Arias Cabezas, J. M. y Maza Sánchez, I. (2023). Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, 2º de Bachillerato de Sociales, Nueva etapa. Madrid, Ed Bruño del Grupo ANAYA. ISBN: 9788469634226

10

Programación lineal

¿Para qué sirve la programación lineal?

La programación lineal tiene aplicación a una gran variedad de problemas. Un supuesto que puede servir de ejemplo es el siguiente: Una fábrica quiere producir bicicletas de paseo y de montaña. Para ello dispone de una cantidad de acero y otra de aluminio. Para construir cada tipo de bicicleta necesita distintas cantidades de acero y aluminio. Si vende las bicicletas a distinto precio, ¿cuántas bicicletas de cada tipo debe construir para que el beneficio sea máximo?

ELABORA en tu cuaderno una imagen y un breve texto de una aplicación de la programación lineal.

1 INTRODUCCIÓN A LA PROGRAMACIÓN LINEAL

ENGÁNCHATE

Procedimiento para representar el semiplano definido por una inecuación:

a) El signo de desigualdad se sustituye por el de igualdad.

b) Se despeja la incógnita más fácil y se hace una tabla con dos valores.

c) Se dibuja la recta que pasa por los dos puntos.

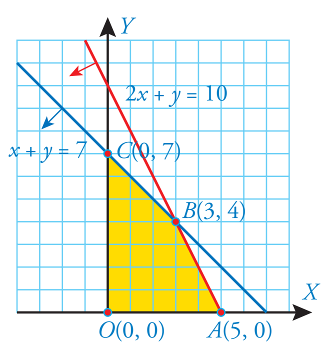
d) Se prueba en la inecuación un punto del plano que no esté en la recta. El punto más sencillo, si no está en la recta, es el origen de coordenadas $O(0, 0)$

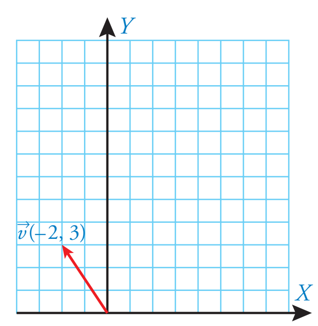
- Si la verifica se toma el semiplano limitado por la recta y que contiene el punto.
- Si no la verifica es el semiplano que no contiene al punto.

e) Se dibuja una flecha perpendicular a la recta en el sentido del semiplano.

Restricciones $x \geq 0, y \geq 0$

Prácticamente en todos los problemas de programación lineal se exige que las variables x e y sean mayores o iguales que cero; en estos casos, la región factible se dibuja directamente en el 1.er cuadrante.





EXPLORA

Escribe una función $f(x, y)$ que calcule los ingresos que se obtienen al vender x chaquetas a 30 € e y pantalones a 20 €

1.1 PROGRAMACIÓN LINEAL BIDIMENSIONAL

La **programación lineal bidimensional** trata de optimizar, es decir, de maximizar o minimizar una función lineal con dos variables sujeta a unas restricciones que están dadas por inecuaciones lineales.

EJEMPLO

Dado el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y \leq 7 \\ 2x + y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

maximiza en dicho recinto el valor de la función $f(x, y) = 30x + 20y$

1.2 FUNCIÓN OBJETIVO

La **función objetivo** en un problema de programación lineal es la función lineal en dos variables que se desea optimizar. Se representa por:

$$f(x, y) = ax + by$$

EJEMPLO

Continuando con el ejemplo anterior, se tiene que la función objetivo es:

$$f(x, y) = 30x + 20y$$

1.3 REGIÓN FACTIBLE

La **región factible** son todos los puntos del plano que verifican todas las restricciones del enunciado del problema, y puede ser un polígono cerrado o una región abierta.

EJEMPLO

Continuando con el ejemplo anterior, se obtiene la región factible representada en el margen, sus vértices son: $O(0, 0)$, $A(5, 0)$, $B(3, 4)$ y $C(0, 7)$

1.4 VECTOR DIRECTOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

El **vector director de la función objetivo** $f(x, y) = ax + by$ es el vector:

$$\vec{v}\,(-b, a)$$

Las dos coordenadas del vector director de la función objetivo se pueden multiplicar o dividir por un mismo número distinto de cero, y su dirección no varía.

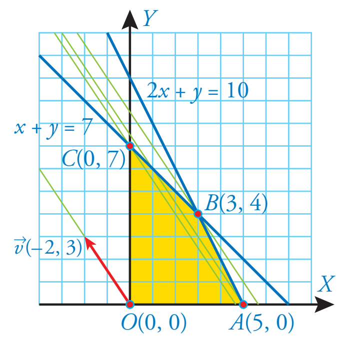
EJEMPLO

Continuando con el ejemplo anterior, el vector director de la función objetivo $f(x, y) = 30x + 20y$ es $\vec{v}(-20, 30) \parallel (-2, 3)$

10_Mat_CCSS_2BACH.indd 200 23/3/23 8:35

1.5 RECTAS DE NIVEL

Las **rectas de nivel** son las rectas paralelas al vector director de la función objetivo que pasan por los puntos de la región factible.



EJEMPLO

Continuando con la función objetivo y la región factible del ejemplo anterior, las rectas de nivel son las rectas verdes del dibujo.

1.6 SOLUCIÓN ÓPTIMA

La **solución óptima** son los puntos de la región factible donde la función objetivo alcanza el valor óptimo, es decir, el máximo o el mínimo. Si la solución óptima es única, es uno de los vértices de la región factible. Si existen varias soluciones, son todos los puntos que están sobre uno de los lados.

Gráficamente, si la solución óptima es un máximo, esta corresponde al punto o puntos en los que la recta de nivel esté lo más alta posible. Si la solución es un mínimo, corresponde al punto o puntos en los que la recta de nivel esté lo más abajo posible.

EJEMPLO

Continuando con el mismo ejemplo, la solución óptima es $B(3, 4)$

Analíticamente, para hallar la solución óptima, se prueba en la función objetivo cada uno de los vértices de la región factible.

EJEMPLO

Continuando con el mismo ejemplo: $f(x, y) = 30x + 20y$

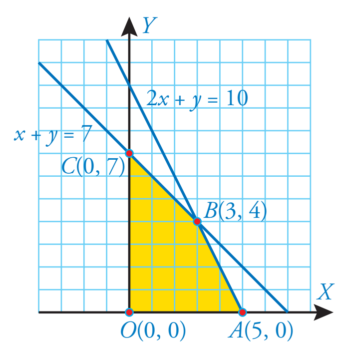
$O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 30 \cdot 0 + 20 \cdot 0 = 0$

$A(5, 0) \Rightarrow f(5, 0) = 30 \cdot 5 + 20 \cdot 0 = 150$

$B(3, 4) \Rightarrow f(3, 4) = 30 \cdot 3 + 20 \cdot 4 =$ **170 Máximo**

$C(0, 7) \Rightarrow f(0, 7) = 30 \cdot 0 + 20 \cdot 7 = 140$

La solución óptima es $B(3, 4)$



ELABORA

1 Dado el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y \leq 1\,000 \\ x + 1{,}5y \leq 750 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

a) Represéntalo gráficamente.

b) Halla sus vértices.

c) Obtén el valor máximo de la función $f(x, y) = 15x + 12y$ en el recinto anterior, así como el punto en que lo alcanza.

2 Representa gráficamente la región factible determinada por las siguientes desigualdades:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 5 \\ 4x + 3y \leq 30 \end{array}\right\}$$

Calcula la solución que hace mínima la función objetivo

$$z = x + 2y$$

sometida a las restricciones anteriores.

2 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

ENGÁNCHATE

EXPLORA

Escribe la función objetivo que calcule los ingresos que se obtienen al vender x bicicletas de paseo a 200 € e y bicicletas de montaña a 150 €

2.1 PROCEDIMIENTO DE RESOLUCIÓN

Para resolver un problema de programación lineal se sigue el procedimiento:

a) Se hace una tabla con los datos del problema.
b) Se representa la región factible.
c) Se hallan los valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.
d) Se escribe la solución.

Problema del transporte

Es un tipo muy especial de problema que se resuelve por programación lineal y que cada vez es más utilizado.

Por ejemplo, una cadena de grandes centros comerciales implantados en un país e incluso en varios países, compra los productos a varios proveedores y los tiene que distribuir a todos sus centros comerciales para minimizar los gastos de transporte.

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

2.2 TABLA CON LOS DATOS DEL PROBLEMA

- En la 1.ª fila, cabecera horizontal, se escriben las etiquetas correspondientes a los **conceptos** de las **variables** y la etiqueta **restricciones.**
- En la 2.ª fila se escriben las **variables.**
- En cada una de las filas siguientes se escribe una condición, que da origen a una restricción, es decir, a una inecuación.
- En la última fila se escriben los valores correspondientes a la función objetivo y si se trata de maximizar o minimizar.

Maximizar y minimizar

Se resolverán dos ejercicios, uno de maximizar y otro de minimizar.

Ambos procedimientos de resolución son análogos.

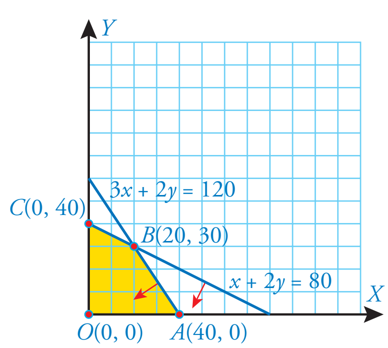
EJERCICIOS RESUELTOS

1 **Una fábrica quiere producir bicicletas de paseo y de montaña. La fábrica dispone de 80 kg de acero y 120 kg de aluminio. Para construir una bicicleta de paseo se necesitan 1 kg de acero y 3 kg de aluminio, y para construir una bicicleta de montaña se necesitan 2 kg de acero y 2 kg de aluminio. Si vende las bicicletas de paseo a 200 € y las de montaña a 150 €, ¿cuántas bicicletas de cada tipo debe construir para que el beneficio sea máximo?**

a) Tabla con los datos del problema.

