UNIDAD 3. INTERÉS COMPUESTO Y EQUIVALENCIA DE TASAS

Interés compuesto y equivalencia de tasas

Tabla de contenido

Introducción

La otra forma de realizar operaciones financieras es a interés compuesto, bien sea a tasa nominal o tasa efectiva, en forma vencida o anticipada. Esta unidad mostrará al estudiante cómo resolver problemas de interés compuesto en cualquiera de las formas en que se presente.

Objetivos

Objetivo general

Resolver e interpretar problemas que involucren el interés compuesto, tanto a tasa efectiva como a tasa nominal.

Objetivos específicos

- Comprender qué es el interés compuesto.
- Deducir y aplicar las fórmulas propias del compuesto.
- Resolver problemas de valor presente, valor futuro, tiempo y tasas de interés a interés compuesto.
- Entender qué significa trabajar con tasa nominal o con tasa efectiva.
- Comprender la equivalencia entre la tasa nominal y la tasa efectiva.
- Hallar tasas efectivas a partir de tasas nominales y viceversa, sean ellas vencidas o anticipadas.
- Resolver problemas de interés compuesto a tasa nominal o efectiva, vencida o anticipada.
- Hallar ecuaciones de valor a interés compuesto.

3.1 Interés compuesto

En la unidad anterior se manejaron las operaciones financieras cuando los intereses se calculan solamente sobre el capital, pero en esta unidad se verá la forma de realizar las operaciones financieras cuando el interés se liquida sobre el capital más los intereses, es decir, a interés compuesto.

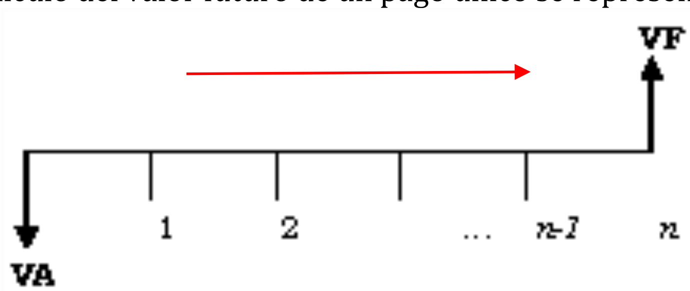
Teniendo claro el concepto, se procederá ahora a calcular, tanto el valor futuro como el valor presente a interés compuesto pago único.

Cálculo del valor futuro

La simbología que se maneja para calcular el valor futuro es:

VF= Valor futuro
VA= Valor presente
n= tiempo
í= tasa de interés

Gráficamente el cálculo del valor futuro de un pago único se representa así:



La fórmula que se utiliza para el cálculo del valor futuro pago único es:

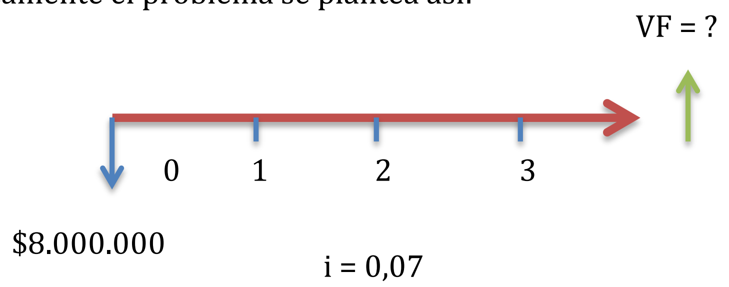
$$\boldsymbol{VF = VA(1+i)^n}$$

Ejemplo

Manuel invierte hoy $8.000.000 en una cuenta que paga el 7% compuesto anual, ¿qué cantidad podrá retirar dentro de 4 años?

El problema plantea la necesidad de hallar el valor futuro porque la persona invierte hoy y espera retirar el dinero dentro de 4 años. Es a interés compuesto porque así lo expresa el problema.

Gráficamente el problema se plantea así:



Los datos que el problema entrega son:

VA = $8.000.000 i = 0,07 compuesto anual n = 4 años VF = ¿?

La fórmula que debe usarse es:

$$VF = VA(1+i)^n$$

Reemplazando los valores en la fórmula, se tiene:

$$VF = 8.000.000(1+0{,}07)^4$$
$$VF = 8.000.000(1{,}07)^4$$
$$VF = 8.000.000x1{,}031079601$$
$$VF = 10.486.368{,}1$$

La respuesta muestra que Manuel, a los cuatro años, podrá retirar $10.486.368,10.

Es de capital importancia que las cifras se manejen con todos los decimales que la calculadora permita y la respuesta se dé con máximo dos decimales.

NOTA: Para resolver las operaciones financieras a interés compuesto, éstas deben expresar que ese es el tipo de interés con el cual operan.

A continuación se presenta la forma de calcular, tanto el tiempo como la tasa de interés a partir de valor futuro.

Cálculo del tiempo a partir de valor futuro

En ocasiones lo que se requiere es encontrar el tiempo en el cual se debe tener invertida una cantidad A de dinero, a una determinada tasa de interés para poder retirar en el futuro una cantidad B. Para efectos de no confundir al lector, la cantidad A será el valor presente y la cantidad B el valor futuro. Para poder encontrar eses tiempo, se toma como punto de partida la ecuación utilizada para hallar el valor futuro y se va despejando ésta hasta llegar a la fórmula que permite calcular el tiempo a partir de valor futuro.

A continuación se presenta el proceso que ha de seguirse:

$$VF = VA(1+i)^n,$$

Luego se procede a despejar n así:

$$VF = VA(1+i)^n$$

$$\frac{VF}{VA} = (1+i)^n$$

Como lo que se desea despejar es la n, se debe aplicar logaritmo y más específicamente el de una potencia. Se puede trabajar con logaritmo en base 10 o logaritmo en base e. Aquí se trabajará con logaritmo en base 10.

$$\log\left[\frac{VF}{VA}\right] = \log\left[(1+i)^n\right]$$

$$\log\left[\frac{VF}{VA}\right] = n\log(1+i)$$

$$\frac{\log\left[\frac{VF}{VA}\right]}{\log(1+i)} = n$$

$$ordenando:$$

$$n = \frac{\log\left[\frac{VF}{VA}\right]}{\log(1+i)}$$

Ejemplo

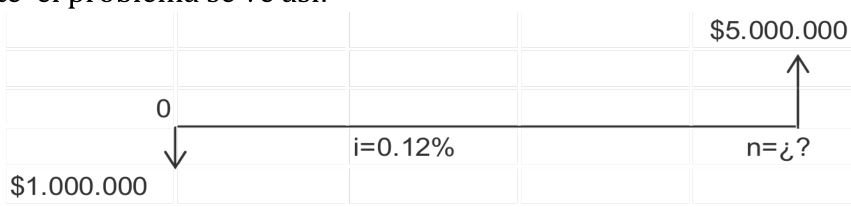
Sara tiene $1.000.000 y quiere quintuplicarlos. Si la tasa de interés que le pagan es del 12% compuesto anual, ¿en qué tiempo lo conseguirá?

