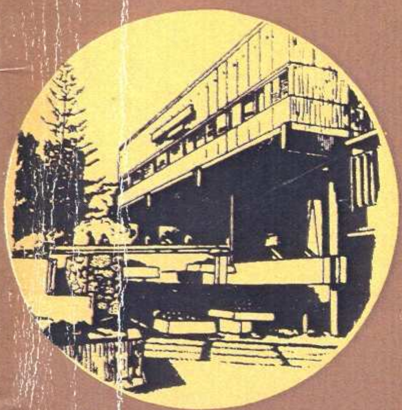
UNIVERSIDAD DE TARAPACA
VICERRECTORIA ACADEMICA
3er CONCURSO DE CREACION INTELECTUAL
AREA DOCENCIA

TRIGONOMETRIA Y GEOMETRÍA ANALITICA PARA LAS CARRERAS DE INGENIERIA



AUTORES
FREDDY CASTRO SANTANDER
MARLENE CISTERNAS RIVEROS
VERONICA REY MAS

ARICA - CHILE
1999

UNIVERSIDAD DE TARAPACA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

"TRIGONOMETRIA Y GEOMETRIA ANALITICA PARA LAS CARRERAS DE INGENIERIAS"

Sr. Freddy Castro Santander
Sra. Marlene Cisternas Riveros
Sra. Verónica Rey Mas

Arica – Chile
1999

SIMBOLOGIA UTILIZADA

$\overrightarrow{AB}$	*rayo AB=* A B
$\overleftrightarrow{AB}$	*recta AB :* A B
$\overline{AB}$	*segmento AB:* A B
[A B C]	*A,B,C puntos colineales y B se encuentra entre A y C.*
P1	P_1
/ /	*paralela*
$\perp$	*perpendicular*
$\odot_{or}$	*Circunferencia de centro O y radio r*
$\exists$	*Existe*
$\in$	*pertenece*
$\forall$	*Para todo*
$\Rightarrow$	*implica*
$\Leftrightarrow$	*si y sólo si*
Δ	*triángulo*

GEOMETRIA

Ahora vamos a desarrollar una de las partes más hermosas de la Matemática:
LA GEOMETRIA.

¡¡BIENVENIDO AL MUNDO DE LA GEOMETRIA!!

Etimológicamente la palabra **GEOMETRIA** proviene de dos voces griegas:

GEO = TIERRA.
METRON = MEDIDA.

Por lo tanto, etimológicamente significa: Medición de la tierra.

BREVE HISTORIA DE LA GEOMETRIA.

La historia dice que la Geometría se inicia en Egipto alrededor del año 3.000 A.C., por la necesidad de medir los terrenos que eran inundados por las crecidas del Nilo. También necesitaban conocimientos adecuados para construir las pirámides, monumentos, etc.

Aproximadamente 7 siglos A.C. pasó la geometría de los egipcios a los griegos, quienes le dan un gran impulso.

La geometría antígua era sólo **INTUITIVA**, se aceptaban los hechos sin necesidad de probarlos.

THALES de Mileto (600 A.C.) introduce la idea de **PROBAR** los hechos. Esta contribución da inicio a la **GEOMETRIA DEMOSTRATIVA.** Los métodos demostrativos inventados por los griegos fueron aplicados en la LOGICA, que es el estudio del razonamiento correcto.

La geometría actual, se conoce como :

"GEOMETRIA EUCLIDEANA",

porque se basa en el libro escrito por el sabio **EUCLIDES** (aproximadamente 280 A.C.), llamado **"ELEMENTOS"**, el cual sigue usándose como texto con muy pocas variaciones.

En el siglo XIX se inventaron otros sistemas geométricos, distintos a los de Euclides, estos sistemas dan inicio a las **GEOMETRIAS NO EUCLIDEANAS**. Uno de estos sistemas fue inventado por el matemático alemán **RIEMANN** (1854).

Los árabes conservan y transmiten a Occidente la ciencia griega. A principios del S. XV y XVI se inician en Occidente los estudios geométricos, en un sentido moderno.

En esta misma época: **DESCARTES** y **FERMAT**, establecen la **GEOMETRIA ANALITICA**.

ALFABETO GRIEGO

Letras		Nombres
Λ	α	$Alfa$
B	β	$Beta$
Γ	γ	$Gamma$
Δ	δ	$Delta$
E	ε	$Epsilon$
Z	ζ	$Zeta$
H	η	Eta
Θ	θ	$Theta$
I	ι	$Iota$
K	κ	$Kappa$
Λ	λ	$Lambda$
M	μ	My
N	ν	Ny
Ξ	ξ	Xi
O	o	$Omicron$
Π	π	Pi
P	ρ	Rho
Σ	σ	$\mathrm{Si}\,gma$
T	τ	Tau
Y	υ	$Ipsilon$
Φ	ϕ	Fi
X	χ	Ji
Ψ	ψ	Psi
Ω	ω	$Omega$

CONCEPTOS BASICOS.

La Geometría estudia las propiedades y relaciones de las figuras geométricas. Se sustenta en una sistematización rigurosa y lógica de principios y definiciones.

La Geometría se divide en dos grandes campos: Geometría Plana y Geometría del Espacio.

Construiremos una Geometría en base a: Definiciones, Teoremas (Proposiciones que para ser evidentes necesitan demostrarse. Constan de dos partes: Hipótesis: Suposición de una cosa, posible o imposible, para sacar de ella una consecuencia. Tesis: Lo que se quiere demostrar) y Postulados (Es una proposición que se admite sin demostración).

Para poder construir la Geometría se necesitan algunos elementos para comenzar y estos elementos son los Términos Geométricos No Definidos, son los más sencillos y fundamentales, como ser: Punto, Recta y Plano.

1. **DEF.: MEDIR**: Consiste en comparar dos magnitudes de la misma especie, considerando una de ellas como "Unidad de Medida". Al número resultante de esta comparación se le llamará Medida.

2. **DEF.: PUNTOS COLINEALES**: Dados los puntos, distintos: A, B, C, ... pertencientes al espacio, se dirán COLINEALES si existe una recta que los contenga.

3. **DEF.: ANGULO**: Figura formada por dos rayos que tienen un origen en común.
ANGULO AOB $= \angle AOB = \overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}$
Las figuras geométricas las nombraremos, principalmente, en sentido positivo.
$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ LADOS $\angle AOB$
O VERTICE $\angle AOB$
En caso contrario hablaremos de ángulos negativos.
Ej.: medida del ángulo ABC= $\measuredangle ABC = 45^O$ ó -315^O
El $\angle AOB$ divide al plano en 3 subconjuntos disjuntos:

INTERIOR $\angle AOB$, $\angle AOB$ y EXTERIOR $\angle AOB$

Una forma de generar el interior de un ángulo es la siguiente: Suponga que el rayo OA se hace girar alrededor del origen O, hasta que tome la posición OB. La revolución del rayo OA genera el interior del ángulo BOA.

No existe límite respecto al número de revoluciones que se pueden efectuar.

En este caso: El rayo OA se llama LADO INICIAL del $\angle BOA$.
El rayo OB se llama LADO TERMINAL del $\angle BOA$.
O se llama VERTICE del $\angle BOA$.

La abertura del ángulo puede ser medida por medio de la medida sexagesimal (Medida usual: grados, minutos y segundos) o por medio de la medida circular (radianes).

Medida sexagesimal:

4. DEF.: GRADO: 1 grado $= 1^o = \frac{1}{360}$ de revolución.
1 minuto $= 1' = \frac{1}{60}$ de grado.
1 segundo $= 1'' = \frac{1}{60}$ de minuto $= \frac{1}{3600}$ de grado.

Medida en radianes:

5. DEF.: RADIAN: Angulo del centro, subtendido por un arco de circunferencia, cuya longitud es igual a la del radio de la circunferencia.

Conversión: Ambos sistemas de medida están relacionados por las siguientes equivalencias:

$1^o = \frac{\pi}{180}$ radianes.
1 rad. $= \frac{180}{\pi}$ grados.

Para reducir: grados a radianes: Multiplicar los grados por $\frac{\pi}{180}$.
radianes a grados: Multiplicar los radianes por $\frac{180}{\pi}$.
En forma decimal se obtienen las siguientes aproximaciones:
$1^o = 0.0174532$ radianes.
1 rad. $= 57.29578^o$.

6. DEF.: BISECTRIZ DE UN ANGULO: Rayo que, partiendo del vértice, divide al ángulo en dos ángulos de igual medida.

7. DEF.: ANGULOS COMPLEMENTARIOS: Son dos o más ángulos, cuya suma de sus medidas es de 90^o.

8. DEF.: ANGULOS SUPLEMENTARIOS: Son dos o más ángulos, cuya suma de sus medidas es de 180^o.

9. DEF.: TRIANGULO: Es la unión de tres segmentos en forma consecutiva. (Es una figura plana cerrada).

TRIANGULO ABC $= \triangle ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$
Elementos del $\triangle$ABC:

A vértice del $\triangle$ABC.
B vértice del $\triangle$ABC.
C vértice del $\triangle$ABC.
$\overline{AB}$ lado del $\triangle$ABC.
$\overline{BC}$ lado del $\triangle$ABC.
$\overline{CA}$ lado del $\triangle$ABC.
$\angle$CAB ángulo interior del $\triangle$ABC.
$\angle$ABC ángulo interior del $\triangle$ABC.
$\angle$BCA ángulo interior del $\triangle$ABC.

Angulo exterior de un triángulo: Es aquel formado por un lado del triángulo y la prolongación de otro lado.

Sean: D$\in$(prolongación $\overline{CA}$) tal que [CAD].
E$\in$(prolongación $\overline{AB}$) tal que [ABE].
F$\in$(prolongación $\overline{BC}$) tal que [BCF].
$\angle$BAD ángulo exterior $\triangle$ABC.
$\angle$CBE ángulo exterior $\triangle$ABC.
$\angle$ACF ángulo exterior $\triangle$ABC.

SEGMENTOS NOTABLES EN UN TRIANGULO.

10. DEF.: ALTURA: Es el segmento perpendicular trazado desde un vértice a la recta que contiene al lado opuesto.

11. DEF.: ORTOCENTRO: Es el punto de intersección de las rectas que contienen a las alturas.

12. DEF.: BISECTRIZ: Es el segmento que divide al ángulo interior del triángulo en dos partes iguales.

13. DEF.: INCENTRO: Es el punto de intersección de las bisectrices. Este punto tiene la característica de ser el centro de una circunferencia inscrita en el triángulo.

14. DEF.: MEDIANA: Segmento que une el vértice con el punto medio del lado opuesto.

15. DEF.: BARICENTRO: Es el punto de intersección de las medianas. Este punto tiene la característica de encontrarse a $\frac{1}{3}$ del lado, respecto de la longitud de la mediana.

16. DEF.: MEDIATRIZ: Es el segmento perpendicular en el punto medio de un lado.

17. DEF.: CIRCUNCENTRO: Es el punto de intersección de las rectas que contienen a las mediatrices. Este punto tiene la particularidad de ser el centro de una circunferencia que circunscribe al triángulo.

TRIGONOMETRIA

Esta parte la vamos a orientar, principalmente, al cálculo de razones trigonométricas.

RAZONES TRIGONOMETRICAS

Las razones trigonométricas, con las cuales trabajaremos, son seis:

NOMBRE	*ABREVIATURA*
SENO	*sen*
COSENO	cos
TANGENTE	*tg*
COTANGENTE	*ctg*
SECANTE	sec
COSECANTE	*co* sec

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE UN ANGULO AGUDO:

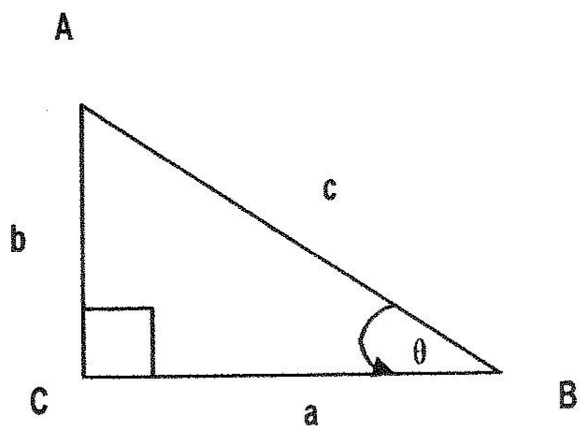


Fig. 1

DADO : $\triangle ABC$; $\measuredangle\, C$ RECTO y $\measuredangle B = \theta$

DEFINICIONES:

sen	$= \dfrac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa}$	$= \dfrac{b}{c}$
$\cos$	$= \dfrac{Cateto\ Adyacente}{Hipotenusa}$	$= \dfrac{a}{c}$
tg	$= \dfrac{Cateto\ Opuesto}{Cateto\ Adyacente}$	$= \dfrac{b}{a}$
ctg	$= \dfrac{Cateto\ Adyacente}{Cateto\ Opuesto}$	$= \dfrac{a}{b}$
$\sec$	$= \dfrac{Hipotenusa}{Cateto\ Adyacente}$	$= \dfrac{c}{a}$
$\cos ec$	$= \dfrac{Hipotenusa}{Cateto\ Opuesto}$	$= \dfrac{c}{b}$

OBSERVACION: Según estas definiciones se tiene:

1.- Las razones seno y coseno de un ángulo no pueden ser mayores que 1.

2.- Las razones secante y cosecante de un ángulo no pueden ser menores que 1.

EJERCICIOS:

1.- Graficar un triángulo XYZ, donde:

$\measuredangle\ Z\ recto$
$\measuredangle\ X\ = \alpha$
$\measuredangle Y\ = \beta$

Determinar: a) $sen\ \alpha$ b) $\cos\ \alpha$ c) $tg\ \alpha$
d) $ctg\ \beta$ e) $\sec\ \beta$ f) $co\sec\ \beta$

2.- Graficar un triángulo PQR, donde:

$\measuredangle P\ recto$
$\measuredangle Q\ = \alpha,\ PQ = 2,\ RQ = 5$

Determinar: a) $\measuredangle R$ b) $sen\ \alpha$ c) $co\sec\ \alpha$
d) $\cos\ \measuredangle R$ e) $\sec\ \measuredangle R$ f) $tg(90^o - \alpha)$

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE UN ANGULO DE 60°:

Realiza la siguiente experiencia:

1.- Dibuja un triángulo ABC equilátero, con lado de longitud 1u.

2.- Dibuja un punto D perteneciente al lado $\overline{CA}$ de tal manera que $\overline{BD}$ es una altura del triángulo ABC.

Bajo las condiciones dadas, determinar:

a) $\measuredangle BCD$
b) $\measuredangle CDB$
c) $\measuredangle DBC$
d) CD
e) BD
f) $sen\ 60^o$
g) $\cos 60^o$
h) $tg\ 60^o$
i) $ctg\ 60^o$
j) $\sec\ 60^o$
k) $\cos ec\ \ 60^o$

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE UNA ANGULO DE 30°:

Aprovechemos el triángulo de la experiencia anterior.
Determina: a) El $\triangle BCD$ b) $\measuredangle DBC$ c) $\measuredangle CDB$ d) $\measuredangle BCD$
e) Longitud del cateto opuesto al ángulo de 30^o
f) Longitud del cateto adyacente al ángulo de 30^o
g) $sen\, 30^o$ h) $\cos 30^o$ i) $tg\ 30^o$ j) $ctg\ 30^o$
k) $\sec 30^o$ l) cosec 30^o

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE UN ANGULO DE 45^o:

Realizar la siguiente experiencia:

1. Dibujar un triángulo ABC, isósceles, con ángulo recto en B y catetos de longitud 1u.
2. Dibujar un punto D perteneciente al lado $\overline{CA}$ de tal manera que $\overline{BD}$ es una altura del triángulo ABC.

Bajo las condiciones dadas, determinar:

a) $\measuredangle CAB$ b) $\measuredangle BCA$ c) $\measuredangle ABC$ d) CA e) DA
f) El $\triangle\ ABD$ g) $\measuredangle ABD$ h) $\measuredangle BDA$ i) $\measuredangle DAB$
j) BD k) $sen\, 45^o$ l) $\cos 45^o$ m) $tg\, 45^o$
n) $ctg\ 45^o$ o) $\sec\ 45^o$ p) $co\sec\ 45^o$

EJEMPLOS:

1.- Completar el siguiente cuadro:

Angulo/Razon	sen	$\cos$	tg	ctg	$\sec$	$\cos ec$
30^o						
45^o						
60^o						

2.- Encontrar X si:

$$tg^2 45^o - \cos^2 60^o = x sen 45^o\ \cos 45^o\ tg 60^o$$

SOLUCION: $1 - \frac{1}{4} = x\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3}$

$$\frac{3}{4} = x\frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow x = \frac{3\bullet 2}{4\bullet\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3.- Resolver 2 $sen^2\theta - 5sen\theta + 2 = 0$

<u>SOLUCION</u>: $2sen^2\theta - 5sen\theta + 2 = 0$
$(2sen\theta - 1)(sen\theta - 2) = 0$
$sen\theta = \frac{1}{2} \Longrightarrow \theta = 30^o$
$sen\,\theta = 2$ no hay solución

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

Existen muchas relaciones entre las razones trigonométricas, que son verdaderas para todos los valores que puedan tomar los argumentos. Las principales identidades fundamentales son:

RELACIONES RECIPROCAS:

1) $sen\theta = \dfrac{1}{\cos ec\ \theta}$ 2) $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$ 3) $tg\,\theta = \dfrac{1}{ctg\,\theta}$

4) $tg\,\theta = \frac{sen\,\theta}{\cos\theta}$ 5) $ctg\,\theta = \frac{\cos\theta}{sen\,\theta}$

RELACIONES PITAGORICAS:

6) $sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 7) $tg^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

8) $1 + ctg^2\theta = \cos ec^2\theta$

(Todas estas relaciones son demostrables, ¡demúestralas!)

Expresar cada una de las razones trigonométricas en términos de las otras razones trigonométricas.

Ej.: Expresar $sen\theta$ en términos de: $\cos\,\theta$, $tg\,\theta$, $ctg\,\theta$, $\sec\,\theta$ y $\cos ec\,\theta$

Solución:

a) $sen\,\theta = \sqrt{1-\cos^2\,\theta}$

b) $sen\,\theta = (\cos\,\theta)(tg\,\theta) = \dfrac{tg\,\theta}{\sec\,\theta} = \dfrac{tg\,\theta}{\sqrt{1+tg^2\,\theta}}$

c) $sen\,\theta = \dfrac{1}{\cos ec\,\theta} = \dfrac{1}{\sqrt{1+ctg^2\,\theta}}$

d) $sen\,\theta = \dfrac{\sqrt{\sec^2\,\theta-1}}{\sec\,\theta}$

e) $sen\,\theta = \dfrac{1}{\cos ec\,\theta}$

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE ANGULOS COMPLEMENTARIOS

$$\begin{array}{ll} RAZON & CO-RAZON \\ seno & \cos eno \\ \tan gente & co\tan gente \\ \sec ante & co\sec ante \end{array}$$

TEO.: La razón trigonométrica de un ángulo es igual a la co-razón de su ángulo complementario.

Si: $\alpha + \beta = 90^o(\alpha \;\; y \;\; \beta$ Complementarios)

Entonces: $sen\,\alpha = \cos\beta$

$$\begin{aligned} \cos\,\alpha &= sen\,\beta \\ tg\;\;\alpha &= ctg\,\beta \\ ctg\;\alpha &= tg\;\beta \\ \sec\;\alpha &= \cos ec\;\beta \\ \cos ec\,\alpha &= \sec\;\beta \end{aligned}$$

Ej.: Expresar: $sen\,30^o$ mediante la razón cos

IDENTIDADES

Dadas las siguientes relaciones: f(t) y g(t), si f(t) puede ser transformada en g(t) o viceversa, entonces diremos que f(t)=g(t) es una identidad.

Para demostrar una identidad, debe alterarse sólo uno de los miembros hasta que tome la misma forma del otro miembro, el cual no debe ser alterado.

Las transformaciones se realizan empleando las identidades fundamentales:

Ej.: Demostrar la siguiente identidad: $\dfrac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha} = 1 - 2sen^2\alpha$

Demostración: Desarrollando el primer miembro, se tiene:

$$\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=\frac{1-\frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\frac{\cos^2\alpha-sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha+sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\cos^2\alpha-sen^2\alpha=$$

$$=(1-sen^2\alpha)-sen^2\alpha=1-2\,sen^2\alpha$$

Desarrollando por el segundo miembro y expresando todo en función de tangente, se tiene:

$$\begin{aligned}1-2\,sen^2\alpha &= 1-2\frac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = \frac{1+tg^2\alpha-2\,tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}\\ &= \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}\end{aligned}$$

RECOMENDACIONES PARA DEMOSTRAR IDENTIDADES:

a) Recordar las identidades fundamentales.

b) Cualquier razón trigonométrica puede ser expresada mediante otra razón trigonométrica.

c) El miembro a desarrollar debe expresarse en función de las razones trigonométricas del otro miembro.

d) Se debe tratar de descomponer en factores las expresiones que sean posible.

e) En lo posible se debe tratar de evitar el uso de radicales.

f) Antes de iniciar el trabajo, se deben ver las posibles simplificaciones.

EJERCICIOS:

I.- Demostrar, si es posible, las siguientes identidades:

1.- $\sec^2\alpha - \cos ec^2\alpha = tg^2\alpha - \cot g^2\alpha$

2.- $\dfrac{\cos\beta}{1 - sen\beta} = \dfrac{1 + sen\beta}{\cos\beta}$

3.- $sen^4 y - \cos^4 y = 2sen^2 y - 1$

4.- $\dfrac{tg^2\delta + 1}{2\cos(\delta) - sen(90^o - \delta)} = \sec^3\delta$

5.- $\dfrac{\cot g\,\varepsilon - \cos\varepsilon}{\cos^3\varepsilon} = \dfrac{\cos ec\,\varepsilon}{1 + sen\,\varepsilon}$

6.- $(a\,sen\,\omega + b\cos\omega)^2 + (b\,sen\,\omega - a\cos\omega)^2 = a^2 + b^2$

7.- $\dfrac{\cos^2(90^o - \alpha)}{1 - \cos\alpha} = 1 + sen(90^o - \alpha)$

II.- Resolver para $x \epsilon IC$

1.- $4\,sen\,x = 3\cos ec\,x$ Resp.: $x = \frac{\pi}{3}$

2.- $\sec^2 x = 3tg^2 x - 1$ Resp.: $x = \frac{\pi}{4}$

3.- $2\,sen\,x\,tg\,x + 1 = tg\,x + 2\,sen\,x$ Resp.: $x = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right\}$

4.- $tg\,x - \cot g\,x = \cos ec\,x$ Resp.: $x = \frac{\pi}{3}$

III.- Si $\sec\alpha = \frac{13}{5}$,hallar el valor de $\dfrac{2sen\alpha - 3\cos\alpha}{4sen\alpha - 9\cos\alpha}$ Resp.: 3

IV.- Si $sen\,A = \frac{m}{n}$,probar que $\sqrt{n^2 - m^2}\,tgA = m$

ANGULOS DE ELEVACION Y DE DEPRESION

Sea $\overleftrightarrow{AB}$ una recta horizontal y $\overleftrightarrow{AC}$ otra recta en el mismo plano.

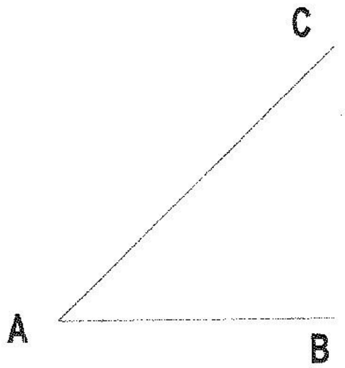


Fig. 2

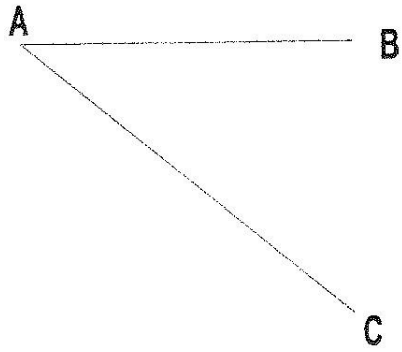


Fig. 3

En 1) : Como C está por encima de la horizontal, el ángulo A se llama ángulo de elevación del objeto C visto desde A.

En 2) : Como C está por debajo de la horizontal, el ángulo A se llama ángulo de depresión del objeto C visto desde A.

EJEMPLOS:

1.- El ángulo de elevación del remate de una chimenea, a una distancia de 90m, es 30°. Hallar su altura.

Solución:

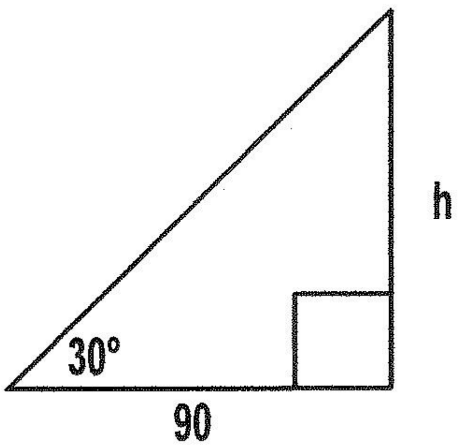


Fig. 4

$\operatorname{tg} 30^o = \frac{h}{90} \Longrightarrow h = 90 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 30\sqrt{3}m$

2.- Desde el puesto de vigía de un barco que tiene 48 m de altura se observa que el ángulo de depresión de un bote es de 30°. Hallar la distancia del bote al barco.

Solución:

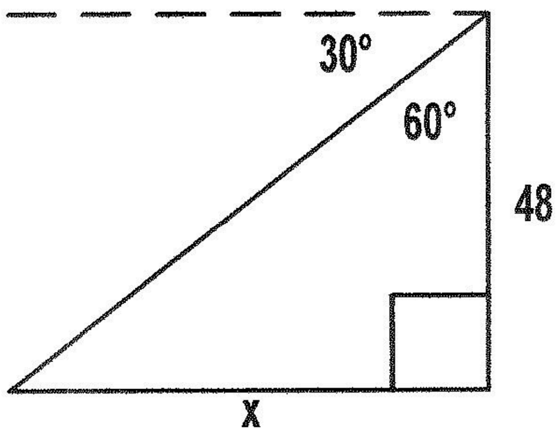


Fig. 5

$tg\,60^o = \frac{x}{48} \Longrightarrow x = 48 \cdot \sqrt{3}m$

3.- El angulo de elevación de la parte superior de una torre es de 30^o, acercándose 100m se encuentra que el ángulo de elevación es de 60^o. Hallar la altura de la torre.

Solución:

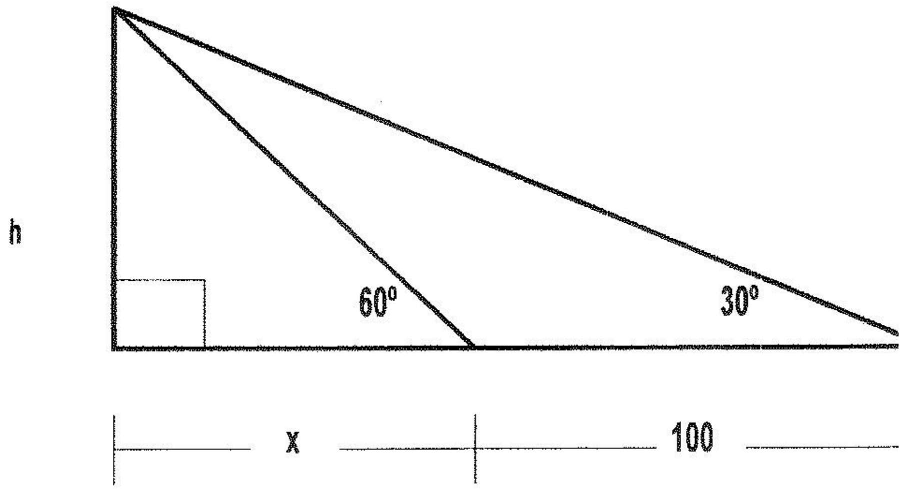


Fig. 6

$tg\,30^o = \frac{h}{x+100} \Longrightarrow h = \frac{1}{\sqrt{3}}(x+100)$

$tg\,60^o = \frac{h}{x} \Longrightarrow \sqrt{3}\;x = h$
$\therefore \sqrt{3}x = \frac{1}{\sqrt{3}}(x+100) \Longrightarrow 3x = x+100 \Longrightarrow 2x = 100 \Longrightarrow x = 50m$
$\therefore h = 50\sqrt{3}m$

EJERCICIOS:

1. Hallar el ángulo de elevación del sol cuando la sombra de un poste de 6m de altura es de $2\sqrt{3}m$ de largo.
   Resp.: $4\sqrt{3}$

2.- Un asta de bandera está enclavada verticalmente en lo alto de un edificio. A 12m de distancia los ángulos de elevación de la punta del asta y de la parte superior del edificio son de 60^o y 30^o, respectivamente. Hallar la longitud del asta. Resp.: $8\sqrt{3}$

3. Los ángulos de elevación de la punta de una torre desde dos lugares que están en la dirección este de ella, separados por una distancia de 60m, son 45^o y 30^o. Hallar la altura de la torre. Resp.: $30(\sqrt{3}+1)$

4. Desde lo alto de un acantilado de 45m de altura, los ángulos de depresión de dos botes que están en el mar en la dirección norte del observador, son 30^o y 15^o, respectivamente ¿Qué distancia hay entre los botes?.

Resp.: $\frac{45(1-\sqrt{3}tg\ 15^o)}{tg\ 15^o}$

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE UN ANGULO CUALQUIERA

ANGULO EN POSICION PRINCIPAL O NORMAL: Consideremos un sistema de coordenadas tal que su origen sea el vértice de un ángulo y uno de sus lados coincida con el eje positivo de las X. El lado del ángulo sobre el eje de las X se llama lado inicial y el otro lado final. Esta posición de un ángulo en un sistema coordenado bidimensional se llama posición principal o normal.

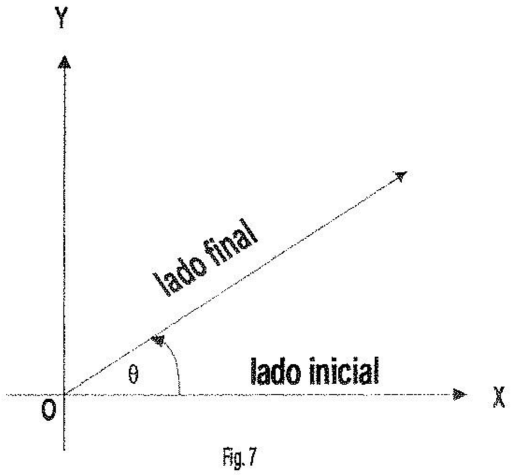


Fig. 7

Se dice que un ángulo pertenece al primer cuadrante (I.C.) cuando estando en posición normal, su lado final cae dentro del primer cuadrante. Ejemplo:60^o,-330^o,25^o,etc.

Una definición similar rige para los ángulos pertenecientes a los demás cuadrantes.

Ejemplo: 100^o, $-200^o \in IIC$
$-119^o \in IIIC$
$-10^o, 710^o \in IVC$

ANGULOS COTERMINALES: Son aquellos que, estando en posición normal, tiene lados finales coincidentes.

Ejemplo: 30^o y -330^o, -10^o y 710^o, etc.

ANGULOS CUADRANGULARES: Son aquellos que, estando en posición normal, su lado final coincide con el eje X o con el eje Y.

Son ángulos cuadrangulares: 0^o, 90^o, 180^o, 270^o y todos sus coterminales.

Supongamos que α sea un ángulo no cuadrangular y en posición normal, y P(x,y) un punto cualquiera diferente del origen, en el lado final del ángulo. Las seis razones trigonométricas de α se definen en términos de la abscisa, la ordenada y el radio de P, como sigue:

$$\begin{array}{lllll} sen\alpha & = & \frac{ordenada}{radio} = \frac{y}{r} & \qquad \cos ec\alpha & = & \frac{radio}{ordenada} = \frac{r}{y} \\ \cos\alpha & = & \frac{abscisa}{radio} = \frac{x}{r} & \qquad \sec\alpha & = & \frac{radio}{abscisa} = \frac{r}{x} \\ tg\alpha & = & \frac{ordenada}{abscisa} = \frac{y}{x} & \qquad ctg\alpha & = & \frac{abscisa}{ordenada} = \frac{x}{y} \end{array}$$

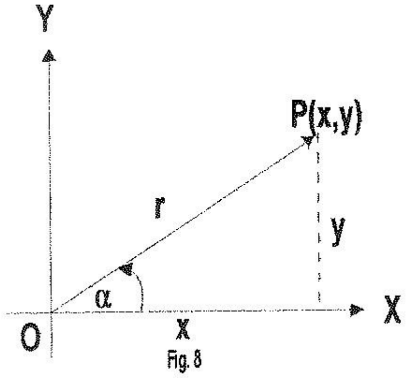


Fig. 8

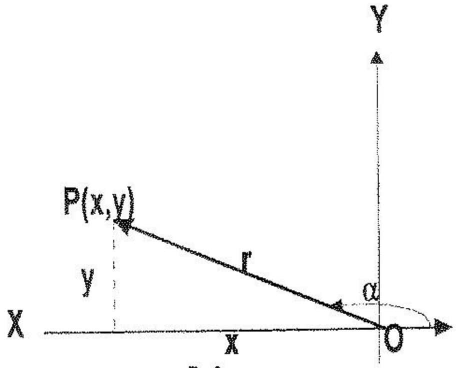


Fig. 9

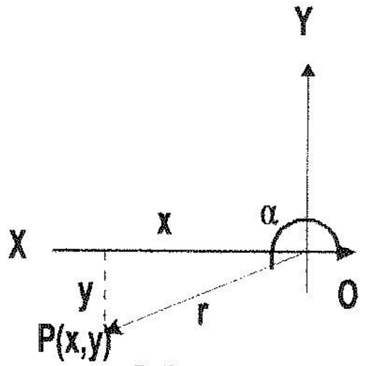


Fig. 10

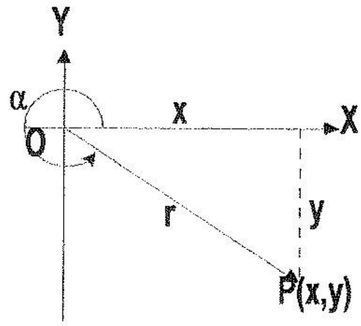


Fig. 11

De estas definiciones se obtienen las siguientes identidades fundamentales:

$sen\alpha \cos ec\,\alpha = 1 \qquad tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} \qquad sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\cos\alpha \sec\alpha = 1 \qquad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{sen\alpha} \qquad 1 + tg^2\alpha = \sec^2\alpha$

$tg\alpha\, ctg\,\alpha = 1 \qquad 1 + ctg^2\alpha = \cos ec^2\alpha$

VARIACION DE SIGNO DE LAS RELACIONES TRIGONOMETRICAS

Sea α un ángulo cualquiera en posición normal y P un punto cualquiera de su lado final. Sea $OP = r, r > 0$. Luego el signo de los valores de las relaciones trigonométricas de α depende del signo de las coordenadas de P.

