RECURSOS BÁSICOS EN GEOMETRÍA PLANA

Rodolfo Larrea Tomás

ÍNDICE

1. IGUALDAD Y SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Criterios de igualdad: Dos triángulos T_1 y T_2 son iguales (o congruentes) si y sólo si verifican alguno de los siguientes criterios:

C1) Cada lado en T_1 tiene un lado igual en T_2.
C2) Un ángulo y los lados que lo forman en T_1 tienen iguales en T_2.
C3) Un lado y los ángulos que soporta en T_1 tienen iguales en T_2.

La igualdad (o congruencia) de triángulos la expresaremos así: $T_1 \equiv T_2$

Criterios de semejanza: Dos triángulos T_1 y T_2 son semejantes si y sólo si verifican alguno de los siguientes criterios:

S1) Hay proporcionalidad entre cada lado de T_1 y otro de T_2,
S2) Un ángulo en T_1 es igual a otro en T_2 y los lados que forman dicho ángulo en T_1 son proporcionales a los correspondientes lados en T_2.
S3) Dos ángulos en T_1 son iguales a otros dos ángulos en T_2.

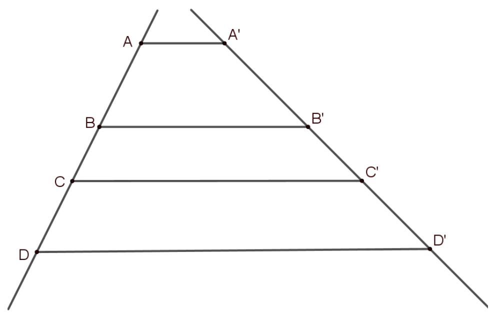
La semejanza de triángulos la expresaremos así: $T_1 \sim T_2$. La razón *k* entre dos lados homólogos se llama **razón de semejanza**.

2. FIGURAS Y CUERPOS SEMEJANTES

En una semejanza de razón k :

- Dos longitudes homólogas estarán en la misma razón *k*.
- Dos áreas homólogas estarán en la razón k^2.
- Dos volúmenes homólogos estarán en la razón k^3.

3. TEOREMA DE THALES



“Si dos o más paralelas se cortan por dos rectas transversales, los segmentos que se determinan en una de éstas son directamente proporcionales a sus homólogos en la otra”

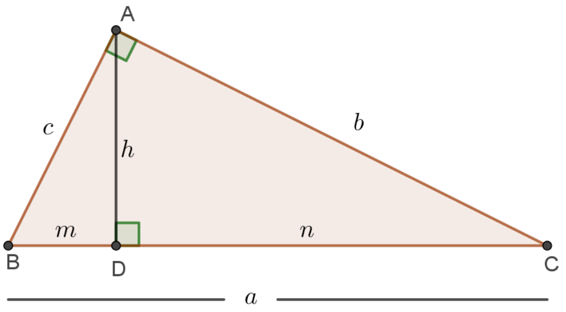
Es decir:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{AC}{A'C'} = \cdots$$

El recíproco es cierto: $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \cdots \Rightarrow AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel \cdots$

4. SEMEJANZA EN TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Si en un triángulo rectángulo trazamos la altura correspondiente a la hipotenusa, el triángulo queda dividido en dos triángulos rectángulos semejantes al inicial. De esta semejanza surgen dos teoremas sencillos:



Teorema de la altura: *"En un triángulo rectángulo, la altura relativa a la hipotenusa es la media proporcional de los segmentos en que dicha altura divide a la hipotenusa*. Es decir: $\frac{m}{h} = \frac{h}{n} \Rightarrow h^2 = m \cdot n$

Teorema del cateto: *"En un triángulo rectángulo un cateto es la media proporcional de la hipotenusa y la proyección ortogonal de dicho cateto sobre la hipotenusa"*.

Es decir: $\frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = a \cdot n \qquad y \qquad \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = a \cdot m$

A partir de este último se puede justificar fácilmente el teorema de Pitágoras tal y como se suele enunciar:

Teorema de Pitágoras: *"En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos"*.

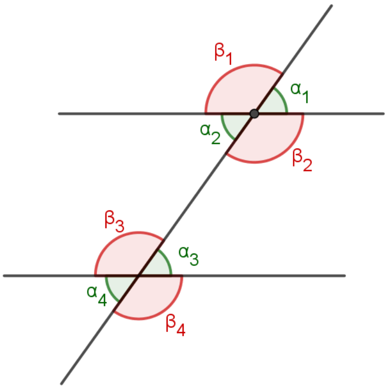
Es decir: $a^2 = b^2 + c^2 \qquad \left(si\ \widehat{A} = 90^\circ \right)$

Como el recíproco es cierto, pondremos mejor: $\widehat{A} = 90^\circ \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$

5. ÁNGULOS ENTRE PARALELAS

Al cortar dos paralelas por una recta transversal se originan dos familias de ángulos muy relacionados entre sí (ver figura), ya que:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 \\ \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 \end{cases} \quad con \quad \alpha_i + \beta_j = 180^\circ$$



α_1 y α_2 se dicen **opuestos por el vértice**, al igual que β_1 y β_2 ; α_3 y α_4 ; β_3 y β_4

α_1 y α_3 se dicen **correspondientes entre paralelas** al igual que β_1 y β_3 ; α_2 y α_4 ; β_2 y β_4

α_2 y α_3 se dicen **alternos internos** al igual que β_2 y β_3

α_1 y α_4 se dicen **alternos externos** al igual que β_1 y β_4

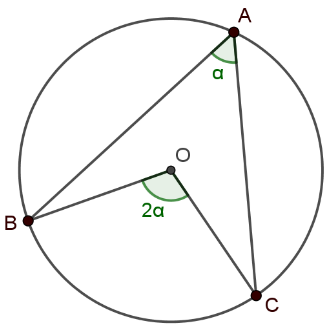
Consecuencias:

1) Los ángulos interiores de un triángulo suman 180º
2) Los ángulos interiores de un polígono convexo de *n* lados suman (*n* – 2)180º
3) Si el polígono es regular, cada ángulo interior mide $\dfrac{(n-2)180^{\circ}}{n}$

6. ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

Centrales: su vértice es el centro de la circunferencia y sus lados son dos radios.

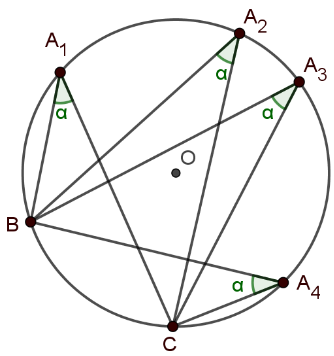
Inscritos: su vértice está sobre la circunferencia y sus lados son dos cuerdas.



Miden la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco. Demuéstralo.

