Tabla de contenido

1 SUCESIONES Y SERIES

1.1 Concepto

Una sucesión o progresión es una lista de números reales de la forma:
$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n,\dots}$donde a_n es el término general y se denota por $a_n = f(n)\ o\ \{a_n\}$ y $n \in \mathbb{N}$.

$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n,\dots}\ es\ una\ sucesión\ infinita\ donde\ a_n = n - ésimo\ término$

$a_1, a_2, a_3, a_4\ es\ una\ sucesión\ finita\ de\ los\ primeros\ cuatro\ términos\ de\ \mathbb{N}$

Escribir una sucesión dado su enésimo término:

Usar $a_n = f(n)$

Ejemplo: Escribir la sucesión si su enésimo término es $a_n = f(n) = \frac{1}{2n}$

$$a_1 = \frac{1}{(2)(1)} = \frac{1}{2}$$
$$a_2 = \frac{1}{(2)(2)} = \frac{1}{4}$$
$$a_3 = \frac{1}{(2)(3)} = \frac{1}{6}$$

Por tanto, la sucesión se escribe:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{2n}, \dots$$

Ejemplo: Escribir la sucesión con enésimo término $\{3^n\}$

$a_1 = 3^1$
$a_2 = 3^2 = 9$
$a_3 = 3^3 = 27$
$a_n = 3^n$

Por tanto, la sucesión se escribe: $3^1, 3^2, 3^3, \dots 3^4, \dots$ o bien: $3, 9, 27, \dots$

Ejemplo: Encontrar los términos que conforman la sucesión con término general: $a_n = \frac{2n-1}{n}$

$$a_1 = \frac{2(1) - 1}{1} = \frac{1}{1} = 1$$
$$a_2 = \frac{2(2) - 1}{2} = \frac{3}{2}$$
$$a_3 = \frac{2(3) - 1}{3} = \frac{5}{3}$$

Por tanto, la sucesión se escribe: $1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \dots, \frac{2n-1}{n}$

Ejemplo: Determinar los cuatro primeros términos de: $\{(-1)^{n+1} - 2n\}$

$a_1 = (-1)^2 - 2(1) = 1 - 2 = -1$
$a_2 = (-1)^3 - 2(2) = -1 - 4 = -5$
$a_3 = (-1)^4 - 2(3) = 1 - 6 = -5$
$a_4 = (-1)^5 - 2(4) = -1 - 8 = -9$

Por tanto, los cuatro primeros términos son: $1, -5, -5, -9$

Ejemplo: Escribir la sucesión definida por $a_n = f(n) = 2n + 3, donde\ n\ \varepsilon\ N\ y\ n\ \varepsilon\ \{1, 2, 3, 4\}$

$a_1 = f(1) = 2 \cdot 1 + 3 = 2 + 3 = 5$
$a_1 = f(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 4 + 3 = 7$
$a_1 = f(1) = 2 \cdot 3 + 3 = 6 + 3 = 9$
$a_1 = f(1) = 2 \cdot 4 + 3 = 8 + 3 = 11$

Por tanto, la sucesión es: $5, 7, 9, 11$
Es una sucesión finita, porque es una función cuyo dominio incluye solo los primeros cuatro números naturales.

Ejemplo: Dada $a_n = f(n) = \frac{2n+3}{n^2}$ determine:

a) El primer término de la sucesión
b) El tercer término de la sucesión
c) El quinto término de la sucesión
d) El décimo término de la sucesión

Solución:

$$a)\ Cuando\ n = 1, a_1 = f(1) = \frac{2n+3}{n^2} = \frac{2 \cdot 1 + 3}{1^2} = \frac{5}{1} = 5$$
$$b)\ Cuando\ n = 3, a_3 = f(3) = \frac{2n+3}{n^2} = \frac{2 \cdot 3 + 3}{3^2} = \frac{9}{9} = 1$$
$$c)\ Cuando\ n = 5, a_5 = f(5) = \frac{2n+3}{n^2} = \frac{2 \cdot 5 + 3}{5^2} = \frac{13}{25} = 0{,}52$$
$$d)\ Cuando\ n = 10, a_{10} = f(10) = \frac{2n+3}{n^2} = \frac{2 \cdot 10 + 3}{10^2} = \frac{23}{100} = 0{,}23$$

Por consiguiente, agregando los valores intermedios a los solicitados, la sucesión es: $5;\ 1{,}75; 1;\ 0{,}6875; 0{,}52; \dots 0, 23;\ \dots$

Es una sucesión infinita decreciente.

Ejemplo: Determinar los primeros cinco términos dado $a_n = (-1)^n \cdot n$

$a_1 = (-1)^1 \cdot 1 = -1$
$a_2 = (-1)^2 \cdot 2 = 2$
$a_3 = (-1)^3 \cdot 3 = -3$
$a_4 = (-14^1 \cdot 4 = 4$
$a_5 = (-1)^5 \cdot 5 = -5$

La sucesión es: $-1, 2, -3, 4, -5$

Se llama *sucesión alternante*, porque cada término alterna el signo.

Ejemplo: Determinar los primeros cinco términos de una sucesión si $(a_1 = 2)$ y $a_{n+1} = 3a_n$

$a_1 = 2$
$a_2 = a_{1+1} = a_2 = 3a_1 = 3 \cdot 2 = 6.$
$a_3 = a_{2+1} = a_3 = 3a_2 = 3 \cdot 6 = 18$
$a_4 = a_{3+1} = a_4 = 3a_3 = 3 \cdot 18 = 54$
$a_5 = a_{4+1} = a_5 = 3a_4 = 3 \cdot 54 = 162$

Por consiguiente, los primeros cinco términos de la sucesión son: 2, 6, 18, 54, 162.

Ejemplo: Dado $a_n = n(n+2)$, determine el noveno término:

$a_9 = 9(9+2) = 9 \cdot 11 = 99$

Ejemplo: Dado $a_1 = -2 \; y \; a_{n+1} = (a_n)^2$, determine los cinco primeros términos de la sucesión.:

$a_1 = -2$
$a_2 = a_{1+1} = a_2 = (a_2)^2 = (-2)^2 = 4$
$a_3 = a_{2+1} = a_3 = (a_3)^2 = (4)^2 = 16$
$a_4 = a_{3+1} = a_4 = (a_4)^2 = (16)^2 = 256$
$a_5 = a_{4+1} = a_5 = (a_5)^2 = (256)^2 = 65536$

Los cinco primeros términos de la sucesión son: 4,16,256, 65536.

Ejemplo: Determinar los cinco primeros términos de la sucesión si $a_1 = 4 \; y$, $a_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n}{n}}$

$a_1 = 4$

$a_2 = a_{1+1} = a_2 = \sqrt{\frac{a_1}{1}} = \sqrt{\frac{4}{1}} = \sqrt{4} = 2$

$a_3 = a_{2+1} = a_3 = \sqrt{\frac{a_2}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2}} = \sqrt{1} = 1$

$a_4 = a_{3+1} = a_4 = \sqrt{\frac{a_3}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$a_5 = a_{4+1} = a_5 = \sqrt{\frac{a_4}{4}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{4}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}}}{\sqrt{4}} = \frac{\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{\sqrt{3}}}}{2} = \frac{\frac{1}{\sqrt[4]{3}}}{2} = \frac{1}{2\sqrt[4]{3}}$

La sucesión es: 2, 1, $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt[4]{3}}$

Ejemplo: Determinar los cinco primeros términos de la sucesión si $a_n = 10 - (0{,}1)^n$.