Si α es un ángulo del primer cuadrante, P tiene ambas coordenadas positivas, luego todas las relaciones trigonométricas de α son positivas.

Haciendo un análisis análogo, se puede determinar que si $\alpha \in IIC, (x < 0, y > 0)$, serán positivas seno y cosecante; las demás negativas. Si $\alpha \in IIIC, (x < 0, y < 0)$, serán positivas tg y ctg las demás negativas. Si $\alpha \in IVC, (x > 0,\ y\ < 0)$, serán positivas cos y sec y las demás negativas.

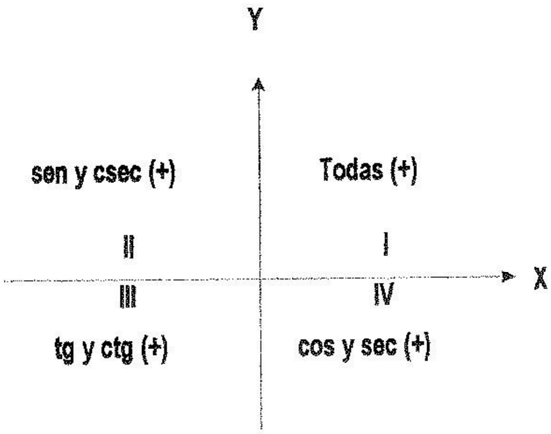


Fig. 12

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE ANGULOS CUADRANGULARES

El lado terminal de estos ángulos coincide con uno de los ejes coordenados. Luego se tiene:

1.- Para 0° : $r = r, x = r, y = 0$

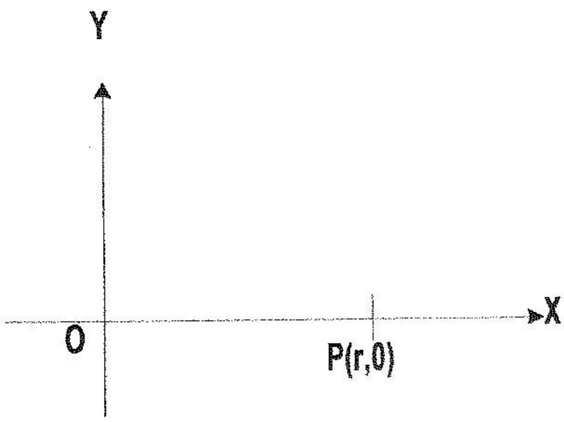


Fig. 13

$sen\,0^{\circ} = \frac{y}{r} = 0$	$\cos ec\,0^{\circ}$ no está def.
$\cos\,0^{\circ} = \frac{x}{r} = 1$	$\sec\,0^{\circ} = 1$
$tg\,0^{\circ} = \frac{y}{x} = 0$	$ctg\,0^{\circ}$ no está def.

2.- Para 90^o: $r = r, x = 0, y = r$

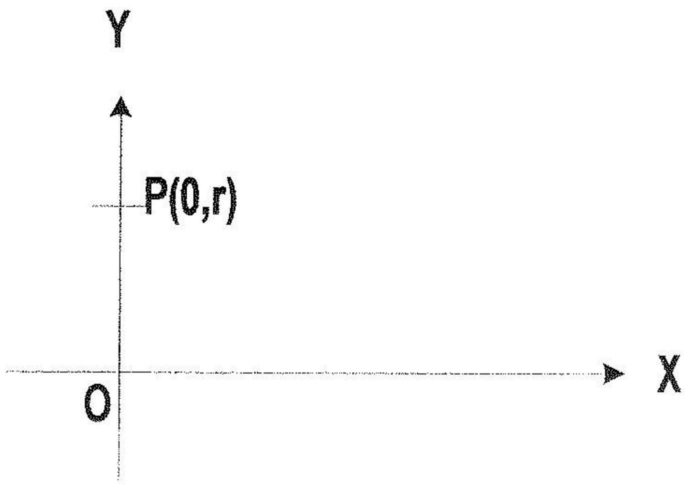


Fig. 14

$sen 90^o = \frac{y}{r} = 1$	$\cos ec\, 90^o = 1$
$\cos\, 90^o = 0$	$\sec\, 90^o$ no está def.
$tg\, 90^o$no está def.	$ctg\, 90^o = 0$

3.- Para 180^o:$r = r, x = -r, y = 0$

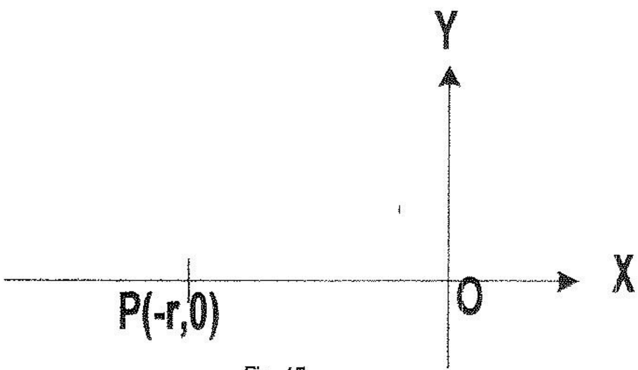


Fig. 15

$sen\, 180^o = 0$	$co\sec\, 180^o$ no está def.
$\cos\, 180^o = -1$	$\sec\, 180^o = -1$
$tg\, 180^o = 0$	$ctg\, 180^o$ no está def.

4.- Para 270^o:$r = r, x = 0, y = -r$

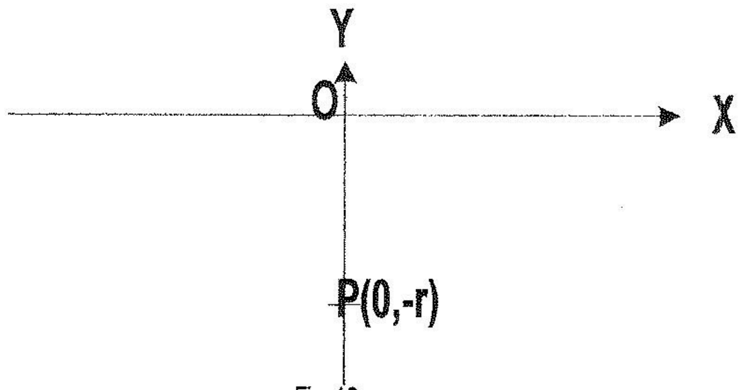


Fig. 16

$sen 270^o = -1$	$co\sec 270^o = -1$
$\cos\ 270^o = 0$	$\sec\ 270^o$ no está def.
$tg\, 270^o$ no está def.	$ctg\, 270^o = 0$

EJEMPLOS:

1.- Hallar el valor de: $tg\,\pi\cos\frac{3\pi}{2} + \sec 2\pi - \cos ec\frac{3\pi}{2} = A$

Solución: A$=0{\cdot}0 + 1 - (-1) = 2$

2.- ¿De qué cuadrante debe ser θ si $\cos\theta$ es negativo?

Solución: Como $\cos\theta < 0 \Longrightarrow \theta \in II\,ó\ III\ C$

3.- Encontrar los valores de $\cos\alpha$ y $tg\,\alpha$ si $sen\alpha = \frac{8}{17}$ y $\alpha \in IC$

Solución:

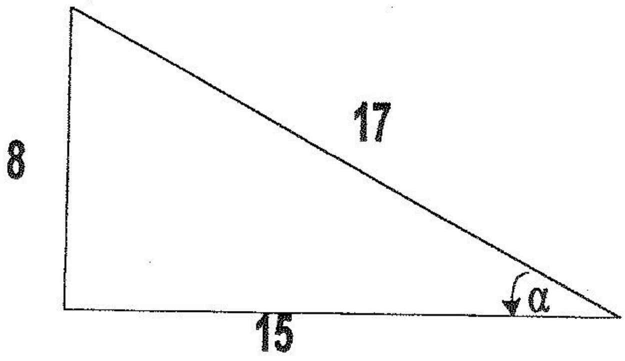


Fig. 17

$\therefore \cos\alpha = \frac{15}{17} \quad y \quad tg\alpha = \frac{8}{15}$

4.- Si $3\,ctg\alpha = 2$,hallar el valor de $\dfrac{10sen\alpha - 6\cos\alpha}{4sen\alpha + 3\cos\alpha}$

Solución: $\quad ctg\alpha = \frac{2}{3} > 0 \Longrightarrow \alpha \in I \text{ ó } III\,C$

a) Si $\alpha \in IC$

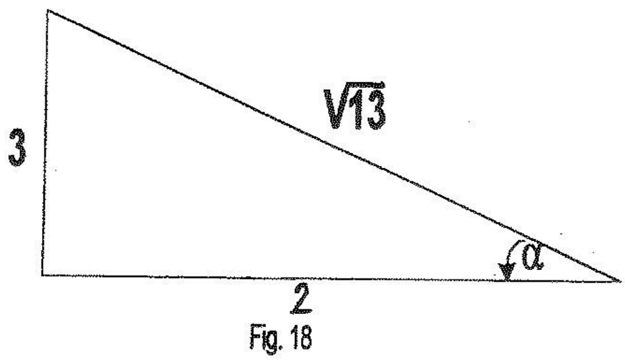


Fig. 18

$$\frac{10sen\alpha - 6\cos\alpha}{4sen\alpha + 3\cos\alpha} = \frac{10\frac{3}{\sqrt{13}} - 6\frac{2}{\sqrt{13}}}{4\frac{3}{\sqrt{13}} + 3\frac{2}{\sqrt{13}}} = \frac{18}{18} = 1$$

b) Si $\alpha \in IIIC$

$$A = \frac{10\frac{-3}{\sqrt{13}} - 6\frac{-2}{\sqrt{13}}}{4\frac{-3}{\sqrt{13}} + 3\frac{-2}{\sqrt{13}}} = \frac{-18}{-18} = 1$$

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE ANGULOS NEGATIVOS

Sea $\alpha \in IC$ y P(x,y) un punto de su lado final, OP= r. Luego $-\alpha \in IVC$. Sea $P_1(x_1, y_1)$ un punto sobre su lado final tal que $OP = OP_1 = r$

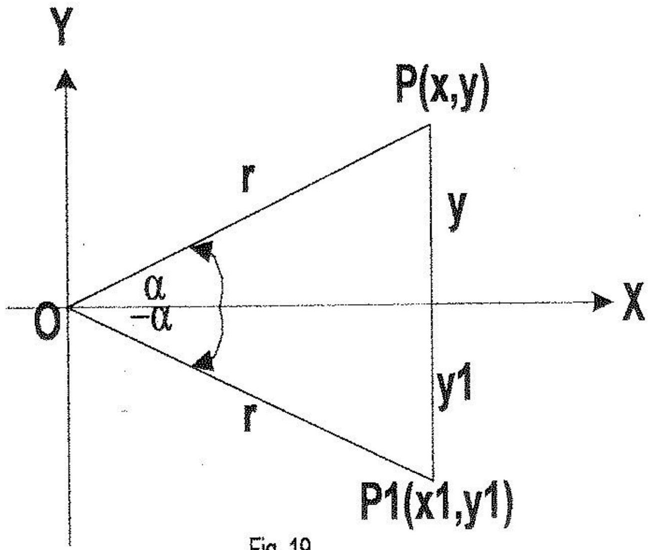


Fig. 19

$\therefore r = r, \quad x = x_1, \;\; y = -y_1$

$\therefore sen(-\alpha) = \frac{y_1}{r} = \dfrac{-y}{r} = -sen\alpha$

$\cos(-\alpha) = \frac{x_1}{r} = \dfrac{x}{r} = \cos\alpha$

$tg(-\alpha) = \frac{y_1}{x_1} = \dfrac{-y}{x} = -tg\alpha$

$\sec(-\alpha) = \sec\alpha$

$\cos ec(-\alpha) = -\cos ec\alpha$

$ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$

EJERCICIOS:

1.- Calcular el valor de: $\dfrac{tg^2 30^o + sen^2 30^o - sen^2 45^o}{tg^2 60^o + ctg^2 45^o - ctg^2 30^o + \cos^2 60^o}$

Resp.: $\frac{1}{15}$

2.- Determinar los valores de $\cos\alpha$ y $tg\alpha$, si $sen\alpha = \frac{8}{17}, \alpha \in IIC$

3.- Si $senA - \cos A = 0, A \in IC$, hallar $\cos ecA$

Resp.: $\cos ecA = \sqrt{2}$

4.- Determinar el valor de: $\dfrac{sen(-30^o) + \cos 90^o \cos ec(-45^o)}{tg^2(-60^o) + 2}$

Resp.: $\frac{-(1+2\sqrt{2})}{10}$

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE ANGULOS COMPUESTOS

1.- COSENO DE LA DIFERENCIA

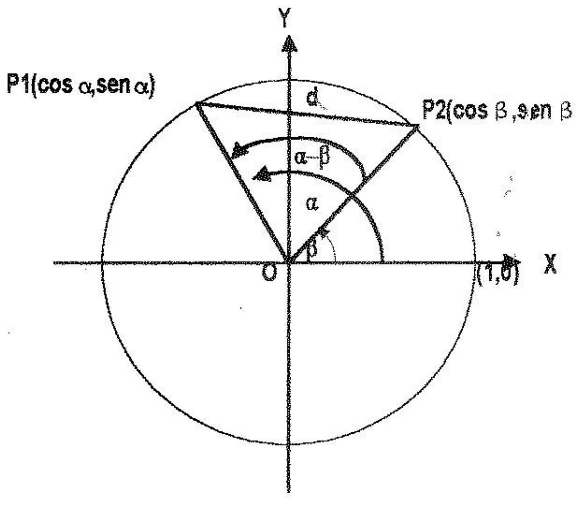


Fig. 20

$$d^2 = \overline{P_1P_2}^2 = (\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (sen\beta - sen\alpha)^2$$
$$= \cos^2\beta - 2\cos\beta\cos\alpha + \cos^2\alpha + sen^2\beta - 2sen\beta sen\alpha + sen^2\alpha$$
$$= 2 - 2\cos\beta\cos\alpha - 2sen\beta sen\alpha$$

Se hace girar el ΔOP_1P_2 en el sentido del reloj tal que P_2 coincida con el punto (1,0). Luego $\alpha - \beta$ queda en posición normal y las nuevas coordenadas de P_1 son $P_1(\cos(\alpha - \beta), sen(\alpha - \beta))$

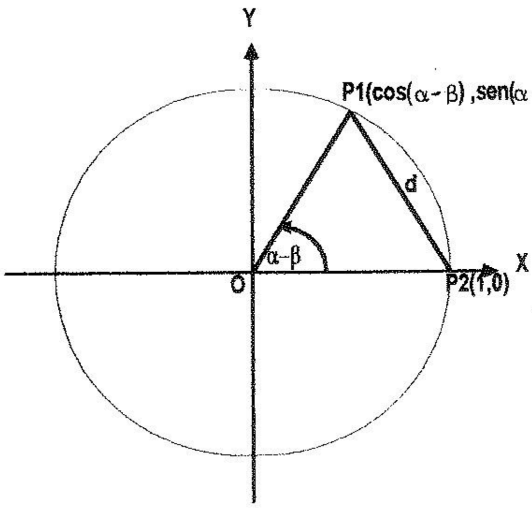


Fig. 21

$$d^2 = [1 - \cos(\alpha - \beta)]^2 + [0 - sen(\alpha - \beta)]^2$$

$$= 1 - 2\cos(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) + sen^2(\alpha - \beta)$$

$$= 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$$

$$\therefore 2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 2 - 2\cos\beta\cos\alpha - 2sen\beta sen\alpha$$

$$\therefore \boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + sen\alpha\ sen\beta}$$

2.- COSENO DE LA SUMA

Como la fórmula anterior es una identidad, reemplazando β por $-\beta$, se obtiene:

$$\cos(\alpha-(-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + sen\alpha\, sen(-\beta)$$

$$\therefore \boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - sen\alpha\, sen\beta}$$

3.- SENO DE LA SUMA

$$\begin{aligned} sen(\alpha+\beta) &= \cos\left[90^o-(\alpha+\beta)\right] = \cos\left[(90^o-\alpha)-\beta\right] \\ &= \cos(90^o-\alpha)\cos\beta + sen(90^o-\alpha)sen\beta \\ &= sen\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot sen\beta \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{sen(\alpha+\beta) = sen\alpha\cos\beta + \cos\alpha\, sen\beta}$$

4.- SENO DE LA DIFERENCIA

En la fórmula anterior reemplazando β por $-\beta$, se obtiene:

$$\boxed{sen(\alpha-\beta) = sen\alpha\cos\beta - sen\beta\cos\alpha}$$

5.- TANGENTE DE LA SUMA

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{sen(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{sen\alpha\cdot\cos\beta + sen\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta - sen\alpha sen\beta} \;/ : \cos\alpha\cos\beta$$

$$\boxed{tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\cdot tg\beta}}$$

6.- TANGENTE DE LA DIFERENCIA

En la fórmula anterior se reemplaza β por -β,

$$\therefore \boxed{tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}}$$

EJEMPLOS:

1.- Determinar el valor de tg75^o

SOLUCION:

$$\begin{aligned} tg75^o &= tg(45^o+30^o)\\ &= \frac{tg45^o+tg30^o}{1-tg45^o\cdot tg30^o}\\ &= \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\\ &= \frac{9+6\sqrt{3}+3}{9-3} = \frac{12+6\sqrt{3}}{6} = 2+\sqrt{3} \end{aligned}$$

2.- Demostrar que: $\dfrac{sen(\alpha-\beta)}{sen\alpha\, sen\beta}=ctg\beta-ctg\alpha$

DEMOSTRACION:

$$\begin{aligned} \frac{sen(\alpha-\beta)}{sen\alpha\cdot sen\beta} &= \frac{sen\alpha\cos\beta-sen\beta\cos\alpha}{sen\,\alpha\cdot sen\beta}\\ &= \frac{sen\alpha\cdot\cos\beta}{sen\alpha\cdot sen\beta}-\frac{sen\beta\cos\alpha}{sen\alpha\, sen\beta}\\ &= ctg\beta-ctg\alpha \end{aligned}$$

3.- Demostrar que cos 75^o - sen 75^o = sen(-45^o)

DEMOSTRACION:

$$\cos 75^o - sen75^o = \cos(45^o + 30^o) - sen(45^o + 30^o)$$

$$= \cos 45^o \cos 30^o - sen\,45^o\, sen\,30^o - sen45^o \cos 30^o - sen30^o \cos 45^o$$

$$= \tfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \tfrac{-2\sqrt{2}}{4} = -\tfrac{\sqrt{2}}{2} = sen(-45^o)$$

EJERCICIOS:

1.- Si $tg\alpha = \frac{12}{5}, \sec\alpha < 0, \sec\beta = \frac{25}{7}, sen\,\beta < 0$, determinar el valor de:

$sen(\alpha + \beta), tg(\beta - \alpha), \cos ec\,[90^o - (\alpha + \beta)]$
Resp.:$tg(\beta - \alpha) = \frac{36}{323}$

2.- Demostrar que:

$$\frac{1 + ctg(\alpha + \beta)ctg\alpha}{ctg\alpha - ctg(\alpha + \beta)} = ctg\beta$$

3.- Si $tg\alpha = \frac{4}{3}$ y $\beta = 45^o$ hallar $tg(\alpha - \beta)$ Resp.:$\frac{1}{7}$

FORMULAS DE REDUCCION

Sea α un ángulo cualquiera:

1.- Para $(90^o + \alpha)$ ó $(\frac{\pi}{2} + \alpha)$

$sen(90^o + \alpha) = sen90^o \cos\alpha + \cos 90^o sen\alpha = \cos\alpha$
$\cos(90^o + \alpha) = \cos 90^o \cos\alpha - sen90^o sen\alpha = -sen\alpha$

$$tg(90^o+\alpha)=\frac{sen(90^o+\alpha)}{\cos(90^o+\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{-sen\alpha}=-ctg\alpha$$
$$ctg(90^o+\alpha)=\frac{1}{tg(90^o+\alpha)}=\frac{1}{-ctg\alpha}=-tg\alpha$$
$$\sec(90^o+\alpha)=\frac{1}{\cos(90^o+\alpha)}=\frac{1}{-sen\alpha}=-co\sec\alpha$$
$$\cos ec(90^o+\alpha)=\frac{1}{sen(90^o+\alpha)}=\frac{1}{\cos\alpha}=\sec\alpha$$

Haciendo un desarrollo análogo se obtiene que:

2.- Para $(180^o-\alpha)$ ó $(\pi-\alpha)$

$$sen(180^o-\alpha)=sen180^o\cdot\cos\alpha-\cos180^o\,sen\alpha=sen\alpha$$
$$\cos(180^o-\alpha)=\cos180^o\cos\alpha+sen180^o sen\alpha=-\cos\alpha$$
$$tg(180^o-\alpha)=\frac{sen(180^o-\alpha)}{\cos(180^o-\alpha)}=\frac{sen\alpha}{-\cos\alpha}=-tg\alpha$$

3.- Para $(180^o+\alpha)$ ó $(\pi+\alpha)$

$$sen\,(180^o+\alpha)=sen180^o\cdot\cos\alpha+sen\alpha\cdot\cos180^o=-sen\alpha$$
$$\cos(180^o+\alpha)=\cos180^o\cos\alpha-sen180^o sen\alpha=-\cos$$
$$tg(180^o+\alpha)=tg\alpha$$

4.- Para $(270^o-\alpha)$ ó $(\frac{3\pi}{2}-\alpha)$

$$sen(270^o-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\cos(270^o-\alpha)=-sen\alpha$$
$$tg(270^o-\alpha)=ctg\,\alpha$$

5.- Para $(270^o+\alpha)$ ó $(\frac{3\pi}{2}+\alpha)$

$$sen(270^o+\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\cos(270^o+\alpha)=sen\,\alpha$$
$$tg(270^o+\alpha)=ctg\,\alpha$$

¡¡Obtenga todas las razones trigonométricas restantes!!

EJEMPLOS:

1.- Determinar el valor de: $\cos 0^o \cdot sen\, 450^o \cdot tg(-135^o)$

SOLUCION:

$$\begin{aligned} \cos 0^o \cdot sen\,450^o \cdot tg(-135^o) &= 1 \cdot sen(360^o + 90)\,[-tg(90^o + 45^o)] \\ &= -sen\,90^o\,[-ctg45^o] \\ &= 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

2.- Resolver $\forall \theta \in [0, 360^o]$

$sen\,\theta = -\frac{1}{2}$

SOLUCION: $sen\,\theta < 0 \Longrightarrow \theta \in III \quad ó \;\; IVC$
Se sabe que $sen\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \therefore$
a) Si $\theta \in IIIC$:

$\therefore sen(\pi + \theta) = -sen\theta = -\frac{1}{2}$
$\therefore \theta = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

b) Si $\theta \in IVC : sen(2\pi - \theta) = -sen\theta = -\frac{1}{2}$
$\therefore \;\; \theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

EJERCICIOS:

1.- Expresar $sen(-1.583)^o$ en función de un ángulo agudo.

Resp.: $-\cos 53^o$

2.- Determinar el valor de $ctg\frac{23\pi}{4}$. Resp.:-1

3.- Resolver para $\theta \in [0, 2\pi)$

a) $\cos^2\theta = \frac{1}{4}$ Resp.:$\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$
b) $\sec\theta = -2$ Resp.:ϕ
c) $\frac{tg^2\theta - 1}{sen\theta} = 0$ Resp.:$\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

4.- Expresar en su forma más simple :

$$\sec(180^o + \alpha) + ctg(90^o + \alpha) \cdot tg(180^o + \alpha)$$

5.- Demostrar:

$$\frac{sen(180^o - \alpha)}{tg(180^o + \alpha)} \cdot \frac{ctg(90^o - \alpha)}{tg(90^o + \alpha)} \cdot \frac{\cos(360^o - \alpha)}{sen(-\alpha)} = sen\,\alpha$$

6.- Completar el siguiente cuadro, usando el ángulo de referencia:

RAZON / *ANGULO*	*sen*	cos	*tg*	*ctg*	sec	*co*sec
120^o						
135^o						
150^o						
210^o						
225^o						
240^o						
300^o						
315^o						
330^o						

RAZONES TRIGONOMETRICAS DEL ANGULO DOBLE

Si en las identidades correspondientes a $sen(\alpha+\beta), \cos(\alpha+\beta)$ y $tg(\alpha+\beta)$
se hace $\alpha = \beta$,se obtiene:

1.- $sen2\alpha = sen(\alpha+\alpha) = sen\,\alpha\,\cos\alpha + sen\alpha\cos\alpha$

$\therefore\ sen2\alpha = 2sen\alpha\,\cos\alpha$

2.- $\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cdot\cos\alpha - sen\alpha\cdot sen\alpha$

$$\therefore \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$$

$$= 1 - 2sen^2\alpha$$

$$= 2\cos^2\alpha - 1$$

3.- $tg2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$ ¡Demostrar!

RAZONES TRIGONOMETRICAS DEL ANGULO MEDIO

1.- Se sabe que $\cos 2\alpha = 1 - 2sen^2\alpha \Longrightarrow$

$sen\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$

haciendo $\alpha = \frac{\theta}{2}$,se obtiene que:

$sen\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$. El signo se determina según el cuadrante al cual pertenezca de $\frac{\theta}{2}$.

2.- Se sabe que $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Longrightarrow$

$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$

haciendo $\alpha = \frac{\theta}{2}$,se obtiene que:

$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$. El signo se determina según el cuadrante al cual pertenezca de $\frac{\theta}{2}$.

3.- Demostrar $tg\frac{\theta}{2} = \frac{sen\theta}{1+\cos\theta}$

EJEMPLOS:

1.- Hallar el valor de $sen120^o$

Solución: $$\begin{aligned} sen120^o = sen(2\cdot 60^o) &= 2sen60^o\cos 60^o \\ &= 2\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

2.- Si $ctg\alpha = \frac{-12}{5}, \alpha \in IVC$. Determinar $sen2\alpha, \cos 2\alpha \quad y \quad tg(\pi + 2\alpha)$

SOLUCION:

Si $ctg\alpha = \frac{-12}{5}, \alpha \in IVC \Longrightarrow sen\alpha = \frac{-5}{13}, \cos\alpha = \frac{12}{13}, tg\alpha = \frac{-5}{12}$

$\therefore \quad sen\,2\alpha = 2sen\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{-5}{13}\cdot\frac{12}{13} = \frac{-120}{169}$

$\cos 2\alpha = 1 - 2sen^2\alpha = 1 - 2(\frac{-5}{13})^2 = 1 - \frac{50}{169} = \frac{119}{169}$

$$tg(\pi + 2\alpha) = tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{2\cdot(\frac{-5}{12})}{1-(\frac{-5}{12})^2} = \frac{\frac{-10}{12}}{\frac{119}{144}} = \frac{-120}{119}$$

3.- Demostrar que: $\dfrac{sen2A}{1-\cos 2A} = ctgA$

Demostración:

$$\frac{sen2A}{1-\cos 2A} = \frac{2senA\cos A}{1-(1-2sen^2A)} = \frac{2senA\cos A}{1-1+2sen^2A} = \frac{2senA\cos A}{2sen^2A}$$

$$= \frac{\cos A}{senA} = ctgA$$

4.- Demostrar que: $tg\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{sen\theta}$

Demostración: $tg\frac{\theta}{2} = \dfrac{sen\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$ amplificando por $2sen\frac{\theta}{2}$ se obtiene:

$$= \frac{2sen^2\frac{\theta}{2}}{2sen\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{1-\cos\theta}{sen\theta}$$

5.- Si $\sec\alpha = -\frac{17}{15}, \alpha \in IIIC$. Determinar $sen\frac{\alpha}{2}$ $\quad y \quad$ $\cos(3\pi + \frac{\alpha}{2})$

<u>SOLUCION:</u> $\alpha \in III\ C \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} \in II\ C$

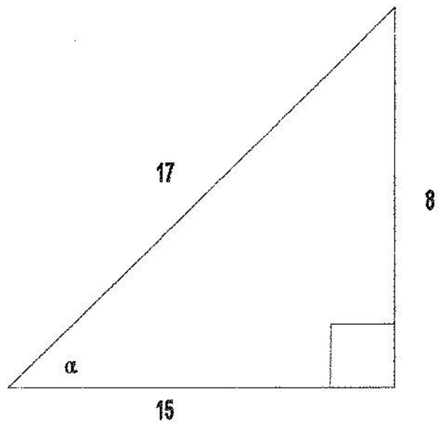


Fig. 22

a) $sen\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{15}{17}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

b) $\cos(3\pi + \frac{\alpha}{2}) = \cos(\pi + \frac{\alpha}{2}) = -\cos\frac{\alpha}{2} = -(-\sqrt{\frac{1-\frac{15}{17}}{2}}) = \frac{1}{\sqrt{17}}$

<u>EJERCICIOS:</u>

1.- Demostrar que:

a) $tg\alpha = \dfrac{sen2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

b) $tg(\frac{\alpha}{2} + 45^o) - tg\alpha = \sec\alpha$

2.- Determinar el valor de: $tg22,5^o; sen15^o$ Resp.:$\sqrt{2} - 1;$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

3.- Si $ctg\alpha = -\frac{3}{4}, \alpha \in II\ C, \cos ec\beta = \frac{13}{12}, \beta \in II\ C$

Determinar el valor de: $\dfrac{sen2\alpha \cdot \cos\beta - tg\frac{\alpha}{2} \cdot \sec\beta}{\cos^2\frac{\beta}{2} - \frac{3}{13}}$

Resp.:$\frac{458}{5}$

TRANSFORMACION DE PRODUCTOS A SUMAS Y VICEVERSA

I.- TRANSFORMACION DE PRODUCTOS A SUMAS:

Se tiene que:

$$1)\quad \left.\begin{array}{l} sen(\alpha+\beta) = sen\alpha\cos\beta + sen\beta\cos\alpha \\ sen(\alpha-\beta) = sen\alpha\cos\beta - sen\beta\cos\alpha \end{array}\right|$$

sumando miembro a miembro, se tiene:

$$sen(\alpha+\beta) + sen(\alpha-\beta) = 2sen\alpha\cos\beta$$

$$\therefore\ \boxed{sen\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}\left[sen(\alpha+\beta) + sen(\alpha-\beta)\right]}$$

Análogamente, restando se obtiene:

$$\boxed{sen\beta\cos\alpha = \tfrac{1}{2}\left[sen(\alpha+\beta) - sen(\alpha-\beta)\right]}$$

$$2)\quad \left.\begin{array}{l} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - sen\alpha\ sen\beta \\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + sen\alpha\ sen\beta \end{array}\right|$$ sumando miembro a miembro,se tiene:

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

$$\therefore\ \boxed{\cos\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]}$$

Análogamente, restando se tiene:

$$\boxed{sen\alpha\ sen\beta = \tfrac{-1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right]}$$

II.- TRANSFORMACION DE SUMAS EN PRODUCTOS

Si en las fórmulas anteriores se hace:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha+\beta = x \\ \\ \alpha-\beta = y \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{2}(x+y) \\ \\ \beta = \frac{1}{2}(x-y) \end{array}$$

Sustituyendo se obtiene:

$$
\begin{aligned}
1) sen x + sen y &= 2\ sen\tfrac{1}{2}(x+y)\cos\tfrac{1}{2}(x-y)\\
2) sen x - sen y &= 2\cos\tfrac{1}{2}(x+y)\ sen\tfrac{1}{2}(x-y)\\
3) \cos x + \cos y &= 2\cos\tfrac{1}{2}(x+y)\cos\tfrac{1}{2}(x-y)\\
4) \cos x - \cos y &= -2 sen\tfrac{1}{2}(x+y) sen\tfrac{1}{2}(x-y)
\end{aligned}
$$

EJERCICIOS:

1.- Demostrar que: $\dfrac{\cos 7\delta - \cos 5\delta}{sen 5\delta - sen 7\delta} = tg 6\delta$

Demostración:

$$
\begin{aligned}
\frac{\cos 7\delta - \cos 5\delta}{sen 5\delta - sen 7\delta} &= \frac{-2 sen 6\delta \cdot sen\delta}{2\cos 6\delta \cdot sen(-\delta)}\\
&= \frac{-sen 6\delta \cdot sen\delta}{-\cos 6\delta \cdot sen\delta} = tg 6\delta
\end{aligned}
$$

2.- Demostrar que: $\cos 3\alpha + sen 2\alpha - sen 4\alpha = (1 - 2 sen\alpha)\cos 3\alpha$

Demostración:

$$
\begin{aligned}
\cos 3\alpha + (sen 2\alpha - sen 4\alpha) &= \cos 3\alpha + 2\cos 3\alpha \cdot sen(-\alpha)\\
&= \cos 3\alpha - 2\cos 3\alpha \cdot sen\alpha\\
&= (1 - 2 sen\alpha)\cos 3\alpha
\end{aligned}
$$

3.- Demostrar que: $\dfrac{1 + sen\mu - \cos\mu}{1 + sen\mu + \cos\mu} = tg\frac{\mu}{2}$

Demostración:

$$
\frac{1 + sen\mu - \cos\mu}{1 + sen\mu + \cos\mu} = \frac{\frac{1-\cos\mu}{2} + \frac{sen\mu}{2}}{\frac{1+\cos\mu}{2} + \frac{sen\mu}{2}} = \frac{sen^2\frac{\mu}{2} + sen\frac{\mu}{2}\cos\frac{\mu}{2}}{\cos^2\frac{\mu}{2} + sen\frac{\mu}{2} \cdot \cos\frac{\mu}{2}} =
$$

$$
= \frac{sen\frac{\mu}{2}(sen\frac{\mu}{2} + \cos\frac{\mu}{2})}{\cos\frac{\mu}{2}(\cos\frac{\mu}{2} + sen\frac{\mu}{2})} = tg\frac{\mu}{2}
$$

EJERCICIOS:

1.- Demostrar que: $\dfrac{sen2\alpha + sen5\alpha - sen\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 5\alpha + \cos\alpha} = tg2\alpha$

2.- Demostrar que: $sen20^o \cdot sen40^o \cdot sen\,80^o = \frac{1}{8}\sqrt{3}$

3.- Demostrar que: $sen^2 5\alpha - sen^2 2\alpha = sen7\alpha \cdot sen3\alpha$

OBSERVACION:

Considerando que las razones trigonométricas cumplen con la definición de función, en adelante hablaremos de funciones trigonométricas en vez de razones trigonométricas.