Este es un caso típico de cálculo del tiempo a partir de valor futuro. ¿Por qué?

A continuación los elementos del problema:

1. Tiene hoy $1.000.000
2. Quiere quintuplicarlos, es decir, convertirlos en $5.000.000.
3. La tasa de interés que le pagan para conseguirlo es el 12% compuesto anual.

Gráficamente el problema se ve así:



Según este gráfico, el problema entrega los siguientes datos:

VA = $1.000.000 VF = $5.000.000 i = 12% compuesto anual n= ¿?

Reemplazándolos en la fórmula:

$$n = \frac{\log\left[\frac{VF}{VA}\right]}{\log(1+i)}$$

$$n = \frac{\log\left[\frac{5.000.000}{1.000.000}\right]}{\log(1+0{,}12)}$$

Dado que el numerador es el logaritmo de una división, la fórmula se convierte en:

$$n = \frac{\log 5.000.000 - \log 1.000.000}{\log 1{,}12}$$

$$n = \frac{6.698970004 - 6}{0{,}04921802267}$$

$$n = \frac{0{,}698970004}{0{,}04921802267}$$

$$n = 14{,}20150518$$

Sara tardará 14,20 años en acumular \$5.000.000 a partir de \$1.000.000, a una tasa del 12% compuesto anual.

Resolviéndolo con el logaritmo en base e, el problema quedaría:

$$n = \frac{\ln\left[\frac{VF}{VA}\right]}{\ln(1+i))}$$

$$n = \frac{\ln\left[\frac{5.000.000}{1.000.000}\right]}{\ln(1+0{,}12)}$$

$$n = \frac{\ln 5.000.000 - \ln 1.000.000}{\ln 1{,}12}$$

$$n = \frac{15.42494847 - 13.81551056}{0{,}1133286853}$$

$$n = \frac{1.60943791}{0{,}1133286853} = 14.20150517$$

Se obtiene la misma respuesta.

Cálculo de la tasa de interés a partir de valor futuro

Al igual que con el tiempo, en ocasiones lo que se debe encontrar es la tasa de interés que permitirá acumular una cierta cantidad (VF), a partir de una cantidad inicial (VA), a una determinada tasa de interés compuesto. En este caso, se está hallando la tasa de interés a partir de valor futuro. Para hacerlo, se parte nuevamente de la fórmula para el cálculo del valor futuro y se llega a la que permite encontrar la tasa de interés, así:

$$VF = VA(1+i)^n$$

$$\frac{VF}{VA} = (1+i)^n$$

Como lo que se desea hallar es "i", se debe aplicar radical a los dos lados de la igualdad así:

$$\sqrt[n]{\frac{VF}{VA}} = \sqrt[n]{(1+i)^n}$$

$$\sqrt[n]{\frac{VF}{VA}} = (1+i)$$

$$\left(\sqrt[n]{\frac{VF}{VA}}\right) - 1 = i$$

$$Ordenando:$$

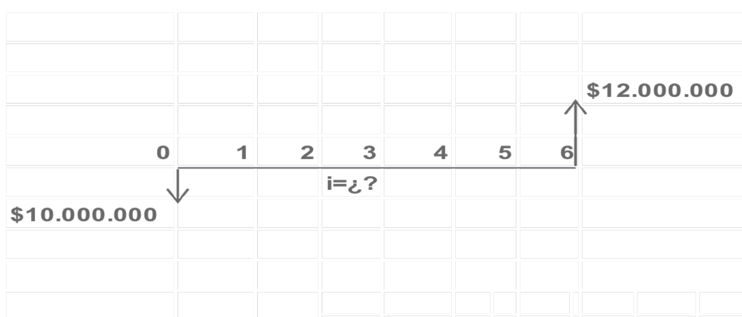
$$i = \left(\sqrt[n]{\frac{VF}{VA}}\right) - 1$$

Ejemplo

La empresa de comestibles, El Cerdito Feliz, quiere saber a qué tasa de interés compuesto puede colocar sus excedentes de tesorería que ascienden a \$10.000.000, para que en 6 meses se le conviertan en \$12.000.000.

El problema es claro, pues pide hallar la tasa de interés a partir de valor futuro, por cuanto colocará \$10.000.000 y quiere retirar, a los 6 meses, \$12.000.000.

Gráficamente, el problema se ve así:



Los datos del problema son:

VA= \$10.000.000 VF=\$12.000.000 n = 6 meses i= ¿?

Aplicando la fórmula se obtiene:

$$i = \left(\sqrt[n]{\frac{VF}{VA}}\right) - 1$$

$$i = \left(\sqrt[6]{\frac{12.000.000}{10.000000}}\right) - 1$$

$$i = \left(\sqrt[6]{1.2}\right) - 1$$

$$i = 1.030853321 - 1$$

$$i = 0{,}031$$

$$i = 3{,}1\% mensual.$$

La empresa debe colocar los $10.000.000 en una cuenta que le pague el 3,1% mensual, si quiere retirar a los 6 meses $12.000.000.

NOTA: Si el tiempo está en meses la tasa de interés es mensual; si el tiempo está en años la tasa de interés es anual.

3.2 Cálculo de valor presente – pago único

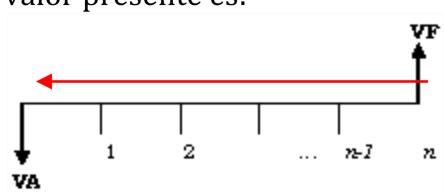
La otra expresión del valor del dinero en el tiempo es el valor presente, es decir, si se conoce cuánto se va a acumular o pagar en un determinado periodo de tiempo a una tasa de interés, se puede encontrar el valor inicial.

