

GUÍA DE ESTUDIO MATEMÁTICAS FINANCIERAS



amv

Autorregulador del Mercado de Valores
de Colombia

Tercera edición: Abril de 2019
Autoregulador del Mercado de Valores (AMV)
Gerencia de Certificación e información.

Este material es propiedad de AMV, es de consulta gratuita y se encuentra prohibida su venta y su uso para fines comerciales.

Diseño y Diagramación:
Artmedia Estudio Diseño
www.artmediaestudio.com

CONTENIDO



1. CONCEPTOS DE VALOR DEL DINERO EN EL TIEMPO	2
1.1. Tasas de interés: conceptos teóricos	2
1.2. Tasas de interés nominal y periódica – efectiva anual	2
1.3. Tasa de interés anticipada	7
1.4. Interés compuesto continuo 	9
1.5. Factores de conversión	10
2. INVERSIONES Y PRESUPUESTO DE CAPITAL	12
2.1. Valor presente neto (VPN)	12
2.2. Tasa interna de retorno (TIR)	13
3. INDICADORES ECONÓMICOS	15
3.1. DTF	15
3.2. UVR (unidad de valor real)	16
3.3. Índice de precios al consumidor (IPC)	16
3.4. IBR (indicador bancario de referencia) 	17
4. ANUALIDADES	19
4.1. Vencidas	19
4.2. Anticipadas	20
4.3. Diferidas	21

A large, stylized graphic of a globe or sphere, rendered in shades of light blue and white. The globe is composed of several curved, overlapping segments that create a sense of depth and movement. The word "PROPÓSITO" is centered on the upper portion of the globe.

PROPÓSITO

Para el Autorregulador del Mercado de Valores de Colombia (AMV) la elevación de los estándares es un elemento de primer orden. En tal sentido, se presentan a la industria y al público en general las guías de estudio como nuevas herramientas para preparar los exámenes de certificación.

El documento se apoya en los temarios publicados en la página electrónica de AMV, los cuales contienen los temas que comprenden los exámenes de idoneidad profesional.

La información suministrada tiene el propósito exclusivo de utilizarse como herramienta adicional de estudio y no reemplaza otros materiales ya que estará, al igual que la normativa, en permanente evolución.

La inclusión de algún enlace o documento no implica la recomendación o aprobación de los puntos de vista expresados en él. Se advierte que la información que contienen las guías solo podrá usarse para consultas personales, respetando las leyes vigentes de derechos de autor. Absténgase de reproducir la totalidad de tal información o parte de ella, o citarla sin autorización expresa de AMV.



1 Conceptos de valor del dinero en el tiempo

1.1. Tasas de interés: conceptos teóricos

La tasa de interés es el pago que recibe un inversionista por prestar su dinero a un agente denominado “deudor”, durante un plazo determinado¹. De manera análoga, a la tasa de interés se le denomina “precio del dinero”, ya que mide cuánto le cuesta a un agente tener dinero en el bolsillo o usar el dinero de otro. Así pues, la tasa de interés depende de varios factores, principalmente de los siguientes:

- **Riesgo de contraparte:** los agentes a los cuales se les presta dinero tienen diferente capacidad de pago y por esto, cada uno de ellos tiene una probabilidad diferente de incumplir sus obligaciones, razón por la cual se tiene que compensar al inversionista con una mayor tasa de interés cuando asume riesgos mayores (mayor probabilidad de incumplimiento).
- **Expectativas de inflación:** entre mayores sean las expectativas de inflación, mayor será la tasa de interés.
- **Preferencia por liquidez:** cuando los inversionistas tienen mayor preferen-

cia por liquidez (efectivo), exigirán un pago de interés mayor.

1.2. Tasas de interés nominal y periódica – efectiva anual

1.2.1. Conceptos teóricos

Tasa de interés nominal. Es una tasa que se obtiene al final de un período **SIN** que los rendimientos generados en cada período sean reinvertidos; dicha característica hace que esta tasa de interés constituya una función lineal. A la tasa nominal se le adicionan dos términos: el primero, es el período de liquidación de interés durante un año y el segundo, es el momento del período en el cual se liquida. Ejemplo: una inversión que pague un interés del 6% nominal al final de cada trimestre, se denomina 6% nominal trimestre vencido. Si los intereses de dicha inversión se pagan a principio de cada trimestre, sería 6% nominal trimestre anticipado. Para los dos casos, el número de períodos de capitalización sería 4, ya que hay cuatro trimestres en el año.

Con base en esta conceptualización se tiene la siguiente ecuación:

¹ Basado en Bodie, Zvi; Kane, Alex y Marcus, Alan (2004). *Principios de inversiones*, 5ª ed., Madrid, Edit. McGraw-Hill.



Ecuación (1):

$$(TIN) = (TIP) * (n)$$

Donde:

TIN = tasa de interés nominal.

TIP = tasa de interés periódica.

n = número de períodos de capitalización en un año.

Tasa de interés periódica. Es una tasa que se obtiene al final de un período, **CONTANDO** con que los rendimientos que se liquiden en cada período van a ser reinvertidos a la misma tasa inicial. Dicha característica hace que esta tasa de interés constituya una función exponencial; la tasa efectiva anual (tasa más común en inversiones) es una tasa de interés periódica anualizada. Al igual que con la tasa de interés nominal, a esta tasa se le adicionan los dos términos explicados anteriormente.

Despejando de la ecuación (1) tenemos:

Ecuación (2):

$$TIP = \frac{TIN}{n}$$

Dado que la tasa de interés periódica constituye una función exponencial, para pasar de una tasa periódica a otra, es necesario utilizar la siguiente fórmula:

Ecuación (3):

$$TIP_2 = \left(1 + TIP_1\right)^{\frac{\# \text{ días } 2}{\# \text{ días } 1}} - 1$$

Donde:

TIP₁ = tasa periódica inicial o conocida.

TIP₂ = tasa periódica que se desea obtener (a convertir).

días 1 = número de días de la tasa periódica 1 (TIP₁).

días 2 = número de días de la tasa periódica 2 (TIP₂).

Nota: para la formulación de los ejercicios se usa la base 30/360, ya que es la más frecuente. Esta base quiere decir que todos los meses se cuentan de 30 días y los años de 360 días.

Ejemplo:

- Cuando se desea convertir una tasa periódica trimestral a una anual (efectiva anual):
- # días 1: 90
- # días 2: 360
- Cuando se desea convertir una tasa periódica anual o efectiva anual a una tasa trimestral:
- # días 1: 360
- # días 2: 90

Para comprender mejor los conceptos expuestos, es pertinente pensar en el siguiente ejemplo:

Se quiere construir la tasa de interés nominal y efectiva (expresiones anualizadas) equivalente a una tasa de interés del 2% bimestral, suponiendo un capital inicial de \$ 100.000².

