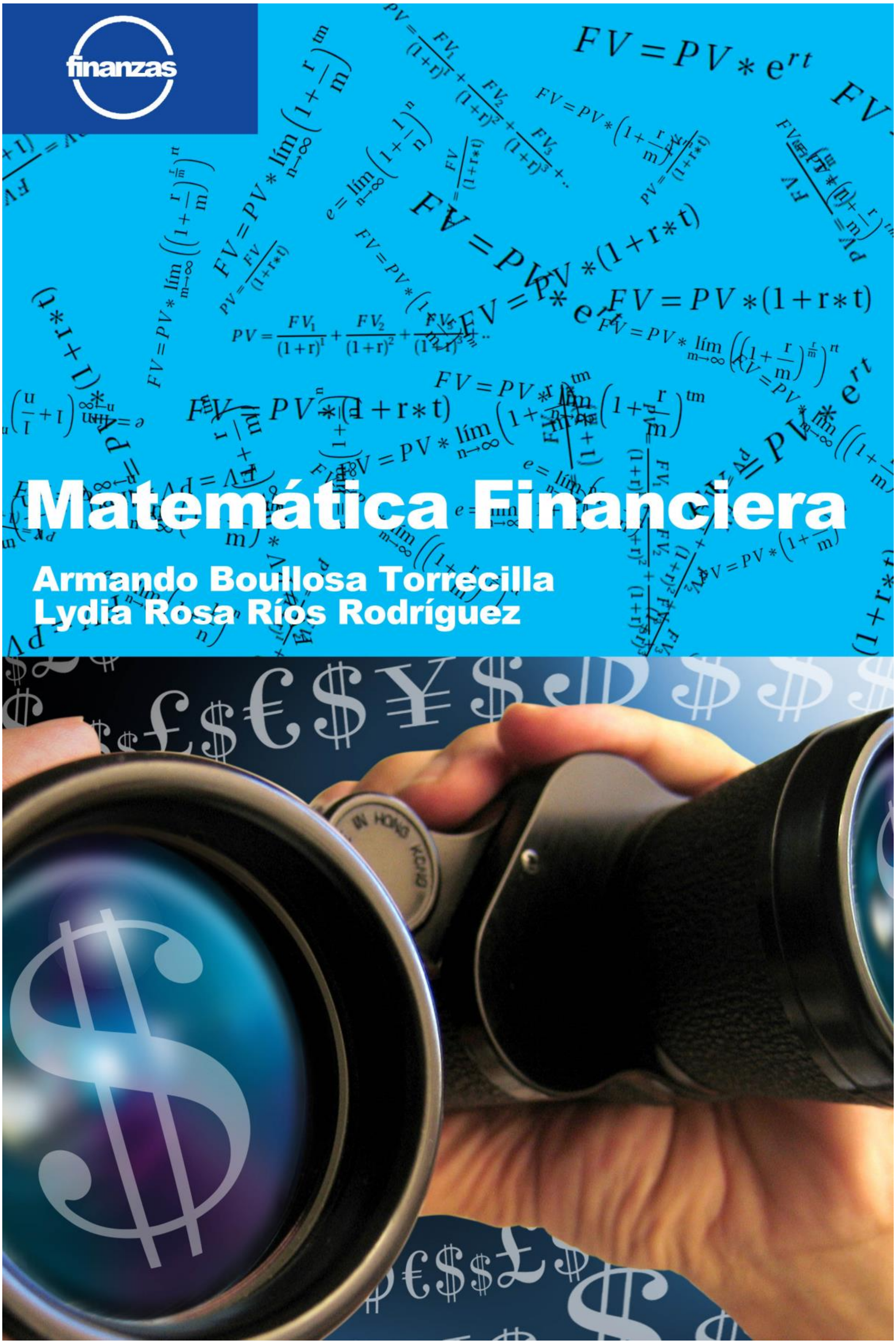

finanzas
Matemática Financiera
Armando Boullosa Torrecilla
Lydia Rosa Ríos Rodríguez

Diseño y Composición:
Lic. Frank Rafael Quesada Espinosa.
Departamento de Tecnología Educativa.
Universidad de Sancti Spíritus "José Martí Pérez"

Revisora:
Virginia Rivero

ISBN: 978-959-312-223-8

EDITORIAL
Feijóo

ÍNDICE

Introducción

Desde el surgimiento de la moneda, esta pasó a formar parte importante de la actividad y vida de las personas, por lo que siempre ha tratado de utilizarse de la mejor manera posible. Con el de cursar del tiempo ha ido adquiriendo mayor importancia porque la mayoría de los procesos relacionados con la vida se sustentan en ella, lo que exige también una mejor forma en su utilización sistemática para aprovechar al máximo, su uso y beneficio. Esto requiere que las personas e instituciones conozcan cómo lograrlo.

También se debe tener en cuenta y conocer cómo las personas tanto de forma individual como para las entidades, al estar relacionadas con el uso y manejo del dinero, necesitan manipularlo de forma adecuada para que genere beneficios y se aproveche su máxima utilidad; por lo que es importante comprender y conocer cómo el dinero puede ganar, perder o cambiar de valor en el transcurso del tiempo, debido a fenómenos económicos y las causas que lo puedan originar. Resulta imprescindible, además, su manejo adecuado en la economía de cualquier entidad y nación, para la certera toma de decisiones, por todo ello es preciso saber utilizarlo por lo que resulta indispensable el conocimiento y uso de la Matemática Financiera.

Para la economía de un país es imprescindible el manejo y uso adecuado de los conceptos y sustentos de Matemática Financiera, ya que establecen y respaldan las diferentes operaciones financieras y sus fundamentos para la toma de decisiones acertadas. Esto exige tener en cuenta, que a través del tiempo, el valor del dinero puede tener variaciones.

La Matemática Financiera como parte de la Matemática está directamente relacionada con la práctica financiera, lo cual es la esencia de su sustento y trabajo, es por ello que en este libro se presentan estas relaciones, mediante fundamentos con situaciones teóricas, prácticas, ejemplos de problemas, ejercicios con sus argumentos y los pasos necesarios para que propicien a los interesados los conocimientos con las habilidades esenciales para enfrentar su práctica y aprendan a resolverlos en función de afianzar los conocimientos a través de los diferentes contenidos por capítulos.

En sentido general los contenidos del Libro se orientan para que el estudiante o interesado logre los conocimientos necesarios para poder tomar las decisiones en el manejo del dinero tanto de forma personal como para la actividad profesional empresarial.

Capítulo I. Matemática Financiera, términos y conceptos fundamentales. Aspectos generales sobre Matemática Financiera.

Desde el surgimiento de la moneda esta ha pasado a ser parte importante de la vida de la sociedad lo que requiere su buen uso. Actualmente ha adquirido una mayor importancia y trascendencia ya que la mayoría de los procesos en la vida de las personas e instituciones se mueven a través de ella, lo cual exige utilizarla de la mejor manera y aprovechar al máximo su servicio.

También la economía de cualquier nación tiene sus bases en el dinero y los créditos lo que requiere de la toma de decisiones acertadas donde resulta determinante tener en cuenta que el valor del dinero a través del tiempo es fundamental pues en función de este puede variar su valor y ello repercute en los diferentes procesos económicos de una nación o país.

En las diferentes sociedades, tanto las personas como las instituciones, organizaciones y entidades tienen relaciones con el dinero y su circulación, que se caracteriza por procesos los cuales generalmente incrementan o disminuyen su valor. Por ello es imprescindible tener presente, los aspectos esenciales que distinguen a estos, como: las fuentes de orígenes y destino con sus cantidades, la administración de forma eficiente, eficaz y precisa, las condiciones para administrarlo debidamente teniendo en cuenta factores como la cantidad, el tiempo y el beneficio que se obtiene en todo ese proceder, lo cual es posible utilizando los fundamentos de Matemática para la toma de decisiones correspondientes de forma adecuada y de la Contabilidad para la fundamentación clara y precisa de las situaciones financieras en todo momento.

La Matemática Financiera está en función de dar respuesta a las operaciones matemáticas para el manejo de los recursos monetarios con los fundamentos científicos técnicos correspondientes aplicados a estas dos áreas de la ciencia.

Es importante tener en cuenta que la situación financiera precisa cuánto y cuándo se cobra y se paga en términos de movimiento del dinero para que se obtengan de este en un momento determinado los efectos correspondientes, independientemente de lo alto o bajo que puedan ser los resultados de las ganancias.

Toda entidad, organización o empresa puede disponer del dinero que garantice una eficiente y eficaz administración de los flujos de cajas, entradas y salidas periódicas del dinero, si cumple en tiempo y forma todas las obligaciones contraídas y las normas establecidas, con quienes mantenga las relaciones económicas. Para ello generalmente las organizaciones o empresas, que necesitan obtener dinero, se relacionan con aquellas entidades que disponen de fondos en exceso, o con las que se dedican al financiamiento de las actividades económicas.

Las decisiones financieras generalmente se fundamentan y apoyan, para todos estos procesos, en los cálculos matemáticos con determinadas características y complejidades, por ello tanto los economistas, contadores y directivos que enfrentan problemas financieros utilizan la matemática aplicada directamente a su contenido de trabajo. Esto exige que los profesionales se vean obligados a utilizar los fundamentos de la matemática en función de las finanzas, con sus sustentos correspondientes, como argumento e instrumento adecuado para la toma de decisiones. Este proceder le corresponde a la Matemática Financiera.

La Matemática Financiera es una rama de la Matemática Aplicada, que fundamenta y argumenta los procesos de cálculo con métodos y algoritmos que permiten ejecutar las operaciones relacionadas con la eficiente y eficaz administración de los recursos financieros.

1.1 Importancia de la Matemática Financiera.

Tanto las personas como las organizaciones toman decisiones que pueden afectar su futuro económico, para lo cual, necesitan utilizar y analizar científica y técnicamente los factores económicos y no económicos, así como también los tangibles e intangibles, inmersos en cada una de las decisiones que se toman para invertir o utilizar el dinero en las diferentes opciones que se puedan presentar, por ello, la importancia de las técnicas, fundamentos y modelos de la Matemática Financiera en la toma de decisiones, pues cada una de ellas puede afectar lo que se ejecute o realice en el futuro, por eso, los resultados y fundamentos usadas de Matemática Financiera son las mejores predicciones de lo que se espera que suceda.

Es importante en esto, que para todo proceso de toma de decisiones, el fundamento económico es imprescindible ya que toda persona u organización necesita la adecuada utilización de los recursos con que cuenta, lo que exige tener presente entre los fundamentales esenciales, aspectos como los siguientes:

- La inversión económica o social es recomendable o favorable.
- El análisis de las alternativas planteadas es la mejor para la organización o el inversionista.
- La justificación para la realización de cualquier proyecto de inversión.
- Si se puede usar la actual infraestructura de producción o servicios para alcanzar el nuevo nivel deseado, en los dos casos.
- El tiempo determinado o estipulado para la realización del proyecto es el adecuado.

Resulta indispensable tener presente en todo momento del proceso de toma de decisiones el fundamento matemático, ya que toda organización o persona desea y espera un adecuado y óptimo uso de los recursos con que cuenta. Es por ello que tanto los fundamentos económicos como los matemáticos son imprescindibles. Una solución que garantice la mejora y optimización de los recursos disponibles exige también tener en cuenta:

- De las alternativas planteadas para la organización o el inversionistas la que resulta mejor.
- Si la inversión económica o social es recomendable o favorable.
- Si se realiza un proyecto de una inversión, el tiempo establecido es el adecuado.
- Se justifica la realización del proyecto de inversión.
- La infraestructura de producción y servicios que existe se puede utilizar para alcanzar el nuevo nivel de producción y servicio esperado.

El análisis de estas alternativas, ayuda y determina que una persona, organización o inversionista pueda analizar y eliminar proyectos o inversiones que no son factibles o favorables por no contar con los recursos y fundamentos necesarios.

En estas problemáticas, el proceso de toma de decisiones para la búsqueda de soluciones o alternativas favorables, tiene una gran importancia la Matemática Financiera como herramienta y fundamento para justificar y favorecer el análisis así como la evaluación del proceso en función de la adecuada decisión, lo cual exige el conocimiento de sus fundamentos y argumentos.

1.2 Algunas definiciones de Matemática Financiera.

Desde su origen la Matemática Financiera, como parte de la Matemática para el fundamento financiero adecuado y necesario en su definición existen diferentes alternativas pero en todos los casos está precisado su objetivo y aspiración a lograr, es por ello que se presentan a continuación unos ejemplos de estas:

-"Estudia el conjunto de conceptos y técnicas cuantitativas de análisis útiles para la evaluación y comparación económica de las diferentes alternativas que un inversionista, o una organización pueden llevar a cabo y que normalmente están relacionadas con proyectos o inversiones en: sistemas, productos, servicios, recursos, inversiones, equipos, entre otros, para tomar decisiones que permitan seleccionar la mejor o las mejores posibilidades entre las que se tienen en consideración".
-"Es una herramienta de trabajo que permite el análisis de diferentes alternativas planteadas para la solución de un mismo problema".
"Es el estudio de todas las formas posibles para desarrollar nuevos productos (o resolver un problema), que ejecutarán funciones necesarias y definidas a un costo mínimo".
-"Es un conjunto de conceptos y técnicas de análisis, útiles para la comparación y evaluación económica de alternativas".

En sentido general el objetivo esencial de la Matemática Financieras es fundamentar, seleccionar y utilizar la alternativa más conveniente desde el punto de vista económico.

La Matemática Financiera es una rama de Matemática Aplicada que estudia el valor del dinero en el tiempo, combinando el capital, la tasa y el tiempo para obtener un rendimiento o interés, a través de métodos de evaluación que permiten tomar decisiones para las inversiones.

Esta rama de la matemática, por sus características y fundamentos, se relaciona con otras ciencias entre ellas: contabilidad, economía, derecho, ingeniería, informática, entre otras.
Por sus particulares las relaciones están dadas atendiendo a:

- la contabilidad, ya que suministra en momentos precisos o determinados, información razonada, sobre la base de registros técnicos, de las operaciones realizadas por una entidad privada o pública, que le permiten tomar la decisión más acertada en el momento de realizar una inversión;

- el derecho, porque las leyes regulan las ventas, los instrumentos financieros, transportes terrestres y marítimos, seguros, garantías y embarques de mercancías, las propiedades de los bienes, las formas en que se pueden adquirir, los contratos de compras y ventas, hipotecas y préstamos a interés;

- la economía, por cuanto brinda la posibilidad de determinar los mercados en los cuales, un negocio o empresa, podrían obtener mayores beneficios económicos;

- la ciencia política, pues estudia y resuelve problemas económicos que tienen que ver con la sociedad, donde existen empresas e instituciones en manos de los gobiernos y propietarios.

- la matemática auxilia y fundamenta los procesos de cálculo y las herramientas necesarias para que en la toma de decisiones relacionadas con: inversiones, presupuestos, ajustes económicos y negociaciones beneficien a las empresas, negocios y toda la población;

-la ingeniería, que controla costos de producción en el proceso fabril, en el cual influye de una manera directa la determinación del costo y depreciación de los equipos industriales de producción;

- la informática, porque posibilita instrumental y optimizar procedimientos manuales relacionados con movimientos económicos, inversiones y negociaciones;

- la sociología, pues proporciona las herramientas necesarias para que las empresas produzcan más y mejores beneficios económicos que le permitan una mejor calidad de vida de la sociedad;

- las finanzas, disciplina que trabaja con activos financieros o títulos valores e incluyen bonos, acciones y préstamos otorgados por instituciones financieras, que forman parte de los elementos fundamentales de las matemáticas financieras.

Por todo ello, la matemática financiera es de aplicación eminentemente práctica, su estudio está íntimamente ligado a la resolución de problemas y ejercicios de la vida cotidiana, en el mundo de los negocios y las inversiones. El dinero, las finanzas y los cálculos son indesligables.

1.3 El dinero

"El dinero es el equivalente general, la mercancía donde el resto de las mercancías expresan su valor, el espejo donde todas las mercancías reflejan su igualdad y su proporcionalidad cuantitativa".

Según la economía habitual, dinero es cualquier cosa que los miembros de una comunidad estén dispuestos a aceptar como pago de bienes y deudas, cuya función específica estriba en desempeñar la función de equivalente general. El dinero surgió espontáneamente en la remota antigüedad, en el proceso de desarrollo del cambio y de las formas del valor. A diferencia de las otras mercancías, el dinero posee la propiedad de ser directa y universalmente cambiable por cualquier otra mercancía.

Marx procede en este terreno de modo distinto. Cuando analiza el trueque directo de mercancías descubre el dinero en forma germinal.

1.3.1 Funciones del dinero

Formas concretas en que se manifiesta la esencia del dinero como equivalente general. En la economía mercantil desarrollada, el dinero cumple las cinco funciones siguientes:

1) medida del valor. Con el dinero podemos medir, por ejemplo, el patrimonio que tiene cada ciudadano. Y también permite medir el precio de cada hora de trabajo social medio. De manera que si expresamos el valor del patrimonio personal en dinero, después debemos expresar este dinero en horas de trabajo.

2) medio de circulación,

3) medio de acumulación o de atesoramiento,

4) medio de pago y

5) dinero mundial.

Su función elemental es la de intermediación en el proceso de cambio. El hecho de que los bienes tengan un precio proviene de los valores relativos de unos bienes con respecto a otros.

1.3.2 Tipos de dinero

Dinero – mercancía: Consiste en la utilización de una mercancía (oro, sal, cueros) como medio para el intercambio de bienes. La mercancía elegida debe ser: duradera, transportable, divisible, homogénea, de oferta limitada.

Dinero – signo: Billetes o monedas cuyo valor extrínseco, como medio de pago, es superior al valor intrínseco. El dinero signo es aceptado como medio de pago por imperio de la ley que determina su circulación (curso legal). El dinero signo descansa en la confianza que el público tiene en que puede utilizarse como medio de pago generalmente aceptado.

Dinero – girar: Representado por los depósitos bancarios.

1.3.3 La transformación del dinero en capital

El dinero se transforma en capital cuando con él compramos los factores objetivos y subjetivos para producir riqueza. Los factores objetivos son los medios técnicos o de producción y los factores subjetivos son la fuerza de trabajo. Por lo tanto, el dinero como capital se diferencia del dinero como simple dinero por la clase peculiar de mercancías que compra: medios técnicos o de producción y fuerza de trabajo.

La economía convencional solo capta el dinero como medio de cambio, y el dinero que funciona como capital igualmente lo capta como medio de cambio. Y es cierto que el dinero que circula como capital funciona como medio de cambio. La diferencia no estriba, por lo tanto, en la función que desempeña en el mercado, sino en la clase de mercancías que se compra con él. El dinero como simple dinero, se emplea como medio de cambio de medios de consumo personal, mientras que el dinero como capital, se emplea como medio de cambio de medios de producción y de fuerza de trabajo

1.3.4 Sistemas monetarios

Un sistema monetario es un conjunto de disposiciones que reglamentan la circulación de la moneda de un país.

Tradicionalmente, los países eligieron el oro y la plata como la base de un sistema monetario mono metalista. Cuando adoptaron ambos metales, a la vez, se trataba de un sistema bimetalista.

Actualmente todas las divisas (dólar, euro, yen, entre otras.) son dinero fiduciario.En épocas de inflación, la gente trata de desprenderse inmediatamente del dinero que se desvaloriza y de retener aquellos bienes que conservan su valor.

1.4 Los bancos y el dinero bancario

El dinero bancario está constituido por los depósitos en los bancos, cajas de ahorro, compañías financieras o cajas de crédito.

Los bancos reciben depósitos de sus clientes y conceden préstamos a las familias y empresas. El volumen de los préstamos concedidos es superior al de los depósitos que mantienen sus clientes.

Al parecer, la palabra "banco" procede de los que utilizaban los cambistas para trabajar en las plazas públicas en las ciudades italianas medievales. El oficio de cambista era entonces una profesión muy especializada, que requería amplios conocimientos ya que las docenas de pequeños Estados, existentes entonces, mantenían en circulación centenares de diferentes monedas que eran aceptadas para el comercio, no por su valor facial, sino por el peso y ley del metal en que se acuñaban y que solo un experto discernimiento podía establecer.

Evolución histórica. Las instituciones bancarias nacen en la Europa medieval, en las Repúblicas aristocráticas de: Italia, Venecia, Génova y Florencia, a mediados del siglo XII con la finalidad de prestar servicios de depósito. Al multiplicarse los bancos, amplían sus operaciones, agregan la emisión de certificados, antecedentes de nuestros actuales billetes.

Juan Fugger fue el iniciador, en Alemania, de una familia de banqueros y comerciantes que unió su destino empresarial a la corona. Se constituyó en el prestamista de Carlos V., desde Italia la prominencia comercial y bancaria pasó a Holanda y al norte de Europa.

En 1605 nace el Banco de Amsterdam, primer banco moderno que no tuvo, como todos los bancos italianos, carácter de sociedad familiar o personal. Integrado por comerciantes a causa de la ubicación geográfica de su ciudad y puerto, fue un factor de primer orden para la economía de Holanda y Alemania.

El Banco de Inglaterra fundado en 1694, como consecuencia de los préstamos que otorga, el gobierno le autorizó a emitir billetes.

A partir de estos se expandieron y concretaron los demás bancos en todo el mundo.

1.4.1 Clasificación de los bancos

Según el origen del capital los bancos se clasifican en general como:

Bancos públicos: El capital es aportado por el estado.

Bancos privados: El capital es aportado por accionistas particulares.

Bancos mixtos o Banca Asociada: Su capital proviene de aportes privados y estatales.

Según el tipo de operación

Bancos corrientes: Los más comunes, sus operaciones habituales incluyen depósitos en cuenta corriente, caja de ahorro, préstamos, cobranzas, pagos y cobranzas por cuentas de terceros, custodia de títulos y valores, alquileres de cajas de seguridad, financiación, entre otros.

Bancos especializados: Tienen una finalidad crediticia específica (Bancos Hipotecarios, Banco Industrial, Banco Agrario).

Bancos de emisión: Actualmente representados por bancos oficiales.

Bancos centrales: Son las casas bancarias de categoría superior que autorizan el funcionamiento de entidades crediticias, las supervisan y controlan.

1.4.2 Sistema Bancario

Banco Central

Es la autoridad monetaria por excelencia en cualquier país que tenga desarrollado su sistema financiero. Es una institución casi siempre estatal que tiene la función y la obligación de dirigir la política monetaria del gobierno.

Funciones:

- Emisión de moneda de curso legal con carácter exclusivo.

- Es el «banco de los bancos». Los bancos comerciales tienen una cuenta corriente en el Banco Central de igual forma que los individuos tienen las suyas en los comerciales.

- Es el asesor financiero del gobierno y mantiene sus principales cuentas.

- Es el encargado de custodiar las reservas de divisas y oro del país.

- Es el prestamista en última instancia de los bancos comerciales.

- Determina la relación de cambio entre la moneda del país y las monedas extranjeras.

- Maneja la deuda pública.

- Ejecuta y controla la política financiera y bancaria del país.

Bancos Comerciales

Dedicados al negocio de recibir dinero en depósito, los cuales prestan, ya sea en forma de mutuo acuerdo, de descuento de documentos o de cualquier otra forma. En ellos son consideradas además todas las operaciones que natural y legalmente constituyen el giro bancario.

Funciones.

- Aceptar depósitos.

- Otorgar adelantos y préstamos.

Los depósitos (pasivos) son deudas del banco hacia el público, por las cuales el banco paga un interés. Los préstamos (activos) son deudas del público al banco, por ellos el banco recibe un interés, la diferencia entre ambos constituye la ganancia que les otorga la actividad de intermediarios financieros.

1.4.3 Componentes del dinero y creación monetaria

Dinero son los billetes y monedas de circulación legal en un país, en poder del público, más los depósitos bancarios en cuenta corriente, movilizados mediante el cheque.

O sea, el primer componente es el dinero en efectivo, el segundo es el denominado «dinero bancario» originado en la práctica de los negocios.

Los depósitos en cuenta corriente son denominados «depósitos a la vista» y son los que guardan mayor relación con el dinero en efectivo. En los países de elevado desarrollo económico-financiero, la masa de cheques en circulación representa una proporción muy significativa respecto del total monetario.

Los depósitos «a plazo» (cajas de ahorro, cuentas especiales, plazo fijo) poseen distintos grados de convertibilidad líquida.

Desde el punto de vista de la creación monetaria, existen dos tipos de dinero:

- Base monetaria o dinero primario (emitido por la autoridad financiera).
- Dinero secundario (inyectado por los bancos a través del poder adquisitivo generado por los préstamos).

Las entidades financieras tienen facultad de dar créditos hasta un determinado porcentaje de los depósitos captados. La autoridad monetaria establece una reserva obligatoria (efectivo mínimo o encaje), el resto puede ser afectado a operaciones de crédito.

Un cheque no es dinero, sino simplemente una orden a un banco para transferir una determinada cantidad de dinero, que estaba depositada en él.

Los depósitos no son una forma visible o tangible de dinero, sino que consisten en un asiento contable en las cuentas de los bancos.

En los países con un sistema financiero desarrollado, los billetes y las monedas representan una pequeña parte del total de la oferta monetaria.

1.4.4 La creación del dinero bancario

El dinero otorga a su poseedor capacidad de compra. Ese dinero puede ser creado de dos maneras:

- Por emisión, dispuesta por la entidad autorizada en cada país.

- Por los préstamos que otorgan las entidades financieras.

Dado que los depósitos bancarios son convertibles en dinero líquido, los bancos tienen que asegurarse de que en todas las circunstancias se encuentren en posición de hacer frente a las demandas de liquidez (billetes y monedas) por parte de sus depositantes.

La práctica bancaria muestra que el uso generalizado de cheques significa que cada día solo un pequeño porcentaje de los depósitos bancarios son convertidos en dinero efectivo y esos retiros son compensados con los ingresos de efectivo que otras personas realizan. De esta forma, los banqueros han comprobado que pueden crear depósitos bancarios por encima de sus reservas líquidas.

Las reservas líquidas legalmente requeridas o encaje bancario es la fracción de depósitos que los bancos deben mantener como reservas.

Si en un determinado momento todos los clientes de un banco quisieran a la vez retirar sus depósitos, el banco no podría atender todas las peticiones.

Activos financieros

Los activos pueden ser:

- Reales: tienen valor por sí mismos (mercaderías, muebles).

- Financieros: tienen valor por lo que representan (billetes, depósitos bancarios).

a. Efectivo: activo financiero líquido por excelencia.

b. Depósitos bancarios: tienen mayor o menor liquidez según sean a la vista o a término.

c. Títulos valores:

- Acciones: títulos emitidos por las sociedades de capital a favor de sus socios, para acreditar su condición de tales.

- Pagarés: promesas de pago emitidas por una persona (librador) a favor de otra (beneficiario).

- Letras de cambio: órdenes de pago emitidas por un librador a favor de un beneficiario y a cargo de otra persona.

- Títulos de deuda, públicos y privados: sus titulares pasan a ser acreedores del ente emisor de aquellos. Reciben una renta fija.

1.5 Crédito

Término utilizado en el comercio y finanzas para referirse a las transacciones que implican una transferencia de dinero que debe devolverse transcurrido cierto tiempo. Por tanto, el que transfiere el dinero se convierte en acreedor y el que lo recibe en deudor; los términos crédito y deuda reflejan pues una misma transacción desde dos puntos de vista contrapuestos.

Finalmente, el crédito implica el cambio de riqueza presente por riqueza futura.

1.6 Las inversiones.

Uno de los conceptos importantes en el cual tiene mucha implicación la Matemática Financiera es el de inversión. Las inversiones son un proceso para la asignación y utilización de los recursos en las diferentes áreas de una organización, con las cuales se logran los objetivos trazados en cada una de ellas.

Las inversiones deben ser analizadas y evaluadas cuidadosamente con el propósito de determinar su aceptación o rechazo y establecer su grado de prioridad dentro de los planes estratégicos de una empresa o institución. Es importante para ello tener en cuenta que los errores cometidos en las decisiones relacionadas con la inversión no solo tienen consecuencias negativas en los resultados de las operaciones, sino que también impactan en las estrategias de la empresa o institución.

1.6.1 Clasificación de las inversiones.

Las inversiones pueden clasificarse según diferentes criterios y desde diferentes puntos de vista. Por el tipo de funciones que desempeñan dentro de las empresas o instituciones, las clasificaciones son:

1) **Inversiones de renovación**: Se realizan cuando se van a sustituir equipos, instalaciones o edificaciones obsoletas o desgastadas físicamente por nuevos elementos productivos. Se invierte en función de renovar las operaciones existentes.

2) **Inversiones de modernización**: En este caso comprenden todas las inversiones que se efectúan para mejorar la eficiencia y respuesta actual de la empresa tanto en la fase productiva como en la comercializadora de los productos. Se invierte para mejorar la eficiencia y eficacia operacional así como la económica.

3) **Inversiones de expansión**: Son las inversiones que se realizan para satisfacer la demanda creciente de los productos de una empresa o institución.

4) **Inversiones estratégicas**: Son las que afectan la esencia misma de la empresa, ya que tomadas en conjunto definen el sistema de actividades de la misma. Estas inversiones generalmente provienen del análisis de la estrategia de la empresa y de su impacto en el sistema de actividades para lograr ser contundente. Los casos más típicos de estas son las inversiones para:

diversificación, la cobertura de nuevos mercados, las inversiones asociadas con nuevos desarrollos tecnológicos y las derivadas de las decisiones de integración vertical u horizontal en la empresa o institución.

También atendiendo a la relación de dependencia o independencia económica de las inversiones, estas se pueden clasificar en: mutuamente excluyentes, independientes y complementarias.

1) Mutuamente excluyentes: Cuando por su naturaleza y características solo se puede ejecutar una de ellas, pues sería redundante o contraria la política de la organización. Hay que tener en cuenta, que las inversiones mutuamente excluyentes están vinculadas a la solución de un mismo problema, por eso, es importante e imprescindible seleccionar la mejor de todas.

2) Inversiones independientes: Son las que no guardan relación o dependencia económica entre sí, por tal motivo, la realización de una de ellas no impide la ejecución de otra u otras inversiones. La limitante para la organización, está en la disponibilidad de los recursos para cada una de las inversiones.
El proceso de decisión, en estos casos, se orienta a identificar una combinación de inversiones, factibles de ejecutar en función de la disponibilidad de recursos, que es la que genera los mejores resultados.

3) Inversiones complementarias: Son aquellas inversiones que tienen un alto grado de dependencia económica entre sí, que en algunos de los casos al realizarse simultáneamente, interactúan reforzando o atenuando las características de ellas.

Esto da como resultado que, en algunas combinaciones se presente el fenómeno de sinergia y que en tal sentido, haya que determinar el efecto correlativo de la combinación. El proceso de decisión está orientado a identificar una mezcla de combinaciones o alternativas individuales, factibles de realizar en función de la disponibilidad de recursos, y que es la que produce los mejores resultados.

Las inversiones también, se clasifican en función del sector de la economía en que se ejecutan, por lo tanto, habrán inversiones en empresas del sector privado y en el sector estatal o público.

a) Inversiones en el sector privado: Son inversiones preparadas y ejecutadas por personas naturales y jurídicas, con recursos privados y de crédito, se deben aceptar cuando se esperan incrementos en los beneficios de sus empresas (crean valor) y por consiguiente se espera que aumente el patrimonio de los accionistas. No obstante, en algunas ocasiones hay inversiones de carácter estratégico que no generan los rendimientos mínimos exigidos por la empresa, pero que se aceptan por completar el sistema de actividades escogido por la estrategia de la empresa.

b) Inversiones estatales o del sector público: Son inversiones desarrolladas por entidades o empresas del gobierno y con presupuestos de inversión pública. Generalmente se orientan al mejoramiento de la salud, la educación, la vivienda, el transporte, la seguridad, entre otras.

Estas inversiones se realizan con base en los planes y programas de desarrollo económico y social que se preparan en los diferentes niveles de la administración pública o estatal.

En las inversiones estatales o del sector público se deben valorar aspectos cuantitativos y cualitativos de beneficio económico y social, su objetivo primordial es aumentar el bienestar social.

1.7 El proceso de toma de decisiones.

La toma de decisiones es un proceso para la selección de un curso de acción entre varias alternativas planteadas en una organización o institución y el núcleo de la planeación, también, es una actividad cotidiana en las organizaciones o instituciones, cada problema o situación se tiene que resolver, para lo cual es necesario tomar una decisión. Por lo tanto, es recomendable disponer de una lógica con procedimientos sistémicos para la solución de los problemas, lo cual se puede concretar de la siguiente manera:

1)-Definir el problema: Se trata de identificar de forma clara y precisa el problema que existe, realizar su formulación de manera concreta, definiendo los objetivos necesarios correspondientes. La importancia de este fundamento es vital en el proceso de toma de decisiones, y es recomendable dedicarle todo el tiempo necesario, para lograr una clara y adecuada definición del problema así como su concreción, porque de lo contrario se corre el riesgo de dar solución a un problema inexistente.

Debe quedar claro que los problemas en la vida cotidiana o real, están enunciados de manera muy general, por lo cual, es indispensable identificarlos, definirlos con precisión y exactitud, de forma tal que tengan su relación con sus objetivos y los métodos de análisis que se seguirán.

La importancia de definir con claridad y precisión el problema radica en el hecho conocido de que es preferible no resolver el problema, antes que resolver el problema que no es, por eso, se dice que la definición del problema es la parte más necesaria y crítica de todo proceso de toma de decisiones, debido a que una equivocada identificación traerá como consecuencia la toma de una decisión igualmente errada.

En este sentido, se recomienda agotar los mejores esfuerzos y recursos de la institución u organización en la identificación y precisión de la problemática. Para ello deben realizarse reuniones, tormentas de ideas, trabajos de grupo y discusiones para la consecución de una visión clara y precisa de la situación que se deberá enfrentar.

2) Analizar el problema: Una vez que se haya definido en forma clara, precisa y concreta el problema, se procede a discriminar todos los hechos que lo han originado o tienen relación con él. Es indispensable que dentro del análisis, se realice una reseña de las decisiones tomadas en el pasado, en relación con el problema definido; porque muchas veces el problema surgido, tiene que ver con las decisiones que se han tomado con anterioridad en el tiempo. También, es conveniente y necesario analizar y precisar las restricciones que se presentan al momento de dar solución a los problemas, las que pueden ser reales o ficticias.

Las restricciones reales son las que verdaderamente existen en el momento de formular el problema y estas pueden ser: tecnológicas, de recursos, de tiempo, sociopolíticas, de seguridad, administrativas, entre otras. Estas restricciones, son necesarias tenerlas en cuenta al momento de seleccionar la solución del problema.

Las restricciones ficticias son las que no están o no existen contenidas en el problema que se ha concretado o definido; generalmente surgen de manera inconsciente por el criterio de la persona que está realizando el proceso análisis, y pueden estar dados por: hábitos, temores, inhibiciones, timidez. Para ello es necesario también tener en cuenta, que hay personas que se restringen ficticiamente más que otras, afectando en forma negativa la creatividad y dificultad de la solución de los problemas o los convierte en imposibles de solucionarlos.

3) Generación de alternativas de soluciones: Una vez que el problema se ha definido y analizado, se debe proceder a generar las posibles soluciones y alternativas para ser aplicadas. Una tormenta de ideas, es un buen comienzo para la generación de soluciones. En el proceso de generación de soluciones, se recomienda reunir todas aquellas personas que tengan que ver, estén relacionadas o conozcan el problema e inducirlas al planteamiento de soluciones, no sin antes tener en cuenta los siguientes elementos:
a) Evitar resaltar las diferencias jerárquicas de los asistentes.
b) Buscar la participación desde el directivo más importante hasta el obrero más humilde de la organización.
c) No subestimar ninguna solución sugerida.
d) No permitir burlas a las soluciones planteadas.
e) No hacer comentarios negativos sobre las soluciones sugeridas.
f) Motivar e inducir permanentemente a las personas para que sugieran soluciones.

En el caso de que la decisión competa a una sola persona y esta no tenga los medios para consultar con otros, es indispensable que se presenten distintas alternativas para que cada una sea evaluada individualmente.

4) Evaluación de alternativas: El proceso de determinación o generación de alternativas de soluciones tiene poca importancia si las mismas no son analizadas y comparadas entre sí, de manera tal que se pueda determinar cuál es la más conveniente.

Mediante la evaluación de las alternativas se conocerá, cuál de ellas es la más adecuada, cuál tendrá más posibilidad de realización, cuál apoyará los intereses generales de la institución y organización, así como también cuáles de las posibles soluciones serán más adecuadas y acorde con la visión y misión de la institución u organización. Igualmente se considerarán las estrategias para ellas a corto, mediano y largo plazo.

Cuando se estima la conveniencia de una solución debe tomarse en cuenta la rentabilidad que produce, asociada al riesgo que conlleva. Es indispensable también considerar el beneficio económico a corto plazo, ya que puede quedar relegado en aras de una estrategia superior de la empresa.

Es necesario que una vez seleccionada la alternativa que dará solución al problema, se le comunique a las personas de la organización o entidad encargada de dar la aprobación final y su implementación. De la presentación de la solución depende que se lleve a la práctica, por ello es importante estar seguros de los beneficios de dicha solución y llevar a cabo la sustentación con seguridad, demostrando clara y concretamente cuáles son las ventajas de la solución propuesta. Es conveniente presentar soluciones a corto, mediano y largo plazo.

5) Implementar la solución: La selección de la decisión sobre la solución no hace finalizar el proceso de toma de decisiones; por el contrario, una vez seleccionada la alternativa, se debe buscar su implementación, teniendo en cuenta factores tales como: tiempo, recursos humanos, tecnológicos, financieros, entre otros. También es de suma importancia considerar la capacidad de entendimiento de la decisión por parte de la persona responsable de su ejecución, así como su grado de compromiso.

En muchas ocasiones una determinada decisión pasará por diferentes áreas de la organización o institución y probablemente el compromiso no sea el mismo en cada una de ellas. Por otro lado, es probable que el entendimiento de la decisión no sea compartido por igual, por lo cual deberán tomarse en cuenta estas consideraciones en el momento de implementar la decisión.

Implementar una decisión exige en muchos casos todo un proceso de planificación y distribución de recursos que garanticen su éxito. Una decisión podría fracasar por no contar con los recursos adecuados o con el compromiso y entendimiento de los miembros de la organización o institución.

6) Evaluar los resultados de la decisión: A través de un análisis de los resultados obtenidos, por la puesta en práctica de la decisión tomada, se podrán establecer y ejecutar medidas para asegurar la mejor o más adecuada utilización de los resultados. Es así como mediante la evaluación de estos se pueden llevar a cabo las acciones necesarias para corregir cualquier desviación en los resultados inicialmente planificados. Adicionalmente, se puede descubrir la necesidad de incluir nuevos recursos en el proceso: humanos, financieros o de otra clase. También, se puede llegar a la conclusión de que la decisión tomada no fue la correcta y así adoptar las medidas necesarias para enmendar esa equivocación.

1.8 Análisis de inversiones. Aspectos básicos.

En el trabajo con la Matemática Financiera, es esencial tener presente una serie de análisis en diferentes etapas básicas del proceso de las inversiones. Estos análisis son:

a) Análisis técnico
b) Análisis económico
c) Análisis financiero

d) Análisis de intangibles
e) Análisis del mercado
f) Análisis administrativo
g) Análisis social
h) Análisis sensorial
Cada uno de ellos se caracteriza a continuación:

Análisis técnico: Es el estudio de la factibilidad operacional del proyecto o alternativa que se quiere, es decir, se define la viabilidad técnica del proyecto. En este análisis, se definirán y trabajarán las especificaciones técnicas con los insumos necesarios para ejecutar el proyecto de inversión para lo cual es preciso tener en cuenta: tipo y cantidad de materias primas e insumos, nivel de calificación de los recursos humanos requeridos, las maquinarias y los equipos necesarios para el proyecto con un programa de las inversiones iníciales y de reposición, así como también, los calendarios con la proyección de los mantenimientos.

Análisis económico: Se refiere a la factibilidad económica de la alternativa o proyecto, es decir, si es rentable o no. Es fundamental, pues permite decidir la implantación del proyecto o alternativa que se trabaja.

Análisis financiero: Está relacionado con la disponibilidad y origen de los fondos necesarios para realizar el proyecto. Se refiere a la identificación de las fuentes vitales para la financiación del proyecto tanto interna como externa, las que permiten adicionalmente establecer los criterios para el manejo de excedentes e identificar las necesidades de liquidez, para construir y negociar el plan de financiamiento del proyecto.

Análisis de intangibles: Está orientado a considerar los efectos no cuantificables de un proyecto: Aspectos como: imagen corporativa, opinión pública, nombre, factores ecológicos y ambientales, leyes cambiantes, situación política, entre otros. El estudio de las leyes, debe llevarse a cabo en las etapas iniciales de la formulación y preparación, ya que un proyecto supremamente rentable, puede resultar no factible por una norma legal. En análisis de los factores ecológicos y ambientales, es necesario determinar el impacto del proyecto sobre el medio ambiente a corto, mediano y largo plazo así como el efecto del entorno sobre el proyecto.

Análisis del mercado: Es el proceso en el cual se determinan ventas y los clientes potenciales para los bienes y servicios que van a producirse. Además, de estudiar la demanda, es necesario tener en cuenta la oferta y precios, tanto de los productos como de los insumos de un proyecto. En la demanda de los productos, se analiza el volumen presente, futuro y las variables relevantes para su proyección como: población objetivo o segmento de mercado, niveles de ingresos esperados, productos complementarios y sustitutos que ya estén o que en el futuro entrarán al mercado. Es importante tener en cuenta el mercado local, regional, nacional y el internacional.

Análisis administrativo: Es un proceso de estudio y valoración que muestra la estructura organizacional y define las necesidades de personal del proyecto, además; genera información sobre las necesidades de infraestructura para el normal desarrollo de las actividades de las diferentes áreas que conforman el proyecto de la empresa o institución como son: planeación, personal, finanzas, cobranzas, entre otras. En este análisis, también se señalan los equipos y dotación de los insumos requeridos para el adecuado funcionamiento administrativo.

Análisis social: Está orientado a la determinación de la incidencia que el proyecto tiene en la comunidad y la manera de evitar las incidencias negativas de este. En concreto el análisis está dirigido a identificar y caracterizar con precisión los diferentes grupos de la población implicados en el proyecto, desde el punto de vista de los beneficios y los costos.

Análisis sensorial: Trata de fijar la posición personal del empresario u organización en aspectos legales, éticos, morales y de gusto personal, con relación a la actividad en sí misma o a las condiciones que el proyecto exige.

1.9 Principales términos financieros para Matemática Financiera.

En el trabajo y comprensión de la Matemática Financiera resulta fundamental tener en cuentas los siguientes términos, conceptos y definiciones de las finanzas para su utilización en la práctica profesional.

Operación financiera: Es toda aquella acción que produce, por un desplazamiento en el tiempo una variación cuantitativa del capital. Se dice entonces que dicho capital está sometido a un régimen financiero, que constituye el estudio de sus leyes y la evaluación de sus efectos cuantitativos, el objetivo del cálculo financiero.

Capital financiero: Es la medida de un bien económico referido a la época en que está disponible. Es por ello que todo capital financiero queda determinado por el importe del capital y el momento de su disponibilidad o vencimiento.

Documento negociable: Es aquel documento transferible por traspaso y entrega, o por entrega en el curso ordinario de los negocios, donde resulta liberado el poseedor, a su debido tiempo, de su vindicación con respecto al poseedor o a los poseedores anteriores.

Acciones (de capital) a valor par (o nominal): Las acciones de una sociedad, a cada una de las cuales se le ha asignado un valor nominal fijo, de acuerdo con las condiciones de la escritura de constitución. El valor a la par de cada acción del capital social se expresa ordinariamente en cantidades cerradas.

Las acciones pueden tomar varias formas y convertirse en acciones al portador, acciones de capital, de fundador, de capital no emitidas, de capital no gravables, entre otras. Las más usadas en problemas de la Matemática Financiera y que son a su vez las más comúnmente conocidas son: las acciones comunes u ordinarias y las acciones de capital preferentes. Las acciones comunes u ordinarias son típicas de una corporación, o sociedad (anónima) que después de considerar los derechos de las clases preferentes, en su caso, no tienen limitación ni preferencia en su participación en las distribuciones de las ganancias de superávit de una compañía, o en la distribución definitiva de su activo. Es la clase de acciones que representa el patrimonio residual de todo el activo de una compañía, después de haber satisfecho el pasivo y otros derechos de los propietarios. A diferencia de estas, las acciones de capital preferentes son la clase de acciones que tiene derecho de prioridad sobre los accionistas comunes a las utilidades de una compañía, o entidad y frecuentemente también sobre los activos, en caso de liquidación.

Bonos: Es un certificado de adeudo por escrito y frecuentemente autentificado. Los bonos se emiten en forma de instrumentos, con cupones al portador, o se registran a nombre del propietario en cuanto al importe del capital o principal solamente (bonos de cupones, registrados) también en cuanto a principal e intereses (bonos registrados).

Su título indica usualmente de manera general el fin y la garantía de su emisión, así como el método de pago o redención. Los bonos se clasifican teniendo en cuenta:

-el tipo de organismo emisor; por ejemplo: servicios públicos gubernamentales, estatales o municipales;

-la naturaleza del proyecto u obra financiada; por ejemplo: bonos agrarios;

-el tipo de moneda en que serán pagados; por ejemplo: dólares, libras esterlinas;

-con privilegios especiales;

-el tipo de gravamen;

-la preferencia de inversión y

- el vencimiento.

Documentos mercantiles: Generalmente las operaciones financieras y comerciales casi nunca se liquidan de inmediato, sino que sobre la base de la contratación o emisión el deudor cumple su compromiso en fecha posterior a la establecida. Por otra parte, en muchas ocasiones las entidades necesitan disponer de efectivos y con ese propósito materializan en documentos los créditos que poseen contra terceros. Estos documentos son negociables y con ellos se pueden comprar y pagar, pero también pueden circular como si fueran dinero, ya que están respaldados por la solvencia del deudor, pero es dinero que no se puede hacer efectivo hasta la fecha de vencimiento.

En la práctica cotidiana, las entidades económicas hacen uso de documentos que constituyen promesas formales para el pago y que están sometidos a lo que en cada país está legislado al efecto.

Los documentos mercantiles, también llamados efectos comerciales, son aquellos que implícitamente expresan una promesa de pago. Desde el punto de vista contable son efectos a cobrar a corto, mediano y a largo plazo.

Existen distintos tipos de documentos mercantiles: la letra de cambio, el pagaré, el cheque, la carta de crédito, la tarjeta de crédito, la tarjeta de débito, entre otros.

Letra de cambio: Documento mercantil, con el cual las transacciones comerciales y bancarias adquirieron notable impulso. Por su uso adecuado se hizo innecesario portar colosales cantidades de dinero metálico. Hay que tener en cuenta también que no es hasta el siglo XIII que comienza a generalizarse el billete de papel, en las naciones de mayor poderío económico.

¿Qué caracteriza a la letra de cambio?

La letra de cambio es un documento expedido en forma legal, mediante el cual una persona ordena a otra que pague, a la orden de ella misma o de un tercero, una suma de dinero, en lugar y fecha determinados por ese documento. Es bueno precisar que el uso del término "persona" en este documento hace referencia tanto a personas físicas o naturales, como a personas jurídicas; es decir, empresas e instituciones.

¿Qué personas intervienen en la letra de cambio?

- Librador o girador: Quien emite el documento.
- Librado o girado: La persona a quien va dirigida la letra, y que es quien paga.
- Beneficiario, tomador o tenedor: Es la persona que cobra la letra, aunque comúnmente se denomina beneficiario al original, y tomador a los posteriores beneficiarios.

¿Cuáles son los datos que debe contener una letra de cambio?

- Lugar, día, mes y año en que se libra.
- Fecha o época que deberá ser pagada.
- Nombres y apellidos, con razón social o título a cuya orden se manda a hacer el pago.
- Nombres y apellidos, con razón social o título del librador o su apoderado.
- La cantidad que el librador manda a pagar, en números y letras; si hubiera discrepancia entre ambas escrituras, se paga atendiendo a la cantidad escrita en letras.

¿Cuáles son los términos de vencimientos en una letra de cambio?

Una letra de cambio puede librarse con diferentes términos o plazos, los que pueden ser:

- A la vista: En el acto de presentación.
- A días o meses vista: Se cuenta a partir de su presentación, y lo acredita la aceptación de la letra, contándose desde el día siguiente a su aceptación.
- A días o meses fecha: Igual que en el término anterior, pero partiendo de la fecha de emisión.
- A día fijo: Es obligatorio que se pague en la fecha indicada.

Duplicados de la letra de cambio.

Los tenedores de letras de cambio están en su derecho de exigir a los libradores la expedición de segundas, terceras y cuantas copias que necesiten, expresando en todas ellas que no se consideran válidas sino en el caso de no haberse pagado en virtud de la primera o de otras expedidas anteriormente.

Momentos de la letra de cambio.

- Aceptación: Reconocimiento por parte del librado de que sí está obligado al pago. El documento tiene que ser presentado al librado para que este lo acepte, llenando los espacios destinados a ese fin y anotando la palabra; acepto (o aceptamos), la fecha y su firma, o manifestando al portador las razones que tuviera para no aceptar la letra.

- Aval: Es la garantía escrita que suscribe la institución o persona que ofrece seguridad de que el librado pagará la letra. Normalmente esta garantía se consigna en el documento, escribiéndoselas palabras “Por Aval”, acompañadas de la firma del avalista.

- Endoso: Es el acto jurídico por el cual se transfiere cualquier documento a la orden, o pasa al dominio de otra persona. Las letras de cambio son documentos transferibles los cuales facilitan los pagos sin que sea necesaria la presencia de dinero físico; una persona que recibe una letra puede pagar con ella a otra persona que, a su vez, puede pagar a otra, y así sucesivamente. La persona que transfiere la letra se denomina “endosante”, y la persona a la cual se le endosa recibe el nombre de “endosatario”. Quien transfiere la letra tiene que responder porque se le pague al endosatario. La letra ha de estar expedida a la orden para poder ser endosada, y el proceso de sucesivas transferencias tiene como límite la fecha de vencimiento.

-Protesto: Es el medio de que se dispone para hacer patente la falta de aceptación o de pago, o de ambos aspectos, de una letra de cambio. El protesto se materializa mediante acta notarial que da fe de la falta de pago por parte del deudor, dándose así inicio a las diligencias encaminadas a la avenencia entre las partes, y posteriormente, si fuere necesario, iniciar el proceso judicial que corresponda. Los gastos de protesto son pagados por el librado.

- Perjuicio de la letra de cambio: Las letras de cambio que no se presenten a la aceptación o al pago dentro del término señalado, o si no son protestadas oportunamente, quedan perjudicadas. Cuando una letra queda perjudicada el tenedor pierde las acciones cambiarias que establece la ley, y para exigir su pago tiene que acudir a otros procedimientos.

Un modelo para la letra de cambio es:

LETRA DE CAMBIO

Aceptamos: Lugar y fecha de emisión.

Por ______________________________

Cantidad en números.

____

Fecha de aceptación. A ______días vista se servirá Ud. mandar a pagar por esta única de cambio a la orden de:

______________________ ______________________________

Firma del librado Beneficiario

La cantidad de ______________________________

Cantidad en letras

A: ______________________________

Librado

____

Lugar donde se pagará la letra

Letra No. _________ Firma del librador ____________

Al dorso del documento, el Endoso:

Páguese a la orden de : ______________________________

Endosatario

______________________ ______________________________

Fecha Firma del endosatario

El pagaré: Es un documento formal que expresa una promesa de pago, por el cual una persona natural o jurídica se compromete a entregar a otra, en un plazo establecido, una suma de dinero estipulada en el documento.

El pagaré se utiliza en préstamos a corto plazo y debe ser pagado por la persona que lo suscribe, en esto se diferencia de la letra de cambio. En general, al pagaré le son aplicables las normativas del Código de Comercio relativas a la letra de cambio, aunque sin la fuerza legal de esta y sin el requerimiento de aceptación.

Otorgante y tenedor: Se denomina “otorgante” a la persona que expide el pagaré; la persona que tiene derecho a cobrar el documento, esté o no mencionada en el mismo, se designa como “tenedor”.

Vencimiento: Con frecuencia se extienden pagarés con plazo menor o mayor de un año. Cuando la fecha de vencimiento no aparece en el documento, suele entenderse que tiene plazo de un año.

Endoso: Los pagarés expedidos “a la orden” son endosables; en cambio, si son expedidos a una persona determinada, no son endosables.

Valor nominal: La cantidad escrita en el pagaré es su valor nominal, pero si el documento gana interés a lo largo del plazo, entonces su valor nominal es la cantidad escrita más el interés que debe pagar.

Series de pagarés: Cuando las operaciones son a largo plazo, tanto para el comercio nacional como internacional, se utilizan pagarés como documentos de amortización de las deudas; el comprador expide series de pagarés a favor del vendedor con los importes y las fechas de vencimiento acordados.

Fiador solidario: Puede suceder que el prestamista no conozca lo suficiente al solicitante del préstamo, o que no le merezca suficiente confianza; en casos como este se exige como garantía la firma de una persona que confiera solidez a la operación y que, de hecho, se convierta en fiador solidario del deudor.

Modelo de Pagaré.

Pagaré

Lugar y fecha de expedición

A ______ días de la fecha, pagaré a la orden de:

Tenedor

Cantidad en números y en letras

Pagaderos en: ______

Dirección del lugar donde habrá de pagarse

Valor recibido con interés del ______% anual: ______

Cantidad en números y en letras

Vencimiento: ______

Fecha de vencimiento

Pagaré No. ______

Firma del otorgante

1.10 Clasificación de las operaciones financieras.

Una primera clasificación de las operaciones financieras puede hacerse por su duración, según sea inferior o superior a un año, se denomina de corto o largo plazo.

Distinguiremos la operación financiera a término cierto, cuya realización está solo sujeta al transcurso del tiempo, de la actuarial (contingente), cuya verificación posterior está supeditada a que se realicen determinados hechos dependientes del azar.

Si lo que se desea determinar es la variación cuantitativa de un capital, se trata de una operación financiera simple; y será compleja si lo que se estudia es la transformación de una sucesión de capitales en uno u otros, por desplazamiento, en el tiempo, de sus elementos.

1.11 Principales conceptos y términos utilizados en la práctica financiera.

Se presentan algunos términos y vocabularios empleados en las operaciones financieras esenciales con su uso.

