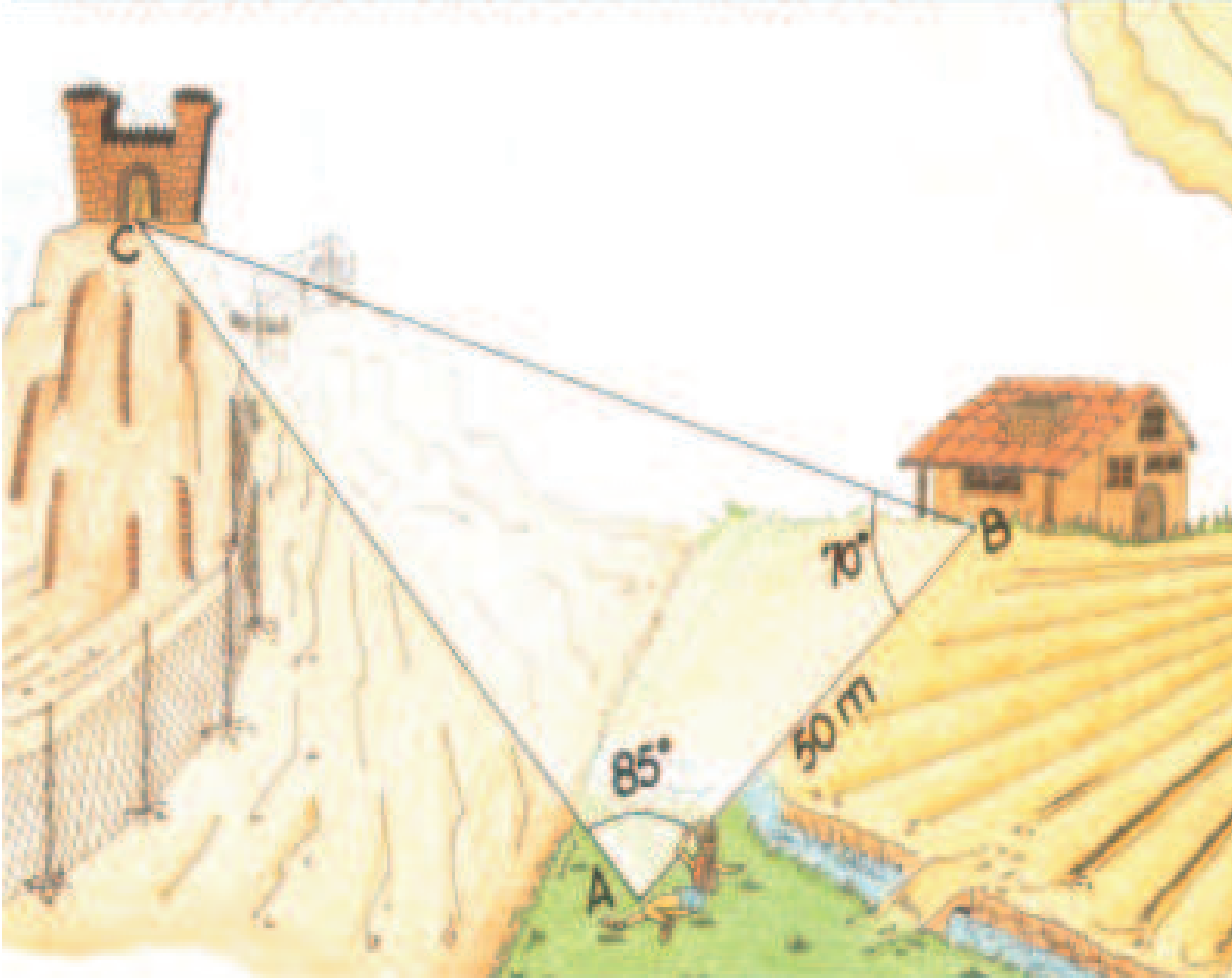
SINTESIS DE LA

TRIGONOMETRIA PRE



TRIGONOMETRÍA

DEFINICIÓN

Es aquella parte de la matemática elemental que estudia la medida de los tres ángulos de un triángulo en relación con sus lados.

MEDIDA DE ÁNGULOS

SISTEMAS DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Hay tres sistemas para medir los ángulos; Sexagesimal, Centesimal y Radial.

SEXAGESIMAL

Toma como unidad de medida un arco que es igual a la 360 ava parte de la circunferencia, y a cada parte se le llama grado sexagesimal. Se simboliza así: º

Ejemplo: 30º Se lee: 30 grados sexagesimales

CENTESIMAL

Toma como unidad de medida un arco que es igual a la 400 ava parte de la circunferencia, y a cada parte se le llama grado centesimal. Se simboliza así: g.

Ejemplo: 40 g. Se lee: 40 grados centesimales

RADIAL

Toma como unidad de medida un arco de una longitud igual a la de su radio, y a esta longitud de arco se le llama radián. Se simboliza así: rad.

Ejemplo: 2,16 rad. Se lee: 2,16 radianes.

VALOR DE π

$$\pi = \frac{22}{7} \text{ (Arquímides)}$$

$$\pi = \frac{355}{113} \text{ (Mecio)}$$

EQUIVALENCIA ENTRE LOS TRES SISTEMAS

1 circunferencia < > 360º < > 400 < > 2π rad.

