Finanzas del Proyecto

Introducción a las Matemáticas Financieras

Carlos Mario Morales C

Finanzas del proyecto

Introducción a las Matemáticas Financieras

 carrera 77c No 61-63 Medellín-Colombia
Teléfono: 421.28.93
E_Mail: carlosmoralescastano@gmail.com

Impresión digital en Colombia.

Datos Catalográficos para citar este libro

Finanzas para el proyecto: Matemáticas Financieras

Carlos Mario Morales C.
Editorial propia. Medellín, 2011
ISBN: Pendiente
Formato 21x24 cm.   Paginas:

Contenido

PRESENTACIÓN

El dinero es el principal recurso con que cuenta el gerente para la realización del proyecto; por esto, se requiere especial atención en la planeación y ejecución de la iniciativa de inversión.

Los inversionistas solo estarán dispuestos a colocar su dinero en una iniciativa que le permita recuperar lo invertido y tener unos rendimientos que al menos equiparen inversiones con similar nivel de riesgo. Igualmente, el sector financiero solo prestara dinero a proyectos que demuestren que en el futuro puedan cumplir con las obligaciones financieras. De otro lado, el gerente de proyecto deberá durante la fase de ejecución asegurar que el proyecto se realice bajo los presupuestos financieros con los cuales fue aprobada la ejecución.

¿Cuál es el valor del proyecto?, ¿Cuáles son los costos y gastos para su futura operación?, ¿Cuándo es prudente endeudarse para la realización del proyecto?, ¿Cuál es el costo del dinero?, ¿Qué rentabilidad se debe exigir a la inversión?, ¿Cuál es la estructura financiera más apropiada para el proyecto?; son, entre otras, preguntas que debe contestar el gerente de proyectos al momento de decidir sobre la mejor forma de financiar la iniciativa.

La Ingeniería Económica o Matemática Financiera, es una poderosa herramienta de la matemática aplicada, que estudia el valor del dinero en el tiempo; y que permite a través de modelos apoyar a los gerentes y administradores en la toma de decisiones al momento de escoger la forma óptima de manejar el recurso dinero. Es decir, una herramienta para la planeación y gestión del dinero; actividades que permiten asegurar la generación de valor del inversionista.

La generación de valor es determinante en el momento en que el inversionista se define por una alternativa de inversión; por esto, es necesario que el gerente de proyectos cuente con las competencias para planear y gestionar óptimamente los recursos financieros; es decir, capaces de manejar óptimamente el dinero de manera que se asegure el éxito futuro del proyecto.

El libro Finanzas del proyecto busca desarrollar las competencias para que el futuro gerente haga un manejo adecuado de los modelos de la matemática financiera que le permitan de manera rigurosa realizar la planeación, evaluación y gestión del proyecto. Para esto el libro, aparte de tratar la teoría, desarrolla numerosos casos de aplicación de cada uno de los modelos y propone otro tanto para que el estudiante resuelva como medio para el aprendizaje a través del trabajo independiente.

El texto está compuesto de cinco unidades de aprendizaje y un apéndice. En la primera unidad se estudia los fundamentos de la disciplina: el valor del dinero en el tiempo, el concepto de equivalencia y el interés simple, con sus aplicaciones más importantes. En la unidad dos se estudia el concepto de interés compuesto, incluyendo la diferenciación entre tasa efectiva y tasa nominal, la equivalencia de tasas y la ecuación de valor; además sus aplicaciones más relevantes: depósitos a término, inflación, deflación, devaluación, revaluación, tasas combinadas, la tasa deflactada y la equivalencia de tasas relacionadas. En la unidad tres se analizan las anualidades: el valor presente y futuro de una anualidad, las anualidades anticipadas, diferidas y perpetuas; adicionalmente, se estudian los gradientes aritméticos y geométricos. En la unidad cuatro se estudian las amortización de créditos y la capitalización de inversiones en sus diferentes modalidades; finalmente la unidad cinco se tratan los criterios de evaluación de proyectos: VPN, TIR y la relación B/C. Adicional a las cinco unidades de aprendizaje se presenta un apéndice donde se recuerdan los conceptos básicos de la aritmética, necesarios para la manipulación de los diferentes modelos de la matemática financiera.

De esta forma, el texto ofrece a los estudiantes y profesionales, con orientación a la gerencia de proyectos, los fundamentos básicos y herramientas para el ejercicio de su profesión. Se propone el estudio desde la dimensión práctica, sin dejar de analizar el fundamento teórico. A partir de los elementos teóricos se realizan aplicaciones orientadas a situaciones empresariales, permitiendo a los estudiantes desarrollar las habilidades requeridas para una práctica profesional acorde con las necesidades del medio empresarial.

Para lo anterior, la exposición de cada tema se inicia con los elementos teóricos ilustrando su aplicación con ejemplos o situaciones de la práctica empresarial; en cada unidad de aprendizaje se presentan ejercicios resueltos y se proponen casos para su solución.

Metodológicamente para la solución de los ejemplos, casos y ejercicios, aplicamos en forma combinada las fórmulas y las funciones financieras utilizando el siguiendo procedimiento básico: a) Identificación del problema y ordenamiento de los datos; b) Aplicación del modelo apropiado para el caso identificado y; c) la interpretación de los resultados encontrados.

Las lecturas de los capítulos serán la base teórica; pero no sé excluye que el estudiante apoye su aprendizaje en la consulta de la bibliografía y cibergrafía propuesta.

Para las prácticas el libro propone, en cada unidad de aprendizaje, diferentes tipos de ejercicios. El docente deberá asegurar que los estudiantes desarrollen la capacidad de aplicar a casos particulares las teorías, técnicas y procedimientos desarrollados desde el marco teórico.

Por su parte, los estudiantes deben adoptar una técnica y asumir una disciplina que le permita: realizar el estudio de los conceptos teóricos y la realización de las prácticas de acuerdo a los instructivos y las recomendaciones del docente.

Se sugiere al profesor acompañante que adopte una evaluación integral dirigida a la verificación de la apropiación de los conocimientos y desarrollo de las habilidades; pero también a la evaluación de la responsabilidad, la capacidad del trabajo en equipo, la creatividad e iniciativa, el compromiso, la tolerancia al cambio, la toma de riesgos calculados y la persistencia en el trabajo; valores estos propios y necesarios para cualquier profesional de la gerencia de proyectos.

Quiero terminar esta presentación manifestando mi agradecimiento a todos los profesores y estudiantes que a lo largo de más de seis años han aportado a la construcción de este escrito, sin ellos habría sido imposible esta realización.

Interés

No hay inversión más rentable que la del conocimiento
(Benjamín Franklin)

UNIDAD 1: INTERÉS

OBJETIVO

Al finalizar la unidad los estudiantes estarán en capacidad de conceptuar sobre el valor del dinero en el tiempo; calcular operaciones financieras aplicando interés simple y realizar operaciones comerciales de descuento.

CONTENIDO

1. *Valor del dinero en el tiempo*
2. *Interés simple*
3. *Interés anticipado y descuento comercial*
4. *Ejercicios resueltos*
5. *Ejercicios propuestos*

Introducción

En general, las operaciones financieras tienen en común el pago de un valor por el uso del dinero, esto es igualmente cierto en las operaciones comerciales. Además al considerarse el dinero como un bien se espera que el valor que se paga por su uso sufra altas y bajas, como cualquier otra mercancía. Es decir, el costo del dinero dependerá de las condiciones de la oferta y demanda del mercado y variables como la inflación, devaluación y revaluación, entre otras.

La expresión: "No es lo mismo un millón de pesos de hoy, que un millón de pesos dentro de un año", se utiliza para significar que el poseedor del dinero espera que se le recompense por no utilizar su dinero y ponerlo a disposición de otro por un tiempo. No es igual recibir la misma cantidad de dinero hoy que un tiempo después; es decir, no se puede decir que dichos valores sean equivalentes.

Dos cifras de dinero son equivalentes cuando a una persona le es indiferente recibir una suma de dinero hoy (V_P) o recibir otra (V_F) al cabo de un tiempo. El Interés es el monto de dinero que hace equivalente el valor del dinero en el tiempo; es decir, el interés permite hacer equivalente cifras de dinero en el tiempo.

El concepto de interés es de uso amplio en la vida comercial y financiera; esto ha conducido a que tenga múltiples acepciones, entre otras: valor del dinero en el tiempo, valor recibido o entregado por el uso del dinero, utilidad o ganancia que genera un capital, precio que se paga por el uso del dinero, rendimiento de una inversión.

1. Valor del dinero en el tiempo

¿Por qué no es igual recibir $1´000.000 hoy, que esta misma cantidad dentro de un año? Las razones que explican por qué dos cantidades iguales de dinero no tienen el mismo valor en el tiempo; son:

a) La primera tiene que ver con la pérdida del poder adquisitivo del dinero, ocasionado por el incremento generalizado de los precios –inflación-. Con el mismo dinero, en general, se podrán adquirir mayor cantidad de bienes y servicios hoy que dentro de un año.

b) La segunda razón tiene que ver con la capacidad que tiene el dinero de generar dinero. Disponiendo del millón de pesos hoy, estos se podrán invertir obtenido rendimientos que permitirán tener después de un año una cantidad mayor

c) La tercera tiene que ver con el riesgo. Mas vale tener asegurado el millón hoy, y no la promesa de recibir el dinero dentro de un año.

En resumen, el que posee una cantidad de dinero solo estará dispuesto a entregarla en préstamo, si se le reconoce un monto de dinero adicional que compense la perdida de valor, el rendimiento por renunciar a su uso y el riesgo de recibir la cantidad un tiempo después.

2. Interés

Es la cantidad de dinero adicional por la cual un inversionista estará dispuesto a prestar su dinero. En otras palabras es la cantidad de dinero adicional que hace que dos cantidades de dinero sean equivalente en el tiempo

$$Vp = Vp + I$$

2.1 Interés Simple

En el caso del interés simple la cantidad de dinero que se paga por el uso del dinero se calcula al final de cada periodo de tiempo pactado. El interés no se capitaliza, es decir, no se suma al capital inicial para calcular el interés del próximo periodo.

Para el cálculo del interés se utiliza la tasa de interés.

2.2 Tasa de interés

Se define como el valor porcentual que se pacta por el uso del dinero para un periodo de tiempo determinado.

Ejemplo 1

a) 20% anual, significa que se pagará 0,2 pesos por cada peso, por cada año.
b) 1,5% mensual, significa que se pagará 0,015 pesos por cada peso, por mes
c) 6% semestral, significa que se pagará 0,06 pesos por cada peso, por seis meses
d) 4% bimensual, significa que se pagará 0,04 pesos por cada peso, por dos meses
e) 45% bianual, significa que se pagará 0,45 pesos por cada peso, por dos años

2.3 Formula de interés simple

El interés se calcula como el producto del capital inicial por la tasa de interés para el periodo de tiempo pactado.

$$I = Vp \times i$$

Si el préstamo del dinero se pacta durante varios periodos de tiempo; entonces para calcular el interés es necesario multiplicar el anterior resultado por el número de periodos pactados.

$$I = Vp \times i \times n \quad (1)$$

Donde:

Vp: *capital o monto principal*

i: *tasa de interés*

n: *número de periodos*

2.4 Clases de interés simple

En la práctica no existe un criterio único para aplicar el interés simple. La aplicación depende de la operación comercial o financiera, también del sector económico donde se realice la operación o incluso de las costumbres comerciales.

Dependiendo de la base en días se utilice para el cálculo del interés, se distinguen dos tipos de aplicaciones.

2.4.1 Interés Ordinario

En esta aplicación para el cálculo del interés se toma como base un año de 360 días.

2.4.2 Interés Exacto

A diferencia que en el interés ordinario, en este caso el interés se calcula tomando como base un año de 365 días.

Ambas modalidades de cálculo ordinario y exacto pueden, a su vez, tomar algunas de las variantes que se muestran en la siguiente tabla

Interés Ordinario (Base de Cálculo 360)	Con tiempo exacto (Interés Bancario) (Considera los días exactos en los cuales se ha utilizado el préstamo y una base de 360 días al año)	Tiempo exacto
	Con tiempo aproximado (Interés Comercial) (Considera indistintamente meses de 30 días y una base de 360 días al año)	Meses de 30 días
Interés Exacto (Base de Calculo 365)	Exacto o Verdadero (Interés Racional) (Considera los días exactos en los cuales se ha utilizado el préstamo y la base son los días exactos del año)	Tiempo exacto
	Exacto sin Bisiesto (Interés base 365 días) (Considera los días exactos en los cuales se ha utilizado el préstamo y una base de 365 días al año (No considera bisiestos))	Tiempo exacto sin bisiesto
	Con tiempo aproximado (Considera meses de 30 días y la base son los días exactos del año (No tiene utilidad práctica))	Meses de 30 días

2.4.3 Ejemplos: calculo del interés simple

Ejemplo 2
Sandra quiere conocer el interés que debe cancelar a una entidad bancaria por el préstamo de $1´000.000, durante el mes de febrero del año 2004 (bisiesto), si la entidad financiera le esta cobrando una tasa de interés del 20% Nominal Anual

Solución

- El monto o capital principal es: $Vp = 1´000.000$
- La tasa de interés es: $20\%\ anual$; es decir, es lo que se cobrará por un año.
- El periodo en que se causa el interés es una fracción de año: 29 (días del mes de febrero) de los 360 días del año, aplicando interés bancario.

Con las anteriores consideraciones, el interés se calcula utilizando la formula (1), como:

$$I = Vp \times i \times n \quad (1)$$

$$I = 1´000.000 \times 0{,}2 \times \left(\frac{29}{360}\right) = 16.111{,}11$$

El monto que Sandra debe cancelar por el préstamo de un millón durante el mes de febrero es: $16.111,11

Ejemplo 3

Carmen quiere conocer cuál es el interés que debe cancelar por el mes de febrero del año 2004 (bisiesto) por un crédito comercial de $1´000.000 para la compra de un TV, si se le cobra una tasa del 20% Nominal Anual

Solución

- El monto o capital principal es: $Vp = 1´000.000$
- La tasa de interés es: $20\%\ anual$; es decir, es lo que se cobrará por un año.
- El periodo en que se causa el interés es una fracción de año: 30 (días del mes de febrero) de los 360 días del año, aplicando interés comercial.

Con las anteriores consideraciones, el interés se calcula utilizando la formula (1), como:

$$I = Vp \times i \times n \quad (1)$$

$$I = 1´000.000 \times 0{,}2 \times \left(\frac{30}{360}\right) = 16.666{,}66$$

El monto que Carmen debe cancelar por el préstamo de un millón durante el mes de febrero es: $16.666,66

Ejemplo 4

Juliana quiere conocer cuál es el interés que debe cancelar por el mes de febrero del año 2004 (bisiesto) por un préstamo de $1´000.000, si el prestamista cobra una tasa del 20% Nominal Anual y lo calcula con interés racional

Solución

- El monto o capital principal es: $Vp = 1´000.000$
- La tasa de interés es: $20\%\ anual$; es decir, es lo que se cobrará por un año.
- El periodo en que se causa el interés es una fracción de año: 29 (días del mes de febrero) de los 366 días del año, aplicando interés racional.

Con las anteriores consideraciones, el interés se calcula utilizando la formula (1), como:

$$I = Vp \times i \times n \quad (1)$$

$$I = 1´000.000 \times 0,2 \times \left(\frac{29}{366}\right) = 15.846,99$$

El monto que Juliana debe cancelar por el préstamo de un millón durante el mes de febrero es: $15.846,99

Ejemplo 5

Alberto quiere conocer cuál es el interés que debe cancelar por el mes de febrero del año 2004 (bisiesto) por un préstamo de $1´000.000, si se le cobra una tasa del 20% Nominal Anual y el prestamista hace el cálculo con interés base 365 (tiempo exacto sin bisiesto)

Solución

- El monto o capital principal es: $Vp = 1´000.000$
- La tasa de interés es: $20\%\ anual$; es decir, es lo que se cobrará por un año.
- El periodo en que se causa el interés es una fracción de año: 28 (días del mes de febrero) de los 365 días del año, aplicando interés racional.

Con las anteriores consideraciones, el interés se calcula utilizando la formula (1), como:

$$I = Vp \times i \times n \quad (1)$$

$$I = 1´000.000 \times 0,2 \times \left(\frac{28}{365}\right) = 15.342,47$$

El monto que Alberto debe cancelar por el préstamo de un millón durante el mes de febrero es: $15.342,47

Ejemplo 6

Mario quiere conocer cuál es el interés que debe cancelar por el mes de febrero del año 2004 (bisiesto) sobre un préstamo de $1´000.000, si se le cobra una tasa del 20% Nominal Anual y el prestamista hace el cálculo con interés exacto-tiempo aproximado

Solución

- El monto o capital principal es: $Vp = 1´000.000$
- La tasa de interés es: $20\%\ anual$; es decir, es lo que se cobrará por un año.
- El periodo en que se causa el interés es una fracción de año: 30 (días del mes de febrero) de los 365 días del año, aplicando interés racional.

Con las anteriores consideraciones, el interés se calcula utilizando la formula (1), como:

$$I = Vp \times i \times n \quad (1)$$

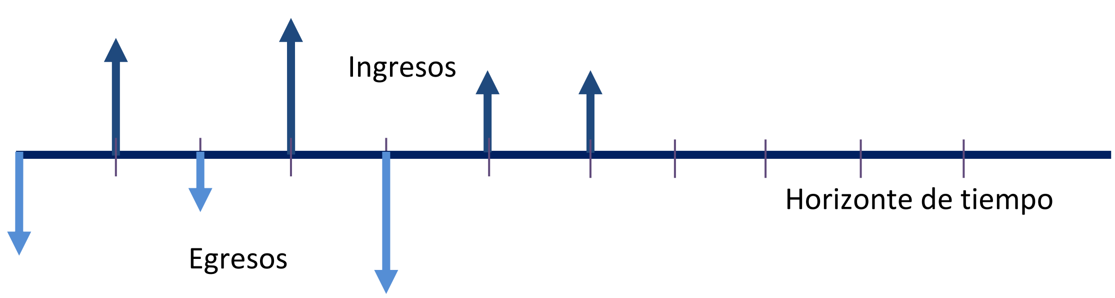
$$I = 1´000.000 \times 0{,}2 \times \left(\frac{28}{366}\right) = 16.393{,}44$$

El monto que Mario debe cancelar por el préstamo de un millón durante el mes de febrero es: $16.393,44

2.5 Flujo de Caja: representación gráfica de las transacciones financieras.

El flujo de caja es una representación grafica que permite comprender con exactitud los movimientos de dinero que están sucediendo en una transacción financiera, durante el tiempo. En la gráfica se representa el tiempo por una recta horizontal, la cual puede estar dividida en periodos, para mayor claridad; los egresos de dinero se representan por flechas hacia abajo; los ingresos por su parte se representan por flechas hacia arriba.

GRAFICA NO 1 – FLUJO DE CAJA



2.6 Capital Final – Valor futuro (V_f)

El capital final que recibirá el prestamista o inversionista, o por el contrario el que deberá pagar el usuario del dinero, corresponde al capital inicial más los intereses. Este valor se denomina valor final o valor futuro y se representa por V_f

$$Vf = Vp + I$$

Remplazando (1) en la anterior formula, se obtiene:

$$Vf = Vp + (\,Vp \times i \times n)$$

Factorizando el valor común, se obtiene:

$$Vf = Vp\,(1 + i \times n) \quad (2)$$

Donde:

$Vp\colon capital\ o\ monto\ principal$

$Vf\colon capital\ final\ o\ valor\ futuro$

$i\colon tasa\ de\ interés$

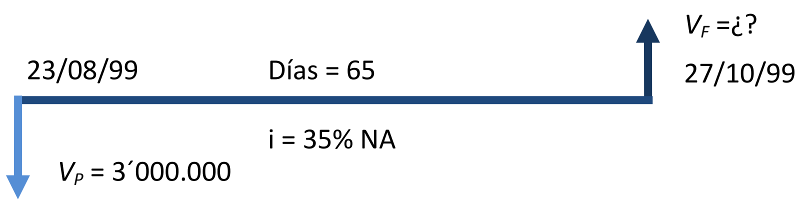
$n\colon número\ de\ periodos$

Ejemplo 7

María Cristina quiere saber cuánto recibirá "exactamente" al final, si presta a un amigo la suma de $3´000.000 entre el 23 de agosto hasta el 27 de octubre de 1999 a una tasa de interés del 35% nominal anual

Solución

La transacción financiera se ilustra con el siguiente flujo de caja.



- El monto o capital principal es: $Vp = 3´000.000$
- La tasa de interés es: $35\%\ anual$; es decir, es lo que se cobrará por un año.

- El tiempo en el cual se causan los intereses son los días entre 23.08.1999 y el 27.10.1999; es decir, 65 días; que es una fracción del año
- Considerando que ella quiere conocer el valor exacto entonces se debe aplicar interés racional.

Con las anteriores consideraciones, el interés se calcula utilizando la formula (2), como:

$$Vf = Vp\,(1 + i \times n)$$

$$Vf = 3´000.000 \left(1 + 0{,}35 \times \frac{65}{365}\right) = 3´186.986{,}30$$

El monto que recibirá María Cistina al final será: \$3´186.986,30; esto significa ganara un interés de \$186.986,30

2.7 Capital Inicial – Valor presente (V_p)

Conocido el valor futuro, la tasa de interés y el número de periodos a los cuales se pacta la transacción financiera se puede calcular el capital inicial o el valor presente involucrado en dicha transacción.

Partiendo de la ecuación (2): $Vf = Vp\,(1 + i \times n)$; despejando V$p$ se obtiene:

$$Vp = \frac{Vf}{(1 + i \times n)} \quad (3)$$

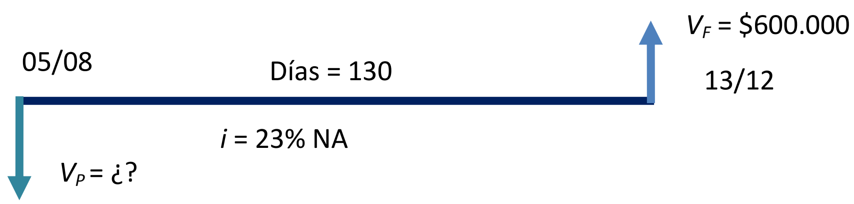
Los símbolos tienen el mismo significado que en las formulas (1) y (2)

Ejemplo 8

Juan debe pagar \$600.000 de matrícula en la universidad el día 13 de diciembre. ¿Cuánto dinero debe depositar el 5 de agosto del mismo año en una cuenta de ahorros que paga el 23% nominal anual?

<u>Solución</u>

La transacción financiera se ilustra con el siguiente flujo de caja.



- El valor final que debe pagar es: $Vf = 600.000$
- La tasa de interés es: $23\%\ anual$; es decir, es lo que se pagara por un año.
- El tiempo en el cual se causan los intereses son los días entre 5 de agosto y el 13 de diciembre; es decir, 130 días; que es una fracción del año
- Considerando que se trata de banco, se aplica interés bancario.

Con las anteriores consideraciones, el interés se calcula utilizando la formula (3), como:

$$Vp = \frac{Vf}{(1 + i \times n)}$$

$$Vf = \frac{600.000}{(1 + (0{,}23 \times \frac{130}{360})} = 553.988{,}20$$

El monto que Juan debe depositar en la cuenta de ahorros es: $553.988,20

2.8 Tasa de interés nominal (i)

Conocido el valor futuro, el capital inicial o valor presente y el número de periodos se puede calcular interés nominal al cual esta pactada la transacción financiera.

Partiendo de la ecuación (2): $Vf = Vp\ (1 + i \times n)$; despejando i se obtiene:

$$i = \frac{\frac{Vf}{Vp} - 1}{n} \quad (4)$$

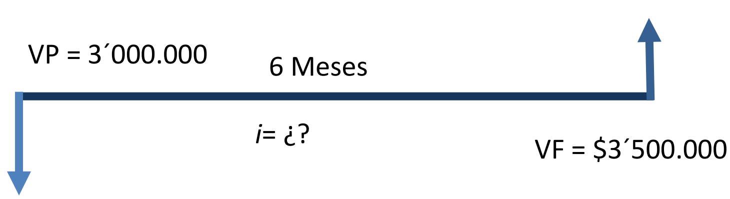
Los símbolos tienen el mismo significado que en las formulas (1) y (2)

Ejemplo 10

Julián dueño de una pequeña empresa ha tenido excedentes por $3´000.000 durante el pasado periodo; él quiere conocer a que tasa de interés comercial dichos excedentes se convertirán en $3´500.000 en 6 meses

<u>Solución</u>

La transacción financiera se ilustra con el siguiente flujo de caja.



- El valor final es: $Vf = 3´500.000$
- El capital inicial o valor presente: $Vp = 3´000.000$
- El tiempo en el cual se causan los intereses son 6 meses, 180 días
- Aplicando interés comercial.

Con las anteriores consideraciones, el interés se calcula utilizando la formula (4), como:

$$i = \frac{(\frac{Vf}{Vp} - 1)}{n}$$

$$i = \frac{(\frac{3´500.000}{3´000.000} - 1)}{\frac{180}{360}} = 0{,}3333 = 33{,}33\%$$

Juan deberá colocar su dinero a un interés nominal anual del 33,33%

2.9 Numero de periodos (n)

Conocido el valor futuro, el capital inicial o valor presente y la tasa de interés nominal se puede calcular el número de periodos a la cual esta pactada la transacción financiera.

Partiendo de la ecuación (2): $Vf = Vp\ (1 + i \times n)$; despejando n se obtiene:

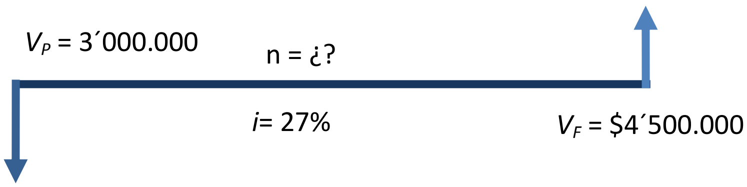
$$n = \frac{\frac{Vf}{Vp} - 1}{i} \quad (5)$$

Los símbolos tienen el mismo significado que en las formulas (1) y (2)

Ejemplo 11
Rubén dueño de una pequeña empresa ha tenido excedentes por $3´000.000 durante el pasado periodo; él quiere conocer durante cuánto tiempo debe colocar este dinero para convertir estos excedentes en $4´500.000, si la entidad bancaria le reconoce un interés NA del 27%.

Solución

La transacción financiera se ilustra con el siguiente flujo de caja.



- El valor final es: $Vf = 4´500.000$
- El capital inicial o valor presente: $Vp = 3´000.000$
- Tasa de interés nominal anual es: $i = 27\%\ anual$
- Aplicando interés bancario.

Con las anteriores consideraciones, el interés se calcula utilizando la formula (4), como:

$$n = \frac{(\frac{Vf}{Vp} - 1)}{i}$$

$$n = \frac{(\frac{4´500.000}{3´000.000} - 1)}{0{,}27} = 1{,}852\ años = 666{,}66\ días$$

Rubén de colocar sus excedentes durante 666,66 días

3. Interés anticipado y descuento comercial

En algunas transacciones financieras es normal que el pago del interés se haga de manera anticipada; es decir, que se causan los intereses al principio de los periodos acordados en la operación; en este caso, se aplica la tasa de interés anticipada; la cual se representa con el símbolo (i_a).

Por su parte, en las operaciones comerciales es corriente el descuento de pagos futuros respaldados en títulos valores; también conceder descuentos bajo ciertas condiciones comerciales para motivar el pago cumplido, anticipado, o la compra de la mercancía. En estos casos el descuento se calcula utilizando la tasa de descuento, que se representa con la letra "*d*".

En la unidad de aprendizaje siguiente se tratara en detalle el interés anticipado, especialmente se tratará la equivalencia con el interés vencido.

3.1 Operaciones de Descuento

El descuento de pagos futuros respaldados en títulos valores es común en el ámbito comercial. La operación consiste en volver líquido ante un tercero, usualmente una entidad financiera, un titulo valor que respalda un pago futuro. El descuento (*D*) se calcula sobre el valor final o valor nominal de la operación, aplicando la tasa de descuento (*d*) acordada en la operación y considerando el tiempo faltante para causar el pago; el valor líquido (V_t), valor de la transacción, se calcula como el valor nominal menos el descuento.

Teniendo en cuenta lo anterior el descuento se realiza como:

$$D = Vf \times d \times n \quad (6)$$

Donde:

$D: Descuento$

$Vf: valor\ nominal\ de\ la\ transacción$

$d: tasa\ de\ descuento$

$n: número\ de\ periodos$

Por su parte el Valor Líquido (Vt) o valor de la transacción se calcula como el valor nominal menos el descuento:

$$Vt = Vf - D$$

$$Vt = Vf - (Vf \times d \times n)$$

$$Vt = Vf \times (1 - d \times n) \quad (7)$$

Los símbolos tienen el mismo significado que en las formulas (6)

Ejemplo 12

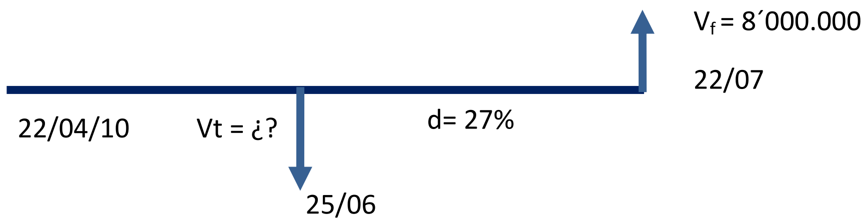
El 22 de abril del 2010 una pequeño comerciante compra mercancías por un valor de \$8´000.000 para surtir su almacén; este realiza el pago a la fabrica a través de una letra de cambio por valor nominal de \$8´000.000 con vencimiento el 22 de julio.

El 20 de junio la fábrica por problemas de liquidez ofrece en venta la letra al banco

Medellín, el cual aplica un descuento del 27%. ¿Cuánto recibirá el fabricante en esta transacción?

Solución

La transacción financiera se ilustra con el siguiente flujo de caja.



- El valor final es: $Vf = 8´000.000$
- El periodo en que se causa el descuento esta entre el 25/06 y 22/07, es decir: 27 días.
- Tasa de descuento: $d = 27\%\ anual$
- Aplicando interés bancario.

Con las anteriores consideraciones, el Valor Liquido se calcula utilizando la formula (7), como:

$$Vt = Vf \times (1 - d \times n)$$

$$Vt = 8´000.000 \times \left(1 - 0{,}36 \times \frac{27}{360}\right) = 7´784.000$$

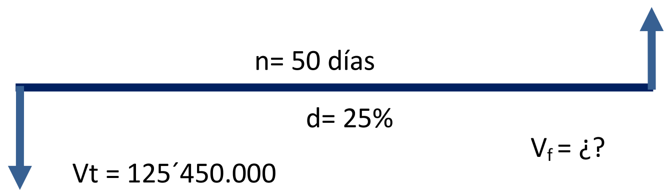
La fabrica recibirá el 25 de junio un valor de $7´784.000

Ejemplo 13

¿Cuál deberá ser el valor nominal de una letra de cambio que un comerciante descuenta en el Banco Medellín, cincuenta días antes de su vencimiento a una tasa de descuento del 25% anual, si el comerciante recibe un valor de $125´450.000?

Solución

La situación se ilustra gráficamente como se muestra a continuación:



- El valor liquido es: $Vt = 125´450.000$
- El tiempo en que se causa el descuento es: 50 días.
- Tasa de descuento: $d = 25\%\ anual$
- Aplicando interés bancario.

Con las anteriores consideraciones, el Valor Nominal se calcula despejando de la formula (7), V_f, así como se muestra a continuación:

$$Vf = \frac{Vt}{(1 - d \times n)}$$

$$Vf = \frac{125´450.000}{\left(1 - 0{,}25 \times \frac{50}{360}\right)} = 129´962.589{,}9$$

El valor nominal de la letra de cambio deberá ser de $129´962.589,9

3.2 Tasa de interés real en una operación de descuento

La tasa de descuento se aplica al valor final de la operación, a diferencia del interés simple que se aplica al valor inicial; en consecuencia, es lógico, que para un mismo valor el interés hallado sea diferente; para calcular la tasa de interés real que se cobra en una operación de descuento se debe aplicar la formula de interés simple (4), al resultado final de la operación de descuento.

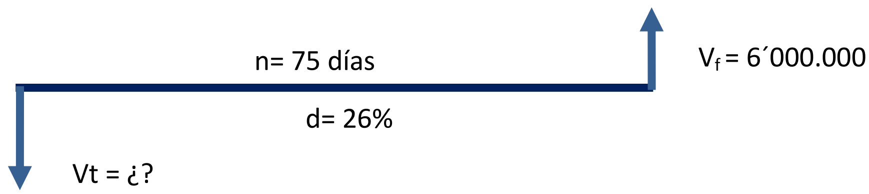
El cálculo de la tasa de interés real en una operación de descuento se ilustra a través del siguiente ejemplo:

Ejemplo 14

Si el Banco Medellín descuenta una letra de cambio de $6´000.000, 75 días antes del vencimiento al 26%. ¿Cuál es la tasa de interés simple real que se cobra por esta operación?

Solución

Primero, en la operación de descuento, se calcula el valor líquido. La situación se ilustra gráficamente como se muestra a continuación:



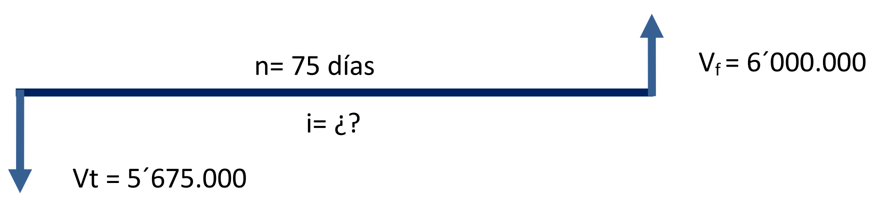
- El valor nominal es: $Vf = 6´000.000$
- El tiempo en que se causa el descuento es: 75 días.
- Tasa de descuento: $d = 26\%\ anual$
- Aplicando interés bancario.

Con las anteriores consideraciones, el Valor liquido se calcula aplicando la formula (7), como se muestra a continuación:

$$Vt = Vf \times (1 - d \times n)$$

$$Vt = 6´000.000 \times \left(1 - 0,26 \times \frac{75}{360}\right) = 5´675.000$$

Así, la situación de la operación financiera se muestra en la siguiente gráfica, a partir de esta se pide determinar la tasa de interés real de la operación



Para hallar la tasa de interés real, aplicamos la formula (4)

$$i = \frac{\frac{Vf}{Vp} - 1}{n}$$

$$i = \frac{\frac{6´000.000}{5´675.000} - 1}{\frac{75}{360}} = 0,2748 = 27,48\%$$

La tasa de interés anual real de la operación es: 27,48%

3.3 Descuentos en Cadena

Como se explicó en las operaciones comerciales es común también ofrecer descuentos con el fin de motivar el pago y/o incentivar la compra de mercancías. Lo corriente es encontrar que los comerciantes ofrecen más de un descuento simultáneamente aplicables a una misma factura, a continuación se relacionan los más comunes:

- Descuento por volumen
- Descuento por pronto pago
- Descuento por embalaje
- Descuento por temporada
- Descuento por fidelidad

La aplicación de varios descuentos sobre una misma factura recibe el nombre de descuentos en cadena. En la tabla No 1 Descuentos en cadena, se muestra la forma de calcula, el valor del descuento y el valor final de la factura, cuando se aplican varios descuentos de manera simultánea a una misma factura.

TABLA NO 1. DESCUENTOS EN CADENA

Valor factura antes del descuento	Tasa descuento	Valor descuento (D)	Valor factura después del descuento (A_f)
A	d_1	$D_1 = Ad_1$	$A_1 = A - Ad_1 = A(1-d_1)$
$A(1-d_1)$	d_2	$D_2 = A(1-d_1)\, d_2$	$A_2 = A(1-d_1)-A(1-d_1)\, d_2 = A(1-d_1)(1-d_2)$
$A(1-d_1)(1-d_2)$	d_3	$D_3 = A(1-d_1)(1-d_2)\, d_3$	$A_3 = (A(1-d_1)(1-d_2)-A(1-d_1)(1-d_2)d_3) = A(1-d_1)(1-d_2)(1-d_3)$
…	…	…	…
$A(1-d_1)(1-d_2)\ldots(1-d_{n-1})$	d_n	$D_n = A(1-d_1)(1-d_2)\ldots(1-d_{n-1})\, d_n$	$A_n = A(1-d_1)(1-d_2)(1-d_3)\ldots(1-d_n)$

Donde:

$A: Valor\ inicial\ de\ la\ factura$

$d_n: Tasa\ de\ descuento\ n$

$D_n: Descuento\ total\ despues\ de\ n\ descuentos$

$A_n: Valor\ de\ la\ factura\ final\ despues\ de\ n\ descuentos$

Resumiendo, de la tabla se puede establecer que el descuento total se calcula como:

$$D = A[1-(1-d_1)(1-d_2)\dots(1-d_{n-1})(1-d_n)] \quad (8)$$

El valor de la factura final, se calcula como:

$$A_f = A(1-d_1)(1-d_2)\dots(1-d_n) \quad (9)$$

La tasa de descuento promedio se obtiene de dividir el valor final de la factura con el valor inicial de la misma:

$$\bar{d} = 1-(1-d_1)(1-d_2)\dots(1-d_n) \quad (10)$$

Ejemplo 15

Un comerciante quiere conocer la tasa de descuento promedio que se le otorga, el descuento total y el valor final de la factura si realiza compras de mercancía por $120´350.000, a un fabricante que le concede los siguientes descuentos: por pronto pago: 15%; por compra al por mayor 20%; por fidelidad 3%; y por temporada: 5%

Solución

- El valor inicial de la factura es: $A = 120´350.000$
- Descuento por pronto pago: $d_1 = 15\%$
- Descuento por compra al por mayor: $d_2 = 20\%$
- Descuento por fidelidad: $d_3 = 3\%$
- Descuento por temporada: $d_4 = 5\%$

Teniendo en cuenta las anteriores consideraciones el valor total del descuento se calcula con la formula (8):

$$D = A[1-(1-d_1)(1-d_2)\dots(1-d_{n-1})(1-d_n)]$$

$$D = 120´350.000[1-(1-0{,}15)(1-0{,}20)(1-0{,}03)(1-0{,}05)] = 44´969.283$$

El valor de la factura final, se calcula con la formula (9), como:

$$A_f = A(1-d_1)(1-d_2)\dots(1-d_n)$$

$$A_f = 120´350.000(1-0{,}15)(1-0{,}20)(1-0{,}03)(1-0{,}05) = 75´413.717$$

La tasa promedio de descuento, se calcula con la formula (10), como:

$$\bar{d} = 1 - (1 - d_1)(1 - d_2) \dots (1 - d_n)$$

$$\bar{d} = 1 - (1 - 0{,}15)(1 - 0{,}20)(1 - 0{,}03)(1 - 0{,}05) = 0{,}3733 = 37{,}33\%$$

El comerciante obtendrá un descuento total de $44´969.283, el valor final de la factura será de $75´413.717 y la tasa promedio de descuento recibida es 37,33%

4. Ejercicios resueltos

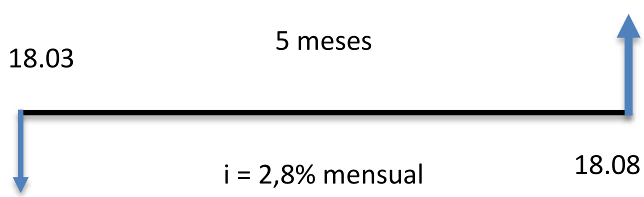
4.1 Gloria quiere conocer el interés simple que debe cancelar a un comerciante que le vende a crédito un electrodoméstico que cuesta $10´000.000, si realiza la compra en marzo 18 y debe cancelarlo el 18 de agosto del mismo año. El comerciante cobra una tasa de interés del 2,8% mensual

Solución:

Parámetros

- Valor presente de la transacción :$Vp = 10´000.000$
- Tasa de interés: $i = 2{,}8\%\ mensual$
- Tiempo en el cual se causan los intereses : 5 $meses$

Representación gráfica



Cálculos

Para calcular el interés simple se utiliza la formula (1)

$$I = Vp \times i \times n$$

$$I = 10´000.000 \times 0{,}028 \times 5 = 1´400.000$$

Respuesta

Gloria debe cancelar $306.000 de intereses al comerciante

4.2 Un empresario quiere conocer cuánto recibirá al final si realiza una inversión de $250´000.000 en un fondo de inversiones entre 15 de septiembre hasta el 18 de noviembre del mismo año; si le reconocen una tasa de interés del 40% anual. Se pide calcular: a) El monto racional y b) el monto bancario

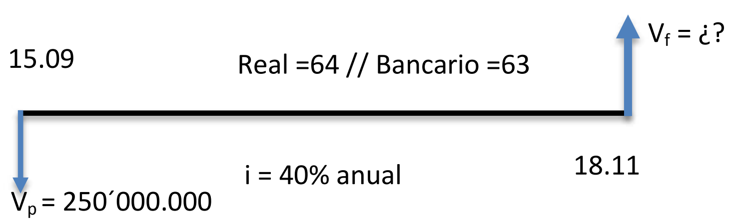
Solución:

Parámetros

- Valor presente de la transacción :$Vp = 250´000.000$
- Tasa de interés: $i = 40\%\ anual$
- Tiempo en el cual se causan los intereses:

	Real (racional)	Bancario
Septiembre	15	15
Octubre	31	31
Noviembre	18	18
Total	**64**	**63**

Representación gráfica



Cálculos

a) Para calcular el valor final aplicando interés racional que recibirá el empresario se utiliza la formula (2)

$$Vf = Vp\ (1 + i \times n)$$

$$Vf = 250´000.000 \left(1 + 0{,}40 \times \frac{64}{365}\right) = 267´534.246{,}60$$

En el caso que los intereses se causen de forma racional el empresario recibirá la suma de $267´534.246,60

a) Para calcular el valor final aplicando interés bancario que recibirá el empresario se utiliza la formula (2)

$$Vf = Vp\ (1 + i \times n)$$

$$Vf = 250'000.000\left(1 + 0{,}40 \times \frac{63}{360}\right) = 267'500.000{,}00$$

Respuesta

En el caso que los intereses se causen de forma bancaria el empresario recibirá la suma de $267´500.000,00

4.3 Un empresario desea saber cuánto debe invertir el 22 de octubre en un fondo que le garantiza el 28% anual para que el 25 de marzo del siguiente año pueda retirar la suma de $150´000.000. Realice el calculo utilizando interés racional, comercial y bancario

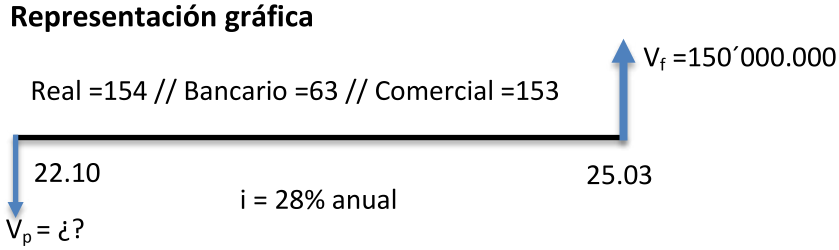
<u>Solución:</u>

Parámetros

- Valor futuro: $Vf = 150'000.000$
- Tasa de interés: $i = 28\%\ anual$
- Tiempo en el cual se causan los intereses:

	Real	Bancario	Comercial
Octubre	9	9	8
Noviembre	30	30	30
Diciembre	31	31	30
Enero	31	31	30
Febrero	28	28	30
Marzo	25	25	25
Total	154	154	153

Representación gráfica



Cálculos

a) Para calcular el valor que deberá invertir el empresario, aplicando interés racional o real se utiliza la formula (3)

$$Vp = \frac{Vf}{(1 + i \times n)}$$

$$Vp = \frac{150´000.000}{\left(1 + 0{,}28 \times \frac{154}{365}\right)} = 134´151.720{,}10$$

En el caso que los intereses se causen de forma racional el empresario deberá invertir la suma de $134´151.720,10

b) Para calcular el valor que deberá invertir el empresario, aplicando interés bancario se utiliza la formula (3)

$$Vp = \frac{150´000.000}{\left(1 + 0{,}28 \times \frac{154}{360}\right)} = 133´955.149{,}80$$

En el caso que los intereses se causen de forma racional el empresario deberá invertir la suma de $133´955.149,80

c) Para calcular el valor que deberá invertir el empresario, aplicando interés comercial se utiliza la formula (3)

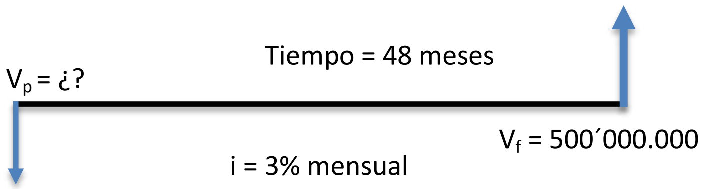
$$Vp = \frac{150´000.000}{\left(1 + 0{,}28 \times \frac{153}{360}\right)} = 134´048.257{,}40$$

Respuesta
En el caso que los intereses se causen de forma racional el empresario deberá invertir la suma de $134´048.257,40

4.4 Un empresario desea conocer cuánto deberá invertir hoy en un fondo para dentro de tres años y medio reponer la maquinaria que estima costara $500´000.000. El fondo utiliza interés bancario en sus cálculos y reconoce un interés mensual del 3%.

Solución:
Parámetros
- Valor futuro esperado: $Vf = 500´000.000$
- Tasa de interés: $i = 3\%\ mensual$
- Tiempo en el cual se causan los intereses: 42 meses (3 años y medio)

Representación gráfica



Cálculos

Para calcular el valor que el empresario deberá invertir para al final obtener el dinero para reponer la maquinaria, aplicando interés bancario, se utiliza la formula (2)

$$Vp = \frac{Vf}{(1 + i \times n)}$$

$$Vp = \frac{500´000.000}{(1 + 0{,}03 \times 42)} = 221´238.938{,}10$$

Respuesta

El empresario deberá invertir la suma de \$221´238.938,10

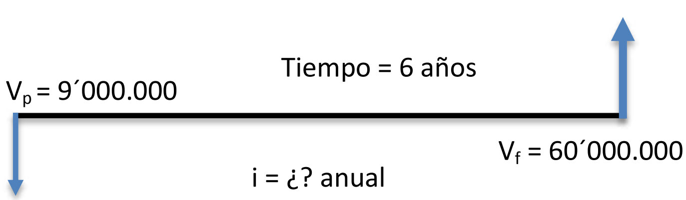
4.5 Un inversionista compro un terreno por \$9´000.000 hace seis años; si el día de hoy lo vende por \$60 millones, ¿Qué la tasa de interés anual gano en esta operación?

<u>Solución:</u>

Parámetros

- Valor inicial de la operación: $Vp = 9´000.000$
- Valor final de la operación: $Vf = 60´000.000$
- Tiempo de duración de la operación: 6 años

Representación gráfica



Cálculos

Para calcular la tasa de interés que el inversionista obtendrá en la operación, se utiliza la formula (4), aplicando interés comercial

$$i = \frac{\frac{Vf}{Vp} - 1}{n}$$

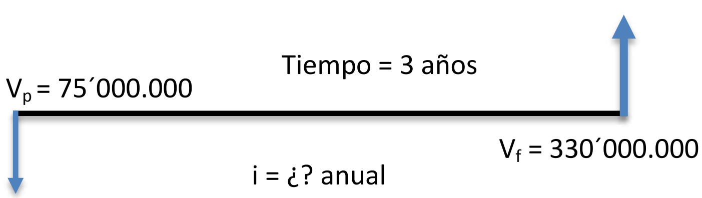
$$i = \frac{\frac{60´000.000}{9´000.000} - 1}{6} = 0{,}9444 = 94{,}44\%$$

Respuesta
El inversionista recibe una tasa de interés del 94,44% anual en esta operación

4.6 ¿Cuál será la rentabilidad de un titulo valor que al día de hoy se adquiere por $75 millones y después de tres años devuelve $330 millones?