Construcción de la tasa de interés nominal (TIN). Al no tenerse en cuenta la reinversión de intereses, el inversionista cada bimestre recibirá 2% sobre su inversión inicial, o sea, \$ 2.000, para un total de \$ 12.000 al final del año, de manera que:

2 Basado en Pinilla, Valero y Guzmán (2007). *Operaciones en el mercado de capitales*, 3ª ed., Edit. Correval, p. 36.



Construcción interés nominal			
Bimestre	Capital inicial	Intereses	Capital acumulado
1	\$ 100.000	\$ 2.000	\$ 102.000
2		\$ 2.000	\$ 104.000
3		\$ 2.000	\$ 106.000
4		\$ 2.000	\$ 108.000
5		\$ 2.000	\$ 110.000
6		\$ 2.000	\$ 112.000

Los \$ 12.000 recibidos representan un 12% de intereses sobre el capital inicial, de modo que esta tasa se conoce como 12% nominal bimensual vencida.

Construcción de la tasa de interés efectiva anual (TEA). Basados en el supuesto de reinversión de intereses de las tasas periódicas, se evidencia de antemano que los intereses van a ser mayores ya que ellos se calculan sobre el capital acumulado, de manera que:

Construcción interés periódico - Efectivo anual			
Bimestre	Capital inicial	Intereses	Capital acumulado
1	\$ 100.000	\$ 2.000	\$ 102.000
2		\$ 2.040	\$ 104.040
3		\$ 2.081	\$ 106.121
4		\$ 2.122	\$ 108.243
5		\$ 2.165	\$ 110.408
6		\$ 2.208	\$ 112.616

Los \$12.616 recibidos representan un 12,616% de intereses sobre el capital inicial, de modo que esta tasa se conoce como 12,616% efectiva anual. De manera análoga se puede usar la ecuación (3):

$$TIP_2 = \left(1 + TIP_1\right)^{\frac{\# \text{ días } 2}{\# \text{ días } 1}} - 1$$

Entonces:

$$TEA = \left(1 + 2\%\right)^{\frac{360}{60}} - 1$$

$$TEA = 12,616\%$$

De esta forma, la tasa de 12% nominal bimensual vencida, la tasa de 12,616% efectiva anual y la tasa de 2% bimestral, son equivalentes pero compuestas bajo diferentes supuestos. Razón por la cual estas tasas presentan comportamientos diferentes, como lo evidencia la gráfica 1.

1.2.2. Ejercicios prácticos

Nota: para los ejercicios, además de la aplicación de fórmulas, también se realizará el procedimiento de solución por medio de la calculadora financiera (el procedimiento está basado en la calculadora HP 17bII+).

- ¿Cuál es la tasa efectiva anual de un certificado de depósito a término (CDT) que paga el 8% nominal mes vencido?

Respuesta:

$$TIP_2 = \left(1 + TIP_1\right)^{\frac{\# \text{ días } 2}{\# \text{ días } 1}} - 1$$

Reemplazando TIP_1 en la ecuación TIP_2 :

$$TIP_2 = \left(1 + \frac{TIN}{n}\right)^{\frac{\# \text{ días } 2}{\# \text{ días } 1}} - 1$$

$$TEA = \left(1 + \frac{8\%}{12}\right)^{\frac{360}{30}} - 1$$

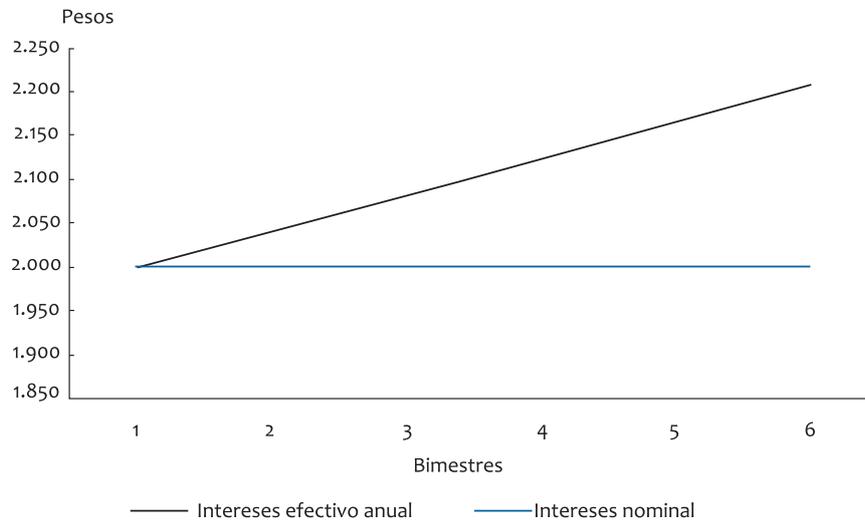
$$TEA = 8,30\%$$

Calculadora financiera

De manera general, para la conversión de tasas de interés siempre se entrará de la siguiente forma:



Gráfica 1 Intereses periódicos vs. nominales



1. FIN (menú financiero).
2. CONVI (conversión de tasas de interés).
3. PER (para conversión de tasas periódicas) o CONT (para conversión de tasas continuas).
4. Se tiene que llenar el siguiente cuadro en la calculadora, donde %NOM = tasa nominal, %EFE = tasa efectiva y P = # de períodos de capitalización en un año.

$$TEA = \left(1 + \frac{15\%}{4}\right)^{\frac{360}{90}} - 1$$

$$TEA = 15,865\%$$

Calculadora financiera

%NOM	%EFE	P
15	¿?	4

$$TEA = 15,865\%$$

Para este ejercicio:

%NOM	%EFE	P
8	¿?	12

$$TEA = 8,30\%$$

- ¿Cuál es la tasa nominal mensual vencida de una inversión que pagó el 12% efectivo anual?

$$(TIN) = (TIP) * (n)$$

Reemplazando TIP en la fórmula de TIN:

$$(TIN) = \left(\left(1 + TIP_1\right)^{\frac{\# \text{ días } 2}{\# \text{ días } 1}} - 1 \right) * (n)$$

- ¿Cuál es la tasa efectiva anual para un préstamo del 15% nominal trimestre vencido?

$$TIP_2 = \left(1 + \frac{TIN}{n}\right)^{\frac{\# \text{ días } 2}{\# \text{ días } 1}} - 1$$



$$(TIN) = \left((1 + 12\%)^{\frac{30}{360}} - 1 \right) * (12)$$

Tasa nominal mensual vencida = 11,387%

Calculadora financiera

%NOM	%EFE	P
¿?	12	12

Tasa nominal mensual vencida = 11,387%

- ¿Cuál es la tasa efectiva anual de un certificado de depósito a término (CDT) que paga una tasa periódica del 0,5% bimensual vencida?