	Paseo	Montaña	Restricciones	
N.º de bicicletas	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Acero	x	$2y$	$x + 2y \leq 80$	
Aluminio	$3x$	$2y$	$3x + 2y \leq 120$	
Beneficio	$200x$	$150y$	$f(x, y) = 200x + 150y$	Maximizar

b) Región factible. Es el gráfico del margen.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 200 \cdot 0 + 150 \cdot 0 = 0$ €

$A(40, 0) \Rightarrow f(40, 0) = 200 \cdot 40 + 150 \cdot 0 = 8\,000$ €

$B(20, 30) \Rightarrow f(20, 30) = 200 \cdot 20 + 150 \cdot 30 =$ **8 500 € Máximo**

$C(0, 40) \Rightarrow f(0, 40) = 200 \cdot 0 + 150 \cdot 40 = 6\,000$ €

d) La solución óptima es $B(20, 30)$, es decir, **x = 20 bicicletas de paseo e y = 30 bicicletas de montaña.**

2 **Se quiere organizar un puente aéreo entre dos ciudades, con plazas suficientes de pasaje y carga, para transportar a 1 600 personas y 96 toneladas de equipaje. Los aviones disponibles son de dos tipos: 11 del tipo A y 8 del tipo B. La contratación de un avión del tipo A, que puede transportar a 200 personas y 6 toneladas de equipaje, cuesta 40 000 €; la contratación de uno del tipo B, que puede transportar a 100 personas y 15 toneladas de equipaje, cuesta 10 000 €**

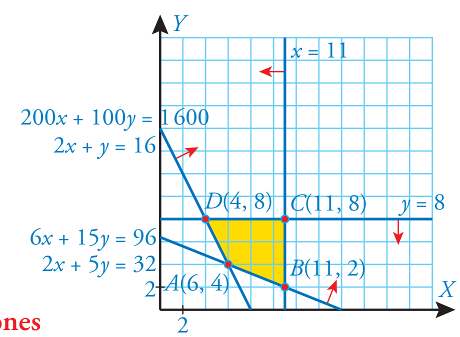
¿Cuántos aviones de cada tipo deben utilizarse para que el coste sea mínimo?

a) Tabla con los datos del problema.

	Tipo A	Tipo B	Restricciones	
N.º de aviones	x	y	$0 \le x \le 11;\ 0 \le y \le 8$	
Personas	$200x$	$100y$	$200x + 100y \ge 1600$	
Equipaje	$6x$	$15y$	$6x + 15y \ge 96$	
Coste	$40000x$	$10000y$	$f(x, y) = 40000x + 10000y$	Minimizar

b) Región factible.

Es el gráfico del margen.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$A(6, 4) \Rightarrow f(6, 4) = 40000 \cdot 6 + 10000 \cdot 4 = 280000$ €

$B(11, 2) \Rightarrow f(11, 2) = 40000 \cdot 11 + 10000 \cdot 2 = 460000$ €

$C(11, 8) \Rightarrow f(11, 8) = 40000 \cdot 11 + 10000 \cdot 8 = 520000$ €

$D(4, 8) \Rightarrow f(4, 8) = 40000 \cdot 4 + 10000 \cdot 8 =$ **240 000 € Mínimo**

d) La solución óptima es $D(4, 8)$, es decir, **$x = 4$ aviones tipo A, $y = 8$ aviones tipo B**

Soluciones enteras

En la mayoría de los problemas de programación lineal las soluciones son números enteros.

EJEMPLO

En los ejercicios resueltos 1 y 2:

- Número de bicicletas de paseo y de montaña.
- Número de aviones de tipo A y de tipo B.

ELABORA

3 Un sastre tiene 80 m^2 de tejido A y 120 m^2 de tejido B. Un traje de caballero requiere 1 m^2 de A y 3 m^2 de B, y un vestido de señora 2 m^2 de cada tejido. Si la venta de un traje deja al sastre el mismo beneficio que la de un vestido, halla cuántos trajes y vestidos debe fabricar para obtener la máxima ganancia.

4 Un vendedor de libros usados tiene en su tienda 90 libros de la colección Austral y 80 de la colección Alianza de bolsillo. Decide hacer dos tipos de lotes: el lote de tipo A con 3 libros de Austral y 1 de Alianza de bolsillo, que vende a 8 €, y el de tipo B con 1 libro de Austral y 2 de Alianza de bolsillo, que vende a 10 €

¿Cuántos lotes de cada tipo debe hacer el vendedor para maximizar su ganancia cuando los haya vendido todos?

5 Una empresa produce dos bienes, A y B. Tiene dos factorías y cada una de ellas produce los dos bienes en las cantidades por hora siguientes:

	Factoría 1	Factoría 2
Bien A	10 unidades/hora	20 unidades/hora
Bien B	25 unidades/hora	25 unidades/hora

La empresa recibe un pedido de 300 unidades de A y 500 de B. Los costes de funcionamiento de las dos factorías son: 100 € por hora para la factoría 1 y 80 € por hora para la factoría 2.

¿Cuántas horas debe funcionar cada factoría para minimizar los costes de la empresa y satisfacer el pedido?

3 NÚMERO DE SOLUCIONES

ENGÁNCHATE

EXPLORA

Representa la región definida por las siguientes restricciones:

$x \geq 0 \qquad y \geq 0 \qquad x + y \geq 6 \qquad y \geq x$

¿Está acotada?

3.1 PROBLEMAS CON INFINITAS SOLUCIONES

Un problema de programación lineal tiene **infinitas soluciones** si tiene la solución óptima en dos vértices de la región factible. En este caso, todos los puntos del lado que une ambos vértices son soluciones óptimas. Gráficamente este lado es paralelo al vector director de la función objetivo.

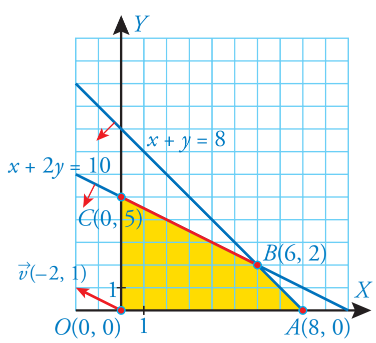
EJERCICIO RESUELTO

3 Dado el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y \leq 8 \\ x + 2y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Maximiza en dicho recinto el valor de la función:

$$f(x, y) = 30x + 60y$$



a) Región factible.

Es el gráfico del margen.

b) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 30 \cdot 0 + 60 \cdot 0 = 0$

$A(8, 0) \Rightarrow f(8, 0) = 30 \cdot 8 + 60 \cdot 0 = 240$

$B(6, 2) \Rightarrow f(6, 2) = 30 \cdot 6 + 60 \cdot 2 =$ **300 Máximo**

$C(0, 5) \Rightarrow f(0, 5) = 30 \cdot 0 + 60 \cdot 5 =$ **300 Máximo**

c) **La solución se alcanza en los vértices $B(6, 2)$ y $C(0, 5)$; por tanto, también se alcanza en todos los puntos del lado que une los puntos $B(6, 2)$ y $C(0, 5)$, es decir, tiene infinitas soluciones.**

Se observa gráficamente que el lado BC es paralelo al vector director de la función objetivo.

$$\vec{v}(-60, 30) \parallel (-2, 1)$$

3.2 PROBLEMAS SIN SOLUCIÓN

Un problema de programación lineal puede que no tenga solución, debido a dos razones:

a) Porque la región factible sea vacía.

b) Porque la región factible no esté acotada y no se alcance nunca en ella la solución óptima.

Vamos a ver dos ejercicios resueltos, uno de cada tipo, es decir, uno en el que la región factible es vacía y otro en el que la región factible no está acotada y nunca se alcanza en ella el valor máximo.

10_Mat_CCSS_2BACH.indd 204 23/3/23 8:35

4 **Dado el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:**

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{x + y \geq 7} \\ \boldsymbol{2x + 3y \leq 12} \\ \boldsymbol{x \geq 0} \\ \boldsymbol{y \geq 0} \end{array}\right\}$$

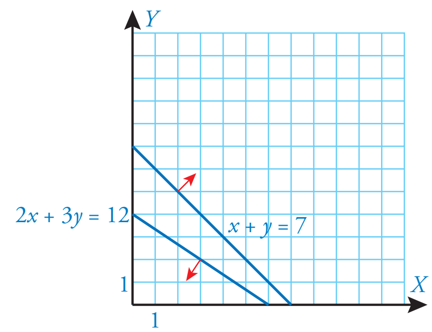
Minimiza en dicho recinto el valor de la función:

$$\boldsymbol{f(x, y) = 17x + 35y}$$

a) Región factible.

Es el gráfico del margen.

Se observa que la región factible está vacía, es decir, **no hay ningún punto en el plano que verifique las restricciones del enunciado del problema.**



5 **Dado el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:**

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{x \leq y} \\ \boldsymbol{x + 2y \geq 6} \\ \boldsymbol{x \geq 0} \\ \boldsymbol{y \geq 0} \end{array}\right\}$$

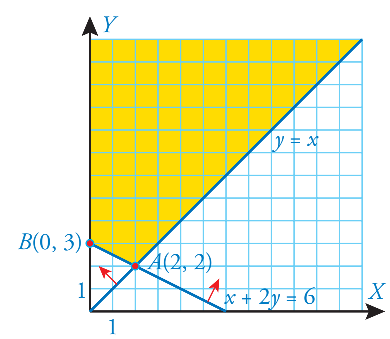
Maximiza en dicho recinto el valor de la función:

$$\boldsymbol{f(x, y) = 10x + 20y}$$

a) Región factible.

Es el gráfico del margen.

Se observa que la región factible no está acotada y, **por tanto, nunca se alcanza en ningún punto de ella el valor máximo.**



Observa que si se trata de minimizar una función objetivo en un recinto no acotado, sí puede tener solución.

A veces en el mundo real se presentan problemas de programación lineal sin solución, por ejemplo cuando queremos resolver un problema y por las condiciones que tenemos que aplicar se presenta uno de los casos anteriores.