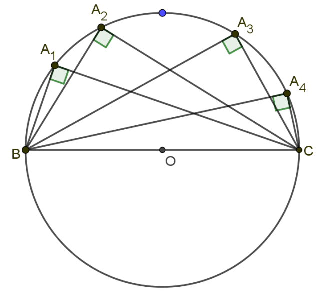
Consecuencias:

1) Todos los inscritos que abarcan el mismo arco sobre la misma circunferencia son iguales entre sí.



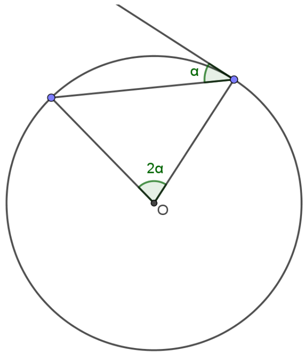
2) Los inscritos que abarcan media circunferencia son todos rectos.

Desde cualquier punto de la circunferencia que no sea B ni C, se ve un diámetro BC bajo ángulo recto.



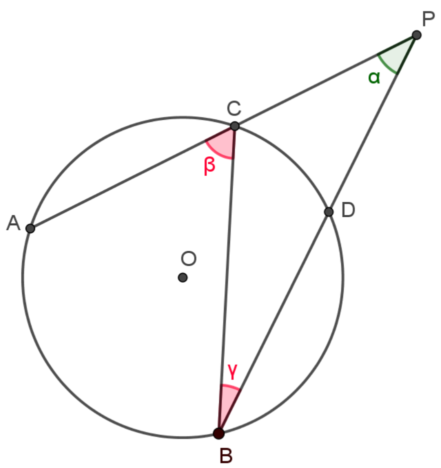
3) Un cuadrilátero convexo ABCD está inscrito en una circunferencia si y sólo si dos ángulos opuestos del mismo suman 180º. En tal caso, el cuadrilátero ABCD se dice que es un **cuadrilátero cíclico**. Más adelante volverán a aparecer.

Semiinscritos: su vértice está en la circunferencia y sus lados son una cuerda y la tangente a la circunferencia en el vértice.



Miden la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco.

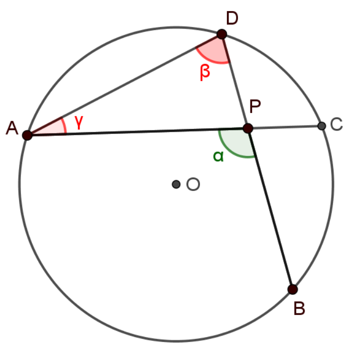
Exteriores: su vértice P está en el exterior de la circunferencia y sus lados son dos secantes.



$$\alpha+\gamma=\beta \Rightarrow \alpha=\beta-\gamma=\frac{\widehat{AOB}-\widehat{COD}}{2}$$

Miden la semidiferencia de los centrales que abarcan los arcos $\widehat{AB}$ y $\widehat{CD}$ afectados.

Interiores: su vértice P está en el interior de la circunferencia y sus lados son dos cuerdas.



$$\alpha=\beta+\gamma=\frac{\widehat{AOB}+\widehat{COD}}{2}$$

Miden la semisuma de los centrales que abarcan los arcos $\widehat{AB}$ y $\widehat{CD}$ afectados.

Demostrar estos resultados es un buen entrenamiento geométrico.

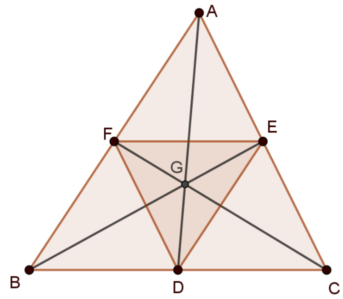
7. RECTAS Y PUNTOS NOTABLES EN UN TRIÁNGULO

7.1. Medianas y baricentro

Medianas son los segmentos que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto.

Las tres medianas de un triángulo concurren en un mismo punto que se llama baricentro. Lo denotaremos por G.

Propiedades;



1) Las medianas dividen el triángulo ABC en seis triángulos de igual área. Demuéstrese con ayuda de un recurso muy elemental que es de gran ayuda en muchos problemas: ***"Triángulos que comparten una altura tienen áreas directamente proporcionales a sus respectivas bases"***

2) El baricentro divide cada mediana en dos segmentos de modo que la distancia del baricentro al vértice es el doble de la distancia del baricentro al punto medio del lado opuesto.

   Es decir: $\dfrac{GA}{GD}=\dfrac{GB}{GE}=\dfrac{GC}{GF}=2$

   De otro modo: $GA=\dfrac{2}{3}AD \quad y \quad GD=\dfrac{1}{3}AD \quad etc.$

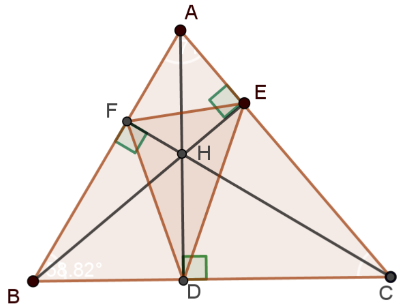
3) El triángulo DEF (**triángulo medial** de ABC) es semejante al triángulo ABC y la razón de semejanza entre ambos es 1/2. Sus baricentros coinciden.

   Demostrar estas propiedades es un buen ejercicio.

7.2. Alturas y ortocentro

Alturas son los segmentos que unen un vértice con el pie de la perpendicular al lado opuesto (o su prolongación) trazada desde dicho vértice.

Las tres alturas de un triángulo (o mejor las rectas que las contienen) concurren en un mismo punto que se llama ortocentro. Lo denotaremos por H.



En los triángulos rectángulos el ortocentro es el vértice del ángulo recto. En los obtusángulos queda en el exterior del triángulo.

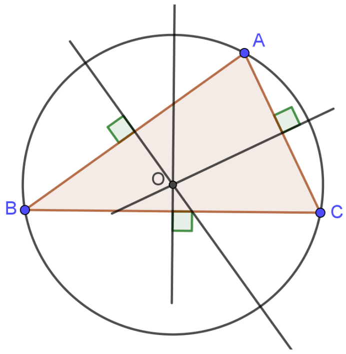
Si ABC es acutángulo, el ortocentro H queda en el interior del triángulo. En tal caso, los pies de las alturas determinan un triángulo DEF muy interesante que se llama **triángulo órtico**. Lo estudiaremos en el capítulo 14.

7.3. Mediatrices y circuncentro

Mediatriz de un segmento PQ es la recta perpendicular a dicho segmento en su punto medio.
La mediatriz de PQ es el **lugar geométrico**[1] de los puntos del plano que equidistan de los puntos P y Q.

Mediatrices de un triángulo ABC son pues las mediatrices de sus lados AB, BC y CA.