$a_1 = 10 - (0{,}1)^1 = 10 - \frac{1}{10} = \frac{100-1}{10} = \frac{99}{10} = 9{,}9$

$$a_2 = 10 - (0{,}1)^2 = 10 - \frac{1}{100} = \frac{1000-1}{100} = \frac{999}{100} = 9{,}99$$

$$a_3 = 10 - (0{,}1)^3 = 10 - \frac{1}{1000} = \frac{10000-1}{1000} = \frac{9999}{1000} = 9{,}999$$

$$a_4 = 10 - (0{,}1)^4 = 10 - \frac{1}{10000} = \frac{100000-1}{10000} = \frac{99999}{10000} = 9{,}9999$$

$$a_3 = 10 - (0{,}1)^5 = 10 - \frac{1}{100000} = \frac{100000-1}{100000} = \frac{999999}{100000} = 9{,}99999$$

Los cinco primeros términos de la sucesión son: 9,9; 9,99; 9,999; 9,9999; 9,99999.

Ejercicios propuestos:

Determinar los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones:

$\{(n-1)(n-2)\}$. Solución: 0,0,2,6,12
$\{(-1)^{2n-1}\cdot\frac{n}{n+1}\}$. Solución: $-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, -\frac{5}{6}$
$\{\frac{n!}{(n-1)!}\}$. Solución: 1,2,3,4,5

$a_1 = -1, a_{n+1} = na_n$. Solución: -1,-1,-2,-6.-24

1.2 Determinar la suma de términos de una sucesión:

Notación de suma o sumatoria: $\sum$

Dada una sucesión infinita, $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$

$$\sum_{i=1}^{m} a_1 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m$$

Donde 1 y *m* son los valores mínimo y máximo de la variable *i*, donde *i* se denomina índice de la suma.

<u>Ejemplo</u>: Determinar la suma: $\sum_{i=1}^{6}(i^2+1)$

$$\sum_{i=1}^{6}(i^2+1) = (1^2+1) + (2^2+1) + (3^2+1) + (4^2+1) + (5^2+1) + (6^2+1)$$
$$\sum_{i=1}^{6}(i^2+1) = (2) + (5) + (10) + (17) + (26) + (37) = 97$$

<u>Ejemplo</u>: Determinar la suma $\sum_{j=1}^{5}(j^2)$

$\sum_{j=1}^{5}(j^2) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$

Ejemplo: ¿Cuál es el resultado de $\sum_{i=1}^{8} 4$

$$\sum_{i=1}^{8} 4 = 4+4+4+4+4+4+4+4 = 32 \; o \; bien: 8 \cdot 4 = 32$$

En general: $\sum_{i=1}^{n} k = nk$

Ejemplo: Determine la suma $\sum_{i=1}^{8}(2i-3)$

$$\sum_{i=1}^{8}(2i-3) = (2\cdot 1-3)+(2\cdot 2-3)+(2\cdot 3-3)+(2\cdot 4-3)+(2\cdot 5-3)+(2\cdot 6-3) + (2\cdot 7-3)+(2\cdot 8-3) = -1+1+3+5+7+9+11+13 = 48$$

Ejemplo: Determine la suma $\sum_{i=1}^{6} 2^i$

$$\sum_{i=1}^{6} 2^i = 2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6 = 2+4+8+16+32+64 = 126$$

Ejemplo: Determine la suma $\sum_{i=1}^{6}(\sqrt{i+1}-\sqrt{i})$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{6}(\sqrt{i+1}-\sqrt{i}) &= \left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{5}-\sqrt{4}\right)+\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right) \\ &+ \left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right) \\ &= \cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{1}+\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}}+\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}}+\cancel{\sqrt{5}}-\cancel{\sqrt{4}}+\cancel{\sqrt{6}}-\cancel{\sqrt{5}}+\sqrt{7}-\cancel{\sqrt{6}} = \sqrt{7}-\sqrt{1} \\ &= \sqrt{7}-1\end{aligned}$$

Ejemplo: Calcular el valor de *c* en la siguiente igualdad: $\sum_{i=1}^{4}(ci-1)^2 = 214$

$$\sum_{i=1}^{4}(ci-1)^2 = (c-1)^2+(2c-1)^2+(3c-1)^2+(4c-1)^2 = 214$$

$c^2-2c+1+4c^2-4c+1+9c^2-6c+1+16c^2-8c+1 = 214$

$30c^2-20c+4 = 214$

$30c^2-20c-210 = 0$ Dividiendo entre 10:

$3c^2-2c-21 = 0$

Aplicando la fórmula general de la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$c_1 = \frac{2+\sqrt{4+252}}{6} = \frac{2+\sqrt{256}}{6} = \frac{2+16}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

$$c_2 = \frac{2-\sqrt{4+252}}{6} = \frac{2-\sqrt{256}}{6} = \frac{2-16}{6} = \frac{-14}{6} = -\frac{7}{3}$$

Ejemplo: Si el término general de una sucesión es $a_n = 2n^2 - 9$, represente la suma parcial s_3 en notación sigma.

La tercera suma parcial es la suma de los primeros tres términos, $a_1, a_{2,}\ a_{3.}$ Por tanto, la tercera suma parcial es:

$$\sum_{i=1}^{3}(2i^2 - 9)$$

Ejemplo: Determine la quinta suma parcial, si el término general es $a_n = n + 8$.

$$\sum_{i=1}^{5}(i+8) = (1+8) + (2+8) + (3+8) + (4+8) + (5+8) = 9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 55$$

Ejemplo: Para el siguiente conjunto de valores $x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 5, x_4 = 6,\ x_5 = 7,$ *¿se cumple si o no la igualdad siguiente?*

$$\sum_{i=1}^{5}(x_i)^2 = (\sum_{i=1}^{5} x_i)^2$$

$$\sum_{i=1}^{5}(x_i)^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + (x_4)^2 + (x_5)^2$$

$$\sum_{i=1}^{5}(x_i)^2 = (3)^2 + (4)^2 + (5)^2 + (6)^2 + (7)^2 = 135$$

Segundo miembro:

$$(\sum_{i=1}^{5} x_i)^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 = (3+4+5+6+7)^2 = 25^2 625$$

Como $135 \neq 625$,

$$\sum_{i=1}^{5}(x_i)^2 \neq (\sum_{i=1}^{5} x_i)^2$$

Ejercicios propuestos:

1. Determinar las siguientes sumas:

$$\sum_{h=1}^{9} 2$$
$$\sum_{i=1}^{n} i$$
$$\sum_{i=1}^{n} n$$

$$\sum_{j=0}^{5} \frac{j+1}{j+2}$$

$$\sum_{i=0}^{10} (i^2 - 4i)$$

2. Determinar la primera y la tercera sumas parciales $s_1 \; y \; s_3$:

$a_n = 3n - 1$. Solución: $s_1 = 2 \; y \; s_3 = 15$

$a_n = 2^n + 1$. Solución: $s_1 = 3 \; y \; s_3 = 17$

$a_n = \frac{n-1}{n+2}$. Solución: $s_1 = 0 \; y \; s_3 = \frac{13}{20}$

$a_n = (-1)^n$. Solución: $s_1 = -1 \; y \; s_3 = -1$

$a_n = \frac{n^2}{2}$. Solución: $s_1 = \frac{1}{2} \; y \; s_3 = 7$

3. Determinar el valor de c que cumpla con las siguientes igualdades:

$$\sum_{i=1}^{20} 2c = 120. \text{ Solución } c = 3$$
$$\sum_{i=4}^{9} (ci - 2) = 105. Solución \; c = 3$$

$$\sum_{i=1}^{6} \frac{(ci-1)^2}{3} = \frac{286}{9}. Solución \; c_1 = 2 \; y \; c_2 = -\frac{20}{13}$$