$$TIP_2 = (1 + TIP_1)^{\frac{\# \text{ días } 2}{\# \text{ días } 1}} - 1$$

$$TIP_2 = (1 + 0,5\%)^{\frac{360}{30}} - 1$$

$$TEA = 3,038\%$$

Calculadora financiera

%NOM	%EFE	P
0,5 * 6	¿?	6

$$TEA = 3,038\%$$

- ¿Cuál es la tasa periódica mensual de una inversión que paga el 6% efectivo anual?

$$TIP_2 = (1 + TIP_1)^{\frac{\# \text{ días } 2}{\# \text{ días } 1}} - 1$$

$$TIP_2 = (1 + 6\%)^{\frac{30}{360}} - 1$$

Tasa periódica mensual = 0,487%

Calculadora financiera

%NOM	%EFE	P
¿?	6	12

Tasa nominal mensual (TNM) = 5,841%

TNM/12 = tasa periódica nominal = 0,487%

- ¿Cuál es la tasa nominal semestral vencida para un crédito al 15% efectivo anual?

$$(TIN) = \left((1 + TIP_1)^{\frac{\# \text{ días } 2}{\# \text{ días } 1}} - 1 \right) * (n)$$

$$(TIN) = \left((1 + 15\%)^{\frac{180}{360}} - 1 \right) * (2)$$

Tasa de interés nominal semestral vencida = 14,476%

Calculadora financiera

%NOM	%EFE	P
¿?	15	2

Tasa de interés nominal semestral vencida = 14,476%

- ¿Cuál es la tasa periódica semestre vencido de una inversión que paga el 6% nominal mes vencido?

$$TIP_2 = \left(1 + \frac{TIN}{n} \right)^{\frac{\# \text{ días } 2}{\# \text{ días } 1}} - 1$$

$$TIP_2 = \left(1 + \frac{6\%}{12} \right)^{\frac{180}{30}} - 1$$

Tasa de interés periódica semestral = 3,038%

Calculadora financiera

Primero se debe convertir la tasa nominal mes vencido a efectiva anual.

%NOM	%EFE	P
6	¿?	12

$$EA = 6,168\%$$

Después se pasa la tasa efectiva anual a nominal semestre vencido.



%NOM	%EFE	P
?	6.168	2

Tasa nominal semestre vencido =
6,076%

Finalmente, se divide por el número de períodos:

$$6,076\%/2 = 3,038\% \text{ periódica semestral vencida}$$

- ¿Cuál es la tasa nominal vencida que paga un certificado de depósito a término (CDT) emitido a 194 días, si la entidad capta al 8% efectivo anual y liquida los intereses **base 365**³?

$$(TIN) = \left((1 + TIP_1)^{\frac{\# \text{ días } 2}{\# \text{ días } 1}} - 1 \right) * (n)$$

$$(TIN) = \left((1 + 8\%)^{\frac{194}{365}} - 1 \right) * (365/194)$$

Tasa de interés nominal vencida =
7,856%

Calculadora financiera

%NOM	%EFE	P
?	8%	365/194

Tasa de interés nominal vencida =
7,856%

1.3. Tasa de interés anticipada

1.3.1. Conceptos teóricos

En la práctica, las tasas de interés anticipadas son poco usadas. “En el mercado colombiano no se permite captar recursos utilizando este tipo de tasas; sin embargo,

3 Tomado de Pinilla, Valero y Guzmán (2007). *Op. cit.*, p. 45.

la existencia de indicadores como la DTF (cuya modalidad es trimestre anticipado) implican el uso de estas tasas, aunque la liquidación de los intereses se realiza de manera vencida. La DTF es utilizada por los bancos para colocación, aunque como se resaltó anteriormente, la liquidación de los intereses se realiza de manera vencida”⁴. En el ámbito internacional, las tasas anticipadas no se utilizan.

Fórmulas que relacionan los conceptos mencionados

Para calcular una tasa efectiva anual partiendo de una tasa nominal anticipada o una tasa periódica anticipada, se utiliza la siguiente fórmula:

$$TEA = (1 - TIPa)^n$$

Reemplazando la ecuación de TIP en TEA:

$$TEA = \left(1 - \frac{TIPa}{n} \right)^{-n} - 1$$

Para calcular una tasa nominal anticipada partiendo de una tasa efectiva anual o una tasa periódica anticipada:

$$TINa = TIPa * n$$

$$TINa = \left(1 - (1 + TEA)^{-\frac{1}{n}} \right) * n$$

1.3.2. Conceptos prácticos

- ¿Cuál es la tasa efectiva anual de una inversión que paga el 12% trimestral anticipado?

$$TEA = \left(1 - \frac{TINa}{n} \right)^{-n} - 1$$

4 Tomado de Pinilla, Valero y Guzmán (2007). *Op. cit.*, p. 40.



$$TEA = \left(1 - \frac{12\%}{(360/90)}\right)^{-\left(\frac{360}{90}\right)} - 1$$

$$TEA = 12,957\%$$

Calculadora financiera

Cuando se utiliza período anticipado el P se introduce con signo negativo:

%NOM	%EFE	P
12	¿?	-4

$$TEA = 12,957\%$$

- ¿Cuál es la tasa efectiva para un préstamo que se obtiene a una tasa periódica del 1% mensual anticipada?

$$TEA = (1 - TP_a)^{-n} - 1$$

$$TEA = (1 - 1\%)^{-12} - 1$$

$$TEA = 12,818\%$$

Calculadora financiera

Primero se tiene que convertir la tasa periódica a nominal anticipada, entonces:

$$1\% \text{ periódica mensual anticipada} * 12 =$$

$$12\% \text{MA}$$

Luego se convierte la tasa nominal en efectiva anual, así:

%NOM	%EFE	P
12	¿?	-12

$$TEA = 12,818\%$$

- ¿Cuál es la tasa nominal trimestre anticipado de un certificado de depósito a término (CDT) que paga el 6% efectivo anual?

$$TIN_a = \left(1 - (1 + TEA)^{-\frac{1}{n}}\right) * n$$

$$TIN_a = \left(1 - (1 + 6\%)^{-\frac{1}{4}}\right) * 4$$

$$TIN \text{ trimestre anticipado} = 5,785\%$$

Calculadora financiera

%NOM	%EFE	P
¿?	6	-4

$$TIN \text{ trimestre anticipado} = 5,785\%$$

- ¿Cuál será la tasa nominal mes vencido de una inversión que paga el 8% trimestre anticipado?

