Editado por
Verónica Gruenberg Stern

Apuntes de

MAT021 - Cálculo

vs. 1er. sem. 2013

Prefacio

Estimados alumnos:

Este texto ha sido desarrollado especialmente para ustedes, y es el resultado del aporte de muchos colegas del Departamento de Matemática de la Universidad Técnica Federico Santa María, que a lo largo del tiempo han dictado este curso. Las diferentes secciones incorporan apuntes de profesores tanto de Casa Central como del Campus Santiago, especialmente Pedro Gajardo y Erwin Hernández. En esta versión, éstos han sido editados por quien suscribe, para que su estructura incorpore no solo los contenidos que se espera conozcan en profundidad, sino que también una gran cantidad de ejercicios resueltos y propuestos, que esperamos resuelvan con entusiasmo, para lograr mejores aprendizajes. Hemos optado también por incluir muchas demostraciones de los teoremas que revisarán en clases. No es el objetivo que todas éstas sean vistas en clases. Más bien, esperamos que los alumnos interesados, tengan la posibilidad de profundizar en la aprehensión de los conceptos involucrados, y de comprender cómo se realiza la construcción del conocimiento matemático. Esperamos que esta segunda versión, aún preliminar, les sea de utilidad, y que cualquier error que encuentren (por cierto, involuntario), nos sea informado al mail indicado abajo.

Es importante que tengan presente que este apunte no reemplaza las clases. Para lograr un buen aprendizaje de los conceptos e ideas que considera este curso, es fundamental que asistan a clases, participen activamente en ella, estudien de manera metódica, ojalá estructurando un horario de estudio diario, preparándose siempre para su próxima clase y que planteen a sus profesores cualquier duda que les surja.

Cordialmente,

Verónica Gruenberg Stern
Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

veronica.gruenberg@usm.cl

Índice general

Capítulo 1

Números Reales

1.1. Introducción

El objetivo del cálculo en una variable es estudiar funciones definidas sobre la recta real, por lo que es importante conocer más profundamente sus propiedades básicas, para desarrollar fundadamente los conceptos del cálculo.

Históricamente, los conjuntos numéricos aparecen en forma paulatina, y en el mismo orden en que los conocemos a lo largo de nuestro desarrrollo escolar. Conocimos primeramente el conjunto de los *números naturales*, denotado por $\mathbb{N}$, también llamado conjunto de *enteros positivos*, denotado por $\mathbb{Z}^+$. Para determinar soluciones de ecuaciones algebraicas, fue necesario introducir primero el conjunto de los *números enteros*, denotado por $\mathbb{Z}$ y luego el conjunto de los *números racionales*, denotado por $\mathbb{Q}$.

Más precisamente:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \cdots\} \\ \mathbb{Z} &= \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2 \cdots\} \\ \mathbb{Q} &= \left\{\frac{a}{b}, \ a, b \in \mathbb{Z}, \ b \neq 0\right\} \end{aligned}$$

Cabe señalar que, para los geómetras griegos, los números eran *razones* entre segmentos de recta. En un comienzo, pensaban que todos los números eran racionales, o, en la terminología de la época, que todo segmento de recta era *conmensurable*. Ellos suponían que dados dos segmentos de recta $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$, siempre era posible encontrar un tercer segmento $\overline{MN}$ y números naturales n y n' de modo que $\overline{MN}$ cupiera n veces en $\overline{AB}$ y n' veces en $\overline{A'B'}$. Así, la razón entre $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ sería $\frac{n}{n'}$. Pero, el descubrimiento del *Teorema de Pitágoras* echó por tierra esta creencia, ya que de él se deduce que un triángulo rectángulo isósceles de lados (catetos) de longitud igual a 1 tiene una hipotenusa de longitud $\sqrt{2}$, y $\sqrt{2}$ **no** es un número racional, es decir

$$\nexists\, a, b \in \mathbb{Z}, \ b \neq 0, \quad \text{tal que} \quad \frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

Un número real que no es racional se llama *irracional*. Así, $\sqrt{2}$ es irracional. Notemos que $\sqrt{2}$ se obtiene como solución de la ecuación con coeficientes enteros

$$x^2 = 2$$

Los números reales que se obtienen como soluciones de ecuaciones con coeficientes enteros se llaman *números algebraicos*. Dejamos como ejercicio al lector probar que todo número racional es un número algebraico. Los números reales que no son algebraicos se llaman *números trascendentes*. Ejemplos conocidos de números trascententes son π y e.

A pesar de lo anterior, es posible construir el conjunto de los números reales, que denotamos por $\mathbb{R}$, a partir de $\mathbb{Q}$. Sin embargo, no es ese nuestro objetivo aquí, por lo que consideraremos los números reales como objetos no definidos (o conceptos primitivos) y sobre los cuales están definidas dos operaciones binarias: la adición y la multiplicación, que satisfacen ciertos *axiomas*, que le dan la estructura que conocemos.

1.2. El Cuerpo de los Números Reales

Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, que dotamos de las siguientes dos operaciones:

1. **Adición:** Denotada por "$+$" y que satisface que: si $x, y \in \mathbb{R}$ entonces $x + y \in \mathbb{R}$ llamada propiedad de *clausura* o *cerradura* de la adición o suma.

2. **Multiplicación:** Denotada por "$\cdot$" que satisface que: si $x, y \in \mathbb{R}$ entonces $x \cdot y \in \mathbb{R}$ llamada propiedad de *clausura* o *cerradura* de la multiplicación o producto.

Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, las operaciones arriba definidas satisfacen los siguientes axiomas:

Axioma	**Adición**	**Multiplicación**
Asociatividad	$(x + y) + z = x + (y + z)$	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
Existencia del Elemento Neutro	$\exists\, 0 \in \mathbb{R} :\ x + 0 = x$	$\exists\, 1 \in \mathbb{R} :\ x \cdot 1 = x$
Existencia del Elemento Inverso	$\exists\, (-x) \in \mathbb{R} :\ x + (-x) = 0$	$\exists\, x^{-1} \in \mathbb{R} :\ x \cdot x^{-1} = 1\,,\ \forall x \neq 0$
Conmutatividad	$x + y = y + x$	$x \cdot y = y \cdot x$
Distributividad	$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$	$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

Decimos entonces que $\mathbb{R}$ dotado de la suma y multiplicación que satisfacen las propiedades anteriores es el *cuerpo de los números reales*, o que el trío $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ tiene estructura de cuerpo.

OBSERVACIÓN:

1. Notamos que "0" representa al elemento neutro para la suma y "1" al elemento neutro para la multiplicación. Éstos neutros deben ser *distintos* o el conjunto de los números reales se reduciría al cero.

2. Es posible probar que los elementos neutros son únicos. En efecto:
supongamos que 0 y $0'$ son dos elementos neutros para la suma. Entonces:
$$\left.\begin{array}{rcll} 0'+0 &=& 0' & \text{pues } 0 \text{ es neutro} \\ 0+0' &=& 0 & \text{pues } 0' \text{ es neutro} \end{array}\right\} \text{Por conmutatividad: } 0+0' = 0'+0 \text{ de donde } 0 = 0'$$
Análogamente para el neutro multiplicativo, cuya demostración dejamos como ejercicio.

3. Si $x \in \mathbb{R}$, su elemento inverso aditivo será denotado por "$(-x)$" y el inverso multiplicativo de $x \in \mathbb{R}$ será denotado por "x^{-1}". Notar que hablamos de "su "inverso aditivo o multiplicativo. Esto se debe a que éstos son únicos. En efecto:
sea $a \in \mathbb{R}$ y supongamos que $\exists -a, b \in \mathbb{R}$, ambos inversos aditivos de a. Entonces:
$a + (-a) = 0 \quad \Rightarrow \quad b + (a + (-a)) = (b + 0) \quad \Rightarrow \quad (b + a) + (-a) = b$ Como b es inverso aditivo de a: $0 + (-a) = b \quad \therefore \quad -a = b$.

   Análogamente con el inverso multiplicativo.

4. Como siempre, la diferencia entre dos números $a, b \in \mathbb{R}$ se define por $b - a = b + (-a)$, y el cociente entre dos números reales $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$ se define por $a \cdot b^{-1}$ y se denota por "$\frac{a}{b}$" o por "a/b".

Con estos axiomas y considerando las definiciones anteriores es posible demostrar las siguientes propiedades en $\mathbb{R}$.

PROPOSICIÓN 1.2.1 Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$; entonces:

1. $a + b = a + c \quad \Rightarrow \quad b = c$.

2. $-(-a) = a$.

3. $a(b - c) = ab - ac$.

4. $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.

5. $ab = ac$ y $a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad b = c$.

6. $a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad (a^{-1})^{-1} = a$.

7. $ab = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \quad \vee \quad b = 0.$

8. $(-a)b = -(ab) = a(-b).$

9. Si $a, b \neq 0$, entonces $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$

Dem. Demostraremos algunas y las demás quedan de ejercicio:

2. Si $a \in \mathbb{R}$, entonces existe $-a \in \mathbb{R}$ tal que $a + (-a) = 0$. Por lo tanto, a es el inverso aditivo de $-a$. Pero, el inverso aditivo de $-a$ es $-(-a)$. Luego, por la unicidad del inverso aditivo, se tiene que $-(-a) = a$.

4. Notamos que $0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$ y luego, aplicando la propiedad 1., se tiene que $0 \cdot a = 0$.

7. Sean $a, b \in \mathbb{R} : ab = 0$. Se quiere probar que $a = 0 \vee b = 0$. Supongamos que $b \neq 0$, luego b posee inverso multiplicativo, y multiplicando la ecuación por b^{-1} se obtiene:

$$ab = 0 \quad \Rightarrow \quad (ab) \cdot b^{-1} = 0 \cdot b^{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad a(b \cdot b^{-1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$$

9. Notamos que, si $a, b \neq 0$, entonces

$$(a^{-1} \cdot b^{-1}) \cdot (ab) = (a^{-1} \cdot b^{-1}) \cdot (ba) = a^{-1} \cdot (b^{-1} b) \cdot a = a^{-1} \cdot 1 \cdot a = a^{-1} \cdot a = 1$$

Pero, el inverso de ab es $(ab)^{-1}$, de donde necesariamente, por la unicidad de este inverso,

$$(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$$

Ejercicios Propuestos

1. Demuestre las siguientes propiedades:

   - $-0 = 0 \quad$ y $\quad 1^{-1} = 1$
   - 0 no tiene elemento inverso multiplicativo.
   - Si $a \neq 0$ entonces la ecuación $ax + b = c$ tiene solución única.
   - $(-1) \cdot (-1) = 1$
   - $(-a)^2 = a^2 \quad$ y $\quad (-a)^3 = -a^3$.

2. En el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ se define la operación $*$, por $x * y = x^y$. Determine si esta operación satisface los axiomas de asociatividad o de conmutatividad.

3. Muestre que si $a_1, a_2, \cdots, a_n$ son números reales y $a_1 a_2 \cdots a_n = 0$ entonces alguno de los a_i debe ser el neutro aditivo.

4. Resuelva la ecuación $(x-2)(2x+3)(5x+1)=0$

5. Considere el conjunto $F_2 = \{0, 1\}$ dotado de la suma y productos definidos por las siguientes tablas:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

¿Posee F_2, dotado de estas operaciones, una estructura de cuerpo?

6. Sea $A = \mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}\}$, con las operaciones habituales de suma y producto en $\mathbb{R}$. ¿Satisface A los axiomas de cuerpo ? ¿Y el conjunto $B = \{a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Q}\}$ dotado también de la suma y producto usual?

7. Suponga que se definen en $\mathbb{R} - \{0\}$ las operaciones siguientes:

$$x \oplus y = xy, \qquad\qquad x \odot y = x + y$$

¿Cuáles de los axiomas de cuerpo son satisfechos por el trío $(\mathbb{R} - \{0\}, \oplus, \odot)$?

1.3. Axiomas de Orden

Además de los axiomas de cuerpo, el conjunto $\mathbb{R}$ satisface los llamados *axiomas de orden*. Para enunciarlos, considere el conjunto que denotamos por $\mathbb{R}^+$ y al que llamaremos conjunto de los *números reales positivos*. Éste verifica los axiomas conocidos como **axiomas de orden**:

Axioma	
Clausura para la suma	$x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x + y \in \mathbb{R}^+$
Clausura para el producto	$x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x \cdot y \in \mathbb{R}^+$
Tricotomía	$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in \mathbb{R}^+ \veebar -x \in \mathbb{R}^+ \veebar x = 0$

DEFINICIÓN 1.3.1 Definimos el conjunto de los *números reales negativos* como el conjunto

$$\mathbb{R}^- = \{-x \;/\; x \in \mathbb{R}^+\}$$

OBSERVACIÓN: Notar que $\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$.

DEFINICIÓN 1.3.2 Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Diremos que:

1. a es menor que b, y escribimos $a < b$, si y sólo si $b - a \in \mathbb{R}^+$.
2. a es mayor que b, y escribimos $a > b$, si y sólo si $b < a$.
3. a es menor o igual a b, y escribimos $a \leq b$, si y sólo si $a < b \;\vee\; a = b$.
4. a es mayor o igual a b, y escribimos $a \geq b$, si y sólo si $a > b \;\vee\; a = b$.

OBSERVACIÓN:

- $a < 0 \iff 0 - a \in \mathbb{R}^+ \iff -a \in \mathbb{R}^+ \iff a \in \mathbb{R}^-$
- $a > 0 \iff a - 0 \in \mathbb{R}^+ \iff a \in \mathbb{R}^+$
- En la recta numérica real, $x < y$ ssi x está a la izquierda de y en dicha recta. Con esta representación gráfica, la idea de orden en $\mathbb{R}$ y la ley de tricotomía resultan evidentes.

PROPIEDADES 1.3.1 Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$; entonces se tiene que:

1. Se verifica exactamente una de las siguientes:

$$a < b, \qquad a = b, \qquad a > b$$

   Dem. Sea $c = b - a$. Por el axioma de tricotomía: $c > 0$, $c = 0$ o $c < 0$.
   Luego, $b - a > 0$, $b - a = 0$ o $b - a < 0$.

2. $a < b \;\wedge\; b < c \;\Rightarrow\; a < c$.

   Dem. $b - a > 0 \;\wedge\; c - b > 0 \;\Rightarrow\; (b - a) + (c - b) = c - a > 0 \;\Rightarrow\; a < c$

3. $a \leq b \;\wedge\; c \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; a + c \leq b + c$.
4. $a \leq b \;\wedge\; c \leq d \;\Rightarrow\; a + c \leq b + d$.
5. $a \leq b \;\wedge\; c \in \mathbb{R}^+ \;\Rightarrow\; ac \leq bc$.
6. $a \leq b \;\wedge\; -c \in \mathbb{R}^+ \;\Rightarrow\; ac \geq bc$.

7. $0 \leq a \leq b \ \wedge \ 0 \leq c \leq d \qquad \Rightarrow \qquad 0 \leq ac \leq bd.$

8. $a \neq 0 \qquad \Rightarrow \quad a^2 > 0$

   Dem. $\quad a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a > 0 \ \vee \ a < 0.$ Si $a > 0$, el axioma de clausura para el producto implica que $a^2 > 0$. Si $a < 0$, la propiedad 6. con $b = 0$ y $c = a$, implica que $a^2 > 0$.

9. $a > 0 \quad \Rightarrow \quad a^{-1} > 0$

   Dem. Supongamos que $a^{-1} < 0$. Entonces: $a \cdot a^{-1} = 1 < 0$, lo cual evidentemente es una contradicción. Por lo tanto $a^{-1} > 0$.

10. $0 < a < b \quad \Rightarrow \quad a^{-1} > b^{-1}$

Dejamos como ejercicio la demostración de aquellas propiedades que no hemos probado.

Ejercicios Resueltos

1. $\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad a^2 + b^2 \geq 2ab$

   Dem. Sabemos que $x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Luego:

   $$a, b \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad a - b \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad (a-b)^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

   $$\therefore \qquad \boxed{a^2 + b^2 \ \geq \ 2ab \quad \forall a, b \in \mathbb{R}}$$

2. $\forall a \in \mathbb{R}^+: \quad a + \dfrac{1}{a} \geq 2$

   Dem. Sabemos que $\forall a \in \mathbb{R}^+: \ a - 1 \in \mathbb{R}$. Luego:

   $$(a-1)^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 - 2a + 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 + 1 \geq 2a$$

   Como $a > 0$, multiplicando esta desigualdad por a^{-1} se obtiene lo pedido.

3. Si $a + b = 1$, probar que $a^2 + b^2 \geq \dfrac{1}{2}$.

   Dem. Sabemos que $\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad a^2 + b^2 \geq 2ab.$

   Además, por hipótesis: $a + b = 1 \quad \Rightarrow \quad a^2 + 2ab + b^2 = 1.$ Sumando, obtenemos:

   $2a^2 + 2ab + 2b^2 \geq 1 + 2ab \qquad \Rightarrow \qquad a^2 + b^2 \geq \dfrac{1}{2}.$

4. Si $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ entonces

   $$\frac{2ab}{a+b} + \frac{2ac}{a+c} + \frac{2bc}{b+c} \leq a + b + c$$

   Dem. Notamos que los términos del primer miembro de la tesis son análogos. Tratemos de construir el primero, es decir, $\dfrac{2ab}{a+b}$.

Sabemos que $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Sumando $2ab$, obtenemos: $(a+b)^2 \geq 4ab$. Como $a+b>0$, dividimos por esta última expresión y obtenemos:

$$a+b \geq \frac{4ab}{a+b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{a+b}{2} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

Análogamente:

$$\frac{a+c}{2} \geq \frac{2ac}{a+c} \qquad \wedge \qquad \frac{b+c}{2} \geq \frac{2bc}{b+c}$$

Sumando las tres últimas desigualdades, obtenemos lo pedido.

5. Si $a, b \in \mathbb{R}^+$ entonces

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

Dem. En realidad, se pide demostrar dos desigualdades para $a, b \in \mathbb{R}^+$:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \qquad \wedge \qquad \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$$

Demostremos la primera:

$a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 \Rightarrow a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0.$

$$\therefore \qquad \boxed{\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}}$$

Demostremos la segunda:

Por la primera desigualdad: $a+b \geq 2\sqrt{ab}$. Multiplicamos por $\sqrt{ab}$ y dividimos por $a+b$:

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}}$$

EJERCICIOS:

1. Demostrar que si a y b son números reales positivos, entonces $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

2. Demostrar que si a y b son números reales positivos, entonces $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$.

3. Demostrar que si x es un número real positivo, entonces $x^3 + \dfrac{1}{x^3} \geq x + \dfrac{1}{x}$.

4. Si $a+b=1$, probar que:

   a) $ab \geq \dfrac{1}{4}$

   b) $a^4 + b^4 \geq \dfrac{1}{8}$

5. Demuestre que si a, b, c, d son reales positivos, entonces $(ab + cd)(ac + bd) \geq 4abcd$.

6. Demuestre que si a, b, c son reales positivos, entonces $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$.

7. Demuestre que si a, b, c son reales positivos, entonces $ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2$.

8. Demuestre que si $a, b, c \geq 0$, no todos iguales, entonces
$$(a + b + c)(bc + ca + ab) \geq 9abc$$

9. Demostrar que si $0 \leq a \leq b$ entonces $a \leq b \iff a^2 \leq b^2$

10. Demuestre que si $a + b + c = 6$, entonces $a^2 + b^2 + c^2 \geq 12$.

11. Demuestre que si $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ entonces
$$\frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \leq \sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x + y + z}{3}$$

12. Si a, b, c son reales positivos y distintos entre sí, demuestre que
$$\frac{a + b + c}{3} > \left(\frac{ab + bc + ca}{3}\right)^{\frac{1}{2}} > (abc)^{\frac{1}{3}}$$

13. Si a, b, c son reales positivos, demostrar
$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} + \frac{b^2 + c^2}{b + c} + \frac{c^2 + a^2}{c + a} \geq a + b + c$$

14. Sean $x, y \in \mathbb{R}^+$, con $x < 1 < y$. Probar que $1 + xy < x + y$.

15. Si $a > b$ y $m, n \in \mathbb{R}^+$; demuestre que $b < \dfrac{ma + nb}{m + n} < a$.

16. Si $a \neq b \neq c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, demuestre que $\dfrac{a + b}{c} + \dfrac{b + c}{a} + \dfrac{a + c}{b} > 6$.

17. Demuestre que si $a, b \in \mathbb{R}^+$, entonces $\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{b} \geq \dfrac{9}{a + 2b}$.

1.3.1. Intervalos

Para simplificar la notación de ciertos subconjuntos de $\mathbb{R}$, introduciremos la notación de *intervalos*. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Se definen los siguientes conjuntos:

Nombre	Notación	Definición
Intervalo Abierto	$]a, b[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
Intervalo Cerrado	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
Intervalo semi-abierto por la izquierda	$]a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
Intervalo semi-abierto por la derecha	$[a, b[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
Intervalo infinito abierto por la derecha	$]-\infty, b[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$
Intervalo infinito cerrado por la derecha	$]-\infty, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$
Intervalo infinito abierto por la izquierda	$]a, \infty[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
Intervalo infinito cerrado por la izquierda	$[a, \infty[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \geq x\}$

DEFINICIÓN 1.3.3 Los números reales a, b y los símbolos $\infty, -\infty$ se llaman *valores extremos* del intervalo en cuestión. Si sus valores extremos son números reales, el intervalo se dice *acotado*.

1.3.2. Inecuaciones Lineales

Entenderemos por *inecuaciones lineales* ó de primer grado a expresiones algebraicas que pueden reducirse a la forma

$$ax + b > 0 \quad \vee \quad ax + b \geq 0 \quad \vee \quad ax + b < 0 \quad \vee \quad ax + b \leq 0$$

donde $a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ y x es una *variable real*.

Resolver una inecuación es determinar **todos** los $x \in \mathbb{R}$ que la satisfacen, lo cual se logra aplicando los teoremas anteriores.

El **conjunto solución** de una inecuación de la forma $p(x) \geq q(x)$ es el conjunto:

$$S = \{\ x \in \mathbb{R} \mid p(x) \geq q(x) \text{ es verdadero } \}$$

Ejercicios Resueltos

1. Resuelva: $\dfrac{6}{x-1} \geq 5$

   Solución: Veremos dos métodos para resolver esta inecuación, teniendo presente que $x \neq 1$.

   $\boxed{\text{Método1}}$ $\quad \dfrac{6}{x-1} - 5 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{11-5x}{x-1} \geq 0.$

   Para que este cuociente sea ≥ 0, es necesario que:

   $$(11 - 5x \geq 0 \quad \wedge \quad x - 1 > 0) \qquad \vee \qquad (11 - 5x \leq 0 \quad \wedge \quad x - 1 < 0)$$

   Luego, el conjunto solución es $\quad S = \left]1, \dfrac{11}{5}\right[.$

   $\boxed{\text{Método2}}$ Si se desea “multiplicar cruzado ”, se debe tener presente el signo de $x - 1$:

   - Si $x > 1:\quad 6 \geq 5x - 5 \quad \Rightarrow \quad x \leq \dfrac{11}{5} \quad \Rightarrow \quad S_1 = \left]1, \dfrac{11}{5}\right[.$
   - Si $x < 1:\quad 6 \leq 5x - 5 \quad \Rightarrow \quad x \geq \dfrac{11}{5} \quad \Rightarrow \quad S_2 = \emptyset$

     Por lo tanto, $\quad S = S_1 \cup S_2 = \left]1, \dfrac{11}{5}\right[.$

2. Probar que si $\ 3x - 5 \in]-2, 4[\ $ entonces $\ x \in]1, 3[$.

   Solución: $\quad 3x - 5 \in]-2, 4[\quad \Rightarrow \quad -2 < 3x - 5 < 4 \quad \Rightarrow \quad 3 < 3x < 9 \quad \Rightarrow \quad x \in]1, 3[.$

3. Resuelva el siguiente sistema de inecuaciones: $\left.\begin{array}{rcl} x - 1 & \leq & 1 - 3x \\ 3x + 2 & \geq & 7 \end{array}\right|$

   Solución: La primera inecuación tiene solución $\ x \leq 2\ $ y la segunda $\ x \geq \frac{5}{3}$. Como ambas condiciones deben satisfacerse simultáneamente, la solución del sistema es $\ S = \left[\frac{5}{3}, 2\right]$.

4. Resolver $\sqrt{2x+1} > \sqrt{x-3}$.

   Solución: En primer lugar determinamos las *restricciones* del problema, es decir, el conjunto de valores $x \in \mathbb{R}$ para los que las raíces cuadradas tienen sentido:

   $$2x+1 \geq 0 \quad \wedge \quad x-3 \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x \geq -\frac{1}{2} \quad \wedge \quad x \geq 3 \qquad \Longrightarrow \qquad x \geq 3$$

   Resolver la inecuación propuesta es equivalente a resolver

   $$2x+1 > x-3 \qquad \Longrightarrow \qquad x > -4 \qquad \therefore \qquad S \ = \ [3, \infty[\cap]-4, \infty[= \ [3, \infty[$$

5. Resuelva la siguiente inecuación, determinando la solución en términos del parámetro m:

   $$m(x-1) \leq x+2$$

   Solución: $mx - m \leq x + 2 \qquad \Longrightarrow \qquad (m-1)x \leq m+2.$

   Luego: si $m-1 > 0: \quad x \leq \dfrac{m+2}{m-1}$ y si $m-1 < 0: \quad x \geq \dfrac{m+2}{m-1}$.

   ¿Qué sucede si $m = 1$? La ecuación *original* queda: $x - 1 \leq x + 2$, la que es válida $\forall x \in \mathbb{R}$.

   Así, la solución de la inecuación en términos del parámetro m es:

   $$\left[\frac{m+2}{m-1}, \infty\right[\quad \text{si} \quad m < 1, \qquad \mathbb{R} \quad \text{si} \quad m = 1, \qquad \left]\infty, \frac{m+2}{m-1}\right] \quad \text{si} \quad m > 1$$

Ejercicios Propuestos

1. Resuelva las siguientes inecuaciones:

   a) $2x - 1 < x + 3$

   b) $-\dfrac{x}{3} < 2x + 1$

   c) $(x-2)^2 \geq x^2 - 1$

   d) $\dfrac{x-3}{2x+5} \geq 1$

2. Si $2x + 3 \in [1, 2]$, ¿a qué intervalo pertenece x?

3. Si $x \in [1, 2]$, ¿a qué intervalo pertenece $\dfrac{1}{2x+3}$?

4. Resuelva la ecuación

   $$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} = \frac{2}{x-m}$$

   ¿Qué condiciones debe cumplir el parámetro m para que la solución sea menor que 1? ¿Y para que la solución sea menor que 0?

5. Resuelva la ecuación
$$\frac{2x-m}{x+2} - \frac{x+m}{x^2-4} = \frac{4x-m}{2x-4}$$
¿Qué condiciones debe cumplir el parámetro m para que la solución esté entre -1 y 1?

6. En la fabricación de cierto producto, los costos mensuales totales están dados por la ecuación $C = 2500 + 100x$, donde x es el número de unidades producidas. Si el precio de venta se fija en \$150, determine el número mínimo de unidades que deben venderse mensualmente para asegurar que no hayan pérdidas.

1.3.3. Valor Absoluto

DEFINICIÓN 1.3.4 Sea $x \in \mathbb{R}$. Se define el **valor absoluto** de x, que denotamos $|x|$, como:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

OBSERVACIÓN:

- $x \leq 0 \quad \Rightarrow \quad -x \geq 0 \qquad \therefore\ \forall x \in \mathbb{R} : |x| \geq 0 \quad \wedge \quad (|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0).$
- El valor absoluto de x representa, geométricamente, la distancia de x al origen. De esta forma, dados $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que $|x-y|$ representa geométricamente la distancia que hay entre x e y.

PROPIEDADES 1.3.2 Para $x, y \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ se tiene que:

1. $|x| \geq 0$, y la igualdad se satisface si y solo si $x = 0$.
2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
3. $|-x| = |x|$.
4. $|x| \leq c \qquad \Longleftrightarrow \qquad -c \leq x \leq c.$
5. $||x| - |y|| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$. (Desigualdad Triangular)
6. $|x| \geq c \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \leq -c \quad \vee \quad x \geq c.$

Dem. Demostraremos las propiedades 4., 5. y 6:

4. $\boxed{\Rightarrow}$ $|x| \leq c \quad \Rightarrow \quad -c \leq -|x|$. Por otra parte, $x = |x| \quad \vee \quad x = -|x|$. Así:

$$-c \ \leq \ -|x| \ \leq \ x \ \leq \ |x| \ \leq \ c \qquad \therefore \quad -c \leq x \leq c$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Suponga $-c \leq x \leq c$. Como $x \in \mathbb{R}:\ x \geq 0 \quad \vee \quad x < 0$.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Si} \ \ x \geq 0: & |x| = x \leq c \\ \text{Si} \ \ x < 0: & |x| = -x \leq c \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad |x| \ \leq \ c$$

5. *a*) Probemos en primer lugar que $|x+y| \leq |x| + |y|$. Notar que:

$$\begin{array}{ccccc} -|x| & \leq & x & \leq & |x| \\ -|y| & \leq & y & \leq & |y| \\ \hline -(|x|+|y|) & \leq & x+y & \leq & |x|+|y| \end{array}$$

$\therefore |x+y| \ \leq \ |x| + |y|$.

b) Probemos ahora que $|\,|x| - |y|\,| \ \leq \ |x+y|$. Notar que:

$$|x| = |x+y-y| \leq |x+y| + |-y| = |x+y| + |y| \qquad \Rightarrow \qquad |x| - |y| \ \leq \ |x+y|$$

$$|y| = |y+x-x| \leq |y+x| + |x| \qquad \Rightarrow \qquad |y| - |x| \ \leq \ |x+y|$$

$$\therefore \quad |\,|x| - |y|\,| \ \leq \ |x+y|.$$

6. $\boxed{\Rightarrow}$ $|x| \ \geq \ c \qquad \Rightarrow \qquad -|x| \ \leq \ -c$

Luego, si $x \geq 0:\ x = |x| \geq c$ y si $x < 0:\ x = -|x| \leq -c$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $x \leq -c$ entonces $-x \geq c$. Como $c > 0:\ |x| = -x \geq c \qquad \Rightarrow \qquad |x| \geq c$.

Si $x \geq c$ y como $c > 0:\ |x| = x \geq c \qquad \Rightarrow \qquad |x| \geq c$.

1.3.4. Ecuaciones e Inecuaciones lineales con valor absoluto

Análogamente al caso anterior, resolver una ecuación o una inecuación lineal que posee en su planteamiento valores absolutos, es determinar el conjunto de **todos** los números reales que la satisfacen, o la transforman en una proposición verdadera.

Ejercicios Resueltos

1. Resolver $|\,3x-2\,| < 4$.

   Solución:

   $|3x-2| < 4 \;\Leftrightarrow\; -4 < 3x-2 < 4 \;\Leftrightarrow\; -2 < 3x < 6 \;\Leftrightarrow\; -\dfrac{2}{3} < x < 2$. Por lo tanto, $S =]-\frac{2}{3}, 2[$

2. Resolver $\dfrac{1}{|x+7|} > 2$.

   Solución: Notamos que $x \neq -7$. Además, como $|x+7| > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} - \{-7\}$: $\dfrac{1}{|x+7|} > 2 \;\Leftrightarrow\; |x+7| < \dfrac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; -\dfrac{1}{2} < x+7 < \dfrac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; -\dfrac{15}{2} < x < -\dfrac{13}{2}$. Por lo tanto, $S =]-\frac{15}{2}, -7[\cup]-7, \frac{13}{2}[$.

3. Resolver $|x-|x-1|| \leq 2$.

   Solución: $|x-|x-1|| \leq 2 \iff -2 \leq x-|x-1| \leq 2$

   $$\iff -2 \leq |x-1|-x \leq 2 \iff x-2 \leq |x-1| \leq x+2$$

   Si $x \geq 1$: $x-2 \leq x-1 \leq x+2$. La solución es el intervalo: $S_A = [1, \infty[$.

   Si $x < 1$: $x-2 \leq 1-x \leq x+2$. Luego, $2x \leq 3 \wedge 2x \geq -1$, de donde

   $-\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{3}{2}$. Así, la solución en este caso es $S_B = \left[-\dfrac{1}{2}, 1\right[$.

   Por lo tanto, la solución es $S = S_A \cup S_B = \left[-\dfrac{1}{2}, \infty\right[$.

4. Resolver $|x-2| + |3x-2| > 7$.

   Solución: $|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \geq 2 \\ -(x-2) & \text{si } x < 2 \end{cases}$ y $|3x-2| = \begin{cases} 3x-2 & \text{si } x \geq \frac{2}{3} \\ -(3x-2) & \text{si } x < \frac{2}{3} \end{cases}$

   Luego, deberemos analizar tres casos:

   $\boxed{x \geq 2}$ $\quad x-2+3x-2 > 7 \quad\Rightarrow\quad x > \dfrac{11}{4} \quad\Rightarrow\quad S_1 = \left]\dfrac{11}{4}, \infty\right[$

   $\boxed{\dfrac{2}{3} \leq x < 2}$ $\quad 2-x+3x-2 > 7 \quad\Rightarrow\quad x > \dfrac{7}{2} \quad\Rightarrow\quad S_2 = \emptyset$

   $\boxed{x < \dfrac{2}{3}}$ $\quad 2-x+2-3x > 7 \quad\Rightarrow\quad x < -\dfrac{3}{4} \quad\Rightarrow\quad S_3 = \left]-\infty, -\dfrac{3}{4}\right[$

   Luego, $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left]-\infty, -\dfrac{3}{4}\right[\bigcup \left]\dfrac{11}{4}, \infty\right[$

5. Demostrar que $\quad |x-2|<2 \quad \Longrightarrow \quad \left|\dfrac{x^2-3x+1}{x+1}\right|<7.$

Solución: Como $\left|\dfrac{x^2-3x+1}{x+1}\right| = |x^2-3x+1|\cdot\left|\dfrac{1}{x+1}\right|$, acotaremos separadamente ambas expresiones.

Notamos que:

- $|x^2-3x+1| = |(x-2)(x-1)-1| \leq |x-2||x-1|+1.$
  Luego, debemos acotar $|x-1|$: sabemos que $|x-2|<2 \quad\Rightarrow\quad -2<x-2<2.$
  Sumando 1: $\quad -1<x-1<3 \quad\Rightarrow\quad |x-1|<3.$
  Así: $\quad |x^2-3x+1| \leq |x-2||x-1|+1 < 2\cdot 3+1=7.$
- Para acotar $\left|\dfrac{1}{x+1}\right|$, nuevamente usamos la hipótesis: $\quad |x-2|<2 \quad\Rightarrow$
  $-2<x-2<2 \quad\Rightarrow\quad 1<x+1<5 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{1}{5}<\dfrac{1}{x+1}<1 \quad\Rightarrow\quad \left|\dfrac{1}{x+1}\right|<1.$

Multiplicando ambas expresiones, obtenemos lo pedido.

Ejercicios Propuestos Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones en $\mathbb{R}$:

1) $|2x-3|=5$

2) $|x-1|+|x+1|=2$

3) $|\,|x-2|-2|=2$

4) $|\,|x+1|-2|=x+3$

5) $|\,x-m|=2m$, con $m\in\mathbb{R}$

6) $|\,2x-1|<5$

7) $|x-3|\geq 2$

8) $|x-1|<|2x-1|$

9) $|x-1|+|x-2|+|x-3|\leq 5$

10) $|x-|2x-5||\geq 4$

11) $3x>|x-|2x-7||$

12) $||x-m|-|x+m||<2m$

13) $||x-3|-3|<2$

14) $|x-7|<5<|5x-25|$

15) $|4-x|+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x+4}}>2$

16) $|4-x|+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x+4}}>-2$

17) Demuestre que si $\quad |x-3|<1, \quad$ entonces $\quad 6<x+4<8.$

18) Probar que si $|x-2|<3$ entonces $\left|\dfrac{x^2+2x-8}{x+3}\right|<14$

19) Hallar $\delta>0$ tal que si $|x-4|<\delta$ entonces $\left|\dfrac{2x^2-6}{x+1}-\dfrac{26}{5}\right|<10^{-3}$

1.3.5. Inecuaciones cuadráticas

Entenderemos por *inecuaciones cuadráticas* ó de segundo grado a expresiones algebraicas que pueden reducirse a la forma

$$ax^2+bx+c>0 \quad \vee \quad ax^2+bx+c\geq 0 \quad \vee \quad ax^2+bx+c<0 \quad \vee \quad ax^2+bx+c\leq 0$$

donde $a,b,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0$ y x es una *variable real*. Como antes, resolver una inecuación de este tipo es determinar **todos** los $x\in\mathbb{R}$ que la satisfacen.

Para resolver una inecuación cuadrática, consideremos su *ecuación cuadrática asociada*:

$$ax^2+bx+c=0$$

cuyas soluciones se pueden determinar reescribiendo la expresión, como se muestra en los siguientes pasos:

$$0=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{4a}\right)+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right),$$

concluyendo

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\Rightarrow x=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Los valores de x que satisfacen la ecuación se llaman **raíces** y su existencia en $\mathbb{R}$ y multiplicidad dependen del signo del **discriminante** Δ definido por

$$\Delta:=b^2-4ac.$$

Se tendrán entonces los siguientes casos:

- Si $\Delta>0$, la ecuación posee dos **raíces reales y distintas**;
- Si $\Delta=0$, la ecuación posee **raíces reales e iguales**;
- Si $\Delta<0$, la ecuación no posee raíces en $\mathbb{R}$. Estas serán **raíces complejas conjugadas**.

OBSERVACIÓN: A partir de la expresión para las raíces, es posible deducir las siguientes relaciones entre los coeficientes a, b, c, que dejamos como ejercicio al lector:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \qquad\qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Recordemos que, de la Geometría Analítica, sabemos que la representación gráfica de la **ecuación cuadrática** :

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0,$$

es una **parábola**, donde a corresponde al coeficiente cuadrático, b al coeficiente lineal y c al término independiente. La expresión puede tomar la siguiente forma:

$$y \quad = \quad ax^2 + bx + c \quad = \quad a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right).$$

y, si $y = 0$, se tiene una ecuación cuadrática. Notamos que:

- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ entonces la curva cruza dos veces el eje x (se tienen dos soluciones para la ecuación cuadrática), si $\Delta = 0$ entonces la curva toca el eje x solo una vez (se tiene una sola solución) y si $\Delta < 0$ entonces no cruza el eje x (se tienen dos soluciones complejas conjugadas).

- Si $a > 0$ entonces $y \geq -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ y por el contrario, si $a < 0$, entonces $y \leq -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$. Gráficamente, si $a > 0$ entonces la ecuación cuadrática corresponde a la gráfica de una parábola «abierta hacia arriba», y si $a < 0$, corresponde a la gráfica de una parábola «abierta hacia abajo».

- Para $x = \dfrac{-b}{2a}$ se debe tener $y = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$. El punto $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ se llama vértice.