<u>Solución:</u>
Parámetros
- Valor inicial de la operación: $Vp = 75´000.000$
- Valor final de la operación: $Vf = 330´000.000$
- Tiempo de duración de la operación: 3 años

Representación gráfica



Cálculos
Para calcular la rentabilidad (tasa de interés anual) que el inversionista obtendrá en la operación, se utiliza la formula (4), aplicando interés comercial

$$i = \frac{\frac{Vf}{Vp} - 1}{n}$$

$$i = \frac{\frac{330´000.000}{75´000.000} - 1}{3} = 1{,}1333 = 113{,}33\%$$

Respuesta
El inversionista obtiene una rentabilidad del 113,33% (interés anual) en esta operación

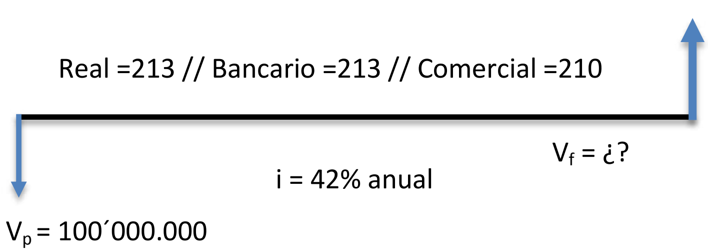
4.7 Un empresario recibe un préstamo por $100 millones al 42% anual el día 8 de agosto de 2011 con vencimiento el 8 de marzo del 2012. Si el mercado le ofrece las siguientes alternativas, ¿Cuál de ellas es la más económica?

a) préstamo con calculo de interés exacto o racional
b) préstamo con calculo de interés comercial
c) préstamo con calculo de interés bancario
Nota: Tenga en cuenta que el año 2012 es un año bisiesto

<u>Solución:</u>
Parámetros
- Valor inicial de la operación: $Vp = 100´000.000$
- Tasa de interés: $i = 42\%\ anual$
- Periodo en el cual se causan los intereses:

	Exacto o racional	Bancario	Comercial
Agosto	23	23	22
Septiembre	30	30	30
Octubre	31	31	30
Noviembre	30	30	30
Diciembre	31	31	30
Enero	31	31	30
Febrero	29	29	30
Marzo	8	8	8
Total	213	213	210

Representación gráfica



Cálculos
Para determinar la alternativa más económica para el empresario se calcula el interés que este debe pagar en cada caso, para lo cual se utiliza la formula (1)

a) Interés exacto o racional

$$I = Vp \times i \times n$$

$$I = 100´000.000 \times 0,42 \times \frac{213}{366} = 24´442.622,95$$

b) Interés comercial

$$I = 100´000.000 \times 0,42 \times \frac{210}{360} = 24´500.000,00$$

c) Interés bancario

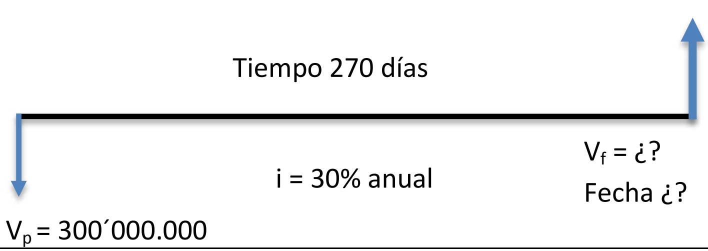
$$I = 100´000.000 \times 0,42 \times \frac{213}{360} = 24´850.000,00$$

Respuesta
La alternativa más económica es aquella que le cobra interés exacto o racional

4.8 A un empresario que se le ofrece el 15 de septiembre de 2010 un pagaré por $300´000.000, con un plazo de 270 días y una tasa de interés del 30% anual; desea conocer el valor que finalmente recibirá y la fecha de vencimiento; considerando que en la operación se aplique:
a) interés exacto o racional
b) interés comercial
c) interés bancario

<u>Solución:</u>
Parámetros
- Valor inicial de la operación: $Vp = 300´000.000$
- Tasa de interés: $i = 30\%\ anual$
- Periodo en el cual se causan los intereses: 270 días

Representación gráfica



Cálculos
Para determinar el valor futuro del pagare se utiliza la formula (2)

a) Interés exacto o racional

$$Vf = Vp\ (1 + i \times n)$$

$$Vf = 300´000.000\ \left(1 + 0{,}3 \times \frac{270}{366}\right) = 366´393.442{,}60$$

Para calcular la fecha de vencimiento se cuentan 270 días exactamente desde el 15 de septiembre, entonces la fecha de vencimiento será: 11.06.2011

b) Interés comercial

$$Vf = 300´000.000\ \left(1 + 0{,}3 \times \frac{270}{360}\right) = 367´500.000{,}00$$

Para calcular la fecha de vencimiento se cuentan 270 días desde el 15 de septiembre, considerando que los meses son de 30 días; entonces la fecha de vencimiento será: 15.06.2011

c) Interés comercial

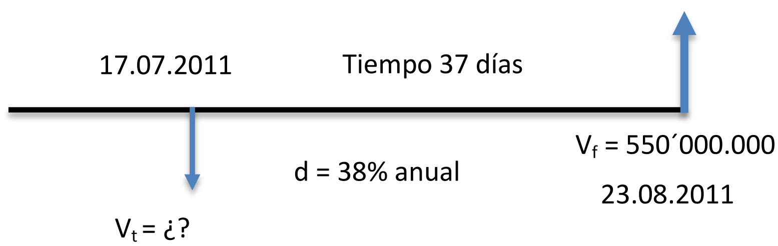
$$Vf = 300´000.000\ \left(1 + 0{,}3 \times \frac{270}{360}\right) = 367´500.000{,}00$$

Para calcular la fecha de vencimiento se cuentan 270 días desde el 15 de septiembre, considerando los días exactos; entonces la fecha de vencimiento será: 11.06.2011

4.9 El 17 de julio del 2011 una entidad bancaria descontó una letra de cambio de valor nominal $550´000.000, que maduraba el 23 de agosto de mismo año, si la tasa de descuento del 38% anual; ¿Cuál fue el valor de la transacción?

Solución:
Parámetros
- Valor nominal de la letra de cambio: $Vf = 550´000.000$
- Tasa de descuento: $d = 38\%\ anual$
- Periodo en el cual se causan los intereses, entre el 17 de julio y el 23 de agosto: 37 días

Representación gráfica



Cálculos
Para determinar el valor liquido o valor de la transacción se utiliza la formula (7)

$$Vt = Vf \times (1 - d \times n)$$

$$Vt = 550´000.000 \times \left(1 - 0{,}38 \times \frac{37}{360}\right) = 528´519.444{,}44$$

Respuesta
El valor de la transacción será de $528´519.444,44

4.10 El 15 de diciembre de 2011 una empresa recibe un pagaré por $200 millones para respaldar una operación comercial; el pagare tiene un periodo de maduración de 90 días, y una tasa de interés del 25% anual. El 14 de enero del 2012 lo negocia con un banco que lo adquiere a una tasa de descuento del 29% anual. ¿Cuánto recibirá la empresa por el pagaré y cuánto ganará el banco en la operación de descuento?

Solución:
Parámetros
- Valor nominal del pagare: $Vf = 200´000.000$
- Tasa de interés pagare: : $i = 25\%\ anual$
- Tasa de descuento: $d = 29\%\ anual$
- Periodo de maduración del pagare: 90 días; periodo de descuento: entre el 15 de enero y el 15 de marzo: 60 días

Representación gráfica

Cálculos

Para determinar el valor nominal o final del pagare se utiliza la formula (2)

$$Vf = Vp \times (1 + i \times n)$$

$$Vf = 200´000.000 \times \left(1 + 0,25 \times \frac{90}{360}\right) = 212´500.000$$

Sobre el valor nominal se calcula el valor liquido de la operación de descuento el 15 de enero, utilizando la formula (7)

$$Vt = Vf \times (1 - d \times n)$$

$$Vt = 212´500.000 \times \left(1 - 0,29 \times \frac{60}{360}\right) = 202´229.166,70$$

Respuesta

La empresa recibirá la suma de \$202´229.166,70; el banco obtendrá una utilidad de \$10´270.833,33

5. Ejercicios propuestos

5.1 La empresa el "Buen Gusto" quiere saber el valor de maduración de un pagaré con vencimiento el 15 de mayo del 2012, el cual va ser descontado por un banco el 12 de marzo del mismo año, a una tasa de descuento del 25% anual, teniendo en cuenta que el valor de la transacción de descuento es de $78´400.000.

5.2 Un empresario recibe el 15 de mayo del 2011, las siguientes tres ofertas por la compra de su negocio. ¿Cuál de las tres es la mejor si el rendimiento del dinero es del 10,5% anual?

a) $60 millones de contado y pagare por $33 millones con fecha de maduración del 10 de septiembre del 2011.
b) $30 millones a los 120 días; y $64 millones a los 180 días, en ambos casos se pagan los intereses correspondientes
c) $20 millones de contado y un pagare por $71 millones con vencimiento a los 120 días.

5.3 Una empresa debe cancelar una deuda de $14 millones a los seis meses, con una tasa de interés del 8% anual; si el contrato del préstamo tiene una clausula penal por mora que cobra el 12% por el tiempo que se exceda del plazo fijado, ¿Qué cantidad pagara el deudor, 100 días después del vencimiento?

5.4 Un pequeño empresario acuerda con una entidad financiera un préstamo bancario por la suma de $80 millones en un plazo de 120 días y una tasa de interés anticipado del 28% anual.

a) ¿Qué valor recibirá el empresario al momento de suscribir el préstamo?
b) Suponga que el banco cobra $15.000 por el estudio del crédito, ¿Cuál será el valor liquido de la operación?

5.5 Una empresa comercial descuenta un titulo valor en un banco. ¿Cuál es el valor nominal del documento que queda en poder del banco, si la empresa comercial recibe un valor liquido de $50´000.000 y el periodo de maduración es de 120 días? El banco aplica una tasa de descuento del 25% anual.

5.6 Un empresario y un comerciante acuerdan el respaldo de una transacción comercial con un pagare por $70 millones; el documento fechado el 25 de septiembre del 2010, pacta un plazo de 325 días y un interés del 30% anual. Si el pagare es descontado por un banco el 18 de marzo de 1999 a una tasa de descuento del 40% anual, se pide determinar:

a) La fecha de vencimiento
b) El valor nominal del documento
c) El valor de transacción de descuento.

5.7 ¿Cuál será la verdadera tasa de interés cobrada por un banco que descuenta un documento de valor nominal $400´000.000, 25 días antes de su vencimiento y a una tasa de descuento del 29% anual?

5.8 Un comerciante compra mercancía a un fabricante por valor de $200 millones. Si este ultimo ofrece los siguientes descuentos: 30% por venta al por mayor, 10% por pago al contado y 5% por enviar la mercancía sin empaque.

a) ¿Cuál es el valor final de la factura que debe cancelar el comerciante?
b) ¿De cuánto es el descuento que otorgado por el fabricante?
c) ¿Cuál es la tasa de descuento promedio que ofrece el fabricante?

5.9 Si una fábrica ofrece un descuento del 25% en ventas al por mayor, 5% por pronto pago y 4% por embalaje. ¿Cuál debe ser el descuento adicional que debe ofrecerle a los empleados para que la tasa de descuento promedio sea del 35%?

5.10 Demostrar que el interés simple producido por un capital C, colocado durante n años a una tasa de interés i es igual al interés simple que producirá a la tasa proporcional (i/m) colocado durante $m.n$ periodos.

5.11 Calcular la tasa de interés simple mensual equivalente a una tasa del 9% anual.

5.12 Calcular el interés simple que genera un capital de $10´000.000 en 3 años a una tasa de interés del 0,8% mensual

5.13 Juan quiere saber a qué tasa de interés anual debe colocar un capital de $20 millones para dentro de nueve meses recibir $22´500.000

5.14 La comercializadora "El Negociante" firmo un pagare el 10 de enero de 2010 por un valor de 60 millones, para este se pacto una tasa de interés del 9% de interés semestral; el gerente quiere saber en que fecha los intereses serán de $3´590.000.

5.15 Juan quiere saber que suma debe colocar en un fondo de inversiones que paga una tasa de interés promedio del 8,5% anual, para dentro de ocho meses poder retirar la suma de 223´000.000.

5.16 Si una empresa firma un pagare por $20 millones el 15 de mayo con vencimiento el 13 de agosto y en una operación de descuento recibe $19.500.000. ¿A que tasa de descuento racional le fue descontado el pagaré?

5.17 Un inversionista recibió un pagaré que gana intereses del 8% anual, por $120 millones el 15 de julio a 150 días de su vencimiento. El 20 de octubre del mismo año lo ofrece a otro inversionista que desea ganar 10%. ¿Cuánto recibirá por el pagaré el primer inversionista?

Interés compuesto

UNIDAD 2: INTERÉS COMPUESTO

OBJETIVO

Al finalizar la unidad los estudiantes estarán en capacidad de conceptuar sobre el interés compuesto, deducir los modelos matemáticos que lo soportan y aplicar este en las principales operaciones financieras.

CONTENIDO

1. *Concepto de interés compuesto*
2. *Modelo matemático de interés compuesto*
3. *Tasas de interés*
4. *Equivalencia entre tasas de interés*
5. *Ecuación de valor (Equivalencia)*
6. *Aplicaciones de interés compuesto*
7. *Ejercicios resueltos*
8. *Ejercicios propuestos*

Introducción

Diferente a lo visto hasta el momento, en una operación financiera donde se aplica interés compuesto en cada periodo de conversión convenido se agregan los intereses al capital, generando así un nuevo monto de capital sobre el cual se calcularan los intereses para el periodo siguiente; en estos casos se dice que los intereses se capitalizan.

En la mayoría de las operaciones financieras y comerciales es común el uso del interés compuesto; es por esta razón que el modelo matemático de interés compuesto es una herramienta esencial en el cálculo y análisis de las transacciones financieras.

De otro lado, como no hay criterios unificados para la aplicación de una tasa de interés determinada ya que estas son utilizadas dependiendo de las operaciones particulares, costumbres y en muchas ocasiones el gusto de las entidades involucradas; por esta razón es necesario desarrollar un modelo que permitan determinar la equivalencia entre tasas de interés.

Finalmente en la unidad se analizan algunas de las aplicaciones prácticas que tiene el interés compuesto: inflación, deflación, devaluación, revaluación, depósitos a termino definido, aceptaciones financieras.

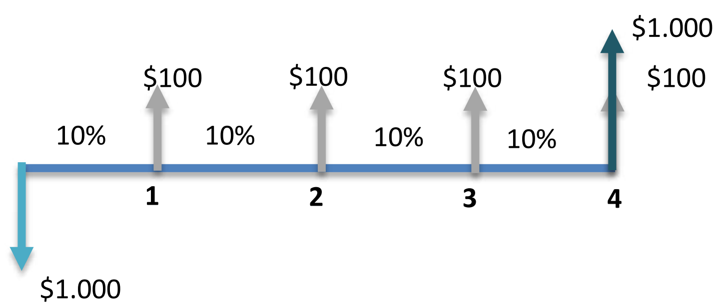
1. Concepto de interés compuesto

Bajo el modelo de interés simple, si se invierte un capital de \$1000 al 10% trimestral, durante un año, la liquidación de los intereses será:

$$I = 1.000 \times 0{,}1 \times 4 = 400$$

Al cabo de un año el inversionista recibirá \$1.400; \$1.000 correspondiente al capital y \$400 a los intereses. La situación de la liquidación de intereses bajo la modalidad de interés simple se ilustra en la gráfica No 2:

GRAFICA NO 2 – CAUSACIÓN DEL INTERÉS SIMPLE

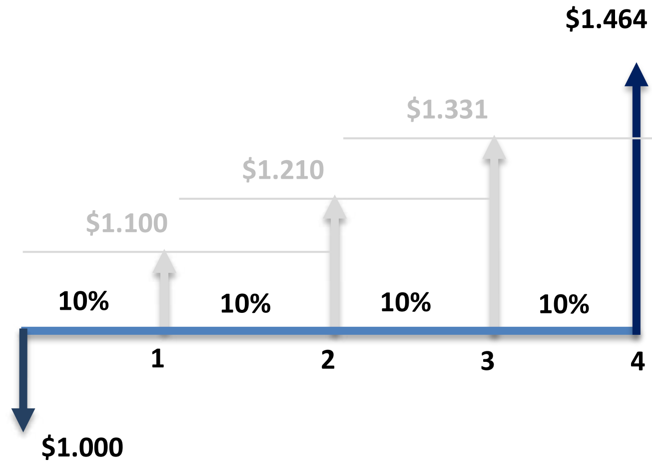


De otro lado, si la inversión se hace a interés compuesto entonces al final del primer trimestre se liquidan los primeros intereses $(1.000 \times 0{,}1 = 100)$ y estos se acumulan al capital para obtener un monto de \$1.100 al cabo del primer periodo; al final del 2do periodo se liquidan los segundos intereses sobre el monto anterior $1.100 \times 0{,}1 = 110$ y estos se acumulan de nuevo al capital para obtener un nuevo monto de \$1.210; y así sucesivamente hasta \$1.464,10.

La situación de la liquidación de intereses bajo la modalidad de interés compuesto se ilustra en la gráfica No 3.

En estas operaciones el intervalo en el cual se capitaliza el interés reciben el nombre de período de capitalización; por su parte, la frecuencia de capitalización es el número de veces por año en que estas se realizan. Similar al caso del interés simple, los conceptos más importantes cuando tratamos con interés compuesto son:

GRAFICA NO 3 – CAUSACIÓN DEL INTERÉS COMPUESTO



- Valor presente (V_P): es la cantidad de dinero que se invierte o se presta, en el momento de hoy, a la tasa de interés i y durante n periodos.
- Tasa de interés periódica (i): Es la tasa de interés que se aplica en cada periodo.
- Periodos (n): son los periodos de conversión durante los cuales se invierte o se presta el Valor Presente (V_p).
- Valor futuro (V_f): es la cantidad de dinero de la cual se dispone al final de la transacción; es equivale a un pago único futuro en n periodos y el cual es equivalente a un pago único presente al día de hoy.

2. Modelo de Interés compuesto

Para determinar el modelo de interés compuesto se considera un monto de capital inicial (V_p), al cual se le aplica un interés (i), durante *n* periodos; adicionalmente, se considera que los intereses son capitalizados al final del periodo en que se generan.

Realizando los cálculos de interés y valor futuro teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, en la tabla No 1, se puede observar que para el periodo 1, el interés (V_p.i) se suma al capital inicial para (V_p), obteniendo así que el capital al final del periodo 1, el cual es a su vez es el capital inicial del periodo 2; es decir: $V_p(1+i)$; si el capital sigue invertido entonces el interés en el periodo 2, igual a $V_p(1+i).i$, el cual deberá sumarse al capital inicial de ese periodo para obtener así, el capital al final del periodo 2 o capital inicial del periodo 3, si se decide continuar con la inversión; este valor será: $V_{f2} = V_p(1+i)^2$. Si los cálculos se continúan hasta el periodo n, obtenemos el valor futuro para este ultimo periodo

Periodo	Capital Inicial	Interés	Capital Final
1	Vp	$Vp \times i$	$V_f = V_p + V_p \times i$ $V_{f1} = V_p \times (1+i)$
2	$V_p(1+i)$	$V_p(1+i) \times i$	$V_{f2} = V_p(1+i) + V_p \times (1+i)$ $V_{f2} = V_p(1+i)^2$
3	$V_p(1+i)^2$	$V_p(1+i)^2 \times i$	$V_{f3} = V_p(1+i)^2 + V_p(1+i)^2 \times i$ $V_{f3} = V_p(1+i)^3$
….	…..	…..	…….
n	$V_p(1+i)^{n-1}$	$V_p(1+i)^{n-1} \times i$	$V_{fn} = V_p(1+i)^n$

De esta forma el modelo, da cuenta del valor futuro de una inversión V_f en función del capital inicial (V_p) cuando los intereses causados son capitalizados durante (n) periodos a una tasa de interés (i)

$$V_f = V_p(1+i)^n \quad (11)$$

Donde:

$V_f: Valor\ futuro\ del\ capital\ en\ la\ operación$

$V_p: valor\ presente\ del\ capital\ en\ la\ operación$

$i: tasa\ de\ interes\ efectiva\ que\ se\ aplica\ en\ la\ operación$

n: *numero de periodos de conversión pactados en la operacion*

El término $(1+i)^n$ se conoce como el factor que convierte un pago único presente (V_p) en un pago único futuro (V_f) equivalente, a una tasa de interés (i), durante (n) periodos.

Del modelo (11) podemos definir otros modelos que dan razón de elementos como el valor presente, el interés o el número de periodos cuando se conocen los demás parámetros.

2.1 Valor futuro

Dados el valor presente, tasa de interés y los periodos de conversión, el valor futuro de la inversión o pago se calcula directamente aplicando la formula (11).

Ejemplo 1.

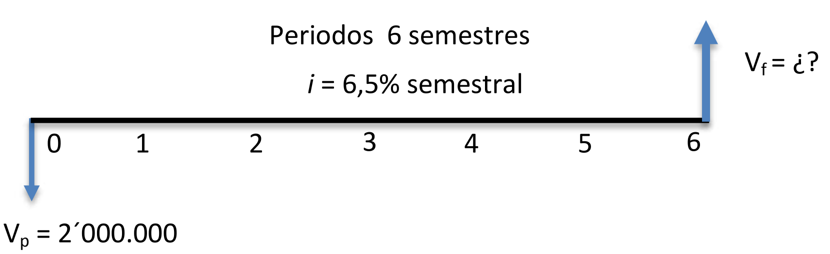
¿Cuánto recibirá una persona que invierte $2 millones de pesos en depósito a término fijo por tres años, si se le reconoce una tasa de interés del 6,5% semestral?

Solución:

Parámetros

- Valor de la inversión: $V_p = 2´000.000$
- Tasa de interés pagare: : $i = 6{,}5\%\ semestral$
- Periodos de conversión: 3 años o 6 semestres

Representación gráfica



Cálculos

Para determinar el valor final que recibirá la persona se utiliza la formula (11), utilizando los periodos de conversión semestrales, en consideración a que la tasa de interés es una tasa semestral

$$V_f = V_p(1+i)^n$$

$$V_f = 2´000.000(1+0{,}065)^6 = 2´918284{,}59$$

Respuesta
El valor que finalmente recibirá la persona es $2´918.284,59

Observación: el periodo de conversión debe coincidir con el periodo de aplicación de la tasa de interés. Para el caso, ya que la tasa aplica para periodos semestrales, el número de periodos debe expresarse, igualmente, en forma semestral.

2.2 Valor presente

Dados el valor futuro, tasa de interés y los periodos de conversión, el valor presente se puede calcular a partir de la formula (11), despejando V_p

$$V_f = V_p(1+i)^n$$

Despejando el valor de V_p, se obtiene:

$$V_p = \frac{V_f}{(1+i)^n} = V_f \times (1+i)^{-n} \quad (12)$$

Los símbolos tienen el mismo significado que en la formula (11)

Ejemplo 2.

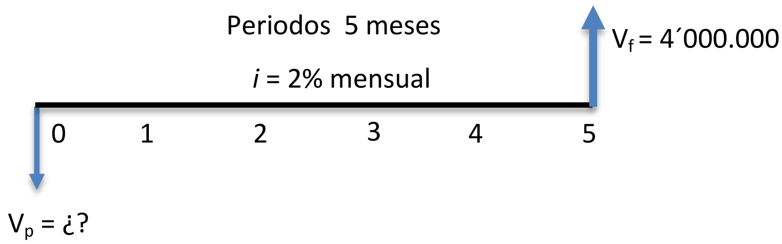
¿Cuánto debe ahorrar un padre de familia el 1 de septiembre para pagar la matrícula de la universidad de su hijo el 31 de enero del siguiente año; si el costo de la matrícula es de $4´000.000 y la tasa de interés que se le reconoce es del 2% mensual?

Solución:

Parámetros
- Valor final: $V_f = 4´000.000$
- Tasa de interés pagare: : $i = 2\%\ mensual$
- Periodos de conversión entre el 1 de septiembre y 31 de enero: 5 meses

Representación gráfica

En la siguiente grafica se representa la operación, el padre debe ahorrar *X* de dinero para dentro de 5 meses obtener $4´000.000 para pagar la matricula de la universidad de su hijo



Cálculos

Para determinar el valor que debe ahorrar el padre se utiliza la formula (12), utilizando los periodos de conversión mensuales, en consideración a que la tasa de interés es una tasa mensual

$$V_p = V_f(1+i)^{-n}$$

$$V_p = 4´000.000(1+0{,}02)^{-5} = 3´622.923{,}24$$

Respuesta

El valor que deberá ahorrar el papa el 1 de septiembre es $3´622.923,24

2.3 Número de periodos de conversión

Dados el valor presente y futuro y la tasa de interés, los periodos de conversión se hallan despejando el valor de n de la formula (11)

$$V_f = V_p(1+i)^n$$

$$\frac{V_f}{V_p} = (1+i)^n \ (Pasando\ el\ valor\ que\ multiplica\ la\ incognita\ a\ dividir)$$

$$\log\left(\frac{V_f}{V_p}\right) = \log(1+i)^n \ (Aplicando\ la\ funcion\ logaritmo\ en\ ambos\ lados)$$

$$\log\left(\frac{V_f}{V_p}\right) = n\log(1+i) \ \ (Aplicando\ las\ propiedades\ de\ logaritmos)$$

$$\frac{\log\left(\frac{V_f}{V_p}\right)}{\log(1+i)} = n \quad (13)$$

Los símbolos tienen el mismo significado que en la formula (11)

Ejemplo 3.

¿En cuánto tiempo se duplicara una inversión, si la tasa de interés que se reconoce es del 1.5% mensual?

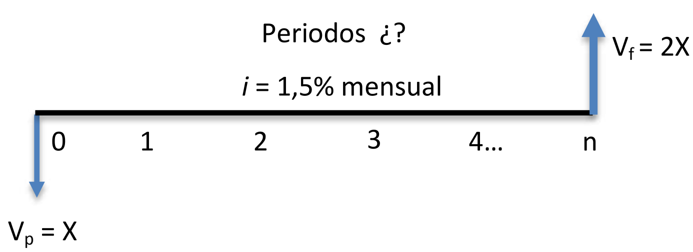
Solución:

Parámetros

- Valor inicial de la inversión: $V_p = x$
- Valor final de la inversión: $V_f = 2x$
- Tasa de interés pagare: : $i = 1{,}5\%\ mensual$

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación; durante cuantos periodos se duplicara una inversión, si se reconoce una tasa de interés del 1,5% mensual



Cálculos

Para determinar el numero de periodos en los cuales se duplica la inversión se utiliza la formula (13)

$$n = \frac{\log\left(\frac{V_f}{V_p}\right)}{\log(1+i)}$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{2x}{x}\right)}{\log(1+0{,}015)} = \frac{\log(2)}{\log(1{,}015)} = 46{,}55$$

Respuesta
El ahorrador deberá mantener la inversión mínimo 47 meses para duplicar su inversión. Son meses considerando que la tasa de interés es mensual.

2.4 Tasa de interés

Dados el valor presente y futuro y el número de periodos de conversión se puede determinar la tasa de interés a partir de la formula (11), despejando *i*.

$$V_f = V_p(1+i)^n$$

$$\frac{V_f}{V_p} = (1+i)^n \ (Pasando\ a\ dividir\ el\ termino\ que\ esta\ multiplicando\ la\ incognita)$$

$$\sqrt[n]{\frac{V_f}{V_p}} = (1+i) \quad (Aplicando\ raiz\ cuadrada\ en\ ambos\ lados\ de\ la\ ecuación)$$

$$\sqrt[n]{\frac{V_f}{V_p}} - 1 = i \quad (pasando\ a\ restar\ el\ termino\ que\ esta\ sumando\ la\ incognita)$$

$$\sqrt[n]{\frac{V_f}{V_p}} - 1 = i \quad (14)$$

Los símbolos tienen el mismo significado que en la formula (11)

Ejemplo 4.

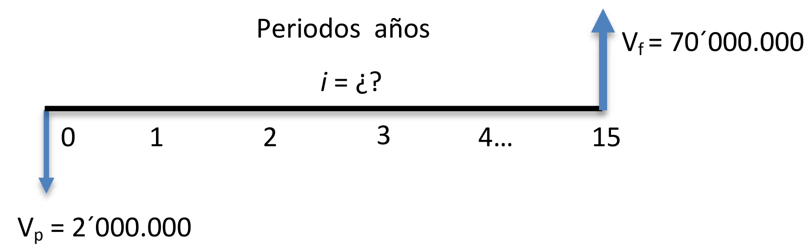
Si una inversión de $2 Millones, realizada hace 15 años, tiene hoy un valor de $70 Millones. ¿Cuál fue la tasa de interés pactada? Exprésela en interés mensual, trimestral, semestral y anual

Solución:

Parámetros
- Valor inicial de la inversión: $V_p = 2´000.000$
- Valor final de la inversión: $V_f = 70´000.000$
- Periodos de conversión: $n = 15\ años = 30\ semestres = 60\ trimestres = 180\ meses$

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación; durante 15 años la inversión inicial de 2´000.0000 se han convertido en 70´000.000, se quiere conocer la tasa de interés expresada en diferentes periodos de capitalización: anual, semestral, trimestral, mensual



Cálculos

Para determinarla tasa de interés se utiliza la formula (14), considerando los periodos de conversión correspondientes.

a) Tasa de Interés anual

$$\sqrt[n]{\frac{V_f}{V_p}} - 1 = i \quad (14)$$

$$\sqrt[15]{\frac{70´000.000}{2´000.000}} - 1 = i = 0{,}2674 = 26{,}74\%\ anual$$

b) Tasa de Interés semestral

$$\sqrt[30]{\frac{70´000.000}{2´000.000}} - 1 = i = 0{,}1258 = 12{,}58\%\ semestral$$

c) Tasa de Interés trimestral

$$\sqrt[60]{\frac{70´000.000}{2´000.000}} - 1 = i = 0{,}0610 = 6{,}10\%\ trimestral$$

d) Tasa de Interés mensual

$$\sqrt[180]{\frac{70'000.000}{2'000.000}} - 1 = i = 0{,}0199 = 1{,}99\%\ mensual$$

3. Tasas de Interés

3.1 Tasa Nominal[1]

Es una tasa de interés de referencia que indica el número de capitalizaciones, que para una transacción financiera, se realizan durante un periodo de un año. La tasa nominal se representa por la letra j, seguida por el periodo de capitalización.

Ejemplo 5.

a) j = 10% N-a. Tasa nominal del 10%, capitalizable anualmente, una por año

b) j = 25% N-t. Tasa nominal del 25%, capitalizable trimestralmente, cuatro por año

c) j = 30% N-s. Tasa nominal del 30%, capitalizable semestralmente, dos por año

d) j = 28% N-m. Tasa nominal del 28% capitalizable mensualmente, doce por año

e) j = 55% N-d. Tasa nominal del 55% capitalizable diariamente, trecientos sesenta por año

3.2 Tasa Efectiva

La tasa efectiva, a diferencia de la tasa nominal, señala la tasa de interés que efectivamente se está pagando por un capital, para los periodos de conversión pactados. Como la capitalización del interés se produce cierta cantidad de veces al año; la tasa efectiva es mayor que la tasa nominal.

La tasa nominal comúnmente esta referenciada a un periodo de un año, e indica varias liquidaciones de intereses en dicho plazo; por su parte, la tasa efectiva mide el rendimiento efectivo en el periodo en que se realiza el pago o cobro.

[1] Se trata de un valor de referencia utilizado en las operaciones financieras que suele ser fijado por las autoridades para regular los préstamos y depósitos

La tasa efectiva se representa por la letra i, seguida por la letra E (efectiva) y una letra mayúscula que representa el periodo al cual hace referencia.

Ejemplo 6.

a) i = 10% EM. Indica una tasa del 10% efectiva mensual.

b) i = 25% ET. Indica una tasa del 25% efectiva trimestral.

c) i = 30% ES. Indica una tasa del 30% efectiva semestral.

d) i = 28% EA. Indica una tasa del 28% efectiva anual.

e) i = 0,5% ED. Indica una tasa del 0,5% efectiva diaria.

3.3 Relación entre Tasa Efectiva y Nominal

La tasa nominal es igual a la tasa efectiva multiplicada por el número de periodos de capitalización en un año.

$$j = i \times m \quad (15)$$

Donde:

j: Tasa de Interés Nominal

i: Tasa de Interés efectiva

m: es la frecuencia de conversión anual; es decir, es el número de veces que se capitalizan los intereses por año.

Nótese que sí la frecuencia de conversión es igual a uno, la tasa efectiva es igual a la tasa Nominal.

Ejemplo 7.

Hallar la tasa efectiva anual, si la tasa nominal es 42%.

<u>Solución</u>

En este caso la frecuencia de capitalización es uno, ya que no se indica lo contrario. Para hallar la tasa efectiva, se utiliza la formula (15)

$$i = \frac{j}{m} = \frac{0{,}42}{1} = 0{,}42 = 42\%$$

En este caso la tasa de interés nominal es igual a la tasa efectiva, la cual será una tasa efectiva anual.

Ejemplo 8.

Hallar la tasa efectiva, si la tasa nominal es 36% N-s.

Solución

En este caso la frecuencia de capitalización es dos (dos semestres por año). Para hallar la tasa efectiva, se utiliza la formula (15)

$$i = \frac{j}{m} = \frac{0{,}36}{2} = 0{,}18 = 18\%$$

Respuesta
La tasa efectiva es 18% ES

Ejemplo 9.

Hallar la tasa nominal, si la tasa efectiva trimestral es 8% ET.

Solución

En este caso la frecuencia de capitalización es cuatro (cuatro trimestres por año). Para hallar la tasa nominal, se utiliza la formula (15)

$$j = i \times m = 0{,}08 \times 4 = 0{,}32 = 32\%$$

Respuesta
La tasa nominal es 32% N-t

Ejemplo 10.

Hallar la tasa nominal, si la tasa efectiva es 2,5% EM.

Solución

En este caso la frecuencia de capitalización es doce (doce meses por año). Para hallar la tasa efectiva, se utiliza la formula (15)

$$j = i \times m = 0{,}025 \times 12 = 0{,}3 = 30\%$$

Respuesta
La tasa nominal es 30% N-m

Ejemplo 11.

Hallar la tasa efectiva diaria, si la tasa Nominal es 36%.

Solución

En este caso la frecuencia de capitalización es trecientos sesenta (trecientos sesenta días por año). Para hallar la tasa efectiva, se utiliza la formula (15)

$$i = \frac{j}{m} = \frac{0{,}36}{360} = 0{,}001 = 0{,}1\%$$

Respuesta
La tasa efectiva es 0,1% ED

3.4 Tasa de Interés Anticipado

El concepto de interés anticipado, definido en la unidad anterior, es válido cuando se trabaja con interés compuesto.

En contraste con el interés i (vencido), el interés anticipado se denomina i_a. Cuando no hay una referencia específica, se supone que la tasa de interés será siempre vencida.

4. Equivalencia entre tasas de interés

4.1 Equivalencia entre tasas efectivas.

Dos o más tasas efectivas de interés son equivalentes, si con diferente periodicidad producen el mismo interés efectivo al final de cualquier periodo.

En el ejemplo 4 se comprobó que $2´millones eran equivalentes a $70´millones en 15 años a diferentes tasa de interés: 26,74% EA, 12,58% ES, 6,10% ET, o 1,99% EM. De esta manera, se puede decir que todas estas tasas de interés son equivalentes.

Modelo matemático

Para hallar el modelo matemático, se parte de la formula (11). Para un valor presente dado V_p se deben hallar dos tasas de interés efectivas, que hagan que el valor futuro V_f sea igual.

Aplicando la formula (11), para una tasa de interés efectiva i_1, entonces se obtiene:

$$V_f \ = \ V_p(1+i_1)^{n_1}$$

Igualmente para tasa de interés efectiva i_2, se obtiene

$$V_f \ = \ V_p(1+i_2)^{n_2}$$

Considerando que el Valor futuro debería ser igual en ambos casos, entonces podemos igualar ambas ecuaciones:

$$V_p(1+i_1)^{n_1} \ = \ V_p(1+i_2)^{n_2}$$

De esta igualdad, adicionalmente se tiene que el VP es igual de acuerdo a las condiciones del problema, ósea que:

$$(1+i_1)^{n_1} \ = \ (1+i_2)^{n_2}$$

Para despejar i_2 en función i_1 , se aplica la raíz n_2 en ambos lados de la ecuación,

$$\sqrt[n_2]{(1+i_1)^{n_1}} \ = \ \sqrt[n_2]{(1+i_2)^{n_2}}$$

Aplicando las propiedades de los radicales, entonces se obtiene:

$$(1+i_1)^{\frac{n_1}{n_2}} \ = \ (1+i_2)$$

Despejando i_2 , se obtiene:

$$i_2 = (1+i_1)^{\frac{n_1}{n_2}} - 1 \quad (16)$$

Los símbolos tienen el mismo significado que en la formula (11)

Ejemplo 11.

Hallar la tasa efectiva anual equivalente de las siguientes tasas: 12,58% ES, 6,10% ET, o 1,99% EM.

Solución

Para hallar la tasa equivalente se utiliza la formula (16)

$$(1+i_1)^{\frac{n_1}{n_2}} - 1 = i_2$$

a) Tasa efectiva anual equivalente de 12,58% ES; en este caso i_1 es 12,58% ES, n_1 es 2 y n_2 es 1.

$$i_2 = (1+0{,}1258)^{\frac{2}{1}} - 1 = 0{,}2674 = 26{,}74\%\ EA$$

Respuesta: La tasa de interés efectiva anual equivalente a 12,58% ES, es: 26,74% EA

b) Tasa efectiva anual equivalente de 6,1% ET; en este caso i_1 es 6,1% ET, n_1 es 4 y n_2 es 1.

$$i_2 = (1+0{,}0610)^{\frac{4}{1}} - 1 = 0{,}2672 = 26{,}72\%\ EA$$

Respuesta: La tasa de interés efectiva anual equivalente a 6,1% ET, es: 26,72% EA

c) Tasa efectiva anual equivalente de 1,99% EM; en este caso i_1 es 1,99% ES, n_1 es 12 y n_2 es 1.

$$i_2 = (1+0{,}0199)^{\frac{12}{1}} - 1 = 0{,}2667 = 26{,}67\%\ EA$$

Respuesta: La tasa de interés efectivo anual equivalente a 1,99% EM, es: 26,67% EA

Observación: las tres soluciones deberían dar igual resultado de acuerdo al resultado del ejemplo 4; no obstante, se dan resultados ligeramente diferentes por el uso del número de decimales.

4.2 Equivalencia entre tasas vencidas y tasas anticipadas

Del interés simple se conoce que:

$$i = \frac{I}{V_p} \quad (a)$$

$$I = V_f \times d \quad (b)$$

$$V_p = V_t = V_f\,(1-d) \quad (c)$$

Remplazando (b) y (c) en (a), se obtiene:

$$i = \frac{V_f \times d}{V_f\,(1-d)} = \frac{d}{(1-d)}$$

Considerando que d es una tasa anticipada i_a entonces se puede escribir la anterior ecuación, como:

$$i = \frac{i_a}{(1-i_a)} \quad (17)$$

Despejando i_a en función de i entonces se obtiene:

$$i_a = \frac{i}{(1+i)} \quad (18)$$

Tasa vencida equivalente a una tasa anticipada

Para hallar una tasa vencida equivalente a una tasa anticipada, se propone los siguientes pasos:

1) La tasa anticipada se convierte en una tasa vencida, utilizando la formula (17).
2) Para la tasa vencida efectiva hallada en el paso anterior, se halla la tasa vencida efectiva para otro periodo de ser necesario; utilizando el modelo (16)

Ejemplo 12.

Hallar la tasa efectiva semestral equivalente de una tasa anticipada del 5%E_aM.

Solución

Paso 1: La tasa anticipada se convierte en una tasa vencida, utilizando la formula (17)

$$i = \frac{i_a}{(1-i_a)}$$

$$i = \frac{0{,}05}{(1-0{,}05)} = 0{,}0526 = 5{,}26\%\ EM$$

Paso 2: para hallar la tasa efectiva semestral equivalente se utiliza la formula (16). En este caso i_1 es 5,26% EM, n_1 es 12 y n_2 es 2.

$$(1+i_1)^{\frac{n_1}{n_2}} - 1 = i_2$$

$$i_2 = (1+0{,}0526)^{\frac{12}{2}} - 1 = 0{,}3601 = 36{,}01\%\ ES$$

Respuesta: 36,01% ES es la tasa efectiva equivalente de la tasa anticipada 5%E_aM

Tasa anticipada equivalente a una tasa vencida

Para hallar la tasa anticipada equivalente a una tasa vencida, se propone los siguientes pasos:

1) Para la tasa vencida efectiva se halla la tasa vencida efectiva para otro periodo, de ser necesario, utilizando el modelo (16)
2) La tasa vencida se convierte en una tasa anticipada, utilizando el modelo (18).

Ejemplo 13.

Hallar la tasa efectiva semestral anticipada equivalente de una tasa efectiva vencida del 8% ET.

Solución

Paso 1: para hallar la tasa efectiva semestral equivalente de la tasa 8%ET, inicialmente se haya la tasa efectiva semestral aplicando la formula (16). En este caso, i_1 es 8%, n_1 es 4 y n_2 es 2.

$$i_2 = (1+i_1)^{\frac{n_1}{n_2}} - 1$$

$$i_2 = (1+0{,}08)^{\frac{4}{2}} - 1 = 0{,}1664 = 16{,}64\%\ ES$$

Paso 2: para hallar la tasa efectiva semestral anticipada equivalente se utiliza la formula (18). En este caso i es 16,64% ES.

$$i_a = \frac{i}{(1+i)}$$

$$i_a = \frac{0{,}1664}{(1+0{,}1664)} = 0{,}1426 = 14{,}26\%\ E_aS$$

Respuesta: la tasa efectiva semestral anticipada equivalente es 14,26% E_aS

4.3 Tasa nominal equivalente a una tasa efectiva.

Para hallar la tasa nominal equivalente a una tasa efectiva, se propone los siguientes pasos:

1) Para la tasa vencida efectiva se halla la tasa vencida efectiva para otro periodo, utilizando como referencia el periodo de capitalización de la tasa nominal; utilizando la formula (16)

2) La tasa vencida hallada se convierte en una tasa nominal, utilizando la formula (15).

Ejemplo 14.

Hallar la tasa nominal semestral equivalente de una tasa efectiva vencida del 2%EM.

<u>Solución</u>

Paso 1: para hallar la tasa nominal semestral equivalente de la tasa 2%EM, inicialmente se halla la tasa efectiva semestral equivalente aplicando la formula (16). En este caso, i_1 es 2%, n_1 es 12 y n_2 es 2.

$$i_2 = (1 + i_1)^{\frac{n_1}{n_2}} - 1$$

$$i_2 = (1 + 0{,}02)^{\frac{12}{2}} - 1 = 0{,}1261 = 12{,}61\%\ ES$$

Paso 2: para hallar la tasa nominal semestral equivalente se utiliza la formula (15). En este caso i es 12,61% ES y m es 2

$$j = i \times m$$

$$j = 0{,}1261 \times 2 = 0{,}2522 = 25{,}22\%$$

Respuesta: la tasa nominal semestral equivalente es 25,22% N-s

4.4 Tasa efectiva equivalente de una tasa nominal.

Para hallar la tasa efectiva equivalente a una tasa nominal, se propone los siguientes pasos:

1) Para la tasa nominal dada se halla la tasa efectiva, utilizando como referencia el periodo de capitalización de la tasa nominal; a través de la formula (15)

2) En caso que la tasa efectiva pedida tenga una base diferente a la hallada en el punto anterior, se halla la tasa equivalente, utilizando de la formula (16).

Ejemplo 15.

Hallar la tasa efectiva trimestral equivalente de una tasa nominal semestral del 12% N-s.

<u>Solución</u>

Paso 1: para hallar la tasa efectiva trimestral de la tasa 12% N-s, inicialmente se halla la tasa efectiva semestral equivalente aplicando la formula (15). En este caso, j es 12%, y m es 2

$$j = i \times m$$

$$i = \frac{0{,}12}{2} = 0{,}06 = 6\%\ ES$$

Paso 2: para hallar la tasa efectiva trimestral equivalente se utiliza la formula (16). En este caso i_1 es 6% ES, n_1 es 2 y n_2 es 4

$$i_2 = (1 + i_1)^{\frac{n_1}{n_2}} - 1$$

$$i_2 = (1 + 0{,}06)^{\frac{2}{4}} - 1 = 0{,}0295 = 2{,}95\%$$

Respuesta: la tasa efectiva trimestral equivalente es 2,95% ET

5. Ecuaciones de valor o ecuaciones de equivalencia

La reliquidación de obligaciones financieras es una práctica corriente en el sector financiero o comercial. La falta de liquidez, mejora de las condiciones financieras son, entre otras, razones para cambiar las obligaciones presentes por otras. A través del concepto de “Ecuación de Valor” se pueden hallar equivalencias de préstamos u obligaciones financieras.

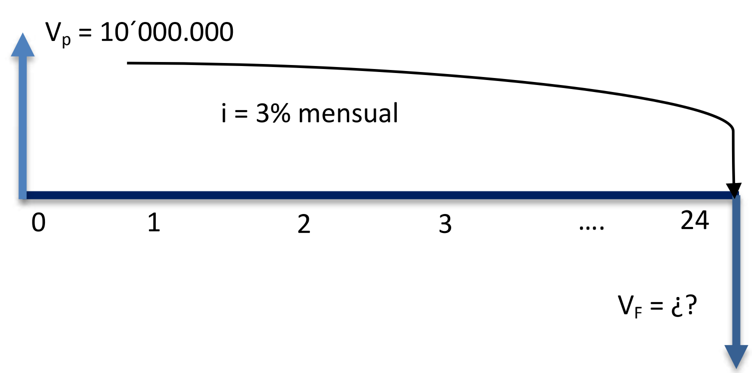
5.1 Concepto de Ecuación de Valor

A través de la ecuación de valor un conjunto de obligaciones con vencimientos en fechas pre-establecidas puedan ser convertidos en una o varias obligaciones equivalentes con vencimientos en fechas diferentes.

Ilustración del concepto de Ecuación de Valor:

Considérese una obligación de $10´000.000 que debe ser cancelada en dos años, pagando una tasa efectiva mensual del 3%. El flujo de caja de la operación financiera propuesta se muestra en la gráfica No 4.

GRAFICA NO 4 – VALOR DEL DINERO EN EL TIEMPO 1



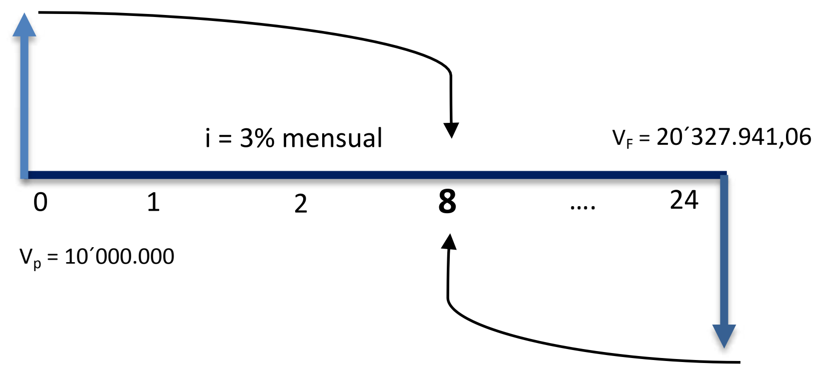
Para hallar el valor futuro aplicamos la formula (11)

$$V_f = V_p(1+i)^n$$

$$V_f = 10´000.000(1+0{,}03)^{24} = 20´327.941{,}06$$

El valor de 20´327.941,06 es el equivalente de 10´000.000 en el mes 24, a una tasa de interés efectiva mensual del 3%. Esto ratifica lo conocido, no es posible comparar cantidades de dinero en diferentes fechas; de esta forma, para que se pueda realizar cualquier operación entre valores de dinero, estas se deben hacer en la misma fecha. Por ejemplo, considerando que $10´000.000 y $20´327.941,06 son valores equivalentes, se espera que los dos valores comparados en un mismo periodo sean iguales. Para hacer esta comparación se selecciona un periodo cualquiera entre 0 y 24 y trasladamos a allí el valor del periodo 0 (10´000.000) y el valor de periodo 24 (20´327.941,06); se debería encontrar, que el resultado de ambos traslados son iguales; la situación se muestra en la gráfica No5.