1º < > 60’   y   1’ < > 60”

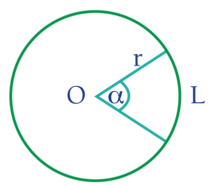
1 g < > 100 min   y   1 min < > 100 s

$$\boxed{\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}}$$

LONGITUD DE UN ARCO:

$$\boxed{L = r \,.\, \alpha}$$

α : ángulo central, debe estar en radianes



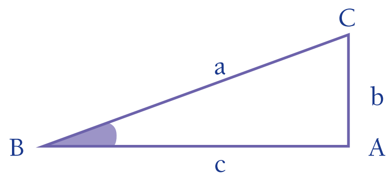
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

FUNCIONES BÁSICAS

$$\text{sen } B = \frac{b}{a} \qquad \cos B = \frac{c}{a}$$

$$\text{tg } B = \frac{b}{c} \qquad \text{ctg } B = \frac{c}{b}$$

$$\sec B = \frac{a}{c} \qquad \text{cosec} = \frac{a}{b}$$



TABLAS DE VALOR DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE TRIÁNGULOS NOTABLES

VALORES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE 30º Y 60º (30º = π/6 Y 60º = π/3)

$$\text{sen } 30° = \frac{1}{2} \qquad \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

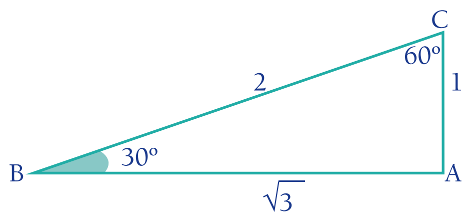
$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \text{tg } 60° = \sqrt{3}$$

$$\text{ctg } 30° = \sqrt{3} \qquad \text{ctg } 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \sec 60° = 2$$

$$\text{cosec } 30° = 2 \qquad \text{cosec } 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

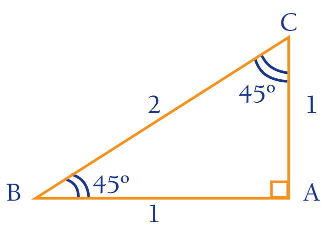


VALORES DE LAS FUNCIONES DE 45º (45º = π/4)

$$\text{sen } 45^{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45° = 1 \qquad \text{ctg } 45° = 1$$

$$\sec 45° = \sqrt{2} \qquad \text{cosec } 45° = \sqrt{2}$$



VALORES APROXIMADOS DE LAS FUNCIONES DE 37º y 53º (37º = π/4,865 y 53º ≃ π/3,396)

$$\text{sen } 37° = \frac{3}{5} \qquad \text{sen } 53° = \frac{4}{5}$$

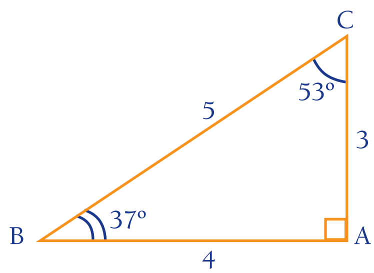
$$\cos 37° = \frac{4}{5} \qquad \cos 53° = \frac{3}{5}$$

$$\text{tg } 37° = \frac{3}{4} \qquad \text{tg } 53° = \frac{4}{3}$$

$$\text{ctg } 37° = \frac{4}{3} \qquad \text{ctg } 53° = \frac{3}{4}$$

$$\sec 37° = \frac{5}{4} \qquad \sec 53° = \frac{5}{3}$$

$$\text{cosec } 37° = \frac{5}{3} \qquad \text{cosec } 53° = \frac{5}{4}$$



VALORES APROXIMADOS DE LAS FUNCIONES DE 15º y 75º (15º = π/12 y 75º = π/2,4)

$$\text{sen } 15° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \qquad \text{sen } 75° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

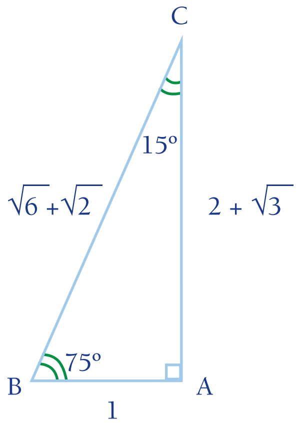
$$\cos 15° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \qquad \cos 75° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{tg } 15° = 2 - \sqrt{3} \qquad \text{tg } 75° = 2 + \sqrt{3}$$

$$\text{ctg } 15° = 2 + \sqrt{3} \qquad \text{ctg } 75° = 2 - \sqrt{3}$$

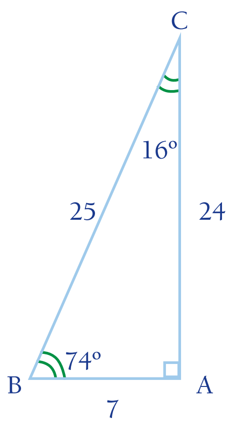
$$\sec 15° = \sqrt{6} - \sqrt{2} \qquad \sec 75° = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

$$\text{cosec } 15° = \sqrt{6} + \sqrt{2} \qquad \text{cosec } 75° = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$



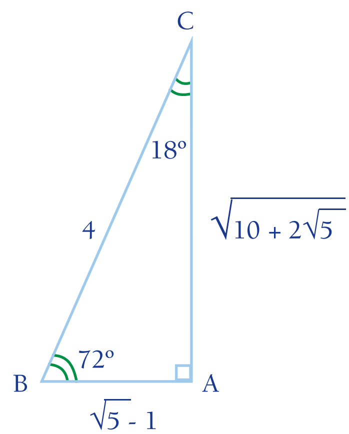
VALORES APROXIMADOS DE LAS FUNCIONES DE 16º y 74º (16º = π/11,25 y 74º ≃ π/2,43)

$\text{sen } 16º = \dfrac{7}{25}$	$\text{sen } 74º = \dfrac{24}{25}$
$\cos 16º = \dfrac{24}{25}$	$\cos 74º = \dfrac{7}{25}$
$\text{tg } 16º = \dfrac{7}{24}$	$\text{tg } 74º = \dfrac{24}{7}$
$\text{ctg } 16º = \dfrac{24}{7}$	$\text{ctg } 74º = \dfrac{7}{24}$
$\sec 16º = \dfrac{25}{24}$	$\sec 74º = \dfrac{25}{7}$
$\text{cosec } 16º = \dfrac{25}{7}$	$\text{cosec } 74º = \dfrac{25}{24}$