ELABORA

6 Dado el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y \leq 8 \\ 3x + 2y \geq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Minimiza en dicho recinto el valor de la función:

$$f(x, y) = 15x + 10y$$

7 Dado el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y \leq 4 \\ x + 2y \geq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Minimiza en dicho recinto el valor de la función:

$$f(x, y) = 12x + 19y$$

8 Dado el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y \geq 6 \\ x \geq y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Maximiza en dicho recinto el valor de la función:

$$f(x, y) = 7x + 11y$$

9 Sea S la región definida por

$$y \geq 2x - 4;\ y \leq x;\ 3y \geq 2x;\ x \geq 0;\ y \geq 0$$

a) Representa la región S y calcula las coordenadas de sus vértices.

b) Obtén el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x + 3y$ en S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

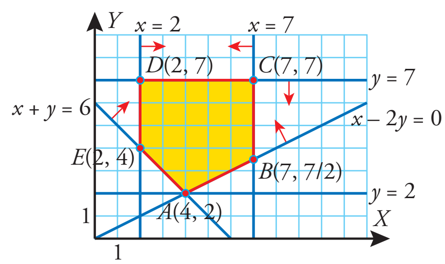
Mínimo coste y solución múltiple

6 Un distribuidor de aceite de oliva compra la materia prima a dos almazaras, A y B. Las almazaras A y B venden el aceite a 2 000 y 3 000 euros por tonelada, respectivamente. Cada almazara le vende un mínimo de dos toneladas y un máximo de 7 y para atender a su demanda, el distribuidor debe comprar en total un mínimo de 6 toneladas. El distribuidor debe comprar como máximo a la almazara A el doble de aceite que a la almazara B. ¿Qué cantidad de aceite debe comprar el distribuidor a cada una de las almazaras para obtener el mínimo coste? Determina dicho coste mínimo.

a) Tabla con los datos del problema.

	Almazara A	**Almazara B**	**Restricciones**	
N.º de toneladas	x	y	$2 \le x \le 7;\ 2 \le y \le 7$	
Comprar	x	y	$x + y \ge 6$	
Relación A y B	x	y	$x \le 2y$	
Coste	$2000x$	$3000y$	$f(x, y) = 2000x + 3000y$	**Minimizar**

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$A(4, 2) \Rightarrow f(4, 2) = 2000 \cdot 4 + 3000 \cdot 2 =$ **14 000 € Mínimo**

$B(7, 7/2) \Rightarrow f(7, 7/2) = 2000 \cdot 7 + 3000 \cdot 7/2 = 24500$ €

$C(7, 7) \Rightarrow f(7, 7) = 2000 \cdot 7 + 3000 \cdot 7 = 35000$ €

$D(2, 7) \Rightarrow f(2, 7) = 2000 \cdot 2 + 3000 \cdot 7 = 25000$ €

$E(2, 4) \Rightarrow f(2, 4) = 2000 \cdot 2 + 3000 \cdot 4 = 16000$ €

d) La solución óptima es $A(4, 2)$, es decir, **$x = 4$ toneladas de la almazara A e $y = 2$ toneladas de la almazara B**

7 Resuelve los siguientes apartados:

a) Representa gráficamente la región determinada por las siguientes restricciones:

$$2x + y \le 6$$
$$4x + y \le 10$$
$$-x + y \le 3$$
$$x \ge 0;\ \ y \ge 0$$

y determina sus vértices.

b) Calcula el máximo de la función

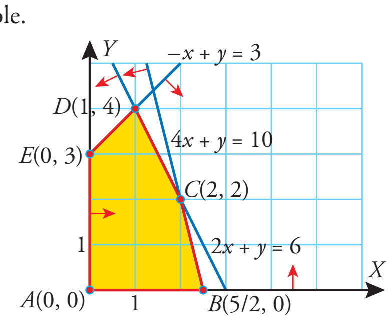
$$f(x, y) = 4x + 2y - 3$$

en el recinto anterior e indica dónde se alcanza.

a) Restricciones:

$2x + y \le 6;\ 4x + y \le 10;\ -x + y \le 3;\ x \ge 0;\ y \ge 0$

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$A(0, 0) \Rightarrow f((0, 0) = 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 3 = -3$

$B(5/2, 0) \Rightarrow f(5/2, 0) = 4 \cdot 5/2 + 2 \cdot 0 - 3 = 7$

$C(2, 2) \Rightarrow f(2, 2) = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 3 =$ **9 Máximo**

$D(1, 4) \Rightarrow f(1, 4) = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 4 - 3 =$ **9 Máximo**

$E(0, 3) \Rightarrow f(0, 3) = 4 \cdot 0 + 2 \cdot 3 - 3 = 3$

d) La solución óptima es el **segmento *CD*, es decir, todos los puntos de dicho segmento.**

8 Una compañía de publicidad ofrece a sus clientes anuncios de radio y televisión. El beneficio esperado por cada anuncio de radio es de 15 €, y 17 € por cada anuncio de televisión. La compañía impone las condiciones:

a) El número de anuncios de radio no puede ser menor que el número de anuncios de televisión disminuido en 5

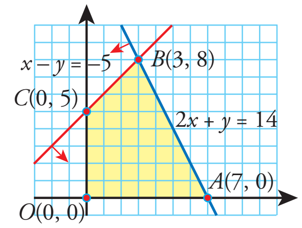
b) Sumando el doble del número de anuncios de radio con el número de anuncios de televisión no puede obtenerse más de 14

Determina el número de anuncios de radio y televisión para que el beneficio sea máximo y calcula dicho beneficio.

a) Tabla con los datos del problema.

	Anuncios radio	Anuncios televisión	Restricciones	
Número	x	y	$x \geq 0$; $y \geq 0$	
Condición 1	x	y	$x \geq y - 5$	
Condición 2	$2x$	y	$2x + y \leq 14$	
Beneficio	$15x$	$17y$	$f(x, y) = 15x + 17y$	**Maximizar**

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 15 \cdot 0 + 17 \cdot 0 = 0$ €

$A(7, 0) \Rightarrow f(7, 0) = 15 \cdot 7 + 17 \cdot 0 = 105$ €

$B(3, 8) \Rightarrow f(3, 8) = 15 \cdot 3 + 17 \cdot 8 =$ **181 € Máximo**

$C(0, 5) \Rightarrow f(0, 5) = 15 \cdot 0 + 17 \cdot 5 = 85$ €

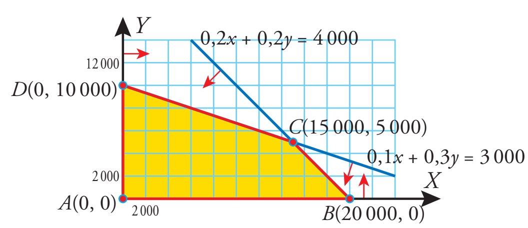
d) La solución óptima es $B(3, 8)$, es decir, **$x = 3$ anuncios de radio e $y = 8$ anuncios de televisión.**

9 Una fábrica de papel tiene almacenados 4 000 kg de pasta de papel normal y 3 000 kg de pasta de papel reciclado. La fábrica produce dos tipos diferentes de cajas de cartón. Para el primer tipo se utilizan 0,2 kg de pasta de papel normal y 0,1 kg de pasta de papel reciclado, mientras que para la caja del segundo tipo se utilizan 0,2 kg de pasta de papel normal y 0,3 kg de pasta de papel reciclado. Los beneficios que la fábrica obtiene por la venta de cada caja son 5 € para el primer tipo y 6 € para el segundo tipo de cajas. Utilizando técnicas de programación lineal, calcula cuántas cajas de cada tipo deben fabricar para obtener el máximo beneficio. ¿A cuánto asciende el beneficio máximo obtenido?

a) Tabla con los datos del problema.

	Tipo A	Tipo B	Restricciones	
N.º de cajas	x	y	$x \geq 0$; $y \geq 0$	
Normal	$0{,}2x$	$0{,}2y$	$0{,}2x + 0{,}2y \leq 4\,000$	
Reciclado	$0{,}1x$	$0{,}3y$	$0{,}1x + 0{,}3y \leq 3\,000$	
Beneficio	$5x$	$6y$	$f(x, y) = 5x + 6y$	**Maximizar**

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$A(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 5 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 0$ €

$B(20\,000, 0) \Rightarrow f(20\,000, 0) = 5 \cdot 20\,000 + 6 \cdot 0 = 100\,000$ €

$C(15\,000, 5\,000) \Rightarrow f(15\,000, 5\,000) = 5 \cdot 15\,000 + 6 \cdot 5\,000 =$ **105 000 € Máximo**

$D(0, 10\,000) \Rightarrow f(0, 10\,000) = 5 \cdot 0 + 6 \cdot 10\,000 = 60\,000$ €

d) La solución óptima es $C(15\,000, 5\,000)$, es decir, **$x = 15\,000$ cajas del tipo A e $y = 5\,000$ cajas del tipo B. El beneficio máximo asciende a 105 000 €**

10 Para dotar de mobiliario urbano a cierta zona de la ciudad, se quieren colocar al menos 20 piezas entre farolas y jardineras. Hay 40 farolas y 12 jardineras disponibles. Se pretende que el número de jardineras colocadas no sea superior a una tercera parte del de farolas colocadas, pero de forma que por lo menos un 20 % de las piezas que se coloquen sean jardineras.

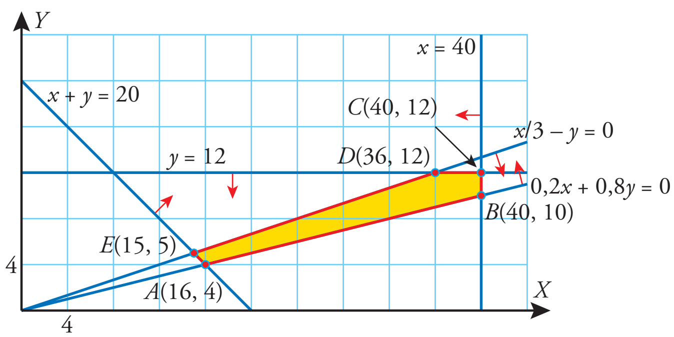
a) ¿Qué combinaciones de piezas de cada tipo se pueden colocar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) ¿Qué combinación hace que la diferencia entre el número de farolas y de jardineras colocadas sea mayor? ¿Es la combinación donde más piezas de mobiliario se colocan?

a) Tabla con los datos del problema.

	Farolas	Jardineras	Restricciones	
N.º de piezas	x	y	$0 \leq x \leq 40;\ 0 \leq y \leq 12$	
Condición 1	x	y	$x + y \geq 20$	
Condición 2	x	y	$y \leq x/3$	
Condición 3	x	y	$0{,}2(x + y) \leq y$	
Beneficio	x	y	$f(x, y) = x - y$	**Maximizar**

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$A(16, 4) \Rightarrow f(16, 4) = 16 - 4 = 12$

$B(40, 10) \Rightarrow f(40, 10) = 40 - 10 =$ **30 Máximo**

$C(40, 12) \Rightarrow f(40, 12) = 40 - 12 = 28$

$D(36, 12) \Rightarrow f(36, 12) = 36 - 12 = 24$

$E(15, 5) \Rightarrow f(15, 5) = 15 - 5 = 10$

d) Se pueden colocar las piezas correspondientes a las coordenadas enteras que hay en el borde y el interior de la región factible.

