

Guy Brousseau

Profesor emérito, IUFM<sup>2</sup> d'Aquitaine, Francia

Guy.Brousseau@cribx1.u-bordeaux.fr

*Educación Matemática*

Vol. 12 No. 1 Abril 2000

pp. 5-38

**Resumen.** *Siempre nos hemos preguntado cuáles son los aportes de los conocimientos matemáticos "necesarios" para la educación y la sociedad y cómo llevar a cabo dichos aportes. Hoy en día nos cuestionamos, además, acerca de los medios que hemos creado para responder a esta demanda inicial: en qué medida el éxito de la difusión de los conocimientos matemáticos depende de las Ciencias de la educación o de las matemáticas mismas, o qué lugar tienen en esta difusión los conocimientos de didáctica, y más precisamente de la didáctica de las matemáticas, qué instituciones pueden asegurar la coherencia y la pertinencia de este género de conocimientos...*

*Más que un panorama amplio, les propongo hacer un recorrido por estas preguntas siguiendo un itinerario que conozco porque lo he seguido. Así pues, me limitaré a lo siguiente:*

- *Presentar una de las aproximaciones a la enseñanza –asumida como objeto de estudio– que se desarrolló a partir de los años 60 de manera complementaria o paralelamente a otras.*
- *Indicar qué parte puede ser considerada para la enseñanza de la educación de los alumnos y para la formación de los maestros.*
- *Plantear algunas preguntas sobre el estatuto epistemológico, científico y social de esta aproximación.*

**Résumé.** *Nous nous demandons toujours quels sont les apports des connaissances mathématiques "nécessaires" à l'éducation et à la société, et comment réaliser ces apports, mais nous nous interrogeons aujourd'hui en plus sur les moyens que nous avons créés pour répondre à cette demande initiale: dans quelle mesure le succès de la diffusion des connaissances mathématiques dépend-il des Sciences de l'éducation, ou quelle place les connaissances de didactique, et plus précisément de didactique des mathématiques tiennent-elles dans cette diffusion, quelles institutions peuvent assurer la cohérence et la pertinence de ce genre de connaissances...*

*Plutôt qu'un vaste panorama je vous propose une visite de ces questions en suivant un itinéraire que je connais pour l'avoir suivi. Je me bornera.*

- *à présenter une des approches de l'enseignement - pris comme objet d'étude - qui s'est développée à partir des années 60 en complément ou parallèlement à d'autres.*
- *à indiquer quel parti peut en être tiré pour l'enseignement et l'éducation des élèves, et pour la formation des professeurs.*
- *et à poser quelques questions sur le statut épistémologique, scientifique et social de cette approche.*

<sup>1</sup> Una versión resumida de este trabajo fue presentada en el V Congreso Nacional de Investigación Educativa. Aguascalientes, Ags. 30 y 31 de octubre y 1º y 2 de noviembre de 1999. Traducción de David Block y Patricia Martínez Falcón.

<sup>2</sup> Instituto Universitario de Formación de Maestros.

## Introducción

En los inicios del siglo XXI vamos a abordar la educación matemática con recursos que aparentemente no tienen punto de comparación con aquellos que se han utilizado en el pasado. Sin embargo, en estas nuevas circunstancias, no es seguro que nuestros conocimientos y nuestras prácticas actuales nos garanticen una mejor regulación y una mejor eficacia en este dominio que las que se tuvieron a principios del siglo XX.

Siempre nos hemos preguntado cuáles son los aportes de los conocimientos matemáticos “necesarios” para la educación y la sociedad y cómo llevar a cabo dichos aportes. Los textos acerca de la finalidad de las matemáticas abundan. Explican la necesidad, para una sociedad, de que cada ciudadano disponga de una cultura matemática suficiente, y a la vez, la necesidad social de disponer de la cantidad suficiente de técnicos y de científicos para enfrentar los desafíos del futuro. Todo tiende a convencernos de que las matemáticas jugarán en ello un papel importante. Dichos textos explican también la importancia de las propiedades formativas inherentes a las matemáticas, tanto a nivel individual, por las capacidades que parecen desarrollar, como a nivel de la vida colectiva. El comportamiento racional de una sociedad, es decir, su relación tanto con la verdad como con la realidad, no descansa únicamente en las virtudes individuales de sus miembros. Exige una práctica social y una cultura que deben enseñarse en la escuela. Las matemáticas constituyen el campo en el que el niño puede iniciarse más tempranamente en la racionalidad, en el que puede forjar su razón en el marco de relaciones autónomas y sociales.

A través de su acercamiento profundo a la conjugación de las distintas culturas que lo componen, México me ha parecido siempre muy afecto al aspecto humano y humanista de la enseñanza. Desde esta óptica, hemos coincidido frecuentemente en la importancia de organizar desde la infancia relaciones más vivas con las matemáticas, más próximas de su funcionamiento real, y menos austeras de lo que podría pensarse. Pero no voy a volver aquí a este mensaje siempre de actualidad.

Nos cuestionamos hoy además, acerca de los recursos que hemos creado para responder a esta demanda inicial: en qué medida el éxito de la difusión de los conocimientos matemáticos depende de las Ciencias de la educación o de las matemáticas mismas, o qué lugar tienen en esta difusión los conocimientos de didáctica, y más precisamente de la didáctica de las matemáticas, qué instituciones pueden asegurar la coherencia y la pertinencia de este género de conocimientos.

No estoy en condiciones de hacer un estado del arte en relación con la educación matemática en todo el mundo y de hacer un inventario de las tendencias que se han desarrollado en el fin del siglo, además ésta no es mi especialidad. La cantidad y la calidad de los trabajos experimentales, la multiplicidad y la diversidad de las propuestas didácticas que se han realizado rebasan el propósito de este trabajo y probablemente también mi capacidad de información y de síntesis.

Más que un panorama amplio, les propongo hacer un recorrido por estas preguntas siguiendo un itinerario que conozco porque lo he seguido. Así pues, me limitaré a lo siguiente:

- Presentar una de las aproximaciones a la enseñanza -asumida como objeto de estudio- que se desarrolló a partir de los años 60 de manera complementaria o paralelamente a otras.
- Indicar qué parte puede ser considerada para la enseñanza de la educación de los alumnos y para la formación de los maestros.
- Plantear algunas preguntas sobre el estatuto epistemológico, científico y social de esta aproximación.

Esta aproximación, la de la teoría de las situaciones didácticas, se presenta actualmente como un instrumento científico. Tiende a unificar y a integrar los aportes de otras disciplinas y proporciona una mejor comprensión de las posibilidades de mejora y de regulación de la enseñanza de las matemáticas.

No es mi intención hacer aquí proselitismo para un nuevo método de enseñanza, incluso si numerosas aplicaciones han sido tomadas de este acercamiento. Me parece que en la educación en el siglo XX no han faltado profetas e innovadores. Yo solamente deseo propiciar una reflexión acerca de las relaciones entre “contenido” de la enseñanza con los métodos de la educación.

### 1. Los orígenes de la Teoría de las Situaciones

Con frecuencia se concibe a la enseñanza como la parte de las relaciones entre el **sistema educativo** y el **alumno** que conciernen a la transmisión de un **saber** dado, y entonces se interpreta a la relación didáctica como una comunicación de informaciones (Fig. 1).

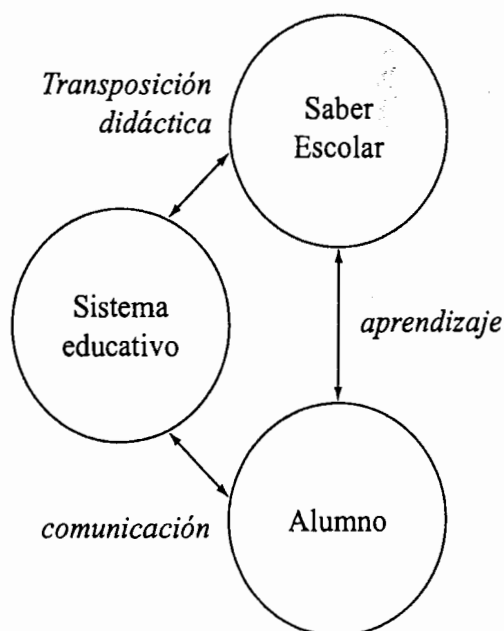
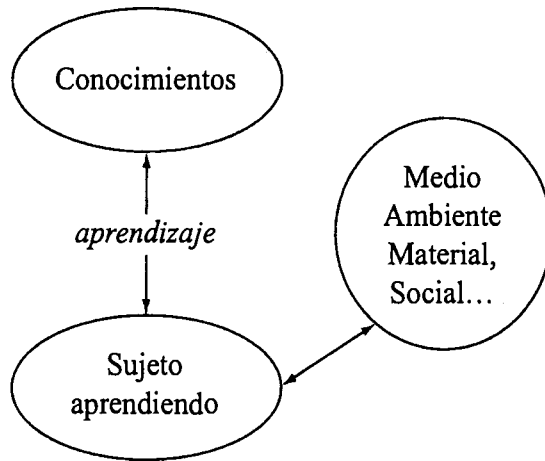


Figura 1

Este esquema tripolar está asociado habitualmente con una concepción de enseñanza en la que el profesor organiza el saber por enseñar en una serie de mensajes de los cuales el alumno toma lo que debe adquirir. Este esquema facilita la determinación de los objetos por estudiar, el papel de los actores, y la asignación del estudio de la enseñanza a diversas disciplinas. Por ejemplo, las matemáticas tienen la responsabilidad del contenido, las ciencias de la comunicación se responsabilizan de la traducción en mensajes adaptados, la pedagogía y la psicología cognitivas de comprender y de organizar las adquisiciones y los aprendizajes del alumno. El propósito de estos mensajes es esencialmente la aculturación del alumno por la sociedad. Por supuesto, este esquema no excluye la intervención de otras disciplinas como complemento para esclarecer algún aspecto del proceso, pero dicho esquema jerarquiza el impacto que pueden tener.

Ahora bien, a propósito de estos fenómenos de aprendizaje, los psicólogos no han cesado de mostrar la importancia de la tendencia natural de los sujetos para adaptarse a su medio. Tanto Skinner (papel de los estímulos), como Piaget (papel de las experiencias personales en el desarrollo espontáneo de los esquemas fundamentales), o Vigotski (papel del medio sociocultural) (Fig.2).

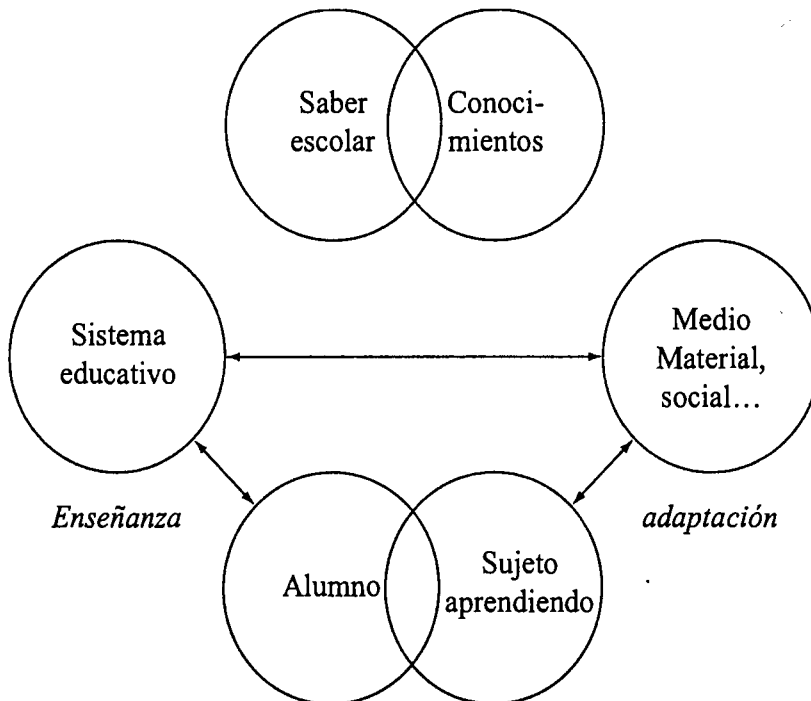


**Figura 2**

Así por ejemplo, aunque Piaget se ocupa esencialmente de la génesis no escolar de los conocimientos, en numerosos casos, declina esta dualidad para coordinarla<sup>4</sup>, (el apriorismo y el empirismo en la abstracción reflexiva, la asimilación y la acomodación en la equilibración, etc.)

Desde esta perspectiva, la enseñanza se convierte en una actividad que no puede más que conciliar dos procesos, uno de *aculturación* y el otro de *adaptación independiente*.

Si identificamos los conocimientos que el sujeto desarrolla en el contacto del medio, con los saberes enseñados, y si identificamos al sujeto que aprende con el alumno, se obtiene el esquema cuadripolar de la figura 3.



**Figura 3**

<sup>4</sup> "Contra las diversas formas de empirismo, la epistemología *constructivista* rechaza considerar el conocimiento como un reflejo del mundo exterior en la representación del sujeto, y es en la actividad práctica o cognitiva del sujeto y no en la aprehensión sensorial, donde se sitúa el origen de este conocimiento. Recíprocamente, contra las diversas formas de nativismo, de apriorismo y de idealismo, rechaza ver en el conocimiento la proyección sobre la realidad de las estructuras trascendentales del espíritu". P. Greco, artículo "Jean Piaget" en *Encyclopedia universalis*.

Desde inicios del siglo, los trabajos de psicología no han dejado de influir en la enseñanza. Sin embargo, los resultados han aparecido solamente como formas de "rectificarla". Deben "ser tomados en cuenta" por los maestros, sin que se sepa cómo.