- La gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ es simétrica respecto de la recta $x = -\dfrac{b}{2a}$. En efecto, si tomamos

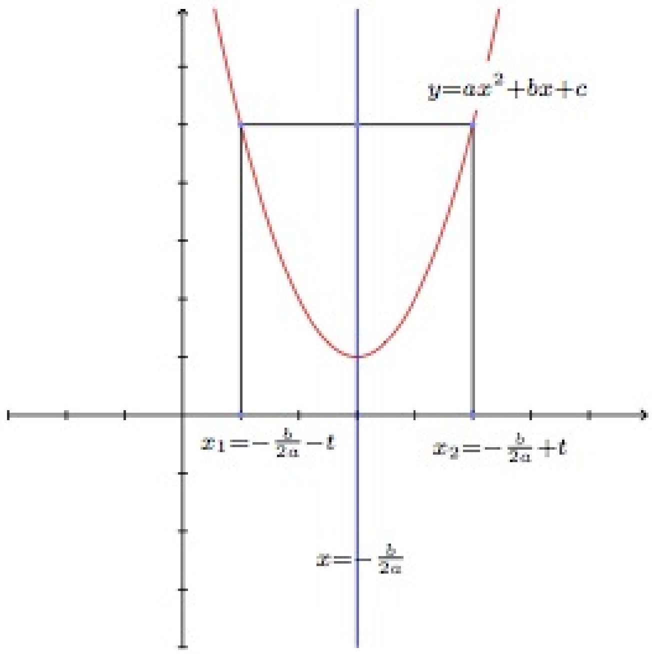
  $$x_1 = -\frac{b}{2a} + t \qquad \text{y} \qquad x_2 = -\frac{b}{2a} - t \qquad t > 0$$

  se tendrá

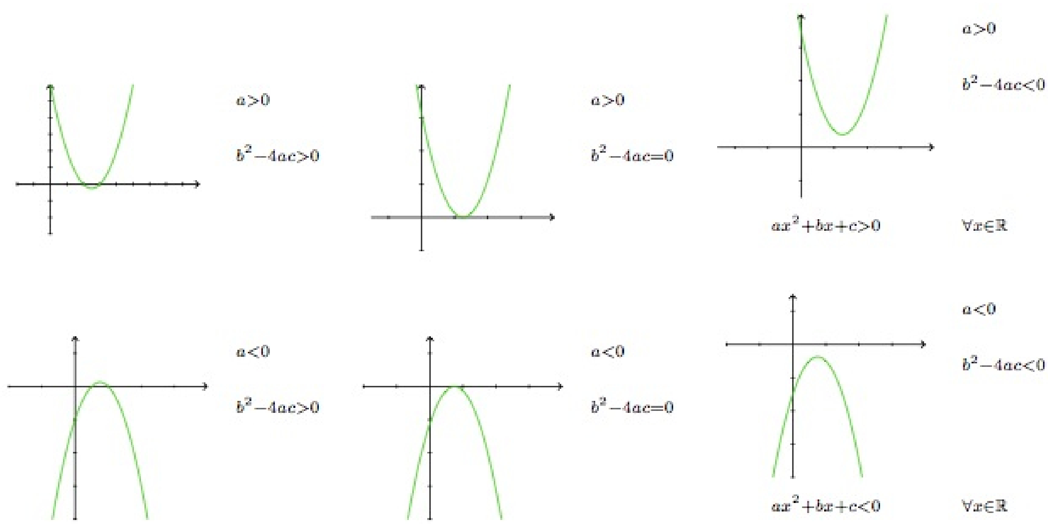
  $$y_1 = a\left(-\frac{b}{2a} + t + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = at^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

  $$y_2 = a\left(-\frac{b}{2a} - t + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a(-t)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

  de donde $y_1 = y_2$.



Utilizando todas estas consideraciones, obtenemos los gráficos que se muestran en la figura de arriba, de donde podemos concluir que, de acuerdo al signo del coeficiente principal a y los valores del discriminante $\triangle$, se tienen los siguientes casos, que ilustramos primeramente de manera gráfica e interpretamos luego analíticamente:



- Supongamos que se quiere resolver $ax^2 + bx + x > 0$, $a > 0$. Hay 3 posibilidades:
  - $\triangle > 0$ en cuyo caso hay 2 soluciones reales distintas de la ecuación cuadrática asociada (estamos en la situación de la primera figura). Si llamamos $r_1, r_2,\ r_1 < r_2$ a estas raíces, entonces la solución es $]-\infty, r_1[\,\cup\,]r_2, \infty[$.
  - $\triangle = 0$ en cuyo caso hay solo 1 solución real de la ecuación cuadrática asociada (estamos en la situación de la segunda figura). Si llamamos r_1 a esta raíz, entonces la solución es $]-\infty, r_1[\cup]r_1, \infty[$.
  - $\triangle < 0$ en cuyo caso no hay soluciones reales de la ecuación cuadrática asociada (estamos en la situación de la tercera figura). Entonces la solución es $\mathbb{R}$.
- Supongamos que se quiere resolver $ax^2 + bx + x \geq 0$, $a > 0$. Hay 3 posibilidades:
  - $\triangle > 0$ en cuyo caso hay 2 soluciones reales distintas de la ecuación cuadrática asociada (estamos en la situación de la primera figura). Si llamamos $r_1, r_2,\ r_1 < r_2$ a estas raíces, entonces la solución es $]-\infty, r_1]\,\cup\,[r_2, \infty[$.
  - $\triangle = 0$ en cuyo caso hay solo 1 solución real de la ecuación cuadrática asociada (estamos en la situación de la segunda figura). Entonces la solución es $\mathbb{R}$.
  - $\triangle < 0$ en cuyo caso no hay soluciones reales de la ecuación cuadrática asociada (estamos en la situación de la tercera figura). Entonces la solución es $\mathbb{R}$.
- Supongamos que se quiere resolver $ax^2 + bx + x < 0$, $a > 0$. Hay 3 posibilidades:
  - $\triangle > 0$ en cuyo caso hay 2 soluciones reales distintas de la ecuación cuadrática asociada (estamos en la situación de la primera figura). Si llamamos $r_1, r_2,\ r_1 < r_2$ a estas raíces, entonces la solución es $]r_1, r_2[$.
  - $\triangle = 0$ en cuyo caso hay solo 1 solución real de la ecuación cuadrática asociada (estamos en la situación de la segunda figura). Entonces la solución es $\emptyset$.
  - $\triangle < 0$ en cuyo caso no hay soluciones reales de la ecuación cuadrática asociada (estamos en la situación de la tercera figura). Entonces la solución es $\emptyset$.
- Supongamos que se quiere resolver $ax^2 + bx + x \leq 0$, $a > 0$. Hay 3 posibilidades, que dejamos como ejercicio al lector, pues es análogo.

Ejercicios Resueltos

1. Resolver $\sqrt{\dfrac{1}{x^2-2x+1}} \leq |x-1|$.

   Solución: $\sqrt{\dfrac{1}{x^2-2x+1}} = \sqrt{\dfrac{1}{(x-1)^2}} = \dfrac{1}{|x-1|}$ Luego, la raíz cuadrada está bien definida siempre que $x \neq 1$. La inecuación queda $\dfrac{1}{|x-1|} \leq |x-1| \Leftrightarrow |x-1|^2 \geq 1$.

   Como $|x-1|^2 = (x-1)^2$, debemos resolver $x^2-2x+1 \geq 1 \Leftrightarrow x^2-2x = x(x-2) \geq 0$.

   $\therefore \quad S =]-\infty, 0] \cup [2, \infty[$.

2. Resolver $-2 + |x+2| \leq \sqrt{1-|x-3|}$.

   Solución: Para que la raíz cuadrada esté bien definida:

   $$1-|x-3| \geq 0 \quad \Rightarrow \quad |x-3| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -1 \leq x-3 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 2 \leq x \leq 4$$

   En este intervalo: $x+2>0 \quad \therefore |x+2| = x+2$.

   Así, debemos resolver equivalentemente $x \leq \sqrt{1-|x-3|}$.

   Como ambos miembros son positivos, podemos elevar al cuadrado: $x^2 \leq 1-|x-3| \iff 1-x^2 \geq |x-3|$.

   Si $2 \leq x < 3$**:** $1-x^2 \geq 3-x \Leftrightarrow x^2-x+2 \leq 0$, cuyo discriminante es <0, y como $a=1>0$, no hay soluciones en este intervalo.

   Si $3 \leq x \leq 4$**:** $1-x^2 \geq x-3 \Leftrightarrow x^2+x-4 \leq 0$, cuya solución en $\mathbb{R}$ es $\left[\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}\right]$. Sin embargo, $\left[\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}\right] \bigcap [3,4] = \emptyset$.

   Así, el conjunto solución es $S = \emptyset$.

3. Resuelva $\sqrt{|x|-2} \leq |x+2|$.

   Solución: Las restricciones son: $|x|-2 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 2 \Leftrightarrow \Big(x \geq 2 \quad \vee \quad x \leq -2\Big)$

   Como ambas expresiones son mayores o iguales a 0 podemos elevar al cuadrado sin alterar la desigualdad:

   $$|x|-2 \leq (x+2)^2$$

   $\boxed{\text{Si } x \geq 2}$ $x-2 \leq (x+2)^2 \Leftrightarrow x^2+3x+6 \geq 0$. Como $\triangle < 0$, $S_A = [2, \infty[$.

   $\boxed{\text{Si } x \leq -2}$ $-(x+2) \leq (x+2)^2 \Leftrightarrow x^2+5x+6 \geq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x+2) \geq 0$

   Luego, $S_B =]-\infty, -3] \cup \{-2\}$.

   Por lo tanto la solución es $S = S_A \cup S_B =]-\infty, -3] \cup \{-2\} \cup [2, \infty[$.

4. Demuestre que para todo $a, p, q \in \mathbb{R}^+$, las raíces de la ecuación

$$\frac{1}{x-p} + \frac{1}{x-q} = \frac{1}{a^2} \qquad \text{son reales.}$$

Solución:

Notamos que, para que la ecuación tenga sentido, se requiere que $x \neq p, \ x \neq q$. Con estas condiciones, la ecuación es equivalente a:

$$a^2(x-p) + a^2(x-q) = (x-p)(x-q)$$

$$x^2 - (2a^2 + p + q)x + a^2(p+q) + pq = 0$$

Debemos probar que el discriminante de esta ecuación es siempre mayor ó igual a cero.

Notemos que:

$$\triangle = (2a^2 + p + q)^2 - 4(a^2(p+q) + pq) = (p-q)^2 + 4a^4$$

Como $(p-q)^2 \geq 0$ y $a^4 > 0$, se tiene que $\triangle > 0$.

Ejercicios Propuestos

1. Encontrar el conjunto solución para cada una de las siguientes inecuaciones:

   a) $2x^2 < 3 - 5x$

   b) $-x^2 + 2x - 5 \leq 0$

   c) $x^3 - 2x^2 \leq -x^2 + 2x$

   d) $\dfrac{x^2}{x^2 - 1} \leq 1$

   e) $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 6} < 3$

   f) $|x^2 - 5x| \geq 3$

   g) $|x| + |x^2 - 2x - 3| < 5$

   h) $\sqrt{x^2 - x} - 2 < x$

   i) $\sqrt{3x - 2} > \sqrt{3 - x}$

   j) $\sqrt{x^2 + x - 2} - 2\sqrt{x^2 - 1} \geq 0$

   k) $\sqrt{x^2 + x + 1} \geq x - 2$

   l) $|x^2 - 10| < k$ con $k \in \mathbb{R}$

   m) $|x^3 - 1| \geq |x - 1|^2$

   n) $\dfrac{x^3 - 26x^2 + 25x}{(x^2 + x + 1)(2x - 2)} > x$

   ñ) $\dfrac{(x^2 - 2x - 3)\sqrt{4 - |x - 2|}}{(x^2 + 3x + 7)(4x - 1)\sqrt{3x^2 + 1}} > 0$

   o) $\dfrac{(1 + x^2)(x^2 - 4x + 3)}{\sqrt[4]{x - 2}\,|2x - 5|^7} < 0$

   p) $\dfrac{\sqrt{4 - |x - 2|}\,(x^2 - 2x - 3)}{(x^2 + 3x + 7)\,(4x - 1)\,\sqrt{3x^2 + 1}} > 0$

   q) $\dfrac{\sqrt{8 - |2x - 9|} - 2\sqrt{x - 1}}{(x^2 + 6x + 10)\,|3x - 5|} \leq 0$

2. Considere la ecuación cuadrática $x^2 + (2k+1) + k(k+9) = 0$. Determine $k \in \mathbb{R}$ tal que la ecuación tenga:

   a) Raíces reales distintas.

   b) Raíces reales iguales.

   c) No tenga raíces reales.

3. Encontrar los valores de $r \in \mathbb{R}$ tales que

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad rx^2 - r(r-1)x + 2r < 0$$

4. Encontrar los valores de $r \in \mathbb{R}$ tales que

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad (5-r)x^2 + 2(1-r)x + 2(1-r) < 0$$

5. ¿Para qué valor(es) de m las raíces *distintas* x_1 y x_2 de la ecuación

$$(m+1)x^2 - 2x + m - 1 = 0$$

   pertenecen al intervalo $]0, 2[$?

6. ¿Para qué valor(es) de m las raíces *distintas* x_1 y x_2 de la ecuación

$$(m-2)x^2 - 7(m-1)x + 12m - 3 = 0$$

   cumplen que $|x_1 - x_2| = 3m - 1$?

7. ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ se tiene que $\quad -3 < \dfrac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2$?

8. Determine todos los valores que pueden tener dos múltiplos consecutivos de siete, si su producto debe ser mayor que 294.

9. Determine las dimensiones que puede tener una cancha, si no debe sobrepasar $88[m^2]$ de superficie y su largo debe ser tres metros más que su ancho.

10. Determine el ó los valor(es) de $m \in \mathbb{R}$ de modo que el punto de intersección de las rectas del sistema

$$\begin{cases} x - y &= m^2 + 2m \\ x + y &= m^2 - 4 \end{cases}$$

   pertenezcan al rectángulo con vértices $A = (0, -4)$, $B = (10, -4)$, $C = (10, 1)$, $D = (0, 1)$.

1.4. Axioma del Supremo

El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ satisface muchas de las propiedades de $\mathbb{R}$. De hecho, también tiene estructura de cuerpo. Sin embargo, intuitivamente podemos visualizar que éstos no están *pegados*, es decir, que muy cerca de cualquier número racional, siempre es posible encontrar un número que no es racional. Por ejemplo, entre 1,41 y 1,42 (números escitos en forma decimal que corresponden a números racionales) se encuentra $\sqrt{2}$. La pregunta es cómo dar cuenta de esta *completitud* de $\mathbb{R}$. Para ello, introduciremos los siguientes conceptos:

DEFINICIÓN 1.4.1 Sean $A \subset \mathbb{R}$, $\quad a,\, b\, \in \mathbb{R}$. Diremos que

1. a es una *cota inferior* de A ssi $\forall x \in A:\ a \leq x.$ Si existe una cota inferior para A, diremos que A es *acotado inferiormente*.
2. b es una *cota superior* de A ssi $\forall x \in A:\ b \geq x.$ Si existe una cota superior para A, diremos que A es *acotado superiormente*.
3. A es *acotado* si tiene cotas inferiores y superiores. Es decir:

$$A \subset \mathbb{R} \ \text{ es acotado} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists a, b \in \mathbb{R}:\ \forall x \in A:\ a \leq x \leq b$$

OBSERVACIÓN: Si A tiene **una** cota inferior, entonces tiene infinitas cotas inferiores. Análogamente para cotas superiores. Luego, es posible considerar la mayor de las cotas inferiores y la menor de las cotas superiores, lo que da origen a la siguiente

DEFINICIÓN 1.4.2 Sea $A \subset \mathbb{R}$.

1. Un número real a se dice **ínfimo** de un conjunto A si es la **mayor de las cotas inferiores de A**. Escribimos en este caso: $\text{ínf}(A) = a.$ Es decir,

$$a = \text{ínf}(A) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in A:\ a \leq x \quad \wedge \quad a' \leq a \ \text{ para toda cota inferior } a' \text{ de } A$$

   Si $\text{ínf}(A) \in A$ entonces el ínfimo se dice *mínimo*, y escribimos $\text{mín}(A) = a.$

2. Un número real b se dice **supremo** de un conjunto A si es la **menor de las cotas superiores de A**. Escribimos en este caso: $\sup(A) = b.$ Es decir,

$$b = \sup(A) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in A:\ b \geq x \quad \wedge \quad b' \geq b \ \text{ para toda cota superior } b' \text{ de } A.$$

   Si $\sup(A) \in A$ entonces el supremo se dice *máximo*, y escribimos $\text{máx}(A) = b.$

PROPOSICIÓN 1.4.1 Si $A \subset \mathbb{R}$ posee ínfimo y/o supremo, éstos son únicos.

Dem.

En efecto: supongamos que a y a' son ambos supremos de A. Entonces, $a' \leq a$ pues $a = \sup(A)$ y $a \leq a'$ pues $a' = \sup(A)$. Así, necesariamente $a = a'$.

Análogamente con el ínfimo.

EJEMPLO 1.4.1 Determine cotas inferiores, cotas superiores, ínfimo, supremo, máximo y mínimo, si es que existen, para cada uno de los siguientes conjuntos:

- $A =]-1, 9[$
- $B = [-1, 9]$
- $C =]0, \infty[$
- $D = [-5, -3] \cup]-1, 9[$
- $E = \left\{ \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \right\}$

Solución:

- Para A y B las cotas superiores son todos los $x \in \mathbb{R}$: $x \geq 9$; las cotas inferiores son todos los $x \in \mathbb{R}$: $x \leq -1$. $\therefore$ A y B son acotados. Además: $\text{ínf}\, A = \text{ínf}\, B = -1$ $\sup A = \sup B = 9$.
  A no tiene mínimo ni máximo. $\text{mín}\, B = -1$ y $\text{máx}\, B = 9$.
- C es acotado inferiormente pero no superiormente. $\text{ínf}\, C = 0$.
- E es acotado. $\sup E = 1 = \text{máx}\, E$. $\text{ínf}\, E = 0$.

Presentamos a continuación la propiedad que caracteriza la diferencia entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ que corresponde al *Axioma del Supremo o de Completitud de* $\mathbb{R}$.

Todo subconjunto no vacío de números reales superiormente acotado, tiene supremo.

De este axioma se concluye, simétricamente, el siguiente

TEOREMA 1.4.1 Todo subconjunto no vacío de números reales acotado inferiormente tiene ínfimo.

TEOREMA 1.4.2 Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, acotado superiormente, y sea $a = \sup(A)$. Entonces,

$$\forall \epsilon > 0 \quad (\text{ no importa cuán pequeño }) \quad \exists x_0 \in A : \quad x_0 > a - \epsilon$$

Dem.

Notamos que todo número real x menor que a puede ser escrito en la forma $a - \epsilon$, donde $\epsilon = a - x$. Es decir, esta es otra manera de decir que ningún número menor que a es una cota superior de A.

TEOREMA 1.4.3 $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ no es acotado superiormente. (Sí lo es inferiormente).

Dem.

- $0 \in \mathbb{R}$ es una cota inferior para $\mathbb{N}$.
- Probaremos que $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente por contradicción:

  Supongamos que $\mathbb{N}$ es acotado superiormente. Luego, $\exists a \in \mathbb{R}: \quad a = \sup(\mathbb{N})$.

  $$\therefore \quad n \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

  Pero

  $$n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad n+1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

  $$n \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad n+1 \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad n \leq a-1 \; \forall n \in \mathbb{N}$$

  Es decir, hemos encontrado otra cota superior, menor que la anterior, para $\mathbb{N}$, lo cual es una contradicción.

TEOREMA 1.4.4 **Propiedad Arquimedeana**

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \exists n \in \mathbb{N}: \quad x < n$$

Dem.

Supongamos lo contrario, es decir:

$\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad n \leq x$ lo cual significaría que $\mathbb{N}$ es acotado superiormente, que acabamos de probar es falso.

COROLARIO 1.4.1

$$\forall x \in \mathbb{R}^+: \quad \exists n \in \mathbb{N}: \quad 0 < \frac{1}{n} < x$$

Dem.

Sea $y \in \mathbb{R}^+$ cualquiera, y definamos $\quad x = \dfrac{1}{y} \in \mathbb{R}^+$.

Por la propiedad arquimedeana, como $y \in \mathbb{R}$: $\quad \dfrac{1}{x} = y < n \quad$ y luego $\quad 0 < \dfrac{1}{n} < x$.

TEOREMA 1.4.5 Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces, $\quad \exists \, \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}: \quad a < \dfrac{p}{q} < b$.

Dem.

Aplicamos la propiedad arquimedeana a $\quad x = b-a, \quad n = q \quad$ de donde $\quad q(b-a) > 1$.

También, obtenemos que $\quad \exists \, j \in \mathbb{N}: \quad j > qa$.

Sea ahora p el menor entero positivo tal que $\quad p > qa$. Por lo tanto, $\quad p-1 \leq qa$.

Así:

$$qa < p \leq qa + 1 \underbrace{<}_{q(b-a)>1} qa + q(b-a) = qb$$

$$qa < p < qb \qquad \Longrightarrow \qquad a < \frac{p}{q} < b$$

OBSERVACIÓN: Sabemos que existen números que no pertenecen a $\mathbb{Q}$ pero si a $\mathbb{R}$. Por ejemplo, $\sqrt{2}$. El axioma del supremo nos permite construirlo a partir de los números racionales. Veamos que

$$\sqrt{2} = \sup\{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \wedge x^2 < 2\}$$

Consideremos el conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \wedge x^2 < 2\}$.
Si $x \in A$ entonces $x < \sqrt{2}$. Luego,

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, x_0 \in \mathbb{Q} : \quad \sqrt{2} - \epsilon < x_0 < \sqrt{2}$$

es decir, $\sqrt{2} = \sup(A)$. Más en general, se tiene la siguiente

PROPOSICIÓN 1.4.2 Si $a > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces el número real

$$j = \sup\{x \in \mathbb{R} : x^n \leq a\} \qquad \text{satisface} \qquad j^n = a$$

PROPOSICIÓN 1.4.3 Si A es un conjunto no vacío y acotado entonces

$$\text{ínf } A \ \leq \ \sup A$$

Dem. Sean:

$$\left.\begin{array}{l} a = \text{ínf}(A) \ \Rightarrow \ \forall x \in A : \ a \leq x \\ b = \sup(A) \ \Rightarrow \ \forall x \in A : \ x \leq b \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad a \leq x \leq b \quad \forall x \in A \qquad \therefore \quad a \leq b$$

PROPOSICIÓN 1.4.4 Si $A \subseteq B$ son conjuntos no vacíos y B es acotado entonces

$$\text{ínf } B \ \leq \text{ínf } A \ \leq \sup A \ \leq \sup B$$

Dem. Sean: $a = \text{ínf}(A)$, $a' = \sup(A)$, $b = \text{ínf}(B)$, $b' = \sup(B)$.
$b' = \sup(B) \ \Rightarrow \ \forall x \in B : \ x \leq b'$. En particular, como $A \subseteq B$: $\forall x \in A : \ x \leq b'$.
$\therefore$ b' es una cota superior de A, y por lo tanto $a' \leq b'$ (a' es la menor de las cotas superiores).
Análogamente con los ínfimos:
$b = \text{ínf}(B) \ \Rightarrow \ \forall x \in B : \ x \geq b$. En particular, como $A \subseteq B$: $\forall x \in A : \ x \geq b$.
$\therefore$ b es una cota inferior de A, y por lo tanto $b \leq a$ (a es la mayor de las cotas inferiores).

Ejercicios Propuestos

1. Muestre que $\sup[a, b] = \sup[a, b[= b$;

2. Muestre que $\text{ínf}]a, b[= \text{ínf}[a, b[= a$;

3. Determine, si existen, $\sup$ e ínf de los siguientes conjuntos:

   a) $A = \left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

   b) $A = \{0{,}3, 0{,}33, 0{,}333, \dots\}$

   c) $A = \left\{8^{0{,}3}, 8^{0{,}33}, 8^{0{,}333}, \dots\right\}$

   d) $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 3\right\}$

   e) $\left\{\dfrac{2n-3}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$

   f) $\left\{\dfrac{2n^2-3}{1+2n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

   g) $\left\{\dfrac{2n^2-5}{1+4n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$

   h) $\left\{1 - \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \bigcup \left\{2 - \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

4. Sean A, B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$, acotados superiormente. Defina el conjunto

$$AB = \{ab \in \mathbb{R} \,:\, a \in A \,\wedge\, b \in B\}$$

   Demostrar que $\quad \sup(AB) \neq \sup A \sup B \quad$ pero que si $A, B \subset \mathbb{R}^+$, entonces se cumple la igualdad. Muestre además que si $\sup A < 0$ y $\sup B < 0$, entonces

$$\text{ínf}(AB) = \sup A \sup B$$

   .

5. Sean A, B subconjuntos de $\mathbb{R}$ no vacíos y acotados. Demuestre (aquellas que son verdaderas) ó refute (mediante un contraejemplo en el caso de las falsas):

   a) $\sup(A \cap B) \leq \text{ínf}\,\{\sup A, \sup B\}$

   b) $\sup(A \cap B) = \text{ínf}\,\{\sup A, \sup B\}$

   c) $\sup(A \cup B) \geq \sup\,\{\sup A, \sup B\}$

   d) $\sup(A \cup B) = \text{ínf}\,\{\sup A, \sup B\}$

1.5. Ejercicios de controles y certámenes

1. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

    a) Sea $a \in \mathbb{R}$, entonces existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{\sqrt{x^2 - a^2}}{|x-a| + x^2 + x + 2} < 0$

    b) Sean $\lambda \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}$ y $\alpha > 1$, entonces $(\alpha - 1)(\lambda x^2 + \lambda x + \lambda) > \dfrac{1 - \alpha^2}{\alpha}$

2. Resolver en $\mathbb{R}$:
$$\left| \frac{x - |x|}{x} - \frac{1}{x} \right| \geq |x|$$

3. Sea $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \ x = \left(\dfrac{1}{2} \right) + (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$

    a) Determine si A es acotado.

    b) Determine si existe $\sup(A)$ e $\inf(A)$. ¿Existen máximo y mínimo de A?

4. Resolver:

    a) $\dfrac{2}{|x-4|} \geq 1$

    b) $x + \sqrt{x} \ < \ 2$

5. Determine, si existen, $\sup A$ e $\inf A$ para $A = \left\{ \dfrac{n}{n+1} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$.

6. Encuentre el conjunto solución de la siguiente inecuación: $\left| \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 2x - 3} \right| \leq 1$

7. Se definen los conjuntos:
$$\mathcal{S} = \left\{ x \in \mathbb{R} \, / \ \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x^2 + 3x + 2} < 0 \right\}$$
$$\mathcal{T} = \left\{ x \in \mathbb{R} \, / \ \frac{x^2 + 5x - 6}{|2x - 3|} > 0 \right\}$$
    Determinar: $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ y $\mathcal{S} - \mathcal{T}$

8. Resolver:

    a) $\dfrac{1 + |2x - 3|}{|x + 5|} < 1$

    b) $\dfrac{\sqrt{4x + 1} - \sqrt{x + 6}}{\sqrt{x - 1}} < 1$

9. Resolver en $\mathbb{R}$:
$$2\sqrt{x^2 + x + 1} - x \leq |x + 3|$$

10. Determine los valores de $k \in \mathbb{R}$ tal que
$$x^2 - (k+1)x + k^2 > 0 \, , \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Capítulo 2

Funciones

En gran parte de la matemática y de las ciencias naturales se presentan relaciones «funcionales». Por ejemplo, el volumen y la superficie de un cono *dependen* de la altura y del radio basal del mismo; la posición de una partícula en movimiento *depende* del tiempo, la cuenta de la luz y del agua *dependen* del consumo respectivo, etc. En general, cuando los valores de ciertas «cantidades» están determinadas por los de otras, diremos que las primeras *dependen* de las segundas, o que están en *función* de ellas.

2.1. El Concepto de Función

Para entender el concepto de *función* consideremos dos conjuntos A y B. En lenguaje coloquial, una *función* o *aplicación* f de A en B, es un «criterio», «regla» o «fórmula» que a **cada** elemento de A le asocia **un único** elemento de B. A se denomina el *dominio* de f (denotado por $\text{Dom}(f)$) y B el *conjunto de llegada* de f. Si $a \in A$, el único elemento de f que se le asocia por intermedio de f se denota, habitualmente, por $f(a)$ y se denomina la *imagen* o el *valor* de f en a. Al conjunto formado por todas la imágenes de A se le denomina también *imagen* de f ($\text{Im}(f)$), *recorrido* de f ($\text{Rec}(f)$) o *codominio* de f ($\text{Cod} f$). Si $f(a)$ es un elemento en el $\text{Rec}(f)$, entonces a es su *preimagen*, y

$$\text{Rec}(f) \;=\; \{\, f(x) \in B \;:\; x \in A \,\}$$

NOTACIÓN 2.1.1 Las notaciones más usadas para una función f de A en B son $f\colon A \to B$ escribiéndose al lado o debajo la fórmula o criterio, mediante el cual a los elementos de A se le asocian únicos elementos en B. Es decir:

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \longrightarrow & B \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array} \qquad\qquad \text{o} \qquad\qquad f: A \longrightarrow B, \quad x \mapsto f(x)$$

EJEMPLOS:

1. Sea E un conjunto formado por n artículos, es decir, $E = \{a_1, a_2, \cdots a_n\}$ y F un conjunto formado por m etiquetas, cada una marcada con precios, es decir, $F = \{p_1, p_2, \cdots p_m\}$. El proceso de «etiquetar» los artículos (con una sola etiqueta) es una función $f\colon E \to F$. Si

al artículo a_i se le asocia (al adherírsele) la etiqueta p_j, escribimos $f(a_i) = p_j$ y podemos interpretar esto como que el artículo a_i vale p_j.

2. Sea $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ la función que a cada $n \in \mathbb{N}$ le asigna el número **mínimo** de monedas necesarias para completar \$ n. Entonces:

   $\varphi(1) = \varphi(5) = \varphi(10) = \varphi(50) = \varphi(100) = \varphi(500) = 1$

   $\varphi(2) = \varphi(6) = \varphi(11) = \varphi(15) = \varphi(20) = \varphi(51) = \varphi(55) = \varphi(60) = \varphi(101) = \varphi(105) = \varphi(110) = \varphi(200) = \varphi(501) = \cdots = 2$

   OBSERVACIÓN: Notemos que si en lugar de número mínimo hubiésemos considerado el número **máximo** de monedas requeridas para formar \$ n, entonces la función sería diferente: el número máximo de monedas habría coincidido con n.

   Si simplemente hubiésemos dicho *el número de monedas requeridas* para formar \$ n, la función **no** estaría bien definida, ya que, por ejemplo, \$ 11 se podría formar de varias maneras. Es importante, en la definición de una función, que la imagen esté claramente determinada.

3. La función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (x + y, x - y)$, asigna a cada elemento de $\mathbb{R}^2$ un nuevo elemento en $\mathbb{R}^2$. Por ejemplo: $f(1, 2) = (3, -1)$.

4. Sea $E = \{1, 2, 3\}$ y considere la función $\psi : \mathbb{P}(E) \longrightarrow \mathbb{N}_0$, $\psi(A) = \#A$

   Así, por ejemplo $f(\{3\}) = 1$, $f(\emptyset) = 0$ y $f(E) = 3$.

5. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^2$. En este caso, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{Rec}(f) = \mathbb{R}_0^+$.

6. Se desea construir un estanque horizontal de acero para almacenar gas, que tenga forma de cilindro circular recto de 3 metros de largo, con una semiesfera en cada extremo. Expresar el volumen V del estanque, como función del radio r de la semiesfera.

   El volumen contenido por las semiesfera será: $V_{s.e.}(r) = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

   El volumen contenido en el cilindro: $V_C(r) = 3\pi r^2$.

   Luego, el volumen del estanque es: $V_E(r) = \dfrac{1}{3}\pi r^2(4r + 9)$

2.2. Funciones reales

Las *funciones reales de variable real* serán el objeto de estudio en este curso. Es decir, queremos estudiar funciones $f : A \longrightarrow B$ donde $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Estas funciones son del tipo de los ejemplos 5. y 6. señalados arriba. En particular, el ejemplo 6. ilustra la forma en que las funciones permiten *modelar* situaciones reales.

OBSERVACIÓN: A veces, escribiremos $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Esta notación será usada para indicar que el dominio de f es A, donde A es el **más grande** subconjunto de $\mathbb{R}$ en donde la fórmula ó expresión que la define tiene sentido.

Muchas veces, por abuso de lenguaje, se define una función sólo señalando la «fórmula». En estos casos, nuevamente se considerará que el dominio de esta función es el más grande subconjunto de $\mathbb{R}$ en donde la fórmula ó expresión que la define tiene sentido, es decir

$$\mathrm{Dom}(f) \;=\; \{\, x \in \mathbb{R} \,:\; f(x) \in \mathbb{R}\,\}$$

DEFINICIÓN 2.2.1 Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Llamaremos *gráfico* de la función f, al conjunto

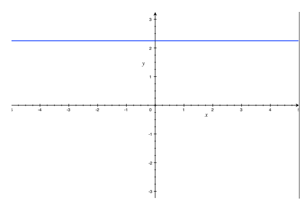
$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y = f(x)\}$$

Por lo tanto, podemos representar una función real como una curva o figura en el plano $\mathbb{R}^2$.

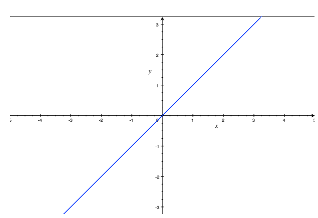
EJEMPLOS:

1. **Función constante:**

   $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = K, \quad K \in \mathbb{R}$ fija.
   $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}, \quad \mathrm{Rec}(f) = \{K\}$.
   Como se ve, la gráfica corresponde a una recta paralela al eje x.

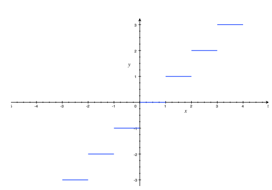
2. **Función identidad:**

   $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x$.
   $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}, \quad \mathrm{Rec}(f) = \mathbb{R}$.

3. **Función parte entera:**

   $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = [x]$ donde $[x]$ es el mayor entero menor o igual que x.
   $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}, \quad \mathrm{Rec}(f) = \mathbb{Z}$.

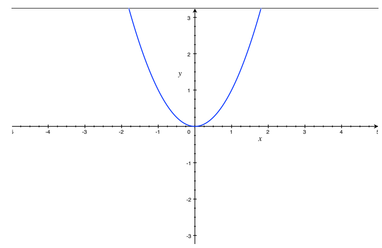
   

4. **Función afín:** $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b, \ a, b \in \mathbb{R}$ fijas.

   $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}, \qquad \text{Rec}(f) = \mathbb{R}$.
   La gráfica es una recta de pendiente a que corta al eje Y en b.

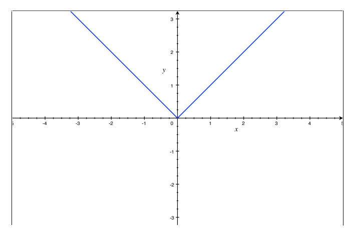
5. **Función cuadrática:**

   $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$.
   $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}, \qquad \text{Rec}(f) = \mathbb{R}_0^+$

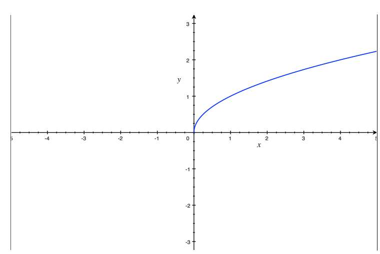
6. **Función valor absoluto:**

   $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|$.
   $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}, \qquad \text{Rec}(f) = \mathbb{R}_0^+$.

7. **Función raíz cuadrada:**

   $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x}$.
   $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}_0^+, \qquad \text{Rec}(f) = \mathbb{R}_0^+$.

8. Una **función definida por tramos:**

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x > 1 \\ x^2 & \text{si} \quad x \leq 1 \end{cases}$$

OBSERVACIÓN: A partir de las gráficas conocidas, es posible construir las gráficas de las funciones trasladadas, en forma vertical u horizontal, o reflejadas respecto a los ejes coordenados, considerando las siguientes propiedades:

1. La ecuación $y = f(x) + c$, donde $c \in \mathbb{R}^+$, gráficamente representa un corrimiento vertical de la gráfica de $y = f(x)$, en c unidades hacia arriba.
2. La ecuación $y = f(x-c)$, donde $c \in \mathbb{R}^+$, gráficamente representa un corrimiento horizontal de la gráfica de $y = f(x)$, en c unidades hacia la derecha.
3. La ecuación $y = -f(x)$, gráficamente representa una reflexión de la gráfica de $y = f(x)$, respecto al eje x.
4. La ecuación $y = f(-x)$, gráficamente representa una reflexión de la gráfica de $y = f(x)$, respecto al eje y.

EJERCICIOS:

1. Construya las gráficas de las siguientes funciones g a partir de las gráficas de f:

   a) $g(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ a partir de $f(x) = \dfrac{1}{x}$

   b) $g(x) = -\sqrt{1-x} + 2$ a partir de $f(x) = \sqrt{x}$

   c) $g(x) = |x^2 - 2x - 3|$ a partir de $f(x) = |x|$

2. Resuelva **gráficamente** las siguientes ecuaciones e inecuaciones:

   a) $\sqrt{x-2} = 4 - x$

   b) $\sqrt{2-x} < x$

   c) $||x| - 2| < 1$

   d) $\dfrac{x}{x-1} \geq x$

3. Determine el dominio, el recorrido (como subconjuntos de $\mathbb{R}$) y el gráfico, de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

   b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

   c) $f(x) = \sqrt{-x}$

   d) $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$

   e) $f(x) = x + [x]$

   f) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

DEFINICIÓN 2.2.2 Diremos que dos funciones f y g son *iguales* ssi tienen el mismo dominio, el mismo conjunto de llegada y $f(x) = g(x) \quad \forall x \in A$.

OBSERVACIÓN: A veces se considera sólo que tengan el mismo dominio y $f(x) = g(x) \quad \forall x \in A$.

EJEMPLO 2.2.1 Las funciones $f(x) = x + 1$, $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ son diferentes, pues $1 \in \mathrm{Dom} f$ pero $1 \notin \mathrm{Dom} g$.

2.2.1. Algebra de Funciones

Por «álgebra de funciones» entendemos las «operaciones» más usuales entre funciones, que definimos a continuación :

DEFINICIÓN 2.2.3 Sean $\lambda \in \mathbb{R}$, y las funciones con **igual** dominio $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Definimos las siguientes operaciones:

a) $(f \pm g)(x) \ = \ f(x) \pm g(x) \qquad \forall x \in A.$

b) $(f \cdot g)(x) \ = \ f(x) \cdot g(x) \qquad \forall x \in A.$

c) $(\lambda f)(x) \ = \ \lambda \cdot f(x) \qquad \forall x \in A.$

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) \ = \ \dfrac{f(x)}{g(x)} \qquad \forall x \in A: \ g(x) \neq 0.$

OBSERVACIÓN: Si $\mathrm{Dom}(f) \neq \mathrm{Dom}(g)$, las operaciones se definen en la intersección de ambos, excepto en el caso del cuociente, donde a la intersección se le debe restar el conjunto de puntos en los que el denominador se anula.

