Tabla de contenido

ECUACIONES DE LA RECTA EN EL SISTEMA CARTESIANO BIDIMENSIONAL

José Santic A.

LINEA RECTA:

Es una ecuación lineal o de primer grado con dos variables. Para su determinación se requieren dos condiciones, por ejemplo, dos de sus puntos, o un punto y su dirección (la pendiente).

FORMAS DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA: RESUMEN

Ecuación principal:

$$\boldsymbol{y = mx + n}$$

Ecuación de la recta que pasa por el origen del plano cartesiano:

$$\boldsymbol{y = mx}$$

Ecuación general de la recta:

$$\boldsymbol{ax + by + c = 0}$$

Ecuación de la recta que pasa por un punto (ecuación punto – pendiente):

$$\boldsymbol{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

Ecuación de la perpendicular de un punto a una recta:

$$\boldsymbol{y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0)}$$

Ecuación de segmentos o simétrica:

$$\boldsymbol{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

Ecuación cartesiana o ecuación de la recta que pasa por dos puntos:

La ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2), es$:

$$\boldsymbol{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}}$$

Rectas paralelas:

$\boldsymbol{L_1 \,//\, L_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2}$

Rectas perpendiculares:

$\boldsymbol{L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 * m_2 = -1}$

Distancia entre dos puntos del plano cartesiano:

Si los puntos son: $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ y d = distancia entre los dos puntos:

$$\boldsymbol{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

DESARROLLO DE LOS TIPOS DE ECUACIONES DE LA RECTA

ECUACIÓN PRINCIPAL:

$$\boldsymbol{y = mx + n}$$

Donde m = la pendiente o inclinación de la recta.
n = coeficiente de posición (la ordenada en el origen).

$y = mx + n$ es una recta con pendiente m y que interseca al eje Y en el punto $(0, n)$, siendo n la ordenada en el origen.

Para determinar la intersección en el eje Y, es decir, para encontrar el punto $(0, n)$, se hace $x = 0$ y se despeja y.

<u>Ejemplo</u>: Determinar la pendiente y la intersección en el eje Y de las siguientes rectas:

La intersección "y" de la recta $y = 2x + 4$ es: $(0, 4)$. La pendiente $m = 2$
La intersección "y" de la recta $y = 2x - \frac{5}{3}$ es: $(0, -\frac{5}{3})$. La pendiente $m = 2$
La intersección "y" de la recta $y = -\frac{1}{3}x + 4$ es: $(0, 4)$. La pendiente $m = -\frac{1}{3}$
La intersección "y" de la recta $y = -\frac{1}{3}x$ es: $(0, 0)$. La pendiente $m = -\frac{1}{3}$
La intersección "y" de la recta $y = -\frac{1}{3}x - 2$ es: $(0, -2)$. La pendiente $m = -\frac{1}{3}$

<u>Ejemplo</u>: Determine la pendiente y la intersección y de la ecuación: $-5x + 2y = 8$

Despejando y:

$$2y = 5x + 8$$

$$y = \frac{5}{2}x + 4$$

Por tanto, la pendiente $m = \frac{5}{2}$ y la intersección y es: (0,4).

<u>Ejemplo</u>: Hallar la pendiente m y la ordenada en el origen n de la recta y la intersección y de la ecuación: $2y + 3x = 7$

Despejando y:

$$2y = -3x + 7$$
$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$$

Por tanto, la pendiente $m = -\frac{3}{2}$ y la ordenada n en el origen es: $\frac{7}{2}$

<u>Traslación de gráficas</u>:

$y = 2x$
$y = 2x + 4$
$y = 2x - 4$

Las tres rectas anteriores son paralelas entre sí porque tienen igual pendiente $m = 2$, con la diferencia que:

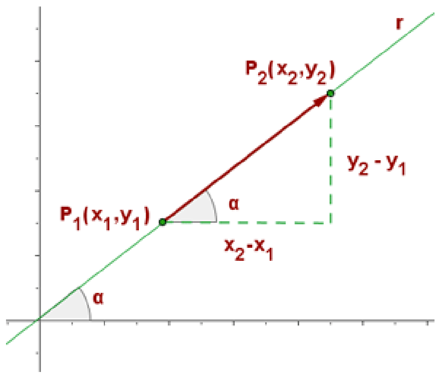
$y = 2x$, pasa por el origen, ya que la intersección en el eje Y es (0,0).
$y = 2x + 4$, corta al eje Y en $y = (0,4)$
$y = 2x - 4$ corta al eje Y en $y = (0, -4)$

<u>Nota para la identificación de tipos de ejercicios:</u> La *Ecuación principal* de la recta: $y = mx + n$
Se usa para: a) Determinar la pendiente y la intersección "y' de una recta, b) Para determinar la ecuación de una recta dada su pendiente y su intersección "y", c) Determinar si dos rectas son paralelas o perpendiculares, d) Graficar una ecuación lineal.

Pendiente de una recta: Dados dos puntos de la recta, $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ su pendiente es el cociente entre el cambio vertical y el cambio horizontal entre esos dos puntos.

$$Pendiente\ m = \frac{cambio\ vertical}{cambio\ horizontal} = \frac{cambio\ en\ y}{cambio\ en\ x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\boldsymbol{y_2 - y_1}}{\boldsymbol{x_2 - x_1}}$$

Siempre y cuando $x_1 \neq x_2$, porque si fueran iguales, el denominador sería cero y la división entre cero no está definida.



Ejemplo: Si $(-2,3)$ y $(1,-4)$ son dos puntos de una recta, ¿Cuál es la pendiente de esa recta?

(x_1, y_1)= $(-2,3)$
(x_2, y_2)= $(1,-4)$

$$m = \frac{-4-3}{1-(-2)} = -\frac{7}{3}$$

Ejemplo: La pendiente como razón de cambio.

¿Qué significa $m = \frac{5}{3}$? Teniendo presente que $y = mx + n$, $m = \frac{5}{3}$ significa que el valor de y aumenta 5 unidades por cada aumento de 3 unidades de x.

Por ejemplo:

Año	Gasto en educación (en millones de pesos)
1970	1.340.093
1980	3.125.134
1990	2.618.455

¿Cuál es la pendiente de los segmentos de recta entre 1970 y 1980 y entre 1970 y 1990?

Entre 1970 y 1980:

$$m = \frac{3.125.134 - 1.340.093}{1980 - 1970} = \frac{1.785.041}{10} = 178.504{,}1$$

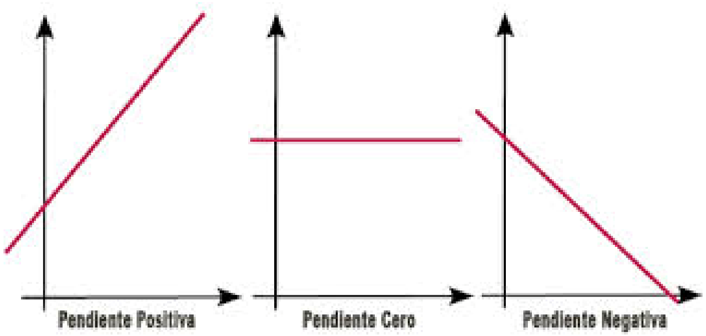
Es decir, el gasto en educación aumentó a razón de MM$178.504,1 por año en el período de 10 años entre 1970-1980.

