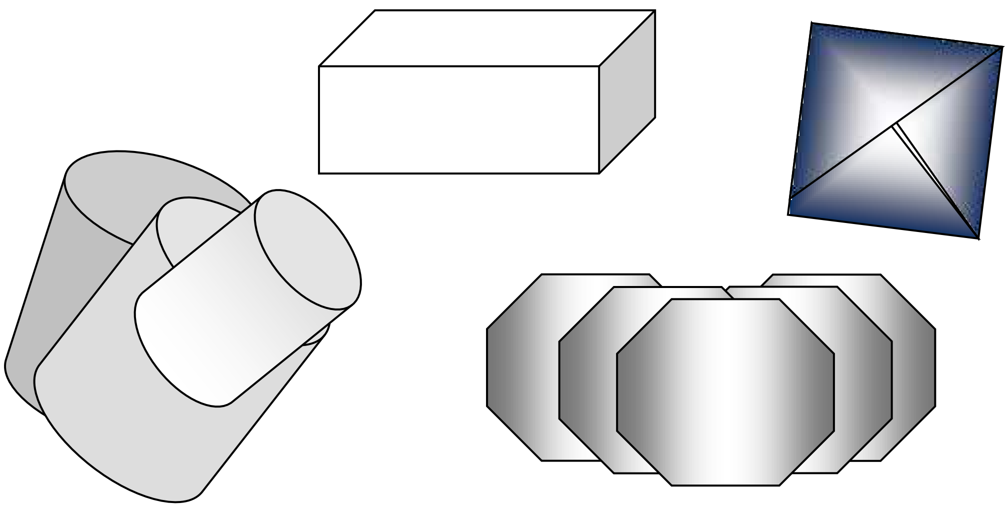
GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA

OBJETIVO:

Los estudiantes desarrollarán las habilidades necesarias para aplicar los conocimientos geométricos y trigonométricos a través de situaciones problemáticas, para comprender el mundo físico que lo rodea y resolver los problemas relacionados y que como técnicos enfrentan.



MAPA CONCEPTUAL DEL ESTUDIO DE LA GEOMETRÍA

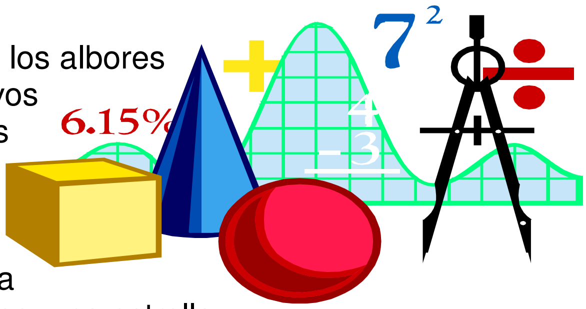
ESTUDIO DE LA GEOMETRÍA

- Geometría
  - Historia de la Geometría
  - Conceptos Básicos
  - Proposiciones verdaderas
- Nomenclatura y notación de rectas
- Definición, clasificación y notación de ángulos
  - Demostración de Teoremas
    - Demostración de teoremas relacionados con situaciones reales
- Triángulos
  - Definición, notación y clasificación de triángulos
  - Rectas y puntos notables de un triángulo
  - Demostración de Teoremas
  - Teorema de Pitágoras
    - Teorema de Pitágoras como medio de solución de problemas
- Polígonos
  - Definición, notación y clasificación de polígonos
  - Diagonales y ángulos internos de un polígono
- Circunferencia
  - Definición notación y elementos de una circunferencia
  - Demostración de Teoremas

Lee detenidamente la siguiente lectura y descubrirás como es que el estudio de la geometría ha ido evolucionando atravez de los siglos, realiza una línea del tiempo, ubicando los hechos que definitivamente han hecho que esta parte de las matemáticas haya cambiado. Al final entrega a tu asesor este trabajo.

HISTORIA DE LA GEOMETRÍA.

ANTECEDENTES HISTÓRICOS DE LA GEOMETRÍA:



La historia de la geometría se remota a los albores de la humanidad. Los hombres primitivos poseían de manera intuitiva los conceptos de recta, punto y plano. Además, la naturaleza les ofrecía múltiples ejemplos de representaciones geométricas: el Sol y la Luna eran representados por medio de círculos; una estrella de mar para polígono estrellado, y un caracol cualquiera por un espiral.
Posteriormente, la necesidad que surgió de conocer y modificar el mundo que les rodeaba los obligó a profundizar y relacionar sus ideas, surgiendo el personaje de ***Euclides*** (matemático griego) que organizó sus conocimientos de Geometría y sentó las bases de lo que hoy en día se conoce como ***Geometría Clásica.*** Su obra fue tan exitosa que desde hace 2000 años se sigue enseñando, desde entonces se le ha llamado ***Geometría Euclidiana.***

Sumerios y babilonios: La rueda inventada por los sumerios 3500 años A.C., marca en la historia el inicio de la civilización; inventaron la escritura, crearon la aritmética y las construcciones de sus ciudades revelan la aceptación de las figuras geométricas.
En la antigua Mesopotamia florece la cultura de los Babilonios, herederos de los sumerios: adaptaron la rueda a sus carros de guerra, descubriendo las propiedades de la circunferencia, deduciendo el valor de "3" como relación entre la circunferencia y el diámetro de un círculo.
De acuerdo a sus estudios astronómicos, conocieron que el año tiene aproximadamente 360 días, motivo por el cual dividieron la circunferencia en 360 partes iguales, obteniéndose así el grado sexagésima.
También tenían el conocimiento de como trazar su hexágono regular inscrito en el círculo; conocían una fórmula para hallar el área del trapecio rectángulo.

EGIPTO: Los egipcios obligados por las constantes avenidas (*CRECIDAS*) del Río Nilo que año con año inundaba sus tierras de cultivo, por lo cual tenían que rehacer las divisiones de tierra para calcular los impuestos para cada dueño de la superficie cultivada; la aplicación de sus conocimientos geométricos se hicieron sobre la medida de la tierra de lo cual se deduce el significado de *GEOMETRÍA* (medidas de la tierra) cuyas raíces griegas son: *GEO*-Tierra y *METRE*-Medida.
También aplicaron sus conocimientos de geometría en la construcción de pirámides como la de *KEOPS, KEFREN y MEKERINOS*, que son cuadrangulares y sus caras laterales son triangulares equiláteros, la de *KEOPS*

es una de las siete maravillas del mundo antiguo donde se ha comprobado que además de la precisión en sus dimensiones era perfectamente orientada.
Los conocimientos de los egipcios están contenidos en cinco papiros, siendo el de mayor interés el de *RHIND* donde se establecen las reglas para calcular el área del triángulo isósceles, área del círculo; determinaron el valor de 3.1604 como relación entre la circunferencia y diámetro de un círculo, valor mucho más aproximado que el de los Babilonios para π.
Los egipcios empleaban el cordel (*TENEDORES DE CUERDA*) para sus operaciones de construcción y diseño, siendo regla, compás y escuadra al mismo tiempo.

GRIEGOS: Los conocimientos egipcios sobre la geometría eran netamente empíricos, ya que no se cimentaban en una sistematización lógicas deducida a partir de axiomas y postulados.
En Grecia comienza la geometría como ciencia deductiva, con los matemáticos*, TALES DE MILETO, HERODOTO, PITAGORAS DE SAMOS y EUCLIDES DE ALEJANDRIA*; quienes fueron a Egipto a iniciarse en los conocimientos de la geometría.

TALES DE MILETO: (*SIGLO VII A.C.*) fue uno de los siete sabios y fundador de la escuela "*JONICA*", se inicia en la filosofía y las ciencias, especialmente en la geometría.
Resolvió algunas dudas como la altura de las pirámides, conociendo la sombra que proyectan; la igualdad de los ángulos de la base en el triángulo isósceles; el valor del ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto; demostró algunos teoremas relativos a las proporcionalidades de segmento determinados en dos rectas cortadas por un sistema de paralelos.

TEOREMAS DE TALES DE MILETO:

1. " Los ángulos en la base de triángulo isósceles son iguales."
2. " Todo diámetro biseca a la circunferencia."
3. " Los ángulos inscritos en una semicircunferencia son iguales."

PITÁGORAS DE SAMOS*:* *(SIGLO VI A.C.)* fue discípulo de Tales de Mileto, fundó en *CROTONA, ITALIA* la escuela pitagórica, atribuyéndosele el Teorema que lleva su nombre y que se enuncia:
" El cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de sus cuadrados construidos sobre los catetos ".
Otro de sus teoremas expresa: " La suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera es igual a dos rectos ".
También demostró la construcción del pentágono y poliedros regulares como:
tetraedro, hexaedro ,octaedro, dodecaedro e icosaedro.

EUCLIDES DE ALEJANDRIA: (*SIGLO IV A.C.*) uno de los más distinguidos maestros de la universidad de Alejandría y quién por encargo de *PTOLOMEO* Rey de Egipto, reunió y ordenó los teoremas y demás proporciones geométricas en su obra llamada " *ELEMENTOS* " que ha sobrevivido hasta el presente, por lo que se le considera el " padre de la geometría ".

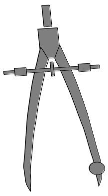
¡PREPARA TU AGUDEZA PARA QUE CON CALIDAD ADQUIERAS HABILIDAD!

CONCEPTOS BASICOS.

PUNTO, RECTA, PLANO Y ESPACIO.

¿Cómo podrían describirse un punto, una recta, un plano y el espacio? Estos cuatro conceptos son muy importantes en el estudio de la geometría. Aquí no se definirán el punto, la recta ni el plano, sino que se observarán objetos que los sugieren.

PUNTO
ubicación, sin longitud, anchura ni altura

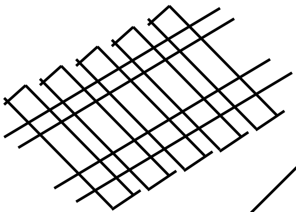


Un punto como parte un objeto físico.

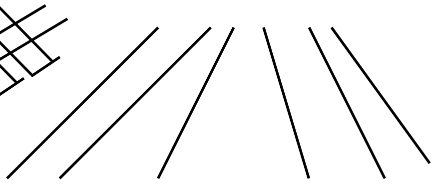
Un punto como la marca más pequeña que se puede dibujar

Un punto es una idea o abstracción. Un punto no puede definirse con términos más sencillos es un término indefinido.

RECTA
Es una sucesión de puntos que tienen una misma dirección.

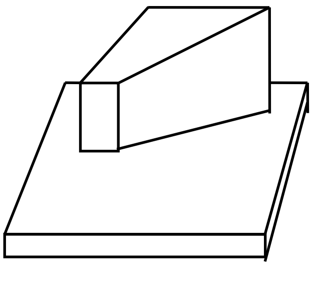


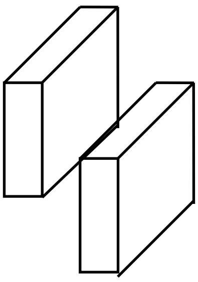
Una recta como parte de una situación física



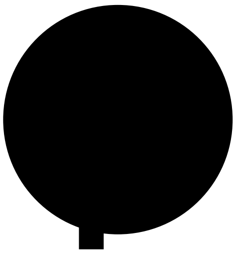
Una recta como la línea más delgada que se pueda dibujar

Una recta es una idea o abstracción. Como no puede definirse con términos más sencillos por si sola esta definida.





PLANO
ilimitado, continuo en todas direcciones, llano, sin grosor.



Hay puntos sobre dentro y fuera del globo.

Aunque el globo se destruya el espacio sigue ocupado por los mismos puntos

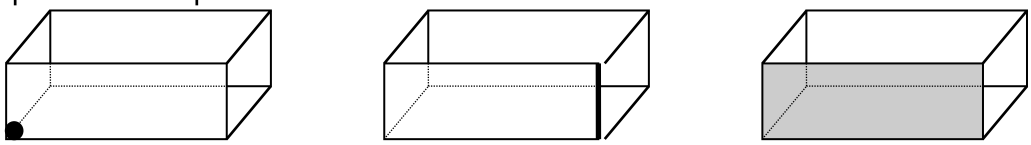
ESPACIO
ilimitado, sin longitud, anchura ni altura.

El espacio es una idea o abstracción El espacio es el conjunto de todos los puntos

Pon a prueba tu comprensión de de los conceptos anteriores.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

1. Indica si la porción en color de cada figura sugiere un punto, una recta, un plano o el espacio.



2. Menciona cinco objetos cuyas formas sugieran un plano en alguna de sus partes. Identifica la parte específica de cada objeto.

3. Menciona cinco objetos cuyas formas sugieran un plano en alguna de sus partes.

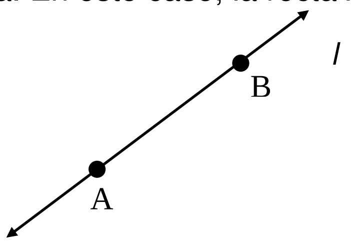
4. Menciona tres objetos o situaciones físicas que ilustren la idea de recta o de una parte de ella

5. Menciona tres objetos, como el globo que sugieran la idea de espacio

RELACIONES ENTRE PUNTOS, RECTAS Y PLANOS:

Para representar puntos, se dibujan pequeñas marcas de papel. Las letras mayúsculas al lado de cada punto son sus nombres; así, se llaman punto A, punto B y punto C.

Una recta puede considerarse como conjunto de puntos. Al dar nombre a un par de ellos, se puede llamar a la recta en función de esos dos puntos. Por ejemplo, los puntos A y B están en la recta, por ello se llama recta AB; se supone que por puntos A y B sólo pasa una recta. Otra manera de decir esto es: dos puntos determinan una recta. En ocasiones, se nombra una recta con una letra minúscula. En este caso, la recta AB también podría llamarse recta *l.*

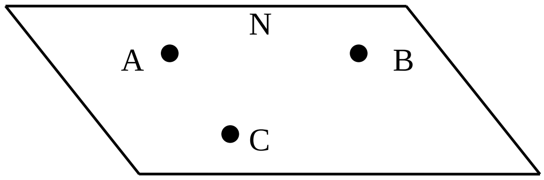


recta AB
o
recta *l*

Se escribe: $\overleftrightarrow{AB}$

Un plano también puede concebirse como un conjunto de puntos. Se designa con una sola letra o dando nombre a tres de sus puntos que no estén en una recta. Así se le llama *plano* N o *plano* ABC.

Los puntos A, B y C están en el plano N.

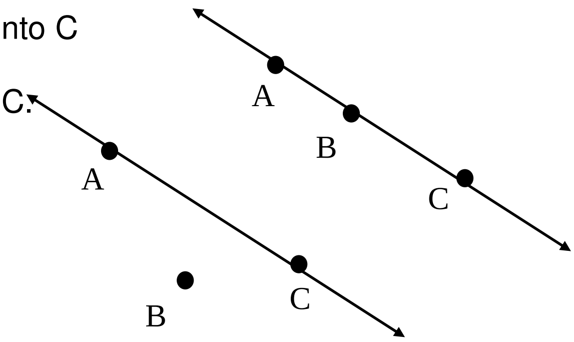


Se supone que sólo un plano contiene estos tres puntos. Se dice entonces que tres puntos que no están en una misma recta determinan al plano.

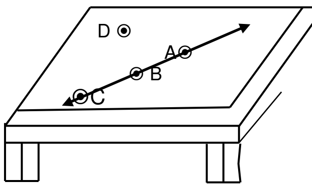
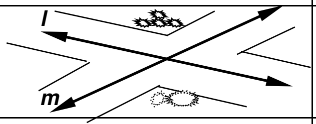
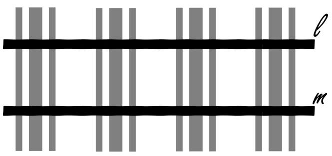
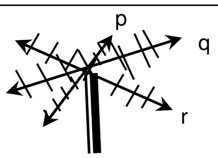
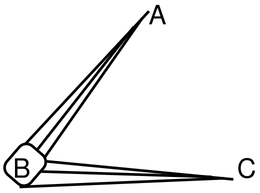
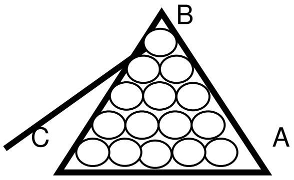
Al considerar la recta *l* como un conjunto de puntos, puede decirse que el punto A está en la recta *l* **,** y que el punto A *es un elemento* de la recta l para describir la misma situación. También puede decirse que *la recta l contiene al punto A.*
Si A, B y C son puntos de la recta *l* como se muestra en la figura siguiente, se dice que el punto B está *entre* los puntos A y C.
Si A, B y C no están en la misma recta, no se usa la palabra *entre* para describir su relación.

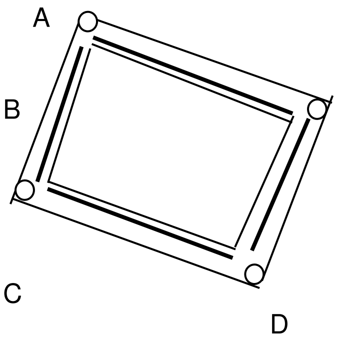
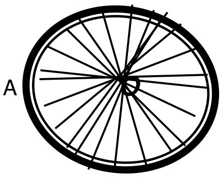
El punto B está entre el punto A y el punto C

El punto B no está entre el punto A y el C.



Alguna de las relaciones básicas de los puntos y las rectas en un plano se describen a continuación con modelos, símbolos y definiciones.

Modelo físico, figura	***Descripción Símbolo***	***Definición***
	A, B y C son *colineales*. A, d y c son *no colineales.* A, B, C y D están en el mismo plano, son *coplanares*. Los puntos que como conjunto no están en el mismo plano, son *no coplanares.*	Los *puntos colineales* son puntos que están en la misma recta. Los *puntos coplanares* son puntos que se encuentran en el mismo plano.
	Las rectas *l* y *m* se *intersecan* en el punto A.	Las *rectas intersecantes,* son dos rectas con un punto en común.
	Las rectas *l* y *m* no tienen un punto en común. *l es paralela a m.*	Las *rectas paralelas* son rectas que están en el mismo plano y no se intersecan.
	Las rectas *p*, *q* y *r* tienen exactamente un punto en común. Son *rectas concurrentes coplanares.*	Las *rectas concurrentes* son tres o más rectas coplanares que tienen un punto en común.
	B es el vértice. BA y BC son los lados. El interior del ángulo ABC es la intersección de los puntos del lado A de BC con los del lado C de AB.	Un ángulo es la unión de dos rayos no colineales que tienen el mismo extremo.
	A, B, y C son vértices, AB, BC, y AC son los lados.	Un triángulo es la unión de tres segmentos determinados por tres puntos no colineales.

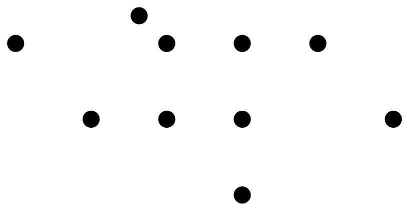
	A, B, C, y D son vértices. AB, BC, CD y AD son lados.	Un *cuadrilátero* es la unión de cuatro segmentos determinados por cuatro puntos, entre los cuales no hay tres que sean colineales. Los segmentos se intersectan sólo en sus extremos.
	Los puntos A y B están en el círculo. El punto O es el centro del círculo. AB es el diámetro del círculo OB es un radio del círculo.	Un *círculo* es el conjunto de todos los puntos de un plano que están a una distancia fija de un punto dado del plano.

¡ Proyecta tu conocimiento !

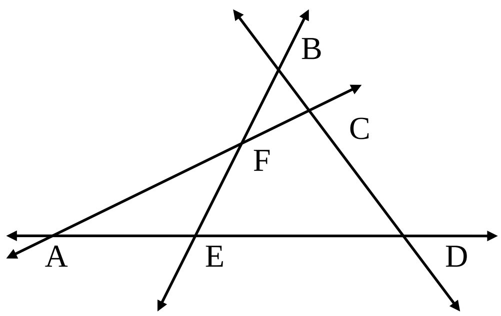
ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

1. Dibuja tres puntos que sean colineales.

2. Utiliza el grupo de puntos que se muestra a continuación y, con una regla, dibuja una recta a través de grupos de tres o más puntos colineales.



Los ejercicios 3, 4 y 5 se refieren a la figura de la derecha



3. Localiza conjuntos de tres puntos colineales

4. Nombra conjunto de tres puntos no colineales

5. Nombra cuatro puntos entre los cuales no hayan tres que sean colineales

Los ejercicios 6, 7 y 8 se refieren a la figura de la derecha.
(Si las rectas parecen paralelas, puede suponerse que lo son).

6. Menciona tres rectas que intersectan a la recta s.

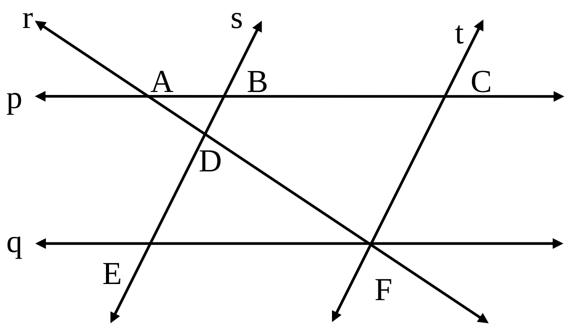
____

7. Encuentra tres rectas concurrentes

____

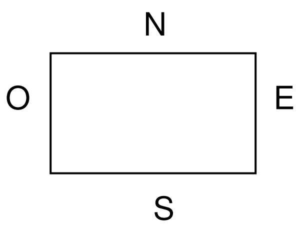
8. Menciona todos los pares de rectas paralelas

____



9. Dibuja cuatro rectas concurrentes.

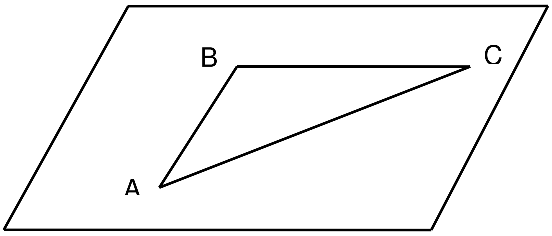
10. Si tenemos una parcela de forma rectangular, sus linderos son paralelos y perpendiculares:



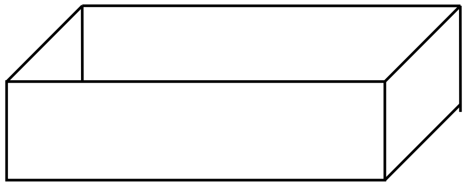
a) Los linderos sur y norte son______________________
b) Norte y poniente son:___________________________
c) Cuales son paralelos:___________________________

CONOCE ALGUNAS FIGURAS GEOMÈTRICAS BÁSICAS:

Ya que las rectas, los planos y los espacios se consideran conjuntos de puntos, resulta útil definir las figuras geométricas como conjuntos y puntos. Una figura plana es una figura con todos los puntos en un plano, pero no todos en una recta. Una figura espacial no tiene todos sus puntos en un solo plano.



Un triángulo es una figura plana.



Una caja es una figura espacial.

¡Continúa construyendo tu aprendizaje!

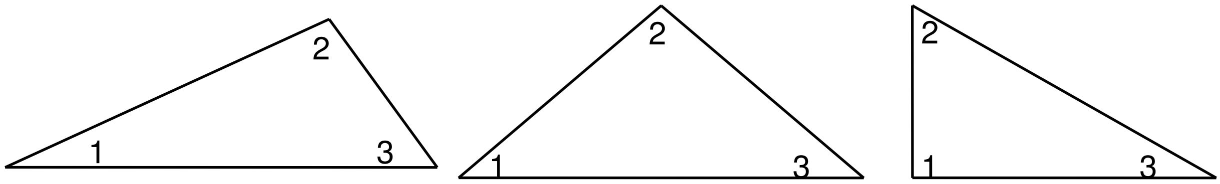
PROPOSICIONES VERDADERAS

EL PROCESO DEL RAZONAMIENTO INDUCTIVO.

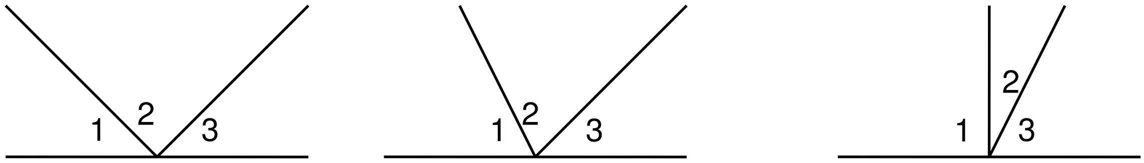
El razonamiento es el proceso mediante el cual se sacan conclusiones a partir de la información. En ocasiones, la gente saca conclusiones basadas en sus propias observaciones. Al observar varias veces que una acción produce el mismo resultado, se concluye, en general, que esa acción tendrá siempre el mismo resultado. A esta clase de razonamiento se le llama razonamiento inductivo. Y a la conclusión que se saca del *razonamiento inductivo* se le llama *generalización.*

Los tres ejemplos siguientes muestran cómo puede aplicarse el razonamiento inductivo en geometría

Ejemplo: Supóngase que alguien cortó, de una hoja de papel, tres triángulos diferentes



Las esquinas de cada triángulo se cortaron y colocaron juntas tal como se muestran a continuación.



¿Qué se observa acerca de la suma de las medidas de los ángulos? ¿Es eso cierto para todos los triángulos?

Completa esta generalización:

La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es la suma de los tres ...

Para comprender mejor como se pueden construir conocimientos nuevos, a partir de conocimientos ya establecidos, te invitamos a que conozcas los elementos del razonamiento deductivo en la siguiente lectura.

DESARROLLO DE LA GEOMETRÍA POR MEDIO DEL RAZONAMIENTO DEDUCTIVO:

Hasta ahora se han buscado objetos de nuestro mundo que sugieren conceptos geométricos. Se han elegido los conceptos básicos punto, recta y plano y se les ha llamado **términos indefinidos.**
A partir de estos términos, se obtuvieron definiciones para describir otras figuras geométricas, como triángulos, segmentos y ángulos. También se definieron relaciones, como la congruencia, el paralelismo y la perpendicularidad.
Después, se empleó el razonamiento inductivo para descubrir algunas generalizaciones sobre estas figuras. En este proceso de descubrimientos se buscaron contraejemplos que invalidaran las generalizaciones.
Ahora es el momento de dar el siguiente paso. Se requiere un método para comprobar que las generalizaciones descubiertas son verdaderas para todos los casos. El método que se empleará se llama *razonamiento deductivo*.

En las secciones siguientes se estudiará este método.
El proceso del razonamiento deductivo requiere la aceptación de unas cuantas generalizaciones básicas sin comprobarlas. Estas generalizaciones se llaman ***postulados***.

Todas las demás generalizaciones que pueden probarse como verdaderas con la ayuda de definiciones, postulados y la lógica del razonamiento deductivo, se llaman ***teoremas***.
Finalmente, se usan los teoremas ya probados como ayuda para la resolución de problemas de la vida cotidiana.

En las secciones anteriores de este capítulo se usó el razonamiento inductivo para descubrir generalizaciones. Ahora se explorara el razonamiento lógico y el deductivo, y su función en la demostración de teoremas. El proceso del razonamiento deductivo consta de tres pasos.

En el siguiente teorema se mencionan estos tres pasos:

Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los dos ángulos opuestos son congruentes.

Razonamiento deductivo

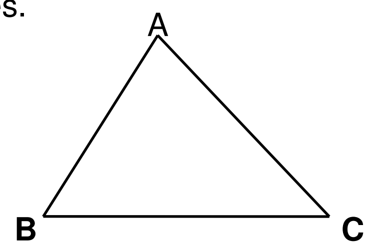
Paso 1. Empieza con las condiciones dadas (la hipótesis).

Paso 2. Úsese la lógica, definiciones, postulados o teoremas previamente probados para justificar una serie de proposiciones o pasos que den el resultado deseado.

Paso 3. Afírmese el resultado (la conclusión).

Ejemplo: Dado $\triangle$ ABC es un triangulo con el lado AB = AC.

Las proposiciones que arroja esta conclusión es que por lo tanto, el ángulo B y el ángulo C son congruentes.



Después de usar la lógica para obtener las proposiciones correctas del paso 2 del ejemplo probado en las líneas anteriores, se habrá demostrado este teorema.

" Si dos lados de un triángulo son congruentes (hipótesis ***) entonces los dos ángulos opuestos son congruentes "*** (conclusión).

Ahora te corresponde aplicar estos razonamientos

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. Según el diccionario, un plano es una superficie llana o lisa.

Escribe tres palabras de la definición que también deberá entenderse y para las cuales forma una definición.

2. Define uno de los tres términos del ejercicio 1. Elabora una lista de las palabras de la definición que también puedan definirse.

3. ¿Debería considerarse el término plano entre los términos indefinidos? Explica la respuesta.

4. Da una definición de espacio que incluya los términos indefinidos conjunto y punto.

5. Escribe una proposición que sea un teorema de geometría.

Uno de los objetivos que los recursos de geometría es proporcionar cierta práctica en el razonamiento lógico a situaciones de la vida cotidiana. En la vida diaria, algunas veces se sacan conclusiones con poca o ninguna base.

Acéptese esta historia como una representación adecuada de algo que realmente ocurrió.

→ ***El pequeño Luis Medina se sentó en un rincón***
→ ***a comer su pastel de Navidad.***
→ ***Metió su dedo entre la masa, sacó una pasa y dijo: ¡Qué buen chico soy!***

6.¿Cuáles de estas conclusiones pueden aceptarse (quizá de manera inconsciente) al leer la historia?

a). Luis comía un pastel de pasas.

b). Luis comprendió que era un buen chico

c). Luis era un niño.

d). Era el día de Navidad

e). Luis comprendió que era un chico porque estaba castigado.

Ahora, lee de nuevo la historia. ¿Cuáles de estas conclusiones son acertadas basándose únicamente en la información que proporciona la historia?

Interesante ¿verdad ? Continuamos ...

POSTULADOS DE GEOMETRIA

Los postulados de geometría son muy importantes en el proceso del razonamiento deductivo. Pueden compararse con las reglas de un juego. En el juego de la geometría se aceptan los postulados como verdad y se usan como ayuda en la demostración de teoremas.

Tema: Razonamiento deductivo

AQUÍ HABRA QUE INVESTIGAR, QUE PASO CON EL PUNTO NÚMERO 1.(Baldor)

2. AXIOMA. Es una proposición tan sencilla y evidente que se admite sin demostración.

Ejemplo. El todo es mayor que cualquiera de sus partes.

3. POSTULADO. Es una proposición no tan evidente como un axioma pero que también se admite sin demostración.

Ejemplo. Hay infinitos puntos.

4. TEOREMA. Es una proposición que puede ser demostrada. La demostración consta de un conjunto de razonamientos que conducen a la evidencia de la verdad de la proposición.

En el enunciado de todo teorema se distinguen dos partes: la hipótesis que es lo que se supone, y la tesis que es lo que se quiere demostrar.

Ejemplo. La suma de los ángulos interiores de un triángulo vale dos rectos.

5.HIPOTESIS. *A, B* y C son los ángulos interiores de un triángulo.

TESIS. La suma de los ángulos *A, B* Y *C* vale dos rectos.

En la demostración se utilizan los conocimientos adquiridos hasta aquel momento, enlazados de una manera lógica.

6. COROLARIO. Es una proposición que se deduce de un teorema como consecuencia del mismo.

Ejemplo. Del teorema: La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos, se deduce el siguiente corolario: La suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo vale un recto.

Después de haber realizado la lectura, qué te parece si practicas tu razonamiento.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

En los ejercicios del 1 al 8, completa los enunciados con las palabras punto, recta, plano y espacio. Dí qué postulado sugiere la proposición completa.

1. Si los dos puntos están en un plano, entonces la ______________. que los contiene está en el plano.
2. Un ________________. contiene por lo menos tres puntos no colineales.
3. Dos puntos están contenidos en una, y sólo una,__________________.
4. Si dos planos se intersecan, se intersecan exactamente en una ___________
5. Hay exactamente una ________________. que pasa por un punto dado y es perpendicular a un plano dado.
6. En un plano separa un ___________________. en dos semiespacios
7. En un plano, hay exactamente una ___________________. que pasa por un punto dado y es perpendicular a una recta dada
8. Una recta separa un _______________. en dos semiplanos.

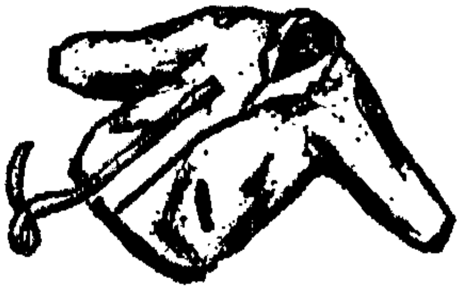
Con una cuerda y unos clips, construye un modelo para estos postulados. ¿Cuál es el número mínimo necesario de trozos de cuerda y clips para satisfacer todos los requisitos de los postulados?

1. Hay por lo menos un trozo de cuerda
2. Hay exactamente tres clips en cada trozo de cuerda
3. No todos los clips están en el mismo trozo de cuerda
4. Hay exactamente una cuerda a través de dos clips cualesquiera
5. Dos cuerdas cualesquiera tienen por lo menos un clip en común.

Identifica si son axiomas, teoremas, postulados, corolarios las expresiones siguientes:

1. El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de cada uno de los catetos. ______________________________
2. La distancia mas cercana entre dos puntos es la recta que los une.________________________.
3. La suma de dos ángulos que suman noventa grados son complementarios. _____________________.

RECTA

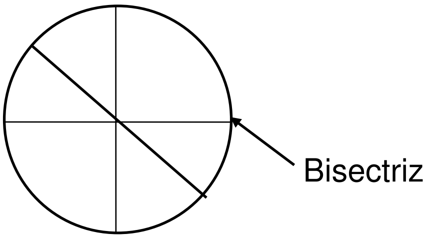


Para el estudio de la geometría es necesario que te familiarices con ciertos términos frecuentemente empleados en los procesos de razonamientos y solución de problemas. A continuación se te muestran algunos de los más empleados.

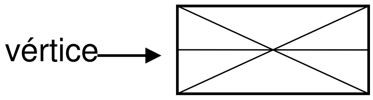
3.2 NOMENCLATURA Y NOTACIÓN DE RECTAS.

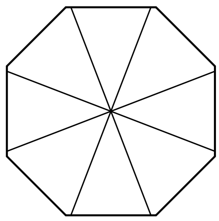
***BISECTRIZ*:** Es un segmento de recta que divide en dos partes iguales a alguna cosa.

Existen figuras que tienen dos o más bisectrices, es decir, existen figuras que pueden partirse de varias formas en dos partes iguales o simétricas. Un ángulo sólo tiene una bisectriz siendo ésta la recta que pasa por su vértice y además lo parte en otros dos ángulos de la misma medida o abertura.

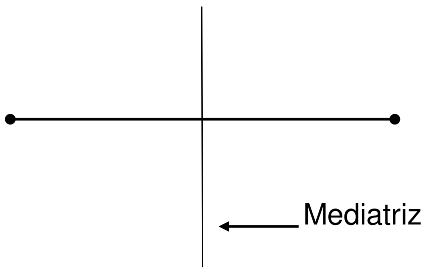


El diámetro es una bisectriz del círculo. Existen muchas bisectrices en el círculo.





***MEDIATRIZ*.-** Es la recta perpendicular a un segmento que pasa por el punto medio.



PERPENDICULARIDAD Y PARALELISMO

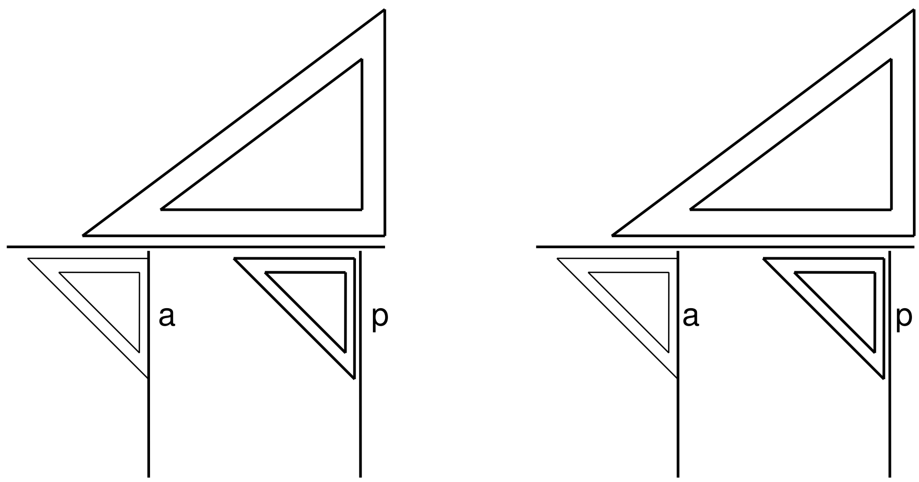
Cuando dibujamos dos líneas rectas sobre un plano, podemos observar que esas líneas quedan de la siguiente manera:

1) Se cruzan en algún punto.

2) Dos líneas pueden no cruzarse aunque se prolonguen infinitamente.