Es necesario establecer que en un **préstamo** se solicita una determinada cantidad que se recibe en su totalidad y se pagan los intereses por la cantidad prestada.

En un **crédito** se da la posibilidad de disponer o sacar, cantidades de dinero hasta el límite del mismo y se pagan los intereses por las cantidades dispuestas (aunque para referirnos al acto se usarán indistintamente). En ambos casos se incurre en una **deuda** que no es más que dinero en efectivo, mercancías o servicios que se deben a otro en virtud de un convenio, expreso o implícito, que crea una obligación de pago.

A riesgo de parecer triviales, se puede afirmar que, de las dos partes en presencia para una operación de crédito, el **prestamista o acreedor** es el que presta o entrega cierta cantidad de recursos monetarios, bajo las condiciones que se acuerden y durante un tiempo limitado.

El **deudor o prestatario**, que es quien recibe los recursos monetarios, contrayendo así una deuda u obligación que habrá de cumplir entregando lo recibido más una cantidad adicional. Esta cantidad adicional es el interés que paga el deudor por el préstamo recibido.

Se denomina **Interés** a la cantidad adicional que se paga por hacer uso de dinero ajeno.El importe del préstamo se denominará **Capital o Principal** y las cantidades pagadas por el prestatario se denominan **pagos periódicos**.

El período de capitalización, conversión o acumulación de intereses será la cantidad de unidades de tiempo, entre dos fechas sucesivas, en que los intereses son sumados al capital; mientras que a **la frecuencia de capitalización, conversión o acumulación** se les destina al número de veces por año que los intereses son capitalizados. La frecuencia de capitalización puede ser anual o subanual y viene expresada por la tasa que se establece en cada caso. Un aumento en la frecuencia de capitalización produce un incremento del interés devengado.

En la actividad económica de las empresas y de las personas, son frecuentes los cobros y pagos a intervalos iguales de tiempo para así dar cumplimiento a diferentes compromisos contraídos. A esto lo llamaremos **rentas**, o sea, a toda sucesión de pagos o cobros, que se efectúan a intervalos de tiempo iguales.

Entre los innumerables ejemplos existentes presentamos los siguientes:

- El cobro de salarios, cuya periodicidad puede ser mensual, quincenal o semanal;
- El pago mensual de alquileres;
- El pago mensual de servicios públicos recibidos (electricidad, agua);
- El pago de contribuciones fiscales (anual, semanal, trimestre);
- Liquidaciones de compras a plazo.

Cuando la renta sea fija y periódica se dice que es una **anualidad**. La palabra anualidad no tiene por qué asociarse a cobros y pagos siempre anuales. Sí lo fueron muchos siglos antes, cuando reyes, emperadores y potentados de las clases dominantes percibían tributos anuales y las deudas iban liquidándose con esa periodicidad, tanto en el mundo antiguo como en buena parte del medieval.

Estos pagos periódicos se liquidan casi siempre, en fechas regularmente espaciadas; denominándose este intervalo de tiempo **períodos**, siendo la periodicidad el número de períodos dentro del año. Según el pago periódico caiga al principio o al final del período se denominarán de: **plazo anticipado, o ordinario o vencido**.

A las cantidades pagadas por el deudor correspondientes en parte a una fracción del capital inicial se denominan **amortización** y en parte a los intereses considerados como el alquiler del dinero.

Otro de los fundamentos es el de Renta que con sus características esenciales se presentan a continuación**.**

Renta: Es cada uno de los pagos o cobros que tienen lugar a iguales intervalos de tiempo.

Período de renta: Intervalo de tiempo entre dos rentas consecutivas cualquiera.

Fecha de convenio o contratación: Es la fecha en que queda formalizada la operación.

Fecha inicial: Es la fecha en que comienza el primer período de renta.

Fecha final o de vencimiento: Es la fecha en que termina el último período de renta.

Tiempo de plazo: Se designa como el tiempo comprendido entre la fecha inicial y final incluye las de una anualidad.

Clasificación de las rentas.

Las anualidades pueden ser clasificadas atendiendo a diversos criterios, entre ellos:

- Por el carácter constante o variable de las rentas.
- Si se conocen de antemano la fecha inicial y final (rentas ciertas); o una de las fechas, o ninguna de las dos (rentas contingentes).
- Si los pagos se efectúan al inicio o final de cada período de renta se clasifican en:
  - Renta ordinaria o vencida: aquella en la que los pagos se efectúan al final de cada período de renta.
  - Renta anticipada o adelantada: aquella en la que los pagos siempre coinciden con la fecha de convenio y la fecha inicial.
  - Renta diferida: aquella en que la fecha inicial es posterior a la fecha de convenio.

1.12 El valor del dinero en el tiempo.

Es el concepto más importante en las matemáticas financieras. El dinero, como cualquier otro bien, tiene un valor intrínseco, es decir, su uso no es gratuito, hay que pagar para usarlo. El dinero cambia de valor con el tiempo por el fenómeno de la inflación y por el proceso de devaluación. El concepto del valor del dinero dio origen al interés. Además, el concepto del valor del dinero en el tiempo, significa que sumas iguales de dinero no tendrán el mismo valor si se encuentran o consideran ubicadas en diferentes tiempos, siempre y cuando la tasa de interés que les afecta sea diferente a cero.

La inflación es el fenómeno económico que hace que el dinero todos los días pierda poder adquisitivo o que se desvalorice. Por ejemplo, dentro de un año se recibirán los mismo \$ 1 000.00 pero con un poder de compra menor de bienes y servicios. Desde un punto de vista más sencillo, con los \$ 1 000.00 que se recibirán, dentro de un año se adquirirá una cantidad menor de bienes y servicios que la que se puede comprar hoy, porque la inflación le ha quitado poder de compra al dinero.

1.13 Los logaritmos y su cálculo.

Para los cálculos con las potencias son esenciales los conocimientos relacionados con las operaciones y sus propiedades. A continuación se presentan en general y con ejemplos por su importancia en la práctica las propiedades más utilizadas.

-Multiplicación de potencia: En la multiplicación de potencias con una misma base se escribe esta base con exponente igual a la suma de los exponentes de cada factor.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

Por ejemplo: $a^3 \times a^2 = a^{3+2} = a^5$

- División: Al dividir se restan los exponentes del divisor con las del dividendo cuando las bases son iguales.

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

Ejemplo: $a^3 / a^2 = a^{3-2} = a$.

- Potencia de un producto: Es igual a la potencia de cada uno de sus factores:

$$(ab)^n = a^n b^n$$

Ejemplo: $(ab)^3 = a^3 b^3$.

- Potencia de un cociente: Es igual a la potencia del numerador dividido por la potencia del denominador.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplo: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$

- Potencia de potencia: Es igual al producto que se obtiene multiplicando ambas potencias entre sí:

$$(a^m)^n = a^{m \times n.}$$

Ejemplo: $(a^3)^2 = a^{3 \times 2} = a^6$

En el caso de las potencias es necesario conocer sus particularidades y relaciones esenciales. Por ejemplo si tenemos $3^2 = 9$, aparece su base, en este caso 3, su exponente que es 2 y el resultado 9. A partir de esta expresión en la práctica resulta fundamental cómo calcular cada uno de sus elementos cuando se necesitan. Por ejemplo:

Calcular:

a) $4^2 = X$ con esto se busca cuál es el resultado de multiplicar 4 x 4. Lo cual se puede expresar también de forma abreviada mediante la potencia como el producto de la base según el exponente.
b) $X^2 = 16$ aquí es necesario buscar qué número elevado al cuadrado da como resultado 16. Esto puede expresarse también como raíz cuadrada de 16 que es 4. Es decir**:** $X^2 = 16$ que puede expresarse como $\sqrt{16} = 4$.
c) $4^x = 16$ en esta situación se necesita buscar a qué número debemos elevar 4 para obtener 16. Esto puede representarse como $\log_4 16 = x$

En los casos anteriormente analizados cuando la expresión no es tan sencilla como esta, es preciso conocer otros fundamentos esenciales con las formas y vías correspondientes para obtenerlas. Para todos estos casos existen tablas y posibilidades en computadoras y calculadoras. Pero siempre es determinante conocer las formas de obtenerlo mediante las tablas. En el primer y segundo caso la búsqueda es generalmente sencilla, sin embargo para el último es esencial conocer la forma de obtenerlo en lo cual se utilizan los logaritmos. Es decir consiste en una herramienta para el proceso de cálculo del exponente de una potencia en la cual se conoce la base y el resultado.

Por todo ello el logaritmo de un número es el exponente de la potencia, a que debe elevarse su base para obtener el número. Ejemplo: $7^2 = 49$ puede escribirse como: $\log_7 49 = 2$

En general si **a** es la base, x el exponente y **n** el resultado de la operación exponencial esto se puede escribir mediante la siguiente relación:

$$a^x = n \text{ si y solo si } \log_a n = x$$

Una forma muy utilizada que facilita el trabajo para la determinación de los logaritmos en expresiones tanto simples como complejas es el uso de las tablas.

Las tablas constituyen una vía práctica y sencilla para buscar el logaritmo de un número. Ver las tablas, de logartimos.En este proceso de búsqueda existen dos elementos esenciales al calcular el logaritmo: la característica y la mantisa. La característica es la parte entera del logaritmo y mantisa en el logaritmo es la parte correspondiente a la expresión decimal.

En este caso las tablas que se presentan permiten hallar directamente las mantisas de los logaritmos de base diez desde los números1000 hasta 10 000 y también por interpolación la de los números mayores que 10 000. En ella se sigue el proceso de doble entrada que consiste en situar cada mantisa en la intersección de la fila que comienza por los tres primeros dígitos del número cuyo logaritmo se busca y la columna encabezada por el cuarto dígito. Así por ejemplo, la mantisa del logaritmo de 4276 se determina en la intercesión de la fila que tiene a su izquierda en la columna N a 427 y la columna que tiene un 6 en su encabezamiento.

Hay que tener presente también que la característica o parte entera del logaritmo de un número se calcula teniendo en cuenta si el número, como en el ejemplo tratado, tiene:

- Cifras enteras, entonces la característica es igual al número de estas cifras disminuido en una unidad. Ejemplo: log 42,83 = 1,63175.
- Si el número tiene solo cifras decimales la característica es negativa e igual, en valor absoluto, al número de ceros decimales que aparecen inmediatamente después del punto decimal aumentado en una unidad. Ejemplos:

  a- log 0,013= $\bar{2}$,11394

  b- log 0,215= $\bar{1}$,33244

  c- log 0,000617= $\bar{4}$,79029

También es muy usual, en muchos cálculos numéricos, expresar los números con una sola cifra entera, multiplicándolos cuando es necesario por una potencia de 10 según convenga. Por ejemplo si se trata del número 345,8 se escribe 3,458x 10^2; para el caso de 0,00938 se escribe 9,38 x 10^{-2}. Utilizando esta notación la característica del logaritmo del número buscado es el exponente al que aparece elevado el 10.

Estos fundamentos son importantes para el trabajo con las tablas al buscar los logaritmos. Para ello cuando se quiere determinar el logaritmo del número como por ejemplo de: 1534, se localiza en la tabla la columna que se inicia con N, al número formado por las tres primeras cifras del número buscado aquí 153 y en la columna correspondiente al número 4, se obtiene 18523 que se denomina mantisa. Pero como el número que se quiere buscar tiene cuatro cifras, entonces aplicando lo establecido anteriormente para la característica el logaritmo es 3.18523. Es decir log 1534= 3.18523

Los logaritmos de los número enteros comprendidos entre 100 y 10 000 se encuentran directamente en la tabla y los menores que ellos siempre que posean la cantidad de dígitos correspondientes y se tenga en cuenta lo relacionado con la característica.

También es posible el cálculo de los logaritmos que no están contenidos directamente en las tablas como son los casos de los que corresponden a números enteros mayores que 10 000. Para esto siempre se busca la mantisa de los cuatro primeros números que aparecen directamente en la tabla.

Por ejemplo si se quiere calcular log 132 67, lo primero que se debe hacer es separar en este número formado por 5 dígitos a los 4 primeros de la izquierda, que puede ser así: 1326-7 y se busca en la tabla la mantisa del número 1326 que siguiendo lo explicado anteriormente es: 12254. Ahora se procede a hallar el producto de la última cifra del número buscado la cual fue separada y se considera como decimal, así 0,7 por la diferencia entre la mantisa obtenida y la que aparece en la tabla de la misma línea pero en la columna siguiente, en este caso corresponde a la columna 7 y es: 12287. Esta diferencia tiene un valor de 33. La cual puede ser encontrada más directamente buscando al final de la fila que contiene estas mantisas en la columna encabezada por d, pero este valor debe ser calculado mentalmente mediante la diferencia entre la mantisa tomada y la siguiente en la tabla, que es lo más adecuado generalmente, pues algunas veces esa diferencia no coincide en la tabla.

El producto de 0,7 x 33= 23,1. Entonces añadiendo este producto, siempre la parte entera del mismo cuando contenga decimales, a la mantisa hallada anteriormente del número buscado se obtiene: 0,12254 + 23= 0,12277 que es la mantisa del logaritmo buscado es decir: log 132 67= 4,12277

Ejemplos: Calcular log 35612

Se busca log 3561 = 4,55157 0,7 x 12= 8,2 de aquí se selecciona la parte entera, y se procede al cálculo siguiente:

log 35612 = 4,55157

$$\underline{+ \quad\quad 8}$$

4,55165 de donde log 35612 = 4,55167

Esto se basa en que el método de interpolación en el supuesto de que el incremento de un logaritmo es proporcional al incremento que sufre el número, lo cual es correcto para intervalos pequeños dentro de cierta aproximación.

Logaritmo de los números fraccionario

Si se quiere determinar el logaritmo de un número fraccionario se aplica la regla de cálculo para el cociente como la diferencia entre el logaritmo del numerador menos la del denominador. Por ejemplo:

a) $\log \frac{23}{8}$ = log 23 – log 8 = 1,36173 – 0,90309= 0,45864

b) $\log \frac{4}{216}$ = log 4 - log 216 = 0,60206 – 2,33445= $\bar{1}$,73239

Cuando el número aparece expresado en forma decimal, o si se convierte en esta forma para determinar la característica se sigue la regla explicada anteriormente. Para ello se procede disminuyendo una unidad al número de cifras enteras o aumentar una unidad si el número es un decimal o no, cambiando en este caso el signo del resultado. Para hallar la mantisa se prescinde totalmente del punto decimal y se busca la mantisa del número entero que se obtiene al suprimir el signo del decimal, porque como se ha explicado las mantisas no varían cuando los número se multiplican o dividen por una potencia cualquier de 10.
Analicemos algunos ejemplos:

1- log 63,42 = 1, 80216
2- log 6,342= 0, 80216
3- log 0,6342= $\bar{1}$, 80216
4- log 0,06342= $\bar{2}$, 80216

1.13.1 Logaritmo de los números irracionales.

Un número irracional puede estar expresao de diferentes formas pero lo importante es tener en cuenta las primeras cifras significativas para el trabajo con las tablas tratadas y hallar el valor de este aproximadamente. Por ejemplo si se quiere determinar:
log¶ = log 3,1416 = 0, 49715 Como es un número mayor que 10 000 no aparecen directamente en la tabla y es necesario utilizar el procedimiento explicado anteriormente.

Cuando el número aparece expresado en forma de raíz es conveniente tomar el logaritmo de la cantidad subradical y dividirlo por el índice del radical. Por ejemplo si se quiere calcular:
$\log \sqrt{5} = \frac{\log 5}{2} = \frac{0{,}69897}{2}$ = 0,836044

Si se conoce el logaritmo ¿Cómo buscar número al cual corresponde ese logaritmo?

Otro de los problemas que generalmente se presenta en la práctica al calcular es si se tiene el logaritmo de un número la forma de buscar el número al cual corresponde ese logaritmo. Esta operación se le llama antilogaritmo.

Al igual que en los casos anteriores es posible que la mantisa del logaritmo a buscar aparezca directamente en la tabla o que no esté en ella.

Para esto se procede a localizar en qué parte de la tabla se encuentra la mantisa que se busca y posteriormente en la columna del cero la fila que comienza por la tercera cifra decimal de la mantisa, o por la cifra más aproximada a ella por defecto. Una vez logrado esto se busca hacia la derecha siguiendo la misma fila hasta obtener la columna donde aparecen los últimos dígitos de la mantisa. Entonces para escribir el número correspondiente basta tomar el que a parece frente a la propia fila, en la columna N, y yuxtaponerle el dígito que corresponde a la columna donde fue localizada la mantisa. Ahora falta la determinación de la posición del punto decimal en el número hallado para lo cual se suma 1 a la característica y si resulta un número positivo se separan tantas cifras enteras como indique ese número, si resulta ser cero se colocará el punto delante de la primera cifra significativa de la izquierda, y si es un número negativo. Se dispondrán tantos ceros entre la coma del decimal y la primera cifra significativa de la izquierda como indique dicho número en valor absoluto. Analicemos los siguientes ejemplos.

Calcular x si:

a- log x =2,76215   entonces x= 578,3
b- log x=6,89354 entonces x= 7826000 la característica aquí es 6 por lo que indica que el número se compone de 7 cifras enteras por lo que se agregan los ceros necesarios a la derecha para completar los dígitos del número.
c- log x = $\bar{1}$,73062 entonces x= 0,5378
d- log x= $\bar{3}$,24055   entonces x=0,00174

Si la mantisa que se da al buscarla no se encuentra exactamente en las tablas, siguiendo lo explicado anteriormente se determinan dos mantisas consecutivas entre las cuales se halla contenida la respuesta. Se toma entonces la mantisa menor y se anota el número a que pertenece, el cual es aproximadamente el número que se busca, y se procede a calcular la diferencia entre la mantisa dada y la mantisa aproximada por defecto. Se divide después esa diferencia por la diferencia tabular correspondiente, se van determinando sucesivamente los dígitos que habrá que yuxtaponer al número antes anotado para obtener el antilogaritmo que se busca. Entonces si d representa la diferencia entre las mantisas, ∂ la diferencia tabular y h lo que debe incrementarse al número correspondiente de la menor mantisa, expresado como fracción decimal de la unidad, en la hipótesis aproximada de la proporcionalidad entre las diferencias de los números y las de sus logaritmos, se tiene:

$$\frac{1}{\partial} = \frac{h}{d}$$

Despejando se obtiene: h= $\frac{d}{\partial}$ según lo anteriormente indicado.

La posición del punto decimal en el antilogaritmo se determina, de igual modo que en el primer caso, sumando una unidad a la característica del logaritmo propuesto.
Ejemplos: Calcular x si:

log x = 1,45913

Para el ejemplo al buscar en la tabla aparecen las mantisas: 45909 y 45924 entre las cuales se halla la propuesta. La mantisa menor corresponde al número 2878. La diferencia entre la mantisa menor y la dada es de 4 unidades correspondiente al último orden, dividiendo entre 15, que es la diferencia tabular encontrada, resulta 4: 15= 0,2666, luego el número que corresponde al logaritmo buscado es:
X= 28,782 pues se coloca el 2 correspondiente al primer número de la división encontrado

A partir de esto se procede a determinar la posición del punto decimal en el número hallado para lo cual se suma uno a la característica dada.
Otro de los fundamentos importantes son las operaciones con los logaritmos, para ello a continuación se presentan la forma de ejecutarlas.
Suma de logaritmos

a) 4.385659
3.210910
<u>-7. 020110</u>
0. 616679

b) -3.515873
<u>-1.979346</u>
-3.495219

En esta operación se procede teniendo en cuenta lo establecido en la suma de números, lo único que hay que cuidar es que las unidades que se llevan al terminar de sumar las mantisas, son positivas. Particularmente en el ejemplo b al sumar las décimas de los dos números correspondientes al: 5 más 9 que dan como resultado 14 entonces se lleva una unidad positiva, que sumada con -3 y -1 que son los elementos de la característica y da como resultado tres unidades negativas, que corresponden a la característica del número buscado.

Resta de logaritmos. Para esto se presentan las diferentes alternativas y en lo cual hay que aplicar explicado anteriormente para la suma al llevar de la mantisa a la característica para el cálculo.

a) Dos positivos
3.189853 - 2.189876
3.189853
<u>2.189876</u>
0.999977

b) Positivo y negativo
0.198764 – (– 2.998764)
0.198764
–<u>2.998764</u>
1. 200000

c) Negativo y positivo

–-1.009876 – (3.802561)

d) Dos negativos

–3.194569– (–4.985670)

–1.009876	–3.194569
3. 802561	–4.985670
–5.207315	0.208899

En el caso del inciso b, cuando se dice de nueve al once van dos y llevo uno, ese uno que llevo es para restar. Nótese que efectivamente se resta al 2, que, como era originalmente negativo, para restar se convierte en positivo, y disminuido por la unidad que se lleva, da una característica uno en la respuesta. Obsérvese que al restar las décimas en el inciso c, llevamos una negativa que con la negativa que posee el minuendo y con tres negativas del sustraendo (puesto que a este hay que cambiarle el signo de la característica), nos da -5.

En el caso del inciso d, se dice que de nueve a once van dos y llevo una negativa que con tres negativas del minuendo nos dará cuatro negativas. Al cambiar de signo a la característica del sustraendo, esta se convierte en más cuatro y se obtiene entonces cero en la característica del resultado.

Multiplicación de logaritmos por números enteros.

En la multiplicación de logaritmos por números enteros se consideran las particularidades de las características por ello se presentan los siguientes casos posibles:

La multiplicación de un logaritmo con característica positiva o cero por un número positivo se efectúa como si se tratara de una multiplicación de cualquier número normalmente, ejemplo:

0.186754 x 8 = 1.494032

Si se trata de una multiplicación de un logaritmo con característica negativa por un número positivo, se debe tener en cuenta que como la característica es lo único negativo, entonces, al multiplicar las unidades se obtiene como resultado un número negativo, ejemplo:

-3.151671 x 2 = -6.303342

Para la multiplicación de un logaritmo con característica positiva o cero por un número negativo, entonces, como la mantisa es positiva y el número negativo, el resultado de la multiplicación será negativo:

0.181565 x -3 = -0.544695 con mantisa negativa o 1.455305 con mantisa positiva porque estás utilizando el cologaritmo.

Debe tenerse mucho cuidado y convertir siempre esa mantisa negativa a positiva usando el procedimiento del cologaritmo.

El cologaritmo se determina así:

-3.181625 = 2.818375

2.856329 = -3.143671

Se resta la primera cifra significativa de la derecha de diez, y todas las demás de nueve, esto para la mantisa. En el caso de la característica se obtiene cambiando el signo a la que tiene el logaritmo y restándole una unidad.

En el caso de la multiplicación de un logaritmo con característica negativa por un número negativo como el siguiente: -3.181516 x -3

El logaritmo es equivalente a: -3.000000 + .181516.

Multiplicando separadamente ambas cantidades y sumando los productos se obtiene el resultado, en este caso:

-3.000000 x -3 = + 9.000000
.181516 x -3 = - .544548
8.455452

En el caso de la división de un logaritmo con característica positiva por un número entero positivo se hace como si fuera una sencilla división de números cualesquiera, por ejemplo:

3,758695: 4 =. 93967375

Cuando se divide un logaritmo con característica negativa entre un número positivo, entonces, si dicho número cabe íntegramente en la característica, se divide ésta entre aquél normalmente y el cociente es la característica negativa del resultado. La mantisa se sigue dividiendo como decimales ordinarios.

-5,786540: 5 = -1,157308

Si al dividir no cabe íntegramente, entonces es necesario aumentarle una cantidad tal, que haga la característica múltiplo del número. Esto que se le suma es negativo, y para que no se altere la división es necesario sumarle esa misma cantidad positiva.

-3.457294: 4 = -1.364323
- 3 – 1 = - 4
- 4 + 1.457294 + 4 ahora se dividen ambas expresiones
25 -1
17 0.364323
12 -1.364323
09
14
2

Nótese que, como 3 no cabe entre 4, aumentamos una negativa y una positiva.

Se divide -4 entre 4 y se obtiene -1 al efectuar da cero el resto de la división y se continúa con la división de 1,457294 entre 4 y el resultado da: 0,364323 y al sumar ambos cocientes es decir: –1 + 0,364323 =–1,364323

También el antilogaritmo es importante conocerlo aunque no es muy utilizado, en ocasiones en la Matemática Financiera, si es posible emplearlo.

Se denomina antilogaritmo al número que corresponde a un logaritmo uno y se simboliza por $\log^{-1}$ o antilogaritmo x = n.

Por ejemplo: 562935 es el antilogaritmo de 5.750458 o también se puede escribir:

Si el logaritmo de 2 = 0.301030

El antilogaritmo de 0.301030 = 2.

En la búsqueda del antilogaritmo de un logaritmo pueden ocurrir dos cosas:

- Que la mantisa del logaritmo se encuentre en las tablas.
- Que la mantisa del logaritmo no se encuentre en las tablas, en este caso hay necesidad de interpolar, cuando no existan tablas de partes no proporcionales.

Todos los fundamentos y argumentos tratados anteriormente son esenciales para el trabajo con la Matemática Financiera.En la actualidad la Matemática Financiera es de vital importancia para las diferentes empresas y negocios, pues cualquier tipo de transacción se sustenta en base a la comparación de los intereses, capitales, tasas, tiempo, monto y saldos, los cuales posibilitan la toma de decisiones más trascendentes para el manejo de los recursos financieros.

Por su importancia tiene un papel primordial en la formación de los profesionales de las Ciencias Económicas y Empresariales.

Capítulo II Interés. Su clasificación

2.1 El Interés.

Cuando una persona utiliza un bien que no es de su propiedad; generalmente debe pagar un dinero por el uso de ese bien; por ejemplo, se paga un alquiler al habitar un apartamento o vivienda que no es de nuestra propiedad. De la misma manera cuando se pide prestado dinero generalmente se paga una renta o valor por la utilización de ese dinero. En este caso la renta recibe el nombre de interés o intereses.

En otras palabras se podría definir el interés, como la renta o los réditos que hay que pagar por el uso del dinero prestado. También se puede decir que el interés es el rendimiento que se tiene al invertir en forma productiva el dinero.

Interés: es la cantidad suplementaria que entrega el deudor al prestamista por la utilización de los recursos monetarios, lo cual se puede considerar también como el precio de la operación de préstamo.

El interés se representa por la letra **I**. En concreto, el interés se puede mirar desde dos puntos de vista.

- Como costo de capital: cuando se refiere al interés que se paga por el uso del dinero prestado.
- Como rentabilidad o tasa de retorno: cuando se refiere al interés obtenido en una inversión.

En los préstamos para el interés es imprescindible considerar los elementos que intervienen en ese proceso, los cuales son:

1- La cantidad dada en préstamo, que es el capital principal y se representa por la letra P.
2- La tasa de interés, que es el % adicional que entrega el prestatario al prestamista y que se identifica por la letra i.

Por ejemplo, si la tasa de interés es i = 0,08 (ocho centésimas), esto significa que se pagan $0,08 (o sea ocho centavos) por cada $1,00 recibido. En esta forma la tasa está expresada como “tanto por uno”. Cuando se representa como i= 8%, entonces expresa que se pagan $8,00 por cada $100,00 recibidos. Las tasas de interés expresadas en por ciento y como tanto por uno se representan a continuación por su equivalencia:

a) 10% = $\frac{10}{100}$ = 0,10

b) 2,5% = $\frac{2,5}{8}$ = 0,025

c) 0,9 % = $\frac{0,9}{100}$ = 0,009

3- El tiempo establecido para la devolución del préstamo se da en: años, meses, días, entre otras formas y que se identifica por la letra t.

4- El interés, conocido también como valor porcentual, que es la suma suplementaria que entrega el deudor al prestamista como resultado de la aplicación de la tasa de interés al principal en el tiempo establecido se identificará como I.

Existen dos tipos o clases de interés: Interés simple y compuesto. ¿Qué los caracteriza?

El interés simple: es el proporcionado por el principal en el tiempo establecido a una tasa determinada.

El interés compuesto: es el que se obtiene cuando al final de cada unidad de tiempo, a una tasa determinada, el interés se agrega al principal para devengar nuevos intereses. Así el principal no permanece invariable, es por tanto diferente el valor porcentual obtenido en cada período de tiempo de igual duración.

2.1.1 Interés Simple.

Interés simple: es la cantidad de dinero que se obtiene en función de la tasa de interés i y varía en razón directa con la cantidad de dinero prestado P y el tiempo t de duración del préstamo.
Esto permite obtener que: $I = P\ t\ i$ (1)

En el interés simple los intereses devengados en cada intervalo unitario son iguales. Como puede constatarse a partir de la fórmula el interés es directamente proporcional al principal, el tiempo y la tasa de interés. Fundamento importante para la práctica financiera.

Ejemplo 1.
Si una entidad presta $400.00 por un período de 3 años y las condiciones de préstamo o tasa de interés fue del 6% anual. ¿Cuál es el interés acumulado en el tiempo del préstamo?
Datos

P= $400.00	Conocemos que	$I = P\ t\ i$
t= 3 años	Sustituyendo	$I = 400 \times 3 \times 0{,}06$
i= 6%		$I = 72$

I=? Respuesta. El interés acumulado es de $72.00.

Al finalizar el período de 3 años, en que fue concedido el préstamo, el deudor entregará a la entidad que concedió el préstamo un total de $472.00, por concepto de principal e intereses, ese total se denomina Monto.

Usualmente el interés se mide por el incremento entre la suma original invertida o tomada como préstamo, que se representada por la letra **P** y el monto o valor final acumulado o pagado que se representa por **M**.

¿Qué es el monto?

Definición: El monto (que se denota por M) es la suma del capital principal (P) y el interés o valor porcentual (I).

Es decir: $M = P + I$ (2)

Si a partir del concepto de interés dado anteriormente y la fórmula (I) esta se sustituye en la (II) entonces, se obtiene:

$$M = P + (P\ t\ i)$$

Extrayendo factor común: $M = P\ (1 + t\ i)$ (3)

También de lo expuesto anteriormente se desprende que si hacemos un préstamo o una inversión de un capital de **$P,** después de un tiempo **t** se tendría una cantidad acumulada de **$M,** entonces se puede representar el interés pagado u obtenido, mediante la siguiente expresión:

I = M – P   (4)

Analizando lo anteriormente tratado, se puede plantear que el interés es una función directamente proporcional de tres variables: el capital inicial (P), la tasa de interés (i) y el tiempo (t). Entre mayor sea alguno de los tres, mayor serán los intereses. Pues matemáticamente por la expresión los términos son directamente proporcionales.

Las razones por la existencia del interés se deben a:

1- El dueño del dinero (prestamista) al cederlo se descapitaliza perdiendo la oportunidad de realizar otras inversiones atractivas.
2- Cuando se presta el dinero se corre el riesgo de no recuperarlo o perderlo, por lo tanto, el riesgo se toma si existe una compensación atractiva.
3- El dinero está sujeto a procesos inflacionarios y devaluatorios en cualquier economía, implicando pérdida en el poder adquisitivo de las compras.
4- Quien recibe el dinero en préstamo (prestatario) normalmente obtiene beneficios, por lo cual, es lógico que el propietario del dinero, participe de esas utilidades.

Ejemplo 2

Si se deposita en una institución financiera la suma de $ 1 200.00 y al cabo de 8 meses se tiene un acumulado de $ 1 400.00. ¿Cuál es el valor del interés obtenido?

Datos

M=$ 1 400.00

P=$ 1 200.00

t=8 meses

I:?

Para calcular el valor del interés se procede de la siguiente forma:

I= M - P= 1 400.00 – 1 200.00 = $ 200.000

La cantidad suplementaria que se recibe por el depósito, una vez transcurrido el tiempo de los 8 meses que se depositó el dinero en la institución financiera se obtienen $ 200.00, lo cual se denomina valor del dinero en el tiempo y su medida, son los intereses producidos.

2.2 Tasa de interés.

La tasa de interés mide el valor de los intereses en porcentaje para un período de tiempo determinado. Es el valor que se fija en la unidad de tiempo por cada cien unidades monetarias ($100) que se invierten o se toman en calidad de préstamo, por ejemplo, se dice: 25% anual, 15% semestral, 9 % trimestral, 3% mensual.

Cuando se fija el 25% anual, significa que por cada cien pesos que se inviertan o se prestan, se generarán de intereses $ 25.00 cada año. Si la tasa de interés es 15% semestral, entones por cada cien pesos se recibirán o se pagarán $ 15.00 cada seis meses. Si la tasa es 9% trimestral se recibirán o se pagarán $ 9 de manera trimestral, y si la tasa es del 3% mensual, se recibirán o se pagarán $ 3 cada mes.

La tasa de interés puede depender de la oferta monetaria, las necesidades, la inflación, las políticas del gobierno, entre otros factores. Es un indicador muy importante en la economía y la finanza de las personas, instituciones y países, porque le coloca valor al dinero en el tiempo.

Matemáticamente la tasa de interés, se puede expresar como la relación que se da entre lo que se recibe de interés (**I**) y la cantidad invertida o prestada, para un período de tiempo establecido. Entonces, se obtiene:

$$i = \frac{I}{P} \quad (5)$$

La tasa de interés siempre se presenta en forma porcentual, así: 7% mensual, 18% semestral, 35% anual, pero cuando se usa en cualquier ecuación matemática para el cálculo, se hace necesario convertirla en número decimal, por ejemplo: 0,07; 0,185 y 0,35.

La unidad de tiempo generalmente usada para expresar las tasas de interés es el año. Sin embargo, las tasas de interés se expresan también en unidades de tiempo menores de un año. Cuando a la tasa de interés, no se le especifica la unidad de tiempo, se supone que se trata de una tasa anual.

Ejemplo 3

Una entidad le presta a una persona la suma de $ 2 000.00 y al cabo de un mes le paga $ 2 050.00. ¿Cuál es el valor de los intereses y de la tasa de interés pagada?

Datos

P=$ 2 000.00 Dado que I= M - P

M= $ 2 050.00 Sustituyendo se obtiene I = $ 2 050.00 - $ 2 000.00

I=? I= $50.00

i=?

Entonces como $i = \frac{I}{P}$

Sustituyendo en la fórmula $i = \frac{50.00}{2000.00}$ = 0,025=2,5%

Respuesta. El interés tiene un valor de $50.00 y la tasa de interés pagada es del 2,5% o lo que es lo mismo de 0,025.

Otro fundamento importante de la Matemática Financiera es la clasificación del interés simple. Este puede ser:

- ordinario o comercial.
- real o exacto.

¿Qué caracteriza a cada uno?
El interés simple ordinario o comercial es el que se calcula considerando el año de 360 días.

El interés simple real o exacto es el que se calcula considerando el año de 365 días y de 366 días, si se trata de un año bisiesto.

En las operaciones financieras generalmente se acostumbra a calcular los intereses tomando como base el año de 360 días y los meses de 30 días.

Sobre la base de lo anteriormente expresado para calcular el interés o valor porcentual devengado por un principal durante un tiempo establecido inferior a un año, se debe sustituir en la fórmula (1) el valor de t, por su equivalente, que en el interés comercial es de 360 días y en el real es de 365 o 366 si el año es bisiesto, lo cual se concreta de la siguiente forma:

$$t = \frac{días}{360}; \quad t = \frac{días}{365} \quad o \quad t = \frac{días}{366}$$

Es fundamental destacar que en los problemas financieros donde se utilizan las tasas de interés es preciso en ocasiones, calcular el tiempo entre dos fechas dadas, ya que los préstamos se pueden realizar por: años, meses, días; por años y meses, por meses y días y por años con meses y días.

En el proceso de cálculo del interés el tiempo ocupa un lugar importante dado por las irregularidades del calendario, ya que los diversos meses no contienen el mismo número de días. Este hecho provoca que existan diferentes formas para determinar el interés atendiendo al tiempo.

Debemos tener presente que como el interés es un pago que se hace por el uso del dinero tomado en préstamo, para que el deudor pueda utilizarlo es preciso que transcurra el tiempo. Por ello es esencial la determinación del tiempo de duración entre dos fechas, así como la consideración del total de días que tiene el año.

Hay que considerar en la determinación del período de duración entre dos fechas que se excluye el primer día y se incluye el último, aunque en algunas operaciones y países se incluyen ambos. Esto depende del convenio o compromiso de pago de la fecha final. Por ejemplo:

-Un préstamo adquirido el 10 de agosto a devolver en 5 meses corresponde hacer la entrega el 10 de enero. Se habla de meses.

-Una deuda contraída el 10 de agosto para devolver en 120 días, aquí el tiempo se da en días, por lo que el número exacto de días para hacer la devolución corresponde al 8 de diciembre. Se excluye el primer día y se cuentan los días exactos transcurridos.

Si se quiere determinar el interés comercial y el exacto de $ 1 000 000.00 al 6% adquirido como préstamo por un día. ¿Cómo proceder y cuál es el mejor resultado?

Datos.	I. Comercial.	I. Exacto
P= $1 000 000.00	I= P t i	I= P t i
i= 6%=0.06	I= 100 000 x 1/360 x 0, 06	I = 100 000x 1/365 x 0, 06
t= $\frac{1}{360} o \frac{1}{365}$	I= 16.66	I= 16.43

Como se observa en los resultados obtenidos el interés comercial a un día es ligeramente mayor que el interés exacto.

Observe que en el interés ordinario o comercial el denominador al expresar el tiempo es de 360 y en el real o exacto puede ser 365 o 366 días.

En la práctica son los más usados generalmente, aunque para el cálculo pueden existir otras alternativas que se aplican en algunos países y situaciones. Es decir:

-el interés ordinario o comercial puede calcularse considerando el tiempo como:

a) t= $\frac{(No.exacto - de - días - del - período)}{360}$

b) t= $\frac{(no.de - días - con - meses - de - 30 - días)}{360}$

- el interés real o exacto puede calcularse considerando el tiempo como:

a) t= $\frac{(No.exacto - de - días - del - período)}{365 - o - 366}$

b) t= $\frac{(no.de - días - con - meses - de - 30 - días)}{365 - o - 366}$

Es imprescindible en todo esto considerar la forma para la determinación del período de duración entre dos fechas lo cual puede hacerse por la tabla cuando se busca el número exacto o de forma directa contando los días. Pero también pueden considerarse los meses de 30 días.

En el trabajo con el interés simple para realizar los cálculos de manera correcta, es conveniente y necesario el manejo de la tabla de días, para determinar de forma exacta los días que transcurren entre una fecha y otra, lo cual, es importante para el interés bancario y el racional.

La construcción de la tabla se concreta por asignarle a cada día del año un número en forma consecutiva; esta asignación va desde el número 1, que corresponde al primero de enero, hasta el número 365, que corresponde al 31 de diciembre. Cuando el año es bisiesto, hay que adicionar un día, a partir del primero de marzo, por lo cual, el 31 de diciembre sería el día 366.

La tabla siguiente ofrece las posibilidades de estos cálculos.

	ene.	feb.	mar.	abr.	may.	jun.	jul.	ago.	sep.	oct.	nov.	dic.
enero	365	31	59	90	120	151	181	212	243	273	304	334
febrero	334	365	28	59	89	120	150	181	212	242	273	303
marzo	306	337	365	31	61	92	122	153	184	214	245	275
abril	275	306	334	365	30	61	91	122	153	183	214	244
mayo	245	276	304	335	365	31	61	92	123	153	184	214
junio	214	243	273	304	334	365	30	61	92	122	153	193
julio	184	215	243	274	304	335	365	31	62	92	123	153
agosto	153	184	212	243	273	304	334	365	31	61	92	122
septiembre	122	153	181	212	242	273	303	334	365	30	61	91
octubre	92	123	151	182	212	243	273	304	335	365	31	61
noviembre	61	92	120	151	181	212	242	274	304	334	365	30
diciembre	31	62	90	121	151	182	212	243	274	304	335	365

Esta se utiliza cuando se necesita calcular la cantidad exacta de días que existen entre dos fechas establecidas. En ella se indica cuántos días hay desde cualquier fecha de un mes, hasta idéntica fecha de cualquier otro, bien sea dentro del año o del siguiente.

El manejo de la tabla para la determinacion de las fechas se resume en los siguientes pasos:

1. Localice el mes de inicio de la operación en la fila correspondiente.
2. Localice el mes de conclusión de la operación en la columna que corresponda.
3. La intersección de la fila (fecha inicial) y la columna (fecha final) indica el número exacto de días entre idénticas fechas de ambos meses.
4. Si la fecha final es mayor que la inicial, se suma la diferencia al número que aparece en la intersección fila-columna. Por el contrario, si la fecha final es menor que la inicial se restará la diferencia.

En la práctica es muy usual el cálculo del tiempo transcurrido entre dos fechas, dato que se puede determinar con facilidad utilizando este tipo de tabla.
Analicemos la siguiente situación:

Ejemplo 4.

Determinar el interés de \$100 000.00 impuestos al 6%, desde el 10 de agosto de 2014 al 10 de febrero de 2015.

Datos

P=\$ 100 000.00
i=6%= 0,06
t:?
i:?
Aquí 184 es el número exacto de días que se obtiene en la tabla o mediante el conteo de los días exactos. En el caso del número de días obtenidos considerando los meses de 30 días se logra mediante el producto: 30 días x 6 meses=180 días.

Utilizando el interés ordinario o comercial el tiempo puede calcularse considerando:

a) t= $\frac{(No.exacto - de - días - del - período)}{360}$

t= $\frac{184}{360}$ = 0,51

b) t= $\frac{(no.de - días - con - meses - de - 30 - días)}{360}$

t= $\frac{180}{360}$ = 0,50

Observe que en el primer caso el resultado es mayor entonces al calcular el interés para ambos respectivamente se tiene:

a) I= P t i = 100 000 x $\frac{184}{360}$ x 0,06 = 100 000 x 0,51 x 0,06= \$3 066.66
b) I= P t i = 100 000 x $\frac{180}{360}$ x 0,06= 100 000 x 0,50 x 0,06= \$3 000.00

En estas dos alternativas para el cálculo del interés ordinario o comercial observe que cuando el numerador es mayor y se divide por el mismo denominador, el resultado del cociente también es mayor. En la práctica financiera se utiliza con más frecuencia la segunda de estas opciones. El primer caso es considerado como método mixto y utilizado por las empresas comerciales así como en los bancos para los pagarés y el segundo usado en el pago de obligaciones y cuentas bancarias.

Por su parte el interés real o exacto puede calcularse considerando el tiempo como:

a) t= $\frac{(No.exacto - de - días - del - período)}{365 - o - 366}$

$t = \frac{184}{365} = 0{,}5041$

t= 0,50 41

b) $t = \frac{(no.de - días - con - meses - de - 30 - días)}{365 - o - 366}$

Proceso poco usado en la práctica.

$t = \frac{180}{365} = 0{,}4931$

En el primer cálculo el resultado es mayor, entonces al calcular el interés se obtiene:

a) I=P t i = 100 000 x 0,5041 x 0,06 = $3 024.60
b) I= P t i= 100 000 x 0,4931 x 0,06= $2 958.60

En estas dos alternativas de cálculo para el interés real o exacto al considerar el número exacto de días para el préstamo en el numerador el resultado es mayor que en el otro.

Esta primera alternativa del interés real o exacto es muy utilizada en los bancos para calcular el interés de los depósitos. Y la segunda es muy poco utilizada en la práctica generalmente.

Estos fundamentos son esenciales para la práctica financiera en las entidades y los bancos

A continuación se presentan diferentes ejemplos resueltos:

Ejemplo 5:
Una persona recibe un préstamo de $2 400.00 por 7 meses a una tasa de interés del 2,5% anual.

a) Determine el monto a pagar utilizando el interés comercial.
b) Calcule el monto aplicando el interés real.

Compare ambos resultados.
Datos
P= $2 400.00
t = 7 meses = 210 días
i = 2,5% = 0,025

a)-Cálculo con el interés comercial

M = P (1 + t i)

$M = \$2\ 400.00\ (1 + \frac{210}{360} \text{ x } 0{,}025)$

M = $2 400.00 (1 + 0,0145833)
M = $2 400.00 (1,0145833)
M = $ 2435.00

Puede suceder también que en lugar de esos días sean los siguientes, ejemplo t= $\frac{270}{360}$, fracción que se corresponde con valores tales como: $\frac{9}{12}$ ó $\frac{3}{4}$ que son las tres cuartas partes del año. También cuando el tiempo se da en meses este puede expresarse como:

t = $\frac{meses}{12}$.

b)- Cálculo con el interés real.

M = P (1 + t i)

M = \$2 400.00 (1 + $\frac{210}{365}$ x 0,025)

M = \$2 400.00 (1 + 0,014383561)

M = \$2 400.00 (1,0145833)

M = \$ 2434.52

Como puede observarse el interés comercial es de \$ 2435.00 y el real asciende a \$ 2434.52, evidencia que es mayor el comercial.

Ejemplo 6.

Se necesita calcular el interés o valor porcentual comercial y real de un préstamo efectuado por un valor de \$ 3000.00 al 8% anual durante un período de 60 días.¿Cuál de los dos es mayor?

Datos

P= \$ 3000.00

t= 60 días

i= 8% = 0,08

I:?

Interés comercial I= P t i

I= \$ 3000.00. ($\frac{60}{360}$) (0, 08)

I= \$40,00

Interés real: I= P t i

I= \$ 3000.00. ($\frac{60}{365}$) (0,08)

I= \$39, 45

Es importante señalar que el interés es ligeramente inferior cuando se calcula el interés real, que cuando se aplica el interés comercial. Este es un fundamento esencial en el proceso de cálculo del interés.

Entre el interés comercial y el real existe una relación que se expresa mediante las siguientes expresiones:

Donde Ic es interés comercial e Ir es el interés real

Ic= Ir (1 - $\frac{1}{72}$) y Ir = Ic (1 - $\frac{1}{73}$)

Ejemplo 7

Calcule los días transcurridos entre el 5 de abril de 2013 y 28 de diciembre del mismo año.

Solución

Según la tabla, los días transcurridos entre el 5 de abril y el 5 de diciembre son: 244 días, entonces como la fecha inicial es menor que la final, se resta a la mayor fecha, la menor; aquí: 28 – 5 = 23. Posteriormente se suman ambos resultados es decir: 244 + 23 = 267 días.

Esta forma es más práctica, aunque para este mismo cálculo también se puede proceder como sigue: Según la tabla, los días transcurridos entre el inicio del año y el 5 de abril son 95 días, mientras; los días entre el inicio del año y el 28 de diciembre son 362, por lo tanto, por diferencia 362 – 95 = 267 días.

|------------------|-----------------------|
0 05- 04 28-12

El cálculo realizado anteriormente, se refiere al año real o exacto, si desean calcular los días con base al año comercial (360 días, es decir, meses de 30 días), se debe seguir el siguiente procedimiento.

		Año	Mes	Día
	Fecha actual:	2013	12	28
(-)	Fecha inicial:	2013	04	05
		0	8	23

Como es en el mismo año hay 8 meses y 23 días: 8x30 + 23 = 263 días

Ejemplo 8

Hallar los días transcurridos, entre el 20 mayo de 2012 y 25 de noviembre de 2013.

Solución

Teniendo en cuenta que la tabla está diseñada para un año, se deben calcular, por separado los días que hay en cada año y luego sumarlos. Los días transcurridos entre 20 de mayo de 2015 y el 31 de diciembre de 2012, son:
214 + 11= 225. También los días transcurridos entre el primero del año 2013 y el primero de noviembre de 2013 son 304, más los días del primero de noviembre al 25 del mismo mes, son 24; luego se obtiene 304 + 25 = 329. Entonces, los días transcurridos entre el 20 mayo de 2012 y 25 de noviembre de 2013, son: 225 + 329 = 554 días

|____________________|______________________|
20-05-2012 31-12-2012 25-11-2013

Ahora si el año se considera de 360 días (año comercial), se obtendrá como respuesta 545 días.

		Día	Mes	Año
	Fecha actual:	25	11	2013
(-)	Fecha inicial:	20	05	2012
		5	6	1

De lo anterior se deduce que hay:
1 año, 6 meses y 5 días: 1x360 + 6x30 + 5 = 545 días

También se combinan estos fundamentos estudiados en problemas y situaciones prácticas generales como las siguientes:

Ejemplo 9.

Se necesita calcular el interés de \$ 10 000.00 prestados al 5% anual a interés comercial, el día 7 de abril de 2013 que deben ser devueltos el 22 de septiembre del mismo año.

Datos.

P= \$ 10 000.00

i = 5% = 0.05

t =?

I=?

Para obtener el resultado pedido es preciso calcular primeramente el tiempo entre las dos fechas. Como se trata de interés comercial no es necesario utilizar la tabla.

Cálculo del tiempo:

De abril 7 a septiembre 7:	150 días
De septiembre 7 a septiembre 22:	15 días
Total	165 días

I = P t i

I = \$ 10 000.00 $\left(\frac{165}{360}\right)$ (0,05)

I = \$ 229,16

Es usual no incluir en los cálculos del interés comercial el día inicial y en períodos mayores a un año, es costumbre calcular el tiempo aproximado considerando los años de 360 días y los meses de 30 días

Ejemplo 10.

Se pretende saber cuál es la tasa de interés real a la que fue dado un préstamo ascendente a \$ 20 000.00, el día 12 de febrero de 2013, y devueltos el 16 de octubre de 2014, si el monto de la deuda fue de \$22 800.00.

Datos:

P= \$ 20 000.00

M= \$22 800.00.

t :?

i:?

Cálculo del tiempo buscando en la tabla se obtiene:

De febrero 12 de 2012 a febrero 12 de 2013:	365 días
De febrero 12 de 2013 a octubre 16 de2013:	242 días
	607 días

t= 607 días para el cálculo se expresa t= $\frac{607}{365}$ =1,663013

Como M= P (1 + t i)

Despejando i se obtiene: M / P = 1 + t i

M/P – 1 = t i

i = $\frac{(M-P)}{Pt}$ Sustituyendo se tiene

$$i = \frac{(\$22800.00 - \$20000.00)}{\$20000.00 x 1,663013} = \frac{2800}{33260.36}$$

i= 0, 084 = 8,4%

Respuesta. La tasa de interés real a la que fue dado el préstamo, es del 8,4%.

2.4 Relación de proporcionalidad para los cálculos con las fórmulas.

Uno de los aspectos esenciales a tener presente y que influyen en los procesos de trabajo de la Economía con las Finanzas desde la Matemática está la relación de proporcionalidad que existe entre los componentes que conforman las diferentes fórmulas para los cálculos donde se utilizan. Esta proporcionalidad puede ser directa o inversa, lo cual incide en los resultados del cálculo por lo que hay que analizarlo según la situación a que corresponda, por su ocurrencia directa o inversa en el aumento y disminución de los resultados.

Analicemos sobre estos sustentos los siguientes ejemplos:

1.- Una agencia paga el 4% de interés simple sobre un depósito a plazo. ¿Cuál es el pago anual que corresponde a un depósito efectuado de $250 000.00?

Datos
i= 4%=0,04
t=1 año
P=$250 000.00 como la fórmula del interés es I=Pti al sustituir se tiene
I=$250 000.00 x 1x0, 04
I=$10 000.00

Respuesta. El interés anual correspondiente al depósito es de $10 000.00.

¿Qué sucede con el interés si se aumenta alguno de los siguientes componentes: principal, interés o tiempo en la fórmula?

Cualesquiera de los componentes que aumente incide de forma directa también en el crecimiento del interés total, pues existe una relación directamente proporcional, expresada mediante el producto en la fórmula.

Para este mismo ejemplo si se quiere determinar el Principal (P) manteniendo los demás valores constantes, entonces en la fórmula hay que despejar P y se obtiene:

$P = \frac{I}{txi}$ para lo cual sustituyendo en la fórmula se tiene:

$$P = \frac{\$10000.00}{1x0,04} = \$250\ 000.00$$

¿Qué sucede si se aumenta el interés o el tiempo?

Analicemos si el tiempo aumenta en 1 año esto significa que ahora se trata de dos años.

Al sustituir en la fórmula y efectuando los cálculos se obtiene:

$$P= \frac{\$10000.00}{2x0,04} = \$125\ 000.00$$

Como puede observarse con este proceso de cálculo el principal disminuyó en la mitad del valor en relación con el que tenía anteriormente, lo que significa que es inversamente proporcional, o sea, si aumenta el valor del tiempo o la tasa disminuye el principal. Si ocurre lo contrario, es decir disminuye el tiempo entonces aumenta el principal.

En las expresiones matemáticas cuando se trata de producto se incide de forma directamente proporcional en el resultado, ya sea por aumento o disminución. En el caso del cociente en cualesquiera de las expresiones sucede lo contrario.

Estos sustentos son imprescindibles a tener presente de forma sistemática durante los procesos de cálculo por su incidencia y efecto en los resultados correspondiente. En próximas fórmulas más complejas por sus componentes la situación es similar en función de sus características relacionadas con los fundamentos matemáticos precisados anteriormente, los que inciden en los resultados financieros, los cuales son esenciales en situaciones concretas, cuando sea necesario.

Analicemos la siguiente situación:

Un cliente de una agencia bancaria está interesado en saber: ¿cuál es el capital que debe depositar en una cuenta que va a abrir, para obtener un monto de $84 000.00, en un período de 5 años si el banco paga un interés del 4% anual simple.

Datos
M=$84 000.00
t= 5 años
i= 4%=0,04
P:?

Utilizando la fórmula del monto se tiene M=P (1 + t i) despejando y efectuando los cálculos se tiene:

$$P= \frac{M}{1+txi}$$

$$P= \frac{\$84000.00}{1+5x0,04} = \$70\ 000.00$$

Ante esta situación el cliente debe depositar en el banco$ 70 000.00

En este caso presentado, si aumenta el tiempo ¿Qué le sucede al principal? y ¿Cuáles son los argumente matemáticos?.

Al aumentar el tiempo entonces el principal disminuye pues según la fórmula la relación que se tiene, entre esas variables, es inversamente proporcional, lo que significa que al aumentar el tiempo el principal disminuye.

Un situación similar ocurre con la tasa de interés, en este caso, pues si aumenta la tasa y se mantienen fijos los demás indicadores, el principal disminuye por la relación de proporcionalidad inversa que existe entre ellos.

Este es un fundamento básico de la Matemática que incide en los diferentes procesos del cálculo, cuando existe una relación directamente o inversamente proporcional, aspectos determinantes a tener presentes, de forma sistemática en los procesos de cálculos, por su incidencia en las finanzas

Ejemplo de ejercicios resueltos 2.4.