La diferencia mayor entre el número de farolas y jardineras se alcanza en:

$x = 40$ farolas

$y = 10$ jardineras

$g(x, y) = x + y$

$g(16, 4) = 16 + 4 = 20$ piezas

$g(40, 10) = 40 + 10 = 50$ piezas

$g(40, 12) = 40 + 12 =$ **52 piezas**

$g(36, 12) = 36 + 12 = 48$ piezas

$g(15, 5) = 15 + 5 = 20$ piezas

40 farolas y 12 jardineras. En total serían **40 + 12 = 52 piezas de mobiliario** que también está dentro de la región factible.

La combinación que hace máxima la diferencia entre farolas y jardineras **no coincide** con la combinación donde más piezas de mobiliario se colocan.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

CONTESTA EN TU CUADERNO

1 Representa gráficamente el conjunto de soluciones del sistema de inecuaciones:

$$3x + 2y \geq 5$$
$$x - 2y \geq -1$$
$$5x + 4y \leq 16$$
$$x - y \leq 5$$

Determina los vértices de la región obtenida.

a) $A(5, 2)$; $B(3, 1)$; $C(9, 7/2)$; $D(5, 5)$

b) $A(13, -1)$; $B(2, 3)$; $C(1, -1)$

c) $A(3, -2)$; $B(4, -1)$; $C(2, 3/2)$; $D(1, 1)$

d) $A(0, 0)$; $B(3, 4)$; $C(0, 9)$; $D(7, 0)$

2 En el ejercicio anterior calcula el punto donde alcanza el mínimo la función $f(x, y) = 3x - y$ en dicha región. Determina dicho valor mínimo.

a) $A(1, 1)$; el mínimo es 2

b) $A(3, 5)$; el mínimo es 23

c) $A(7, 4)$; el mínimo es 56

d) $A(9, 0)$; el mínimo es 1

3 Una hamburguesería necesita diariamente un mínimo de 180 kg de carne de cerdo y 120 kg de carne de ternera. Hay dos mataderos A y B que pueden suministrarle la carne requerida, pero ha de ser en lotes. El lote del matadero A contiene 6 kg de carne de cerdo y 2 kg de carne de ternera cuyo coste es 25 €, y el lote del matadero B contiene 4 kg de carne de cerdo y 3 kg de carne de ternera, cuyo coste es 35 €. Determina, justificando la respuesta, el número de lotes que debe adquirir la hamburguesería en cada matadero con objeto de garantizar sus necesidades diarias con el mínimo coste.

a) 5 lotes del matadero A y 23 lotes del B.

b) 9 lotes del matadero A y 18 lotes del B.

c) 5 lotes del matadero A y 15 lotes del B.

d) 6 lotes del matadero A y 36 lotes del B.

4 En el ejercicio anterior, calcula el valor de dicho coste diario mínimo.

a) El coste mínimo es de 2 600 €

b) El coste mínimo es de 5 000 €

c) El coste mínimo es de 1 410 €

d) El coste mínimo es de 250 €

5 Un taller de bisutería produce sortijas sencillas a 4,5 € y sortijas adornadas a 6 €. Las máquinas condicionan la producción de modo que no pueden salir al día más de 400 sortijas sencillas, ni más de 300 adornadas, ni más de 500 en total.

Suponiendo que se vende toda la producción, ¿cuántas unidades de cada clase interesará fabricar para obtener los máximos ingresos?

a) 150 sortijas sencillas y 150 adornadas.

b) 250 sortijas sencillas y 200 adornadas.

c) 200 sortijas sencillas y 300 adornadas.

d) 300 sortijas sencillas y 250 adornadas.

6 En el ejercicio anterior, calcula los ingresos máximos.

a) 2 700 € **b)** 3 000 € **c)** 1 000 € **d)** 10 000 €

7 En un almacén de electrodomésticos hay neveras y lavadoras, y pueden almacenarse hasta un total de 180 unidades. Para atender adecuadamente la demanda de los clientes, deben existir al menos 30 lavadoras, y el número de neveras debe ser, al menos, igual al número de lavadoras más 20. Si el coste de cada nevera es de 450 €, y el de cada lavadora, de 375 €, ¿cuántas unidades de cada electrodoméstico se han de almacenar minimizando los costes totales?

a) 25 neveras y 10 lavadoras. **b)** 75 neveras y 20 lavadoras.

c) 40 neveras y 40 lavadoras. **d)** 50 neveras y 30 lavadoras.

8 En el ejercicio anterior, calcula los costes mínimos.

a) 33 750 € **b)** 10 000 € **c)** 50 000 € **d)** 25 000 €

9 Un profesor ha dado a sus alumnos una lista de problemas para que resuelvan, como máximo, 70 de ellos. Los problemas están clasificados en dos grupos. Los del grupo A valen 5 puntos cada uno, y los del B, 7 puntos. Para resolver un problema del tipo A, se necesitan 2 minutos, y para resolver un problema del tipo B, 3 minutos. Si los alumnos disponen de dos horas y media para resolver los problemas, ¿cuántos problemas de cada tipo habría que hacer para obtener la puntuación máxima? ¿Cuál es dicha puntuación máxima?

a) 25 problemas del grupo A y 70 del B.

b) 35 problemas del grupo A y 53 del B.

c) 65 problemas del grupo A y 10 del B.

d) 60 problemas del grupo A y 10 del B.

10 En el ejercicio anterior, calcula la puntuación máxima.

a) 500 puntos. **b)** 400 puntos.

c) 370 puntos. **d)** 200 puntos.

ACTIVIDADES FINALES

Elabora actividades de las secciones

1 INTRODUCCIÓN A LA PROGRAMACIÓN LINEAL

10 Sea el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 5x + 2y - 10 \geq 0 \\ x - y - 2 \leq 0 \\ 3x + 4y - 20 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

a) Dibuja dicho recinto y determina sus vértices.

b) Determina en qué punto de ese recinto alcanza el máximo valor la función:

$$f(x, y) = 4x + 3y$$

11 Dado el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y \leq 27 \\ x \geq 12 \\ y \geq 6 \end{array}\right\}$$

a) Represéntalo gráficamente.

b) Determina los vértices de ese recinto.

c) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 90x + 60y$ en el recinto anterior?

¿En qué puntos alcanza dichos valores?

12 Sea el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + 3y \leq 3 \\ 2x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

a) Dibuja el conjunto de puntos definidos por las inecuaciones.

b) Maximiza en dicho conjunto la siguiente función objetivo:

$$z = 2x + 3y$$

13 Dada la siguiente función objetivo

$$f(x, y) = 2x + 3y$$

sujeta a las restricciones siguientes:

$$\begin{array}{l} 3x + y \leq 10 \\ x + 2y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}$$

a) Representa la región factible.

b) Halla los valores de x e y que hacen máxima la función objetivo.

c) Determina los valores x e y que minimizan la función objetivo.

2 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

14 Un artesano fabrica collares y pulseras. Hacer un collar lleva dos horas, y hacer una pulsera una hora. El material de que dispone no le permite hacer más de 50 piezas. Como mucho, el artesano puede dedicar al trabajo 80 horas. Por cada collar gana 5 €, y por cada pulsera, 4 €. El artesano desea determinar el número de collares y pulseras que debe fabricar para optimizar sus beneficios.

a) Expresa la función objetivo y las restricciones del problema.

b) Representa gráficamente el recinto definido.

c) Obtén el número de collares y pulseras correspondientes al máximo beneficio.

15 Un ganadero tiene que elaborar un pienso a partir de dos ingredientes nutritivos: A y B. Los mínimos que necesita son 30 unidades de A y 32 unidades de B. En el mercado se venden sacos de dos marcas que contienen A y B, cuyos contenidos y precios se dan en la tabla siguiente:

Marca	Unidades de A	Unidades de B	Precio del saco
I	3	1	9 €
II	1	4	12 €

¿Cuántos sacos de cada marca tiene que comprar el ganadero para elaborar este pienso con el mínimo coste?

16 Una fábrica produce confitura de albaricoque y confitura de ciruela. El doble de la producción de confitura de ciruela es menor o igual que la producción de confitura de albaricoque más 800 unidades. Además, el triple de la producción de confitura de albaricoque más el doble de la producción de confitura de ciruela es menor o igual que 2 400 unidades.

Cada unidad de confitura de albaricoque produce un beneficio de 60 €, y cada unidad de confitura de ciruela 80 €. ¿Cuántas unidades de cada tipo de confitura se tienen que producir para obtener un beneficio máximo?

17 Una empresa que sirve comidas preparadas tiene que diseñar un menú utilizando dos ingredientes. El ingrediente A contiene 35 g de grasas y 150 kilocalorías por cada 100 g de ingrediente, mientras que el ingrediente B contiene 15 g de grasas y 100 kilocalorías por cada 100 g. El coste es de 1,5 € por cada 100 g del ingrediente A y de 2 € por cada 100 g del ingrediente B.

El menú que hay que diseñar debería contener no más de 30 g de grasas y, al menos, 110 kilocalorías por cada 100 g de alimento. Se pide determinar las proporciones de cada uno de los ingredientes que se emplearán en el menú, de manera que su coste sea lo más reducido posible.

a) Indica la expresión de las restricciones y la función objetivo del problema.

b) Representa gráficamente la región delimitada por las restricciones.

c) Calcula el porcentaje óptimo de cada uno de los ingredientes que se incluirán en el menú.

3 NÚMERO DE SOLUCIONES

18 Dado el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y \geq 5 \\ 2x + 3y \leq 18 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Maximiza en dicho recinto el valor de $f(x, y) = 16x + 24y$

19 Dado el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y \geq 11 \\ 2x + y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Minimiza en dicho recinto el valor de $f(x, y) = 5x + 7y$

20 Dado el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y \geq 8 \\ x \leq y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Maximiza en dicho recinto el valor de la función:

$$f(x, y) = 23x + 14y$$

Elabora actividades para reforzar

21 Dado el recinto definido por el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 6 \\ y \leq 8 \\ x + 2y \geq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

a) Represéntalo gráficamente.

b) Calcula sus vértices.

c) Calcula el máximo de la función $f(x, y) = 20x + 60y$ en dicho recinto.