En el primer caso observemos que al cruzarse forman cuatro ángulos. Si estos ángulos son de diferente medida entonces las rectas son ***oblicuas***, pero si los cuatro ángulos formados por las rectas son iguales entonces se llaman ***rectas perpendiculares***. Las rectas perpendiculares tienen la misma característica de formar cuatro ángulos rectos. ***Un ángulo recto mide 90 grados.***

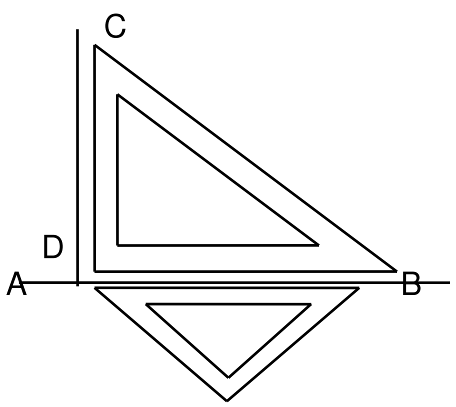
En el segundo caso, es decir, cuando las líneas nunca se cruzan por más que se prolonguen, reciben el nombre de ***rectas paralelas*** y el ángulo formado entre ellas es de 0 grados, porque si desplazamos una sobre la otra, lo que se observa es que se enciman y no existe abertura entre ambas; y la figura que forman es un ángulo de 0 grados. Como ejemplo de líneas paralelas podemos mencionar a las vías de ferrocarril y los cruceros de las calles en una ciudad pueden representar las líneas que se cortan en algún punto.

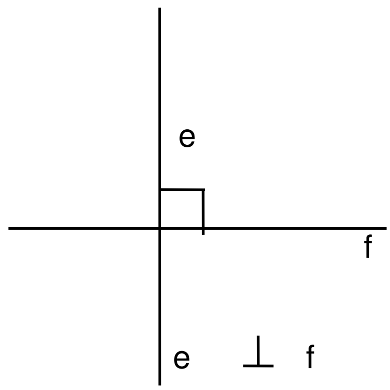


Las rectas a y p son paralelas. En ambos casos se simboliza de la forma siguiente:

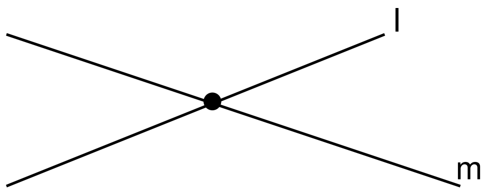
$$a \parallel p .$$

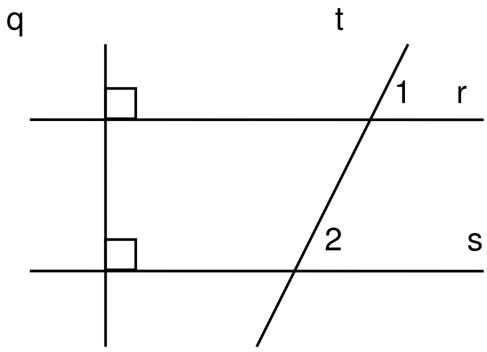
Los segmentos de recta AB y CD son perpendiculares y se expresan como:
AB $\perp$ CD porque forman un ángulo recto.





Las rectas m y l son oblicuas





De las figuras anteriores se observa que las rectas :

q $\perp$ r; q y r Son perpendiculares
q $\perp$ s; q y s Son perpendiculares
r | | s; r y s Son paralelas
s y t; Son oblicuas
r y t; Son oblicuas
Los ángulos 1 y 2 son iguales, etc.

PROBLEMAS GRAFICOS: 1) *Trazar una perpendicular en el punto medio de un segmento.*

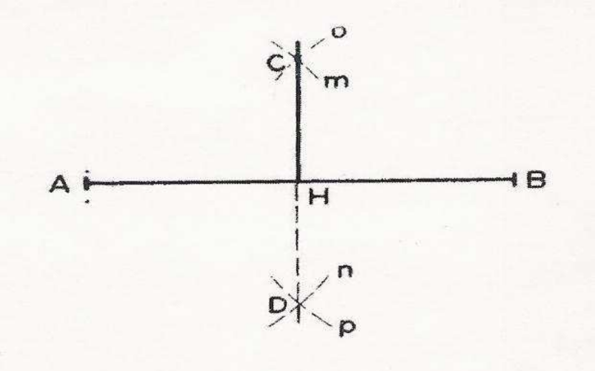


Fig 41

Sea el segmento AB (Fig. 41). Con una abertura de compás mayor de la mitad del segmento y haciendo centro en *A* y en *B*, sucesivamente, se trazan los arcos o, *m*, *n* y *p*, que se cortan en C y D, respectivamente. Uniendo C con D, tenemos la perpendicular en el punto medio *H*, del segmento *AB*.

2) *Trazar uno, perpendicular en un punto cualquiera de una recta,*
Sea *P* un punto cualquiera de la recta AB (figura 42). Haciendo centro en *P* y con una abertura cualquiera del compás, se trazan los arcos *m* y *n;* haciendo centro en los puntos en que estos arcos cortan a la recta se trazan los arcos *q* y *r*, que se cortan en el punto *S*. Uniendo *S* con *P*, se tiene *PS* que es la perpendicular buscada

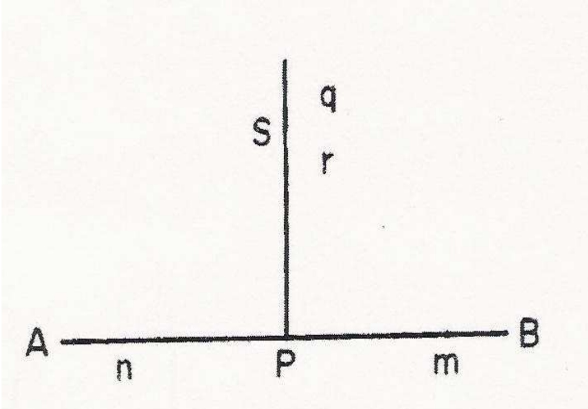


Fig. 42

3) *Trazar una perpendicular en un extremo de un segmento sin prolongarlo* (Fjg 43)

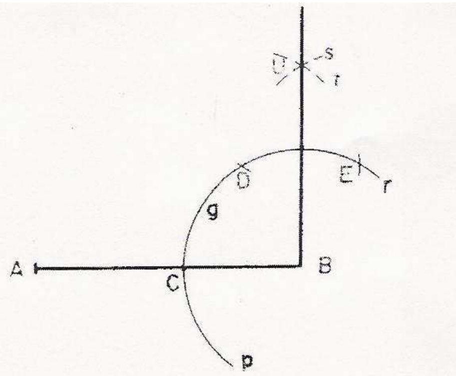


Fig. 43

Sea AB el segmento. Para trazar la perpendicular en un extremo *B*, se hace centro en *B* y con una abertura cualquiera de compás, se traza el arco *p* g *r* que corta a AB en C. Haciendo centro en C y con la misma abertura, se señala el punto D; haciendo centro en D se señala el punto *E*. Haciendo centro en *D* y en *E*, sucesivamente se trazan los arcos *s* y *t*, que se cortan en *U*. Uniendo *U* con *B*, tendremos la perpendicular buscada.

4) *Por un punto P exterior a una recta AB trazar a ésta una paralela. (fig. 44 A).*

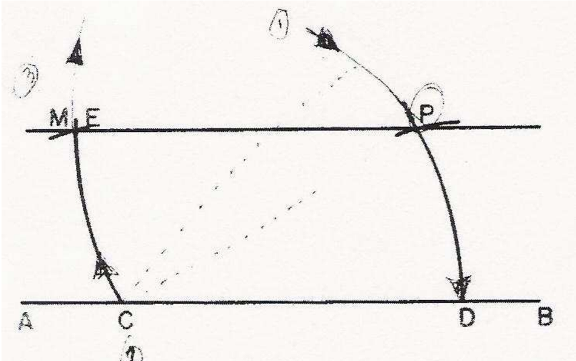


Fig. 44-A

Por un punto cualquiera *C* de la recta y con radio <u>*CP*</u> se traza el arco *OPD*. Haciendo centro en *P* y con el mismo radio se traza el arco *OCE*.
Con centro en C y tomando una abertura de compás igual a <u>*PD*</u> se señala el punto *M*.

La recta *PM* es paralela a la recta *AB* y pasa por *P*.

5) *Trazar la bisectriz de un ángulo*

Sea el ángulo *ABC (Fig. 44B)*

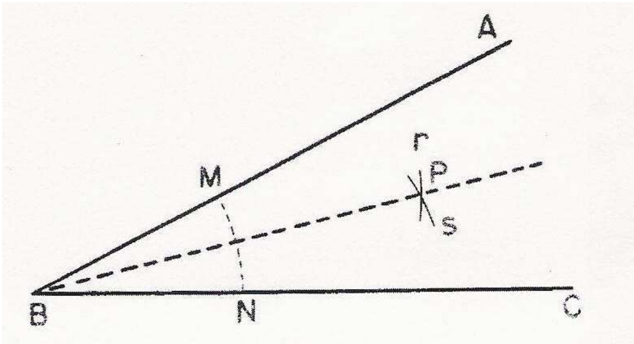


Fig. 44-B

Haciendo centro en el vértice *B* se traza el arco O*MN*.
Con centro en *M* trazamos el arco *r* y con centro en *N* el arco *s*. Entonces *r* y *s* se cortan en *P*.
La semirrecta *BP* es la bisectriz del ángulo *ABC*.

CONGRUENCIA Y MEDIDA

Intuitivamente decimos que dos figuras geométricas son congruentes si una de ellas puede ser trasladada de tal forma que coincida con la otra punto por punto. En otras palabras las ***figuras congruentes tienen la misma medida y forma***. Suponemos que al trasladar una figura geométrica no cambia ninguna de sus propiedades, excepto su localización en el espacio. Estas figuras son ***rígidas***, esto es, no se doblan ni se deforman. Entonces, si movemos un triángulo de tal manera que coincida con otro, la traslación no altera la medida de los ángulos ni la longitud de cualquiera de sus lados; podemos observar que las nociones de congruencia y medida están estrechamente relacionadas.

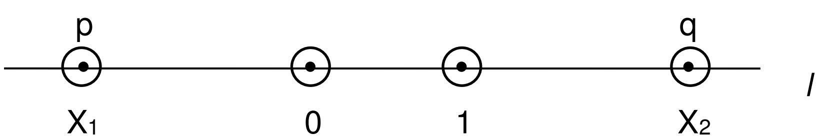
CRITERIOS DE CONGRUENCIA Y MEDIDA

a) ***Medida de segmento de recta***. En la medición de segmentos de recta, usamos unidades de longitud. Antiguamente, las unidades de longitud eran tomadas de partes del cuerpo. Un ***codo*** era la longitud del brazo del hombre, desde el codo hasta la punta del dedo cordial. La distancia entre las puntas del pulgar y el meñique, en mano extendida se llamaba ***palmo***. Un codo medía dos palmos. La ***braza*** era la distancia entre los extremos de los dedos con los brazos extendidos: medía aproximadamente 1.83 m. y se usa todavía en mediciones oceánicas de profundidad.

La historia consigna que la ***yarda*** fue definida como la distancia entre el extremo de la nariz y la punta del pulgar de Enrique I, teniendo el brazo extendido.

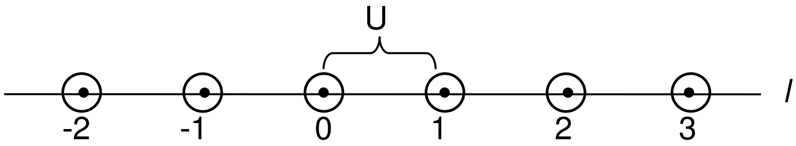
La ***pulgada*** fue establecida como la longitud de tres granos de cebada, colocados uno después de otro. Estas unidades no fueron usadas de manera uniforme. Una unidad más moderna de medida es el ***metro***, propuesto en 1791 como una diezmillonésima parte de la distancia entre el Polo Norte y el Ecuador. Un metro equivale a 39.17 pulgadas y es ligeramente mayor que una yarda.
Desde el punto de vista geométrico, podemos representar la medida de una forma siguiente:

Consideremos ahora una recta *l* sobre el plano, y escojamos un punto arbitrario que designaremos ***O***. Escojamos otro punto sobre la recta y denotémoslo con **1**.



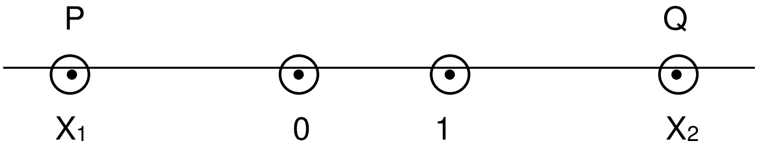
Con este principio podemos construir una recta numérica estableciendo una correspondencia uno a uno entre los números reales y los puntos sobre la recta l.

Por ejemplo, para encontrar el número 2 tomamos la distancia U desde el punto 0 hasta el punto 1, como nuestra unidad, asignemos el número 2 al punto que está situado una unidad a la derecha del 1; de la misma manera asignemos el punto localizado una unidad a la izquierda de 0, al entero negativo 1. Esta correspondencia entre los números reales y los puntos de *l* es llamado sistema coordenado.



Si queremos medir un segmento de recta PQ, podemos usar uno de los sistemas coordenados de la recta *l*. El símbolo que emplearemos para la medida PQ será m(PQ) .

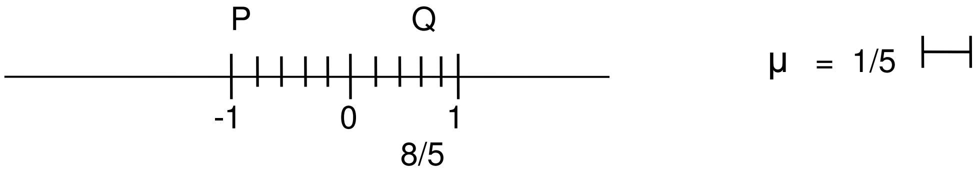
Para efectuar comparaciones entre medidas de diferentes segmentos de recta, usaremos la misma unidad de longitud en todos nuestros sistemas coordenados.
Si tenemos una recta *l*, a la cual le hemos asignado algún sistema coordenado entonces, dados dos puntos cualesquiera.

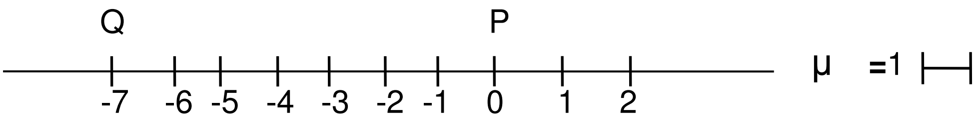


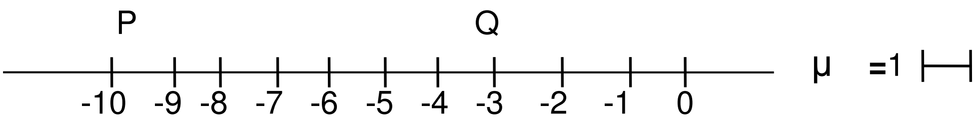
P y Q sobre la recta, definimos la medida del segmento de recta PQ como la distancia entre ellos. Si X_1 es el número asignado a P y X_2 es el número asignado a Q, esta distancia será el número de unidades de longitud que haya de P a Q.
Por ejemplo si P tiene coordenadas -5 y Q coordenada 2 entonces m(PQ) = 7 que es el número de unidades que hay de P a Q, las cuales son las mismas que hay de Q a P.

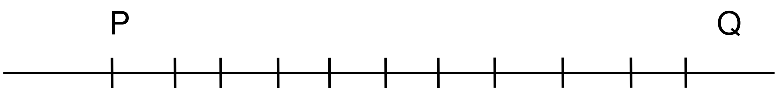
Ejemplo: Si P y Q son números reales encontrar la medida m(PQ) del segmento en cada caso.

	P	Q	m (PQ)
a)	-1	3/5	8/5
b)	0	-7	7
c)	-10	-3	7
d)	-2	9	11

a) 

b) 

c) 

d) 

-2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 μ =1

μ = unidad de medida en cada caso.

PROPIEDADES DE LA MEDIDA DEL SEGMENTO DE RECTA

1. La medida de un segmento de recta es siempre un número real positivo, es decir:

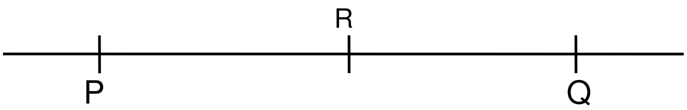
$$m\,(PQ) \geq 0$$

2. Si PQ ⊂ AB entonces $m\,(PQ) \leq m\,(AB)$

Esto significa que si el segmento PQ está contenido en el segmento AB entonces la medida de PQ es menor o igual que la del segmento AB.

3. Si PQ es un segmento de recta y si R es algún punto entre P y Q, entonces :

Si $\overline{pa} \subset \overline{ab}$ entonces: $\overline{pa} \leq \overline{ab}$



$$m\,(PR) + m\,(RQ) = m\,(PQ)$$

Esta es la propiedad aditiva de la medida de segmentos de recta; es decir, la medida total del segmento es igual a la suma de las medidas de sus partes.

PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Si PQ es un segmento de recta, existe exactamente un punto R sobre PQ, tal que la medida del segmento PR es igual a la medida del segmento RQ es decir, m(PR) = m(RQ).

Este punto R se denomina punto medio del segmento PQ. Si R es el ***punto medio*** de PQ entonces algunas veces decimos que R biseca a PQ ya que por R se puede trazar una bisectriz.

Como R es el punto medio del segmento PQ, entonces $m\,(PR) = \frac{m\,(PQ)}{2}$ por lo que la coordenada del punto medio estará dada por $pm = \frac{(P + Q)}{2}$

Si conocemos la coordenada de dos puntos, podemos encontrar la coordenada del tercero.

Ejemplo: Encontrar la coordenada del tercer punto a partir de los puntos dados.

	P	Q	R
a)	-6	3	
b)	5		-2
c)		-4	3

a) $\dfrac{(-6+3)}{2} = -3/2$

b) $(5 + Q) / 2 = -2$
$5 + Q = -4$
$Q = -4 - 5$
$Q = -9$

c) $(P - 4) / 2 = 3$
$P - 4 = 6$
$P = 6 + 4$
$p = 10$

CONGRUENCIA DE SEGMENTOS DE RECTA

Después de describir la medida de segmentos de recta, podemos definir la relación de congruencia entre segmentos de recta.

Se dice que dos segmentos de recta son ***congruentes***, si tiene la misma medida. El símbolo que usaremos para esta relación será $\cong$ que quiere decir ***congruente con*** o ***congruente a***. Por lo que si PQ y RS tienen la misma medida entonces son congruentes y podemos escribir PQ $\cong$ RS.
Decir que PQ $\cong$ RS es lo mismo que decir m(PQ) = m(RS).

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN UN NÚMERO DE SEGMENTOS CONGRUENTES.

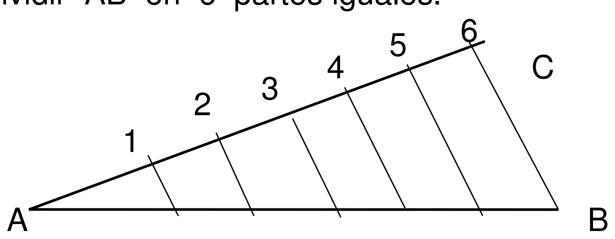
Como un caso particular del teorema de Thales podemos considerar el siguiente caso:

Un sistema de rectas paralelas divide a dos transversales en segmentos congruentes si la constante de la proporcionalidad es igual a la unidad (r= a / b = 1).
r = razón

Lo que nos da la técnica para dividir en segmentos congruentes, una recta dada AB, de la siguiente manera:

1. Trazar una recta A C sobre la cual se marca el número de partes iguales en que se desea dividir el segmento AB.
2. Se traza el segmento CB y enseguida por los puntos de división en el segmento AB se trazan paralelas al segmento CB.

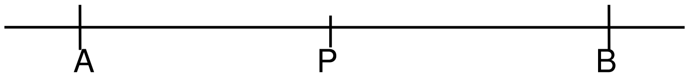
Por ejemplo: Si queremos dividir AB en 6 partes iguales.



DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA

Derivada también del teorema de Thales, llegamos a la razón de división de un segmento:

Si A, B, P, con $A \neq B$, son puntos colineales y se dice que P divide al segmento AB en la razón $r = AP/PB$.



Como también se tiene que: $AP + PB = AB$, entonces $AP = AB - PB$.

Entonces la razón $r = AP / PB$ se transforma en:

$$r = (AB - PB) / PB \, .$$

Las igualdades i) e ii) permiten una manipulación adecuada de estos conceptos; *por ejemplo*:

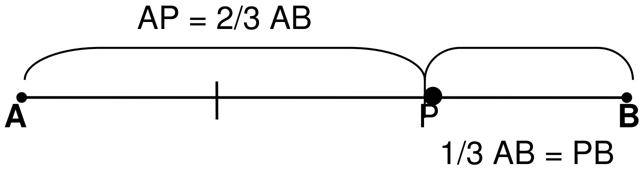
¿ Qué punto divide al segmento AB en la razón 2?

Usando: $AP = r(AB) / (r + 1) = 2\,AB / (2 + 1)$

$AP = 2 / 3\ AB$

Ahora usando: $PB = AB / (r + 1) = AB / (2 + 1) = AB / 3$

Nos queda: $AP = 2 / 3\ AB$



Comprobando: $r = (2 / 3\ AB) / (1/ 3\ AB) = 2$

Estas razones se toman en el sentido de izquierda a derecha.

Verifica tus conocimientos, haciendo:

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1.- Encuentra la medida (m), el valor de μ; y construye tus rectas para cada segmento.

	R	S	m(RS)
a)	-2	3/6	
b)	0	-4	
c)	-8	-3	
d)	12	1	

2. Cuál será la coordenada de los siguientes puntos, tomando en cuenta que B es el punto medio del segmento AC.

	A	B	C
a)	-2	4	
b)	3	-5	
c)	1		6

3. Divide en 5 partes iguales el siguiente segmento de recta CD.

C D

AUTOEVALUACIÓN.

I. Subraya la respuesta correcta a los siguientes enunciados:

1. Cultura que ordenó los conocimientos empíricos de la geometría para elevarla a ciencia.
   a) EGIPCIA b) GRIEGA c) BABILÓNICA d) ROMANA

2. Cultura que basada en sus estudios astronómicos dividieron la circunferencia en 360 partes iguales, obteniendo así el grado sexagésimal.
   a) SUMERIA b) GRIEGA c) BABILÓNICA d) EGIPCIA

3. Cultura cuyos conocimientos geométricos permitieron deducir el significado de geometría:
   a) EGIPCIA b) ROMANA c) SUMERIA d) FENICIA

4. Matemático que calculó la altura de la pirámide por medio de la sombra que proyectó.
   a) PITÁGORAS b) EUCLIDES c) ARQUÍMEDES d) THALES DE MILETO.

5. Matemático que estableció el teorema " La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos ".
   a) EUCLIDES b) HERÓN c) PITÁGORAS d) PLATÓN

II. Cita objetos que ilustren lo siguiente:

a) Recta.

____

b) Rectas Perpendiculares.

____

c) Plano.

____

d) Punto.

____

e) Espacio.

____

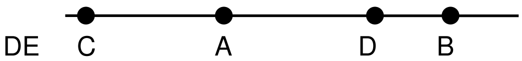
f) Rectas Paralelas.

____

III. Indica si las afirmaciones siguientes son falsas o verdaderas:

a) El diámetro de un círculo es una recta. ___________

b) Dos puntos siempre son colineales. ___________



c) El punto D está en AB. ____________

d) El punto D esta en AC . ____________

e) ¿ Es lo mismo BA que AB ? ________ ¿Por qué ? __________________

____

f) Dos puntos determinan una recta. ____________

g) Una recta divide a un espacio en dos semiespacios. ______________

h) Si dos rectas se intersectan, la intersección es un punto. ________________

IV. Resuelve lo siguiente:

a) Si B está entre A y C, AC = 10 y AB = 4, encontrar BC .________________

b) Identifica la hipótesis y la conclusión de las siguientes proposiciones:
   1) un triángulo es isósceles si tiene dos lados congruentes.
   2) todos los triángulos equiláteros tienen tres ángulos congruentes.

V. Responde con el concepto apropiado:

1. El segmento de recta trazado en una circunferencia que pasa por el centro, y cuyos extremos son dos puntos sobre ella, se conoce como: ________________________________
2. Las rectas que al cruzarse forman ángulos de 90 grados, se llaman: ________________________________
3. Las rectas que no se cruzan aunque su prolongación sea infinita se llaman: ________________________________.

VI. Resuelve lo siguiente:

a) Un segmento AB mide 12 unidades, el punto P interior en el segmento, determina los segmentos AP y PB. Si se conoce la razón de medida donde:

$$PB = \tfrac{1}{3}\ AB,$$

entonces la medida que le corresponde a AP es:

b) ¿ Cuál es la medida del PQ, conociendo que P = -3 y Q = 7 ?

¡ Dos cabezas piensan más que una !

ACTIVIDADES

Recuerda que cualquier actividad, realizada en equipo rinde mejores frutos, que el trabajo individual, por el cual te sugerimos ésta forma de trabajo para que analicen y discutan las dudas que se les presente.

También puedes acudir al auxilio de tu asesor, para aclaración de alguna duda.

1. Analizando los antecedentes históricos de la Geometría, contesta las siguientes preguntas:

2. Herramienta empleada por los egipcios, que funcionaba como regla, compás, escuadras al mismo tiempo: ______________________________

3. Nombre de los matemáticos griegos que inician la geometría como ciencia deductiva:____

4. Cita los tres fundamentos de Tales de Mileto: _________________________
   ____
   ____

1. Escribe el enunciado de Teoremas más importante de Pitágoras de Samos:
   ____
   ____

DEFINICIÓN, CLASIFICACIÓN, NOTACIÓN Y MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Cuando se analizan figuras y cuerpos de formas geométricas se observan espacios en los puntos de unión o de intersección de planos de rectas y trazos. Estos espacios son de vital consideración en Geometría.

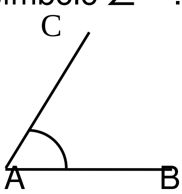
Entonces:

Se llama ángulo a la abertura o amplitud que hay entre dos semirectas que se cortan en un punto llamado vértice.

Ejemplo:

La abertura comprendida entre $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ se llama ***ángulo.***

Las semirectas que forman el ángulo se llaman ***lados*** del ángulo. El punto donde se unen las semirectas se llama ***vértice.*** Para representar un ángulo se utiliza el símbolo $\angle$.



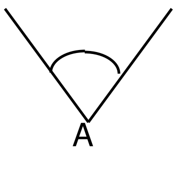
$\left.\begin{array}{l}\overline{AB}\\ \overline{AC}\end{array}\right\}$ Lados del ángulo.

A = Vértice del ángulo.

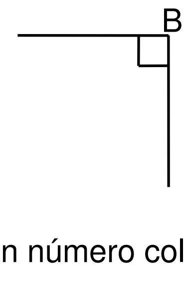
¿ Cómo designar o nombrar un ángulo?

Los ángulos se pueden designar o nombrar de tres maneras distintas:

Mediante una letra mayúscula colocada en el vértice

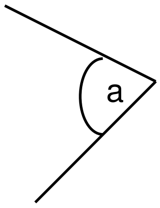


ángulo A
o bien
$\angle$ A

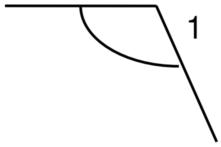


ángulo B
o bien
$\angle$ B

Mediante una letra minúscula o un número colocado dentro del ángulo.

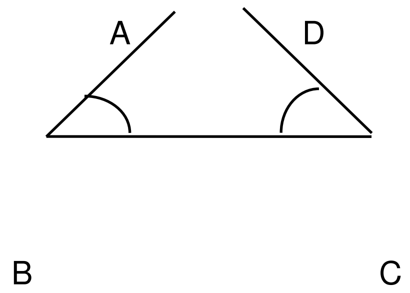


ángulo a
o bien
$\angle$ a



ángulo 1
o bien
$\angle$ 1

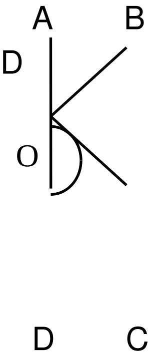
Mediante tres letras mayúsculas, de las cuales la del vértice se coloca entre las otras dos, que se colocan sobre los lados del ángulo.



ángulos ABC y BCD

o bien ∠ ABC y

∠ BCD

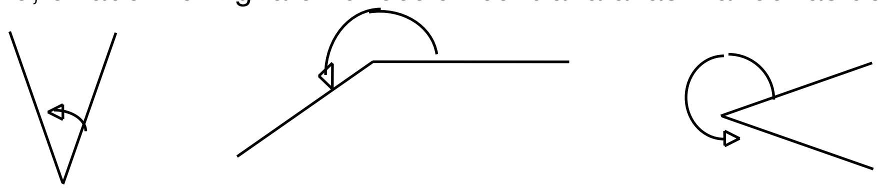


∠ AOB

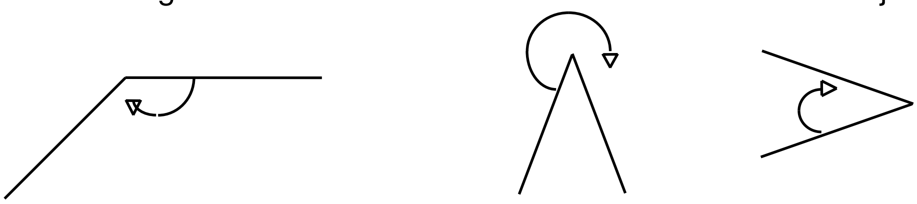
∠ DOC

∠ BOC

Ángulo positivo. Se dice que un ángulo es positivo cuando al formarse el ángulo, el lado móvil gira en dirección contraria a las manecillas del reloj.

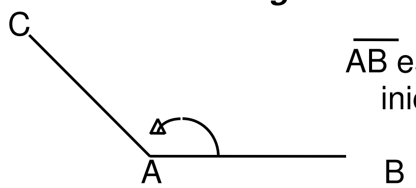


Ángulo negativo. Se dice que un ángulo es negativo cuando al formarse, el lado móvil gira en la misma dirección a las manecillas del reloj.

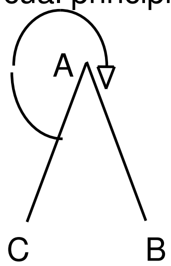


Nota: El sentido del giro lo indican las flechitas

Lado inicial de un ángulo. Es la semirecta en la cual principia la rotación.

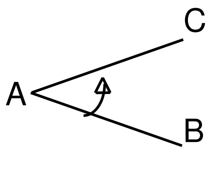


$\overline{AB}$ es el lado inicial.

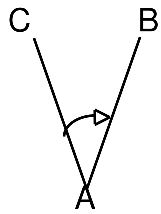


$\overline{AC}$ es el lado inicial.

Lado final de un ángulo. Es la semirecta en la cual termina la rotación.



$\overline{AC}$ es el lado final.



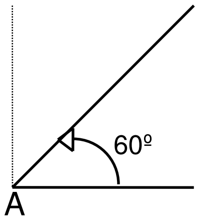
$\overline{AB}$ es el lado final.

¿ Cómo se clasifican los ángulos ?

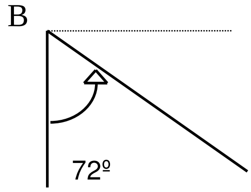
Atendiendo a sus características, se distinguen los siguientes tipos de ángulos.

I) Según su medida o magnitud los ángulos pueden ser:

a) ***Ángulo Agudo***: Es el que mide menos de 90º , *ejemplo*:

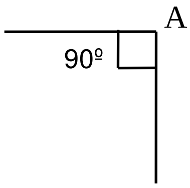


$\angle$ A = 60º
60º < 90º
entonces:
$\angle$ A es agudo

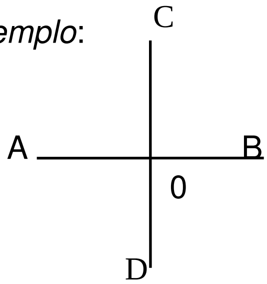


$\angle$ B = 72º
72º < 90º
entonces:
$\angle$ B es agudo

b) ***Ángulo Recto***: Es el que mide 90º , *ejemplo*:

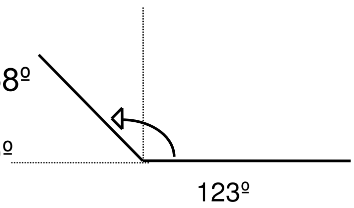


$\angle$ A = 90º
entonces:
$\angle$ A es recto

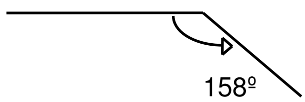


$\angle$ AOC = 90º
$\angle$COB = 90º
$\angle$BOD = 90º
$\angle$AOD = 90º

c) ***Ángulo Obtuso***: Es el que mide más de 90º pero menos de 180º , *ejemplo*:

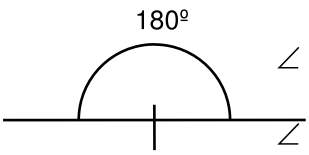


$\angle$ A = 123º
123º > 90º
123º < 180º
entonces:
A $\angle$ A es obtuso

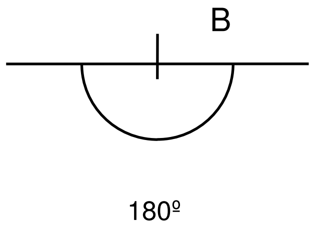


$\angle$ B = 158º
158º > 90º
158º < 180º
entonces:
$\angle$ B es obtuso

d) ***Ángulo Llano o Colineal***: Es el que mide 180º , *ejemplo*:



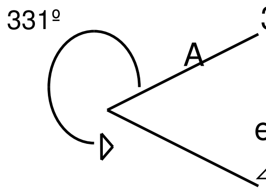
$\angle$ A = 180º
entonces:
$\angle$ A es colineal o llano



$\angle$ B = 180º
entonces:
$\angle$ B es colineal o llano

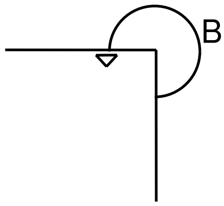
4. ***Ángulo Cóncavo o Entrante***: Es el que mide más de 180º, pero menos de 360º,

Ejemplo:



∠ A = 331º
331º 180º
331º 360º

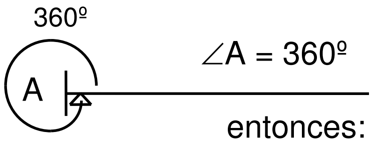
entonces:
∠ A es cóncavo o entrante



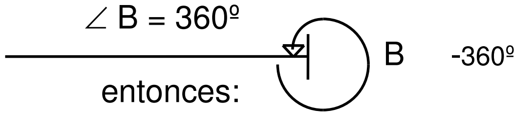
∠ B = 270º
270º 180º
270º 360º

entonces:
∠ B es cóncavo o entrante

f) *Perígono*: Es el ángulo que mide 360º (un giro completo), *ejemplo*:

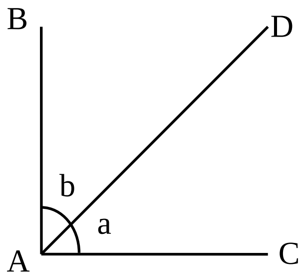


∠A = 360º
entonces:
∠ A es un perígono



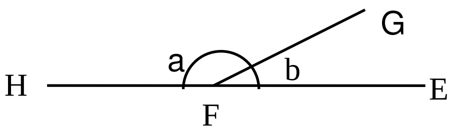
∠ B = 360º
entonces:
∠ B es un perígono

CLASES DE PARES DE ÁNGULOS:



a) ***Ángulos Consecutivos***: Se llaman ángulos consecutivos a los que tienen comunes un vértice y un lado que los separa.
Ejemplo: ∠a y ∠ b son consecutivos por que tienen el mismo vértice A y el lado común $\overline{AD}$. " El lado común forma parte de los dos ángulos".

b) ***Ángulos Adyacentes***. Son aquellos que tienen un vértice y un lado común y los lados no comunes están alineados uno del otro. *Ejemplo*:



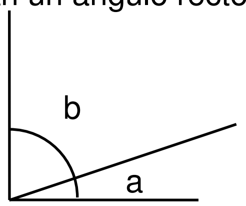
∠ a y ∠b son adyacentes porque tienen el mismo vértice F y un lado común FG ; pero además los otros dos lados no comunes $\overline{FH}$ y $\overline{FE}$, están alineados

También se observa que la suma de los dos ángulos adyacentes forman un ángulo colineal o llano.

$$\boxed{\angle a + \angle b = 180^\circ}$$

POR SU SUMA, DOS ÁNGULOS PUEDEN SER:

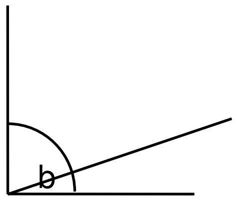
a) ***Ángulos Complementarios***: Son dos ángulos que juntos suman 90º (o sea forman un ángulo recto), *ejemplo*:



En símbolos:

$\angle a + \angle b = 90^\circ$

Un ángulo es complementario de otro; es decir $\angle$ a es el complemento de $\angle$ b y a su vez $\angle$ b es el complemento de $\angle$ a.



a = 25º

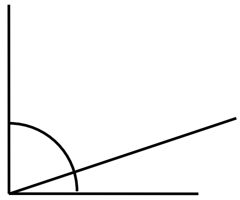
$\angle a + \angle b = 90º$

$25º + \angle b = 90º$

entonces:

$\angle b = 90º - 25º$

$\angle b = 65º$



b=65° a

$\angle a + \angle b =$ 90º

$\angle a + 65º =$ 90º

entonces:

$\angle a = 90º -$ 65º

$\angle a = 25º$

Entonces:

El complemento de un ángulo se obtiene restando a 90º el valor del ángulo conocido.

