LOGARITMOS

DEFINICIÓN DE LOGARITMO

Sean $a, x \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$. La expresión anterior quiere decir que tanto a como x deben ser valores positivos ya que forman parte del conjunto de los reales positivos y que a no puede ser 1.

Se dice que y es el logaritmo en base a de x si y solo sí $x = a^y$.

Es decir: y es el exponente al que hay que elevar la base a para obtener el número x (argumento del logaritmo).

$$log_a x = y$$

Ejemplo:

$$log_4 1024 = 5$$

En este ejemplo, el número real positivo 4 es la base del logaritmo,1024 su argumento y 5 es el resultado de calcular el logaritmo de 1024.

El logaritmo de 1024 en base 4, es 5, porque 5 es el exponente al cual se debe elevar la base 4 para obtener 1024.

$$4^5 = (4)(4)(4)(4)(4) = 1024$$

Según se dijo, tener presente que:

- La base a de un logaritmo debe ser siempre distinta de 0 y 1.
- La base a del logaritmo debe ser positiva.
- El argumento x de un logaritmo debe ser positivo.
- Los logaritmos de base $a = 10$ se llaman logaritmos comunes o decimales y se omite el 10. Así:

$$log_{10} x = \log x$$

EJERCICIOS EMPLEANDO LA DEFINICIÓN DE LOGARITMO

Ejercicios donde se pide transformar una expresión en forma logarítmica a su forma exponencial:

Forma logarítmica	Forma exponencial
$log_3 243 = 5$	$3^5 = 243$
$log_3 81 = 4$	$3^4 = 81$
$log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{64} = 6$	$(\frac{1}{2})^6 = \frac{1}{64}$
$log_a \sqrt{6} = \frac{1}{2}$	$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$
$log_2 \frac{1}{8} = -3$	$(2)^{-3} = \frac{1}{8}$
$log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} = 3$	$(\frac{1}{3})^3 = \frac{1}{27}$

Ejercicios donde se pide transformar una expresión en forma exponencial a su forma logarítmica:

Aquí, primero, hay que fijarse en el exponente al que está elevada una cierta base, porque ese exponente va a ser el segundo miembro en la forma exponencial solicitada. En el primer ejemplo siguiente, el 6 es el exponente que está elevando la base $\frac{1}{2}$, por eso el 6 es el logaritmo del número y se registra en el segundo miembro.

Forma exponencial	Forma logarítmica
$\frac{1}{64} = (\frac{1}{2})^6$	$log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{64} = 6$
$P = (\sqrt{2})^3$	$log_{\sqrt{2}}P = 3$
$\frac{1}{125} = 5^{-3}$	$log_5\frac{1}{125} = -3$
$25 = (\sqrt{5})^4$	$log_{\sqrt{5}}25 = 4$
$y = (x)^p$	$log_x y = p$

Ejercicios donde se pide encontrar la base del logaritmo:

Encontrar el valor de la base a en la expresión: $log_a 216 = 3$

Solución:

$$a^3 = 216$$

Extrayendo raíz cúbica de ambos miembros:

$$\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{216}$$
$$a = \sqrt[3]{216}$$
$$a = 6$$

Encontrar el valor de la base b en la expresión: $log_b 3125 = -5$

Solución:

$$b^{-5} = 3125$$
$$(\frac{1}{b})^5 = 3125$$

Extrayendo raíz quinta de ambos miembros:

$$\sqrt[5]{(\frac{1}{b})^5} = \sqrt[5]{3125}$$

$$\frac{1}{b} = \sqrt[5]{3125}$$

$$\frac{1}{b} = 5$$
$$\frac{1}{b} = \frac{5}{1}$$

$$5b = 1$$
$$b = \frac{1}{5}$$

Encontrar el valor de la base b en la expresión: $log_b 7 = 2$

Solución: Aplicando la definición de logaritmo:

$$b^2 = 7$$

$$b = \pm\sqrt{7}$$
$$b = +\sqrt{7}$$
$$b = -\sqrt{7}$$

Esta última respuesta no es válida, porque b es la base de un logaritmo y las bases no pueden ser negativas.

Encontrar el valor de x en la expresión: $log_{x-1}(x + 5) = 2$

Solución: Aplicando la definición de logaritmo:

$$(x - 1)^2 = x + 5$$

$$(x - 1)(x - 1) = x^2 - x - x + 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = x + 5$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$
$$(x - 4)(x + 1) = 0$$
$$(x - 4) = 0$$

$x = 4$ Es solución, porque si se reemplaza en la base $(x - 1)$ da un valor positivo que es 3.

$$(x + 1) = 0$$
$$x = -1$$

$x = -1$ No es solución, porque si se reemplaza en la base $(x - 1)$ da -2 que es un valor negativo y la base no puede ser negativa.

Ejercicios donde se pide encontrar el argumento del logaritmo:

- Encontrar el valor de x en: $log_3 x = 4$

Solución:

La expresión se transforma a su forma exponencial y se desarrolla el exponente.

$$3^4 = x$$

$$x = (3)(3)(3)(3) = 81$$

- Encontrar el valor de m en: $log_{\sqrt{2}} m = 3$

Solución:

La expresión se transforma a su forma exponencial y se desarrolla el exponente.

$$\sqrt{2}^3 = m$$

$$m = (\sqrt{2})(\sqrt{2})(\sqrt{2}) = \sqrt{8} = (\sqrt{4})(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

- Encontrar el valor de b en: $log_{32}b = 0{,}2$

Solución:

La expresión se transforma a su forma exponencial y se desarrolla el exponente.

$$32^{0,2} = b$$

$$32^{\frac{2}{10}} = b$$
$$\sqrt[10]{32^2} = b$$
$$\sqrt[10]{1024} = b$$

Usando la calculadora, la raíz 10 de 1024 es: 2

- Encontrar el valor de x en: $log_8 x = 0{,}333\ldots$

Solución:

La expresión se transforma a su forma exponencial y se desarrolla el exponente.

$$8^{0,333\ldots} = x$$

$$8^{\frac{1}{3}} = x$$
$$\sqrt[3]{8} = x$$
$$x = 2$$

- Encontrar el valor de w en: $log_{27}w = \frac{1}{3}$

Solución:

La expresión se transforma a su forma exponencial y se desarrolla el exponente.

$$27^{\frac{1}{3}} = w$$

$$\sqrt[3]{27} = w$$
$$w = 3$$

- Encontrar el valor de m en: $log_{0,5}y = 5$

Solución:

La expresión se transforma a su forma exponencial y se desarrolla el exponente.

$0{,}5^5 = y$

$(\frac{1}{2})^5 = y$
$y = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32}$

Ejercicios donde se pide encontrar el valor del logaritmo:

- Calcular el valor de y en la expresión: $log_3 81 = y$

<u>Solución:</u>

y es el exponente al cual hay que elevar la base 3 para obtener 81:

$3^y = 81$
$3^y = 3^4$

Como la base es la misma en ambos miembros de la igualdad, entonces sus exponentes son iguales:

$y = 4$

Por consiguiente: $log_3 81 = 4$

- Calcular el valor de y en la expresión: $log_2 8 = y$

<u>Solución</u>*:*

y es el exponente al cual hay que elevar la base 2 para obtener 8:

$2^y = 8$
$2^y = 2^3$

Como la base es la misma en ambos miembros de la igualdad, entonces sus exponentes son iguales:

$y = 3$

Por consiguiente: $log_2 8 = 3$

- Calcular el valor de y en la expresión: $log_7 343 = y$

<u>Solución</u>*:*
y es el exponente al cual hay que elevar la base 7 para obtener 343:
$7^y = 343$
$7^y = 7^3$

Como la base es la misma en ambos miembros de la igualdad, entonces sus exponentes son iguales:

$y = 3$
Por consiguiente: $log_7 343 = 3$

- Calcular el valor de y en la expresión: $log_{\sqrt{3}} 9 = y$

<u>Solución:</u>
y es el exponente al cual hay que elevar la base $\sqrt{3}$ para obtener 9:

$\sqrt{3}^y = 9$
$\sqrt{3}^y = 3^2$
$3^{\frac{y}{2}} = 3^2$

Como la base es la misma en ambos miembros de la igualdad, entonces sus exponentes son iguales:

$\frac{y}{2} = 2$

$y = (2)(2) = 4$

Por consiguiente:$log_{\sqrt{3}} 9 = 4$

- Calcular el valor de y en la expresión: $log_{\frac{1}{2}} 0{,}125 = y$

Solución:
y es el exponente al cual hay que elevar la base $\frac{1}{2}$ para obtener 0,125:

$(\frac{1}{2})^y = 0{,}125$

$\left(\frac{1}{2}\right)^y = \frac{1}{8}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^y = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

Como la base es la misma en ambos miembros de la igualdad, entonces sus exponentes son iguales:

$y = 3$

Por consiguiente: $log_{\frac{1}{2}} 0{,}125 = 3$

- Calcular el valor de y en la expresión: $log_{10} 10\,000\,000 = y$

Solución:
y es el exponente al cual hay que elevar la base10 para obtener 10 000 000:

$10^y = 10\,000\,000$
$10^y = 10^7$

Como la base es la misma en ambos miembros de la igualdad, entonces sus exponentes son iguales:

$y = 7$
Por consiguiente: $log_{10} 10\,000\,000 = 7$

- Calcular el valor de y en la expresión: $log_{0,25} 0{,}0625 = y$

Solución:
y es el exponente al cual hay que elevar la base $0{,}25 = \frac{25}{100}$ para obtener $0{,}0625 = \frac{625}{10000}$

$\left(\frac{25}{100}\right)^y = \frac{625}{10000}$

$\left(\frac{1}{4}\right)^y = \frac{1}{16}$

$\left(\frac{1}{4}\right)^y = \left(\frac{1}{4}\right)^2$

Como la base es la misma en ambos miembros de la igualdad, entonces sus exponentes son iguales:

$y = 2$

Por consiguiente: $log_{0,25}0{,}0625 = 2$

- Calcular el valor de y en la expresión**:** $log_{0,0256}\left(\frac{64}{15625}\right) = y$

<u>Solución:</u>

$log_{\frac{256}{10000}}\left(\frac{2^6}{5^6}\right)$

$log_{\frac{2^8}{(5^4)(2^4)}}\left(\frac{2^6}{5^6}\right)$

$log_{\frac{2^4}{(5^4)}}\left(\frac{2^6}{5^6}\right)$

$(\frac{2^4}{5^4})^y = (\frac{2}{5})^6$

$(\frac{2}{5})^{4y} = (\frac{2}{5})^6$

$4y = 6$

$y = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

- Calcular: $3log_2\left(\frac{1}{4}\right) = y$

Se aplica el logaritmo de una potencia: $log_a a^n = nlog_a$

$3log_2\left(\frac{1}{4}\right) = log_2\left(\frac{1}{4}\right)^3 = log_2(4)^{-3} = log_2(2^2)^{-3} = log_2(2)^{-6}$

$log_2 2^{-6} = y$

$2^y = 2^{-6}$

$y = -6$

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Las propiedades que se describen a continuación están referidas no solo a logaritmos de base decimal, sino a logaritmos de cualquier base.

Muy importante: en las fórmulas siguientes, los valores de *a, x, y c*, *p*, *n* deben cumplir las siguientes condiciones:

$$a, x, y, c, p > 0, a \neq 1, p \neq 1, n \in N$$

1) <u>Logaritmo de la base</u>: (la base y el argumento son iguales)

$$log_a a = 1$$

Ejemplo: $log_5 5 = 1$

2) <u>Logaritmo de la unidad</u>:

$$log_a 1 = 0$$

3) <u>Logaritmo de base cero</u>: *No existe*, porque se dijo que a debe ser mayor que cero ($a > 0$).