GRAFICA NO 5 – VALOR DEL DINERO EN EL TIEMPO 2



Seleccióñanos como periodo de referencia el 8, al cua se trasladan los valores del periodo 0 y 24. Para trasladar el valor del periodo 0, utilizamos la formula (11) ya que lo que se quiere es hallar el valor futuro de $10´000.000 en el periodo 8.

$$V_f \;=\; V_p(1+i)^n$$

$$V_f \;=\; 10´000.000(1+0{,}03)^8 = 12´667.700{,}81$$

Para trasladar el valor del periodo 24, utilizamos la formula (12) ya que lo que se quiere es hallar el valor presente de $20´327.941,06 en el periodo 8.

$$V_p \;=\; \frac{V_f}{(1+i)^n}$$

$$V_p \;=\; \frac{20´327.941{,}06}{(1+0{,}03)^{16}} = 12´667.700{,}81$$

Como se esperaba ambos valores son iguales. En conclusión cuando se quieren comparar valores monetarios, esta debe hacerse en un mismo periodo de tiempo; esta es la base conceptual en la cual esta fundamentado el concepto de la “Ecuación de Valor”.

5.2 Ecuación de Valor

El principio fundamental de la ecuación de valor establece que en una operación financiera la suma de los ingresos es igual a la suma de los egresos, en un periodo determinado del tiempo; a este periodo se le denomina fecha focal (ff). La expresión (19) define en términos matemáticos la ecuación de valor.

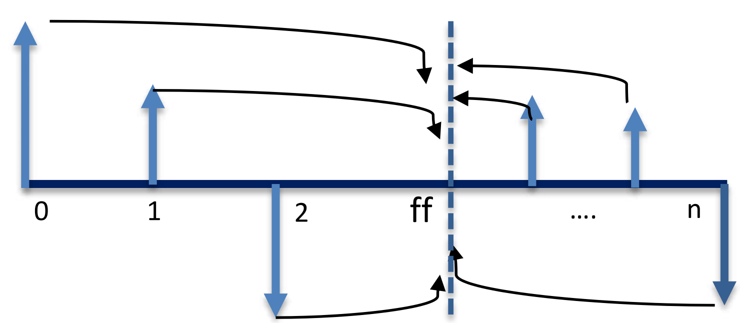
$$\sum ingresos = \sum egresos \ (en\, la\, ff) \quad (19)$$

Considerando que toda operación financiera esta compuesta por obligaciones y pagos; la ecuación de valor se puede expresar como:

$$\sum Obligaciones = \sum Pagos \ (en\, la\, ff) \quad (20)$$

La fecha focal se define libremente a criterio del analista; en las ecuaciones se representan como ff, y gráficamente como una línea interrumpida perpendicular a la línea del tiempo, cruzando por el periodo escogido. En la grafica No 6 se representa la ecuación de valor en el flujo de caja flujo de caja.

GRAFICA NO 6 – ECUACIÓN DE VALOR



La metodología para el establecimiento de la ecuación, es la siguiente:

Paso 1. Considere el conjunto de obligaciones que se quieren cambiar como los ingresos de la operación, para cada una de ellas tenga en cuenta la tasa de interés efectiva pactada para la operación. En caso que se trate de evaluación de proyectos se deberá determinar el costo de capital, o tasa mínima de retorno.

Paso 2. Considere el nuevo conjunto de obligaciones como los egresos de la operación para ello tenga en cuenta la nueva tasa de interés efectiva, si la hay.

Paso 3. Determinar la fecha focal. Recuerde que no hay restricción para la selección de la fecha focal; pero una buena escogencia muchas veces ayudara en los cálculos.

Paso 4. Para establecer la ecuación de valor, traslade las deudas y pagos (ingresos y egresos) a la fecha focal previamente establecida utilizando para ello las formulas (11) y (12) según que se trate de un hallar un valor futuro o un valor presente.

Ejemplo 16.

Una pequeña empresa tiene los siguientes compromisos financieros con el banco Medellín: 25 millones en cinco meses, 30 millones en ocho meses, y 15 millones en doce meses. Debido a su iliquidez propone al banco una nueva forma de pago: 6 millones a la fecha, 20 millones en el mes doce y el saldo a 20 meses. Suponiendo que el banco mantiene la tasa de interés, que es del 3% efectiva mensual, sin variaciones, se pide determinar el valor del saldo que debe pagar, el empresario.

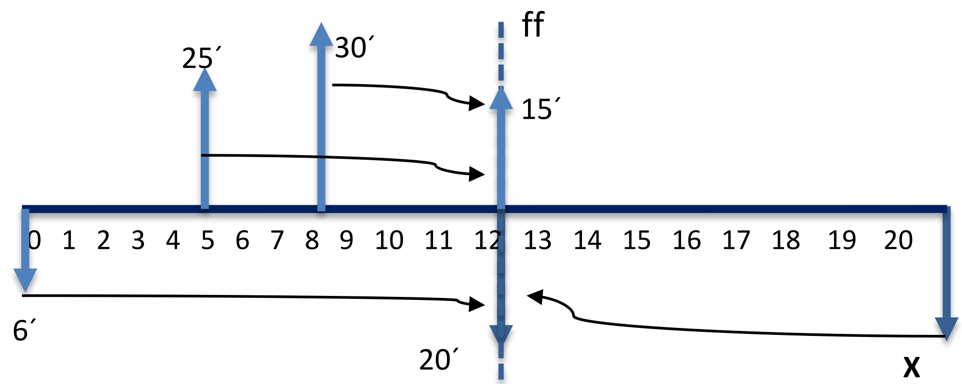
Solución

Parámetros

- Ingresos: 25 millones mes 5, 30 millones mes 8 y 15 millones en el mes 12
- Egresos: 6 millones mes 0, 20 millones en el mes 12 y saldo en el mes 20.
- Fecha focal: se define el periodo 12
- Tasa de interés efectiva: 3% EM

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación que se quiere realizar. Las obligaciones pendientes de cancelación que se quieren remplazar se simulan como ingresos, en cambio las nuevas obligaciones, como los egresos



Cálculos
Ingresos calculados en la fecha focal.
1. $V_{f12} = 25'000.000(1+0,03)^{7} = 30'746.846,64$
2. $V_{f12} = 30'000.000(1+0,03)^{4} = 33'765.264,30$
3. $V_{f12} = 15'000.000(1+0,03)^{0} = 15'000.000,00$

Egresos calculados en la fecha focal.
1. $V_{f12} = 6'000.000(1+0,03)^{12} = 8'554.565,32$
2. $V_{f12} = 20'000.000(1+0,03)^{0} = 20'000.000,00$
3. $V_{f12} = X(1+0,03)^{-8} = 0,7894\, X$

Ecuación de valor

$$\sum ingresos = \sum egresos \ \ (en\ la\ ff)$$

$$(30'746.846,64 + 33'765.264,30 + 15'000.000) = (8'554.565,32 + 20'000.000 + 0,7894X)$$

$$79'512.110,94 = 28'554.565,32 + 0,7894\, X$$

$$79'512.110,94 - 28'554.565,32 = 0,7894\, X$$

$$50'957.545,62 = 0,7894\, X$$

$$64'552.249,33 = X$$

Respuesta

El ultimo pago que deberá hacer el pequeño empresario en el mes 20, es: \$64'552.249,33

Ejemplo 17.

Una pequeña empresa contrajo una deuda de 15 millones hace 4 meses con vencimiento en 5 meses a partir de la fecha, para esta deuda se pacto una tasa de interés del 22% N-t. Además pacto una segunda deuda el día de hoy por 20 millones con vencimiento en doce meses y una tasa de interés 12% ES. Si el empresario propone pagar estas deudas en dos cuotas iguales una el mes 6 y la otra en el mes 12, a una tasa de interés 15% EA, ¿Cuál será el valor de las cuotas?

Solución

Parámetros
- Ingresos: Valor de la deuda de 15 millones en el mes 5; valor de la deuda de 20

millones en el mes 12.
- Egresos: Pago X en el mes 6 y pago X en el mes 12.
- Fecha focal: se define el periodo 12
- Tasa de interés efectiva: 15% EA

Cálculos preliminares

Valor de la deuda de 15 millones en el mes 5, tasa de interés 22% N-t

Calculo del interés efectivo trimestral: $i = \frac{0{,}22}{4} = 0{,}055 = 5{,}5\%\ ET$

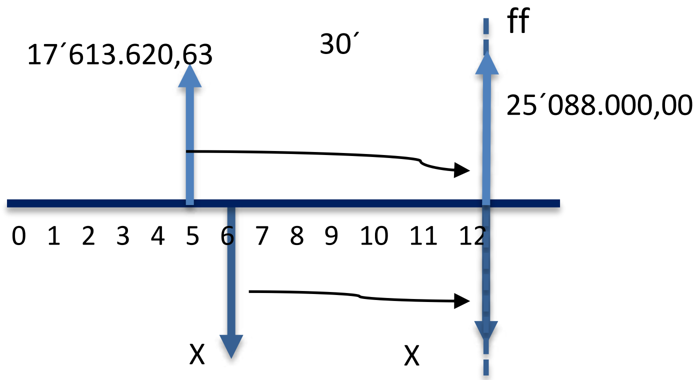
$$V_f = 15´000.000(1 + 0{,}055)^3 = 17´613.620{,}63$$

Valor de la deuda de 20 millones en el mes 12, tasa de interés 12% ES

$$V_f = 15´000.000(1 + 0{,}12)^2 = 25´088.000{,}00$$

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación. Las obligaciones que se quieren remplazar se simulan como ingresos, en cambio las nuevas obligaciones, como los egresos



X

Cálculos

Ingresos calculados en la fecha focal.

1. $V_{f12} = 17´613.620{,}63(1 + 0{,}15)^{\frac{7}{12}} = 19´109.781{,}07$
2. $V_{f12} = 25´088.000{,}00(1 + 0{,}15)^0 = 25´088.000{,}00$

Egresos calculados en la fecha focal.

4. $V_{f12} = X(1 + 0{,}15)^{\frac{6}{12}} = 1{,}0723X$
5. $V_{f12} = X(1 + 0{,}15)^0 = X$

Ecuación de valor

$$\sum ingresos \ = \sum egresos \ \ (en\ la\ ff)$$

$$(19´109.781{,}07 + 25´088.000{,}00) = \ (1{,}0723X + X)$$

$$44´197.781{,}07 = 2{,}0723\ X$$

$$21´327.887{,}41 = X$$

Respuesta

Los dos pagos en el periodo 6 y 12 deben ser de $21´327.887,41

Ejemplo 18.

Una pequeña empresa tiene los siguientes compromisos financieros con el banco Medellín: 10 millones con vencimiento en 6 meses, 25 millones con vencimiento en 9 meses y 35 millones con vencimiento en 12 meses. Si realiza un pago único de 72 millones en que fecha debería hacerlo, si el banco le cobra una tasa efectiva de interés del 3,5% ET.

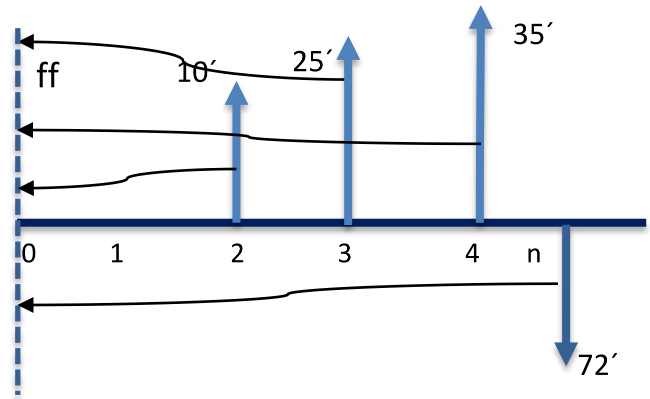
<u>Solución</u>

Parámetros

- Ingresos: 10 millones mes 6, 25 millones mes 9 y 35 millones en el mes 12
- Egresos: 72 millones.
- Fecha focal: se define el periodo 0
- Tasa de interés efectiva: 3,5% ET; de este modo se trabaja con periodos trimestrales

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación que se quiere realizar. Las obligaciones pendientes se simulan como ingresos, en cambio la nueva obligación, como un egreso



Cálculos

Ingresos calculados en la fecha focal.

1. $V_{f12} = 10´000.000(1+0{,}035)^{-2} = 9´335.107{,}00$
2. $V_{f12} = 25´000.000(1+0{,}035)^{-3} = 22´548.567{,}64$
3. $V_{f12} = 35´000.000(1+0{,}035)^{-4} = 30´500.477{,}97$

Egresos calculados en la fecha focal.

1. $V_{f12} = 72´000.000(1+0{,}035)^{-n}$

Ecuación de valor

$$\sum ingresos = \sum egresos \ (en\ la\ ff)$$

$$(9´335.107{,}00 + 22´548.567{,}64 + 30´500.477{,}97) = 72´000.000(1+0{,}035)^{(-n)}$$

$$0{,}8664 = (1{,}035)^{(-n)}$$

$$\log 0{,}8664 = \log(1{,}035)^{(-n)}$$

$$\log 0{,}8664 = -\mathrm{n} \log 1{,}035$$

$$\frac{\log 0{,}8664}{\log 1{,}035} = -n$$

$$-4{,}16 = -n$$

$$4{,}16 = n$$

Respuesta

El pago debe hacerse en el trimestre 4,16; es decir, en el mes 12,48

Ejemplo 19.

Una pequeña empresa tiene los siguientes compromisos financieros con el banco Medellín: 10 millones con vencimiento en 6 meses, 25 millones con vencimiento en 9 meses y 35 millones con vencimiento en 12 meses. Si realiza un pago único de 72 millones en el mes 15, ¿Qué tasa de interés efectiva mensual esta cobrando el banco?

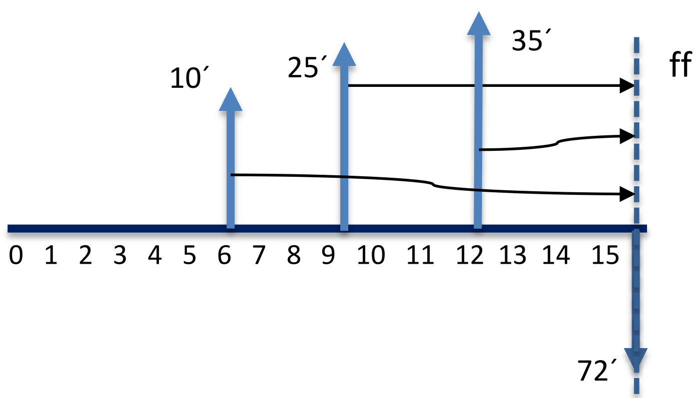
Solución

Parámetros

- Ingresos: 10 millones mes 6, 25 millones mes 9 y 35 millones en el mes 12
- Egresos: 72 millones en el mes 15
- Fecha focal: se define el periodo 15
- Se trabaja con periodos mensuales ya que se quiere obtener una tasa efectiva mensual

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación que se quiere realizar. Las obligaciones pendientes se simulan como ingresos, en cambio la nueva obligación, como un egreso



Cálculos

Ingresos calculados en la fecha focal.

4. $V_{f12} = 10´000.000(1+i)^9$
5. $V_{f12} = 25´000.000(1+i)^6$
6. $V_{f12} = 35´000.000(1+i)^3$

Egresos calculados en la fecha focal.

2. $V_{f12} = 72´000.000(1+i)^0$

Ecuación de valor

$$\sum ingresos \ = \sum egresos \ \ (en\ la\ ff)$$

$$(10´000.000(1+i)^9 + 25´000.000(1+i)^6 + 35´000.000(1+i)^3) = \ 72´000.000$$

Considerando que se trata de una ecuación de grado 9, no se puede solucionar por un método analítico y es necesario hallar el valor de i, por el método de ensayo y error.

Lo primero es simplificar la ecuación, para esto se divide por 1´000.000 ambos lados de la ecuación y se pasa a restar el termino independiente al lado izquierdo de la ecuación

$$10(1+i)^9 + 25(1+i)^6 + 35(1+i)^3 = \ 72$$

$$10(1+i)^9 + 25(1+i)^6 + 35(1+i)^3 - \ 72 = 0$$

Para hallar i inicialmente le damos un valor, por ejemplo 1,5% EM, y calculamos la ecuación, dependiendo del resultado se aumentando o disminuyendo este valor. Si el valor calculado es mayor que cero, se incrementa el interés, en caso contrario se disminuye.

Para i = 0,015, el resultado es 3,3687 que es mayor que 0

Se disminuye i, y se prueba para i=0,01, en este caso el resultado es: 1,5353 que es igualmente mayor que 0; lo cual nos indica que se debe disminuir aun más

Al probar con i=0,005 se obtiene -0,2538, lo que indica que la tasa de interés que soluciona la ecuación esta entre 0,01 y 0,005 (entre el 1% y el 0,5%)

Interpolando

1%		1,5353	$\frac{1-x}{1-0{,}5} = \frac{1{,}5353-0}{1{,}5353+0{,}2538}$ X = 0,5709%
X		0	
0,5%		-0,2538	

Respuesta
El interés que el banco le esta cobrando en este caso es 0,5709% EM.

6. Aplicaciones de interés compuesto

Son múltiples las aplicaciones del interés compuesto en las operaciones financieras y comerciales; en este apartado se hace referencia a las más relevantes.

6.1 Depósitos a término fijo

Un intermediario financiero es una persona jurídica que tiene por función conseguir dinero prestado del público y prestarlo a otras personas pero a una tasa de interés mayor. La tasa de interés a la cual un intermediario capta recursos se denomina tasa de captación y a la cual presta el dinero se le denomina tasa de colocación. La diferencia de estas dos tasas se le denomina margen de intermediación; aunque esta no es exactamente la utilidad que obtiene el agente financiero en consideración a otros factores como los impuestos, etc.

En los depósitos a término fijo es necesario considerar que la ganancia obtenida por concepto de intereses es gravada con un impuesto que se cobra al momento de la liquidación, denominado retención en la fuente.

Ejemplo 20.

Una persona quiere invertir $60 millones en un deposito a término fijo durante doce meses, en una entidad financiera que le ofrece una tasa de interés del 28% N-m. La persona quiere conocer:

a) El valor que finalmente recibirá si la retención en la fuente es del 5%
b) La rentabilidad que realmente obtendrá en esta operación

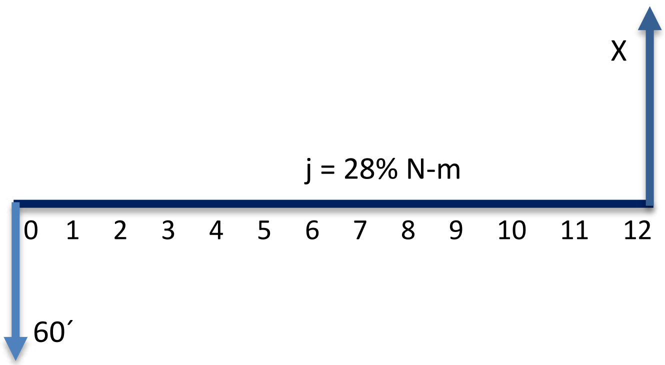
Solución

Parámetros

- Inversión: 60 millones
- Tasa de interés: 28% N-m
- Periodo de la inversión: 1 año, o 12 meses
- Retención en la renta: 5%

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación que se quiere realizar.



Cálculos

Lo primero es determinar la tasa de interés efectiva que se va utilizar en los cálculos, para ello utilizamos la formula (15)

$$j = i \times m$$

$$0{,}28 = i \times 12$$

$$i = 0{,}0233 = 2{,}33\%\ EM$$

Para hallar el valor futuro que recibirá el inversionista, se utiliza la formula (11)

$$V_f \;=\; V_p(1+i)^n$$

$$V_f \;=\; 60´000.000(1+0{,}0233)^{12} = 79´132.830{,}35$$

El interés que recibirá el inversionista es igual: $I = V_f - V_p = 19´132.830{,}35$; sobre esta valor, que será la utilidad se deberá pagar la retención en la renta, la cual se calcula como:

$$Im \;=\; 79´132.830{,}35\ \times 0{,}05 = 3´956.641{,}51$$

Lo realmente recibido por el inversionista entonces es igual al valor final calculado menos el impuesto o retención en la fuente.

$$V_f^{´} \;=\; V_f - Im = 79´132.830{,}35 - 3´956.641{,}51 = 75´176.188{,}83$$

Para hallar la tasa de interés real recibida se utiliza la formula (14), teniendo en cuenta el valor invertido y valor realmente recibido durante los 12 meses

$$\sqrt[n]{\frac{V_f}{V_p}} - 1 = i$$

$$i = \sqrt[12]{\frac{75´176.188,83}{60´000.000}} - 1 = 0,01896 = 1,89\%\ EM$$

Respuesta

a) El valor que finalmente recibirá si la retención en la fuente es del 5% es: $75´176.188,83$
b) La rentabilidad que realmente obtendrá en esta operación es: $1,89\%\ EM$

Algunas definiciones importantes relacionadas con los depósitos a término fijo son:

DTF: se define como el promedio ponderado semanal de las tasas de captación de los certificados de depósito a 90 días pagando los intereses por anticipado; en los bancos, corporaciones financieras, compañías de financiamiento y corporaciones de ahorro y vivienda.

TCC: es el promedio ponderado de las tasas de captación de los certificados a 90 días solo en las corporaciones financieras

CDAT: depósitos a término fijo de menos de un mes.

6.2 Inflación y Deflación

La inflación es el fenómeno económico que representa el alza general de los precios de una economía; por su parte, cuando se presenta una baja generalizada de precios el fenómeno se denomina deflación. La inflación se simboliza con la letra "f"; la deflación estará representada por inflación negativa "-f".

La inflación se calcula con base en los aumentos de los productos de la canasta familiar, la cual es un conjunto de artículos previamente seleccionados que representan la totalidad de los productos de consumo. Todos los cambios de la canasta familiar se miden a través del IPC –Índice de Precios al Consumidor-.

En el sector empresarial la canasta familiar en vez de bienes de consumo incluye materias primas, salarios, servicios y demás materiales e insumos necesarios para la producción, en

este caso la inflación de los productos se mide de acuerdo a las variaciones del IPP –Índice de precios al productor- el cual varía de acuerdo sector económico.
La inflación se mide como una tasa efectiva anual.

6.3 Devaluación y revaluación

La devaluación es la perdida de valor de una moneda frente a otra. Por ejemplo, hay devaluación del peso frente al dólar cuando hay que pagar $1.800 pesos por un dólar y un tiempo más tarde hay que pagar $1.900 pesos por el mismo dólar; para calcular la devaluación se procede como sigue:

$$Devaluación = \frac{1.900 - 1.800}{1.800} = 0{,}0555 = 5{,}55\%$$

En este caso, se dice que hubo una devaluación del 5,5% del peso con respecto al dólar.
Contrario a la devaluación se define la revaluación como la ganancia de valor de una moneda con respecto a otra. Por ejemplo hay revaluación del peso frente al dólar cuando hay que pagar $1.800 pesos por un dólar y un tiempo después se paga $1.750 por el mismo dólar; para calcular la revaluación se procede como sigue:

$$Revaluación = \frac{1.750 - 1.800}{1.750} = -0{,}0285 = -2{,}85\%$$

Nótese que en este caso la tasa efectiva es negativa.
La Tasa Representativa del Mercado (TRM) se obtiene de promediar la tasa de compra y venta del dólar en las casas de cambio y bancos del país. Las fluctuaciones de la TRM (devaluación y revaluación) como fenómeno económico afecta el comercio exterior del país; cuando hay una devaluación del peso frente al dólar los exportadores reciben mayor cantidad de pesos cuando realizan ventas en el otros países; por el contrario, cuando existe una revaluación el mismo exportador recibirá menor cantidad de pesos. La tasa de cambio es un factor determinante en la competitividad de los empresarios nacionales.

Ejemplo 20.

Un inversionista colombiano realizó un deposito a término fijo por doce meses en el Banco de New York, por valor de USD$ 20.000; el banco reconoció una tasa de interés del 5% EA. Si la tasa de cambio al inicio de la inversión era de $1.820 por dólar y la devaluación durante el año del 7%. ¿Cuál fue la rentabilidad obtenida por el inversionista?

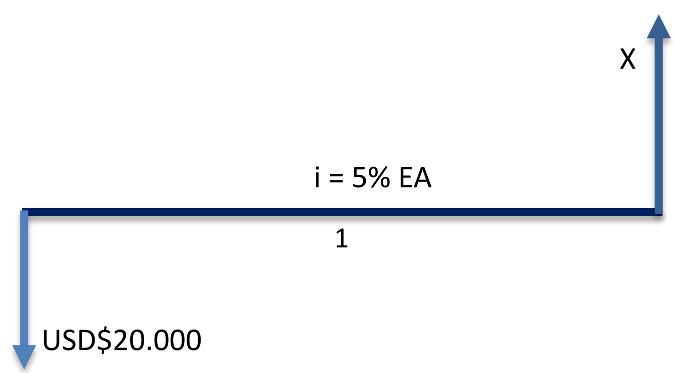
Solución

Parámetros

- Inversión: USD$ 20.000
- Tasa de interés: 5% EA
- Periodo de la inversión: 1 año, o 12 meses
- Tasa de cambio inicial: $1.820 por 1USD$
- Devaluación del peso con respecto al dólar: 7%

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación que se quiere realizar.



Cálculos

Para hallar el valor futuro que recibirá el inversionista en dólares , se utiliza la formula (11)

$$V_f \;=\; V_p(1+i)^n$$

$$V_f \;=\; 20.000(1+0{,}05)^1 = USD\ \$21.000$$

Para calcular la inversión realizada en pesos, se aplica la tasa de cambio a lo invertido en dólares

$$Inversión\ en\ pesos = 20.000 \times 1.820 = 36'400.000$$

Para calcular lo recibido en pesos, primero se calcula la tasa de cambio después de un año considerando la devaluación del peso con respecto al dólar. Para este ultimo calculo se utiliza la formula (11)

$$TC_f \;=\; TC_i(1+i)^n$$

$$TC_f \;=\; 1.820(1+0{,}07)^1 = 1.947{,}40$$

Considerando esta tasa de cambio se puede calcular lo recibido al cabo de un año:

$$V_f \;=\; 21.000 \times 1.947{,}4 = 40´895.400$$

Para calcular la rentabilidad obtenida por el inversionista se debe calcular el interés teniendo en cuenta lo invertido y lo recibido, durante de un año de inversión, para ello se utiliza la formula (14)

$$\sqrt[n]{\frac{V_f}{V_p}} - 1 = i$$

$$i = \sqrt[1]{\frac{40´895.400}{36´400.000}} - 1 = 0{,}1235 = 12{,}35\%$$

Respuesta

La rentabilidad recibida por el inversionista es del 12,35% EA

En el ejemplo anterior, la inversión gana dos tasas de interés por un lado la tasa de interés reconocida por el banco y por otro lado la tasa de devaluación del peso con respecto al dólar. En estos casos cuando se combina una tasa i_1 y una tasa i_2, se puede determinar una tasa combinada que reúne ambas tasa de interés. A continuación se deduce la formula del interés combinado:

Para un peso sometido a una tasa de interés i_1, durante un periodo, el valor final será:

$$(1+i_1)$$

Si este valor resultante se somete a una tasa de interés i_2, también durante de un periodo, el valor final será:

$$(1 + i_1) \times (1 + i_2)$$

El monto final, aplicando una tasa de interés combinada, durante un periodo, se tiene:

$$(1 + i_c)$$

Igualando las dos expresiones anteriores, se tiene:

$$(1 + i_c) = (1 + i_1) \times (1 + i_2)$$

Al despejar i_c, se obtiene:

$$i_c = i_1 + i_2 + i_1 \times i_2 \quad (21)$$

Ejemplo 21.

Resolver el ejemplo anterior considerando tasas combinadas.

Solución

Parámetros

- Inversión: USD$ 20.000
- Tasa de interés: 5% EA
- Periodo de la inversión: 1 año, o 12 meses
- Tasa de cambio inicial: $1.820 por 1USD$
- Devaluación del peso con respecto al dólar: 7%

Cálculos

Para calcular la rentabilidad obtenida por el inversionista se utiliza directamente la formula de tasas combinadas, formula (21)

$$i_c = i_1 + i_2 + i_1 \times i_2$$

$$i_c = 0{,}05 + 0{,}07 + 0{,}05 \times 0{,}07 = 0{,}1235 = 12{,}35\%$$

Respuesta

La rentabilidad recibida por el inversionista es del 12,35% EA; que es el mismo valor obtenido en el ejemplo anterior.

6.4 Tasa deflactada o tasa real

En los proyectos de inversión la rentabilidad real se ve afectada por la inflación. para calcular la rentabilidad real se puede hacer uso de la formula (21), considerando que la tasa combina se compone de la tasa real y la tasa causada por la inflación

$$i = i_r + f + i_r \times f$$

Despejando i_r, se obtiene:

$$i_r = \frac{i - f}{1 + f} \quad (22)$$

Donde:

i_r: $rentabilidad\ real$

i: $rentabilidad\ corriente$

f: $inflación$

Ejemplo 22.

Calcular la rentabilidad real que obtuvo el inversionista del ejemplo 20, considerando que la inflación en Colombia para el año de la inversión fue del 4%.

Solución

Parámetros

- Inversión: USD$ 20.000
- Tasa de interés: 5% EA
- Periodo de la inversión: 1 año, o 12 meses
- Tasa de cambio inicial: $1.820 por 1USD$
- Devaluación del peso con respecto al dólar: 7%
- Inflación en Colombia: 4%

Cálculos

Para calcular la rentabilidad real, se parte de la rentabilidad obtenida en los ejemplos 20 y 21 y utilizando la formula (22)

$$i_r = \frac{i - f}{1 + f}$$

$$i_r = \frac{0{,}1235 - 0{,}04}{1 + 0{,}04} = 0{,}0802 = 8{,}02\%$$

Respuesta

La rentabilidad real recibida por el inversionista es del 8,02% EA

6.5 Equivalencia de tasas referenciadas

Muchos de los créditos que se adquieren en el sector financiero comúnmente se pactan a una tasa de interés principal más unos puntos adicionales; a estos puntos adicionales se les denomina "SPREAD".

Cuando la tasa de interés principal esta dada por una tasa efectiva, para calcular la tasa pactada, es decir la principal más el SPREAD, se utiliza la formula de tasas combinadas; por su parte, cuando la tasa principal se expresa como un interés nominal, entonces simplemente se suman la tasa principal y el SPREAD. En general la inflación se expresa como una tasa efectiva anual, el DTF y el TCC como un interés nominal.

Ejemplo 23.

Determinar la tasa de interés efectiva mensual que paga un crédito de vivienda que esta pactada al DTF más 5 puntos; si la DTF es del 18% N-t

Solución

Parámetros
- DTF: 18% N-t
- SPREAD: 5 puntos

Cálculos

Considerando que la tasa de interés principal es una tasa nominal, simplemente se suman a esta los puntos del SPREAD.

$$0{,}18 + 0{,}05 = 0{,}23 = 23\%\ N - t$$

Para calcular la tasa efectiva mensual, se procede como se explico anteriormente para el cálculo de una tasa equivalente. Es decir, primero se halla la tasa efectiva correspondiente a la tasa nominal, después la tasa equivalente efectiva mensual de la tasa obtenida. Para esto se utilizan las formulas (15) y (16)

La tas efectiva de la tasa nominal, es:

$$j = i \times m$$

$$i = \frac{0{,}23}{4} = 0{,}0575 = 5{,}75\%\ ET$$

Para convertir esta tasa en una tasa efectiva mensual aplicamos la ecuación (16)

$$i_2 = (1 + i_1)^{\frac{n_1}{n_2}} - 1$$

$$i_2 = (1 + 0{,}0575)^{\frac{4}{12}} - 1 = 0{,}0188 = 1{,}88\%\ EM$$

Respuesta

El crédito de vivienda paga una tasa de interés efectiva mensual del 1,88% EM

Ejemplo 24.

Una persona esta pagando un crédito de vivienda al IPC + 4 puntos. ¿Cuál será el SPREAD, si se quiere cambiar a un plan con interés principal del DTF? Suponga una inflación del 5,5% y una DTF del 8% N-t_a

Solución

Parámetros

- Crédito de vivienda: IPC + 4 puntos
- Inflación, IPC: 5,5%
- DTF: 8% N-t_a

Cálculos

Para determinar el SPREAD, se debe hallar X en la siguiente ecuación:

$$IPC + 4 = DTF + X$$

Para resolver esta ecuación debemos primero resolver la parte izquierda:

Ya que el IPC es una tasa efectiva anual, para sumar los puntos del SPREAD se debe aplicar la formula (21)

$$i_c = i_1 + i_2 + i_1 \times i_2$$

$$i_c = 0{,}055 + 0{,}04 + 0{,}055 \times 0{,}04 = 0{,}0972 = 9{,}72\%\ EA$$

Considerando que el DTF esta expresado en interés nominal trimestre anticipado, se debe pasa la tasa efectiva a una tasa efectiva trimestral utilizando la formula (16)

$$i_2 = (1 + i_1)^{\frac{n_1}{n_2}} - 1 \quad (16)$$

$$i_2 = (1 + 0{,}0972)^{\frac{1}{4}} - 1 = \ 0{,}02346 = 2{,}34\%\ ET$$

Y considerando que la DTF se refiere a una tasa trimestral anticipada se debe hallar tasa efectiva anticipada equivalente, utilizando la formula (18).

$$i_a = \frac{i}{(1 + i)}$$

$$i_a = \frac{0{,}02346}{(1 + 0{,}02346)} = 0{,}02286 = 2{,}28\%\ ET_a$$

Y considerando que el DTF se expresa como una tasa nominal, entonces se debe hallar la tasa nominal equivalente, utilizando la formula (15)

$$j = i\ \times m$$

$$j = 0{,}02286\ \times 4 = 0{,}09145 = 9{,}14\%\ N - t_a$$

Ahora si se puede resolver la ecuación

$$0{,}0914 = 0{,}08 +\ X$$
$$X = 0{,}01145$$

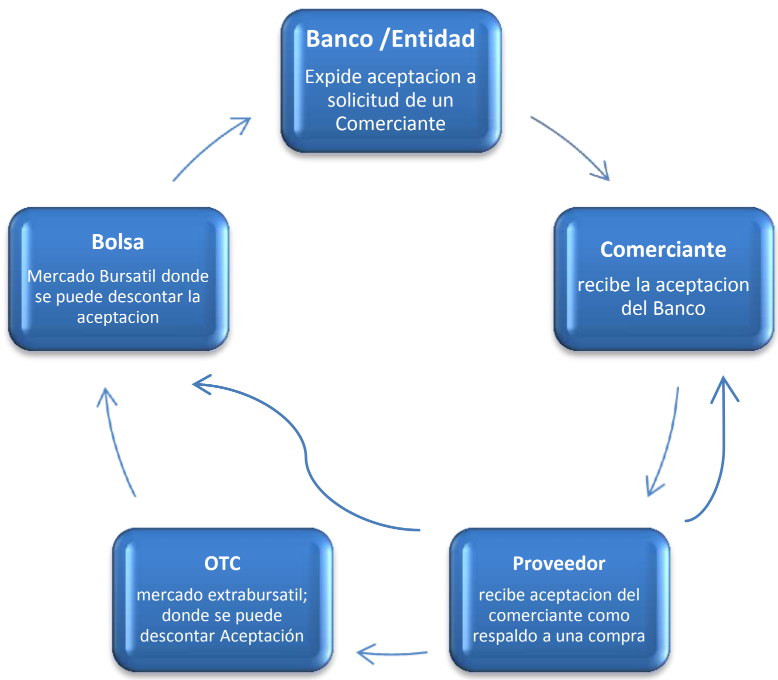
Respuesta

El SPREAD sumado al DTF es de 1,145 puntos

6.6 Aceptaciones bancarias y financieras

Son letras de cambio, respaldadas por una entidad financiera, con cargo a un proveedor de bienes; a través de ellas la entidad asegura el pago al momento del vencimiento. En general, su plazo es menor a un año; no son divisibles y no son gravables en el mercado primario. Las Aceptaciones reciben el nombre de bancarias cuando son respaldadas por los bancos, y financieras cuando su respaldo proviene de otras entidades financieras.

GRAFICA NO 7 – ACEPTACIONES BANCARIAS Y FINANCIERAS



Para respaldar una transacción comercial, el comerciante solicita la aceptación a un banco o entidad financiera; una vez expedida el comerciante entrega la aceptación al proveedor con el fin de respaldar el pago de la compra. El proveedor tiene la opción de negociar el documento en el mercado secundario, antes del vencimiento o esperar la fecha de su vencimiento para cobrarla en el banco o en la entidad financiera. Por su parte, cuando decide descontarla antes de su vencimiento en el mercado secundario tiene la opción del mercado extrabursátil OTC (Over the counter) o en el mercado bursátil; cuando es vendida en el mercado extrabursátil el comprador tiene a su vez de la posibilidad de venderla en el mercado bursátil o esperar su vencimiento.

Ejemplo 25.

Una fabrica de bienes de primera necesidad recibe un pedido de un distribuidor por valor de $50´millones de pesos. El fabricante ofrece un plazo de 120 días, pero exige que el pago sea respaldado por una entidad financiera. Para esto, el comerciante solicita a su banco una aceptación bancaria por 50 millones a nombre del fabricante y con vencimiento en 120 días. El banco le expide al distribuidor la aceptación y este a su vez la entrega al fabricante para respaldar el pedido

a) Si faltando 60 días el fabricante decide vender la aceptación en el mercado OTC (el inversionista puede ser: un particular, una compañía de financiamiento comercial, un leasing, etc.) a una tasa descuento del 25%, ¿Cuál será el valor que recibirá el fabricante?

b) Si faltando 60 días el fabricante decide vender la aceptación en el mercado Bursátil; con una tasa de registro del 25% anual, y una comisión de venta del 0,5%. ¿Cuál será el valor que recibirá el fabricante?

Solución

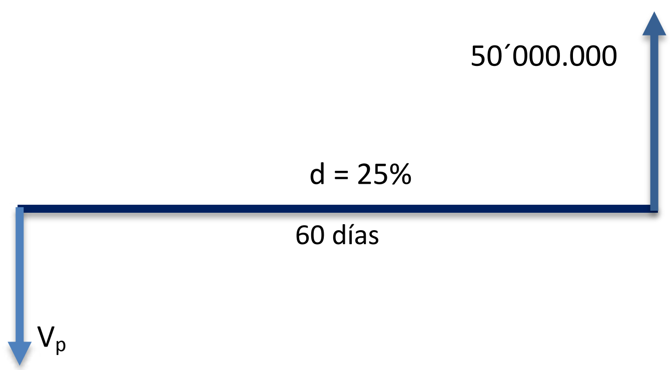
a) Venta en el mercado OTC

Parámetros

- Valor de maduración de la aceptación: 50 millones
- Tasa de descuento: 25%
- Tiempo de descuento: 60 días

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Para calcular el valor presente por cada $100, se utiliza la formula (12):

$$V_p = \frac{V_f}{(1+i)^n} = V_f \times (1+i)^{-n}$$

$$V_p = \frac{100}{(1+0{,}25)^{\frac{60}{360}}} = 96{,}34924\%$$

Esto significa que el precio de compra es el 96,34924% por cada $100 de maduración y si el valor de maduración es de $50´000.000, entonces el precio de compra es:

$$50´000.000 \times 96{,}34924\% = 48´174.620 \ \textit{Precio de venta}$$

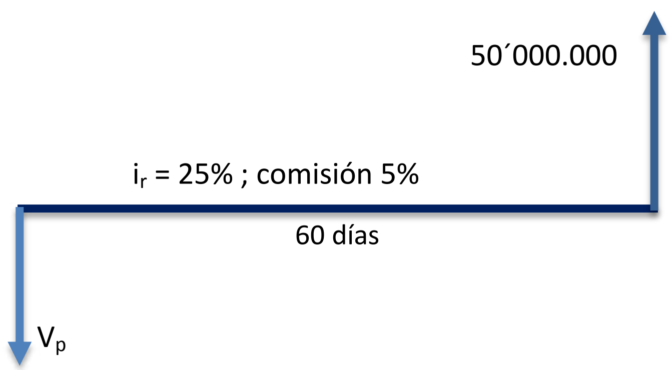
b) Venta en el mercado Bursátil

Parámetros

- Valor de maduración de la aceptación: 50 millones
- Tasa de registro: 25%
- Comisión: 0,5%
- Tiempo de descuento: 60 días

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

En este caso la tasa de descuento debe incluir la comisión, es decir: 25% + 0,5% = 25,5%; igualmente para calcular el valor presente por cada $100, se utiliza la formula (12):

$$V_p = \frac{V_f}{(1+i)^n} = V_f \times (1+i)^{-n}$$

$$V_p = \frac{100}{(1+0{,}255)^{\frac{60}{360}}} = 96{,}28516\%$$

Esto significa que el precio de compra es el 96,28516% por cada $100 de maduración y si el valor de maduración es de $50´000.000, entonces el precio de compra es:

$$50´000.000 \times 96{,}28516\% = 48´142.582{,}51$$

Nótese que el valor de la comisión de venta se puede calcular como la diferencia entre el precio de venta y el precio de registro

$$comisión = 48´174.620 - 48´142.582{,}51 = 32.037{,}49$$

Respuesta

a) Precio de venta: 48´174.620
b) Precio de registro: 48´142.582,51
c) Comisión: 32.037,49

7. Ejercicios resueltos

7.1 Hallar el valor equivalente de un monto de $48´000.000 en 227 días suponiendo una tasa de interés del 22% EA (Use interés bancario)

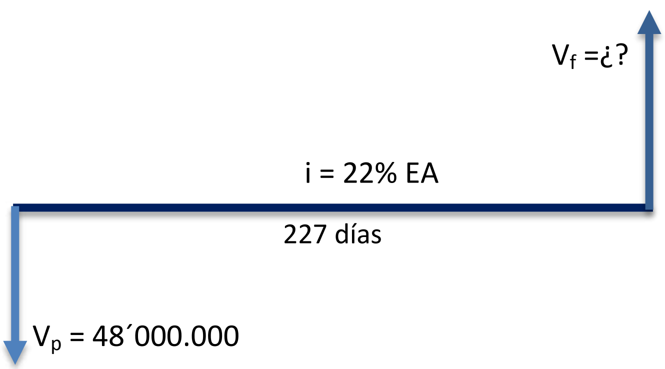
Solución

Parámetros

- Valor inicial o presente: 48 millones
- Tasa de interés: 22% EA
- Periodo de tiempo: 227 días

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Para calcular el valor futuro o equivalente de los $48 millones, se utiliza la formula (11):

$$V_f = V_p \times (1+i)^n$$

$$V_f = 48´000.000 \times (1+0{,}22)^{\frac{227}{360}} = 54´412.152{,}73$$

Respuesta

El valor equivalente de 48 millones al cabo de 227 días, aplicando un interés del 22% es: $54´412.152,73

7.2 ¿Qué capital se debe invertir hoy para poder retirar diez millones de pesos dentro de 24 meses suponiendo que el fondo de inversión garantiza una tasa de interés del 28% N-s?

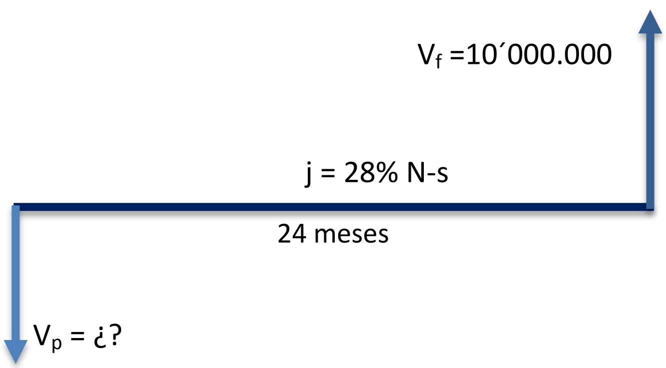
Solución

Parámetros

- Valor futuro: 10 millones
- Tasa de interés: 28% N-s
- Periodo de tiempo: 24 meses

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Lo primero que se debe hacer es hallar la tasa de interés efectiva; para esto se utiliza la formula (15)

$$j = i \times m$$

$$i = \frac{0{,}28}{2} = 0{,}14 = 14\% ES$$

Para calcular el valor presente o valor de la inversión, se utiliza la formula (12), considerando periodos de tiempo semestrales:

$$V_p = V_f \times (1 + i)^{-n}$$

$$V_p = 10´000.000 \times (1 + 0{,}14)^{-4} = 5´920.802{,}77$$

Respuesta

Para obtener 10 millones al cabo de 24 meses a un interés del 28%N-s, se debe hacer una inversión inicial de $5´920.802,77

7.3 Un pequeño empresario quiere conocer cuánto debe depositar en una fiducia para dentro de tres años reponer la maquinaria de producción, la cual se estima costará $350 millones de pesos. La fiducia reconoce una tasa de interés del 22% N-m.

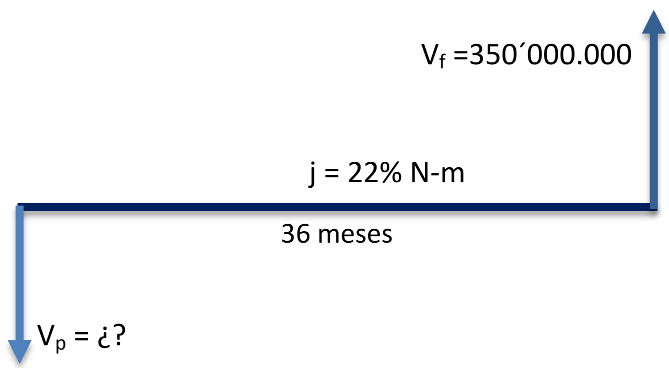
Solución

Parámetros

- Valor de la maquinaria en tres años (V_f): 350 millones
- Tasa de interés: 22% N-m
- Periodo de tiempo: 36 meses

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Lo primero que se debe hacer es hallar la tasa de interés efectiva; para esto se utiliza la formula (15)

$$j = i \times m$$

$$i = \frac{0{,}22}{12} = 0{,}0183 = 1{,}83\% EM$$

Para calcular el valor presente o valor de la inversión, se utiliza la formula (12), considerando periodos de tiempo mensuales:

$$V_p = V_f \times (1+i)^{-n}$$

$$V_p = 350´000.000 \times (1 + 0{,}0183)^{-36} = 182´197.019{,}7$$

Respuesta

El empresario requiere depositar $182´197.019,7 en la fiducia para reponer la maquinaria en tres años, si le reconocen una tasa de interés del 22% N-m

7.4 Un inversionista quiere conocer la rentabilidad que le reportaría la compra de un titulo valor el cual puede adquirir el día de hoy en 30 millones y el cual puede vender en seis meses en 50 millones.

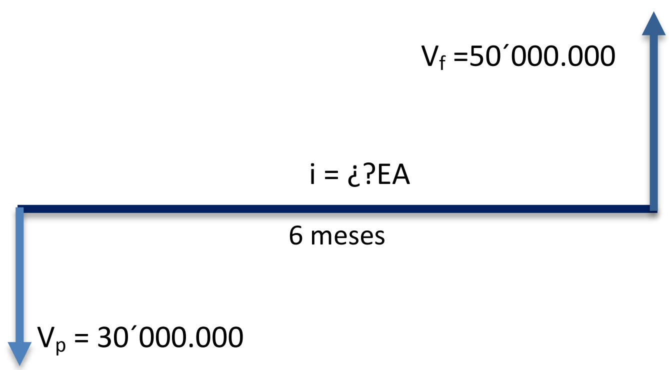
Solución

Parámetros

- Valor inicial de la inversión (Vp): 30 millones
- Valor final del titulo valor: 50 millones
- Periodo de la operación: 6 meses

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Para determinar la rentabilidad se debe hallar la tasa de interés efectiva anual que gana la inversión propuesta. Para ello, se utiliza la formula (14), considerando periodos de tiempo anuales:

$$\sqrt[n]{\frac{V_f}{V_p}} - 1 = i$$

$$i = \sqrt[\frac{1}{2}]{\frac{50´000.000}{30´000.000}} - 1 = 1{,}7777 = 177{,}77\%\ EA$$

Respuesta

La rentabilidad que reportaría esta inversión es del 177,77% EA

7.5 ¿A que tasa nominal trimestral se triplica una inversión en cuatro años?