Ejemplo:

¿Cuál es el complemento de un ángulo de 15º?

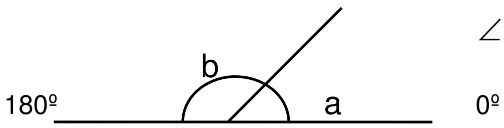
$\angle x + 15º = 90º$
$\angle x = 90º - 15º$
$\angle x = 75º$

Si $\angle A = 57º$ su ángulo complementario $\angle B$ es de:

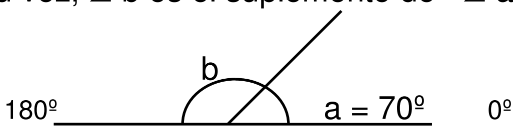
$\angle A + \angle B = 90º$
$57º + \angle B = 90º$
$\angle B = 90º - 57º$
$\angle B = 33º$

b) ***Ángulos Suplementarios***: Son dos ángulos que juntos suman 180º (o sea forman un ángulo colineal o llano), *ejemplo*:

En símbolos:
$\angle a + \angle b = 180º$



Un ángulo es suplemento de otro, es decir, $\angle$ a es el suplemento de $\angle$ b, y a su vez, $\angle$ b es el suplemento de $\angle$ a .



$\angle a + \angle b = 180º$
$70º + \angle b = 180º$
$\angle b = 180º - 70º$
$\angle b = 110º$

Por lo anterior ***el suplemento de un ángulo se obtiene restando a 180º el valor del ángulo conocido.***

Ejemplo:

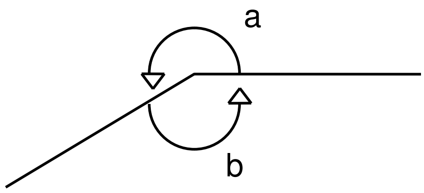
¿Cuál es el suplemento de un ángulo de 85º ?

$$\angle x + 85º = 180º$$
$$\angle x = 180º - 85º$$
$$\angle x = 95º$$

¿Cuál es el valor del ángulo $\angle$ A si su ángulo suplementario $\angle$ B mide 128º ?

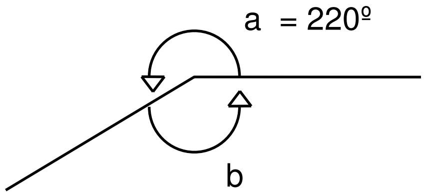
$$\angle A + B = 180º$$
$$\angle A + 128º = 180º$$
$$\angle A = 180º - 128º$$
$$\angle A = 52º$$

c) ***Ángulos Conjugados***: Son dos ángulos que juntos suman 360º (o sea que forman un ángulo *perígono*), *ejemplo*:



$$\angle a + \angle b = 360º$$

Un ángulo es el conjugado de otro, es decir , $\angle$ a es conjugado de $\angle$ b y $\angle$ b es conjugado de $\angle$ a.



$$\angle a + \angle b = 360º$$
$$220º + \angle b = 360º$$
$$\angle b = 360º - 220º$$
$$\angle b = 140\ º$$

En consecuencia ***el conjugado de un ángulo se obtiene restando a 360º el ángulo conocido.***

Ejemplo:

¿Cuál es el ángulo conjugado del ángulo de 25º?

$$\angle x + 25º = 360º$$
$$\angle x = 360º - 25º$$
$$\angle x = 335º$$

¿Cuál es el valor del ángulo $\angle$ A, si su ángulo conjugado $\angle$ B es de 138º?

$$\angle A + \angle B = 360º$$
$$\angle A + 138º = 360º$$
$$\angle A = 360º - 138º$$
$$\angle A = 222º$$

Complementa, suplementa y conjuga tu conocimiento

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

Realiza lo que se te pide a continuación:

I. Calcula el complemento:

1. Si $\angle$ a = 32º $\angle$ b = ____________
2. Si $\angle$ b = 72º $\angle$ a = ____________
3. Si $\angle$ m = 76º $\angle$ n = ____________

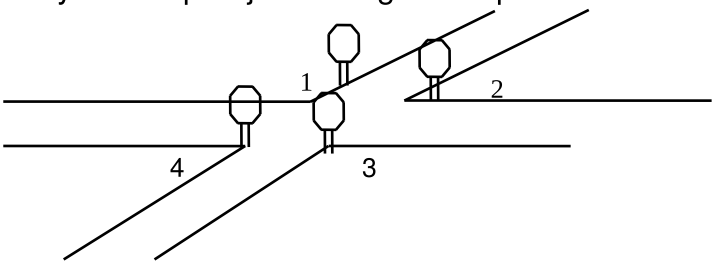
II. Calcula el suplemento:

1. Si $\angle$ a = 37º $\angle$ b = ____________
2. Si $\angle$ b = 125º $\angle$ a = ____________
3. Si $\angle$ x = 22º $\angle$ y = ____________

III. Calcula el conjugado:

1. Si $\angle$ a = 85 $\angle$ b = _____________
2. Si $\angle$ m = 178 $\angle$ n = _____________
3. Si $\angle$ x = 256 $\angle$ y = _____________

IV. ¿Cuántas y cuáles parejas de ángulos suplementarios encuentras?

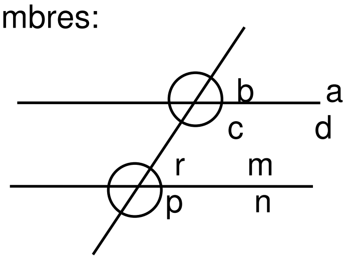


V. ¿Cuál es el ángulo que es igual a su complemento?

VI. Encuentra cada ángulo, si son suplementarios y el mayor de ellos es el doble del menor.

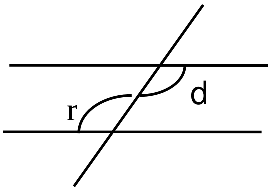
ÁNGULOS QUE SE FORMAN CUANDO DOS PARALELAS SON CORTADAS POR UNA TRANSVERSAL.

Se forman ocho ángulos que, según la posición relativa de unos con respecto a otros, reciben los siguientes nombres:

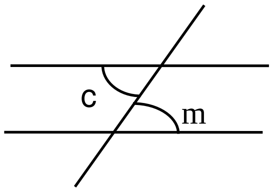


a) Ángulos alternos internos.- Son los que quedan a uno y otro lado de la transversal y en el interior de las paralelas, *ejemplo*:

$\angle r = \angle d$

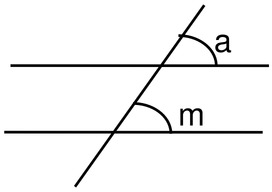


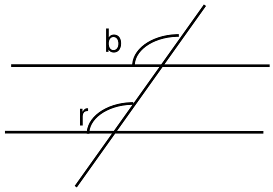
$\angle r$ con $\angle d$
$\angle m$ con $\angle c$

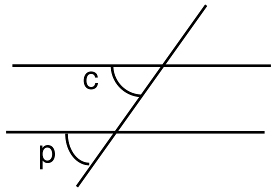


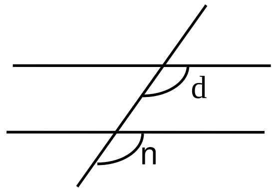
$\angle c = \angle m$

b) ***Ángulos correspondientes***: Quedan al mismo lado de la transversal y a un mismo lado de las paralelas y son iguales, *ejemplo*:





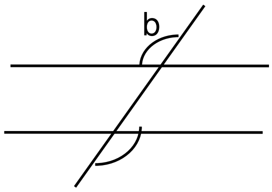




$\angle a$ con $\angle m$ $\angle b$ con $\angle r$ $\angle c$ con $\angle p$ $\angle d$ con $\angle n$

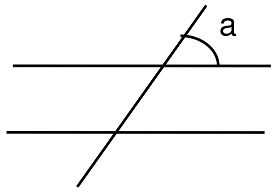
$\angle a = \angle m$ $\angle b = \angle r$ $\angle c = \angle p$ $\angle d = \angle n$

c) Ángulos alternos externos: Quedan a uno y otro lado de la transversal y en la parte exterior de las paralelas y son iguales, *ejemplo*:



$\angle b$ con $\angle n$

$\angle b = \angle n$



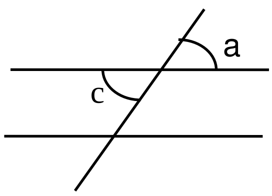
$\angle a$ con $\angle p$

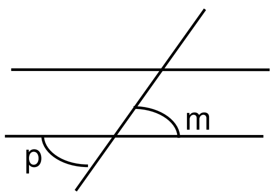
$\angle a = \angle p$

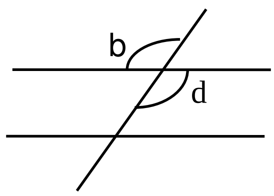
p

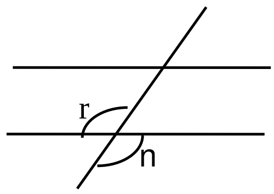
n

d) Ángulos opuestos por el vértice: Son los que quedan uno frente a otro, cuando dos rectas se cortan entre sí y además son iguales. Ejemplo:









$\angle a$ con $\angle c$ $\angle m$ con $\angle p$ $\angle b$ con $\angle d$ $\angle n$ con $\angle r$

$\angle a = \angle c$ $\angle m = \angle p$ $\angle b = \angle d$ $\angle n = \angle r$

SUMA Y RESTA DE ÁNGULOS:

Para realizar estas operaciones es necesario recordar que 1º = 60’ y 1’ = 60’’

***Suma de ángulos*:** Sumar dos o más ángulos es encontrar el total de grados. *Ejemplo:*

Si tengo tres ángulos, uno de 40º , otro de 55º y un tercero de 75º al sumarlo nos dará un total de 170º .

por que:

$$\begin{array}{r} 40^{\circ} \\ 75^{\circ} \\ 55^{\circ} \\ \hline 170^{\circ} \end{array}$$

Observa con atención el siguiente *ejemplo:*

Si tengo un $\angle$ de 23º 56’ 18”, otro de 46º 38’ 54” y un tercero de 12º 22’ 15”, ¿Cuál será el total?

$$\begin{array}{lr} & 23^{\circ}\ 56'\ 18'' \\ + & 46^{\circ}\ 38'\ 54'' \\ & 12^{\circ}\ 22'\ 15'' \\ \hline & 81^{\circ}\ 116'\ 87'' \end{array}$$

se le suma el minuto

81º 117’ 27’’

82º 57’ 27’’

Resultado final

Se convierten los 87’’ a minutos dividiendo entre 60’’ entonces en 87’’ hay un minuto y sobran 27 segundos se convierten los 117’ a grados dividiendo entre 60 entonces en 117’ hay 1º y sobran 57 minutos.

Otro *ejemplo*: Ahora tenemos un $\angle$de 83º 29’ 57”,otro de 19º 21’15” y el tercero de
12º 30’ 09”, ¿Cuál será la suma?

$$\begin{array}{r} 83^{\circ}\ 29'\ 57'' \\ 19^{\circ}\ 21'\ 15'' \\ 12^{\circ}\ 30'\ 09'' \\ \hline 114^{\circ}\ 80'\ 81'' \end{array}$$

114º 80’ 81’’ ------ 81’’ = 1 minuto y sobran 21 segundos

114º 81’ 21’’ ------ 81’ = 1 grado y sobran 21 minutos

$\boxed{115^{\circ}\ 21'\ 21''} \longrightarrow$ Resultado final

RESTA DE ÁNGULOS:

La resta de ángulos tiene la misma "intención" que la resta de número naturales. Esto es, ver cuánto le falta al sustraendo para ser igual al minuendo.

¡ Vamos a comprobarlo !

Tenemos un ángulo M y le vamos a restar el ángulo N. Si $\angle$ M = 80º y $\angle$ N = 45º

$$\begin{array}{r} 80^{\circ} \\ -\ 45^{\circ} \\ \hline 35^{\circ} \end{array}$$

Pero si a un ángulo de 90º le restamos otro de 36º 10’ . ¿cuál será el resultado?
Podemos proceder de la siguiente manera:

Convertimos 1º de los 90º a minutos 1º = 60’

$$90^{\circ} = 89^{\circ}\ 60'$$

entonces:

$$\begin{array}{r} 89^{\circ}\ 60' \\ -\ 36^{\circ}\ 10' \\ \hline 53^{\circ}\ 50' \end{array}$$

Observa los siguientes *ejemplos*:

1) 36º 15' – 13º 25' 32"
   36º 15' = 35º 75' (Se convirtió un grado a minutos y se suma a los que teníamos)
   35º 74' 60'' (Se convirtió 1 minuto a segundos)
   Por lo tanto:

   36º 15' = 35º 74' 60''

   entonces:

$$\begin{array}{r} 35^{\circ}\ 74'\ 60'' \\ -\ 13^{\circ}\ 25'\ 32'' \\ \hline 22^{\circ}\ 49'\ 28'' \end{array} \longrightarrow \text{resultado}$$

2) 180º = 179º 59' 60'' - 93º 32' 57''

   entonces:

$$\begin{array}{r} 179^{\circ}\ 59'\ 60'' \\ -\ 93^{\circ}\ 32'\ 57'' \\ \hline 86^{\circ}\ 27'\ 03'' \end{array}$$

¡Actívate operando con ángulos !

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

I. Efectúa las sumas y restas de ángulos que se proponen:

1. $\begin{array}{r} 34^{\circ}\ 41'\ 51'' \\ +\ 70^{\circ}\ 35'\ 11'' \\ 8^{\circ}\ 23'\ 59'' \\ \hline \end{array}$

2. $\begin{array}{r} 17^{\circ}\ 36'\ 42'' \\ +\ 65^{\circ}\ 43'\ 50'' \\ 16^{\circ}\ 57'\ 45'' \\ \hline \end{array}$

3. $\begin{array}{r} 150^{\circ} \\ -\ 9^{\circ}\ 10'\ 13'' \\ \hline \end{array}$

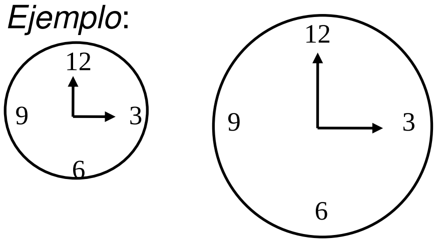
4. $\begin{array}{r} 98^{\circ}\ 37' \\ -\ 26^{\circ}\ 59'\ 48'' \\ \hline \end{array}$

¿ Vamos bien ? Continuamos...

¿ Cómo medir un ángulo ?

La medida de un ángulo depende únicamente de su amplitud de rotación, siendo independiente de la longitud de sus lados; es decir, el tamaño de los lados de un ángulo puede ser cualquiera, sin que por ello varíe su valor angular.

Ejemplo:



El ángulo formado por las manecillas de un reloj a las tres en punto es 90º, independientemente de que el reloj sea grande o pequeño.

La unidad de medida es el grado (º) la cual equivale a $\frac{1}{360}$ partes del círculo.

Cada grado se divide en 60 minutos 1º = 60’

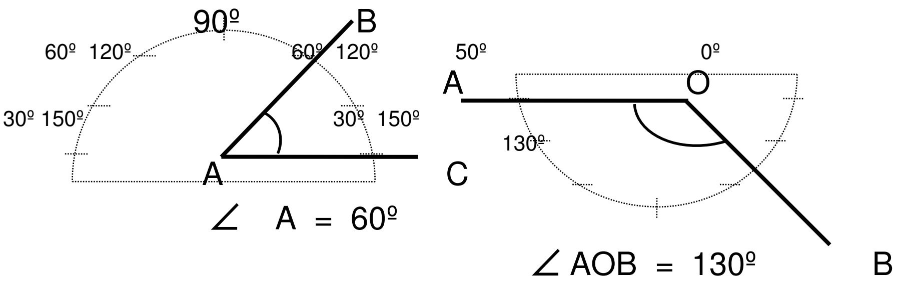
Cada minuto equivale a 60 segundos 1’ = 60’’

Este sistema de medidas angulares, por tener como base el número 60 según acabamos de ver, se llama ***Sistema sexagesimal.***

Para medir ángulos, usamos un instrumento llamado ***transportador*** para usarlo se deben de seguir las siguientes instrucciones:

1. El vértice del ángulo debe coincidir exactamente en el centro del transportador.
2. Uno de los lados del ángulo debe coincidir con el diámetro 0º - 180º.
3. El otro lado del ángulo o su prolongación, nos dará la medida del ángulo.

A continuación te mostramos algunos *ejemplos* de medición de ángulos.

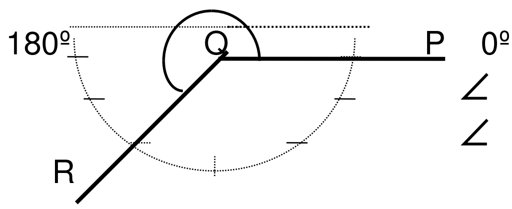


∠ A = 60º

∠ AOB = 130º

Para medir ángulos mayores de 180º , se traza la prolongación auxiliar a los 180º y únicamente se mide con el transportador la diferencia, que después se sumará a 180º para dar el valor exacto del ángulo.

Veamos un *ejemplo*:



∠ PQR = 180º + 43º

∠ PQR = 223º

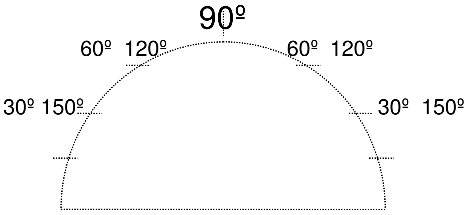
Para trazar un ángulo:

Primer paso: Se traza uno de los lados y acomodando el centro del transportador en uno de los extremos y que el otro extremo coincida con 0º.

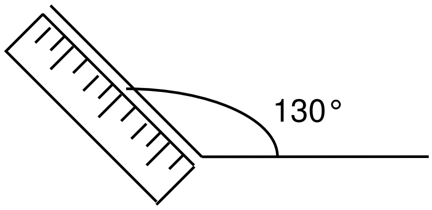
Segundo paso: En donde marque la medida deseada se pone un punto, el cual después se une con el extremo que sirvió de apoyo.

Aquí dibujamos un ángulo de 130º :

1er. paso



2do. paso

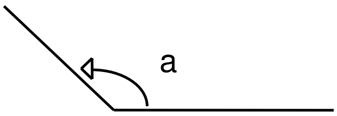


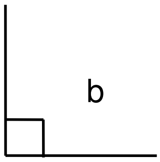
La medida de un ángulo es la misma que la de su amplitud correspondiente

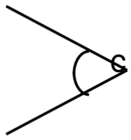
Que te parece si ahora lo practicas

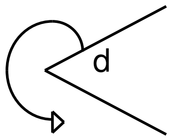
ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

I. Haciendo uso del transportador, mida los siguientes ángulos









$\angle a$ = $\angle b$ = $\angle c$ = $\angle d$ =

II. Traza 4 ángulos de las siguientes medidas: 54º , 120º , 230º , y 302º .

CONVERSIÓN DE GRADOS A RADIANES Y VICEVERSA:

Podemos relacionar radianes y grados por medio de expresiones sencillas. En una circunferencia completa hay 360º o 2 π radianes (2 πrad), entonces:

$$360^{\circ} = 2\pi \text{rad}$$

$$\frac{360^{\circ}}{2\pi} = \frac{2\pi \text{rad}}{2\pi}$$ dividiendo la ecuación entre 2 π

$$1 \text{ rad} = \frac{360^{\circ}}{2\pi} = \frac{180^{\circ}}{\pi}$$

$$1 \text{ rad} = 57.30^{\circ} = 57^{\circ}\ 18'$$

También: $$1 \text{ rad} = \frac{180^{\circ}}{\pi}$$

$$1 \text{ rad } (\pi) = 180^{\circ}$$

$$1 \text{ grado} = \frac{\pi \text{ rad}}{180^{\circ}}$$

Ejemplos:

1. Convertir a radianes: a) 60º b) 135º

Solución: Multiplicamos por el número de radianes que hay en un grado, $1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180^{\circ}}$, tendremos:

a) $60^{\circ} = 60\left(\frac{\pi}{180^{\circ}}\right) = \frac{(60)(3,1416)}{180^{\circ}} = \frac{3,1416}{3} = 1.0472 \text{ rad}$

b) $135^{\circ} = 135^{\circ}\left(\frac{\pi}{180^{\circ}}\right) = \frac{(135)(3,1416)}{180^{\circ}} = 2.3562 \text{ rad}$

2. Convertir a grados: a) 5 rad b) 2.15 rad

Solución: Multiplicando por el número de grados que hay un radián, $1 \text{ rad} = \frac{180^{\circ}}{\pi}$ tendremos:

a) $5 \text{ rad} = 5\left(\frac{180^{\circ}}{\pi}\right) = \frac{(5)(180^{\circ})}{3.1416} = \frac{900}{3.1416} = 286^{\circ}\ 28'\ 42''$

b) $2.15 \text{ rad} = 2.15\left(\frac{180^{\circ}}{\pi}\right) = \frac{(2.15)(180^{\circ})}{3.1416} = 123^{\circ}\ 11'\ 08''$

Continúa en el proceso de conversión de ángulos

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

I. Convierte a radianes los siguientes ejercicios:

a) 22º
b) 33º
c) 50º

II. Convierte a grados los siguientes ejercicios:

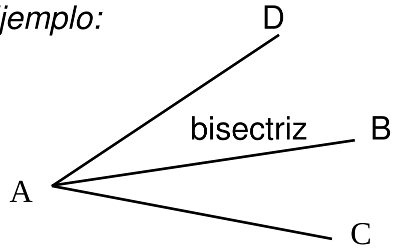
a) $\frac{\pi}{4}$ rad
b) 130 rad
c) 3.15 rad

Seguimos conociendo más sobre ángulos

DEMOSTRACIÓN DE TEOREMAS:

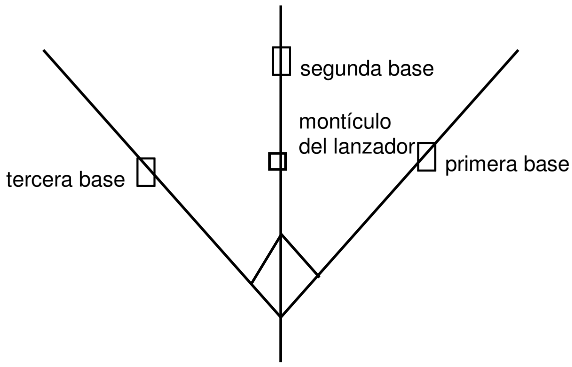
Bisectriz de un ángulo. Se llama bisectriz a la recta que divide un ángulo en dos ángulos exactamente iguales.

Ejemplo:



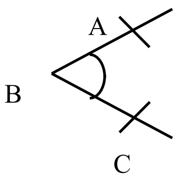
La recta AB es la bisectriz del ángulo CAD de la figura

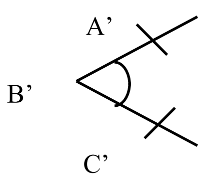
Este diagrama muestra cómo la bisectriz de un ángulo resulta útil en la marcación de un estadio de beisbol.
Observa que el montículo del lanzador está sobre la bisectriz del ángulo, a 60 pies y a 6 pulgadas de home. si está sobre recta, pero no está en el punto medio de la recta que va de home a la segunda base.



Congruencia de ángulos. Si consideramos dos ángulos ABC y A'B'C' y se dibuja uno de ellos en papel transparente, y se superpone sobre el otro, de tal manera que el vértice B coincida con B' y el lado BC con el B'C', se presentan las siguientes posibilidades.

- Que el lado $\overrightarrow{BA}$ coincida con el lado B'A', en tal caso los ángulos son ***congruentes***.

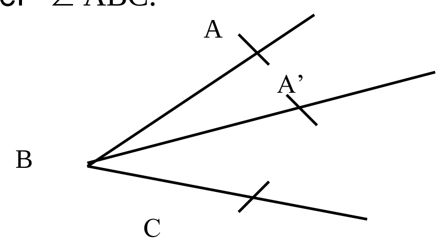




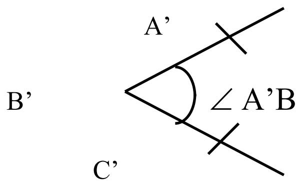
A = A'
B = B'
C = B'

$\angle ABC \cong \angle A'B'C'$

- Que el lado $\overrightarrow{B'A'}$ resulte interior al $\angle ABC$, y en tal caso el $\angle A'B'C'$ es menor que el $\angle ABC$.

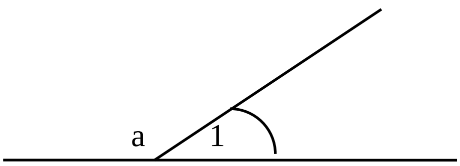


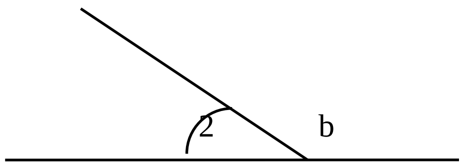
A' < A
B' < B
C' < B



$\angle A'B'C' < \angle ABC$

Demostrar: Los suplementos de ángulos iguales son iguales.



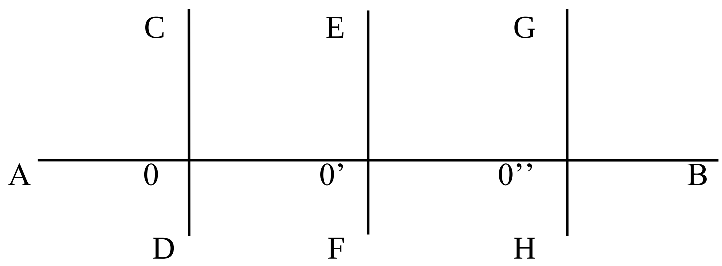


Datos: $\angle$ a suplemento de $\angle$ 1 , $\angle$ b suplemento de $\angle$ 2
$\angle$ 1 = $\angle$ 2
Demostrar: $\angle$ a = $\angle$ b

PROPOSICIONES	FUNDAMENTOS
1. $\angle$ a suplemento $\angle$ 1, $\angle$ b suplemento $\angle$ 2	1. Datos.
2. $\angle$ a + $\angle$ 1 = 180º $\angle$ b + $\angle$ 2 = 180º	2. $\angle$s suplementarios son $\angle$ s cuya suma es 180º .
3. $\angle$ a + $\angle$ 1 = $\angle$ b + $\angle$ 2	3. Si dos cosas son iguales a una tercera, entonces, son iguales entre si.
4. $\angle$ 1 = $\angle$ 2	4. Datos.
5. $\angle$ a - $\angle$ b = $\angle$ 1 - $\angle$ 2	5. Si las diferencias son iguales entonces son iguales.

De pares iguales de ángulos suplementarios se puedan restar los ángulos iguales (dados). Las diferencias iguales son los ángulos buscados.

Teorema: Dos o más rectas son perpendiculares a otra recta dada, cuando al cortarla forman con ella ángulos rectos (90º)



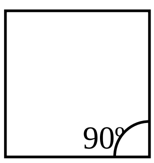
CD $\perp$ AB, porque $\angle$BOC = $\angle$COA 90º c/u
EF $\perp$ AB, porque $\angle$BO’E = $\angle$EO’A 90º c/u
GH $\perp$ AB, porque $\angle$BO”G = $\angle$ GO”A 90º c/u

DEMOSTRACIÓN DE TEOREMAS RELACIONADOS CON SITUACIONES REALES:

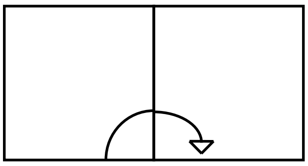
DEMOSTRAR EL TEOREMA: La suma de cuatro ángulos rectos nos da un ángulo perígono (360º).

Se tienen mosaicos cuadrados. ¿Puedes cubrir un piso sin dejar huecos entre los mosaicos?

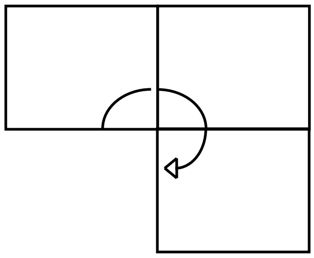
Tomando un mosaico vemos que uno de sus ángulos internos mide 90º :



Si colocamos junto a él, otro mosaico; entre los dos forman un ángulo de 180º.

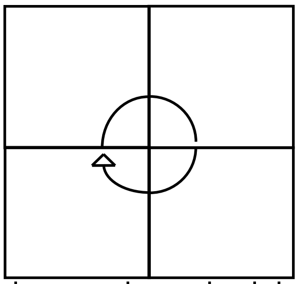


Colocando otro que coincida en el vértice de los anteriores:



el ángulo formado es de: _______________

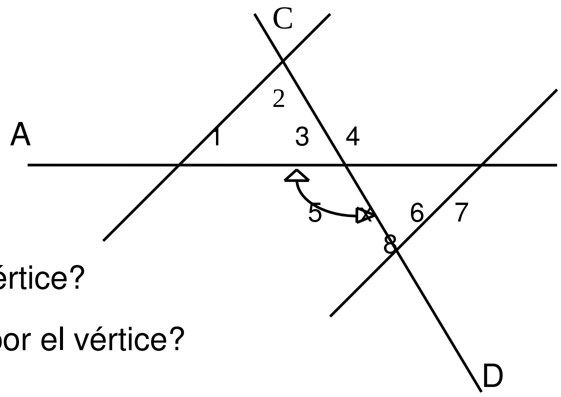
El hueco que queda es de 90º lo que quiere decir que allí cabrá otro mosaico para hacer el total de 360º .



y así se pueden ir anexando mosaicos sin dejar huecos entre ellos.

AUTOEVALUACIÓN.

I. En la figura dada a la derecha, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se intersectan en x. Contesta lo que se pide:



1. ¿Qué ángulos son agudos?

2.- ¿Qué ángulos son obtusos?

B

3. ¿Son $\angle 3$ y $\angle 4$ adyacentes?

4. ¿Qué ángulos son opuestos por el vértice?

5. ¿Qué par de ángulos son opuestos por el vértice?

II. Encuentra el valor de los ángulos que se piden.

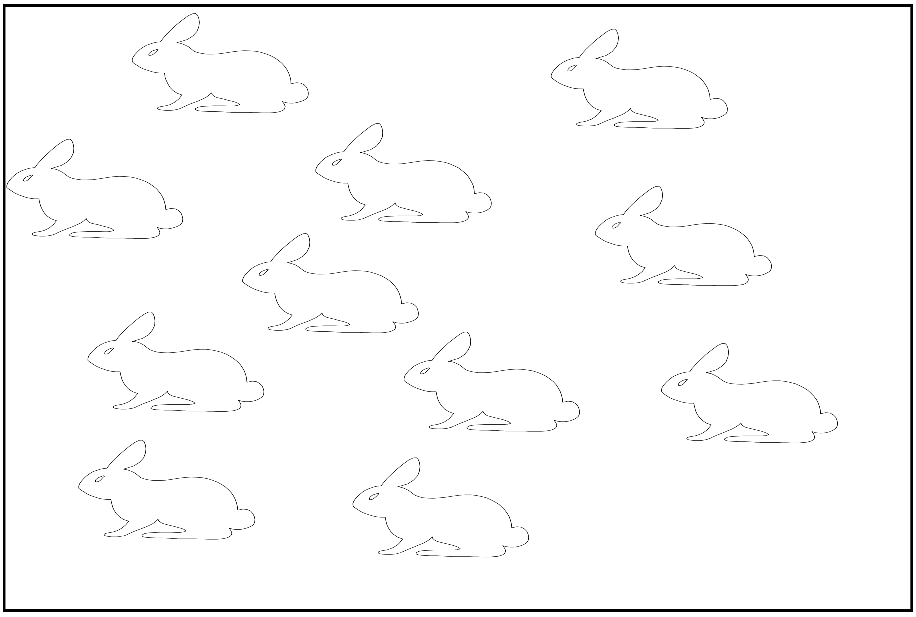
1. ¿Cuál es el complemento de un ángulo de 15º 37'? _________________
2. ¿Cuál es el suplemento de un ángulo de 128º 42' 25''? _________________
3. ¿Cuál es el conjugado de un ángulo de 256º 38' 43''? _________________

III. Realiza la siguientes conversiones

1. 30º a rad
2. 15º 17' a rad
3. 25º 02' a rad
4. 3.7 rad a grados
5. 7 rad a grados
6. 6.5 rad a grados

ACTIVIDADES REMEDIALES

Si tienes dudas sobre ángulos, te invito a resolver el siguiente problema:



Un granjero quiere separar estos once conejos construyendo once corrales exactamente con cuatro vallas rectas. ¿Cómo puede hacerlo? (Las vallas se pueden cruzar).

Seguimos informando....

TRIÁNGULOS.

Desde la escuela primaria se sabe qué un triángulo fácilmente se puede identificar pero en este tema trataremos de dar una definición más de esa figura.

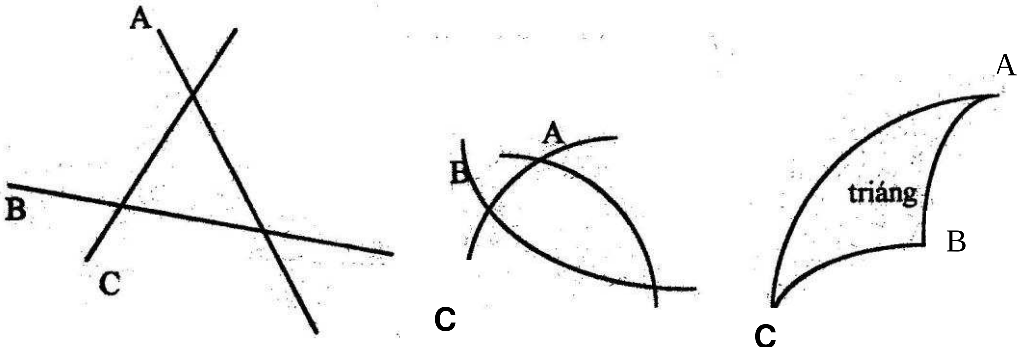
3.4.1. DEFINICIÓN, NOTACIÓN Y CLASIFICACIÓN DEL TRIÁNGULO.

Si en un plano se tienen tres puntos no alineados a los que llamaremos A, B, C, y se trazan líneas que los unan de dos en dos, el espacio interior formado es un triángulo.

El trazo de una poligonal cerrada que pase por los tres puntos no alineados forman un triángulo.

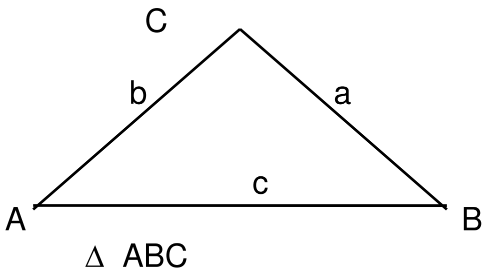
Cuando las figuras geométricas o polígonos están formados por tres líneas, pertenecen al subconjunto llamado triángulos.

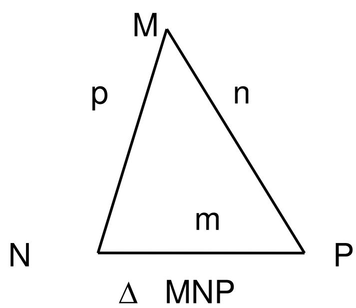
Cuando tres líneas se cruzan en diferentes puntos, el espacio que queda entre ellas es un triángulo.



Triángulo es todo polígono o figura geométrica limitada por tres lados, que forman entre sí tres ángulos.

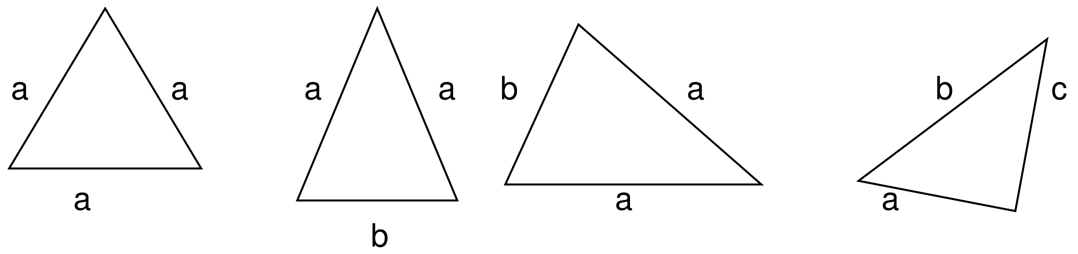
Notación. Un triángulo se nombra colocando tres letras mayúsculas en sus vértices y en los lados opuestos las correspondientes letras minúsculas, siguiendo siempre una rotación contraria al movimiento de giro de las manecillas del reloj.