4) <u>Logaritmo de una potencia de la base</u>:

$$log_a a^n = n$$

5) <u>Logaritmo de un número negativo</u>: *No existe*, porque por definición de logaritmo, el número debe pertenecer al conjunto de los reales positivos ($x \in \mathbb{R}^+$).

6) <u>Logaritmo de cero, sea cual sea su base</u>: *No existe*.

7) <u>Logaritmo de un producto</u>:

Es igual a la suma de los logaritmos de los factores del producto. Si el producto está formado por los factores *x* e *y*, se tiene que:

$$log_a xy = log_a x + log_a y$$

Importante: $log_a x + log_a y \neq \log_a(x + y)$

EJERCICIOS

- Desarrollar: $log_a 12$

Solución:

$$log_a 12 = log_a(3)(4) = log_a 3 + log_a 4$$

- Desarrollar: $log_a 25$

Solución:

$$log_a 25 = log_a(5)(5) = log_a 5 + log_a 5$$

- Desarrollar: $log_x(x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2})$

Solución:

$$log_x\left(x^3\sqrt[3]{x^2}\right) = log_x x^3 + \log_x \sqrt[3]{x^2} = 3log_x(x) + log_x\left(x^{\frac{2}{3}}\right) = 3log_x(x) + \frac{2}{3}log_x x = 3(1) + \frac{2}{3}(1)$$
$$= 3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$$

- Calcular: $log_6 12 + log_6 3$

$log_6 12 + log_6 3 = log_6(12)(3) = log_6 36$

El valor del logaritmo anterior se resuelve preguntándose a qué exponente hay que elevar la base 6 para obtener 36. Respuesta: 2. Por tanto:

$log_6 12 + log_6 3 = 2$

- Calcular: $log_4 8 + log_4 8$

$log_4 8 + log_4 8 = log_4(8)(8) = log_4 64$

El valor del logaritmo anterior se resuelve preguntándose a qué exponente hay que elevar la base 4 para obtener 64. Respuesta: 3. Por tanto:

$log_4 8 + log_4 8 = 3$

- Sabiendo que $\log 2 = a; \log 3 = b$ $calcular$ $\log 360$

Solución: tener presente, también, que $\log 10 = 1$
$\log 360 = \log(10)(36)$

$\log 360 = \log(10) + log(36)$
$\log 360 = 1 + \log(9)(4)$
$\log 360 = 1 + \log(3^2)(2^2)$
$\log 360 = 1 + \log(3^2) + log(2^2)$
$\log 360 = 1 + 2\log 3 + 2\log 2$
$\log 360 = 1 + 2\,\mathrm{b} + 2a = 2a + 2b + 1$

- Calcular: $log_3(a^2 - b^2)$, si $log_3(a+b) = k$ y $(a-b) = 9$

Solución:

$log_3(a^2-b^2)=log_3(a+b)(a-b)$

$log_3(a^2-b^2)=log_3(a+b)+log_3(a-b)$

$log_3(a^2-b^2)=k+log_3 9$

Como por definición de logaritmo: $log_3 9=2$ ya que 2 es el exponente al que elevar la base 3 para obtener 9.

$log_3(a^2-b^2)=k+2$

8) <u>Logaritmo de un cociente</u>:

Es igual a la diferencia de los logaritmos del dividendo y del divisor:

$$log_a\left(\frac{x}{y}\right)=log_a x-log_a y$$

a, x, y, c, p deben ser mayores que cero $(a,x,y,c,p>0)$, *a, p* distintos de 1 $(a\neq 1;\ p\neq 1)$ y **n** pertenecer al conjunto de los números naturales $(n\in\mathbb{N})$.

Ejercicios:

- Desarrollar: $log_a\frac{(x+y)^3}{(x-y)^2}$

Solución:

$$log_a\frac{(x+y)^3}{(x-y)^2}=log_a(x+y)^3-log_a(x-y)^2$$

$$log_a\frac{(x+y)^3}{(x-y)^2}=3log_a(x+y)-2log_a(x-y)$$

- Desarrollar: $log\sqrt[3]{\frac{3x^2}{2y^5}}$

Solución:

$$log\sqrt[3]{\frac{3x^2}{2y^5}}=log\frac{\sqrt[3]{3x^2}}{\sqrt[3]{2y^5}}=log\sqrt[3]{3x^2}-log\sqrt[3]{2y^5}$$

$$log\sqrt[3]{\frac{3x^2}{2y^5}}=log\frac{\sqrt[3]{3x^2}}{\sqrt[3]{2y^5}}=log3x^{\frac{2}{3}}-log2y^{\frac{5}{3}}$$

$$log\sqrt[3]{\frac{3x^2}{2y^5}}=log\frac{\sqrt[3]{3x^2}}{\sqrt[3]{2y^5}}=\frac{2}{3}log3x-\frac{5}{3}log2y$$

- Escribe como logaritmo la siguiente expresión: $logx+\log y-\log z$

Solución:
La suma de logaritmos de igual base se expresa como el logaritmo del producto de los argumentos:

$$logx + \log y - \log z = \log xy - \log z$$

La diferencia de logaritmos de igual base se expresa como el logaritmo del cociente de los argumentos:

$$\log xy - \log z = \log \frac{xy}{z}$$

Por tanto: $logx + \log y - \log z = \log \frac{xy}{z}$

- Escribe como logaritmo la siguiente expresión: $log_2 x - log_2 y - log_2 z$

Solución:

La diferencia de logaritmos de igual base se expresa como el logaritmo del cociente de los argumentos:

$$log_2 x - log_2 y - log_2 z = \log_2 \frac{x}{y} - log_2 z$$

$$\log_2 \frac{x}{y} - log_2 z = \log_2 \frac{\frac{x}{y}}{z}$$

$$\log_2 \frac{x}{y} - log_2 z = \log_2 \frac{x}{yz}$$

Por tanto: $log_2 x - log_2 y - log_2 z = \log_2 \frac{x}{yz}$

9) <u>Logaritmo de una potencia</u>:

Es igual al producto del exponente de la potencia por el logaritmo de la base:

$$log_a c^n = nlog_a c$$

Ejercicios:

- Desarrollar $log_a 7^4$

Solución:

$$log_a 7^4 = 4log_a 7$$

- Desarrollar $log_6 3^{-\frac{3}{2}}$

Solución:

$$log_6 3^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2} log_6 3$$

- Desarrollar $log_e \sqrt[3]{e^7 x}$

Solución:

$log_e \sqrt[3]{e^7 x} = log_e e^{\frac{7}{3}} x^{\frac{1}{3}}$

$log_e e^{\frac{7}{3}} x^{\frac{1}{3}} = log_e e^{\frac{7}{3}} + log_e x^{\frac{1}{3}}$

$log_e e^{\frac{7}{3}} x^{\frac{1}{3}} = \frac{7}{3} log_e e + \frac{1}{3} log_e x$

Como $log_e e = 1$

$log_e e^{\frac{7}{3}} x^{\frac{1}{3}} = \frac{7}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} log_e x \frac{7}{3} + \frac{1}{3} log_e x$

- Desarrollar $\log\ (x+y)^3(x-z)$

Solución:

$\log\ (x+y)^3(x-z) = \log(x+y)^3 + \log(x-z) = 3\log(x+y) + \log(x-z)$

- Calcular el logaritmo en base 3 de 243^2.

$log_3 243^2$

$2 log_3 243$

Como se pide calcular el valor del logaritmo, se asume que es x y se aplica la definición de logaritmo.

Sea $log_3 243 = x$

Aplicando la definición de logaritmo:

$3^x = 243 = 3^5$

$3^x = 3^5$

Como las bases son iguales, los exponentes también lo son.

$x = 5$

Por tanto: $2 log_3 243 = 2(5) = 10$

- Calcular $\frac{2}{3} log_5 5^{\frac{3}{4}}$

$\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right) log_5 5$

Como $log_5 5 = 1$ porque el argumento y la base son iguales:

$$\frac{6}{12} log_5 5 = \frac{1}{2}\ (1) = \frac{1}{2}$$

- Calcular el logaritmo de: 4096^4 en base 4.

Solución:

$log_4 4096^4 = log_4(2^{12})^4 = log_4 2^{48} = 48 log_4 2$

Sea $log_4 2 = x$

Aplicando la definición de logaritmo:

$4^x = 2$

$4^x = \sqrt{4} = 4^{\frac{1}{2}}$

$x = \frac{1}{2}$

$log_4 2 = x$

$log_4 2 = \frac{1}{2}$

$48 log_4 2 = 48\left(\frac{1}{2}\right) = 24$

- Calcular: $log_a \frac{(x+y)^3}{(x-y)^2} = ?$

$$log_a \frac{(x+y)^3}{(x-y)^2} = log_a(x+y)^3 - log_a(x-y)^2$$

$$log_a \frac{(x+y)^3}{(x-y)^2} = 3log_a(x+y) - 2log_a(x-y)$$

10) Logaritmo de una raíz:

Es igual al exponente fraccionario de la potencia por el logaritmo del número:

$$log_a \sqrt[n]{c} = \log_a c^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{n} log_a c$$

El logaritmo de una raíz se puede definir, también, como sigue: Es igual al logaritmo de la cantidad sub radical o radicando dividida por el índice de la raíz:

$$log_a \sqrt[n]{c} = \frac{log_a c}{n}$$

Ejercicios:

- Calcular: $log \sqrt[3]{7}$

$log\sqrt[3]{7} = \log 7^{\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{3}log7$

O bien:_ $log\sqrt[3]{7} = \frac{log7}{3}$

- Calcular:_$log_3\ \sqrt[5]{81} =?$

$log_3\ \sqrt[5]{81} = \log_3 81^{\left(\frac{1}{5}\right)} = \frac{1}{5}\log_3 81 = \frac{1}{5}\log_3 3^4$

Como $\log_3 3^4$ es 4, ya que 4 es el exponente al que debe elevarse la base 3 para obtener 3^4, se tiene:

$log_3\ \sqrt[5]{81} = \log_3 81^{\left(\frac{1}{5}\right)} = \frac{1}{5}\log_3 81 = \frac{1}{5}\log_3 3^4 = \frac{1}{5}(4) = \frac{4}{5}$

- Calcular:$log_7\ \sqrt[2]{7} =?$

$log_7\ \sqrt[2]{7} = \log_7 7^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}\log_7 7$

Como $\log_7 7$ es 1, ya que 1 es el exponente al que debe elevarse la base 7 para obtener 7, se tiene:

$log_7\ \sqrt[2]{7} = \log_7 7^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}\log_7 7 = \left(\frac{1}{2}\right)(1) = \frac{1}{2}$

11) <u>Logaritmo de una diferencia</u>:
En general, el logaritmo de una diferencia no es equivalente a la diferencia de los logaritmos, es decir:

$$\log(p^2 - q^2)\ es\ distinto\ de \log p^2 - logq^2$$

Lo correcto, en este ejemplo es:

$$\log(p^2 - q^2) = \log[(p+q)(p-q)]$$
$$\log(p^2 - q^2) = \log(p+q) + \log(p-q)$$