EJEMPLO 2.2.2 Considere las funciones en sus dominios respectivos y determine en cada caso $f+g, \ f-g, \ f \cdot g$. ¿Cuál es el dominio de $\dfrac{f}{g}$?

1. $f(x) = x$ y $g(x) = [x]$.

   $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R} = \mathrm{Dom} g$. Por lo tanto, $\mathrm{Dom} f \pm g = \mathrm{Dom} f \cdot g = \mathbb{R}$.

   $$(f+g)(x) = x + [x], \qquad (f-g)(x) = x - [x], \qquad (f \cdot g)(x) = x[x]$$

   Para determinar el dominio del cuociente, notemos que $[x] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [0,1[$. Luego, $\mathrm{Dom}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \mathbb{R} - [0,1[$.

2. Sean $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ y $g(x) = \sqrt{x-1}$. Entonces, $\mathrm{Dom}(f) = [-3,3]$ y $\mathrm{Dom}(g) = [1,\infty[$. Luego, $\mathrm{Dom}(f+g) = [1,3]$. Análogamente para las otras operaciones, excepto el cuociente, para el que $\mathrm{Dom}\left(\dfrac{f}{g}\right) =]1,3]$.

3. $f(x) \ = \ \begin{cases} 1-x^2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) \ = \ \begin{cases} -2x & \text{si} \quad x < 1 \\ 1-x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

   El dominio de ambas funciones es $\mathbb{R}$. Luego:

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 1-x^2-2x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ -x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Dejamos como ejercicio las demás operaciones, en particular la determinación del $\operatorname{Dom}\left(\dfrac{f}{g}\right)$.

DEFINICIÓN 2.2.4 Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremos que:

i) f es *par* ssi $\forall x \in A : \ f(-x) = f(x)$.

ii) f es *impar* ssi $\forall x \in A : \ f(-x) = -f(x)$.

OBSERVACIÓN: En la representación gráfica, una función:

i) par: es simétrica con respecto al eje y.

ii) impar: es simétrica con respecto al origen.

EJEMPLO 2.2.3 Si $f(x) =$ cada una de las siguientes, determine si es par, impar, o ninguna de ellas.

$$f(x) = x^2, \quad \frac{1}{x}, \quad |x|, \quad x|x|, \quad x+|x|, \quad |x|-1, \quad x|x|+x^3, \quad x|x|+x, \quad x^2+x$$

¿Hay funciones que son pares e impares a la vez?

En cada caso, debemos «comparar» $f(-x)$ con $f(x)$:

Si $f(x) = x^2$: $\quad f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \quad \Rightarrow \quad f$ es par.

Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$: $\quad f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x) \quad \Rightarrow \quad f$ es impar.

Si $f(x) = x|x|$: $\quad f(-x) = -x|-x| = -x|x| = -f(x) \quad \Rightarrow \quad f$ es impar.

Si $f(x) = x+|x|$: $\quad f(-x) = -x + |-x| = -x + |x| \neq \begin{cases} -f(x) \\ f(x) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f$ no es par ni impar.

Si $f(x) = 0$: $\quad f(-x) = 0 \quad \therefore \quad f(-x) = f(x) \quad \wedge \quad f(-x) = -f(x) \quad \Rightarrow \quad f$ es par e impar.

Dejamos las demás como ejercicio.

DEFINICIÓN 2.2.5 Sea $f : A \to B$, y sean N_1, N_2 dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ tal que $N_1 \subset A \subset N_2$.

a) $g : N_1 \to B$ tal que $\forall x \in N_1 : \; g(x) = f(x)$ se llama *restricción* de f a N_1 y se denota por $f\big/_{N_1} : N_1 \to B$.

b) $h : N_2 \to B$ tal que $h\big/_{A} = f$ se llama *prolongación* o *extensión* de f a N_2.

EJEMPLOS:

1. Sea $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $\quad f(x) = x$. Construya prolongaciones a $\mathbb{R}$ tal que:
   $a)$ f sea par $\qquad b)$ f sea impar $\qquad c)$ f no sea par ni impar

   Solución:

   $a)$ $f(x) = |x|, \quad x \in \mathbb{R} \qquad b)$ $f(x) = x, \quad x \in \mathbb{R} \qquad c)$ $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}_0^+ \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^- \end{cases}$

2. Estudie los dominios de las siguientes para determinar si f es una restricción o prolongación de g:

   $a)$ $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}, \qquad g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$

   $b)$ $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{|x|}, \qquad g(x) = \sqrt{|1-x|} + \sqrt{x}$

   Solución: En cada caso, se debe determinar cuál dominio está contenido en cuál, y que en el dominio común las imágenes coincidan. Ejercicio para el lector.

DEFINICIÓN 2.2.6 Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diremos que:

1. f es *creciente* ssi $\forall x, y \in A : \; x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

2. f es *decreciente* ssi $\forall x, y \in A : \; x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

3. f es *estrictamente creciente* ssi $\forall x, y \in A : \; x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

4. f es *estrictamente decreciente* ssi $\forall x, y \in A : \; x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

5. f es *monótona* ssi es creciente o decreciente.

6. f es *estrictamente monótona* ssi es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

OBSERVACIÓN: Gráficamente, una función es *creciente* si «sube» al mirarla de izquierda a derecha, y es *decreciente* si «baja» al mirarla de igual manera. Por lo mismo, existen funciones que crecen en ciertos intervalos de sus dominios y decrecen en otros.

EJEMPLO 2.2.4 Determine los intervalos de crecimiento de las funciones

$$f(x) = |x|, \qquad g(x) = x^2 + 2x - 3, \qquad h(x) = \frac{1}{x}$$

Solución:
f decrece en $]-\infty, 0[$ y crece en $]0, \infty[$. h decrece en $]-\infty, 0[$ y en $]0, \infty[$.

DEFINICIÓN 2.2.7 Sean $g : A \subseteq \mathbb{R} \to B, \quad f : B \subseteq \mathbb{R} \to C$ funciones reales. Definimos la *composición de f con g* como la función $f \circ g : A \to C$ dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

OBSERVACIÓN: De manera más general, es posible definir la composición de f con g, $f \circ g$ para $g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con la condición que $\operatorname{Rec}(g) \subseteq \operatorname{Dom}(f)$.

EJEMPLOS:

1. Considere las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f(x) = 2x$ y $g(x) = x^2$. Calcular $f \circ g$ y $g \circ f$. Concluya que, en general: $f \circ g \neq g \circ f$.

   Solución:

   Notamos que $\operatorname{Dom} f$ = $\operatorname{Dom} g = \mathbb{R}$. En cambio, $\operatorname{Rec} f = \mathbb{R}$, pero $\operatorname{Rec} g = \mathbb{R}_0^+$. Claramente, se tiene que:

   - $\operatorname{Rec} g = \mathbb{R}_0^+ \subseteq \mathbb{R} = \operatorname{Dom} f$, por lo que $f \circ g$ está definida.
     De hecho: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2$
   - $\operatorname{Rec} f = \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R} = \operatorname{Dom} f$, por lo que $g \circ f$ está definida.
     En este caso: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = (2x)^2 = 4x^2$
     Luego, vemos que en general, aunque sea posible realizar ambas composiciones,

     $$f \circ g \neq g \circ f$$

2. Considere las funciones:

   $$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} -2x & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 - x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

   Encuentre, si es posible, $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

   Solución:

   Determinaremos $(f \circ g)(x)$ y dejaremos $(g \circ f)(x)$ como ejercicio.

   Notamos que $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R}$, por lo que claramente, $\operatorname{Rec}(g) \subseteq \operatorname{Dom}(f)$. Luego, es posible realizar la composición.

Tendremos que:

$$f \circ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Para poder aplicar f correctamente a $g(x)$, necesitamos saber para qué valores de x: $g(x) \leq 0$ y para cuáles $g(x) > 0$.

$\boxed{\text{Caso 1}}$ Supongamos $x < 1$.

Entonces: $g(x) = -2x \leq 0 \iff x \geq 0 \quad \therefore \quad x \in [0, 1[$

Luego, si $x \in [0, 1[$: $\quad f(g(x)) = f(-2x) = 1 - (-2x)^2 = 1 - 4x^2$

Además, si $x \in]-\infty, 0[$: $\quad f(g(x)) = f(-2x) = -2x$

$\boxed{\text{Caso 2}}$ Supongamos $x \geq 1$.

Entonces: $g(x) = 1 - x \leq 0 \iff x \geq 1 \quad \therefore \quad x > 0$

Así: $f(g(x)) = f(1 - x) = 1 - (1 - x)^2 = 2x - x^2$

En resumen:

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} -2x & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - 4x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 2x - x^2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

EJERCICIOS: Determine, en cada caso, $f \circ g$ y $g \circ f$, si es posible.

1. $f(x) = \begin{cases} -2x + \dfrac{1}{3} & \text{si} \quad x \geq \dfrac{1}{2} \\ |x| & \text{si} \quad x < \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 3x + 6 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ 2x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 3x + 4 & \text{si} \quad x \in [0, 2] \\ x + 1 & \text{si} \quad x \in]2, 4] \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \in [2, 5] \\ 4 & \text{si} \quad x \in]5, 12] \end{cases}$

PROPIEDADES 2.2.1 Sean $h : A \to B$, $g : B \to C$, $f : C \to D$ funciones reales. Entonces:

a) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

b) Si $I_A : A \to A$ es la función identidad en A, y análogamente para B, entonces $h \circ I_A = h$ y $I_B \circ h = h$.

Dem. Ejercicio.

2.3. Funciones invertibles

DEFINICIÓN 2.3.1 Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ y considere la función $f : A \to B$. Entonces diremos que:

1. f es *epiyectiva* o *sobreyectiva* o simplemente *sobre* $\iff$ $\text{Rec}(f) = B$ $\iff$
$$\forall y \in B \; \exists x \in A \; : \; y = f(x)$$
2. f es *inyectiva* o *uno a uno* o simplemente 1-1 $\iff$ cada elemento imagen tiene una única pre-imagen en A por f $\iff$ $\forall x_1, x_2 \in A : \; f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$.
3. f es *biyectiva* $\iff$ f es epiyectiva e inyectiva.

EJEMPLO 2.3.1 Estudie las siguientes funciones, definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, respecto a las propiedades anteriores:
$f(x) =$ • x • $|x|$ • x^3 • $[x]$ • $x^2 - 1$ • $2x - 3$

PROPIEDADES 2.3.1 Sean $g : A \to B\,,$ $f : B \to C.$ Entonces:

1. Si g y f son epiyectivas, entonces $f \circ g$ es epiyectiva.
2. Si g y f son inyectivas, entonces $f \circ g$ es inyectiva.
3. Si g y f son biyectivas, entonces $f \circ g$ es biyectiva.

Dem.

1. Se desea probar que $f \circ g : A \to C$ es sobre, es decir, que
$$\forall c \in C \; \exists a \in A \; : \; (f \circ g)(a) = c$$
Sea $c \in C$. Como f es sobre: $\exists b \in B \; : \; f(b) = c$
Como g es sobre: $\exists a \in A \; : \; g(a) = b$
$\therefore \exists a \in A \; : \; f(g(a)) = c$
2. Sean $x_1, x_2 \in A : \; (f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) \;\Rightarrow\; f(g(x_1)) = f(g(x_2))$
Como f es 1-1: $g(x_1) = g(x_2)$. Como f es 1-1: $x_1 = x_2$.
Luego, $(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$.

DEFINICIÓN 2.3.2 Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es *invertible* ssi

$$\exists f^{-1} : B \to A \quad \text{tal que} \quad f \circ f^{-1} = I_B \quad \wedge \quad f^{-1} \circ f = I_A$$

OBSERVACIÓN: En otras palabras, $\forall a \in A, \quad \forall b \in B : \quad f(a) = b \quad \iff \quad a = f^{-1}(b).$

TEOREMA 2.3.1 f es invertible $\iff$ f es biyectiva.

Dem. Supongamos que f es invertible. Entonces,

$$\Big(f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = f^{-1}(f(x_2)) = x_2 \Big) \qquad \therefore f \ \text{ es 1-1.}$$

Además, como f es invertible: Dom$f$ = Recf^{-1}, de donde f es epiyectiva.
Recíprocamente, supongamos que f es 1-1. Entonces,

$$\forall y \in \text{Rec}(f)\ \exists! x : \ x = g(y),\ y = f(x). \qquad \text{Tal } g \ \text{ es } \ f^{-1}.$$

PROPIEDADES 2.3.2 Si $f : A \to B, \quad g : B \to C$ son funciones biyectivas, entonces

1. f^{-1} es biyectiva.
2. $(f^{-1})^{-1} = f$
3. $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Dem. Dejamos 1. y 2. como ejercicio y demostramos 3.:
Notemos que:

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) \ = \ g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \ = \ g \circ I_B \circ g^{-1} \ = \ g \circ g^{-1} \ = \ I_C$$

y luego, $f^{-1} \circ g^{-1}$ es la inversa de $g \circ f$. Así: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Ejercicios Resueltos

1. Estudie $f(x) = \dfrac{1}{2}(x + |x|)$.

   Solución: Notamos que si $x \geq 0 : \quad f(x) = x$ y si $x < 0 : \quad f(x) = 0$.

   Por lo tanto, Dom$f = \mathbb{R}$ y Rec$f = \mathbb{R}_0^+$.

   Como $f(-1) = f(-2) = 0$ y obviamente $-1 \neq -2$, la función no es 1-1.

   Al restringir la función al dominio $\mathbb{R}_0^+$, se obtiene la función identidad en ese conjunto, claramente invertible.

2. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \sqrt{(2x-1)^2 - 4}$. Determine Dom$f$ y Rec$f$. ¿Es f inyectiva? ¿epiyectiva? ¿Puede restringirla para que lo sea? ¿Puede determinar Graf$f$?

Solución:

a) El Dom$f$ estará dado por todos los números reales tales que $(2x-1)^2 - 4 \geq 0$. Luego, $\text{Dom}f = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right[$

b) Para determinar Rec$f$, buscamos los valores de y para los que existe $x \in \text{Dom}f$ tal que $y = f(x)$, recordando que $y \geq 0$ ya que está definida como una raíz cuadrada:

$$y = \sqrt{(2x-1)^2 - 4} \implies y^2 = (2x-1)^2 - 4$$

$$\therefore \quad y^2 + 4 = (2x-1)^2 \implies |2x-1| = \sqrt{y^2+4}$$

Luego, no hay restricciones adicionales para y, por lo que $\text{Rec}f = \mathbb{R}_0^+$.

c) Sean $a, b \in \text{Dom}f$, tal que $f(a) = f(b)$

$$\therefore \quad (2a-1)^2 - 4 = (2b-1)^2 - 4 \implies (2a-1)^2 = (2b-1)^2$$

$$\therefore \quad |2a-1| = |2b-1| \implies (\, 2a-1 = 2b-1 \quad \vee \quad 2a-1 = 1-2b\,)$$

Luego, si $a \neq b$: $b = -a-1$. Luego, claramente f no es inyectiva.

Otra manera es notar que $f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ pero $-\frac{1}{2} \neq \frac{3}{2}$

d) Así, la función original **no** es ni inyectiva ni epiyectiva. Podemos restringir el conjunto de llegada de f al Rec$f$ para que sea epiyectiva. Y, se puede restringir el Dom$f$ al intervalo $\left[\frac{3}{2}, \infty\right[$. Así, la nueva función obtenida a partir de f:

$$\begin{aligned} \widetilde{f} : \left[\frac{3}{2}, \infty\right[&\longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ x &\longmapsto \sqrt{(2x-1)^2 - 4} \end{aligned}$$

es biyectiva, y por lo tanto invertible. La función inversa es:

$$\begin{aligned} \widetilde{f}^{-1} : \mathbb{R}_0^+ &\longrightarrow \left[\frac{3}{2}, \infty\right[\\ x &\longmapsto \frac{1+\sqrt{x^2+4}}{2} \end{aligned}$$

3. Estudie $f(x) = \dfrac{x^2}{1-|x|}$.

   Solución: $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

   Para encontrar el $\text{Rec} f$, notemos que para

$$x \geq 0,\ x \neq 1: \qquad y = \frac{x^2}{1-x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-y \pm \sqrt{y^2+4y}}{2}$$

   expresión que tiene sentido solo si $y \leq -4 \quad \vee \quad y \geq 0$

   Como la función es par, las imágenes para $x < 0$ son las mismas que para $-x$. Por lo tanto,

$$\text{Rec} f =]-\infty, -4] \ \cup \ [0, \infty[$$

4. Sean $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x < -1 \\ x + \sqrt{|x|} & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$, $\qquad g(x) = |x|$

   Determine $f \circ g$ y $g \circ f$.

   Solución:

   - Veamos en primer lugar, la factibilidad de $f \circ g$. Como $\text{Rec} g = \mathbb{R}_0^+ \subseteq \mathbb{R} = \text{Dom} f$, la composición se puede realizar y

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(|x|) = \begin{cases} |x| + \sqrt{|x|} & \text{si} \quad 0 \leq |x| \leq 1 \\ \dfrac{1}{|x|} & \text{si} \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

   - Análogamente, verificamos la factibilidad de $g \circ f$. Como $\text{Rec} f =]-\infty, 2] \subseteq \text{Dom}\ g = \mathbb{R}$, la composición se puede realizar y

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} |x-1| & \text{si} \quad x < -1 \\ |x + \sqrt{|x|}| & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{|x|} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

5. Sean $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-2}$, $g(x) = 5 - 2x$. Determine condiciones necesarias y suficientes para definir $(f \circ g)(x)$ y para $(g \circ f)(x)$.

   Solución:

- Para definir $(f \circ g)(x)$, es necesario que Rec$g \subseteq$ Dom$f$.
  Rec$g = \mathbb{R}$ pero Dom$f = \mathbb{R} - \{2\}$. Por lo que necesitamos que $g(x) \neq 2 \iff 5 - 2x \neq 2 \iff x \neq \dfrac{3}{2} \quad \therefore$ Dom$(f \circ g) = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.
  En este dominio: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(5-2x) = \dfrac{(5-2x)^2 - 1}{(5-2x) - 2} = 4 \cdot \dfrac{x^2 - 5x + 6}{3 - 2x}$

- Para definir $(g \circ f)(x)$, es necesario que Rec$f \subseteq$ Dom$g$. Como Dom$g = \mathbb{R}$, esta relación se satisface siempre, y se tiene Dom$(g \circ f) =$ Dom $f = \mathbb{R} - \{2\}$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x^2-1}{x-2}\right) = 5 - 2\,\frac{x^2-1}{x-2} = \frac{-2x^2 + 5x - 8}{x-2}$$

6. Determine la paridad de $f \circ g$ si sabe que:
   a) f y g son funciones pares. *b*) f es par y g es impar. *c*) f y g son funciones impares.

   Solución:

   a) $(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(g(x)) = (f \circ g)(x) \quad \therefore \; f \circ g$ es par.

   b) $(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x)) = (f \circ g)(x) \quad \therefore \; f \circ g$ es par.

   c) $(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = -f(g(x)) = -(f \circ g)(x) \quad \therefore \; f \circ g$ es impar.

7. *a*) Probar que si $g \circ f$ es sobre, entonces g es sobre.

   b) Probar que si $g \circ f$ es 1-1, entonces f es 1-1.

   Solución: $f : A \longrightarrow B, \quad g : B \longrightarrow C.$

   a) $g \circ f$ sobre $\Rightarrow \; \forall c \in C \; \exists a \in A : (g \circ f)(a) = c \; \Rightarrow g(f(a)) = c$
   $\therefore \quad \forall c \in C \exists a \in A : \; f(a) \in B \; \wedge \; g(f(a)) = g(b) = c$ para algún $b \in B$. Por lo tanto, g es sobre.

   b) Sean $x_1, x_2 \in A$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$. Aplicamos g: $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (pues $g \circ f$ es 1-1). Luego, f es 1-1.

8. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(f(x-1)) = x - 1.$ Probar que f es biyectiva.

   Solución:

   $f \circ f$ biyectiva $\Rightarrow$ $f \circ f$ es 1-1. $\therefore$ f es 1-1.

   $f \circ f$ biyectiva $\Rightarrow$ $f \circ f$ es sobre. $\therefore$ f es sobre. Luego, f es biyectiva.

9. Determine si existen o no funciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) + g(y) = xy$$

Solución: Supongamos que $\exists f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que: $f(x) + g(y) = xy$.

$x = 0 :\quad f(0) + g(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(y) = -f(0) \quad \Rightarrow \quad g(y) =$cte.

$y = 0 :\quad f(x) + g(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = -g(0) \quad \Rightarrow \quad f(x) =$cte.

Luego, hemos probado que $f(x) + g(y) = -(g(0) + f(0)), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$, es decir, $f(x) + g(y) =$ cte., por lo que no es posible encontrar tales funciones.

10. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface

(I) $f(x + y) = f(x) + f(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(II) $f(ab) = f(a)f(b), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$

a) Demuestre que $f(0) = 0$.

b) Demuestre que si Rec$(f) = \mathbb{R}$, entonces $f(1) = 1$.

c) Encuentre una función que satisfaga (I) y (II).

Solución:

a) Por (I): $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0$

b) Por (II): $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1) \quad \Rightarrow \quad f(1) = 0 \quad$ o $\quad f(1) = 1$

Veamos que si $f(1) \neq 1$ entonces f no es epiyectiva. En efecto: supongamos que $f(1) \neq 1$; entonces $f(1) = 0$, de donde

$$\forall x \in \mathbb{R} : \qquad f(x) = f(1 \cdot x) = f(1) \cdot f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0$$

Luego, Rec$(f) = \{0\}$.

c) Por lo anterior, $f_1(x) = 0$ es una tal función, que **no** es epiyectiva (ni inyectiva). Otra función que satisface ambas condiciones es $f_2(x) = x$; ésta es biyectiva.

EJERCICIOS: Resuelva los siguientes:

1. Demuestre que $f : \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\} \longrightarrow \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}, \quad f(x) = \dfrac{1-x}{2x-3}$ es invertible, y encuentre f^{-1}.

2. Sea $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{2x+3}}$. Determine conjuntos $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f : A \to B$ sea biyectiva. En este caso, determine f^{-1}.

3. Encuentre $(f \circ f \circ f)(x)$ si $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

4. Encuentre $f(x+1)$ si $f(x-1) = x^2$. (**Ayuda:** $x + 1 = (x+2) - 1$).

5. Determine, si es posible, $f + g, \quad \dfrac{f}{g}, \quad \dfrac{g}{f}, \quad f \circ g, \quad g \circ f$ si

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \leq 1 \\ 2x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ -1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

6. Considere la función $f(x) = 1$ si $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Construya una extensión par de esta función, de modo que en $x = 0$ la función extendida tome el valor 3.

7. Determine Dom y Rec para $f(x) = \sqrt{2 - \sqrt{2 - x^2}}$. ¿ Donde es invertible la función?

8. Estudie la función

$$\begin{aligned} f : A \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{x^2-3}} \end{aligned}$$

9. Demuestre que toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se puede escribir como la suma de una función par y una función impar.

10. Sea $f : A \longrightarrow A, \quad (f \circ f) \circ f$ es biyectiva. Probar que f es biyectiva.

2.4. Funciones como modelos

El concepto de función, como vimos en un ejemplo anterior, nos permite *modelar* matemáticamente situaciones del mundo real. Es importante que desarrolle los siguientes ejercicios, para que adquiera la habilidad de *traducir* al lenguaje matemático las situaciones planteadas en lenguaje coloquial.

EJERCICIOS:

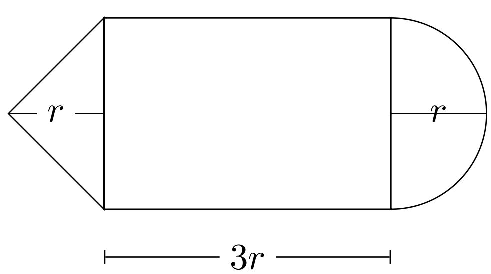
1. Encuentre la capacidad de una canaleta para aguas de lluvia construida en una plancha de latón de $6\ m$ de largo y $80\ cm$ de ancho.

2. Se ha fabricado un envase de lata (un cilindro con tapas) con capacidad de 1 litro. Determine en función del radio basal la cantidad de material utilizado en su fabricación.

3. Considere un cilindro recto con tapa cuyo radio basal mide $R\ cm$ y su altura mide $H\ cm$. Determine el volumen del cilindro en función de su radio sabiendo que su superficie lateral es de $15\ cm^2$.

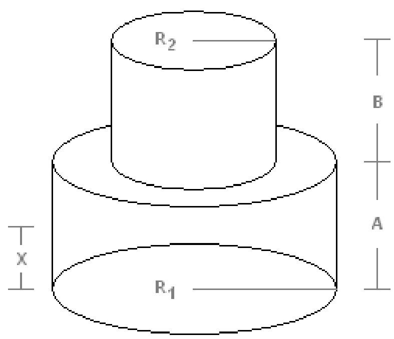
4. Un rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados tiene un vértice en el origen, uno en el eje x positivo, uno en el eje y positivo y su cuarto vértice en el primer cuadrante sobre la recta $2x + y = 100$. ¿Cuál es el área máxima de dicho rectángulo?

5.



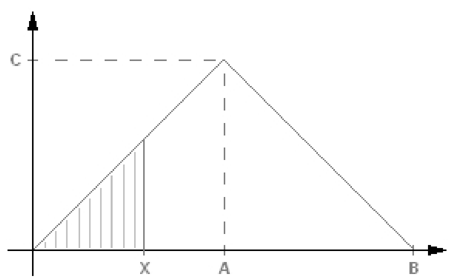
Una semiesfera de radio r, un cono de altura r y un cilindro de altura $3r$ se pegan formando un estanque con la forma de la figura. Si se sabe que la capacidad del estanque es 125,5π cm^3 ¿Cuánto vale r?

6.



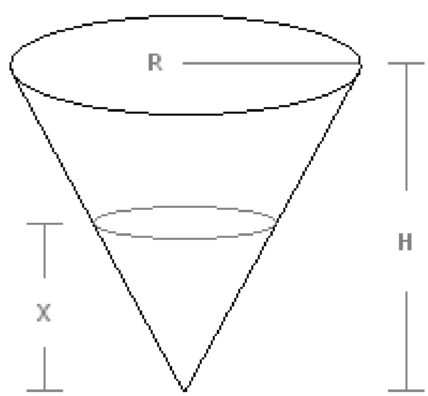
1. Encuentre el volumen, $V(x)$, del sólido de la figura, en función de la altura x.
2. Determine el dominio y recorrido de $V(x)$.
3. Grafique $V(x)$.

7.



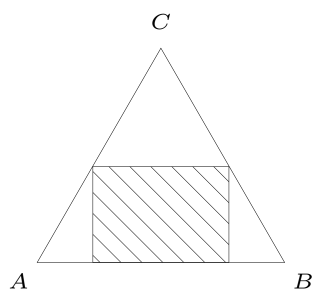
1. En la figura, encuentre el área achurada, $A(x)$, en función de la base x.
2. Determine el dominio y recorrido de $A(x)$.
3. Grafique $A(x)$.

8.



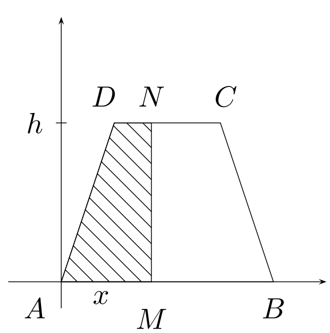
1. Encuentre el volumen del cono, $V(x)$, en función de la altura x.
2. Determine el dominio y recorrido de $V(x)$.
3. Grafique $V(x)$.

9.



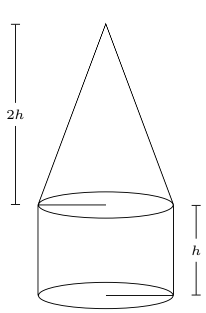
En un triángulo equilátero de lado a se inscribe un rectángulo, de modo que una de las aristas del rectángulo está en la base del triángulo. Al hacer rotar este rectángulo en torno a la base del triángulo, se obtiene un cilindro. Determine una expresión para el volumen de este cilindro, en función del radio del mismo.
Repita el problema considerando un triángulo isósceles, de longitud de base b.

10.



Considere un trapecio isósceles de bases a y b y altura h. Se traza un segmento de recta $\overline{MN}$ perpendicular respecto a las bases, a una distancia de x unidades del vértice A del trapecio (es decir, $\overline{AM} = x$). Exprese el área S de $ABNM$ como función de x, cuando M se mueve desde A hasta D.

11.

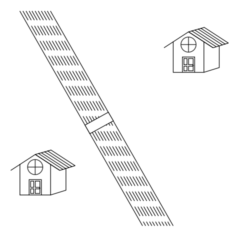


Se tiene un recipiente como el de la figura. Si $R = 10$ y $h = 5$, entonces determinar el volumen de un líquido en función del nivel x.

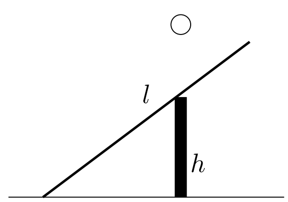
12. Una casa se encuentra a p[m] de la ribera de un río de r [m] de ancho. A b [m] río arriba y a $2p$[m] de la ribera opuesta se encuentra otra casa. Se ha construído un puente sobre el río, recto y perpendicular a las riberas, que permite ir de un lado a otro. Encuentre una expresión para la distancia entre las dos casas, en función de:

    a) la distancia del puente a la proyección perpendicular sobre la ribera correspondiente de una de las casas.

    b) la distancia de una de las casas al puente.



13. Una muralla de altura h, a una hora del día, no da sombra en ninguno de los lados que separa. Se apoya una escalera de longitud l **sobre** la muralla, con la base de la escala apoyada en el suelo. Determine una función que indique la longitud de la sombra proyectada en función de la distancia x de la base de la escalera al muro.



2.5. Ejercicios de Controles y Certámenes

1. Considere la expresión $\quad f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x+1}} \quad$ y la función

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \text{tal que} \qquad g(x) = \frac{3x+\pi}{\sqrt{3}}$$

   a) Determine el mayor subconjunto de $\mathbb{R}$ donde f sea función.

   b) Determine el Rec$f$ de la función obtenida en a).

   c) Determine $f+g$, indicando su dominio y recorrido.

2. Considere las expresiones $\quad f(x) = \dfrac{1-x}{\sqrt{x}} \quad$ y $\quad g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

   a) Determine los mayores subconjuntos de $\mathbb{R}$ donde f y g son funciones biyectivas.

   b) Determine las expresiones $f \circ g$ y $g \circ f$, indicando sus restricciones y dominio respectivo.

   c) Determine f^{-1} y g^{-1}.

3. Sea $\quad f(x) = \begin{cases} x(x-1) & \text{si} \quad x \leq 1 \\ -2x+1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

   a) Determine el gráfico y recorrido de f.

   b) ¿Es f inyectiva? Si no, determine los máximos subconjuntos A, B de $\mathbb{R}$ tal que $f : A \to B$ sea biyectiva.

   c) Determine f^{-1}.

4. Sean $\quad f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x} \quad$ y $\quad g(x) = \begin{cases} x^2-3 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 2x+1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

   a) Determine Dom f y Rec$g$.

   b) Calcular (si existen): $\quad (f \circ g)(2), \quad (f \circ g)(-2) \quad$ y $\quad (f \circ g)(0)$.

   c) Determine explícitamente $(f \circ g)(x)$.

5. Sea $\quad f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad$ dada por $\quad f(x) = \dfrac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{|x|}-1}$.

   a) Determine el dominio A y analice la paridad de la función f.

   b) Determine el mayor dominio y recorrido de f de modo que sea una función biyectiva.

   c) Determine la función inversa de la encontrada en b).

6. Considere la función $f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{si} \quad x \in [-4,-1[\\ (x-1)^2 - 1 & \text{si} \quad x \in [-1,2[\\ x+3 & \text{si} \quad x \in [5,7[\end{cases}$

   a) Grafique f.

   b) Determine el Rec$f$.

   c) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

   d) Detrmine el máximo dominio para que f sea biyectiva y calcule la inversa en este caso.

7. En un cuadrado $ABCD$ de lado $AB = 2$ se traza la perpendicular a la diagonal AC, que corta el lado AB en el punto M y al lado AD en el punto N. Denote la distancia del vértice A a la recta MN por x. Exprese el área S de la región poligonal AMN en función de x.

8. Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{4-x}}$

   a) Determine Dom$f = A$ y Rec$f$.

   b) ¿Es $f : A \longrightarrow$ Rec$f$ biyectiva? Si no lo es, determine el máximo dominio donde sea invertible y encuentre dicha inversa.

9. Sean $f, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x > 0 \\ 1 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 3 & \text{si} \quad x < -1 \end{cases}$

   a) Determine y grafique la función $g = \dfrac{1}{h \circ f}$.

   b) Resuelva la ecuación: $\operatorname{sen}(2x) + g(x)\cos(2x) = \sqrt{2}$.

   c) Grafique $u(x) = 2g(x)\operatorname{sen}(2x)$.

10. Se define $f_n(x) = \sqrt{x+n} - (n+1)$, con $n \in \mathbb{N}$. Si $B_n = \text{Rec}(f_n)$ y $n < m$, determinar $B_n \cap B_m$.

Capítulo 3

Límites y Continuidad

El concepto de límite de una función es fundamental en el cálculo y en el análisis matemático, que demoró varios siglos en llegar a la formulación precisa que se tiene hoy. La evolución histórica que ha tenido este concepto se inicia con la matemática griega A.C. y llega hasta el siglo XIX. Los griegos utilizaron esta noción de manera intuitiva, fundamentalmente para el cálculo de áreas. Por ejemplo, para calcular el área de un círculo, utilizaron el método de exhaución, inscribiendo sucesivos polígonos regulares en la circunferencia, a los que se les incrementaba el número de aristas, para obtener el área de un círculo. Muchos matemáticos, esencialmente a partir del siglo XVII en adelante contribuyeron a la matematización de esta idea, hasta que finalmente, en el siglo XIX, Weierstrass (1815-1897) da la definición precisa, aceptada hasta hoy, del concepto de límite.

En esta sección, estudiaremos el concepto de límite de una función real de variable real, que son aquellas que vimos en el capítulo anterior.

3.1. Necesidad del concepto de Límite

Para entender la necesidad de una formulación precisa de este concepto, consideremos las siguientes funciones, y tratemos de responder, en cada caso, la pregunta: ¿cómo se comporta $f(x)$ cuando x *se acerca* a 1?

1. $f(x) = 3x + 6$

   Hagamos una tabla de valores de $f(x)$ para valores de x cercanos a 1:

x	0,9	0,95	0,99	0,999	1,001	1,01	1,05	1,1
$f(x)$	8,7	8,85	8,97	8,997	9,003	9,03	9,15	9,3

   Vemos que, en la medida que x se acerca a 1, $f(x)$ se acerca a 9. En este caso, diremos que *el límite de f(x) cuando x tiende a 1 es 9*, y escribimos

$$\lim_{x \to 1} 3x + 6 = 9$$

   Más aún, notamos que podemos calcular *directamente* $f(1) = 9$, y que este valor coincide con el $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

2. $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

   Hagamos una tabla de valores de $g(x)$ para valores de x cercanos a 1:

x	0,9	0,95	0,99	0,999	1,001	1,01	1,05	1,1
$g(x)$	1,9	1,95	1,99	1,998	2,001	2,01	2,05	2,1

   Vemos que, en la medida que x se acerca a 1, $g(x)$ se acerca a 2. En este caso, diremos que *el límite de g(x) cuando x tiende a 1 es 2*, y escribimos

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

   Notamos que, en este caso, no podemos evaluar g directamente en 1, puesto que $1 \notin \text{Dom} g$. Sin embargo, es claro que, si $x \neq 1$: $\quad \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$, expresión que sí podemos evaluar en 1, obteniendo el *mismo* valor que el límite encontrado.

3. $h(x) = \dfrac{|x - 1|}{x - 1}$

   Hagamos una tabla de valores de $h(x)$ para valores de x cercanos a 1:

x	0,9	0,95	0,99	0,999	1,001	1,01	1,05	1,1
$h(x)$	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1

   Aquí hay una diferencia con las situaciones anteriores: en la medida que x se acerca a 1 *por la izquierda*, la función $h(x)$ se acerca a -1, y en la medida que x se acerca a 1 *por la derecha*, la función $h(x)$ se acerca a 1. En este caso, diremos que el *límite de h(x) cuando x tiende a* 1 no existe.

Con estos casos en mente, daremos una primera definición, semi-formal, del límite de una función en un punto.

DEFINICIÓN 3.1.1 Sean $a \in \mathbb{R}$ y $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que D contiene algún conjunto de la forma $V^* =]a - \delta, a + \delta[\ - \{a\}$, donde $\delta \in \mathbb{R}^+$, o equivalentemente, contiene un conjunto $V^* = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta\}$ para cierto $\delta > 0$.

Diremos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es $L \in \mathbb{R}$, lo que se escribe como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si $f(x)$ toma valores tan cercanos como se quiera al valor L cuando x es suficientemente cercano, *pero diferente*, de a.

OBSERVACIÓN: El conjunto V^* se llama *vecindad perforada* de a.

EJEMPLOS: Calcule intuitivamente, si existen, los siguiente límites:

1. $\lim\limits_{x\to 2} 4x - 5 = 3$
2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{3}{2}$
3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{8x-3x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(2-3x)}{x-2} = -4$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{8x-3x^2-4}{x-2} = 2$
5. $\lim\limits_{x\to 1} [x] \qquad \nexists$

3.2. El Concepto de Límite

DEFINICIÓN 3.2.1 (Límite de una función) Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que D contiene alguna vecindad perforada de a. Diremos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es $L \in \mathbb{R}$, y escribimos

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

si $\qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tal que $(0 < |x-a| < \delta) \wedge (x \in D) \implies |f(x) - L| < \varepsilon$

OBSERVACIÓN: Es importante notar que para calcular el límite de una función cuando x tiende a un punto, la función *no necesariamente* debe estar definida en dicho punto, como hemos visto ya en algunos ejemplos.

EJEMPLO 3.2.1 Demuestre la existencia de los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} C = C, \quad$ donde C es una constante.

   Dem. Debemos probar que dado *cualquier* $\varepsilon > 0$ podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que siempre que $|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |C - C| < \varepsilon$.

   Pero esta desigualdad es obvia, pues $\varepsilon > 0$.

2. $\lim\limits_{x\to 2} x + 1 = 3$

   Dem. Debemos probar que dado *cualquier* $\varepsilon > 0$ podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que siempre que $|x - 2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x + 1 - 3| < \varepsilon$.

   Notamos que $|x + 1 - 3| = |x - 2| < \delta$. Luego, si dado cualquier $\varepsilon > 0$ escogemos $\delta = \varepsilon$, se tendrá lo pedido.

3. $\lim\limits_{x\to 2} 1 - 3x = -5$

   Dem. Debemos probar que dado *cualquier* $\varepsilon > 0$ podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que siempre que $\quad |1-3x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |1-3x-(-5)| < \varepsilon.$

   Notamos que $\quad |1-3x-(-5)| = |6-3x| = 3|x-2| < 3\delta.\quad$ Luego, si dado cualquier $\varepsilon > 0$ escogemos $\quad \delta = \dfrac{\varepsilon}{3},\quad$ se tendrá lo pedido.