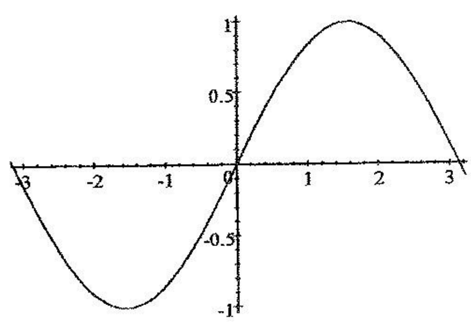
GRAFICA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Variaciones de las funciones trigonométricas:

$Función \diagdown \theta$	0^o a 90^o	90^o a 180^o	180^o a 270^o	270^o a 360^o
$sen\ \theta$	0 a 1	1 a 0	0 a -1	-1 a 0
$\cos\ \theta$	1 a 0	0 a -1	-1 a 0	0 a 1
$tg\ \theta$	0 a $+\infty$	$-\infty$ a 0	0 a $+\infty$	$-\infty$ a 0
$ctg\,\theta$	$+\infty$ a 0	0 a $-\infty$	$+\infty$ a 0	0 a $-\infty$
$\sec\ \theta$	1 a $+\infty$	$-\infty$ a -1	-1 a $-\infty$	$+\infty$ a 1
$\cos ec\,\theta$	$+\infty$ a 1	1 a $+\infty$	$-\infty$ a -1	-1 a $-\infty$

Observación: En los gráficos trigonométricas siguientes, el Eje X está medido considerando $\pi = 3,14$

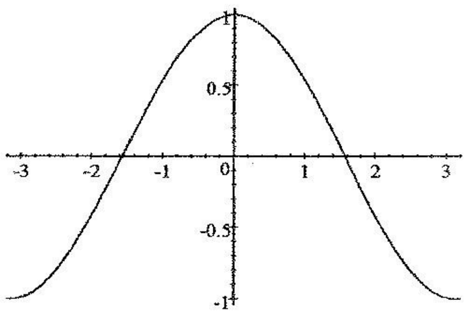
GRAFICA DE SENO: $(-\infty, +\infty) \longrightarrow [-1, 1]\ \ /\ f(x) = senx$



Seno (Fig. 23)

Se trazan dos paralelas al Eje X, una por 1 y la otra por -1. Después de 2π la gráfica se repite, entonces se dice que el período del seno es 2π.

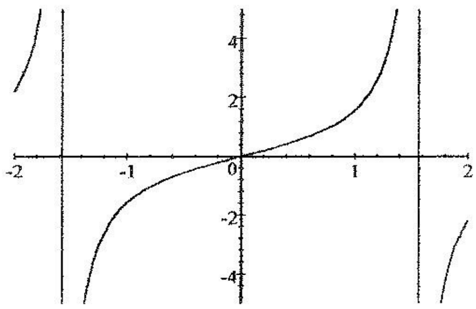
GRAFICA DE COSENO: $(-\infty,+\infty) \longrightarrow [-1,1]$ / $f(x)=\cos x$



Coseno (Fig. 24)

Se trazan dos paralelas al Eje X, una por 1 y la otra por -1. Después de $\frac{3\pi}{2}$ la gráfica se repite, como de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{3\pi}{2}$ hay 2π, entonces se dice que el período del coseno es 2π.

GRAFICA DE TANGENTE : R$-\left\{\frac{(2K+1)}{2}\pi, k \in Z\right\} \longrightarrow (-\infty,+\infty)/$
$f(x)=tgx$

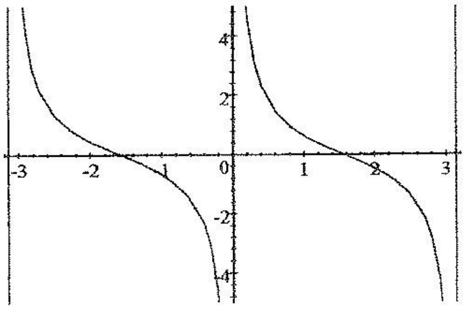


Tangente (Fig. 25)

Se trazan tres paralelas al Eje Y, una por $-\frac{\pi}{2}$ otra por $\frac{\pi}{2}$ y otra por $\frac{3\pi}{2}$.

Después de $\frac{\pi}{2}$ la gráfica se repite, como de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ hay π,entonces se dice que el período de la tangente es π.

GRAFICA DE CONTANGENTE: $R-\{k\pi, k \in Z\} \longrightarrow (-\infty, +\infty)/$
$f(x) = \cot gx$

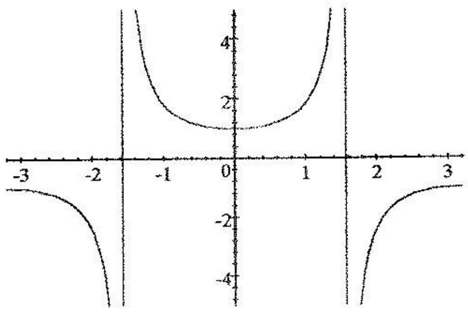


Cotangente (Fig. 25)

Se trazan dos paralelas al Eje Y, una por 0 y la otra por π.

Después de π la gráfica se repite, entonces se dice que el período de la cotangente es π.

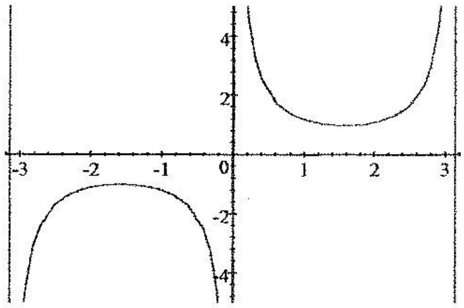
GRAFICA DE SECANTE: $\mathbb{R} - (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\,\} \longrightarrow$
$\mathbb{R} - (-1, 1) \quad / \quad f(x) = \sec x.$



Secante (Fig. 26)

Se trazan dos paralelas al Eje X, una por 1 y otra por -1 y se trazan tres paralelas al Eje Y, una por $-\frac{\pi}{2}$, otra por $\frac{\pi}{2}$ y otra por $\frac{3\pi}{2}$. Después de 2π la gráfica se repite, entonces se dice que el período de la secante es 2π.

GRAFICA DE COSECANTE: $\mathbb{R}-\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}-(-1,1)$ / $f(x) = \cos ec x$



Cosecante (Fig. 28)

Se trazan dos paralelas al Eje X, una por 1 y otra por -1, y se trazan dos paralelas al Eje Y, una por π y otra por 2π.

Después de 2π la gráfica se repite, entonces se dice que el período de la cosecante es 2π.

EJERCICIOS:

1.- a) Graficar: $f(x) = sen(\frac{\pi}{2} - x)$

b) Comparar con el gráfico de $f(x) = \cos x$ ¿Qué puede concluir?

2.- a) Graficar: $f(x) = tg(270^o - x)$

b) Comparar con el gráfico de $f(x) = \cot gx$ ¿Qué puede concluir?

3.- ¿Qué concluye al comparar los gráficos de $f(x) = sen(180^o + x)$ con el de $f(x) = senx$?

ECUACIONES TRIGONOMETRICAS

Definición: Se llaman Ecuaciones Trigonométricas, aquellas ecuaciones que contienen razones trigonométricas de ángulos desconocidos y que son válidas únicamente para determinados valores de dichos ángulos.

Ejemplo:

$$senx = 0 \Longrightarrow \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = \pi \end{array}$$

Chequeo de las soluciones: Si los valores encontrados son solución, deben satisfacer la ecuación.

Si: $x_1 = 0 \Longrightarrow sen\ 0 = 0\ \therefore\ x_1 = 0$ es solución.
Si: $x_2 = \pi \Longrightarrow sen\ \pi = 0\ \therefore\ x_2 = \pi$ es solución

$\therefore$ El conjunto solución $= S = \{0, \pi\}$

Si una ecuación tiene una solución, tiene en general, un conjunto infinito de soluciones.

Soluciones generales: $sen\, x = 0 \Longrightarrow x_1 = 0 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

$$x_2 = \pi + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

Período: 2π

En general veremos soluciones particulares en las cuales: $0 \leq x \leq 2\pi$

RECOMENDACIONES PARA REDUCIR LAS ECUACIONES TRIGONOMETRICAS A TIPOS MAS ELEMENTALES:

a) Expresar todas las funciones que intevienen en la ecuación en términos de una sola función de un mismo ángulo.

b) Reunir todos los términos en un solo miembro.

c) Descomponer en factores, siempre que sea posible.

EJEMPLO:

Resolver la ecuación : $sen\,x\;-2sen\,x\,\cos\,x=0$

SOLUCION: $sen\,x\;-\;2sen\,x\,\cos\,x\;=0$

$$sen\,x\,(1\;-2\,\cos\,x)=0\Longrightarrow\;a)\;sen\,x\;=0\Longrightarrow\;\begin{array}{l}x_1=0+2n\pi\\x_2=\pi+2n\pi\end{array}$$

b) $1-2\cos\,x=0$

$$\cos\,x\;=\tfrac{1}{2}\Longrightarrow\;x_3=\tfrac{\pi}{3}+2n\pi$$

$$x_4=\tfrac{5\pi}{3}+2n\pi\qquad\therefore S=\left\{0,\pi,\tfrac{\pi}{3},\tfrac{5\pi}{3}\right\}$$

OBSERVACION:

Generalmente, al elevar al cuadrado ambos miembros de una ecuación o al eliminar denominadores, se introducen soluciones extrañas. Todos aquellos ángulos que no satisfacen la ecuación original deben ser eliminados como solución.

EJEMPLOS:

1.- Resolver : $\forall x\in[\,0,2\,\pi),\;\;sen\;x\cos x=0$

SOLUCION:

$$senx\cos x=0\Longrightarrow\;\;a)senx=0\;\;\begin{array}{l}\Longrightarrow x=0+2k\pi=0\;\;(k=0)\\\Longrightarrow x=\pi+2k\pi=\pi\;\;(k=0)\end{array}$$

b) $\cos x=0\Longrightarrow x\;\;=\tfrac{\pi}{2}+2k\pi=\tfrac{\pi}{2}\;(k=0)$

$$x=\tfrac{3\pi}{2}+2k\pi=\tfrac{3\pi}{2}\;(k=0)$$

$$\therefore S=\left\{0,\pi,\tfrac{\pi}{2},\tfrac{3\pi}{2}\right\}$$

2.- Resolver : $\forall x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$, $sen2x = \cos 2x$

<u>SOLUCION:</u> $sen2x = \cos 2x \Longrightarrow tg2x = 1 \Longrightarrow$

a) $2x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Longrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}$ $(k = 0,\ 1,\ 2)$

b) $2x = \frac{5\pi}{4} + k\pi \Longrightarrow x = \frac{5\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} = \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}$ $(k = 0, 1)$

$\therefore\ S = \left\{\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}\right\}$

3.- Resolver $\forall\theta \in [0, 2\pi)$, $\cos\theta - sen\theta = \cos 2\theta$

<u>SOLUCION:</u>

$$\cos\theta - sen\theta = \cos 2\theta /^2$$
$$\cos^2\theta - 2sen\theta\cos\theta + sen^2\theta = \cos^2 2\theta$$
$$1 - sen2\theta = \cos^2 2\theta$$
$$1 - sen2\theta = 1 - sen^2 2\theta$$
$$sen^2 2\theta - sen2\theta = 0 \Longrightarrow sen2\theta(sen2\theta - 1) = 0$$

$\Longrightarrow a) sen2\theta = 0 \Longrightarrow\ \ 2\theta = 0 + 2k\pi \Longrightarrow \theta = k\pi = 0, \pi (k = 0, 1)$

$2\theta = \pi + 2k\pi \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} (k = 0, 1)$

$b) sen2\theta = 1 \Longrightarrow\ \ 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\ (k = 0, 1)$

$\therefore\ S = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

(las demás soluciones son soluciones extrañas)

4.- Resolver $\forall x \in [0, 2\pi]$

$2\cos 2x + tgx = 2$

<u>Solución:</u> $2(1 - 2sen^2x) + \dfrac{sen\,x}{\cos\,x} = 2$

$4sen^2x - \dfrac{senx}{\cos x} = 0 \Longrightarrow \dfrac{2(2senx\cos x)senx - senx}{\cos x} = 0 \Longrightarrow$

$senx(2sen2x - 1) = 0, con\ \ \cos x \neq 0, \Longrightarrow$

$a) senx = 0 \Longrightarrow\ \ x = 0 + 2k\pi = 0, 2\pi\ \ (k = 0, 1)$

$x = \pi + 2k\pi = \pi\ (k = 0)$

$b)\ sen2x = \frac{1}{2} \Longrightarrow\ \ 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Longrightarrow\ \ x = \frac{\pi}{12} + k\pi = \frac{\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}\ (k = 0, 1)$

$2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Longrightarrow\ \ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi = \frac{5\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\ (k = 0, 1)$

$\therefore\ S = \left\{0, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right\}$

EJERCICIOS :

Resolver $\forall x \in [0, 2\pi]$:

1. $sen2x = -senx$ Resp.:$\left\{0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}\right\}$
2. $2\cos x\ sen\,x + 2\cos\ x\ = 1{+}sen\,x$ Resp.:$\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right\}$
3. $\cos ec\,x + ctgx = \sqrt{3}$ Resp.:$\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$
4. $\sqrt{2}\cos 3x - \cos x = \cos 5x$
   Resp.:$\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}, \frac{\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}\right\}$
5. $\frac{senx}{1+\cos x} = 2 - ctgx$ Resp.:$\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$
6. $senx\cos x = 1$ Resp.:ϕ

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS

Sea $y = senx$. Sabemos que para cada valor de x se obtiene un y, es decir si conocemos el ángulo, el valor del seno de ese ángulo es único. Sin embargo, si conocemos el valor del seno de un ángulo, ese ángulo puede tomar infinitos valores.

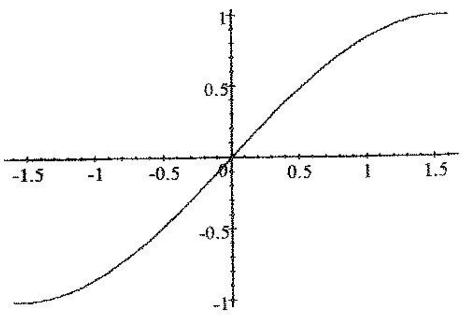
Ejemplo: $senx = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, etc.$

Esto sucede porque las funciones trigonométricas no son biyectivas. Para que lo sean, y por lo tanto posean inversa, es necesario restringir los dominios de ellas.

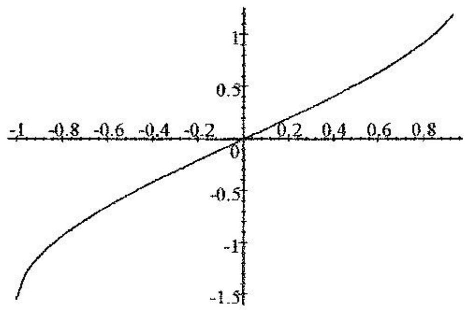
Hechas estas restricciones, se definen las funciones trigonométricas inversas de la siguiente forma: retomando nuestra función inicial $y = senx$, intercambiamos x con y, es decir $x = sen\, y$, de donde al despejar y, se obtiene $y = arcsenx$ que se lee, "y igual arco seno de x", y llamada función inversa del seno. La función arco seno de x representa el ángulo cuyo seno es x.

A continuación veremos las gráficas de las funciones trigonométricas inversas con sus características principales.

1.- Para $f(x) = arc\, sen\, x$ siendo $sen : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ y $arc\, sen : [-1, 1] \to \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



seno (Fig. 29)



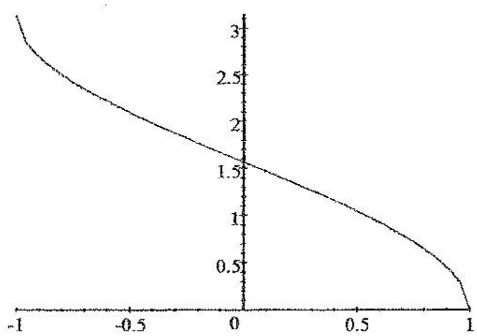
arco seno (Fig. 30)

Observación:

Si la gráfica de $f(x) = sen\, x$ se rota en 90^o en sentido contrario a las manecillas de un reloj y luego se invierte sobre si misma se obtiene la gráfica de $f(x) = arc\, sen\, x$. Lo mismo sucederá en las demás funciones.

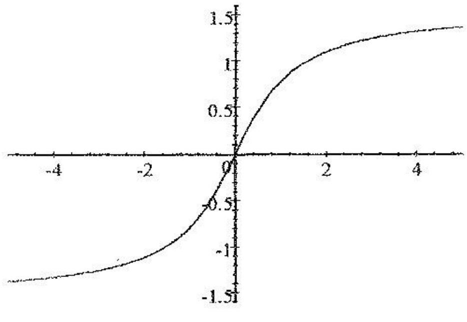
2.- Para $f(x) = arc\ \cos x$,siendo $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ y

$$arc\ \cos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$



arco coseno (Fig. 31)

3.- $f(x) = arctgx$,siendo $tg : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ y $arc\ tg : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



arco tangente (Fig. 32)

Graficar las demás funciones inversas, determinando su dominio y recorrido.

EJEMPLOS:

1.- Calcular $y = arc\,sen\frac{\sqrt{3}}{2}$, considerándola como:

a) relación inversa
b) función inversa

SOLUCION:

a) $y = arc\,sen\frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow sen\,y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ y = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z \\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z \end{cases}$

es decir, $arcsen\frac{\sqrt{3}}{2}$ representa cualquiera de los ángulos cuyo seno es $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $y = arc\,sen\frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow sen\,y = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow y = \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

es decir, $arc\,sen\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ representa el único ángulo que pertenece al dominio restringido de la función seno correspondiente al recorrido de la función arc seno.

2.- Determinar el valor de $tg(arc\,tg\mu)$

SOLUCION:

Sea $arc\,tg\mu = \alpha \Longrightarrow tg\,\alpha = \mu$

$\therefore\ tg(arc\,tg\mu) = tg\,\alpha = \mu$

3.- Demostrar : $tg\left[arc\,sen(-\frac{3}{5}) - arc\cos\frac{5}{13}\right] = \frac{63}{16}$

Demostración:

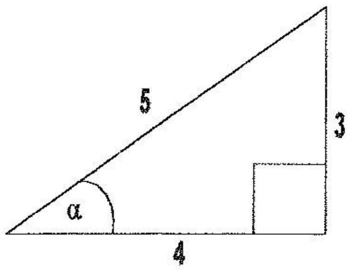


Fig. 33

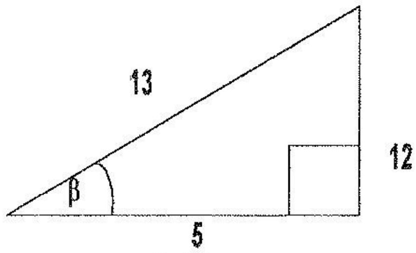


Fig. 34

Sea $\alpha = arc\,sen(-\frac{3}{5}) \Longrightarrow sen\,\alpha = -\frac{3}{5} \Longrightarrow \alpha \in IV\,C$

Sea $\beta = arc\,\cos\,\frac{5}{13} \Longrightarrow \cos\beta = \frac{5}{13} \Longrightarrow \beta \in I\,C$

$$\therefore\ tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha \cdot tg\,\beta} = \frac{\frac{-3}{4} - \frac{12}{5}}{1 - \frac{3}{4}\cdot\frac{12}{5}} = \frac{63}{16}$$

4.- Resolver $2\,arc\,ctg2 + \arccos\frac{3}{5} = arc\,\cos ec\,x$

SOLUCION:

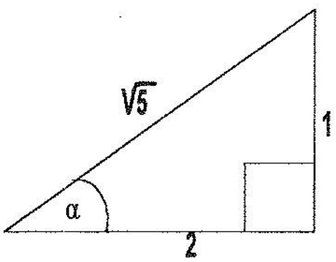


Fig. 35

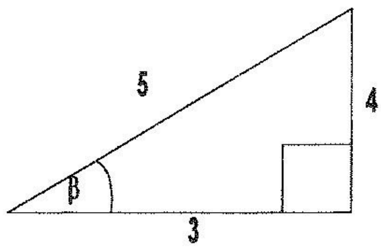


Fig. 36

Sea $\alpha = arc\,ctg2 \Longrightarrow ctg\alpha = 2 \Longrightarrow \alpha \in\ I\,C$

Sea $\beta = arc\ \cos\frac{3}{5} \Longrightarrow \cos\ \beta = \frac{3}{5} \Longrightarrow \beta \in\ I\,C$

$\therefore\ \ 2\alpha + \beta = arc\ \cos ec\,x \Longrightarrow \cos ec\ (2\alpha + \beta) = x$

$$x = \frac{1}{sen(2\alpha + \beta)} = \frac{1}{sen2\alpha\ \cdot\ \cos\ \beta + \cos 2\alpha\ \cdot\ sen\beta}$$

$$= \frac{1}{2sen\alpha\ \cdot\ \cos\ \alpha\ \cos\ \beta\ + (1 - 2sen^2\alpha)sen\beta}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{5} + (1 - 2 \cdot \frac{1}{5}) \cdot \frac{4}{5}} = \frac{1}{\frac{12}{25} + \frac{12}{25}} = \frac{25}{24}$$

EJERCICIOS:

1.- Calcular:

a) $\cos(arc\,tg(-\frac{2}{5}))$ Resp.: $\frac{5\sqrt{29}}{29}$

b) $arc\ \cos\ (tg\ (-\frac{5\pi}{4}))$ Resp.: $\frac{3\pi}{4}$

c) $arc\ \cos ec\ \frac{2}{\sqrt{3}}$ Resp.: $\frac{\pi}{3}$

2.- Demostrar:

a) $2\,arc\,tg\ \sqrt{\frac{x}{a}} = arc\ \cos\ \frac{a-x}{a+x}$

b) $sen\ (2arc\ sen\ x) = 2x\sqrt{1-x^2}$

c) $arc\ \cos\ \sqrt{\frac{2}{3}} - arc\ \cos\ \frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$

3.- Resolver:

a) $arc\ \cos\ x - arc\,sen\,x = arc\ \cos x\sqrt{3}$ Resp.: $\{0, \pm\ \frac{1}{2}\}$

b) $2arc\ ctg2 + arc\ \cos\frac{3}{5} = arc\ \cos ec\,x$ Resp.: $\{\frac{25}{4}\}$

c) $arc\,ctg\frac{x^2-1}{2x} + arc\,tg\ \frac{2x}{x^2-1} + \frac{4\pi}{3} = 0$ Resp.: ϕ

GEOMETRIA ANALITICA

COORDENADAS

Si consideramos la recta de los números reales ($\mathbb{R}$), nos encontramos trabajando en un sistema unidimensional.

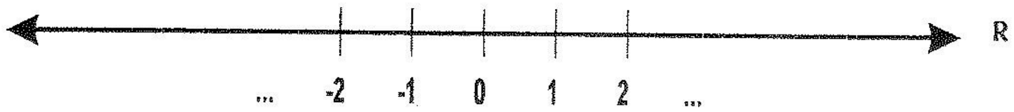


Fig. 37

Sistema Unidimensional:

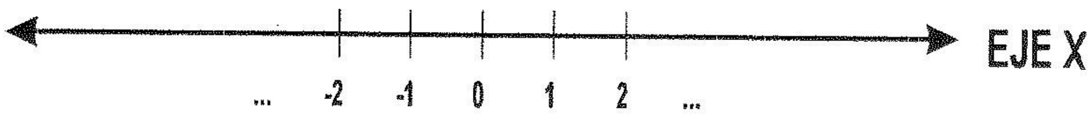


Fig. 38

A todo punto P en el eje le corresponde un real y a todo real n le corresponde un punto.

Es decir: Si: $P \in Eje\ X, \exists\ n \in \mathbb{R}\ /\ P \Longleftrightarrow n$,siendo

n la coordenada de P.
(El punto P con coordenada n, se denota: $P(n)$)
$0(0)$ es el ORIGEN del sistema.

Sean $P_1(x_1)$ y $P_2(x_2)$ dos puntos dados de una recta. Para determinar la longitud del segmento P_1P_2 se tiene:

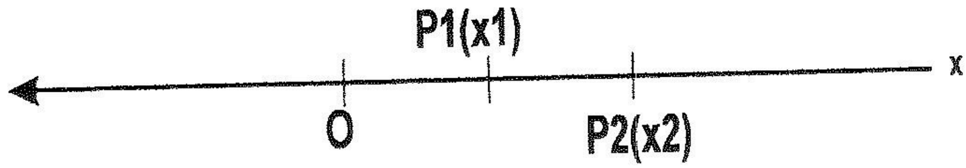


Fig. 38'

$$\overline{OP_1} + \overline{P_1P_2} = \overline{OP_2} \Longrightarrow x_1 + \overline{P_1P_2} = x_2 \Longrightarrow$$

$$\overline{P_1P_2} = x_2 - x_1$$

La longitud de un segmento se obtiene restando a la coordenada del punto final, la coordenada del punto inicial.

De esta forma: $\overline{P_2P_1} = x_1 - x_2$

$$= -(x_2 - x_1)$$

$$\overline{P_2P_1} = -\overline{P_1P_2}$$

Estos segmentos se denominan segmentos dirigidos.

La distancia entre dos puntos se define como el valor absoluto de la longitud del segmento rectilíneo que los une, es decir:

$$|\overline{P_1P_2}| = |\overline{P_2P_1}|$$

EJEMPLOS: 1) Determinar la distancia determinadas por el origen y los siguientes puntos:

a) $P(2)$

Solución: $|OP| = 2 = |PO|$

b) $A(-7)$

Solución: hágala

c) $B(0)$

Solución: $|OB| = 0 = |BO|$

Luego: $|OB| = 0 \Leftrightarrow 0 = B$

2.- Con los datos del problema anterior, determinar : $|PA|$

Solución: $|PA| = |(-7) - (2)| = |-9| = 9$
o también $|AP| = |2 - (-7)| = |9| = 9$

Si consideramos dos rectas de números reales: L_1 y L_2, donde: $L_1 \cap L_2 = \{0\} = ORIGEN$ del sistema.
Con ésto se da origen a un sistema bidimensional.

Gráficamente:

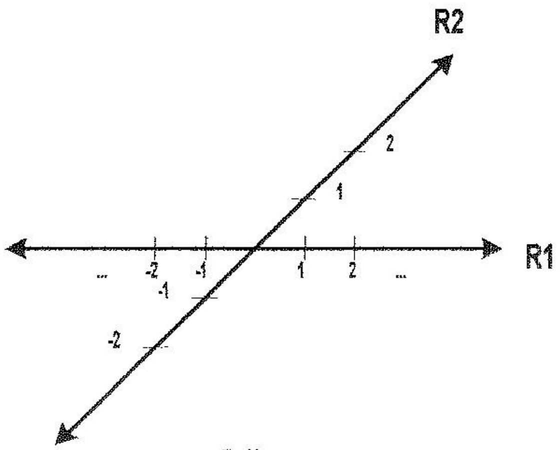


Fig. 39

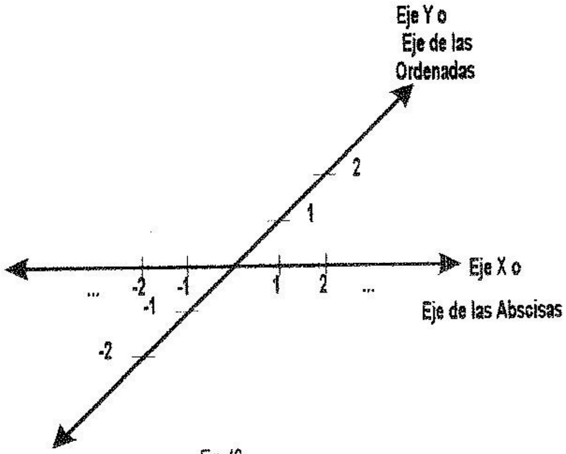


Fig. 40

$(Eje\,X) \cap (Eje\,Y) = \{0\} = ORIGEN$ del sistema.
Si: $(Eje\,X) \perp (Eje\,Y)$ se origina un sistema bidimensional recto:

plano π_{xy}

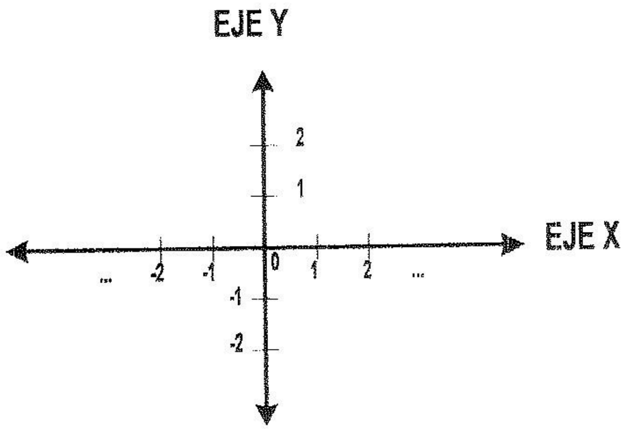


Fig. 41

Una abscisa y una ordenada forman las COORDENADAS RECTANGULARES de un punto, las que se denotan mediante una pareja:

P(abscisa,ordenada) $= P(x, y)$, con: $x, y \in \mathbb{R}$.

¡¡A todo punto P del plano (π_{XY}) le corresponde un único par ordenado y a todo par ordenado le corresponde un único punto!!

Al segmento determinado por el origen del sistema y un punto P del plano, se le llama: RADIO VECTOR, siendo $|OP| = r$

Si: $r \neq 0$, r es considerado, siempre, positivo.
Los ejes dividen al plano π_{XY} en cuatro cuadrantes: I, II, III y IV.
Signo de las coordenadas ubicadas en los cuadrantes:
I: (+,+)
II: (-,+)
III: (-,-)
IV: (+, -)

Al Sistema Coordenado Rectangular, también se le llama: SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS.

EJERCICIOS:

1.- Dados : Un Sistema Cartesiano.

A(3,0)
B(-1,0)
C(8,0)
0(0,0)

a) Ubicar los puntos en π_{XY}
b) Determinar: $|OA|$
$|OB|$
$|OC|$
$|BC|$

2.- Dados: Un Sistema Cartesiano.

$D(0,-4)$
$E(0,2)$
$F(0,9)$
$0(0,0)$

a) Ubicar los puntos en π_{XY}
b) Determinar : $|OD|$
$|OE|$
$|OF|$
$|DF|$

3.- Con los datos de los problemas: (1) y (2), determinar:

a) $|AD|$
b) $|AE|$
c) $|AF|$

4.- Dados los siguientes puntos: $P(2,3)$ y $Q(6,6)$

a) Ubicar los puntos en π_{XY}
b) Trazar una paralela al Eje X por P.
c) Trazar una paralela al Eje Y por Q.
d) $(\text{// } Eje\ X) \ \cap \ (\text{// } Eje\ Y) = \{S\}$
e) Determinar las coordenadas del punto S.
f) Determinar: $|PQ|$

GENERALIZACION DEL ULTIMO PROBLEMA:

Dados: $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$
Determinar: $|P_1P_2|$

DES.: Hacer una gráfica con los datos dados.
Trazar una paralela al Eje X por P_1
Trazar una paralela al Eje Y por P_2
$(\text{// } Eje\ X) \ \cap \ (\text{// } Eje\ Y) = \{S\}$
Determinar las coordenadas de S.
Determinar : $|P_1S|$
Determinar: $|SP_2|$

$\therefore \ |P_1P_2|^2 = |P_1S|^2 \ + \ |SP_2|^2$

$\therefore \ |P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
¡La distancia se define como no negativa!

EJERCICIOS:

1.- Dados los puntos : $P_1(-3,2)$ y $P_2(5,-1)$. Determinar: $|P_1P_2|$
Resp.: $\sqrt{73}$

2.- Dados los puntos: $P_1(3,3)$, $P_2(-3,-3)$ y $P_3(-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$.

Determinar el tipo de triángulo generado por los puntos dados.

Resp.: equilátero

3.- Dos de los vértices de un triángulo equilátero son los puntos:

(-1,1) y (3,1). Determinar las coordenadas del tercer vértice (dos soluciones).

Resp.: $(1, 1 \pm\ 2\sqrt{3})$

4.- Determinar la ecuación algebráica que expresa el hecho de que el punto (x,y) equidista de los puntos: (-3,5) y (7,-9). Resp.: $5x - 7y - 24 = 0$

DIVISION DE UN SEGMENTO EN UNA RAZON DADA

Teorema: Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son los extremos del segmento P_1P_2 y $P(x,y)$ divide a $\overline{P_1P_2}$ en la razón $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$ entonces las coordenadas de P, son:

$$X = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}, \quad y = \frac{y_1 + \ ry_2}{1+r}, \ r \ \neq -1$$

DEMOSTRACION:

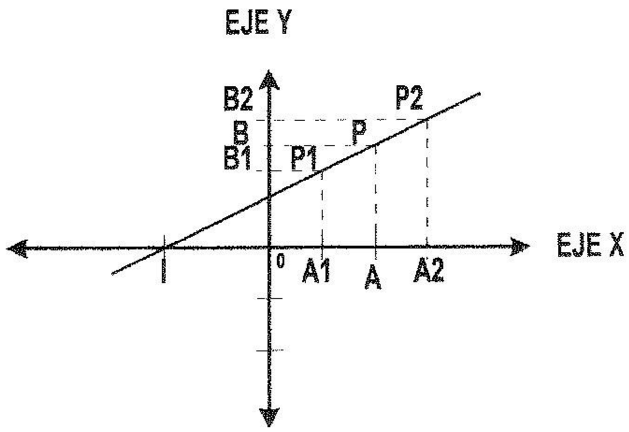


Fig.42

A_1 proyección de P_1 sobre eje x

A proyección de P sobre eje x
A_2 proyección de P_2 sobre eje x
B_1 proyección de P_1 sobre eje y
B proyección de P sobre eje y
B_2 proyección de P_2 sobre eje y
Por geometría elemental $\triangle\, P_1 I\, A_1 \sim \triangle P I A \sim \triangle P_2 I\, A_2$

$$\therefore\ \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{\overline{A_1A}}{\overline{AA_2}} \quad pero \quad A_1(x_1,0), A(x,0)\ y\ A_2(x_2,0)$$

$$\therefore\ \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = r = \frac{x-x_1}{x_2-x} \Longrightarrow x = \frac{x_1+rx_2}{1+r}, r \neq -1$$

Procediendo de la misma forma con las ordenadas, se tiene:

$$B_1(0,y_1), B(0,y), B_2(0,y_2)$$

$$\therefore\ \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = r = \frac{\overline{B_1B}}{\overline{BB_2}} = \frac{y-y_1}{y_2-y} \Rightarrow y = \frac{y_1+ry_2}{1+r}, r \neq -1$$

Caso particular: Si P es punto medio del segmento dirigido $\overline{P_1P_2}$, entonces $r = 1,\ y$:

$$x = \frac{x_1+x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1+y_2}{2}$$

Observaciones:

1.- Las razones deben ser consideradas con su signo, por tratarse de segmentos dirigidos.