12) <u>Logaritmo de un número inverso</u>:

$$log_a\left(\frac{1}{c}\right) = log_a c^{-1} = -1 \cdot log_a c = -log_a c$$

Ejemplo: $log_2\left(\frac{1}{8}\right) = log_2(8)^{-1} = -log_2(8) = -(log_2 2^3) = -3log_2 2 = -3(1) = -3$

13) <u>Cambio de base</u>:

Cambiar la base *a*, a la base *p*:

$$log_a c = \frac{log_p c}{log_p a}$$

Si la base *a* se cambia a la base *10*, esta no se escribe en el logaritmo:

$$log_a c = \frac{\log c}{\log a}$$

Ejemplo 1: Transformar a base 7 el siguiente logaritmo: $log_2 5$

$$log_2 5 = \frac{log_7 5}{log_7 2}$$

Ejemplo 2: Cuando se quiere utilizar la calculadora, la que solo tiene logaritmos de base 10. Calcular $log_2 7$

Se cambia a logaritmo de base 10

$$log_2 7 = \frac{\log 7}{\log 2} = \frac{0{,}8451}{0{,}301} = 2{,}807$$

Ejemplo 3: Cuando se quiere utilizar la calculadora, la que solo tiene logaritmos de base 10. Calcular $log_2 8^{-1}$

$$log_2 8^{-1} = -1 log_2 8$$

Se cambia a logaritmo de base 10

$$-1 log_2 8 = -\frac{\log 8}{\log 2} = -\frac{0{,}903089987}{0{,}3010299957} = -3$$

Ejemplo 4: Calcular $log_5 14$ en base 10, si $\log 7 = 0{,}8451$; $\log 2 = 0{,}301$; $\log 5 = 0{,}6990$

Se cambia a logaritmo de base 10 (el 10 no se escribe).

$$log_5 14 = \frac{\log 14}{\log 5} = \frac{\log(7)(2)}{\log 5} = \frac{\log(7) + log(2)}{\log 5} = \frac{0{,}8451 + 0{,}301}{0{,}6990} = \frac{1.1461}{0{,}6990} = 1{,}640$$

Ejemplo 5: Calcular $\frac{log_6 8}{log_6 2}$

Método 1: Cambio a logaritmos de base 10.

$$\log_6 8 = \frac{\log 8}{\log 6}$$

$$\log_6 2 = \frac{\log 2}{\log 6}$$

$$\frac{log_6 8}{log_6 2} = \frac{\frac{\log 8}{\log 6}}{\frac{\log 2}{\log 6}} = \frac{\log 8}{\log 6} : \frac{\log 2}{\log 6} = \frac{\log 8}{\log 6} \cdot \frac{\log 6}{\log 2} = \frac{\log 8}{\log 2} = \frac{0{,}903}{0{,}301} = 3$$

Método 2: Aplicando directamente la propiedad $\frac{log_p c}{log_p a} = log_a c$. Tener en consideración que el argumento del logaritmo resultante es el argumento del logaritmo del numerador y que la base del logaritmo resultante es el argumento del logaritmo del denominador:

$$\frac{log_6 8}{log_6 2} = log_2 8$$

$$log_2 8 = log_2 2^3 = 3 log_2 2$$

Como $log_2 2 = 1$ porque el argumento del logaritmo y su base son iguales:

$log_2 8 = log_2 2^3 = 3log_2 2 = 3(1) = 3$

<u>Ejemplo 6</u>: Si $log_{16} 12 = \frac{1}{2a}$, calcular $log_{12} 48$

El primer miembro de la condición (Si $log_{16} 12$) se cambia a la base 12:

$$log_{12} 12 = \frac{log_{12} 12}{log_{12} 16}$$
$$\frac{log_{12} 12}{log_{12} 16} = \frac{1}{2a}$$

$$\frac{1}{log_{12} 16} = \frac{1}{2a}$$

$2a = log_{12} 16$
$2a = log_{12} 4^2$
$2a = 2log_{12} 4$
$a = log_{12} 4$

Hasta aquí, tanto la condición como la pregunta del ejercicio tienen la misma base.

$log_{12} 48 = log_{12}(4)(12)$
$log_{12} 48 = log_{12} 4 + log_{12} 12$

Pero $log_{12} 4 = a$
y $log_{12} 12 = 1$

$log_{12} 48 = a + 1$

EJERCICIOS TEXTO DE MATEMÁTICA 2º MEDIO (MUÑOZ, RUPIN Y JIMÉNEZ):

<u>Página 60</u>:

Ejercicio 1: Calcular en cada caso el valor de x.

a) $3^x = 27$ La estrategia para resolver esta ecuación es transformar 27 en una potencia de base 3 y luego aplicar la propiedad que dice que, si las bases de las potencias son iguales, los exponentes también lo son. $3^x = 27$ $3^x = 3^3$ porque $(3)(3)(3) = 27$ $x = 3$	j) $-3{,}1^3 = x$ $x = (-3{,}1)(-3{,}1)(-3{,}1) = -29{,}791$
b) $5^x = 625$ $5^x = 625$ $5^x = 5^4$ porque (5)(5)(5)(5) = 625 $x = 4$	k) $(\frac{1}{5})^4 = x$ $x = \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{625}$
c) $-2^x = -32$ $-2^x = -2^5$ porque $(-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32$ $x = 5$	l) $(\frac{7}{2})^{-3} = x$ $x = (\frac{2}{7})^3$ $x = \left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{2}{7}\right) = \frac{8}{343}$
d) $-9^x = -729$ $-9^x = -9^3$ porque (-9)(-9)(-9)=-729 $x = 3$	m) $(x)^2 = 36$ $x = \pm\sqrt{36} = \pm 6$
e) $-3^x = \frac{1}{9}$ $-3^x = \frac{1}{(-3)^2}$ $-3^x = (-3)^{-2}$ $x = -2$	n) $(x)^3 = -1000$ $\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{-1000}$ $x = \sqrt[3]{-1000} = -10, porque\ (-10)(-10)(-10) = -1000$
f) $-0{,}5^x = 4$ $(-\frac{1}{2})^x = (\frac{1}{4})^{-1}$ $(-\frac{1}{2})^x = (\frac{1}{(-2)^2})^{-1}$	ñ) $(x)^5 = 32$ $\sqrt[5]{x^5} = \sqrt[5]{32}$ $x = 2\ porque\ (2)(2)(2)(2)(2) = 32$

$(-\frac{1}{2})^x = (\frac{1}{-2})^{-2}$ $x = -2$	
g) $8^2 = x$ $x = (8)(8) = 64$	o) $(x)^4 = 0{,}0001$ $\sqrt[4]{(x)^4} = \sqrt[4]{\frac{1}{10000}}$ $x = \frac{1}{10}\ porque\ \left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10000}$ o bien: $x = 0{,}1$
h) $1{,}1^2 = x$ $x = (1{,}1)(1{,}1) = 1{,}21$	p) $(x)^{-2} = 0{,}25$ $(x)^{-2} = \frac{1}{4}$ $(\frac{1}{x})^2 = \frac{1}{4}$ $\sqrt{(\frac{1}{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{4}}$ $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ Multiplicando cruzado: $x = 2$
i) $-6^6 = x$ $x = (-6)(-6)(-6)(-6)(-6)(-6) = 46656$	q) $(x)^{-5} = 243$ $(\frac{1}{x})^5 = 3^5$ $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{x}\right)} = \sqrt[5]{243}$ $\frac{1}{x} = 3$, porque (3)(3)(3)(3)(3)=243 $3x = 1$ $x = \frac{1}{3}$

Ejercicio 2: Calcular en cada caso el valor de x.

a) $\sqrt[3]{125} = x$ $x = 5, porque\ (5)(5)(5) = 125$	j) $\sqrt{x} = \frac{1}{3}$ Elevando a 2 ambos miembros de la ecuación: $\sqrt{x}^2 = (\frac{1}{3})^2$ $x^{\frac{2}{2}} = \frac{1}{9}$ $x = \frac{1}{9}$
b) $\sqrt[5]{1024} = x$ $x = 4, porque\ (4)(4)(4)(4)(4) = 1024$	k) $\sqrt[7]{x} = -1$ Elevando a 7 ambos miembros: $\sqrt[7]{x}^7 = -1^7$ $x^{7/7} = -1$ $x = -1$
c) $\sqrt{0{,}25} = x$ $\sqrt{\frac{1}{4}} = x$ $\frac{1}{4} = x^2$ $x = \frac{1}{2}$=0,5	l) $\sqrt[5]{x} = -2$ Elevando a 5 ambos miembros: $\sqrt[5]{x}^5 = -2^5$ $x^{\frac{5}{5}} = -32$ $x = -32$
d) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = x$ $x = \frac{2}{3}, porque\ \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{81}$	m) $\sqrt[x]{25} = 5$ Elevando a x ambos miembros: $\sqrt[x]{25}^x = 5^x$ $25^{\frac{x}{x}} = 5^x$ $25 = 5^x$ $5^2 = 5^x$ Como las bases son iguales, sus exponentes también lo son: $x = 2$
e) $\sqrt[3]{\frac{1}{81216}} = x$ $x = \frac{1}{6}, porque\ \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{216}$	n) $\sqrt[x]{343} = 7$ Elevando a x ambos miembros: $\sqrt[x]{343}^x = 7^x$ $343^{\frac{x}{x}} = 7^x$ $343 = 7^x$ $7^3 = 7^x$ Como las bases son iguales, sus exponentes también lo son: $x = 3$
f) $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}} = x$	ñ) $\sqrt[x]{81} = 3$ Elevando a x ambos miembros:

$x = -\frac{1}{2}, porque \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$ $= -\frac{1}{32}$	$\sqrt[x]{81}^{x} = 3^x$ $81^{\frac{x}{x}} = 3^x$ $81 = 3^x$ $3^4 = 3^x$ Como las bases son iguales, sus exponentes también lo son: $x = 4$
g) $\sqrt[6]{x} = 1$ Elevando a 6 ambos miembros: $\sqrt[6]{x}^{6} = 1^6$ $x^{6/6} = 1$ $x = 1$	o) $\sqrt[x]{\frac{1331}{8}} = \frac{11}{2}$ Elevando a x ambos miembros: $\sqrt[x]{\frac{1331}{8}}^{x} = (\frac{11}{2})^x$ $(\frac{1331}{8})^{\frac{x}{x}} = (\frac{11}{2})^x$ $\frac{1331}{8} = (\frac{11}{2})^x$ $\frac{11^3}{2^3} = (\frac{11}{2})^x$ $\frac{11^3}{2} = (\frac{11}{2})^x$ Como las bases son iguales, sus exponentes también lo son: $x = 3$
h) $\sqrt{x} = 100$ Elevando a 2 los miembros: $\sqrt{x}^{2} = 100^2$ $x^{2/2} = 10000$ $x = 10000$	p) $\sqrt[x]{0{,}00001} = 0{,}1$ Elevando a x ambos miembros: $\sqrt[x]{0{,}00001}^{x} = (0{,}1)^x$ $(\frac{1}{100000})^{\frac{x}{x}} = (\frac{1}{10})^x$ $\frac{1}{100000} = (\frac{1}{10})^x$ $\frac{1}{10^5} = (\frac{1}{10})^x$ $(\frac{1}{10})^5 = (\frac{1}{10})^x$

