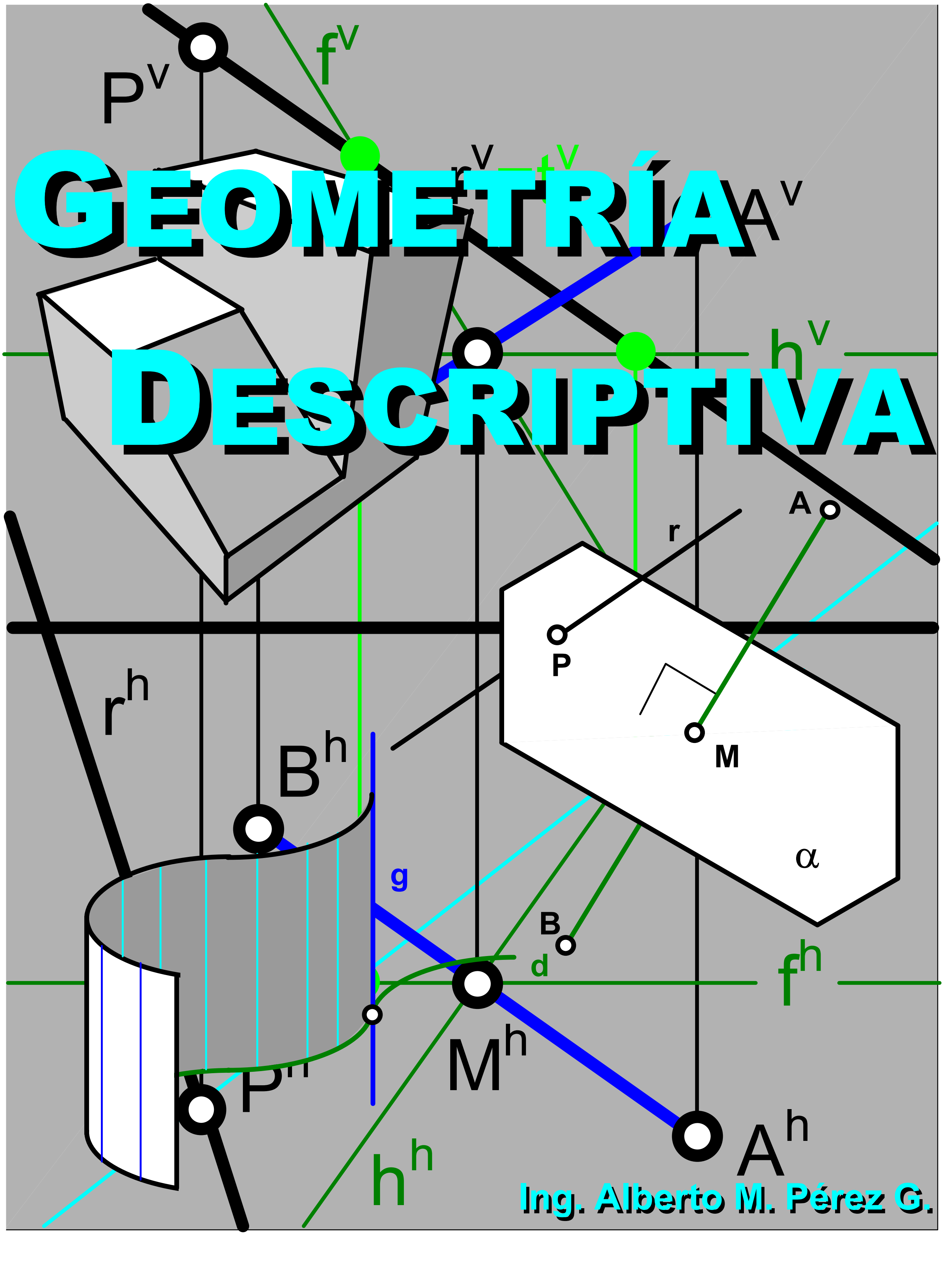
GEOMETRÍA DESCRIPTIVA



Ing. Alberto M. Pérez G.

GEOMETRÍA DESCRIPTIVA

Universidad de los Andes
Núcleo Universitario "Rafael Rangel"
Departamento de Ingeniería
Trujillo-Venezuela

Trabajo presentado con fines
de ascenso a la categoría de
Asistente en el escalafón
de la Universidad de los Andes

Trujillo; 1.997

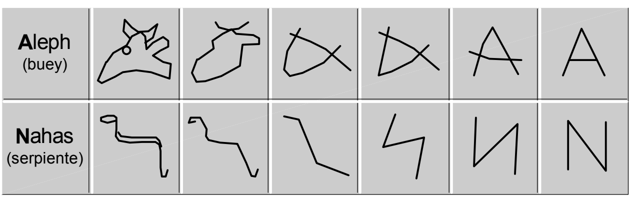
Ing. Alberto M. Pérez G.

TABLA DE CONTENIDO.

introducción.

Aunque los hombres no han podido ponerse de acuerdo para llegar a un lenguaje mundial de palabras y frases, ha existido un lenguaje realmente universal desde los tiempos mas remotos: **el lenguaje gráfico.** La idea de comunicar los pensamientos de una persona a otra por medio de figuras existió desde la antiguedad. Los hombres primitivos registraban sus ideas por medio de figuras hechas sobre pieles, piedras, paredes de cavernas, etc. Las formas mas antiguas de escritura se realizaron con figuras, como lo prueban los jeroglíficos egipcios. Mas adelante, estas figuras fueron simplificadas, y transformadas en los símbolos abstractos que dieron origen a la escritura actual, la cual tiene por lo tanto su fundamento en el dibujo.

En la figura siguiente se muestra un ejemplo de como a partir de los jeroglíficos egipcios: **A**leph (buey) y **N**ahas (serpiente) pueden haber evolucionado los caracteres latinos (**A** y **N**) respectivamente.



La representación gráfica se desarrolló básicamente en dos direcciones distintas: **a)** la artística y **b)** la técnica.

En la antiguedad prácticamente todo el mundo era iletrado, no existía la imprenta, por lo tanto no había periódicos ni libros, y los pocos que había eran manuscritos realizados en papiro o pergamino y no eran asequibles al público. En general la gente aprendía escuchando, mirando esculturas, dibujos, cuadros, expuestos en lugares públicos. El artista no era simplemente un artista, era también un maestro, un filósofo, un medio de expresión y comunicación.

En cuanto a la representación técnica, se desarrolló desde los comienzos de la historia registrada ante la necesidad de representar los objetos diseñados para su posterior construcción o fabricación.

De las ruinas de antiguos edificios, acueductos, puentes, y otras estructuras de buena construcción se deduce que no pudieron haberse levantado sin la previa elaboración de dibujos cuidadosamente preparados que sirvieran de guía a sus constructores.

El dibujo técnico mas antiguo que se conoce es un grabado realizado sobre una loseta de piedra que representa el diseño en planta de una fortaleza, realizado alrededor del año 4.000 a.C. por el Ingeniero caldeo Gudea.

En el año 30 a. C., el Arquitecto romano Vitruvius escribió un tratado sobre Arquitectura.

Se atribuye a los Arquitectos italianos Alberti, Brunelleschi y otros el desarrollo, a principios de siglo quince, de la teoría de las proyecciones de objetos sobre planos imaginarios de proyección (proyección en vistas).

Y aunque Leonardo da Vinci usaba dibujos para transmitir a los demás sus ideas y diseños de construcciones mecánicas, no está muy claro que haya hecho dibujos en los que aparecieran vistas ortográficas, aunque es muy probable que los hubiera hecho. El tratado de Leonardo da Vinci sobre pintura, publicado en 1.651, se considera como el primer libro impreso sobre la teoría de dibujo de proyecciones; pero esta enfocado a la perspectiva, no a la proyección ortográfica.

En cuanto a la **Geometría** (parte de la matemática que se ocupa de las propiedades, medidas y relaciones entre puntos, líneas, ángulos, superficies y cuerpos), tuvo su origen en Egipto hacia el año 1.700 a. C., y su desarrollo se debió a la necesidad práctica de la medición de terrenos. Hacia el año 600 a. C. Tales de Mileto la introdujo en Grecia y fundó la escuela jónica. Su discípulo Pitágoras fundó la escuela pitagórica que dio gran avance a la geometría demostrando, entre otros su famoso teorema para los triángulos rectángulos ($a^2 + b^2 = h^2$). Otros personajes destacados en este campo fueron: Zenón, Hippias, Platón, Hipócrates, Eudoxio, Arquímides, etc.

En el siglo tres a. C. Euclides en su obra **Elementos** culmina una prolongada evolución de las ideas y establece de forma sistemática los fundamentos de la geometría elemental. Durante la edad media se observó poco avance en el campo de la geometría, contrariamente al desarrollo extraordinario que se observó en la edad moderna, en la cual Desargues estableció los fundamentos de la **Geometría Proyectiva** y Monge los de la **Geometría Descriptiva**, la cual es la gramática del lenguaje gráfico.

Con respecto a la **Geometría Descriptiva**, sus comienzos están asociados en los problemas que se encontraron en el diseño de edificios y fortificaciones militares en Francia en el siglo dieciocho. Se considera a Gaspar Monge (1.746 - 1.818), ya citado, como el "**inventor**" de la geometría descriptiva, aunque precedieron a sus esfuerzos varias publicaciones sobre **Estereotomía** (arte y técnica de tallar la madera o piedra con fines constructivos), arquitectura, y perspectiva donde ya se aplicaban muchos de los conceptos de la geometría descriptiva. Fue a finales del siglo dieciocho cuando Monge, siendo profesor de la Escuela Tecnológica de Francia, desarrolló los principios de la proyección que constituyen la base del dibujo técnico de hoy en día. Pronto se reconoció que estos principios de la geometría descriptiva tenían tan gran importancia militar que se obligó a Monge a mantenerlos en secreto hasta 1.795, año a partir del cual se convirtieron en parte importante de la educación técnica en Francia y Alemania; y posteriormente en los Estados Unidos. Su libro **La Géométrie Descriptive**, se considera aun como el primer texto para exponer los principios básicos del dibujo de proyectistas.

Los principios de Monge llegaron a los Estados Unidos en 1.816, procedentes de Francia, y los trajo el Sr. Claude Crozet, profesor de la Academia Militar de West Point. El profesor Crozet publico en 1.821 el primer texto en inglés sobre geometría descriptiva. En los años siguientes se convirtieron estos principios en parte regular del plan de estudios de los primeros años de ingeniería en el Instituto Politécnico Rensselaer, en la Universidad de Harvard, en la Universidad de Yale, y en otras, convirtiéndose de esta forma hoy en día la geometría descriptiva en materia de estudio en los primeros años de las carreras de Ingeniería y Arquitectura en la gran mayoría de las universidades del mundo.

JUSTIFICACIÓN.

Es muy común que el estudiante de Ingeniería, Arquitectura, ú otras carreras afines, inicie sus estudios con la impresión de que el trabajo en la mesa de dibujo será una actividad de importancia secundaria en su vida profesional, y por lo tanto carece de sentido dedicar tiempo y esfuerzo en adquirir el dominio de una actividad tan rutinaria como la elaboración de dibujos, propia netamente de los dibujantes. Esta forma de pensar es completamente errónea, pues es el dominio de la expresión gráfica de sus ideas lo que lo hará mas y mejor profesional. Y lejos de concebirla como una actividad sin importancia debe asimilarla como lo que realmente es: la base ó piedra de fundamento sobre la que edificará toda su vida profesional. Es precisamente en este inicio de sus estudios, el momento en el cual el futuro profesional debe tomar una decisión que afectará toda su vida, pues debe elegir, paradójicamente hablando, si fundará su edificio sobre roca ó arena.

El profesional de la Ingeniería, Arquitectura, o cualquier otra carrera afín, debe ser capaz de expresar gráficamente y con toda claridad sus ideas. Todo proyecto consta de: cálculos de esfuerzos, análisis de movimientos, diseño y dimensionamiento de partes, especificación de materiales, proceso de ensamblaje y/o construcción, entre otros aspectos, estas características no se expresan con palabras, aunque son utilizadas en un breve porcentaje, deben elaborarse planos que sirvan de guía para la construcción de todo proyecto, y la expresividad de estos planos es responsabilidad neta del proyectista y lo que determinará que el aspecto final del proyecto sea o nó el que él ha concebido inicialmente. Es por esta razón necesario que el proyectista domine las técnicas de dibujo y expresión gráfica, pues deben hacerse muchos esquemas antes de concebir una idea definitiva, y estos no los va a realizar el dibujante, pues el no es quien esta desarrollando la idea. Si bien es cierto que al momento de realizar un proyecto se elaboran muchos esquemas a mano alzada, también es frecuente, en esta fase de diseño, la realización de dibujos técnicos aunque no definitivos para fijar detalles constructivos que sería imposible definir en un esquema impreciso, y estos en la mayoría de los casos tampoco los realiza el dibujante. Por esta razón, el Ingeniero ó Arquitecto debe dominar el dibujo a mano alzada y el Dibujo Técnico y estar consciente que el aspecto expresivo de un dibujo es algo muy personal que el debe desarrollar y transmitir a sus dibujantes, para que sus dibujos expresen lo que el quiere decir y en la forma en que él lo quiere decir. Quizás pues un profesional de la Ingeniería ó Arquitectura que no domine el dibujo y sus técnicas es comparable a un ser que carezca de habla; y en base a esta misma comparación puede decirse que un Ingeniero o Arquitecto que dibuje mal es equivalente a un ser que hable mal, y ambos correrán el riesgo de que sus ideas sean rechazadas, aún siendo grandes ideas, por no haber sido expuestas en forma clara y precisa, causando de esta forma la incomprensión de las mismas. Es aquí donde tiene gran vigencia el adagio popular que dice: No importa sólo lo que se dice; sino también como se dice.

OBJETIVOS.

La Geometría Descriptiva es de las materias que se aprenden "haciendo" y no solo "viendo". Y es quizás este aspecto lo que dificulta su aprendizaje, siendo necesario por parte del estudiante la realización constante de ejercicios prácticos que le permitan consolidar los conocimientos teóricos previamente expuestos. Este aspecto de la Geometría Descriptiva, aunque es considerado en la enseñanza en aula de la misma, ha sido descuidado en la elaboración de la mayoría de los textos. Siendo por esta razón uno de los objetivos de la presente obra subsanar esta carencia, colocando al alcance de los estudiantes de Geometría Descriptiva, así como de los profesionales de la Ingeniería y/o Arquitectura que así lo requieran, un texto teórico en el cual puedan revisar los conceptos fundamentales de la misma.

Otra de las dificultades con que se encuentra el estudiante de Geometría Descriptiva es el grado de sintetización que se alcanza al representar objetos tridimensionales mediante esquemas bidimensionales. Esto también ha sido descuidado o cubierto de manera insatisfactoria en una gran cantidad de textos de Geometría Descriptiva, por lo tanto en la elaboración de la presente obra han sido incluidas una gran variedad de ilustraciones tridimensionales realizadas en perspectivas diversas, y presentadas paralelamente junto a su correspondiente representación en Doble Proyección Ortogonal.

Se pretende asimismo que la presente obra sirva como material de apoyo y consulta para los estudiantes de Geometría Descriptiva, quienes durante el transcurso de su asistencia diaria a clases se encuentran con la dificultad de la toma de apuntes, en algunos casos de difícil elaboración, y que por lo tanto son copiados en forma imprecisa en sus cuadernos, trayendo posteriormente resultados desastrosos en el momento de pretender consolidar los conocimientos adquiridos.

El contenido de la presente obra esta basado en el programa vigente de la materia Sistemas de Representación 10 dictado en la Universidad de Los Andes.

METODOLOGÍA.

Con la finalidad de alcanzar los objetivos propuestos, la presente obra se desarrolla de la siguiente manera:

a) En su comienzo se presenta un **marco teórico** en el cual se exponen los conceptos básicos de la Geometría Elemental; tales como: punto; línea; recta; plano; etc. Continuando esta sección se exponen, en forma netamente práctica, los procedimientos de trazado con las escuadras, y de dibujo de polígonos regulares de hasta ocho lados por métodos particulares y generales. Los conceptos expuestos en esta sección se supone que son del conocimiento previo por parte del estudiante de Geometría Descriptiva, por lo tanto son mostrados en forma netamente gráfica, por medio de ilustraciones sencillas y de fácil interpretación, no obstante si se dificulta su comprensión deben estudiarse estos métodos por medio de cualquier texto básico de Geometría.

Todos los conceptos teóricos aquí expuestos son de gran importancia para la comprensión del resto de esta obra y el estudiante no debe pasar esta sección si no comprende y/o ejecuta sin dificultad los procedimientos prácticos aquí mostrados, ya que son la base del trabajo en Doble Proyección Ortogonal.

b) Sigue a esta exposición de conceptos básicos una introducción a los Sistemas de Proyección, presentando una breve descripción de los mas comunes. Esto es con la finalidad de que el estudiante conozca y diferencie las distintas formas de representación de los objetos.

c) A continuación se describe detalladamente el sistema de **Doble Proyección Ortogonal**, también denominado sistema de **Proyección Diédrica**, el cual es el objeto principal de esta obra. En adelante se definirán con exactitud los métodos de representación de puntos, rectas, planos, poliedros, determinación de intersecciones, trazado de rectas y planos paralelos y perpendiculares, procedimientos de observación de elementos geométricos en verdadero tamaño, visibilidad, etc.

A partir de esta sección, todos los conceptos son expuestos de la siguiente manera:

1) Se expone, mediante un breve comentario teórico, el concepto que se quiere emitir. Este debe ser leído por el estudiante, las veces que lo considere necesario hasta lograr su comprensión.

2) Acompaña al concepto teórico en estudio un gráfico en perspectiva que lo ilustra, el cual, al ser observado paralelamente con la lectura, facilitará grandemente la comprensión de la idea que se quiere expresar.

3) Se incluye, en forma simultánea con el gráfico en perspectiva, una segunda ilustración del mismo concepto, pero elaborada en doble proyección ortogonal. Esto se hace con la finalidad de capacitar al estudiante en la resolución práctica de problemas de Geometría Descriptiva. Estas dos ilustraciones deben compararse minuciosamente para lograr la comprensión total de las mismas.

4) Seguidamente se desarrolla, a manera de ejemplo, y netamente en Doble Proyección Ortogonal, un ejercicio relacionado con el concepto recién expuesto, explicando con detalle la elaboración del mismo. Por medio de estos ejercicios el estudiante podrá darse cuenta si ha adquirido la comprensión de lo explicado y se encuentra en condiciones de continuar el estudio de los siguientes conceptos.

En general, esta obra debe ser estudiada inicialmente en el orden expuesto y en la forma descrita, ya que cada uno de los conceptos emitidos inicialmente tiene relación con los que serán presentados posteriormente. No obstante, una vez conocido todo el contenido de esta obra, el estudiante podrá darse cuenta que logrará repasar fácilmente cualquier tema en particular por medio de la simple observación de los gráficos que lo acompañan, sin que sea necesario leer nuevamente todo el contenido teórico expuesto.

Con respecto a la nomenclatura utilizada en la elaboración de la presente obra, su significado se explica en el momento en que es introducida por primera vez, por considerar que este es el momento mas propicio para su comprensión.

Finalmente, el estudiante debe ejercitarse en la resolución de problemas, resolviendo para ello los ejercicios que podrá encontrar en cualquier problemario ó guía de ejercicios de Geometría Descriptiva.

capítulo 1

marco teórico.

Todos los objetos creados por el hombre, desde un simple alfiler hasta la más compleja maquinaria, planta industrial, obra civil, etc, son concebidos inicialmente en forma mental, y antes de su fabricación deben ser descritos con toda precisión para resolver con exactitud cualquier problema relacionado con su forma, tamaño y funcionalidad.

Es el estudio de la Geometría Descriptiva, lo que permite definir correctamente la representación plana (proyección) de los objetos tridimensionales antes ó después de su existencia real.

Estudiar Geometría Descriptiva es estudiar el mundo que nos rodea, es describir la forma de: tornillos; resortes; engranajes; relojes; sillas; mesas; televisores; carros; casas; urbanizaciones; carreteras; represas; planetas; galaxias; en fin, todos los objetos físicos que nos rodean pueden ser concebidos por el hombre mediante representaciones planas de los mismos, y es la Geometría Descriptiva la que define las reglas que rigen la elaboración de estas proyecciones.

Se logra definir gráficamente cualquier objeto, mediante la sintetización del mismo a sus elementos geométricos mas simples, como lo son: puntos; líneas; superficies; ángulos; etc. Es por lo tanto necesario que el estudiante de Geometría Descriptiva domine y exprese estos conceptos en forma correcta, razón por la cual se inicia la presente obra con este primer capítulo, en el cual se describen en forma simple los conceptos geométricos básicos de mayor uso en el estudio de la Geometría Descriptiva.

Además, pensando en la ejercitación práctica del estudiante en la resolución de problemas de Geometría Descriptiva, se incluyen en este marco teórico las formas elementales de: trazado; manejo de escuadras y compás; y se incluye una breve descripción del concepto de escala.

Se supone que todo el contenido de este primer capítulo es del conocimiento previo del estudiante de Geometría Descriptiva, razón por la cual se presenta en forma concisa y con carácter principalmente informativo.

CONCEPTOS BÁSICOS.

PUNTO.

Es la representación de una posición fija del espacio. No es un objeto físico, por lo tanto carece de forma y dimensiones. En la fig.1, se muestran algunas formas de representar a un punto.

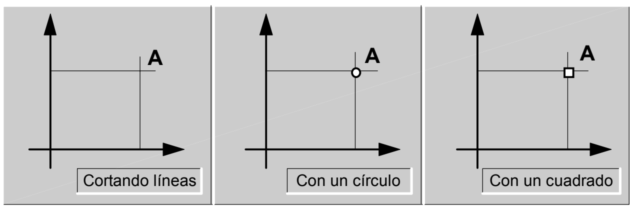


fig.1.\ Representación de un Punto.

LÍNEA.

Es una sucesión infinita de puntos. Una línea puede ser: **a)** recta, **b)** poligonal (quebrada), ó **c)** curva\ fig.2.

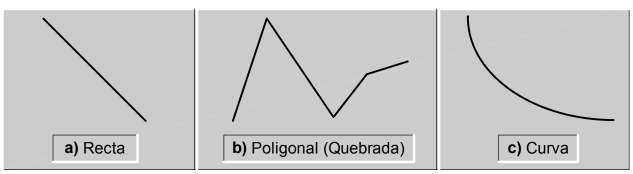


fig.2.\ Líneas.

RECTA.

Línea de dirección constante. Una recta puede ser definida por dos puntos, a los que une recorriendo su menor distancia.

ALGUNAS PARTES DE UNA RECTA SON:

a) **Semirrecta.** Cada una de las dos partes en que divide a una recta, uno cualquiera de sus puntos\ fig.3a.

b) **Segmento.** Porción de una recta comprendida entre dos de sus puntos\ fig.3b.

Las semirrectas son de longitud infinita, mientras que los segmentos son de longitud finita.

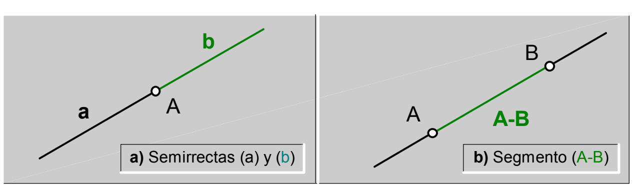


fig.3.\ Partes de una Recta.

SEGÚN LA POSICIÓN RELATIVA EN QUE SE ENCUENTREN DOS RECTAS, SE DEFINEN COMO:

a) **Rectas que se cortan.** Si las rectas poseen un punto en común. En este caso las rectas están contenidas en un mismo plano\ fig.4a.

b) **Rectas paralelas.** Si mantienen indefinidamente la distancia entre ellas. En este caso las rectas están contenidas en un mismo plano\ fig.4b.

c) **Rectas que se cruzan.** Son dos rectas que no se cortan ni son paralelas. En este caso las rectas no están contenidas en un mismo plano\ fig.4c.

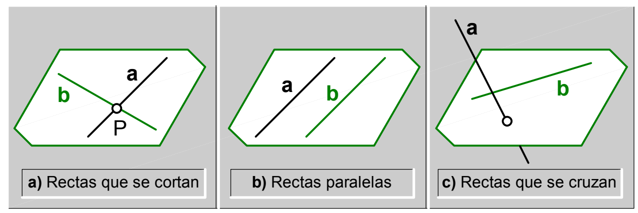


fig.4.\ Posición relativa entre rectas.

ÁNGULO.

Porción de un plano comprendida entre dos semirrectas de origen común.

UN ÁNGULO, SEGÚN SU MEDIDA ANGULAR EN GRADOS SEXAGESIMALES[1], SE DEFINE COMO:

a) **Cóncavo.** Si mide entre 180° y 360°\ fig.5a.

b) **Llano.** Si mide 180°\ fig.5b.

c) **Completo.** Si mide 360°\ fig.5c.

d) **Convexo.** Si miden menos de 180°. Se definen a su vez\ fig.5d:

  1) **Agudo.** Si mide menos de 90°.

  2) **Recto.** Si mide 90°.

  3) **Obtuso.** Si mide entre 90° y 180°.

DOS ÁNGULOS SE DEFINEN COMO:

Ángulos consecutivos. Si se ubican uno a continuación del otro. A su vez se denominan\ fig.5e:

a) **Complementarios.** Si la suma de sus medidas angulares es igual a 90°.

b) **Suplementarios.** Si la suma de sus medidas angulares es igual a 180°.

DOS RECTAS QUE SE CORTAN DEFINEN CUATRO ÁNGULOS, LOS CUALES, TOMADOS EN PARES, SE DEFINEN COMO:

a) **Opuestos.** Si no poseen ninguna semirrecta común. En este caso sus medidas angulares son iguales\ fig.5f.

b) **Adyacentes.** Si poseen una semirrecta común. En este caso son ángulos suplementarios\ fig.5g.

[1] Un grado sexagesimal es la 90va. parte del ángulo recto.

SI DOS RECTAS PARALELAS SON CORTADAS POR UNA TERCERA RECTA, SE FORMAN OCHO ÁNGULOS, LOS CUALES, CONSIDERADOS EN PARES DE IGUAL MEDIDA ANGULAR, SE DEFINEN COMO:

a) **Ángulos alternos.** Los cuales se agrupan en\ fig.5h:

- **1)** Ángulos alternos internos.
- **2)** Ángulos alternos externos.

b) **Ángulos correspondientes,**\ fig.5i.

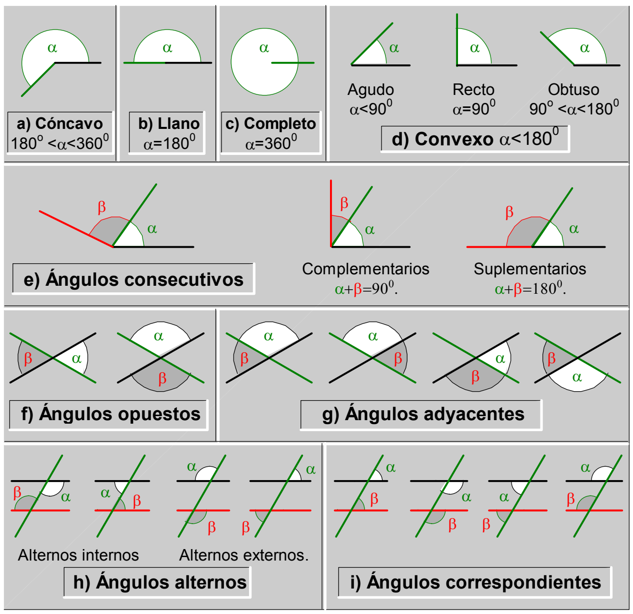


fig.5.\ Ángulos.

POLIGONAL.

Línea formada por segmentos rectos consecutivos no alineados. Una poligonal puede ser\ fig.6:

a) **Poligonal abierta.** Si el primer y último segmentos no están unidos\ fig.6a.

b) **Poligonal cerrada.** Si cada segmento esta unido a otros dos\ fig.6b.

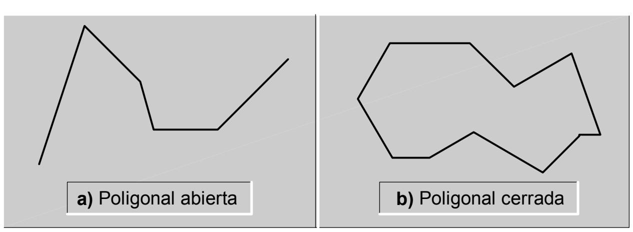


fig.6.\ Poligonal.

POLÍGONO.

Figura geométrica plana limitada por una poligonal cerrada que no se corta a sí misma. Los polígonos se clasifican en\ fig.7:

a) **Polígonos regulares.** Polígonos en los cuales todos sus lados son de igual longitud, y todos sus vértices están circunscritos en una circunferencia. De acuerdo al número de sus lados, los polígonos regulares se denominan\ fig.7a:

- **1)** **Triángulo equilátero.** Polígono regular de tres lados.
- **2)** **Cuadrado.** Polígono regular de cuatro lados.
- **3)** **Pentágono, hexágono, heptágono u octágono regular.** Polígono regular de cinco, seis, siete u ocho lados respectivamente.

b) **Polígonos irregulares.** Son polígonos en los cuales sus lados no son de igual longitud, y/o sus vértices no están contenidos en una circunferencia. Se clasifican a su vez, según el número de sus lados en\ fig.7b:

- **1)** **Triángulo.** Polígono de tres lados. Los triángulos se denominan\ fig.7c:
  - **i)** **Triángulo equilátero.** Si sus tres ángulos son iguales.
  - **ii)** **Triángulo isósceles.** Si solo dos de sus ángulos son iguales.
  - **iii)** **Triángulo escaleno.** Si sus tres ángulos son diferentes.
  - **iv)** **Triángulo rectángulo.** Si tienen un ángulo recto.
  - **v)** **Triángulo obtusángulo.** Si tienen un ángulo obtuso.
  - **vi)** **Triángulo acutángulo.** Si sus tres ángulos son agudos.
- **2)** **Cuadrilátero.** Polígono de cuatro lados. Los cuadriláteros se clasifican en\ fig.7d:
  - **i)** **Paralelogramo.** Cuadrilátero en el que los lados opuestos son paralelos. Se denominan a su vez:
    - **A)** **Cuadrado.** Paralelogramo en el cual los cuatro ángulos son rectos y los cuatro lados son de igual longitud.
    - **B)** **Rectángulo.** Paralelogramo en el cual los cuatro ángulos son rectos, pero los lados adyacentes no son de igual longitud.
    - **C)** **Rombo.** Paralelogramo que no tiene ángulos rectos, pero sus lados son de igual longitud.
    - **D)** **Romboide.** Paralelogramo que no tiene ángulos rectos y sus lados adyacentes no son de igual longitud.
  - **ii)** **Trapecio.** Cuadrilátero que tiene solo dos lados paralelos. Se definen a su vez como:
    - **A)** **Trapecio rectángulo.** Trapecio que tiene dos ángulos rectos.
    - **B)** **Trapecio isósceles.** Trapecio en el que sus lados no paralelos son de igual longitud.
  - **iii)** **Trapezoide.** Cuadrilátero que no tiene lados paralelos.

3) **Pentágono, hexágono, heptágono, octágono.** Polígono de cinco, seis, siete u ocho lados respectivamente\ fig.7**b**.

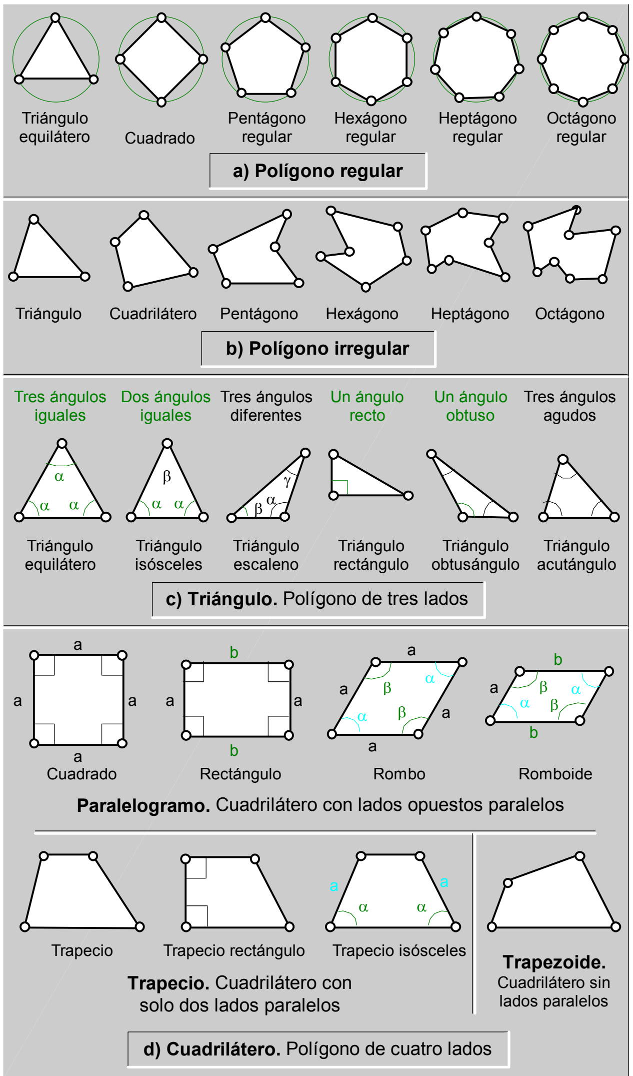


fig.7.\ Polígono.

CURVA.

Línea del plano o del espacio que no tiene segmentos rectos. Las curvas se clasifican en:

a) **Cónica.** Curva que se genera al seccionar un cono recto de revolución con un plano\ fig.8**a**.

DEPENDIENDO DE LA RELACIÓN ENTRE LOS ÁNGULOS:

α^o: Ángulo que forma el plano (α) seccionante con el plano base del cono.

β^o: Ángulo que forman las **generatrices**[2] (g) del cono con el plano base del mismo.

LAS CÓNICAS SE DENOMINAN\ fig.8a:

1) **Circunferencia.** Cónica generada cuando el plano (α) seccionante y el plano base del cono son paralelos; $(\alpha^0=0^0)$.

2) **Elipse.** Cónica generada cuando el ángulo (α^0) es menor que el ángulo (β^0); $(\alpha^0 < \beta^0)$.

3) **Parábola.** Cónica generada cuando los ángulos (α^0) y (β^0) son iguales; $(\alpha^0 = \beta^0)$.

4) **Hipérbola.** Cónica generada cuando el ángulo (α^0) es mayor que el ángulo (β^0); $(\alpha^0 > \beta^0)$.

El estudio de las cónicas es de gran importancia en los campos de la Óptica, Astronomía, Física, Biología, Informática, Ingeniería, entre otras, ya que son la base del diseño y construcción de lentes, espejos, y superficies: elípticas, circulares parabólicas e hiperbólicas, los cuales son componentes esenciales de: microscopios, telescopios, radares, antenas parabólicas, teodolitos, distanciómetros, etc, de gran uso en estas ciencias.

b) **Curvas Matemáticas, Físicas, Estadísticas, etc.** Estas curvas son generadas por ecuaciones propias de cada una de estas ciencias, y su estudio es de gran utilidad en la solución de problemas relacionados con las mismas. En la fig.8**b** se muestra una curva trigonométrica.

c) **Espiral de Arquímides.** Curva del plano, generada por un punto (P) que se mueve con velocidad lineal constante (v), a lo largo de una recta (**a**); mientras esta gira, con velocidad angular uniforme (ϖ), alrededor de un punto fijo contenido en ella\ fig.8**c**.

d) **Involuta ó Envolvente.** Curva del plano, generada por un punto fijo (P) de un hilo, mientras este se desenrolla a partir de un segmento, polígono regular ó circunferencia\ fig.8**d**.

La involuta de un círculo se utiliza en la construcción de los dientes de engranajes.

e) **Cicloide.** Curva del plano, generada por un punto fijo (P) de una circunferencia que ruede sin deslizarse a lo largo de una recta (**a**)\ fig.8**e**.

Las cicloides tienen aplicación en la construcción de los dientes de engranajes.

f) **Catenaria.** Curva plana que forma, por la acción de su propio peso, un hilo, completamente homogéneo, flexible e inextensible, cuando se fijan dos de sus puntos\ fig.9**a**.

La catenaria, tiene gran aplicación en la Ingeniería Eléctrica para el diseño y colocación de líneas eléctricas, ya que los cables, al ser suspendidos, generan este tipo de curvas y su estudio permite determinar los esfuerzos a que serán sometidos por la acción de su propio peso. En la Ingeniería Civil se aplican en el diseño y construcción de puentes colgantes.

g) **Helice.** Curva del espacio, generada por un punto (P), de una recta (**a**), la cual se desplaza, con velocidad constante (v), y rota, con velocidad constante (ϖ), sobre otra recta (**e**), con la que se corta (fig.9**b**). Una hélice puede ser:

1) **Hélice cilíndrica.** Si el punto (P) que la genera es un punto fijo de la recta (**a**)\ fig.9**b1**.

[2] Rectas que contienen al vértice (V) del cono y a un punto (P) de su circunferencia base.

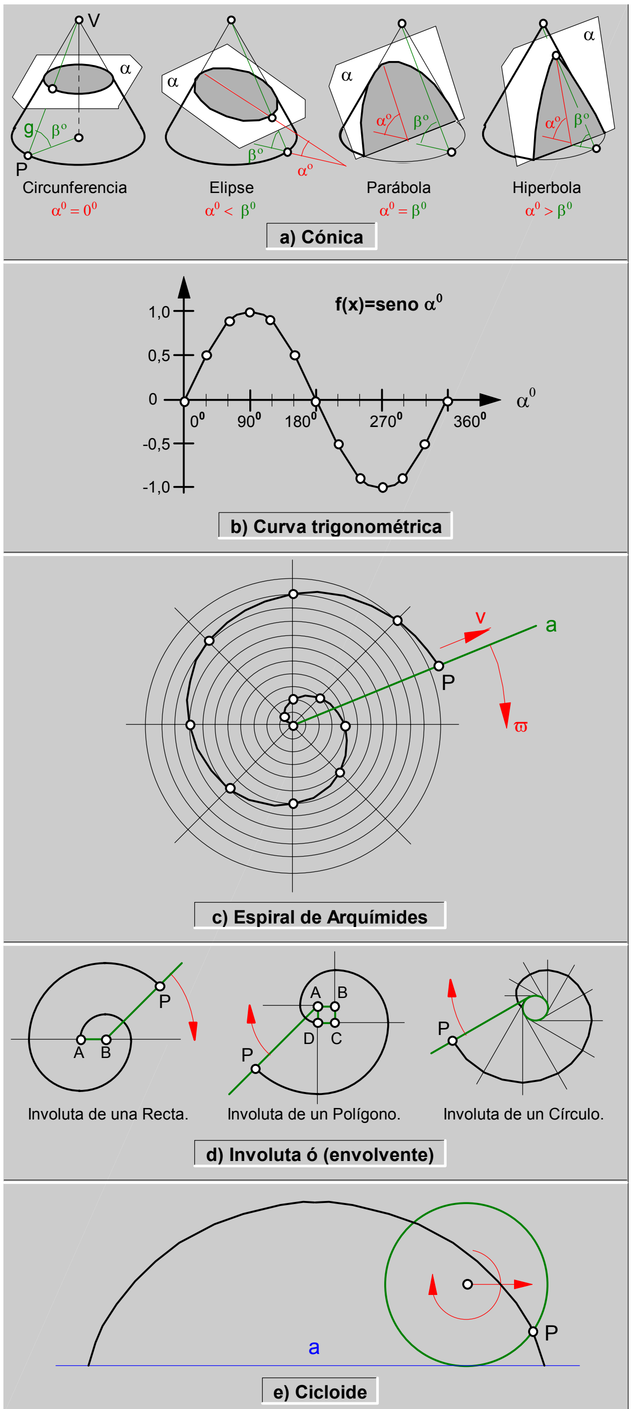


fig.8.\ Curva.

2) **Hélice cónica.** Si el punto (P) que la genera, se mueve, con velocidad lineal constante (v_p), a lo largo de la recta (a)\ fig.9b2.

Las hélices tienen aplicación en la Ingeniería Mecánica para la construcción de roscas de tornillos y tornillos sin fín para engranajes transportadores; también en la Ingeniería Civil y Arquitectura las hélices se utilizan para el diseño y construcción de escaleras en espiral (escaleras de caracol); se aplican también en la Industria Publicitaria para la construcción de avisos publicitarios.

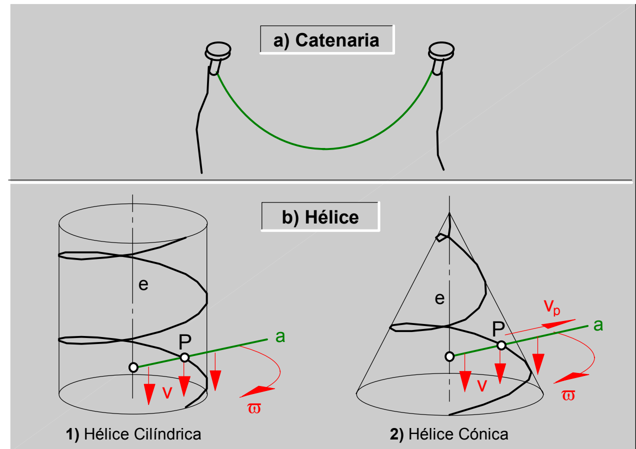


fig.9.\ Catenaria - Hélice.

CÍRCULO.

Figura geométrica plana limitada por una circunferencia. En la fig.10. Se muestran el círculo y sus partes.

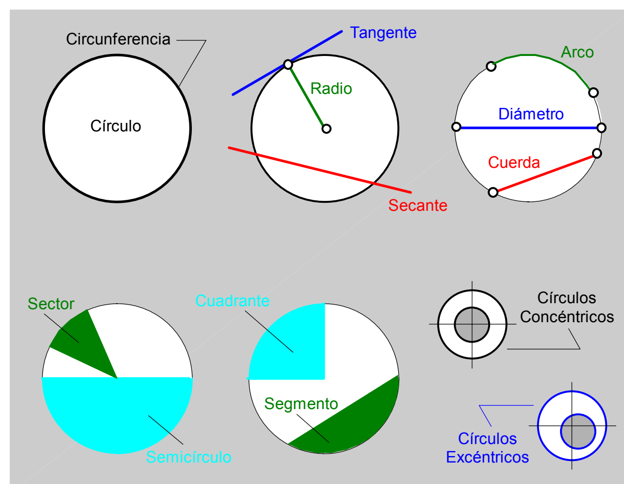


fig.10.\ Círculo y sus partes.

SUPERFICIE.

Configuración geométrica que posee solo dos dimensiones. Los principales tipos de superficie son:

a) **Superficie reglada.** Superficie generada por el movimiento de una recta, denominada **generatriz** (g), manteniéndose en contacto con otra ú otras líneas, denominadas **directrices** (d), y cumpliendo además ciertas condiciones particulares. Entre las superficies regladas se pueden mencionar\ fig.11:

1) **Plano.** Superficie reglada generada por el movimiento de una generatriz (g), que se mantiene en contacto con una directriz (d) recta, siendo paralelas todas las posiciones de la generatriz\ fig.11a.

b) Superficie de curvatura simple. Superficie reglada en la cual cada dos posiciones adyacentes de la generatriz (g) son coplanares (son paralelas o se cortan)\ fig.11b.

Las superficies de curvatura simple son superficies desarrollables, es decir que pueden extenderse sobre un plano. Ejemplos de estas superficies son:

1) Superficie cilindrica. Superficie generada por el movimiento de una generatriz (g) que se mantiene en contacto con una directriz (d) curva, siendo además paralelas todas las posiciones de la generatriz. Las superficies cilíndricas pueden ser\ fig.11b1:

i) Superficie cilindrica de revolución. Superficie cilíndrica en la cual todas las posiciones de la generatriz (g) equidistan de un **eje** (e), paralelo a ella.

ii) Superficie cilindrica de nó revolución. Superficie cilíndrica en la cual no es posible definir un eje (e) que equidiste de todas las posiciones de la generatriz (g).

2) Superficie cónica. Superficie reglada generada por el movimiento de una generatriz (g), manteniéndose en contacto con una directriz (d) curva, teniendo, todas las posiciones de la generatriz (g), un punto común (V), denominado **vértice**. Se clasifican\ fig.11b2:

i) Superficie cónica de revolución. Superficie cónica en la cual, todas las posiciones de la generatriz (g), forman el mismo ángulo con un eje (e), que pasa por el vértice (V).

ii) Superficie cónica de nó revolución. Superficie cónica en la cual no es posible definir un eje (e), que forme el mismo ángulo con todas las posiciones de la generatriz.

c) Superficie alabeada. Es una superficie reglada nó desarrollable, es decir, en la cual, dos posiciones sucesivas de la generatriz no son coplanares. Entre este tipo de superficies, se puede citar\ fig.11c:

1) Cilindroide. La generatriz (g) se desplaza manteniéndose paralela a un **plano director** (δ) y apoyada sobre dos directrices (d_1 y d_2) curvas\ fig.11c1.

2) Conoide. La generatriz (g) se desplaza manteniéndose paralela a un plano director (δ) y apoyada sobre dos directrices, siendo una de ellas recta (d_1) y la otra curva (d_2)\ fig.11c2.

3) Superficie doblemente reglada. Superficie reglada en la cual por cada uno de sus puntos pasan dos generatrices (g_1 y g_2). Entre ellas se pueden citar\ fig.11c3:

i) Paraboloide hiperbólico. La generatriz (g) se desplaza manteniéndose paralela a un plano director (δ) y apoyada sobre dos directrices rectas (d_1 y d_2) que se cruzan.

ii) Hiperboloide de revolución. La generatriz (g) se apoya sobre dos directrices (d_1 y d_2) circulares, paralelas, y se mueve manteniendo constante el ángulo (α^0) que forma ellas.

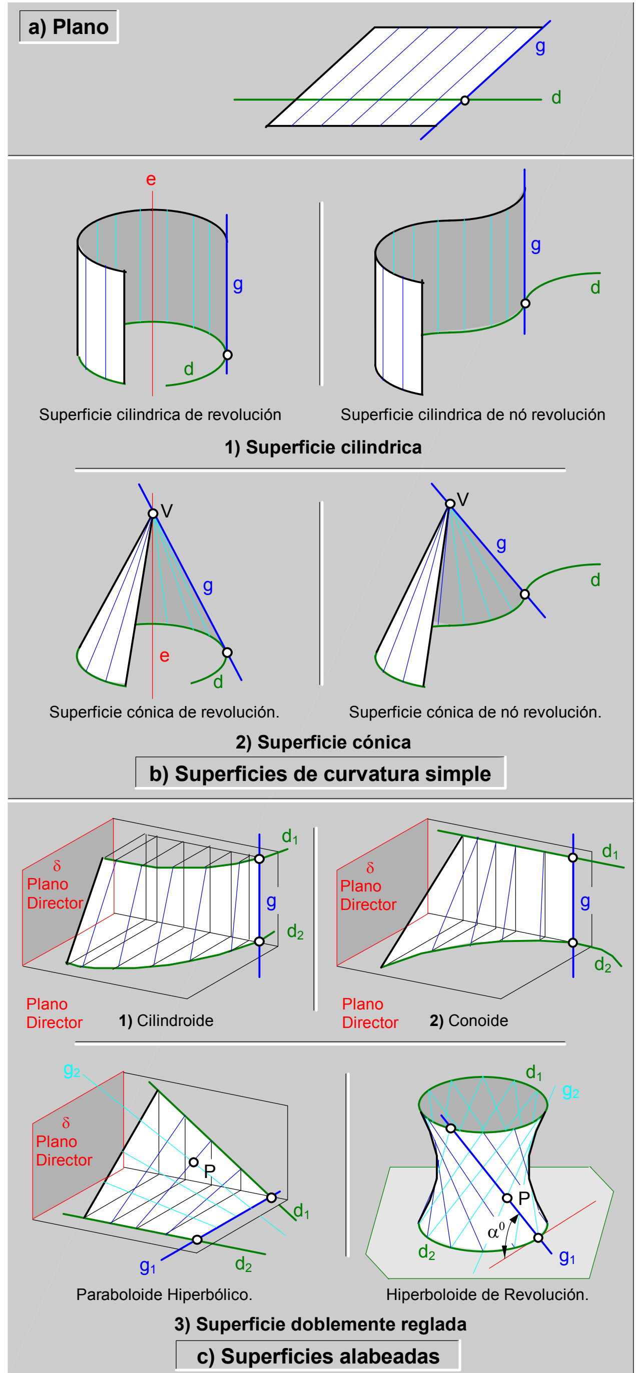


fig.11.\ Superficies Regladas.

d) Superficie de doble curvatura. Son superficies generadas por el movimiento de una generatriz (g) curva. Estas superficies no contienen líneas rectas y por lo tanto no son desarrollables. Entre ellas son muy conocidas las cuádricas, las cuales son superficies generadas por la rotación de una curva cónica alrededor de uno de sus ejes. Las cuádricas son\ fig.12:

1) Esfera. La generatriz (g) es una circunferencia.

2) Elipsoide. La generatriz (g) es una elipse.

3) Paraboloide. La generatriz (g) es una parábola.

4) Hiperboloide. La generatriz (g) es una hipérbola.

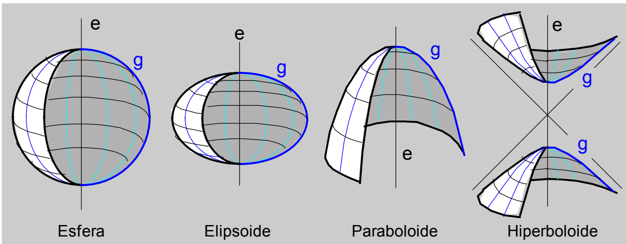


fig.12.\ Superficies de doble curvatura.

SÓLIDO.

Espacio limitado por superficies. Se clasifican en:

a) Poliedro. Sólido limitado por superficies planas (polígonos). Los polígonos que limitan al sólido se denominan **caras**; los lados de estos polígonos **aristas**; y los puntos donde concurren varias aristas **vértices**. Los poliedros se denominan\ fig.13:

1) Poliedro irregular. Poliedro que posee caras diferentes y/o aristas de longitudes distintas. Según el número de sus caras, se denominan:

Tetraedro, pentaedro, hexaedro, heptaedro ú octaedro. Poliedro de cuatro, cinco, seis, siete, u ocho caras respectivamente\ fig.13**a**.

2) Poliedro regular. Poliedro cuyas caras son polígonos regulares iguales, y todas sus aristas son de igual longitud; en consecuencia, todos sus vértices están contenidos en una esfera. Los poliedros regulares son cinco y se denominan\ fig.13**b**:

i) Tetraedro regular. Poliedro definido por cuatro triángulos equiláteros iguales.

ii) Hexaedro regular (cubo). Poliedro definido por seis cuadrados iguales.

iii) Octaedro regular. Poliedro definido por ocho triángulos equiláteros iguales.

iv) Dodecaedro regular. Poliedro definido por doce pentágonos regulares iguales.

v) Icosaedro regular. Poliedro definido por veinte triángulos equiláteros iguales.

3) Prisma. Poliedro definido por dos polígonos iguales y paralelos (bases) y cuyas caras laterales son paralelogramos. La recta que une los centros geométricos de las bases se denomina **eje del prisma** (e). Los prismas se denominan\ fig.13c:

i) Prisma recto. Si el eje (e), es perpendicular a las bases; en cuyo caso todas sus caras laterales son rectángulos.

ii) Prisma oblicuo. Si el eje (e),no es perpendicular a las bases.

iii) Prisma regular. Prisma cuyas bases son polígonos regulares. Pueden a su vez ser:

A) Prisma regular recto. Prisma regular cuyo eje (e), es perpendicular a las bases; en cuyo caso todas sus caras laterales son rectángulos iguales.

B) Prisma regular oblicuo. Prisma regular cuyo eje (e), no es perpendicular a las bases.

iv) Paralelepípedo. Prisma cuyas bases son paralelogramos. Pueden ser a su vez rectos u oblicuos.

4) Pirámide. Poliedro definido por un polígono **base**, y cuyas caras laterales son triángulos que poseen un vértice común (V), denominado **vértice de la pirámide**, no contenido en el plano base. La recta que pasa por el vértice de la pirámide y el centro geométrico de la base se denomina **eje de la pirámide (e)**. Las pirámides se denominan\ fig.13**d**:

i) Pirámide recta. Si el eje (e), es perpendicular a la base.

ii) Pirámide oblicua. Si el eje (e), no es perpendicular a la base.

iii) Pirámide regular. Pirámide cuya base es un polígono regular. Pueden a su vez ser:

A) Pirámide regular recta. Pirámide regular cuyo eje (e), es perpendicular a la base; en cuyo caso, todas sus caras laterales son triángulos isósceles iguales.

B) Pirámide regular oblicua. Pirámide regular cuyo eje (e), no es perpendicular a la base.

b) Cuerpo redondo. Sólido que contiene superficies curvas. Entre ellos se pueden mencionar\ fig.14:

1) Cilindro. Sólido limitado por una superficie cilíndrica y por dos bases planas paralelas. La recta que pasa por los centros geométricos de las bases se denomina **eje del cilindro (e)**, y es paralela a la generatriz (g) de la superficie cilíndrica. Los cilindros pueden ser\ fig.14**a**:

i) Cilindro recto. Si el eje (e), es perpendicular a las bases.

ii) Cilindro oblicuo. Si el eje (e), no es perpendicular a las bases.

iii) Cilindro de revolución. Cilindro limitado por una superficie cilíndrica de revolución. Pueden a su vez ser:

A) Cilindro de revolución recto. Cilindro de revolución cuyo eje (e), es perpendicular a las bases.

B) Cilindro de revolución oblicuo. Cilindro de revolución cuyo eje (e), no es perpendicular a las bases.

2) Cono. Sólido limitado por una superficie cónica y por una base plana. La recta que pasa por el vértice (V), de la superficie cónica y el centro geométrico de la base se denomina **eje del cono (e)**. Los conos pueden ser\ fig.14**b**:

- **i)** **<u>Cono recto.</u>** Si el eje (e), es perpendicular a la base.
- **ii)** **<u>Cono oblicuo.</u>** Si el eje (e), no es perpendicular a la base.
- **iii)** **<u>Cono de revolución.</u>** Cono limitado por una superficie cónica de revolución. Pueden a su vez ser:
  - **A)** **<u>Cono de revolución recto.</u>** Cono de revolución cuyo eje (e), es perpendicular a la base.
  - **B)** **<u>Cono de revolución oblicuo.</u>** Cono de revolución cuyo eje (e), no es perpendicular a la base.

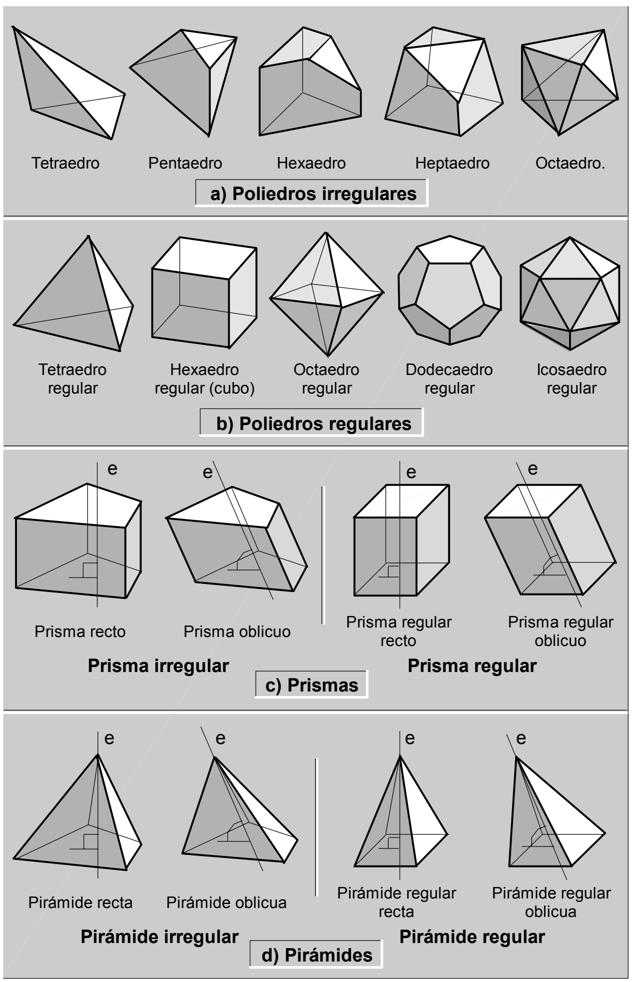


fig.13.\ Poliedros.

3) **<u>Sólido de revolución.</u>** Sólido limitado por una generatriz curva que rota alrededor de un eje. Entre ellos se pueden mencionar\ fig.14c:

- **i)** **<u>Esfera, elipsoide, paraboloide e hiperboloide.</u>** Espacios limitados por estos tipos de superficie ya descritas.
- **ii)** **<u>Toro (anillo).</u>** Su superficie la genera una circunferencia ó una elipse, que gira alrededor de un eje (e), coplanar con ella, y situado fuera de ella.

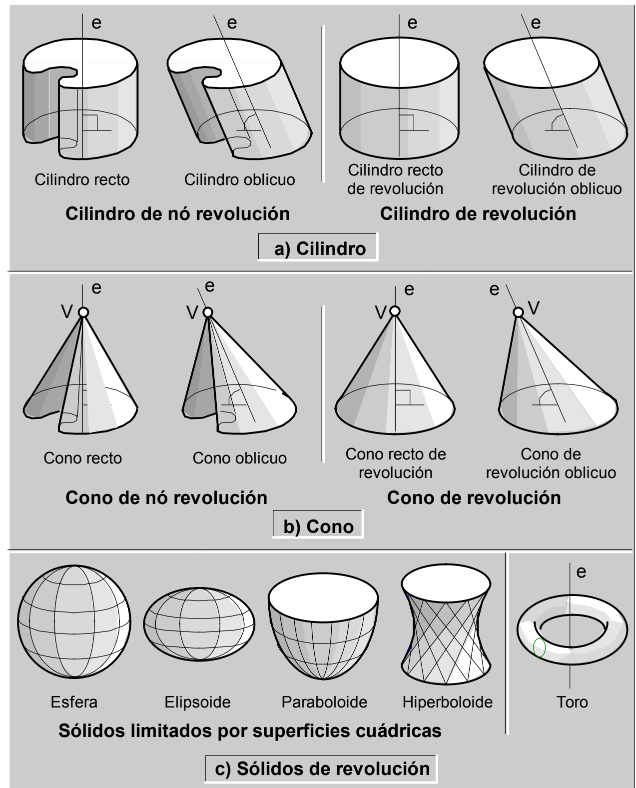


fig.14.\ Cuerpos redondos.

TRAZADO.

En la fig.15, se muestran los tipos básicos de trazado, utilizados en la elaboración de un dibujo.

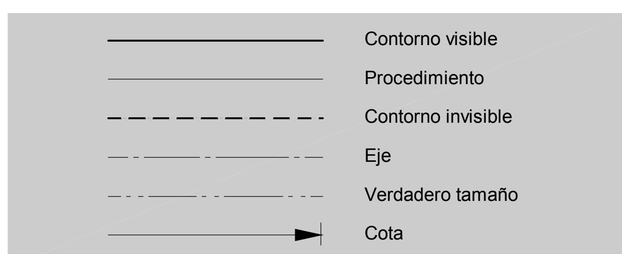


fig.15.\ Líneas de trazado.

EL JUEGO DE ESCUADRAS.

Un juego de escuadras, se compone de una **escuadra** y un **cartabón**. Siendo la hipotenusa de la escuadra, de igual longitud que el cateto mayor del cartabón\ fig.16.

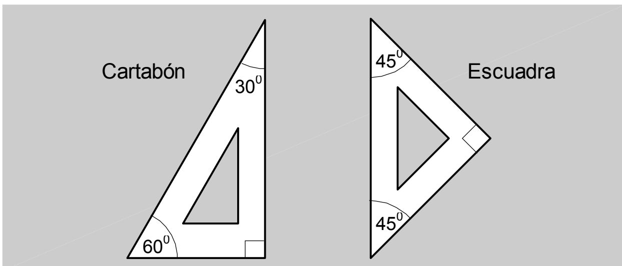


fig.16.\ Juego de escuadras.

TRAZADO DE RECTAS CON LAS ESCUADRAS.

Por medio de las escuadras, pueden trazarse rectas paralelas, rectas perpendiculares y rectas que se corten a cualquier ángulo que sea múltiplo de 15^0, según puede observarse en las fig.17 a fig.19:

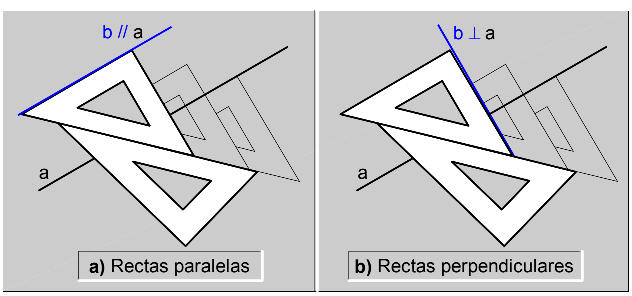


fig.17.\ Trazado de rectas paralelas; y perpendiculares.

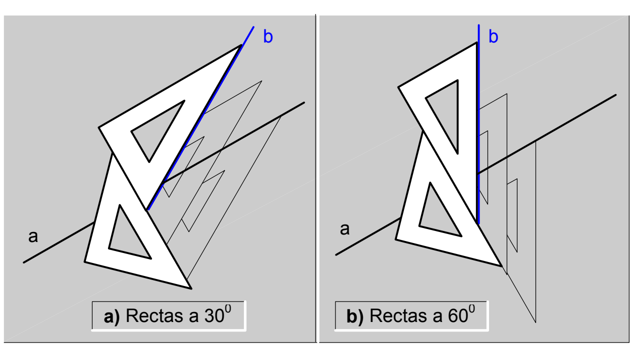


fig.18.\ Trazado de rectas a 30^0 ; y 60^0.

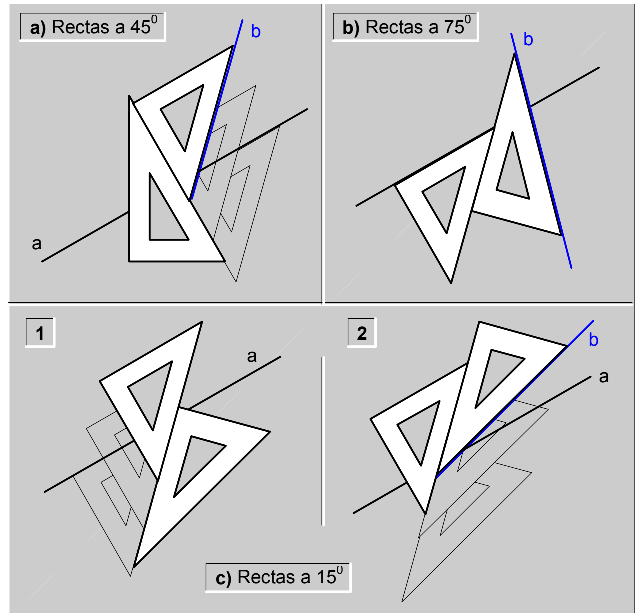


fig.19.\ Trazado de rectas a 45^0 ; 75^0 y 15^0.

TRAZADO DE UNA RECTA (t) TANGENTE A UNA CIRCUNFERENCIA.

a) **Por un punto (T), contenido en la circunferencia.** fig.20.

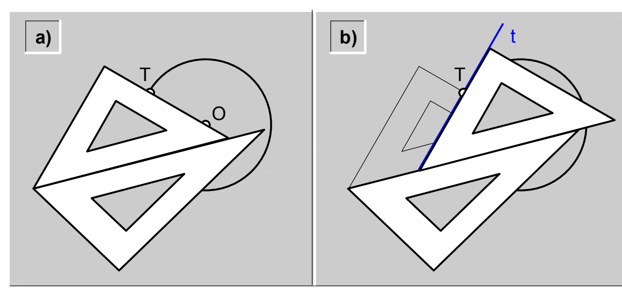


fig.20.\ Recta (t), tangente a una circunferencia, en un punto (T) de ella.

b) **Por un punto (A), no contenido en ella.**

Ejemplo: Trazar una recta (t), tangente a una circunferencia, y que pase por un punto (A) externo a ella\ fig.21a:

Solución:

a) Se traza el segmento (A-O), y se define su punto medio (M)\ fig.21b.

b) Con centro en (M), se dibuja el arco que pase por el centro (O) de la circunferencia, determinando sus puntos de corte (T_1 y T_2) con la misma.

c) Las rectas (t_1 y t_2), que parten del punto (A) y pasan por los puntos (T_1 y T_2), son tangentes a la circunferencia.

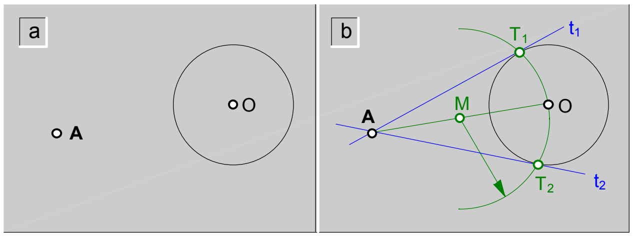


fig.21.\ Recta (t), tangente a una circunferencia, y que pase por un punto (A), externo a ella.

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN PARTES IGUALES.

Ejemplo: Dividir el segmento (A-B) en cinco partes iguales\ fig.22a.

Solución:

a) Se traza una recta (r) cualquiera, que pase por uno de los extremos del segmento; en el ejemplo se trazó por el punto (A)\ fig.22b.

b) Se marcan en la recta (r), y a partir del punto (A), cinco divisiones iguales.

c) Se transportan, mediante rectas paralelas, las cinco divisiones de la recta (r), al segmento (A-B).

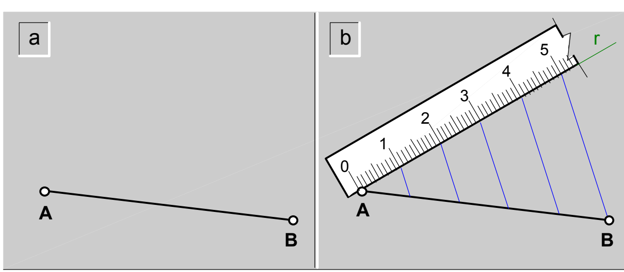


fig.22.\ División de un segmento en cinco partes iguales.

TRAZADO DE POLÍGONOS REGULARES.

a) TRIÁNGULO EQUILÁTERO\ ver fig.23; fig.24; y fig.25.

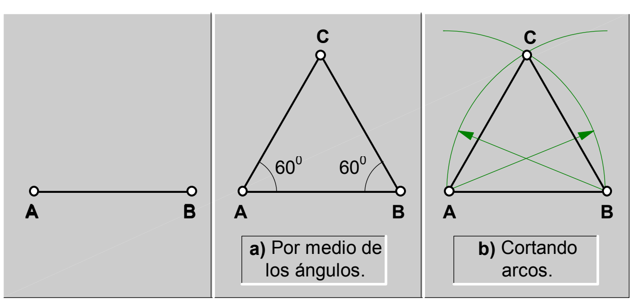


fig.23.\ Dibujo de un triángulo equilátero (ABC), conocido el lado (AB) .

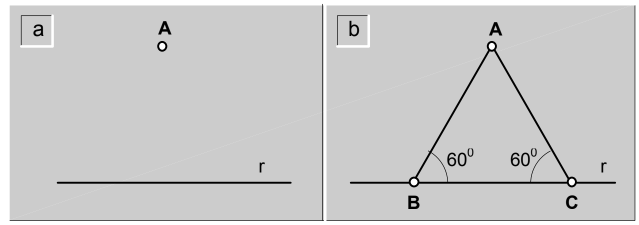


fig.24.\ Dibujo de un triángulo equilátero (ABC), conocido el vértice (A) y la recta (r) que contiene al lado (B-C).

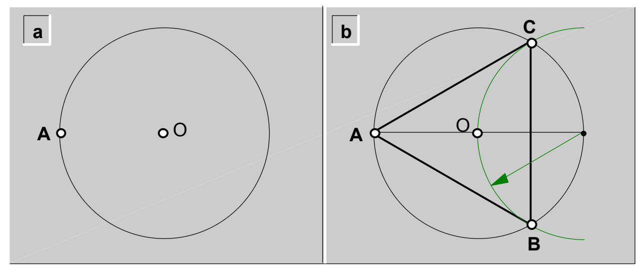


fig.25.\ Dibujo de un triángulo equilátero (ABC), conocido el vértice (A) y la circunferencia que lo circunscribe.

b) CUADRADO\ ver fig.26; y fig.27.

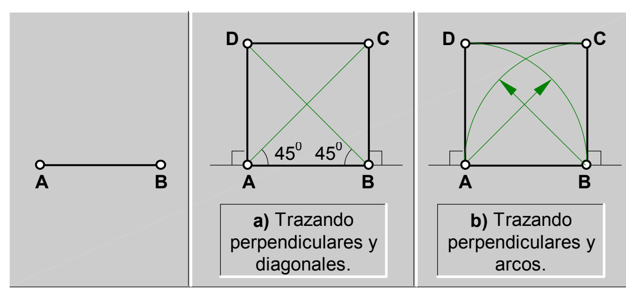


fig.26.\ Dibujo de un cuadrado (ABCD), conocido el lado (AB).

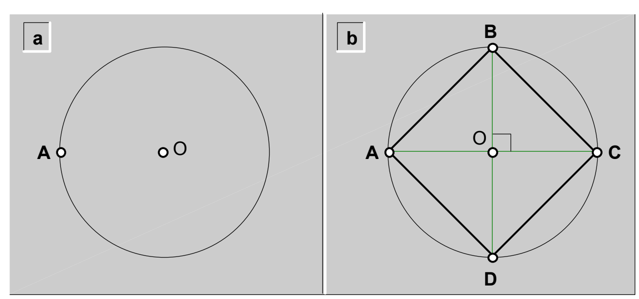


fig.27.\ Dibujo de un cuadrado (ABCD), conocido el vértice (A), y la circunferencia que lo circunscribe.

c) <u>PENTÁGONO REGULAR</u>\ ver fig.28; y fig.29.

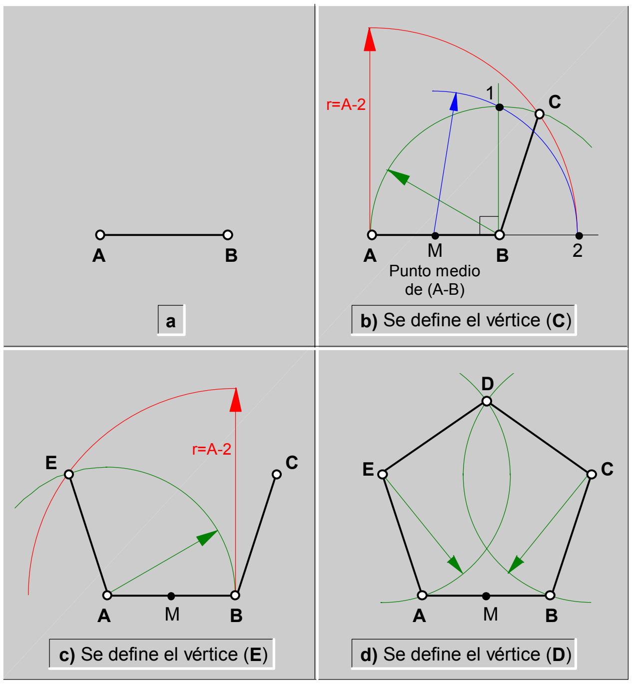


fig.28.\ Dibujo de un pentágono regular (ABCDE), conocido el lado (AB).

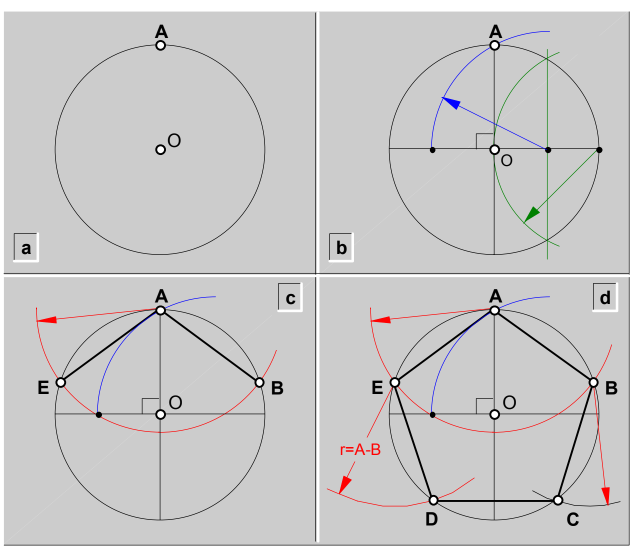


fig.29.\ Dibujo de un pentágono regular (ABCDE), conocido el vértice (A) y la circunferencia que lo circunscribe.

d) <u>HEXÁGONO REGULAR</u>\ ver fig.30; y fig.31.

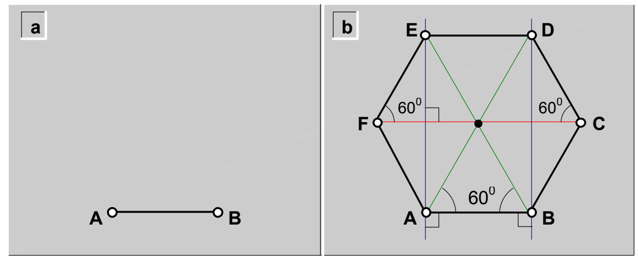


fig.30.\ Dibujo de un hexágono regular (ABCDEF), conocido el lado (AB).

