2.1 Elementos fundamentales de la Geometría

OBJETIVOS

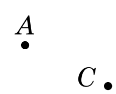
- Conocer los elementos fundamentales de la Geometría y su representación.
- Aprender las definiciones fundamentales obtenidas a partir de los elementos fundamentales.
- Encontrar la medida de ángulos en figuras geométricas utilizando los postulados y teoremas de ésta sección.

Términos básicos no definidos

La Geometría tiene tres entes o elementos fundamentales no definidos: **punto**, **recta** y **plano.**

Punto

El punto es el primer elemento que no está definido en Geometría. Se representa gráficamente por un pequeño círculo y una letra mayúscula que lo identifica. La siguiente figura muestra tres puntos A, B y C.

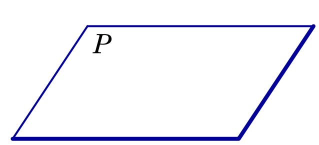


Recta

El segundo término no definido de la Geometría Euclideana es el de recta, aunque se entiende que una recta es un conjunto infinito de puntos que se extienden indefinidamente en sentidos opuestos. Para referirse a una recta, se seleccionan dos puntos sobre ella; la recta queda determinada por dichos puntos. Una recta también se puede identificar por una letra minúscula. La figura siguiente muestra la recta $\overleftrightarrow{AB}$ que pasa por los puntos A y B. La recta de la figura también está identificada como la recta l.

Plano

El tercer término no definido de la Geometría Euclideana es el de plano. Se entiende que un plano es una superficie totalmente plana que se extiende indefinidamente. Una mesa de vidrio o la cubierta de un escritorio da la idea de un plano. Un plano se representa geométricamente por una figura de cuatro lados y una letra mayúscula. La siguiente figura representa al plano P.



Definiciones fundamentales

A partir de los elementos fundamentales se pueden definir otros elementos de la Geometría, en ésta sección se definen algunos de ellos.

Espacio
Está formado por todos los puntos posibles y contiene infinitos planos.

Puntos colineales
Son todos los puntos que están situados sobre una misma recta.

Puntos coplanares
Son todos los puntos que están situados en un mismo plano.

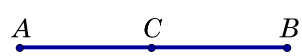
Segmento de recta
El segmento de recta AB está formado por todos los puntos entre A y B incluyendo los puntos A y B. La longitud de un segmento es la distancia entre sus puntos extremos. Para indicar que la longitud del segmento AB es 5 escribimos $AB = 5$. La siguiente figura muestra el segmento de recta AB.

Rayo o semirecta
El Rayo AB está formado por todos los puntos que se extienden en una sola dirección a partir del punto A pasando por el punto B. El punto A se llama origen o punto extremo del rayo. La siguiente figura muestra el Rayo AB.

Rayo AB

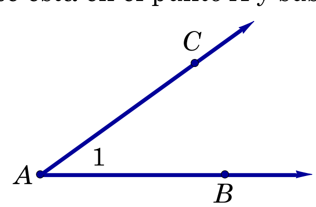
Punto medio de un segmento
Es el punto que divide un segmento en dos segmentos iguales. Si C es el punto medio de AB, entonces

$$AC = CB$$



Ángulos y su medida

Un ángulo está formado por dos rayos que tienen el mismo punto extremo. Al punto extremo común se le llama vértice y a los dos rayos se las llama lados del ángulo. El ángulo de la figura siguiente está formado por los rayos AB y AC, su vértice está en el punto A y sus lados son los rayos AB y AC.



Para referirse al ángulo de la figura anterior se puede hacer como $\angle 1$, $\angle CAB$, $\angle BAC$ y si el vértice no es compartido con otro ángulo puede identificarse como $\angle A$.