	Como las bases son iguales, sus exponentes, también: $x = 5$
i) $\sqrt[3]{x} = \frac{1}{2}$ Elevando a 3 ambos miembros: $\sqrt[3]{x}^3 = (\frac{1}{2})^3$ $x^{\frac{3}{3}} = \frac{1}{8}$ $x = \frac{1}{8}$	q) $\sqrt[x]{-10,648} = -2,2$ Elevando a x ambos miembros: $\sqrt[x]{-10,648}^x = (-2,2)^x$ $(-10,648)^{\frac{x}{x}} = (-2,2)^x$ $-10,648 = (-2,2)^x$ $-2,2^3 = (-2,2)^x$ Como las bases son iguales, sus exponentes, también: $x = 3$

Ejercicio 3: Determinar en cada caso si es posible calcular el valor de x. Cuando no lo sea, justificar.

a) $2^x = -8$ Como la base de la potencia 2^xes positiva, su valor no puede ser negativo como el -8. Por tanto, no se puede determinar el valor de *x*.	e) $\sqrt[x]{-27} = 3$ Si el índice *x* de la raíz es un número par: Si la cantidad subradical es negativa, -27 en este caso, su valor no es un número real. Por tanto, no se puede determinar. Si el índice x de la raíz es impar: Como la cantidad subradical es negativa, su valor debiera ser negativo y 3 no lo es, por lo tanto, tampoco se puede determinar.
b) $0^6 = 5x$ Como 0^6=0, entonces: $0 = 5x$ $x = \frac{0}{5} = 0$	f) $\sqrt[x]{20} = 0$ No puede ser cero, porque siendo la cantidad subradical positiva, su valor debe ser mayor que cero y no cero.
c) $-2^4 = x$ $x = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16$	g) $\sqrt[3]{-1000} = x$ $x = -10, porque\ (-10)(-10)(-10) = -1000$
d) d) $-3^x = -27$ $-3^x = -3^3$ Como las bases son iguales, sus exponentes, también: $x = 3$	h) $\sqrt[x]{16} = -2$ Su valor no puede ser negativo, porque la cantidad subradical es positiva.

Ejercicio 4: Expresar como logaritmo las siguientes potencias.

a) $3^4 = 81$ Se resuelve partiendo de la definición de logaritmo que dice: el logaritmo de un número es el exponente al que hay que elevar la base del logaritmo para obtener el número (el argumento del logaritmo). $log_3 81 = 4$	l) $5^{-3} = \frac{1}{125}$ $log_5\left(\frac{1}{125}\right) = -3$
b) $2^3 = 8$ $log_2 8 = 3$	m) $2^{-5} = \frac{1}{32}$ $log_2\left(\frac{1}{32}\right) = -5$
c) $7^1 = 7$ $log_7 7 = 1$	n) $4^{-1} = \frac{1}{4}$ $log_4\left(\frac{1}{4}\right) = -1$
d) $4^6 = 4096$ $log_4 4096 = 6$	ñ) $8^{-5} = \frac{1}{32768}$ $log_8\left(\frac{1}{32768}\right) = -5$
e) $7^6 = 117649$ $log_7 117649 = 6$	o) $4^{-3} = \frac{1}{64}$ $log_4\left(\frac{1}{64}\right) = -3$
f) $9^3 = 729$ $log_9 729 = 3$	p) $8^{-3} = \frac{1}{512}$ $log_8\left(\frac{1}{512}\right) = -3$
g) $6^5 = 7776$ $log_6 7776 = 5$	q) $(\frac{5}{6})^5 = \frac{3125}{7776}$ $log_{5/6}\left(\frac{3125}{7776}\right) = 5$
h) $10^3 = 1000$ $log_{10} 1000 = 3$	r) $(\frac{8}{7})^5 = \frac{32768}{16807}$ $log_{8/7}\left(\frac{32768}{16807}\right) = 5$
i) $8^3 = 512$ $log_8 512 = 3$	s) $(\frac{10}{3})^4 = \frac{10000}{81}$ $log_{10/3}\left(\frac{10000}{81}\right) = 4$
j) $7^4 = 2401$ $log_7 2401 = 4$	t) $(\frac{9}{4})^{-5} = \frac{1024}{59049}$ $log_{9/4}\left(\frac{1024}{59049}\right) = -5$
k) $2^{-6} = \frac{1}{64}$ $log_2\left(\frac{1}{64}\right) = -6$	u) $(\frac{5}{4})^{-4} = \frac{256}{625}$ $log_{5/4}\left(\frac{256}{625}\right) = -4$

Ejercicio 5: Expresar como potencia los siguientes logaritmos.

a) $log_2 32 = 5$ $2^5 = 32$	l) $log_6\left(\frac{1}{36}\right) = -2$ $6^{-2} = \frac{1}{36}$
b) $log_8 512 = 3$ $8^3 = 512$	m) $log_6\left(\frac{1}{46656}\right) = -6$ $6^{-6} = \frac{1}{46656}$
c) $log_9 6561 = 4$ $9^4 = 6591$	n) $log_{(\frac{5}{7})}\left(\frac{125}{343}\right) = 3$ $(\frac{5}{7})^3 = \frac{125}{343}$
d) $log_{10} 10000000 = 7$ $10^7 = 10000000$	o) $log_{(\frac{3}{8})}\left(\frac{729}{262144}\right) = 6$ $(\frac{3}{8})^6 = \frac{729}{262144}$
e) $log_9 531441 = 6$ $9^6 = 531441$	p) $log_{(\frac{9}{4})}\left(\frac{1024}{59049}\right) = -5$ $(\frac{9}{4})^{-5} = \frac{1024}{59049}$
f) $log_7 117649 = 6$ $7^6 = 531441$	q) $log_{(\frac{13}{5})}\left(\frac{5}{13}\right) = -1$ $(\frac{13}{5})^{-1} = \frac{5}{13}$
g) $log_3 1 = 0$ $3^0 = 1$	r) $log_{(\frac{7}{16})}\left(\frac{4}{4}\right) = 0$ $(\frac{7}{16})^0 = \frac{4}{4} = 1$
h) $log_9\left(\frac{1}{81}\right) = -2$ $9^{-2} = \frac{1}{81}$	
i) $log_2\left(\frac{1}{32}\right) = -5$ $2^{-5} = \frac{1}{32}$	
j) $log_7\left(\frac{1}{343}\right) = -3$ $7^{-3} = \frac{1}{343}$	
k) $log_5\left(\frac{1}{125}\right) = -3$ $5^{-3} = \frac{1}{125}$	

<u>Ejercicio 6</u>: Calcular el valor de los siguientes logaritmos considerando el valor de las siguientes potencias:

$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$5^2 = 25$	$7^2 = 49$
$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$5^3 = 125$	$7^3 = 343$
$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	$5^4 = 625$	$7^4 = 2401$
$2^5 = 32$	$3^5 = 243$	$5^5 = 3125$	$7^5 = 16807$
$2^6 = 64$	$3^6 = 729$	$5^6 = 15625$	$7^6 = 117649$

a) $log_2 32 = 5$	m) $log_{(\frac{1}{7})} 7 = -1$
b) $log_3 27 = 3$	n) $log_{(\frac{1}{2})} (\frac{1}{8}) = 3$
c) $log_5 3125 = 5$	ñ) $log_{(\frac{1}{3})} \left(\frac{1}{729}\right) = 6$
d) $log_7 16807 = 5$	o) $log_{(\frac{1}{3})} 729 = -6$
e) $log_2 \left(\frac{1}{8}\right)$ =? $log_2 \left(\frac{1}{2^3}\right)$ =? Como $\frac{1}{2^3}$ es el recíproco de 2^3, el exponente pasa a ser negativo, por lo que el valor del logaritmo es el exponente -3. $log_2 \left(\frac{1}{2^3}\right) = -3$ Nota: tener presente este racionamiento para todos los ejercicios de logaritmos cuya base sea una fracción.	p) $log_{(\frac{3}{5})} 243 = 5$
f) $log_3 \left(\frac{1}{729}\right) = -6$	q) $log_{(\frac{1}{7})} 2401 = 4$
g) $log_3 \left(\frac{1}{243}\right) = -5$	r) $log_{(\frac{1}{7})} (\frac{1}{49}) = 2$
h) $log_5 \left(\frac{1}{25}\right) = -2$	s)) $log_{(\frac{7}{3})} (\frac{2401}{81}) = 4$
i) $log_7 \left(\frac{1}{343}\right) = -3$	t) $log_{(\frac{1}{3})} (\frac{1}{9}) = 2$
j) $log_7 \left(\frac{1}{117649}\right) = -6$	u)$log_{\frac{3}{2}} (\frac{64}{729})$ =-6 Alternativamente: Sin usar la tabla anterior: Sea x el valor de este logaritmo. $log_{\frac{3}{2}} (\frac{64}{729}) = x$ $(\frac{3}{2})^x = (\frac{64}{729})$ $(\frac{3}{2})^x = (\frac{2^6}{3^6})$ $(\frac{3}{2})^x = (\frac{2}{3})^6$ $(\frac{3}{2})^x = (\frac{3}{2})^{-6}$ Como las bases son iguales, los exponentes, también: $x = -6$
k) $log_{(\frac{1}{2})} 8 = -3$	
l) $log_{(\frac{1}{5})} 3125 = -5$	

<u>Ejercicio 7</u>: Calcular el valor de x para que se cumplan las siguientes igualdades.

a) $log_x 27 = 3$ Se aplica la definición de logaritmo, es decir, el logaritmo de un número es el exponente al que hay que elevar su base para obtener el número. En este caso, el logaritmo del número 27 es 3 y 3 es el exponente al que hay que elevar la base x para obtener 27: $x^3 = 27$ $\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{27}$ $x = 3, porque\ (3)(3)(3) = 27$	m) $log_{729} 3 = x$ $729^x = 3$ $(3^6)^x = 3^1$ $3^{6x} = 3^1$ Como las bases son iguales, los exponentes también lo son: $6x = 1$ $x = \frac{1}{6}$
b) $log_x 625 = 4$ $x^4 = 625$ $\sqrt[4]{x^4} = \sqrt[4]{625}$ $x = 5, porque\ (5)(5)(5)(5)(5) = 625$	n) $log_{125} 5 = x$ $125^x = 5$ $(5^3)^x = 5^1$ $5^{3x} = 35^1$ Como las bases son iguales, los exponentes también lo son: $3x = 1$ $x = \frac{1}{3}$
c) $log_x 49 = 2$ $x^2 = 49$ $\sqrt{x^2} = \sqrt{49}$ $x = 7, porque\ (7)(7) = 49$	ñ) $log_{16807} 7 = x$ $16807^x = 7$ $(7^5)^x = 5^1$ $7^{5x} = 5^1$ Como las bases son iguales, los exponentes también lo son: $5x = 1$ $x = \frac{1}{5}$
d) $log_x 729 = 6$ $x^6 = 729$ $\sqrt[6]{x^6} = \sqrt[6]{729}$ $x = 3, porque\ (3)(3)(3)(3)(3)(3) = 729$	o) $log_4 2 = x$ $4^x = 2$ $2^{2^x} = 2$ $2^{2x} = 2^1$ Como las bases son iguales, los exponentes también lo son: $2x = 1$ $x = \frac{1}{2}$
e) $log_x 10807 = 5$ $x^5 = 10807$ $\sqrt[5]{x^5} = \sqrt[5]{10807}$ $x = 7, porque\ (7)(7)(7)(7)(7)(7) = 10807$	p) $log_{15625} 5 = x$ $15625^x = 5$ $5^{6^x} = 5$ $5^{6x} = 5^1$ Como las bases son iguales, los exponentes también lo son: $6x = 1$ $x = \frac{1}{6}$

f) $log_x 8 = 3$ $x^3 = 8$ $\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{8}$ $x = 2, porque\ (2)(2)(2) = 8$	q) $log_{\left(\frac{1}{32}\right)} 2 = x$ $\frac{1}{32}^x = 2$ Aplicando el inverso de un número: $32^{-x} = 2^1$ $(2^5)^{-x} = 2^1$ $2^{-5x} = 2^1$ Como las bases son iguales, los exponentes también lo son: $-5x = 1$ $x = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}$
g) $log_2 x = 4$ $2^4 = x$ $x = 16$	r) $log_{\left(\frac{1}{64}\right)} 2 = x$ $\frac{1}{64}^x = 2$ Aplicando el inverso de un número: $64^{-x} = 2^1$ $(2^6)^{-x} = 2^1$ $2^{-6x} = 2^1$ Como las bases son iguales, los exponentes también lo son: $-6x = 1$ $x = \frac{1}{-6} = -\frac{1}{6}$
h) $log_3 x = 2$ $3^2 = x$ $x = 9$	s) $log_{\left(\frac{1}{9}\right)} 3 = x$ $(\frac{1}{9})^x = 3$ Aplicando el inverso de un número: $9^{-x} = 3$ $(3^2)^{-x} = 3^1$ $3^{-2x} = 3^1$ Como las bases son iguales, los exponentes también lo son: $-2x = 1$ $x = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$
i) $log_3 x = 5$ $3^5 = x$ $x = 243$	t) $log_{\left(\frac{1}{81}\right)} 3 = x$ $(\frac{1}{81})^x = 3$