Prescripciones recientes como "el niño debe ser ubicado en el centro de las preocupaciones del educador" muestran el deseo de reaccionar contra la lógica de la comunicación, pero no logran esconder la impotencia de la psicología y de la pedagogía para intervenir de otro modo que no sea el modo crítico y correctivo. Así pues, estos esfuerzos no consiguen modificar sensiblemente el esquema tripolar.

En los años 60, el medio del alumno no fue un objeto de estudio en sí mismo. Se buscó construir un modelo del sujeto que aprende, del proceso de producción o de aprendizaje de conocimientos, o bien, de la estructura de los saberes. Para Skinner, la caja negra es el sujeto, los estímulos pueden decidirse por el experimentador, por lo tanto son "conocidos", más exactamente, son transparentes y de lo que conviene construir un modelo es del sujeto<sup>5</sup>. La cultura científica de Piaget le proporciona todos los conocimientos que necesita para concebir los dispositivos experimentales en los cuales el niño revela sus modos de pensamiento y para reconocer en sus comportamientos las estructuras y los conocimientos matemáticos de su elección. *A fortiori*, si las modalidades de la influencia del medio sociocultural sobre los aprendizajes de los alumnos son tomados en cuenta y estudiados por Vigotski, el estudio del medio, en sí mismo, da lugar a otro campo, ideológico o científico.

En los años 60, siendo todavía estudiante de matemáticas, y al mismo tiempo alumno de Pierre Gréco en Psicología cognitiva, me impresioné por su habilidad para concebir dispositivos experimentales destinados a poner en evidencia la originalidad del pensamiento matemático de los niños en las etapas de su desarrollo. Sin embargo, me daba cuenta de que no se hacía ningún esfuerzo por analizar los dispositivos mismos y por hacer explícita la relación entre éstos y la noción matemática cuya adquisición era estudiada<sup>6</sup>. Asimismo, cuando Piaget utilizaba los axiomas de Peano para identificar EL desarrollo de EL conocimiento de EL número en EL Niño, estos singulares me parecían apuestas interesantes pero arriesgadas, más que evidencias. Yo podía producir "definiciones" de números naturales, matemáticamente equivalentes a los axiomas de Peano, pero de complejidades cognitivas muy diversas. La equivalencia matemática no tiene como consecuencia la equivalencia cognitiva. Igualmente, bastaba con variar un poco los números propuestos para ver que el conocimiento DEL número era de hecho el conocimiento de algunos números. ¿Qué es lo que nos permitiría declarar que es exactamente este conocimiento matemático el que el sujeto conoce y no otro más general o más particular? Estas observaciones no eran objeciones a los trabajos de Piaget, sino al uso muy preciso que se quería hacer de los estudios piagetianos para hablar de las adquisiciones de un alumno particular en una situación particular y para inferir prescripciones didácticas.<sup>7</sup>

Así pues, me pareció que era preciso extender estos trabajos al estudio los dispositivos mismos y de sus relaciones con tal o cual conocimiento: ¿en qué condicio-

<sup>5</sup> Sus críticos, como Chomski, después Nelson o Arbib y sus seguidores como Suppes hacen modelos del sujeto por medio de autómatas formales.

<sup>6</sup> "Desplazamientos" o "transformaciones" son quizás términos técnicos del geómetra pero que corresponden aquí sin lugar a equivocación a acciones, a movimientos usuales pero ya no se trata de movimientos vividos en la acción, se trata de movimientos imaginados, ejecutados o reconstituidos en pensamiento" *Structures e significations (EHESS, 1991)*.

<sup>7</sup> H. Aebli (1959) *Didactique psychologique*.

nes puede propiciarse que un sujeto -cualquiera- tenga la necesidad de un conocimiento determinado para tomar ciertas decisiones?, y ¿cómo explicar de antemano la razón por la cual lo haría? Sin los dispositivos piagetianos, esta idea hubiera sido trivial, ya que estudiar los problemas y los ejercicios que hacen que se utilice una noción matemática es un trabajo habitual para los matemáticos. Por otra parte, como cada noción apela a todo un conjunto de problemas y de ejercicios que le son específicos, podía pensarse que esta vía de investigación tenía una oportunidad más o menos nula para aportar información sobre la adquisición de saberes un poco generales. En esta perspectiva, son los comportamientos de los alumnos los que revelan el funcionamiento del medio, considerado como un sistema. La caja negra es, entonces, el medio.

En esa época, los profesores de matemáticas trataban de inventar ejercicios para acompañar la introducción de conocimientos matemáticos nuevos y sus esfuerzos dejaban ver, desde mi punto de vista, cierta pobreza de nuestras concepciones didácticas. Se conformaban con frecuencia con encontrar un ejemplo, en el que, a través de una traducción simple, se pudieran “leer” los elementos de la estructura o las propiedades enunciadas en la definición o el teorema de matemáticas. La aplicación en un sentido literal de las estructuras matemáticas sobre los objetos y sobre relaciones muy diversas era interesante, pero confinaba al alumno al papel de espectador, y al profesor al de presentador del espectáculo. En el mejor de los casos, hacer actuar al alumno consistía en comunicarle las condiciones y las propiedades de un sistema generador y en hacerle producir los conocimientos previstos (fórmulas, declaraciones, etc.) mediante la aplicación de reglas enseñadas previamente, como lo proponía Z. Dienes. En estas condiciones, la pregunta que planteada a cada propuesta considerada engendró los trabajos de los que vamos a hablar fue “¿por qué?": ¿por qué un sujeto haría tal cosa en lugar de tal otra? ¿por qué es este conocimiento el que determina a este comportamiento?

Esta actitud conduce naturalmente a considerar un problema o un ejercicio, no como una simple reformulación de un saber, sino como un dispositivo, como un medio que “responde al sujeto” siguiendo algunas reglas. ¿Qué juego debe jugar el sujeto para tener necesidad de dicho conocimiento? ¿qué aventura -sucesión de juegos- puede llevarlo a concebirlo o a adoptarlo? En este acercamiento, no hay necesidad de describir al sujeto mejor que a un jugador de ajedrez, que mueve las piezas blancas o negras siguiendo una estrategia impersonal. ¿Qué información, qué sanción pertinente debe recibir el sujeto por parte del medio para orientar sus elecciones y comprometer tal conocimiento en lugar de tal otro?

El mismo camino conduce entonces a considerar al medio como un sistema autónomo, antagonista del sujeto, y es de aquél del que conviene hacer un modelo en tanto una especie de autómeta.

Hemos llamado “situación” a un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable. Algunas de estas “situaciones” requieren de la adquisición “anterior” de todos los conocimientos y esquemas necesarios, pero hay otras que ofrecen una posibilidad al sujeto para construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso “genético”.

Notemos que la misma palabra “situación” sirve, en su sentido ordinario, para describir tanto al conjunto (no necesariamente determinado) de condiciones que enmarcan una acción, como al modelo teórico y eventualmente formal que sirve para estudiarla.

En 1970 se plantea el proyecto científico: se trata de construir el modelo de las situaciones utilizadas para introducir o enseñar las nociones matemáticas (y de criticarlas) así como de imaginar otras más apropiadas. Planteando los problemas de esta manera, es posible introducir en el análisis, en particular en el cálculo, junto con los argumentos de organización lógico-matemática del saber, argumentos de tipo económico y ergonómico. Pero también es posible tomar en cuenta otras restricciones, en particular aquellas que podrían aparecer como conclusiones de trabajos de psicología o de sociología, con la condición de hacerlas funcionales, es decir de precisar cómo intervienen efectivamente. Un ejemplo de aplicación de este principio metodológico es el que se plantea en el siguiente apartado. Correspondiente al dominio del aprendizaje del número.

Sería ocioso indicar aquí todas las condiciones que han hecho que esta idea de estudiante se haya convertido en una hipótesis de trabajo, en un método y en un programa de investigación para toda una generación de investigadores en didáctica de las matemáticas en Francia. El proyecto y el programa IREM (Instituto de Investigaciones sobre la Enseñanza de las Matemáticas) y la regulación de las reformas de los años 70 están en el centro de estos acontecimientos. Desde esta época se observa que buscar las condiciones de existencia de un saber constituye un recurso general para la investigación y para la ingeniería en didáctica. La descripción sistemática de las situaciones didácticas es un recurso más directo para discutir con los maestros acerca de lo que hacen o podrían hacer, y para considerar cómo éstos podrían prácticamente tomar en cuenta los resultados de las investigaciones en otros campos. La teoría de las situaciones aparece entonces como un recurso privilegiado, no solamente para comprender lo que hacen los profesores y los alumnos, sino también para producir problemas o ejercicios adaptados a los saberes y a los alumnos y para producir finalmente un recurso de comunicación entre los investigadores y con los profesores.

## 2. Un ejemplo: el número natural

### *Dos situaciones clásicas*

Comencemos por describir dos situaciones culturalmente clásicas utilizadas para saber si un niño sabe contar.

#### *Una práctica popular: el pequeño cuenta, escena familiar*

*Mamá:* “¿Sabes abuelo?, ¡el pequeño ya sabe contar!

*Abuelo:* “¿Es verdad? A ver mi chiquito...”

*Mamá:* “Enséñale al abuelo que ya sabes contar”

*El niño (de 4 años):* “Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, diez, quince, mmm”

*Abuelo:* (con admiración) “¡Ahh!, muy bien, sigue así.

#### *Una práctica profesional: “contar” así no cuenta*

Sin embargo, dentro de la familia está la tía Mimi, que es una maestra jubilada.

*Tía Mimi:* “Claro que no abuelo, eso no significa que sepa contar. Para saber si el niño sabe contar hay que mostrarle algunos dedos y preguntarle cuántos

son, luego pedirle que levante una cantidad de dedos. ¡No es suficiente con que recite la serie de los números! Y si no lo logra hacer bien, la mamá no debe decepcionarse. A los cuatro años, la mayoría de los niños apenas pueden comprender los números hasta el 5. Los psicólogos lo dicen.

*Mamá:* ¡Pero si nuestra vecina Odile, que tiene cinco años, cuenta perfectamente hasta el 70!

*Tía Mimí:* Seguramente también puede recitar la fábula de La Fontaine “El gato, la comadreja y el conejito” que contiene más de 70 palabras<sup>8</sup>, pero cree que los penates<sup>9</sup> son una especie de pantuflas. Esto no es grave, pero una colega me contó que los padres ejercen actualmente una fuerte presión para que los niños “sepan contar” precozmente. Ha visto que bajo la influencia de este “duro y dale” algunos alumnos empiezan a contar cuando escuchan la palabra “número”, sin ni siquiera querer reflexionar sobre la pregunta que se les plantea. Tiene en su salón de maternal a niños chicos y medianos que cuentan mecánicamente más allá del 50, y por ello no puede, ni con éstos ni con los que no cuentan más allá de cinco, organizar colectivamente ninguna actividad matemática de su edad, etc.

### *Análisis y construcción de modelos*

El modelo del segundo ejemplo contiene y corrige evidentemente al primero. En los dos casos la formulación de los números es un recurso apropiado para responder a lo que se pide, pero la Tía Mimí modifica el modelo inicial (maestro, alumno, saber) de manera esencial y lo sustituye por otro (maestro, alumno saber, medio), en el que el medio objetivo es el número de dedos que se muestran o se cuentan. Así, en su relación con el medio, el niño debe sujetar su respuesta a una nueva forma de validez que no es únicamente la que espera o desea un adulto.

Esta sujeción proporciona evidentemente otro sentido al saber, el cual se convierte en el recurso adecuado para responder a las necesidades de una situación objetiva, desprovista en sí misma de intencionalidad didáctica. Sin embargo, notemos que el niño no tiene los recursos para comprender la pregunta “cuántos”, ni para responder en caso de que no haya aprendido previamente el sentido en juego. Además, no tiene los recursos para verificar por sí mismo la validez de su respuesta. El juicio de su adecuación queda bajo el control del maestro. Esta situación es pues esencialmente una situación de evaluación de los conocimientos.

Esta situación sólo puede utilizarse para la enseñanza en un marco de una didáctica conductista, que consiste en repetir las preguntas, en enseñar cómo se establece la respuesta y en hacer reproducir las técnicas de conteo en asociaciones pregunta-respuesta hasta lograr una reproducción perfecta.

En relación con esto, en uno de sus dispositivos más célebres, Piaget pregunta a los niños “¿dónde hay más fichas?” presentando dos colecciones equipotentes, que ocupan más o menos espacio. Esta situación siempre provoca la misma crítica por parte de los que la conocen por primera vez: la pregunta es ambigua, es necesario conocer el número para comprender que se trata del número y no del espacio ocupado. De hecho, las preguntas de evaluación siempre son tales que hace falta conocer la respuesta para comprender la pregunta.

<sup>8</sup> N. de T.: Se refiere a series de palabras que los pequeños se pueden aprender de memoria, sin por ello comprender lo que éstas dicen, o cambiando su sentido.

<sup>9</sup> Dioses domésticos, entre los romanos. Las imágenes de los penates se guardaban en la penetralia o sala central de la casa. Había penates del estado y de cada familia particular.



En una situación “de aprendizaje” en la que el alumno debería “adaptarse a una situación objetiva” (y no a una relación dual con el maestro) produciendo él mismo el conocimiento, es necesario que la consigna o el proyecto de acción pueda ser concebido por el sujeto mismo sin el auxilio de su solución, puesto que se trata de construir o de adquirir.