1)- A usted como economista de la empresa donde trabaja el director le da como tarea que determine lo que resulta más conveniente para él hacer en función de ejecutar una inversión cuyo valor asciende a $13 400.00 la cual debe liquidar en dos años con el prestamista que le dará esa cantidad. Actualmente dispone de $12 000.00 los cuales va a depositar en el banco para lograr liquidar la deuda al concluir el período de la inversión, para ello necesita determinar de las dos alternativas de tasas de interés simple anual que le ofrecen dos bancos diferentes las cuales son: una del 6% y la otra del 5%. Por lo que necesita saber: ¿Cuál tasa es más conveniente según la información que dispone? Y ¿Por qué? Argumente.

Datos

M = $13 400.00
P = $12 000.00
t= 2 años
i_1=6%=0,06
i_2=5%=0,05
Para determinar cuál tasa es más conveniente es importante la fórmula.
M=P (1 + t i) donde a partir del valor de P y conociendo t e i se tiene que:

Hay una relación directamente proporcional entre i y M ya que a medida que aumente i también se logrará en M lo cual significa que se debe depositar el dinero en el banco que paga el 6% de interés simple anual, pues la tasa es mayor y por tanto el aumento también lo será.

Esto es posible comprobarlo matemáticamente utilizando las fórmulas en cada caso como se muestra a continuación para calcular M y comparar.

Primero para i_1=0,06

M=P (1 + t i) = $12 000.00 (1 + 2 x 0,06) = $12 000.00 x 1,12 = $13 440.00

Segundo para i_2=0,05

M=P (1 + t i) = $12 000.00 (1 + 2 x 0,05) = $12 000.00 x 1,10 = $13 200.00

Respuesta. Como puede observarse en la primera alternativa el resultado es mejor y se logra liquidar la deuda con un sobrante de $40.00.

2) Al efectuar los cálculos para el monto a interés simple si se conocen los valores de los indicadores de la fórmula como el monto y el tiempo para calcular el principal. ¿Qué sucede si la tasa de interés aumenta en el proceso de cálculo? Argumente.

Respuesta. Al efectuar el despeje en la fórmula para calcular el principal se puede apreciar que si aumenta la tasa de interés disminuye el principal pues existe una relación inversamente proporcional al despejar entre esos dos indicadores.

2. 5 Desventajas del interés simple

- Desventajas del interés simple

Para el tratamiento del interés simple por sus características se pueden plantear tres desventajas básicas, ellas son:
a) Su aplicación en el mundo de las finanzas es limitado.
b) No tiene o no considera el valor del dinero en el tiempo, por consiguiente el valor final no es representativo del valor inicial.
c) No capitaliza los intereses en los períodos y por consiguiente, el dinero pierde poder adquisitivo.

2.6 El descuento.

Otra de las operaciones de cálculo en la Matemática Financiera es el descuento.
¿Qué es el descuento?
Por sus características prácticas el descuento es una operación de crédito que se realiza normalmente en el sector bancario, y consiste en que los bancos reciben documentos negociables como: cheques, letras de cambio, pagarés, de cuyo valor nominal se descuenta una cantidad equivalente a los intereses que devengaría el documento entre la fecha en que se recibe y la fecha del vencimiento. Con este proceder se anticipa el valor actual del documento. Se define como:

Descuento: Es el valor que tiene que pagar el acreedor por cobrar una deuda antes de su vencimiento.
Entre los tipos de descuento en el interés simple están:
a) El descuento comercial o bancario.
b) El descuento racional o matemático.
En el interés compuesto, existe también el descuento compuesto que estudiaremos en el próximo capítulo.

Para el trabajo con esta operación financiera es esencial tener en cuenta que el interés simple o valor porcentual es la magnitud en que se incrementa un principal, por el tiempo que media entre la fecha en que se realiza el préstamo y su devolución. El descuento se denota por D, determina en cuánto disminuye la cantidad que se tiene que pagar en la fecha de su vencimiento a la cual se le llama Monto o valor nominal, por el tiempo que media entre esa fecha y la fecha en que se anticipa su pago.

A continuación se presenta un gráfico que describe este proceso con sus aspectos esenciales.
Gráfico 1:

P	M – D	M
x	x	x
Fecha de Préstamo	Fecha de Anticipo	Fecha de Vencimiento

Otro de los elementos esenciales del descuento es su tasa. ¿Qué es la tasa de descuento?

Se definió que el valor que paga el acreedor por percibir anticipadamente una deuda se le llama descuento y se denota por D, si esta cantidad se fija por cada cien unidades monetarias del monto anticipado por un año, se le llama tasa de descuento y se denota por d.
Generalmente se constata que la tasa de descuento d es casi siempre inferior a la tasa de interés i.

2.6.1 Descuento comercial o bancario.

Una característica esencial del descuento es que está relacionado y es directamente proporcional con el monto y el tiempo, lo que significa que a mayor monto y más tiempo, el descuento es mayor. Con esto se evidencia también que este tipo de descuento es directamente proporcional con el monto, el tiempo y la tasa de interés que se aplica, fórmula similar a la utilizada para hallar el interés, con la particularidad de que se utiliza tasa de descuento en lugar de tasa de interés. Es decir que el descuento comercial o bancario se denota por D_b y se calcula mediante la siguiente expresión:

$$D_b = M\ t\ d \quad (6)$$

Donde:
D_b: Descuento bancario
M: Monto
t: Tiempo
d: tasa de interés
De la expresión anterior se pueden calcular cada uno de los elementos en función del descuento comercial o bancario a partir del despeje.

Ejemplo 11
Una empresa solicitó un préstamo, a una agencia bancaria de $ 4 000.00 que debe devolver el 27 de diciembre de 2013. La tasa de descuento que aplica el banco es del 3% anual. Se necesita determinar cuál es el descuento y cuánto hay que pagar, si la empresa decide devolver el dinero el 27 de octubre de ese año.
Datos

M= $ 4 000.00	Fórmula
t = 2/12 = 1/6	$D_b = M\ t\ d$
d= 0,03	$D_b = \$\ 4\ 000.00.\ (\frac{1}{6}).\ (0,03)$
D_b:?	$D_b = \$\ 20.00$

Entonces el descuento es de $20.00 y el total a pagar el 27 de diciembre de 2013 ascendería a $ 4 000.00, pero al devolver la empresa el 27 de octubre de ese año tendrá que pagar: $ 4 000.00 - $20.00 = $3980.00.

En la práctica a partir de la expresión D_b = M t d y basado en la Matemática se pueden despejar cada uno de los componentes de ella según se necesiten, donde también resulta esencial tener en cuenta la relación de proporcionalidad en función de su efecto en los resultados.

2.6.2 Descuento racional o matemático.

El descuento racional, es aquel que se determina sobre el valor efectivo de un documento. Se denota por D_m y se calcula de la siguiente forma:

$$D_m = M\left(\frac{ti}{1+ti}\right) \quad (7)$$

Para el cálculo del descuento matemático se utiliza la tasa de interés i, a diferencia del bancario.

Si para el ejemplo anterior se aplica el descuento racional o matemático considerando que coinciden los valores de las tasas es decir si: i=d=3%=0,03 entonces el cálculo en este caso está dado por:

Datos

M= $ 4 000.00	Fórmula
$t = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ =1,666	$D_m = M\left(\frac{ti}{1+ti}\right)$
i= 0,03	$D_m = \$\ 4\ 000.00.\left(\frac{1.666x0,03}{1+1,666x0,03}\right)$
D_m:?	D_m = $ 19,90

Entonces la empresa tendrá que pagar $ 4 000.00 - $ 19,90 = $3980.10

Como puede observarse existe una diferencia entre los dos resultados, que hace al descuento racional o matemático más racional.

2.7 Valor actual.

Otro concepto importante de la Matemática Financiera es el valor actual. ¿Qué es el valor actual?

En las operaciones financieras resulta esencial la determinación del valor presente de los bienes que se expresan en dinero y cuya obtención se haya establecida para fecha futura. En concreto se puede necesitar conocer, cuánto vale hoy o cuánto valdrá dentro de un tiempo una deuda de $ 4 300.00 cuyo vencimiento está establecido para dentro de 8 meses.

Precisamente a partir de situaciones como esta es aplicable el concepto de valor actual.

Definición: El valor actual también llamado valor efectivo o líquido, es el valor de una obligación en el presente o en el momento de ser descontada.

Por tanto, puede plantearse que el valor presente es una suma que puesta a interés alcanzará el valor nominal o monto de la deuda, en el día de su vencimiento.

Para el cálculo del valor actual a interés simple se tiene entonces un proceso inverso al del monto que ya estudiamos. Se proyecta la deuda hacia el futuro y se le acumulan sus intereses. Por el valor actual traemos la deuda o pago al presente a partir de su vencimiento y le descontamos dichos intereses. En general, el valor actual puede verse como la diferencia entre el monto de una deuda y el descuento, es decir:

$$V = M – D \quad (8)$$

Esta expresión se concreta en la práctica atendiendo al tipo de descuento utilizado, por ello se tiene que al aplicar el descuento bancario $D_{b,}$ y se obtendrá el valor actual con descuento bancario V_b, y al aplicar el descuento matemático $D_{m,}$ se obtendrá el valor actual con descuento matemático V_m.

Es por eso que a partir de la fórmula general (8) se concreta la siguiente:

$$V_b = M – D_b$$

Y cómo conocemos que $D_b = M\, t\, d$ al sustituir en la expresión anterior se obtiene:

$$V_b = M – M\, t\, d$$

Extrayendo factor común $V_b = M\,(1 – t\, d)$ (9)

De similar forma se puede proceder con la expresión $V_m = M – D_m$ del descuento matemático.

Sustituyendo $D_m = M(\frac{ti}{1+ti})$ se obtiene: $V_m = M - M(\frac{ti}{1+ti})$ entonces extrayendo factor común se tiene:

$$V_m = M\,[1 - (\frac{ti}{1+ti})] \text{ efectuadno se logra}$$

$$V_m = M\,[\frac{1+ti-ti}{1+ti}]$$

Por lo que:

$$V_m = \frac{M}{1+ti}$$

Para el tratamiento financiero resulta importante también conocer la relación que existe entre el descuento comercial o bancario y el descuento racional o matemático, sobre la base de las fórmulas anteriores.

Hemos estudiado y establecido el descuento bancario y matemático donde su cálculo está en función del monto o valor nominal de la deuda, sin embargo para estos es usual que el descuento matemático se obtenga también en función del valor actual mediante la expresión:

$$D_m = V_m\, t\, i \quad (10)$$

Por una u otra vía para la obtención del descuento, entre ambos tipos de descuento no hay una diferencia sensible, según el ejemplo analizado anteriormente. Esta relación se presenta a continuación, sobre la base de las fórmulas conocidas de valor actual, y suponiendo que i= d se tiene:

Descuento matemático | Descuento bancario.

$V_m = \frac{M}{1+ti}$ | $V_b = M\,(1 - t\,i)$

Estableciendo la relación mediante la razón entre ambos descuentos se obtiene:

$$\frac{Vm}{Vb} = \left[\frac{M}{1+ti}\right] : [M\,(1 - t\,i)]$$

Efectuando se obtiene:

$$\frac{Vm}{Vb} = \frac{1}{(1+ti)(1-ti)}$$

Efectuando en el denominador el producto de la suma y diferencia de los factores se obtiene $1 - (t\,i)^2$ y despejando en la formula V_b como resultado se tiene:.

De donde $V_b = V_m\,[1 - (t\,i)^2]$ (11)

Ahora despejando V_m se obtiene: $V_m = \frac{Vb}{1-(ti)^2}$ (12)

A partir de la fórmula (11), se puede constatar que para períodos iguales y a una misma tasa i=d, el valor actual con descuento bancario, es siempre menor que el valor actual con descuento matemático.

Analicemos la aplicación práctica de lo tratado anteriormente mediante el siguiente ejemplo.

¿Cuál es el valor actual con descuento bancario conociendo que el valor actual matemático es de $6 000.00 impuesto a una tasa del 2% anual durante dos años?

Datos

V_m= $6 000.00

t= 2 años

d=i=2%=0,02

V_b:?

Como $V_b = V_m\,[1 - (t\,i)^2]$ sustituyendo y efectuando se tiene:

V_b = $6 000.00 [1 – (2 x 0,02)²]= $6 000.00 [1 – (0,02)²]

V_b =$6 000.00 [1 – 0,0016] =$6 000.00x 0,9984

V_b = $5 990.40

Respuesta. El valor actual con descuento bancario es de $5 990.40

Si para la situación anterior se tiene el valor actual del descuento bancario es de $ 6 000.00 a una tasa del 2% efectivo anual por dos años.¿Cuál es el valor actual del descuento matemático correspondiente?

Datos

V_b:= $6 000.00

t= 2 años

d=i=2%=0,02

V_m?

Como $V_m = \frac{Vb}{1-(ti)^2}$ efectuando la sustitución

$$V_m = \frac{\$6000.00}{1-(2x0,02)^2} = \frac{\$6000.00}{1-(0,04)^2} = \frac{\$6000.00}{1-(0,0016)}$$

$$V_m = \frac{\$6000.00}{0,9984} = \$6\ 009.61$$

Respuesta. El valor actual con descuento matemático es de $6 009.61

Según los resultados se contata que para períodos iguales y la misma tasa el valor actual com descuento bancário es mejor. Lo cual está relacionado con la proporcionalidad de las varialbes que intervienen en el proceso.

Los conceptos y fundamentos estudiados en este capítulo son importantes para el trabajo futuro de los siguientes temas. Posteriormente se presenta un conjunto de ejercicios resueltos con la aplicación de los contenidos tratados.

2.8 Relación entre la tasa de interés simple y la tasa de descuento simple correspondiente.

Es conocido que M = P (1 + ti) y despejando se obtiene:

$$P = \frac{M}{1+ti} = V \quad (1)$$

Conocemos también que D=M-V

Además el valor actual también se obtiene mediante la expresión que utiliza el descuento comercial y sabemos que:

P = M - D entonces M = P + D y como D= M t d sustituyendo se tiene :

P = M - M t d = M (1 - t d) (2)

Si para las fórmulas (1) y (2) anteriores se considera a M=$1.00 impuesto al tanto por ciento de interés "i" durante un período "t", y se necesita hallar el valor actual, entonces al sustituir en las fórmulas anteriores se tiene:

$$P = \frac{1}{1+ti} \quad y \quad P = 1 - t\,d$$

Por lo que sustituyendo P en una de las dos ecuaciones se tiene:

$$1 - t\,d = \frac{1}{1+ti} \quad \text{transformando}$$

$$(1 - t\,d)(1 + t\,i) = 1 \quad \text{efectuando}$$

$$1 + t\,i - t\,d - t^2\,i\,d = 1$$

$$t\,i - t^2\,i\,d - t\,d = 0 \quad (3)$$

A partir de la expresión anterior se puede despejar t o i. Entonces para despejar i en la ecuación (3) se extrae factor común

t i (1 - t d) = t d

i = $\frac{td}{t(1-td)}$ simplificando se obtiene

i = $\frac{d}{(1-td)}$

Fórmula que permite calcular i, en función de t y d

De similar forma si se despeja ahora "d" en la expresión (3), para ello se tiene:

t i = t d + t^2 i d extrayendo factor común td

t i = t d (1 + t i) despejando

d = $\frac{ti}{t(1+ti)}$ simplificando se obtiene

d = $\frac{i}{1+ti}$

Fórmula que posibilita el cálculo de d, en función de t e i.

Las fórmulas anteriores permiten el cálculo de una tasa de descuento simple comercial "d" equivalente a una tasa de interés simple real "i".
Analicemos el siguiente ejemplo :

¿Cuál es la tasa de interés simple que equivale a una de descuento del 5%?

Datos

i =? i = d / 1 - t d = 0, 05 / (1 - 0, 05) = 0, 05 / 0, 95 = 0, 0526

d= 0, 05 i = 5, 26%

t = 1

i = $\frac{d}{1-td}$ = $\frac{0{,}05}{1-1x0{,}05}$ = $\frac{0{,}05}{0{,}95}$ = 0,0526

i = 5,26%

Hemos obtenido la tasa o tipo de interés simple equivalente a una tasa de de descuento. Este proceso es necesario en algunas operaciones financieras.

2.9 Ejemplos de ejercicios resueltos.

1) Una empresa solicita al banco un préstamo, el cual tiene que devolver dentro de seis meses por un valor de $4 200.00 afectado por una tasa de interés del 3%

anual. Por condiciones reales la empresa decide devolverlo 3 meses antes. ¿Cuál es el descuento que corresponde? y ¿Cuánto debe pagar la empresa?

Datos:

M= $4 200.00

t= $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

d= 3%= 0.03

D:?

D= M t d

D= \$4 200.00 x $\frac{1}{4}$ x 0.03

D= \$31,50

Como el descuento es de \$31.50 y el total a devolver a los 6 meses es de \$4 200.00, entonces, tres meses antes la empresa debe pagar un total de:

\$4 200.00 - \$31,50 = \$ 4168,50

Respuesta. El descuento que corresponde es de \$31.50 y la empresa debe pagar \$ 4168,50.

2) Si un principal con un interés del 7,5% anual asciende a \$ 48 359,50. Posteriormente si se mantiene colocado por 3 meses más que lo establecido, entonces dicha suma ascendería a un valor de \$ 48 780.00. ¿Cuál es el principal y el tiempo a que estuvo impuesto?

Datos

M = \$ 48 359,50

i = 7,5%= 0,075

M_1 = \$ 48 780.00

t_1= $\frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0,25$

P:?

t:?

Según se plantea si hubiera estado impuesto cuatro meses más, el monto tiene un incremento que es:

\$ 48 780.00 - \$ 48 359,50 = \$ 420,50

Esta cifra es el interés o valor porcentual correspondiente a los cuatro meses. Entonces utilizando la fórmula del interés se obtiene:

I = P t i

Despejando P = $\frac{I}{ti}$ y sustituyendo se tiene que:

$$P = \frac{\$420.50}{0,25x0.075} = \$\ 22\ 426.66$$

Como puede observarse se dispone del principal que es de \$ 22 426.66 y se puede obtener a partir de este el interés total con la fórmula: M= P + I de la cual despejando se tiene: I = M – P, entonces al sustituir y calcular posteriormente se obtiene:

I = \$ 48 359,50 - \$ 22 426.66 = \$ 25 932,34

A patir de aquí aplicando la regla de tres, se puede obtener el tiempo a que estuvo impuesto ese principal:

$$\frac{\$420.50}{3} = \frac{\$22426.66}{t} \text{ despejando t}$$

$$t = \frac{\$22426.66x3}{\$420.50}$$

t = 159,99 meses

Respuesta. El principal es de $ 22 426.66 y el tiempo impuesto de 159,99 meses.

3)-Una Entidad Comercial solicita al Banco un préstamo, que asciende a $ 30 560.00 por un año, la empresa precisa que tiene la posibilidad de poder liquidar su deuda a los 6 meses.

El banco cobra el 6% de interés y si liquida la cuenta a los 6 meses le efectúa un descuento del 4 %. ¿Cuánto tendrá que pagar la empresa al Banco si:

- liquida al año?
- paga a los 6 meses?

Datos

P= $ 30 560.00

t = 1 año

d= 0,04

$t= \frac{6}{12} = \frac{1}{2} =0,5$

i=6%=0,06

Si liquida al año hay que calcular el monto del valor del préstamo.

M= P (1 + t i) = $ 30 560.00 (1 + 0,5 x 0,06))

M = $ 30 560.00 x 1,03

M = $ 31 476.80

Respuesta. La empresa tendrá que pagar al banco al liquidar en el año un total de: $ 31 476.80

Si paga a los 6 meses, entonces hay que calcular el valor actual de la deuda en ese tiempo. V = M (1 – t d) = $ 31 476.80 (1 – ½. 0,04) = $ 31 476.80 x 0.98 = $30 847.26

Si paga a los 6 meses tiene que entregar $30 847.26.

4) ¿En cuánto tiempo se duplica un capital invertido al 20% de interés anual simple?

Datos:

M= $ 2.00

i = 20% anual = 0,20

t : ? Años

P=$ 1.00

Esta situación se puede representar gráficamente como sigue:

$ 2.00

0_______i = 20%______↑ t años

$$\downarrow$$
$ 1.00

M= Pti

t= $\dfrac{M}{Pi}$ = $\dfrac{2}{1x0,20}$ = 10

Respuesta. Se duplica en 10 años.

5)- El Banco de Crédito y Comercio concedió un préstamo de $100 000.00 el 20 de febrero de 2014 a una empresa agrícola y la tasa de interés aplicada fue del 6% anual simple. El proceso de pago la empresa lo hizo en el año del préstamo de la siguiente forma: $ 40 000.00 el 21 de abril y $ 60 000.00 el 21 de julio. ¿Cuál fue el interés total que cobró el banco si fueron calculados sobre los saldos decrecientes?

Datos
P= $100 000.00
i= 6% =0,06
Fecha inicial: 20-2- 2014
Primer pago: 18-4-2014
Segundo pago: 26-9-2014
t_1:?
t_2:?
M:?

Los intereses se cobran sobre el saldo del capital inicial y los tiempos que median entre los saldos que se pagan. El saldo inicial aquí es el principal de la deuda. Luego:

t_1 del 20 de febrero al 21 de abril que son:
Del 20 de febrero al 20 de abril: 59 días
Más 1 días
60 días

t= $\dfrac{60}{360}$ = $\dfrac{1}{6}$ = 0,166

Entonces calculando el interés: I= P t i = $100 000.00 x $\dfrac{1}{6}$ x 0,06= $1000.00

La empresa agrícola ahora entrega el 18 de abril, un monto parcial igual a:
$ 40 000.00 + $1000.00 = $ 41 000.00
Ahora debe $100 000.00 - $1000.00= $99 000.00, que es el saldo que ganará interés hasta el 21 de julio.

t_2 del 21 de abril al 21 de julio.
Del 21 de abril al 21 de julio: 91 días
Menos 1 día
90 días

t= $\dfrac{90}{360}$ = $\dfrac{1}{4}$ = 0,25

Al calcular el interés para este período se obtiene: I= P t i

I = $99 000.00 x $\dfrac{1}{4}$ x 0,06

I= $1 485.00

La empresa ahora entrega el 21 de julio un monto parcial de:
$60 000.00 + $1 485.00 = $ 61 485.00

Respuesta. Al finalizar el período el banco cobró el siguiente Monto:
$41000.00 + $ 61 485.00 = $102 485.00

6) Un central azucarero utilizó una letra de cambio que tenía un valor nominal de $70 500.00, con vencimiento a los 90 días siguiente, pero una vez pasado 30 días efectuó el documento al 5% de interés comercial. ¿Cuánto cobró realmente el central azucarero por la letra de cambio?
Datos:
M= $70 500.00
d= 5%= 0.05
t= $\frac{60}{360} = \frac{1}{6}$ =0,166 Cálculo del tiempo: 90 – 30 = 60 días
V:?
El valor actual es lo buscado que es el valor cobrado por el central en la fecha de anticipo
V= M (1- t d)
V= 70 500 (1 – $\frac{1}{6}$ x 0,05) = 70 500 (0,99167)= $69 912.50
Otra vía es, primero calcular el descuento y después restarlo del monto, es decir:
D= M d t= 70 500 x 0,05 x $\frac{1}{6}$ = $587.50
V = M – D = 70 500 - 587.50 = $69 912,50

Respuesta. El central azucarero cobró realmente $69 912,50.al descontar a los 30 días

Ejercicios del tema. (Puede auxiliarse del formulario electrónico)
1) Una persona deposita en una cuenta de ahorros, en el banco, la cantidad de $1 200.00, este paga un interés real i= 3%. Al transcurrir 4 años, la persona necesita extraer el dinero para una inversión. ¿A cuánto ascendía la suma total? **Respuesta. La suma total asciende a M=$1 344.00**

2) Se necesita determinar el interés o valor porcentual de un préstamo de $ 20 000.00, solicitado por una empresa a una agencia bancaria, por un período de un año y 45 días ,donde la tasa de interés comercial utilizada es del 4,5% anual.
Respuesta. El interés o valor porcentual es I= $1 012,50

3) ¿Cuánto se debe invertir hoy para tener dentro de un semestre, una suma de $ 8 500.00, si en la inversión se gana un interés de $ 480.00? ¿Cuál es la tasa de interés?
Respuesta.Se deben invertir P=$ 8 020. 00, y la tasa de interés es de 5,985% semestral.

4) Calcular el importe del interés que se logra por una inversión efectuada hoy, con un valor $ 10 000.00, si se consideran las siguientes tasas:
a) 1.2% quincenal. **Respuesta.$ 120.00 quincenales**
b) 2,5% mensual. **Respuesta.$ 250.00 mensuales**

c) 7% trimestral. **Respuesta.$ 700.00 trimestrales**
d) 10% cuatrimestral. **Respuesta.$ 1 000.00 cuatrimestral**
e) 15% semestral. **Respuesta.$ 1 500.00 semestral**

5) Si una empresa constructora invierte $1 500.00, durante un año, al final de él cuál le entregaron $ 2 000.00. ¿Cuál es la tasa de interés aplicada?
Respuesta. 33,33% anual

6) ¿A qué tiempo se impuso una suma de $ 5 200.00 si se aplicó una tasa de interés simple comercial del 6,5% anual, si el interés obtenido fue de $405,50?
Respuesta.El tiempo fue de: 1 año, 5 meses y 5 días

7) ¿A qué tasa de interés real fue impuesto un principal ascendente a $2 000.00 durante 3 años y 6 meses, si el interés o valor porcentual obtenido ascendió a $ 350.00? **Respuesta. La tasa de interés real fue del 5%**
8) A usted le concedieron un préstamo por la suma de $ 5 000.00, para un período de un trimestre, al final de él debe pagar $ 5 600.00. ¿Cuál fue la tasa de interés del crédito obtenido? **Respuesta. La tasa de interés fue del 12% trimestral**

9) Una empresa impuso una cantidad de dinero al 9% anual durante 4 años y 3 meses, si el valor porcentual o interés ascendió a $2 400.00. ¿Cuál fue el capital impuesto? **Respuesta. El capital impuesto fue P=$6 625,25**

10) Se solicita un préstamo por $ 7 000.00 al 9,5% trimestral de interés simple ordinario o comercial, ¿cuánto debe pagar por concepto de intereses al término de 9 meses?, ¿Cuál es el valor del monto? **Respuesta. Debe pagar por concepto de interés I= $ 495.75 y el valor del monto es M= $ 7 495,75**.

11) Una persona obtiene un préstamo por $ 2 890.00 el 3 de febrero de 2012 y cancela el capital principal más los intereses el 3 de julio de 2012. Obtenga el interés y el monto, si la tasa de interés fue del 3% mensual simple real o exacto.
Respuesta. El interés fue de i= $ 35.63 y monto de M= $ 2 925.63

12) Un cliente tiene que devolver el dinero al banco donde solicitó un préstamo de $8 000.00 el 27 de diciembre. Si fue devuelto el 27 de octubre de ese mismo año y la tasa de descuento aplicada fue del 3% anual. ¿Cuál es el descuento que corresponde a esta operación? ¿Cuánto tiene qué pagar el cliente el 27 de diciembre? **Respuesta. El descuento fue D=$40.00 y tiene que pagar V=$7960.00**

13) Un director de una empresa arrocera, terminó de pagar el 29 de julio de 2014, una deuda con un valor inicial de $ 60 000.00, que contrató con el Banco de Crédito y Comercio (BANDEC), el 1 de diciembre del año pasado. Si el banco recibió $3 000.00 por conceptos de interés, ¿Cuál es la tasa de interés simple anual comercial que aplicó? ¿A cuánto ascendió el dinero que la empresa pagó por el préstamo? **Respuesta. La tasa de interés fue i = 0,075 = 7,5 % y el dinero que la empresa pagó ascendió a M= $63 000.00**

14) Una empresa productora de helados accedió a una letra de cambio que tiene valor nominal de $ 75 300.00 la cual vence a los 90 días. Una vez transcurridos 42 días del acceso a la letra, se efectuó el descuento del documento a un 15% de interés comercial. ¿Cuánto se cobró realmente? **Respuesta. Se cobró realmente V=$73 974.00**

15) Dentro de dos años y medios se necesita acumular la suma de $ 3 500.00, a una tasa del 2.8% mensual, ¿Cuál es el valor inicial de la inversión?
Respuesta. El valor inicial de la inversión es P=$ 1 902.17

16) ¿Qué tasa nominal, capitalizable mensualmente, equivale a la tasa efectiva del 8% anual? **Respuesta. La tasa nominal es j=7,72 %**

17) Una corporación dispone de un pagaré con $ 6 000.00, el cual vence dentro de tres meses y deviene un interés del 5% mensual. ¿Cuál es el valor actual a una tasa es del 6%? **Respuesta. El valor actual a la tasa del 6% es de $ 5 985.22**

18) Un central azucarero solicita un préstamo al cual se le aplica un descuento de $ 5 500.00, porque adelantó su vencimiento en 5 años. La tasa de descuento aplicada fue del 3%. ¿A cuánto asciende el monto de la deuda por el préstamo solicitado? **Respuesta. El monto de la deuda por el préstamo es M= $36 666.66**

19) ¿Qué tasa de descuento se aplicó a una deuda de $ 200 000.00 impuesta por un período de 2 años y 7 meses si el descuento que se efectuó fue de $50 000.0? **Respuesta. La tasa de descuento aplicada fue d= 9,6%**

20) El MIinsap, adquiere para la modernización de los policlínicos, en un territorio, un préstamo que debe pagar dentro de 6 años. El dinero recibido asciende a $ 60 000.00. Una vez transcurridos 5 años el deudor decide liquidarlo y la tasa aplicada fue del 5% anual. ¿Cuánto debe descontarse por el adelanto del pago? ¿Cuánto paga realmente? **Respuesta. Debe descontarse D=$15 000,00por el adelanto del pago y pagar realmente $45 000.00.**

21) Una institución comercializadora solicita al BANDEC un préstamo de $300 000.00, por un período de 2, años pero precisa que tiene muchas posibilidades de liquidar la deuda al año. El banco le cobra un 6% de interés, pero si liquida la deuda al año, la tasa de descuento que aplica es del 4%. ¿Qué cantidad de dinero tiene que pagar la institución a BANDEC, si liquida a los dos años? ¿Cuánto si lo hace al año? Y ¿Cuál es el ahorro que tiene por liquidar al año? **Respuesta. Si liquida a los dos años tiene que pagar M= $336 000.00, si lo hace al año paga, $ 322 560.00 y si liquida al año, el ahorro es de $13 440.00-**

22) ¿Qué tasa de descuento simple es equivalente a la tasa de interés simple del 2,5 %? **Rta. La tasa de interés simple equivalente es i = 1%**

Capítulo III. Interés compuesto.

3.1 Carácterísticas y fundamentos del interés compuesto.

Otro de los sustentos básicos e importantes de la Matemática Financiera es el interés compuesto, el cual es un fundamento financiero, que se caracteriza por capitalizar el interés, por lo tanto, hace que el valor que se paga por concepto de intereses se incremente al final de cada período establecido, por la adición de los valores porcentuales que la imposición ha producido, ya que la base para el cálculo del interés se incrementa cada vez que se liquidan los respectivos intereses. El interés compuesto es muy aplicado en los sistemas financieros; se utiliza en los créditos que hacen los bancos sin importar su modalidad. La razón de la existencia de este sistema, se debe al supuesto de la reinversión de los intereses por parte del prestamista.

Este tipo de interés se caracteriza porque el capital cambia al final de cada período, debido a que los intereses se adicionan al capital para formar un nuevo capital denominado monto y sobre este volver a calcular los intereses, es decir, hay capitalización de los intereses. En otras palabras se puede definir como la operación financiera en la cual el capital o principal, a una tasa de interés establecida durante un tiempo, aumenta al final de cada período por la acumulación a dicho principal de los intereses devengados formándose así un nuevo principal que devengará intereses en el período siguiente. La suma total obtenida al final se conoce con el nombre de monto compuesto o valor futuro. A la diferencia entre el monto compuesto y el capital original se le denomina interés compuesto.

Es necesario tener en cuenta que si i, es la tasa de interés establecida en un período determinado, por ejemplo: en un período anual, entonces el monto de una unidad monetaria al cabo de un año es (1 + i), y al final del otro año, ese monto originará un interés (1 +i) i, entonces el monto es de:
$(1 + i) + (1 + i)\,i = (1+i)^2$ por lo que al cabo de t años el monto se obtiene sobre la base de la expresión general: $(1+i)^t$ entonces para un principal P al calcular el monto hay que multiplicar este por la expresión $(1+i)^t$ de donde se obtiene la fórmula:

$$M = P\,(1+i)^t \qquad (12)$$

El interés compuesto es más flexible y real, ya que valora período a período, el dinero realmente comprometido en la operación financiera y por tal motivo es el tipo de interés más utilizado en las actividades económicas generalmente. Lo anterior, hace necesario una correcta elaboración del diagrama de tiempo y lo importante que es ubicar en forma correcta y exacta el dinero en el tiempo.

El interés compuesto es uno de los fundamentos que más se ha utilizado en la práctica, en todos los sistemas financieros, por su utilidad y resultados.

Ejemplo 3.1

Una persona invierte hoy la suma de $ 100 000.00, en una agencia bancaria que paga el 7% cuatrimestral, se solicita mostrar la operación de capitalización durante dos años.

Período	Cap. Inicial (P)	Interés (I)	Monto (M)
0	100 000.00		100 000.00
1	100 000.00	7 000.00	107 000.00
2	107 000.00	7 490.00	114 490.00
3	114 490.00	8 014.30	122 504.30
4	122 504.30	8 535.3010	131 079.6010
5	131 079.6010	9 175.5721	140 255. 1731
6	140 255. 1731	9 817. 8621	150 073. 0352

Como puede verse en la tabla anterior, los intereses cuatrimestrales se calculan sobre el monto acumulado en cada período de tiempo y los intereses se suman al capital, para formar el nuevo capital del período siguiente, es decir, se presenta la capitalización de los intereses, con el objeto de conservar el poder adquisitivo del dinero a través del tiempo.

Para el cálculo del interés se usa la fórmula: $I= P\ i\ t$, mientras que para el monto se utiliza: $M = P + I$ o $M = P\ (1+i)^t$; ecuaciones que resultan esenciales y fueron definidas anteriormente.

Subdivisión del interés compuesto.

Actualmente el interés compuesto se puede subdividir de la siguiente manera:
a) **Interés compuesto discreto**: Se aplica con intervalos de tiempos finitos.
b) **Interés compuesto continuo:** Se aplica en una forma continua, o sea que los intervalos de tiempo son perpetuos.

Sin importar el hecho de que el interés sea discreto o continuo y para dar una definición precisa del interés compuesto, es conveniente e importante tener en cuenta los siguientes aspectos.

Tasa de interés: Es el valor del interés que se expresa como un porcentaje. Ej. 5%, 10%, 20%.

Período de aplicación: Es la forma de cómo se aplicará el interés por etapas o períodos. Ej. 2% mensual, 20% anual compuesto trimestralmente, 18% anual compuesto continuamente.

Base de aplicación: Es la cantidad de dinero sobre la cual se aplicará el interés para cada período. Ej. 20% anual compuesto trimestralmente sobre el saldo mínimo trimestral.

Forma de aplicación: Es el monto sobre el cual se aplica el interés, sobre la base de los períodos definidos. Ej. 2% mensual por adelantado, 18% anual por trimestre vencido.

3.1.1 Comparación entre el interés simple y el compuesto.

La comparación entre el interés simple e interés compuesto, es esencial por ello en el siguiente ejemplo se precisan aspectos importantes a tener en cuenta.

Ejemplo 3.2
Si una persona invierte $ 1 000.00 a un interés del 2.5% mensual durante 12 meses, al final del período espera disponer del capital principal y los intereses obtenidos. Suponiendo que no existen retiros intermedios del dinero. Calcular la suma final obtenida utilizando el interés simple y compuesto.

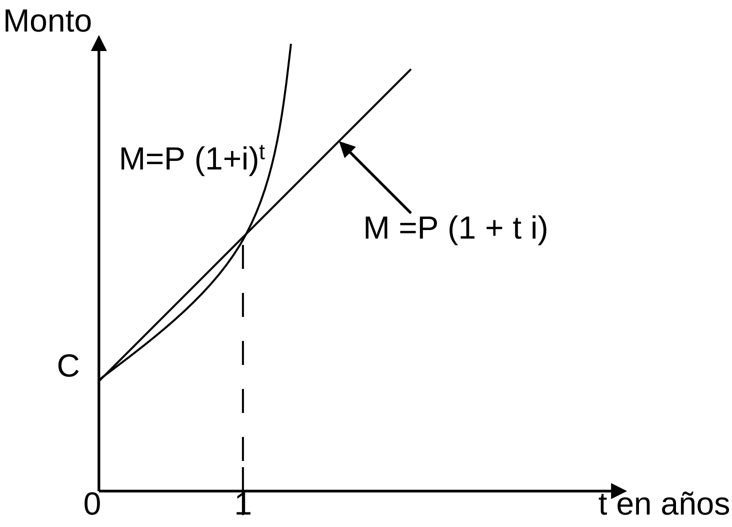
Período	Capital Inicial o Presente		Intereses		Monto final o Futuro	
	Simple	Compuesto	Simple	Compuesto	Simple	Compuesto
1	$1 000.00	$1 000.00	25	25.00	1 025.00	1 025.00
2	$1 000.00	1 025.00	25	25.63	1050.00	1 050.63
3	$1 000.00	1 050.63	25	26.27	1075.00	1 076.90
4	$1 000.00	1 076.90	25	26.92	1100.00	1 103.82
5	$1 000.00	1 103.82	25	27.59	1125.00	1 131.41
6	$1 000.00	1 131.41	25	28.29	1150.00	1 159.70
7	$1 000.00	1 159.70	25	28.99	1175.00	1 188.69
8	$1 000.00	1 188.69	25	29.72	1200.00	1 218.41
9	$1 000.00	1 218.41	25	30.46	1225.00	1 248.87
10	$1 000.00	1 248.87	25	31.22	1250.00	1 280.09
11	$1 000.00	1 280.09	25	30.00	1275.00	1 312.09
12	$1 000.00	1 312.09	25	30.80	1300.00	1 344.89

En la tabla se observa que el monto a interés simple crece en forma aritmética y su gráfica es una línea recta. Sus incrementos son constantes y el interés es igual en cada período de tiempo. El monto a interés compuesto, en cambio, crece en forma geométrica y su gráfica corresponde a la de una función exponencial. Sus incrementos son variables. Cada período tiene un incremento mayor al del período anterior.

Gráficamente el monto compuesto corresponde a una curva exponencial dada por la fórmula de su cálculo $M = P\ (1+i)^t$ que se corresponde con la función:
$y = s\ a^k$ donde el exponente es $k = t$ mayor o igual que cero y la base es: $a = 1 + i$ y $s= P$ es la constante.

Para el caso del monto simple como $M = P\ (1 + t\ i)$ corresponde a un gráfica representada por una linea recta. Entonces al trazar ambas gráficas en un sistema de coordenadas es evidente que difieren a partir del año. Si se trata de un año resulta indiferente aplicar uno u otro método de cálculo para el interés.

De lo analizado anteriormente y con la gráfica que se presenta a continuación se puede concluir que cuando se analizan largos períodos de tiempos la diferencia entre ambos montos es grande pues el interés compuesto es mucho mayor. Si embargo a partir de valores menores que 1 es todo lo contrario. Esto evidencia la conveniencia para cualquier acreedor de utilizar el método del interés compusto cuando el período o plazo de tiempo es mayor de un año.



Figura

Si se tiene por ejemplo un principal P= $1000.00, impuesto a una tasa de interés del 6% anual, en el transcurso de 25 años, el comportamiento de los intereses simples y compuestos se puede representar en una gráfica a partir de los datos de la fórmula de forma similar a la anterior.

3.2 El período en el interés compuesto.

También para el interés compuesto, se denomina período al tiempo que transcurre entre un pago de interés y el otro pago, se simboliza por t, mientras que el número de períodos que hay en un año se representa por m y constituye el número de veces que el interés se capitaliza durante un año y se le denomina frecuencia de conversión o frecuencia de capitalización.

A continuación se presenta una tabla que muestra las frecuencias de capitalización más utilizadas o comunes al calcular el interés compuesto.

Capitalización de intereses	***Frecuencia de conversión***
Diaria	365
Semanal	52
Quincenal o Bimensual	24
Mensual	12
Bimestral	6
Trimestral	4
Cuatrimestral	3
Semestral	2
Anual	1

En una situación práctica, ejercicio o problema de interés compuesto al especificar la tasa de interés, se menciona inmediatamente el período de capitalización. Por ejemplo:
30% Anual capitalizable o convertible diariamente.
28% Liquidable o capitalizable semanalmente.
24% Capitalizable quincenalmente.
36% Anual convertible mensualmente.
32% Anual liquidable bimestralmente.
40% Anual capitalizable trimestralmente.
20% Anual compuesto cuatrimestralmente.
35% Anual convertible semestralmente.
18% Anual liquidable anualmente.

Si no se especifica el período de referencia, este se debe considerar que está establecido para la capitalización de forma anual. Es decir, 28% liquidable o capitalizable semanalmente, es lo mismo, que si se expresa 28% anual liquidable o capitalizable semanalmente.

El período de capitalización es un dato indispensable en la solución de problemas relacionados con el interés compuesto. Al realizar un cálculo de interés compuesto, es necesario que la tasa de interés esté expresada en la misma unidad de tiempo que el período de capitalización.

Ejemplo 3.3
Si un documento ofrece pagos semestrales y tiene una duración de 3 años. ¿Qué valor tiene m y t, sobre la base de lo explicado anteriormente?
Solución:
Un año tiene 2 semestre, por lo tanto, m = 2.
Como la obligación financiera dura 3 años, el número de veces que el documento paga el interés por año será 2, por consiguiente en 3 años, pagará 6 veces, lo que indica que **t = 6**

3.3 El Monto o valor futuro equivalente a un valor presente dado.

El monto o valor futuro, se puede encontrar a partir de un valor presente dado, para lo cual, se debe especificar la tasa de interés y el número de períodos, y a partir de la siguiente relación, se determina la fórmula que permite calcular el valor futuro o monto.

Período	Capital inicial	Interés	Capital final
1	P	Pi	$M_1 = P + Pi = P(1+i)$
2	P (1 + i)	P(1 + i)i	$M_2 = P(1+i) + P(1+i)i = P(1+i)(1+i) = P(1+i)^2$
3	$P(1+i)^2$	$P(1+i)^2i$	$M_3 = P(1+i)^2 + P(1+i)^2i = P(1+i)^2(1+i) = P(1+i)^3$
4	$P(1+i)^3$	$P(1+i)^3i$	$M_4 = P(1+i)^3 + P(1+i)^3i = P(1+i)^3(1+i) = P(1+i)^4$
….	.	.	.
….	.	.	.
….	.	.	.
….	.	.	.
N	$P(1+i)^{n-1}$	$P(1+i)^{n-1}i$	$M_n = P(1+i)^{n-1} + P(1+i)^{n-1}i = P(1+i)^{n-1}(1+i) = P(1+i)^n$

Se concluye entonces que: $M = P\ (1+i)^t$ **(3.1)** ; donde :
M= Monto o valor futuro.
P= Principal.
i = Tasa de interés por período de capitalización.
t = Número de períodos o número de períodos de capitalización.

Ejemplo 3.4
¿Cuánto dinero posee dentro de seis meses, una cuenta de ahorros, impuesta a una tasa del 2% mensual, si hoy se tienen invertido en la cuenta $400 000.00?
Solución:
M =?
i = 2% mensual= 0,02
t = 6 meses
P = $ 400 000.00
$M = P\ (1+i)^t$;
Sustituyendo los volores en la fórmula se obtiene:
$M = \$\ 400\ 000.00\ (1+ 0,02)^6$ buscando en la tabla y efectuando se tiene:
M =$ 400 000.00 x 1,12616242 =$ 450 465.00
Respuesta. En la cuenta se tiene a los seis meses $ 450 465.00.

Ejemplo 3.5
El 2 de enero se depositaron $150 000.00, en una cuenta de ahorros y se desea saber cuánto se puede retirar al finalizar el año, si se aplica una tasa de interés mensual igual a 3%?
Solución:
M =?
i = 3% mensual =0,03
t = 12 meses
P = $ 150 000.00
Gráficamente se puede representar:

i= 3% mensual M:?
0________________________↑
↓ 1 2 3 4 t= 12 meses

P =$ 150 000.00
$M = P\ (1+i)^t$;
Por lo tanto sustituyendo en: $M = 150\ 000.00\ (1+0.03)^{12} = \$\ 213\ 864.00$
Respuesta. Al finalizar el año se pueden retirar $ 213 864.00.

Ejemplo 3.6
Un inversionista al iniciar los meses de julio y septiembre, se propone ahorrar $150 000.00 y $210 000.00 respectivamente y desea ponerlos en dos cuentas en una agencia bancaria, que otorga una tasa de interés del 4% mensual. ¿Cuánto dinero tiene el inversionista el primero de noviembre?
Solución:
$M_t = M_1 + M_2$

jul agot sept oct nov
___!____!___!___↑
↓ 1 2 3 4

$150 000.00 ↓
$210 000.00

P_1= $ 150 000.00 P_2 = $ 210 000.00 i = 0.04 mensual
$M_1 = P_1 (1+i)^t$ = 150 000.00 $(1+0.04)^4$= 150 000.00 $(1.04)^4$ = $175 479.00

$M_2 = P_2 (1+i)^t$ = 210 000.00 $(1+0.04)^2$ = 210 000.00 $(1.04)^2$= $227 136.00

M_t = M1 + M2 =$ 175 479.00 + $227 136.00 = $ 402 615.00;
Respuesta. El primero de noviembre, el inversionista tiene $ 402 615.00.

Existe una diferencia y utilidad en los dos tipos de intereses estudiados. Para ello analizaremos el siguiente ejemplo práctico.

Ejemplo 3.7
Una persona deposita, en una cuenta de una institución bancaria, $ 4 250.00, al 5% de interés anual por 5 años. ¿Cuál es el monto y el interés o valor porcentual a interés simple y compuesto?
- Compare los resultados y valore el que resulta más efectivo para el depositante.
Datos
P= $ 4 250.00
i= 5%= 0,04
t= 5 años
M:?
I:?
El Monto a interés simple es:
M= P (1 + t i) = $ 4 250.00 (1 + 5 x 0,05) = $ 4 250.00 (1,25) = $5 312.50
El interés simple correspondiente es:
I= M – P = $5 312.50 - $ 4 250.00 = $ 1 062.50
El Monto a interés compuesto es:
$M = P (1 + i)^t$ = $ 4 250.00 $(1 + 0,05)^5$ = $ 4 250.00 $(1,05)^5$
M = $ 4 250.00. 1, 27628156 = $ 5 424.19
El interés compuesto correspondiente es:
I= M – P = $ 5 424.19 - $ 4 250.00 = $ 1 174.19

Al comparar los resultados del monto a interés compuesto y simple se obtiene:
$ 5 424.19 - $5 312.50 = $111.69. El monto a interés compuesto es mayor en $111.69.
Observe que la fórmula para el cálculo del interés es la misma por las dos vías. Sin embargo como el monto compuesto es mayor que el simple en el interés compuesto, también la diferencia por la cual se obtiene es mayor.

Desde el punto de vista matemático existe otra vía para calcular el monto, esto se logra usando logaritmos, en ello las tablas resultan esenciales. Analicemos esto en el siguiente problema.

Ejemplo 3.8
A usted, como financiero de una empresa, el director le pide que resuelva y argumente un problema con la información en los documentos que posee actualmente. Dispone de la diferencia entre el monto a interés compuesto y el

simple, que es de $ 2 276.96, al cual fue impuesto un capital por un período de 8 años al 6 % de interés anual. Primero necesita determinar el valor del principal y posteriormente el monto a interés simple y compuesto que le corresponde.

Datos

$M_c - M_s$ = $2 276.96

t= 8 años

i= 6%= 0,06

P:?

M_s :?

M_c :?

Como sabemos que $M_s = P(1 + ti)$ y $M_c = P(1+i)^t$

La diferencia es $M_c - M_s$ = $2 276.96 sustituyendo con las fórmulas se tiene:

$P(1+i)^t - P(1 + ti) = \$2\,276.96$ extrayendo factor común

$P[(1+i)^t - (1 + ti)] = \$2\,276.96$ despejando P

$P = \dfrac{\$2276.96}{(1+i)^t - (1+ti)}$ sustituyendo

$$P = \frac{\$2276.96}{(1+0{,}06)^8 - (1+8x0{,}06)}$$

$$P = \frac{\$2276.96}{(1{,}593848 - 1{,}48)}$$

$$P = \frac{\$2276.96}{0{,}113848}$$

P = $ 20 000.00

Monto a interés simple: M = P (1 + t i) sustituyendo se tiene

M = $ 20 000.00 (1 + 8 x 0,06)

M = $ 20 000.00 x 1,48

M = $29 600.00

Monto a interés compuesto: $M = P(1+i)^t$

$M = \$\,20\,000.00\ (1+0{,}06)^8$

M = $ 20 000.00 x 1,593848

M = $ 31876.96

Se puede comprobar que la diferencia entre el monto simple y el compuesto es de $2276.96.

Respuesta. El valor del principal es de $20 000.00, el monto a interés simple es de $29 600.00 y el compuesto de: $ 31876.96

Ejemplo 3.9

Una empresa invierte $2 800.00 al 3% de interés compuesto trimestral durante 8 años. ¿Cuál es el monto al finalizar el período?

Datos

M=?

P= $2 800.00

i= 3%= 0,03

t= 8 años= 8 x 4= 24 trimestres

$M = P(1+i)^t$

$M = \$2\,800.00\ (1+ 0{,}03)^{24}$

log M = log 2 800 +24 log 1,03

log M = log 2 800 +24 log 1,03

Se busca en la tabla, según las exigencias establecidas para estos cálculos y explicadas en el primer capítulo del libro.
log M = 3.44716+24x0,01284= 3.44716+0,30816
log M = 3,74876
M= antilog 3,7486 Para el antilogaritmo se aplica el proceso contrario al de búsqueda de logaritmo por lo que: M= $8 742.50

Respuesta. Al finalizar el período el monto asciende a $8 742.50.
Otra vía para determinar la tasa o el exponente es usando la interpolación, para ello analicemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.10

Una empresa productora de refrescos deposita en un banco $5 000.00 durante 5 años, y al efectuar la extracción del dinero, obtuvo un saldo de $6 312.50. ¿Qué tasa de interés compuesto aplicó el banco?

Datos

P=$5 000.00

t= 5 años

M= $6 312.50

i:?

$M= P (1+i)^t$ sustituyendo y efectuando se obtiene:

$\$6\ 312.50 = 5\ 000(1+i)^5$

$(1+i)^5 = \dfrac{\$6312.50}{5000}$

$(1+i)^5 = 1,\ 2\ 625$

Se busca en la tabla el año 5 y dentro de esta se localiza el número 1.2625, como no aparece exactamente, hay que efectuar la interpolación, teniendo en cuenta los valores de los números, entre los cuales se encuentra el número buscado en la tabla en este caso es entre: 1.27628156 y 1.24618194, o sea, buscar el % entre el cual se encuentra para hallar la tasa exacta.

Según la tabla 1.2625 se encuentra entre 4.5 % < i< 5% entonces:

Interpolando →	5.0 %	1.27628156	
	4.5%	1.24618194	
Restando	0.5%	0.03009982	entonces se establece:

0,045 + x	---------	1,2625
0,045	---------	1,24618194
-	x	0,01631806

A partir de aquí se puede plantear la siguiente proporción:

0,05 es a 0.03009982 como x es a 0,0163806 matemáticamente:

$\frac{0,05}{0,03009982} = \frac{x}{0,01631806}$ despejando se obtiene:

X= $\frac{0,05x0,01631806}{0,03009982}$ =0,0271 entonces a 4,5% se le suma 0,027 y el resultado es: 0,045 + 0,027= 0,0477 = 4,77%

Respuesta. La tasa de interés compuesta aplicada fue del 4,77%

También puede resolverse utilizando logaritmos, de forma similiar al ejemplo 3,9 anterior.

Ejemplo 3.11

Un cliente del BPA, deposita en una cuenta que abre en 1996 con una cantidad de $ 450 000.00 y en el año 2014 tiene como saldo en la cuenta $750 000.00 ¿Cuál es la tasa de interés efectiva a la que fue impuesto el dinero?

Datos

P=$ 450 000.00

M= $750 000.00

t=

i:?

M= P $(1 + i)^t$

Despejando $\frac{M}{P}$ = $(1 + i)^t$

Sustituyendo $(1 + i)^{1\,9} = \frac{\$750000.00}{\$450000.00} = 1,66666$

$(1 + i)^{1\,9} = 1,66666$

Aplicando logaritmo se tiene: 19 log (1 + i)= log. 1, 66666 despejando

log (1+ i)= $\frac{\log 1,66666}{19}$

Buscando en la tabla el logaritmo log (1 + i)= $\frac{0,221675}{19}$

(1 + i) = antilog (0, 0116671)

(1 + i) = 1.051

i = 1,051 - 1 = 0,051

i= 0.051

Respuesta. La tasa de interés efectiva fue de 5,1%.

3.4 Relación de proporcionalidad entre los elementos del Monto compuesto.

Los fundamentos de Matemáticos de la relación directa e inversa entre los elementos de las fórmulas tratados en el tema anterior aquí también son válidos. Analicemos el siguiente ejemplo para ello.

Ejemplo 3.12

Un cuentapropista necesita determinar qué capital depositar en una agencia bancara para que se convierta en $ 3 700.00 al cabo de 5 años si el interés compuesto que se aplica es del 4% anual.

Datos
M= $ 3 700.00
t= 5 años
i=4%=0,04
P:? $M=P(1+i)^t$ despejando y sustituyendo en la fórmula se tiene

$P = M / (1+i)^t$

$P = \$\ 3\ 700.00 / (1+0{,}04)^5$ Buscando en la tabla

$P = \$\ 3\ 700.00 / 1{,}21665290 = \$\ 3\ 041.62$

Respuesta. Se necesita depositar un capital de $ 3 041.62.

Ante esta situación ¿Qué sucede si en lugar de 5 años utiliza 10? Argumente.

Al utilizar 10 años como aumenta el número de años y en la fórmula al despejar se constata que existe una relación inversamente proporcional entre el tiempo y el principal por lo cual este disminuye en valor al aumentar el número de años.

Compruebe usted esta respuesta haciendo los cálculos. En este caso se obtiene P=$ 2 500.00, con lo cual se corrobora lo explicado.

El fundamento matemático de la relación directamente e inversamente proporcional son válidos en las diferentes fórmulas por lo que resulta fundamental su conocimiento y aplicación para los análisis y fundamentación de cada situación concreta.