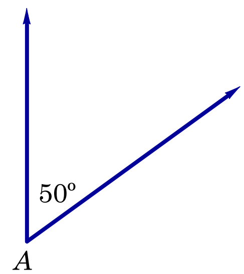
En Geometría usualmente la medida de un ángulo se expresa en grados sexagesimales. Un círculo tiene 360 grados, así un grado (1°) es el ángulo formado por $\frac{1}{360}$ parte de un círculo. Un grado se divide en 60 minutos y un minuto se divide en 60 segundos.

$$1^{\circ} = 60'$$

$$1' = 60''$$

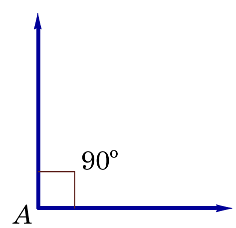
Ángulo agudo

Es un ángulo cuya medida es mayor que cero y menor de 90º. Por ejemplo el ángulo A de la figura siguiente tiene una medida de 50º, es decir $\angle A = 50^{\circ}$



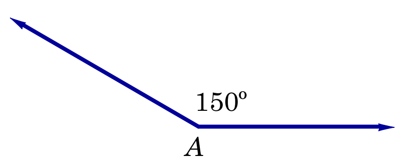
Ángulo recto

Es un ángulo cuya medida es 90º y usualmente se representa con una pequeña escuadra en el vértice del ángulo.



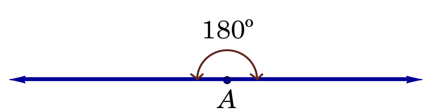
Ángulo obtuso

Es un ángulo cuya medida es mayor de 90º pero menor que 180º, en la figura se muestra un ángulo obtuso de 150º



Ángulo llano

Es un ángulo cuyos lados son rayos opuestos. La medida de un ángulo llano es 180º



Postulados y Teoremas

El estudio formal de la Geometría requiere el uso de postulados, teoremas y demostraciones. Los postulados son enunciados que se aceptan como verdaderos y ellos no pueden demostrarse mientras que los teoremas son proposiciones derivadas de los postulados y se pueden demostrar, aunque en muchos casos las demostraciones son muy complicadas. En este curso se presentan únicamente los postulados y teoremas que se consideran necesarios para la solución de problemas geométricos.

SIETE POSTULADOS IMPORTANTES

1. Una recta contiene cuando menos dos puntos; un plano contiene cuando menos tres puntos, no todos en la misma recta; el espacio contiene cuando menos cuatro puntos, no todos en el mismo plano.
2. Existe una recta y sólo una que pasa por dos puntos.
3. Existe un plano y sólo uno que pasa por tres puntos que no están en una sola recta.
4. Si dos puntos están en un plano, entonces la recta que los contiene se encuentra también en el mismo plano.
5. Si dos planos diferentes se intersecan, su intersección es una recta.
6. Entre dos puntos existe una distancia, y sólo una.
7. A cada ángulo le corresponde una medida en grados única, mayor o igual a 0º y menor o igual a 180º.

Relaciones entre puntos rectas y ángulos

Cuando se combinan puntos, rectas, segmentos y ángulos, se obtienen figuras geométricas; las cuales dan origen a definiciones y teoremas que relacionan los elementos geométricos. A continuación se presentan algunas definiciones y teoremas importantes.

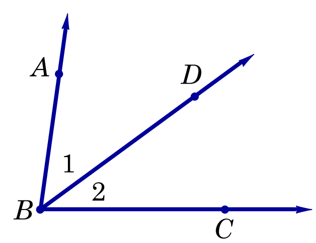
Puntos sobre una recta

Si tres puntos A, B y C se encuentran sobre una recta, y el punto B está entre los puntos A y C, entonces las distancias entre ellos se relacionan de la siguiente forma

$$AB + BC = AC$$

Ángulos adyacentes

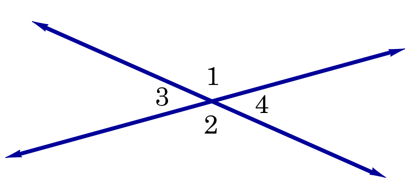
Son dos ángulos que están en el mismo plano, tienen el mismo vértice y un lado en común, pero no tienen puntos interiores comunes. La suma de las medidas de los ángulos adyacentes da como resultado la medida del ángulo mayor formado.



$$\angle ABC = \angle 1 + \angle 2$$

Ángulos opuestos por el vértice

Si dos rectas se intersecan en un punto, los ángulos opuestos por el vértice son iguales



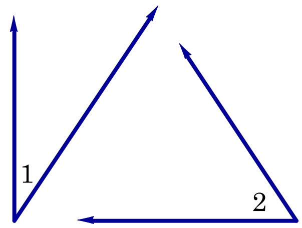
$\angle 1$ y $\angle 2$ son opuestos por el vértice, entonces $\angle 1 = \angle 2$