Para comprender la situación, el alumno debe poder esbozar, con sus conocimientos actuales, una estrategia de base que corresponda a la consigna que se le dio. El conocimiento nuevo es entonces el recurso para producir el efecto esperado mediante una estrategia más eficaz, más segura, más económica, etc. Los conocimientos están en competencia y los motivos de aprendizaje son leyes “económicas” que se manifiestan al alumno mismo.

El aprendizaje “behaviorista” apela a un sentido, pero este sentido es exterior al proceso de adaptación. Por este hecho, es el maestro el que debe decidir lo que va a considerar como un aprendizaje elemental. Si un conocimiento es muy complejo, lo deberá descomponer, enseñar sus partes y enseñar después la composición de dichos conocimientos fragmentados. Las razones de este recorte son ajenas al niño y el sentido de lo que ha aprendido no le podrá ser dado sino después, a través del uso. Esto explica la necesidad de multiplicar los ejercicios de aplicación de un saber aprendido. El sentido de este saber estará representado, no por su adecuación al establecimiento de respuestas, sino por un universo de situaciones determinado por sus analogías. Así, por ejemplo, la enseñanza clásica de la división separa el aprendizaje del algoritmo, del aprendizaje de su sentido.

No continuaremos este análisis que solamente tenía como objetivo mostrar cómo opera una interpretación de las prácticas, en términos de la sujeción del alumno a una situación.

Hipótesis de la situación fundamental. La vía empírica consiste en intentar mejorar estas prácticas. Nosotros, por el contrario, vamos a seguir el otro camino, aquel que partiendo de un conocimiento determinado, busca qué tipo de situaciones son capaces de propiciar su aparición, su utilización, su construcción y su aprendizaje.

Por razones heurísticas, suponemos que *cada conocimiento matemático posee al menos una situación que lo caracteriza y lo diferencia de los otros.*

Además, conjeturamos que el conjunto de situaciones que caracterizan a una misma noción está estructurado y puede ser engendrado a partir de un pequeño número de situaciones llamadas fundamentales, a través de un juego de variantes, de variables y de cotas sobre estas variables.

Pero antes de abordar estas preguntas teóricas, me parece útil ilustrar concretamente la noción de situación fundamental presentando la que corresponde al número natural. No señalaremos los razonamientos de ingeniería didáctica que siguen de los que ya hemos dado y a través de los que llegamos a este resultado. Tampoco mostraremos los argumentos en favor de la idea de que esta situación es bastante próxima a la situación fundamental. No obstante, se puede señalar que, en lugar de criticar la ceguera de las situaciones prácticas, resulta más eficaz compararlas con una situación fundamental.

Antes de dar este ejemplo es importante considerar por el momento que *una situación fundamental no es a priori una situación “ideal” para la enseñanza, ni siquiera una solución más eficaz.* El valor de una situación para su uso didáctico se aprecia en función de un gran número de otros parámetros externos, tales como la posibilidad efectiva de ponerlos a disposición en un ambiente psico-socio-cultural determinado.

## *La situación fundamental del conteo*<sup>10</sup>

Para satisfacer las condiciones anteriores y utilizando algunas conclusiones de la teoría, se obtiene la situación siguiente que puede traducirse en instrucciones adaptadas para niños de 3 a 7 años:

“Tenemos pinturas en estos botes. Tu vas a ir allá a buscar los pinceles y vas meter uno solo en cada bote. Debes traer todos los pinceles en un solo viaje y es importante que ningún pincel se quede sin bote y ningún bote se quede sin pincel. Si te equivocas, tomas todos los pinceles, te los llevas otra vez y lo intentas de nuevo. Sabrás contar cuando puedas hacerlo, incluso cuando haya muchos botes y muchos pinceles”.

Esta situación engloba a la anterior en el sentido de que, en cuanto el número de botes se vuelve suficientemente grande, el alumno debe disponer de un recurso material para representar la colección (dibujo, listado, con sus dedos o de otra manera), o bien debe contarla organizando su listado. El número no es más *el objeto* explícito de la pregunta, sino el *recurso* implícito para responder a ella.

Para que el número aparezca explícitamente, es necesario transformar esta auto-comunicación en una comunicación verdadera:

“Debes quedarte cerca de los botes de pintura, y decir o escribir un mensaje para que tu compañero pueda traerte los pinceles que quieres. Si te trae demasiados pinceles o le faltan, entonces **los dos pierden**. *Sabrán contar cuando puedan hacerlo, incluso cuando haya muchos botes y muchos pinceles*”.

El niño sabrá contar cuando pueda jugar los dos roles: *pedir* (emisor) a alguien (receptor), oralmente o por escrito, la cantidad de pinceles necesarios verificando la operación, y al contrario, *proveer* la petición de una cantidad deseada.<sup>11</sup>

Los recursos para resolver este problema van a evolucionar, en particular con el tamaño de las colecciones y con la forma en que éstas se presenten. El conocimiento de los números pequeños se enriquecerá aún más cuando sirvan para construir otros con la ayuda de diversas operaciones... Es necesario observar que si bien los niños adquieren rápidamente ciertos esquemas verdaderos para cualquier número, la posibilidad efectiva de tomar estos esquemas como objetos de conocimiento y de tratarlos como saberes no se adquiere ni espontánea ni rápidamente. Será necesario además, tarde o temprano, no conformarse con su utilización, sino también dilucidar, formular y discutir sus propiedades y sus estructuras numéricas. Estas dilucidaciones son nece-

<sup>10</sup> N. de T.: En sus trabajos sobre la noción de número natural, Brousseau distingue la enumeración en el sentido de listado (“*énumération*”), de la asociación de los objetos de la lista con la serie de los números (“*comptage*”) y finalmente de la determinación del cardinal de un conjunto (ya sea por medio de un conteo, de una correspondencia uno a uno o de otra manera) (“*dénombrément*”). Debido a que en este texto de carácter general esta distinción no es muy importante, hemos decidido, en acuerdo con el autor, traducir “*dénombrément*” por “conteo” entendiendo por éste además de la asociación de cada número de la serie con un objeto, la determinación final del cardinal.

<sup>11</sup> Esta situación parece presentar un carácter fundamental porque “todas” las situaciones de conteo pueden deducirse con sólo variar sus variables cognitivas (naturaleza, movilidad de los objetos, circunstancias, tamaño de los conjuntos, etc.) y porque todas las prácticas de conteo y de aprendizaje del conteo pueden también ser clasificadas y comparadas desde el punto de vista didáctico. Las dos prácticas habituales anteriores se obtienen a partir de la situación fundamental, suprimiendo o transfiriendo al adulto algunas tareas. En la primera situación, que podemos llamar por ejemplo “*el conteo popular*”, el alumno reproduce una serie de palabras bajo el control del adulto. La segunda, “*el conteo escolar clásico*” es más evolucionada, al niño le toca hacer corresponder un número a un conjunto de botes de pinturas (trabajo de emisor), o le toca constituir un conjunto a partir de un número dado de pinceles.

sarias para el aprendizaje mismo y deben acompañarlo. ¿Cuándo y cómo? El conocimiento de El número no puede reducirse al de los axiomas de Peano. Los conocimientos humanos no están contenidos en los saberes que los resumen.

La diferencia entre el conteo como **saber** cultural habitual y el conteo como **conocimiento** de un recurso para resolver la situación fundamental queda muy clara en el ejemplo que veremos enseguida y que debemos a B. Villegas:

### *El sentido de los conteos*

La situación anterior es propuesta a niños en curso de aprendizaje (clásico) que ya saben asociar la serie de números a cada objeto de una colección, y en ese sentido “saben” resolver el problema del emisor y el del receptor (digamos hasta 30), pero que todavía no dominan el conteo (no asocian necesariamente el último pronunciado con el cardinal del conjunto). Puede entonces observarse a veces un comportamiento como el siguiente.

*El alumno va a buscar un puñado de pinceles y los distribuye en los botes.*

- “Ahh, ¡quedan tres!”

- “¿Lo lograste?”

- “No, porque me quedan tres”

- “Bueno, recógelos todos e inténtalo otra vez”

*Los demás alumnos de la clase le sugieren:*

- “¡Cuenta, cuenta!”

*El alumno cuenta los botes, se vuelve a ir, toma un puño de pinceles y regresa. El hecho de haber contado no le sirvió de nada. Los demás alumnos le siguen ayudando:*

- “¡No! ¡no! Debes contar los pinceles”

*El niño se vuelve a ir, cuenta todos los pinceles que hay, toma algunos y regresa...*

### *Una condición suplementaria: la confianza en sus métodos*

¿Podemos afirmar que el alumno sabe contar cuando es capaz de conformar colecciones adecuadas de cualquier cantidad en las condiciones de la situación fundamental? No del todo: debe ser también capaz de estar suficientemente seguro de su conteo para identificar las fuentes de error y en caso dado para discutirlos.

Por ejemplo, si en el momento en el que el niño se va a buscar los pinceles alguien le esconde un bote, deberá ser capaz de comprender y de decir “¡Me hiciste trampa!”.

Esta confianza en sus métodos exige a su vez una posición reflexiva con respecto a ellos, es decir, un “metaconocimiento”, también exige palabras para expresar los conocimientos adquiridos, un metalenguaje, y finalmente todo aquello que constituye la conversión de ciertos conocimientos en saberes. Así, nuestra situación de conteo no era del todo fundamental. ¿Lo es ahora?

Con respecto a los métodos clásicos, esta situación fundamental de conteo puede revelarse útil en diversos momentos del aprendizaje y sobre todo para indicar a los profesores lo que quiere decir “contar” en términos “concretos”. Esto no quiere decir que el aprendizaje a través del uso exclusivo de la situación fundamental sería más rápido o más eficaz, éste podría incluso demostrarse innecesariamente pesado cuando el alumno ha comprendido el objetivo del aprendizaje.

## *La organización de procesos genéticos largos*

¿Cómo se organiza la adquisición de una estructura matemática compleja como la de los números naturales? Se requieren evidentemente procesos largos. ¿Cómo se articulan los conocimientos adquiridos en un primer momento con aquellos que se adquieren después?

Aprender las prácticas parciales del conteo de manera separada, implica que el adulto las enseña, las exige, las corrige, las hace imitar y repetir y después las integra. En ningún momento el niño está en condiciones para establecer por sí mismo la finalidad de la acción y para corregir sus errores. Sin embargo, padres y maestros utilizan con cierto éxito todas estas formas degeneradas de la situación fundamental, incluso el caso extremo del aprendizaje formal de la serie de los números. Posiblemente no se trata tanto de rechazar algunas de estas formas como de utilizarlas mejor en función de sus características particulares.

Las principales desventajas de los aprendizajes parciales son las siguientes:

- No permiten transferir al niño la responsabilidad del juicio sobre el valor de sus respuestas, ni describirle de antemano un proyecto de aprendizaje del cual él podría evaluar los progresos.
- Es necesario que ya haya aprendido la respuesta, de una manera o de otra, para que comprenda lo que se le está pidiendo.

La teoría de las situaciones permite estudiar las soluciones que ya existen y proponer otras, en particular sustituyendo las técnicas parciales en una génesis global inteligible. La presentación de tal génesis sale del marco del presente artículo, pero cabe decir que la utilización de la situación fundamental y el seguir conociendo números cada vez más grandes juegan un papel esencial.

## *Aprender los números*

El ejemplo anterior deja de lado la diversidad de situaciones necesarias para el conjunto del proceso, la complejidad de las relaciones con el saber y un gran número de fenómenos: será necesario que el alumno *enumere*<sup>12</sup> las colecciones (que pase o nombre uno tras otro todos los objetos sin pasar dos veces el mismo), al mismo tiempo que las *pone en correspondencia* con otra colección, y que *evalúe su cardinal* mediante esta correspondencia, particularmente cuando las *cuente* (cuando ponga en correspondencia sus elementos con las palabras), y después, si el conteo fue descompuesto, cuando *nombre* el resultado de su conteo (expresando el número oralmente mediante un sistema de numeración) y finalmente cuando *escriba* el número. Será necesario también que se apropie de los usos *ordinales* de la serie de números, etc. La denominación y la escritura de los primeros números se basa en procedimientos de *numeración* que deben ser reconocidos para ser utilizados, pero cuyo estudio y cuyo análisis deben continuar a todo lo largo de la escolaridad básica, por lo menos para conocer y utilizar nuevos números. El análisis de la criptografía numérica y de los siste-

<sup>12</sup> Enumerar en el sentido de "hacer un listado". Para mayor información acerca del proceso de "enumerar" se puede consultar la tesis de J. Briand (1993) *L'énumération dans le mesurage des collections. Un dysfonctionnement dans la transposition didactique* (Daest, Université de Bordeaux 2, Place de la Victoire 33 000 Bordeaux) y la de B. Villegas (1986); acerca de la numeración, la tesis de M Bahra (1995) *Problèmes de didactique de la numération, échecs et succès de la remathématisation* (misma dirección); entre otros.

mas de numeración, opuestos a la práctica del *numeral*, y especialmente a la lectura de *números*, es indispensable.

### *Usos razonados de las situaciones fundamentales*

Estos aprendizajes podrán producirse mediante una conjunción de métodos, por ejemplo:

en un proceso constructivista, completando las respuestas espontáneas, o provocadas, con las institucionalizaciones indispensables,

en experiencias de enseñanza más clásicas, mayeutica, o incluso axiomática, mediante lecciones seguidas de ejercicios, en tanto respuesta al problema que de aquí en adelante estaría bien identificado por el alumno.

Así mismo, la situación fundamental no desacredita a ninguna de las formas de aprendizaje. Las permite todas y permite conjugarlas: completa los aprendizajes parciales que permanecen útiles y sin duda necesarios, y, sobre todo, les otorga su sentido.