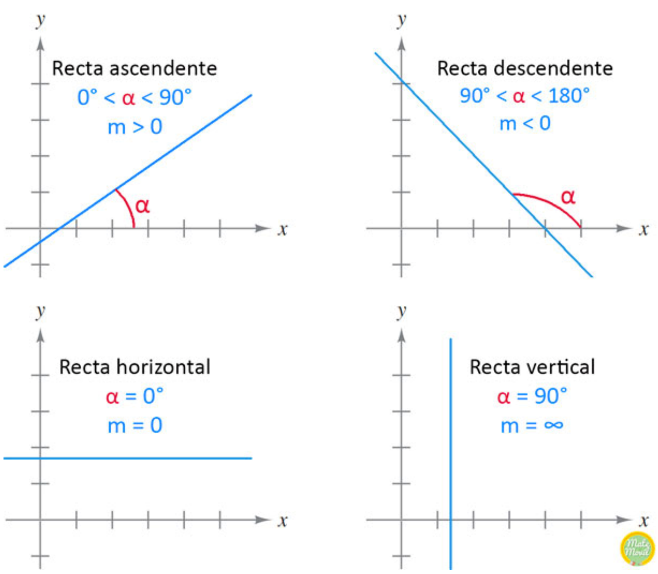
Entre 1970 y 1990:

$$m = \frac{2.618.455 - 1.340.093}{1990 - 1970} = \frac{1.278.362}{20} = 63.918,1$$

Es decir, el gasto en educación aumentó a razón de MM$63.918,1 por año en el período de 20 años entre 1970-1990.
Tipos de pendientes:

- Pendiente positiva ($m > 0$): Una recta que se eleva de izquierda a derecha.
- Pendiente cero ($m = 0$): Una recta que no se eleva ni baja al ir de izquierda a derecha.
- Pendiente negativa ($m < 0$): Una recta que baja de izquierda a derecha.





Tener presente lo siguiente:

- Pendiente de una recta horizontal: se dice "la pendiente es cero", no se dice "no tiene pendiente".
- Pendiente de una recta vertical: se dice "la pendiente es indefinida", no se dice "no tiene pendiente".

Ejemplo: Demostrar que los puntos $A(-3,4), B(3,2)\ y\ C(6,1)$ son colineales (forman parte de la recta).

Serán colineales, si la pendiente entre dos puntos es la misma.

$$Pendiente\ de\ AB = \frac{2-4}{3—3} = -\frac{2}{6} = -1/3$$

$$Pendiente\ de\ AC = \frac{1-4}{6—(-3)} = \frac{-3}{9} = -1/3$$

$$Pendiente\ de\ BC = \frac{1-2}{6—3} = \frac{-1}{3} = -1/3$$

Como las pendientes de los segmentos son iguales, los puntos A, B y C son colineales.

ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR EL ORIGEN DEL PLANO CARTESIANO:

En este caso:
m = la pendiente o inclinación de la recta.
$n = 0$

$$\boldsymbol{y = mx}$$

ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA:

$$\boldsymbol{ax + by + c = 0}$$

La pendiente $m = \frac{-a}{b}$

El coeficiente de posición $n = \frac{-c}{b}$

Nota para la identificación de tipo de ejercicio: Esta forma de la ecuación de la recta es útil para determinar las intersecciones de dos rectas de manera gráfica en el plano cartesiano:

- Para determinar la intersección y, se hace $x = 0$ y se despeja y.
- Para determinar la intersección x, se hace $y = 0$ y se despeja x.

Ejemplo: Encuentre las intersecciones x e y en la gráfica de la ecuación: $5x = 10y - 20$.

Para determinar la intersección y (el punto donde la gráfica cruza el eje Y), se hace $x = 0$ y se despeja y:

$5(0) = 10y - 20.$
$0 = 10y - 20.$
$20 = 10y.$
$y = 2.$

La gráfica cruza el eje Y en $y = 2$. El par ordenado que representa la intersección en Y es (0,2).

Para determinar la intersección x (el punto donde la gráfica cruza el eje X), se hace $y = 0$ y se despeja x:

$5x = 10(0) - 20.$
$5x = -20.$
$x = -4.$

La gráfica cruza el eje X en $x = -4$. El par ordenado que representa la intersección y es (-4,0).

Ejemplo: Encuentre las intersecciones x e y en la gráfica de la ecuación: $y = -\frac{1}{3}x - 1.$

Para determinar la intersección y (el punto donde la gráfica cruza el eje Y), se hace $x = 0$ y se despeja y:

$y = -\frac{1}{3}(0) - 1.$
$y = -1.$

La gráfica cruza el eje Y en $y = -1$. El par ordenado que representa la intersección y es (0,-1).

Para determinar la intersección x (el punto donde la gráfica cruza el eje X), se hace $y = 0$ y se despeja x:

$0 = -\frac{1}{3}x - 1.$
$3(0) = -x - 3.$
$x = -3.$

La gráfica cruza el eje X en $x = -3$. El par ordenado que representa la intersección y es (-3,0).

ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR UN PUNTO (ECUACIÓN PUNTO – PENDIENTE):

$$\boldsymbol{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

Donde m = la pendiente o inclinación de la recta.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Según la expresión para m, la ecuación punto-pendiente se puede expresar como sigue:

$$\boldsymbol{y - y_0 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_0)}$$

El punto $P\ (x_0, y_0)$ es un punto cualquiera conocido de la recta.

Nota para la identificación de tipo de ejercicio: Se usa: a) Para determinar la ecuación de una recta cuando se da la pendiente y un punto en la recta, b) Para determinar la ecuación de una recta cuando se dan dos puntos en una recta.

Ejemplo: Usando la ecuación punto – pendiente deduzca la ecuación de la recta que pasa por el punto (1,4) y tiene pendiente -3.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - 4 = -3(x - 1)$$
$$y - 4 = -3x + 3$$
$$y = -3x + 7$$

Ejemplo: Deduzca la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, -2)$ y tiene pendiente $-\frac{2}{5}$
Fuente: Guía Camila T.

$$m = -\frac{2}{5}$$
$$x_0 = 1$$
$$y_0 = -2$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - (-2) = -\frac{2}{5}(x - 1)$$
$$y + 2 = -\frac{2}{5}(x - 1)$$

Multiplicando por 5 ambos miembros:

$$5y + 10 = -2(x - 1)$$
$$5y = -2x + 2 - 10$$
$$5y = -2x - 8$$
$$y = \frac{-2x - 8}{5} = -\frac{2}{5}x - \frac{8}{5}$$

Ejemplo: Usando la ecuación punto – pendiente deduzca la ecuación de la recta que pasa por el punto (3,1) y tiene pendiente 2.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - 1 = 2(x - 3)$$
$$y - 1 = 2x - 6$$

$$y = 2x - 5$$

<u>Ejemplo</u>: Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-4{,}3)$ y tiene pendiente $\frac{1}{2}$.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - (-4))$$
$$y - 3 = \frac{1}{2}(x + 4)$$
$$2y - 6 = x + 4$$
$$x - 2y + 10 = 0$$

<u>Ejemplo</u>: Escriba como ecuación punto – pendiente y como principal, la ecuación de la recta que pasa por los puntos (2,3) y (1,4).

