Cálculo

con
Geometría
Analítica

Tabla de integrales

Formas básicas

1 $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

2 $\int u^n\,du = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + C \quad n \neq -1$

3 $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

4 $\int e^u\,du = e^u + C$

5 $\int a^u\,du = \frac{1}{\ln a}a^u + C$

6 $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$

7 $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$

8 $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$

9 $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$

10 $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$

11 $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$

12 $\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + C$

13 $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

14 $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

15 $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$

16 $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

17 $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$

18 $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a} + C$

19 $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$

20 $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

Formas en las que interviene $\sqrt{a^2 + u^2}$

21 $\int \sqrt{a^2 + u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 + u^2} + \frac{a^2}{2}\ln|u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$

22 $\int u^2\sqrt{a^2 + u^2}\,du = \frac{u}{8}(a^2 + 2u^2)\sqrt{a^2 + u^2} - \frac{a^4}{8}\ln|u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$

23 $\int \frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2 + u^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 + u^2}}{u}\right| + C$

24 $\int \frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u} + \ln|u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$

25 $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \ln|u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$

26 $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 + u^2} - \frac{a^2}{2}\ln|u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$

27 $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2 + u^2} + a}{u}\right| + C$

28 $\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{a^2 u} + C$

29 $\int \frac{du}{(a^2 + u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2 + u^2}} + C$

Formas en las que interviene $\sqrt{a^2 - u^2}$

30 $\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

31 $\int u^2\sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2 - a^2)\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

32 $\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2 - u^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$

33 $\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2}\,du = -\frac{1}{u}\sqrt{a^2 - u^2} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

34 $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

35 $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$

36 $\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a^2 u}\sqrt{a^2 - u^2} + C$

37 $\int (a^2 - u^2)^{3/2}\,du = -\frac{u}{8}(2u^2 - 5a^2)\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{3a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

38 $\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2 - u^2}} + C$

Formas en las que interviene $\sqrt{u^2 - a^2}$

39 $\int \sqrt{u^2 - a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$

40 $\int u^2\sqrt{u^2 - a^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2 - a^2)\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^4}{8}\ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$

41 $\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u}\,du = \sqrt{u^2 - a^2} - a\cos^{-1}\frac{a}{u} + C$

42 $\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} + \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$

43 $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$

44 $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$

45 $\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a^2 u} + C$

46 $\int \frac{du}{(u^2 - a^2)^{3/2}} = -\frac{u}{a^2\sqrt{u^2 - a^2}} + C$

Formas en las que interviene $a + bu$

47 $\int \frac{u\,du}{a + bu} = \frac{1}{b^2}(a + bu - a\ln|a + bu|) + C$

48 $\int \frac{u^2\,du}{a + bu} = \frac{1}{2b^3}[(a + bu)^2 - 4a(a + bu) + 2a^2\ln|a + bu|] + C$

49 $\int \frac{du}{u(a + bu)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a + bu}\right| + C$

50 $\int \frac{du}{u^2(a + bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a + bu}{u}\right| + C$

51 $\int \frac{u\,du}{(a + bu)^2} = \frac{a}{b^2(a + bu)} + \frac{1}{b^2}\ln|a + bu| + C$

52 $\int \frac{du}{u(a + bu)^2} = \frac{1}{a(a + bu)} - \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a + bu}{u}\right| + C$

53 $\int \frac{u^2\,du}{(a + bu)^2} = \frac{1}{b^3}\left(a + bu - \frac{a^2}{a + bu} - 2a\ln|a + bu|\right) + C$

54 $\int u\sqrt{a + bu}\,du = \frac{2}{15b^2}(3bu - 2a)(a + bu)^{3/2} + C$

55 $\int \frac{u\,du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2}{3b^2}(bu - 2a)\sqrt{a + bu}$

56 $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2}{15b^3}(8a^2 + 3b^2u^2 - 4abu)\sqrt{a + bu}$

57 $\int \frac{du}{u\sqrt{a + bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a + bu} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + bu} + \sqrt{a}}\right| + C, \quad \text{si } a > 0$

$= \frac{2}{\sqrt{-a}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{a + bu}{-a}} + C, \quad \text{si } a < 0$

58 $\int \frac{\sqrt{a + bu}}{u}\,du = 2\sqrt{a + bu} + a\int \frac{du}{u\sqrt{a + bu}}$

59 $\int \frac{\sqrt{a + bu}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a + bu}}{u} + \frac{b}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{a + bu}}$

60 $\int u^n\sqrt{a + bu}\,du = \frac{2u^n(a + bu)^{3/2}}{b(2n + 3)} - \frac{2na}{b(2n + 3)}\int u^{n-1}\sqrt{a + bu}\,du$

61 $\int \frac{u^n\,du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2u^n\sqrt{a + bu}}{b(2n + 1)} - \frac{2na}{b(2n + 1)}\int \frac{u^{n-1}\,du}{\sqrt{a + bu}}$

62 $\int \frac{du}{u^n\sqrt{a + bu}} = -\frac{\sqrt{a + bu}}{a(n - 1)u^{n-1}} - \frac{b(2n - 3)}{2a(n - 1)}\int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a + bu}}$

Prólogo

Esta obra está proyectada para un curso de Cálculo a realizar en tres semestres, o bien en cuatro trimestres, para estudiantes de Ciencias, Ingeniería, Matemáticas o Administración. En ella se reflejan varios de los puntos de vista que he sostenido con más firmeza, aunque difícilmente sean originales: Que un libro de Cálculo debe presentar las funciones trigonométricas tan pronto como sea posible; que debe motivar y explicar la idea de límite de la manera más sencilla que se pueda; y que debe ser pródigo, y destacar en las aplicaciones.

Parece haber tres escuelas de pensamiento por lo menos referentes al Cálculo con las funciones trigonométricas. Según una opinión, el estudio de tales funciones debe posponerse hasta el segundo semestre o el segundo trimestre de un curso; según otra, solamente deben introducirse las derivadas e integrales de las funciones seno y coseno en los primeros capítulos de un texto. La tercera opinión recomienda el inmediato desarrollo del cálculo con las seis funciones trigonométricas.

En lo personal me suscribo a la tercera opinión por las siguientes razones:

Considero que los estudiantes de matemáticas se beneficiarán más trabajando con todas las funciones trigonométricas a lo largo del curso completo de Cálculo, en vez de hacerlo solamente en dos terceras partes de éste. Una cantidad considerable de estudiantes se encuentra pronto con estas funciones en sus cursos de Ciencias o de Ingeniería. La regla de la derivación en cadena se puede evidenciar con toda su capacidad, ya que hay una variedad más amplia de aplicaciones. Y finalmente, encuentro que el estudio del Cálculo es así más interesante.

En el Capítulo 1 se repasan las seis funciones trigonométricas, y en el Capítulo 3 se consideran sus derivadas. En el Capítulo 4 se describen las integrales de estas funciones.

CARACTERÍSTICAS DIDÁCTICAS

- Las secciones marcadas con una [O] son optativas y se pueden omitir si el profesor lo desea.
- Algunas de las secciones más extensas (como la de las fracciones parciales) están divididas en subsecciones para facilitar su exposición en varios períodos de clases, aunque se mantienen unificadas en su contenido. Las series de ejercicios presentadas al final de dichas partes, están marcadas en correspondencia con las subsecciones.
- Todos los ejemplos se encuentran enmarcados para distinguirlos claramente del resto del texto, y se han numerado para su fácil referencia.
- Tanto las fórmulas como las listas de fórmulas importantes, se hacen resaltar empleando un segundo color.
- Los temas importantes se indican por medio de encabezados en letras cursivas.
- El final de una definición o de un teorema se señala mediante un □ en color.
- Cada capítulo empieza con su propia tabla de contenido y una introducción al material que se expone en él, y termina con un Examen del Capítulo que incluye cuestionarios de los tipos "verdadero/falso" y "llene los espacios en blanco".
- La mayoría de las secciones concluyen con breves análisis informales designados como Observaciones. Dichas observaciones incluyen

posibles aplicaciones matemáticas de lo expuesto, un poco de historia, o algunas palabras de advertencia al estudiante acerca de posibles malinterpretaciones o generalizaciones injustificadas de definiciones y teoremas.

- Se utilizan en todo el texto abundantes ilustraciones (aproximadamente 1,200).
- Las series de ejercicios son amplias en su mayoría (hay más de 6,000 problemas en el libro), e incluyen la abundancia común de problemas de ejercicio junto con Problemas Diversos, los cuales son más difíciles, o bien exponen conceptos que no se habían presentado formalmente.
- Las series de ejercicios incluyen Problemas para Calculadora, los cuales fueron ideados para realizarse empleando una calculadora de bolsillo, o bien una computadora.
- El texto contiene las respuestas (incluyendo gráficas) a los problemas de número impar.
- Está disponible para el profesor un manual completo de soluciones (en inglés), el que pueden pedirnos directamente a Grupo Editorial Iberoamérica, o a través de nuestros representantes.

En el Capítulo 1 se ha puesto especial énfasis en el concepto básico de función. Como preparación para aplicaciones posteriores de la derivada, los ejercicios incluyen muchos problemas de planteo de una función interpretando descripciones verbales por medio de símbolos.

Todo el Capítulo 2 se refiere a límites. En mi opinión, el Cálculo es más manejable para los estudiantes, especialmente para aquellos que no han tenido contacto previo con él, cuando en lugar de la un poco compleja, aunque precisa, formulación épsilon-delta del concepto de límite, se prefiere una explicación geométrica o "intuitiva". Yo no pongo mucho énfasis en la búsqueda, a menudo poco compensatoria, de la "delta" desconocida dada la misteriosa "épsilon". Los estudiantes pueden adquirir una noción bien fundada acerca de la naturaleza de un límite, examinando gráficas y realizando cálculos numéricos. La definición épsilon-delta de límite se expone de tal manera que puede omitirse si se desea. Debo decir, sin embargo, que aún espero que en mis propias clases los estudiantes sepan la definición formal de límite y que sean capaces de interpretarla gráficamente. Me gustaría que supieran que la intuición, las gráficas y los cálculos pueden ser convincentes, pero que a menudo tienen, por así decirlo, sus propias limitaciones. Las demostraciones épsilon-delta no se presentan propiamente en el texto; para quienes se interesen en ellas, en el Apéndice II se incluyen las demostraciones de algunos de los teoremas básicos acerca de límites.

En el Capítulo 3 se motiva el concepto de derivada, tanto mediante el problema de la recta tangente como por el problema de la velocidad instantánea.

En el Capítulo 4 he introducido las tasas o razones de cambio y el movimiento rectilíneo antes de la discusión de las tasas de variación relacionadas. En esta última sección, exhorto al estudiante a traducir el texto de un problema a símbolos y figuras, teniendo presentes tres componentes en su solución: ¿Cuáles razones de cambio se dan?, ¿cuáles razones de cambio se desean? y ¿qué relaciones matemáticas se conocen entre las variables empleadas en el problema?

El Capítulo 5 trata la integral y se empieza con el concepto de antiderivada (primitiva) o integral indefinida. El tema de la segunda sección es el método de sustitución para evaluar integrales indefinidas de potencias de funciones. Previo a la definición de integral definida se consideran: notación sumatoria, fórmulas sumatorias, particiones regulares y determinación de áreas bajo gráficas calculando límites de sumas.

El Capítulo 6 se refiere a las aplicaciones de la integral. Dichas aplicaciones se presentan antes de considerar las técnicas de integración. Considero que el estudiante debe tener contacto, en el primer semestre, tanto con las aplicaciones de la derivada como con las aplicaciones de la integral. Dado que el Capítulo 6 es muy extenso, el profesor está en libertad de elegir aquellos temas que sean apropiados a su curso o programa. Enseguida del estudio de las técnicas de integración incluidas en el Capítulo 9, se encuentra una sección dedicada a repasar aplicaciones tales como problemas de longitud de arco, presión hidrostática, trabajo, problemas de bombeo, separación de variables y localización de centroides. Por supuesto, las aplicaciones "clásicas" de la integración, como determinar áreas, volúmenes de sólidos de revolución, etc., no son expuestas y luego olvidadas, sino que aparecen en las series de ejercicios siempre que es posible.

La noción de función inversa se pospone a propósito hasta el Capítulo 7, para que este concepto esté fresco en la mente del estudiante cuando trate con las funciones trigonométricas inversas de este capítulo, y la función exponencial y las funciones hiperbólicas inversas en el siguiente.

En el Capítulo 8 se define el logaritmo natural por medio de una integral. Se le informa al estudiante que hay diferencias de opinión acerca de cómo debe definirse el logaritmo natural, y por qué, según el punto de vista del autor, se prefiere la definición por la integral. Sin embargo, en una sección aparte se discute el planteamiento alterno del logaritmo natural como la inversa de una función exponencial. Además, se dedica una sección completa a la diferenciación logarítmica. Dada la importancia de las funciones hiperbólicas en cursos subsecuentes de matemáticas aplicadas, no se descuida su estudio en este capítulo.

En el Capítulo 9 se consideran las técnicas de integración. Aunque una sección de este capítulo se dedica al uso de las tablas de integrales, cada ejemplo de dicha sección se desarrolla al menos de una manera alternativa. Se le indica al lector que un problema puede resolverse a menudo de manera más rápida por medio de un análisis cuidadoso, que gastando un tiempo prolongado examinando fórmulas extrañas en una tabla.

El Capítulo 12, que trata de Geometría Analítica, incluye una sección sobre ecuaciones polares de las secciones cónicas.

El Capítulo 14 describe los vectores y empieza con el sistema de coordenadas rectangulares en tres dimensiones. Los vectores se definen de inmediato en un marco tridimensional en vez de en uno de dos dimensiones. De todos los temas de un curso de Cálculo, siempre he experimentado que a la mayoría de los estudiantes les agrada este tema en particular, de manera que no se justifica un estudio por separado acerca de vectores en dos dimensiones.

Las semejanzas entre los cinco pasos que conducen a la definición de la integral definida, y los que conducen a las definiciones de las integrales doble, triple, de línea y de superficie, se destacan en los capítulos 17 y 18, resumiéndolos y enmarcándolos.

El texto finaliza con el Capítulo 19, que es una introducción a algunos de los temas generales referentes a ecuaciones diferenciales. Puesto que es muy probable que este capítulo no se alcance a cubrir en las series de cursos tradicionales de tres semestres o de cuatro trimestres, he optado por introducir en el Capítulo 8 el concepto importante de separación de variables. En el Capítulo 16 se consideran las ecuaciones diferenciales exactas, enseguida de la discusión de la diferencial de una función de dos variables.