22 Determina los valores máximo y mínimo de la función

$$z = 3x + 4y$$

sujeta a las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + y \geq 3 \\ x + y \leq 5 \\ x \geq -2 \\ y \leq 10 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

23 Dado el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y \leq 11 \\ 40x + 30y \geq 360 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

a) Represéntalo gráficamente.

b) Calcula los vértices de ese recinto.

c) Obtén en dicho recinto el valor máximo y el valor mínimo de la función dada por

$$f(x, y) = 10\,000x + 7\,000y$$

y di en qué puntos se alcanzan.

24 Sea P el polígono de vértices $O(0, 0)$, $A(6, 0)$, $B(8, 3)$, $C(4, 8)$ y $D(0, 6)$. Averigua en qué puntos del polígono alcanza la función $f(x, y) = 2x + 3y$ los valores máximo y mínimo.

25 Dado el recinto definido por el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\geq 2 \\ x-y\leq 0 \\ y\leq 4 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

a) Represéntalo gráficamente.

b) Calcula los vértices de ese recinto.

c) Determina el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = 12x + 4y$ en el recinto anterior.

26 Sea el conjunto de restricciones siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\leq 9 \\ x-y\leq 0 \\ x+2y\leq 16 \\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

a) Dibuja la región factible determinada por dichas restricciones.

b) Calcula los vértices de dicha región.

c) Obtén los puntos en los que presenta el máximo y el mínimo la función:

$$f(x, y) = x + 2y$$

27 Se considera la función $f(x, y) = 2x + 4y$, sujeta a las siguientes restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2y\geq 6 \\ x+4y\geq 4 \\ x-2y+6\geq 0 \\ x+2y\leq 10 \\ x\leq 4 \end{array}\right\}$$

a) Representa la región del plano determinada por el conjunto de restricciones.

b) Calcula los puntos de dicha región en los que la función $f(x, y)$ alcanza su valor máximo y su valor mínimo.

28 Dado el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y\leq 18 \\ 2x+3y\leq 26 \\ x+y\leq 16 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

a) Represéntalo gráficamente.

b) Calcula los vértices del recinto.

c) Obtén en dicho recinto el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x, y) = 5x + 3y$. Halla en qué puntos se alcanzan.

Elabora problemas

29 Un granjero desea crear una granja de pollos de dos razas, A y B. Dispone de 9 000 € para invertir y de un espacio con una capacidad limitada para 7 000 pollos. Cada pollo de la raza A le cuesta 1 € y obtiene con él un beneficio de 1 €, y cada pollo de la raza B le cuesta 2 € y el beneficio es de 1,4 € por unidad.

Si por razones comerciales el número de pollos de la raza B no puede ser superior a los de la raza A, determina, justificando la respuesta:

a) ¿Qué cantidad de ambas razas debe comprar el granjero para obtener un beneficio máximo?

b) ¿Cuál será el valor de dicho beneficio?

30 Un vendedor dispone de dos tipos de pienso, A y B, para alimentar ganado. Si mezcla a partes iguales los dos piensos, obtiene una mezcla que vende a 0,15 €/kg; si la proporción de la mezcla es de una parte de A por 3 de B, vende la mezcla resultante a 0,1 €/kg. El vendedor dispone de 100 kg de pienso del tipo A y de 210 kg del tipo B. Desea hacer las dos mezclas de modo que sus ingresos por venta sean máximos.

a) Plantea el problema y dibuja la región factible.

b) Halla cuántos kilos de cada mezcla deben producirse para maximizar los ingresos, y calcula dicho ingreso.

31 Los alumnos de un centro educativo pretenden vender dos tipos de lotes, A y B, para sufragar los gastos del viaje de estudios. Cada lote de tipo A consta de una caja de galletas y cinco participaciones de lotería, y cada lote del tipo B consta de dos cajas de galletas y dos participaciones de lotería. Por cada lote de tipo A vendido, los alumnos obtienen un beneficio de 12,25 €; y por cada lote de tipo B ganan 12,5 €

Por razones de almacenamiento, pueden disponer a lo sumo de 400 cajas de galletas. Los alumnos solo cuentan con 1 200 participaciones de lotería y desean maximizar sus beneficios.

a) Determina la función objetivo y expresa mediante inecuaciones las restricciones del problema.

b) ¿Cuántas unidades de cada tipo de lote deben vender los alumnos para que el beneficio obtenido sea máximo? Calcula dicho beneficio.

32 Cada mes una empresa puede gastar, como máximo, 10 000 € en salarios y 1 800 € en energía (electricidad y gasoil). La empresa solo elabora dos tipos de productos A y B. Por cada unidad de A que elabora gana 0,8 €; y por cada unidad de B gana 0,5 €. El coste salarial y energético que acarrea la elaboración de una unidad del producto A y de una unidad del producto B aparece en la siguiente tabla:

	Producto A	Producto B
Coste salarial	2	1
Coste energético	0,1	0,3

Se desea determinar cuántas unidades de cada uno de los productos A y B debe producir la empresa para que el beneficio sea máximo.

33 En un depósito se almacenan bidones de petróleo y gasolina. Para poder atender la demanda se han de tener almacenados un mínimo de 10 bidones de petróleo y 40 de gasolina. Siempre debe haber más bidones de gasolina que de petróleo, y la capacidad del depósito es de 200 bidones. Por razones comerciales, deben mantenerse en inventario, al menos, 50 bidones. El gasto de almacenaje de un bidón de petróleo es de 0,2 € y el de uno de gasolina es de 0,3 €. Se desea saber cuántos bidones de cada clase han de almacenarse para que el gasto de almacenaje sea mínimo.

34 Un agricultor cosecha garbanzos y lentejas. Se sabe que, a lo sumo, solo se pueden cosechar 500 toneladas (t), de las que, como máximo, 200 t son lentejas. Los beneficios por toneladas de garbanzos y lentejas son de 500 € y 300 €, respectivamente, y desea planificar la producción para optimizar el beneficio total.

a) Formula el sistema de inecuaciones asociado al enunciado del problema y la función objetivo del mismo.

b) Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices.

c) ¿Cuántas toneladas de garbanzos y cuántas de lentejas debe cosechar para obtener el máximo beneficio?

35 Cierta sala de espectáculos tiene una capacidad máxima de 1 500 personas entre adultos y niños, aunque el número de niños asistentes no puede superar los 600. El precio de la entrada de un adulto a una sesión es de 8 €, mientras que la de un niño es de un 40 % menos. El número de adultos no puede superar al doble del número de niños.

Cumpliendo las condiciones anteriores, ¿cuál es la cantidad máxima que se puede recaudar por la venta de entradas? ¿Cuántas de las entradas serán de niños?

36 Un grupo musical va a lanzar un nuevo trabajo al mercado. La casa discográfica considera necesario realizar una campaña intensiva de publicidad, combinando dos publicidades: anuncios en televisión, con un coste estimado de 10 000 € por anuncio, y cuñas radiofónicas, con un coste estimado de 1 000 € por cuña. No obstante, no pueden gastar más de un millón de euros para dicha campaña, a lo largo de la cual se tienen que emitir, al menos, 50 cuñas, pero no más de 100

Un estudio de mercado cifra en 10 000 el número de copias que se venderá por anuncio de televisión emitido, y en 2 000 el número de copias por cuña radiofónica emitida.

a) ¿De cuántos anuncios y cuñas radiofónicas podrá constar esta campaña? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) ¿Qué combinación de ambos se debería realizar para vender el mayor número de copias posibles? ¿Se llega a gastar el millón de euros?

37 Una fábrica de coches va a lanzar al mercado dos nuevos modelos, uno básico y otro de lujo. El coste de fabricación del modelo básico es de 10 000 € y el del modelo de lujo es de 15 000 €. Se dispone de un presupuesto de 600 000 € para esta operación de lanzamiento.

Para evitar riesgos se cree conveniente lanzar al menos tantos coches del modelo básico como del modelo de lujo y, en todo caso, no fabricar más de 45 coches del modelo básico.

a) ¿Cuántos coches interesa fabricar de cada modelo si el objetivo es maximizar el número de coches fabricados?

b) ¿Se agota el presupuesto disponible?

38 Por motivos de ampliación de plantilla, una empresa de servicios de traducción quiere contratar, a lo sumo, 50 nuevos traductores. El salario que ha de pagar a cada traductor de una lengua es de 2 000 €, y de 3 000 € a los que son de más de una lengua.

Como poco, y por motivos de demanda, dicha empresa tiene que contratar a un traductor de más de una lengua. La política de selección de personal de la compañía obliga también a contratar al menos a tantos traductores de una lengua como de más de una. Sabiendo que el objetivo fijado de beneficios totales es, como mínimo, de 120 000 €, y que los beneficios que aportan los traductores de una lengua son de 4 000 €/traductor, y de 8 000 €/traductor los de más de una lengua:

a) ¿Cuántos traductores de cada tipo puede contratar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) ¿Cuántos traductores contratará para minimizar el gasto en salarios? ¿Qué beneficios totales tendrá la empresa en este caso?

39 Un agricultor puede sembrar trigo (5 hectáreas como máximo) y centeno (7 hectáreas como máximo) en sus tierras. La producción de trigo, por cada hectárea sembrada, es de 5 toneladas, mientras que la producción de centeno, también por hectárea sembrada, es de 2 toneladas, y puede producir un máximo de 29 toneladas de los dos cereales.

Si el beneficio que obtiene el agricultor por cada tonelada de trigo es de 290 € y el beneficio por cada tonelada de centeno es de 240 €, ¿qué número de hectáreas ha de sembrar de cada cultivo para maximizar los beneficios?

40 Un cliente de un banco dispone de 30 000 € para adquirir fondos de inversión. El banco le ofrece dos tipos de fondos, A y B. El de tipo A tiene una rentabilidad del 12 % y unas limitaciones legales de 12 000 € de inversión máxima; el del tipo B presenta una rentabilidad del 8 % sin ninguna limitación. Además, este cliente desea invertir en los fondos tipo B, como máximo, el doble de lo invertido en los fondos tipo A.

a) ¿Qué cantidad de dinero debe invertir en cada tipo de fondo para obtener un beneficio máximo?

b) ¿Cuál será el valor de dicho beneficio máximo?

41 Un comerciante desea comprar dos tipos de lavadoras, A y B. Las de tipo A cuestan 450 €, y las de tipo B, 750 €. Dispone de 10 500 € y de sitio para 20 lavadoras y, al menos, ha de comprar una de cada tipo.

¿Cuántas lavadoras ha de comprar de cada tipo para obtener beneficios máximos con su venta posterior, sabiendo que en cada lavadora gana el 20 % del precio de compra?