Sea $P(x_1, y_1) = (2, 3)$.
Sea $P(x_1, y_2) = (1, 4)$.

Para $P(x_0, y_0)$, se elige cualquiera de los dos, por ejemplo, $(2, 3)$.

$$y - y_0 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_0)$$

$$y - 3 = \frac{4 - 3}{1 - 2}(x - 2)$$

$y - 3 = -1(x - 2)$ como ecuación punto - pendiente

$y - 3 = -x + 2$

$y = -x + 5$ como ecuación principal

<u>Ejemplo</u>: Escriba como ecuación punto – pendiente y como principal, la ecuación de la recta que pasa por los puntos (2,-3) y (-6,9).

Sea $P(x_1, y_1) = (2, -3)$.
Sea $P(x_1, y_2) = (-6, 9)$.

Para $P(x_0, y_0)$, se elige cualquiera de los dos, por ejemplo, $(2, -3)$

$$y - y_0 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_0)$$
$$y - (-3) = \frac{9 - (-3)}{-6 - 2}(x - 2)$$

$$y+3=\frac{12}{-8}(x-2)$$

$y+3=-\frac{3}{2}(x-2)$ como ecuación punto pendiente

$$y=-\frac{3}{2}x+3-3$$

$y=-\frac{3}{2}x$ como ecuación principal

<u>Ejemplo</u>: Escriba como ecuación punto – pendiente la ecuación de la recta que pasa por los puntos (-2,-3) y (4,2).

Sea $P(x_1,y_1)=(-2,-3)$.
Sea $P(x_1,y_2)=(4,2)$.

Para $P(x_0,y_0)$, se elige cualquiera de los dos, por ejemplo, $(-2,-3)$.

$$y-y_0=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_0)$$

$$y-(-3)=\frac{2-(-3)}{4-(-2)}(x-(-2))$$

$$y+3=\frac{5}{6}(x+2)$$

$$6y+18=5(x+2)$$
$$6y+18=5x+10$$
$$-5x+6y+8=0$$
$$5x-6y-8=0$$

<u>Ejemplo:</u> El precio de costo de un artículo A es de \$350 y se vende en \$600; un artículo B tiene un costo de \$150 y se vende en \$300. Si la política de aumento de precios de la empresa es lineal, ¿cuál es el precio de venta del artículo A cuyo costo es de \$20?

A) 218
B) 180
C) 183
D) 105
E) 40

Fuente: Adaptación Guía Ale:

Solución:

Los pares ordenados son:

$(350, 600)\ y\ (150, 300)$ lo que permite calcular la pendiente de la recta que une ambos puntos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{300 - 600}{150 - 350} = \frac{-300}{-200} = 1{,}5$$

La ecuación de la recta que permite calcular el precio de venta del artículo A es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Eligiendo uno cualquiera de los dos puntos anteriores, por ejemplo, $(350, 600)$

$$y - 600 = 1{,}5(x - 350)$$
$$y = 1{,}5x - 525 + 600$$
$$y = 1{,}5x + 75$$

Si $x = 20$

$$y = 1{,}5(20) + 75 = 30 + 75 = 105$$

Alternativa correcta: D).

<u>Ejemplo</u>: La demanda de un producto es de 100 unidades cuando el precio es de $5800, y de 200 unidades, con un precio de $5.100. Determine la ecuación de demanda asumiendo que es lineal.

Solución:

$q_1 = 100$
$p_1 = 5800$

$q_2 = 200$
$p_2 = 6100$

Los pares ordenados son:

$(100, 5800)\ y\ (200, 5100)$ lo que permite calcular la pendiente de la recta que une ambos puntos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5100 - 5800}{200 - 100} = \frac{-700}{100} = -7$$

La ecuación de la recta que permite determinar la ecuación de demanda es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$p - p_1 = m(q - q_1)$$

Eligiendo uno cualquiera de los dos puntos anteriores, por ejemplo, $(100, 5800)$

$$p - 5800 = -7(q - 100)$$
$$p = -7q + 700 + 5800$$

La ecuación de demanda es:

$$p = -7q + 6500$$

ECUACIÓN DE LA PERPENDICULAR DE UN PUNTO A UNA RECTA:

Si la recta es: $y = mx + n$ y el punto es: $P(x_0, y_0)$, la ecuación de la perpendicular es:

$$\boldsymbol{y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0)}$$

<u>Ejemplo</u>:

¿Cuál es la recta que pasa por el punto $P(-2, 5)$ y es perpendicular a la recta: $2x - 3y = 12$?

$$2x - 3y = 12$$
$$-3y = -2x + 12$$
$$3y = 2x - 12$$
$$y = \frac{2}{3}x - 4$$

donde $m = \frac{2}{3}$

Por tanto, la recta que pasa por ese punto y es perpendicular a la recta dada, es:

$$y - 5 = -\frac{3}{2}(x + 2)$$
$$y = -\frac{3}{2}(x + 2) + 5$$
$$y = -\frac{3}{2}x - 3 + 5$$
$$y = -\frac{3}{2}x + 2$$

ECUACIÓN DE SEGMENTOS O SIMÉTRICA:

Recta que intersecta a los ejes X e Y en el punto (a ,0) y en el punto (0, b), siendo a la abscisa en el origen y b la ordenada en el origen. En otras palabras:

$a = punto\ donde\ la\ recta\ corta\ al\ eje\ X$
$b = punto\ donde\ la\ recta\ corta\ al\ eje\ Y$

$$\boldsymbol{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

<u>Nota para la identificación de tipo de ejercicio</u>: Se usa para encontrar la ecuación de una recta dadas su abscisa y ordenada en el origen.

<u>Ejemplo</u>: Hallar la ecuación de la recta cuya abscisa en el origen es 5 y la ordenada en el origen es -3.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$a = 5; b = -3$

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{-3} = 1$$

Multiplicando ambos miembros por: 15:

$$\frac{x}{5}(15) + \frac{y}{-3}(15) = 1(15)$$

$$3x - 5y = 15$$
$$3x - 5y - 15 = 0$$

<u>Ejemplo</u>: Encontrar la recta simétrica que pasa por los puntos: $A(0,5) y\ B(-2,0)$.

