MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Sección: 01
Profesores: Cristián Bargsted
Andrés Kettlun

Contenido

- Matemáticas Financieras: Interés Simple vs Interés Compuesto
- Valor Presente y Valor Futuro
- Planificación estratégica

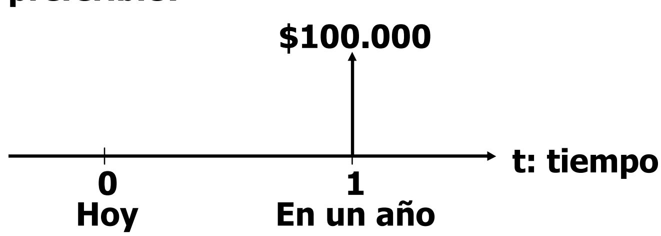
Matemáticas Financieras:

Interés Simple vs.

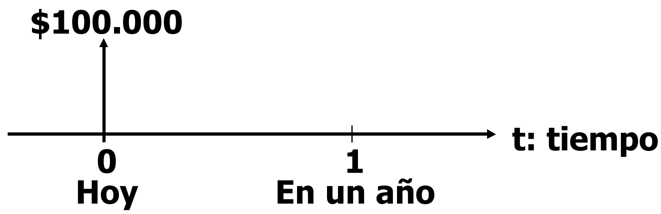
Interés Compuesto

Matemáticas Financieras

¿Qué es preferible?



vs



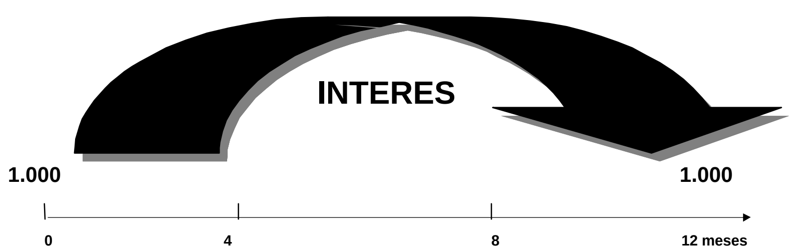
Matemáticas Financieras

Valor del Dinero en el Tiempo

"Un peso hoy vale más que un peso mañana". Esta conclusión no se refiere al efecto de la inflación, sino a que si tengo un peso hoy, puedo invertirlo y mañana voy a tener más que un peso. Dicho de otra manera, una persona que tiene $100.000 hoy, estará dispuesta a invertir esa cantidad (y dejar de consumir hoy) siempre que al cabo de un período recibe los $100.000 más un premio que compense su sacrificio (tasa de interés).

Valor del Dinero en el Tiempo

1.000 AHORA 1 **1.000 DENTRO DE 1 AÑO**

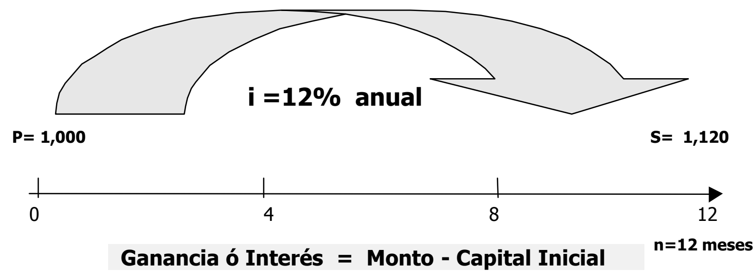


El interés es el precio del dinero en el tiempo.

Interés = f (capital, tiempo, riesgo, inflación…)

Matemáticas Financieras: Interés Simple

Es el que se calcula sobre un capital que permanece invariable o constante en el tiempo y el interés ganado se acumula sólo al término de esta transacción.