Nota: se recuerda que el número de lavadoras de cada tipo ha de ser entero.

42 Una empresa se dedica a la fabricación de frascos de perfume y de agua de colonia, a partir de tres factores productivos, F_1, F_2 y F_3.

Las unidades de dichos factores utilizadas en la producción de cada tipo de frasco se detallan en la siguiente tabla:

	Perfume	Agua de colonia
F_1	1	2
F_2	2	0
F_3	0	4

Sabiendo que el precio de venta de un frasco de perfume es de 50 €, el de uno de agua de colonia es de 20 €, y que la empresa dispone de 240 unidades de F_1, 360 de F_2 y 440 de F_3:

a) Calcula el número de frascos de cada tipo que debe fabricar la empresa para maximizar sus beneficios. Explica los pasos seguidos para obtener la respuesta.

b) ¿Se consumen todas las existencias de F_1, F_2 y F_3 en la producción de los frascos que maximiza los beneficios?

43 Un concesionario de coches vende dos modelos: el A, con el que gana 1 000 € por unidad vendida, y el B, con el que gana 500 € por unidad vendida. El número x de coches vendidos del modelo A debe verificar que $50 \le x \le 75$. El número y de coches vendidos del modelo B debe ser mayor o igual que el número de coches vendidos del modelo A

Sabiendo que el máximo de coches que puede vender es 400, determina cuántos coches debe vender de cada modelo para que su beneficio sea máximo.

44 El número de unidades de dos productos (A y B) que un comercio puede vender es, como máximo, igual a 100. Dispone de 60 unidades de producto de tipo A, con un beneficio unitario de 2,5 €, y de 70 unidades tipo B con un beneficio de 3 €

Determina cuántas unidades de cada tipo de productos A y B debe vender el comercio para maximizar sus beneficios globales.

Elabora problemas de más nivel

45 En un problema de programación lineal la región factible es el pentágono convexo que tiene de vértices los puntos:

$$O(0, 0),\ P(0, 4),\ Q(3/2, 3),\ R(5/2, 2) \text{ y } S(11/4, 0)$$

y la función objetivo que hay que maximizar es

$$F(x, y) = 2x + ay$$

(a es un número real positivo).

a) Dibuja la región factible.

b) Halla el vértice, o punto extremo, del mismo en el que la función objetivo alcanza el máximo para $a = 1/2$

c) Encuentra un valor de a para que el máximo se alcance en el punto (0, 4)

46 Un hipermercado quiere ofrecer dos clases de bandejas: A y B. La bandeja A contiene 40 g de queso manchego, 160 g de roquefort y 80 g de camembert; la bandeja B contiene 120 g de cada uno de los tres tipos de queso anteriores. Para confeccionarlas disponen de 10,4 kg de queso manchego, 17,6 kg de roquefort y 11,2 kg de camembert.

El precio de venta es de 5,8 € la bandeja A y de 7,32 € la bandeja B. El hipermercado desea maximizar los ingresos.

a) Expresa la función objetivo.

b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.

c) Determina el número de bandejas que debe vender de cada clase para que los ingresos obtenidos sean máximos. Calcula dichos ingresos.

47 Para fabricar 2 tipos de cable, A y B, que se venderán a 1,5 y 1 € el metro, respectivamente, se emplean 16 kg de plástico y 4 kg de cobre para cada hectómetro del tipo A y 6 kg de plástico y 12 kg de cobre para cada del tipo B.

Sabiendo que la longitud de cable fabricado del tipo B no puede ser mayor que el doble de la del tipo A y que, además, no pueden emplearse más de 252 kg de plástico ni más de 168 kg de cobre, determina la longitud, en hectómetros, de cada tipo de cable que debe fabricarse para que la cantidad de dinero obtenida en la venta sea máxima.

48 Una fábrica de adornos produce broches sencillos y broches de fiesta. Se obtiene un beneficio de 4,5 € por cada broche sencillo y de 6 € por cada broche de fiesta. En un día no se pueden fabricar más de 400 broches sencillos ni más de 300 de fiesta; tampoco pueden producirse más de 500 broches en total. Suponiendo que se logra vender toda la producción de un día, ¿cuál es el número de broches de cada clase que conviene fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál debería ser la producción para obtener el máximo beneficio si se obtuvieran 6 € por cada broche sencillo y 4,5 € por cada broche de fiesta?

49 Un proyecto de asfaltado puede llevarse a cabo por dos grupos diferentes de una misma empresa: G1 y G2. Se trata de asfaltar tres zonas: A, B y C. En una semana, el grupo G1 es capaz de asfaltar 3 unidades en la zona A, 2 en la zona B y 2 en la zona C. El grupo G2 es capaz de asfaltar semanalmente 2 unidades en la zona A, 3 en la zona B y 2 en la zona C. El coste semanal se estima en 3 300 € para G1 y en 3 500 € para G2. Se necesita asfaltar un mínimo de 6 unidades en la zona A, 12 en la zona B y 10 en la zona C. ¿Cuántas semanas deberá trabajar cada grupo para finalizar el proyecto con el mínimo coste?

50 Una empresa, especializada en la fabricación de mobiliario para casas de muñecas, produce cierto tipo de mesas y sillas, que vende, respectivamente, a 20 € y 30 € por unidad. La empresa desea saber cuántas unidades de cada artículo debe fabricar diariamente un operario para maximizar los ingresos, teniendo las siguientes restricciones:

El número total de unidades de los dos tipos no podrá exceder de 4 por día y operario. Cada mesa requiere 2 horas para su fabricación; cada silla, 3 horas. La jornada laboral máxima es de 10 horas.

El material utilizado en cada mesa cuesta 4 €. El utilizado en cada silla cuesta 2 €. Cada operario dispone de 12 € diarios para material.

a) Expresa la función objetivo y las restricciones del problema.

b) Representa gráficamente la región factible y calcula los vértices de la misma.

c) Razona si con estas restricciones un operario puede fabricar diariamente una mesa y una silla, y si esto le conviene a la empresa.

d) Resuelve el problema.

51 Una agencia de viajes vende paquetes turísticos para acudir a la final de un campeonato de fútbol. La agencia está considerando ofrecer dos tipos de viajes. El primero de ellos, A, incluye desplazamiento en autocar para dos personas, una noche de alojamiento en habitación doble y cuatro comidas. El segundo, B, incluye desplazamiento en autocar para una persona, una noche de alojamiento (en habitación doble) y dos comidas.

El precio de venta del paquete A es de 150 € y el del paquete B es de 90 €. La agencia tiene contratadas un máximo de 30 plazas de autobús, 20 habitaciones dobles y 56 comidas. El número de paquetes del tipo B no debe superar al del tipo A. La empresa desea maximizar sus ingresos.

Se pide:

a) Expresar la función objetivo.

b) Escribir mediante inecuaciones las restricciones del problema y representar gráficamente el recinto definido.

c) Determinar cuántos paquetes de cada tipo debe vender la agencia para que sus ingresos sean máximos. Calcular dichos ingresos.

COMPETENCIA digital
con GeoGebra en Moodle

1. Ejercicio (Calificación: 10 puntos)

Un agricultor dispone de 5 hectáreas, como máximo, de terreno para dedicar a la plantación de trigo y cebada. Cada hectárea dedicada al trigo le supone un beneficio de 200 €, mientras que cada hectárea dedicada a la cebada le supone un beneficio de 60 €. Entre ambos cultivos es obligatorio plantar como mínimo una hectárea, y la normativa autonómica le obliga a que el cultivo de trigo ocupe como mucho una hectárea más que el de cebada. Representa la región factible, determina las hectáreas que debería dedicar a cada cultivo para maximizar sus beneficios y obten el valor del beneficio máximo.

SOLUCIÓN:

En **GeoGebra** elige el *applet*: **Resolución de problemas de programación lineal.**

Una vez introducidos los datos en las casillas de entrada:

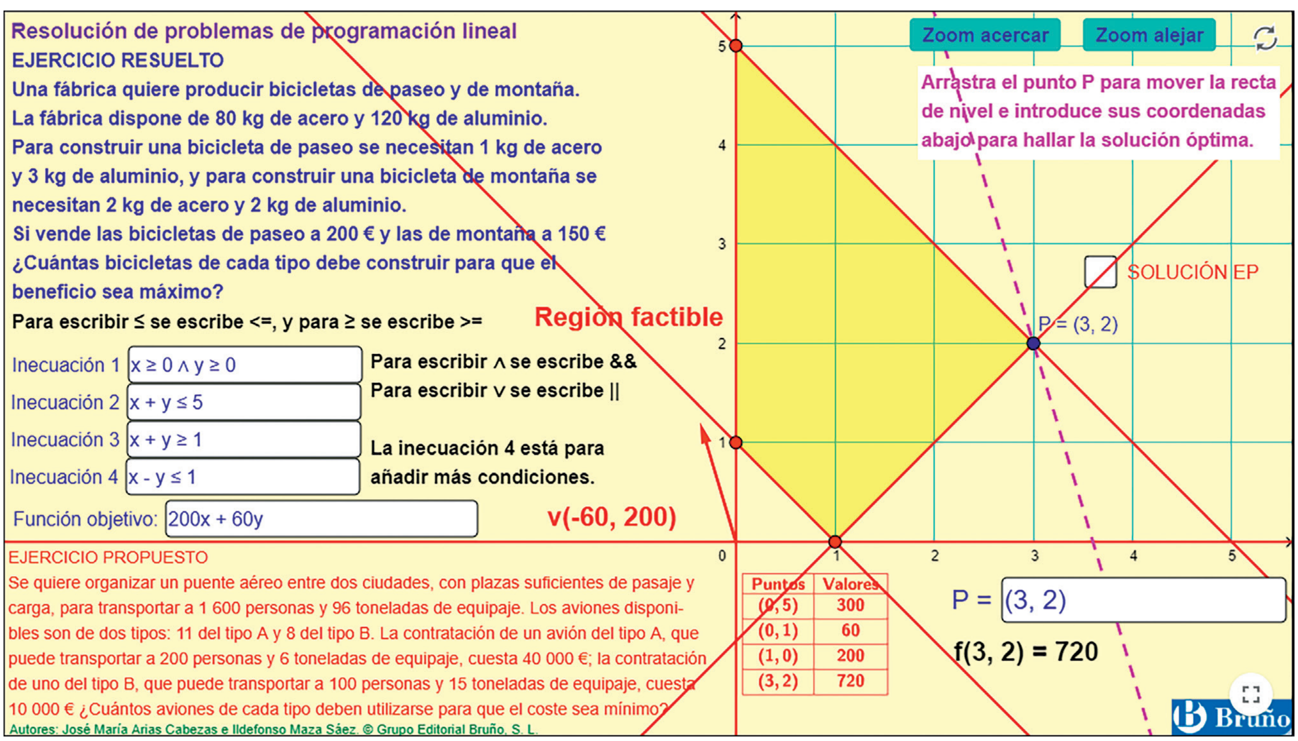
a) Haz Zoom, para ello coloca el puntero del ratón en el origen de coordenadas $O(0, 0)$ y haz *clic*. Mueve la rueda del ratón hacia arriba para hacer Zoom aumento, hasta que te quede, más o menos, como el de la imagen.

b) Abajo a la derecha en el punto $P(20, 30)$ introduce el punto (0, 1), obtendrás $f(0, 1) = 60$

c) *Arrastra* con el ratón el punto azul al punto (1, 0), obtendrás $f(1, 0) = 200$

d) *Arrastra* con el ratón el punto azul al punto (3, 2), obtendrás $f(3, 2) =$ **720 Máximo**

e) *Arrastra* con el ratón el punto azul al punto (0, 5), obtendrás $f(0, 5) = 300$



Obtendrá el beneficio máximo para $\boxed{3}$ hectáreas de trigo y $\boxed{2}$ hectáreas de cebada.