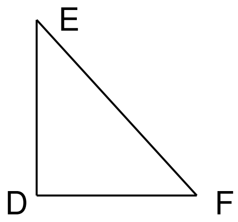
CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

Por la longitud de sus lados, los triángulos son:
. **Equiláteros**. Cuando los tres lados del triángulo tienen la misma longitud.
. **Isósceles**. El triángulo presenta dos de sus lados iguales y el otro desigual.
. **Escalenos**. Los tres lados del triángulo son de diferente longitud.



equilátero i s ó s c e l e s escaleno

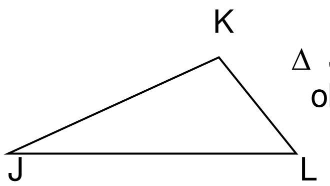
Por la medida de sus ángulos, los triángulos son:



∆ DEF es un triángulo rectángulo. El lado EF es la hipotenusa. DE y EF son los catetos

Definición :
Un **triángulo rectángulo** es un triángulo que tiene un ángulo recto.

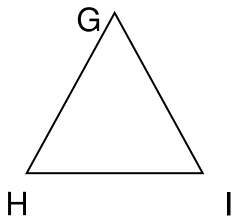
D es un ángulo recto.



∆ JKL es un triángulo obtusángulo.

Definición:
Un **triángulo obtusángulo** es triángulo que tiene un ángulo obtuso

K es un ángulo obtuso.



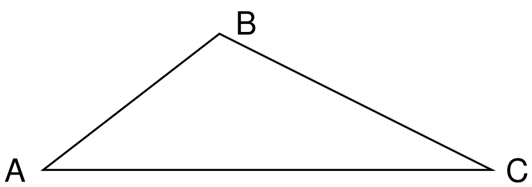
∆ GHI es un triángulo equiángulo.

Definición:
Un **triángulo equiángulo** es un triángulo que tiene tres ángulos y sus tres lados congruentes.

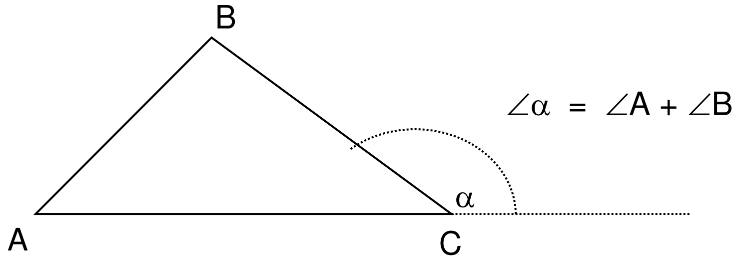
PROPIEDADES DE LOS TRIÁNGULOS.

Propiedad de los ángulos interiores de un triángulo. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos.

$$\angle A + \angle B + \angle C = 2R = 180º$$



Propiedades del ángulo exterior de un triángulo. Todo ángulo exterior a un triángulo es igual a la suma de los otros dos interiores no adyacentes a él.



Por la propiedad de los ángulos interiores de un y triángulo:

$\angle A + \angle B + \angle C = 2R$
$\angle\alpha + \angle C = 2R$ por ser adyacentes

Comparando las dos igualdades, los segundos miembros son iguales y ello implica que los primeros también son .

$\angle A + \angle B + \angle C = \angle\alpha + \angle C$

Pasamos C al primer miembro, con la operación contraria.

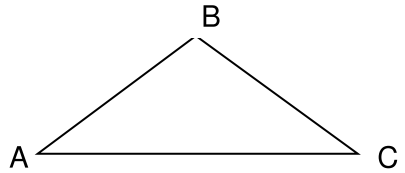
$\angle A + \angle B + \angle C - \angle C = \angle\alpha$

Como C está sumado y restando se elimina.

$\angle A + \angle B = \angle\alpha$

Propiedades relativas a los lados y ángulos de un triángulo.

1) En un triángulo, cada lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia



$AB < BC + AC$
$AB > BC - AC$

2) En todo triángulo, a lados iguales se oponen ángulos iguales y, cuanto mayor es el lado, mayor es el ángulo opuesto.

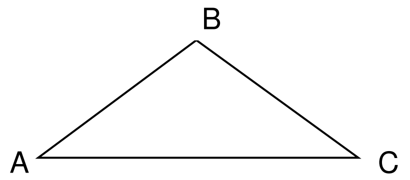
Congruencias:

3) En un triángulo solamente puede haber un ángulo recto u obtuso.

4) Cada ángulo de un triángulo equilátero vale 60º.

Criterios de igualdad de triángulos.

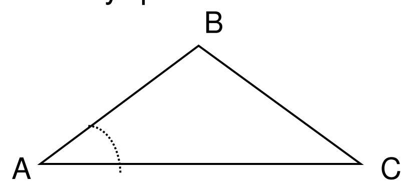
Primer criterio. Dos triángulos son iguales cuando dos lados y el ángulo comprendido son respectivamente iguales.



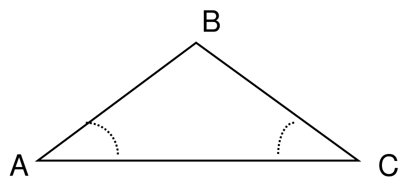
Problema: Dado ∆ ABC, construir otro triángulo igual a él, que tenga dos lados iguales y que el ángulo comprendido también sea igual.

Solución: Se traza una semirrecta de origen. A´, se transporta la longitud del lado AC. Se transporta el ángulo A y, en el lado del ángulo A´, se transporta el lado AB, determinando el punto B´,.

Se une B´ con C´ y queda determinado el triángulo.

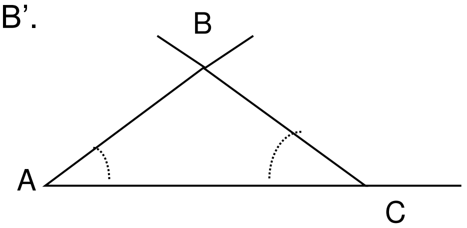


Segundo criterio. Dos triángulos son iguales cuando tienen un lado y dos ángulos adyacentes a el respectivamente iguales.



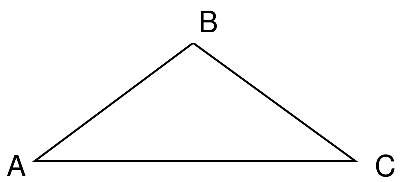
Problema: Dado ∆ ABC, construir otro triángulo igual a el, que tenga un lado y los dos ángulos adyacentes a el iguales.

Solución: Se traza una semirrecta de origen A' y se transporta el lado AC y sobre dicho lado los ángulos A y C. Donde se cortan los lados del ángulo A y C determinan el punto B'.



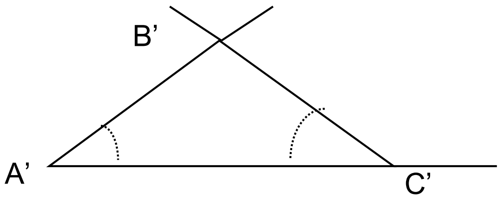
AC = A' C'
A = A' ABC = A'B'C'
C = C'

Tercer criterio. Dos triángulos son iguales cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales.



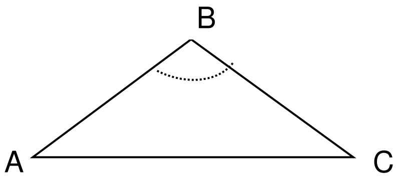
Problema: Dado ∆ ABC, construir otro triángulo igual a él, que tenga los tres lados iguales.

Solución: Se traza una semirrecta de origen A’ y se transporta el lado AC. Se toma con el compás la longitud del segmento AB y en el extremo A’ se transporta dicha medida haciendo un arco y, de la misma forma, se transporta la longitud de BC al extremo C’, cortando el arco anterior que determina el punto B’.



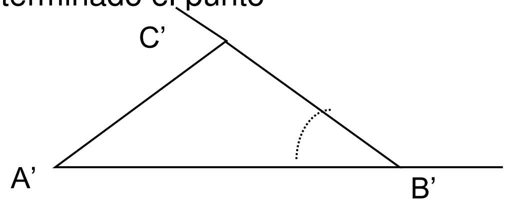
AB = A’ B’
AC = A’ C’ ∆ ABC = ∆ A‘ B’ C’
BC = B’ C’

Cuarto criterio. Dos triángulos son iguales cuando tienen dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos, respectivamente iguales.



Problema: Dado ∆ ABC, construir un triángulo igual al dado.
AC > AB
B opuesto AC

Solución: Se traza una semirrecta de origen A´ y se transporta AB y, sobre el extremo B´, se construye él ángulo igual a B. Con él compás se toma la longitud AC y se transporta al extremo A´, haciendo un arco que corte el lado del ángulo B´, quedando determinado el punto



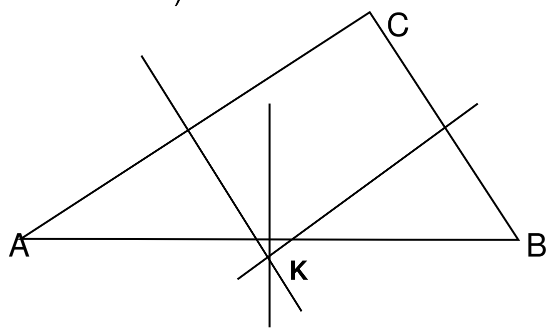
Continúa conociendo más sobre triángulos...

RECTAS Y PUNTOS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO

Las rectas notables del triángulo son: mediatriz, bisectriz, altura y mediana.
Los puntos notables del triángulo son: circuncentro, incentro, ortocentro y baricentro.

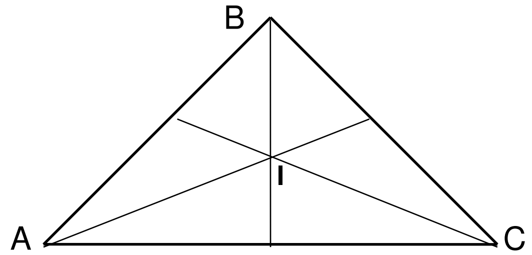
Mediatriz es una recta perpendicular trazada en el punto medio de cada lado del triángulo a su vértice opuesto.

Las mediatrices de un triángulo concurren en un punto llamado ***circuncentro***, que equidista de los vértices del mismo y es centro de una circunferencia circunscrita a él (**K** circuncentro)



K equidista de A, de B y de C

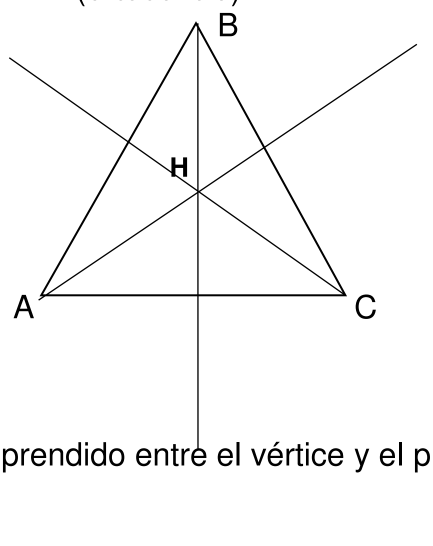
Bisectriz: Es la semirrecta interior del ángulo que lo divide en dos partes iguales.
Las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo concurren en un punto llamado ***incentro***, que equidista de los lados del mismo y es centro de una circunferencia inscrita en él. (**I** incentro)



I equidista de AB, de BC y de AC

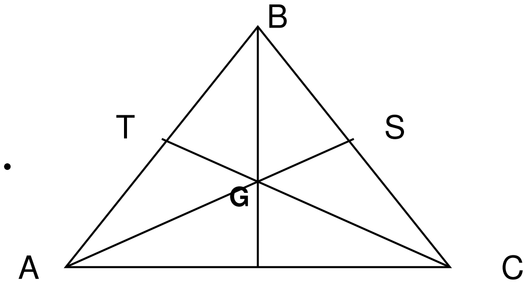
Altura es el segmento perpendicular comprendido entre el vértice y el lado opuesto.
Las rectas a las que pertenecen las alturas de un triángulo concurren en un punto llamado ***ortocentro.***

H (ortocentro)



Mediana es el segmento comprendido entre el vértice y el punto medio del lado opuesto.

Las medianas de un triángulo concurren en un punto llamado baricentro, que dista 2/3 del vértice de la mediana correspondiente.



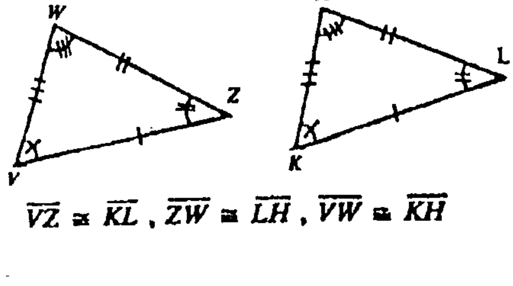
(**G** baricentro)

POSTULADOS DE CONGRUENCIA DE TRIANGULOS.

Aplicar los postulados de congruencia de triángulos para saber si dos triángulos son congruentes.

Como los triángulos son polígonos, podemos afirmar que dos triángulos son congruentes (de la misma forma y mismo tamaño), cuando los tres lados y los tres ángulos de uno, son congruentes con sus homólogos lados y ángulos del otro triángulo, respectivamente.

Si en $\triangle$ VZW y $\triangle$ KLH sabemos, como se indica en la figura, que:



$\overline{VZ} \cong \overline{KL}$, $\overline{ZW} \cong \overline{LH}$, $\overline{VW} \cong \overline{KH}$

Y además, que $\angle$ V = $\angle$ K, $\angle$ Z = $\angle$ L y $\angle$ W = $\angle$ H, entonces podemos asegurar que los dos triángulos son congruentes, y para establecer esto simbólicamente, necesitamos hacer corresponder a cada vértice su homólogo, esto es,

Δ VZW = Δ KLH.

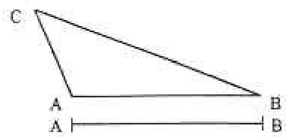
Por lo anterior, si queremos saber si dos triángulos cualesquiera son congruentes, necesitamos primero saber si las seis partes (lados y ángulos) de uno, son congruentes con las seis partes homólogas del otro.

Sin embargo, existen algunas reglas que nos van a permitir establecer una congruencia entre dos triángulos de una manera más rápida y sencilla, será suficiente conocer ciertas congruencias de elementos homólogos para asegurar que los triángulos son congruentes.

Estas reglas son tres enunciados que consideramos como verdaderos y que llamaremos postulados de congruencias de triángulos.

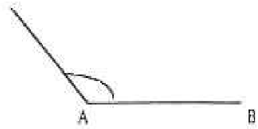
Los tres postulados de congruencia de triángulos se reconocen con los nombres de LLL (lado- lado- lado). LAL (lado- ángulo- lado) y ALA (ángulo-lado- ángulo) y se puede obtener de la siguiente manera:

Para dibujar un triángulo A´ B´ C´ que sea congruente con el triángulo ABC, se puede seguir tres diferentes caminos :

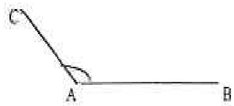


A) Camino de postulado LAL.

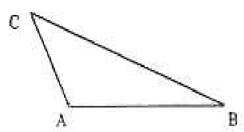
1.- Traza un segmento A´ B´ que sea con gruente con el segmento AB del Δ ABC.



2.- Medir con el transportador, el ángulo A y trazar el ángulo A´congruente con el ángulo A.



3.- Medir el segmento AC del Δ ABC y trazar el segmento A´C´congruente con AC.



4.- Unir C´con B´para completar el Δ A´B´ C´, que podemos comprobar es congruente con el triángulo dado ABC.

Hemos dibujado el triángulo A´B´C´ haciendo que A´B´ = [illegible] y que A´C´= AC. Esto es que los dos triángulos tengan dos pares de lados congruentes y los ángulos comprendidos entre dichos lados también sean congruentes.

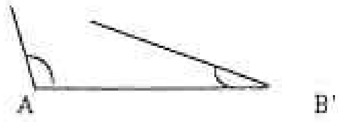
Postulado LAL. Si dos lados y el ángulo comprendido de un triángulo son congruentes respectivamente con dos lados y él ángulo comprendido de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

B) Camino de postulado ALA.

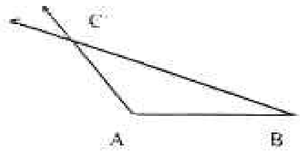
1.- Trazar un segmento A´B´ que sea congruente con el segmento AB del triángulo ABC.

2.- Medir los ángulos A y B del triángulo ABC y trazar ∠A y ∠ B´ que sean congruentes con ∠s A y B, respectivamente.

3.- Marcar con C´ el punto de intersección de los rayos que salen de A´y de B´. Así tenemos el triángulo A´B´C´ que podemos comprobar es congruente con el triángulo ABC dado.



Hemos dibujado el triángulo A´B´C´ haciendo que A´B´= AB, el ángulo A' congruente al ángulo Ay el ángulo B´ al ángulo B. Esto es que los dos triángulos tengan dos pares de ángulos congruentes y los lados comprendidos entre dichos ángulos también sean congruentes.



Postulado ALA. Si dos ángulos y el lado comprendido de un triángulo son congruentes respectivamente, con dos ángulos y el lado comprendido de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

C) Camino del postulado LLL.

Recortar el triángulo ABC y utilizarlo como molde para dibujar el triángulo A´B´C´. De esta manera estamos haciendo que coincidan los tres lados del triángulo ABC, con los tres lados del triángulo A´B´C´. Esto es que A´B´= AB, A´C´= AC y B´C´= BC.

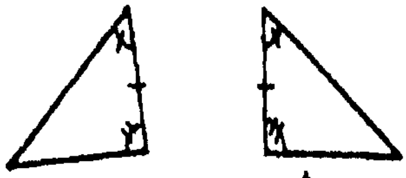
Postulado LLL. Si los tres lados de un triángulo son congruentes, respectivamente con los 3 lados de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

Estos tres postulados de congruencia de triángulos los usaremos para descubrir y probar algunas propiedades de las figuras geométricas que estudiaremos

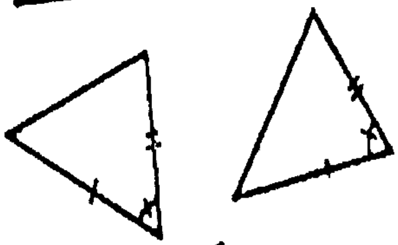
.

Aquí lo usaremos para saber si dos triángulos que reúnen ciertas condiciones (tienen algunas partes congruentes) son triángulos congruentes.

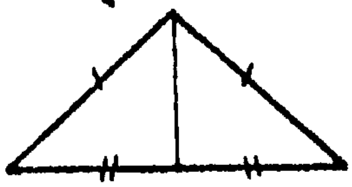
Ejemplos:

a) 

Son los triángulos congruentes porque cumplen con el postulado **ALA.**

b) 

Son triángulos congruentes porque cumplen con el postulado **LAL.**

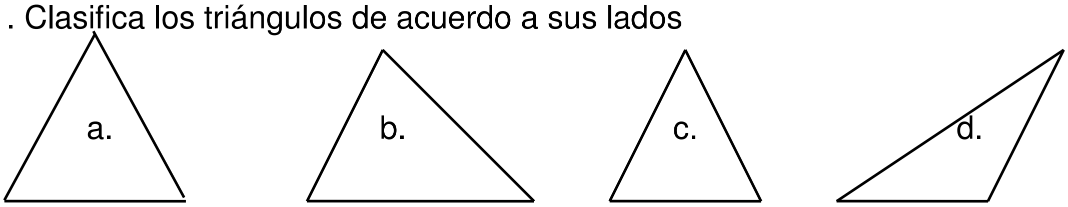
c) 

Son triángulos congruentes porque cumplen con el postulado **LLL**. (observa que estos triángulos tienen un lado común y que es congruente consigo mismo.)

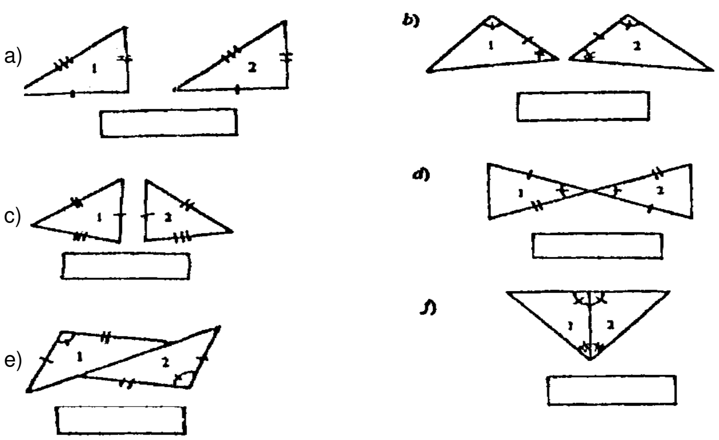
¿Lograste asimilarlo?

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

1. Clasifica los triángulos de acuerdo a sus lados

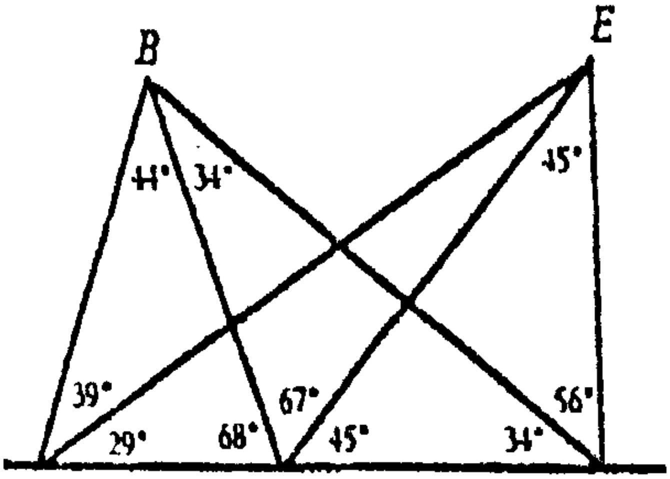


2.- Las siguientes parejas de triángulos 1 y 2 son congruentes, anota en el rectángulo el nombre del postulado que se aplica para asegurar la congruencia.

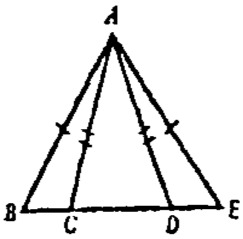


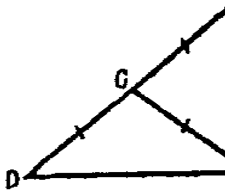
3. Investiga en algún libro de Geometría que esté a tú alcance como se construyen los triángulos, sigue los pasos indicados y construye uno de cada tipo. Necesitarás compás y regla.

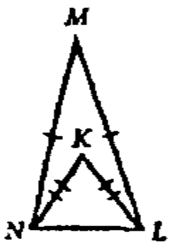
4. Identifica los triángulos como acutángulo, rectángulo u obtusángulo.



5. En los ejercicios siguientes, los segmentos que tienen marcas idénticas se consideran congruentes. Cita todos los pares de ángulos que son congruentes.







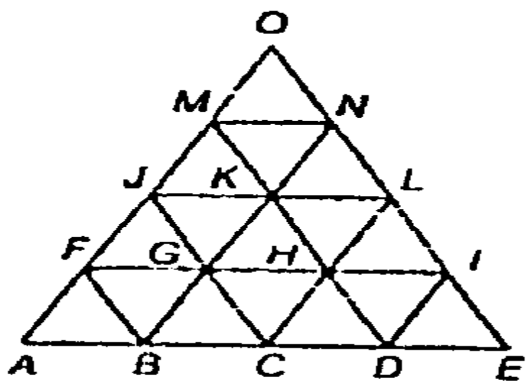
6. La medida de los ángulos de la base de un triángulo isósceles se representa por x, y el ángulo del vértice, por 2x + 30. Encuentra la medida de cada ángulo.

7. Las medidas de los ángulos de un triángulo se representan por 2x + 15, x + 20 y 3x +25. Encuentra las medidas de los ángulos.

Para que confirmes la comprensión del tema sobre triángulos, resuelve los siguientes ejercicios.

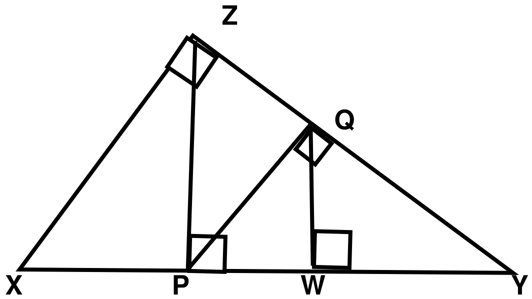
AUTOEVALUACIÓN

1. En esta figura hay 27 triángulos equiláteros. Cita todos los posibles. ¿Cuántos encontraste?



2. Prueba que la bisectriz del ángulo del vértice de un triángulo isósceles, es la bisectriz perpendicular de lado opuesto.

3. En la figura de abajo, identifica las alturas y sus triángulos respectivos.



(4) Construir un triángulo que tenga un ángulo de 50° Y los dos lados que lo forman midan 5 cm y 3.5 cm.

(5). Construir un triángulo que tenga un ángulo que mida 60° y los dos lados que lo forman midan tres pulgadas y cuatro pulgadas. Trazar las tres medianas y señalar el baricentro.

(6). Construir un triángulo que tenga un lado que mida 7 cm y los dos ángulos adyacentes midan 30° y 70°. Trazar las tres alturas y señalar el ortocentro.

(7) Construir un triángulo que tenga un lado que mida 4 pulgadas y los ángulos adyacentes midan 40° y 50°. Trazar las bisectrices y señalar el incentro.

(8)Construir un triángulo equilátero de 5 cm de lado. Trazar las mediatrices y señalar el circuncentro.

(9)'Construir un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 3 cm y 4 cm.

(10) Construir un triángulo rectángulo que tenga un cateto que mida 8 cm y cuya hipotenusa mida 10 cm. Dibujar las tres alturas.
(11) Construir un triángulo rectángulo que tenga un cateto que mida 6 cm y tenga un ángulo agudo de 50°, Dibujar las tres mediatrices.
(12) Construir un triángulo rectángulo que tenga una hipotenusa que mida 5 cm y un ángulo que mida 45°. Dibujar las tres medianas.
(13) ¿Cuánto vale el ángulo de un triángulo equilátero?
(14) Dos ángulos de un triángulo miden 40° y 30° respectivamente.
¿Cuánto mide el tercer ángulo y cada uno de los ángulos exteriores?
(15) Los ángulos en la base de un triángulo isósceles miden 40° cada uno. ¿Cuánto mide el ángulo opuesto a la base?

Si tuviste complicaciones para la aplicación de tus conocimientos en la solución de los problemas planteados.

ACTIVIDADES

1. Puedes consultar cualquier libro de Geometría que esté a tú alcance para que vuelvas a intentarlo.

2.- Sí aún después de la consulta te quedan dudas, acude con tú maestro asesor. el podrá auxiliarte.

3.- Además de resolver los problemas propuestos, si lo deseas, presenta a tú asesor otros ejercicios resueltos por ti sobre este tema.

DEMOSTRACIÓN DE TEOREMAS.

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Toda recta paralela a un lado de un triángulo, con las rectas a que pertenecen los otros dos lados, un triángulo semejante al dado.

1) Los puntos P' y N' pertenecen a $\overline{PA}$ y $\overline{AN}$

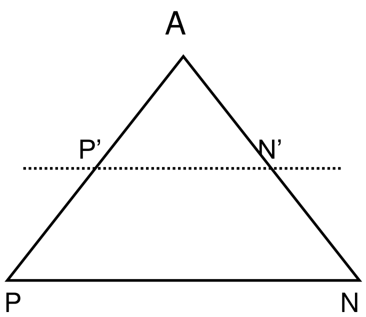
En el Δ PAN; P'N' $/\!/$ PN $\Rightarrow$ Δ PAN $\cong$ Δ P'A'N'

$\angle P = \angle P'$ Por ser correspondiente entre paralelas

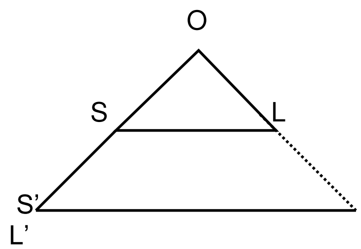
$\angle N = \angle N'$ Por ser correspondiente entre paralelas

$\angle A$ es común

$\frac{PA}{P'A'} = \frac{AN}{A'N'} = \frac{PN}{P'N'}$ Por consecuencia de Thales



2) Los puntos S' y L' son exteriores a los lados OS y OL y pertenecen a los $\overrightarrow{OS}$ y $\overrightarrow{OL}$

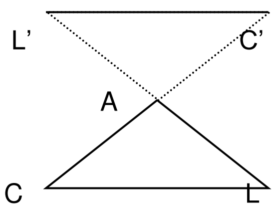


En el Δ SOL, S'L' // SL $\angle$ O es común

Δ SOL $\cong$ Δ S'O'L' $\angle$ S = $\angle$ S Por ser correspondien-
$\angle$ L = $\angle$ L tes entre paralelas

$\dfrac{SO}{S'O'} = \dfrac{LO}{L'O'} = \dfrac{SL}{S'L'}$ Por consecuencia de Thales

3) Los puntos C y L son exteriores a los lados CA y AL y pertenecen a las semirrectas $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{LA}$



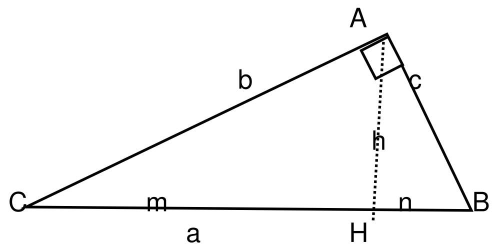
Δ CAL, L'C' // LC $\Rightarrow$ Δ CAL $\cong$ Δ C'A'L'

TEOREMA DEL CATETO

Sea un triángulo rectángulo ABC (rectángulo en $\angle$ A); se cumple que cualquier cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.

Es decir:

$\frac{a}{b} = \frac{b}{m}$ y $\frac{a}{c} = \frac{c}{m}$



Demostración:
Los triángulos ABH, AHC y ABC, son proporcionales, ya que tienen tres ángulos iguales
Δ ABC y Δ ABH tienen un ángulo recto
$\angle$ ABH = $\angle$ ABC Por construcción
Luego tienen los lados homólogos proporcionales.

TEOREMA DE LA ALTURA.

La altura de un triángulo rectángulo es medio proporcional entre las dos partes en que divide a la hipotenusa.

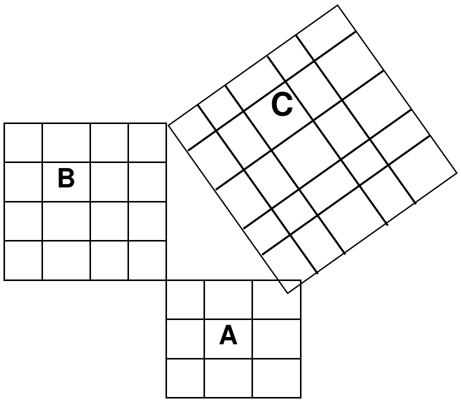
$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n}$$

Demostración:
Basta tener en cuenta la proporcionalidad de los triángulos Δ ABH y Δ ACH de la figura anterior

Gran descubrimiento.

Uno de los Teoremas más conocidos en Geometría Plana es el ***Teorema de Pitágoras,*** llamado así por el matemático griego Pitágoras, quien observó que para todos los triángulos rectángulos, el área de un cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

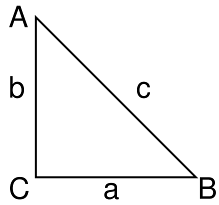
En los ejemplos de abajo, encuentra la forma de contar las pequeñas unidades cuadradas que te muestran que el área de los cuadrados A y B es igual al área del cuadrado C sobre la hipotenusa.



TEOREMA DE PITÁGORAS.

Si el triángulo ABC, es rectángulo, entonces el cuadrado de la longitud de la hipotenusa, es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

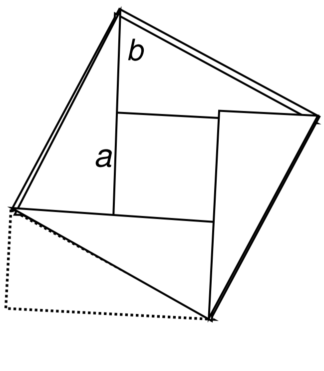
Fórmula: $c^2 = a^2 + b^2$



Análisis:
Construye cuadrados sobre el triángulo ABC como los que se muestran en el ejemplo anterior.

El cuadrado sobre a, tendrá área a^2
El cuadrado sobre b, tendrá área b^2
El cuadrado sobre c, tendrá área c^2

El cuadrado sobre el lado c, consta de cuatro triángulos congruentes con el Δ ABC y un cuadrado. La figura muestra la longitud de un lado del cuadrado pequeño, a-b.
Puede encontrarse el área del cuadrado grande, sumando las áreas de los cuatro triángulos y el área del cuadrado pequeño.
El área de un triángulo es ½ de ab
El área del cuadrado pequeño es $(a-b)^2$
Así $c^2 = 4(1/2\ ab) - (a-b)^2 = 2ab - (a^2 - 2ab + b^2) = a^2 - b^2$, *entonces*
$c^2 = a^2 - b^2$



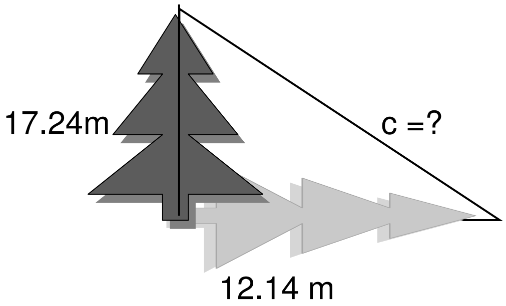
A ⟵ *a – b*

b *c*

C *a* *B*

APLICACIÓN:

La altura de un árbol es de 17.24 m ¿Qué distancia hay de la punta del árbol al final de la sombra?



DATOS	FÓRMULA	SOLUCIÓN
b = 12.14 m	$c^2 = a^2 + b^2$	$c^2 = (17.24\ m)^2 + (12.14\ m)^2$
a = 17.24 m		$c^2 = 293.78m^2 + 147.38m^2$
c = ?		$c = \sqrt{441.16m^2}$
		c = 21 m

Resultado = 21 m

Así que la distancia que hay de la punta del árbol al final de la sombra es de 21m.

Del teorema anterior se deducen los siguientes ***corolarios:***

a) ***En todo triángulo rectángulo la hipotenusa es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos.***

Si $c^2 = a^2 + b^2$, despejando c, quedaría

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

b) ***En todo triángulo rectángulo, cada cateto es igual a la raíz cuadrada de la diferencia entre el cuadrado de la hipotenusa y el cuadrado del otro cateto.***

Si $c^2 = a^2 + b^2$, transportando términos queda:

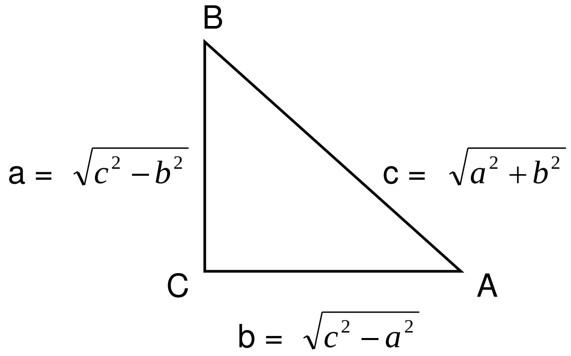
Despejando a

$a^2 + b^2 = c^2$
$a^2 = c^2 - b^2$
$a = \sqrt{c^2 - b^2}$

Despejando b

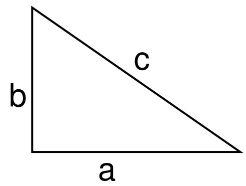
$a^2 + b^2 = c^2$
$b^2 = c^2 - a^2$
$b = \sqrt{c^2 - a^2}$

Las fórmulas de los anteriores corolarios permiten conocer los catetos de todo triángulo rectángulo.

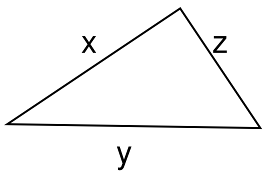


ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

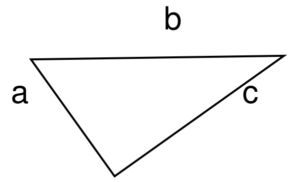
En los ejercicios siguientes establece si la ecuación dada es correcta o no.