	Aplicando el inverso de un número: $$81^{-x} = 3$$ $$(3^4)^{-x} = 3^1$$ $$3^{-4x} = 3^1$$ Como las bases son iguales, los exponentes también lo son: $$-4x = 1$$ $$x = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$$
j) $log_5 x = 6$ $$5^6 = x$$ $$x = 15625$$	u) $log_{(\frac{1}{5})} 5 = x$ $$(\frac{1}{5})^x = 5$$ Aplicando el inverso de un número: $$5^{-x} = 5$$ $$5^{-x} = 5^1$$ Como las bases son iguales, los exponentes también lo son: $$-x = 1$$ $$x = -1$$
k) $log_7 x = 3$ $$7^3 = x$$ $$x = 343$$	v) $log_{(\frac{1}{625})} 5 = x$ $$(\frac{1}{625})^x = 5$$ Aplicando el inverso de un número: $$625^{-x} = 5$$ $$(5^4)^{-x} = 5^1$$ $$5^{-4x} = 5^1$$ Como las bases son iguales, los exponentes también lo son: $$-4x = 1$$ $$x = -\frac{1}{4}$$
l) $log_{81} 3 = x$ $$81^x = 3$$ $$(3^4)^x = 3^1$$ $$3^{4x} = 3^1$$ Como las bases son iguales, los exponentes también lo son: $$4x = 1$$ $$x = \frac{1}{4}$$	w) $log_{(\frac{1}{343})} 7 = x$ $$(\frac{1}{343})^x = 7$$ Aplicando el inverso de un número: $$343^{-x} = 7$$ $$(7^3)^{-x} = 5^1$$ $$7^{-3x} = 7^1$$

	Como las bases son iguales, los exponentes también lo son: $$-3x = 1$$ $$x = -\frac{1}{3}$$

Ejercicio 8: Desafío: Demostrar las siguientes propiedades de los logaritmos.

a) $log_{\left(\frac{1}{x}\right)}a = -log_x a$

Sea $log_{\left(\frac{1}{x}\right)}a = n$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^n = a$$

$$x^{-n} = a$$

la ecuación anterior es lo mismo que:

$log_x a = -n$ y, multiplicando ambos miembros por – 1:

$-log_x a = n$

Como $n = log_{\left(\frac{1}{x}\right)}a$, reemplazando, se tiene que:

$-log_x a = log_{\left(\frac{1}{x}\right)}a$

b) $log_a\left(\frac{1}{b}\right) = -log_a b$

Sea $log_a\left(\frac{1}{b}\right) = n$

Por definición de logaritmo:

$$a^n = \left(\frac{1}{b}\right)$$

$$a^n = b^{-1}$$

$$a^{-n} = b$$

El $-n$ es el resultado del logaritmo, por eso se hace:

$log_a b = -n$

Multiplicando por -1 ambos miembros:

$-log_a b = n$

Reemplazando la n en: $log_a\left(\frac{1}{b}\right) = n$, se tiene:

$$log_a\left(\frac{1}{b}\right) = -log_a b$$

Que era lo que se pedía demostrar.

Ejercicio 9: **Desafío**: Resolver las siguientes operaciones de logaritmos.

a)$2log_4 64 + \left(\frac{1}{3}\right)log_3 27 - \sqrt{log_5 125}$

Solución: Resolviendo separadamente los sumandos y usando variables auxiliares x, y, z:

$log_4 64 = x$
$(4^x = 64)$
$(4^x = 4^3)$
$x = 3$
$2log_4 64 = 2 * 3 = 6$

$log_3 27 = y$
$(4^y = 27)$
$(4^y = 3^3)$
$y = 3$
$(\frac{1}{3})log_3 27 = \left(\frac{1}{3}\right) * 3 = \frac{3}{3} = 1$

$log_5 125 = z$
$5^z = 5^3$
$z = 3$

$\sqrt{log_5 125} = \sqrt{3}$

Por consiguiente: $2log_4 64 + \left(\frac{1}{3}\right) log_3 27 - \sqrt{log_5 125} = 6 + 1 - \sqrt{3} = 7 - \sqrt{3}$

b) $4log_3 9 + \left(\frac{1}{3}\right) log_{16} 8 - \sqrt{log_2 32}$

Solución: Resolviendo separadamente los sumandos y usando variables auxiliares x, y, z:

$log_3 9 = x$
$(3^x = 9)$
$(3^x = 3^2)$
$x = 2$

$4log_3 9 = 4 * 2 = 8$

$log_{16} 8 = y$
$(16^y = 8)$
$(2^{4y} = 2^3)$
$4y = 3$
$y = \frac{3}{4}$
$\frac{1}{3} log_{16} 8 = \frac{1}{3} * \frac{3}{4} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

$log_2 32 = z$

$(2^z = 32)$

$(2^z = 2^5)$

$z = 5$

$\sqrt{log_2 32} = \sqrt{5}$

Por lo tanto: $4log_3 9 + \left(\frac{1}{3}\right) log_{16} 8 - \sqrt{log_2 32} = 8 + \frac{1}{4} - \sqrt{5} = \frac{33}{4} - \sqrt{5}$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)\log 10 + \left(\frac{2}{3}\right)\log 10 - \log 10 + \sqrt{log\ 10}$

Solución: Resolviendo separadamente los sumandos:

$log 10 = 1$. La base de este logaritmo es 10 (cuando la base no se escribe se asume que es 10). Como, además, el argumento del logaritmo también es 10, el logaritmo es, por definición, igual a 1. (los logaritmos de base 10 se llaman logaritmos comunes o decimales).

$\left(\frac{1}{3}\right)\log 10 = 1 * \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$\left(\frac{2}{3}\right)\log 10 = \frac{2}{3} * 1 = \frac{2}{3}$

$\log 10$

$\log 10 = 1$

$-\log 10 = -1$

$\sqrt{\log 10} = \sqrt{1} = 1$

Por lo tanto, $\left(\frac{1}{3}\right)\log 10 + \left(\frac{2}{3}\right)\log 10 - \log 10 + \sqrt{log\ 10} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - 1 + 1 = 1$

d) $\left(\frac{\sqrt{3\log 100)}}{9+log_2 8}\right) / \frac{log_6 3 + log_6 2}{log_{(\frac{1}{2})} 4}$

Solución: Resolviendo separadamente los términos:

$\sqrt{3\log 100)}$

Como el $\log 100 = 2$ (la base 10 elevada a 2 da 100).

$\sqrt{3\log 100)}$=$\sqrt{3 * 2} = \sqrt{6}$

$9 + log_2 8$

Sea $log_2 8 = x$

$2^x = 8$

$2^x = 2^3$

$x = 3$

$9 + log_2 8 = 9 + 3 = 12$

$log_{(\frac{1}{4})} 4$

Sea $log_{(\frac{1}{4})} 4 = y$

$(\frac{1}{2})^y = 4$

$2^{-y} = 2^2$

$-y = 2$

$y = -2$

$log_6 3 + log_6 2$. Es el desarrollo del logaritmo de un producto. Por lo tanto:
$log_6 3 + log_6 2 = log_6(3 * 2) = log_6(6)$

Sea $log_6(6) = z$

$6^z = 6^1$

Como las bases son iguales, los exponentes también son iguales:

$z = 1$

Por lo tanto:

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{3\log 100)}}{9 + log_2 8}\right)}{\frac{log_6 3 + log_6 2}{log_{\left(\frac{1}{2}\right)} 4}} = \frac{\frac{\sqrt{6)}}{12}}{\frac{1}{-2}} = \left(-\frac{2\sqrt{6)}}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{6}$$

Reflexiona: (Pie de la página 61)

a) ¿Cuál es el significado de la palabra “logaritmo? Investiga y explica, ¿por qué crees que le pueden haber puesto ese nombre?
b) Investiga el significado de las palabras “guarismo” y “algoritmo”.

Respuesta:

a) Logaritmo

Un logaritmo es el exponente al que hay que elevar la base positiva de una potencia para que resulte un número determinado. También se lo conoce como la función inversa a la función exponencial.

Se denomina logaritmación a la operación matemática a través de la cual, dando un número resultante y una base de potenciación, se tendrá que hallar el exponente al cual habrá que elevar la base para así conseguir el mencionado resultado.

Así como la suma tiene su operación inversa, que es la resta, y la multiplicación tiene a la división como su operación inversa, la logaritmación tiene a la exponenciación, como su función inversa.

El impulsor del uso de los logaritmos fue John Napier a comienzos del siglo XVII.

El método logarítmico contribuyó al avance de la ciencia y se convirtió en una herramienta fundamental en Astronomía, haciendo más simples cálculos muy complejos. También se usó mucho Geodesia, en algunas ramas de la matemática aplicada y en la navegación marítima, especialmente cuando las calculadoras y las computadoras no se habían desarrollado como ahora.

Origen de la palabra logaritmo: Proviene del griego "logos" que significa razón, proporción, manera o relación y de "arithmos", que significa número. Indica, por tanto, la relación que hay entre los términos (números) de una progresión aritmética y los de una geométrica. Al principio, John Neper llamó a los logaritmos números artificiales.

b) Guarismo y algoritmo:

Guarismo es aquello relativo a los números. Este término (número) está vinculado a la expresión de una cantidad con relación a su unidad. Por ejemplo: "Los primeros guarismos indican que el candidato del partido AB ganará las elecciones presidenciales".

Según el ejemplo anterior, la utilización del concepto es habitual en los procesos de elecciones, en referencia a los porcentajes de votos recibidos por los candidatos. Dichos porcentajes resultan claves para saber quién fue elegido.

Los guarismos también pueden referirse a todo tipo de estadísticas, como los datos poblacionales o demográficos o económicos, etc.: Ejemplo: "Los guarismos de natalidad han sorprendido a los especialistas".