2.- Debe tenerse cuidado con la sustitución de coordenadas.

3.- Si el punto de división es externo al segmento dirigido $\overline{P_1P_2}$, la razón r es negativa.

EJEMPLO:

Los puntos extremos de un segmento son $P_1(2,4)$ y $P_2(8,-4)$. Determinar el punto $P(x,y)$ que divide a este segmento en dos partes tales que:

$\overline{P_2P} : \overline{PP_1} = -2$

SOLUCION: Como r es negativa, P es un punto exterior del segmento. Haga el gráfico aplicando la fórmula se tiene:

$x = \dfrac{x_2 + r\,x_1}{1+r} = \frac{8-4}{-1} = -4 \qquad y = \dfrac{y_2 + r\,y_1}{1+r} = \frac{-4-8}{-1} = 12$

$\therefore P(-4, 12)$

Otra forma:

Escribiendo las razones directamente se tiene:

$$r = \frac{\overline{P_2P}}{\overline{PP_1}} = \frac{x-8}{2-x} = -2 \Longrightarrow x - 8 = -4 + 2x \Longrightarrow x = -4$$

$$r = \frac{\overline{P_2P}}{\overline{PP_1}} = \frac{y+4}{4-y} = -2 \Longrightarrow y + 4 = -8 + 2y \Longrightarrow y = +12$$

$\therefore P(-4, 12)$

EJERCICIOS:

Dados: $P_1(1,4)$ y $P_2(5,0)$,determinar:

a) Las coordenadas del punto $P(x,y)$, que divide al segmento dirigido $\overline{P_1P_2}$ en la razón: $r = 3$

Resp.: $P(4,1)$

b) La razón en que el punto $P(4,1)$, divide al segmento dirigido $\overline{P_1P_2}$

Resp.: $r = 3$

c) La razón en que P_2 divide al segmento dirigido $\overline{P_1P}$.

Resp.: $r = -4$

d) Las coordenadas del punto medio del segmento dirigido $\overline{P_1P_2}$

Resp.: $(3,2)$

PENDIENTE DE UNA RECTA

Dadas: L_1 y L_2

$L_1 \cap L_2 = \{P\}$

Se forman dos pares de ángulos opuestos por el vértice.

Gráficamente:

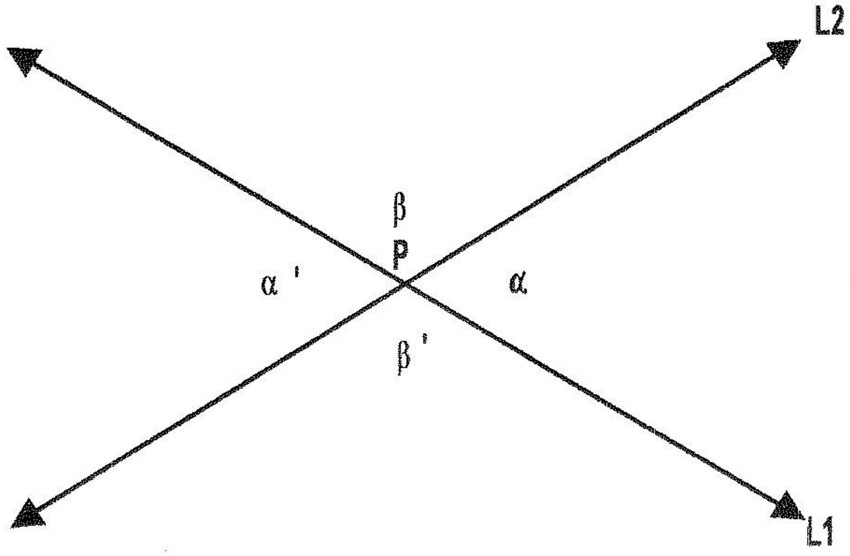


Fig. 43

DEFINICION: ANGULO DE DOS RECTAS DIRIGIDAS: Es aquel formado por los dos lados que se alejan del vértice.

Ejemplo: α

$$L_1 \parallel L_2 \Longrightarrow \begin{cases} \text{Si} : \textit{Sentido de } L_1 = \textit{Sentido de } L_2 \Longrightarrow \alpha = 0^o \\ \text{Si} : \textit{Sentido de } L_1 \textit{opuesto} \ \ \textit{Sentido de } L_2 \Longrightarrow \alpha = 180^o \end{cases}$$

Sólo trabajaremos con ángulos menores o iguales que 180^o.

DEFINICION: ANGULO DE INCLINACION: Se llama ángulo de inclinación de una recta, al ángulo formado por la recta (considerando su sentido hacia arriba) y el Eje X (considerando su sentido positivo).

Gráficamente:

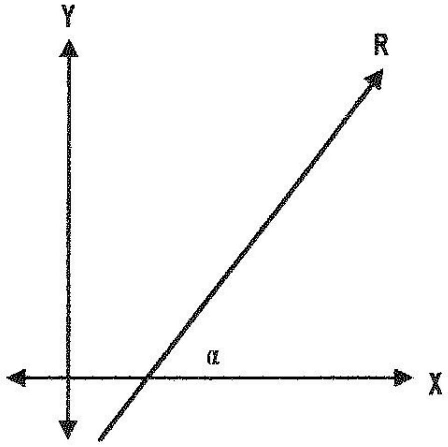


Fig. 44

$0^o \leq$ Angulo de Inclinación de $\leq 180^o$.

DEFINICION: PENDIENTE O COEFICIENTE ANGULAR: La pendiente o coeficiente angular de una recta corresponde a la tangente de su angulo de inclinación.

Sea: α ángulo de inclinación de L.
Pendiente $=\ m\ =\ tg\alpha$

α agudo $\Longrightarrow$pendiente positiva $\Longrightarrow m > 0$.
α obtuso $\Longrightarrow$pendiente negativa $\Longrightarrow m < 0$.

Si: $L \parallel (Eje\ Y) \Longrightarrow L \perp (Eje\ X)$
$\therefore$ Angulo de Inclinación =....
Pero: $tg90^o$ no está definida.
$\therefore$ La Pendiente de una recta paralela al Eje Y o perpendicular al Eje X, no existe.

La característica de las coordenadas de este tipo de rectas es que la abscisa es siempre...

TEOREMA: Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos de una recta, entonces $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $x_1 \neq x_2$

Demostración:

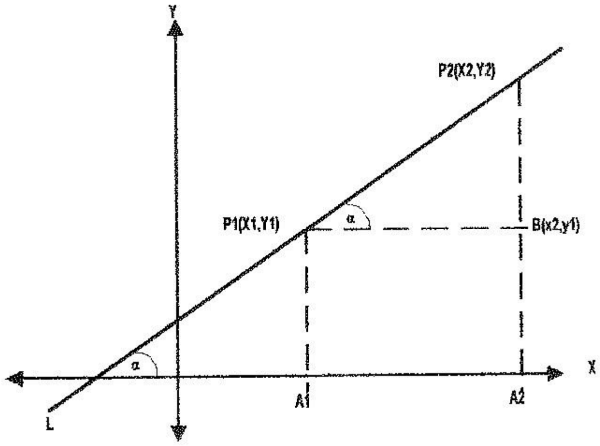


Fig.45

L= recta que pasa por P_1 y P_2

α=ángulo inclinación de L

α=ángulo $B\ P_1\ P_2$

Por trigonometría se tiene: $m = tg\alpha = \frac{\overline{BP_2}}{\overline{P_1B}}$

$\therefore m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, x_1 \neq x_2$

EJEMPLO:

Dados $A(1,6)$ y $B(8,-5)$,determinar:

a) La pendiente de la recta AB

b) El ángulo de inclinación de la recta AB

SOLUCION:

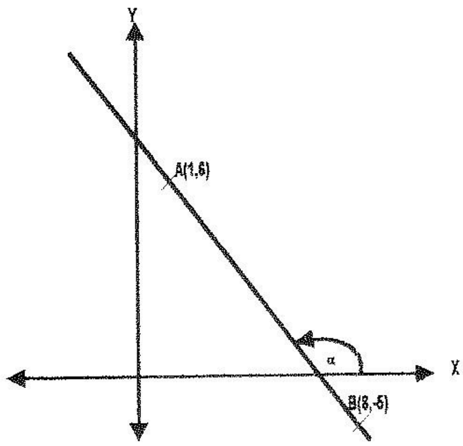


Fig.46

a) $m = \frac{6-(-5)}{1-8} = \frac{11}{-7} = -\frac{11}{7}$

b) $\alpha = arc\, tg\left(-\frac{11}{7}\right) = 122^o 28' 16''$

ANGULO DE DOS RECTAS

Dados: L_1 y L_2

$L_1 \cap L_2 = \{C\}$

$L_1 \cap (Eje\ x) = \{A\}$

$L_2 \cap (Eje\ x) = \{B\}$

θ_1 y θ_2 Angulos Suplementarios que forman L_1 y L_2

Gráficamente:

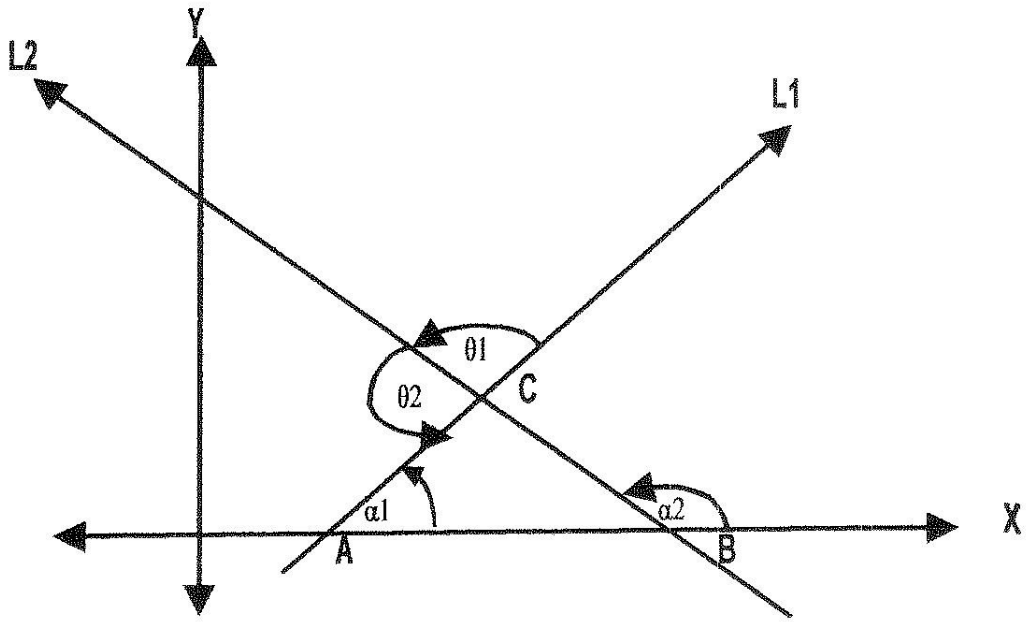


Fig. 47

θ_1 y θ_2 siempre se van a medir en sentido positivo.
En cada ángulo se va a encontrar:

Recta Inicial $\Longrightarrow$Pendiente Inicial
Recta Final$\Longrightarrow$Pendiente Final

En θ_1 se tiene: L_1es la Recta................
m_1 es la Pendiente.........
L_2 es la Recta................
$m_2$es la Pendiente..........
En θ_2 se tiene:L_2es la Recta................
m_2 es la Pendiente.........
L_1 es la Recta................
$m_1$es la Pendiente..........
Se determinará θ_1 y θ_2 en función de las pendientes (m_1 y m_2).
De los lados que forman los ángulos θ_1 y θ_2 se tiene:

Cálculo de θ_1: En $\triangle\ ABC; \alpha_2 = \alpha_1 + \theta_1 \Longrightarrow \theta_1 = \alpha_2 - \alpha_1$

$$\Longrightarrow tg\ \theta_1 = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \tfrac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1+tg\alpha_2 tg\alpha_1}$$
$$\therefore\ tg\theta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

Cálculo de θ_2: En $\triangle\, ABC, \theta_2 = \alpha_1 + (180^o - \alpha_2) \Longrightarrow$

$$tg\,\theta_2 = tg(\alpha_1 + (180^o - \alpha_2)) = tg(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{tg\alpha_1 - tg\alpha_2}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2}$$

$$\therefore\ tg\theta_2 = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

(Siempre se va a restar: La Pendiente Final menos la Pendiente Inicial del ángulo en referencia).
Resumiendo: $tg\theta = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$, donde: $m_1 m_2 \neq -1$

Donde: m_1 es la Pendiente.............
m_2 es la Pendiente...............

CASOS ESPECIALES:

a) RECTAS PARALELAS: El ángulo que forman es de:..........o..........

$\therefore\ tg0^o = tg180^o = 0 = \frac{m_2 - m_1}{1+m_1 m_2} \Longrightarrow m_2 - m_1 = 0 \Longrightarrow m_1 = m_2$
Recíprocamente:
Si: $m_1 = m_2 \Longrightarrow tg\theta = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \theta = 0^o \\ \theta = 180^o \end{cases}$ ó

$\therefore\ L_1 \| L_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$

b) RECTAS PERPENDICULARES: En este caso: $\theta =$ ....

No es posible emplear la fórmula : $tg\theta = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$
porque: $tg90^o = ?$
Pero es factible escribir la fórmula como $\cot g$:

$$\cot g\theta = \frac{1 +\ m_1 m_2}{m_2 -\ m_1}$$

$$\therefore\ \cot g 90^o = 0 = \frac{1 +\ m_1 m_2}{m_2 -\ m_1}$$

$$\therefore\ 1 + m_1 m_2 = 0 \Longrightarrow m_1 m_2 = -1$$

Recíprocamente:
Si: $m_1 m_2 = -1 \Longrightarrow \cot g\theta = 0 \Longrightarrow \theta = 90^o$
$\therefore\ L_1\ \perp\ L_2 \Longleftrightarrow m_1 m_2 = -1$

EJERCICIOS:

1.- Dados los siguientes puntos : $A(-2,1), B(1,5), C(10,7)\ y\ D(7,3)$

a) Determinar el tipo de cuadrilátero que se forma.
b) Determinar la medida del ángulo agudo.

2.- Dados: $A(2,5), B(8,-1)\ y\ C(-2,1)$

a) Determinar el tipo de triángulo que ellos forman.
b) Determinar la medida de cada uno de los ángulos interiores del triángulo.

3.- Dados: $A(2,4), B(7,3), C(6,-2)\ y\ D(1,-1)$

a) Determinar el tipo de cuadrilátero.
b) Demostrar que sus diagonales son perpendiculares.
c) Demostrar que las diagonales se dividen, mutuamente, en partes iguales.

DEMOSTRACION DE TEOREMAS GEOMETRICOS

Los métodos de la Geometría Analítica permiten demostrar los teoremas de la Geometría Elemental. Lo principal es poder ubicar, la figura geométrica, en la forma más conveniente, en el sistema coordenado, de tal manera que las coordenadas de sus puntos principales sean lo más simple posible.

EJEMPLOS:

1.- Ubicar un triángulo en un sistema cartesiano, de tal manera que la cantidad de variables sea la menor posible. (Buscar dos soluciones).

2.- Dados: Cuadrilátero $ABCD$

E punto medio del segmento AB
F punto medio del segmento BC
G punto medio del segmento CD
H punto medio del segmento DA

Demostrar que el cuadrilátero $EFGH$ es un paralelógramo.

LA LINEA RECTA

DEFINICION:

Línea recta es el conjunto de puntos (o lugar geométrico) tales que tomando dos puntos diferentes cualesquiera $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ de él, el valor de la pendiente "m" calculada por: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_1 \neq x_2$, resulta siempre la misma constante.

Sabemos que dos puntos, distintos, $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ determinan una única recta, cuya pendiente es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_1 \neq x_2$$

Si se toma otro punto de la recta $P(x,y)$, entonces se va a tener la siguiente ecuación:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Esta es la ecuación de la recta que pasa por los puntos P_1 y P_2.De esta ecuación, prácticamente, se deducen todas las otras ecuaciones de la recta.

Ej.: Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos: $A(2,1)$ y $B(-6,5)$.

FORMAS ESPECIALES DE LA ECUACION DE LA RECTA:

a) Ecuación de la recta que pasa por dos puntos: Es la forma presentada anteriormente, es decir: $\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$

b) FORMA PUNTO PENDIENTE: Como: $\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$

entonces la ecuación anterior queda de la siguiente forma:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m \Longrightarrow \boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Esta última expresión es la ecuación pedida.
Ej.: Determinar la ecuación de la recta que pasa por $(3,-4)$ y forma un ángulo de 60^o con el Eje X.

c) FORMA ORDENADA EN EL ORIGEN: Entenderemos por ordenada en el origen a la ordenada del punto de intersección de la recta con el Eje Y. Por lo tanto, en el caso anterior, si el punto (x_1, y_1) es $(0,b)$, entonces la ecuación queda de la siguiente forma: $y = mx + b$

Ej.: Determinar la ecuación de la recta con pendiente -3 y que intersecta al Eje Y en el punto $(0,7)$.

d) FORMA SIMETRICA: Si la recta intersecta al Eje X en $(a, 0)$ y al Eje Y en $(0, b)$,entonces, aplicando la forma (a), se tiene:

$$\frac{y-b}{x} = -\frac{b}{a} \Longrightarrow a(y-b) = -bx \Longrightarrow ay - ab + bx = 0$$

$$\therefore\ bx + ay = ab \Big/ \frac{1}{ab} \Longrightarrow \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

Ej.: Determinar la ecuación de la recta que intersecta al Eje X en el punto $A(-2, 0)$ y al Eje Y en el punto $B(0, 5)$.

ALGUNAS ECUACIONES ESPECIALES DE RECTA:

a) Graficar una recta paralela al Eje Y, que pase por el punto $(3, 5)$. Determinar otras coordenadas de esta recta. La particularidad de todos estos puntos es que: Las abscisas son ....

$\therefore$ La ecuación de una recta perpendicular al Eje X o paralela al Eje Y es: $x = n,\ n \in \mathbb{R}$.

b) De acuerdo a lo anterior la ecuación del Eje Y es: x =............

c) Graficar una recta paralela al Eje X, que pase por el punto $(4, -2)$. Determinar otras coordenadas de esta recta. La particularidad de todos estos puntos es que:.....................................

$\therefore$ La ecuación de una recta perpendicular al Eje Y o paralela al Eje X es: $y = n,\ n \in \mathbb{R}$.

d) De acuerdo a lo anterior la ecuación del Eje X es:........................

ECUACION GENERAL DE LA RECTA.

Todas las ecuaciones que hemos visto anteriormente tienen la forma: $Ax + By + C = 0$.

Todas las ecuaciones de esta forma representan una recta, donde, necesariamente, A o B deben ser no nulos.

Esta ecuación se llama: Ecuación de Primer Grado en dos variables o Ecuación Lineal.

Ahora vamos a chequear si realmente una ecuación de este tipo representa una recta. Para ésto analizaremos, en la ecuación, el coeficiente de "y", es decir:..........

Se pueden presentar dos casos: $B = 0$ ó $B \neq 0$.

<u>Caso 1:</u> $B = 0$: Si: $B = 0 \Longrightarrow A \neq 0$.

$\therefore$ La ecuación queda como: $Ax + C = 0$

$\therefore \; Ax = -C \Longrightarrow x = \frac{-C}{A}$ que es la ecuación de una recta paralela al Eje....por el punto..............

<u>Caso 2:</u> $B \neq 0$: La ecuación queda de la forma: $Ax + By + C = 0 \,/\, \frac{1}{B}$

$\frac{A}{B}x + y + \frac{C}{B} = 0 \Longrightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ que es la ecuación de una recta de pendiente: $m =$ .... y ordenada en el origen:..................

Ej.: Dada la siguiente ecuación: $3x - 5y + 2 = 0$

Determinar:

a) Su pendiente

b) Tres puntos de la recta.

<u>CONDICION DE PARALELISMO:</u>

Sean:

$L_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$L_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$

$\therefore \; m_{L_1} =$.............................. $m_{L_2} =$ ....

Sabemos que : $L_1 \| L_2 \Longleftrightarrow m_{L_1} =$......................

$$\therefore \; -\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2} \Longrightarrow \text{.....................................}$$

$\therefore \; L_1 \| L_2 \Longleftrightarrow A_1B_2 - B_1A_2 = 0$

Ej.: Dadas:

$L_1 : 2x + 3y - 1 = 0$

$L_2 : 4x + 6y + 7 = 0$

Determinar si: $L_1 \parallel L_2$

CONDICION DE PERPENDICULARIDAD:

Sean:
$L_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$
$L_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$

$\therefore \quad m_{L_1}=$.............................. $\quad m_{L_2} =$ ....

Sabemos que : $L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow$ .... $= -1$

$\therefore \quad \left[-\frac{A_1}{B_1}\right]\left[-\frac{A_2}{B_2}\right] = -1 \Longrightarrow$ ....

$\therefore \quad L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

Ej.: Dadas:
$L_1 : 3x - 2y + 3 = 0$

$L_2 : 4x + 6y - 1 = 0$

Determinar si ellas son perpendiculares.

CONDICION DE COINCIDENCIA:

Sean:
$L_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$
$L_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$
L_1 coincidente con $L_2 \Longleftrightarrow A_1 = kA_2, B_1 = kB_2, C_1 = kC_2$ con $k \neq 0$.

Ej.: Dadas:
$L_1 : x + 2y + 3 = 0$
$L_2 : 3x + 6y + 9 = 0$

Determinar si ellas son coincidentes.

$1 = k \cdot 3$, $2 = k \cdot 6$, $3 = k \cdot 9$ $\quad k = \frac{1}{3}$

FORMA NORMAL DE LA ECUACION DE LA RECTA

Una recta también es posible determinarla conociendo la distancia del origen a la recta y el ángulo que este segmento forma con el eje x. Al ángulo entre el segmento perpendicular a la recta y el sentido positivo del Eje X lo llamaremos ϖ y a la longitud del segmento la llamaremos p.

Sean: 0 origen del sistema
$A \in L$
$\overline{OA} \perp L$
$OA = p$

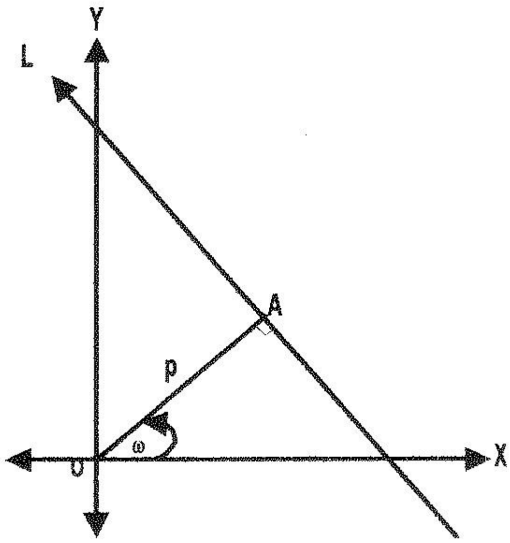


Fig. 48'

Angulo entre: $\overline{OA}$ y el Eje X $= \varpi$
$\therefore$Las coordenadas de A son $(p \cos \varpi, p\ sen\ \varpi)$.
$\therefore$El ángulo de inclinación de la recta es: $90^o + \varpi$
$\therefore$La pendiente de la recta es: $m = tg(90^o + \varpi) = -\cot g\, \varpi$
$\therefore$Si se tienen: El punto A y la pendiente m de la recta, entonces se conoce la ecuación de la recta, aplicando la forma Punto Pendiente,
es decir: $y - p\ sen\, \varpi = -\cot g\, \varpi(x - p \cos \varpi)$.

$y - p\, sen\, \varpi = -\frac{\cos \varpi}{sen \varpi}(x - p \cos \varpi)$
Realizando las simplificaciones del caso, se tiene:

$$\boxed{x \cos \varpi + y\, sen\, \varpi - p = 0}$$

Observación:

Si la recta pasa por el origen $p = 0$. En este caso se supone que la recta está dirigida hacia arriba del origen y por lo tanto $0^o \leq \varpi < 180^o$.

EJEMPLO: Determinar la ecuación normal de la recta que no pasa por el IIIC, cuyo ángulo de inclinación es de 120^o y la distancia del origen a la recta es de 5 unidades.

SOLUCION:

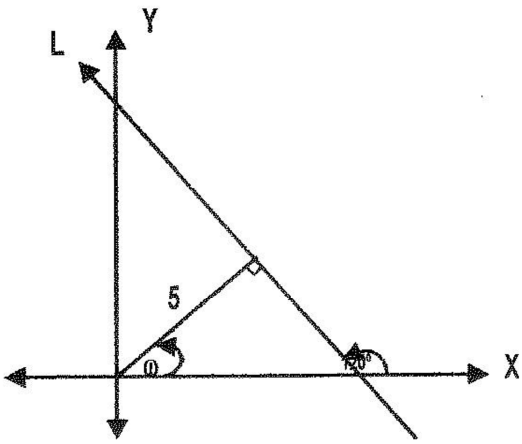


Fig. 48

$p = 5$
$120^o = \varpi + 90^o \Longrightarrow \varpi = 30^o$
$\therefore$ forma normal de L es:

$x\,\cos 30^o + y\,sen 30^o - 5 = 0$

$\sqrt{\frac{3}{2}}x + \frac{1}{2}y - 5 = 0$

REDUCCION DE LA FORMA GENERAL DE LA ECUACION DE UNA RECTA A LA FORMA NORMAL

Sea $Ax + By + C = 0$ la forma general de una recta (*) $x\cos\varpi + y\,sen\,\varpi - p = 0$ su forma normal. Si ambas ecuaciones representan la misma recta sus coeficientes son proporcionales. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\cos\varpi = kA \Longrightarrow \cos^2\varpi = k^2A^2 \\ 2) sen\varpi = kB \Longrightarrow sen^2\varpi = k^2B^2 \\ \quad 3)\ -p = kC \end{array}\right\} \Longrightarrow k^2(A^2+B^2) = 1 \quad (\alpha)$$

De (α) $k = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, A^2 + B^2 \neq 0$

$\therefore \cos\varpi = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\quad sen\,\varpi = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\quad p = -\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$

$\therefore$ *en* $(*)$

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

Es evidente que no podemos usar el doble signo del radical. Luego debemos notar que:

a) Si $p \neq 0$, debe ser positivo, luego en 3) k y C deben ser de signos distintos.

b) Si la recta pasa por el origen, $p = 0$ y $C = 0$, y $0 \leq \varpi < 180^o$,entonces

$sen\ \varpi \geq 0$. Luego en 2) k y B deben tener el mismo signo.

c) Por último si $B = C = 0$,entonces $sen\,\varpi = 0 \Longrightarrow \varpi = 0^o \Longrightarrow \cos\varpi = 1$.

Luego de 1) k y A deben tener el mismo signo.

EJEMPLO:

Reducir la ecuación $12x - 5y - 52 = 0$ a la forma normal y hallar p y ϖ

SOLUCION: $12x - 5y - 52 = 0(*)$

Como $C = -52, k > 0 \quad \therefore$

$$k = \frac{1}{\sqrt{144+25}} = \frac{1}{13}$$

Multiplicando (*) por $\frac{1}{13}$ se tiene $\frac{12}{13}x + \frac{-5}{13}y - \frac{52}{13} = 0$ (forma normal)

$\Longrightarrow \cos \varpi = \frac{12}{13}$ y $sen\ \varpi = \frac{-5}{13} \Longrightarrow \varpi \in IV\,C$

$$\therefore \varpi = arc \cos \frac{12}{13} \text{ y } p = 4$$

APLICACIONES DE LA FORMA NORMAL

1.- Distancia de un punto a una recta.

Veremos la distancia desde un punto dado a una recta cuya ecuación es conocida.

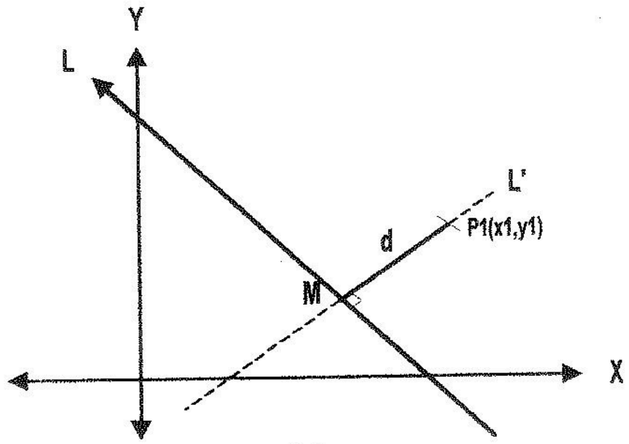


Fig. 49

Sea L una recta y P_1 un punto $\notin L$. Por P_1 tracemos una recta $L' \perp L$.

Sea M su intersección. Para obtener las coordenadas de M, hacemos:

Sea $Ax + By + C = 0$ la ecuación de L,siendo $m = -\frac{A}{B}$.

Como $L' \perp L$, $m' = \frac{B}{A}$

Luego la ecuación de L' es:

$$y - y_1 = \frac{B}{A}(x - x_1) \Longrightarrow Bx - Ay - (Bx_1 - Ay_1) = 0$$

Resolviendo el sistema entre L y L' se obtiene que las coordenadas de M son:

$$y = -\frac{ABx_1 - A^2y_1 + BC}{A^2 + B^2} \quad , \quad x = \frac{B^2x_1 - ABy_1 - AC}{A^2 + B^2}$$

$\therefore$ la distancia entre M y P_1 es:

$\boxed{d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$ llamada distancia no dirigida entre P_1 y L.

Esta ecuación es válida para todas las posiciones de L.

<u>Teorema:</u> La distancia no dirigida entre un punto $P_1(x_1, y_1)$ y una recta $Ax + By + C = 0$ es:

$$\boxed{d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

<u>Teorema:</u> La distancia dirigida entre un punto $P_1(x_1, y_1)$ y la recta $Ax + By + C = 0$ es:

$\boxed{d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}}$ siendo $r = \pm\sqrt{A^2 + B^2}$

en donde el signo del radical se elige de acuerdo a:

a) Si $C \neq 0, r$ es de signo contrario a C.
b) Si $C = 0$ y $B \neq 0, r$ y B tiene el mismo signo.
c) Si $C = B = 0$, r y A tienen el mismo signo.

Observaciones:

1.- Si la recta no pasa por el origen, d es positiva si P_1 y el origen están en lados opuestos de la recta. En caso contrario, d es negativa.

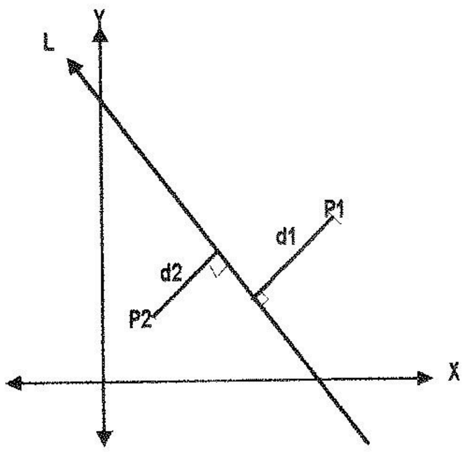


Fig. 50

$d_1 > 0$
$d_2 < 0$

2.- Si la recta dada pasa por el origen y P está por arriba de la recta, entonces d es positiva. En caso contrario, d es negativa.

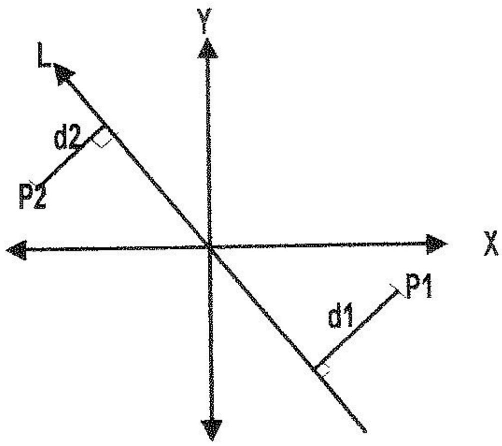


Fig. 51

$d_1 > 0$

$d_2 < 0$

Ejemplo:

Determinar la distancia dirigida y no dirigida de la recta $x-y-5=0$ al punto $P(3,4)$.

SOLUCION:

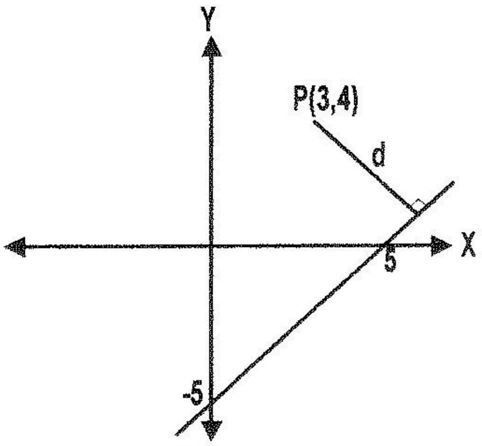


Fig. 52

a) distancia dirigida: como P y 0 están al mismo lado de la recta, "d" debe ser negativa.

$$d = \frac{1\cdot 3+(-1)\cdot 4-5}{\sqrt{2}} = \frac{-6}{\sqrt{2}} = -3\sqrt{2}$$

b) distancia no dirigida:

$$d = \left|-3\sqrt{2}\right| = 3\sqrt{2}$$

2.- Ecuación de las bisectrices de los ángulos suplementarios formados por dos rectas dadas que se cortan:

Sean $Ax+By+C=0$ y $A'x+B'y+C'=0$ las ecuaciones de L y L' respectivamente: Sean: L_1 y L_2 las bisectrices de los ángulos suplementarios.

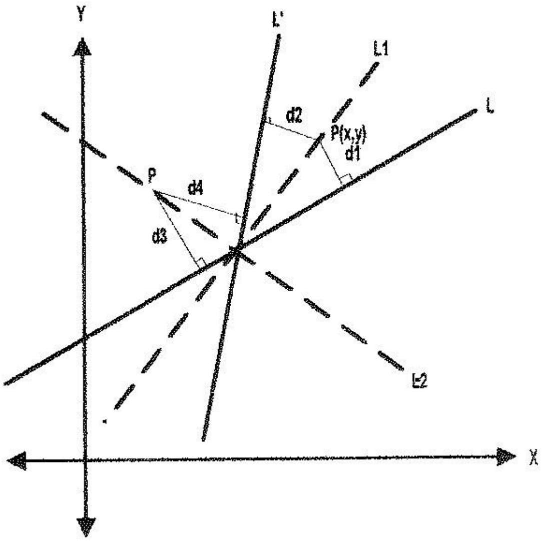


Fig. 53

Por geometría elemental, la bisectriz de un ángulo es el $L.G.$ de los puntos equidistante de los lados del ángulo.