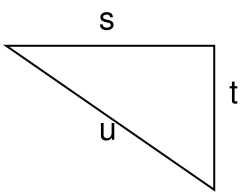
$c^2 = a^2 + b^2$ (   )



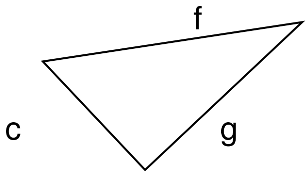
$x^2 + y^2 = z^2$ (   )



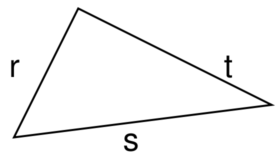
$c^2 = a^2 + b^2$ (   )



$s^2 = u^2 - t^2$ (   )

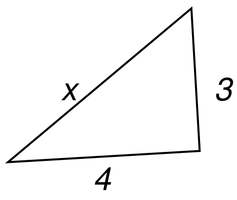


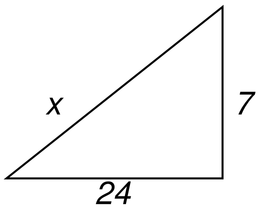
$f = \sqrt{c^2 + g^2}$ (   )

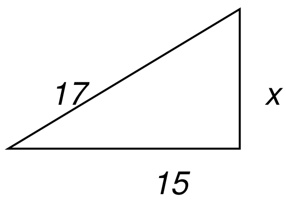


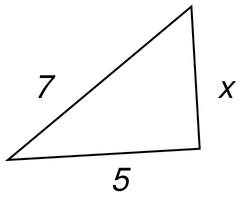
$r = \sqrt{s^2 + t^2}$ (   )

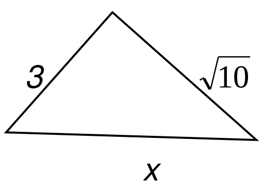
En los siguientes ejercicios, emplea la información dada en cada figura para encontrar el valor de x

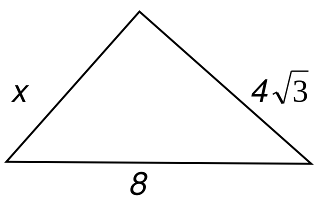






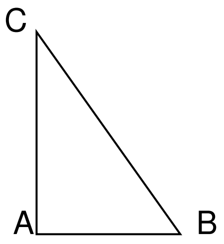






Para resolver los siguientes ejercicios, emplea el triángulo ABC

13. Si AB = 6 y AC = 8, entonces BC = _____?
14. Si BC = 15 y AB = 9, entonces AC = _____?
15. Si AC = 2 y AB = 2, entonces BC = _____?
16. Si BC = 15 y AB = 10, entonces AC = _____?



¿Cómo usarlo?, Continúa ejercitándote.

TEOREMA DE PITÁGORAS COMO MEDIO DE SOLUCIÓN A PROBLEMAS PRÁCTICOS.

Muchos problemas se pueden resolver si se conoce y aplica correctamente el TEOREMA DE PITÁGORAS. Como es sabido, este teorema se refiere a los triángulos rectángulos y a las relaciones que existen entre las dimensiones d sus lados.
A continuación se te presentará una serie de problemas que deberás resolver utilizando las herramientas que se te proporcionaron anteriormente, te sugerimos que realices todos los dibujos necesarios anotándoles los datos correspondientes.

1) Una puerta mide 6 pies y 6 pulgadas de altura por 36 pulgadas de ancho. ¿Cuál es el ancho mayor que debe tener un tablero para que quepa por esta muerta?

2) Una escalera de 6 pies se coloca contra una pared. Con la base a 2 pies de la pared. ¿A qué altura del suelo está la parte superior de la escalera?

3) Una persona viaja 8 Km. al norte, 3 Km. al oeste, 7 Km. al sur y 11 Km. al norte ¿A qué distancia está la persona del punto original?

4) Una caja tiene 24 cm. de largo, 8 cm. de ancho y 10 cm. de altura. ¿Cuál es la longitud de la diagonal?

5) Si la cancha de voleibol de tu escuela mide 18 m de largo por 9 m de ancho, encuentra la medida de la diagonal.

6) La plataforma de un vehículo tiene 1.80 m de alto, si se quiere subir cierta carga, tendría que ponerse una madera que sirviera como rampa, si esta madera tiene 5 m de largo. ¿A qué distancia de la plataforma quedará apoyada en el suelo?

¡Ahora si! Verifica lo aprendido.

AUTOEVALUACIÓN.

1) Una vez solucionados los seis problemas anteriores entrega a tu asesor los dibujos con que los ejemplificaste para resolverlos.

2) De acuerdo con los conocimientos que ya adquiriste, realiza las siguientes actividades:

a) Si fueras a colocar un tirante de alambre para un poste de concreto. ¿A qué distancia del poste asegurarías el tirante si el poste mide 2.7 m y El tirante tiene una longitud de 4.5 m? *(realiza el esquema)*

b) Una persona está tratando de localizar a su perro que se ha extraviado. Camina 5.4 Km. hacia el sur y 1.85 Km. al oeste antes de encontrarlo. ¿A qué distancia se encuentra del punto de partida?

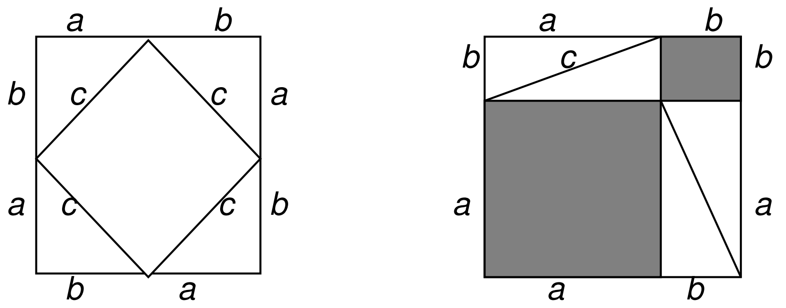
c) Revisa los resultados que obtuviste y compáralos con los de tus compañeros de grupo, si tienes dudas, consúltalo con ellos y con tu asesor, si tienes algún error rectifícalo.

Si deseas saber más sobre este teorema te invitamos a realizar las siguientes

ACTIVIDADES.

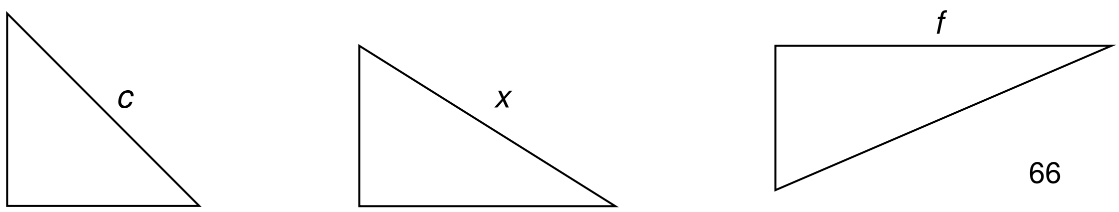
1) Forma círculos de estudio con tus compañeros y planteén problemas reales donde intervenga la utilización del Teorema de Pitágoras.

2) Con los siguientes cuadros, cuyo lado mide a+b, demuestra que el Teorema de Pitágoras es verdadero.



3) Traza un triángulo rectángulo con hipotenusa c y catetos a y b.
   a) Encuentra la longitud del cateto a, si c = 15 y b = 8.
   b) Encuentra la longitud del cateto b, si a = 6 y c = 14

4) Plantea la ecuación dada por el Teorema de Pitágoras, utilizando las literales que aparecen en cada triángulo.



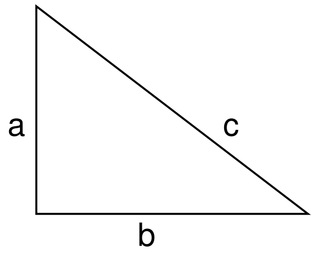
a *y* *e* *g*

b *z*

________________ ________________ ________________

5) ¿Cuáles de las afirmaciones acerca de los catetos a y b y de la hipotenusa c de un triángulo rectángulo son ciertas y cuáles son falsas?

a) $c^2 = a^2 + b^2$ ( )
b) $a^2 = b^2 - c^2$ ( )
c) $a^2 = b^2 + c^2$ ( )
d) $b^2 = a^2 - c^2$ ( )
e) $b^2 = c^2 - a^2$ ( )
f) $a^2 = c^2 - b^2$ ( )



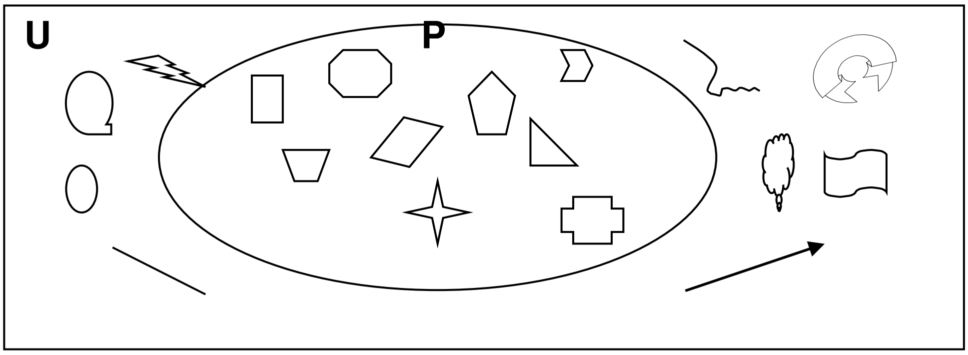
Conoce otras figuras.

Las figuras geométricas formadas por rectas son muy comunes en nuestro mundo.

POLÍGONOS.

Un polígono es la figura plana cerrada simple que está formada completamente por segmentos de recta.

En el conjunto **P** se encuentran contenidos algunos polígonos, en el resto del conjunto **U** hay otras figuras que no son polígonos. Lo que distingue a unos de otros lo tenemos en la definición anterior.

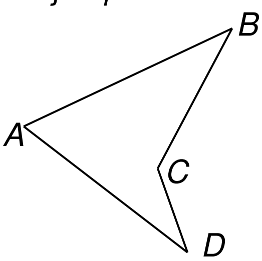


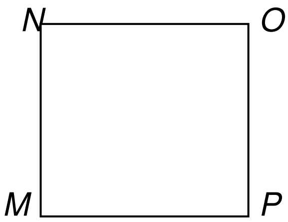
Veamos por qué no son polígonos las otras figuras.

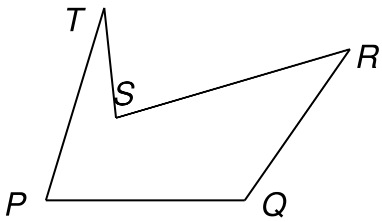
En un polígono podemos encontrar diferentes elementos, como son: Lados y vértices.

*Los segmentos de recta que forman a un polígono se llaman **Lados.***
*Los puntos donde se intersecan dos rectas se llaman **Vértices.***

Por ejemplo:







En el polígono ABCD, AB, BC, CD, y DA son lados, A, B, C y D son vértices.

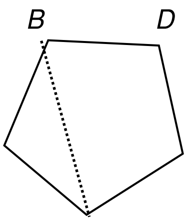
En el polígono MNOP MN, NO, OP y PM son lados y M.N.O. y P son vértices.

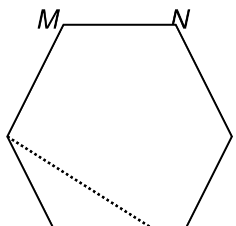
En el polígono PQRST PQ, QR, RS, ST y TP son lados, P, Q, R, S y T son vértices.

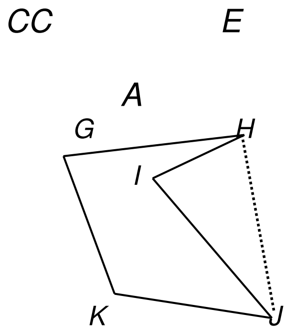
Los polígonos se indican nombrando las letras de sus vértices consecutivos, comúnmente por orden alfabético. Observa las figuras anteriores y lee su nombre en cada caso.

Además de los lados y los vértices de los polígonos, existen otros elementos, las diagonales.

Una diagonal es el segmento que une dos vértices no consecutivos de un polígono.







Los extremos de AB son vértices no consecutivos del polígono ABCDE. AB es una de las diagonales del polígono.

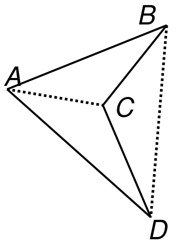
R O

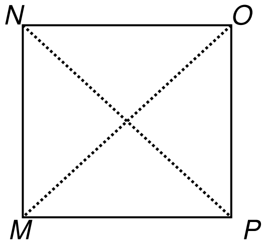
Q P

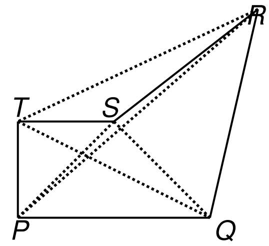
Por lo menos una de las diagonales de este polígono no está en el interior.

Cada diagonal de este polígono, como PR, está en el interior del polígono.

Otros ejemplos de polígonos con su diagonal son:



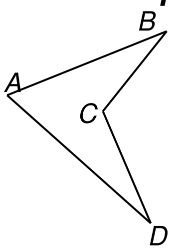


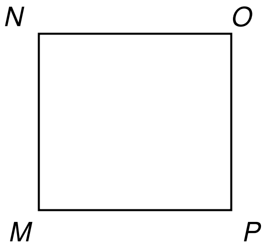


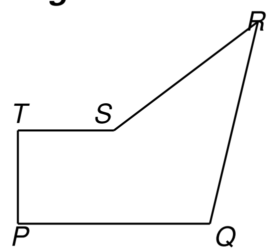
$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ $\overline{NP}$ y $\overline{MO}$ $\overline{PR}$, $\overline{PS}$, $\overline{QS}$, $\overline{QT}$ y $\overline{RT}$

Aparte de los lados vértices y diagonales, en un polígono se encuentran determinados ángulos, los cuales pueden ser interiores y exteriores.

Los ángulos interiores de un polígono son aquellos que están detrminados por dos segmentos consecutivos del polígono.





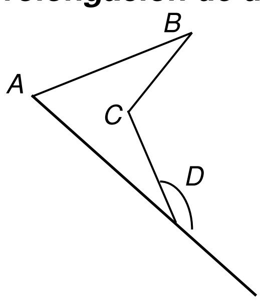


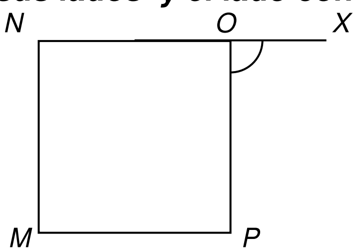
Cualquier polígono tiene cierto número de ángulos asociados, uno por cada vértice.

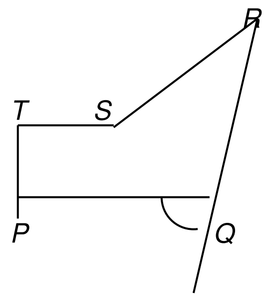
Considerando la primera figura, los ángulos que están determinados son:

∠ A**B**C, ∠ B**C**D, ∠ C**D**A, ∠ D**A**B, que también pueden nombrarse con la letra que se encuentra en cada vértice. ∠ B, ∠ C, ∠ D, ∠ A.

Un ángulo externo a un polígono es el que está determinado por la prolongación de uno de sus lados y el lado consecutivo a él.







E
Al prolongar AD y unir con CD, tenemos el ángulo externo CDE

Al prolongar NO y unir con OP, tenemos el ángulo externo POX

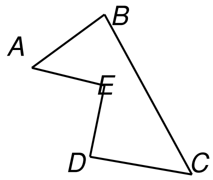
W
Al prolongar RQ y unir con PQ, tenemos el ángulo externo PQW

¡A trabajar!

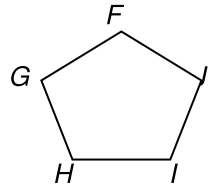
ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

1. Para cada una de las figuras dadas, encuentra los elementos que se te piden y anota sus nombres en las líneas correspondientes.

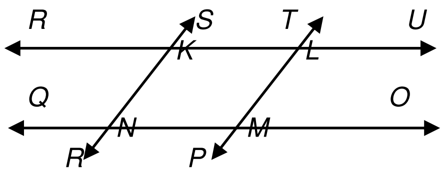
a) En el polígono ABCD, los vértices son: _______________ y las diagonales son: _________________



b) En el polígono FGHIJ, los ángulos interiores son: _________________ y las diagonales que pueden trazarse son: __________________________

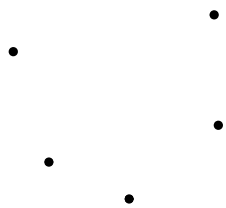


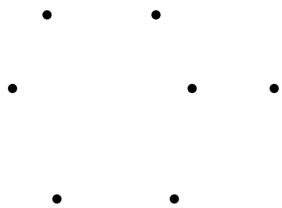
c) Para el polígono KLMN, los ángulos interiores son: _______________ y los ángulos exteriores son_________ ______________________________

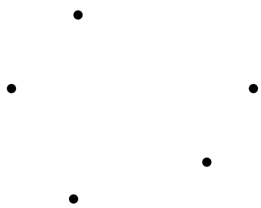


2. En los siguientes incisos, cada conjunto de puntos corresponde a los vértices de un polígono. Traza en cada caso los lados con color azul y las diagonales con color rojo.

a) 

b) 

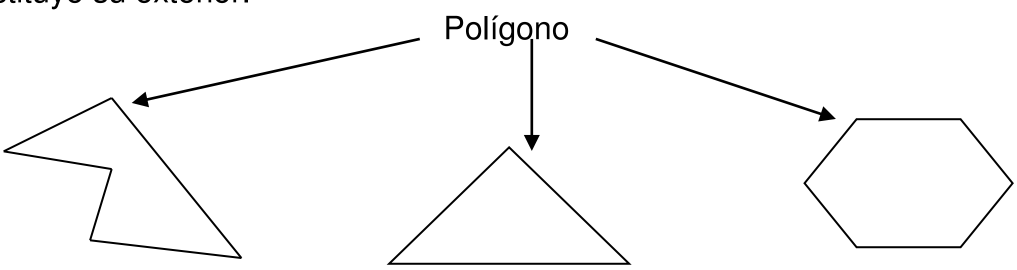
c) 

d) 

e) 

DEFINICIONES, NOTACIÓN Y CLASIFICACIÓN DE POLÍGONOS.

Cada polígono divide al plano en dos regiones, una región del plano queda encerrada por los lados del polígono, es su interior, la otra región no encerrada constituye su exterior.



Exterior Exterior

Interior

Interior Interior

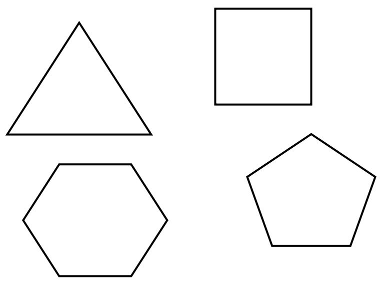
Exterior

La segunda clasificación de los polígonos se hace por el número de lados, estos son:

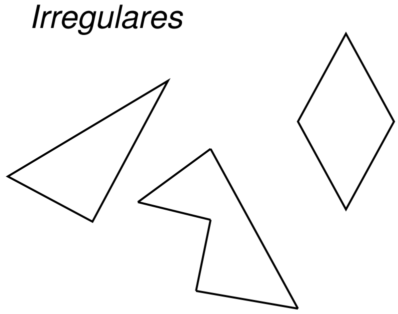
3 lados	*Triángulo*	*8 lados*	*Octágono*
4 lados	*Cuadrilátero*	*9 lados*	*Eneágono*
5 lados	*Pentágono*	*10 lados*	*Decágono*
6 lados	*Hexágono*	*11 lados*	*Undecágono*
7 lados	*Heptágono*	*12 lados*	*Dodecágono*

La última clasificación que haremos de los polígonos, es en base a la medida de sus lados y sus ángulos.

Regulares

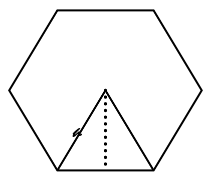


Irregulares



Los polígonos que tienen sus lados y ángulos congruentes (de la misma medida) entre si, se llaman <u>polígonos regulares</u>.
Los polígonos que no cumplen con el requisito anterior, se llaman <u>polígonos irregulares.</u>

Los polígonos regulares son: Triángulo equilátero, cuadrado, pentágono regular, hexágono regular, etc.
Los polígonos irregulares más conocidos son: cualquier triángulo que no sea equilátero, el rectángulo, el rombo, el trapecio, etc.
Cuando en un polígono regular se traza un segmento de recta, desde el centro del polígono hasta el punto medio de cualquiera de sus lados, este segmento recibe el nombre de ***apotema (a)***



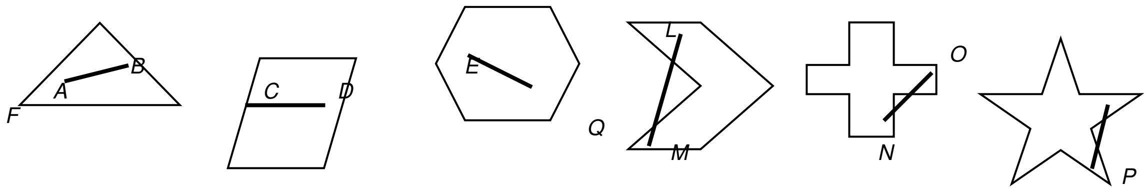
Resumiendo:

El interior de un polígono es la región del plano que está encerrada por los lados del polígono.
El exterior de un polígono es la región del plano que no contiene puntos del polígono ni de su región interior.
Los conceptos anteriores son más útiles para iniciar la clasificación de los polígonos.

La primera clasificación se hace atendiendo a su región interior.

Polígonos

Convexos ***Cóncavos***



Son polígonos convexos aquellos en los que al tomar dos puntos cualesquiera de su interior, el segmento que los une también está en su interior

A y B están en el interior AB también
C y D están en el interior CD también
E y F están en el interior EF también

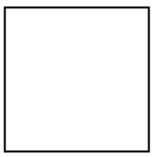
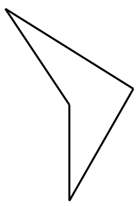
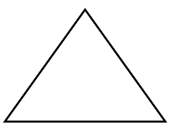
Los polígonos que no son convexos se llaman cóncavos. Los polígonos anteriores no son convexos porque

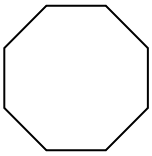
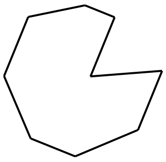
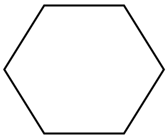
L y M están en el interior mero LM no lo está.
N y O están en el interior, pero NO no lo está.
P y Q están en el interior, pero PQ no lo está.

¡Polipracticando!

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:

1. Observa los polígonos de la izquierda y anota el nombre que recibe cada uno de ellos, de acuerdo al criterio que se expresa. (fíjate en el ejemplo)

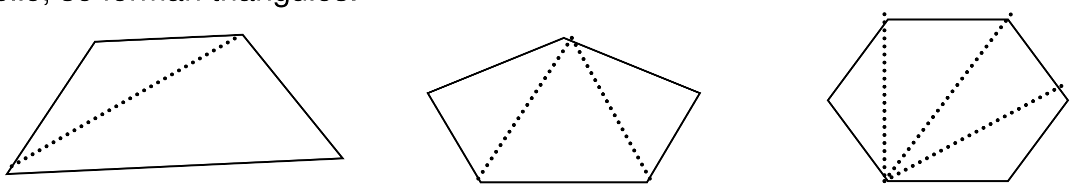
Polígono	***Nombre de su región interior***	***Por el número de lados***	***Por la congruencia de lados y ángulos***
	CONVEXO	CUADRILÁTERO	REGULAR
			
			

DIAGONALES Y ÁNGULOS INTERNOS DE UN POLÍGONO CONVEXO.

Como lo aprendiste en el tema anterior, un polígono convexo es aquel que al tomar dos puntos cualesquiera de su interior, el segmento que los une también está en su interior. También sabes ya, trazar diagonales en un polígono.
En base a esto, aprenderemos un poco más sobre los polígonos convexos.

Primero pregúntate: ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de un polígono? Para responder esto se trazad diagonales desde un solo vértice del polígono, con ello, se forman triángulos.



Cuadrilátero Pentágono Hexágono

En cada uno de estos casos, la suma de las medidas de los ángulos del polígono, corresponde a la suma de las medidas de los ángulos de los triángulos. A partir de esta observación se presenta la siguiente tabla:

Polígono	*Número de lados*	*Número de triángulos*	*Suma de las medidas de los ángulos*
Cuadrilátero	4	2	$2(180^\circ) = 360^\circ$
Pentágono	5	3	$3(180^\circ) = 540^\circ$
Hexágono	6	4	$4(180^\circ) = 720^\circ$

. . *n – gono*	. . *n*	. . *n – 2*	. . *(n – 2)180°*

TEOREMA: ***La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados es (n – 2) 180°***

En el caso particular de los polígonos regulares, es decir, aquellos que sólo poseen lados y ángulos de la misma medida, para conocer cuanto mide cada ángulo, se tendría que dividir la suma total de la medida de los ángulos interiores entre el número de ángulos.

Ejemplo.

1. En un cuadrado, la suma de los ángulos interiores es:
   (n – 2) 180°
   (4 – 2) 180° = 2(180°) = 360°

Los 360° tendrían que dividirse entre cuatro, el número de ángulos que posee.

$\frac{360}{4} = 90°$ ***CADA ÁNGULO MIDE 90°***

2. En el caso de un pentágono regular.
   (n – 2) 180°
   (5 – 2) 180° = 3(180°) = 540

$\frac{540}{5} = 108°$ ***CADA ÁNGULO MIDE 108°***

TEOREMA: ***La medida de un ángulo interior de un polígono regular de n lados es:*** $\frac{(n-2)}{n}180°$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

En los ejercicios del 1 al 3, se te proporciona el número de lados de un polígono convexo. ¿En cuántos triángulos dividen al polígono las diagonales trazadas desde uno de sus vértices?

1. *10*
2. *25*
3. *x*

En los ejercicios del 4 al 9, se proporciona el número de lados de un polígono convexo. Encuentra la suma de las medidas de los ángulos de los polígonos.

4. *6*
5. *12*
6. *24*
7. *36*
8. *100*
9. *p*

En los ejercicios del 10 al 15, se proporciona la suma de las medidas de los ángulos interiores. Encuentra el número de lados del polígono.

10. *7020°*
11. *1980°*
12. *6120°*
13. *1800°*
14. *1260°*
15. *3420°*

En los ejercicios del 16 al 21, se proporciona el número de lados de un polígono regular, Encuentra la medida del ángulo en cada vértice del polígono.

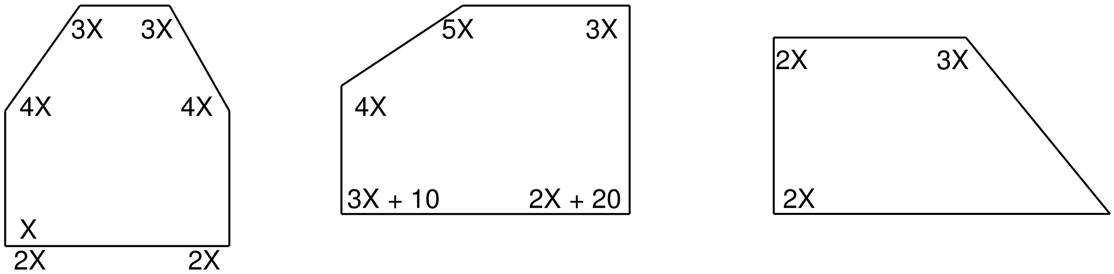
16. *7* 17. *9* 18. *10*

19. *15* 20. *20* 21. *100*

22) La suma de las medidas de siete ángulos de un octágono, es 1000° ¿Cuál es la medida de un ángulo?

23) ¿Cuántos lados tiene un polígono regular si cada ángulo interior mide 108°? ¿Cuántos lados tendría si cada ángulo midiese 144°?

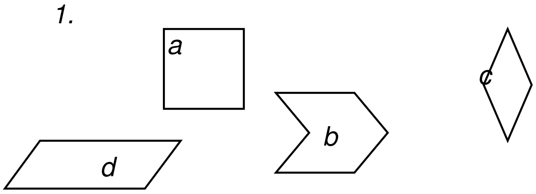
24) Determina la medida de los ángulos interiores de los siguientes polígonos.



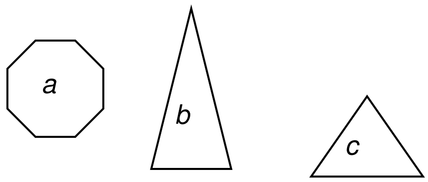
AUTOEVALUACIÓN.

En los ejercicios del 1 al 4, selecciona la figura que no es un polígono regular y explica por qué no lo es.

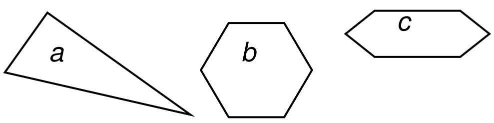
1.



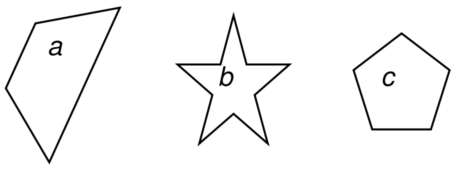
2.



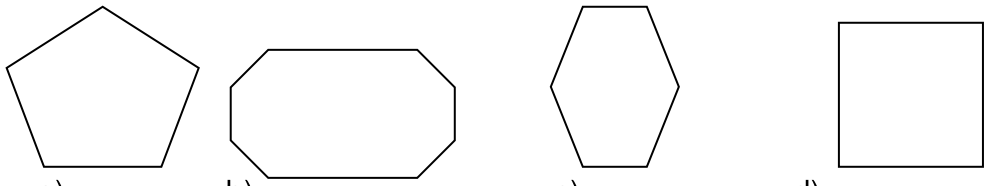
3.



4.



5. ¿Cuáles de las siguientes figuras, son polígonos regulares?



a) b) c) d)

Traza tantas diagonales como sea posible, para cada uno de los polígonos anteriores.

Completa cada proposición con las palabras que la hagan verdadera.

a) Los polígonos que tienen sus lados y ángulos congruentes entre si, se llaman: ____________________

b) Un polígono de tres lados, es un: ____________________

c) Todos los polígonos regulares, también son: ____________________

d) Los polígonos que no son convexos, se llaman: ____________________

e) Un polígono de diez lados, es un: ____________________

f) Un heptágono, es un polígono que tiene: ____________________

g) Los polígonos que no son regulares, se llaman: ____________________

h) El polígono que tiene cuatro lados, se llama: ____________________

i) Los polígonos que tienen sus lados y ángulos congruentes entre si, se llaman: ____________________

j) Un polígono de tres lados, es un: ____________________

k) Todos los polígonos regulares, también son: ____________________

l) Los polígonos que no son convexos, se llaman: ____________________

m) Un polígono de diez lados, es un: ____________________

n) Un heptágono, es un polígono que tiene: ____________________

o) Los polígonos que no son regulares, se llaman: ____________________

p) El polígono que tiene cuatro lados, se llama: ____________________

Si todavía no encuentras satisfacción con tu aprendizaje alcanzado, te recomendamos.

ACTIVIDADES

1. Observa analíticamente tu entorno y encuentra todos los polígonos que se formen, menciona por lo menos 9 y clasifícalos

2. Encuentra la medida de cada ángulo interno de un polígono regular de siete lados.

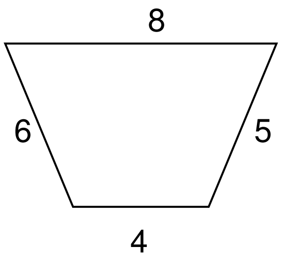
3. Determina el número de lados de un polígono regular, si la suma de las medidas de sus ángulos internos es 2700°.

4. ¿Cuántos lados tiene un polígono regular, si cada uno de sus ángulos interiores mide 140°?Determina el número de lados de un polígono regular, si la suma de sus ángulos interiores es de 4140°

5. Encuentra la medida de cada ángulo interno de un polígono regular de ocho lados.

PERÍMETRO Y ÁREA

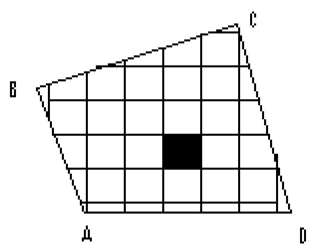
El perímetro de cualquier polígono se busca sumando todos sus lados.



$P = 6+8+5+4 = 23$

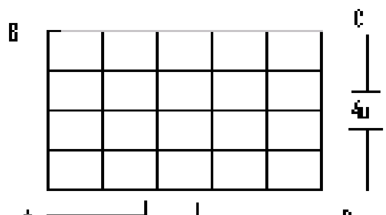
El área de una figura plana, en este caso un polígono, es el número de veces que una unidad cuadrada queda contenida en su superficie.

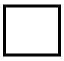
Unidad cuadrada



Area = número de unidades cuadrdas contenidas en el polígono

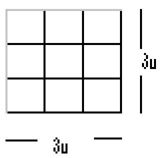
Por ejemplo, analicemos un caso específico de área.



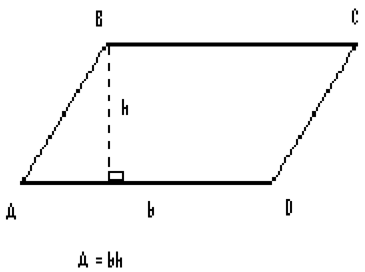


Como observarás en la figura anterior, la unidad cuadrada está contenida 20 veces en el rectángulo ABCD, es decir, su área es de 20 unidades cuadradas. De aquí, concluimos que el área de un rectángulo es igual a **la base por su altura**.

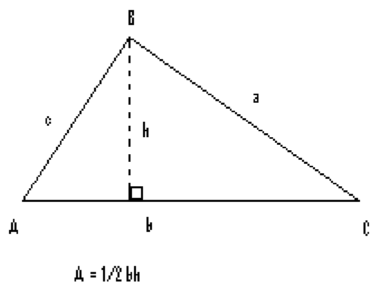
En un **cuadrado,** la base y la altura son iguales, entonces su área es igual **a lado al cuadrado**, como se ilustra a continuación.



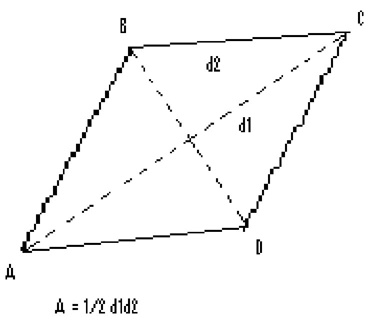
A = 3u x 3u = l^2 = 9 unidades cuadradas



Para un **paralelogramo**, el área será igual al producto de un lado por la altura correspondiente a ese lado.

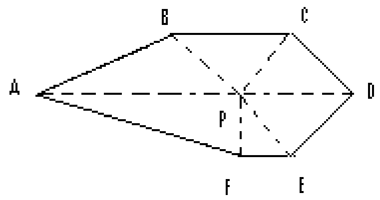


En un triángulo, el área es igual a la mitad del producto de un lado por la altura correspondiente.



En el caso de un rombo, su área es igual a la mitad del producto de sus diagonales.

El área de un polígono cualquiera se puede determinar descomponiéndolo en triángulos, ya sea por sus diagonales o por segmentos trazados de los vértices a un punto interior, tal como se muestra en la siguiente figura:



AUTOEVALUACIÓN

1. Calcula el área de un cuadrado si:

   a) Su lado es 8.3
   b) Su diagonal vale 5.6

2. Calcula el área de un rectángulo si:

   a) Su diagonal es igual a 10 y su altura es 6
   b) Su base es 15.3 y su altura 3.5
   c) Su altura es 2.5 y su base es el triple de su altura

3. Calcula el área de un triángulo si:

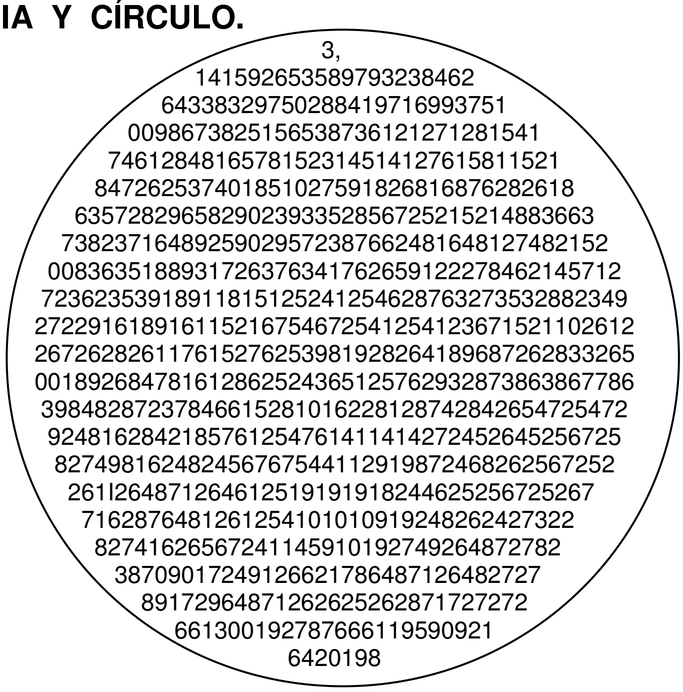
   a) Su altura es 9.3 y su base 6.8
   b) Es equilátero de lado igual a 8
   c) Es isósceles con base igual a 4 y lado 6

4. Calcula el área de un rombo si:

   a) Sus diagonales son 8 y 9
   b) Una diagonal e igual a 10 y el lado es 13
   c) Sus diagonales son 11 y 7 respectivamente

¡Una figura fuera de serie!