Ganancia ó Interés = Monto - Capital Inicial

Ganancia ó Interés = 1,120 - 1,000

Ganancia ó Interés = 120

Matemáticas Financieras: Interés Simple

I = P x i x n → **P, i, n**

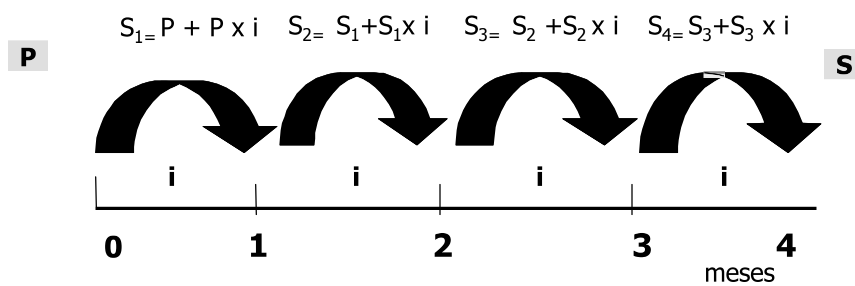
I = intereses
P = Capital inicial
i = Tasa de interés
n = período de tiempo

Importante

En esta formula i es la tasa de una unidad de tiempo y n es él número de unidades de tiempo. Debe entenderse que si i es una tasa anual, n deberá ser él número de años, si i es mensual, n deberá expresarse en meses.

Matemáticas Financieras: Int. Compuesto

En el interés compuesto, el interés (I) ganado en cada periodo (n) es agregado al capital inicial (P) para constituirse en un nuevo capital (S) sobre el cual se calcula un nuevo interés produciéndose lo que se conoce como **capitalización** la cual puede ser anual, trimestral, mensual, diaria; y se sigue aplicando hasta que vence la transacción de acuerdo a lo pactado. 2



Matemáticas Financieras: Int. Compuesto

En los problemas de interés compuesto deben expresarse i y n en la <u>misma unidad de tiempo</u> efectuando las conversiones apropiadas cuando estas variables correspondan a diferentes períodos de tiempo.

Datos
P= 1,000
i mensual = 0.01 o 1% mensual
n= 12 meses
I= ?

No.Periodos (m)	Capital Inicial (P)	Interés (I) $P \times i_p \times n$	Capital+Interes (S) P + I	
1	1000.0	10.0	1010.0	S_1
2	1010.0	10.1	1020.1	S_2
3	1020.1	10.2	1030.3	S_3
4	1030.3	10.3	1040.6	S_4
5	1040.6	10.4	1051.0	S_5
6	1051.0	10.5	1061.5	S_6

Matemáticas Financieras: Int. Compuesto

$$S = P \times (1+i)^n$$

$$P = \frac{S}{(1+i)^n}$$

$$i = \left(\left(\frac{S}{P} \right)^{(1/n)} \right) - 1$$

$$n = \frac{\log S - \log P}{\log(1+i)}$$

Donde :

P	**=**	**Capital inicial**
i	**=**	**tasa de interés del periodo**
n	**=**	**periodo de tiempo**
S	**=**	**Monto total o capital final**

Matemáticas Financieras: Int Simple e Int. Compuesto

LA DIFERENCIA FUNDAMENTAL ENTRE EL INTERÉS SIMPLE Y EL INTERÉS COMPUESTO ESTRIBA EN QUE EN EL PRIMERO EL CAPITAL PERMANECE CONSTANTE, Y EN EL SEGUNDO EL CAPITAL CAMBIA AL FINAL DE CADA PERÍODO DE TIEMPO.

- Ejemplo:

  Una tasa mensual de 1% no es equivalente a una tasa anual de 12%, a menos que se especifique interés simple. La tasa compuesta equivale a 1,01 elevado a 12, menos la unidad, es decir, $1{,}01^{12} - 1 = 12{,}68\%$.

$$\boxed{(1 + r_a^c) = (1 + r_m^c)^{12}}$$

Matemáticas Financieras: Int Simple e Int. Compuesto

Si se deposita una cantidad C, los intereses ganados al cabo de n años serán iguales a:

- Con interés simple:

$$Intereses = C \times r_a^s \times n$$

Donde r_a^s es la tasa de interés anual simple

- Con interés compuesto:

$$Intereses = C\left[(1 + r_a^c)^n - 1\right]$$

Donde r_a^c es la tasa de interés anual compuesta

Matemáticas Financieras: Int Simple e Int. Compuesto

Ejemplo:

Considere una deuda al 12% anual por un monto de 1.000 UF, a ser pagada en tres años. ¿Cuál es el valor que habría que pagar?