Paso 1. Convertir la tasa trimestre anticipado en efectivo anual:

$$TEA = \left(1 - \frac{TIN_a}{n}\right)^{-n} - 1$$

$$TEA = \left(1 - \frac{8\%}{4}\right)^{-4} - 1$$

$$TEA = 8,417\%$$

Paso 2. Convertir la tasa efectiva anual a tasa nominal mes vencido:

$$(TIN) = \left((1 + TEA)^{\frac{\# \text{ días } 2}{\# \text{ días } 1}} - 1 \right) * (n)$$

$$(TIN) = \left((1 + 8,417\%)^{\frac{30}{360}} - 1 \right) * (12)$$

$$TIN \text{ mes vencido} = 8,108\%$$

Calculadora financiera

Primero se tiene que pasar la tasa trimestre anticipado a efectivo anual, entonces:

%NOM	%EFE	P
8	¿?	-4

$$TEA = 8,417\%$$



Luego se pasa la tasa efectiva anual a nominal mes vencido, entonces:

%NOM	%EFE	P
¿?	8,417	12

TIN mes vencido = 8,108%

1.4. Interés compuesto continuo

1.4.1. Conceptos teóricos

El sistema de interés compuesto continuo se caracteriza por obtener interés sobre el principal, en el primer instante de tiempo. A diferencia de los intereses vistos anteriormente, esta clase de interés no tiene posibilidades de reinversión trimestral, mensual, semanal, etc. Sino que se tiene en cuenta la reinversión **continua**; dicho factor lleva a que la función de interés compuesto continuo sea logarítmica. Actualmente, en el mercado colombiano este tipo de interés se usa en el mercado de derivados⁵.

Para calcular una tasa efectiva anual, partiendo de una tasa continua, se usa la siguiente fórmula:

$$TEA = e^{TICC} - 1$$

De manera análoga, para calcular una tasa de interés compuesta continua, partiendo de una tasa efectiva anual, se usa la siguiente fórmula:

$$TICC = \ln(1 + TEA)$$

Donde:

TICC: tasa de interés compuesta continua.

5 Tomado de Pinilla, Valero y Guzmán (2007). *Op. cit.*, p. 42.

1.4.2. Conceptos prácticos

- ¿Cuál es la tasa de interés continua compuesta de un certificado de depósito a término (CDT) que paga una tasa del 8% efectivo anual?

$$TICC = \ln(1 + TEA)$$

$$TICC = \ln(1 + 8\%)$$

$$TICC = 7,696\%$$

Calculadora financiera

De manera general, para la conversión de tasas de interés siempre se entrará de la siguiente forma:

- FIN (menú financiero).
- CONVI (conversión de tasas de interés).
- CONT (para conversión de tasas continuas).

Para este ejercicio:

%NOM	%EFE
¿?	8

$$TICC = 7,696\%$$

- ¿Cuál es la tasa efectiva anual de una inversión que paga una tasa de 10% compuesta continua?

$$TEA = e^{TICC} - 1$$

$$TEA = e^{10\%} - 1$$

$$TEA = 10,517\%$$

Calculadora financiera

%NOM	%EFE
10	¿?

$$TEA = 10,517\%$$



1.5. Factores de conversión

1.5.1. Valor presente (VP) y valor futuro (VF)

1.5.1.1. Conceptos teóricos

Valor presente. El valor actual o presente es comúnmente conocido como el valor del dinero en función del tiempo, ya que dicho valor representa una equivalencia temporal entre el capital final que se obtendrá de colocarlo a una tasa de interés hasta su vencimiento, y el capital en la época de pago.

La fórmula que relaciona estos conceptos es la siguiente:

$$VP = \frac{VF}{(1+i)^n}$$

Donde:

VP = valor presente.

VF = valor futuro.

n = número de períodos.

i = tasa de interés.

Valor futuro. De manera análoga, el valor futuro representa el valor presente después de n períodos a una tasa de interés determinada, i . Desde otro punto de vista, el valor futuro corresponde al capital prestado más los intereses causados sobre el período considerado.

$$VF = VP * (1+i)^n$$

1.5.1.2. Conceptos prácticos

- ¿Cuál es el valor aproximado del dólar para dentro de 180 días a través de un

forward con una devaluación del 1% y una tasa peso/dólar en *spot* de \$ 1.790 por dólar? (La devaluación en el mercado de divisas colombiano, está dada en términos efectivos anuales, base 365).

$$VP = \$ 1.790$$

$$I = 1\%$$

$$n = 180 \text{ días}$$

$$VF = ?$$

$$VF = VP * (1+i)^n$$

$$VF = 1.790 * (1+0,01)^{180/365}$$

$$VF = 1.798,81$$

De acuerdo con lo anterior, el dólar en 180 días estará en \$ 1.798,81.

Calculadora financiera

De manera general, para el cálculo de la tasa de rentabilidad, número de períodos, valor presente, valor futuro, cuotas, se entrará a la calculadora de la siguiente forma:

1. FIN (menú financiero).
2. VDT (valor del dinero en el tiempo).
3. OTRO: 1 = NO. P AÑO.
4. FIN (modo final).

N	%IA	V.A.	V.F.
180/365	1	1.790	¿?

$$VF = 1.798,81$$

- ¿Qué monto de dinero debe invertir la compañía “PQR” en un certificado de depósito a término que paga un interés efectivo anual del 8%, si desea recibir \$ 20.000.000 al cabo de tres trimestres (base 30/360)?



$$VP = \frac{VF}{(1+i)^n}$$

$$VP = \frac{20.000.000}{(1+8\%)^{\left(\frac{270}{360}\right)}}$$

$$VP = 18.878.269$$

Calculadora financiera

N	%IA	V.A.	V.F.
270/360	8	¿?	20.000.000

$$VF = 18.878.269$$

1.5.2. Período (n)

1.5.2.1. Conceptos teóricos

Se define como el tiempo que transcurre entre el día del valor presente de análisis y el día de ingreso del flujo futuro. Por lo general, las inversiones en Colombia se calculan con plazo en días con base en años a 365 días.

Para hallar n, se despeja de la ecuación de VF o VP:

$$VF = VP * (1+i)^n$$

$$\ln = \left(\frac{VF}{VP}\right) = n * \ln(1+i)$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{VF}{VP}\right)}{\ln(1+i)}$$

1.5.2.2. Conceptos prácticos

- Si un cliente desea obtener \$ 25.000.000, invirtiendo \$ 10.000.000 a una tasa efectiva anual del 12,5%. ¿Cuántos meses debe esperar para obtener el monto esperado?

$$VF = 25.000.000$$

$$VP = 10.000.000$$

$$I = 12,5\%$$

$$n = ?$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{VF}{VP}\right)}{\ln(1+i)}$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{25.000.000}{10.000.000}\right)}{\ln(1+12,5\%)}$$

$$n = 7,8 \text{ años} \times 12 \text{ (meses)} = 93,6 \text{ meses}$$

Calculadora financiera

N	%IA	V.A.	V.F.
¿?	12,5	-10.000.000	25.000.000

$$n = 7,8 \text{ años} \times 12 \text{ (meses)} = 93,6 \text{ meses}$$



2 Inversiones y presupuesto de capital

2.1. Valor presente neto (VPN)

2.1.1. Conceptos teóricos

El valor presente neto es una metodología que permite calcular el valor presente de un determinado número futuro de flujos de caja, provenientes de una inversión. Dicha metodología se basa en descontar mediante una determinada tasa todos los flujos de caja futuros del proyecto; a este valor se le resta la inversión inicial, de tal modo que el valor obtenido es el valor actual neto del proyecto.