Cuando se dan las coordenada de los dos puntos, es conveniente hacer la gráfica correspondiente para ver dónde la recta corta al eje X (entrega el valor de a) y dónde corta al eje Y (entrega el valor de b)

Se verá que la recta corta al eje X en el punto – 2 y al eje Y en el punto 5, por lo que se tiene:

$a = -2$
$b = 5$

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{5} = 1$$

<u>Ejemplo (Caso especial)</u>: Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2,3)$ y cuya abscisa en el origen es el doble que la ordenada en el origen.
Fuente: Geometría Analítica, colección Schaum, p. 32, nº7.

$$y - 3 = m(x - 2)$$

Para x=0 (ordenada en el origen)

$$y = -2m + 3$$

Para y=0 (abscisa en el origen)

$$-3 = mx - 2m$$
$$-3 + 2m = mx$$
$$x = \frac{-3 + 2m}{m}$$

Como la abscisa en el origen es el doble de la ordenada en el origen:

$$\frac{-3 + 2m}{m} = 2(-2m + 3)$$
$$-3 + 2m = 2m(-2m + 3)$$
$$-3 + 2m = -4m^2 + 6m)$$
$$4m^2 - 4m - 3 = 0$$

$$m = -\frac{1}{2}$$
$$m = \frac{3}{2}$$

Reemplazando en la ecuación punto – pendiente anterior se llega a la solución dada en el texto citado:

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

$$2y - 6 = -x + 2$$
$$2y + x - 8 = 0$$

Hay otra recta si se considera $m = \frac{3}{2}$ (haz de rectas)

$$y - 3 = \frac{3}{2}(x - 2)$$
$$2y - 6 = 3(x - 2)$$
$$2y - 6 = 3x - 6)$$
$$2y - 3x = 0$$

ECUACIÓN CARTESIANA O ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS:

La ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2), es$:

$$\boldsymbol{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}}$$

Ejemplo: Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-2, -3)$ y $(4, 2)$.

$$\frac{y + 3}{x + 2} = \frac{-3 - 2}{-2 - 4} = \frac{-5}{-6} = \frac{5}{6}$$

$$(y + 3)(6) = (x + 2)(5)$$

$$6y + 18 = 5x + 10$$

$$6y - 5x + 8 = 0$$

PUNTO DE INTERSECCIÓN DE DOS RECTAS:

Es el punto que se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones correspondiente:

Ejemplo: Encontrar el punto de intersección de las rectas:

$y = 3x - 2$
$y = 2x + 2$

$y = 3x - 2$
$y = 2x + 2$

$3x - 2 = 2x + 2$

$x = 4$
$y = 2(4) + 2 = 10$

Por tanto, el punto de intersección es: $P(4, 10)$.

RECTAS PARALELAS:

Dos rectas son paralelas si y solo si sus pendientes son iguales y no tienen puntos en común.

$$\boldsymbol{L_1 \, // \, L_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2}$$

Ejemplo: Dos puntos en L_1 son (8,5) y (4,-1). Dos puntos en L_2 son (0,2) y (6,-2). Determine si L_1 y L_2 son rectas paralelas.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_1 = \frac{-1 - 5}{4 - 8} = -\frac{6}{-4} = \frac{3}{2}$$

$$m_2 = \frac{-2 - 2}{6 - 0} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

Como sus pendientes son diferentes L_1 y L_2 no son rectas paralelas.

<u>Ejemplo</u>: Considere la ecuación $2x + 4y = 8$. Determine la ecuación de la recta que tiene una intersección en el eje Y de 5 y es paralela a la recta dada.

Paso 1: Determinar la pendiente de la ecuación dada:

$$4y = -2x + 8$$

$$y = -\frac{2}{4}x + \frac{8}{2}$$
$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

Es decir: $m_1 = -\frac{1}{2}$. Por lo tanto, la pendiente de la recta paralela también debe ser $m_2 = -\frac{1}{2}$.
Paso 2: La ecuación anterior tiene la forma: $y = mx + n$, donde n es el coeficiente de posición.

Como la recta debe cortar al eje Y en $y = 5$, el coeficiente de posición de la recta paralela debe ser: $n = 5$

Paso 3:
$$y = mx + n$$
$$y = -\frac{1}{2}x + 5$$

Que es la recta paralela a la recta $2x + 4y = 8$ y que corta al eje Y en $y = 5$, coordenadas (0,5).

<u>Ejemplo</u>: Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2, 3)$ y es paralela a la recta que une los puntos (4,1)y (−2,2).

$P(x_0, y_0 = (-2, 3)$
$P(x_1, y_1 = (4, 1)$
$P(x_2, y_2 = (-2, 2)$
$$y - y_0 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_0)$$

$$y - 3 = \frac{2 - 1}{-2 - 4}(x + 2)$$

$$y - 3 = \frac{1}{-6}(x + 2)$$
$$-6y + 18 = (x + 2)$$
$$-6y - x + 16 = 0$$

$$x + 6y - 16 = 0$$

RECTAS PERPENDICULARES:

Dos rectas no verticales son perpendiculares si y sólo sí el producto de sus pendientes es -1. (se dice no verticales, porque si lo fueran sus pendientes serían indefinidas).

$$\boldsymbol{L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 * m_2 = -1}$$

O bien: Dos rectas son perpendiculares si la pendiente de una de ellas es la inversa con signo negativo:

$$\boldsymbol{L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}}$$

<u>Ejemplo</u>: Dos puntos en L_1 son (8,5) y (4,-1). Dos puntos en L_2 son (0,2) y (6,-2). Determine si L_1 y L_2 son rectas perpendiculares.

$$m_1 = \frac{-1-5}{4-8} = -\frac{6}{-4} = \frac{3}{2}$$

$$m_2 = \frac{-2-2}{6-0} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$m_1 * m_2 = \frac{3}{2} * -\frac{2}{3} = -1$$

Como el producto de las pendientes es – 1, (una es el valor recíproco negativo de la otra), L_1 y L_2 son rectas perpendiculares.

<u>Ejemplo</u>: Considere la ecuación $5y = -10x + 7$. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto $(4, \frac{1}{3})$ y que sea perpendicular a la ecuación dada.

Paso 1: Determinar la pendiente de la ecuación dada:

$$y = -\frac{10}{5}x + \frac{7}{5}$$

$$y = -2x + \frac{7}{5}$$

Es decir: $m_1 = -2$

Paso 2: Como la pendiente es $m_1 = -2$, la pendiente de la recta perpendicular a la ecuación dada debe ser: $m_1 * m_2 = -1 \Longrightarrow -2 * m_2 = -1 \Longrightarrow m_2 = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$

Paso 3: Como la recta perpendicular debe pasar por el punto $P(x_0, y_0) = \left(4, \frac{1}{3}\right)$.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}(x - 4)$$

Multiplicando ambos miembros por 6:

$$6(y - \frac{1}{3}) = 6[\frac{1}{2}(x - 4)]$$

$$6y - 2 = 3x - 12$$

$$-3x + 6y + 10 = 0$$

<u>Ejemplo</u>: Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2,3)$ y es perpendicular a la recta $2x - 3y + 6 = 0$.