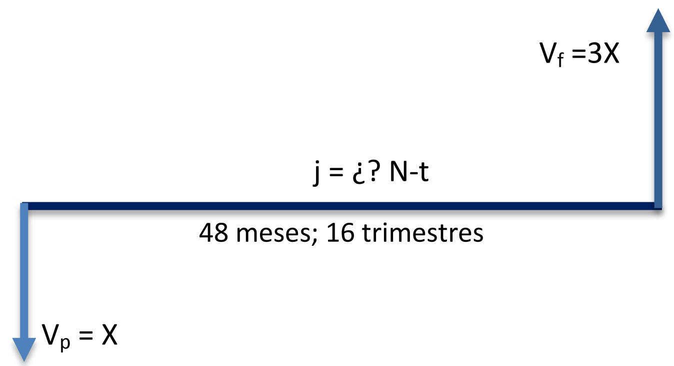
Solución

Parámetros

- Valor inicial de la inversión (Vp): X
- Valor final: 3X
- Periodo de la operación: 48 meses; 16 trimestres

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Para determinar la tasa de interés nominal trimestral, inicialmente calculamos la tasa efectiva trimestral utilizando la formula (14) y considerando periodos de tiempo trimestrales:

$$\sqrt[n]{\frac{V_f}{V_p}} - 1 = i$$

$$i = \sqrt[16]{\frac{3X}{X}} - 1 = 0{,}0710 = 7{,}10\%\ ET$$

Considerando que se quiere conocer la tasa nominal trimestral, entonces se debe calcular está utilizando la formula (15)

$$j = i\ \times m$$

$$j = 0{,}0710\ \times 4 = 0{,}2843 = 28{,}43\%\ N - t$$

Respuesta

Para triplicar un capital en cuatro años se requiere una tasa de interés nominal trimestral de: 28,43%

7.6 Un inversionista quiere conocer a qué tasa efectiva mensual se duplica un capital en 2,5 años.

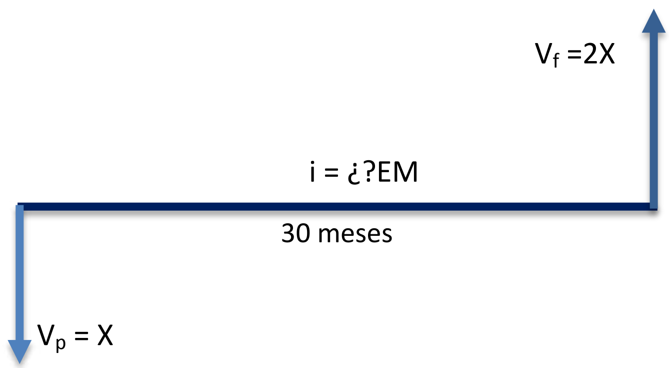
Solución

Parámetros

- Valor inicial de la inversión (Vp): X
- Valor final: 2X
- Periodo de la operación: 30 meses

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Para determinar la tasa de interés efectiva mensual se utiliza la formula (14), considerando periodos de tiempo mensuales:

$$\sqrt[n]{\frac{V_f}{V_p}} - 1 = i$$

$$i = \sqrt[30]{\frac{2X}{X}} - 1 = 0{,}0233 = 2{,}33\%\ EM$$

Respuesta

Para duplicar un capital en dos años y medio se requiere una tasa de interés efectiva de: 2,33%

7.7 Una compañía de intermediación financiera desea hacer propaganda para captar dineros del público, una idea del gerente de mercadeo es duplicar el dinero que depositan los ahorradores. Si la junta directiva de la compañía autoriza pagar por la captación de dinero un máximo de 2.5% EM. ¿Cuánto tiempo debe durar la inversión?

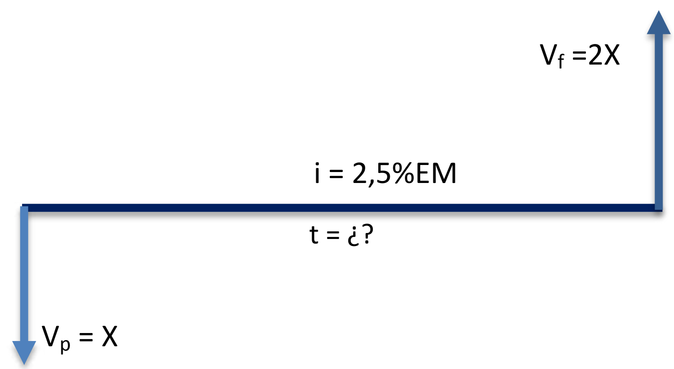
Solución

Parámetros

- Valor inicial de la inversión (Vp): X
- Valor final: 2X
- Tasa de interés efectiva: 2,5% EM

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Para determinar el tiempo (numero de meses) en que se duplican los ahorros de los clientes, se utiliza la formula (13):

$$\frac{\log\left(\frac{V_f}{V_p}\right)}{\log(1+i)} = n \quad (13)$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{2X}{X}\right)}{\log(1+0{,}025)} = 28{,}07$$

Respuesta

La inversión debe durar mínimo 28,07 meses

7.8 ¿En cuánto tiempo se triplica un capital al 8% Nominal trimestral? Considere que el interés solo se paga por trimestres completos.

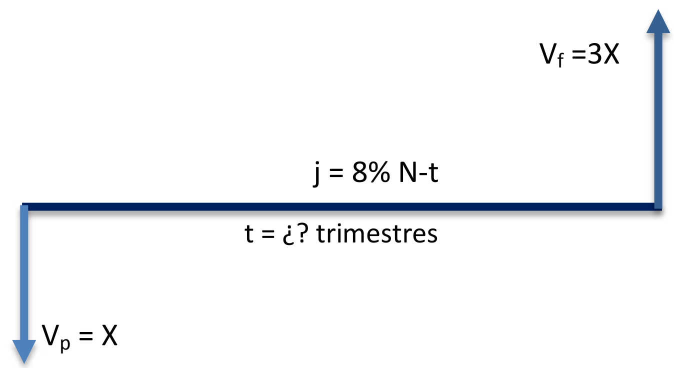
Solución

Parámetros

- Valor inicial de la inversión (Vp): X
- Valor final: 3X
- Tasa de interés: 8% N-t

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Para determinar el número de trimestres en que se triplica el capital inicialmente determinamos la tasa efectiva utilizando la formula (15)

$$j = i \ \times m$$

$$i = \frac{0{,}08}{4} = 0{,}02 = 2\%ET$$

Para calcular el número de trimestres se utiliza la formula (13)

$$\frac{\log\left(\frac{V_f}{V_p}\right)}{\log(1+i)} \ = \ n$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{3X}{X}\right)}{\log(1+0{,}02)} = 55{,}47$$

Respuesta

Considerando que el interés solo se paga por trimestres completos será necesario tener la inversión 56 trimestres

7.9	Usando la comparación de tasas, decidir la mejor alternativa entre invertir en una compañía de financiamiento comercial que en depósitos a término fijo paga el 28% nominal trimestral vencido, o invertir en una empresa de turismo que garantiza triplicar el capital en 3 años y 6 meses.

Solución

Parámetros

- Rendimiento compañía de financiamiento: 28% N-t
- Valor inicial inversión empresa turismo: X
- Valor final inversión empresa de turismo: 3X
- Tiempo de la inversión en la empresa de turismo: 42 meses; 14 trimestres

Cálculos

Lo primero es hallar la tasa de interés efectiva trimestral que paga la empresa de turismo; para ello se utiliza la formula (14), considerando periodos trimestrales

$$\sqrt[n]{\frac{V_f}{V_p}} - 1 = i$$

$$i = \sqrt[14]{\frac{3X}{X}} - 1 = 0{,}0816 = 8{,}16\%\ ET$$

El rendimiento de la empresa de turismo es entonces 8,16% ET. Para comparar con la compañía de financiamiento se calcula la tasa nominal trimestral equivalente de la tasa anterior, utilizando la formula (15)

$$j = i\ \times m$$

$$j = 0{,}0816\ \times 4 = 0{,}3265 = 32{,}65\%\ N - t$$

Respuesta

La mejor alternativa es la empresa de turismo ya que esta ofrece un rendimiento del 32,65% N-t a diferencia de la compañía de financiamiento que solo ofrece el 28% N-t.

7.10	Una empresa tiene en producción una máquina que llegará al final de su vida útil al final de 3 años; para esa época se adquirirá una nueva máquina, la cual se

estima costará USD$40.000; la máquina actual, para esa época, podrá ser vendida en USD$10.000. Determinar el valor que debe depositar el empresario en un CDT, en un banco que garantiza el 7,5% EA.

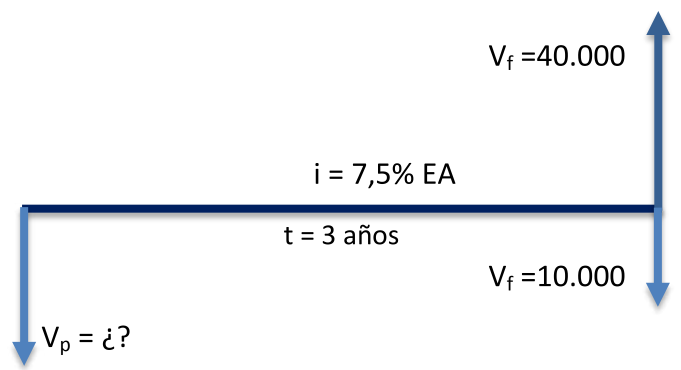
Solución

Parámetros

- Valor estimado de la maquina (V_f): USD $40.000
- Valor de reposición de la maquina vieja (V_f): USD $10.000
- Tasa de interés efectiva: 7,5% EA
- Tiempo de la inversión: 3 años

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Considerando que al cabo de los tres años se puede vender la maquina vieja el valor que realmente se requiere para la compra de la nueva es de USD $30.000; para hallar el valor del ahorro en el CDT se utiliza la formula (12), considerando periodos anuales

$$V_p = \frac{V_f}{(1+i)^n} = V_f \times (1+i)^{-n}$$

$$V_p = \frac{30.000}{(1+0{,}075)^3} = 24.148{,}81$$

Respuesta

El empresario deberá ahorrar USD $24.148,81 para poder reponer la maquina en tres años.

7.11 Hallar la tasa efectiva mensual equivalente al 7% efectivo trimestre anticipado.

Solución

Parámetros

- Tasa efectiva trimestre anticipado: 7%

Cálculos

Para calcular la tasa efectiva mensual equivalente a la tasa efectiva anticipada trimestral, inicialmente se halla la tasa vencida de la tasa anticipada, utilizando la formula (17)

$$i = \frac{i_a}{(1 - i_a)}$$

$$i = \frac{0{,}07}{(1 - 0{,}07)} = 0{,}06542 = 6{,}542\%\ ET$$

A partir de esta tasa efectiva trimestral se halla la tasa efectiva mensual, utilizando la formula (16), considerando que n_1 y n_2 son 4 y 12 respectivamente.

$$i_2 = (1 + i_1)^{\frac{n_1}{n_2}} - 1$$

$$i_2 = (1 + 0{,}06542)^{\frac{4}{12}} - 1 = 0{,}0213 = 2{,}13\%\ EM$$

Respuesta

La tasa efectiva mensual equivalente al 7% ET_a, es 2,13%

7.12 Hallar la tasa efectiva mensual anticipada equivalente al 36% N-m.

Solución

Parámetros

- Tasa nominal mensual: 36%

Cálculos

Para calcular la tasa efectiva mensual anticipada equivalente a la tasa nominal mensual, inicialmente se halla la tasa efectiva equivalente a la tasa nominal utilizando la formula (15)

$$j = i \times m$$

$$i = \frac{0{,}36}{12} = 0{,}03 = 3\%\ EM$$

A partir de esta tasa efectiva mensual se halla la tasa efectiva mensual anticipada, utilizando la formula (18).

$$i_a = \frac{i}{(1+i)}$$

$$i_a = \frac{0{,}03}{(1+0{,}03)} = 0{,}02912 = \ 2{,}912\%\ ET_a$$

Respuesta

La tasa efectiva mensual anticipada equivalente al 36% N-m, es 2,912%

7.13 Un inversionista coloca $35 millones en un depósito a término fijo durante 5 años. Si el banco reconoce una tasa del 28% N-t ¿Qué valor recibirá al momento del vencimiento del documento?

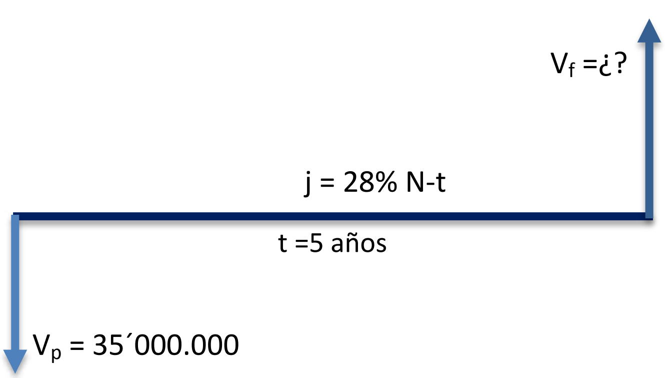
Solución

Parámetros

- Valor inicial de la inversión: 35 millones
- Tasa nominal trimestral: 28%
- Tiempo de la inversión: 5 años; 20 trimestres

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Para calcular el valor que finalmente recibirá el inversionista, inicialmente se halla la tasa efectiva a la cual se realiza la operación, para esto utilizamos la formula (15)

$$j = i \times m$$

$$i = \frac{0{,}28}{4} = 0{,}07 = 7\%\ ET$$

Con la tasa efectiva se halla el valor el valor que recibirá el inversionista, es decir el valor futuro, utilizando la formula (11); considerando periodos trimestrales

$$V_f \ = V_p(1+i)^n$$

$$V_f \ = 35´000.000(1+0{,}07)^{20} = 135´438.956{,}20$$

Respuesta

El inversionista recibirá $135´438.956,20 al cabo de 5 años.

7.14 Un inversionista constituye un CDT a 180 días por $650 millones con una tasa del 26% N-t_a; teniendo en cuenta que la retención en la fuente es de 7%, se pide determinar:

a) La rentabilidad antes de impuestos.
b) La rentabilidad después de impuestos y
c) El valor que le entregan al vencimiento
d) Suponiendo una inflación del 18% determinar la tasa real obtenida

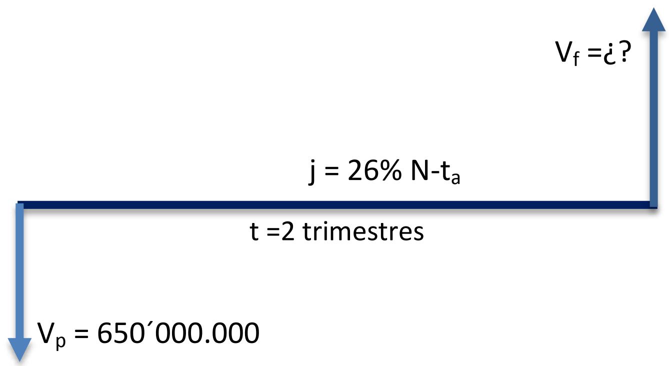
Solución

Parámetros

- Valor inicial de la inversión: 650 millones
- Tasa nominal trimestral anticipado: 26%
- Tiempo de la inversión: 6 meses; 2 trimestres
- Retención en la fuente: 7% sobre los intereses
- Inflación durante el periodo de la inversión: 18%

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Para calcular el valor final de la inversión, y la rentabilidad antes y después de impuestos se debe hallar la tasa efectiva a la cual se realiza la operación, para esto utilizamos la formula (15)

$$j = i \times m$$

$$i = \frac{0{,}26}{4} = 0{,}065 = 6{,}5\%\ ET_a$$

Utilizando la formula (17), se calcula la tasa efectiva trimestral efectiva

$$i = \frac{0{,}065}{(1 - 0{,}065)} = 0{,}0695 = 6{,}95\%\ ET$$

a) La rentabilidad antes de impuestos, corresponde a la tasa efectiva anual equivalente a la tasa efectiva de la operación, esta se calcula utilizando la formula (16), considerando que n_1 y n_2 son 4 y 1 respectivamente

$$i_2 = (1 + i_1)^{\frac{n_1}{n_2}} - 1$$

$$i_2 = (1 + 0{,}0695)^{\frac{4}{1}} - 1 = 0{,}3083 = 30{,}83\%\ EA$$

b) Para calcular la rentabilidad después de impuestos es necesario calcular inicialmente el valor final de la inversión para seguidamente calcular la retención en la fuente y determinar lo efectivamente recibido. Para el calculo del valor final antes de impuestos se utiliza la formula (11) considerando periodos trimestrales

$$V_f = V_p(1+i)^n$$

$$V_f = 650´000.000(1+0,0695)^2 = 743´489.662,5$$

De esta manera lo recibido por intereses, que es la base para el calculo de la retención, es: $93´489.662,5. La retención se calcula como el 7% de este valor, así:

$$retencion\ en\ la\ fuente = 93´489.662,5 \times 0,07 = 6´544.276,37$$

De esta forma lo realmente recibido por el inversionista es igual:

$$V_f^{´} = 743´489.662,5 - 6´544.276,37 = 736´945.386,1$$

Para determinar la rentabilidad después de impuestos se calcula la tasa efectiva anual, considerando lo efectivamente recibido, para esto se utiliza la formula (14)

$$\sqrt[n]{\frac{V_f}{V_p}} - 1 = i$$

$$i = \sqrt[\frac{1}{2}]{\frac{736´945.386,1}{650´000.000}} - 1 = 0,2854 = 28,54\%\ EA$$

La rentabilidad después de impuestos es 28,54% EA

c) El valor que se le entrega al vencimiento es $736´945.386,1

d) Para obtener la tasa de interés realmente obtenida, se utiliza la formula (22), considerando una inflación del 18%

$$i_r = \frac{i-f}{1+f}$$

$$i_r = \frac{0,2854 - 0,18}{1+0,18} = 0,0893 = 8,93\ EA$$

La rentabilidad realmente obtenida en la operación fue del 8,93% EA

7.15 Si una entidad financiera quiere asegurarle una rentabilidad del 8% a sus inversionistas; ¿Qué tasa de interés debe ofrecer si se estima que la inflación del próximo año será el 5%?

Solución

Parámetros
- Tasa de rentabilidad real: 8%
- Inflación estimada: 5%

Cálculos

Para determinar la tasa de interés real se utiliza la formula (22) de la cual se despeja i;

$$i_r = \frac{i - f}{1 + f}$$

$$i = i_r \times (1 + f) + f = 0{,}08 \times (1 + 0{,}05) + 0{,}05 = 0{,}134 = 13{,}4\%\ EA$$

Respuesta

La entidad financiera debe ofrecer una tasa de interés anual del 13,4%

7.16 Una C.I vende en Colombia un artículo fabricado en Estados Unidos por $50.000 ¿Cuanto valdrá el artículo en Colombia y en Estados Unidos al final de un año suponiendo los siguientes índices económicos: cambio actual US$ 1= $2000, inflación en Estados Unidos 3%, devaluación del peso con respecto al peso 18%

Solución

Parámetros
- Valor inicial del articulo en Colombia: $50.000
- Tasa de cambio inicial: 1USD = $2.000
- Inflación en los Estados Unidos: 3%
- Devaluación del peso con respecto al dólar: 18%

Cálculos

Para determinar el valor del artículo en ambos países al cabo de un año, lo primero es determinar su valor inicial en Estados Unidos; para esto se utiliza la tasa de cambio inicial:

$$Pu = \frac{50.000}{2000} = USD\ 25$$

Considerando que la inflación en los Estados Unidos fue del 3%, el precio al cabo de un año, se calcula utilizando la formula (11)

$$V_f = V_p(1 + i)^n$$

$$P_f \;=\; P_i(1+f)^n$$

$$P_f \;=\; 25(1+0{,}03)^1 = USD\ 25{,}75$$

El precio al cabo de un año el articulo valdrá en los Estados Unidos USD 25,75

Para determinar el valor en pesos colombianos, es necesario calcular la tasa de cambio después de un año, para ello se considera la devaluación del peso y se utiliza la formula (11)

$$V_f \;=\; V_p(1+i)^n$$

$$TC_f \;=\; TC_i(1+i_d)^n$$

$$TC_f \;=\; 2000(1+0{,}18)^1 = 2.360$$

Considerando esta tasa de cambio, y que el valor del articulo al cabo de un año cuesta USD 25,75 se determina el valor del articulo en pesos, así:

$$Pu \;=\; 25{,}75\ \times 2.360 = 60.770$$

Nótese que a este valor igualmente se puede llegar si hallamos la tasa combinada: inflación, devaluación; y se la aplicamos al valor inicial. Para hallar la tasa combinada se utiliza la formula (21)

$$i_c = i_1 + i_2 + i_1 \times i_2$$

$$i_c = 0{,}03 + 0{,}18 + 0{,}03 \times 0{,}18 = 0{,}2154 = 21{,}54\%$$

Para hallar el precio final del artículo aplicamos la formula (11)

$$V_f \;=\; V_p(1+i)^n$$

$$Pu_f \;=\; Pu_i(1+i_c)^n$$

$$Pu_f \;=\; 50.000(1+0{,}2154)^1 = 60.770$$

Respuesta

Después de un año el precio del artículo en los Estados Unidos será de USD 25,75 y de $60.770 Col pesos en Colombia.

7.17 Un artículo, fabricado en Colombia, que se exporta a los Estados Unidos cuesta $68.000, cuando la tasa de cambio es de US$1= 2000. Suponiendo que el IPP del sector empresarial en la cual se produce el artículo en Colombia es del 22%, y la devaluación del peso frente al dólar es del 18%; ¿Cuál será el precio del producto en ambos países al final de un año?

Solución

Parámetros

- Valor inicial del producto en Colombia: $68.000
- Tasa de cambio inicial: 1USD = $2.000
- Inflación del productor en Colombia IPP: 22%
- Devaluación del peso con respecto al dólar: 18%

Cálculos

Para determinar el valor del artículo en ambos países al cabo de un año, lo primero es determinar el valor de este al cabo de un año en Colombia, considerando el IPP, para esto se utiliza la formula (11)

$$V_f \;=\; V_p(1+i)^n$$

$$P_f \;=\; P_i(1+f)^n$$

$$P_f \;=\; 68.000 \times (1+0{,}22)^1 = 82.960$$

El precio del producto al cabo de un año será: $82.960

Para determinar el valor USD, es necesario calcular la tasa de cambio después de un año, para ello se considera la devaluación del peso y se utiliza la formula (11)

$$V_f \;=\; V_p(1+i)^n$$
$$TC_f \;=\; TC_i(1+i_d)^n$$

$$TC_f \;=\; 2000(1+0{,}18)^1 = 2.360$$

Considerando esta tasa de cambio, y que el valor del articulo al cabo de un año en Colombia es de $82.960, se determina el valor del articulo en los Estados Unidos, así:

$$Pu \;=\; \frac{82.960}{2.360} = 35{,}15$$

Respuesta

Después de un año el precio del artículo en los Estados Unidos será de USD 35,15 y de $82.960 Col pesos en Colombia.

7.18 Dos inversionistas de origen suizo, uno residente en Suiza y el otro residente en Colombia, han decidido realizar un negocio en Europa en el cual cada uno aportará e 50%. El negocio exige una inversión inicial de 300 millones de euros y al final de 3 años devolverá la suma de 400 millones de euros. Hallar las rentabilidades totales y reales para cada uno de los socios suponiendo que los siguientes indicadores económicos se mantuvieron estables durante los 3 años

a) tasa promedio de la inflación en Colombia 22% anual
b) tasa promedio de inflación en Suiza 2% anual
c) tasa de devaluación del peso frente al dólar: primer año 18%, segundo año 20% y tercer año 17%, devaluación euro frente al dólar: años 1 y 2 el 2%, y una revaluación del 3% para el tercer año
d) Tasas de cambio actuales 1 US$ = € 2,23 y 1 US$= $1.300

Solución

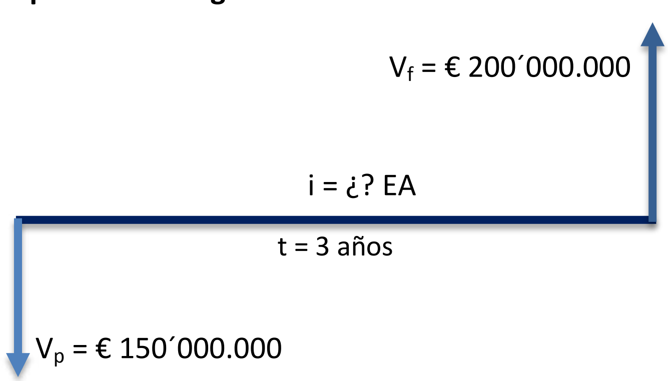
Parámetros

- Valor inicial de la inversión: € 300´000.000
- Valor final de la inversión: € 400´000.000
- Periodo de la inversión: 3 años
- Inflación en Colombia (promedio por año): 22%
- Inflación en Suiza (promedio por año): 2%
- Devaluación del peso con respecto al dólar, año 1: 18%
- Devaluación del peso con respecto al dólar, año 2: 20%
- Devaluación del peso con respecto al dólar, año 3: 17%
- Devaluación del Euro con respecto al dólar, año 1 y 2: 2%
- Revaluación del Euro con respecto al dólar, año 3: 3%
- Tasa de cambio inicial: 1USD = $1.300
- Tasa de cambio inicial: 1 USD = € 2,23

Para mejor comprensión se divide la solución del problema en dos: a) la situación del suizo residente en Suiza y b) la del suizo residente en Colombia.

a) Suizo residente en Suiza

Representación grafica



Cálculos

Para determinar la rentabilidad del inversionista es necesario hallar la tasa de interés anual ganada por la inversión, para ello se utiliza la formula (14)

$$\sqrt[n]{\frac{V_f}{V_p}} - 1 = i$$

$$i = \sqrt[3]{\frac{200'000.000}{150'000.000}} - 1 = 0{,}1006 = 10{,}06\%$$

De esta forma la rentabilidad total ganada por el suizo residente en Suiza es 10,06% EA. Para determinar la tasa real se aplica la formula (22), teniendo en cuenta la inflación promedio en ese país.

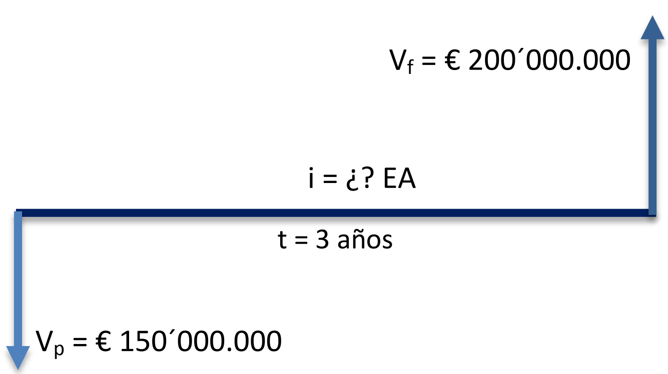
$$i_r = \frac{i - f}{1 + f}$$

$$i_r = \frac{0{,}1006 - 0{,}02}{1 + 0{,}02} = 0{,}0790 = 7{,}90\%\ EA$$

De esta forma la rentabilidad realmente obtenida por este inversionista es: 7,90%EA

a) Suizo residente en Colombia

Representación grafica



En este caso, lo primero es hallar la inversión en pesos, la cual se calcula realizando reglas de tres simples utilizando las tasas de cambio iniciales (de USD a Euros y de USD a pesos), así:

$$Inversion\ en\ USD = \frac{150'000.000}{2{,}23} = 67'264.573{,}99$$

$$Inversion\ en\ Col\ Pesos = 67´264.573,99 \times 1.300 = 87.443´946.190$$

Para hallar el valor finalmente recibido por el inversionista se deben calcular las tasa de cambio de euros a dólares y de pesos a dólares en el año tres, para esto se tienen en cuenta las devaluaciones y se utiliza la formula (11), así:

<u>Tasa de cambio Dólares a Euros</u>

Año 0. Tasa de cambio inicial 1USD = €2,23
Año 2.

$$V_f = V_p(1+i)^n$$

$$TC_f = TC_i(1+i_d)^n$$

$$TC_{f2} = 2,23(1+0,02)^2 = 2,320$$

Año 3.

$$TC_{f3} = 2,320(1-0,03)^1 = 2,2504$$

<u>Tasa de cambio Dólares a Pesos</u>

Año 0. Tasa de cambio inicial 1USD = $1.300
Año 1.

$$V_f = V_p(1+i)^n$$

$$TC_f = TC_i(1+i_d)^n$$

$$TC_{f1} = 1.300(1+0,18)^1 = 1.534$$

Año 2.

$$TC_{f2} = 1.534(1+0,20)^1 = 1.840,8$$

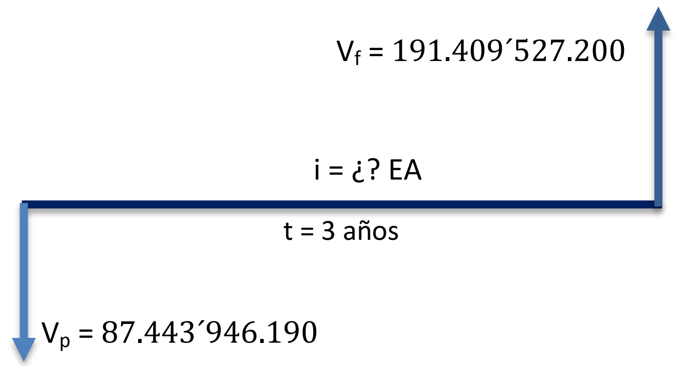
Año 3.

$$TC_{f3} = 1.840,8(1+0,17)^1 = 2.153,74$$

Lo recibido en pesos se calcula a través de reglas de tres simples utilizando las tasas de cambio del año 3, así:

$$Recibido\ en\ USD = \frac{200´000.000}{2,2504} = 88´873.089,23$$

$$Recibido\ en\ Col\ Pesos = 88´873.089,23 \times 2.153,74 = 191.409´527.200$$



Para determinar la rentabilidad de este inversionista es necesario hallar la tasa de interés anual ganada por la inversión, para ello se utiliza la formula (14)

$$\sqrt[n]{\frac{V_f}{V_p}} - 1 = i$$

$$i = \sqrt[3]{\frac{191.409´527.200}{87.443´946.190}} - 1 = 0{,}2984 = 29{,}84\%$$

De esta forma la rentabilidad total ganada por el suizo residente en Colombia es 29,84% EA. Para determinar la tasa real se aplica la formula (22), teniendo en cuenta la inflación promedio en Colombia.

$$i_r = \frac{i - f}{1 + f}$$

$$i_r = \frac{0{,}2984 - 0{,}22}{1 + 0{,}22} = 0{,}0642 = 6{,}42\%\ EA$$

De esta forma la rentabilidad realmente obtenida por este inversionista es: 6,42%EA

7.19 Un inversionista residente en el Japón y uno residente en Estados Unidos se asocian para comprar un banco en Colombia, el valor de cada acción del banco es de $90.000; la cual estiman vender después de tres meses en $97.000.

a) Calcule la rentabilidad total y real anual de cada uno de los socios
b) ¿Cuánto tendrá cada uno en su respectiva moneda al final de los 3 meses?

Tome en cuenta la siguiente información:

- ✓ Inflación en: Colombia 18%, en Estados Unidos 3.5%, en Japón 2.3%
- ✓ Tasa de devaluación del peso frente al dólar 22%
- ✓ Tasa de devaluación del dólar frente al Yen 1%
- ✓ Cambio actual US$1 = $2000; US$1 = Yen 105

Solución

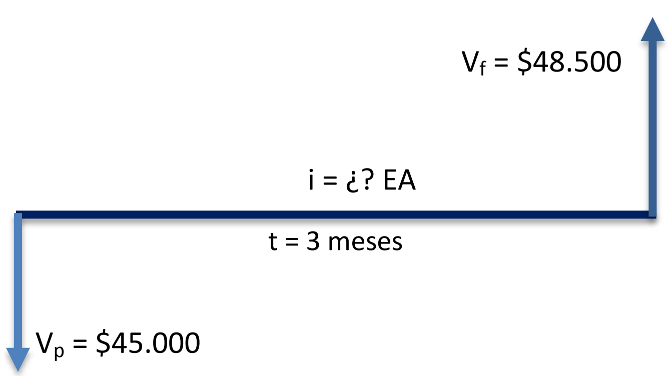
Parámetros

- o Valor inicial de la inversión: $90.000
- o Valor final de la inversión: $97.000
- o Periodo de la inversión: 3 meses
- o Inflación en Colombia: 18%
- o Inflación en Japón: 2,3%
- o Inflación en Estados Unidos: 3,5%
- o Devaluación del peso con respecto al dólar: 22%
- o Devaluación del dólar frente a Yen: 1%
- o Tasa de cambio inicial: 1USD = $2.000
- o Tasa de cambio inicial: 1 USD = ¥ 105

Para mejor comprensión se divide la solución del problema en dos: a) la situación del inversionista japonés y b) la del estadunidense.

a) Inversionista japonés

Representación grafica



Cálculos

Para determinar la rentabilidad del japonés es necesario determinar la inversión y recibido en Yenes; el cálculo se hace a través de una sencilla regla de tres, considerando las tasa de cambio.

Inversión

$$Inversion\ en\ USD = \frac{45.000}{2000} = 22{,}5$$

$$Inversion\ en\ Yenes = 22{,}5 \times 105 = 2.362{,}50$$

Para hallar el valor finalmente recibido por el inversionista en Yenes se deben calcular las tasa de cambio de Yenes a dólares y de pesos a dólares en el mes tres, para esto se tienen en cuenta las devaluaciones y se utiliza la formula (11), así:

Tasa de cambio Dólares a Yenes

Tasa de cambio inicial 1USD = ¥ 105

$$V_f = V_p(1+i)^n$$
$$TC_f = TC_i(1+i_d)^n$$

$$TC_f = 105 \times (1-0{,}01)^{\frac{3}{12}} = 104{,}736$$

Tasa de cambio Dólares a Pesos

Tasa de cambio inicial 1USD = $2.000

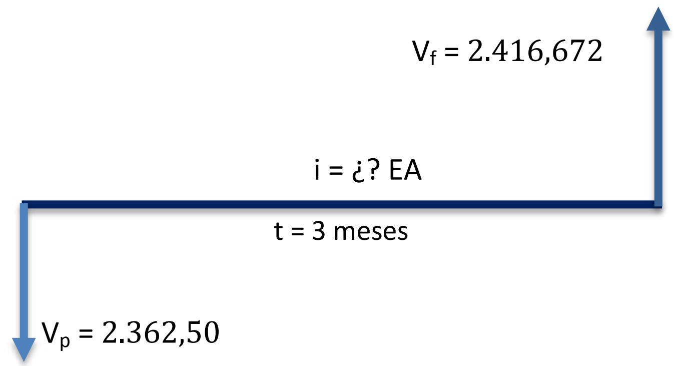
$$V_f = V_p(1+i)^n$$
$$TC_f = TC_i(1+i_d)^n$$

$$TC_f = 2.000(1+0{,}22)^{\frac{3}{12}} = 2.101{,}938$$

Lo recibido en Yenes se calcula a través de reglas de tres simples utilizando las tasas de cambio del mes 3, así:

$$Recibido\ en\ USD = \frac{48.500}{2.101{,}938} = 23{,}073$$

$$Recibido\ en\ Yenes = 23{,}073 \times 104{,}736 = 2.416{,}672$$



Para determinar la rentabilidad de este inversionista es necesario hallar la tasa de interés anual ganada por la inversión, para ello se utiliza la formula (14)

$$\sqrt[n]{\frac{V_f}{V_p}} - 1 = i$$

$$i = \sqrt[\frac{3}{12}]{\frac{2.416{,}672}{2.362{,}500}} - 1 = 0{,}09492 = 9{,}492\%$$

De esta forma la rentabilidad total ganada por el japonés es 9,492% EA. Para determinar la tasa real se aplica la formula (22), teniendo en cuenta la inflación promedio en Japón .

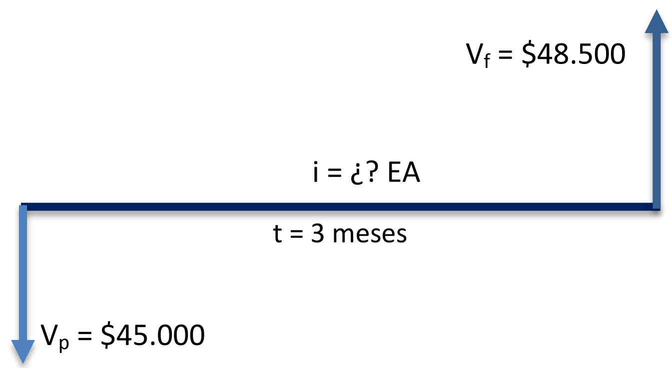
$$i_r = \frac{i - f}{1 + f}$$

$$i_r = \frac{0{,}09492 - 0{,}023}{1 + 0{,}023} = 0{,}07030 = 7{,}03\%\ EA$$

De esta forma la rentabilidad realmente obtenida por este inversionista es: 7,03% EA.

a) Inversionista estadunidense

Representación grafica



Cálculos

Para determinar la rentabilidad del estadunidense es necesario determinar la inversión y recibido en dólares; el calculo se hace a través de una sencilla regla de tres, considerando las tasa de cambio.

Inversión

$$Inversion\ en\ USD = \frac{45.000}{2000} = 22,5$$

Para hallar el valor finalmente recibido por el inversionista en dólares se deben calcular las tasa de cambio de pesos a dólares en el mes tres, para esto se tienen en cuenta las devaluaciones y se utiliza la formula (11), así:

<u>Tasa de cambio Dólares a Pesos</u>

Tasa de cambio inicial 1USD = $2.000

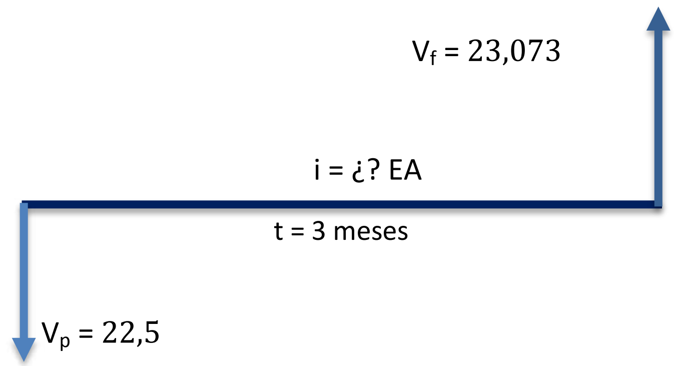
$$V_f = V_p(1+i)^n$$

$$TC_f = TC_i(1+i_d)^n$$

$$TC_f = 2.000(1+0,22)^{\frac{3}{12}} = 2.101,938$$

Lo recibido en dólares se calcula a través de reglas de tres simples utilizando las tasas de cambio del mes 3, así:

$$Recibido\ en\ USD = \frac{48.500}{2.101,938} = 23,073$$



Para determinar la rentabilidad de este inversionista es necesario hallar la tasa de interés anual ganada por la inversión, para ello se utiliza la formula (14)

$$\sqrt[n]{\frac{V_f}{V_p}} - 1 = i$$

$$i = \sqrt[\frac{3}{12}]{\frac{23{,}073}{22{,}500}} - 1 = 0{,}10582 = 10{,}582\%$$

De esta forma la rentabilidad total ganada por el estadunidense es 10,582% EA. Para determinar la tasa real se aplica la formula (22), teniendo en cuenta la inflación promedio en Estados Unidos.

$$i_r = \frac{i - f}{1 + f}$$

$$i_r = \frac{0{,}10582 - 0{,}035}{1 + 0{,}035} = 0{,}0684 = 6{,}84\%\ EA$$

De esta forma la rentabilidad realmente obtenida por este inversionista es: 6,84% EA

7.20 En un país "X" cuya moneda es el DURO, un producto vale 24.000 Duros; la inflación en del 22% y la tasa de cambio actual es US$1 = 1.000 Duros. De otra parte, en el país "Y" la moneda es el dólar americano y presenta una inflación del 6.5% anual.

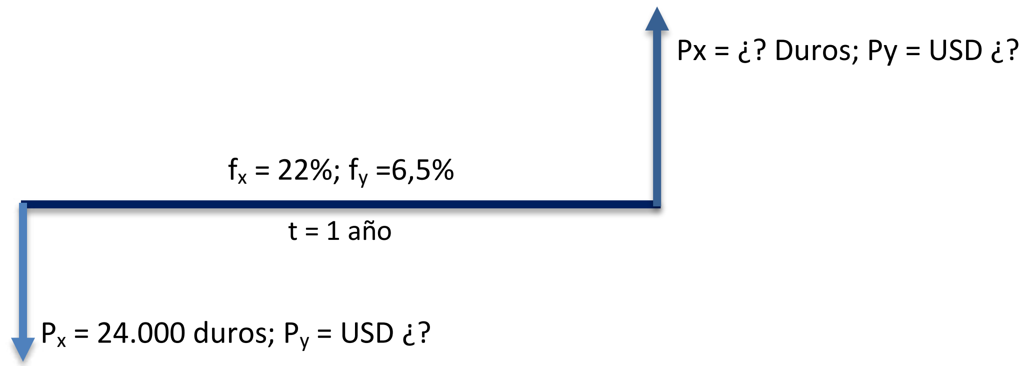
Al final de un año ¿Cuál debe ser la tasa de devaluación en el país "X" con respecto al dólar a fin de no perder competitividad en los mercados del país "Y"?

Solución

Parámetros

- Precio del producto al inicio del año en el país “X”: 24.000 Duros
- Inflación en el país “X”: 22%
- Inflación en el país “Y”: 6,5%
- Tasa de cambio inicial en el país “X”: 1USD = 1.000 Duros

Representación grafica



Cálculos

Inicialmente se determina el precio del producto en el país “X”, para esto se utiliza la formula (11), considerando la inflación y el precio inicial del producto.

$$V_f = V_p(1+i)^n$$
$$P_{fx} = P_{ix}(1+f_x)^n$$
$$P_{fx} = 24.000(1+0{,}22)^1 = 29.280\ Duros$$

El precio inicial del producto en el país “Y”, se calcula a través de una regla de tres, considerando la tasa de cambio inicial, así:

$$P_{iy} = \frac{24.000}{1000} = USD24$$

El precio del producto al final del año en el país “Y” debería aumentar de acuerdo a la inflación en ese país, para calcular este se utiliza la formula (11), el valor de la inflación y el precio inicial, de esta manera:

$$V_f = V_p(1+i)^n$$
$$P_{fy} = P_{iy}(1+f_x)^n$$
$$P_{fx} = 24(1+0{,}065)^1 = USD\ 25{,}56$$

De esta manera para mantener la competitividad de “X” en el país “Y” el producto se debería vender a USD 25,56; por lo tanto, la tasa de cambio que debería tener el país “X” se calcula como el valor que tiene el producto en ese país sobre el valor en país "Y", así:

$$TC_{fx} = \frac{29.280}{25,56} = 1.145,54$$

Para calcular la tasa de devaluación que mantiene el pais "X" competitivo, se utiliza la formula (14), considerando la tasa de cambio inicial y final

$$\sqrt[n]{\frac{V_f}{V_p}} - 1 = i$$

$$\sqrt[1]{\frac{TC_f}{TC_i}} - 1 = i_d$$

$$i = \sqrt[1]{\frac{1.145,54}{1.000}} - 1 = 0,1455 = 14,55\%$$

Respuesta
El país "X" debe tener una tasa de devaluación del Duro con respecto al USD del 14,55%

7.21 Un inversionista desea que todas sus inversiones le reporten una rentabilidad real del 8%. ¿Qué tasa efectiva mensual debe ofrecérsele en un país donde la inflación esperada es del 17%?

<u>Solución</u>
Parámetros
- Rentabilidad real esperada: 8%
- Inflación del país receptor de la inversión: 17%

Cálculos

Para calcular la tasa de interés efectiva, de la formula (22) se despeja i, considerando la i_R y la inflación, así:

$$i_r = \frac{i - f}{1 + f}$$

$$i = i_r \times (1 + f) + f$$

$$i = 0,08 \times (1 + 0,17) + 0,17 = 0,2636 = 26,36\%\ EA$$

Considerando que se pide la tasa efectiva mensual, entonces se debe calcular la tasa equivalente mensual de la tasa efectiva anual, para esto se utiliza la formula (16), considerando n_1 y n_2 como 1 y 12 respectivamente:

$$i_2 = (1 + i_1)^{\frac{n_1}{n_2}} - 1$$

$$i_2 = (1 + 0{,}2636)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0{,}0196 = 1{,}96\%\ EM$$

Respuesta

Se debe ofrecer una tasa de interés efectiva mensual del 1,96% EM

7.22 Un ahorrador consigna en una corporación de financiamiento la suma de $300 millones el día 1 de marzo y $200 millones el día 20 de junio del mismo año. ¿Cuánto podrá retirar el 31 de agosto si la corporación paga el 27% efectivo anual de corrección monetaria para los meses de marzo y abril y el 25% efectivo anual para el resto del período (mayo, junio, julio y agosto)

Solución

Parámetros

- Inversión 1 de marzo: $300 millones
- Inversión 20 de junio: $200 millones
- Tasa de interés marzo, abril: 27% EA
- Tasa de interés mayo, junio, julio, agosto: 25%

Cálculos

Para calcular lo que el inversionista puede retirar el 31 de agosto, se halla el valor equivalente en esta fecha de cada una de las inversiones, utilizando la formula (11), considerando las tasa de interés efectivas y los periodos de tiempo causados:

$$V_f = V_p(1 + i)^n$$

Inversión del 1 de marzo

Equivalente al 01 de mayo

$$V_f = 300´000.000(1 + 0{,}27)^{\frac{2}{12}} = 312´192.075{,}4$$

Equivalente al 31 de agosto

$$V_f = 312´192.075{,}4(1 + 0{,}25)^{\frac{4}{12}} = 336´298.718{,}60$$

Inversión del 20 de junio

Equivalente al 31 de agosto; considerando 10 días de junio y 60 días de los meses de julio y agosto

$$V_f \;=\; 200´000.000(1+0{,}25)^{\frac{70}{360}} = 208´868.818{,}10$$

Lo que el inversionista podrá retirar el 31 de agosto es $336´298.718{,}60 + 208´868.818{,}10 = 545´167.536{,}70$

Respuesta
El inversionista puede retirar $545´167.536,70 el 31 de agosto

7.23 Calcular la cantidad y rentabilidades que ganara un inversionista antes y después de impuestos por una inversión de $800 millones a dos años en una cuenta de ahorros en UVR que garantiza pagar la corrección monetaria más 4 puntos. Considera la siguiente información:

a) Se estima que la corrección monetaria del primer año será del 18% y la del segundo año del 17%
b) Retención en la fuente es del 7%
c) Cambio actual del UVR; 1UVR = $14.000

Solución
Parámetros
- Inversión inicial: $800 millones
- Tasa de interés: CRM + 4 puntos
- CM año 1: 18%
- CM año 2: 17%
- Periodo de la inversión: 2 años
- Retención en la fuente: 7%
- Cambio actual 1 UVR = $14.000

Cálculos

La tasa de interés efectiva del primer y segundo año se calcula como la tasa combinada de la CR y los 4 puntos adicionales, utilizando la formula (21)

$$i_c = i_1 + i_2 + i_1 \times i_2$$

$$i_1 = 0{,}18 + 0{,}04 + 0{,}18 \times 0{,}04 = 0{,}2272 = 22{,}72\%\ EA$$

La tasa efectiva para el primer año es: 22,72% EA

$$i_2 = 0{,}17 + 0{,}04 + 0{,}17 \times 0{,}04 = 0{,}2168 = 21{,}68\%\ EA$$

La tasa efectiva para el segundo año es: 21,68% EA

Para calcular el valor recibido al final del periodo de inversión, se utiliza la la formula (11), considerando cada año independientemente

$$V_f \;=\; V_p(1+i)^n$$

Año 1.

$$V_{f1} \;=\; 800´000.00(1+0{,}2272)^1 = 981´760.000$$

Año 2

$$V_{f2} = 981´760.000(1+0{,}2168)^1 = 1.194´605.568$$

La cantidad que ganara el inversionista antes de impuestos es $1.194´605.568

Para determinar la rentabilidad antes de impuestos se utiliza la formula (14)

$$i = \sqrt[n]{\frac{V_f}{V_p}} - 1$$

$$i = \sqrt[2]{\frac{1.194´605.568}{800´000.000}} - 1 = 0{,}2219 = 22{,}19\%\ EA$$

La rentabilidad antes de impuesto es: $22{,}19\%\ EA$

El calculo del impuesto se realiza sobre los intereses ganados, de esta forma:

$$I = 1.194´605.568 - 800´000.000 = 394´605.568$$

$$Retencion\ en\ la\ fuente = 394´605.568\ \times 0{,}07 = 27´622.389{,}76$$

Lo que realmente recibirá el inversionista será el valor final menos el impuesto

$$V_f^{´} = 1.194´605.568 - 27´622.389{,}76$$

$$V_f^{´} = 1.166´983.178$$

Lo que realmente recibirá el inversionista será: 1.166´983.178

Para determinar la rentabilidad después de impuestos se utiliza la formula (14), considerando lo que finalmente recibirá el inversionista

$$i = \sqrt[n]{\frac{V_f}{V_p}} - 1$$

$$i = \sqrt[2]{\frac{1.166´983.178}{800´000.000}} - 1 = 0{,}2077 = 20{,}77\%\ EA$$

La rentabilidad después de impuesto es: $20{,}77\%\ EA$

7.24 Hallar la tasa efectiva anual equivalente de DTF + 6 puntos. (Asuma: DTF= 15%TA)

Solución

Parámetros

- DTF: 15%N-ta

- Puntos adicionales 6

Cálculos

Considerando que el DTF es una tasa nominal simplemente se suman los puntos a esta tasa de interés

$$j = 0{,}15 + 0{,}06 = 0{,}21\ N - ta$$

Para hallar la tasa efectiva anual, lo primero es calcular la tasa efectiva equivalente a la tasa nominal, para esto se utiliza la formula (15)

$$j = i \times m$$

$$i = \frac{0{,}21}{4} = 0{,}0525 = 5{,}25\ ETa$$

A partir de esta tasa se calcula la tasa efectiva trimestral vencida utilizando la formula (17)

$$i = \frac{i_a}{(1 - i_a)}$$

$$i = \frac{0{,}0525}{(1 - 0{,}0525)} = 0.0554 = 5{,}54\%\ ET$$

Para calcular la tasa efectiva anual, se utiliza la formula (16), considerando n_1 y n_2 como 4 y 1 respectivamente:

$$i_2 = (1 + i_1)^{\frac{n_1}{n_2}} - 1$$

$$i_2 = (1 + 0{,}0554)^{\frac{4}{1}} - 1 = 0{,}2407 = 24{,}07\%\ EA$$

Respuesta
La tasa efectiva anual es: 24,07%

7.25 Hallar la tasa efectiva anual equivalente de IPC + 7 puntos (Asuma: IPC = 10%)

Solución
Parámetros
- IPC: 10%
- Puntos adicionales 7

Cálculos

Considerando que el IPC es una tasa efectiva para sumar los puntos se debe considerar la formula (21), es decir combinando la inflación y los puntos adicionales

$$i_c = i_1 + i_2 + i_1 \times i_2$$

$$i_c = 0{,}1 + 0{,}07 + 0{,}1 \times 0{,}07 = 0{,}177 = 17{,}70\%$$

Respuesta
La tasa efectiva anual es: 17,70%

7.26 Hallar la tasa efectiva anual equivalente de Libor + 8 puntos. (Asuma: Libor = 5,14 N-s)

<u>Solución</u>
Parámetros
- Libor: N-s
- Puntos adicionales 8

Cálculos

Considerando que el Libor es una tasa nominal simplemente se suman los puntos a esta tasa de interés

$$j = 0{,}0514 + 0{,}08 = 0{,}1314\ N - s$$

Para hallar la tasa efectiva anual, lo primero es calcular la tasa efectiva equivalente a la tasa nominal, para esto se utiliza la formula (15)

$$j = i \times m$$

$$i = \frac{0{,}1314}{2} = 0{,}0657 = 6{,}57\ ES$$

Para calcular la tasa efectiva anual, se utiliza la formula (16), considerando n_1 y n_2 como 2 y 1 respectivamente:

$$i_2 = (1 + i_1)^{\frac{n_1}{n_2}} - 1$$

$$i_2 = (1 + 0{,}0657)^{\frac{2}{1}} - 1 = 0{,}1357 = 13{,}57\%\ EA$$

Respuesta
La tasa efectiva anual es: 13,57%

8. Ejercicios propuestos

8.1 Una empresa invierte sus excedentes financieros que suman $225´000.000 en un banco durante un año.

a) Si el banco reconoce una tasa del 4% ET; ¿Cuál será el Interés que la empresa recibirá al cabo del año?
b) Si el banco reconoce una tasa simple del 4% trimestral; ¿Cuál será el Interés que la empresa recibirá al cabo del año?
c) Explique porque las diferencias.