4. Para $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; $x_3 = 5$; $x_4 = -1$; $x_5 = 4$

$$\sum_{i=1}^{5}(x_i + 5) = ?$$

$$\sum_{i=1}^{5}(x_i)^2 = ?$$

$$\left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right)^2 = ?$$

2 PROGRESIONES ARITMÉTICAS

2.1 Concepto: Una progresión aritmética es una sucesión de números reales en donde la diferencia que hay entre dos términos consecutivos es constante.

La cantidad constante se denomina "razón d" o "diferencia común d". Por ejemplo:

Progresión aritmética	Razón d
2,4,6,8,10,12, ...	$d = 4 - 2 = 2$ $d = 12 - 10 = 2$ $d = 8 - 6 = 2$
5, 1, -3, -7, -11, -15	$d = 1 - 5 = -4$ $d = -11 - (-7) = -4$ $d = -3 - 1 = -4$

Ejemplo: Escribir los primeros cinco términos de la progresión aritmética con: a) el primer término 1 y la razón d = 4; b) el primer término 3 y la razón d = -2; c) el primer término 1 y la razón d = 1/3.

Solución a): $1, 5, 9, 13, 17$

Solución b): $3, 1, -1, -3, -5$

Solución c): $1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}$

La representación general de la progresión aritmética con a_1 como primer término y d como la razón, es:

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, a_1 + 4d, a_1 + 5d, \dots, a_1 + (n-1)d$$

Así, en la solución a) anterior:

$$1, 1 + 4, 1 + 8, 1 + 12, 1 + 16$$
$$1, 5, 9, 13, 17$$

2.2 Escribir los primeros "x" términos de una progresión aritmética:

Se debe tener presente que la representación general de una progresión aritmética es:

$$(a_1),\ (a_1 + d),\ (a_1 + 2d),\ (a_1 + 3d), \dots, (a_1 + (n-1)d)$$

Ejemplo: Escribir los primeros cinco términos de una progresión aritmética si el primero $a_1 = 3$ y la razón es $d = -2$

$$(3), (3 - 2), (3 - 4), (3 - 6), (3 - 8)$$
$$3, 1, -1, -3, -5$$

2.3 Determinar si una sucesión es una progresión aritmética:

Determinar la razón *d* entre dos términos consecutivos *m* y *m-1* de la sucesión de modo que:

$d = a_m - a_{m-1}$

<u>Ejemplo</u>: Determinar si la siguiente sucesión es una progresión aritmética:

$2, 6,10, 14, \dots, 4n - 2$

$d = a_m - a_{m-1}$

$d = [(4m - 2) - [4(m - 1) - 2]$

$d = 4m - 2 - (4m - 4 - 2)$

$d = 4m - 2 - 4m + 4 + 2 = 4$

Por tanto, la sucesión es aritmética y sus términos se obtienen sumando 4 al anterior.

<u>Ejemplo</u>: Determinar si la siguiente sucesión es una progresión aritmética:

$-3, -5, -7, -9 \ \dots, -2n - 1$

$d = a_m - a_{m-1}$

$d = (-2m - 1) - [-2(m - 1) - 1]$
$d = -2m - 1 + 2m + 1 - 1 = -2$
-2 es precisamente la diferencia entre un término y el anterior, por lo que la progresión es aritmética: -7 – $(-5) = -2;\ -9 - (-7) = -2,$ es aritmética.

<u>Ejemplo</u>: Determinar si la siguiente sucesión es una progresión aritmética:

$2, 4, 7, \dots, \frac{n^2 + n + 2}{2}$

$d = \frac{m^2 + m + 2}{2} - \frac{(m - 1)^2 + (m - 1) + 2}{2}$
$d = \frac{m^2 + m + 2}{2} - \frac{m^2 - 2m + 1 + m - 1 + 2}{2}$
$d = \frac{m^2 + m + 2 - m^2 + 2m - 1 - m + 1 - 2}{2} = \frac{2m}{2} = m$

pero como la diferencia $d = m$ no es una constante, la progresión dada no es aritmética.

2.4 Determinar el enésimo término, el primer término, la cantidad de términos y la razón de una progresión aritmética:

Fórmula general:

Si a_1 es el primer término y d es la diferencia común o razón, la progresión aritmética tiene los siguientes términos:

$a_1 = a_1$
$a_2 = a_1 + d$
$a_3 = a_1 + 2d$
$4_3 = a_1 + 3d$
.
.
.
$a_n = a_1 + (n-1)d$

donde:

$a_1 = primer\ término$
$n = número\ de\ términos\ de\ la\ progresión$
$a_n = enésimo\ término$
$d = razón\ o\ diferencia\ común = diferencia\ entre\ un\ término\ y\ el\ anterior$

<u>Ejemplo</u>: Determinar el 8º término de la progresión aritmética: 1,4,7,10, …

$a_8 = ?$
$a_1 = 1$
$n = 8$
$d = razón = 4 - 1 = 3$

Método 1:

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_8 = 1 + (8-1)(3) = 1 + 7(3) = 22$

Método 2:

$a_n = a_1 + (n-1)d$

Usando el valor de $a_1\ y\ el\ valor\ de\ d$:

$a_n = 1 + (n-1)(3)$
$a_n = 1 + 3n - 3$
$a_n = 3n - 2$

Con la expresión anterior se puede calcular el valor del octavo término y de cualquier otro término de la progresión aritmética dada.

$a_n = 3(8) - 2 = 22$

Por ejemplo, el séptimo término es:

$a_n = 3(7) - 2 = 19$

Ejemplo: Determinar el 11º término de la progresión aritmética: $1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2},$ ...

$a_{11} = ?$
$a_1 = 1$
$n = 11$
$d = razón = \dfrac{5}{4} - 1 = \dfrac{5-4}{4} = \dfrac{1}{4}$
Solución:

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$$a_{11} = 1 + (11-1)\left(\frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{10}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

Ejemplo: Determinar el 13° término en la sucesión 15; 11,5; 8, …

$a_{13} = ?$
$a_1 = 15$
$n = 13$
$d = 11{,}5 - 15 = -3{,}5$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$$a_{13} = 15 + (13-1)(-3{,}5) = 15 + (12)(-3{,}5) = 15 - 42 = -27$$

Ejemplo: Si $a_1 = -8$ y $d = \frac{5}{3}$, determine a_{13}.

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$$a_{13} = -8 + (13-1)\left(\frac{5}{3}\right) = -8 + (12)\left(\frac{5}{3}\right) = -8 + 20 = 12$$

Ejemplo: Si $a_1 = 5$ y $d = 3$, determine a_4.