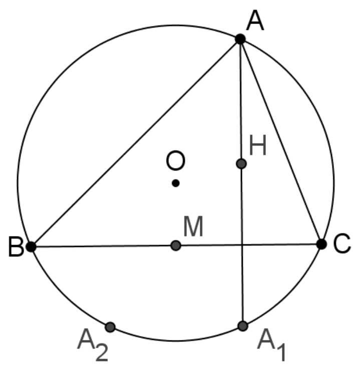
Las tres mediatrices de un triángulo concurren en un mismo punto. Este punto se llama circuncentro y lo denotaremos por O.



El circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, porque equidista de los tres vértices del mismo.

El circuncentro de un triángulo es el ortocentro de su triángulo medial.

La circunferencia circunscrita al triángulo ABC tiene algunas propiedades muy interesantes en el caso en que ABC sea acutángulo. Destacaremos:



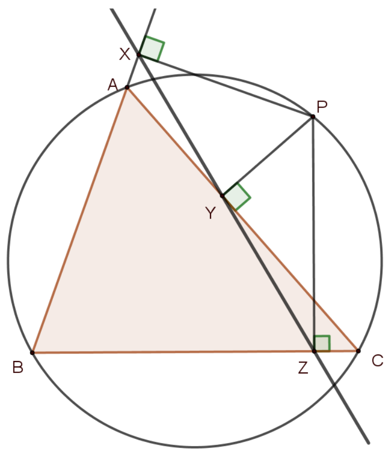
1) Contiene, además de los tres vértices, los simétricos del ortocentro con respecto a los lados y con respecto a los puntos medios de los lados.

2) Desde un punto P trazamos las perpendiculares a los tres lados del triángulo ABC. Si X, Y, Z son los pies de estas perpendiculares, se cumple que:

   X, Y, Z alineados si y sólo si P está en la circunferencia circunscrita a ABC.

   En tal caso, la recta que contiene a X, Y, Z se llama recta de Wallace-Simson.

   El anterior resultado se conoce como el teorema de Wallace-Simson.



[1] En geometría llamamos **lugar geométrico** al conjunto de puntos que goza de una propiedad que les es exclusiva. Es decir, una propiedad que los caracteriza.

7.4. Bisectrices, incentro y exincentros

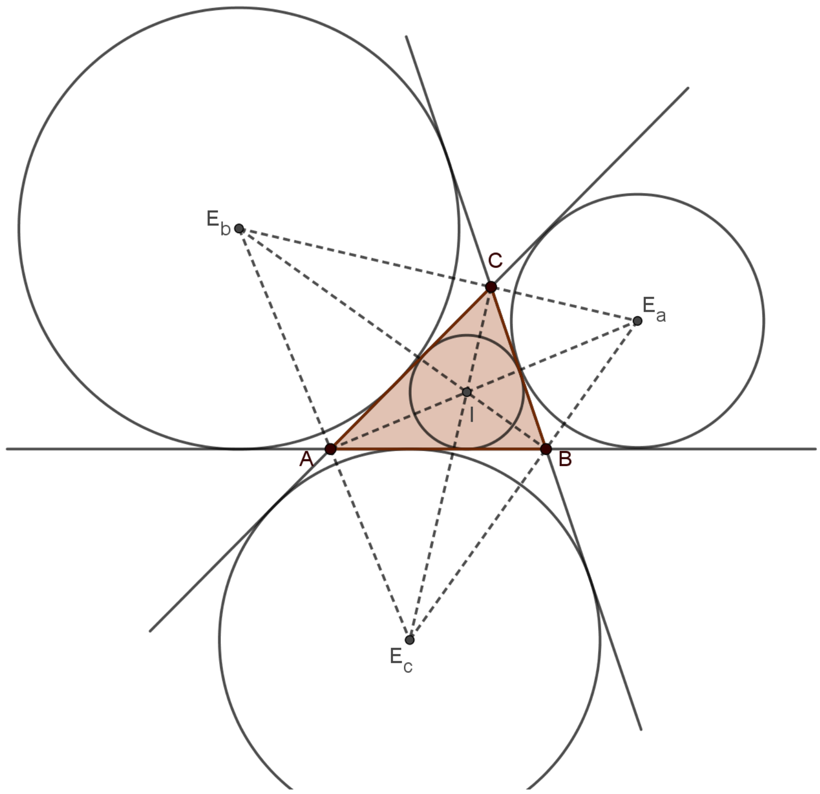
Bisectriz del ángulo de dos semirrectas es la semirrecta que divide el ángulo en dos ángulos iguales. Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de las dos semirrectas que forman el ángulo inicial.

En un triángulo distinguiremos dos tipos de bisectrices:

Bisectrices interiores, que dividen en dos ángulos iguales los ángulos interiores del triángulo.
Bisectrices exteriores, que dividen en dos ángulos iguales los ángulos exteriores del mismo (formados por un lado y la prolongación de otro).

Las bisectrices interiores concurren en un mismo punto que se llama incentro. Es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo. Lo denotaremos por I .

La bisectriz interior que parte de un vértice concurre a su vez con las bisectrices exteriores de los otros dos vértices en un punto que llamaremos exincentro.
Los exincentros, que denotaremos por E_a, E_b, E_c son los centros de las circunferencias exinscritas, tangentes a uno de los lados del triángulo y a las prolongaciones de los otros dos (ver figura).

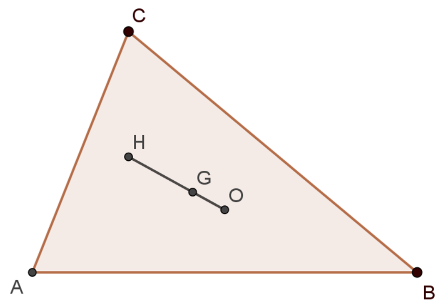


Estos cuatro puntos (incentro y exincentros) son los únicos puntos equidistantes de las tres rectas que contienen a los lados del triángulo.

La recta de Euler

En todo triángulo, el baricentro G, el ortocentro H y el circuncentro O están alineados siendo la distancia GH el doble de GO.

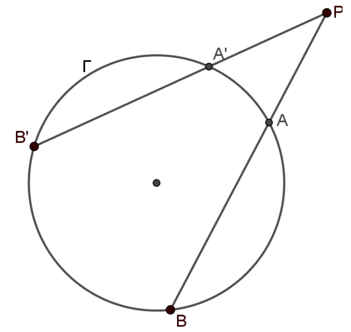
La recta que contiene a estos tres puntos se llama recta de Euler.



8. POTENCIA DE UN PUNTO CON RESPECTO A UNA CIRCUNFERENCIA Γ

Caso 1.º: *P* es exterior a la circunferencia

Si por un punto P exterior a la circunferencia Γ trazamos una secante cualquiera que corta a Γ en dos puntos A y B, se tiene que PA·PB=k, siendo k una constante que no depende de la secante trazada: sólo depende de P y Γ.