$\therefore\ |d_1| = |d_2|\,;|d_3| = |d_4|$

Como "d_1 y d_2 y "d_3 y d_4" serán numéricamente iguales, la interpretación analítica conduciría a la misma ecuación para ambas bisectrices. Por esto se hace necesario considerar a d_1,d_2,d_3 y d_4 como distancias dirigidas para poder hacer una distinción entre L_1 y L_2.

Para P sobre L_1, P y el origen están en lados opuestos de L', luego $d_1$es positiva.

Análogamente d_2.

Luego para $L_1; d_1 = d_2$ (1)

Para P sobre L_2, P y el origen están en lados opuestos de L, luego d_3 es positiva, en cambio d_4 es negativa.

Luego para $L_2 : d_3 = -d_4$ (2)

Luego para (1)

$$\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{A'x+B'y+C'}{\pm\sqrt{A'^2+B'^2}}$$ ecuaciones de la bisetriz L_1

Para (2)

$$\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=-\frac{A'x+B'y+C'}{\pm\sqrt{A'^2+B'^2}}$$ ecuación de la bisectriz L_2

EJEMPLO:

Hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas $x+y-1=0$ y $2x-y+1=0$, y demostrar que son $\perp$ entre sí.

SOLUCION:

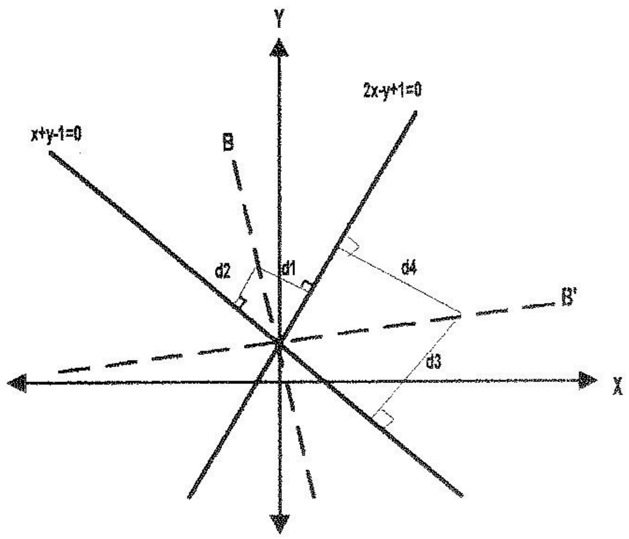


Fig. 54

a) $d_1=d_2$

$\frac{2x-y+1}{-\sqrt{5}}=\frac{x+y-1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow 2\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+\sqrt{2}=-\sqrt{5}x-\sqrt{5}y+\sqrt{5} \Longrightarrow$

la ecuación de B es: $\left(2\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)x+\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)y+\sqrt{2}-\sqrt{5}=0$

b) $d_3 = -d_4$

$$\frac{x+y-1}{\sqrt{2}} = \frac{2x-y+1}{+\sqrt{5}} \Rightarrow \sqrt{5}x + \sqrt{5}y - \sqrt{5} = 2\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + \sqrt{2} \Rightarrow$$

$\left(\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\right)x + \left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right)y - \sqrt{5} - \sqrt{2} = 0$ es la ecuación de B'.

$$m_1 = \frac{-2\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}, m_2 = -\frac{\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \Rightarrow m_1 m_2 = \frac{5-8}{5-2} = \frac{-3}{3} = -1 \Rightarrow \text{son } \perp_s$$

FAMILIA DE LINEAS RECTAS

Vemos que una recta queda determinada cuando conocemos dos condiciones independientes de ella. Luego, una recta que satisface sólo una condición no es única, hay infinitas rectas que la cumplen.

Definición: La totalidad de rectas que satisfacen una única condición geométrica se llama familia o haz de rectas.

Por ejemplo, todas las rectas cuya pendiente es 3 forman una familia de rectas paralelas.
Analíticamente esta familia puede representarse por la ecuación.

$y = 3x + k$, siendo $k \in \mathbb{R}$

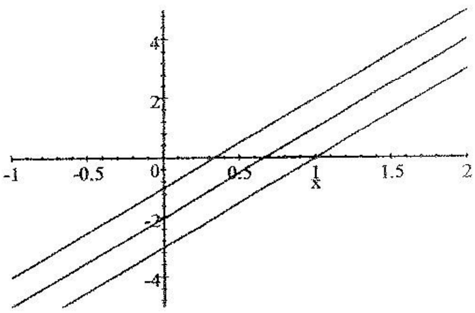


Fig. 55

Al asignarle un valor a k, obtenemos la ecuación de una de las rectas de esta familia.

Otro ejemplo sería el de la familia de rectas que pasan por el punto $P(2,3)$, cuya ecuación es: $y - 3 = k(x - 2)$ donde k es la pendiente. Esta ecuación no incluye la recta $x = 2$ aunque pasa por $(2,3)$.

En general k recibe el nombre de parámetro de la familia.

Es de especial interés la familia de rectas que pasan por la intersección de dos rectas dadas. Sean $L_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $L_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ dos rectas que se cortan en $P_1(x_{1,}y_1)$.

Consideremos la ecuación:
$(*)$ $\quad k_1(A_1x + B_1y + C_1) + k_2(A_2x + B_2y + C_2) = 0$, k_1y k_2 constantes cualesquiera menos el caso en que ambas sean cero. Demostraremos que es la ecuación de la familia de rectas que pasan por P_1.

Como k_1y k_2 son constantes, la ecuación anterior representa una recta. Como $P_1 \in L_1$ y $L_{2,} \Rightarrow$

$$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 = 0$$

$$A_2x_1 + B_2y_1 + C_2 = 0$$

Si en $(*)$ hacemos $x = x_1, y = y_1$,obtenemos $k_1 \cdot 0 + k_2 \cdot 0 = 0$ que es verdadera $\forall k_1$y k_2.

$\therefore$ $(*)$ representa todas las rectas que pasan por $P_1(x_1, y_1)$

En particular, si $k_1 \neq 0, k_2 = 0$,obtenemos de $(*)$ L_1 y si $k_1 = 0, k_2 \neq 0$, de $(*)$ obtenemos L_2

Sin embargo no nos interesa obtener L_1 y L_2 de $(*)$

De $(*)$ si $k_1 \neq 0$, obtenemos:

$$A_1x + B_1y + C_1 + \frac{k_2}{k_1}(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

$$A_1x + B_1y + C_1 + k(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

Esta ecuación nos permite obtener la ecuación de una recta que pasa por la intersección de dos rectas dadas sin tener que buscar las coordenadas del punto de intersección.

EJEMPLOS:

1.- Determinar el valor de k para que la distancia del origen a la recta $x + ky - 7 = 0$ sea 2.

SOLUCION:

$$x + ky - 7 = 0 \Big/ \cdot \frac{1}{+\sqrt{1+k^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}x + \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}y - \frac{7}{\sqrt{1+k^2}} = 0$$

$$\therefore \frac{7}{\sqrt{1+k^2}} = 2 \Rightarrow k = \pm\frac{3\sqrt{5}}{2}$$

2.- Una recta pasa por el origen y por la intersección de $3x+2y-14 = 0$ y $x - 3y - 1 = 0$. Hallar su ecuación, sin determinar el punto de intersección.

SOLUCION: $\quad 3x + 2y - 14 + k(x - 3y - 1) = 0$

$$(0,0) \in recta \therefore -14 - k = 0 \Rightarrow k = -14$$

$$\therefore \textit{Ecuación pedida es} \quad x - 4y = 0$$

EJERCICIOS:

1.- Determinar la ecuación de la recta que pasa por $(3,-4)$ y forma un ángulo de 60^o con el Eje x.

Resp.: $x\sqrt{3}-y-3\sqrt{3}-4=0$

2.- Dado el triángulo : $A(4,5), B(-2,0)$ y $C(2,-3)$,determinar la ecuación de la mediana que pasa por C.

Resp.: $11x+2y-16=0$

3.- Determinar las intersecciones con los ejes de la recta que pasa por el punto (1,6) y es perpendicular a la recta de ecuación: $2x+3y-7=0$. Resp.: $x=-3$; $y=\frac{9}{2}$

4.- Empleando haz de rectas, determinar el miembro del haz que pasa por la intersección de :$2x+y-2=0$ y $x-y+7=0$ y que es perpendicular a la recta de ecuación: $x+6y-3=0$.

Resp.: $3x+6y-27=0$

5.- Empleando haz de rectas, determinar la pendiente de la recta que pasa por el origen y por la intersección de : $x-4y+1=0$ y $3x+y+2=0$. Resp.: $13x+117y=0$

6.- Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto en que:$2x+3y-8=0$ intersecta al Eje X y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos: $A(1,3)$ y $B(2,-1)$.

Resp.: $x-4y-4=0$

7.- Determinar la ecuación de la recta que pasa por la intersección de las diagonales del trapecio cuyos vértices son: $A(1,0), B(0,2), C(-3-1)$ y $D(-1,-5)$ y que es paralela al Eje Y.

Resp.: $x=-\frac{1}{3}$

8.- Empleando haz de rectas, determinar la ecuación del miembro que pasa por el punto $(1,2)$ y el punto de intersección de las medianas del triángulo de vértices: $(2,0),(-5,1)$ y $(-3,7)$.

Resp.: $2x+9y-20=0$

9.- Determinar la ecuación de la familia de rectas que son perpendiculares a la recta de ecuación: $x-3y+6=0$.

Resp.: $3x+y-3x_1-y_1=0$

10.- Determinar la ecuación del haz de rectas que pasa por la intersección de las rectas: $x+y-5=0$ y $4x+y+1=0$. Resp.: $mx-y+7+2m=0$

CIRCUNFERENCIA

DEFINICION:

Es el lugar geométrico, de todos los puntos del plano, que equidistan de un punto llamado centro.

Graficar una circunferencia de centro 0.

Marcar un punto A en la circunferencia.

RADIO: Segmento que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de la circunferencia.($\overline{OA}$)

Marcar otro punto B en la circunferencia.

CUERDA: Segmento que une dos puntos distintos, de una misma circunferencia. ($\overline{AB}$).

DIAMETRO: Es una cuerda que contiene al centro de la circunferencia.

Si: $C \in \odot_{or}$
$D \in \odot_{or}$
$O \in \overline{CD}$.

Entonces: $\overline{CD}$ es un diámetro de la circunferencia de centro 0 y radio r.

SECANTE: Recta que intersecta a la circunferencia en dos puntos distintos ($\overleftrightarrow{AB}$)

TANGENTE: Recta en el mismo plano de la circunferencia, que la intersecta en un único punto.

Si: $\top \cap \odot_{or} = A$

Entonces $\top$ es una tangente a la circunferencia de centro 0 y radio r en el punto A.

ARCO: Es una porción de circunferencia limitada por dos puntos de ella. ($\overset{\frown}{AB}$).

ALGUNAS PROPIEDADES:

1.- En una misma circunferencia, a arcos de igual medida, corresponden cuerdas de igual medida (Graficar).

2.- Un diámetro perpendicular a una cuerda, divide a la cuerda en dos partes de igual longitud (Graficar).

3.- Un diámetro perpendicular a una cuerda, divide al arco que subtiende a la cuerda en dos partes de igual longitud (Graficar).

4.- En toda circunferencia, las cuerdas de igual longitud equidistan del centro de la circunferencia. (Graficar).

5.- Los arcos de una circunferencia comprendidos entre dos cuerdas paralelas son de igual longitud. (Graficar).

6.- Todo radio es perpendicular a la tangente en el punto de tangencia. (Graficar).

7.- Las tangentes trazadas desde un punto exterior de una circunferencia tienen igual longitud. (Graficar).

Veamos ahora la circunferencia desde el punto de vista de la Geometría Analítica.

Determinaremos la ecuación de una circunferencia con centro en el origen del sistema y radio r.

Si 0 es el origen del sistema, entonces las coordenadas de 0 son:................
Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la circunferencia, entonces la distancia de 0 a P se llama:................

$$\therefore \; |OP| = r$$

Aplicando la fórmula de distancia se tiene:

....

Elevando al cuadrado ambos miembros, se tiene: $\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$
Esta es la ecuación de una circunferencia con centro en el origen del sistema y radio r.

Ahora se determinará la ecuación de una circunferencia con centro en $C(h,k)$ y radio r.

Si C es el centro de la circunferencia y $P(x,y)$ un punto cualquiera de la circunferencia, entonces aplicando la definición de circunferencia se tiene:

$$|CP| = r$$

Aplicando la fórmula de distancia se tiene:

....

Elevando al cuadrado ambos miembros, se tiene: $\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$

Esta es la ecuación de una circunferencia con centro en (h,k) y radio r.

EJERCICIOS:

1.- Determinar la ecuación de una circunferencia con centro en el origen del sistema y radio 3.

Resp.: $x^2 + y^2 = 9$

2.- Dada la siguiente ecuación de una circunferencia: $x^2 + y^2 = 5$. Determinar su centro y radio.

Resp.: $C(0,0)$, $r = \sqrt{5}$

3.- Determinar la ecuación de la circunferencia de centro $(-5,1)$ y radio 2.

Resp.: $(x+5)^2 + (y-1)^2 = 4$

4.- Determinar si la ecuación : $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 12 = 0$ representa una circunferencia. En caso afirmativo, determinar su centro y radio. (Sugerencia: Tratar de dar a la ecuación presentada, la forma de la ecuación de una circunferencia con centro en (h,k))

GENERALIZACION : Desarrollando la ecuación:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Se tiene: ....

Colocando todos los elementos en el primer miembro, se tiene:

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$$

Si: $-2h = D, -2k = E,\ \ h^2 + k^2 - r^2 = F$

Entonces la ecuación queda de la siguiente forma:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Ahora, partiendo de la ecuación : $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ veamos si ella representa una circunferencia.

Asociando, se tiene: $(x^2 + Dx) + (y^2 + Ey) = -F$

Sumando: $\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2$ a ambos miembros, para formar cuadrados perfectos, se tiene:

$$\left[x^2 + Dx + \left(\frac{D}{2}\right)^2\right] + \left[y^2 + Ey + \left(\frac{E}{2}\right)^2\right] = -F + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2$$

Lo anterior es igual a: $\left[x + \frac{D}{2}\right]^2 + \left[y + \frac{E}{2}\right]^2 = -F + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2$

Si: $-F + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 > 0$, entonces la ecuación anterior representa una circunferencia de: centro= $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$y

$$radio = \sqrt{-F + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2}$$

Si: $-F + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 = 0$,entonces la ecuación representa sólo un punto:

$$\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$$

Si: $-F + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 < 0$,entonces la ecuación no representa un lugar real.

EJERCICIOS:

1.- Determinar la ecuación de la circunferencia con centro en la intersección de las rectas:

$L_1 : 2x + y - 1 = 0$ y

$L_2 : x - 3y + 3 = 0$ y que pase por el punto: $(1, -1)$

Resp.: $(x - 1)^2 + y^2 = 5$

2.- Determinar la ecuación de la circunferencia con centro en $(2,-3)$ y tangente a la recta de ecuación: $3x-2y+1=0$ Resp.: $(x-2)^2+(y+3)^2=13$

3.- Determinar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia de ecuación:

$x^2+y^2-2x+10y+17=0$, en el punto: $(1,-2)$. Resp.: $y=-2$

4.- Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos, no colineales:

$A(1,2), B(-2,0)$ y $C(-1,-5)$.(Sugerencia: Cada punto debe ser solución para la ecuación: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$. En este caso, las incógnitas son: D, E y F).

Resp.: $17x^2+17y^2-49x+65y-166=0$

5.- Determinar la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo cuyos lados tienen por ecuación: $x=0$, $y=0$ y $3x+4y-1=0$

Resp.: $(x-\frac{1}{12})^2+(y-\frac{1}{12})^2=\frac{1}{144}$

6.- Determinar la ecuación de la circunferencia que es tangente a los ejes coordenados y que pase por el punto $(1,7)$.

7.- Determinar la ecuación de la circunferencia que sea tangente al Eje Y, que pase por el punto $(-1,-1)$ y cuyo centro se encuentre en la recta de ecuación: $2x+y+4=0$

Sean:

$C_1: x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$ y
$C_2: x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$

Se define:

1.- Recta de los centros de C_1 y C_2 como aquella recta que pasa por sus centros siendo: $\boxed{2(E_1-E_2)x-2(D_1-D_2)\ y+D_2E_1-D_1E_2=0}$ su ecuación

2.- Eje radical de C_1 y C_2 : restando miembro a miembro las ecuaciones de C_1 y C_2,se obtiene: $\boxed{(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)\ y\ +F_1-F_2=0}$

llamada ecuación eje radical.

OBSERVACIONES:

1.- Si C_1 y C_2 se cortan en dos puntos, el eje radical pasa por estos dos puntos coincidiendo con su cuerda común.

2.- Si C_1 y C_2 son tangentes entre si, el eje radical es la tangente común a ambas circunferencias.

3.- Si C_1 y C_2 no se cortan y no son concéntricas, el eje radical no tiene ningún punto común con ellas.

4.- La recta de los centros es perpendicular al eje radical (Demúestrelo).

5.- Cada par de tres circunferencias no concéntricas tiene un eje radical, es decir, hay tres ejes radicales. Si ellas no tienen una recta de los centros común, sus tres ejes radicales se cortan en un punto llamado centro radical.

EJEMPLO:

Determinar las ecuaciones de la recta de los centros y eje radical de :
$C_1 : x^2 + y^2 + 2x - 4y - 6 = 0$ y $C_2 : x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$

SOLUCION:

a) Para $C_1 : C_1(-1, 2)$ y para $C_2 : C_2(2, 1)$
$\therefore$ ecuación recta de los centros

$$y - 2 = \frac{1}{-3}(x + 1)$$

b) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 6 = 0$
$\underline{x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0}$ restando

$$6x - 2y - 6 = 0 \Rightarrow 3x - y - 3 = 0 \text{ ecuación eje radical}$$

TANGENTE A UNA CIRCUNFERENCIA

Sabemos que la tangente a una circunferencia es perpendicular al radio trazado por el punto de tangencia.

La ecuación de la tangente a una $\otimes$ queda perfectamente determinada si conocemos su pendiente y el punto de tangencia (o algún otro punto). Si tenemos uno de estos datos el otro debe determinarse a partir de las condiciones del problema. Consideraremos tres casos:

a) Hallar la ecuación de la tangente a una $\otimes$ dada y que tiene pendiente dada.

b) Hallar la ecuación de la tangente a una $\otimes$ dada en el punto de tangencia dado.

c) Hallar la ecuación de la tangente a una $\otimes$ dada y que pasa por un punto exterior dado.

Para cada uno de estos casos, el procedimiento es similar. En cada caso se da una condición. Con ella escribiremos la ecuación de la familia de rectas que la cumplen. Esta ecuación contiene un parámetro que se determina aplicando la condición de tangencia.

EJEMPLO:

1.- Hallar las ecuaciones de las tangentes a la $\otimes$ $4x^2 + 4y^2 + 8x + 4y - 47 = 0$ que tengan $m = -\frac{3}{2}$

SOLUCION: $\quad y = -\frac{3}{2}x + k$

$$4x^2 + 4(\tfrac{9}{4}x^2 - 3xk + k^2) + 8x + 4(-\tfrac{3}{2}x + k) - 47 = 0$$
$$4x^2 + 9x^2 - 12xk + 4k^2 + 8x - 6x + 4k - 47 = 0$$

$13x^2 + (2 - 12k)x + 4k^2 + 4k - 47 = 0$

$\therefore b^2 - 4ac = 0$ llamada condición de tangencia $\Rightarrow$

$(12k - 2)^2 - 4 \cdot 13(4k^2 + 4k - 47) = 0$

$144k^2 - 48k + 4 - 208k^2 - 208k + 2444 = 0$

$-64k^2 - 256k + 2448 = 0 / : (-16)$

$4k^2 + 16k - 153 = 0 \Rightarrow (2k + 17)(2k - 9) = 0 \Rightarrow$

$k_1 = -\frac{17}{2}, k_2 = \frac{9}{2}$

$\therefore \quad y = -\frac{3}{2}x - \frac{17}{2} \Rightarrow 3x + 2y + 17 = 0$

$y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2} \Rightarrow 3x + 2y - 9 = 0$

EJERCICIOS:

1.- Hallar la ecuación de la tangente a la $\otimes$ $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 3 = 0$ en el punto $(-1, 6)$.

2.- Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $(-2, 7)$ a la $\otimes$

$$x^2 + y^2 + 2x - 8y + 12 = 0$$

TRANSFORMACION DE COORDENADAS:

Las Transformaciones de Coordenadas se usan, principalmente, para simplificar las ecuaciones o resaltar alguna propiedad del lugar geométrico.

Estudiaremos dos tipos de Transformaciones:

TRASLACION DE EJES:

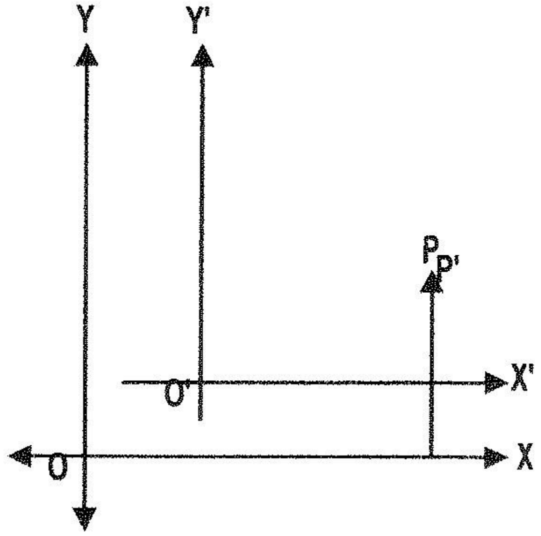


Fig. 56

En el gráfico se tiene que:

$(Eje\ X) \parallel (Eje\ X')$

$(Eje\ Y) \parallel (Eje\ Y')$

$0(0,0)$ en el sistema XY

$0'(h,k)$ en el sistema $X'Y'$

$P(x,y)$ en el sistema XY

$P'(x',y')$ en el sistema $X'Y'$

Podemos notar que: $\boxed{\begin{array}{c} x = h + x' \\ y = k + y' \end{array}}$

Estas son las ecuaciones de transformación para la traslación de ejes coordenados.

Al efectuar estas sustituciones en una ecuación dada, se obtiene una nueva ecuación de la misma gráfica, referida a los nuevos ejes coordenados (ejes trasladados).

La traslación de ejes, generalmente, se usa para eliminar los términos de primer grado en una ecuación.

EJEMPLOS:

1.- Transformar la ecuación $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$ trasladando los ejes al nuevo origen $(-1, 3)$.

SOLUCION: Las ecuaciones de traslación son:

$x = x' - 1$, $y = y' + 3$. Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$(x' - 1)^2 + (y' + 3)^2 + 2(x' - 1) - 6(y' + 3) + 6 = 0$

Desarrollándola y reduciendo términos semejantes se obtiene: $x'^2 + y'^2 = 4$

2.- Transformar la ecuación $2x^2 + y^2 + 16x - 4y + 32 = 0$ en otra de tal manera que carezca de términos de primer grado.

SOLUCION:

1er. método: Sean $x = x' + h, y = y' + k$ las ecuaciones de traslación:

$\therefore\ 2(x' + h)^2 + (y' + k)^2 + 16(x' + h) - 4(y' + k) + 32 = 0$

Desarrollando y ordenando se obtiene:

$$2x'^2 + y'^2 + (4h + 16)x' + (2k - 4)y' + 2h^2 + k^2 + 16h - 4k + 32 = 0$$

de donde: $4h + 16 = 0 \Rightarrow h = -4$

$2k - 4 = 0 \Rightarrow k = 2$

Luego el nuevo origen es $(-4, 2)$ y la ecuación resultante es: $2x'^2 + y'^2 = 4$

2do.Método: Por completación de cuadrados:

$$2(x^2 + 8x + 16) + y^2 - 4y + 4 = -32 + 32 + 4$$

$$2(x+4)^2 + (y-2)^2 = 4$$

siendo:

$x' = x + 4 \Rightarrow h = -4$

$y' = y - 2 \Rightarrow k = 2$

La ecuación resultante es: $2x'^2 + y'^2 = 4$

EJERCICIOS:

1.- Dada la siguiente ecuación : $x^2 - 4y^2 - 4x + 24y - 36 = 0$. Trasladar los ejes al nuevo origen $0'(2,3)$ y determinar la ecuación que se genera.

Resp.: $x'^2 - 4y'^2 + 4 = 0$

2.- Dada la siguiente ecuación : $x^2 - 2xy - 5y^2 + x - 3y = 0$. Mediante una traslación de ejes coordenados, transforme la ecuación dada en una ecuación que no contenga términos de primer grado.

Resp.: $12x'^2 - 60y'^2 - 24x'y' - 1 = 0$

ROTACION DE EJES:

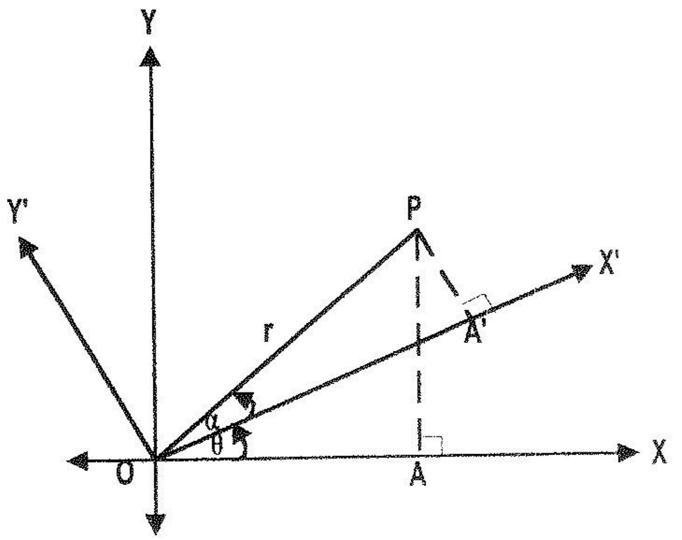


Fig. 57

En el gráfico, sean (x, y) las coordenadas de P según los ejes XY y (x', y') las coordenadas de P según los ejes $X'Y'$:

En el triángulo OAP:

$$\left.\begin{array}{l} x = \overline{OA} = r\ \cos(\theta + \alpha) = r\ \cos\ \theta\ \ \cos\ \alpha - r\ sen\,\theta\ sen\,\alpha \\ \\ y = \overline{AP} = r\ sen(\theta + \alpha) = r\ sen\ \theta\ \ \cos\ \ \alpha + r\ sen\,\alpha\ \cos\ \ \theta \end{array}\right\} (*)$$

En el $\triangle\ 0A'P$:

$$x' = \overline{OA'} = r\ \ \cos\ \alpha, \quad y' = \overline{A'P} = r\ sen\ \alpha$$

Sustituyendo en (*), se obtiene:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = x'\ \cos\ \theta\ - y'\ sen\ \theta \\ y = x'\ sen\,\theta\ + \ y'\ \cos\ \theta \end{array}} \text{siendo } 0 \leq \theta < 90^o$$

son las ecuaciones de rotación.

Al efectuar estas sustituciones en una ecuación dada, se obtiene una nueva ecuación de la misma gráfica, referida a los nuevos ejes coordenados (ejes rotados).

La rotación de ejes, generalmente, se usa para eliminar el término xy en una ecuación.

EJEMPLOS:

1.- Transformar la ecuación: $x^2 - 2xy + y^2 - x = 0$ rotando los ejes 45^o

SOLUCIÓN: Las ecuaciones de rotación son:

$$x = x'\ \cos\ 45^o\ - y'\ sen\,45^o = \tfrac{\sqrt{2}}{2}x' - \tfrac{\sqrt{2}}{2}y'$$

$y = x' \, sen\, 45^o + y' \cos 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'$

Reemplazando en la ecuación dada se tiene:

$(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y')^2 - 2(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y')(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y')$

$+(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y')^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y') = 0$

Desarrollando y reduciendo términos semejantes se obtiene: $4y'^2 - \sqrt{2}x' + \sqrt{2}y' = 0$

2.- Transformar $4x^2 + 4xy + y^2 + \sqrt{5}x + 1 = 0$ en otra que carezca del término en xy.

<u>SOLUCION:</u>

Sean:

$x = x' \cos\theta - y' \, sen\, \theta$

$y = x' \, sen\, \theta + y' \cos\theta$

Reemplazando en la ecuación dada, desarrollándola y ordenándola se obtiene:

$(4\cos^2\theta + 4\cos\theta \, sen\, \theta + sen^2\theta)x'^2 + (4\, sen^2\theta - 4\, sen\, \theta \cos\theta + \cos^2\theta)y'^2$

$+(-6\cos\theta \, sen\, \theta + 4\cos^2\theta - 4\, sen^2\theta)x'y' + \sqrt{5}x' \cos\theta - \sqrt{5}y' \, sen\theta + 1 = 0 (*)$

de donde: $4\cos^2\theta - 4\, sen^2\theta - 6\, sen\theta \cos\theta = 0$

$$4\cos 2\theta - 3\, sen\, 2\theta = 0 \Rightarrow tg 2\theta = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\cos 2\theta = \frac{3}{5}, 2\,\theta \in IC \Rightarrow \theta \in IC$$

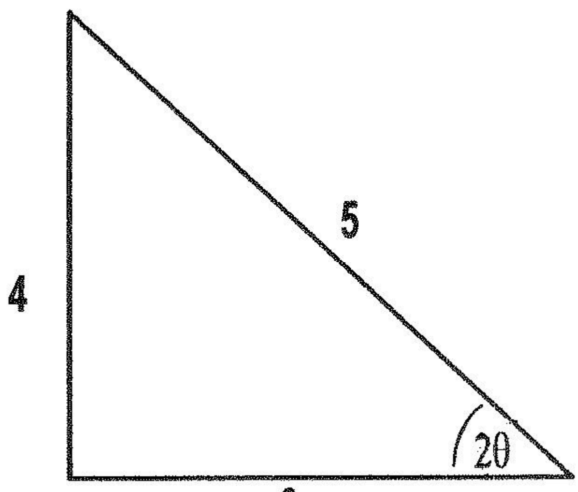


Fig.58

$$\therefore\ sen\,\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\,\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Reemplazando estos valores en (*), se obtiene: $5x'^2+2x'-y'+1=0$

EJERCICIOS:

1.- Transformar $2x^2-5xy+2y^2=0$ en otra que carezca del término en xy.

Resp.: $x'^2-9y'^2=0$

2.- Transformar $2x-y-2=0$ de tal manera que esta recta sea paralela al nuevo eje x'

Resp.: $y'=\frac{-2\sqrt{5}}{5}$

OBSERVACIONES:

1.- Si efectuamos ambas transformaciones a una ecuación, puede obtenerse una simplificación mayor de ella. Existen ecuaciones que permiten efectuar estas transformaciones en forma simultánea. En general es preferible efectuarlas separadamente.

2.- En el caso de una ecuación de 2do. grado en la cual los términos en x^2, xy, y^2 forman un cuadrado perfecto, los ejes deben rotarse primero y luego trasladarse.

3.- El grado de una ecuación no se altera por transformación de coordenadas.

EJERCICIO:

Por transformación de coordenadas verifique que al simplificar la ecuación:

$x^2 - 10xy + y^2 - 10x + 2y + 13 = 0$ se obtiene $2x''^2 - 3y''^2 - 6 = 0$

CONICAS

Estudiaremos ciertas curvas muy importantes en la Geometría Analítica y que se originaron al considerar cortes en diferentes ángulos de un doble cono circular recto, mediante un plano, dando lugar a las figuras llamadas cónicas las que, según el ángulo de corte, reciben el nombre de : Parábola, Elipse e Hipérbola.

1.- PARABOLA:

Definición: es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia a una recta fija es siempre igual a su distancia a un punto fijo que no pertenece a la recta.

El punto fijo se llama FOCO y la recta fija DIRECTRIZ.

Elementos de una parábola:

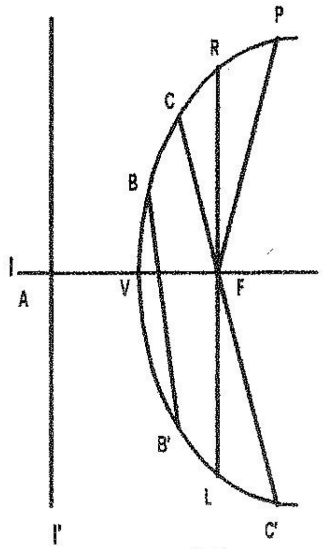


Fig. 59

$l' = directriz$

$F = foco$

$l = eje\ focal$

$V = vértice, \overline{AV} = \overline{VF}$

$\overline{B\ B'} = cuerda$

$\overline{C\ C'} = cuerda\ \ focal$

$\overline{L\ R} = lado\ \ recto$

$\overline{P\ F} = radio\ focal\ \ o\ \ radio\ vector$

ECUACION PARABOLA CON VERTICE EN EL ORIGEN Y EJE FOCAL UN EJE COORDENADO

Sea X eje de la parábola. Por definición se tiene que:

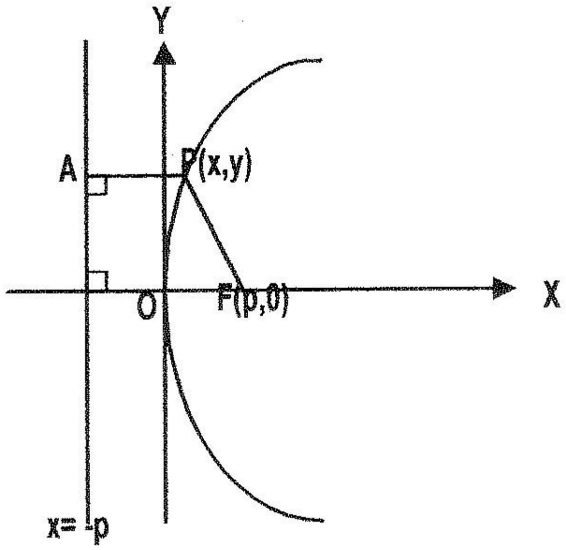


Fig. 60

$|\overline{FP}| = |\overline{PA}| \Rightarrow$

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x+p| \quad /^2$$

$$x^2 - 2xp + p^2 + y^2 = x^2 + 2xp + p^2$$

$\therefore \boxed{y^2 = 4px}$ Forma ordinaria ecuación parábola

ANALISIS DE LA ECUACION:

1.- Intersección: El origen es la única intersección con los ejes.

2.- Simetría: solamente con respecto al eje x.

3.- Extensión: $y = \pm 2\sqrt{px} \Rightarrow$

y es real si p y x son del mismo signo. Luego hay dos casos: $p > o, p < o$.