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO.

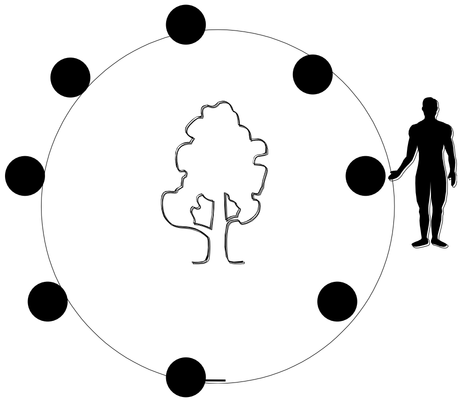


El número ***p*** es la relación entre las medidas de una circunferencia y su diámetro. En la ilustración, se reproducen algunas de sus cifras exactamente las primeras mil y puede comprobarse que éstas no siguen ninguna pauta periódica.

LA HERENCIA DE JUAN

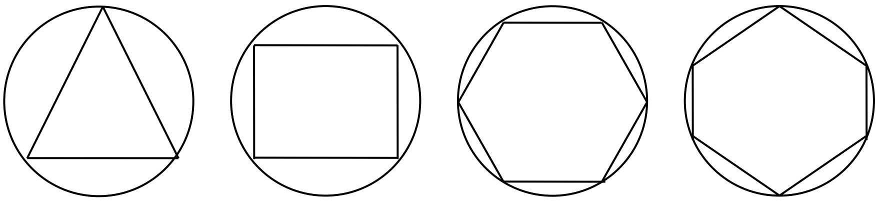
El padre de Juan en su testamento le dejó el siguiente mensaje:
" Encontrarás un tesoro en un lugar a 10 metros del único árbol de durazno que hay en el patio de la casa ". Juan se dispone a localizar el tesoro, para lo cual

tomo una cuerda de 10 metros fijando uno de los extremos al árbol, mientras que con el otro extremo va marcando una línea donde tendrá que excavar.



Como verán, Juan ha trazado una figura geométrica ya conocida por ti, la ***circunferencia.***

La circunferencia se origina geométricamente a partir de una secuencia de polígono que al ir aumentando el número de lados se asemeja más a ella.



3 lados 4 lados 6 lados 8 lados etc.

DEFINICIÓN, NOTACIÓN Y ELEMENTOS DE UNA CIRCUNFERENCIA

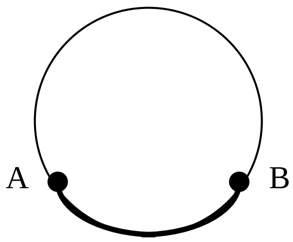
La circunferencia es el conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de otro punto llamado ***centro***.
La distancia que existe del centro a cualquiera de los puntos de la circunferencia se llama ***radio***.

NOTACION DE LA CIRCUNFERENCIA:

Una circunferencia o un círculo se denota con las letras del centro "O" y del radio "r" escrita de la siguiente manera: c (o,r) por lo general se reemplazan las palabras circunferencia o círculo por el símbolo .
En el caso del ejemplo del tesoro buscado por Juan ¿ El radio es de ? _______

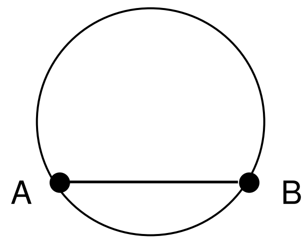
LOS ELEMENTOS DE LA CIRCUNFERENCIA :

Si Juan decide caminar sobre un trecho de la circunferencia desde el punto "A" hasta el punto "B" .

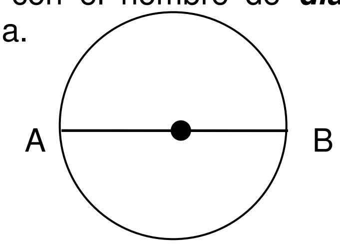


La parte comprendida entre dos puntos situada sobre la circunferencia se llama arco, y se denota ∩ AB que se lee ***arco*** de la circunferencia.

Una vez que se encuentra en el punto "B", Juan decide regresar hasta A, pero siendo tan flojo, tomo un camino en línea recta para su regreso.



El segmento de recta que se describe al unir dos puntos de la circunferencia se llama ***cuerda***, y se denota $\overline{AB}$, se lee cuerda de la circunferencia.
Si decides atravesar la circunferencia pasando por el centro, describe una trayectoria que se conoce con el nombre de ***diámetro***, la notación será la misma para cualquier cuerda.



¿Cuántos diámetros hay en una circunferencia?
¿Cómo son sus medidas ?
¿Cuál es la cuerda de mayor tamaño en la circunferencia?

¡Para pensar...!

π en la Biblia.

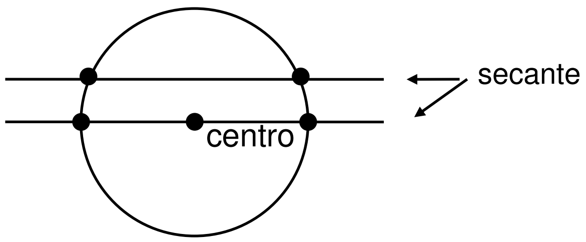
El libro de los Reyes (7,23) dice: *" Después hizo un depósito de bronce fundido. De forma redonda, media diez codos de un extremo a otro y cinco codos de profundidad. Tenia treinta codos de perímetro ".* Parece claro que los instrumentos de medida de los israelitas no eran muy precisos. ¿ Cuál es el valor de π que se deduce de ese versículo de la Biblia ?

El número π (pi) es la relación (cociente) entre las longitudes de la circunferencia y su diámetro. Es un número irracional, es decir, no existe ninguna fracción que nos dé exactamente su valor y, actualmente, se conocen varios millones de sus cifras; sin embargo, basta con una aproximación de diez cifras decimales para determinar la circunferencia terrestre con un error inferior a 2 cm. Para la mayoría de los cálculos es suficiente tomar como valor aproximado el de 3.14; si se necesita más precisión, por ejemplo para el diseño de motores, se toma con cuatro decimales (3.1416).

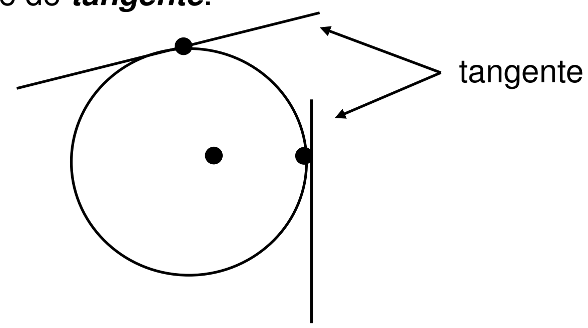
Algunos de los valores notables de π utilizados a lo largo de la historia han sido los siguientes:
- Papiro Rhind (hacia 1800 a. C.): 3.1604
- Arquímedes (287 - 212 a. C.): entre 3.14084 y 3.14285 (22/7)
- Herón de Alejandrina (siglo I): 3.1408

- Tolomeo (90 ? - 168 ?): 3.1416
- Liu-Hu (hacia 250): 3.14159
- Tsu-Chung-Chi (430 - 501): 3.1415926 (355/113)
- Viéte (1579: entre 3.1415926535 y 3.1415926537

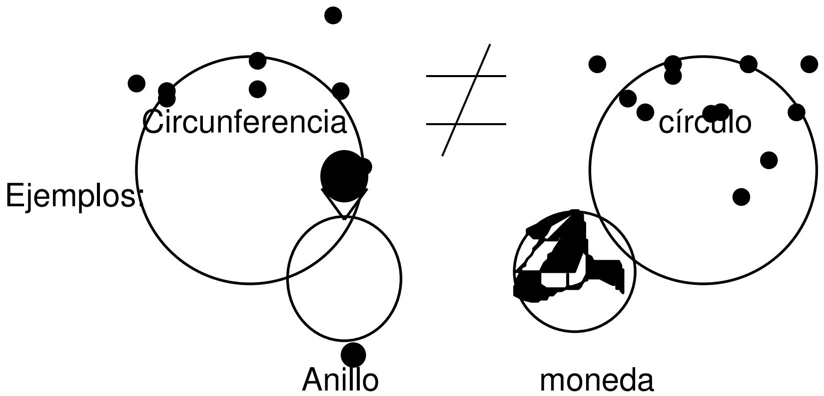
Cuando una recta cruza a la circunferencia en dos de sus puntos recibe el nombre de ***secante***.



Si la recta en vez de cruzar a la circunferencia la toca solamente en un punto, entonces recibe el nombre de ***tangente***.



No confundas los conceptos de circunferencia con círculo ya que círculo son todos los puntos de la circunferencia y de los interiores a ella misma.



Continuamos circulando...

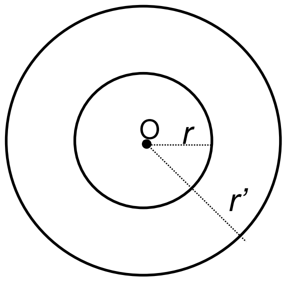
DETERMINACIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA.

POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIAS.

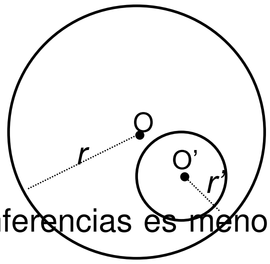
Dos circunferencias pueden ser:

Concéntricas: Son circunferencias que tienen el mismo centro y distinto radio.

C (O,*r*) y C (O,*r'*) concéntricas.

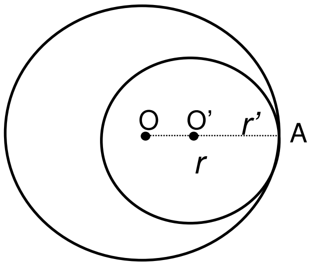


Interiores: Cuando estando una dentro de la otra, no tienen el mismo centro, ni ningún punto común.



C (O,*r*) y C (O',*r'*) excéntricas interiores
(La distancia entre los centros de dos circunferencias es menor a la diferencia de los radios).

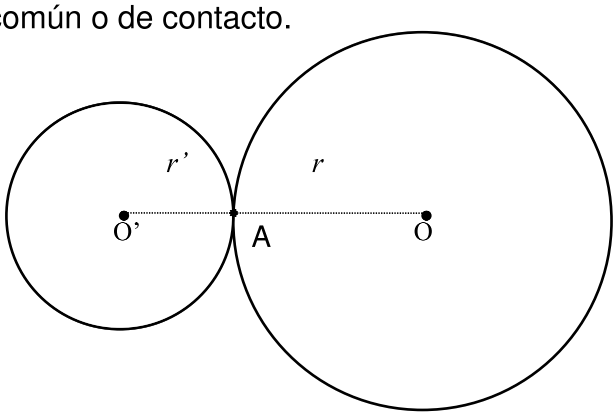
Tangentes interiores: Cuando, estando una dentro de la otra, tienen un punto único de contacto.



C (O, *r*) y C (O', r') tangentes interiores en A.
(La distancia entre los centros de dos circunferencias tangentes interiores es igual a la diferencia entre los radios).

OO' = *r* - *r'*

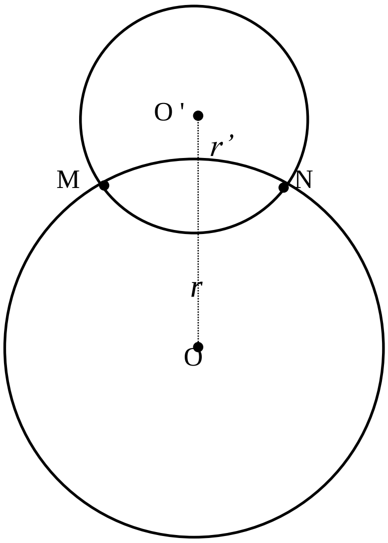
Tangentes exteriores: Cuando, estando una fuera de la otra, tienen un punto común o de contacto.



C (O, *r*) y C (O', *r'*) secantes en M y N.
(La distancia entre los centros de dos circunferencias secantes es menor que la suma de sus radios, pero mayor que la diferencia).

OO' < *r* + *r'* y OO' > *r* - *r'*

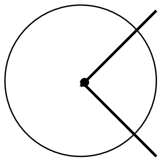
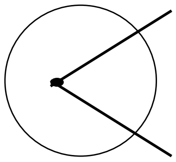
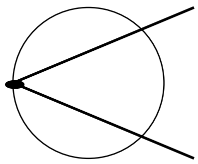
Secantes: Tienen dos puntos de contacto.



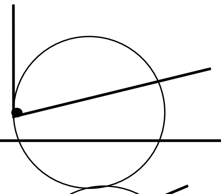
ÁNGULOS EN UNA CIRCUNFERENCIA:

Según la posición del vértice de un ángulo con respecto a una circunferencia, el ángulo puede ser: ***central***, ***interior***, ***inscrito***, ***semiinscrito*** o ***exterior***.

1) Completa en la tabla siguiente las características de cada ángulo, observando su dibujo correspondiente.

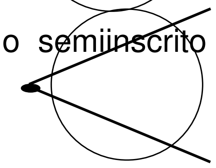
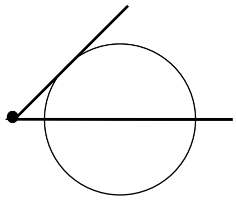
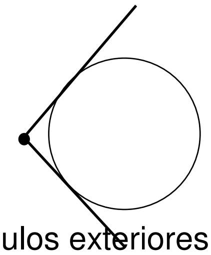
Ángulos	***Características***
 Ángulo central	¿El vértice del ángulo central coincide con el centro de la circunferencia?______________
 Ángulo interior	El vértice del ángulo interior es un punto cualquiera _______________
	El vértice del ángulo inscrito es un punto _________ y los lados son rectas ___________________

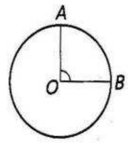
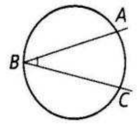
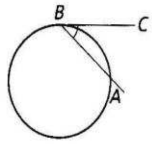
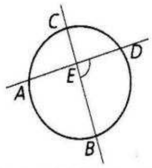
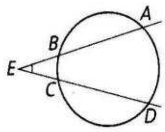
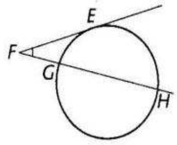
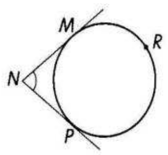
Ángulo inscrito



Ángulo semiinscrito

El vértice del ángulo semiinscrito es un punto ____________los lados son rectas ____________

a)  b)  c)  Ángulos exteriores	El vértice del ángulo exteriores es un punto______________ y los lados pueden ser: a) rectas_____________________ b) rectas_____________________ c) rectas_____________________

ÁNGULO	CARACTERÍSTICAS	FIGURA	MEDIDA
Central	Abertura formada por dos radios de la circunferencia		$\measuredangle AOB = \widehat{AB}$
Inscrito	Tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son dos cuerdas		$\measuredangle ABC = \frac{\widehat{AC}}{2}$
Seminscrito	Tiene su vértice en la circunferencia y uno de sus lados es una tangente y el otro una cuerda		$\measuredangle ABC = \frac{\widehat{AB}}{2}$
Interior	Tiene su vértice en cualquier punto del círculo y sus lados son dos secantes		$\measuredangle BED = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2}$
Exterior	Tiene su vértice fuera de la circunferencia y sus lados puede ser: a) Dos secantes		$\measuredangle AED = \frac{\widehat{AD} - \widehat{BC}}{2}$
	b) Una secante y una tangente		$\measuredangle EFG = \frac{\widehat{HE} - \widehat{EG}}{2}$
	c) Dos tangentes		$\measuredangle MNP = \frac{\widehat{PRM} - \widehat{MP}}{2}$

Circuanalízate...

AUTOEVALUACIÓN.

I. Conteste las siguientes preguntas:

1. Explique la diferencia entre circunferencia y círculo.

2.- ¿Qué son los puntos interiores y exteriores de la circunferencia?

3. ¿Cuál es la notación de la circunferencia?

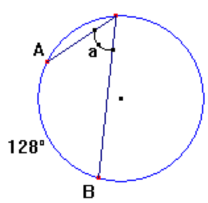
4. Nombre de los elementos de una circunferencia.

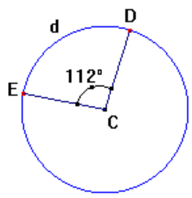
5. ¿Qué es un arco circunferencial?

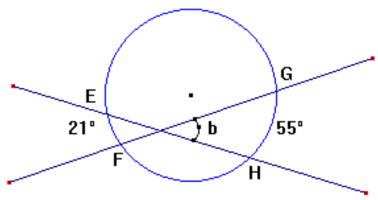
6. ¿Cómo se define la cuerda en la circunferencia?

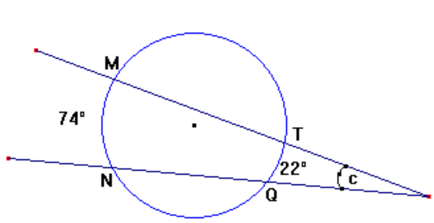
7. Explique la diferencia entre radio y diámetro de la circunferencia.

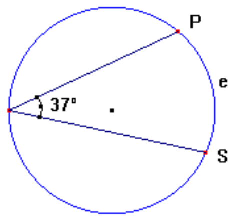
<u>INSTRUCCIONES</u>: Encuentra los valores que se piden, de acuerdo con los datos de las figuras.











$\angle a =$ $\quad$ $arco\ \mathrm{d} =$ $\quad$ $\angle b =$ $\quad$ $\angle c =$ $\quad$ $arco\ \mathrm{e} =$

¿No circulaste?

ACTIVIDADES REMEDIALES

Si no has logrado el aprendizaje deseado:

1. Acude a tu asesor, el te ayudará.

2. Relaciona tus conocimientos con figuras que observes en tu entorno.

G L O S A R I O

ARISTA El plano de un cuerpo geométrico.

CIRCUNFERENCIA Geométricamente se describe como la curva que resulta de la intersección de un cono recto circular y un plano paralelo, a la base del cono.

CIRCUNFERENCIA Es el lugar geométrico de todos los puntos en el plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.

RADIO DE LA CIRCUNFERENCIA Distancia del centro de la circunferencia a cualquier punto de la misma. Se representa por ***r*.**

B I B L I O G R A F Í A.

1. BALDOR A., Geometría plana y del espacio y trigonometría, Publicaciones Cultural S. A., México 1992.

2. CASTRO C. Aureliano, Geometría y trigonometría, Universidad Autónoma de Sinaloa, México 1990.

3. ENCICLOPEDIA AUDIOVISUAL, Matemáticas (euclidiana 2), Océano Multimedia, México 1990.

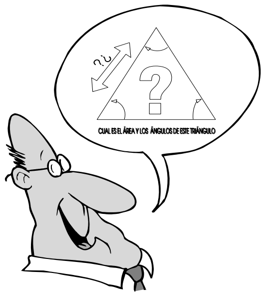
4. WALTER Fleming, DALE Varberg Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica, Editorial Hispanoamericana, México 1992.

TRIGONOMETRÍA

Y
RELACIONES

TRIGONOMÉTRICAS

PROPÓSITO
Que el estudiante se apropie de los conocimientos de la trigonometría para resolver problemas relacionados con el sector agropecuario.



El objetivo fundamental de esta unidad es que el estudiante del SAETA, utilice conceptos trigonométricos para la descripción de problemas agropecuarios y de interés social en donde se involucren triángulos y apliquen estrategias en la resolución de ellos, así como mostrar la relación que existe entre una función trigonométrica de un mismo ángulo. Con ello le permitirá adquirir habilidades para transformar expresiones trigonométricas utilizando las identidades fundamentales y les permita modelar problemas del mundo real.

Para que te des una idea del contenido programático de esta unidad te presentamos el siguiente mapa conceptual.

DEFINICIÓN DE TRIGONOMETRÍA Y RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

- **Razones trigonométricas en el triángulo**
- **Funciones Trigonométricas**
- **Identidades trigonométricas fundamentales**
- **Ecuaciones trigonométricas**
- **Ecuaciones exponenciales**
- **Ecuaciones logarítmicas**

Razones trigonométricas en el triángulo

Definiciones de trigonometría y relaciones trigonométricas.

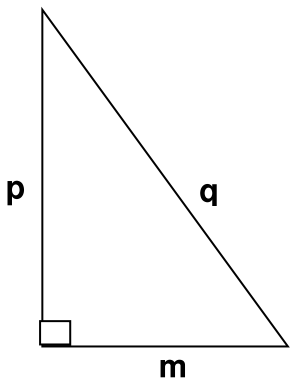
La trigonometría estudia a los triángulos, y las relaciones existentes que hay entre sus elementos, así como las aplicaciones que éstas tienen en la práctica, como la topografía, la astronomía, etc.
Etimológicamente, la palabra trigonometría significa medida de triángulo, es decir, el cálculo del valor de algún o algunos de sus elementos. De donde podemos definirla de la siguiente manera.

***Trigonometría*. Es la ciencia que estudia las relaciones que ligan los lados y los ángulos de un triángulo, aplicando dichas relaciones al cálculo de los elementos desconocidos en el triángulo**.

CONCEPTO DE RAZÓN

Razón de un número **a** con otro número **b** distinto de cero, es el cociente que resulta de dividir **a** entre **b**; es decir, razón es el número que resulta de comparar por cociente dos magnitudes.

En un triángulo rectángulo, las razones que resultan de comparar sus lados, por ejemplo, de acuerdo con la figura, son las siguientes:



$$\frac{q}{m} \qquad \frac{p}{m} \qquad \frac{q}{p} \qquad \frac{q}{m} \qquad \frac{m}{q} \qquad \frac{m}{p}$$

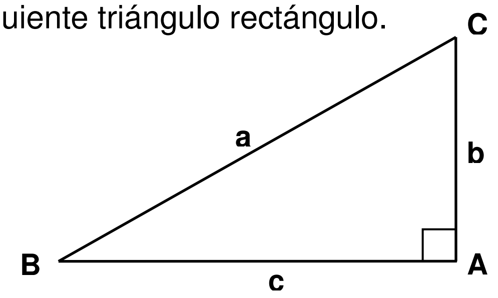
Dichas razones pueden variar, al variar el ángulo de referencia, por lo tanto podemos concluir que, las razones son funciones del ángulo.

Funciones trigonométricas

RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS COMO UNA RAZÓN DE DOS LADOS DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO RESPECTO A SUS ÁNGULOS AGUDOS.

Anteriormente has estudiado relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo (como en el Teorema de Pitágoras); ahora veras que en función a sus ángulos.
resultan las razones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

Si consideramos el siguiente triángulo rectángulo.



Las razones trigonométricas de los ángulos agudos B y C son:

- Seno (sen)
- Coseno (cos)
- Tangente (tan)
- Cotangente (cot)
- Secante (sec)
- Cosecante (csc)

Donde:
SENO: Es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa.
Sen B = b/a Sen C = c/a

COSENO: Es la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa.
Cos B = c/a Cos C = b/a

TANGENTE: Es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.
Tan B = b/c Tan C = c/b

COTANGENTE: Es la razón entre el cateto adyacente y el cateto opuesto.
Cot B = c/b Cot C = b/c

SECANTE: Es la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente.
Sec B = a/c Sec C = a/b

COSECANTE: Es la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto.
Csc B = a/b Csc C = a/c

Para que se te facilite trabajar con las funciones trigonométricas, te daremos una breve orientación acerca del uso de tu calculadora.

USO DE LA CALCULADORA PARA OBTENER EL VALOR DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO.

Si quieres encontrar el valor de una función trigonométrica de un ángulo, usando la calculadora se utilizan, directamente las teclas SIN, COS y TAN.

Por ejemplo, para encontrar el SEN 45º se teclea 45 y enseguida se oprime la tecla SIN.

SEN 45º = **.**7071

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS:

La expresión Sen^{-1} X, se denomina "seno inverso de X "y también "arco seno de X" que significa "el ángulo cuyo seno es X".
Si se establece que el seno de un ángulo X es igual a Y, es decir: Sen X = Y ó X = Sen^{-1} Y.

Las Funciones Trigonométricas inversas son:

Sen^{-1} X ó Arc. Sen X

Cos^{-1} X ó Arc. Cos X

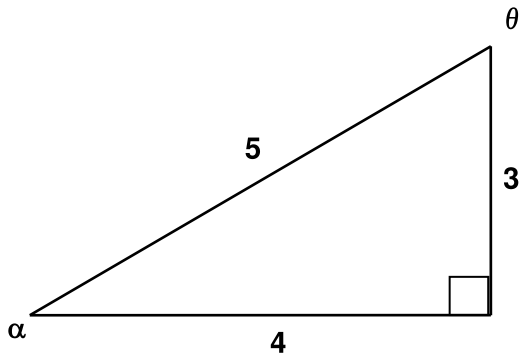
Tan^{-1} X ó Arc . Tan X

Estas funciones se aplican en la determinación del valor del ángulo de una función trigonométrica, cuando se conoce su valor.
Ejemplo:
Dado que la Tg C = 1.854, se escribe en base a la función trigonométrica inversa como:
C = tg^{-1} (1.854)
C = 61º 39'

En la calculadora se obtiene utilizando la tecla SHIFT, INV, ARC Ó F2.

EJEMPLO:
Emplea el siguiente triángulo rectángulo, para obtener las seis razones trigonométricas de los ángulos (ángulos agudos).

α = alfa $\theta =$ teta



PARA α

Sen	=	3/5
Cos	=	4/5
Tan	=	3/4
Cot	=	4/3
Sec	=	5/4
Csc	=	5/3

PARA θ

Sen	=	4/5
Cos	=	3/5
Tan	=	4/3
Cot	=	3/4
Sec	=	5/3
Csc	=	5/4

¡ Razona tu aprendizaje !

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

- Traza un triángulo rectángulo cuyas medidas sean a = 9 b =12 c = 15 y practica las razones trigonométricas.

Identifícate más con el tema ...

RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ÁNGULOS AGUDOS DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO, LAS IDENTIDADES PARA UN ÁNGULO Y SU COMPLEMENTO.

Si trazamos un triángulo en donde A y B son ángulos agudos, y como la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180º, tenemos que:

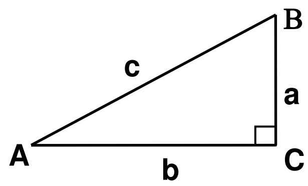
A + B + 90º = 180º

Los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo con una medida total de 90º , son ángulos complementarios.

El seno de un ángulo es igual al coseno de su ángulo complementario .

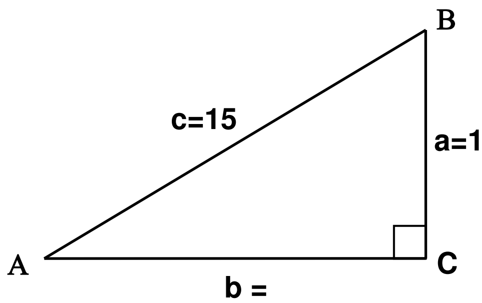
Podemos demostrar que esta relación se cumple en todas las funciones de los ángulos complementarios (seno, coseno, tangente, cotangente, secantes y cosecantes).

Ejemplo:
Sen A = a/c = Cos B
Cos A = b/c = Sen B
Tan A = a/b = Cot B
Csc A = c/a = Sec B
Sec A = c/a = Csc B
Cot A = b/a =Tan B



Si en un triángulo rectángulo el sen A = 10/15, obtendremos las siguientes razones trigonométricas de A y B.
Primeramente encontraremos el lado b,
(utiliza el teorema de Pitágoras).

Utiliza tu calculadora en funciones trigonométricas para que obtengas la medida de ángulos.



Ejemplo: Sen A = 10/15 = 2/3 = Cos B
2/3 = .6666

Sen 0.6666 = 41º 48' 37"
Cos 0.6666 = 48º 11' 22"

Siguiendo este ejemplo, ahora tú localiza las otras 5 razones trigonométricas de A y B.

EN RELACIÓN AL CONCEPTO DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS, VERIFICAR LAS RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS.

Los triángulos rectángulos, se resuelven obteniendo los dos ángulos agudos y las longitudes de los tres lados. Esto se puede hacer si se da la longitud de un lado y la medida de un ángulo, o si se conocen las longitudes de sus lados.

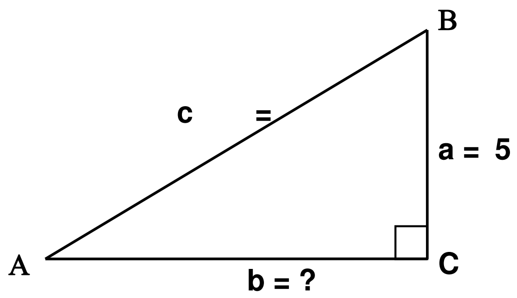
Una función trigonométrica de un ángulo agudo comprende tres cantidades, las longitudes de dos lados y la medida de un ángulo, en consecuencia dadas esas tres cantidades, podemos determinar las faltantes.

Ahora vamos a determinar cada una de ellas:

a) Dadas las longitudes de dos lados:

Por el teorema de Pitágoras, si se conocen dos lados, se puede calcular el tercero, luego se puede hallar cualquier razón trigonométrica de cualquiera de los ángulos agudos desconocidos (seno, coseno, tangente).
Puedes utilizar tu calculadora con funciones trigonométricas para obtener ángulos y una vez conociendo el ángulo agudo, puedes encontrar el otro, porque la suma de ellos es igual a 90º .

Ejemplo: Aplicando el teorema de Pitágoras, encuentra el lado "b" del triángulo.



Solución:
1. Por el teorema de Pitágoras

$c^2 = b^2 + a^2$

$a^2 = - b^2 + c^2$
$b^2 = c^2 – a^2$
b = $\sqrt{c^2 - a^2}$

2. Utilizando una razón, encuentra los ángulos del triángulo.

b = $\sqrt{c^2 - a^2}$
b = $\sqrt{13^2 - 5^2}$
b = $\sqrt{169 - 25}$
b = $\sqrt{144}$
b = 12

3. Utiliza la función SENO.
Sen A = 5/13 = 0.3846153

Sen A 0.3846153 = 22º 37' 11"

A = 22º 37' 11"

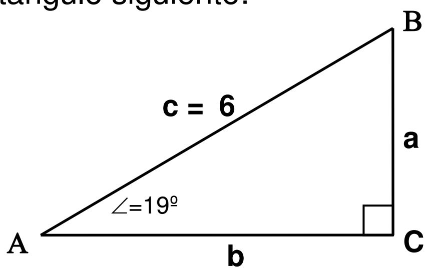
4. Entonces A + B = 90º
A + B = 90º
B = 90º - A
B = 90º - 22º 37' 11"
B = 67º 22' 49"

b) Dado un ángulo y la longitud de un lado:

Si se conoce un ángulo agudo, es fácil encontrar el otro ángulo, ya que la suma de los tres ángulos es 180º .

Una vez que los ángulos son conocidos, elegimos una razón trigonométrica, de uno de los ángulos que comprende el lado conocido, entonces podemos encontrar el tercero, por medio del teorema de Pitágoras.

Ejemplo: Si tenemos el triángulo rectángulo siguiente:



1. Buscamos el ángulo B

A + B + 90º = 180º

19º + B + 90º = 180º

B = 180º - 90º -19º

B = 71º

2. Con la función seno encontramos "a"

$$SenA = \frac{a}{c}$$

Sen 19º = a/6

a/6 = sen 19º

a = sen 19º (6)

a = 0.3255681 (6)

a = 1.9534

3. Por el teorema de Pitágoras

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b = \sqrt{6^2 - 1.9534^2}$$

$$b = \sqrt{36 - 3.8158}$$

$$b = \sqrt{33.8158}$$

$$b = 5.8151$$

¡ Muy Bien !

Verifica tus conocimientos

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

Si ya aprendiste te invitamos a que resuelvas las siguientes actividades de aprendizaje las cuales servirán para tu autoevaluación:

1. A través del uso de tu calculadora , encuentra las funciones trigonométricas principales de un ángulo y viceversa.

ángulo/función	Seno	Coseno	Tangente
20º 46'			
	.9717554		
		.1448743	
			0.5685408
12º 13'			
	0.2116059		
		0.977342	
			0.7318893
120°30'			
	0.8660		
		0.7071	
			58.6072

¡ FELICIDADES ¡

"Los has resuelto correctamente, ello te servirá para la resolución de triángulos rectángulos"

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.

Utilizando las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) que son relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo, éstas nos permitirán resolver completamente los elementos de un triángulo rectángulo y en sí gran cantidad de problemas relativos a ellos. Estas razones nos permitirán conocer ciertos elementos de un triángulo a partir de otros conocidos. Cabe aquí la pregunta: ¿Cuántos ángulos o lados de un triángulo rectángulo son necesarios para determinar todos sus elementos?
La contestación a esta pregunta es fácil. Si sabemos que el teorema de Pitágoras nos permite conocer un lado, si obtenemos los otros dos, esto también nos permite por medio de la calculadora, conocer las dimensiones de los ángulos. Ahora si conocemos el tamaño de uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, podemos obtener la dimensión del otro. Por medio de la calculadora, podemos conocer el valor de las razones, pero esto no nos permite identificar el tamaño de los lados, ya que los valores de las razones es constante para el mismo ángulo, no importa el tamaño del triángulo formado, entonces es necesario conocer alguno de los lados para determinar el resto de los elementos.
En conclusión, basta conocer dos de los elementos (siempre que uno de ellos sea un lado) de un triángulo rectángulo para determinarlo completamente.

Esto es importante para determinar completamente los 6 elementos de un triángulo rectángulo (3 lados y 3 ángulos) y problemas prácticos relativos a ellos. En los cuales se presentan 4 casos:

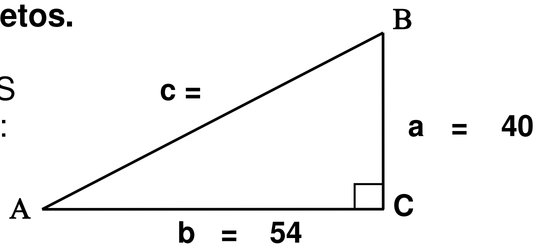
a) Dados dos catetos
b) Dado un cateto y la hipotenusa
c) Dado un cateto y un ángulo agudo
d) Dado la hipotenusa y un ángulo agudo.

Para resolver un triángulo rectángulo, se recomienda utilizar los datos exclusivamente para determinar los demás elementos (para evitar cometer errores).

EL PRIMER CASO: Dado los dos catetos.

DATOS
a = 40 m
b = 54 m
C = 90

INCÓGNITAS
Determinar:
c, A y B.



SOLUCIÓN:
Cálculo de c.
por teorema de Pitágoras determinamos c
$c^2 = a^2 + b^2$
$c^2 = (40)^2 + (54)^2$ $\quad c^2 = 1600 + 2916$ $\quad c = \sqrt{4516}$ $\quad \boxed{c = 67.20\ m}$
Cálculo del ángulo A.
Aplicando la razón tangente.

$$Tan\ A = \frac{40}{54} = 0.7407$$

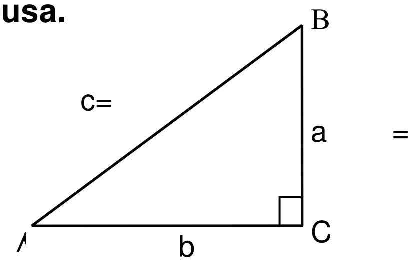
A = arc tg 0.7407
A = 36.527º

$\boxed{A = 36^o\ 32'}$

Cálculo del ángulo B.
Por el suplemento de A.
B = 90º - A
B = 90º - 36.527º
B = 53.473º

$\boxed{B = 53^o\ 28'}$

SEGUNDO CASO: Dado un cateto y la hipotenusa.



DATOS
a = 25 m
c = 50 m
C = 90°

INCÓGNITAS
b, A Y B

SOLUCIÓN:
Cálculo del cateto b. Cálculo del ángulo A. Cálculo del ángulo B.

T. Pitágoras: Aplicando la razón Sen A ó Cos B. Por suplemento de A.

$a^2 + b^2 = c^2$	Sen A = 25/50	B = 90º - A
$b^2 = c^2 - a^2$	Sen A = 1/2	B = 90º - 30º
$b^2 = (50)^2 - (25)^2$	A = arc sen 0.5	$\boxed{B = 60º}$
$b^2 = 2500 - 625$	$\boxed{A = 30º}$	

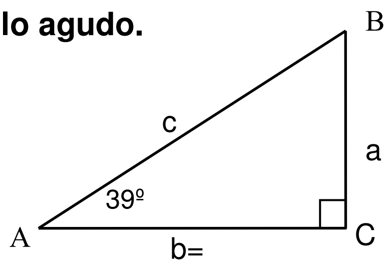
b = $\sqrt{1875}$

b = $\boxed{43.30 \text{ m}}$

TERCER CASO: Dados un cateto y un ángulo agudo.