El uso de los números únicamente en tanto *numerales* (para sólo identificar o designar un objeto: número de un canal de televisión, de un teléfono, de un placa de auto) no parece presentar en cambio ningún problema, sin duda porque el aprendizaje de automatismos constituye una dificultad menor que aquella que subyace al conocimiento de las propiedades de las colecciones, de los números y de sus operaciones. El alumno debe necesariamente “conocer” estas últimas para poder controlar sus usos complejos. Será necesario además, tarde que temprano, no conformarse con su uso, sino esclarecer, formular, discutir las propiedades y las estructuras numéricas. Estas dilucidaciones son necesarias para el aprendizaje mismo y deben acompañarlo. ¿Cómo y cuándo? Apelan a situaciones de distinta estructura.

### **3. Algunos elementos de la teoría de las situaciones**

La búsqueda y la invención de situaciones características de los diversos conocimientos matemáticos enseñados en la escuela, el estudio y la clasificación de sus variantes, la determinación de sus efectos sobre las concepciones de los alumnos, la segmentación de las nociones y su organización en procesos de aprendizaje largos, constituyen la materia de la didáctica de las matemáticas y el terreno al cual la teoría de las situaciones provee de conceptos y de métodos de estudio. Para los profesores como para los alumnos, la presentación de los resultados de estos trabajos renueva su conocimiento así como la idea que tienen de las matemáticas, y esto incluso si es necesario desarrollar todo un vocabulario nuevo para vincular las condiciones en las que emergen y se enseñan las nociones matemáticas básicas, con la expresión de dichas nociones en la cultura matemática clásica. No continuaremos aquí en esta dirección ya que sería demasiado largo exponer los aportes de la teoría de las situaciones a la enseñanza de las diferentes nociones matemáticas tales como los números naturales, los racionales, los decimales, el espacio y la geometría, los principios del álgebra, la estadística y la probabilidad, o bien, al estudio del razonamiento, de la lógica.

Es importante advertir que los conceptos que vamos a revisar a continuación son muy generales por lo que aparentemente pueden exportarse para el estudio de temas de enseñanza de otras disciplinas, pero en la ciencia es necesario desconfiar de las

analogías. Así como no existe ninguna metafísica que engendre a la vez a la termodinámica, a la óptica y a la electricidad, lo que voy a presentar constituye una especie de meta didáctica que no puede convertirse automáticamente para tratar a cualquier conocimiento.

### *La estructura de las situaciones*

#### *Modelo general de una situación*

Una situación modela las relaciones y las interacciones de uno o varios actores con un medio. El modelo comprende una representación:

- de los estados del medio y de los cambios que los actores pueden imprimirle.
- de aquello que se juega en la acción, generalmente un estado final del medio y el interés que el actor le asocia.
- Y del inventario de las elecciones permitidas por las reglas.

Un *conocimiento* es pertinente en esta situación si es el recurso para poner en juego una estrategia o una táctica en el marco de las elecciones permitidas en cada momento. Entre los conocimientos pertinentes -éstos determinan las elecciones-, algunos son *adecuados*: permiten obtener el estado final deseado, y entre éstos, algunos son más eficaces, más fiables o más económicos que otros.

Este modelo permite identificar algunos conocimientos de un sujeto, por lo menos aquellos que se manifiestan en sus comportamientos: se trata de identificar los conocimientos "más simples" que engendran la estrategia "más simple" que coincide con las series de decisiones observadas. Permite después compararlos con otros conocimientos pertinentes, en particular con los conocimientos óptimos en esta situación.

De esta manera es como hemos mostrado la importancia de los procedimientos y de los conocimientos de la acción de "enumerar", independientemente del conteo, para el aprendizaje de los números y de sus operaciones<sup>13</sup>.

Para simplificar retomemos nuestra esquematización de una situación mediante de la triada: {actor, reglas de interacción con el medio, conocimientos} (Fig. 4)

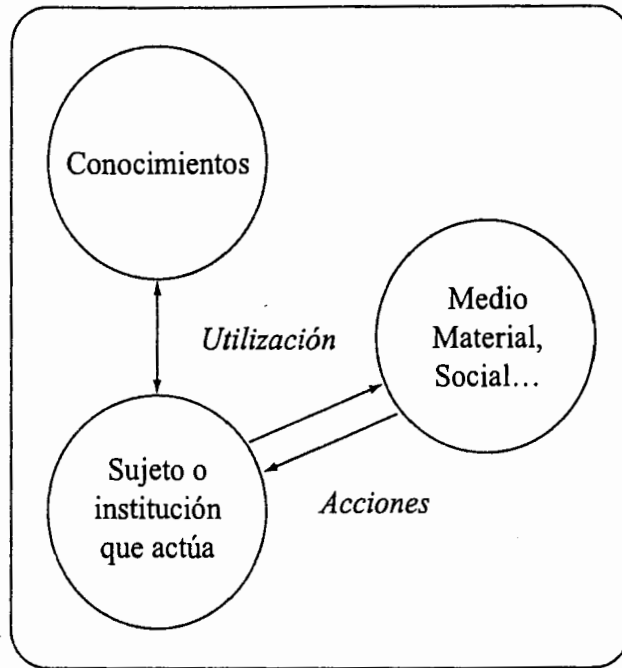
Este modelo es el que generalmente se adopta para concebir una actividad finalizada cualquiera, en una institución cualquiera. El actor puede ser él mismo una institución.

¿Cuándo una situación constituye una realización de otra? ¿Cuándo dos situaciones son diferentes?... La definición de los instrumentos generales para la comparación de situaciones es todavía muy incierta, sobre todo en lo que se refiere a la jerarquía y a la agregación de situaciones y de conocimientos asociados. El propósito de la teoría de las situaciones es permitir organizar localmente el aprendizaje de conocimientos elementales considerando su adecuación a las circunstancias y a las posibilidades del sujeto, y al mismo tiempo permitir su reorganización de acuerdo con necesidades lógicas y teóricas que son el fruto de una adaptación completamente diferente de la sociedad.

### *Las interacciones*

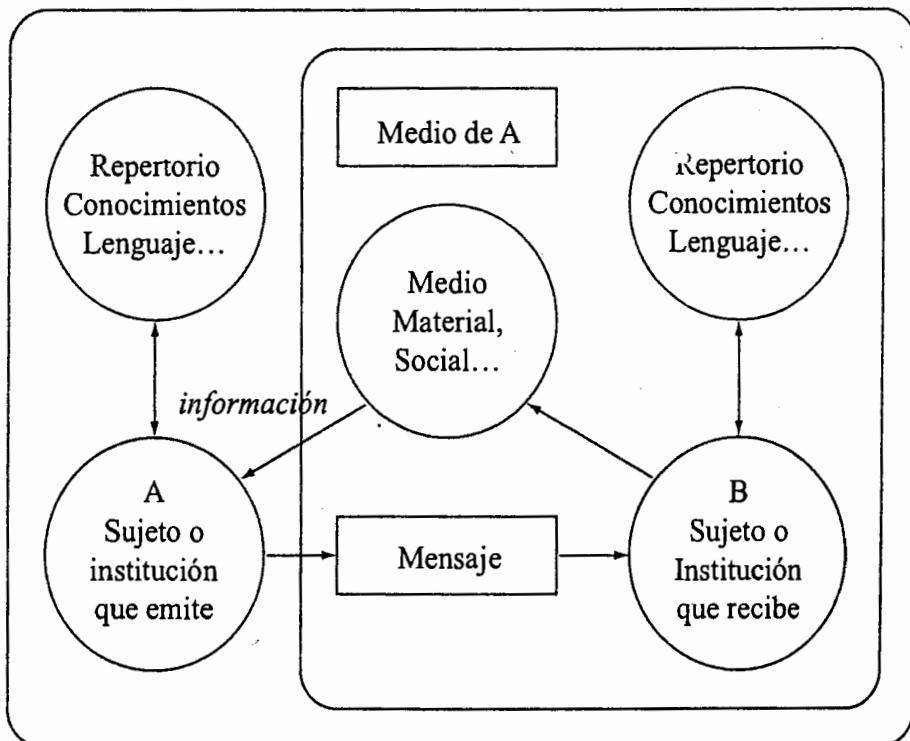
Tanto la observación antropológica como la lógica del principio metodológico de la Teoría de las situaciones nos conducen a distinguir tres tipos fundamentales de interacciones de un actor con su medio:

<sup>13</sup> J. Briand (1993) *L'énumération dans le mesurage des collections. Un dysfonctionnement dans la transposition didactique.*

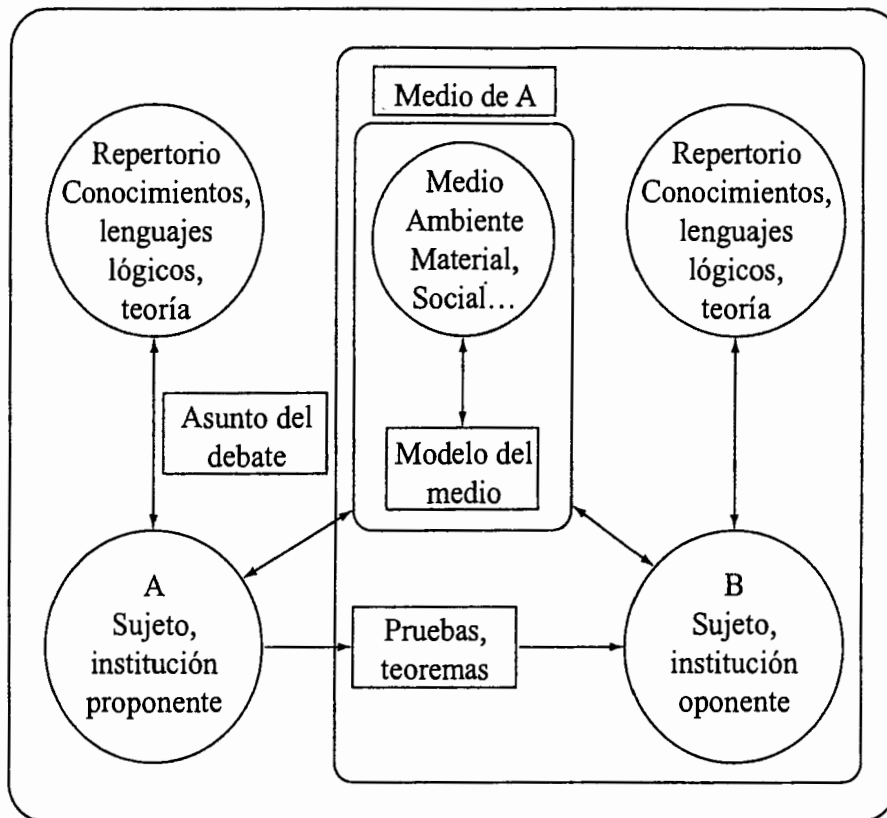


**Figura 4.** Situación de acción

- El tipo "acción" que consiste para el actor en fijar un estado del medio o en determinar o limitar las acciones de otros actores (materialmente o mediante reglas impuestas) (Fig. 4).
- El tipo "comunicación" que consiste en modificar los conocimientos de otro actor por medio de mensajes portadores de informaciones (Fig. 5).
- El tipo "prueba" que tiende a la justificación o validación cultural de los actos o de las declaraciones (Fig. 6).



**Figura 5.** Situación de comunicación



**Figura 6.** Situación de prueba, o de validación social

Cada una de estas interacciones se modela mediante tipos de situaciones diferentes y pone en juego repertorios de recursos diferentes. Por ejemplo, es fácil mostrar por qué proporcionar una “prueba” se inscribe en una situación muy distinta a una simple comunicación de información: la estructura de la situación, es decir la posición de los actores con respecto a un medio, es muy diferente, el juego, las reglas y el repertorio de recursos de prueba también.

En las clases, esta clasificación de situaciones ha favorecido el establecimiento y la observación del tránsito de situaciones de argumentación a situaciones de prueba. Sin esta clasificación la iniciación a estas prácticas no sería fácil de poner en marcha.

No obstante, estas situaciones no sólo constituyen un paso importante desde el punto de vista de los procesos matemáticos, son además portadoras de un proyecto educativo esencial: el de hacer del alumno un ser racional, social, autónomo y responsable, capaz de comprender cómo se establece y se comparte una verdad en una sociedad, mediante debates a la vez democráticos y constructivos.

#### *Los dos sentidos de “Situación didáctica”*

El término de “situación didáctica” tiene hoy dos significados:

- i) En el sentido clásico, es una *situación que se usa con fines didácticos, que sirve para enseñar* (como un problema o un ejercicio), tanto si está dotada de virtudes didácticas autónomas, como si el profesor debe intervenir para que produzca su efecto.



- ii) *Es una situación que describe el entorno didáctico del alumno, comprende todo aquello que concurre para enseñarle algo.* En este sentido, comprende al profesor, tanto si éste se manifiesta durante el desarrollo de la situación, como si no.