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$$a_4 = 5 + (4-1)(3) = 5 + (3)(3) = 5 + 9 = 14$$

Ejemplo: Encontrar el primer término de una progresión aritmética si se sabe que $a_{13} = -28\ y\ d = -6$

$a_{13} = -28$
$a_1 = ?$
$n = 13$

$d = -6$

$a_n = a_1 + (n-1)d$
$-28 = a_1 + (13-1)(-6) = a_1 - 72$
$-28 + 72 = a_1$
$a_1 = 44$

<u>Ejemplo</u>: Encontrar la razón *d* si el primer término es 7 y el décimo es -11.

$a_{10} = -11$
$a_1 = 7$
$n = 10$
$d = ?$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$-11 = 7 + (10-1)(d) = 7 + 9d$
$-11 - 7 = 9d$
$-18 = 9d$

$$d = -\frac{18}{9} = -2$$

<u>Ejemplo</u>: Encontrar el número de términos de la progresión aritmética: ¼, 3/8, …, 11/8.

$a_n = \frac{11}{8}$
$a_1 = \frac{1}{4}$
$n = ?$
$d = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3-2}{8} = \frac{1}{8}$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$$\frac{11}{8} = \frac{1}{4} + (n-1)\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$\frac{11}{8} = \frac{1}{4} + \frac{n}{8} - \frac{1}{8}$$

$$\frac{11}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} + \frac{n}{8}$$
$$\frac{12}{8} = \frac{1}{4} + \frac{n}{8}$$
$$\frac{12}{8} - \frac{1}{4} = \frac{n}{8}$$
$$\frac{12}{8} - \frac{1}{4} = \frac{n}{8}$$
$$\frac{12-2}{8} = \frac{n}{8}$$

$8n = 8 \Longrightarrow n = 10$

2.5 Determinar un término cualquiera de una progresión, conociendo dos de ellos:

Se requiere expresar la representación general de una progresión aritmética y luego resolver un sistema de ecuaciones.

Ejemplo: determinar el 11º término de una progresión aritmética si el 3º es -4 y el 7º es -16.

la representación general de una progresión aritmética:

$$(a_1),\ (a_1 + d),\ (a_1 + 2d), \qquad (a_1 + 3d), \dots, (a_1 + (n-1)d)$$

$a_3 = a_1 + 2d = -4$
$a_7 = a_1 + 6d = -16$

Se resuelve el sistema:

$a_1 + 2d = -4$
$a_1 + 6d = -16$

$4d = -12 \Longrightarrow d = -3$

Reemplazando d=-3 en:
$a_1 + 2d = -4$
$a_1 + 2(-3) = -4$
$a_1 = -4 + 6 = 2$

$a_n = a_1 + (n-1)d$
$a_{11} = 2 + (11-1)(-3)$
$a_{11} = 2 - 30 = -28$

2.6 Determinar la suma de los primeros *x* términos de una progresión aritmética:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Ejemplo: ¿Cuál es la suma de los primeros ocho términos de la progresión aritmética infinita: 1,7,13, …?

$a_1 = 1$
$n = 8$
$d = 7 - 1 = 6$

$a_n = a_1 + (n-1)d$
$a_8 = 1 + (8-1)(6)$
$a_8 = 43$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$S_8 = \frac{8(1+43)}{2} = \frac{352}{2} = 176$$

<u>Ejemplo</u>: ¿Cuál es la suma de los términos de la progresión aritmética finita: 1000, 988, …, -188?

$a_1 = 1000$
$d = 998 - 1000 = -2$
$a_n = -188$

$a_n = a_1 + (n-1)d$
$-188 = 1000 + (n-1)(-12)$
$-1188 = -12n + 12$
$-1200 = -12n$
$n = -\frac{1200}{-12} = 100$

$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$
$S_8 = \frac{100(1000 - 188)}{2} = \frac{100 * 812}{2} = 40.600$

<u>Ejemplo</u>: Se apilan troncos de modo que hay 26 troncos en la parte inferior, y cada fila tiene un tronco menos que la fila anterior. ¿Cuántos troncos tiene la pila?

$a_1 = 1$
$d = 1$
$a_n = 26$

$a_n = a_1 + (n-1)d$
$26 = 1 + (n-1)(1)$
$26 = 1 + n - 1$
$n = 26$

$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$
$S_8 = \frac{26(1+26)}{2} = \frac{702}{2} = 351\ troncos$

<u>Ejemplo</u>: Un constructor apila cierto número de bloques de granito de la siguiente manera: 15 bloques en la base y de 2 bloques por fila, resulta:

El primer término de la progresión aritmética es 15 y que, al disminuir en 2 bloques por fila, resulta:

$$15, 13, 11, \ldots\ a_n$$

$a_1 = 15$
$d = -2$
$a_n = 1$

$a_n = a_1 + (n-1)d$
$1 = 15 + (n-1)(-2)$
$1 = 15 - 2n + 2$
$2n = 16$
$n = 8$
$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$
$S_8 = \frac{8(15+1)}{2} = \frac{128}{2} = 64\ bloques\ de\ granito$

Ejemplo: El estacionamiento de un centro comercial tiene la siguiente disposición de lugares: la primera fila tiene 50, la segunda 47 y cada fila subsiguiente tiene 3 menos que la anterior. Si la última fila tiene 23 lugares, ¿de cuántos lugares dispone el estacionamiento?

El primer término de la progresión aritmética es 50, y que, al disminuir en 3 lugares, resulta:

$$50, 47, 44, 41, \ldots\ 23$$

a_1 =50
$d = -3$
$a_n = 23$

$a_n = a_1 + (n-1)d$
$23 = 50 + (n-1)(-3)$
$23 = 50 - 3n + 3$
$3n = 30$
$n = 10$
$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$
$S_8 = \frac{10(50+23)}{2} = \frac{730}{2} = 365\ lugares$

Ejemplo: Un albañil apilará ladrillos de tal forma que la base tenga 50, la segunda capa 48, la tercera 46, y así sucesivamente hasta que la capa superior tenga 24, ¿cuántos ladrillos en total apilará el albañil?

El primer término de la progresión aritmética es 50 y que, al disminuir en 2 ladrillos por fila, resulta:

$$50, 48, 46, \ldots\ 24$$

a_1 =50
$d = -2$
$a_n = 24$

$a_n = a_1 + (n-1)d$
$24 = 50 + (n-1)(-2)$
$24 = 50 - 2n + 2$
$2n = 28$
$n = 14$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$S_8 = \frac{14(50 + 24)}{2} = \frac{1.036}{2} = 518\ ladrillos$$

3 PROGRESIONES O SUCESIONES GEOMÉTRICAS

3.1 Concepto

A la sucesión: $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n,\dots}$ se le llama progresión o sucesión geométrica, si para todo a_m que pertenezca a la sucesión existe una constante r diferente de cero tal que:

$$a_{m+1} = a_m \cdot r$$

De la igualdad anterior, se tiene que la razón común es:

$$r = \frac{a_{m+1}}{a_m}$$

Ejemplo: $5, 15, 45, 135, 405, 1215$ es una progresión geométrica porque cada término se obtiene multiplicando el anterior por el mismo número, por 3.