8.2 Hallar las Tasa Efectivas Equivalentes para las siguientes Tasas Nominales

a) 28% N-b
b) 36% N-m
c) 27% N-t
d) 25% N
e) 32.5% N-s

8.3 ¿Cuándo debe ahorrar un padre el 1 de enero para pagar la matrícula de su hijo que inicia en la Universidad el 10 de febrero del año siguiente, si la matrícula para ese entonces le costará $2´550.000 y el banco le reconoce un Interés Nominal del 12% N-m

8.4 Una empresa contrata con un banco la financiación para la compra de los equipos de informática los cuales tienen un costo de $78´000.000. Si las condiciones del préstamo son: un pago único al cabo de 18 meses y el banco aplica una tasa de interés del 23,5% EA; ¿Cuánto deberá pagar la empresa al momento de cumplirse el plazo?

8.5 Un comerciante realiza un préstamo bancario de $68´000.000. para este pacta con el banco el pago de una cuota única a los 23 meses y una tasa de interés del 25% N-b. ¿Cuánto deberá cancelar de intereses y en total al cabo del plazo pactado?

8.6 ¿Cuál será la inversión que debe realizar una empresa en fondo tener el dinero necesario para reponer sus equipos de cómputo dentro de 38 meses? Se estima que los equipos tendrán un valor de $223´500.000 y que el rendimiento promedio del fondo es del 17% EA.

8.7 ¿A que tasa de Interés efectiva trimestral se deberá colocar un capital para que se triplique, durante los próximos 56 meses?

8.8 La compañía GGG quiere invertir por un año sus excedentes, que suman $625´900.600, del periodo pasado; para esto solicita al sector financiero tres ofertas: la entidad No 1, le reconoce una Tasa de Interés de 0.75% EM; la entidad No 2, le ofrece 1.5% EB. ¿Qué tasa de Interés Nominal debería ofrecerle la tercera entidad, para convertirse en la mejor opción?

8.9 Durante cuánto tiempo una empresa debería mantener un ahorro de $123´500.000 para obtener una suma de $250´000.000; si el fondo de inversión donde tiene el dinero le reconoce una Tasa de Interés de 11.5%N-m.

8.10 ¿Cuánto tiempo se necesitara para duplicar un capital, si el fondo de inversión reconoce una tasa de Interés de 3.5% ET?

8.11 Una Empresa realiza las siguientes inversiones todas con vencimiento el 31 de diciembre del 2012. La primera de ellas el 15 de enero del 2010 por un monto de $45´000.000 en un fondo que en promedio reconoce el 9,5% EA; una segunda inversión el 15 de junio del 2011 por un monto de $74´600.000 en una entidad bancaria que reconoce el 0,65% EM y una tercera inversión el 01 de enero del 2012 por un monto de $142´200.000 en un fondo que reconoce el 25% N-m. ¿Cuánto recibirá la empresa inversionista el día 31 de diciembre del 2012?

8.12 Una Empresa realiza las siguientes inversiones todas con vencimiento el 31 de diciembre del 2011. La primera de ellas el 15 de febrero del 2010 por un monto de $211´000.000 en un fondo que en promedio reconoce el 12,5% N-m; una segunda inversión el 15 de agosto del 2011 por un monto de $180´500.000 en una entidad bancaria que reconoce el 12% N-b y una tercera inversión el 01 de noviembre del 2011 por un monto de $182´800.000 en un fondo que reconoce el 22% N-m. ¿Qué monto único deberá invertir el 15 de febrero para que el monto recibido el 31 de diciembre del 2011, no cambie?

8.13 Una empresa recibe tres ofertas del sector financiero para invertir sus excedentes del periodo anterior que suman $455´000.000: la primera de ellas promete devolverle en 28 meses la suma de $520´000.000; la segunda promete devolverle en 24 meses la suma de 515´000.000 y la tercera promete en 35 meses devolverle la suma de $555´500.000. ¿Cuál de las tres opciones es la más atractiva para la empresa? (Nota: calcule la Tasa de Interés EA para cada opción y compare)

8.14 Hallar el tiempo en que debe hacerse un pago de $30´000.000, para cancelar dos deudas: una de $15´000.000 con vencimiento en 15 meses y otra de $15´000.000 con vencimiento en 26 meses. Suponga una tasa del 30% N-m

8.15 ¿Cuánto debería pagar hoy un empresario que tiene tres deudas: una de $29´500.000 con vencimiento en 18 meses; la segunda de $32´550.000 con vencimiento en 24 meses y otra de $18´000.000 con vencimiento en 28 meses? Suponga una tasa del 19,5%EA

8.16 Hallar las siguientes tasas equivalentes.

a) Una tasa nominal semestre vencido equivalente al 24% N-tv
b) Una tasa nominal trimestre anticipado equivalente al 2.5% EM
c) Una tasa efectiva mensual anticipada equivalente al 41.12% EA
d) Una tasa efectiva mensual equivalente al 36% N-ma
e) Una tasa nominal semestral equivalente al 28% N-ta
f) Una tasa nominal mes anticipado equivalente al 27% N-sv
g) Una tasa efectiva mensual anticipada equivalente al 35% N-sv
h) Una tasa efectiva semestral vencida equivalente al 25% EA
i) Una tasa nominal mes anticipado equivalente al 24% N-ma
j) Una tasa nominal trimestre vencido equivalente al 22.5% N-sa

8.17 Dado el 37% N170dv. Hallar una tasa efectiva mensual equivalente. Base 365 días.

8.18 Dado el 25% N200dv. Hallar una tasa N300dv equivalente. Base 360 días

8.19 Carolina y Juan acaban de casarse y quieren comprar un apartamento que a la fecha de hoy cuesta la suma de $80´000.000. No obstante que ellos disponen del dinero para comprarlo de contado; han decidido adquirir un préstamo, para destinar el capital en un negocio que les asegura una renta del 5% NT.

Para la financiación del apartamento, después de consultar el mercado, encuentran las siguientes alternativas: 1) Una caja de compensación les ofrece un crédito por la totalidad durante 60 meses, teniendo que pagar al final la suma de $105´000.000; 2) Por su parte, el Banco Medellín les ofrece la financiación del 100% durante 12 semestres, pagando al final $110´000.000.

a) ¿Cuál alternativa es la mejor para financiar el apartamento?
b) ¿Cuál es la rentabilidad (interés efectivo anual) del negocio en el cual quieren invertir?
c) Considerando solo la rentabilidad y la mejor opción de financiamiento; ¿Qué puede usted decir de la decisión de los recién casados?

8.20 Un inversionista estudia tres proyectos: el primero tiene un rendimiento del 25% N-m; el segundo del 30% EA y el tercero del 2,5% EM. ¿Cuál de los tres proyectos es más atractivo?

8.21 Un concesionario de vehículos ofrece su último modelo que tiene un valor de $75´000.000 con el siguiente plan de financiación: Una tercera parte de contado, el resto se paga a un año. ¿Cuánto deberá pagar un cliente que compra el vehículo el 15 de diciembre, si el concesionario cobra una tasa de interés del 22,5% N-m?

8.22 ¿Qué banco es preferible para depositar los ahorros: el banco A que ofrece una tasa de interés del 7% N-t o el banco B que ofrece una tasa del 7,25% N-s?

8.23 Una persona ahorra $23´000.000 en una entidad bancaria el 10 de agosto del 2011; ¿Cuándo tendrá en su cuenta $27´500.000, si la entidad bancaria reconoce una tasa de interés del 8,5% anual?

8.24 Un prestamista desea ganar el 8% EA, sobre un préstamo, con interés capitalizables trimestralmente. ¿Qué tasa de interés nominal que debería cobrar?

8.25 ¿Qué es más conveniente: invertir en una sociedad que garantiza duplicar el capital invertido en 10 años, o depositar el dinero en una cuenta de ahorros, que ofrece una tasa de interés del 6% N-t?

8.26 Determinar la tasa N-ta a través de la cual se triplica un capital en cuatro años.

8.27 Usando la comparación de tasas, decidir la mejor alternativa entre invertir en un fondo de inversión que paga el 25% N-tv o invertir en una empresa comercial que garantiza cuadruplicar el capital en 43 meses.

8.28 Una persona tiene tres deudas: la primera de ellas por $7´000.000 con vencimiento en 10 meses y una tasa de interés del 23% EA; la segunda por $5´500.000 con vencimiento en 15 meses y una tasa del 25% N-m; y la tercera por $7´520.000 con vencimiento en 18 meses y una tasa del 12% N-t. ¿Qué tasa de interés N-s debería ofrecerle una entidad financiera, para que esta persona acceda a vender su deuda?

8.29 Una persona compra a crédito un equipo por valor de $125´500.000 y se le ofrecen tres modalidades de pago:

a) Una cuota inicial del 40% y un pago dentro de un año de $90´360.000
b) Un pago único dentro de 24 meses por valor de $188´250.000
c) Un pago de 100´000.000 en 6 meses y un pago de $95´200.000 en el mes 20.

¿Qué alternativa debería tomar la persona comparando las tasas de interés efectivas ofrecidas?

8.30 Un concesionario de vehículos ofrece su último modelo que tiene un valor de $95´000.000 con el siguiente plan de financiación: la mitad de contado y a los dos años un pago único de $65´000.000. ¿Qué tasa de interés N-t está aplicando el concesionario?

8.31 Una persona tiene dos deudas bancarias una de $25´000.000 pagadera en 90 días y otra de $40´000.000 pagadero en 28 semanas. Si la persona desea cambiar la forma de cancelarlas mediante dos pagos iguales con vencimiento a los 5 meses y los 12 meses respectivamente ¿Cuál será el valor de los pagos, suponiendo una tasa del 30% N-m?

8.32 Una empresa tiene dos deudas con una entidad financiera. La primera deuda es de $100 millones, paga una tasa de interés del 30% N-m, se adquirió hace 6 meses y vence hoy; la segunda por $200 millones, a una tasa de interés del 32% N-m, se contrató hace 2 meses y vence en 4 meses. Debido a la incapacidad de cancelar la deuda, la empresa propone a la entidad refinanciar las deudas; llegándose a un acuerdo entre las partes, bajo las siguientes condiciones: a) hacer 3 pagos iguales con vencimiento en 6, 9 y 12 meses, con una tasa de interés del 33% N-m ¿Cuál será el valor de cada pago?

8.33 Hoy se contrae una deuda por $50 millones con intereses al 30% N-t y vencimiento en 8 meses; de otra parte se tiene una deuda por $80 millones tomada hace 6 meses con intereses al 32% N-s y vencimiento en un año. ¿En qué fecha deberá hacer un pago de $170 millones para cancelar las deudas suponiendo que el rendimiento normal del dinero es del 2.5% EM?

8.34 Hallar el tiempo en que debe hacerse un pago de $30 millones, para cancelar dos deudas: una de $15 millones, con vencimiento en 8 meses y otra de $15 millones con vencimiento en 26 meses. Suponga una tasa del 12% N-t

8.35 Una persona tiene deudas así: $800.000 con vencimiento en 6 meses; $1´000.000 en 15 meses y $900.000 en 20 meses. Por problemas de liquidez la persona le propone a la entidad financiera cancelar las deudas en dos pagos el primero por $700.000 en 15 meses, ¿En qué fecha deberá pagar $2´850.600 para saldar las deudas suponiendo que el dinero rinde el 8% ET?

8.36 La empresa de proyectos "MMM", en el desarrollo de un proyecto realizó inversiones que suman los $967 millones de pesos; además el proyecto registró ingresos por valores de $752 y $420 millones en los meses 15 y 20 respectivamente. ¿Cuál fue la rentabilidad que generó el proyecto?

8.37 Una empresa tiene tres deudas bancarias: la primera por valor de $23´00.000 a una tasa de interés del 29% EA fue adquirida el 15 de enero del 2011 y tiene vencimiento el 15 de enero del 2013; la segunda por valor de $25´000.000 a una tasa del 34% N-t fue adquirida el 01 de junio del 2011 y vence un año más tarde; y la tercera por valor de $65´000.000 a una tasa del 45% N-m adquirida el 15 de julio del 2011 y vencimiento dos años más tarde. La empresa se declara en quiebra y en la reunión con los acreedores re estructura sus pasivos con las siguientes fechas y montos: primer pago el 15 de junio del 2012 por valor de $45´200.000; segundo pago el 15 de diciembre del 2012 por valor $55´000.000 y el tercer pago el 15 de diciembre del 2013 por valor de $55´600.800. ¿Cuál fue la tasa de interés de la renegociación?

8.38 Una empresa tiene dos deudas con un banco, la primera deuda es de $10´000.000 con interés del 28% N-s, se adquirió hace 6 meses y hoy se vence; la segunda por $20´000.000 al 30% N-m se contrató hace 2 meses y vence en 4 meses, debido a la incapacidad de cancelar la deuda, la empresa propone al banco refinanciar el total de su deuda; se llega a un acuerdo de tres pagos iguales con vencimiento en los meses 6, 9 y 12, a partir de la fecha y con una tasa del 34% N-m. ¿Cuál es el valor de cada pago?

8.39 Una empresa metalmecánica compra el día de hoy una máquina, la cual tiene una vida útil de 5 años; en esa fecha será necesario remplazar la máquina y se estima que para esa fecha esta costara $20´000.000. La máquina actual para esa época podrá ser vendida por $5´000.000. Determinar el valor de dos depósitos iguales que se deben hacer el día de hoy y al inicio del año 3 en dos CDT que rinden 9.2% EA, de forma que se pueda comprar la maquina en el año 5

8.40 Una empresa debe cancelar tres deudas durante el año; la primera deuda de $2´000.000, por la cual se cobra un interés del 24%N-t, vence en tres (3) meses; la segunda de $4´000.000, por la cual se cobra un interés de 3% EM, vence en nueve (9) meses y la tercera de $1´500.000, por la que se cobra un interés igual a la primera, vence en 12 meses. Debido a la incapacidad de pago, la empresa propone al banco refinanciar la deuda en dos pagos en los meses 18 y 24; el primero de ellos por $5´000.000.

a) Si el banco en esta nueva transacción cobra un interés del 30% N-ma, de qué valor deberá ser el pago del mes 24
b) ¿Qué tasa de interés EM está cobrando el banco en la nueva transacción?

8.41 Para la empresa GGG calcular la fecha de vencimiento promedio de sus obligaciones que son: $50 millones a dos años de plazo; $60 millones a cuatro años de plazo y $10 millones a cinco años de plazo. La tasa de interés que se aplica en los tres casos es del 8% EA.

8.42 Una empresa quiere comprar una maquinaria y le ofrecen los siguientes formas de pago:

- ✓ $ 90 millones de contado
- ✓ $ 40 millones de contado y tres cuotas anuales de $20 millones.

Si la tasa de interés que aplica la entidad financiera es del 12,5% N-s. ¿Qué forma de pago es más conveniente?

8.43 ¿Con que pagos iguales a 1, 2 y 3 años de plazo puede remplazarse una obligación de $120 millones que tiene vencimiento dentro de 4 años, si la tasa de interés que se aplica es del 12,5% N-t?

8.44 Un comerciante compra mercancías por $120 millones y paga $20 millones al contado; $40 millones en un pagare a 3 meses y $60 millones a 6 meses. Hallar el valor de contado de la mercancía, si la tasa de interés que cobra el vendedor es del 10,5% EA

8.45 Una empresa debe pagar $56 millones dentro de 2 años; si el banco acepta un pago de contado de $20 millones y nuevo pagare a 3 años. Hallar el valor del nuevo pagare, si el banco aplica una tasa de interés del 11% ES

8.46 Un artículo fabricado en Inglaterra, se vende en Colombia en $50.000. Suponiendo los siguientes indicadores económicos: cambio actual £ 1= $4.000, inflación en Inglaterra del 2%, devaluación del peso con respecto a la Libra Esterlina 19% e inflación en Colombia del 3% ¿Cuánto valdrá el artículo en Colombia y en Inglaterra al final del año?

8.47 Un artículo fabricado en Francia, se vende en Colombia en $75.000. Suponiendo los siguientes indicadores económicos: cambio actual € 1= $2.520, inflación en Francia del 3,5% y revaluación del peso con respecto al Euro 7% e inflación en Colombia del 4,5% ¿Cuánto valdrá el artículo en Colombia y en Francia al final del año?

8.48 Un artículo fabricado en Colombia tiene un costo de $68.000, cuando la tasa de cambio es igual US$1 = $1800. Suponiendo que el (Índice de Precios al Productor) IPP del sector que lo produce en Colombia es del 8%, y que la devaluación del peso frente al dólar es del 5,5%. Hallar el precio del artículo en Colombia y los Estados Unidos después de un año.

8.49 Dos inversionistas de origen sueco, uno residente en Suecia y el otro en Colombia, han decidido realizar un negocio en Suecia, en el cual cada uno aportará el 50%. El negocio exige una inversión inicial de €300.000; transcurridos dos años la inversión devolverá la suma de €355.000. Hallar las tasas de rentabilidad totales y reales para cada uno de los socios suponiendo que los siguientes indicadores económicos se mantienen constantes durante los 2 años.

a) Tasa promedio de inflación en Colombia 8% anual
b) Tasa promedio de inflación en Suecia 2,5% anual
c) Tasa de devaluación del peso frente al dólar: primer año 9%, segundo año 10% y tercer año 12%, devaluación euro frente al dólar: años 1 y 2 el 2%, para el tercer año hay una revaluación del 3%
d) Cambio actual 1 US$ = € 2,23 y 1 US$= $1.700.

8.50 El señor Susuki residente en el Japón y Sr. Smith residente en Estados Unidos se asocian para comprar una Empresa en Colombia, el valor de cada acción es de $10.550 y esperan venderla al final de 5 meses en $12.880.

a) Calcule la rentabilidad anual total y la rentabilidad anual real de cada uno de los socios
b) ¿Cuánto tendrá cada uno en su respectiva moneda al final de los 5 meses?

Tome en cuenta la siguiente información:

- ✓ Inflación en: Colombia 6%, en Estados Unidos 4.5%, en Japón 2.5%
- ✓ Tasa de devaluación del peso frente al dólar 9%
- ✓ Tasa de Devaluación del dólar frente al Yen 1,5%
- ✓ Cambio actual US$1 = $1750; US$1 = Yen 95.

8.51 Un empresario tiene actualmente contratado un préstamo con una entidad financiera a la tasa del TCC + 4 puntos. ¿Cuál debe ser el spread en puntos básicos de forma tal que sea indiferente el préstamo en la entidad o en el mercado de capitales de Londres? Suponga los siguientes índices:

TCC = 12,5% N-ta, i_{DEV} = 22% EA, Libor = 5,2% EA

8.52 Si en el problema anterior el valor de la Empresa de $75 mil millones de pesos y el Sr. Susuki participa en el negocio con el 35% de la compra y Sr. Smith con el resto, determinar la cantidad que recibirá cada uno en su respectiva moneda.

8.53 En el país imaginario A cuya moneda es el IMA, un par de zapatos vale IMA 35.000, existe una inflación del 18% y la tasa de cambio actual es de US$1 =IMA 1.000. En otro país X rige el dólar americano y se prevé una inflación promedio del 6.5% anual. Al final de un año; ¿Cuál debe ser la tasa de devaluación en el país A con respecto al dólar a fin de no perder competitividad en los mercados de X?

8.54 Un inversionista internacional desea que todas sus inversiones le den una rentabilidad real del 6,5%. ¿Qué tasa efectiva anual debe ofrecérsele en Ecuador si la inflación esperada es del 2,5% de forma tal que satisfagan los deseos del inversionista?

8.55 Un inversionista internacional desea que todas sus inversiones le den una rentabilidad real del 8%. ¿Qué tasa efectiva anual debe ofrecérsele en Colombia si la inflación esperada es del 8,5% de forma tal que satisfagan los deseos del inversionista?

8.56 Hallar la Tasa Efectiva anual de:

a) DTF + 2 puntos
b) IPC + 6 puntos
c) Libor + 3 puntos
d) DTF - 5 puntos
e) Libor – 2 puntos

Suponga: DTF = 12,5% TA, IPC = 5,5%, y Libor = 6,14 % N-s

8.57 Hallar X de las siguientes igualdades:

a) IPC + 8 = CM + X
b) CM + 5 = TCC + X
c) DTF + 5.6 = IPC + X
d) DTF + X = TBS(CF 180 días) + 8
e) DTF + X = TCC + 6.5

Suponga: IPP = 6%; IPC = 8.5%; CM = 12% (CM = corrección monetaria); DTF = 15%TA; TCC = 15.5%TA; TBS (CF 180 días) = 19.27%EA; TBS (Bancos 360 días) = 19.19%EA. **Observación:** TBS (CF 360 días) significa Tasa Básica Del Sector corporaciones financieras a 180 días.

8.58 Hallar X de las siguientes igualdades:

a) DTF + X = IPC + 4
b) CM + 4 = IPP + X
c) IPP + X = DTF + 2
d) IPC + 2 = IPP + X
e) IPP + 5 = CM + X

Suponga: IPP = 5%; IPC = 4.5%; CM = 8% (CM = corrección monetaria); DTF = 12%TA; TCC = 12,5%TA; TBS (CF 90 días) = 11.2%EA; TBS (Bancos 180 días) = 8.19%EA. **Observación:** TBS (CF 180 días) significa Tasa Básica Del Sector corporaciones financieras a 180 días.

8.59 Un ahorrador consigna en una corporación de ahorro y vivienda la suma de $5´000.000 el día 1 de abril y el día 20 de julio consigna $4´000.000. ¿Cuánto podrá retirar el 31 de diciembre, si la corporación paga el 27% efectivo anual de corrección monetaria para los meses de abril y mayo y el 25% efectivo anual para el resto del período (junio-diciembre)

a) Elabore los cálculos en pesos
b) Elabore los cálculos en UVR sabiendo que el primero de abril 1 UVR = $1.850

8.60 En Colombia se estima que la corrección monetaria del primer año será del 12% y la del segundo año del 8%; sobre esta base, se pide:

a) Calcular la cantidad que recibirá un ahorrador antes de impuestos si ha depositado la suma de $8´500.000 durante dos años en una cuenta de ahorros en UVR que garantiza pagar la corrección monetaria más el 4% EA de interés sobre los UVR ahorrados.

b) Calcule la rentabilidad obtenida antes de impuestos suponiendo que el cambio actual es 1 UVR = $3.750
c) Si la retención en la fuente es del 7% sobre los intereses, calcular la rentabilidad después de impuestos
d) Calcular la cantidad final que le entregarán después de impuestos

8.61 Una empresa constituye con un banco un CDT con plazo de 240 días por $6´500.000. El banco reconoce una tasa de interés del 14% N-ta y el estado colombiano aplica una retención en la fuente del 4,5%. Determinar:

a) La rentabilidad antes de impuestos.
b) La rentabilidad después de impuestos y
c) El valor que recibe la empresa al vencimiento
d) Si la inflación fue del 12%; determinar la tasa real obtenida.

8.62 Un padre de familia quiere realizar un ahorro en un CDAT un año antes de iniciar la Universidad su hijo. Si el costo estimado de la matrícula en la Universidad en un año es de $5´500.000 y el banco reconoce una tasa de interés del 9,5% N-s; ¿Por cuánto deberá constituir el CDAT? Suponga que el estado colombiano aplica 4% de retención en la fuente.

8.63 Una empresa dispone de $38´500.000 para hacer un ahorro en un CDAT el cual está destinado para reponer una máquina que se estima que en el futuro tendrá un costo de 45´500.000. Si el banco reconoce una tasa de interés del 9,5% EA y el estado colombiano aplica una retención del 4% sobre utilidades; ¿Por cuánto tiempo la empresa deberá constituir el CDAT, para recibir el dinero necesario para comprar de contado la maquinaria?

8.64 Un comerciante desea, durante 36 meses, duplicar la inversión a través del ahorro en un CDAT. Si el estado colombiano aplica una retención en la fuente del 3,5%; ¿Qué tasa de interés deberá reconocerle el banco al comerciante?

8.65 Una empresa manufacturera desea reponer una máquina dentro de 3 años y medio, la cual se estima para esa fecha tendrá un costo de $42´300.800. Si el banco reconoce el 12% EA, y el estado aplica una retención en la fuente del 3%; ¿Qué valor deberá ahorrar la empresa a la fecha?

8.66 Una empresa quiere invertir sus excedentes del periodo anterior, los cuales suman $320´650.000, para esto recibe de su asesor bancario dos posibilidades: a) Un CDAT a 180 días para el cual se reconoce una tasa de interés del 11.0% EA o b) Una cuenta de ahorros en la cual se paga 0.6% EM. El estado colombiano aplica una retención en la fuente del 3,5% sobre las utilidades de inversiones fijas

a) ¿Cuál de las dos opciones es la mejor para la empresa?
b) ¿Cuánto recibirá al cabo de seis meses en cada una de las dos opciones?
c) ¿Cuál será la rentabilidad antes y después de impuestos en cada una de las opciones?

8.67 Si un inversionista desea obtener una rentabilidad real del 9,5%; ¿Qué tasa de interés EA le deberá reconocer una entidad bancaria donde colocara sus ahorros en un CDAT? La inflación se estima en 5,5%.

8.68 Si un inversionista desea que todas sus inversiones tengan una rentabilidad real del 8,5%. El recibe las siguientes ofertas del sector financiero:

a) El banco Medellín ofrece en los CDAT una tasa de interés del 8% ES.
b) El banco Antioquia ofrece en una cuenta de ahorros una tasa de interés del 3% ET
c) El banco de Colombia ofrece en su fondo de inversiones a la vista una tasa del 13% EA

Si la inflación proyectada es del 5%; ¿Cuál oferta debería aceptar?

8.69 Un comerciante, al cual se le deben $60´000.000, recibe del deudor dos acuerdos de pago, así:

- ✓ El pago a través de un CDAT con valor nominal de $58´000.000, que vence en seis meses, y para el cual está pactada una tasa de interés del 24% N-m.
- ✓ El pago a través de un pagare que vence en tres meses con valor nominal de $61´000.000 y para la cual está pactada un interés del 24% N-b.

El comerciante estima su costo de capital en una tasa del 0,8% EA; de otro lado, se sabe que la inversión en depósito a término fijo se le aplica una retención en la fuente del 3,5%, sobre las utilidades.

a) ¿Cuál de las dos opciones es la más aconsejable?
b) Debería aceptar alguna de las propuestas de pago
c) En cada caso; ¿Cuánto debería recibir neto para saldar la deuda?

8.70 Una empresa tiene las dos siguientes opciones de inversión: a) un banco le reconoce en un depósito a término fijo el 5% ES y un fondo de inversión le reconoce una tasa promedio del 10,5 N-m. Si la inflación estimada es del 3% y el estado colombiano aplica una retención en la fuente para ambos tipos de inversión

a) ¿Cuál de las dos opciones es la mejor para la empresa?
b) ¿Cuál será la rentabilidad real antes de impuestos, en cada caso?
c) ¿Cuál será la rentabilidad real después de impuestos, en cada caso?

8.71 Una empresa tiene las dos siguientes opciones de inversión: a) un banco en el extranjero que le reconoce en un depósito a término fijo en USD$ el 4,5% ET y un fondo de inversión en Colombia que le reconoce una tasa promedio del 9,5 N-m. Si la inflación estimada es del 4,5% y devaluación de 2%. En ambos casos las ganancias están exentas del pago de impuestos.

a) ¿Cuál de las dos opciones es la mejor para la empresa?
b) ¿Cuál será la rentabilidad real antes de impuestos, en cada caso?
c) ¿Cuál será la rentabilidad real después de impuestos, en cada caso?

8.72 Un exportador recibe una aceptación bancaria por sus mercancías la cual vence en 180 días, tiene una tasa de emisión del 28%NS. El mismo día en que le entregan la aceptación la ofrece en bolsa. Si las comisiones de compra y de venta son de 0,4% y 0.6% respectivamente, calcular:

a) La tasa de registro
b) La tasa del comprador
c) La tasa del vendedor
d) El precio de registro

8.73 Un inversionista adquirió una Aceptación Bancaria, suscrita en $250 millones, el 14 de junio de 2001; el título aplica una tasa de interés del 22.5% EA y un vencimiento el 15 de mayo del 2002. Un segundo inversionista lo quiere adquirir el día 10 de septiembre del 2001 a una tasa del 33% EA.

a) ¿Cuál será la utilidad en pesos del primer inversionista?
b) ¿Cuál es la rentabilidad del primer inversionista?

8.74 El señor González posee una aceptación bancaria por valor de $100 millones y la vende en Bolsa faltándole 87 días para su maduración. Esta es adquirida por el señor Muñoz, el cual desea ganar el 32% después de pagar la comisión, pero antes de impuestos. Si la comisión de compra es del 0.4% y la de venta el 0.375% usando un año de 360 días determinar:

a) La tasa de registro
b) El precio de registro
c) La tasa de cesión
d) El precio de cesión
e) El precio al comprador
f) La retención en la fuente
g) La cantidad que debe pagar el Señor Muñoz
h) La cantidad que recibe el señor González

8.75 El señor Pérez tiene una aceptación bancaria por valor de $950 millones. Si él quiere ganar el 28% después de pagar la comisión y antes de impuestos. Por cuanto la deberá vender al Sr. Sandoval 90 días antes. La comisión de compra es del 0.25% y la de venta el 0.3% usando un año de 360 días

Anualidades y gradientes

UNIDAD 3: ANUALIDADES Y GRADIENTES

OBJETIVO

Al finalizar la unidad los estudiantes estarán en capacidad de calcular operaciones financieras en las cuales la contraprestación se hace a través de cuotas periódicas. Para esto deducirá los modelos matemáticos para calcular el valor actual, futuro, interés y número de pagos para diferentes tipos de operaciones y aplicará estos en situaciones de la vida empresarial.

CONTENIDO

1. *Anualidades*
2. *Anualidades anticipadas*
3. *Anualidades diferidas*
4. *Anualidades perpetuas*
5. *Gradientes*
6. *Ejercicios resueltos*
7. *Ejercicios propuestos*

Introducción

Es corriente que se pacte entre el deudor y acreedor el pago de una obligación financiera en cuotas periódicas a una tasa de interés, durante un tiempo determinado. Cuando las cuotas son constantes la operación recibe el nombre de anualidad, por el contrario si las cuotas son cambiantes se le denomina gradiente. Cuando, por ejemplo, una persona compra un automóvil pagado una cuota inicial y el resto del dinero en cuotas mensuales iguales durante un tiempo determinado, se configura una operación financiera de anualidades; si por el contrario las cuotas crecen con la inflación por ejemplo, la operación se denomina gradiente.

Anualidad o gradiente es un sistema de pagos a intervalos iguales de tiempo; de esta forma, no significa pagos anuales, sino pagos a intervalo regular; definida así en la vida cotidiana se encuentran innumerables ejemplos de este tipo de operaciones: el pago de dividendos, los fondos de amortización, los pagos a plazos, los pagos periódicos a las compañías de seguros, los sueldos, y en general todo tipo de renta son, entre otros, ejemplos de anualidades o gradientes.

En este tipo de operaciones se distinguen los siguientes elementos: la renta o pago, el periodo de pago o de renta, el tiempo o plazo y la tasa de interés. La renta se define como el pago periódico, también denominado como cuota o deposito. El periodo de renta es el tiempo que se fija entre dos pagos consecutivos; el tiempo o plazo de la operación es el intervalo de tiempo que sucede desde el inicio del primer periodo de pago y el final del último. Finalmente la tasa de interés es el tipo de interés que se acuerda en la operación.

Dependiendo de la forma como se pacten los montos y periodos de pago las operaciones se pueden clasificar en ordinarias, variables, anticipadas, diferidas, perpetuas. En esta unidad de aprendizaje se analizan cada una de ellas determinándose los modelos matemáticos que permiten simular y analizar estos tipos de operación financiera.

1. Anualidades

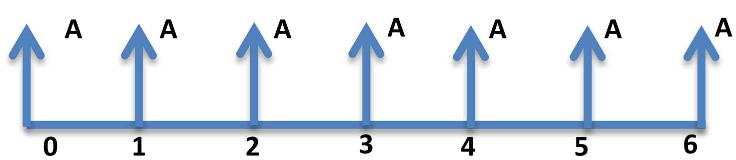
Es una serie de pagos periódicos iguales que cumple con las siguientes condiciones:

- Los pagos (rentas) son de igual valor.
- Los pagos se hacen a iguales intervalos de tiempo
- A todos los pagos (rentas) se les aplica la misma tasa de interés
- El número de pagos y periodos pactados es igual

Las anualidades que cumplen con estas condiciones son las ordinarias o vencidas y las anticipadas. Los modelos matemáticos que se deducen para el cálculo y análisis de este tipo de anualidades tienen en cuenta las anteriores condiciones; por lo cual, es necesario que al momento de aplicarse las formulas a situaciones particulares, se asegure que se cumplan dichas condiciones.

Ejemplo 1.

Determinar si el siguiente sistema de pagos corresponde a una anualidad.

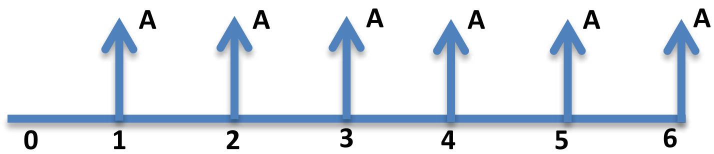


Respuesta

El sistema de pagos no corresponde a una anualidad ya que no obstante los pagos son iguales y se hacen a intervalos de tiempo igual, el número de pagos no es igual al número de periodos

Ejemplo 2.

Determinar si el siguiente sistema de pagos corresponde a una anualidad.

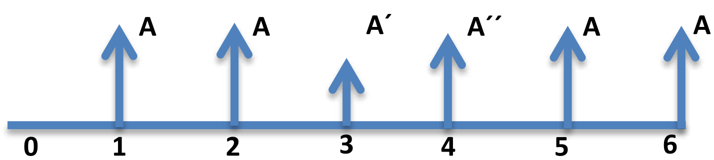


Respuesta

Si se supone que la tasa de interés que se aplica a cada pago es la misma, se puede afirmar que el sistema corresponde a una anualidad teniendo en cuenta que los pagos son iguales, se hacen a intervalo de tiempo igual y los periodos pactados corresponden al número de pagos. Es la forma general de una anualidad ordinaria o vencida

Ejemplo 3.

Determinar si el siguiente sistema de pagos corresponde a una anualidad.

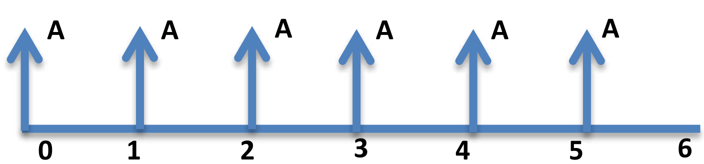


Respuesta

El sistema de pagos no corresponde a una anualidad ya que no obstante que el número de pagos es igual al número de periodos y los intervalos de tiempo son iguales los pagos no son iguales.

Ejemplo 4.

Determinar si el siguiente sistema de pagos corresponde a una anualidad.



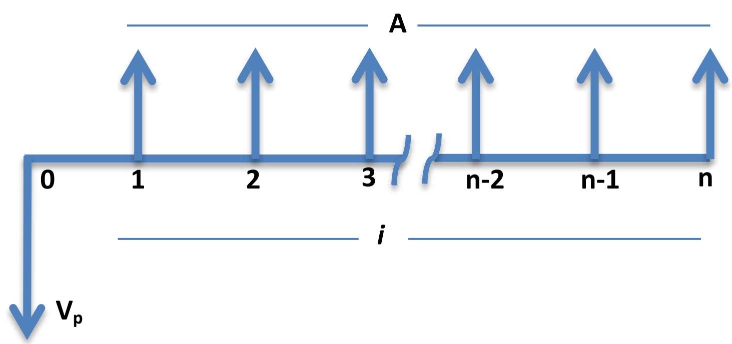
Respuesta

Si se supone que la tasa de interés que se aplica a cada pago es la misma, se puede afirmar que el sistema corresponde a una anualidad teniendo en cuenta que los pagos son iguales, se hacen a intervalo de tiempo igual y los periodos pactados corresponden al número de pagos. Es la forma general de una anualidad anticipada

1.1 Valor presente de la anualidad

Para la deducción del modelo matemático se considera una operación en la cual un préstamo V_p se paga en cuotas iguales A, a una tasa de interés efectiva por periodo i, durante n periodos. La situación se muestra en la grafica No 7.

GRAFICA NO 7 – VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD



Para calcular el valor presente se utiliza la formula (12), considerando cada valor de A como un valor futuro y sumando todos los resultados en 0.

$$V_p = \frac{V_f}{(1+i)^n}$$

$$V_p = \frac{A}{(1+i)^1} + \frac{A}{(1+i)^2} + \frac{A}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{A}{(1+i)^{n-2}} + \frac{A}{(1+i)^{n-1}} + \frac{A}{(1+i)^n}$$

Factorizando A, se obtiene:

$$V_p = A\left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^{n-2}} + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n}\right] \quad (a)$$

Multiplicando esta por el factor $\frac{1}{(1+i)}$, esto da como resultado la siguiente ecuación:

$$\frac{V_p}{(1+i)} = A\left[\frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \frac{1}{(1+i)^4} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n} + \frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right] \quad (b)$$

Restando la ecuación (a) de la (b), se obtiene:

$$\frac{-i}{(1+i)} V_p = A\left[\frac{1}{(1+i)^{n+1}} - \frac{1}{(1+i)^1}\right]$$

Despejando de este resultado el V_p, se obtiene:

$$V_p = \frac{A}{-i}\left[\frac{1}{(1+i)^n} - 1\right]$$

La cual también se puede expresar como:

$$V_p = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]; para\ i \neq 0 \quad (23)$$

Donde:

V_p: $Valor\ presente\ de\ una\ serie\ de\ pagos$

A: $pagos\ periodicos$

i: $tasa\ efectiva\ de\ interes\ a\ la\ cual\ se\ trasladan\ los\ pagos\ a\ valor\ presente$

n: $numero\ de\ periodos\ en\ los\ cuales\ se\ hacen\ los\ pagos$

El factor $\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$ suele nombrarse como: $(V_p/A,\ i\%,\ n)$. Este significa el factor para hallar V_p , dado el pago o renta A, la tasa de interés efectiva i a la cual son trasladados los pagos al valor inicial y el número de pagos n. La formula (23) se puede escribir en notación clásica, como:

$$V_p = A(V_p/A, i\%, n); para\ i \neq 0 \quad (24)$$

Ejemplo 5.

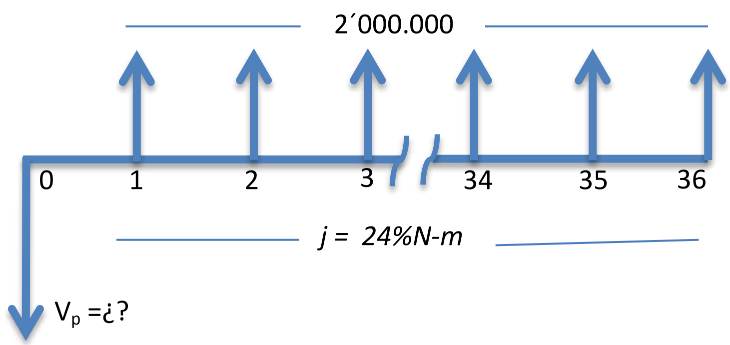
Un pequeño empresario para reponer su equipo de producción hoy, está en capacidad de realizar 36 pagos de $2´000.000 mensuales, a partir del próximo mes; si el banco que financia la operación cobra una tasa de interés del 24% N-m. ¿De cuánto dinero dispondrá para la reposición de los equipos?

Solución

Parámetros
Pagos: $2´000.000
Numero de pagos: 36
Tasa de interés: 24% N-m

Representación gráfica

Para determinar lo que el pequeño empresario tendrá disponible para reposición de equipos, se debe hallar el valor presente de los pagos mensuales. En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Para determinar el valor presente, lo primero que se debe hacer es hallar la tasa efectiva mensual a partir de la tasa nominal, para esto se utiliza la formula (15):

$$j = i \times m$$

$$i = \frac{0{,}24}{12} = 0{,}02 = 2\%\ EM$$

Teniendo la tasa efectiva de interés se procede a calcular el valor presente, considerando $(V_p/2´000.000\,,2\%\,,36)$. Nótese que la tasa efectiva de interés coincide los periodos en los cuales se realiza los pagos. El calculo se realiza utilizando la formula (23)

$$V_p \;=\; A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$V_p \;=\; 2´000.000\left[\frac{1-(1+0{,}02)^{-36}}{0{,}02}\right] = 50´977.684{,}96$$

Respuesta

El pequeño empresario dispondrá de $50´977.684,96 para la reposición de los equipos.

1.2 Pagos o renta a partir del valor presente

De la ecuación (23) se puede deducir el factor para hallar A, dado el valor presente V_p, o lo que es igual $(A/V_p\,, i\%, n)$.

$$A = V_p\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right] \quad (25)$$

$$V_p = V_p(A/V_p\,, i\%\,, n);\, para\; i \neq 0 \quad (26)$$

Los símbolos tienen el mismo significado que en la ecuación (23)

Ejemplo 6.

Una persona desea comprar un automóvil que tiene un precio de $64´000.000 a través de un crédito. Si la empresa de financiamiento ofrece las siguientes condiciones: préstamo del 90% del valor total en cuotas iguales durante 60 meses y una tasa efectiva de interés del 0,95% EM, ¿Cuál será el valor de la cuota mensual?

Solución

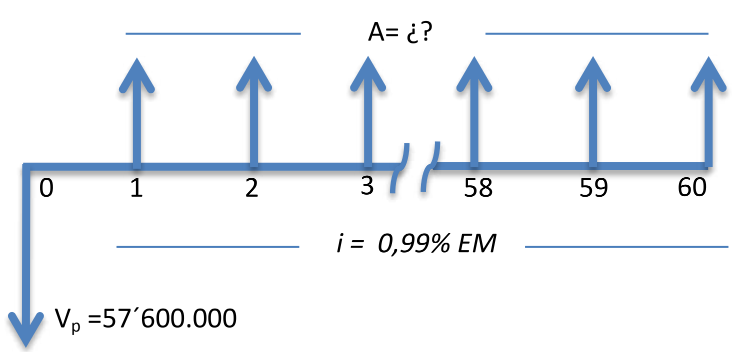
Parámetros
Valor del automóvil: $64´000.000
Financiación: 90% del valor total
Numero de pagos: 60
Tasa de interés: 0,95% EM

Representación gráfica

Considerando que solo se financia el 90% del valor del vehículo el préstamo debe ser por un valor de:

$$Prestamo = V_p = 64´000.000 \times 0{,}9 = 57´600.000$$

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Para determinar el valor de los pagos mensuales, $(A/V_p\,, i\%\,, n)$, para lo cual se aplica directamente la formula (25), considerando la tasa efectiva de interés mensual:

$$A = V_p \left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right]$$

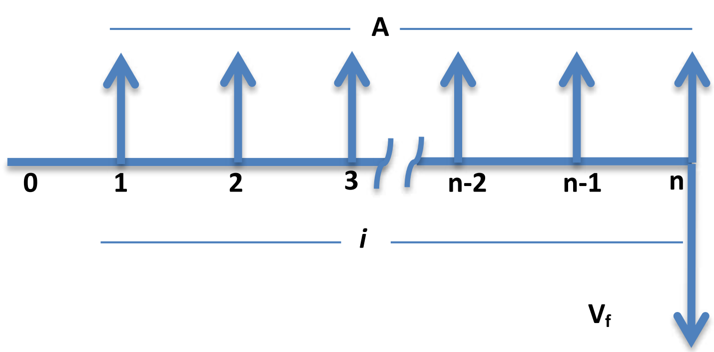
$$A = 57´600.000 \left[\frac{0,0095}{1-(1+0,0095)^{-60}}\right] = 1´263.884,42$$

Respuesta
El valor de la cuota mensual será de $1´263.884,42

1.3 Pagos o renta con base en el valor futuro

Igual que se hizo en el la deducción anterior, para determinar este modelo, se considera una operación en la cual el valor final V_f es equivalente a n pagos iguales A, a una tasa de interés efectiva por periodo i, durante n periodos. La situación se muestra en la grafica No 8.