- Con interés simple:
  - Por concepto de devolución de capital, 1.000 UF
  - Por concepto de pago de intereses, 3 x 0,12 x 1.000=360 UF
  - Total: 1.360 UF.
- Con interés compuesto:
  - Deuda acumulada año 1: 1.000 (1+0,12) = 1.120 UF
  - Deuda acumulada año 2: 1.120 (1+0,12) = 1.254 UF
  - Deuda acumulada año 3: 1.254 (1+0,12) = 1.405 UF
  - Método rápido: 1.000 $(1+0,12)^3$ = 1.405 UF

Valor Presente y Valor Futuro

Valor Futuro y Valor Presente

- Si una persona invierte una cantidad P a una tasa r durante un período ¿qué cantidad tendrá al término del período?

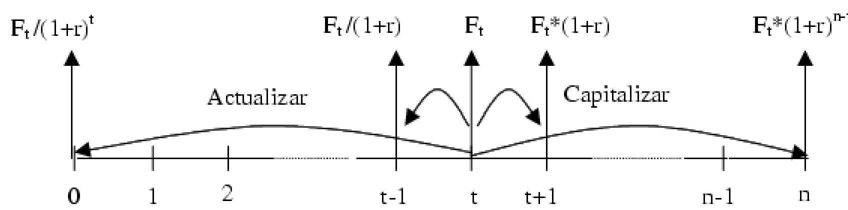
  $VF_1 = P\ (1+r)$, que se conoce como el valor futuro
- Si la invierte por n períodos, el valor futuro será

  $VF_n = P\ (1+r)^n$
- Una persona recibirá una cantidad F1 al cabo de un año ¿qué cantidad hoy sería equivalente a F1 dentro de 1 año?

  $F_1 = X\ (1+r)$

  X = Valor Presente = $VP_1 = F_1/(1+r)$
- Al factor $1/(1+r)$ se le llama factor de descuento o de actualización, y es necesariamente menor que 1 porque la tasa r es positiva

Valor Futuro y Valor Presente



Valor Futuro y Valor Presente

- Si la cantidad se recibe en n períodos más:

$$VP_n = \frac{F_n}{(1+r)^n}$$

- Un caso más general es cuando se reciben n flujos, uno al final de cada período:

$$VP = \frac{F1}{(1+r)} + \frac{F2}{(1+r)^2} + \dots\dots\dots\dots + \frac{Fn}{(1+r)^n}$$

$$VP = \sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{(1+r)^t}$$

Valor Futuro y Valor Presente

- El caso más general es cuando las tasas de interés cambian en cada período. Si las tasas para cada período son $r_{0,1}$; $r_{1,2}$; $r_{2,3}$; etc., entonces:

$$VP = \frac{F_1}{(1+r_{0,1})} + \frac{F_2}{(1+r_{0,1})(1+r_{1,2})} + ... + \frac{F_n}{(1+r_{0,1})....(1+r_{n-1,n})}$$

$$VP = \sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{\prod_{i=1}^{t}(1+r_{i-1,i})}$$

Fórmulas últiles

Anualidad: Flujo constante C que se paga durante n años:

$$VP = \frac{C}{(1+r)} + \frac{C}{(1+r)^2} + ... + \frac{C}{(1+r)^{n-1}} + \frac{C}{(1+r)^n}$$

- Multiplicando la ecuación anterior por (1+r):

$$(1+r)\,VP = C + \frac{C}{(1+r)} + ... + \frac{C}{(1+r)^{n-2}} + \frac{C}{(1+r)^{n-1}}$$

- Restando la primera ecuación de la segunda:

$$(1+r)\,VP - VP = C + \frac{C}{(1+r)^n}$$

Fórmulas últiles

- Despejando el valor de VP:

$$VP = C \times \frac{[(1+r)^n - 1]}{(1+r)^n \times r}$$

<u>Perpetuidad</u>: Flujo constante C que se paga infinitamente

$$VP = \lim_{n \to \infty} C \times \frac{[(1+r)^n - 1]}{(1+r)^n \times r}$$

$$VP = \frac{C}{r}$$

Ejemplo 1

Usted quiere comprar un departamento que cuesta UF 3.600. El banco le ofrece un crédito hipotecario por el 75% del valor, a 10 años plazo, con una tasa anual de 8%. ¿Cuánto va a cancelar como dividendo mensual?