Si $p > o \Rightarrow x > o \Rightarrow$ el L.G. se encuentra a la derecha del eje y,y la curva se extiende indefinidamente en esa dirección. En este caso se dice que la parábola se abre hacia la derecha. Ahora si $p < o \Rightarrow x < o \Rightarrow$ el L.G. se encuentra a la izquierda del eje y, y la curva se extiende indefinidamente en esa dirección. Se dice que la parábola se abre hacia la izquierda. La ecuación de la directriz es $x = -p$.

4.- No tiene asíntotas verticales ni horizontales.

5.- Si en $y^2 = 4px$, hacemos $x = p \Rightarrow y = \pm 2p \Rightarrow L.L.R. = |4p|$ =longitud lado recto

En forma análoga se demuestra que la ecuación de la parábola con $V(0,0)$ y eje el eje y, es $\boxed{x^2 = 4py}$, siendo $F(o,p)$ el foco. Igualmente si $p > o$, la parábola se abre hacia arriba y si $p < o$ la parábola se abre hacia abajo. La ecuación de la directriz es $y = -p$.

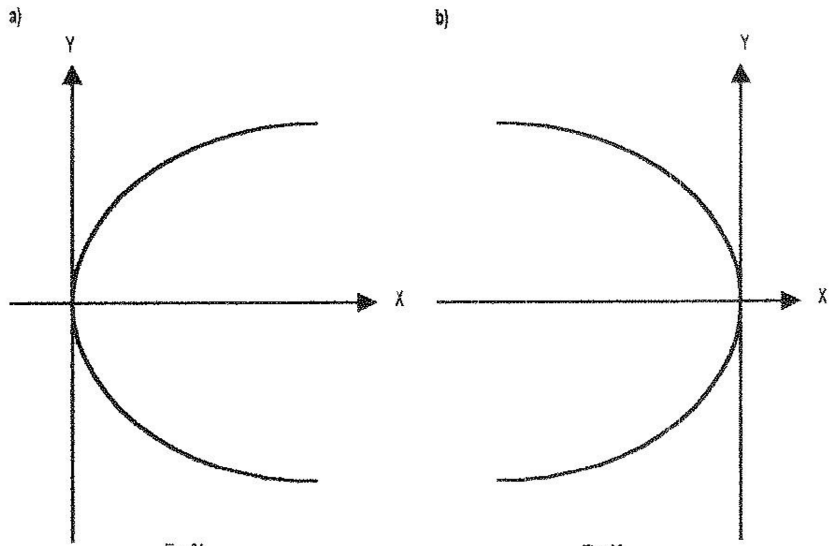


Fig. 61

Fig. 62

$y^2 = 4px, p > o$

$y^2 = 4px, p < o$

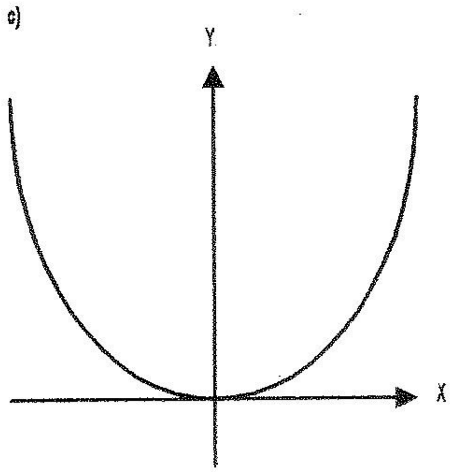


Fig. 63

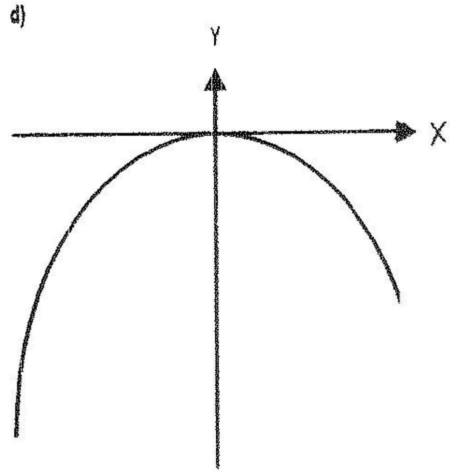


Fig. 64

$x^2 = 4py, p > o$

$x^2 = 4py, p < o$

EJEMPLOS:

1.- Una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje coincide con el eje x, pasa por el punto $(-2, 4)$. Hallar la ecuación de la parábola, las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud de su lado recto.

SOLUCION:

$\therefore\ y^2 = 4px, p < o$

$(-2, 4) \in parábola \ \Rightarrow$

$16 = -8p \Rightarrow p = -2$

$\therefore\ y^2 = -8x, ecuación\ parábola$

$F(-2, 0), coordenadas\ del\ foco$

$x = 2, ecuación\ de\ la\ directriz$

$LLR = 8$

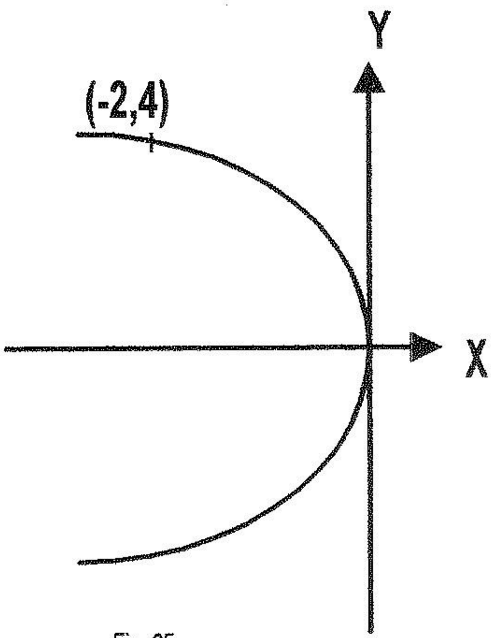


Fig. 65

2.- Una cuerda de la parábola $y^2 - 4x = 0$ es un segmento de la recta $x - 2y + 3 = 0$

Hallar su longitud.

SOLUCION: Haga un gráfico que represente el enunciado.

$$\left.\begin{array}{l} y^2 - 4x = 0 \\ x = 2y - 3 \end{array}\right\} \Rightarrow y^2 - 8y + 12 = 0 \Rightarrow (y-6)(y-2) = 0$$

$$\Rightarrow y = 6 \Rightarrow x = 9 \therefore P_1(9,6)$$

$$y = 2 \Rightarrow x = 1 \therefore P_2(1,2)$$

$$\therefore\ d = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

ECUACION PARABOLA V(h,k) Y EJE PARALELO A UN EJE COORDENADO

Consideremos una parábola con $V(h,k)$ y eje paralelo al eje X.

La ecuación de esta parábola con respecto a los ejes $X'Y'$ es $y'^2 = 4px'$

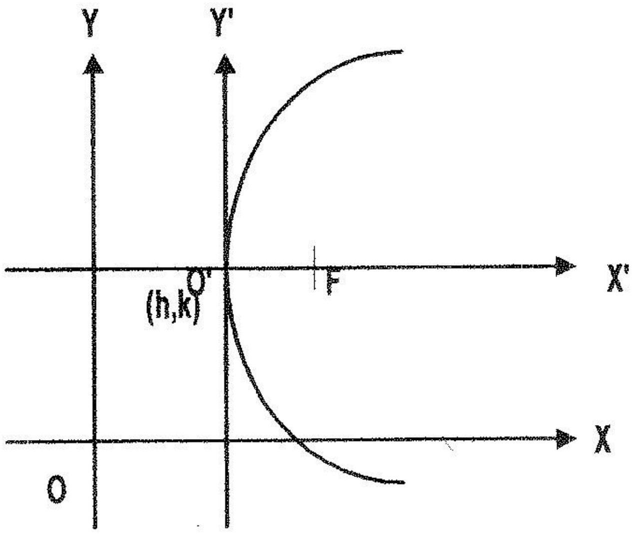


Fig. 66

Pero:

$x = x' + h \Rightarrow x' = x - h$

$y = y' + k \Rightarrow y' = y - k$

$\therefore$ sustituyendo se obtiene que: $\boxed{(y-k)^2 = 4p(x-h)}$ Forma ordinaria ecuación parábola $V(h,k)$ y eje //eje X

Análogamente se obtiene que la ecuación de la parábola con $V(h,k)$ y eje paralelo al eje Y es : $\boxed{(x-h)^2 = 4p(y-k)}$

En ambas ecuaciones $|p|$ es la longitud entre el vértice y el foco.

En ellas hay tres constantes arbitrarias e independientes. Luego deben tenerse tres condiciones independientes para determinar su ecuación.

Desarrollando $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ se obtiene:

$$y^2 - 2yk + k^2 = 4px - 4ph \Rightarrow y^2 - 4px - 2yk + k^2 + 4ph = 0$$

$a_1 \quad a_2$

que es de la forma: $y^2 + a_1x + a_2y + a_3 = 0 \qquad 1)$

$$\text{siendo: } \begin{aligned} a_1 &= -4p \\ a_2 &= -2p \\ a_3 &= k^2 + 4ph \end{aligned}$$

Completando cuadrado en la ecuación 1) veremos que representa una parábola cuyo eje es paralelo al eje X.

Al discutir la ecuación 1) suponemos que $a_1 \neq 0$. Si $a_1 = 0$, la ecuación toma la forma: $y^2 + a_2y + a_3 = 0 \quad 2)$

Si las raíces de 2) son reales y desiguales r_1 *y* r_2, entonces 2) toma la forma:

$(y - r_1)(y - r_2) = 0$ y el L.G. corresponde a dos rectas, $y = r_1$, $y = r_2$,paralelas al eje X.

Si las raíces de 2) son reales e iguales, el L.G. corresponde a dos rectas coincidentes paralelas al eje X.

Si las raíces de 2) son complejas, no existe L.G. real.

Una discusión análoga se realiza para la ecuación:

$(x - h)^2 = 4p(y - k)$

EJEMPLOS:

1.- Hallar la ecuación de la parábola cuyos vértice y foco son los puntos $(-4, 3)$ y $(-1, 3)$,respectivamente. Hallar las ecuaciones de su directriz y eje.

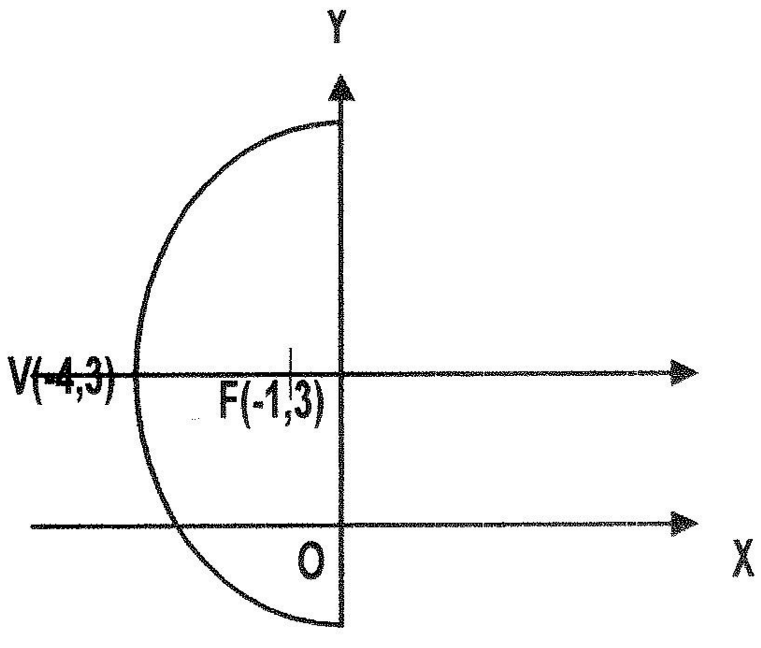


Fig. 67

SOLUCION: $p = -1 + 4 = 3$

$\therefore \quad Ecuación\ parábola : (y - 3)^2 = 12(x + 4)$

$Ecuación\ \ directriz:\ x = -7$

$Ecuación\ eje: \qquad y = 3$

2.- Reducir a la forma ordinaria; encontrar las coordenadas del vértice y foco, las ecuaciones de la directriz, eje focal y la L.L.R. de $4y^2 - 48x - 20y = 71$

SOLUCION: $4y^2 - 48x - 20y = 71/ : 4$

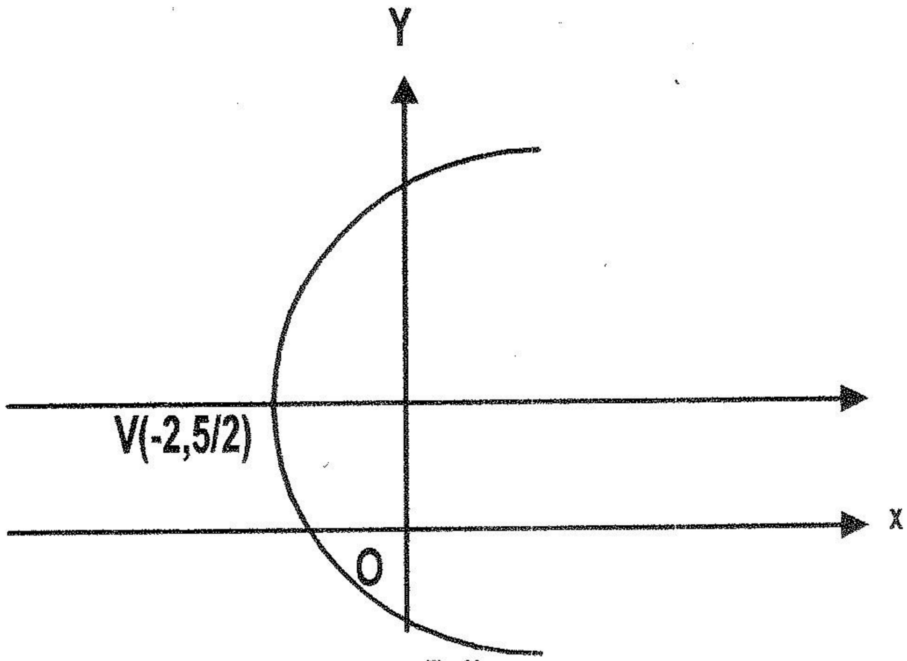


Fig. 68

$$y^2 - 12x - 5y = \tfrac{71}{4}$$
$$y^2 - 5y + \tfrac{25}{4} = 12x + \tfrac{71}{4} + \tfrac{25}{4} = 12x + 24$$
$$(y - \tfrac{5}{2})^2 = 12(x + 2) \Rightarrow 4p = 12 \Rightarrow p = 3$$
$$\therefore\ V(-2, \tfrac{5}{2})\ \ y\ \ F(1, \tfrac{5}{2})$$

$Ec.directriz\ \ x = -5 \qquad Ec.eje\ focal\ \ y = \frac{5}{2} \quad L.L.R. = 12$

3.- Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje x, y que pasa por los puntos $(0,0), (8,-4)\ y\ (3,1)$

SOLUCION: La ecuación de la parábola es de la forma: $y^2 + Dx + Ey + F = 0$

$$\therefore\ (0,0) \in paráb. \Rightarrow \qquad F = 0$$
$$(8,-4)\ \in paráb. \Rightarrow 16 + 8D - 4E + F = 0\ |$$

Resolviendo el sistema se obtiene: $D = -1,\ \ E = 2,\ \ F = 0$. Luego la ecuación pedida es: $y^2 - x + 2y = 0$

EJERCICIOS:

1.- Determinar la ecuación de la parábola, cuya directriz tiene por ecuación: $y = 1$ y foco $F(3, -2)$

Resp.: $(x-3)^2 = -12(y-1)$

2.- (a) Determinar la ecuación de la parábola con vértice $V(2,3)$ $y\ foco\ F(0,3)$

(b) Determinar la longitud del lado recto. Resp.: $LL\ R = 8$

3.- Dada: $2x^2 - 3x + 8y + 1 = 0$

(a) Reducirla a la forma canónica. Resp.: $(x-\frac{3}{4})^2 = -4(y-\frac{1}{64})$

(b) Determinar las coordenadas del foco.

(c) Determinar las coordenadas del vértice.

(d) Determinar la ecuación de la directriz.

(e) Trazar la gráfica

2.- LA ELIPSE :

Definición: Es el L.G. de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos.

Los dos puntos fijos se llaman focos. La definición excluye el caso en que el punto móvil esté sobre el segmento que une los focos.

Elementos de la elipse:

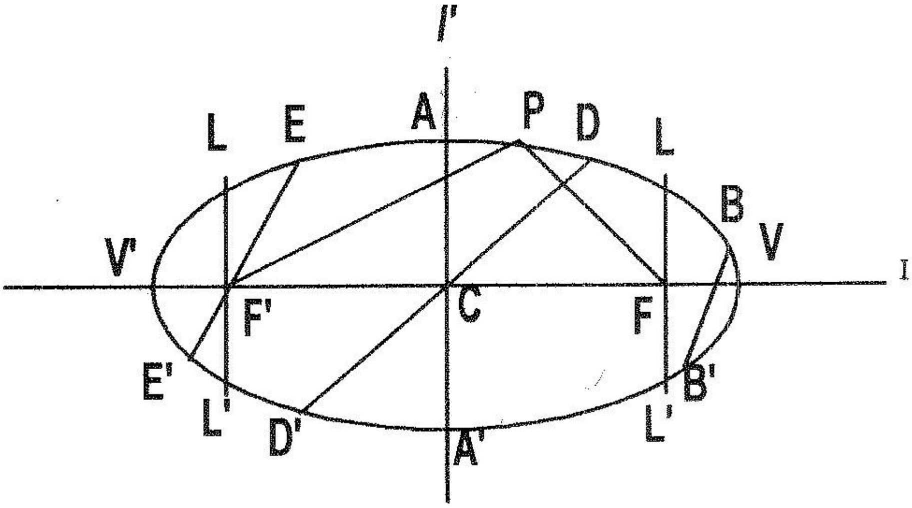


Fig. 69

F y F' = focos

recta l = eje focal

V y V' = vértice

$\overline{VV'}$ = eje mayor

C = centro

recta l' = eje normal

$\overline{AA'}$ = eje menor

$\overline{BB'}$ = cuerda

$\overline{EE'}$ = cuerda focal

$\overline{LL'}$ = lados rectos

$\overline{DD'}$ = diámetro

$\overline{F'P}$ y $\overline{PF}$ = radios vectores de P

ECUACION ELIPSE DE CENTRO EN EL ORIGEN Y EJES DE LA ELIPSE, LOS EJES COORDENADOS.

Sea la elipse con centro en el origen y eje focal coincidente con el eje X. 0 es el punto medio entre F y F'. Sea $F(c,0)$ y $F'(-c,0)$ sus coordenadas y $P(x,y)$ un punto cualquiera de la elipse.

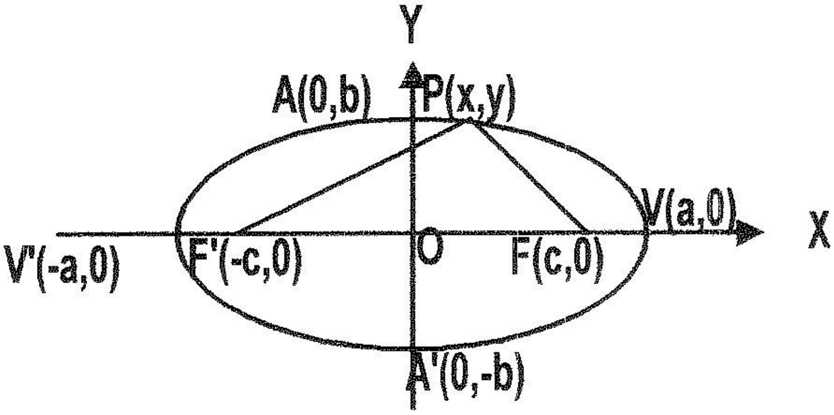


Fig. 70

Por definición $|\overline{F'P}| + |\overline{FP}| = k = 2a$, siendo $a > c$

$$\therefore \ \sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad /^2$$

$$x^2+2xc+c^2+y^2 = 4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2-2xc+c^2+y^2$$

$$xc - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad /^2$$

$$a^4 + x^2c^2 - 2xca^2 = a^2x^2 - 2xca^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$x^2(a^2-c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

Como $a > c \Rightarrow a^2 > c^2 \Rightarrow a^2 - c^2 > 0$. Sea $a^2 - c^2 = b^2$

$\therefore\ b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \qquad / : a^2b^2$

$\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$ Forma ordinaria ecuación elipse

ANALISIS:

1.- a) Intersecciones eje X, si $y = 0 \Rightarrow x = \pm\ a \Rightarrow V'(-a, 0)\ y\ V(a, 0)$
$\therefore$ la longitud del eje mayor $= 2a$
b) Intersecciones eje Y, si $x = 0 \Rightarrow y = \pm\ b \Rightarrow A(0, b)\ y\ A'(0, -b)$
$\therefore$ la longitud del eje menor $= 2b$

2.- La elipse es simétrica con respecto a ambos ejes coordenados y al origen.

3.- Extensión: $x = \pm\ \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2} \Rightarrow x \in R, \forall\ y\ \in [-b, b]$

$$y = \pm\ \tfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow y \in R, \forall\ x\ \in [-a, a]$$

$\therefore$ la elipse es una curva cerrada que no tiene asíntotas horizontales ni verticales.
Como la abscisa de F es $c \Rightarrow y = \pm\frac{b^2}{a} \Rightarrow L.L.R. = \frac{2b^2}{a}$. Análogamente para F'
La excentricidad de una elipse se define como: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.
Como $a > c, e < 1$

Si consideramos que la elipse tiene su centro en el origen y eje focal coincide con el eje Y, haciendo un desarrollo análogo al anterior, obtenemos que su ecuación es:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

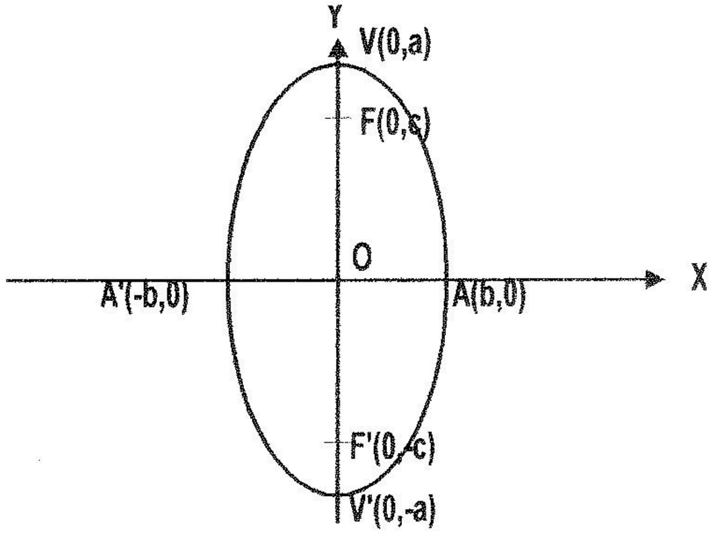


Fig. 71

Siempre el denominador mayor está asociado a la variable correspondiente al eje coordenado con el cual coincide el eje mayor de la elipse.

EJEMPLOS:

1.- Hallar las coordenadas de los vértices y focos, longitudes eje mayor y menor, excentricidad y la L.L.R. de $16x^2 + 25y^2 = 400$

SOLUCION: $16x^2 + 25y^2 = 400 \quad / : 400$

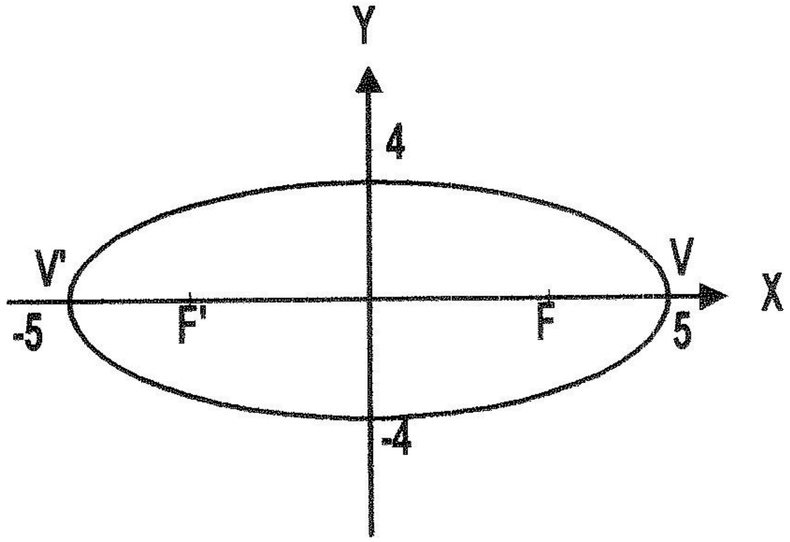


Fig. 72

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$\therefore \quad a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$

$\therefore \; V'(-5,0) \quad y \quad V(5,0)$

$a^2 - c^2 = b^2 \Rightarrow 25 - c^2 = 16 \Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = 3$

$\therefore \; F'(-3,0) \quad y \quad F(3,0)$

Long. eje mayor $= 2a = 10$

Long. eje menor $= 2b = 8$

$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$

$L.L.R. = \frac{2b^2}{a} = \frac{32}{5}$

2.- Hallar la ecuación de la elipse que pasa por $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, 3\right)$, tiene su centro en el origen, su eje menor coincide con el eje X, y la longitud de su eje mayor es el doble de la de su eje menor.

SOLUCION: Ecuación de la forma: $\frac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow$

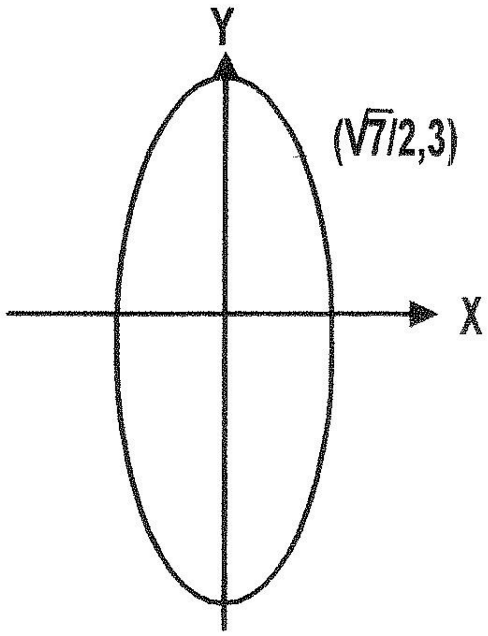


Fig. 73

$a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$

Como $(\frac{\sqrt{7}}{2}, 3) \in$ *elipse* $\Rightarrow \frac{7}{4}a^2 + 9b^2 = a^2b^2$ como $a = 2b \Rightarrow$
$7b^2 + 9b^2 = 4b^4 \Rightarrow 16b^2 - 4b^4 = 0 \Rightarrow$

$b^2 = 4 \Rightarrow a^2 = 16$

$\therefore$ *la ecuación pedida es* : $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

ECUACION ELIPSE CENTRO (h,k) Y EJES PARALELOS A LOS EJES COORDENADOS

Consideremos una elipse centro $0'(h, k)$ y eje focal paralelo al eje X.

La ecuación de la elipse según $X'Y'$

es: $\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$

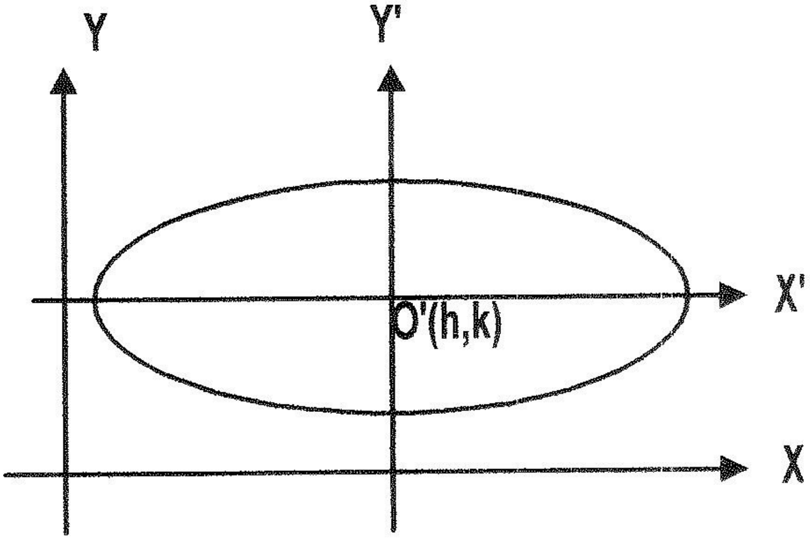


Fig. 74

pero: $\left.\begin{array}{r} x = x' + h \Rightarrow x' = x - h \\ y = y' + k \Rightarrow y' = y - k \end{array}\right\}$ Sustituyendo se tiene:

1.- $\boxed{\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$ *Forma ordinaria ecuación elipse*
$C(h,k)$, *eje focal paralelo eje* X.

Análogamente, si su eje focal es paralelo eje Y, se tiene:

2.- $\boxed{\dfrac{(x-h)^2}{b^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$ *Forma ordinaria ecuación elipse*
$C(h,k)$, *eje focal paralelo eje* Y

Considerando la ecuación 1), desarrollándola y ordenándola obtenemos:

$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2hx - 2a^2ky + b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2 = 0$

que es de la forma: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad \alpha)$

siendo:
$A = b^2$
$C = a^2$
$D = -2b^2h$
$E = -2a^2k$
$F = b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2$

Evidentemente los coeficientes de A y C son del mismo signo.
¿Toda ecuación de la forma $\alpha)$ representará siempre una elipse?.
Para responder llevemos la ecuación $\alpha)$ a la forma ordinaria.

$$A(x^2 + \tfrac{D}{A}x + \tfrac{D^2}{4A^2}) + C(y^2 + \tfrac{E}{C}y + \tfrac{E^2}{4C^2}) = \tfrac{D^2}{4A} + \tfrac{E^2}{4C} - F$$

$$A(x + \tfrac{D}{2A})^2 + C(y + \tfrac{E}{2C})^2 = \tfrac{CD^2+AE^2-4ACF}{4AC} \qquad / : AC$$

$$\frac{(x + \frac{D}{2A})^2}{C} + \frac{(y + \frac{E}{2C})^2}{A} = \tfrac{CD^2+AE^2-4ACF}{4A^2C^2}$$

Sea: $\frac{CD^2+AE^2-4ACF}{4A^2C^2} = M$ Si $M \neq 0$ la ecuación queda:

$\dfrac{(x + \frac{D}{2A})^2}{MC} + \dfrac{(y + \frac{E}{2C})^2}{MA} = 1$ que es la forma ordinaria de la ecuación de la elipse.

Como A y C deben ser del mismo signo, consideremos que son positivos. Luego si $\alpha)$ debe representar una elipse, M debe ser positivo. Su denominador $4A^2C^2$ es positivo, luego el signo de M dependerá de su numerador. En resumen si:

1. $CD^2 + AE^2 - 4ACF > 0$, $\alpha)$ representa una elipse.
2. $CD^2 + AE^2 - 4ACF = 0$, $\alpha)$ representa el punto $(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C})$ llamado elipse punto.
3. $CD^2 + AE^2 - 4ACF < 0$, $\alpha)$ no representa un L.G. real.

EJEMPLOS:

1.- Los vértices de una elipse son los puntos (1,1) y (7,1) y su excentricidad es $\frac{1}{3}$. Hallar la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus focos y las longitudes de sus ejes mayor y menor y de cada lado recto.

SOLUCION:

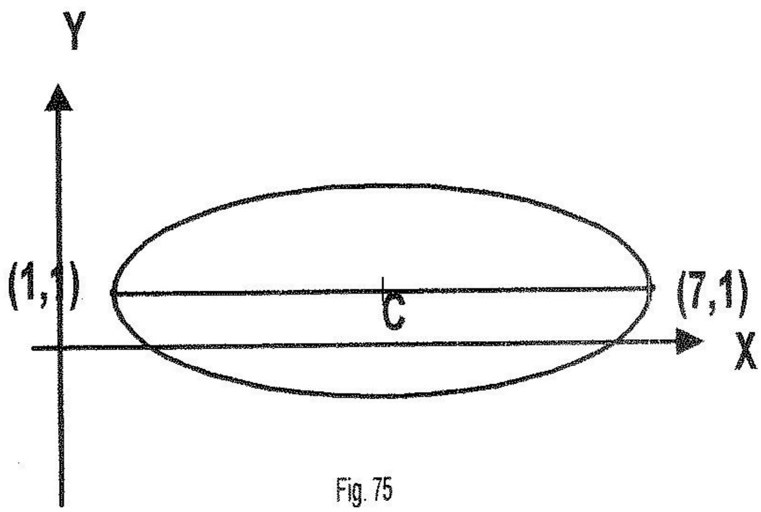


Fig. 75

$\therefore \ C(4,1)$

$2a = 6 \Rightarrow a = 3$

$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{3} \Rightarrow c = 1$

$a^2 - b^2 = 9 - b^2 = 1 \Rightarrow b^2 = 8$

$$\therefore \ \frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{8} = 1$$

$F(h+c,1) = F(5,1)$

$F'(h-c,1) = F'(3,1)$

$L.E.Ma. = 2a = 6$

$L.E.Me. = 2b = 4\sqrt{2}$

$L.L.R. = \frac{2b^2}{a} = \frac{16}{3}$

2.- Reducir a la forma ordinaria, y determinar las coordenadas del centro, vértices y focos, las longitudes de los ejes mayor y menor, y la de cada lado recto y la excentricidad, si $9x^2+4y^2-8y-32=0$

<u>SOLUCION:</u> $9x^2+4y^2-8y-32=0$

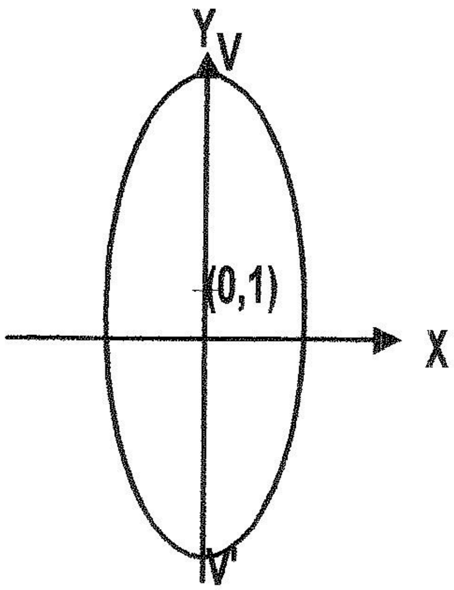


Fig. 76

$9x^2+4(y^2-2y+1) = 32+4$

$9x^2+4(y-1)^2 = 36 \quad / : 36$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

$\therefore\ a^2 = 9 \Rightarrow a = 3, \quad b^2 = 4 \Rightarrow b = 2, \quad C(0,1)$

$V(0,4)\ y\ \ V'(0,-2)$

$a^2 - b^2 = c^2 \Rightarrow 9 - 4 = c^2 \Rightarrow c^2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$

$\therefore\ F(0, 1+\sqrt{5})\ \ y\ \ F'(0, 1-\sqrt{5})$

$L.E.Ma. = 2a = 6$

$L.E.Me. = 2b = 4$

$L.L.R. = \dfrac{2b^2}{a} = \frac{8}{3}, \quad e = \dfrac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

EJERCICIOS:

1.- Si: $(2,-1)$ Centro de una Elipse.