Ciertas situaciones de uso didáctico tienen la propiedad de permitir al alumno tomar solo decisiones pertinentes, juzgar su adecuación, y adaptarse al medio mediante la construcción del conocimiento deseado. A estas situaciones subyace un modelo “no didáctico”, en el sentido de que no requieren de una intervención específicamente didáctica. En oposición con este caso límite, se encuentran las situaciones puramente didácticas en las que el profesor debe intervenir en todo momento a lo largo del desarrollo de la acción del alumno, para provocarla, orientarla, restringirla y controlarla según su propia estrategia didáctica. En general las situaciones de enseñanza reales pueden descomponerse en un componente didáctico y en un componente no didáctico (desdidacticado) que pueden desarrollarse simultáneamente o sucesivamente (Fig. 7 y 8)

*Consecuencias, puesta en evidencia de algunos fenómenos*

Una teoría científica es, formalmente, una colección de enunciados “verdaderos”. Su principal uso consiste en derivar o descartar declaraciones de manera cierta a partir de las que ya se conocen, pero más aún, en producir conjeturas nuevas falseables. Estas conjeturas deben ser razonablemente inciertas y tener consecuencias concretas tan importantes como sea posible. La teoría debe sobre todo dar cuenta de los recursos y los métodos de confrontación de esas conjeturas con la contingencia. La teoría de las

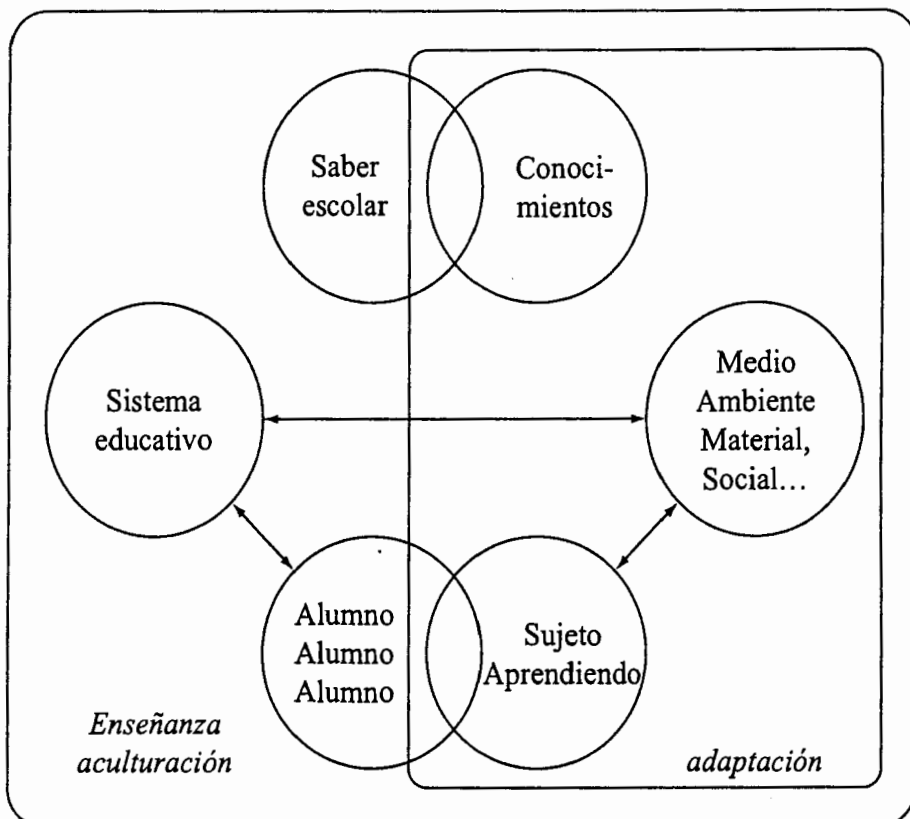


Figura 7.

Situación Didáctica  
en tanto entorno  
didáctico

Parte “dedidactificada” de una situación de uso didáctico, tiene más o menos virtudes didácticas propias puede o no necesitar intervenciones didácticas.

**Figura 8**

situaciones tenía en el origen como único objetivo controlar la coherencia y la factibilidad de las prescripciones y los juicios didácticos dirigidos a los profesores por sus consejeros y por los tomadores de decisiones. Permitted una larga confrontación que está lejos de estar terminada, pero tuvo que enriquecerse y complejizarse considerablemente. El esfuerzo por mantener la consistencia del conjunto de declaraciones que se expresan mediante sus conceptos, se volvió arduo. Hoy día esta teoría se ha vuelto difícil de aprehender y de transmitir a los investigadores jóvenes y sobre todo a los maestros.

El acercamiento a través de la teoría de las situaciones ha producido numerosos resultados:

- primero, al permitir comprender mejor las causas de los fracasos de ciertas sugerencias precipitadamente inferidas de las ciencias vecinas o de ideologías audaces,
- después, en ingeniería didáctica, modelando los conocimientos de las principales ramas de las matemáticas que se enseñan en la educación básica,
- en metodología, por el desarrollo de conceptos generales del tipo de los que hemos expuesto antes, y por las mejores formas clínicas y estadísticas de confrontación con la contingencia.

### *Concepciones y obstáculos*

Hemos razonado como si fuera un hecho habitual el poder aislar un conocimiento y como si las situaciones fueran entidades aislables. En efecto, un medio efectivo reúne a familias de situaciones que ponen en juego conocimientos estructurados por relaciones lógicas, relaciones de conveniencia, de co-presencia frecuente, etc. “Medios” y agrupamientos de situaciones –como el de las figuras de la geometría plana trazadas con regla y compás- apelan a conjuntos de conocimientos adecuados que pueden estructurarse en teorías matemáticas –en este caso, la geometría euclídea-. Esta idea encuentra una extensión en la teoría de las situaciones: de la misma manera que los conocimientos se agrupan alrededor de teorías y de conceptos en los saberes de las instituciones sabias, los conocimientos de los alumnos se agrupan en “concepciones” que caracterizan una cierta manera de comprender y de utilizar una noción matemática en cierto campo de situaciones.

El estudio de las formas que asumen las “dependencias” que vinculan estos conocimientos<sup>14</sup>, el de los procesos teóricos de agregación<sup>15</sup> y el de las formas de puesta en evidencia experimental<sup>16</sup> de las concepciones se realizan ininterrumpidamente desde hace veinticinco años y se prolongan hoy a través del estudio de ecosistemas y de praxeologías en el acercamiento antropológico<sup>17</sup>.

<sup>14</sup> H. Ratsimba-Rajohn acerca de las concepciones de los racionales.

<sup>15</sup> G. Vergnaud con la teoría de los Campos conceptuales.

<sup>16</sup> R. Gras con el análisis implicativo.

<sup>17</sup> Y. Chevallard, 1992.

Las situaciones que encuentra un principiante en relación con un conocimiento nuevo son necesariamente poco numerosas y frecuentemente simplificadas. La adaptación de los conocimientos a este medio limitado conduce al alumno, y también al profesor, a utilizar concepciones que se manifestarán inadaptadas, aproximadas o incluso falsas en las situaciones que se encontrarán más adelante. Estas primeras concepciones no son errores o faltas de comprensión por parte del alumno, sino el resultado inherente e inevitable de una enseñanza adaptada. El reconocimiento de este hecho cambia completamente la problemática de la organización de los aprendizajes a largo plazo así como la de la recuperación de conocimientos antiguos en un proceso de enseñanza. Se ha mostrado además<sup>18</sup> que estos primeros conocimientos pueden constituirse en *obstáculos*, en el sentido Bachelardiano del término, incluso en matemáticas. Por ejemplo, el conocimiento escolar elemental del número natural tiende a obstaculizar la comprensión de los racionales. No se trata de dificultades, sino efectivamente de conocimientos, primero necesarios, pero que perturban duraderamente los aprendizajes ulteriores y que persisten, incluso después de las adquisiciones de saberes correctos. Este hecho, deducido a priori de la teoría, ha sido observado en varios ejemplos<sup>19</sup>.

#### *La relativización de los conocimientos*

La definición de los conocimientos en relación con su función en una situación ratifica el hecho de que para una misma noción matemática, cada actor (sociedad, profesor, alumno) desarrolla conocimientos diferentes *a priori* según las condiciones en las cuales los utiliza, los crea o los aprende. Válidos o no desde un punto de vista académico, en cierta forma los conocimientos se legitiman y se reconocen. Una idea falsa aparece y desaparece siguiendo las mismas leyes que hacen aparecer o desaparecer a una idea verdadera. Para un observador, el hecho de saber que un conocimiento es falso porque produce errores, no es necesariamente la expresión de un funcionamiento erróneo de los mecanismos de cognición del sujeto observado. La teoría de las situaciones remite al estudio de las condiciones presentes y anteriores que "justifican" el estado de esos conocimientos y el uso que conviene hacer de ellos.

Por ejemplo, todos los alumnos establecen su comprensión de la "multiplicación" de dos números, mediante el sentido que ésta asume en los números naturales:  $5 \times 4$  representa  $5+5+5+5$ , y controlan su uso implícitamente a través de "propiedades" como: "el producto de dos números no puede ser más pequeño que el más grande de los dos". El día en que deben interpretar la "multiplicación"  $0.8$  por  $0.6$ , sus recursos de comprensión y de control desaparecen. Se trata de otra operación, diferente aunque tenga el mismo nombre y se parezca un poco a la anterior.

Inversamente, el hecho de conceder de esta manera al alumno o a una institución, la legitimidad de conocer una noción de una manera particular, no hace automáticamente de este reconocimiento un objeto esencial para el trabajo del maestro. Entre los conocimientos erróneos sólo son interesantes para el profesor aquellos que son significativos para los otros alumnos, es decir, aquellos que tienen una probabilidad fuerte de reproducirse y que pueden ser explicados y erradicados en un tiempo razonable, etc. Se ha podido observar en varios países los inconvenientes de prestar una

<sup>18</sup> G. Brousseau, 1976.

<sup>19</sup> H. El Bouazzaoui, 1982.

atención excesiva a los errores de los alumnos. Estos conocimientos no son *a priori* de-gradaciones o errores con respecto a los conocimientos culturalmente establecidos. Tienen una legitimidad que conviene comprender y respetar, aún si se les quiere modificar.

Los conocimientos relativos pueden compararse con los “conocimientos científicos o académicos universales”, pero hay que cuidarse de una confusión: el hecho de que sean adecuados no los hace por ello “verdaderos”.

### *El gradiente y la transposición didáctica*

En relación con una misma noción, dos instituciones pueden tener conocimientos diferentes, lo cual puede constituir un obstáculo para su colaboración si entran juntas en una nueva institución. Más allá de cierto margen, se vuelve necesario un esfuerzo de homogeneización. Se traduce por una situación didáctica: una de las instituciones intenta modificar el repertorio de la otra directamente o a través del intermediario de una tercera. Frecuentemente la acción didáctica efectiva es recíproca. Las dificultades para cooperar son más grandes en la medida en que las diferencias sean importantes y en que el número de situaciones en las que esas diferencias se manifiestan sea grande. Esta especie de gradiente crea por lo tanto una presión didáctica. No obstante, la enseñanza sólo es posible si los repertorios no son demasiado diferentes y se realiza al precio de una adaptación —espontánea o meditada— de los conocimientos transmitidos, llamada *transposición didáctica*. Por otra parte, el hecho mismo de enseñar un conocimiento lo modifica, tanto para el que enseña como para el enseñado. La transposición es una modificación de conocimientos que altera su papel, la situación en la que intervienen. Es una condición y un efecto de la relación didáctica.

### *Las paradojas de “contrato” didáctico*

Jeanine Filloux, al extender el contrato social de Rousseau, destacó la noción de *contrato pedagógico*, en el que se precisan las obligaciones recíprocas entre alumno, sociedad y profesores. ¿Puede este contrato extenderse a la parte “enseñanza” de la educación? ¿Puede el profesor precisar y aplicar un contrato de enseñanza de la misma manera? En un primer momento, yo había imaginado que el profesor actuaba sobre el sistema {alumno, situación, conocimiento}, exactamente como el alumno actúa en la situación no didáctica. En ese caso, el contrato didáctico hubiera estado constituido únicamente por las reglas de esa situación. Me di cuenta de que semejante construcción de modelos conducía a contradicciones que se expresaban en la realidad por paradojas: por ejemplo, el profesor no puede decir explícitamente de antemano lo que el alumno tendrá que hacer frente a un problema, sin quitarle, al hacerlo, la posibilidad de manifestar o de adquirir el conocimiento correspondiente. El profesor no puede comprometerse a “hacer comprender” un conocimiento, y aún menos a hacer que se produzca: nadie sabe cómo “se hacen” matemáticas nuevas, y menos aún cómo se puede “hacer hacerlas” de manera certera. De manera que la relación didáctica no puede dar lugar formalmente a un contrato; las cláusulas no pueden escribirse; las sanciones en caso de ruptura no pueden ser previstas, etc. Sin embargo, la ilusión de que hay un contrato es indispensable para que la relación se dé y, eventualmente, tenga éxito. Cada uno, el maestro y el alumno, se hacen una idea de lo que el otro espera de él y de lo que cada uno piensa de lo que el otro piensa... y esta idea crea las posibilidades de intervención, de *devolución* de la parte a-didáctica de las situaciones y de la *institucionalización*. Esta

ilusión permite la ficción de que el profesor enseña un saber definitivo preparando las adquisiciones posteriores sin tropiezos. La teoría de las situaciones muestra que la situación didáctica no puede depender del mismo tipo de modelo que las situaciones no didácticas (de uso didáctico) del alumno. El contrato didáctico existe por lo tanto como una ficción necesaria. El juego entre situaciones reales y situaciones ficticias también es indispensable.

Detengamos aquí esta evocación de las consecuencias del acercamiento teórico a las cuestiones de la enseñanza a través del análisis de las enseñanzas de las matemáticas. Varios se sentirán posiblemente sorprendidos del hecho de que no infiero de dicho acercamiento ningún precepto universal y general, ningún consejo, ninguna instrucción. Los estudios concretos de la teoría de las situaciones indican en qué condiciones precisas la enseñanza de tal noción es posible y bajo qué forma, e indica asimismo que esas condiciones nunca son extremas. La conclusión es casi siempre la siguiente: las intervenciones didácticas son *regulaciones* destinadas a mantener equilibrios, más que a producir directamente efectos, y esas regulaciones son específicas de la noción matemática.