Como la ecuación dada está en la forma general, la pendiente es: $-\frac{a}{b} = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$

Si las rectas son perpendiculares, la pendiente de una de ellas es el recíproco con signo contrario de la pendiente de la otra. Por consiguiente, la pendiente de la recta pedida es: $-\frac{3}{2}$. Su ecuación es:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - 3 = -\frac{3}{2}(x + 2)$$

$$2y - 6 = -3(x + 2)$$

$$2y - 6 = -3x - 6$$

$$3x + 2y = 0$$

Ejemplo 4: Dadas las dos rectas perpendiculares entre sí, calcular el valor de k.

$$kx + (3 - k)y + 7 = 0$$
$$x + 7y + 1 = 0$$

Solución: Recordar que: $m = -\frac{a}{b}$

Pendiente de la primera ecuación: $m_1 = -\frac{k}{3-k}$
Pendiente de la primera ecuación: $m_2 = -\frac{1}{7}$

Como las rectas son perpendiculares entre sí:

$$m_1 m_2 = -1$$

$$-\frac{k}{3-k} * -\frac{1}{7} = -1$$

$$\frac{k}{21-7k} = -1$$

$$k = -21 + 7k$$

$$21 = 6k$$
$$k = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS DEL PLANO CARTESIANO:

Si si los puntos son: $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ y d = distancia entre los dos puntos:

$$\boldsymbol{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Ejemplo: Hallar la distancia entre los puntos $(-2, 3)\ y\ (5, 1)$.

$$P_1 = (x_1, y_1) = (-2, 3)$$
$$P_2 = (x_2, y_2) = (5, 1)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(5-(-2))^2 + (1-3)^2}$$

$$d = \sqrt{49 + 4} = \sqrt{53}$$

Ejemplo: Hallar la distancia entre los puntos $(6, -1) y\ (-4, -3)$.

$$P_1 = (x_1, y_1) = (6, -1)$$
$$P_2 = (x_2, y_2) = (-4, -3)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(-4-6)^2 + (-3-(-1))^2}$$

$$d = \sqrt{100 + 4} = \sqrt{104} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{26} = 2\sqrt{26}$$

Ejemplo: Demostrar que los tres puntos siguientes son colineales: $A(-3, -2), B(5, 2)\ y\ C\ (9, 4)$.

Deberá cumplirse que la suma de dos de los segmentos da la medida del tercero, por ejemplo, que $AB + BC = AC$.

$$d_{AB} = \sqrt{(5+3)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(9-5)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$

$$d_{AC} = \sqrt{(9+3)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{144+36} = \sqrt{180} = \sqrt{36 \cdot 5} = 6\sqrt{5}$$

$$d_{AB} + d_{AB} = 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

Por consiguiente, los tres puntos son colineales.

<u>Ejemplo</u>: Demostrar que los tres puntos siguientes son colineales: $A(1,5), B(-3,-7)\ y\ C\ (5,17)$.

$$d_{AB} = \sqrt{(-3-1)^2 + (-7-5)^2} = \sqrt{16+144} = \sqrt{160}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(5--3)^2 + (17--7)^2} = \sqrt{64+576} = \sqrt{640} = \sqrt{4 \cdot 160} = 2\sqrt{160}$$

$$d_{AC} = \sqrt{(5-1)^2 + (17-5)^2} = \sqrt{16+144} = \sqrt{160}$$

$$d_{AB} + d_{AC} = d_{BC} = \sqrt{160} + \sqrt{160} = 2\sqrt{160}$$

Como $AB + AC = BC$, los tres puntos son colineales.

<u>Ejemplo</u>: Calcular el perímetro del triángulo de vértices: $A(-3,-5), B(3,-2)\ y\ C\ (-2,4)$.

Hay que sumar las medidas de sus lados, es decir, de los lados: AB, BC y AC.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(3+3)^2 + (-2+5)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$
$$d_{BC} = \sqrt{(-2-3)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{25+36} = \sqrt{61}$$
$$d_{AC} = \sqrt{(-2+3)^2 + (4+5)^2} = \sqrt{1+81} = \sqrt{82}$$

Por consiguiente, el perímetro del triángulo es:

$$d_{\Delta ABC} = 3\sqrt{5} + \sqrt{61} + \sqrt{82}$$

<u>Ejemplo</u>: Verificar que el cuadrilátero que tiene por extremos los puntos: $A(2,4), B(-2,5),\ C\ (-4,1)\ y\ D(0,0)$, es un paralelogramo.

Para que sea paralelogramo sus lados opuestos deben tener la misma medida.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(-2-2)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$
$$d_{BC} = \sqrt{(-4+2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$
$$d_{CD} = \sqrt{(0+4)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$
$$d_{DA} = \sqrt{(0-2)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Como las medidas $\overline{AB}\ y\ \overline{CD}$ son iguales, y también $\overline{BC}\ y\ \overline{AD}$, entonces el cuadrilátero es, efectivamente, un paralelogramo.

<u>Ejemplo</u>: Los vértices de un triángulo son: $A(5,1), B(2,2)\ y\ C\ (4,3)$. Comprobar que:

a) El triángulo ABC es isósceles.
b) Las transversales de gravedad trazadas desde los vértices opuestos a los lados congruentes tienen la misma medida.

Solución:

a) Para verificar que el triángulo es isósceles, dos de sus lados deben tener igual medida:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(2-5)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$
$$d_{BC} = \sqrt{(4-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$
$$d_{CA} = \sqrt{(4-5)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

Como las medidas $\overline{BC}\ y\ \overline{CA}$ son iguales, el triángulo es isósceles de base $\overline{AB}$

<u>Ejemplo</u>: Verificar que el triángulo de vértices: $A(-2,2), B(2,1)\ y\ C\ \left(1,\frac{11}{2}\right), es\ isósceles.$

Para verificar que el triángulo es isósceles, dos de sus lados deben tener igual medida:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(2--2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$
$$d_{BC} = \sqrt{(1-2)^2 + (\frac{11}{2}-1)^2} = \sqrt{1+\frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{85}{4}} = \frac{\sqrt{85}}{2}$$

$$d_{CA} = \sqrt{(1+2)^2 + (\frac{11}{2} - 2)^2} = \sqrt{9 + (\frac{7}{2})^2} = \sqrt{9 + \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{85}{4}} = \frac{\sqrt{85}}{2}$$

Como las medidas $\overline{BC}\ y\ \overline{CA}$ son iguales, el triángulo es isósceles de base $\overline{AB}$.

b) Como las transversales de gravedad de un triángulo son los trazos dibujados desde un vértice al punto medio del lado opuesto, hay que determinar los puntos medios de los lados $\overline{BC}\ y\ \overline{CA}$. Sea F el punto medio de $\overline{BC}$ y D el punto medio de CA

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$
$$M_{BC=F} = \left(\frac{2+4}{2}, \frac{2+3}{2}\right) = (3, \frac{5}{2})$$

$$M_{CA=D} = \left(\frac{4+5}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = (\frac{9}{2}, 2)$$

La transversal que llega al punto medio de BC parte del vértice $B(5,1)$, por lo que hay que calcular la medida del trazo cuyos extremos son los puntos $A(5,1)$ y $(3, \frac{5}{2})$

$$d_{AF} = \sqrt{(3-5)^2 + \left(\frac{5}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

La transversal que llega al punto medio de AC parte del vértice $B(2,2)$, por lo que hay que calcular la medida del trazo cuyos extremos son los puntos $B(2,2)$ y $(\frac{9}{2}, 2)$

$$d_{AF} = \sqrt{\left(\frac{9}{2} - 2\right)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{(\frac{5}{2})^2 + 0} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

Es decir, ambas transversales tienen igual medida.