- Primero, calculamos la tasa de interés mensual:

  $i_m = (1+i_a)^{(1/12)} - 1 = (1+0{,}08)^{(1/12)} - 1 = 0{,}0064 = 0{,}64\%$ mensual

- El monto del crédito será 0,75 x UF3.600 = UF2.700
- El dividendo mensual es:

$$C = VP \times \frac{(1+r)^n \times r}{[(1+r)^n - 1]} = 2.700 \times \frac{(1+0{,}0064)^{120} \times 0{,}0064}{[(1+0{,}0064)^{120} - 1]}$$

$$= 2.700 \times 0{,}0120 = UF\ 32{,}36$$

Ejemplo 2

Una gran tienda ofrece un nuevo modelo de televisor. El precio contado es de $165.990. La tienda ofrece un crédito en 12 cuotas de $17.687 cada una.¿Cuál es la tasa de interés anual implícita que cobra esta tienda?

- Sabemos que la relación entre las cuotas y el precio contado está dado por:
- Luego:

$$\boxed{C = VP \times \frac{(1+r)^n \times r}{[(1+r)^n - 1]}}$$

$$17.687 = 165.990 \times \frac{(1+r_m)^{12} \times r_m}{[(1+r_m)^{12} - 1]}$$

- Iterando hasta lograr la igualdad, llegamos a que la tasa mensual implícita es de 4%, o en términos anuales, $(1+0{,}04)^{12}-1 = 0{,}601 = 60{,}1\%$

Ejemplo 3

Una persona obtuvo un crédito de consumo de $1.300.000 a 18 meses, pagadero en cuotas iguales, con una tasa de 1,65% mensual. Calcule la cuota.

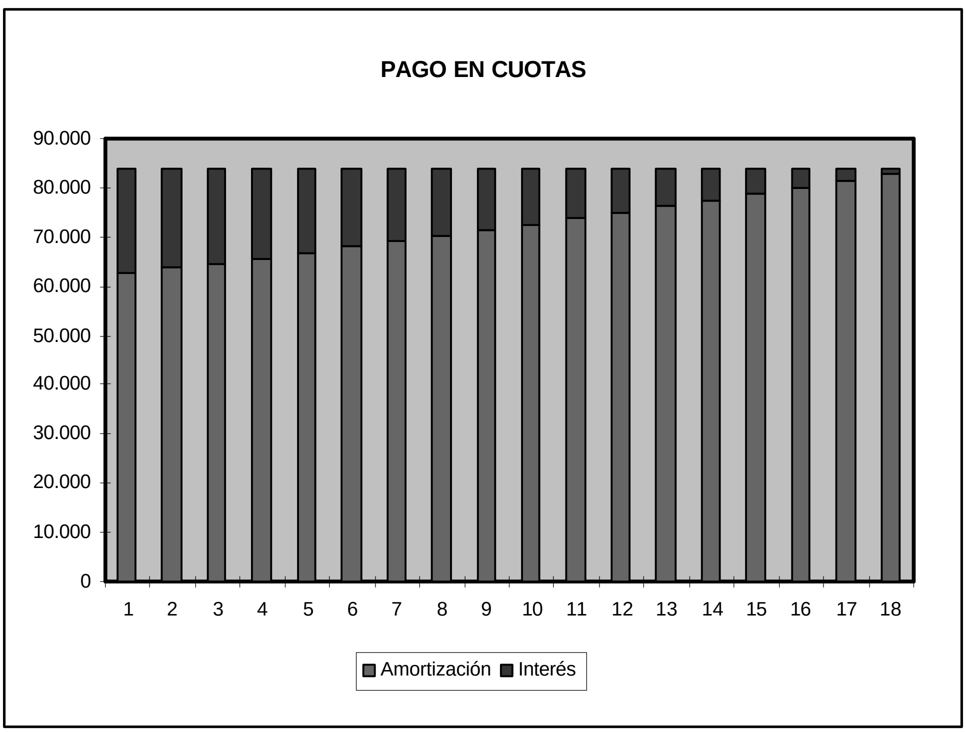
$$C = VP \times \frac{(1+r)^n \times r}{[(1+r)^n - 1]}$$

$$C = 1.300.000 \times \frac{(1+0{,}0165)^{18} \times 0{,}0165}{[(1+0{,}0165)^{18} - 1]} = 84.067$$

- En un crédito que se paga en cuotas iguales, cada cuota paga intereses y amortizaciones, en montos variables.