En el Apéndice I puede encontrarse un repaso de matemáticas básicas, tales como leyes de los exponentes, teorema del binomio, determinantes, regla de Cramer y números complejos.

Agradecimientos

Aprovecho esta oportunidad para agradecer a Mary Margaret Grady su excelente trabajo de mecanografía de la versión final del manuscrito de esta obra, lo mismo que al personal de PWS Publishers, que contribuyó de muchas maneras en la realización de este largo proyecto, especialmente Sara Waller, Helen Walden y Eileen Katin, del departamento de producción, David Pallai, supervisor editorial del área de Matemáticas, y a la ex-supervisora editorial Barbara Schott. Agradezco también a David Smith de Loyola Marymount University, y a Christopher Morgan de California State University, en Hayward, el haber proporcionado las gráficas por computadora del Capítulo 16, así como a Michael Cullen, también de Loyola Marymount University, por sugerir algunas de las aplicaciones físicas que aparecen en los ejemplos y en las series de ejercicios. Me gustaría reconocer y expresar mi gratitud a los siguientes revisores por sus valiosas sugerencias y críticas:

Gus Pekara, South Oklahoma City Jr. College
John Gerriets, Emporia State University
Jane Edgar, Brevard Community College
Joan Golliday, Santa Fe Community College
Gene Ortner, Michigan Technological University
Jack Wilson, University of North Carolina, Ashville
Lillian Seese, St. Louis Community College en Meramec
Hubert Walczak, College of St. Thomas
Joseph Stemple, CUNY Queens College
William E. Mastrocola, Colgate University
Donald Sherbert, University of Illinois
Harvey Greenwald, California Polytechnic Institute
Robert Brooks, University of Utah
Harold Olsen, Diablo Valley College
Arthur Dull, Diablo Valley College
David Burton, Chabot College
Dave Hallenbeck, University of Delaware
Noel Harbertson, California State University, en Fresno
Joseph Egar, Cleveland State University
Carolyn Narasimhan, DePaul University
George Kung, University of Wisconsin, en Stevens Point
Jean Holton, Tidewater Community College
Aubrey Owen, Community College of Denver
Susan Richman, Penn. State University, Capitol Campus
Loyd Wilcox, Golden West College

Finalmente, doy las gracias de manera especial a Irving Drooyan y a Charles Carico de Los Angeles Pierce College, por haber sembrado, hace siete años, la semilla de una idea que dio por resultado el desarrollo de este libro de Cálculo.

Dennis G. Zill
Los Ángeles, California

Contenido

Al estudiante

Grupo Editorial Iberoamérica en su esfuerzo permanente de producir cada vez mejores textos, pone en tus manos esta nueva obra, en la que se ha puesto la más alta calidad en los aspectos teórico y didáctico, así como en diseño y presentación, con el objetivo de proporcionarte la mejor herramienta, no sólo para facilitarte el aprendizaje sino también para hacértelo más estimulante.

Éste, como cualquiera de nuestros libros, ha sido cuidadosamente seleccionado para que encuentres en él un pilar de tu preparación, y un complemento ideal a la enseñanza del maestro. Lo didáctico de la presentación de sus temas hace que lo consideres el mejor auxiliar, y el que llevas a todas partes.

Lo anterior es parte de nuestro propósito de ser partícipes en una mejor preparación de profesionales, contribuyendo así a la urgente necesidad de un mayor desarrollo de nuestros países hispanohablantes.

Sabemos que esta obra será fundamental en tu biblioteca, y tal vez la más inmediata y permanente fuente de consulta.

Como uno de nuestros intereses principales es hacer mejores libros en equipo con profesores y estudiantes, agradeceremos tus comentarios y sugerencias o cualquier observación que contribuya al enriquecimiento de nuestras publicaciones.

Grupo Editorial Iberoamérica
. . . presente en tu formación profesional

1 Funciones

La palabra *Cálculo* proviene del latín *calculus*, diminutivo del término *calx*, que significa piedra. En las civilizaciones antiguas con frecuencia se usaban piedrecillas o guijarros para hacer cuentas. En consecuencia, la palabra *cálculo* podría designar cualquier método sistemático para contar o computar. Sin embargo, durante los últimos siglos la acepción de *cálculo* ha evolucionado en algunos idiomas hasta significar la rama de las matemáticas que se ocupa del manejo y las aplicaciones de las entidades matemáticas denominadas derivadas e integrales. De este modo el cálculo se ha dividido en dos ramas considerablemente amplias, pero relacionadas entre sí, llamadas *Cálculo Diferencial* y *Cálculo Integral*.

Antes de comenzar el estudio del cálculo diferencial se repasará un poco matemáticas básicas. Indudablemente, en cursos anteriores el lector ha encontrado muchos de los temas que se considerarán en este primer capítulo: números reales, desigualdades, gráficas, pendiente, rectas, circunferencias, funciones y trigonometría. Sin embargo, debe evitarse que un sentimiento de familiaridad con estos temas conduzca a una presunta suficiencia de conocimiento. La mayoría de los temas expuestos inicialmente se utilizará en capítulos posteriores con poca explicación o énfasis. Deben aprenderse (o en su caso, repasarse) bien.

Se sugiere al lector que además de leer el Capítulo 1, amplíe su repaso leyendo el Apéndice I.

1.1 Los números reales

Números reales

Los números reales se clasifican en **racionales** e **irracionales**. Un número racional puede expresarse como un cociente a/b en donde a y b son enteros y $b \neq 0$. Un número que *no* es racional es entonces irracional. Por ejemplo, $\frac{5}{4}, -6, \frac{22}{7}, \sqrt{4} = 2$ y $1.32 = \frac{132}{100}$, son números racionales, mientras que $\sqrt{2}, \sqrt{3}/2$ y π son irracionales. La suma, la diferencia y el producto de dos números reales son también números reales. El cociente de dos números reales será un número real siempre que el divisor sea diferente de cero.

El conjunto de los números reales se denotará por el símbolo R; los símbolos Q y H se usan para denotar el conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales, respectivamente. En términos de la unión de dos conjuntos, se tiene que $R = Q \cup H$. El hecho de que Q y H no tengan elementos en común se resume empleando la intersección de dos conjuntos: $Q \cap H = \emptyset$, en donde $\emptyset$ es el conjunto vacío.

Recta numérica

El conjunto de los números reales puede ponerse en correspondencia de uno a uno (o biunívoca) con los puntos de una recta horizontal, llamada **recta numérica** o **recta de números reales**. El número a asociado al punto P en la recta numérica se denomina **Coordenada** de P. El punto elegido para representar al 0 se llama *origen*. Como se muestra en la Figura 1.1, los **números positivos** se sitúan a la derecha del origen y los **números negativos** a la izquierda del mismo. El número 0 no es positivo ni negativo. La punta de la flecha en la recta numérica indica el **sentido positivo**. Se adopta como regla emplear las expresiones "punto a" y "número a" alternativamente con "punto P de coordenada a".

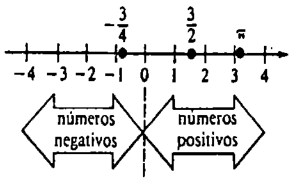


Figura 1.1

Desigualdades

El conjunto R de los números reales es un conjunto **ordenado**. Un número real a es menor que un número real b si la diferencia $b - a$ es positiva. Esto se representa como $a < b$. Por ejemplo, $-2 < 5$ puesto que $5 - (-2) = 7$ es un número positivo. En la recta numérica, $a < b$ significa que el número a está a la izquierda del número b. Véase la Figura 1.2. El enunciado "a es menor que b" equivale a decir "b es mayor que a" y se escribe $b > a$. De modo que un número a es positivo si $a > 0$, y negativo si $a < 0$. Expresiones como $a < b$ o $b > a$ se denominan **desigualdades**.

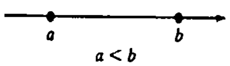


Figura 1.2

Propiedades de las desigualdades

A continuación se presentan algunas propiedades de las desigualdades.

(*i*) Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$ para cualquier número real c.

(*ii*) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.

(*iii*) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.

(*iv*) Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

La propiedad (*iii*) indica que si se multiplica una desigualdad por un número negativo, entonces se *invierte* el sentido de la desigualdad.

La expresión $a \leq b$ se lee "a **es menor que o igual a** b" y significa que $a < b$ o bien $a = b$. Las anteriores cuatro propiedades dan lugar a otras cuatro al sustituir los símbolos $<$ y $>$ por $\leq$ o $\geq$, respectivamente. Si $a \geq 0$, el número a es entonces **no negativo**.

Ejemplo 1

Resolver la desigualdad $2x < 5x + 9$.

Solución Primero se aplica (*i*) y resulta

$$2x + (-5x) < 5x + 9 + (-5x)$$
$$-3x < 9.$$

Al multiplicar ambos lados de la última desigualdad por $-\frac{1}{3}$, la propiedad (*iii*) implica que

$$x > -3.$$

Intervalos

Si $a < b$, el conjunto de los números reales x, que son *simultáneamente* menores que b y mayores que a, se representa por $\{x \mid a < x < b\}$, o simplemente como $a < x < b$. Este conjunto se denomina **intervalo abierto** y se denota por (a, b). Los números a y b son los extremos del intervalo. La tabla siguiente es un compendio de varias clases de intervalos y su **representación gráfica** en la recta numérica.

Nombre	*Símbolo*	*Definición*	*Representación gráfica*
Intervalo abierto	(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	a b
Intervalo cerrado	$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	a b
Intervalos semiabiertos	$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	a b
	$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	a b
Intervalos infinitos	(a, ∞)	$\{x \mid x > a\}$	a
	$[a, \infty)$	$\{x \mid x \geq a\}$	a

	$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	
	$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \le b\}$	
	$(-\infty, \infty)$	$\{x \mid -\infty < x < \infty\}$	

Los símbolos ∞ y $-\infty$ se leen "infinito" e "infinito negativo", respectivamente, y no representan números reales; se usan como una pictografía simple para simbolizar intervalos *no acotados*.

Ejemplo 2

(*a*) La desigualdad $-3 < x < 8$ equivale a $(-3, 8)$ en la notación de intervalos.

(*b*) La desigualdad $5 < x \le 6$ equivale a $(5, 6]$ en la notación de intervalos.

(*c*) La desigualdad $x \le -1$ equivale a $(-\infty, -1]$ en la notación de intervalos.

Ejemplo 3

Resolver la desigualdad $4 < 2x - 3 < 8$.

Solución

$$4 < 2x - 3 < 8$$
$$4 + 3 < 2x < 8 + 3 \qquad [\text{por } (i)]$$
$$\frac{7}{2} < x < \frac{11}{2} \qquad [\text{por } (ii)]$$

En la notación de intervalo la solución queda $(\frac{7}{2}, \frac{11}{2})$.

Valor absoluto

Si a es un número real entonces su **valor absoluto** es

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \ge 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

En la recta numérica, $|a|$ es la distancia entre el origen y el número a. En general, la distancia entre dos números a y b es $b - a$ si $a < b$, o bien $a - b$ si $b < a$. En términos del valor absoluto la distancia entre a y b es $|b - a|$. Véase la Figura 1.3. Obsérvese que $|b - a| = |a - b|$.

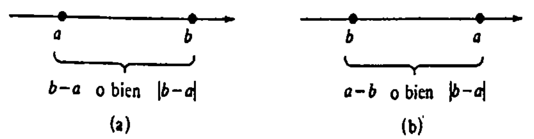


Figura 1.3

Ejemplo 4

(*a*) $|-5| = -(-5) = 5$.

(*b*) $|2x - 1| = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } 2x - 1 \ge 0 \\ -(2x - 1) & \text{si } 2x - 1 < 0. \end{cases}$

Esto es,

$$|2x - 1| = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \ge \frac{1}{2} \\ -2x + 1 & \text{si } x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ejemplo 5

La distancia entre -5 y 7 es la misma que entre 7 y -5:

$$|7 - (-5)| = |12| = 12 \text{ unidades},$$
$$|-5 - 7| = |-12| = 12 \text{ unidades}.$$

Valores absolutos y desigualdades

Como $|x|$ da la distancia entre un número x y el origen, la solución de la desigualdad $|x| < b$, si $b > 0$ es el conjunto de los números reales x que están a una distancia *menor* que b unidades respecto del origen. Como se muestra en la Figura 1.4

$$|x| < b \quad \text{si y solo si} \quad -b < x < b. \tag{1.1}$$

Por otra parte, la solución de la desigualdad $|x| > b$ es el conjunto de los números reales que están a una distancia *mayor* que b unidades respecto del origen. Por lo tanto,

$$|x| > b \quad \text{si y sólo si} \quad x > b \quad \text{o bien} \quad x < -b. \tag{1.2}$$

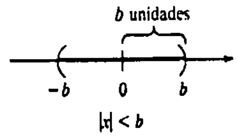


Figura 1.4

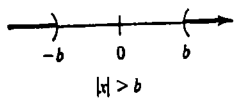


Figura 1.5

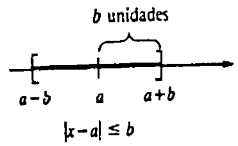


Figura 1.6

Véase la Figura 1.5. Los resultados en (1.1) y (1.2) son válidos cuando $<$ y $>$ se sustituyen por $\le$ y $\ge$, respectivamente, y cuando x se reemplaza por $x - a$; por ejemplo, $|x - a| \le b$, si $b > 0$ representa el conjunto de números reales x cuya distancia al número, si a es menor que o igual a b unidades. Como se ilustra en la Figura 1.6, $|x - a| \le b$ si y sólo si x es un número en el intervalo cerrado $[a - b, a + b]$.

Ejemplo 6

Resolver la desigualdad $|x - 1| < 3$.

Solución Usando (1.1), primero se escribe la desigualdad como

$$-3 < x - 1 < 3.$$

Por lo tanto,

$$-3 + 1 < x - 1 + 1 < 3 + 1 \quad -2 < x < 4.$$

La solución es el intervalo abierto $(-2, 4)$.

Ejemplo 7

Resolver la desigualdad $|x| > 2$.

Solución De (1.2) se tiene inmediatamente que,

$$x > 2 \quad \text{o bien} \quad x < -2.$$

La solución es una unión de intervalos abiertos: $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

Ejemplo 8

Evaluar la desigualdad $0 < |x - 2| \leq 7$.