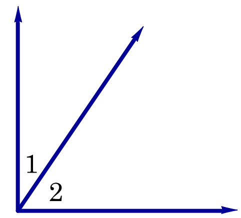
$\angle 3$ y $\angle 4$ son opuestos por el vértice, entonces $\angle 3 = \angle 4$

Ángulos complementarios

Si la suma de las medidas de dos ángulos es 90º, los ángulos se llaman complementarios. En las dos figuras que se muestran $\angle 1$ y $\angle 2$ son complementarios, entonces

$$\angle 1 + \angle 2 = 90^{\circ}$$

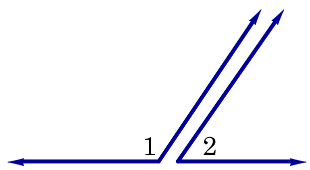


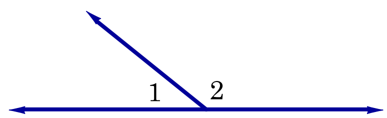


Ángulos suplementarios

Si la suma de las medidas de dos ángulos es 180º, los ángulos son suplementarios, en las dos figuras mostradas $\angle 1$ y $\angle 2$ son suplementarios, entonces

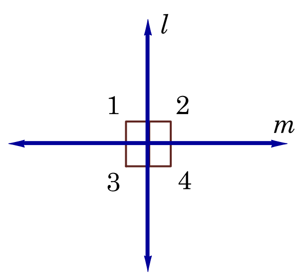
$$\angle 1 + \angle 2 = 180^{\circ}$$





Rectas perpendiculares

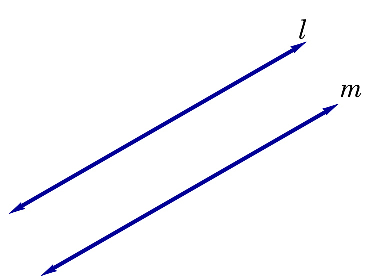
Si dos rectas se intersecan formando ángulos rectos, las rectas son perpendiculares y la medida de los cuatro ángulos formados es 90º. En la figura las rectas l y m son perpendiculares.



$$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = 90^{\circ}$$

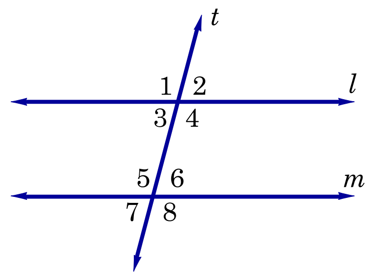
Rectas paralelas

Dos rectas son paralelas cuando están en un mismo plano y no tienen ningún punto en común. En la figura las rectas l y m son paralelas



Ángulos formados por dos rectas paralelas y una transversal

Cuando dos rectas paralelas son intersecadas por una transversal, se forman 8 ángulos como se muestra en la figura siguiente



Puede observarse que se forman cuatro pares de ángulos que son opuestos por el vértice así como ocho pares de ángulos que comparten el mismo vértice y son suplementarios. Adicionalmente se definen los ángulos siguientes

Ángulos correspondientes

Los ángulos situados del mismo lado de la transversal, uno externo y el otro interno pero con vértice diferente se llaman ángulos correspondientes; hay cuatro pares de ángulos correspondientes.

Los ángulos correspondientes son iguales, es decir

$$\angle 1 = \angle 5, \qquad \angle 2 = \angle 6, \qquad \angle 3 = \angle 7, \qquad \angle 4 = \angle 8$$

Ángulos alternos internos

Los ángulos situados dentro de las paralelas, en lados opuestos de la transversal y con vértice diferente se llaman ángulos alternos internos; hay dos pares de ángulos alternos internos.

Los ángulos alternos internos son iguales, es decir

$$\angle 3 = \angle 6, \qquad \angle 4 = \angle 5$$

Ángulos alternos externos

Los ángulos situados fuera de las paralelas, en lados opuestos de la transversal y con vértice diferente se llaman ángulos alternos externos; hay dos pares de ángulos alternos externos.