Ejemplo: Determinar si la siguiente sucesión es geométrica: $3, 6, \dots, 3 \cdot 2^{n-1}$

$$r = \frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{6}{3} = 2$$

Seguidamente, en el numerador de la fórmula de la razón geométrica r se escribe el último término de la sucesión cambiando la n por $\mathrm{m}+1$, y en su denominador la n se cambia por m.

$$r = \frac{3 \cdot 2^{(m+1)-1}}{3 \cdot 2^{m-1}} = \frac{\cancel{3} \cdot 2^{m}}{\cancel{3} \cdot 2^{m-1}} = 2^{m-m+1} = 2$$

Como la razón es la misma igual a 2, la progresión es geométrica.

Ejemplo: Determinar si la siguiente sucesión es geométrica: $1,4,7, \dots, 3n-2$

$$r = \frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{4}{1} = 4$$

Seguidamente, en el numerador de la fórmula de la razón geométrica r se escribe el último término de la sucesión cambiando la n por $m+1$, y en su denominador la n se cambia por m.

$$r = \frac{3 \cdot (m+1) - 2}{3m-2} = \frac{3m+3-2}{3m-2} = \frac{3m+1}{3m-2}$$

Como la razón no es igual a 4, la progresión no es geométrica; además, porque los términos siguientes no se pueden obtener al multiplicar por la razón $\frac{3m+1}{3m-2}$.

Ejercicios propuestos:

Determinar si las siguientes sucesiones son geométricas:

1. $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{3^{n-2}}{2^{n-1}}$. Respuesta: Sí.
2. $-4, -2, o, \ldots, 2n-6$. Respuesta: No.
3. $1,2,6, \ldots, n!$ Respuesta: No.

3.2 Calcular la razón de una progresión geométrica.

$r = \frac{a_{m+1}}{a_m}$

<u>Ejemplo</u>: Calcular la razón en la progresión geométrica: $a\sqrt{6},\ 3a^2\sqrt{2},\ 3a^3\sqrt{6},\ 9a^4\sqrt{2},$

$r = \frac{3a^2\sqrt{2}}{a\sqrt{6}} = 3a\sqrt{\frac{1}{3}} = a\sqrt{\frac{9}{3}} = a\sqrt{3}$

$r = \frac{3a^3\sqrt{6}}{3a^2\sqrt{2}} = a\sqrt{\frac{6}{2}} = a\sqrt{3}$

La razón constante es: $a\sqrt{3}$

<u>Ejemplo</u>: Calcular la razón en la progresión geométrica $512, 128, 32, 8, \ldots$

$$r = \frac{128}{512} = 0{,}25$$

$$r = \frac{32}{128} = 0{,}25$$

$$r = \frac{8}{32} = 0{,}25$$

<u>**Ejercicio propuesto**</u>:

Calcular la razón de la progresión:

$$\frac{8}{9}x^2y, \frac{2}{3}x^2, \frac{x^4}{2y^2}, \frac{3x^5}{8y^2}, \ldots$$

3.3 Determinar el enésimo término, el primer término, el número de términos y la razón de una progresión geométrica.

a) El *enésimo término* de una progresión geométrica con el primer término a_1y la razón común r, está dado por: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

Donde:

$a_n = enésimo\ término$
$a_1 = primer\ término$
$r = razón\ de\ la\ proporción$
$n = número\ de\ términos$

b) El *primer término*: Se despeja a_1 de la igualdad: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}$$

c) La *razón*: Se despeja *r* de la igualdad: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$$r^{n-1} = \frac{a_n}{a_1}$$

Extrayendo raíz $\sqrt[n-1]{\ }$ en ambos miembros de la igualdad anterior:

$$\sqrt[n-1]{r^{n-1}} = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

$$r^{\frac{n-1}{n-1}} = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

d) El *número de términos*:

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$
$\log a_n = \log a_1 \cdot r^{n-1}$
$\log a_n = \log a_1 + \log r^{n-1}$
$\log a_n = \log a_1 + (n-1)\log r$
$\log a_n = \log a_1 + n\log r - \log r$
$\log a_n - \log a_1 + \log r = n\log r$

$$n = \frac{\log a_n - \log a_1 + \log r}{\log r}$$

<u>Ejemplo</u>: En una progresión geométrica la razón $r = \frac{1}{2}$ y el octavo término es $\frac{1}{8}$. Calcular el primer término.

Respuesta:

$$a_8 = \frac{1}{8}$$

$n = 8$

$$r = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}$$

$$a_1 = \frac{a_8}{(\frac{1}{2})^{8-1}} = \frac{\frac{1}{8}}{(\frac{1}{2})^7} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{128}} = \frac{128}{8} = 16$$

<u>Ejemplo</u>: ¿Cuál es la razón r de la progresión geométrica cuyo $a_1 = \frac{1}{5}$ y $a_7 = 3125$

Respuesta:

$$a_1 = \frac{1}{5}$$

$$a_7 = 3125$$

$$n = 7$$

$$r = ?$$

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

$$r = \sqrt[6]{\frac{a_7}{a_1}} = \sqrt[6]{\frac{3125}{\frac{1}{5}}} = \sqrt[6]{15625} = 5$$

<u>Ejemplo:</u> ¿De cuántos términos está formada la progresión geométrica: $1,2, \dots, 512$?

Respuesta:

$$r = \frac{2}{2} = 2$$
$$n = ?$$
$$a_1 = 1$$
$$a_n = 512$$

$$n = \frac{\log a_n - \log a_1 + \log r}{\log r}$$

$$n = \frac{\log 512 - \log 1 + \log 2}{\log 2} = \frac{2.7092 - 0 + 0,3010}{0,3010} = 10$$

Ejemplo: ¿De cuántos términos está formada la progresión geométrica: $2, 6, \dots, 162$?

Respuesta:

$$r = \frac{6}{2} = 3$$
$$n = ?$$
$$a_1 = 2$$
$$a_n = 162$$

$$n = \frac{\log a_n - \log a_1 + \log r}{\log r}$$

$$n = \frac{\log 162 - \log 2 + \log 3}{\log 3} = \frac{2.2095 - 0.3010 + 0{,}4771}{0{,}4771} = \frac{2{,}3856}{0{,}4771} = 5$$

Ejemplo: ¿De cuántos términos está formada la progresión geométrica: $5^x, 5^{2x+1}, \dots, 5^{9x+8}$

Respuesta:

$$r = \frac{5^{2x+1}}{5^x} = 5^{x+1}$$
$$a_1 = 5^x$$
$$a_n = 5^{9x+8}$$

$$n = \frac{\log a_n - \log a_1 + \log r}{\log r}$$

$$n = \frac{\log 5^{9x+8} - \log 5^x + \log 5^{x+1}}{\log 5^{x+1}} = \frac{(9x+8)\log 5 - x log\ 5 + (x+1)\log 5}{(x+1)\log 5}$$
$$= \frac{(9x+8)\cdot 0{,}699 - 0{,}699x + (x+1)\cdot 0{,}699}{(x+1)\cdot 0{,}699}$$
$$= \frac{6{,}291x + 5{,}592 - 0{,}699x + 0{,}699x + 0{,}699}{0{,}699x + 0{,}699} = \frac{6{,}291x + 6{,}291}{0{,}699x + 0{,}699}$$
$$= \frac{6{,}291(x+1)}{0{,}699x(x+1)} = \frac{6{,}291}{0{,}699} = 9$$