Máximo beneficio: $\boxed{720\ €}$

PONTE A PRUEBA

PROBLEMAS RESUELTOS

1 Una empresa que fabrica grapadoras debe satisfacer un pedido de 325 unidades que empaqueta en cajas de diferentes tamaños. Hay 3 modelos de cajas, A, B y C, en los que caben, respectivamente, 5, 10 y 15 unidades. Se dispone de un total de 35 cajas. Además, el total de cajas de los modelos A y B es 6 veces el número de cajas del modelo C. Halla el número de cajas de cada tipo.

Incógnitas, datos y pregunta

A = cajas modelo A B = cajas modelo B C = cajas modelo C

Planteamiento y operaciones

$$\left.\begin{array}{r} 5A + 10B + 15C = 325 \\ A + B + C = 35 \\ A + B = 6C \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1.^{a}/5 \\ \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} A + 2B + 3C = 65 \\ A + B + C = 35 \\ A + B - 6C = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ 1.^{a} - 2.^{a} \\ 2.^{a} - 3.^{a} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} A + 2B + 3C = 65 \\ B + 2C = 30 \\ 7C = 35 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ \\ 3.^{a}/7 \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} A + 2B + 3C = 65 \\ B + 2C = 30 \\ C = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} A = 10 \\ B = 20 \\ C = 5 \end{array}\right\}$$

Solución

N.º de cajas del modelo A = 10, B = 20, C = 5

2 Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 €. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 €

Para compensar el error, el vendedor le ofreció que se llevara un bocadillo y un refresco por solo 3 €, lo que suponía un descuento del 40 % respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de la bolsa de patatas?

Incógnitas, datos y pregunta

b = precio bocadillo r = precio refresco p = precio patatas

Planteamiento y operaciones

En realidad le cobró 4 bocadillos, 2 refrescos y 3 bolsas de patatas y pagó un total de 19 €

$$\left.\begin{array}{r} 4b + 2r + 3p = 19 \\ b + p = 4 \\ 0{,}6\,(b + r) = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ \\ 3.^{a}/0{,}6 \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4b + 2r + 3p = 19 \\ p = 4 - b \\ b + r = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4b + 2r + 3p = 19 \\ p = 4 - b \\ r = 5 - b \end{array}\right\}$$

$4b + 2(5 - b) + 3(4 - b) = 19 \Rightarrow 4b + 10 - 2b + 12 - 3b = 19$

$-b = -3 \Rightarrow b = 3,\ p = 1,\ r = 2$

Solución

Precio de un bocadillo = 3 €, refresco = 2 € y patatas = 1 €

3 Un cliente hace un pedido a una fábrica de harinas que ofrece tres tamaños distintos de sacos: pequeño, mediano y grande. Ha pedido 20 sacos pequeños, 14 medianos y 6 grandes, y el peso total de su pedido es 1800 kg. Si el peso de 2 sacos pequeños y de 3 medianos en el mismo que el de 2 sacos grandes y el peso de un saco grande es 4 veces el peso de un saco pequeño. Halla el peso de cada uno de los sacos.

Incógnitas, datos y pregunta

p = peso saco pequeño m = peso saco mediano g = peso saco grande

Planteamiento y operaciones

$$\left.\begin{array}{r} 20p + 14m + 6g = 1\,800 \\ 2p + 3m = 2g \\ g = 4p \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 10p + 7m + 3g = 900 \\ 2p + 3m = 8p \\ g = 4p \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 10p + 7m + 3g = 900 \\ 3m = 6p \\ g = 4p \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 10p + 7m + 3g = 900 \\ m = 2p \\ g = 4p \end{array}\right\}$$

$10p + 14p + 12p = 900 \Rightarrow 36p = 900 \Rightarrow p = 25,\ m = 50,\ g = 100$

Solución

Peso saco pequeño = 25 kg, mediano = 50 kg y grande = 100 kg

PONTE A PRUEBA

4 Se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Razona si la matriz A es simétrica.

b) Calcula A^{-1}

c) Resuelve la ecuación matricial:

$$2X \cdot A - A^2 - 3I = 0$$

a) Una matriz es simétrica si coincide con su traspuesta:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos que $A^t \neq A$, porque $a_{23} \neq a_{32}$

b) $|A| = -1 \neq 0 \Rightarrow$ Existe la matriz inversa A^{-1}

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3,\ A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,\ A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) $2X \cdot A - A^2 - 3I = 0 \Rightarrow 2X \cdot A = A^2 + 3I$

$$X = \frac{1}{2}(A^2 + 3I)A^{-1} \Rightarrow X = \frac{1}{2}(A + 3A^{-1})$$

$$A + 3A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & -6 & -6 \\ -6 & -3 & -3 \\ 6 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -8 & -6 \\ -8 & -1 & -4 \\ 6 & 4 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -8 & -8 & -6 \\ -8 & -1 & -4 \\ 6 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -3 \\ -4 & -1/2 & -2 \\ 3 & 2 & 7/2 \end{pmatrix}$$

5 Se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

a) Calcula el determinante de A

b) ¿Para qué valores de a tiene inversa la matriz A?

a) Determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = -a^3 - a^2$$

b) La matriz A tiene inversa siempre que su determinante sea distinto de cero.

$$|A| = = -a^3 - a^2 \Rightarrow = -a^3 - a^2 = 0 \Rightarrow = a^3 + a^2 = 0$$

$$a^2(a+1) = 0 \Rightarrow a = 0,\ a = -1$$

La matriz A tiene inversa siempre que $a \neq 0$ y $a \neq -1$

6 Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & x \\ 0 & x+2 & 0 \\ 1 & 1 & x+2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & 0 & x \\ 0 & x+2 & 0 \\ 1 & 1 & x+2 \end{vmatrix} = x^3 + 3x^2 + 2x$$

$$x^3 + 3x^2 + 2x = 0$$

$$x(x^2 + 3x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$$

Soluciones o raíces: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = -2$

7 Un autobús transporta durante un viaje 60 viajeros de tres tipos: viajeros que pagan el billete entero que cuesta 1 €; estudiantes que tienen un 25 % de descuento y jubilados con un descuento del 50 % en el precio del billete. La recaudación del autobús en el viaje fue de 48 €. Calcula el número de viajeros de cada clase sabiendo que el número de estudiantes era el doble que el número del resto de pasajeros.

Incógnitas, datos y pregunta

N.º de viajeros que pagan el billete entero: x

N.º de estudiantes: y

N.º de jubilados: z

Número de viajeros totales: 60

¿Cuántos viajeros de cada clase hay?

Planteamiento y operaciones

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 60 \\ x + 0{,}75y + 0{,}5z = 48 \\ y = 2(x + z) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 60 \\ 100x + 75y + 50z = 4\,800 \\ -2x + y - 2z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 100 \cdot 1.^a - 2.^a \Rightarrow \\ 2 \cdot 1.^a + 3.^a \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 60 \\ 25y + 50z = 1\,200 \\ 3y = 120 \end{array}\right\} y = 40 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y + z = 60 \\ 50z = 200 \end{array}\right\} z = 4 \Rightarrow x = 16$$

La solución del sistema es: $x = 16$, $y = 40$, $z = 4$

Solución

Viajan 16 viajeros que pagan el billete completo, 40 estudiantes y 4 jubilados.

8 Antonio ha conseguido 1 372 € trabajando durante las vacaciones. Ese dinero puede gastarlo íntegramente comprando un ordenador portátil, una cámara digital y haciendo un viaje. El precio del ordenador portátil excede en 140 € la suma de los precios de la cámara y del viaje. Teniendo en cuenta que el precio de un segundo acompañante para el viaje es la mitad que el precio inicial, Antonio podría invitar a su hermano al viaje en el caso de que no se comprara la cámara digital y todavía le quedarían 208 €. Calcula los precios del ordenador, de la cámara y del viaje.

Incógnitas, datos y pregunta

Precio del ordenador: x

Precio de la cámara: y

Precio del viaje: z

Planteamiento y operaciones

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1\,372 \\ x = y + z + 140 \\ x + y + y/2 = 1\,164 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1\,372 \\ x - y - z = 140 \\ 2x + 3y = 2\,328 \end{array}\right\} 1.^a + 2.^a \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1\,372 \\ 2x = 1\,512 \\ 2x + 3y = 2\,328 \end{array}\right\} x = 756 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y + z = 1\,372 \\ 3y = 816 \end{array}\right\} y = 272 \Rightarrow z = 344$$

La solución es: $x = 756$, $y = 272$, $z = 344$

Solución

El precio del ordenador es de 756 €, el de la cámara, 272 €, y el del viaje, 344 €

9 Determina la matriz X que verifica la ecuación:

$$A^2X - B = AX$$

donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$A^2X - B = AX$; $A^2X - AX = B$; $(A^2 - A)X = B$; $X = (A^2 - A)^{-1}\, B$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad A^2 - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A^2 - A| = 4,\ (A^2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$X = (A^2 - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ -3/2 & 5/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

10 Dado el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ 2y + az = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

a) Discute el sistema para los distintos valores de a

b) Resuelve el sistema para $a = 3$, $a = 1$

a) Discusión: $C = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |C| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - a$

$a^2 - a = 0 \Rightarrow a = 0,\ a = 1$

Para $a \neq 0$, $a \neq 1 \Rightarrow R(C) = R(A) =$ n.º de incógnitas $= 3$, sistema compatible determinado.