4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} = 3$

   Dem. Debemos probar que dado *cualquier* $\varepsilon > 0$ podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que siempre que $\quad |x-2| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\dfrac{x^2-x-2}{x-2} - 3\right| < \varepsilon.$

   Notamos que $\quad \left|\dfrac{x^2-x-2}{x-2} - 3\right| = \left|\dfrac{(x+1)(x-2)}{x-2} - 3\right| = |x-2| < \delta.\quad$ Luego, si dado

   cualquier $\varepsilon > 0 \quad$ escogemos $\quad \delta = \varepsilon,\quad$ se tendrá lo pedido.

5. $\lim\limits_{x\to 2} x^2 + x + 1 = 7$

   Dem. Debemos probar que dado *cualquier* $\varepsilon > 0$ podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que siempre que $\quad |x-2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x^2+x+1-7| < \varepsilon.$

   Notamos que $\quad |x^2+x+1-7| = |x^2+x-6| = |(x+3)(x-2)|$

   El factor $|x-2|$ puede acotarse por δ. ¿Cómo acotamos el factor $|x+3|$? Supongamos que existe un δ_1 que nos permite esto, digamos $\delta_1 = 1$. Entonces:

   $|x-2| < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < x-2 < 1 \quad \Rightarrow \quad 4 < x+3 < 6. \quad$ Luego, $\quad |x+3| < 6.$

   Así, podemos acotar: $\quad |(x+3)(x-2)| < 6|x-2| < 6\delta_2.\quad$ Para que esto sea menor que ε, bastaría escoger $\quad \delta_2 = \dfrac{\varepsilon}{6}.$

   Pero, ya teníamos supuesto un valor para $\delta : \delta_1 = 1$. Notamos que, si un valor de δ sirve para probar la desigualdad, cualquier valor *menor* también servirá. Luego, escogemos finalmente,

   $$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{6}\right\}$$

6. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{2}{3}$

   Dem. Debemos probar que dado *cualquier* $\varepsilon > 0$ podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que siempre que $\quad |x-2| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left|\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{2}{3}\right| < \varepsilon.$

   $$\left|\frac{x}{x+1} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{3x-2x-2}{3x+3}\right| = \frac{|x-2|}{3|x+1|} \underbrace{<}_{\downarrow} \frac{|x-2|}{6} < \frac{\delta}{6} \qquad \therefore \text{ basta escoger } \quad \delta = 6\varepsilon.$$

   $$\overbrace{x \text{ «cerca» de } 2 \ \Rightarrow\ 1 < x < 3 \ \Rightarrow\ 2 < x+1 < 4 \ \Rightarrow\ \frac{1}{4} < \frac{1}{x+1} < \frac{1}{2}}$$

7. $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$

   Dem. Deberemos considerar 2 casos: $a > 0 \quad \wedge \quad a = 0$.

   $\boxed{a > 0}$: Notamos que:

$$\forall x \geq 0: \qquad \sqrt{x} - \sqrt{a} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \cdot \left(\sqrt{x} - \sqrt{a}\right) = \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

   de donde

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| \leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a}} \leq \frac{\delta}{\sqrt{a}}$$

   por lo que, dado cualquier $\varepsilon > 0$ basta tomar $\delta < \sqrt{a}\, \varepsilon$.

   $\boxed{a = 0}$: En este caso, $|\sqrt{x}| = \sqrt{x} < \varepsilon$ siempre que $0 < x < \varepsilon^2 = \delta \quad \wedge \quad x \in \mathrm{Dom} f$, donde $f(x) = \sqrt{x}$. Es decir, escogemos $\delta = \varepsilon^2$.

8. Considere la función $g(h) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, donde $f(x) = mx + b$, $m \neq 0$.
   Calcular $\lim\limits_{h \to 0} g(h)$.

   Solución:

$$\lim_{h \to 0} g(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{m(x+h) + b - mx - b}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{mh}{h} = m$$

EJERCICIOS: Demuestre los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x \to 4} x^2 - 3x + 1 = 5$
2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x} = 1$
3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 + x^2}{x + 2} = \dfrac{2}{3}$
4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 4}{x} = -3$
5. $\lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$
6. $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$
7. $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{a}$
8. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 3} = 0$
9. Sea $\varepsilon = 0,1$. Determine $\delta > 0$ de modo que $|x - 2| < \delta \implies |x^2 - 4| < \varepsilon$. Repita para $\varepsilon = 0,01$ y $\varepsilon = 0,001$.
10. Sea $\varepsilon = 0,01$. Determine $\delta > 0$ de modo que $|x - 3| < \delta \implies \left| \dfrac{x - 1}{2(x+1)} - \dfrac{1}{4} \right| < \varepsilon$.
11. Sea $\varepsilon = 0,01$. Determine $\delta > 0$ de modo que $|x - 2| < \delta \implies \left| \sqrt{4x + 1} - 3 \right| < \varepsilon$.

PROPOSICIÓN 3.2.1 Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que D contiene una vecindad perforada de a. Entonces,

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a} \Big(f(x) - L \Big) = 0$$

TEOREMA 3.2.1 (Unicidad del límite)

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$, entonces $L_1 = L_2$.

Dem. Dado cualquier $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \quad \Rightarrow \quad \exists \delta_1 > 0 : \quad 0 < |x - x_0| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \wedge$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = L_2 \quad \Rightarrow \quad \exists \delta_2 > 0 : \quad 0 < |x - x_0| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\therefore \quad |L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\therefore \quad L_1 - L_2 = 0 \quad \left(\text{Si no, sea } \varepsilon = \frac{|L_1 - L_2|}{2} > 0 \Rightarrow |L_1 - L_2| < \frac{|L_1 - L_2|}{2} \Rightarrow \frac{|L_1 - L_2|}{2} < 0\right).$$

DEFINICIÓN 3.2.2 (Límite lateral derecho) Sea f una función definida $\forall x \in I =]a, c[$. Entonces, el límite de $f(x)$, cuando x tiende a a *por la derecha* es L, lo que denotamos por:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

si $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad a < x < a + \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$

DEFINICIÓN 3.2.3 (Límite lateral izquierdo) Sea f una función definida $\forall x \in J =]d, a[$. Entonces, el límite de $f(x)$, cuando x tiende a a *por la izquierda* es L, lo que denotamos por:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

si $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad a - \delta < x < a \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$

TEOREMA 3.2.2 El $\lim_{x\to a} f(x)$ existe y es igual a L si y sólo si $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existen y son iguales a L.

Dem.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 > 0 \quad \exists \delta_2 > 0 : \quad \begin{cases} a < x < a + \delta_1 & \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon \\ a - \delta_2 < x < a & \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon \end{cases}$$

$\therefore \quad a - \delta_2 < x < a + \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$ Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, se tiene lo pedido.

EJEMPLOS:

1. Demostrar que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{|x|}$ no existe.

   Dem. Calculamos los límites laterales:

   $$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{-x} = -1$$

   Como los límites laterales difieren, el límite pedido no existe.

2. Si $f(x) = x + [x]$, analizar la existencia de $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

   Dem. Notamos que si x se acerca a 1 por la derecha, $[x] = 1$, y que si x se acerca a 1 por la izquierda, $[x] = 0$. Entonces:

   $$\lim_{x \to 1^+} x + [x] = \lim_{x \to 1^+} x + 1 = 2 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1^-} x + [x] = \lim_{x \to 1^+} x + 0 = 1$$

   Como los límites laterales difieren, el límite pedido no existe.

3. Si $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 3x + 2a & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$, ¿qué valor debe tener a para que $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ exista?

   Dem. Para que este límite exista, necesitamos que los límites laterales coincidan.

   $$\lim_{x \to 1^-} ax + 1 = \lim_{x \to 1^+} 3x + 2a \qquad \Rightarrow \qquad a + 1 = 3 + 2a \qquad \therefore \quad a = -2$$

3.3. Algebra de Límites

Sean $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones, y sea $a \in \mathbb{R}$ tal que los siguientes límites existen:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L_1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = L_2$$

Entonces, se satisfacen las siguientes propiedades:

1. Múltiplo escalar: $\lim\limits_{x \to a} \Big(\lambda f(x)\Big) = \lambda L_1 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

2. Suma o diferencia: $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = L_1 \pm L_2$

3. Producto: $\lim\limits_{x \to a} [f(x) g(x)] = L_1 L_2$

4. Cuociente: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, siempre que $L_2 \neq 0$

5. Potencia: $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = L_1^n$, para cualquier entero positivo n

6. Raíz: $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$, para cualquier entero positivo n.
   Nota: Si n es par, entonces se debe tener $L_1 \geq 0$ y
   $f(x) \geq 0 \quad \forall x$ en una vecindad perforada de a.

Estas reglas son útiles para el cálculo de límites, lo que veremos a continuación.

EJEMPLOS:

1. $$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 + 4x + 2}{x^3 - x^2 + 1} = \frac{\lim\limits_{x \to 2} 3x^2 + 4x + 2}{\lim\limits_{x \to 2} x^3 - x^2 + 1} = \frac{3 \lim\limits_{x \to 2} x^2 + 4 \lim\limits_{x \to 2} x + \lim\limits_{x \to 2} 2}{\lim\limits_{x \to 2} x^3 - \lim\limits_{x \to 2} x^2 + \lim\limits_{x \to 2} 1} = \frac{3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 2}{8 - 4 + 1} = \frac{22}{5}$$

2. $$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{2x+6} - 4}{x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{2x+6} - 4}{x - 5} \cdot \frac{\sqrt{2x+6} + 4}{\sqrt{2x+6} + 4} = \lim_{x \to 5} \frac{2x + 6 - 16}{(x-5)\sqrt{2x+6} + 4} = \frac{1}{4}$$

3. Calcular $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x - 6}{2 - |1 - x|}$.

   Solución:

   Notar que $|1 - x| = \begin{cases} 1 - x & \text{si} \quad x \leq 1 \\ -(1 - x) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$, de donde

   $$\lim_{x \to 3} \frac{2x - 6}{2 - |1 - x|} = \lim_{x \to 3} \frac{2(x-3)}{2 - [-(1 - x)]} = \lim_{x \to 3} \frac{2(x-3)}{2 + 1 - x} = \lim_{x \to 3} \frac{2(x-3)}{3 - x} = -2$$

También permiten, como veremos en el siguiente ejemplo, mostrar la inexistencia de ciertos límites:

4. Demuestre que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ no existe.

   Dem.: Supongamos que existe y es igual a L y consideremos el límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} x \;=\; L\cdot 0 \;=\; 0 \\ \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x} \;=\; \lim\limits_{x\to 0} 1 \;=\; 1 \end{cases}$$

   La contradicción con el teorema de unicidad del límite surge de suponer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ existe.

OBSERVACIÓN: Este último ejemplo muestra la importancia de la hipótesis de la existencia de los límites de f y g. En otras palabras, el *límite de una suma (o resta o producto) es la suma (o resta o producto) de los límites* **solo** si los límites respectivos existen.

EJERCICIOS:

1. Calcule, si existen, los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-x}{x^2-1}$

   b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-x-3}{x+1}$

   c) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^4-1}{h}$

   d) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^3-8}{h}$

   e) $\lim\limits_{t\to 9} \dfrac{9-t}{3-\sqrt{t}}$

   f) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{2-t}-\sqrt{2}}{t}$

   g) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4-16}{x-2}$

   h) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}$

   i) $\lim\limits_{x\to 1} \left[\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2-1}\right]$

2. Determine cada uno de los siguientes límites, si existen. Si no existen, explique por qué.

   a) $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{16-x^2}$

   b) $\lim\limits_{x\to 2^-} \sqrt{4+2x}+x$

   c) $\lim\limits_{x\to -7} |x+7|$

   d) $\lim\limits_{x\to 2^-} [x]$

   e) $\lim\limits_{x\to 2} [x]$

   f) $\lim\limits_{x\to 2{,}4} [x]$

   g) $\lim\limits_{x\to 8^+} \sqrt{x-8}+[x+1]$

3. Si $n\in\mathbb{Z}$, determine $\lim\limits_{x\to n^-} [x]$ y $\lim\limits_{x\to n^+} [x]$. ¿Para qué valores de $a\in\mathbb{R}$ existe el $\lim\limits_{x\to a} [x]$?

4. Sea $f(x) = x - [x]$.

   a) Grafique f.

   b) Si $n \in \mathbb{Z}$, calcule $\lim\limits_{x\to n^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to n^+} f(x)$.

   c) ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ existe el $\lim\limits_{x\to a} f(x)$?

TEOREMA 3.3.1 (Funciones que coinciden salvo en un punto) Sea I un intervalo abierto y sea $c \in I$ un número real. Si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I - \{c\}$ y existe el límite de $g(x)$ cuando x tiende a c, entonces también existe el de $f(x)$, y se tiene

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x).$$

TEOREMA 3.3.2 (Límite de una función compuesta ó regla de sustitución) Suponga que

$$\lim_{x\to a} f(x) = L, \quad \lim_{t\to t_0} g(t) = a \quad \text{y que} \quad \exists\, c > 0 \,:\, g(t) \neq a \quad \forall\, t \in\,]t_0 - c,\, t_0 + c[\, - \{t_0\}$$

Entonces:

$$\lim_{t\to t_0} (f \circ g)(t) = L$$

Dem.:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0 : \quad 0 < |x - a| < \eta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Reemplazando $x = g(t)$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0 : \quad 0 < |g(t) - a| < \eta \quad \Rightarrow \quad |f(g(t)) - L| < \varepsilon$

Como $\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = a$, $\quad \forall \eta > 0\ \exists \delta_1 > 0 : \quad 0 < |t - t_0| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |g(t) - a| < \eta$

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \eta\}$. Entonces: $\forall \varepsilon > 0$:

$$0 < |t - t_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad 0 < |g(t) - a| < \eta \quad \Rightarrow \quad |f(g(t)) - L| < \varepsilon$$

Es decir:

$$\lim_{t\to t_0} (f \circ g)(t) = L$$

OBSERVACIÓN: Notar que si $g(x) = a$, la propiedad anterior no se cumple.

EJEMPLO 3.3.1 Calculemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$$

Sea $g : [-1,+\infty[\,\to \mathbb{R}$, con $g(x) = \sqrt{x+1}$ y consideremos

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}-\{1\} \to \mathbb{R} \\ x & \to & f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1} \end{array}$$

Note que

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 1$$

y $g(x) \neq 1$ en $]-1,1[\,-\{0\}$. Además

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{2}$$

Entonces, por el teorema:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0} f(g(x)) = \lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2}$$

OBSERVACIÓN: El Teorema anterior se usa habitualmente en la forma de un cambio de variable: hacemos $u = g(x)$ entonces $u \to a \iff x \to b$ y $\lim\limits_{x\to b} f(g(x)) = \lim\limits_{u\to a} f(u)$.

En el ejemplo, ponemos $u = \sqrt{x+1}$ entonces $u \to 1 \iff x \to 0$ entonces (note que $x = u^2 - 1$):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{u\to 1}\frac{u-1}{u^2-1} = \lim_{u\to 1}\frac{1}{u+1} = \frac{1}{2}$$

EJEMPLOS:

1. Calcular $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$.

   Solución: Hacemos $u = \sqrt[6]{x}$. Así, si $x \to 64$, $u \to 2$. Tenemos entonces:

   $$\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4} = \lim_{u\to 2}\frac{u^3-8}{u^2-4} = \lim_{u\to 2}\frac{(u-2)(u^2+2u+4)}{(u-2)(u+2)} = 3$$

2. Calcular $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

   Sugerencia: Hacer $u = \sqrt[12]{x}$.

3. Calcular $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt[3]{x-1}-2}$.

4. Calcular, si existe, el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x+1}}{x}$$

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x+1}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1-(\sqrt[3]{x^3+x+1}-1)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x} \;-\; \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3+x+1}-1}{x}$$

Calculamos ambos límites separadamente:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2+x+1}+1}{\sqrt{x^2+x+1}+1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^2+x+1-1}{x(\sqrt{x^2+x+1}+1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x(x+1)}{x(\sqrt{x^2+x+1}+1)} \;=\; \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3+x+1}-1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3+x+1}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt[3]{(x^3+x+1)^2}+\sqrt[3]{x^3+x+1}+1}{\sqrt{(x^3+x+1)^2}+\sqrt[3]{x^3+x+1}+1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^3+x+1-1}{x(\sqrt{(x^3+x+1)^2}+\sqrt[3]{x^3+x+1}+1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x(x^2+1)}{x(\sqrt{(x^3+x+1)^2}+\sqrt[3]{x^3+x+1}+1)} \;=\; \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Luego:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x+1}}{x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

TEOREMA 3.3.3 (Teorema del Acotamiento o del Sandwich) Sean f, g, h funciones en $\mathbb{R}$. Si $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ para todo x en una vecindad de c sin (necesariamente) incluir a c, y

$$\lim_{x\to c} h(x) = L = \lim_{x\to c} g(x)$$

entonces $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ existe y es igual a L.

Ejemplo Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2-2x+\operatorname{sen}(\pi x)}$.

Solución:

Sabemos que $\quad -1 \;\leq\; \operatorname{sen}(\pi x) \;\leq\; 1 \qquad \forall x\in\mathbb{R}.\qquad$ Luego:

$$3x^2-2x-1 \;\leq\; 3x^2-2x+\operatorname{sen}(\pi x) \;\leq\; 3x^2-2x+1$$

$$\therefore \qquad \frac{1}{3x^2-2x+1} \leq \frac{1}{3x^2-2x+\operatorname{sen}(\pi x)} \leq \frac{1}{3x^2-2x-1} \qquad \forall x\in\mathbb{R}-\left\{0,1,-\frac{1}{3}\right\}$$

$$\therefore \qquad \frac{x^2}{3x^2-2x+1} \leq \frac{x^2}{3x^2-2x+\operatorname{sen}(\pi x)} \leq \frac{x^2}{3x^2-2x-1} \qquad \forall x\in\mathbb{R}-\left\{0,1,-\frac{1}{3}\right\}$$

Como

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2-2x+1}=0=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2-2x-1}$$

se tiene que, por el teorema del *sandwich*:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2-2x+\operatorname{sen}(\pi x)}=0$$

EJERCICIOS:

1. Calcule $\quad \displaystyle\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt[3]{x-1}-2}$

2. En los siguientes, use el teorema del acotamiento para calcular:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)$ $\quad$ si $\quad \forall x\in\mathbb{R}: \quad 1\leq f(x)\leq x^2+2x-2.$

   b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)$ $\quad$ si $\quad \forall x\in[0,2]: \quad 3x\leq f(x)\leq x^3+2.$

   c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^3\cos(35\pi x)$

   d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sqrt{x^3+x^4}\,\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$

3. Pruebe que $\quad \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{\sqrt{x^4+4x^2+7}}=0$

4. Pruebe que $\quad \displaystyle\lim_{x\to 0} x^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)=0$

3.4. Límites Trigonométricos

Hasta aquí, no hemos calculado límites que involucren funciones trigonométricas, salvo en los ejemplos anteriores en los que solamente hemos utilizado el hecho que las funciones sen y cos son acotadas. En esta sección aplicaremos los teoremas ya vistos a límites de funciones trigonométricas.

EJEMPLOS: Calcule y/o demuestre los siguientes:

1. $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a\,, \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$

Dem. Probaremos en primer lugar la desigualdad $|\operatorname{sen} x| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

$\boxed{0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}}$ Sea P un punto en el primer cuadrante, que forma con el eje x un ángulo de x radianes, sea Q su reflexión respecto al eje x, y consideremos la circunferencia centrada en el origen que pasa por estos 2 puntos. Luego, la longitud de la cuerda $\overline{PQ}$ que pasa por P y Q es menor o igual a la longitud del arco $\widehat{PQ}$, es decir, $\overline{PQ} \leq \widehat{PQ}$. Pero

$$\overline{PQ} = 2\operatorname{sen} x \quad \wedge \quad \widehat{PQ} = 2x \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} x \leq x \quad \Rightarrow \quad |\operatorname{sen} x| \leq |x|$$

$\boxed{x \geq \dfrac{\pi}{2}}$ En este caso, $|\operatorname{sen} x| \leq 1 < \dfrac{\pi}{2} \leq x = |x|$.

Así, hemos probado que $\forall x \geq 0: \quad |\operatorname{sen} x| \leq |x|$

$\boxed{x < 0}$ En este caso, $-x > 0$ y luego

$|\operatorname{sen} x| = |-\operatorname{sen} x| = |\operatorname{sen}(-x)| \leq |-x| = |x| \qquad \therefore \quad |\operatorname{sen} x| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Demostremos ahora que $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a\,, \qquad \forall a \in \mathbb{R}:$

$$|\cos x - \cos a| = \left|-2\operatorname{sen}\left(\frac{x+a}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| = 2\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x+a}{2}\right)\right|\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| \leq$$

$$\leq 2\cdot 1\cdot\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| \leq 2\left|\frac{x-a}{2}\right| \leq |x-a| \qquad \text{Así, basta escoger } \delta = \varepsilon.$$

2. Calcular el $\lim\limits_{x\to a} \operatorname{sen} x$

Solución: Aplicaremos la regla de sustitución para calcular este límite, usando la notación del teorema.

Como $\operatorname{sen} x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, tomamos $f(x) = \cos x$, $g(t) = t - \dfrac{\pi}{2}$.

Como $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$, $\lim\limits_{t \to a} g(t) = a - \dfrac{\pi}{2}$ y $g(t) \neq a - \dfrac{\pi}{2}$ $\forall t \neq a$, se tiene:

$$\lim_{t \to a} \operatorname{sen} t = \lim_{t \to a} \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \to a - \frac{\pi}{2}} \cos x = \cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} a$$

3. Calcular $\lim\limits_{u \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{1 - 2\cos u}{\operatorname{sen}(u - \frac{\pi}{3})}$

Solución: Aplicaremos la regla de sustitución de manera más informal que en el ejemplo anterior.

Sea $u - \frac{\pi}{3} = x$ entonces, cuando $u \longrightarrow \frac{\pi}{3}$, $x \longrightarrow 0$.

Así: $$\lim_{u \to \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2\cos u}{\operatorname{sen}(u - \frac{\pi}{3})} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - 2\cos(x + \frac{\pi}{3})}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x + \sqrt{3}\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} + \lim_{x \to 0} \sqrt{3} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x(1 + \cos x)} + \sqrt{3} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} + \sqrt{3} = 0 + \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

4. Demuestre que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

Dem. Consideremos una circunferencia de radio 1 centrada en el origen. Sea Q un punto en el primer cuadrante *fuera* de la circunferencia, de modo que su proyección sobre el eje x sea el punto $(1, 0)$. Tracemos el segmento que une el origen con Q y sea P el intercepto de este segmento con la circunferencia; llamemos R y S a las proyecciones sobre el eje x de P y Q, respectivamente.

Si denotamos por $\widehat{AB}$ a la longitud del arco de circunferencia entre A y B, y por $\overline{AB}$ a la longitud del segmento AB, entonces:

$$\overline{PR} \leq \widehat{PS} \leq \overline{QS}$$

Así, si $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$:

$$\overline{PR} = \operatorname{sen} x \qquad \widehat{PS} = x \qquad \overline{QS} = \tan x$$

Luego:

$$\operatorname{sen} x \leq x \leq \tan x$$

$$\left(\operatorname{sen} x \leq x \quad \Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1\right) \qquad \wedge \qquad \left(x \leq \tan x \quad \Rightarrow \quad \cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$$

Por lo tanto, si $\quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$:

$$\cos x \ \leq \ \frac{\operatorname{sen} x}{x} \ \leq \ 1$$

Ahora, $\quad -\dfrac{\pi}{2} \ \leq \ x \ \leq \ 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\pi}{2} \ \geq \ -x \ \geq \ 0,$ $\quad$ y aplicando el resultado anterior a $\ -x$:

$$\cos(-x) \ \leq \ \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} \ \leq \ 1$$

Usando las propiedades de paridad de las funciones involucradas:

$$\cos x \ \leq \ \frac{+\operatorname{sen} x}{+x} \ \leq \ 1$$

Así:

$$\cos x \ \leq \ \frac{\operatorname{sen} x}{x} \ \leq \ 1 \qquad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\ \cup \ \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

Como $\qquad \lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1 \quad$ y $\quad \lim\limits_{x \to 0} 1 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

5. Demuestre que $\quad \lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$

Dem. $\qquad$ Como $\quad \left|\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \ \leq \ 1, \quad$ tenemos que:

$$-1 \ \leq \ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \ \leq \ 1$$

$$-|x| \ \leq \ x \ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \ \leq \ |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Como $|x| \longrightarrow 0$ cuando $x \longrightarrow 0$, $\quad$ por el Teorema del sandwich se tiene lo pedido.

6. Demuestre que $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x} = 0$

Dem.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} \ = \ \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \ = \ \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1 + \cos x)} \ = \ \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x}{x(1 + \cos x)} \ =$$

$$= \ \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} \ = \ 1 \cdot 0 \ = \ 0$$

7. Demuestre que $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{sen}\sqrt{1 + \dfrac{1}{x}} - \operatorname{sen}\sqrt{\dfrac{1}{x}} \ = \ 0$

Dem.

$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen}\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \operatorname{sen}\sqrt{\frac{1}{x}} \ = \ \lim_{x \to 0^+} 2\cos\left(\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}}}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}}}{2}\right) \ =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} 2\cos\left(\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{1}{x}}}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2\sqrt{x}\,(\sqrt{x+1}+1)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} 2\cos\left(\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{1}{x}}}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{x}}{2\,(\sqrt{x+1}+1)}\right)$$

Como $\quad -1 \leq \cos\left(\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{1}{x}}}{2}\right) \leq 1 \quad \wedge \quad \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{x}}{2\,(\sqrt{x+1}+1)}\right) = 0$

se tiene que $\quad \lim_{x\to 0^+} 2\cos\left(\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{1}{x}}}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{x}}{2\,(\sqrt{x+1}+1)}\right) = 0$

de donde $\quad \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \operatorname{sen}\sqrt{\frac{1}{x}} = 0$

8. Calcular $\quad \lim_{x\to\pi} \frac{1-\sqrt{-\cos x}}{\cos 2x - \operatorname{sen}\frac{x}{2}}$

Dem.

$$\lim_{x\to\pi} \frac{1-\sqrt{-\cos x}}{\cos 2x - \operatorname{sen}\frac{x}{2}} \underbrace{=}_{u=\frac{x}{2}} \lim_{u\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sqrt{-\cos 2u}}{\cos 4u - \operatorname{sen} u} \underbrace{=}_{y=u-\frac{\pi}{2}} \lim_{y\to 0} \frac{1-\sqrt{-\cos 2(y+\frac{\pi}{2})}}{\cos 4(y+\frac{\pi}{2}) - \operatorname{sen}(y+\frac{\pi}{2})} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos 2y}}{\cos 4y - \cos y} = \lim_{y\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos 2y}}{2\cos^2(2y) - 1 - \cos y}\cdot\frac{1+\sqrt{\cos 2y}}{1+\sqrt{\cos 2y}} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos 2y}{(2(2\cos^2 y - 1)^2 - 1 - \cos y)\,(1+\sqrt{\cos 2y})} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{2-2\cos^2 y}{(8\cos^4 y - 8\cos 2y + 1 - \cos y)\,(1+\sqrt{\cos 2y})} =$$

$$= 2\lim_{y\to 0} \frac{1}{\left(\frac{8\cos^2 y(\cos^2 y - 1)}{\operatorname{sen}^2 y} + \frac{1-\cos y}{\operatorname{sen}^2 y}\right)\,(1+\sqrt{\cos 2y})} = 2\cdot\frac{1}{(-8+\frac{1}{2})(1+1)} = -\frac{2}{15}$$

9. Calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{sen}(ax)}{x+\operatorname{sen}(bx)}$

Dem. Para calcular este límite, debemos analizarlo según los valores de a y b.

- Caso (i): $ab \neq 0,\ b \neq -1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen}(ax)}{x+\operatorname{sen}(bx)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(1-a\frac{\operatorname{sen}(ax)}{ax}\right)}{x\left(1+b\frac{\operatorname{sen}(bx)}{bx}\right)} = \frac{1-a}{1+b}$$

- Caso (ii): $a \neq 0,\ a \neq 1\ b=-1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen}(ax)}{x+\operatorname{sen}(bx)} = \lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen}(ax)}{x-\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1-a\frac{\operatorname{sen}(ax)}{ax}\right)}{\left(1-\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)}, \quad \text{que } \textbf{no existe}.$$

- Caso (iii): $a=1,\ b=-1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen}(ax)}{x+\operatorname{sen}(bx)} = \lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen}(x)}{x-\operatorname{sen}(x)} = 1$$

- Caso (iv): $ab \neq 0$:
  - $a=0,\ b\neq 0$: $$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x+\operatorname{sen}(bx)} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+b\frac{\operatorname{sen}(bx)}{bx}} = \frac{1}{1+b} & \text{si} \quad b \neq -1 \\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{x-\operatorname{sen} x} \quad \text{que } \nexists, & \text{si} \quad b=-1 \end{cases}$$
  - $a\neq 0,\ b=0$: $$\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen}(ax)}{x} = 1-a$$
  - $a=0,\ b=0$: $$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

EJERCICIOS:

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 7x}{\operatorname{sen} 3x}$
2. $\lim_{x\to \pi} \dfrac{1-\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{x-\pi}$
3. $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\operatorname{sen}(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}$
4. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{sen} x-\cos x}{1-\tan x}$
5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x^n}{(\operatorname{sen} x)^m}$
6. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3}{\tan^3(2x)}$
7. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x^2+x^3}{x^2}$
8. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}-\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{\tan x}$
9. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x(\sqrt{1+\operatorname{sen} x}-\sqrt{1-\operatorname{sen} x})}{\sec^2(2x)-1}$
10. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1+\operatorname{sen} x-\cos x}{1-\operatorname{sen} x-\cos x}$

3.5. Límites al infinito

En los límites que hemos considerado hasta ahora, de la forma $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, tanto x_0 como L son valores en $\mathbb{R}$. Consideraremos ahora dos extensiones de la idea de límite, incorporando la noción de «infinito».

En primer lugar, consideraremos la situación en la que, cuando x se acerca a x_0, los valores de la función $f(x)$ crecen (o decrecen) indefinidamente. Cuando los valores de la función crecen indefinidamente, decimos que *f(x) tiende a* +∞ y cuando los valores de la función decrecen indefinidamente decimos que *f(x) tiende a* -∞.

En segundo lugar, estudiaremos el comportamiento de la función $f(x)$ cuando la *variable* x crece o decrece indefinidamente, en cuyo caso diremos *cuando* x *tiende a* $+\infty$ o $-\infty$, respectivamente.

DEFINICIÓN 3.5.1 Sea f una función definida en una vecindad de a. Diremos que

- f crece sin límite o que f *tiende a infinito* cuando x tiende a a, que denotamos por

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

  ssi

$$\forall N > 0 \ \exists \delta > 0 \ : \ 0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > N$$

- f decrece sin límite o que f *tiende a - infinito* cuando x tiende a a, que denotamos por

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

  ssi

$$\forall N < 0 \ \exists \delta > 0 \ : \ 0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) < N$$

OBSERVACIÓN: Igualmente, en estos casos diremos que **el límite no existe**, puesto que $+\infty$ y $-\infty$ no son números reales, y en este contexto son símbolos utilizados para representar un tipo de comportamiento de la función.

EJEMPLOS: Demuestre que:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

   Dem. Sea $N > 0$. Entonces, $\dfrac{1}{x^2} > N$ si se cumple que $0 < x^2 < \dfrac{1}{N}$ o equivalentemente, $0 < x < \dfrac{1}{\sqrt{N}}$. Así, escogemos $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{N}}$.

2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 5}{(x - 1)^2} = -\infty$

DEFINICIÓN 3.5.2 Diremos que $L \in \mathbb{R}$ es el límite de f cuando x tiende a $+\infty$, y escribimos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \qquad \text{ssi} \qquad \forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0 : \quad \forall x \geq N : \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Análogamente definimos el límite para $x \to -\infty$, vale decir:
diremos que $L \in \mathbb{R}$ es el límite de f cuando x tiende a $-\infty$, y escribimos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \qquad \text{ssi} \qquad \forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0 : \quad \forall x \leq N : \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

EJEMPLOS: Demuestre que $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x^{-n} = 0\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$

Dem. $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \geq 1 : \qquad 0 < \dfrac{1}{x^n} \geq \dfrac{1}{x}$

Sea $\varepsilon > 0 :$ $\qquad \left| \dfrac{1}{x} - 0 \right| = \dfrac{1}{x} < \varepsilon \quad$ si $\quad x > \dfrac{1}{\varepsilon}. \qquad$ Escogemos $\quad N = \max\left\{1, \frac{1}{\varepsilon}\right\}.$

EJERCICIOS:

1. Probar que $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$
2. Probar que $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x}{1 + x^2} = 0$
3. Probar que $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$
4. Probar que $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \sqrt{x(x-a)} - x = \frac{a}{2}$
5. Probar que $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x^{3/2} - \sqrt{x} + 4x^{4/3} + 2}{3x^2 - 5\sqrt[3]{x} + 2x^{-1/2} + 1} = 0$

3.5.1. El número e como límite

DEFINICIÓN 3.5.3

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

OBSERVACIÓN: Si hacemos el cambio de variable $\quad u = \dfrac{1}{x} \quad$ vemos que cuando x tiende a ∞, u tiende a 0. Luego, equivalentemente, es posible decir que

$$\lim_{u \to 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}} = e$$

EJEMPLOS: Verificar que:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x = e^a$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-5}\right)^{2x} = e^4$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-3}\right)^{x+5} = e^2$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-3}{4x+5}\right)^{3x+1} = e^{-6}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2})}{2x+1}\right)^x = \dfrac{1}{2}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\ln(x+1)-\ln x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} x\ln\dfrac{x+1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{1/x} = \ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{1/x} = 1$

3.6. Asíntotas

Las gráficas de ciertas funciones poseen la característica de «aproximarse» (pero no intersectar) a una recta vertical cuando la variable independiente x se acerca a cierto valor (que no pertenece al Dom$f$) o a una recta horizontal, cuando la variable independiente x toma valores arbitrariamente grandes o pequeños. Estas rectas reciben el nombre de *asíntotas*. Más precisamente:

DEFINICIÓN 3.6.1 La recta $x = a$ se llama *asíntota vertical* de la curva $y = f(x)$ si se satisface una de las siguientes condiciones:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

DEFINICIÓN 3.6.2 Sea $f :]a,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si el límite

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

entonces la recta $y = L$ se llama *asíntota horizontal* de f.

EJEMPLOS: Determine, si hay, las asíntotas verticales y horizontales de las siguientes:

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
2. $f(x) = \dfrac{2x+3}{5-x}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

3.7. Continuidad

Consideremos las funciones

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ -3 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = x^2 + 2x + 5$$

Notemos que si bien el límite de ambas funciones cuando x tiende a 0 existe, no corresponde *en ambos casos*, a la función evaluada en el punto. Más precisamente,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \boxed{\neq} f(0) = -3 \qquad \wedge \qquad \lim_{x \to 0} g(x) = 5 \boxed{=} g(0)$$

El concepto de *continuidad* da cuenta de esta situación.

DEFINICIÓN 3.7.1 (Continuidad en un punto) Supongamos que la función f está definida en algún intervalo abierto que contiene al número a. Se dice que f es **continua** en a si se satisfacen las siguientes dos condiciones:

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe;
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Si alguna de las anteriores condiciones no se cumple en a, entonces se dice que la función f es **discontinua** en ese punto.

Equivalentemente, f es continua en a si

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \; : \; (x \in \operatorname{Dom}(f) \;\wedge\; |x - a| < \delta) \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

DEFINICIÓN 3.7.2 (Función continua) Sea f una función cuyo domino es, o bien $\mathbb{R}$, o bien está formado por la unión de intervalos abiertos. Decimos que f es una función continua si es continua en cada punto de su dominio.

EJEMPLOS:

1. Si $m, n \in \mathbb{R}$ son constantes, entonces $f(x) = mx + n$ es una función continua en todo $\mathbb{R}$.
2. En general, los polinomios de grado n son funciones continuas en todo $\mathbb{R}$.
3. Las funciones $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = \cos(x)$ son continuas en todo número real.
4. La función $f(x) = [x]$ es continua en *cada* intervalo de la forma $]s, s+1[\,,\; s \in \mathbb{Z}$ y es discontinua en *todos* los $s \in \mathbb{Z}$.

5. La función
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$
no es continua en $x=0$ pues $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, por lo tanto no existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

6. Determine $A,B\in\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\begin{cases}-2\operatorname{sen}x & \text{si} & x\leq -\frac{\pi}{2}\\ A\operatorname{sen}x+B & \text{si} & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ \cos x & \text{si} & x\geq \frac{\pi}{2}\end{cases}$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

   Solución: f es continua en los intervalos $]-\infty,-\frac{\pi}{2}[,\ ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ y $]\frac{\pi}{2},\infty[$. Para que sea continua en los puntos $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$, se debe cumplir:
$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} f(x)\qquad\wedge\qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)$$
$$\Longleftrightarrow\qquad \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} -2\operatorname{sen}x=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} A\operatorname{sen}x+B\qquad\wedge\qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} A\operatorname{sen}x+B=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\cos x$$
$$\Longleftrightarrow\qquad 2=-A+B\qquad\wedge\qquad A+B=0\qquad\Longrightarrow\qquad \boxed{A=-1\,,\quad B=1}$$

7. La función
$$f(x)=\begin{cases}x & \text{si } x\in\mathbb{Q}\\ -x & \text{si } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$
es continua en $x=0$. ¿Es continua en algún otro punto?

Solución: Veamos que f es continua en 0: sea $\epsilon>0$; buscamos $\delta>0$, tal que $0<|x-0|<\delta\Rightarrow|f(x)|<\epsilon$.
Tomando $\delta=\epsilon$:

- Si $x\in\mathbb{Q}$: $|x-0|<\delta\quad\Rightarrow\quad|f(x)|=|x|<\delta=\epsilon$
- Si $x\notin\mathbb{Q}$: $|x|<\delta\quad\Rightarrow\quad|f(x)|=|-x|=|x|<\delta=\epsilon$

De este modo $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$

3.7.1. Algebra de Funciones Continuas

TEOREMA 3.7.1 (Álgebra de funciones continuas) Sean f, g dos funciones continuas en a; entonces

1. $f + g$ es continua en a;

2. $f - g$ es continua en a;

3. $f \cdot g$ es continua en a;

4. $\dfrac{f}{g}$ es continua en a, siempre que $g(a) \neq 0$.

EJEMPLOS:

1. Las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ son continuas en todo $\mathbb{R}$. Por lo tanto: $h_1(x) = 3 \operatorname{sen} x - 5 \cos x$, $h_2(x) = \operatorname{sen} x \cdot \cos x$ son continuas en todo $\mathbb{R}$.
   La función $h_3(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ es continua en *todos* los $x \in \mathbb{R} :\ \cos x \neq 0$.