GRAFICA NO 8 – VALOR FUTURO DE UNA ANUALIDAD



Para determinar el valor futuro $(V_f/A, i\%, n)$ remplazamos en la formula (24) el valor presente en función del valor futuro, formula (12).

$$V_p = V_f(1+i)^{-n} \quad (a)$$

$$A = V_p \left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right] \quad (b)$$

Remplazando (a) en (b), se obtiene:

$$A = V_f(1+i)^{-n} \left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right]$$

$$A = V_f \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right] \quad (26)$$

$$A = V_f\left(A/V_f\,, i\%\,, n\right) \quad (27)$$

Ejemplo 8.

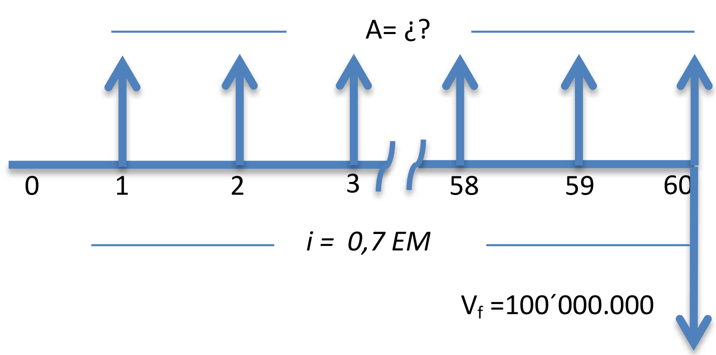
De cuánto deberá ser el ahorro mensual de una persona que proyecta adquirir una casa de $100´000.000 dentro de cinco años, si la fiducia le asegura una tasa de interés efectiva mensual del 0,7%.

Solución

Parámetros
Valor futuro: $100´000.000
Numero de pagos: 5 años = 60 meses (inicia un mes después de tomar la decisión)
Tasa de interés: 0,7% EM

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Para determinar los pagos del ahorro $\left(A/V_f\,, i\%\,, n\right)$ se aplica directamente la formula (26), considerando la tasa efectiva de interés mensual:

$$A = V_f \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$A = 100´000.000 \left[\frac{0{,}007}{(1+0{,}007)^{60} - 1}\right] = 1´346.836{,}88$$

Respuesta
Se deberá realizar un ahorro de $1´346.836,88 mensual

1.4 Valor futuro de la Anualidad

De la formula (26) se puede determinar el valor futuro en función de los pagos, así:

$$V_f = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \quad (28)$$

$$V_f = A(V_f/A, i\%, n) \quad (29)$$

Ejemplo 7.

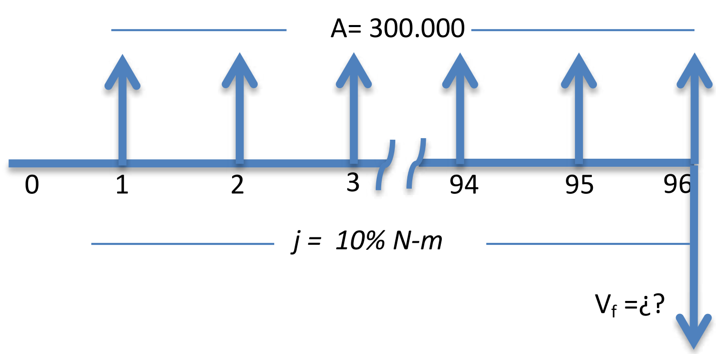
Un padre de familia quiere conocer de cuánto dispondrá para la educación superior de su hijo, si inicia un ahorro mensual de 300.000, un mes antes de que cumpla 10 años y hasta cuando cumpla 18, edad en la cual estima iniciara los estudios universitarios; la fiducia donde se realiza el ahorro asegura una de interés del 10% N-m

Solución

Parámetros
Valor de los pagos: $300.000
Numero de pagos: 8 años = 96 meses
Tasa de interés: 10% N-m

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Para determinar el valor futuro del ahorro $(V_f/A, i\%, n)$ inicialmente se debe hallar la tasa de interés efectiva mensual, para esto se aplica la formula (15), considerando que la tasa de interés que ofrece la fiducia esta expresa en nominal:

$$j = i \times m$$

$$i = \frac{0{,}10}{12} = 0{,}0083 = 0{,}833\%\ EM$$

Con esta tasa de interés efectiva se puede calcular, $(V_f/A, i\%, n)$, para lo cual se aplica directamente la formula (28), considerando la tasa efectiva de interés mensual:

$$V_f = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$V_f = 300.000\left[\frac{(1+0{,}0083)^{96} - 1}{0{,}0083}\right] = 43´776.403{,}87$$

Respuesta
El Padre de familia dispondrá de $43´776.403,87 cuando su hijo cumpla 18 años

1.5 Número de pagos con base en el valor futuro

Si se conocen el V_f, los pagos A, y la tasa de interés i, de la ecuación (28) se puede determinar el valor de n; es decir, el número de pagos. Lo mismo se podría hacer a partir de la ecuación (23) cuando se conocen V_p, los pagos A, y la tasa de interés i. A continuación se deduce la formula para calcular el valor de n, a partir de la ecuación (28).

$$V_f = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$V_f \times i = A(1+i)^n - A$$

$$A(1+i)^n = V_f i + A$$

Aplicando logaritmo en ambos lados de la ecuación se obtiene:

$$Log(A(1+i)^n) = Log(V_f i + A)$$

Por propiedades de los logaritmos, se obtiene:

$$LogA + Log(1+i)^n = Log(V_f i + A)$$

$$LogA + nLog(1+i) = Log(V_f i + A)$$

$$nLog(1+i) = Log(V_f i + A) - LogA$$

Despejando n, se obtiene:

$$n = \frac{Log(V_f i + A) - LogA}{Log(1+i)} \quad (30)$$

Ejemplo 8.

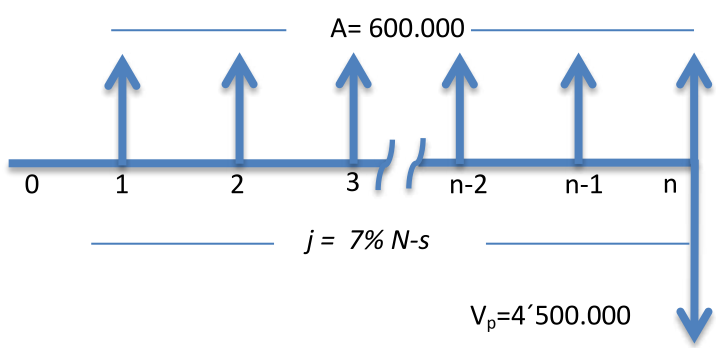
Cuántos pagos semestrales de $600.000 deberá realizar un padre de familia para pagar la universidad de su hijo que en futuro estima le costará $4´500.000; el banco reconoce por este tipo de ahorros una tasa de interés del 7% N-s

Solución

Parámetros
Valor futuro: 4´500.000
Valor de los pagos: $600.000
Tasa de interés: 7% N-s

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Inicialmente se hallar la tasa de interés efectiva semestral aplicando la formula (15), considerando que la tasa de interés nominal que cobra el banco:

$$j = i \times m$$

$$i = \frac{0,07}{2} = 0,035 = 3,5\%\ ES$$

Con esta tasa de interés efectiva, el valor futuro V_f, y el valor de los pagos A, se puede determinar el valor de n, para lo cual se aplica directamente la formula (30), considerando la tasa efectiva de interés semestral:

$$n = \frac{Log(V_f i + A) - Log A}{Log(1 + i)}$$

$$n = \frac{\log(4´500.000 \times 0,035 + 600.000) - Log(600.000)}{Log(1 + 0,035)} = 6,77$$

Esta respuesta indica que deben hacerse 6,77 pagos semestrales. No obstante, desde el punto de vista practico el ahorrador (deudor) tiene dos opciones:

a) Terminar de ahorrar (pagar) en el semestre 6, aumentando el último pago

b) O terminar de ahorrar (pagar) en el semestre 7, disminuyendo el ultimo pago

Respuesta
Se deben realizar 6 o 7 pagos.

1.6 Número de pagos con base en el valor presente

Si se conocen el V_p, los pagos A, y la tasa de interés i, de la ecuación (23) se puede determinar el valor de n; es decir, el número de pagos. A continuación se deduce la fórmula para calcular el valor de n, a partir de la ecuación (23).

$$V_p = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]; para\ i \neq 0$$

$$V_p i = A[1-(1+i)^{-n}]$$

$$V_p i = A - A(1+i)^{-n}$$

$$-V_p i + A = \frac{A}{(1+i)^n}$$

$$(1+i)^n = \frac{A}{A - iV_p}$$

Aplicando logaritmo en ambos lados de la ecuación, se obtiene:

$$n \log(1+i) = \log A - Log\ (A - iV_p)$$

$$n = \frac{\log A - Log\ (A - iV_p)}{\log(1+i)} \qquad (31)$$

Ejemplo 9.

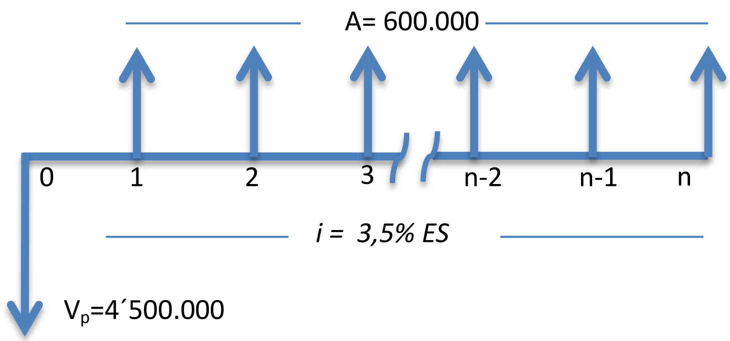
Cuántos pagos semestrales de \$600.000 deberá realizar un padre de familia para pagar la universidad de su hijo que hoy día cuesta \$4´500.000; el banco cobra tasa de interés del 3,5% ES

Solución

Parámetros
Valor presente: 4´500.000
Valor de los pagos: \$600.000
Tasa de interés: 3,5% ES

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

El número de pagos se puede calcular directamente de la formula (31), considerando la tasa efectiva de interés semestral:

$$n = \frac{\log A - Log\ (A - iV_p)}{\log(1+i)}$$

$$n = \frac{\log 600.000 - Log\ (600.000 - 0{,}035 \times 4´500.000)}{\log(1+0{,}035)} = 8{,}85$$

Esta respuesta indica que deben hacerse 8,85 pagos semestrales. No obstante, desde el punto de vista practico el ahorrador (deudor) tiene dos opciones:

a) Terminar de ahorrar (pagar) en el semestre 8, aumentando el último pago
b) O terminar de ahorrar (pagar) en el semestre 9, disminuyendo el último pago

Respuesta
Se deben realizar 8 o 9 pagos.

1.7 Tasa efectiva de interés a partir del valor presente

Cuando se tienen los demás elementos de la anualidad, es decir: el valor presente V_p o valor futuro V_f, el valor y numero de pagos A, se puede determinar el valor de la tasa de interés i a partir de la formula (23) o (28). No obstante por tratarse de ecuaciones con más de una raíz, no es posible hallar la solución analíticamente; por esta razón se debe utilizar un método de tanteo y error.

$$V_p = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$V_f = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

La forma de proceder en estos casos, es la siguiente:

a) Se asigna un valor inicial a la tasa de interés i y se calcula la ecuación.

b) Si el valor es menor que la igualdad V_p o V_f entonces se disminuye la tasa y se vuelve a calcular, en caso contrario se aumenta la tasa y se vuelve a calcular

c) Cuando se logre determinar dos valores, uno mayor y otro menor, suficientemente aproximados a los valores de la igualdad, se procede a calcular la tasa de interés por interpolación.

Con el siguiente ejemplo se ilustra el anterior procedimiento:

Ejemplo 10.

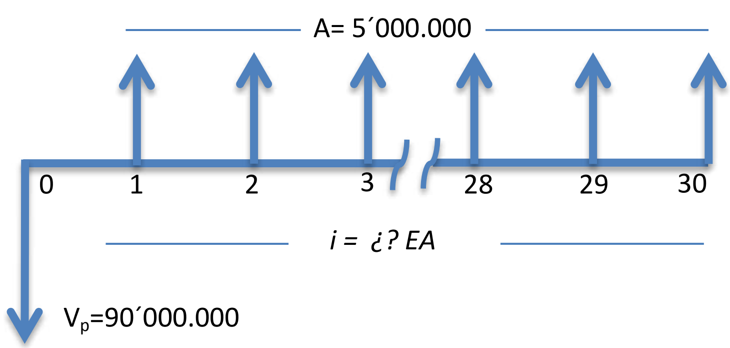
Si una compañía de pensiones ofrece, por un pago inmediato de $90 millones, una renta de $5 millones durante 30 años. ¿Qué tasa de interés está reconociendo?

Solución

Parámetros
Valor presente: 90´000.000
Valor de los pagos: $5´000.000
Numero de pagos: 30 anuales

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Para determinar la tasa de interés se parte de la formula (23):

$$V_p = A\left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}\right]$$

De acuerdo al procedimiento descrito se le da valor inicial a la tasa (efectiva anual) y se calcula el valor del lado derecho, así para un valor de $i = 2\%$, se obtiene:

$$90´000.000 \; < \; 111´982.277{,}8$$

Considerando que el valor de la derecha es mucho mayor al lado izquierdo, aumentamos el valor de i, y se vuelve a calcular. En este caso se calcula para $i = 3\%$, obteniendo:

$$90´000.000 \; < \; 98´002.206{,}75$$

Considerando que el valor de la derecha es mayor al lado izquierdo, aumentamos el valor de i, y se vuelve a calcular. En este caso se calcula para $i = 4\%$, obteniendo:

$$90´000.000 \; > \; 86´460.166{,}50$$

Considerando que en este caso el valor de la menor al lado derecho, se puede concluir que la tasa de interés está entre 3% y 4%. El valor exacto se calcula por interpolación como se indica a continuación:

98´002.206,75	3%
90´000.000	X
86´460.166,50	4%

Aplicando una sencilla regla de tres: si para una diferencia entre 98´002.206,75 y 86´460.166,50, existe una diferencia del 1%; que diferencia en % habrá para diferencia entre 98´002.206,75 y 90´000.000, así se obtiene la fracción que sumada a 3% completa la tasa de interés.

$$X = \frac{8´002.206{,}75 \; \times 1\%}{11´542.040{,}25} = 0{,}693$$

Sumando el resultado a 3%, se obtiene la tasa de interés buscada: 3,693%

Este resultado se puede comprobar remplazando este valor en la ecuación (23) y verificando que se cumple la igualdad.

$$V_p \; = \; A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$90´000.000 \; \cong \; 89´776.298{,}32$$

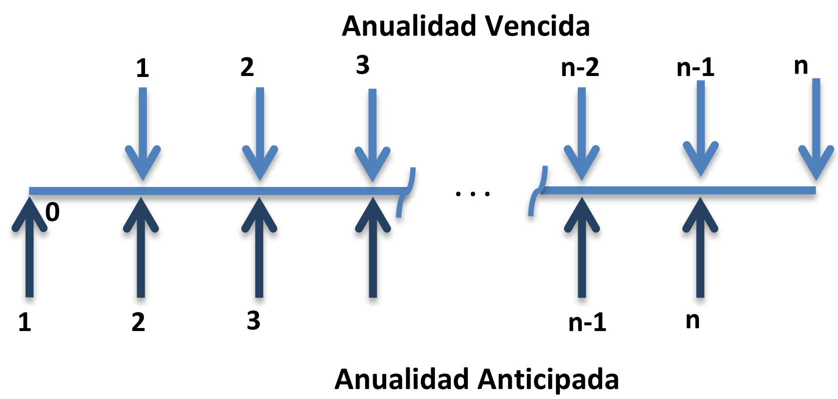
Respuesta
La compañía de pensiones reconoce una tasa efectiva anual de: 3,693%

2. Anualidades anticipadas

En los negocios es frecuente que los pagos se efectúen al comienzo de cada periodo; es el caso de los arrendamientos, ventas a plazos, y contratos de seguros, este tipo de operaciones financieras reciben el nombre de anualidades anticipadas.

Una anualidad anticipada es una sucesión de pagos o rentas que se efectúan o vencen al principio del periodo del pago. En la gráfica No 9 se comparan las anualidades vencidas y anticipadas

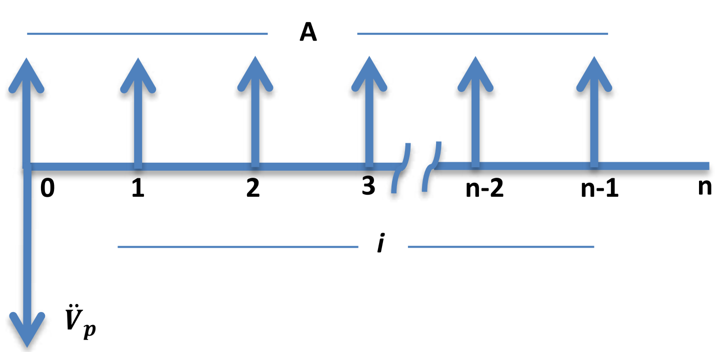
Grafica No 9 – Comparación de anualidades vencidas y anticipadas



2.1 Valor presente de las anualidades anticipadas

Para la deducción del modelo matemático se considera una operación en la cual un préstamo V_p se paga en cuotas iguales A, a una tasa de interés efectiva por periodo i, durante n periodos, desde el periodo 0. La situación se muestra en la grafica No 10.

Grafica No 10 – Valor presente de una anualidad anticipada



Si se analiza la operación se puede afirmar que el valor presente en este caso se puede determinar como la suma de A y el valor presente de una anualidad durante n-1 periodos.

$$\ddot{V_p} = A + A\left[\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right]$$

$$\ddot{V_p} = A\left[1 + \frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right] \quad (32)$$

Ejemplo 11.

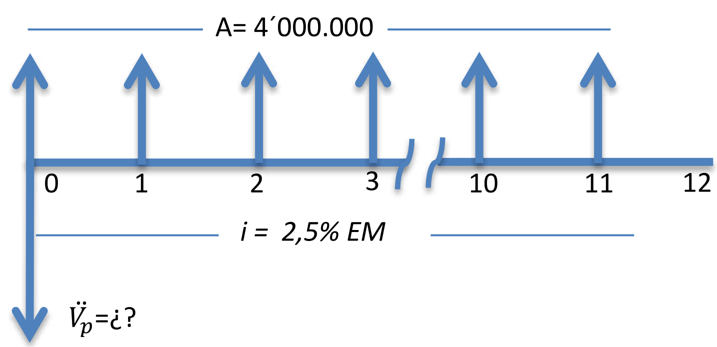
El contrato de arriendo de una oficina fija pagos de $4´000.000 mensuales al principio de cada mes, durante de un año. Si se supone un interés del 2,5% efectivo anual; ¿Cuál será el pago único al inicio del contrato que cubre todo el arriendo?

Solución

Parámetros
Valor de los pagos anticipados: $4´000.000
Numero de pagos: 12 mensuales
Tasa de interés efectiva mensual: 2,5%

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Para determinar el valor presente de la anualidad anticipada se aplica directamente la formula (32):

$$\ddot{V_p} = A\left[1 + \frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right]$$

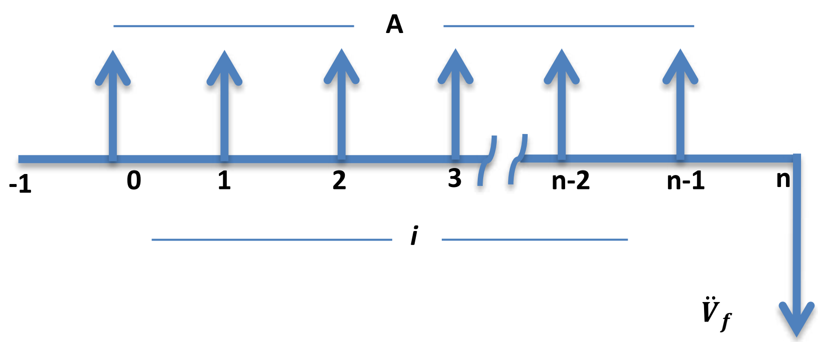
$$\ddot{V_p} = 4´000.000\left[1 + \frac{1-(1+0{,}025)^{-(12-1)}}{0{,}025}\right] = 42´056.834{,}85$$

Respuesta
El valor total del contrato al momento de su firma es: $42´056.834,85

2.2 Valor futuro de las anualidades anticipadas

Para la deducción del modelo matemático se considera una operación en la cual un ahorro V_f se paga en cuotas iguales A, a una tasa de interés efectiva por periodo i, durante n periodos, desde el periodo 0. La situación se muestra en la grafica No 11.

GRAFICA NO 11 – VALOR FUTURO DE UNA ANUALIDAD ANTICIPADA



Si se analiza la operación se puede afirmar que el valor futuro de la anualidad anticipada es igual al valor futuro de la anualidad durante n periodos (desde -1 hasta n-1) trasladada 1 periodo, ha través de la formula (11), hasta el periodo n.

$$\ddot{V}_f = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i) \quad (33)$$

Ejemplo 12.

Una empresa arrienda una bodega que tiene de sobra por $5´000.000 mensuales, los cuales se pagan de manera anticipada. Si cada que recibe el arriendo lo coloca en un fondo de inversiones que promete una tasa de interés del 2% EM. ¿Cuánto podrá retirar al cabo de un año?

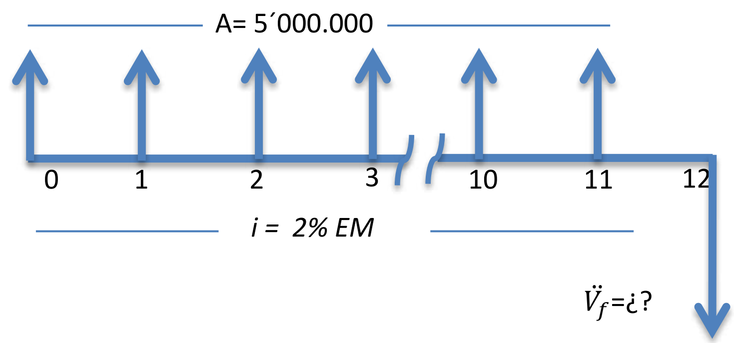
Solución

Parámetros

Valor de los pagos anticipados: $5´000.000
Numero de pagos: 12 mensuales
Tasa de interés efectiva mensual: 2%

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Para determinar el valor futuro de la anualidad anticipada se aplica directamente la formula (33):

$$\ddot{V_f} = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i)$$

$$\ddot{V_f} = 5´000.000\left[\frac{(1+0,02)^{12} - 1}{0,02}\right](1+0,02) = 68´401.657,61$$

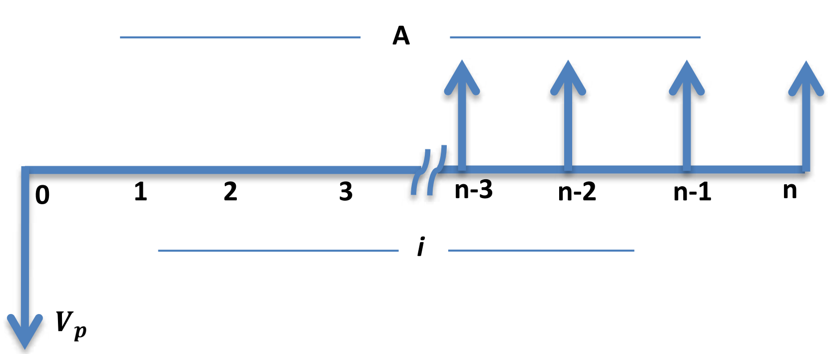
Respuesta

El valor ahorrado por el empresario al cabo de un año es: $68´401.657,61

3. Anualidades diferidas

Hasta el momento se ha considerado que el pago de las rentas se inicia inmediatamente después de que se plantea la operación; no obstante, existen transacciones donde los pagos o rentas se realizan después de haber pasado cierta cantidad de periodos, en estos casos la operación se denomina anualidad diferida. En la gráfica No 12 se ilustran este tipo de actividades.

GRAFICA NO 12 –ANUALIDAD DIFERIDA



3.1 Valor presente de las anualidades diferidas

En este caso se halla el valor presente de la anualidad un periodo antes de iniciarse los pagos, utilizando para ello la formula (23), el valor hallado se traslada al periodo 0 utilizando para ello la formula (12)

Ejemplo 12.

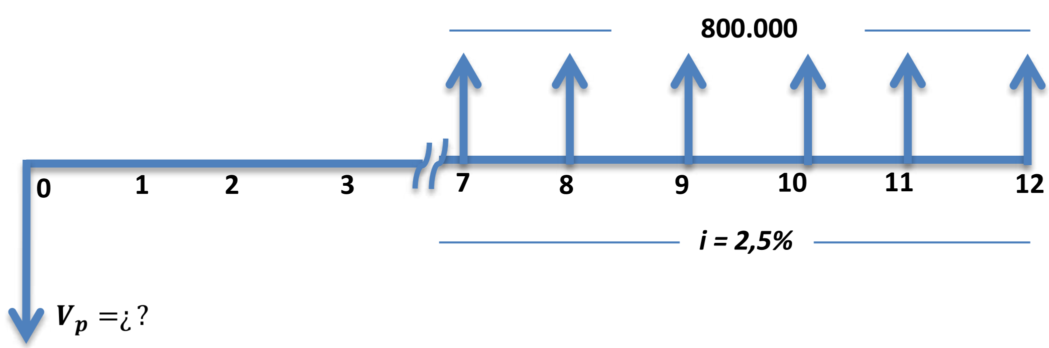
Una empresa acepta que un cliente le pague el valor de una compra realizada el día de hoy, en seis cuotas mensuales de $800.000 a partir del séptimo mes. Si la empresa aplica una tasa efectiva de interés del 2,5% EM, ¿Cuál será el valor de la venta?

Solución

Parámetros
Valor de los pagos: $800.000
Numero de pagos: 6 mensuales, a partir del mes 7
Tasa de interés efectiva mensual: 2,5%

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Para determinar el valor presente inicialmente calculamos el valor presente de la anualidad en el periodo 6, utilizando para ello la ecuación (23):

$$V_p = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]; para\ i \neq 0$$

$$V_{p6} = 800.000\left[\frac{1-(1+0{,}025)^{-6}}{0{,}025}\right] = 4´406.500{,}28$$

Este valor se traslada al periodo 0, para esto se utiliza la formula (12)

$$V_p = \frac{V_f}{(1+i)^n}$$

$$V_p = \frac{4´406.500,28}{(1+0,025)^6} = 3´799.711,38$$

Respuesta
El valor de la venta realizada por la empresa es: $3´799.711,38

3.2 Valor futuro de las anualidades diferidas

En este caso se halla el valor presente de la anualidad un periodo antes de iniciarse los pagos, utilizando para ello la formula (23), el valor hallado se traslada al periodo n utilizando para ello la formula (11)

Ejemplo 13.

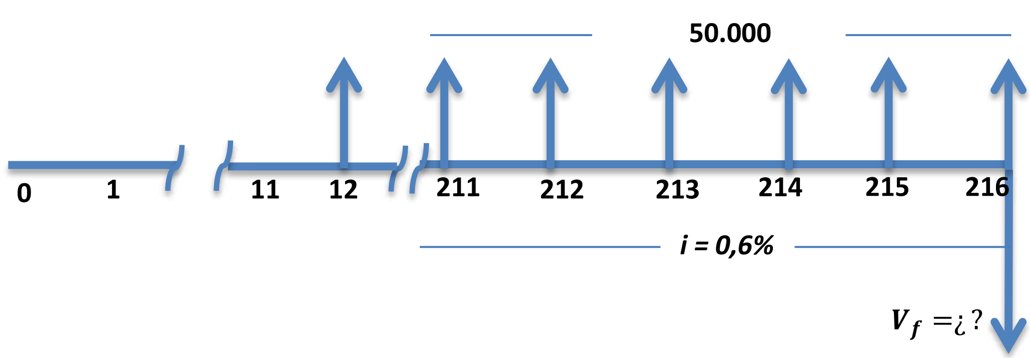
Si un padre inicia un ahorro mensual de $50.000, cuando su hijo cumple 1 año, ¿Cuál será el valor ahorrado, cuando este cumpla 18 años, si el banco donde hace el deposito le reconoce un interés anual del 0,6% EM?

Solución

Parámetros
Valor de los pagos: $50.000
Numero de pagos: 204 mensuales, a partir del mes 12
Tasa de interés efectiva mensual: 0,6%

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Para determinar el valor futuro inicialmente calculamos el valor presente de la anualidad en el periodo 11, utilizando para ello la ecuación (23):

$$V_p \; = \; A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]; para\; i \neq 0$$

$$V_{p6} \; = 50.000\left[\frac{1-(1+0{,}006)^{-204}}{0{,}006}\right] = 5´873.924{,}73$$

Este valor se traslada al periodo 216, para esto se utiliza la formula (11)

$$V_f \;\; = \; V_p(1+i)^n$$

$$V_f \;\; = \; 5´873.924{,}73(1+0{,}006)^{205} \; = 20´022.321{,}23$$

Respuesta
El valor del ahorro cuando el hijo cumpla 18 años es : $20´022.321,23

4. Anualidades perpetuas

Cuando el número de pagos de una anualidad es muy grande, o cuando no se conoce con exactitud la cantidad de pagos se dice que la anualidad es perpetua.

Al deducirse los modelos matemáticos se debe tener en cuenta que solo existe el valor presente ya que por tratarse de una anualidad perpetua el valor futuro de este tipo de anualidades sería infinito.

Partiendo del valor presente de la anualidad formula (23) se puede hallar el limite cuando n tiende a infinito, teniendo en cuenta la definición de anualidad perpetua.

$$V_p \; = \; A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]; para\; i \neq 0$$

$$V_p \; = \; \lim_{n\to\infty} \mathrm{A}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] = \; \lim_{n\to\infty} A\; \frac{1-0}{i} = \frac{A}{i}$$

$$V_p = \frac{A}{i}; para\; i \neq 0 \quad (34)$$

Ejemplo 14.

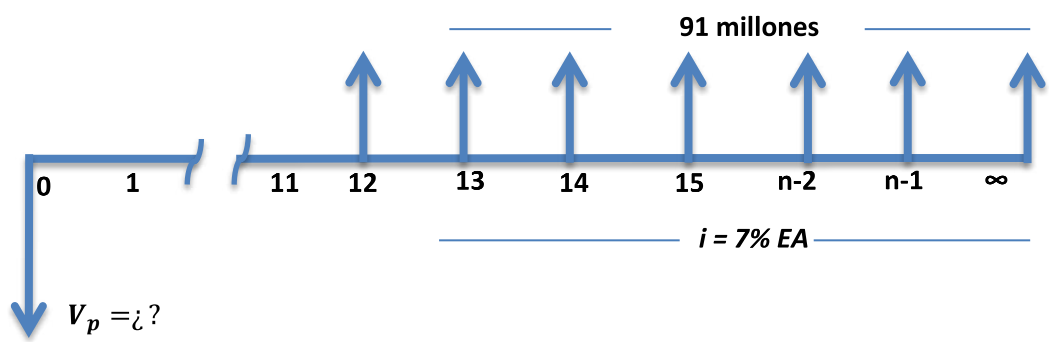
El consejo municipal de Santa Fe de Antioquia resuelve crear un fondo para proveer a perpetuidad las reparaciones del puente colonial de esa población que se estima tendrá un costo anual de $91 millones de pesos, doce años después de una reparación general. ¿Cuánto se deberá colocar en el fondo al momento de terminar la reparación general, si la tasa de interés de colocación del mercado es del 7% anual?

Solución

Parámetros
Valor de los pagos: $91 millones
Numero de pagos: infinitos, a partir del año 12
Tasa de interés efectiva anual: 7%

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Lo que habrá que depositar en el fondo será igual al valor presente de la anualidad perpetua calculada en el año 11, para lo cual se utiliza la formula (34), y este valor trasladado al momento 0, que es donde se supone se termino la reparación general, para esto se utiliza la formula (12):

$$V_{p11} = \frac{A}{i}; para\ i \neq 0$$

$$V_{p11} = \frac{91´000.000}{0{,}07} = 1.300´000.000$$

$$V_p = \frac{V_f}{(1+i)^n}$$

$$V_p = \frac{1.300´000.000}{(1+0{,}07)^{12}} = 577´215.547$$

Respuesta
En el fondo se deben colocar: $577´215.547

5. Gradientes

Falta modelo, ejemplos

6. Ejercicios resueltos

5.1 Un padre de familia cuando su hijo cumple 12 años hace un depósito de $X en una fiduciaria con el objeto de asegurar sus estudios universitarios, los cuales se iniciara al cumplir 20 años. Se estima que para esa época el valor de la matrícula anual de la universidad va ser de $3´000.000 y no sufrirá modificaciones durante los seis años que duraran sus estudios, ¿Cuál deberá ser el valor del depósito $X? Suponga que la fiducia le reconoce una tasa de interés del 30% anual.

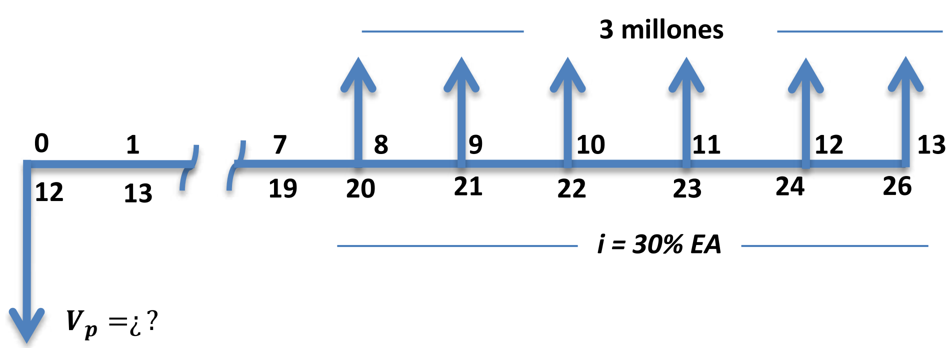
Solución

Parámetros

- Valor de los pagos: $3 millones
- Numero de pagos: 6, a partir del año 12
- Tasa de interés efectiva anual: 7%

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Para calcular el deposito se calcula el valor presente V_{p7} de la anualidad, aplicando la formula (23) y el resultado se traslada al periodo 0, es decir cuando el hijo cumple 12 años, utilizando la formula (12)

$$V_p = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]; para\ i \neq 0$$

$$V_p = 3´000.0000\left[\frac{1-(1+0,3)^{-6}}{0,3}\right] = 7´928.237,89$$

$$V_p = \frac{V_f}{(1+i)^n}$$

$$V_p = \frac{7´928.237{,}89}{(1+0{,}3)^7} = 1´263.494{,}06$$

Respuesta
El deposito que deberá hacer el padre de familia es: $1´263.494,06

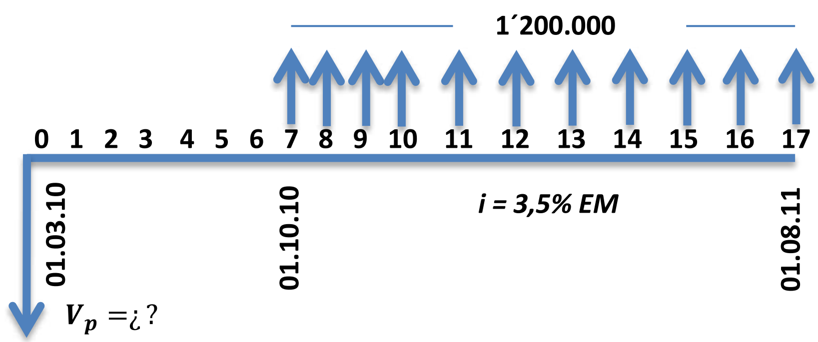
5.2 Una pequeña empresa solicita un préstamo el día 1 de marzo de 2010 y acuerda efectuar pagos mensuales de $1´200.000, desde el 1 de octubre de 2010, hasta el 1 de agosto de 2011. Si el banco aplica una tasa de interés del 3.5% efectivo mensual, ¿Cuál será el valor del préstamo?

Solución

Parámetros
- Valor de los pagos: $1´200.000
- Numero de pagos: 11, a partir del 1 de octubre
- Tasa de interés efectiva mensual: 3,5%

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Para calcular el préstamo se calcula el valor presente V_{p6} de la anualidad, aplicando la formula (23) y el resultado se traslada al periodo 0, es decir el 01 de marzo del 2010, utilizando la formula (12)

$$V_p = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]; para\ i \neq 0$$

$$V_p = 1'200.000\left[\frac{1-(1+0{,}035)^{-11}}{0{,}035}\right] = 10'801.861{,}24$$

$$V_p = \frac{V_f}{(1+i)^n}$$

$$V_p = \frac{10'801.861{,}24}{(1+0{,}035)^6} = 8'787.321{,}08$$

Respuesta
El préstamo será de: $8´787.321,08

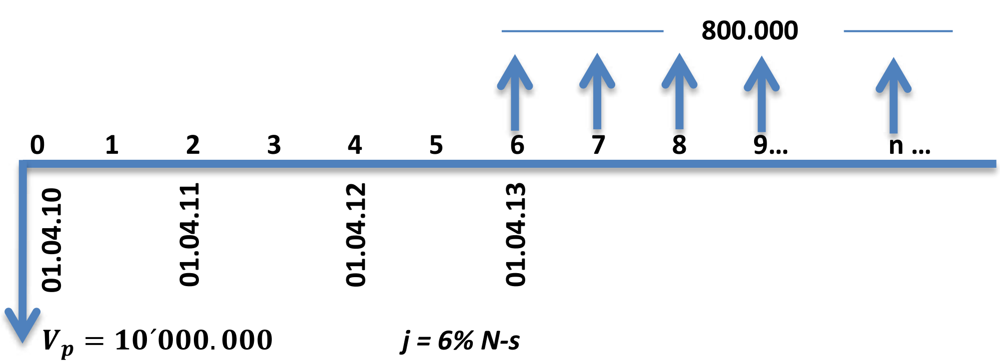
5.3 Un inversionista que depositó el primero de abril de 2010, $10 millones, en un fondo que paga un interés del 6% N-s ¿Cuántos retiros semestrales de $800.000 podrá hacer, si el primer retiro lo hace el primero de abril de 2013?

Solución

Parámetros
- Valor de los pagos: $800.000
- Tasa de interés: 6% N-s
- Periodos semestrales

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Para calcular el número de retiros, inicialmente llevamos el deposito inicial hasta seis meses antes de iniciar lo retiros, es decir el 01 de abril del 2013; esto con el fin de configurar la anualidad, para esto se utiliza la formula (11)

Tasa de interés efectiva se calcula a partir de la formula (15)

$$j = i \times m$$

$$i = \frac{0{,}06}{2} = 0{,}03 = 3\%\ ES$$

Numero de periodos: 5 periodos (semestres)

$$V_f \ = V_p(1+i)^n$$

$$V_{f5} \ = 10´000.000(1+0{,}03)^5 = 11´592.740{,}74$$

A partir de la anualidad configurada se puede calcular el numero de retiros (pagos) utilizando la formula (31)

$$n = \frac{\log A - Log\ (A - iV_p)}{\log(1+i)}$$

$$n = \frac{\log 800.000 - Log\ (800.000 - 0{,}03 \times 11´592.740{,}74)}{\log(1+0{,}03)} = 19{,}29$$

Respuesta

El inversionista podrá hacer: 19 retiros semestrales de $800.000 y un veinteavo retiro por una fracción de los $800.000

5.4 Un trabajador deposita en un fondo de pensiones el día de hoy la suma de $1´000.000 y dentro de tres años $3´000.000; al final del año 5 comienza a hacer depósitos anuales de $5´000.000, durante 6 años, ¿Cuánto dinero podrá retirar anualmente en forma indefinida, comenzando al final del año 14? El fondo reconoce una tasa del 20% efectivo anual

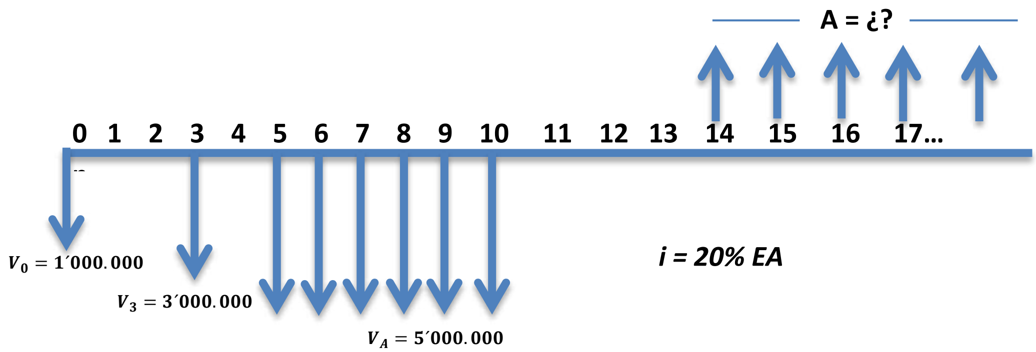
Solución

Parámetros

- Valor de los pagos: 5´000.0000
- Tasa de interés: 20% EA
- Periodos anuales: 6
- Depósitos extras; año 1: 1´000.000, año 3: 3´000.000

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Para determinar el valor que trabajador puede retirar anualmente en forma indefinida se debe configurar la anualidad perpetua con valor presente en el periodo 13. Este valor se calcula, por su parte, como el valor futuro de la anualidad con pagos de $5´000.000, traslada al periodo 13, más el valor futuro, en este mismo periodo, de los ahorros de $1´000.000 y 3´000.000. Para calcular los valores futuros se utilizan las formulas (11) y (28).

$$V_f = V_p(1+i)^n$$

$$V_{f13} = 1'000.000(1+0{,}2)^{13} = 10'699.320{,}53$$

$$V_{f13} = 3'000.000(1+0{,}2)^{10} = 18'575.209{,}26$$

$$V_f = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$V_{f13} = 5'000.000\left[\frac{(1+0{,}2)^6 - 1}{0{,}2}\right](1+0{,}2)^3 = 85'794.508{,}80$$

$$V_{13} = 10'699.320{,}53 + 18'575.209{,}26 + 85'794.508{,}80 = 115'069.038{,}59$$

Para determinar el monto que puede retirar a perpetuidad, aplicamos la formula (34), despejando A

$$V_p = \frac{A}{i}; para\ i \neq 0$$

$$V_p = 115'069.038{,}59 \times 0{,}2 = 23'013.807{,}71$$

Respuesta

El trabajador podrá realizar retiros anuales de 23´013.807,71

5.5 Una empresa estudia el arriendo de una casa lote para sus operaciones. Su agente inmobiliario le presenta dos ofertas: una casa para la cual se estima un costo de mantenimiento de $2.000.000 anuales y de $3.000.000 cada 4 años para reparaciones mayores; de otro lado se ofrece una casa que requerirá de una suma de $3.000.000 anuales para mantenimiento y de $2.500.000 cada tres años para reparaciones adicionales. Si la casa-lote se va usar por tiempo indefinido y suponiendo que el costo de capital de la empresa es del 35% efectivo anual. ¿Cuál de las dos alternativas le aconsejaría tomar a la empresa?

Solución

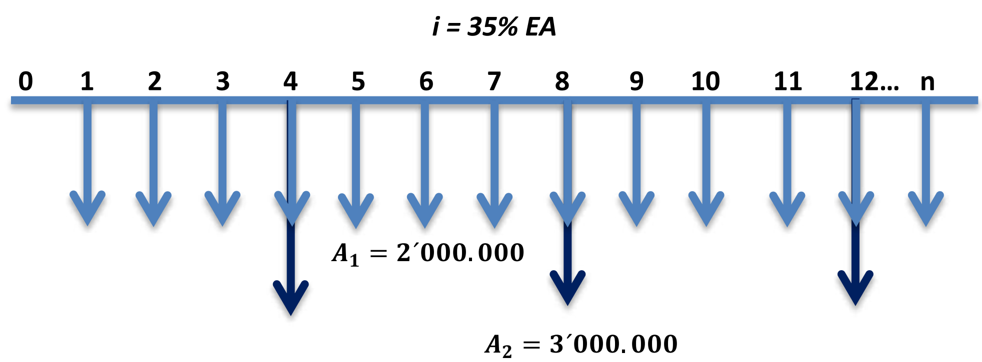
Parámetros

- Casa No 1
- Anualidad mantenimiento: 2´000.0000 anual; anualidad de reparaciones $3´000.000 cada 4 años
- Casa No 2
- Anualidad mantenimiento: 3´000.0000 anual; anualidad de reparaciones $2´500.000 cada 3 años
- Tasa de interés: 35% EA
- Periodos anuales: perpetuo

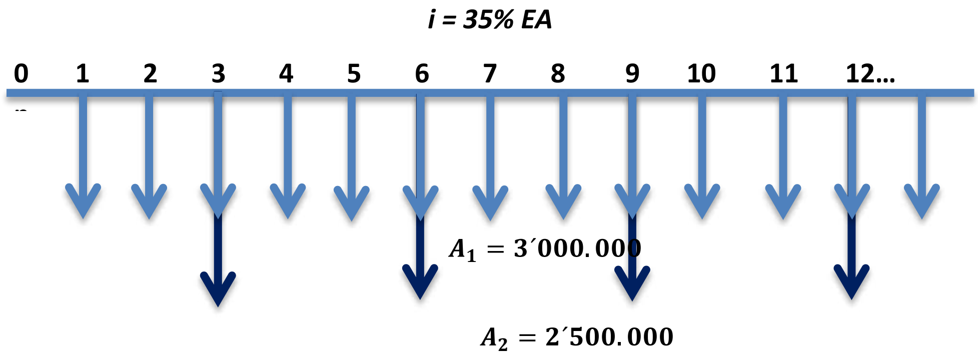
Representación gráfica

En la siguientes gráficas se representan las dos alternativas:

Casa No1



Casa No2



Cálculos

Para determinar la mejor alternativa; se compara el valor presente de ambas alternativas. El calculo del valor presente se realiza aplicando la formula (34) y considerando que ambos casos el valor presente es la suma de las dos anualidades en el periodo cero (0)

Casa No1

$$V_p = \frac{A_1}{i_1} + \frac{A_2}{i_2}$$

Para la anualidad de cada cuatro años se debe determinar la tasa efectiva equivalente partiendo de la tasa efectiva anual, para ello se utiliza la formula (16), considerando que n_1 es igual a 1 y n_2 es $\frac{1}{4}$

$$i_2 = (1 + i_1)^{\frac{n_1}{n_2}} - 1$$

$$i_2 = (1 + 0{,}35)^{\frac{1}{\frac{1}{4}}} - 1 = 2{,}3215 = 232{,}15\%\ ECuatroAños$$

Considerando esta tasa de interés se puede ahora calcular el valor presente de la alternativa, como sigue:

$$V_p = \frac{2´000.000}{0{,}35} + \frac{3´000.000}{2{,}3215} = 7´006.553{,}64$$

Casa No2

Para la anualidad de cada tres años se debe determinar la tasa efectiva equivalente partiendo de la tasa efectiva anual, para ello se utiliza la formula (16), considerando que n_1 es igual a 1 y n_2 es $\frac{1}{3}$

$$i_2 = (1 + i_1)^{\frac{n_1}{n_2}} - 1$$

$$i_2 = (1 + 0{,}35)^{\frac{1}{\frac{1}{3}}} - 1 = 1{,}4603 = 146{,}03\%\ ETresAños$$

Considerando esta tasa de interés se puede ahora calcular el valor presente de la alternativa, como sigue:

$$V_p = \frac{3´000.000}{0{,}35} + \frac{2´500.000}{1{,}4603} = 10´283.405{,}56$$

Respuesta
El valor presente de la segunda alternativa es mucho mayor que el de la primera por lo cual la mejor opción será la casa No1

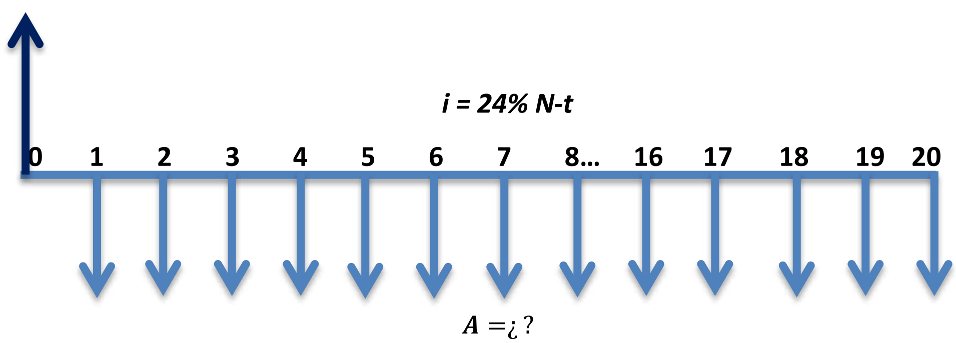
5.6 Con una tasa de interés del 24% N-t, ¿Cuál debe ser el valor de los pagos semestrales vencidos que, hechos por 10 años, amortizarán una deuda de $120´000.000?