DATOS
b = 24 m
A = 39º
C = 90º

INCOGNITAS
a, c, y B



SOLUCIÓN:

Cálculo del ángulo B:

Por suplemento de A.

B = 90º - A

B = 90º - 39º

$\boxed{B = 51º}$

Cálculo del cateto a:

Aplicando la razón Tg A.

Tg A = a/b

a = b Tg A

a = 24 (Tg 39º)

a = 24 (0.8098)

$\boxed{a = 19.43 \text{ m}}$

Cálculo de la hipotenusa c.

Aplicando la razón Cos A.

Cos A = b/c c = b/Cos A

c = 24/Cos 39º

c = 24/0.7771

$\boxed{c = 30.88\text{m}}$

CUARTO CASO: Dados la HIPOTENUSA y un ángulo agudo.

DATOS

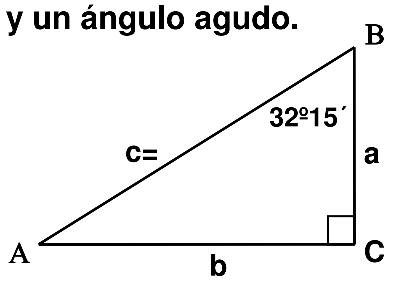
c = 18.25 m

B = 32º 15’

C = 90°

INCÓGNITAS

a, b y A



SOLUCIÓN:

Cálculo del ángulo A
Por suplemento de B

A = 90º - B

A = 90º - 32º 15’

$\boxed{A = 57º\ 45’}$

Cálculo del cateto b
Aplicando la razón sen B

Sen B = b/c

b = c(Sen B)

b = 18.25 (Sen 32º 15’)

b = 18.25 (0.5336)

$\boxed{b = 9.738 \text{ m}}$

Cálculo del cateto a
Aplicando la razón Cos B

Cos B = a/c

a = c(Cos B)

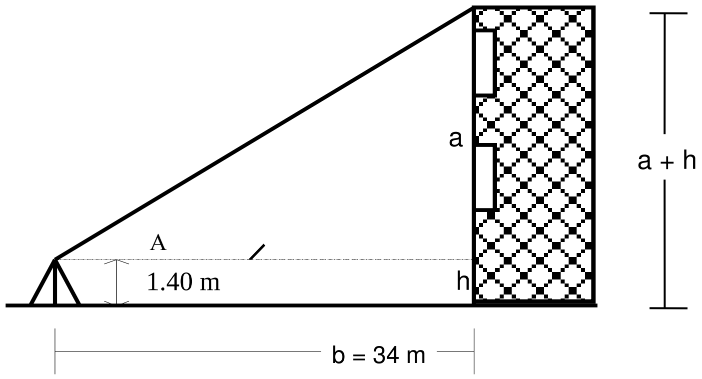
a = 18.25 (Cos 32º 15’)

a = 18.25 (0.8457)

$\boxed{a = 15.43 \text{ m}}$

AHORA HAGAMOS APLICACIONES PRÁCTICAS DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS RESOLVIENDO ALGUNOS PROBLEMAS.

PROBLEMA 1:
Se quiere calcular la altura de un edificio. Para ello a 34 m. de distancia se ha colocado un aparato para medir el ángulo de elevación A, que es de 38º 20´ . ¿ Cuál es la altura del edificio, sí el aparato con el que se determinó el ángulo mide 1.40 m sobre el nivel del piso ?



DATOS INCÓGNITAS

b = 34 m La altura del edificio

A = 38º 20’ a + h

SOLUCIÓN:

Aplicando la razón tangente.

Tg A = a/b a = b Tg A a = 34 (Tg 38º 20’)

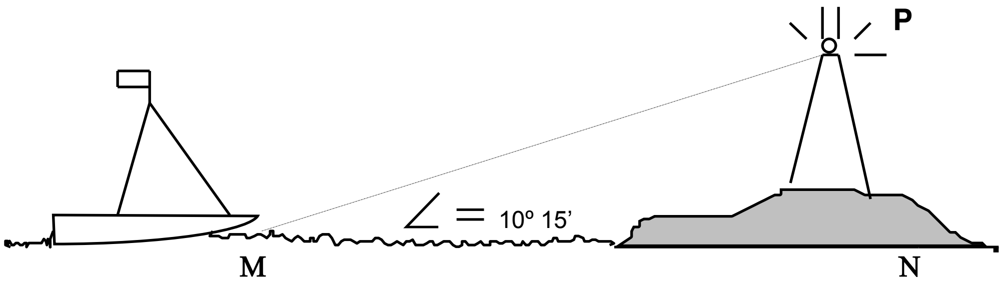
a = 34 (0.7907)

$\boxed{a = 26.88 \text{ m}}$

De donde la altura del edificio es:
Altura del edificio = a + h
Altura del edificio = 26.88 + 1.40

$\boxed{\text{Altura del edificio} = 28.28 \text{ m}}$

PROBLEMA 2:
Desde una embarcación M se ve un faro con un ángulo de elevación de 10º15’. Se sabe que el faro tiene 45 m de altura sobre el nivel del mar. Calcular la distancia del barco al faro.



SOLUCIÓN:

Aplicando la razón tangente

Tg M = NP/MN MN = $\frac{NP}{TgM}$ MN = $\frac{45}{Tg10^{\circ}15'}$

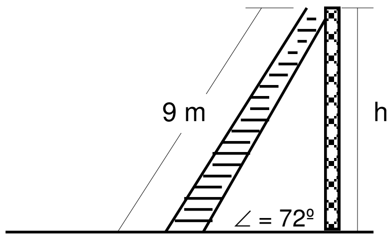
MN = 45 / 0.1808

$\boxed{\text{MN} = 248.85\ \text{m}}$

El barco se encuentra a una distancia de 248.85 m del faro.

PROBLEMA 3:

Una escalera de 9 m. está apoyada contra una pared. ¿Qué altura alcanza si forma con el suelo, supuestamente horizontal un ángulo de 72º?



SOLUCIÓN:

Aplicando la razón seno: Sen 72° = $\frac{h}{9}$

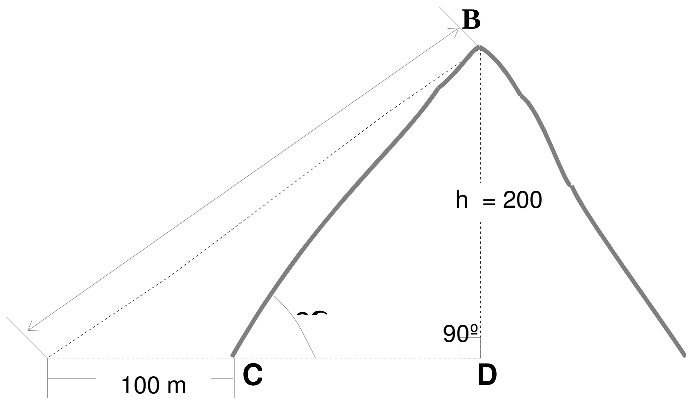
h = 9 (Sen 72º)

h = 9 (0.951)

$\boxed{h = 8.56\ \text{m}}$ Altura que se logra alcanzar es 8.56 m.

PROBLEMA 4:

¿Qué longitud debe tener el cable del teleférico que une la cima de una montaña hasta un lugar a 100m de la base de la montaña, si la ladera de la montaña forma un ángulo de 45º con el suelo, y la altura de la montaña es de 200 m?



SOLUCIÓN:
Como el triángulo ABC no es rectángulo, no podemos aplicar ninguna razón trigonométrica que nos resuelva el problema, Pero el triángulo ABD sí es rectángulo, pero como AD = AC+CD y no conocemos CD, entonces primeramente hay que calcular CD del triángulo BCD.

Cálculo de CD, aplicando la razón tangente en el triángulo BCD.

Tg 45º $= \frac{200}{CD}$

CD = 200/ Tg 45º = 200/1 = 200 m

Luego como AD = AC +CD

Entonces AD = 100 + 200

AD = 300 m

y para calcular AB, apliquemos el teorema de Pitágoras al triángulo ABD.

$(AB)^2 = (BD)^2 + (AD)^2$ AB $= \sqrt{130,000}$

$(AB)^2 = (200)^2 + (300)^2$ AB $\boxed{= 360.55 \text{ m}}$

$(AB)^2 = 40000 + 90000$

$(AB)^2 = 130,000$

De donde la longitud del cable del teleférico es de 360.55 m

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

1. Toma como referencia el triángulo de la derecha y encuentra en cada caso los datos desconocidos.

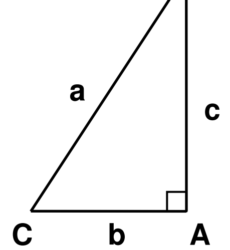
a) b = 40 y c = 50

b) a = 30 y b = 25

c) b = 60 y B = 28° 30’

d) a = 4 y B = 62° 30´

e) c = 23.5 y a = 15.26



f) $a = 175.5$ y $B = 27° 15'$

2. Resuelve los siguientes problemas de aplicación de triángulos rectángulos:

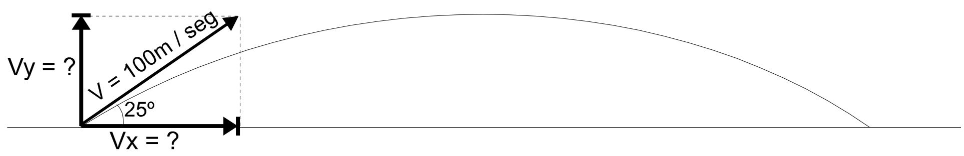
a) La torre inclinada de pisa mide, desde el pie a su parte superior 54.56 m, y está fuera de la plomada 5.029 m. Calcular su ángulo de inclinación con respecto a la vertical.

b) ¿A qué distancia de un faro se encuentra una embarcación si desde ella el ángulo de elevación del faro es de 13º y se sabe que la altura del faro es de 100 m?.

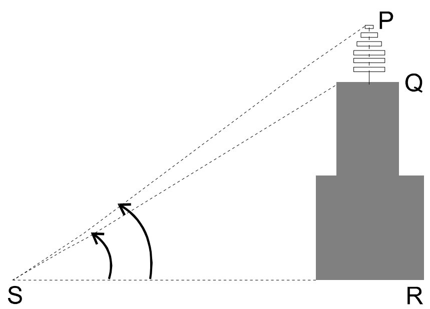
c) ¿Cuál es la altura de un edificio que a 56 m tiene un ángulo de elevación de 25º?.

d) Una vía de ferrocarril forma un ángulo de 7º con la horizontal. ¿Cuántos metros se eleva en 950 m de distancia ?.

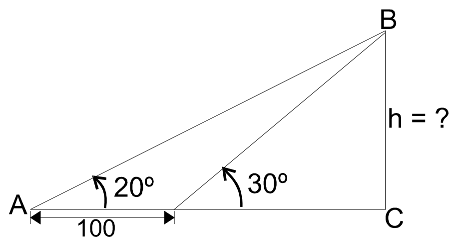
e) Se dispara un proyectil de un cañón inclinado en un ángulo 25º con la horizontal . El proyectil deja la boca del cañón con una velocidad de 100 m/seg. ¿ A qué velocidad se está moviendo horizontalmente cuando deja la boca del cañón. ?



f) Calcular la altura PQ de una torre de televisión que se encuentra sobre un edificio, sabiendo que, desde un punto S situado a 40 m del pie del edificio, el ángulo de elevación al punto P más elevado de la torre mide 38º 20' y el ángulo de elevación del punto Q situado en la base de la torre mide 31º 10'.



g) Del punto A, el ángulo de elevación de R es 20º; del punto B, que está 100 m más cercano a C, el ángulo de elevación de R es 30º. Encontrar h, distancia de R a la recta AC; y encontrar la distancia BC.



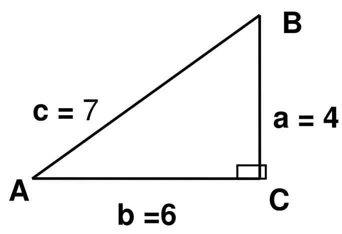
Autotrigoevalúate...

AUTOEVALUACIÓN.

En el siguiente triángulo rectángulo completa los datos que hacen falta: Recuerda que los valores podrían ser para los dos ángulos agudos y los tres lados.

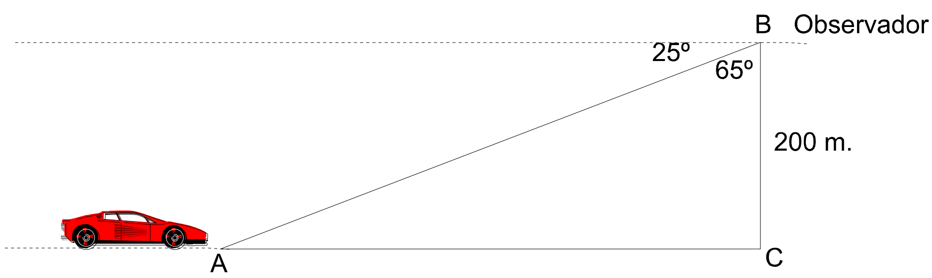
$\angle$ A = ____________

$\angle$ B = ____________

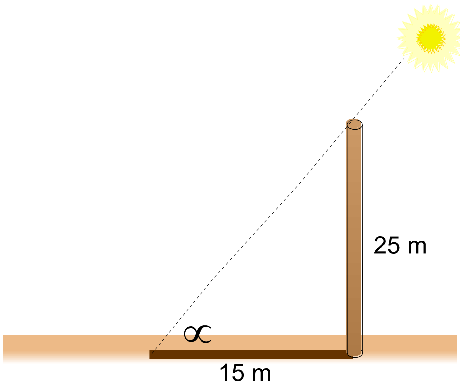


2. Resuelve los siguientes problemas:

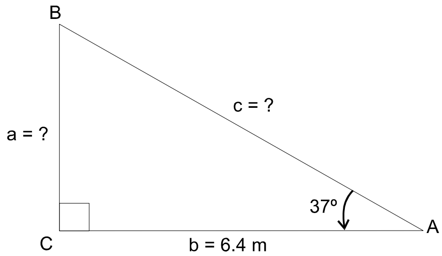
a) La cima de una meseta , esta a 200 m. sobre el nivel del suelo de un valle, si el ángulo de depresión (ángulo medido desde la horizontal superior hasta el objeto) de un automóvil que se mueve hacia el observador es de 25º. ¿ A qué distancia está el auto del observador?.



b) Un poste de 25 m de altura proyecta una sombra de 15 m, obtener el ángulo de elevación al sol (el ángulo entre el horizonte y el sol).



c) El cateto adyacente al ángulo A (A = 37º) es de 6.4 m encontrar los elementos restantes.
DATOS: A = 37º C = 90º b = 6.4 a = ? c = ?



¿No alcanzaste a triangularte por completo? Realiza las...

ACTIVIDADES REMEDIALES.

1. Reúnete con tu asesor y compañeros de módulo y realiza las siguientes prácticas:

a) Traza varios triángulos rectángulos
b) Determina las áreas.
c) Obtén los ángulos necesarios.

Te sugerimos utilices juego geométrico y calculadora.

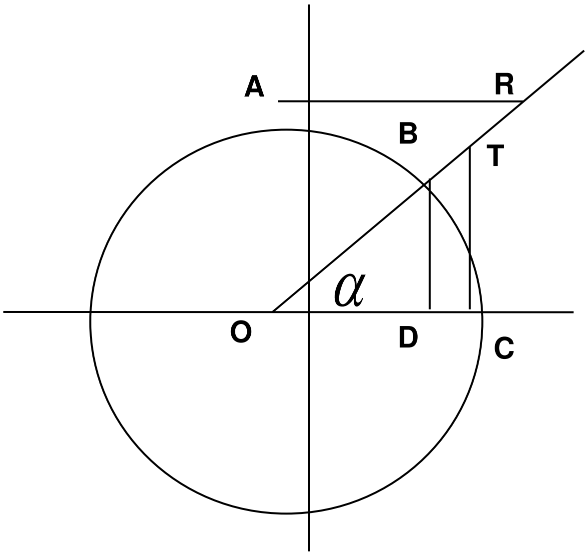
2. Con apoyo de tu asesor, organicen prácticas topográficas, en donde puedas poner en práctica tus conocimientos.

3. Utiliza las canchas cívicas y deportivas de tu localidad o escuela para realizar todas las prácticas requeridas.

Funciones trigonométricas

EL CÍRCULO UNITARIO

El círculo unitario, llamado también círculo trigonométrico, se construye en un sistema de ejes coordenados, de manera que su centro coincida con el origen de las coordenadas, y con un radio que vale una unidad de longitud, y trazando triángulos de condiciones dadas.

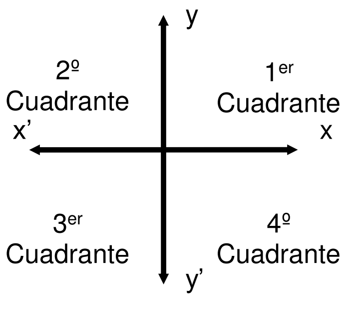


1. Tomamos un ángulo α positivo cualquiera con vértice en el origen, tal que su lado inicial coincida con la parte positiva del eje x
2. Los puntos C y B son intersecciones de la circunferencia con los lados inicial y final, respectivamente, del ángulo α.
3. Desde B se traza BD perpendicular al eje x.
4. En C se traza una tangente a la circunferencia que interseca el lado final del ángulo α en T.
5. En A, punto de intersección de la circunferencia con la parte positiva del eje y, se traza una tangente a la circunferencia que interseca el lado final del ángulo α en el punto R.

SIGNO DE LAS FUNCIONES

Una vez analizado y comprendidas las razones trigonométricas, es necesario que conozcan lo siguiente:

Signo de las funciones trigonométricas en los cuadrantes:



	sen	cos	tg	cotg	sec	cosec
I	+	+	+	+	+	+
II	+	-	-	-	-	+
III	-	-	+	+	-	-
IV	-	+	-	-	+	-

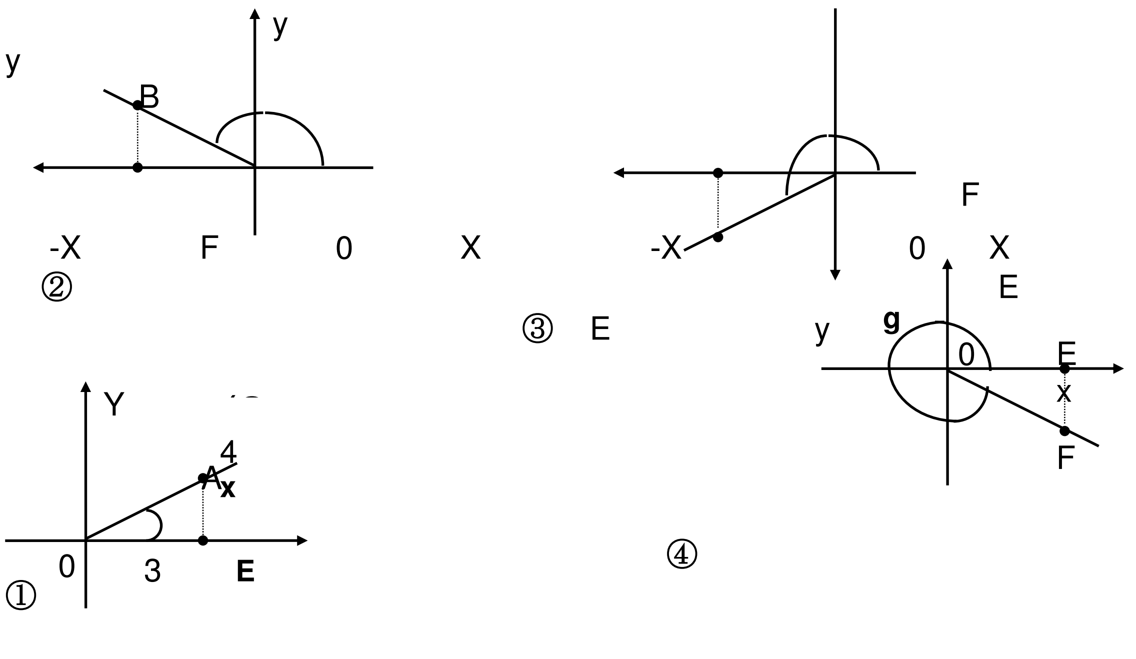
IDENTIFICACIÓN DE LAS FUNCIONES EN EL CÍRCULO UNITARIO

Los triángulos rectángulos BOD, COT y AOR son semejantes por tener dos ángulos y el lado correspondiente iguales.

Aplicando las definiciones de las funciones: Seno, Coseno, Tangente y Cotangente; y como OC = OB = OA = 1, estás quedan representadas mediante líneas en la figura anterior.

En el triángulo BOD		$Sen\ \alpha = \frac{BD}{OB} = \frac{BD}{1} = BD$
		$Cos\ \alpha = \frac{OD}{OB} = \frac{OD}{1} = OD$
En el triángulo COT		$Tan\ \alpha = \frac{CT}{OC} = \frac{CT}{1} = CT$
En el triángulo AOR		$Cot\ \alpha = \frac{AR}{OA} = \frac{AR}{1} = AR$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO DE CUALQUIER MAGNITUD



Las funciones trigonométricas se definen así:

SENO. Es la razón entre la ordenada y la distancia al origen.

COSENO. Es la razón entre la abscisa y la distancia al origen:

TANGENTE. Es la razón entre la ordenada y la abscisa.

COTANGENTE. Es la razón entre la abscisa y la ordenada.

SECANTE. Es la razón entre la distancia y la abscisa.

COSECANTE. Es la razón entre la distancia y la ordenada.

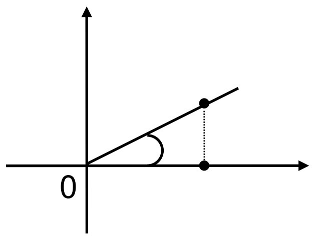
Ejemplos: a) Calcular las funciones trigonométricas del ángulo $\angle$ XOA = α, sabiendo que A (3, 4).

$d = \sqrt{3^2 + 4^2}$ $d = \sqrt{9+16}$ $= \sqrt{25}$ $d = 5$

sen $a = \frac{4}{5} = 0.80$ cos $a = \frac{3}{5} = 0.60$

tan $\alpha = \frac{4}{3} = 1.33$ cot $\alpha = \frac{3}{5} = 0.75$

sec $\alpha = \frac{5}{3} = 1.67$ csc $\alpha = \frac{5}{4} = 1.25$



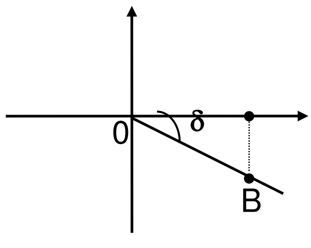
b) Calcular las funciones trigonométricas del ángulo $\angle$ XOB = δ sabiendo que B (2,-3).

$d = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+6}$ $d = \sqrt{13}$

$sen\delta = \frac{-3}{V13} = \frac{-3\sqrt{13}}{13}$ cos $\delta = \frac{2}{V13} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$

$\tan\delta = \frac{-3}{2} = 1.5$ $\cot\delta = \frac{2}{-3} = -0.67$

$\sec\delta = \frac{\sqrt{13}}{2}$ $\csc\delta = \frac{\sqrt{13}}{-3} = \frac{-\sqrt{13}}{3}$



ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

1) Dados los puntos A (2, 3) y B (-1, 4) calcular las funciones trigonométricas de $\angle$ XOA y $\angle$ XOB.

2) Calcular las funciones trigonométricas del $\angle$ XOA = α sabiendo que A (-3, 4).

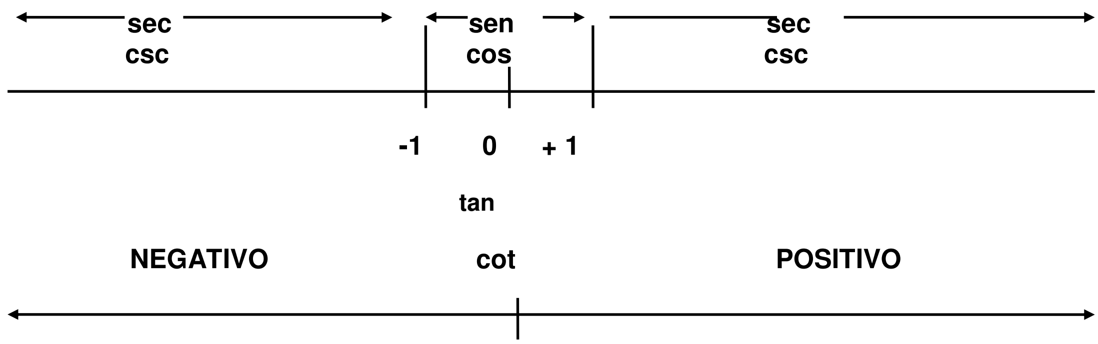
Seguimos valorando las funciones

VALORES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ÁNGULOS QUE LIMITAN LOS CUADRANTES.

	0°	90°	180°	270°	360°
sen	0	1	0	-1	0
cos	1	0	-1	0	1
tan	0	no existe	0	no existe	0
cot	no existe	0	no existe	0	no existe
sec	1	no existe	- 1	no existe	1
csc	no existe	1	no existe	- 1	no existe

Estudiando la tabla anterior vemos que el seno toma los valores de 0, 1, 0, -1, 0. Es decir, que su valor máximo es + 1 y su valor mínimo es - 1. El seno varía entre + 1 y -1, no pudiendo tomar valores mayores que + 1, ni valores menores que - 1.

Observando el coseno, vemos que también varía entre + 1 y - 1. Si analizamos la tangente veremos que su variación es más compleja. De 0^0 a 90^0 es positiva y varía de 0^0 hasta tomar valores tan grandes como se quiera. Para 90^0 no está definida y de 90^0 a 180^0 pasa a ser negativa, variando de valores negativos muy grandes en valor absoluto hasta cero. De 180^0 a 270^0 vuelve a ser positiva variando de cero hasta valores tan grandes como se quiera. Para 270^0 no está definida y de 270^0 a 360^0 pasa a negativa variando de valores negativos muy grandes en valor absoluto hasta cero. Las demás funciones varían analógicamente. Estas variaciones se pueden resumir en el siguiente diagrama:



Resumen de los valores de las funciones trigonométricas de 30º, 45º y 60º

FUNCIÓN	*30º*	*45º*	*60º*
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cot	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{\frac{3}{3}}$
Sec	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
csc	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Operaciones con ángulos notables.

1. Calcula $\dfrac{\text{seno } 30º + \cos 60º}{\tan 60º.\ \tan 30º}$

Solución:

$$\frac{sen 30° + \cos 60°}{\tan 60°.\tan 30°} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{3}{3}}} = \frac{1}{\frac{3}{3}} = 1$$

¡ *Notando el aprendizaje* !

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

Halla el valor numérico de las sig. expresiones.

a) (seno 30º) (cos 45º) c) (tan 45º) (cos 30º)

b) cos 30º + tan 30º d) (sen 30º) (cos 45º) + tan 60º

e) $\dfrac{\text{sen } 30º}{\cos 45º} + \dfrac{1}{(\cos 45º)\ (\tan 45º)}$.

f) Si A = cos 60º y B = $\dfrac{1}{\cos 45º}$ Calcula el valor de 2A-3B

Representación grafica de las funciones Seno, Coseno y Tangente.

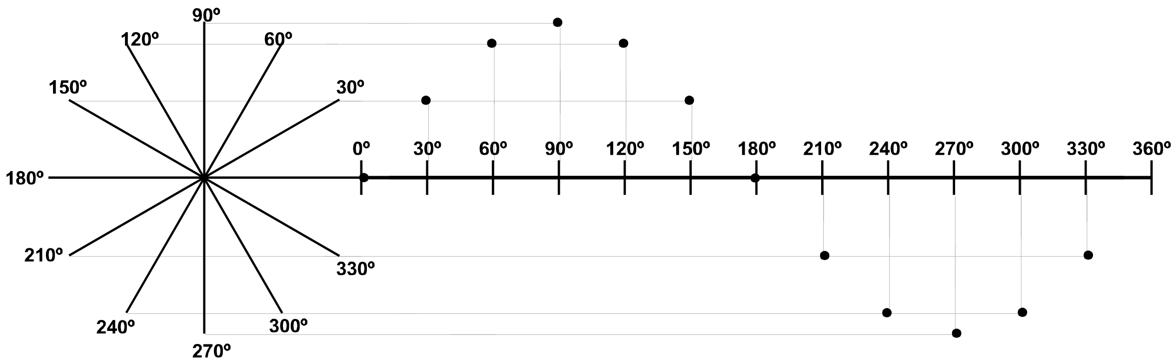
En la representación gráfica de la función Seno y Coseno, se observa que, después de un período de 360º , los valores (del seno y coseno) se repiten nuevamente, en el caso de la tangente, la repetición de valores se presenta a intervalos de 180º , observa:

Gráfica de la función seno:

Se traza una circunferencia y por su centro se trazan dos perpendiculares. Se dividen los cuadrantes en ángulos de 30º cada uno. se traza una semirrecta horizontal a lo largo de la hoja (representa el desarrollo de la circunferencia) y se dividen partes iguales. Cada punto representa los ángulos de 0, 30, 60,..hasta 360 grados.
Por el origen de dicha semirrecta se traza una perpendicular y se consideran hacia arriba y hacia abajo unidades respectivamente iguales al radio de la circunferencia trazada.

Desde el punto de intersección de la circunferencia con los radio vectores de los ángulos de 30, 60, 90,... 360, se trazan paralelas al eje horizontal y luego se intersecan con perpendiculares levantadas desde los puntos que sobre el eje horizontal representa cada ángulo.

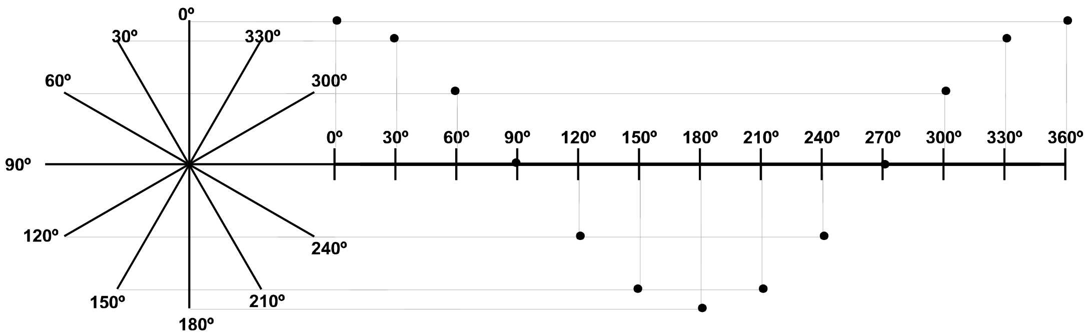
Ejemplo: Uniendo los puntos obtenidos por intersección, se llega a determinar una curva llamada senoide, que representa gráficamente la función seno.



Observaciones:

a) Los valores de la curva están comprendidas entre 1 y -1.
b) Para 0 el seno vale 0 y, a medida que el ángulo crece, el valor del seno aumenta hasta llegar a 90 donde alcanza el valor máximo que es 1.
c) En el segundo cuadrante el seno decrece desde 1 a 0 sea: para un ángulo de 180º el valor de seno es 0.
d) En el tercer cuadrante el seno crece en valor absoluto desde 0 a 1, pero, como es negativo, en realidad decrece desde 0 a -1.
e) En el cuarto cuadrante decrece en valor absoluto desde 1 hasta 0, pero, como es negativo, en realidad crece desde -1 a 0.

Gráfica de la función coseno.



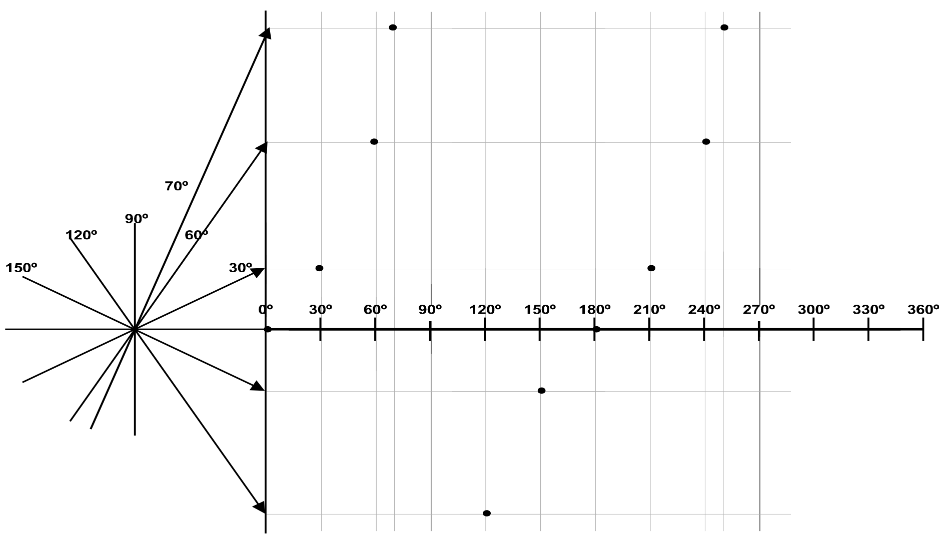
La gráfica que representa el coseno se denomina cosenoide.

Observaciones.

a) Los valores de la curva están comprendidas entre 1 y -1
b) Para 0 el valor del coseno es 1 y, a medida que el ángulo crece, el valor del coseno decrece hasta llegar a 90º donde alcanza el valor 0.
c) En el segundo cuadrante, el coseno crece en valor absoluto desde 0 a 1; pero como es negativo, en realidad decrece de 0 a -1.
d) En el tercer cuadrante, decrece en valor absoluto desde 1 a 0 ; pero como es negativo, en realidad crece de -1 a 0.
e) En el cuarto cuadrante, crece de 0 a 1.

Las gráficas del seno y coseno son curvas onduladas continuas, cada onda es igual a la precedente (se llama ciclo).
Si la gráfica del seno se traslada hacia la izquierda (hasta el valor 90) se obtiene la gráfica coseno.

Gráfica de la función tangente:



No es una curva continua, sino discontinua, y consiste en numerosas ramas similares. Une los puntos.

Observaciones:

a) Para el valor 0º de la tangente toma el valor 0 y, a medida que aumenta el ángulo, la tangente alcanza valores tendientes a infinito (para ángulos próximos a 90º). no siendo posible dar el valor a la tangente para dicho ángulo.
b) Para ángulos superiores a 90º la tangente es negativa y en valor absoluto muy grande y decrece (en valor absoluto) hasta hacerse 0 para 180º, pero como es negativo, crece.
c) Para ángulos superiores a 180º la tangente es positiva y repite los mismos valores que en el primer cuadrante, no siendo posible dar el valor para 270º.
d) En el cuarto cuadrante se repiten los mismos valores que en el segundo cuadrante y la tangente decrece en valor absoluto hasta hacerse 0 para 360º, pero es negativa, entonces crece.

CONTACTO CON OTRO TIPO DE TRIÁNGULOS

Ya aprendiste a resolver problemas relacionados con un tipo de triángulos que por tener un ángulo interior recto, se llaman ***"Triángulos rectángulos".***

En esta ocasión tendrás la oportunidad de obtener las herramientas necesarias para resolver otro tipo de triángulos, cuya característica en que en su interior no existe ningún ángulo recto (de 90^0), los cuales reciben el nombre de ***"Triángulos Oblicuángulos".***

LEY DE LOS SENOS Y COSENOS.

Antes de pasar a mostrarte las herramientas mencionadas, es necesario que consideres que "***Resolver un triángulo***" significa que a partir de 3 elementos conocidos, (uno de ellos debe ser un lado como mínimo), se encontrará el valor de los otros tres.

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS.

En la resolución de triángulos oblicuángulos se pueden distinguir 4 casos :

CASO I : Cuando se conocen dos ángulos y un lado.

CASO II : Cuando se conocen 2 lados y el ángulo comprendido.

CASO III: Cuando se conocen tres lados.

CASO IV: Cuando se conocen 2 lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

Toma en cuenta que necesitamos saber manejar la calculadora, para obtener los valores de las funciones trigonométricas y cualquier otra operación. Si no sabes usarla, acude a tu asesor ó cualquier otra persona que te pueda auxiliar.

Pasaremos ahora a demostrar 2 de las herramientas que usarás para *"Resolver triángulos Oblicuángulos".*

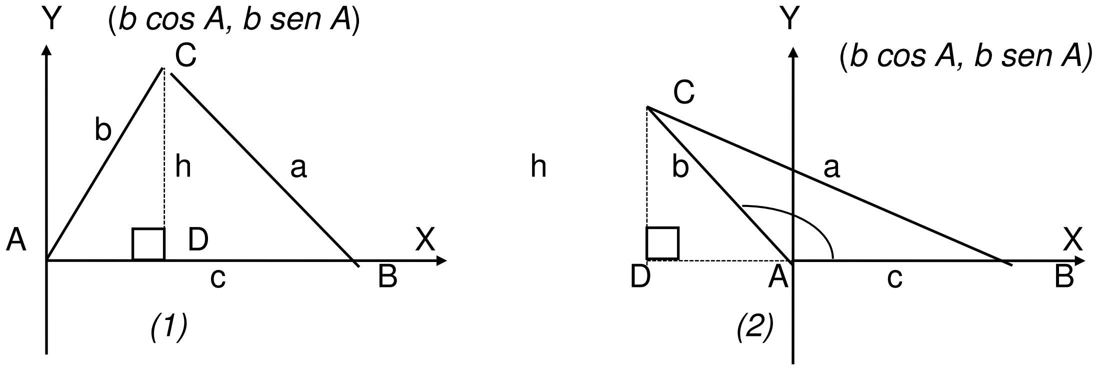
! COMENCEMOS !