PRESTAMO	1.300.000	
TASA	1,65%	mensual
PLAZO	18	meses
CUOTA	84.067	mensual

MES	DEUDA AL INICIO DEL MES	CUOTA	INTERÉS	AMORTIZACIÓN DE CAPITAL	DEUDA AL FINAL DEL MES
1	1.300.000	84.067	21.450	62.617	1.237.383
2	1.237.383	84.067	20.417	63.650	1.173.732
3	1.173.732	84.067	19.367	64.701	1.109.032
4	1.109.032	84.067	18.299	65.768	1.043.264
5	1.043.264	84.067	17.214	66.853	976.410
6	976.410	84.067	16.111	67.956	908.454
7	908.454	84.067	14.989	69.078	839.376
8	839.376	84.067	13.850	70.218	769.158
9	769.158	84.067	12.691	71.376	697.782
10	697.782	84.067	11.513	72.554	625.228
11	625.228	84.067	10.316	73.751	551.478
12	551.478	84.067	9.099	74.968	476.510
13	476.510	84.067	7.862	76.205	400.305
14	400.305	84.067	6.605	77.462	322.843
15	322.843	84.067	5.327	78.740	244.102
16	244.102	84.067	4.028	80.040	164.063
17	164.063	84.067	2.707	81.360	82.703
18	82.703	84.067	1.365	82.703	0
TOTAL		1.513.210	213.210	1.300.000	



Inflación y Tasa de Interés

Inflación y Tasa de Interés

Inflación:

- Es el aumento sostenido y generalizado del nivel de precios
- Se mide a través del Indice de Precios al Consumidor (IPC), que refleja los cambios en el precio de una canasta de bienes y servicios. Dicha canasta representa el consumo promedio de las familias, y se estima a partir de la Encuesta de Presupuestos Familiares.
- Poder adquisitivo del dinero: ¿Cuántas canastas puedo comprar con una determinada cantidad de dinero? Si hay inflación el poder adquisitivo cae.

Inflación y Tasa de Interés

- Tasa de interés nominal: mide el aumento en dinero, es decir, lo que se paga por sobre lo adeudado.

  Ejemplo : Depósitos en pesos a una cierta cantidad de días.

- Tasa de interés real: mide el aumento de poder adquisitivo

  Ejemplo: tasas en UF + X% (esto significa que al cabo de un año el dinero debiera tener el mismo poder adquisitivo que el dinero que invertí)

Inflación y Tasa de Interés

Relación entre las tasas de interés real y nominal:

Sean:

X:	Cantidad de dinero disponible
P:	Precio de la canasta de bienes en período 0
Q:	Cantidad de canastas compradas
C_0:	Indice de precios en período 0
C_1:	Indice de precios en período 1
i_n:	Tasa de interés nominal
i_r:	Tasa de interés real

Inicialmente puede comprar: $\boxed{Q_0 = \frac{X}{P}}$

Inflación y Tasa de Interés

Si presta X a una tasa i_n al final del período podrá comprar:

$$Q_1 = \frac{X(1+i_n)}{\frac{C_1}{C_0}\times P} = \frac{X}{P}\times\frac{(1+i_n)}{(1+f)}$$

donde f es la tasa de inflación.

$$\frac{\Delta Q}{Q_0} = \frac{(1+i_n)}{(1+f)} - 1 = i_r$$

Inflación y Tasa de Interés

Finalmente,

$$\boxed{(1+i_r) = \frac{(1+i_n)}{(1+f)}}$$

(Ecuación de Fisher)

Luego,

$$\boxed{(1+i_r)(1+f) = (1+i_n)}$$

Inflación y tasa de interés

- Ejemplo: en qué banco me conviene depositar 100UM, en el banco que ofrece 18% de interés anual o en el que ofrece UF+5.5% anual.