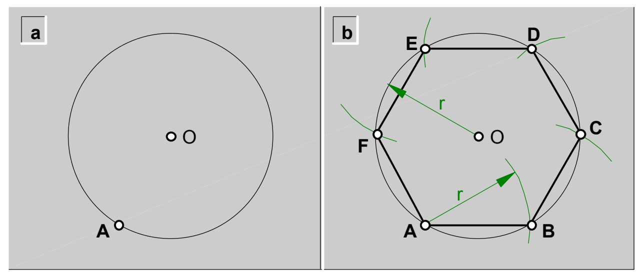


fig.31.\ Dibujo de un hexágono regular (ABCDEF), conocido el vértice (A) y la circunferencia que lo circunscribe.

e) <u>HEPTÁGONO REGULAR</u>\ ver fig.32; y fig.33.

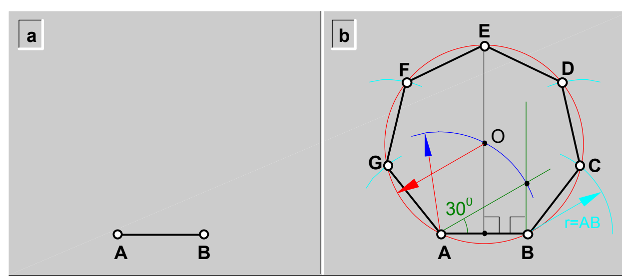


fig.32.\ Dibujo de un heptágono regular (ABCDEFG), conocido el lado (AB).

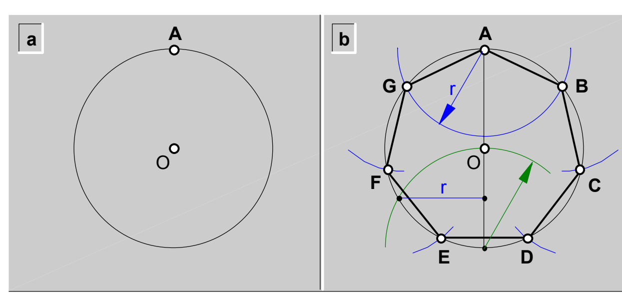


fig.33.\ Dibujo de un heptágono regular (ABCDEFG), conocido el vértice (A) y la circunferencia que lo circunscribe.

f) <u>OCTÁGONO REGULAR</u>\ ver fig.34; y fig.35.

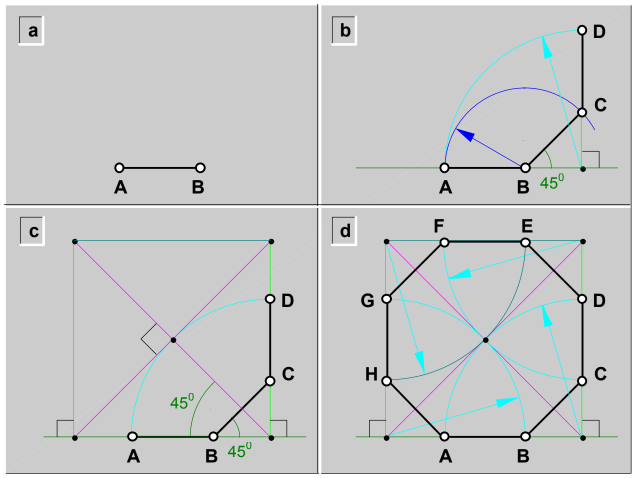


fig.34.\ Dibujo de un octágono regular (ABCDEFGH), conocido el lado (AB).

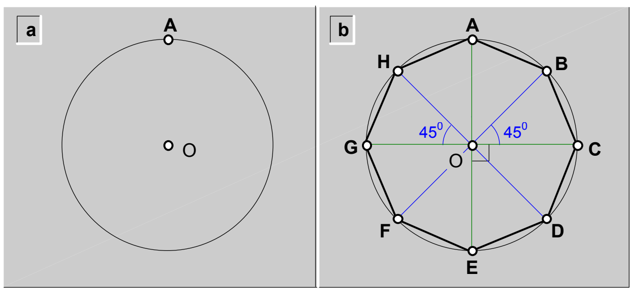


fig.35.\ Dibujo de un octágono regular (ABCDEFGH), conocido el vértice (A) y la circunferencia que lo circunscribe.

MÉTODOS GENERALES DE TRAZADO DE POLÍGONOS REGULARES.

Por medio de los métodos generales mostrados en las fig.36, a fig.38, se pueden dibujar polígonos regulares de cualquier número de lados.

a) Conocido un vértice (A) y la circunferencia que la circunscribe.

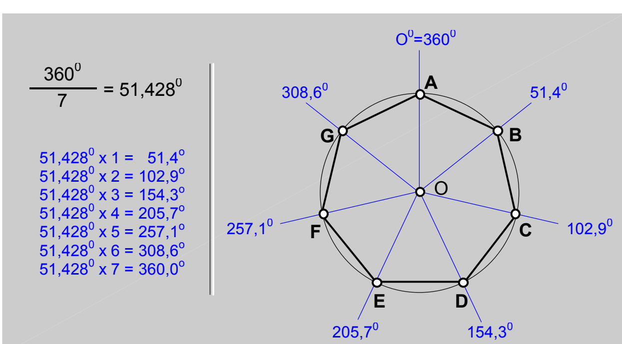


fig.36.\ Dibujo de un heptágono regular, (Método general).

El método general mostrado en la fig.36, se basa en dividir la circunferencia que circunscribe al polígono, en tantas partes iguales, como el número de lados que tendrá el polígono a dibujar.

El método general mostrado en la fig.37, se basa en dividir el diámetro de la circunferencia que circunscribe al polígono, en tantas partes iguales, como el número de lados que tendrá el polígono a dibujar.

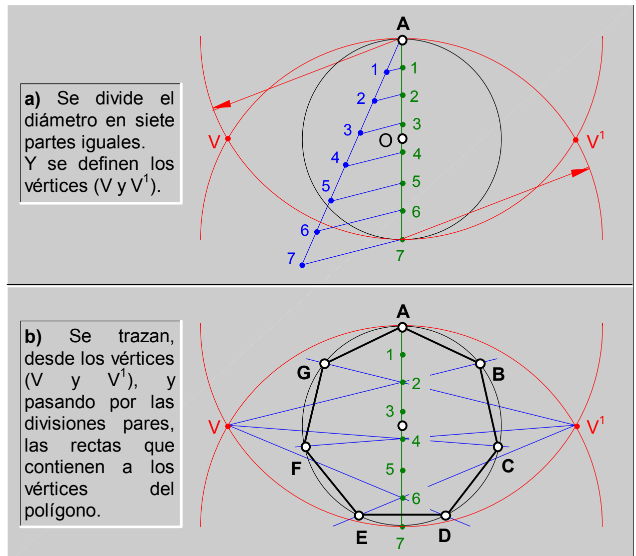


fig.37.\ Dibujo de un heptágono regular, (Método general).

b) Conocido un lado.

El método mostrado en la fig.38, se basa en dividir el semicírculo de radio (A-B), dibujado sobre el lado (A-B) dado, en tantas partes iguales, como lados tendrá el polígono a dibujar.

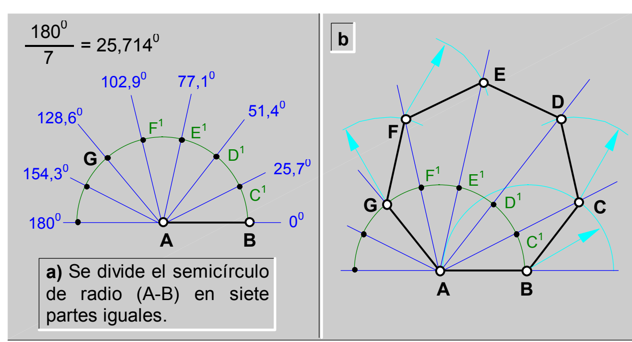


fig.38.\ Dibujo de un heptágono regular, (Método general).

ESCALA.

Es la proporción de aumento o disminución que existe entre las dimensiones reales y las dimensiones representadas de un objeto. En efecto, para representar un objeto de grandes dimensiones, deben dividirse todas sus medidas por un factor mayor que uno, en este caso denominado **escala de reducción**; y para representar objetos de pequeñas dimensiones, todas sus medidas se multiplican por un factor mayor que uno, denominado **escala de ampliación**. La escala a utilizar se determina entonces en función de las medidas del objeto y las medidas del papel en el cual será representado. El dibujo hecho a escala mantendrá de esta forma todas las proporciones del objeto representado, y mostrará una imagen de la apariencia real del mismo. Finalmente, deben indicarse sobre el dibujo las dimensiones del objeto real, y la escala en que ha sido elaborado.

En la fig.39**a**, se muestra un cuadrado de 1 cm. de lado dibujado en sus dimensiones reales (dibujado a escala natural ó escala 1/1). En la fig.39**b**, se muestra el mismo cuadrado representado en escala 2/1 (multiplicadas sus medidas por dos). Y en la fig.39**c**, se muestra el mismo cuadrado representado en escala 1/2 (divididas sus medidas por dos).

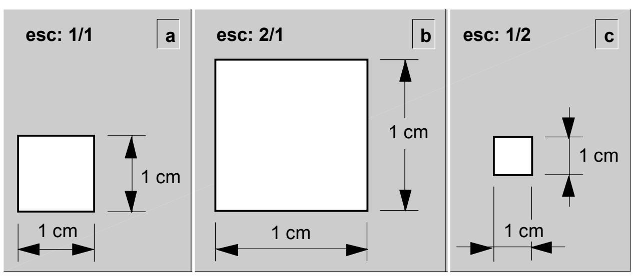


fig.39.\ Representaciones a escala de un cuadrado.

En la fig.40, se muestran algunos factores de escalas de reducción y ampliación.

escalas de reducción

escala	factor de reducción	longitud de representación de 1 metro
1/1	1	100 cms.
1/1,25	1,25	80 cms.
1/2	2	50 cms.
1/2,5	2,5	40 cms.
1/5	5	20 cms.
1/7,5	7,5	13,33 cms.
1/10	10	10 cms.

escalas de ampliación

escala	factor de aumento	longitud de representación de 1 cm.
1/1	1	1 cms.
1,33/1	1,33	1,33 cms.
2/1	2	2 cms.
4/1	4	4 cms.
5/1	5	5 cms.
8/1	8	8 cms.
10/1	10	10 cms.

fig.40.\ Factores de escalas de reducción y ampliación.

Para evitar la realización de multiplicaciones ó divisiones en la elaboración de un dibujo a escala, se trabaja con reglas graduadas denominadas **escalas**, las cuales son construidas en base a los factores de reducción ó ampliación de las respectivas escalas. En la fig.41, se muestran algunas de estas escalas.

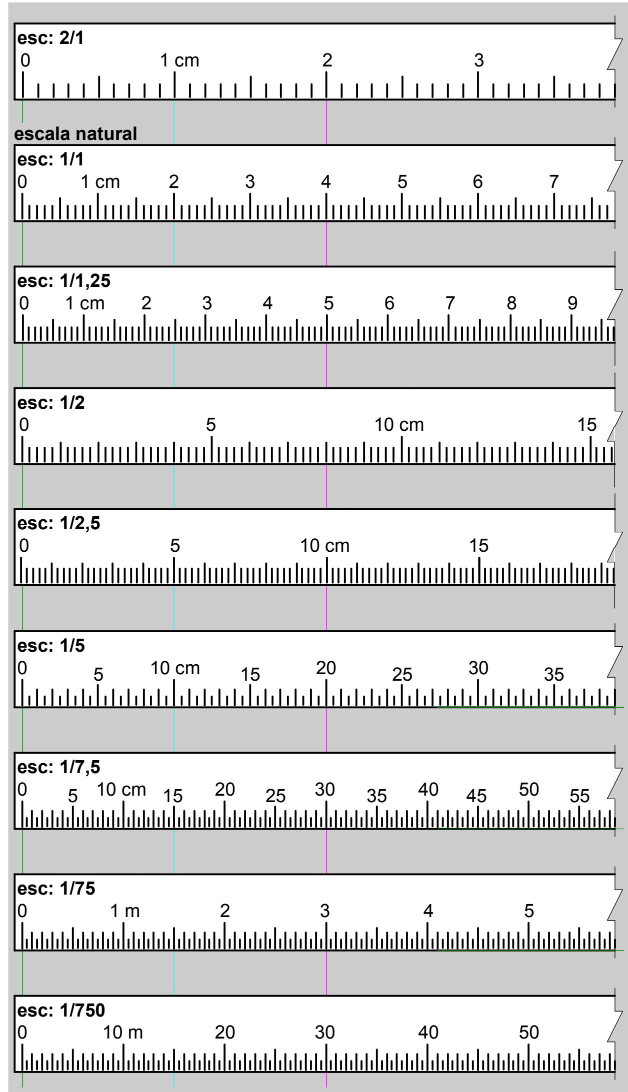


fig.41.\ Escalas.

ESCALÍMETRO.

Es una regla ó un juego de reglas que contiene simultáneamente varias escalas diferentes.

Son muy comunes los escalímetros de forma triangular que contienen seis escalas como el mostrado en la fig.42.

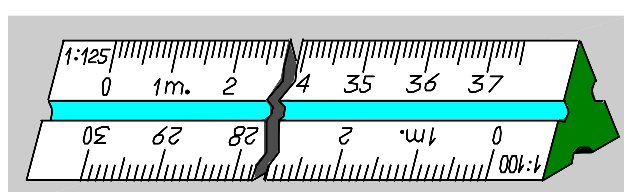


fig.42.\ Escalímetro.

capítulo 2

SISTEMAS DE PROYECCIÓN.

En este capítulo se hace una breve descripción de los sistemas de proyección mas utilizados en Ingeniería y Arquitectura, describiendo el fundamento básico de la ejecución de proyecciones en estos sistemas.

El objetivo principal del capítulo es que el estudiante conozca estos sistemas de proyección, y sepa identificar cuando un objeto esta representado en cada uno de ellos. Al igual que el capítulo anterior, el carácter del presente capitulo es básicamente informativo por lo tanto se presentan las características mas esenciales de estos sistemas de proyección sin entrar en descripciones profundas de sus métodos de trabajo.

SISTEMAS DE PROYECCIÓN.

Un sistema de proyección es un sistema por medio del cual puede ser definida la proyección de un objeto sobre una superficie. En todo sistema de proyección intervienen cuatro elementos denominados:\ fig.43:

a) **Objeto.** Es el objeto que se desea representar. Puede ser un punto, recta, plano, superficie, sólido, etc; en fin cualquier elemento geométrico ú objeto en si.

b) **Punto de observación.** Punto desde el cual se observa el objeto que se quiere representar. Es un punto cualquiera del espacio.

c) **Superficie de proyección.** Es la superficie sobre la cual se proyectará el objeto. Generalmente es un plano; aunque también puede ser una superficie esférica, cilíndrica, cónica, etc.

d) **Proyectantes.** Son rectas imaginarias que unen los puntos del objeto con el punto de observación.

La proyección (P') de cualquier punto (P) del objeto se obtiene interceptando su **proyectante** con el plano de proyección.

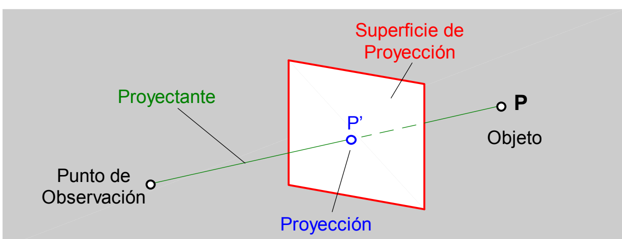


fig.43.\ Sistema de proyección.

LOS SISTEMAS DE PROYECCIÓN MAS USADOS SON:

a) **Proyección cilíndrica.** Se obtiene cuando el punto de observación se encuentra a una distancia tan grande del objeto, que permita considerar que las proyectantes son paralelas al interceptarse con el plano de proyección (fig.44). Los principales tipos de proyección cilíndrica son:

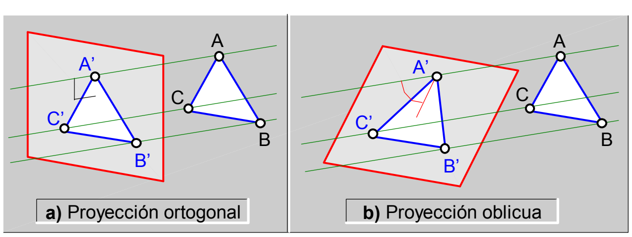


fig.44.\ Proyección cilíndrica.

1) **Proyección ortogonal.** También denominada proyección ortográfica. Se obtiene cuando las proyectantes son perpendiculares al plano de proyección. La proyección ortogonal es muy utilizada en el diseño de piezas mecánicas y maquinarias\ fig.44a.

Los principales tipos de proyección ortogonal son:

i) **Proyección en vistas múltiples.** Cada vista es una proyección ortográfica. Para obtener una vista se coloca el plano de proyección preferentemente paralelo a una de las caras principales del objeto\ fig.45.

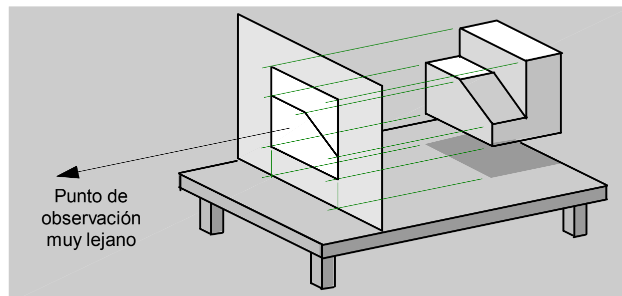


fig.45.\ Vista ortográfica.

Los objetos se representan generalmente en tres vistas ortográficas. Los métodos utilizados para determinar estas vistas son:

A) **Proyección en el séptimo triedro (séptimo octante).** Usado en los Estados Unidos y Canadá.\ fig.46.

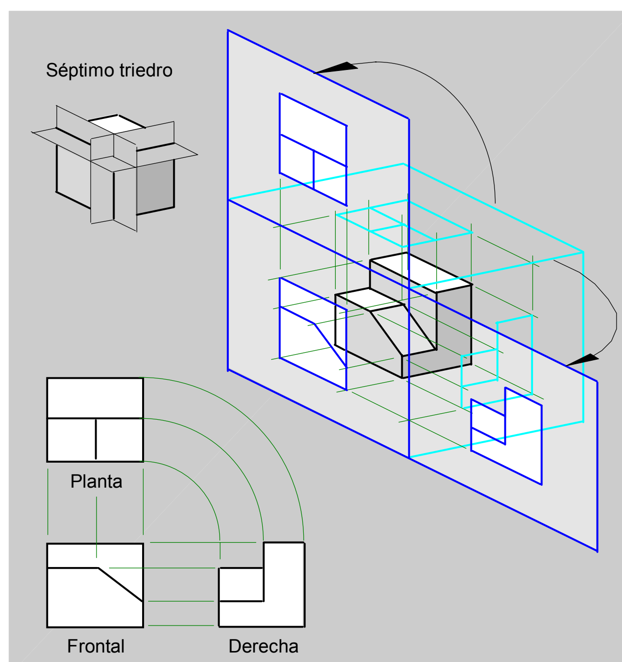


fig.46.\ Proyección en vistas múltiples en el séptimo triedro.

B) <u>Proyección en el primer triedro (primer octante).</u> Usado en todo el mundo, excepto en los Estados Unidos y Canadá.\ fig.47.

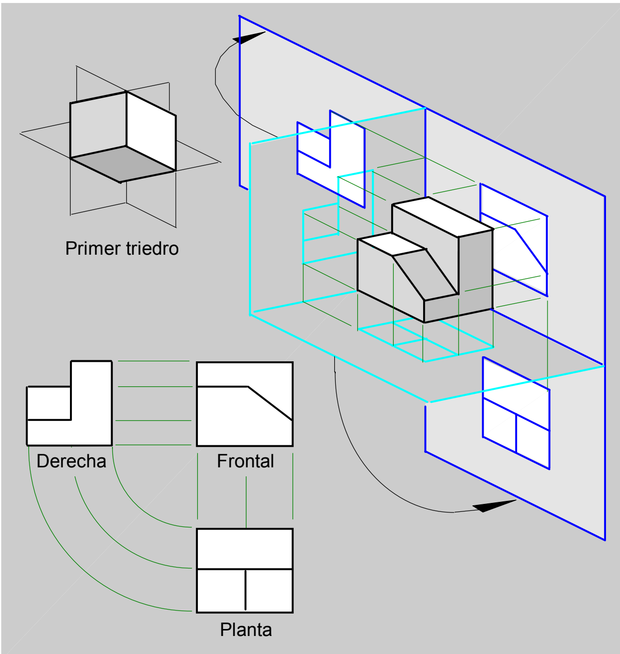


fig.47.\ Proyección en vistas múltiples en el primer triedro.

ii) <u>Proyección acotada.</u> Es una proyección ortogonal sobre la que se acotan en cada punto, línea, u objeto representado la altura (cota) del mismo con respecto a cualquier plano de referencia que sea paralelo al plano de proyección\ fig.48. La proyección acotada es muy práctica cuando es necesario representar gráficamente objetos irregulares; razón por la cual se usa frecuentemente para el diseño de techos de viviendas; construcción de puentes, represas, acueductos, gasoductos, carreteras, determinación de áreas de parcelas, trazado de linderos, y dibujos topográficos de plantas y perfiles de terrenos, entre otros.

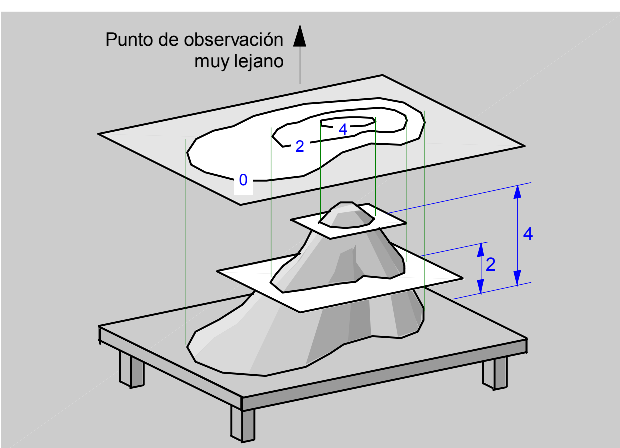


fig.48.\ Proyección acotada.

iii) <u>Proyección axonométrica.</u> Se obtiene cuando el plano de proyección no es paralelo a ninguno de los tres ejes principales del objeto\ fig.49.

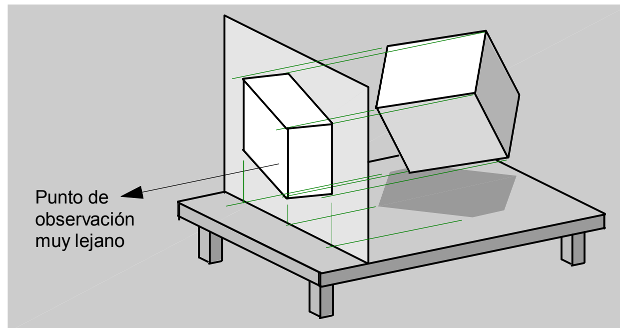


fig.49.\ Proyección axonométrica.

La proyección axonométrica, dependiendo de los ángulos que forman entre sí los ejes axonométricos (proyecciones de los ejes principales del objeto), se denomina:

A) <u>Proyección isométrica.</u> Se obtiene cuando los tres ángulos que forman los ejes axonométricos son iguales. Al representar objetos en proyección isométrica se mide en una misma escala sobre los tres ejes isométricos.\ fig.50

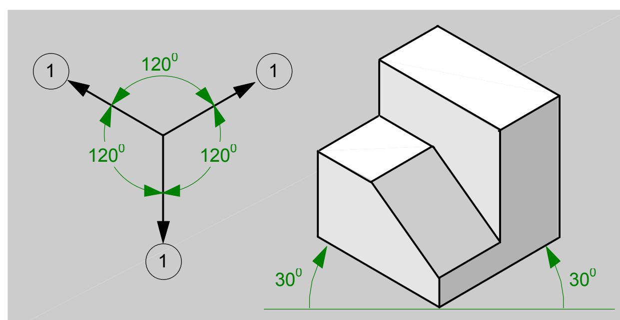


fig.50.\ Proyección isométrica.

B) <u>Proyección dimétrica.</u> Se obtiene cuando solo dos de los tres ángulos que forman los ejes axonométricos son iguales. Al representar un objeto en proyección dimétrica debe medirse en dos de los ejes axonométricos con una misma escala y con una escala diferente en el tercer eje axonométrico. La forma gráfica de determinar la relación entre las escalas sobre los tres ejes axonométricos para cualquier distribución de los mismos, se muestra en la fig.52. No obstante, en la fig.51, se muestran tres distribuciones muy usadas de ejes dimétricos con sus respectivas escalas, estas proporciones difieren muy poco de los valores teóricos reales, los cuales de ser usados difucultarián grandemente la ejecución de la dimetría.

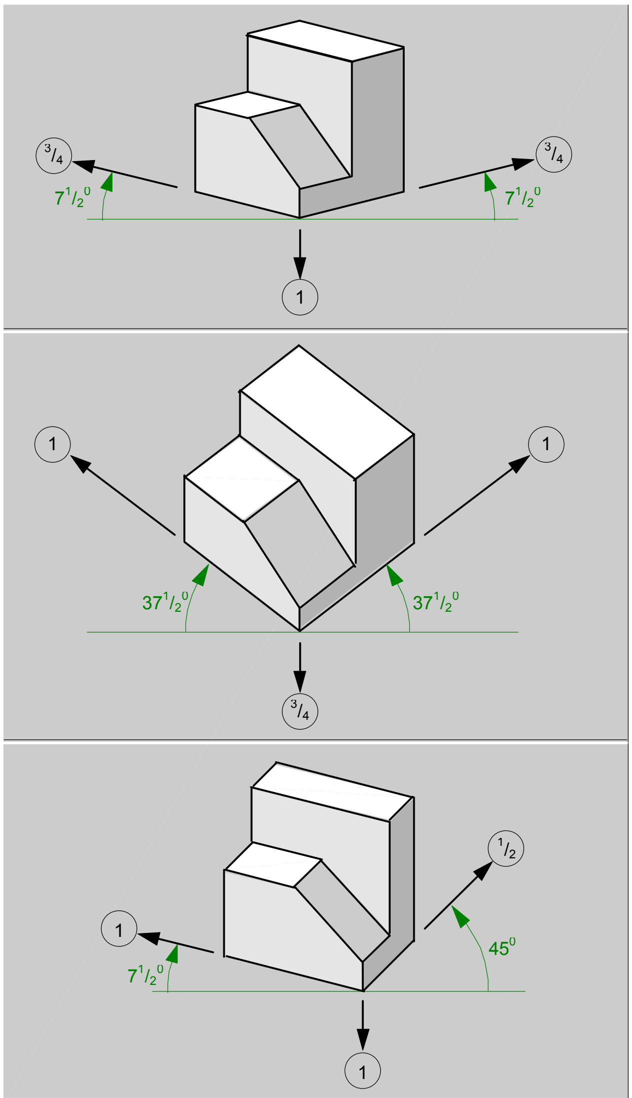


fig.51.\ Proyecciones dimétricas.

C) **<u>Proyección trimétrica.</u>** Se obtiene cuando los tres ángulos que forman los ejes axonométricos son diferentes. En la proyección trimétrica cada eje axonométrico posee su propia escala diferente a la de los otros dos.\ fig.52

2) **<u>Proyección oblicua.</u>** Se obtiene cuando las proyectantes no son perpendiculares al plano de proyección (fig.44b). Preferentemente al dibujar en proyección oblicua se coloca el plano de proyección paralelo a una de las caras principales del objeto; ya que de esta forma dicha cara se proyectará en verdadero tamaño\ fig.53.

Al definir una proyección oblicua el **eje recedente** (eje de profundidad del objeto) se puede proyectar formando cualquier ángulo (α^o) con respecto a los otros dos; e independientemente de este ángulo (α^o), la profundidad del objeto se puede proyectar también en cualquier longitud (teóricamente hasta una longitud infinita). Por lo tanto, al dibujar en proyección oblicua, se traza el eje recedente a cualquier ángulo, y se miden las profundidades sobre el en cualquier escala\ fig.54.

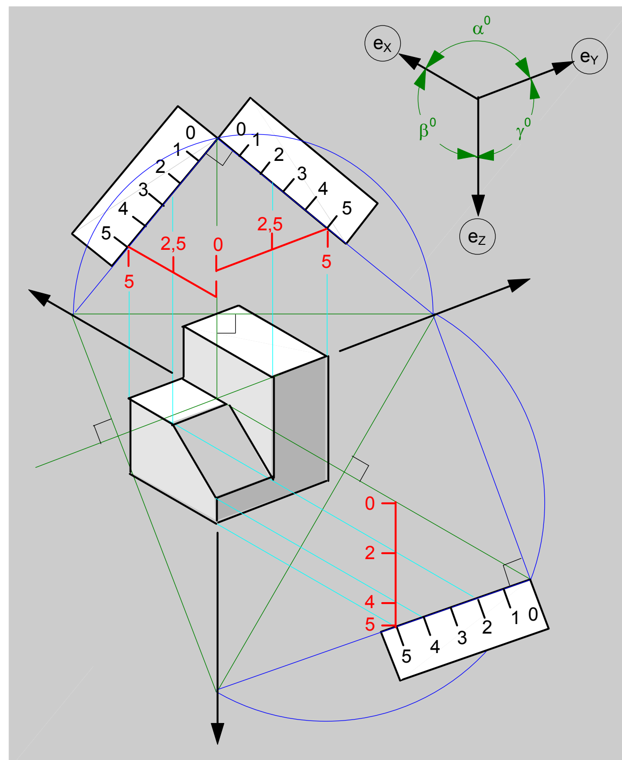


fig.52.\ Proyección trimétrica.

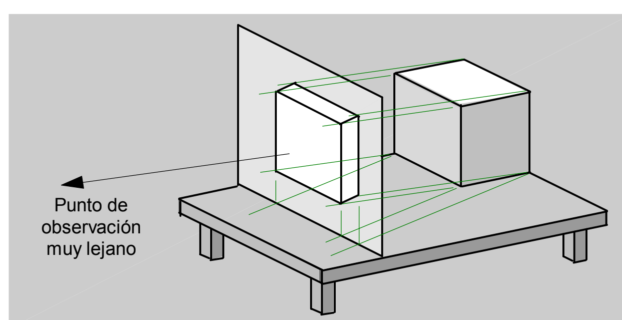


fig.53.\ Proyección oblicua.

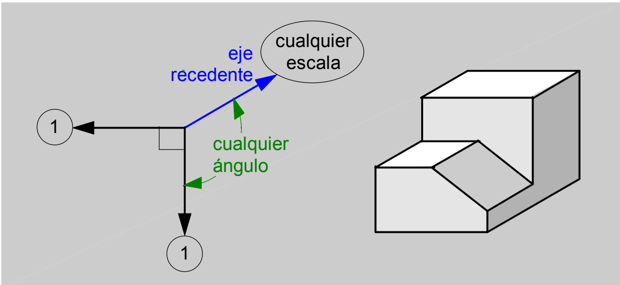


fig.54.\ Proyección oblicua.

Sin embargo, la escala a utilizar para el eje recedente debe elegirse en forma intuitiva, en función del ángulo en que se dibuje, de modo que la representación del objeto muestre una apreciación real de su forma y proporciones. Entre las proyecciones oblicuas mas utilizadas se pueden mencionar:

i) **Proyección caballera**\ Se originó en el dibujo de las fortificaciones medievales.\ fig.55

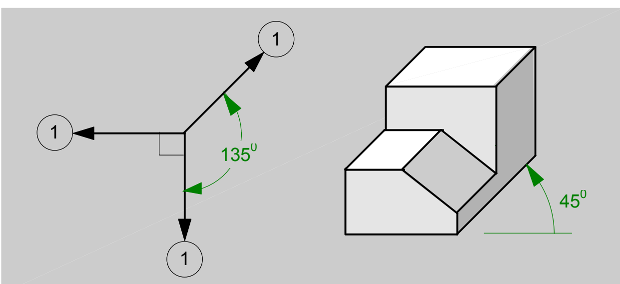


fig.55.\ Proyección caballera.

ii) **Proyección de gabinete**\ Recibe este nombre debido a que se usó grandemente en la industria del mueble.\ fig.56

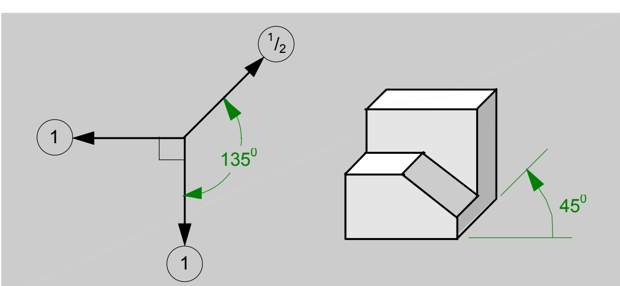


fig.56.\ Proyección de gabinete.

iii) **Proyección oblicua aérea.** Es una proyección oblicua realizada sobre un dibujo en planta de una edificación, urbanismo, etc. con la finalidad de apreciar su forma tridimensional\ fig.57.

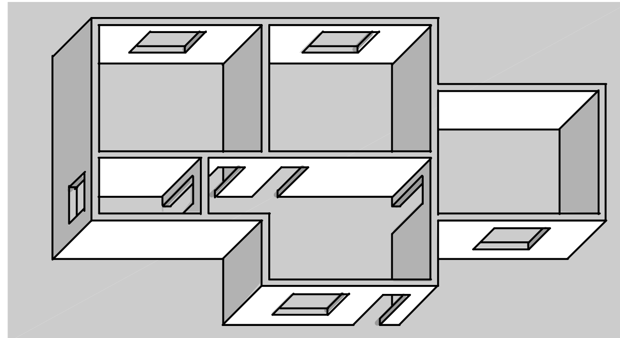


fig.57.\ Proyección oblicua aérea.

b) **Proyección cónica.** Denominada también **perspectiva**. Se obtiene cuando el punto de observación y el objeto se encuentran relativamente cercanos\ fig.58.

Geométricamente, una fotografía es una perspectiva; razón por la cual la proyección cónica sobrepasa en excelencia a los demás sistemas de proyección por ser la que mas se acerca a la vista real obtenida por el observador.

El dibujo en perspectiva es muy utilizado en el diseño arquitectónico, civil, industrial, publicitario, etc.

las perspectivas pueden ser:

1) **Perspectiva de un punto de fuga**. Se obtiene cuando el plano de proyección es paralelo a una de las caras principales del objeto (el plano de proyección es paralelo a dos de los tres ejes principales del objeto)\ fig.59.

2) **Perspectiva de dos puntos de fuga**. Se obtiene cuando el plano de proyección es paralelo a solamente uno de los tres ejes principales del objeto\ fig.60.

3) **Perspectiva de tres puntos de fuga**. Se obtiene cuando ninguno de los tres ejes principales del objeto es paralelo al plano de proyección\ fig.61.

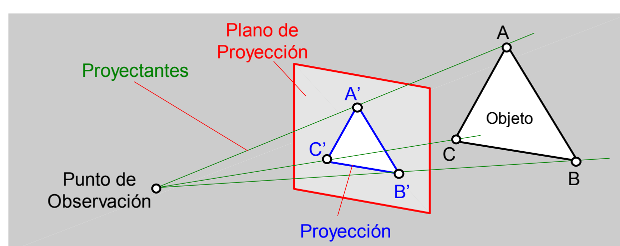


fig.58.\ Proyección cónica.

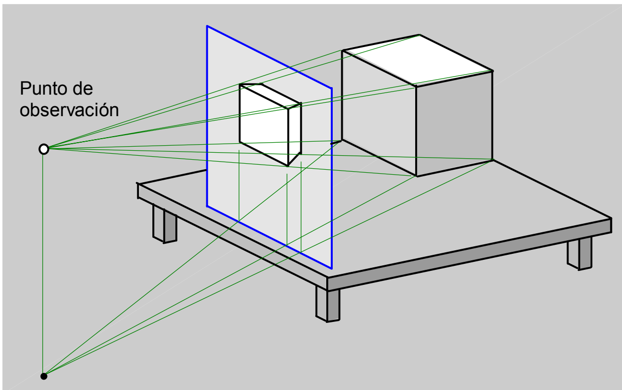


fig.59.\ Perspectiva de un punto fuga.

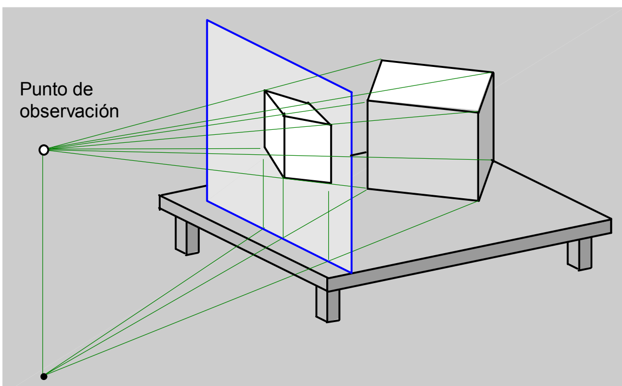


fig.60.\ Perspectiva de dos puntos de fuga.

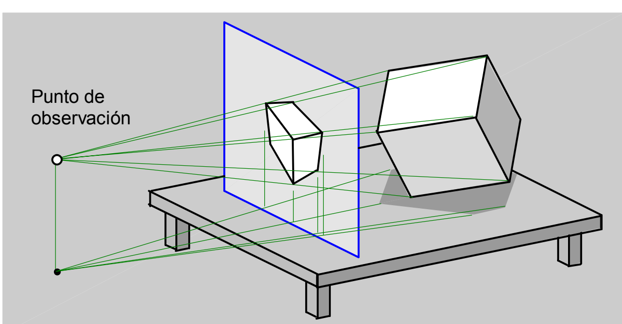


fig.61.\ Perspectiva de tres puntos de fuga.

Las perspectivas de uno, dos, y tres puntos de fuga, pueden dibujarse en forma sencilla a partir de las proyecciones en vistas múltiples, como se muestra en las fig.62; fig.63; y fig.64, respectivamente.

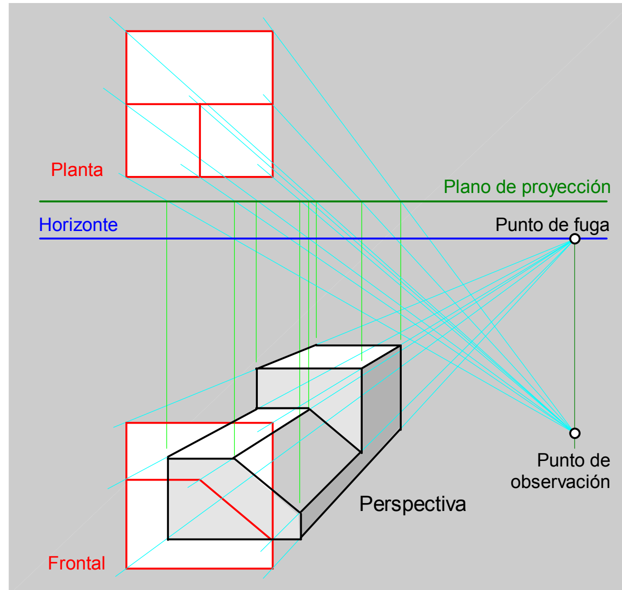


fig.62.\ Dibujo de una perspectiva de un punto de fuga.

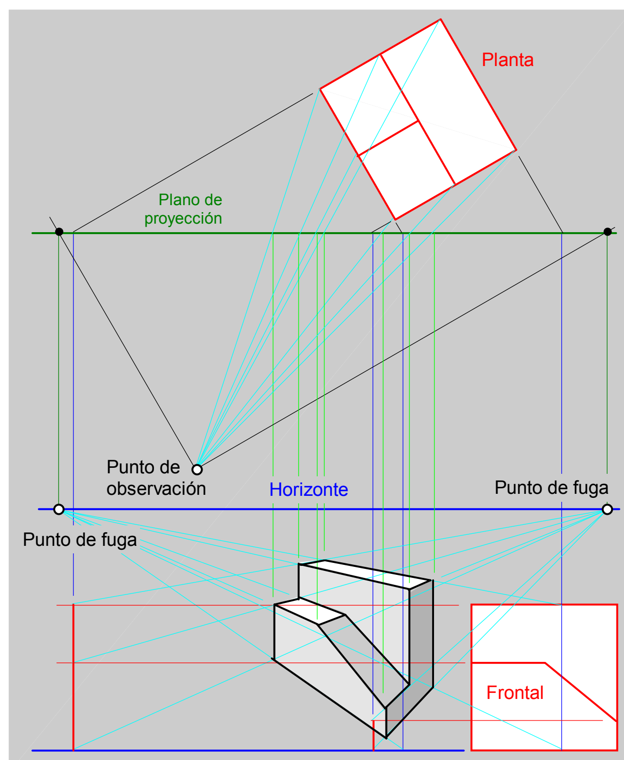


fig.63.\ Dibujo de una perspectiva de dos puntos de fuga.

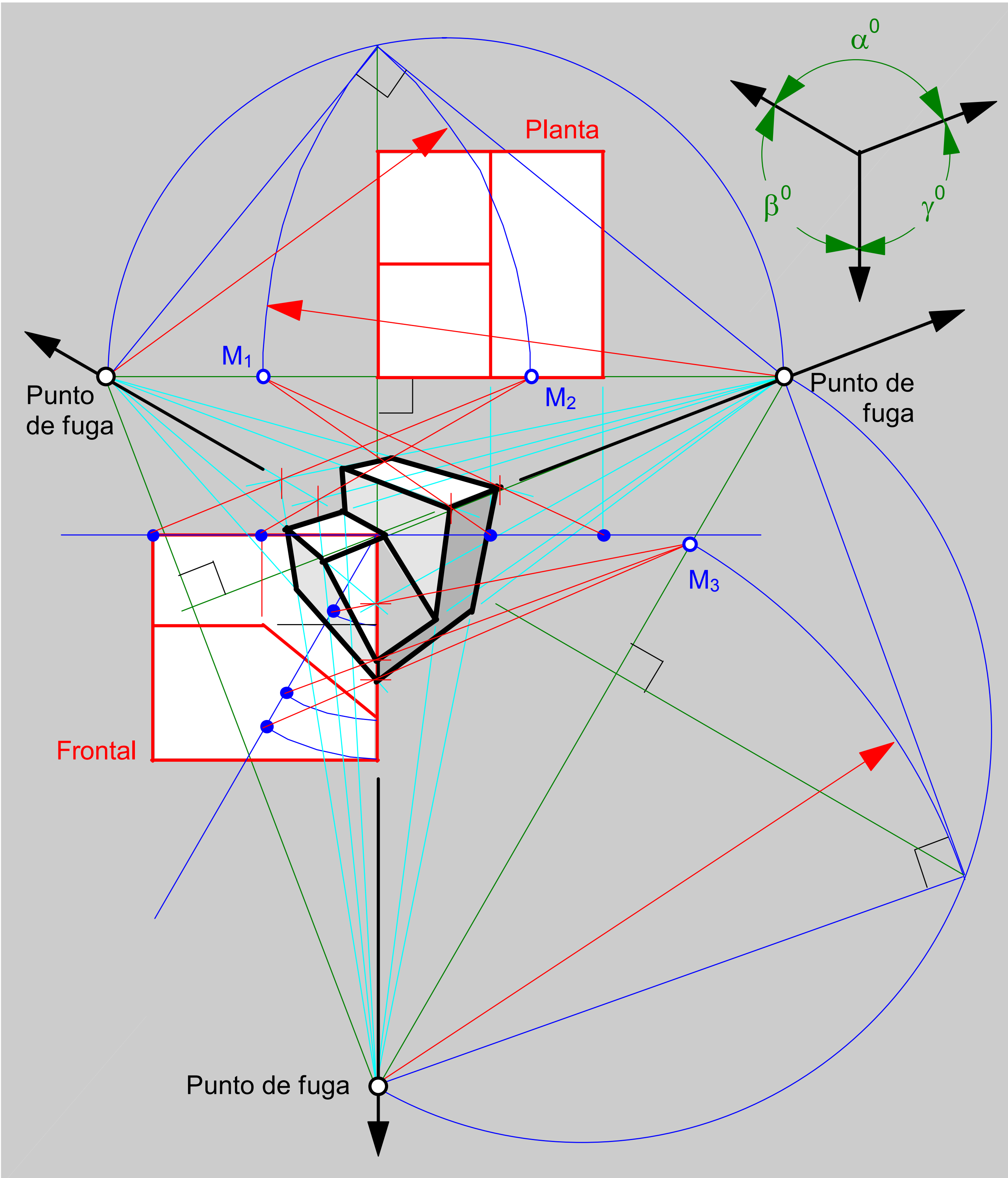


fig.64.\ Dibujo de una perspectiva de tres puntos de fuga.

capítulo 3

PROYECCIÓN DIÉDRICA.

Comienza en este capítulo el estudio del sistema de Doble Proyección Ortogonal ó Proyección Diédrica, el cual es el objetivo de estudio principal de esta obra. Se inicia con una descripción de este sistema de proyección, que se basa definir la proyección ortogonal de los objetos en forma simultánea sobre dos planos de proyección perpendiculares entre sí. De esta forma se obtiene dos proyecciones ortogonales del objeto en estudio, por medio de las cuales, se puede concebir la forma tridimensional del mismo.

Una vez que el estudiante comprenda los fundamentos del sistema de Doble Proyección Ortogonal, será capaz de representar objetos, y podrá resolver cualquier problema relacionado con la forma tridimensional de los mismos, sin necesidad de elaborar complicadas perspectivas o representaciones en otros sistemas de proyección mas laboriosos.

Después de la descripción de este importante sistema de proyección, comenzamos en este capítulo a ejercitarnos en la elaboración de la doble proyección ortogonal del "objeto" mas simple que puede ser considerado "el punto". Para continuar después con el estudio de la proyección diédrica de la recta y el plano.

PROYECCIÓN DE PUNTOS.

DOBLE PROYECCIÓN ORTOGONAL.

También llamada **proyección diédrica**. Es la proyección ortogonal simultánea de un objeto sobre dos planos de proyección perpendiculares entre sí, llamados: **planos principales de proyección**; y en forma particular denominados: **plano vertical de proyección** (PV); y **plano horizontal de proyección** (PH). En la fig.65**a**, se muestra la proyección diédrica de un punto (A). La nomenclatura utilizada representa:

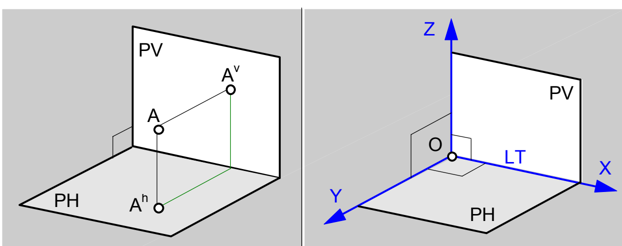
a) PV :Plano vertical de proyección.

b) PH :Plano horizontal de proyección.

c) A :Posición real del punto (A).

d) A^v :Proyección ortogonal del punto (A) sobre el plano vertical de Proyección.

e) A^h :Proyección ortogonal del punto (A) sobre el plano horizontal de proyección.



a) Proyección diédrica del punto (A)

b) El sistema de doble proyección ortogonal

fig.65.\ La doble proyección ortogonal (proyección diédrica).

En la fig.65**b**, se muestra el sistema de proyección diédrica con la siguiente nomenclatura adicional.

a) LT :**Línea de tierra.** Es la intersección entre los planos vertical y horizontal de proyección.

b) O :**Origen.** Punto común a los tres ejes de coordenadas, a partir del cual se miden las coordenadas de los puntos.

c) X :**Eje de coordenadas (X).** Eje sobre el cual se miden las coordenadas (X) de los puntos; coincide con la línea de tierra.

d) Y :**Eje de coordenadas (Y).** Eje sobre el cual se miden las coordenadas (Y) de los puntos.

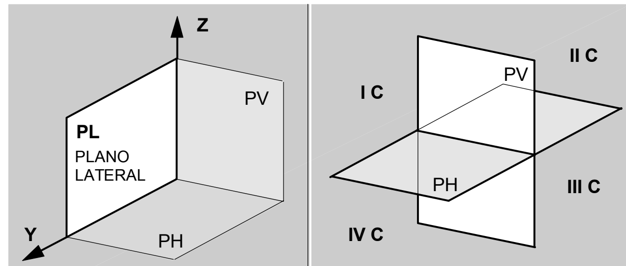
e) Z :**Eje de coordenadas (Z).** Eje sobre el cual se miden las coordenadas (Z) de los puntos.

PLANO LATERAL DE PROYECCIÓN.

Es un plano auxiliar de proyección que esta definido por los ejes de coordenadas (Y) y (Z)\ fig.66**a**. Sobre este plano, cuando sea necesario, se proyectan ortogonalmente los objetos, denominándose estas proyecciones: **proyecciones laterales**.

DIEDROS.

También denominados **cuadrantes**, son las cuatro zonas en que los planos principales de proyección, al considerarse la extensión infinita de ellos, dividen todo el espacio que los rodea\ fig.66**b**.



a) Plano lateral

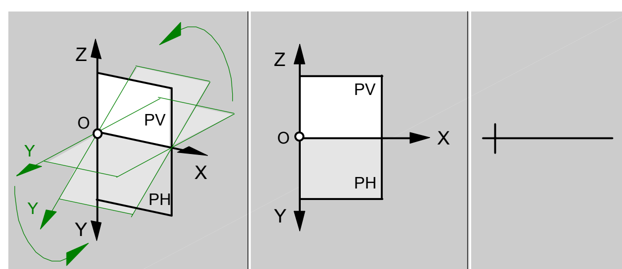
b) Cuadrantes (Diedros)

fig.66.\ Plano lateral / Cuadrantes.

DIBUJO EN PROYECCIÓN DIÉDRICA.

En la fig.65**b** se muestra un esquema en perspectiva del sistema de proyección diédrica; no obstante, la proyección diédrica en sí, no se ejecuta en perspectiva, si no que se facilita su elaboración rotando el plano horizontal de proyección alrededor de la línea de tierra, hasta hacerlo coincidir con el plano vertical de proyección, como lo muestra la fig.67**a**. En la fig.67**b** se muestra el mismo esquema en proyección frontal. Y finalmente, la fig.67**c**, muestra el esquema de trabajo en proyección diédrica; este se obtiene sustituyendo los ejes de coordenadas por una recta horizontal (**línea de tierra**, **ó eje** (X)), en la cual se señala el origen por un pequeño segmento vertical que la corta.

Es muy importante tener presente que en la representación definitiva (fig.67**c**), los ejes de coordenadas y el origen no dejan de existir; si no que han sido substraídos de la representación, y aunque no se vean dibujados ellos existen en las posiciones que indica la fig.67**b**.



a) Giro del plano horizontal de proyección

b) Representación frontal después del giro del PH

c) Representación definitiva utilizada

fig.67.\ Dibujo en proyección diédrica.

COORDENADAS DE UN PUNTO.

Son las distancias, expresadas en milímetros, que al medirse sobre los ejes de coordenadas, a partir del origen, permiten definir con exactitud la ubicación de un punto en el espacio que lo rodea (fig.68). En proyección diédrica, las coordenadas se denominan:

X **:** Distancia al plano lateral.

Y : Vuelo ó alejamiento.

Z : Cota ó altura.

Las coordenadas de un punto se expresan siempre en orden y separadas por **punto y coma** (;), y el nombre del punto es siempre una letra mayúscula ó un número. Por ejemplo, la notación P(08; 16; 10), identifica a un punto (P) con las siguientes coordenadas:

P_X : Distancia del punto (P) al plano lateral ... : 08 mms.

P_Y : Vuelo del punto (P) .... : 16 mms.

P_Z : Cota del punto (P)...................................... : 10 mms.

Las coordenadas de un punto, también representan las distancias desde el punto a los planos principales de proyección y al plano lateral. El punto P(08 ; 16; 10), ya mencionado se encuentra a distancias de:

08 mms. : Del plano lateral.

16 mms. : Del plano vertical de proyección.

10 mms. : Del plano horizontal de proyección.

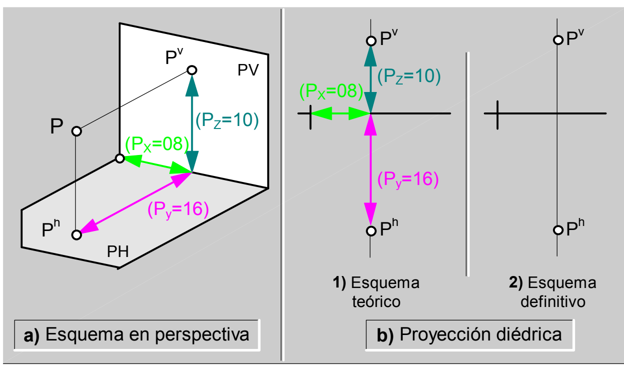


fig.68.\ Representación diédrica del punto P(08 ; 16 ; 10).

En la fig.68**a** se muestra un esquema en perspectiva de la proyección diédrica de este punto (P), y en la fig.68**b1**, la proyección diédrica propiamente dicha del mismo; las cifras anotadas entre paréntesis indican las medidas reales que deben tener esos respectivos segmentos, estos valores no se escriben en la lámina, de forma que la representación definitiva es la mostrada en la fig.68**b2**.

POSICIONES PARTICULARES DE UN PUNTO.

Las coordenadas de un punto, pueden tener valor: positivo, cero, ó negativo, dependiendo la posición que este ocupe con respecto al origen; aunque generalmente se evita asignar valores negativos a la coordenada (X).

Con respecto a un sistema de proyección diédrica, las posiciones que puede ocupar un punto en el espacio son:

a) Punto en un cuadrante\ fig.69:

- **1)** Primer cuadrante: .... $A(+A_X ; +A_Y ; +A_Z)$.
- **2)** Segundo cuadrante: .... $B(+B_X ; -B_Y ; +B_Z)$.
- **3)** Tercer cuadrante: .... $C(+C_X ; -C_Y ; -C_Z)$.
- **4)** Cuarto cuadrante: .... $D(+D_X ; +D_Y ; -D_Z)$.

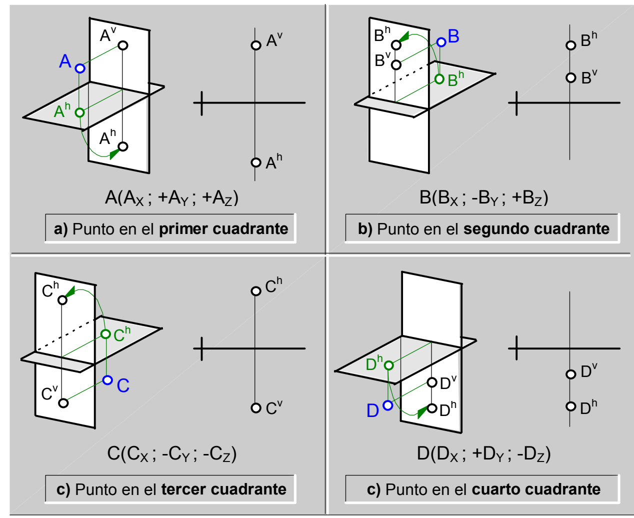


fig.69.\ Ubicación de un punto en un cuadrante.

b) Punto en un plano principal de proyección\ fig.70:

- **1)** Plano vertical de proyección: .... $E(+E_X ; 00 ; +E_Z)$.
  $F(+F_X ; 00 ; -F_Z)$.
- **2)** Plano horizontal de proyección: ..... $G(+G_X ; +G_Y ; 00)$.
  $H(+H_X ; -H_Y ; 00)$.

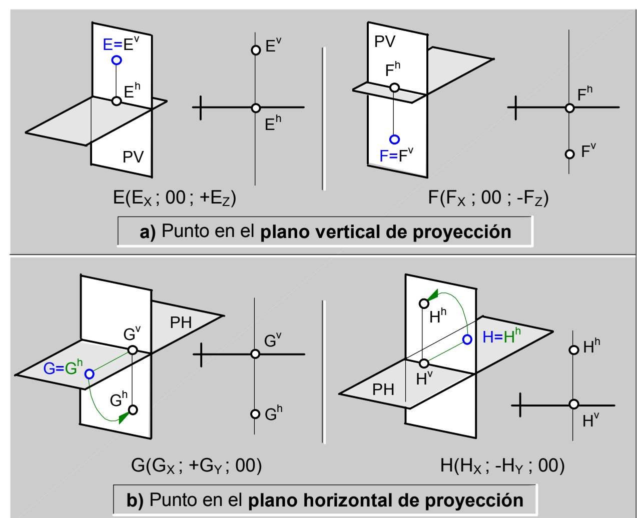


fig.70.\ Ubicación de un punto en un plano principal de proyección.

c) Punto en el plano lateral\ fig.71: Puede además estar en:

- **1)** PL y primer cuadrante: .... $I(00 ; +I_Y ; +I_Z)$.
- **2)** PL y segundo cuadrante: .... $J(00 ; -J_Y ; +J_Z)$.
- **3)** PL y tercer cuadrante: .... $K(00 ; -K_Y ; -K_Z)$.
- **4)** PL y cuarto cuadrante: .... $L(00 ; +L_Y ; -L_Z)$.

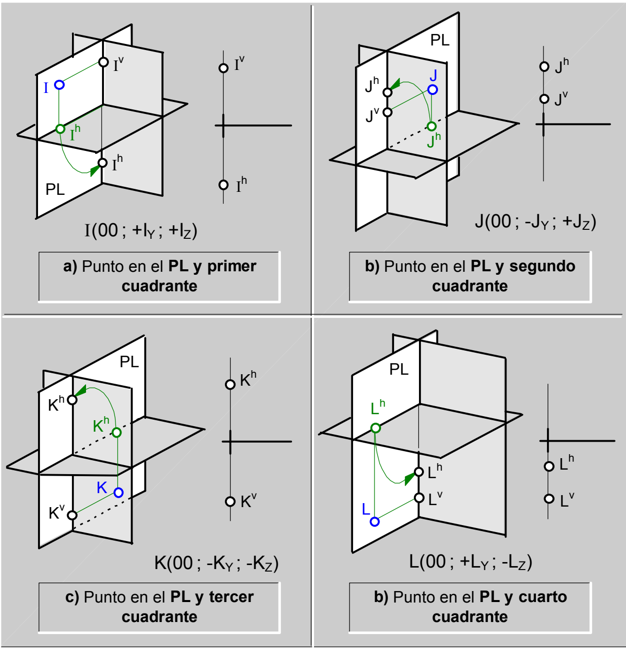


fig.71.\ Ubicación de un punto en el plano lateral.

d) Punto en el origen\ fig.72a: ....M(00 ; 00 ; 00).

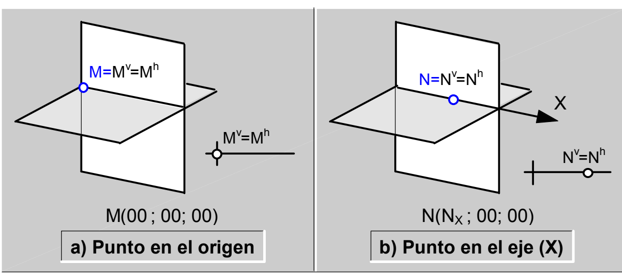


fig.72.\ Punto en el origen; punto en el eje (X) (línea de tierra).

e) Punto en un eje de coordenadas:

1) Eje (X): fig.72b.................................N(+N$_X$; 00 ; 00).

2) Eje (Y): fig.73...................................P(00 ; +P$_Y$; 00).

Q(00 ; -Q$_Y$; 00).

3) Eje (Z): fig.74...................................R(00 ; 00 ; +R$_Z$).

S(00 ; 00 ; -S$_Z$).

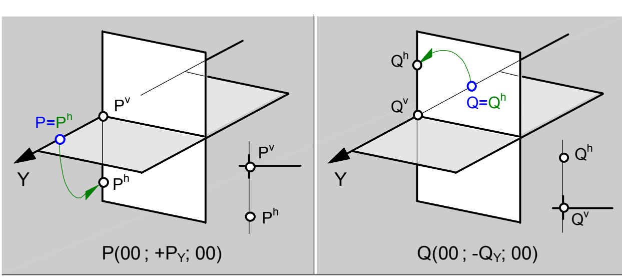


fig.73.\ Punto en el eje (Y).

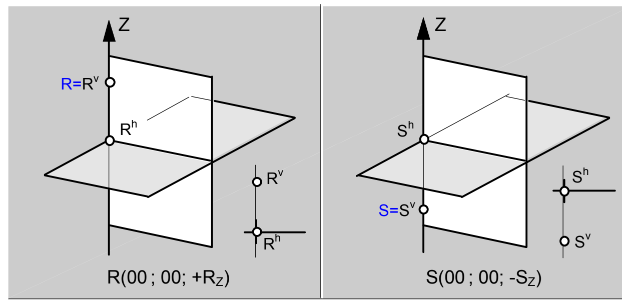


fig.74.\ Punto en el eje (Z).

PROYECCIÓN LATERAL DE UN PUNTO.

Se llama así a la proyección ortogonal de un punto sobre el plano lateral\ fig.75.

En este sistema de proyección, el punto de observación se encuentra a una distancia infinita del plano lateral, en dirección del eje (X), el cual se proyecta en su totalidad en el punto de origen (O).

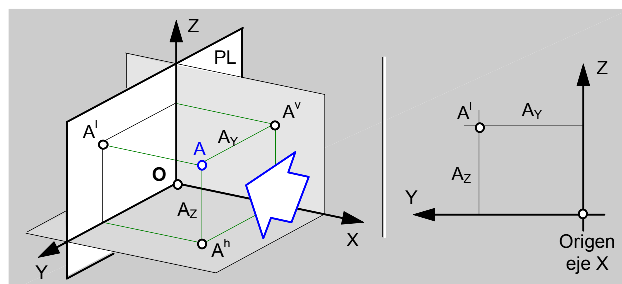


fig.75.\ Proyección lateral.

El punto de observación, puede también ubicarse en sentido opuesto al eje (X), resultando en esta caso, la proyección lateral, como se muestra en la fig.76.

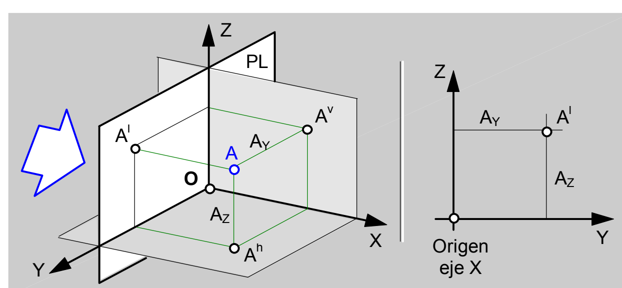


fig.76.\ Proyección lateral.

En el sistema de proyección lateral, los planos vertical (PV) y horizontal (PH) de proyección, se encuentran totalmente proyectados sobre los ejes (Z) e (Y) respectivamente, los cuales se observan cortándose a 90^0, como puede observarse en las fig.75 y fig.76.

REPRESENTACIÓN DE PUNTOS EN PROYECCIÓN LATERAL.

En la fig.77**a**, se representan las proyecciones laterales de los puntos (A,B,C y D), ubicados en los cuadrantes (I; II; III y IV), respectivamente, y en la fig.77**b** se representan las proyecciones laterales de los mismos puntos, cambiando el sentido del eje (Y).

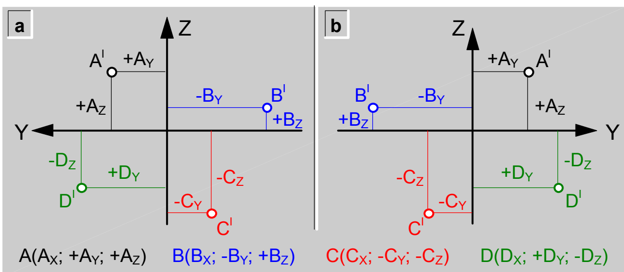


fig.77.\ Proyección lateral\ ejemplos.

OBTENCIÓN DE LA PROYECCIÓN LATERAL DE UN PUNTO, A PARTIR DE SU PROYECCIÓN DIÉDRICA.

Generalmente la proyección lateral de un punto se obtiene a partir de su doble proyección ortogonal. En la fig.78, se muestra, a manera de ejemplo, el procedimiento a seguir para determinar la proyección lateral (A^l) de un punto (A), a partir de sus proyecciones vertical (A^v) y horizontal (A^h) (fig.78**a**) siguiendo para ello el procedimiento siguiente:

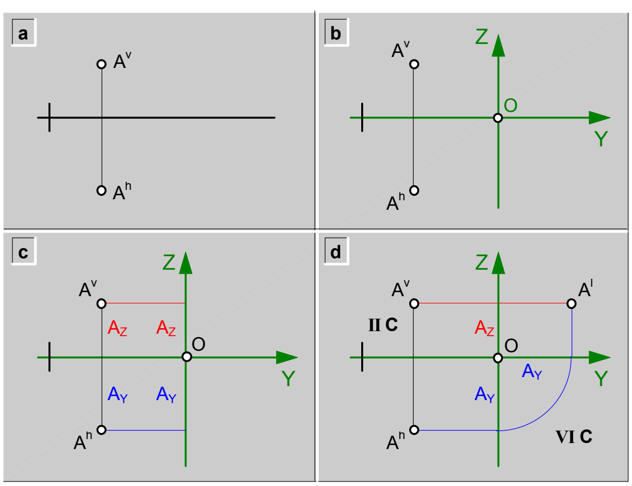


fig.78.\ Determinación de la proyección lateral de un punto (A), a partir de su doble proyección ortogonal.

a) Se definen los ejes de proyección\ fig.78**b**:

EJE (Z): Perpendicular a la línea de tierra, y por cualquier punto (O) de ella.

EJE (Y): Coincide con la línea de tierra, y se dirige hacia la derecha ó izquierda (en el ejemplo hacia la derecha).

b) Se trasladan la cota (A_Z) y el vuelo (A_Y) del punto (A) hacia el eje (Z)\ fig.78**c**.

c) Se rota, mediante un arco con centro en el punto (O) y recorriendo un cuadrante par (en el ejemplo el IV C), el vuelo (A_Y) del punto (A), desde el eje (Z) hasta el eje (Y) (fig.78**d**); y se define la proyección lateral (A^l) del punto (A) por medio de rectas paralelas a los ejes (Z e Y).

<u>**Ejemplo1**: Definir las proyecciones laterales de los puntos (A;B;C; y D)</u>\ fig.79**a**.

Solución:

En la fig.79**b**, se muestra como obtener las proyecciones laterales de estos puntos; ubicando el eje (Z) a igual distancia al plano lateral que el punto (B), y dirigiendo el eje (Y) hacia la derecha.

Puede observarse en la fig.79**b**, que los arcos han sído trazados recorriendo sólo los cuadrantes pares (II C ó IV C). La razón de esto es mantener el signo del vuelo de los respectivos puntos en ambos sistemas, ubicando sus proyecciones laterales en el cuadrante correcto.

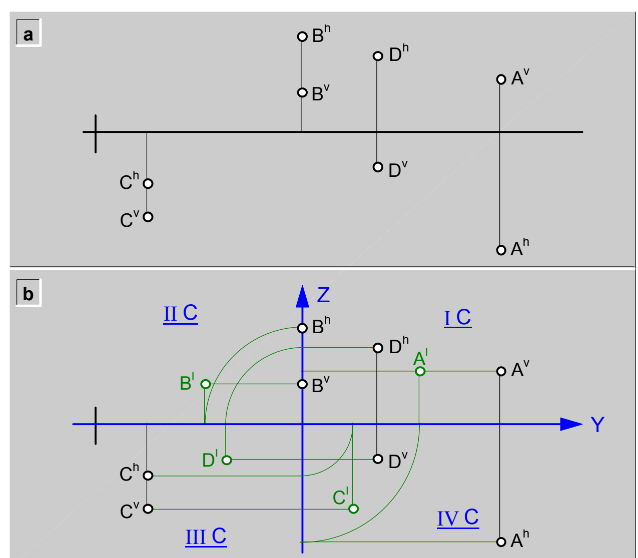


fig.79.\ Obtención de las proyecciones laterales a partir de la doble proyección ortogonal\ ejemplo.

<u>**Ejemplo2;** Definir la proyección lateral del triángulo de vértices</u> (A;B;C)\ fig.80**a**.

Solución: \ fig.80**b**.

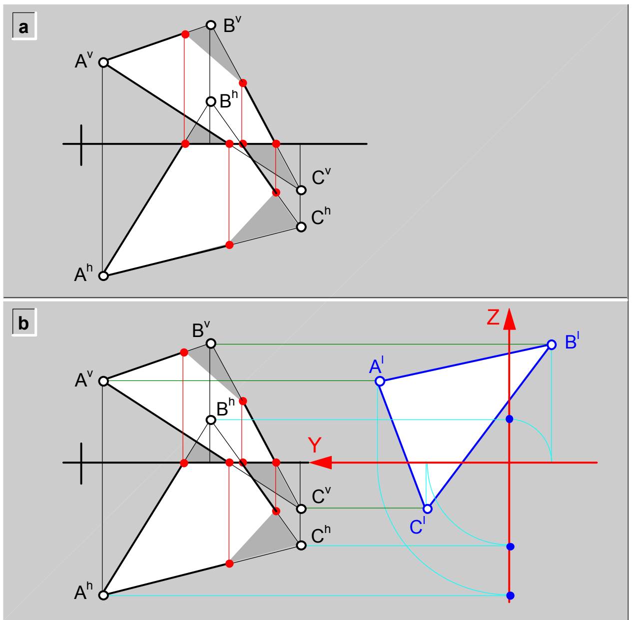


fig.80.\ Proyección lateral de un triángulo (A;B;C).

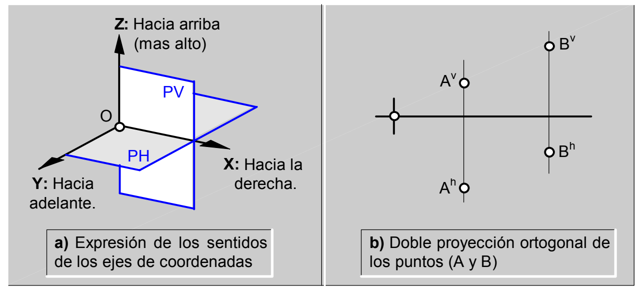


fig.81.\ Posición relativa entre dos puntos.

POSICIÓN RELATIVA ENTRE DOS PUNTOS.

En la fig.81**a**, se señalan los nombres dados a los sentidos de avance de cada uno de los ejes de coordenadas. En base a estos sentidos, se puede expresar, en forma relativa, la posición de un punto con respecto a otro.

__Ejemplo:__ __Expresar la posición relativa entre los puntos (A y B)__\ fig.81**b**.

Solución.

La posición relativa entre los puntos (A y B) puede expresarse, entre otras, de las siguientes maneras:

a) El punto (A) se encuentra a la **izquierda** (tiene menos distancia al plano lateral); **por debajo** (tiene menos cota); y **por delante** (tiene mayor vuelo) del punto (B).

b) El punto (B) se encuentra a la **derecha** (tiene mas distancia al plano lateral); **mas alto** (tiene mayor cota); y **por detrás** (tiene menor vuelo) del punto (A).

En resumen: Comparando las distancias al plano lateral de dos puntos, puede decirse cual de ellos está a la izquierda ó a la derecha del otro; comparando los vuelos de dos puntos, se define cual de ellos está por delante ó por detrás del otro; y, comparando las cotas de dos puntos, puede determinarse cual de ellos está por encima o por debajo del otro.

__Ejemplo:__ __Definir las proyecciones de los puntos:__ (La solución se presenta en la fig.82)

A (45;-20; 05)

B (?; 25; ?) A 10 mms del plano lateral; y 5 mms por encima de (A).

C (?; ?; ?) 15 mms a la derecha de (B); 30 mms delante de (A); y 15 mms por encima del plano horizontal de proyección.

D (60; ?; ?) En el IV cuadrante; a 15 mms del plano horizontal de proyección; y a 20 mms del plano vertical de proyección.

E (?; ?; ?) Contenido en el plano vertical de proyección; 25 mms a la izquierda de (D); y 15 mms debajo del plano horizontal de proyección.

F (?; ?; ?) En el eje (Z); y 35 mms por debajo de (C).

G (65; ?; ?) 05 mms delante de (A); y 30 mms mas alto que (D).

H (?; 10; 20) En el plano lateral.

I (?; ?; ?) En la línea de tierra; a 15 mms del origen.

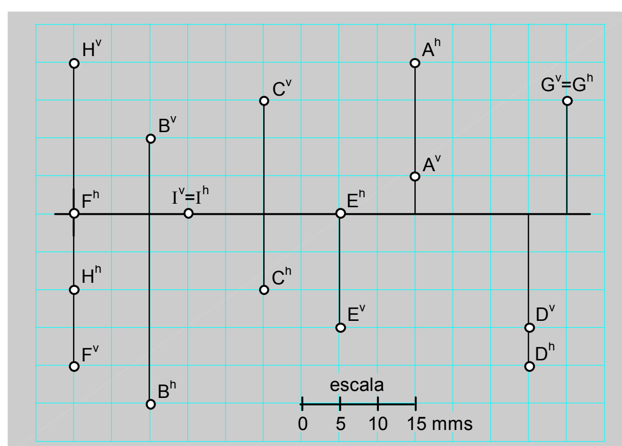


fig.82.\ Proyección de puntos\ ejemplo.