Esta metodología es uno de los criterios económicos más utilizados en la valoración de proyectos de inversión a largo plazo. El valor presente neto puede ser mayor, igual o menor a cero. Cuando el valor es mayor, significa que la inversión producirá ganancias por encima de la rentabilidad exigida. Cuando el valor es menor, producirá pérdidas por debajo de la rentabilidad exigida. Cuando el valor es igual a cero, la inversión no producirá ni pérdidas ni ganancias⁶.

Ahora bien, la ecuación general que relaciona lo anteriormente expuesto es la siguiente:

$$VPN = \sum_{t=1}^n \frac{Vt}{(1+i)^t} - I_0$$

Donde:

Vt = flujos de caja en el período t .

I_0 = inversión inicial.

n = número de períodos considerados para la inversión.

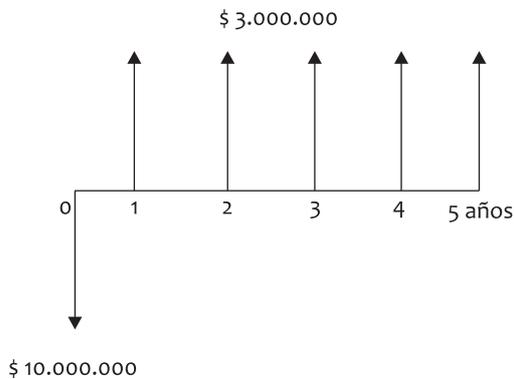
i = interés. Si el proyecto no tiene riesgo, se toma como referencia la tasa libre de riesgo. En otros casos, se puede utilizar el costo de oportunidad.

2.1.2. Conceptos prácticos

- A Laura le proponen invertir en un proyecto \$ 10.000.000 y le aseguran que en los próximos cinco años recibirá \$ 3.000.000 cada año. Si su tasa de oportunidad es del 20% anual, ¿le conviene hacer el negocio?

Para entender de mejor manera el anterior ejercicio, es necesario realizar el flujo de caja:

6 Basado en López Dumrauf, G. (2006). *Cálculo financiero aplicado, un enfoque profesional*, 2ª ed., Buenos Aires, Edit. La Ley.



De acuerdo con lo anterior, tenemos:

$$VPN = -10 + \frac{3M}{(1+20\%)^1} + \frac{3M}{(1+20\%)^2} + \frac{3M}{(1+20\%)^3} + \frac{3M}{(1+20\%)^4} + \frac{3M}{(1+20\%)^5}$$

$$VPN = -1.028.163,58$$

Dado que el valor presente neto (VPN) es menor a cero, se debe rechazar el proyecto.

De esta forma, para obtener el valor actual cuando los flujos de caja son de un **monto fijo** (ej.: bonos u otros títulos de renta fija), se deduce la siguiente fórmula:

$$VPN = -I + \frac{R(1 - (1+i)^{-n})}{i}$$

Donde:

R = flujo de caja constante.

I = valor del desembolso inicial de la inversión.

n = número de períodos considerados para la inversión.

i = interés. Si el proyecto no tiene riesgo, se toma como referencia la tasa

libre de riesgo. En otros casos, se utilizará el costo de oportunidad.

2.2. Tasa interna de retorno (TIR)

2.2.1. Conceptos teóricos

La tasa interna de retorno de una inversión es el promedio geométrico de los rendimientos futuros esperados de dicha inversión y que implica el supuesto de la reinversión. La TIR también se conceptualiza como la tasa de descuento con la que el valor presente neto (VPN) es igual a cero⁷.

La TIR se usa como un indicador de la rentabilidad de un proyecto, de forma tal que a mayor TIR, existe una mayor rentabilidad. La TIR tiene que ser comparada con una tasa mínima que puede ser el costo de oportunidad del inversionista o una tasa libre de riesgo.

De esta forma, para hallar la TIR se parte de la ecuación del VPN:

$$VPN = \sum_{T=1}^n \frac{Vt}{(1+i)^t} - I_0$$

Dado que la TIR es la tasa de interés con la que el VPN es igual a cero, se tiene:

$$0 = \sum_{T=1}^n \frac{Vt}{(1+TIR)^t} - I_0$$

Suponiendo que se va a hallar la TIR para una inversión con un T = 1:

7 Basado en Ehrhardt, Michael C. y Brigham, Eugene F. (2007). *Finanzas corporativas*, Cengage Learning Editores.



$$0 = \frac{Vt}{(1+TIR)^t} - I_0$$

$$i = \frac{Vt}{I_0} - 1$$

Con un $T = 2$:

$$0 = \frac{Vt}{(1+TIR)} + \frac{Vt2}{(1+TIR)^2} - I_0$$

Al haber dos flujos de caja, se forma una ecuación de segundo grado y sustituyendo $(1+i)$ por X , tenemos:

$$0 = \frac{Vt}{(x)} + \frac{Vt2}{(x)^2} - I_0$$

Simplificando:

$$0 = I_0 X^2 + VtX + Vt2$$

Finalmente, se resuelve por medio de la ecuación cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde: $A = I$; $B = Vt$; $C = Vt2$

Para hallar la TIR con un T mayor a dos, se recomienda utilizar un paquete computacional o una calculadora financiera.

2.2.2. Conceptos prácticos

- Se tienen dos proyectos:
El proyecto A pide una inversión inicial de 2 millones y después de dos años se va a recibir 2,8 millones.

El proyecto B pide una inversión inicial de 2 millones. Al cabo del primer año se recibirá 1,5 millones y al final del segundo año se recibirán 1,3 millones.

¿Cuál es el proyecto en el que será mejor invertir en términos de la TIR anual?

Proyecto A:

$$0 = \frac{Vt}{(1+TIR)^t} - I_0$$

$$0 = \frac{2,8M}{(1+TIR)^2} - 2M$$

$$0 = \left(\frac{2,8M}{2M} \right)^{1/2} - 1$$

$$TIR = 18,32\%$$

Proyecto B:

$$0 = \frac{1,5M}{(1+TIR)} + \frac{1,3M}{(1+TIR)^2} - 2M$$

$$0 = -2MX^2 + 1,5X + 1,3$$

$$0 = \frac{-1,5 \pm \sqrt{1,5^2 - 4(2)(1,3)}}{2(2)}$$

$$TIR = 26,4\%$$

Según el criterio de la tasa interna de retorno, el proyecto B sería la mejor opción para invertir, ya que, según los cálculos, proporciona una mayor TIR que el proyecto A.