Ejemplo 3.13

Una persona deposita en la agencia del Banco Popular de Ahorro (BPA) $1 200.00 en una cuenta donde se paga el 3% anual. ¿Cuántos años deben pasar para que el monto ascienda a $1 432.86 si la capitalización es anual? ¿Qué sucede con el monto si el tiempo aumenta?

Datos

P= $1 200.00
i= 3%= 0,03
M=$ 1 432.86
t:? $M=P(1+i)^t$ despejando

$M / P = (1+i)^t$ sustituyendo los valores

$(1+0{,}03)^t = \$\ 1\ 432.86 / \$1\ 200.00$ efectuando

$(1+0{,}03)^t = 1{,}19405$

Buscando en la tabla la tasa del 3% y en esa fila el valor de 1,19405 se obtiene que el valor correspondiente para t=6

Luego para que el monto ascienda a $1 432.86 si la capitalización es anual debe ser en un tiempo de t=6 años.

Respuesta. Si el tiempo aumenta entonces el monto aumenta también porque según la fórmula existe una relación directamente proporcional.

Ejemplo 3.14

Un empresario siete años después de haber obtenido un préstamo de $ 4 500.00 para una inversión que ejecutó en su entidad lo pagó a un interés compuesto. La cantidad que el prestamista le exigió le pagara fue de $ 6 766.34 ¿Qué tasa de interés con capitalización anual pagó con el préstamo recibido? ¿Cuál es el efecto que tiene en el monto si la tasa de interés disminuye en esta situación?

Datos
t=7 años
P=$ 4 500.00
M=$ 6 766.34
i:?
$M=P\ (1 + i)^t$ Primero se procede a efectuar el despeje
$M / P= (1 + i)^t$ sustituyendo los valores y calculando
$(1 + i)^7 = \$\ 6\ 766.34 / \$\ 4\ 500.00$
$(1 + i)^7 = 1,50363111$
Buscando en la tabla en 7 años y como resultado 1,50363111 se obtiene que el valor correspondiente para i=6%

Respuesta. Si la tasa de interés disminuye el monto disminuye pues es directamente proporcional según la fórmula.

3.5 Valor actual o valor presente.

En el interés compuesto al igual que en el simple, existe una diferencia entre el monto de un préstamo en la fecha de su vencimiento y el valor actual de dicha deuda.

Se conoce que $M = P\ (1+i)^t$**;** por lo tanto despejando se puede obtener:

$P = M\ (1+i)^{-t}$ o $P = \dfrac{M}{(1+i)^t}$ (3.2)

Entonces el valor actual o presente de un préstamo que vence en una fecha futura, es el principal que, a interés compuesto, devengará un valor porcentual tal, que sumado a la cantidad inicial se corresponde con el monto que deberá recibirse en la fecha establecida. El valor actual se representa también por V pues V=P. Generalmente la notación utilizada es V.

Es por ello que el valor actual o presente se puede definir, como: el capital que prestado o invertido ahora, a una tasa de interés dada, alcanzará un monto específico después de un cierto número de períodos de capitalización.

El factor corresponde al elemento $(1+i)^{-t}$ de la fórmula, se conoce con el nombre de factor de descuento o factor de valor presente para pago único.

Ejemplo 3.15
Un heredero debe recibir al cumplir los 20 años una herencia dejada por un valor de $15 000.00. El interés compuesto aplicado es del 4% anual efectivo. ¿Cuál es el valor actual de esa herencia, al heredero cumplir 13 años?
DATOS

M = \$15 000.00 $V = M (1 + i)^{-t}$
i = 0,04 V = \$15 000.00 $(1 + 0{,}04)^{-t}$
t = 7 V = \$15 000.00 $(1 + 0{,}04)^{-7}$
V =? V = \$15 000.00 x 0,75991781
V = 11 398,767
Respuesta. El valor de la herencia es de \$11 398,77.

Ejemplo 3.16
Determine el valor actual o presente de \$60 000.00, impuestos en una agencia bancaria, al 3% e interés efectivo anual a pagar dentro de 5 años.
Datos
V:?
M= \$60 000.00
i= 3% = 0, 03
t= 5 años
$V = M (1+i)^{-t}$
V = \$60 000.00 $(1+0{,}03)^{-5}$
Buscando en la tabla el valor de $(1+0{,}03)^{-5}$ se obtiene:
V = \$60 000.00 x 0,86260878
V = \$ 51 756. 52
Respuesta. El valor actual o presente obtenido es de \$ 51 756. 52

También se puede proceder utilizando para el cálculo, a partir de la fórmula
$V = M (1+i)^{-t}$ la aplicando del logaritmo, por lo que se tiene:
V = \$60 000.00 $(1+0{,}\ 03)^{-5}$
log V = log M – t log (1+i)
Sustituyendo los valores se tiene: log V = log 60 000 – 5 log 1,03.
A partir de aquí se busca en la tabla el número 60000 como es cero el último se examina directamente en la tabla, es decir, que log 60000 = 4.77815.

En el caso de log 1,03 se procede de forma más simple como en casos anteriores presentados. Es decir log 1,03= 0,01284
Sustituyendo los resultados y calculando se tiene:
log V = 4.77815 – 5 x 0,01284
log V= 4.77815 – 0,0642
log V= 4,71395
V = antilog 4, 71395
Se busca en la tabla en la parte de la mantisa el número 71395 que se encuentra entre las columnas 5 y 6 que corresponde a los valores 391 y 397 respectivamente donde la diferencia es de 6, cifra que se agrega al último número del encontrado en la tabla, en este caso es 5175. Al efectuar esto se obtiene que:
V= \$ 51 758.00
Respuesta. El valor actual es de \$ 51758.00

Ejemplo 3.17
Una cooperativa de producción agropecuaria dispone de un activo que decide liquidar, el cual tiene establecido como obligación un período de 5 años con pagos por un valor de \$9 500.00, a un interés del 5,5% capitalizable anualmente. ¿Cuál es el valor actual al 6% de interés capitalizable anualmente?

Datos. Primeramente hallamos el monto del activo al vencimiento.

$P = 9500$ $\quad M = P\,(1 + i)^t$

$t = 5$ $\quad M = 9500\,(1 + 0{,}055)^5$

$i_1 = 0{,}055$ $\quad M = 9500\,(1{,}30696001)$

$i_2 = 0{,}06$ $\quad M = \$\ 12416{,}12$

M =? Ahora se halla el valor actual a su vencimiento al 6% de interés

P=V =? $\quad V = M\,/(1 + 0{,}06)^{5}$

$$V = 12416{,}12\,(1 + 0{,}06)^{-5}$$

$$V = 12416{,}12 .\ 0{,}74725817$$

$$V = \$\ 9278{,}05$$

Respuesta: El activo tiene un valor actual de $ 9278,05.

Ejemplo 3.18

Calcule P sobre la base del siguiente diagrama de flujo con los datos correspondientes, si se sabe que i = 10%.

500 700 900

↓ 2 4 6

P =?

Solución:

Hay que considerar que cada valor que está a la derecha de P, en la parte superior del gráfico, es un valor futuro o monto (M).

Según el diagrama y la fórmula puede expresarse como: $P = M\,(1+i)^{-t}$ para el cálculo, al sustituir se tiene: $P = 500(1+0.10)^{-2} + 700(1+0.10)^{-4} + 900(1+0.10)^{-6}$

$$P = \$\ 413.22 + \$478.10 + \$508{,}02$$

$$P = \$1\ 399.36$$

Como puede apreciarse en el diagrama se tienen varios montos que están impuestos en diferentes períodos de tiempos, lo cual permite concretar el proceso de cálculo según se muestra, para obtener el principal.

Ejemplo 3.19

¿Qué capital es necesario invertir hoy en una institución que capitaliza al 3% mensual, a fin de obtener en dos años $ 2 000 000.00?

Datos

P=?

M= $ 2 000 000.00

i= 3%= 0,03

t= 2 años= 24 meses En la gráfica se puede representar así.

i = 3% mensual

M= $ 2 000 000.00

↓ 1 2 3 4 5 23 24

V : ?

$P = M\,(1+i)^{-t} = \$2\ 000\ 000.00\ (1+ 0{,}003)^{-24} = \$983\ 867.47$

Respuesta: Es necesario invertir hoy $983 867.47.

Ejemplo 3.20
Una persona desea invertir hoy una suma de dinero en una institución financiera, para poder retirar $ 2 500 000.00 dentro de 2 años ¿Cuál será la suma a depositar, si la tasa de interés que aplica la institución es de 7.01% trimestral?
Solución:
Como la tasa de interés que se establece en el problema es trimestral, y teniendo en cuenta que debe haber una relación de homogeneidad entre i y n, como los dos años tienen 8 trimestres, entonces:
Datos
P :?
M= $ 2 500 000.00
i = 7,01%
t= 2 años= 2 x 4= 8 trimestres en dos años

Gráficamente se tiene:

i = 7,01% trimestral $ 2 500 000.00
___ !_____!_____!__॥__↑
↓ 1 2 3 8 trimestres
P =?

$P = M (1+i)^{-t}$ =$ 2 500 000.00 $(0,0701)^{-8}$ = $1 453 935.35;

Cuando se trata del interés compuesto el cálculo del interés y el tiempo requiere el uso de procedimientos matemáticos básicos. Analicemos algunos casos.

En la realización de operaciones financieras donde se disponga del principal (P), el monto (M), el tiempo (t) en que se impone el principal y se quiera conocer la tasa de interés (i) al utilizar la fórmula: $M = P (1+i)^t$ se puede proceder de dos formas; como ya explicamos anteriormente utilizando logaritmos o la interpolación lineal, en ambos casos las tablas son esenciales, para ello analicemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.21
Una empresa agropecuaria impuso en una cuenta de un banco $ 20 000.00, por un período de 10 años, a una tasa de interés compuesto. Al concluir el tiempo de imposición se obtiene un monto que es el doble del principal impuesto por la empresa en la cuenta. ¿Cuál es la tasa de interés que aplicó el banco?
Datos
P= $ 20 000.00
M= $ 40 000.00
t = 10
i=?

Como $M = P (1+i)^t$

Si se aplica interpolación lineal se procede de la siguiente forma:
Sustituyendo los valores en la fórmula se obtiene

$$40\ 000 = 20\ 000\ (1+i)^{10}$$

Despejando $(1+i)^{10} = \dfrac{40000}{20000} = 2$

$(1+i)^{10} = 2$

El valor i de la expresión anterior se busca de la tabla el cual se encuentra entre 1,96715136 que corresponde al 7% de interés, y 2,06103156 que corresponde al 7,5%, entonces aplicando interpolación lineal se puede determinar el valor deseado, es decir:

0,075 corresponde 2,06103156
0,07 corresponde 1,96715136 restando se tiene:
0,005 0,0938802

Se puede plantear entonces que:

O,07 + x corresponde a 2
0,07 corresponde a 1,96715136 restando en ambos caso se obtiene:
x 0,03284864

Sobre la base de los cálculos efectuados anteriormente se plantea la siguiente proporción:
0,005 es a 0,0938802 como x es a 0,03284864 que matemáticamente se expresa:

$$\frac{0{,}005}{0{,}0938802} = \frac{x}{0{,}03284864}$$

Despejando x se tiene:

$x = \dfrac{0{,}005 x 0{,}03284864}{0{,}0938802}$ = 0,001749 donde se puede plantear que la tasa de interés que aplicó el banco fue de: 0,07 + 0,001749 = 0,071749 es decir que
i= 7,17 % si se redondea se obtiene 7,2%

El otro proceso de cálculo es aplicando logaritmo que se desarrolla de la siguiente forma:
En la fórmula $M = P (1+i)^t$
Sustituyendo los valores correspondientes: $40\,000 = 20\,000 (1+i)^{10}$
log 40 000 = log 20 000 + 10 log (1 + i) despejando se obtiene.

$$\log (1 + i) = \frac{\log 40000 - \log 20000}{10}$$

Buscando los valores en la tabla de logaritmos y sustituyendo

$$\log (1 + i) = \frac{4{,}60206 - 4{,}30103}{10} = \frac{0{,}30103}{10} = 0{,}03103$$

log (1 + i) = 0,030103
1 + i = antilog 0,030103
i = 1,0720 - 1 = 0,072
De donde se obtiene que i= 7,2%
Como puede comprobarse las tasas de interés coinciden.

En el cálculo del interés también se puede aplicar la interpolación lineal. Analicemos un ejemplo para ello.

Ejemplo 3.22
Un cliente deposita en una cuenta de ahorros de un banco \$6 500.00, al efectar la extracción obtiene \$10 750.00, si la tasa utilizada por la institución bancaria fue del 5% de interés compuesto anual. ¿Qué tiempo estuvo depositado el dinero?
Datos
P= \$6 500.00
M= \$10 750.00
i= 5% = 0,05
t:?
$M = P\,(1+i)^t$
Sustituyendo $\$10\,750.00 = \$6\,500.00\,(1+0{,}05)^t$
Despejando se obtiene: $(1+0{,}05)^t = \dfrac{\$10750}{\$6500}$
Efectuando $(1+0{,}05)^t = 1{,}65384615$

Utilizando la interpolación lineal se procede de la siguiente forma.
En la tabla el valor buscado de 1,65384615 para el 5% se encuentra entre los valores: 1,62889463 que corresponde a 10 años y 1,71033936 a 11 años. Esto permite establecer que t se encuentra entre 10 y 11 años, entonces para los cálculos se procede de la siguiente forma:

11 años corresponde a 1,71033936
10 años corresponde a 1,62889463 restando se obtiene
1 año 0,08144473

Después se establece la siguiente relación:
a 10 + x años corresponde 1,65384615
10 años corresponde 1,62889463
x 0,02495152

De lo anterior se puede plantear la siguiente proporción:
1 año es a 0,08144473 como x es a 0,02495152, lo cual matemáticamente se expresa:

$$\frac{1}{0{,}08144473} = \frac{x}{0{,}02495152}$$

Despejando x se obtiene:

$$x = \frac{1x0{,}02495152}{0{,}08144473} = 0{,}306361$$

Entonces el total de años es 10 + 0,306361= 10,3 que equivale a 10 años y 3 meses.

Utilizando la vía de los logaritmos se procede de la siguiente forma.
Como $M = P\,(1+i)^t$
Sustituyendo los valores se obtiene: $10750 = 6500\,(1 + 0{,}05)^t$
Aplicando logaritmos: log 10750 = log 6500 + t log 1,05

Despejando t se obtiene: t= $\frac{\log 10750 - \log 6500}{\log 1{,}05}$

Utilizando la tabla de logaritmos:

t= $\frac{4{,}03141 - 3{,}81291}{0{,}02119}$

t = $\frac{0{,}2185}{0{,}02119}$ = 10,3 que corresponde a 10 años y 3 meses

Como se puede constatar el resultado en ambos casos es el mismo.

3.6 Tasa de interés nominal

En las situaciones analizadas se ha utilizado la tasa de interés anual, lo cual significa que la acumulación del interés se efectúa una sola vez al año. ¿Cómo proceder entonces cuando la tasa de interés se acumula varias veces en el año?

Cuando se producen varias acumulaciones al año a una tasa de interés que se denota por j, entonces $\frac{j}{n}$ es el tanto por ciento de interés que corresponde a cada período de acumulación. De esta relación se obtiene que i= $\frac{j}{n}$

Como es conocido, para el cálculo del interés compuesto es imprescindible tener en cuenta el tiempo de imposición del dinero que se representa por t, para ello el total de acumulaciones que se efectúan en ese período de tiempo se calcula mediante el producto de n por t, (o sea: n.t). Este producto es el número de períodos de tiempo en que se acumula el dinero durante la imposición efectuada, entonces a partir de la fórmula: $M = P (1+i)^t$ para el cálculo del monto, según lo anteriormente expresado, esta se transforma al sustituir en:

$M = P (1 + \frac{j}{n})^{nt}$ (3,3)

Analicemos algunas situaciones concretas relacionadas con lo anterior.

Ejemplo 3.23.

Si se tiene una tasa de interés del 8 % anual acumulable trimestralmente. ¿Cómo se representa?

Como en el año hay 4 trimestres entonces aquí n=4 y la tasa se calcula:

$\frac{j}{n} = \frac{8\%}{4}$ =2% trimestral.

Ejemplo 3.24

Una persona crea una cuenta de ahorro con $4 200.00 en una agencia bancaria que paga el 4% anual acumulable semestralmente durante 8 años. ¿Determine cuál es el monto de la cuenta al concluir los 8 años?

Datos

P= $4 200.00

j= 4%=0,04

t=8 años

n= 2 (semestres en el año)

$M = P\,(1 + \frac{j}{n})^{nt}$

Sustituyendo y efectuando se obtiene:

$M = 4\,200(1 + \frac{0,04}{2})^{2x8}$

M= 4 200 $(1+ 0,02)^{16}$ Buscando en la tabla se tiene

M= 4 200x 1,37278171 = $ 5 765. 68

Respuesta. El monto es de $ 5 765. 68

Como es conocido utilizando despejes matemáticos se pueden determinar todos los elementos de la fórmula $M = P\,(1 + \frac{j}{n})^{nt}$. Analicemos diferentes situaciones con ejemplos.

Ejemplo 3.25

Se depositan $4 000.00 a un 4% anual, acumulables trimestralmente durante un período de 6 años. ¿Cuál es el valor actual o principal impuesto?

Datos

M = $4 000.00

V=?

t= 6 años

j= 4% 0 0,04

n= 4

Como $M = P\,(1 + j/n)^{nt}$

Despejando se obtiene: $V = \dfrac{M}{(1+\frac{j}{n})^{nt}}$

Sustituyendo $V= \dfrac{\$4000.00}{(1+\frac{0,04}{4})^{4x6}}$

$V= \dfrac{\$4000.00}{(1+0,01)^{24}}$ Buscando en la tabla:

$V= \dfrac{\$4000.00}{1,26973465}$

V= $ 3 159.26

Respuesta. El valor actual o principal es del impuesto es de $ 3 159.26.

Ejemplo 3.26

Un equipo que debe ser pagado dentro de 6 años, con un valor de $5 708.80 y se conoce que su valor actual es de $ 2 200.00. ¿Cuál es la tasa de interés capitalizable anualmente, que se ha establecido para esa operación?

DATOS

M= $5 708.80 $M = P\,(1 + i)^{t}$

P =V= $ 2200.00 $\$5\,708.80 = \$\,4\,000.00\,(1 + i)^{6}$

t = 6 $\quad \frac{\$5708.80}{\$4000.00} = (1 + i)^6$ interpolando

i :? $\quad (1 + i)^6 = 1,4272$

6,5 %	------------1, 459142	6 + x	---------------1, 427272
6	-------------1, 418519	6	---------------1, 418519
0, 0 5	-------------0,040623	x	--------------- 0,008753

$$\frac{0,5}{0,040623} = \frac{x}{0,008753}$$

$$X = \frac{0,5x0,008753}{0,040623} = 0,0107734$$

Entonces 6 + X = 6 + 0.0107734 = 6,01%

Respuesta. Se ha supuesto a una tasa de interés i=6,01%

Ejemplo 3.27

¿A qué tasas de interés anual acumulable cuatrimestralmente, ha sido impuesto un principal de \$12 000.00, durante un período de 2 años, si se obtiene un monto de \$ 15 400.00, al concluir el período de imposición?

Datos

P= \$12 000.00

M= \$15 400.00

t= 2 años

n= 3

j: ?

$M = P\left(1 + \frac{j}{n}\right)^{nt}$

Sustituyendo se obtiene: $15\,400 = 12\,000\left(1 + \frac{j}{3}\right)^{3x2}$

Aplicando logaritmo: log 15 400 = log 12 000 + 6 log (1 + j/3)

Despejando: $\quad \log\left(1 + \frac{j}{3}\right) = \frac{\log 15\,400 - \log 12\,000}{6}$

Buscando en la tabla y sustituyendo se obtiene:

$\log\left(1+\frac{j}{3}\right)=\left(\frac{4,187520 - 4,079180}{6}\right.$

$\log\left(1+\frac{j}{3}\right)= \frac{0,10834}{6} =0,018$

$\log\left(1 + \frac{j}{3}\right) =0,018$

Aplicando antilogaritmo $\quad \left(1 + \frac{j}{3}\right) = 1,043$

Despejando $\quad$ j = 3 (1,043 - 1)

j = 3 x 0,043 = 0,129 = 12,9%

Respuesta. La tasa de interés es del 12,9%.

Ejemplo 3.28
Un principal de $14 300.00, fue impuesto al 6 % anual acumulable cuatrimestralmente y se obtuvo un monto de $ 16 350.00. ¿Qué período de tiempo estuvo impuesto el principal?
Datos
M= $ 16 350.00
P= $14 300.00
j= 6%= 0,06
n= 3
t:?

$M = P\,(1 + \frac{j}{n})^{nt}$

Aplicando logaritmo se obtiene: log M= log P + nt log (1+ j/n)

Despejando: $$nt = \left[\frac{\log M - \log P}{\log(1 + \frac{j}{n})} \right]$$

$$t = \left[\frac{\log M - \log P}{n \log(1 + \frac{j}{n})} \right]$$

Sustituyendo los valores: $$t = \frac{\log 16\,350 - \log 14\,300}{3 \log (1+ \frac{0,06}{3})}$$

Efectuando: $$t = \frac{\log 16\,350 - \log 14\,300}{3 \log (1,02)}$$

Buscando en la tabla de logaritmo: $t = \frac{4,21352 - 4,15534}{3 \times 0,00860} = \frac{0,05818}{0,0258}$

Entonces: t =2,25

Respuesta. El principal estuvo impuesto a un período de 2,25 años.

Ejemplo 3.29
Un cliente del BPA, impone en una cuenta que abre $3 000.00 durante 2 años y medios, al concluir el período extrae el dinero que asciende a $ 4 500.00 ¿ A qué tasa de interés anual acumulable semestralmente fue impuesto?

Datos
P= $ 3 000.00
t= 2,5 años
M=$ 4 500.00
n= 2
j:?

$M = P\,(1+ \frac{j}{n})^{nt}$ sustituyendo

$\$\,4\,500.00 = \$\,3\,000.00\,(1+ \frac{j}{2})^{2 \times 2,5}$

$$4\,500 = 3\,000\,(1+\frac{j}{2})^5$$

$$\log 4\,500 = \log 3\,000 + 5 \log (1+\frac{j}{2}) \quad \text{despejando}$$

$$\frac{\log 4500 - \log 3000}{5} = \log (1+\frac{j}{2})$$

$$\log (1+\frac{j}{2}) = \frac{3{,}63321 - 3{,}47712}{5}$$

$$\log (1+\frac{j}{2}) = \frac{0{,}15609}{5}$$

$$\log (1+\frac{j}{2}) = 0{,}031218$$

$$(1+\frac{j}{2}) = \text{antilog } 0{,}031218$$

$$j = 2\,(1{,}084 - 1) = 2 \times 0{,}084$$

$$j = 0{,}168$$

Respuesta. La tasa a que fue impuesta es del 16,8 %

3.7 Interés nominal y efectivo.

Otros de los fundamentos esenciales en la Matemática Financiera son: el interés nominal y efectivo. Para estos dos tipos de intereses resulta primordial la relación que existe entre ellos por su implicación práctica.

Hasta el momento se han trabajado las tasas de interés, cuyo período de tiempo para la acumulación de los intereses puede corresponderse o no con dicha unidad de tiempo. Esto permite concretar y diferenciar los dos tipos de tasas de interés: efectiva y nominal.

La tasa de interés efectiva se caracteriza porque el período de tiempo establecido coincide con el intervalo de acumulación. Ejemplos:

- el 3% anual acumulable anualmente.
- el 5 % semestral acumulable cada semestre.

La tasa de interés es nominal cuando el período de tiempo definido es distinto al intervalo de acumulación. Ejemplos:

- el 4% anual acumulable trimestralmente.
- el 7% anual acumulable cada dos años

Ambos conceptos son esenciales y muy aplicables en la práctica financiera. Es importante también determinar la relación entre ambas tasas para ello resulta fundamental obtener una expresión que posibilite expresar una en función de la otra. Para lograr esta relación utilizaremos las fórmulas para calcular el monto tanto a interés simple como a interés compuesto, es decir: $M = P\,(1 + t\,i)$ y $M = P\,(1+\frac{j}{n})^t$

Si consideramos para ambas expresiones al principal igual a una unidad de dinero y el período de tiempo igual a un año, entonces se puede plantear la siguiente igualdad entre ambas fórmulas.

$$1 + i = \left(1+ \frac{j}{n}\right)^t$$

De la expresión anterior despejando i se obtiene: $i = \left(1+ \frac{j}{n}\right)^t - 1$ (3.4)

Si de la mima expresión se despeja j entonces:

Elevando a la 1/t en ambos miembros: $(1+i)^{1/t} = \left(1+ \frac{j}{n}\right)$

Despejando: $(1+i)^{1/t} - 1 = \frac{j}{n}$

$j = n\,[(1+i)^{1/t} - 1]$ (3.5)

Ambos resultados posibilitan la obtención de una tasa en función de la otra. Analicemos algunos ejemplos.

Ejemplo 3,30

Una agencia bancaria necesita determinar la tasa de interés nominal, que debe cobrar a una, que depositó en una cuenta de su entidad al 4 % efectivo anual acumulable por semestres.

Datos

j:?

n= 2

i = 4% = 0,04

t=1x2=2

Como se quiere obtener la tasa de interés nominal se aplica la fórmula (3.5) entonces: $j = n\,[(1+i)^{1/t} - 1]$ sustituyendo:

$j = 2\,[(1+0{,}04)^{1/2} - 1]$ utilizando la tabla

Se obtiene: $j = 2\,(1{,}01980390 - 1)$

$j = 2\,(0{,}01980390)$

$j = 0{,}0396078$

Rta/ La tasa nominal que debe cobrar la agencia bancaria es de 3,96%

3.7.1 Tasa de interés simple equivalente a tasa de interés compuesto.

También es importante la relación que debe existir entre la tasa de interés simple y la compuesta. Si consideramos que los montos son iguales y el princial tiene valor de 1, entonces las fórmulas de los montos son en cada caso:

En el monto simple es: $M= P\,(1 + t\, i_s)$

En el monto compuesto $M = P\,(1+ i_c)^t$

Igualando tenemos: $(1 + t\, i_s) = (1+ i_c)^t$

Despejando i_s se tiene: $t\, i_s = (1+ i_c)^t - 1$

$$i_s = \left[\frac{(1 + i_c)^t - 1}{t}\right]$$

Se puede también despejar i_c

La fórmula que se obtiene es: $i_c = (1 + t\, i_s)^{1/t} - 1$

Ejemplo 3,31

1-¿Qué tipo de interés simple, es equivalente al 7% capitalizable anualmente, durante 20 años?

Datos
i_c =0,05
t =25años
i_s=?

$$i_s = \left[\frac{(1+i_c)^t - 1}{t} \right]$$ sustituyendo en la fórmula

$$i_s = \left[\frac{(1+0{,}07)^{20} - 1}{20} \right]$$ buscando en la tabla se tiene

$$i_s = \left[\frac{3{,}20713547 - 1}{20} \right] = \frac{2{,}20713547}{20}$$

i_s= 11,03%

Respuesta. El tipo simple equivalente al compuesto del 7% capitalizable anualmente durante 20 años, es de 11,03%.

3.8 Descuento a interés compuesto.

El concepto de descuento estudiado en el interés simple es válido para el interés compuesto, es decir: es el precio que tiene que pagar el acreedor por cobrar una deuda antes de su vencimiento.

Para el descuento compuesto también existen los dos tipos estudiados en el interés simple que son: el descuento bancario y el matemático.
Sobre la base del concepto estudiado la fórmula es: D = M – P donde:
D: descuento
M: monto
P: principal

Según la fórmula el descuento se obtiene por la diferencia entre el monto a pagar y su valor actual. Para el caso del interés compuesto el cálculo se efectúa mediante la sustitución del valor actual P = M $(1+i)^{-t}$ en D = M – P de donde se tiene: Dm = M – M $(1+i)^{-t}$ y extrayendo factor común

$$Dm = M\ [1 - (1+i)^{-t}] \quad (3.\ 6)$$

Considerando a $(1+i)^{-t}$ como factor de descuento y denotándolo por fd, es decir: fd= $(1+i)^{-t}$ al sustituir en la fórmula (3. 6) se obtiene:

$$Dm = M\ (1 - fd) \quad (3{,}7)$$

Cuando la tasa es nominal, es decir, j y el interés se acumula n veces al año la fórmula general (3,7) para el descuento al sustituir se concreta mediante la siguiente expresión:

$$Dm = M\ [1 - (1+ j / n)^{-nt}] \quad (3{,}7)$$

Analicemos los siguientes casos.

Ejemplo 3.32
Una empresa tiene en una cuenta bancaria un monto de $ 6 000.00, la cual vence dentro de 3 años, si se efectúa un descuento a interés compuesto del 4% anual. ¿Cuál es el valor del descuento a efectuar?
Datos
M= $ 6 000.00
t= 3 años
i= 4%= 0,04
Dm:?
Como: $fd= (1+i)^{-t}$ al sustituir se obtiene:
$fd= (1+0{,}04)^{-3}$ buscando en la tabla
fd= 0,088899636
Entonces: Dm = M (1 – fd)
Dm = $ 6 000.00 (1 – 0,88899636)
Dm= $ 666.02
Respuesta. El valor del descuento es de $ 666.02

Ejemplo 3. 33
Para el ejemplo anterior si la tasa de descuento a interés compuesto es del 4% anual acumulable semestralmente. ¿Cuál es el valor del descuento a efectuar en este caso?
Compare los resultados obtenidos.
Datos
M= $ 6 000.00
t= 3 años
j= 4%= 0,04
n= 2
Dm:?
Sustituyendo en la fórmula: $Dm = M\ [1 - (1+ j / n)^{-nt}]$ se obtiene:
$Dm = \$ 6\ 000.00\ [1 - (1+ 0{,}04 / 2)^{-2x3}]$
$Dm = \$ 6\ 000.00\ [1 - (1+ 0{,}02)^{-6}]$
Buscando en la tabla y sustituyendo: Dm = $ 6 000.00 (1 – 0,88797138)
Dm = $ 6 000.00 (0,11202862)
Dm = $ 672. 17
Respuesta. El descuento es de $ 672. 17

En el ejemplo 3.23 se obtiene el mayor descuento.

Ejemplo 3. 34
Una empresa productora de materiales de la construcción, obtiene una letra de cambio con un valor nominal de $ 95 400.00, por un período de 1,5 años y se negocia al 14% de descuento compuesto convertible semestralmente. La empresa descuenta un años después de aceptada la letra. ¿Cuánto recibe la empresa al descontarla en esa fecha?
Datos
M= $ 95 000.00
t= 1,5 – 1= 0,5 años = 1 semestre
j= 14%=0,14
n= 2

$i= \frac{0,14}{2} = 0,07$

Dm:?

También puede usarse la siguiente fórmula en lugar de incluir el factor de descuento fd= $(1+i)^{-t}$ es decir:

Dm= M [1- $(1 + i)^{-t}$] = \$ 95 000.00[1- $(1 + 0,07)^{-1}$]

Dm= =\$ 95 400.00 [1- 0. 934 579] =\$ 95 400.00 [0.065 421]

Dm =\$ 6 241.16

Respuesta. La empresa recibe al descontarla en esa fecha un total de \$ 6 241.16 menos.

En todo el proceder con las fórmulas es esencial el despeje y en ello tener en cuenta la relación de proporcionalidad directa o inversa entre los elementos que la conforman, pues son aspectos esenciales para los resultados a obtener con los cálculos.

Ejercicios del tema. (Puede auxiliarse del formulario electrónico)

1- Un cliente del banco, liquida una cuenta que tiene un valor de \$ 11 124.00, la cual fue impuesta por su padre hace dos años. ¿Cuál fue el depósito que se efectuó para obtener ese resultado? **Respueta. P= \$90 000.00**

2- Una empresa eléctrica solicita un préstamo al banco, para la modernización de un área en una ciudad, por un valor de \$ 60 000.00, una vez transcurrido tres años decide liquidar la deuda, que según el banco informó asciende a \$ 62 740.68. ¿Qué tasa de interés compuesta anual aplicó el banco?
Respuesta. **i= 1,5%**

3-¿A cuántos años hay que imponer \$100 000.00 a una tasa de interés del 4% anual compuesto para obtener \$112486,40? **Respuesta. t= 3 años.**

4- Una persona recibe un préstamo de \$500 000.00, por un período de 5 años y se necesita obtener un interés compuesto de \$ 52 040.50. ¿Qué tasa compuesta anual se tiene que aplicar en esa operación para garantizar ese interés? **Respuesta. i= 2% anual.**

5- El Banco de Crédito y Comercio, presta \$10 000 000.00 a una empresa productora de la agricultura, la cual debe devolver el préstamo y lo intereses dentro de 3 años y medio. El banco aplicó el 5% de interés anual para los primeros 12 meses y el 6% capitalizable semestralmente para el resto del tiempo prestado. ¿Qué cantidad de dinero debe devolver la empresa al banco al finalizar el período? **Respuesta. M=\$12 172 377.00**

6.- ¿A qué tasa de interés compuesto fue impuesto un principal que asciende a \$ 2 400.00, si a los 3 años el monto obtenido fue de \$ 3 000.00?
Respuesta. Fue impuesto a una tasa de i= 7.7%.

7.-Una corporación pagó una deuda de $976 152.00, con el fondo de una cuenta, que tenía en el Banco de Crédito y Comercio, que pagaba un interés del 6% compuesto trimestralmente. La corporación abrió la cuenta con un saldo de $800000,00 ¿Cuántos años estuvo impuesto el dinero? **Respuesta. t = 5 años.**

8.- ¿Qué tasa de interés nominal debe aplicarse para que sea equivalente a una del 8% efectiva anual, acumulable trimestralmente? **Respuesta. j=0,077=7,7%**

9.- Un administrador de una empresa productora de muebles impone $24 500.00, en una cuenta de ahorro del banco el cual paga el 7% de interés anual acumulable cuatrimestralmente. Al final del período el administrador necesita obtener $30 000.00 para liquidar el saldo de una inversión. ¿A qué período de tiempo debe imponer el dinero? **Respuesta.Rta. t= 2,93 años o 2 años, 11 meses y 4 días**

10.- El economista de una entidad productiva importante del territorio central de Cuba, contrata con el Bandec la creación de un fondo con valor de $ 1 000 000.00. Para obtener ese resultado establece el pago sistemático de $ 15 000.00 al fondo al final de cada año. El banco establece como interés el 5% de interés efectivo anual. ¿Cuánto tiempo se necesita para que el fondo tenga la suma establecida? **Respuesta.El tiempo t= 30,052, o de 30 años, 0 meses y 18 días.**

11.- Un depósito de $ 2 300.00 a una tasa del 4,5% anual se convierten en $3 260.00 en un período de 5 años. ¿Qué interés compuesto se obtiene al transcurrir los 4 primeros años de efectuada la operación? **Respuesta.I=442,79**

12.- ¿Cuál es el interés que obtiene un cliente en una cuenta que abre con un capital de $3500.00 si lo impone durante 20 años en un banco que paga el 3% anual durante los 12 primeros años y un 2% nominal con capitalización semestral por el resto del período? **Respuesta. El interés que se obtiene es de $ 2353,67**

13.- Una empresa necesita un préstamo de $20 000.00 el cual va a solicitar al Bandec por un período de 2 años, pero tiene dos alternativas relacionadas con las tasas de interés compuesto: el 6% anual o el 6 % anual acumulable semestralmente. ¿Qué alternativa es más ventajosa para la empresa que solicita el préstamo? Argumente. **Respuesta.i= 6% anual es más ventajosa pues ahorra $85.88.**

14.- Usted, cliente de BPA tiene una cuenta de ahorro con $5 000.00 y otra corriente con $10 000.00. Por la cuenta de ahorro recibió un interés del 3% por 5 años y una vez concluido ese período el banco baja el interés al 2%. La otra cuenta corriente paga el 2,5% de interés. El período general en que se mantiene el dinero en las cuentas es por 15 años. Todo el dinero disponible al finalizar el período se utiliza para la aplicación de los negocios. ¿A cuánto asciende el dinero disponible? **Respuesta.El dinero disponible asciende a M=$ 21 548.72.**

15.- Una corporación colocó $ 1200.00 en un banco de ahorro. El interés que recibió se comportó según el tiempo establecido como sigue:

- Durante los primeros 5 años, el 5% anual pagadero semestralmente.
- Los 4 años siguientes, el 4,5% de interés compuesto anual.
- Los 12 años siguientes el 4% capitalizable por trimestres.

¿A cuánto ascenderá la cuenta al cabo de esos 21 años?

Respuesta. Al cabo de 21 años la cuenta ascenderá a $ 2953.32.

16.- Un cliente necesita decidir a qué tasa de interés imponer $35 000.00, saldo que dispone actualmente para que en un período de 6 años, a una tasa de interés compuesto acumulable semestralmente obtener el doble del saldo impuesto. ¿Qué decisión debe asumir el cliente? **Respuesta.i= 5,9 % de interés compuesto semestralmente.**

17.- ¿Qué descuento compuesto hay que aplicar a $6 900.00 si se deben pagar dentro de 6 años y medios cuando la tasa de descuento compuesta aplicada fue del 5% anual capitalizable trimestralmente? **Respuesta.. El descuento compuesto es D=$ 1 905.51.**

18.- Una empresa tiene una cuenta en el Banco de Crédito y Comercio que aplica el 2% de interés compuesto anual. La cuenta tiene un monto de $ 4 600.00 y 2 años antes de su vencimiento. Si efectúa la extracción ¿Cuál es el valor del descuento? **Rta. Dm= $178.62**

19.- 2- Una fábrica de helados adquiere una letra de cambio por un valor de $10 000.00, a pagar dentro de 4 años, a un 6% de descuento compuesto capitalizable semestralmente. La fábrica hace el descuento dos años después de concretada la letra. ¿Cuál es el valor del descuento para ese tiempo? **Respuesta. Dm= 1 155.13**

20.- ¿Cuál es el interés que se obtiene, si un capital de $3500.00, se impone durante 20 años en un banco que paga el 3% anual, durante los 12 primeros años y un 2% nominal con capitalización semestral, por el resto del período? **Respuesta. I = 2353,67**

21.-Un central azucarero contrae una deuda al 3% anual compuesto. El plazo de vencimiento es a los 5 años y su valor nominal es de $80 000.00. El económico de la empresa necesita saber: ¿Qué valor tiene a los 3 años para analizar la posibilidad de liquidarla pues dispone de $ 73 000.00? **Respuesta. No puede liquidarla pues a los tres años tiene un valor: V=$ 75 407.68**

22.- Se conoce que el valor actual correspondiente a $3 140.00 que deben ser pagados dentro de 6 años, es de $ 2200.00 ¿Cuál es la tasa de interés compuesto con capitalización anual que se aplica para obtener el resultado deseado? **Respuesta.La tasa de interés compuesto que se aplica es 6,01%**

23.- ¿A qué tasa de interés anual acumulable por trimestres, fue impuesto un principal de $200 000.00, durante 4 años, si se obtuvo un monto de

$324 000.00? **Respuesta. Fue impuesto a una tasa de interés nominal j=5,44 % acumulable trimestralmente**

24.-Una empresa de producciones varias deposita en una cuenta del Banco de Crédito y Comercio $50 000.00, por un período de 12 años y obtuvo al concluir el tiempo el doble del principal. ¿Cuál fue la tasa de interés compuesto que aplicó el banco? **Respuesta. La tasa de interés compuesto que aplicó es i=5,9% aplicando logarimos o interpolación.**

25.-Un cliente impone $20 000.00, en una cuenta que abre en el BPA, al transcurrir cuatro años y medios obtuvo como monto $32 400.00. ¿Cuál fue la tasa de interés anual acumulable cuatrimestralmente que se aplicó?
Respuesta. La tasa de interés que aplicó fue j=0,109 = 10,9% aplicando logaritmos y antilogaritmo.

26.- ¿En cuánto tiempo, un cliente de un banco de ahorro, logra que por un depósito de $9 300.0,0 efectuado en una cuenta que abre, a la cual el banco aplica un 5% de interés efectivo anual obiene como resultado $14 136.00 ? **Respuesta**. **El tiempo es t=8,57 años, es decir 8 años, 5 meses y 25 días.**

Capítulo IV. Renta o anualidades

4.1 Conceptos primordiales para las rentas o anualidades.

Otro de los fundamentos importantes relacionados con las actividades económicas de las empresas y las personas, son los cobros y pagos a intervalos iguales de tiempo para dar cumplimiento a diferentes compromisos. Como ejemplos de estos podemos relacionar a:

- El cobro de salarios, en el cual la periodicidad puede ser mensual, quincenal o semanal;
- El pago mensual por los alquileres;
- El pago mensual de los servicios públicos recibidos. Por ejemplo: electricidad, gas y agua;
- El pago de contribuciones fiscales las que pueden ser: anual, semanal, y trimestral;
- Las liquidaciones de compras a plazos.

Estas actividades en general tienen como característica esencial la de ser una sucesión de pagos periódicos que tienen como destino la cancelación de una deuda.

Los flujos de caja (pagos) de los créditos comerciales y financieros, normalmente tienen las características de ser iguales y periódicos, estos se denominan anualidades, rentas o series uniformes.

Por ejemplo: son anualidades las cuotas para pagar período a período un electrodoméstico, un vehículo, los salarios mensuales, las cuotas de los seguros, los pagos de arrendamientos, entre otros, siempre y cuando, no varíen de valor durante algún tiempo.

En este capítulo, se tratarán las rentas o anualidades más comunes y de mayor aplicación en la vida práctica. Por ello, se calculará el valor presente de una anualidad y su valor futuro, de similar forma se determinará el valor de la cuota igual y periódica y el número de períodos de la negociación. Existen también las anualidades conocidas como impropias, es decir, aquella en que no todos los pagos son iguales, en este caso no se realizará el estudio de este tipo de anualidad.

4.1.1 Definición de anualidad.

Una anualidad es una serie de pagos generalmente iguales o constantes que se realizan a intervalos iguales de tiempo, que no necesariamente tienen que ser anuales, sino que pueden ser: diarios, quincenales, mensuales, bimestrales, trimestrales, cuatrimestrales, semestrales, anuales o por períodos mayores de un año.

El concepto de anualidad, es importante en el área de las finanzas, porque es uno de los sistemas de amortización más utilizado en las diferentes modalidades de créditos por las instituciones financieras. Además, es muy frecuente que las transacciones comerciales se realicen mediante una serie de pagos hechos a intervalos iguales de tiempo, en vez de un pago único realizado al final del plazo establecido en la negociación.

Es muy importante, para el estudio de las anualidades, tener en cuenta las definiciones de los siguientes términos:

4.1.2 Concepto de Renta.

Renta: El valor de cada uno de los pagos o cobros periódicos generalmente iguales que se efectúan a intervalos de tiempo iguales, se denomina renta y se representa por la letra R. A la renta también se le conoce con el nombre de: cuota, depósito. Cualesquiera de estos términos pueden ser utilizados en lugar de anualidad.

También para que exista una anualidad se debe cumplir con las siguientes condiciones:

- Todos los flujos de caja deben ser iguales o constantes.
- La totalidad de los flujos de caja en un lapso de tiempo determinado deben ser periódicos.
- Todos los flujos de caja son llevados al principio o al final de la serie, a la misma tasa de interés, a un valor equivalente, es decir, la anualidad debe tener un valor presente y un valor futuro equivalente.
- El número de periodos debe ser igual necesariamente al número de pagos.

Período de Renta. Es el tiempo que transcurre entre dos pagos periódicos consecutivos o sucesivos. El período de renta puede ser anual, semestral, mensual, entre otros.

El tiempo o plazo de una anualidad es el intervalo comprendido entre el comienzo del primer perido y el final del último

4.1.3 Clasificación de las anualidades

Las anualidades pueden ser clasificadas atendiendo a diversos criterios: según las formas de pagos utilizadas, el uso del tiempo, los intereses, así como otros elementos financieros. A continuación se presentan las clasificaciones según los tipos de pagos:

1) Ordinarias o fijas: cuando los pagos comienzan y terminan en fechas establecidas.
2) Anticipadas o adelantadas: si los pagos se efectúan al comienzo de cada período de pago.

3) Diferidas o aplazadas: cuando el período de su plazo o duración comienza a decursar cierto tiempo después de suscrito el convenio.
4) Anualidades eventuales: son aquellas en las que los pagos primeros y últimos dependen de un hecho futuro o incierto.
5) Rentas vitalicias: los pagos se efectúan durante la vida de la persona solamente.
6) Seguro de vida: son los pagos que para indemnizar se efectúan por la muerte de una persona.
7) Perpetuas o perpetuidades: Son aquellas anualidades en las que la duración del pago es ilimitada
8) Fijas ordinarias: los pagos se efectúan al final de cada período.
9) Fijas anticipadas: los pagos se efectúan al inicio de cada período.
10) Fijas diferidas o aplazadas: los pagos comienzan a efectuarse después de transcurrido un cierto número de períodos y siempre al final de cada período.

Ejemplos de algunas de estas anualidades:

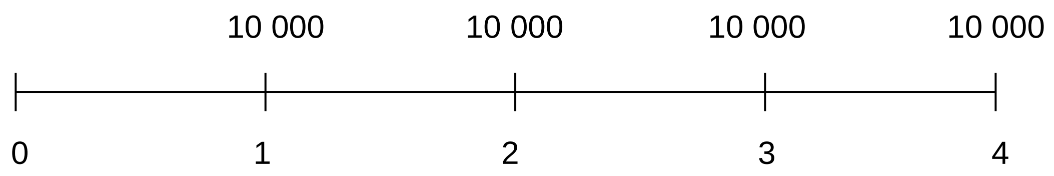
- Ordinarias o fijas: Por ejemplo, cuando una persona compra en un almacén un electrodoméstico a crédito, y se establecen de forma inmediata las fechas para la iniciación y terminación del pago de la obligación financiera.
- Seguro de vida: Son aquellas anualidades en las cuales la fecha del primer flujo de caja, la fecha del último flujo de caja, o ambas dependen de algún evento o suceso que se sabe ocurrirá, pero no se sabe cuándo. El ejemplo más clásico, es el contrato de un seguro de vida, se sabe que hay un beneficiario, al cual se le realizan una serie de pagos en un tiempo plenamente definido, pero no se sabe cuándo empezarán, por desconocerse la fecha en que morirá el asegurado.
- Diferidas o aplazadas: Son aquellas en las que la serie de flujos de caja se realizan al final de cada período, por ejemplo, el salario mensual de un trabajador, en general las cuotas mensuales e iguales que se generan en todo tipo de transacciones comerciales, como la compra de vehículos, electrodomésticos, entre otros.

Analicemos un ejemplo:

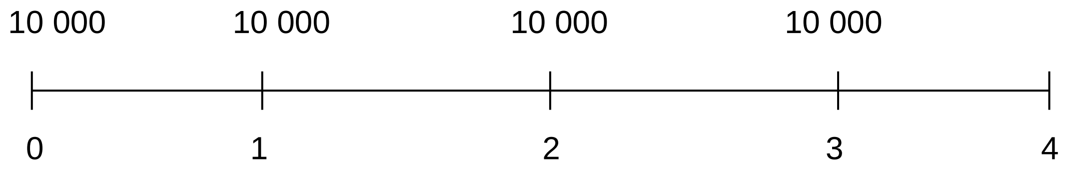
Ejemplo 4.1

Una empresa productora de refrescos contrajo una deuda por un plazo de 2 años, la cual debe liquidar mediante cuatro pagos semestrales de $10 000.00 al final de cada semestre. La tasa de interés compuesto a aplicar es del 6% semestral. ¿Cuál es monto a pagar?

Si cada pago se hace al final del semestre (pago por semestre vencido) gráficamente se representa de la siguiente forma:



Sí cada pago se hace al principio de cada semestre (pago por semestre adelantado): se representa así:



Independientemente de las peculiaridades de cada variante para la colocación de los pagos en el tiempo, existen elementos generales de toda anualidad que requieren ser definidos posteriormente.

En sentido general para las anualidades también son imprescindibles los datos, así como establecer la notación que se utilizará, en el proceso de trabajo para los cálculos, en este caso se considerarán:
R: renta
T: período
t: tiempo o plazo de la anualidad.
i: tasa de interés efectiva de la anualidad.
j: tasa de interés nominal de la anualidad
jm: tasa nominal con m períodos de acumulación en el año.
m: número de acumulaciones en el año.
M: monto total de la anualidad
V: valor actual o presente de la anualidad.

En el ejemplo anterior la renta es R= $10 000,00, y como tiene periodicidad semestral, el tiempo de plazo queda dividido en cuatro semestres t=4. Además, nótese que la fecha inicial coincide con la de convenio, estén ubicadas las rentas al inicio o al final de cada semestre.

Comenzaremos estudiando las anualidades ordinarias o fijas. Al igual que en capítulos anteriores trataremos los conceptos, métodos para el cálculo, la notación y los fundamentos esenciales que corresponden.

Para las anualidades ordinarias o fijas la notación utilizada es la tratada anteriormente.

Las rentas cuyos pagos se efectúan al final de cada período, acumulan interés compuesto mientras transcurre el plazo de la anualidad.

4.1.4 Monto de anualidad ordinaria o fija.

El monto de una anualidad ordinaria o fija se define como: la suma de cada renta, cuyos pagos se efectúan al final de cada período, acumulando interés compuesto hasta el final del plazo de tiempo de la anualidad.

Sobre la base de la definición de renta o anualidad, el monto se calcula mediante la expresión que se obtiene a partir de aplicar el concepto en el proceso de cálculo, es decir:

$M= R(1+i)^{t-1} + R(1+i)^{t-2} + \ldots\ldots\ldots + R(1+i)^2 + R(1+i) + R$ extrayendo factor común:

$M= R\ [(1+i)^{t-1} + (1+i)^{t-2} + \ldots\ldots\ldots + (1+i)^2 + (1+i) + 1]$; la expresión dentro del corchete es una sucesión geométrica de "t" términos; en el cual se puede tomar

por "1" el primer término, por "$(1+i)^{t-1}$" el último término, y por "(1+i)" la razón de la progresión.
Es conocido que la suma de todos los términos de la sucesión o serie geométrica, están dados por la expresión:

$S = \left[\frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \right]$, sustituyendo en esta sucesión en trabajo, se tiene: a = 1, además r = (1+i), n = t y S= M , entonces se obtiene:

$M_{t,\ i} = R \left[\frac{((1+i)^t - 1)}{(1+i) - 1} \right]$ efectuando en el denominador, al eliminar paréntesis se tiene:

$$M_{t\,,\,i} = R \left[\frac{(1+i)^t - 1}{i} \right] \quad (4.1)$$

i

La expresión $\left[\frac{(1+i)^t - 1}{i} \right]$ representa el monto para una renta unitaria (renta de una unidad monetaria) y se denota por $m_{t,\,i}$ es decir:

$$m_{t\,,\,i} = \left[\frac{(1+i)^t - 1}{i} \right] \quad (4.2)$$

Entonces la fórmula (4.1) puede expresarse de forma simplificada de la siguiente forma:
$M_{t\,,\,i} = R\, m_{t\,,\,i}$ (4.3)

En este caso los valores $m_{t,\,i}$ pueden calcularse aplicando logaritmo o utilizando la tabla, con lo cual se simplifica el trabajo.

La expresión (4,3) es equivalente a la (4,1), y tiene la ventaja de que con el auxilio de las tablas financieras pueden calcularse todos sus términos. El factor $m_{t,\,i}$ es el monto unitario.

Esta expresión estudiada es aplicable también cuando se presenta la tasa de interés nominal es decir que i= $\frac{j}{n}$ y la fórmula entonces se puede expresar como:

$$M_{nt,j/n} = R \left[\frac{(1+\frac{j}{n})^{nt} - 1}{\frac{j}{n}} \right] \quad (4.4)$$

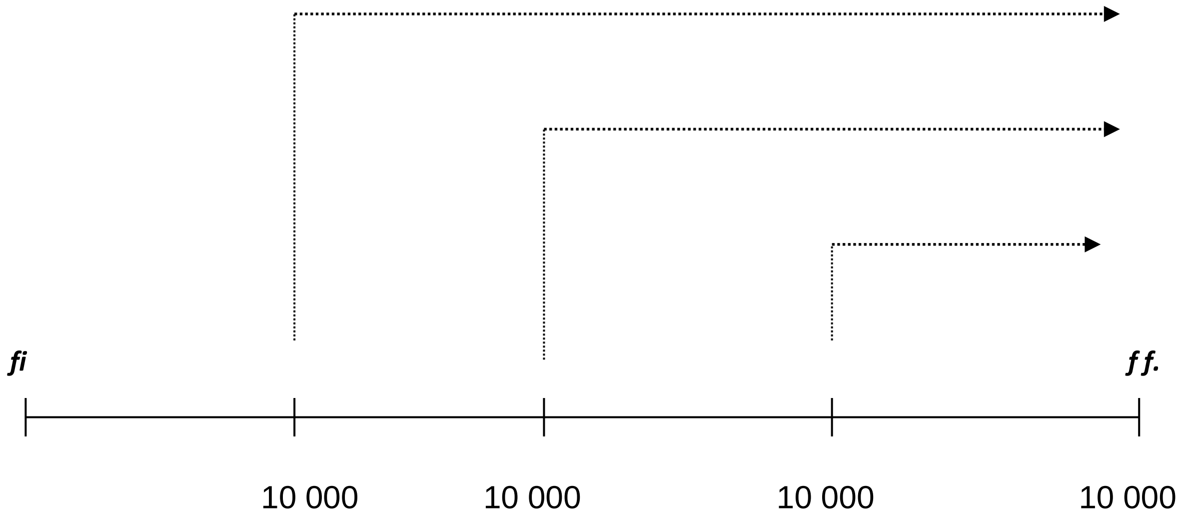
En general, sobre la base de lo estudiado, para el cálculo del monto se pueden utilizar las siguientes expresiones cuando R es desigual de 1.

$$M = M_{t,i} = R\, m_{t,i} \quad o \quad M_{t,i} = R\left[\frac{(1+i)^t - 1}{i}\right] \quad o \quad M_{t,i} = R\left[\frac{(1+\frac{j}{n})^{nt} - 1}{\frac{j}{n}}\right]$$

4.1.4.1 Aplicación de las fórmulas del monto de una anualidad ordinaria o fija.

A partir del problema 4.1, presentado anteriormente, se tiene que: la anualidad es ordinaria o fija pues se conocen la fecha inicial y final, los pagos se efectúan al final de cada período. Las rentas son iguales: renta constante R= $10 000,00. Los períodos de renta son semestrales, es decir de 4 semestres. La tasa de interés es del 6% capitalizable semestralmente.