2. La función $f(x) = \dfrac{(x+1)^2(x-2)(x+3)}{(x-1)(x-4)}$ es continua en $\mathbb{R} - \{1, 4\}$.

TEOREMA 3.7.2 (Límites y continuidad) Sea f una función continua en $x = a$. Si g es una función tal que $\lim\limits_{x \to b} g(x) = a$ entonces

$$\lim_{x \to b} f(g(x)) = f(a)$$

es decir

$$\lim_{x \to b} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to b} g(x)\right) = f(a)$$

OBSERVACIÓN: Se dice que, bajo estas condiciones, el *límite* puede ingresar al argumento de la función.

EJEMPLOS:

1. Sea $h(x) = \sqrt{8+x^2}$. Calcular $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$.

   Aplicando el teorema anterior: $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{8+x^2} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 1} 8+x^2} = \sqrt{9} = 3$

2. Verificar que $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\dfrac{x^2-1}{x-1}\right) = 0.$

   Aplicando el teorema: $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\dfrac{x^2-1}{x-1}\right) = \ln\left(\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-1}{x-1}\right)\right) = \ln\left(\lim\limits_{x\to 0} x+1\right) = \ln 1 = 0$

TEOREMA 3.7.3 (Composición de funciones continuas) Sean $f : \mathcal{D}\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g : \mathcal{E}\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funciones. Si f es continua en $a\in\mathcal{D}$ y g es continua en $f(a)\in\mathcal{E}$ entonces $g\circ f$ es continua en a, que podemos escribir en la forma

$$\lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) = g(f(a))$$

Dem.: Sean f y g continuas en a y $f(a)$ respectivamente. Sea $\varepsilon > 0$; como g es continua en $f(a)$ existe un $\rho > 0$ tal que

$$|y - f(a)| < \rho \quad\Rightarrow\quad |g(y) - g(f(a))| < \varepsilon$$

Como f es continua en a, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x-a| < \delta \quad\Rightarrow\quad |f(x) - f(a)| < \rho$$

De esta forma, si $|x-a|<\delta$ entonces $|f(x)-f(a)|<\rho$ y entonces $|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$ es decir, $g\circ f$ es continua en a.

OBSERVACIÓN: Este teorema, que se puede leer como « la composición de funciones continuas es continua», nos permite evaluar con facilidad límites como

$$\lim_{x\to 0}\cos\left(\operatorname{sen}\left(x^2\right)\right) = \cos\left(\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}\left(x^2\right)\right) = \cos\left(\operatorname{sen}\left(\lim_{x\to 0}\left(x^2\right)\right)\right) = \cos(\operatorname{sen}(0)) = \cos(0) = 1$$

de manera directa:

$$\lim_{x\to 0}\cos\left(\operatorname{sen}\left(x^2\right)\right) = \cos(\operatorname{sen}(0)) = \cos(0) = 1$$

EJEMPLOS:

- Si f es continua en a, entonces $|f|$ es continua en a.
- Si f es continua en a, y si $f(a) > 0$, entonces $\sqrt{f}$ es continua en a.

DEFINICIÓN 3.7.3 (Continuidad por la derecha) Se dice que la función f es **continua por la derecha en** a si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. $f(a)$ existe ($a \in \operatorname{dom}(f)$);
2. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ existe;
3. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

DEFINICIÓN 3.7.4 (Continuidad por la izquierda) Se dice que la función f es **continua por la izquierda en** a si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. $f(a)$ existe ($a \in \operatorname{dom}(f)$);
2. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ existe;
3. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

DEFINICIÓN 3.7.5 (Continuidad en un intervalo cerrado) Se dice que una función, cuyo dominio contiene al intervalo cerrado $[a, b]$ es **continua en el intervalo cerrado** $[a, b]$ si y sólo si es continua en el intervalo abierto $]a, b[$, así como continua por la derecha en a y continua por la izquierda en b.

DEFINICIÓN 3.7.6 (Continuidad en un intervalo semiabierto) Una función cuyo dominio incluye al intervalo semiabierto $[a, b[$ (respectivamente $]a, b]$) es **continua en** $[a, b[$ (respectivamente en $]a, b]$) si y sólo si es continua en el intervalo abierto $]a, b[$ (para ambos casos) y es continua por **la derecha en** a (respectivamente, por **la izquierda** en b).

EJERCICIOS:

1. Analice la continuidad de $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi}{2} x & \text{si} \quad -1 \le x \le 1 \\ |x - 1| & \text{si} \quad |x| > 1 \end{cases}$$

2. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + 3b & \text{si} \quad x \le 1 \\ ax^3 - 3ax^2 + 2bx & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

   Determinar $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que la función sea continua en $\mathbb{R}$.

3. Considere la familia de funciones a un *parámetro* $f_\alpha(x)$, (es decir, para cada valor de α se considera la función f_α) dada por:

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha \operatorname{sen} x & \text{si} \quad x \leq \frac{\pi}{2} \\ (1-\alpha)x + \alpha^2 & \text{si} \quad x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Determine para qué valores del parámetro se tiene una función continua, y grafique f_α para cada uno de estos valores.

3.7.2. Tipos de Discontinuidad

DEFINICIÓN 3.7.7 (Discontinuidad reparable y no reparable) Dada una función f que no es continua en un elemento a (puede o no ser del dominio de la función) diremos que:

1. f tiene una discontinuidad reparable en a, si existe el límite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.
2. f tiene una discontinuidad no reparable o irreparable en a, si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ no existe.

OBSERVACIÓN: Note que para considerar el límite necesitamos que por lo menos f esté definida "cerca de a".

EJEMPLOS:

1. Notar que la función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ tiene una discontinuidad **reparable** en 0 ($0 \notin \operatorname{Dom}(f)$) pues $\widetilde{f}$ definida como

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

corresponde a una extensión continua de f.

2. La función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{3-x}$ tiene una discontinuidad **no reparable** en $x = 3$, pues el límite de $f(x)$ cuando $x \to 3$ no existe.

3. Considere la función $f(x)$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 2 \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2} x & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \\ \dfrac{a-2}{x+2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

   a) ¿Es $f(x)$ continua en $x = 0$?

   b) ¿Es $f(x)$ continua en $x = 1$?

   c) Determine a de modo que $f(x)$ sea continua en el mayor subconjunto de $\mathbb{R}$ que sea posible.

   d) ¿Es posible hacer que f sea continua en $\mathbb{R}$?

Solución:

   a) No es continua en $x = 0$ pues: $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$

   b) Sí es continua en $x = 1$ pues: $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$

   c) $a = 2$ pues:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} x = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{a-2}{x+2} = \frac{a-2}{4}$$

   Como ambos límites deben coincidir: $\dfrac{a-2}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 2$

   d) No es posible pues en $x = 0$ la discontinuidad es irreparable.

3.7.3. Teoremas de funciones continuas en intervalos cerrados

TEOREMA 3.7.4 (del Valor Intermedio) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Si $f(a) \neq f(b)$, entonces para cada valor y_0 entre $f(a)$ y $f(b)$ existe un número c entre a y b tal que $f(c) = y_0$.

OBSERVACIÓN:

1. Geométricamente, el Teorema del valor intermedio (T.V.I.) dice que *todos los valores* entre $f(a)$ y $f(b)$ están en el recorrido de f. Dicho de otra manera, si escogemos y_0 entre $f(a)$ y $f(b)$, y trazamos la recta horizontal $y = y_0$, esta recta intersecta la gráfica de $y = f(x)$ en al menos un punto. Esta es una manera de decir que la gráfica de la función no posee «saltos» o «huecos», lo que sugiere la idea de poder trazar dicha gráfica *sin levantar el lápiz*.

2. Notar que basta que f posea un punto de discontinuidad para que *no* se satisfaga el teorema. La función «parte entera», definida en el intervalo $\left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$ es un ejemplo de esta situación.

3. No toda función que tiene la propiedad del valor intermedio es continua. Por ejemplo, la función $f(x) = x - [x]$, definida en $[0, 2]$ es discontinua en $x = 1$.

COROLARIO 3.7.1 Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos. Entonces, $\exists c \in (a, b) : f(c) = 0$. (Este es conocido como el *Teorema de Bolzano*).

EJEMPLOS:

1. Demuestre que existe $x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) = 0$, donde $f(x) = x^5 - x^3 + 2x - 1$.

   Solución: f es una función continua en $\mathbb{R}$, en particular en el intervalo $[0, 1]$. Evaluamos en los extremos del intervalo: $f(0) = -1$ y $f(1) = 1$. Luego, $\exists x_0 \in]0, 1[: f(x_0) = 0$ es decir, existe una raíz del polinomio $f(x)$.

2. Sea $f(x) = x + \operatorname{sen} x - 1$. Probar que existe al menos una raíz real de la ecuación $f(x) = 0$.

   Solución: Notamos que f es suma de funciones continuas, por lo que es continua. Evaluamos en 0 y $\frac{\pi}{2}$: $f(0) = -1$, $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$. Luego, f posee una raíz en el intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$.

3. Considere la curva definida por $y = x^5 + x - 2$ ¿Es posible afirmar que la recta $y = x$ intersecta a esta curva?

   Solución: El problema es equivalente a determinar si $\exists x_0 \in \mathbb{R} : x^5 + x - 2 = x$, es decir, si $\exists x_0 \in \mathbb{R} : x^5 - 2 = 0$. Aplicando el T.V.I. podemos afirmar que tal x_0 existe y pertenece, por ejemplo, al intervalo $]0, 2[$.

4. La función $y = \tan x$ toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $[\pi/4, 3\pi/4]$ y sin embargo no se anula en él. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano?

   Solución: No, puesto que, para $x = \dfrac{\pi}{2}$ la función no está definida.

5. Considere la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 & \text{si} \quad 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

   Para $k \in]3,4[$, ¿existe $c \in [0,3]$ tal que $f(c) = k$? ¿Por qué no se cumple lo establecido en el teorema anterior?

   Solución: $\text{Rec}f = [-1,1] \cup]4,9[$, de donde $\nexists y_0 \in]3,4[$ que esté en $\text{Rec}f$. Como f no es continua en $x = 2$, esto no contradice el T.V.I.

6. Verificar que $f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x + 1$ tiene tres ceros entre -2 y 2.

   Solución: Aplicamos el T.V.I. a la función en tres intervalos contenidos en $[-2,2]$, por ejemplo $[-2,-1]$, $[0,1]$ y $[1,2]$.

7. Verifique el T.V.I. para $f(x) = \sqrt{x+1}$ en el intervalo $[3,24]$.

   Solución: f es continua en $[3,24]$ y $f(3) = 2, \quad f(24) = 5$.

   Sea $y \in [2,5]$. Queremos probar que $\exists c \in [3,24] : f(c) = y$, es decir, $\sqrt{c+1} = y$.
   Despejando c de la ecuación, obtenemos $c = y^2 - 1$. Tal c pertenece a $[3,24]$, pues si
   $2 < y < 5 \quad \Rightarrow \quad 4 < y^2 < 25 \quad \Rightarrow \quad 3 < y^2 - 1 < 24$.

8. Sea $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ una función continua. Probar que $\exists t \in [0,1] : f(t) = t$.

   Solución:

   - Si $f(0) = 0$ o $f(1) = 1$, está probado.
   - Supongamos que $f(0) > 0 \ \wedge \ f(1) < 1$ y consideremos la función $g(t) = f(t) - t$. Entonces, g es continua. Además:

$$\left.\begin{array}{l} g(0) = f(0) - 0 > 0 \\ g(1) = f(1) - 1 < 0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad g(0) \cdot g(1) < 0$$

     Luego, $\exists t \in [0,1] : g(t) = 0$, es decir, $\exists t \in [0,1] : f(t) = t$.

TEOREMA 3.7.5 Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces, f es acotada, es decir,

$$\exists M > 0 : \quad |f(x)| \leq M \qquad \forall\, x \in [a, b]$$

TEOREMA 3.7.6 Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces,

$$\exists\, x_0,\, x_1 \in [a, b] : \quad f(x_0) \;\leq\; f(x) \;\leq\; f(x_1) \quad \forall\, x \in [a,\, b]$$

OBSERVACIÓN: Este teorema dice que una función continua definida sobre un intervalo cerrado **siempre** alcanza su valor máximo y su valor mínimo, en el intervalo.

EJEMPLO 3.7.1 Con un alambre de largo 1[m] se desea construir un marco cuadrado y otro circular. ¿Es posible repartir el alambre de modo que la suma de las áreas encerradas sea máxima? ¿Y para que sea mínima?
Solución: Se «corta» el alambre a una distacia x de uno de sus extremos. Tenemos entonces 2 trozos de alambre: uno de largo x, con el que construiremos el marco circular, y uno de largo $1 - x$, con el que construiremos el marco cuadrado. Así:

$$A_{\square}(x) = \left(\frac{1-x}{4}\right)^2 \qquad \wedge \qquad A_{\circ}(x) = \frac{x^2}{4\pi} \qquad (\text{pues} \quad A_{\circ} = \pi r^2, \quad \text{con} \quad 2\pi r = x)$$

donde $A_{\square}$ y $A_{\circ}$ representan las áreas del cuadrado y círculo, respectivamente. Así, el área total encerrada es:

$$A(x) \;=\; \left(\frac{1-x}{4}\right)^2 + \frac{x^2}{4\pi}$$

El problema planteado es equivalente a preguntar si la función

$$A : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}\,, \qquad A(x) \;=\; \left(\frac{1-x}{4}\right)^2 + \frac{x^2}{4\pi}$$

alcanza su valor máximo y su valor mínimo en el intervalo [0,1]. Como la función A es continua, y está definida sobre un intervalo cerrado, por el teorema anterior *sabemos* que la respuesta es sí.

Más adelante en el curso veremos cómo determinar los puntos en los que se alcanzan estos valores extremos.

3.8. Ejercicios de Controles y Certámenes

1. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$

2. Estudie la continuidad de la función $f:\mathbb{R}-\{0,1\}\longrightarrow\mathbb{R}$, $\quad f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(\pi(x-1))}{x(x-1)}$ y repare sus discontinuidades.

3. Si $[x]$: parte entera de x, determine, justificadamente, el $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n-1}{n}\right]$

4. Determine el valor de $a\in\mathbb{R}$ de modo que $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x^4-a^4}=3.$

5. Determine los valores de $a,b\in\mathbb{R}$ de manera que la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+\operatorname{sen}x}{2x-\operatorname{sen}x} & \text{si} \quad x<0 \\ b & \text{si} \quad x=0 \\ \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}+a & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

sea continua en $x=0$.

6. Determine el valor de $c>0$ de modo que la función $f(x)=\dfrac{\sqrt{cx^4+1}+2x}{4x^2+3x+1}$ tenga como asíntota horizontal a la recta $y=1$ cuando x tiende a infinito.

7. Considere la función f definida en $\mathbb{R}$ por:

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si} \quad x\le 0 \\ (x-a)^2+b & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

donde $a,b\in\mathbb{R}$, con $a\ge 0$.

   a) Determine qué relación debe existir entre a y b para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$.

   b) Determine los valores de a y b para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$ y biyectiva.

   c) Para los valores determinados en la parte *b*), encuentre f^{-1}, la función inversa de f.

8. Calcular los siguientes límites:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3x)-\operatorname{sen}(5x)}{\sqrt{x+1}-1}$ *b*) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2-\sqrt{27x}}{\sqrt{3x}-3}$

9. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x^{1/7}-4x^{3/2}+2(x-\pi)^{5/3}}{\operatorname{sen}^3 x+2^{1/6}x^{5/3}-\cos x}.$

10. Sea $f(x) = (\cos x)^{1/x}, \ x \in \mathbb{R} - \{0\}$. ¿Cómo habría que definir $f(0)$ para que la función resultante fuese continua en $x = 0$?

11. Sea
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x} & \text{si} \quad x < 1 \quad (x \neq 0, x \neq -1) \\ \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 1} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$
Calcule $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

12. *a*) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x(x+a)} - x \right)$

    b) $\lim\limits_{x \to 2\pi} \dfrac{1 - \cos x}{(x - 2\pi)^2}$

13. Sea g una función continua en $x = 0$, dada por
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{f(x)} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$
Calcular:

    a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{f(x) + x^2}$

    b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{f(x)}{f(x) + x^2} - 1 \right) \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x} \right)$

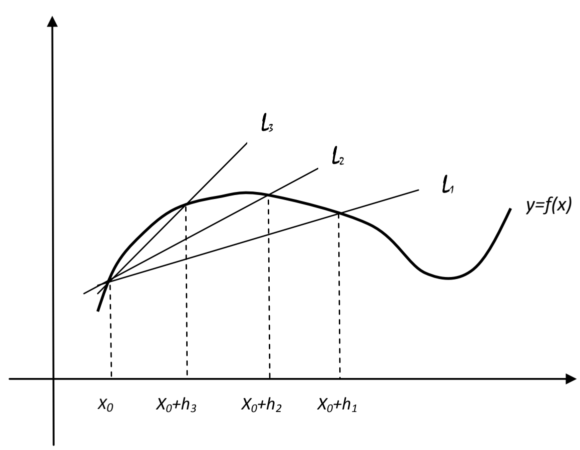
Capítulo 4

Derivadas

4.1. Introducción

El concepto de derivada es una de las ideas más importantes en la matemática. Es una herramienta fundamental, no solo en el ámbito de las ciencias físicas sino también en las ciencias sociales. Tiene aplicaciones tan variadas como la resolución numérica de ecuaciones (útil en los casos en los que no se dispone de una «fórmula» que permita determinar las raíces de la ecuación), aproximación de funciones por otras más sencillas, determinación de las tasas de variación de variables como distancia y velocidad, curvas de demanda en economía, etc.

Consideremos la gráfica de una función $y = f(x)$ como en la figura, y sean $x_0, x_0 + h_1, x_0 + h_2, x_0 + h_3$ elementos en Dom$f$.



Consideremos los puntos $(x_0, y_0), (x_0+h_1, f(x_0+h_1)), (x_0+h_2, f(x_0+h_2)), (x_0+h_3, f(x_0+h_3))$ en la gráfica de $y = f(x)$. Vemos que las rectas *secantes* ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 que pasan por $(x_0, y_0), (x_0 + h_1, f(x_0 + h_1))$, $(x_0, y_0), (x_0 + h_2, f(x_0 + h_2))$, $(x_0, y_0), (x_0 + h_3, f(x_0 + h_3))$ respectivamente, todas pasan por (x_0, y_0) y en la medida que $x_0 + h_i$ está «más cerca» de x_0, van modificando su pendiente y se aproximan a la *recta tangente* a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$.

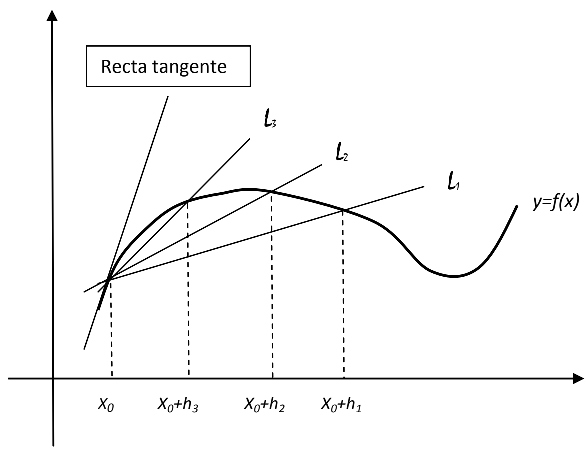
Más precisamente: recordemos que la ecuación de una recta que pasa por los puntos (x_0, y_0) y $(x_1, f(x_1))$ está dada por

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\,(x - x_0)$$

y haciendo $x_1 = x_0 + h$:

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\,(x - x_0)$$

de donde vemos que, si la expresión $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ tiene sentido para h *suficientemente pequeño*, representará la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$. De la misma manera, podríamos haber considerado la expresión anterior para la ecuación de la recta, en donde la pendiente de la recta está dada por $\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$, es decir, si este cuociente tiene sentido para $x_1 \to x_0$, entonces, representará la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$.



Cuocientes de la forma $\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ aparecen en otros contextos. Supongamos que $f(t)$ representa la *posición* de una partícula en un tiempo $t \neq t_0$. Entonces, la expresión

$$\frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$$

es la velocidad media de la partícula en el tiempo transcurrido entre t_0 y t_1 (recordar que $v = \dfrac{d}{t}$, donde d: distancia, y t= tiempo). Así, si t_1 «se acerca» a t_0, este promedio se aplica a intervalos cada vez más pequeños de tiempo, por lo que tiene sentido pensar en que el límite de este cuociente, cuando $t_1 \to t_0$, representa la «velocidad instantánea» de la partícula, en el tiempo $t = t_0$.

Es la existencia del límite de este cuociente, el que define el concepto de *derivada*.

4.2. El Concepto de Derivada

DEFINICIÓN 4.2.1 (Derivada) Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, donde I es un intervalo abierto, y sea $x_0 \in I$. Diremos que f *es derivable en* x_0 si existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

En tal caso escribimos

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

y diremos $f'(x_0)$ es la derivada de f en x_0.

La *derivada de la función* f es aquella función, denotada por f', tal que su valor en un número x del dominio de f está dado por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

si este límite existe.

Si $f'(x)$ existe para todo x en el dominio de f, se dice que la función es diferenciable.

OBSERVACIÓN:

1. Haciendo el cambio de variable $x = x_0 + h$ reemplazamos en la definición de derivada:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

   por lo que ambas expresiones son equivalentes.

2. $f'(x_0)$ (la derivada de f en el punto x_0) se denota también $\dfrac{d}{dx}\big(f(x_0)\big)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$, $D_x\big(f(x_0)\big)$, $D_x f(x_0)$.

   Consecuentemente, la derivada de una función f (que depende de la variable x) se denota por $\dfrac{d}{dx}\big(f(x)\big)$, $\dfrac{df}{dx}$, $D_x\big(f(x)\big)$, $D_x f$.

3. $\text{Dom}\,(f') \subseteq \text{Dom}\,(f)$.

EJEMPLOS:

1. $f(x) = c$ (constante) $\Rightarrow$ $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{c - c}{h} = 0.$

2. $f(x) = x$ $\Rightarrow$ $f'(3) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{3 + h - 3}{h} = 1$

3. $f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(3) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(3+h)^2-3^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{6h+h^2}{h} = 6$

   En general:

4. $f(x) = x^n \quad \Rightarrow$
   $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x^n + nx^{n-1}h + \cdots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h} = nx^{n-1}$

5. $f(x) = ax + b \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h} = a,$ que corresponde a la pendiente de la recta.

6. $f(x) = \sqrt{x} \quad \forall\, x \geq 0 \quad \Rightarrow$
   $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \dfrac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
   Vemos que $0 \notin \mathrm{Dom} f'$, es decir, f **no** es derivable en $x = 0$.

7. $f(x) = \operatorname{sen} x \quad \Rightarrow$
   $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x \cos h + \operatorname{sen} h \cos x - \operatorname{sen}(x)}{h} =$

   $$= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x(\cos h - 1) + \operatorname{sen} h \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x(\cos h - 1)}{h} + \frac{\operatorname{sen} h \cos x}{h} = \cos(x)$$

8. $f(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$ análogamente.

9. Si $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-4}$ determine $f'(3)$.

   $$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{2(3+h)-1}{(3+h)-4} - \dfrac{5}{-1}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{7h}{h(h-1)} = -7$$

10. Si $f(x) = |x|$, muestre que $f'(0)$ no existe.

    Basta ver que no existe el siguiente: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|0+h|-|0|}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|h|}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h}{h} = 1 \\ \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{-h}{h} = -1 \end{cases}$

EJERCICIOS:

1. Determine $f'(x)$ si:

   a) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$

   b) $f(x) = \sqrt{x+3}$

   c) $f(x) = \dfrac{x-2}{x}$

2. Sea f una función monótona (estricta) creciente. Verificar que $f'(x) > 0$. Análogamente, si $f(x)$ es monótona (estricta) decreciente verificar que $f'(x) < 0$.

3. Hallar mediante la definición, la derivada en $x = a$ de

$$f(x) = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x}$$

4. Dada la función continua $f(x)$, determinar $f'(x)$ y señalar su dominio,

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x^2 - 6x + 7 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

5. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface las siguientes:

   a) $f(a+b) = f(a) \cdot f(b) \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$

   b) $f(0) = 1$

   c) $f'(0)$ existe

   Probar que f es derivable $\forall x \in \mathbb{R}$ y, más aún, $\quad f'(x) = f'(0) \cdot f(x)$.

4.2.1. Interpretación Geométrica

Vimos en la introducción del concepto de derivada, la manera bastante natural en que aparece la derivada como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función $y = f(x)$. Precisaremos a continuación estas ideas.

DEFINICIÓN 4.2.2 (Recta Tangente) Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en $x_0 \in I$, donde I es un intervalo abierto. La ecuación de la **recta tangente** a la gráfica de f en el punto $P(x_0, f(x_0))$ es:

$$y - f\left(x_0\right) = f'(x_0)\left(x - x_0\right)$$

OBSERVACIÓN: Vemos entonces que $f'(x_0)$ corresponde a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en P.

DEFINICIÓN 4.2.3 (Recta Normal) La **recta normal** a la gráfica de $y = f(x)$ en un punto P es la recta **perpendicular** a la recta tangente en ese punto.

OBSERVACIÓN:

- Si $f'(x_0) \neq 0$ entonces la recta normal que pasa por $(x_0, f(x_0))$ tiene ecuación

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

- Si $f'(x_0) = 0$ entonces la recta normal que pasa por $(x_0, f(x_0))$ tiene ecuación $x = x_0$.

EJEMPLOS: Determine las ecuaciones de las rectas tangente y normal en $x = 3$ para las curvas

a) $y = x$

b) $y = x^2$

c) $y = \sqrt{x}$

Solución:

a) $y = f(x) = x \quad \Rightarrow \quad f'(3) = \dfrac{dy}{dx}(3) = 1$ es la pendiente de la recta tangente en el punto.

Luego, la ecuación de esta recta es: $y - 3 = 1 \cdot (x - 3) \quad \Rightarrow \quad y = x$ obviamente.

La ecuación de la recta normal es $y = -x$.

b) $y = f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(3) = \dfrac{dy}{dx}(3) = 6 \quad \Rightarrow \quad y - 9 = 6 \cdot (x - 3) \quad \Rightarrow \quad y = 6x - 9$

es la ecuación de la recta tangente.

La ecuación de la recta normal será: $y - 9 = -\dfrac{1}{6} \cdot (x - 3) \quad \Rightarrow \quad y = -\dfrac{1}{6}x + \dfrac{19}{2}$

c) $y = f(x) = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f'(3) = \dfrac{dy}{dx}(3) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad y - \sqrt{3} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} \cdot (x - 3) \quad \Rightarrow$

$y = \dfrac{\sqrt{3}}{6}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ es la ecuación de la recta tangente.

La ecuación de la recta normal será: $y - \sqrt{3} = -2\sqrt{3} \cdot (x - 3) \quad \Rightarrow \quad y = -2\sqrt{3}x + 7\sqrt{3}$

TEOREMA 4.2.1 Si una función f es diferenciable en x_0, entonces f es continua en x_0.

Dem.

Debemos probar que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, equivalentemente, que $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ o equivalentemente, que $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) - f(x_0) = 0$.

Pero:

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h)-f(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot \lim_{h\to 0} h = f'(x_0)\cdot 0 = 0$$

donde utilizamos la hipótesis de que f es diferenciable en x_0 para escribir el límite como producto de dos límites que existen. Luego, f es continua en x_0.

OBSERVACIÓN: El recíproco de este teorema es falso, es decir, una función continua en un punto **no necesariamente** es diferenciable en ese punto. Los siguientes ejemplos muestran esto.

EJEMPLOS:

1. Consideremos $f(x)=|x|$ y veamos que esta función no es diferenciable en $x=0$ aunque es continua allí. (Vimos ya esto anteriormente).

   Solución:

   a) Claramente f es continua en 0, pues

   $$\lim_{x\to 0}|x| = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} x & = & 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} -x & = & 0 \end{cases} \qquad \text{por lo que} \qquad \lim_{x\to 0}|x| = 0 = f(0).$$

   b) Si f fuese diferenciable en $x=0$, debiera existir el límite $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$.
   Sin embargo,

   $$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{|h|}{h} = 1 \\ \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{|h|}{h} = -1 \end{cases} \qquad \therefore f \text{ no es diferenciable en } 0.$$

2. Sea $f(x)=x^{1/3}$. Muestre que f no es diferenciable en $x=0$ aunque es continua en 0.

   Solución:

   Para ver que f no es diferenciable en $x=0$, basta ver que $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ no está definida en este punto.

3. Considere la función

   $$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} & x\le 1 \\ 1/x & \text{si} & x>1 \end{cases}$$

   Determine, si es posible, la ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ si *a*) $x = 0$ *b*) $x = 2$ *c*) $x = 1$

Solución:

a) Determinamos primero si existe $f'(0)$, que debiera ser la pendiente de la recta tangente:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h - 0}{h} = 1$$

Luego, la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = 0$ está dada por:

$$y - 0 = 1 \cdot (x - 0) \qquad \Longrightarrow \qquad y = x$$

b) Determinamos primero si existe $f'(2)$, que debiera ser la pendiente de la recta tangente:

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 - (2+h)}{2h(2+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{2h(2+h)} = -\frac{1}{4}$$

Luego, la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = 2$ está dada por:

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \cdot (x - 2) \qquad \Longrightarrow \qquad y = -\frac{1}{4}x + 1$$

c) Determinamos primero si existe $f'(1)$, que debiera ser la pendiente de la recta tangente:
Si f fuese derivable en $x = 1$, debiera existir el límite $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$. Veamos:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{\frac{1}{1+h} - 1}{h} = -1 \\ \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{1 + h - 1}{h} = 1 \end{cases} \qquad \therefore f \text{ no es derivable en } x = 1$$

Luego, no existe la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en $x = 1$.

EJERCICIOS: Considere la función $f(x) = \dfrac{1}{1 + |x|} + \dfrac{1}{1 + |x - 3|}$.

1. Determine $A \subseteq \mathbb{R}$ de **todos** los puntos donde f es continua.

2. Determine $B \subseteq \mathbb{R}$ de **todos** los puntos donde f es diferenciable.

4.3. Álgebra de Derivadas

TEOREMA 4.3.1 (Álgebra de derivadas) Sean f, g funciones derivables en $x \in I$, donde I es un intervalo abierto en $\mathbb{R}$. Entonces:

1. $\dfrac{d}{dx}\big((f \pm g)(x)\big) = f'(x) \pm g'(x)$
2. $\dfrac{d}{dx}\big(kf(x)\big) = kf'(x) \qquad k \in \mathbb{R}$
3. $\dfrac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
4. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \qquad g(x) \neq 0$

Dem.:

1. $$\frac{d}{dx}\big((f \pm g)(x)\big) = \lim_{h\to 0} \frac{(f \pm g)(x+h) - (f \pm g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) \pm g(x+h) - (f(x) \pm g(x))}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) \pm g'(x)$$

3. $$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\big(f(x+h) - f(x)\big)g(x+h)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x)\big(g(x+h) - g(x)\big)}{h}\\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\big(f(x+h) - f(x)\big)g(x)}{hg(x+h)g(x)} - \frac{f(x)\big(g(x+h) - g(x)\big)}{hg(x+h)g(x)}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\big(f(x+h) - f(x)\big)}{h} \frac{g(x)}{g(x+h)g(x)} - \frac{f(x)}{g(x+h)g(x)} \frac{\big(g(x+h) - g(x)\big)}{h}\\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}\end{aligned}$$

EJEMPLOS:

1. Si $f(x) = 7x^5 - 2x + \operatorname{sen} x$, entonces $f'(x) = 35x^4 - 2 + \cos x$.

2. Si $f(x) = (x^2+1)\sqrt{x} + 4x^5 - 5$, entonces $f'(x) = 2x\sqrt{x} + (x^2+1)\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 20x^4$

3. Si $f(x) = \dfrac{x + \operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}$, entonces $f'(x) = \dfrac{(1+\cos x)\sqrt{x} - (x + \operatorname{sen} x)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$

4. Probar que la recta $y = -x$ es tangente a la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ ¿Cuál es el punto de tangencia? ¿Corta esta recta a la curva en otro punto?

   Solución:

   Veamos, en primer lugar, los puntos en los que la curva se intersecta con la recta (si la recta es tangente a la curva, al menos debe tocarla en un punto). Igualamos:

   $$x^3 - 6x^2 + 8x = -x \qquad \Rightarrow \qquad x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x(x-3)^2 = 0$$

   Luego, se intersectan si $x = 0$ ó $x = 3$.

   Determinemos las ecuaciones de las rectas tangentes a $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ en $x = 0$ y $x = 3$.

   Se tiene que $\dfrac{df}{dx} = 3x^2 - 12x + 8$ de donde $\dfrac{df}{dx}(0) = 8 \quad \wedge \quad \dfrac{df}{dx}(3) = -1.$

   Si $x = 0$, la ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ es: $y - 0 = 8(x-0)$ ó $y = 8x$.

   Si $x = 3$, la ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ es: $y + 3 = -(x-3)$ ó $y = -x$.

   Por lo tanto, la recta $y = -x$ es tangente a la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ para $x = 3$.

5. ¿Para qué valores de a, b y c las curvas $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = x^3 + cx$, tienen una recta tangente común en el punto $(2,2)$?

   Solución: Como $(2,2)$ pertenece a ambas curvas: $f(2) = 4+2a+b = 2$, $g(2) = 8+2c = 2$.

   Además, si tienen la misma recta tangente, éstas tendrán la misma pendiente, de donde:
   $$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=2} = \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=2} \qquad \Rightarrow \qquad (2x+a)|_{x=2} = (3x^2+c)|_{x=2} \qquad \Rightarrow \qquad 4 + a = 12 + c$$

   $$\therefore \quad \left.\begin{array}{rcr} 2a+b &=& -2 \\ c &=& -3 \\ a-c &=& 8 \end{array}\right| \qquad \Rightarrow \qquad a = 5, \quad b = -12, \quad c = -3$$

6. Dos atletas se disponen a correr los 100 metro planos. La distancia, en metros, que cada uno de ellos recorre en t segundos está dada por

$$s_1(t) = \frac{1}{5}t^2 + 8t \qquad \text{y} \qquad s_2(t) = \frac{1100t}{t+100}$$

Determine cuál de los corrredores es el

a) más rápido en la salida.

b) que gana la carrera.

c) más rápido en la llegada.

Solución:

a) La velocidad del atleta 1 en la salida está dada por:

$$\frac{ds_1}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{2}{5}t + 8\Big|_{t=0} = 8[m/s]$$

La velocidad del atleta 2 en la salida está dada por

$$\frac{ds_2}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{1100(t+100) - 1100t}{(t+100)^2}\Big|_{t=0} = 11[m/s]$$

Luego, el atleta 2 es más rápido en la salida.

b) Para determinar el tiempo en que el atleta 1 recorre $100[m]$ resolvemos

$$100 = \frac{1}{5}t^2 + 8t \quad \Leftrightarrow \quad t^2 + 40t - 500 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 10[s]$$

Para determinar el tiempo en que el atleta 2 recorre $100[m]$ resolvemos

$$100 = \frac{1100t}{t+100} \quad \Leftrightarrow \quad t + 100 = 11t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 10[s]$$

Luego, ambos atletas llegan simultáneamente a la meta.

c) La velocidad del atleta 1 en la llegada está dada por:

$$\frac{ds_1}{dt}\Big|_{t=10} = \frac{2}{5}t + 8\Big|_{t=10} = 12[m/s]$$

La velocidad del atleta 2 en la llegada está dada por

$$\frac{ds_2}{dt}\Big|_{t=10} = \frac{1100(t+100) - 1100t}{(t+100)^2}\Big|_{t=10} = 9,9\cdots[m/s]$$

Luego, el atleta 1 es más rápido en la llegada.

7. Sea $f(x)$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ ax + b & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Determine a y b de modo que f sea continua y derivable en $\mathbb{R}$.

Solución:

$$\left.\begin{array}{lrcl} \text{Para que sea continua en } x = 1: & 1 - 5 + 6 & = & a + b \\ \text{Para que sea diferenciable en } x = 1: & 2 - 5 & = & a \end{array}\right\} \qquad \therefore a = -3, \quad b = 5$$

8. Demuestre que el triángulo formado por los ejes coordenados y la tangente a la curva $xy = \dfrac{a^2}{2}$ tiene área constante.

Solución:

Consideramos la función $y = f(x) = \dfrac{a^2}{2x}$. Luego: $f'(x) = -\dfrac{a^2}{2x^2}$.

Así, la ecuación de la recta tangente a la curva en un punto $\left(x_0, \dfrac{a^2}{2x_0}\right)$ está dada por:

$$y - \frac{a^2}{2x_0} = -\frac{a^2}{2x_0^2}(x - x_0)$$

Determinamos los interceptos de esta recta con los ejes coordenados:

$$\left.\begin{array}{lcl} x = 0 & \Rightarrow & y = \dfrac{a^2}{x_0} \\ y = 0 & \Rightarrow & x = 2x_0 \end{array}\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad A_\triangle = \frac{1}{2}x \cdot y = \frac{1}{2} \cdot 2x_0 \cdot \frac{a^2}{x_0} = a^2$$

EJERCICIOS:

1. Hallar el punto en que la tangente a la recta $y = x^2 - 7x + 3$ es paralela a la recta $5x + y - 3 = 0$.

2. ¿En qué punto de la curva $y^2 = 2x^3$ la tangente es perpendicular a la recta $4x - 3y + 2 = 0$?

3. Sean $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2 + ax + b$. Determina $a, b \in \mathbb{R}$ tal que las gráficas de $y = f(x)$ e $y = g(x)$ sean tangentes en $x = 2$.

4. Pruebe que las gráficas de $y = f(x)$ e $y = g(x)$ son tangentes en P, donde

   a) $f(x) = 2 - 3x, \qquad g(x) = x^2 - 5x + 3, \qquad P = (1, -1)$

   b) $f(x) = x^2 + 1, \qquad g(x) = -1 - 4x - x^2, \qquad P = (-1, 2)$

   c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x, \qquad g(x) = \dfrac{x}{x+1}, \qquad P = (0, 0)$

5. Determine $f'(0)$ si
$$f(x) = \begin{cases} g(x)\,\text{sen}(\frac{1}{x}) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$
y se sabe que $\quad g(0) = g'(0) = 0.$

6. El costo total de producir x unidades de un producto se expresa a veces como una función $C(x)$ que depende solo de x. El costo promedio por unidad será entonces $\dfrac{C(x)}{x}$. Si se modifica el número de unidades producidas a, digamos, $x+h$, entonces la tasa promedio de variación del costo está dada por
$$\frac{C(x+h) - C(x)}{x+h-x}$$
El límite de esta razón, cuando h tiende a 0 se llama *costo marginal*. Es decir, el costo marginal es la derivada del costo $C'(x)$, que representa la tasa de variación del costo por unidad.

   Con las definiciones anteriores, resuelva los siguientes problemas.

   a) Un fabricante determina que si produce x unidades diarias de su producto, sus costos están dados por:
   - un costo fijo de \$20.000 diario
   - un costo de \$1000 por unidad diarios
   - otros costos de \$ $2x^2$ diarios

   ¿Cuál es su costo promedio por unidad y cuál es su costo marginal? ¿Cuánto debiera producir de modo que su costo promedio sea mínimo?

   b) Un mayorista descubre que los costos fijos de su tienda son de \$6.000.000 anuales, y que si su inventario promedia x unidades, entonces los costos de almacenamiento son \$$20x + 8x^3$ por año. ¿Cuál es el costo promedio por unidad, y el costo marginal? ¿Qué número de unidades x del inventario minimizan el costo medio por unidad?