### *La epistemología de los profesores*

Con la teoría de las situaciones se admite que los conocimientos que se desarrollan en una institución constituyen adaptaciones “legítimas”, *a priori* diferentes de aquellas que se desarrollan en otras instituciones en circunstancias diferentes. La cuestión es entonces saber si las instituciones de enseñanza desarrollan, por necesidad profesional, conocimientos originales relativos a la adquisición de los conocimientos, a su papel, a su estatuto, etc. ¿Son estos conocimientos verdaderamente diferentes de aquellos que proponen las diversas instituciones científicas relativas a la psicología, la sociología, la epistemología..., los cuales a su vez son diferentes de aquellos que se utilizan en la vida diaria?

Un ejemplo trivial: los profesores utilizan frecuentemente el término de “distracción” o “tontería” como una manera de calificar una respuesta y de caracterizar a un alumno. Una “tontería” es una respuesta inexacta a una pregunta para la cual la cultura oficial de la clase propone una respuesta no solamente fácil, sino familiar, indigna de un nuevo trabajo didáctico. Permite al profesor eludir toda una acción didáctica. No conozco la “tontería” como elemento de un diagnóstico médico... es un elemento de la psicología (espontánea) de los maestros, pero no constituye una relación personal con el saber.

Un ejemplo menos trivial: ¿la producción “inteligente” de respuestas por parte de los alumnos debe acaso seguir el esquema de una demostración culturalmente correcta? Los profesores no piensan que esto sea necesariamente así, y en sus prácticas siguen otros caminos. Pueden por ejemplo, comportarse como finos psicólogos cognitivos, interpretando las profundidades del pensamiento original de un alumno, respondiendo a éste y rectificándolo con una gran habilidad retórica. Pero está en juego aquí el ejercicio de los conocimientos personales del profesor que no tienen lugar legítimo entre los conocimientos oficiales. Concretamente, el profesor no puede transformar su clase en un laboratorio de psicología. Las divagaciones de un alumno no siempre son virtudes didácticas para los otros, muy al contrario... El profesor está por lo tanto obligado a practicar y a profesar un modelo de pensamiento “oficial” calcado de aquello que la cultura declara inteligible y expresable, con la única tolerancia que ofrece

la transposición didáctica. El querer confundir la organización del saber con las leyes de su producción es, manifiestamente, un error, pero es la consecuencia indispensable del contrato didáctico: el profesor no puede rectificar todas las trayectorias personales ni siquiera las trayectorias colectivas si se separan demasiado de la organización final de los saberes. Sería demasiado costoso y técnicamente imposible, de donde se deriva la siguiente conclusión: una epistemología calcada de “la organización actual de los saberes”.

Así, en su práctica, en su vocabulario, en sus exigencias, etc., el profesor pone en juego “conceptos” o “leyes” cuyo objetivo es permitir la acción del alumno y justificar las decisiones del profesor. “¿Cómo buscar?”, “¿qué es buscar?”, “¿cómo aprender?”, “¿cómo comprender?”, etc., son preguntas que el alumno y el maestro de la enseñanza secundaria se plantean y que responden implícitamente a través de su práctica, manifestando así una especie de epistemología espontánea y funcional, pero falsa. Esta epistemología se acompaña de toda una mitología de metáforas y de símbolos, aunque el conjunto constituye un sistema praxeológico<sup>20</sup> aceptable desde el punto de vista ergonómico<sup>21</sup>.

Por ejemplo: en principio, en la matemática profesional, sólo cuenta la validez del resultado. Fuera del rigor, todas las otras consideraciones sobre el modo de prueba son subalternas: la longitud, la complejidad, el carácter clarificador, la elegancia, la claridad del estilo, lo heurístico natural... razonamiento sutil o fastidiosa enumeración exhaustiva de casos, intuición genial o azar inesperado, basta mostrar que la solución resuelve el problema, sin discusión. Pero un alumno principiante que actúa de esta manera y que por ejemplo produce las raíces de una ecuación “ensayando 1, -1, i, -i, porque esto “funciona” no tiene ninguna posibilidad de ver legitimada su solución (en adelante se le concederá cierto derecho de ver directamente este tipo de solución)<sup>22</sup>. Una solución que se intuye y que milagrosamente satisface las condiciones dadas, no tiene valor en la epistemología de los profesores, y bien poco en los exámenes, porque no tiene ninguna función didáctica positiva (esto explica que los profesores y por lo tanto los alumnos rechacen utilizar las conclusiones para buscar los valores correctos que pueden insertarse en el curso de la demostración, o rechacen desandar el camino de las igualdades recorriéndolas de derecha a izquierda, etc.). Así, las condiciones de producción de un resultado matemático son muy diferentes y son tratadas con mucho más vigilancia e intencionalidad en situación didáctica.

El hecho de reconocer que la creencia epistemológica de los profesores se origina en la necesidad de satisfacer las necesidades de su profesión no es un juicio de valor. Puede ser una verdad o un error epistemológico y en los dos casos ser igualmente útil y necesario, pero es importante no confundir ni los objetos ni las funciones.

La teoría de las situaciones estudia el funcionamiento efectivo de los sistemas. Existen “creencias” epistemológicas, de origen cultural, histórico, científico, etc. Éstas tienen una función, una justificación. Pueden ser correctas o falsas, y adaptadas o inadaptadas ¡independientemente! Aquello que facilita la relación didáctica “local” no siempre queda sin consecuencias posteriores.

<sup>20</sup> Y. Chevallard, 1992.

<sup>21</sup> Considera las fuerzas y los esfuerzos de los participantes.

<sup>22</sup> Sin embargo, durante trescientos años, los Gauss, Germain y otros no tuvieron pena de “demostrar” la conjetura de Fermat sobre porciones despreciables de  $N$ , a pesar de que estos resultados no tuvieron ningún valor como argumentos para la conjetura general. El argumento era que cada demostración era verdadera, y que se le creía útil para “buscar métodos”.

El término “epistemología” abarca un campo más amplio que la concepción de la génesis y del sentido de los saberes, aunque ésta es la parte más importante para las relaciones del enseñante con la sociedad sabia.

La forma en que un profesor específico piensa que puede producir una génesis didáctica de los saberes que quiere enseñar en su clase, debe estar controlada por un repertorio de conocimientos explícitos o implícitos de naturaleza epistemológica. Este repertorio podría identificarse quizás como “la epistemología de tal profesor, para tal noción, en tal clase” ... pero se tendría aquí una especificación difícil de observar y de manejar. Lo que es observable es el producto, el registro de sus elecciones y de sus decisiones. Querer inferir de ese registro un repertorio epistemológico privado es azaroso excepto para aspectos bastante singulares. Además, lo que es particular de un profesor no es muy interesante para la didáctica, en donde son prioritarios los fenómenos colectivos o estocásticos.

Es mucho más importante y fácilmente verificable en tanto hecho didáctico lo que es inteligible y puede justificarse por un “interés profesional” universal, científicamente verdadero o falso, que aquello que es singular o explicable por circunstancias no didácticas.

Sería interesante establecer un inventario de las creencias que conforman la epistemología de los profesores y que se justifican por las necesidades de su tarea. Pero la dificultad principal reside en que todos los matemáticos practican la didáctica. Por consiguiente, fuera de su campo de investigación, comparten las concepciones didácticas de los profesores. Por lo tanto no es fácil distinguir una creencia epistemológica de un experto de la de un profesor. Sólo un trabajo didáctico, epistemológico e histórico podría ayudar.

Por ejemplo, la introducción de la práctica de las demostraciones públicas en los usos matemáticos de la Grecia del siglo V antes de J.C. constituye una decisión de origen y de naturaleza ante todo didáctica. Sus consecuencias sobre la práctica de las matemáticas fueron gigantescas. Sospecho fuertemente –aunque reconozco que mi tesis es bastante aventurada– que el largo mutismo en las matemáticas de la civilización “directamente” heredera de esta cultura –me refiero a Roma y a Bizancio– no fue por azar, y que la necesidad de demostrar se constituyó en un enorme obstáculo epistemológico que pesó gravemente sobre la producción de las matemáticas y sobre su interés para estas sociedades. Debe repensarse la oposición entre esta práctica de las matemáticas, ya clásica hoy día, con las matemáticas más aplicadas y digamos esotéricas (siempre practicadas en el mundo).

La epistemología “oficial” de las matemáticas está muy contaminada por la epistemología de los profesores (porque la comunicación y la difusión de las matemáticas aparecen como una necesidad inevitable, porque los matemáticos fueron buenos alumnos y frecuentemente buenos maestros), lo que explica que puede ser a veces bastante falsa y abusiva.

La epistemología de los profesores es a la vez:

- su medio de lectura de las matemáticas
- su medio de concebirlas como conocimientos proyectados para los alumnos
- su medio para interpretar los comportamientos de los alumnos como distanciamientos con respecto a esta norma.
- Y su medio para concebir una intervención.

La función cognitiva de la epistemología de los profesores es la de confundir estos cuatro objetos en uno solo. Es por esta razón que es considerada por los profesores como la “verdadera” verdad de las matemáticas, de la enseñanza y de los alumnos.

Se ha observado<sup>23</sup> que los profesores utilizan exactamente los mismos términos para describir sus objetivos, los conocimientos de los alumnos, la explicación de sus errores y los recursos que se contemplan para remediarlos. Por lo tanto, sospecho que a los profesores se les dificulta mucho distinguir las dos génesis que conforman la bipolaridad de la transposición didáctica:

- “La forma en que un profesor piensa que puede, reconstruir esta génesis en su clase”. Es la cronogénesis didáctica de los conocimientos matemáticos, el modo de construcción progresiva de los conceptos. Debe adaptarse a necesidades de la presentación y del aprendizaje de las nociones por los alumnos.
- “La génesis y el sentido de los saberes que el profesor tiene la intención de enseñar”. Es la topogénesis: la composición y la organización de los conocimientos que resultan finalmente del proceso anterior.

Los profesores tienden a confundir estos dos proyectos con la organización “oficial” de los saberes en uso en la enseñanza y en la sociedad sabia. Consideran entonces el orden determinado por una exposición axiomática de la noción matemática en cuestión, como modelo a la vez de cronogénesis y de organización final de los conocimientos.

En esta exposición nos hemos limitado a cinco ejemplos, pero existen muchos otros.

#### **4. El lugar y el papel de la didáctica de las matemáticas en la educación y en la sociedad**

*La teoría de las situaciones en la didáctica de las matemáticas y de las ciencias*

*¿Qué es la didáctica de las matemáticas?*

El término se utiliza con sentidos diferentes dependiendo de los países y de las instituciones. Por ejemplo, un mismo curso sobre la enseñanza de la geometría, destinado a un mismo público de estudiantes para profesor, podrá llamarse “didáctica de las matemáticas” en un departamento de matemáticas, o “matemáticas” a secas en un departamento o facultad de ciencias de la educación. La cosa se complica por el hecho de que se utiliza frecuentemente el mismo término para designar una actividad, los conocimientos y los recursos técnicos que pone en juego y su estudio, científico o no.

Así, del término griego que significa “enseñar”<sup>24</sup> (un conocimiento) por oposición con “educar” (conducir a los niños), Comenio extrae “didáctica” con el sentido de “arte de enseñar” y produce bajo este título una obra destinada a combatir las prácticas dogmáticas y escolásticas de la enseñanza, en las cuales una institución se interpone entre los textos y los alumnos para controlar mejor su educación religiosa. En lo sucesivo, este término designará todo aquello que sirva para enseñar: materiales, técnicas, términos<sup>25</sup> y conocimientos. Por consiguiente, la producción de estos materiales (ma-

<sup>23</sup> N. Milhaud (1983) *Memoire de DEA*, Bordeaux 1.

<sup>24</sup> Y que dará la raíz latina “disc” aprender.

<sup>25</sup> Littré 1872: Didáctica: que pertenece a una ciencia (2ª acepción).



nuales, paquetes informáticos, consejos) y el arte de producir estos materiales entrará en el campo de la didáctica.

Por consiguiente también, el estudio de la enseñanza de las matemáticas como práctica o como proyecto social, cualquiera que sea la disciplina o el punto de vista desde el que se asume este estudio, entrará en el campo de la didáctica de las matemáticas: el estudio psicológico de los comportamientos matemáticos del alumno en situación escolar o no, el estudio antropológico o etnológico de la actividad de los profesores, el estudio lingüístico de los discursos escolares sobre los fenómenos de azar, etc.

En el siglo XIX el sentido de “didáctica” se había extendido a todo aquello que denotara intención de enseñar -en particular a la situación ridícula pero muy común en la que el alumno no tiene ningunas ganas de aprender-. Esta connotación peyorativa que asocia “didáctica” con “pedantismo” volverá imposible el uso de la palabra “didáctica” en varios países.

De esta manera, hoy en día el término de didáctica abarca la actividad misma de enseñanza de las matemáticas, el arte y los conocimientos necesarios para hacerlo, el arte de preparar y de producir los recursos para esta actividad, el estudio de esta enseñanza y de todo aquello que se manifiesta en ella, en tanto proyecto social, hecho socio-histórico o como fenómeno.

Dado que la conjunción de las disciplinas clásicas no parece estar en condiciones de explicar simplemente el conjunto de fenómenos de didáctica, ni de proponer técnicas apropiadas, tuvieron que desarrollarse teorías específicas (“home made” dicen algunos, no sin cierto desprecio) (metodología, teorías de la enseñanza). Las más interesantes son las que permiten asumir y regular las consecuencias de importar resultados de otras disciplinas a la enseñanza.