Solución La desigualdad dada significa que $0 < |x - 2|$ y $|x - 2| \leq 7$. En el primer caso, $0 < |x - 2|$ es verdadero para todo número real excepto $x = 2$. En el segundo caso se tiene que

$$-7 \leq x - 2 \leq 7$$
$$-5 \leq x \leq 9$$

o bien $[-5, 9]$. El conjunto de números reales x que satisface ambas desigualdades consta de todos los números en $[-5, 9]$ excepto 2. La solución expresada como unión de intervalos es $[-5, 2) \cup (2, 9]$. Véase la Figura 1.7.

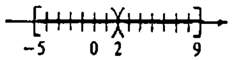


Figura 1.7

Desigualdad del triángulo

La demostración de la llamada desigualdad del triángulo

$$|a + b| \leq |a| + |b| \tag{1.3}$$

se deja al lector como ejercicio.

Observación

Todo número real tiene una representación decimal interminable. Los números racionales se caracterizan como decimales *periódicos* o *repetitivos*; por ejemplo, mediante la división puede verse que

$$\frac{7}{11} = 0.636363\ldots \quad \text{y} \quad \frac{3}{4} = 0.750000\ldots.$$

se repite sucesivamente

Por lo tanto, los números irracionales son los números decimales *no periódicos* o *no repetitivos*. Por ejemplo,

$$\pi = 3.141592\ldots \quad \text{y} \quad \sqrt{3} = 1.732050\ldots.$$

cifras no repetitivas

Ejercicios 1.1

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 965.

En los Problemas 1-4 exprese la desigualdad dada en la notación de intervalos.

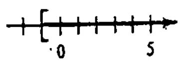
1. $-4 \leq x < 20$
2. $x \geq 5$
3. $x < -2$
4. $\frac{1}{2} < x < \frac{7}{4}$

En los Problemas 5-8 represente el intervalo dado como una desigualdad.

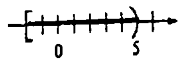
5. $(\frac{3}{2}, 6)$
6. $[-1, 5]$
7. $[20, \infty)$
8. $(-\infty, -7)$

En los Problemas 9-12 escriba el intervalo que corresponde a la gráfica dada.

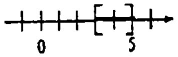
9.



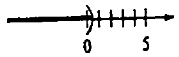
10.



11.



12.



En los Problemas 13-22 resuelva la desigualdad dada. Exprese la solución en la notación de intervalos.

13. $3x < -9$
14. $-2x > 8$
15. $4x + 1 > 10$
16. $-\frac{1}{2}x + 6 \leq 0$
17. $4x \geq 5x - 7$
18. $x + 12 \leq 5x$
19. $-4 < 1 - x \leq 3$
20. $1 \leq \dfrac{2x + 14}{3} < 2$
21. $x \leq 3x + 2 \leq x + 6$
22. $10 - x < 4x \leq 25 - x$

En los Problemas 23-26 represente la expresión dada sin emplear el símbolo de valor absoluto.

23. $|4 - a|$, $4 - a$ es un número negativo
24. $|-6a|$, a es un número positivo
25. $|a + 10|$, a es mayor o igual que -10
26. $|a^2 - 1|$, a es un número en $(-1, 1)$

En los Problemas 27-30, despeje x.

27. $|4x| = 36$
28. $|-2x| = 16$
29. $|3 - 5x| = 22$
30. $|12 - \frac{1}{2}x| = x$

En los Problemas 31-40 resuelva la desigualdad dada. Exprese la solución en la notación de intervalos.

31. $|x| < 4$
32. $|-\frac{1}{3}x| \leq 3$
33. $|1 - 2x| \leq 1$
34. $|5 + 4x| < 17$
35. $\left|\dfrac{x + 3}{-2}\right| < 1$
36. $0 < |x + 1| \leq 5$
37. $|x| > 6$
38. $|4 - x| > 0$
39. $|5 - 2x| > 7$
40. $|x + 9| \geq 8$
41. Si $1/x < 4$, ¿se obtendría que $x > \frac{1}{4}$?
42. Si $x^2 < 6x$, ¿se obtendría que $x < 6$?
43. Cuando un equipo se deprecia linealmente y pierde todo su valor inicial de A en unidades monetarias en un periodo de n años, su valor V a los x años $(0 \leq x \leq n)$ está dado por $V = A(1 - x/n)$. Si una computadora cuesta inicialmente $100,000 y se deprecia (total-

mente) a los 20 años, determine los valores de x tales que $30{,}000 \le V \le 80{,}000$.

44. Según una teoría, el efecto más benéfico de un ejercicio como trotar, se obtiene cuando el ritmo pulsatorio se mantiene dentro de cierto intervalo. Los extremos del mismo se obtienen multiplicando el número (220 − edad) por 0.70 y 0.85. Determine el intervalo del ritmo cardiaco para dos trotadores de 30 y 40 años, respectivamente.

Problemas para calculadora

En los Problemas 45-48 sustituya la coma entre el par de números reales dado con uno de los símbolos $<$, $>$, o $=$. Utilice una calculadora.

45. $\pi, \frac{22}{7}$ **46.** $\frac{\pi}{2}, 1.5$

47. $\frac{180}{\pi}, 57.29$ **48.** $\frac{1}{\pi}, \frac{1}{3}$

Problemas diversos

El punto medio de un intervalo con extremos a y b es el número $(a + b)/2$. En los Problemas 49-52 utilice esta información para encontrar una desigualdad $|x - c| < d$ cuya solución sea el intervalo dado.

49. $(0, 8)$ **50.** $(-1, 6)$

51. $(-3, 4)$ **52.** $(-10, -2)$

53. Utilice $-|a| \le a \le |a|$ y $-|b| \le b \le |b|$ para demostrar la desigualdad del triángulo (1.3). (*Sugerencia:* Sume las desigualdades.)

1.2 El plano cartesiano

Es prácticamente imposible hojear un libro, un periódico o una revista informativa sin encontrar alguna clase de exposición gráfica de datos, como la que muestra la Figura 1.8, que es un *plano de coordenadas* determinado por la intersección de dos rectas numéricas perpendiculares. En matemáticas a dicho plano coordenado se le llama también **plano cartesiano**.*

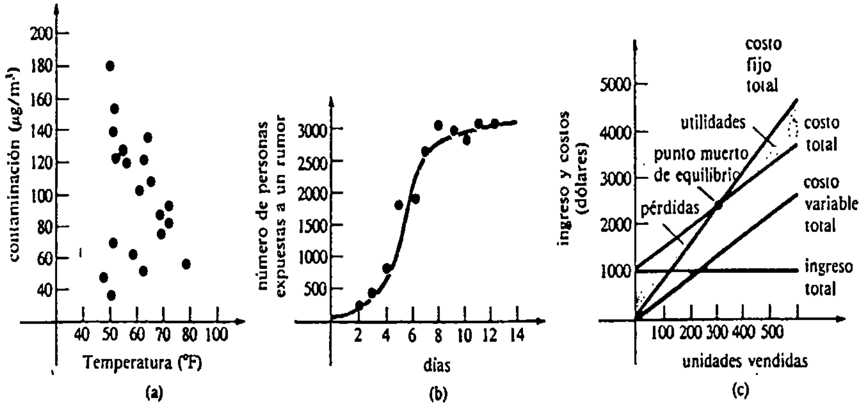


Figura 1.8

En la explicación general acerca del plano cartesiano se supondrá que se ha empleado la misma escala para marcar cada una de las rectas numéricas. El punto de intersección de estas rectas, que corresponde al número 0 en ambas, se llama **origen** y se denota por O. La recta numérica horizontal es el **eje x** y la recta vertical es el **eje y**. Los números

* En honor de René Descartes (1596-1650), matemático y filósofo francés.

situados a la derecha del origen sobre el eje x son positivos; y los números a la izquierda de O son negativos. Sobre el eje y, los números que están arriba del origen son positivos; y los números abajo de O son negativos.

Si P denota un punto del plano cartesiano, pueden trazarse desde P rectas perpendiculares a los ejes x y y, lo que determina un número a en el eje x y un número b en el eje y, como lo muestra la Figura 1.9. Recíprocamente, puede observarse que los números especificados a y b en los ejes x y y determinan un punto único P en el plano. De esta manera se establece una correspondencia biunívoca (o uno a uno) entre puntos del plano cartesiano y pares ordenados de números reales (a, b).† El número a se llama **abscisa** o **coordenada x** del punto P; el número b se llama **ordenada** o **coordenada y** del punto. Los ejes también se denominan **ejes de coordenadas** y se dice que P tiene las coordenadas (a, b).

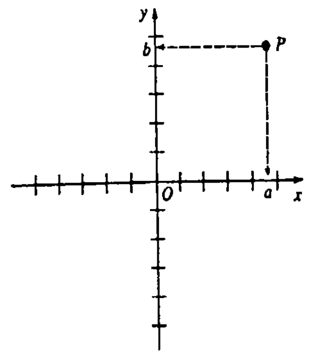


Figura 1.9

Cuadrantes

Los ejes coordenados dividen al plano cartesiano en cuatro regiones, conocidas como **cuadrantes**. En la Figura 1.10(a) se indican los signos algebraicos de las coordenadas x y y de cualquier punto (a, b) localizado en cada uno de los cuatro cuadrantes. Los puntos sobre los ejes de coordenadas, tales como $(2, 0)$ y $(0, -3)$ en la Figura 1.10(b), no se consi-

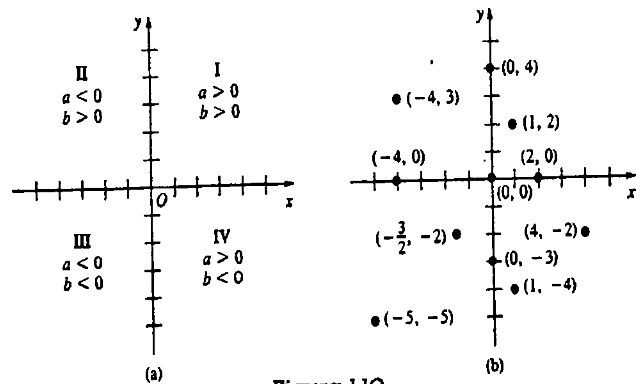


Figura 1.10

† Esta notación es la misma que la de un intervalo abierto. El lector debe ser capaz de identificar, por el contexto, si el símbolo se refiere a un punto o a un intervalo.

deran localizados en alguno de los cuadrantes. Este método para describir los puntos en un plano es el que corresponde al **sistema de coordenadas cartesianas** o **rectangulares.** En este sistema, dos puntos (a, b) y (c, d) son iguales si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

Fórmula de la distancia

A partir del teorema de Pitágoras es posible obtener la distancia $d(P_1, P_2)$ entre dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$. Como se muestra en la figura 1.11, los tres puntos P_1, P_2 y P_3 forman un triángulo rectángulo con hipotenusa d y catetos $|x_2 - x_1|$ y $|y_2 - y_1|$. De este modo,

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

da lugar a la **fórmula de la distancia**

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{1.4}$$

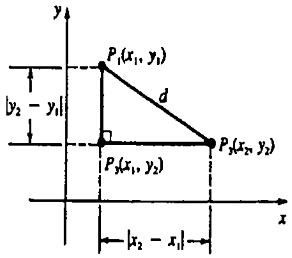


Figura 1.11

Ejemplo 1

Obtener la distancia entre los puntos $(-2, 3)$ y $(4, 5)$.

Solución Al identificar a P_1 como $(-2, 3)$ y a P_2 como $(4, 5)$, se obtiene de (1.4) que

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

Como $(x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2$ y $(y_2 - y_1)^2 = (y_1 - y_2)^2$, no importa cuál punto es designado como P_1 y cuál como P_2. En otras palabras, $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$.

Punto medio de un segmento de recta

Durante el estudio del Cálculo se usará con frecuencia la fórmula de la distancia en demostraciones y definiciones. Como primera aplicación se demostrará que las coordenadas del **punto medio de un segmento de recta** que va de un punto $P_1(x_1, y_1)$ a un punto $P_2(x_2, y_2)$ son

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \tag{1.5}$$

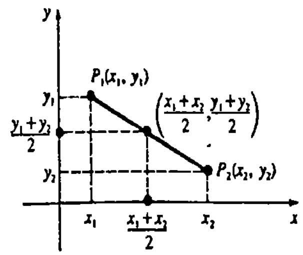


Figura 1.12

Véase la Figura 1.12. Si M denota un punto en el segmento P_1P_2 con coordenadas establecidas por (1.5), entonces M será el punto medio de P_1P_2 siempre que

$$d(P_1, M) = d(M, P_2) \quad \text{y} \quad d(P_1, P_2) = d(P_1, M) + d(M, P_2).$$

De (1.4) y aplicando un poco de álgebra encontramos que

$$\begin{aligned} d(P_1, M) &= \sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_1\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2}{2} - y_1\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{1}{2}d(P_1, P_2), \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned} d(M, P_2) &= \sqrt{\left(x_2 - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(y_2 - \frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{1}{2}d(P_1, P_2). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Es evidente que $d(P_1, M) = d(M, P_2)$. Además al sumar (1.6) y (1.7) se obtiene $d(P_1, P_2)$, como se debía demostrar.

Ejemplo 2

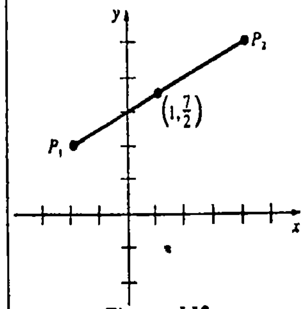


Figura 1.13

Encontrar las coordenadas del punto medio del segmento rectilíneo que va de $P_1(-2, 2)$ a $P_2(4, 5)$.

Solución De (1.5) se tiene que

$$x = \frac{-2 + 4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{y} \quad y = \frac{2 + 5}{2} = \frac{7}{2}.$$

El punto medio $(1, \frac{7}{2})$ se muestra en la Figura 1.13.

Gráficas

Una **gráfica** (o **gráfico**) es cualquier conjunto de puntos (x, y) situados en el plano cartesiano. Una gráfica puede ser un conjunto infinito de puntos, tales como los puntos del segmento de recta P_1P_2 de la Figura 1.13, o simplemente un conjunto finito de puntos como el que se muestra en la Figura 1.8(a). La **gráfica de una ecuación** es el conjunto de puntos (x, y) en el plano cartesiano que son soluciones de la ecuación. Un par ordenado (x, y) es una solución de una ecuación si al sustituir x y y en la ecuación, ésta se reduce a una identidad.