La simbología a utilizar, en este caso, es la misma usada en el caso del cálculo del valor futuro, así:

VF= Valor futuro
VA= Valor presente
n= tiempo
í= tasa de interés

Tasa nominal

Gráficamente el cálculo del valor presente es:



La fórmula a utilizar para el cálculo es:

$$VA = VF(1+i)^{-n}$$

Ejemplo

Jaime quiere comprar una casa y le ofrecen las siguientes alternativas: Comprarla de contado por $120.000.000 o pagarla dentro de 30 años por $350.000.000 con un interés del 4,8% compuesto anual. ¿Qué le conviene más?

Este es el típico caso de cálculo de valor presente. Para poder comparar las alternativas, éstas deben colocarse a valor presente. A la primera alternativa no se le hace nada porque el pago de contado se entiende como si fuera hoy.

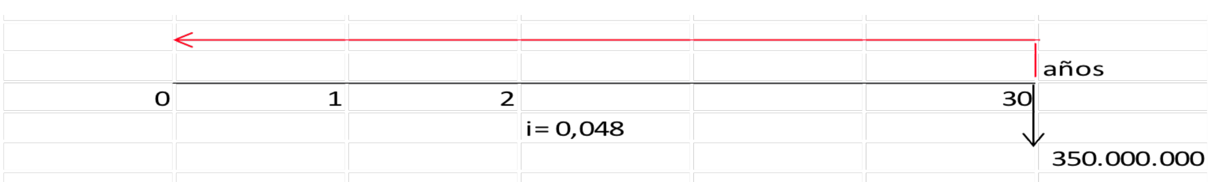
La segunda alternativa sí debe ser traída a valor presente así:

$$VA = VF(1+i)^{-n}$$

Dónde:

Va= ¿?
VF= $350.000.000
n = 30 años
i= 4,8% compuesto anual

Gráficamente se ve así:



Reemplazándolo en la fórmula, resulta:

$$VA = 350.000.000(1+0{,}048)^{-30}$$
$$VA = 350.000.000x1{,}048^{-30}$$
$$VA = 350.000.000x0{,}2449974254$$
$$VA = 85.749.098{,}90$$

Dado que este valor es menor hoy que los $120.000.000 de la primera alternativa, lo mejor que puede hacer Jaime es comprarla para pagarla dentro de 30 años por $350.000.000.

Cálculo del tiempo a partir de valor presente

En ocasiones lo que se requiere es encontrar el tiempo en el cual se tuvo invertida o fue hecho un préstamo de una cantidad A de dinero a una determinada tasa de interés para poder retirar en el futuro o pagar una cantidad B. Para efectos de no confundir al lector, la cantidad A será el valor presente y la cantidad B el valor futuro. Para poder encontrar ese tiempo, se toma como punto de partida la ecuación utilizada para hallar el valor presente y se va despejando ésta hasta llegar a la fórmula que permite calcular el tiempo a partir de valor presente.

A continuación se presenta el proceso que ha de seguirse:

$$VA = VF(1+i)^{-n},$$

$$\log\left[\frac{VA}{VF}\right] = \log\left[(1+i)^{-n}\right]$$

$$\log\left[\frac{VA}{VF}\right] = -n\log(1+i)$$

$$\frac{\log\left[\frac{VA}{VF}\right]}{\log(1+i)} = -n$$

$$ordenando:$$

$$-n = \frac{\log\left[\frac{VA}{VF}\right]}{\log(1+i)}$$

Ejemplo

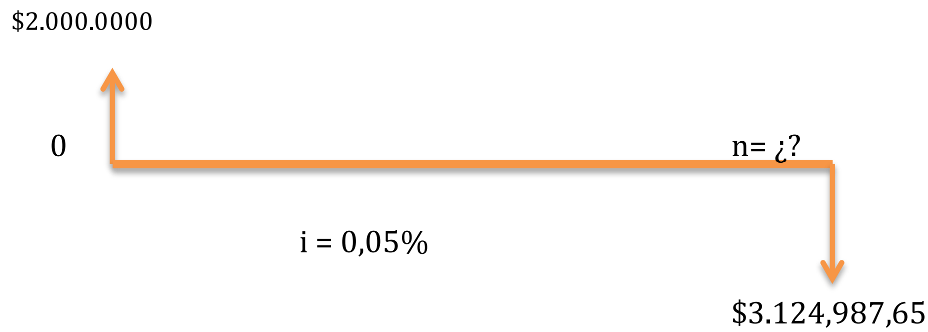
A Mateo, el Banco XXX le prestó $2.000.000 a una tasa del 5% compuesto anual. Sabe que transcurrido el tiempo estipulado, él tendrá que cancelar $3.124.987,56. ¿De qué tiempo se está hablando?

Este es un caso típico de cálculo de tiempo a partir de valor presente ¿Por qué?

Consulte los elementos del problema:

1. Mateo tiene un préstamo de $2.000.000
2. Sabe que debe pagar $ 3.124.987,56
3. La tasa de interés que le cobran es el 5% compuesto anual.

Gráficamente el problema se ve así:



Según este gráfico, el problema entrega los siguientes datos:

VA = $2.000.000 VF = $3.124.987,56 i = 5% compuesto anual n= ¿?
Reemplazándolos en la fórmula:

$$-n = \frac{\log\left[\frac{VA}{VF}\right]}{\log(1+i))}$$

$$-n = \frac{\log\left[\frac{2.000.000}{3.124.987{,}56}\right]}{\log(1+0{,}05)}$$

Dado que el numerador es el logaritmo de una división, la fórmula se convierte en:

$$-n = \frac{\log 2.000.000 - \log 3.124.987{,}56}{\log 1{,}05}$$

$$-n = \frac{6.301029996 - 6.494848293}{0{,}02118929907}$$

$$-n = \frac{-0{,}1938182972}{0{,}02118929907}$$

$$-n = -9{,}146989552$$

Dado que - n = -9,146989552, por la ley de los signos n = 9,146989552

Mateo se demorará 9,15 años en cancelar la deuda de $2.000.000 por 3.124.987,56 a una tasa del 5% compuesta anual.

Resolviéndolo con el logaritmo en base e, el problema quedaría:

$$-n=\frac{\ln\left[\frac{VA}{VF}\right]}{\ln(1+i))}$$

$$-n=\frac{\ln\left[\frac{2.000.000}{3.124.987,56}\right]}{\ln(1+0,05)}$$

$$-n=\frac{\ln 2.000.000-\ln 3.124.987,56}{\ln 1,05}$$

$$-n=\frac{14,50865774-14,95494086}{0,04879016417}$$

$$-n=\frac{1.60943791}{0,1133286853}=9,14698955$$

Se obtiene la misma respuesta.