Ahora se necesita calcular el total de dinero que deberá entregar la empresa al acreedor, pues como se precisa en el problema, cada renta gana un interés del 6 % semestral desde el momento del pago hasta la fecha final.
Gráficamente se puede representar de la siguiente forma:



La primera renta genera un monto parcial $t_1 = 3$ semestres:
$M_c^{(1)} = 10\,000\,(1 + 0{,}06)^3$ buscando en la tabla se obtiene:
$= 10\,000\,(1{,}19101600)$ efectuando:
$= \$11\,910{,}16$
Para la segunda renta, con $t_2 = 2$ semestres
$M_c^{(2)} = 10\,000(1 + 0{,}06)^2$ de la tabla se obtiene
$= 10\,000\,(1{,}12360000)$ efectuando:
$= \$11\,236.00$
Para la tercera renta, con $t_3 = 1$ semestre:
$M_c^{(3)} = 10\,000\,(1 + 0{,}06)^1$
$= \$10\,600.00$

En el caso de la cuarta renta no gana interés alguno por estar ubicada en la fecha final ($t_4 = 0$), de modo que:
$M_c^{(4)} = 10\,000\,(1 + 0{,}06)^0$ efectuando se obtiene

$= \$10\ 000.00$

Denotemos por M a la suma de los montos parciales:

$M = M_c^{(1)} + M_c^{(2)} + M_c^{(3)} + M_c^{(4)}$

$= 10\ 927,27 + 10\ 609 + 10\ 300 + 10\ 000$

$= \$\ 41\ 836,27$

Rta. El total de dinero que deberá entregar la empresa al acreedor es de: $ 41 836,27

Analicemos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.2

Si se paga una renta de $2 000.00, al 2% de interés anual efectivo por un período de 5 años. ¿A cuánto asciende el monto a pagar?

Datos

M:?

R= $2 000.00

i= 2%= 0,02

t= 5 años

Sabemos que $M_{t,\,i} = R\,\frac{[(1+i)^t - 1]}{i}$ luego sustituyendo se tiene:

$M_{t\,,\,i} = \$2\ 000.00\,\frac{[(1+0,02)^5 - 1]}{5}$ utilizando la tabla y efectuando

$M_{t\,,\,i} = \$2\ 000.00 \times 5,20404016$

$M_{t\,,\,i} = \$\ 104081.\ 08$

Respuesta. El monto de la renta a pagar asciende a $ 104081. 08

Ejemplo 4.3

Una persona tiene que pagar una renta de $105.00, al finalizar cada mes durante un período de 6 años. La renta se impone al 18% anual con acumulación mensual ¿Cuánto debe pagar a su término la persona?

Datos

M=?

R= $ 105.00

t = 6. 12=72 meses

$i = \frac{j}{n} = \frac{0,18}{12} = 0,015$

Es importante tener presente que hay que expresar el tiempo y la tasa mensualmente, entonces:

Se conoce que: $M = R.m_{t\,,\,i}$

Sustituyendo se tiene: $M = 105 \times m_{72\,,\,0,015}$, buscando en la tabla

M = 105 (128,0719738),

M = $ 13 448,104

Respuesta. A su término la persona debe pagar $ 13 448,10 de Monto.

Ejemplo 4.4

Una persona al final de cada semestre y durante tres años, hace depósitos en una cuenta de una agencia bancaria que paga el 3 % anual con capitalización semestral de intereses y necesita tener un saldo final de $ 50 000.00. ¿Cuál debe ser el valor de cada depósito para obtener el saldo deseado?

Datos

M= $ 50 000.00

j= 3%= 0,03

n= 2

t= 3 años x 2 semestres en el año= 6 semestres

R:?

Como $M_{nt,j/n} = R\left[\frac{(1+\frac{j}{n})^{nt}-1}{\frac{j}{n}}\right]$ Sustituyendo se obtiene:

Para la tasa efectiva: $i_2 = \frac{0,03}{2} = 0,015$

$50000 = R\left[\frac{(1+\frac{0,03}{2})^{2x3}-1}{\frac{0,03}{2}}\right]$ efectuando se tiene : $50000 = R\left[\frac{(1+0,015)^{6}-1}{0,015}\right]$

Buscando en la tabla y calculando se obtiene

50 000= R x 6,2295506 Despejando

R= $\frac{50000}{6,22959093}$

R= $ 8 026.26

Respuesta. El valor de cada depósito es de $ 8 026.26 por semestres vencidos para obtener un saldo de $ 50 000,00 dentro de tres años.

Ejemplo 4.5

Se efectúan pagos anuales vencidos de $ 100 000.00, para liquidar una deuda concertada al 7 % de interés compuesto anual, si se conoce que el monto al finalizar el período es de $ 575 073.90. ¿Cuánto pagos anuales hay que realizar para liquidar la deuda?

Datos

M = $ 575 073.90

R= $ 100 000.00

i= 7%= 0,07

t:?

Sabemos que M= R $m_{t,i}$ sustituyendo los valores

575 073.90 = 100 000.00 $m_{t,0,07}$ despejanto

$m_{t,0,07} = \frac{\$57507390}{\$100000.00}$

$m_{t,0,07}$ =5,750739

El número obtenido se busca en la tabla de $m_{t;i}$ correspondiente al 7 % y se constata que está asociado a t = 5, lo cual indica que son cinco pagos anuales requeridos para la cancelación de la deuda.

Respuesta. Hay que realizar 5 pagos anuales para cancelar la deuda.

Ejemplo 4.6

Una empresa tiene que liquidar un préstamo de $187 500.00 que adquirió con el banco. Si la deuda se pagó a $25 000.00 semestrales al final de cada período, al 7% de interés efectivo semestral. ¿En cuántos pagos se liquidó la deuda por la empresa?

Datos

M= $187 500.00

R= $25 000.00

i= 7%=0,07

t:?

M= R $m_{t,i}$

Sustituyendo los valores $187 500.00 = $25 000.00 $m_{t,0,07}$

Despejando $\frac{\$187500}{\$25000} = m_{t,0,07}$ entonces

$m_{t,0,07} = \frac{\$187500}{\$25000}$

$m_{t,0,07} = 7,5$

En la tabla para la tasa del 7%= 0,07 no existe un valor de t entero, pero el valor de 7,5 se encuentra comprendido en la tabla entre 6 y 7 es decir:

	7 corresponde a	8,654021
Restando	6 corresponde a	7,153290
	1	1, 500731

También del resultado se tiene que: t corresponde con 7,5

6 corresponde con 7,153290

Restando t – 6 0,34671

Estableciendo la proporción se tiene:

$$\frac{1}{1{,}500731} = \frac{t-6}{0{,}34671}$$

Efectuando $t - 6 = \frac{0{,}34671}{1{,}500731}$

$t - 6 = 0{,}231027$

$t = 0{,}231027 + 6 = 6,\ 231027$

t= 6,23 períodos semestrales

En la práctica profesional se utiliza generalmente aumentar al pago que se corresponde con el último período entero, aquí sería aumentar el pago de semestre 6. Para ello se procede de la siguiente forma:

R=$25 000.00

t= 6,23

Rx t= $25 000 x 6,23 = $155 750.00

Y $25 000.00 x 6 = $150 000.00

Entonces la diferencia entre $155 750.00 y $150 000.00 es de $5 750.00 por lo que el pago número 6 debe ser de $25 000 + $5 750.00 = $30 750.00

Ejemplo 4.7

Un comerciante recibe un préstamo de $ 2 000.00 para la renovación de sus equipamientos. Debe efectuar los pagos en un tiempo de 6 años, por trimestres vencidos, a una tasa del 7,6 % de interés compuesto nominal. ¿Cuál es el monto del préstamo recibido?

Datos

R= $2 000.00

j= 7,6% = 0,076

t= 6 años= 6años x 4 $\frac{semestres}{años}$ = 24 semestres

M:?

M= R m $_{t,\, i}$ pero es necesario calcular m $_{t,\, i}$ por la característica de los datos ya que j= 7,6 % no aparece en la tabla por lo que hay que utilizar los logaritmos entonces según la fórmula se tiene:

$$m_{t,i} = \left[\frac{(1+i)^t - 1}{i}\right]$$

i

Sustituyendo y efectuando: $m_{t,i} = \left[\frac{(1+0{,}076)^{24} - 1}{0{,}076}\right]$

Como no aparece en la tabla se plantea: log x = $(1+0{,}076)^{24}$

Aplicando propiedades de los logaritmos se tiene: log x = 24 log (1 + 0,076)

Buscando en la tabla log x = - 24 log 1, 076

log x = -24 x 0,03181

log x = - 0, 76344

x = antilog 0,76344

x = 5, 8 00

Sustituyendo en la fórmula a: $m_{t,i} = \left[\frac{5{,}800 - 1}{0{,}076}\right]$ = 63,157894

M= R m $_{t,\, i}$

M= $2 000.00 x 63,157894 = $ 126 315. 78.

Respuesta. El monto del préstamo recibido es de $ 126 315. 78

En la práctica profesional se presentan situaciones donde se cambia el monto compuesto con las rentas o anualidades, un ejemplo de ello se presenta en el siguiente problema.

Ejemplo 4.7

Un cliente de un banco abre una cuenta con $250.00 y hace depósitos sistemáticos iguales los últimos días de cada mes, durante 4 años consecutivos. ¿Qué cantidad acumula su cuenta 6 años después del último depósito, si el banco tiene establecido el 2% de interés acumulable trimestralmente?

Datos

R= $250.00

i=2%00,02

n=4

t_1= 4 años

t_2= 6 años
M:?
Hay que tener en cuenta que:

- para el primer período t_1= 4 años x 4 $\frac{trimestres}{años}$ = 16 semestres
- para el segundo período t_2= 6 años x 4 $\frac{trimestres}{años}$ = 24 trimestres

También como puede constatarse en el problema para los 4 primeros años se tiene una renta vencida, al concluir este período ese resultado pasa a ser el principal de la próxima etapa y como se quiere determinar el monto las fórmulas son:

$M = P (1 + i)^t$ y $M= R\ m_{t,i}$

Pero también se pueden integrar estas fórmulas para este caso puesto que el monto de la renta al concluir los 4 primeros años se convierten en el principal del próximo período y por tanto la fórmula se puede concretar en:

$M= R\ m_{t,i} \times (1 + i)^t$

Entonces sustituyendo en esta última fórmula que simplifica el proceso se tiene:

$M= \$250.00 \times m_{16,\ 0,02} \times (1 + 0,02)^{24}$
$M= \$250.00 \times 18,639285 \times 1,608437$
M= $ 7 495. 03

Respuesta. La cuenta acumula 6 años después del último depósito, $ 7 495. 03

4.1.5 Valor actual o presente de una anualidad ordinaria o fija.

Entre los conceptos fundamentales de las rentas o anualidades también está el de valor actual. Cuando se necesita saber cuánto vale hoy una renta o anualidad, lo que se busca es el valor actual, es decir para el caso de una renta si se consideran los valores de cada una de las rentas correspondientes a una anualidad en el día de hoy y se suman, se obtiene el valor actual o presente de una anualidad.

Definición:
El valor actual o presente de una anualidad es la cantidad de dinero, que con sus intereses compuestos, al transcurrir el tiempo de la anualidad da el monto correspondiente.

El valor actual o presente de una anualidad se denota por V.
Entonces la expresión para el cálculo es: $M = V (1+i)^t$ (4.5)
Según la fórmula (4.1) del monto estudiada anteriormente, se conoce que:

$M_{t,i} = R\left[\frac{(1+i)^t - 1}{i}\right]$ Por lo que sustituyendo M de (4.5) en la fórmula anterior se obtiene:

$V (1+i)^t = R\left[\frac{(1+i)^t - 1}{i}\right]$ despejando V:

i

V$= R\left[\dfrac{(1+i)^t-1}{i}\right]$ x (1+i) ^{t} efectuando

i

$$V_{t,j/n} = R\left[\frac{1-(1+\frac{j}{n})^{-nt}}{\frac{j}{n}}\right] \quad (4.6)$$

Considerando, igual que anteriormente con el caso de la Renta, si el valor de cada pago R es de una unidad monetaria, entonces el valor actual de una anualidad de uno por el período se expresa como $V_{t\,,\,i,}$ por lo que se obtiene a partir de la fórmula anterior la siguiente:

$$V_{t,i} = \left[\frac{1-(1+i)^{-1}}{i}\right] \quad (4,\ 7)$$

Entonces: V= R $v_{t,\,i}$ (4, 8)

Estos valores de $v_{t,\,i}$ se pueden calcular también utilizando logaritmos o la tabla de valores. Para ello analizaremos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.8

Un empresario necesita determinar el valor actual de un equipo que adquiere en una entidad mediante seis pagos trimestrales vencidos por un valor de $ 5 000.00 y a una tasa de interés del 12% anual capitalizable trimestralmente. ¿Cómo obtenerlo?

Datos

R= $ 5 000.00

t= 6 trimestres

j= 12% = 0,012

n= 4

V: ?

Como V= R $v_{t,\,i}$

Aquí i= $\dfrac{j}{n} = \dfrac{0{,}012}{4}$ =0,03 sustituyendo los datos se obtiene:

V= $5 000.00 x $v_{6,\,0{,}03}$ Buscando en la tabla

V= $5 000.00 x 5,41719144

V= $27 085.95

Respuesta. El valor actual del equipo adquirido es de $27 085.95

Si en el ejemplo anterior la empresa liquida el resto de la deuda en la fecha del primer pago. ¿Cuál es la cantidad que debe entregar en ese caso? ¿Cuánto paga realmente la empresa por el equipo?

Según este caso en la fecha del primer pago, la empresa entrega $ 5 000.00, para saber lo que debe pagar de una sola vez, y adquirir el equipo, es necesario calcular el valor actual de la anualidad, cuya fecha inicial está al final del primer trimestre. Entonces la anualidad tiene 5 períodos de renta y su valor actual se calcula, así:

$V= R\ v_{t,\ i}$ Sustituyendo se obtiene:

$V= \$\ 5\ 000.00\ v_{5,\ 0,03}$

V= $5 000.00 x 4,57970719

V= $ 22 898.54

Entonces la persona entrega $ 22 898.54 además de los $ 5 000.00 pagados del primer trimestre vencido. La persona paga realmente por el equipo la suma de estos dos resultados, es decir: $27 898.54.

Ejemplo 4.9

Una empresa compra mercancías en un almacén en el día de hoy por un valor de $ 26 870.37, al contado, y acuerda con el vendedor entregar $ 1 000.00 a final de cada semestre, a una tasa de intereses del 6 % con acumulación semestral. ¿Cuántos pagos semestrales serán necesarios efectuar para liquidar la deuda?

Datos

V = $ 26 870.37

R = $1 000.00

j= 6% = 0,06

n=2

t:?

$V= R\ v_{t,\ i}$ la tasa efectiva aquí se calcula $i= \frac{0,06}{2} =0,03$

Despejando en la fórmula se obtiene:

$V_{t,\ 0,03} = \frac{V}{R}$ sustituyendo los valores y calculando:

$V_{t,\ 0,03} = \frac{6870,37}{1000}$

$V_{t,\ 0,03} = 26.\ 87037$

Buscando en la tabla en la página correspondiente a la tasa del 0,03%= 3% aparece el número 26.87037, que es igual al valor obtenido en nuestros cálculos, y el valor de “t” asociado es de 20.

Respuesta. En esta operación serán t=20 los pagos necesarios para la cancelación de la deuda.

Ejemplo 4.10

¿Cuál es el valor actual de una anualidad vencida de $ 3000.00 a pagar mensualmente en un período de 12 años, si la tasa es del 4% mensual efectiva?

Datos

R= $ 3 000.00

t= 12 años= 12 años x 12 $\frac{meses}{años}$ = 144 meses

i= 4% = 0,04

V:?

$V= R\ v_{t,\ i}$

Sustituyendo en la expresión: $V_{t,i} = \left[\dfrac{1-(1+i)^{-1}}{i}\right]$ se tiene

i

$$V_{144,0,04} = \left[\frac{1-(1+0{,}04)^{-144}}{0{,}04}\right]$$

Para calcular la expresión (1+0,04) $^{-144}$con la tabla es preciso descomponer pues no aparece directamente es decir:
(1+0,04) $^{-144}$= (1+0,04) $^{-100}$ x (1+0,04) $^{-44}$
Buscando en la tabla ahora se tiene:
(1+0,04) $^{-144}$= 0,019800 x 0,178046 = 0,003525
Entonces sustituyendo este valor en la expresión

$V_{144,0,04} = \left[\dfrac{1-0{,}003525}{0{,}04}\right]$ efectuando

v $_{144,\ 0,04}$ = $\dfrac{0{,}996475}{0{,}04}$ = 24,911875
Sustitueyendo en la fórmula: V= R v$_{t,\ i}$
Se tiene V= \$ 3 000.00 x 24,911875 = \$ 73 735.62
Respuesta. El valor actual de la anualidad vencida es de \$ 73 735.62

Ejemplo 4.11
¿En qué tiempo debe ser pagada una deuda que tiene un valor hoy de \$ 300,00, si la tasa de interés es del 5% y las rentas son anuales vencidas de \$ 20,00?
Datos
V= \$300.00
R= \$ 20.00
i= 5%= 0,05
t:?
Conocemos que:
V= R$V_{t,i} = R\left[\dfrac{1-(1+i)^{-1}}{i}\right]$

V= $R\left[\dfrac{1-(1+i)^{-1}}{i}\right]$ despejando

$\dfrac{Vxi}{R}$ = 1 - (1+i) $^{-t}$

(1+i) $^{-t}$ = 1 - $\dfrac{Vxi}{R}$ aplicando logaritmo

- t log(1 + i) = log [1 - $\dfrac{Vxi}{R}$]

- t = log [1 - $\frac{Vxi}{R}$] : log(1 + i)

t= - [log [1 – ($\frac{Vxi}{R}$] : log(1 + i)]

t= - [log [1 – ($\frac{300\,x 0{,}05}{20}$] : log (1 + 0,05)]

t= - [log (1 – 0,75) : log (1,05)]

t= - [$\frac{\log 0{,}25}{\log 1{,}05}$] buscando en la tabla de logaritmos

t= - [$\bar{1}$,39794: 0,02119] como la mantisa del log 0,25 es negativa se busca el cologaritmo del resultado obtenido es decir:

Se resta la primera cifra significativa de la derecha del último decimal, aquí el 4 de diez, y todas las demás de nueve, esto para la mantisa. En el caso de la característica se obtiene cambiando al signo a la que tiene el logaritmo y restándole una unidad.

Aquí t= - (- $\frac{0{,}602076}{0{,}021189}$)= 28,414

Respuesta. El tiempo en que puede ser pagada la deuda es de: 28 años, 4 meses y 27 días.

Es importente tene en cuenta que en la práctica financiera se presentan situaciones que combinan conceptos y procedimientos de los estudiados anteriormente. Analicemos el siguiente problema.

Ejemplo 4.12

Un empresario hace un convenio con otra entidad, para recibir un préstamo de $80 000.00 a un interés compuesto del 5% anual pagadero semestralmente, por un período de 8 años.

El empresario, una vez firmado el convenio, presenta varias dificultades financieras por lo que negocia con otra empresa, quien le compara el dinero prestado por el valor actual establecido, en el convenio con la entidad que le otorgó el préstamo, a un interés del 7% anual efectivo.

El capital que así obtiene lo utiliza para la compra de una anualidad vencida por un período de 10 años. ¿Cuál es el valor de cada uno de los pagos anuales vencidos, que deben hacerse para lograr la compra de la anualidad, si la tasa de interés aplicada fue del 4% anual?

Datos
P = $80 000.00
t= 8 años
n= 2
j= 5%=0.05
M:?
i= 7%=0, 07
P=V:?
t=10 años

i= 4%=0,04
R:?

Es preciso determinar el monto de la deuda prestada aquí: $M = P(1+\frac{j}{n})^{nt}$

Sustituyendo se tiene: M = $80 000.00

$$M = \$80000.00(1+\frac{0,05}{2})^{2x8}$$

$$M = \$80000.00(1+0,023)^{16}$$

M = $80 000.00 x 1,484505
M= $ 118 760. 45
El valor actual se puede calcular a partir de: M = P (1+i)^{t}

$$P = \frac{M}{(1+i)^{t}}$$

$$P = \frac{\$118760.45}{(1+0,07)^{8}}$$

$$P = \frac{\$118760.45}{0,582009}$$

P = $ 69 119.66

Para calcular el valor de cada uno de los pagos es preciso tener en cuenta que.
V= R $v_{t,\, i}$
Despejando R se tiene: V= R $v_{t,\, i}$

$$R = \frac{V}{V_{t,i}} = \frac{\$69199.66}{V_{10,0,04}}$$

Es esencial recordar que el valor de $v_{t,\, i}$ se busca en la tabla teniendo en cuenta que $v_{t,\, i}$ = m $_{t,\, i}$ + i fundamento explicado anteriormente. Es decir que:
$V_{10,\, 0,04}$ = m $_{10,\, 0,04}$ + 0,04 = 0,083290 + 0,04
$v_{10,\, 0,04}$ = 0,123290

$$R = \frac{\$69199.66}{V_{10,0,04}} = \frac{\$69199.66}{0,123290}$$

R = $ 560 626.65
Respuesta. El valor de cada uno de los pagos es de $ 560 626.65.

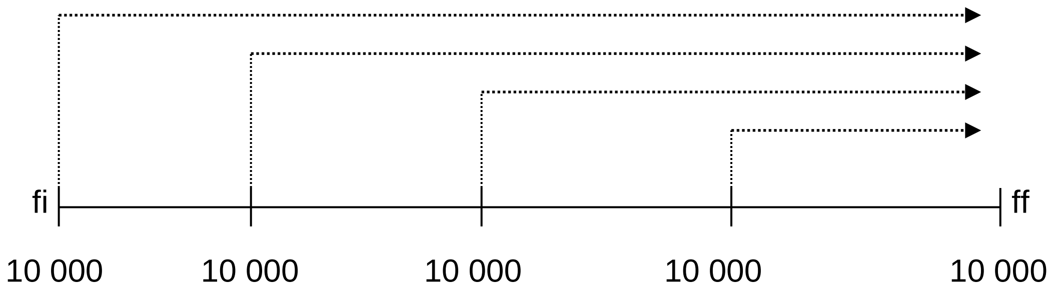
4.2.1 Anualidades anticipadas o adelantadas.

Es muy frecuente que en las finanzas los pagos periódicos se efectúen al comienzo de cada período. Ejemplo: los pagos de algunos alquileres, los seguros de automóviles, las ventas a plazos, entre otros.

Definición: Una anualidad anticipada, es aquella en que los pagos o rentas se efectúan al principio de cada uno de los períodos de pagos.Este tipo de anualidad se acaba un período después de efectuado el último pago.

En estos casos para el ejemplo del problema 4.1, presentado anteriormente las rentas de $ 10 000,00, aparecen representadas al final de cada uno de los 4 semestres del plazo (2 años), y el monto es de $ 41 836,27. Pero en el caso de anualidades anticipadas o adelantadas las rentas se pagan al inicio de cada semestre la situación cambia, sobre todo desde el punto de vista del acreedor, quien resulta favorecido.

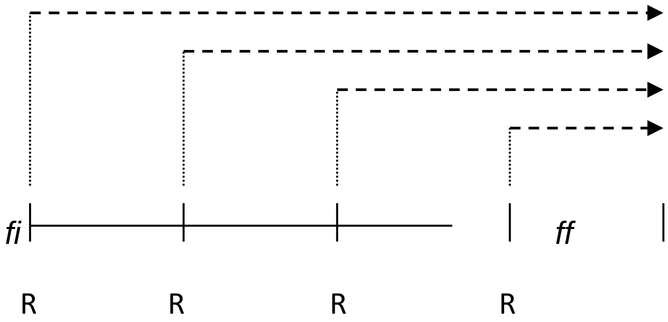
A continuación mostramos la gráfica correspondiente a esta situación, así como su análisis.



Como cada renta gana un interés del 3% ($i_2 = 0{,}03$) durante un semestre más y el monto de la anualidad, como ya se conoce, es la suma de los montos parciales correspondientes, entonces, se tiene en el cálculo que:
$M = 10\,000(1{,}03)^4 + 10\,000(1{,}03)^3 + 10\,000(1{,}03)^2 + 10\,000(1{,}03)$
$M = 10\,000(1{,}125\,509) + 10\,000(1{,}092\,727) + 10\,000(1{,}060\,9) + 10\,000(1{,}03)$
$M = 11\,255{,}09 + 10\,927{,}27 + 10\,609 + 10\,300$
$M = 43\,091{,}36$

Si comparamos los resultados obtenidos en este caso con la reta ordinaria o fijas, este resultado del monto supera en $ 1 225,09 al de la renta ordinaria.
Entonces para una anualidad anticipada o adelantada se tiene gráficamente:

Figura 13



Como las rentas están al inicio de cada período, el monto se obtiene mediante la suma siguiente:

$$\mathbf{M_r = R(1+i)^t + R(1+i)^{t-1} + \ldots + R(1+i)^2 + R(1+i)}$$

Como puede constatarse gráficamente y también por la expresión anterior las rentas correspondientes a una anualidad anticipada ganan interés por un período más, por lo que su monto puede ser deducido a partir del monto para t + 1 períodos, restándole la última renta, es decir:

$M_{ant} = R\left[\frac{(1+i)^t - 1}{i}\right]$ - R efectuando se obtiene:

$M_{ant} = R\left[\frac{(1+i)^{t+1} - 1}{i}\right]$ - 1

También se puede sustituir en esta expresión a: $m_{t+1} = \left[\frac{(1+i)^{t+1} - 1}{i}\right]$ y se obtiene:

i

M_{ant} = R [$m_{t+1,\ i}$ - 1]

Expresión que también simplifica los procesos de cálculos.

También cuando la tasa de interés es nominal, como conocemos que i= $\frac{j}{n}$ entonces, se puede sustituir cuando la tasa es nominal y efectuar los cálculos de forma simplificada. Analizaremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.13

Una empresa pesquera abre una cuenta en el Banco con $ 7 000.00, la tasa de interés que paga es del 2% anual con capitalización semestral. Por los resultados comerciales la empresa continúa efectuando depósitos sistemáticamente al incio de cada semestre, sin hacer ninguna extracción con el propósito de completar dentro de 2 años un saldo para la mordernización de la empresa. ¿Qué saldo tendrá al concluir el período para ejecutar la modernización de la empresa?

Datos

P= $ 7 000.00

j=2% = 0,02

n= 2

t= 2 años= 2 x 2 semestres = 4 semestres

M:?

Como conocemos que i= j/n se calcula i y trabaja con la fórmula anterior.

i= $\frac{j}{n} = \frac{0,02}{2}$ = 0,01 y utilizando la fórmula: M_{ant} = R [$m_{t+1,\ i}$ - 1]

Ahora se sustituye y calcula con el auxilio de las tablas de la siguiente forma:

M_{ant} = $ 7 000.00 [$m_{4+1,\ 0,01}$ - 1]

M_{ant} = $ 7 000.00 [$m_{5,\ 0,01}$ - 1]

M_{ant} = $ 7 000.00 [5, 101005 - 1]

M_{ant} = $28 707. 03

Respuesta. El saldo al concluir los dos años para ejecutar la modernización de la empresa es de $28 707. 03.

Ejemplo 4.14

Un departamanto de una empresa que acomete una inversión por un valor de $93 685.50 y para su liquidación establece un convenio con otra entidad para lo cual debe efectuar depósitos mensuales adelantados de $6 000.00, en una cuenta a la cual el banco le paga el 6% de interés anual capitalizable mensualmente. El primer depósito se efectuó el día que se abrió la cuenta. ¿Qué cantidad de depósitos serán necesarios para liquidar el valor de la deuda con la entidad?

Datos.
M= $93 685.50
R= $6 000.00
j= 6% = 0,06
n= 12
t:?

i= $\frac{j}{n} = \frac{0{,}06}{13}$ 0,06/ 12 = 0,005

M_{ant} = R [$m_{t+1,\,i}$ - 1] sustituyendo y despejando se tiene

$93 685.50 = $6 000.00 [$m_{t+1,\,0{,}005}$ - 1]

$m_{t+1,\,0{,}005} - 1 = \frac{\$93685.50}{\$6000.00}$

$m_{t+1,\,0{,}005} = \frac{\$93685.50}{\$6000.00} + 1$

$m_{t+1,\,0{,}005}$ =$15, 61425+ 1

Buscando en la tabla el valor de $m_{t+1,\,0{,}005}$ =$16, 61425 entonces el valor del 0,0050= 0,5% que corresponde con 16,61425 en la tabla es: t + 1= 16 entonces a t le corresponde el valor de 15.
Respuesta. La cantidad de depósitos que son necesarios para liquidar la deuda, son 15.

Ejemplo 4.15

Una compañía productora de efectos eléctricos otorgó $ 10 000.00, al inicio de cada semestre, a otro empresario del cual es cliente. El tiempo establecido fue de dos años y medio. Finalmente la compañía tuvo que pagar un monto de $84 500.00. ¿Cuál fue la tasa nominal capitalizable semestralmente que se aplicó en el proceso?
Datos
M= $61532.00
P= $10 000.00
t= 2,5años= 5 semestres
n= 2
j:?

M_{ant} = R [$m_{t+1,\,i}$ - 1] Despejando se tiene

$$\frac{M_{ant}}{R} = m_{t+1,i} - 1$$

$$m_{t+1,i} = \frac{M_{ant}}{R} + 1$$ Sustituyendo y efectuando

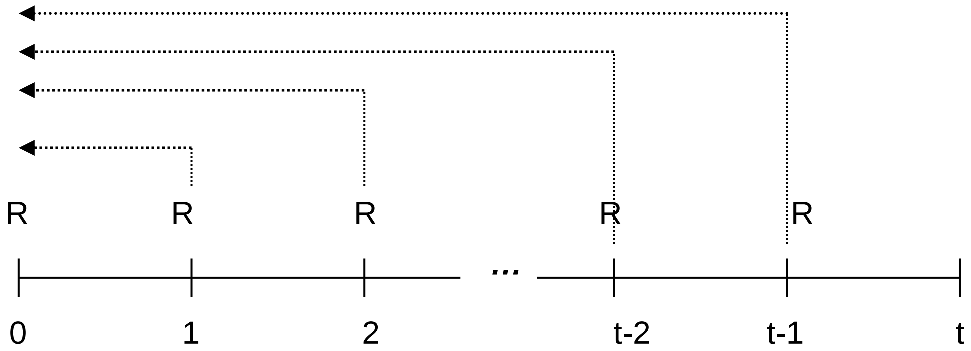
$m_{t+1,\,i} = \frac{\$61532.00}{\$10000.00} + 1$

$m_{t+1,\,i}$ = 6,1532+ 1 = 7,1532 como son 5 semestres sustituyendo en

$m_{5+1,\,i}$ = 7,1532
$m_{6,\,i}$ = 7,1532
Buscando en la tabla, para t = 6 aparece como el valor calculado, y corresponde el de una tasa del 7 %
Como la tasa buscada es nominal de capitalización semestral y sabemos que $i=\frac{j}{n}$ entonces si despejamos j se tiene:
j= n x i sustituyendo y calculando
j= 2 x 0,07= 0,14
j= 14 %
Respuesta. La tasa aplicada al proceso fue del 14 % capitalizable semestralmente

4.2.2 Valor actual de una anualidad anticipada.

El proceso de actualización de las rentas constantes de una anualidad anticipada con t períodos de renta, se puede representar gráficamente como sigue:



Como puede observarse en la gráfica, la primera renta ya está actualizada por lo que se suprime el primer pago de la anualidad, por lo que el valor actual se calcula para t-1 períodos, pero se tendrá que añadir entonces al final la primera renta es decir:

Como la suma de los valores actuales de las demás rentas puede escribirse agregándolos a R como:

$$V_{ant} = R + [\, R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + \ldots + R(1+i)^{-(t-2)} + R(1+i)^{-(t-1)} \,]$$

Entonces en la expresión se tiene que después del primer término R el valor actual de una anualidad ordinaria para t-1 períodos de renta, destacada dentro del corchete.

Extrayendo factor común a R en la expresión dentro del corchete se tiene:

$$V_{ant} = R + R\,[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \ldots + (1+i)^{-(t-2)} + (1+i)^{-(t-1)}]$$

La expresión dentro del corchete se puede expresar entonces:

$$V_{ant} = R + R\left[\frac{1-(1+i)^{-(t-1)}}{i}\right]$$

Si se extrae factor común a R se tiene: $V_{ant} = R\left[1 + .\ \frac{1-(1+i)^{-(t-1)}}{i}\right]$

Sustituyendo por los valores de la tabla financiera se tiene: $V_{t-1;\,i} = \frac{1-(1+i)^{-(t-1)}}{i}$

Entonces V_{ant} = R [1 + $V_{t-1;\,i}$] fórmula que puede expresarse también como:
V_{ant} = R (1 + $V_{t-1;\,i}$)
Analicemos algunos ejemplos prácticos.

Ejemplo 4.16

Una institución bancaria, concede un préstamo a una empresa productora para la compra de un equipamiento necesario a un 5% de interés capitalizable semestralmente. La empresa tiene que efectuar pagos periódicos de $ 3 000.00, al principio de cada semestre durante tres años. El económico de la empresa necesita saber ¿Cuál es el valor actual y el monto qué corresponde a esa situación?

Datos
R= $ 3 000.00
i= 5%=0,05
t= 3 años = 3 x 2= 6 semestres
V_{ant} : ?
M_{ant} : ?
V_{ant} = R (1 + $V_{t-1;\,i}$) Sustituyendo
V_{ant} = $ 3 000.00 (1 + $V_{6-1;\,0,05}$) buscando en la tabla.
V_{ant} = $ 3 000.00 (1 + 4, 329476) = $3 000 x 5,329476
V_{ant} = $ 15 988. 42
M_{ant} = R [$m_{t+1,\,i}$ - 1]
M_{ant} = $ 3 000.00 [$m_{6+1,\,0,05}$ - 1] buscando en la tabla
M_{ant} = $ 3 000.00 [8,42008 - 1]= $ 3 000.00 x 7,142008
M_{ant} = $ 21 421. 02
Respuesta. El valor actua de la renta es de $ 15 988. 42, y el monto $ 21 421. 02.

Ejemplo 4.17

1)- ¿Cuál es el valor actual de una renta $800.00, que está pagando una cooperativa agropecuaria, mediante pagos adelantados semestralmente por un tiempo de 2 años si la tasa de interés anual acumulable semestralmente es del 5%?

Datos
R=$800.00
V_{ant}:?
t=2 años= 2 x 12 = 24 semestres
i= 5%=0,05
V_{ant} = R (1 + $V_{t-1;\,i}$)
V_{ant} = $800.00 (1 + $V_{24-1;\,0,05)}$
V_{ant} = $800.00 (1 + $V_{23\,;\,0,05}$)
V_{ant} = $800.00 (1 + 13,488573)
V_{ant} = $800.00 x 14,488573
V_{ant} = $11 590.85
Respuesta. El valor actual de la renta adelantada, es de $11 590.85.

Ejemplo 4.18

Un cliente contrae una deuda de $600 000.00 en el día de hoy a una tasa del 14 % convertible trimestralmente. Según el contrato con el acreedor la liquidación tiene un plazo de 27 meses, mediante pagos iguales cada 90 días.

¿Cuál es el valor de cada pago, si cada uno se hace en la fecha inicial de los períodos?
Datos
V_{ant}= $600 000.00 (el valor de la deuda hoy es el valor actual)
j=14%=0,14
n= 4
t= 27 meses= 9 trimestres
R:?

$V_{ant} = R\ (1 + V_{t-1;\ i})$ entonces como: $i = \frac{j}{n}$ = 0,14/4= 0,035 sustituyendo en la expresión del valor actual se tiene:
$600 000.00 / $(1 + V_{9-1;\ 0,035}) = R$
R= $600 000.00/ $(1 + V_{8\ ;\ 0,035})$ buscando en la tabla

$$R = \frac{\$600000.00}{(1+6,873956)} = \frac{\$600000.00}{7.873956}$$

R= $ 76 200. 58
Respuesta. El valor de cada pago, si cada uno se hace en la fecha inicial de los períodos, es de $ 76 200. 58.

Ejemplo 4.19

Una persona hace un contrato con una entidad bancaria por una deuda que tiene un valor de $ 448 320.00. En el contrato se establece una tasa de interés del 4% acumulable semestralmente. ¿Qué cantidad de pagos, al inicio de cada semestre, con un valor de $60 000.00, debe hacer el deudor para liquidar la deuda?

Datos
V_{ant} = $448 320, 00
R = $ 60 000, 00

$$i = \frac{j}{2} = \frac{0,04}{2} = 0,\ 02$$

t:?
$V_{ant} = R\ (1 + V_{t-1;\ i})$ Despejando

$$1 + V_{t-1;\ i} = \frac{V_{ant}}{R}$$

$$V_{t-1;\ i} = \frac{V_{ant}}{R} - 1$$

$$V_{t-1;\ 0,02} = \left(\frac{\$448320.00}{\$60000.00}\right) - 1$$

$V_{t-1;\ 0,02}$ = 7,472 – 1 = 6,472
Buscando en la tabla para el 2% el valor más cerca de 6,472 es el de 6,47199 para lo cual entonces se tiene que plantear: t -1=7 y despejando y calculando se obtiene t=8
Respuesta. Hay que hacer 8 pagos al inicio de cada semestre para liquidar la deuda del contrato establecido.

Ejemplo 4.20

Una deuda de un comerciante asciende hoy a \$1 200.00. Para su liquidación se aplica una tasa de interés del 2% efectiva y se paga una renta anual anticipada de \$300.00. ¿En qué tiempo liquida la deuda el comerciante?

Datos

V_{ant} =\$1 200.00

R = \$300.00

i= 2%=0,02

t:?

Como $V_{ant} = R\,(1 + V_{t-1;\,i})$ sustituyendo

$\$1\,200.00 = \$300.00\,(1 + V_{t-1;\,0,02})$ Despejando

$$\frac{\$1200.00}{\$300.00} - 1 = V_{t-1;\,0,02}$$

$V_{t-1;\,0,02} = 4 - 1 = 3$

$V_{t-1;\,0,02} = 4$ Buscando en la tabla t se encuentra entre los valores:

Para t= 3 se tiene 2,883883 y t=4 entonces 3,807728 efectuando

4	------------- 3,807728	3 + x	---------3.000000
3	------------- 2,883883	3	---------3.807728
1	------------ 0,923845	x	--------- 0,116117

Estableciendo la proporción

1 / 0,923845 = x / 0,116117

Despejando: x= 0,116117 / 0,923845 = 0,12568

Entonces t – 1 = 0,12

t= 0,12 + 1 = 1,12

1,12 es 1 año, 0,12 x 12= 1,44 es decir 1 mes y 0,44 x 30= 13 días

Respuesta. La deuda se liquida en un t= 1,12 o sea 1 año, 1 mes y 13 días.

4.3 Anualidades diferidas o aplazadas.

En las transacciones finacieras es muy común, en los pagos, que el primer período de pago comience a facturase después de pasado cierto tiempo del momento inicial de la transacción, en este caso la anualidad recibe el nombre de diferida o aplazada. Además de estas condiciones los pagos pueden estar colocados al inicio o al final de cada período de renta, por lo que la fecha inicial ha sufrido un desplazamiento respecto a la fecha de convenio. Fundamento que caracteriza este tiempo de anualidad.

La estimación del intervalo de aplazamiento para una anualidad diferida se miden en las mismas unidades del período de pago de la renta. Por ello cuando hablamos de una anualidad diferida durante 10 períodos, esto significa que tienen que transcurrir ese tiempo entre el momento actual y la época en que se empieza a considerar el plazo. Estos preríodos generalmente se establecen en años, semestres, trimestres, meses o cualquier otra unidad, según la frecuencia de los pagos que hay que hacer cuando empieza el plazo. Por ello el intervalo de aplazamiento se mide también así, tanto para una anualidad vencida como anticipada.

Definición: Una anualidad es diferida o aplazada cuando el plazo de duración comienza a decursar cierto tiempo después de suscrito el convenio. Al período inicial se le denomina período de aplazamiento.

Como en las anualidades diferidas o aplazadas el intervalo de aplazamiento se mide en los mismos períodos de la renta, esto exige que se establezca de forma explícita, si el pago se efectuará al comienzo o final del período para poder identificar si las anualidades son anticipadas u ordinarias espectivamente.

En las siguientes gráficas se muestra como se concreta el tiempo de plazo, para las rentas, el cual puede estar ubicado al inicio o al final de cada período, en correspondencia con el tipo de anualidad.

Figura de anualidades ordinarias o vencidas

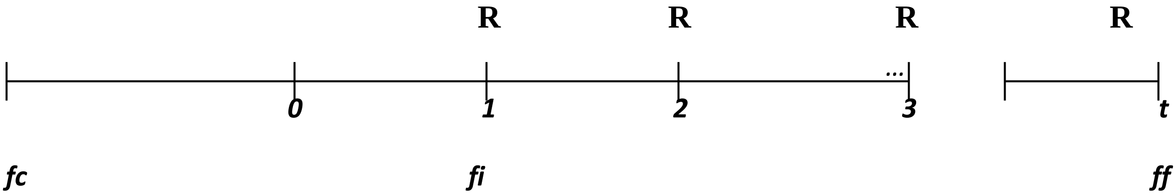
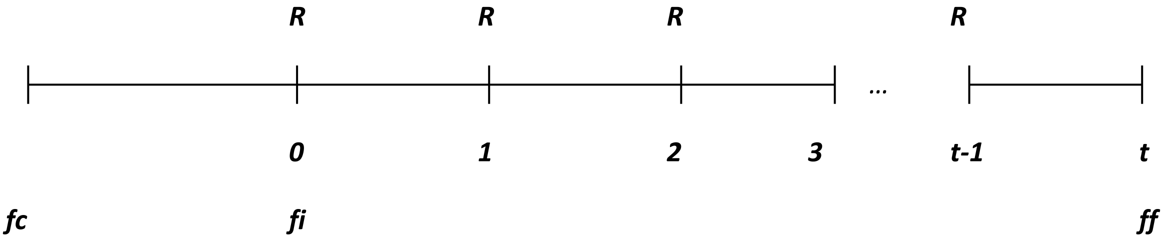


Figura de anualidades anticipadas o adelantadas



El período en que se difiera la anualidad se denota k.

Según la gráfica y lógica del proceso que caracteriza a este tipo de anualidad, el cálculo del monto para una anualidad cuando es diferida puede efectuarse de igual forma al de una anualidad ordinaria o anticipada, porque como no se entrega renta alguna en el tiempo que se difiere, las acumulaciones comienzan cuando se paga la primera renta.

También cuando no se declare para las anualidades diferidas o aplazadas si los pagos o cobros tienen lugar al inicio o al final de cada período, la anualidad será considerada como ordinaria o vencida para sus cálculos.Las anualidades diferidas se presentan con frecuencia en los negocios.

4.3.1 Monto de una anualidad diferida vencida o adelantada.

El monto de una anualidad diferida no se diferencia del monto de una anualidad no diferida, que tenga las mismas características, en cuanto a las tasas de interés, el plazo, el importe y la fecha de los pagos. Esto es evidente pues durante el intervalo de aplazamiento, denotado por h, no se gana ningún interés, ya que en ese período no se hace ningún tipo de pago. Cuando ha transcurrido el intervalo de aplazamiento la anualidad no puede distinguirse de cualesquiera de las otras anualidades cuyo plazo ha empezado. Es por ello que el monto de una anualidad diferida ya sea vencida o anticipada es igual respectivamente al monto de una anualidad vencida o anticipada no diferida cuando tiene las mismas características para sus dimensiones es decir; la tasa, el plazo, el importe y la fecha de los pagos que se efectúen.

¿Cómo hacer los cálculos en cada uno de esos casos? Analizaremos algunos ejemplos para ello.

Ejemplo 4.21

Una empresa hace un contrato para efectuar un pago mediante una renta diferida vencida por un período de 3 años diferidos y los pagos se realizarán los siguientes 6 años con un valor de $200.00 anuales a una tasa de interés del 2% anual.¿Cuál es el monto a pagar por esa renta diferida vencida?

Datos

k= 3 años (años diferidos)

t=6 años

i= 2%=0,02

R= $200.00

M:?

Como se trata de una anualidad diferida vencida se utiliza la fórmula correspondiente a una anualidad vencida: M= R.$m_{t,i}$

Sustituyendo M= $200.00.$m_{6,\ 0,02}$

Buscando en la tabla   M= $200.00.x 6.30812096

M= $1 261.62

Respuesta. El monto a pagar por esa renta diferida vencida es de $1 261.62.

Ejemplo 4.22

Para acometer una inversión una institución hace un contrato con un banco y establecen una forma de pago mediante anualidades diferidas anticipadas. Se consideran dos años diferidos y 5 donde se pague la deuda. La deuda que la institución inversionista adquiere tiene un valor de $ 10 200.00 y debe efectuar depósitos adelantados anuales para cancelarla. Esos pagos reciben un interés del 2% anual efectivo. El primer depósito se efectuó el primer día de inicio del período de pago establecido. ¿Cuál es el valor de cada depósito que debe hacer la institución inversionista?

Datos.

M= $10 200.00

R:?

i= 2% = 0,02

t=5 años

k= 2 años (período en que se difiere)

M_{ant} = R [$m_{t+1,\ i}$ - 1]   despejando se tiene

$$R=\frac{M_{ant}}{m_{t+1,i}-1}$$

$$R=\frac{\$10200.00}{m_{5+1,0,02}-1}$$

R = $\dfrac{\$10200.00}{m_{6,0,02} - 1}$

R = $\dfrac{\$10200.00}{6{,}30812096 - 1}$

R = $\dfrac{\$10200.00}{5{,}30812096 - 1}$

R = $ 1 921.58

Respuesta. El valor de cada depósito que debe hacer la institución inversionista es de $ 1 921.58.

Cuando en las anualidades diferidas vencidas se necesita calcular el monto o el valor actual, se pueden presentar casos en los que las rentas se pagan anualmente y los intereses se acumulan en el mismo tiempo, pero en la práctica esto no siempre se cumple. Se pueden presentar situaciones en que los intereses se acumulan varias veces en el año, o cuando la renta se paga varias veces al año, puede suceder que el interés en uno de los casos sea efectivo y en el otro nominal. Para efectuar los cálculos en esos casos tenemos que usar las fórmulas tratadas y en ellas hacer las sustituciones de acuerdo a las particularidades del interés es decir: i= $\frac{j}{n}$ y el tiempo también multiplicarlo por n.

Estas sustituciones se hacen en las fórmulas correspondientes para logar la forma de ejecutar los cálculos. Fundamentos que por sus características y los ejemplos ya tratados en los temas anteriores, no se especifican en las fórmulas sino que se dejan para su aplicación según corresponda a las situaciones y ejercicios. Esto es válido para el monto y el valor actual.

4.3.2 Valor actual de una anualidad diferida vencida o adelantada.

El valor actual de una anualidad diferida es el valor de dicha anualidad al inicio del tiempo total de la misma, o sea al comienzo del período en que se difiere. Esto se debe a que el valor actual se calcula en el momento cero en que comienzan a decursar los períodos establecidos.

Para el cálculo del valor actual V, cuando la anualidad es diferida vencida o adelantada con k períodos diferidos, a un tiempo t, con una tasa i de interés, y renta R se efectúa mediante las siguientes expresiones:

$V_{dif}\ (1 + i)^k = R\ V_{t,\,i}$ y despejando se obtiene

$V_{dif} = R\ V_{t,\,i}\ (1 + i)^{-k}$

También se puede obtener mediante la diferencia entre las anualidades diferidas es decir: $V_{dif} = R\ (V_{t,\,i} - (1 + i)^{k})$

Si se quiere hallar la renta entonces se despeja, y se obtiene:

$R = V_{dif}\ (1 + i)^k : V_{t,\,i}$ o igualmente desde la otra fórmula

$R = V : (V_{t,\,i} - (1 + i)^{k})$

De la misma forma se pueden calcular t e i mediante despejes, con el uso de logaritmos o interpolación, de forma similar a como se han analizado situaciones de los temas anteriormente, teniendo en cuenta las particularidades de los cálculos**.**

Observe que la notación utilizada para el valor actual de las anualidades diferidas o aplazadas es: V_{dif}
Analicemos algunos ejemplos prácticos.

Ejemplo 4.23
1)- La empresa Etecsa hace una inversión para modernizar el equipamiento disponible y proyecta que debe producir para ello $ 200 000.00 anuales por un período de 5 años, para liquidar la inversión. Esa producción se inicia dos años después de efectuado el proceso inversionista al final de cada año. Para ello se considera un interés del 3% anual. ¿Cuál es el valor de la inversión a su inicio?
Datos
R= $ 200 000.00
t= 5 años
k= 2 años (período de aplazamiento)
i= 3%= 0,03
V_{dif}:?
Como se trata de una anualidad diferida vencida entonces:
$V_{dif} = R\ (1 + i)^{-k} \times V_{t,\, i}$ sustituyendo
$V_{dif} = \$\ 200\ 000.00\ (1 + 0{,}03)^{-2} \times V_{5,\ 0{,}03}$
Buscando en las tablas y sustituyendo
$V_{dif} = \$\ 200\ 000.00 \times 0{,}942595 \times 4{,}579707$
$V_{dif} = \$\ 863361.78$
Respuesta. El valor de la inversión hoy es de $ 863361.78.

Ejemplo 4.24
El administrador de una CPA necesita comprar un equipo para mejorar la producción de la cooperativa y al contactar con la empresa vendedora, esta le ofrece dos opciones:
-la primera, es comprar el equipo al contado por un valor de $9 500.00.
-la segunda, es pagar $4 900.00 al inicio y efectuar 6 pagos anuales vencidos de $1 100.00, cada uno a un 4% de interés compuesto, comenzando a pagar después de concluir el segundo año de establecido el convenio. ¿Cuál opción resulta más conveniente para el empresario? ¿Cuál es la diferencia?
Datos
Precio de contado. $9 500.00
Pago de entrada: $4 900.00
R= $ 1 100.00
i= 4%=0,04
k=2
t=6
V_{dif}:?
Como se trata de una anualidad diferida vencida, se comienza a pagar después de concluir del segundo año de establecido el convenio por lo que gráficamente se tiene:

```
                P1  P2  P3  P4  P5  P6
!___!____!___!___!___!____!___!___!
0   1    2   3   4   5    6   7   8
```

$V_{dif} = R\ (1+i)^{-k}\ V_{t,\,i}$
$V_{dif} = \$\ 1\ 100.00\ (1+0{,}04)^{-2}\ V_{6,\,0{,}04}$ Buscando en la tabla los valores
$V_{dif} = \$\ 1\ 100.00 \times 0{,}965897 \times 5{,}242136$
$V_{dif} = \$5\ 569.69$
Precio a plazo = Precio de entrada + valor de la renta diferida anticipada
Precio a plazo = $4 900.00 + $5 569.69
Precio a plazo = $ 10 469.69
Entonces: Precio a plazo – Precio de contado= $ 10 469.69 - $9 500.00
Precio a plazo – Precio de contado= $969.69
Respuesta. La mejor opción es comprar el equipo al contado pues se obtiene un ahorro de $969.69.

Ejemplo 4.25

Una fábrica productora de cemento, hace una inversión con el propósito de mejorar la calidad de su producción,para lo cual establece un contrato con otra entidad con el fin de que se le otorgue un préstamo desde el inicio de la inversión, el cual comienzará a pagar dentro de dos años de forma anticipada con un valor de $50 000.00 anuales, durante un período 4 años. ¿Cuál es el valor actual del préstamo recibido para la inversión si se aplica un interés anual del 2%?
Datos
R= $50 000.00
k= 2 años
t= 4 años
i= 2% = 0,02
$V_{dif:}$?
$V_{dif} = R\ (1+i)^{-k}\ V_{t,\,i}$ Sustituyendo
$V_{dif} = \$50\ 000.00\ (1+0,\ 02)^{-2}\ V_{4,\,0{,}02}$ Buscando en las tablas
$V_{dif} = \$50\ 000.00 \times 0{,}96116878 \times 3,\ 80772870$
$V_{dif} = \$182\ 993.\ 49$
Respuesta. El valor actual del préstamo recibido es $V_{dif} = \$182\ 993.\ 49$.

Ejemplo 4.26
Un negociante solicita a un banco $20 000.00, para hacer una inversión que comienza a liquidar 3 años después de solicitada con pagos al inicio de cada año durante 6 años. ¿Qué valor tiene cada renta que paga el negociante, para liquidar el préstamo solicitado de la inversión?
Datos
$V_{dif} = \$\ 20\ 000.00$
i= 3%=0,03
k=3
t= 6 años
R:?
Se trata de una anualidad diferida anticipada
$V_{dif} = R\ (1+i)^{-k}\ V_{t,\,i}$

$$R = \frac{V_{dif}}{(1+i)^{-3}} V_{t,i}$$

R= $\dfrac{\$20000.00}{(1+0,03)^{-3} V_{6,0,03}}$

R= $\dfrac{\$20000.00}{0,91514166\, x 5,417191}$

R= $\dfrac{\$20000.00}{4,95749716}$ = \$4 034.29

Respuesta. El valor que tiene la renta es R=\$4 034.29.

Ejemplo 4.27

Una empresa de turismo para la construcción de un hotel de primera calidad, en la cayería norte de Cuba, solicita al Bandec, dinero que pagará en un período de 10 años, pero comenzará a efectuar los pagos, todos iguales, después de transcurrir dos años por un valor de \$10 000.00 siempre al inicio de cada año. El interés establecido por el banco es del 3% efectivo anual. ¿Qué cantidad de dinero fue prestado por el Banco para la construcción del hotel?

Datos

R= \$10 000.00

i=3%=0,03

k=2

t=8 años

V_{dif} :?

V_{dif} = R $(1+i)^{-k}$ $V_{t,\, i}$

V_{dif} = \$10 000.00 $(1+0,\, 03)^{-2}$ $V_{8,\, 0,\, 03}$

V_{dif} = \$10 000.00 x 0,94259521 x 7,01969219

V_{dif} = \$66 167. 28

Respuesta. Para la construcción del hotel fueron prestados \$66 167. 28 por el Banco.