<u>Ejemplo:</u> Determinar el valor de la incógnita en la siguiente situación: La distancia entre los puntos $A(5,2)$ y $B(a,3)$ es $\sqrt{12}$

$$d_{AB} = \sqrt{(a-5)^2 + (3-2)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{a^2 - 10a + 25 + 1}$$
$$d_{AB} = \sqrt{a^2 - 10a + 25 + 1}$$

$$\sqrt{a^2 - 10a + 26} = \sqrt{12}$$

$$a^2 - 10a + 26 = 12$$
$$a^2 - 10a + 14 = 0$$

$$a = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 56}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{44}}{2} = \frac{10 \pm 2\sqrt{11}}{2} = 5 \pm \sqrt{11}$$

Ejemplo: Determinar el valor de la incógnita en la siguiente situación: La distancia entre los puntos $A(b, -b)$ y $B(3b, 2b)$ es 1.

$$d_{AB} = \sqrt{(3b - b)^2 + (2b + b)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(2b)^2 + (3b)^2}$$
$$d_{AB} = \sqrt{4b^2 + 9b^2} = \sqrt{13b^2}$$
$$\sqrt{13b^2} = 1$$

$$13b^2 = 1$$
$$b^2 = \frac{1}{13}$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{(1)\sqrt{13}}{\sqrt{13}\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$$

Ejemplo: Dados los puntos $A\ (2, 1)$, $B\ (6, -1)$, $C\ (-2, -1)$, determinar:

a) d_{AB}, d_{BC}, d_{AC}
b) El punto medio M del trazo $\overline{BC}$
c) La distancia entre A y M.
d) ¿Qué tipo de triángulo se forma?
e) El perímetro del triángulo
f) El área del triángulo

Solución a):

$$d_{AB} = \sqrt{(6 - 2)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$$
$$d_{BC} = \sqrt{(-2 - 6)^2 + (-1 + 1)^2} = \sqrt{64} = 8$$
$$d_{AC} = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$$

Solución b):

$$M = \left(\frac{6 - 2}{2}, \frac{-1 - 1}{2}\right)$$

$$M = (2, -1)$$

Solución c): Distancia entre A y M:

$$A = (2, 1)$$
$$M = (2, -1)$$
$$d_{AM} = \sqrt{(2-2)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{0+4} = 2$$

El trazo $\overline{AM}$ es la altura del triángulo.

Solución d): El triángulo es isósceles, ya que tiene dos lados iguales: $d_{AB} = d_{AC}$=$\sqrt{20}$
Solución e): El perímetro de un triángulo es la suma de sus lados:

$$P_{\Delta ABC} = \sqrt{20} + 8 + \sqrt{20} = 8 + 2\sqrt{20}$$

Solución f): El área de un triángulo es la base $\overline{BC}$ por la altura dividido entre 2, es decir:

$$\frac{\overline{BC} \cdot \overline{AM}}{2}$$

$$\frac{8 \cdot 2}{2} = \frac{16}{2} = 8\ unidades\ al\ cuadrado$$

COORDENADAS DEL PUNTO MEDIO DE UNA RECTA:

Sean los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y M = punto medio de la recta.

$$\boldsymbol{M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)}$$

Ejemplo: Encontrar el punto medio de un segmento que une a los puntos $(2, 4)\ y\ (8, -2)$.

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$M = \left(\frac{2+8}{2}, \frac{4-2}{2}\right)$$

$$M = (5, 1)$$

Ejemplo: Encontrar el punto medio del segmento en el plano cartesiano cuyos extremos son: $(-17, 3) y\ (5, -29)$.

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$M = \left(\frac{-17+5}{2}, \frac{3-29}{2}\right)$$

$$M = \left(-\frac{12}{2}, -\frac{26}{2}\right)$$

$$M = (-6, -13)$$

Ejemplo: Encontrar el punto medio del segmento en el plano cartesiano cuyos extremos son: $(\sqrt{9}, 16) y\ (10, \sqrt{400})$.

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$M = \left(\frac{\sqrt{9} + 10}{2}, \frac{16 + \sqrt{400}}{2}\right)$$

$$M = \left(\frac{13}{2}, 18\right)$$

Ejemplo: Encontrar la ecuación de la simetral del segmento $\overline{PQ}$, donde $P(-1,-6)\ y\ Q(7,-4)$.

Como la simetral es el punto medio del segmento $\overline{PQ}$, hay que calcular su punto medio:

$$M_{\overline{PQ}} = \left(\frac{-1+7}{2}, \frac{-6-4}{2}\right) = (3, -5)$$

La pendiente del segmento $\overline{PQ}$ es:

$$m_{\overline{PQ}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4+6}{7+1} = \frac{1}{4}$$

Pero la pendiente de la perpendicular es el valor recíproco de la pendiente con signo contrario:

$$m_{perpendicular} = -4$$

Ecuación de la simetral

$$y = mx + n$$

Como el punto medio de $\overline{PQ}$ es $(3, -5)$

$$-5 = -4(3) + n$$
$$-5 = -12 + n$$

$$n = 7$$

$$y = mx + n$$
$$y = -4x + 7$$
$$y + 4x = 7$$

EJERCICIOS

1. Si uno de los puntos de la gráfica es (6,3) y la pendiente de la recta es $\frac{4}{3}$, determine la intersección "y" de la recta.

Como el punto es (6,3), entonces $x = 6$ e $y = 3$

$m = \frac{4}{3}$

$$\begin{aligned} y &= mx + n \\ 3 &= \frac{4}{3}(6) + n \\ 3 - \frac{24}{3} &= n \\ 3 - 8 &= n \\ n &= -5 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el punto y es $(0, n) = (0, -5)$

2. Si uno de los puntos de la gráfica es (9,2) y la pendiente de la recta es $\frac{2}{3}$, determine la intersección "y" de la recta.

Como el punto es (9,2), entonces $x = 9$ e $y = 2$

$m = \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} y &= mx + n \\ 2 &= \frac{2}{3}(9) + n \\ 2 - \frac{18}{3} &= n \\ 2 - 6 &= n \\ n &= -4 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el punto y es $(0, n) = (0, -4)$.

3. Encontrar la ecuación general de la recta de pendiente -2 y que pasa por el punto $(1, -3)$.

<u>Solución 1</u>:

1. Partir de la ecuación Punto-Pendiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$
2. Reemplazar en esta ecuación el valor de la pendiente, la ordenada y la abscisa del punto conocido de la recta.
3. Transponer los términos de modo que quede en la forma $ax + by + c = 0$.