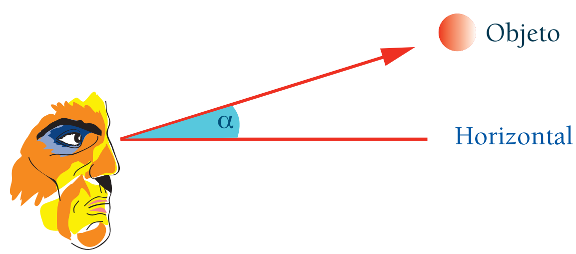
VALORES APROXIMADOS DE LAS FUNCIONES DE 18º Y 72º (18º = π/10 Y 72º = π/2,5)

$\text{sen } 18º = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\text{sen } 72º = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$
$\cos 18º = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\cos 72º = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$
$\text{tg } 18º = \dfrac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$	$\text{tg } 72º = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$
$\text{ctg } 18º = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\text{ctg } 72º = \dfrac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$
$\sec 18º = \dfrac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{5}$	$\sec 72º = \sqrt{5}+1$
$\text{cosec } 18º = \sqrt{5}+1$	$\text{cosec } 72º = \dfrac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{5}$

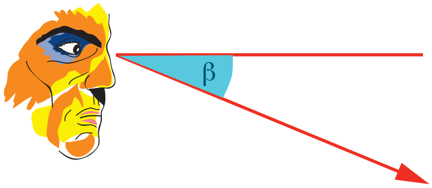


ÁNGULOS DIRECTRICES

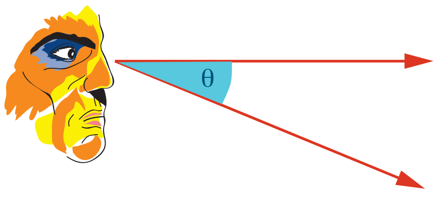
Ángulo de Elevación:



Ángulo de Depresión:



Ángulo que Subtiende:



Los ángulos de elevación (α) y depresión (β) siempre están en plano vertical. El ángulo que subtiende (θ) dos objetos observados puede estar en cualquier plano.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS O CIRCULARES EN EL CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO DE RADIO = 1

sen a = PM

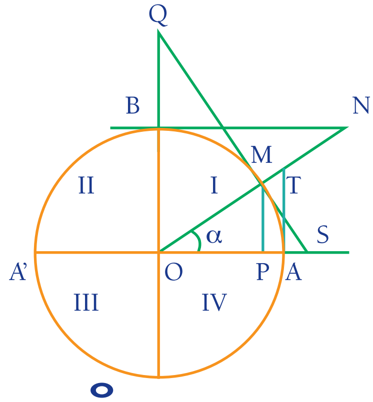
cos a = OP

tg a = AT

ctg a = BN

sec a = OS

cosec a = OQ



$\overset{\frown}{AM} = a = \alpha$

SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS SEGÚN EL CUADRANTE

FUNCIÓN	I C	II C	III C	IV C
seno	+	+	-	-
coseno	+	-	-	+
tangente	+	-	+	-
cotangente	+	-	+	-
secante	+	-	-	+
cosecante	+	+	-	-

VARIACIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS SEGÚN EL CUADRANTE

FUNCIÓN	I C	II C	III C	IV C
seno	c: de 0 a 1	d: de 1 a 0	d: de 0 a -1	c: de -1 a 0
coseno	d: de 1 a 0	d: de 0 a -1	c: de -1 a 0	c: de 0 a 1
tangente	c: de 0 a ∞	c: de -∞ a 0	c: de 0 a ∞	c: de -∞ a 0
cotangente	d: de ∞ a 0	d: de 0 a -∞	d: de ∞ a 0	d: de 0 a -∞
secante	c: de 1 a ∞	c: de -∞ a – 1	d: de -1 a -∞	d: de ∞ a 1
cosecante	d: de ∞ a 1	c: de 1 a ∞	c: de - ∞ a -1	d: de -1 a - ∞

c = crece ; d = decrece

INTERVALO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Intervalo es el espacio o valor dentro de dos extremos en el cual se encuentra el valor de la función. Se denota así:

[ ] intervalo cerrado

⟨ ⟩ intervalo abierto

⟨] intervalo abierto cerrado

[⟩ intervalo cerrado abierto

sen x ε [-1; + 1]

cos x ε [-1; + 1]

tg x ε ⟨ -∞ ; + ∞ ⟩

ctg x ε ⟨ -∞ ; + ∞⟩

sec x ε ⟨ -∞ ; -1] ∨ [+1; + ∞ ⟩

cosec x ε ⟨ -∞ ; -1] ∨ [+1; + ∞ ⟩

DOMINIO Y RANGO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

En las funciones trigonométricas, DOMINIO es el valor del ángulo o arco; RANGO es el valor de la función. Las funciones trigonométricas no son BIUNIVOCAS; es decir, para un ángulo hay más de un valor para su función, repitiéndose dentro de un período.

FUNCIÓN	DOMINIO	RANGO	PERÍODO
sen x	$\forall$ x	[-1; +1]	2π
cos x	$\forall$ x	[-1; +1]	2π
tg x	$\forall x - \{2n+1\}\frac{\pi}{2}$	$\mathbb{R}$ o ⟨ -∞ ; + ∞ ⟩	π
ctg x	$\forall x - \{n\pi\}$	$\mathbb{R}$ o ⟨ -∞ ; + ∞ ⟩	π
sec x	$\forall x - \{2n+1\}\frac{\pi}{2}$	$\mathbb{R}$ - ⟨ -1; +1⟩	2π
cosec x	$\forall x - \{n\pi\}$	$\mathbb{R}$ - ⟨ -1; +1⟩	2π