Ejemplo 3

El punto $(-2, 2)$ se ubica en la gráfica de $y = 1 - \frac{1}{8}x^3$ puesto que

$$2 = 1 - \frac{1}{8}(-2)^3 \quad \text{es equivalente a} \quad 2 = 1 + \frac{8}{8} \quad \text{o bien} \quad 2 = 2.$$

Trazo de puntos

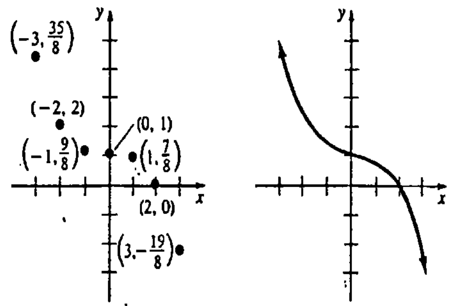
Una manera de bosquejar la gráfica de una ecuación, que se usa a menudo, consiste en situar puntos y después unirlos mediante una línea continua. Para obtener puntos de la gráfica se asignan valores a x o a y y luego se resuelve la ecuación para determinar los valores correspondientes de y o de x. Por supuesto, se necesita situar los puntos suficientes hasta que la forma de la gráfica sea evidente.

Ejemplo 4

Trazar la gráfica de $y = 1 - \frac{1}{8}x^3$.

Solución Asignando valores a x se encuentran los valores de y dados en la tabla adjunta. Al unir los puntos mostrados en la Figura 1.14(a) mediante una línea continua, la gráfica de la ecuación es la que se muestra en la Figura 1.14(b).

x	y
-3	$\frac{35}{8}$
-2	2
-1	$\frac{9}{8}$
0	1
1	$\frac{7}{8}$
2	0
3	$-\frac{19}{8}$



(a) trazo de puntos

(b) gráfica de $y = 1 - \frac{1}{8}x^3$

Figura 1.14

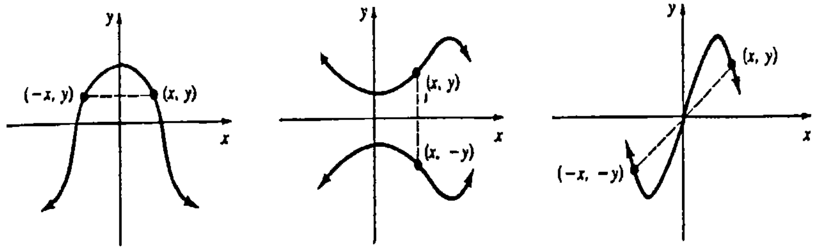
Simetría

Antes de trazar puntos el lector puede determinar si la gráfica de una ecuación posee simetría. La Figura 1.15 muestra que una gráfica es

(*i*) simétrica con respecto al eje y, si tanto (x, y) como $(-x, y)$ están en la gráfica;

(*ii*) simétrica con respecto al eje, si tanto (x, y) como $(x, -y)$ están en la gráfica; y

(*iii*) simétrica con respecto al origen, si tanto (x, y) y $(-x, -y)$ están en la gráfica.



(a) simetría con respecto al eje y

(b) simetría con respecto al eje x

(c) simetría con respecto al origen

Figura 1.15

Criterios para la simetría

Las condiciones (*i*), (*ii*) y (*iii*) dan lugar a los tres siguientes criterios para la simetría de una ecuación. La gráfica de una ecuación es simétrica con respecto

(*i*) al eje y, si al sustituir x or $-x$ resulta una ecuación equivalente;

(*ii*) al eje x, si al reemplazar y por $-y$ resulta una ecuación equivalente; y

(*iii*) al origen, si al sustituir x por $-x$ y y por $-y$ resulta una ecuación equivalente.

Ejemplo 5

Determinar si la gráfica de $x = |y| - 2$ posee simetría.

Solución

Criterio (*i*): $-x = |y| - 2$ o bien $x = -|y| + 2$, no es equivalente a la ecuación original.

Criterio (*ii*): $x = |-y| - 2$ es equivalente a la ecuación original puesto que $|-y| = |y|$.

Criterio (*iii*): $-x = |-y| - 2$ o bien $x = -|y| + 2$, no es equivalente a la ecuación original.

Se concluye que la gráfica de $x = |y| - 2$ sólo es simétrica con respecto al eje x.

Un examen de la Figura 1.14(b) demuestra que la gráfica de $y = 1 - \frac{1}{8}x^3$ no tiene ninguna de las simetrías que se están considerando.* Puede verificarse que ninguno de los criterios de simetría se cumple por no producirse una ecuación equivalente.

Detectar simetrías antes de situar puntos a menudo puede ahorrar tiempo y esfuerzo. Por ejemplo, si se sabe que la gráfica de una ecuación es simétrica con respecto al

* La atención se limitará a las simetrías con respecto a los dos ejes coordenados y al origen. Por supuesto, una gráfica podría tener otros tipos de simetría.

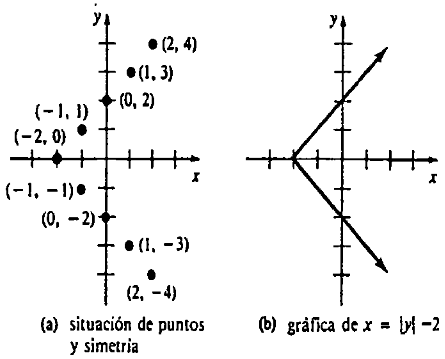
eje y, entonces es suficiente situar puntos mediante coordenadas x que satisfagan $x \geq 0$. Como se sugiere en la Figura 1.15(a), pueden encontrarse puntos en el segundo y tercer cuadrantes tomando imágenes de espejo, a través del eje y, de los puntos ubicados en el primero y el cuarto cuadrante.

Ejemplo 6

Trazar la gráfica $x = |y| - 2$.

Solución Los valores de la tabla adjunta se obtuvieron asignando valores a y y despejando x. Hemos tomado $y \geq 0$, puesto que se vio en el Ejemplo 5 que la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto al eje x. En la Figura 1.16(a) se usa el color azul para indicar los puntos de la gráfica obtenidos por simetría. La gráfica de la ecuación, que parece consistir en dos rectas, se presenta en la Figura 1.16(b).

x	y
2	4
1	3
0	2
−1	1
−2	0

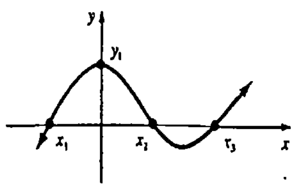


(a) situación de puntos y simetría (b) gráfica de $x = |y| - 2$

Figura 1.16

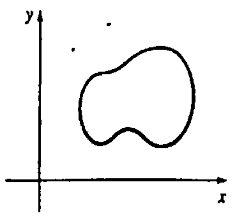
Coordenadas de la intersección con los ejes (intercepciones)

Cuando se traza la gráfica de una ecuación, siempre es conveniente investigar si la gráfica tiene **intersecciones con los ejes**. La abscisa de un punto donde la gráfica corta al eje x se denomina **intercepción x** (o abscisa en el origen). La ordenada de un punto donde la gráfica corta al eje y se llama **intercepción y** (u ordenada en el origen). En la Figura 1.17 las intercepciones x de la gráfica son x_1, x_2 y x_3. La única intercepción y es y_1. La Figura 1.18 muestra una gráfica que no tiene intersecciones con los ejes x o y. En el Ejemplo 4



gráfica con intercepciones

Figura 1.17



gráfica sin intercepciones

Figura 1.18

la intercepción x de la gráfica es 2; la intercepción y es 1. En el Ejemplo 6 la intercepción x de la gráfica es −2; las intercepciones y son −2 y 2.

Como $y = 0$ para todo punto en el eje x, y $x = 0$ para todo punto en el eje y, las intercepciones de la gráfica de una ecuación pueden determinarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}&\text{intercepciones } x\text{: Hacer } y = 0 \text{ en la ecuación y despejar } x.\\&\text{intercepciones } y\text{: Hacer } x = 0 \text{ en la ecuación y despejar } y.\end{aligned} \tag{1.8}$$

Ejemplo 7

Encontrar las intersecciones con los ejes de la gráfica de (a) $y = 4x - 3$ y la de (b) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2+5}$.

Solución

(a) Haciendo $y = 0$ se obtiene $0 = 4x - 3$; de donde $x = \frac{3}{4}$. Haciendo $x = 0$ se tiene que $y = -3$. Las intercepciones x y y son $\frac{3}{4}$ y -3, respectivamente.

(b) En la segunda ecuación $y = 0$ si $x^2 + 1 = 0$ y $x^2 + 5 \neq 0$. Como $x^2 + 5 \neq 0$ para todos los números reales, se tiene que $x^2 + 1 = 0$, o sea, $x^2 = -1$. Sin embargo, no hay números reales que satisfagan la última ecuación, por lo cual la gráfica no tiene intercepciones x. Haciendo ahora $x = 0$, la ecuación resulta $y = \frac{1}{5}$. La intercepción y es $\frac{1}{5}$.

*Circunferencias**

La fórmula de la distancia (1.4) permite encontrar una ecuación para una curva plana muy conocida. Una **circunferencia** es el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano cartesiano que equidistan de un punto fijo $C(h, k)$. Si r es la distancia fija, entonces un punto $P(x, y)$ está en la circunferencia si y sólo si

$$d(C, P) = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r.$$

De manera equivalente se tiene la **forma general** de la ecuación de una circunferencia **con centro $C(h, k)$ y radio r:**

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \tag{1.9}$$

Véase la Figura 1.19. Si $h = 0$ y $k = 0$, entonces la forma general de la ecuación de una circunferencia con centro en el origen es

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Véase la Figura 1.20.

* En la terminología matemática en español se designa por circunferencia a la curva que delimita una superficie circular; y por círculo a esta última figura. (N. del RT.)

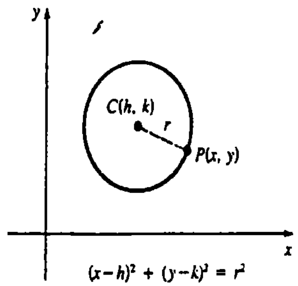


Figura 1.19

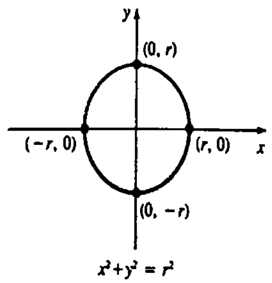


Figura 1.20

Ejemplo 8

Considérese el segmento de recta que va de $P_1(-2, 2)$ a $P_2(4, 5)$ del Ejemplo 2. Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por P_1 y P_2 con centro en el punto medio M de P_1P_2.

Solución Como el centro es el punto medio $M(1, \frac{7}{2})$, debe tenerse que $h = 1$ y $k = \frac{7}{2}$. El radio r puede ser $d(M, P_1)$ o bien $d(M, P_2)$. Usando

$$d(M, P_1) = \sqrt{(-2-1)^2 + \left(2 - \frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3\sqrt{5}}{2} = r,$$

de (1.9) resulta que la ecuación de la circunferencia es

$$(x-1)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{45}{4}.$$

Al desarrollar los cuadrados en (1.9) se observa que toda circunferencia tiene una ecuación en alternativa de la forma

$$Ax^2 + Ay^2 + Cx + Dy + E = 0, \qquad A \neq 0.$$

Sin embargo, lo inverso no es necesariamente cierto; esto es, no toda ecuación de la forma $Ax^2 + Ay^2 + Cx + Dy + E = 0$ es una circunferencia. Véanse los Problemas 39-44.

Ejemplo 9

Demostrar que $x^2 + y^2 - 4x + 8y = 0$ es la ecuación de una circunferencia. Encontrar su centro y su radio.

Solución *Completando el cuadrado* tanto en x como en y, se observa que

$$(x^2 - 4x \qquad) + (y^2 + 8y \qquad) = 0$$

se convierte en

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 8y + 16) = 20$$

o bien

$$(x-2)^2 + (y+4)^2 = 20.$$

Esta última es la forma general de la ecuación de una circunferencia con centro $(2, -4)$ y radio $2\sqrt{5}$.

Secciones cónicas

La circunferencia es un elemento de la clase de curvas conocidas como secciones cónicas. La ecuación de una sección cónica puede expresarse siempre en la forma $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, en donde A y B no son cero a la vez.

Ejemplo 10

Trazar la gráfica de $9x^2 + 16y^2 = 25$.

Solución Obsérvese primero que al sustituir (x, y) sucesivamente por $(-x, y)$, $(x, -y)$ y $(-x, -y)$ no se altera la ecuación dada, por lo cual la gráfica es simétrica con respecto al eje y, al eje x y al origen. Además, $9(1)^2 + 16(1)^2 = 25$ indica que $(1, 1)$ es un punto de la gráfica. Finalmente,

$$y = 0 \text{ implica que } 9x^2 = 25 \quad \text{o bien} \quad x = \pm\frac{5}{3},$$

$$x = 0 \text{ implica que } 16y^2 = 25 \quad \text{o bien} \quad y = \pm\frac{5}{4}.$$

Las intercepciones x son $-\frac{5}{3}$ y $\frac{5}{3}$; las intercepciones y son $-\frac{5}{4}$ y $\frac{5}{4}$. Al unir los puntos de la Figura 1.21(a) mediante una línea continua, se obtiene la gráfica de la Figura 1.21(b). Obsérvese que la gráfica *no* es una circunferencia.

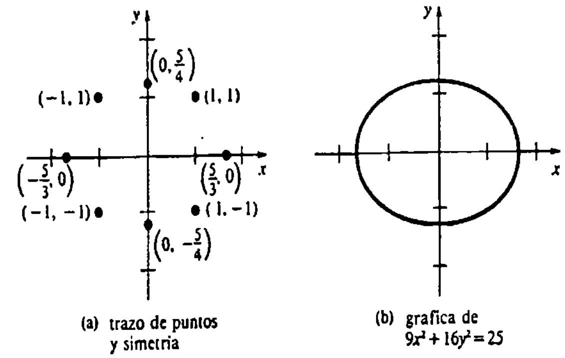


Figura 1.21

La elipse

Cuando la ecuación del Ejemplo 10 se expresa en la forma equivalente

$$\frac{x^2}{(5/3)^2} + \frac{y^2}{(5/4)^2} = 1$$

aparece como un caso especial de la forma general

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1. \qquad (1.10)$$

Para $a = b$ la gráfica de (1.10) es una circunferencia de radio a. Si $a \neq b$, la gráfica de (1.10) es una **elipse con centro** (h, k). Por lo tanto, la gráfica de $9x^2 + 16y^2 = 25$ es una elipse con centro en el origen. En el Capítulo 12 se estudiará la elipse junto con las otras secciones cónicas.