Cálculo de la tasa de interés a partir de valor presente

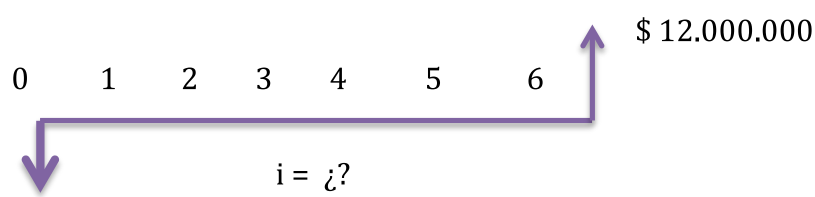
Al igual que con el tiempo, en ocasiones lo que se debe encontrar es la tasa de interés que permitirá pagar una deuda o permitió acumular una cierta cantidad (VF) a partir de una cantidad inicial (VA), a una determinada tasa de interés compuesto. En este caso, se está hallando la tasa de interés a partir de valor presente. Para hacerlo, se parte nuevamente de la fórmula para el cálculo de valor presente y se llega a la que permite encontrar la tasa de interés.

Ejemplo

La empresa de comestibles, El Cerdito Feliz, quiere saber a qué tasa de interés compuesto puede colocar sus excedentes de tesorería que ascienden a $10.000.000, para que en 6 meses se le conviertan en $12.000.000.

El problema es claro, pues pide hallar la tasa de interés a partir de valor futuro, por cuanto colocará $10.000.000 y quiere retirar a los 6 meses $12.000.000.

Gráficamente el problema se ve así:



Los datos del problema son:

VA= $10.000.000 VF=$12.000.000 n = 6 meses i= ¿?

Aplicando la fórmula se obtiene:

$$i = \left(\sqrt[n]{\frac{VF}{VA}}\right) - 1$$

$$i = \left(\sqrt[6]{\frac{12.000.000}{10.000000}}\right) - 1$$

$$i = \left(\sqrt[6]{1.2}\right) - 1$$

$$i = 1.030853321 - 1$$

$$i = 0{,}031$$

$$i = 3{,}1\%\,mensual.$$

La empresa debe colocar los $10.000.000 en una cuenta que le pague el 3,1% mensual si quiere retirar a los 6 meses $12.000.000.

Nota: Si el tiempo está en meses la tasa de interés es mensual, si el tiempo está en años la tasa de interés es anual.

3.3 Tasa de interés nominal y efectiva

Las operaciones financieras se realizan utilizando dos tipos de tasa de interés, unas nominales y otras efectivas. A su vez, éstas pueden ser anticipadas o vencidas. En este aparte, se trabaja la forma de convertir tasas nominales a efectivas y tasas efectivas a nominales, y de tasas anticipadas a vencidas y viceversa.

Tasa de interés nominal

Es una tasa de referencia que existe sólo de nombre, pues no determina la verdadera tasa de interés que se cobra en la operación financiera. Esta tasa de interés está afectada por los periodos de capitalización de los intereses, los cuales pueden ser: Mensual, bimestral trimestral, cuatrimestral, semestral.

Los periodos de capitalización se reconocen con la letra m y el número de periodos de capitalización, según la modalidad son:

m= 12 si la capitalización es mensual (cada mes).
m= 6 si la capitalización es bimestral (cada bimestre).

m= 4 si la capitalización es trimestral (cada 3 meses).
m= 3 si la capitalización es cuatrimestral (cada 4 meses).
m= 2 si la capitalización es semestral (cada 6 meses).

Cuando en una negociación se dice, por ejemplo, al 12% con capitalización mensual, la operación se está planteando a una tasa nominal de interés del 12% anual, con liquidación de intereses mensual.

Tasa de interés efectiva

Es la tasa de interés que realmente se reconoce en una operación financiera. El Decreto No. 1229 de 1972, de la legislación colombiana, define la tasa efectiva de interés como aquella que, *"aplicada con periodicidad diferente a un año de acuerdo con las fórmulas de interés compuesto, produce exactamente el mismo resultado que la tasa anual".*

3.4 Equivalencia entre tasas

Se dice que dos tasas son equivalentes cuando, al partir de una cantidad inicial de dinero una vez transcurrido el mismo tiempo, producen un valor futuro o presente igual.

Sea cual sea la forma en la cual se pacte la negociación, los dos tipos de tasas son equivalentes, esto significa que para la tasa nominal existe una tasa efectiva equivalente y viceversa. La equivalencia entre tasas se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$(1+i) = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm}$$

Dónde:

í= tasa efectiva
j= tasa nominal
m= período de capitalización en el año
n= número de años

A continuación se verá la forma de convertir tasas de interés.

3.4.1 Conversión de tasa de interés nominal a efectiva

Partiendo de la ecuación de equivalencia entre tasas, se puede convertir una tasa nominal en una tasa efectiva, así:

$$(1+i)=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm}$$

$$i=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nxm}-1$$

Ejemplo

Convertir el 12% con capitalización mensual en la tasa efectiva anual. En este caso:

j= 12%
m=12
n=1

Utilizando la fórmula que permite convertir la tasa nominal en tasa efectiva, se tiene:

$$i=\left(1+\frac{0{,}12}{12}\right)^{1x12}-1$$

$$i=(1+0{,}01)^{12}-1$$

$$i=1{,}01^{12}-1$$

$$i=1{,}1268-1$$

$$i=0{,}1268$$

$$i=12{,}68\%$$

Es decir, una tasa del 12% con capitalización mensual es equivalente al 12,68% de interés efectiva anual.

Ejemplo

Convertir el 12% con capitalización trimestral en la tasa efectiva anual. En este caso:

j= 12%
m=4
n=1

Utilizando la fórmula que permite convertir la tasa nominal en tasa efectiva, se tiene:

$$i = \left(1 + \frac{0{,}12}{4}\right)^{1x4} - 1$$
$$i = (1 + 0{,}03)^4 - 1$$
$$i = 1{,}03^4 - 1$$
$$i = 1{,}1255 - 1$$
$$i = 0{,}1255$$
$$i = 12{,}55\%$$

Es decir, que el 12% con capitalización cuatrimestral es equivalente al 12,55% efectiva anual.