Un guarismo, por otra parte, es un signo, letra o número arábigo que expresa una cantidad. Estos símbolos se denominan arábigos, ya que fueron introducidos por los árabes en Europa, aunque se cree que fueron inventados en India.

Asimismo, se entiende por guarismo a cada signo que forma parte de un número en un sistema y que puede unirse a otros para expresar una cantidad; por ejemplo, el número 75 se compone de los guarismos 7 y 5.

Origen del término guarismo: proviene del árabe Al-juarezmi, apodo de Mohamed-ben-Muza, un importante matemático persa que vivió en el siglo IX y difundió el sistema arábigo de numeración y los principios de la matemática india.

La palabra guarismo tiene la misma raíz latina de algoritmo, aunque sus significados son diferentes; un algoritmo es una serie definida de instrucciones o normas que permiten alcanzar un fin determinado al ser reproducidas en orden, siempre partiendo del mismo estado inicial. Se trata de dos conceptos que se cruzan en más de un contexto, dado que los algoritmos suelen apoyarse en los números.

ECUACIONES EXPONENCIALES

Son aquellas ecuaciones donde la incógnita está como exponente.

Método de igualación de las bases de las potencias

Ejemplo 1:

$$3^x = 27$$

La estrategia para resolver esta ecuación es transformar 27 en una potencia de base 3 y luego aplicar la propiedad que dice que, si las bases de las potencias son iguales, los exponentes también lo son.

$3^x = 27$
$3^x = 3^3$ porque $(3)(3)(3) = 27$

$x = 3$

Ejemplo 2:

$$3^x = 1$$

La estrategia para resolver esta ecuación es transformar 1 en una potencia de base 3 y luego aplicar la propiedad que dice que, si las bases de las potencias son iguales, los exponentes también lo son.

$3^x = 3^0$

Toda potencia de exponente 0 vale 1.

$x = 0$

<table>
<tr><td>$5^x = 625$

$5^x = 625$
$5^x = 5^4$ porque (5)(5)(5)(5)=625

$x = 4$</td><td>$-2^x = -32$

$-2^x = -2^5$ porque $(-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32$

$x = 5$</td></tr>
<tr><td>$-3^x = \frac{1}{9}$

$-3^x = \frac{1}{(-3)^2}$

$-3^x = (-3)^{-2}$

$x = -2$</td><td>$-9^x = -729$

$-9^x = -9^3$ porque $(-9)(-9)(-9) = -729$

$x = 3$</td></tr>
<tr><td>$2^{x+1} = 32$

$2^{x+1} = 2^5$
$x + 1 = 5$
$x = 5 - 1 = 4$</td><td>$9^{x-1} = 81^x$

$9^{x-1} = 9^{2x}$
$x - 1 = 2x$
$x - 2x = 1$
$-x = 1$
$x = -1$</td></tr>
<tr><td>$4^{x-2} = 8^{1-x}$

$4^{x-2} = 2^{3(1-x)}$
$2^{2(x-2)} = 2^{3(1-x)}$
$2(x-2) = 3(1-x)$
$2x - 4 = 3 - 3x$
$5x = 7$
$x = \frac{7}{5}$</td><td>$7^{3x-3} = 343$

$7^{3x-3} = 7^3$
$3x - 3 = 3$

$3x = 6$
$x = 2$</td></tr>
<tr><td>$7^{3x-3} = 343$

$2^{3x+1} = 256$
$2^{3x+1} = 2^8$

$3x + 1 = 8$
$3x = 7$
$x = \frac{7}{3}$</td><td>$0{,}125^x = 128$

$(\frac{1}{8})^x = 128$
$2^{-3x} = 2^7$
$-3x = 7$
$3x = -7$
$x = -\frac{7}{3}$</td></tr>
<tr><td>$2^{x^2-2x} = 8$
$2^{x^2-2x} = 2^3$</td><td>$5^x = 625^2$

Como $625 = 5^4$</td></tr>
</table>

$x^2 - 2x = 3$ $x^2 - 2x - 3 = 0$ $(x - 3)(x + 1) = 0$ $(x + 1) = 0$ $x = -1$ $(x - 3) = 0$ $x = 3$	$5^x = (5^4)^2 = 5^8$ Como las bases son iguales, los exponentes también lo son: $x = 8$
$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 15$ $2^x + 2^x * 2 + 2^x * 2^2 + 2^x * 2^3 = 15$ Sea $2^x = u$ $u + 2u + 4u + 8u = 15$ $15u = 15$ $u = \frac{15}{15} = 1$ Si $u = 1$, entonces: $2^x = 1$ $2^x = 2^0$ $x = 0$	

Otros ejercicios:

$log_{\sqrt[5]{2}} 16^2 = x$ $(\sqrt[5]{2})^x = 16^2$ $(2^{\frac{1}{5}})^x = (2^4)^2$ $= 2^8$ $= 8$ $= 40$	Si $\sqrt[3]{x+1} = 2$, *¿ cuál es el valor de* $log_{49} x$? $\sqrt[3]{x+1} = 2$ $x + 1 = 8 \Rightarrow x = 7$ $log_{49} x$? $log_{49} 7 = y$ $49^y = 7$ $(7^2)^y = 7$ $7^{2y} = 7$ $2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$
$2^{3x-1} = 3^{x+2}$ $\log 2^{3x-1} = log 3^{x+2}$ $(3x - 1) log2 = (x + 2) log3$ $3x log2 - log2 = x log3 + 2 log3$ $3x log2 - x log3 = 2 log3 + log2$ $x(3 log2 - log3) = 2 log3 + log2$	$4^{x-2} = 8^{1-x}$ $log 4^{x-2} = log 8^{(1-x)}$ $(x - 2) log4 = (1 - x) log8$ $x log4 - 2 log4 = log8 - x log8$ $x log4 + x log8 = log8 + 2 log4$ $x(log4 + log8) = log8 + 2 log4$ $x = \frac{log8 + 2log4}{log4 + log8} = \frac{0{,}90 + 2(0{,}60)}{0{,}60 + 0{,}90} = \frac{2{,}10}{1{,}50} = 1{,}4$

<table>
<tr>
<td>$x = \frac{2log3 + log2}{3log2 - log3}$</td>
<td>Nota: este ejercicio se resolvió anteriormente por el método de igualar las bases de las potencias y dio $\frac{7}{5} = 1{,}4$.</td>
</tr>
<tr>
<td>$9^{x-1} = 81^{x}$

$log9^{x-1} = log81^{x}$

$(x-1)log9 = xlog81$
$xlog9 - log9 = xlog81$
$xlog9 - xlog81 = log9$

$x(log9 - log81) = log9$

$x = \frac{log9}{log9 - log81} = \frac{0{,}95}{0{,}95 - 1{,}91} = \frac{0{,}95}{-0{,}96}$
$= -0{,}99 \approx -1$

Nota: este ejercicio se resolvió anteriormente por el método de igualar las bases de las potencias y dio exactamente − 1.</td>
<td>$^{+2} = 5^{x+1}$

$g2^{x+2} = log5^{x+1}$

$+ 2) \log 2 = (x+1) \log 5$
$og\, 2 + 2 \log 2 = x \log 5 + \log 5$
$og\, 2 - x \log 5 = \log 5 - 2 \log 2$
$(\log 2 - \log 5) = \log 5 - 2 \log 2$

$x = \frac{log5 - 2log2}{log2 - log5}$</td>
</tr>
<tr>
<td>$= 625^{2}$
$xlog5 = 2log625$

$x = \frac{2log625}{log5} = \frac{2 * 2{,}796}{0{,}699} = \frac{5{,}992}{0{,}699} = 8$</td>
<td>$log_3(4x-5) = log_3(2x+1)$

Se agrupan los logaritmos en el primer miembro:

$log_3(4x-5) - log_3(2x+1) = 0$

la expresión anterior es el logaritmo de un cociente:

$log_3 \frac{4\text{x} - 5}{2x+1} = 0$

Se aplica la definición de logaritmo:

El logaritmo de un número (en este caso 0) es el exponente al que elevar la base (en este caso 3) para obtener ese número (en este caso $\frac{4\text{x}-5}{2x+1}$)

$3^{0} = \frac{4\text{x} - 5}{2x+1}$

$\frac{1}{1} = \frac{4\text{x} - 5}{2x+1}$

$1(2x+1) = 4x - 5$
$2x + 1 = 4x - 5$
$2x - 4x = -5 - 1$

$-2x = -6$
$2x = 6$
$x = 3$</td>
</tr>
</table>

$log\ x - log(x+3) = -1$ Los logaritmos ya están agrupados en el primer miembro: La expresión anterior es el logaritmo de un cociente: $log\dfrac{\mathrm{x}}{x+3} = -1$ Se aplica la definición de logaritmo: El logaritmo de un número (en este caso -10) es el exponente al que elevar la base (en este caso 10) para obtener ese número (en este caso $\frac{\mathrm{x}}{x+3}$) $10^{-1} = \dfrac{\mathrm{x}}{x+3}$ $\dfrac{1}{10} = \dfrac{\mathrm{x}}{x+3}$ $x + 3 = 10x$ $x - 10x = -3$ $-9x = -3$ $9x = 3$ $x = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$	$\log(5x+4) + \log(x+1) = \log(5x^2+4x+1)$ El primer miembro es el desarrollo de logaritmo de un producto: $\log(5x+4)(x+1) = \log(5x^2+4x+1)$ Recordar que $loga = logb \Leftrightarrow a = b$ $(5\mathrm{x}+4)(\mathrm{x}+1) = 5x^2+4x+1$ $5x^2+5x+4x+4 = 5x^2+4x+1$ $9x+4 = 4x+1$ $5x = -3$ $x = -0{,}6$
$3^{2x-3} - 2^{4x-1} = 0$ $3^{2x-3} = 2^{4x-1}$ $log3^{2x-3} = log2^{4x-1}$ $(2x-3)\log 3 = (4x-1)\log 2$ $2x\log 3 - 3\ log3 = 4xlog\ 2 - \log 2$ $2x\log 3 — 4xlog\ 2 = 3\ log3 - \log 2$ $x\ (2\log 3 — 4log\ 2) = 3\ log3 - \log 2$ $x = \dfrac{3log3 - log2}{(2\log 3 — 4log\ 2)} = \dfrac{3log3 - log2}{2(log3 - 2log2)}$	$(ab)^x = cd$ Se aplica logaritmo a ambos miembros: $log(ab)^x = log(cd)$ $xlog(ab) = \log(cd)$ $x = \dfrac{\log(cd)}{\log(ab)}$
$\log(2x-1) + \log(x+4) = \log(2x^2+x+7)$ $\log(2x-1)\ (x+4) = \log(2x^2+x+7)$ $\log\ (2x^2+8x-x-4) = \log(2x^2+x+7)$ $(2x^2+8x-x-4) = (2x^2+x+7)$ $(7x-4) = (x+7)$ $6\mathrm{x} = 11)$ $\mathrm{x} = \dfrac{11}{6}$	$\log(5x+4) + \log(x+1) = \log(5x^2+4x+1)$ $\log(5x+4)(x+1) = \log(5x^2+4x+1)$ $5x^2+5x+4x+4 = 5x^2+4x+1$ $9x+4 = 4x+1$ $5x = -3$ $x = -0{,}6$
$\log(3x+8) = \log(2x-3)$	$\log(4x+24) = \log(9x+2)$

<table>
<tr><td>Si hay igualdad de logaritmos, sus argumentos también son iguales:

$3x + 8 = 2x - 3$
$3x - 2x = -3 - 8$

$x = -11$

Al verificar se ve que este ejercicio no tiene solución porque resulta ser el logaritmo de un número negativo. En efecto:

$\log(3(-11) + 8) = \log(2(-11) - 3)$

$\log(-25) = \log(-25)$</td><td>Si hay igualdad de logaritmos, sus argumentos también son iguales:

$4x + 24 = 9x + 2$
$4x - 9x = 2 - 24$
$-5x = -22$

$x = \frac{22}{5} = 4{,}4$</td></tr>
<tr><td>$\log(5x - 16) = \log(6x + 15)$

Si hay igualdad de logaritmos, sus argumentos también son iguales:

$5x - 16 = 6x + 15$
$5x - 6x = 15 + 16$
$-x = 31$

$x = -31$. Al verificar se ve que este ejercicio no tiene solución, porque resulta ser el logaritmo de un número negativo. En efecto:

$\log(5(-31) - 16) = \log(6(-31) + 15)$

$\log(-171) = \log(-171)$</td><td>$\log(3x + 2) + \log(x + 4) = \log(3x^2 - 2x + 4)$

$\log(3x + 2)(x + 4) = \log(3x^2 - 2x + 4)$
$(3x + 2)(x + 4) = (3x^2 - 2x + 4)$
$(3x^2 + 12x + 2x + 8) = (3x^2 - 2x + 4)$
$(14x + 8) = (-2x + 4)$
$(14x + 2x) = 4 - 8$
$16x = -4$
$x = -\frac{1}{4} = -0{,}25$</td></tr>
<tr><td>$\log(4x + 7) = \log(4x^2 + 5x - 6) - \log(x - 3)$

$\log(4x + 7) = \log\frac{4x^2 + 5x - 6}{x - 3}$
$4x + 7 = \frac{4x^2 + 5x - 6}{x - 3}$

$(4x + 7)(x - 3) = 4x^2 + 5x - 6$

$4x^2 - 12x + 7x - 21 = 4x^2 + 5x - 6$

$-5x - 21 = 5x - 6$
$-15 = 10x$
$-\frac{15}{10} = x$
$x = -1{,}5$</td><td></td></tr>
</table>

APLICACIÓN DE LAS PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Aplicar las propiedades de logaritmos para reducir las siguientes expresiones a un solo logaritmo.

a) $\log a^3 + 4\log b$ $log a^3 + \log b^4 = log(a^3 b^4)$	b) $\log\frac{c}{d} - \log\sqrt{cd}$ $\log\frac{c}{d} - \frac{1}{2}\log cd$ $\log\frac{c}{d} - \log(cd)^{\frac{1}{2}}$ $\log\frac{\frac{c}{d}}{(cd)^{\frac{1}{2}}} =$ $\log\frac{\frac{c}{d}}{\sqrt{cd}} = log\left(\frac{c}{d}\right) * \left(\frac{1}{\sqrt{cd}}\right)$ $= log\frac{c}{(d)(\sqrt{cd})} =$ Racionalizando el denominador: $log\frac{c}{(d)(\sqrt{cd})} = log\frac{c(\sqrt{cd})}{(d)(\sqrt{cd})\sqrt{cd}}$ $= log\frac{c(\sqrt{cd})}{(d)cd}$ $= \log\frac{c(\sqrt{cd})}{cd^2} = \log\frac{\sqrt{cd}}{d^2}$
c) $\log a^2 - \log\sqrt[3]{b^5} + logc^4$ $\log a^2 + logc^4 - \log\sqrt[3]{b^5}$ $\log a^2c^4 - \log\sqrt[3]{b^5}$ $\log\frac{a^2c^4}{\sqrt[3]{b^5}}$	d) $\log\sqrt[3]{a^8} - 0{,}3\log c^3 + \log(ac)^2$ $\log\sqrt[3]{a^8} - \frac{9}{10}\log c + \log(a)^2 + \log(c)^2$ $\log\sqrt[3]{a^8} + \log(a)^2 + \log(c)^2 - \log c^{\frac{9}{10}}$ $\log\sqrt[3]{a^8} + \log(a)^2 + \log\frac{c^2}{c^{\frac{9}{10}}}$ $\log\sqrt[3]{a^8} + \log(a)^2 + \log\frac{c^2}{\sqrt[10]{c^9}}$ $\log\sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{a^2}$ $+ \log(a)^2 + \log\frac{c^2}{\sqrt[10]{c^9}}$ $\log\sqrt[3]{a^6}\sqrt[3]{a^2} + \log(a)^2 + \log\frac{c^2}{\sqrt[10]{c^9}}$ $\log a^2(\sqrt[3]{a^2}) * a^2 + \log\frac{c^2}{\sqrt[10]{c^9}}$ $\log a^2(\sqrt[3]{a^2}) * a^2 * \frac{c^2}{\sqrt[10]{c^9}}$ $\log a^4(\sqrt[3]{a^2}) * \frac{c^2}{\sqrt[10]{c^9}}$

Algunos ejercicios de la página 65 del libro de Matemática 2º medio de Muñoz, Rupin y Jiménez.

Colocar en un solo logaritmo:

$\log 4+\log x-\log x-\frac{1}{2}\log x^2$ $\log 4+\log x-\log x-\frac{1}{2}(2)\log x$ $\log 4-\frac{1}{2}(2)\log x$ $\log 4-\log x$ $\log\frac{4}{x}$	$\frac{1}{2}\log a+\frac{1}{2}\log b-\frac{1}{3}\log b-\frac{1}{3}\log a^2$ Sacando MCM de los denominadores: $[3\log a+3\log b-2\log b-2\log a^2](\frac{1}{6})$ $[\log a^3+\log b^3-\log b^2-\log a^4](\frac{1}{6})$ $[\log a^3*b^3-(\log b^2+\log a^4](\frac{1}{6})$ $[\log a^3*b^3-(\log b^2*a^4](\frac{1}{6})$ $(\frac{1}{6})\log(a^3*b^3)/(b^2*a^4)$ $(\frac{1}{6})\log(a^{-1}*b)$ $(\frac{1}{6})\log(\frac{1}{a}*b)=log\sqrt[6]{\frac{b}{a}}$
$\frac{2}{3}\log a-\frac{4}{3}\log b-\frac{2}{3}\log b+\frac{4}{3}\log a^2$ $\frac{2}{3}\log a-\frac{4}{3}\log b-\frac{2}{3}\log b+\frac{8}{3}\log a$ $loga^{\frac{2}{3}}-\log b^{\frac{4}{3}}-\log b^{\frac{2}{3}}+\log a^{\frac{8}{3}}$ $loga^{\frac{2}{3}}+\log a^{\frac{8}{3}}-(\log b^{\frac{4}{3}}+\log b^{\frac{2}{3}})$ $\log(a^{\frac{2}{3}}*a^{\frac{8}{3}})-\log(b^{\frac{4}{3}}*b^{\frac{2}{3}})$ $\log(a^{\frac{10}{3}})-\log(b^{\frac{6}{3}})$	$\frac{1}{2}\log x-\frac{1}{3}\log y+\frac{1}{4}\log z$ Hay que sacar Mínimo Común Múltiplo de los denominadores = 12 $[(\frac{1}{2})\log x-(\frac{1}{3})\log y+(\frac{1}{4})\log z](\frac{1}{12})$ $[6\log x-4\log y+3\log z](\frac{1}{12})$ $[\log x^6-\log y^4+\log z^3](\frac{1}{12})$

$\log(a^{\frac{10}{3}}) - \log(b^2)$ $log\frac{a^{\frac{10}{3}}}{b^2} = log(\frac{\sqrt[3]{a^{10})}}{b^2})$	$(\frac{1}{12})[\log(x^6 * z^3) - \log y^4$ $(\frac{1}{12})\log\frac{x^6 * z^3}{y^4} = \log\sqrt[12]{\frac{x^6 * z^3}{y^4}}$
$\log a - 4\log b + \frac{1}{5}(\log c - 2\log d)$ Sacando Mínimo Común Múltiplo = 5 $[\log a - 4\log b + \frac{1}{5}(\log c - 2\log d) * (\frac{1}{5})$ $[5\log a - 20\log b + 1(\log c - 2\log d) * (\frac{1}{5})$ $[\log a^5 - \log b^{20} + 1(\log c - \log d^2) * (\frac{1}{5})$ $(\frac{1}{5})[\log\frac{a^5}{b^{20}} + \log\frac{c}{d^2}]$ $(\frac{1}{5})\log\frac{a^5 c}{b^{20}d^2} = \log\sqrt[5]{\frac{a^5 c}{b^{20}d^2}}$ Otra manera: $\log a - 4\log b + \frac{1}{5}(\log c - 2\log d)$ $\log a - \log b^4 + \frac{1}{5}(\log c - \log d^2)$ $log\frac{a}{b^4} + \frac{1}{5}log\frac{c}{d^2}$ $log\frac{a}{b^4} + \log(\frac{c}{d^2})^{\frac{1}{5}}$ $log\frac{a}{b^4} + \log(\frac{c^{\frac{1}{5}}}{d^{\frac{2}{5}}})$ $log\frac{a}{b^4} * \left(\frac{c^{\frac{1}{5}}}{d^{\frac{2}{5}}}\right) = log(\frac{a}{b^4} * \frac{\sqrt[5]{c)}}{\sqrt[5]{d^2}} = log\frac{\sqrt[5]{a^5 c)}}{\sqrt[5]{b^{20}d^2}} = \sqrt[5]{\frac{a^5 c}{b^{20}d^2}}$	$\log p^2 + 5\log p - log\sqrt[3]{p^2} + \log 1/p$ $\log p^2 + \log p^5 - log\ p^{\frac{2}{3}} + \log p^{-1}$ $\log p^2 * p^5 + \log p^{-1} - logp^{\frac{2}{3}}$ $\log p^7 + \log((p^{-1})\ /(p^{\frac{2}{3}}))$ $\log p^7 + \log(p^{-\frac{5}{3}})$ $log\ p^7 * (p^{-\frac{5}{3}})$ $\log\ (p^{\frac{16}{3}}) = log\sqrt[3]{p^{16}}$
$\log\sqrt{a} - 5\log b^2 + \frac{1}{5}(\log\sqrt[3]{c} - 2\log d)$ Sacando Mínimo Común Múltiplo = 5 $[5\log\sqrt{a} - 25\log b^2 + (\log\sqrt[3]{c} - 2\log d)] * (\frac{1}{5})$ $[\frac{5}{2}\log a - 50\log b + \frac{1}{3}\log c - 2\log d] * (\frac{1}{5})$	$\log_b x - (2log_b y + log_b z)$ $\log_b x - (log_b y^2 + log_b z)$ $\log_b x - (log_b y^2 z)$ $\log_b\frac{x}{y^2 z}$

$[\log a^{\frac{5}{2}} - \log b^{50} + (\log c^{\frac{1}{3}} - \log d^{2})] * (\frac{1}{5})$ $(\frac{1}{5})[\log \frac{a^{\frac{5}{2}}}{b^{50}} + \log \frac{c^{\frac{1}{3}}}{d^{2}}]$ $(\frac{1}{5})[\log \frac{a^{\frac{5}{2}}}{b^{50}} \cdot \frac{c^{\frac{1}{3}}}{d^{2}}]$ $log \sqrt[5]{\frac{a^{\frac{5}{2}}}{b^{50}} \cdot \frac{c^{\frac{1}{3}}}{d^{2}}}$ $log \sqrt[5]{\frac{a^{\frac{5}{2}}}{b^{50}}} \cdot \sqrt[5]{* \frac{c^{\frac{1}{3}}}{d^{2}}}$ $log \frac{(a^{\frac{1}{2}})}{b^{10}} \cdot \frac{(c^{\frac{1}{15}})}{d^{\frac{2}{5}}}$ $log \frac{\sqrt{a}}{b^{10}} \cdot \frac{\sqrt[15]{c}}{d^{\frac{2}{5}}}$ $log \frac{\sqrt{a}}{b^{10}} \cdot \frac{\sqrt[15]{c}}{d^{\frac{2*3}{5*3}}}$ $log \frac{\sqrt{a}}{b^{10}} \cdot \frac{\sqrt[15]{c}}{d^{\frac{6}{15}}}$ $log \frac{\sqrt{a}}{b^{10}} \cdot \frac{\sqrt[15]{c}}{\sqrt[15]{d^{6}}}$ $log \frac{\sqrt{a}}{b^{10}} * \sqrt[15]{\frac{c}{d^{6}}}$	

ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Ecuación logarítmica es aquella cuya incógnita se encuentra en el argumento del logaritmo. Para resolverla se utilizan las propiedades de los logaritmos o su definición.