$\mathbb{R}$ = número real

RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

$$\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$$

$$\text{tg } a = \frac{\text{sen } a}{\cos a}$$

$$\text{tg } a \,.\, \text{ctg } a = 1$$

$$1 + \text{tg}^2\, a = \sec^2 a$$

$$\text{ctg } a = \frac{\cos a}{\text{sen } a}$$

$$\text{sen } a \,.\, \text{cosec } a = 1$$

$$\cos a \,.\, \sec a = 1$$

$$1 + \text{ctg}^2\, a = \text{co sec}^2\, a$$

RELACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN TÉRMINOS DE UNA SOLA

	sen a	**cos a**	**tg a**	**ctg a**	**sec a**	**cosec a**
sen		$\pm\sqrt{1 - \cos^2 a}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1 + \text{tg}^2 a}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1 + \text{ctg}^2 a}}$	$\frac{\pm\sqrt{\sec^2 a - 1}}{\sec a}$	$\frac{1}{\text{cosec } a}$
cos a	$\pm\sqrt{1 - \text{sen}^2 a}$		$\frac{\text{tg } a}{\pm\sqrt{1 + \text{tg}^2 a}}$	$\frac{\text{ctg } a}{\pm\sqrt{1 + \text{ctg}^2 a}}$	$\frac{1}{\cos a}$	$\frac{\pm\sqrt{\text{cosec}^2 a - 1}}{\text{cosec } a}$
tg a	$\frac{\text{sen } a}{\pm\sqrt{1 - \text{sen}^2 a}}$	$\frac{\pm\sqrt{1 - \cos^2 a}}{\cos a}$		$\frac{1}{\text{ctg } a}$	$\pm\sqrt{\sec^2 a - 1}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{\text{cosec}^2 a - 1}}$
ctg a	$\frac{\pm\sqrt{1 - \text{sen}^2 a}}{\text{sen } a}$	$\frac{\cos a}{\pm\sqrt{1 - \cos^2 a}}$	$\frac{1}{\text{tg } a}$		$\frac{1}{\pm\sqrt{\sec^2 a - 1}}$	$\pm\sqrt{\text{cosec}^2 a - 1}$
sec a	$\frac{1}{\pm\sqrt{1 - \text{sen}^2 a}}$	$\frac{1}{\cos a}$	$\pm\sqrt{1 + \text{tg}^2 a}$	$\frac{\pm\sqrt{1 + \text{ctg}^2 a}}{\text{ctg } a}$		$\frac{\text{cosec } a}{\pm\sqrt{\text{cosec}^2 a - 1}}$
cosec a	$\frac{1}{\text{sen } a}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1 - \cos^2 a}}$	$\frac{\pm\sqrt{1 + \text{tg}^2 a}}{\text{tg } a}$	$\pm\sqrt{1 + \text{ctg}^2 a}$	$\frac{\sec a}{\pm\sqrt{\sec^2 a - 1}}$	

ARCOS COMPUESTOS

FUNCIONES DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE ARCOS

$$\text{sen }(a \pm b) = \text{sen } a \,.\, \cos .\, b \pm \text{sen } b \,.\, \cos a$$

$$\cos (a \pm b) = \cos a \,.\, \cos \,.\, b \mp \text{sen } a \,.\, \text{sen } b$$

$$\text{tg }(a \pm b) = \frac{\text{tg } a \pm \text{tg } b}{1 \mp \text{tg } a \,.\, \text{tg } b}$$

$$\text{ctg }(a \pm b) = \frac{\text{ctg } a \,.\, \text{ctg } b \mp 1}{\text{ctg } b \pm \text{ctg } a}$$

FUNCIONES DE LA SUMA DE TRES ARCOS

$$\text{sen }(a + b + c) = \text{sen } a \,.\, \cos b \,.\, \cos c - \text{sen } a \,.\, \text{sen } b \,.\, \text{sen } c + \text{sen } b \,.\, \cos a \,.\, \cos c + \text{sen } c \,.\, \cos a \,.\, \cos b$$

$$\cos (a + b + c) = \cos a \,.\, \cos b \,.\, \cos c - \text{sen } b \,.\, \text{sen } c \,.\, \cos a - \text{sen } a \,.\, \text{sen } c \,.\, \cos b - \text{sen } a \,.\, \text{sen } b \,.\, \cos c$$

$$\text{tg}(a+b+c) = \frac{\text{tag } a + \text{tg } b + \text{tg } c - \text{tg } a \,.\, \text{tg } b \,.\, \text{tg } c}{1 - \text{tg } a \,.\, \text{tg } b - \text{tg } a \,.\, \text{tg } c - \text{tg } b \,.\, \text{tg } c}$$

EQUIVALENCIA DE LAS FUNCIONES DE LOS ARCOS COMPLEMENTARIOS

Sean: $\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ y "a" dos arcos complementarios:

$$\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + a = \frac{\pi}{2}$$

se cumple:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \text{sen } a$$

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \text{ctg } a$$

Ejemplo:

$$\text{sen } 40^o = \cos 50^o$$

puesto que:

$$40^o + 50^o = 90^o$$

EQUIVALENCIAS DE LAS FUNCIONES DE LOS ARCOS SUPLEMENTARIOS

Sean: $(\pi - a)$ y "a" dos arcos suplementarios, entonces:

$$(\pi - a) + a = \pi$$

se cumple:

$$\text{sen }(\pi - a) = \text{sen } a$$

$$\cos (\pi - a) = - \cos a$$

$$\text{tg }(\pi - a) = - \text{tg } a$$

Ejemplos:

$$\cos 120^o = - \cos 60^o$$

notar que:

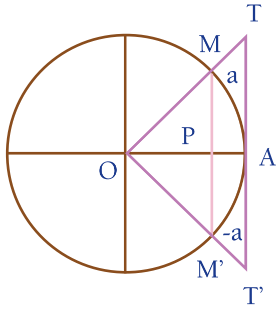
$$120^o + 60^o = 180^o$$

$$\text{tg } 130^o = -\text{tg } 50$$

EQUIVALENCIAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ARCOS NEGATIVOS

Sean "a" y "-a" dos arcos iguales pero de signo cotrario. Es decir, del mismo origen pero de sentido contrario. (En el gráfico todos de origen A).

sen a = MP	;	sen (-a) = M'P = -MP
cos a = OP	;	cos (-a) = OP = OP
tg a = AT	;	tg (-a) = AT' = -AT