### *¿Didáctica general aplicada o ciencia propia?*

Para numerosos investigadores, dichas teorías deben ser primero generales, es decir, independientes del contenido, para aplicarse después a un contenido preciso. La didáctica de las matemáticas sería primero una teoría general de lo didáctico. Mi posición a este respecto es mucho más matizada. Lo didáctico comienza con la determinación de su objeto: un conocimiento particular. No hay ninguna razón para pensar que la invención o la práctica de la geometría podrían constituir una aventura semejante a la del álgebra. La hipótesis de que la construcción de todo conocimiento seguiría procesos idénticos me parece contradicha por la historia y por mi propia práctica de las matemáticas. Para el alumno como para la humanidad, un conocimiento nuevo es mucho más que una simple aplicación de un conocimiento más general, y esto es lo que le da su interés. Aceptar de entrada la idea de una didáctica general *a priori*, me parece que llevaría a dejar de lado el estudio de todo aquello que es propio de lo didáctico. Una didáctica general no puede ser, desde mi punto de vista, más que una metadidáctica azarosa. Y es por esto que la teoría de las situaciones comienza con el estudio y la construcción de modelos de situaciones didácticas características de tal o cual saber específico.

No sabría decir si la teoría de las situaciones, o uno de sus avatares, está en condiciones de proporcionar a la didáctica de las matemáticas el esqueleto teórico y experimental susceptible de hacer de ella una ciencia en forma, espero que sí. Dicha teoría se presenta como un acercamiento científico al conjunto de problemas que plantea la difusión de las matemáticas, y en el cual la especificidad de los conocimientos enseñados está implicada y juega un papel significativo.

### *Didáctica de las ciencias*

No se le habrá escapado al lector atento, si es que todavía los hay después de una exposición tan larga, que la puesta en situación de conocimientos matemáticos renueva su presentación para los alumnos. La funcionalidad de los conocimientos pone en evidencia su utilidad, su papel con respecto a un medio. Reubica el papel de la teorización matemática en la perspectiva de sus aplicaciones.

Por otro lado, el análisis de las transposiciones puede proporcionar un marco experimental al problema de la adaptación de las matemáticas a la formación de sujetos de diferentes instituciones. ¿Hay que enseñar la teoría de las distribuciones en tal escuela para ingenieros o es posible contentarse con una estructura menos poderosa pero más fácil de dominar por los alumnos en el tiempo de que disponen? La pregunta no depende de debates ideológicos sino de construcciones de modelos, de mediciones, de cálculos y de experiencias.

### *Interés de la didáctica de las matemáticas*

#### *Interés para los profesores*

El profesor espera que la didáctica le proporcione por lo menos lo esencial de las técnicas específicas de las nociones que se enseñan, técnicas compatibles con sus concepciones educativas y pedagógicas generales.

- Técnicas locales: preparación de lecciones, de problemas y de ejercicios, de materiales para la enseñanza, textos, programas para computadora, instrumentos de gestión como objetivos y medios de evaluación (para todos los alumnos o exclusivos para alumnos que presentan dificultades específicas).
- Técnicas más “globales”: currículum para todo un sector de las matemáticas, métodos “listos para usarse”, programas para varios grados escolares.

El profesor desea saber, por ejemplo, cómo hacer posible una verdadera actividad científica en su clase sin sacrificar el tiempo de los alumnos en tareas que no tengan virtudes formadoras. Situaciones como “el agrandamiento del rompecabezas”<sup>26</sup> muestran que los alumnos pueden “construir” un saber que no les ha sido enseñado y, en cierta medida, pueden ponerlo en juego para resolver nuevos problemas. Pero esta situación no es transferible a ninguna otra noción matemática.

O también, los profesores desean saber cómo lograr que lo alumnos aprendan a hacer cálculos a mano, especialmente las tablas, siendo que el uso intensivo de la calculadora las ha trivializado.

Como sucede con todos los objetos técnicos, las respuestas presentarán únicamente cualidades relativas y no evitarán el fracaso si el profesor no posee las competencias necesarias para ponerlas en marcha.

El profesor puede esperar también de la didáctica *conocimientos relativos a los diferentes aspectos de su trabajo*:

- Acerca de las condiciones que deben crearse en las situaciones de enseñanza o de aprendizaje.
- Acerca de las condiciones que deben mantenerse en la gestión o la conducción de la enseñanza.

<sup>26</sup> Ver G. Brousseau 1981.

- Acerca de los alumnos, de sus comportamientos, de sus aprendizajes, de sus resultados en las condiciones específicas de la enseñanza.
- Acerca de los fenómenos de didáctica a los que alumnos y profesores se ven confrontados con todos los participantes en la comunicación de los saberes.

En otro orden de cosas, la didáctica puede, a la larga, ayudar al profesor a *modificar su estatuto, su formación y sus relaciones con la sociedad*:

- Actuando directamente sobre el estatuto de los conocimientos que utiliza, los cuales pasan de ser un arte, a ser técnicas que se apoyan en un campo científico.
- Actuando sobre los conocimientos de sus colegas profesionales, sobre los de los padres de familia y sobre los del público.
- Desarrollando mayores posibilidades para los ciudadanos en general de utilizar la enseñanza de manera más satisfactoria.
- Dando mayores posibilidades a los poderes públicos o privados de gestionar la enseñanza a través de medios más apropiados.

Cuando la didáctica explica las causas reales de una dificultad de enseñanza a través de un fenómeno o de una ley, alivia a los profesores de una parte de la sospecha, ilegítima, de incompetencia que pesa sobre ellos. Pero en contrapartida, la didáctica precisa sus responsabilidades y proporciona medios para la regulación de su trabajo que pueden ser sentidos como restrictivos. Esto ocurre especialmente cuando la didáctica hace eco y promueve prescripciones que se infieren directamente y sin análisis de los resultados obtenidos en otras disciplinas, o cuando retoma sin un análisis serio los juicios de tal o cual organismo o grupo de presión. La enseñanza es el último refugio de todos los fantasmas colectivos o individuales, el último campo cerrado en el que pueden enfrentarse, con la mejor fe, todas las ideologías. Para gestionar la enseñanza, la sociedad le aplica arbitrariamente modelos inadecuados: el consumismo, el productivismo industrial, el utopismo político o religioso, el cientificismo... En estas condiciones, los profesores, sobrecargados de obligaciones incompatibles, de prescripciones inaplicables, de representaciones exóticas, pierden su capacidad de controlar los parámetros fundamentales de su acción, cuando no aprovechan la circunstancia para descargarse de aquello que a ellos compete asegurar y que desaparece de la atención general.

Examinemos por un momento la ideología de la “innovación” que en mi país y en otros campeó durante mucho tiempo. Una innovación interesa a cierto número de profesores porque les interroga acerca de sus prácticas y les ayuda a luchar contra la obsolescencia. Interesa a todos aquellos que giran en torno de la enseñanza: formadores, editores, responsables diversos, debido a que nutre su discurso y justifica su intervención. Interesa a todos aquellos que quieren dar a entender, por algún motivo, que la enseñanza está inadaptada, etc. Sin embargo, al hacer de lo novedoso el criterio esencial para valorar las acciones propuestas, se destruyen las posibilidades de éxito de las mismas, y se muestra al mismo tiempo que no es al mejoramiento de la enseñanza a lo que se aspira. Efectivamente, lo propio de una innovación es descalificar una práctica antigua para reemplazarla por otra, y no para corregirla. Se tiene la ilusión empirista de que entre las cien flores de la innovación, los profesores recogerán las más adaptadas. Pero una innovación ahuyenta a otra, critica a la precedente, pero no la regula. Ciertos conocimientos dejan de poder ser enseñados y desaparecen, pero no porque

se haya decidido que ya no son útiles, sino porque las cascadas de innovaciones hicieron desaparecer los ecosistemas que les permitían existir como objetos de enseñanza. Las modas pasan o regresan sin verdaderos progresos. La ideología de la innovación aniquila a la innovación.

Lo anterior no quiere decir que el conservadurismo didáctico no presente otros inconvenientes igualmente cuestionables.

#### *Interés para la formación de maestros*

Al proporcionar a los profesores una ciencia integradora y una memoria propia, la didáctica permite la creación de una cultura común así como consideración de la experiencia adquirida y de los resultados de la investigación científica. La dependencia de la enseñanza respecto a numerosos campos del conocimiento conduce a una saturación desalentadora en la formación. La didáctica reduce las redundancias que se producen y facilita la organización de cursos centrados en la principal actividad a la que se apunta la enseñanza.

Apoyada sobre un edificio científico, la ingeniería que la didáctica propondrá no estará necesariamente acompañada de una práctica más elegante que la de los mejores maestros, pero podrá mejorar los resultados del conjunto y evitar ciertas catástrofes.

Por otra parte, la enseñanza de la didáctica a los maestros en formación presenta dificultades que provienen del hecho de que la transposición didáctica de la didáctica misma es, todavía, un trabajo por hacer. El volumen y la complejidad de los resultados de investigaciones fragmentarias, dispersos en numerosos campos disciplinarios dispares y concurrentes, ha crecido mucho más aprisa que lo que dura la formación y también más aprisa que la posibilidad de jerarquizar adecuadamente dichos resultados en textos de síntesis para los principiantes.

Para comprender y utilizar uno de estos resultados en una clase, se requieren conocimientos previos sobre todos los demás temas, conocimientos que sólo algunos maestros poseen.

Es necesario aceptar y respetar la existencia necesaria de una "didáctica para principiante", que garantice un comportamiento profesional mínimo, que pueda cohabitar en la formación con una formación teórica que prepare hacia un uso más refinado de saberes más avanzados de la didáctica. La proyección de todas las ideas "nuevas" es gratificante para el formador de maestros, pero llega a suceder que éste no pueda prever lo que harán sus estudiantes. Inversamente, el utilitarismo a corto plazo en la formación de maestros conduce a lo peor: a la ilusión de la simplicidad y a la imposibilidad para comprender y tratar el origen de los fracasos.

#### *Interés para los padres de familia y para el público*

¿Qué es posible? ¿qué es ilusorio o falaz? Todas las reformas se topan con las insuficiencias y las diferencias en las concepciones epistemológicas de los actores sociales. El control del público sobre la enseñanza es legítimo, pero requiere de un mínimo de conocimientos y de informaciones, y de toda una jerarquía social y científica que trate los diferentes niveles de conocimiento y de regulación de los actos didácticos. Este modelo existe en el campo de la medicina: el vocabulario del biólogo, el del médico, y el del enfermo difieren entre sí. Cada uno tiene su necesidad y un campo de eficacia en el uso y en la regulación de la medicina. Ni la confianza ciega en el cuerpo profesional, ni la suspicacia generalizada son las mejores soluciones, pero para ello es necesario que

se mantengan repertorios didácticos mínimos, que se utilicen, se jerarquicen y se “reconozcan” como legítimos. Desde este punto de vista, la difusión universal de la opinión de cada uno sobre todos los temas, propiciada por los medios de comunicación modernos, tiende a destruir el funcionamiento social de esos repertorios. Con las mejores justificaciones ideológicas, destruye las transposiciones y plantea problemas dudosos en la gestión de todos los sistemas tradicionales fundamentales.

Por cierto, es a partir de este modelo médico que algunos padres de familia tienden a concebir y a organizar la regulación de la enseñanza de sus hijos. Conciben las dificultades como enfermedades para las cuales hay que encontrar un remedio. Dado el caso recurren a instituciones específicas que se complacen, cuales médicos, en hacer pasar su trabajo como un medio para cuidar la salud. De esta manera, cada vez más niños y cada vez más actividades se retiran del proyecto social común. La enseñanza colectiva está contaminada: hemos identificado una tendencia nítida a reducir las lecciones al “apoyo remedial” para los errores individuales que los alumnos cometen en sus ejercicios.

Estas acciones se legitiman por una concepción individualista y consumista de la enseñanza, concepción que se extiende cada vez más y que acrecienta la confusión. Lo que se aprende en la escuela no es únicamente aquello que cada niño necesitará personalmente en el futuro para sobrevivir (esto nadie puede saberlo). En primer lugar está la cultura que cada sociedad considera como el mínimo necesario para cada uno de sus miembros adultos, y está también el servicio civil que los niños deben cumplir superando los desafíos del aprendizaje. Estos son los elementos que permitirán a la sociedad encontrar los diferentes tipos de especialista que necesitará. Un alumno no aprende matemáticas sólo por sus necesidades, sino también para ofrecer a la sociedad una oportunidad de encontrar, en un momento dado, tanto a los matemáticos como a los modestos usuarios de las matemáticas que ésta necesitará.

#### *Interés para la ciencia misma*

Mejorar la producción de conocimientos científicos sin perder el control de su validez constituye una preocupación para la comunidad, y particularmente para los matemáticos. Para que la comunicación y la reestructuración de saberes pueda desarrollarse, es necesario que estas dos actividades entren en el proceso social científico de evaluación. La didáctica tendría la vocación de ser el medio para este ingreso si resolviera algunos problemas teóricos que se le plantean...

Desde el momento en que tenemos que ver con la organización de los saberes, es con sus productores con quienes hay que discutir. Por lo tanto, es en el seno de la comunidad científica, en donde los didactas y los profesores debemos ganar la legitimidad para reorganizar los saberes enseñables. De hecho, estas reorganizaciones forman parte integrante de la actividad científica. Muy frecuentemente se olvida que esta limpia y reorganización impuestas por la comunicación y por la enseñanza de las ciencias, son necesarias y contribuyen fuertemente a su evolución.

Este punto explica porqué la didáctica de una disciplina científica debe ponerse bajo la responsabilidad de dicha disciplina, aún si puede ser el objeto de trabajo de didactas de origen científico diverso.