Ejemplo 4.28

Con el propósito de liquidar una deuda adquirida, en el día de hoy, por un valor de \$7 000.00, la persona establece comenzar los pagos un año después de forma adelantada, por un período de 3 años, con pagos semestrales al que se le aplica una tasa del 2% anual acumulable semestralmente. ¿Cuál es el valor de cada pago para liquidar la deuda adquirida según lo establecido?

Datos

V_{dif} =\$7 000.00

j=2%=0,02

k=1año

t=3 años

n=2

R:?

V_{dif} = R $(1+i)^{-k}$ $V_{t,\, i}$

Como se trata de una tasa de interés nominal se puede calcular:

i= $\dfrac{j}{n}$ = $\dfrac{0,02}{2}$ =0,01

t= 3 años x 2 $\frac{semestres}{años}$ = 6 semestres, con estos datos se puede aplicar directamente la fórmla anterior, pero también es posible obtener una transformacón en la fórmula como sigue:

V_{dif} = R $(1+j/n)^{-nk}$ $V_{nt,\ j/n}$

Encontces despejando R y sutituyendo se tiene:

$$R = \frac{V_{dif}}{(1+\frac{j}{n})^{-nk}} V_{nt\frac{j}{n}}$$

Sustituyendo los valores

$$R = \frac{\$7000.00}{(1+\frac{0,02}{2})^{-2x3}} V_{2x3,\frac{0,02}{2}}$$

$$R = \frac{\$7000.00}{(1+0,01)^{-6}} V_{6x0,01}$$

Buscando en las tablas

R = $\frac{\$7000.00}{0,94204524\ x5,79547647}$

R = $\frac{\$7000.00}{5,45960102}$

R = \$ 1 282.14

Respuesta. El valor de cada pago para liquidar la deuda adquirida según lo establecido R = \$ 1 282.14.

4.4 Fondo y amortización.

Otro de los conceptos importantes a considerar en el trabajo con las anualidades es el de fondo y la amortización.

En sentido general un fondo es un caudal o conjunto de bienes (dinero) que posee una persona o entidad para ejecutar acciones financieras. Por su parte amortizar es un proceso para extinguir o liquidar el capital o riquezas de un préstamo o deuda que se posee.

La creación de un fondo está siempre acorde a las características del contrato correspondiente donde se concreta la forma de liquidación de la deuda u obligación.

Otra vía es crear el fondo de amortización para pagar un préstamo a largo plazo partiendo de las utilidades, después de impuesto un porciento de esas, se destina a crear la reserva para amortizar la obligación a pagar (bonos o préstamos bancarios) a largo plazo.

En el contrato el préstamo define cómo el prestatario va a crear fuente de financiamiento a utilizar para financiar la deuda a corto plazo, lo cual puede ser creando una reserva a partir de las utilidades. Las fuentes pueden utilizarse en diferentes alternativas concebidas en un contrato.

Particularmente en las finanzas estos conceptos tienen una gran importancia e incidencia en los procederes correspondientes, por ello la amortización se define como:

Amortización: Es cualquier forma o modalidad de pagos que se efectúan para la liquidación o extinción de una deuda o préstamo.

Existen diferentes alternativas para la amortización, en esta ocasión se trabajará con la más común de estas modalidades, es decir mediante la liquidación de una deuda o préstamo a través un sistema de pagos de igual valor en intervalos regulares de tiempo establecido.

Por sus características esta forma de pago, para la liquidación de una deuda o préstamo, se utiliza la misma forma financiera que las correspondientes a anualidades, es por ello que los problemas relacionados con la amortización de una deuda o préstamo recibido este proceso se corresponde con una aplicación práctica del concepto de anualidad.

También como concepto importante de las finanzas está el de fondo: el cual constituye un efectivo o cualquier otro activo que por razones de convenio, contrato o de forma voluntaria se destina a determinado propósito. Los activos que integran el fondo generalmente tienen que separarse de los demás, de su misma clase, para evitar confusiones.

En las finanzas este proceso se realiza utilizando cuentas especiales que pueden ser varias o una sola, de acuerdo a las características de los activos que integran el fondo.

En sentido general se distinguen dos clases de activos, desde el punto de vista de su disponibilidad:

-los que forman parte de distintos fondos, los cuales pueden ser utilizados para los fines a que los fondos se destinan y se hacen aparecer bajo un epígrafe apropiado.

-los demás, aparecen clasificados en los diferentes grupos de activos, de acuerdo a su naturaleza o los que son empleados en las operaciones ordinarias de la empresa o entidad correspondiente.

Los fondos son creados para cumplir distintos propósitos según las características de las instituciones. Por ejemplo, en las empresas industriales, los fondos pueden ser creados para:

-satisfacer a su vencimiento una obligación a largo plazo por una suma importante de dinero.

-retirar de la circulación una emisión de acciones preferidas.

-adquirir una propiedad valiosa.

-lleva a cabo en un futuro, más o menos cercano, un programa de ampliación relacionado con los negocios.

Existen otras posibilidades de fondos como: los no acumulativos y los acumulativos.

Los fondos no acumulativos, como todos aquellos se invierten bastante en valores, los cuales producen ingresos, donde pueden ocurrir dos variantes:
1.- Que los ingresos se consideren como parte del fondo aumentando el importe de este.
2.- Que no se considere así, y se lleven a la cuenta general de caja o banco.

Los fondos que tienen la primera característica precisada son clasificados como acumulativos y los de la segunda peculiaridad se pueden considerar como no acumulativos.

Generalmente cuando se tienen obligaciones en los contratos o convenios establecidos, se precisa la forma de pago para la liquidación o reembolso a su vencimiento. Estas cantidades según las particulares del proceso de pago en diferentes países pueden efectuarse mediante dos vías. A través de un fondo de amortización también denominado fondo acumulativo o mediante un sistema de amortización o liquidativo, en ambos casos según el período establecido y las características del contrato o convenio.

En el caso del sistema de amortización o liquidación el proceso es contrario al del fondo. Este se caracteriza porque sistemáticamente según se vayan efectuando los pagos el total a pagar va disminuyendo. Es por todo ello que el proceso para los cálculos correspondientes tiene sus particularidades muy relacionadas con los conceptos y fundamentos estudiados anteriormente de monto y valor actual lo cual sustentado en la Matemática Financiera se tienen las vías y procederes que distinguen sus cálculos.

Para todo ello es importante e imprescindible distinguir las semejanzas y diferencias que existen entre el fondo de amortización o también denominado fondo acumulativo y la amortización o sistema de amortización. El siguiente cuadro precisa esos fundamentos.

	Fondo de amortización o Fondo acumulativo.	Cuadro de Liquidación o Sistema de amortización.
Semejanzas	Ambos son métodos para el cálculo de pagos a plazos de un préstamo o deuda para su liquidación.	
Diferencias	El importe de los pagos se utiliza para acumular el capital y los intereses a liquidar.	Los pagos se utilizan para ir liquidando de forma periódica el capital con sus intereses correspondientes.
	La deuda permanece constante hasta que se completa el fondo.	La deuda va siendo cada vez más pequeña mediante con cada uno de los pagos sucesivos hasta liquidar la deuda.
	Para el proceso de cálculo se utiliza el monto de las rentas.	Para el proceso de cálculo se utiliza el valor actual de las rentas.

Particularmente el fondo acumulativo, o fondo de amortización, como también se le denomina, tiene la particularidad de que los intereses u otros ingresos que provienen de los valores en que se invierte el efectivo utilizado en él, se acumulan al fondo. En este proceder un efecto importante lo tiene la Matemática Financiera. Es por ello que las cantidades que, a fin de cada período establecido: año, trimestre, cuatrimestre, meses entre otros, hay que integrar al fondo van siendo mayores hasta liquidar la deuda.

Por las características de este tipo de fondo, según la Matemática Financiera se evidencia que es imprescindible considerar el interés compuesto. Es por todo lo argumentado que para determinar la cantidad que hay que integrar al fondo periódicamente, se utiliza el monto de las rentas, las cuales generalmente pueden ser vencidas o anticipadas, aunque en la práctica predominan los casos de vencidas, para lo cual se aplica la siguiente fórmula de la Matemática Financiera:

$M = R\, m_{t,\,i}$ aunque existen otras fórmulas equivalentes conocidas y analizadas anteriormente como: $M = R\left[\frac{(1+i)^t - 1}{i}\right]$ a partir de las características o peculiaridades de los datos, especialmente de la tasa y el tiempo, se considera también:

$$M = R\left[\frac{(1+\frac{j}{n})^{nt} - 1}{\frac{j}{n}}\right]$$

Es en este proceder para los cálculos es muy efectivo la utilización de las tablas correspondientes, lo cual simplifica el proceso.

Analicemos el siguiente caso práctico.

Ejemplo 4.29

Una empresa tiene una obligación hipotecaria con un valor de $6 000.00 que vence dentro de 4 años. Para su liquidación decide formar un fondo acumulativo o de amortización con un interés del 3% anual efectivo y necesita determinar:
a)- ¿Cuál es el valor que debe integrar al fondo anualmente?
b)- ¿Cómo evoluciona el fondo anualmente? ó ¿Cuál es la tabla correspondiente al fondo de amortización?

Respuesta.
a)- El valor que se debe integrar anualmente al fondo o la renta a pagar es:
Datos
M=$6 000.00
t=4 años
i=3%= 0,03
R:?

a)- M= R $m_{t,\,i}$ Despejando R.
R = M / $m_{t,\,i}$ Sustituyendo
R = $6 000.00 / $m_{4,\,0{,}03}$ Buscando en la tabla se tiene
R = $6 000.00 / 4,183627
R = $1 434.16
b)- Fondo de amortización

Fondo de amortización

Año	Pago anual o contribución al fondo R.	Interés devengado por el total acumulado.	Renta o Aumento del período.	Total en el fondo o acumulado.
1	$1 434.16	-	$1 434.16	$1 434.16
2	1 434.16	$ 43.03	1 477.19	2 911.35
3	1 434.16	87.34	1 521.50	4 432.85
4	1 434.16	132.99	1567.15	6000.00
Total	$5 736.64	$263.36	$6 000.00	

El fondo de amortización o fondo acumulativo, como igualmente se le denomina, se caracteriza porque periódicamente los intereses y los ingresos que provienen de la renta que se amortiza van disminuyendo el saldo deudor al incorporase al fondo, hasta la liquidación en el período establecido. Aquí como parte de la Matemática Financiera se utiliza el monto de las rentas.

En el caso del valor actual para el sistema de amortización o cuadro de liquidación como también se le llama, las cantidades que al final de cada periodo establecido se incorporan van disminuyendo progresivamente con el tiempo, en el saldo deudor hasta su liquidación al concluir el tiempo establecido. En general en este proceso sus características esenciales son:

- El capital va disminuyendo conforme se van dando los pagos, hasta su liquidación final.
- Al ir reduciéndose el capital, los intereses también se van reduciendo.
- La amortización del capital va aumentando conforme pasen los períodos, al ir disminuyendo en la misma forma los intereses.

- Si se quieren conocer las amortizaciones de los diferentes períodos, basta multiplicar la primera amortización por la razón: $(1+i)^t$, donde t es el número de períodos que faltan para la amortización del período correspondiente.
- La suma de las amortizaciones será igual al valor actual o capital inicial del préstamo.

Por todos esos argumentos, según lo estudiado anteriormente, para calcular el valor actual de una renta anticipada la fórmula a utilizar es:

$V = R\, v_{t,\, I}$ aunque también existen otras fórmulas equivalentes estudiadas como:

$$V = R\, \frac{[1 - (1+i)^{-t}]}{i}$$

En las que se tienen que tener en cuenta las particularidades de los datos, especialmente de la tasa y el tiempo, es por ello que existe también la siguiente fórmula:

$$V = R\left[\frac{1-(1+\frac{j}{n})^{-nt}}{\frac{j}{n}}\right]$$

Al igual que en otros casos estudiados para el trabajo con los cálculos es muy importante la utilización de las tablas matemáticas correspondientes, lo cual simplifica el proceso en los cálculos. Analicemos para ello el siguiente caso práctico

Ejemplo 4.30

Una fábrica de helados adquiere un deuda por la compra de equipos eléctricos para la conservación de los productos que debe liquidar en un período de 3 años, para lo cual establece un convenio con la entidad productora de equipos para la creación de un sistema de amortización mediante pagos anuales de $420.00 a una tasa del 2% de interés efectivo anual. El director de la fábrica le solicita al economista la siguiente información.

a)- ¿Cuál es el valor de la deuda que tiene la fábrica?

b)- Construya el sistema de amortización correspondiente a la situación presentada.

Datos

R? $420.00

i= 2%=0.02

t= 3 años

V:?

a)- $V= R\, v_{t,\, I}$

V=$420.00 x $v_{3,\, 0,02}$ buscando en la tabla.

V=$420.00 x 2,883883

V=$ 1 211.23

b)- Sistema de amortización.

Año	Renta	Interés	Cuota de amortización	Saldo Deudor
0		-	-	$ 1 211.23
1	$ 420.00	$24.22	$395.78	815.45

2	420.00	16.31	403.69	411.76
3	420.00	8.24	411.76	-
Total	$1 260.00	$48.77	$1211.23	

Observe en la tabla que el saldo deudor coincide con la cuota de amortización total y esta a su vez es igual a la diferencia entre el total de la renta y del interés total obtenido.

En el siguiente ejemplo se presenta una situación donde primero se trabaja el sistema de amortización con los fundamentos del valor actual y posteriormente el monto con el fondo de amortización. Son importantes para estos casos los conceptos que caracterizan a cada uno, así como las tablas correspondientes.

A pesar de que la renta es la misma para ambos casos el total a liquidar no es el mismo lo cual está relacionado con los conceptos correspondientes y los procesos de cálculo. Es importante el análisis de esta situación pues en la práctica tiene una implicación diferente.

Ejemplo 4.31

Un negociante tiene una deuda con una entidad productora de la mercancía que el comercializa y debe liquidar esa deuda mediante pagos anuales de $1 000.00 en un período de 4 años a un interés del 2% anual.

a)- ¿Cuál es el valor de la deuda?

b)- Confeccione el sistema de amortización correspondiente.

Datos

R= $1 000.00

i=2%=0,02

t= 4 años

V:?

a)- V= R $v_{t,\ i}$

V=$1 000.00 $v_{4,\ 0{,}02}$

V=$1 000.00 x 3.807728

V=$ 3 807.728 = $ 3 807.73

Respuesta. El valor de la deuda es de $ 3 807.73

b)- Sistema de amortización o cuadro de liquidación.

Año	Pago Anual	Interés del fondo	Total añadido	Saldo Deudor
0	-	-	-	$ 3 807.73
1	$1 000.00	$71.15	$ 923.85	2 883.88
2	1 000.00	57.67	942.33	1 941.55
3	1 000.00	38.83	961.17	980.38
4	1 000.00	19.60	980.38	-
Total	$ 4 000.00	$192.26	$ 3807.73	

En esta misma situación o problema, si se plantea:

a)- ¿Cuál es el monto de la deuda?

b)- Confeccione el cuadro de amortización o fondo acumulativo correspondiente.
Respuesta
Datos
R= $1 000.00
i=2%=0,02
t= 4 años
M:?
a)-
M= R m $_{t,\ i}$
M=$1 000.00 m $_{4,\ 0,02}$
M=$1 000.00 x 4.121608
M=$ 4 121.60 8 = $ 4 121.61
Respuesta. El valor de la deuda es de $ 4 121.61

b)- Cuadro de amortización o fondo de amortización.

Año	Pago Anual	Interés del fondo	Total añadido	Saldo Total en el fondo
1	$ 1 000.00	-	$1 000.00	$ 1 000.00
2	1 000.00	$ 20.00	$1 020.00	2 020.00
3	1 000.00	40.00	1 040.00	3 060.40
4	1 000.00	61.21	1 061.21	4 121.61
Total	$ 4 000.00	$ 121.61	$4121.61	

Observe en los dos cuadros, si se comparan la diferencia que existe entre ambos casos lo cual está dado por los conceptos de Matemática Financiera que se corresponden y aplican es decir, el monto y el valor actual.

Analizaremos ahora un ejemplo para el monto con la precisión de los cálculos necesarios en los diferentes procesos.

Ejemplo 4.32
A usted como financiero de una empresa el director le pide que para el próximo consejo de dirección le informe y argumente sobre la situación que tiene la empresa para la liquidación de una deuda que contrajo a través de un convenio el cual establece la creación de un fondo de amortización para liquidar los $14 250.00 en un período de 5 años a una tasa de interés compuesto anual del 5% efectivo. Para ello se necesita conocer:
a) El valor correspondiente a cada uno de los pagos anuales a efectuar.
b) ¿A cuánto asciende la duda al comienzo del tercer año en el fondo?
c) ¿Cuál es el interés correspondiente al pago número 3?
d) Elabore el fondo de amortización correspondiente
Respuesta
a)-
Datos
M= $14 250.00
t= 5 años
i= 4,5% = 0,045

R:?

M= R $m_{t,\,i}$ Despejando R.

R= $\dfrac{M}{m_{t,i}}$ Sustituyendo

R = $\dfrac{\$14250.00}{m_{5,0,045}}$ Buscando en la tabla

R $\dfrac{\$14250.00}{5{,}470710}$

R = $ 2 604.78

b)- k=2 han trascurrido dos años completos entonces para el cálculo se tiene:

M= R $m_{t\text{-}k,\,i}$

M= $ 2 604.78 $m_{5\text{-}2,\ 0{,}045}$ Buscando en la tabla

M= $ 2 604.78 x 3,137025

M= $ 8 171.25

c)- Recordar que I = P t i pero como t = 1 y en este caso P= M_2

Aquí el principal para el cálculo se corresponde con el Monto del pago número 2 por ello la expresión de cálculo es: I_3= M_2 x i para lo cual se necesita determinar el Monto total del segundo período es decir:

M_2 = (P + I_2) + M_1

M_2 = ($ 2 604.78 + I_2) + $ 2 604.79 donde

I_2= M_1 x i= $ 2 604.78 x 0,045 = $ 117.21 entonces sustituyendo I_2 en

M_2 = $ 2 604.78 + I_2) + $ 2 604.79), se tiene

M_2 = ($ 2 604.78 + $ 117.21) + $ 2 604.79 = $ 5 325.77

Por lo que para calcular el I_3 se sustituyen en I_3= M_2 x i = $ 5 325.77 x 0,045

I_3= $ 239.70

d)- Fondo de amortización

Año	Renta o Pago anual	Interés	Total añadido al fondo	Saldo en el Fondo
1	$ 2 604. 78	-	$ 2 604. 78	$ 2 604. 78
2	2 604. 78	$ 117.25	2 721. 99	5 326. 77
3	2 604. 78	239.70	2 844. 48	8 171. 25
4	2 604. 78	367.70	2 972. 48	11 143. 73
5	2 604. 78	501.46	3 106. 24	14 249.97
Total	$ 13 023.90	$ 1 226.07	$ 14 249. 97	

En el caso del valor actual y su aplicación en el proceso para los cálculos correspondientes a las diferentes partes del sistema se presenta el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.33

Una corporación adquiere una deuda que debe liquidar para lo cual establece un convenio con la entidad en función de crear un sistema para amortizarla donde se establece realizar pagos anuales a un interés del 2,5% efectivo, por un período de 5 años y una renta anual de $1 200.00. El director de la corporación le solicita

a su contador que le determine la siguiente información necesaria para el proceso.
a)- El valor de la deuda a liquidar.
b)- La segunda cuota de amortización
c)- Los intereses correspondientes al tercer pago.
d)- El saldo deudor tras abonar la tercera cuota.
e)-Construir el sistema o estado de amortización según los períodos establecidos.

Respuesta.
Datos
R= $1 200.00
i= 2,5%= 0,025
t= 5 años
V:?
a)- V= R $v_{t,\ i}$

Sustituyendo se tiene: V= $1 200.00 $v_{5,\ 0,025}$
Buscando en la tabla V= $1 200.00 x 4,645828
V= $5 574.99
b)- La segunda cuota de amortización se obtiene de R= $R_k + I_k$
Donde el interés I se obtiene mediante el producto de V_{k-1} x i es decir:
$I_k = V_{k-1} \times i$
Despejando R_k en: R= $R_k + I_k$ se tiene $R_k = R - I_k$

Y sustituyendo I_k en la expresión $R_k = R – (V_{k-1} \times i)$ se tiene:
R_k = R – (V_{k-1} x i)= $1200.00 – (4514.37 x 0,025)
R_k = $1 200.00 – 112.86
R_k =$ 1 087.14

c)- I = V_{k-1} x i
Sustituyendo se tiene I = V_{3-1} x 0,025
I = V_2 x 0,025 = 3427.23 x 0,024 = $85.68
I = $ 85.68

d)- V_k = R $v_{t-k,\ i}$
V_3 = R $v_{6-3,\ 0,025}$
Sustituyendo y buscando en la tabla se tiene: V_3 = $1 200.00 $v_{3,\ 0,025}$
V_3 = $1 200.00 x 2,856023
V_3 = $ 3 427. 23
e) Sistema de amortización

Año	Renta o pago anual	Interés del fondo	Total añadido al fondo	Saldo Deudor
0	-	-	-	$5 574.99
1	$ 1 200.00	$ 139.38	$ 1060.62	4 514.37
2	1 200.00	112.86	1087.14	3427.23
3	1 200.00	85.68	1114.32	2312.91
4	1 200.00	57.82	1142.18	1170.73
5	1200.00	29.27	1170.73	
Total	$ 6 000.00	425.01	$ 5 574.99	

En el sistema de amortización se pueden comprobar los cálculos efectuados en el total.

Ejercicios del tema. (Puede auxiliarse del formulario electrónico)

1)- Un empresario le plantea a su contador que necesita determinar el valor que debe tener una renta anual a un 3% de interés, si se compra un recurso necesario para una inversión por un valor de $2 500.00. ¿Cuál debe ser la respuesta? **Respuesta. La renta anual debe tener un valor de: $356.14**

2)- Una empresa necesita crear un fondo de amortización de $ 1 000 000.00 y para su cancelación debe efectuar pagos sistemáticos de $15 000.00, al final de cada año. Si la tasa de interés aplicada es del 5% de interés efectivo anual. ¿Cuánto tiempo necesita la empresa para liquidar la deuda? **Respuesta. Se necesita un tiempo t= 30,05271 es decir 30 años, 0 meses y 18 días.**

3)- A un trabajador de una empresa se le vende un automóvil como estímulo a los resultados obtenidos. Para efectuar los pagos se hace un contrato que exige sean depositado $4 000.00, al comenzar cada año, y se establece una tasa de interés anual del 3%. ¿A cuánto asciende el valor del auto al cabo de los 7 años? **Respuesta.Al cabo de los 7 años el valor del auto es M= $24 078.77**

4)- ¿Qué tasa de interés posibilita que con 10 pagos anuales de $100.00, una anualidad vencida, se liquide un año antes del primer pago por una cantidad de $825.00? **Respuesta. La tasa de interés que posibilita estos pagos es de 3,66%.**

5)-A un trabajador de un Empresa se le asigna un apartamento por un valor de $10 020,00. Al formalizar el crédito con el banco el contrato exige $320,00 al contado al finalizar el año con 15 pagos iguales para liquidar la deuda, el banco cobra el 6% de interés anual compuesto. ¿Cuánto debe pagar anualmente el trabajador para liquidar la deuda? **Respuesta. El trabajador debe pagar anualmente $1009,03**

6)-El Inder necesita la compra de un terreno y materiales para la contrucción moderna de sus instalaciones por un valor de $ 1 300 000.00. Dispone de $300 000.00 que paga al contado, y establece un contrato con una entidad vendedora, donde se compromete a pagar el resto del dinero en 6 pagos anuales vencidos de igual valor a un interés del 4% capitalizable anualmente. ¿Cuál es el importe anual que tiene que pagar? **Respuesta. El importe anual a pagar es de $ 190 760.00**

7)- Un cliente adquiere a plazos un televisor con mando digital y su pago tiene que hacerlo en 14 meses de forma anticipada por un valor de, $4 3 000,00 y a una tasa del 12 % capitalizable mensualmente. ¿Cuánto hay qué pagar si se adquiere hoy al contado? **Respuesta.Si el equipo se adquiere hoy al contado hay que pagar $ 39 401,22**

8)-Un negociante para la compra de objetos que comercializa, invierte $ 795 382.45 dinero, el cual lo solicita como préstamo a un banco quien establece para liquidarlo hacer 18 pagos iguales cada dos meses, pero también le exigía efectuar el primer pago el mismo día de la compra y los demás al inicio de cada período. ¿Qué tasa efectiva bimestral se estableció para la liquidación de la deuda mediante esa forma de pago? **Respuesta. Se estableció una tasa efectiva del 1,5% compuesto bimestral.**

9)-Una cooperativa agropecuaria arrienda un equipo por un valor de $3 500.00 anuales durante 10 años, con la condición de pagar la renta por adelantado cada año a un interés del 5% anual. ¿Cuál es el valor actual del arriendo para ese equipo? **Respuesta. El valor actual del arriendo para el equipo es de V_{ant} =$28 377. 37.**

10)-Un trabajador compra un automóvil que le cuesta $ 51 500.00 y establece un contrato para efectuar los pagos trimestrales anticipados durante un período de 21 meses, la tasa de interés que se le cobra es del 8% anual con acumulación trimestral ¿Qué cantidad de dinero entregó el trabajador por adelantado en cada período? **Respuesta. La cantidad de dinero entregada por adelantado es R= $8 141. 67**

11)- La corporación Cimex compra sistemáticamente mercancías a créditos. El 5 de febrero del año 2013, compra y comienza a realizar pagos por un valor de $10 000.00 todos los meses, el cual debe culminar el 5 de mayo del siguiente año. La tasa de interés acordada es del 3% mensual: ¿Cuál es el valor de la compra efectuada en ese período de la mercancía? **Respuesta. El valor de la compra es V_{ant}=$122 960,73.**

12)- Un trabajador no estatal necesita establecer un fondo de amortización para cancelar una deuda que asciende a $3 000 000.00. El período establecido para el pago del capital de la deuda a su vencimiento es de 8 años y la tasa de interés es del 5% capitalizable anualmente. ¿Cuál es el importe anual de cada pago para liquidar? **Respuesta. El importe anual de cada pago para liquidar la deuda es R=$ 314 160.00.**

13)- ¿Qué cantidad de dinero debe pagarse al comienzo de un plazo de 20 años, si de forma sistemática se pagan $85.00 al inicio de cada período, mediante una póliza de seguro a la compañía aseguradora, si esta ha acumulado esos pagos al 3,5% nominal capitalizable semestralmente? **Respuesta. Deben pagarse al comienzo del plazo V_{ant} = $2 187.07**

14)- Una corporación establece un convenio con una de sus entidades donde proyecta que produzca $400 000.00 anuales durante 20 años. Por las características de la entidad y las transformaciones que hacen para la producción no comienzan hasta dentro de 5 años. ¿Cuál es el valor hoy del convenio para la producción, si el interés que se aplica es del 6% anual? **Respuesta. El valor hoy del convenio es de V_{dif} = $ 342 839.37**

15)- Una fábrica productora de helados hace un contrato con el propósito de pagar una renta semestralmente de $ 32 000. Los pagos deben comenzar a efectuarlos dentro de tres años y terminar de pagarlo en 5 años. El interés aplicado es del 8% semestralmente. El contratista propone como valor actual del contrato $ 130 000.00. ¿Es correcta esa propuesta? Argumente. **Respuesta. No**

es correcta esa propuesta pues el valor actual que corresponde es de V_{dif} =$126 644. 89 y hay una diferencia de $3 355.11 con el propuesto.

16)- Una empresa hace hoy una compra por un valor de $462 611. 60 y se acordó con el vendedor liquidar la deuda mediante pagos trimestrales de $80 000,00, comenzando el primero de ellos hoy mismo. Si la tasa de interés es del 6% capitalizable trimestralmente, ¿De cuántos meses es el plazo de la compra? **Respuesta. El plazo de compra es t=18 meses**

17)- Una fábrica productora de cemento hace una inversión con el propósito de mejorar la calidad de su producción, para lo cual establece un contrato con otra entidad con el fin de que se le otorgue un préstamo al comienzo de la inversión, el cual comienzará a pagar dentro de dos años de forma anticipada con un valor de $50 000.00 anuales durante un período 4 años. ¿Cuál es el valor actual del préstamo recibido para la inversión si se aplica un interés anual del 2%? **Respuesta.El valor actual del préstamo recibido es V_{dif} = $182 993. 49.**

18)- En un contrato efectuado para la adquisición de un equipo que cuesta $1 600.00 después de transcurrido los primeros 4 años, al final de cada uno por un período de 5 años, se deposita una cantidad de dinero de forma sistemática en una cuenta de ahorros que recibe un 2% de interés anual, para liquidar la deuda del equipo. ¿Cuál es el valor de cada depósito para que después de concluido ese tiempo se liquide el préstamo adquirido? **Respuesta.El valor de cada depósito es R = $367.43**

19)- ¿Cuál es el valor actual de una anualidad de $600.00 semestrales, si se paga durante 5 años de forma anticipada, y está diferida por 2 años, si el dinero está a un interés del 4% acumulable por semestres? **Respuesta.El valor actual de la anualidad diferida es V_{dif} =$ 4 979.11**

20)- Para un negocio el empresario contrae una deuda, en el día de hoy, que tiene un valor de $30 000.00. El acreedor le exige comenzar a pagar dentro de 2 años al inicio de cada uno para liquidar la deuda en un período de 4 años, la tasa aplicada es del 3% anual. ¿Cuál es el valor de cada pago anticipado para liquidar la deuda según lo establecido? **Respuesta.El valor de cada pago anticipado para liquidar la deuda es R= $8 479.39**

21)- Una corporación adquiere todos los recursos de una compañía al precio de $ 2 250 000.00 pagaderos al cabo de 7 años. En función de ello, decide establecer un fondo de amortización para hacer frente a este pago, al final del período establecido. Si la tasa de interés aplicada al fondo de amortización es del 5 ½ % y se hacen pagos iguales durante 7 años. ¿Cuál es el pago que tiene que hacer la compañía cada año al fondo de amortización? ¿Construya el fondo de amortización correspondiente?

Respuesta: a:- El pago anual de la compañía al fondo de amortización es de: $ 272 169,94.

b.- Fondo de amortización.

Año	Pago anual	Interés del fondo	Total añadido al fondo	Total en el fondo
1	$ 272 169,94	-	$ 272 169,94	$ 272 169,94
2	272 169,94	$ 14 969,35	287 139,29	559 309,23

3	272 169,94	30 762,01	302 931,95	862 241,18
4	272 169,94	47 423,26	319 593,21	1 181 834,39
5	272 169,94	65 000,89	337 170,83	1 519 005,22
6	272 169,94	83 545,29	355 715,23	1 874 720,45
7	272 169,94	103 109,62	375 279,55	2 250 000,00
Total	$ 1 905 189,58	$ 344 810,42	$2 250 000,00	

22)- La empresa donde usted trabaja le da la responsabilidad de resolver el siguiente problema relacionado con un negocio efectuado: se necesita liquidar una deuda para lo cual se establece crear un fondo de amortización con un monto que asciende a $25 506.97 el cual se debe pagar en un período de 6 años a una tasa del 5% de interés efectivo.

a) ¿Cuál es el importe de cada uno de los pagos que hay que efectuar para liquidar la deuda?
b) ¿Determine el interés que hay que pagar en el segundo año?
c) ¿Cuál es el importe de la deuda al comienzo del tercer año?
d) Construya el cuadro de amortización correspondiente.

Respuesta: a)- El importe de cada uno de los pagos que hay que efectuar para liquidar la deuda es de. R=$ 3 749.97
b) El interés es I= $ 187.50
c)- El importe de la deuda al comienzo del tercer año es M= $ 7 687.44.
d) Cuadro de amortización.

Año	Pago anual	Interés del fondo	Total añadido al fondo	Total en el fondo
1	·$ 3 749. 97	-	·$ 3 749. 97	·$ 3 749. 97
2	3 749. 97	$ 187.50	3 937. 47	7 687.44
3	3 749. 97	384.37	4134. 34	11 821.78
4	3 749. 97	591.08	4341. 06	16 162.84
5	3 749. 97	808.14	4558.11	20 720.95
6	3 749. 97	1036.05	4786. 02	25 506.97
Total	$ 22 499. 82	$ 3007.14	$ 25 506. 97	

23)- Una empresa cuya función es comercializar productos alimenticios tiene que amortizar una deuda de $ 6 200.00 mediante pagos en 2 años al 5% de interés anual acumulables semestralmente. Para ello el director establece un sistema de amortización y por la necesidad que tiene de argumentar le solicita se determine:

a)- La cuota de pago o renta de amortización semestral
b)- Establecer el sistema de amortización correspondiente.

Respuesta: a) La cuota de pago o renta semestral es R= $1 648.07
b) Sistema de amortización

Semestre	Pago anual	Interés del fondo	Total añadido al fondo	Saldo deudor
0	-	-	-	$ 6 200.00
1	$ 1 648.07	$ 155.00	$1 493.07	4 706.93
2	1 648.07	117.67	1530.40	3 176.53
3	1 648.07	79.41	1568.66	1 607.87
4	1 648.07	40.20	1607.87	
Total	$ 6 592. 28	$392.28	$ 6 200.00	

24)- Una entidad estatal pide prestado a otra $ 10 000.00 a pagar en un período de 2 años al 6% de interés nominal semestral. El prestamista exige se efectúe el proceso de pago mediante un sistema de amortización con pagos semestrales para garantizar la liquidación. Para ello la entidad que recibe el préstamo necesita determinar:

a)- El valor de la renta o cuota a amortizar semestralmente
b)- Los intereses correspondientes al pago número tres.
c)- El saldo deudor tras abonar la cuota número tres.
D= Construir el sistema de amortización correspondiente a la situación establecida.
Respuesta. a)- R= $2690.27; b)- I_3 = $154.43; c)- V_3= $ 2611.91
d)- Sistema de amortización

Año	Renta o pago anual	Interés del fondo	Total añadido al fondo	Saldo Deudor
0	-	-	-	$ 10 000.00
1	$2 690.27	$300.00	$ 2 390.27	7 609.73
2	2 690.27	228.29	2 461.98	5 147.75
3	2 690.27	154.43	2 535.84	2 611.91
4	2 690.27	78.36	2 611.91	
Total	$ 10 761.08	$ 761.08	$ 10 000.00	

Resumen del libro

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA

Álvarez de Zayas, Carlos M.:	La escuela en la vida. Editorial Artedu. La Habana, 1992
Ballester Pedrosos, Sergio:	La flexibilidad del pensamiento y la sistematización de los conocimientos matemáticos. IPLAC. Pedagogía 1995
Benítez Miranda, Miguel A.:	Contabilidad y Finanzas para la formación de los cuadros de dirección. MES. La Habana, 1997
Beker, Víctor A.:	Del caos en la economía, a la economía del caos. Editorial Belgrano. Buenos Aires, 1998
Blanco Tabraue, Ana Ma./ Domínguez Camps, Juan C.:	Elementos de Matemática Financiera. MES. La Habana, 1988
Díaz Mata, Alfredo/ Aguilera Gómez, Víctor:	Matemáticas Financieras. Editorial Mc Graw-Hill. México, D. F. 1996
Dickson, Franklyn J.:	Administración de empresas medianas y pequeñas. Editorial Diana. México, D. F., 1993
EDITEX, Editorial:	Matemáticas Comerciales. Madrid, 1990
González Jordán, Benjamín:	Introducción a las decisiones financieras. Caribbean Financial Investments. La Habana, 1999
González Catalá, Vicente T.:	Enfoque práctico de las operaciones de las Matemáticas Financieras. Ediciones Ciencias Sociales. Madrid, 1992
Jiménez Sánchez, José:	Matemáticas Financieras y Comerciales. Editorial Mc Graw-Hill. Madrid, 1994
Sito Cabo, Araceli:	Contabilidad de sociedades mercantiles y empresas estatales cubanas. Ministerio de Finanzas y Precios. La Habana, 1993
Van Horne, James C.:	Fundamentos de Administración Financiera. Prentice Hall Hispanoamericana. México D. F. 1994
Vázquez Aldama, María J.:	Curso de Matemáticas Financieras. Ediciones Pirámide. Madrid, 1993
Villalobos Medina, José L.:	Matemáticas Financieras. Grupo Editorial Iberoamérica. México D. F., 1993
Villazón, César/ Sanou, Lina:	Matemáticas Financieras. Ediciones Foro Científico. Madrid, 1993
Weston, John Fred:	Fundamentos de Administración Financiera Editorial Mc Graw-Hill. México D. F., 1994

TABLAS

TABLAS LOGARÍTMICAS

LOGARITMOS DE LOS NUMEROS

1000-1500

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.
100	00	000	043	087	130	173	217	260	303	346	389	43
01		432	475	518	561	604	647	689	732	775	817	43
02		860	903	945	988	*030	*072	*115	*157	*199	*242	42
03	01	284	326	368	410	452	494	536	578	620	662	42
04		703	745	787	828	870	912	953	995	*036	*078	42
05	02	119	160	202	243	284	325	366	407	449	490	41
06		531	572	612	653	694	735	776	816	857	898	41
07		938	979	*019	*060	*100	*141	*181	*222	*262	*302	40
08	03	342	383	423	463	503	543	583	623	663	703	40
09		743	782	822	862	902	941	981	*021	*060	*100	40
110	04	139	179	218	258	297	336	376	415	454	493	39
11		532	571	610	650	689	727	766	805	844	883	39
12		922	961	999	*038	*077	*115	*154	*192	*231	*269	39
13	05	308	346	385	423	461	500	538	576	614	652	38
14		690	729	767	805	843	881	918	956	994	*032	38
15	06	070	108	145	183	221	258	296	333	371	408	38
16		446	483	521	558	595	633	670	707	744	781	37
17		819	856	893	930	967	*004	*041	*078	*115	*151	37
18	07	188	225	262	298	335	372	408	445	482	518	37
19		555	591	628	664	700	737	773	809	846	882	36
120		918	954	990	*027	*063	*099	*135	*171	*207	*243	36
21	08	279	314	350	386	422	458	493	529	565	600	36
22		636	672	707	743	778	814	849	884	920	955	36
23		991	*026	*061	*096	*132	*167	*202	*237	*272	*307	35
24	09	342	377	412	447	482	517	552	587	621	656	35
25		691	726	760	795	830	864	899	934	968	*003	35
26	10	037	072	106	140	175	209	243	278	312	346	34
27		380	415	449	483	517	551	585	619	653	687	34
28		721	755	789	823	857	890	924	958	992	*025	34
29	11	059	093	126	160	193	227	261	294	327	361	34
130		394	428	461	494	528	561	594	628	661	694	33
31		727	760	793	826	860	893	926	959	992	*024	33
32	12	057	090	123	156	189	222	254	287	320	352	33
33		385	418	450	483	516	548	581	613	646	678	33
34		710	743	775	808	840	872	905	937	969	*001	32
35	13	033	066	098	130	162	194	226	258	290	322	32
36		354	386	418	450	481	513	545	577	609	640	32
37		672	704	735	767	799	830	862	893	925	956	32
38		988	*019	*051	*082	*114	*145	*176	*208	*239	*270	31
39	14	301	333	364	395	426	457	489	520	551	582	31
140		613	644	675	706	737	768	799	829	860	891	31
41		922	953	983	*014	*045	*076	*106	*137	*168	*198	31
42	15	229	259	290	320	351	381	412	442	473	503	31
43		534	564	594	625	655	685	715	746	776	806	30
44		836	866	897	927	957	987	*017	*047	*077	*107	30
45	16	137	167	197	227	256	286	316	346	376	406	30
46		435	465	495	524	554	584	613	643	673	702	30
47		732	761	791	820	850	879	909	938	967	997	29
48	17	026	056	085	114	143	173	202	231	260	289	29
49		319	348	377	406	435	464	493	522	551	580	29
150		609	638	667	696	725	754	782	811	840	869	29
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.

Partes Prop.

	44	43	42
1	4.4	4.3	4.2
2	8.8	8.6	8.4
3	13.2	12.9	12.6
4	17.6	17.2	16.8
5	22.0	21.5	21.0
6	26.4	25.8	25.2
7	30.8	30.1	29.4
8	35.2	34.4	33.6
9	39.6	38.7	37.8

	41	40	39
1	4.1	4.0	3.9
2	8.2	8.0	7.8
3	12.3	12.0	11.7
4	16.4	16.0	15.6
5	20.5	20.0	19.5
6	24.6	24.0	23.4
7	28.7	28.0	27.3
8	32.8	32.0	31.2
9	36.9	36.0	35.1

	38	37	36
1	3.8	3.7	3.6
2	7.6	7.4	7.2
3	11.4	11.1	10.8
4	15.2	14.8	14.4
5	19.0	18.5	18.0
6	22.8	22.2	21.6
7	26.6	25.9	25.2
8	30.4	29.6	28.8
9	34.2	33.3	32.4

	35	34	33
1	3.5	3.4	3.3
2	7.0	6.8	6.6
3	10.5	10.2	9.9
4	14.0	13.6	13.2
5	17.5	17.0	16.5
6	21.0	20.4	19.8
7	24.5	23.8	23.1
8	28.0	27.2	26.4
9	31.5	30.6	29.7

	32	31	30
1	3.2	3.1	3.0
2	6.4	6.2	6.0
3	9.6	9.3	9.0
4	12.8	12.4	12.0
5	16.0	15.5	15.0
6	19.2	18.6	18.0
7	22.4	21.7	21.0
8	25.6	24.8	24.0
9	28.8	27.9	27.0

Partes Prop.

1500-2000

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.
150	17	609	638	667	696	725	754	782	811	840	869	29
51		898	926	955	984	*013	*041	*070	*099	*127	*156	29
52	18	184	213	241	270	298	327	355	384	412	441	29
53		469	498	526	554	583	611	639	667	696	724	28
54		752	780	808	837	865	893	921	949	977	*005	28
55	19	033	061	089	117	145	173	201	229	257	285	28
56		312	340	368	396	424	451	479	507	535	562	28
57		590	618	645	673	700	728	756	783	811	838	28
58		866	893	921	948	976	*003	*030	*058	*085	*112	27
59	20	140	167	194	222	249	276	303	330	358	385	27
160		412	439	466	493	520	548	575	602	629	656	27
61		683	710	737	763	790	817	844	871	898	925	27
62		952	978	*005	*032	*059	*085	*112	*139	*165	*192	27
63	21	219	245	272	299	325	352	378	405	431	458	27
64		484	511	537	564	590	617	643	669	696	722	26
65		748	775	801	827	854	880	906	932	958	985	26
66	22	011	037	063	089	115	141	167	194	220	246	26
67		272	298	324	350	376	401	427	453	479	505	26
68		531	557	583	608	634	660	686	712	737	763	26
69		789	814	840	866	891	917	943	968	994	*019	26
170	23	045	070	096	121	147	172	198	223	249	274	25
71		300	325	350	376	401	426	452	477	502	528	25
72		553	578	603	629	654	679	704	729	754	779	25
73		805	830	855	880	905	930	955	980	*005	*030	25
74	24	055	080	105	130	155	180	204	229	254	279	25
75		304	329	353	378	403	428	452	477	502	527	25
76		551	576	601	625	650	674	699	724	748	773	25
77		797	822	846	871	895	920	944	969	993	*018	25
78	25	042	066	091	115	139	164	188	212	237	261	24
79		285	310	334	358	382	406	431	455	479	503	24
180		527	551	575	600	624	648	672	696	720	744	24
81		768	792	816	840	864	888	912	935	959	983	24
82	26	007	031	055	079	102	126	150	174	198	221	24
83		245	269	293	316	340	364	387	411	435	458	24
84		482	505	529	553	576	600	623	647	670	694	24
85		717	741	764	788	811	834	858	881	905	928	23
86		951	975	998	*021	*045	*068	*091	*114	*138	*161	23
87	27	184	207	231	254	277	300	323	346	370	393	23
88		416	439	462	485	508	531	554	577	600	623	23
89		646	669	692	715	738	761	784	807	830	852	23
190		875	898	921	944	967	989	*012	*035	*058	*081	23
91	28	103	126	149	171	194	217	240	262	285	307	23
92		330	353	375	398	421	443	466	488	511	533	23
93		556	578	601	623	646	668	691	713	735	758	22
94		780	803	825	847	870	892	914	937	959	981	22
95	29	003	026	048	070	092	115	137	159	181	203	22
96		226	248	270	292	314	336	358	380	403	425	22
97		447	469	491	513	535	557	579	601	623	645	22
98		667	688	710	732	754	776	798	820	842	863	22
99		885	907	929	951	973	994	*016	*038	*060	*081	22
200	30	103	125	146	168	190	211	233	255	276	298	22
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.

Partes Prop.

	29	28
1	2.9	2.8
2	5.8	5.6
3	8.7	8.4
4	11.6	11.2
5	14.5	14.0
6	17.4	16.8
7	20.3	19.6
8	23.2	22.4
9	26.1	25.2

	27	26
1	2.7	2.6
2	5.4	5.2
3	8.1	7.8
4	10.8	10.4
5	13.5	13.0
6	16.2	15.6
7	18.9	18.2
8	21.6	20.8
9	24.3	23.4

	25
1	2.5
2	5.0
3	7.5
4	10.0
5	12.5
6	15.0
7	17.5
8	20.0
9	22.5

	24	23
1	2.4	2.3
2	4.8	4.6
3	7.2	6.9
4	9.6	9.2
5	12.0	11.5
6	14.4	13.8
7	16.8	16.1
8	19.2	18.4
9	21.6	20.7

	22	21
1	2.2	2.1
2	4.4	4.2
3	6.6	6.3
4	8.8	8.4
5	11.0	10.5
6	13.2	12.6
7	15.4	14.7
8	17.6	16.8
9	19.8	18.9

Partes Prop.

LOGARITMOS DE LOS NUMEROS

2000-2500

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.
200	30	103	125	146	168	190	211	233	255	276	298	22
01		320	341	363	384	406	428	449	471	492	514	22
02		535	557	578	600	621	643	664	685	707	728	21
03		750	771	792	814	835	856	878	899	920	942	21
04		963	984	*006	*027	*048	*069	*091	*112	*133	*154	21
05	31	175	197	218	239	260	281	302	323	345	366	21
06		387	408	429	450	471	492	513	534	555	576	21
07		597	618	639	660	681	702	723	744	765	785	21
08		806	827	848	869	890	911	931	952	973	994	21
09	32	015	035	056	077	098	118	139	160	181	201	21
210		222	243	263	284	305	325	346	366	387	408	21
11		428	449	469	490	510	531	552	572	593	613	20
12		634	654	675	695	715	736	756	777	797	818	20
13		838	858	879	899	919	940	960	980	*001	*021	20
14	33	041	062	082	102	122	143	163	183	203	224	20
15		244	264	284	304	325	345	365	385	405	425	20
16		445	465	486	506	526	546	566	586	606	626	20
17		646	666	686	706	726	746	766	786	806	826	20
18		846	866	885	905	925	945	965	985	*005	*025	20
19	34	044	064	084	104	124	143	163	183	203	223	20
220		242	262	282	301	321	341	361	380	400	420	20
21		439	459	479	498	518	537	557	577	596	616	20
22		635	655	674	694	713	733	753	772	792	811	19
23		830	850	869	889	908	928	947	967	986	*005	19
24	35	025	044	064	083	102	122	141	160	180	199	19
25		218	238	257	276	295	315	334	353	372	392	19
26		411	430	449	468	488	507	526	545	564	583	19
27		603	622	641	660	679	698	717	736	755	774	19
28		793	813	832	851	870	889	908	927	946	965	19
29		984	*003	*021	*040	*059	*078	*097	*116	*135	*154	19
230	36	173	192	211	229	248	267	286	305	324	342	19
31		361	380	399	418	436	455	474	493	511	530	19
32		549	568	586	605	624	642	661	680	698	717	19
33		736	754	773	791	810	829	847	866	884	903	19
34		922	940	959	977	996	*014	*033	*051	*070	*088	18
35	37	107	125	144	162	181	199	218	236	254	273	18
36		291	310	328	346	365	383	401	420	438	457	18
37		475	493	511	530	548	566	585	603	621	639	18
38		658	676	694	712	731	749	767	785	803	822	18
39		840	858	876	894	912	931	949	967	985	*003	18
240	38	021	039	057	075	093	112	130	148	166	184	18
41		202	220	238	256	274	292	310	328	346	364	18
42		382	399	417	435	453	471	489	507	525	543	18
43		561	578	596	614	632	650	668	686	703	721	18
44		739	757	775	792	810	828	846	863	881	899	18
45		917	934	952	970	987	*005	*023	*041	*058	*076	18
46	39	094	111	129	146	164	182	199	217	235	252	18
47		270	287	305	322	340	358	375	393	410	428	18
48		445	463	480	498	515	533	550	568	585	602	18
49		620	637	655	672	690	707	724	742	759	777	17
250		794	811	829	846	863	881	898	915	933	950	17
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.

Partes Prop.

	22	21
1	2.2	2.1
2	4.4	4.2
3	6.6	6.3
4	8.8	8.4
5	11.0	10.5
6	13.2	12.6
7	15.4	14.7
8	17.6	16.8
9	19.8	18.9

	20
1	2.0
2	4.0
3	6.0
4	8.0
5	10.0
6	12.0
7	14.0
8	16.0
9	18.0

	19
1	1.9
2	3.8
3	5.7
4	7.6
5	9.5
6	11.4
7	13.3
8	15.2
9	17.1

	18
1	1.8
2	3.6
3	5.4
4	7.2
5	9.0
6	10.8
7	12.6
8	14.4
9	16.2

	17
1	1.7
2	3.4
3	5.1
4	6.8
5	8.5
6	10.2
7	11.9
8	13.6
9	15.3

Partes Prop.

2500-3000

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.
250	39	794	811	829	846	863	881	898	915	933	950	17
51		967	985	*002	*019	*037	*054	*071	*088	*106	*123	17
52	40	140	157	175	192	209	226	243	261	278	295	17
53		312	329	346	364	381	398	415	432	449	466	17
54		483	500	518	535	552	569	586	603	620	637	17
55		654	671	688	705	722	739	756	773	790	807	17
56		824	841	858	875	892	909	926	943	960	976	17
57		993	*010	*027	*044	*061	*078	*095	*111	*128	*145	17
58	41	162	179	196	212	229	246	263	280	296	313	17
59		330	347	363	380	397	414	430	447	464	481	17
260		497	514	531	547	564	581	597	614	631	647	17
61		664	681	697	714	731	747	764	780	797	814	17
62		830	847	863	880	896	913	929	946	963	979	16
63		996	*012	*029	*045	*062	*078	*095	*111	*127	*144	16
64	42	160	177	193	210	226	243	259	275	292	308	16
65		325	341	357	374	390	406	423	439	455	472	16
66		488	504	521	537	553	570	586	602	619	635	16
67		651	667	684	700	716	732	749	765	781	797	16
68		813	830	846	862	878	894	911	927	943	959	16
69		975	991	*008	*024	*040	*056	*072	*088	*104	*120	16
270	43	136	152	169	185	201	217	233	249	265	281	16
71		297	313	329	345	361	377	393	409	425	441	16
72		457	473	489	505	521	537	553	569	584	600	16
73		616	632	648	664	680	696	712	727	743	759	16
74		775	791	807	823	838	854	870	886	902	917	16
75		933	949	965	981	996	*012	*028	*044	*059	*075	16
76	44	091	107	122	138	154	170	185	201	217	232	16
77		248	264	279	295	311	326	342	358	373	389	16
78		404	420	436	451	467	483	498	514	529	545	16
79		560	576	592	607	623	638	654	669	685	700	16
280		716	731	747	762	778	793	809	824	840	855	15
81		871	886	902	917	932	948	963	979	994	*010	15
82	45	025	040	056	071	086	102	117	133	148	163	15
83		179	194	209	225	240	255	271	286	301	317	15
84		332	347	362	378	393	408	423	439	454	469	15
85		484	500	515	530	545	561	576	591	606	621	15
86		637	652	667	682	697	712	728	743	758	773	15
87		788	803	818	834	849	864	879	894	909	924	15
88		939	954	969	984	*000	*015	*030	*045	*060	*075	15
89	46	090	105	120	135	150	165	180	195	210	225	15
290		240	255	270	285	300	315	330	345	359	374	15
91		389	404	419	434	449	464	479	494	509	523	15
92		538	553	568	583	598	613	627	642	657	672	15
93		687	702	716	731	746	761	776	790	805	820	15
94		835	850	864	879	894	909	923	938	953	967	15
95		982	997	*012	*026	*041	*056	*070	*085	*100	*114	15
96	47	129	144	159	173	188	202	217	232	246	261	15
97		276	290	305	319	334	349	363	378	392	407	15
98		422	436	451	465	480	494	509	524	538	553	15
99		567	582	596	611	625	640	654	669	683	698	15
300		712	727	741	756	770	784	799	813	828	842	14
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.

Partes Prop.

	18
1	1.8
2	3.6
3	5.4
4	7.2
5	9.0
6	10.8
7	12.6
8	14.4
9	16.2

	17
1	1.7
2	3.4
3	5.1
4	6.8
5	8.5
6	10.2
7	11.9
8	13.6
9	15.3

	16
1	1.6
2	3.2
3	4.8
4	6.4
5	8.0
6	9.6
7	11.2
8	12.8
9	14.4

	15
1	1.5
2	3.0
3	4.5
4	6.0
5	7.5
6	9.0
7	10.5
8	12.0
9	13.5

	14
1	1.4
2	2.8
3	4.2
4	5.6
5	7.0
6	8.4
7	9.8
8	11.2
9	12.6

Partes Prop.