Luego:

$$\operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen} a$$

$$\operatorname{cosec}(-a) = -\operatorname{cosec} a$$

$$\cos(-a) = \cos a$$

$$\sec(-a) = \sec a$$

$$\operatorname{tg}(-a) = -\operatorname{tg} a$$

$$\operatorname{ctg}(-a) = -\operatorname{ctg} a$$

FUNCIONES DE ARCOS DOBLES

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cdot \cos a$$

$$\operatorname{sen} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg}^2 a}$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$$

$$\cos 2a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 a}{1 + \operatorname{tg}^2 a}$$

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$$

$$\cos 2a = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

FUNCIONES DE ARCO MITAD

$$1 - \cos a = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}$$

$$\operatorname{sen} \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}$$

$$1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2}$$

$$\cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}$$

$$\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a} = \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}$$

FUNCIONES DE ARCOS TRIPLES

$$\operatorname{sen} 3a = 3 \operatorname{sen} a - 4 \operatorname{sen}^3 a$$

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3 \cos a$$

$$\operatorname{tg} 3a = \frac{3 \operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 a}$$

FUNCIONES AUXILIARES

$$\text{seno verso } a = 1 - \cos a$$

$$\text{cos verso } a = 1 - \operatorname{sen} a$$

$$\text{ex-sec } a = \sec a - 1$$

NOTA: A la **ex-secante** se le llama también **external**.

TRANSFORMACIÓN A PRODUCTO

SUMA Y DIFERENCIA DE SENOS

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2}$$

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos \frac{A + B}{2} \operatorname{sen} \frac{A - B}{2}$$

SUMA Y DIFERENCIA DE COSENOS

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\,\text{sen}\,\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2\,\text{sen}\,\frac{A+B}{2}\,\text{sen}\,\frac{A-B}{2}$$

LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS

1. En el primer cuadrante se cumple que el arco es mayor que el seno pero menor que su tangente.

$$\text{sen } a < a < \text{tg } a$$

o:

$$0 < a < \frac{\pi}{2}$$

2. Cuando el arco es muy pequeño; es decir, cercano a cero, el seno, el arco y la tangente tienden a confundirse.

y:

$$\lim_{a \to 0} \frac{a}{\text{sen } a} = 1$$

$$\lim_{a \to 0} \frac{a}{\text{tg } a} = 1$$

De donde:

$$\text{sen } a = a = \text{tg } a \Leftrightarrow a \to 0$$

Ejemplo:

¿Cuál es el límite de $\frac{3x}{\text{sen}\frac{x}{2}}$, cuando x tiende a cero? ($x \to 0$)

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x}{\text{sen}\frac{x}{2}} = \lim_{x \to 0} \frac{3\,\frac{2x}{2}}{\text{sen}\frac{x}{2}} = \lim_{x \to 0} \frac{6\,\frac{x}{2}}{\text{sen}\frac{x}{2}}$$

$$= 6\,.\lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{2}}{\text{sen}\frac{x}{2}} = 6\,.\,1$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{3x}{\text{sen}\frac{x}{2}} = 6$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Son expresiones que dan el valor del ángulo "en forma indicada".

Sea "A" un arco ó ángulo:		denotación inglesa	denotación francesa
sen A = m	⇒	A = arco sen m	A = sen^{-1} m
cos A = n	⇒	A = arco cos n	A = $\cos^{-1}$ n
tg A = p	⇒	A = arco tg p	A = tg^{-1} p
ctg A = q	⇒	A = arco ctg q	A = ctg^{-1} q
sec A = r	⇒	A = arco sec r	A = $\sec^{-1}$ r
cosec A = s	⇒	A = arco cosec s	A = cosec^{-1} s

De donde:

sen (arco sen m) = m ⇔ arco sen (sen A) = A

cos (arco cos n) = n ⇔ arco cos (cos A) = A

tg (arco tg p) = p ⇔ arco tg (tg A) = A

Ejemplo: Calcular

$$y = \text{arco sen}\frac{\sqrt{3}}{2} + \text{arco tg}\frac{1}{2} + \text{arco sec}\frac{\sqrt{10}}{3} \qquad (1)$$

Procedimiento. Llamando:

$$A = \text{arco sen}\,\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{sen } A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 60°$$

$$B = \text{arco tg}\,\frac{1}{2} \Rightarrow \text{tg } B = \frac{1}{2}$$

$$C = \text{arco sec}\,\frac{\sqrt{10}}{3} \Rightarrow \sec C = \frac{\sqrt{10}}{3} \Rightarrow \text{tg } C = \frac{1}{3}$$

Sustituyendo en (1):

$$y = A + B + C$$

o sea:

$$y = 60 + B + C$$

$$y - 60 = B + C$$

tomando tangente:

$$\text{tg}\,(y - 60) = \text{tg}\,(B + C)$$

$$\text{tg}\,(y - 60) = \frac{\text{tg } B + \text{tg } C}{1 - \text{tg } B\,.\,\text{tg } C}$$

sustituyendo valores de tg B y tg C:

$$\text{tg}\,(y - 60\,) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$$

$$\text{tg}\,(y - 60) = 1$$

$$y - 60 = 45°$$

$$y = 105°$$

DOMINIO Y RANGO DE LAS FUNCIONES INVERSAS

En las funciones inversas, como su nombre lo indica, el DOMINIO de una función es el RANGO de la inversa y viceversa, consideradas dentro de un INTERVALO.

FUNCIÓN INVERSA	DOMINIO	RANGO
arco sen x	$[-1\,;+1\,]$	$\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$
arco cos x	$[-1\,;+1\,]$	$\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$
arco tg x	$\mathbb{R}$ o $\langle -\infty\,;\,+\infty\rangle$	$\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$
arco ctg x	$\mathbb{R}$ o $\langle -\infty\,;\,+\infty\rangle$	$\langle 0; \pi\rangle$
arco sec x	$\langle -\infty\,;\,-1] \cup [\,1\,;+\infty\rangle$	$\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$
arco cosec x	$\langle -\infty\,;-1] \cup [\,1\,;+\infty\rangle$	$\left[-\frac{\pi}{2}\,;0\right\rangle \cup \left\langle 0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

La solución puede ser la más pequeña de todas (solución principal) o puede ser una expresión algebraica que incluya todos los arcos que satisfagan la ecuación dada (solución general).