3.4.2 Conversión de tasa de interés efectiva a nominal

Partiendo de la ecuación de equivalencia entre tasas, se puede convertir una tasa efectiva en una tasa nominal, así:

$$(1 + i) = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nxm}$$
$$j = \left\{\left[\sqrt[1xm]{1 + i} - 1\right]xm\right\}x100$$

Ejemplo

Convertir el 15% efectivo anual en la tasa nominal con capitalización bimestral equivalente. En este caso:

í= 15%
m=6
n=1

Utilizando la fórmula que permite convertir la tasa efectiva en tasa nominal, se tiene:

$$j = \left[\sqrt[1x6]{1+0,15}-1\right]x6$$
$$j = \left[\sqrt[6]{1,15}-1\right]x6$$
$$j = \left[1,023567073-1\right]x6$$
$$j = 0,023567073x6$$
$$j = 0,1414$$
$$j = 14,14\%$$

Una tasa del 15% efectiva anual es equivalente a una tasa del 14,14% con capitalización bimestral.

Ejemplo

Convertir el 15% efectivo anual en la tasa nominal con capitalización semestral equivalente. En este caso:

í= 15%
m=2
n=1

Utilizando la fórmula que permite convertir la tasa efectiva en tasa nominal, se tiene:

$$j = \left[\sqrt[1x2]{1+0,15}-1\right]x2$$
$$j = \left[\sqrt[2]{1,15}-1\right]x2$$
$$j = \left[1,072380529-1\right]x2$$
$$j = 0,072380529x2$$
$$j = 0,1448$$
$$j = 14,48\%$$

Una tasa del 15% efectiva anual es equivalente a una tasa del 14,48% con capitalización semestral.

3.5 Conversión de tasa de interés de anticipada a vencida y viceversa

Las tasas de interés nominales o efectivas pueden ser canceladas en forma anticipada o vencida. Se denomina tasa de interés anticipada a aquella que se cancela al inicio del periodo de pago y vencida a aquella que se cancela al final del período de pago. Al igual que en las tasas nominales y efectivas, se pueden hallar las equivalencias entre tasas anticipadas y tasas vencidas.

Simbología:

i_a= tasa anticipada
i_v= tasa vencida.

3.5.1 Conversión de tasa de interés anticipada a vencida

Para convertir una tasa anticipada a vencida se utiliza la siguiente fórmula:

$$i_v = \frac{i_a}{(1 - i_a)} x100$$

Ejemplo

Convertir el 12% anticipado anual a una tasa vencida anual.
$Í_a$= 12%
Utilizando la fórmula que permite convertir la tasa anticipada a tasa vencida, se tiene:

$$i_v = \frac{i_a}{(1 - i_a)} x100$$

$$i_v = \frac{0{,}12}{(1 - 0{,}12)} x100$$

$$i_v = \frac{0{,}12}{0{,}88} x100$$

$$i_v = 0{,}13{,}6363 x100$$

$$i_v = 13{,}64\%$$

Una tasa del 12% anticipada es equivalente a un tasa del 13,64% vencida.

3.5.2 Conversión de tasa de interés vencida a anticipada

Para convertir una tasa vencida a una tasa anticipada se utiliza la siguiente fórmula:

$$i_a = \frac{i_V}{(1 + i_V)} x100$$

Ejemplo

Convertir el 12% anticipado anual a una tasa vencida anual.

ÍV= 12%

Utilizando la fórmula que permite convertir la tasa vencida a tasa anticipada, se tiene:

$$i_a = \frac{i_V}{(1+i_v)} x100$$

$$i_a = \frac{0{,}12}{(1+0{,}12)}$$

$$i_a \frac{0{,}12}{1{,}12} x100$$

$$i_a = 0{,}10714$$

$$i_a = 10{,}71\%$$

Una tasa del 12% vencida anual es equivalente a un tasa del 10,74% anticipada anual.

De igual forma, se puede convertir una tasa efectiva vencida a una tasa nominal anticipada o viceversa.

Ejemplo

Hallar la tasa efectiva anual anticipada equivalente a una tasa del 14% con capitalización mensual.

Se halla la tasa efectiva anual equivalente al 14% con capitalización mensual.

$$i = \left(1 + \frac{0{,}14}{12}\right)^{1x12} - 1$$

$$i = (1 + 0{,}01166666)^{12} - 1$$

$$i = 1{,}0{,}01166666^{12} - 1$$

$$i = 1{,}1493 - 1$$

$$i = 0{,}1493$$

$$i = 14.93\%$$

Se halla la tasa efectiva anticipada equivalente.

$$i_a = \frac{i_V}{(1+i_v)}x100$$

$$i_a = \frac{0{,}1493}{(1+0{,}1493)}x100$$

$$i_a \frac{0{,}14{,}93}{1{,}1493}x100$$

$$i_a = 0{,}1299$$

$$i_a = 12{,}99\%$$

Ejemplo

Hallar la tasa con capitalización trimestral vencida, equivalente a una tasa efectiva del 18% anual anticipada.
Primero se halla la tasa nominal con capitalización trimestral anticipada equivalente:

$$ja = \left[\sqrt[1x4]{1+0{,}18} - 1\right]x4$$

$$j_a = \left[\sqrt[4]{1{,}18} - 1\right]x4$$

$$j_a = [1{,}042246635 - 1]x4$$

$$j_a = 0{,}042246635x4$$

$$j_a = 0{,}1689$$

$$j_a = 14{,}48\%$$

Ahora se halla la tasa nominal vencida:

$$j_v = \frac{i_a}{(1-i_a)}x100$$

$$j_v = \frac{0{,}1448}{(1-0{,}1448)}x100$$

$$j_v = \frac{0{,}1448}{0{,}8552}x100$$

$$j_v = 0{,}1693x100$$

$$j_v = 16{,}93\%$$

Para saber el valor trimestral se divide la tasa nominal vencida entre los periodos de capitalización, es decir:

$$j/m = {0{,}1493}/{4} = 0{,}0423\%$$

3.6 Aplicación a pagos únicos

Se denomina pago único a aquella cantidad de dinero que sólo se invierte o presta por una vez y sobre el cual se generan o pagan intereses a una tasa de interés que puede ser nominal o efectiva.

Ya se sabe que existe una equivalencia entre este tipo de tasas, por tanto, en este aparte se verá la forma en la cual esta equivalencia se hace presente. Cabe resaltar que para poder saber con qué tipo de interés se está trabajando, es necesario que la operación financiera sea planteada en forma clara, es decir, debe señalar si ella se realizará con una tasa efectiva o, por el contrario, a una tasa con capitalización.