LOGARITMOS DE LOS NUMEROS

3000-3500

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.
300	47	712	727	741	756	770	784	799	813	828	842	14
01		857	871	885	900	914	929	943	958	972	986	14
02	48	001	015	029	044	058	073	087	101	116	130	14
03		144	159	173	187	202	216	230	244	259	273	14
04		287	302	316	330	344	359	373	387	401	416	14
05		430	444	458	473	487	501	515	530	544	558	14
06		572	586	601	615	629	643	657	671	686	700	14
07		714	728	742	756	770	785	799	813	827	841	14
08		855	869	883	897	911	926	940	954	968	982	14
09		996	*010	*024	*038	*052	*066	*080	*094	*108	*122	14
310	49	136	150	164	178	192	206	220	234	248	262	14
11		276	290	304	318	332	346	360	374	388	402	14
12		415	429	443	457	471	485	499	513	527	541	14
13		554	568	582	596	610	624	638	651	665	679	14
14		693	707	721	734	748	762	776	790	803	817	14
15		831	845	859	872	886	900	914	927	941	955	14
16		969	982	996	*010	*024	*037	*051	*065	*079	*092	14
17	50	106	120	133	147	161	174	188	202	215	229	14
18		243	256	270	284	297	311	325	338	352	365	14
19		379	393	406	420	433	447	461	474	488	501	14
320		515	529	542	556	569	583	596	610	623	637	14
21		651	664	678	691	705	718	732	745	759	772	14
22		786	799	813	826	840	853	866	880	893	907	13
23		920	934	947	961	974	987	*001	*014	*028	*041	13
24	51	055	068	081	095	108	121	135	148	162	175	13
25		188	202	215	228	242	255	268	282	295	308	13
26		322	335	348	362	375	388	402	415	428	441	13
27		455	468	481	495	508	521	534	548	561	574	13
28		587	601	614	627	640	654	667	680	693	706	13
29		720	733	746	759	772	786	799	812	825	838	13
330		851	865	878	891	904	917	930	943	957	970	13
31		983	996	*009	*022	*035	*048	*061	*075	*088	*101	13
32	52	114	127	140	153	166	179	192	205	218	231	13
33		244	257	270	284	297	310	323	336	349	362	13
34		375	388	401	414	427	440	453	466	479	492	13
35		504	517	530	543	556	569	582	595	608	621	13
36		634	647	660	673	686	699	711	724	737	750	13
37		763	776	789	802	815	827	840	853	866	879	13
38		892	905	917	930	943	956	969	982	994	*007	13
39	53	020	033	046	058	071	084	097	110	122	135	13
340		148	161	173	186	199	212	224	237	250	263	13
41		275	288	301	314	326	339	352	364	377	390	13
42		403	415	428	441	453	466	479	491	504	517	13
43		529	542	555	567	580	593	605	618	631	643	13
44		656	668	681	694	706	719	732	744	757	769	13
45		782	794	807	820	832	845	857	870	882	895	13
46		908	920	933	945	958	970	983	995	*008	*020	13
47	54	033	045	058	070	083	095	108	120	133	145	13
48		158	170	183	195	208	220	233	245	258	270	12
49		283	295	307	320	332	345	357	370	382	394	12
350		407	419	432	444	456	469	481	494	506	[illegible]	12
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.

Partes Prop.

	15
1	1.5
2	3.0
3	4.5
4	6.0
5	7.5
6	9.0
7	10.5
8	12.0
9	13.5

	14
1	1.4
2	2.8
3	4.2
4	5.6
5	7.0
6	8.4
7	9.8
8	11.2
9	12.6

	13
1	1.3
2	2.6
3	3.9
4	5.2
5	6.5
6	7.8
7	9.1
8	10.4
9	11.7

	12
1	1.2
2	2.4
3	3.6
4	4.8
5	6.0
6	7.2
7	8.4
8	9.6
9	10.8

Partes Prop.

LOGARITMOS DE LOS NUMEROS

3500-4000

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.
350	54	407	419	432	444	456	469	481	494	506	518	12
51		531	543	555	568	580	593	605	617	630	642	12
52		654	667	679	691	704	716	728	741	753	765	12
53		777	790	802	814	827	839	851	864	876	888	12
54		900	913	925	937	949	962	974	986	998	*011	12
55	55	023	035	047	060	072	084	096	108	121	133	12
56		145	157	169	182	194	206	218	230	242	255	12
57		267	279	291	303	315	328	340	352	364	376	12
58		388	400	413	425	437	449	461	473	485	497	12
59		509	522	534	546	558	570	582	594	606	618	12
360		630	642	654	666	678	691	703	715	727	739	12
61		751	763	775	787	799	811	823	835	847	859	12
62		871	883	895	907	919	931	943	955	967	979	12
63		991	*003	*015	*027	*038	*050	*062	*074	*086	*098	12
64	56	110	122	134	146	158	170	182	194	205	217	12
65		229	241	253	265	277	289	301	312	324	336	12
66		348	360	372	384	396	407	419	431	443	455	12
67		467	478	490	502	514	526	538	549	561	573	12
68		585	597	608	620	632	644	656	667	679	691	12
69		703	714	726	738	750	761	773	785	797	808	12
370		820	832	844	855	867	879	891	902	914	926	12
71		937	949	961	972	984	996	*008	*019	*031	*043	12
72	57	054	066	078	089	101	113	124	136	148	159	12
73		171	183	194	206	217	229	241	252	264	276	12
74		287	299	310	322	334	345	357	368	380	392	12
75		403	415	426	438	449	461	473	484	496	507	12
76		519	530	542	553	565	576	588	600	611	623	12
77		634	646	657	669	680	692	703	715	726	738	11
78		749	761	772	784	795	807	818	830	841	852	11
79		864	875	887	898	910	921	933	944	955	967	11
380		978	990	*001	*013	*024	*035	*047	*058	*070	*081	11
81	58	092	104	115	127	138	149	161	172	184	195	11
82		206	218	229	240	252	263	274	286	297	309	11
83		320	331	343	354	365	377	388	399	410	422	11
84		433	444	456	467	478	490	501	512	524	535	11
85		546	557	569	580	591	602	614	625	636	647	11
86		659	670	681	692	704	715	726	737	749	760	11
87		771	782	794	805	816	827	838	850	861	872	11
88		883	894	906	917	928	939	950	961	973	984	11
89		995	*006	*017	*028	*040	*051	*062	*073	*084	*095	11
390	59	106	118	129	140	151	162	173	184	195	207	11
91		218	229	240	251	262	273	284	295	306	318	11
92		329	340	351	362	373	384	395	406	417	428	11
93		439	450	461	472	483	494	506	517	528	539	11
94		550	561	572	583	594	605	616	627	638	649	11
95		660	671	682	693	704	715	726	737	748	759	11
96		770	780	791	802	813	824	835	846	857	868	11
97		879	890	901	912	923	934	945	956	966	977	11
98		988	999	*010	*021	*032	*043	*054	*065	*076	*086	11
99	60	097	108	119	130	141	152	163	173	184	195	11
400		206	217	228	239	249	260	271	282	293	304	11
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.

Partes Prop.

	13
1	1.3
2	2.6
3	3.9
4	5.2
5	6.5
6	7.8
7	9.1
8	10.4
9	11.7

	12
1	1.2
2	2.4
3	3.6
4	4.8
5	6.0
6	7.2
7	8.4
8	9.6
9	10.8

	11
1	1.1
2	2.2
3	3.3
4	4.4
5	5.5
6	6.6
7	7.7
8	8.8
9	9.9

	10
1	1.0
2	2.0
3	3.0
4	4.0
5	5.0
6	6.0
7	7.0
8	8.0
9	9.0

Partes Prop.

LOGARITMOS DE LOS NUMEROS

4000-4500

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.
400	60	206	217	228	239	249	260	271	282	293	304	11
01		314	325	336	347	358	369	379	390	401	412	11
02		423	433	444	455	466	477	487	498	509	520	11
03		531	541	552	563	574	584	595	606	617	627	11
04		638	649	660	670	681	692	703	713	724	735	11
05		746	756	767	778	788	799	810	821	831	842	11
06		853	863	874	885	895	906	917	927	938	949	11
07		959	970	981	991	*002	*013	*023	*034	*045	*055	11
08	61	066	077	087	098	109	119	130	140	151	162	11
09		172	183	194	204	215	225	236	247	257	268	11
410		278	289	300	310	321	331	342	352	363	374	11
11		384	395	405	416	426	437	448	458	469	479	11
12		490	500	511	521	532	542	553	563	574	584	11
13		595	606	616	627	637	648	658	669	679	690	11
14		700	711	721	731	742	752	763	773	784	794	10
15		805	815	826	836	847	857	868	878	888	899	10
16		909	920	930	941	951	962	972	982	993	*003	10
17	62	014	024	034	045	055	066	076	086	097	107	10
18		118	128	138	149	159	170	180	190	201	211	10
19		221	232	242	252	263	273	284	294	304	315	10
420		325	335	346	356	366	377	387	397	408	418	10
21		428	439	449	459	469	480	490	500	511	521	10
22		531	542	552	562	572	583	593	603	613	624	10
23		634	644	655	665	675	685	696	706	716	726	10
24		737	747	757	767	778	788	798	808	818	829	10
25		839	849	859	870	880	890	900	910	921	931	10
26		941	951	961	972	982	992	*002	*012	*022	*033	10
27	63	043	053	063	073	083	094	104	114	124	134	10
28		144	155	165	175	185	195	205	215	225	236	10
29		246	256	266	276	286	296	306	317	327	337	10
430		347	357	367	377	387	397	407	417	428	438	10
31		448	458	468	478	488	498	508	518	528	538	10
32		548	558	568	579	589	599	609	619	629	639	10
33		649	659	669	679	689	699	709	719	729	739	10
34		749	759	769	779	789	799	809	819	829	839	10
35		849	859	869	879	889	899	909	919	929	939	10
36		949	959	969	979	988	998	*008	*018	*028	*038	10
37	64	048	058	068	078	088	098	108	118	128	137	10
38		147	157	167	177	187	197	207	217	227	237	10
39		246	256	266	276	286	296	306	316	326	335	10
440		345	355	365	375	385	395	404	414	424	434	10
41		444	454	464	473	483	493	503	513	523	532	10
42		542	552	562	572	582	591	601	611	621	631	10
43		640	650	660	670	680	689	699	709	719	729	10
44		738	748	758	768	777	787	797	807	816	826	10
45		836	846	856	865	875	885	895	904	914	924	10
46		933	943	953	963	972	982	992	*002	*011	*021	10
47	65	031	040	050	060	070	079	089	099	108	118	10
48		128	137	147	157	167	176	186	196	205	215	10
49		225	234	244	254	263	273	283	292	302	312	10
450		321	331	341	350	360	369	379	389	398	408	10
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.

Partes Prop.

	11
1	1.1
2	2.2
3	3.3
4	4.4
5	5.5
6	6.6
7	7.7
8	8.8
9	9.9

	10
1	1.0
2	2.0
3	3.0
4	4.0
5	5.0
6	6.0
7	7.0
8	8.0
9	9.0

	9
1	0.9
2	1.8
3	2.7
4	3.6
5	4.5
6	5.4
7	6.3
8	7.2
9	8.1

Partes Prop.

LOGARITMOS DE LOS NUMEROS

4500-5000

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.
450	65	321	331	341	350	360	369	379	389	398	408	10
51		418	427	437	447	456	466	475	485	495	504	10
52		514	523	533	543	552	562	571	581	591	600	10
53		610	619	629	639	648	658	667	677	686	696	10
54		706	715	725	734	744	753	763	772	782	792	9
55		801	811	820	830	839	849	858	868	877	887	9
56		896	906	916	925	935	944	954	963	973	982	9
57		992	*001	*011	*020	*030	*039	*049	*058	*068	*077	9
58	66	087	096	106	115	124	134	143	153	162	172	9
59		181	191	200	210	219	229	238	247	257	266	9
460		276	285	295	304	314	323	332	342	351	361	9
61		370	380	389	398	408	417	427	436	445	455	9
62		464	474	483	492	502	511	521	530	539	549	9
63		558	567	577	586	596	605	614	624	633	642	9
64		652	661	671	680	689	699	708	717	727	736	9
65		745	755	764	773	783	792	801	811	820	829	9
66		839	848	857	867	876	885	894	904	913	922	9
67		932	941	950	960	969	978	987	997	*006	*015	9
68	67	025	034	043	052	062	071	080	089	099	108	9
69		117	127	136	145	154	164	173	182	191	201	9
470		210	219	228	237	247	256	265	274	284	293	9
71		302	311	321	330	339	348	357	367	376	385	9
72		394	403	413	422	431	440	449	459	468	477	9
73		486	495	504	514	523	532	541	550	560	569	9
74		578	587	596	605	614	624	633	642	651	660	9
75		669	679	688	697	706	715	724	733	742	752	9
76		761	770	779	788	797	806	815	825	834	843	9
77		852	861	870	879	888	897	906	916	925	934	9
78		943	952	961	970	979	988	997	*006	*015	*024	9
79	68	034	043	052	061	070	079	088	097	106	115	9
480		124	133	142	151	160	169	178	187	196	205	9
81		215	224	233	242	251	260	269	278	287	296	9
82		305	314	323	332	341	350	359	368	377	386	9
83		395	404	413	422	431	440	449	458	467	476	9
84		485	494	502	511	520	529	538	547	556	565	9
85		574	583	592	601	610	619	628	637	646	655	9
86		664	673	681	690	699	708	717	726	735	744	9
87		753	762	771	780	789	797	806	815	824	833	9
88		842	851	860	869	878	886	895	904	913	922	9
89		931	940	949	958	966	975	984	993	*002	*011	9
490	69	020	028	037	046	055	064	073	082	090	099	9
91		108	117	126	135	144	152	161	170	179	188	9
92		197	205	214	223	232	241	249	258	267	276	9
93		285	294	302	311	320	329	338	346	355	364	9
94		373	381	390	399	408	417	425	434	443	452	9
95		461	469	478	487	496	504	513	522	531	539	9
96		548	557	566	574	583	592	601	609	618	627	9
97		636	644	653	662	671	679	688	697	705	714	9
98		723	732	740	749	758	767	775	784	793	801	9
99		810	819	827	836	845	854	862	871	880	888	9
500		897	906	914	923	932	940	949	958	966	975	9
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.

Partes Prop.

	10
1	1.0
2	2.0
3	3.0
4	4.0
5	5.0
6	6.0
7	7.0
8	8.0
9	9.0

	9
1	0.9
2	1.8
3	2.7
4	3.6
5	4.5
6	5.4
7	6.3
8	7.2
9	8.1

	8
1	0.8
2	1.6
3	2.4
4	3.2
5	4.0
6	4.8
7	5.6
8	6.4
9	7.2

Partes Prop.

5000-5500

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.
500	69	897	906	914	923	932	940	949	958	966	975	9
01		984	992	*001	*010	*018	*027	*036	*044	*053	*062	9
02	70	070	079	088	096	105	114	122	131	140	148	9
03		157	165	174	183	191	200	209	217	226	234	9
04		243	252	260	269	278	286	295	303	312	321	9
05		329	338	346	355	364	372	381	389	398	406	9
06		415	424	432	441	449	458	467	475	484	492	9
07		501	509	518	526	535	544	552	561	569	578	9
08		586	595	603	612	621	629	638	646	655	663	9
09		672	680	689	697	706	714	723	731	740	749	9
510		757	766	774	783	791	800	808	817	825	834	9
11		842	851	859	868	876	885	893	902	910	919	9
12		927	935	944	952	961	969	978	986	995	*003	9
13	71	012	020	029	037	046	054	063	071	079	088	8
14		096	105	113	122	130	139	147	155	164	172	8
15		181	189	198	206	214	223	231	240	248	257	8
16		265	273	282	290	299	307	315	324	332	341	8
17		349	357	366	374	383	391	399	408	416	425	8
18		433	441	450	458	466	475	483	492	500	508	8
19		517	525	533	542	550	559	567	575	584	592	8
520		600	609	617	625	634	642	650	659	667	675	8
21		684	692	700	709	717	725	734	742	750	759	8
22		767	775	784	792	800	809	817	825	834	842	8
23		850	858	867	875	883	892	900	908	917	925	8
24		933	941	950	958	966	975	983	991	999	*008	8
25	72	016	024	032	041	049	057	066	074	082	090	8
26		099	107	115	123	132	140	148	156	165	173	8
27		181	189	198	206	214	222	230	239	247	255	8
28		263	272	280	288	296	304	313	321	329	337	8
29		346	354	362	370	378	387	395	403	411	419	8
530		428	436	444	452	460	469	477	485	493	501	8
31		509	518	526	534	542	550	558	567	575	583	8
32		591	599	607	616	624	632	640	648	656	665	8
33		673	681	689	697	705	713	722	730	738	746	8
34		754	762	770	779	787	795	803	811	819	827	8
35		835	843	852	860	868	876	884	892	900	908	8
36		916	925	933	941	949	957	965	973	981	989	8
37		997	*006	*014	*022	*030	*038	*046	*054	*062	*070	8
38	73	078	086	094	102	111	119	127	135	143	151	8
39		159	167	175	183	191	199	207	215	223	231	8
540		239	247	255	263	272	280	288	296	304	312	8
41		320	328	336	344	352	360	368	376	384	392	8
42		400	408	416	424	432	440	448	456	464	472	8
43		480	488	496	504	512	520	528	536	544	552	8
44		560	568	576	584	592	600	608	616	624	632	8
45		640	648	656	664	672	679	687	695	703	711	8
46		719	727	735	743	751	759	767	775	783	791	8
47		799	807	815	823	830	838	846	854	862	870	8
48		878	886	894	902	910	918	926	933	941	949	8
49		957	965	973	981	989	997	*005	*013	*020	*028	8
550	74	036	044	052	060	068	076	084	092	099	107	8
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.

Partes Prop.

	9
1	0.9
2	1.8
3	2.7
4	3.6
5	4.5
6	5.4
7	6.3
8	7.2
9	8.1

	8
1	0.8
2	1.6
3	2.4
4	3.2
5	4.0
6	4.8
7	5.6
8	6.4
9	7.2

	7
1	0.7
2	1.4
3	2.1
4	2.8
5	3.5
6	4.2
7	4.9
8	5.6
9	6.3

Partes Prop.

5500-6000

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.
550	74	036	044	052	060	068	076	084	092	099	107	8
51		115	123	131	139	147	155	162	170	178	186	8
52		194	202	210	218	225	233	241	249	257	265	8
53		273	280	288	296	304	312	320	327	335	343	8
54		351	359	367	374	382	390	398	406	414	421	8
55		429	437	445	453	461	468	476	484	492	500	8
56		507	515	523	531	539	547	554	562	570	578	8
57		586	593	601	609	617	624	632	640	648	656	8
58		663	671	679	687	695	702	710	718	726	733	8
59		741	749	757	764	772	780	788	796	803	811	8
560		819	827	834	842	850	858	865	873	881	889	8
61		896	904	912	920	927	935	943	950	958	966	8
62		974	981	989	997	*005	*012	*020	*028	*035	*043	8
63	75	051	059	066	074	082	089	097	105	113	120	8
64		128	136	143	151	159	166	174	182	189	197	8
65		205	213	220	228	236	243	251	259	266	274	8
66		282	289	297	305	312	320	328	335	343	351	8
67		358	366	374	381	389	397	404	412	420	427	8
68		435	442	450	458	465	473	481	488	496	504	8
69		511	519	526	534	542	549	557	565	572	580	8
570		587	595	603	610	618	626	633	641	648	656	8
71		664	671	679	686	694	702	709	717	724	732	8
72		740	747	755	762	770	778	785	793	800	808	8
73		815	823	831	838	846	853	861	868	876	884	8
74		891	899	906	914	921	929	937	944	952	959	8
75		967	974	982	989	997	*005	*012	*020	*027	*035	8
76	76	042	050	057	065	072	080	087	095	103	110	8
77		118	125	133	140	148	155	163	170	178	185	8
78		193	200	208	215	223	230	238	245	253	260	8
79		268	275	283	290	298	305	313	320	328	335	8
580		343	350	358	365	373	380	388	395	403	410	8
81		418	425	433	440	448	455	462	470	477	485	7
82		492	500	507	515	522	530	537	545	552	559	7
83		567	574	582	589	597	604	612	619	626	634	7
84		641	649	656	664	671	678	686	693	701	708	7
85		716	723	730	738	745	753	760	768	775	782	7
86		790	797	805	812	819	827	834	842	849	856	7
87		864	871	879	886	893	901	908	916	923	930	7
88		938	945	953	960	967	975	982	989	997	*004	7
89	77	012	019	026	034	041	048	056	063	070	078	7
590		085	093	100	107	115	122	129	137	144	151	7
91		159	166	173	181	188	195	203	210	217	225	7
92		232	240	247	254	262	269	276	283	291	298	7
93		305	313	320	327	335	342	349	357	364	371	7
94		379	386	393	401	408	415	422	430	437	444	7
95		452	459	466	474	481	488	495	503	510	517	7
96		525	532	539	546	554	561	568	576	583	590	7
97		597	605	612	619	627	634	641	648	656	663	7
98		670	677	685	692	699	706	714	721	728	735	7
99		743	750	757	764	772	779	786	793	801	808	7
600		815	822	830	837	844	851	859	866	873	880	7
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.

Partes Prop.

	8
1	0.8
2	1.6
3	2.4
4	3.2
5	4.0
6	4.8
7	5.6
8	6.4
9	7.2

	7
1	0.7
2	1.4
3	2.1
4	2.8
5	3.5
6	4.2
7	4.9
8	5.6
9	6.3

Partes Prop.

LOGARITMOS DE LOS NUMEROS

6000-6500

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.
600	77	815	822	830	837	844	851	859	866	873	880	7
01		887	895	902	909	916	924	931	938	945	952	7
02		960	967	974	981	988	996	*003	*010	*017	*025	7
03	78	032	039	046	053	061	068	075	082	089	097	7
04		104	111	118	125	132	140	147	154	161	168	7
05		176	183	190	197	204	211	219	226	233	240	7
06		247	254	262	269	276	283	290	297	305	312	7
07		319	326	333	340	347	355	362	369	376	383	7
08		390	398	405	412	419	426	433	440	447	455	7
09		462	469	476	483	490	497	504	512	519	526	7
610		533	540	547	554	561	569	576	583	590	597	7
11		604	611	618	625	633	640	647	654	661	668	7
12		675	682	689	696	704	711	718	725	732	739	7
13		746	753	760	767	774	781	789	796	803	810	7
14		817	824	831	838	845	852	859	866	873	880	7
15		888	895	902	909	916	923	930	937	944	951	7
16		958	965	972	979	986	993	*000	*007	*014	*021	7
17	79	029	036	043	050	057	064	071	078	085	092	7
18		099	106	113	120	127	134	141	148	155	162	7
19		169	176	183	190	197	204	211	218	225	232	7
620		239	246	253	260	267	274	281	288	295	302	7
21		309	316	323	330	337	344	351	358	365	372	7
22		379	386	393	400	407	414	421	428	435	442	7
23		449	456	463	470	477	484	491	498	505	511	7
24		518	525	532	539	546	553	560	567	574	581	7
25		588	595	602	609	616	623	630	637	644	650	7
26		657	664	671	678	685	692	699	706	713	720	7
27		727	734	741	748	754	761	768	775	782	789	7
28		796	803	810	817	824	831	837	844	851	858	7
29		865	872	879	886	893	900	906	913	920	927	7
630		934	941	948	955	962	969	975	982	989	996	7
31	80	003	010	017	024	030	037	044	051	058	065	7
32		072	079	085	092	099	106	113	120	127	134	7
33		140	147	154	161	168	175	182	188	195	202	7
34		209	216	223	229	236	243	250	257	264	271	7
35		277	284	291	298	305	312	318	325	332	339	7
36		346	353	359	366	373	380	387	393	400	407	7
37		414	421	428	434	441	448	455	462	468	475	7
38		482	489	496	502	509	516	523	530	536	543	7
39		550	557	564	570	577	584	591	598	604	611	7
640		618	625	632	638	645	652	659	665	672	679	7
41		686	693	699	706	713	720	726	733	740	747	7
42		754	760	767	774	781	787	794	801	808	814	7
43		821	828	835	841	848	855	862	868	875	882	7
44		889	895	902	909	916	922	929	936	943	949	7
45		956	963	969	976	983	990	996	*003	*010	*017	7
46	81	023	030	037	043	050	057	064	070	077	084	7
47		090	097	104	111	117	124	131	137	144	151	7
48		158	164	171	178	184	191	198	204	211	218	7
49		224	231	238	245	251	258	265	271	278	285	7
650		291	298	305	311	318	325	331	338	345	351	7
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.

Partes Prop.

	8
1	0.8
2	1.6
3	2.4
4	3.2
5	4.0
6	4.8
7	5.6
8	6.4
9	7.2

	7
1	0.7
2	1.4
3	2.1
4	2.8
5	3.5
6	4.2
7	4.9
8	5.6
9	6.3

	6
1	0.6
2	1.2
3	1.8
4	2.4
5	3.0
6	3.6
7	4.2
8	4.8
9	5.4

Partes Prop.

LOGARITMOS DE LOS NUMEROS

6500-7000

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.
650	81	291	298	305	311	318	325	331	338	345	351	7
51		358	365	371	378	385	391	398	405	411	418	7
52		425	431	438	445	451	458	465	471	478	485	7
53		491	498	505	511	518	525	531	538	544	551	7
54		558	564	571	578	584	591	598	604	611	617	7
55		624	631	637	644	651	657	664	671	677	684	7
56		690	697	704	710	717	723	730	737	743	750	7
57		757	763	770	776	783	790	796	803	809	816	7
58		823	829	836	842	849	856	862	869	875	882	7
59		889	895	902	908	915	921	928	935	941	948	7
660		954	961	968	974	981	987	994	*000	*007	*014	7
61	82	020	027	033	040	046	053	060	066	073	079	7
62		086	092	099	105	112	119	125	132	138	145	7
63		151	158	164	171	178	184	191	197	204	210	7
64		217	223	230	236	243	249	256	263	269	276	7
65		282	289	295	302	308	315	321	328	334	341	7
66		347	354	360	367	373	380	387	393	400	406	7
67		413	419	426	432	439	445	452	458	465	471	7
68		478	484	491	497	504	510	517	523	530	536	7
69		543	549	556	562	569	575	582	588	595	601	7
670		607	614	620	627	633	640	646	653	659	666	7
71		672	679	685	692	698	705	711	718	724	730	6
72		737	743	750	756	763	769	776	782	789	795	6
73		802	808	814	821	827	834	840	847	853	860	6
74		866	872	879	885	892	898	905	911	918	924	6
75		930	937	943	950	956	963	969	975	982	988	6
76		995	*001	*008	*014	*020	*027	*033	*040	*046	*052	6
77	83	059	065	072	078	085	091	097	104	110	117	6
78		123	129	136	142	149	155	161	168	174	181	6
79		187	193	200	206	213	219	225	232	238	245	6
680		251	257	264	270	276	283	289	296	302	308	6
81		315	321	327	334	340	347	353	359	366	372	6
82		378	385	391	398	404	410	417	423	429	436	6
83		442	448	455	461	467	474	480	487	493	499	6
84		506	512	518	525	531	537	544	550	556	563	6
85		569	575	582	588	594	601	607	613	620	626	6
86		632	639	645	651	658	664	670	677	683	689	6
87		696	702	708	715	721	727	734	740	746	753	6
88		759	765	771	778	784	790	797	803	809	816	6
89		822	828	835	841	847	853	860	866	872	879	6
690		885	891	897	904	910	916	923	929	935	942	6
91		948	954	960	967	973	979	985	992	998	*004	6
92	84	011	017	023	029	036	042	048	055	061	067	6
93		073	080	086	092	098	105	111	117	123	130	6
94		136	142	148	155	161	167	173	180	186	192	6
95		198	205	211	217	223	230	236	242	248	255	6
96		261	267	273	280	286	292	298	305	311	317	6
97		323	330	336	342	348	354	361	367	373	379	6
98		386	392	398	404	410	417	423	429	435	442	6
99		448	454	460	466	473	479	485	491	497	504	6
700		510	516	522	528	535	541	547	553	559	566	6
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.

Partes Prop.

	7
1	0.7
2	1.4
3	2.1
4	2.8
5	3.5
6	4.2
7	4.9
8	5.6
9	6.3

	6
1	0.6
2	1.2
3	1.8
4	2.4
5	3.0
6	3.6
7	4.2
8	4.8
9	5.4

Partes Prop.

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.
700	84	510	516	522	528	535	541	547	553	559	566	6
01		572	578	584	590	597	603	609	615	621	628	6
02		634	640	646	652	658	665	671	677	683	689	6
03		696	702	708	714	720	726	733	739	745	751	6
04		757	763	770	776	782	788	794	800	807	813	6
05		819	825	831	837	844	850	856	862	868	874	6
06		880	887	893	899	905	911	917	924	930	936	6
07		942	948	954	960	967	973	979	985	991	997	6
08	85	003	009	016	022	028	034	040	046	052	058	6
09		065	071	077	083	089	095	101	107	114	120	6
710		126	132	138	144	150	156	163	169	175	181	6
11		187	193	199	205	211	217	224	230	236	242	6
12		248	254	260	266	272	278	285	291	297	303	6
13		309	315	321	327	333	339	345	352	358	364	6
14		370	376	382	388	394	400	406	412	418	425	6
15		431	437	443	449	455	461	467	473	479	485	6
16		491	497	503	509	516	522	528	534	540	546	6
17		552	558	564	570	576	582	588	594	600	606	6
18		612	618	625	631	637	643	649	655	661	667	6
19		673	679	685	691	697	703	709	715	721	727	6
720		733	739	745	751	757	763	769	775	781	788	6
21		794	800	806	812	818	824	830	836	842	848	6
22		854	860	866	872	878	884	890	896	902	908	6
23		914	920	926	932	938	944	950	956	962	968	6
24		974	980	986	992	998	*004	*010	*016	*022	*028	6
25	86	034	040	046	052	058	064	070	076	082	088	6
26		094	100	106	112	118	124	130	136	141	147	6
27		153	159	165	171	177	183	189	195	201	207	6
28		213	219	225	231	237	243	249	255	261	267	6
29		273	279	285	291	297	303	308	314	320	326	6
730		332	338	344	350	356	362	368	374	380	386	6
31		392	398	404	410	415	421	427	433	439	445	6
32		451	457	463	469	475	481	487	493	499	504	6
33		510	516	522	528	534	540	546	552	558	564	6
34		570	576	581	587	593	599	605	611	617	623	6
35		629	635	641	646	652	658	664	670	676	682	6
36		688	694	700	705	711	717	723	729	735	741	6
37		747	753	759	764	770	776	782	788	794	800	6
38		806	812	817	823	829	835	841	847	853	859	6
39		864	870	876	882	888	894	900	906	911	917	6
740		923	929	935	941	947	953	958	964	970	976	6
41		982	988	994	999	*005	*011	*017	*023	*029	*035	6
42	87	040	046	052	058	064	070	075	081	087	093	6
43		099	105	111	116	122	128	134	140	146	151	6
44		157	163	169	175	181	186	192	198	204	210	6
45		216	221	227	233	239	245	251	256	262	268	6
46		274	280	286	291	297	303	309	315	320	326	6
47		332	338	344	349	355	361	367	373	379	384	6
48		390	396	402	408	413	419	425	431	437	442	6
49		448	454	460	466	471	477	483	489	495	500	6
750		506	512	518	523	529	535	541	547	552	558	6
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.

Partes Prop.

	7
1	0.7
2	1.4
3	2.1
4	2.8
5	3.5
6	4.2
7	4.9
8	5.6
9	6.3

	6
1	0.6
2	1.2
3	1.8
4	2.4
5	3.0
6	3.6
7	4.2
8	4.8
9	5.4

	5
1	0.5
2	1.0
3	1.5
4	2.0
5	2.5
6	3.0
7	3.5
8	4.0
9	4.5

Partes Prop.

7500-8000

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.
750	87	506	512	518	523	529	535	541	547	552	558	6
51		564	570	576	581	587	593	599	604	610	616	6
52		622	628	633	639	645	651	656	662	668	674	6
53		679	685	691	697	703	708	714	720	726	731	6
54		737	743	749	754	760	766	772	777	783	789	6
55		795	800	806	812	818	823	829	835	841	846	6
56		852	858	864	869	875	881	887	892	898	904	6
57		910	915	921	927	933	938	944	950	955	961	6
58		967	973	978	984	990	996	*001	*007	*013	*018	6
59	88	024	030	036	041	047	053	058	064	070	076	6
760		081	087	093	098	104	110	116	121	127	133	6
61		138	144	150	156	161	167	173	178	184	190	6
62		195	201	207	213	218	224	230	235	241	247	6
63		252	258	264	270	275	281	287	292	298	304	6
64		309	315	321	326	332	338	343	349	355	360	6
65		366	372	377	383	389	395	400	406	412	417	6
66		423	429	434	440	446	451	457	463	468	474	6
67		480	485	491	497	502	508	513	519	525	530	6
68		536	542	547	553	559	564	570	576	581	587	6
69		593	598	604	610	615	621	627	632	638	643	6
770		649	655	660	666	672	677	683	689	694	700	6
71		705	711	717	722	728	734	739	745	750	756	6
72		762	767	773	779	784	790	795	801	807	812	6
73		818	824	829	835	840	846	852	857	863	868	6
74		874	880	885	891	897	902	908	913	919	925	6
75		930	936	941	947	953	958	964	969	975	981	6
76		986	992	997	*003	*009	*014	*020	*025	*031	*037	6
77	89	042	048	053	059	064	070	076	081	087	092	6
78		098	104	109	115	120	126	131	137	143	148	6
79		154	159	165	170	176	182	187	193	198	204	6
780		209	215	221	226	232	237	243	248	254	260	6
81		265	271	276	282	287	293	298	304	310	315	6
82		321	326	332	337	343	348	354	360	365	371	6
83		376	382	387	393	398	404	409	415	421	426	6
84		432	437	443	448	454	459	465	470	476	481	6
85		487	492	498	504	509	515	520	526	531	537	6
86		542	548	553	559	564	570	575	581	586	592	6
87		597	603	609	614	620	625	631	636	642	647	6
88		653	658	664	669	675	680	686	691	697	702	6
89		708	713	719	724	730	735	741	746	752	757	6
790		763	768	774	779	785	790	796	801	807	812	5
91		818	823	829	834	840	845	851	856	862	867	5
92		873	878	883	889	894	900	905	911	916	922	5
93		927	933	938	944	949	955	960	966	971	977	5
94		982	988	993	998	*004	*009	*015	*020	*026	*031	5
95	90	037	042	048	053	059	064	069	075	080	086	5
96		091	097	102	108	113	119	124	129	135	140	5
97		146	151	157	162	168	173	179	184	189	195	5
98		200	206	211	217	222	227	233	238	244	249	5
99		255	260	266	271	276	282	287	293	298	304	5
800		309	314	320	325	331	336	342	347	352	358	5
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.

Partes Prop.

	6
1	0.6
2	1.2
3	1.8
4	2.4
5	3.0
6	3.6
7	4.2
8	4.8
9	5.4

	5
1	0.5
2	1.0
3	1.5
4	2.0
5	2.5
6	3.0
7	3.5
8	4.0
9	4.5

Partes Prop.

8000-8500

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.
800	90	309	314	320	325	331	336	342	347	352	358	5
01		363	369	374	380	385	390	396	401	407	412	5
02		417	423	428	434	439	445	450	455	461	466	5
03		472	477	482	488	493	499	504	509	515	520	5
04		526	531	536	542	547	553	558	563	569	574	5
05		580	585	590	596	601	607	612	617	623	628	5
06		634	639	644	650	655	660	666	671	677	682	5
07		687	693	698	703	709	714	720	725	730	736	5
08		741	747	752	757	763	768	773	779	784	789	5
09		795	800	806	811	816	822	827	832	838	843	5
810		849	854	859	865	870	875	881	886	891	897	5
11		902	907	913	918	924	929	934	940	945	950	5
12		956	961	966	972	977	982	988	993	998	*004	5
13	91	009	014	020	025	030	036	041	046	052	057	5
14		062	068	073	078	084	089	094	100	105	110	5
15		116	121	126	132	137	142	148	153	158	164	5
16		169	174	180	185	190	196	201	206	212	217	5
17		222	228	233	238	243	249	254	259	265	270	5
18		275	281	286	291	297	302	307	312	318	323	5
19		328	334	339	344	350	355	360	365	371	376	5
820		381	387	392	397	403	408	413	418	424	429	5
21		434	440	445	450	455	461	466	471	477	482	5
22		487	492	498	503	508	514	519	524	529	535	5
23		540	545	551	556	561	566	572	577	582	587	5
24		593	598	603	609	614	619	624	630	635	640	5
25		645	651	656	661	666	672	677	682	687	693	5
26		698	703	709	714	719	724	730	735	740	745	5
27		751	756	761	766	772	777	782	787	793	798	5
28		803	808	814	819	824	829	834	840	845	850	5
29		855	861	866	871	876	882	887	892	897	903	5
830		908	913	918	924	929	934	939	944	950	955	5
31		960	965	971	976	981	986	991	997	*002	*007	5
32	92	012	018	023	028	033	038	044	049	054	059	5
33		065	070	075	080	085	091	096	101	106	111	5
34		117	122	127	132	137	143	148	153	158	163	5
35		169	174	179	184	189	195	200	205	210	215	5
36		221	226	231	236	241	247	252	257	262	267	5
37		273	278	283	288	293	298	304	309	314	319	5
38		324	330	335	340	345	350	355	361	366	371	5
39		376	381	387	392	397	402	407	412	418	423	5
840		428	433	438	443	449	454	459	464	469	474	5
41		480	485	490	495	500	505	511	516	521	526	5
42		531	536	542	547	552	557	562	567	572	578	5
43		583	588	593	598	603	609	614	619	624	629	5
44		634	639	645	650	655	660	665	670	675	681	5
45		686	691	696	701	706	711	716	722	727	732	5
46		737	742	747	752	758	763	768	773	778	783	5
47		788	793	799	804	809	814	819	824	829	834	5
48		840	845	850	855	860	865	870	875	881	886	5
49		891	896	901	906	911	916	921	927	932	937	5
850		942	947	952	957	962	967	973	978	983	988	5
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.

Partes Prop.

	6
1	0.6
2	1.2
3	1.8
4	2.4
5	3.0
6	3.6
7	4.2
8	4.8
9	5.4

	5
1	0.5
2	1.0
3	1.5
4	2.0
5	2.5
6	3.0
7	3.5
8	4.0
9	4.5

Partes Prop.

LOGARITMOS DE LOS NUMEROS

8500-9000

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.
850	92	942	947	952	957	962	967	973	978	983	988	5
51		993	998	*003	*008	*013	*018	*024	*029	*034	*039	5
52	93	044	049	054	059	064	069	075	080	085	090	5
53		095	100	105	110	115	120	125	131	136	141	5
54		146	151	156	161	166	171	176	181	186	192	5
55		197	202	207	212	217	222	227	232	237	242	5
56		247	252	258	263	268	273	278	283	288	293	5
57		298	303	308	313	318	323	328	334	339	344	5
58		349	354	359	364	369	374	379	384	389	394	5
59		399	404	409	414	420	425	430	435	440	445	5
860		450	455	460	465	470	475	480	485	490	495	5
61		500	505	510	515	520	526	531	536	541	546	5
62		551	556	561	566	571	576	581	586	591	596	5
63		601	606	611	616	621	626	631	636	641	646	5
64		651	656	661	666	671	776	682	687	692	697	5
65		702	707	712	717	722	727	732	737	742	747	5
66		752	757	762	767	772	777	782	787	792	797	5
67		802	807	812	817	822	827	832	837	842	847	5
68		852	857	862	867	872	877	882	887	892	897	5
69		902	907	912	917	922	927	932	937	942	947	5
870		952	957	962	967	972	977	982	987	992	997	5
71	94	002	007	012	017	022	027	032	037	042	047	5
72		052	057	062	067	072	077	082	086	091	096	5
73		101	106	111	116	121	126	131	136	141	146	5
74		151	156	161	166	171	176	181	186	191	196	5
75		201	206	211	216	221	226	231	236	240	245	5
76		250	255	260	265	270	275	280	285	290	295	5
77		300	305	310	315	320	325	330	335	340	345	5
78		349	354	359	364	369	374	379	384	389	394	5
79		399	404	409	414	419	424	429	433	438	443	5
880		448	453	458	463	468	473	478	483	488	493	5
81		498	503	507	512	517	522	527	532	537	542	5
82		547	552	557	562	567	571	576	581	586	591	5
83		596	601	606	611	616	621	626	630	635	640	5
84		645	650	655	660	665	670	675	680	685	689	5
85		694	699	704	709	714	719	724	729	734	738	5
86		743	748	753	758	763	768	773	778	783	787	5
87		792	797	802	807	812	817	822	827	832	836	5
88		841	846	851	856	861	866	871	876	880	885	5
89		890	895	900	905	910	915	919	924	929	934	5
890		939	944	949	954	959	963	968	973	978	983	5
91		988	993	998	*002	*007	*012	*017	*022	*027	*032	5
92	95	036	041	046	051	056	061	066	071	075	080	5
93		085	090	095	100	105	109	114	119	124	129	5
94		134	139	143	148	153	158	163	168	173	177	5
95		182	187	192	197	202	207	211	216	221	226	5
96		231	236	240	245	250	255	260	265	270	274	5
97		279	284	289	294	299	303	308	313	318	323	5
98		328	332	337	342	347	352	357	361	366	371	5
99		376	381	386	390	395	400	405	410	415	419	5
900		424	429	434	439	444	448	453	458	463	468	5
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.

Partes Prop.

	6
1	0.6
2	1.2
3	1.8
4	2.4
5	3.0
6	3.6
7	4.2
8	4.8
9	5.4

	5
1	0.5
2	1.0
3	1.5
4	2.0
5	2.5
6	3.0
7	3.5
8	4.0
9	4.5

	4
1	0.4
2	0.8
3	1.2
4	1.6
5	2.0
6	2.4
7	2.8
8	3.2
9	3.6

Partes Prop.

LOGARITMOS DE LOS NUMEROS

9000-9500

N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.
900	95	424	429	434	439	444	448	453	458	463	468	5
01		472	477	482	487	492	497	501	506	511	516	5
02		521	525	530	535	540	545	550	554	559	564	5
03		569	574	578	583	588	593	598	602	607	612	5
04		617	622	626	631	636	641	646	650	655	660	5
05		665	670	674	679	684	689	694	698	703	708	5
06		713	718	722	727	732	737	742	746	751	756	5
07		761	766	770	775	780	785	789	794	799	804	5
08		809	813	818	823	828	832	837	842	847	852	5
09		856	861	866	871	875	880	885	890	895	899	5
910		904	909	914	918	923	928	933	938	942	947	5
11		952	957	961	966	971	976	980	985	990	995	5
12		999	*004	*009	*014	*019	*023	*028	*033	*038	*042	5
13	96	047	052	057	061	066	071	076	080	085	090	5
14		095	099	104	109	114	118	123	128	133	137	5
15		142	147	152	156	161	166	171	175	180	185	5
16		190	194	199	204	209	213	218	223	227	232	5
17		237	242	246	251	256	261	265	270	275	280	5
18		284	289	294	298	303	308	313	317	322	327	5
19		332	336	341	346	350	355	360	365	369	374	5
920		379	384	388	393	398	402	407	412	417	421	5
21		426	431	435	440	445	450	454	459	464	468	5
22		473	478	483	487	492	497	501	506	511	515	5
23		520	525	530	534	539	544	548	553	558	562	5
24		567	572	577	581	586	591	595	600	605	609	5
25		614	619	624	628	633	638	642	647	652	656	5
26		661	666	670	675	680	685	689	694	699	703	5
27		708	713	717	722	727	731	736	741	745	750	5
28		755	759	764	769	774	778	783	788	792	797	5
29		802	806	811	816	820	825	830	834	839	844	5
930		848	853	858	862	867	872	876	881	886	890	5
31		895	900	904	909	914	918	923	928	932	937	5
32		942	946	951	956	960	965	970	974	979	984	5
33		988	993	997	*002	*007	*011	*016	*021	*025	*030	5
34	97	035	039	044	049	053	058	063	067	072	077	5
35		081	086	090	095	100	104	109	114	118	123	5
36		128	132	137	142	146	151	155	160	165	169	5
37		174	179	183	188	192	197	202	206	211	216	5
38		220	225	230	234	239	243	248	253	257	262	5
39		267	271	276	280	285	290	294	299	304	308	5
940		313	317	322	327	331	336	340	345	350	354	5
41		359	364	368	373	377	382	387	391	396	400	5
42		405	410	414	419	424	428	433	437	442	447	5
43		451	456	460	465	470	474	479	483	488	493	5
44		497	502	506	511	516	520	525	529	534	539	5
45		543	548	552	557	562	566	571	575	580	585	5
46		589	594	598	603	607	612	617	621	626	630	5
47		635	640	644	649	653	658	663	667	672	676	5
48		681	685	690	695	699	704	708	713	717	722	5
49		727	731	736	740	745	749	754	759	763	768	5
950		772	777	782	786	791	795	800	804	809	813	5
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.

Partes Prop.

	5
1	0.5
2	1.0
3	1.5
4	2.0
5	2.5
6	3.0
7	3.5
8	4.0
9	4.5

	4
1	0.4
2	0.8
3	1.2
4	1.6
5	2.0
6	2.4
7	2.8
8	3.2
9	3.6

Partes Prop.

9500-10,000

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.
950	97 772	777	782	786	791	795	800	804	809	813	5
51	818	823	827	832	836	841	845	850	855	859	5
52	864	868	873	877	882	886	891	896	900	905	5
53	909	914	918	923	928	932	937	941	946	950	5
54	955	959	964	968	973	978	982	987	991	996	5
55	98 000	005	009	014	019	023	028	032	037	041	5
56	046	050	055	059	064	068	073	078	082	087	5
57	091	096	100	105	109	114	118	123	127	132	5
58	137	141	146	150	155	159	164	168	173	177	5
59	182	186	191	195	200	204	209	214	218	223	5
960	227	232	236	241	245	250	254	259	263	268	5
61	272	277	281	286	290	295	299	304	308	313	5
62	318	322	327	331	336	340	345	349	354	358	5
63	363	367	372	376	381	385	390	394	399	403	5
64	408	412	417	421	426	430	435	439	444	448	5
65	453	457	462	466	471	475	480	484	489	493	4
66	498	502	507	511	516	520	525	529	534	538	4
67	543	547	552	556	561	565	570	574	579	583	4
68	588	592	597	601	605	610	614	619	623	628	4
69	632	637	641	646	650	655	659	664	668	673	4
970	677	682	686	691	695	700	704	709	713	717	4
71	722	726	731	735	740	744	749	753	758	762	4
72	767	771	776	780	784	789	793	798	802	807	4
73	811	816	820	825	829	834	838	843	847	851	4
74	856	860	865	869	874	878	883	887	892	896	4
75	900	905	909	914	918	923	927	932	936	941	4
76	945	949	954	958	963	967	972	976	981	985	4
77	989	994	998	*003	*007	*012	*016	*021	*025	*029	4
78	99 034	038	043	047	052	056	061	065	069	074	4
79	078	083	087	092	096	100	105	109	114	118	4
980	123	127	131	136	140	145	149	154	158	162	4
81	167	171	176	180	185	189	193	198	262	207	4
82	211	216	220	224	229	233	238	242	247	251	4
83	255	260	264	269	273	277	282	286	291	295	4
84	300	304	308	313	317	322	326	330	335	339	4
85	344	348	352	357	361	366	370	374	379	383	4
86	388	392	396	401	405	410	414	419	423	427	4
87	432	436	441	445	449	454	458	463	467	471	4
88	476	480	484	489	493	498	502	506	511	515	4
89	520	524	528	533	537	542	546	550	555	559	4
990	564	568	572	577	581	585	590	594	599	603	4
91	607	612	616	621	625	629	634	638	642	647	4
92	651	656	660	664	669	673	677	682	686	691	4
93	695	699	704	708	712	717	721	726	730	734	4
94	739	743	747	752	756	760	765	769	774	778	4
95	782	787	791	795	800	804	808	813	817	822	4
96	826	830	835	839	843	848	852	856	861	865	4
97	870	874	878	883	887	891	896	900	904	909	4
98	913	917	922	926	930	935	939	944	948	952	4
99	957	961	965	970	974	978	933	987	991	996	4
1000	00 000	004	009	013	017	022	026	030	035	039	4
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.

Partes Prop.

	5
1	0.5
2	1.0
3	1.5
4	2.0
5	2.5
6	3.0
7	3.5
8	4.0
9	4.5

	4
1	0.4
2	0.8
3	1.2
4	1.6
5	2.0
6	2.4
7	2.8
8	3.2
9	3.6

Partes Prop.