$Longitud\ \ del\ Eje\ Mayor = 10$

$(Eje\ Mayor) paralelo\ (Eje\ X)$

$Longitud\ \ del\ Eje\ Menor = 8$

Determinar:

a.- Ecuación de la Elipse. Resp.: $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$

b.- Excentricidad

c.- Coordenadas de los Focos.

d.- Coordenadas de los Vértices.

2.- Dada la elipse de ecuación: $2x^2 + y^2 = 4$

Determinar todos sus elementos y graficarla.

3.- Dada la siguiente ecuación : $x^2 + 4y^2 + 4x = 0$, reducirla a la forma ordinaria, determinar todos sus elementos y graficarla.

Resp.: $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3.- <u>HIPERBOLA:</u>

<u>DEFINICION:</u> es el L.G. de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, es siempre igual a una constante, positiva y menor que la distancia entre ellos. Los puntos fijos se llaman focos.

Esta definición excluye el caso en que el punto móvil se mueva sobre la recta que pasa por los focos a excepción del segmento comprendido entre ellos. Los focos y el punto medio de este segmento no pertenecen al L.G.

La hipérbola consta de dos ramas diferentes, cada una de longitud infinita.

<u>ELEMENTOS DE UNA HIPERBOLA:</u>

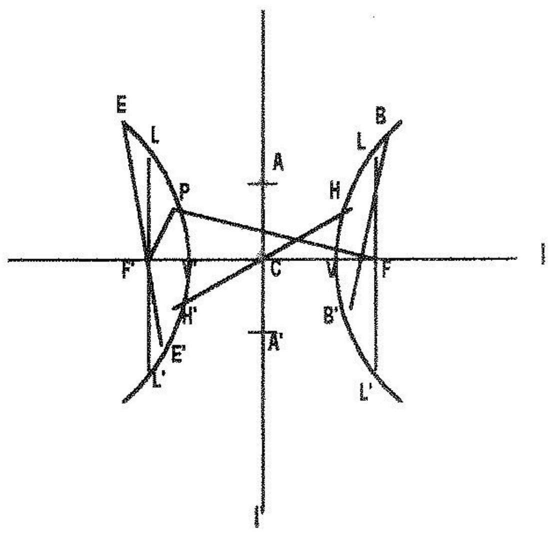


Fig. 77

$l = eje\ focal$

$l' = eje\,normal$

F' y $F = focos$

V' y $V = vértices$

$C = centro$

$\overline{A'A} = eje\ conjugado$

$\overline{B'B} = cuerda$

$\overline{E'E} = cuerda\ focal$

$\overline{L'L} = lados\ rectos$

$\overline{H'H} = diámetro$

$\overline{V'V} = eje\ transverso$

$\overline{F'P}$ y $\overline{FP} = radios\ vectores\ de\ P$

ECUACION HIPERBOLA $C(0,0)$ Y EJE FOCAL UNO DE LOS EJES COORDENADOS

Consideremos una hipérbola con $C(0,0)$ y eje focal el eje X. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera de ella. Aplicando la definición de hipérbola se tiene que:

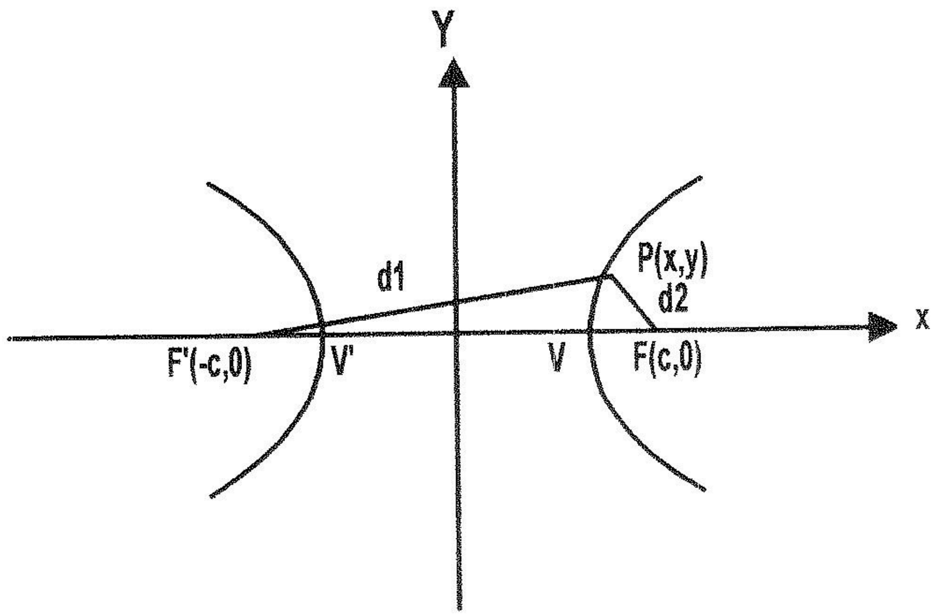


Fig. 78

$|d_1 - d_2| = k = 2a, 2a < 2c$

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad /^2$

$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{\%} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$

$4xc - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} / : 4 /^2$

$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2x^2 - 2xca^2 + a^2c^2 + a^2y^2$

$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = (c^2 - a^2)a^2 \quad \therefore \; c > a \Rightarrow c^2 > a^2 \Rightarrow c^2 - a^2 > 0$

Sea: $c^2 - a^2 = b^2 \quad \therefore \quad b^2x^2 - a^2y^2 = b^2a^2 \qquad / : a^2b^2$

$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$ Forma ordinaria ecuación hipérbola $C(0,0)\; y\, eje\, focal, eje\; X$

ANALISIS:

1.- Intersecciones:

a)$x = 0 \Rightarrow \quad y \quad \notin R$. Sin embargo se consideran los puntos $A'(0,b) \;\; y \;\; A(0,b)$ como extremos del eje conjugado.

$\therefore \; long.eje \;\; conjugado = 2b$

b) $y = 0 \Rightarrow x = \pm a \Rightarrow V'(-a,0) \;\; y \;\; V(a,0)$

$\therefore \; long.\, eje\, transverso = 2a$

2.- Simetría: hay con respecto a los ejes y al origen.

3.- Extensión:

a) $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \Rightarrow \quad y \ \in R, \forall x \in (-\infty, -a] \cup [a + \infty)$

$b)$ $x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2} \Rightarrow \quad x \ \in R, \forall \ y \in R$

$\therefore$ no es una curva cerrada

4.- Asíntotas: No tiene asíntotas horizontales ni verticales, pero si tiene dos asíntotas oblicuas que se estudiarán más adelante.

5.- Como la abscisa de F es $c \Rightarrow y = \pm\frac{b^2}{a} \Rightarrow L.L.R. = \frac{2b^2}{a}$. Análogamente para F'.

6.- Excentricidad: $e = \frac{c}{a} > 1$

Haciendo un desarrollo análogo al anterior, se obtiene que la ecuación de la hipérbola con $C(0,0)$ y eje focal el eje Y es: $\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$

La variable de coeficiente positivo corresponde al eje coordenado que contiene al eje transverso.

ASINTOTAS DE LA HIPERBOLA:

Tenemos: $\quad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

En esta ecuación si x aumenta sin límite $1 - \frac{a^2}{x^2} \to 1$ y por lo tanto $y = \pm\frac{b}{a}x$, que representa dos rectas $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$ que son asíntotas de la hipérbola.

<u>DEMOSTRACION:</u> Sea $P_1(x_1, y_1)$ un punto de la hipérbola y $bx - ay = 0$ la ecuación de la recta.

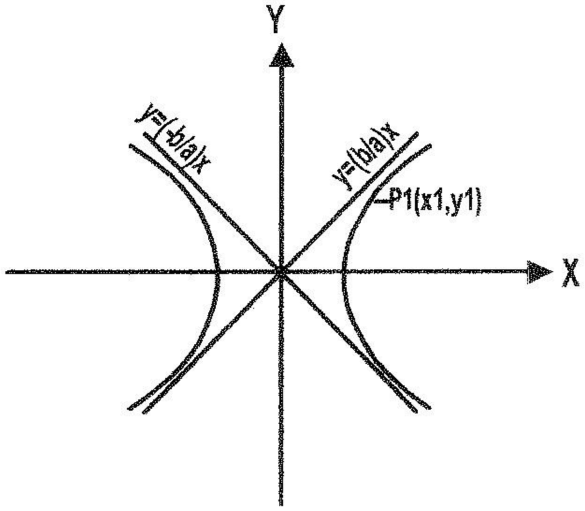


Fig. 79

$$\therefore \ d = \frac{|bx_1 - ay_1|}{\sqrt{b^2+a^2}} \cdot \frac{|bx_1 + ay_1|}{|bx_1 + ay_1|} = \frac{|b^2x_1^2 - a^2y_1^2|}{\sqrt{b^2+a^2}\,|bx_1 + ay_1|}$$

$$\therefore \ b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2 \Rightarrow d = \frac{a^2b^2}{\sqrt{b^2+a^2}|bx_1+ay_1|}$$

$\therefore$ Si P_1 se mueve de tal manera que $x_1 \to \infty, y_1 \to \infty \Rightarrow d \to 0, \therefore \ y = \frac{b}{a}x$ es asíntota de la rama derecha e izquierda. Análogamente sucede si $P_1(x_1, y_1)$ está sobre la rama izquierda, es decir $y = -\frac{b}{a}x$ también es asíntota.

OBSERVACION: Si $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ es la ecuación de una hipérbola, fácilmente se determinan sus asíntotas haciendo $b^2x^2 - a^2y^2 = 0 \Rightarrow (bx-ay)(bx+ay) = 0$ y luego $bx-ay = 0, bx+ay = 0$ son las ecuaciones de ellas.

HIPERBOLA EQUILATERA O RECTANGULAR.

Sea la hipérbola para la cual $a = b$, luego la ecuación de ella es $x^2 - y^2 = a^2$ llamada hipérbola equilátera por tener los ejes transverso y conjugado iguales, siendo $x - y = 0, x + y = 0$ sus asíntotas. Estas rectas son perpendiculares, por esta razón se le llama también hipérbola rectangular.

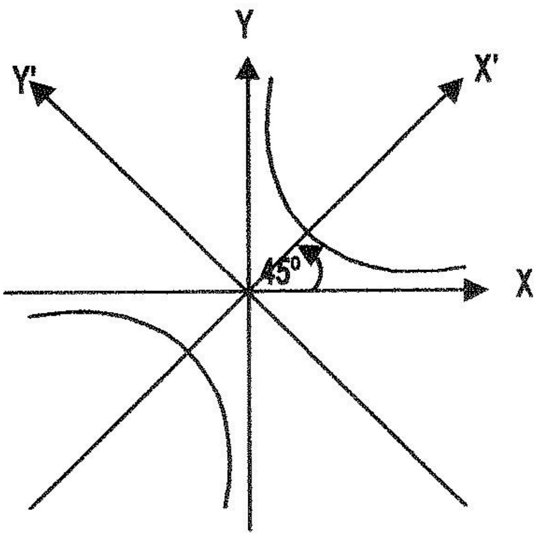


Fig. 80

Una ecuación útil de la hipérbola equilátera es $xy = k$, k constante $\neq 0$. Es una hipérbola que tiene de asíntotas a los ejes coordenados. Si los ejes coordenados se giran 45^o, la ecuación se transforma en $x'^2 - y'^2 = 2k$

<u>**HIPERBOLAS CONJUGADAS:**</u> Si dos hipérbolas son tales que el eje transverso de una es idéntico al eje conjugado de la otra, y viceversa, se dice que cada una de ella es conjugada de la otra. Ambas se denominan hipérbolas conjugadas.

Si una de ella tiene por ecuación: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ la otra es $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ que resulta fácilmente cambiando el signo de uno de los miembros de la primera.

<u>EJEMPLOS:</u>

1.- Hallar las coordenadas de los vértices y los focos, las longitudes de los ejes transverso y conjugado, la excentricidad y la longitud de cada lado recto para $9y^2 - 4x^2 = 36$

SOLUCION:

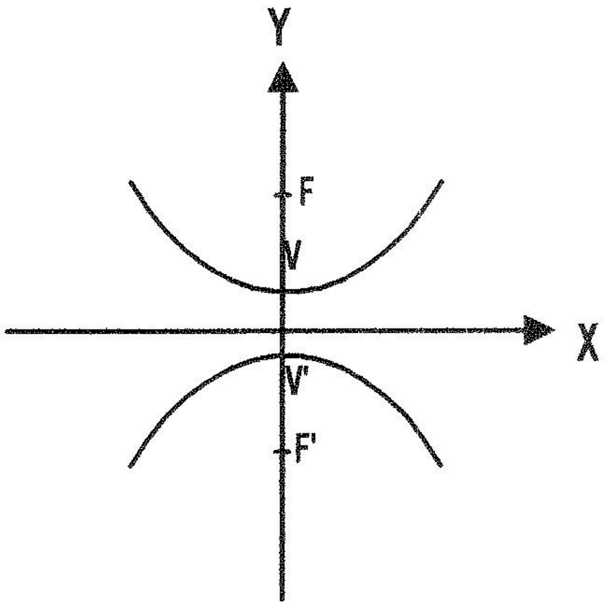


Fig. 81

$9y^2 - 4x^2 = 36$

$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$

$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$

$\therefore\ V(0,2)\ \ y\ \ V'(0,-2),\quad F(0,\sqrt{13})\ \ y\ \ F'(0,-\sqrt{13})$

$L.\,eje\ trans. = 2a = 4,\quad \log.\,eje\,conjugado = 2b = 6$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2},\quad L.L.R. = \frac{2b^2}{a} = 9$

2.- El centro de una hipérbola está en el origen, y su eje transverso está sobre el eje y. Si un foco es el punto (0,5) y la excentricidad es igual a 3, hallar la ecuación de la hipérbola y la longitud de cada lado recto.

SOLUCION:

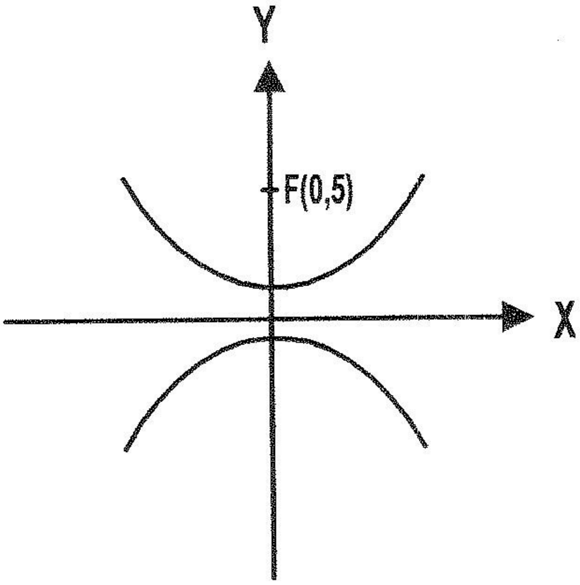


Fig. 82

$c = 5,\ e = \frac{c}{a} = 3 \Rightarrow a = \frac{5}{3} \Rightarrow a^2 = \frac{25}{9}$

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

$c^2 - a^2 = b^2 \Rightarrow 25 - \frac{25}{9} = b^2 \Rightarrow b^2 = \frac{200}{9}$

$$\therefore\ \frac{y^2}{\frac{25}{9}} - \frac{x^2}{\frac{200}{9}} = 1 \Rightarrow 72y^2 - 9x^2 = 200$$

$L.L.R. = \frac{2b^2}{a} = 2 \cdot \frac{200}{9} \cdot \frac{3}{5} = \frac{80}{3}$

3.- Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto (3,-1), su centro está en el origen, su eje transverso sobre el eje X, y una de sus asíntotas es la recta $2x + 3\sqrt{2}\,y = 0$

SOLUCION:

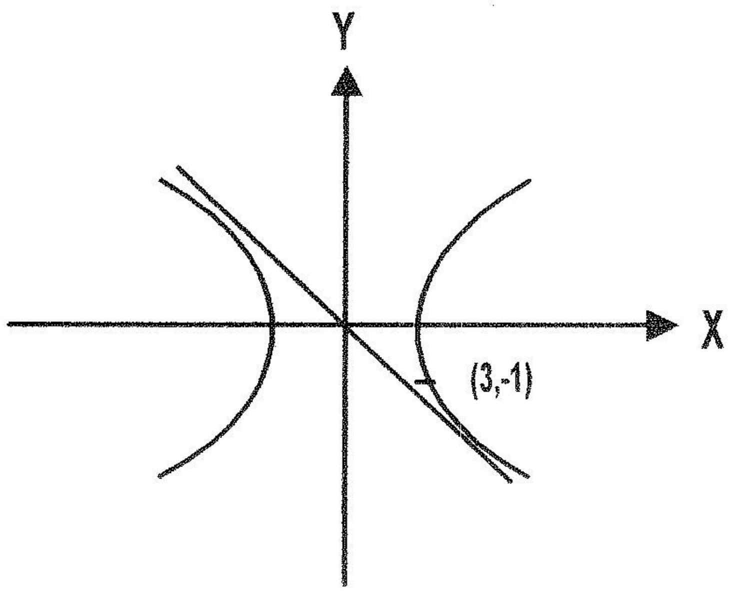


Fig. 83

$(2x + 3\sqrt{2}y)(2x - 3\sqrt{2}y) = k$

$4x^2 - 18y^2 = k$

$(3, -1) \in hip. \Rightarrow 36 - 18 = k \Rightarrow k = 18$

$\therefore \; 4x^2 - 18y^2 = 18 \qquad / : 2$

$2x^2 - 9y^2 = 9$

4.- Hallar las coordenadas de los vértices y focos, y la excentricidad de la hipérbola que es conjugada a $9x^2 - 4y^2 = 36$

SOLUCION: $4y^2 - 9x^2 = 36 \, / : 36 \;\Rightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$

$\therefore \; a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \qquad \therefore \; V(0, 3), \quad V'(0, -3)$

$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$ $\qquad F(0, \sqrt{13}), \quad F'(0, -\sqrt{13})$

$c^2 = a^2 + b^2 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13}$ $\qquad e = \frac{\sqrt{13}}{3}$

ECUACION HIPERBOLA CENTRO (h,k) Y EJES PARALELOS A LOS EJES COORDENADOS

Consideremos una hipérbola con centro $O'(h, k)$ y eje focal paralelo al eje X.

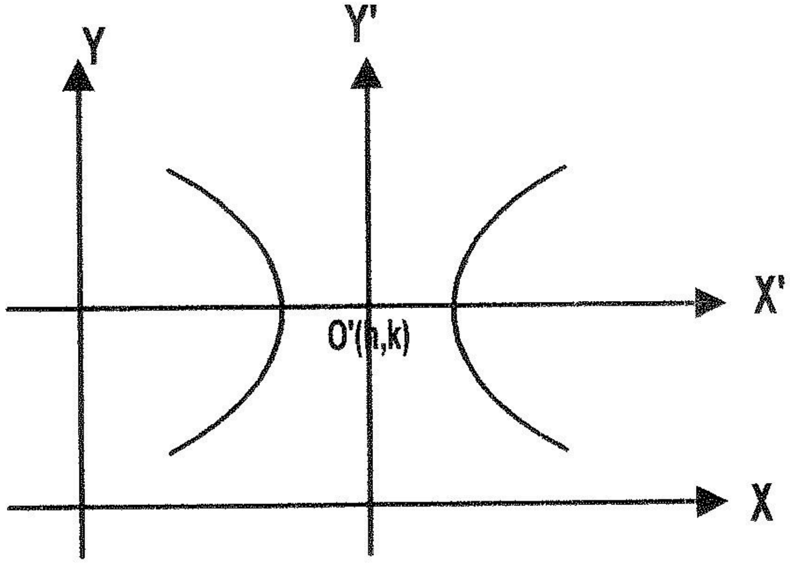


Fig. 84

La ecuación de la hipérbola según ejes $X'Y'$ es $\dfrac{x'^2}{a^2} - \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$ (*)

pero $\quad x = x' + h \Rightarrow x' = x - h$

$y = y' + k \Rightarrow y' = y - k$

Sustituyendo en (*) se tiene:

$\boxed{\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$ *Forma ordinaria ecuación hipérbola* $C(h, k)$ *y eje focal paralelo eje* X

Análogamente:

$$\boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1} \quad Forma\ ordinaria\ ecuación\ hipérbola\ C(h,k)$$

$y\ eje\ focal\ paralelo\ eje Y.$

EJEMPLOS:

1.- Reducir la ecuación $4x^2 - 9y^2 + 32x + 36y + 64 = 0$ a la forma ordinaria y determinar coordenadas del centro, vértices y focos, longitud ejes transverso y conjugado, longitud lado recto, excentricidad y ecuación de las asíntotas.

SOLUCION: $4(x^2 + 8x + 16) - 9(y^2 - 4y + 4) = -64 + 64 - 36$

$$9(y-2)^2 - 4(x+4)^2 = 36 \qquad / : 36$$

$$\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x+4)^2}{9} = 1 \qquad C(-4,2)$$

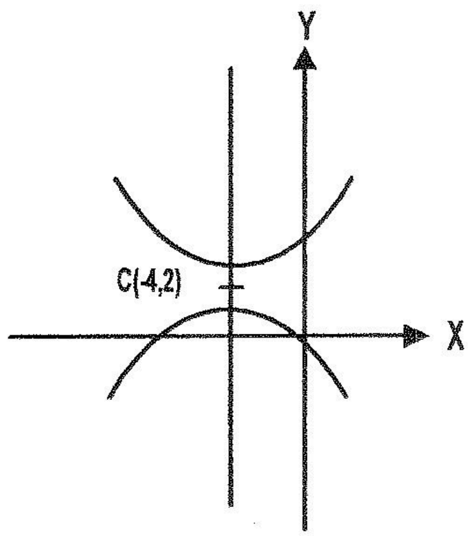


Fig. 85

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$

$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

$c^2 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13}$

$\therefore\ V'(-4,0)\quad y\quad V(-4,4)$

$F'(-4, 2-\sqrt{3})\ y\quad F(-4, 2+\sqrt{3})$

$L.\,eje\ \ trans. = 2a = 4$

$L.\,eje\ conj.\ = 2b = 6$

$L.L.R. = \frac{2b^2}{a} = 9$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2}$

<u>Asíntotas:</u> $3(y-2) - 2(x+4) = 0 \Rightarrow 2x - 3y + 14 = 0$

$3(y-2) + 2(x+4) = 0 \Rightarrow 2x + 3y + 2 = 0$

2.- Hallar el ángulo agudo de intersección de las asíntotas de la hipérbola $9x^2 - y^2 - 36x - 2y + 44 = 0$

<u>SOLUCION:</u> $9(x^2 - 4x + 4) - (y^2 + 2y + 1) = -44 + 36 - 1$

$(y+1)^2 - 9(x-2)^2 = 9 \Rightarrow Asíntotas : 3x - y - 3 = 0 \Rightarrow m_1 = 3$

$3x + y - 1 =$
$0 \Rightarrow m_2 = -3$

$\therefore\ \ tg\alpha = \frac{-3-3}{1-9} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4} = 0,75 \Rightarrow \alpha = 36,87^o$

3.- Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto (4,6), tiene el eje focal paralelo al eje X, y sus asíntotas son las rectas $2x + y - 3 = 0\ \ y\ \ 2x - y - 1 = 0$

<u>SOLUCION:</u> $(2x + y - 3)\ (2x - y - 1) = k$

$\therefore\ (4,6) \in Hip. \Rightarrow 11 \cdot 1 = k \Rightarrow k = 11$

$\therefore\ 4x^2 - 2xy + 2xy - y^2 - y - 6x + 3y + 3 - 2x = 11$

$4x^2 - 8x - y^2 + 2y = 8$

$4(x^2 - 2x + 1) - (y^2 - 2y + 1) = 8 + 4 - 1$

$4(x-1)^2 - (y-1)^2 = 11$

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{11}{4}} - \frac{(y-1)^2}{11} = 1$$

4.- Demostrar que la elipse $x^2 + 3y^2 = 6$ y la hipérbola $x^2 - 3y^2 = 3$ tienen los mismos focos.

SOLUCION:

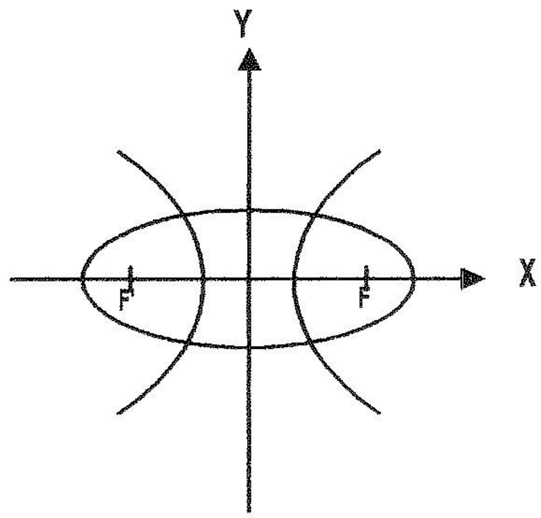


Fig. 86

$$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$$

$a^2=6 \Rightarrow a=\sqrt{6}$

$b^2=2 \Rightarrow b=\sqrt{2}$

$c^2=4 \Rightarrow c=2$

$\therefore\ F'(-2,0)\ \ y\ \ F(2,0)$

$\dfrac{x^2}{3}-y^2=1 \Rightarrow a^2=3 \Rightarrow a=\sqrt{3}$

$b^2=1 \Rightarrow b=1$

$c^2=4 \Rightarrow c=2$

$\therefore\ F'(-2,0)\ \ y\ \ F(2,0)$

$\therefore$ los focos son los mismos

OBSERVACION IMPORTANTE.

Si los coeficientes A y C difieren del signo, la ecuación $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ representa una hipérbola de ejes paralelos a los coordenados o un par de rectas que se cortan.

EJEMPLO:

Determinar que curva representa la ecuación: $x^2-4y^2-2x+1=0$.

SOLUCION:

$$x^2-4y^2-2x+1=0$$

$$x^2-2x+1-4y^2=0$$

$(x-1)^2 - 4y^2 = 0$

$x - 1 - 2y = 0 \Rightarrow x - 2y - 1 = 0$

$x - 1 + 2y = 0 \Rightarrow x + 2y - 1 = 0$

$\therefore$ representa dos rectas que se cortan.

EJERCICIOS.

1.- a) Escribir la ecuación de la Hipérbola con centro en (-2,1), con eje transverso de longitud 6, paralelo al eje X y con eje conjugado de longitud 8. Resp.: $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$

b) Determinar: excentricidad, coordenadas de los focos y de los vértices.

c) Determinar: Las ecuaciones de las asíntotas.

d) Graficar la hipérbola.

2.- a) Graficar la hipérbola de ecuación: $4x^2 - y^2 + 36 = 0$

b) Determinar la ecuación de la hipérbola conjugada y graficarla.

Resp.: $\mathbf{4x^2 - y^2 = 36}$

3.- Dada la siguiente ecuación: $x^2 - y^2 - 2x - y + 1 = 0$, reducirla a la forma ordinaria y graficarla.

Resp.: $\frac{(y+\frac{1}{2})^2}{\frac{1}{4}} - \frac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}} = 1$

ECUACION GENERAL DE SEGUNDO GRADO

Sea:

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ la ecuación general de segundo grado. Considerando $B \neq 0$, veremos que por medio de una rotación podremos transformar (1) en otra de la forma: (2) $A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$

Hemos estudiado anteriormente que si (2) representa un L.G. real, corresponde a una cónica, a un punto o a un par de rectas. Como por transformación de coordenadas la naturaleza de un L.G. no se altera, entonces (1) debe ser también una cónica, un punto o un par de rectas. Luego la ecuación (1) se toma, generalmente, como la definición analítica de cónica.

Efectuando una rotación para (1), tenemos:

$$x = x' \cos\theta - y' \, sen\,\theta, \; y = x' \, sen\,\theta + y' \cos\theta$$

$\therefore\; A(x' \cos\theta - y' sen\theta)^2 + B(x'\cos\theta - y' sen\theta)(x' sen\theta + y'\cos\theta) + C(x' sen\theta + y'\cos\theta)^2 + D(x'\cos\theta - y' sen\theta) + E(x' sen\theta + y'\cos\theta) + F = 0$

Desarrollando y agrupando términos, se obtiene:

*) $A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$, siendo:

$A' = A\cos^2\theta + B \; sen\,\theta \cos\theta + C \, sen^2\theta$

$B' = 2(C - A)\, sen\,\theta \cos\theta + B(\cos^2\theta - sen^2\theta)$

$C' = A\, sen^2\theta - B \; sen\,\theta \cos\theta + C\cos^2\theta$

$D' = D\cos\theta + E\, sen\,\theta$

$E' = E\cos\theta - D \; sen\,\theta$

$F' = F$

Si *) debe carecer del término en $x'y'$, debemos hacer :

$2(C - A) sen\theta \cos\theta + B(\cos^2\theta - sen^2\theta) = 0$

$(C - A) \; sen\,2\theta + B \cos 2\theta = 0$, Si $A \neq C$ $\boxed{tg\,2\theta = \frac{B}{A-C}}$ (3)

Si $A = C, B \cos 2\theta = 0_1$, como $B \neq 0$ se sigue que $\cos 2\,\theta = 0 \quad **)$

Como $0^o \leq \theta < 90^o \Rightarrow 0^o \leq 2\;\theta < 180^o$.
Luego de **) $2\,\theta = 90^o \Rightarrow \boxed{\theta = 45^o}$

Resumiendo: Teorema

La ecuación general de segundo grado: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, en donde $B \neq 0$, puede transformarse siempre en otra de la forma:

$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$ haciendo girar los ejes coordenados un ángulo positivo agudo θ tal que: $tg\ 2\,\theta = \frac{B}{A-C}$, si $A \neq C$ y $\theta = 45^o$, si $A = C$.

Conclusión importante: En (3) como $B \neq 0$, $tg\ 2\,\theta \neq 0$ y por lo tanto $\theta \neq 0$ en todos los casos. Luego la ecuación (1) puede transformarse en la forma (2) girando los ejes coordenados un ángulo diferente de cero. Luego si (2) representa una cónica, el eje focal es paralelo o coincide con los ejes coordenados. Luego si (1) es una cónica, el eje focal debe ser oblicuo con respecto a los ejes coordenados.

El indicador : $I = B^2 - 4AC$

Hemos visto que si en la ecuación (1) $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F = 0$, efectuamos una rotación, se transforma en la ecuación:

$(*)\ A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$, siendo

$$\left.\begin{array}{l} A' = A\cos^2\theta + B\,sen\,\theta\cos\theta + C sen^2\theta \\ B' = 2(C-A)sen\theta\cos\theta + B(\cos^2\theta - sen^2\theta) \\ C' = A\,sen^2\theta - B\,sen\,\theta\ \cos\theta + C\ \cos^2\theta \\ D' = D\cos\theta + E\,sen\ \theta \\ E' = E\cos\theta - D\,sen\ \theta \\ F' = F \end{array}\right\}\ (\alpha)$$

Si escogemos θ de acuerdo al teorema anterior (*) toma la forma:

$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \quad (2)$

Definiciones:

1.- Si A' o C' es igual a cero, (2) representa una cónica género parábola.

2.- Si A' y C' son del mismo signo, (2) representa una cónica género elipse.

3.- Si A' y C' son de signo contrario, (2) representa una cónica género hipérbola.

Usando las tres primeras relaciones de (α), puede demostrarse que: $B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$ que es una relación independiente de θ. Como $B^2 - 4AC$ no cambia de valor para ninguna rotación de los ejes coordenados, se llama invariante.

Por otro lado cuando la ecuación (1) se transforma en la ecuación (2), $B' = 0$ y la relación anterior queda: $B^2 - 4AC = -4A'C'$

De las definiciones anteriores:

1.- Si A' o C' es igual a cero, la ecuación (2) y por lo tanto la (1) es del género parábola, y por lo tanto $B^2 - 4AC = 0$

2.- Si A' y C' son del mismo signo, la ecuación (2), y por lo tanto la (1) es del género elipse, luego: $B^2 - 4AC < 0$

3.- Si A' y C' son de signo contrario, la ecuación (2), y por lo tanto la (1) es del género hipérbola y luego: $B^2 - 4AC > 0$

Luego $B^2 - 4AC$ recibe el nombre de "indicador" y se denota por $I = B^2 - 4AC$.

EJEMPLOS:

1.- Determinar la naturaleza de la cónica.

$4x^2 - 12xy + 9y^2 - 8\sqrt{13}x - 14\sqrt{13}y + 117 = 0$. Reducir la ecuación a su forma canónica por transformación de coordenadas. Trazar el L.G. y todos los sistemas de ejes coordenados.