Siguiendo los pasos anteriores: $m = -2;\ P\ (1, -3)$

1. $y - y_0 = m(x - x_0)$
2. $y - (-3) = -2(x - 1)$
   $y + 3 = -2x + 2$

3. $2x + y + 1 = 0$

Solución 2:

1. Partir de la ecuación principal: $y = mx + n$
2. Reemplazar m por el valor dado de la pendiente
3. En la nueva ecuación principal, reemplazar “y” por la ordenada del punto y “x” por la abscisa del punto.
4. Despejar y calcular “n”.
5. Reemplazar “n” en la ecuación principal.
6. Ordenar los términos de modo que la ecuación quede en la forma ax + by + c = 0.

Siguiendo los pasos anteriores:

1. $y = mx + n$
2. $y = -2x + n$
3. $-3 = -2(1) + n$
4. $-3 + 2 = n = -1$
5. $y = -2x - 1$
6. $2x + y + 1 = 0$

4. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por e; punto (3, -5) y tiene una pendiente $\frac{5}{3}$

$$y = mx + n$$
$$y = \frac{4}{3}x + n$$

Para encontrar n se reemplazan las coordenadas x e y del punto (3, -5)

$$-5 = \frac{4}{3}(3) + n$$
$$-5 = 4 + n$$
$$n = -9$$

Por consiguiente, la ecuación pedida es:

$$y = \frac{4}{3}x - 9$$

5. Escribir a) la ecuación Punto-Pendiente y b) la ecuación general de una recta con pendiente 2 y que pasa por el punto (-7, 8).

Solución:

a) ecuación Punto-Pendiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 8 = 2(x - (-7))$$
$$y - 8 = 2(x + 7)$$

b) La Ecuación General se obtiene transponiendo los términos de modo que quede de la forma $ax + by + c = 0$.

$$y - 8 = 2(x + 7)$$
$$y - 8 = 2x + 14$$
$$-2x + y - 24 = 0$$
$$2x - y + 24 = 0.$$

6. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (-2, -3) y (4,2).

Solución:

Para $P(x_0, y_0)$ *se elige cualquiera de los dos, por ejemplo*, $(-2, -3)$

$$y - y_0 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_0)$$

$$y - (-3) = \frac{2 - (-3)}{4 - (-2)}(x - (-2))$$
$$y + 3 = \frac{5}{6}(x + 2)$$
$$6y + 18 = 5(x + 2)$$
$$6y - 5x - 8 = 0$$
$$5x - 6y + 8 = 0$$

7. Hallar la pendiente *m* y la ordenada *n* en el origen de la recta 2y + 3x = 7

Solución 1: Partiendo de la ecuación principal $y = mx + n$

$$2y + 3x = 7$$
$$2y = -3x + 7$$

$y = -3/2x + 7/2$, luego la pendiente $m = -\frac{3}{2}$ y la ordenada *n* en el origen = 7/2

Solución 2: Partiendo de la ecuación general $ax + by + c = 0$

$$3x + 2y - 7 = 0$$

Pendiente: $m = -\frac{a}{b} = -\frac{3}{2}$

$Ordenada\ en\ el\ origen = n = -\frac{c}{b} = -\frac{-7}{2} = \frac{7}{2}$

8. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2,3)$ y es paralela a la recta que une los puntos $(4,1)$ y $(-2,2)$.

$$y - y_0 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_0)$$

$$y - 3 = \frac{2 - 1}{-2 - 4}(x + 2)$$

$$y - 3 = \frac{1}{-6}(x + 2)$$
$$-6y + 18 = (x + 2)$$
$$-6y - x + 16 = 0$$
$$x + 6y - 16 = 0$$

9. Una recta pasa por el punto (-1,5) y es paralela a la recta con ecuación 5x – 3y + 7 = 0. ¿Cuál es su ecuación?

Solución:

$y - y_0 = m(x - x_0)$
$y - 5 = m(x + 1)$

$m = \frac{y - 5}{x + 1}$

La pendiente de la recta 5x – 3y +7 = 0 es: $m_2 = -\frac{a}{b} = -\frac{5}{-3} = \frac{5}{3}$

Como $m_1 = m_2$, si las rectas son paralelas, entonces:

$\frac{y - 5}{x + 1} = \frac{5}{3}$

$3(y - 5) = 5(x + 1)$
$3y - 15 = 5x + 5$
$-5x + 3y - 20 = 0$
$5x - 3y + 20 = 0$

10. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (-2,3) y es perpendicular a la recta 2x – 3y +6 = 0.

Solución: Si las rectas son perpendiculares el producto de sus pendientes es igual a -1. O bien, la pendiente de una de ellas es el recíproco con signo contrario de la pendiente de la otra.

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

En la recta $2x - 3y + 6 = 0$, que tiene la forma general $ax + by + c = 0$, la pendiente es:
$-\frac{a}{b} = -(\frac{2}{-3}) = 2/3$. Luego, la pendiente de la recta perpendicular que se busca será: $-\frac{3}{2}$

Sea (x, y) otro punto cualquiera de la recta que pasa por el punto (-2,3) y que tiene una pendiente = -3/2. La solución a este problema se vio en el ejercicio 1 y se puede utilizar su solución 2.

Solución:

1. Partir de la ecuación Punto-Pendiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$
2. Reemplazar en esta ecuación el valor de la pendiente, la ordenada y la abscisa del punto conocido de la recta.
3. Transponer los términos de modo que quede en la forma ax + by + c = 0.

Siguiendo los pasos anteriores: $m = -\frac{3}{2}$; $P\ (-2{,}3)$

1. $y - y_0 = m(x - x_0)$
2. $y - 3 = -\frac{3}{2}(x - (-2))$
3. $y - 3 = -\frac{3}{2}(x + 2)$

   Multiplicando por 2 ambos miembros:

   $2y - 6 = -3(x + 2)$
   $2y - 6 = -3x - 6$
4. $3x + 2y = 0$

11. ¿Cuál es la ecuación de la recta perpendicular que pasa por el punto medio de las intersecciones con los ejes de la recta 2x – 3y +6 = 0?

Solución: Si las rectas son perpendiculares, el producto de sus pendientes es igual a -1. O bien, la pendiente de una de ellas es el recíproco con signo contrario de la pendiente de la otra.

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

En la recta $2x - 3y + 6 = 0$, que tiene la forma general $ax + by + c = 0$, la pendiente es:
$-a/b = -(2/-3) = 2/3$. Luego, la pendiente de la recta perpendicular que se busca será:
$-3/2$.
$2x - 3y + 6 = 0$

$2x - 3y = -6$
$-2x + 3y = 6$
$\frac{-2x}{6} + \frac{3y}{6} = 1$
$-\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 1$

Se recuerda que la *Ecuación de segmentos* es la recta que intersecta a los ejes X e Y en el punto $(a, 0)$ y en el punto $(0, b)$, siendo a la abscisa en el origen y b la ordenada en el origen.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Implica punto de corte en el eje $x = (a, 0) = (-3,0)$ y punto de corte en el eje $y = (0, b) = (0,2)$.