PROYECCIÓN DE RECTAS.

Las rectas se designan con letras minúsculas (a; b; c;...).

Una recta (r) puede ser definida por medio de dos puntos (A y B)\ fig.83.

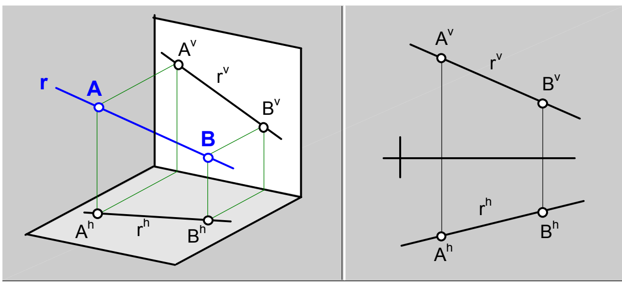


fig.83.\ Proyección diédrica de una recta.

PUNTO CONTENIDO EN UNA RECTA.

Si un punto (P) esta contenido en una recta (r), entonces las proyecciones vertical (P^v) y horizontal (P^h) del punto están contenidas en las proyecciones vertical (r^v) y horizontal (r^h) de la recta, respectivamente\ fig.84. De esta forma, es posible determinar las proyecciones de un punto conocida una sola de sus tres coordenadas, si se establece que esta contenido en una recta dada\ fig.85.

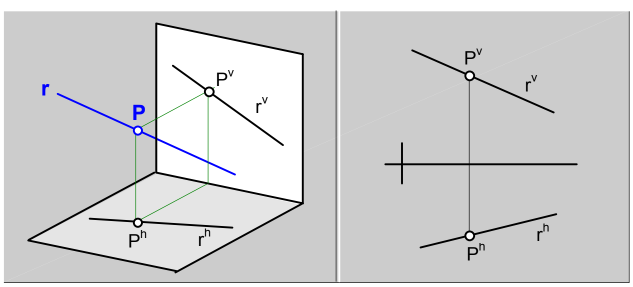


fig.84.\ Punto contenido en una recta.

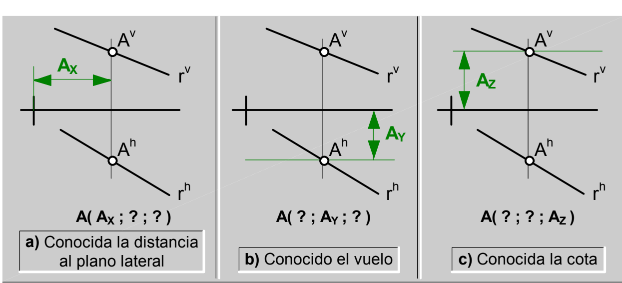


fig.85.\ Ubicación de un punto (A) en una recta (r).

TRAZAS DE UNA RECTA.

Son los puntos donde la recta se intercepta con los planos principales de proyección; se denominan\ fig.86:

a) **Traza Vertical.** Punto donde la recta se intercepta con el plano vertical de proyección. Generalmente se designa con la letra (V).

b) **Traza Horizontal.** Punto donde la recta se intercepta con el plano horizontal de proyección. Generalmente se designa con la letra (H).

DETERMINACIÓN DE LAS TRAZAS DE UNA RECTA.

Las trazas de una recta se determinan, en doble proyección ortogonal, interceptando sus proyecciones con la línea de tierra\ fig.86b.

VISIBILIDAD.

Solamente pueden ser visibles al observador los elementos geométricos que se encuentren en el primer cuadrante, debido a que los planos principales de proyección tapan a los objetos contenidos en los otros tres cuadrantes, como puede observarse en la fig.86.

Las partes invisibles se representan con líneas de contorno invisible, como lo muestra la fig.86b; aunque también es frecuente, en el desarrollo de problemas en proyección diédrica, representarlas con líneas de procedimiento)\ fig.88.

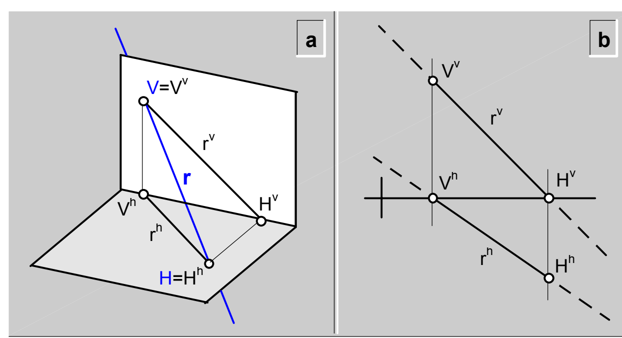


fig.86.\ Trazas de una recta.

CUADRANTES QUE ATRAVIESA UNA RECTA.

Considerando la extensión infinita de una recta, ella puede:

a) **Mantenerse en un cuadrante.** Si es paralela a la línea de tierra; en este caso la recta no posee trazas\ fig.87a.

b) **Atravesar dos cuadrantes.** Si es paralela a solo uno de los planos principales de proyección, o si se corta con la línea de tierra; en este caso la recta tiene una sola traza\ fig.87c.

c) **Atravesar tres cuadrantes.** Si no cumple con ninguna de las condiciones anteriores; en este caso la recta tiene dos trazas\ fig.87b.

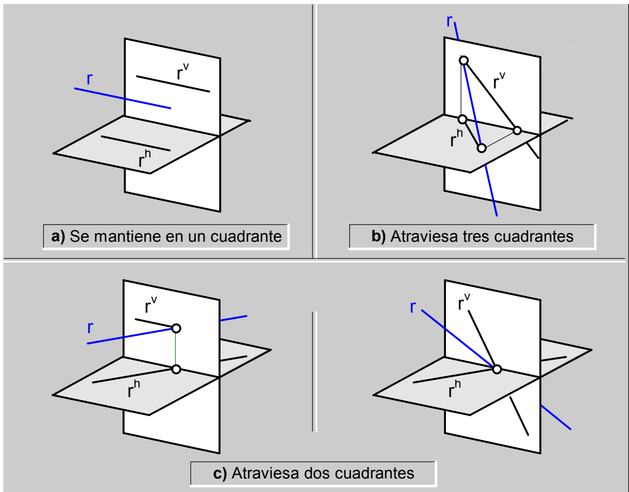


fig.87.\ Recta que atraviesa 1, 2 ó 3 cuadrantes.

DETERMINACIÓN DE LOS CUADRANTES QUE ATRAVIESA UNA RECTA.

Las trazas de una recta son también los puntos donde la recta cambia de cuadrante, por lo tanto, para determinar que cuadrantes atraviesa una recta (r) (fig.88**a**), puede seguirse el siguiente procedimiento:

a) Se definen las trazas vertical (V) y horizontal (H) de la recta (r). Y se acotan las dos semirrectas y el segmento en que la misma queda dividida\ fig.88**b**.

b) Se ubican tres puntos (1; 2 y 3) arbitrarios, cada uno de ellos situado en una de estas tres partes de la recta\ fig.88**c**.

c) Se determina en que cuadrante se encuentra ubicado cada uno de los puntos anteriores, los cuales se corresponden al cuadrante en que se encuentra la parte de la recta que lo contiene\ fig.88**d**.

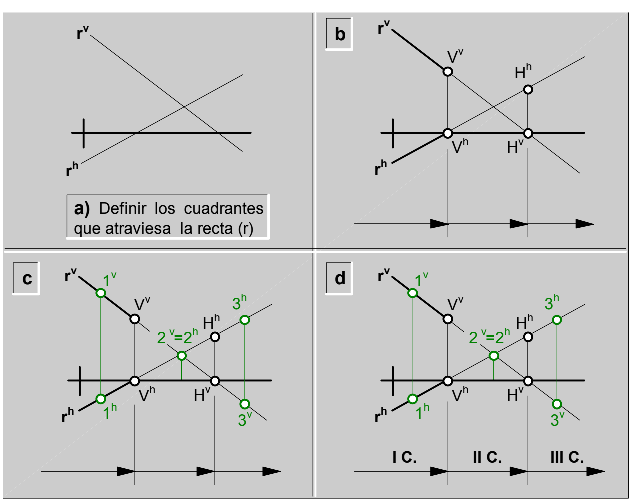


fig.88.\ Determinación de los cuadrantes que atraviesa una recta.

DIFERENCIA DE COTA ENTRE DOS PUNTOS / TRIÁNGULO DE REBATIMIENTO HORIZONTAL.

La diferencia de cota ($\Delta_Z^{A\text{-}B}$) entre dos puntos (A y B) es, matemáticamente, el valor absoluto de la resta de las cotas de ambos puntos ($\Delta_Z^{A\text{-}B} = |A_Z\text{-}B_Z|$). Gráficamente, se determina trazando, por uno de los puntos (A), una recta (a) perpendicular al plano horizontal de proyección, y por el otro (B), una recta (b) paralela al mismo plano, que se corte con la primera. Estas dos rectas, son en consecuencia perpendiculares y junto con la proyección real de la recta (r) forman un triángulo rectángulo denominado: **Triángulo de rebatimiento horizontal**\ fig.89.

El triángulo de rebatimiento horizontal de un segmento (A-B) generalmente se dibuja, en doble proyección ortogonal, sobre la proyección horizontal (A^h-B^h)del mismo.\ fig.91**a**.

La nomenclatura utilizada en las fig.89, fig.90, y fig.91. representa:

- **$\Delta_Z^{A\text{-}B}$** : Diferencia de cota entre los puntos (A y B).
- **$\Delta_Y^{A\text{-}B}$** : Diferencia de vuelo entre los puntos (A y B).
- **α^0** : Ángulo que forma el segmento (A-B) (la recta (r)) con el plano horizontal de proyección.
- **β^0** : Ángulo que forma el segmento (A-B) (la recta (r)) con el plano vertical de proyección.
- **A^r** : Proyección rebatida del punto (A).
- **B^r** : Proyección rebatida del punto (B).
- **$d_{A\text{-}B}$** : Longitud real (**verdadero tamaño**) del segmento (A-B) (distancia entre los puntos (A y B).

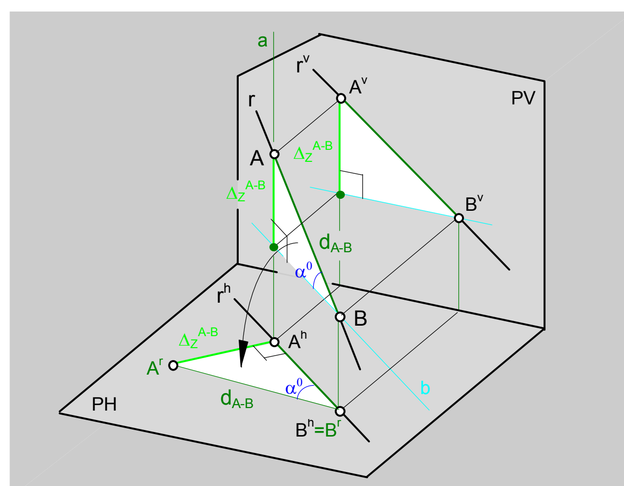


fig.89.\ Triángulo de rebatimiento horizontal.

DIFERENCIA DE VUELO ENTRE DOS PUNTOS / TRIÁNGULO DE REBATIMIENTO VERTICAL.

La diferencia de vuelo ($\Delta_Y^{A\text{-}B}$) entre dos puntos (A y B) es, matemáticamente, el valor absoluto de la resta de los vuelos de ambos puntos ($\Delta_Y^{A\text{-}B} = |A_Y\text{-}B_Y|$). Gráficamente, se determina trazando, por uno de los puntos (B) una recta (b) perpendicular al plano vertical de proyección, y por el otro (A), una recta (a) paralela al mismo plano, que se corte con la primera. Estas dos rectas, son en consecuencia perpendiculares y junto con la proyección real de la recta (r) forman un triángulo rectángulo denominado: **Triángulo de rebatimiento vertical.**\ fig.90

El triángulo de rebatimiento vertical de un segmento (A-B) generalmente se dibuja, en doble proyección ortogonal, sobre la proyección vertical (A^v-B^v) del mismo\ fig.91**b**.

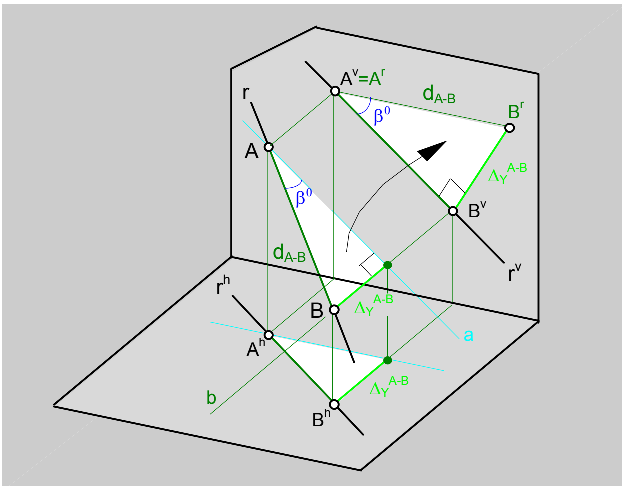


fig.90.\ Triángulo de rebatimiento vertical.

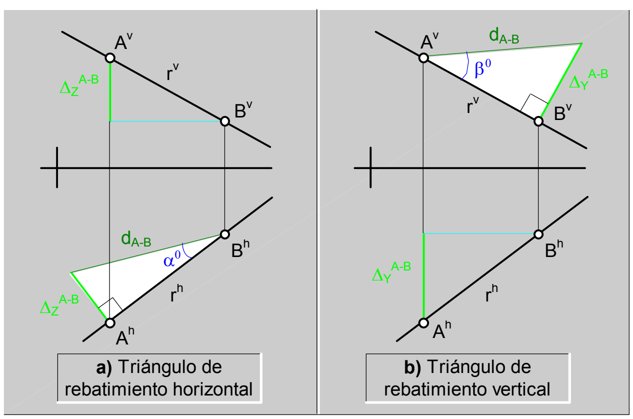


fig.91.\ Dibujo de los triángulos de rebatimiento.

Por medio del dibujo de los triángulos de rebatimiento de un segmento (A-B), puede determinarse el verdadero tamaño (d_{A-B}) del mismo; así como también los ángulos (α^o y β^0) que forma con los planos horizontal y vertical de proyección respectivamente, como puede observarse en las fig.89 a fig.92.

ARCOCAPAZ.

Se denomina arcocapaz a la construcción geométrica de los triángulos de rebatimiento de un segmento (A-B), unidos por sus hipotenusas, y circunscritos en una circunferencia; cuyo diámetro es igual al verdadero tamaño (d_{A-B}) del mismo.

En la fig.92**a**, se muestra el dibujo de los triángulos de rebatimiento del segmento (A-B) y en fig.92**b** la construcción del arcocapaz del mismo segmento.

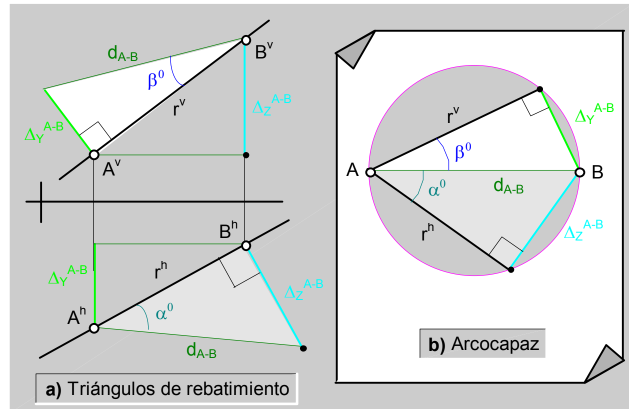


fig.92.\ Arcocapaz.

MEDICIÓN DE DISTANCIAS EN RECTAS.

Como puede observarse en las fig.89 y fig.90, la longitud real (d_{A-B}) de un segmento (A-B) es deformada cuando este es proyectado ortogonalmente. Por lo tanto, en doble proyección ortogonal la longitud real (d_{A-B}) de un segmento (A-B), debe medirse en la hipotenusa de uno de sus triángulos de rebatimiento (fig.91**a** ó fig.91**b**).

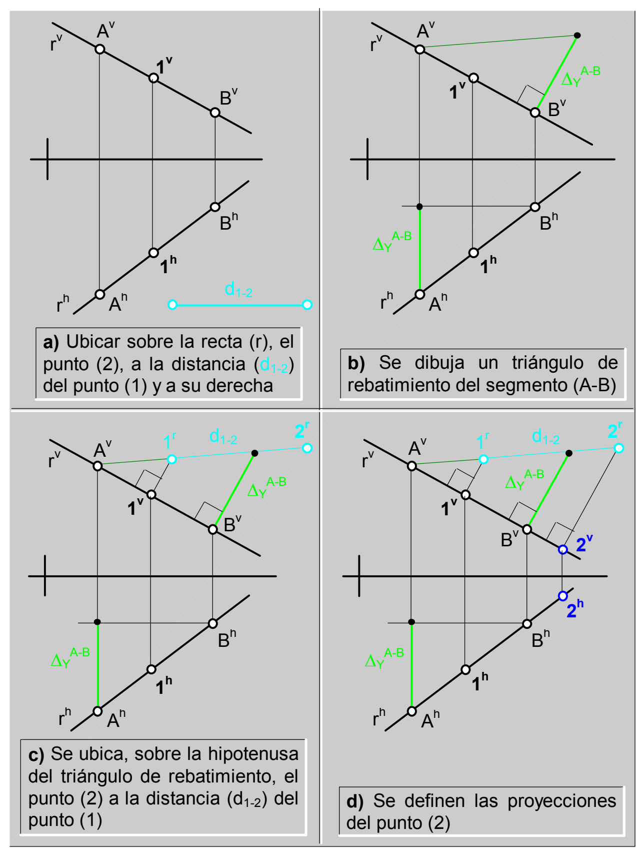


fig.93.\ Medición de distancias en rectas.

De igual forma, para ubicar a un punto (2) a una distancia ($d_{1\text{-}2}$) determinada de otro punto (1) dado, estando ambos puntos contenidos en una misma recta; debe también dibujarse un triángulo de rebatimiento de la recta como se indica en la fig.93.

RECTAS EN POSICIONES PARTICULARES.

Si una recta es paralela a uno de los planos principales de proyección, se proyecta sobre el en verdadero tamaño, y por lo tanto no es necesario dibujar los triángulos de rebatimiento para medir distancias sobre ella, o determinar los ángulos que forma con los planos principales de proyección. Por lo tanto el conocimiento de este tipo de rectas permite resolver ciertos problemas con mayor rapidez. A continuación se describen estas posiciones particulares:

a) **Recta horizontal.** Es una recta paralela al plano horizontal de proyección; por lo tanto, se proyecta sobre este plano en verdadero tamaño; su proyección vertical es paralela a la línea de tierra, por que todos sus puntos tienen igual cota (Z=cte.), y por lo tanto forma un ángulo de cero grados con el plano horizontal de proyección ($\alpha^0=0^0$)\ fig.94.

1) **Recta contenida en el plano horizontal de proyección.** Es un caso particular del anterior. Su proyección vertical coincide con la línea de tierra, por que todos sus puntos tienen cota igual a cero (Z=0)\ fig.95.

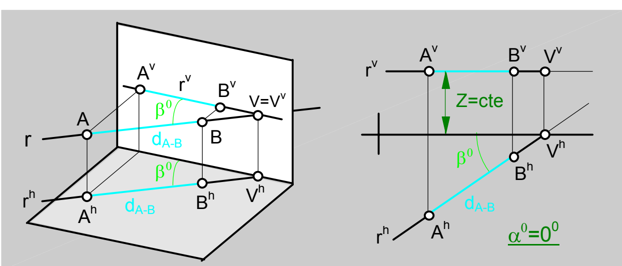


fig.94.\ Recta horizontal.

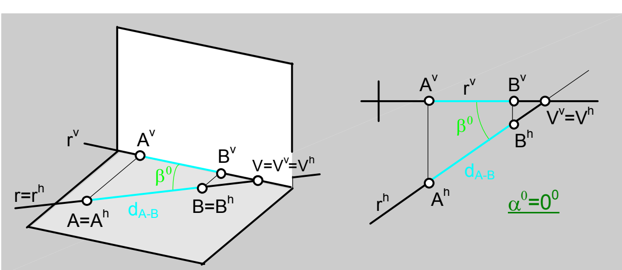


fig.95.\ Recta contenida en el plano horizontal de proyección.

b) **Recta frontal.** Es una recta paralela al plano vertical de proyección; por lo tanto, se proyecta sobre este plano en verdadero tamaño; su proyección horizontal es paralela a la línea de tierra, por que todos sus puntos tienen igual vuelo (Y=cte.), y por lo tanto forma un ángulo de cero grados con el plano vertical de proyección ($\beta^o=0^0$)\ fig.96.

1) **Recta contenida en el plano vertical de proyección.** Es un caso particular del anterior. Su proyección horizontal coincide con la línea de tierra, por que todos sus puntos tienen vuelo igual a cero (Y=0)\ fig.97.

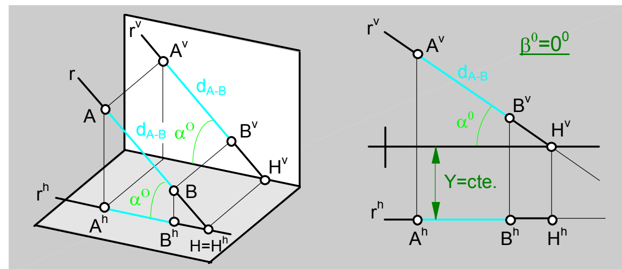


fig.96.\ Recta frontal.

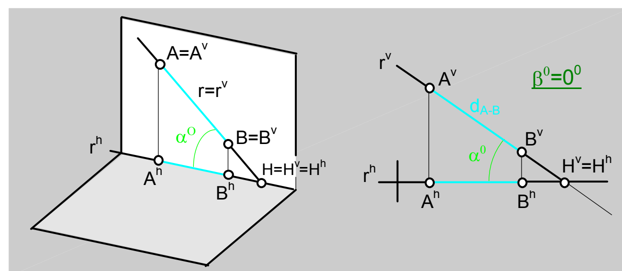


fig.97.\ Recta contenida en el plano vertical de proyección.

c) **Recta paralela a la línea de tierra.** Es una recta paralela simultáneamente a los planos vertical y horizontal de proyección; por lo tanto, es una recta horizontal y frontal, y en consecuencia tiene las propiedades de ambas; es decir, su cota es constante (Z=cte) y su vuelo también (Y=cte). Sus proyecciones horizontal y vertical son paralelas a línea de tierra; están en verdadero tamaño; y forman ángulos de cero grados con los planos vertical y horizontal de proyección ($\alpha^0=\beta^0=0^0$) \ fig.98.

1) **Recta contenida en la línea de tierra.** Es un caso particular del anterior. Sus proyecciones están contenidas en línea de tierra\ fig.99.

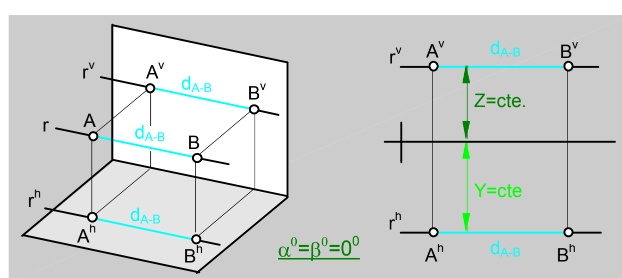


fig.98.\ Recta paralela a la línea de tierra.

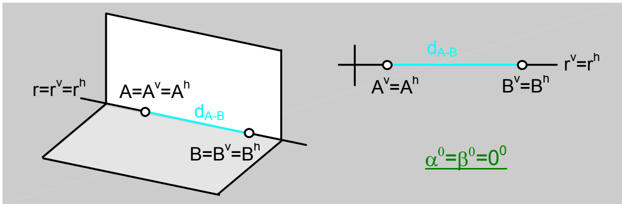


fig.99.\ Recta contenida en la línea de tierra.

d) **Recta vertical.** Es una recta perpendicular al plano horizontal de proyección; por lo tanto, su proyección horizontal es un punto, y su proyección vertical se observa en verdadero tamaño y perpendicular a línea de tierra; forma ángulos de noventa grados con el plano horizontal de proyección (α^0=90^0) y cero grados con el plano vertical de proyección (β^0=0^0)\ fig.100.

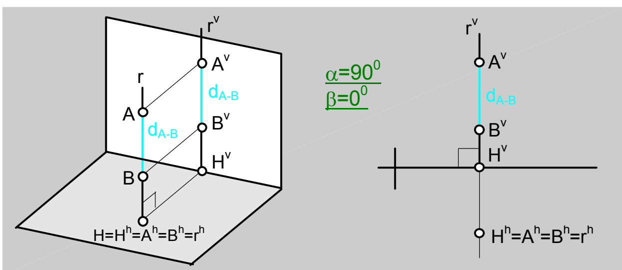


fig.100.\ Recta vertical.

e) **Recta de punta.** Es una recta perpendicular al plano vertical de proyección; por lo tanto, su proyección vertical es un punto, y su proyección horizontal se observa en verdadero tamaño y perpendicular a línea de tierra; forma ángulos de cero grados con el plano horizontal de proyección (α^0=0^0) y noventa grados con el plano vertical de proyección (β^0=90^0)\ fig.101.

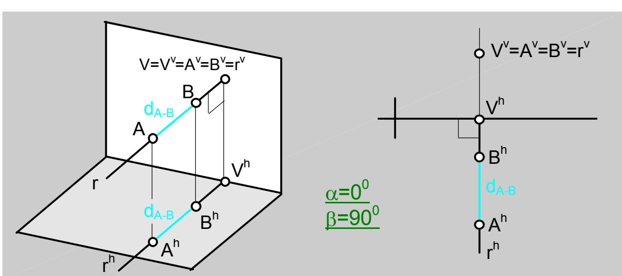


fig.101.\ Recta de punta.

f) **Recta de perfil.** Es una recta perpendicular a la línea de tierra (paralela al plano lateral); sus proyecciones son perpendiculares a línea de tierra. Su verdadero tamaño, así como los ángulos que forma con los planos principales de proyección, pueden determinarse en una proyección lateral de la misma\ fig.102.

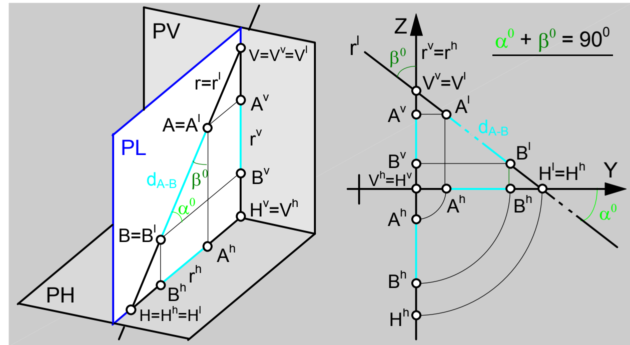


fig.102.\ Recta de perfil.

CONSTRUCCIÓN DE RECTAS.

La posición relativa entre los elementos que forman los triángulos de rebatimiento de una recta no varía; por ejemplo: el cateto (Δz) es siempre opuesto al ángulo (α) y perpendicular al cateto (r^h)\ fig.92. Por lo tanto es posible definir las proyecciones incompletas de una recta, si se posee información adicional que permita dibujar sus triángulos de rebatimiento. A continuación se analizan algunos de estos casos.

a) **SE CONOCE LA PROYECCIÓN VERTICAL (r^v) DE LA RECTA (r) Y EL ÁNGULO (β^0) QUE ESTA FORMA CON EL PLANO VERTICAL DE PROYECCIÓN.**

Ejemplo: Definir la proyección horizontal (r^h) de la recta (r) que contiene al segmento (A-B) que forma el ángulo (β^0) con el plano vertical de proyección; estando (B) por detrás de (A)\ fig.103a.

Solución:

La proyección horizontal (r^h) de la recta (r), puede definirse dibujando el triángulo de rebatimiento vertical del segmento (A-B) a partir de su proyección vertical\ fig.103b.

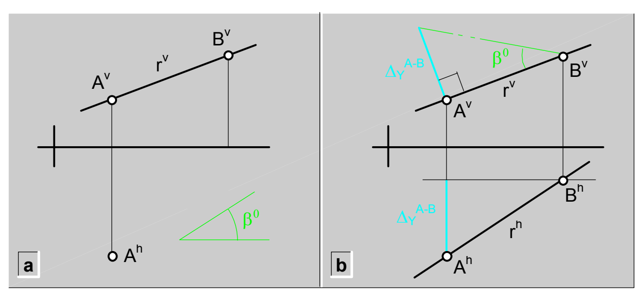


fig.103.\ Construcción de rectas (PV + β^0).

b) **SE CONOCE LA PROYECCIÓN HORIZONTAL (r^h) DE LA RECTA (r) Y EL ÁNGULO (α^0) QUE ESTA FORMA CON EL PLANO HORIZONTAL DE PROYECCIÓN.**

Ejemplo: Definir la proyección vertical del segmento (A-B) que forma el ángulo (α^0) con el plano horizontal de proyección; estando (B) por debajo de (A)\ fig.104a.

Solución:

La proyección vertical del segmento (A-B) puede definirse dibujando el triángulo de rebatimiento horizontal del mismo a partir de su proyección horizontal\ fig.104**b**.

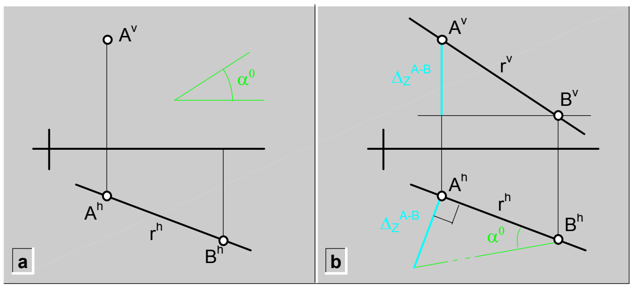


fig.104.\ Construcción de rectas (PH + α).

c) **<u>SE CONOCE LA PROYECCIÓN VERTICAL (r^v) DE LA RECTA (r) Y EL ÁNGULO (α^0) QUE ESTA FORMA CON EL PLANO HORIZONTAL DE PROYECCIÓN.</u>**

<u>**Ejemplo:** Definir la proyección horizontal del segmento (A-B) que baja hacia adelante formando el ángulo (α^0) con el plano horizontal de proyección</u>\ fig.105a.

Solución:

La proyección horizontal del segmento (A-B) puede definirse determinando la diferencia de cota ($\Delta_Z^{A\text{-}B}$) del mismo, y dibujando, a partir de ella, su triángulo de rebatimiento horizontal\ fig.105**b**.

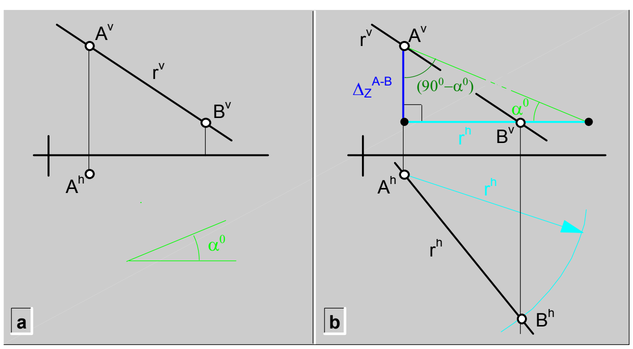


fig.105.\ Construcción de rectas (PV + α^0).

En la fig.106, se muestra como, para el mismo ejercicio, si se varía el valor del ángulo (α^0) dado, puede ser que la solución sea: una recta frontal\ fig.106**a**; o que el ejercicio no tenga solución\ fig.106**b**.

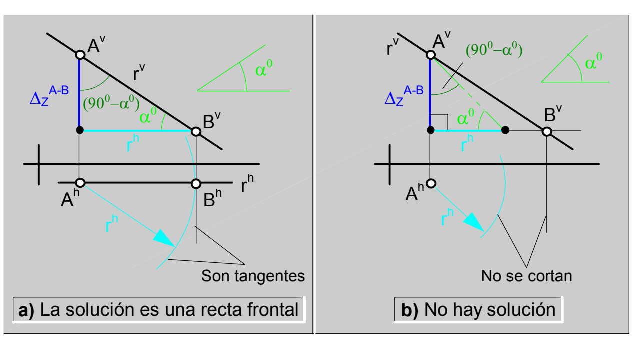


fig.106.\ Construcción de rectas (PV + α^0) \ casos particulares.

d) **<u>SE CONOCE LA PROYECCIÓN HORIZONTAL (r^h) DE LA RECTA (r) Y EL ÁNGULO (β^0) QUE ESTA FORMA CON EL PLANO VERTICAL DE PROYECCIÓN.</u>**

<u>**Ejemplo:** Definir la proyección vertical del segmento (A-B) que sube hacia atrás formando el ángulo (β^0) con el plano vertical de proyección</u>\ fig.107**a**.

Solución:

La proyección vertical del segmento (A-B) puede definirse determinando la diferencia de vuelo ($\Delta_Y^{A\text{-}B}$) del mismo, y dibujando a partir de ella, su triángulo de rebatimiento vertical\ fig.107**b**.

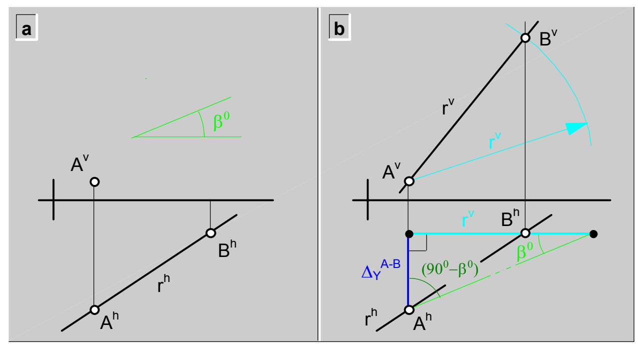


fig.107.\ Construcción de rectas (PH + β^0).

En la fig.108, se muestra como, para el mismo ejercicio, si se varía el valor del ángulo (β^0) dado, puede ser que la solución sea una recta horizontal\ fig.108**a**; o que el ejercicio no tenga solución\ fig.108**b**.

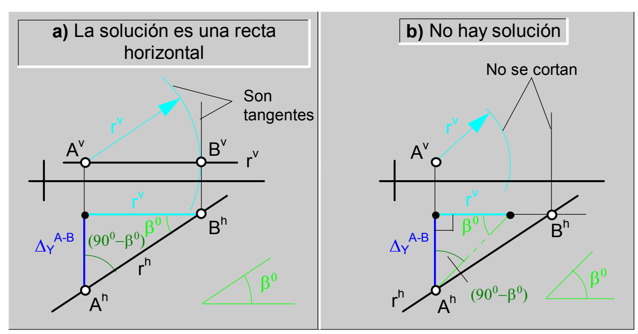


fig.108.\ Construcción de rectas (PH + β^0) \ casos particulares.

e) **<u>SE CONOCE LA PROYECCIÓN HORIZONTAL (r^h) DE LA RECTA (r) Y EL VERDADERO TAMAÑO ($d_{A\text{-}B}$) DE UN SEGMENTO.</u>**

<u>**Ejemplo:** Definir la proyección vertical del segmento (A-B), de longitud ($d_{A\text{-}B}$), sabiendo que baja hacia la derecha</u>\ fig.109a.

Solución:

La proyección vertical del segmento (A-B) puede definirse dibujando el triángulo de rebatimiento horizontal del mismo a partir de su proyección horizontal\ fig.109**b**.

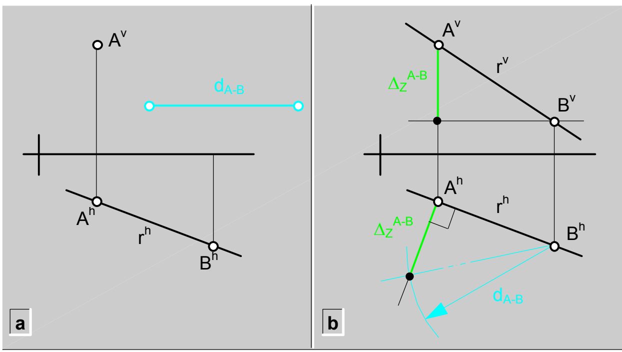


fig.109.\ Construcción de rectas (PH + VT).

En la fig.110, se muestra como, para el mismo ejercicio, si se varía el valor del verdadero tamaño (d_{A-B}) del segmento dado, puede ser que la solución sea una recta horizontal\ fig.110**a**; o que el ejercicio no tenga solución\ fig.110**b**.

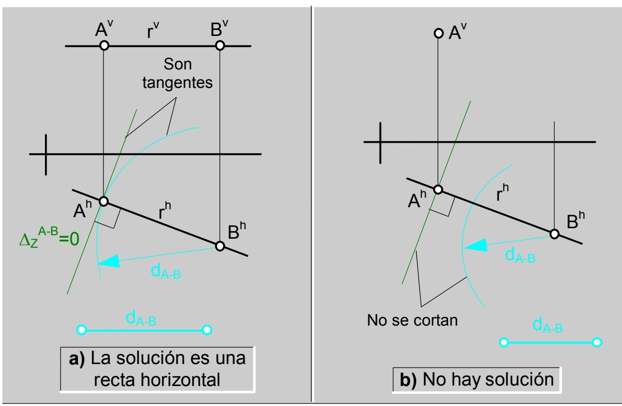


fig.110.\ Construcción de rectas (PH + VT) \ casos particulares.

f) <u>**SE CONOCE LA PROYECCIÓN VERTICAL (r^v) DE LA RECTA (r), Y EL VERDADERO TAMAÑO (d_{A-B}) DE UN SEGMENTO.**</u>

<u>**Ejemplo:** Definir la proyección horizontal del segmento (A-B), de longitud (d_{A-B}), sabiendo que sube hacia atrás</u>\ fig.111**a**.

Solución:

La proyección horizontal del segmento (A-B) puede definirse dibujando el triángulo de rebatimiento vertical del mismo a partir de su proyección vertical\ fig.111**b**.

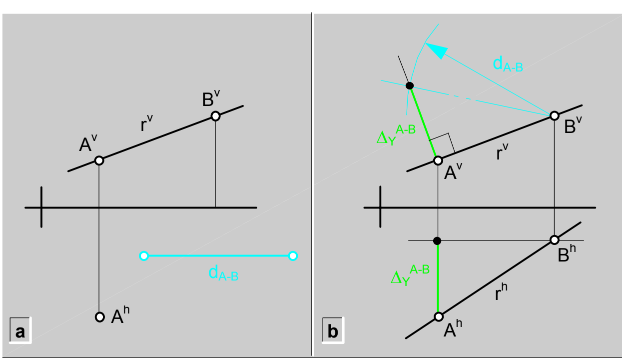


fig.111.\ Construcción de rectas (PV + VT).

En la fig.112 se muestra como, para el mismo ejercicio, si se varía el valor del verdadero tamaño (d_{A-B}) del segmento dado, puede ser que la solución sea una recta frontal\ fig.112**a**; o que el ejercicio no tenga solución\ fig.112**b**.

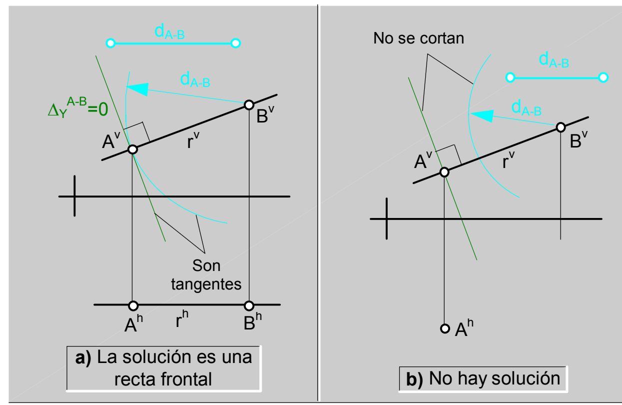


fig.112.\ Construcción de rectas (PV + VT) \ casos particulares.

g) <u>**SE CONOCE EL VERDADERO TAMAÑO (d_{A-B}) DE UN SEGMENTO (A-B), Y LOS ÁNGULOS (α^0) Y (β^0) QUE ESTE FORMA CON LOS LOS PLANOS PRINCIPALES DE PROYECCIÓN.**</u>

<u>**Ejemplo:** Definir las proyecciones del segmento (A-B), de longitud (d_{A-B}), sabiendo que baja hacia atrás **(**(B) a la derecha y por debajo de (A)**)**, formando los ángulos (α^0) y (β^0) con los planos vertical y horizontal de proyección respectivamente</u>\ fig.113**a**.

Solución:

Las proyecciones horizontal y vertical pueden dibujarse construyendo, generalmente aparte, el arcocapaz del segmento (A-B) dado, en base a una circunferencia cuyo diámetro sea el verdadero tamaño (d_{A-B}) del mismo\ fig.113**b**.

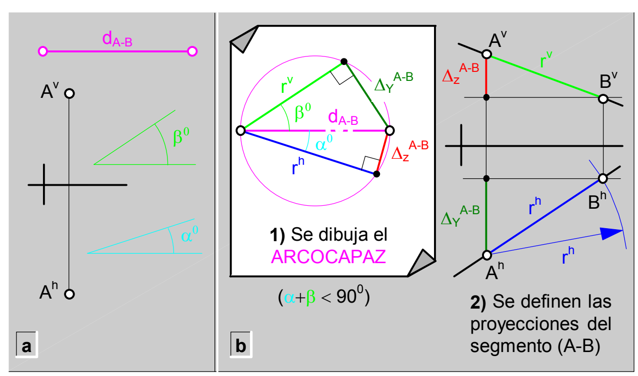


fig.113.\ Construcción de rectas (VT + α^0 + β^0).

Este tipo de ejercicio tiene solución cuando la suma de los ángulos (α^0) y (β^0) es inferior a 90^0 ($\alpha^0+\beta^0<90^0$), como es el caso del ejemplo mostrado en la fig.113; o si la suma de los ángulos (α^0) y (β^0) es igual a 90^0 ($\alpha^0+\beta^0=90^0$), en cuyo caso la solución es una recta de perfil\ fig.114. Si la suma de los ángulos (α^0) y (β^0) es mayor que 90^0 ($\alpha^0+\beta^0>90^0$), el ejercicio no tiene solución\ fig.115.

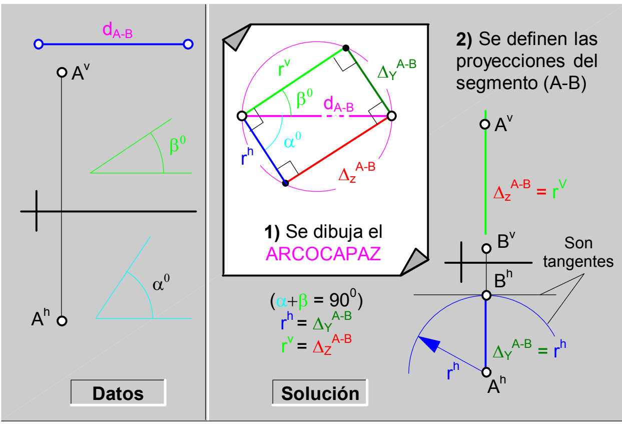


fig.114.\ Construcción de rectas (VT + α^0 + β^0) \ La solución es una recta de perfil.

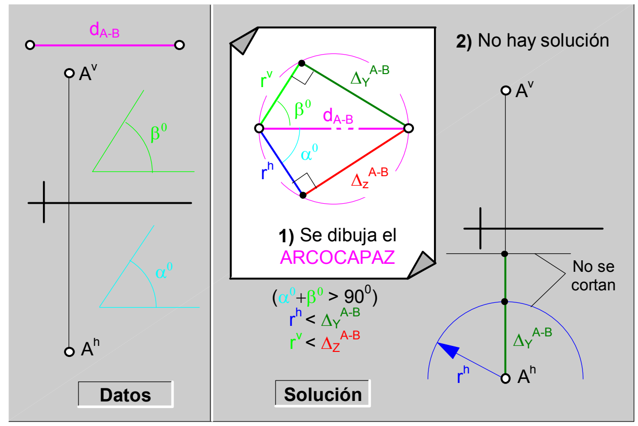


fig.115.\ Construcción de rectas (VT + α^0 + β^0) \ No hay solución.

PROYECCIÓN DE PLANOS.

Para designar los planos se utilizan letras minúsculas del alfabeto griego (Fig.116).

Α	α	Alfa	Ι	ι	Iota	Ρ	ρ	Ro
Β	β	Beta	Κ	κ	Kapa	Σ	σ	Sigma
Γ	γ	Gamma	Λ	λ	Lambda	Τ	τ	Tau
Δ	δ	Delta	Μ	μ	Mu	Υ	υ	Ípsilon
Ε	ε	Épsilon	Ν	ν	Nu	Φ	φ	Fi
Ζ	ζ	Zeta	Ξ	ξ	Xi	Χ	χ	Ji
Η	η	Eta	Ο	ο	Ómicron	Ψ	ψ	Psi
Θ	θ	Teta	Π	π	Pi	Ω	ω	Omega

Fig.116.\ Alfabeto griego.

<u>**UN PLANO (α) PUEDE DEFINIRSE POR MEDIO DE:**</u>

a) Tres puntos (A; B; y C)\ Fig.117.

b) Una recta (a) y un punto (P)\ Fig.118.

c) Dos rectas (a y b) que se cortan\ Fig.119.

d) Dos rectas (a y b) paralelas\ Fig.120.

Dos rectas que se cruzan no definen un plano\ Fig.121.

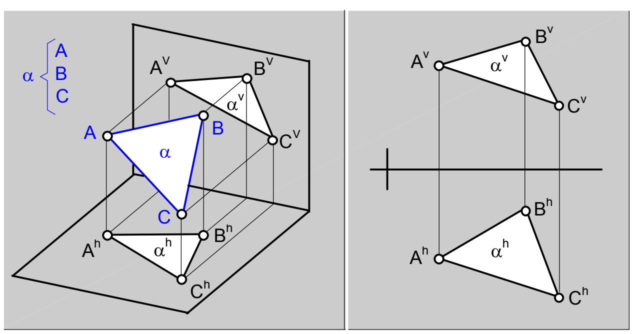


Fig.117.\ Plano (α) definido por tres puntos (A; B; y C).

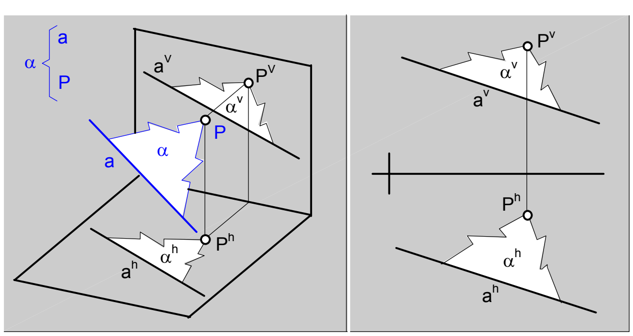


Fig.118.\ Plano (α) definido por una recta (a) y un punto (P).

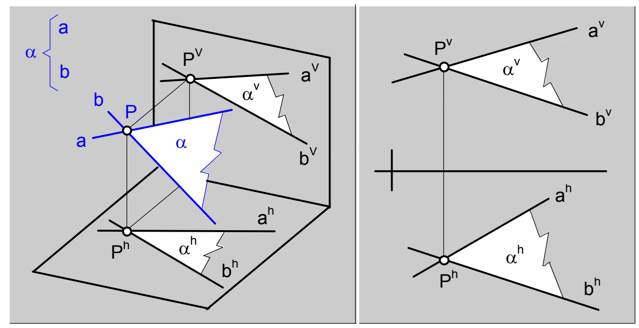


Fig.119.\ Plano (α) definido por dos rectas (a y b) que se cortan.

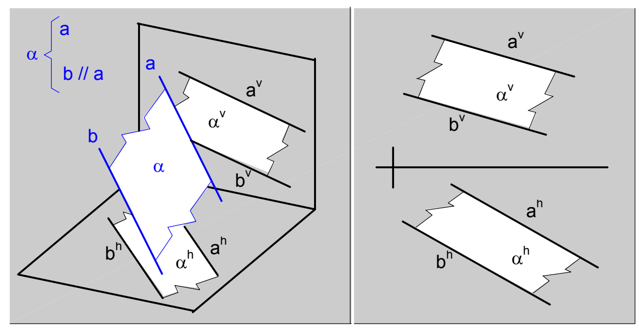


Fig.120.\ Plano (α) definido por dos rectas (a y b) paralelas.

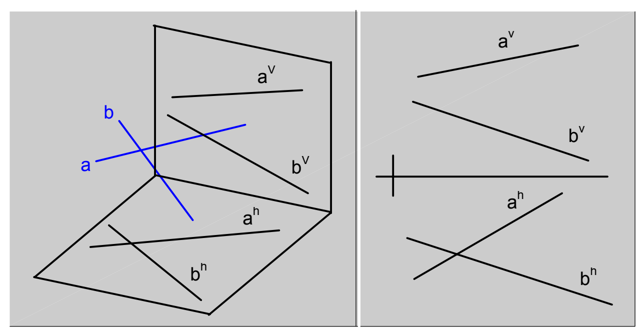


Fig.121.\ Dos rectas (a y b) que se cruzan no definen un plano.

Un plano, inicialmente definido por tres puntos (Fig.122a), puede posteriormente ser definido por: una recta (a) y un punto (A) (Fig.122b1); dos rectas (a y b) que se cortan (Fig.122b2); o dos rectas (a y b) paralelas (Fig.122b3).

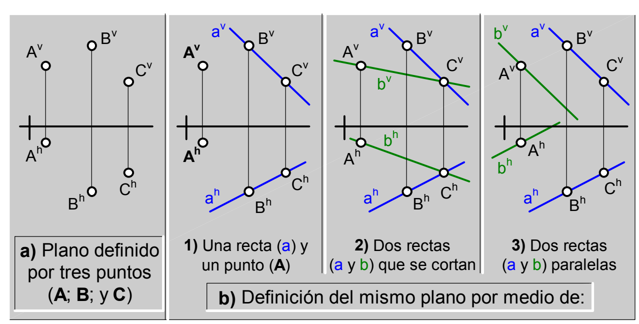


Fig.122.\ Cambio de la definición original de un plano.

Ing. Alberto M. Pérez G.

TEOREMAS DE PLANOS.

a) Si dos puntos (A y B) pertenecen a un plano (α), la recta (r) que los une también pertenece a él\ Fig.123**a**.

b) Todas la rectas coplanares se cortan entre si; excepto si son paralelas\ Fig.123**b**.

Estos dos teoremas son de gran aplicación en la resolución de problemas de geometría descriptiva relacionados con la proyección de planos.

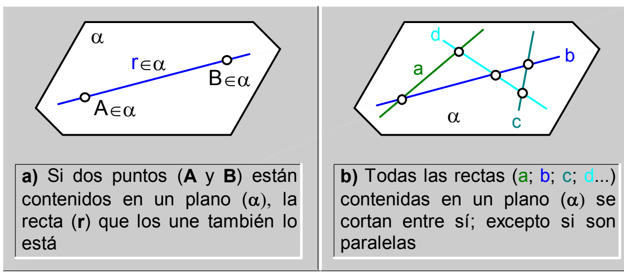


Fig.123.\ Teoremas de planos.

RECTA QUE PERTENECE A UN PLANO.

Se puede determinar la pertenencia o nó de una recta (r) a un plano (α), por medio de la verificación del cumplimiento de los dos teoremas mostrados en la Fig.123.

Ejemplo: Definir la proyección horizontal (r^h) de la recta (r), sabiendo que esta contenida en el plano (α) definido por:

a) Tres puntos (**A**; **B** y **C**)\ Fig.124a1.

Solución\ Fig.124a2.

1) Se definen las proyecciones de la recta (a) por medio de los puntos (A y C).
2) Se definen las proyecciones de la recta (b) por medio de los puntos (B y C).

   Las rectas (a y b) están contenidas en el plano (α), por que los puntos (A; B; y C) que las definen son puntos ese plano.
3) Se definen las proyecciones de los puntos (1 y 2) de corte de la recta (r) con las rectas (a y b) respectivamente.

   Las rectas (a; b; y r) se cortan por que todas pertenecen a un mismo plano (α).
4) La proyección horizontal (r^h) de la recta (r) queda definida por las proyecciones horizontales (1^h y 2^h) de los puntos (1 y 2).

b) Una recta (**a**) y un punto (**A**)\ Fig.124b1.

Solución\ Fig.124b2.

1) Se definen las proyecciones del punto de corte (I) entre las rectas (a y r).
2) Se definen las proyecciones de un punto (1) cualquiera de la recta (a).

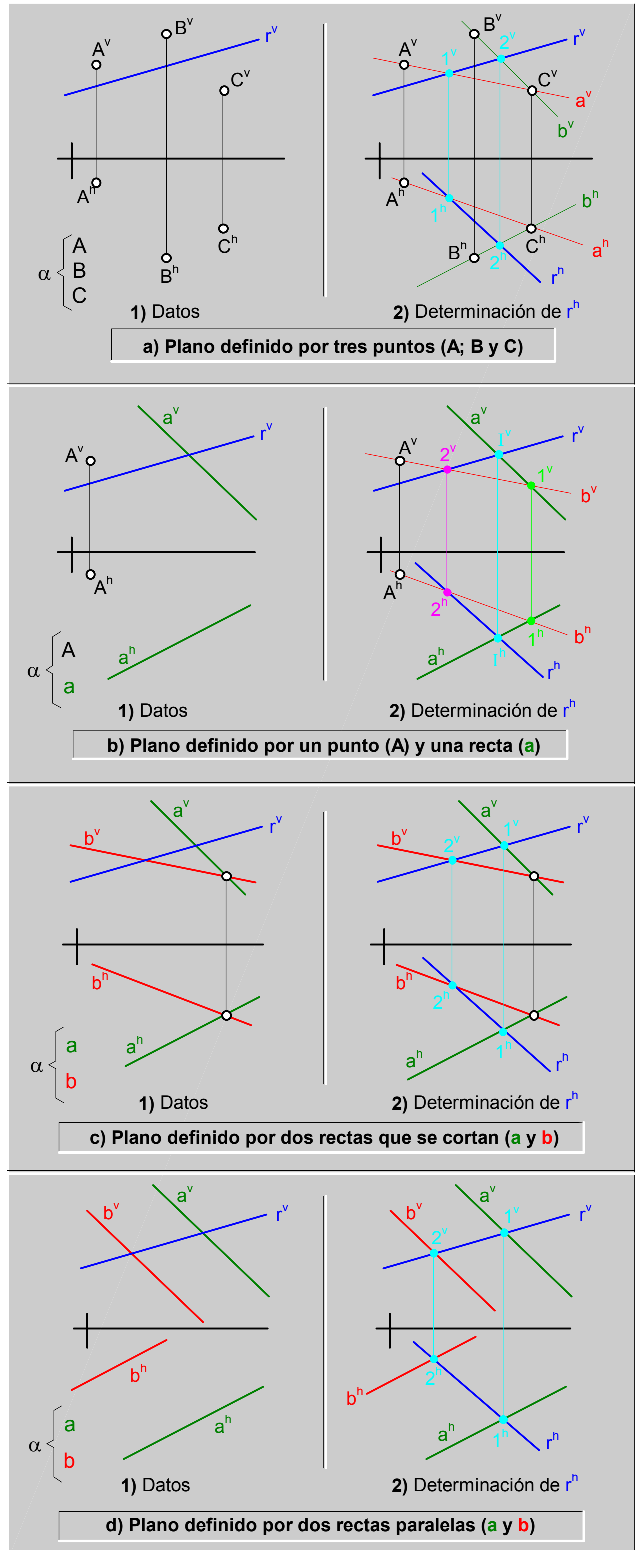


Fig.124.\ Recta que pertenece a un plano.

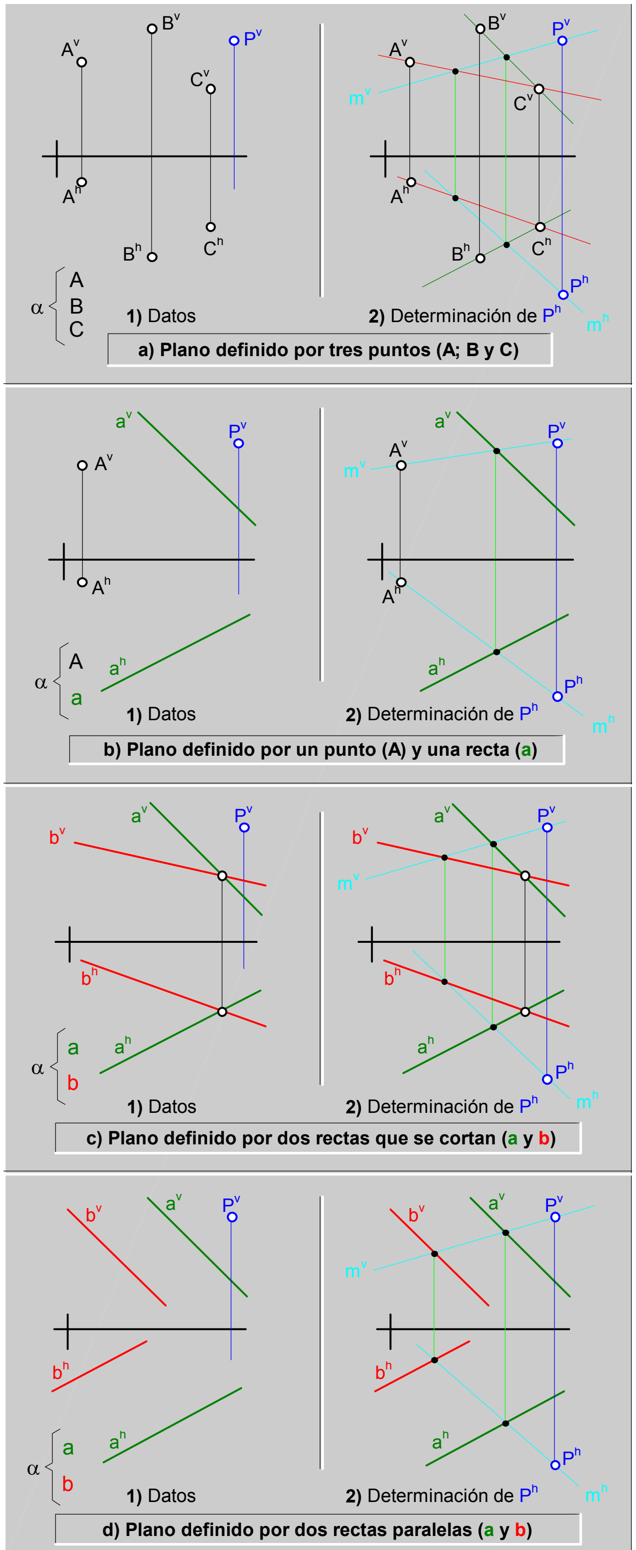


Fig.125.\ Punto que pertenece a un plano.

3) Se definen las proyecciones de la recta (b), que contiene a los puntos (A y 1).

4) Se definen las proyecciones del punto de corte (2) entre las rectas (b y r).

5) La proyección horizontal (r^h) de la recta (r) queda definida por las proyecciones horizontales (2^h e 1^h) de los puntos (2 e 1).

c) <u>Dos rectas (**a** y **b**) que se cortan</u>\ Fig.124c1.

Solución\ Fig.124c2.

1) Se definen las proyecciones de los puntos (1 y 2) de corte de la recta (r) con las rectas (a y b) respectivamente.

2) La proyección horizontal (r^h) de la recta (r) queda definida por las proyecciones horizontales (1^h y 2^h) de los puntos (1 y 2).

d) <u>Dos rectas (**a** y **b**) paralelas</u>\ Fig.124d1.

Solución\ Fig.124d2.

Se procede de igual forma que el caso anterior.

PUNTO QUE PERTENECE A UN PLANO.

<u>Ejemplo</u>:\ Fig.125.

Definir la proyección horizontal (P^h) del punto (P) sabiendo que está contenido en el plano (α) definido por:

a) <u>Tres puntos (**A**; **B** y **C**)</u>\ Fig.125a1.

b) <u>Una recta (**a**) y un punto (**A**)</u>\ Fig.125b1.

c) <u>Dos rectas (**a** y **b**) que se cortan</u>\ Fig.125c1.

d) <u>Dos rectas (**a** y **b**) paralelas</u>\ Fig.125d1.

Solución:\ Fig.125a2; Fig.125b2; Fig.125c2; y Fig.125d2, respectivamente.

Para definir la proyección horizontal (P^h) del punto (P), en todos los casos, se aplica el siguiente procedimiento:

a) Se define la proyección vertical (m^v) de una recta (m) cualquiera que contenga al punto (P).

b) Se define la proyección horizontal (m^h) de la recta (m) haciéndola pertenecer al plano (α).

c) Se define la proyección horizontal (P^h) del punto (P), sobre la proyección horizontal (m^h) de la recta (m).

TRAZAS DE UN PLANO.

Son las rectas donde el plano se intercepta con los planos principales de proyección. Se denominan\ Fig.126:

a) **<u>Traza vertical.</u>** Es la intersección (f) del plano (α) con el plano vertical de proyección\Fig.126a.

b) **<u>Traza horizontal.</u>** Es la intersección (h) del plano (α) con el plano horizontal de proyección\ Fig.126b.

Las trazas (f y h) de un plano (α) se cortan en la línea de tierra (excepto si el plano (α) es paralelo a ella).

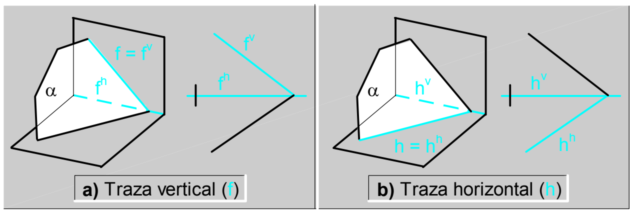


Fig.126.\ Trazas de un plano.

DETERMINACIÓN DE LAS TRAZAS DE UN PLANO.

Si una recta (r) está contenida en un plano (α); las trazas vertical (V) y horizontal (H) de la recta (r), están contenidas en las trazas vertical (f) y horizontal (h) del plano (α), respectivamente (fig.127). Además, como ya se mencionó, las trazas de un plano se cortan en la línea de tierra (Excepto si el plano es paralelo a ella). Por lo tanto, pueden definirse las trazas de un plano (α), definiendo previamente las trazas de dos rectas (**a** y **b**) contenidas en el, como se muestra en los ejemplos (a) y (b) de la fig.128.

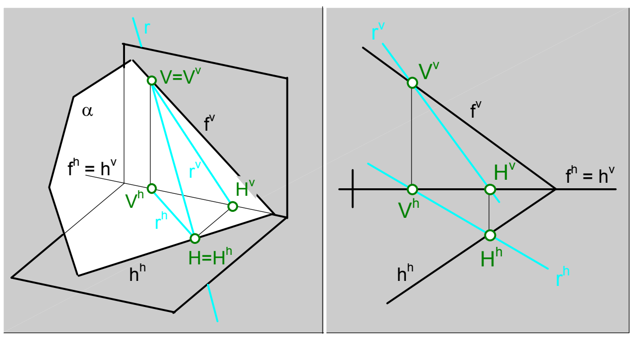


fig.127.\ Trazas de una recta (r) contenida en un plano (α).

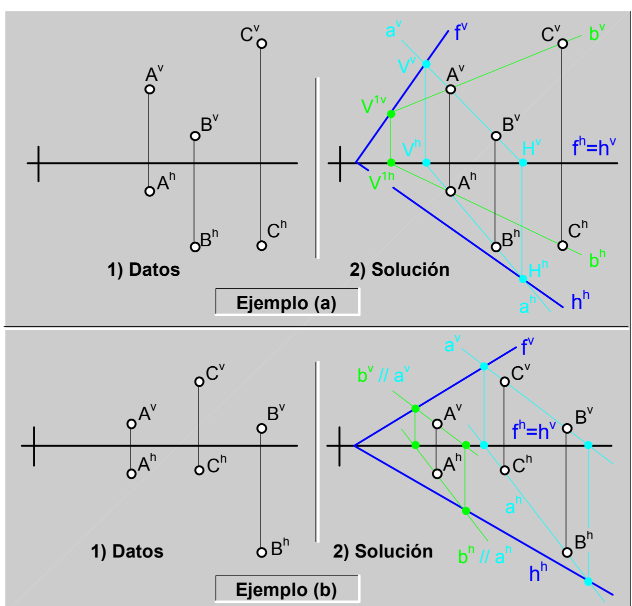


fig.128.\ Determinación de las trazas de un plano\ ejemplos.

RECTAS CARACTERÍSTICAS DE UN PLANO.

Se llaman rectas características de un plano (α) a las rectas del plano que son paralelas a uno de los planos principales de proyección; se denominan\ fig.129:

a) **Rectas características frontales.** Son las rectas (f^1) del plano (α) paralelas al plano vertical de proyección; en consecuencia son paralelas a la traza vertical (f) del plano α\ fig.129**a**.

Todas las rectas frontales (f; f^1; f^2; ...) de un plano (α) son paralelas entre sí\ fig.130.

b) **Rectas características horizontales.** Son las rectas (h^1) del plano (α) paralelas al plano horizontal de proyección; en consecuencia son paralelas a la traza horizontal (h) del plano (α)\ fig.129**b**.

Todas las rectas horizontales (h; h^1; h^2; ...) de un plano (α) son paralelas entre sí\ fig.131.

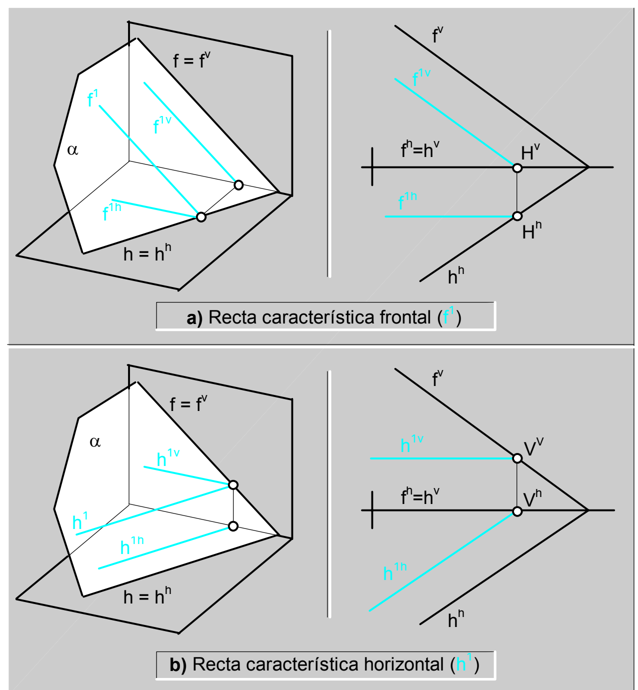


fig.129.\ Rectas características de un plano.

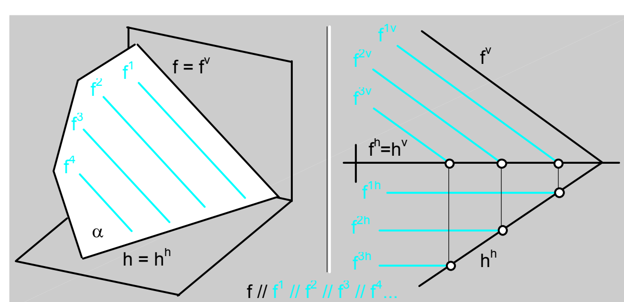


fig.130.\ Paralelismo entre rectas características frontales.

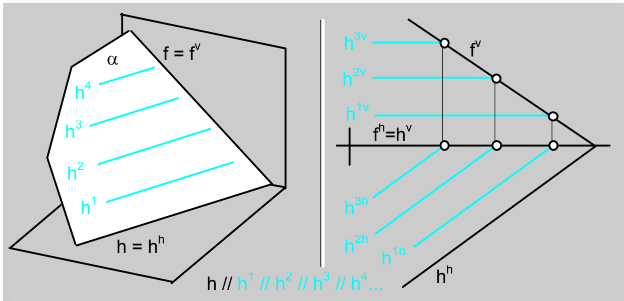


fig.131.\ Paralelismo entre rectas características horizontales.

Un plano (α) puede ser definido por dos rectas características (f^1 y h^1), como se muestra en la fig.132**a**. Y las trazas (f y h) de este plano (α), pueden determinarse a partir de sus rectas características (f^1 y h^1), como se muestra en la fig.132**b**.

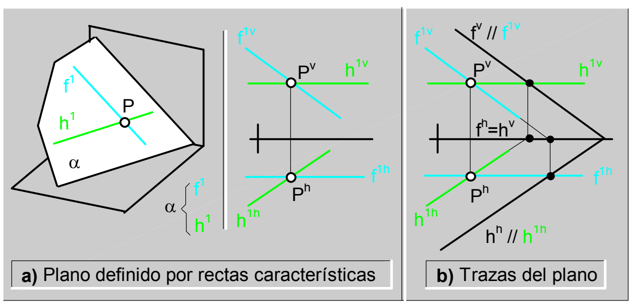


fig.132.\ Plano (α) definido por rectas (f^1 y h^1) características.

PUNTO QUE PERTENECE A UN PLANO DEFINIDO POR RECTAS CARACTERÍSTICAS.

Siguiendo el método ya descrito en el ejemplo de la Fig.125, se muestra, en la fig.133**b**, como hacer pertenecer un punto (P) a un plano (α) definido por rectas características (f y h) (fig.133**a**); utilizando para ello una recta: (r) cualquiera (fig.133**b1**); (f^1) frontal (fig.133**b2**); ú (h^1) horizontal (fig.133**b3**).

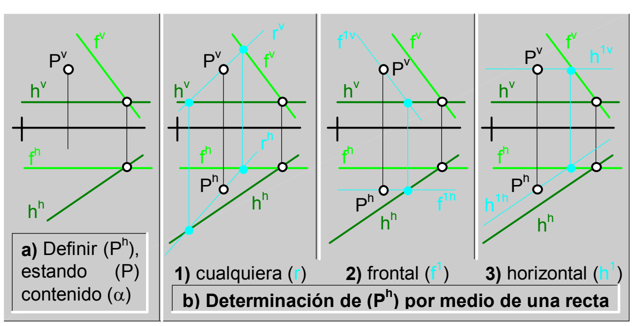


fig.133.\ Punto que pertenece a un plano definido por rectas características.

PUNTO QUE PERTENECE A UN PLANO DEFINIDO POR TRAZAS.

Siguiendo el método ya descrito en el ejemplo de la Fig.125, se muestra, en la fig.134, como hacer pertenecer un punto (P) a un plano (α) definido por trazas (f y h) (fig.134**a**), utilizando para ello una recta: (r) cualquiera (fig.134**b1**); (f^1) frontal (fig.134**b2**); ú (h^1) horizontal (fig.134**b3**).

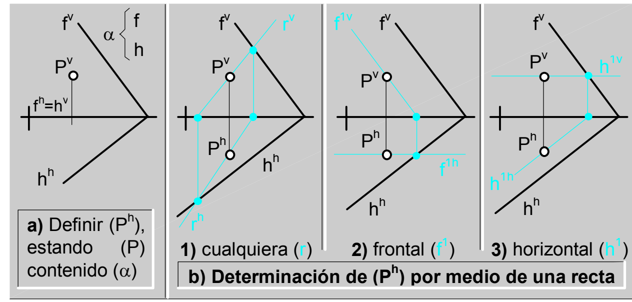


fig.134.\ Punto contenido en un plano definido por trazas.

NOTACIÓN CONVENIDA DE PLANOS DEFINIDOS POR TRAZAS.

Una forma convencional de designar, en doble proyección ortogonal, a un plano (α), definido por sus trazas (f y h), consiste en cambiar su nomenclatura teórica, mostrada en la fig.135**a**, por la nomenclatura convencional mostrada en la fig.135**b**

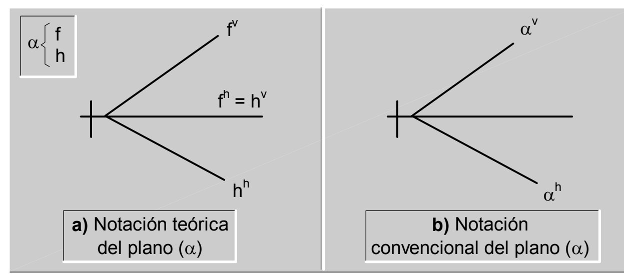


fig.135.\ Notación teórica y convencional de un plano (α).

En la fig.136, se muestra la comparación entre la notación teórica (fig.136**a**) y la notación convencional (fig.136**b**) usadas en la representación de los planos (α; β; y γ), pudiéndose apreciar en la misma, la conveniencia de utilizar esta última, la cual será usada en adelante.

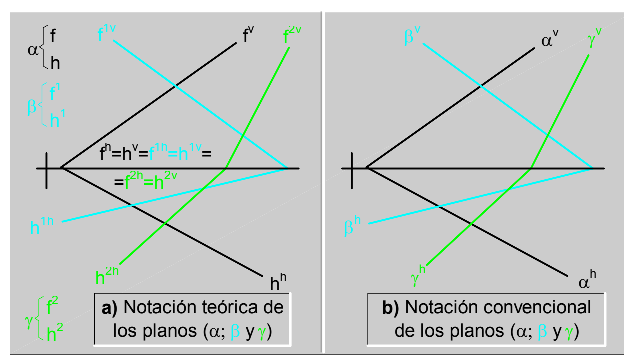


fig.136.\ Notación teórica y convencional de los planos (α; β y γ).