En los siguientes ejemplos se mostrará la forma en la cual se plantean las operaciones financieras, utilizando, tanto tasas efectivas como tasas nominales, tasas anticipadas y tasas vencidas.

Ejemplo

Camila quiere saber qué cantidad podrá retirar dentro de 5 años, si invierte hoy $600.000 en una cuenta que paga el 3% efectivo trimestral.

Se trata de hallar el valor futuro de un pago único tasa efectiva.

Según lo que se vio en el cálculo del valor futuro, la fórmula a utilizar es:

$$VF = VA(1+i)^n$$

Cuando se trabaja a interés efectivo, esta es la fórmula que se emplea.

Identificando cada término de la fórmula se tiene:

VA = \$600.00
i= 3% efectiva trimestral
n= 5 años que, convertidos en trimestres, serán: 5x4 = 20 trimestres.

Reemplazando los datos en la fórmula, se tiene:

$$VF = 600.000(1+0{,}03)^{20}$$
$$VF = 600.000(1{,}03)^{20}$$
$$VF = 600.000x1{,}800611123$$
$$VF = 1.083.666{,}74$$

Camila podrá retirar dentro de 5 años $1.083.666,74

Ejemplo

Camila quiere saber qué cantidad podrá retirar dentro de 5 años, si invierte hoy $600.000 en una cuenta que paga el 3% con capitalización trimestral.

Se trata de hallar el valor futuro de un pago único tasa nominal.

Según lo que se vio en el cálculo del valor futuro, la fórmula a utilizar es:

$$VF = VA(1+i)^{n}$$

Pero como es tasa nominal, ya se sabe que $(1+i) = \left(1+\frac{J}{m}\right)^{nxm}$

Reemplazándola en la fórmula original queda:

$$VF = VA\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nnx}$$

Identificando cada término de la fórmula, se tiene:

$VA = \$600.00$
j= 3% con capitalización trimestral
n= 5 años
m= 4 (número de trimestres en 1 año).

Reemplazando los datos en la fórmula, se tiene:

$$VF = 600.000\left(1 + \frac{0,03}{4}\right)^{5x4}$$
$$VF = 600.000 + (1 + 0,0075)^{20}$$
$$VF = 600.000x11,16118414$$
$$VF = 696.710,48$$

Camila podrá retirar dentro de 5 años $ 696.710,48

Si se comparan los resultados de los dos ejemplos anteriores, se ve claramente que no es lo mismo hablar de 3% efectivo trimestral que 3% con capitalización trimestral.

Ejemplo

¿Qué cantidad le prestaron a Santiago para que a los 3 años la cancelara por $ 2.456.789.56, a una tasa del 6% efectiva anual?

Se trata de hallar el valor presente de un pago único a tasa efectiva.

En el aparte sobre cálculo del valor presente se vio que la fórmula a utilizar para calcular el valor presente es:

$$VA = VF(1 + i)^{-n}$$

Al igual que en el caso del valor futuro, ésta es la fórmula que se debe emplear si la tasa es efectiva. Identificando los términos del problema se tiene:

VF=$2.456.789,56
i= 6% efectiva anual
n = 3 años.

Reemplazándolos en la fórmula, se tiene:

$$VA = 2.456,789,56(1 + 0,06)^{-6}$$
$$VA = 2.456.789,56x(1,06)^{-6}$$
$$VA = 2.456.789.56x0,70496054$$
$$VA = 1.731.939,7$$

El valor del préstamo fue de $1.731.939,7

Ejemplo

¿Qué cantidad le prestaron a Santiago para que a los 3 años la cancelara por $ 2.456.789.56, a una tasa del 6% con capitalización bimestral?

Se trata de hallar el valor presente de un pago único a tasa nominal.

En el aparte sobre cálculo del valor presente se vio que la fórmula a utilizar para calcular el valor presente es:

$$VA = VF(1+i)^{-n}$$

Al igual que en el caso del valor futuro y sabiendo que las tasas nominales y efectivas son equivalentes, la fórmula que se debe emplear es:

$$VA = VF\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nxm}$$

Identificando los términos del problema se tiene:

VF=$2.456.789,56
j= 6% con capitalización bimestral
n = 3 años
m = 6 (número de bimestres que tiene el año)

Reemplazándolos en la fórmula, se tiene:

$$VA = 2.456{,}789{,}56\left(1+\frac{0{,}06}{6}\right)^{-(3x6)}$$
$$VA = 2.456.789{,}56x(1{,}01)^{-36}$$
$$VA = 2.456.789.56x0{,}90204524$$
$$VA = 1.717.111{,}52$$

El valor del préstamo fue de $.1.717.111,52

Si se comparan los dos últimos ejemplos, se ve que no es lo mismo trabajar con tasa efectiva que con tasa nominal.

Ejemplo

¿En cuántos semestres se podrán acumular $4.000.000 a partir de $2.600.000, a una tasa del 4% con capitalización semestral?

Se sabe que es cálculo del tiempo a partir de valor futuro, porque se invierten \$2.600.000 y se espera obtener \$4.000.000. Es tasa nominal porque dice que es el 4% con capitalización semestral.

Identificando los términos de la fórmula, se tiene:

VA= \$2.600.000
VF= \$4.000.000
j= 4% CCS
m=2

La fórmula para el cálculo del tiempo a partir de valor futuro es:

$$n = \frac{\log\left(\frac{VF}{VA}\right)}{\log(1+i)}$$

Dado que la tasa es nominal, la fórmula se convierte en:

$$n = \left[\frac{\log\left(\frac{VF}{VA}\right)}{\log\left(1+\frac{j}{m})\right)}\right] xm$$

Dónde:

VA= \$2.600.000
VF= \$4.000.000
j= 4%CCS
m=2

Reemplazando los valores se tiene:

$$n = \left[\frac{\log\left(\frac{4.000.000}{2.600.000}\right)}{\log\left(1 + \frac{0,04}{2})\right)} \right] x2$$

$$n = \left[\frac{\log 4.000.000 - \log 2.600.000}{\log 1,02} \right] x2$$

$$n = \frac{6.602059991 - 6.414993348}{0,008600171762} x2$$

$$n = 21.75x2$$

$$n = 43.51$$

Se demorará 43,51 semestres.

Ejemplo

¿Qué tasa de interés con capitalización cuatrimestral permitirá cuadruplicar un capital en 10 años y 8 meses?