Aplicaremos ahora el álgebra de derivadas para determinar las derivadas de las funciones trigonométricas.

TEOREMA 4.3.2 (Derivadas de las funciones trigonométricas)

1. $\dfrac{d}{dx}\big(\tan x\big) = \sec^2 x$
2. $\dfrac{d}{dx}\big(\sec x\big) = \sec x \tan x$
3. $\dfrac{d}{dx}\big(\text{cotg}\, x\big) = -\text{cosec}^{\,2} x$
4. $\dfrac{d}{dx}\big(\text{cosec}\, x\big) = -\text{cosec}\, x \,\text{cotg}\, x$

Dem.

1. $\dfrac{d}{dx}\big(\tan x\big) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) = \dfrac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x$
2. $\dfrac{d}{dx}\big(\sec x\big) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\cos x}\right) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x$
3. $\dfrac{d}{dx}\big(\operatorname{cotg} x\big) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right) = \dfrac{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$
4. $\dfrac{d}{dx}\big(\operatorname{cosec} x\big) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right) = -\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$

TEOREMA 4.3.3 (Derivadas de las funciones logaritmo y exponencial)

1. $\dfrac{d}{dx}\big(\ln(x)\big) = \dfrac{1}{x}$
2. $\dfrac{d}{dx}\big(\log_b(x)\big) = \dfrac{1}{\ln x}\cdot\dfrac{1}{x}$
3. $\dfrac{d}{dx}\big(e^x\big) = e^x$
4. $\dfrac{d}{dx}\big(b^x\big) = \ln b \cdot b^x$

Dem.

1. $$\dfrac{d}{dx}\big(\ln(x)\big) = \lim_{h\to 0}\dfrac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\ln\left(\dfrac{x+h}{x}\right) = \lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)$$
$$\underbrace{=}_{y=\frac{x}{h}} \lim_{y\to\infty}\dfrac{y}{x}\ln\left(1+\dfrac{1}{y}\right) = \dfrac{1}{x}\lim_{y\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^y = \dfrac{1}{x}\ln\left(\lim_{y\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^y\right)$$
$$= \dfrac{1}{x}\ln e = \dfrac{1}{x}$$

2. Usando la fórmula del cambio de base y aplicando lo anterior tenemos:
$$\dfrac{d}{dx}\big(\log_b(x)\big) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\ln x}{\ln b}\right) = \dfrac{1}{\ln b}\cdot\dfrac{1}{x}$$

3. $$\dfrac{d}{dx}\big(e^x\big) = \lim_{h\to 0}\dfrac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0}e^x\left(\dfrac{e^h-1}{h}\right) = e^x\lim_{h\to 0}\left(\dfrac{e^h-1}{h}\right) \underbrace{=}_{e^h-1=u} e^x\cdot\lim_{u\to 0}\dfrac{u}{\ln(u+1)} =$$
$$= e^x\cdot\lim_{u\to 0}\dfrac{1}{\frac{1}{u}\ln(u+1)} = e^x\cdot\lim_{u\to 0}\dfrac{1}{\ln(u+1)^{\frac{1}{u}}} = e^x\cdot\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})^n} = e^x\cdot\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} =$$
$$= e^x\cdot\dfrac{1}{\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)} = e^x\cdot 1 = e^x$$ donde hemos hecho uso de la continuidad de la función logaritmo. Luego,
$$\dfrac{d}{dx}\big(e^x\big) = e^x$$

4. $$\frac{d}{dx}\big(b^x\big) = \lim_{h\to 0}\frac{b^{x+h}-b^x}{h} = \lim_{h\to 0} b^x\left(\frac{b^h-1}{h}\right) = b^x\lim_{h\to 0}\left(\frac{b^h-1}{h}\right) \underbrace{=}_{b^h-1=u} b^x\cdot\lim_{u\to 0}\frac{u}{\log_b(u+1)} =$$

$$= b^x\lim_{u\to 0}\frac{u}{\dfrac{\ln(u+1)}{\ln b}} = \ln b\cdot b^x\cdot\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(u+1)} = \ln b\cdot b^x \qquad \Big(\text{pues } \lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(u+1)} = 1\Big)$$

OBSERVACIÓN: Notemos que, si $b>0,\ b\neq 1$:

$$\frac{d}{dx}b^x = \lim_{h\to 0}\frac{b^{x+h}-b^x}{h} = \lim_{h\to 0} b^x\,\frac{b^h-1}{h} = b^x\lim_{h\to 0}\frac{b^h-1}{h} = Kb^x$$

Es decir, la *razón de cambio* ó *tasa de variación* de cualquier función exponencial es proporcional a la exponencial. Veremos que esta *constante de proporcionalidad* K dependerá de la base b.

Por otra parte, si calculamos la derivada de $f(x)=\log_b(x)$ en $x=1$ usando la definición, tenemos:

$$(\log_b(x))'\Big|_{x=1} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_b(1+h)-\log_b 1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_b\left(\frac{1+h}{1}\right) = \lim_{h\to 0}\log_b\,(1+h)^{\frac{1}{h}}$$

$$\underbrace{=}_{\log_b \text{ es continua}} \log_b\left(\lim_{h\to 0}\,(1+h)^{\frac{1}{h}}\right) = \log_b e$$

Luego, si la base escogida es $b=e$, la pendiente será $\ln e = 1$. Este es uno de los motivos de por qué la base e es tan importante en cálculo: es aquella que hace que la pendiente sea igual a 1 tanto para el logaritmo, como para la exponencial. Para la función *logaritmo*, en $x=1$ y, simétricamente, para la función exponencial en $x=0$.

Ahora aplicamos estas observaciones para calcular:

$$\frac{d}{dx}\big(e^x\big) = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x\left(\frac{e^h-1}{h}\right) = e^x\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^h-1}{h}\right) = e^x\cdot 1 = e^x$$

donde $\displaystyle\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^h-1}{h}\right) = (e^x)'\Big|_{x=0} = 1$, pues es la pendiente de la recta tangente a la curva $y=e^x$ en $x=0$.

EJERCICIOS:

1. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \dfrac{x+\cos x-1}{x^2+e^x}$

   b) $f(x) = x\tan x\ln x$

   c) $f(x) = \dfrac{e^x-e^x}{e^x+e^{-x}}$

2. Suponga que una población de 500 bacterias se introduce en un cultivo y aumenta de número de acuerdo con la ecuación:
$$P(t) = 500\left(1 + \frac{4t}{50+t^2}\right)$$
donde t se mide en horas. Hallar la razón de cambio a la que está creciendo la población cuando $t = 2$.

3. Determinar si existe algún valor de x en el intervalo $[0, 2\pi)$ tal que las razones de cambio de $f(x) = \sec x$ y de $g(x) = \operatorname{cosec} x$ sean iguales.

4.3.1. Regla de la Cadena

El siguiente teorema señala cómo calcular la derivada de una compuesta de funciones, cuando ambas funciones son derivables. Esta regla permite derivar funciones de expresiones complicadas, de manera bastante sencilla.

TEOREMA 4.3.4 Si $y = f(u)$ es una función derivable de u, y si además $u = g(x)$ es una función derivable de x, entonces $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ es una función derivable, con
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$
En otras palabras
$$\frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$$
Dem. Presentamos una demostración parcial de este importante teorema, que no contempla todos los casos pero permite validar su enunciado.

Notamos que:
$$\lim_{h\to 0}\frac{(f\circ g)(x+h)-(f\circ g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(f\circ g)(x+h)-(f\circ g)(x)}{g(x+h)-g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
lo cual sirve en el caso en que $g(x+h) \neq g(x)$. Aplicamos la propiedad para el producto de límites, cuando éstos existen (como en este caso), y obtenemos el resultado.

EJEMPLOS:

1. Para calcular $\dfrac{d}{dx}(x^2-7x)^3$, hacemos $g(x) = x^2 - 7x$ y $f(t) = t^3$. Luego:
$$g'(x) = 2x - 7 \quad \wedge \quad f'(t) = 3t^2$$
$$\therefore \qquad \frac{d}{dx}(f\circ g) = \frac{d}{dx}(f(g(x)) = f'(g(x))\cdot g'(x) = 3(x^2-7x)^2\cdot(2x-7)$$

Notar que, en este caso, también podemos efectuar la operación elevar al cubo antes, y luego derivar:

$$\frac{d}{dx}(x^2-7x)^3 = \frac{d}{dx}(x^6-21x^5+147x^4-343x^3) \;=\; 6x^5-105x^4+588x^3-1029x^2$$
$$= 3x^2(2x^3-35x^2+196x-343) = 3x^2(x-7)^2(2x-7)$$

lo cual muestra que, si interesa obtener los puntos en los que la derivada se anula, la regla de la cadena resulta ser una herramienta más eficiente, puesto que entrega el polinomio factorizado. En el segundo caso, debemos ser capaces de encontrar los ceros de un polinomio de grado 3.

2. Para calcular $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen}(\ln(x^2+1)))$, aplicamos directamente la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}(\ln(x^2+1))) = \cos(\ln(x^2+1))\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x$$

Formalmente, debiésemos haber definido:

$$f(x)=\operatorname{sen}x, \qquad g(x)=\ln x, \qquad h(x)=x^2+1$$

Entonces:

$$(f\circ g\circ h)(x) = f(g(h(x))) = f(g(x^2+1)) = f(\ln(x^2+1)) = \operatorname{sen}(\ln(x^2+1))$$

de donde

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}(\ln(x^2+1))) = (f\circ g\circ h)'(x) = f'(g(h(x)))\cdot g'(h(x))\cdot h'(x) = \cos(\ln(x^2+1))\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x$$

EJERCICIOS:

1. Escriba $f(x)$ como la composición de 2 funciones y también como la composición de 3 funciones. Calcule la derivada de f, si:

   a) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ *b*) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5x-2}}$ *c*) $f(x)=(3x^2+7x)^{5/2}$

2. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

   a) $f\,(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

   b) $f(x)=a^x, \quad a>0,\ a\neq 1.$

   c) $f(x)=\operatorname{sen}^2 x\cdot\operatorname{sen}x^2$

d) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x \operatorname{sen} x)}{x}$

e) $f\,(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{x^2 + \sqrt{x^2 + \tan x}}$

f) $f(x) = x^x$

g) $f(x) = (\operatorname{sen} x)^x$

3. Pruebe que si f es una función derivable y es par, entonces f' es impar. ¿Qué puede decir si f es impar?

4. Verifique la *Regla General de las Potencias*:
Si $y = [u(x)]^n$ con u función derivable de x y n número racional, entonces
$$\frac{dy}{dx} = n[u(x)]^{n-1}\frac{du}{dx}$$

5. Suponga que $f(x)$ es una función diferenciable, y que los valores de $f(x)$ y de sus derivadas en los puntos $x = 0, 1, 2$ y 3 están dados por:
$$\begin{array}{cccc} f(0) = 3 & f(1) = 5 & f(2) = -3 & f(3) = 5 \\ f'(0) = -1 & f'(1) = 2 & f'(2) = 0 & f'(3) = 4 \end{array}$$
Si $g(x) = x^2 - 5x + 6$, determine la derivada de las siguientes en los puntos indicados:

a) $\left.\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|_{x=0}$ *b*) $f(x)g(x)\Big|_{x=1}$ *c*) $f(g(x))\Big|_{x=2}$ *d*) $(g(f(x))\Big|_{x=3}$

6. Sea $g(x) = f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right), \quad \forall x \neq 1$ y $f'(x) = x^2$. Calcular $g'(x)$.

7. Si $y = \cos(\operatorname{sen} 2x))$, determine $\dfrac{dy}{dx}$ en $x = \dfrac{\pi}{6}$.

8. Un recipiente tiene forma de cono circular. La altura es de $10[m]$ y el radio de la base mide $4[m]$. Se introduce agua en el recipiente a una velocidad constante de $5[m^3]$ por minuto ¿Con qué velocidad se eleva el nivel del agua cuando la profundidad del agua es de $5[m]$ si el vértice del cono está hacia arriba?

4.4. Teoremas importantes sobre funciones derivables

DEFINICIÓN 4.4.1 Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R},\ a \in A$. Diremos que f tiene (o alcanza) en a un:

1. máximo local ó relativo si $\exists\,]x_1, x_2[\subseteq A,\ x_1 < a < x_2 :\ f(a) \geq f(x) \quad \forall x \in]x_1, x_2[$.
2. mínimo local ó relativo si $\exists\,]x_1, x_2[\subseteq A,\ x_1 < a < x_2 :\ f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in]x_1, x_2[$.
3. máximo absoluto ó mínimo absoluto si las respectivas desigualdades se satisfacen $\forall x \in A$.

TEOREMA 4.4.1 (Teorema de Fermat) Sea f una función diferenciable en el intervalo $]a, b[$. Entonces, si en $x_0 \in]a, b[$ la función f alcanza un extremo (máximo ó mínimo) relativo, entonces $f'(x_0) = 0$.

Dem.

Supongamos que f alcanza un máximo relativo en x_0 (análogamente se prueba para el caso en que f alcance un mínimo relativo en x_0). Luego,

$$\exists \delta > 0 : \quad f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

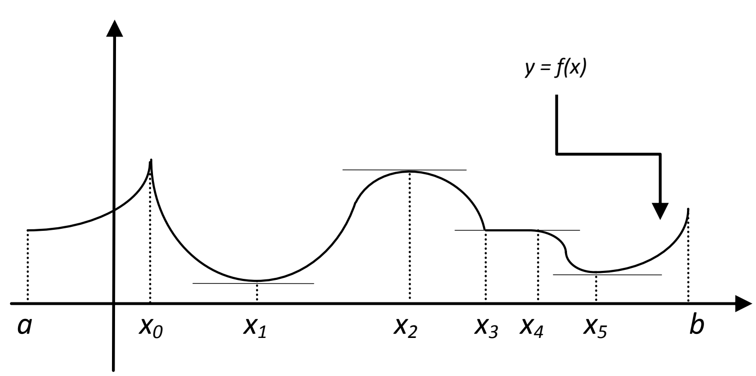
$$\therefore\ \exists h \in \mathbb{R}\ (h \text{ cercano a } 0) : \quad f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$$

Luego:

$$\begin{array}{lllll} h < 0 & \Rightarrow & \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0 & \Rightarrow & \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \geq 0 \\ h > 0 & \Rightarrow & \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0 & \Rightarrow & \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \leq 0 \end{array}$$

Como f es diferenciable en el intervalo, ambos límites laterales deben coincidir, de donde $f'(x_0) = 0$.

OBSERVACIÓN: La figura ilustra la relación del Teorema con los valores extremos de f.



- En los puntos x_1, x_2, x_5 y en el intervalo $]x_3, x_4[$ encontramos extremos relativos para f. Se ha dibujado la recta tangente a $y = f(x)$ en estos puntos, puesto que en ellos, la función es derivable.
- En los puntos a, x_0, x_3 y b la función **no** es derivable; sin embargo, f alcanza extremos relativos en estos puntos.

DEFINICIÓN 4.4.2 Los puntos $x_0 \in \text{Dom}f$ en donde $f'(x_0) = 0$ se llaman *puntos críticos* ó *singulares* de f.

EJEMPLO 4.4.1 Determine los puntos críticos de:

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 8$
2. $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

Solución:

1. $f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)(x-4) = 0 \quad \therefore x = -2 \ \wedge \ x = 4$ son los puntos críticos de f.
2. $f'(x) = \dfrac{2}{x^3} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$ Por lo tanto, f no tiene puntos críticos.

EJERCICIOS:

1. Encuentre, si existen, los puntos críticos de las siguientes funciones:
   a) $f(x) = x^3 - 3x$
   b) $f(x) = x^3 + 3x$
   c) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$
   d) $f(x) = e^{3x}$
   e) $f(x) = 2x + \cos x$
   f) $f(x) = xe^{3x}$
   g) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 189x + 285$
2. Demuestre que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene exactamente un punto crítico ssi $b^2 = 3ac$.

TEOREMA 4.4.2 (Teorema de Rolle) Sea f continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto $]a, b[$. Si

$$f(a) = f(b)$$

entonces, existe al menos un número c en $]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Dem.

Como f es continua en el intervalo $[a,b]$, f alcanza su máximo y su mínimo en el intervalo, es decir,

$$\exists c_0, c_1 \in [a,b]: \quad f(c_0) \leq f(x) \leq f(c_1) \qquad \forall x \in [a,b]$$

Si $c_0 \in]a,b[$: $f'(c_0) = 0$, por el teorema anterior, y análogamente, si $c_1 \in]a,b[$: $f'(c_1) = 0$. Si $c_0, c_1 \notin]a,b[$ entonces $c_0 = a$ ó $c_0 = b$ y $c_1 = a$ ó $c_1 = b$.

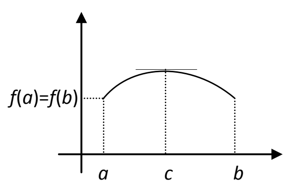
Como, por hipótesis, $f(a) = f(b)$ tenemos:

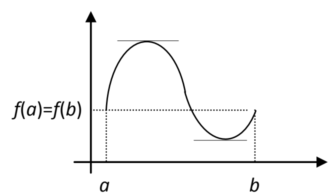
$$f(c_0) = f(a) = f(b) \qquad \wedge \qquad f(c_1) = f(a) = f(b)$$

Así, $\forall x \in [a,b]$:

$$f(a) = f(c_0) \leq f(x) \leq f(c_1) = f(a) \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = f(a)$$

En otras palabras, f es constante, de donde $f'(c) = 0 \quad \forall c \in]a,b[$ (mucho más que lo que se quería).

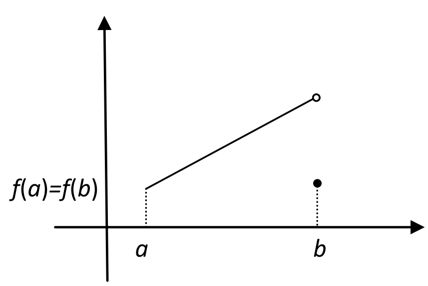




OBSERVACIÓN:

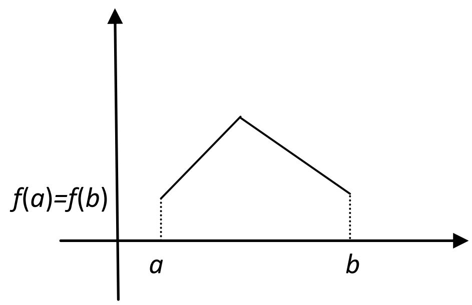
1. Las figuras anteriores ilustran la situación descrita por el teorema de Rolle.

2. La importancia de la hipótesis de la continuidad de f en el intervalo *cerrado* $[a,b]$ en el teorema de Rolle se muestra en el siguiente ejemplo. Considere la función definida en $[a,b]$ por la gráfica:



En este caso, $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \quad \text{pero} \quad \nexists c \in]a,b[: \; f'(c) = 0.$$

3. La importancia de la hipótesis de la diferenciabilidad de f en el intervalo *abierto* $]a, b[$ en el teorema de Rolle se muestra en el siguiente ejemplo. Considere la función definida en $[a, b]$ por la gráfica:



En este caso, tampoco existe tal c, pues f no es diferenciable en todo el intervalo.

TEOREMA 4.4.3 (Teorema del Valor Medio) Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto $]a, b[$, existe un número c en $]a, b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dem.

Demostraremos el teorema aplicando el Teorema de Rolle a la función:

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Notemos que $\quad g(a) = 0 \quad$ y $\quad g(b) = 0. \quad$ Además, g es continua en $[a, b]$ pues f lo es. Luego, g alcanza sus extremos en el intervalo, es decir, existen $m, M \in [a, b]$:

$$g(m) \leq g(x) \leq g(M) \qquad \forall x \in [a, b]$$

Si $g(m) = g(M) = 0$, entonces $g(x) = 0 \ \forall x \in [a, b]$, de donde

$$f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

o equivalentemente

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(x)$$

En este caso, la gráfica de f es una recta y luego el resultado es obvio.

Por lo tanto, podemos suponer que $g(m)$ ó $g(M)$ no es nulo. Supongamos que $g(m) \neq 0$. Como $g(a) = g(b) = 0$, m es diferente de a y de b, de donde $m \in]a, b[$. Como g tiene un mínimo en m, y es diferenciable allí, se tiene que $g'(m) = 0$. Además, de la definición de g:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot 1$$

Luego:

$$0 = g'(m) = f'(m) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

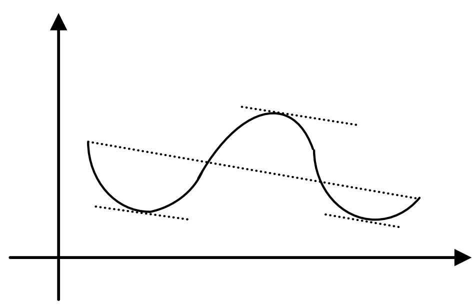
o equivalentemente

$$f'(m) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

OBSERVACIÓN:

1. El teorema de Rolle es una caso particular del teorema del valor medio, y no debe confundirse con el teorema del valor **intermedio** visto en clases anteriores, que se aplica a funciones *continuas*.

2. El Teorema del Valor Medio afirma que existe un punto $c \in]a, b[$ tal que la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(c, f(c))$ es *paralela* a la cuerda determinada por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. En otras palabras, el Teorema del Valor Medio es una versión *oblicua* del Teorema de Rolle.



3. El Teorema del Valor Medio permite obtener resultados que asocian propiedades de una función con propiedades de su derivada. Presentamos a continuación algunos.

COROLARIO 4.4.1 Si $f'(x) = 0$ para todo x en $I =]a, b[$ entonces f es constante en $[a, b]$

Dem.

Sea $c \in I$ cualquiera. Probaremos que $f(x) = f(c)\ \forall x \in I$.

Como f es continua en $[x, c]$ y diferenciable en $]x, c[$, podemos aplicar el Teorema del Valor Medio (TVM):

$$\exists m \in]x, c[: \quad f'(m) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Pero $f'(m) = 0$, de donde

$$f(x) - f(c) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) = f(c)$$

Por lo tanto, f es constante en el intervalo I.

OBSERVACIÓN: La función **debe** estar definida en **un** intervalo. Considere

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

En este caso, $f'(x) = 0 \quad \forall x \in \text{Dom}(f)$, pero f **no** es constante.

COROLARIO 4.4.2 Si f y g son diferenciables en un intervalo abierto I y $f'(x) = g'(x)\ \forall x \in I$, entonces $f = g + K$, donde K es una constante.

Dem.

Tenemos que $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 \quad \forall x \in I$. Por el corolario anterior, $f - g = K$, de donde $f = g + K$.

COROLARIO 4.4.3 Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in]a,b[$ entonces f es creciente. (Un resultado análogo se obtiene para el caso $f'(x) < 0$ en donde se concluye que f es decreciente).

Dem.

Sean $x_0, x_1 \in]a,b[:\ a < x_0 < x_1 < b$. Aplicamos el TVM al intervalo $[x_0, x_1]$, es decir,

$$\exists c \in]x_0, x_1[: \quad f'(c) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad \text{es decir} \quad f(x_1) - f(x_0) = f'(c)(x_1 - x_0)$$

Pero, $x_1 - x_0 > 0$ de donde si $f'(c) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) - f(x_0) \geq 0$, es decir $f(x_1) \geq f(x_0)$. De la misma manera, si $f(x_1) - f(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_0)$.

Luego, f es creciente en el intervalo.

EJEMPLOS:

1. Determine $c \in]0,1[$ que satisface el TVM, para $f(x) = x^3$.

   Solución: Buscamos $c \in]0,1[:\ f'(c) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$. Tenemos que

   $$f'(c) = 3c^2 = \frac{f(1) - f(0)}{1} \quad \Rightarrow \quad 3c^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \therefore \qquad c = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

2. Sea $f(x) = 1 - |x - 1|$. Considere el intervalo $[0,2]$ y notar que $f(0) = f(2)$. ¿Existe un punto c en (a,b) tal que $f'(c) = 0$? ¿Por qué no es posible aplicar el teorema de Rolle?

3. Demostrar que $x \leq \tan x \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

   Solución:

   Sea $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, y consideremos el intervalo $[0,x]$. Sea $f(y) = \tan y, \quad y \in [0,x]$.

f satisface el TVM en el intervalo $[0, x]$, por lo que

$$\exists c \in \,]0, x[\,: \ f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

es decir,

$$\sec^2 x = \frac{\tan x}{x} \geq 1 \quad \left(\text{pues} \ \ \sec^2 c \geq 1 \quad \forall c \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$$

4. Si la gráfica de un polinomio tiene tres intersecciones con el eje x, ¿al menos en cuántos puntos su tangente debe ser horizontal?

5. Dos patrullas de carabineros, equipados con radar, distan a $8[Km]$ en una autopista. El límite de velocidad de esta autopista es de $88[Km/h]$. Un camión pasa ante la primera de ellas a $88[Km/h]$ y cuatro minutos después a $80[Km/h]$.
   Probar que el camión ha sobrepasado el límite de velocidad en algún lugar, entre esos dos puntos.
   Observaciones: Considerar $t = 0$ cuando pasa por la primera patrulla. Suponer la función posición derivable y aplicar el teorema del valor medio.

6. Muestre el teorema del valor medio generalizado. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en $]a, b[$ entonces existe un punto $\xi \in \,]a, b[$ tal que

$$\frac{g\,(b) - g\,(a)}{f\,(b) - f\,(a)} = \frac{g'\,(\xi)}{f'\,(\xi)}$$

   Ind: Usar una función adecuada y el teorema de Rolle.

EJERCICIOS:

1. Determine $c \in \,]1, e[$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(e) - f(1)}{e - 1}$, si $f(x) = \ln x$.

2. Use el TVM para probar que

$$\frac{x - 1}{x} < \ln x < x - 1 \qquad \forall x \in \,]0, 1[$$

3. Si f es diferenciable en $]a, b[$ y $\exists \alpha \in \mathbb{R}^+ \ : \ |f'(x)| \leq \alpha \quad \forall x \in \,]a, b[$, probar que

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \alpha |x_1 - x_2|$$

   Use esto para probar que $\quad |\operatorname{sen} x_1 - \operatorname{sen} x_2| \leq |x_1 - x_2|$

4.5. Derivadas de orden superior

Considere una función f derivable. La función derivada f' puede resultar también una función derivable. Por ejemplo $f(x) = \operatorname{sen} x$ es una función derivable, su derivada es $f'(x) = \cos x$ pero esta a su vez es una función derivable luego podemos calcular

$$\left(f'(x)\right)' = (\cos x)' = -\operatorname{sen} x$$

Así, hemos derivado dos veces la función $f(x) = \operatorname{sen} x$.

DEFINICIÓN 4.5.1 Sea f una función n veces derivable en x, entonces $f^{(n)}(x)$ denota la $n-$ésima derivada de f en x (derivada de orden n).

Luego, escribimos $f^{(1)}(x) = f'(x)$ para la primera derivada de f en x (derivada de orden 1) , $f^{(2)}(x) = f''(x)$ es la segunda derivada de f en x (derivada de orden 2) y en forma análoga para el resto de los casos.

Se reserva el nombre de derivada de *orden superior* para el caso $n > 1$ en $f^{(n)}(x)$.

OBSERVACIÓN:

1. Sea $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ una función derivable en $]a,b[$. Entonces decimos que f es de clase C^k en $]a,b[$, y escribimos $f \in C^k]a,b[$ si las derivadas $f', f'', \ldots, f^{(k)}$ existen y son todas funciones continuas en $]a,b[$. Si $f^{(k)}$ existe y es continua para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces decimos que f es de clase C^∞, lo cual se escribe como $f \in C^\infty]a,b[$.

2. Existen otras notaciones habitualmente utilizadas para las derivadas de orden superior de $y = f(x)$:
$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n}(f(x)) = D_x^n y$$

TEOREMA 4.5.1 Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones n veces derivables en $]a,b[$; entonces su producto también es n veces derivable en $]a,b[$ y se tiene la siguiente fórmula

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

EJEMPLOS:

1. Muestre que $y(x) = \alpha \operatorname{sen} x + \beta \cos x$ satisface la ecuación
$$y'' + y = 0$$

   Solución: En efecto:

$y(x) = \alpha \operatorname{sen} x + \beta \cos x \quad \Rightarrow \quad y'(x) = \alpha \cos x - \beta \operatorname{sen} x \quad \Rightarrow \quad y''(x) = -\alpha \operatorname{sen} x - \beta \cos x$

Reemplazando en el lado izquierdo de la ecuación:

$$y'' + y = (-\alpha \operatorname{sen} x - \beta \cos x) + (\alpha \operatorname{sen} x + \beta \cos x) = 0$$

2. Calcular $\dfrac{d^n}{dx^n}(x \cos x), \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Solución:

Calcularemos algunas derivadas para determinar la fórmula general:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x\cos x) &= \cos x - x \operatorname{sen} x \\
\frac{d^2}{dx^2}(x\cos x) &= -2\operatorname{sen} x - x\cos x \\
\frac{d^3}{dx^3}(x\cos x) &= -3\cos x + x \operatorname{sen} x \\
\frac{d^4}{dx^4}(x\cos x) &= 4\operatorname{sen} x + x\cos x
\end{aligned}$$

Luego, pareciera que:

$$\frac{d^n}{dx^n}(x\cos x) = \begin{cases} (-1)^{k+1}((2k-1)\cos x - x\operatorname{sen} x) & \text{si} \quad n = 2k-1 \\ (-1)^k(2k\operatorname{sen} x + x\cos x) & \text{si} \quad n = 2k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Probemos la fórmula obtenida por inducción.

CASO n **impar**, es decir $n = 2k-1$:

$\boxed{k = 1}$ se verifica trivialmente.

$\boxed{k \Rightarrow k+1}$ La hipótesis de inducción es:

$$\frac{d^{2k-1}}{dx^{2k-1}}(x\cos x) = (-1)^{k+1}\Big((2k-1)\cos x - x\operatorname{sen} x\Big)$$

Debemos probar que: $\dfrac{d^{2k+1}}{dx^{2k+1}}(x\cos x) = (-1)^{k+2}\Big((2k+1)\cos x - x\operatorname{sen} x\Big)$

En efecto:

$$\frac{d^{2k+1}}{dx^{2k+1}}(x\cos x) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d^{2k-1}}{dx^{2k-1}}(x\cos x)\right) = \frac{d^2}{dx^2}\left((-1)^{k+1}\Big((2k-1)\cos x - x\operatorname{sen} x\Big)\right)$$

$$= (-1)^{k+1}\frac{d^2}{dx^2}\Big((2k-1)\cos x - x\operatorname{sen} x\Big) = (-1)^{k+1}\frac{d}{dx}\Big((2k-1)(-\operatorname{sen} x) - (\operatorname{sen} x + x\cos x\Big)$$

$$= (-1)^{k+2}\Big(2k\operatorname{sen} x + x\cos x\Big)' = (-1)^{k+2}\Big((2k+1)\cos x - x\operatorname{sen} x\Big) \qquad \text{como se quería.}$$

CASO n **par**, es decir $n = 2k$:

$\boxed{k = 1}$ se verifica trivialmente.

$\boxed{k \Rightarrow k+1}$ La hipótesis de inducción es:

$$\frac{d^{2k}}{dx^{2k}}\left(x\cos x\right) = (-1)^k(2k\,\mathrm{sen}\,x + x\cos x)$$

Debemos probar que: $\displaystyle\frac{d^{2k+2}}{dx^{2k+2}}\left(x\cos x\right) = (-1)^{k+1}((2k+2)\,\mathrm{sen}\,x + x\cos x)$

Procediendo de manera análoga al caso impar, se concluye lo pedido. Así, la fórmula obtenida es válida $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. Obtener una fórmula para la suma $x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \cdots + n^2x^n$.

Solución: Sabemos que (progresión geométrica):

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{i=0}^{n} x^i$$

Luego:

$$\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)' = \sum_{i=1}^{n} ix^{i-1} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2} = \sum_{i=1}^{n} ix^{i-1}$$

Por lo tanto:

$$\frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2} = \sum_{i=1}^{n} ix^{i} \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2}\right)' = \sum_{i=1}^{n} i^2x^{i-1}$$

es decir:

$$\frac{-n^2x^{n+2}+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-(n+1)^2x^n+1-x}{(1-x)^3} = \sum_{i=1}^{n} i^2x^{i-1}$$

Multiplicando nuevamente por x:

$$x\cdot\frac{-n^2x^{n+2}+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-(n+1)^2x^n+1-x}{(1-x)^3} = \sum_{i=1}^{n} i^2x^{i}$$

Así:

$$x + 2^2x^2 + 3^3x^3 + \cdots + n^2x^n = \frac{-n^2x^{n+3}+(2n^2+2n-1)x^{n+3}-(n+1)^2x^{n+1}+x-x^2}{(1-x)^3}$$

EJERCICIOS:

1. Encuentre una fórmula general para $f^{(n)}(x)$ si:

   a) $f(x) = \operatorname{sen} x$ b) $f(x) = e^x$ c) $f(x) = \ln x$

   ¿A qué clase corresponde cada una de estas funciones?

2. Considere el polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Pruebe que

$$a_i = \frac{p^{(i)}(0)}{i!}, \qquad i = 0, \cdots, n$$

3. Sea f una función $C^\infty(I)$ donde I es un intervalo que contiene al 0. Pruebe que:

   a) Si f es par, entonces $f^{(2n-1)}(0) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
   b) Si f es impar, entonces $f^{(2n)}(0) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

4. La velocidad (entendida como *función velocidad*) $v(t)$ de una partícula puede ser obtenida tras derivar la función de posición $s(t)$. Por otro lado, la aceleración corresponde a la razón de cambio de la velocidad por lo que puede ser obtenida como la derivada de ésta. Entonces

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d^2}{dt^2}s(t)$$

   En este contexto, resuelva el siguiente problema:

   Una partícula cuenta con una función de posición s definida para $t \geq 0$ por

$$s(t) = \frac{32}{12 + t^2}$$

   Determinar el tiempo, la distancia y la velocidad en cada instante en que la aceleración es nula.

5. Si $y = f(x)$ es la ecuación de una curva, $f'(x)$ determina la pendiente de la recta tangente. Luego, $f^{(2)}(x)$ determina la *razón de cambio de la pendiente* de la recta tangente respecto a x.

   Determinar la pendiente de la recta tangente en cada punto de la curva con ecuación

$$y = x^4 + x^3 - 3x^2$$

   en los que la razón de cambio de la pendiente es cero.

6. Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, determine el polinomio $s(x)$ dado por

$$s(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4$$

4.6. Ejercicios de Controles y Certámenes

1. Calcule $f'(x)$ en todo su dominio, si $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x, & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ -x^2 + 6x, & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

   Justifique claramente los casos $x = 0$ y $x = 2$.

2. Sea
$$f(x) = \begin{cases} mx + 2(1-m) & \text{si} \quad x \geq 2 \\ ax^2 - b & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$$
   ¿Qué condiciones tienen que satisfacer los parámetros para que f sea:

   a) continua para $x = 2$?

   b) exista recta tangente a la gráfica de f en el punto $(2, 2)$?

   c) exista recta tangente a la gráfica de f de pendiente $\frac{1}{2}$ en el punto $(2, 2)$?

   d) Interprete en una gráfica el caso *c*).

3. a) Determine la derivada de la función $f(x) = \ln\left(\arctan x^3\right)$

   b) Si $h(x) = g(f(x))$, determine $h'(3)$, sabiendo que:
   $g'(2) = 4, \quad f(3) = 2 \quad$ y $\quad f'(3) = -1$.

4. Sea g una función diferenciable tal que su derivada es $\dfrac{1}{x^3+1}$. Si $h(x) = g(x^2)$, determine $h'(x)$.

5. Sea $f(x) = \dfrac{\sqrt{\operatorname{sen} x^2 + \operatorname{tg} x^2 + \operatorname{tg}^2 x + 1}}{1 + \operatorname{tg} x^2}$. Encuentre $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=0}$

6. Sea
$$f(x) = \begin{cases} mx + 2(1-m) & \text{si} \quad x \geq 2 \\ ax^2 - b & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$$
   ¿Qué condiciones tienen que satisfacer los parámetros para que

   a) f sea continua para $x = 2$?

   b) exista recta tangente a la gráfica de f en el punto $(2, 2)$?

   c) exista recta tangente a la gráfica de f de pendiente $\frac{1}{2}$ en el punto $(2, 2)$?

   d) Interprete en una gráfica el caso *c*).

7. La recta tangente al gráfico de $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x - \dfrac{1}{2} \cos x$ en el punto $A = (x_0, 1/2)$ con $0 < x_0 < \pi$, corta al eje X en el punto $B = \left(\dfrac{\pi - \sqrt{3}}{3}, 0\right)$.

   Determine x_0 y calcule la longitud del trazo AB.

8. Determinar los valores de a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{1+x} & x \geq 1 \\ \dfrac{bx - x^2}{2} & x < 1 \end{cases}$$

   sea derivable en $x = 1$.

9. Determine sobre cuáles puntos de la gráfica de la función $f(x) = x^2 - x + 1$, la recta tangente a dicha gráfica pasa por el origen.

Capítulo 5

Derivadas implícitas y paramétricas

En este capítulo estudiaremos las derivadas de funciones en las que la relación entre la variable dependiente e independiente se expresa de una manera diferente a como se ha hecho hasta ahora. Hacemos hincapié en que lo que nos interesa conocer respecto a éstas funciones, son sus *derivadas*, y no necesariamente la función misma.

5.1. Curvas definidas implícitamente

La gráfica de una función continua de una variable puede considerarse como un *curva* en el plano, y esta curva tendrá una *recta tangente* en todos aquellos puntos en los que la función es derivable. En otras palabras, si

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{es una función continua}$$

entonces $y = f(x)$ corresponde a una curva en el plano $\mathbb{R}^2$. En este caso, la ecuación de dos variables $y = f(x)$ define a y *explícitamente* en función de la variable x.

Considere ahora una función F de dos variables

$$\begin{array}{rccc} F: & U \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & F(x,y) \end{array}$$

La expresión $F(x,y) = 0$, corresponde a una ecuación de dos variables donde la variable y está relacionada mediante F a la variable x. En este caso decimos que y está *implícitamente* definida por una o más funciones que dependen de x.

EJEMPLOS:

1. La ecuación $3x - 2y = 4$ se puede escribir de la forma $F(x,y) = 0$ donde la función F está dada por $F(x,y) = 3x - 2y - 4$. En este caso, la ecuación $F(x,y) = 0$ permite despejar la variable y en términos de la variable x:

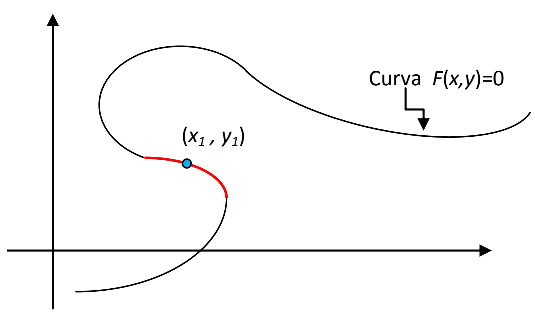
   $$y = f(x) = \frac{3}{2}x - 2$$

   ecuación que corresponde a una recta en el plano.