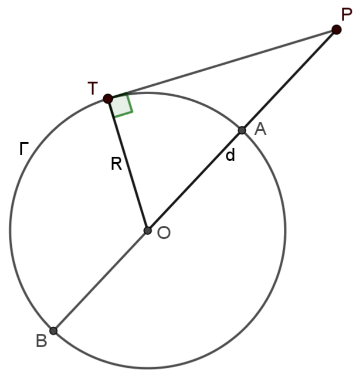


Trata de demostrar con la figura que $PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$

Esta constante *k* se llama potencia de *P* con respecto a Γ

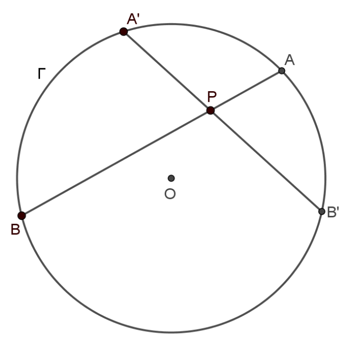
En particular, si la secante pasa por el centro O de la circunferencia:

$$k = PA \cdot PB = (d - R)(d + R) = d^2 - R^2 = PT^2$$



Caso 2.º: *P* es interior a la circunferencia

Al trazar una secante cualquiera que pase por P y corte a la circunferencia en los puntos A y B, también se cumple que $PA \cdot PB = k \ \ (cte.)$.



Trata de demostrar con la figura que $PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$

En particular si la secante pasa por el centro O y siendo $d = OP$ tendremos: $k = PA \cdot PB = (R - d)(R + d) = R^2 - d^2$

También aquí diremos que la constante *k* es la potencia del punto interior *P* con respecto a la circunferencia Γ.

Las definiciones pueden unificarse utilizando **segmentos orientados:**

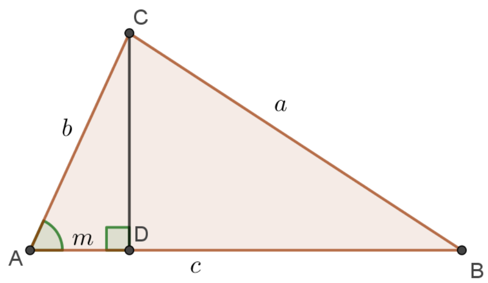
PA y PB son del mismo signo si P no está entre A y B. En caso contrario serán de signo contrario. Así, en ambos casos será $k = d^2 - R^2$ *con* $\begin{cases} k < 0 \Leftrightarrow P \text{ interior a } \Gamma \\ k = 0 \Leftrightarrow P \text{ pertenece a } \Gamma \\ k > 0 \Leftrightarrow P \text{ exterior a } \Gamma \end{cases}$

9. RELACIONES MÉTRICAS EN UN TRIÁNGULO

9.1. Cuadrado del lado opuesto a un ángulo

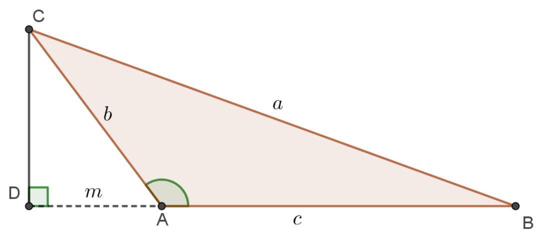
*"El cuadrado del lado opuesto a un ángulo **agudo** es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble del producto de uno de ellos por la proyección ortogonal del otro sobre él".*

Es decir: $a^2 = b^2 + c^2 - 2cm$



*"El cuadrado del lado opuesto a un ángulo **obtuso** es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados más el doble del producto de uno de ellos por la proyección ortogonal del otro sobre él".*

Es decir: $a^2 = b^2 + c^2 + 2cm$



Para los alumnos iniciados en trigonometría, estos dos teoremas se engloban en uno con el siguiente teorema:

Teorema del coseno

"En todo triángulo ABC, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble del producto de ellos por el coseno del ángulo que forman"

Es decir: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \widehat{A}$

Análogamente con los otros lados:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \widehat{B}$ y $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \widehat{C}$

Forma de un triángulo

Siendo $a \geq b \geq c$, en cuyo caso $\widehat{A} \geq \widehat{B} \geq \widehat{C}$:

* Si $a^2 > b^2 + c^2$, entonces $\widehat{A}$ es obtuso y el triángulo es obtusángulo ($\widehat{A} > 90^{\circ}$).

* Si $a^2 = b^2 + c^2$, entonces $\widehat{A}$ es recto y el triángulo es rectángulo ($\widehat{A} = 90^{\circ}$).

* Si $a^2 < b^2 + c^2$, entonces $\widehat{A}$ es agudo ($\widehat{A} < 90^{\circ}$) y el triángulo es acutángulo, ya que $\widehat{A}$ es el mayor de los ángulos del triángulo.

Aplicando debidamente estos teoremas es fácil demostrar algunos resultados:

Ley del paralelogramo

"En todo paralelogramo ABCD , la suma de los cuadrados de las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de los cuatro lados"

Es decir: $AC^2 + BD^2 = 2\left(AB^2 + BC^2\right)$

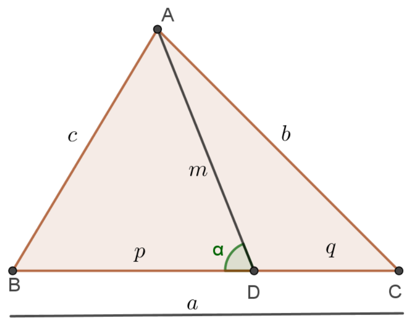
Otro resultado a destacar es el teorema de Stewart, que nos permite calcular la longitud de una ceviana en función de los lados y las medidas de los segmentos que determina en el lado opuesto. Lo mostramos en el punto siguiente.

NOTA: En un triángulo se llama **ceviana** a cualquier segmento que una un vértice con un punto cualquiera del interior del lado opuesto.

9.2. Teorema de Stewart

Siendo m la medida de una ceviana que parte de A y divide el lado BC en dos segmentos de longitudes BD= p y DC= q, se cumple la siguiente relación:

$$m^2 = \frac{b^2 p + c^2 q - pqa}{a}$$



No vale la pena recordar el enunciado, pero sí el procedimiento de obtención, que se basa en el teorema del coseno (o cuadrados de lado opuesto…) aplicado a los triángulos ADC y ADB:

$$b^2 = m^2 + q^2 + 2mq\cos\alpha \Rightarrow b^2 p = m^2 p + q^2 p + 2mpq\cos\alpha$$
$$c^2 = m^2 + p^2 - 2mp\cos\alpha \Rightarrow c^2 q = m^2 q + p^2 q - 2mpq\cos\alpha$$

Sumando término a término las últimas expresiones y teniendo en cuenta que $p + q = a$ se obtiene el resultado anunciado.