Se aplica también este concepto cuando no es posible aplicar, en las ecuaciones exponenciales, el método de igualar las bases de las potencias.

Ejemplo: Resolver la ecuación:

$$\log(32x + 12) - \log(5x - 8) = 1$$

Paso 1: Aplicar la propiedad de los logaritmos que corresponda, en este caso, el logaritmo de un cociente, que dice que es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.

$$\log \frac{32x+12}{5x-8} = 1$$

Paso 2: Aplicar la definición de logaritmo: El logaritmo de un número (en este caso 1) es el exponente al que hay que elevar la base (en este caso 10) para obtener el número (en este caso, $\frac{32x+12}{5x-8}$) Y resolver.

$10^1 = \dfrac{32x+12}{5x-8}$
$10(5x-8) = 32x+12$
$50x-80 = 32x+12$
$18x = 92 \Rightarrow x = \dfrac{46}{9}$

Paso 3: Verificar la solución para considerar posibles restricciones. Por ejemplo, el logaritmo de un número negativo no existe, por lo que, si al reemplazar el valor de la incógnita en el argumento del logaritmo da un número negativo, el ejercicio no tiene solución:

$$\log(32x+12) - \log(5x-8) = 1$$

$\log\left(32\left(\dfrac{46}{9}\right)+12\right) - \log\left(5(\dfrac{46}{9})-8\right) = 1$
$\log\left(\dfrac{1472}{9}+12\right) - \log\left(\dfrac{230}{9}-8\right) = 1$
$\log\left(\dfrac{1580}{9}\right) - \log\left(\dfrac{158}{9}\right) = 1$
$2{,}24 - 1{,}24 = 1$
$1 = 1$

Los ejercicios siguientes son del Nº2 de la página 68 del libro de Matemática de Muñoz, Rupin y Jiménez. Resolver:

$\log(x+5) = 1$ Aplicando la definición de logaritmo: El logaritmo de un número (en este caso 1) es el exponente al que hay que elevar la base (en este caso 10) para obtener el número (en este caso, $(x+5)$. $10^1 = x+5$ $x = 10-5 = 5$	$\log(2x+125) = 2$ Aplicando la definición de logaritmo: El logaritmo de un número (en este caso 2) es el exponente al que hay que elevar la base (en este caso 10) para obtener el número (en este caso, $(2x+125)$. $10^2 = 2x+125$ $100-125 = 2x$ $-25 = 2x$ $-12{,}5 = x$
$\log(-2x+5) = -1$ Aplicando la definición de logaritmo: El logaritmo de un número (en este caso -1) es el exponente al que hay que elevar la base (en este caso 10) para obtener el número (en este caso, $(-2x+5)$. $10^{-1} = -2x+5$ $\dfrac{1}{10} - 5 = -2x$ $-\dfrac{49}{10} = -2x$	

$\frac{49}{20} = x$ $x = 2{,}45$ ¿? <u>Advertencia</u>: Si se reemplaza este valor en el ejercicio original, no se produce una igualdad entre ambos miembros, por lo que el ejercicio no tiene solución.	

Los ejercicios siguientes son del Nº29 de la página 80 del libro de Matemática de Muñoz, Rupin y Jiménez.

a) $\log(2x+3) = 1$ Aplicando la definición de logaritmo: El logaritmo de un número (en este caso 1) es el exponente al que hay que elevar la base (en este caso 10) para obtener el número (en este caso, $(2x+3)$. $10^1 = 2x+3$ $7 = 2x$ $x = \frac{7}{2} = 3{,}5$	b) $\log(3x-113) = 2$ Aplicando la definición de logaritmo: El logaritmo de un número (en este caso 2) es el exponente al que hay que elevar la base (en este caso 10) para obtener el número (en este caso, $(3x-113)$. $10^2 = 3x - 113$ $100 + 113 = 3x$ $x = \frac{213}{3} = 71$
c) $\log\ (3x-2) - \log(3x^2+4x-5) = log\frac{1}{x+3}$ La propiedad de los logaritmos que corresponde aplicar es el logaritmo de un cociente, que es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador. $log\frac{3x-2}{3x^2+4x-5} = \ log\frac{1}{x+3}$ Recordar aquí que: $log\ a = log\ b\ sí\ y\ solo\ sí\ a = b$ En este ejercicio: $a = \frac{3x-2}{3x^2+4x-5}$ y $b = \frac{1}{x+3}$ $\frac{3x-2}{3x^2+4x-5} = \frac{1}{x+3}$ $(3x-2)(\ x+3) = 3x^2+4x-5$ $3x^2+9x-2x-6 = 3x^2+4x-5$ $7x-6 = 4x-5$ $3x = 1$ $x = \frac{1}{3}$. Comprobar este resultado (No tendría solución).	

EJERCICIOS VARIOS:

Ejercicio:

$log_4 64 - 3log_5 625 + \frac{1}{3} log_3 9^6$

Solución: Resolviendo separadamente los sumandos y usando variables auxiliares x, y, z:

$log_4 64 = x$
$(4^x = 64)$
$(4^x = 4^3)$
$x = 3$

$log_5 625 = y$
$(5^y = 625)$
$(5^y = 5^4)$
$y = 4$
$3log_5 625 = 3(4) = 12$

$log_3 9^6 = z$
$3^z = 9^6$
$3^z = (3^2)^6$
$3^z = 3^{12}$

$z = 12$

$\frac{1}{3} log_3 9^6 = \frac{1}{3}(12) = 4$

Por consiguiente:
$log_4 64 - 3log_5 625 - \frac{1}{3} log_3 9^6 = 3 - 12 + 4 = -5$

Ejercicio:
Calcular: $log_x 4 = \frac{2}{3}$

$x^{\frac{2}{3}} = 4$

$\sqrt[3]{x^2} = 4$

Elevando al cubo ambos miembros:

$\sqrt[3]{x^2}^3 = 4^3$

$x^2 = 64$

$x = 8$

Ejercicio:
Calcular: $log_x 4 = 4$

$x^4 = 4$

$x^4 - 4 = 0$

$(x^2 + 2)(x^2 - 2) = 0$
$(x^2 + 2) = 0$

$x^2 = -2 \Rightarrow x = i\sqrt{2}$

$(x^2 - 2) = 0$

$x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$

Ejercicios:
Desarrollar aplicando las propiedades de los logaritmos:

$\log abc = \log a + logb + logc$
$\log a^5\, b^2 = \log a^5 + \log b^2 = 5 \log a + 2log\ b$
$log\, \dfrac{x}{yz} = \log x - logyz = logx - (logy + logz) = logx - logy - logz$
$\log 2abc = log2 + loga + logb + logc$
$log\, \dfrac{bd^3}{c^4} = logbd^3 - \log c^4 = \log b + logd^3 - 4logc = \log b + 3 \log d - 4 \log c$
$log\sqrt{ab} = \log(ab)^{\frac{1}{2}} = \log a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} = \log a^{\frac{1}{2}} + \log b^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\log a + \dfrac{1}{2}\log b = \dfrac{1}{2}(\log a + \log b)$
$log\sqrt{\dfrac{xy}{z}} = \log(\dfrac{xy}{z})^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{xy}{z} = \dfrac{1}{2}(logxy - logz) = \dfrac{1}{2}(logx + logy - logz)$
$\dfrac{\log\left(3a^3\sqrt{b}\right)}{2c} = \log 3a^3\sqrt{b} - log2c = log3 + loga^3 + log\sqrt{b} - (log2 + logc)$
$= \log 3 + 3\log a + \log b^{\frac{1}{2}} - \log 2 - \log c = log3 + 3 \log a + \dfrac{1}{2}\log b - \log 2 - \log c$

Ejercicios:
Expresar como un solo logaritmo:

$loga + logb = logab$
$logx - logy = \log\left(\dfrac{x}{y}\right)$
$logx + logy + \log z = \log xyz$
$logx - logy + \log z = \log\left(\dfrac{x}{y}\right) + \log z = \log(\dfrac{x}{y})(z) = \log\dfrac{xz}{y}$
$\dfrac{1}{2}logx + \dfrac{1}{2}logy = \dfrac{1}{2}(logx + logy) = \dfrac{1}{2}logxy$
$2logp - 8logq = logp^2 - logq^8 = log\ \dfrac{p^2}{q^8}$
$4logx - 3logy + 1 = \log x^4 - \log y^3 + \log 10 = \log\dfrac{x^4}{y^3} + log10 = \log\left(\dfrac{x^4}{y^3}\right)(10) = \log\dfrac{10x^4}{y^3}$
$\dfrac{1}{3}loga - \dfrac{1}{2}\log b - \dfrac{1}{2}\log c = \log a^{\frac{1}{3}} - (\log b^{\frac{1}{2}} + \log c^{\frac{1}{2}}) = log\ a^{\frac{1}{3}} - (\log b^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}}) = \log\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}}}$
$4logx + \dfrac{5}{6}\log y - \log z = \log x^4 + \log y^{\frac{5}{6}} - \log z = log\ x^4 y^{\frac{5}{6}} - \log z = \log\dfrac{x^4 y^{\frac{5}{6}}}{z}$

$$\frac{2}{3}logx^3 - 6\log y^4 + \frac{1}{5}\log x^{\frac{5}{3}} = \log x^{\frac{6}{3}} + \log x^{\frac{1}{3}} - \log y^{24} = log\ x^2 x^{\frac{1}{3}} - (\log y^{24}) = \log \frac{x^2 x^{\frac{1}{3}}}{y^{24}}$$
$$= \log \frac{x^{\frac{7}{3}}}{y^{24}} = \log \frac{\sqrt[3]{x^7}}{y^{24}}$$

Ejercicio:

Si $log_3(A+B) = k$ y $A - B = 9$, calcular: $log_3(A^2 - B^2)$

Solución:

$log_3(A^2 - B^2) = log_3(A+B) \cdot (A-B)$

$log_3(A^2 - B^2) = log_3(A+B) + log_3(A-B)$

Como: $log_3(A+B) = k$

$log_3(A^2 - B^2) = k + log_3(A-B)$

Como $A - B = 9$

$log_3(A^2 - B^2) = k + log_3 9$

$log_3(A^2 - B^2) = k + 2$

JSA/logaritmos.docx