3 Indicadores económicos

3.1. DTF

3.1.1. Conceptos teóricos

La DTF es una tasa de interés de captación que resulta del promedio ponderado de las tasas y los montos diarios de las captaciones a 90 días de los CDT de los bancos, corporaciones financieras y compañías de financiamiento comercial durante una semana que va de viernes a jueves y tiene vigencia de lunes a domingo. Esta tasa se denomina DTF, que significa tasa de depósitos a término fijo y es una tasa nominal trimestre anticipado. Es calculada por el Banco de la República con la información recolectada por la Superintendencia Financiera de Colombia.

De manera general, cuando una tasa indexada está sujeta a una tasa nominal como base (como la DTF que es una tasa nominal anual trimestre vencido, o TA), la tasa base y los puntos de ajuste se suman.

3.1.2. Aplicaciones con tasas indexadas

Nota: la conversión de tasas de interés se puede resolver por medio de la calculadora financiera, según lo muestra el apartado de

“Conceptos de valor del dinero en el tiempo” y conversión de tasas.

- El Banco Ahorros S. A., le concede un crédito a Laura a un costo de la DTF + 8%. Calcular el costo del crédito en términos efectivos anuales, si la DTF = 8,75% TA.

Dado que el DTF y los puntos de más están en tasa anticipada trimestral, se pueden sumar:

$$\text{COSTO DEL CRÉDITO} = 8,75\% + 8\% = 16,75\% \text{ TA}$$

El siguiente paso es convertir la tasa trimestre anticipado a efectiva anual:

$$\text{TEA} = \left(1 - \frac{\text{TINa}}{n}\right)^{-n} - 1$$

$$\text{TEA} = \left(1 - \frac{16,75\%}{4}\right)^{-4} - 1$$

$$\text{TEA} = 18,662\%$$

- Calcule la tasa nominal trimestre anticipado para un DTF + 3%. Donde la tasa DTF actual es de 4,35% efectivo anual.

Como la DTF se encuentra en modo efectivo, lo que se debe hacer primero



es convertirla a trimestre anticipado y después sí sumarle el *spread*.

$$TINa = \left(1 - (1 + TEA)^{-\frac{1}{n}}\right) * n$$

$$TINa = \left(1 - (1 + 4,35\%)^{-\frac{1}{4}}\right) * 4$$

Tasa nominal trimestre anticipado = 4,235%

Entonces tenemos que:

$$DTF + 3 = 4,235 + 3 = 7,235\% \text{ TA}$$

- Encuentre el interés efectivo anual que paga el emisor de un bono que tiene como tasa facial DTF + 3%. Suponga que la DTF para este caso es de 5% TA.

Para empezar, se suman las tasas trimestre anticipado:

$$5\% + 3\% = 8\% \text{ TA}$$

Luego se encuentra la tasa efectiva anual:

$$TEA = \left(1 - \frac{TINa}{n}\right)^{-n} - 1$$

$$TEA = \left(1 - \frac{8\%}{4}\right)^{-4} - 1$$

$$TEA = 8,417\%$$

3.2. UVR (unidad de valor real)

3.2.1. Generalidades

La UVR es una unidad de cuenta usada para calcular el costo de los créditos de vivienda que le permite a las entidades financieras mantener el poder adquisitivo del

dinero prestado⁸. “Esta unidad de cuenta se encarga de reflejar el poder adquisitivo de la moneda como función exclusiva de la variación del índice de precios al consumidor (IPC) certificada por el Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE)”.

Para su cálculo, se debe tener en cuenta la variación mensual del IPC certificada por el DANE para el mes calendario inmediatamente anterior al mes del inicio del período de cálculo. Lo anterior significa “que durante los meses en los cuales estacionalmente es alta la inflación, la UVR tendrá un reajuste mayor que el que se presenta en meses de baja inflación; por esta razón, anualizar la inflación de un mes determinado, presupone que esa va a ser la inflación total del año, con lo cual se distorsiona la inflación real que puede resultar en dicho período”⁹.

3.3. Índice de precios al consumidor (IPC)

3.3.1. Generalidades

El índice de precios al consumidor o IPC, es un número sobre el cual se acumulan a partir de un período base las variaciones promedio de los precios de los bienes y servicios consumidos por los hogares de un país, durante un período de tiempo.

De manera más compleja, se trata del indicador de la inflación de un país, y se

8 Banco de la República: <http://www.banrep.gov.co/es/uvr>.

9 Bancolombia. “Investigaciones económicas”. Consultado en <http://investigaciones.bancolombia.com>.



constituye en un indicador de carácter coyuntural sobre el comportamiento de los precios minoristas de un país¹⁰. Así pues, a la variación generada en la canasta del IPC en un determinado período de tiempo, se le denomina inflación.

Para el cálculo de tasas indexadas al IPC, se debe tener en cuenta que este indicador se usa como una tasa efectiva anual y su margen (puntos de más) también es expresado de igual manera. De esta forma, al ser dos tasas efectivas anuales, la adición de estas, indicador (o tasa base) y margen, se deben sumar por medio de ponderación, así:

$$TP = (1 + TB) * (1 + \text{margen}) - 1$$

Donde:

TP = tasa efectiva anual.

TB = tasa base o indicador, en este caso el IPC.

3.3.2. Aplicaciones con tasas indexadas

- El emisor de un bono paga cupones al IPC + 4,3% semestre vencido. Calcule el valor del primer cupón de intereses para un valor nominal de \$ 250 millones. El IPC es de 4,75% EA.

$$TP = (1 + TB) * (1 + \text{margen}) - 1$$

$$TP = (1 + 3,95\%) * (1 + 4,3\%) - 1$$

$$EA = 9,25\%$$

Como se tiene una tasa efectiva anual, hay que pasarla a semestre vencido, ya

¹⁰ DANE, Preguntas frecuentes. Consultado en <http://www.dane.gov.co/files/faqs>.

que esa es la forma en la que el bono paga el cupón.

$$TNS = \left((1 + 9,25\%)^{\frac{180}{360}} - 1 \right) * 2$$

$$\text{Tasa nominal semestral: } 9,045\%$$

Ahora, teniendo en cuenta los pagos del bono, el cupón se calcula así:

$$250.000.000 * 9,045\% / 2 = 11.306.812$$

- Determinar el interés periódico que paga la empresa “ABC” de un bono con tasa facial del IPC + 5,2%; la empresa reconoce los intereses de manera trimestral vencida. El valor del IPC es del 3,3% EA.

$$TP = (1 + TB) * (1 + \text{margen}) - 1$$

$$TP = (1 + 3,3\%) * (1 + 5,2\%) - 1$$

$$EA = 8,672\%$$

Dado que la empresa paga intereses de manera periódica trimestral vencida, la tasa EA se tiene que convertir:

$$TPS = \left((1 + 8,672\%)^{\frac{90}{360}} - 1 \right)$$

$$TPS = 2,101\%$$

3.4. IBR (indicador bancario de referencia)

3.4.1. Generalidades

El indicador bancario de referencia (IBR) y su esquema de formación que funciona desde comienzos del 2008, fue desarrollado por el sector privado y respaldado prin-



principalmente por el Banco de la República, con el objetivo de reflejar la liquidez del mercado monetario colombiano. El IBR es una tasa de interés de referencia de corto plazo denominada en pesos colombianos, que refleja el precio al que los bancos están dispuestos a ofrecer o a captar recursos en el mercado monetario.