Si hacemos $p = q = \dfrac{a}{2}$ obtendremos el teorema de Apolonio, que nos da la longitud de las medianas m_a, m_b, m_c del triángulo ABC en función de los lados *a*, *b* y *c*.

9.3. Teorema de Apolonio (de las medianas)

Las medidas de las medianas m_a , m_b , m_c *de un triángulo ABC son:*

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} \;\; ; \; m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} \;\; ; \;\; m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

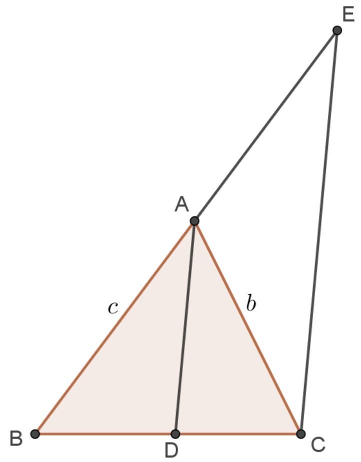
9.4. Teoremas de la bisectriz interior y exterior

Teorema de la bisectriz interior

"En todo triángulo ABC, la bisectriz interior de un ángulo divide al lado opuesto en dos segmentos directamente proporcionales a los lados adyacentes a los mismos"

Es decir: Si *D* es el punto en el que la bisectriz interior de *A* corta al lado *BC*, se tiene que $\frac{BD}{c} = \frac{DC}{b}$.

Aún más: como el lado *a* se reparte en dos partes proporcionales a *b* y *c*, tendremos: $BD = \frac{ac}{b+c}$ *y* $DC = \frac{ab}{b+c}$



Se puede demostrar con el teorema de los senos aplicado a los triángulos *ABD* y *ADC*. Este teorema está en el apartado siguiente (9.5). Sin embargo es muy bueno practicar las demostraciones basadas en métodos geométricos elementales.

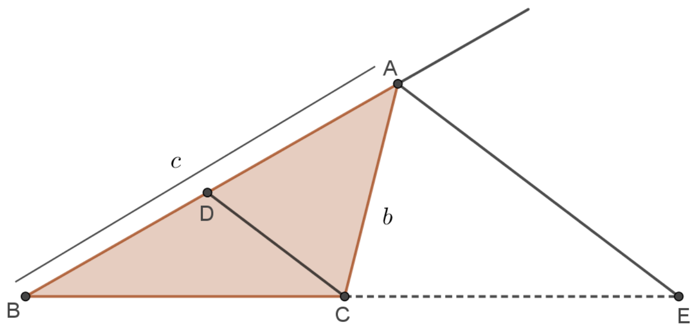
Yo empiezo y tú sigues:

En la figura hemos trazado una paralela a la bisectriz *AD* desde el vértice *C* que corta a la prolongación de *BA* en el punto *E*.
Es el inicio de la demostración. ¿Sabrías continuarla?

Teorema de la bisectriz exterior

Sea *ABC* un triángulo tal que ***c*>*b*,** entonces:

"La bisectriz exterior del ángulo A corta a la prolongación de BC en el punto E, de modo que los segmentos EC y EB son directamente proporcionales a los lados b y c".



Es decir: $\frac{EB}{c} = \frac{EC}{b}$

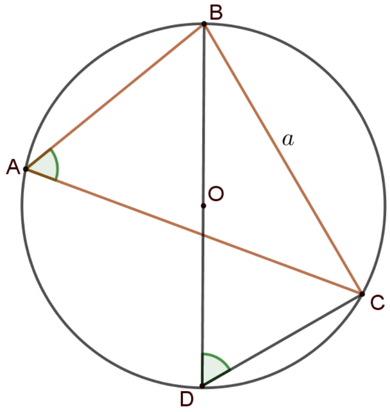
Es fácil ver que $EB = \frac{ac}{c-b}$ *y* $EC = \frac{ab}{c-b}$

Intenta continuar la demostración iniciada en la figura, donde se ha trazado una paralela a la bisectriz *AE* desde el vértice *C* que corta al lado *AB* en el punto *D*.

9.5. Teorema de los senos

"En todo triángulo ABC, los lados son directamente proporcionales a los senos de los ángulos opuestos y la razón de proporcionalidad es el doble del radio R de la circunferencia circunscrita al triángulo"

Es decir: $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} = 2R$



En efecto:

Trazamos desde B un diámetro BD. Se tiene que

$\widehat{BDC} = \widehat{BAC} = \widehat{A}$ por ser inscritos con igual arco $\widehat{BC}$.
Pero el triángulo BCD es rectángulo, por lo que

$\operatorname{sen}\widehat{A} = \dfrac{a}{2R} \Rightarrow \dfrac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = 2R$

De modo análogo con los otros pares de lado-ángulo opuesto.

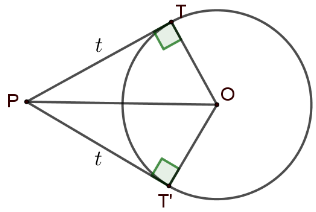
Consecuencia: en un triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo. Razónalo.

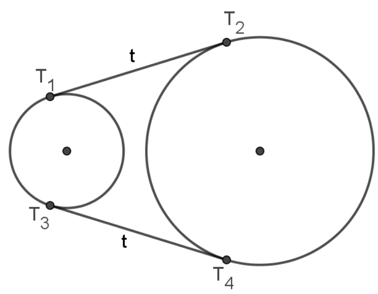
10. IGUALDAD DE SEGMENTOS TANGENTES

Es un recurso básico tan sencillo como útil, pues ayuda a obtener resultados muy diversos, de los que mostraremos algunos ejemplos.

Se basa en ideas muy conocidas:

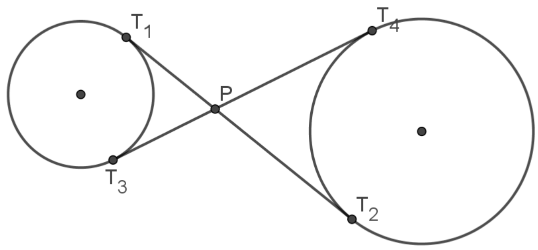
1) Si desde un punto P se trazan tangentes a una circunferencia, los segmentos tangentes PT y PT' son iguales.