Para $a = 0$, se estudian los rangos de la matriz de los coeficientes C y de la ampliada A

$$R\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2.^a/2 \\ 3.^a - 1.^a \end{array} = R\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 2.^a - 3.^a \end{array} = R\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$R(C) = 2 < R(A) = 3$, sistema incompatible.

Para $a = 1$, se estudian los rangos de la matriz de los coeficientes C y de la ampliada A

$$R\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 3.^a - 1.^a \end{array} = R\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas, sistema compatible indeterminado.

b) Resuelve para $a = 3$, $a = 1$

Para $a = 3$

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y + z = 1 \\ 2y + 3z = 2 \\ x + y + z = 14 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ \\ 1.^a - 3.^a \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 3y + z = 1 \\ 2y + 3z = 2 \\ 2y \qquad = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1/3 \\ z = 2/3 \\ y = 0 \end{array}$$

La solución única es: $x = 1/3$, $y = 0$, $z = 2/3$

Para $a = 1$ se ha visto que el sistema es compatible indeterminado; se pasa de la última matriz de la discusión al sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 2y + z = 2 \end{array}\right\} z = 2 - 2y \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + 2 - 2y = 1 \\ z = 2 - 2y \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = y - 1 \\ z = 2 - 2y \end{array}$$

La solución es: $x = y - 1$, $z = 2 - 2y$

En paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = -1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{array}\right\};\ \lambda \in \mathbb{R}$

11 Un proyecto de jardinería puede llevarse a cabo por dos grupos diferentes de una misma empresa: G_1 y G_2. Se trata de ajardinar tres zonas: A, B y C. En la siguiente tabla se recoge el número de unidades que puede ajardinar cada grupo en cada zona durante una semana:

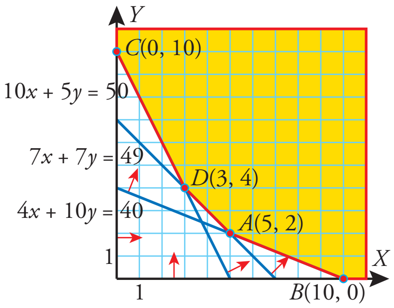
	Zona A	Zona B	Zona C
Grupo G_1	4	10	7
Grupo G_2	10	5	7

Se necesita ajardinar un mínimo de 40 unidades en la zona A, 50 unidades en la zona B y 49 unidades en la zona C; su coste semanal se estima en 3 300 € para el grupo G_1 y en 4 000 € para el grupo G_2. ¿Cuántas semanas deberá trabajar cada grupo para finalizar el proyecto con el mínimo coste? Expresa la función objetivo y las restricciones del problema. Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices.

a) Tabla con los datos del problema.

	Grupo G_1	Grupo G_2	Restricciones	
N.º de semanas	x	y	$x \geq 0;\ y \geq 0$	
A	4	10	$4x + 10y \geq 40$	
B	10	5	$10x + 5y \geq 50$	
C	7	7	$7x + 7y \geq 49$	
Coste	$3\,300x$	$4\,000y$	$f(x, y) = 3\,300x + 4\,000y$	**Minimizar**

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$A(5, 2) \Rightarrow f(5, 2) = 3\,300 \cdot 5 + 4\,000 \cdot 2 = =$ **24 500 € Mínimo**

$B(10, 0) \Rightarrow f(10, 0) = 3\,300 \cdot 10 + 4\,000 \cdot 0 = = 33\,000$ €

$C(0, 10) \Rightarrow f(0, 10) = 3\,300 \cdot 0 + 4\,000 \cdot 10 = = 40\,000$ €

$D(3, 4) \Rightarrow f(3, 4) = 3\,300 \cdot 3 + 4\,000 \cdot 4 = = 25\,900$ €

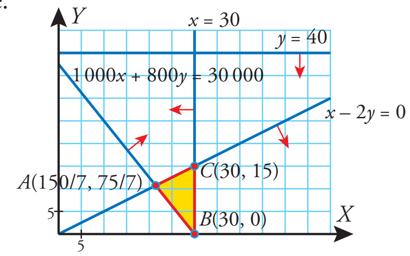
d) La solución óptima es $A(5, 2)$, es decir, **$x = 5$ semanas del grupo G_1 e $y = 2$ semanas del grupo G_2**

12 Una tienda de informática lanza una producción destinada a comercializar dos modelos de ordenadores portátiles: modelo A y modelo B. Cada unidad del modelo A se vende a 1 000 € y cada unidad del B a 800 €. Se trata de una promoción destinada a un número limitado de unidades: solo afecta a 30 ordenadores del modelo A y a 40 del modelo B. El objetivo de la tienda es vender del modelo A al menos el doble de unidades que del modelo B y obtener unos ingresos mínimos de 30 000 €. ¿Cuántas unidades de cada modelo deberá vender para obtener unos ingresos máximos? ¿A cuánto ascienden dichos ingresos?

a) Tabla con los datos del problema.

	Modelo A	Modelo B	Restricciones	
N.º de ordenadores	x	y	$0 \leq x \leq 30;\ 0 \leq y \leq 40$	
Objetivo	x	y	$x \geq 2y$	
Ingresos mínimos	x	y	$1\,000x + 800y \geq 30\,000$	
Ingresos totales	$1\,000x$	$800y$	$f(x, y) = 1\,000x + 800y$	**Maximizar**

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$A(150/7, 75/7) \Rightarrow f(150/7, 75/7) \Rightarrow$ No tiene sentido 150/7 de ordenador.

$B(30, 0) \Rightarrow f(30, 0) = 1\,000 \cdot 30 + 800 \cdot 0 = 3\,000$ €

$C(30, 15) \Rightarrow f(30, 15) = 1\,000 \cdot 30 + 800 \cdot 15 =$ **42 000 € Máximo**

d) La solución óptima es $C(30, 15)$, es decir, **$x = 30$ ordenadores modelo A e $y = 15$ ordenadores modelo tipo B. Los ingresos ascienden a 42 000 €**

PONTE A PRUEBA

PROBLEMAS PROPUESTOS

1 Se están preparando dosis con dos tipos de complementos para unos astronautas. Cada gramo del complemento A contiene 2 unidades de riboflavina, 3 de hierro y 2 de carbohidratos. Cada gramo del complemento B contiene 2 unidades de riboflavina, 1 de hierro y 4 de carbohidratos. ¿Cuántos gramos de cada complemento son necesarios para producir exactamente una dosis con 12 unidades de riboflavina, 16 de hierro y 14 de carbohidratos?

2 En un domicilio se pagaron 3 facturas (agua, luz y teléfono) por un total de 140 €. De agua se pagó la tercera parte que de luz, y la factura del teléfono fue el 45 % del total.

a) Plantea el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) ¿Cuánto se pagó en cada factura?

3 Considera la ecuación matricial:

$$X + X \cdot A + B^t = 2C$$

donde las matrices A, B y C son:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y donde B^t denota la matriz traspuesta de B.

a) Despeja la matriz X en la ecuación matricial. ¿De qué orden es?

b) Calcula la matriz $2C - B^t$ y la inversa de la matriz $I + A$, siendo I la matriz identidad de orden 3

c) Resuelve la ecuación matricial obteniendo la matriz X

4 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} -x \\ 2 \\ z \end{pmatrix}$$

a) Determina la matriz inversa de A

b) Halla los valores de x, y, z para los que $A \cdot X = Y$

5 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} y \\ ay \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 6 - ay \\ 1 - a \end{pmatrix}$$

a) Consideramos x e y dos variables y a, un parámetro. Obtén el sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas que resulta de plantear $AB - C = D$

b) Estudia el sistema para los distintos valores de a

c) Encuentra una solución para $a = 2$

6 Estudia para qué valores de m el sistema, con incógnitas representadas por x e y, dado por:

$$\begin{cases} mx - m - 2 = 0 \\ mx + (m-1)y - 2m - 1 = 0 \end{cases}$$

tiene solución y cuándo es única. Encuentra dos soluciones para $m = 1$

7 Considera el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} ax + y + 3z &= 0 \\ x + ay + 2z &= 1 \\ x + ay + 3z &= -1 \end{aligned}\right\}$$

a) Discute sus posibles soluciones según los valores del parámetro a

b) Resuelve el sistema para $a = 0$

8 Un agricultor desea plantar 750 cerezos, 700 perales y 650 manzanos. En el vivero Agro ofrecen un lote de 15 cerezos, 30 perales y 10 manzanos por 700 €, y en el vivero Ceres el lote de 15 cerezos, 10 perales y 20 manzanos cuesta 650 €

a) Plantea y resuelve un programa lineal para averiguar el número de lotes que ha de comprar en cada vivero para que pueda plantar los árboles que desea y para que el coste total de adquisición sea mínimo.

b) ¿Utiliza el agricultor todos los árboles que ha adquirido? En caso negativo, di cuántos no ha plantado y de qué tipo son.

9 Se desea invertir una cantidad de dinero menor o igual que 125 000 €, distribuido entre acciones del tipo A y del tipo B. Las acciones del tipo A garantizan una ganancia del 10 % anual, y es obligatorio invertir en ellas un mínimo de 30 000 € y un máximo de 81 000 €. Las acciones del tipo B garantizan una ganancia del 5 % anual, y es obligatorio invertir en ellas un mínimo de 25 000 €. La cantidad invertida en acciones del tipo B no puede superar el triple de la cantidad invertida en acciones del tipo A. ¿Cuál debe ser la distribución de la inversión para maximizar la ganancia anual? Determina dicha ganancia máxima.

10 Un nutricionista informa a un individuo que, en cualquier tratamiento que siga, no debe ingerir diariamente más de 240 mg de hierro ni más de 200 mg de vitamina B. Para ello están disponibles píldoras de dos marcas, P y Q. Cada píldora de la marca P contiene 40 mg de hierro y 10 mg de vitamina B, y cuesta 6 céntimos de euro; cada píldora de la marca Q contiene 10 mg de hierro y 20 mg de vitamina B, y cuesta 8 céntimos de euro.

Entre los distintos tratamientos, ¿cuál sería el de máximo coste diario?