Este indicador se calcula a partir de las tasas cotizadas por los participantes del sistema, las cuales corresponden al interés nominal al cual estas entidades son indiferentes entre prestar y recibir recursos para el respectivo plazo.

“Desde enero de 2008 y hasta el 31 de julio de 2012, el IBR fue calculado para los plazos de un (1) día y un (1) mes. A partir del primero (1°) de agosto de 2012 se implementó una nueva metodología de cálculo del IBR para el plazo de un (1) mes y se in-

trodujo un plazo adicional (3 meses). Adicionalmente, se realizaron modificaciones en la operatividad general del esquema. El IBR *overnight* continuó operando de la misma forma, es decir, los participantes se otorgan créditos interbancarios a la tasa mediana calculada por el Banco de la República.

Por su parte, el IBR para los plazos de un (1) mes y tres (3) meses está fundamentado en la cotización de *swaps* de tasa de interés (*overnight index swap - OIS*), en donde se intercambian los flujos de una tasa fija por una variable. La tasa fija para cada plazo es la mediana que resulte del proceso de cotización y es equivalente al IBR del plazo correspondiente, mientras que la tasa variable corresponde a la tasa de interés compuesta del IBR *overnight* durante el período de vigencia del *swap*”¹¹.

11 Banco de la República: www.banrep.gov.co.



4 Anualidades

Anualidad

“Una anualidad es una serie de pagos que cumple con las siguientes condiciones:

1. Todos los pagos son de igual valor.
2. Todos los pagos se hacen a iguales intervalos de tiempo.
3. A todos los pagos se les aplica la misma tasa de interés.
4. El número de pagos es igual al número de períodos.

Las condiciones anteriores conllevan diversas implicaciones, por ejemplo, la primera condición es indispensable para poder factorizar.

La segunda condición establece que los pagos deben hacerse a iguales intervalos de tiempo, esto es necesario para que los exponentes sean ascendentes o descendentes. Esta condición se cumple aún si los pagos son trimestrales, semestrales o anuales y, sin embargo, a la serie se le sigue denominando anualidad.

La tercera condición establece que todos los pagos deben ser llevados a valor presente o a valor final, según el caso, a la misma tasa de interés. Esto nos garantiza que todos los términos dentro del paréntesis

angular tienen la misma base; por lo tanto, la serie que está dentro del paréntesis angular forma una progresión aritmética. “La cuarta condición establece que el número de pagos debe ser igual al número de períodos”¹².

Las anualidades se clasifican en dos grupos de acuerdo con el tipo de pago: ciertas y contingentes. Las anualidades ciertas son aquellas en donde se conocen tanto la fecha de inicio como la de terminación y dichas fechas son fijas y conocidas con antelación. Por otro lado, las anualidades contingentes son aquellas en las que alguna de las dos fechas (inicio o terminación) no es conocida.

Los pagos de las anualidades pueden dividirse en vencidas, anticipadas y diferidas.

4.1. Vencidas

4.1.1. Conceptos teóricos

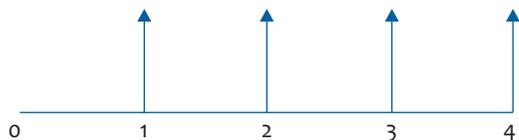
Anualidad vencida

Es aquella cuyos pagos iguales se efectúan al final de cada período; por ejemplo, el salario recibido por los trabajadores el cual

¹² Baca, Guillermo (1997). *Ingeniería económica*. Fondo Educativo Panamericano.



se entrega una vez se haya terminado el período de trabajo. El siguiente flujo de caja refleja la definición de anualidad vencida.



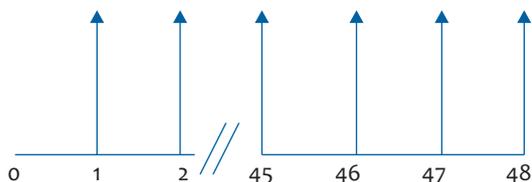
Anualidad vencida	
Valor presente	Valor futuro
$TP = Cuota * \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]$	$VF = Cuota * \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$

4.1.2. Conceptos prácticos

Para ilustrar de forma más clara, se plantea el siguiente ejemplo:

- María está terminando su maestría, y de regalo de grado sus papás le darán un automóvil. El banco “123” le ofrece una tasa de interés del 33% anual semestre vencido financiado a cuatro años. Si el automóvil de María cuesta \$ 76.500.000 y ella necesita financiar el 70% de este, ¿cuál es el valor de la cuota mensual si sus papás prefieren una cuota fija?

El flujo de caja sería el siguiente:



Dado que la tasa es diferente a la periodicidad con la que se pagará el crédito,

es necesario convertirla, por lo que la tasa periódica mensual equivalente sería:

$$\frac{0,33}{2} = 0,165$$

$$TPM = (1 + 0,165)^{\frac{30}{180}} - 1$$

$$TPM = 2,578\%$$

La tasa mensual será entonces de 2,578%. Al tener el valor de la tasa mensual, y utilizando la fórmula de valor presente de la anualidad vencida, es posible encontrar el valor de la cuota, por lo que reemplazando tenemos:

$$VP = Cuota * \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]$$

$$53.550.000 = Cuota * \left[\frac{1 - (1 + 2,578022\%)^{-48}}{2,578022\%} \right]$$

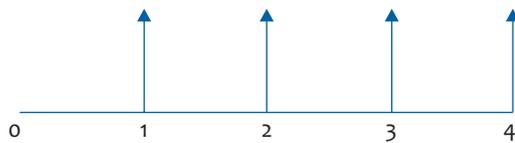
$$53.550.000 = Cuota * [27,357855]$$

4.2. Anticipadas

4.2.1. Conceptos teóricos

Anualidad anticipada

Es aquella cuyos pagos iguales se efectúan al inicio de cada período. Como ejemplos de anualidades anticipadas tenemos los créditos comerciales en los cuales se le manifiesta al cliente que no le cobrarán cuotas iniciales, pero en el mismo momento en que se haga la negociación se le exige el pago de la primera cuota del conjunto de cuotas que tiene que pagar. Tal y como se muestra a continuación:



Anualidad anticipada	
Valor presente	Valor futuro
$VP = Cuota * \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] * (1+i)$	$VF = Cuota * \left[\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i} \right]$

se usará la fórmula de valor futuro, teniendo en cuenta que las cuotas se efectúan anticipadamente o a principio de mes.

$$VF = Cuota * \left[\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i} \right]$$

$$VF = 1.000.000 * \left[\frac{(1+1,25\%)^{25} - (1+1,25\%)}{1,25\%} \right]$$

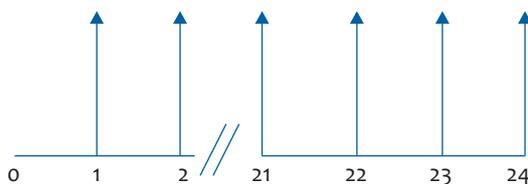
$$VF=28.135.435,08$$

4.2.2. Conceptos prácticos

Para ilustrar de forma más clara, se plantea un ejemplo:

- Catalina planea irse a Europa en dos años, por lo que decide suscribirse en un fondo de ahorro. Si decide ahorrar \$ 1 millón de forma mensual en el fondo el cual le ofrece una tasa de interés de 15% anual mensual vencido, ¿cuánto dinero tendrá al final de los dos años?