Expresión de todos los arcos que tienen la misma función trigonométrica.

Que tienen el mismo seno:

$$\boxed{X = K\pi + (-1)^k \alpha}$$

α = solución principal

Que tiene el mismo coseno:

$$\boxed{X = 2K\pi \pm \beta}$$

β = solución principal

Que tienen la misma tangente:

$$\boxed{X = K\pi + \theta}$$

θ = solución principal

SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES

Para resolver ecuaciones debe tenerse presente que:

$\text{sen } x$	$= a$	$\Rightarrow$	$x = \text{sen}^{-1} a$	$\wedge$	$X = k\pi + (-1)^K \text{sen}^{-1} a$
$\cos x$	$= b$	$\Rightarrow$	$x = \cos^{-1} b$	$\wedge$	$X = 2k\pi \pm \cos^{-1} b$
$\text{tg } x$	$= c$	$\Rightarrow$	$x = \text{tg}^{-1} c$	$\wedge$	$X = k\pi + \text{tg}^{-1} c$
$\text{ctg } x$	$= d$	$\Rightarrow$	$x = \text{ctg}^{-1} d$	$\wedge$	$X = k\pi + \text{ctg}^{-1} d$
$\sec x$	$= e$	$\Rightarrow$	$x = \sec^{-1} e$	$\wedge$	$X = 2k\pi \pm \sec^{-1} e$
$\text{cosec } x$	$= f$	$\Rightarrow$	$x = \text{cosec}^{-1} f$	$\wedge$	$X = k\pi + (-1)^K \text{cosec}^{-1} f$

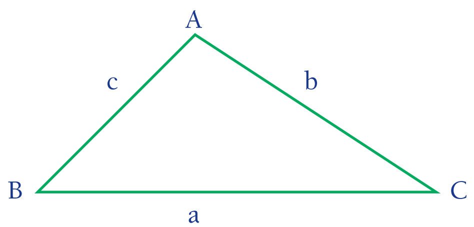
Donde: $K \varepsilon \mathbb{Z}$; x = solución principal y X = solución general

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Para resolver triángulos que equivale a calcular sus lados o sus ángulos, debe conocerse las siguientes leyes o propiedades:

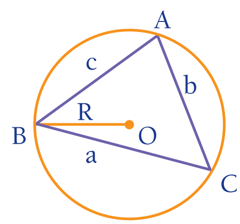
TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

1. Ley de los senos: En todo triángulo, los lados son directamente proporcionales a sus lados opuestos.



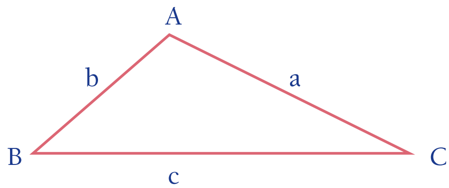
$$\boxed{\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}}$$

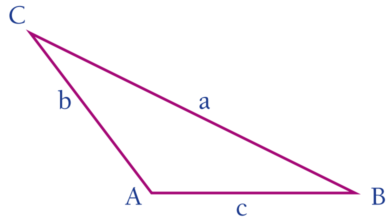
2. Corolario: En todo triángulo inscrito en una circunferencia, la relación de la Ley de los senos es constante e igual al diámetro de la circunferencia circunscrita.



$$\boxed{\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} = 2R}$$

3. Ley de cosenos (Carnot).- Para todo triángulo:



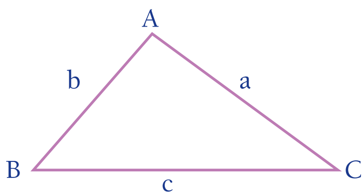


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \, . \, b \, . \, c \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \, . \, a \, . \, c \cos B$$

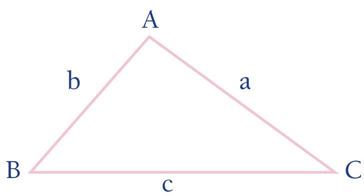
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 . \, a \, . \, b \cos C$$

4. Ley de las tangentes (Nepper).- Para todo triángulo:



$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}$$

5. Ley de las proyecciones.- Para todo triángulo:



$$a = b \, . \cos C + c \, . \cos B$$

$$b = a \, . \cos C + c . \cos A$$

$$c = a \, . \cos B + b \, . \cos C$$

CÁLCULO DE ÁNGULOS (Fórmula de Briggs)

Si:

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

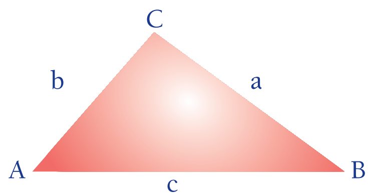
$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\operatorname{sen} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$$

CÁLCULO DE SUPERFICIES

Fórmula Trigonométricas



$$S = \frac{a \, . \, b}{2} \operatorname{sen} C$$

$$S = \frac{b \, . \, c}{2} \operatorname{sen} A \qquad \text{(I)}$$

$$S = \frac{a \, . \, c}{2} \operatorname{sen} B$$

Fórmulas Geométricas

$$S = p \, . \, r \qquad S = \frac{a \, . \, b \, . \, c}{4R}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad \text{(II)}$$

$$S = \rho a \, (p-a)$$

Donde:

p = semiperímetro

r = radio círculo inscrito

R = radio círculo circunscrito

ρa = radio del círculo exinscrito al lado a

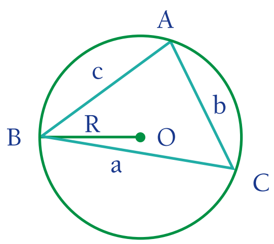
ELEMENTOS SECUNDARIOS EN LA SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Para calcular los elementos secundarios, lo aconsejable es despejar las fórmulas conocidas, tales como las siguientes:

RADIOS

RADIO CIRCUNSCRITO:

Es el radio "R" de la circunferencia circunscrita al triángulo.