Ejercicios 1.2

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 965.

En los Problemas 1-6 el punto (a, b) está en el primer cuadrante. Determine el cuadrante que corresponde al punto dado.

1. $(a, -b)$ 2. (b, a) 3. $(-b, -a)$

4. $(-a, a)$ 5. $(-a, b)$ 6. $(-b, a)$

En los Problemas 7-10 halle la distancia entre los puntos dados.

7. $P_1(3, -1), P_2(7, -3)$

8. $P_1(0, 5), P_2(-8, -2)$

9. $P_1(\sqrt{3}, 0), P_2(0, -\sqrt{6})$

10. $P_1(\frac{5}{2}, 5), P_2(-\frac{3}{2}, 5)$

En los Problemas 11 y 12 determine si los puntos dados son los vértices de un triángulo rectángulo.

11. $(16, 2), (-6, -2), (20, 10)$

12. $(-2, -8), (0, 3), (-6, -5)$

En los Problemas 13 y 14 utilice la fórmula de la distancia para determinar si los puntos dados son colineales.

13. $(1, 3), (-2, -3), (4, 9)$

14. $(0, 2), (1, 1), (5, -2)$

En los Problemas 15 y 16 despeje x.

15. $P_1(x, 2), P_2(1, 1), d(P_1, P_2) = \sqrt{10}$

16. $P_1(x, 0), P_2(-4, 3x), d(P_1, P_2) = 4$

17. Encuentre una ecuación que relacione a x y y si se sabe que la distancia desde (x, y) a $(0, 1)$ es igual a la distancia desde (x, y) a $(x, -1)$.

18. Demuestre que el punto $(-1, 5)$ está en la perpendicular bisectriz del segmento de recta que va de $P_1(1, 1)$ a $P_2(3, 7)$.

En los Problemas 19 y 20 obtenga el punto medio del segmento de recta que va de P_1 a P_2.

19. $P_1(4, 7), P_2(8, -3)$ 20. $P_1(-3, 5), P_2\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

21. Si las coordenadas del punto medio del segmento determinado por los puntos $P_1(1, 3)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son $(3, 4)$, ¿cuáles son las coordenadas de P_2?

22. La Figura 1.22 muestra los puntos medios de los lados de un triángulo. Determine las coordenadas de los vértices del triángulo.

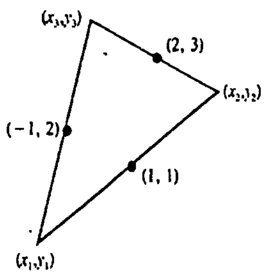


Figura 1.22

23. Si M es el punto medio del segmento de recta que va de $P_1(2, 3)$ a $P_2(6, -9)$, encuentre el punto medio del segmento desde P_1 a M y el punto medio del segmento desde M a P_2.

24. El punto $P(x, y)$ con coordenadas definidas por $x = x_1 + r(x_2 - x_1)$, $y = y_1 + r(y_2 - y_1)$ está en el segmento que va $P_1(x_1, y_1)$ a $P_2(x_2, y_2)$. Use $P_1(2, 3)$, $P_2(6, -9)$, $r =$, $r = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{3}{4}$ y compare los resultados con los del Problema 23. Halle un punto a $\frac{2}{3}$ de la distancia desde P_1 hasta P_2.

En los Problemas 25-32 trace la gráfica de la ecuación dada. Determine los tipos de simetría (si los hay).

25. $y = 2x + 1$ 26. $y = x - 5$

27. $x = y^2$ 28. $y = \sqrt{x}$

29. $y = |x|$ 30. $4y - x^3 = 0$

31. $x^2 = y^2$ 32. $y = x^2 + x$

En los Problemas 33-38 encuentre la ecuación en la forma general de la circunferencia que satisface las condiciones dadas.

33. Centro $(4, -6)$, radio 8

34. Centro $(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$, radio $\sqrt{2}$

35. Centro $(3, -4)$, pasa por el origen

36. Centro $(6, 2)$, es tangente al eje x

37. Centro $(1, 1)$, pasa por el punto $(5, 2)$

38. Centro en el punto medio M del segmento que va de $P_1(3, 8)$ a $P_2(5, 2)$, radio $\frac{1}{2}\, d(M, P_2)$

En los Problemas 39-44 determine si la ecuación dada es la ecuación de una circunferencia. Si es así, determine su centro y su radio.

39. $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$

40. $2x^2 + 2y^2 - 16x - 40y = 37$

41. $3x^2 + 3y^2 - 18x + 6y = -2$

42. $x^2 + y^2 + 10y + 26 = 0$

43. $x^2 + y^2 - 12x + 8y + 52 = 0$

44. $x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x + y = 0$

En los Problemas 45-48 se tiene la ecuación de una elipse. Trace la gráfica.

45. $25x^2 + 4y^2 = 100$ 46. $x^2 + 4y^2 = 36$

47. $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ 48. $x^2 + \frac{y^2}{7} = 1$

En los Problemas 49 y 50 se tiene la ecuación de una elipse. Exprese la ecuación en la forma general y determine el centro de la curva.

49. $x^2 + 4y^2 - 4x + 40y + 88 = 0$

50. $5x^2 + 2y^2 + 60x - 8y + 178 = 0$

Problemas diversos

En los Problemas 51-54 grafique el conjunto de puntos (x, y) que satisfagan la ecuación o la desigualdad dadas.

51. $xy = 0$ 52. $xy > 0$

53. $xy < 0$ 54. $y < x$

1.3 Rectas

En los capítulos siguientes se comprobará la importancia de la noción de recta en el estudio del cálculo diferencial. Antes de considerar las rectas se introducirán, por conveniencia, dos símbolos especiales.

Incrementos

Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos cualesquiera en el plano, se define el **incremento de** x como la diferencia de las abscisas

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

y el **incremento de** y como la diferencia de ordenadas

$$\Delta y = y_2 - y_1.$$

Los símbolos "Δx" y "Δy" se leen "delta x" y "delta y", respectivamente.

Ejemplo 1

Encontrar los incrementos x y y para (*a*) $P_1(4, 6)$, $P_2(9, 7)$; (*b*) $P_1(10, -2)$, $P_2(3, 5)$; y (*c*) $P_1(8, 14)$, $P_2(8, -1)$.

Solución

(*a*) $\Delta x = 9 - 4 = 5, \quad \Delta y = 7 - 6 = 1$

(*b*) $\Delta x = 3 - 10 = -7, \quad \Delta y = 5 - (-2) = 7$

(*c*) $\Delta x = 8 - 8 = 0, \quad \Delta y = -1 - 14 = -15$

El Ejemplo 1 muestra que un incremento puede ser positivo, negativo o cero.

Pendiente

Supóngase que L es una recta no vertical en el plano cartesiano. Existe un número asociado con la misma llamado **pendiente** de la recta. Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos distintos de L, entonces la **pendiente** m de la recta se define como el cociente

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{1.11}$$

Al incremento $\Delta x = x_2 - x_1$, *cambio en x*, se le denomina **corrimiento (o avance)** en la recta; el correspondiente *cambio en y* se llama **desnivel (o elevación)** en la recta: $\Delta y = y_2 - y_1$. Así,

$$m = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{\text{desnivel}}{\text{corrimiento}}.$$

Para facilitar la explicación, supóngase que $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ se escogen de tal manera que $x_1 < x_2$; en consecuencia, la pendiente de la recta mostrada en la Figura 1.23(a) será positiva, mientras que la pendiente de la recta de la Figura 1.23(b) será negativa. Si una recta tiene pendiente positiva, entonces las ordenadas de sus puntos aumentan cuando las abscisas aumentan; si la recta tiene pendiente negativa, las ordenadas disminuyen cuando las abscisas aumentan. Si una recta es horizontal, entonces $\Delta y = 0$ y por lo tanto su pendiente es cero. Véase la Figura 1.23(c). La pendiente de una recta vertical es indefinida, puesto que (1.11) no tiene sentido cuando $\Delta x = 0$. Véase la Figura 1.23(d).

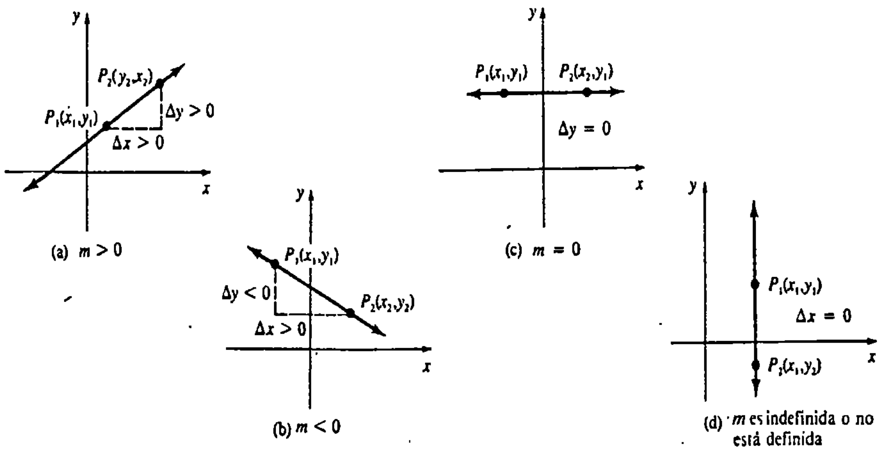


Figura 1.23

Ejemplo 2

Encontrar la pendiente de la recta que pasa por los puntos *a*) (6, 3), (−2, 5); *b*) (7, −2), (4, −2); *c*) (1, 5), (1, −3).

Solución Al utilizar (1.11) en los dos primeros casos, el resultado es

(*a*) $m = \dfrac{5-3}{-2-6} = \dfrac{2}{-8} = -\dfrac{1}{4}$, y

(*b*) $m = \dfrac{-2-(-2)}{4-7} = \dfrac{0}{-3} = 0$. La recta que pasa por (7, −2) y (4, −2) es horizontal.

(*c*) Como $\Delta x = 1 - 1 = 0$. la pendiente de la recta que pasa por (1, 5) y (1, −3) es indefinida. Por consiguiente, la recta es vertical.

La pendiente de una recta es *única* en el sentido de que cualquier par de sus puntos determina el mismo cociente m. Esto puede demostrarse porque son iguales las razones entre los lados correspondientes de triángulo semejantes. Véase la Figura 1.24.

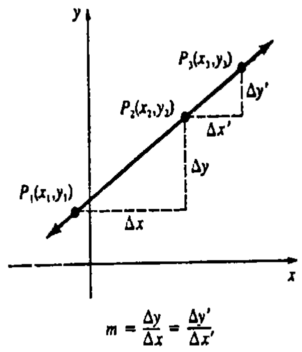


Figura 1.24

Rectas paralelas y perpendiculares

En los dos teoremas siguientes se supondrá que dos rectas L_1 y L_2 tienen pendiente efectivamente. Esto significa que ninguna recta es vertical, puesto que m_1 y m_2 son números finitos. El primer teorema relaciona las pendientes de rectas paralelas.

TEOREMA 1.1

Dos rectas L_1 y L_2 con pendientes m_1 y m_2 son **paralelas** si y sólo si $m_1 = m_2$. □

Por supuesto, dos rectas verticales —esto es, rectas paralelas al eje y— son paralelas (entre sí) pero tienen pendientes indefinidas.

TEOREMA 1.2
Dos rectas L_1 y L_2 son pendientes m_1 y m_2 son **perpendiculares** si y sólo si $m_1m_2 = -1$.

Demostración Supóngase que L_1 y L_2 son rectas perpendiculares con pendientes m_1 y m_2, respectivamente. En la Figura 1.25 se observa que

$$m_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad y \quad m_2 = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}.$$

Además, por el teorema de Pitágoras

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

La fórmula de la distancia muestra que la expresión anterior equivale a

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 + (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2.$$

Simplificando y factorizando la última expresión se obtiene que

$$(y_1 - y_0)(y_2 - y_0) = -(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)$$

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} = -1 \tag{1.12}$$

o bien

$$m_1m_2 = -1.$$

Recíprocamente, si (1.12) se cumple, puede utilizarse el argumento en sentido contrario para demostrar que L_1 y L_2 son perpendiculares. □

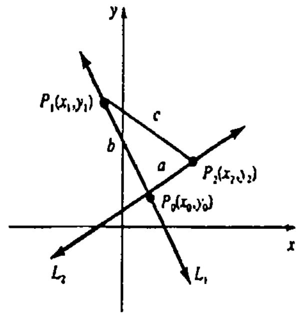


Figura 1.25

En otras palabras, dos rectas son perpendiculares cuando la pendiente de una es la *recíproca negativa* de la pendiente de la otra:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad y \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}.$$

Ecuaciones de rectas

El concepto de pendiente permite encontrar ecuaciones de rectas. Por un punto $P_1(x_1, y_1)$ pasa solamente una recta L con una pendiente determinada, m. Para encontrar una ecuación de L, supóngase que $P(x, y)$ denota cualquier punto de la recta para el cual $x \neq x_1$. Igualando las pendientes,

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

se obtiene de inmediato que

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Como las coordenadas de todos los puntos $P(x, y)$ de la recta, *incluyendo a* $P_1(x_1, y_1)$, satisfacen la última ecuación, se concluye que esta es una ecuación de L. Esta ecuación particular se denomina **forma punto-pendiente de la recta**. En resumen:

La forma punto-pendiente de la ecuación de una recta es

$$y - y_1 = m(x - x_1). \tag{1.13}$$

Ejemplo 3

Encontrar una ecuación de la recta que pase por (6, −2) y tenga pendiente 4.