2. Consideremos la ecuación $e^x + x = \operatorname{sen}(y-3) + 2y + 6$ y escribámosla en la forma $F(x,y) = 0$:
$$e^x + x - \operatorname{sen}(y-3) - 2y - 6 = 0$$
¿ Es simple despejar y en términos de x? ¿Cumple $(1,3)$ con la ecuación $F(x,y) = 0$?

3. Considere la función $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. La ecuación $F(x,y) = 0$ representa una circunferencia de radio 1 centrada en el origen, y **no** es la gráfica de una función. Sin embargo, esta ecuación define a y implícitamente como función de x, de manera *local*. Notemos que en este caso es posible despejar y, obteniendo dos funciones:
$$y = f_1(x) = \sqrt{1-x^2} \qquad \wedge \qquad y = f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$$
La primera describe a la semicircunferencia en el semiplano superior y la segunda, la semicircunferencia en el semiplano inferior. Ambas **funciones** son derivables $\forall x \in]-1,1[$, pero no lo son en los puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$.

Consideremos, de manera más general, una curva en el plano dada por la ecuación $F(x,y) = 0$ que no representa necesariamente a una función real de variable real, pero que consideraremos *continua*. Notemos que en la figura, la gráfica **no** representa una función; sin embargo, en una vecindad de (x_1, y_1), podemos considerarla como la gráfica de una función. En este caso, decimos que la ecuación $F(x,y) = 0$ define a y implícitamente como función de x.



En el caso de la circunferencia, por ejemplo: $x^2+y^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad F(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$ define a y implícitamente como función de x en una vecidad de, por ejemplo, $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, y la función $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$ define a y explícitamente como función de x. Vemos que, en este caso, es fácil *despejar* y en términos de x, pero esto no es siempre así. Consideremos una ecuación sencilla, como por ejemplo,
$$y^5 + 3y^2 - \sqrt{y} - 2x^2 = -4$$
Sin embargo, si **suponemos** que y está definida implícitamente como una función *derivable* de x en una vecindad de algún punto (x_0, y_0) de la curva, es posible aplicar la *regla de la cadena* para

determinar $\dfrac{dy}{dx}$, *independientemente* que *no* se conozca una expresión *explícita* para y como función de x. Esta técnica se conoce como *derivación implícita*.

5.1.1. Derivación implícita

Iniciemos nuestro estudio con un ejemplo que conocemos bien:

$$x^2+y^2=1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad F(x,y)=x^2+y^2-1=0$$

Si suponemos que en la vecindad de algún punto (x_0,y_0) es posible escribir $y=\varphi(x)$ (cosa que en realidad sabemos, en este caso), entonces

$$F(x,\varphi(x))=x^2+(\varphi(x))^2-1=0$$

Derivamos con respecto a x:

$$2x+2\varphi(x)\varphi'(x)=0 \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi'(x)=-\frac{2x}{2\varphi(x)}=-\frac{x}{\varphi(x)} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

expresión que es válida siempre que $y\neq 0$.

Notemos que a partir de la curva $x^2+y^2=1$ podemos definir las siguientes dos funciones, con dominio en $[-1,1]$: $f_1(x)=\sqrt{1-x^2}$ $\wedge$ $f_2(x)=-\sqrt{1-x^2}$. Entonces:

$$\frac{df_1}{dx}=-\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \wedge \qquad \frac{df_2}{dx}=\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

derivadas que, como sabemos, no son válidas en $x=\pm 1$, que son los valores que corresponden a $y=0$. Adicionalmente, notemos que *ambas* expresiones, tanto para $\dfrac{df_1}{dx}$ como para $\dfrac{df_2}{dx}$ correponden a $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$.

OBSERVACIÓN:

1. La manera de *calcular* la derivada de y respecto de x en el ejemplo anterior, muestra la forma en que procederemos en general.

2. Para estudiar la derivación implícita de manera formal, es necesario el uso del *Teorema de la función implícita* . Sin embargo, en este importante resultado intervienen conceptos que no son definidos en este curso, y que se verán en MAT023. Por esta razón sólo nos enfocaremos en el cálculo de las derivadas.

EJERCICIOS:

1. Considere la curva dada por la ecuación $x\cos(y) + y\cos(x) - 1 = 0$. Calcule $\dfrac{dy}{dx}$.

2. Considere la curva dada por la ecuación $y^5 + 3y^2 - 2x^4 = -4$. Calcule $\dfrac{dy}{dx}$.

3. Considere la curva dada por la ecuación $(x^2 + y^2)^2 = ax^2y$. Calcule $\dfrac{dy}{dx}$.

4. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva: $\operatorname{sen}(xy) + 3y = 4$ en el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

5. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ en el punto $(1,1)$ si $\cos\left(\dfrac{\pi xy^2}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi y}{2}\right) + y + 3x = 5$.

6. Encontrar la ecuación de la recta normal a la curva dada por $\operatorname{sen} xy + e^{xy} = e^x$ en el punto $(\pi, 1)$.

7. Sea $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2y - xy^2 + 3x - 2y = 0\}$. Encontrar la ecuación del lugar geométrico de los puntos en R tal que la tangente a R en dichos puntos sea paralela a la recta $y = x + \dfrac{1}{2}$.

   Solución:

   $$2xy + x^2\frac{dy}{dx} - y^2 - 2xy\frac{dy}{dx} + 3 - 2\frac{dy}{dx} = 0$$

   $$\frac{dy}{dx}(x^2 - 2xy - 2) = y^2 - 2xy - 3$$

   $$\therefore \quad \text{igualando las pendientes :} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 2xy - 3}{x^2 - 2xy - 2} = 1$$

   $$\Longrightarrow \quad x^2 - 2xy - 2 \neq 0 \quad \wedge \quad y^2 - 2xy - 3 = x^2 - 2xy - 2$$

   $$\therefore \quad y^2 - x^2 = 1 \quad \text{es decir, es una hipérbola.}$$

8. Demuestre que la curva $y - x^2 = 0$ es ortogonal a la curva $x^2 + 2y^2 = 3$ en el punto de intersección (1,1). (Dos curvas son *ortogonales* en un punto cuando sus rectas tangentes son perpendiculares en dicho punto).

5.1.2. Derivación implícita de segundo orden.

Sean x, y variables relacionadas por una ecuación $F(x,y)=0$. Nos interesa ahora obtener $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. Esto se realiza a través de la derivación implícita obteniendo, en primer lugar, $\dfrac{dy}{dx}$ y luego se utiliza este resultado para encontrar la expresión de $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Determinemos, por ejemplo, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ si $x^2+y^2=2$. Encontramos primero $\dfrac{dy}{dx}$:

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

$$\therefore \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\left(\frac{y-x\dfrac{dy}{dx}}{y^2}\right) = -\frac{y+\dfrac{x^2}{y}}{y^2} = -\frac{y^2+x^2}{y^3} = -\frac{2}{y^3}$$

EJERCICIOS:

1. Encontrar y'' si $x^4+y^4=16$.
2. Sea $f(x)=\sqrt[3]{\cos^2 x}$. Calcule $f''(0)$ usando derivación implícita y en forma directa.
3. Un objeto se mueve de tal manera que su velocidad v está relacionada con su desplazamiento s mediante la ecuación
$$v=\sqrt{2gs+c}$$
con g y c constantes. Demuestre usando derivación implícita que la aceleración es constante.
4. Sea $F(x,y)=y-f(x)g(x)$, con f,g funciones con derivadas de todo orden. Demuestre que para $F(x,y)=0$ se verifica
$$y''=f''g+2f'g'+fg''$$
5. Considere los lugares geométricos definidos por las expresiones:

   (1) $x^2+y^2=1$ (2) $y^2-x^2=1$

   - Grafique la circunferencia y la hipérbola respectiva.
   - Determine los valores de x e y para los cuales $y'=0$.
   - Evalúe y'' en los valores de x encontrados en el punto anterior.
   - Si considera los casos $y\geq 0$ e $y<0$ podrá notar que los puntos encontrados corresponden a máximos y mínimos para las funciones obtenidas. ¿Qué relación puede observar respecto al signo de y'', cuando el punto es máximo / mínimo? ¿Es razonable este resultado?

5.2. Teorema de la función inversa

La importancia del *Teorema de la función inversa* no radica, como pudiera pensarse, en las condiciones de invertibilidad de una función: esas ya las conocemos. Lo esencial de este teorema, es que nos entrega condiciones bajo las cuales la inversa de una función, si existe (aunque sea localmente), es *diferenciable*.

TEOREMA 5.2.1 (Teorema función inversa) Sea $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y sea $I \subseteq U$ un intervalo en el que f es diferenciable, y tal que $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$. Entonces, la función f es invertible *en el intervalo* I, y, más aún, se cumple que

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

es decir, la inversa también es derivable en el correpondiente intervalo en la imagen de f.

OBSERVACIÓN: En otras palabras, si para x_0 en el dominio de la función se tiene que

1. f es diferenciable en un intervalo que *contiene* a x_0, y
2. $\dfrac{df}{dx}(x_0) \neq 0$ (y por lo tanto $\dfrac{df}{dx}(x) \neq 0$ en algún intervalo que contiene a x_0)

entonces, existe una inversa *local* f^{-1} de f definida en un intervalo que contiene a $y_0 = f(x_0)$.

Además, es posible calcular la *derivada* de la función inversa en este intervalo, y la expresión de su derivada (escribimos aquí la formulación con una *notación* diferente) viene dada por

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(f(x)) = \left(\frac{d}{dx} f(x) \right)^{-1}.$$

Idea de la demostración del teorema:

Sea f diferenciable: $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I.$ Sea $x_0 \in I$:

$$y_0 = f(x_0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_0 = f^{-1}(y_0)$$

$f'(x) \neq 0 \;\Rightarrow\; f$ es inyectiva. $\therefore\; f(x_0+h) - f(x_0) = k \neq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_0+h) = f(x_0) + k = y_0 + k$
$\Rightarrow \quad f^{-1}(y_0 + k) = x_0 + h.$ Luego:

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f^{-1}(y_0+k) - f^{-1}(y_0)}{k} = \lim_{h,k \to 0} \frac{x_0 + h - x_0}{k} = \lim_{h,k \to 0} \frac{h}{y_0 + k - y_0} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{f(x_0+h) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \qquad \text{bien definido porque } f'(x_0) \neq 0$$

EJEMPLO 5.2.1 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f'(x) = 1 + \cos^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)$. Suponga que $f(1) = 3$. Calcular $(f^{-1})'(3)$.

Solución:

Notamos que $f'(x) > 0 \quad (\therefore \neq 0)$. Luego

$$f(1) = 3 \iff f^{-1}(3) = 1$$

$$\therefore \qquad (f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{1+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2}{3}$$

OBSERVACIÓN: Disponemos ahora de las herramientas matemáticas que nos permiten calcular las derivadas de las funciones trigonométricas inversas.

5.2.1. Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

TEOREMA 5.2.2 (Derivadas de las funciones trigonométricas inversas).

1. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{arc\,sen} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad x \in \,]-1,1[$

2. $\dfrac{d}{dx}(\arccos x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad x \in \,]-1,1[$

3. $\dfrac{d}{dx}(\arctan x) = \dfrac{1}{x^2+1} \qquad x \in \mathbb{R}$

Dem.

1. Como $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x > 0 \quad \forall\, x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, se tiene que $\operatorname{arc\,sen} x$ es derivable en $]-1,1[$.

   Más aún:
   $$\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,sen} x) = \frac{1}{\operatorname{sen}'(\operatorname{arc\,sen} x)} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arc\,sen} x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\operatorname{arc\,sen} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

   donde hemos usado la identidad de Pitágoras, notando que si $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[: \quad \cos x > 0.$

2. Como $\dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x < 0 \quad \forall\, x \in \,]0,\pi[$, se tiene que $\arccos x$ es derivable en $]-1,1[$.

   Más aún:
   $$\frac{d}{dx}(\arccos x) = \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

OBSERVACIÓN: Como las funciones $\arccos$ y $-\operatorname{arc\,sen}$ tienen la misma derivada en el intervalo $]-1,1[$, podemos concluir que ellas difieren en una constante en dicho intervalo, es decir:

$$\arccos x = C - \operatorname{arc\,sen} x \qquad \forall\, x\, \in]-1,1[$$

Por continuidad, la ecuación también es válida en los extremos del intervalo. Además, la constante C puede determinarse evaluando en, por ejemplo, $x=0$:

$$\arccos 0 = C - \operatorname{arc\,sen} 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\pi}{2} = C + 0$$

$$\therefore \qquad \arccos x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,sen} x \qquad \forall\, x\, \in [-1,1]$$

3. Como $\dfrac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$, se tiene que $\arctan x$ es derivable en $\mathbb{R}$.

   Más aún:

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{\sec^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

EJERCICIOS:

1. Demuestre que:

   a) $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{arc\,cot} x) = -\dfrac{1}{1+x^2}, \quad \forall\, x\, \in \mathbb{R}.$ Concluya que $\operatorname{arc\,cot} x = \dfrac{\pi}{2} - \arctan x.$

   b) $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{arc\,sec} x) = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}},$ para $|x|>1.$

   c) $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{arc\,cosec} x) = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}},$ para $|x|>1.$

2. Calcular $\dfrac{d}{dx}\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right).$

3. Calcular la derivada de $f(t) = a \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{t}{a}\right) + \sqrt{a^2-t^2}, \quad a>0.$

4. Calcular $\dfrac{dy}{dx}$ si $\operatorname{arc\,sen}(xy) = \arccos(x+y).$

5. Calcular $\dfrac{dy}{dx}$ si $x \operatorname{sen} y + x^3 = \arctan y.$

5.3. Curvas definidas paramétricamente

Las curvas en el plano, que son las que estamos estudiando, pueden definirse también de manera *paramétrica*, es decir, en función de un *parámetro*. Para entender de qué se trata, consideremos la semicircunferencia

$$x^2 + y^2 = 1\,, \qquad y \geq 0 \qquad \text{(definición implícita)}$$

o equivalentemente

$$y = \sqrt{1 - x^2} \qquad \text{(definición explícita).}$$

Podemos también escribir:
$\begin{array}{rcl} x & = & \cos t \\ y & = & \operatorname{sen} t \end{array}$, $\quad t \in [0, \pi]$, que corresponde a la *misma* curva. Esta forma de representación, que depende de un *parámetro* t, se llama *ecuación paramétrica de la curva*. Observar que, si elevamos ambas ecuaciones al cuadrado y las sumamos, obtenemos la ecuación implícita.

EJEMPLOS:

1. La parametrización de una semicircunferencia de radio r es: $\begin{array}{rcl} x & = & r\cos t \\ y & = & r\operatorname{sen} t \end{array}$, $\quad t \in [0, \pi]$.

   Si dejamos que el parámetro t se mueva en el intervalo $[0, 2\pi]$, obtenemos la circunferencia completa.

2. ¿Qué lugar geométrico está parametrizado por las ecuaciones
   $\begin{array}{rcl} x & = & a\cos t \\ y & = & b\operatorname{sen} t \end{array}$, $\quad a, b > 0, \quad a > b, \quad t \in [0, 2\pi]$?

3. Grafique la curva dada en forma paramétrica por $\begin{array}{rcl} x & = & 2t \\ y & = & t^2 - 1 \end{array}$, $\quad -1 \leq t \leq 2$.

4. Si $\begin{array}{rcl} x & = & a\cos^3 t \\ y & = & a\operatorname{sen}^3 t \end{array}$, $\quad a > 0,\ t \in [0, 2\pi]$, encuentre la forma implícita de esta curva en $\mathbb{R}^2$.

5. Si $\begin{array}{rcl} x & = & \operatorname{sen} 2t \\ y & = & \cos t \end{array}$, $\quad a > 0,\ t \in [0, 2\pi]$, encuentre la forma implícita de esta curva en $\mathbb{R}^2$.

   Intente graficar las últimas dos curvas descritas en forma paramétrica.

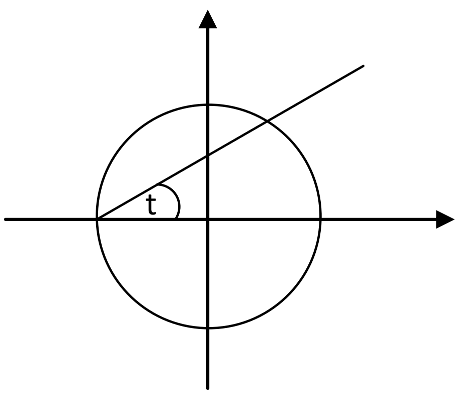
Nota interesante: Parametrización de una curva

En general, no es fácil obtener una parametrización no trivial de una curva. En esta sección haremos algunas parametrizaciones, para entender el proceso.

EJEMPLOS:

1. Parametrice una circunferencia centrada en el origen y de radio 1, en términos de la tangente del haz de rectas que pasa por el punto (-1, 0).

   Solución: Antes de encontrar la parametrización pedida, notemos que ya conocemos una parametrización de la circunferencia, dada por $x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t,\ t \in [0, 2\pi]$. Es decir, encontraremos ahora *otra* parametrización.

   La ecuación de una recta es de la forma $y = mx + n$. Como el parámetro deberá ser la tangente de la recta, y sabemos que ésta coincide con la pendiente, entonces, la ecuación de la recta será de la forma $y = tx + n$. Como la recta debe pasar por el punto (-1, 0), este punto debe satisfacer la ecuación, es decir: $-t + n = 0 \quad \Rightarrow \quad n = t$. Así, la ecuación de la recta será

   $$y = t(x+1)$$

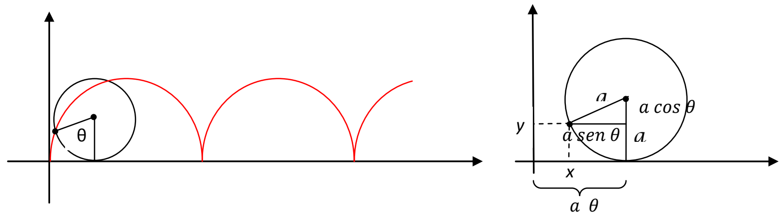
   La ecuación de la circunferencia que debemos parametrizar en términos de t es $x^2+y^2 = 1$. Luego, buscamos los puntos de la recta que satisfacen la circunferencia, es decir, son aquellos puntos que están en la *intersección* de ambas curvas. Debemos resolver, en términos del *parámetro* t, el sistema:

   $$\left.\begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & 1 \\ y & = & t(x+1) \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad x^2+t^2(x+1)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad (1+t^2)x^2+2t^2x+t^2-1 = 0$$

   Resolviendo esta ecuación, encontramos que $x = -1 \quad \vee \quad x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

   Ahora, $(x = -1 \quad \Rightarrow \quad y = 0) \quad \wedge \quad \left(x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{2t}{1+t^2} \right), \quad t \in \mathbb{R}$

   Esta es la parametrización pedida (que recordarán en MAT022).



2. Un círculo de radio a rueda a lo largo del eje X, sobre el semiplano superior. **El** punto que inicialmente se encuentra en el origen, traza una curva llamada *cicloide* (ver figura arriba). Parametrice dicha curva, tomando como parámetro el ángulo central θ indicado en la figura.

   Solución:

   En la figura de la derecha, vemos que: $$\left.\begin{array}{rcl} a\theta & = & x + a\,\text{sen}\,\theta \\ a & = & y + a\cos\theta \end{array}\right|$$ de donde

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & a(\theta - \text{sen}\,\theta) \\ y & = & a(1 - \cos\theta) \end{array}\right|, \qquad \theta \in [0, 2\pi].$$

EJERCICIOS:

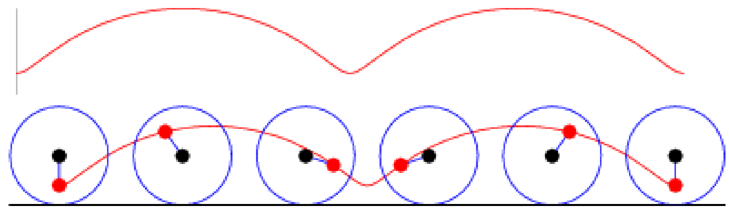
1. Grafique e identifique la curva dada en forma paramétrica por

$$x(t) = \begin{cases} t & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leq t \leq 2 \\ 3-t & \text{si} \quad 2 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{si} \quad 3 \leq t \leq 4 \end{cases} \qquad y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ t-1 & \text{si} \quad 1 \leq t \leq 2 \\ 1 & \text{si} \quad 2 \leq t \leq 3 \\ 4-t & \text{si} \quad 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

2. Una circunferencia C de radio b rueda por fuera de una segunda circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$, donde $b < a$. Sea P un punto fijo de C cuya posición inicial es $A = (a, 0)$. Demuestre que, si el parámetro t es el ángulo entre la parte positiva del eje X y el segmento de recta que va desde el origen al centro de C, entonces las ecuaciones paramétricas de la curva trazada por P (llamada *epicicloide*) son:

$$\begin{array}{rcl} x & = & (a+b)\cos\theta - b\cos\left(\dfrac{a+b}{b}\,\theta\right) \\ y & = & (a+b)\,\text{sen}\,\theta - b\,\text{sen}\left(\dfrac{a+b}{b}\,\theta\right) \end{array} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

3. Un círculo de radio a rueda a lo largo del eje X, sobre el semiplano superior. **Un** punto, en el *interior* del círculo, a distancia $b\,(< a)$ del centro, traza una curva, llamada *cicloide de curtate*.



Parametrice esta curva, como en el ejemplo 1.

4. Se dispara un proyectil, desde el nivel del suelo, con velocidad inicial v_0 y ángulo de elevación θ, de acuerdo a las ecuaciones paramétricas

$$x(t) = v_0 t \cos\theta \qquad\qquad y(t) = v_0 t \operatorname{sen}\theta - gt^2$$

   a) Muestre que la trayectoria corresponde a una parábola.

   b) ¿Cuńato tiempo transcurre antes que el proyectil toque la tierra?

   c) ¿Cuán lejos llega el proyectil hasta tocar tierra?

   d) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada?

5.3.1. Derivación Paramétrica

Considere una partícula que se está moviendo en el plano a lo largo de una trayectoria dada en coordenadas paramétricas, digamos,

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t)\,, \qquad\qquad t \in I \end{aligned}$$

Entonces, podemos obtener información del *movimiento* de la partícula a través de las componentes vertical y horizontal de su velocidad, es decir, las componentes de la velocidad en las direcciones x e y respectivamente, serán:

$$\begin{aligned} v_x &= x'(t) \\ v_y &= y'(t) \\ \text{donde} \quad \overrightarrow{v} &= (v_x, v_y) \end{aligned}$$

Podría ser interesante, también, conocer la *pendiente* $\dfrac{dy}{dx}$ en cada punto $(x(t), y(t))$. Para ello, supongamos que las funciones $x(t), y(t), x'(t), y'(t)$ son continuas en I (si una función posee su primera derivada continua en un intervalo I, se dice que es de *clase* $C^1(I)$), es decir, supongamos que $x(t)$ e $y(t)$ son de clase $C^1(I)$, y que además $x'(t) \neq 0, \quad \forall t \in I$. Entonces, es razonable afirmar:

- $x'(t) \neq 0, \quad \forall t \in I \quad \Rightarrow \quad x(t)$ es invertible (aunque no podamos obtenerla explícitamente), por lo que podemos decir que en este intervalo $\quad t = t(x)$.
- $y = y(t) \quad \Rightarrow \quad y = y(t) = y(t(x)) \quad \Rightarrow \quad y = f(x) = y(t(x))$
- Aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = y'(t(x)) \cdot t'(x) \underbrace{=}_{\text{T.F.Inversa}} y'(t(x))\frac{1}{x'(t(x))} = \frac{y'(t(x))}{x'(t(x))} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

Apliquemos este procedimiento en los ejemplos:

EJEMPLOS: Determine $\dfrac{dy}{dx}$ en los siguientes casos:

1. Si $\left.\begin{array}{rcl} x &=& \cos t \\ y &=& \operatorname{sen} t \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rcl} x' &=& -\operatorname{sen} t \\ y' &=& \cos t \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{\cos t}{-\operatorname{sen} t} = -\dfrac{x}{y}$

2. Si $\left.\begin{array}{rcl} x &=& a\cos t \\ y &=& b\operatorname{sen} t \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rcl} x' &=& -a\operatorname{sen} t \\ y' &=& b\cos t \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b\cos t}{-a\operatorname{sen} t} \cdot \dfrac{ab}{ab} = -\dfrac{b^2x}{a^2y}$

3. $\left.\begin{array}{rcl} x &=& a\cos^3 t \\ y &=& a\operatorname{sen}^3 t \end{array}\right|$

4. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva:

   a) $x(t) = t^2, \quad y(t) = (2-t)^2, \quad t = \frac{1}{2}$

   b) $x(t) = \cos^3 t, \quad y(t) = \operatorname{sen}^3 t, \quad t = \frac{\pi}{4}$

OBSERVACIÓN: Para derivadas paramétricas de orden superior, el procedimiento es análogo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}$$

y en general

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}$$

5.4. Ejercicios de Controles y Certámenes

1. Encuentre la ecuación de la tangente a la curva γ dada por la ecuación $x \cos y = \operatorname{sen}(x+y)$ en el punto $(\pi/2, \pi/2)$.

2. Considere la gráfica de la curva $y = y(x)$ descrita implícitamente por la ecuación
$$x^4 \operatorname{sen} xy + xy \cos x - y^2 = 0.$$
Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(1,0)$.

3. Considere la curva cuya ecuación *paramétrica* viene dada por:
$$\begin{cases} x(t) &= \sqrt{1+t^2} \\ y(t) &= 2t^2(1-t) \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$
Calcule $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

4. Sea $f(x) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$, $-1 < x < 1$. ¿Posee f una (función) inversa f^{-1}? Si f^{-1} existe, ¿es monótona? ¿creciente? ¿decreciente? ¿diferenciable? Grafique. Justique su respuesta. Si acaso f^{-1} existe, calcule $\left(f^{-1}\right)'\left(\sqrt{3}\right)$.

5. a) Dada la curva
$$x = 2(t - \operatorname{sen} t)$$
$$y = 2(1 - \cos t)$$
Determine $\dfrac{dy}{dx}$ en el punto $P = (x, y)$ en el cual $t = \dfrac{\pi}{6}$.
   b) Suponga que la ecuación $\sqrt{x} + 1 = x\sqrt{y} + \operatorname{sen} y$ define implícitamente una función derivable f tal que $y = f(x)$. Determine y'.

6. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangente y normal a:
$$x^2 - y^2 - 2x - 4y - 4 = 0,$$
en el punto correspondiente a $x = 1$.

7. Demuestre que la recta normal a $x^3 + y^3 = 3xy$ en $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ pasa por el origen.

8. Sea g la función inversa de $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{1+x}\right)$, $x > 0$. Calcule $g'(1)$.

9. Si h es una función tal que $h'(x) = \frac{x+1}{|x+1|}$ y $h(0) = 1$. Determine $(h^{-1})'(1)$.

Capítulo 6
Aplicaciones

6.1. Razón de Cambio

En esta sección consideraremos razones de cambio respecto al tiempo, que no son necesariamente la velocidad o la aceleración. Deberemos tener presente que si y es una función de x, y a su vez x es una función de t, entonces tiene sentido considerar la razón de cambio de y respecto de x, pero también la de y respecto de t. En casos como el descrito, requeriremos usar la *la regla de la cadena*. También, podemos tener varias variables involucradas en una ecuación, las que a su vez dependen de la variable t. En estos casos, deberemos aplicar la derivación *implícita*.

EJEMPLOS:

1. Una placa circular de metal se dilata por el calor, de manera que su radio aumenta con una rapidez de 0,01 cm/s. ¿Con qué rapidez aumenta el área cuando el radio mide 2 cm?

   Solución: Sea r el radio de la placa, y sea $A(r)$ su área. Por lo tanto:

   $$A(r) = \pi r^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 0,01 = 0,04\pi \ [cm^2/s]$$

2. Una luminaria cuelga a una altura de 4 m. directamente sobre un paseo rectilíneo y horizontal. Si en este paseo, una persona de 1,5 m. de alto se aleja de la luminaria a razón de 55 m/min., ¿a razón de cuántos m/min. se alarga su sombra?

   Solución: Sea x la distancia de la persona a la base de la luminaria, y sea y la distancia de la persona al extremo de su sombra. Luego, por semejanza de triángulos:

   $$\frac{y}{1,5} = \frac{x+y}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{3}{5}x \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{3}{5}\frac{dx}{dt} = 33 \text{ m/min}$$

3. Un globo que se encuentra a 120 m. de un observador comienza a elevarse verticalmente, con una rapidez de 10 m/min. Calcule la rapidez con que cambia el ángulo de un observador, cuando el globo está a 160 m. de altura.

Solución: Sea $h(t)$ la altura del globo, y sea $\alpha(t)$ el ángulo de observación. Luego:

$$\tan(\alpha(t)) = \frac{h(t)}{120} \qquad \Longrightarrow \qquad \sec^2(\alpha(t))\frac{d\alpha}{dt} = \frac{dh}{dt}\cdot\frac{1}{120} = \frac{1}{12}$$

En el instante t_0 en el que el globo se encuentra a 160 m. de altura, es fácil ver que $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$. Luego:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{12}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3}{100}\ \text{rad/s}$$

4. Un punto P se mueve a lo largo de la curva $C:\ y = x^3 - 3x^2$. Cuando P está en el punto $(1,-2)$, su coordenada x crece a razón de 3. Encuentre la razón de cambio de la distancia de P al origen.

   Solución: La distancia de un punto (x,y) al origen está dada por:

   $$d\left((x,y),(0,0)\right) = \sqrt{x^2+y^2} \underbrace{=}_{(x,y)\in C} \sqrt{x^2+(x^3-3x^2)^2} =: f(x)$$

   Se sabe que: $x = 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dx}{dt} = 3.$ Luego:

   $$\frac{df}{dt} = \frac{2x+2(x^3-3x^2)(3x^2-6x)}{2\sqrt{x^2+(x^3-3x^2)^2}}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{21}{\sqrt{5}}$$

5. Dos carreteras se cruzan en un ángulo de 60°. Se sabe que, en un determinado instante, dos automóviles A y B, distan 160 [km.] del cruce, A alejándose con una rapidez de 100 [km/hr] y B acercándose al cruce con una rapidez de 50 [km/hr]. Determine la rapidez con que se separan uno del otro.

   Solución: Sean $x(t), y(t)$ las distancias al cruce de A y B respectivamente, y sea $z(t)$ la distancia entre A y B. Por el teorema del coseno:

   $$(z(t))^2 = (x(t))^2 + (y(t))^2 - 2x(t)y(t)\cos 60^\circ$$

   Derivando con respecto a t:

   $$2z(t)z'(t) = 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) - 2\left(x'(t)y(t) + x(t)y'(t)\right)\frac{1}{2}$$

   Sabemos que:

   $$\frac{dx}{dt} = x'(t) = 100\ \text{[km/hr]}\,, \qquad \frac{dy}{dt} = y'(t) = -50\ \text{[km/hr]}$$

Además, si t_0 es el instante en el que ambos vehículos se encuentran a una distancia de 160 Km., entonces

$$x(t_0) = y(t_0) = 160[\text{km}] \qquad \therefore \quad z(t_0) = 160[\text{km}]$$

Luego:

$$z'(t_0) = \frac{2x(t_0)\cdot 100 - 2y(t_0)\cdot 50 - 100y(t_0) + 50x(t_0)}{2z(t_0)} = 25\ [\text{km/hr}]$$

es decir, los automóviles se alejan entre sí a una rapidez de 25 km/hr.

6. En un depósito cónico recto (vértice hacia abajo) entra líquido a razón de 8 lt/s. Si el radio del cono es 21[dm] y su altura es 35 [dm], calcular la velocidad instantánea con que sube el nivel del líquido cuando h=6 [dm].

   Solución: Si $h(t)$ es la altura del líquido en el instante t, sea $r(t)$ el radio correspondiente. Luego, por semejanza de triángulos:

   $$\frac{h(t)}{r(t)} = \frac{35}{21}$$

   Como

   $$V(t) = \frac{1}{3}\pi r^2(t)h(t) \qquad \Longrightarrow \qquad V(t) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{21}{35}\right)^2 h^3(t)$$

   Además, sabemos que $\dfrac{dV}{dt} = 8$. Luego, derivando la expresión de arriba:

   $$8 = \frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{21}{35}\right)^2\cdot 3h^2(t)\cdot\frac{dh}{dt} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dh}{dt} = \frac{50}{81\pi}$$

EJERCICIOS:

1. Dos carreteras se cruzan en ángulo recto. Un auto viajando a 45 [km/hr] pasa por este cruce, y 3 minutos más tarde, otro auto, viajando por la otra carretera a 60 [km/hr], llega a la intersección. ¿A qué velocidad aumenta la distancia entre los dos autos 5 minutos después que el segundo auto llegó a la intersección?

2. Una escalera de 15 $[pies]$ se apoya en una muralla vertical. Si la parte superior resbala a razón de $2[pies/seg]$, encuentre la velocidad con que la parte inferior resbala cuando está a una distancia de $12[pies]$ de la muralla.

3. Uno de los lados de un rectángulo tiene una magnitud constante a = 10 [cm], mientras que el otro b, es variable y aumenta a la velocidad constante de 4 [cm/seg]. ¿A qué velocidad crecerán la diagonal del rectángulo y su área en el instante en que b = 30 [cm]?

4. El radio de una esfera crece uniformemente con una velocidad de 5 [cm/seg]. ¿ A qué velocidad crecerán el área de la superficie de dicha esfera y el volumen de la misma, cuando el radio sea igual a 50 [cm]?

5. Una persona de 2 [m] de altura camina a una rapidez constante de 3 [m/s], alejándose de un poste de alumbrado de 6 [m] de altura. ¿Con qué rapidez se alarga la longitud de la sombra?

6. De un globo esférico escapa gas de modo que el radio disminuye a razón de 2[cm/seg]. ¿Con qué rapidez escapa el aire y con qué rapidez disminuye el diámetro del globo cuando el radio mide 10[cms]?

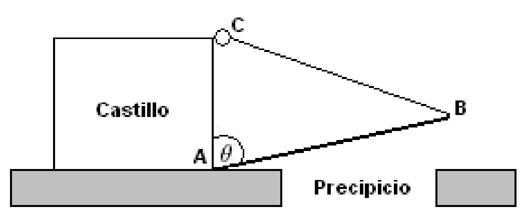
7. Un líquido fluye dentro de un estanque cilíndrico vertical de 6[dm] de radio, con una rapidez de 8[dm^3/seg], ¿con qué rapidez se eleva la superficie del líquido?

8. Las dimensiones de un rectángulo varían de modo que su área permanece constante. ¿Cuál es la rapidez con que decrece la altura del rectángulo en el momento que la base y altura tienen son iguales? Suponga que la base crece con rapidez de 5 [m/s].

9. Una cámara de TV sigue desde el suelo el despegue vertical de un cohete, que se produce de acuerdo con la ecuación $s = 50t^2$ (s es la altura con respecto al suelo medido en metros y t en segundos). La cámara está a 2000 [m] del lugar de despegue. Halle como varía el ángulo de elevación de la cámara después de 10 [s] del despegue del cohete.

10. Un bloque de hielo de base cuadrada y lados rectangulares se derrite de modo que cada arista de la base disminuye a razón de 1 cm/min, mientras que su altura disminuye a razón de 2 cm/min. ¿A qué razón varía el volumen del bloque de hielo en el instante en que la arista de la base mide 20 cm y su altura es de 15 cm?

11. El puente levadizo que se muestra en la figura está siendo jalado desde C de modo que el cable BC se desliza a razón de 4 m/min. La altura del castillo es de 24 m y la longitud del puente es de 12 m. ¿Con qué rapidez está subiendo el extremo B (con respecto al suelo) del puente cuando $\theta = 60°$?



6.2. Máximos y Mínimos

En la sección 4.4 definimos los conceptos de máximo y mínimo relativo o local y de máximo y mínimo absoluto o global de una función, que repetimos ahora con una redacción levemente diferente:

DEFINICIÓN 6.2.1 (Máximo local o relativo) Se dice que una función f tiene un **máximo local** en $c \in \mathbb{R}$ si existe un intervalo abierto I, sobre el cual f está definida, tal que $c \in I$ y $\forall x \in I$, $f(c) \geq f(x)$.

DEFINICIÓN 6.2.2 (Mínimo local o relativo) Una función f se dirá que tiene un **mínimo local** en $c \in \mathbb{R}$ si existe un intervalo abierto I, sobre el cual f está definida, tal que $c \in I$ y $\forall x \in I$, $f(c) \leq f(x)$.

DEFINICIÓN 6.2.3 (Máximo global o absoluto sobre un intervalo) Una función f tiene un **máximo global** sobre un intervalo I dado, si existe $c \in I$ tal que $\forall x \in I$, $f(c) \geq f(x)$.

DEFINICIÓN 6.2.4 (Mínimo global o absoluto en un intervalo) Una función f se dirá tiene **mínimo global** en un intervalo I dado, si existe $c \in I$ tal que $\forall x \in I$, $f(c) \leq f(x)$.

En el caso en que estos extremos se alcancen en puntos en que la función es *derivable*, el Teorema 4.4.1 (de Fermat) nos entrega una condición que deben cumplir: si f es derivable en x_0 y x_0 es un extremo local para f, entonces $f'(x_0) = 0$. Llamamos a estos puntos *puntos críticos* de la función f. Extenderemos ahora nuestro concepto de *punto crítico*:

DEFINICIÓN 6.2.5 Diremos que $x_0 \in \text{Dom} f$ es un *punto crítico* o un *punto singular* de f si satisface una de las siguientes condiciones:

- $f'(x_0) = 0$
- f no es derivable en x_0.

Veremos en esta sección cómo determinar la *naturaleza* del punto crítico, vale decir, estudiaremos algunos criterios, para el caso en que la función sea derivable en el punto crítico, que nos permitirán determinar si éste es máximo, mínimo o posee alguna otra característica.

TEOREMA 6.2.1 (Criterio primera derivada para crecimiento y decrecimiento) Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto $]a, b[$, entonces

1. Si $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in\,]a, b[$ entonces f es creciente en $[a, b]$.
2. Si $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in\,]a, b[$ entonces f es decreciente en $[a, b]$.
3. Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in\,]a, b[$ entonces f es constante en $[a, b]$.

Criterio para encontrar intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función. Considere f una función continua y derivable en su dominio, **salvo, a lo más, en un número finito de puntos**. Estos puntos determinan *intervalos* $]a_i, b_i[,\ i = 1, \cdots, n$ en el dominio de f, en donde f es continua y derivable. Para encontrar los intervalos abiertos donde f crece o decrece se siguen los siguientes pasos:

1. Determinar los puntos críticos de f en $]a_i, b_i[$ para cada intervalo determinado anteriormente.
2. Determinar el signo de $f'(x)$ en cada intervalo determinado por los puntos encontrados sobre la recta real.
3. Usar el teorema anterior para decidir si f crece o decrece en cada subintervalo.