PLANOS EN POSICIONES PARTICULARES.

Los planos, al igual que las rectas, pueden ocupar ciertas posiciones particulares con respecto a los planos principales de proyección. El estudio de estas posiciones es muy importante; ya que poseen propiedades proyectivas propias que permiten simplificar la resolución de problemas relacionados con este tipo de planos.

En las fig.137 a fig.139, se muestran estas posiciones particulares. Los puntos (A; B; y C) representados en cada caso están contenidos en el plano (α) mostrado, y se indican además los ángulos (α^0 y β^0) que el plano (α) forma en cada caso con los planos horizontal y vertical de proyección respectivamente. A continuación, se hace una breve descripción de estas posiciones particulares:

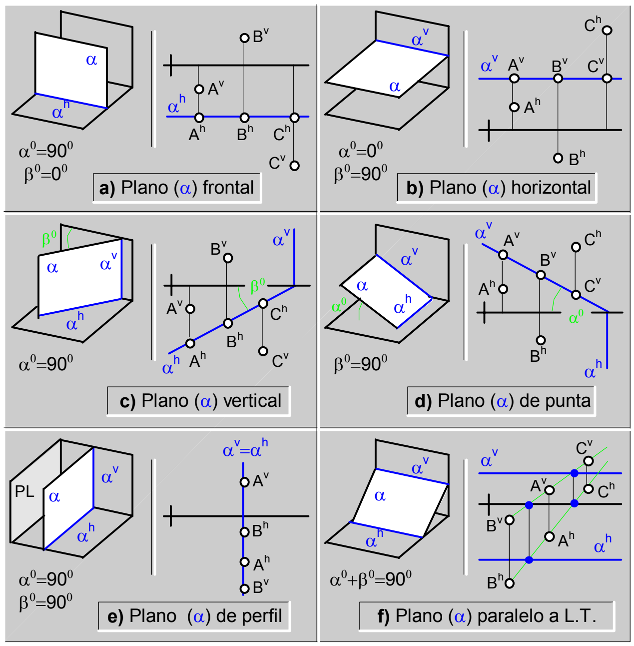


fig.137.\ Planos en posiciones particulares.

a) Plano frontal. Es un plano paralelo al plano vertical de proyección; por lo tanto todos sus puntos tienen el mismo vuelo. Su traza horizontal, sobre la cual se proyecta horizontalmente todo el plano, es paralela a la línea de tierra. El plano se proyecta verticalmente en verdadero tamaño\ fig.137**a**.

b) Plano horizontal. Es un plano paralelo al plano horizontal de proyección; por lo tanto todos sus puntos tienen la misma cota. Su traza vertical, sobre la cual se proyecta verticalmente todo el plano es paralela a la línea de tierra. El plano se proyecta horizontalmente en verdadero tamaño\ fig.137**b**.

c) Plano vertical. Es un plano perpendicular al plano horizontal de proyección; por lo tanto su traza vertical es perpendicular a la línea de tierra, todo el plano se proyecta horizontalmente sobre su traza horizontal\ fig.137**c**.

d) Plano de punta. Es un plano perpendicular al plano vertical de proyección; por lo tanto su traza horizontal es perpendicular a la línea de tierra, todo el plano se proyecta verticalmente sobre su traza vertical\ fig.137**d**.

e) Plano de perfil. Es un plano perpendicular a la línea de tierra; por lo tanto es paralelo al plano lateral y en consecuencia todos sus puntos tienen igual distancia a este plano. Sus trazas horizontal y vertical son perpendiculares a la línea de tierra, y todo el plano se proyecta horizontal y verticalmente sobre ellas. El plano se proyecta lateralmente en verdadero tamaño, por eso es frecuente en estos planos determinar su proyección lateral\ fig.137**e**.

f) Plano paralelo a la línea de tierra. Sus trazas son paralelas a la línea de tierra\ fig.137**f**.

g) Plano que pasa por la línea de tierra. Sus trazas se encuentran en la línea de tierra, la cual es una recta del plano\ fig.138. Todas las rectas contenidas en estos planos se cortan con la línea de tierra (excepto si son paralelas a ella). Existen además dos planos muy particulares de este tipo denominados:

1) **Plano primer bisector.** Es un plano que pasa por la línea de tierra y forma 45º con el plano horizontal de proyección, dividiendo en partes iguales a los cuadrantes uno (I C) y tres (III C). Las proyecciones de cualquier figura geométrica contenida en el primer bisector son simétricas; debido a que para todos sus puntos: la cota, es igual al vuelo\ fig.139**a**.

2) **Plano segundo bisector.** Es un plano que pasa por la línea de tierra y forma 45º con el plano horizontal de proyección. dividiendo en partes iguales a los cuadrantes dos (II C) y cuatro (IV C). Las proyecciones de cualquier figura geométrica contenida en el segundo bisector son coincidentes; debido a que para todos sus puntos: la cota y el vuelo son iguales en magnitud pero diferentes en signo\ fig.139**b**.

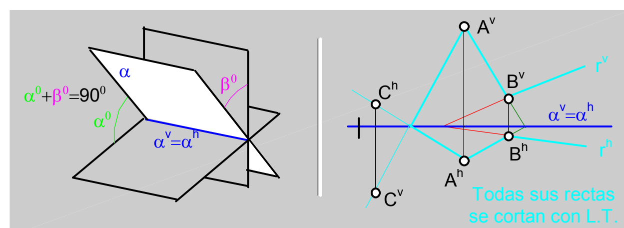


fig.138.\ Plano que pasa por la la línea de tierra.

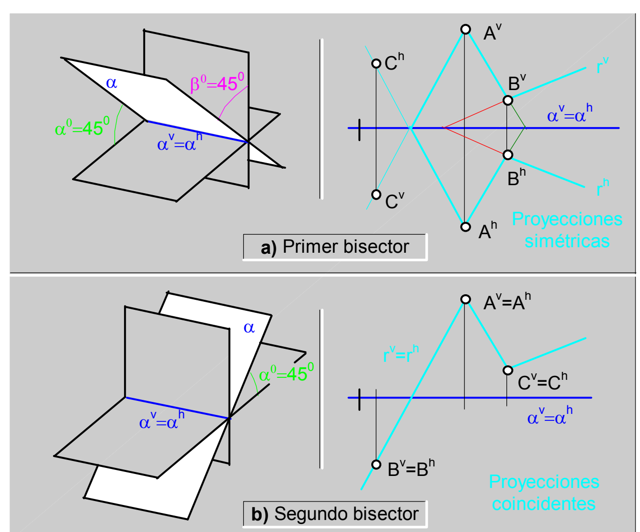


fig.139.\ Planos bisectores.

capítulo 4

INTERSECCIÓN; PARALELISMO; PERPENDICULARIDAD.

En el capítulo tres se estudió como definir la Proyección Diédrica de los elementos geométricos básicos: punto; recta y plano.

Sin embargo, estos elementos geométricos no deben considerarse como algo independiente, debido a que se presentan juntos en cualquier objeto real que se represente o en cualquier problema de Geometría Descriptiva que se quiera resolver.

Por ejemplo, un punto puede originarse de la intersección entre una recta y un plano; o una recta puede ser definida por la intersección entre dos planos, etc. Las rectas y los planos por su parte pueden ubicarse en el espacio que los rodea en diferentes posiciones relativas; pudiendo ser paralelos; perpendiculares, cortarse, cruzarse, etc.

En este capítulo se estudia como definir, en Doble Proyección Ortogonal, la intersección, paralelismo y/o perpendicularidad que puede producirse entre rectas y planos debido a las posiciones relativas que estos ocupen entre sí en el espacio que los rodea.

Los procedimientos aquí descritos son de gran importancia para la resolución de problemas en doble proyección ortogonal, y representan una herramienta básica de trabajo que capacitará al estudiante para la determinación de la Proyección Diédrica de objetos tridimensionales, tales como pirámides, prismas, conos, esferas, etc., así como para la definición de las intersecciones producidas entre estos cuerpos.

Por otra parte, la comprensión de estas relaciones básicas de intersección, paralelismo y perpendicularidad, es necesaria para la resolución de **problemas métricos** y la determinación de **lugares geométricos**, que se analiza en los capítulos cinco y seis; así como para la comprensión de otros procedimientos prácticos de Geometría Descriptiva como lo son: el **rebatimiento de planos**; **rotación**; y **cambio de planos de proyección**, descritos en el capítulo siete, y que representan también procedimientos de trabajo esenciales para la determinación de la proyección diédrica de objetos geométricos complejos.

INTERSECCIÓN.

INTERSECCIÓN ENTRE RECTA Y PLANO.

La intersección entre una recta (r) y un plano (α) es un punto (I)\ fig.140.

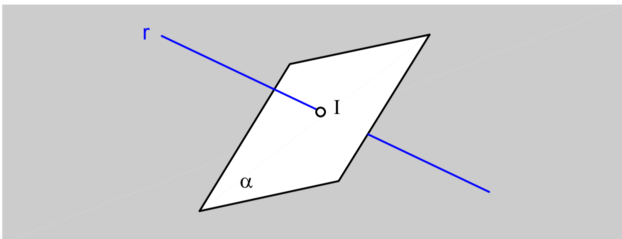


fig.140.\ Intersección (I) entre una recta (r) y un plano (α).

DETERMINACIÓN DE LA INTERSECCIÓN ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO (recta tapada).

Para definir, en Doble Proyección Ortogonal, el punto de intersección (I) entre una recta (r) y un plano (α), se aplica un procedimiento denominado **recta tapada**, el cual consiste en:\ fig.141:

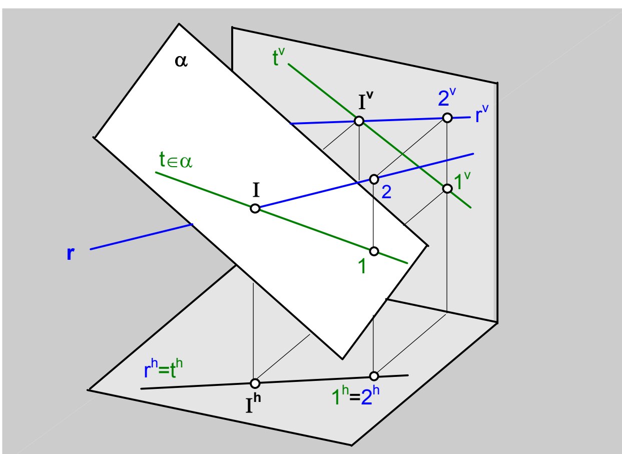


fig.141.\ Determinación de la intersección (I), entre recta (r) y plano (α), tapando las proyecciones horizontales (r^h y t^h) de las rectas (r y t) .

a) Definir en el plano (α) una recta (t), cuya proyección horizontal (t^h) coincide (**se tapa**) con la proyección horizontal (r^h) de la recta (r); por esta razón la recta (t) se denomina **recta tapada**[1]. Las rectas (r y t) se cortan en el punto de intersección (I) buscado.

b) La proyección vertical (I^v) del punto (I) queda definida por el corte de las proyecciones verticales (r^v y t^v) de las rectas (r y t).

c) La proyección horizontal (I^h) del punto (I), se obtiene proyectivamente, sobre la proyección horizontal ($r^h=t^h$) de las rectas (r y t).

También es posible definir la intersección (I) entre una recta (r) y un plano (α) **tapando** las proyecciones verticales (r^v y t^v) de las rectas (r y t) y siguiendo un procedimiento análogo al anterior\ fig.142.

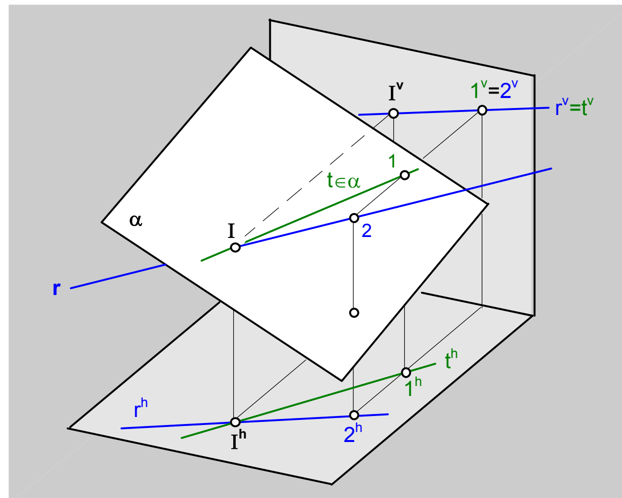


fig.142.\ Determinación de la intersección (I) entre una recta (r) y un plano (α), tapando las proyecciones verticales (r^v y t^v) de las rectas (r y t).

<u>**Ejemplo:** Definir la intersección (I) entre la recta (r) y el plano (α) para los siguientes casos:</u>

a) <u>El plano (α) está definido por sus trazas</u>\ fig.143a.

Solución:

En la fig.143**b**, se muestra la solución tapando las proyecciones horizontales ($r^h=t^h$) de las rectas (r y t) y en la fig.143**c**, tapando sus proyecciones verticales ($r^v=t^v$).

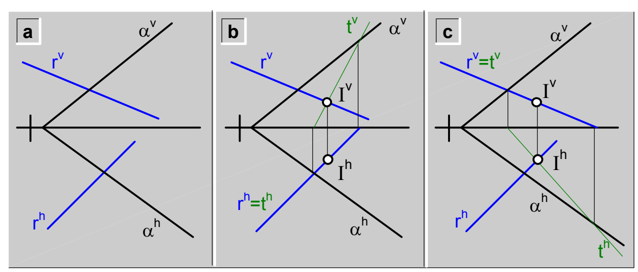


fig.143.\ Intersección (I) de la recta (r) con el plano (α) definido por trazas.

b) <u>El plano (α) está definido por las rectas (f y h) características</u>\ fig.144a.

Solución:

En la fig.144**b**, se muestra la solución tapando las proyecciones horizontales ($r^h=t^h$) de las rectas (r y t) y en la fig.144**c**, tapando sus proyecciones verticales ($r^v=t^v$).

[1] La designación de **recta tapada** asignada a la recta (**t**) no debe interpretarse literalmente, ya que ambas rectas (**r y t**) se tapan mutuamente.

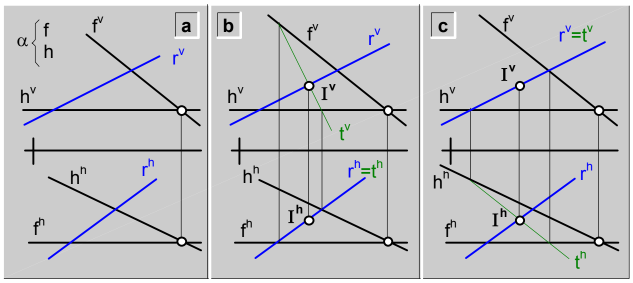


fig.144.\ Intersección (I) de la recta (r) con el plano (α) definido por rectas características (f y h).

c) <u>El plano (α) está definido por sus trazas y la recta (r) es una recta de perfil</u>\ fig.145a.

Solución:

El punto de intersección (I), puede definirse en una proyección lateral del sistema\ fig.145b.

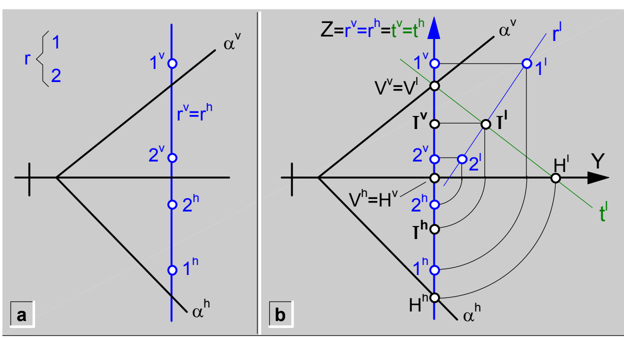


fig.145.\ Intersección (I) de un plano (α) definido por trazas, con una recta (r) de perfil.

d) <u>Definir la intersección (I) de la recta (r) con los planos bisectores</u>\ fig.146a.

Solución:

En la fig.146b, se muestra como definir la intersección (I) de la recta (r) con el primer bisector, en el cual las proyecciones de la recta (t) son simétricas.

En la fig.146c, se muestra como definir la intersección (I) de la recta (r) con el segundo bisector, en el cual las proyecciones de la recta (t) coinciden.

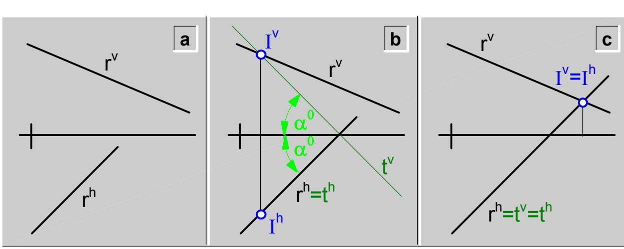


fig.146.\ Intersección (I) de una recta (r) con los planos bisectores.

<u>ANÁLISIS DE LA VISIBILIDAD EN LA INTERSECCIÓN DE UNA RECTA CON UN PLANO.</u>

La representación de la intersección de una recta (r) con un plano (α), siempre presenta dos posibilidades de visibilidad, como se muestra en las fig.147a y fig.147b, en las cuales puede observarse que un segmento de la recta (r), definido por el punto de intersección (I) y un punto del contorno del plano (α), permanece invisible al observador, siendo tapado por el plano.

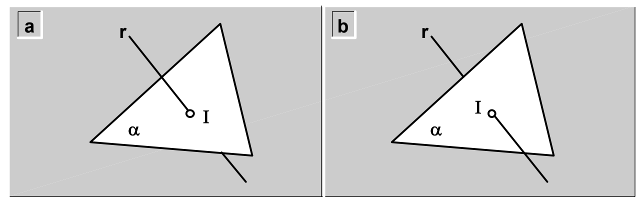


fig.147.\ Intersección entre una recta y un plano\ VISIBILIDAD.

En Doble Proyección Ortogonal, debe analizarse la visibilidad en las proyecciones horizontal y vertical en forma independiente, debido a que los segmentos visibles en una de las proyecciones no son necesariamente visibles en la otra proyección.

Por medio del siguiente ejemplo se describe la forma de analizar la visibilidad en la intersección de una recta (r) con un plano (α).

<u>**Ejemplo:** Definir la intersección (I) y visibilidad entre la recta (**r**) y el triángulo de vértices (**A**;**B**; y **C**)</u>\ fig.148a.

Solución:

a) Se determina el punto de intersección (I) entre la recta (r) y el triángulo (A;B;C)\ fig.148b.

b) Para determinar la visibilidad en proyección vertical\ fig.148c:

1) Se define el segmento de punta (1-2) cuya proyección vertical (1^v=2^v) es el punto de corte entre las proyecciones verticales de la recta (r) y del lado (A-B). Estando los puntos (1 y 2) contenidos en:

punto 1: En el lado (A-B).

punto 2: En la recta (r).

2) De estos dos puntos, solo uno es visible en proyección vertical, y será aquel de los dos que posea mayor vuelo. Por lo tanto se define la proyección horizontal del segmento de punta (1-2), y se determina en ella cual de estos dos puntos tiene mayor vuelo; resultando ser el punto (2).

Se define entonces, que el segmento (2-I) de la recta (r) es visible en proyección vertical, porque el punto (2) que esta contenido en el es visible en esta proyección.

c) Para determinar la visibilidad en proyección horizontal\ fig.148d:

1) Se define el segmento vertical (3-4) cuya proyección horizontal (3^h=4^h) es el punto de corte entre las proyecciones horizontales de la recta (r) y del lado (B-C). Estando los puntos (3 y 4) contenidos en:

punto 3: En el lado (B-C).

punto 4: En la recta (r).

2) De estos dos puntos, solo uno es visible en proyección horizontal, y será aquel de los dos que posea mayor cota. Por lo tanto se define la proyección vertical del segmento vertical (**3-4**), y se determina en ella cual de estos dos puntos tiene mayor cota; resultando ser el punto (**4**).

Se define entonces, que el segmento (**4-I**) de la recta (**r**) es visible en proyección horizontal, porque el punto (**4**) que esta contenido en el es visible en esta proyección.

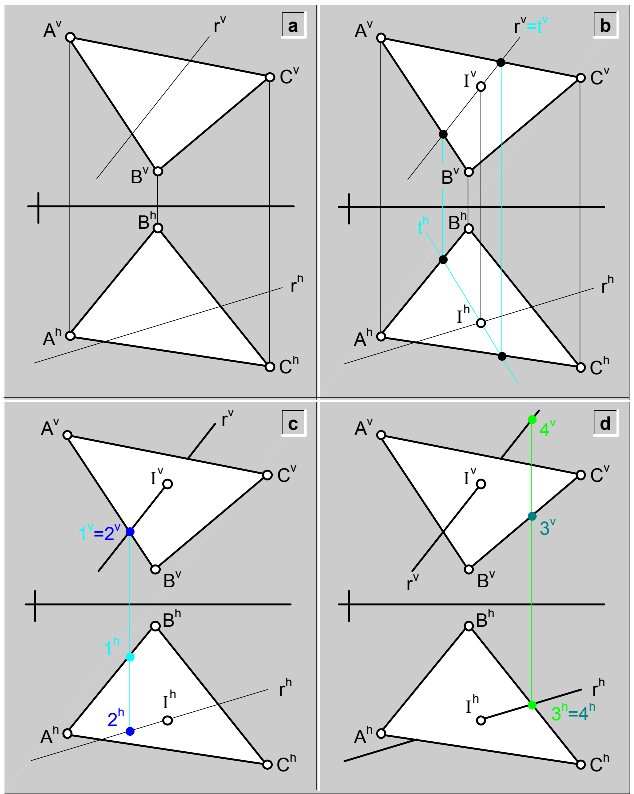


fig.148.\ Intersección entre recta y plano\ VISIBILIDAD.

INTERSECCIÓN ENTRE DOS PLANOS.

La intersección entre dos planos (α y β) es una recta (i), para determinarla\ fig.149**a**:

a) Se elige, cualquier recta (**a**) en el plano (α), y se determina su intersección (**I**) con el plano (β).

b) Se repite el paso anterior eligiendo una segunda recta, (**b**) en el plano (α), y determinando su intersección (**J**) con el plano (β).

c) Los puntos de intersección (**I y J**) definen la recta de intersección (i) entre los planos (α y β).

Las rectas (**a y b**) también pueden ser elegidas en el plano (β) y ser interceptadas con el plano (α)\ fig.149**b**.

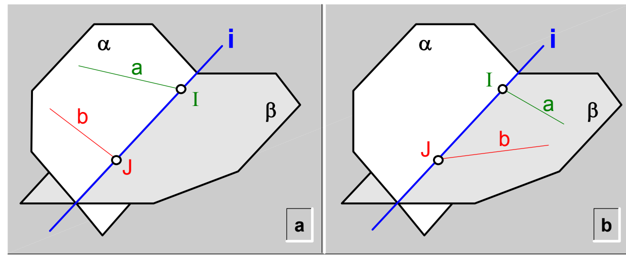


fig.149.\ Intersección (i) entre dos planos (α y β).

<u>Ejemplo:</u> <u>Definir la intersección (i) entre los planos (α y β) para los siguientes casos:</u>

a) <u>Los planos (α y β) están definidos por sus trazas</u>\ fig.150**a**.

Solución:

Se definen dos rectas (**a y b**) frontales del plano (α), y se determinan sus intersecciones (**I y J**) con el plano (β). La recta de intersección (i) entre los planos (α y β) queda definida por los puntos (**I y J**)\ fig.150**b**.

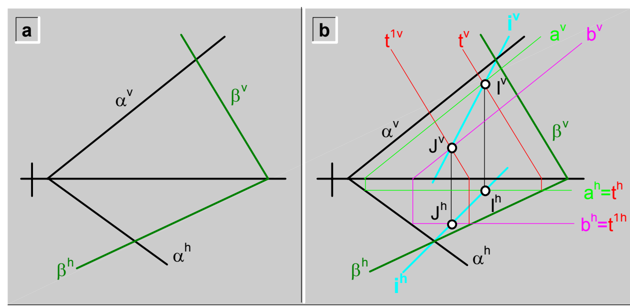


fig.150.\ Intersección (i), entre dos planos (α y β) definidos por trazas.

b) <u>El plano (α) está definido por sus trazas, y el plano (β) por las rectas (a y b) paralelas</u>\ fig.151**a**.

Solución:

La intersección (**I**) entre los planos (α y β), queda definida por los puntos de intersección (**I y J**) de las rectas (**a y b**) con el plano (α)\ fig.151**b**.

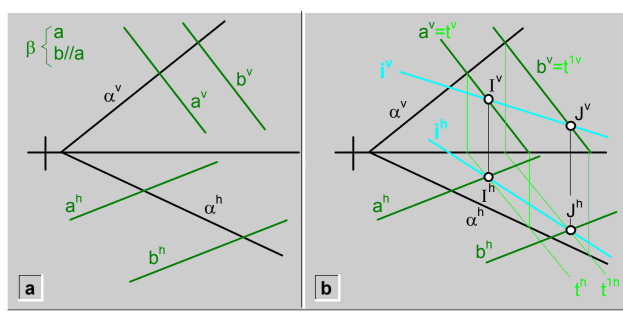


fig.151.\ Intersección (i), entre un plano (α) definido por trazas, y un plano (β) definido por rectas (a y b) paralelas.

c) <u>El plano (α) está definido por las rectas (f y h) características, y el plano (β) por las rectas (a y b) paralelas</u>\ fig.152**a**.

Solución:

La intersección (I) entre los planos (α y β), queda definida por los puntos de intersección (I y J) de las rectas (a y b) con el plano (α)\ fig.152b.

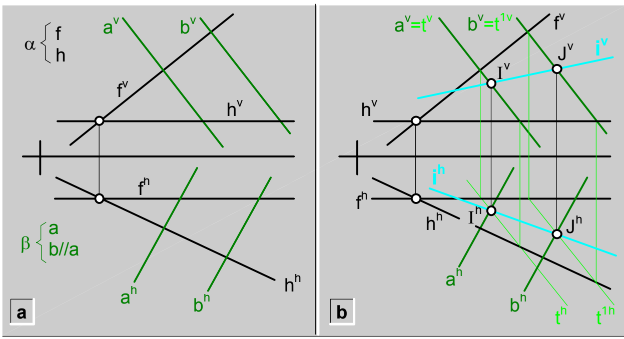


fig.152.\ Intersección (i), entre un plano (α) definido por rectas (f y h) características, y un plano (β) definido por rectas (a y b) paralelas.

d) <u>El plano (α) está definido por trazas, y el plano (β) es un plano que pasa por la línea de tierra y contiene al punto (A)\</u> fig.153a.

Solución:

1) Se traza, por el punto (A), una recta (r) cualquiera del plano (α); es decir, cualquier recta (r) que pase por el punto (A) y se corte con la línea de tierra\ fig.153b.

2) Se define la intersección (I) de la recta (r) con el plano (α).

3) Se define la intersección (J) del plano (α) con la línea de tierra.

4) Los puntos (I y J) están contenidos simultáneamente en los planos (α y β), por lo tanto definen a la recta de intersección (I) entre ambos planos.

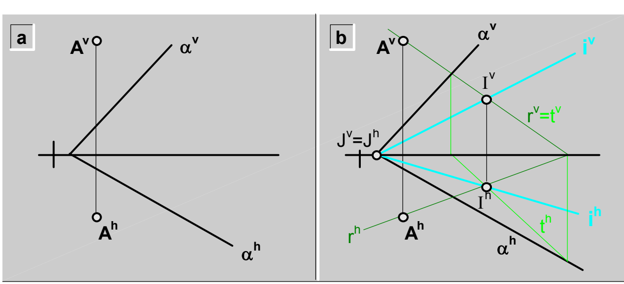


fig.153.\ Intersección (i) de un plano (α) definido por trazas, con un plano (β) que pasa por la línea de tierra y contiene a un punto (A).

<u>ANÁLISIS DE LA VISIBILIDAD EN LA INTERSECCIÓN DE DOS PLANOS.</u>

<u>**Ejemplo:** Definir la intersección y visibilidad entre el triángulo (A;B;C) y el cuadrilátero (1;2;3;4) contenido en el plano (1;2;3)\</u> fig.154a.

Solución:

a) Se define la proyección horizontal (1^h) del vértice (1), haciéndolo pertenecer al plano (1;2;3)\ fig.154b.

b) Se definen las intersecciones: (I) de la recta (A-B) con el cuadrilátero (1;2;3;4); y (J) de la recta (2-3) con el triángulo (A;B;C). El segmento (I-J) pertenece a los dos planos, y si está contenido en el primer cuadrante siempre es visible en ambas proyecciones\ fig.154c.

c) Se define la visibilidad de la intersección entre las dos figuras planas, por medio del análisis de visibilidad de la intersección de las rectas: (A-B) con el cuadrilátero (1;2;3;4); y (2-3) con el triángulo (A;B;C)\ fig.154d.

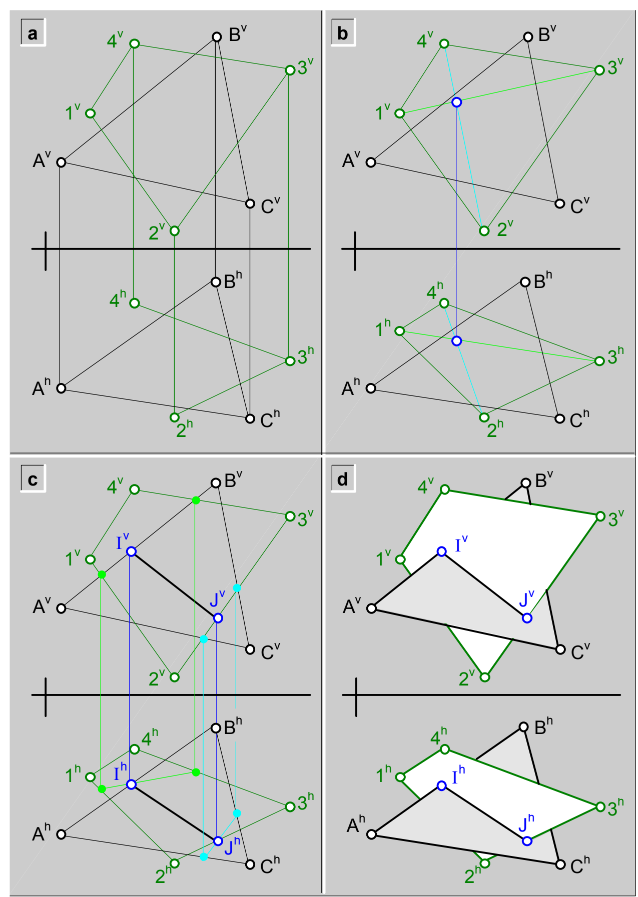


fig.154.\ Intersección y visibilidad de dos planos\ ejemplo.

INTERSECCIÓN DE TRES PLANOS.

La intersección de tres planos (α; β; y γ) es un punto (I). El cual se define interceptando, con el plano (γ), la recta de intersección (i) entre los planos (α y β)\ fig.155.

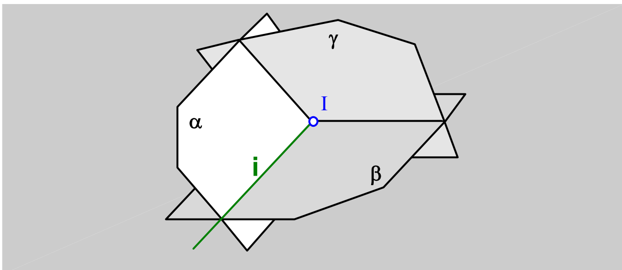


fig.155.\ Intersección (I) entre tres planos (α, β y γ).

Ejemplo: Definir la intersección (I) entre los planos (α; β; y γ)\ fig.156a.

Solución:

a) Se determina la intersección (i) entre los planos (α y β)\ fig.156b.

b) Se determina la intersección (I) de la recta (i) con el plano (γ)\ fig.156c.

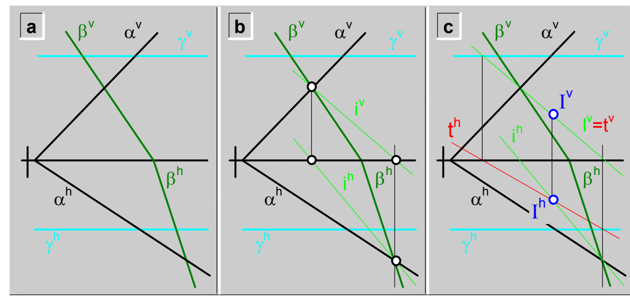


fig.156.\ Intersección (I) de tres planos\ ejemplo.

PARALELISMO.

PARALELISMO ENTRE RECTAS.

El paralelismo entre rectas, en Doble Proyección Ortogonal, tiene propiedad proyectiva. Por lo tanto si dos rectas (a y b) son paralelas, sus proyecciones verticales son paralelas ($a^v//b^v$) y sus proyecciones horizontales también son paralelas ($a^h//b^h$).

Ejemplo: Definir las proyecciones de la recta (a) que contiene al punto (A) y es paralela a la recta (r)\ fig.157a.

Solución:\ fig.157b.

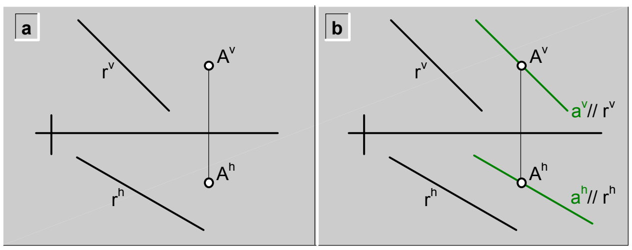


fig.157.\ Recta (a), paralela a otra recta (r).

PARALELISMO ENTRE RECTA Y PLANO.

Si una recta (r) es paralela a un plano (α), entonces existen en el plano (α) infinidad de rectas (a; b; c; d...) paralelas a la recta (r)\ fig.158a.

Para verificar el paralelismo entre una recta (r) y un plano (α) es suficiente comprobar la existencia de una recta (a) del plano (α) que sea paralela a la recta (r)\ fig.158b.

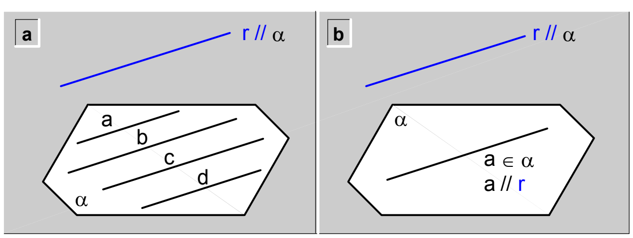


fig.158.\ Paralelismo entre recta (r) y un plano (α).

RECTA PARALELA A UN PLANO.

Ejemplo 1) Definir la proyección horizontal (r^h) de la recta (r), que contiene al punto (A) y es paralela al plano (α)\ fig.159a1.

Solución:

1) Se define la proyección horizontal (t^h) de la recta (t) que esta contenida en el plano (α), cuya proyección vertical (t^v) se tapa con la proyección vertical (r^v) de la recta (r).

2) Se traza, por la proyección horizontal (A^h) del punto (A), y paralela a la proyección horizontal (t^h) de la recta (t), la proyección horizontal (r^h) de la recta (r)\ fig.159a2.

Ejemplo 2) Definir la proyección vertical (r^v) de la recta (r), que contiene al punto (A) y es paralela al plano (α) de punta\ fig.159b1.

Solución:

La proyección vertical (t^v) de cualquier recta (t) del plano (α) de punta coincide con la proyección vertical (α^v) de su traza vertical ($\alpha^v=t^v$). Por lo tanto la proyección vertical (r^v) de la recta (r), pasa por la proyección vertical (A^v) del punto (A) y es paralela a la proyección vertical (α^v) de la traza vertical del plano (α)\ fig.159b2.

Ejemplo 3) Definir la proyección horizontal (r^h) de la recta (r), que contiene al punto (A) y es paralela al primer bisector\ fig.159c1.

Solución:

Las proyecciones vertical (t^v) y horizontal (t^h) de la recta (t) contenida en el Primer Bisector, cuya proyección vertical (t^v) coincide con la proyección vertical (r^v) de la recta (r) son simétricas con respecto a la línea de tierra. Por lo tanto la proyección horizontal (r^h) de la recta (r), pasa por la proyección horizontal (A^h) del punto (A) y ambas proyecciones de la recta (r) forman con la línea de tierra el mismo ángulo (α^o)\ fig.159c2.

Ejemplo 4) Definir la proyección horizontal (r^h) de la recta (r), que contiene al punto (A) y es paralela al segundo bisector\ fig.159d1.

Solución:

Las proyecciones de la recta (t) que esta contenida en el Segundo Bisector y cuya proyección vertical (t^v) coincide con la proyección vertical (r^v) de la recta (r) son coincidentes ($r^v=t^v=t^h$). Por lo tanto la proyección horizontal (r^h) de la recta (r), pasa por la proyección horizontal (A^h) del punto (A) y es paralela a la proyección vertical (r^v) de la recta (r)\ fig.159d2.

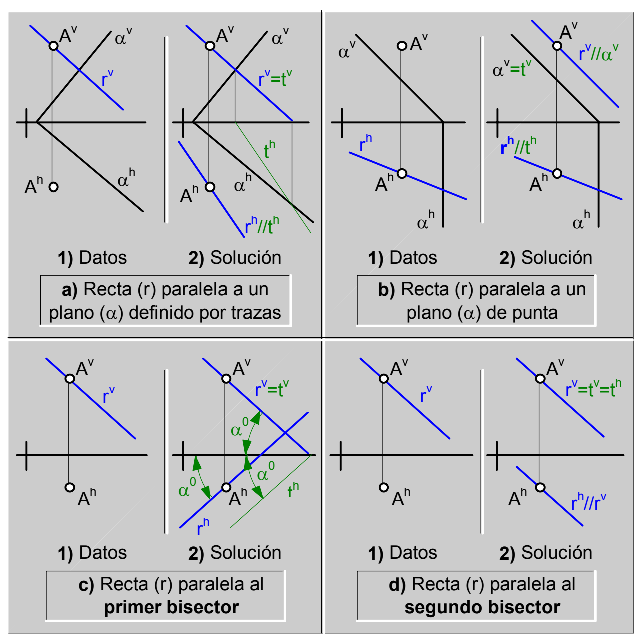


fig.159.\ Recta (r) paralela a un plano (α)\ ejemplos.

PLANO PARALELO A UNA RECTA.

Ejemplo: Definir el plano (α), que contiene a la recta (a) y es paralelo a la recta (r)\ fig.160**a**.

Solución:

Para definir este plano (α) debe trazarse, por cualquier punto (P) de la recta (**a**), una recta (**b**) paralela a la recta (r), quedando el plano (α) definido por las rectas (**a** y **b**) que se cortan\ fig.160**b**.

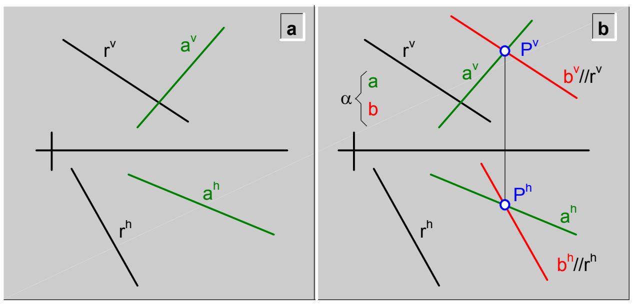


fig.160.\ Plano (α), paralelo a una recta (r)\ ejemplo.

RECTA PARALELA A DOS PLANOS.

Una recta (r) es paralela a dos planos (α y β) si es paralela a la intersección (i) entre ambos planos\ fig.161.

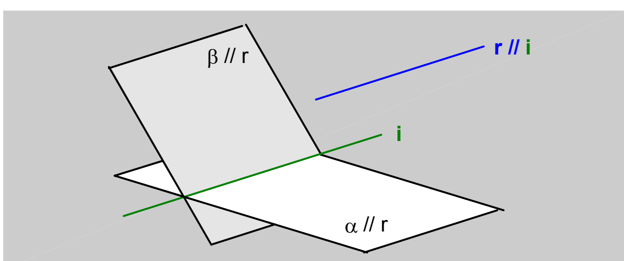


fig.161.\ Recta (r) paralela a dos planos (α y β).

Ejemplo: Definir las proyecciones de la recta (r) que pasa por el punto (A) y es paralela a los planos (α y β)\ fig.162a.

Solución:

Se define la intersección (i) entre los planos (α y β), y se traza, por el punto (A) la recta (r) paralela a la recta (i)\ fig.162**b**.

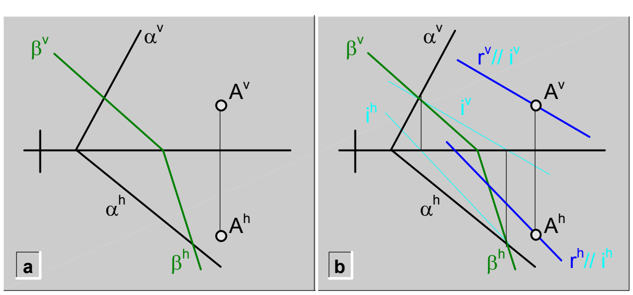


fig.162.\ Recta (r) paralela a dos planos (α y β)\ ejemplo.

PARALELISMO ENTRE PLANOS.

Si dos planos (α y β) son paralelos, entonces todas las rectas (a; b; c;...) del plano (α) son paralelas al plano (β), y todas las rectas (a^1; b^1; c^1;...) del plano (β) son paralelas al plano (α)\ fig.163**a**.

Para verificar el paralelismo entre dos planos (α y β) es suficiente comprobar que dos rectas (**a** y **b**) no paralelas, de uno de ellos (α) sean paralelas al otro (β)\ fig.163**b**.

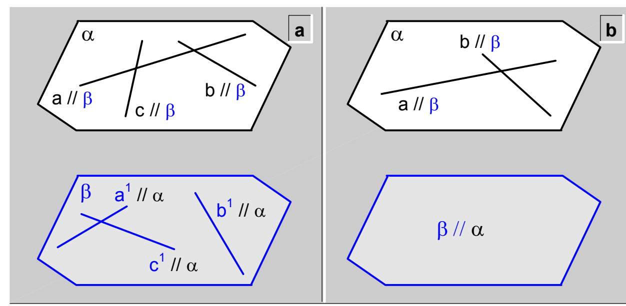


fig.163.\ Paralelismo entre planos.

Ejemplo 1) Definir el plano (β) que contiene al punto (A) y es paralelo al plano (α) definido por las rectas (a y b)\ fig.164a.

Solución:

El plano (β) se define por medio de las rectas (**a**^{1} y **b**^{1}) que pasan por el punto (A) y son paralelas a las rectas (**a** y **b**) respectivamente\ fig.164**b**.

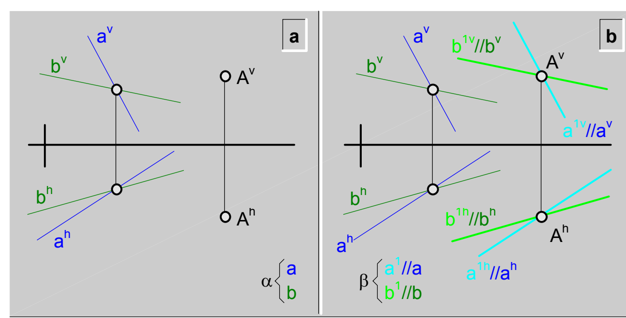


fig.164.\ Paralelismo entre planos\ ejemplo 1.

Ejemplo 2) Definir las trazas del plano (β) que contiene al punto (A) y es paralelo al plano (α)\ fig.165a.

Solución: Se define inicialmente el plano (β) por medio de las rectas características (**f** y **h**), que pasan por el punto (A) y son paralelas a las trazas vertical y horizontal del plano (α) respectivamente. Y luego se definen las trazas del plano (β) por medio de sus rectas características (**f** y **h**)\ fig.165**b**.

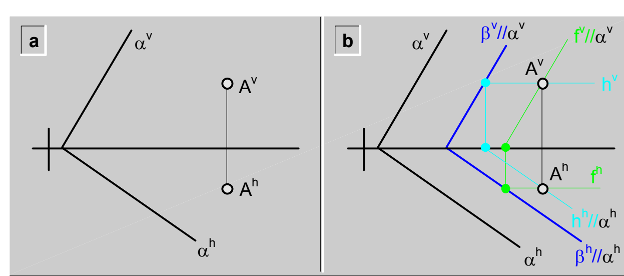


fig.165.\ Paralelismo entre planos\ ejemplo 2.

PERPENDICULARIDAD.

PERPENDICULARIDAD ENTRE RECTAS.

El ángulo recto, en proyección ortogonal, tiene propiedad proyectiva cuando por lo menos una de las rectas que lo definen es paralela al plano de proyección.

En la fig.166**a**, se muestra una escuadra paralela a un plano (α) de proyección, los catetos (**a** y **b**) definen un ángulo recto, el cual se proyecta ortogonalmente sin deformación sobre el plano (α) por ser ambos catetos paralelos a este plano.

Si esta escuadra se gira a través de su cateto (**a**) (fig.166**b**), el cateto (**b**) deja de ser paralelo al plano (α), pero el ángulo recto sigue proyectándose sin deformación, por que el cateto (**a**) sigue siendo paralelo al plano de proyección (α).

En la fig.166**c**, donde la escuadra se gira a través de su hipotenusa (**h**), puede observarse que el ángulo recto es deformado al proyectarse, debido a que las dos rectas (**a** y **b**) que lo definen dejan de ser paralelas al plano (α) de proyección.

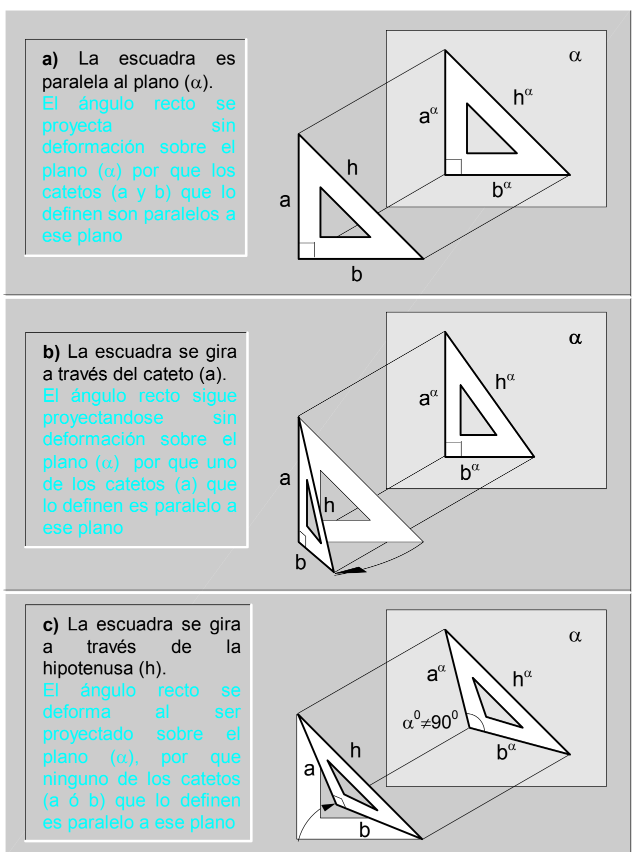


fig.166.\ Propiedad proyectiva del ángulo recto.

En Proyección Diédrica, para que el ángulo recto se proyecte sin deformación, por lo menos una de la rectas que lo definen debe ser:

a) frontal (f) (paralela al plano vertical de proyección). En este caso se proyecta el ángulo recto sin deformación sobre el plano vertical de proyección (véase el ejemplo de la fig.167**a**).

b) horizontal (h) (paralela al plano horizontal de proyección). En este caso se proyecta el ángulo recto sin deformación sobre el plano horizontal de proyección) (véase el ejemplo de la fig.167**b**).

<u>**Ejemplo 1:** Definir las proyecciones de la recta (r) que contiene al punto (A) y es perpendicular a la recta frontal (f).</u>\ fig.167**a1**.

Solución:

a) Las proyecciones verticales de las rectas (f y r) son perpendiculares ($f^v \perp r^v$), ya que la recta frontal (f) es paralela al plano vertical de proyección. Por lo tanto se traza, por la proyección vertical (A^v) del punto (A), y perpendicular a la proyección vertical (f^v) de la recta (f), la proyección vertical (r^v) de la recta (r)\ fig.167**a2**.

b) Se definen las proyecciones vertical (P^v) y horizontal (P^h) del punto (P) de corte entre las rectas (f y r).

c) La proyección horizontal (r^h) de la recta (r) queda definida por las proyecciones horizontales (A^h y P^h) de los puntos (A y P).

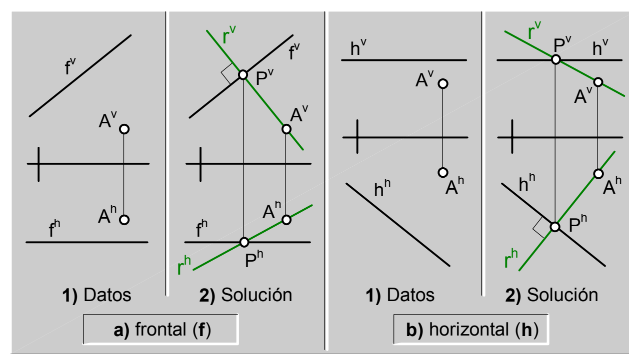


fig.167.\ Definir las proyecciones de la recta (r) que contiene al punto (A) y es perpendicular a la recta...

<u>**Ejemplo 2:** Definir las proyecciones de la recta (r) que contiene al punto (A) y es perpendicular a la recta horizontal (h).</u>\ fig.167**b1**.

Solución:

a) Las proyecciones horizontales de las rectas (h y r) son perpendiculares ($h^h \perp r^h$), ya que la recta horizontal (h) es paralela al plano horizontal de proyección. Por lo tanto se traza, por la proyección horizontal (A^h) del punto (A), y perpendicular a la proyección horizontal (h^h) de la recta (h), la proyección horizontal (r^h) de la recta (r)\ fig.167**b2**.

b) Se definen las proyecciones horizontal (P^h) y vertical (P^v) del punto (P) de corte entre las rectas (h y r).

c) La proyección vertical (r^v) de la recta (r) queda definida por las proyecciones verticales (A^v y P^v) de los puntos (A y P).

RECTAS PERPENDICULARES Y RECTAS ORTOGONALES.

Dos rectas se denominan **perpendiculares** si se cortan formando un ángulo recto y **ortogonales** si forman un ángulo recto pero no se cortan.

Para mayor comprensión, obsérvese el paralelepípedo mostrado en la fig.168**a**, en el cual sus aristas (**a** y **b**) son perpendiculares; mientras que las aristas (**a** y **c**) son ortogonales al igual que las aristas (**b** y **c**).

En la fig.168**b1**, se muestra, la doble proyección ortogonal, de una recta (r) ortogonal a una recta frontal (f). Y en la fig.168**b2**, de una recta (r) ortogonal a una recta horizontal (h).

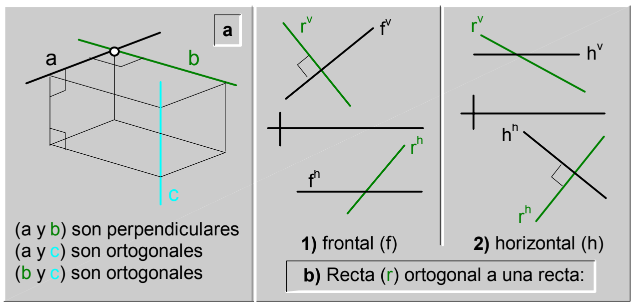


fig.168.\ Perpendicularidad y ortogonalidad.

PERPENDICULARIDAD ENTRE RECTA Y PLANO.

Si una recta (r) es perpendicular a un plano (α), entonces todas las rectas del plano (α) son perpendiculares, ú ortogonales, a la recta (r)\ fig.169.

Para verificar la perpendicularidad entre una recta (r) y un plano (α),es suficiente comprobar que dos rectas (**a** y **b**) no paralelas del plano (α) sean perpendiculares, ú ortogonales, a la recta (r).

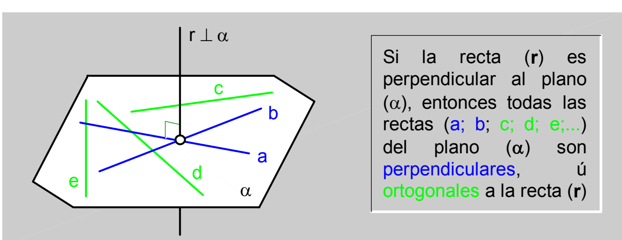


fig.169.\ Recta (r) perpendicular a un plano (α).

Ejemplo 1: Definir las proyecciones de la recta (r) que contiene al punto (A) y es perpendicular al plano (α)\ fig.170**a**.

Solución:

a) La recta (r) es ortogonal a la traza vertical (f) del plano (α), y por estar esta última contenida en el plano vertical de proyección, el ángulo recto entre ambas rectas se proyecta verticalmente sin deformación, por lo tanto se dibuja ($r^v \perp \alpha^v$)\ fig.170**b**.

b) La recta (r) es también ortogonal a la traza horizontal (h) del plano (α), y por estar esta última contenida en el plano horizontal de proyección, el ángulo recto entre ambas rectas se proyecta horizontalmente sin deformación, por lo tanto se dibuja ($r^h \perp \alpha^h$)\ fig.170**c**.

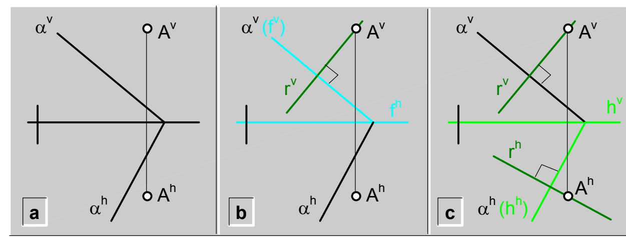


fig.170.\ Recta (r), que contiene a un punto (A) y es perpendicular a un plano (α), definido por trazas.

Ejemplo 2: Definir las proyecciones de la recta (r) que contiene al punto (A) y es perpendicular al plano (α)\ fig.171**a**.

Solución:

a) La recta (r) es ortogonal a la recta característica frontal (f) del plano (α), y por ser esta última paralela al plano vertical de proyección, el ángulo recto entre ambas rectas se proyecta verticalmente sin deformación, por lo tanto se dibuja ($r^v \perp f^v$)\ fig.171**b**.

b) La recta (r) es también ortogonal a la recta característica horizontal (**h**) del plano (α), y por ser esta última paralela al plano horizontal de proyección, el ángulo recto entre ambas rectas se proyecta horizontalmente sin deformación, por lo tanto se dibuja ($r^h \perp h^h$)\ fig.171**c**.

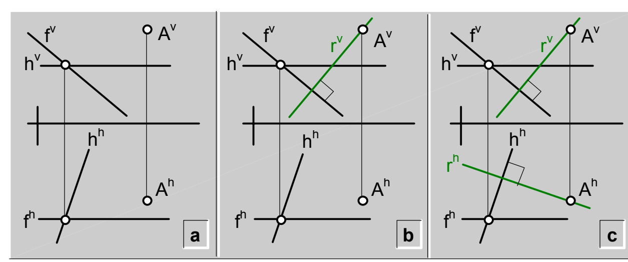


fig.171.\ Recta (r), que contiene a un punto (A) y es perpendicular a un plano (α), definido por rectas características

PLANO PERPENDICULAR A UNA RECTA.

Ejemplo: Definir el plano (α) que contiene al punto (A) y es perpendicular a la recta (r)\ fig.172a.

Solución:

a) Se traza, por el punto (A) y ortogonal a la recta (r), la recta característica frontal (f) del plano (α)\ fig.172**b**.

b) Se traza, por el punto (A) y ortogonal a la recta (r), la recta característica horizontal (**h**) del plano (α)\ fig.172**c**.

El plano (α) queda definido por sus rectas características frontal (f) y horizontal (h), que se cortan en el punto (A) y son ortogonales a la recta (r); siendo en consecuencia el plano (α) perpendicular a la recta (r).

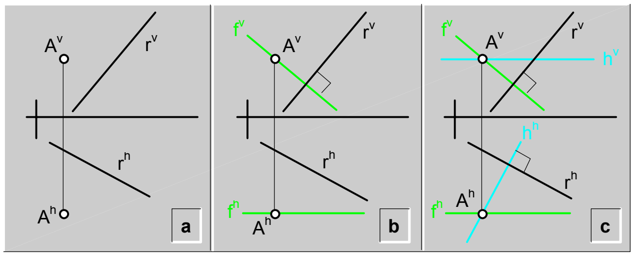


fig.172.\ Plano (α), que contiene a un punto (A) y es perpendicular a una recta (r).

RECTA PERPENDICULAR A OTRA RECTA.

Para definir las proyecciones de una recta (b) que pase por un punto (P) y sea perpendicular a otra recta (a)\ fig.173a:

a) Se traza por el punto (P) un plano (α) perpendicular a la recta (a) y se determina la intersección (I) entre la recta (a) y el plano (α)\ fig.173b.

b) La recta (b) queda definida por los puntos (P) e (I)\ fig.173c.

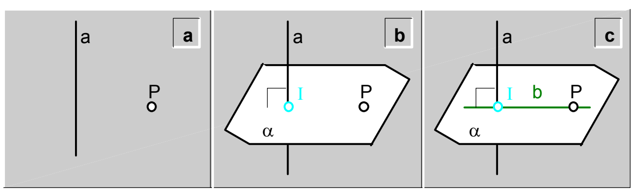


fig.173.\ Recta (b), que contiene a un punto (P), y es perpendicular a otra recta (a).

<u>**Ejemplo:** Definir las proyecciones de la recta (b), que contiene al punto (P) y es perpendicular a la recta (a)</u>\ fig.174a.

Solución:

a) Se define, por medio de las rectas características (f y h), el plano (α), que contiene al punto (P) y es perpendicular a la recta (a); y se determina la intersección (I) entre el plano (α) y la recta (a)\ fig.174b.

b) La recta (b) queda definida por los puntos (P e I)\ fig.174c.

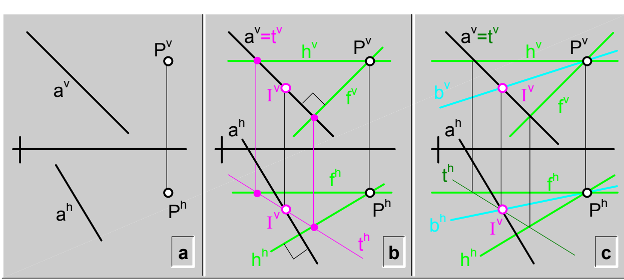


fig.174.\ Recta (b), que contiene a un punto (P), y es perpendicular a otra recta (a)\ ejemplo.

RECTAS DE MÁXIMA PENDIENTE DE UN PLANO.

Son las rectas (p) de un plano (α) perpendiculares a todas las rectas horizontales del mismo, y en consecuencia perpendiculares a su traza horizontal (h)\ fig.175.

El ángulo (α^o) que forman con el plano horizontal de proyección las rectas (p) de máxima pendiente de un plano (α), es igual al ángulo (α^o) que forma el plano (α) con el plano horizontal de proyección.

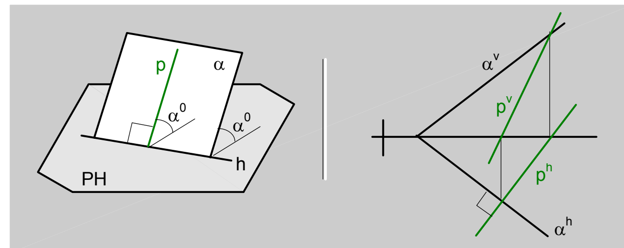


fig.175.\ Recta (p) de máxima pendiente de un plano (α).

RECTAS DE MÁXIMA INCLINACIÓN DE UN PLANO.

Son las rectas (i) de un plano (α) perpendiculares a todas las rectas frontales del mismo, y en consecuencia son perpendiculares a su traza vertical (f) \ fig.176.

El ángulo (β^o) que forman con el plano vertical de proyección las rectas de máxima inclinación (i) de un plano (α), es igual al ángulo (β^o) que el plano (α) forma con el plano vertical de proyección.

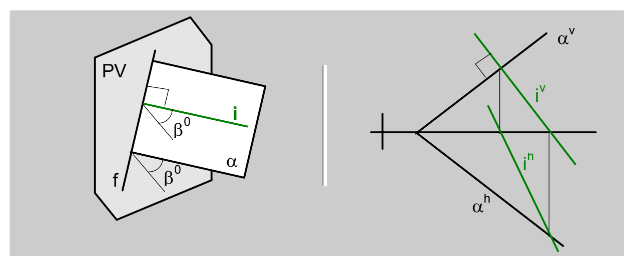


fig.176.\ Recta (i) de máxima inclinación de un plano (α).

Un plano (α) puede ser definido por una sola recta, si esta es de máxima pendiente (p); o de máxima inclinación (i).

<u>**Ejemplo 1:** Definir las trazas del plano (α), sabiendo que la recta (p) es una de sus rectas de máxima pendiente</u>\fig.177a1.

Solución:

a) Se definen las trazas vertical (V) y horizontal (H) de la recta (p)\ fig.177a2.

b) Se traza, por el punto (H^h), y perpendicular a la recta (p^h), la proyección horizontal (α^h) de la traza horizontal del plano (α).

c) La proyección vertical (α^v) de la traza vertical del plano (α), pasa por el punto (V^v) y se corta en la línea de tierra con la recta (α^h).

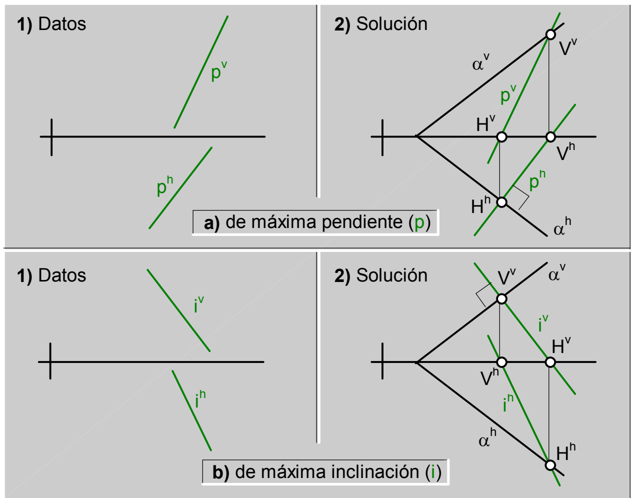


fig.177.\ Determinar las trazas del plano (α) definido por la recta...

<u>**Ejemplo 2:** Definir las trazas del plano (α), sabiendo que la recta (i) es una de sus rectas de máxima inclinación</u>\fig.177b1.

Solución:

a) Se definen las trazas vertical (V) y horizontal (H) de la recta (i)\ fig.177b2.

b) Se traza, por el punto (V^v), y perpendicular a la recta (i^v), la proyección vertical (α^v) de la traza vertical del plano (α).

c) La proyección horizontal (α^h) de la traza horizontal del plano (α), pasa por el punto (H^h) y se corta en la línea de tierra con la recta (α^v).

PERPENDICULARIDAD ENTRE PLANOS.

Para verificar la perpendicularidad entre dos planos (α y β) es suficiente comprobar la existencia en uno de ellos (α) de una recta (r) que sea perpendicular al otro (β)

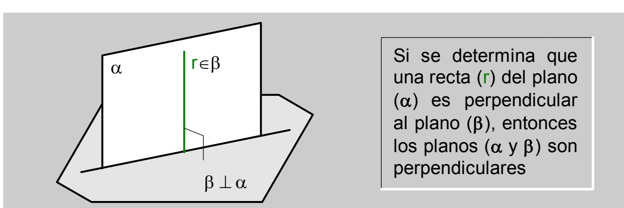


fig.178.\ Perpendicularidad entre planos.

<u>**Ejemplo:** Definir el plano (β) que contiene a la recta (a) y es perpendicular al plano (α)</u>\ fig.179a.

Solución:

Se traza, por cualquier punto (A) de la recta (a), una recta (b) perpendicular al plano (α), y el plano (β) queda definido por las rectas (a y b) que se cortan\ fig.179b.

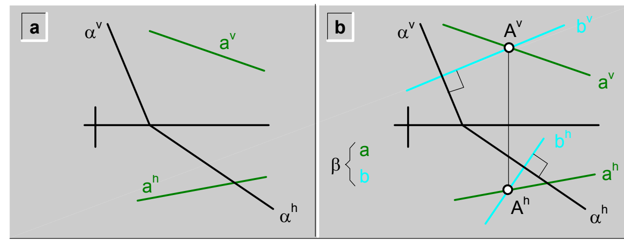


fig.179.\ Plano (β), que contiene a una recta (a), y es paralelo a otro plano (α).

PLANO PERPENDICULAR A OTROS DOS.

Un plano (γ) es perpendicular a otros dos planos (α y β) si es perpendicular a la intersección (i) entre ellos\ fig.180.

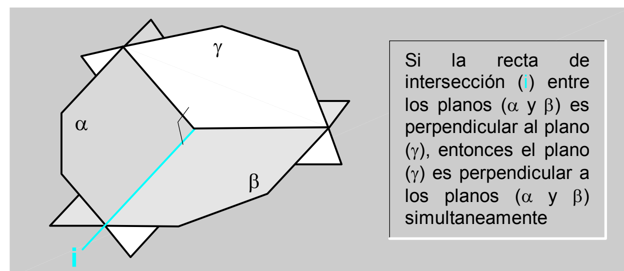


fig.180.\ Plano (γ) perpendicular a los planos (α y β).

<u>**Ejemplo:** Definir el plano (γ) que contiene al punto (A) y es perpendicular a los planos (α y β)</u>\ fig.181a.

Solución:

a) Se define la intersección (i) entre los planos (α y β)\ fig.181b.

b) Se define el plano (β) por medio de sus rectas características (f y h) que pasan por el punto (A) y son ortogonales a la recta de intersección (i) entre los planos (α y β)\ fig.181c.

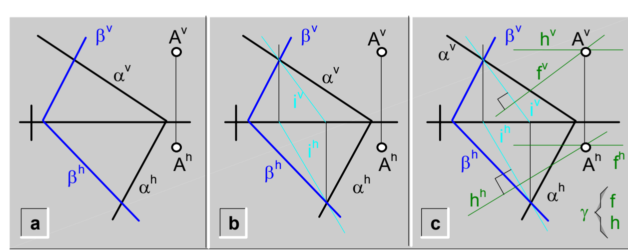


fig.181.\ Plano (γ), que contiene a un punto (A), y es perpendicular a los planos (α y β).

capítulo 5

problemas métricos.

En este capítulo se analizan los procedimientos por medio de los cuales pueden determinarse, en Doble Proyección Ortogonal, distancias lineales ó angulares entre puntos rectas y planos.

La comprensión de los problemas métricos básicos aquí analizados capacitará al estudiante para resolver cualquier problema relacionado con las dimensiones de los objetos que esté proyectando.

No debe iniciarse el estudio de este capítulo sin comprender el anterior, pues la resolución de los problemas métricos aquí planteados requiere de la aplicación de los conceptos de intersección, paralelismo y perpendicularidad ya expuestos.

PROBLEMAS MÉTRICOS.

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.

La distancia (d_{A-B}) entre dos puntos (A y B), se determina por medio de un triángulo de rebatimiento vertical (fig.182**a**) ú horizontal (fig.182**b**).

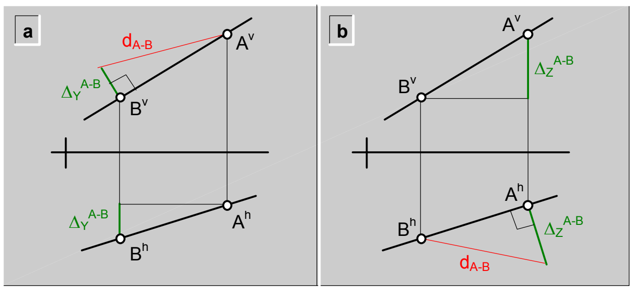


fig.182.\ Distancia (d_{A-B}) entre dos puntos (A y B).

DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y UN PLANO.

Para determinar la distancia ($d_{A-\alpha}$) entre un punto (A) y un plano (α) (fig.183**a**), se traza por el punto (A) una recta (p) perpendicular al plano (α) y se determina la intersección (I) entre ambos. La distancia (d_{A-I}) entre los puntos (A e I) es igual a la distancia ($d_{A-\alpha}$) entre el punto (A) y el plano (α)\ fig.183**b**.

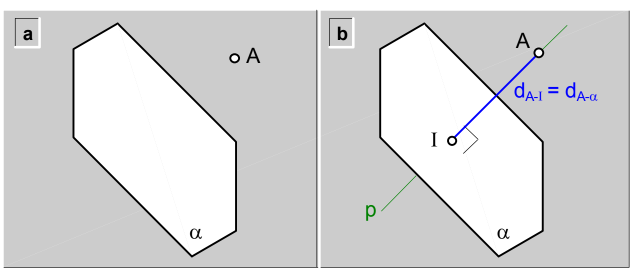


fig.183.\ Distancia ($d_{A-\alpha}$) entre un punto (A) y un plano (α).

Ejemplo: Definir la distancia entre el punto (A) y el plano (α)\ fig.184**a**:

Solución:

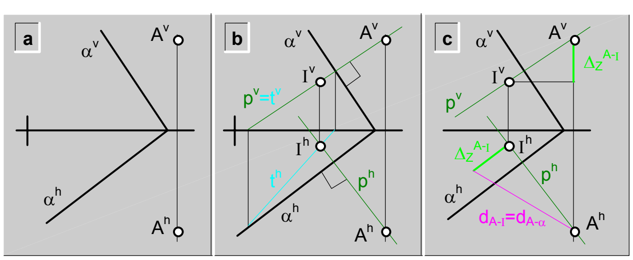


fig.184.\ Distancia ($d_{A-\alpha}$) entre un punto (A) y un plano (α)\ ejemplo.

a) Se traza, por el punto (A), la recta (p) perpendicular al plano (α), y se determina la intersección (I), entre la recta (p) y el plano (α)\ fig.184**b**.

b) Se determina la distancia (d_{A-I}) entre los puntos (A e I); la cual es igual a la distancia ($d_{A-\alpha}$) entre el punto (A) y el plano (α)\ fig.184**c**.

DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y UNA RECTA.

Para determinar la distancia (d_{A-r}) entre un punto (A) y una recta (r) (fig.185**a**): se traza, por el punto (A), un plano (α) perpendicular a la recta (r), y se determina la intersección (I) entre ambos. La distancia (d_{A-I}) entre los puntos (A e I), es igual a la distancia (d_{A-r}) entre el punto (A) y la recta (r)\ fig.185**b**.

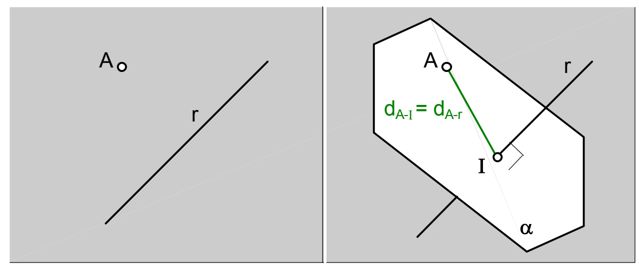


fig.185.\ Distancia (d_{A-r}) entre un punto (A) y una recta (r).

Ejemplo: Definir la distancia entre el punto (A) y la recta (r)\ fig.186**a**:

Solución:

a) Se define, por medio de las rectas características (**f** y **h**), el plano (α), que contiene al punto (A) y es perpendicular a la recta (r), y se determina la intersección (I), entre la recta (r) y el plano (α)\ fig.186**b**.

b) Se determina la distancia (d_{A-I}) entre los puntos (A e I); la cual es igual a la distancia (d_{A-r}) entre el punto (A) y la recta (r)\ fig.186**c**.

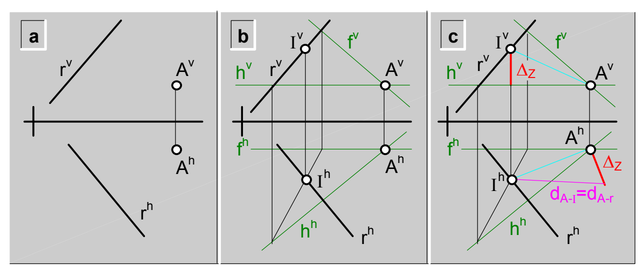


fig.186.\ Distancia (d_{A-r}) entre un punto (A) y una recta (r)\ ejemplo.

DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN.

Para determinar la distancia (d_{a-b}) entre dos rectas (a y b) que se cruzan\ fig.187**a**:

a) Se define un plano (α) que contenga a una de ellas (b) y se paralelo a la otra (a); para ello se traza por cualquier punto (1) de la recta (b) una recta (a^1) paralela a la recta (a). De esta forma el plano (α) queda definido por las rectas (a^1 y b) que se cortan y es paralelo a la recta (a)\ fig.187**b**

b) Por cualquier punto (2) de la recta (a) se traza una recta (p) perpendicular al plano (α) y se determina su intersección (I) con este plano. La distancia ($d_{2\text{-}I}$) entre los puntos (2 e I) es igual a la distancia ($d_{a\text{-}b}$) entre las rectas (a y b)\ fig.187c.