El ejercicio que se plantea corresponde al cálculo del valor de la tasa de interés a partir de valor futuro tasa nominal, debido a que el cálculo de la tasa de interés a partir de valor futuro tasa efectiva, es el que se vio en el aparte correspondiente (cálculo de la tasa a partir del valor futuro). En el interés compuesto, sólo se hace este ejercicio. Además, se presenta otra de las formas en las que se puede plantear este tipo de problemas.

La fórmula que se utiliza para este tipo de problemas es la siguiente:

$$j = \left[\left(\sqrt[nxm]{\frac{VF}{VA}} \right) - 1 \right] xm$$

Dónde

VA= 1
VF= 4
n = 10 años 8 meses
m= 3 (un año tiene 3 cuatrimestres)

En este caso, lo primero que ha de hacerse es convertir n en nxm así: 10x3= 30 + (8/4) = 2 = 32 cuatrimestres.

Reemplazando los términos con los datos del problema, se tiene:

$$j = \left[\left(\sqrt[32]{\frac{4}{1}}\right) - 1\right] x3$$
$$j = \left[\left(\sqrt[32]{4}\right) - 1\right] x3$$
$$j = [1.044273782 - 1] x3$$
$$j = 0{,}044273782 x3$$
$$j = 0{,}132821$$
$$j = 13{,}28\%$$

La tasa de interés con capitalización cuatrimestral que permitirá cuadruplicar un capital en 10 años 8 meses es 13,28%.

Ejemplo

Tadeo desea saber cuánto tiempo se demoró su padre en pagar un préstamo de $5.000.000, si la entidad financiera le cobró el 12% con capitalización mensual y fue pagado por $6.000.000.

En este caso, se pide calcular el tiempo a partir de valor presente, debido a que el problema está planteado en pasado. Esta es una de las características del valor presente, sus problemas, normalmente, se plantean de esta forma.

Cuando se vio el cálculo del tiempo a partir de valor presente, se estableció que la fórmula a utilizar era:

$$-n = \frac{\log \frac{VA}{VF}}{\log(1+i)}$$

Como el problema es a tasa nominal, ésta se convierte en:

$$-n = \left[\frac{\log \frac{VA}{VF}}{\log(1+\frac{j}{m})}\right] xm$$

Dónde:

VA= valor presente

VF= valor futuro
j= tasa nominal
m= periodo de capitalización por año

Los datos del problema son:

VA= \$5.000.000
VF=\$6.000.000
j= 12% con CCM
m= 12 (un año tiene 12 meses)

Reemplazándolos en la fórmula quedaría:

$$-n=\left[\frac{\log\frac{5.000.000}{6.000.000}}{\log(1+\frac{0,12}{12})}\right]x12$$

$$-n=\left[\frac{\log 5.000.000-\log 6.000.000}{\log 1,01}\right]x12$$

$$-n=\left[\frac{6.698970004-6.77815125}{0,004321373783}\right]x12$$

$$-n=\left[\frac{-0.07918124605}{0,004321373783}\right]x12$$

$$-n=-18.32316528x12$$

$$-n=-219,88$$

$$n=219,88$$

El padre de Tadeo se demoró 219,88 meses en pagar la deuda de \$5.000.000 por \$6.000.000. Si se quiere saber cuántos años, el resultado se divide entre doce y da 18,32 años.

Ejemplo

Encontrar la tasa de interés con capitalización bimestral, que cobraron por una deuda de \$3.000.000 por \$4.098.765,43 en 37 bimestres.

En este caso se debe hallar la tasa de interés nominal (con capitalización) a partir de valor presente, debido a que el planteamiento del problema es pasado.

Cuando se vio cómo calcular la tasa de interés a partir del valor presente, se planteó la siguiente fórmula:

$$i = anti\log\left[\frac{\log\frac{VA}{VF}}{-n}\right] - 1$$

Dado que el problema es con tasa nominal, la fórmula se convierte en:

$$j = \left[anti\log\left[\frac{\log\frac{VA}{VF}}{-nxm}\right] - 1\right]xm$$

Dónde:

Antilog= antilogaritmo en base 10
VA= valor presente
VF= valor futuro
j = tasa nominal
m= período de capitalización en un año
nxm= tiempo

En el problema planteado los datos son:

VA= \$3.000.000
VF= \$4.098.765,43
j = ¿?
m= 6 (un año tiene 6 bimestres)
nxm= 37 bimestres

Reemplazándolos en la fórmula, se tiene:

$$j=\left[\left[anti\log\left[\frac{\log\dfrac{3.000.000}{4.098.765,43}}{-37}\right]\right]-1\right]x6$$

$$j=\left[\left[ani\log\left[\frac{\log 3.000.000-\log 4.098.765.43}{-37}\right]\right]-1\right]x6$$

$$j=\left\{\left[anti\log\left[\frac{6.477121255-6.612653065}{-37}\right]\right]-1\right\}x6$$

$$j=\left\{\left[anti\log\frac{-0,1355318099}{-37}\right]-1\right\}x6$$

$$j=\{[anti\log 0,003663021889]-1\}x6$$

$$j=(1,00847009-1)x6$$

$$j=0,00847009x6$$

$$j=0,0508x100$$

$$=5,08\%$$

La tasa de interés cobrada fue del 5,08% con capitalización bimestral.

3.7 Ecuación de valor

En ciertas circunstancias es necesario cambiar o la fecha de pago o el valor a pagar en operaciones que se realizan a interés compuesto. En este aparte se verá cuál es el procedimiento a seguir en cada uno de ellos.

Cambio en el tiempo de pago

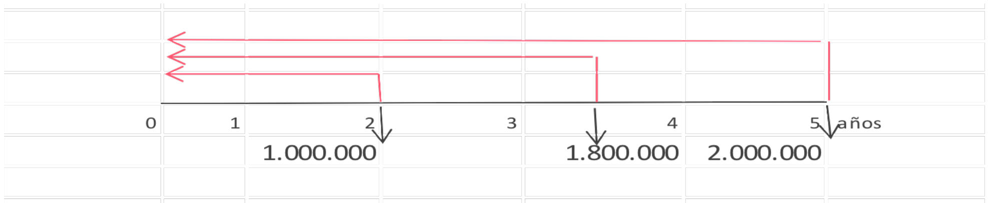
Para realizar el cambio de fecha de pago se debe:

1. Ubicar los pagos originales en la línea de tiempo.
2. Traer los valores a valor presente, tanto los originales como el de pago.
3. Despejar n en la fórmula, aplicando la vista en cálculo del tiempo a partir de valor presente.