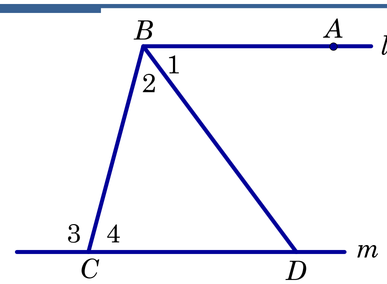
Los ángulos alternos externos son iguales, es decir

$$\angle 1 = \angle 8, \qquad \angle 2 = \angle 7$$

Ejemplo 1: Calculando ángulos entre paralelas

Si las rectas l y m son paralelas y $\angle 1 = \angle 2 = 55^{o}$,

Calcule la medida de $\angle 4$



Solución

Para resolver éste problema se utilizarán las propiedades de ángulos establecidas en ésta sección.

Calculando el ángulo $\angle ABC$ cuya medida es la suma de dos ángulos adyacentes

$$\angle ABC = \angle 1 + \angle 2 = 55^o + 55^o = 110^o$$

Ahora se puede calcular el $\angle 3$ ya que es igual al $\angle ABC$ pues son alternos internos entre paralelas

$$\angle 3 = \angle ABC = 110^o$$

Finalmente, el $\angle 3$ y el $\angle 4$ son ángulos suplementarios, es decir que suman 180º

$$\angle 3 + \angle 4 = 180^o$$

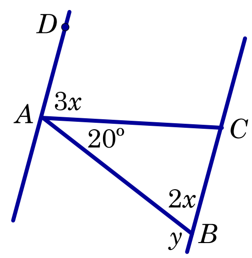
$$\angle 4 = 180^o - \angle 3$$

$$= 180^o - 110^o = 70^o$$

Entonces la medida del $\angle 4$ es 70º

Ejemplo 2: Calculando ángulos expresados en términos de variables

Si los segmentos AD y CB son paralelos,
Encuentre los valores de x y y.



Solución

La medida del ángulo $\angle DAB = 3x + 20$ pues se obtiene sumando dos ángulos adyacentes. Como el ángulo $\angle DAB$ y el ángulo cuya medida es y son alternos internos, tienen la misma medida, es decir

$$3x + 20 = y$$

Por otro lado, el ángulo $\angle 2x$ y el ángulo $\angle y$ son suplementarios, entonces sus medidas suman 180º, es decir

$$2x + y = 180$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones por sustitución se obtiene

$$2x + y = 180$$

$$2x + (3x + 20) = 180$$

$$5x = 150$$

$$x = 32$$

Sustituyendo $x = 32$ para encontrar el valor de y

$$y = 3x + 20$$

$$y = 3(32) + 20$$

$$y = 116$$

De donde los valores buscados son $x = 32$ y $y = 116$

Ejemplo 3: Calculando ángulos expresados en términos de variables

La medida de un ángulo agudo es tal que su ángulo complementario y su suplementario están en razón de 3 a 7. Encontrar la medida del ángulo.

Solución

Sea x la medida del ángulo buscado, entonces su complemento es $90 - x$ y su suplemento es $180 - x$. Como la razón entre su complemento y su suplemento es $\frac{3}{7}$, se obtiene la ecuación

$$\frac{90 - x}{180 - x} = \frac{3}{7}$$

Resolviendo la ecuación anterior

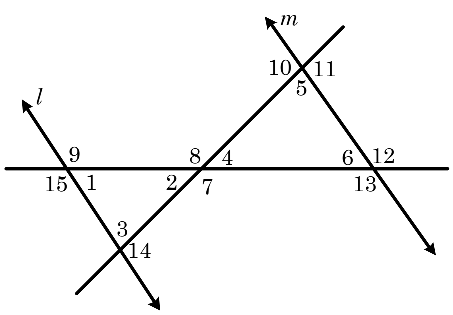
$$7(90 - x) = 3(180 - x)$$

$$\begin{aligned} 630 - 7x &= 540 - 3x \\ 3x - 7x &= 540 - 630 \\ -4x &= -90 \\ x &= 22.5 \end{aligned}$$

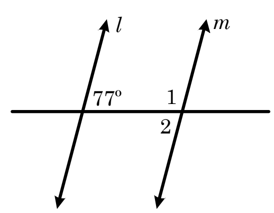
La medida del ángulo agudo es 22.5º o bien 22º 30´.