Ejemplo: Encontrar a_4, si $a_2 = 1$ y si $a_9 = \frac{1}{m^{14}}$

Respuesta: Hay que plantear un sistema de ecuaciones equivalentes a las variables $a_1 y\, r$ (usando $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$)

$$a_2 = a_1 \cdot r^{2-1} = a_1 \cdot r \qquad (1)$$

$$a_9 = a_1 \cdot r^{9-1} = a_1 \cdot r^8 \qquad (2)$$

$$a_1 = \frac{a_2}{r} = \frac{1}{r}$$

Reemplazando el valor de $a_1$en (2):

$$a_9 = \frac{1}{r} \cdot r^8 = r^7$$

Como $a_9 = \frac{1}{m^{14}}$

$$\frac{1}{m^{14}} = r^7$$

$$r = \sqrt[7]{\frac{1}{m^{14}}} = \sqrt[7]{\frac{1}{m^7} \cdot \frac{1}{m^7}}$$

$$r = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{m^2}$$

$$= \sqrt[7]{\frac{1}{m^7} \cdot \frac{1}{m^7}}$$

Reemplazando en $a_1 = \frac{1}{r}$

$$a_1 = \frac{1}{\frac{1}{m^2}} = m^2$$

$$a_4 = a_1 \cdot r^3$$

$$a_4 = m^2 \cdot \left(\frac{1}{m^2}\right)^3 = m^2 \cdot \frac{1}{m^6} = \frac{1}{m^4}$$

<u>Ejemplo</u>: Encontrar el segundo término si $\mathrm{r} = 2$ y el séptimo término es -128?

Respuesta:

$r = -2$
$a_7 = -128$
$a_2 = ?$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$a_7 = a_1 \cdot (-2)^{7-1}$$

$$-128 = a_1 \cdot (-2)^6$$

$-128 = a_1 \cdot 64$

$a_1 = -\frac{128}{64} = -2$

$a_2 = -2 \cdot (-2)$, porque $a_{m+1} = a_m \cdot r \rightarrow a_2 = a_1 \cdot r = a_2 = (-2)(-2)$
$a_2 = 4$

<u>Ejemplo</u>: Determinar el 10º término de la progresión geométrica: -9, -3, -1, …

Respuesta:

$r = -\frac{-3}{-9} = \frac{1}{3}$
$n = 10$
$a_1 = -9$

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$
$a_{10} = -9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10-1} = -9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{9} = -9 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{9}{19683} = -\frac{1}{2187}$

<u>Ejemplo</u>: Encontrar el 7º término de la progresión geométrica: 200, 100, 50, …

$r = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}$
$n = 7$
$a_1 = 200$

$a_n = a_1 * r^{n-1}$
$a_7 = 200 * \left(\frac{1}{2}\right)^{7-1} = 200 * \left(\frac{1}{2}\right)^{6} = 200 * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = 200 * \frac{1}{64} = \frac{25}{8}$

<u>Ejemplo</u>: Encontrar el 6º término de la progresión geométrica: $\frac{1}{3}, -1, 3, ...$

$r = \frac{3}{-1} = -3$

$r = \frac{-1}{\frac{1}{3}} = -3$

$a_1 = \frac{1}{3}$
$n = 6$

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$
$a_6 = \frac{1}{3} \cdot -3^{6-1} = \frac{1}{3} \cdot (-3)(-3)(-3)(-3)(-3) = \frac{-243}{3} = -81$

Ejemplo: Encontrar el 9º término de la progresión geométrica: $1, -m^3, m^6, ...$

$$r = \frac{-m^3}{1} = -m^3$$

$$r = \frac{m^6}{-m^3} = -m^3$$

$a_1 = \frac{1}{3}$
$n = 9$
$a_1 = 1$

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$
$a_9 = 1 \cdot (-m^3)^{9-1} = 1 \cdot (-m^3)^8 = m^{24}$. Nota: es $+m^{24}$ porque *-m* está elevada a un número par.

Ejemplo: Si $a_1 = 2$ y $r = \frac{1}{2}$, determine a_8.

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$
$$a_n = 2 \cdot \frac{1}{2}^{8-1} = 2 \cdot \frac{1}{2}^{7} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{128} = \frac{1}{64}$$

Ejemplo: Si en una progresión geométrica el 3º y 7º términos son 18 y 1458, ¿cuál es el 5º término?

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$
$a_3 = a_1 \cdot r^{3-1}$
$18 = a_1 \cdot r^2$

$a_7 = a_1 \cdot r^{7-1}$
$1458 = a_1 \cdot r^6$

Pero:
$a_1 \cdot r^6 = a_1 \cdot r^2 \cdot r^4 = 18r^4$

Entonces,
$18r^4 = 1458$

$$r = \sqrt[4]{\frac{1458}{18}} = \sqrt[4]{81} = 3$$
$a_1 3^2 = 18$

$$a_1 = \frac{18}{9} = 2$$

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$a_5 = a_1 \cdot r^{5-1}$

$a_5 = a_1 \cdot r^4 = (2)(3^4) = (2)(81) = 162$

<u>Ejemplo</u>: Encontrar una fórmula para el enésimo término de la sucesión geométrica: 5, 3, 9/5, …,

$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$

$a_1 = 5$

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$a_n = 5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$

Ejercicios propuestos:

1. Si $a_1 = 4; r = 2, determine\ a_6$. Sol.: $a_6 = 128$
2. Si $a_1 = \frac{1}{4}; r = 2, determine\ a_{10}$. Sol.: $a_{10} = 128$
3. Si $a_1 = -15; r = -\frac{1}{2}, determine\ a_9$. Sol.: $a_9 =?$
4. Si $a_1 = 50; r = \frac{1}{3}, determine\ a_7$. Sol.: $a_7 = \frac{50}{729}$
5. Determinar el 10° término de $n^{-4}, n^{-2}, 1, \ldots$ Sol.: $a_{10} = n^{14}$
6. Determinar el 7° término de $\frac{(n+1)^5}{n^3}, \frac{(n+1)^4}{2}, \ldots$ Sol.: $a_7 = \frac{n^3}{n+1}$
7. Encontrar a_1, si $r = \frac{1}{2}$ y $a_6 = \frac{1}{16}$. Sol.: $a_1 = 2$
8. Encontrar r, si $a_1 = \frac{3}{5}$ y $a_5 = \frac{1}{135}$. Sol.: $r = \frac{1}{3}$
9. Encontrar a_4, si $a_2 = 1$ y $a_9 = \frac{1}{m^{14}}$. Sol.: $a_4 = \frac{1}{m^{14}}$
10. Encontrar, n si $r = \frac{2}{5}$ y $a_1 = \frac{1}{2}$ y $a_n = \frac{64}{78125}$ Sol.: $n = 8$
11. Encontrar r, si $a_1 = -8$ y $a_7 = \frac{-729}{512}$. Sol.: $r = \frac{3}{4}$
12. Encontrar a_{11}, si $a_3 = 2^{\frac{7}{6}x-1}$ y $a_9 = 2^{\frac{19}{6}x-7}$. Sol.: $a_{11} = 2^{\frac{23}{6}x-9}$

3.4 Encontrar el valor de cada término de una progresión geométrica.

Si los términos consecutivos de una progresión geométrica son a, b, c, y r la razón, entonces:

$b = a \cdot r$

$b = \frac{c}{r}$

Multiplicando los primeros y segundos miembros entre sí:

$b^2 = (ar) \cdot \frac{c}{r}$

$b^2 = ac$

$b = \sqrt{a \cdot c}$

Entonces, cada término de una progresión geométrica es la media proporcional geométrica entre el término anterior y el siguiente.