1.- De: $2R = \dfrac{a}{\text{sen } A}$

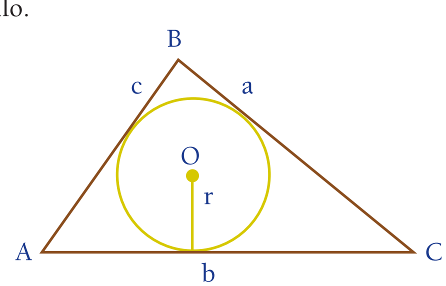
$$\boxed{\Rightarrow\ R = \frac{a}{2\text{sen}A}}$$

2.- De: $\dfrac{abc}{4R} = S$

$$\boxed{\Rightarrow\ R = \frac{a\ .\ b\ .\ c}{4\ .\ S}}$$

RADIO INSCRITO O INRADIO:

Es el radio "r" de la circunferencia inscrita en el triángulo.



1.- De: $pr = S$

$$\boxed{\Rightarrow\ r = \frac{S}{p}}$$

2.- De: $\dfrac{r}{p - a} = \text{tg}\,\dfrac{A}{2}$

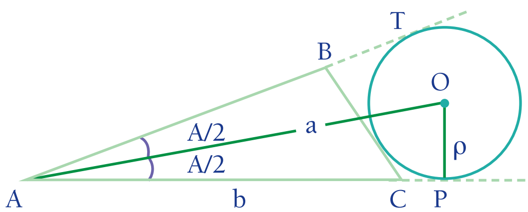
$$\boxed{\Rightarrow\ r = (p - a)\text{tg}\,\frac{A}{2}}$$

3.- De: $a = r\left(\text{ctg}\,\dfrac{B}{2} + \text{ctg}\,\dfrac{C}{2}\right)$

$$\boxed{\Rightarrow\ r = \frac{a}{\text{ctg}\,\frac{B}{2} + \text{ctg}\,\frac{C}{2}}}$$

RADIO EX-INSCRITO:

Es el radio "ρ" de la circunferencia, ex-inscrito a uno de los lados del triángulo.



De la propiedad:

$AP = AT = \dfrac{a + b + c}{2}$, se demuestra:

1.- $\dfrac{a + b + c}{2}\ .\ \text{tg}\,\dfrac{A}{2}$

o :

$$\boxed{\rho = p\ .\ \text{tg}\,\frac{A}{2}}$$

2.- De: $S = \rho\,(p - a)$

o:

$$\boxed{\rho = \frac{S}{p - a}}$$

3.- De: $a = \rho \left(tg\,\frac{B}{2} + tg\,\frac{C}{2} \right)$

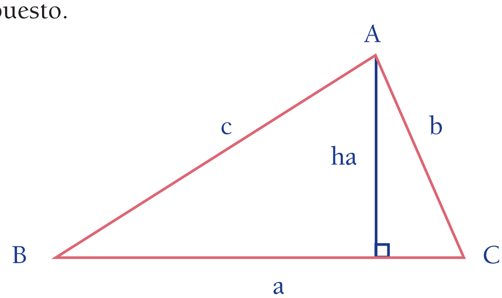
$$\Rightarrow \rho = \frac{a}{tg\,\frac{B}{2} + tg\,\frac{C}{2}}$$

CEVIANAS

Son rectas que partiendo de un vértice tocan un punto del lado opuesto. Las principales son: altura, mediana, bisectriz interna y bisectriz externa.

ALTURA

Es la perpendicular trazada de un vértice al lado opuesto.



1.- $ha = b \,.\, sen\, C$

o:

$ha = c \,.\, sen\, B$

2.- $ha = 2 \,.\, R \,.\, sen\, b \,.\, sen\, C$

3.- $ha = \frac{2 \,.\, S}{a}$

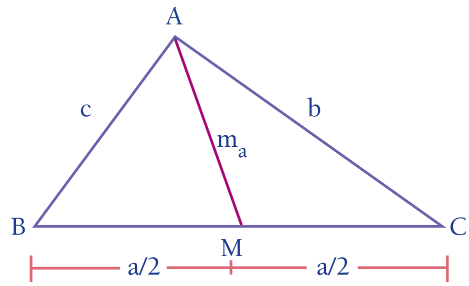
ha = altura con respecto al lado “a”

MEDIANA

Es la recta trazada de un vértice al punto medio del lado opuesto.

1.- De: $b^2 + c^2 = 2 \,.\, m_a^2 + \frac{a^2}{2}$

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}}{2}$$

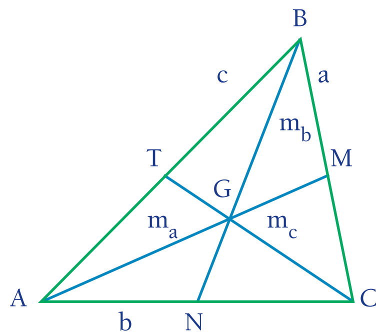


2.- $m_b^2 = \frac{a^2}{4} + c^2 - a \,.\, c \,.\, cos\, B$

$$m_c^2 = \frac{a^2}{4} + b^2 - a \,.\, b \,.\, cos\, C$$

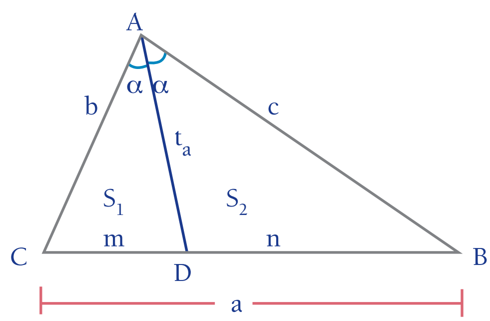
$$4m_a^2 = b^2 + c^2 + 2 \,.\, b \,.\, c \,.\, cos\, A$$

La intersección de las tres medianas se denomina CENTRO DE GRAVEDAD o BARICENTRO.



BISECTRIZ INTERIOR

Es la recta que divide a un ángulo interior en dos ángulos iguales.