OBSERVACIÓN: En lugar de intervalos de la forma $]a, b[$, es posible considerar intervalos con extremos en $a = -\infty \quad \text{o} \quad b = +\infty$.

EJERCICIOS:

Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento para las siguientes funciones:

- $f(x) = x^3 - 2x - 2$

  Solución: El dominio de f es $\text{Dom} f = \mathbb{R}$. Determinamos ahora los puntos críticos:

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \qquad \therefore \quad \Big(f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 2 = 0 \Big).$$

  Por lo tanto, los puntos críticos de f son $x = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, y èstos son los únicos ya que f es derivable en todo $\mathbb{R}$. Estos puntos determinan tres intervalos que debemos estudiar:

$$I_1 = \left] -\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}} \right[, \qquad I_2 = \left] -\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right[, \qquad I_3 = \left] \sqrt{\frac{2}{3}}, \infty \right[.$$

  Si $x \in I_1 : \quad f'(x) > 0 \qquad \therefore\ f$ es creciente en I_1.

  Si $x \in I_2 : \quad f'(x) < 0 \qquad \therefore\ f$ es decreciente en I_2.

  Si $x \in I_3 : \quad f'(x) > 0 \qquad \therefore\ f$ es creciente en I_3.

  OBSERVACIÓN: Notamos que, si f crece en I_1 y decrece en I_2, entonces en el punto $-\sqrt{\frac{2}{3}}$, f alcanza un máximo local. De la misma manera, si f decrece en I_2 y crece en I_3, entonces en el punto $\sqrt{\frac{2}{3}}$, f alcanza un mínimo local.

- $f(x) = xe^x$

  Solución: El dominio de f es $\text{Dom}f = \mathbb{R}$. Determinamos ahora los puntos críticos: $f'(x) = e^x(1+x)$. Por lo tanto, $\Big(f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad e^x(1+x) = 0\Big)$. Como $\forall x \in \mathbb{R}:$ $e^x \neq 0$ se tiene que $x = -1$ es el único punto crítico de la función, ya que, nuevamente, f es derivable en todo $\mathbb{R}$. Debemos estudiar el crecimiento de f en los intervalos $]-\infty, -1[$ y $]-1, \infty[$.

  Si $x \in]-\infty, -1[$: $\quad f'(x) < 0 \qquad \therefore\ f$ es decreciente en el intervalo.

  Si $x \in]-1, \infty[$: $\quad f'(x) > 0 \qquad \therefore\ f$ es creciente en el intervalo.

  De acuerdo a la observación anterior, concluimos que en $x = -1$ la función f alcanza un mínimo local.

- $f(x) = 5x^{2/3} - x^{5/3}$

  Solución: El dominio de f es $\text{Dom}f = \mathbb{R}$. Determinamos ahora los puntos críticos:
  $$f'(x) = \frac{10}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{5}{3}x^{2/3} \quad \therefore \quad \left(f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{3}\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - x^{2/3}\right) = 0\right)$$
  Por lo tanto, los puntos críticos son $x = 0$ (donde f **no** es derivable), y $x = 2$, que obtenemos como solución de la ecuación anterior. Dejamos como ejercicio determinar el crecimiento en los intervalos determinados por éstos puntos.

- $f(x) = \dfrac{x^2 - 27}{x - 6}, x \in [0, 6]$

  Solución: En este caso, $x = 6 \notin \text{Dom}f$, por lo que deberemos incluir este punto como extremo de un par de intervalos. De hecho, la recta $x = 6$ es una asíntota vertical a la gráfica de $y = f(x)$.
  $$f'(x) = \frac{2x(x-6) - (x^2 - 27)}{(x-6)^2} = \frac{(x-3)(x-9)}{(x-6)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \ \vee \ x = 9.$$
  Luego, los puntos críticos son $x = 3$, $x = 6$, $x = 9$. Dejamos como ejercicio determinar el crecimiento en los 4 intervalos determinados por estos puntos.

  Dejamos como ejercicio los siguientes:

- $f(x) = \operatorname{sen} x$

- $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 - 6x + 7 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

Con lo visto hasta hora, el siguiente teorema parece evidente:

TEOREMA 6.2.2 (Criterio de la primera derivada para extremos relativos) Sea c un punto crítico de una función f (continua), en un intervalo abierto I, con $c \in I$. Si f es derivable en I, excepto quizás en c, se cuenta con los siguientes casos

1. Si $f'(x)$ cambia en c desde un signo negativo a uno positivo entonces $f(c)$ es un **mínimo local** de f.

2. Si $f'(x)$ cambia en c de positiva a negativa, entonces $f(c)$ es un **máximo local** de f.

OBSERVACIÓN: Este teorema da cuenta de las observaciones hechas anteriormente. Es pertinente recordar, además, el Teorema 3.7.6 que dice que *toda función continua definida sobre un intervalo cerrado alcanza su máximo y su mínimo absolutos en dicho intervalo*. En los siguientes ejercicios, aplicaremos estas ideas.

EJERCICIOS:

Para cada una de las siguiente funciones, determine máximos y mínimos locales y globales (si es que existen) en el dominio en donde f está definida. En el caso que los extremos no existan, explique por qué.

1. Sea $f(x) = 2x$ con $x \in I = [1, 4[$. ¿Cuál es el mínimo global de f en este intervalo? ¿Por qué no se puede decir que hay un máximo global en I?

2. Para $x \in [-5, 4]$, definimos
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 - 6x + 7 & \text{si} \quad 1 \leq x \end{cases}$$

3. $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$

4. Sea $f(x) = (x^2 - 3x)$. Además de determinar valores mínimos y/o máximos, evalúe $f'(x)$ en los valores encontrados.

5. Sea $f(x) = |x|$. ¿ Qué tipo de punto (máximo/mínimo) es $x = 0$? ¿ Qué puede decir de la derivada de la función en este punto?

6. $f(x) = \operatorname{sen} x$. Además de determinar valores mínimos y/o máximos, evalúe $f'(x)$ en los valores encontrados.

7. Sea f la función definida por
$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

   Además de determinar valores mínimos y/o máximos, evalúe, si es posible, $f'(x)$ y $f''(x)$ en los valores encontrados. ¿Es f derivable en $x = 0$?

TEOREMA 6.2.3 Si f tiene un extremo relativo en un punto c entonces c es un punto crítico para f.

OBSERVACIÓN: El recíproco no es verdad. Por ejemplo $f(x) = x^3$ tiene por punto crítico a $x = 0$ pero no es un extremo local

EJERCICIOS:

Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y/o mínimos locales (si existen) de las siguientes funciones:

- $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 12x - 3$
- $f(x) = x^2 e^x$
- $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x \neq 0$
- $f(x) = \dfrac{3x^3}{16}$

6.2.1. Convexidad, concavidad, puntos de inflexión

DEFINICIÓN 6.2.6 (Funcion cóncava y convexa) Una función real f definida en un intervalo I se dice **convexa** si para $x, y \in I$ se verifica

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \qquad \forall t \in [0,1]$$

Por otro lado, se dice que la función f es **cóncava** si

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y) \qquad \forall t \in [0,1]$$

lo que equivale a decir que $-f$ es convexa.

OBSERVACIÓN: Geométricamente, una función es *convexa* en un intervalo, si dados dos puntos cualquiera en la gráfica de la curva en el intervalo, el segmento de recta que une estos puntos pasa por *encima-arriba* de la gráfica de f. Análogamente, una función es *cóncava* en un intervalo, si dados dos puntos cualquiera en la gráfica de la curva en el intervalo, el segmento de recta que une estos puntos pasa por *debajo* de la gráfica de f.

Si se cumplen las desigualdades en forma estricta entonces se dice que la función es *estrictamente* convexa/cóncava respectivamente. Notar que las funciones lineales (rectas) son funciones convexas y cóncavas simultáneamente.

PROPOSICIÓN 6.2.1 (Convexidad de una función derivable en un intervalo abierto) Una función f derivable en un intervalo abierto I es **convexa** en I si f' es estrictamente creciente en ese intervalo, y **cóncava** en I si f' es estrictamente decreciente en él.

TEOREMA 6.2.4 (Criterio de convexidad) Sea f una función cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto I.

1. Si $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$, entonces f es convexa en I.

2. Si $f''(x) \leq 0$ para todo $x \in I$, entonces f es cóncava en I.

OBSERVACIÓN:

1. Notar la relación existente entre el signo de f'' con el hecho de que f' es creciente o decreciente y por lo tanto con el criterio indicado en la Proposición 6.2.1.

2. Si $f'(x_0) = 0$, donde x_0 pertenece a un intervalo abierto en el Dom$f$, y $f''(x_0) < 0$ en el intervalo, esto significa que la derivada de f es *siempre* decreciente en dicho intervalo. Como $f'(x_0) = 0$, esto significa que en el intervalo, f' cambió de signo en x_0, de positivo a negativo. Luego, f alcanza un máximo local en x_0. Análogamente, en el caso en que $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$ en un intervalo abierto, la función alcanza un mínimo local. Revisaremos estas ideas de manera más formal en el Teorema 6.2.6

3. El caso $f''(x) = 0$ para cada $x \in I$ representa la presencia de una función lineal (recta), la cual es convexa y cóncava a la vez.

DEFINICIÓN 6.2.7 (Punto de inflexión) El punto c es un **punto de inflexión**[1] de la función f si la función cambia de cóncava a convexa, o de convexa a cóncava en $(c, f(c))$.

OBSERVACIÓN: Si f es derivable en $x = c$, y si existe un intervalo abierto I que contiene a c, tal que para $x \in I$, entonces la definición de *punto de inflexión* implica que una de las dos siguientes situaciones ocurre:

1. $f''(x) < 0 \quad \text{si} \quad x < c \qquad \text{y} \qquad f''(x) > 0 \quad \text{si} \quad x > c$

2. $f''(x) > 0 \quad \text{si} \quad x < c \qquad \text{y} \qquad f''(x) < 0 \quad \text{si} \quad x > c$

PROPOSICIÓN 6.2.2 Sea f una función derivable en un intervalo abierto I y c un elemento del intervalo. Si c es un punto de inflexión y existe la segunda derivada de f en c, entonces $f''(c) = 0$.

[1]En ocasiones también se dice que el punto $(c, f(c))$ es de inflexión en la gráfica de la función f.

OBSERVACIÓN: La proposición anterior dice que, si f tiene segunda derivada en los puntos de inflexión, esta segunda derivada debe ser 0. Sin embargo, el recíproco **no** es cierto. Considerar la función $f(x) = x^2$, en cuyo caso $f''(0) = 0$ pero $x_0 = 0$ **no** es un punto de inflexión sino que es un mínimo absoluto para f. Pero, tenemos el siguiente

TEOREMA 6.2.5 Sea f una función tal que $f''(c) = 0$ y $f'''(c) \neq 0$. Entonces, c es un punto de inflexión para f.

Dem. Supongamos que $f'''(c) < 0$. (Análogamente si $f'''(c) > 0$.)

$$f'''(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f''(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f''(c+h)}{h} < 0$$

$h < 0 \quad \Rightarrow \quad f''(c+h) > 0 \quad \Rightarrow \quad f'$ es creciente $\quad \Rightarrow \quad f$ es convexa.

$h > 0 \quad \Rightarrow \quad f''(c+h) < 0 \quad \Rightarrow \quad f'$ es decreciente $\quad \Rightarrow \quad f$ es cóncava.

Así, en c la función f posee un punto de inflexión.

EJERCICIOS:

1. ¿Para qué valores $a, b \in \mathbb{R}$, el punto $x = 1$ es punto de inflexión para la función $y = ax^3 + bx^2$?

2. Muestre que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple
$$e^{\frac{x+y}{2}} \leq \frac{e^x + e^y}{2}$$

3. Para las siguientes funciones determinar los puntos de inflexión (si existen), y los intervalos en que la función es cóncava y/o convexa: :

   - $f(x) = 2\text{sen}\, 3x, \quad x \in [-\pi, \pi]$
   - $f(x) = e^x$
   - $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + 3}$
   - $f(x) = 3x^4 - 4x^3$
   - $f(x) = x + \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$

6.2.2. Criterios

TEOREMA 6.2.6 (Criterio de la segunda derivada para extremos locales) Sea c un punto tal que $f'(c) = 0$. Si f'' existe para todos los valores de x en un intervalo abierto I, con $c \in I$. Entonces:

1. Si $f''(c) > 0$, entonces c es un mínimo local de f.

2. Si $f''(c) < 0$, entonces c es un máximo local de f.

Dem.
Demostraremos 2. (1. se demuestra análogamente): Supongamos que $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$.
Pero:

$$f''(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(c+h) - f'(c)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(c+h)}{h} < 0 \qquad \text{(por hipótesis)}$$

Luego:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Si } h < 0: & f'(c+h) > 0 & \Rightarrow \quad f \text{ es creciente.} \\ \text{Si } h > 0: & f'(c+h) < 0 & \Rightarrow \quad f \text{ es decreciente.} \end{array}\right\} \qquad \text{en } \ c \ \text{ se alcanza un máximo local.}$$

OBSERVACIÓN: La condición de la segunda derivada es suficiente pero **no** necesaria. Considere la función $f(x) = (x-7)^4$. En este caso: $f'(x) = 4(x-7)^3 \quad \Rightarrow \quad x = 7$ es punto crítico, y, más aún, es un punto donde se alcanza el mínimo global para f, pero $f''(x) = 12(x-7)^2\Big|_{x=7} = 0$.

Luego, notamos que si $f''(c) = 0$, este criterio no decide y ha de recurrirse al criterio de la primera derivada. Sin embargo, tenemos el siguiente

TEOREMA 6.2.7 Sea f una función tal que:

$$f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(n)}(c) = 0 \qquad \wedge \qquad f^{(n+1)}(c) \neq 0$$

Entonces, en c la función f alcanza un:

- máximo local si n es impar y $f^{(n+1)}(c) < 0$
- mínimo local si n es impar y $f^{(n+1)}(c) > 0$
- punto de inflexión si n es par.

Ejercicios de OPTIMIZACIÓN

1. Una caja abierta se construye por remoción de un pequeño cuadrado en cada una de las esquinas de una plancha de cartón y luego doblando los lados. Si el pliego de cartón es cuadrado y la longitud de su lado es L [cm], ¿cuál es el volumen máximo posible de la caja?

2. Encuentre dos números x e y no negativos tales que su suma sea igual a 1 y la suma de sus cuadrados sea mínima. ¿Existen valores para los cuales la suma de sus cuadrados sea máxima? Justifique.

3. Pruebe que entre todos los rectángulos de un perímetro dado, el de área máxima es el cuadrado.

4. Encuentre las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una semicircunferencia.

5. Pruebe que de todos los triángulos isósceles inscritos en una circunferencia, el triángulo equilátero es el de perímetro máximo.

6. Calcular el volumen máximo del cilindro circular recto que se puede inscribir en un cono de 12[cm] de altura y 4[cm] de radio en la base, de manera que los ejes del cono y del cilindro coincidan.

7. Determine el volumen del cono circular recto de mayor volumen que puede ser inscrito en una esfera de radio R.

8. Un observatorio, de volumen de $V\ [m^3]$, debe tener la forma de un cilindro, rematado por una bóveda semiesférica, ambos con el mismo radio. Si la construcción de la bóveda semiesférica cuesta el doble por metro cuadrado que la del muro cilíndrico, ¿cuáles son las proporciones que se deben emplear para que la construcción tenga costo mínimo?

9. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, en el primer cuadrante, y que forma con los ejes coordenados un triángulo de área mínima.

10. Se usarán 5 metros de alambre para hacer 2 figuras. En cada uno de los siguientes casos, determine cuánto alambre debe utilizarse en cada figura de modo que el área total encerrada (es decir, la suma de las áreas encerradas por las dos figuras), sea máxima:

    a) un triángulo equilatero y un cuadrado.
    b) un cuadrado y un pentágono regular.
    c) un pentágono regular y un hexágono regular.
    d) un hexágono regular y un círculo

    ¿Puede sacar alguna conclusión a partir de este patrón?

    Ayuda: el área de un polígono regular de n lados de longitud x está dado por $A = \frac{n}{4}\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{n}\right)x^2$.

6.3. Gráfico de Curvas

Las derivadas de una función nos permiten conocer la gráfica de ella, como veremos en esta sección. Antes de iniciar este estudio, revisaremos la noción de *rectas asíntotas* a la gráfica de una función.

6.3.1. Asíntotas oblicuas

Recordaremos, en primer lugar, las definiciones de rectas asíntotas *verticales* y rectas asíntotas *horizontales* de la gráfica de una función f.

- Sea $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$. Una recta asíntota *vertical* para f es una recta $x = a$, donde $q(a) = 0$.
- Una recta asíntota *horizontal* para f es una recta $y = b$, donde $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$.

Pero, las gráficas de las funciones pueden «acercarse» a una recta *oblicua* cuando x tiende a $\pm\infty$. Es decir, es posible que exista una recta de la forma $y = ax + b$ a la cual se acerque la gráfica de f cuando x tiende a $\pm\infty$.

DEFINICIÓN 6.3.1 La recta $y = ax + b$ es una asíntota *oblicua* para f ssi

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax - b = 0$$

OBSERVACIÓN: $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} = 0$

$$\therefore \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \qquad \text{y luego} \qquad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = b$$

Tenemos ahora todas las herramientas para graficar funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Es importante para ello ser ordenados y metódicos. Deberá considerarse en cada caso los siguientes pasos:

- Determinación del DOMINIO de f.
- Búsqueda de INTERCEPTOS con los ejes.
- Búsqueda de ASÍNTOTAS.
- Búsqueda de PUNTOS CRÍTICOS.
- Estudio del CRECIMIENTO.
- Determinación de MÁXIMOS y MÍNIMOS.
- Estudio de CONVEXIDAD y PUNTOS DE INFLEXIÓN.

EJEMPLOS: Grafique las siguientes funciones:

1) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$ 2) $f(x) = \dfrac{x(x-4)}{(x+4)^2}$ 3) $f(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x-1}$

Solución:

1) Si $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$, entonces:

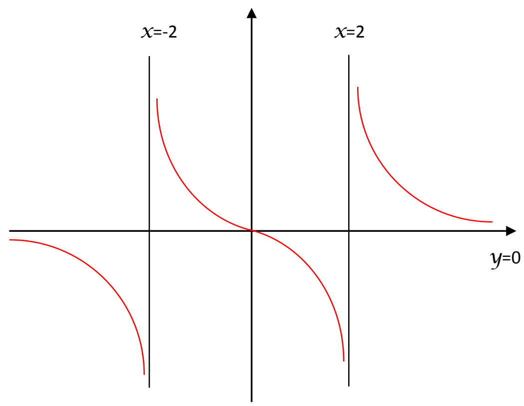
- DOMINIO de f: $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.
- INTERCEPTOS con los ejes: $x = 0 \Leftrightarrow y = 0 \quad \therefore (0,0) \in$ Graf(f).
- ASÍNTOTAS:
  verticales: $x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \ \wedge \ x = -2$ son asíntotas.
  horizontales: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$ es asíntota.
  oblicuas: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{x(x^2-4)} = 0 \quad \therefore$ no tiene.
- PUNTOS CRÍTICOS: $f'(x) = \dfrac{x^2-4-2x^2}{(x^2-4)^2} = -\dfrac{x^2+4}{(x^2-4)^2} < 0$ si $x \neq \pm 2$, es decir, **no** tiene puntos críticos.
- CRECIMIENTO: Por lo anterior, la función **decrece** en cada uno de los intervalos $]-\infty, -2[, \ ]-2, 2[, \ ]2, \infty[$.
- MÁXIMOS y MÍNIMOS: No posee, puesto que no tiene puntos críticos.
- CONVEXIDAD y PUNTOS DE INFLEXIÓN:

$$f''(x) = -\frac{2x(x^2-4)^2 - 2(x^2-4)\cdot 2x \cdot (x^2+4)}{(x^2-4)^4} = \frac{2x(x^2+12)^2}{(x^2-4)^3}$$

  Luego, $f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ es un posible punto de inflexión. Calculamos $f'''(0)$:
  $f'''(x) = -12\dfrac{x^4+20}{(x^2-4)^4} \quad \Rightarrow \quad f'''(0) \neq 0$ de donde, efectivamente, $x = 0$ es un punto de inflexión.

  CONVEXIDAD: $x > 2 \quad \Rightarrow \quad f''(x) > 0 \quad \therefore f$ es convexa en $]2, \infty[$.
  $0 < x < 2 \quad \Rightarrow \quad f''(x) < 0 \quad \therefore f$ es cóncava en $]0, 2[$.
  $-2 < x < 0 \quad \Rightarrow \quad f''(x) > 0 \quad \therefore f$ es convexa en $]-2, 0[$, (corroborando que $x = 0$ es un punto de inflexión).
  $x < -2 \quad \Rightarrow \quad f''(x) < 0 \quad \therefore f$ es cóncava en $]-\infty, -2[$.

Estamos ahora en condiciones de graficar $y = f(x)$:



2) Si $\; f(x) = \dfrac{x(x-4)}{(x+4)^2}\;$ entonces:

- DOMINIO de f: $\mathbb{R} - \{-4\}$

- INTERCEPTOS con los ejes: $\quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \wedge \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x = 4$.
  Por lo tanto, $(0,0) \ \wedge \ (4,0) \ \in$ Graf(f).

- ASÍNTOTAS:

  verticales: $\quad (x+4)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -4 \qquad \therefore \quad x = -4 \quad$ es asíntota vertical.

  horizontales: $\quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x(x-4)}{(x+4)^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{8x}{x^2} + \frac{16}{x^2}} = 1 \quad \therefore y = 1 \quad$ es asíntota.

  oblicua: $\quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x(x-4)}{x(x+4)^2} = 0 \qquad \therefore\;$ no tiene.

- PUNTOS CRÍTICOS: $\quad f'(x) = \dfrac{(2x-4)(x+4)^2 - 2(x+4)(x^2-4x)}{(x+4)^4} = \dfrac{4(3x-4)}{(x+4)^3}$

  $f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{4}{3} \quad$ es punto crítico para f.

- CRECIMIENTO: Debemos estudiar el signo de $f'(x) = \dfrac{4(3x-4)}{(x+4)^3}$:

  $f'(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3x-4>0 \ \wedge \ x+4<0) \quad \vee \quad (3x-4<0 \ \wedge \ x+4>0)$

  Luego, f decrece en $\left]-4, \frac{4}{3}\right[$.

  $f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3x-4>0 \ \wedge \ x+4>0) \quad \vee \quad (3x-4<0 \ \wedge \ x+4<0)$

  Luego, f crece en $]-\infty, -4[$ y $\left]\frac{4}{3}, \infty\right[$.

- MÁXIMOS y MÍNIMOS: Podemos deducir de nuestro análisis anterior que en $x = \frac{4}{3}$ la función alcanza un mínimo relativo. También, podemos aplicar el criterio de la segunda derivada:

  $f''(x) = \dfrac{12(x+4)^3 - 3(x+4)^2(12x-16)}{(x+4)^6} = \dfrac{24(4-x)}{(x+4)^4} \quad \therefore \quad f''\left(\frac{4}{3}\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3}$ es un mínimo local para f.

  Además: $f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{1}{8}$.

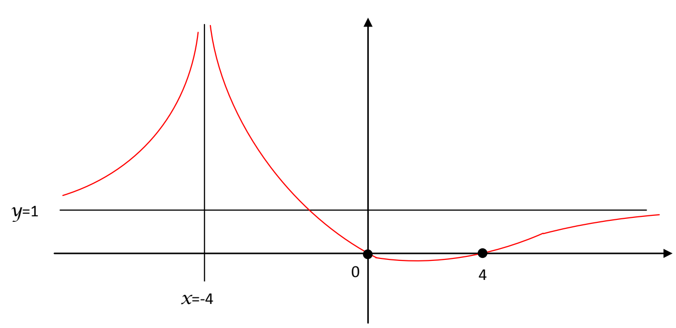
- CONVEXIDAD y PUNTOS DE INFLEXIÓN: Del cálculo de la segunda derivada, vemos que $f''(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 4$. Para confirmar que es un punto de inflexión, podemos calcular la segunda derivada, ó analizar los cambios de signo de f'', que determinan los cambios de convexidad de la función.

  $x > 4 \quad \Rightarrow \quad f''(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ es cóncava allí.

  $(-4 < x < 4 \quad \vee \quad x < -4) \quad \Rightarrow \quad f''(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ es convexa allí.

  Luego, efectivamente $x = \frac{4}{3}$ es un punto de inflexión para f.

Estamos ahora en condiciones de graficar $y = f(x)$:



3) Si $f(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x-1}$ entonces:

- INTERCEPTOS: $x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 1 \qquad \wedge \qquad \left(y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \right).$

  Por lo tanto $\quad (0,1),\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, 0)\ \wedge\ (\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 0)\ \in \text{Graf}(f).$

- ASÍNTOTAS: Claramente, $x = 1$ es una asíntota vertical. Además, no hay asíntotas verticales ya que $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+x-1}{x-1} \longrightarrow \infty.$

  Buscamos entonces asíntotas oblicuas, de la forma $y = ax + b$:

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+x-1}{x(x-1)} = 1 \ \wedge\ b = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+x-1}{x-1} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+x-1-x^2+x}{x-1} = 2$$

  Luego, $\quad y = x + 2 \quad$ es asíntota para f.

- PUNTOS CRÍTICOS: $\quad f'(x) = \dfrac{(2x+1)(x-1)-(x^2+x-1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

  Por lo tanto, $\quad x = 0 \quad \wedge \quad x = 2 \quad$ son puntos críticos.

- CRECIMIENTO: El denominador de $f'(x)$ es siempre positivo, por lo que el signo de $f'(x)$ depende del signo del numerador. Así,

  f crece en $]-\infty, 0[$ y en $]2, \infty[$.

  f decrece en $]0,1[$ y en $]1,2[$.

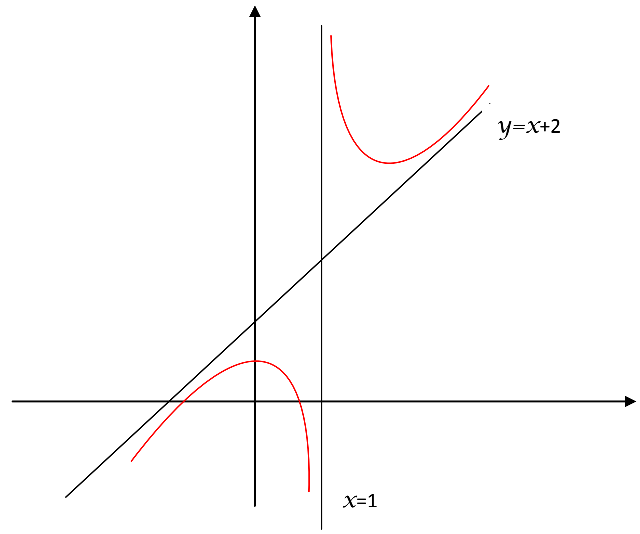
- MÁXIMOS y MÍNIMOS: De lo anterior, vemos que en $x = 0$ la función alcanza un máximo local y en $x = 2$ alcanza un mínimo local. También podemos usar el criterio de la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3} \quad \Rightarrow \quad f''(0) < 0 \quad \wedge \quad f''(2) > 0.$$

Por lo tanto, en $x = 0$ la función alcanza un máximo local y en $x = 2$ alcanza un mínimo local, como vimos recién. Además, $\quad f(0) = 1 \quad \wedge \quad f(2) = 5.$

- PUNTOS DE INFLEXIÓN y CONVEXIDAD: Del cálculo de la segunda derivada, vemos que $\ f''(x) < 0\ $ si $\ x < 1\ $ y $\ f''(x) > 0\ $ si $\ x > 1.$

Estamos ahora en condiciones de graficar $y = f(x)$:



Ejercicios

1. Haga un estudio completo de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-1}$

   b) $g(x) = \dfrac{x^3-2x}{x-5}$

   c) $h(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$

   d) $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+2)}{x^2(x+1)}$

   e) $g(x) = 2 + \dfrac{1}{1+x^2}$

   f) $h(x) = \dfrac{3x^2}{x^2-2x-3}$

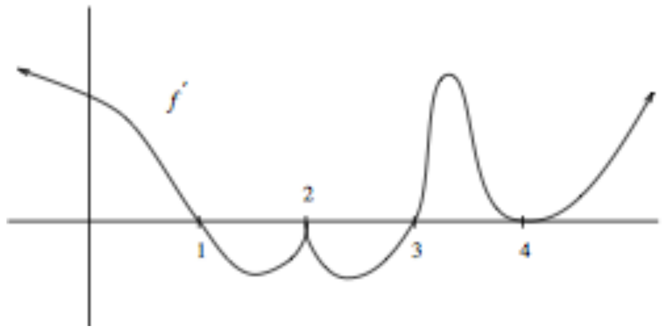
   g) $f(x) = 7x + \dfrac{1}{2x+5}$

   h) $g(x) = 2(x-1) + \dfrac{4}{x-1}$

   i) $h(x) = (x^2-1)(x+2)$

2. La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{2}{3}$ tiene un máximo para $x = 1$ y un mínimo para $x = 3$. Determine las constantes a y b, y bosqueje la gráfica de f.

3. La siguiente figura corresponde a la gráfica de la *derivada* de la función $f(x)$.



a) Determine los puntos críticos de f.

b) Determine la naturaleza de los puntos críticos.

c) Grafique $y = f(x)$.

4. Grafique la función $y = f(x)$, si sabe que $f(0) = 2$ y que $f'(x) = \sqrt[3]{1 + x^3}$.

6.4. Regla de L'Hôpital

Si cuando $x \to x_0$, $f(x)$ y $g(x)$ tienden a cero, entonces no sabemos qué sucede con el cuociente

$$\frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{cuando} \qquad x \to x_0.$$

Ejemplos de esta situación son

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}, \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

en los cuales no podemos aplicar directamente el álgebra de límites. Cada uno de ellos nos lleva a la forma $\frac{0}{0}$ que se conoce como *forma indeterminada*. También hay otras situaciones en las cuales el comportamiento del cuociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ es indeterminado, por ejemplo si cuando $x \to x_0$, se tiene que $f(x) \to \pm\infty \quad \text{y} \quad g(x) \to \pm\infty$.

La regla de L' Hôpital permite conocer en algunos casos el valor de estos límites cuando estamos frente a una forma indeterminada de los tipos $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$. El resultado es una consecuencia del teorema del valor medio generalizado.

TEOREMA 6.4.1 Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en $]a, b[$, entonces existe un punto $\xi \in]a, b[$ tal que

$$\frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{g'(\xi)}{f'(\xi)}$$

Dem. Utilizar el teorema de Rolle aplicado a la función

$$H(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a)).$$

TEOREMA 6.4.2 (Regla de L' Hôpital para la forma $\frac{0}{0}$) Sean $f,\ g$ funciones derivables y sea $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Suponga además que si $x \to a$ entonces $f(x), g(x) \to 0$. Si

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

(donde $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$), entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

TEOREMA 6.4.3 (Regla de L' Hôpital para la forma $\frac{\infty}{\infty}$) Sean $f,\ g$ funciones derivables y $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Suponga además que si $x \to a$ entonces $f(x), g(x) \to \infty$. Si

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

(donde $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$), entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

OBSERVACIÓN:

1. La regla de L' Hôpital sólo se aplica a casos de formas indeterminadas; por ejemplo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2} = \frac{1}{2}$$

Si aplicamos L' Hôpital (**que no corresponde pues no se está frente a una forma indeterminada**) nos quedaría $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{2x} = 1$ lo que claramente es incorrecto.

2. Es posible que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ exista sin que $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ exista. Por ejemplo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{x} = \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}(1/x) = 0$$

Pero

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\left(x^2 \operatorname{sen}(1/x)\right)}{\frac{d}{dx}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x)}{1}$$

que no existe.

3. Si f y g tienen derivadas de orden superior, la regla se extiende para éstas si el cuociente de los límites de las derivadas se siguen indeterminando.

EJEMPLOS: Use la regla de L' Hôpital para calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$$

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

Formas Indeterminadas Las siguientes expresiones corresponden a *formas indeterminadas*:

$$\frac{0}{0} \quad , \quad \frac{\infty}{\infty} \quad , \quad 0\cdot\infty \quad , \quad 1^{\infty} \quad , \quad 0^0 \quad , \quad \infty^0 \quad , \quad \infty-\infty$$

Para las *formas* tercera en adelante, se deberá transformar la expresión (llevándola a una de las dos primeras) de manera tal de poder aplicar los anteriores teoremas.

Ejercicios

- Compare los resultados para los siguientes límites **sin utilizar la regla de L' Hôpital**

  1) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x+2}$ 2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2-x}{x^4-x^3}$

  Notar que la forma indeterminada involucrada es $0/0$. Es claro que no se puede contar con $0/0 = 1$ como identidad (aunque puede que el límite de la forma indeterminada sea 1).

- Hallar los siguientes límites

  1. $\displaystyle\lim_{x\to -\pi/2} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x - 1}$
  2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(\pi/2)-\arctan x}{1/x}$
  3. $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \frac{3\cos x}{2x-\pi}$
  4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x}$
  5. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^3}$
  6. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{e^{1/x^2}}$

- Obtener los siguientes límites buscando obtener las formas requeridas para aplicar la regla de L'Hopital

  1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln x$
  2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x)$

6.4.1. L' Hôpital con funciones $f(x)^{g(x)}$

En el cálculo de algunos límites, pueden presentarse funciones de la forma

$$y = f(x)^{g(x)}$$

Sabemos que estos límites pueden ser resueltos usando exponencial y logaritmo. Ahora veremos que, en vista de las formas indeterminadas que se puede obtener de esta expresión, es posible utilizar la regla de L' Hôpital para determinar tales límites tras la aplicación del siguiente procedimiento:

1. Escribir $y = f(x)^{g(x)}$
2. Tomar $\ln y$
3. Analizar el límite de $\ln y$
4. Utilizando el límite anterior, analizar $\lim y = \lim e^{\ln y} = e^{\lim \ln y}$

OBSERVACIÓN: Todo esto bajo las condiciones pertinentes al considerar el dominio de $\ln(\cdot)$.

OBSERVACIÓN: Notar la aplicación del teorema de límites y continuidad presentado en clases anteriores, según el cual si f es función continua con $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ entonces $\lim\limits_{x\to a}(f \circ g)(x) = f(b)$ o en forma equivalente

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x)).$$

EJEMPLOS:

- Calcular con el procedimiento mencionado $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

  ¿Reconoce en una primera instancia este límite?

  Verifique el resultado entregado en clases anteriores para $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$

- Calcular los siguientes límites:
  - $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$
  - $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\operatorname{sen} x}$
  - $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$
  - $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^{2x})^{1/x}$

EJERCICIOS:

Encontrar el límite de las siguientes funciones usando la regla de L'Hôpital:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\arctan(4x)}$
4. $\lim\limits_{x\to \infty} x^3 e^{-x^2}$
5. $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x$
6. $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x)$
7. $\lim\limits_{x\to 0} (1-2x)^{1/x}$
8. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cos x)^{1/x^2}$
9. $\lim\limits_{x\to \infty} x^{(\ln 2)/(1+\ln x)}$
10. $\lim\limits_{x\to \infty} (e^x + x)^{1/x}$
11. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{2x+1}$
12. $\lim\limits_{x\to \pi/4} (1-\tan x)\sec x$

6.5. Ejercicios de Controles y Certámenes

1. Una partícula P se mueve sobre la trayectoria $y = \operatorname{sen} x$, de modo que su abscisa aumenta uniformemente a razón de 10 unidades por segundo. Si M es la proyección de P sobre el eje OY ¿con qué rapidez está variando el área del triángulo OPM?

2. Determine dos números x e y no negativos tales que su suma sea igual a 1 y la suma de sus cuadrados sea mínima. ¿Existen valores x e y para los cuales la suma de sus cuadrados sea máxima?

3. Sea $y = x + \cos x, \quad x \in [0, 2\pi]$.

   a) Determine los intervalos donde la función es:
      i) estrictamente creciente.
      ii) estrictamente decreciente.

   b) ¿En qué intervalos la función es
      i) cóncava?
      ii) convexa?

4. ¿Para qué valores de a y b en $\mathbb{R}$, el punto $(1, 3)$ es un punto de inflexión para la función $y = ax^3 + bx^2$?

5. Una partícula $P = (x, y)$ describe una circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Encuentre los puntos sobre esta circunferencia para los que la ordenada "y"decrece en la misma razón en que la abscisa "x"crece.

6. Un barco navega paralelamente a una costa recta a una rapidez de 12millas/hora y a una distancia de 4 millas de la costa. ¿Cuál es su velocidad de aproximación a un faro de la costa, en el instante en que dista precisamente 5 millas del faro?

7. Una recta variable que pasa por el punto (1, 2) corta al eje x en $A = (a, 0),\ a > 0$ y al eje y en $B = (0, b),\ b > 0$. Hallar el triángulo AOB que tenga área mínima.

8. Bosqueje el gráfico de la función $y = f(x)$ a partir de la siguiente información:

$$\begin{array}{rcl}
\text{Dom} f & = & \mathbb{R} - \{0, -2\} \\
\lim\limits_{x\to 0} f(x) & = & \dfrac{3}{2}; \quad \lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty; \quad f(-2-\sqrt{15}) = -15,75; \quad f(-2+\sqrt{15}) = -0,25 \\
\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} & = & 1; \quad \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - x) = -6; \quad \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -\infty \\
f' & \geq & 0 \quad \text{en} \quad [-2+\sqrt{15}, \infty[\cup]-\infty, -2-\sqrt{15}[\\
f' & \leq & 0 \quad \text{en} \quad [-2-\sqrt{15}, -2[\cup]-2, -2+\sqrt{15}[\\
f'(-2-\sqrt{15}) & = & 0 \quad \text{y} \quad f''(-2-\sqrt{15}) < 0 \\
f'(-2+\sqrt{15}) & = & 0 \quad \text{y} \quad f''(-2+\sqrt{15}) > 0 \\
f''(x) & \geq & 0 \quad \text{en} \quad]-2, \infty[\\
f''(x) & \leq & 0 \quad \text{en} \quad]-\infty, -2[
\end{array}$$

9. En la ribera de un río de 3 km de ancho hay una planta eléctrica. En la orilla, a 4 km corriente abajo respecto a la planta, hay una fábrica. El costo de tender un cable por tierra es de $15000 por metro, y de $25000 por metro para el tendido bajo el agua. ¿Cual es la ruta más económica para tender un cable desde la planta eléctrica a la fábrica, y cuál es su costo?

10. Calcular el volumen máximo del cilindro circular recto que se puede inscribir en un cono de 12 [cm] de altura y 4 [cm] de radio en la base, de manera que los ejes del cilindro y del cono coincidan.

11. Sea f una función continua con segunda derivada continua en $\mathbb{R}$, tal que

$$f(x) > 0 \qquad \text{y} \qquad f'(x) = -x \cdot f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Hallar:

a) intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.

b) intervalos de convexidad y concavidad de la función f.

c) ¿Cuáles son los puntos de inflexión de f ?