El flujo de caja sería el siguiente:



Como los depósitos serán mensuales, la tasa de interés periódica mensual equivalente es la siguiente:

$$\frac{15\%}{12} = 1,25\%$$

Por consiguiente, para calcular el valor que Catalina tendrá en 24 meses

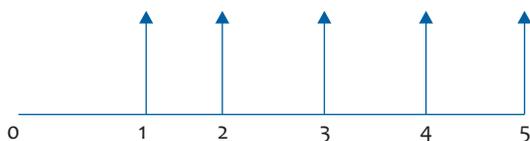
4.3. Diferidas

4.3.1. Conceptos teóricos

Anualidad diferida

Es aquella en la que el primer pago se realiza períodos después de efectuada la formalización de la operación financiera. Cuando la operación financiera queda formalizada, se le conoce como momento de convenio. El período que existe entre el momento en que se formaliza la operación y cuando se inicia la amortización de capital se conoce como período de gracia. Es importante aclarar que dicho período causa intereses, de manera que si dichos intereses no son pagados durante el período de gracia, serán capitalizados por lo que el capital se verá incrementado; si, por el contrario, los intereses se pagaron durante el período de gracia, el capital permanecerá inalterado.

Un ejemplo de dicha modalidad de anualidad, es un préstamo bancario, el cual se comienza a pagar meses después del desembolso.

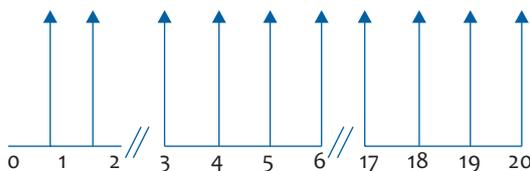


El cálculo de dicha anualidad se realiza de la misma forma que las anualidades vencidas, por lo que el valor presente de los flujos donde se empieza a amortizar la deuda, es calculado de la misma forma en la que se calculan para una anualidad vencida.

4.3.2. Conceptos prácticos

La cadena de supermercados “ABC” ofrece a sus clientes, por el mes de septiembre, la promoción “Compre hoy y empiece a pagar en 3 meses”, con la opción de financiar el valor total de la compra. Juan decide comprar un computador y financiarlo a 18 meses. La tasa de interés de “ABC” es del 2,5% mensual, por lo que Juan debe pagar COP \$ 250.000 mensuales. ¿Cuál será el valor del computador de Juan?

El flujo de caja sería el siguiente:



Dado que la primera cuota se paga hasta el mes número 3, se trae a valor presente 18 flujos a partir del tercer mes, hasta completar 18 períodos, utilizando la fórmula de anualidad vencida:

$$VP = 250.000 * \left[\frac{1 - (1 + 0,025)^{-18}}{0,025} \right]$$

$$VP = 3.588.340,90$$

Este es el valor del computador de Juan en el tercer mes. Ahora ese valor es necesario traerlo al mes 0, que fue donde Juan adquirió la promoción con el almacén “ABC”. Para ello, se utiliza la fórmula básica de valor futuro y se despeja el valor presente:

$$VF = VP * (1 + i)^n$$

$$VP = \frac{VF}{(1 + i)^n}$$

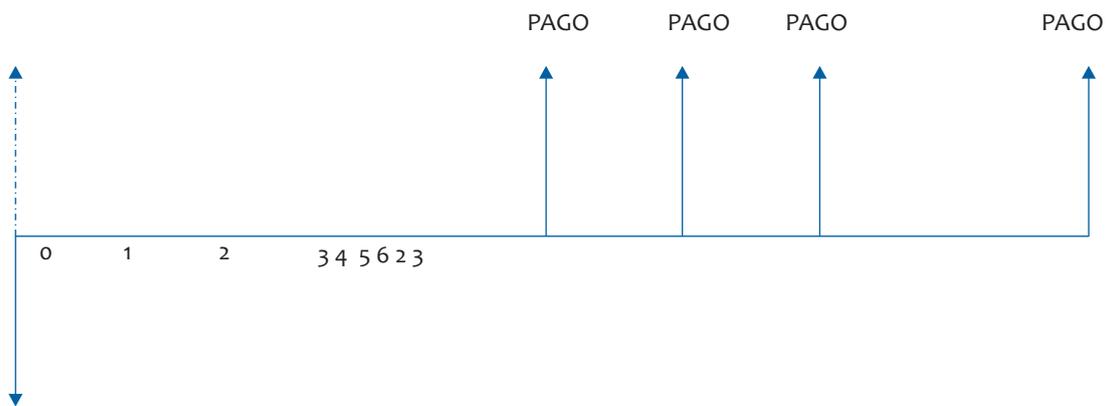
$$VP = \frac{3.588.340,90660}{(1 + 0,025)^3}$$

$$VP = 3.332.131,25$$

De forma tal que el precio del computador fue de \$ 3.332.131.

- Una empresa ha solicitado un préstamo de \$ 8.000.000 a un banco para ser cancelado en 20 pagos trimestrales. Asimismo, solicita que le sea permitido efectuar el primer pago exactamente al año de que se le conceda el préstamo. Calcular el valor del \$PAGO con una tasa del 36% continuo.

De acuerdo con lo mencionado, el primer pago se encuentra en el período 4, que corresponde al original del año 1. La anualidad debe comenzar en el punto 3 y terminar en el punto 23. Además, el valor presente deberá trasladarse al punto 0, la numeración superior corresponde a cada uno de los trimestres o pagos del ejercicio. Así pues, la ecuación de valor será:



$$8.000.000 = \text{PAGO} \frac{1 - (1,09)^{-20}}{0,09} * (1,09)^{-3}$$

Despejando, tenemos que el valor del pago será: PAGO = \$ 1.134.926,9.



Calle 72 No. 10-07 oficina 1202 / Bogotá - Colombia
PBX: (571) 607 1010 - Fax: (571) 347 0759
[www. amvcolombia.org.co](http://www.amvcolombia.org.co)