Solución De la forma de punto y pendiente (1.13) se obtiene

$$y - (-2) = 4(x - 6).$$

En forma equivalente,

$$y + 2 = 4x - 24 \quad \text{o bien} \quad y = 4x - 26.$$

La forma punto-pendiente (1.13) da lugar a otras dos formas importantes de ecuaciones de rectas. Si la recta L pasa por el eje y en $(0, b)$, entonces de (1.13) se obtiene

$$y - b = mx \quad \text{o bien} \quad y = mx + b.$$

El número b es la **intercepción** y (u ordenada en el origen) de la recta. Además, si L es una recta horizontal que pasa por $P_1(x_1, y_1)$, entonces haciendo $m = 0$ en (1.13) se obtiene

$$y - y_1 = 0(x - x_1) \quad \text{o bien} \quad y = y_1.$$

En resumen:

La forma pendiente-intercepción y de la ecuación de una recta es

$$y = mx + b. \tag{1.14}$$

La ecuación de una recta horizontal que pasa por $P_1(x_1, y_1)$ *es*

$$y = y_1 \tag{1.15}$$

Dos puntos distintos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, determinan también una recta única. Si la recta tiene pendiente, entonces puede obtenerse una ecuación a partir de (1.13) calculando primero $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$, y utilizando luego las coordenadas de P_1 o las de P_2. Finalmente, si la recta que pasa por P_1 y P_2 es vertical, entonces cualquier par de puntos de la recta tiene la misma abscisa. En consecuencia, si $P(x, y)$ se localiza en la recta vertical que pasa por $P_1\ (x_1, y_1)$ se tiene que

$$x = x_1.$$

Se resume este último caso como sigue:

La ecuación de la recta vertical que pasa por $P_1\ (x_1, y_1)$ es

$$x = x_1. \tag{1.16}$$

Ejemplo 4

Encontrar una ecuación para la recta que pasa por $(2, -3)$ y $(-4, 1)$.

Solución Designando el primer punto como P_1, se deduce de (1.11) que la pendiente de la recta es

$$\frac{1-(-3)}{-4-2} = -\frac{2}{3}.$$

Mediante la forma punto-pendiente (1.13) se obtiene

$$y-(-3) = -\frac{2}{3}(x-2) \quad \text{o bien} \quad y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}.$$

Solución Alternativa I Es posible, por supuesto, elegir $(-4, 1)$ como P_1:

$$y-1 = -\frac{2}{3}(x-(-4)) \quad \text{o bien} \quad y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}.$$

Solución Alternativa II De la forma pendiente-intercepción (1.14) puede expresarse $y = -\frac{2}{3}x + b$. Sustituyendo $x = 2$ y $y = -3$ en la última ecuación, se obtiene $-3 = -\frac{4}{3} + b$, así que $b = -\frac{5}{3}$. Resulta, como antes, que $y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$.

Ejemplo 5

(*a*) La ecuación de la recta horizontal que pasa por $(4, 9)$ es $y = 9$.

(*b*) La ecuación de la recta vertical que pasa por $(-1, -2)$ es $x = -1$.

Ecuación lineal

Toda ecuación

$$ax + by + c = 0 \tag{1.17}$$

en la que x y y aparecen a la primera potencia, y a, b y c son constantes, es una ecuación lineal. El nombre indica que la gráfica de una ecuación de la forma (1.17) es una línea recta. En seguida se resumen tres casos especiales de (1.17).

(*i*) $a = 0,\quad b \neq 0.\quad$ recta horizontal: $y = -\dfrac{c}{b}$

(*ii*) $a \neq 0,\quad b = 0,\quad$ recta vertical:: $x = -\dfrac{c}{a}$

(*iii*) $a \neq 0,\quad b \neq 0,\quad$ (1.17) puede escribirse como

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}. \tag{1.18}$$

Comparando (1.18) con (1.14) se observa que cuando $b \neq 0$ la recta dada por (1.18) tiene pendiente $-a/b$ y ordenada en el origen $-c/b$.

Ejemplo 6

Hallar una ecuación de la recta que pasa por $(-1, 5)$ y es perpendicular a la recta $2x + y + 4 = 0$.

Solución Cuando se escribe la ecuación dada en la forma $y = -2x - 4$, se observa que la pendiente es -2. Por el Teorema 1.2 se deduce que la recta que pasa por $(-1, 5)$ y es perpendicular a $2x + y + 4 = 0$ tiene pendiente $\frac{1}{2}$. Por lo tanto, de (1.13) se obtiene

$$y - 5 = \frac{1}{2}(x-(-1)),$$

o, en forma equivalente,

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2} \quad \text{o bien} \quad x - 2y + 11 = 0.$$

Gráficas

Para trazar la gráfica de la ecuación de una recta se necesita solamente determinar dos puntos cuyas coordenadas satisfagan la ecuación. Cuando $a \neq 0$ y $b \neq 0$ en (1.17), la recta debe cortar ambos ejes de coordenadas. La **intercepción x o abscisa en el origen** es la coordenada x del punto donde la recta corta al eje x; **la intercepción y u ordenada en el origen** es la coordenada y del punto donde la recta corta al eje y. Como un punto del eje x tiene coordenadas de la forma $(x, 0)$, la abscisa en el origen se evalúa haciendo $y = 0$ en la ecuación y despejando x. De la misma manera se obtiene la ordenada en el origen haciendo $x = 0$.

Ejemplo 7

Trazar la gráfica de $2x - 3y + 12 = 0$.

Solución Haciendo $y = 0$ se tiene $2x + 12 = 0$, o bien $x = -6$. La abscisa en el origen es -6. Cuando $x = 0$ se observa que la ordenada en el origen es 4. Como se muestra en la Figura 1.26, la recta pasa por los puntos $(-6, 0)$ y $(0, 4)$.

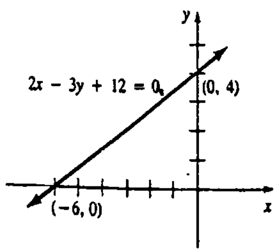


Figura 1.26

Ejercicios 1.3

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 966.

En los Problemas 1-4 encuentre la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados.

1. $(4, 1), (6, -2)$
2. $(3, 0), (6, 9)$
3. $\left(\frac{1}{2}, 4\right), \left(-\frac{3}{2}, 10\right)$
4. $(-3, 2), (11, 2)$

En los Problemas 5 y 6 determine $P_2(x_2, y_2)$ empleando la información dada

5. $P_1(3, -2), \quad \Delta x = 4, \quad \Delta y = 5$
6. $P_1(0, 7), \quad \Delta x = 0, \quad \Delta y = -3$

En los Problemas 7-24 halle una ecuación de la recta que satisfaga las condiciones dadas.

7. Pasa por $(5, -2)$ y $(1, 2)$
8. Pasa por $(0, 0)$, pendiente 8
9. Pasa por $(1, 3)$, $\Delta x = 3$; $\Delta y = 9$
10. Pasa por $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$, abscisa en el origen (intercepción x) $\frac{1}{8}$
11. Ordenada en el origen (intercepción y) 8, pendiente 1
12. Abscisa en el origen -3, ordenada en el origen $\frac{1}{2}$
13. Pasa por $(10, -\frac{3}{2})$, pendiente 0
14. Pasa por $(-\frac{7}{3}, \frac{3}{8})$, paralela el eje y
15. Pasa por $(1, 2)$, paralela a $4x + 2y = 1$
16. Pasa por $(4, 4)$, paralela a $x - 3y = 0$
17. Pasa por $(0, 0)$, perpendicular a $y = -\frac{1}{4}x + 7$
18. Pasa por $(\frac{1}{2}, -1)$, perpendicular a $3x + 4y - 12 = 0$
19. Pasa por $(2, 3)$ y por el punto común a $x + y = 1$ y $2x + y = 5$
20. Pasa por el punto común a $2x + 3 = 0$ y $y + 6 = 0$, pendiente -2
21. Pasa por el punto medio del segmento de recta que va de $(-1, 3)$ a $(4, 8)$, y es perpendicular al segmento.
22. Pasa por los puntos medios de los segmentos rectilíneos comprendidos entre los intercepciones x y y de $3x + 4y = 12$ y $x + y = -6$
23. Pasa por $(4, 2)$ paralelamente a la recta que pasa por $(5, 1)$ y $(-1, 7)$.
24. Pasa por $(3, 9)$, pendiente indefinida

En los Problemas 25-32 trace la gráfica de la recta que tenga la ecuación dada. Determine la pendiente y las coordenadas en el origen.

25. $y = 2x + 3$
26. $y = -3x$
27. $2y - 5 = 0$
28. $x = -4$
29. $5x + 3y = 15$
30. $x - y + 6 = 0$
31. $3x - 8y - 10 = 0$
32. $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 2$

En los Problemas 33 y 34 trace la gráfica de la recta que pase por $(3, 2)$ y tenga la pendiente dada.

33. $\frac{3}{4}$
34. $-\frac{1}{2}$

En los Problemas 35-40 halle el valor de k de tal forma que la gráfica de la ecuación lineal dada satisfaga la condición indicada.

35. $kx + 3y = 1$, pasa por $(5, 1)$
36. $-x + 7y = k$, abscisa en el origen $\frac{3}{2}$
37. $x - ky + 3 = 0$, y-ordenada en el origen -4
38. $2x + ky + 1 = 0$, perpendicular a $-5x + 10y = 3$
39. $kx + y = 0$, paralela a $3x - 7y = 12$
40. $kx + \sqrt{3}y = k$, pendiente $\sqrt{3}$

En los Problemas 41 y 42 determine si los puntos dados son colineales.

41. $(0, -4), (1, -1), (3, 5)$
42. $(-2, 3), \left(1, \frac{3}{2}\right), \left(-1, \frac{1}{2}\right)$

En los Problemas 43 y 44 use las pendientes para verificar que P_1, P_2 y P_3 son vértices de un triángulo rectángulo.

43. $P_1(8, 2), P_2(1, -11), P_3(-2, -1)$
44. $P_1(8, 2), P_2(-3, 0), P_3(5, 6)$

Problemas diversos

45. Sean a y b números diferentes de cero que representan, respectivamente, la abscisa y la ordenada en el origen de una recta. Demuestre que la forma de coordenadas en el origen (o intercepciones) de la ecuación de la recta es

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

46. Demuestre que la forma de dos puntos de la ecuación de la recta que pasa por $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$, es

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1).$$

La distancia D desde un punto $P_1(x_1, y_1)$ a una recta $ax + by + c = 0$ es

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Use este resultado en los Problemas 47-50.

47. Obtenga la distancia desde $(2, 5)$ a la recta $2x + 3y - 1 = 0$.
48. Encuentre la distancia desde el origen a la recta $y = \frac{3}{4}x - 10$.
49. Encuentre la distancia desde la intercepción x de $-x + 3y + 4 = 0$ a la recta que pasa por $(1, 1)$ y $(-1, 13)$.
50. Halle la distancia entre las rectas paralelas $x + y = 1$ y $2x + 2y = 5$.

1.4 Funciones

1.4.1 Definición y gráficas

¿Ha escuchado usted alguna vez comentarios tales como "El éxito está en función del trabajo arduo" y "La demanda es una función del precio"? La palabra *función* se usa con frecuencia para indicar una relación o dependencia de una cantidad respecto de otra. En matemáticas el concepto de función tiene una interpretación semejante, pero ligeramente más especializada. Antes de dar una definición precisa, considérese un ejemplo que emplea la palabra *función* en un sentido más restrictivo.

Ejemplo 1

(*a*) El área de un círculo es una función de su radio.

(*b*) Como se muestra en la Figura 1.27, la estatura de un niño, medida a intervalos anuales, es una función de la edad del niño.

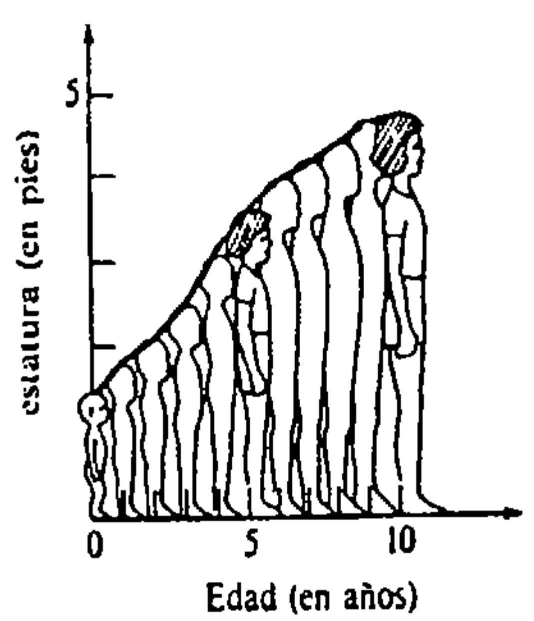


Figura 1.27

(*c*) La tarifa postal de primera clase para una carta es una función de su peso.

(*d*) La intensidad del sonido es una función de la distancia desde la fuente sonora.

(*e*) El volumen de una caja cúbica es una función de la longitud de uno de sus lados.

(*f*) La fuerza entre dos partículas con carga eléctrica opuesta es una función de su distancia.

Regla o correspondencia

Una función es una **regla**, o una **correspondencia**, que relaciona dos conjuntos de tal manera que a cada elemento del primer conjunto corresponde *uno y sólo un* elemento del segundo conjunto. En otras palabras, una relación funcional es una relación univalente. Así, en el Ejemplo 1, un círculo de radio dado tiene un sólo valor de área; en un instante determinado un niño puede tener solamente un valor de estatura, y así sucesivamente. En otro ejemplo, supóngase que se pide a cuatro personas, primero, que escriban su nombre y edad; y después, que escriban su nombre y la marca de los autos que posean.

Sus respuestas son:

Juan —25	Juan —Ford, Porsche
Luis —42	Luis —Plymouth
Irma —28	Irma —VW
Jorge —36	Jorge —Chevrolet, Oldsmobile, Buick

La primera correspondencia es una función, puesto que hay solamente una edad asociada a cada nombre. La segunda correspondencia no es una función porque dos elementos del primer conjunto de nombres (Juan y Jorge) se asocian a más de una marca de automóvil.

Se resume la explicación anterior con una definición formal.

DEFINICIÓN 1.1

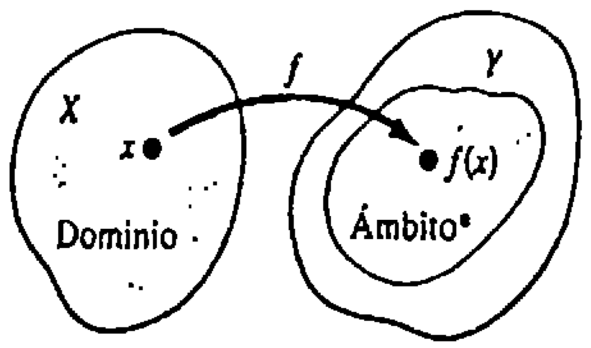
Una **función** f desde un conjunto X hacia un conjunto Y es una regla que asigna a cada elemento x en X un elemento único y en Y. El conjunto x se llama **dominio** de f. El conjunto de elementos correspondientes y en Y se denomina **contradominio** o **ámbito** de f.*

A menos que se indique lo contrario, en lo sucesivo se supondrá que los conjuntos X y Y constan de números reales.