LEY DE LOS SENOS: Esta ley afirma que en todo triángulo, los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos. O sea, en cualquier triángulo ABC.

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

Demostración: En el plano del triángulo trace un sistema de coordenadas de modo que uno de los ángulos, por ejemplo A, quede en posición normal. En la figura (a), se muestra el caso de ser A un ángulo agudo, y en la figura (b), el caso de ser A un ángulo obtuso. En cualquiera de las dos figuras las coordenadas del punto C son (*b cos A, b sen A*). La altura h del triángulo, es igual a la ordenada del punto C, o sea:

h = b sen A



En el triángulo rectángulo BDC, h = a sen B; entonces,
b sen A = a sen B, de donde

$$\frac{a}{SenA} = \frac{b}{senB}$$

Si ahora coloca el ángulo B en posición normal, se obtiene

$$\frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

Las dos igualdades anteriores se escriben en forma más compacta como

$$\frac{a}{senA} = \frac{c}{senC} = \frac{b}{senB}$$

Así, la ley de los senos queda expresada por una proporción sumamente sencilla, que se usa cuando los datos incluyen uno de los lados y su ángulo opuesto (casos 1 y 2). Dado que el seno de un ángulo es positivo en el primero y en el segundo cuadrante, la ley de los senos no sirve cuando no se conoce el cuadrante del ángulo. En ciertas ocasiones se puede hacer la selección acertada recordando que al mayor lado se opone el mayor ángulo. Otras ocasiones se pueden hallar dos valores posibles del ángulo; cosa que se discutirá en el caso 2, llamado *caso ambiguo*, porque puede tener dos soluciones, una, o ninguna.

APLICACIONES DE LA LEY DE LOS SENOS:

Los casos 1 y 2 se pueden resolver con la ley de los senos, como se muestra en los siguientes ejemplos

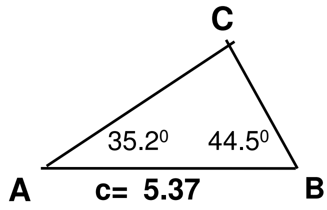
CASO I .

Dados dos ángulos y su lado incluido, la ley de senos puede usarse para resolver al triángulo. Si no se da la figura, es útil bosquejar al triángulo con la información dada.

Ejemplo 1: Si A = 35.2^0, B = 44.5^0 y c = 5.37, resolver el ΔABC.

Solución: Trazar primeramente el triángulo.
Calcular enseguida C, usando el teorema de que la suma de los ángulos de cualquier triángulo es 180^0

C = $(180-35.2-44.5)^0 = 100.3^0$



Enseguida, como se conocen el lado *c* y el ángulo C, encontrar el lado *a* mediante la ley de senos en la forma

$$\frac{a}{senA} = \frac{c}{SenC}$$

Sustituir los datos proporcionados y resolver para *a*.

$$\frac{a}{sen35.2°} = \frac{5.37}{sen100.3°}$$

$$a = \frac{(5.37)(sen35.2°)}{sen100.3°} = 3.1461415$$

Encontrar ahora al lado *b* con la ley de los senos, en la forma

$$\frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

$$\frac{b}{sen44.5°} = \frac{5.37}{sen100.3°}$$

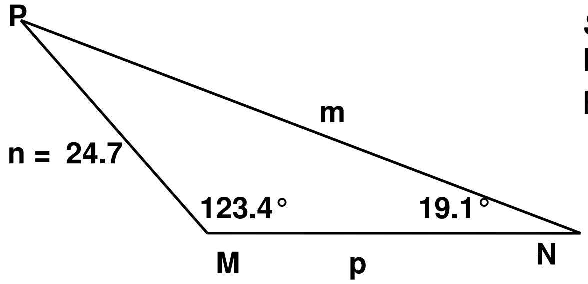
$$b = \frac{(5.37)(sen44.5)}{sen100.3°} = 3.825531$$

Para comprobar los resultados obtenidos, se sustituyen estos en la fórmula de la ley de senos

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

Comprobación: $\frac{3.14614415}{sen35.2°} = \frac{3.825531}{sen44.5°} = \frac{5.37}{sen100.3°} = 5.4579547.$

Ejemplo 2: Resolver el ΔMNP (**CASO I**)



Solución: Calcular primeramente P.

$P = (180 - 123.4 - 19.1)^0 = 37.5^0$

En segundo término,

$$\frac{m}{senM} = \frac{n}{senN}$$

$$\frac{m}{sen123.4°} = \frac{24.7}{sen19.1°}$$

$$m = \frac{(24.7)(sen123.4°)}{sen19.1°} = 63.018381$$

Enseguida, $\frac{p}{senP} = \frac{n}{senN}$ $\qquad \frac{p}{sen37.5°} = \frac{24.7}{sen19.1°}$

$$p = \frac{(24.7)(sen37.5°)}{sen19.1°} = 45.952276$$

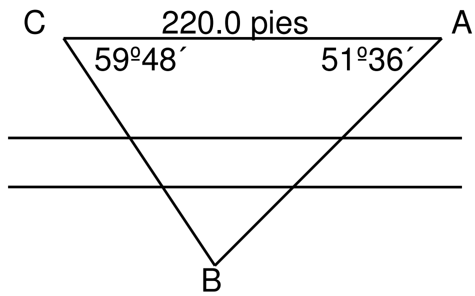
Comprobación: $\frac{63.018381}{sen123.4°} = \frac{24.7}{sen19.1°} = \frac{45.952276}{sen37.5°}$

Respetando las leyes!

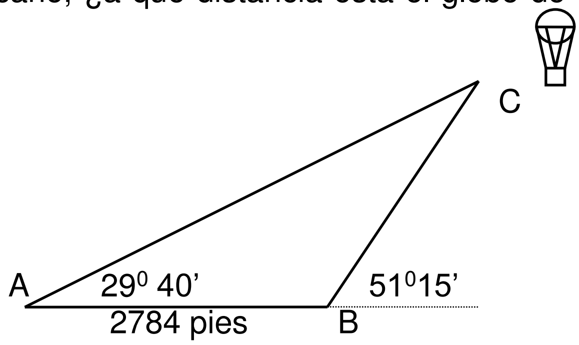
ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

1. Resuelve los siguientes ejercicios utilizando la ley de senos:

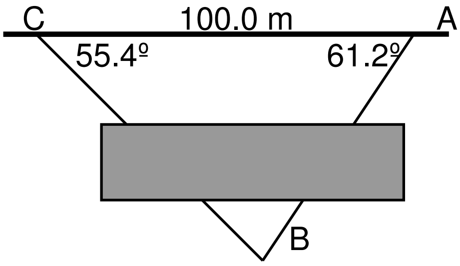
a) Dos puntos A y B se encuentran en lados opuestos de un río. Para encontrar la distancia AB, se toma un punto C en el mismo lado que A y a 220.0 pies de distancia de este punto. Los ángulos CAB y ACB se determinaron como 51^0 36' y 59^0 48', respectivamente. Encontrar la longitud AB.



b) En la figura adjunta se indican los ángulos de elevación A y B de un globo que se encuentra en C. Al pie más cercano, ¿a qué distancia está el globo de B?



c) Se va a suspender una tubería recta sobre un pantano. Si cuesta $ 4.25 por m, encontrar el costo total para tender una tubería desde A hasta B.

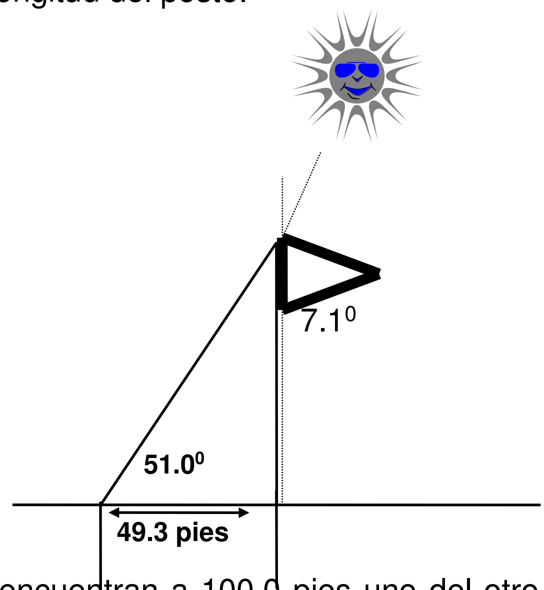


Demuestra tu respeto a las leyes...

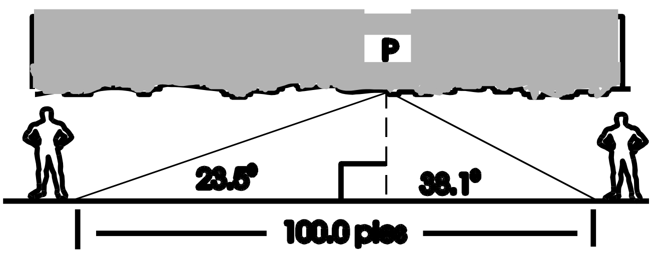
AUTOEVALUACIÓN.

1. Resuelve los siguientes problemas aplicando la ley de los senos:

a) Un poste se inclina 7.1^0 respecto a la vertical. Cuando el ángulo de elevación del sol es de 51.0^0, el poste proyecta una sombra de 49.3 pies de longitud. Encontrar la longitud del poste.



b) Dos individuos se encuentran a 100.0 pies uno del otro, bajo un domo. El ángulo de elevación desde la ubicación de cada uno de ellos al punto más alto P del domo, se muestra en la figura adjunta. Encontrar la altura de P sobre el piso.



ACTIVIDADES REMEDIALES.

Es el momento de que adquieras la 2ª herramienta para “Resolver triángulos oblicuángulos”. Ésta es llamada Ley de los cosenos la cual se te demuestra a continuación:

LEY DE LOS COSENOS: En todo triángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble producto de los mismos lados por el coseno del ángulo que forman. De esta manera, en el triángulo ABC, se tiene:

GRUPO DE FÓRMULAS

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B, \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C. \end{cases}$$

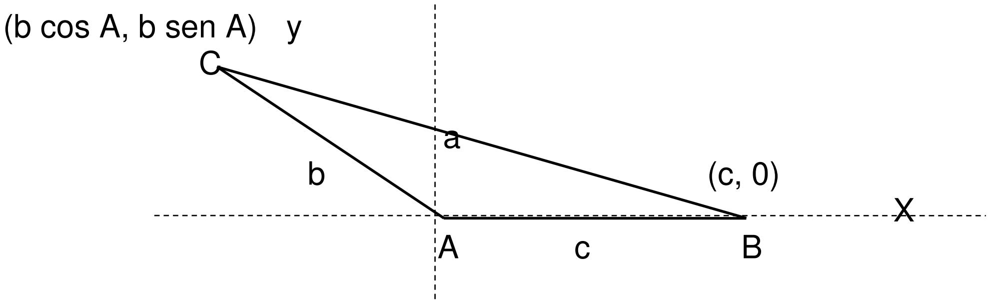
Demostración: Sea *ABC* un triángulo cualquiera, colocado en un sistema de coordenadas X, Y, como se muestra en la figura de abajo. Como A está en posición normal, las coordenadas del vértice C son (***b cos A***, ***b sen A***); las coordenadas de B son (c, 0).

La fórmula del cuadrado de la distancia entre dos puntos, da

$$a^2 = (b \cos A - c)^2 + (b \operatorname{sen} A - 0)^2;$$

elevando al cuadrado y simplificando:

$$a^2 = b^2 (\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A) + c^2 - 2bc \cos A.$$



Pero $\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A = 1$,

por lo que $$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A.}$$

Puesto que la nomenclatura de los lados del triángulo se eligió arbitrariamente, se concluye que la demostración es igualmente válida para las otras dos fórmulas del grupo.

La ley de los cosenos es útil para hallar el tercer lado de un triángulo cuando se conocen los otros dos y el ángulo comprendido entre ellos (caso 3), o para determinar un ángulo cuando se conocen los tres lados de un triángulo (caso 4).

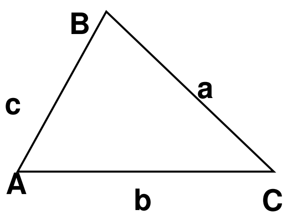
Una ventaja de la ley de los cosenos, en relación a la ley de los senos, es que permite conocer el cuadrante del ángulo en función del signo del coseno del ángulo. Es decir, cos A es positivo, entonces A queda en el *primer cuadrante*; si cos A es *negativo*, entonces A queda en el *segundo cuadrante.*

APLICACIONES DE LA LEY DE LOS COSENOS:

En los ejemplos que siguen se muestra la resolución de triángulos correspondientes a los casos 3 y 4, aplicando la ley de los cosenos.
CASO II (Se conocen 2 lados y el ángulo comprendido)

Dados dos lados y el ángulo comprendido en un triángulo, puede usarse la ley de cosenos para encontrar el tercer lado.

Ejemplo 1: Dados a = 14.0, c = 10.2 y B = 74.8^0, resolver el Δ ABC.



Solución: Trazar un triángulo que muestre la información dada. Como se requiere calcular *b* y se conocen *a, c* y *B*, se escoge la ley de cosenos en la forma $\mathbf{b^2 = a^2 + c^2 - \{ (2ac)(\cos B)\}}$
Sustituir apropiadamente y resolver para *b*.
$b^2 = 14.0^2 + 10.2^2 - 2(14.0)(10.2)\cos 74.8^0 = 225.15877$

Calcular $\sqrt{225.15877}$ para obtener b = 15.005291

Luego de $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, podemos escribir: $\cos A \quad \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

Obteniendo: A = 0.43513657 A = 64.2º

Calcular ahora C.

C = (180 - 64.206015 - 74.8)^0 = 40.993985^0 = 41º

Así, *b* = 15, *A* = 64.2^0, *C* = 41.0^0 y queda resuelto el triángulo.

Ejemplo 2: Sobre un cuerpo se ejercen dos fuerzas de 17.5 Kg. y 22.5 Kg. Si las direcciones de las fuerzas forman un ángulo de 50^{0}10', encontrar la magnitud de la fuerza resultante y el ángulo que forma con la fuerza mayor. (Considera la Fig. de abajo).

En el paralelogramo *ABCD,* A + B = C + D

A + B = 180° B = 180°-50°10' $\boxed{B = 129°50'}$

En el triángulo *ABC*, ***$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos B$***

$b^2 = (22.5)^2 + (17.5)^2 - 2\,(22.5)\,(17.5)\,(-\,0.6406) = 1317$

$b^2 = 1317$

b = $\sqrt{1317}$ b = 36.6.

La resultante es una fuerza de 36.3 Kg.; el ángulo buscado es de 21⁰40'.

Para encontrar A:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(36.3)^2 (22.5)^2 - (17.5)^2}{2(36.3)(22.5)} =$$

$$\cos A = \frac{(131769) + (506.25) - (306.25)}{1633.5} = \frac{1517.67}{1633.5} = 0.929$$

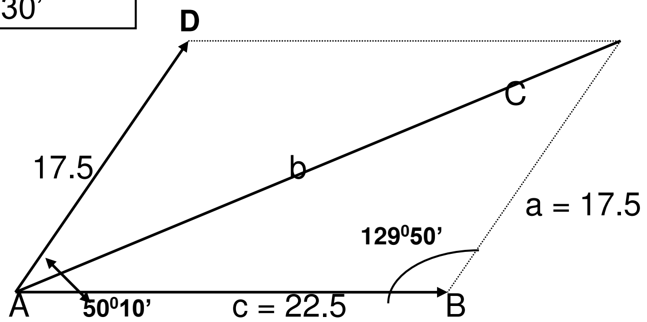
$\boxed{A = 21^{\circ}\ 40'}$

A + B + C = 180°

21°40' + 129°50' + C = 180°

C = 180° - 129°50' – 21°40'

$\boxed{C = 28°30'}$



CASO III (Se conocen los 3 lados)

Dados los tres lados de un triángulo, se puede usar la ley de cosenos *para resolver completamente el triángulo.*

Ejemplo 3: Considérese el Δ *ABC*, donde a =6.9, b = 5.5, c = 2.8 y para encontrar el ángulo A

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(5.5)^2 + (2.8)^2 - (6.9)^2}{2(5.5)(2.8)} =$$

A =arc cos -.30909091 $\boxed{A = 108^{0}}$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(6.9)^2 + (5.5)^2 - (2.8)^2}{2(6.9)(5.5)} = \frac{70.02}{75.9}$$

cos C = 0.9225 C = 22º 42'

Para encontrar B:

B = (180º - 108º - 22º 42')
B = 49º 18'

CASO IV (Se conocen 2 lados y el ángulo opuesto a uno de ellos):

Este caso reviste características especiales, y que puede arrojar una solución, dos soluciones o ninguna solución; es por esto que a éste caso se le conoce con el nombre de "***Caso Ambiguo"***.

En este apartado se considera un método combinado algebraico trigonométrico para resolver triángulos, cuando se conocen dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos.

La fórmula cuadrática.
Del Álgebra, recuerda que una ecuación cuadrática de la forma:

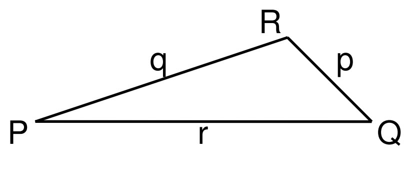
$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad (a \neq 0)$$

Se dice que está en la ***forma general***. Las soluciones de ecuaciones cuadráticas en la forma general se pueden obtener mediante la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

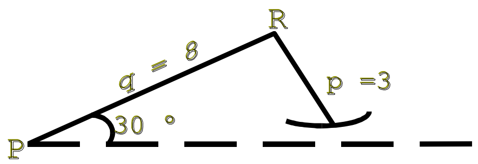
El número $b^2 - 4ac$ bajo el radical se conoce como ***discriminante***.

El caso lado-lado-ángulo:

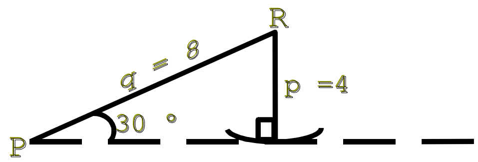


Para evitar confusión con las letras a, b y c que aparecen en la formula cuadrática, en el resto de este apartado se usará ∆ PQR (figura anterior). Como se asentó antes, el caso lado-lado-ángulo se denomina *ambiguo*, pues los datos proporcionados pueden determinar uno, dos o ningún triángulo. *Por ejemplo*, considera los cuatro conjuntos siguientes de datos y las partes correspondientes de las figuras.

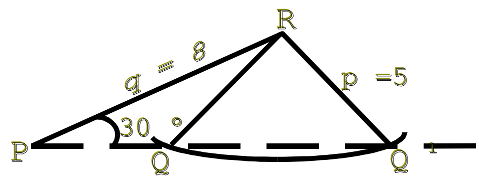
a) P = 30^0, q = 8, p = 3; no hay triángulo.
b) P = 30^0, q = 8, p = 4; un triángulo
c) P = 30^0, q = 8, p = 5; dos triángulos (Δ PQR y Δ PQ'R).
d) P = 30^0, q = 8, p = 9; un triángulo



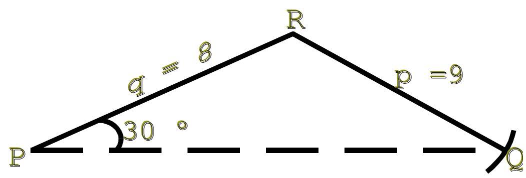
a)



b)

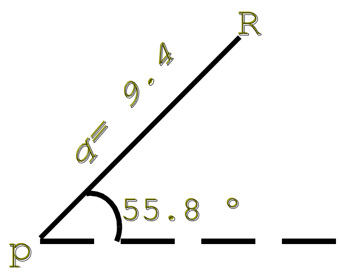


c)



d)

Ejemplo 1: Dados P = 55.8^0, q = 9.4 y p = 11.3, especificar el número de triángulos posibles; calcular *r* y resolver los triángulos.



Solución: Hacer un dibujo. Como el ángulo P se conoce, usar la ley de cosenos en la forma:

$$p^2 = q^2 + r^2 - 2qr \cos P$$

Sustituir los datos proporcionados.

$$(11.3)^2 = (9.4)^2 + r^2 - 2\,(9.4)\; r\; (0.562)$$
$$127.69 - 88.36 = r^2 - 10.567168\; r$$

Simplificar y escribir en la forma general.

$$r^2 - 10.567168\, r - 39.33 = 0$$

Resolver mediante la fórmula cuadrática, con a = 1, b = - 10.567168, y c = - 39.33 a = coeficiente de r^2
c = término independiente.
b = coeficiente de r

$$r = \frac{-(-10.567168) \pm \sqrt{(-10.567168)^2 - 4(1)(-39.33)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{10.567168 \pm \sqrt{268.98504}}{2} = \frac{10.567168 \pm 16.400763}{2}$$

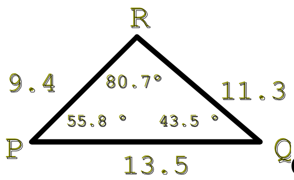
Ahora,

$$r = \frac{10.567168 + 16.400763}{2} = 13.483966$$

o bien

$$r = \frac{10.567168 - 16.400763}{2} = -2.9167885$$

De las dos soluciones, la negativa no es adecuada (- 2.9167885) para ser lado de un triángulo. Se concluye que existe exactamente un triángulo para lo datos proporcionados.
Continua la solución del triángulo, calculando el ángulo R (o el Q). Por la ley de cosenos.



$$\cos R = \frac{p^2 + q^2 - r^2}{2pq} = \frac{11.3^2 + 9.4^2 - (13.5)^2}{2(11.3)(9.4)}$$

$\cos R = 0.16$ $\quad\quad R = 80.72^0$

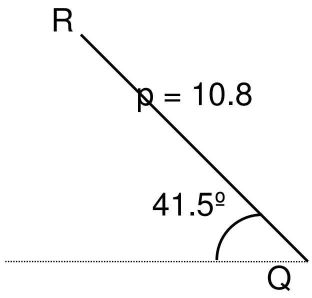
Se completa la solución encontrando el tercer ángulo.

$Q = (180º - 80.7º - 55.8)^0 = 43.5^0$

Por consiguiente, $r = 13.5$, $R = 80.7^0$ y $Q = 43.5^0$

Ejemplo 2: Dados $Q = 41.5^0$, $p = 10.8$ y $q = 6.7$, especificar el número de triángulos posibles y calcular *r*.

Solución: Trazar un dibujo. Como se conoce Q, usar la ley de cosenos en la forma:



$$q^2 = p^2 + r^2 - 2pr \cos Q$$

Sustituir los datos proporcionados, simplificar y escribir la ecuación resultante en la forma general.

$$r^2 - 16.18\, r + 71.75 = 0$$

Resolver por la fórmula cuadrática, con a = 1, b = - 16.18 y c = 71.75.

$$r = \frac{-(-16.18) \pm \sqrt{(-16.18)^2 - 4\,(1)\,(71.75)}}{(2)\;(1)}$$

$$r = \frac{16.18 \pm \sqrt{-25.30}}{2}$$

Como el discriminante (- 25.30) es número negativo, no existen soluciones reales de la ecuación. Se concluye que no hay triángulos posibles para los datos dados.

En la tabla siguiente se resumen los resultados ilustrados por los ejemplos 1,2 y 3 anteriores, donde los ángulos dados son agudos.

Tabla

Discriminante	**Soluciones**	**Número de triángulos**
Positivo	Una positiva Una negativa	Uno
Positivo	Ambas positivas	Dos
Negativo	No en los números reales	Ninguno

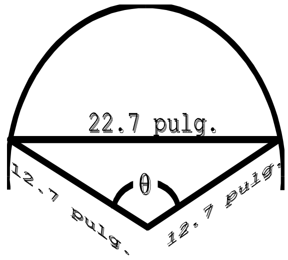
Observar que la posibilidad de que el discriminante sea cero no se registró en la tabla. Para este caso, puede demostrarse que cuando $b^2 - 4ac = 0$, el triángulo resultante es rectángulo.

¡Comprueba tu aprendizaje!

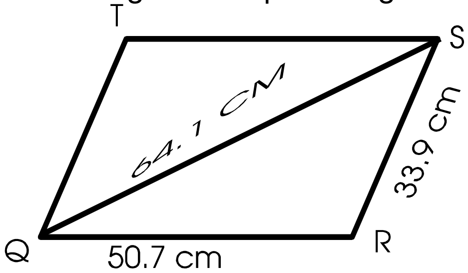
ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

1. Resuelve los siguientes problemas utilizando la ley de cosenos:

a) Se traza una cuerda de 22.7 pulgadas en un círculo de 12.7 pulgadas de radio. Encontrar el ángulo central θ subtendido por la cuerda.



b) Encontrar los cuatro ángulos del paralelogramo QRST y la diagonal RT.



c) Una torre de 150 pies de altura está situada en lo alto de una colina. En un punto, en la falda de la colina, situado a 650 pies de la cima se observa que el ángulo formado por la ladera de la colina y la visual dirigida al extremo superior de la torre es de $12^0 30'$. Encontrar la inclinación de la ladera de la colina respecto a un plano horizontal.

¡ Aplicando leyes !

AUTOEVALUACIÓN.

1. A continuación se te proporciona una serie de ejercicios para que demuestres tus habilidades en la resolución de triángulos oblicuángulos.

1. A = 38.6^0, B = 42.8^0; c = 6.83 cm.
2. A = 42.3^0, C = 108.9^0; b = 41.3 m
3. B = 21.6^0, C = 111.3^0; a = 114.0 Km.
4. M = 96.2^0, N = $23.2^{0;}$ m = 63.8 pies
5. M = 114.2^0, P = $18.1^{0;}$ p = 46.2 yardas
6. N = 38.4^0, P = 39.7^0; n = 221.1 Km.
7. a = 7.8, b = 6.2; c = 5.9.
8. a = 9.9, b = 15.2; c = 21.1.
9. a = 15, c = 11.3; B = 61.3^0
10. a = 22.1, b = 21.5; C = 48.2^0

¡ No desistas !

ACTIVIDADES REMEDIALES.

Considerando el grado de dificultad del tema de triángulos oblicuángulos, te recomendamos formar círculos de estudio con tus demás compañeros, a fin de que aclares dudas que te puedan surgir, apóyate de alguna bibliografía que a continuación se te sugiere:

1. Forma círculos de estudio con tus compañeros y asesor para aclarar cualquier duda.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

IDENTIFICANDO Y RELACIONANDO CONOCIMIENTOS.

En álgebra, identidades tales como a + b = b + a y (x) (1) = x son útiles para simplificar expresiones y resolver ecuaciones. También existen las identidades trigonométricas, las cuales son útiles para simplificar expresiones trigonométricas y resolver ecuaciones trigonométricas.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES.

Una *identidad* es una ecuación que es satisfecha por todos los valores permitidos de la variable, donde el término "Valores Permitidos" se refiere a aquellos valores para los que está definida la ecuación dada.

Ejemplo: Escribir tres identidades algebraicas.

Solución: Las siguientes son identidades algebraicas.

a) $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

c) $\frac{1}{\frac{1}{x}} = X$

b) $x + 1 + 2x - 3 = 3x - 2$

Ejemplo: Escribir las identidades del ejemplo anterior con funciones trigonométricas de "x".

Solución: Cualquier función trigonométrica se puede usar en lugar de x. Hemos escogido cos θ en (a), tan θ en (b), y sen θ en (c).

a) $\cos^2 \theta - 1 = (\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1)$

b) $\tan \theta + 1 + 2 \tan \theta - 3 = 3 \tan \theta - 2$

c) $\dfrac{1}{\dfrac{1}{sen}} = sen\theta$ = sen θ

Aunque estas identidades contienen funciones trigonométricas, su validez proviene más de principios algebraicos que de las propiedades de las funciones trigonométricas por lo que se consideran como identidades algebraicas.

En contraste con las identidades del ejemplo anterior, aunque de naturaleza semejante, están las relaciones que existen entre las funciones trigonométricas.

Primeramente estudiarás ocho identidades trigonométricas. Éstas se conocen como las identidades fundamentales se pueden obtener a partir de las definiciones de las funciones trigonométricas para un ángulo en general.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DEDUCIDAS A PARTIR DE CÍRCULOS ARBITRARIOS O DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.

A) ***Identidades Recíprocas***: Estas identidades se basan en la propiedad de que el producto de recíprocos es 1.

Las funciones seno y cosecante son recíprocas; las funciones coseno y secante son recíprocas; y las funciones tangente y cotangente son recíprocas. Entonces las identidades recíprocas son:

1. sen $\theta \dfrac{1}{\csc\theta}$ = ò también sen θ * csc θ = 1

2. cos θ = $\dfrac{1}{\sec\theta}$ ò también cos θ * sec θ = 1

3. tan θ = $\dfrac{1}{\cot\theta}$ ò también tan θ * cot θ = 1

La verificación de cada enunciado se obtiene a partir de las definiciones de las razones trigonométricas dadas.

Demostración: sen θ . csc θ = $\dfrac{1}{\cot\theta}$ Si sen $\theta = \dfrac{y}{r}$ csc θ = $\dfrac{r}{y}$

entonces

$$\left(\frac{y}{r}\right)\left(\frac{r}{y}\right) = \frac{yr}{ry} = 1$$

B) ***Identidades por cociente:***

4. $\dfrac{sen\theta}{\cos\theta}$ = tan θ

5. $\dfrac{\cos\theta}{sen\theta}$ = cot θ

Demostración: de $\frac{sen\theta}{\cos\theta}$ = tan θ

De las funciones generales de sen θ = $\frac{y}{r}$ y cosθ = $\frac{x}{r}$

Dadas anteriormente, se tiene que:

$$\frac{sen\theta}{\cos\vartheta}=\frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{y\bullet r}{x\bullet r}=\frac{yr}{xr}=\frac{y}{x} \quad \text{y como } \frac{y}{x}=tg\theta$$

Por lo que $\frac{\text{sen }\theta}{\cos\theta}$ = tan θ

C) *Identidades Pitagóricas:*

$\boxed{6.\quad sen^2\theta + \cos^2\theta = 1}$

$\boxed{7.\quad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta}$

$\boxed{8.\quad \cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta}$

Demostración: De $sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$

El teorema de Pitágoras es $r^2 = x^2 + y^2$. Si se dividen ambos lados de esta igualdad entre r^2 y se simplifica obteniéndose.

$1=\left(\frac{x}{r}\right)^2\left(\frac{y}{r}\right)^2$ como sabes sen θ = $\frac{y}{r}$ y cos θ = $\frac{x}{r}$

entonces : $1 = \cos^2\theta + sen^2\theta$

D) *Identidades del doble de un ángulo:*

$\boxed{9.\quad \text{Sen } 2a = 2 \text{ Sen } a \text{ Cos } a}$

$\boxed{10.\quad \text{Cos } 2a = \text{Cos}^2 a - \text{Sen}^2 a}$

$$\boxed{11.\quad Tan\ 2a=\frac{2\ Tan\ a}{1-Tan^2 a}}$$

$$\boxed{12.\quad Cot\ 2a=\frac{Cot^2\ a-1}{2\ Cot\, a}}$$

Demostración: aplicando la identidad $Tan\ (a+b)=\frac{Tan\ a+Tan\ b}{1-Tan\ a\ Tan\ b}$

Haciendo a = b y sustituyendo $Tan\,(a+a) = \dfrac{Tan\ a + Tan\ a}{1 - Tan\ a\ Tan\ a}$ y efectuando operaciones $Tan\ 2a = \dfrac{2Tan\ a}{1 - Tan^2\ a}$

E) *Identidades de la mitad de un ángulo:*

13. $Sen\dfrac{a}{2} = \dfrac{\sqrt{1 - Cos\ a}}{2}$

14. $Cos\dfrac{a}{2} = \dfrac{\sqrt{1 + Cos\ a}}{2}$

15. $Tan\dfrac{a}{2} = \dfrac{\sqrt{1 - Cos\ a}}{1 + Cos\ a}$

Procedimiento para demostrar que una ecuación es una identidad

Para la demostración, debe transformarse uno de los miembros de la ecuación en la misma forma que tiene el otro miembro. Cabe aclarar que no hay un procedimiento general, sin embargo puede resultar útil proceder en la forma siguiente:

1. Si uno de los miembros contiene más de una función, en tanto que el otro miembro contiene sólo una, convertimos las funciones del primer miembro en términos de la función que interviene en el segundo, usando las relaciones fundamentales conocidas.
2. Normalmente resulta más ventajoso trabajar con el miembro en que están las funciones más complicadas de la identidad.
3. Si uno de los miembros incluye una o más operaciones indicadas, deben efectuarse como primer paso.
4. En otros casos, y de ser posible, uno de los miembros debe factorizarse, lo cual posiblemente ayude a distinguir el paso conveniente.
5. Si uno de los miembros contiene varios términos en el numerador, y el denominador solamente uno, en algunos casos nos ayudará expresar el miembro de referencia como una suma de fracciones y aplicar a continuación las relaciones fundamentales conocidas.
6. De no ser posible aplicar alguna de las indicaciones anteriores, debemos convertir las funciones del miembro más complicado en senos y cosenos, y luego simplificarlos.

Identifícate con tu aprendizaje.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

1. Demostrar las identidades siguientes:

a) $\tan\theta \cdot \dfrac{\cos\theta}{\cot\theta} = 1$

c) $\dfrac{\cos\theta}{sen\theta} = \sec\theta$

b) $\dfrac{tg\theta}{sen\theta} = \text{sen}\,\theta$

¡ Autoidentifícate !

AUTOEVALUACION.

1. Comprueba las identidades que se te presentan:

a) $\tan\theta \cdot \cos\theta \cdot \csc\theta = 1$

c) $\sec\theta\ (1 - \text{sen}\,\theta) = \cos\theta$

b) $\text{sen}\,\theta \cdot \csc\theta = \tan\theta$

¿ No te identificas aún ?

ACTIVIDADES DE RETROALIMENTACIÓN.

1. Acude a tu asesor si crees necesario reforzar este tema.

2. Entrega por escrito a tu asesor las identidades resueltas en tus actividades de aprendizaje y autoevaluación.

G L O S A R I O

ÁNGULO.	Abertura comprendida entre dos semirrectas que parten de un punto y tiene una medida que corresponde a la magnitud de la rotación necesaria, para llevar una de las semirrectas desde su posición original hasta la posición de la otra.
ÁNGULO EN GRADOS	Sistema sexagecimal utilizado en aplicaciones prácticas, cuya unidad fundamental es el grado. La magnitud de un ángulo en grados está dada por la relación: Ángulo en grados = (número de revoluciones) (360º)
ÁNGULO DE RADIANES	Sistema más utilizado en matemáticas, cuya unidad fundamental es el radián. Si la longitud de la circunferencia unitaria es **2** π **,** deducimos inmediatamente que: Ángulo en radianes = (número de revoluciones) (**2** π)
IGUALDAD.	Expresión de la equivalencia de dos cantidades.
ECUACIÓN	Proposición de igualdad válida sólo para determinados valores de las letras que aparecen en ella.
IDENTIDAD	Proposición de igualdad válida para todos los valores permisibles de las letras que aparecen en ella.
IDENTIDAD TRIGONOMÉTRICA	Proposición de igualdad entre funciones trigonométricas válida para todos los valores permisibles de θ .
TRIGONOMETRÍA.	Rama de la matemática que estudia las propiedades y aplicaciones de las funciones circulares o trigonométricas.
FUNCIÓN SENO.	Sen $\theta \longrightarrow$ y donde " y" es la ordenada de **P (**θ**)** o sea y = sen θ .
FUNCIÓN COSENO	Cos $\theta \longrightarrow$ x donde " x" es la abscisa de **P (**θ**)** o sea x = cos θ .
FUNCIÓN TANGENTE	Si el punto terminal **P (**θ**)** tiene las coordenadas rectangulares (x, y) entonces: $\tan \theta = \frac{y}{x}$

Anexos

B I B L I O G R A F Í A .

1. HOOPER y GISWOLD, Trigonometría , Publicaciones culturales, México 1984.

2. HARCOURT, B. Jovanovich, Trigonometría , Ed. SITESA, México 1990.

3. NILES, T., Trigonometría Plana , Ed. Limusa Horiega, México 1990.

4. AYRES, Frank, Trigonometría Plana y Esférica , Ed. Mc Graw Hill, México 1984.

5. CASTRO, C. Aureliano, Geometría y Trigonometría , Universidad Autónoma de Sinaloa, Dirección General de Escuelas Preparatorias, México 1984.

6. BALDOR, Geometría Plana y del Espacio y Trigonometría , Publicaciones Cultural S. A., México 1992.

7. Enciclopedia Audiovisual Educativa, Matemáticas volumen 2 , Océano grupo editorial, España 1984.