Ejemplo: Sea la progresión geométrica: 2, 6, 18, 54. ¿Cómo se determinó el valor 18?

Solución:

2, 6, 18, 54
a b c
El término entre 6 y 54 es la raíz cuadrada entre ambos números:
$b = \sqrt{a \cdot c}$

$b = \sqrt{6 \cdot 54} = \sqrt{324} = 18$

3.5 Determinar si una progresión es geométrica.

La razón entre sus términos debe ser la misma (r = constante)

Ejemplo: Determinar si la siguiente sucesión es geométrica:

$3, 6, \dots, 3 \cdot 2^{n-1}$
$r = \frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{6}{3} = 2$

Para determinar la razón usando el último término de la sucesión, se reemplaza la *n* del último término por *m+1* en el numerador de la fórmula y por *m* en el denominador.

$$r = \frac{3 \cdot 2^{(m+1)-1}}{3 \cdot 2^{(m-1)}} = \frac{3 \cdot 2^{(m)}}{3 \cdot 2^{(m-1)}} = 2^{m-m+1} = 2$$

Como la razón es la misma igual a 2, la sucesión es una progresión geométrica.

3.6 Determinar un determinado término de una progresión geométrica.

Se despeja a_1 de la fórmula general: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

Ejemplo: En una progresión geométrica la razón es $r = \frac{1}{2}$ y el 8º término es $\frac{1}{8}$. ¿Cuál es el primer término?

$a_1 = ?$
$n = 8$
$a_8 = \frac{1}{8}$

$$\frac{1}{8} = a_1 * \left(\frac{1}{2}\right)^{8-1}$$

$$\frac{1}{8} = a_1 * \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

$$\frac{1}{8} = a_1 * \frac{1}{128}$$

$$\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{128}} = a_1$$

$$\frac{128}{8} = a_1$$

$$a_1 = 16$$

<u>Ejemplo</u>: Encontrar el 2º término de una progresión geométrica si r = -2 y el 7º es -128.

$$r = -2$$
$$n = 7$$
$$a_7 = -128$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$
$$-128 = a_1 \cdot (-2)^{7-1}$$
$$-128 = a_1 \cdot (-2)^6$$
$$-128 = a_1 \cdot 64$$

$$a_1 = -\frac{128}{64} = -2$$

Como en una progresión geométrica: $a_{m+1} = a_m * r$

$$a_2 = a_1 \cdot r$$
$$a_2 = (-2) \cdot (-2) = 4$$

3.7 Encontrar la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica finita.

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

<u>Ejemplo</u>: Sumar los primeros ocho términos de la progresión geométrica: 4/3, 2, 3, …

$$a_1 = \frac{4}{3}$$

$$r = \frac{2}{\frac{4}{3}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$n = 8$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_n = \frac{\frac{4}{3}\left(1-(\frac{3}{2})^8\right)}{1-\frac{3}{2}} = \frac{\frac{4}{3}\left(1-\frac{6561}{256}\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{4}{3}\left(\frac{-6305}{256}\right)}{-\frac{1}{2}} = -\frac{8}{3} * -\frac{6305}{256} = \frac{6305}{96} = 65{,}7$$

Ejemplo: Determinar la sexta suma parcial de una progresión geométrica cuyo primer término es igual a 2 y cuya razón es igual a 5.

$a_1 = 2$

$r = 5$

$n = 6$

$S_6 = ?$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$
$$S_6 = \frac{2(1-5^6)}{1-5} = \frac{2(1-15625)}{-4} = \frac{2(1-15625)}{-4} = -\frac{31248}{-4} = 7812$$

Ejemplo: Determinar la séptima suma parcial de una progresión geométrica cuyo primer término es igual a 16 y cuya razón es igual a $-\frac{1}{2}$.

$a_1 = 16$

$r = -\frac{1}{2}$

$n = 7$

$S_7 = ?$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$
$$S_7 = \frac{16\left(1-(-\frac{1}{2})^7\right)}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{16\left(1+\frac{1}{128}\right)}{\frac{3}{2}} = \frac{16\left(\frac{129}{128}\right)}{\frac{3}{2}} = -\frac{\frac{129}{8}}{\frac{3}{2}} = \frac{43}{4}$$

Ejemplo: ¿Cuál es el primer término de una progresión geométrica cuya suma de los ocho primeros términos es $\frac{6305}{81}$ y la razón es $\frac{2}{3}$?

$a_1 = ?$

$r = \frac{2}{3}$
$n = 8$

$$S_8 = \frac{6305}{81}$$

$$\frac{6305}{81} = \frac{a_1\left(1 - (\frac{2}{3})^8\right)}{1 - \frac{2}{3}}$$
$$\frac{6305}{81} = \frac{a_1\left(1 - \frac{256}{6561}\right)}{\frac{1}{3}}$$
$$\frac{6305}{81} = \frac{a_1\left(\frac{6305}{6561}\right)}{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{6305}{81} \cdot \frac{1}{3} = a_1\left(\frac{6305}{6561}\right)$$
$$\frac{6305}{81} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{6561}{6305} = a_1$$

$$a_1 = 27$$

<u>Ejemplo</u>: ¿Cuál es el primer término de una progresión geométrica cuya suma de los primeros 10 términos es 341 y la razón es -2?

$a_1 =?$

$r = -2$

$n = 8$

$S_8 = 341$

Respuesta:

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$
$$341 = \frac{a_1(1 - (-2)^{10})}{1 - (-2)}$$
$$341 = \frac{a_1(1 - 1024)}{3}$$
$$341 \cdot 3 = -1.023a_1$$

$$a_1 = \frac{341 \cdot 3}{-1.023} = \frac{1023}{-1.023} = -1$$

<u>Ejemplo</u>: Encontrar el número de elementos de una progresión geométrica cuya suma es 1093, su primer término es 1 y la razón es 3.

Respuesta:

$a_1 = 1$

$r = 3$

$n = ?$

$S = 1093$

Respuesta:

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$1093 = \frac{1(1 - 3^n)}{1 - 3}$$

$$1093 = \frac{(1 - 3^n)}{-2}$$

$1093(-2) = 1 - 3^n$

$-2186 - 1 = -3^n$
$-2187 = -3^n$

Multiplicando ambos miembros por -1:

$3^7 = 3^n$

$n = 7$

Ejemplo: Encontrar el número de elementos de una progresión geométrica cuya suma es $\frac{1-x^7}{x^4-x^5}$, su primer término es x^2 y la razón es $\frac{1}{x}$.