Fórmulas Geométricas:

1.- $\frac{b}{n} = \frac{c}{m}$

2.- $\boxed{t_a^2 = b \cdot c - m \cdot n}$

Fórmula Trigonométrica:

$$\boxed{t_a = \frac{2 \cdot b \cdot c}{b + c} \cos \frac{A}{2}}$$

La intersección de las tres bisectrices interiores se llama INCENTRO.

BISECTRIZ EXTERIOR

Es la recta que divide a un ángulo exterior en dos ángulos iguales.

Fórmulas Geométricas:

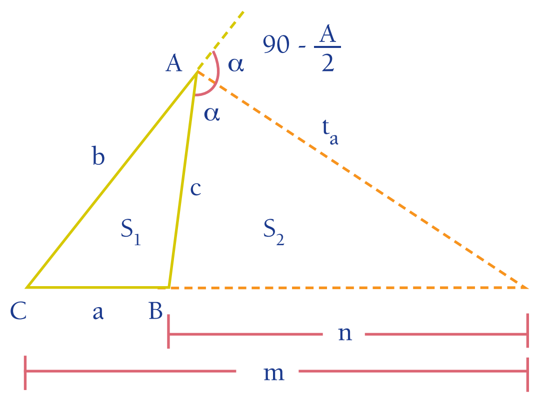
1.- $\boxed{\frac{b}{n} = \frac{c}{m}}$

2.- $\boxed{t_a^2 = m \cdot n - b \cdot c}$

Fórmula Trigonométrica:

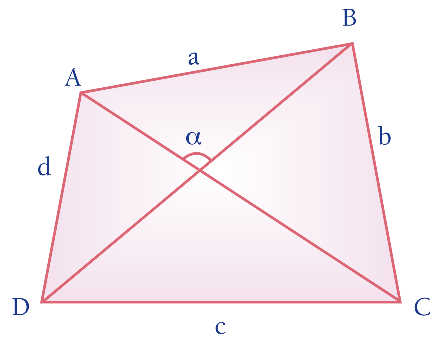
$$\boxed{t_a = \frac{2 \cdot b \cdot c}{b - c} \operatorname{sen} \frac{A}{2}}$$

La intersección de las tres bisectrices interiores se llama EXCENTRO.



CUADRILÁTEROS CONVEXOS

Son cuadriláteros cuyos ángulos son menores que 180º.



SUPERFICIES

1.- $\boxed{S = \frac{AC \cdot BD}{2} \cdot \operatorname{sen} \alpha}$

2.- $\boxed{S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - a.b.c.d.\cos \alpha}}$

donde:

p = semiperímetro

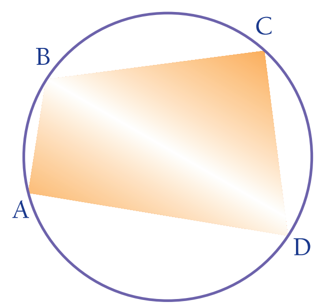
$$\alpha = \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2}$$

o :

$$\alpha = \frac{\hat{B} + \hat{D}}{2}$$

CUADRILÁTERO INSCRITO O CICLÍCO

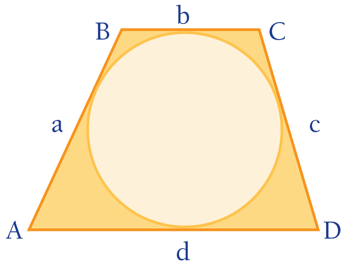
$$\boxed{\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^{\circ}}$$



$$\boxed{S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}}$$

Fórmula de Brahma-Gupta

CUADRILÁTERO CIRCUNSCRITO



Propiedad de Pitot:

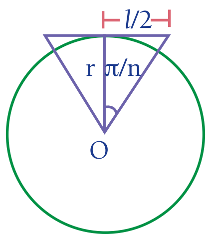
$$\boxed{a + b = c + d = p}$$

POLÍGONOS REGULARES

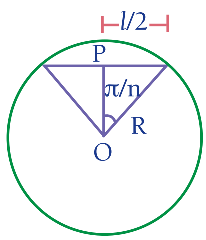
CIRCUNSCRITOS:

Valor del lado "l" y la del área "S"

$$\boxed{l = 2r \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}} \qquad \boxed{S = n \cdot r^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}$$



INSCRITOS:



Cálculo del lado "l", apotema "Ap" y área "S"

$$\boxed{l = 2r \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}$$

$$\boxed{Ap = R \cdot \cos \frac{\pi}{n}}$$

$$\boxed{S = \frac{R^2 \cdot n}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}}$$

OP = Ap

n = número de lados

R = radio circunscrito

S = área

PROBLEMA DE POTHENOT-SNELLIUS

Conocido también como problema de los cuatro puntos o problema de la carta (geográfica):

Dados tres puntos no colineales: A, B y C, calcular sus distancias a un cuarto punto D (situado en el plano ABC, interno al ángulo convexo ACB), desde el cual se vean las distancias AC y BC bajo ángulos dados. Se supone como incógnitas los ángulos x e y.

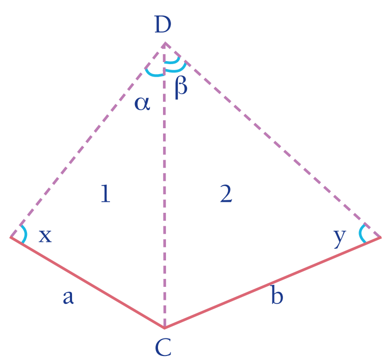
Por ley de senos en los triángulos (1) Y (2):

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\overline{DC}}{a}$$

$$\frac{\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{\overline{DC}}{b}$$

$$\therefore \qquad \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = \frac{b \operatorname{sen} \alpha}{a \operatorname{sen} \beta} \qquad (1)$$

$$x + y = 360^o - (\alpha + \beta + C) \qquad (2)$$



Como a, b, α, β, y $\hat{C}$ se conoce, se tiene un sistema de ecuaciones trigonométricas cuyas incógnitas son "x" e "y". Hallando "x" e "y" el problema queda resuelto, al conocer todos los ángulos y un lado de cada uno de los triángulos (1) y (2).