La gran dificultad de esta función de la didáctica es que pretende enseñar a los profesionales de la investigación un arte que ellos practican inconscientemente en su trabajo y de una manera que los satisface. La didáctica pretende hacerlo además apoyándose en una ciencia que dichos profesionales naturalmente consideran evidente o extraña, y por lo tanto inútil.

### *Interés para el conjunto de la sociedad*

Es en la ciencia, y más precozmente en las matemáticas, en donde los alumnos pueden aprender cómo establecer y cómo gestionar la verdad científica en una sociedad democrática. Los medios para realizar este proyecto no son fáciles de inventar ni de poner en marcha, pero es aún más difícil introducir este proyecto y sus consecuencias en la cultura. Sin embargo, únicamente la penetración de la didáctica en la cultura permitirá mejorar la gestión política de la difusión de los saberes y volver más democrático su uso y su creación.

### *Las matemáticas, la didáctica de las matemáticas, la educación y las ciencias de la educación*

#### *Términos e ideología: la instrucción, la enseñanza, la educación*

El término “educación matemática” sustituyó al de “instrucción en matemáticas” e incluso al de “enseñanza de las matemáticas” a lo largo de los años 60. Se trata de una ampliación progresiva de la ambición que se asume. “Instrucción” consiste en estructurar e informar: estructurar al alumno a través de los conocimientos, a los conocimientos a través del saber; el acento se pone en la cultura que se transmite. La enseñanza consiste en hacer conocer, en hacer saber, en hacer aprender, el acento se pone en la manera de transmitir. La educación consiste en conducir, criar o educar, el acento se pone en el conjunto del proceso a través del cual un niño se convierte en adulto.

En estas condiciones, hoy en día se vuelve más difícil pretender hablar de instrucción o de enseñanza sin ubicarlas de golpe en el marco global de una educación. La respectivas ambiciones de la enseñanza, de la metodología, de la didáctica, de la educación matemática, y de la teoría de las situaciones han sido suficientemente evocadas anteriormente. Son legítimas, distintas y complementarias. Y después de todo, en la ciencia, las aproximaciones múltiples a un mismo objeto no son ninguna novedad.

No obstante, parece difícil deducir de ello una organización conveniente para asegurar la responsabilidad de la enseñanza, de la formación de profesores de matemáticas y de la investigación en este campo.

De hecho, es necesaria una cooperación aunque las instituciones no parecen estar dispuestas a esta cooperación.

#### *La pertenencia a la esfera de los matemáticos*

Los profesores de matemáticas deberían de sentirse pertenecientes a la esfera de los matemáticos:

- En primer lugar, porque trabajan sobre la materia matemática y su actividad es en buena parte una actividad matemática.
- Pero sobre todo, porque transponiendo saberes matemáticos deben apropiarse de las formas y las modificaciones actuales, así como un profesor de lengua debe tener una familiaridad con la cultura de dicha lengua y hacer estancias frecuentes en algún país que pertenezca a esa cultura.

Por cierto, en Francia los jóvenes estudiantes de matemáticas se identifican a sí mismos como matemáticos antes de orientarse hacia la enseñanza. Sin embargo, no se les acepta como tales, en la medida en que el término de “matemático” se reserva para la universidad, para los productores de los saberes matemáticos en sentido estricto. Además, todo un gremio de ingenieros y de expertos los ha sustituido en su papel de

mediadores entre la población y las matemáticas “útiles”. Los maestros están “encerrados” en su función de profesores, aislados en una cultura alejada de las prácticas y de las preocupaciones del público.

Los estudiantes que llegan a las matemáticas por otros caminos, por ejemplo los de la educación, pueden considerar mejor su propia evolución de manera positiva. Pero de hecho se les considera, a su pesar, todavía más alejados de la esfera de los matemáticos.

### *La pertenencia a la esfera educativa*

Los profesores deberían sentir que intelectualmente pertenecen a la esfera educativa. Sin embargo, con frecuencia esta pertenencia se realiza más a través del intermediario de la profesión que a través de la cultura, demasiado amplia, demasiado dispar. A lo más, la visitan en calidad de “amateurs iluminados”. Las dos preguntas que se les plantean son las siguientes:

- Las intenciones, las teorías y las técnicas en la enseñanza, ¿pueden afectar a los conocimientos matemáticos que se van a enseñar y a su organización didáctica ?
- Recíprocamente, ¿las variedades didácticas de la enseñanza de las matemáticas tienen propiedades educativas diferentes.?

Si la respuesta a estas dos preguntas fuera negativa, bastaría con yuxtaponer las dos culturas bajo una responsabilidad, común o no, mediada por un tercero o no, como de hecho se hace en el caso de otras formaciones profesionales en el nivel universitario. Pero la respuesta no es negativa, particularmente en el caso de la segunda, lo cual es fácil de mostrar: hacer que los alumnos utilicen teoremas, hacer que los reciten, hacer que repitan las demostraciones, hacer que las encuentren, iniciarlos en los debates de la prueba o bien revelarles el genio ejemplar de Euclides, tienen propiedades educativas diferentes.

Por otra parte la enseñanza efectiva no puede desarrollarse sin que en determinado momento las comunidades disciplinarias y culturales sean o se sientan interpeladas al respecto por el público: en esos momentos la ausencia de una cultura didáctica de unos y de otros se hace sentir, así como la ausencia de una comunidad capaz de asumir la responsabilidad científica de esta cultura y de las investigaciones que la alimentan.

Las soluciones “universitarias” no suelen responder a estas expectativas. Puede concebirse que una institución desarrolle los conocimientos matemáticos que necesita y los trasmita bajo su responsabilidad. Pero la sociedad no puede acordar ese privilegio a una institución como la enseñanza que no tiene necesidades matemáticas propias y cuya legitimidad radica en su referencia a una institución sabia. Una facultad de educación puede preparar profesores competentes sobre la base de una cultura fija o convenida. No obstante, corre el riesgo de tener mucha dificultad para influir en una comunidad exterior a ella, en relación con problemas en los que se requiere de la competencia de esa comunidad exterior. Si la primera generación de didactas se forma en contacto con matemáticos profesionales, podría mantener la necesaria proximidad con la disciplina en el ambiente de una facultad de educación. Pero a dicha generación no le será fácil sostener con los estudiantes las exigencias del nivel matemático que ella conoció aunque sea sólo debido a que unos y otros tendrán una motivación diferente. La segunda generación de doctores, cualquiera que sea su valor, estará más alejada de las matemáticas.

Con esta organización, los matemáticos se mantienen fuera del ámbito de la enseñanza y de la formación hasta el día en que una cábala los eche a andar y haga caer sobre el gremio de maestros una parvada de anatemas en nombre de la ciencia.

Entonces ¿acaso hay que retomar en cada generación el mismo dispositivo inicial y dejar la formación de profesores, una y otra vez, a cargo de personas que, aunque formadas en otras áreas, son eternos principiantes en didáctica?. Creo que es necesario integrar en las universidades opciones didácticas científicas bajo la responsabilidad de cada sector científico. Así se forman los matemáticos didactas, responsables actuales o futuros de la formación “matemática y didáctica” de los profesores. En Francia en donde se ha intentado esta solución desde hace treinta años, algunos universitarios han mostrado fuerte rechazo por la misma. Sin embargo parece que este rechazo está motivado más bien por cuestiones de interés y de comodidad. Es normal querer utilizar a los matemáticos que ya terminaron su fase de producción matemática o que la aminoraron en la enseñanza, y en particular en la enseñanza de los futuros maestros. A los matemáticos les es fácil, por lo menos en Francia, exigir la responsabilidad total de esta formación, declararse competentes de facto para esta tarea y hacer que en los concursos administrativos para reclutar profesores se elimine del examen cualquier otra competencia que no sea matemática. Esto es en todo caso más fácil para ellos que ponerse a aprender “oficialmente” los conocimientos y los saberes necesarios, lo cual sin embargo es tan normal en otras profesiones.

¿La investigación en didáctica y la formación de profesores deberían entonces estar reservadas para los matemáticos? ¡Sería absurdo! la mayor parte de las investigaciones se realizan bajo la responsabilidad de la ciencias de la educación. En cualquier lugar en el que esta rama asume una participación institucional en la formación, estas investigaciones adquieren un valor evidente para la enseñanza.

Es necesario desarrollar en las universidades, dedicadas a la formación de profesores o generales, equipos de enseñanza y laboratorios de investigación mixtos, abiertos a investigadores de origen diverso, dispuestos a participar en los debates científicos con argumentos verificables por otros. Esto se hace con frecuencia, pero en este caso, la principal dificultad es encontrar los medios conceptuales para regular estas disposiciones y estas competencias dispares. Los conceptos “migrantes”, las ideas brillantes pero superficiales, las ideologías supradisciplinarias, las novedades tienen entonces toda la posibilidad de arrasar con el estudio de dificultades más familiares mediante conceptos complejos.

Es en estas condiciones que aparece la necesidad de teorías fuertes.

## 5. Conclusiones

Más de tres mil años después de la invención del comercio, a la economía -ciencia de las condiciones de difusión de los bienes materiales de los hombres- le tomó doscientos cincuenta años empezar a salir de su existencia fantasmal y está aún lejos de proponer soluciones satisfactorias.

Para educar a los poco más de dos mil millones de no adultos debe haber en el mundo alrededor de cincuenta millones de personas que se ocupan profesionalmente de su enseñanza y de su educación junto con unos cuatro mil millones de padres de familia... El número de creadores y de difusores de las ciencias y de las técnicas es probablemente muy inferior a un millón de personas. Si el objetivo de la didáctica es importante, su fuente no lo es menos.



Sin embargo el estudio científico de los fenómenos de la difusión de los saberes científicos, por su parte, no cuenta más que con un número muy restringido de investigadores dispersos en instituciones diferentes, a veces concurrentes, esparcidas en caminos de investigación divergentes. La debilidad de los medios de elaboración y de difusión de los conocimientos didácticos es manifiesta.

No obstante, a pesar de ciertos vientos actuales que a veces soplan en la dirección contraria, la didáctica de las matemáticas no arrancó tan mal y progresa. Estoy convencido que entrará progresivamente en las prácticas científicas y sociales, y que va a contribuir a mejorar la educación de todos los niños.

## Bibliografía

- Aebli, H. (1959) *Didactique psychologique* Genève: Delachaux et Niestlé
- Arbib, M. A. "Memory limitations of stimulus response models" En *Journal of Structural learning* 5 (1/2), 19-23
- Bachelard, G. (1938) *La formation de l'esprit scientifique* Paris: Vrin.
- Bahra, M. (1995) *Problèmes de didactique de la numération; échecs et succès de la remathématisation* (Thèse d'Université, Bordeaux 1)
- Bourdieu, P. (1980) *Le sens pratique*. Paris: Les éditions de Minuit
- Briand, J. (1993) *L'énumération dans le mesurage des collections, un dysfonctionnement de la transposition didactique*. (Thèse d'Université, Bordeaux 1)
- Brousseau, G. Y N. Brousseau (1987) *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. IREM de Bordeaux
- Brousseau, G. (1989) "Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques" En N. Bednarz et C. Garnier (Eds) *Construction des savoirs* Canada: CIRADE Agence d'arc. pp. 41-63.
- Brousseau, G. (1997) *Theory of Didactical situations in mathematics 1970-1990* Netherland: KLUWER Academic Publishers).
- Brousseau, G. (1998) *La Théorie des situations didactiques* Grenoble: La pensée sauvage
- Chevallard, Y. (1991) *La transposition didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (1992) "Concepts fondamentaux de la Didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique" En J. Brun (Ed) *Didactique des Mathématiques* Genève: Delachaux et Niestlé, pp. 145-196.
- Chomski, N. Y G. A. Miller (1968) *L'analyse formelle des langues naturelles* Paris: Gauthier Villars
- El Bouazzaoui, H. (1982) *Etude de situations scolaires des premiers enseignements du nombre et de la numération*. (Thèse d'Université, Bordeaux 1)»
- Gonseth, F. (1936,1974) *Les Mathématiques et la Réalité; essai sur la méthode axiomatique* Paris: A. Blanchard.
- Gras, R. (1996) *L'implication statistique* Grenoble: La pensée sauvage
- Greco, P. (1991) *Structures et Significations* Paris: EHESS
- Johsua, S. Y J. J. Dupin (1993) *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*. Paris: PUF.
- Margolinas, C. (1995) "La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations" En C. Margolinas (ed.) *Les débats de didactique des mathématiques* Grenoble: La Pensée Sauvage (pp.89-102)
- Nelson *Stochastic automatas*
- Piaget, J. (1969) *Psychologie et pédagogie*. Paris : Éditions Denoël.
- Quevedo de Villegas, B. (1986) *Le rôle de l'énumération dans l'apprentissage du dénombrement* (Thèse de 3<sup>e</sup> cycle, Bordeaux 1)
- Ratsimba-Rajohn, H. (1982) "Éléments d'étude de deux méthodes de mesures rationnelles" En *Recherches en Didactique des Mathématiques* 3/1, pp. 65-113.

Ratsimba-Rajohn, H. (1992) *Contribution à l'étude de hiérarchie implicative. Application à l'analyse de la gestion didactique des phénomènes d'ostension et de contradictions* Thèse. Université de Rennes 1.

Shoenfeld, A. (ed) (1987) *Cognitive Science and Mathematics Education*. Hillsdale Lawrence Erlbaum Associates.

Skinner, B. F. (1952) *Science and human behavior*

Vergnaud, G. (1991) "La théorie des champs conceptuels" En *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol. 10 n 2/3, 133-169.

Vigotski, *Thought and Language*.