Solución

Parámetros
- Valor presente o actual: $120´000.000
- Tasa de interés: 24% N-t
- Periodos semestrales: 20

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Considerando que se trata de pagos semestrales es necesario determinar la tasa de interés efectivo semestral a partir de la tasa nominal trimestral dada. Para esto, inicialmente se halla la tasa efectiva trimestral a partir de la nominal, utilizando para ello la formula (15)

$$j = i \times m$$

$$i = \frac{0{,}24}{4} = 0{,}06 = 6\%\ ET$$

A partir de esta tasa se halla la tasa efectiva semestral, utilizando para ello la formula (16), considerando que n_1 es igual a 4 y n_2 es 2

$$i_2 = (1 + i_1)^{\frac{n_1}{n_2}} - 1$$

$$i_2 = (1 + 0{,}06)^{\frac{4}{2}} - 1 = 0{,}1236 = 12{,}36\%\ ES$$

Considerando esta tasa de interés se puede ahora calcular los pagos de la anualidad, utilizando para ello la formula (25), como sigue:

$$A = V_p \left[\frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}\right]$$

$$A = 120´000.000 \left[\frac{0{,}1236}{1 - (1 + 0{,}1236)^{-20}}\right] = 16´429.291{,}68$$

Respuesta

Las cuotas semestrales para pagar la deuda son de $16´429.291,68

5.7 Con una tasa de interés del 24% N-t, ¿Cuál debe ser el valor de los pagos semestrales anticipados que, hechos por 10 años, amortizarán una deuda de $120´000.000?

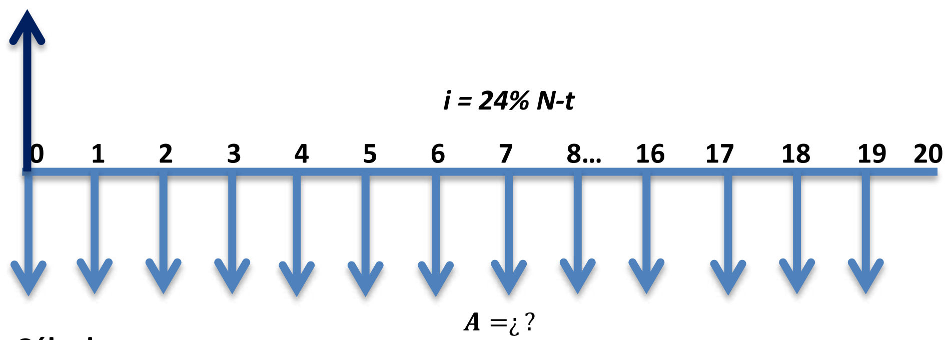
Solución

Parámetros

- Valor presente o actual: $120´000.000
- Tasa de interés: 24% N-t
- Periodos semestrales: 20

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

Considerando que se trata de pagos semestrales es necesario determinar la tasa de interés efectivo semestral a partir de la tasa nominal trimestral dada. Para esto, inicialmente se halla la tasa efectiva trimestral a partir de la nominal, utilizando para ello la formula (15)

$$j = i \times m$$

$$i = \frac{0{,}24}{4} = 0{,}06 = 6\%\ ET$$

A partir de esta tasa se halla la tasa efectiva semestral, utilizando para ello la formula (16), considerando que n_1 es igual a 4 y n_2 es 2

$$i_2 = (1 + i_1)^{\frac{n_1}{n_2}} - 1$$

$$i_2 = (1 + 0{,}06)^{\frac{4}{2}} - 1 = 0{,}1236 = 12{,}36\%\ ES$$

Considerando esta tasa de interés se puede ahora calcular los pagos de la anualidad, despejando A de la formula (32), como sigue:

$$\ddot{V_p} = A\left[1 + \frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right]$$

$$120´000.000 = A\left[1 + \frac{1-(1+0{,}1236)^{-(20-1)}}{0{,}1236}\right]$$

$$120´000.000 = A[8{,}2068]$$

$$A = \frac{120´000.000}{8{,}2068} = 14´622.020{,}76$$

Respuesta

Las cuotas semestrales anticipadas para pagar la deuda son de $14´622.020,76

5.8 Un señor desea comprar una póliza de seguro que garantice a su esposa el pago de $4´000.000 mensuales durante 10 años y adicionalmente $5´000.000 al final de cada año durante este mismo período. Si el primer pago se efectúa al mes del fallecimiento del señor, hallar el valor de la póliza de seguro suponiendo que la compañía de seguros garantiza el 24% N-m

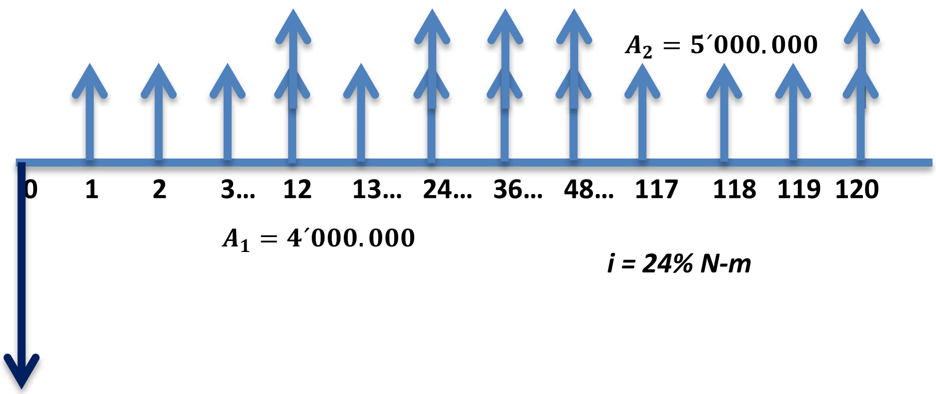
Solución

Parámetros

- Tasa de interés: 24% N-m
- Anualidad 1: $4´000.000 mensuales durante 120 meses
- Anualidad 2: $5´000.000 anuales durante 10 años

Representación gráfica

En la siguiente gráfica se representa la operación:



Cálculos

El valor de la póliza corresponde al valor presente de la suma de las dos anualidades. Para realizar el cálculo se requiere hallar la tasa efectiva de interés anual y mensual equivalente a la tasa nominal dada.

Tasa efectiva mensual

$$j = i \times m$$

$$i = \frac{0,24}{12} = 0,02 = 2\%\ EM$$

Tasa efectiva anual

$$Tasa\ efectiva\ anual$$

A partir de esta tasa efectiva mensual se halla la tasa efectiva anual, utilizando para ello la formula (16), considerando que n_1 es igual a 12 y n_2 es 1

$$i_2 = (1 + i_1)^{\frac{n_1}{n_2}} - 1$$

$$i_2 = (1+0{,}02)^{\frac{12}{1}} - 1 = 0{,}2682 = 26{,}82\%\ EA$$

Considerando estas tasas de interés se puede ahora calcular los valores presentes de las anualidades y sumarlos para obtener el valor de la póliza. Para esto se utiliza la formula (23), como sigue:

$$V_p = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]; para\ i \neq 0$$

Anualidad mensual

$$V_p = 4´000.000\left[\frac{1-(1+0{,}02)^{-120}}{0{,}02}\right] = 181´421.554$$

Anualidad anual

$$V_p = 5´000.000\left[\frac{1-(1+0{,}2682)^{-10}}{0{,}2682}\right] = 16´910.461{,}45$$

Valor de la póliza:

$$Vp = 181´421.554 + 16´910.461{,}45 = 198´332.051{,}4$$

Respuesta
El valor de la póliza es: $198´332.051,4

Faltan ejercicios resueltos de gradientes

7. Ejercicios propuestos

7.1 Cuando su hijo cumple 10 años, un padre hace un depósito de $X en una fiduciaria a nombre de su hijo con el objeto de asegurar los estudios universitarios, los cuales iniciará cuando cumpla 18 años. Si la Fiducia reconoce una tasa de interés del 20% N-t y estimando que para esa época el valor de la matrícula anual en la universidad será de $2´500.000 y que permanecerá constante durante los seis años que duran los estudios; ¿Cuál deberá ser el valor del depósito?

7.2 Una persona quiere solicitar un préstamo bancario el día 1 de marzo del 2008; su capacidad económica solo le permite realizar pagos mensuales de $240.000, a partir del 1 de octubre del mismo año y hasta el 31 de diciembre del 2010. Si la entidad bancaria aplica una tasa de interés del 1,8% EM; ¿De qué valor deberá ser el préstamo?

7.3 Una persona próxima a pensionarse deposita en un fondo de inversión el 1 de mayo del 2000, la suma de $10´000.000. Si el fondo reconoce en promedio un interés del 36% N-s; ¿Cuántos retiros mensuales de $800.000 podrá hacer, a partir de la fecha de jubilación que se estima será el 1 de abril del 2006?

7.4 Un inversionista deposita hoy $1 millones, $3 millones en 2 años; al final del año 4 comienza a hacer depósitos semestrales de $800.000, durante 6 años; Si el fondo de inversiones le reconoce una tasa de interés del 12%EA; ¿Cuánto dinero podrá retirar mensualmente, en forma indefinida, comenzando al final del año 10?

7.5 Una empresa tiene dos alternativas para una instalación de producción: la primera de ellas requiere la suma de $2.500.000 mensuales como costo de mantenimiento y de $10´000.000 cada 4 años para reparaciones adicionales; de otro lado, la segunda alternativa requerirá de una suma de $3.000.000 mensuales para mantenimiento y de $12´500.000 cada tres años para reparaciones adicionales. Considerando que la instalación se usara por tiempo indefinido y que el costo de capital de la empresa es del 35% EA; ¿Cuál de las dos alternativas es más conveniente?

7.6 Si un banco aplica una tasa de interés del 24% N-t; ¿Cuál deberá ser el valor de los pagos semestrales vencidos, hechos durante un periodo de 10 años, para amortizar una deuda de $45´000.000?

7.7 Si un banco aplica una tasa de interés del 24% N-t; ¿Cuál deberá ser el valor de los pagos semestrales anticipados, hechos durante un periodo de 10 años, para amortizar una deuda de $45´000.000?

7.8 Un señor desea contratar una póliza de seguro que garantice a sus hijos el pago de $2´500.000 mensuales durante quince años y adicionalmente $5´000.000 al final de cada año durante ese periodo. Si el primer pago se realiza un mes después de la muerte del señor; ¿Cuál será el valor póliza? La compañía de seguros aplica una tasa de interés del 24% N-m

7.9 Una empresa metalmecánica tiene cuatro opciones para la compra de una maquinaria: el modelo A cuesta $300 millones; el modelo B, $500 millones, el C $700 millones y el modelo D, $900 millones. Si la persona puede hacer 42 pagos mensuales de máximo $30 millones comenzando al final del mes 6. ¿Cuál será el modelo más costoso que podrá comprar? Suponga una tasa del 24% N-m

7.10 Un filántropo ha creado una institución de caridad y desea asegurar su funcionamiento a perpetuidad. Se estima que esta institución necesita para su funcionamiento $10´000.000, al final de cada mes, durante el primer año; $12´000.000, al final de cada mes, durante el segundo año y $13´000.000, al final de cada mes, en forma indefinida. Suponiendo que la fiducia que administrara el dinero reconoce una tasa de interés del 30% N-m; ¿Cuál será el valor del depósito que deberá hacer el filántropo al inicio en la fiducia?

7.11 Un grupo de benefactores decide dotar un hospital de los equipos de laboratorio que requiere para operar. Se estima que el costo de los equipos el 1 de julio del 2011 es de $45´500.000 y que el costo de operación trimestral indefinidamente es de $3´000.000 a partir del primero del 1 de agosto, fecha en la cual entrará en funcionamiento. ¿Cuál debe ser el valor de la donación que se haga el 1 de enero del 2010 si el dinero es invertido inmediatamente en una fiduciaria que garantiza el 24% N-t?

7.12 Si se desea cancelar una deuda de $9´500.000 en pagos mensuales iguales durante tres años, el primero al final de mes, y además se efectuaran abonos anuales extraordinarios de dos y media veces la cuota mensual, comenzando al final del primer año; ¿De cuánto serán las cuotas mensuales y las extraordinarias? Suponga una tasa de interés del 36% N-b

7.13 Si una fiducia reconoce una tasa del 20% EA; ¿Qué es más conveniente para una institución de caridad recibir una renta perpetua de $4´800.000 cada 5 años recibiendo el primer pago al final del cuarto año o recibir $2´000.000 anuales de renta perpetua comenzando al final del primer año?

7.14 Se quiere financiar la compra de un carro que tiene un costo de $47´000.000 mediante el pago de 60 cuotas mensuales vencidas; y cuotas anuales vencidas extraordinarias del 5% del valor total durante el periodo de vigencia del préstamo. Si la entidad financiera aplica una tasa de interés del 1,8 EM; ¿Cuál será el valor de las cuotas mensuales?

7.15 Una máquina llegará al final de su vida útil dentro de 2 años; para esa época se estima que una nueva costará $90´000.000; además que la máquina vieja podrá ser vendida en $20´000.000; ¿Qué ahorro trimestral debe hacer un empresario en una cuenta que paga el 30% N-m con el objeto de hacer la compra en el momento oportuno; si tiene previsto hacer el primer deposito al final del sexto mes?

Faltan ejercicios propuestos de gradientes

4 Amortización y capitalización

UNIDAD 4: AMORTIZACIÓN Y CAPITALIZACIÓN

OBJETIVO

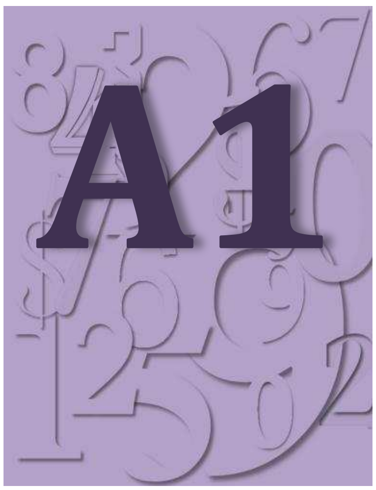
CONTENIDO

5 Criterios de evaluación de proyectos

UNIDAD 5: CRITERIOS DE EVALUACIÓN DE PROYECTOS

OBJETIVO

CONTENIDO



Matemáticas Básicas

APÉNDICE 1: MATEMÁTICAS BÁSICAS

OBJETIVO

CONTENIDO

1. Números

1.1 Conjunto de números naturales

Definición: Son todos los enteros comprendidos entre 1 e infinito.

Notación: **N** = {1, 2, 3, 4,..., ∞}

1.2 Conjunto de números enteros

Definición: Son todos los enteros comprendidos entre menos infinito e infinito, incluyendo el cero; el conjunto de los números naturales es un subconjunto de los números enteros; es decir todos los números naturales hacen parte del conjunto de los enteros.

Notación: **Z** = {-∞,..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,..., ∞}

1.3 Conjunto de números racionales

Definición: Son todos los números enteros y fraccionarios comprendidos entre menos infinito e infinito, incluyendo el cero; así el conjunto de los números enteros es un subconjunto de los números racionales. Los fraccionarios son los números que pueden expresarse como división de dos números enteros excluyendo de esta definición la división por cero, la cual no está definida.

Notación: **Q** = {-∞,...,$-\frac{4}{1}, \dots, -\frac{4}{2}, \dots, -\frac{3}{1}, \dots, -\frac{3}{2}$, ..., -1, 0, 1, $\dots, \frac{4}{2}, \dots, \frac{5}{2}, \dots, \frac{6}{2}, \dots, \frac{3}{2}$, ..., 4,..., ∞}

1.4 Conjunto de números Irracionales

Definición: son números de uso común que no pueden expresarse como la división entre dos números enteros.

Ejemplos: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}, \pi$

1.5 Conjunto de números reales

Definición: son todos los números incluyendo racionales e irracionales. Los reales se pueden representar por los puntos sobre una línea recta denominada *recta numérica*

Notación: **R** = {-∞,..., -4,..., -3,..., -2,..., -1,..., 0,..., 1,..., 2,..., 3,..., 4,..., ∞}

Representación grafica

-∞	**…**	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3…**	**∞**

Propiedades de los números reales

Propiedad Conmutativa

Si a, b son reales cualquiera, entonces se cumple que:

$$a + b = b + a \quad \textit{Propiedad conmutativa de la suma}$$

$$a \times b = b \times a \quad \textit{Propiedad conmutativa del producto}$$

Propiedad Asociativa

Si a, b, y c son números reales cualquiera, entonces se cumple que:

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c) \quad \textit{Propiedad asociativa de la suma}$$

$$a \times b \times c = (a \times b) \times c = a \times (b \times c) \quad \textit{Propiedad asociativa del producto}$$

Propiedad distributiva

Si a, b, y c son números reales cualquiera, entonces se cumple que:

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

$$(a + b) \times c = (c \times a) + (c \times b)$$

Elementos de identidad

Si a es un número real cualquiera, entonces se cumple que:

$$a + 0 = a \quad \textit{Elemento identidad de la suma}$$

$$a \times 1 = a \quad \textit{Elemento identidad del producto}$$

Elementos inversos

Si a es un número real cualquiera, entonces se cumple que:

$$a + (-a) = 0 \quad \textit{Elemento inverso de la suma}$$

$$a \times a^{-1} = 1 \quad \textit{Elemento inverso del producto}$$

2. Exponentes

2.1 Definición 1

Si m es un numero entero entonces se define a^m (*a* la potencia *m*) como el producto de *m* factores de *a* multiplicados a la vez,

$$\boldsymbol{a^m = a \times a \times a \times a \times a \ldots \times a}$$

El factor *a* aparecerá *m* veces de acuerdo al exponente

Ejemplos:

$$\mathbf{3}^{\mathbf{5}} = \mathbf{3} \times \mathbf{3} \times \mathbf{3} \times \mathbf{3} \times \mathbf{3}$$

$$\mathbf{8}^{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \times \mathbf{8} \times \mathbf{8}$$

$$\mathbf{13}^{\mathbf{4}} = \mathbf{13} \times \mathbf{13} \times \mathbf{13} \times \mathbf{13}$$

2.2 Definición 2

Si $a \neq 0$ entonces se define que $a^0 = 1$

2.3 Denominación

$$\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}} : \textit{debe leerse como } \boldsymbol{a} \textit{ a la potencia de } m$$

$$\boldsymbol{a}: \textit{ se denomina la base}$$

$$\boldsymbol{m}: \textit{ se denomina el exponente}$$

2.4 Potenciación

Se define la potenciación como el resultado de multiplicar una cantidad determinada por sí misma la cantidad de veces que indique el exponente.

$$b = a^m$$

Para la anterior expresión se define *b* como la potencia, *a* la base y *m* el exponente.

Por ejemplo: para, $3^2 = 3 \times 3 = 9$**,** se dice que 9 es una Potencia de 3; de igual forma 81 es una potencia de 3, teniendo en cuenta: $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

En la práctica se acostumbra designar la segunda potencia de un número como el cuadrado; y a la tercera potencia como el cubo. Potencias de orden mayor no tienen denominación específica.

2.4.1 Propiedades de la potenciación

Propiedad 1

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \ (a \neq 0)$$

Cuando dos potencias de una misma base se multiplican, el resultado es igual a la base elevada a la suma de los dos exponentes

Propiedad 2

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \ (a \neq 0)$$

Cuando dos potencias de una misma base se dividen, el resultado es igual a la base elevada a un exponente que resulta de restar el exponente del numerador y el denominador

Propiedad 3

$$(a^m)^n = a^{mn} \ \ (a \neq 0)$$

Cuando una potencia es elevada a una potencia el resultado es igual a la base elevada al producto de los dos exponentes

Propiedad 4

$$(ab)^m = a^m \ \times b^m \ (ab \neq 0)$$

Cuando se tiene el producto de dos números elevados a la m-ésima potencia, el resultado es igual al producto de las m-ésimas potencia de los dos números

Propiedad 5

$$(\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{b^m} \ (a \neq 0 \ y \ b \neq 0)$$

Cuando se tiene el cociente de dos números elevados a la m-ésima potencia, el resultado es igual al cociente de las m-ésimas potencia de los dos números

2.4.2 Ejemplos

a) Simplifique la expresión $x^4 \times x^{-6} \times x^2$	
$x^{4-6+2} = \ x^0$	Aplicando la propiedad 1
$x^0 = 1$	Por definición - Resultado

b) Simplifique la expresión $\mathrm{x}^4 \div (\mathrm{x}^{-6} \times \mathrm{x}^2)$	
$x^4 \div (x^{2-6}) = x^4 \div (x^{-4})$	Aplicando la propiedad 1
$x^4 \div (x^{-4}) = x^{4-(-4)}$	Aplicando la propiedad 2
$x^{4+4} = x^8$	Resultado

c) Simplifique la expresión $(\mathrm{x}^4)^4 \div (\mathrm{x}^{-3})^{-3}$	
$x^{4\times4} \div x^{-3\times-3} = x^{16} \div x^9$	Aplicando la propiedad 3
$x^{16} \div x^9 = x^{16-9}$	Aplicando la propiedad 2
$x^{16-9} = x^7$	Resultado

d) Simplifique la expresión $(\frac{\mathrm{x}^4}{2})^2 \div (4\mathrm{x}^{-2})^{-2}$	
$(\frac{x^4}{2})^2 \div (4^{-2}x^4)$	Aplicando la propiedad 4
$\frac{x^{4\times2}}{2^2} \div (4^{-2} \times x^4) = \frac{x^8}{4} \div \frac{x^4}{16}$	Aplicando la propiedad 5
$\frac{x^8}{4} \div \frac{x^4}{16} = \frac{x^8}{4} \times \frac{16}{x^4}$	División de fracciones
$x^{8-4} \times 4^{2-1}$	Aplicando la propiedad 2
$x^4 \times 4 = 4x^4$	Resultado

3. Radicación

La potenciación, como otras operaciones, igualmente tiene operación inversa; pero a diferencia de la suma (inversa resta) y la multiplicación (inversa división) la potenciación tiene dos operaciones inversas: la radicación y la logaritmación.

Se definió la Potenciación como el resultado de elevar una base a un exponente. Cuando se conoce la Potencia y el exponente, la operación que permite conocer la base se denomina radicación. La operación radicación se denota como:

$$\sqrt[m]{b} = a$$

Y los términos se definen como: *b* el *radicando*; *m* el *índice*, *a* la *raíz* y el símbolo $\sqrt{}$ el *radical*.

Expresando en términos exponenciales la radicación se expresa como:

$$b^{\frac{1}{m}} = a$$

Es decir que la raíz es igual al radicando elevado al inverso multiplicativo del índice.

Ejemplos

a) Expresar en forma exponencial $\sqrt[4]{6^3}$	
$\sqrt[4]{6^3} = 6^{\frac{3}{4}}$	De acuerdo a la definición

b) Expresar en forma exponencial $\sqrt[4n]{(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{m}}}$	
$\sqrt[4n]{(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{m}}} = (1+i)^{\frac{m}{4n}}$	De acuerdo a la definición

c) Expresar en forma exponencial $\sqrt[3]{(1+\mathrm{i})^6}$	
$\sqrt[3]{(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{6}}} = (1+i)^{\frac{6}{3}} = (1+i)^3$	De acuerdo a la definición

d) Expresar en forma exponencial $\sqrt{\sqrt[3]{(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{i})}}$	

$\sqrt{\sqrt[3]{(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{i})}} = \sqrt{(1+i)^{\frac{1}{3}}} = ((1+i)^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}$ $= (1+i)^{\frac{1}{6}}$	De acuerdo a la definición

e) Expresar en forma exponencial $\sqrt{(1+\mathrm{i})}$	
$\sqrt{(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{i})} = (1+i)^{\frac{1}{2}}$	De acuerdo a la definición

f) Expresar en forma de radicales $\frac{(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{i})^{\frac{1}{8}}}{\boldsymbol{i}^{\frac{1}{2}}}$	
$\frac{(1+i)^{\frac{1}{8}}}{i^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt[8]{(1+i)}}{\sqrt{i}}$	De acuerdo a la definición

g) Expresar en forma de radicales $((\boldsymbol{1}+\boldsymbol{i})^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} \times (\boldsymbol{1}+\boldsymbol{i})^{\frac{1}{6}}$	
$((\boldsymbol{1}+\boldsymbol{i})^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} \times (\boldsymbol{1}+\boldsymbol{i})^{\frac{1}{6}}$ $= (1+i)^{\frac{1}{6}} \times (1+i)^{\frac{1}{6}}$ $= (1+i)^{\frac{1}{3}}$ $= \sqrt[3]{(1+i)}$	De acuerdo a la definición

h) Expresar en forma de radicales $\frac{(4+\mathrm{x})^{\frac{1}{9}}}{\mathrm{x}^{\frac{3}{4}}}$	

$\frac{(4+x)^{\frac{1}{9}}}{x^{\frac{3}{4}}} = \frac{\sqrt[9]{(4+x)}}{\sqrt[4]{x^3}}$	De acuerdo a la definición

i) Expresar en forma de radicales $\frac{(4+x)^{\frac{1}{9}}}{(4+x)^{\frac{3}{4}}}$	
$\frac{(4+x)^{\frac{1}{9}}}{(4+x)^{\frac{3}{4}}} = (4+x)^{\frac{1}{9}-\frac{3}{4}}$ $= (4+x)^{\frac{23}{36}}$ $= \sqrt[36]{(4+x)^{23}}$	De acuerdo a la definición

j) Expresar en forma de radicales $(\frac{5}{8})^{\frac{3}{4}} \times (\frac{10}{16})^{\frac{1}{2}} \div (x+1)^{\frac{9}{3}}$	
$(\frac{5}{8})^{\frac{3}{4}} \times (\frac{10}{16})^{\frac{1}{2}} \div (x+1)^{\frac{9}{3}}$ $= (\frac{5}{8})^{\frac{3}{4}} \times (\frac{5}{8})^{\frac{1}{2}} \div (x+1)^{\frac{9}{3}}$	Simplificando el segundo termino
$= (\frac{5}{8})^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}} \div (x+1)^{\frac{9}{3}}$	Aplicando la primera propiedad
$= (\frac{5}{8})^{\frac{5}{4}} \div (x+1)^{\frac{9}{3}}$	

$= \sqrt[4]{(\frac{5}{8})^5 \div (x+1)^3}$	De acuerdo a la definición

4. Logaritmos

El logaritmo es el exponente al cual hay que elevar una cantidad positiva, llamada base, para obtener un número determinado llamado potencia.

$$m = log_a b \quad \boldsymbol{si\ y\ solo\ s}í \quad b = a^m$$

De esta forma $log_a b$ es la potencia a la cual debe elevarse *a* para obtener m

4.1 Propiedades de los logaritmos

Propiedad 1

$$Log_a 1 = 0$$

El logaritmo de 1 en cualquier base es igual a 0

Propiedad 2

$$Log_a a = 1$$

El logaritmo de cualquier número positivo con la misma base siempre es igual a 1

Propiedad 3

$$Log_a(u \times v) = Log_a u + Log_a v$$

El logaritmo del producto de dos expresiones es igual al logaritmo de la primera más el logaritmo de la segunda en cualquier base *a*

Propiedad 4

$$Log_a\left(\frac{u}{v}\right) = Log_a u - Log_a v$$

El logaritmo del cociente de dos expresiones es igual al logaritmo de la expresión del numerador menos el logaritmo del denominador en cualquier base *a*

Propiedad 5

$$Log_a\left(\frac{1}{v}\right) = -Log_a v$$

Esta propiedad se desprende de la anterior ya que si el logaritmo de 1 es 0, entonces esta es una derivación de la anterior

Propiedad 6

$$Log_a(u^n) = n\,Log_a u$$

El logaritmo de una expresión elevada a un exponente es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la expresión

4.2 Sistemas de Logaritmos

En teoría existen infinitos sistemas de logaritmos considerando que cualquier número positivo, excepto el 1, puede llegar a ser tomado como base. Sin embargo en la práctica se utilizan dos sistemas: los logaritmos vulgares o decimales, cuya base es el 10 y los logaritmos naturales o neperianos cuya base es el número de Euler (e = 2,718281)

Logaritmos decimales

Son los logaritmos con base 10; en la notación de este no es necesario especificar la base $\log x$; de esta manera para todo aquel logaritmo donde no se especifique la base, esta debe entenderse como con base 10.

Teniendo en cuenta la definición de logaritmo, a continuación se construye la siguiente tabla orientativa de los logaritmos con base 10

10^5 = 100.000	Por lo tanto	Log 100.000 = 5
10^4 = 10.000	Por lo tanto	Log 10.000 = 4
10^3 = 1.000	Por lo tanto	Log 1.000 = 3
10^2 = 100	Por lo tanto	Log 100 = 2
10^1 = 10	Por lo tanto	Log 10 = 1
10^0 = 1	Por lo tanto	Log 1 = 0
10^{-1} = 0,1	Por lo tanto	Log 0,1 = -1
10^{-2} = 0,01	Por lo tanto	Log 0,01 = -2
10^{-3} = 0,001	Por lo tanto	Log 0,001 = -3
10^{-4} = 0,0001	Por lo tanto	Log 0,0001 = -4
10^{-5} = 0,00001	Por lo tanto	Log 0,00001 = -5

De la tabla, se puede concluir que para los números mayores que 1, el logaritmo es siempre positivo; mientras que para los números mayores que 0 y menores que 1, el logaritmo es negativo

Logaritmos Naturales

Son los logaritmos con base *e*; en donde *e* es el número de Euler (*e* = 2,718281). El logaritmo natural se denota como Log_e x o In x. esta última es la notación más aceptada.

Aplicación de las propiedades

En general todas las propiedades son aplicables para cualquier logaritmo independiente de la base que se utilice.

4.3 Ejemplos

a) Escriba la siguiente expresión como el logaritmo de una sola expresión. $$\log(x+1) - \log x$$	
$$Log\ \frac{(x+1)}{x}$$	Aplicando la propiedad 4

b) Escriba la siguiente expresión como el logaritmo de una sola expresión. $$\log x + \log 5 - \log y$$	
$Log\ (5x) - \log y$	Aplicando la propiedad 3
$Log\ \left(\frac{5x}{y}\right)$	Aplicando la propiedad 4

c) Escriba la siguiente expresión como el logaritmo de una sola expresión. $$x\ In\ 2 + 5\ In\ (x-1) - 2\ In\ (x+3)$$	
$In\ 2^x +\ In\ (x-1)^5 - In\ (x+3)^2$	Aplicando la propiedad 6
$In\ (2^x \times (x-1)^5) - In\ (x+3)^2$	Aplicando la propiedad 3
$In\ ((2^x \times (x-1)^5) \div (x+3)^2)$	Aplicando la propiedad 4

d) Escriba la siguiente expresión en forma exponencial y verifíquela. $$log_3 27 = 3$$	
$27 =\ 3^3 = 27$	Aplicando la definición de logaritmo

e) Escriba la siguiente expresión en forma exponencial y verifíquela. $$log_4\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$	
$\frac{1}{2} = 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$	Aplicando la definición de logaritmo

f) Escriba la siguiente expresión en forma exponencial y verifíquela. $$log_{\frac{1}{9}}\left(\frac{1}{243}\right) = \frac{5}{2}$$	
$\frac{1}{243} = (\frac{1}{9})^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{9^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{243}$	Aplicando la definición de logaritmo

g) Calcule el valor de la siguiente expresión usando la definición de logaritmo. $$log_2(512)$$	
$512 = 2^x$	Aplicando la definición de logaritmo
$log_2(512) = 9$	Hallando el valor de x. Respuesta

h) Calcule el valor de la siguiente expresión usando la definición de logaritmo. $$\log_4(2^p)$$	
$2^p = 4^x$	Aplicando la definición de logaritmo
$2^p = 2^{2x}$	Aplicando propiedad 4 de potenciación
$p = 2x$	Igualando los exponentes
$p/_2 = x$	Respuesta

5. Operaciones algebraicas

Cantidades del tipo $10y^2 + 4x^5 + 8$; $x+1$; $y^5 + 3y^4 + 2y^3 + 3y^2 + y + 100$; son expresiones algebraicas. Cada una de ellas está formada por términos. Por ejemplo: la expresión $10y^2 + 4x^5 + 8$, tiene tres términos: $10y^2$, $4x^5$ y 8. En el término $10y^2$, el 10 se denomina el factor numérico y y^2 es la parte literal del término.

Las expresiones con un solo término se denominan monomios, las que contienen dos binomios y la contiene tres, trinomio. En general una expresión con más de un término se denomina multinomio.

Se define términos semejantes aquellos cuya parte literal es igual. Por ejemplo 3x es semejante 1020x; también $3y^2$ es semejante $\frac{3}{4}y^2$.

5.1 Adición y sustracción de expresiones

Para adicionar o sustraer expresiones algebraicas se agrupan; suman o restan, según sea el caso, los términos semejantes; finalmente se simplifica la expresión hasta donde sea posible.

Ejemplos

1) Sumar $(3x^4 + 6x^2 + 20) + (5x^2 + 70)$	
$(3x^4) + (6x^2 + 5x^2) + (20 + 70)$	Agrupando términos semejantes
$3x^4 + 11x^2 + 90$	Sumando los términos semejantes

2) Restar $(3x^2 - 5xy + 7y^2)$ a $(7x^2 - 2xy + 4y^2 + 6)$	
$(7x^2 - 2xy + 4y^2 + 6) - (3x^2 - 5xy + 7y^2)$	Restar de la segunda expresión la primera
$(7x^2 - 3x^2) + (-2xy + 5xy) + (-7y^2 + 4y^2) + (6)$	Agrupando los términos semejantes
$4x^2 + 3xy - 3y^2 + 6$	Resultado

3) Sumar $(3x^2 - 5xy + 7y^2)$ a $(7x^2 - 2xy + 4y^2 + 6)$	
$(7x^2 - 2xy + 4y^2 + 6) + (3x^2 - 5xy + 7y^2)$	Sumar ambas expresiones
$(7x^2 + 3x^2) + (-2xy - 5xy) + (7y^2 + 4y^2) + (6)$	Agrupando los términos semejantes
$10x^2 - 7xy + 11y^2 + 6$	Resultado

4) Sumar $(2\sqrt{a} + 5\sqrt{b}) + (3\sqrt{a} - 2\sqrt{b})$	
$(2\sqrt{a} + 3\sqrt{a}) + (5\sqrt{b} - 2\sqrt{b})$	Agrupando los términos semejantes
$5\sqrt{a} + 3\sqrt{b}$	Sumando los términos semejantes y resultado

5.2 Multiplicación de expresiones

Para la multiplicación de expresiones algebraicas se utiliza la ley distributiva; su aplicación se ilustra a través de los siguientes ejemplos.

5) Multiplicar $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$	
$\boldsymbol{ax+ay}$	Se multiplica la *a* por cada una de los términos de la segunda expresión

6) Multiplicar $(3x+4y)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$	
$\boldsymbol{(3x \times x)+(3x \times y)+(4y \times x)+(4y \times y)}$	Se multiplica cada término de la primera expresión por los términos de la segunda y se suman o sustraen según sea el caso
$\boldsymbol{3x^2+3xy+4yx+4y^2}$	Se realizan las operaciones planteadas
$\boldsymbol{3x^2+(3xy+4yx)+4y^2}$	Se agrupan los términos semejantes
$\boldsymbol{3x^2+7xy+4y^2}$	Se suman los términos semejantes. resultado

7) Multiplicar $(3x-4)(\boldsymbol{6x^2-5x+2})$	
$\boldsymbol{(3x \times 6x^2)-(3x \times 5x)+(3x \times 2)-(4 \times 6x^2)+(4 \times 5x)-(4 \times 2)}$	Se multiplica cada término de la primera expresión por los términos de la segunda y se suman o sustraen según sea el caso
$\boldsymbol{18x^3-15x^2+6x-24x^2+20x-8}$	Se realizan las operaciones planteadas
$\boldsymbol{18x^3-(15x^2+24x^2)+(6x+20x)-8}$	Se agrupan los términos semejantes
$\boldsymbol{18x^3-19x^2+26x-8}$	Se suman los términos semejantes. Resultado

8) Multiplicar $(x+a)(x+b)$	
$\boldsymbol{(x \times x)+(x \times b)+(a \times x)+(a \times b)}$	Se multiplica cada término de la primera expresión por los términos de la segunda y se

	suman o sustraen según sea el caso
$\boldsymbol{x^2+bx+ax+ab}$	Se realizan las operaciones planteadas
$\boldsymbol{x^2+(a+b)x+ab}$	Se agrupan los términos semejantes. Resultado

9) Multiplicar $(x+a)(x+a)=(\boldsymbol{x+a})^{\boldsymbol{2}}$	
$(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a})$	Se multiplica cada término de la primera expresión por los términos de la segunda y se suman o sustraen según sea el caso
$\boldsymbol{x^2+ax+ax+a^2}$	Se realizan las operaciones planteadas
$\boldsymbol{x^2+2ax+a^2}$	Se agrupan los términos semejantes. Resultado

10) Multiplicar $(x-a)(x-a)=(\boldsymbol{x-a})^{\boldsymbol{2}}$	
$(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a})$	Se multiplica cada término de la primera expresión por los términos de la segunda y se suman o sustraen según sea el caso
$\boldsymbol{x^2-ax-ax+a^2}$	Se realizan las operaciones planteadas
$\boldsymbol{x^2-2ax+a^2}$	Se agrupan los términos semejantes. Resultado

11) Multiplicar $(x+a)(x-a)$	
$(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a})$	Se multiplica cada término de la primera expresión por los términos de la segunda y se suman o sustraen según sea el caso
$\boldsymbol{x^2-ax+ax-a^2}$	Se realizan las operaciones planteadas
$\boldsymbol{x^2-a^2}$	Se agrupan los términos semejantes. Resultado

5.3 División de expresiones

Igual que para la multiplicación en la división de expresiones algebraicas se utiliza la ley distributiva; su aplicación se ilustra a través de los siguientes ejemplos.

12) Dividir $(a+b) \div (c)$	
$(\boldsymbol{a} \div \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b} \div \boldsymbol{c})$	Se divide cada término del numerador por el monomio del denominador. Resultado

13) Dividir $(2x^2 + 4x) \div (2x)$	
$(\boldsymbol{2x^2 \div 2x}) + (\boldsymbol{4x \div 2x})$	Se divide cada término del numerador por el monomio del denominador. Resultado
$\boldsymbol{x+2}$	Simplificando. Resultado

Cuando se quiere dividir una expresión algebraica entre un divisor que contiene más de un término se usa el procedimiento denominado de *División Larga*, en los siguientes ejemplos se ilustra este procedimiento

14) dividir $(23 - 11x^2 + 2x^3) \div (2x - 3)$	
$\dfrac{(\boldsymbol{2x^3 - 11x^2 + 0x + 23})}{(\boldsymbol{2x - 3})}$	Antes de iniciar se deben ordenar los términos en el dividendo y divisor en orden decreciente de las potencias de x, se llenan los espacios con cero cuando las potencias no existen
$\boldsymbol{2x^3 \div 2x = x^2}$	Dividimos el primer término del dividendo por el primer término del divisor; para obtener el primer término del cociente
$\boldsymbol{x^2 \times (2x - 3) = 2x^3 - 3x^2}$	Multiplicamos el primer término del cociente con el divisor
$(\boldsymbol{2x^3 - 11x^2 + 0x + 23}) - (\boldsymbol{2x^3 - 3x^2}) =$ $= \boldsymbol{-8x^2 - 0x + 23}$	El resultado anterior se resta al dividendo

$-8x^2 \div 2x = -4x$	Para obtener el segundo término del cociente dividimos el primer término del resultado anterior entre el primer término del divisor
$-4x \times (2x-3) = -8x^2 + 12x$	Se multiplica nuevamente el divisor por el resultado anterior
$(-8x^2 - 0x + 23) - (-8x^2 + 12x) =$ $-12x + 23$	El anterior resultado se resta de $-8x^2 - 0x + 23$
$-12x \div 2x = -6$	Para obtener el tercer término dividimos el primer término del anterior resultado entre el primero del divisor
$-6 \times (2x-3) = -12x + 18$	Se multiplica el divisor por el resultado anterior
$-12x + 23 - (-12x + 18) = 5$	El anterior resultado se resta de $-12x + 23$
$\frac{5}{2x-3}$	Considerando que la potencia es menor a la del divisor este será el residuo
$x^2 - 4x - 6 + \frac{5}{2x-3}$	Resultado

5.4 Factorización

Si dos o más expresiones algebraicas se multiplican a la vez se dice que estas expresiones son factores del producto que se obtuvo. Por ejemplo, la expresión 2xz se obtuvo de multiplicar *2*, *x* y *z* de modo que *2*, *x* y *z* son los factores de 2xz; pero 2x también será un factor ya que 2xz se puede obtener de multiplicar 2x y z.

El procedimiento de escribir una expresión algebraica como el producto de sus factores se denomina *Factorización*

5.4.1 Factor común

Lo primero que debe hacerse es extraer todos los monomios comunes a todos los términos. La forma de hacerlo se ilustra en los siguientes ejemplos

15) Factorizar: $(2x^2 + 4xy + 5x^3y)$	
$\boldsymbol{x(2x + 4y + 5x^2y)}$	$\boldsymbol{x}$ es el único factor común a cada termino; nótese que si revertimos la operación, es decir, aplicamos la ley distributiva volvemos a obtener la misma expresión
$\boldsymbol{x(2x + 4y + 5x^2y)}$	Resultado

16) Factorizar: $12ab^2c^3 + 6a^2b^2c^2 + 18a^3bc^2$	
$\boldsymbol{6abc^2(2bc + ab + 3a^2)}$	Analizando la expresión dada detallamos que el factor común a los tres términos es: $6abc^2$; de esta forma se procede a extraer este factor de cada término
$\boldsymbol{6abc^2(2bc + ab + 3a^2)}$	Resultado

5.4.2 Factorización de la diferencia de cuadrados $x^2 - y^2$

En la sección anterior se llegó a que $\boldsymbol{x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)}$, es decir, la diferencia del cuadrado de dos expresiones es igual al producto de la suma de sus raíces por su diferencia. De esta forma cualquier expresión algebraica que tenga esta forma, se factorizará como dicho producto. En los siguientes ejemplos se ilustra la forma este caso.

17) Factorizar: $b^2c^4 - 81$	
$\boldsymbol{(bc^2)^2 - 9^2}$	La expresión dada se puede escribir como se indica; la cual es a su vez la diferencia de dos cuadrados
$\boldsymbol{(bc^2 + 3)(bc^2 - 3)}$	Resultado

18) Factorizar: $10x^4 - 160y^8$	
$\boldsymbol{10(x^4 - 16y^8)}$	Por factor común la expresión dada, se puede escribir como se indica
$\boldsymbol{10((x^2)^2 - (4y^4)^2)}$	Reescribiendo la expresión
$\boldsymbol{10\ (x^2 + 4y^4)(x^2 - 4y^4)}$	Considerando que la expresión del paréntesis es la diferencia de dos cuadrados.
$\boldsymbol{10\ (x^2 + 4y^4)(x^2 - (2y^2)^2)}$	Reescribiendo el tercer factor
$\boldsymbol{10\ (x^2 + 4y^4)(x + 2y^2)(x - 2y^2)}$	Considerando que la expresión del tercer factor es igualmente la diferencia de dos cuadrados
$\boldsymbol{10\ (x^2 + 4y^4)(x + 2y^2)((\sqrt{x})^2 - (\sqrt{2}y)^2)}$	Reescribiendo el cuarto factor
$\boldsymbol{10\ (x^2 + 4y^4)(x + 2y^2)(\sqrt{x} + \sqrt{2}y)(\sqrt{x} - \sqrt{2}y)}$	Considerando que la expresión del cuarto factor es igualmente la diferencia de dos cuadrados
$\boldsymbol{10\ (x^2 + 4y^4)(x + 2y^2)(\sqrt{x} + \sqrt{2}y)(\sqrt{x} - \sqrt{2}y)}$	Resultado

5.4.3 Factorización por agrupamiento de términos

En este método los términos se agrupan en parejas con el fin de buscar monomios comunes. Se ilustra el método a través de los siguientes ejemplos

19) Factorizar: $2x^3y - 4x^2y^2 + 8xy - 16y^2$	
$\boldsymbol{2y\ (x^3 - 2x^2y + 4x - 8y)}$	Considerando que $\boldsymbol{2y}$ es un factor común a todos los términos, se puede extraer como un factor común
$\boldsymbol{2y\ ((x^3 - 2x^2y) + (4x - 8y))}$	El factor del paréntesis se puede agrupar como se indica ya que los términos agrupados tienen elementos comunes
$\boldsymbol{2y\ (x^2\ (x - 2y) + 4(x - 2y))}$	Factorizando cada una de las expresiones del paréntesis.

	En la primera el factor común es $\boldsymbol{x^2}$, en la segunda es 4
$\boldsymbol{2y\,(x^2+4)(x-2y)}$	Factorizando la expresión total del paréntesis la cual tiene como factor común $\boldsymbol{(x-2y)}$
$\boldsymbol{2y\,(x^2+4)(x-2y)}$	Resultado

5.4.4 Factorización de expresiones $\mathbf{x^2+ax+b}$

Estas expresiones algebraica, donde a y b son constantes, usualmente se pueden factorizar como el producto de $(x+c)(x+d)$; c y d deben ser dos números que sumados den *a* y multiplicados den *b.* el método se ilustra a través de los siguientes ejemplos:

20) Factorizar: x^2+3x+2	
$\boldsymbol{(x+2)(x+1)}$	Considerando que 1 y 2 son dos números que sumados dan 3 y multiplicados dan 2
$\boldsymbol{(x+2)(x+1)}$	Resultado

21) Factorizar: x^4+7x^2+12	
$(x^2)^2+7(x^2)+12$	Reescribiendo la expresión
$\boldsymbol{(x^2+4)(x^2+3)}$	Considerando que 4 y 3 son dos números que sumados dan 7 y multiplicados dan 12
$\boldsymbol{(x^2+4)(x^2+3)}$	Resultado

22) Factorizar: x^2-5x+6	
$\boldsymbol{(x-2)(x-3)}$	Considerando que -2 y -3 son dos números que sumados dan -5 y multiplicados dan 6
$\boldsymbol{(x-2)(x-3)}$	Resultado

23) Factorizar: $3x^2 - 3x - 6$	
$\mathbf{3(x^2 - x - 2)}$	Considerando que 3 es un factor común, lo primero es extraer dicho elemento
$\mathbf{(x-2)(x+1)}$	Considerando que -2 y 1 son dos números que sumados dan -1 y multiplicados dan -2
$\mathbf{(x-2)(x+1)}$	Resultado

5.4.5 Factorización de expresiones $\mathbf{mx^2 + ax + b}$

En este caso se trata de encontrar dos factores del producto *mb* cuya suma sea igual a *a*. Con lo anterior se expresa *a* como la suma de esos dos factores convirtiendo la expresión en una de cuatro términos la cual se puede resolver por el método del agrupamiento. Lo anterior, se ilustra a través de los siguientes ejemplos.

24) Factorizar: $3x^2 + 11x + 6$	
$\mathbf{3x^2 + (9+2)x + 6}$	Considerando que mb = 6 x 3 = 18 y dos factores de 18 que suman 11, son 9 y 2
$\mathbf{3x^2 + 9x + 2x + 6}$	Despejando el paréntesis
$\mathbf{(3x^2 + 9x) + (2x + 6)}$	Agrupando términos
$\mathbf{3x(x+3) + 2(x+3)}$	Extrayendo el factor común de cada uno de las expresiones
$\mathbf{(3x+2)(x+3)}$	Extrayendo el factor común
$\mathbf{(3x+2)(x+3)}$	Resultado

25) Factorizar: $6x^2 - 5x - 4$	
$\mathbf{6x^2 + (-8+3)x - 4}$	Considerando que mb = 6 x -4 = -24 y dos factores de -24 que suman -5, son -8 y 3
$\mathbf{2x^2 - 8x + 3x - 4}$	Despejando el paréntesis
$\mathbf{(2x^2 - 8x) + (3x - 4)}$	Agrupando términos

$\boldsymbol{2x(3x-4)+(3x-4)}$	Extrayendo el factor común de cada uno de las expresiones
$\boldsymbol{(2x+1)(3x+4)}$	Extrayendo el factor común
$\boldsymbol{(2x+1)(3x+4)}$	Resultado

5.4.6 Factorización de expresiones x^3+y^3 ó x^3-y^3

Se puede comprobar que la suma de dos cubos se puede descomponer como:

$$\boldsymbol{x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)}$$

De igual forma la diferencia de dos cubos se puede descomponer como:

$$\boldsymbol{x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)}$$

Estas dos fórmulas son útiles para factorizar expresiones que puedan expresarse como la suma o diferencia de cubos. En los siguientes ejemplos se ilustra esta metodología.