Respuesta:

$a_1 = x^2$

$$r = \frac{1}{x}$$

$n = ?$

$$S = \frac{1 - x^7}{x^4 - x^5}$$

Respuesta:

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$\frac{1-x^7}{x^4-x^5}=\frac{x^2\left(1-\left(\frac{1}{x}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{x}}=\frac{x^2\left(\frac{x^n-1}{x^n}\right)}{\frac{x-1}{x}}=\frac{x^2(x^n-1)}{x^n}\cdot\frac{x}{x-1}$$

$$\frac{1-x^7}{x^4-x^5}=\frac{x^3(x^n-1)}{x^{n+1}-x^n}$$

$$(1-x^7)(x^{n+1}-x^n)=x^3(x^n-1)(x^4-x^5)$$

$$(x^{n+1}-x^n)+x^{n+7}-x^{n+8}=x^{n+7}-x^7-x^{n+8}+x^8$$

$$x^{n+1}-x^n=x^8-x^7$$
$$x^n(x-1)=x^7(x-1)$$

$$x^n=x^7$$
$$n=7$$

Ejercicios propuestos:

1) ¿Cuál es la razón de una progresión geométrica si la suma es $\frac{211}{24}$, el primer término es $\frac{2}{3}$ y el último es $\frac{27}{8}$. Respuesta: $r=\frac{3}{2}$

2) Determine el primer término de una progresión geométrica si la suma de los primeros 6 términos es 364 y la razón es -3. Respuesta: $a_1=-2$.

3) ¿Cuál es el último término de una progresión geométrica cuya suma es $\frac{31}{64}$, su primer término es $\frac{1}{4}$ y la razón es ½. Respuesta: $a_n=\frac{1}{64}$.

4) Determine la razón común de una progresión geométrica si el primer término es -8 y el sexto término es $-\frac{1}{4}$. Respuesta: $r=\frac{1}{2}$.

5) Determine la suma de los términos en cada una de las sucesiones geométricas:

a) $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}, \ldots$ Respuesta: $\frac{5}{4}$
b) $6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \ldots$ Respuesta: 12

6) Dados: $s_n;\ a_1;\ r,$ determine *n* en cada serie geométrica.

   a) $s_n=193;\ a_1=3; r=2$. Respuesta: $n=5$
   b) $s_n=\frac{189}{32};\ a_1=3; r=\frac{1}{2}$. Respuesta: $n=6$

3.8 Suma de una serie geométrica infinita

La serie es infinita cuando no se muestra su último término.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + - \cdots + (\frac{1}{2})^{n-1}, \ldots,$$

Se sabe que:

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

Cuando $|r| < 1$ y *n* se hace cada vez más grande, r^n tiende a cero, por lo que la fórmula anterior se reduce a:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}$$

Donde: $|r| < 1$.

<u>Ejemplo</u>: Encontrar la suma de la serie:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + - \cdots + (\frac{1}{2})^{n-1}, \ldots,$$

Solución:

$$a_1 = 1$$

$$r = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$r = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$Como\ \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}$$
$$S_\infty = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

<u>Ejemplo</u>: Encontrar la suma de la serie:

$$3 - \frac{6}{5} + \frac{12}{25} - \frac{24}{125} + \frac{48}{625} + \ \ldots$$

Respuesta:

$$a_1 = 3$$

$$r = -\frac{\frac{6}{5}}{3} = -\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{6}{15} = -\frac{2}{5}$$

$$Como\ \left|-\frac{2}{5}\right| = \frac{2}{5} < 1$$

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r}$$
$$S_{\infty} = \frac{3}{1-\left(-\frac{2}{5}\right)} = \frac{3}{1+\frac{2}{5}} = \frac{3}{\frac{7}{5}} = \frac{15}{7}$$

<u>Ejemplo</u>: Encontrar la suma de la progresión geométrica infinita:

$9, 3, 1, \ldots$

Respuesta:

$$a_1 = 9$$

$$r = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$Como\ \left|\frac{1}{3}\right| < 1$$

$$S_{\infty} = \frac{9}{1-\frac{1}{3}} = \frac{9}{\frac{2}{3}} = \frac{27}{2}$$

<u>Ejemplo</u>: Encontrar la suma de la progresión geométrica infinita:

$$-60 + 20 - \frac{20}{3} + \frac{20}{9} - \ \ldots$$

Solución:

$$a_1 = -60$$

$$r = \frac{20}{-60} = -\frac{1}{3}$$

$$Como\ \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1$$

$$S_{\infty} = \frac{-60}{1-(-\frac{1}{3})} = \frac{-60}{\frac{4}{3}} = -\frac{180}{4} = -45$$

Ejemplo: Encontrar la suma de la progresión geométrica infinita:

$-6, 3, -\frac{3}{2} + \ ...$

Respuesta:

$a_1 = -6$

$r = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$

$Como\ \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$

$$S_\infty = \frac{-6}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{-6}{\frac{3}{2}} = -\frac{12}{3} = -4$$

Ejemplo: Encontrar la suma de la progresión geométrica infinita:

$\frac{9}{4}, \frac{3}{2}, 1\ ...$

Respuesta:

$a_1 = \frac{9}{4}$

$r = \frac{3}{2} \div \frac{9}{4} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

$Como\ \left|\frac{2}{3}\right| < 1$

$$S_\infty = \frac{\frac{9}{4}}{1-\frac{2}{3})} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{27}{4}$$

Ejemplo: El primer término de una progresión geométrica infinita es $2\sqrt{3}$ y la suma de los términos es $5\sqrt{3}$. Encuentre la razón de la progresión.

Respuesta:

$a_1 = 2\sqrt{3}$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$

$$5\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{1-r}$$

$$5\sqrt{3}(1-r) = 2\sqrt{3}$$

$$5\sqrt{3} - 5r\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$-5r\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$$

$$-5r\sqrt{3} = -3\sqrt{3}$$

$$-5r = -3$$

$$r = \frac{3}{5}$$

<u>Ejemplo</u>: Un triángulo rectángulo de área $1\ cm^2$ se divide en cuatro tríangulos equiláteros más pequeños de área $\frac{1}{4}cm^2$; asu vez, uno de los cuatro triángulos se divide nuevamente en otros cuatro triángulos de $\frac{1}{16}cm^2$, y se repite el procedimiento sucesivamente con cada uno de los cuatro triángulos resultantes. ¿Cuál es el resultado de la suma de las áreas de los triángulos?

Respuesta:

La serie es:

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots$$

$$a_1 = 1$$

$$r = \frac{1}{4} \div 1 = \frac{1}{4}$$

$$Como\ \left|\frac{1}{4}\right| < 1$$

$$S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

<u>Ejemplo</u>: Escriba el siguiente número que tiene decimales periódicos como la razón de dos enteros: 0,454545 …

$0{,}45;\ 0{,}00545; 0{,}000045, \dots, 0{,}45\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1},$

Respuesta:

$$a_1 = 0{,}45$$

$$r = \frac{1}{100} = 0{,}01 < 1$$

$$S_\infty = \frac{0{,}45}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{0{,}45}{\frac{99}{100}} = \frac{45}{99}$$

Se comprueba si se divide 45 entre 99. El valor es $0{,}454545$ =0,45 períodico.

Ejercicios propuestos:

1. ¿Cuál es el valor de la suma de términos de la progresión geométrica: $8, \frac{16}{3}, \frac{32}{9}, \frac{64}{27}$, ... Respuesta: 24

2. ¿Cuál es el valor de la suma de términos de la progresión geométrica: $-12, \frac{-12}{5}, -\frac{12}{25}, -\frac{12}{125}$, ... Respuesta: -15

3. Determine la suma de términos de la progresión geométrica infinita: $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, ... Respuesta: $\frac{9}{4}$

4. El primer término de una progresión infinita es $\frac{a}{b}$ con $b > a$ y $a, b \in \mathbb{N}$ y la suma es $\frac{3a}{2b}$. ¿Cuál es la razón de la progresión? Respuesta: $r = \frac{1}{3}$.