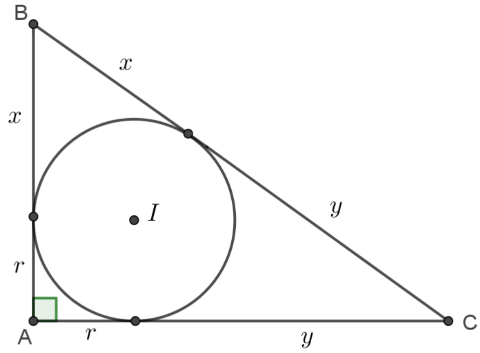
2) Si dos circunferencias admiten tangentes exteriores, los segmentos tangentes T_1T_2 y T_3T_4 son iguales.

3) Con las tangentes interiores pasa lo mismo, los segmentos T_1T_2 y T_3T_4 son iguales. Basta con aplicar dos veces el caso 1)



Ejemplos:

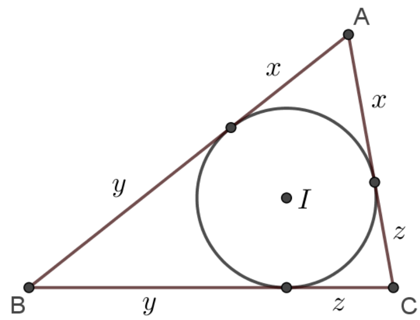
10.1. En un triángulo rectángulo



En un triángulo rectángulo, la suma de los catetos es igual a la suma de los diámetros de las circunferencias inscrita (2r) y circunscrita (*2R=a*).

(Si $\widehat{A} = 90^{\circ}$ entonces $b+c=a+2r=2R+2r$)

10.2. En un triángulo cualquiera



En un triángulo cualquiera los segmentos tangentes desde los vértices A, B y C a la circunferencia inscrita son *p–a, p–b* y *p–c* respectivamente, siendo $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ el semiperímetro del triángulo.

En efecto: $\left.\begin{array}{l} x+y=c \\ x+z=b \\ y+z=a \end{array}\right\} \Rightarrow x+y+z = \dfrac{a+b+c}{2} = p \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=p-a \\ y=p-b \\ z=p-c \end{array}\right.$

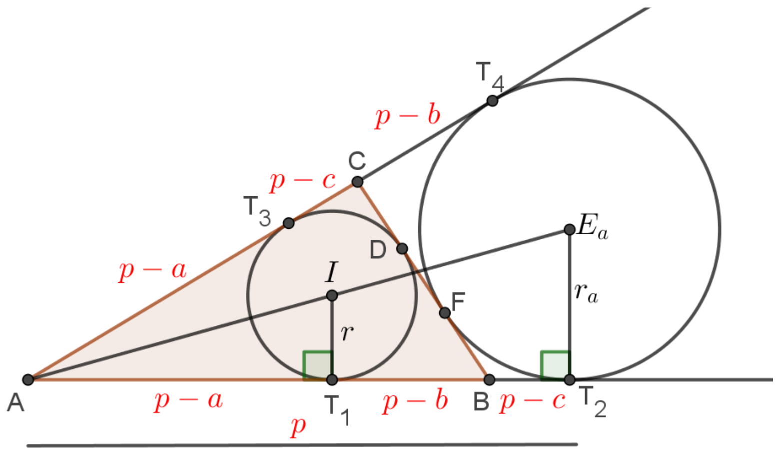
Lo mostrado aquí puede ayudarnos a encontrar relaciones que afecten al inradio o radio de la circunferencia inscrita (*r*) y a los exradios o radios de las circunferencias exinscritas (r_a, r_b, r_c).

10.3. Inradio y exradios

Vale la pena retener esta figura. Está casi toda ella justificada. El “casi” se refiere a que no parece claro que $T_3C = BT_2 =$ *p–c*. Es fácil comprobarlo a partir de la igualdad $T_1T_2 = T_3T_4$ de segmentos tangentes:

$$\left.\begin{array}{l} T_1T_2 = T_1B + BT_2 = DF + FB + BT_2 = DF + 2BT_2 \\ T_3T_4 = T_3C + CT_4 = T_3C + CD + DF = 2T_3C + DF \end{array}\right\} \Rightarrow T_3C = BT_2$$

Notemos que queda: $AT_2 = AT_4 = p$



De la semejanza entre los triángulos rectángulos AIT_1 y AE_aT_2 se desprende la relación $\frac{r_a}{r}=\frac{p}{p-a}\Rightarrow r_a=\frac{pr}{p-a}$. De forma análoga: $r_b=\frac{pr}{p-b}$ y $r_c=\frac{pr}{p-c}$

Anticipándonos un poco al capítulo siguiente, emparentamos dos maneras distintas de calcular el área S del triángulo ABC:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr\Rightarrow r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

Y de aquí podemos obtener la expresión de los exradios en función exclusiva de los lados del triángulo ABC:

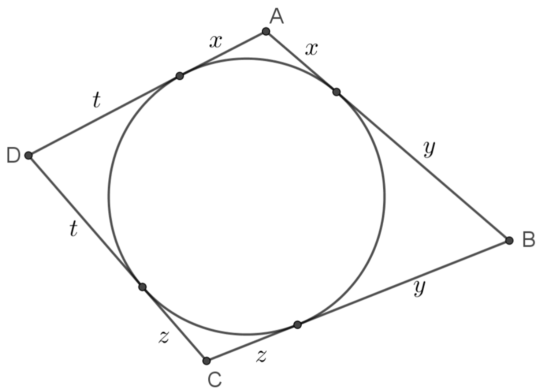
$$r_a=\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}\ ;\ r_b=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}}\ ;\ r_c=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}$$

Es fácil ahora demostrar esta relación: $\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$

10.4. Cuadriláteros circunscritos a una circunferencia. Teorema de Pitot

La figura muestra, sin palabras, la demostración de un sencillo teorema: *"Si un cuadrilátero ABCD está circunscrito a una circunferencia, los lados opuestos suman lo mismo"*. Es decir: $AB+CD = BC+DA$

El recíproco es cierto, por lo que en realidad, estamos hablando de una caracterización de los cuadriláteros circunscritos a una circunferencia:



Teorema de Pitot: *"La condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero circunscriba a una circunferencia es que la suma de lados opuestos sea la misma"*.