26) Factorizar: $8x^6+27y^3$	
$\boldsymbol{(2x^2)^3+(3y)^3}$	Reescribiendo la expresión
$\boldsymbol{(2x^2+3y)(4x^4-6x^2y+9y^2)}$	Factorizando como la suma de dos cubos
$\boldsymbol{(2x^2+3y)(4x^4-6x^2y+9y^2)}$	El segundo factor no puede factorizarse más ya que $\boldsymbol{36y^2}$ no puede expresarse dos factores cuya suma sea $\boldsymbol{-6y}$
$\boldsymbol{(2x^2+3y)(4x^4-6x^2y+9y^2)}$	Resultado

27) Factorizar: $24x^4-3x$	
$\boldsymbol{3x(8x^3-1)}$	Extrayendo el factor común de los dos términos

$\mathbf{3x\,(2x-1)(4x^2+2x+1)}$	Factorizando el segundo factor como la diferencia cubos
$\mathbf{3x\,(2x-1)(4x^2+2x+1)}$	El segundo factor no puede factorizarse más ya que $\mathbf{4}$ no puede expresarse en dos factores cuya suma sea $\mathbf{2}$
$\mathbf{3x\,(2x-1)(4x^2+2x+1)}$	Resultado

5.4.7 Otros casos de Factorización

$$\boldsymbol{x^4-y^4=(x^2-y^2)(x^2+y^2)=(x-y)(x+y)(x^2+y^2)}$$
$$\boldsymbol{x^5+y^5=(x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)}$$

Resumen procedimiento para factorizar expresiones algebraicas
✓ Extraer todos lo monomios comunes de los diferentes términos de la expresión
✓ Si detalla la diferencia de dos cuadrados o la diferencia o suma de dos cubos utilice las reglas vistas anteriormente
✓ En caso de expresiones de cuatro términos utilice el método de agrupamiento.
✓ Si detalla la diferencia de dos cuadrados o la diferencia o suma de dos cubos utilice las reglas vistas anteriormente
✓ Busque los trinomios que puedan existir en la expresión y factoricelos de acuerdo a las reglas vistas

5.5 Fracciones algebraicas

Se define como la razón de dos expresiones algebraicas:

Ejemplos:

$$\frac{x^2}{(x+1)}\ expresion\ algebraica$$

$$\frac{(3x+y)^2}{(4x+2y+1)}\ expresion\ algebraica$$

Los valores de las variables del denominador de una fracción algebraica no deberán tomar valores que hagan que dicho denominador sea igual a 0. Ya que la división por cero no es una operación definida. En esta sección se estudia los métodos de simplificación, suma, sustracción, multiplicación y división de fracciones algebraicas

5.5.1 Simplificación de fracciones

En la simplificación de facciones se busca expresar numerador y denominador en sus factores, con el fin de facilitar la división. Para esto es útil tener presente los diferentes casos de factorización, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplos:

28) Simplificar: $\frac{4y^2-20y+24}{6+10y-4y^2}$	
$4(y^2-5y+6)$	Extrayendo el factor común de los términos del numerador
$4(y-3)(y-2)\quad Numerador$	Factorizando el segundo factor del numerador. Se tiene que -3 y -2 son los dos números que sumados dan -5 y multiplicados den 6.
$-2(2y^2-5y-3)$	Extrayendo el factor común de los términos del denominador
$-2(2y^2+(-6+1)y-3)$	Dos factores de (-2)(-3) que sumen -5, son -6 y 1
$-2(2y^2-6y+y-3)$	Eliminando el paréntesis
$-2((2y^2+y)-(6y-3))$	Agrupando los términos
$-2(y(2y+1)-3(2y+1))$	Extrayendo el factor común de los términos agrupados
$-2(2y+1)(y-3)Denominador$	Extrayendo el factor común
$\frac{4(y-3)(y-2)}{-2(2y+1)(y-3)}$	Escribiendo de nuevo la fracción con las expresiones factorizadas

$\dfrac{-2(y-2)}{(2y+1)}$	Dividiendo las expresiones se obtiene la expresión simplificada

29) Simplificar: $\frac{2y^2-4y+2}{y^2-4y+3}$	
$2(y^2-2y+1)$	Extrayendo el factor común de los términos del numerador
$2(y-1)(y-1) =$ $= 2(y-1)^2 \, Numerador$	Factorizando el segundo factor del numerador. Se tiene que -1 y -1 son los dos números que sumados dan -2 y multiplicados dan 1.
$y^2-4y+3=(y-3)(y-1) Denominador$	En el denominador, (-3) y (-1) son los dos números que sumados dan -4 y multiplicados dan 3.
$\dfrac{2(y-1)^2}{(y-3)(y-1)}$	Escribiendo de nuevo la fracción con las expresiones factorizadas
$\dfrac{2(y-1)}{(y-3)}$	Dividiendo las expresiones se obtiene la expresión simplificada

5.5.2 Adición y sustracción de fracciones

Cuando las fracciones que se suman o restan tienen el mismo denominador simplemente se suman o restan los numeradores manteniendo el mismo denominador; en el caso que estos no sean iguales se debe buscar el mínimo común denominador (m.c.d), hallando para cada una de fracción el equivalente con el nuevo denominador. A través de los siguientes ejemplos se ilustran ambas situaciones.

30) Sumar: $\frac{2x+3}{x+1}+\frac{x-1}{x+1}$	
$\dfrac{(2x+3)+(x-1)}{x+1}$	Considerando que ambas fracciones tienen igual denominador

$\frac{2x+3+x-1}{x+1}$	Eliminando los paréntesis
$\frac{3x+2}{x+1}$	Sumando los términos semejantes del numerador
$\frac{3x+2}{x+1}$	Respuesta

31) Hallar el m.c.d de : $\frac{2z+1}{z-3}$, $\frac{3z-1}{2z+7}$	
$(z-3)(2z+7)$	El m.c.d en este caso será el producto de ambos denominadores; ya que no tienen factores comunes
$(z-3)(2z+7)$	Respuesta

32) Hallar el m.c.d de : $\frac{y+1}{(y-1)^2}$, $\frac{5}{(y-1)(y+2)}$, $\frac{7}{(y+3)(y+2)^3}$	
$(y-1)^2(y+2)^3(y+3)$	El m.c.d en este caso será el producto de los factores comunes y no comunes de todos los denominadores
$(y-1)^2(y+2)^3(y+3)$	Respuesta

33) Sumar : $\frac{2z+1}{z+2} + \frac{z-1}{3z-2}$	
$(z+2)(3z-2)\ Minimo\ Común\ Denominador$	Considerando que no tienen igual denominador; lo primero es hallar el m.c.d. En este caso será el producto de los factores comunes y no comunes de todos los denominadores
$\frac{(2z+1)(3z-2)}{(z+2)(3z-2)}\ primera\ faccion\ modificada$	Primera fracción: equivalente con el nuevo denominador. Para esto pregúntese por qué expresión hay que multiplicar

	el numerador para que no se modifique la fracción
$\frac{(z-1)(z+2)}{(z+2)(3z-2)}$ $segunda\ faccion\ modificada$	Segunda fracción: equivalente con el nuevo denominador. Para esto pregúntese por qué expresión hay que multiplicar el numerador para que no se modifique la fracción
$\frac{(2z+1)(3z-2)}{(z+2)(3z-2)}+\frac{(z-1)(z+2)}{(z+2)(3z-2)}$	Suma equivalente
$\frac{(6z^2-z-2)+(z^2+z-2)}{(z+2)(3z-2)}$	Eliminando paréntesis y sumando expresiones con denominador común
$\frac{7z^2-4}{(z+2)(3z-2)}$	Eliminando paréntesis
$\frac{7z^2-4}{(z+2)(3z-2)}$	Respuesta

34) Realizar: $\frac{5}{y^2-3y+2}-\frac{1}{y+2}+\frac{3}{y^2-4y+4}$	
$y^2-3y+2=(y-2)(y-1)$ $=(y-2)(y-1)$ $denominador\ factorizado\ de\ la\ primera\ fracción$	En este caso es necesario factorizar los denominadores de las fracciones primera y tercera. Factorizando el denominador de la primera
$y^2-4y+4=(y-2)(y-2)=(y-2)^2$ $=(y-2)^2$ $denominador\ factorizado\ de\ la\ tercera\ fracción$	Factorizando el denominador de la tercera fracción
$\frac{5}{(y-2)(y-1)}-\frac{1}{y+2}+\frac{3}{(y-2)^2}$	Reescribiendo la operación
$(y-2)^2(y-1)(y+2)$	Mínimo común denominador
$\frac{5(y-2)(y+2)-1(y-2)^2(y-1)+3(y-1)(y+2)}{(y-2)^2(y-1)(y+2)}$	Convirtiendo las fracciones en sus equivalentes

$\frac{5(y^2-4)-1(y^2-4y+4)(y-1)+3(y^2+y-2)}{(y-2)^2(y-1)(y+2)}$	Eliminando paréntesis
$\frac{5y^2-20-y^3+5y^2-8y+4+3y^2+3y-6}{(y-2)^2(y-1)(y+2)}$	Eliminando paréntesis
$\frac{-y^3+13y^2-5y-22}{(y-2)^2(y-1)(y+2)}$	Sumando términos semejantes
$\frac{-y^3+13y^2-5y-22}{(y-2)^2(y-1)(y+2)}$	Respuesta

5.5.3 Multiplicación de fracciones

Para multiplicar dos o más fracciones simplemente se multiplican sus numeradores y denominadores. La metodología se ilustra en los siguientes ejemplos:

35) Multiplicar: $\frac{2a+1}{a-2} \times \frac{3-a}{a+1}$	
$\frac{(2a+1)(3-a)}{(a-2)(a+1)}$	Para multiplicar las fracciones se multiplican los numeradores y los denominadores; nótese que en este caso la fracción resultante no se puede simplificar
$\frac{(2a+1)(3-a)}{(a-2)(a+1)}$	Respuesta

36) Multiplicar: $\frac{y^2-5y+6}{6y^2+18y+12} \times \frac{4y^2-16}{2y^2-5y-3}$	
$\frac{(y^2-5y+6)(4y^2-16)}{(6y^2+18y+12)(2y^2-5y-3)}$	Para multiplicar las fracciones se multiplican los numeradores y los denominadores; nótese que en este caso la fracción resultante no se puede simplificar

$\frac{(y-2)(y-3)\times 2\times 2(y-2)(y+2)}{2\times 3(y+1)(y+2)(y-3)(2x+1)}$	Factorizando cada uno de los paréntesis
$\frac{2(y-2)(y-2)}{3(y+1)(2x+1)}$	Realizando la divisiones
$\frac{2(y-2)^2}{3(y+1)(2x+1)}$	Respuesta

5.5.4 División de fracciones

Para dividir una fracción entre otra, se invierte el denominador y se multiplica con la fracción del numerador, así:

$$\frac{a}{b}\div\frac{x}{y}=\frac{a}{b}\times\frac{y}{x}$$

La metodología para dividir fracciones se ilustra a través de los siguientes ejemplos

37) Dividir: $\frac{2a+3}{a-1}\div\frac{a+3}{2a^2-2}$	
$\frac{2a+3}{a-1}\times\frac{2a^2-2}{a+3}$	Para dividir fracciones se multiplica el numerador por inverso del denominador
$\frac{(2a+3)2(a-1)(a+1)}{(a-1)(a+3)}$	Multiplicando y Factorizando
$\frac{2(2a+3)(a+1)}{(a+3)}$	Realizando la divisiones
$\frac{2(2a+3)(a+1)}{(a+3)}$	Respuesta

38) Dividir: $\frac{3b-1}{b-2}\div(b+1)$	
$\frac{3b-1}{b-2}\times\frac{1}{b+1}$	Para dividir fracciones se multiplica el numerador por inverso del denominador
$\frac{(3b-1)}{(b-2)(b+1)}$	Multiplicando

$\frac{(3b-1)}{(b-2)(b+1)}$	Respuesta

6. Ecuaciones

6.1 Ecuaciones lineales

Es una proposición que expresa la igualdad de dos expresiones algebraicas, en general involucra una o más variables y el signo igual.

Las siguientes expresiones son ecuaciones:

$$2x - 3 = 9 - 5x \;\; (1)$$

$$\mathrm{y} - 5y = 56 - 5y \;\; (2)$$

$$b + a = 3x + \frac{b}{3+a} \; (3)$$

En la ecuación (1) la variable es x; por su parte, en la ecuación (2) es y, y en la ecuación (3) a y b son parámetros y la variable es x. Las ecuaciones están formadas por miembros que están separados por el signo igual; el primer miembro al lado izquierdo y el segundo miembro a lado derecho.

Las ecuaciones que solo contienen constantes, sin variables, son proposiciones que pueden ser verdaderas o falsas.

$$8 - 3 = 5 \;\; (Proposición\ verdadera) \;\; (4)$$

$$\frac{8}{4} - 1 = 1 \;\; (Proposición\ verdadera) \; (5)$$

$$\frac{15}{3} - 3 = 5 \;\; (Proposición\ falsa) \; (6)$$

$$\frac{2}{4}8 - \frac{12}{3} = 5 \;\; (Proposición\ falsa) \; (7)$$

En cambio una ecuación con una o más variables por lo regular es una proporción válida para algunos valores de la variable o las variables.

$$3\mathrm{y} - 5 = 15 + 5y \;\; (8)$$

En la ecuación (8), si y toma el valor de -10, la proposición se vuelve verdadera; no obstante para cualquier otro valor la proposición es falsa. Los valores de las variables que hacen que la ecuación sea una proposición verdadera se denominan ***solución*** de la ecuación.

Para hallar la ***solución*** de una ecuación se utiliza un procedimiento que consiste en transformar la proposición original en una equivalente más sencilla, que puede ser resuelta fácilmente. Para que la ecuación resultante de la transformación mantenga su equivalencia con la proposición original; es decir, que la(s) solución(es) sea la misma se deben aplicar en el procedimiento de transformación, los siguientes principios:

- ✓ Principio de la adicción: se puede sumar o restar cualquier constante o cualquier expresión algebraica que incluya la variable a la variable a ambos lados de la ecuación sin que se modifique los resultados.
- ✓ Principio de la multiplicación: se puede multiplicar o dividir ambos lados de la ecuación por cualquier constante distinta de cero, o cualquier expresión que incluya la variable, sin que se modifiquen los resultados de la ecuación.
- ✓ Principio de la exponenciación: se puede elevar a una potencia cualquiera ambos lados de la ecuación, sin que se modifiquen los resultados los resultados

A través de los siguientes ejemplos se ilustra la forma de hallar la solución de una ecuación:

Ejemplo 1.

Resuelva la ecuación $7x - 4 = x + 20$

Se resta $\boldsymbol{x}$ a ambos lados de la ecuación; así la ecuación se transforma en:

$$7x - 4 - x = x + 20 - x$$

$$6x - 4 = 20$$

Se suma 4 a ambos lados de la ecuación; así la ecuación se transforma en:

$$6x - 4 + 4 = 20 + 4$$

$$6x = 24$$

Se dividen ambos lados de la ecuación por 6; así la ecuación se transforma en:

$$\frac{6}{6}x = \frac{24}{6}$$

$$\boldsymbol{x = 4}$$

Por lo tanto la solución de la ecuación original es $\boldsymbol{x = 4}$

Ejemplo 2

Resolver la ecuación: $3y - 4(6 - y) = 15 - 6y$

En este caso lo primero es efectuar las operaciones que están planteadas:

$$3y - 24 + 4y = 15 - 6y$$

Sumar los términos semejantes en ambos lados de la ecuación:

$$7y - 24 = 15 - 6y$$

Pasar $\boldsymbol{6y}$ para el lado izquierdo de la ecuación cambiando el signo y pasar -24 para el lado derecho, igualmente cambiando el signo.

$$7y + 6y = 15 + 24$$

Sumar los términos semejantes en ambos lados

$$13y = 39$$

El 13 que está multiplicando la y, se pasa al otro lado de la ecuación dividiendo

$$y = \frac{39}{13} = 3$$

Por lo tanto la solución de la ecuación original es $\boldsymbol{y = 3}$

Conclusiones de los ejercicios

El principio de la adición permite pasar cualquier término de un lado de la ecuación al otro, cambiando su signo, sin alterar las soluciones de la ecuación.

Por su parte el principio de la multiplicación permite pasar un término que está multiplicando al otro lado dividiendo; debe tenerse especial cuidado que dicho valor no pueda tomar el valor de cero.

Considerando estas conclusiones se sistematiza el procedimiento para resolver una ecuación en los siguientes tres pasos:

Procedimiento para resolver las ecuaciones
Paso 1. Elimine las fracciones que aparecen en la ecuación multiplicando ambos miembros por el denominador común de las fracciones involucradas
Paso 2. Pasar todos los términos que contengan la variable al lado izquierdo y todos los demás términos al lado derecho; aplicando el principio de la adicción.
Paso 3. Si es posible simplifique y agrupe los términos semejante. Adicionalmente pase los elementos que multiplican o dividen la variable al otro lado; aplicando el principio de la multiplicación

El procedimiento anterior se aplica en los siguientes tres ejemplos.

Ejemplo 3

Resuelva la ecuación $\frac{5x}{6} - \frac{x-3}{8} = \frac{18}{6} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{4x-1}{3}\right)$

Antes de aplicar el primer paso lo que se debe de hacer es eliminar el paréntesis; realizando esto la ecuación queda como:

$$\frac{5x}{6} - \frac{x-3}{8} = \frac{18}{6} - \frac{x}{2} + \frac{4x-1}{6}$$

Paso 1.

El denominador común de las fracciones de la ecuación es 48, entonces se multiplica ambos lados de la ecuación por este número con el fin de eliminar los denominadores.

$$48(\frac{5x}{6}) - 48(\frac{x-3}{8}) = 48(\frac{18}{6}) - 48(\frac{x}{2}) + 48(\frac{4x-1}{6})$$

$$8(5x) - 6(x-3) = 8(18) - 24(x) + 8(4x-1)$$

$$40x - 6x + 18 = 144 - 24x + 32x - 8)$$

Paso 2.

Se pasan todos los términos que contienen la variable para el lado izquierdo y los demás al lado derecho.

$$40x - 6x + 24x - 32x = 144 - 8 - 18$$

Paso 3.

Se agrupan y simplifican los términos semejantes.

$$26x = 118$$

El 26 que está multiplicando la variable se pasa al otro lado de la ecuación dividiendo

$$x = \frac{118}{26} = 4{,}5384$$

Ejemplo 4

Resuelva la ecuación $\frac{x-2t}{a} = \frac{3(x-y)}{z}$ para x

Paso 1

El denominador común en este caso es az; entonces se multiplican ambos lados de la ecuación por az

$$az\frac{x-2t}{a} = az\frac{3(x-y)}{z}$$

$$z(x-2t) = 3a(x-y)$$

Se eliminan los paréntesis

$$zx - 2zt = 3ax - 3ay$$

Paso 1

Se pasan todos los términos que contienen la variable (en este caso la variables es x, considerando que piden resolver para esta variable) para el lado izquierdo y los demás al lado derecho.

$$zx - 3ax = 2zt - 3ay$$

Paso 3.

Se agrupan y simplifican los términos semejantes.

$$x(z-3a) = 2zt - 3ay$$

El término $(z-3a)$ que está multiplicando la variable se pasa al otro lado de la ecuación dividiendo

$$x = \frac{2zt - 3ay}{(z-3a)}$$

6.2 Aplicación de ecuaciones lineales

En la práctica las ecuaciones lineales son útiles porque a través de ellas se pueden modelar muchos problemas de la vida cotidiana. Inicialmente, de la problemática, se emiten declaraciones verbales que se convierten en proposiciones algebraicas consiguiendo de esta forma un modelo que de manera aproximada simula la situación. En forma detallada el procedimiento de modelación se explica a través del siguiente procedimiento:

Procedimiento para modelar problemas a través de las ecuaciones	
Paso 1.	Represente la cantidad desconocida a través de una variable (por ejemplo x)
Paso 2.	Exprese las demás cantidades en función de la variable.
Paso 3.	Traduzca las expresiones verbales en proposiciones algebraicas en las cuales intervenga la variable. Expresiones como "es" o "era" deben traducirse con el símbolo algebraico "="
Paso 4	Resuelva la expresión o expresiones algebraicas de acuerdo a los métodos algebraicos
Paso 5	Transforme la solución algebraica en una expresión verbal

En los siguientes ejemplos se ilustra el anterior procedimiento.

Ejemplo 5

Un vendedor gana un salario base de $2´000.000 por mes, más una comisión del 3% de las ventas que haga. Si el estima que sus ventas diarias son de $2´500.000 diarios, ¿Cuántos días deberá trabajar para obtener un salario de $3´000.000 mensual?

Paso 1.

x es igual a la cantidad de días que el vendedor deberá trabajar para obtener el salario deseado.

Paso 2.

El salario por comisiones será igual a las ventas diarias ($2´500.000) por el porcentaje que gana por ellas por el número de días que deberá trabajar.

El salario que desea al mes ($3´000.000) será igual al salario básico ($2´000.000) más el salario ganado por comisiones

Paso 3.

Salario por comisiones = $2´500.000 x 3% x x

Salario deseado =$3´000.000 = $2´000.000 + ($2´500.000 x 3% x x)

Ecuación

$$3´000.000 = 2´000.000 + (2´500.000 \times 0{,}03 \times x)$$

Paso 4

Para resolver la ecuación se pasan los 2´000.000 al lado izquierdo y se resuelve el paréntesis

$$3´000.000 - 2´000.000 = 2´500.000 \times 0{,}03 \times x$$

$$1´000.000 = 75.000 \times x$$

Para hallar el valor de x, entonces se pasa al otro lado a dividir los 75.000 que están multiplicando la variable

$$\frac{1´000.000}{75.000} = x$$

$$13{,}33 = x$$

Paso 5

El vendedor deberá trabajar 13,33 días para poder tener un salario de $3´000.000

Ejemplo 6

Un comerciante compro 2000 camisas a $15.000 cada una. Vendió 600 de ellas obteniendo una ganancia del 40%. ¿A qué precio deberá vender el resto de camisas si desea obtener una ganancia promedio del 45%?

Paso 1.

x es igual al precio al cual se deberán vender las 1400 camisas para obtener una ganancia promedio del 45%

Paso 2.

La ganancia obtenida por cada una de las 600 camisas es de $15.000 por el 40%, es decir $6.000; la ganancia total en las 600 fue de $3´600.000

La utilidad en cada camisa de las restantes será igual al precio de venta x menos el costo $15.000; por su parte la ganancia total será igual a la ganancia unitaria multiplicada por las restantes 1.400 unidades.

La utilidad total es igual a la utilidad obtenida al vender las 600 camisas, más la utilidad obtenida al vender las 1.400 restantes. A su vez esta utilidad deberá ser igual al 45% del costo total de las camisas

Paso 3.

Ganancias del primer lote: $15.000 x 0,4 x 600 = $3´600.000

Ganancias del segundo lote: (x – 15.000) x 1.400

Utilidad total obtenida = $3´600.000 + 1.400 ($x$ -15.000)

Ecuación

$$3´600.000 + 1.400 \times (x - 15.000) = 0{,}45 \ \times 15.000 \times 2000$$

Paso 4

Para resolver la ecuación se resuelve el paréntesis y se juntan los términos semejantes.

$$3´600.000 + 1.400x - 21´000.000 = 13´500.000$$

Se agrupan los términos con la variable en el lado izquierdo y los demás en el lado derecho

$$1.400x = 30´900.000$$

Para hallar el valor de x el valor que está multiplicando esta variable se pasa a dividir al otro lado.

$$x = \frac{30´900.000}{1.400} = 22.071{,}42$$

Paso 5

El comerciante deberá vender las camisas del segundo lote a $22.071,42 si quiere obtener una utilidad promedio del 45%

Ejemplo 7

Un inversionista tiene dos opciones para colocar $100´000.000: bonos del gobierno que le reportan un rendimiento del 5% o con un mayor riesgo en un fondo de libre inversión que le ofrece el 8%. Si quiere obtener una renta de $7´500.000. ¿Cómo debería invertir su dinero para minimizar el riesgo y obtener la renta deseada?

Paso 1.

Sea x pesos la cantidad invertida en bonos del gobierno. Entonces la cantidad invertida en el fondo de libre inversión será: (100´000.000 - x)

Paso 2 y 3.

El ingreso recibido por los bonos del gobierno será: $\frac{5}{100}\mathrm{x}$ pesos.

El ingreso recibido por el fondo de inversión será: $\frac{8}{100}(100´000.000 - \mathrm{x})$ pesos.

La renta que el desea (7´500.000) obtener es igual a lo que recibirá por los bonos del gobierno más lo que percibirá del fondo de inversiones.

Ecuación

$$\frac{5}{100}x + \frac{8}{100}(100´000.000 - x) = 7´500.000$$

Paso 4

Para resolver la ecuación multiplicamos ambos lados de la ecuación por 100

$$100\frac{5}{100}x + 100\frac{8}{100}(100´000.000 - x) = 100 \times 7´500.000$$

$$5x + 8(100´000.000 - x) = 700´500.000$$

Se elimina el paréntesis:

$$5x + 800´000.000 - 8x = 700´500.000$$

Se agrupan los términos de las variables en el lado izquierdo de la ecuación y los demás al lado derecho.

$$5x - 8x = -800´000.000 + 700´500.000$$

$$-3x = -99´500.000$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por -1, y pasando a dividir el número que multiplica la variable, se obtiene:

$$x = \frac{99´500.000}{3} = 33´166.666,66$$

Paso 5

El comerciante deberá invertir $33´166.666,66 en bonos del estado y $66´833.333,33 en el fondo de inversiones.

7. Ecuaciones cuadráticas

Son ecuaciones del tipo $ax^2 + bx + c = 0$

Donde a, b, y c son constantes y x es la variable. Entonces se puede afirmar que esta es una ecuación cuadrática en la variable x

Para solucionar esta ecuación existen dos métodos básicamente, ellos son:

1. Utilizar la factorización
2. Completar el cuadrado y factorizando

Procedimiento de factorización

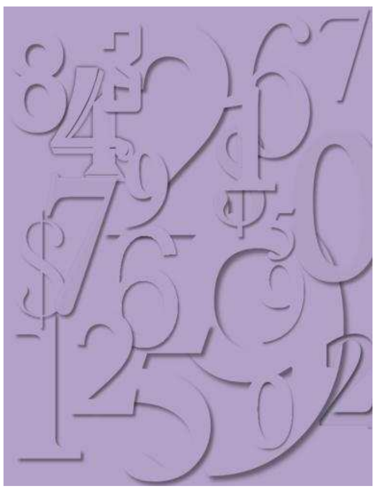
El método se ilustra a través de los siguientes ejemplos

39) Resolver para x: $3(x^2 + 1) = 5(1 - x)$	
$3x^2 + 3 = 5 - 5x$	Eliminando los paréntesis
$3x^2 + 3 - 5 + 5x = 0$	Pasando todos los términos al lado izquierdo
$3x^2 + 5x - 2 = 0$	Agrupando los términos semejantes y organizando la ecuación
$(3x - 1)(x + 2) = 0$	Factorizando
$(3x - 1) = 0$ $(x + 2) = 0$	Si el producto de estos dos factores es igual a cero, es porque uno de ellos es igual a cero o ambos
$x = \frac{1}{3}$	Resolviendo para el primer factor

$x = -2$	Resolviendo para el segundo factor
$x = \frac{1}{3}\ ;\ x = 2$	Respuestas Una ecuación cuadrática tiene dos raíces o lo que es lo mismo dos soluciones

40) Resolver para *a*: $(2a + 3)(3a - 1) = -4$	
$6a^2 + 7a - 3 = -4$	Eliminando los paréntesis
$6a^2 + 7a + 1 = 0$	Pasando todos los términos al lado izquierdo
$(6a + 1)(a + 1) = 0$	Factorizando
$(6a + 1) = 0$ $(a + 1) = 0$	Si el producto de estos dos factores es igual a cero, es porque uno de ellos es igual a cero o ambos
$x = \frac{-1}{6}$	Resolviendo para el primer factor
$x = -1$	Resolviendo para el segundo factor
$x = \frac{-1}{6}\ ;\ x = -1$	Respuestas

Completar el cuadrado



Bibliografía

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

FUNDAMENTAL

1. INFANTE VILLAREAL, Arturo. Evaluación Financiera de Proyectos de Inversión. Editorial Norma, Santafé de Bogotá, 1985
2. BACA CURREA, Guillermo. Ingeniería económica. Editorial Fondo Educativo Panamericano, séptima edición, Bogotá, 2002. ISBN: 958-9489-21-4
3. GOVIDEN, Lincoyán. Matemáticas Financieras. Editorial McGraw-Hill, segunda edición, México, 1988. ISBN: 968-451-408-5
4. BLANK Leland, TARQUIN, Anthony. Ingeniería Económica. Editorial McGraw-Hill, quinta edición, México, 2004. ISBN: 970-10-3948-3

RECOMENDADA

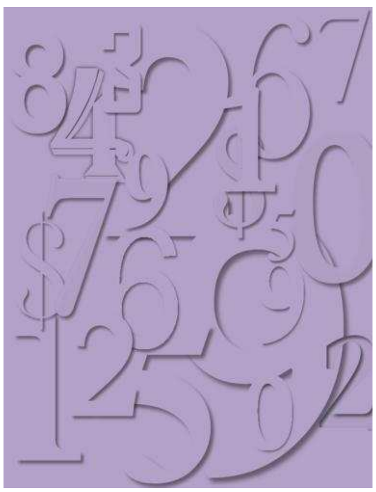
5. ALVAREZ ARANGO, Alberto. Matemáticas Financieras. McGraw-Hill, Bogotá, 2005

6. ORTIZ ANAYA, Héctor. Finanzas Básicas para no Financieros. Thompson, Bogotá, 2003.
7. SAPAG CHAÍN, Nassir. Criterios de Evaluación de Proyectos. McGraw-Hill de Management. España, 1993.
8. VÉLEZ PAREJA, Ignacio. Decisiones de Inversión, una Aproximación al Análisis de Alternativas. Universidad Javeriana, 2000. Bogotá

CIBERGRAFÍA

Listado o referencia de sitios webs, blogs o portales de internet relacionados con el Algebra lineal y los Métodos Cuantitativos

9. VÉLEZ PAREJA, Ignacio. Decisiones de Inversión, una Aproximación al Análisis de Alternativas. Universidad Javeriana, 2000. Bogotá en www.javeriana.com



Glosario de términos

GLOSARIO DE TERMINOS

A: anualidad o cuota uniforme. Nomenclatura básica utilizada en este texto

Aversión al riesgo: se refiere a la situación en la que un inversionista, expuesto a alternativas con diferentes niveles de riesgo, preferirá aquella con el nivel de riesgo más bajo

Bono: Obligación financiera que estipula el pago periódico de un interés y la amortización del principal, generalmente con vencimiento a mediano o largo plazo

Capital: medios para la producción, tales como: maquinaria, planta física de empresas, equipos de producción, entre otros

Certificados: son valores que emiten los bancos o empresas. Los plazos de los documentos, el valor nominal y la tasa de interés varían según las políticas de cada emisor

Interés: El interés es la cantidad que se paga o se cobra por el uso del dinero. Cuando alguien toma prestado dinero, este debe pagar por su uso; en dicho pago debe estar incluido tanto la pérdida del valor del dinero; como también la renta por el uso del dinero. De igual manera, si en vez de un crédito lo que se hace es prestar dinero (invertir), entonces se querrá recibir, aparte de lo invertido, un monto a través del cual se recupere el valor que ha perdido el dinero en el tiempo y una renta por el préstamo del dinero

Costo de oportunidad: Costo en que se incurre al tomar una alternativa y desechar otras; el costo de oportunidad de una determinada acción es el valor de la mejor alternativa sacrificada.

Tasa de interés: Es el porcentaje al que está invertido un capital en una unidad de tiempo, determinando lo que se refiere como "el precio del dinero en el mercado financiero". La tasa de interés (expresada en porcentajes) representa un balance entre el riesgo y la posible ganancia (oportunidad) de la utilización de una suma de dinero en una situación y tiempo determinado. En este sentido, la tasa de interés es el precio del dinero, el cual se debe pagar/cobrar por tomarlo prestado/cederlo en préstamo en una situación determinada.

Porcentajes: Cuando se opera con porcentajes en este texto, se hace con la expresión decimal (0.20), por ejemplo 20% = 0.20 = (20/100), que es la forma correcta de trabajar con las fórmulas. Los resultados de las operaciones lo expresamos generalmente con cuatro decimales, en el caso de los factores o índices. Las respuestas finales de los ejercicios se expresan en con dos decimales. En ambos casos los resultados son redondeados por exceso o por defecto

Capitalización de intereses: Si al final del periodo de inversión en vez de devolver los intereses devengados al prestamista, estos se suman al capital original, para a partir de ahí, calcular un nuevo interés, se dice que los intereses se capitalizan.

Costo marginal: Es el aumento sobre el costo total que se genera al incrementar la producción en una unidad más de un bien o servicio; el principal determinante del costo marginal son las variaciones que se producen en los costos variables.

Costo medio: Son los costos por unidad de producción. Los costos medios totales se calculan como el costo total entre la cantidad producida

Costos fijos: son los costos en que incurre la empresa, halla o no halla producción

Costos totales: Son equivalentes a la suma de los costos variables totales más costos fijos totales

Costos variables: Los costos variables dependen del volumen de producción

Deflación: Contrario a la inflación, la deflación es la disminución generalizada del nivel de los precios de los bienes y servicios en una economía; es decir, es el aumento del poder adquisitivo de la moneda. Esto significa que, en una economía con deflación, la cantidad de productos que se pueden comprar con una cantidad determinada de dinero hoy es menor a la cantidad de productos que se podría comprar dentro de un tiempo

Devaluación: No se puede confundir con la inflación, la devaluación es la pérdida del valor del dinero con respecto a otra moneda, por ejemplo el dólar. La devaluación puede ser causada por muchos factores: la falta de demanda de la moneda o una mayor demanda de la moneda con la cual se le compara.

Factibilidad Económica: Tiene que ver con determinar la bondad de invertir o no los recursos económicos en una alternativa de inversión –proyecto-; sin importar el origen de dichos recursos.

Factibilidad Financiera: Tiene que ver con determinar si el retorno es atractivo o no para los dueños del dinero, para el inversionista. Es decir, lo que interesa es determinar si la inversión efectuada exclusivamente por el dueño, obtiene la rentabilidad esperada por él.

Factibilidad económica versus factibilidad financiera: En el ámbito de la evaluación de proyecto es de vital importancia comprender que a cada decisión de inversión, corresponde una decisión de financiación. Con la condición fundamental de que la rentabilidad de la inversión, debe satisfacer la estructura financiera de la empresa. La decisión de inversión, como ya se mencionó, tiene que ver con la estructura operativa de la empresa y con una de las funciones de la Administración financiera que es definir donde invertir. Para poder tomar la decisión de invertir hay necesidad de definir los indicadores de gestión financiera que permitan establecer si la empresa cumple con su objetivo financiero básico y si los proyectos de inversión que enfrenta cotidianamente la acercan a su meta. La decisión de financiación, otra de las decisiones fundamentales de la administración, tienen que ver con la estructura financiera de la empresa o proyecto, esta estructura se refiere a los dueños de los recursos (deuda o recursos propios), la cual tiene un costo que se denomina el costo de capital promedio ponderado. Al evaluar la estructura financiera del proyecto, interesa diseñar indicadores financieros que permitan identificar si los inversionistas o dueños de la empresa están alcanzando la meta financiera, la cual en empresas que tengan ánimo de lucro, es ganar más dinero ahora y en el futuro

Fondo de Inversión: Fondo de carácter mutuo y de cartera diversificada, cuyas participaciones están distribuidas en forma proporcional a sus aportes entre varios inversionistas

Ganancia: Dinero que sobra después de haber realizado la venta de los bienes, una vez deducidos todos los costos.

Gastos financieros: Gastos correspondientes a los intereses y otros egresos que se desprenden de las obligaciones financieras.

i: tasa de interés efectiva**.** Nomenclatura básica usada en este texto

i_a: tasa de interés anticipada. Nomenclatura básica usada en este texto

i_{EA}: tasa de interés efectiva anual. Nomenclatura básica usada en este texto

i_v: tasa de interés vencida. Nomenclatura básica usada en este texto

I: interés. Nomenclatura básica usada en este texto

Impuesto: es el monto en dinero que se debe pagar al estado por diversos rubros, para que este tenga el financiamiento para las necesidades y proyectos públicos.

Inflación: Se define como inflación al aumento generalizado del nivel de precios de bienes y servicios en una economía. También se puede definir como la caída del poder adquisitivo de una moneda en una economía en particular. Esto significa que, en una economía con inflación, la cantidad de productos que se pueden comprar con una cantidad determinada de dinero hoy es mayor a cantidad de productos que se podría comprar dentro de un tiempo

Interés Compuesto: Si una operación es a interés compuesto, entonces el interés es calculado sobre el capital para un periodo reinvirtiéndose los intereses; es decir, al cabo del periodo los intereses se capitalicen para calcular sobre dicho monto los nuevos intereses**.**

Interés simple: Si una operación es a interés simple, entonces el interés es calculado sobre el capital original para el periodo completo de la transacción y los interés son pagados al prestamista, sin que estos se reinviertan. Es decir, al cabo del periodo se reconoce al prestamista los intereses; iniciándose a partir de allí una nueva liquidación solo sobre el monto original; sin que los intereses se capitalicen para generar nuevos sobre ellos nuevos intereses.

Inversión: Activo o recurso tangible o intangible comprometido en un proyecto con la expectativa de ganancia y la asunción de riesgo económico

Inversionista: Persona física o jurídica que aporta sus recursos financieros con el fin de obtener algún beneficio futuro. Constituyen la contraparte de los emisores. En otras palabras, son las personas físicas o jurídicas que disponen de recursos financieros, los cuales prestan a cambio de la obtención de una ganancia

j: tasa nominal o la tasa de interés anual. Nomenclatura básica usada en este texto

m: Número de capitalizaciones por año. Nomenclatura básica usada en este texto

Margen de utilidad: Diferencia entre el precio de venta y el costo de un producto

Matemáticas financieras: Conjunto de herramientas matemáticas, que permiten analizar cuantitativamente la viabilidad o factibilidad económica y financiera de los proyectos de inversión. Analiza el valor del dinero en el tiempo.

Métodos cuantitativos: es la metodología de la investigación que produce datos numéricos para ayudar al administrador en la toma de decisiones.

Modelo: Representación simplificada de la realidad que busca explicar aquello puede ser relevante dentro de esa realidad.

Modelo conceptual: es el diagrama que representa las relaciones causales entre los conceptos relevantes importantes de una intervención.

n: número de períodos de composición**.** Nomenclatura básica usada en este texto

NPER: (función financiera de Excel) devuelve el número de períodos de una inversión basándose en los pagos periódicos constantes y en la tasa de interés constante.

> Sintaxis: NPER(tasa; pago; va; vf; tipo)
>
> Tasa: tasa de interés por período.
>
> Pago: pago efectuado en cada período; debe permanecer constante durante la vida de la anualidad. Por lo general, pago incluye el capital y el interés, pero no incluye ningún otro arancel o impuesto.
>
> Va: Valor actual o la suma total de una serie de futuros pagos.
>
> Vf: es el valor futuro o un saldo en efectivo que se desea lograr después de efectuar el último pago. Si el argumento vf se omite, se supone que el valor es 0 (por ejemplo, el valor futuro de un préstamo es 0).
>
> Tipo: es el número 0 ó 1 e indica cuándo vencen los pagos (0=final del periodo; 1=inicio del periodo)

PAGO: (función financiera de Excel) calcula el pago de un préstamo basándose en pagos constantes y en una tasa de interés constante.

Sintaxis: PAGO(tasa;nper;va;vf;tipo)

Tasa: es el tipo de interés del préstamo.

Nper: es el número total de pagos del préstamo.

Va: es el valor actual, o la cantidad total de una serie de futuros pagos. También se conoce como valor bursátil.

Vf: es el valor futuro o un saldo en efectivo que se desea lograr después de efectuar el último pago. Si el argumento vf se omite, se supone que el valor es 0 (es decir, el valor futuro de un préstamo es 0).

Tipo: es el número 0 o 1, e indica cuándo vencen los pagos (0=final del periodo; 1=inicio del periodo)

Proyecto de Inversión: Son oportunidades de desembolsos de dinero del cual se espera obtener rendimientos (flujos de efectivo o retornos) de acuerdo a unas condiciones particulares de riesgo. Los rendimientos deben permitir recuperar las inversiones, cubrir los gastos operacionales y además obtener una rentabilidad de acuerdo al nivel de riesgo.

Punto de equilibrio: En la teoría financiera, se define el punto de equilibrio de operación como el nivel de producción necesario para cubrir tanto los costos fijos como los costos variables. En economía, generalmente, es el punto de intersección entre la oferta y la demanda.

Recursos: son todos los medios o todo aquello que se emplea para la producción de bienes y servicio, es de suma importancia mencionar que son escasos

Rendimiento: Interés que un activo devenga, como compensación a su poseedor

Rentas: Ingresos que perciben los propietarios de los factores productivos a cambio de su cesión. Las rentas de la tierra se llaman alquileres, las rentas del trabajo se llaman sueldos o salarios y las rentas del capital reciben el nombre de beneficios, intereses y otros

Reevaluación: Es lo contrario a la devaluación, es decir es la valorización de una moneda, con respecto a otra.

Riesgo: El riesgo se describe como la posibilidad de que un resultado esperado no se produzca. Cuanto más alto sea el nivel de riesgo, tanto mayor será la tasa de rendimiento y viceversa.

Sistema Lineal: Conjunto de ecuaciones lineales capaces de representar una situación problemática (modelo)

TASA: (función financiera de Excel) devuelve la tasa de interés por período de una anualidad. TASA se calcula por iteración y puede tener cero o más soluciones. Si los resultados sucesivos de TASA no convergen dentro de 0,0000001 después de 20 iteraciones, TASA devuelve el valor de error #¡NUM!

Sintaxis: TASA(nper;pago;va;vf;tipo;estimar)

Nper: es el número total de períodos de pago en una anualidad.

Pago: es el pago efectuado en cada período, que no puede variar durante la vida de la anualidad. Generalmente el argumento pago incluye el capital y el interés, pero no incluye ningún otro arancel o impuesto. Si se omite el argumento pago, deberá incluirse el argumento vf.

Va: es el valor actual, es decir, el valor total que tiene actualmente una serie de pagos futuros.

Vf: es el valor futuro o un saldo en efectivo que se desea lograr después de efectuar el último pago. Si el argumento vf se omite, se supone que el valor es 0 (por ejemplo, el valor futuro de un préstamo es 0).

Tipo: es el número 0 ó 1 e indica cuándo vencen los pagos. (0=final del periodo; 1=inicio del periodo)

TIR: Tasa Interna de Retorno**.** Nomenclatura básica utilizada en este texto

t: número de años (tiempo). Nomenclatura básica usada en este texto

Utilidad: es la satisfacción obtenida por el consumidor cuando consume un bien. En contabilidad, es la diferencia positiva entre los ingresos y los costos y gastos

VA: (función financiera de Excel) devuelve el valor actual de una inversión. El valor actual es el valor que tiene actualmente la suma de una serie de pagos que se efectuarán en el futuro. Por ejemplo, cuando pide dinero prestado, la cantidad del préstamo es el valor actual para el prestamista.

Sintaxis: VA(tasa;nper;pago;vf;tipo)

Tasa: es la tasa de interés por período. Por ejemplo, si obtiene un préstamo para un automóvil con una tasa de interés anual del 10 por ciento y efectúa pagos mensuales, la tasa de interés mensual será del 10%/12 o 0,83%. En la fórmula escribiría 10%/12, 0,83% ó 0,0083 como tasa.

Nper: es el número total de períodos de pago en una anualidad. Por ejemplo, si obtiene un préstamo a cuatro años para comprar un automóvil y efectúa pagos mensuales, el préstamo tendrá 4*12 (ó 48) períodos. La fórmula tendrá 48 como argumento nper.

Pago: es el pago efectuado en cada período, que no puede variar durante la anualidad. Generalmente el argumento pago incluye el capital y el interés, pero no incluye ningún otro arancel o impuesto. Por ejemplo, los pagos mensuales sobre un préstamo de 10.000 $ a cuatro años con una tasa de interés del 12 por ciento para la compra de un automóvil, son de 263,33 $. En la fórmula escribiría -263,33 como argumento pago. Si se omite el argumento pago, deberá incluirse el argumento vf.

Vf: es el valor futuro o un saldo en efectivo que se desea lograr después de efectuar el último pago. Si el argumento vf se omite, se supone que el valor es 0 (por ejemplo, el valor futuro de un préstamo es 0). Si desea ahorrar 50.000 $ para pagar un proyecto especial en 18 años, 50.000 $ sería el valor futuro. De esta forma, es posible hacer una estimación conservadora a cierta tasa de interés y determinar la cantidad que deberá ahorrar cada mes. Si se omite el argumento vf, deberá incluirse el argumento pago.

Tipo: es el número 0 ó 1 e indica cuándo vencen los pagos. (0=final del periodo; 1=inicio del periodo)

Valor: Suma máxima que una persona o entidad está dispuesta a pagar por un servicio o bien.

Valor actual neto (VAN): Es el valor presente de los flujos de efectivo de un proyecto descontados a una tasa de interés dada

Valor Económico Agregado: Si la rentabilidad de una inversión supera el costo de capital promedio ponderado entonces se puede afirmar que se generara valor económico para los propietarios de la empresa. Solamente en este caso se puede decir que los inversionistas están satisfaciendo sus expectativas y alcanzando sus objetivos financieros.

VPA: valor presente de una anualidad. Nomenclatura básica usada en este texto

VF: (función financiera de Excel) devuelve el valor futuro de una inversión basándose en pagos periódicos constantes y en una tasa de interés constante.

Sintaxis: VF(tasa;nper;pago;va;tipo)

Tasa: es la tasa de interés por período.

Nper: es el número total de períodos de pago en una anualidad.

Pago: es el pago que se efectúa cada período y que no puede cambiar durante la vigencia de la anualidad. Generalmente, el argumento pago incluye el capital y el interés pero ningún otro arancel o impuesto. Si se omite el argumento pago, se deberá incluir el argumento va.

Va: es el valor actual o el importe total de una serie de pagos futuros. Si se omite el argumento va, se considerará 0 (cero) y se deberá incluir el argumento pago.

Tipo: es el número 0 ó 1 e indica cuándo vencen los pagos. Si se omite el tipo, se calculará como 0. (0=final del periodo; 1=inicio del periodo)

VFA: valor futuro de una anualidad. Nomenclatura básica usada en este texto

VPN: Valor Presente Neto, igual al valor actual neto. Nomenclatura básica usada en este texto

Variable: Cualquier cualidad, fenómeno o acontecimiento que puedan tener valores cuantitativos diferentes.

Variable de decisión: Variable algebraica que representa una decisión cuantificable a ser adoptada, son cantidades, datos o supuestos a considerar en la elaboración del modelo, en otras palabras son las proporciones a cuantificar en función de ciertos objetivos y restricciones.

Variable dependiente: Propiedad o característica que se trata de cambiar mediante la manipulación de la variable independiente. La variable dependiente es el factor que es observado y medido para determinar el efecto de la variable independiente, resultado que uno pretende explicar o estimar. La variable dependiente puede ser definida como los cambios sufridos por los sujetos como consecuencia de la manipulación de la variable independiente por parte del investigador

Variable independiente: Característica que supone ser la causa del fenómeno estudiado. En investigación experimental se llama así, a la variable que el investigador manipula. Variable que se mide para determinar el valor correspondiente de la variable dependiente. Las variables independientes definen las condiciones bajo las cuales se examinará la variable dependiente

V_F: capital más interés; valor futuro expresado en valores monetarias. Nomenclatura básica usada en el texto

V_P: capital principal; valor presente, expresado en valores monetarios. Nomenclatura básica usada en el texto