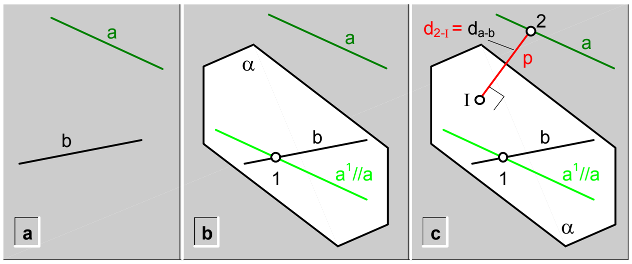


fig.187.\ Distancia ($d_{a\text{-}b}$) entre dos rectas (a y b) que se cruzan.

<u>**Ejemplo:** Determinar la distancia ($d_{a\text{-}b}$) entre las rectas (a y b) que se cruzan</u>\ fig.188a.

Solución:

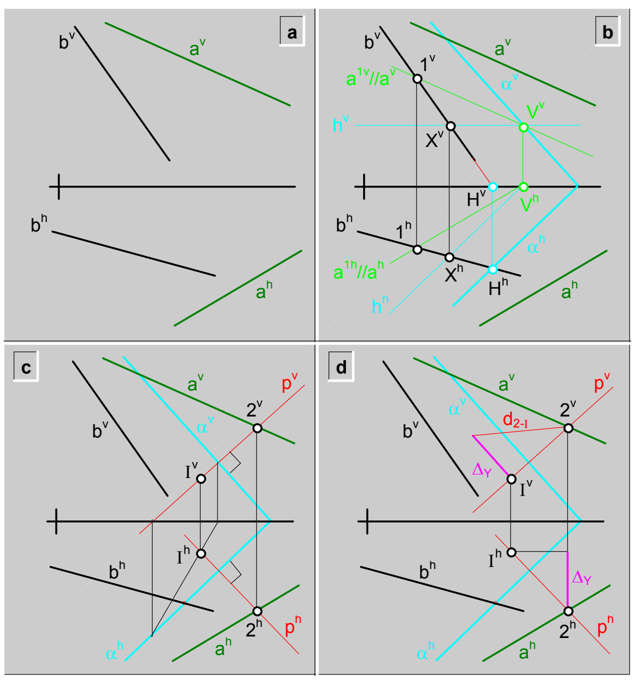


fig.188.\ Distancia ($d_{a\text{-}b}$) entre dos rectas (a y b) que se cruzan\ ejemplo.

a) Se define el plano (α) que contiene a la recta (b) y es paralelo a la recta (a); para ello\ fig.188b:

1) Por cualquier punto (1) de la recta (b) se traza una recta (a^1) paralela a la recta (a). Las rectas (a^1 y b) definen al plano (α); pero este plano debe definirse por trazas (o rectas características), para poder posteriormente trazar la recta (p) perpendicular a el. Para definir entonces las trazas del plano (α):

i) Por la traza vertical (V) de la recta (a^1) se traza la recta horizontal (h) del plano (α) (se define primero su proyección vertical (h^v) y luego la horizontal (h^h)).

ii) Se dibuja, por la traza horizontal (H) de la recta (b), y paralela a la recta horizontal (h), la traza horizontal del plano (α).

iii) Se dibuja, por la traza vertical (V) de de la recta (h) y cortándose en la línea de tierra con la traza horizontal del plano (α), la traza vertical del plano (α).

b) Por un punto (2) cualquiera de la recta (a) se traza una recta (p) perpendicular al plano (α) y se determina su intersección (I) con el mismo\ fig.188c.

c) Se determina la distancia ($d_{2\text{-}I}$) entre los puntos (2 e I) la cual es igual a la distancia ($d_{a\text{-}b}$) entre las rectas (a y b)\ fig.188d.

<u>PERPENDICULAR COMÚN A DOS RECTAS QUE SE CRUZAN.</u>

Para trazar la recta (c) que sea perpendicular a dos rectas (a y b) que se cruzan\ fig.187a:

a) Se realiza, solo hasta la determinación del punto (I), el procedimiento descrito anteriormente (ver fig.187b y fig.187c) para medir la distancia entre las rectas (a y b) que se cruzan.

b) Se traza, por el punto (I), la recta (a^2) paralela a la recta (a), y se determina el punto (3) de corte entre las rectas (a^2 y b)\ fig.189a.

c) Se traza, por el punto (3) la recta (c) paralela a la recta (p). Esta recta (c) es perpendicular a las rectas (a y b) simultáneamente\ fig.189b.

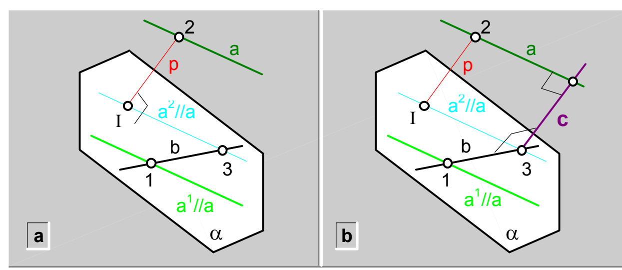


fig.189.\ Perpendicular común (c) a dos rectas (a y b) que se cruzan.

<u>**Ejemplo:** Definir la perpendicular común (c) a las rectas (a y b), del ejemplo mostrado en la fig.188a:</u>

Solución:

a) Se realizan los pasos **a** y **b**, del mismo ejemplo (fig.188b y fig.188c) determinando igualmente las proyecciones del punto (I).

b) Se traza, por el punto (I), la recta (a^2) paralela a la recta (a), y se determina el punto (3) de corte entre las rectas (a^2 y b)\ fig.190a

c) Se traza, por el punto (3), la recta (c) paralela a la recta (p); resultando esta recta (c) perpendicular a las rectas (a y b) simultáneamente\ fig.190b.

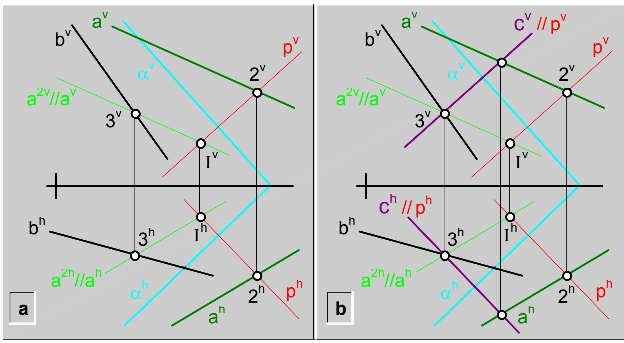


fig.190.\ Perpendicular común (c) a dos rectas (a y b) que se cruzan\ ejemplo.

ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS QUE SE CORTAN.

Para medir el ángulo (α^o) entre dos rectas (**a** y **b**) que se cortan en un punto (**P**)\ fig.191**a**:

a) Se traza una recta (**c**) cualquiera que se corte con las rectas (**a** y **b**), y se determinan los puntos (**1** y **2**) de corte de la recta (**c**) con la rectas (**a** y **b**) respectivamente. Se determinan las longitudes reales (d_{1-2}; d_{p-1}; y d_{p-2}) de los tres lados del triángulo cuyos vértices son los puntos (**P**; **1** y **2**)\ fig.191**b**.

b) Se dibuja, en un sitio aparte, el triángulo de vértices (**P**; **1** y **2**) en su verdadero tamaño, y se mide el ángulo (α^o), cuyo vértice es el punto (**P**)\ fig.191**c**.

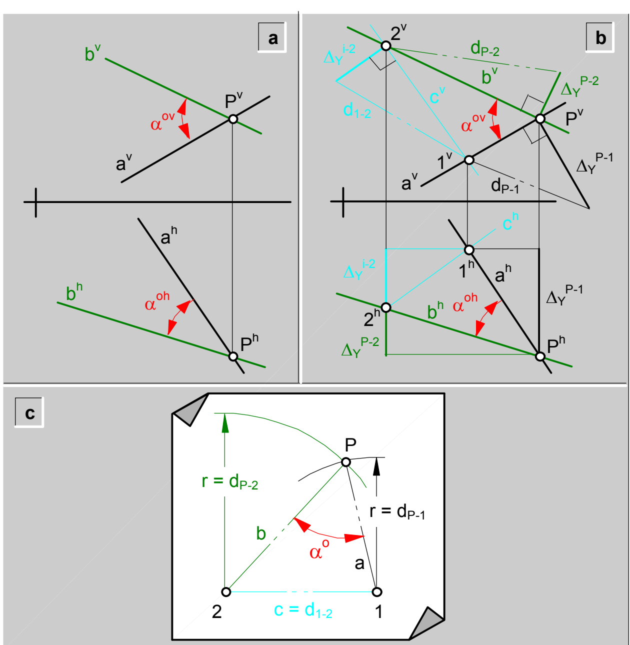


fig.191.\ Ángulo (α^0) entre dos rectas (a y b) que se cortan.

ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN.

Para determinar el ángulo (α^o) entre dos rectas (**a** y **b**) que se cruzan\ fig.192**a**:

a) Por cualquier punto (**P**) de la recta (**a**) se traza la recta (**b**^{1}) paralela a la recta (**b**)\ fig.192**b**.

b) Se mide, utilizando el procedimiento ya descrito en la fig.191, el ángulo (α^o) (mostrado en la fig.192b) que forman las rectas (**a** y **b**^{1}) que se cortan, el cual es igual al ángulo (α^o) de cruce entre las rectas (**a** y **b**).

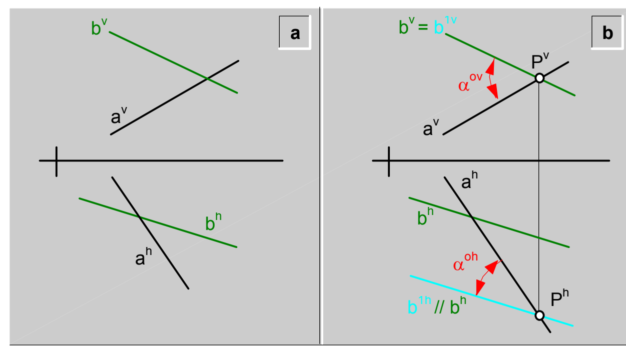


fig.192.\ Ángulo (α^0) entre dos rectas (a y b) que se cruzan.

ÁNGULO ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO.

Para medir el ángulo (α^o) entre una recta (**r**) y un plano (α)\ fig.193**a**:

a) Se determina la intersección (**I**) entre el plano (α) y la recta (**r**)\ fig.193**b**.

b) Se traza, por un punto cualquiera (**X**) de la recta (**r**), una recta (**p**) perpendicular al plano (α) y se determina la Intersección (**J**) entre la recta (**p**) y el plano (α). Los puntos (**I** y **J**) definen una recta (**a**).

c) El ángulo (α^o) que forman las rectas (**r** y **a**) es igual al ángulo que forma la recta (**r**) con el plano (α).

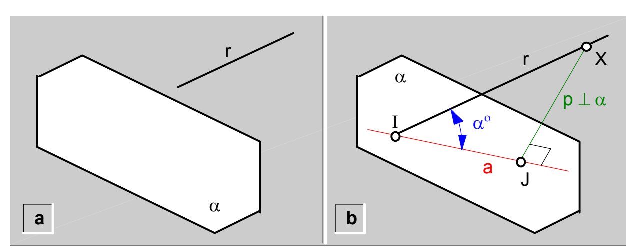


fig.193.\ Ángulo (α^0) entre una recta (r) y un plano (α).

__Ejemplo:__ __Determinar el ángulo (α^o) formado entre la recta (r) y el plano (α)__\ fig.194**a**:

Solución:

a) Se define la intersección (I) entre el plano (α) y la recta (r). Y se traza por un punto (X) cualquiera de la recta (r) una recta (p) perpendicular al plano (α)\ fig.194**b**.

b) Se determina la intersección (J) de la recta (p) con el plano (α), y se definen las proyecciones de la recta (a) que contiene a los puntos (I y J)\ fig.194**c**.

c) Se mide, utilizando el procedimiento ya descrito en la fig.191, el ángulo (α°) (mostrado en la fig.194**d**) formado entre las rectas (r y a) que se cortan, el cual es igual al ángulo que forma la recta (r) con el plano (α).

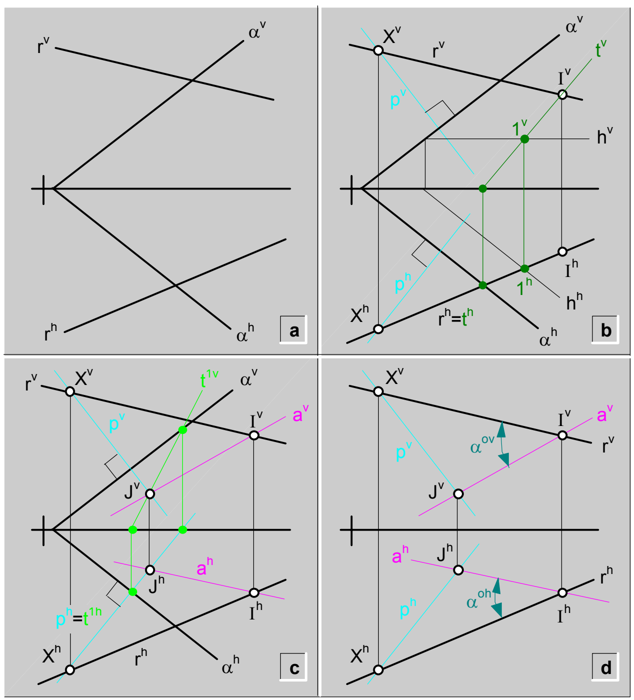


fig.194.\ Ángulo (α°) entre una recta (r) y un plano (α)\ ejemplo.

ÁNGULO ENTRE DOS PLANOS.

Para medir el ángulo (α°) entre dos planos (α y β) (fig.195**a**), se trazan, por un punto (P) cualquiera, las rectas (**a** y **b**) perpendiculares a los planos (α y β) respectivamente. El ángulo (α°) que forman las rectas (**a** y **b**) es igual al ángulo que forman los planos (α y β)\ fig.195**b**.

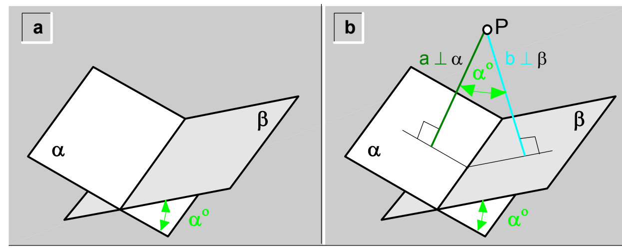


fig.195.\ Ángulo (α°) entre dos planos (α y β).

Ejemplo: Determinar el ángulo (α°) formado entre los planos (α y β)\ fig.196**a**:

Solución:

a) Se trazan, por un punto (P) cualquiera, las rectas (**a** y **b**) perpendiculares a los planos (α y β) respectivamente\ fig.196**b**.

b) Se mide, utilizando el procedimiento ya descrito en la fig.191, el ángulo (α°) (mostrado en la fig.196**c**) que forman las rectas (**a** y **b**) que se cortan, el cual es igual al ángulo que forman los planos (α y β).

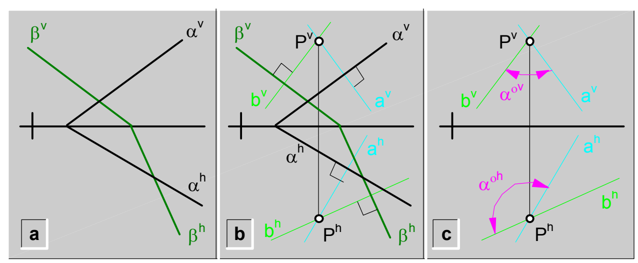


fig.196.\ Ángulo (α°) entre dos planos (α y β)\ ejemplo.

capítulo 6

LUGARES GEOMÉTRICOS.

Se denominan **lugares geométricos**, aquellos lugares del espacio que poseen alguna característica geométrica particular; por ejemplo, la esfera puede definirse como el lugar geométrico de todos los puntos que se encuentran a una determinada distancia de otro punto denominado centro de la esfera.

El estudio de los lugares geométricos es también de gran utilidad y nos permite al igual que el conocimiento de los problemas métricos, resolver problemas relacionados con la forma y dimensiones de los objetos que se estén proyectando.

LUGARES GEOMÉTRICOS.

PUNTO QUE EQUIDISTA DE DOS PUNTOS DADOS.

Dados dos puntos (A y B) (fig.197a). Si por el punto medio (M) del segmento (A-B) que los une se traza un plano (α) perpendicular a dicho segmento (fig.197b), todos los puntos (1;2;3;4...) contenidos en el plano (α) equidistan de los puntos (A y B)\ fig.197c.

El plano (α) es entonces el **lugar geométrico** de todos los puntos que equidistan de (A y B).

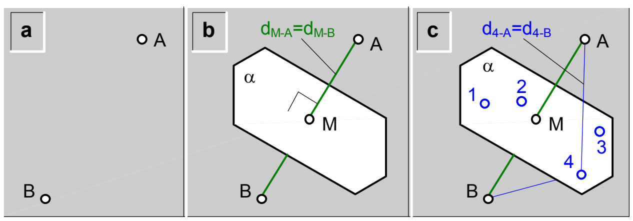


fig.197.\ Punto que equidista de dos puntos (A y B) dados.

<u>**Ejemplo:** Definir la proyección horizontal (P^h) del punto (P) que equidista de los puntos (A y B)</u>\ fig.198a.

Solución:

a) Se define, por el punto medio (M) del segmento (A-B) el plano (α) perpendicular a dicho segmento\ fig.198b.

b) Se determina la proyección horizontal (P^h) del punto (P) haciéndolo pertenecer al plano (α)\ fig.198c.

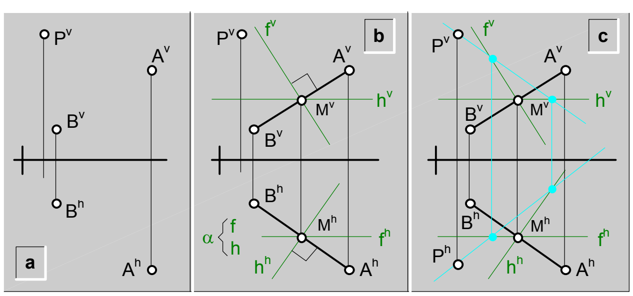


fig.198.\ Punto (P) que equidista de dos puntos (A y B) dados\ ejemplo.

PUNTO QUE EQUIDISTA DE DOS PUNTOS DADOS Y SE ENCUENTRA EN UNA RECTA DADA.

Si quiere ubicarse, sobre una recta (r) dada, un punto (P) que equidiste de otros dos puntos (A y B) dados (fig.199a): se define el lugar geométrico (plano (α)) de todos los puntos que equidistan de (A y B), y se intercepta este lugar geométrico con la recta (r), siendo esta intersección el punto (P) buscado\ fig.199b.

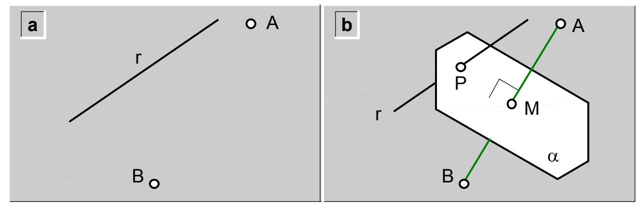


fig.199.\ Punto (P) que equidista de dos puntos (A y B) dados y se encuentra sobre una recta (r) dada.

<u>**Ejemplo:** Determinar las proyecciones del punto (P) que está contenido en la recta (r) y equidista de los puntos (A y B)</u>\fig.200a:

Solución:

a) Se define por el punto medio (M) del segmento (A-B) el plano (α), perpendicular al segmento (A-B)\ fig.200b.

b) Se define el punto (P) interceptando el plano (α) con la recta (r)\ fig.200c.

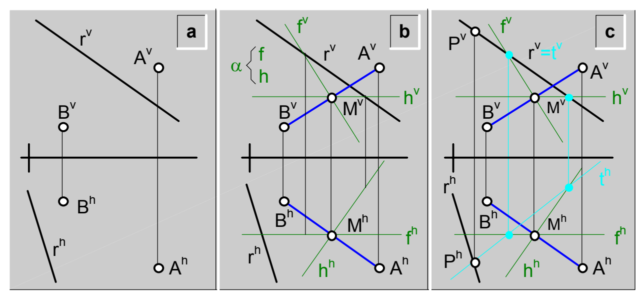


fig.200.\ Punto (P) que equidista de dos puntos (A y B) dados y se encuentra sobre una recta (r) dada\ ejemplo.

RECTA QUE SE CORTA CON DOS RECTAS DADAS Y PASA POR UN PUNTO DADO.

Si quiere definirse una recta (r) que se corte con dos rectas (a y b) dadas y pase por un punto (P) dado\ fig.201a:

a) Se determina la intersección (I), de la recta (a), con el plano (α) definido por la recta (b) y el punto (P)\ fig.201b.

b) La recta (r), que se corta con las rectas (a y b), queda definida por los puntos (P e I)\ fig.201c.

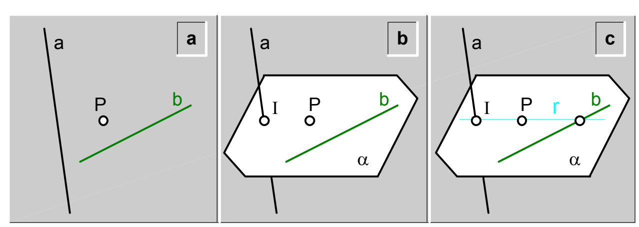


fig.201.\ Recta (r) que se corta con dos rectas (a y b) dadas y pasa por un punto (P) dado.

<u>**Ejemplo:** Definir las proyecciones de la recta (r) que se corta con las rectas (a y b) y contiene al punto (P)</u>\ fig.202a.

Solución:

a) Se define, por rectas características (f y h) el plano (α) que contiene a la recta (b) y al punto (P)\ fig.202**b**.

b) Se determina la intersección (I) entre el plano (α) y la recta (a), y se traza la recta (r) buscada uniendo los puntos (P e I)\ fig.202**c**.

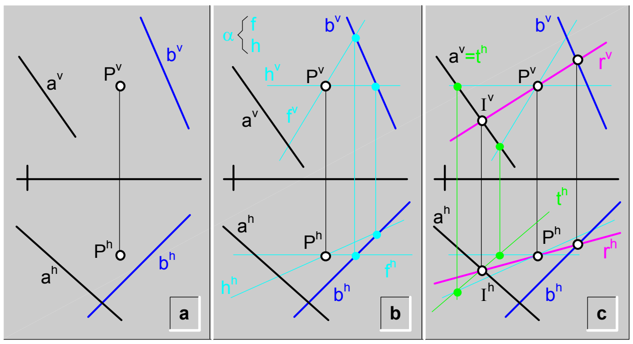


fig.202.\ Recta (r) que se corta con dos rectas (a y b) dadas y pasa por un punto (P) dado\ ejemplo.

RECTA QUE CONTIENE A UN PUNTO DADO Y FORMA UN ÁNGULO DADO CON EL PLANO HORIZONTAL DE PROYECCIÓN.

El lugar geométrico de todas las rectas (g) que pasan por un punto (P) dado y forman un ángulo (α^o) dado con el plano horizontal de proyección (fig.203**a**) es un cono recto de revolución, con vértice en el punto (P) dado, base en el plano horizontal de proyección, y cuyas generatrices (g) forman con ese plano el ángulo (α^o) deseado\ (fig.203**b**).

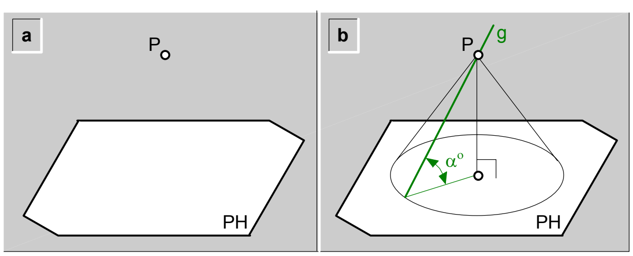


fig.203.\ Recta (g) que contiene a un punto (P) dado y forma un ángulo (α^o) dado con el plano horizontal de proyección.

Ejemplo: Definir la proyección vertical (r^v) de la recta (r), que contiene al punto (P), y forma con el plano horizontal de proyección, el ángulo (α^o)\ fig.204**a**.

Solución:

a) Se dibuja, con vértice en el punto (P), y base en el plano horizontal de proyección el cono recto de revolución cuyas generatrices formen con ese plano el ángulo (α^o)\ fig.204**b**.

b) Se define la proyección vertical (r^v) de la recta (r) considerando que es una generatriz del cono recién trazado\ fig.204**c**.

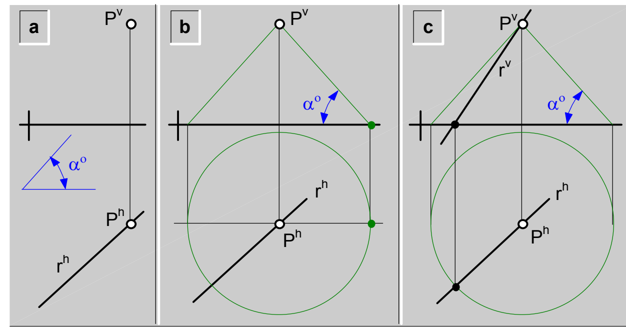


fig.204.\ Recta (r) que contiene a un punto (P) dado y forma un ángulo (α^o) dado con el plano horizontal de proyección\ ejemplo.

RECTA QUE CONTIENE A UN PUNTO DADO Y FORMA UN ÁNGULO DADO CON EL PLANO VERTICAL DE PROYECCIÓN.

El lugar geométrico de todas las rectas (g) que pasan por un punto (P) dado y forman un ángulo (β^o) dado con el plano vertical de proyección (fig.205**a**) es un cono recto de revolución, con vértice en el punto (P), base en el plano vertical de proyección, y cuyas generatrices (g) forman con ese plano el ángulo (β^o) deseado\ (fig.205**b**).

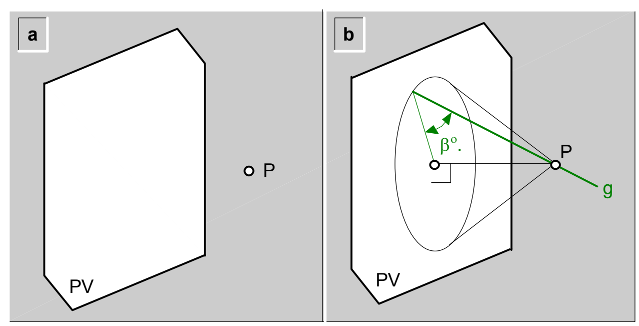


fig.205.\ Recta (g) que contiene a un punto (P) dado y forma un ángulo (β^o) dado con el plano vertical de proyección.

Ejemplo: Definir la proyección horizontal (r^h) de la recta (r), que contiene al punto (P) y forma, con el plano vertical de proyección, el ángulo (β^o)\ fig.206**a**.

Solución:

a) Se dibuja, con vértice en el punto (P), y base en el plano vertical de proyección, el cono recto de revolución cuyas generatrices formen con ese plano el ángulo (β^o)\ fig.206**b**.

b) Se define la proyección horizontal (r^h) de la recta (r) considerando que es una generatriz del cono recién trazado\ fig.206**c**.

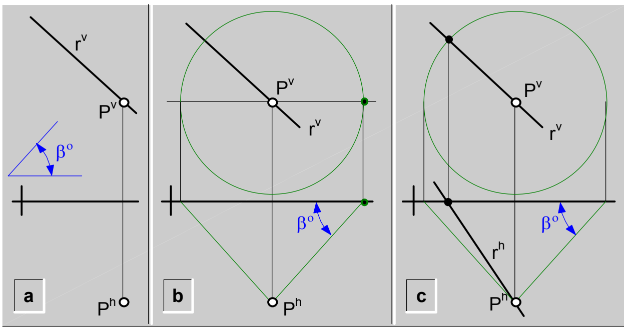


fig.206.\ Recta (r) que contiene a un punto (P) dado y forma un ángulo (β^o) dado con el plano vertical de proyección\ ejemplo.

PLANO QUE CONTIENE A UNA RECTA DADA Y FORMA UN ÁNGULO DADO CON EL PLANO HORIZONTAL DE PROYECCIÓN.

Para definir un plano (α) que contenga a una recta (r) dada y forme un ángulo (α^o) dado con el plano horizontal de proyección\ fig.207**a**:

a) Se traza, con vértice en un punto (P) cualquiera de la recta (r), y base en el plano horizontal de proyección, un cono recto de revolución, cuyas generatrices formen con ese plano el ángulo (α^o), y se determina la intersección (I) entre la recta (r) y el plano horizontal de proyección\ fig.207**b**.

b) Se dibuja, por el punto (I), y tangente a la base del cono (se genera el punto de tangencia (T)), la traza horizontal (h) del plano (α). El plano (α), queda entonces definido por las rectas (r y h). La recta (P-T) es una recta de máxima pendiente del plano (α)\ fig.207**c**.

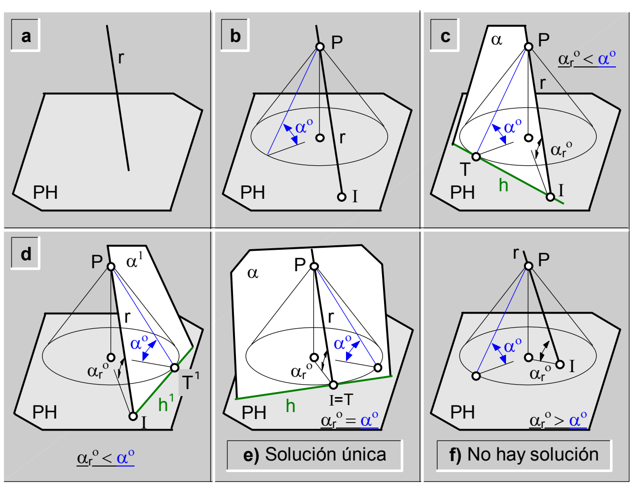


fig.207.\ Plano (α) que contiene a una recta (r) dada y forma un ángulo (α^o) dado con el plano horizontal de proyección.

Puede observarse, en la fig.207**d**, que hay una segunda solución, debido a que por el punto (I) puede trazarse una segunda recta (h^1) tangente a la base del cono en el punto (T^1), la cual, junto con la recta (r) define un segundo plano (α^1) que también cumple las condiciones impuestas. Esto sucede cuando el ángulo (α_r^o) que forma la recta (r) dada con el plano horizontal de proyección es menor que el ángulo (α^o) que debe formar el plano (α) con el plano horizontal de proyección ($\alpha_r^o < \alpha^o$).

Si el punto de Intersección (I) entre la recta (r) y el plano horizontal de proyección es un punto de la circunferencia base del cono, entonces existe una solución única, y el plano (α) queda definido por su recta (P-I) de máxima pendiente (fig.207**e**). Esto sucede cuando el ángulo (α_r^o) es igual al ángulo (α^o); ($\alpha_r^o = \alpha^o$).

Si el punto de Intersección (I) entre la recta (r) y el plano horizontal de proyección se encuentra dentro de la circunferencia base del cono, entonces no existe solución (fig.207**f**). Esto sucede cuando el ángulo (α_r^o) es mayor que el ángulo (α^o); ($\alpha_r^o > \alpha^o$).

Ejemplo: Definir el plano (α) que contiene a la recta (r) y forma el ángulo (α^o) con el plano horizontal de proyección\ fig.208**a**.

Solución:

a) Se define, con vértice en un punto (P) cualquiera de la recta (r), un cono recto de revolución, con base en el plano horizontal de proyección, cuyas generatrices formen con ese plano el ángulo (α^o), y se determina la intersección (I) entre la recta (r) y el plano horizontal de proyección\ fig.208**b**.

b) Se dibuja, por el punto (I), y tangente a la base del cono, la traza horizontal (h) del plano (α); de esta forma el plano (α) queda definido por las rectas (h y r)\ fig.208**c**.

En la fig.208**d**, se muestra una segunda solución al mismo problema.

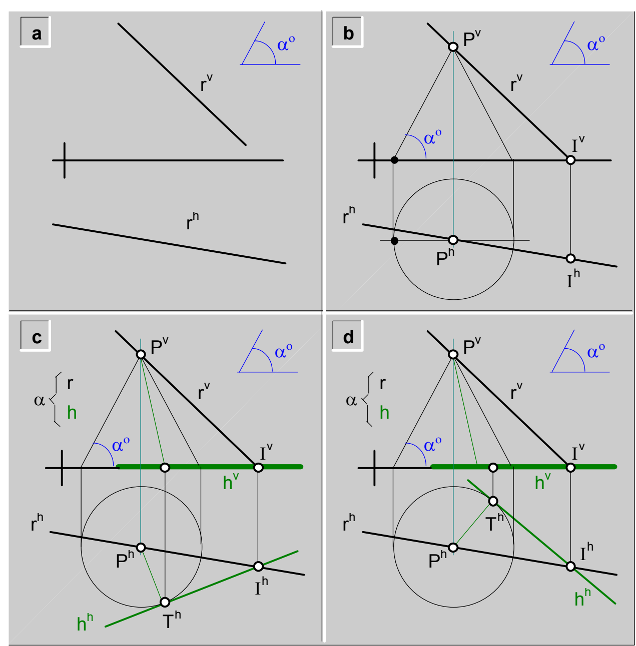


fig.208.\ Plano (α) que contiene a una recta (r) dada y forma un ángulo (α^o) dado con el plano horizontal de proyección\ ejemplo.

PLANO QUE CONTIENE A UNA RECTA DADA Y FORMA UN ÁNGULO DADO CON EL PLANO VERTICAL DE PROYECCIÓN.

Para definir un plano (α) que contenga a una recta (r) dada y forme un ángulo (β^o) dado con el plano vertical de proyección\ fig.209**a**:

a) Se traza, con vértice en un punto (P) cualquiera de la recta (r), y base en el plano vertical de proyección, un cono recto de revolución, cuyas generatrices formen con ese plano el ángulo (β^o), y se determina la intersección (I) entre la recta (r) y el plano vertical de proyección\ fig.209**b**.

b) Se dibuja, por el punto (I), y tangente a la base del cono (se genera el punto de tangencia (T)), la traza vertical (f) del plano (α). El plano (α), queda entonces definido por las rectas (r y f). La recta (P-T) es una recta de máxima inclinación del plano (α)\ fig.209**c**.

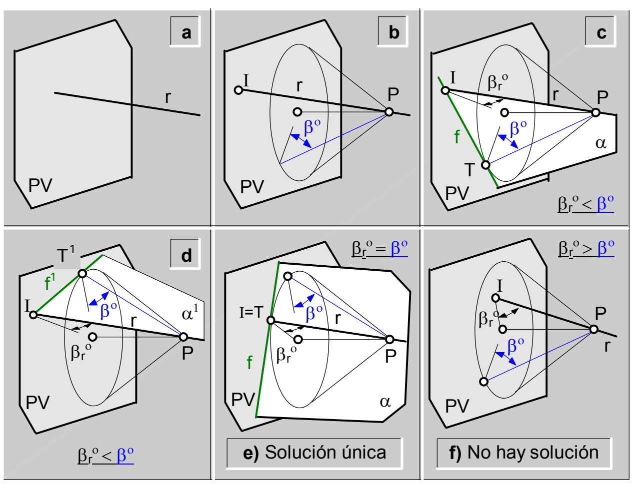


fig.209.\ Plano (α) que contiene a una recta (r) dada y forma un ángulo (β^o) dado con el plano vertical de proyección.

Puede observarse, en la fig.209**d**, que hay una segunda solución, debido a que por el punto (I) puede trazarse una segunda recta (f^1) tangente a la base del cono en el punto (T^1), la cual, junto con la recta (r) define un segundo plano (α^1) que también cumple las condiciones impuestas. Esto sucede cuando el ángulo (β_r^o) que forma la recta (r) dada con el plano vertical de proyección es menor que el ángulo (β^o) que debe formar el plano (α) con el plano vertical de proyección ($\beta_r^o < \beta^o$).

Si el punto de Intersección (I) entre la recta (r) y el plano vertical de proyección es un punto de la circunferencia base del cono, entonces existe una solución única, y el plano (α) queda definido por su recta (P-I) de máxima inclinación (fig.209**e**). Esto sucede cuando el ángulo (β_r^o) es igual al ángulo (β^o); ($\beta_r^o = \beta^o$).

Si el punto de Intersección (I) entre la recta (r) y el plano vertical de proyección se encuentra dentro de la circunferencia base del cono, entonces no existe solución (fig.209**f**). Esto sucede cuando el ángulo (β_r^o) es mayor que el ángulo (β^o); ($\beta_r^o > \beta^o$).

Ejemplo: Definir el plano (α) que contiene a la recta (r) y forma el ángulo (β^o) con el plano vertical de proyección\ fig.210**a**.

Solución:

a) Se define, con vértice en un punto (P) cualquiera de la recta (r), y base en el plano vertical de proyección, un cono recto de revolución, cuyas generatrices formen el ángulo (β^o) con ese plano; y se determina la intersección (I) entre la recta (r) y el plano vertical de proyección\ fig.210**b**.

b) Se dibuja, por el punto (I), y tangente a la base del cono, la traza vertical (f) del plano (α), de esta forma el plano (α) queda definido por las rectas (**f** y **r**)\ fig.210**c**.

En la fig.210**d**, se muestra una segunda solución al mismo problema.

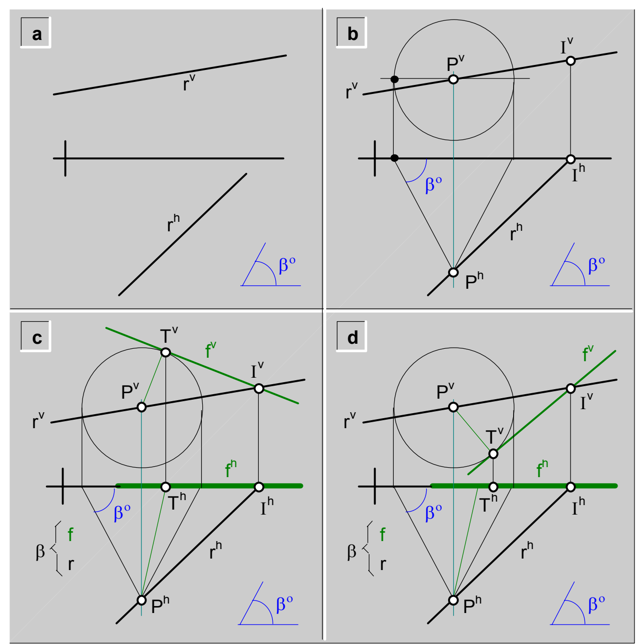


fig.210.\ Plano (α) que contiene a una recta (r) dada y forma un ángulo (β^o) dado con el plano vertical de proyección\ ejemplo.

RECTA CONTENIDA EN UN PLANO DADO Y QUE FORME UN ÁNGULO DADO CON EL PLANO HORIZONTAL DE PROYECCIÓN.

Para definir una recta (r) que este contenida en un plano (α) dado y forme un ángulo (α_r^o) dado con el plano horizontal de proyección\ fig.211**a**:

a) Se traza, con vértice en un punto (V) cualquiera del plano (α), y base en el plano horizontal de proyección, un cono recto de revolución, cuyas generatrices formen con ese plano el ángulo (α_r^o) deseado. Y se determinan las intersecciones (I y J) de la circunferencia base del cono con la traza horizontal (h) del plano (α)\ fig.211**b**.

b) Las dos rectas (V-I) (fig.211**c**), y (V-J) (fig.211**d**), cumplen con las condiciones impuestas. Esto sucede cuando el ángulo (α_r^o) que debe formar la recta (r) con el plano horizontal de proyección es menor que el ángulo (α^o) que forma el plano (α) con el plano horizontal de proyección ($\alpha_r^o < \alpha^o$).

Puede ser que la circunferencia base del cono sea tangente en un punto (T) a la traza horizontal (h) del plano (α); en este caso la recta (r) buscada queda definida por los puntos (P y T) y es una recta de máxima pendiente del plano (α) (fig.211**e**). Esto sucede cuando el ángulo (α_r^o) es igual al ángulo (α^o); ($\alpha_r^o = \alpha^o$).

Si la circunferencia base del cono no se corta con la traza horizontal (h) del plano (α) entonces no hay solución fig.211f. Esto sucede cuando el ángulo (α_r^o) es mayor que el ángulo (α^o); ($\alpha_r^o > \alpha^o$).

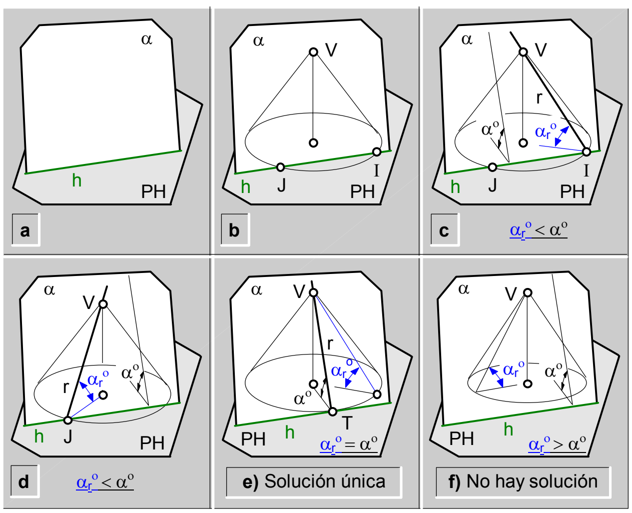


fig.211.\ Recta (r) contenida en un plano (α) dado y que forma un ángulo (α_r^o) dado con el plano horizontal de proyección.

Ejemplo: <u>Definir la recta (r) que pasa por el punto (P), está contenida en el plano (α) y forma el ángulo (α_r^o) con el plano horizontal de proyección</u>\ fig.212**a**.

Solución:

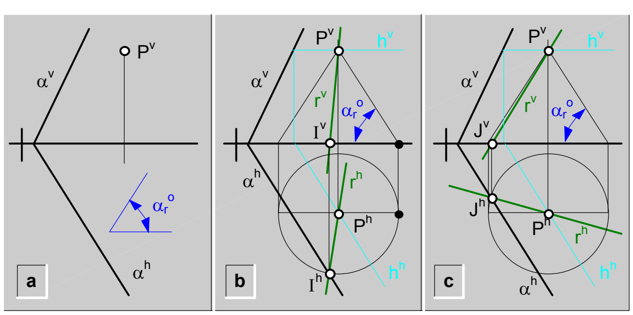


fig.212.\ Recta (r) contenida en un plano (α) dado y que forma un ángulo (α_r^o) dado con el plano horizontal de proyección\ ejemplo.

Se define, con vértice en el punto (P), y base en el plano horizontal de proyección, un cono recto de revolución, cuyas generatrices formen con ese plano el ángulo (α_r^o); y se determinan los puntos (I y J) de corte entre la circunferencia base del cono y la traza horizontal (h) del plano (α). La recta (r) buscada es la recta (P-I) (fig.212**b**), ó la recta (P-J) (fig.212**c**).

RECTA CONTENIDA EN UN PLANO DADO Y QUE FORME UN ÁNGULO DADO CON EL PLANO VERTICAL DE PROYECCIÓN.

Para definir una recta (r) que este contenida en un plano (α) dado y forme un ángulo (β_r^o) con el plano vertical de proyección\ fig.213**a**:

a) Se traza, con vértice en un punto (V) cualquiera del plano (α), y base en el plano vertical de proyección, un cono recto de revolución, cuyas generatrices formen ese plano el ángulo (β_r^o) deseado; y se determinan las intersecciones (I y J) de la circunferencia base del cono con la traza vertical (f) del plano (α)\ fig.213**b**.

b) Las dos rectas (V-I) (fig.213**c**), y (V-J) (fig.213**d**), cumplen con las condiciones impuestas. Esto sucede cuando el ángulo (β_r^o) que debe formar la recta (r) con el plano vertical de proyección es menor que el ángulo (β^o) que forma el plano (α) con el plano vertical de proyección ($\beta_r^o < \beta^o$).

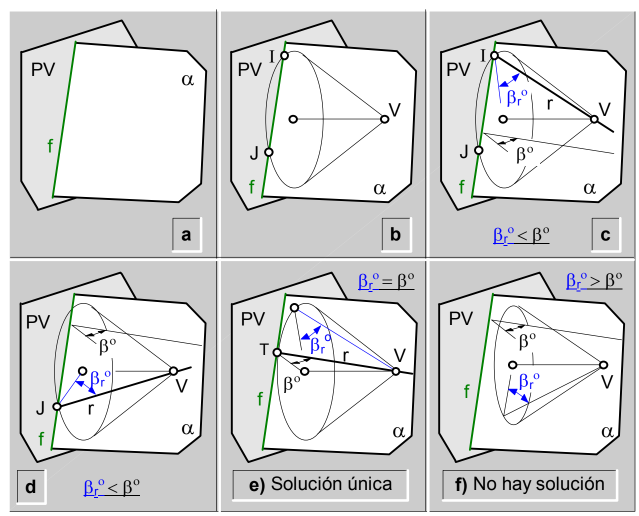


fig.213.\ Recta (r) contenida en un plano (α) dado y que forma un ángulo (β_r^o) dado con el plano vertical de proyección.

Puede ser que la circunferencia base del cono sea tangente en un punto (T) a la traza vertical (f) del plano (α); en este caso la recta (r) buscada queda definida por los puntos (P y T) y es una recta de máxima inclinación del plano (α) (fig.213**e**). Esto sucede cuando el ángulo (β_r^o) es igual al ángulo (β^o); ($\alpha_r^o = \alpha^o$).

Si la circunferencia base del cono no se corta con la traza vertical (f) del plano (α) entonces no hay solución (fig.213f). Esto sucede cuando el ángulo (β_r^o) es mayor que el ángulo (β^o); ($\beta_r^o > \beta^o$).

Ejemplo: Definir la recta (r) que pasa por el punto (P), está contenida en el plano (α) y forma el ángulo (β_r^o) con el plano vertical de proyección\ fig.214a.

Solución:

Se define, con vértice en el punto (P), y base en el plano vertical de proyección, un cono recto de revolución, cuyas generatrices formen con ese plano el ángulo (β_r^o); y se determinan los puntos (I y J) de corte entre la circunferencia base del cono y la traza vertical (α^v) del plano (α). La recta (r) buscada es la recta (P-I) (fig.214b), ó la recta (P-J) (fig.214c).

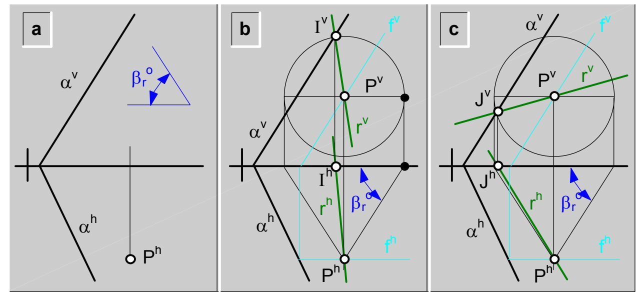


fig.214.\ Recta (r) contenida en un plano (α) dado y que forma un ángulo (β_r^o) dado con el plano vertical de proyección\ ejemplo.

capitulo 7

METODOS PARA OBTENER PROYECCIONES EN VERDADERO TAMAÑO.

El proceso de definir la Doble Proyección Ortogonal de figuras geométricas planas puede simplificarse si el plano que las contiene se coloca paralelo a uno de los planos principales de proyección. Esto se logra básicamente de dos maneras: **a)** Manteniendo fijos los planos principales de proyección y rotando el objeto; ó **b)** Manteniendo fijo el objeto y rotando los planos principales de proyección a su alrededor.

Se analizan en este capítulo tres procedimientos muy utilizados para obtener proyecciones ortogonales de figuras planas en verdadero tamaño denominados:

a) **Rebatimiento de planos.** Consiste en rebatir (rotar) el plano que quiere observarse en verdadero tamaño, a través de una de sus rectas características, que se denominará **eje de rebatimiento ó charnela**, hasta colocarlo paralelo a uno de los planos principales de proyección.

b) **Rotación.** También denominado Giro. Consiste en rotar el plano alrededor de un eje de punta ó de un eje vertical, hasta colocarlo paralelo a uno de los planos principales de proyección. En la mayoría de los casos es necesario realizarle a un plano cualquiera dos rotaciones sucesivas, una a través de un eje de punta y la otra a través de un eje vertical, para lograr colocarlo paralelo a uno de los planos principales de proyección.

c) **Cambio de planos principales de proyección.** Consiste en mantener el plano en estudio fijo, y mover a su alrededor los planos principales de proyección hasta que uno de ellos sea paralelo al plano dado.

REBATIMIENTO DE PLANOS.

Rebatir un plano (α), consiste en girarlo a través de una de sus rectas características, la cual actúa como una "bisagra", hasta hacerlo coincidir con uno de los planos principales de proyección (fig.215**a** y fig.215**b**), ó colocarlo paralelo a uno de ellos (fig.215**c** y fig.215**d**), La recta alrededor de la que se hace girar el plano se denomina **eje de rebatimiento** ó simplemente **eje**.

Puede observarse en la fig.215, que si el eje de rebatimiento es:

a) La traza horizontal (h), ó vertical (f), del plano (α). Se puede rebatir el plano (α) hasta colocarlo sobre el plano horizontal, ó vertical de proyección, (fig.215**a** y fig.215**b**) respectivamente.

b) Una recta característica horizontal (h^1), ó frontal (f^1), del plano (α). Se puede rebatir el plano (α) hasta colocarlo paralelo al plano horizontal, ó vertical de proyección (fig.215**c** y fig.215**d**) respectivamente.

Las posiciones que adquieren los puntos y rectas de un plano al ser rebatidos se denominan proyecciones rebatidas y se identifican con el superíndice "r".

Toda figura geométrica contenida en un plano (α), se observará en verdadero tamaño cuando este sea rebatido; debido a que será paralela a uno de los planos principales de proyección, o estará contenida en uno de ellos. Es por lo tanto el objetivo principal del rebatimiento de planos, facilitar el dibujo de figuras geométricas contenidas en ellos.

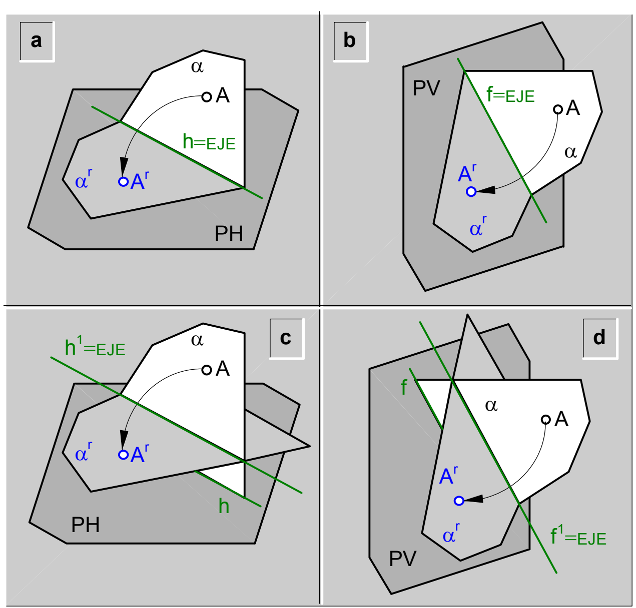


fig.215.\ Rebatimiento de un plano (α).

GENERALIDADES DEL REBATIMIENTO DE PLANOS.

Independientemente de que el eje de rebatimiento sea una traza ó una recta característica de un plano (α), se cumplen las siguientes propiedades:

a) Todos los puntos del plano (α) giran igual ángulo (α^o) al ser rebatidos\ fig.216**a**.

b) Los puntos contenidos en el eje no cambian de posición al rebatir el plano (α), ejemplos: punto (A) (fig.216**c**); y punto (I) (fig.216**d**).

c) Las rectas paralelas se mantienen paralelas al ser rebatidas. fig.216**b**).

d) Las rectas paralelas al eje se mantienen paralelas a él al ser rebatidas (fig.216**c**).

e) Las rectas perpendiculares al eje se mantienen perpendiculares a él al ser rebatidas (fig.216**d**).

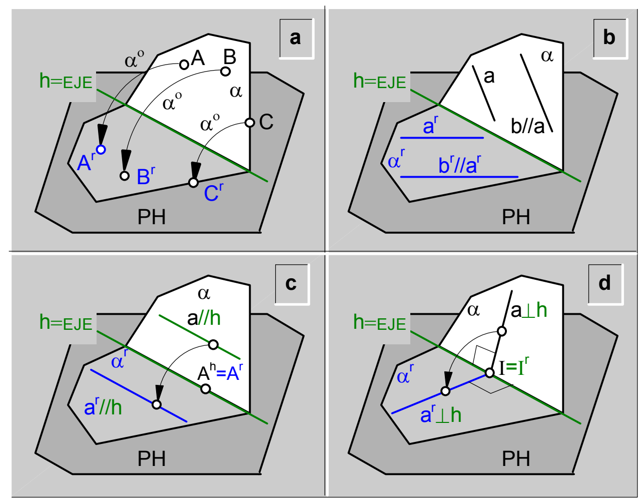


fig.216.\ Generalidades del rebatimiento.

REBATIMIENTO DIRECTO Y REBATIMIENTO INVERSO.

El rebatimiento de un plano (α) puede hacerse en dos direcciones opuestas, recorriendo el plano (α) un mayor o menor ángulo (α^o) en cada una de ellas, en base a esto el rebatimiento se clasifica en:

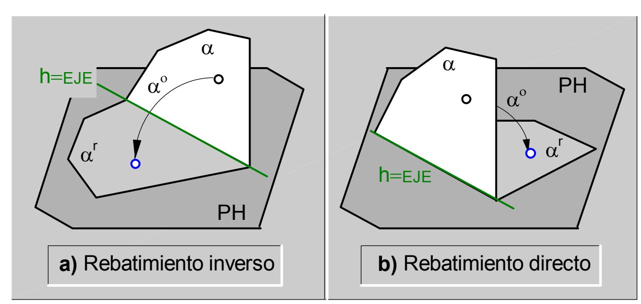


fig.217.\ Rebatimiento inverso y rebatimiento directo.

a) **<u>Rebatimiento Inverso.</u>** Si el ángulo de giro (α^o) es el mayor\ fig.217a.

b) <u>Rebatimiento Directo.</u> Si el ángulo de giro (α°) es el menor\ fig.217**b**.

<u>REBATIMIENTO A TRAVÉS DE LA TRAZA HORIZONTAL DE UN PLANO.</u>

Para rebatir cualquier punto (A) contenido en un plano (α), a través de la traza horizontal (h) del plano (α)\ fig.218**a**:

a) Se traza, por él punto (A) una recta (p) de máxima pendiente del plano (α); y se determinan: el punto (I) de corte entre la recta (p) y la traza horizontal (h) del plano (α); y la longitud ($d_{A\text{-}I}$); del segmento (A-I)\ fig.218**b**.

b) Se define la proyección rebatida (p^r) de la recta (p); sabiendo que: contiene al punto ($I{=}I^r$); está contenida en el plano horizontal de proyección; y es perpendicular a la traza horizontal (h) del plano (α)\fig.218**c**.

c) Se determina la proyección rebatida (A^r) del punto (A); midiendo la longitud ($d_{A\text{-}I}$) del segmento (A-I) sobre la proyección rebatida (p^r) de la recta (p), a partir del punto ($I{=}I^r$) \fig.218**d**.

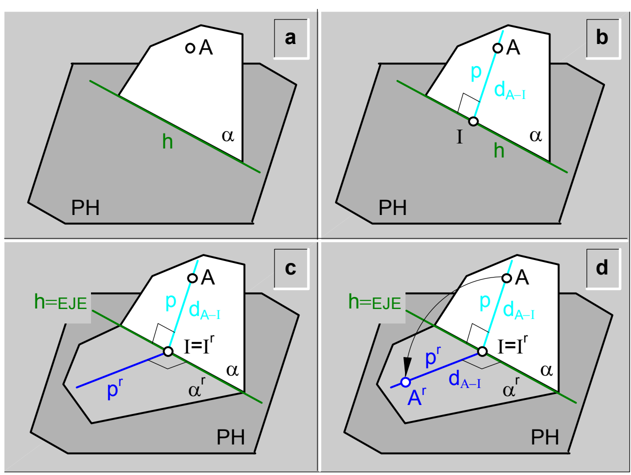


fig.218.\ Rebatimiento de un plano (α) a través de su traza horizontal (h).

<u>**Ejemplo:** Determinar la proyección rebatida (A^r) del punto (A), contenido en el plano (α)</u>\ fig.219**a**.

Solución:

a) Se definen las proyecciones de la recta (p) de máxima pendiente del plano (α), que pasa por el punto (A) (primero la horizontal (p^h), perpendicular a la proyección horizontal (α^h) de la traza horizontal del plano (α); y luego la vertical (p^v))\ fig.219**b**.

b) Se define la proyección rebatida (p^r) de la recta (p). Las proyecciones rebatida (p^r) y horizontal (p^h) de la recta (p) coinciden ($p^h{=}p^r$); ya que ambas son perpendiculares a la proyección horizontal (α^h) de la traza horizontal del plano (α).

c) Se definen las proyecciones: vertical (I^v); horizontal y rebatida ($I^h{=}I^r$) del punto de corte (I) entre la recta (p) y la traza horizontal del plano (α).

d) Se determina la longitud ($d_{A\text{-}I}$) del segmento (A-I).

e) Se define la proyección rebatida (A^r) del punto (A); midiendo la longitud ($d_{A\text{-}I}$) sobre la proyección rebatida (p^r) de la recta (p) a partir del punto ($I^h{=}I^r$), (puede trasladarse con el compás centrado en ($I^h{=}I^r$)).

Si el rebatimiento es inverso (fig.219**b**), las proyecciones horizontal (A^h) y rebatida (A^r) del punto (A) se ubican en lados opuestos del eje de rebatimiento; mientras que si es directo (fig.219**c**), ambas proyecciones se ubican en el mismo lado del eje de rebatimiento.

<u>Simplificación:</u>

Ya comprendidos los principios teóricos del rebatimiento de planos a través de su traza horizontal. Este proceso puede simplificarse, como lo muestra la fig.219**d**, de acuerdo a los siguientes aspectos:

a) La diferencia de cota ($\Delta_Z^{A\text{-}I}$) entre los puntos (A e I) es siempre la cota (Z_A) de del punto (A).

b) No es necesario señalar la ubicación del punto (I).

c) No es necesario definir la proyección vertical (p^v) de la recta (p).

d) Se puede omitir toda la nomenclatura del procedimiento.

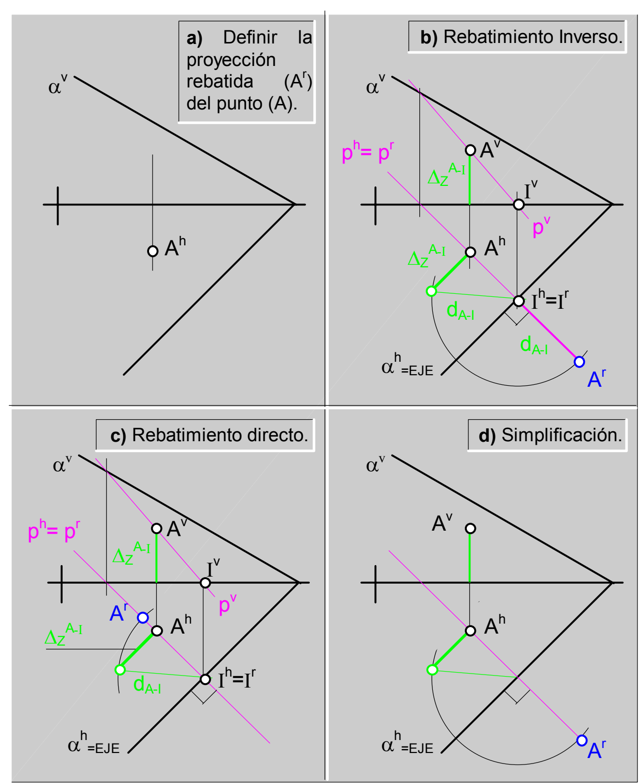


fig.219.\ Rebatimiento a través de la traza horizontal.

REBATIMIENTO DE VARIOS PUNTOS.

En la fig.220**a**, se muestra un punto (A) el cual ha sido rebatido y un segundo punto (B) el cual se quiere rebatir, ambos contenidos en el plano (α). Aunque puede rebatirse el punto (B), siguiendo el método utilizado en el rebatimiento del punto (A), es a veces mas conveniente rebatirlo aplicando una de las propiedades del rebatimiento siguientes:

a) **Los triángulos de rebatimiento dibujados para rebatir todos los puntos de un mismo plano son semejantes**. Por lo tanto la hipotenusa del triángulo de rebatimiento que se dibuje para el punto (B) es paralela a la que se obtuvo en el punto (A)\ fig.220**b**.

b) **El paralelismo entre rectas se conserva en el rebatimiento**. Por lo tanto se traza una recta (a) cualquiera por el punto (A), y luego otra recta (b) paralela a ella por el punto (B); se rebaten ambas rectas y se ubica la proyección rebatida (B^r) del punto (B) sobre la proyección rebatida (b^r) de la recta (b)\ fig.220**c**.

c) Se traza la recta (a) que contiene a los puntos (A y B); y se define su proyección rebatida (a^r); luego se ubica la proyección rebatida (B^r) del punto (B) sobre la proyección rebatida (a^r) de la recta (a)\ fig.220**d**.

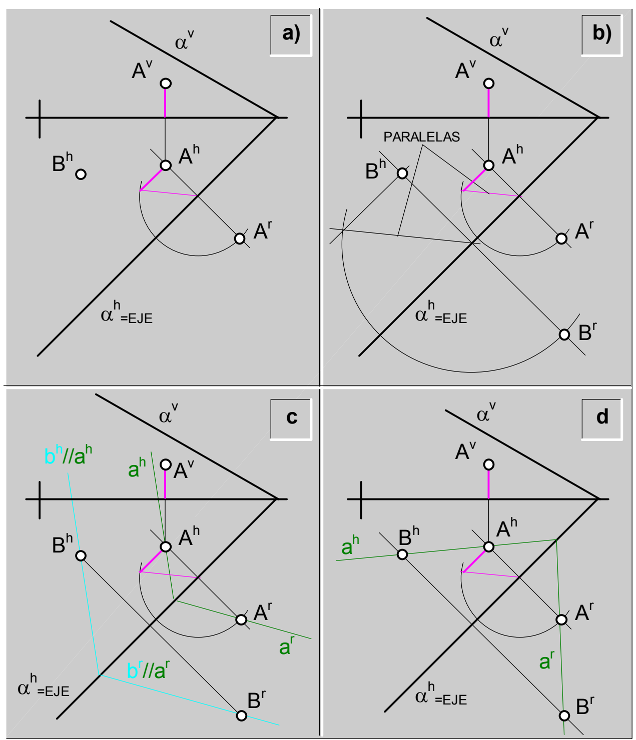


fig.220.\ Rebatimiento de varios puntos.

REBATIMIENTO DE LA TRAZA VERTICAL DE UN PLANO.

Se puede definir la proyección rebatida (α^r) de la traza vertical de un plano (α), por medio del rebatimiento de dos puntos (1 y 2) contenidos en la misma (se simplifica el método si uno de ellos (1) es la intersección del plano (α) con la línea de tierra; ya que las proyecciones horizontal, vertical, y rebatida de este punto coincidirán en una sola (1^v=1^h=1^r)\ fig.221.

En la fig.221**a** se rebate el punto (2) por el método descrito en la fig.219.

En la fig.221**b** se simplifica el procedimiento, tomando en cuenta que:

a) El segmento (1-2) está contenido en el plano vertical de proyección; por lo tanto su longitud real (d_{1-2}) puede medirse en la proyección vertical del mismo.

b) El segmento (1-2), después de rebatido, también se observa en verdadero tamaño.

Entonces, puede obtenerse la proyección rebatida (2^r) del punto (2) trasladando con el compás, centrado en el punto (1^v=1^h=1^r) la longitud (d_{1-2}) del segmento (1-2).

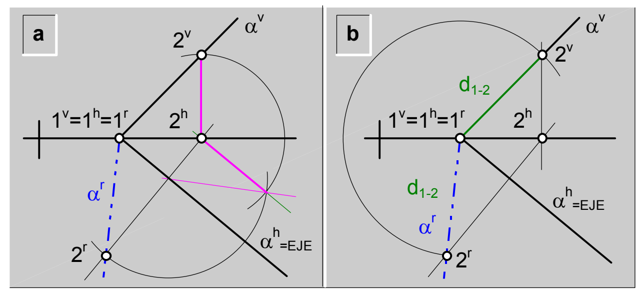


fig.221.\ Rebatimiento de la traza vertical de un plano.

REBATIMIENTO DE UN PUNTO DE UN PLANO, POR MEDIO DEL REBATIMIENTO PREVIO DE LA TRAZA VERTICAL DEL PLANO.

Ya definida la proyección rebatida (α^r) de la traza vertical de un plano (α), si quiere rebatirse cualquier punto (A) de este plano\ fig.222:

a) Se traza, por el punto (A), una recta (r) cualquiera del plano (α)\ fig.222**a**.

b) Se define la proyección rebatida (r^r) de esta recta (r).

c) Se ubica la proyección rebatida (A^r) del punto (A) sobre la proyección rebatida (r^r) de la recta (r).

Es a veces mas conveniente trazar, en vez de una recta (r) cualquiera, una recta horizontal (h) (fig.222b), o una recta frontal (f) (fig.222c) del plano (α).

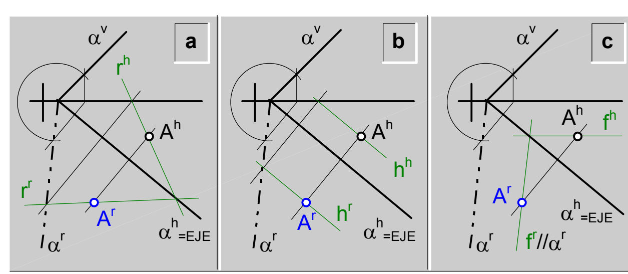


fig.222.\ Rebatimiento de un punto (A), por medio del rebatimiento previo de la traza vertical del plano.

REBATIMIENTO A TRAVÉS DE LA TRAZA VERTICAL DE UN PLANO.

Para rebatir cualquier punto (A) contenido en un plano (α), a través de la traza vertical (f) del plano (α)\ fig.223**a**:

a) Se traza, por él punto (A) una recta (i) de máxima inclinación del plano (α); y se determinan: el punto (I) de corte entre la recta (i) y la traza vertical (f) del plano (α); y la longitud ($d_{A\text{-}I}$); del segmento (A-I)\ fig.223**b**.

b) Se define la proyección rebatida (i^r) de la recta (i); sabiendo que: contiene al punto ($I=I^r$); está contenida en el plano vertical de proyección; y es perpendicular a la traza vertical (f) del plano (α)\ fig.223**c**.

c) Se determina la proyección rebatida (A^r) del punto (A); midiendo la longitud ($d_{A\text{-}I}$) del segmento (A-I) sobre la proyección rebatida (i^r) de la recta (i), a partir del punto ($I=I^r$) \ fig.223**d**.

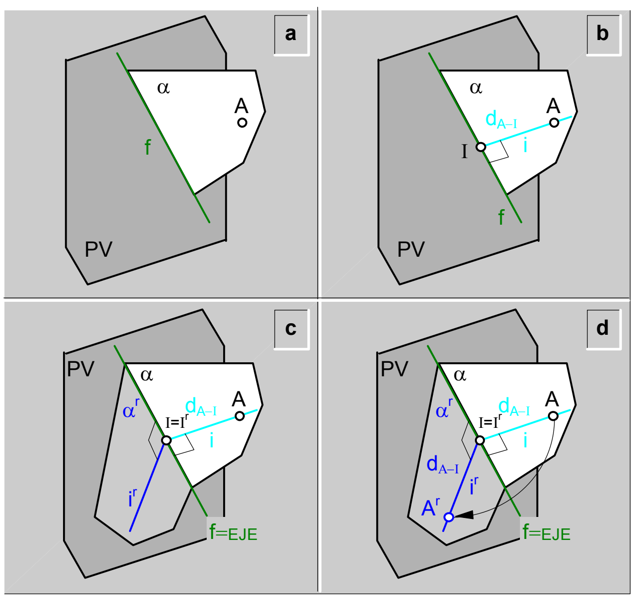


fig.223.\ Rebatimiento de un plano (α) a través de su traza vertical (f).

<u>**Ejemplo:** Determinar la proyección rebatida (A^r) del punto (A), contenido en el plano (α)</u>\ fig.224**a**.

Solución:

a) Se definen las proyecciones de la recta (i) de máxima inclinación del plano (α), que pasa por el punto (A) (primero la vertical (i^v), perpendicular a la proyección vertical (α^v) de la traza vertical del plano (α); y luego la horizontal (i^h))\ fig.224**b**.

b) Se define la proyección rebatida (i^r) de la recta (i). Las proyecciones rebatida (i^r) y vertical (i^v) de la recta (i) coinciden ($i^r=i^v$); ya que ambas son perpendiculares a la proyección vertical (α^v) traza vertical del plano (α).

c) Se definen las proyecciones: horizontal (I^h); vertical y rebatida ($I^v=I^r$) del punto de corte (I) entre la recta (i) y la traza vertical del plano (α).

d) Se determina la longitud ($d_{A\text{-}I}$) del segmento (A-I).

e) Se define la proyección rebatida (A^r) del punto (A); midiendo la longitud ($d_{A\text{-}I}$) sobre la proyección rebatida (i^r) de la recta (i) a partir del punto ($I^v=I^r$), (puede trasladarse con el compás centrado en ($I^v=I^r$)).

Si el rebatimiento es inverso (fig.224**b**), las proyecciones vertical (A^v) y rebatida (A^r) del punto (A) se ubican en lados opuestos del eje de rebatimiento; mientras que si es directo (fig.224**c**), ambas proyecciones se ubican en el mismo lado del eje de rebatimiento.

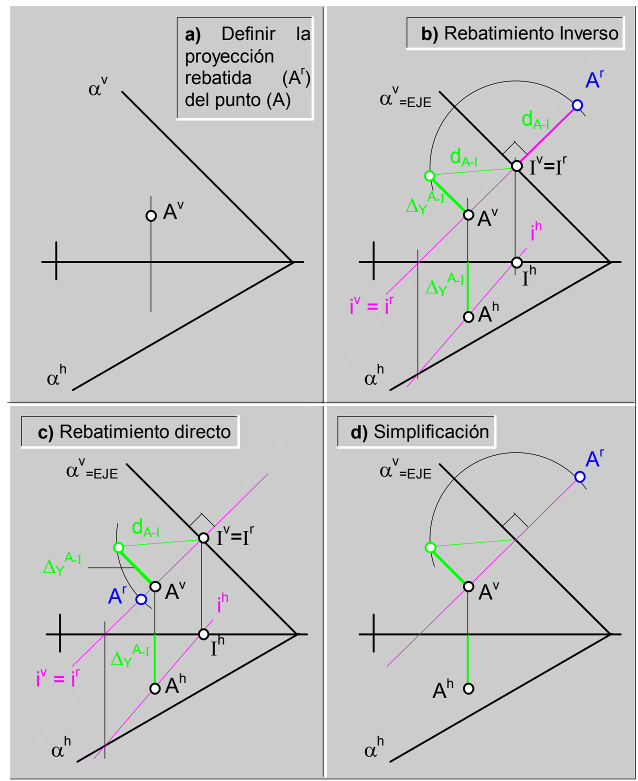


fig.224.\ Rebatimiento a través de la traza vertical.

<u>Simplificación:</u>

Ya comprendidos los principios teóricos del rebatimiento de planos a través de su traza vertical. Este proceso puede simplificarse, como lo muestra la fig.224**d**, de acuerdo a los siguientes aspectos:

a) La diferencia de vuelo ($\Delta_y^{A\text{-}I}$) entre los puntos (A e I) es siempre el vuelo (Y_A) de del punto (A).

b) No es necesario señalar la ubicación del punto (I).

c) No es necesario determinar la proyección horizontal (i^h) de la recta (i).

d) Se puede omitir toda la nomenclatura del procedimiento.

REBATIMIENTO DE VARIOS PUNTOS.

En la fig.225**a**, se muestra un punto (A) el cual ha sido rebatido y un segundo punto (B) el cual se quiere rebatir, ambos contenidos en el plano (α). Aunque puede rebatirse el punto (B), siguiendo el método utilizado en el rebatimiento del punto (A), es a veces mas conveniente rebatirlo aplicando una de las propiedades del rebatimiento siguientes:

a) **<u>Los triángulos de rebatimiento dibujados para rebatir todos los puntos de un mismo plano son semejantes</u>**. Por lo tanto la hipotenusa del triángulo de rebatimiento que se dibuje para el punto (B) es paralela a la que se obtuvo en punto (A)\ fig.225**b**.

b) **<u>El paralelismo entre rectas se conserva en el rebatimiento</u>**. Por lo tanto se traza una recta (a) cualquiera por el punto (A), y luego otra recta (b) paralela a ella por el punto (B); se definen las proyecciones rebatidas de ambas rectas; y se ubica la proyección rebatida (B^r) del punto (B) sobre la proyección rebatida (b^r) de la recta (b)\ fig.225**c**.

c) Se traza la recta (a) que contiene a los puntos (A y B); y se define su proyección rebatida (a^r); luego se ubica la proyección rebatida (B^r) del punto (B) sobre la proyección rebatida (a^r) de la recta (a)\ fig.225**d**.