Notemos que el área S de estos cuadriláteros puede calcularse conociendo tan solo dos lados opuestos y el radio r de la circunferencia:

$$S=(AB+CD)\,r=(BC+DA)\,r$$

11. DIVERSAS EXPRESIONES DEL ÁREA DE UN TRIÁNGULO

- La más conocida no requiere explicaciones: $S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$

- La fórmula de Herón nos permite calcular el área de un triángulo en función exclusiva de los lados:

  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ donde $p = \frac{a+b+c}{2} = \text{semiperímetro}$

- Descomponiendo el triángulo ABC en tres triángulos con un vértice en el incentro (*I*) y los otros dos en los vértices del triángulo:

  $$S = p \cdot r \qquad \text{(Recordemos que } p = \frac{a+b+c}{2}\text{)}$$

- Si conocemos dos lados y el ángulo que forman es fácil conseguir una altura y, por tanto, el área del triángulo:

  $$S = \frac{ab \operatorname{sen} \widehat{C}}{2} = \frac{bc \operatorname{sen} \widehat{A}}{2} = \frac{ac \operatorname{sen} \widehat{B}}{2}$$

- Incorporando el teorema de los senos a cualquiera de las opciones del punto anterior, obtenemos una expresión del área en función de los tres lados y del radio *R* de la circunferencia circunscrita al triángulo:

  $$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

- Del capítulo anterior pueden obtenerse nuevas expresiones más sofisticadas en función de los lados y los exradios:

  $$S = (p-a) \cdot r_a = (p-b) \cdot r_b = (p-c) \cdot r_c$$

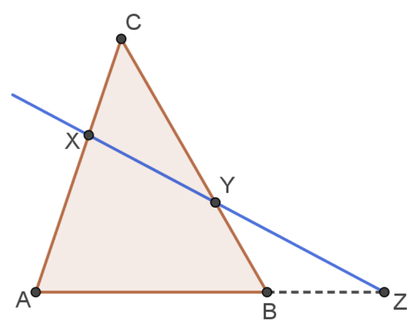
12. TEOREMAS DE MENELAO Y CEVA

Teorema de Menelao

Consideramos un triángulo *ABC*.

Sean X, Y y Z puntos respectivamente sobre los lados AC, BC y AB (o sus prolongaciones). Una condición necesaria y suficiente para que los puntos X, Y y Z estén alineados es que

$$\frac{AX}{XC} \cdot \frac{CY}{YB} \cdot \frac{BZ}{ZA} = 1$$

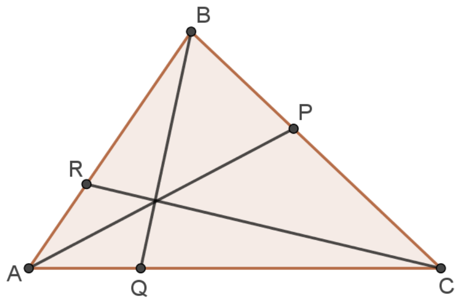


Teorema de Ceva

Sean *AP*, *BQ* y *CR* tres cevianas de un triángulo *ABC*.

La condición necesaria y suficiente para que estas cevianas concurran en un mismo punto es que

$$\frac{AQ}{QC}\cdot\frac{CP}{PB}\cdot\frac{BR}{RA}=1$$



13. CUADRILÁTEROS CÍCLICOS

Un cuadrilátero cíclico es un cuadrilátero convexo tal que sus cuatro vértices están sobre la misma circunferencia. También se llaman inscriptibles o inscribibles.

Caracterización por medio de ángulos

La condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea cíclico es que dos de sus ángulos opuestos sean suplementarios.

Claramente:

- Los únicos paralelogramos cíclicos son los rectángulos.
- Los únicos trapecios cíclicos son los isósceles.

Caracterización en términos métricos

Teorema de Ptolomeo: *"Una condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero ABCD sea cíclico es que el producto de sus diagonales sea igual a la suma de los productos de lados opuestos"*. Es decir: $AC\cdot BD = AB\cdot CD + AD\cdot BC$

Notemos que, a causa de su inscripción en una circunferencia, *el ángulo formado por un lado y una diagonal es igual al formado por el lado opuesto y la otra diagonal.*

Descubrir cuadriláteros cíclicos favorece la identificación de ángulos iguales.

Fórmula de Brahmagupta

El área *S* de un cuadrilátero cíclico de lados *a, b, c* y *d* es:

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \quad \text{siendo} \quad p=\frac{a+b+c+d}{2}=semiperímetro$$

Nos recuerda a la fórmula de Herón. Es más, para *d=0* se obtiene la fórmula de Herón.

El área de un cuadrilátero bicéntrico

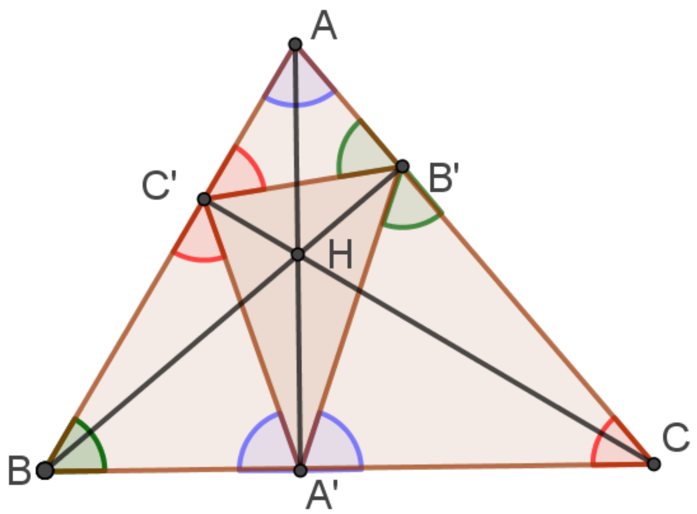
Si el cuadrilátero *ABCD*, además de cíclico, circunscribe a una circunferencia, al cumplirse el teorema de Pitot se tiene que $p = a + c = b + d$. En estos casos tan extraordinarios la expresión del área queda así de sencilla: $S = \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d}$

Estos cuadriláteros (inscriptibles y circunscriptibles) se llaman “bicéntricos”.

14. TRIÁNGULO ÓRTICO

Si *ABC* es un triángulo acutángulo, se llama triángulo órtico de *ABC* al triángulo que tiene sus vértices en los pies de las alturas de *ABC* (en la figura los hemos denotado con *A’*, *B’* y *C’*).

Vale la pena razonar y retener la siguiente figura. Los colores de los ángulos ayudarán a este propósito:



Para razonar:

1) Los cuadriláteros $AB'HC'$, $CB'HA'$, $BA'HC'$ son cíclicos.

2) Los triángulos $AC'B', CB'A', BA'C'$ son semejantes entre sí y, a su vez, semejantes al triángulo de partida *ABC*, pues los cuatro tienen los mismos ángulos. Pista: ver primero los complementarios de los ángulos coloreados.

3) Las alturas de *ABC* son las bisectrices del triángulo órtico $A'B'C'$. Por tanto, el ortocentro *H* de *ABC* es el incentro del triángulo órtico.