Valor de una función

Sea f una función. El número y del contradominio que corresponde a un número x escogido en el dominio es el *valor* de la función en x, o la imagen de x en y, y se denota por $f(x)$. Este símbolo se lee "f de x" o "f en x" y se expresa que $y = f(x)$. Veáse la Figura 1.28. El valor de y depende de la elección de x, por lo que se le denomina **variable dependiente**; a x se la llama **variable independiente**.

Con frecuencia se definen funciones mediante una fórmula o ecuación.



* Contradominio ("rango").

Figura 1.28

Ejemplo 2

La regla para elevar al cuadrado un número real x está dada por la ecuación

$$y = x^2 \quad \text{o bien} \quad f(x) = x^2.$$

* El conjunto de los elementos correspondientes a los de un dominio se llama también impropiamente "rango", traducción incorrecta del término inglés *range*. (N. del RT.)

Los valores de f en $x = -5$ y $x = \sqrt{7}$, por ejemplo, se obtienen sustituyendo a su vez, x por -5 y $\sqrt{7}$.

$$f(-5) = (-5)^2 = 25,$$
$$f(\sqrt{7}) = (\sqrt{7})^2 = 7.$$

Ejemplo 3

Como todo número real puede elevarse al cuadrado, el dominio de la función $f(x) = x^2$ del Ejemplo 2, es el conjunto R de los números reales. Con la notación de intervalo, el dominio de f también se escribe como $(-\infty, \infty)$. Ya que $x^2 \geq 0$ para toda x, se deduce que el contradominio ("rango") de f es $[0, \infty)$.

Con el propósito de enfatizar, podría haberse escrito la función del Ejemplo 2 como

$$f(\quad) = (\quad)^2. \tag{1.19}$$

Lo anterior muestra que x es un *poseedor del lugar* de cualquier número en el dominio de la función. Así, si se desea evaluar (1.19) en $3 + h$, en donde h es un número real, se introduce $3 + h$ en el paréntesis:

$$f(3 + h) = (3 + h)^2 = 9 + 6h + h^2.$$

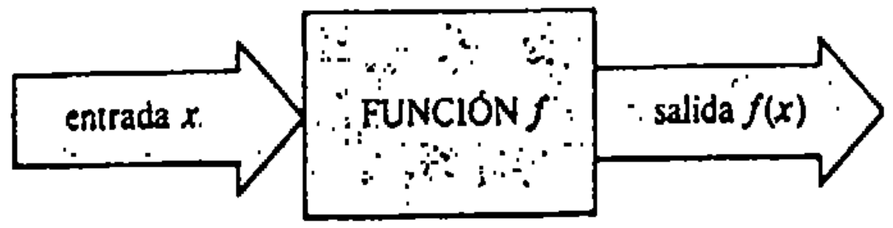
Obsérvese que una desigualdad como $y < x^2$ no define una función. Para cualquier número real x no hay un número real único y menor que x^2; por ejemplo, si $x = 4$ entonces $y = 3$, $y = 9$ y $y = 15.5$ son sólo algunos de los números que satisfacen $y < 4^2$.

Normalmente, no se especifica el dominio de una función definida por una ecuación. A menos que se diga lo contrario, queda entendido que:

*el dominio de una función f es el conjunto más grande de números reales para el cual la regla tiene sentido;**

por ejemplo, para $f(x) = 1/x$ no puede calcularse $f(0)$ puesto que $1/0$ no está definido. De este modo, el dominio de $f(x) = 1/x$ es el conjunto de todos los números reales excepto 0. Por la misma razón, se observa que el dominio de $f(x) = x/(x^2 - 4)$ es el conjunto de todos los números reales excepto -2 y 2. Del mismo modo, $f(x) = \sqrt{x}$ requiere que $x \geq 0$, por lo cual el dominio de esta función es $[0, \infty)$.

Una función se compara a menudo con una computadora. La "entrada" x es transformada por la "máquina" f en la "salida" $f(x)$:



* Algunas veces se le conoce como **dominio natural** o **dominio implícito** de la función.

Las computadoras y las calculadoras están programadas para reconocer cuando un número no está en el conjunto de entradas admisibles por la función. Por ejemplo, al registrar −4 en una calculadora y pulsar la tecla $\sqrt{\ }$ se obtiene un mensaje de error.

Ejemplo 4

Determinar el dominio y el contradominio de la función $f(x) = 7 + \sqrt{3x - 6}$.

Solución El radicando $3x - 6$ debe ser no negativo. Al resolver $3x - 6 \geq 0$ se obtiene $x \geq 2$, por lo cual el dominio de f es $[2, \infty)$. Ahora, por definición $\sqrt{3x - 6} \geq 0$ para $x \geq 2$, y en consecuencia, $y = 7 + \sqrt{3x - 6} \geq 7$. Puesto que $3x - 6$ y $\sqrt{3x - 6}$ aumentan cuando x aumenta, se concluye que el contradominio o ámbito de f es $[7, \infty)$.

Nota: Encontrar el contradominio de una función por simple examen generalmente no es una tarea fácil.

Otros símbolos

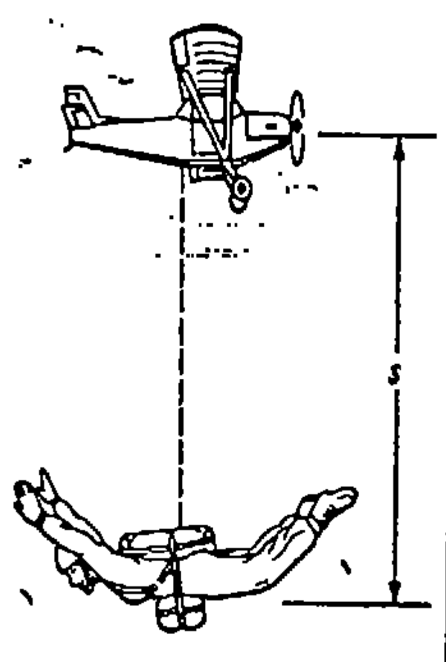
El uso de f o $f(x)$ para representar una función es una notación natural. Sin embargo, en contextos diferentes de matemáticas, ciencias, ingeniería y administración, las funciones se denotan por símbolos como F, G, H, g, h, p, q, y así sucesivamente. Letras diferentes como r, s, t, u, v, w, z se usan a menudo tanto para la variable independiente como para la dependiente. Así, una función podría escribirse $w = G(z)$ o bien $v = h(t)$; por ejemplo, el área de un círculo es $A = \pi r^2$.

Ejemplo 5

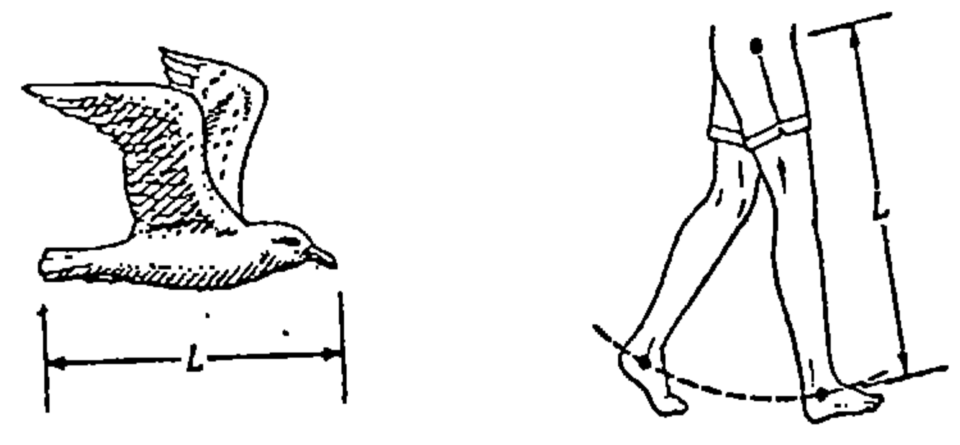
(*a*) La velocidad mínima de vuelo v de un pájaro es una función de su longitud L. Véase la Figura 1.29(a).

(*b*) En el análisis de la marcha, el periodo T de oscilación de una pierna es una función de su longitud L. Véase la Figura 1.29(b).

(*c*) La distancia s que recorre un cuerpo en caída libre es una función del tiempo t. Véase la Figura 1.29(c).



(c) $s = -\frac{1}{2}gt^2$, g = constante



(a) $v = k\sqrt{L}$, k = constante (b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{L}{g}}$, g = constante

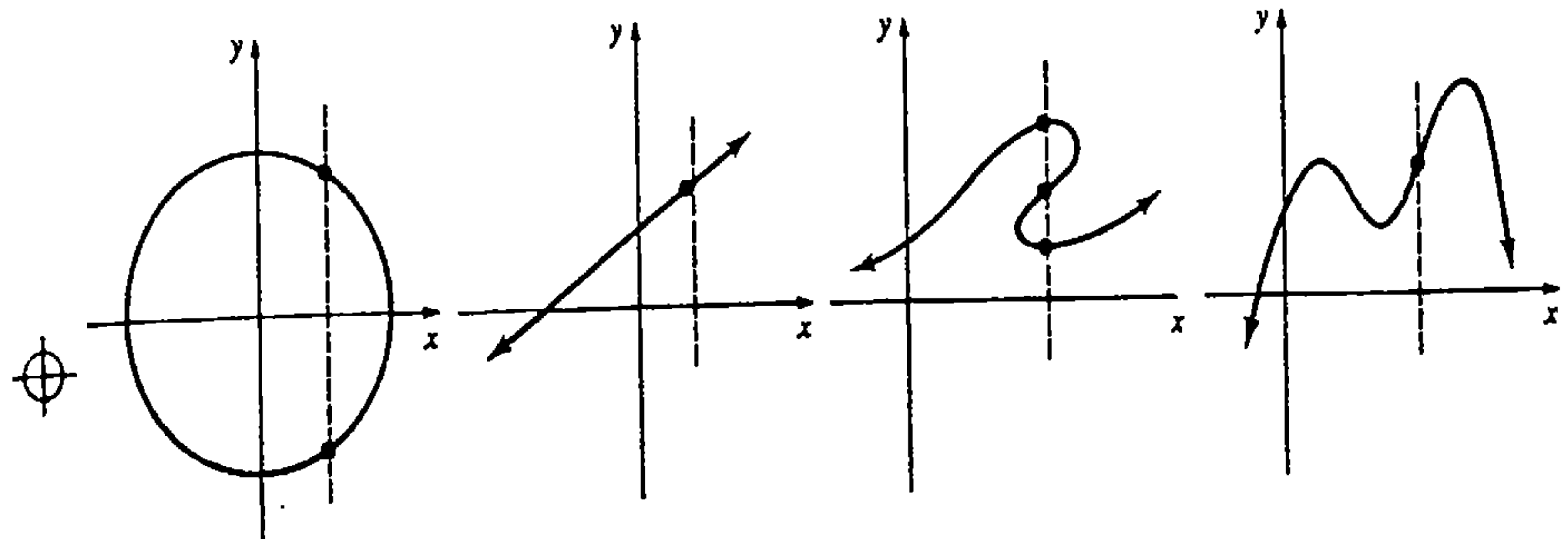
Figura 1.29

Gráficas

La gráfica de una función f es el conjunto de puntos

$$\{(x, y) \mid y = f(x), x \text{ en el dominio } f\}$$

en el plano cartesiano. Como consecuencia de la Definición 1.1, una función se caracteriza geométricamente por el hecho de que *toda* recta vertical que corta su gráfica lo hace *exactamente en un punto*. Véase la Figura 1.30.



(a) no es una función (b) es una función (c) no es una función (d) es una función

Figura 1.30

1.4.2 Tipos de funciones; algo más sobre gráficas

En este libro encontraremos muchos tipos diferentes de funciones.

Función polinomial

Recuérdese que en álgebra a una expresión como $x^5 + 10x^2 - 2x + 1$ se la denomina polinomio de grado 5. Por lo general, cuando $a_n \neq 0$

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, \tag{1.20}$$

en donde n es un entero no negativo, se dice que es una **función polinomial** (o polinómica) de grado n. Los coeficientes a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ son números reales. El dominio de toda función polinomial (1.20) es el conjunto R de números reales. Son funciones polinómicas de grado 0, 1 y 2, respectivamente,

$$f(x) = a_0, \quad \text{función constante,} \tag{1.21}$$

$$f(x) = a_1x + a_0, \quad a_1 \neq 0, \quad \text{función lineal, y} \tag{1.22}$$

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_2 \neq 0, \quad \text{función cuadrática} \tag{1.23}$$

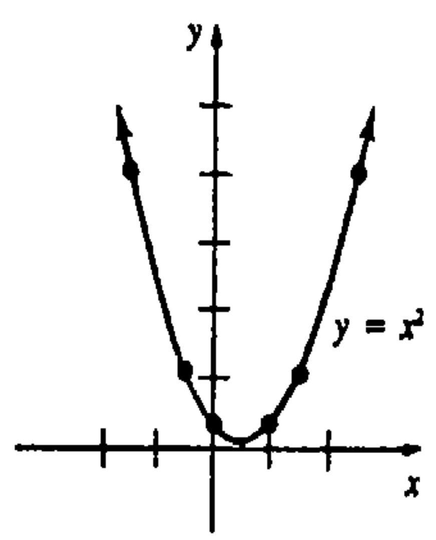
Al comparar (1.22) con la forma pendiente-intercepción de una recta, $y = mx + b$, y haciendo las identificaciones obvias, se observa que la gráfica de una función lineal es una *línea recta*. Por supuesto, la gráfica de una función constante es una *recta horizontal*. Como ya se sabe, la gráfica de una función cuadrática se llama **parábola**.

Ejemplo 6

Trazar las gráficas de las funciones polinomiales $f(x) = x^2$ y $f(x) = x^3$.