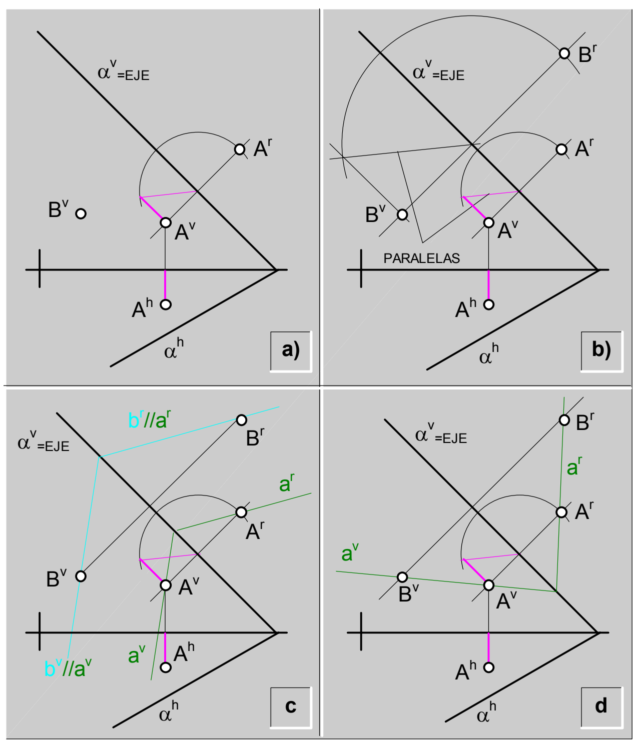


fig.225.\ Rebatimiento de varios puntos.

REBATIMIENTO DE LA TRAZA HORIZONTAL DE UN PLANO.

Se puede definir la proyección rebatida (α^r) de la traza horizontal de un plano (α), por medio del rebatimiento de dos puntos (1 y 2) contenidos en la misma (se simplifica el método si uno de ellos (1) es la intersección del plano (α) con la línea de tierra; ya que las proyecciones horizontal, vertical, y rebatida de este punto coincidirán en una sola ($1^v=1^h=1^r$)\ fig.226.

En la fig.226**a** se rebate el punto (2) por el método descrito en la fig.224.

En la fig.226**b** se simplifica el procedimiento, tomando en cuenta que:

a) El segmento (1-2) está contenido en el plano horizontal de proyección; por lo tanto su longitud real ($d_{1\text{-}2}$) puede medirse en la proyección horizontal del mismo.

b) El segmento (1-2), después de rebatido, también se observa en verdadero tamaño.

Entonces, puede obtenerse la proyección rebatida (2^r) del punto (2) trasladando con el compás, centrado en el punto ($1^v=1^h=1^r$) la longitud ($d_{1\text{-}2}$) del segmento (1-2).

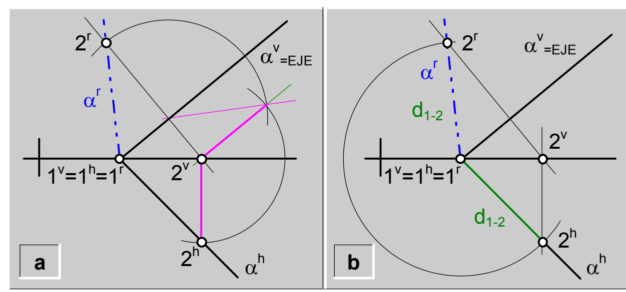


fig.226.\ Rebatimiento de la traza horizontal de un plano.

REBATIMIENTO DE UN PUNTO DE UN PLANO, POR MEDIO DEL REBATIMIENTO PREVIO DE LA TRAZA HORIZONTAL DEL PLANO.

Ya definida la proyección rebatida (α^r) de la traza horizontal de un plano (α), si quiere rebatirse cualquier punto (A) de este plano\ fig.227:

a) Se traza, por el punto (A), una recta (r) cualquiera del plano (α)\ fig.227**a**.

b) Se define la proyección rebatida (r^r) de esta recta (r).

c) Se ubica la proyección rebatida (A^r) del punto (A) sobre la proyección rebatida (r^r)de la recta (r).

Es a veces mas conveniente trazar, en vez de una recta (r) cualquiera, una recta horizontal (h) (fig.227**b**), o una recta frontal (f) (fig.227**c**) del plano (α).

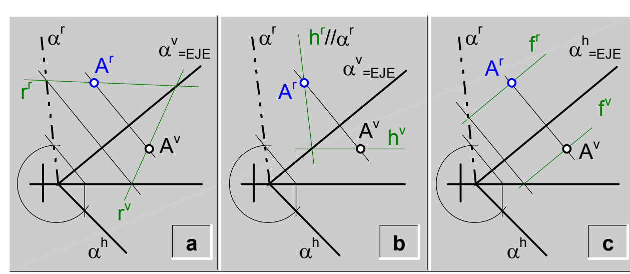


fig.227.\ Rebatimiento de un punto (A) por medio del rebatimiento previo de la traza horizontal del plano.

REBATIMIENTO A TRAVÉS DE UNA RECTA CARACTERÍSTICA HORIZONTAL DE UN PLANO.

Para rebatir cualquier punto (A) contenido en un plano (α) a través de una recta horizontal (h^1) del plano:

a) Se traza por el punto (A) una recta (p) de máxima pendiente del plano (α); y se determinan: el punto de corte (I) entre la recta (p) y la recta horizontal (h^1); y la longitud ($d_{A\text{-}I}$) del segmento (A-I)\ fig.228**a**.

b) Se determina la proyección rebatida (p^r) de la recta (p); sabiendo que contiene al punto ($I\!=\!I^r$), y es: paralela al plano horizontal de proyección; y perpendicular a la recta horizontal (h^1)\ fig.228**b**.

c) Se obtiene la proyección rebatida (A^r) del punto (A) midiendo la longitud ($d_{A\text{-}I}$) del segmento (A-I) sobre la proyección rebatida (p^r) de la recta (p), a partir del punto ($I\!=\!I^r$).

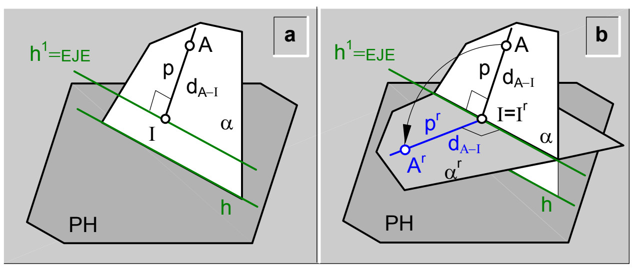


fig.228.\ Rebatimiento a través de una recta característica horizontal (h^1) del plano (α).

Ejemplo. Definir la proyección rebatida (A^r) del punto (A), contenido en el plano (α), definido por sus rectas características frontal (f) y horizontal (h)\ fig.229**a**:

Solución:

a) Se definen las proyecciones de la recta de máxima pendiente (p) del plano (α) que pasa por el punto (A) (primero la horizontal (p^h), perpendicular a la proyección horizontal (h^h) de la recta característica horizontal (h) del plano (α), y luego la vertical (p^v)\ fig.229**b**.

b) Se rebate la recta de máxima pendiente (p) (sus proyecciones rebatida (p^r) y horizontal (p^h) coinciden ($p^h\!=\!p^r$).

c) Se determinan las proyecciones del punto de corte (I) entre las rectas (p y h).

d) Se determina la longitud ($d_{A\text{-}I}$) del segmento (A-I).

e) Se define la proyección rebatida (A^r) del punto (A), midiendo la longitud ($d_{A\text{-}I}$) sobre la proyección rebatida (p^r) de la recta (p) a partir del punto (I), (puede trasladarse con el compás centrado en ($I^h\!=\!I^r$)).

f) Si el rebatimiento es inverso, las proyecciones horizontal (A^h) y rebatida (A^r) del punto (A) se ubican en lados opuestos del eje de rebatimiento (fig.229**b**); mientras que si el es directo, ambas proyecciones se ubican en el mismo lado del eje de rebatimiento\ fig.229**c**.

g) **Simplificación.** Este proceso puede simplificarse de acuerdo con los siguientes aspectos\ fig.229**d**:

h) La diferencia de cota entre los puntos (A e I), es siempre la diferencia de cota entre el punto (A) y la recta horizontal (h).

i) No es necesario señalar la ubicación del punto (I).

j) Se puede omitir toda la nomenclatura intermedia.

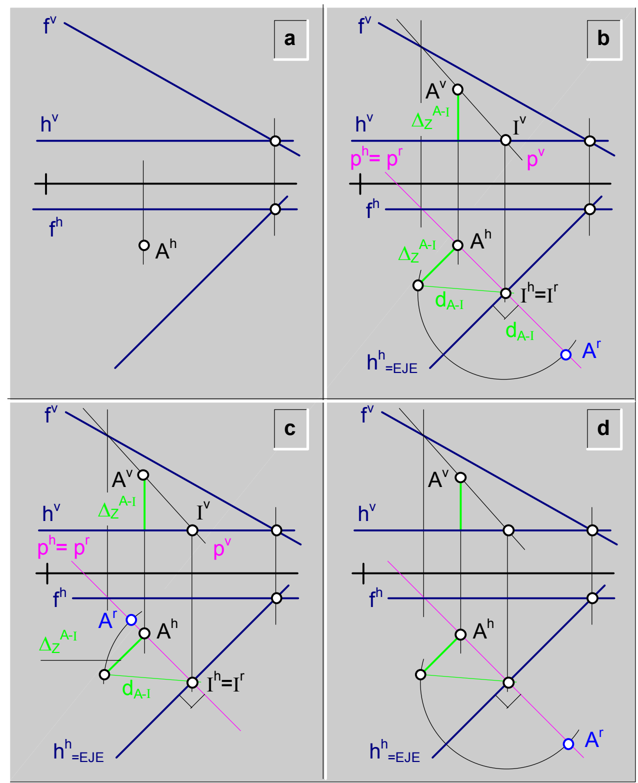


fig.229.\ Rebatimiento alrededor de una recta característica horizontal (h) de un plano (α)\ ejemplo.

REBATIMIENTO DE VARIOS PUNTOS.

En la fig.230**a** se muestra un punto (A) el cual ha sido rebatido y un segundo punto (B) el cual se quiere rebatir, ambos contenidos en el plano (α). Aunque puede rebatirse el punto (B), siguiendo el método utilizado en el rebatimiento del punto (A), es también posible rebatirlo aplicando las propiedades del rebatimiento ya expuestas en la fig.225:

a) Por triángulos de rebatimiento semejantes\ fig.230**b**.

b) Por rectas paralelas\ fig.230**c**.

c) Por medio de la recta (A-B)\ fig.230**d**.

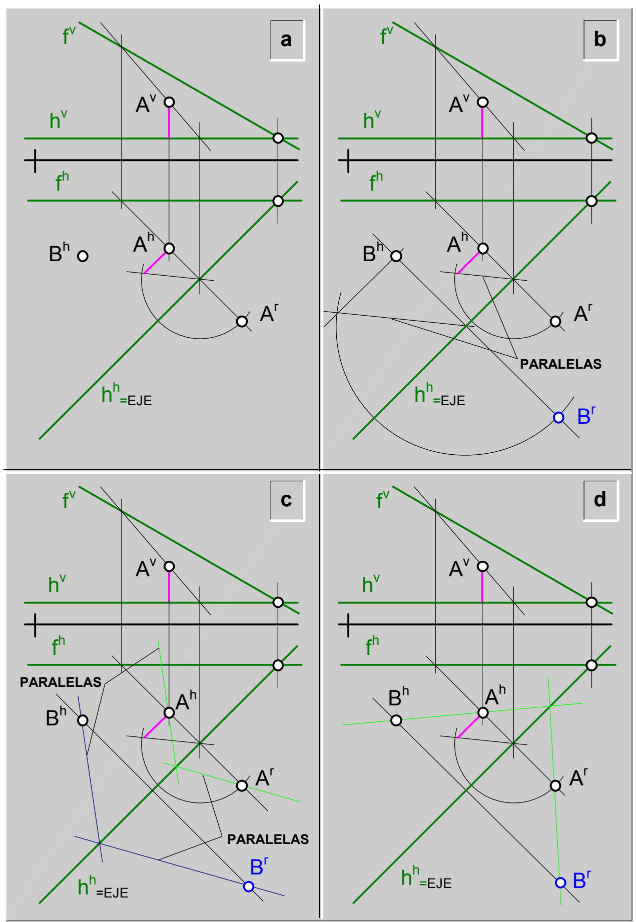


fig.230.\ Rebatimiento de varios puntos.

REBATIMIENTO DE UNA RECTA CARACTERÍSTICA FRONTAL DE UN PLANO.

Siendo el eje de rebatimiento la recta horizontal (h) del plano (α), en la fig.231**a** se muestra como obtener la proyección rebatida (f^r) de la recta frontal (f) del plano (α), rebatiendo para ello dos de sus puntos (1 y 2).

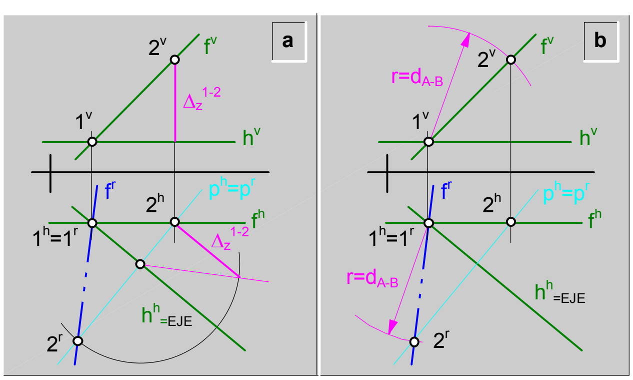


fig.231.\ Rebatimiento de una frontal de un plano (α).

En la fig.231**b** se muestra una simplificación del método basada en que la longitud ($d_{1\text{-}2}$) del segmento (1-2), se observa en verdadero tamaño en las proyecciones vertical (f^v) y rebatida (f^r).

Si previamente se rebate una recta frontal (f) de un plano (α), puede luego rebatirse cualquier punto (A) del plano por medio del siguiente procedimiento:

a) Se traza por el punto (A) una recta cualquiera (r) del plano (α) (fig.232**a**); esta recta puede ser horizontal (h^1) (fig.232**b**), ó frontal (f^1) (fig.232**c**).

b) Se rebate esa recta (r; h^1; ó f^1).

c) Se ubica la proyección rebatida (A^r) del punto (A) sobre la proyección rebatida de la recta (r; h^1; ó f^1).

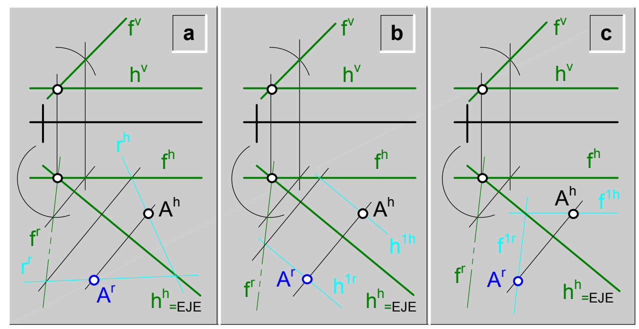


fig.232.\ Rebatimiento de un punto (A) de un plano (α) por medio del rebatimiento previo de una recta frontal (f).

REBATIMIENTO A TRAVÉS DE UNA RECTA CARACTERÍSTICA FRONTAL DE UN PLANO.

Para rebatir cualquier punto (A) contenido en un plano (α) a través de una recta frontal (f^1) del plano:

a) Se traza por el punto (A) una recta (i) de máxima inclinación del plano (α); y se determinan: el punto de corte (I) entre la recta (i) y la recta frontal (f^1); y la longitud ($d_{A\text{-}I}$) del segmento (A-I)\ fig.233**a**.

b) Se determina la proyección rebatida (i^r) de la recta (i); sabiendo que contiene al punto ($I=I^r$), y es: paralela al plano vertical de proyección; y perpendicular a la recta frontal (f^1)\ fig.233**b**.

c) Se obtiene la proyección rebatida (A^r) del punto (A) midiendo la longitud ($d_{A\text{-}I}$) del segmento (A-I) sobre la proyección rebatida (i^r) de la recta (i), a partir del punto ($I=I^r$).

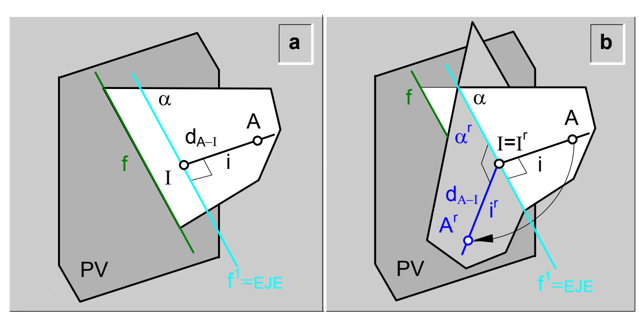


fig.233.\ Rebatimiento a través de una recta característica frontal (f^1) de un plano (α).

<u>Ejemplo.</u> <u>Definir la proyección rebatida (A^r) del punto (A), contenido en el plano (α), definido por sus rectas características frontal (f) y horizontal (h)</u>\ fig.234**a**:

Solución:

a) Se definen las proyecciones de la recta de máxima inclinación (i) del plano (α) que pasa por el punto (A) (primero la vertical (i^v), perpendicular a la proyección vertical (f^v) de la recta característica frontal (f) del plano (α), y luego la horizontal (i^h)\ fig.234**b**.

b) Se rebate la recta de máxima inclinación (i) (sus proyecciones rebatida (i^r) y vertical (i^v) coinciden (i^v=i^r).

c) Se determinan las proyecciones del punto de corte (I) entre las rectas (i y f).

d) Se determina la longitud (d_{A-I}) del segmento (A-I).

e) Se define la proyección rebatida (A^r) del punto (A), midiendo la longitud (d_{A-I}) sobre la proyección rebatida (i^r) de la recta (i) a partir del punto (I), (puede trasladarse con el compás centrado en (I^v=I^r)).

f) Si el rebatimiento es inverso, las proyecciones vertical (A^v) y rebatida (A^r) del punto (A) se ubican en lados opuestos del eje de rebatimiento (fig.234**b**); mientras que si el es directo, ambas proyecciones se ubican en el mismo lado del eje de rebatimiento\ fig.234**c**.

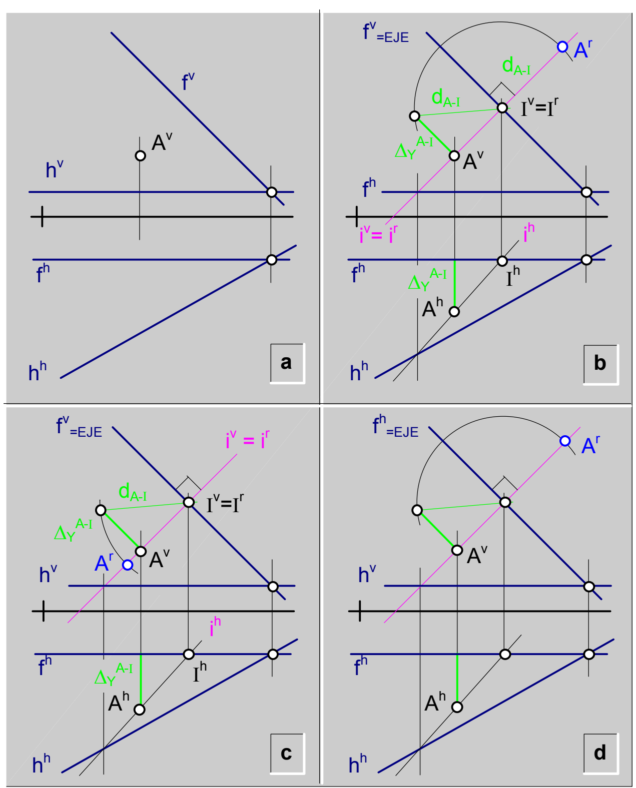


fig.234.\ Rebatimiento alrededor de una recta característica frontal (f) de un plano (α)\ ejemplo.

<u>Simplificación.</u> Este proceso puede simplificarse de acuerdo con los siguientes aspectos\ fig.234**d**:

a) La diferencia de vuelo entre los puntos (A e I), es siempre la diferencia de vuelo entre el punto (A) y la recta frontal (f).

b) No es necesario señalar la ubicación del punto (I).

c) Se puede omitir toda la nomenclatura intermedia.

<u>REBATIMIENTO DE VARIOS PUNTOS.</u>

En la fig.235**a** se muestra un punto (A) el cual ha sido rebatido y un segundo punto (B) el cual se quiere rebatir, ambos contenidos en el plano (α). Aunque puede rebatirse el punto (B), siguiendo el método utilizado en el rebatimiento del punto (A), es también posible rebatirlo aplicando las propiedades del rebatimiento ya expuestas en la fig.225:

a) Por triángulos de rebatimiento semejantes\ fig.235**b**.

b) Por rectas paralelas\ fig.235**c**.

c) Por medio de la recta (A-B)\ fig.235**d**.

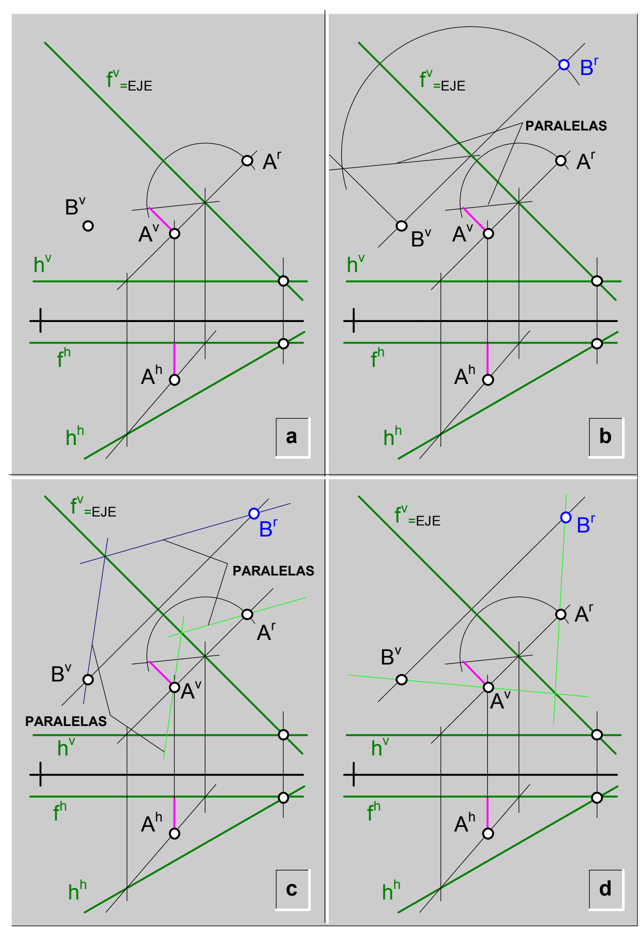


fig.235.\ Rebatimiento de varios puntos.

<u>REBATIMIENTO DE UNA RECTA CARACTERÍSTICA HORIZONTAL DE UN PLANO.</u>

Siendo el eje de rebatimiento la recta frontal (f) del plano (α), en la fig.236**a** se muestra como obtener la proyección rebatida (h^r) de la recta horizontal (h) del plano (α), rebatiendo para ello dos de sus puntos (1 y 2).

En la fig.236b se muestra una simplificación del método basada en que la longitud ($d_{1\text{-}2}$) del segmento (1-2), se observa en verdadero tamaño en las proyecciones horizontal (h^h) y rebatida (h^r).

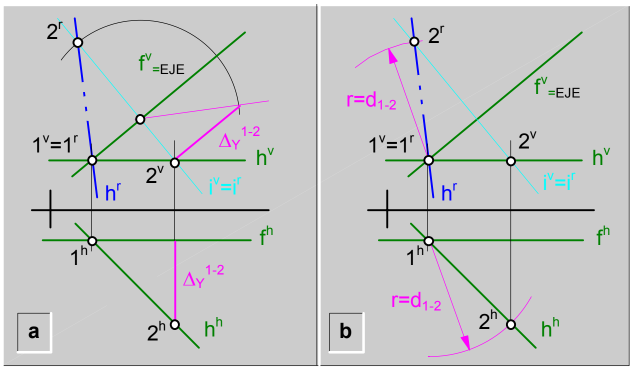


fig.236.\ Rebatimiento de una horizontal (h) de un plano (α).

Si previamente se rebate una recta horizontal (h) de un plano (α), puede luego rebatirse cualquier punto (A) del plano por medio del siguiente procedimiento:

a) Se traza por el punto (A) una recta cualquiera (r) del plano (α) (fig.237a); esta recta puede ser frontal (f^1) (fig.237b), ú horizontal (h^1) (fig.237c).

b) Se rebate esa recta (r; f^1; ó h^1).

c) Se ubica la proyección rebatida (A^r) del punto (A) sobre la proyección rebatida de la recta (r; f^1; ó h^1).

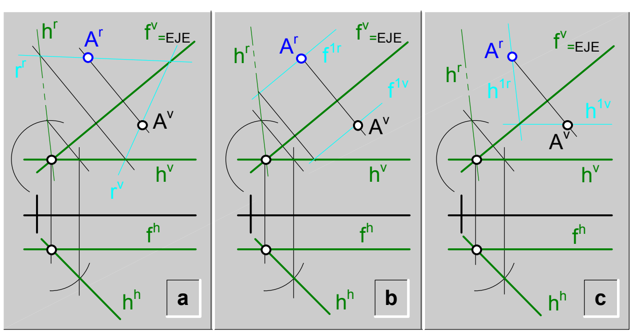


fig.237.\ Rebatimiento de un punto (A) de un plano (α) por medio del rebatimiento previo de una recta horizontal (h).

Ejercicio 01. Definir las proyecciones del cuadrado de vértices (A, B, C, y D), dado su vértice (C) y sabiendo que el lado (A-B), esta contenido en la recta (r); estando (A) mas alto que (B)\ fig.238a.

Solución:

La recta (r) y el punto (C) definen un plano (α) que contiene al cuadrado pedido. Si se rebate este plano, se puede dibujar el cuadrado en verdadero tamaño (rebatido) y luego obtener sus proyecciones horizontal y vertical a partir de la proyección rebatida. A continuación se define este proceso:

a) Se definen las trazas del plano (α) que contiene a la recta (r) y al punto (C); para ello se define previamente el plano (α) por rectas paralelas, trazando por (C) una recta (r^1) paralela a la recta (r)\ fig.238b.

b) Se rebaten: la traza vertical del plano (α), las rectas paralelas (r) y (r^1), y el vértice (C); tomando como eje de rebatimiento la traza horizontal del plano (α).

c) Se dibuja, en proyección rebatida, el cuadrado (A^r-B^r-C^r-D^r) con vértice en (C^r) y lado (A^r-B^r) sobre la recta (r^r)\ fig.238c.

d) Se definen las proyecciones horizontal y vertical del cuadrado a partir de la proyección rebatida\ fig.238d.

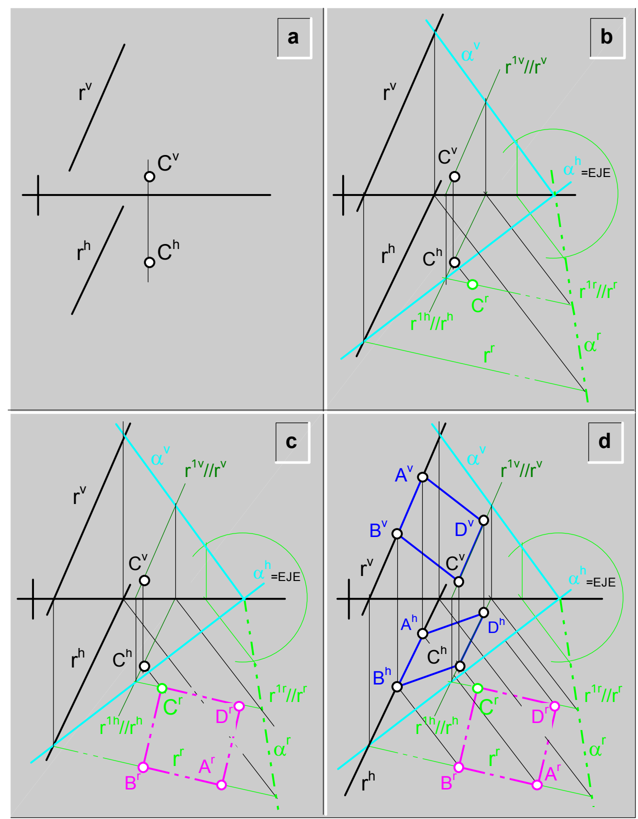


fig.238.\ Construcción de un cuadrado por rebatimiento previo de la traza vertical.

Ejercicio 02. Definir las proyecciones de un triángulo equilátero de vértices (A, B, y C), contenido en el plano (α) definido por los vértices (A, y B) y el punto (X)\ fig.239a.

Solución:

los puntos (A, B, y X) definen el plano (α), que contiene al triángulo equilátero pedido; si se rebate este plano, se puede dibujar el triángulo equilátero en verdadero tamaño (rebatido) y luego obtener sus proyecciones horizontal y vertical a partir de la proyección rebatida. A continuación se define este proceso:

a) Se definen las trazas del plano (α) que contiene a la recta (r) y al punto (X) y se rebate el lado (A-B) del triángulo equilátero; tomando como eje de rebatimiento la traza vertical del plano (α)\ fig.239**b**.

b) Se dibuja, con lado (A^r-B^r), la proyección rebatida (A^r;B^r;C^r) del triángulo equilátero (A;B;C)\ fig.239**c**.

Se definen las proyecciones horizontal y vertical del triángulo a partir de la proyección rebatida\ fig.239**d**.

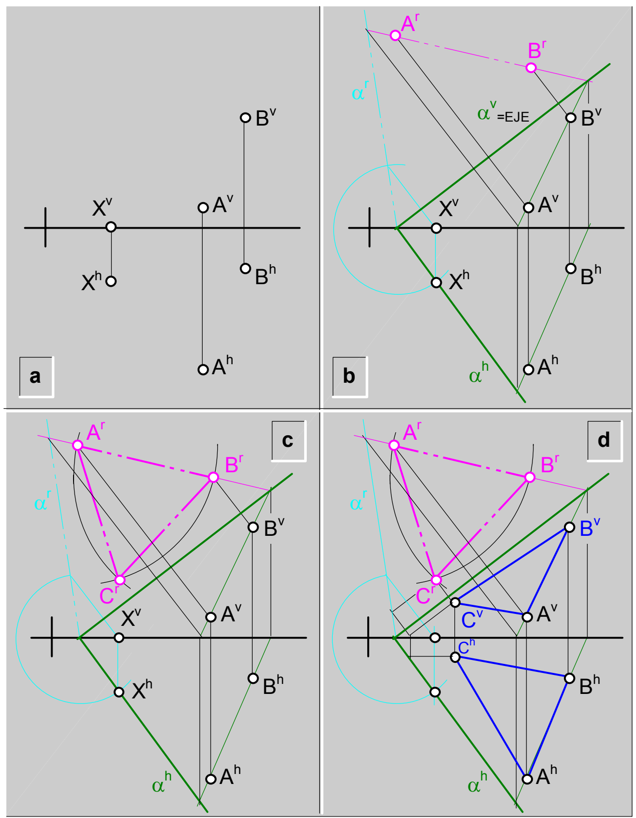


fig.239.\ Construcción de un triángulo equilátero, por rebatimiento previo de la traza horizontal.

<u>**Ejercicio 03.** Definir las proyecciones del cuadrado de vértices (A, B, C, y D), dado su vértice (C) y sabiendo que el lado (A-B), esta contenido en la recta (r), estando (A) por encima de (B)</u>\ fig.240**a**.

Solución:

La recta (r) y el punto (C) definen un plano (α) que contiene al cuadrado pedido, si se rebate este plano, se puede dibujar el cuadrado en verdadero tamaño (rebatido) y luego obtener sus proyecciones horizontal y vertical a partir de la proyección rebatida. A continuación se define este proceso:

a) Se definen las rectas características frontal (f) y horizontal (h) del plano (α) que pasan por el punto (C); y se rebaten: la frontal (f); la recta (r); y el punto (C), tomando como eje de rebatimiento la horizontal (h)\ fig.240**b**.

b) Se dibuja, en la proyección rebatida, un cuadrado con vértice en (C^r) y lado (A^r-B^r) sobre la recta (r^r)\ fig.240**c**.

c) Se definen las proyecciones horizontal y vertical del cuadrado a partir de la proyección rebatida\ fig.240**d**.

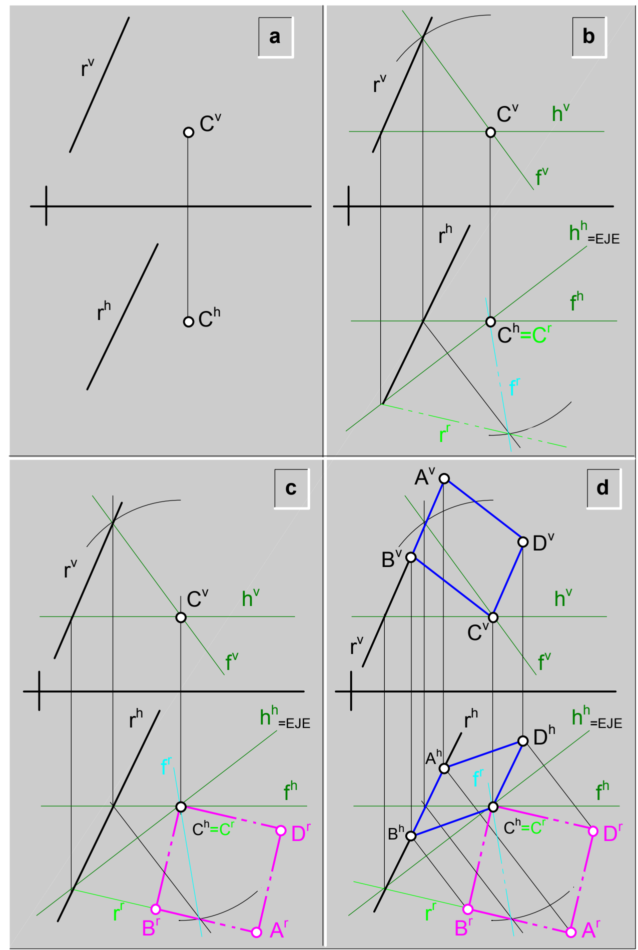


fig.240.\ Construcción de un cuadrado por rebatimiento previo de una recta frontal.

<u>**Ejercicio 04.** Definir las proyecciones de un cuadrado de vértices (A, B, C, y D), contenido en el plano (α) definido por el vértice (A) y la recta (r), sabiendo que la diagonal (A-C) es perpendicular a la recta (r), la cual contiene al vértice (C). (B) está por debajo de (A)</u>\ fig.241**a**.

Solución

El punto (A) y la recta (r) definen un plano (α) que contiene al cuadrado pedido. Si se rebate este plano, se puede dibujar el cuadrado en verdadero tamaño (rebatido) y luego obtener sus proyecciones horizontal y vertical a partir de la proyección rebatida. A continuación se define este proceso:

a) Se definen las rectas características frontal (f) y horizontal (h) del plano (α) que pasan por el punto (A); y se rebaten: la horizontal (h); la recta (r) y el punto (A); tomando como eje de rebatimiento la frontal (f)\ fig.241**b**

b) Se dibuja la proyección rebatida del cuadrado pedido\ fig.241**c**

c) Se definen las proyecciones vertical y horizontal del cuadrado (A; B; C; D) a partir de la proyección rebatida\ fig.241d

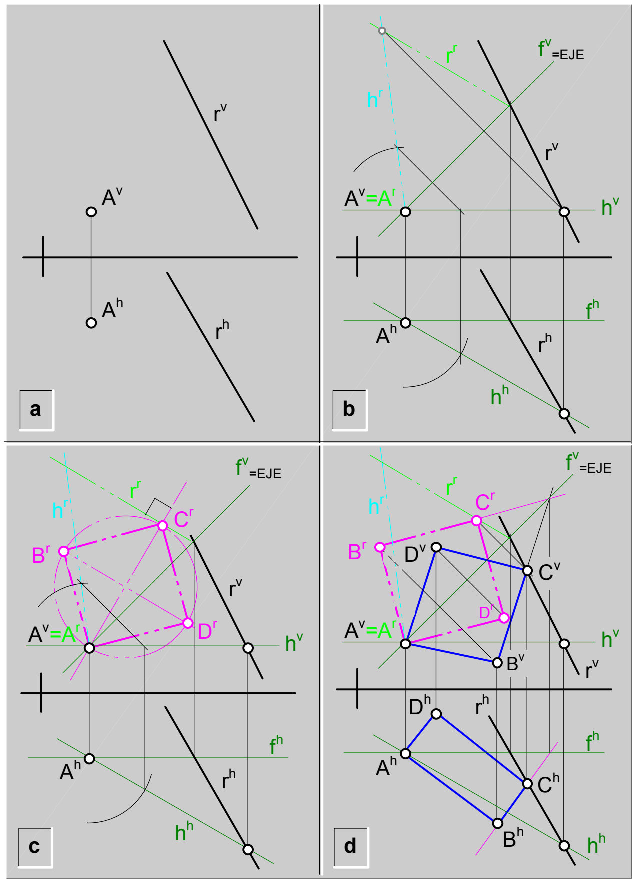


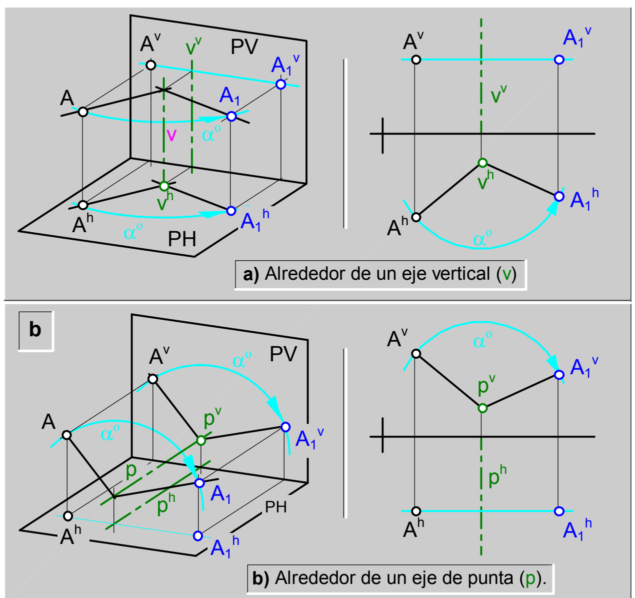
fig.241.\ Construcción de un cuadrado por rebatimiento previo de una recta horizontal.

ROTACIÓN.

El método de **Rotación**, también denominado **Giro**, consiste en girar el objeto en estudio (punto, recta, plano, etc) un determinado ángulo (α^o) alrededor de un eje de rotación, el cual es una recta vertical (v), ó de punta (p).

En la fig.242**a**, se representa la rotación de un punto (A), hasta la posición (A_1), alrededor de un eje vertical (v), y en la fig.242**b**, alrededor de un eje de punta (p).

Puede observarse, en la fig.242**a**, que cuando los puntos rotan a través de un eje vertical (v) recorren arcos de circunferencia paralelos al plano horizontal de proyección, mientras que si la rotación se produce a través de un eje de punta (p) (fig.242**b**), los arcos de circunferencia recorridos son paralelos al plano vertical de proyección.



a) Alrededor de un eje vertical (v)

b) Alrededor de un eje de punta (p).

fig.242.\ Rotación de un punto (A) hasta la posición (A_1).

ROTACIÓN DE UN PUNTO ALREDEDOR DE UN EJE DE PUNTA.

Conocidas las proyecciones de un punto (A), fig.243**a**, para efectuar su rotación a través de un eje de punta (p):

a) Se dibujan las proyecciones del eje de punta (p) que servirá de eje de rotación\ fig.243**b**.

b) Se definen las proyecciones de la recta (r), que pasa por el punto (A) y es perpendicular al eje de rotación (p)\ fig.243**c**.

c) Se representa la rotación, alrededor del eje (p), de la recta (r), hasta la posición (r_1), y por consiguiente del punto (A) contenido en ella hasta la posición (A_1), girando un ángulo de rotación (α^o)\ fig.243**d**.

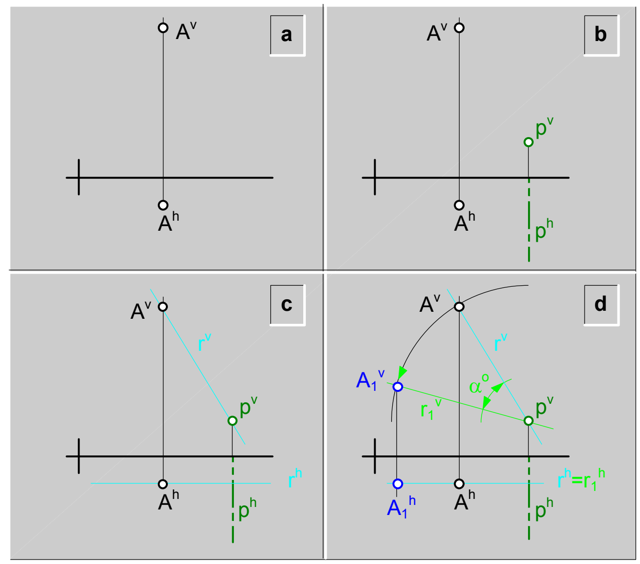


fig.243.\ Rotación alrededor de un eje de punta.

ROTACIÓN DE VARIOS PUNTOS.

Al haberse girado un primer punto (A), alrededor de un eje de punta (p), un determinado ángulo (α^o). Cualquier otro punto (B), debe girarse: alrededor del mismo eje (p), en el mismo sentido, e igual ángulo (α^o)\ fig.244**a**.

El ángulo de giro (α^o) puede ser medido con el transportador de ángulos, como se hizo en la fig.244**a**; pero es mas práctico transportarlo con el compás, sobre una misma circunferencia (la que contiene al punto (A)), por medio del radio (r)\ fig.244**b**.

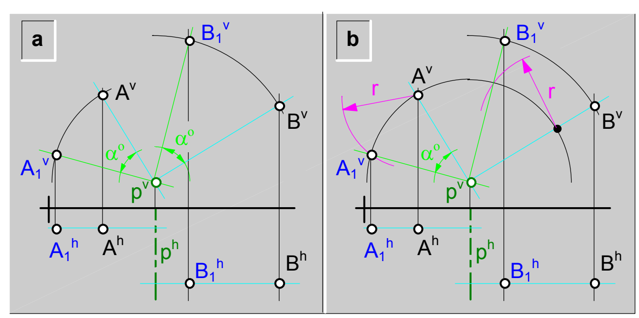


fig.244.\ Rotación simultánea de varios puntos.

ROTACIÓN DE UNA RECTA.

Si quiere rotarse una recta (a) (fig.245a), se rotan dos puntos (1 y 2) de ella hasta las posiciones (1_1 y 2_1), las cuales definirán la posición girada (a_1) de la recta (a)\ fig.245**b**.

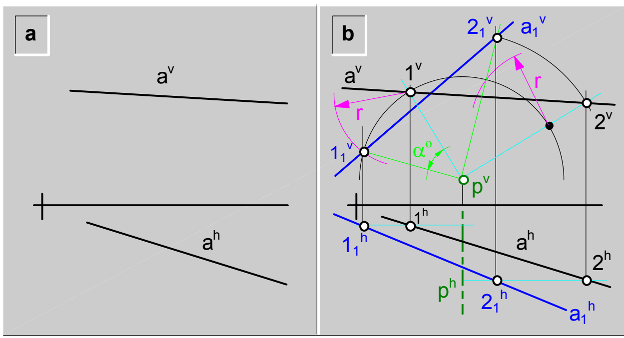


fig.245.\ Rotación de una recta.

ROTACIÓN DE UN PLANO A UNA POSICIÓN VERTICAL.

Para rotar un plano (α), a una posición vertical (α_1)\ fig.246**a**:

a) Por cualquier punto (I) del plano (α), se traza una frontal (f) del mismo y un eje de punta (p) alrededor del cual se hará girar\ fig.246**b**.

b) Se gira la frontal (f) un ángulo (α°) hasta colocarla en posición vertical (f_1)\ fig.246**c**.

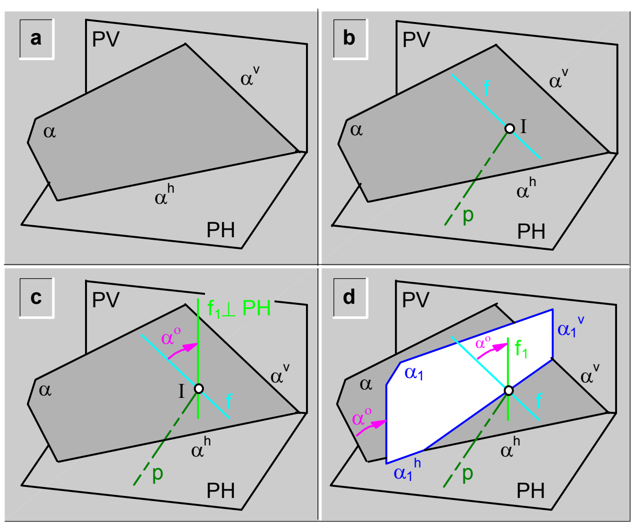


fig.246.\ Rotación de un plano (α) a una posición vertical (α_1).

El plano (α) se encuentra en posición vertical (α_1), después de girar el ángulo (α°), debido a que en esta nueva posición todas sus frontales son rectas verticales\ fig.246**d**.

Las rectas frontales (f) de un plano (α) son perpendiculares a las rectas de máxima inclinación (i) del mismo (fig.247**a**). Por lo tanto también puede definirse el ángulo (α°) de giro necesario para colocar un plano (α) en posición vertical (α_1), rotando una recta de máxima inclinación (i) del plano (α) hasta una posición horizontal (i_1); ya en esta posición las frontales (f), se encontrarán en posición (f_1) vertical\ fig.247**b**.

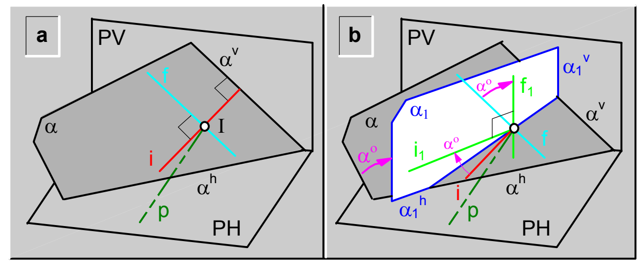


fig.247.\ Rotación de rectas frontal (f) y de máxima inclinación (i) a posiciones vertical (f_1) y horizontal (i_1), respectivamente.

Ejemplo: Si quiere rotarse el plano (α) mostrado en la fig.248**a**, a una posición (α_1) vertical:

a) Por un punto (I) cualquiera del plano (α) se traza el eje de rotación (p), y una recta de máxima inclinación (i) del plano (α). Y se determina la intersección (X) de la recta (i) con el plano vertical de proyección\ fig.248**b**.

b) Se gira la recta (i) hasta colocarla en la posición horizontal (i_1). Y se define la proyección vertical (α_1^v) de la traza vertical del plano (α) en su posición vertical (α_1); dado que pasa por la posición girada (X_1) del punto (X) y es perpendicular a la línea de tierra\ fig.248**c**.

c) Se define la proyección horizontal (α_1^h) de la traza horizontal del plano (α), en su posición vertical (α_1); dado que se corta en la línea de tierra con (α_1^v), y pasa por la proyección horizontal (I^h) del punto (I), debido a que este punto no cambia de posición al girar el plano (α) ($I^h=I_1^h$; $I^v=I_1^v$), por estar contenido en el eje de rotación (p)\ fig.248**d**.

Para mayor comprensión, debe recordarse que en posición vertical (α_1), el plano (α) se proyecta horizontalmente sobre una recta (α_1^h), de la cual ya se conoce un punto (I_1^h) y se sabe además que se corta en la línea de tierra con (α_1^v).

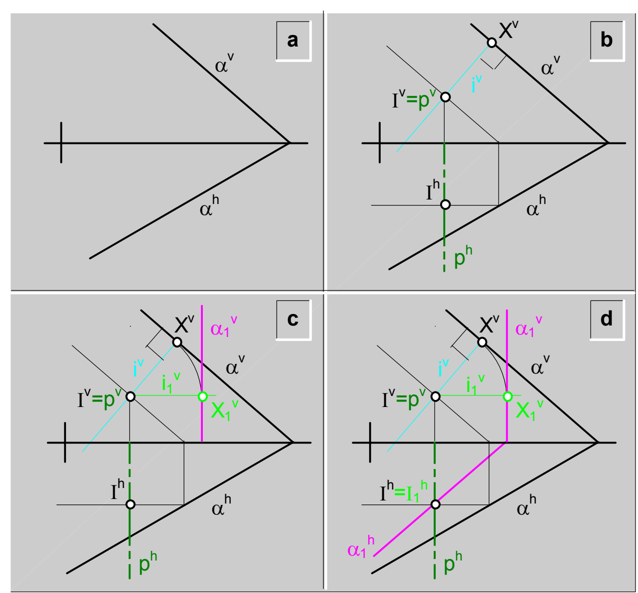


fig.248.\ Rotación de un plano a una posición vertical\ ejemplo.

Si el eje de rotación (p) se elige contenido en el plano horizontal de proyección (fig.249**a**), se simplifica la rotación de un plano (α) a una posición (α_1) vertical\ fig.249**b**.

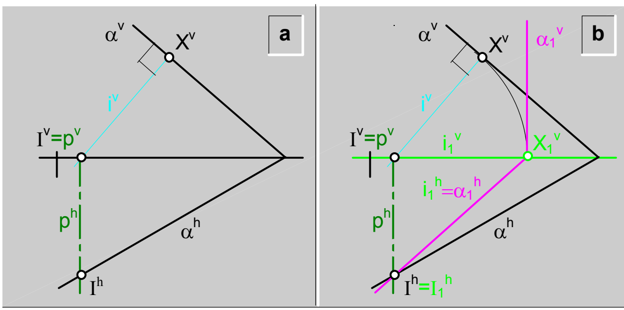


fig.249.\ Eje de rotación en el plano horizontal de proyección .

ROTACIÓN DE UN PLANO EN POSICIÓN VERTICAL HASTA UNA POSICIÓN FRONTAL.

Para rotar un plano (α) que se encuentre en posición vertical hasta una posición frontal (α_1), debe hacerse girar el plano (α) a través de un eje vertical (v)\ fig.250**a**. El eje de rotación (v), puede también estar contenido en el plano (α)\ fig.250**b**, o ser la traza vertical del plano (α)\ fig.250**c**, en este caso se coloca el plano (α) sobre el plano vertical de proyección.

Al encontrarse el plano (α) en posición frontal (α_1), su proyección vertical se encuentra en verdadero tamaño.

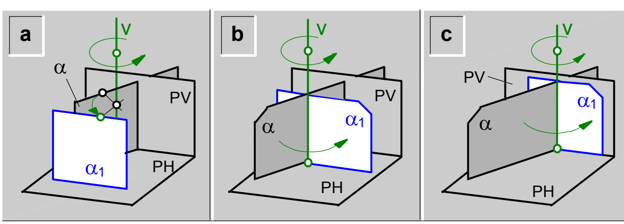


fig.250.\ Rotación de un plano (α) en posición vertical a una posición (α_1) frontal.

Ejemplo: Definir las proyecciones del triángulo equilátero (A;B;C) contenido en un plano vertical (α), conocido su lado (A-B) y dado que el vértice (C) esta por debajo de (B)\ fig.251**a**:

Solución:

a) La proyección horizontal (A^h-B^h) del lado (A-B) define la proyección horizontal (α^h) de la traza horizontal del plano (α) que contiene al triángulo (A;B;C); y la proyección vertical (α^v) de la traza vertical del plano (α) es perpendicular a la línea de tierra y se corta con (α^h) en la línea de tierra, por lo tanto se definen ambas trazas\ fig.251**b**.

b) Se elige como eje vertical (v) de rotación a la traza vertical del plano (α) y se rota, a través de él, el lado (A-B) hasta colocarlo sobre el plano vertical de proyección (A_1-B_1).

c) Se dibuja, en verdadero tamaño, el triángulo (A; B; C) en su proyección vertical girada (A_1^v; B_1^v; C_1^v), y se define la proyección horizontal (C^h) del vértice (C), y por consiguiente la proyección horizontal (A^h; B^h; C^h) del triángulo (A; B; C)\ fig.251**c**.

d) Se define la proyección vertical (C^v) del vértice (C), y por consiguiente la proyección vertical (A^v; B^v; C^v) del triángulo (A; B; C)\ fig.251**d**.

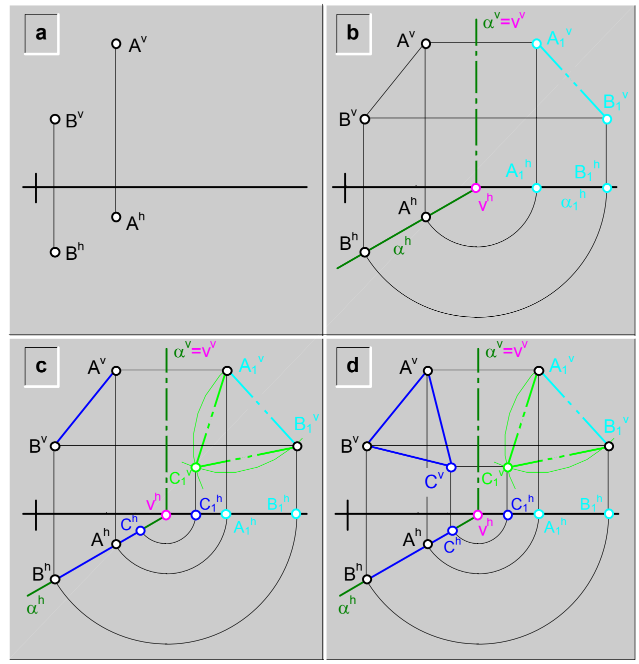


fig.251.\ Rotación de un plano vertical a una posición frontal.

ROTACIÓN DE UN PLANO CUALQUIERA A UNA POSICIÓN FRONTAL.

Cualquier plano (α), en posición arbitraria, puede ser colocado en posición frontal por medio de dos rotaciones sucesivas, realizadas en el siguiente orden:

a) Se gira el plano (α), alrededor de un eje de punta (p), hasta una posición vertical (α_1)\ fig.252**a**.

b) Se gira el plano (α), alrededor de un eje vertical (v), desde la posición vertical (α_1) hasta una posición frontal (α_2)\ fig.252**b**.

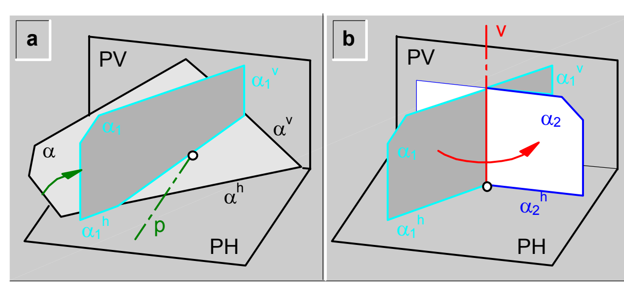


fig.252.\ Rotación de un plano a una posición frontal.

Ing. Alberto M. Pérez G.

EJEMPLO. Definir las proyecciones de un cuadrado de vértices (A, B, C, D), contenido en el plano (α) , sabiendo que el vértice (C) se encuentra a la derecha de (B)\ fig.253**a**.

Solución:

a) Se define el eje de rotación (p) y se rota, a su alrededor, el plano (α) hasta la posición vertical (α_1)\ fig.253**b**.

b) Se rota el lado (A-B) a la posición (A_1-B_1). Para ello\ fig.253**c**:

- **1)** Se trasladan las proyecciones horizontales (A^h-B^h), en forma paralela a la línea de tierra, a la posición (A_1^h-B_1^h), sobre (α_1^h).
- **2)** Se rotan las proyecciones verticales (A^v-B^v), con centro en (p^v) a la posición (A_1^v-B_1^v).

c) Eligiendo la recta (α_1^v) como eje vertical de giro (α_1^v=v^v), se rota el lado (A-B) desde la posición (A_1-B_1) hasta colocarlo sobre el plano vertical de proyección (A_2-B_2)\ fig.253**d**:

d) Se construye, en verdadero tamaño, el cuadrado pedido con lado en (A_2^v-B_2^v)\ fig.253**e**.

e) Se rota el cuadrado (A_2-B_2-C_2-D_2)a la posición (A_1-B_1-C_1-D_1)\ fig.253**f**:

f) Se rota el cuadrado (A_1-B_1-C_1-D_1) a su posición original (A-B-C-D), obteniendo así sus proyecciones horizontal y vertical. Para ello\ fig.253**g**:

- **1)** Se trazan, por las proyecciones (C_1^h y D_1^h) las proyecciones horizontales (f^h y f^{1h}) de las rectas frontales (f y f^1), que pasan por los puntos (C y D) respectivamente.
- **2)** Se determinan las proyecciones verticales (f^v y f^{1v}) de las rectas frontales (f y f^1).
- **3)** Se trazan, con centro en (p^v), las proyecciones verticales de los arcos de giro de los puntos (C y D), los cuales generan las proyecciones verticales (C^v y D^v) de los puntos (C y D) al cortarse con las proyecciones verticales (f^v y f^{1v}) de las frontales (f y f^1). Definiendo así la proyección vertical del cuadrado.
- **4)** Se definen las proyecciones horizontales (C^h y D^h) de los vértices (C y D). Definiendo así la proyección horizontal del cuadrado.

ROTACIÓN DE UN PLANO A UNA POSICIÓN DE PUNTA.

Para rotar un plano (α), a una posición de punta (α_1)\ fig.254**a**:

a) Por cualquier punto (I) del plano (α), se traza una horizontal (**h**) del mismo y un eje de vertical (**v**) alrededor del cual se hará girar\ fig.254**b**.

b) Se gira la horizontal (**h**) un ángulo (α^o) hasta colocarla en posición de punta (h_1)\ fig.254**c**.

El plano (α) se encuentra en posición de punta (α_1), después de girar el ángulo (α^o), debido a que en esta nueva posición todas sus horizontales son rectas de punta\ fig.254**d**.

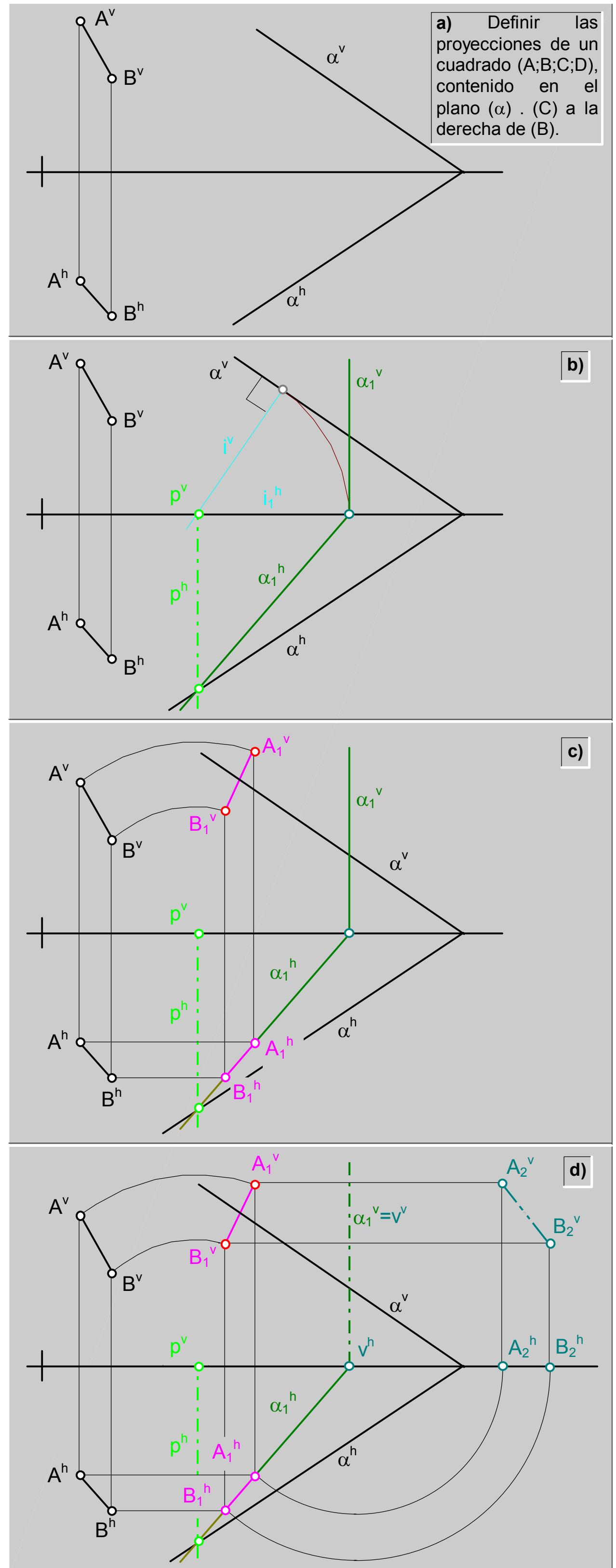


fig.253.\ Rotación de un plano a una posición frontal\ ejemplo.

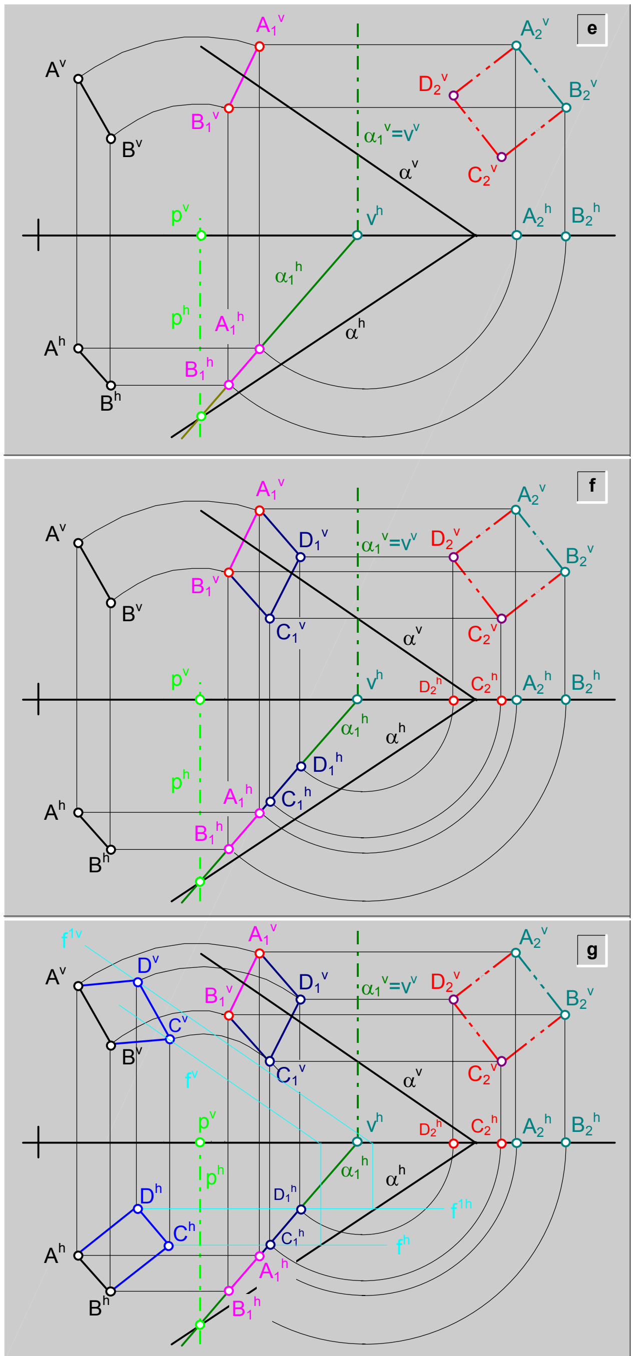


fig.253.\ ... continuación.

Las rectas horizontales (h) de un plano (α) son perpendiculares a las rectas de máxima pendiente (p) del mismo (fig.255a). Por lo tanto también puede definirse el ángulo (α^o) de giro necesario para colocar un plano (α) en posición de punta (α_1), rotando una recta de máxima pendiente (p) del plano (α) hasta una posición frontal (p_1); ya en esta posición las horizontales (h) del plano (α), se encontrarán en posición de punta (h_1)\ fig.255b.

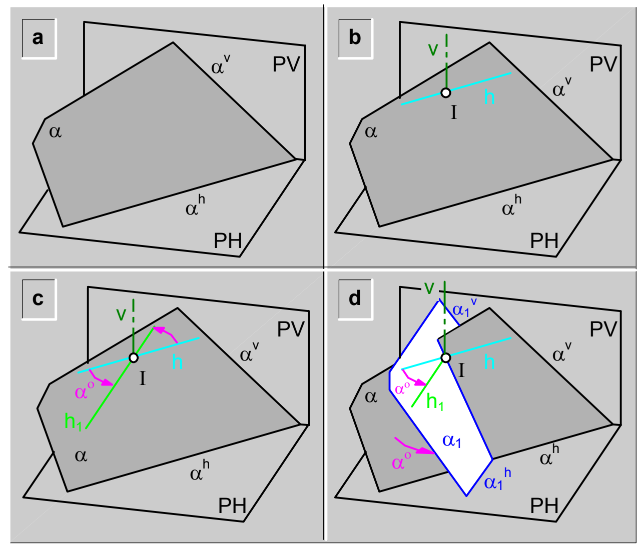


fig.254.\ Rotación de un plano a posición de punta.

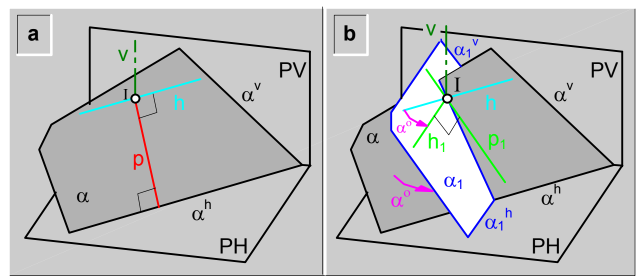


fig.255.\ Rotación de rectas horizontal (h) y de máxima pendiente (p) a posiciones de punta (h_1) y frontal (p_1), respectivamente.

Ejemplo: Si quiere rotarse el plano (α) mostrado en la fig.256**a**, a una posición (α_1) de punta:

a) Por un punto (I) cualquiera del plano (α) se traza el eje de rotación (v), y una recta de máxima pendiente (p) del plano (α); y se determina la intersección (X) de la recta (p) con el plano horizontal de proyección\ fig.256**b**.

b) Se gira la recta (p) hasta colocarla en la posición frontal (p_1). Y se define la proyección horizontal (α_1^h) de la traza horizontal del plano (α) en su posición horizontal (α_1); dado que pasa por la posición girada (X_1) del punto (X) y es perpendicular a la línea de tierra\ fig.256**c**.

c) Se define la proyección vertical (α_1^v) de la traza vertical del plano (α) en su posición de punta (α_1); dado que se corta en la línea de tierra con (α_1^h), y pasa por la proyección vertical (I^v) del punto (I), debido a que este punto no cambia de posición al girar el plano (α) (I^v=I_1^v; I^h=I_1^h), por estar contenido en el eje de rotación (v)\ fig.256**d**.

Para mayor comprensión, debe recordarse que en posición de punta (α_1), el plano (α) se proyecta verticalmente sobre una recta, de la cual ya se conoce un punto (I_1^v) y se sabe además que se corta en la línea de tierra con (α_1^h).

Si el eje de rotación (v) se elige contenido en el plano vertical de proyección (fig.257**a**), se simplifica la rotación de un plano (α) a una posición (α_1) de punta\ fig.257**b**.

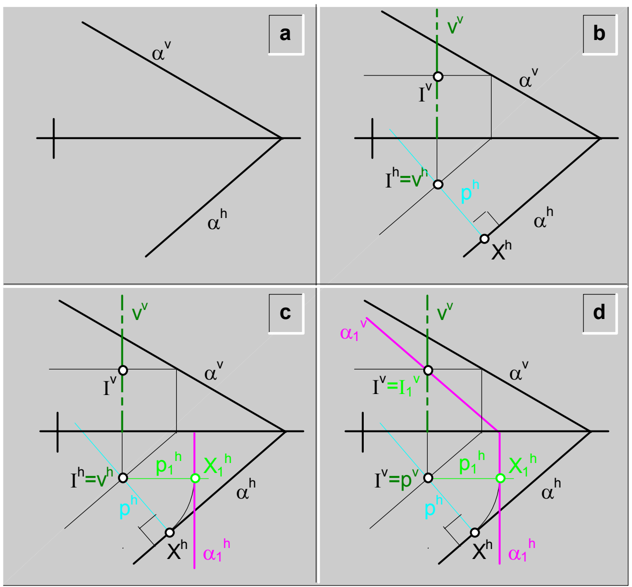


fig.256.\ Rotación de un plano a una posición de punta\ ejemplo.

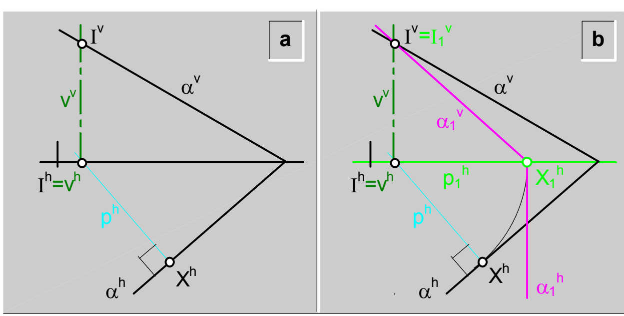


fig.257.\ Eje de rotación en el plano vertical de proyección.

ROTACIÓN DE UN PLANO EN POSICIÓN DE PUNTA HASTA UNA POSICIÓN HORIZONTAL.

Para rotar un plano (α) que se encuentre en posición de punta hasta una posición horizontal (α_1), debe hacerse girar el plano (α) a través de un eje de punta (p)\ fig.258**a**. El eje de rotación (p), puede también estar contenido en el plano (α)\ fig.258**b**, o ser la traza horizontal del plano (α)\ fig.258**c**, en este caso se coloca el plano (α) sobre el plano horizontal de proyección.

Al encontrase el plano (α) en posición horizontal (α_1), su proyección horizontal se encuentra en verdadero tamaño.

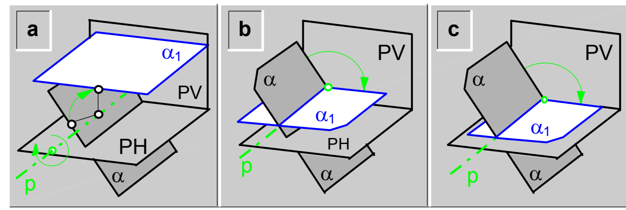


fig.258.\ Rotación de un plano (α) en posición de punta a una posición (α_1) horizontal.

Ejemplo: Definir las proyecciones del triángulo equilátero (A;B;C) contenido en un plano de punta (α), conocido su lado (A-B) y dado que el vértice (C) está por detrás de (B)\ fig.259**a**:

Solución:

a) La proyección vertical (A^v-B^v) del lado (A-B) define la proyección vertical (α^v) de la traza vertical del plano (α) que contiene al triángulo (A;B;C); y la proyección horizontal (α^h) de la traza horizontal del plano (α) es perpendicular a la línea de tierra, y se corta con (α^v) en la línea de tierra, por lo tanto se definen ambas trazas\ fig.259**b**.

b) Se elige como eje de punta (p) de rotación a la traza horizontal del plano (α); y se rota, a través de él, el lado (A-B) hasta colocarlo sobre el plano horizontal de proyección (A_1-B_1).

c) Se dibuja, en verdadero tamaño, el triángulo (A; B; C) en su proyección horizontal girada ($A_1{}^h$; $B_1{}^h$; $C_1{}^h$), y se define la proyección vertical (C^v) del vértice (C), y por consiguiente la proyección vertical (A^v; B^v; C^v) del triángulo (A; B; C)\ fig.259**c**.

d) Se define la proyección horizontal (C^h) del vértice (C), y por consiguiente la proyección horizontal (A^h; B^h; C^h) del triángulo (A; B; C)\ fig.259**d**.

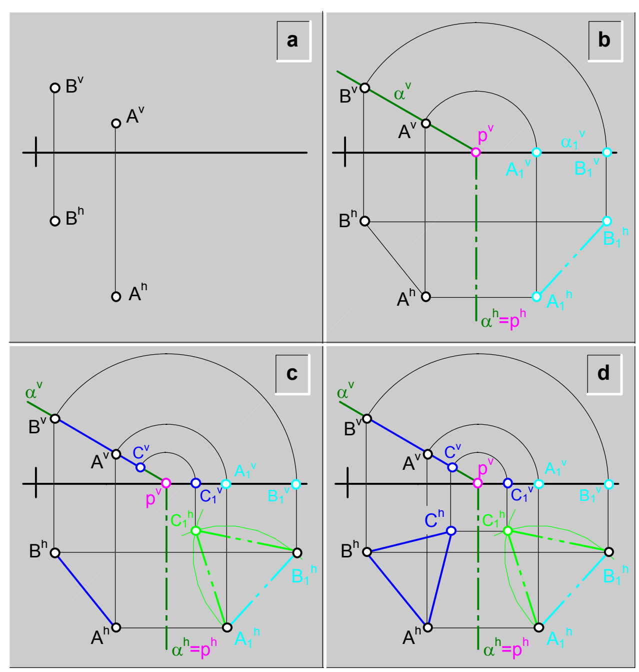


fig.259.\ Rotación de un plano de punta a una posición horizontal.