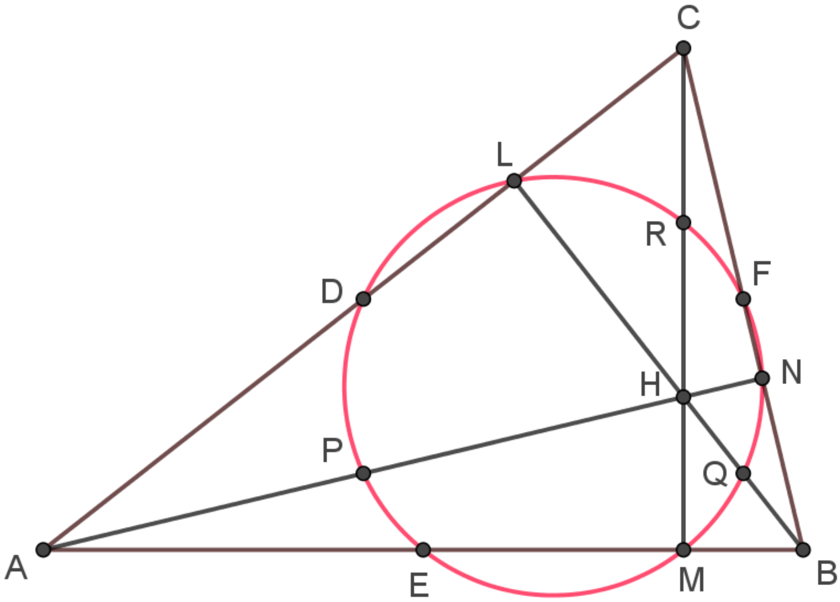
4) Los ángulos interiores del triángulo órtico están estrechamente relacionados con los del triángulo *ABC*, ya que cumplen:

$$\widehat{A}' = 180^\circ - 2\widehat{A} \ ; \ \widehat{B}' = 180^\circ - 2\widehat{B} \ ; \ \widehat{C}' = 180^\circ - 2\widehat{C}$$

15. LA CIRCUNFERENCIA DE LOS NUEVE PUNTOS

Para cualquier triángulo ABC existe una circunferencia que pasa por los siguientes nueve puntos:

- Los puntos medios de los lados D, E y F
- Los pies de las alturas L, M y N
- Los puntos medios de los segmentos que unen cada vértice con el ortocentro H P, Q y R.

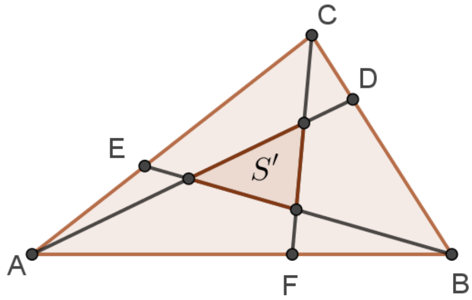


Esta circunferencia también se conoce como "circunferencia de Feuerbach".

Su centro está situado en la recta de Euler, en el punto equidistante del ortocentro H y del circuncentro O. Su radio es la mitad del radio de la circunferencia circunscrita.

16. TEOREMA DE ROUTH

"Sea un triángulo ABC de área S. Elegimos arbitrariamente tres puntos D, E y F respectivamente en los segmentos BC, CA y AB. Las cevianas AD, BE y CF determinan un triángulo cuya área es:



$$S' = S \cdot \frac{(rst-1)^2}{(rs+r+1)(st+s+1)(tr+t+1)}$$

siendo $r = \frac{BD}{DC}$; $s = \frac{CE}{EA}$; $t = \frac{AF}{FB}$ "

Notemos que $S' = 0 \Leftrightarrow rst = 1$ (*Teorema de Ceva*)

17. TEOREMA Y DESIGUALDAD DE EULER

Siendo R y r los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita de un triángulo ABC y d la distancia del incentro I al circuncentro O del mismo, se cumple la relación: $R^2 - d^2 = 2rR$.

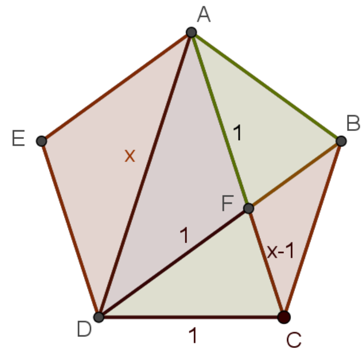
Consecuencia (**desigualdad de Euler**)

En todo triángulo ABC, el radio de la circunferencia circunscrita es mayor o igual que el diámetro de la circunferencia inscrita.

Es decir: $R \geq 2r$

18. EL NÚMERO ÁUREO Y EL PENTÁGONO REGULAR

1) *En un pentágono regular ABCDE la razón entre una diagonal y un lado es el número áureo* Φ*, cuyo valor es* $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.



Sin pérdida de la generalidad, tomamos como unidad el lado del pentágono. Denotamos por *x* la longitud de una diagonal.

Trazamos la diagonal *DB*, que es bisectriz de $\widehat{ADC}$. Esta diagonal corta a *AC* en *F*.

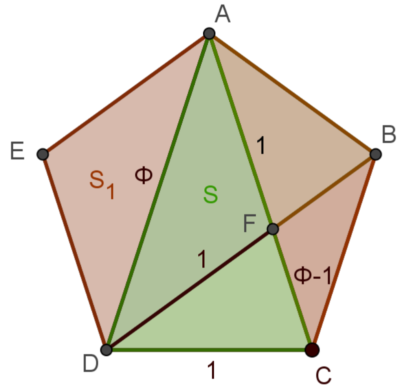
Los triángulos *AFD* (36º, 36º, 108º) y *DFC* (36º, 72º, 72º) son isósceles, por lo que *AF=DF=DC=1*. Por tanto $FC = x - 1$.

Los triángulos *ADC* y *DFC* son semejantes pues tienen sus ángulos iguales. Sus lados son directamente proporcionales:

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x}{1} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \cancel{x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}} \end{cases}$$

Por tanto, $x = \Phi$

Recomponemos la figura sabiendo ya el valor de *x*.



2) Denotamos por S el área de *ADC* y por S_1 el área de cualquiera de los triángulos iguales *ADE*, *ABC* o *ADF*.

Los triángulos *AFD* y *ACD* comparten altura desde *D*, por lo que sus áreas son directamente proporcionales a sus bases *AF* y *AC*:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{\Phi} = \Phi - 1 \Rightarrow S = \Phi\, S_1 \quad \text{o bien} \quad S_1 = \frac{S}{\Phi} = (\Phi - 1)S$$

3) Podemos obtener las razones trigonométricas de 36º, 54º, 18º y 72º a partir de los triángulos isósceles *AED* y *ADC*:

$\cos 36^{\text{o}} = \text{sen}\, 54^{\text{o}} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\text{sen}\, 36^{\text{o}} = \cos 54^{\text{o}} = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$
$\text{sen}\, 18^{\text{o}} = \cos 72^{\text{o}} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\cos 18^{\text{o}} = \text{sen}\, 72^{\text{o}} = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

Con estas ideas básicas pueden abordarse muchos problemas en los que intervenga un pentágono regular.

****