Ejemplo

Rosa tiene tres deudas: la primera, a los 2 años por $1.000.000 y una tasa del 3,8% efectiva anual; la segunda por $1.800.000 a los 3 años 5 meses a una tasa del 6% con capitalización bimestral y la tercera a los 10 semestres por $2.000.000 a una tasa del 5% con capitalización semestral. Si quiere recogerlas por $4.000.000, ¿cuándo deberá cancelarla a una tasa del 4% efectiva anual?

1. Ubicar los pagos en el tiempo:



2. Traer todos los valores a valor presente:

$$4.000.000(1+0,04)^{-n} = 1.000.000(1+0,038)^{-2} + 1.800.000(1+0,06/12)^{-41} + 2.000.000(1+0.05/2)^{10}$$

$$4.000.000(1+0,04)^{-n} = 1.000.000x0,9281224825 + 1.800.000x0,815063543 + 2.000.000x0,7811984017$$

$$4.000.000(1,04)^{-n} = 928.122,48 + 1.467.114,38 + 1.562.396,80$$

$$4.000.000(1,04)^{-n} = 3.957.633,66$$

$$-n = \frac{\log\dfrac{3.957.633,66}{4.000.000}}{\log(1,04)} = \frac{\log 3.957.633,66 - \log 4.000.000}{\log 1,04} = \frac{-0,004624400246}{0,0170333393} = 0,27$$

La debe pagar a los 0,27 años, es decir, a los 3,36 meses.

Cambio en el valor a pagar

Para calcular un nuevo valor de pago se requiere:

1. Ubicar los valores en la línea de tiempo.
2. Ubicar el momento en que se quiere pagar.
3. Llevar los pagos originales al momento de pago; bien utilizando la fórmula para el cálculo del valor futuro o bien la del valor presente.

Ejemplo

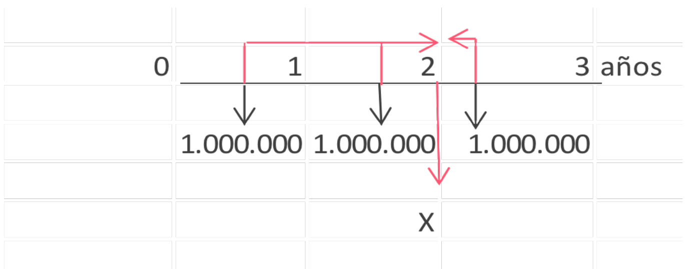
Recoger tres deudas de $1.000.000 cada una. La primera con pago a los 6 meses y una tasa del 1% efectiva mensual; la otra a los 9 bimestres y una tasa del 5% con capitalización bimestral y la tercera a los 2 años, 4 meses y una tasa del 4,8% con capitalización cuatrimestral, conservando sus tasas originales.

1. Ubicar los valores en la línea de tiempo:

Primero se convierten los tiempos a años para construir la línea de tiempo así:

6 meses = 0,5 de año
9 bimestres 1,5 años
2 años 4 meses son 2,33 años.

Se construye la línea de tiempo



Como se ve en el gráfico, los dos primeros valores se van al futuro y el tercero se devuelve.
2 años en meses = 24
2 años en bimestres =12
2 años en cuatrimestre =6

El resultado es:

$$X = 1.000.000(1+0{,}01)^{24-6} + 1.000.000(1+0{,}05/6)^{12-9} + 1.000.000(1+0{,}048/3)^{6-7}$$

$$X = 1.000.000(1{,}01)^{18} + 1.000.000(1{,}00833333)^{-3} + 1.000.000(1{,}016)^{-1}$$

$$X = 1.000.000x0{,}83601731 + 1.000.000x0{,}97541095) + 1.000.000x0{,}98425187$$

$$X = 836.017{,}31 + 975.410{,}95 + 984.251{,}87 = 2.795.680{,}23$$

La cantidad que recoge las tres deudas es de $2.795.680,23

Utilizar una u otra, dependerá de las necesidades del interesado.

Resumen

Hoy en día las operaciones financieras se adelantan a interés compuesto, es decir, pagando intereses, no sólo sobre el capital sino sobre los intereses.

Si se quiere saber qué cantidad se podrá retirar en un tiempo futuro, se habla del cálculo del valor futuro. Si se desea conocer qué cantidad inicial se invirtió o prestó a una tasa de interés compuesto que se cancela o retira después de determinado tiempo, se habla del cálculo del valor presente. Igualmente, se puede calcular el tiempo y la tasa de interés a partir de cada uno de ellos.

Pero el interés compuesto no se trabaja en una única forma. Puede ser que la tasa de interés sea efectiva (realmente pagada) o nominal (la pactada) y que se capitaliza varias veces en el año (tasas nominales). Las tasas nominales y/o efectivas pueden ser vencidas o anticipadas. Toda tasa nominal tiene su equivalencia en una tasa efectiva y viceversa. Toda tasa anticipada tiene su equivalente vencida y viceversa.

También existen tasas que se pagan en forma anticipada, reconocidas como tasas de descuento y tasas que se pagan en forma vencida.

Bibliografía

- Aliaga, C. y Aliaga C,C. Matemáticas Financieras, un enfoque práctico. Editorial PRENTICE
- Arboleda, B. (1982). Ingeniería Económica, métodos para el análisis de alternativas de inversión. 2ª edición. Capítulo 3, Asidua. Medellín.
- Baca, Guillermo. (2005). Ingeniería Económica. Editorial Planeta, octava edición, Capítulo 4. Bogotá.
- Blank L. y Tarquin A. (1991). Ingeniería Económica. McGraw-Hill. 3ª edición. Capítulo 3. Bogotá.
- DeGarmo, John Paul. (1998). Ingeniería Económica. 10ª edición. Capítulo 6. Prentice Hall Hispanoamericana, S.A. México
- Díaz, Alfredo, Aguilera Gómez, Víctor. Matemáticas financieras. Editorial Mc Graw Hill, Tercera edición.
- García Jaime A. Matemáticas Financieras con ecuaciones de diferencia finita. Editorial Pearson.
- Gómez Ceballos, Alberto. Matemáticas Financieras. Editorial Universidad del Quindío.
- Portus Gavieden, Lincoyan (2003). Matemáticas financieras, Ed. Mac Graw Hill.