ROTACIÓN DE UN PLANO A UNA POSICIÓN HORIZONTAL.

Cualquier plano (α), en posición arbitraria, puede ser colocado en posición horizontal por medio de dos rotaciones sucesivas, realizadas en el siguiente orden:

a) Se gira el plano (α), alrededor de un eje de vertical (v), hasta una posición de punta (α_1)\ fig.260**a**.

b) Se gira el plano (α), alrededor de un eje de punta (p), desde la posición de punta (α_1) hasta una posición horizontal (α_2)\ fig.260**b**.

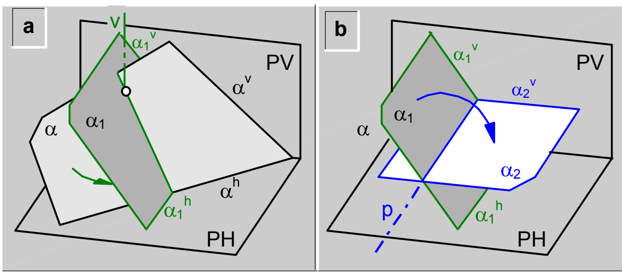


fig.260.\ Rotación de un plano a una posición horizontal.

EJEMPLO. Definir las proyecciones de un cuadrado de vértices (A, B, C, D), contenido en el plano (α) , sabiendo que el vértice (C) se encuentra a la derecha de (B)\ fig.261**a**.

Solución:

a) Se define el eje de rotación (v) y se rota, a su alrededor, el plano (α) hasta la posición de punta (α_1)\ fig.261**b**.

b) Se rota el lado (A-B) a la posición (A_1-B_1). Para ello\ fig.261**c**:

1) Se trasladan las proyecciones verticales (A^v-B^v), en forma paralela a la línea de tierra, a la posición (A_1^v-B_1^v), sobre (α_1^v).

2) Se rotan las proyecciones horizontales (A^h-B^h), con centro en (v^h) a la posición (A_1^h-B_1^h).

c) Eligiendo la recta (α_1^h) como eje de punta de rotación (α_1^h=p^h); se gira el lado (A-B) desde la posición (A_1-B_1) hasta colocarlo sobre el plano horizontal de proyección en la posición (A_2-B_2)\ fig.261**d**:

d) Se construye, en verdadero tamaño, el cuadrado pedido con lado en (A_2^h-B_2^h)\ fig.261**e**.

e) Se rota el cuadrado (A_2-B_2-C_2-D_2) a la posición (A_1-B_1-C_1-D_1)\ fig.261**f**:

f) Se rota el cuadrado (A_1-B_1-C_1-D_1) a su posición original (A-B-C-D), obteniendo así sus proyecciones vertical y horizontal. Para ello\ fig.261**g**:

1) Se trazan, por las proyecciones (C_1^v y D_1^v), las proyecciones verticales (h^v y h^{1v}) de las rectas horizontales (h y h^1), que pasan por los puntos (C y D) respectivamente.

2) Se determinan las proyecciones horizontales (h^h y h^{1h}) de las rectas horizontales (h y h^1).

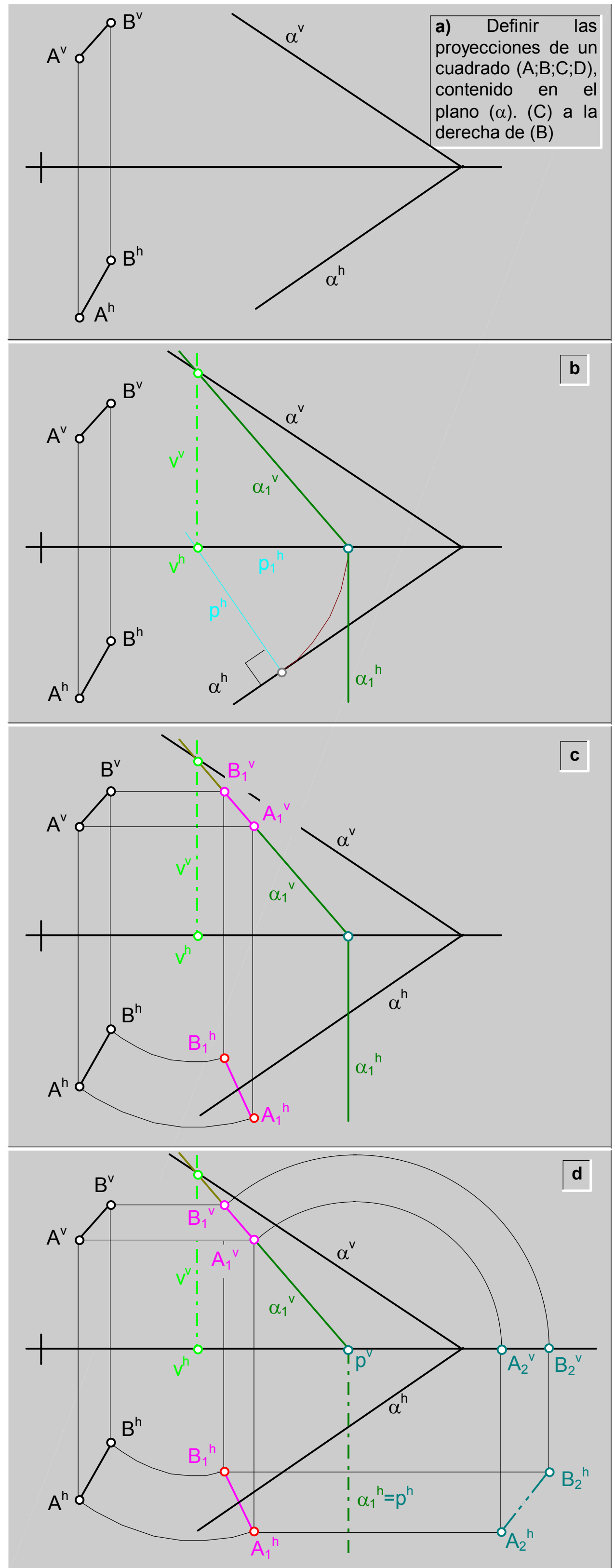


fig.261.\ Rotación de un plano a una posición horizontal\ ejemplo.

3) Se trazan, con centro en (V^h), las proyecciones horizontales de los arcos de giro de los puntos (C y D), los cuales generan las proyecciones horizontales (C^h y D^h) de los puntos (C y D) al cortarse con las proyecciones horizontales (h^h y h^{1h}) de las horizontales (h y h^1). Definiendo así la proyección horizontal del cuadrado.

4) Se definen las proyecciones verticales (C^v y D^v) de los puntos (C y D). Definiendo así la proyección vertical del cuadrado.

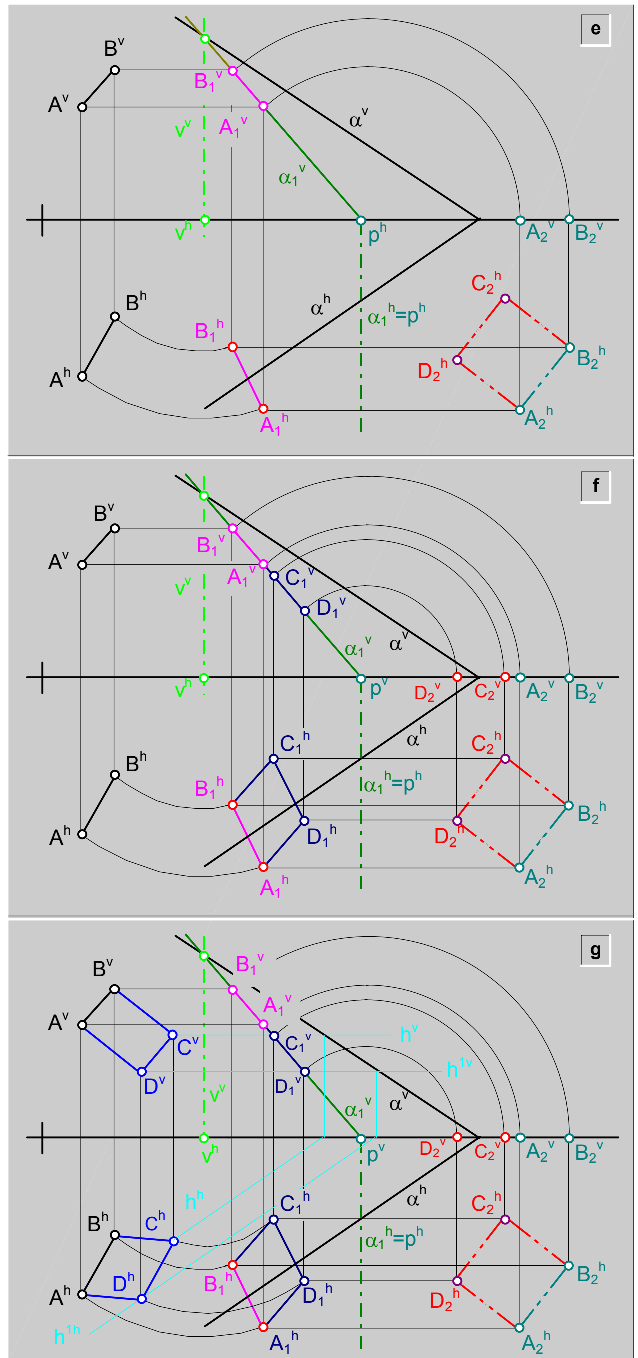


fig.261.\ ... continuación.

CAMBIO DE PLANOS DE PROYECCIÓN.

Como ya se describió, el sistema de Doble Proyección Ortogonal lo definen dos planos principales de proyección, denominados: plano vertical de proyección (PV) y plano horizontal de proyección (PH), los cuales se cortan, formando un ángulo de 90º, y definiendo una línea denominada línea de tierra, la cual ahora se denominará (H-V), por representar la intersección entre los planos horizontal y vertical de proyección\ fig.262**a**.

El cambio de planos de proyección consiste en sustituir el plano vertical de proyección (PV) por cualquier plano tres (P3) de proyección que sea perpendicular al plano horizontal de proyección (fig.262**b**). Se obtiene de esta forma un nuevo sistema de doble proyección ortogonal, en el cual, los planos principales de proyección son: el plano tres de proyección (P3), que reemplaza al plano vertical de proyección (PV), y el plano horizontal de proyección (PH), que mantiene su posición. La Línea de Tierra, es ahora la intersección (H-3) entre los planos horizontal y tres de proyección. En este caso, la proyección horizontal (A^h) de cualquier punto (A) es común a ambos sistemas, y la cota (Z_A) de cualquier punto (A) mantiene su valor al definir su proyección sobre el plano tres de proyección; que se denomina proyección tres (A^3).

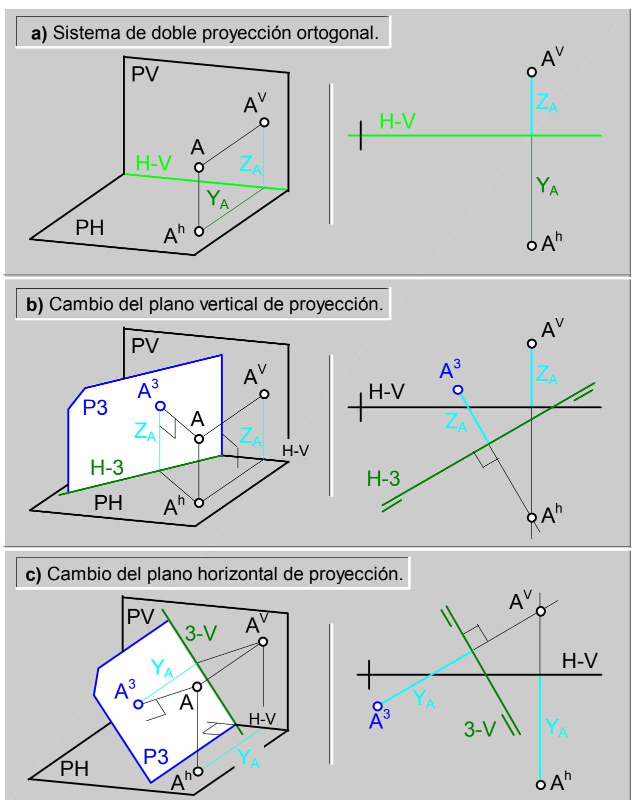


fig.262.\ Cambio de planos de proyección.

Puede establecerse también un cambio de plano de proyección sustituyendo el plano horizontal de proyección por un plano tres de proyección (P3) que sea perpendicular al plano vertical de proyección (fig.262**c**). Se obtiene de esta forma un nuevo sistema de doble proyección ortogonal, en el cual, los planos principales de proyección son: el plano vertical de proyección, que es común a ambos sistemas, y el plano tres de proyección (P3), que reemplaza al plano horizontal de proyección (PH). La Línea de Tierra, es ahora la intersección (3-V) entre los planos tres y vertical de proyección. En este caso, la proyección vertical (A^v) de cualquier punto (A) es común a ambos sistemas, y el vuelo (Y_A) de cualquier punto (A) mantiene su valor al definir su proyección sobre el plano tres de proyección; que se denomina proyección tres (A^3).

CAMBIO DEL PLANO VERTICAL DE PROYECCIÓN, PARA OBSERVAR EN POSICIÓN DE PUNTA A UN PLANO CUALQUIERA.

Si un plano (α) se encuentra en una posición cualquiera con respecto a un sistema (H-V) de doble proyección ortogonal. Puede definirse un nuevo sistema (H-3) de doble proyección ortogonal, con respecto al cual el plano (α) sea un plano de punta, cambiando el plano vertical de proyección (PV) por un plano tres de proyección (P3) que sea perpendicular a la traza horizontal de plano (α)\ fig.263**a** y fig.263**b**.

LAS TRAZAS DEL PLANO (α) SON AHORA:

a) Traza horizontal: Es común a ambos sistemas. Su proyección horizontal (α^h) es perpendicular a la línea de tierra (H-3).

b) Traza tres: Es la intersección del plano (α) con el plano tres de proyección. Se corta en la línea de tierra (H-3) con la traza horizontal del plano (α); por lo tanto su proyección tres (α^3) se corta con la proyección horizontal (α^h) de la traza horizontal del plano (α) en la línea de tierra (H-3)\ fig.263**b**. Todo el plano (α) se proyecta sobre el plano tres de proyección en la recta (α^3).

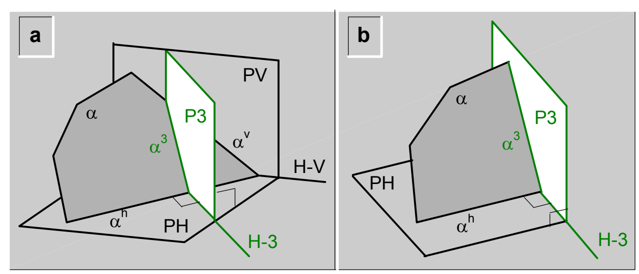


fig.263.\ Cambio del plano vertical de proyección, para observar en posición de punta a un plano cualquiera.

Ejemplo: Realizar el cambio de plano vertical de proyección necesario para definir un sistema de doble proyección ortogonal (H-3) con respecto al cual el plano (α) sea un plano de punta. Definir las trazas del plano (α) en este nuevo sistema de doble proyección ortogonal.\fig.264**a**:

Solución:

a) Se representa el cambio del plano vertical de proyección por el plano tres de proyección, dibujando la nueva la línea de tierra (H-3), perpendicular a la proyección horizontal (α^h) de la traza horizontal del plano (α)\ fig.264**b**.

b) Se definen las trazas del plano (α) en el nuevo sistema de doble proyección ortogonal (H-3) de la siguiente manera\ fig.264c y fig.264d:

1) Traza horizontal. Es común en ambos sistemas.

2) Traza tres. Su proyección tres (α^3) se corta en la nueva línea de tierra (H-3) con la proyección horizontal (α^h) de la traza horizontal del plano (α); y contiene a la proyección tres (1^3) de cualquier punto (1) del plano (α), la cual se obtiene de la siguiente manera\ fig.264c:

i) Se definen las proyecciones vertical (1^v) y horizontal (1^h) de un punto (1) cualquiera del plano (α).

ii) Por la proyección horizontal (1^h) (que es común a ambos sistemas) del punto (1), se traza la línea de proyección perpendicular a la línea de tierra (H-3) que contendrá a la proyección tres (1^3) del punto (1).

iii) Se define la proyección tres (1^3) del punto (1), midiendo, sobre la línea de proyección recién trazada y a partir de la línea de tierra (H-3), la cota (Z_1) del punto (1).

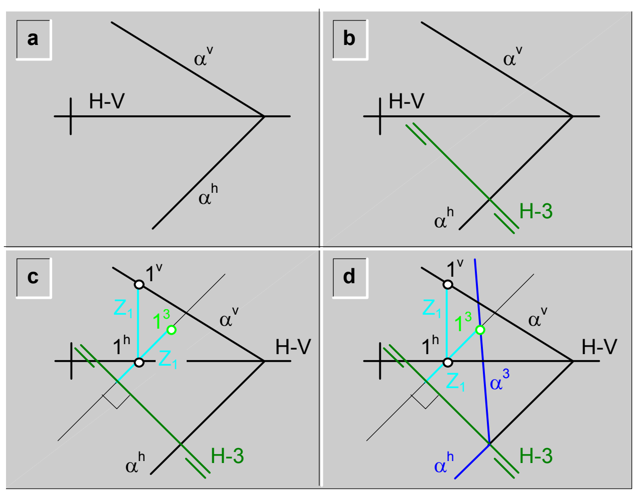


fig.264.\ Cambio del plano vertical de proyección, para observar en posición de punta a un plano cualquiera\ ejemplo.

CAMBIO DEL PLANO HORIZONTAL DE PROYECCIÓN, PARA OBSERVAR EN POSICIÓN HORIZONTAL A UN PLANO DE PUNTA.

Si un plano (α) se encuentra de punta con respecto a un sistema (H-V) de doble proyección ortogonal. Puede establecerse un nuevo sistema (3-V) de doble proyección ortogonal, con respecto al cual el plano (α) sea un plano horizontal, cambiando el plano horizontal de proyección (PH) por un plano tres de proyección (P3) que sea paralelo al plano (α)\ fig.265a y fig.265b.

La traza vertical del plano (α) es común a ambos sistemas, y su proyección vertical (α^v) es paralela a la nueva línea de tierra (3-V).

En este nuevo sistema (3-V) de doble proyección ortogonal, el plano (α) se proyecta sobre el plano tres de proyección (P3) en verdadero tamaño, siendo esta la razón de realizar el cambio del plano horizontal de proyección.

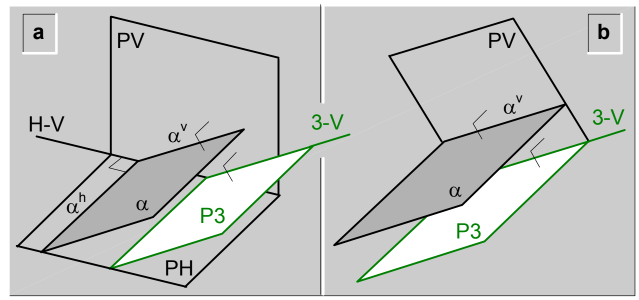


fig.265.\ Cambio del plano horizontal de proyección, para observar en posición horizontal a un plano de punta.

Ejemplo: Definir las proyecciones del cuadrado (A;B;C;D), contenido en el plano (α) y en el (I) cuadrante\ fig.266a.

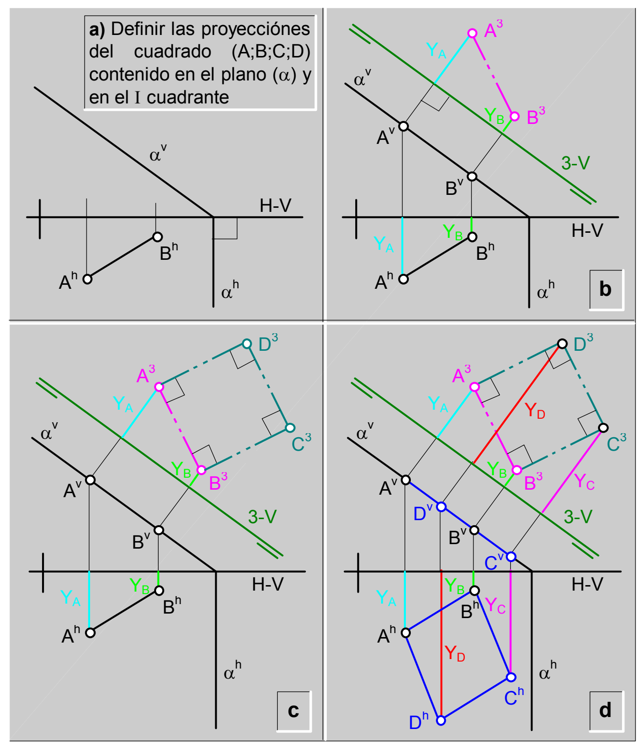


fig.266.\ Cambio del plano horizontal de proyección, para observar en posición horizontal a un plano de punta\ ejemplo.

Solución:

a) Por ser el plano (α) un plano de punta, se definen, sobre la proyección vertical (α^v) de su traza vertical, las proyecciones verticales (A^v y B^v) de los puntos (A y B)\ fig.266b.

Se efectúa el cambio del plano horizontal de proyección por el plano tres de proyección (P3), paralelo al plano (α); representa este cambio de plano de proyección, la nueva línea de tierra (3-V), paralela a la proyección vertical (α^v) de la traza vertical del plano (α).

Se definen, mediante el traslado de sus vuelos (Y_A y Y_B), las proyecciones (A^3 y B^3) de los puntos (A y B) sobre el plano tres de proyección (P3).

b) Se dibuja, en verdadero tamaño, el cuadrado (A^3; B^3; C^3; D^3), con lado en (A^3; B^3)\ fig.266**c**.

c) Se definen las proyecciones vertical y horizontal del cuadrado (A; B; C; D)\ fig.266**d**.

OBSERVACIÓN EN POSICIÓN HORIZONTAL DE UN PLANO CUALQUIERA, POR MEDIO DE DOS CAMBIOS DE PLANO DE PROYECCIÓN SUCESIVOS.

Si un plano (α) se encuentra en una posición cualquiera con respecto a un sistema de doble proyección ortogonal (H-V), Puede establecerse un nuevo sistema de doble proyección ortogonal (4-3), con respecto al cual el plano (α) sea un plano horizontal, por medio de dos cambios de plano de proyección sucesivos, realizados en la siguiente forma:

a) Se cambia el plano vertical de proyección (PV) por un plano tres de proyección (P3), perpendicular a la traza horizontal del plano (α) (fig.267**a**). Se establece de esta forma el sistema de doble proyección ortogonal (H-3), en el cual, el plano (α) es un plano de punta\ fig.267**b**.

b) Se cambia el plano horizontal de proyección (PH) por un plano cuatro de proyección (P4), paralelo al plano (α) (fig.267**c**). Se establece de esta forma el sistema de doble proyección ortogonal (4-3), en el cual, el plano (α) es un plano horizontal\ fig.267**d**.

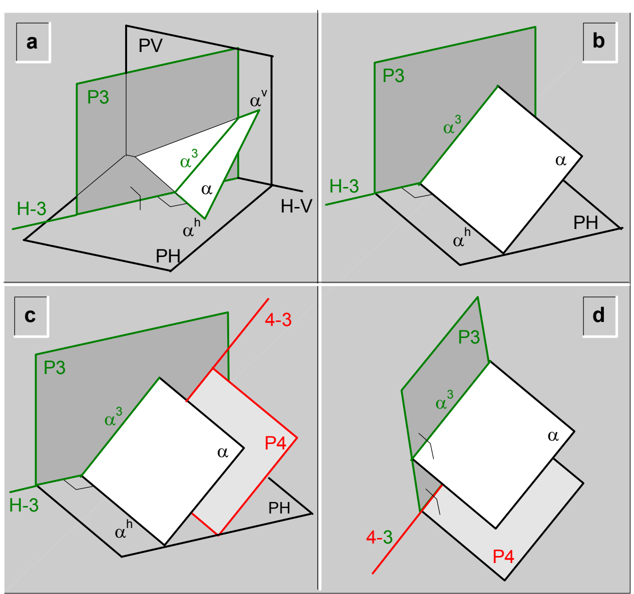


fig.267.\ Observación en posición horizontal de un plano cualquiera, por medio de dos cambios de plano.

Ejemplo: Definir las proyecciones del triángulo equilátero de vértices (A;B;C), contenido en el plano (α), sabiendo que el vértice (C) esta a la derecha de (A)\ fig.268**a**.

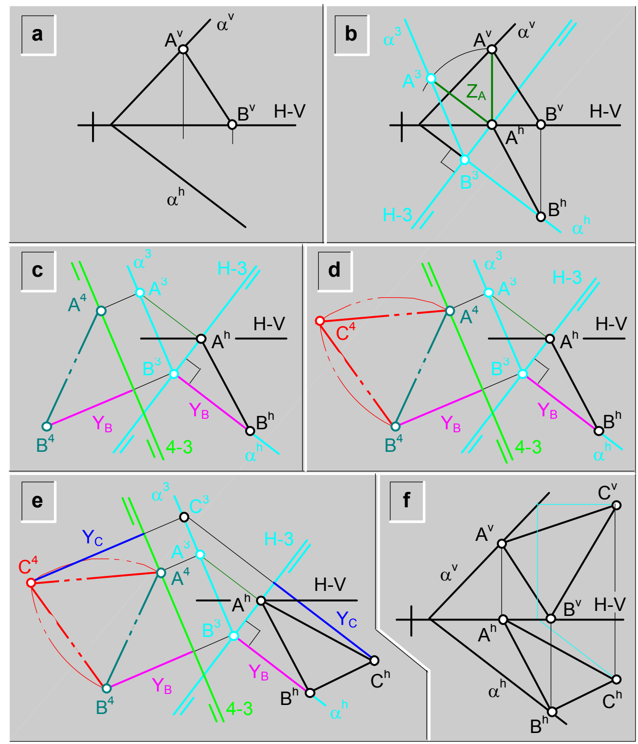


fig.268.\ Observación en posición horizontal de un plano cualquiera, por medio de dos cambios de plano de proyección\ ejemplo.

Solución:

a) Se define la proyección horizontal (A^h-B^h) del lado (A-B), haciéndolo pertenecer al plano (α)\ fig.268**b**.

Se establece, por medio de la nueva línea de tierra (H-3), el cambio del plano vertical de proyección (PV) por el plano tres de proyección (P3), el cual es perpendicular a la traza horizontal del plano (α). En este sistema de doble proyección ortogonal (H-3), el plano (α) se observa de punta.

Se define la proyección tres (α^3) de la traza tres del plano (α); y las proyecciones (A^3 y B^3) de los puntos (A y B), por medio del traslado de sus respectivas cotas (Z_A y Z_B); la cota de (B) es cero (Z_B=0).

b) Se establece, por medio de la nueva línea de tierra (4-3), el cambio del plano horizontal de proyección por un plano cuatro (P4), paralelo al plano (α)\ fig.268**c**.

En este nuevo sistema de doble proyección ortogonal, el plano (α) es un plano horizontal, encontrándose su proyección sobre el plano cuatro en verdadero tamaño.

Se definen las proyecciones (A^4 y B^4) de los puntos (A y B), trasladando sus respectivos vuelos (Y_A y Y_B); el vuelo (Y_A) del punto (A) es cero (Y_A=0).

c) Se dibuja, en verdadero tamaño, la proyección cuatro (A^4;B^4;C^4) del triángulo equilátero (A;B;C)\ fig.268**d**.

d) Se define la proyección tres (A^3;B^3;C^3) del triángulo (A;B;C)\ fig.268**e**.

Se define la proyección horizontal (A^h;B^h;C^h) del triángulo (A;B;C); trasladando el vuelo (Y_C) del punto (C).

e) Se define la proyección vertical (A^v;B^v;C^v) del triángulo (A;B;C); haciendo pertenecer el punto (C) al plano (α) \ fig.268f.

CAMBIO DEL PLANO HORIZONTAL DE PROYECCIÓN, PARA OBSERVAR EN POSICIÓN VERTICAL A UN PLANO CUALQUIERA.

Si un plano (α) se encuentra en una posición cualquiera con respecto a un sistema (H-V) de doble proyección ortogonal. Puede definirse un nuevo sistema (3-V) de doble proyección ortogonal, con respecto al cual el plano (α) sea un plano vertical, cambiando el plano horizontal de proyección (PH) por un plano tres de proyección (P3) que sea perpendicular a la traza vertical del plano (α)\ fig.269a y fig.269b.

LAS TRAZAS DEL PLANO (α) SON AHORA:

a) Traza vertical: Es común a ambos sistemas. Su proyección vertical (α^v) es perpendicular a la línea de tierra (3-V).

b) Traza tres: Es la intersección del plano (α) con el plano tres de proyección. Se corta en la línea de tierra (3-V) con la traza vertical del plano (α); por lo tanto su proyección tres (α^3) se corta con la proyección vertical (α^v) de la traza vertical del plano (α) en la línea de tierra (3-V)\ fig.269b. Todo el plano (α) se proyecta sobre el plano tres de proyección en la recta (α^3).

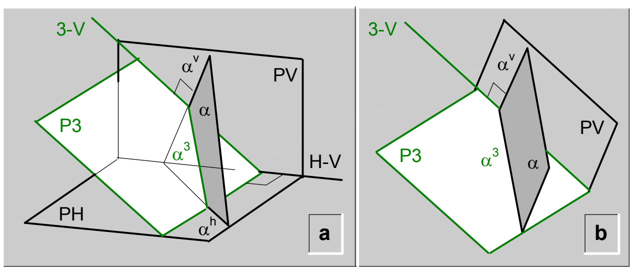


fig.269.\ Cambio del plano horizontal de proyección, para observar en posición vertical a un plano cualquiera.

Ejemplo: Realizar el cambio de plano horizontal de proyección necesario para definir un sistema de doble proyección ortogonal (3-V) con respecto al cual el plano (α) sea un plano vertical. Definir las trazas del plano (α) en este nuevo sistema de doble proyección ortogonal.\ fig.270a:

Solución:

a) Se representa el cambio del plano horizontal de proyección por el plano tres de proyección, dibujando la nueva la línea de tierra (3-V), perpendicular a la proyección vertical (α^v) de la traza vertical del plano (α)\ fig.270b.

b) Se definen las trazas del plano (α) en el nuevo sistema de doble proyección ortogonal (3-V) de la siguiente manera\ fig.270c y fig.270d:

1) Traza vertical. Es común en ambos sistemas.

2) Traza tres. Su proyección tres (α^3) se corta en la nueva línea de tierra (3-V) con la proyección vertical (α^v) de la traza vertical del plano (α); y contiene a la proyección tres (1^3) de cualquier punto (1) del plano (α), la cual se obtiene de la siguiente manera\ fig.270c:

i) Se definen las proyecciones vertical (1^v) y horizontal (1^h) de un punto (1) cualquiera del plano (α).

ii) Por la proyección vertical (1^v) (que es común a ambos sistemas) del punto (1), se traza la línea de proyección perpendicular a la línea de tierra (3-V) que contendrá a la proyección tres (1^3) del punto (1).

iii) Se define la proyección tres (1^3) del punto (1), midiendo, sobre la línea de proyección recién trazada y a partir de la línea de tierra (3-V) el vuelo (Y_1) del punto (1).

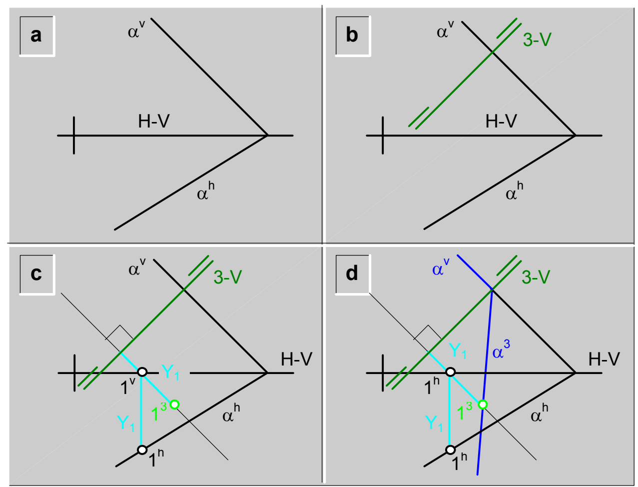


fig.270.\ Cambio del plano horizontal de proyección, para observar en posición vertical a un plano cualquiera\ ejemplo.

CAMBIO DEL PLANO VERTICAL DE PROYECCIÓN, PARA OBSERVAR EN POSICIÓN FRONTAL A UN PLANO QUE SE ENCUENTRA EN POSICIÓN VERTICAL.

Si un plano (α) se encuentra en posición vertical con respecto a un sistema (H-V) de doble proyección ortogonal. Puede establecerse un nuevo sistema (H-3) de doble proyección ortogonal, con respecto al cual el plano (α) sea un plano vertical, cambiando el plano vertical de proyección (PV) por un plano tres de proyección (P3) que sea paralelo al plano (α)\ fig.271a y fig.271b.

La traza horizontal del plano (α) es común a ambos sistemas, y su proyección horizontal (α^h) es paralela a la nueva línea de tierra (H-3).

En este nuevo sistema (H-3) de doble proyección ortogonal, el plano (α) se proyecta sobre el plano tres de proyección (P3) en verdadero tamaño, siendo esta la razón de realizar el cambio del plano vertical de proyección.

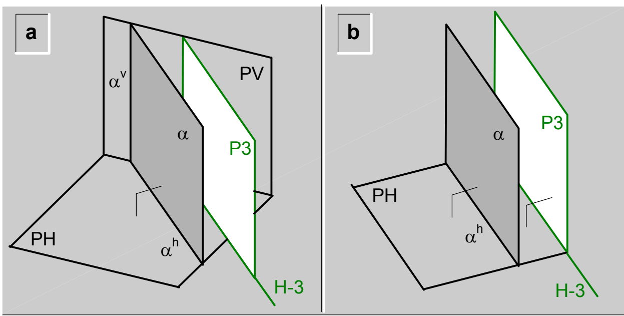


fig.271.\ Cambio del plano vertical de proyección para observar en posición frontal a un plano vertical.

<u>**Ejemplo:** Definir las proyecciones del cuadrado (A;B;C;D), contenido en el plano (α) y en el (I) cuadrante</u>\ fig.272a.

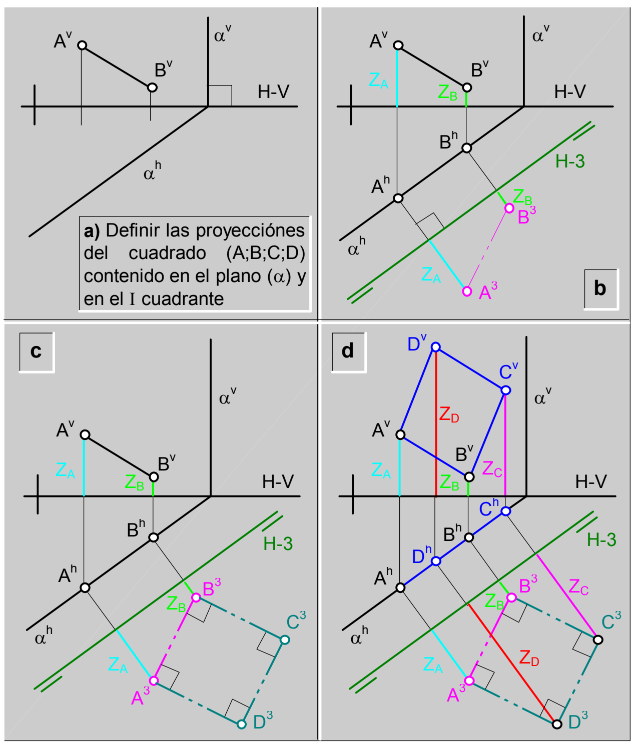


fig.272.\ Cambio del plano vertical de proyección para observar en posición frontal a un plano vertical\ ejemplo.

Solución:

a) Por ser el plano (α) un plano vertical, se definen, sobre la proyección horizontal (α^h) de su traza horizontal, las proyecciones horizontales (A^h y B^h) de los puntos (A y B)\ fig.272b.

Se efectúa el cambio del plano vertical de proyección por el plano tres de proyección (P3), paralelo al plano (α); representa este cambio de plano de proyección, la nueva línea de tierra (H-3), paralela a la proyección horizontal (α^h) de la traza horizontal del plano (α).

Se definen, mediante el traslado de sus cotas (Z_A y Z_B), las proyecciones (A^3 y B^3) de los puntos (A y B) sobre el plano tres de proyección (P3).

b) Se dibuja, en verdadero tamaño, el cuadrado (A^3; B^3; C^3; D^3), con lado en (A^3; B^3)\ fig.272c.

c) Se definen las proyecciones vertical y horizontal del cuadrado (A; B; C; D)\ fig.272d.

<u>OBSERVACIÓN EN POSICIÓN FRONTAL DE UN PLANO CUALQUIERA, POR MEDIO DE DOS CAMBIOS DE PLANO DE PROYECCIÓN SUCESIVOS.</u>

Si un plano (α) se encuentra en una posición cualquiera con respecto a un sistema de doble proyección ortogonal (H-V), Puede establecerse un nuevo sistema de doble proyección ortogonal (3-4), con respecto al cual el plano (α) sea un plano frontal, por medio de dos cambios de plano de proyección sucesivos, realizados en la siguiente forma:

a) Se cambia el plano horizontal de proyección (PH) por un plano tres de proyección (P3), perpendicular a la traza vertical del plano (α) (fig.273a). Se establece de esta forma el sistema de doble proyección ortogonal (3-V), en el cual, el plano (α) es un plano vertical\ fig.273b.

b) Se cambia el plano vertical de proyección (PV) por un plano cuatro de proyección (P4), paralelo al plano (α) (fig.273c). Se establece de esta forma el sistema de doble proyección ortogonal (3-4), en el cual, el plano (α) es un plano frontal\ fig.273d.

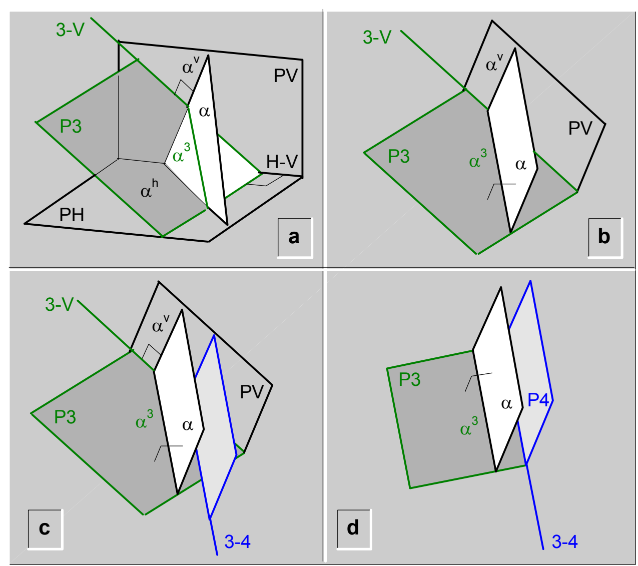


fig.273.\ Observación de un plano en posición frontal por medio de dos cambios de plano.

<u>**Ejemplo:** Definir las proyecciones del triángulo equilátero de vértices (A;B;C), contenido en el plano (α), sabiendo que el vértice (C) esta a la derecha de (A)</u>\ fig.274a.

Solución:

a) Se define la proyección vertical (A^v-B^v) del lado (A-B), haciéndolo pertenecer al plano (α)\ fig.274b.

Se establece, por medio de la nueva línea de tierra (3-V), el cambio del plano horizontal de proyección (PH) por el plano tres de proyección (P3), el cual es perpendicular a la traza vertical del plano (α). En este sistema de doble proyección ortogonal (3-V), el plano (α) es un plano vertical.

Se define la proyección tres (α^3) de la traza tres del plano (α); y las proyecciones (A^3 y B^3) de los puntos (A y B), por medio del traslado de sus respectivos vuelos (Y_A y Y_B); el vuelo de (B) es cero (Y=0).

b) Se establece, por medio de la nueva línea de tierra (3-4), el cambio del plano vertical de proyección por un plano cuatro (P4), paralelo al plano (α)\ fig.274c.

En este nuevo sistema de doble proyección ortogonal, el plano (α) es un plano frontal, encontrándose su proyección sobre el plano cuatro en verdadero tamaño.

Se definen las proyecciones (A^4 y B^4) de los puntos (A y B), trasladando sus respectivas cotas (Z_A y Z_B); la cota (Z_A) del punto (A) es cero (Z_A=0).

c) Se dibuja, en verdadero tamaño, la proyección cuatro (A^4;B^4;C^4) del triángulo equilátero (A;B;C)\ fig.274d.

d) Se define la proyección tres (A^3;B^3;C^3) del triángulo (A;B;C)\ fig.274e.

Se define la proyección vertical (A^v;B^v;C^v) del triángulo (A;B;C); trasladando la cota (Z_C) del punto (C).

e) Se define la proyección horizontal (A^h;B^h;C^h) del triángulo (A;B;C); haciendo pertenecer el punto (C) al plano (α) \ fig.274f.

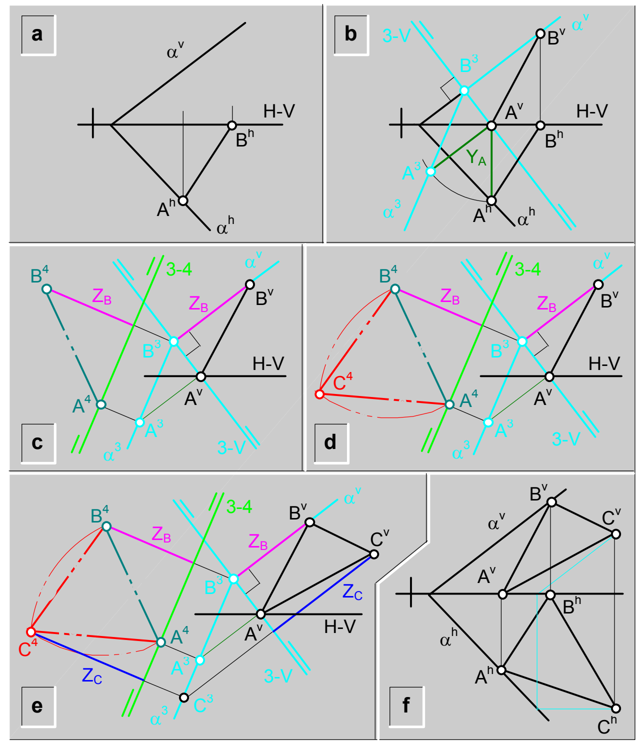


fig.274.\ Observación de un plano en posición frontal, por medio de dos cambios de plano de proyección\ ejemplo.

capítulo 8

poliedros.

Este es un capítulo de gran contenido práctico, en el cual, para definir la doble proyección ortogonal de objetos tridimensionales; en particular poliedros, se aplican en conjunto todos los conocimientos de Geometría Descriptiva hasta ahora expuestos.

En síntesis, todo poliedro esta compuesto de vértices, aristas, caras, ejes, etc. Y definiendo previamente la doble proyección ortogonal de estos elementos geométricos, se logrará definir la doble proyección ortogonal del poliedro que los contiene. Por lo tanto, debe definirse la proyección diédrica de: puntos; rectas; planos; rectas y/o planos paralelos, y/o perpendiculares; obtener proyecciones en verdadero tamaño de planos, para dibujar en ellos: triángulos, cuadrados, pentágonos, etc. En fin, es necesario comprender bien todos los fundamentos de la Geometría Descriptiva hasta ahora expuestos para garantizar el éxito en la determinación de la doble proyección ortogonal de los poliedros.

Representa de esta forma este capítulo, una gran utilidad para el estudiante de Geometría Descriptiva, ya que es en realidad un repaso práctico y de aplicación de todos los conceptos y procedimientos expuestos en los capítulos anteriores.

Se inicia el capítulo haciendo un análisis general de la visibilidad de los poliedros. Para luego estudiar en forma particular la doble proyección ortogonal de: Tetraedros regulares; cubos; pirámides regulares rectas; y prismas regulares rectos.

POLIEDROS.

Los poliedros son sólidos definidos en su totalidad por superficies planas.

Los poliedros, por ser objetos tridimensionales, poseen un volumen propio que oculta al observador algunas de sus partes (vértices; aristas; caras; etc). Por lo tanto en la representación de un poliedro es muy importante definir su **visibilidad**; representando con líneas de trazo continuo sus aristas visibles al observador y con líneas segmentadas sus aristas invisibles.

En la fig.275**a** se representa un prisma sin tomar en cuenta su visibilidad; esta representación, como ya se explicó es incorrecta. En la fig.275**b**, se representa el mismo prisma, asumiendo que el vértice (D) es invisible al observador y el vértice (B^1) es visible. Y en la fig.275**c** se representa el mismo prisma asumiendo que el vértice (B^1) es invisible al observador y el vértice (D) es visible.

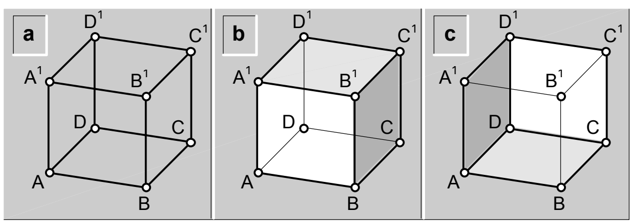


fig.275.\ Representación de un prisma.

Como sucede en este ejemplo, existen siempre dos alternativas lógicas de visibilidad en la representación de cualquier poliedro (en general en la representación de cualquier sólido), pero solo una de ellas es correcta; es el análisis de su visibilidad lo permite definir cual de las dos es la correcta.

DETERMINACIÓN DE LA VISIBILIDAD EN LAS PROYECCIONES DE POLIEDROS.

Se puede definir la visibilidad correcta en la representación de un poliedro, por medio de la observación de las tres características siguientes, las cuales pueden observarse en la fig.275**b** y fig.275**c**:

I) Todo el contorno externo de un poliedro es visible.

II) Si dos aristas que se cruzan poseen proyectivamente un punto en común, entonces una es visible y la otra nó. Ejemplo: aristas (D-D^1) y (A^1-B^1) y aristas (B-B^1) y (C-D).

III) Al considerar cualquier vértice, dentro del contorno del poliedro, todas las aristas que concurren a el tienen la misma visibilidad; siendo todas visibles ó todas invisibles.

Ejemplo: Definir la visibilidad del prisma mostrado en la fig.276a.

Solución:

a) Como se observa en la fig.276**a** inicialmente se representan las proyecciones del prisma dibujando todas sus aristas con líneas de procedimiento; es decir trazado tenue continuo.

b) De acuerdo con la característica I) se dibuja, con líneas de contorno visible (trazado continuo fuerte), todo el contorno externo del prisma en ambas proyecciones\ fig.276**b**.

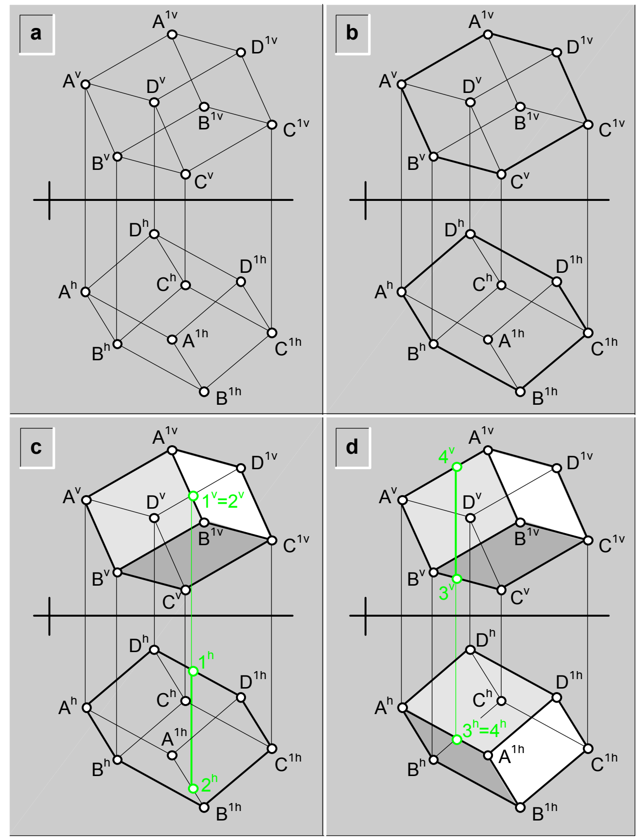


fig.276.\ Definición de la visibilidad de un poliedro.

c) Para definir la visibilidad en la proyección vertical del prisma\ fig.276**c**:

1) De acuerdo con la característica II), se determina, cual de la aristas que se cruzan (A^1-B^1) y (D-D^1) es visible en proyección vertical. Para ello, se traza el segmento de punta (**1-2**) que se corta con ambas y se representa como arista visible, en proyección vertical, aquella que contenga el punto de mayor vuelo del mismo; resultando ser la arista (A^1-B^1) que contiene al punto (**2**), en consecuencia la proyección vertical (D^v-D^{1v}) de la arista (D-D^1) es invisible al observador.

2) De acuerdo con la característica III) todas las aristas que concurren al vértice (B^{1v}) son visibles al observador y todas las que concurren al vértice (D^v) invisibles.

d) Para definir la visibilidad en la proyección horizontal del prisma\ fig.276**d**:

1) De acuerdo con la característica II), se determina, cual de la aristas que se cruzan (A-A^1) y (B-C) es visible en proyección horizontal. Para ello, se traza el segmento vertical (**3-4**) que se corta con ambas, y se representa como arista visible, en proyección horizontal, aquella que contenga el punto de mayor cota del mismo; resultando ser la arista (A-A^1) que contiene al punto (**4**), en consecuencia la proyección vertical (B^h-C^h) de la arista (B-C) es invisible al observador.

2) De acuerdo con la característica III) todas las aristas que concurren al vértice (A^{1h}) son visibles al observador y todas las que concurren al vértice (C^h) invisibles.

No siempre es necesario trazar rectas de punta y/o verticales para poder definir la visibilidad de los poliedros en doble proyección ortogonal como lo muestran los ejemplos siguientes:

a) Analisis de la visibilidad del tetraedro de la fig.277a:

1) Visibilidad de la proyección vertical:

El vértice (D) es invisible al observador; debido a que se encuentra dentro del contorno del tetraedro, y es el vértice de menor vuelo del mismo. Por lo tanto todas las aristas que concurren a el son invisibles al observador.

2) Visibilidad de la proyección horizontal :

El vértice (B) es visible al observador; debido a que se encuentra dentro del contorno del mismo, y es el vértice de mayor cota del tetraedro. Por lo tanto todas las aristas que concurren a el son visibles al observador.

b) Analisis de la visibilidad del tetraedro de la fig.277b:

1) Visibilidad de la proyección vertical:

La visibilidad de las aristas que se cruzan (A-B) y (C-D) es obvia; siendo visible la arista (C-D) por tener mayor vuelo que la arista (A-B), siendo en consecuencia invisible esta última.

2) Visibilidad de la proyección horizontal :

La visibilidad de las aristas que se cruzan (A-D) y (B-C) también es obvia; siendo visible la arista (A-D) por tener mayor cota que la arista (B-C), siendo en consecuencia invisible esta última.

c) Analisis de la visibilidad de la pirámide de la fig.277c:

1) Visibilidad de la proyección vertical:

El vértice (D) es invisible al observador; por encontrarse dentro del contorno externo de la pirámide y ser su vértice de menor vuelo. Por lo tanto todas las aristas que concurren a el son invisibles.

La arista (V-B) es visible al observador; debido a que se cruza con la arista (A-D) que es invisible.

2) Visibilidad de la proyección horizontal :

La arista (A-B) es invisible al observador; por encontrarse dentro del contorno de la pirámide y ser la arista de menor cota de la misma. Por lo tanto las aristas (V-D) Y (V-C), que se cruzan con la arista (A-B), son visibles al observador.

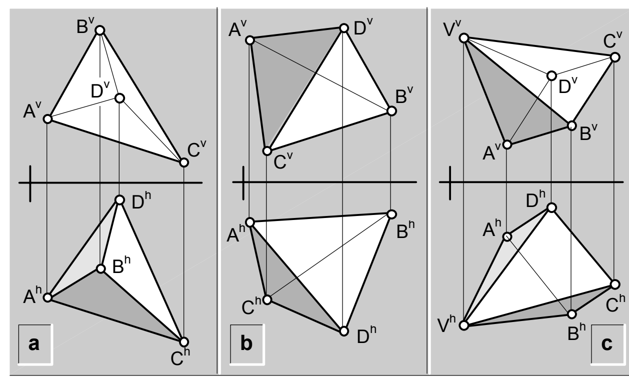


fig.277.\ Visibilidad en poliedros\ ejemplos.

TETRAEDRO REGULAR.

Es un poliedro de cuatro caras, todas iguales, siendo cada una un triángulo equilátero (fig.278**a**). Sus partes principales se denominan:

CARA.

Cada uno de los cuatro triángulos equiláteros que definen al tetraedro regular. Puede dibujarse a partir de una arista (**a**) como se muestra en la fig.278**b**.

VÉRTICE.

Punto al que concurren tres aristas. En total hay cuatro (**A**; **B**; **C**; y **D**).

ARISTA (a).

Segmento que une dos vértices. En total hay seis.

ARISTAS OPUESTAS.

Son dos aristas que no se cortan. Por ejemplo las aristas (**BC**) y (**AD**). Ellas son ortogonales. Pueden definirse tres pares de aristas opuestas en un tetraedro regular.

EJE (e).

Recta que pasa por un vértice y es perpendicular a la cara opuesta a él. Pueden definirse cuatro ejes en un tetraedro regular.

CENTRO DE CARA (N).

Punto de intersección entre un eje (**e**) y la cara perpendicular a él. Es también el centro de gravedad de la cara.

PUNTO MEDIO DE ARISTA (M).

Es el punto medio entre los dos vértices que limitan a una arista.

ALTURA DE CARA (h_C).

Segmento definido por un vértice y un punto medio (**M**) de una arista no concurrente a él.

ALTURA DEL TETRAEDRO (h).

Segmento definido por un vértice y el centro (**N**) de la cara opuesta a él.

CENTRO DEL TETRAEDRO (O).

Es el centro de gravedad del tetraedro regular. Puede obtenerse interceptando los dos ejes de tetraedro regular que contiene cualquier sección principal.

SECCIÓN PRINCIPAL DEL TETRAEDRO.

Sección del tetraedro regular que contiene un eje (**e**), y a una arista (**a**) que se corta con él. Es un triángulo isósceles definido por una arista (**a**) y dos alturas de cara (h_C). En un tetraedro regular pueden definirse seis secciones principales.

En la fig.278**c**, se muestra la sección principal de un tetraedro regular de longitud de arista (**a**). La sección principal de un tetraedro regular se dibuja generalmente con la finalidad de determinar la altura (**h**) del mismo.

En efecto, conocida la longitud (**a**) de arista de un tetraedro regular, puede dibujarse una cara (**ABC**) del mismo, a partir de la cual, se dibuja una sección principal (**ABM**), en la que a su vez se puede determinar la altura (**h**) del tetraedro\ fig.278**d**.

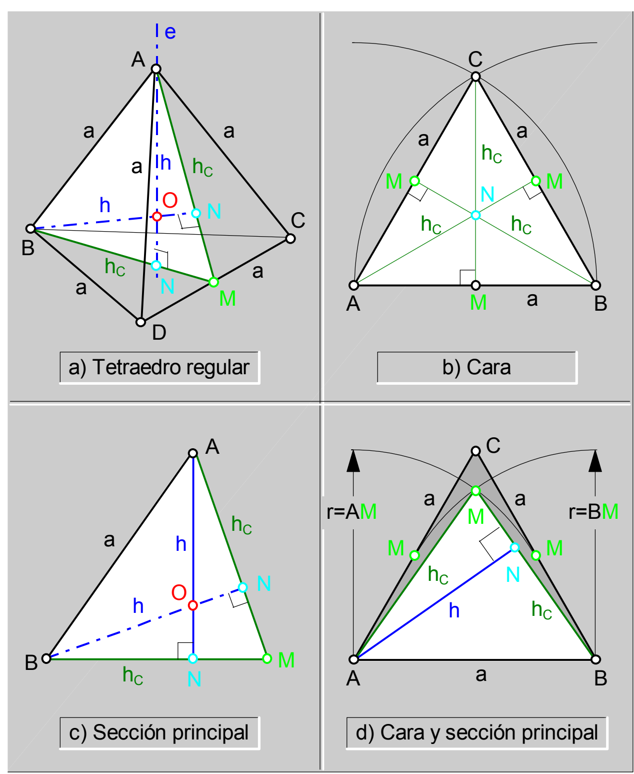


fig.278.\ Tetraedro regular.

CONSTRUCCIÓN DE UN TETRAEDRO REGULAR, CONOCIDO UN VÉRTICE Y UNA RECTA QUE CONTIENE AL EJE.

Construir un tetraedro regular (A;B;C;D), dado un vértice (B) y una recta (e) que contiene a un eje\ fig.279a:

a) Se define, por el vértice (B), el plano (α), perpendicular al eje (e); este plano contiene a la cara (B;C;D) del tetraedro\ fig.279**b**.

Se define el centro (N) de la cara (B;C;D); interceptando el eje (e) con el plano (α).

b) Se construye, contenida en el plano (α), la cara (B;C;D) del tetraedro; la cual es un triángulo equilátero con vértice (B) y centro (N)\ fig.279**c**.

c) Se dibuja, a partir de la cara (B;C;D), la sección principal (B;C;M) del tetraedro en la cual se determina su altura (h)\ fig.279**d**.

d) Se define el vértice (A); midiendo sobre el eje (e), la altura (h) del tetraedro, a partir del centro de cara (N)\ fig.279**e**.

e) Se define el tetraedro y su visibilidad; dibujando las aristas que concurren al vértice (A)\ fig.279**f**.

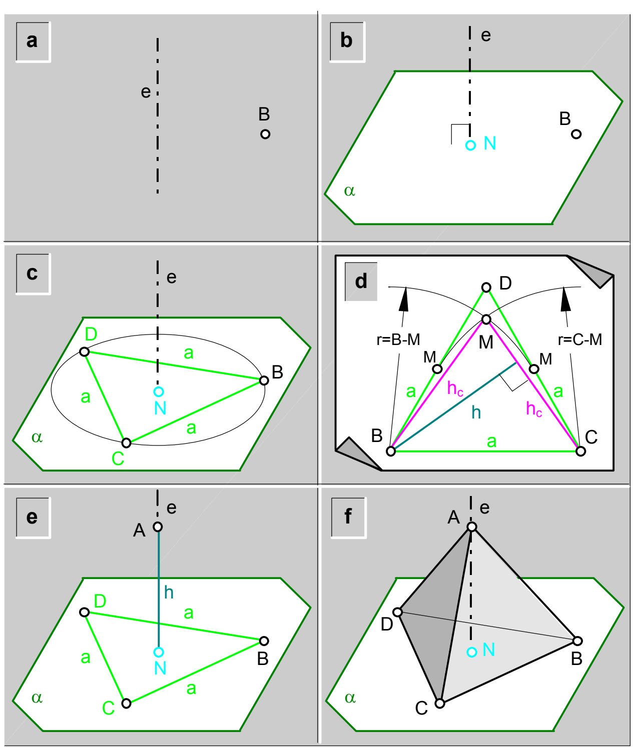


fig.279.\ Construcción de un tetraedro regular, dado un vértice (B) y una recta (e) que contiene a un eje.

Ejemplo: Definir las proyecciones de un tetraedro regular (A;B;C;D), con vértice (B) dado, sabiendo que el vértice (A) esta contenido en el eje (e)\ fig.280a:

Solución (por rebatimiento de planos):

a) Se define el plano (α), que pasa por el vértice (B) y es perpendicular a la recta (e); este plano contiene a la cara (B;C;D)\ fig.280**b**.

Se define el centro (N) de la cara (B;C;D), interceptando la recta (e) y el plano (α).

b) Se rebate el plano (α) y los puntos (B) y (N)\ fig.280**c**.

Se dibuja la proyección rebatida (B^r; C^r; D^r) de la cara (B;C;D); la cual es un triángulo equilátero con centro en (N^r) y vértice en (B).

c) Se definen las proyecciones horizontal y vertical de la cara (B;C;D)\ fig.280**d**.

Se dibuja, a partir de la cara (B^r; C^r; D^r), la sección principal (B^r; C^r; M^r) del tetraedro, en la cual se determina su altura (h).

d) Se definen las proyecciones del vértice (A); midiendo para ello, sobre el eje (e), la altura (h) del tetraedro, a partir del centro de cara (N)\ fig.280**e**.

e) Se definen las proyecciones del tetraedro y su visibilidad\ fig.280**f**.

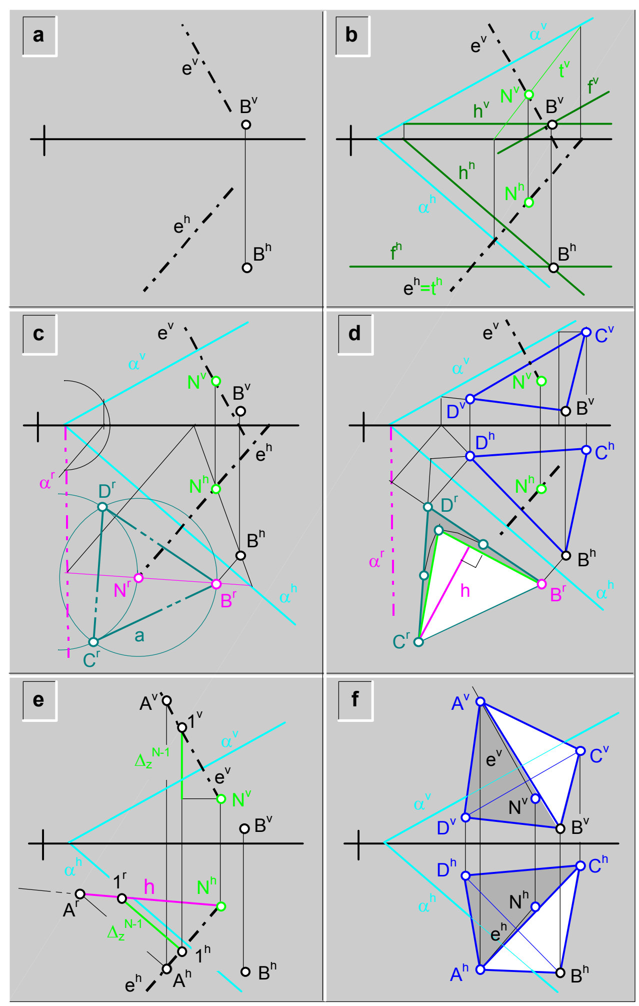


fig.280.\ Construcción de un tetraedro regular, conocido un vértice y una recta que contiene al eje.

CONSTRUCCIÓN DE UN TETRAEDRO REGULAR CONOCIDO UN VÉRTICE Y UNA RECTA QUE CONTIENE A UNA ARISTA.

Construir un tetraedro regular (A;B;C;D), con vértice (A) dado y arista (B-C) en la recta (m)\ fig.281a.

a) Se dibuja la cara (A;B;C) del tetraedro; la cual es un triángulo equilátero, con vértice (A) y lado (A-B) en la recta (m). Esta cara esta contenida en el plano (α) definido por la recta (m) y el vértice (A). Se determina el centro (N) de la cara (A;B;C)\ fig.281b.

b) Se dibuja, a partir de la cara (A;B;C), la sección principal (A;B;M), en la cual se determina la altura (h) del tetraedro\ fig.281c

c) Se traza, por el centro de cara (N) del tetraedro, y perpendicular al plano (α), el eje (e) del mismo\ fig.281d.

Se ubica el vértice (D), midiendo sobre el eje (e), y a partir del centro de cara (N), la altura (h) del tetraedro.

d) Se define el tetraedro y su visibilidad\ fig.281e.

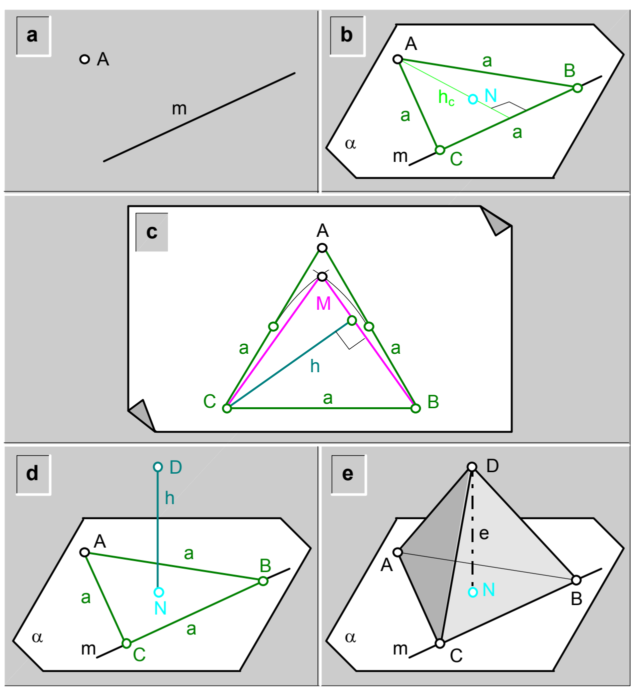


fig.281.\ Construcción de un tetraedro regular con vértice (A) y arista (B-C) en la recta (m).

Ejemplo: Definir las proyecciones de un tetraedro regular (A;B;C;D), con vértice (A) dado y arista (B-C) sobre la recta (m), estando (B) mas alto que (C). El vértice (D) se encuentra por delante de (A)\ fig.282a.

Solución (por rebatimiento de planos):

a) Se definen las trazas del plano (α) que contiene al vértice (A) y a la recta (m)\ fig.282b.

Se rebaten: el plano (α); el vértice (A); y la recta (m).

b) Se define la proyección rebatida (A^r;B^r;C^r) de la cara (A;B;C); la cual, es un triángulo equilátero, con vértice (A^r) y arista (B^r-C^r) sobre la recta (m^r). Se determina la proyección rebatida (N^r) del centro (N) de la cara (A;B;C)\ fig.282c.

Se definen las proyecciones de la cara (A;B;C) y de del centro (N) de cara.

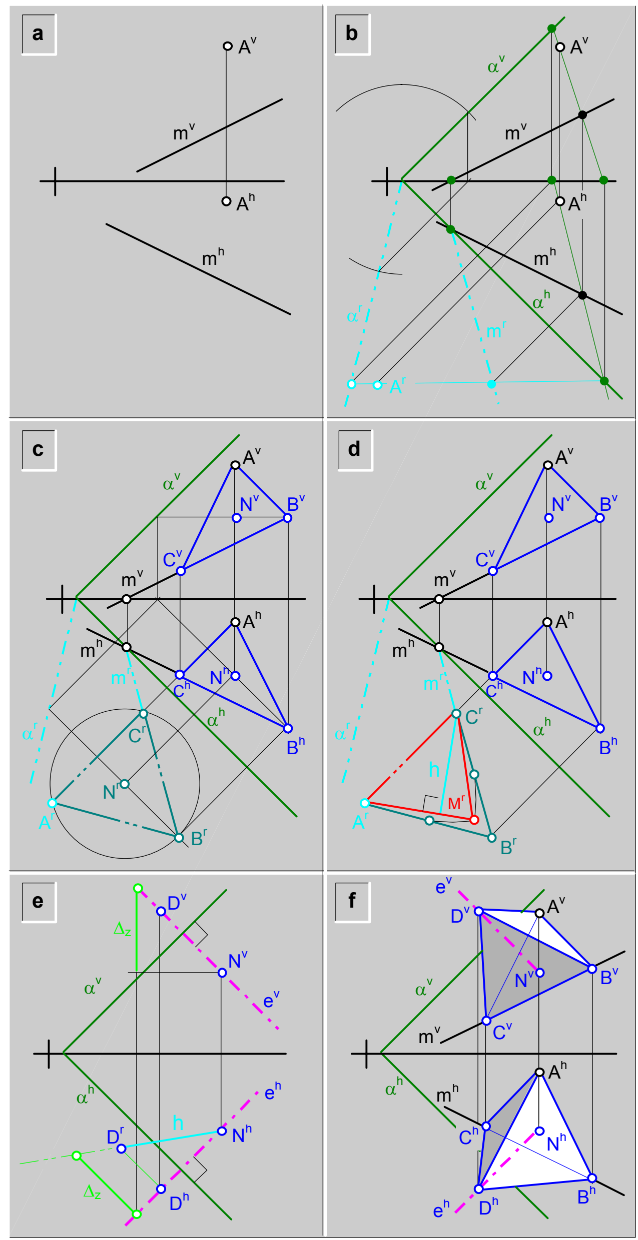


fig.282.\ Construcción de un tetraedro regular conocido un vértice y una recta que contiene a una arista\ ejemplo.

c) Se dibuja, a partir de la cara (A^r;B^r;C^r), la sección principal (A^r;B^r;M^r) del tetraedro y se determina la altura (h) del mismo\ fig.282d.

d) Se dibuja, por el centro de cara (N) y perpendicular al plano (α), el eje (**e**) del tetraedro, y se mide sobre el la altura (**h**) del tetraedro, a partir del centro (N) de cara para ubicar el vértice (D)\ fig.282**e**.

e) Se definen las proyecciones del tetraedro y su visibilidad\ fig.282f.

CONSTRUCCIÓN DE UN TETRAEDRO REGULAR, CONOCIDO EL PLANO QUE CONTIENE A UNA CARA, Y EL VÉRTICE NO CONTENIDO EN ESE PLANO.

Construir un tetraedro regular (A;B;C;D), con vértice (A) dado, sabiendo que la cara (B;C;D) esta contenida en el plano (α)\ fig.283a.

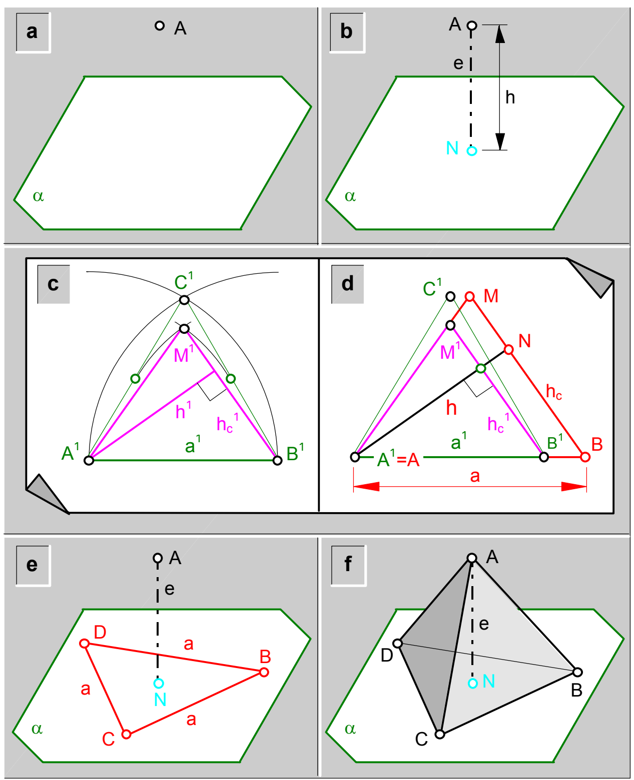


fig.283.\ Construcción de un tetraedro regular, conocido el plano que contiene a una cara y el vértice no contenido en este plano.

a) Se define, por el vértice (A) y perpendicular al plano (α), el eje (**e**) del tetraedro\ fig.283**b**.

Se define, interceptando el eje (**e**) con el plano (α), el centro (N) de la cara (B;C;D). Y se determina la altura (**h**) del tetraedro.

b) Se dibuja, en un esquema aparte y con una longitud (a^1) de arista cualquiera, la cara (A^1;B^1;C^1) de un tetraedro regular cualquiera\ fig.283**c**.

A partir de la cara (A^1;B^1;C^1), se dibuja la sección principal (A^1;B^1;M^1) y se determina la altura (h^1) del tetraedro de longitud (a^1) de arista.

c) Sobre la recta (h^1), y a partir del vértice (A^1), se mide la altura (h) del tetraedro buscado, determinada en el paso (**a)**); ubicando de esta forma el centro (N) de cara\ fig.283**d**.

Se dibuja la sección principal (A;B;M) del tetraedro buscado trazando, por el punto (N), y paralelo a la recta (B^1-M^1), la altura (B-M) de cara. En esta sección principal (A;B;M) se determina la longitud (a) de arista del tetraedro buscado.

d) Se dibuja, contenida en el plano (α), la cara (B;C;D) del tetraedro; la cual es un triángulo equilátero de longitud (a) de arista, y centro (N)\ fig.283**e**.

e) Se define el tetraedro y su visibilidad\ fig.283f.

<u>**Ejemplo:** Definir las proyecciones de un tetraedro regular (A;B;C;D), con vértice (A) conocido y cara (B;C;D) contenida en el plano (α). Sabiendo que la arista (B-D) está contenida en una recta de máxima pendiente del plano (α). (B) por delante de (D). (C) a la izquierda de (B)</u>\ fig.284a.

Solución (por rebatimiento de planos):

a) Se traza, por el vértice (A), y perpendicular al plano (α), el eje (**e**) del tetraedro, y se define el centro (N) de cara interceptando el eje (**e**) con el plano (α)\ fig.284**b**.

Se determina la altura (h) del tetraedro.

b) Se dibuja, en un esquema aparte, y con una longitud (a^1) de arista cualquiera, la cara (A^1;B^1;C^1) de un tetraedro regular cualquiera\ fig.284**c**.