<u>SOLUCION:</u> $4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x - 3y)^2 \Rightarrow$ hacer primero una rotación.

a) $I = B^2 - 4AC = 144 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$ $\therefore$ es género parábola.

b) Para eliminar el término en xy, hacemos girar los ejes coordenados un ángulo θ tal que $tg\ 2\ \theta = \frac{B}{A-C} = \frac{-12}{-5} = \frac{12}{5}$

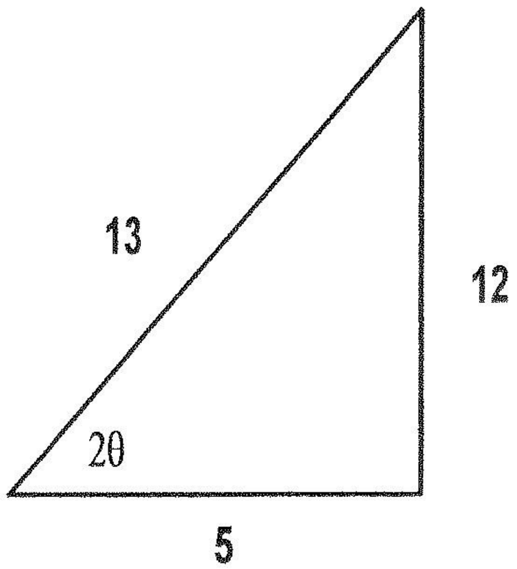


Fig. 87

$sen\ 2\ \theta = \frac{12}{13}$

$\cos\ 2\ \theta = \frac{5}{13}$

$$sen\,\theta = \sqrt{\frac{1 - \cos\ 2\ \theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{5}{13}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\cos\ \theta = \sqrt{\frac{1+\cos\ 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{5}{13}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$\therefore$ las ecuaciones de rotación son: $x = \frac{3}{\sqrt{13}}x' - \frac{2}{\sqrt{13}}y'$

$$y = \frac{2}{\sqrt{13}}x' + \frac{3}{\sqrt{13}}y'$$

Sustituyendo, se tiene:

$4(\frac{3}{\sqrt{13}}x' - \frac{2}{\sqrt{13}}y')^2 - 12(\frac{3}{\sqrt{13}}x' - \frac{2}{\sqrt{13}}y')(\frac{2}{\sqrt{13}}x' + \frac{3}{\sqrt{13}}y') + 9(\frac{2}{\sqrt{13}}x' +$

$\frac{3}{\sqrt{13}}y')^2 - 8\sqrt{13}(\frac{3}{\sqrt{13}}x' - \frac{2}{\sqrt{13}}y') - 14\sqrt{13}(\frac{2}{\sqrt{13}}x' + \frac{3}{\sqrt{13}}y') + 117 = 0$

$\frac{36}{13}x'^2 - \frac{48}{13}x'y' + \frac{16}{13}y'^2 - \frac{72}{13}x'^2 - \frac{108}{13}x'y' + \frac{48}{13}x'y' + \frac{72}{13}y'^2 + \frac{36}{13}x'^2 + \frac{108}{13}x'y'$

$+\frac{81}{13}y'^2 - 24x' + 16y' - 28x' - 42y' + 117 = 0$

$13y'^2 - 52x' - 26y' + 117 = 0 \Rightarrow y'^2 - 4x' - 2y' + 9 = 0$

$\therefore$ haciendo una traslación, se obtiene que: $y'^2 - 2y' + 1 = 4x' - 9 + 1 = 4x' - 8$

$$(y' - 1)^2 = 4(x' - 2)$$
$$y''^2 = 4x''$$

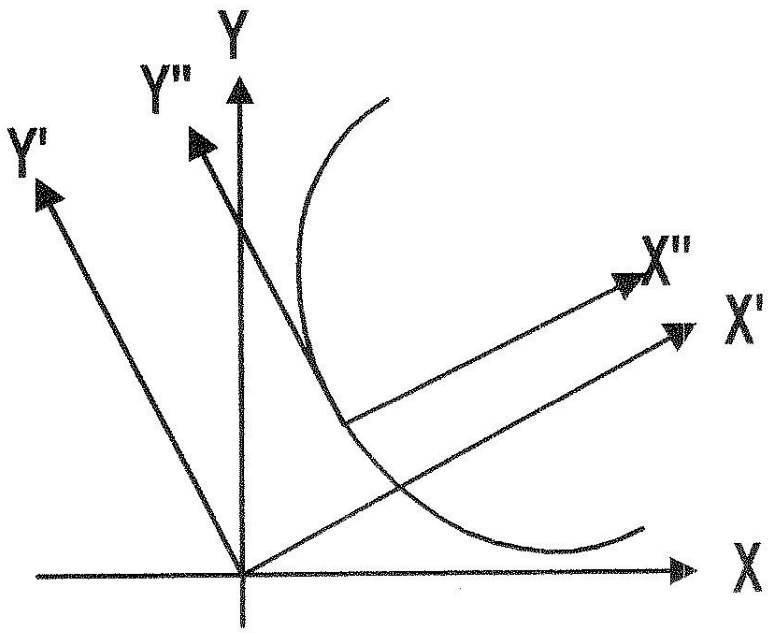


Fig. 88

2.- idem ejercicio 1 para $x^2+8xy+16y^2-4x-16y+7=0$

SOLUCION:

$I = B^2 - 4AC = 64 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 0$, cónica género parábola.

$tg\,2\theta = \frac{B}{A-C} = \frac{8}{1-16} = -\frac{8}{15} \qquad \Rightarrow \cos\;2\theta = \frac{-15}{17}$

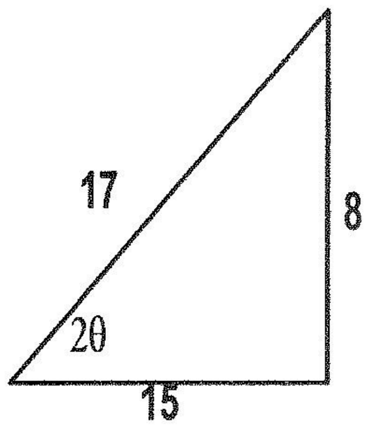


Fig. 89

$$sen\,\theta = \sqrt{\frac{1+\frac{15}{17}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\cos\,\theta = \sqrt{\frac{1-\frac{15}{17}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{17}}x' - \frac{4}{\sqrt{17}}y', \quad y = \frac{4}{\sqrt{17}}x' + \frac{1}{\sqrt{17}}y'$$

$$\frac{x'^2}{17} - \frac{8}{17}x'y' + \frac{16}{17}y'^2 + \frac{32}{17}x'^2 + \frac{8}{17}x'y' - \frac{128}{17}y'x' - \frac{32}{17}y'^2 + \frac{256}{17}x'^2 + \frac{128}{17}y'x' +$$

$$\frac{16}{17}y'^2 - \frac{4}{\sqrt{17}}x' + \frac{16}{\sqrt{17}}y' - \frac{64}{\sqrt{17}}x' - \frac{16}{\sqrt{17}}y' + 7 = 0$$

$\frac{289}{17}x'^2 - \frac{68}{\sqrt{17}}x' + 7 = 0 \qquad /.17$

$289x'^2 - 68\sqrt{17}x' + 119 = 0$

$x' = \frac{68\sqrt{17} \pm \sqrt{78.608 - 137.564}}{578} \in \mathbb{C}$

$\therefore$ no representa un L.G. real

EJERCICIOS:

Determinar la naturaleza de la cónica dada, reducir la ecuación a su forma canónica por transformación de coordenadas. Trazar el L.G. y todos los sistemas de ejes coordenados.

1.- $4x^2 - 24xy + 11y^2 + 56x - 58y + 95 = 0$

2.- $4x^2 - 20xy + 25y^2 + 4x - 10y + 1 = 0$

COORDENADAS POLARES

El sistema de coordenadas polares presenta, para ciertas curvas y tipos de lugares geométricos, algunas ventajas sobre las coordenadas rectangulares.

En el sistema polar, cualquier punto se localiza especificando su posición respecto a una recta fija y a un punto fijo de esa recta. La recta fija se llama eje polar y el punto fijo, polo.

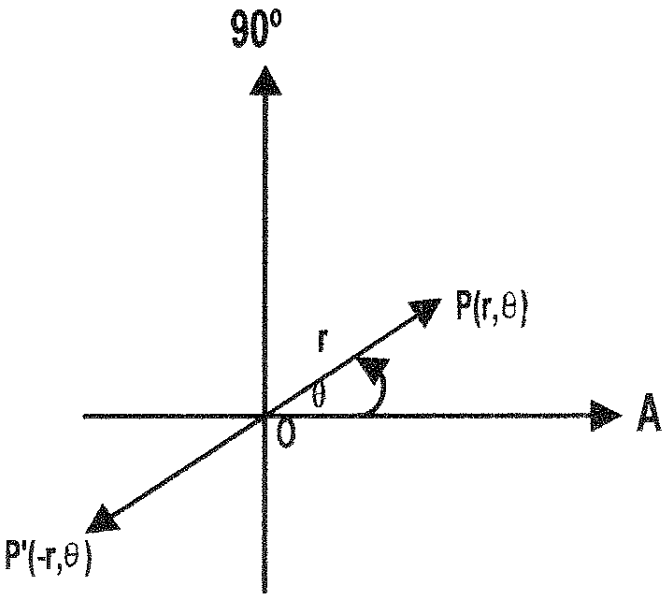


Fig. 90

$\overrightarrow{OA} = eje\ \ polar$

$O = polo$

Sea P un punto cualquiera del plano. Sea $\overline{OP} = r \quad y \quad \measuredangle\ A\ OP = \theta$. Luego conociendo $r \ \ y \ \ \theta$ se podrá determinar P. Estas dos cantidades se llaman coordenadas polares. En particular r se llama radio vector y θ ángulo polar. Luego las coordenadas de P se simbolizan por (r, θ). La recta que pasa por el polo,perpendicular al eje polar se llama el eje a 90°.

θ se mide partiendo del eje polar hacia el radio vector. Será positivo o negativo según Trigonometría. Para el caso de P, cuyo radio vector es negativo, se mide el ángulo polar primero y después se toma el radio vector sobre la prolongación del lado final de θ.

Un par de coordenadas polares (r, θ) determina sólo un punto en el plano. Sin embargo el recíproco no es verdadero ya que un punto P puede ser determinado por $(r, \theta + 2\pi n)$, siendo "n" un entero cualquiera.

En nuestro estudio convendremos, a menos que se especifique lo contrario, en tomar el radio vector r como positivo y su ángulo polar θ comprendido entre cero y el ángulo positivo menor que 360^o.

A tal par le llamaremos par principal de coordenadas polares del punto. Las coordenadas del polo son $(0,\ \theta)$ siendo θ un ángulo cualquiera.

EJEMPLO:

1.- Graficar los puntos : $P_1(3, \frac{\pi}{4})$, $P_2(-5, \frac{3\pi}{2})$, $P_3(2, \frac{4\pi}{3})$, $P_4(-4, \frac{\pi}{4})$

SOLUCION:

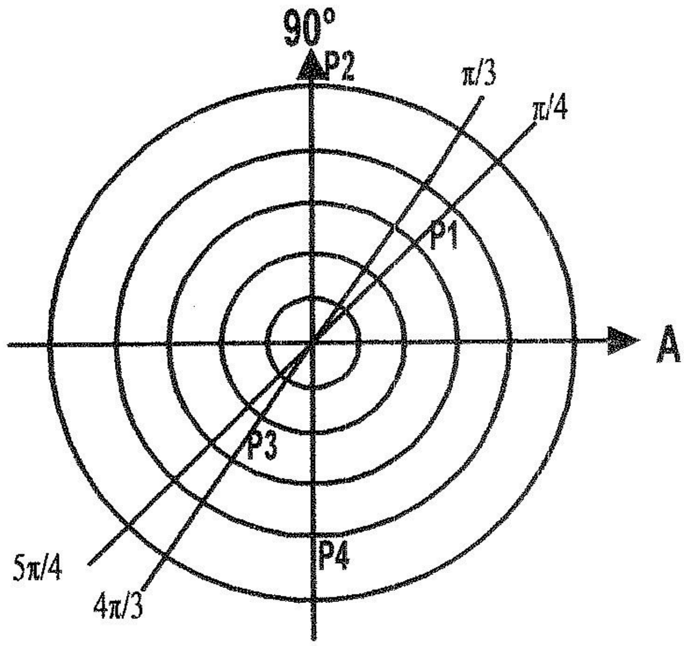


Fig. 91

2.- Construir el triángulo de vértices $P_1(5, 60^o)$, $P_2(-2, \frac{7\pi}{4})$ y $P_3(-4, 150^o)$

SOLUCION:

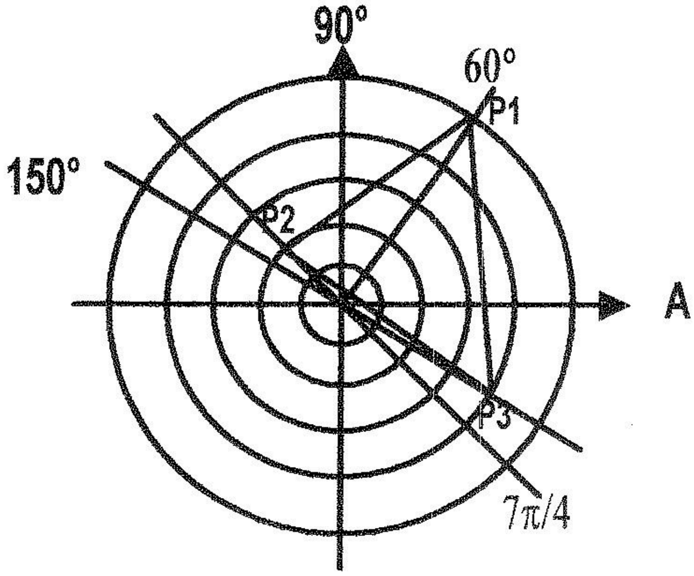


Fig. 92

3.- Un hexágono regular tiene su centro en el polo y dos lados paralelos al eje polar. Si la longitud de un lado es igual a dos unidades, hallar el par principal de coordenadas polares de cada uno de sus vértices.

SOLUCION:

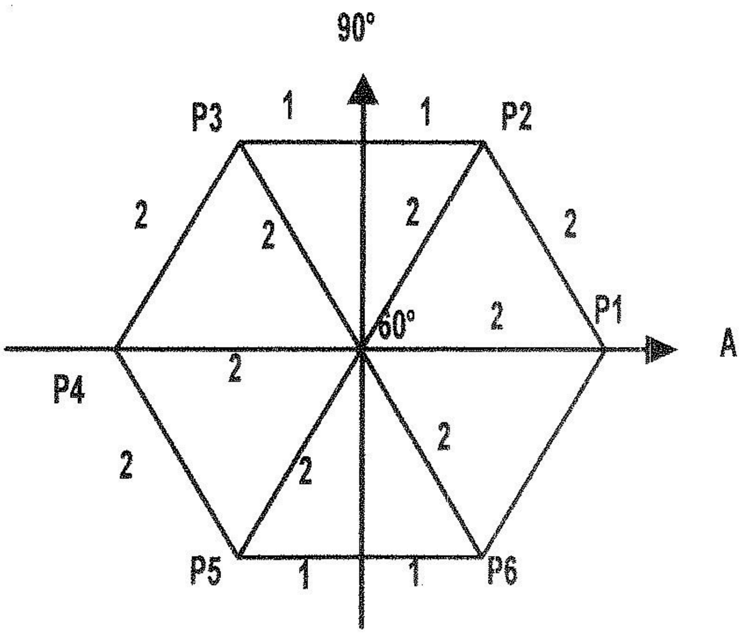


Fig. 93

Se forman $\triangle$ equiláteros

$\therefore\ P_1(2,0),\quad P_2(2,60^o)$

$P_3(2,120^o),\quad P_4(2,\pi)$

$P_5(2,240^o),\quad P_6(2,300^o)$

TRANSFORMACION DE COORDENADAS POLARES A RECTANGULARES Y VICEVERSA

Sea P un punto cualquiera cuyas coordenadas rectangulares son (x,y) y polares (r,θ).

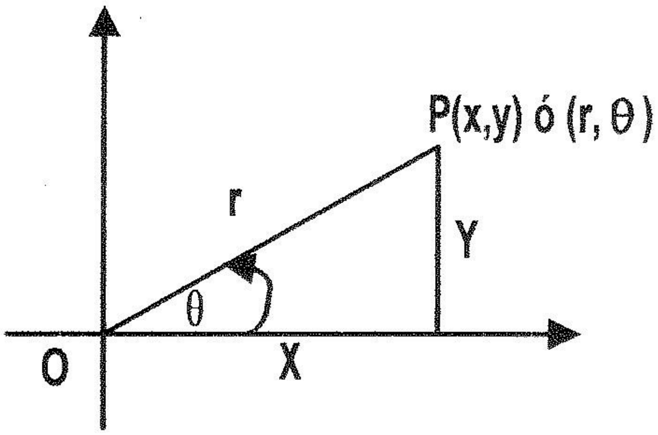


Fig. 94

De la figura tenemos:

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=\frac{x}{r}\Rightarrow x=r\ \cos\theta\\ sen\,\theta=\frac{y}{r}\Rightarrow y=r\ sen\ \theta\end{array}\right\}\Rightarrow x^2+y^2=r^2\quad(\alpha)$$

Además $tg\ \theta=\frac{y}{x}\Rightarrow\theta=arc\,tg\frac{y}{x}$

De α) $r=\pm\sqrt{x^2+y^2}$

y $\quad sen\,\theta = \frac{y}{r} = \dfrac{y}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$

$\cos\,\theta = \frac{x}{r} = \dfrac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$

EJEMPLOS:

1.- Hallar el par principal de coordenadas polares de cada uno de los puntos cuyas coordenadas rectangulares son: a) $(-2,3)$ y b) $(3,-2)$

SOLUCION:

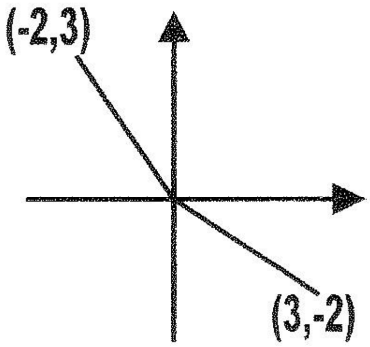


Fig. 95

a) $r = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$\theta = arc\,tg(-\frac{3}{2}) = 180^o - 56,31^o = 123,69^o$

$\therefore$ *las coordenadas polares son* $(\sqrt{13}; 123,69^o)$

b) $r = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$\theta = arc\,tg(-\frac{2}{3}) = 360^o - 33,69^o = 326,31^o$

$\therefore$ *las coordenadas polares son* $(\sqrt{13}; 326,31^o)$

2.- Pasar a la forma polar: a) $x^2 + y^2 = 4$

SOLUCION: $r^2 = 4 \Rightarrow r = \pm 2$

b) $x \cos \varpi + y \; sen \varpi - p = 0$

SOLUCION:

$r \; \cos \theta \cos \varpi + r \; sen\,\theta \, sen \; \varpi - p = 0$

$r \, (\cos \theta \; \cos \varpi + sen\,\theta \, sen \; \varpi) = p$

$r \; \cos (\theta - \varpi) = p$

3.- Pasar a la forma rectangular:

a) $r \; \cos \; \theta - 2 = 0$

SOLUCION: $x - 2 = 0$

b) $r = 4 \, sen\,\theta$

SOLUCION: $r = 4 \; \frac{y}{r} \Rightarrow r^2 = 4y \Rightarrow x^2 + y^2 - 4y = 0$

c) $r - r \; \cos \; \theta = 4$

SOLUCION: $\pm\sqrt{x^2 + y^2} - x = 4 \Rightarrow \pm\sqrt{x^2 + y^2} = x + 4 \qquad /^2$

$x^2 + y^2 = x^2 + 8x + 16 \Rightarrow y^2 - 8x - 16 = 0$

TRAZADO DE CURVAS EN COORDENADAS POLARES

La construcción de curvas en coordenadas polares requiere de ciertas precauciones que no se necesitan para las coordenadas rectangulares. Por ejemplo, un punto en coordenadas polares tiene un número infinito de pares de coordenadas, y puede ocurrir que un par satisfaga la ecuación de un L.G. y otro par no. Además un L.G. puede estar representado, algunas veces, por más de una ecuación polar, como por ejemplo la ecuación de una circunferencia de centro en el polo y radio "a", tiene por ecuación $r = a$ ó $r = -a$, llamadas ecuaciones equivalentes.

Para construir la gráfica de una curva se analizarán los siguientes casos:

1.- Intersecciones:

a) Con el eje polar se le asigna a θ los valores $0, \pm\pi, \pm 2\pi, ..., \pm n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

b) Con el eje a 90^o, se le asigna a θ los valores $n\frac{\pi}{2}$, "n" es un impar cualquiera.

Si para un valor de $\theta, r = 0$, la gráfica pasa por el polo.

2.- Simetría:

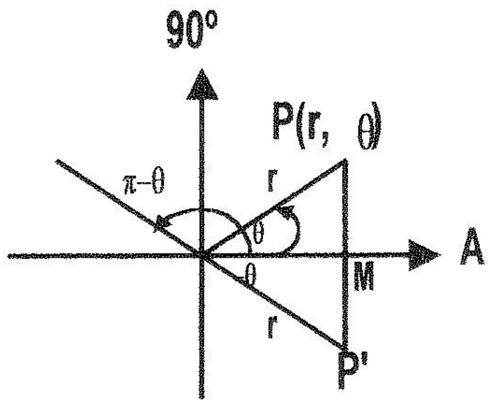


Fig. 96

a) Con respecto al eje polar: en este caso debe existir un punto P' de la curva tal que $\overline{P'P}$ quede bisecado perpendicularmente por el eje polar. Si M es punto medio de $\overline{P'P}$ entonces las coordenadas de P' son $(r, -\theta)$ o $(-r, \pi - \theta)$. Luego para probar esta simetría.

i) Se cambia θ por $-\theta$ ó

ii) Se cambia r por $-r$ y θ por $\pi - \theta$

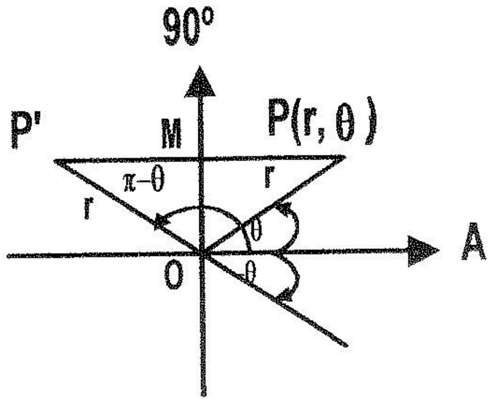


Fig. 97

b) Con respecto al eje a 90°, en este caso debe existir un punto P' de la curva tal que $\overline{P'P}$ quede bisecado perpendicularmente por el eje a 90°. Si M es punto medio de $\overline{P'P}$ entonces las coordenadas de P' son $(r, \pi - \theta)$ o $(-r. -\theta)$.

Luego para probar la simetría:

i) Se cambia θ por $\pi - \theta$ ó

ii) Se cambia θ por $-\theta$ y r por $-r$

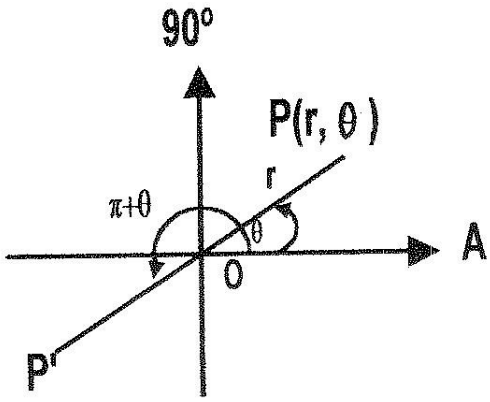


Fig. 98

c) Con respecto al polo debe existir un punto P' de la curva tal que $\overline{P'P}$ quede dimidiado por el polo. Si 0 es el punto medio de $\overline{P'P}$ entonces las coordenadas de P' son $(r, \pi + \theta)$ o $(-r, \theta)$, luego para probar la simetría.

i) Se cambia θ por $\pi + \theta$ ó

ii) Se cambia r por $-r$

En cualquiera de las tres simetrías, la curva será simétrica, si al efectuar los cambios la ecuación no se altera.

3.- Extensión: Se despeja r en función de $\theta : r = f(\theta)$. Si r es finito $\forall\theta$, es una curva cerrada. Si r se vuelve infinita para algún θ,la curva es abierta. Para los θ que hacen r compleja, no hay curva.

4.- Cálculo de las coordenadas de algunos puntos.

5.- Construcción de la gráfica.

6.- Transformación de la ecuación polar a rectangular.

EJEMPLOS:

1.- Analizar y graficar: $r = a\,sen\,2\theta = 2a\ sen\,\theta\ \cos\,\theta$

a) Intersecciones:

i) eje polar : $\theta = 0^o \Rightarrow r = 0$

$\theta = \pi \Rightarrow r = 0$

ii) eje a 90^o: $\theta = \frac{n\pi}{2}, n$ impar $\Rightarrow r = 0$

$\therefore$ pasa por el polo

b) Simetría:

i) eje polar : θ por $-\theta$, no hay

θ por $\pi - \theta$ y r por $-r$, si hay

$\therefore$ hay sim. c/r al eje polar

ii) eje a 90^o: θ por $\pi - \theta$, no hay

θ por $-\theta$ y r por $-r$, si hay

$\therefore$ hay sim. c/r al eje a 90^o

iii) Polo : θ por $\pi + \theta$, si hay

c) <u>Extensión:</u> r es finito $\forall\theta$. Es curva cerrada.

d)

θ	r
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$0.9a$
$\frac{\pi}{4}$	a
$\frac{\pi}{3}$	$0.9a$
$\frac{\pi}{2}$	0

e) rosa de 4 hojas

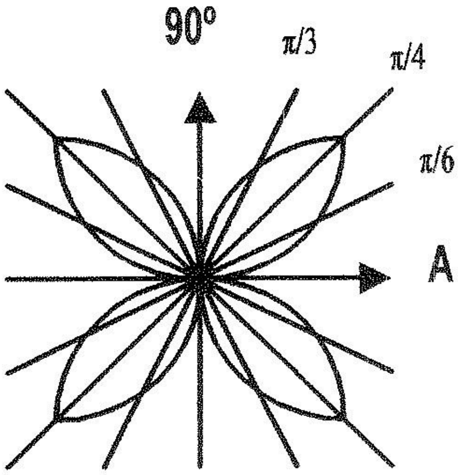


Fig. 99

f) $r = 2asen\theta\,\cos\theta\ \ /.r^2$

$r^3 = 2a\ r\ sen\,\theta\ r\ \cos\,\theta$

$(\pm\sqrt{x^2+y^2})(x^2+y^2) = 2a\ y\ x\ \ /^2$

$(x^2+y^2)^3 = 4a^2y^2x^2$ es la ecuación en coordenadas rectangulares.

EJERCICIOS:

1.- Pasar a la forma polar:

a) $2x^2 + 2y^2 + 2x - 6y + 3 = 0$

b) $xy = 2$

Resp.: $r^2 = \frac{4}{sen 2\theta}$

2.- Pasar a la forma rectangular:

a) $r = \frac{2}{2-\cos\theta}$ Resp.: $3x^2 + 4y^2 - 4x - 4 = 0$

b) $r = 2 \ \sec^2 \frac{\theta}{2}$ Resp.: $y^2 + 8x - 16 = 0$

3.- Analizar y graficar:

a) $r = 2 \sec \theta$

b) $r = a(1 + sen\theta)$ $(cardioide)$

c) $r^2 = a^2 sen\, 2\,\theta$ $(lemmiscata)$

ECUACIONES PARAMETRICAS

Hasta el momento hemos trabajado con curvas que se expresan mediante una ecuación que contiene una o dos variables. Ahora consideraremos la forma de expresar una curva por medio de un par de ecuaciones en las cuales cada una de las dos variables está en función de una tercera.

Por ejemplo: La circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ 1)

puede representarse también por: $x = 3 \ \cos\theta$, $y = 3 \ sen\theta$ 2) siendo θ una variable que puede tomar cualquier valor real. A medida que le damos valores a θ se obtienen valores de x e y que satisfacen 1)

Si queremos eliminar la tercera variable hacemos:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = 9\cos^2\theta \\ y^2 = 9\ sen^2\theta \end{array}\right\} + \Rightarrow x^2 + y^2 = 9(\cos^2\theta + sen^2\theta) = 9$$

Si $f(x, y) = 0$ es la ecuación rectangular de una curva, $x = g(t)$ e $y = h(t)$ son las ecuaciones paramétricas de ella y la variable t se llama parámetro.

En general las ecuaciones paramétricas de un L.G. no son únicas. Por ejemplo en el caso anterior podríamos expresar: $x = \sqrt{t}$, $y = \sqrt{9 - t}$, sin descuidar que t sólo puede tomar valores $0 \leq t \leq 9$, en cambio en 2) θ puede tomar todos los valores reales.

OBTENCION DE LA ECUACION RECTANGULAR DE UNA CURVA A PARTIR DE SUS ECUACIONES PARAMETRICAS

Lo que debemos realizar es la eliminación del parámetro. No hay un método general. Depende exclusivamente de la forma que tengan las ecuaciones paramétricas.

EJEMPLOS:

1.- Hallar la ecuación rectangular de : $x = \cos 2t, y = sen\ t$

SOLUCION:

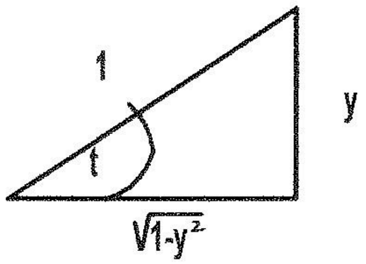


Fig. 100

$x = \cos\ 2t = \cos^2 t - sen^2 t$

$y = sen\, t$

$\therefore\ x = 1 - y^2 - y^2 \Rightarrow 2y^2 + x - 1 = 0$

2.- Hallar la ecuación rectangular de: $x = pt^2 + b, \quad y = 2t + a$

SOLUCION: $t = \frac{y-a}{2} \quad \therefore\ x = \frac{p}{4}(y-a)^2 + b \Rightarrow (y-a)^2 = \frac{4}{p}(x-b)$

GRAFICA DE UNA CURVA

Si asignamos un valor particular al parámetro, las ecuaciones paramétricas determinan valores de x e y, que si son reales, representan las coordenadas de un punto de la curva.

EJEMPLOS:

1.- Trazar $x = 5t, \quad y = 2t + 2$. Obtener la ecuación rectangular.

SOLUCION:

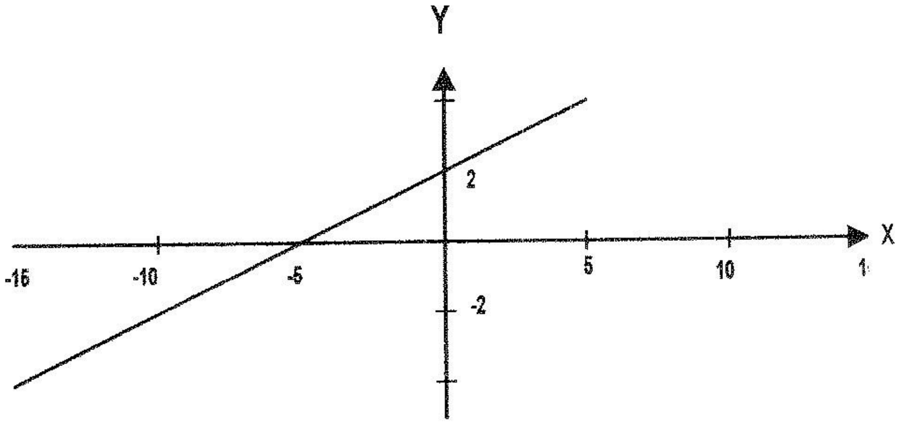


Fig. 101

t	x	y
-3	-15	-4
-2	-10	-2
-1	-5	0
0	0	2
1	5	4
2	10	6
3	15	8

$t = \frac{y-2}{2} \Rightarrow \quad x = \frac{5}{2}(y-2) \ \Rightarrow 2x - 5y + 10 = 0 \quad recta$

2.- Trazar $x = 2\ sen\ \theta - 3\cos\theta$, $y = 4sen\,\theta + 2\cos\theta$. Obtener la ecuación rectangular:

<u>SOLUCION:</u>

θ	$sen\,\theta$	$\cos\,\theta$	x	y
0	0	1	-3	2
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$0,87$	$-1,61$	$3,74$
$\frac{\pi}{4}$	$0,71$	$0,71$	-0,71	$4,26$
$\frac{\pi}{3}$	$0,87$	$\frac{1}{2}$	$0,24$	$4,48$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	2	4
$3\frac{\pi}{4}$	$0,71$	$-0,71$	$3,55$	$1,42$
π	0	-1	3	-2
$5\frac{\pi}{4}$	$-0,71$	$-0,71$	$0,71$	$-4,26$
$3\frac{\pi}{2}$	-1	0	-2	-4
$7\frac{\pi}{4}$	$-0,71$	$0,71$	$-3,55$	$-1,42$
2π	0	1	-3	2

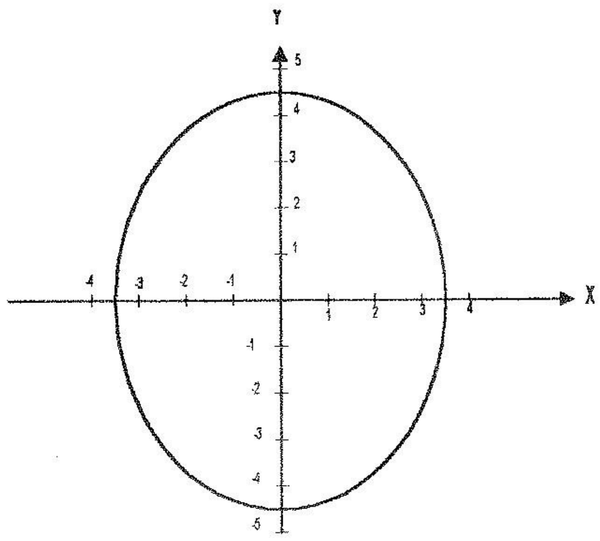


Fig 102

Ecuación rectangular:

$$x = 2\,sen\,\theta - 3\cos\theta \qquad /2$$
$$y = 4\,sen\,\theta + 2\cos\theta \qquad |$$
$$\cos\,\theta = \frac{y-2x}{8}$$

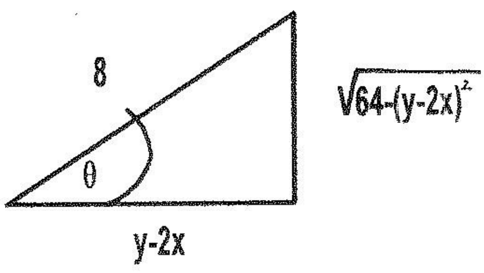


Fig. 103

$$x = 2\frac{\sqrt{64-(y-2x)^2}}{8} - 3\frac{y-2x}{8}$$

$$8x + 3y - 6x = 2\sqrt{64 - (y - 2x)^2} \qquad /^2$$

$$20x^2 - 4xy + 13y^2 = 256 \qquad \textit{género elipse}$$

<u>EJERCICIOS:</u>

1.- Determinar las ecuaciones paramétricas correspondientes a la recta.

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Resp.: $y = y_1 + t \qquad x = x_1 + t\frac{(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1}$

2.- Graficar $x = 3\cos\theta + 2$, $y = 2\ sen\,\theta - 3$. Obtenga la ecuación rectangular de ella e identifíquela.

Resp.: $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$

BIBLIOGRAFIA

1.- *Hall, H.S. – Knight, S.R.*
Trigonometría Elemental
Editorial Hispano Americana, México, 1961

2.- *Lehmann, Ch.*
Geometría Analítica
Editorial Hispano Americana, México, 1967

3.- *Stein, Sh.*
Cálculo y Geometría Analítica
Editorial Ultragráfica, México, 1985

4.- *Swokwski, E.*
Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica
Grupo Editorial Iberoamericana

5.- *Nielsen, Kaj*
Trigonometría Moderna
CECSA

6.- *Granville, W.A.*
Trigonometría Plana y Esférica
UTEHA

7.- *Material Docente de los Académicos*

INDICE