Ejercicios de la sección 2.1

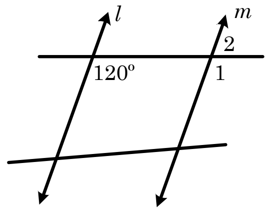
Para resolver los ejercicios 1 a 10, utilice la figura siguiente, donde $l \parallel m$.



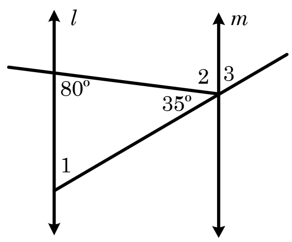
1. Indique que pares de ángulos son opuestos por el vértice.
2. Indique que pares de ángulos son alternos internos entre paralelas.
3. Indique que pares de ángulos son adyacentes y suplementarios.
4. Indique que ángulos son agudos.
5. Indique que ángulos son obtusos.
6. Indique que pares ángulos son correspondientes entre paralelas.
7. Indique que pares de ángulos son alternos externos entre paralelas.
8. Indique que pares de ángulos son suplementarios y no comparten el mismo vértice.
9. Si $\angle 1 = 60^\circ$. Calcule la medida del $\angle 6$
10. Si $\angle 3 = 80^\circ$. Calcule la medida del $\angle 11$
11. Si $l \parallel m$, encuentre $\angle 1$ y $\angle 2$.



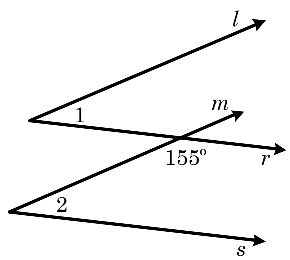
12. Si $l \parallel m$, Encuentre $\angle 1$ y $\angle 2$.



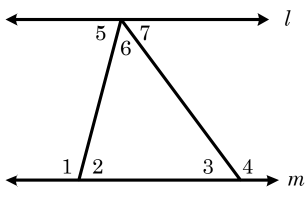
13. Si $l \parallel m$. Encuentre la medida de los otros ángulos numerados.



14. Si $l \parallel m$ y $r \parallel s$, encuentre $\angle 1$ y $\angle 2$.

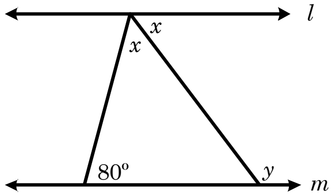


15. Si $l \parallel m$, $\angle 3 = n^o$ y $\angle 1 = 2n^o$. Encuentre la medida de los otros ángulos numerados en términos de n.

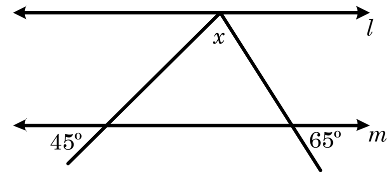


16. En la figura del problema anterior, encuentre x si $\angle 7 = (3x + 5)^o$ y $\angle 4 = (5x + 15)^o$

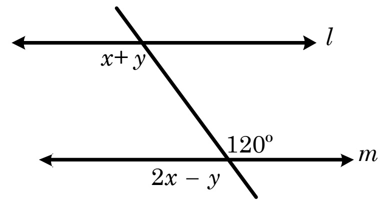
17. Si $l \parallel m$. Encuentre la medida de los ángulos x y y.



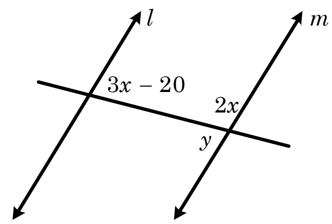
18. Si $l \parallel m$. Encuentre la medida del ángulo x.



19. Si $l \parallel m$. Encuentre los valores de x y de y.



20. Si $l \parallel m$. Encuentre los valores de x y de y.



21. Un ángulo mide $2x + 3y$. ¿Cuál es la diferencia entre las medidas de su complemento y de su suplemento?

22. La diferencia entre las medidas de dos ángulos complementarios es x. Exprese en términos de x la medida del ángulo mayor.

23. La suma de las medidas del complemento y el doble de la medida del suplemento de un ángulo es igual a 354º. Encuentre la medida del ángulo.

24. Dos ángulos son tales que las medidas de sus complementos están en razón 3 a 2, mientras que las medidas de sus suplementos están en razón 9 a 8. Encuentre la medida de cada ángulo.