A partir de la cara (A^1;B^1;C^1), se dibuja la sección principal (A^1;B^1;M^1) y se determina la altura (h^1) del tetraedro de longitud (a^1) de arista.

c) Sobre la recta (h^1), y a partir del vértice (A^1), se mide la altura (h) del tetraedro buscado, determinada en el paso (**a)**); ubicando de esta forma el centro (N) de cara\ fig.284**d**.

Se dibuja la sección principal (A;B;M) del tetraedro buscado trazando, por el punto (N), y paralelo a la recta (B^1-M^1), la altura (B-M) de cara. En esta sección principal (A;B;M) se determina la longitud (a) de arista del tetraedro buscado.

d) Con la longitud (a) de la arista, se dibuja la cara (A;B;C) del tetraedro buscado, y se determinando en este dibujo, el radio (r) de la circunferencia que la circunscribe\ fig.284**e**.

e) Se rebate el plano (α) y se dibuja la proyección rebatida (B^r;C^r;D^r) de la cara (B;C;D); la cual es un triángulo equilátero circunscrito en una circunferencia de radio (r) y centro (N^r)\ fig.284**f**.

Se definen las proyecciones horizontal (B^h;C^h;D^h) y vertical (B^v;C^v;D^v) de la cara (B;C;D) del tetraedro.

f) Se definen las proyecciones del tetraedro y su visibilidad\ fig.284**g**.

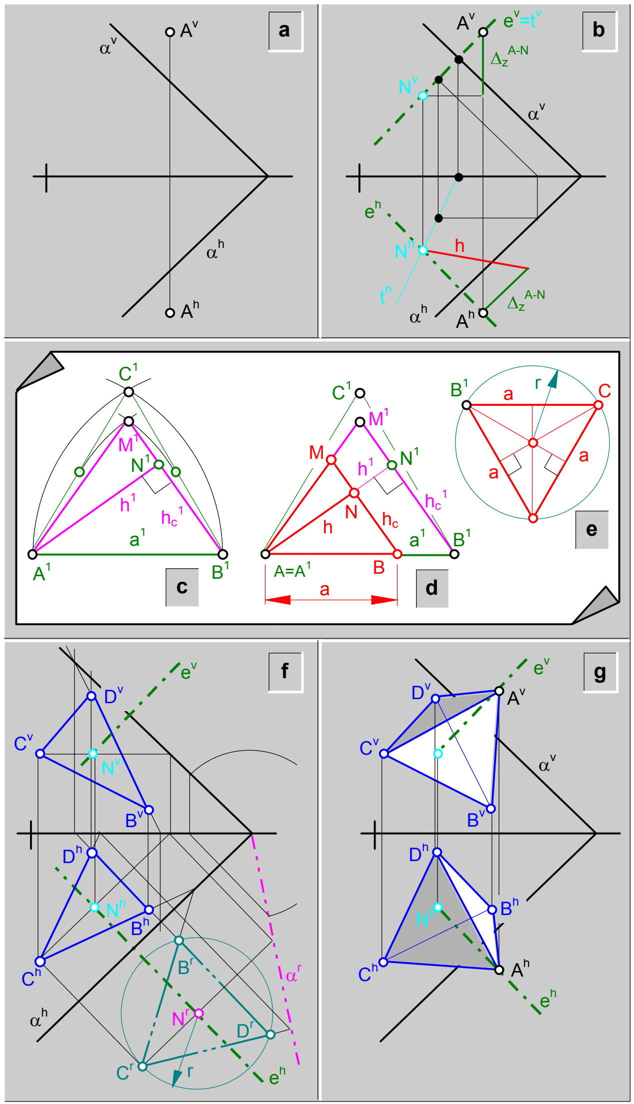


fig.284.\ Construcción de un tetraedro regular, conocido el plano que contiene a una cara y el vértice no contenido en este plano\ ejemplo.

CUBO.

Poliedro regular de seis caras iguales, siendo cada una un cuadrado. Sus elementos principales son\ fig.285:

CARA:

Cada uno de los seis cuadrados que definen al cubo\ fig.286.

ARISTA:

Segmento que une dos vértices contiguos. En total hay doce, todas de igual longitud.

ARISTAS OPUESTAS:

Par de aristas del cubo que son paralelas, y no están contenidas en una misma cara.

VÉRTICE:

Punto al que concurren tres aristas. En total hay ocho.

VÉRTICES OPUESTOS.

Par de vértices del cubo que están contenidos en una diagonal mayor (por ejemplo los vértices (F y D)).

DIAGONAL MAYOR.

Cada una de las diagonales de cualquier sección principal del cubo.

DIAGONAL MENOR.

Cada una de las dos diagonales de cualquier cara del cubo.

CENTRO DE CARA (M):

Punto de intersección entre las dos diagonales de cualquier cara. Es el centro de gravedad de la cara.

CENTRO DEL CUBO (O).

Centro de gravedad del cubo. Puede obtenerse interceptando los dos diagonales mayores de cualquier sección principal.

EJE (e):

Recta que contiene a los centros de cara de dos caras paralelas.

ALTURA DEL CUBO:

Distancia entre dos centros de cara, contenidos en caras paralelas del cubo. Es igual a la longitud de las aristas.

SECCIÓN PRINCIPAL:

Sección del cubo que contiene a dos aristas opuestas. Es un rectángulo formado por dos aristas y dos diagonales mayores. Pueden definirse seis secciones principales en un cubo. En la fig.286, se muestra una sección principal de un cubo.

Una sección principal (ABGH) de un cubo, puede dibujarse a partir de una cara (ABCD) del mismo\fig.287.

En la fig.288, se muestran algunas características geométricas de toda sección principal de un cubo.

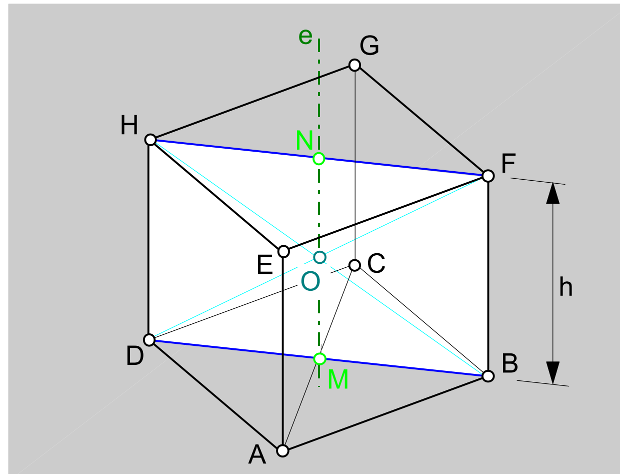


fig.285.\ Hexaedro regular ó cubo.

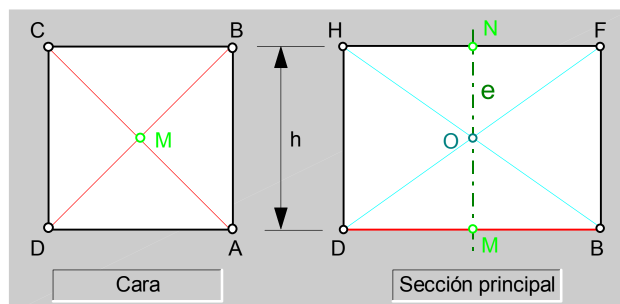


fig.286.\ Cara y sección principal.

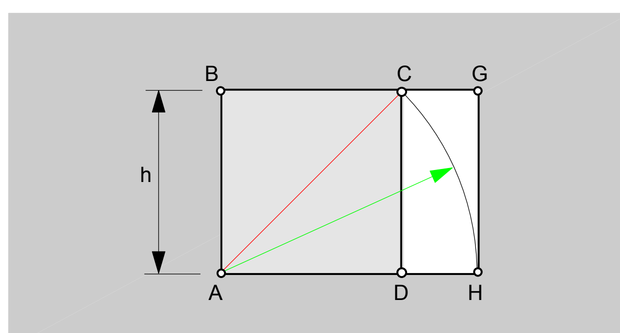


fig.287.\ Dibujo de la sección principal (ABGH), a partir de la cara (ABCD).

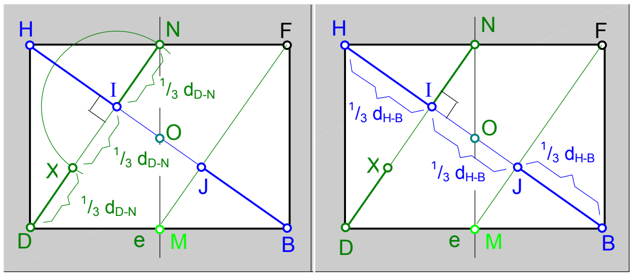


fig.288.\ Propiedades geométricas de toda sección principal de un cubo.

CONSTRUCCIÓN DE UN CUBO, CONOCIDO UN VÉRTICE Y UNA RECTA QUE CONTIENE A UN EJE.

Definir las proyecciones de un cubo, dado el vértice (A) y la recta (e) que contiene a un eje\ fig.289a.

a) Se define, por el vértice (A) el plano (α) perpendicular al eje (e); este plano contiene a la cara (A;B;C;D)\ fig.289**b**.

Se define, interceptando el eje (e) con el plano (α), el centro (M) de la cara (A;B;C;D).

Se dibuja, contenida en el plano (α), la cara (A;B;C;D) del cubo; esta es un cuadrado con centro (M) y vértice (A).

b) Se trazan, paralelas al eje (e) y por los vértices de la cara (A;B;C;D) las aristas del cubo de longitud (a), que contienen a los vértices (E;F;G;H)\ fig.289**c**.

c) Se dibuja la cara (E;F;GH), definiendo así el cubo y su visibilidad\ fig.289**d**.

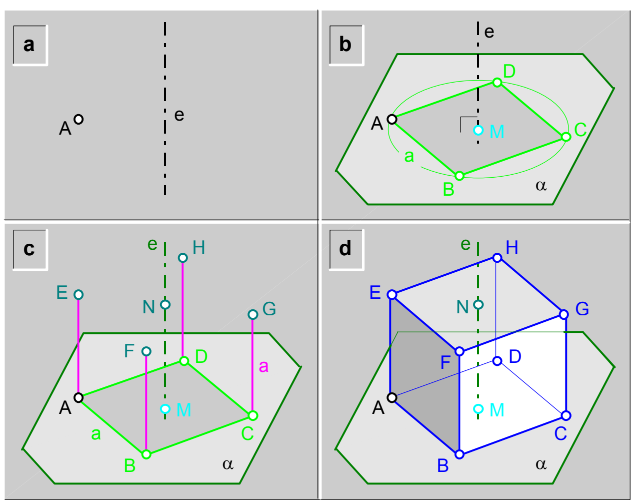


fig.289.\ Construcción de un cubo, conocido un vértice y una recta que contiene a un eje.

Ejemplo: Definir las proyecciones de un cubo (A;B;C;D-E;F;G;H), contenido en el I cuadrante; con vértice (A); y eje sobre la recta (e)\ fig.290a.

Solución (por rebatimiento de planos):

a) Se define el plano (α), que pasa por el vértice (A) y es perpendicular al eje (e)\ fig.290**b**.

Se define el centro (M) de la cara (A;B;C;D), interceptando el eje (e) con el plano (α).

b) Se rebate el plano (α), y los puntos (M) y (A)\ fig.290**c**.

c) Se dibuja la proyección rebatida $(A^r;B^r;C^r;D^r)$ de la cara (A;B;C;D); esta es un cuadrado con vértice (A^r) y centro (M^r)\ fig.290**d**.

Se definen las proyecciones de la cara (A;B;C;D).

d) Se determina el centro (N) de la cara (E;F;G;H); para ello se mide la longitud (a) de arista del cubo sobre el eje (e) a partir del centro de cara (M)\ fig.290**e**.

e) Se dibujan las aristas del cubo paralelas al eje (e), que pasan por los vértices (A;B;C;D); Todas son de longitud (a) \ fig.290**f**.

Se dibuja la cara (E;F;G;H), definiendo así el cubo y su visibilidad.

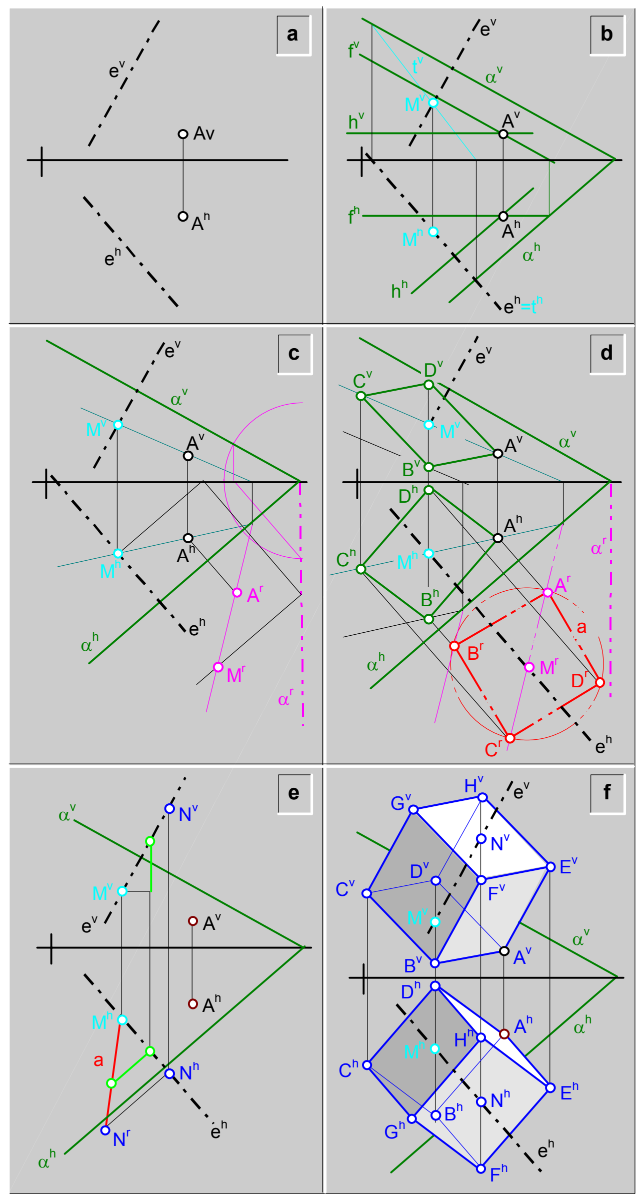


fig.290.\ Construcción de un cubo, conocido el vértice (A) y la recta (e) que contiene a un eje\ ejemplo.

CONSTRUCCIÓN DE UN CUBO CONOCIDO UN VÉRTICE Y UNA RECTA QUE CONTIENE A UNA DIAGONAL MAYOR.

Definir el cubo (ABCD-EFGH), dado su vértice (C) y la recta (r) que contiene a la diagonal mayor (A-G)\ fig.291a.

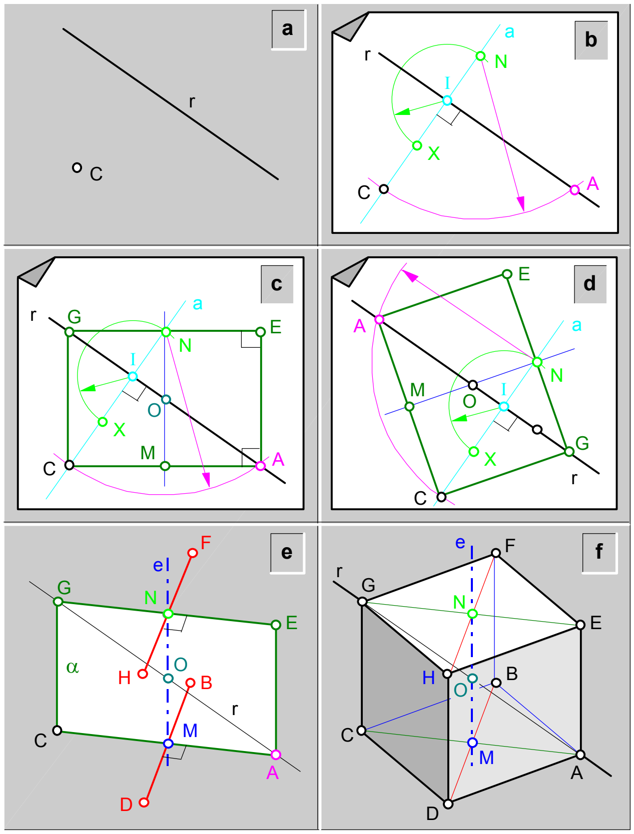


fig.291.\ Construcción de un cubo conocido un vértice y una recta que contiene a una diagonal mayor.

a) La recta (r) y el vértice (C) definen el plano (α) que contiene a la sección principal (AEGC) del cubo. Por lo tanto, sobre este plano (α) se construye esta sección principal de la siguiente forma\ fig.291b:

1) Se traza la recta (a), perpendicular a la recta (r), y se determina el punto de corte (I) entre las dos rectas.

2) Se define el punto medio (X) del segmento (C-I).

3) Se define el centro (N) de la cara (EFGH), cortando la recta (a) con un arco de circunferencia de centro (I) y radio igual a la distancia ($d_{I\text{-}X}$) entre los puntos (I y X).

4) Se define el vértice (A), cortando la recta (r) con un arco de circunferencia de centro (N) y radio igual a la distancia ($d_{N\text{-}C}$) entre los puntos (N y C).

5) Se dibuja la arista (A-C), y se determina su punto medio (M). La recta (M-N) es un eje del cubo\ fig.291c.

6) Se traza, por el vértice (C), y paralela a (MN), la arista (CG), ubicando a (G), sobre la recta (r).

7) Se define, por paralelismo el vértice (E).

Puede observarse que existe una segunda solución, mostrada en la fig.291d.

En la fig.291e, se muestra en el esquema en perspectiva, la sección principal ya construida.

b) Se traza, por, el centro (M) de cara, y perpendicular al plano (α), la diagonal mayor (B-D); la cual es de igual longitud que las diagonales mayores (A-C) y (E-G)\ fig.291e.

Se traza, por el centro de cara (N) y perpendicular al plano (α), la diagonal mayor (F-H); la cual es de igual longitud que las anteriores.

c) Se trazan las aristas del cubo y se define su visibilidad\ fig.291f.

Ejemplo: Definir las proyecciones de un cubo (ABCD-EFGH) con diagonal mayor (C-E) en la recta (r) y vértice (A)\ fig.292a.

Solución (por rotaciones):

a) La recta (r) y el punto (A) definen un plano (α) que contiene a la sección principal (AECG) del cubo, por lo tanto: se define este plano por dos rectas características (f) y (h); de la siguiente manera\ fig.292b:

Se traza la recta horizontal (h), que pasa por el punto (A).

Por un punto (2) cualquiera de ella se traza la recta frontal (f).

b) Se rota, alrededor del eje de punta (p), que pasa por el punto (3), el plano (α); hasta la posición vertical ($α_1$). Y se rotan también la recta (r) y el vértice (A); de la siguiente manera:

1) Se establece el eje de rotación (p) de punta\ fig.292c.

Para determinar el ángulo (α°) que debe girar el plano (α) alrededor del eje (p) para colocarse en la posición vertical ($α_1$); se rota, por medio de sus puntos (2 y 3), la recta frontal (f) hasta la posición vertical (f_1).

2) Se rotan, el ángulo (α°), los puntos (1 y A) y en consecuencia la recta (r); definiendo así sus proyecciones (1_1 ; A_1; y r_1)(\ fig.292d.

3) Se determinan las trazas del plano (α) en su posición vertical ($α_1$).

c) Estableciendo el eje vertical (v), se gira el plano (α), junto con la recta (r) y el punto (A) desde la posición vertical ($α_1$), hasta la posición frontal ($α_2$); obteniendo las proyecciones (r_2 y A_2)\ fig.292e.

d) Se dibuja, en verdadero tamaño, la sección principal (AEGC) del cubo en su proyección ($A_2E_2G_2C_2$) \ fig.292f.

Se gira la sección principal del cubo, desde su proyección ($A_2E_2G_2C_2$) hasta su proyección ($A_1E_1G_1C_1$).

e) Se gira la sección principal del cubo, desde su proyección ($A_1E_1G_1C_1$) hasta su proyección (AEGC), obteniendo sus proyecciones vertical ($A^VE^VG^VC^V$) y horizontal ($A^hE^hG^hC^h$)\ fig.292g. (Recuérdese que todos los puntos giran el mismo ángulo (α°) determinado inicialmente).

f) Se traza, por el centro de cara (N), la recta (d), perpendicular al plano (α); esta recta contiene a la diagonal menor (F-H); cuyo centro es (N)\ fig.292**h**.

Se ubica, sobre la recta (d), el vértice (F); midiendo para ello, por medio de un triángulo de rebatimiento a partir del centro de cara (N), la distancia (d_{E-N}) tomada de la fig.292f.

g) Se ubica, sobre la recta (d), el vértice (H); haciendo para ello iguales las longitudes de los segmentos (N-H) y (N-F)\ fig.292i.

Se dibuja, paralela a la diagonal menor (F-H) y de su misma longitud, la diagonal menor (B-D); de la cual su punto medio es (M).

h) Se dibujan todas las aristas del cubo y se define su visibilidad\ fig.292j.

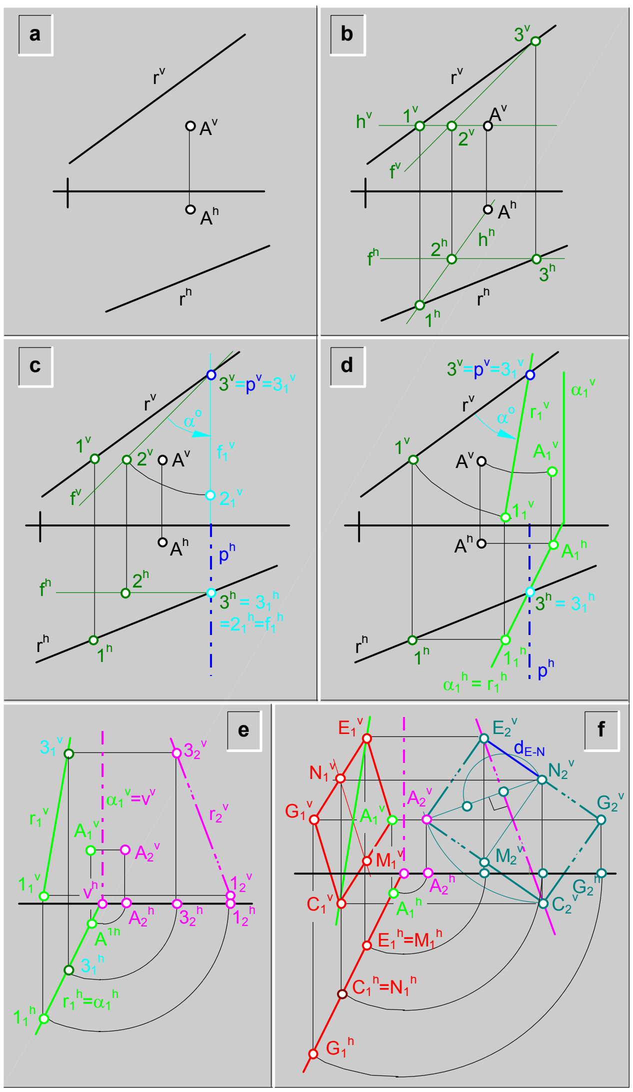


fig.292.\ Construcción de un cubo conocido un vértice (A) y una recta (r) que contiene a una diagonal mayor (E-C)\ ejemplo.

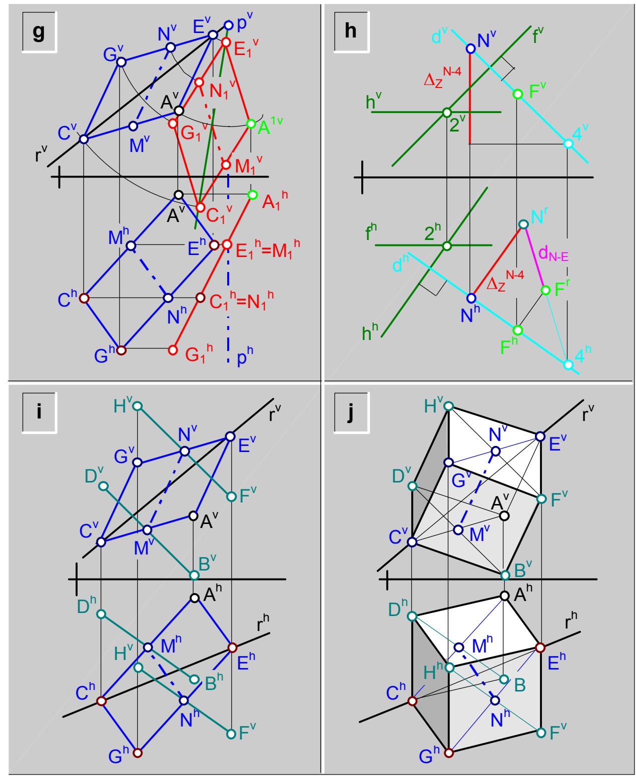


fig.292.\...continuación.

PIRÁMIDE REGULAR RECTA.

Poliedro cuya base es un polígono regular, y sus caras laterales son triángulos isósceles iguales, los cuales poseen un vértice común (V), denominado **vértice principal de la pirámide.** En la fig.293, se muestra una pirámide regular recta de base cuadrada, en la cual, se pueden observar los siguientes elementos principales:

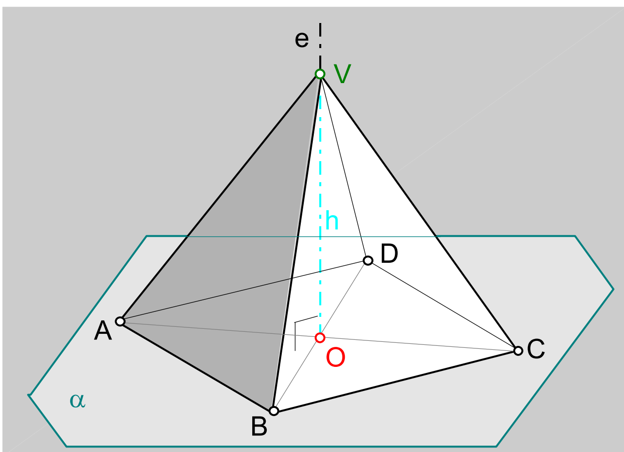


fig.293.\ Pirámide regular recta.

PLANO BASE (α).

Plano que contiene al polígono regular que define la base.

BASE.

Polígono regular contenido en el plano base (α).

CARA.

Cada uno de los triángulos isósceles que definen los lados de la pirámide.

VÉRTICE PRINCIPAL (V).

Punto al que concurren todas las aristas principales de la pirámide. Esta contenido en el eje (**e**) de la pirámide y es el vértice común de todas sus caras.

EJE (e).

Recta que contiene al vértice principal (V) de la pirámide y al centro (O) de su base; es perpendicular al plano base (α).

ARISTA PRINCIPAL.

Segmento que une un vértice de la base con el vértice principal (V) de la pirámide.

ARISTA DE LA BASE.

Segmento que une dos vértices de la base contiguos.

CENTRO DE LA BASE (O).

Centro geométrico de la base; es también su centro de gravedad.

ALTURA DE LA PIRÁMIDE (h).

Distancia entre el vértice principal (V) de la pirámide y el Centro (O) de la base.

CONSTRUCCIÓN DE UNA PIRÁMIDE REGULAR RECTA, CONOCIDO: LA ALTURA; UN VÉRTICE DE LA BASE; Y UNA RECTA QUE CONTIENE AL EJE.

Construir una pirámide regular recta de base hexagonal (ABCDEF), dado: el vértice (A) de la base; la altura (h) de la pirámide; y la recta (e) que contiene al eje\ fig.294a.

a) Se define, por el vértice (A), y perpendicular al eje (**e**), el plano base (α). Y se determina el centro (O) de la base (ABCDEF), interceptando el eje (**e**) con el plano base (α)\ fig.294b.

Se ubica, sobre el eje (**e**), el vértice principal (A) de la pirámide a la distancia (**h**) del centro de la base (O).

b) Se dibuja, con centro (O), y vértice (A), el hexágono base (ABCDEF), contenido en el plano (α)\ fig.294c.

c) Se dibujan las aristas principales de la pirámide, definiendo así su forma y visibilidad\ fig.294d.

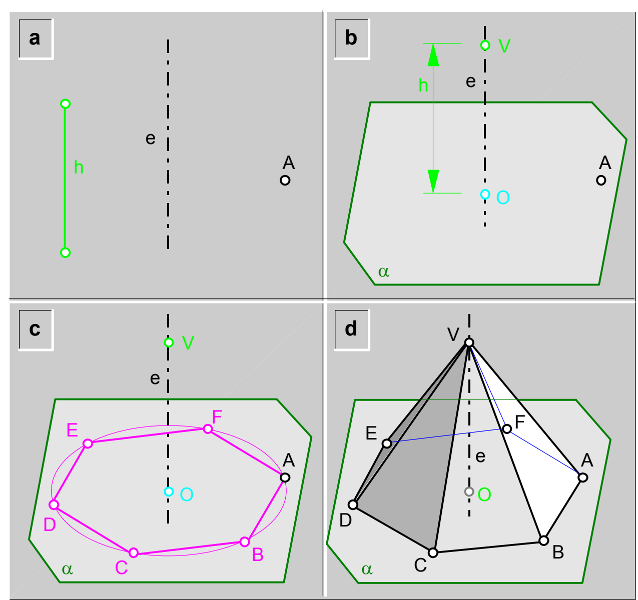


fig.294.\ Construcción de una pirámide regular recta, conocido: la altura (h); un vértice (A) de la base y la recta (e) que contiene al eje.

Ejemplo: Definir las proyecciones de una pirámide regular recta de base hexagonal (ABCDEF), de altura (h) dada, con eje en la recta (e), y vértice (A) de la base conocido. (B) por debajo de (A)\ fig.295a.

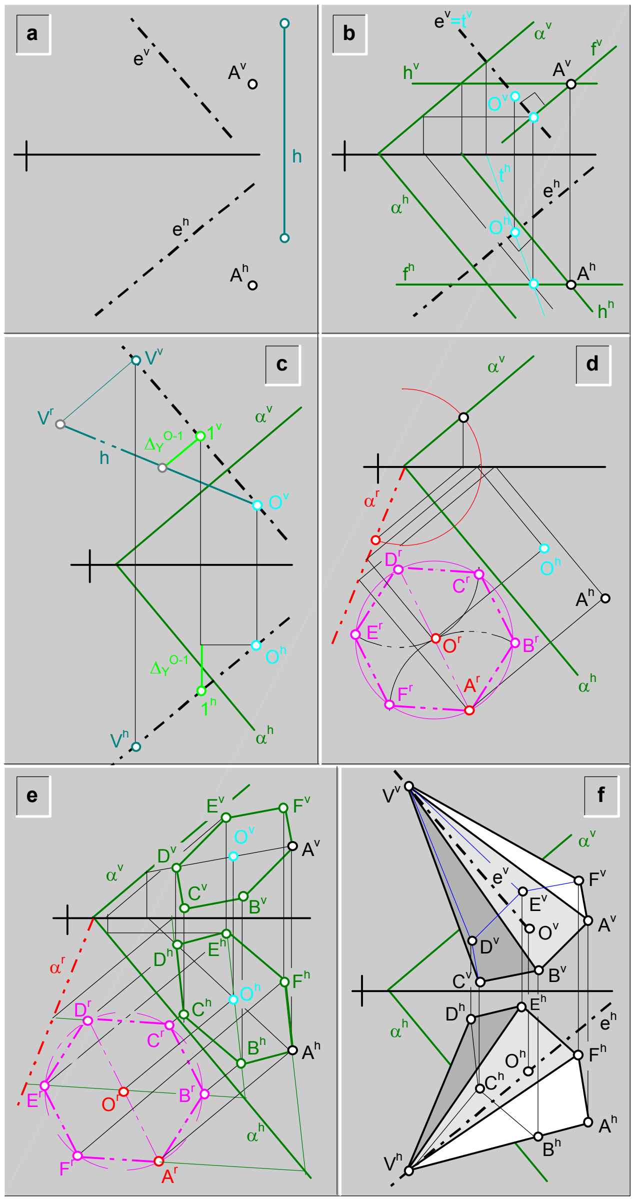


fig.295.\ Construcción de una pirámide regular recta conocido: la altura (h); un vértice (A) de la base; y una recta (e) que contiene al eje\ ejemplo.

a) Se definen las trazas del plano base (α), el cual pasa por el vértice (A) y es perpendicular al eje (e)\ fig.295b.

Se define el centro (O) de la base, interceptando el eje (e) con el plano base (α).

b) Se determina el vértice principal (V) de la pirámide, midiendo la altura (h) dada, sobre el eje (e), a partir del centro de la base (O)\ fig.295c.

c) Se rebate el plano (α), y los puntos (O y A), y se dibuja la proyección rebatida ($A^rB^rC^rD^rE^rF^r$) del hexágono base (ABCDEF)\ fig.295d.

d) Se determinan las proyecciones horizontal y vertical del hexágono base\ fig.295e.

e) Se define la pirámide y su visibilidad, uniendo los vértices de la base (ABCDEF) con el vértice principal (V) de la pirámide\ fig.295f.

CONSTRUCCIÓN DE UNA PIRÁMIDE REGULAR RECTA, CONOCIDO EL PLANO DE LA BASE; UNA RECTA QUE CONTIENE A UNA ARISTA PRINCIPAL; Y LA LONGITUD DE LAS ARISTAS DE LA BASE.

Definir la pirámide regular recta de base cuadrada (ABCD), contenida en el plano (α), siendo conocida la longitud (a) de las aristas de la base y sabiendo que la arista principal (A-V) está contenida en la recta (r)\ fig.296a.

a) Se determina el vértice (A) de la base (ABCD), interceptando la recta (r) con el plano (α)\ fig.296b.

Por cualquier punto (X) de la recta (r), se traza una recta (p) perpendicular al plano (α), y se determina su intersección (I) con el mismo.

Se traza la recta (d), que contiene a los puntos (A e I). Esta recta contiene a la diagonal (A-C) del cuadrado base (ABCD).

b) Se dibuja, contenido en el plano (α), el cuadrado base (ABCD); con vértice (A), longitud de aristas (a), y diagonal (A-C) sobre la recta (d)\ fig.296c.

Se traza, por el centro (O) de la base, y paralelo a la recta (p), el eje (e) de la pirámide.

Se define el vértice principal (V) de la pirámide, cortando las rectas (r y e).

c) Se trazan las aristas principales de la pirámide, definiendo así su forma y visibilidad\ fig.296d.

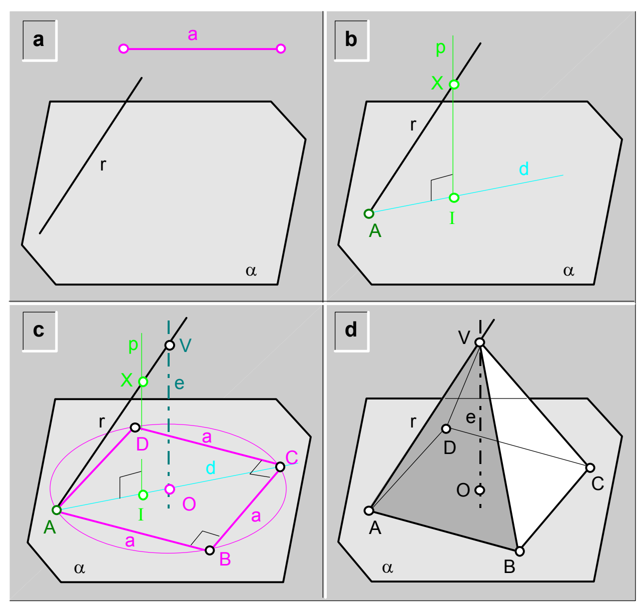


fig.296.\ Construcción de una pirámide regular recta, conocido el plano de la base; una recta que contiene a una arista principal; y la longitud (a) de las aristas de la base.

Ejemplo: Definir las proyecciones de una pirámide regular recta, de base cuadrada (ABCD) contenida en el plano (α), con arista principal (V-A) contenida en la recta (r), y longitud (a) de las aristas de la base conocida\ fig.297**a**.

Solución (por cambio de planos de proyección):

a) Se determina el vértice (A) de la base, interceptando la recta (r) con el plano (α)\ fig.297**b**.

b) Por cualquier punto (X) de la recta (r), se traza una recta (p) perpendicular al plano (α), y se determina su intersección (I) con este plano\ fig.297**c**.

c) Se traza la recta (d), que contiene a los puntos (A e I), esta recta contiene también a la diagonal (A-C) del cuadrado base de la pirámide\ fig.297**d**.

Se establece, por medio de la línea de tierra (3-V), el cambio del plano horizontal de proyección por el plano (3), observando de esta forma el plano (α) en posición vertical.

Se definen las proyecciones (A^3 e I^3) de los puntos (A e I).

d) Se establece, por medio de la línea de tierra (3-4), el cambio del plano vertical de proyección por el plano (4), observando de esta forma el plano (α) en la posición frontal\ fig.297**e**.

Se definen las proyecciones (A^4 e I^4) de los puntos (A e I).

Se dibuja, en verdadero tamaño, la proyección ($A^4B^4C^4D^4$) del cuadrado base (ABCD).

e) Se definen, sobre (α^3), la proyección ($A^3B^3C^3D^3$) de la base (ABCD)\ fig.297**f**.

Se define la proyección vertical ($A^vB^vC^vD^v$) de la base (ABCD).

f) Se define la proyección horizontal ($A^hB^hC^hD^h$) de la base (ABCD)\ fig.297**g**.

g) Se traza, por el centro (O) de la base (ABCD) y perpendicular al plano (α), el eje (**e**) de la pirámide\ fig.297**h**.

Se define, cortando las rectas (r y e), el vértice principal (V) de la pirámide.

Se trazan las aristas principales de la pirámide, definiendo así, su forma y visibilidad.

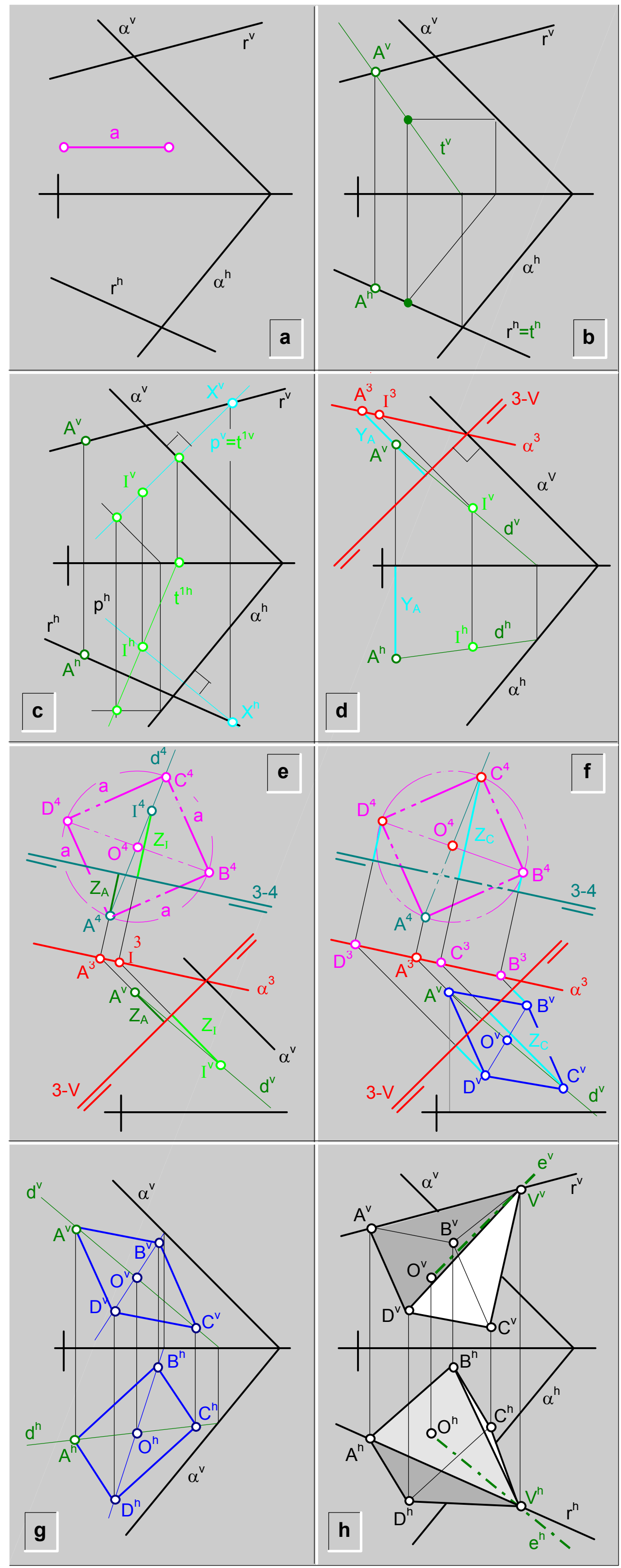


fig.297.\ Construcción de una pirámide regular recta, conocido el plano base; una recta que contiene a una arista principal; y la longitud de la aristas de la base\ ejemplo.

CONSTRUCCIÓN DE UNA PIRÁMIDE REGULAR RECTA, CONOCIDO EL VÉRTICE PRINCIPAL, Y EL PLANO BASE, CON UNA RECTA QUE CONTIENE A UNA ARISTA DE LA BASE.

Definir una pirámide regular recta, de base triangular (ABC) contenida en el plano (α), y vértice principal (V), sabiendo que la arista (A-B) de la base está contenida en la recta (r)\ fig.298a.

a) Se dibuja, por el vértice principal (V); y perpendicular al plano base (α), el eje (e) de la pirámide\ fig.298b.

Se define el centro (O) de la base, interceptando el eje (e) con el plano base (α).

Se construye la base (ABC), la cual es un triángulo equilátero con centro en (O), y arista (A-B) en la recta (r).

Se dibujan las aristas principales, definiendo así forma de la pirámide y visibilidad.

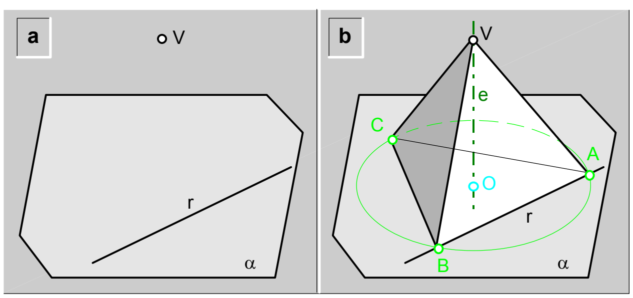


fig.298.\ Construcción de una pirámide regular recta, conocido el vértice principal, y el plano base con una recta que contiene a una arista de la base.

<u>**Ejemplo:** Definir las proyecciones de una pirámide regular recta de base triangular (ABC) contenida en el plano (α), el cual es paralelo a la línea de tierra, dado su vértice principal (V) y la recta (r) que contiene a la arista (A-B) de la base. Estando (A) por delante de (B)</u>\ fig.299a.

Solución (por rebatimiento de planos).

a) Se definen las trazas del plano base (α), que contiene a la recta (r) y es paralelo a la línea de tierra\ fig.299b.

b) Se definen: la proyección lateral (α^l) de plano (α); y la proyección lateral (V^l) del vértice principal (V)\ fig.299c.

Se define, por (V^l), y perpendicular a (α^l), la proyección lateral (e^l) del eje (e) de la pirámide.

Se define la proyección lateral (O^l) del centro de la base (O), cortando las proyecciones laterales del eje y el plano (α).

Se definen las proyecciones horizontal (O^h) y vertical (O^v) del punto (O).

c) Se rebate el plano (α) y el punto (O)\ fig.299d.

d) Se define la proyección rebatida (r^r) de la recta (r)\ fig.299e.

Se dibuja, en verdadero tamaño, la proyección rebatida ($A^rB^rC^r$) de la base (ABC); esta es un triángulo equilátero, con centro en la proyección rebatida (O^r) del punto (O) y lado (A^rB^r) en la proyección rebatida (r^r) de la recta (r).

Se definen las proyecciones vertical ($A^vB^vC^v$) y horizontal ($A^hB^hC^h$) de la base (ABC).

e) Se trazan las aristas principales de la pirámide, definiendo así su forma y visibilidad\ fig.299f.

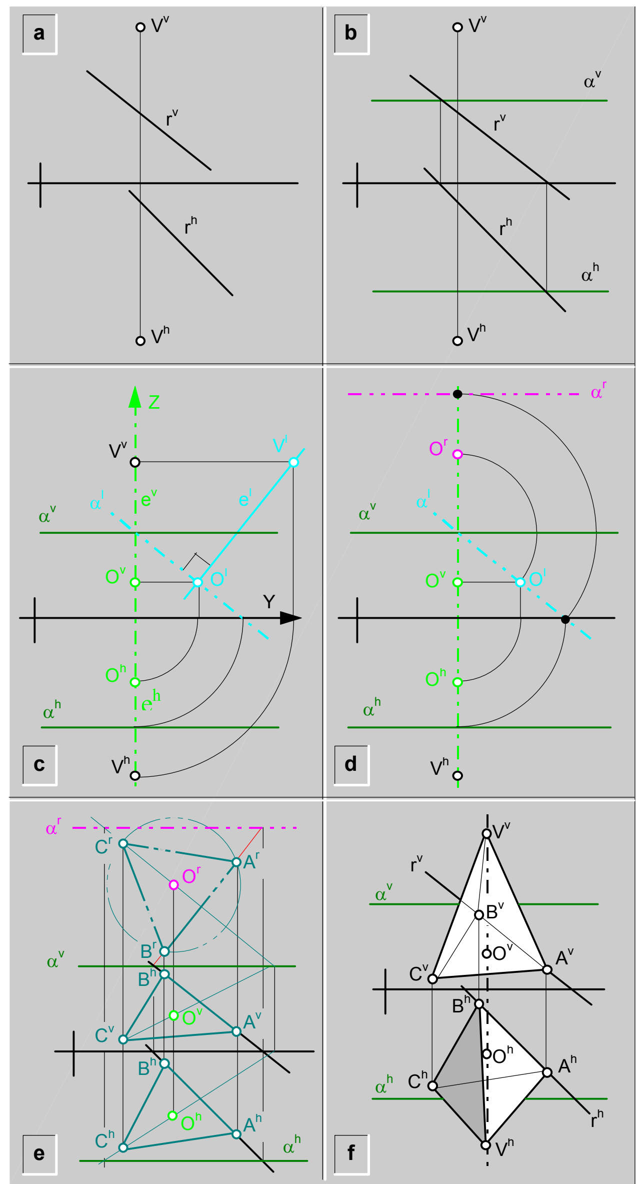


fig.299.\ Construcción de una pirámide regular recta de base triangular (ABC), con vértice principal (V), y plano base (α) paralelo a la línea de tierra, dada la recta (r), que contiene a la arista (A-B) de la base\ ejemplo.

PRISMA REGULAR RECTO.

Poliedro definido por dos polígonos regulares iguales y paralelos denominados bases, y cuyas caras laterales son rectángulos iguales. en la fig.300, se muestra un prisma regular recto de base hexagonal, en el cual pueden observarse las siguientes partes:

PLANO BASE.

Plano que contiene a polígono base. Existen dos paralelos entre sí.

BASE.

Polígono regular que define la base del prisma.

CARA.

Cada uno de los rectángulos que definen los lados del prisma.

CENTRO DE LA BASE.

Centro geométrico de cualquiera de los polígonos base.

EJE (e).

Recta que pasa por los dos centros de base del prisma. Es perpendicular a los planos base.

ARISTA PRINCIPAL.

Segmento, paralelo al eje (**e**), que une dos vértices de base.

ARISTA DE LA BASE.

Segmento que une dos vértices contiguos de una misma base.

ALTURA DEL PRISMA (h).

Distancia entre los dos centros de cara de un prisma. Es igual a la longitud de las aristas principales.

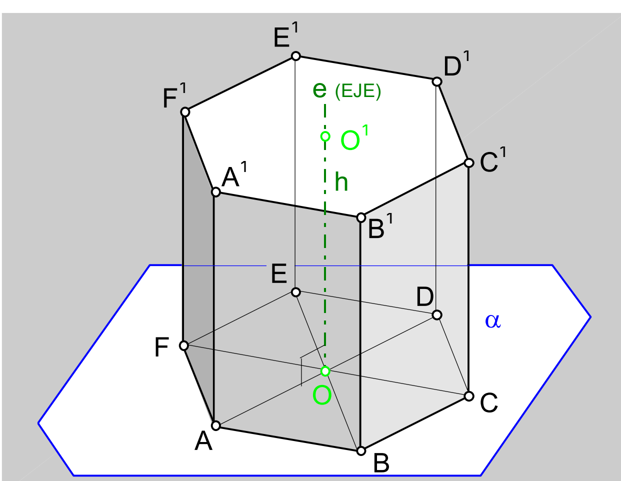


fig.300.\ Prisma regular recto.

CONSTRUCCIÓN DE UN PRISMA REGULAR RECTO, CONOCIDO UN PLANO BASE, CON UNO DE LOS VÉRTICES DE LA MISMA, Y EL CENTRO DE LA OTRA BASE.

Definir un prisma regular recto, de base triangular (ABC) contenida en el plano (α), conocido el vértice (A) y el centro (O^1) de la otra base ($A^1B^1C^1$)\ fig.301a.

a) Se traza, por el centro (O^1) de la base ($A^1B^1C^1$), y perpendicular al plano (α), el eje (**e**) del prisma\ fig.301**b**.

Se define el centro (O) de la cara (ABC), interceptando el eje (**e**) con el plano (α).

Se dibuja, contenida en el plano (α), la base (ABC) del prisma; la cual es un triángulo equilátero, con centro (O) y vértice (A).

b) Se dibujan, paralelas al eje (**e**) del prisma, y por los vértices de la base (ABC), las aristas principales del prisma, de longitud (O-O^1); obteniendo de esta forma, los vértices (A^1B^1 y C^1) de la otra base\ fig.301**c**.

c) Se dibuja la base ($A^1B^1C^1$) del prisma, definiendo así su forma y visibilidad\ fig.301**d**.

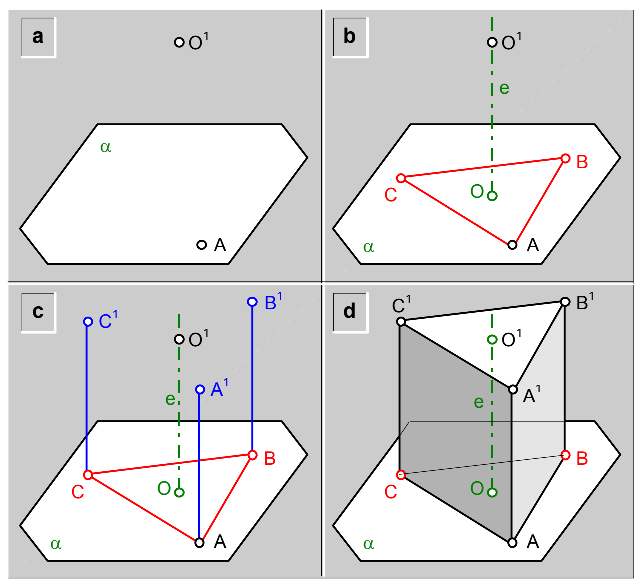


fig.301.\ Construcción de un prisma regular recto, conocido un plano base, con uno de los vértices de la misma, y el centro de la otra base.

Ejemplo: Definir las proyecciones de un prisma regular recto de base triangular (ABC), contenida en el plano (α), siendo (O^1) el centro de la otra base ($A^1B^1C^1$)\ fig.302a.

Solución (por rebatimiento de planos):

a) Se traza, por el punto (O^1) y perpendicular al plano (α), el eje (**e**) del prisma\ fig.302**b**.

Se determina el centro (O) de la cara (ABC), interceptando el eje (**e**) con el plano (α).

Se define la proyección horizontal (A^h) del punto (A), haciéndolo pertenecer al plano (α).

b) Se rebate el plano (α), y los puntos (O) y (A)\ fig.302c.

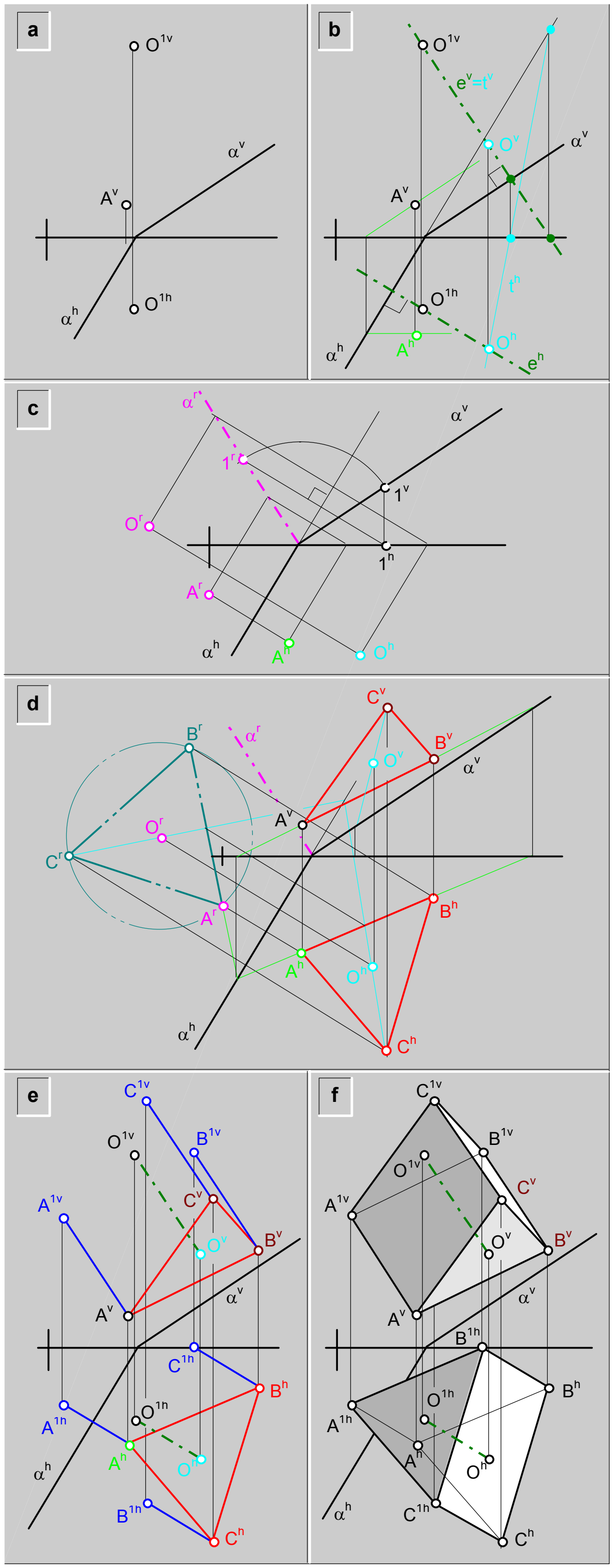


fig.302.\ Construcción de un prisma regular recto, de base triangular (ABC) contenida en el plano (α), siendo (O^1) el centro de la otra base ($A^1B^1C^1$)\ ejemplo.

c) Se dibuja, en verdadero tamaño, la proyección rebatida ($A^rB^rC^r$)de la base (ABC); la cual es un triángulo equilátero con vértice en (A^r) y centro en (O^r)\ fig.302**d**.

Se definen las proyecciones horizontal ($A^hB^hC^h$) y vertical ($A^vB^vC^v$) de la base (ABC).

d) Se trazan, paralelas al eje (e), las aristas principales del prisma que pasan por los vértices de la base (ABC); todas tienen por longitud la distancia ($d_{o\text{-}o^1}$) entre los centros de base (O) y (O^1)\ fig.302**e**.

e) Se dibuja la base ($A^1B^1C^1$) del prisma, definiendo así su forma y visibilidad\ fig.302**f**.

<u>CONSTRUCCIÓN DE UN PRISMA REGULAR RECTO, CONOCIDO: LA ALTURA; UN VÉRTICE; Y UNA RECTA QUE CONTIENE AL EJE.</u>

<u>Construir un prisma regular recto de base pentagonal (ABCDE), con eje en la recta (e); altura (h) y vértice (A)</u>\ fig.303**a**.

a) Se traza, por el vértice (A), el plano base (α), perpendicular al eje (e)\ fig.303**b**.

Se define, interceptando el eje (e) con el plano (α), el centro (O) de la base (ABCDEF).

Se dibuja la base (ABCDE); la cual es un pentágono regular, con centro (O) y vértice (A).

b) Se ubica, sobre el eje (e), y a la distancia (h) del centro (O) de la base (ABCDE), el centro (O^1) de la base ($A^1B^1C^1D^1E^1$)\ fig.303**c**.

Se dibujan, por los vértices de la base (ABCDE), y paralelas al eje (e), las aristas principales del prisma, todas de longitud igual a la altura (h) del prisma; definiendo así los vértices ($A^1B^1C^1D^1E^1$) de la otra base.

c) Se dibuja la base ($A^1B^1C^1D^1E^1$) del prisma, definiendo así su forma y visibilidad\ fig.303**d**.

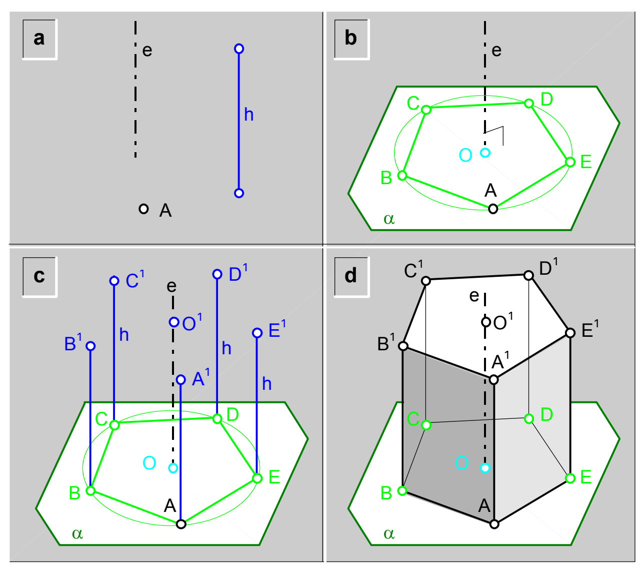


fig.303.\ Construcción de un prisma regular recto, conocido: la altura; un vértice; y la recta (e) que contiene al eje.

<u>**Ejemplo.** Definir las proyecciones de un prisma regular recto de base pentagonal (ABCDE), de altura (h), con eje en la recta (e) y vértice (A) de la base (ABCDE)</u>\ fig.304**a**.

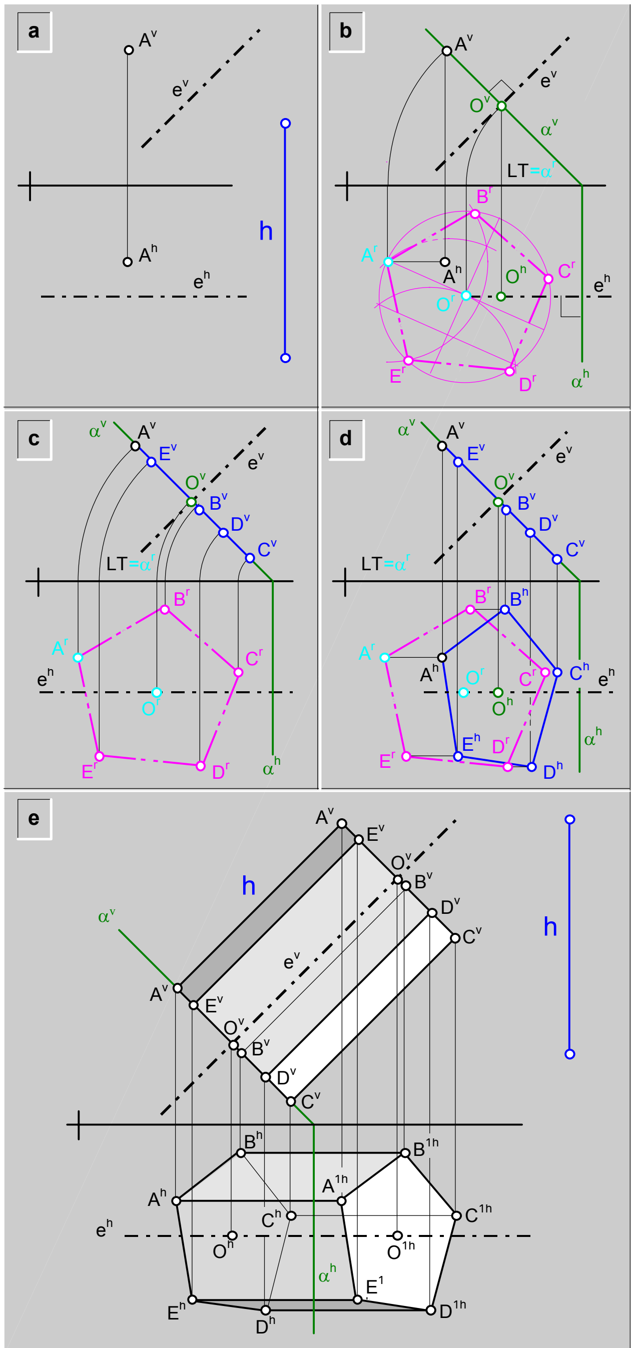


fig.304.\ Construcción de un prisma regular recto de base pentagonal (ABCDE), conocido: la altura (h); el vértice (A) de la base (ABCDE); y la recta (e) que contiene al eje\ ejemplo.

Solución (por rebatimiento de planos):

a) Se define, por el vértice (A) y perpendicular al eje (e), el plano (α), que contiene a la base (ABCDE); este es un plano de punta, debido a que el eje (e) es una recta frontal\ fig.304**b**.

Se define el centro (O) de la base (ABCDE), interceptando el eje (e) con el plano (α).

Se rebate el plano (α), y los puntos (A) y (O).

Se dibuja la proyección rebatida ($A^rB^rC^rD^rE^r$) de la base (ABCDE); la cual es un pentágono regular, con centro (O^r) y vértice (A^r).

b) Se define la proyección vertical ($A^vB^vC^vD^vE^v$) de la base (ABCDE)\ fig.304**c**.

c) se define la proyección horizontal ($A^hB^hC^hD^hE^h$) de la base (ABCDE)\ fig.304**d**.

d) Se trazan, por los vértices de la base (ABCDE), y paralelas al eje (e), las aristas principales del prisma; siendo todas de longitud igual a su altura (h). Se ubican de esta forma a los vértices ($A^1B^1C^1D^1E^1$) de su otra base, definiendo así la forma del prisma y su visibilidad\ fig.304**e**.

<u>CONSTRUCCIÓN DE UN PRISMA REGULAR RECTO, CONOCIDA SU ALTURA, UN VÉRTICE, Y UNA RECTA QUE CONTIENE A UNA ARISTA PRINCIPAL.</u>

<u>**Construir un prisma regular recto de base cuadrada (ABCD) y altura (h), dado su vértice (A) y la recta (r), que contiene a la arista principal (C-C^1)**</u>\ fig.305**a**.

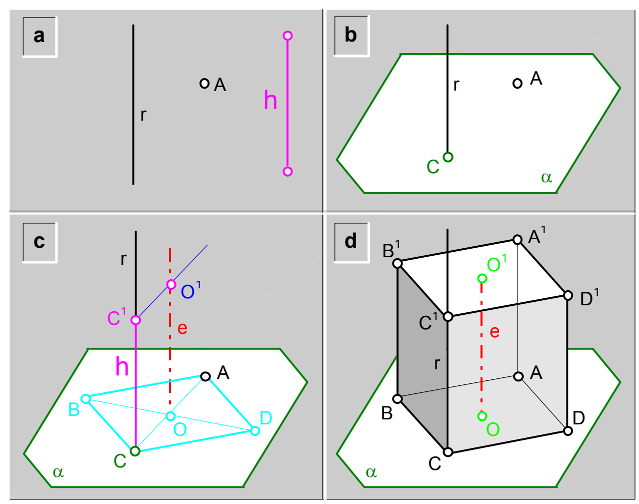


fig.305.\ Construcción de un prisma regular recto, conocida su altura, un vértice y una recta que contiene a una arista principal.

a) Se define, por el vértice (A), y perpendicular a la recta (r), el plano (α) de la base (ABCD)\ fig.305**b**.

Se define el vértice (C), interceptando la recta (r) con el plano (α).

b) Se dibuja, contenido en el plano (α), el cuadrado base (ABCD); cuya diagonal es el segmento (A-C). El punto medio del segmento (A-C) es el centro (O) de esta base\ fig.305**c**.

Se traza, por el punto (O) y paralelo a la recta (r), el eje (e) del prisma.

Se ubica, sobre la recta (r), y a la distancia (h) del vértice (C), el vértice (C^1) de la base ($A^1B^1C^1D^1$).

Se ubica, sobre el eje (e), y a la distancia (h) del punto (O), el centro (O^1) de la base ($A^1B^1C^1D^1$).

c) Se dibujan, paralelas a la recta (r), las aristas principales del prisma, todas de longitud (h)\ fig.305**d**.

Se dibuja la base ($A^1B^1C^1D^1$) del prisma, definiendo así su forma y visibilidad.

Ejemplo: Definir las proyecciones de un prisma regular recto de base cuadrada (ABCD), conocido el vértice (A), la altura (h); y la recta (r), que contiene a la arista principal (C-C^1)\ fig.306**a**.

Solución (por rebatimiento de planos a través de una recta frontal):

a) Se define, por el vértice (A) y perpendicular a la recta (r), el plano (α) de la base (ABCD)\ fig.306**b**.

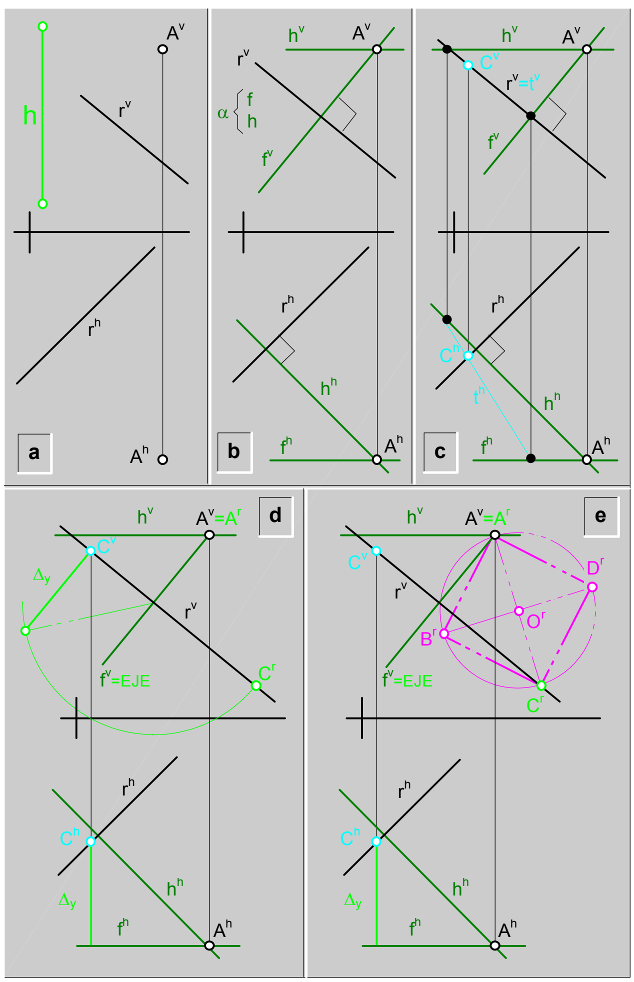


fig.306.\ Construcción de un prisma regular recto de base cuadrada (ABCD), conocido el vértice (A), la altura (h), y la recta (r), que contiene a la arista principal (C-C^1)\ ejemplo.

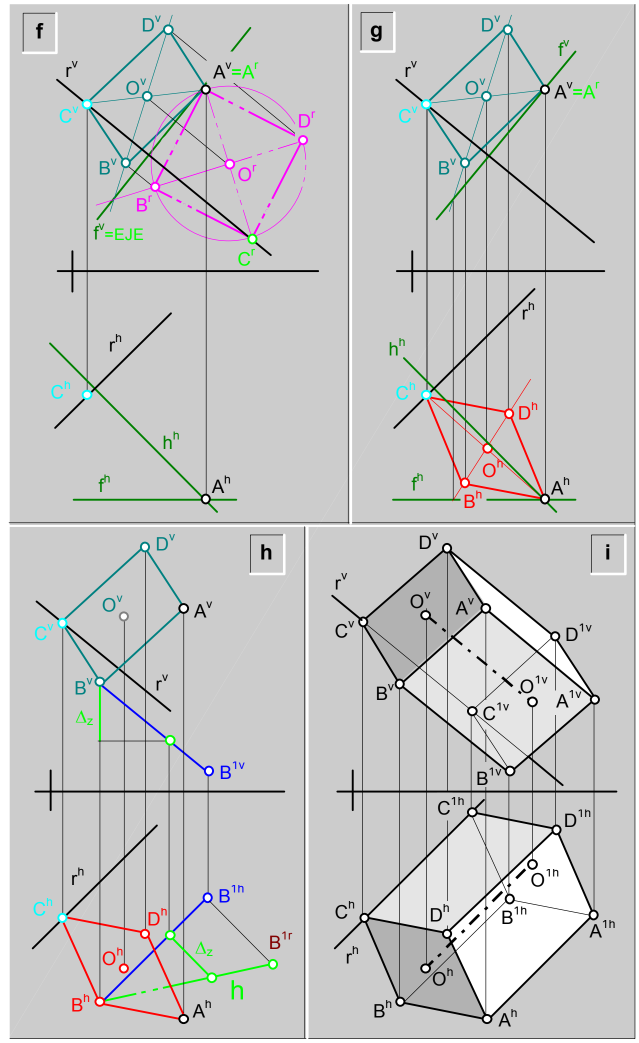


fig.306.\ ...continuación

b) Se determina el vértice (C), interceptando el plano (α) con la recta (r)\ fig.306**c**.

c) Se rebaten, eligiendo como eje la recta frontal (f), los puntos (A) y (C) contenidos en el plano (α)\ fig.306**d**.

d) Se dibuja la proyección rebatida ($A^rB^rC^rD^r$) de la base (ABCD); la cual es un cuadrado de vértices opuestos (A y C)\ fig.306**e**.

e) Se define la proyección vertical ($A^vB^vC^vD^v$) de la base (ABCD)\ fig.306**f**.

f) Se define la proyección horizontal ($A^hB^hC^hD^h$) de la base (ABCD)\ fig.306**g**.

g) Se traza, por el vértice (B), y paralela a la recta (r), la arista principal (B-B^1), y se ubica sobre ella, el vértice (B^1) a la distancia (h) del vértice (B)\ fig.306**h**.

h) Se dibujan las demás aristas principales del prisma, todas paralelas a la recta (r), y de altura (h), definiendo la otra base ($A^1B^1C^1D^1$) del prisma\ fig.306**i**.

Se define la forma y visibilidad y visibilidad del prisma.

Bibliografía.

DI PIETRO, Donato
GEOMETRÍA DESCRIPTIVA.
LIBRERÍA Y EDITORIAL ALSINA.- Buenos Aires - 1.962.

FRECH, Thomas E. y VIERCK, Charles J.
DIBUJO DE INGENIERÍA.
UNIÓN TIPOGRÁFICA EDITORIAL HISPANO-AMERICANA.- México - 1.972, 2ª edición.

GIESECKE , Frederick; MITCHELL, Alva; y otros.
DIBUJO TÉCNICO.
EDITORIAL LIMUSA.- México - 1.979, 6ª edición.

GONZÁLEZ G., Fausto A.
PERSPECTIVA Y SOMBRAS.
CONSEJO DE PUBLICACIONES DE LA UNIVERSIDAD DE LOS ANDES.- Mérida- 1.987.

IZQUIERDO A., F.
EJERCICIOS DE GEOMETRÍA DESCRIPTIVA.
EDITORIAL DOSSAT, S.A .- Madrid - 1.977, 6ª edición.

IZQUIERDO A., F.
GEOMETRÍA DESCRIPTIVA.
EDITORIAL DOSSAT, S.A.- Madrid - 1.981, 14ª edición.

MILLAN, C.
CIENCIAS GRÁFICAS.
EDICIONES ENEVA, S.A.- Caracas - 1.993.

NORIEGA V., Francisco
GEOMETRÍA DESCRIPTIVA Y GRAFISMO ARQUITECTÓNICO.
EDICIONES VEGA.- Caracas - 1.979, 1ª edición.

OSERS, Harry
ESTUDIO DE GEOMETRÍA DESCRIPTIVA. TOMO I.
TALLERES RUÁN, S.A.- Madrid - 1.979, 7ª edición.

PARRAMÓN, José Mª
COMO DIBUJAR EN PERSPECTIVA.
PARRAMÓN EDICIONES, S. A.- Barcelona - 1.983, 16ª edición.

RANELLETTI, C.
GEOMETRÍA DESCRIPTIVA.
EDITORIAL GUSTAVO GILI, S.A.- Barcelona - 1.953, 4ª edición.

RONDÓN R., Alicia, y TELLEZ DE P., Mary
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN.
CONSEJO DE PUBLICACIONES DE LA UNIVERSIDAD DE LOS ANDES.- Mérida- 1.985.

SÁNCHEZ, S, Manuel
GEOMETRÍA.
ARTES GRÁFICAS GRIJELMO.- Bilbao - 1.983.