TABLAS
DE
INTERÉS

i = 0,005 = 0,5 %				
t	$(1+i)^t$	$(1+i)^{-t}$	$m_{t;i}$	$v_{t;i}$
1	1,005000	0,995025	1,000000	0,995025
2	1,010025	0,990075	2,005000	1,985099
3	1,015075	0,985149	3,015025	2,970248
4	1,020151	0,980248	4,030100	3,950496
5	1,025251	0,975371	5,050251	4,925866
6	1,030378	0,970518	6,075502	5,896384
7	1,035529	0,965690	7,105879	6,862074
8	1,040707	0,960885	8,141409	7,822959
9	1,045911	0,956105	9,182116	8,779064
10	1,051140	0,951348	10,228026	9,730412
11	1,056396	0,946615	11,279167	10,677027
12	1,061678	0,941905	12,335562	11,618932
13	1,066986	0,937219	13,397240	12,556151
14	1,072321	0,932556	14,464226	13,488708
15	1,077683	0,927917	15,536548	14,416625
16	1,083071	0,923300	16,614230	15,339925
17	1,088487	0,918707	17,697301	16,258632
18	1,093929	0,914136	18,785788	17,172768
19	1,099399	0,909588	19,879717	18,082356
20	1,104896	0,905063	20,979115	18,987419
21	1,110420	0,900560	22,084011	19,887979
22	1,115972	0,896080	23,194431	20,784059
23	1,121552	0,891622	24,310403	21,675681
24	1,127160	0,887186	25,431955	22,562866
25	1,132796	0,882772	26,559115	23,445638
26	1,138460	0,878380	27,691911	24,324018
27	1,144152	0,874010	28,830370	25,198028
28	1,149873	0,869662	29,974522	26,067689
29	1,155622	0,865335	31,124395	26,933024
30	1,161400	0,861030	32,280017	27,794054
31	1,167207	0,856746	33,441417	28,650800
32	1,173043	0,852484	34,608624	29,503284
33	1,178908	0,848242	35,781667	30,351526
34	1,184803	0,844022	36,960575	31,195548
35	1,190727	0,839823	38,145378	32,035371
36	1,196681	0,835645	39,336105	32,871016
37	1,202664	0,831487	40,532785	33,702504
38	1,208677	0,827351	41,735449	34,529854
39	1,214721	0,823235	42,944127	35,353089
40	1,220794	0,819139	44,158847	36,172228
41	1,226898	0,815064	45,379642	36,987291
42	1,233033	0,811009	46,606540	37,798300
43	1,239198	0,806974	47,839572	38,605274
44	1,245394	0,802959	49,078770	39,408232
45	1,251621	0,798964	50,324164	40,207196
46	1,257879	0,794989	51,575785	41,002185
47	1,264168	0,791034	52,833664	41,793219
48	1,270489	0,787098	54,097832	42,580318
49	1,276842	0,783182	55,368321	43,363500
50	1,283226	0,779286	56,645163	44,142786

i = 0,01 = 1,0 %				
t	$(1+\mathrm{i})^{t}$	$(1+\mathrm{i})^{-t}$	$m_{t;i}$	$v_{t;i}$
1	1,010000	0,990099	1,000000	0,990099
2	1,020100	0,980296	2,010000	1,970395
3	1,030301	0,970590	3,030100	2,940985
4	1,040604	0,960980	4,060401	3,901966
5	1,051010	0,951466	5,101005	4,853431
6	1,061520	0,942045	6,152015	5,795476
7	1,072135	0,932718	7,213535	6,728195
8	1,082857	0,923483	8,285671	7,651678
9	1,093685	0,914340	9,368527	8,566018
10	1,104622	0,905287	10,462213	9,471305
11	1,115668	0,896324	11,566835	10,367628
12	1,126825	0,887449	12,682503	11,255077
13	1,138093	0,878663	13,809328	12,133740
14	1,149474	0,869963	14,947421	13,003703
15	1,160969	0,861349	16,096896	13,865053
16	1,172579	0,852821	17,257864	14,717874
17	1,184304	0,844377	18,430443	15,562251
18	1,196147	0,836017	19,614748	16,398269
19	1,208109	0,827740	20,810895	17,226008
20	1,220190	0,819544	22,019004	18,045553
21	1,232392	0,811430	23,239194	18,856983
22	1,244716	0,803396	24,471586	19,660379
23	1,257163	0,795442	25,716302	20,455821
24	1,269735	0,787566	26,973465	21,243387
25	1,282432	0,779768	28,243200	22,023156
26	1,295256	0,772048	29,525631	22,795204
27	1,308209	0,764404	30,820888	23,559608
28	1,321291	0,756836	32,129097	24,316443
29	1,334504	0,749342	33,450388	25,065785
30	1,347849	0,741923	34,784892	25,807708
31	1,361327	0,734577	36,132740	26,542285
32	1,374941	0,727304	37,494068	27,269589
33	1,388690	0,720103	38,869009	27,989693
34	1,402577	0,712973	40,257699	28,702666
35	1,416603	0,705914	41,660276	29,408580
36	1,430769	0,698925	43,076878	30,107505
37	1,445076	0,692005	44,507647	30,799510
38	1,459527	0,685153	45,952724	31,484663
39	1,474123	0,678370	47,412251	32,163033
40	1,488864	0,671653	48,886373	32,834686
41	1,503752	0,665003	50,375237	33,499689
42	1,518790	0,658419	51,878989	34,158108
43	1,533978	0,651900	53,397779	34,810008
44	1,549318	0,645445	54,931757	35,455454
45	1,564811	0,639055	56,481075	36,094508
46	1,580459	0,632728	58,045885	36,727236
47	1,596263	0,626463	59,626344	37,353699
48	1,612226	0,620260	61,222608	37,973959
49	1,628348	0,614119	62,834834	38,588079
50	1,644632	0,608039	64,463182	39,196118

i = 0,015 = 1,5 %				
t	$(1+\mathrm{i})^t$	$(1+\mathrm{i})^{-t}$	$m_{t;i}$	$v_{t;i}$
1	1,015000	0,985222	1,000000	0,985222
2	1,030225	0,970662	2,015000	1,955883
3	1,045678	0,956317	3,045225	2,912200
4	1,061364	0,942184	4,090903	3,854385
5	1,077284	0,928260	5,152267	4,782645
6	1,093443	0,914542	6,229551	5,697187
7	1,109845	0,901027	7,322994	6,598214
8	1,126493	0,887711	8,432839	7,485925
9	1,143390	0,874592	9,559332	8,360517
10	1,160541	0,861667	10,702722	9,222185
11	1,177949	0,848933	11,863262	10,071118
12	1,195618	0,836387	13,041211	10,907505
13	1,213552	0,824027	14,236830	11,731532
14	1,231756	0,811849	15,450382	12,543382
15	1,250232	0,799852	16,682138	13,343233
16	1,268986	0,788031	17,932370	14,131264
17	1,288020	0,776385	19,201355	14,907649
18	1,307341	0,764912	20,489376	15,672561
19	1,326951	0,753607	21,796716	16,426168
20	1,346855	0,742470	23,123667	17,168639
21	1,367058	0,731498	24,470522	17,900137
22	1,387564	0,720688	25,837580	18,620824
23	1,408377	0,710037	27,225144	19,330861
24	1,429503	0,699544	28,633521	20,030405
25	1,450945	0,689206	30,063024	20,719611
26	1,472710	0,679021	31,513969	21,398632
27	1,494800	0,668986	32,986678	22,067617
28	1,517222	0,659099	34,481479	22,726717
29	1,539981	0,649359	35,998701	23,376076
30	1,563080	0,639762	37,538681	24,015838
31	1,586526	0,630308	39,101762	24,646146
32	1,610324	0,620993	40,688288	25,267139
33	1,634479	0,611816	42,298612	25,878954
34	1,658996	0,602774	43,933092	26,481728
35	1,683881	0,593866	45,592088	27,075595
36	1,709140	0,585090	47,275969	27,660684
37	1,734777	0,576443	48,985109	28,237127
38	1,760798	0,567924	50,719885	28,805052
39	1,787210	0,559531	52,480684	29,364583
40	1,814018	0,551262	54,267894	29,915845
41	1,841229	0,543116	56,081912	30,458961
42	1,868847	0,535089	57,923141	30,994050
43	1,896880	0,527182	59,791988	31,521232
44	1,925333	0,519391	61,688868	32,040622
45	1,954213	0,511715	63,614201	32,552337
46	1,983526	0,504153	65,568414	33,056490
47	2,013279	0,496702	67,551940	33,553192
48	2,043478	0,489362	69,565219	34,042554
49	2,074130	0,482130	71,608698	34,524683
50	2,105242	0,475005	73,682828	34,999688

i = 0,02 = 2,0 %				
t	$(1+i)^t$	$(1+i)^{-t}$	$m_{t;i}$	$v_{t;i}$
1	1,020000	0,980392	1,000000	0,980392
2	1,040400	0,961169	2,020000	1,941561
3	1,061208	0,942322	3,060400	2,883883
4	1,082432	0,923845	4,121608	3,807729
5	1,104081	0,905731	5,204040	4,713460
6	1,126162	0,887971	6,308121	5,601431
7	1,148686	0,870560	7,434283	6,471991
8	1,171659	0,853490	8,582969	7,325481
9	1,195093	0,836755	9,754628	8,162237
10	1,218994	0,820348	10,949721	8,982585
11	1,243374	0,804263	12,168715	9,786848
12	1,268242	0,788493	13,412090	10,575341
13	1,293607	0,773033	14,680332	11,348374
14	1,319479	0,757875	15,973938	12,106249
15	1,345868	0,743015	17,293417	12,849264
16	1,372786	0,728446	18,639285	13,577709
17	1,400241	0,714163	20,012071	14,291872
18	1,428246	0,700159	21,412312	14,992031
19	1,456811	0,686431	22,840559	15,678462
20	1,485947	0,672971	24,297370	16,351433
21	1,515666	0,659776	25,783317	17,011209
22	1,545980	0,646839	27,298984	17,658048
23	1,576899	0,634156	28,844963	18,292204
24	1,608437	0,621721	30,421862	18,913926
25	1,640606	0,609531	32,030300	19,523456
26	1,673418	0,597579	33,670906	20,121036
27	1,706886	0,585862	35,344324	20,706898
28	1,741024	0,574375	37,051210	21,281272
29	1,775845	0,563112	38,792235	21,844385
30	1,811362	0,552071	40,568079	22,396456
31	1,847589	0,541246	42,379441	22,937702
32	1,884541	0,530633	44,227030	23,468335
33	1,922231	0,520229	46,111570	23,988564
34	1,960676	0,510028	48,033802	24,498592
35	1,999890	0,500028	49,994478	24,998619
36	2,039887	0,490223	51,994367	25,488842
37	2,080685	0,480611	54,034255	25,969453
38	2,122299	0,471187	56,114940	26,440641
39	2,164745	0,461948	58,237238	26,902589
40	2,208040	0,452890	60,401983	27,355479
41	2,252200	0,444010	62,610023	27,799489
42	2,297244	0,435304	64,862223	28,234794
43	2,343189	0,426769	67,159468	28,661562
44	2,390053	0,418401	69,502657	29,079963
45	2,437854	0,410197	71,892710	29,490160
46	2,486611	0,402154	74,330564	29,892314
47	2,536344	0,394268	76,817176	30,286582
48	2,587070	0,386538	79,353519	30,673120
49	2,638812	0,378958	81,940590	31,052078
50	2,691588	0,371528	84,579401	31,423606

i = 0,025 = 2,5 %				
t	$(1+i)^t$	$(1+i)^{-t}$	$m_{t;i}$	$v_{t;i}$
1	1,025000	0,975610	1,000000	0,975610
2	1,050625	0,951814	2,025000	1,927424
3	1,076891	0,928599	3,075625	2,856024
4	1,103813	0,905951	4,152516	3,761974
5	1,131408	0,883854	5,256329	4,645828
6	1,159693	0,862297	6,387737	5,508125
7	1,188686	0,841265	7,547430	6,349391
8	1,218403	0,820747	8,736116	7,170137
9	1,248863	0,800728	9,954519	7,970866
10	1,280085	0,781198	11,203382	8,752064
11	1,312087	0,762145	12,483466	9,514209
12	1,344889	0,743556	13,795553	10,257765
13	1,378511	0,725420	15,140442	10,983185
14	1,412974	0,707727	16,518953	11,690912
15	1,448298	0,690466	17,931927	12,381378
16	1,484506	0,673625	19,380225	13,055003
17	1,521618	0,657195	20,864730	13,712198
18	1,559659	0,641166	22,386349	14,353364
19	1,598650	0,625528	23,946007	14,978891
20	1,638616	0,610271	25,544658	15,589162
21	1,679582	0,595386	27,183274	16,184549
22	1,721571	0,580865	28,862856	16,765413
23	1,764611	0,566697	30,584427	17,332110
24	1,808726	0,552875	32,349038	17,884986
25	1,853944	0,539391	34,157764	18,424376
26	1,900293	0,526235	36,011708	18,950611
27	1,947800	0,513400	37,912001	19,464011
28	1,996495	0,500878	39,859801	19,964889
29	2,046407	0,488661	41,856296	20,453550
30	2,097568	0,476743	43,902703	20,930293
31	2,150007	0,465115	46,000271	21,395407
32	2,203757	0,453771	48,150278	21,849178
33	2,258851	0,442703	50,354034	22,291881
34	2,315322	0,431905	52,612885	22,723786
35	2,373205	0,421371	54,928207	23,145157
36	2,432535	0,411094	57,301413	23,556251
37	2,493349	0,401067	59,733948	23,957318
38	2,555682	0,391285	62,227297	24,348603
39	2,619574	0,381741	64,782979	24,730344
40	2,685064	0,372431	67,402554	25,102775
41	2,752190	0,363347	70,087617	25,466122
42	2,820995	0,354485	72,839808	25,820607
43	2,891520	0,345839	75,660803	26,166446
44	2,963808	0,337404	78,552323	26,503849
45	3,037903	0,329174	81,516131	26,833024
46	3,113851	0,321146	84,554034	27,154170
47	3,191697	0,313313	87,667885	27,467483
48	3,271490	0,305671	90,859582	27,773154
49	3,353277	0,298216	94,131072	28,071369
50	3,437109	0,290942	97,484349	28,362312

i = 0,03 = 3,0 %				
t	$(1+\mathrm{i})^{t}$	$(1+\mathrm{i})^{-t}$	$m_{t;i}$	$v_{t;i}$
1	1,030000	0,970874	1,000000	0,970874
2	1,060900	0,942596	2,030000	1,913470
3	1,092727	0,915142	3,090900	2,828611
4	1,125509	0,888487	4,183627	3,717098
5	1,159274	0,862609	5,309136	4,579707
6	1,194052	0,837484	6,468410	5,417191
7	1,229874	0,813092	7,662462	6,230283
8	1,266770	0,789409	8,892336	7,019692
9	1,304773	0,766417	10,159106	7,786109
10	1,343916	0,744094	11,463879	8,530203
11	1,384234	0,722421	12,807796	9,252624
12	1,425761	0,701380	14,192030	9,954004
13	1,468534	0,680951	15,617790	10,634955
14	1,512590	0,661118	17,086324	11,296073
15	1,557967	0,641862	18,598914	11,937935
16	1,604706	0,623167	20,156881	12,561102
17	1,652848	0,605016	21,761588	13,166118
18	1,702433	0,587395	23,414435	13,753513
19	1,753506	0,570286	25,116868	14,323799
20	1,806111	0,553676	26,870374	14,877475
21	1,860295	0,537549	28,676486	15,415024
22	1,916103	0,521893	30,536780	15,936917
23	1,973587	0,506692	32,452884	16,443608
24	2,032794	0,491934	34,426470	16,935542
25	2,093778	0,477606	36,459264	17,413148
26	2,156591	0,463695	38,553042	17,876842
27	2,221289	0,450189	40,709634	18,327031
28	2,287928	0,437077	42,930923	18,764108
29	2,356566	0,424346	45,218850	19,188455
30	2,427262	0,411987	47,575416	19,600441
31	2,500080	0,399987	50,002678	20,000428
32	2,575083	0,388337	52,502759	20,388766
33	2,652335	0,377026	55,077841	20,765792
34	2,731905	0,366045	57,730177	21,131837
35	2,813862	0,355383	60,462082	21,487220
36	2,898278	0,345032	63,275944	21,832252
37	2,985227	0,334983	66,174223	22,167235
38	3,074783	0,325226	69,159449	22,492462
39	3,167027	0,315754	72,234233	22,808215
40	3,262038	0,306557	75,401260	23,114772
41	3,359899	0,297628	78,663298	23,412400
42	3,460696	0,288959	82,023196	23,701359
43	3,564517	0,280543	85,483892	23,981902
44	3,671452	0,272372	89,048409	24,254274
45	3,781596	0,264439	92,719861	24,518713
46	3,895044	0,256737	96,501457	24,775449
47	4,011895	0,249259	100,396501	25,024708
48	4,132252	0,241999	104,408396	25,266707
49	4,256219	0,234950	108,540648	25,501657
50	4,383906	0,228107	112,796867	25,729764

i = 0,035 = 3,5 %				
t	$(1+\mathrm{i})^{t}$	$(1+\mathrm{i})^{-t}$	$m_{t;i}$	$v_{t;i}$
1	1,035000	0,966184	1,000000	0,966184
2	1,071225	0,933511	2,035000	1,899694
3	1,108718	0,901943	3,106225	2,801637
4	1,147523	0,871442	4,214943	3,673079
5	1,187686	0,841973	5,362466	4,515052
6	1,229255	0,813501	6,550152	5,328553
7	1,272279	0,785991	7,779408	6,114544
8	1,316809	0,759412	9,051687	6,873956
9	1,362897	0,733731	10,368496	7,607687
10	1,410599	0,708919	11,731393	8,316605
11	1,459970	0,684946	13,141992	9,001551
12	1,511069	0,661783	14,601962	9,663334
13	1,563956	0,639404	16,113030	10,302738
14	1,618695	0,617782	17,676986	10,920520
15	1,675349	0,596891	19,295681	11,517411
16	1,733986	0,576706	20,971030	12,094117
17	1,794676	0,557204	22,705016	12,651321
18	1,857489	0,538361	24,499691	13,189682
19	1,922501	0,520156	26,357180	13,709837
20	1,989789	0,502566	28,279682	14,212403
21	2,059431	0,485571	30,269471	14,697974
22	2,131512	0,469151	32,328902	15,167125
23	2,206114	0,453286	34,460414	15,620410
24	2,283328	0,437957	36,666528	16,058368
25	2,363245	0,423147	38,949857	16,481515
26	2,445959	0,408838	41,313102	16,890352
27	2,531567	0,395012	43,759060	17,285365
28	2,620172	0,381654	46,290627	17,667019
29	2,711878	0,368748	48,910799	18,035767
30	2,806794	0,356278	51,622677	18,392045
31	2,905031	0,344230	54,429471	18,736276
32	3,006708	0,332590	57,334502	19,068865
33	3,111942	0,321343	60,341210	19,390208
34	3,220860	0,310476	63,453152	19,700684
35	3,333590	0,299977	66,674013	20,000661
36	3,450266	0,289833	70,007603	20,290494
37	3,571025	0,280032	73,457869	20,570525
38	3,696011	0,270562	77,028895	20,841087
39	3,825372	0,261413	80,724906	21,102500
40	3,959260	0,252572	84,550278	21,355072
41	4,097834	0,244031	88,509537	21,599104
42	4,241258	0,235779	92,607371	21,834883
43	4,389702	0,227806	96,848629	22,062689
44	4,543342	0,220102	101,238331	22,282791
45	4,702359	0,212659	105,781673	22,495450
46	4,866941	0,205468	110,484031	22,700918
47	5,037284	0,198520	115,350973	22,899438
48	5,213589	0,191806	120,388257	23,091244
49	5,396065	0,185320	125,601846	23,276564
50	5,584927	0,179053	130,997910	23,455618

i = 0,04 = 4,0 %				
t	$(1+\mathrm{i})^{t}$	$(1+\mathrm{i})^{-t}$	$m_{t;i}$	$v_{t;i}$
1	1,040000	0,961538	1,000000	0,961538
2	1,081600	0,924556	2,040000	1,886095
3	1,124864	0,888996	3,121600	2,775091
4	1,169859	0,854804	4,246464	3,629895
5	1,216653	0,821927	5,416323	4,451822
6	1,265319	0,790315	6,632975	5,242137
7	1,315932	0,759918	7,898294	6,002055
8	1,368569	0,730690	9,214226	6,732745
9	1,423312	0,702587	10,582795	7,435332
10	1,480244	0,675564	12,006107	8,110896
11	1,539454	0,649581	13,486351	8,760477
12	1,601032	0,624597	15,025805	9,385074
13	1,665074	0,600574	16,626838	9,985648
14	1,731676	0,577475	18,291911	10,563123
15	1,800944	0,555265	20,023588	11,118387
16	1,872981	0,533908	21,824531	11,652296
17	1,947900	0,513373	23,697512	12,165669
18	2,025817	0,493628	25,645413	12,659297
19	2,106849	0,474642	27,671229	13,133939
20	2,191123	0,456387	29,778079	13,590326
21	2,278768	0,438834	31,969202	14,029160
22	2,369919	0,421955	34,247970	14,451115
23	2,464716	0,405726	36,617889	14,856842
24	2,563304	0,390121	39,082604	15,246963
25	2,665836	0,375117	41,645908	15,622080
26	2,772470	0,360689	44,311745	15,982769
27	2,883369	0,346817	47,084214	16,329586
28	2,998703	0,333477	49,967583	16,663063
29	3,118651	0,320651	52,966286	16,983715
30	3,243398	0,308319	56,084938	17,292033
31	3,373133	0,296460	59,328335	17,588494
32	3,508059	0,285058	62,701469	17,873551
33	3,648381	0,274094	66,209527	18,147646
34	3,794316	0,263552	69,857909	18,411198
35	3,946089	0,253415	73,652225	18,664613
36	4,103933	0,243669	77,598314	18,908282
37	4,268090	0,234297	81,702246	19,142579
38	4,438813	0,225285	85,970336	19,367864
39	4,616366	0,216621	90,409150	19,584485
40	4,801021	0,208289	95,025516	19,792774
41	4,993061	0,200278	99,826536	19,993052
42	5,192784	0,192575	104,819598	20,185627
43	5,400495	0,185168	110,012382	20,370795
44	5,616515	0,178046	115,412877	20,548841
45	5,841176	0,171198	121,029392	20,720040
46	6,074823	0,164614	126,870568	20,884654
47	6,317816	0,158283	132,945390	21,042936
48	6,570528	0,152195	139,263206	21,195131
49	6,833349	0,146341	145,833734	21,341472
50	7,106683	0,140713	152,667084	21,482185

i = 0,045 = 4,5 %				
t	$(1+i)^{t}$	$(1+i)^{-t}$	$m_{t;i}$	$v_{t;i}$
1	1,045000	0,956938	1,000000	0,956938
2	1,092025	0,915730	2,045000	1,872668
3	1,141166	0,876297	3,137025	2,748964
4	1,192519	0,838561	4,278191	3,587526
5	1,246182	0,802451	5,470710	4,389977
6	1,302260	0,767896	6,716892	5,157872
7	1,360862	0,734828	8,019152	5,892701
8	1,422101	0,703185	9,380014	6,595886
9	1,486095	0,672904	10,802114	7,268790
10	1,552969	0,643928	12,288209	7,912718
11	1,622853	0,616199	13,841179	8,528917
12	1,695881	0,589664	15,464032	9,118581
13	1,772196	0,564272	17,159913	9,682852
14	1,851945	0,539973	18,932109	10,222825
15	1,935282	0,516720	20,784054	10,739546
16	2,022370	0,494469	22,719337	11,234015
17	2,113377	0,473176	24,741707	11,707191
18	2,208479	0,452800	26,855084	12,159992
19	2,307860	0,433302	29,063562	12,593294
20	2,411714	0,414643	31,371423	13,007936
21	2,520241	0,396787	33,783137	13,404724
22	2,633652	0,379701	36,303378	13,784425
23	2,752166	0,363350	38,937030	14,147775
24	2,876014	0,347703	41,689196	14,495478
25	3,005434	0,332731	44,565210	14,828209
26	3,140679	0,318402	47,570645	15,146611
27	3,282010	0,304691	50,711324	15,451303
28	3,429700	0,291571	53,993333	15,742874
29	3,584036	0,279015	57,423033	16,021889
30	3,745318	0,267000	61,007070	16,288889
31	3,913857	0,255502	64,752388	16,544391
32	4,089981	0,244500	68,666245	16,788891
33	4,274030	0,233971	72,756226	17,022862
34	4,466362	0,223896	77,030256	17,246758
35	4,667348	0,214254	81,496618	17,461012
36	4,877378	0,205028	86,163966	17,666041
37	5,096860	0,196199	91,041344	17,862240
38	5,326219	0,187750	96,138205	18,049990
39	5,565899	0,179665	101,464424	18,229656
40	5,816365	0,171929	107,030323	18,401584
41	6,078101	0,164525	112,846688	18,566109
42	6,351615	0,157440	118,924789	18,723550
43	6,637438	0,150661	125,276404	18,874210
44	6,936123	0,144173	131,913842	19,018383
45	7,248248	0,137964	138,849965	19,156347
46	7,574420	0,132023	146,098214	19,288371
47	7,915268	0,126338	153,672633	19,414709
48	8,271456	0,120898	161,587902	19,535607
49	8,643671	0,115692	169,859357	19,651298
50	9,032636	0,110710	178,503028	19,762008

i = 0,05 = 5,0 %				
t	$(1+i)^t$	$(1+i)^{-t}$	$m_{t;i}$	$v_{t;i}$
1	1,050000	0,952381	1,000000	0,952381
2	1,102500	0,907029	2,050000	1,859410
3	1,157625	0,863838	3,152500	2,723248
4	1,215506	0,822702	4,310125	3,545951
5	1,276282	0,783526	5,525631	4,329477
6	1,340096	0,746215	6,801913	5,075692
7	1,407100	0,710681	8,142008	5,786373
8	1,477455	0,676839	9,549109	6,463213
9	1,551328	0,644609	11,026564	7,107822
10	1,628895	0,613913	12,577893	7,721735
11	1,710339	0,584679	14,206787	8,306414
12	1,795856	0,556837	15,917127	8,863252
13	1,885649	0,530321	17,712983	9,393573
14	1,979932	0,505068	19,598632	9,898641
15	2,078928	0,481017	21,578564	10,379658
16	2,182875	0,458112	23,657492	10,837770
17	2,292018	0,436297	25,840366	11,274066
18	2,406619	0,415521	28,132385	11,689587
19	2,526950	0,395734	30,539004	12,085321
20	2,653298	0,376889	33,065954	12,462210
21	2,785963	0,358942	35,719252	12,821153
22	2,925261	0,341850	38,505214	13,163003
23	3,071524	0,325571	41,430475	13,488574
24	3,225100	0,310068	44,501999	13,798642
25	3,386355	0,295303	47,727099	14,093945
26	3,555673	0,281241	51,113454	14,375185
27	3,733456	0,267848	54,669126	14,643034
28	3,920129	0,255094	58,402583	14,898127
29	4,116136	0,242946	62,322712	15,141074
30	4,321942	0,231377	66,438848	15,372451
31	4,538039	0,220359	70,760790	15,592811
32	4,764941	0,209866	75,298829	15,802677
33	5,003189	0,199873	80,063771	16,002549
34	5,253348	0,190355	85,066959	16,192904
35	5,516015	0,181290	90,320307	16,374194
36	5,791816	0,172657	95,836323	16,546852
37	6,081407	0,164436	101,628139	16,711287
38	6,385477	0,156605	107,709546	16,867893
39	6,704751	0,149148	114,095023	17,017041
40	7,039989	0,142046	120,799774	17,159086
41	7,391988	0,135282	127,839763	17,294368
42	7,761588	0,128840	135,231751	17,423208
43	8,149667	0,122704	142,993339	17,545912
44	8,557150	0,116861	151,143006	17,662773
45	8,985008	0,111297	159,700156	17,774070
46	9,434258	0,105997	168,685164	17,880066
47	9,905971	0,100949	178,119422	17,981016
48	10,401270	0,096142	188,025393	18,077158
49	10,921333	0,091564	198,426663	18,168722
50	11,467400	0,087204	209,347996	18,255925

i = 0,055 = 5,5 %				
t	$(1+\mathrm{i})^{t}$	$(1+\mathrm{i})^{-t}$	$m_{t;i}$	$v_{t;i}$
1	1,055000	0,947867	1,000000	0,947867
2	1,113025	0,898452	2,055000	1,846320
3	1,174241	0,851614	3,168025	2,697933
4	1,238825	0,807217	4,342266	3,505150
5	1,306960	0,765134	5,581091	4,270284
6	1,378843	0,725246	6,888051	4,995530
7	1,454679	0,687437	8,266894	5,682967
8	1,534687	0,651599	9,721573	6,334566
9	1,619094	0,617629	11,256260	6,952195
10	1,708144	0,585431	12,875354	7,537626
11	1,802092	0,554911	14,583498	8,092536
12	1,901207	0,525982	16,385591	8,618518
13	2,005774	0,498561	18,286798	9,117079
14	2,116091	0,472569	20,292572	9,589648
15	2,232476	0,447933	22,408663	10,037581
16	2,355263	0,424581	24,641140	10,462162
17	2,484802	0,402447	26,996403	10,864609
18	2,621466	0,381466	29,481205	11,246074
19	2,765647	0,361579	32,102671	11,607654
20	2,917757	0,342729	34,868318	11,950382
21	3,078234	0,324862	37,786076	12,275244
22	3,247537	0,307926	40,864310	12,583170
23	3,426152	0,291873	44,111847	12,875042
24	3,614590	0,276657	47,537998	13,151699
25	3,813392	0,262234	51,152588	13,413933
26	4,023129	0,248563	54,965981	13,662495
27	4,244401	0,235605	58,989109	13,898100
28	4,477843	0,223322	63,233510	14,121422
29	4,724124	0,211679	67,711354	14,333101
30	4,983951	0,200644	72,435478	14,533745
31	5,258069	0,190184	77,419429	14,723929
32	5,547262	0,180269	82,677498	14,904198
33	5,852362	0,170871	88,224760	15,075069
34	6,174242	0,161963	94,077122	15,237033
35	6,513825	0,153520	100,251364	15,390552
36	6,872085	0,145516	106,765189	15,536068
37	7,250050	0,137930	113,637274	15,673999
38	7,648803	0,130739	120,887324	15,804738
39	8,069487	0,123924	128,536127	15,928662
40	8,513309	0,117463	136,605614	16,046125
41	8,981541	0,111339	145,118923	16,157464
42	9,475525	0,105535	154,100464	16,262999
43	9,996679	0,100033	163,575989	16,363032
44	10,546497	0,094818	173,572669	16,457851
45	11,126554	0,089875	184,119165	16,547726
46	11,738515	0,085190	195,245719	16,632915
47	12,384133	0,080748	206,984234	16,713664
48	13,065260	0,076539	219,368367	16,790203
49	13,783849	0,072549	232,433627	16,862751
50	14,541961	0,068767	246,217476	16,931518

i = 0,06 = 6,0 %				
t	$(1+\mathrm{i})^{t}$	$(1+\mathrm{i})^{-t}$	$m_{t;i}$	$v_{t;i}$
1	1,060000	0,943396	1,000000	0,943396
2	1,123600	0,889996	2,060000	1,833393
3	1,191016	0,839619	3,183600	2,673012
4	1,262477	0,792094	4,374616	3,465106
5	1,338226	0,747258	5,637093	4,212364
6	1,418519	0,704961	6,975319	4,917324
7	1,503630	0,665057	8,393838	5,582381
8	1,593848	0,627412	9,897468	6,209794
9	1,689479	0,591898	11,491316	6,801692
10	1,790848	0,558395	13,180795	7,360087
11	1,898299	0,526788	14,971643	7,886875
12	2,012196	0,496969	16,869941	8,383844
13	2,132928	0,468839	18,882138	8,852683
14	2,260904	0,442301	21,015066	9,294984
15	2,396558	0,417265	23,275970	9,712249
16	2,540352	0,393646	25,672528	10,105895
17	2,692773	0,371364	28,212880	10,477260
18	2,854339	0,350344	30,905653	10,827603
19	3,025600	0,330513	33,759992	11,158116
20	3,207135	0,311805	36,785591	11,469921
21	3,399564	0,294155	39,992727	11,764077
22	3,603537	0,277505	43,392290	12,041582
23	3,819750	0,261797	46,995828	12,303379
24	4,048935	0,246979	50,815577	12,550358
25	4,291871	0,232999	54,864512	12,783356
26	4,549383	0,219810	59,156383	13,003166
27	4,822346	0,207368	63,705766	13,210534
28	5,111687	0,195630	68,528112	13,406164
29	5,418388	0,184557	73,639798	13,590721
30	5,743491	0,174110	79,058186	13,764831
31	6,088101	0,164255	84,801677	13,929086
32	6,453387	0,154957	90,889778	14,084043
33	6,840590	0,146186	97,343165	14,230230
34	7,251025	0,137912	104,183755	14,368141
35	7,686087	0,130105	111,434780	14,498246
36	8,147252	0,122741	119,120867	14,620987
37	8,636087	0,115793	127,268119	14,736780
38	9,154252	0,109239	135,904206	14,846019
39	9,703507	0,103056	145,058458	14,949075
40	10,285718	0,097222	154,761966	15,046297
41	10,902861	0,091719	165,047684	15,138016
42	11,557033	0,086527	175,950545	15,224543
43	12,250455	0,081630	187,507577	15,306173
44	12,985482	0,077009	199,758032	15,383182
45	13,764611	0,072650	212,743514	15,455832
46	14,590487	0,068538	226,508125	15,524370
47	15,465917	0,064658	241,098612	15,589028
48	16,393872	0,060998	256,564529	15,650027
49	17,377504	0,057546	272,958401	15,707572
50	18,420154	0,054288	290,335905	15,761861

i = 0,065 = 6,5 %				
t	$(1+i)^t$	$(1+i)^{-t}$	$m_{t;i}$	$v_{t;i}$
1	1,065000	0,938967	1,000000	0,938967
2	1,134225	0,881659	2,065000	1,820626
3	1,207950	0,827849	3,199225	2,648476
4	1,286466	0,777323	4,407175	3,425799
5	1,370087	0,729881	5,693641	4,155679
6	1,459142	0,685334	7,063728	4,841014
7	1,553987	0,643506	8,522870	5,484520
8	1,654996	0,604231	10,076856	6,088751
9	1,762570	0,567353	11,731852	6,656104
10	1,877137	0,532726	13,494423	7,188830
11	1,999151	0,500212	15,371560	7,689042
12	2,129096	0,469683	17,370711	8,158725
13	2,267487	0,441017	19,499808	8,599742
14	2,414874	0,414100	21,767295	9,013842
15	2,571841	0,388827	24,182169	9,402669
16	2,739011	0,365095	26,754010	9,767764
17	2,917046	0,342813	29,493021	10,110577
18	3,106654	0,321890	32,410067	10,432466
19	3,308587	0,302244	35,516722	10,734710
20	3,523645	0,283797	38,825309	11,018507
21	3,752682	0,266476	42,348954	11,284983
22	3,996606	0,250212	46,101636	11,535196
23	4,256386	0,234941	50,098242	11,770137
24	4,533051	0,220602	54,354628	11,990739
25	4,827699	0,207138	58,887679	12,197877
26	5,141500	0,194496	63,715378	12,392373
27	5,475697	0,182625	68,856877	12,574998
28	5,831617	0,171479	74,332574	12,746477
29	6,210672	0,161013	80,164192	12,907490
30	6,614366	0,151186	86,374864	13,058676
31	7,044300	0,141959	92,989230	13,200635
32	7,502179	0,133295	100,033530	13,333929
33	7,989821	0,125159	107,535710	13,459088
34	8,509159	0,117520	115,525531	13,576609
35	9,062255	0,110348	124,034690	13,686957
36	9,651301	0,103613	133,096945	13,790570
37	10,278636	0,097289	142,748247	13,887859
38	10,946747	0,091351	153,026883	13,979210
39	11,658286	0,085776	163,973630	14,064986
40	12,416075	0,080541	175,631916	14,145527
41	13,223119	0,075625	188,047990	14,221152
42	14,082622	0,071010	201,271110	14,292161
43	14,997993	0,066676	215,353732	14,358837
44	15,972862	0,062606	230,351725	14,421443
45	17,011098	0,058785	246,324587	14,480228
46	18,116820	0,055197	263,335685	14,535426
47	19,294413	0,051828	281,452504	14,587254
48	20,548550	0,048665	300,746917	14,635919
49	21,884205	0,045695	321,295467	14,681615
50	23,306679	0,042906	343,179672	14,724521

i = 0,07 = 7,0 %				
t	$(1+i)^t$	$(1+i)^{-t}$	$m_{t;i}$	$v_{t;i}$
1	1,070000	0,934579	1,000000	0,934579
2	1,144900	0,873439	2,070000	1,808018
3	1,225043	0,816298	3,214900	2,624316
4	1,310796	0,762895	4,439943	3,387211
5	1,402552	0,712986	5,750739	4,100197
6	1,500730	0,666342	7,153291	4,766540
7	1,605781	0,622750	8,654021	5,389289
8	1,718186	0,582009	10,259803	5,971299
9	1,838459	0,543934	11,977989	6,515232
10	1,967151	0,508349	13,816448	7,023582
11	2,104852	0,475093	15,783599	7,498674
12	2,252192	0,444012	17,888451	7,942686
13	2,409845	0,414964	20,140643	8,357651
14	2,578534	0,387817	22,550488	8,745468
15	2,759032	0,362446	25,129022	9,107914
16	2,952164	0,338735	27,888054	9,446649
17	3,158815	0,316574	30,840217	9,763223
18	3,379932	0,295864	33,999033	10,059087
19	3,616528	0,276508	37,378965	10,335595
20	3,869684	0,258419	40,995492	10,594014
21	4,140562	0,241513	44,865177	10,835527
22	4,430402	0,225713	49,005739	11,061240
23	4,740530	0,210947	53,436141	11,272187
24	5,072367	0,197147	58,176671	11,469334
25	5,427433	0,184249	63,249038	11,653583
26	5,807353	0,172195	68,676470	11,825779
27	6,213868	0,160930	74,483823	11,986709
28	6,648838	0,150402	80,697691	12,137111
29	7,114257	0,140563	87,346529	12,277674
30	7,612255	0,131367	94,460786	12,409041
31	8,145113	0,122773	102,073041	12,531814
32	8,715271	0,114741	110,218154	12,646555
33	9,325340	0,107235	118,933425	12,753790
34	9,978114	0,100219	128,258765	12,854009
35	10,676581	0,093663	138,236878	12,947672
36	11,423942	0,087535	148,913460	13,035208
37	12,223618	0,081809	160,337402	13,117017
38	13,079271	0,076457	172,561020	13,193473
39	13,994820	0,071455	185,640292	13,264928
40	14,974458	0,066780	199,635112	13,331709
41	16,022670	0,062412	214,609570	13,394120
42	17,144257	0,058329	230,632240	13,452449
43	18,344355	0,054513	247,776496	13,506962
44	19,628460	0,050946	266,120851	13,557908
45	21,002452	0,047613	285,749311	13,605522
46	22,472623	0,044499	306,751763	13,650020
47	24,045707	0,041587	329,224386	13,691608
48	25,728907	0,038867	353,270093	13,730474
49	27,529930	0,036324	378,999000	13,766799
50	29,457025	0,033948	406,528929	13,800746

i = 0,075 = 7,5 %				
t	$(1+\mathrm{i})^{t}$	$(1+\mathrm{i})^{-t}$	$m_{t;i}$	$v_{t;i}$
1	1,075000	0,930233	1,000000	0,930233
2	1,155625	0,865333	2,075000	1,795565
3	1,242297	0,804961	3,230625	2,600526
4	1,335469	0,748801	4,472922	3,349326
5	1,435629	0,696559	5,808391	4,045885
6	1,543302	0,647962	7,244020	4,693846
7	1,659049	0,602755	8,787322	5,296601
8	1,783478	0,560702	10,446371	5,857304
9	1,917239	0,521583	12,229849	6,378887
10	2,061032	0,485194	14,147087	6,864081
11	2,215609	0,451343	16,208119	7,315424
12	2,381780	0,419854	18,423728	7,735278
13	2,560413	0,390562	20,805508	8,125840
14	2,752444	0,363313	23,365921	8,489154
15	2,958877	0,337966	26,118365	8,827120
16	3,180793	0,314387	29,077242	9,141507
17	3,419353	0,292453	32,258035	9,433960
18	3,675804	0,272049	35,677388	9,706009
19	3,951489	0,253069	39,353192	9,959078
20	4,247851	0,235413	43,304681	10,194491
21	4,566440	0,218989	47,552532	10,413480
22	4,908923	0,203711	52,118972	10,617191
23	5,277092	0,189498	57,027895	10,806689
24	5,672874	0,176277	62,304987	10,982967
25	6,098340	0,163979	67,977862	11,146946
26	6,555715	0,152539	74,076201	11,299485
27	7,047394	0,141896	80,631916	11,441381
28	7,575948	0,131997	87,679310	11,573378
29	8,144144	0,122788	95,255258	11,696165
30	8,754955	0,114221	103,399403	11,810386
31	9,411577	0,106252	112,154358	11,916638
32	10,117445	0,098839	121,565935	12,015478
33	10,876253	0,091943	131,683380	12,107421
34	11,691972	0,085529	142,559633	12,192950
35	12,568870	0,079562	154,251606	12,272511
36	13,511536	0,074011	166,820476	12,346522
37	14,524901	0,068847	180,332012	12,415370
38	15,614268	0,064044	194,856913	12,479414
39	16,785339	0,059576	210,471181	12,538989
40	18,044239	0,055419	227,256520	12,594409
41	19,397557	0,051553	245,300759	12,645962
42	20,852374	0,047956	264,698315	12,693918
43	22,416302	0,044610	285,550689	12,738528
44	24,097524	0,041498	307,966991	12,780026
45	25,904839	0,038603	332,064515	12,818629
46	27,847702	0,035910	357,969354	12,854539
47	29,936279	0,033404	385,817055	12,887943
48	32,181500	0,031074	415,753334	12,919017
49	34,595113	0,028906	447,934835	12,947922
50	37,189746	0,026889	482,529947	12,974812

i = 0,08 = 8,0 %				
t	$(1+i)^t$	$(1+i)^{-t}$	$m_{t;i}$	$v_{t;i}$
1	1,080000	0,925926	1,000000	0,925926
2	1,166400	0,857339	2,080000	1,783265
3	1,259712	0,793832	3,246400	2,577097
4	1,360489	0,735030	4,506112	3,312127
5	1,469328	0,680583	5,866601	3,992710
6	1,586874	0,630170	7,335929	4,622880
7	1,713824	0,583490	8,922803	5,206370
8	1,850930	0,540269	10,636628	5,746639
9	1,999005	0,500249	12,487558	6,246888
10	2,158925	0,463193	14,486562	6,710081
11	2,331639	0,428883	16,645487	7,138964
12	2,518170	0,397114	18,977126	7,536078
13	2,719624	0,367698	21,495297	7,903776
14	2,937194	0,340461	24,214920	8,244237
15	3,172169	0,315242	27,152114	8,559479
16	3,425943	0,291890	30,324283	8,851369
17	3,700018	0,270269	33,750226	9,121638
18	3,996019	0,250249	37,450244	9,371887
19	4,315701	0,231712	41,446263	9,603599
20	4,660957	0,214548	45,761964	9,818147
21	5,033834	0,198656	50,422921	10,016803
22	5,436540	0,183941	55,456755	10,200744
23	5,871464	0,170315	60,893296	10,371059
24	6,341181	0,157699	66,764759	10,528758
25	6,848475	0,146018	73,105940	10,674776
26	7,396353	0,135202	79,954415	10,809978
27	7,988061	0,125187	87,350768	10,935165
28	8,627106	0,115914	95,338830	11,051078
29	9,317275	0,107328	103,965936	11,158406
30	10,062657	0,099377	113,283211	11,257783
31	10,867669	0,092016	123,345868	11,349799
32	11,737083	0,085200	134,213537	11,434999
33	12,676050	0,078889	145,950620	11,513888
34	13,690134	0,073045	158,626670	11,586934
35	14,785344	0,067635	172,316804	11,654568
36	15,968172	0,062625	187,102148	11,717193
37	17,245626	0,057986	203,070320	11,775179
38	18,625276	0,053690	220,315945	11,828869
39	20,115298	0,049713	238,941221	11,878582
40	21,724521	0,046031	259,056519	11,924613
41	23,462483	0,042621	280,781040	11,967235
42	25,339482	0,039464	304,243523	12,006699
43	27,366640	0,036541	329,583005	12,043240
44	29,555972	0,033834	356,949646	12,077074
45	31,920449	0,031328	386,505617	12,108402
46	34,474085	0,029007	418,426067	12,137409
47	37,232012	0,026859	452,900152	12,164267
48	40,210573	0,024869	490,132164	12,189136
49	43,427419	0,023027	530,342737	12,212163
50	46,901613	0,021321	573,770156	12,233485

i = 0,085 = 8,5 %				
t	$(1+\mathrm{i})^{t}$	$(1+\mathrm{i})^{-t}$	$m_{t;i}$	$v_{t;i}$
1	1,085000	0,921659	1,000000	0,921659
2	1,177225	0,849455	2,085000	1,771114
3	1,277289	0,782908	3,262225	2,554022
4	1,385859	0,721574	4,539514	3,275597
5	1,503657	0,665045	5,925373	3,940642
6	1,631468	0,612945	7,429030	4,553587
7	1,770142	0,564926	9,060497	5,118514
8	1,920604	0,520669	10,830639	5,639183
9	2,083856	0,479880	12,751244	6,119063
10	2,260983	0,442285	14,835099	6,561348
11	2,453167	0,407636	17,096083	6,968984
12	2,661686	0,375702	19,549250	7,344686
13	2,887930	0,346269	22,210936	7,690955
14	3,133404	0,319142	25,098866	8,010097
15	3,399743	0,294140	28,232269	8,304237
16	3,688721	0,271097	31,632012	8,575333
17	4,002262	0,249859	35,320733	8,825192
18	4,342455	0,230285	39,322995	9,055476
19	4,711563	0,212244	43,665450	9,267720
20	5,112046	0,195616	48,377013	9,463337
21	5,546570	0,180292	53,489059	9,643628
22	6,018028	0,166167	59,035629	9,809796
23	6,529561	0,153150	65,053658	9,962945
24	7,084574	0,141152	71,583219	10,104097
25	7,686762	0,130094	78,667792	10,234191
26	8,340137	0,119902	86,354555	10,354093
27	9,049049	0,110509	94,694692	10,464602
28	9,818218	0,101851	103,743741	10,566453
29	10,652766	0,093872	113,561959	10,660326
30	11,558252	0,086518	124,214725	10,746844
31	12,540703	0,079740	135,772977	10,826584
32	13,606663	0,073493	148,313680	10,900078
33	14,763229	0,067736	161,920343	10,967813
34	16,018104	0,062429	176,683572	11,030243
35	17,379642	0,057539	192,701675	11,087781
36	18,856912	0,053031	210,081318	11,140812
37	20,459750	0,048876	228,938230	11,189689
38	22,198828	0,045047	249,397979	11,234736
39	24,085729	0,041518	271,596808	11,276255
40	26,133016	0,038266	295,682536	11,314520
41	28,354322	0,035268	321,815552	11,349788
42	30,764439	0,032505	350,169874	11,382293
43	33,379417	0,029959	380,934313	11,412252
44	36,216667	0,027612	414,313730	11,439864
45	39,295084	0,025448	450,530397	11,465312
46	42,635166	0,023455	489,825480	11,488767
47	46,259155	0,021617	532,460646	11,510384
48	50,191183	0,019924	578,719801	11,530308
49	54,457434	0,018363	628,910984	11,548671
50	59,086316	0,016924	683,368418	11,565595

i = 0,09 = 9,0 %				
t	$(1+\mathrm{i})^{t}$	$(1+\mathrm{i})^{-t}$	$m_{t;i}$	$v_{t;i}$
1	1,090000	0,917431	1,000000	0,917431
2	1,188100	0,841680	2,090000	1,759111
3	1,295029	0,772183	3,278100	2,531295
4	1,411582	0,708425	4,573129	3,239720
5	1,538624	0,649931	5,984711	3,889651
6	1,677100	0,596267	7,523335	4,485919
7	1,828039	0,547034	9,200435	5,032953
8	1,992563	0,501866	11,028474	5,534819
9	2,171893	0,460428	13,021036	5,995247
10	2,367364	0,422411	15,192930	6,417658
11	2,580426	0,387533	17,560293	6,805191
12	2,812665	0,355535	20,140720	7,160725
13	3,065805	0,326179	22,953385	7,486904
14	3,341727	0,299246	26,019189	7,786150
15	3,642482	0,274538	29,360916	8,060688
16	3,970306	0,251870	33,003399	8,312558
17	4,327633	0,231073	36,973705	8,543631
18	4,717120	0,211994	41,301338	8,755625
19	5,141661	0,194490	46,018458	8,950115
20	5,604411	0,178431	51,160120	9,128546
21	6,108808	0,163698	56,764530	9,292244
22	6,658600	0,150182	62,873338	9,442425
23	7,257874	0,137781	69,531939	9,580207
24	7,911083	0,126405	76,789813	9,706612
25	8,623081	0,115968	84,700896	9,822580
26	9,399158	0,106393	93,323977	9,928972
27	10,245082	0,097608	102,723135	10,026580
28	11,167140	0,089548	112,968217	10,116128
29	12,172182	0,082155	124,135356	10,198283
30	13,267678	0,075371	136,307539	10,273654
31	14,461770	0,069148	149,575217	10,342802
32	15,763329	0,063438	164,036987	10,406240
33	17,182028	0,058200	179,800315	10,464441
34	18,728411	0,053395	196,982344	10,517835
35	20,413968	0,048986	215,710755	10,566821
36	22,251225	0,044941	236,124723	10,611763
37	24,253835	0,041231	258,375948	10,652993
38	26,436680	0,037826	282,629783	10,690820
39	28,815982	0,034703	309,066463	10,725523
40	31,409420	0,031838	337,882445	10,757360
41	34,236268	0,029209	369,291865	10,786569
42	37,317532	0,026797	403,528133	10,813366
43	40,676110	0,024584	440,845665	10,837950
44	44,336960	0,022555	481,521775	10,860505
45	48,327286	0,020692	525,858734	10,881197
46	52,676742	0,018984	574,186021	10,900181
47	57,417649	0,017416	626,862762	10,917597
48	62,585237	0,015978	684,280411	10,933575
49	68,217908	0,014659	746,865648	10,948234
50	74,357520	0,013449	815,083556	10,961683

i = 0,095 = 9,5 %				
t	$(1+i)^t$	$(1+i)^{-t}$	$m_{t;i}$	$v_{t;i}$
1	1,095000	0,913242	1,000000	0,913242
2	1,199025	0,834011	2,095000	1,747253
3	1,312932	0,761654	3,294025	2,508907
4	1,437661	0,695574	4,606957	3,204481
5	1,574239	0,635228	6,044618	3,839709
6	1,723791	0,580117	7,618857	4,419825
7	1,887552	0,529787	9,342648	4,949612
8	2,066869	0,483824	11,230200	5,433436
9	2,263222	0,441848	13,297069	5,875284
10	2,478228	0,403514	15,560291	6,278798
11	2,713659	0,368506	18,038518	6,647304
12	2,971457	0,336535	20,752178	6,983839
13	3,253745	0,307338	23,723634	7,291178
14	3,562851	0,280674	26,977380	7,571852
15	3,901322	0,256323	30,540231	7,828175
16	4,271948	0,234085	34,441553	8,062260
17	4,677783	0,213777	38,713500	8,276037
18	5,122172	0,195230	43,391283	8,471266
19	5,608778	0,178292	48,513454	8,649558
20	6,141612	0,162824	54,122233	8,812382
21	6,725065	0,148697	60,263845	8,961080
22	7,363946	0,135797	66,988910	9,096876
23	8,063521	0,124015	74,352856	9,220892
24	8,829556	0,113256	82,416378	9,334148
25	9,668364	0,103430	91,245934	9,437578
26	10,586858	0,094457	100,914297	9,532034
27	11,592610	0,086262	111,501156	9,618296
28	12,693908	0,078778	123,093766	9,697074
29	13,899829	0,071943	135,787673	9,769018
30	15,220313	0,065702	149,687502	9,834719
31	16,666242	0,060002	164,907815	9,894721
32	18,249535	0,054796	181,574057	9,949517
33	19,983241	0,050042	199,823593	9,999559
34	21,881649	0,045700	219,806834	10,045259
35	23,960406	0,041736	241,688483	10,086995
36	26,236644	0,038115	265,648889	10,125109
37	28,729126	0,034808	291,885534	10,159917
38	31,458393	0,031788	320,614659	10,191705
39	34,446940	0,029030	352,073052	10,220735
40	37,719399	0,026512	386,519992	10,247247
41	41,302742	0,024211	424,239391	10,271458
42	45,226503	0,022111	465,542133	10,293569
43	49,523020	0,020193	510,768636	10,313762
44	54,227707	0,018441	560,291656	10,332203
45	59,379340	0,016841	614,519364	10,349043
46	65,020377	0,015380	673,898703	10,364423
47	71,197313	0,014045	738,919080	10,378469
48	77,961057	0,012827	810,116393	10,391296
49	85,367358	0,011714	888,077450	10,403010
50	93,477257	0,010698	973,444808	10,413707

i = 0,1 = 10,0 %				
t	$(1+i)^{t}$	$(1+i)^{-t}$	$m_{t;i}$	$v_{t;i}$
1	1,100000	0,909091	1,000000	0,909091
2	1,210000	0,826446	2,100000	1,735537
3	1,331000	0,751315	3,310000	2,486852
4	1,464100	0,683013	4,641000	3,169865
5	1,610510	0,620921	6,105100	3,790787
6	1,771561	0,564474	7,715610	4,355261
7	1,948717	0,513158	9,487171	4,868419
8	2,143589	0,466507	11,435888	5,334926
9	2,357948	0,424098	13,579477	5,759024
10	2,593742	0,385543	15,937425	6,144567
11	2,853117	0,350494	18,531167	6,495061
12	3,138428	0,318631	21,384284	6,813692
13	3,452271	0,289664	24,522712	7,103356
14	3,797498	0,263331	27,974983	7,366687
15	4,177248	0,239392	31,772482	7,606080
16	4,594973	0,217629	35,949730	7,823709
17	5,054470	0,197845	40,544703	8,021553
18	5,559917	0,179859	45,599173	8,201412
19	6,115909	0,163508	51,159090	8,364920
20	6,727500	0,148644	57,274999	8,513564
21	7,400250	0,135131	64,002499	8,648694
22	8,140275	0,122846	71,402749	8,771540
23	8,954302	0,111678	79,543024	8,883218
24	9,849733	0,101526	88,497327	8,984744
25	10,834706	0,092296	98,347059	9,077040
26	11,918177	0,083905	109,181765	9,160945
27	13,109994	0,076278	121,099942	9,237223
28	14,420994	0,069343	134,209936	9,306567
29	15,863093	0,063039	148,630930	9,369606
30	17,449402	0,057309	164,494023	9,426914
31	19,194342	0,052099	181,943425	9,479013
32	21,113777	0,047362	201,137767	9,526376
33	23,225154	0,043057	222,251544	9,569432
34	25,547670	0,039143	245,476699	9,608575
35	28,102437	0,035584	271,024368	9,644159
36	30,912681	0,032349	299,126805	9,676508
37	34,003949	0,029408	330,039486	9,705917
38	37,404343	0,026735	364,043434	9,732651
39	41,144778	0,024304	401,447778	9,756956
40	45,259256	0,022095	442,592556	9,779051
41	49,785181	0,020086	487,851811	9,799137
42	54,763699	0,018260	537,636992	9,817397
43	60,240069	0,016600	592,400692	9,833998
44	66,264076	0,015091	652,640761	9,849089
45	72,890484	0,013719	718,904837	9,862808
46	80,179532	0,012472	791,795321	9,875280
47	88,197485	0,011338	871,974853	9,886618
48	97,017234	0,010307	960,172338	9,896926
49	106,718957	0,009370	1.057,189572	9,906296
50	117,390853	0,008519	1.163,908529	9,914814

TABLA PARA VALORES DE $(1+i)^{1/n}$

n	2%	2½%	3%	3½%	4%	4½%	5%
2	1,00995049	1,01242284	1.01488916	1,01734950	1,01980390	1,02225242	1,02469508
3	1,00662271	1,00826484	1,00990163	1,01153314	1,01315940	1,01478046	1,01639636
4	1,00496293	1,00619225	1,00741707	1,00863745	1,00985341	1,01106499	1,01227223
6	1,00330589	1,00412392	1,00493862	1,00575004	1,00655820	1,00736312	1,00816485
12	1,00165158	1,00205984	1,00246627	1,00287090	1,00327374	1,00367481	1,00407412
n	**5½%**	**6%**	**6½%**	**7%**	**7½%**	**8%**	
2	1,02713193	1,02956301	1,03198837	1,03440804	1,03682207	1,03923048	
3	1,01800713	1,01961282	1,02121347	1,02280912	1,02439981	1,02598557	
4	1,01347517	1,01467385	1,01586828	1,01705853	1,01824460	1,01942655	
6	1,00896339	1,00975879	1,01055107	1,01134026	1,01212638	1,01290946	
12	1,00447170	1,00486755	1,00526169	1,00565415	1,00604492	1,00643403	

Formulario

$I = P\,t\,i$

$I = M - P$

$M = P + I$

$M = P\,(1 + t\,i)$

$D_b = M\,t\,d$

$D_m = M\left(\frac{ti}{1+ti}\right)$

$I_c = I_r\left(1 - \frac{1}{72}\right)$ y $I_r = I_c\left(1 - \frac{1}{73}\right)$

$V = M - D$

$V_b = M - D_b$

$V_b = M\,(1 - t\,d)$

$V_m = \frac{M}{1+ti}$

$D_m = V_m\,t\,i$

$V_b = V_m \left[1 - (t\,i)^2\right]$

$P = M - M\,t\,d = M\,(1 - t\,d)$

$M = P\,(1+i)^t$

$$M = P\left(1+\frac{j}{n}\right)^{nt}$$

$$V = M(1+i)^{-t}$$

$$V = M\left(1+\frac{j}{n}\right)^{-nt}$$

$$i = \frac{d}{(1-td)}$$

$$d = \frac{i}{1+ti}$$

$$i = \left(1+\frac{j}{n}\right)^{t} - 1$$

$$j = n\left[(1+i)^{1/t} - 1\right]$$

$$i_s = \left[\frac{(1+i_c)^t - 1}{t}\right]$$

$$i_c = (1+ti_s)^{1/t} - 1$$

$$D_m = M\left[1-(1+i)^{-t}\right]$$

$$D_m = M\left[1-\left(1+\frac{j}{n}\right)^{-nt}\right]$$

M= $M_{t,i}$ = R $m_{t,i}$ $$m_{t,i} = \frac{(1+i)^t}{i}$$

$$M = M_{t,i} = R\left[\frac{(1+i)^t - 1}{i}\right]$$

$$R = \frac{M}{\dfrac{(1+i)^t - 1}{i}}$$

$$M_{nt,j/n} = R\left[\frac{(1+\frac{j}{n})^{nt} - 1}{\frac{j}{n}}\right] \qquad m_{nt,j/n} = \frac{(1+\frac{j}{n})^{nt} - 1}{\frac{j}{n}}$$

$$R = \frac{M}{\left[\dfrac{1-(1+\frac{j}{n})^{-nt}}{\frac{j}{n}}\right]}$$

V= R $v_{t,}$ $${}_{i}V_{t,i} = \left[\frac{1-(1+i)^{-1}}{i}\right]$$

V= R $\left[\frac{1-(1+i)^{-1}}{i}\right]$

$$V = RV_{nt,j/n} = R\left[\frac{1-(1+\frac{j}{n})^{-nt}}{\frac{j}{n}}\right] \qquad V_{nt,j/n} = \frac{1-(1+\frac{j}{n})^{-nt}}{\frac{j}{n}}$$

$$R = \frac{V_{nt,j/n}}{\left[\dfrac{1-(1+\frac{j}{n})^{-nt}}{\frac{j}{n}}\right]}$$

Anualidades

M= R $m_{t,i}$ = R $\frac{[(1+i)^t - 1]}{i}$

V= R $v_{t,i}$ = R $\frac{[1-(1+i)^{-t}]}{i}$

M_{ant} = R m_{ant}=R $\frac{[(1+i)^{t+1} - 1]}{i}$ $$m_{ant} = \frac{[(1+i)^{t+1} - 1]}{i}$$

M_{ant} = R [$m_{t+1,i}$ - 1]

V_{ant} = R (1 + $V_{t-1;i}$)

V_{ant} = R [1 +($\frac{1-(1+i)^{-(t-1)}}{i}$)]

V_{dif} = R $V_{t,i}$ $(1 + i)^{-k}$ o V_{dif} = R ($V_{t+k,i}$ - $V_{k,i}$)