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$M = \left(\frac{-3 + 0}{2}, \frac{0 + 2}{2}\right) = (-\frac{3}{2}, 1)$

$y - y_0 = m(x - x_0)$
$y - 1 = -\frac{3}{2}(x + \frac{3}{2})$
$y - 1 = -\frac{3}{2}[\frac{2x + 3}{2}]$
$y - 1 = \frac{-6x - 9}{4}$
$4y - 4 = -6x - 9$
$4y + 6x + 5 = 0$
$6x + 4y + 5 = 0$ es la recta perpendicular buscada. En efecto, se recuerda que en esta recta la pendiente es: $m = \frac{-a}{b} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$. El producto de ambas pendientes debe ser -1. En efecto:

$$m_1 m_2 = -1$$
$$\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2}\right) = -1$$

12. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (4,1) y es perpendicular a la recta 3x – 4y +8 = 0.

Solución: Si las rectas son perpendiculares el producto de sus pendientes es igual a -1. O bien, la pendiente de una de ellas es el recíproco con signo contrario de la pendiente de la otra.

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

En la recta 3x – 4y +8 = 0, que tiene la forma general $ax + by + c = 0$, la pendiente es:
–a/b = -(3/-4) = 3/4. Luego, la pendiente de la recta perpendicular que se busca será: -4/3.

Sea (x, y) otro punto cualquiera de la recta que pasa por el punto (4,1) y que tiene una pendiente = -4/3. La solución a este problema se vio en el ejercicio 1 y se puede utilizar su solución 2.

Solución:

1. Partir de la ecuación Punto-Pendiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$
2. Reemplazar en esta ecuación el valor de la pendiente, la ordenada y la abscisa del punto conocido de la recta.
3. Transponer los términos de modo que quede en la forma $ax + by + c = 0$.

Siguiendo los pasos anteriores: m = 4/3; P (4,1)

1. $y - y_0 = m(x - x_0)$
2. y –1 = -4/3(x – 4) multiplicando por 3 ambos miembros:
   3y - 3 = -4(x - 4),
   3y – 3 = -4x + 16
3. 4x + 3y - 19= 0

13. Señalar si las rectas siguientes son perpendiculares: L_1 = 3x + 5y -2 = 0 y L_2 = 5x – 3y +8 = 0

Solución: Si las rectas son perpendiculares el producto de sus pendientes debe ser igual a -1.

$$m_1 = -\frac{a}{b} = -\frac{3}{5}$$
$$m_2 = -\frac{a}{b} = -\frac{5}{-3} = \frac{5}{3}$$

$(m_1)(m_2) = \left(-\frac{3}{5}\right) * \left(\frac{5}{3}\right) = -1 \Rightarrow$ L_1 es perpendicular a L_2.

14. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (2,7) y es perpendicular a la recta x – 4y +7 = 0.

Solución: Si las rectas son perpendiculares el producto de sus pendientes es igual a -1. O bien, la pendiente de una de ellas es el recíproco con signo contrario de la pendiente de la otra.

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

En la recta x – 4y +7 = 0, que tiene la forma general ax +by + c = 0, la pendiente es: –a/b = -(1/-4)= 1/4. Luego, la pendiente de la recta perpendicular que se busca será: -4.

Sea (x , y) otro punto cualquiera de la recta que pasa por el punto (2,7) y que tiene una pendiente = -4.

Solución alternativa a las de problemas anteriores:

$m_1 = -4; P(2,7)$

$m_2 = \frac{1}{4}$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$\frac{y - y_0}{(x - x_0)} = m$

$\frac{y - 7}{x + 2} = m_1$

$\frac{1}{4} = m_2$

$m_1 \cdot m_2 = -1$

$\frac{y - 7}{x + 2} \cdot \frac{1}{4} = -1$

Resolviendo se llega a: $4x + y + 1 = 0$.

De otra manera:

$y = mx + n$

$y = -4x + n$
$7 = -4(-2) + n$
$n = -1$
$y = -4x + (-1)$
$4x + y + 1 = 0$

15. Hallar la recta perpendicular a 2x + 3y – 7 = 0 que pasa por la intersección de las rectas $x + y - 7 = 0$ y $2x - 3y + 1 = 0$.

Solución:

El punto de intersección de las rectas x + y – 7= 0 y 2x – 3y + 1 = 0 se obtiene resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

x + y – 7= 0
2x – 3y + 1 = 0

2x + 2y – 14 = 0 después de multiplicar por 2 ambos miembros de la primera ecuación
2x – 3y + 1 = 0

5y – 15 = 0
y = 3

Reemplazando y = 3 en x + y -7 = 0, se obtiene x = 4. Por lo tanto, el punto de intersección de las dos rectas es (4, 3).

La pendiente de la recta 2x + 3y -7 = 0, es: m = -a/b = -2/3, por lo que la pendiente de la recta que se busca es su valor recíproco con signo contrario, es decir, 3/2.

$y = mx + n$
$y = \frac{3}{2}x + n$
$3 = \frac{3}{2}(4) + n$
$3 = 6 + n$
$n = -3$

$y = \frac{3}{2}x - 3$

$2y = 3x - 6$
$-3x + 2y + 6 = 0$
$3x - 2y - 6 = 0$

16. Hallar la ecuación de la recta cuya abscisa y ordenada en el origen son 5 y -3, respectivamente.

Solución: Aplicando la ecuación de segmentos: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Donde la recta corta el eje de las abscisas en el punto (a ,0) = (5,0) y corta al eje de las ordenadas en el punto (0, b) = (0, -3).

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{-3} = 1$$

multiplicando por 15 ambos miembros y ordenando como una ecuación general:

3x – 5y -15 = 0

17. Demostrar que el triángulo con vértices en los puntos A(2,8), B(0,3) y C(7,6) es isósceles.

Solución: Un triángulo isósceles tiene dos lados iguales, por lo que hay que calcular las distancias AB; BC y AC y ver si dos de ellas son iguales.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$d_{AB} = \sqrt{(0-2)^2 + (3-8)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$$
$$d_{BC} = \sqrt{(7-0)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$$
$$d_{AC} = \sqrt{(7-2)^2 + (6-8)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$$

Como $d_{AB} = d_{AC}$, el triángulo ABC es isósceles.

18. Demostrar que el cuadrilátero con vértices en los puntos $A(1{,}2), B(4{,}4)\ , C(5{,}9)\ y\ D(2{,}7)$ es un paralelogramo.

Solución: Una propiedad de los paralelogramos es que sus diagonales se dimidian mutuamente (se intersectan en el punto medio de cada una). Entonces, bastará probar que las dos diagonales tienen el mismo punto medio.

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

El punto medio de la diagonal AC =

$$M = \left(\frac{1+5}{2}, \frac{2+9}{2}\right) = (3, \frac{11}{2})$$

El punto medio de la diagonal BD =

$$M = \left(\frac{4+2}{2}, \frac{4+7}{2}\right) = (3, \frac{11}{2})$$

Como los puntos medios de las diagonales coinciden, el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.
JSA. Ecuaciones de la recta.docx