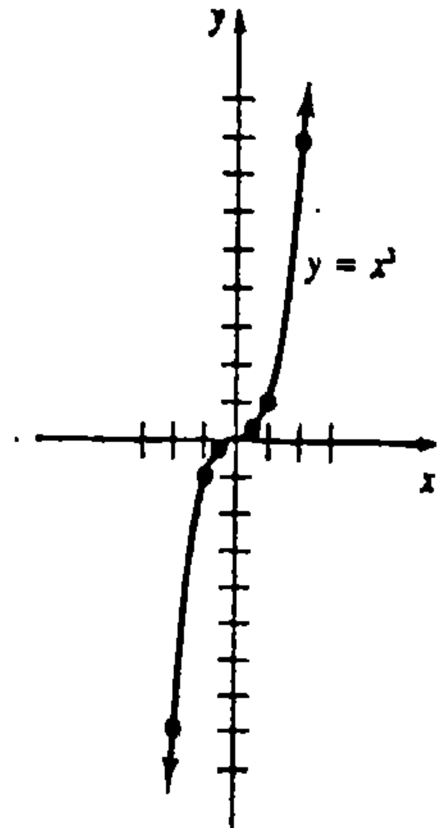
Solución En las Figuras 1.31(a) y 1.31(b) se han trazado los puntos que corresponden a los valores de x y $f(x)$, dados en las tablas adjuntas. Como el dominio de cada función es el conjunto de números reales, se unen los puntos con una línea de trazo continuo.

x	$f(x)$
-2	4
-1	1
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1	1
2	4



(a)

x	$f(x)$
-2	-8
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
1	1
2	8



(b)

Figura 1.31

La Figura 1.31(a) muestra la forma *típica* de una parábola. Sin embargo, la Figura 1.31(b) presenta una de las *varias gráficas posibles* de una función polinomial de tercer grado, o **cúbica.**

Función racional

Una función

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \text{en donde } P \text{ y } Q \text{ son funciones polinomiales,} \qquad (1.24)$$

se denomina **función racional.** El dominio de una función racional (1.24) consiste en el conjunto de todos los números reales excepto aquellos para los que $Q(x) = 0$.

Ejemplo 7

(*a*) $f(x) = \dfrac{x^3 + x + 5}{x^2 - 3x - 4}$ es una función racional. Como $x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4)$ y $(x + 1)(x - 4) = 0$ para -1 y 4, el dominio de f es el conjunto de todos los números reales excepto -1 y 4.

(*b*) $f(x) = x + x^{-1}$ *no* es una función polinomial debido a la potencia de exponente entero negativo -1. En efecto, al usar un común denominador, se observa que $f(x) = (x^2 + 1)/x$ es una función racional cuyo dominio es el conjunto de todos los números reales excepto 0.

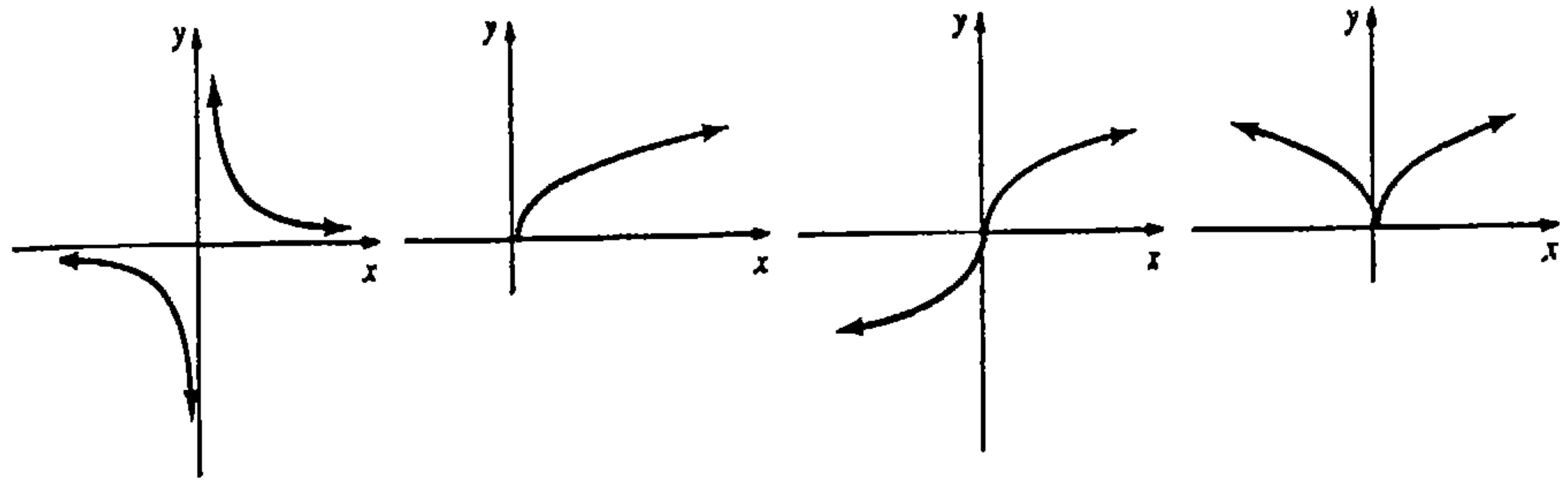
Función potencia

Una función

$$f(x) = kx^n, \quad \text{en donde } k \text{ es constante y } n \text{ un número real} \qquad (1.25)$$

se denomina **función potencia.** Aunque no se probará por ahora, (1.25) define una función para cualquier exponente numérico real n. Una potencia tal como $x^{\sqrt{2}}$ tiene efectivamente sentido, y la regla $y = x^{\sqrt{2}}$ da lugar a un valor simple de y para cada valor no negativo de x. El dominio de una función potencia depende de n; por ejemplo, cuando $k = 1$ y $n = \frac{1}{2}$, entonces $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$ es una función cuyo dominio ya se ha visto que es $[0, \infty)$. Cuando $k = 1$, los casos $n = 1, 2$ y 3 dan lugar a las funciones polinomiales simples lineal, cuadrática y cúbica $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, respectivamente. La Figura 1.32 muestra las gráficas de las funciones potencia que corresponden a $k = 1$ y $n = -1$, $n = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{3}$, $n = \frac{2}{3}$, respectivamente.

Cada una de las funciones dadas en el Ejemplo 5 es una función potencia.



(a) $y = \frac{1}{x}$ (b) $y = x^{1/2}$ (c) $y = x^{1/3}$ (d) $y = x^{2/3}$

Figura 1.32

Ejemplo 8

(*a*) La altura crítica h_{cr} de una columna maciza de radio r que soporta su propio peso, se define mediante la función potencia

$$h_{cr} = kr^{2/3}.$$

Para alturas mayores que h_{cr} la columna se pandea. En el caso de muchos árboles que se tienen en Norteamérica la constante k vale aproximadamente 35.

(*b*) El pulso o ritmo cardiaco p de un animal cuya masa es m está dado por

$$p = km^{-1/4}.$$

Así que un animal de gran tamaño como el elefante tendrá un pulso lento.

Funciones definidas por secciones o elementos

No es necesario que una función este definida por una sola fórmula. El siguiente es un ejemplo de **función definida por secciones.**

Ejemplo 9

Trazar la gráfica de la función definida por secciones o elementos

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x + 2, & x > 0. \end{cases}$$

Solución Nótese que f *no* representa tres funciones sino más bien, a una función cuyo dominio es el conjunto de números reales. Sin embargo, la gráfica de f consta de tres secciones obtenidas trazando, a su vez,

la gráfica de $y = -1$ para $x < 0$,

el punto $(0, 0)$, y

la gráfica de $y = x + 2$ para $x > 0$.

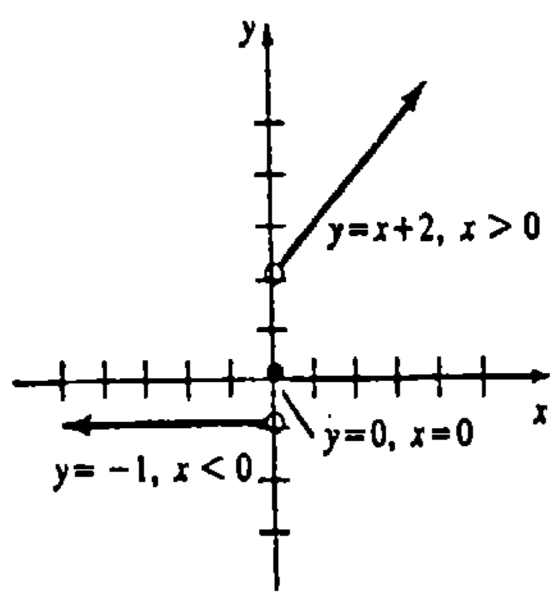


Figura 1.33

Intersecciones

Si la gráfica de una función $y = f(x)$ corta el eje y, entonces su **intercepción** y es $f(0)$. Las **intercepciones** x de la gráfica de f son las soluciones reales de la ecuación $f(x) = 0$. Los valores de x para los que $f(x) = 0$ se llaman también **ceros**, de la función f.

Ejemplo 10

(*a*) La gráfica de la función polinomial $f(x) = x^2 - x - 6$ tiene la intercepción y igual a $f(0) = -6$. También, $f(x) = 0$ cuando $x^2 - x - 6 = 0$ o $(x - 3)(x + 2) = 0$. En consecuencia, 3 y −2 son intercepciones x.

(*b*) La gráfica de la función racional $f(x) = (3x - 2)/x$ no tiene intercepciones y puesto que $f(0)$ no está definida (esto es, 0 no se encuentra en el dominio de f). Ahora bien, la única forma en la que una función racional $f(x) = P(x)/Q(x)$ puede ser nula es cuando $P(x) = 0$ y $Q(x) \neq 0$. Por consiguiente, para la función dada, $3x - 2 = 0$ implica que la intercepción x es $\frac{2}{3}$.

Simetría

La gráfica de una función puede tener a lo sumo dos de los tres tipos de simetría considerados en la Sección 1.2. Una función cuya gráfica es simétrica con respecto al eje y se denomina **función par**, mientras que una función cuya gráfica posee simetría con respecto al origen se llama **función impar**.* Los dos criterios siguientes para simetría son equivalentes a los criterios (*i*) y (*iii*) de la Sección 1.2 (página 13).

La gráfica de $y = f(x)$ es simétrica con respecto al eje y si $f(-x) = f(x)$. (1.26)

* ¿Por qué la gráfica de una función no puede ser simétrica con respecto al eje x?

La gráfica de $y = f(x)$ es simétrica con respecto al origen si $f(-x) = -f(x)$. (1.27)

Las gráficas de la Figura 1.34 ilustran cada concepto.

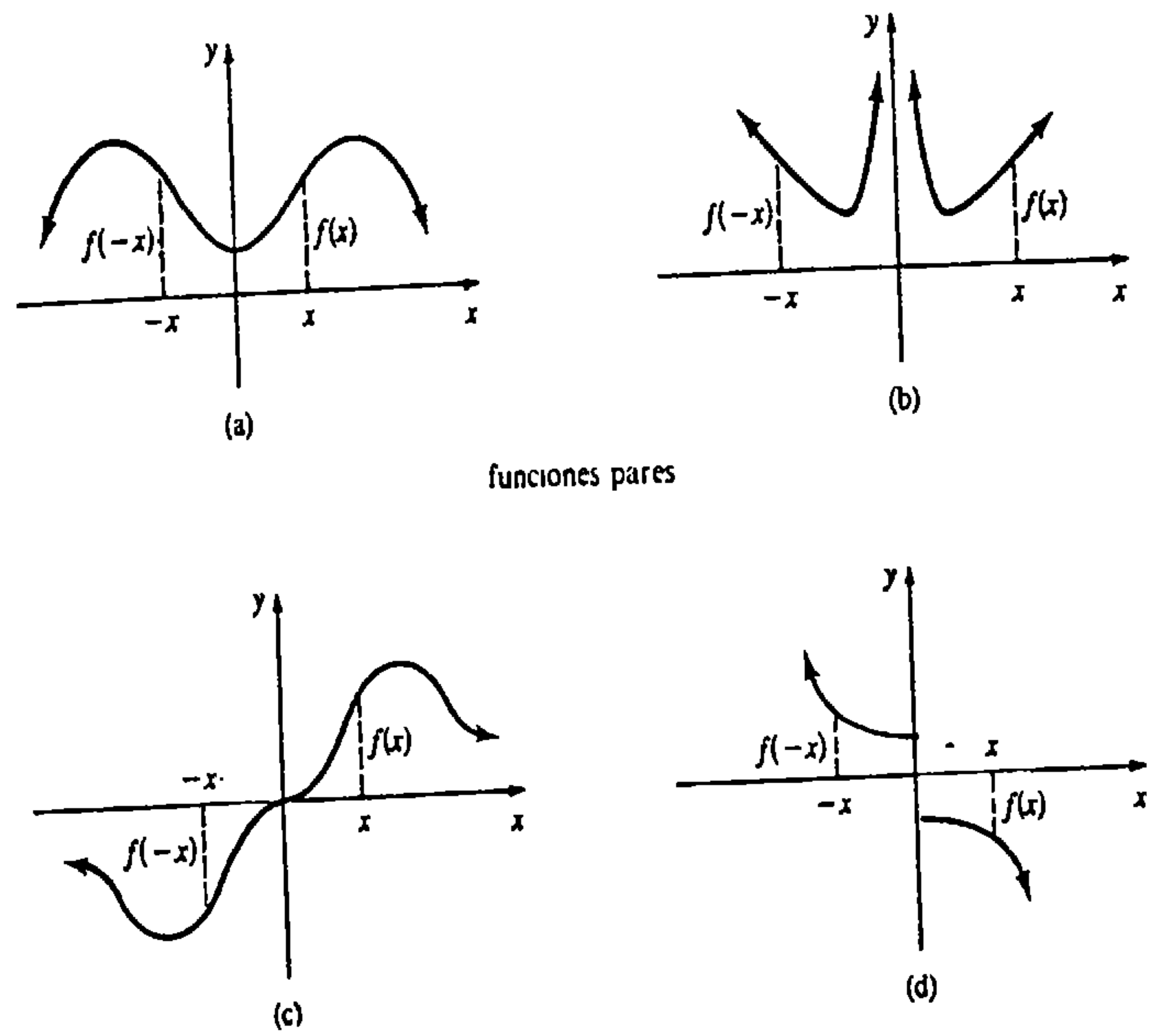


Figura 1.34

Ejemplo 11

Determinar si las funciones siguientes son pares o impares.

(*a*) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 1}$, (*b*) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3 + 1}$.

Solución

(*a*) $f(-x) = \dfrac{3(-x)}{(-x)^2 + 1} = -\dfrac{3x}{x^2 + 1} = -f(x)$.

La función es impar.

(*b*) $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x)^3 + 1} = \dfrac{x^2}{-x^3 + 1} \neq \pm f(x)$.

La función no es par ni impar.

Ejemplo 12

Trazar la gráfica de $f(x) = x^3 - 4x$.

Solución La intercepción y es $f(0) = 0$. Escribiendo $f(x) = x(x^2 - 4) = x(x + 2)(x - 2)$, se observa que las intercepciones x son -2, 0 y 2. Además,

$$f(-x) = (-x)^3 - 4(-x) = -x^3 + 4x = -f(x).$$

muestra que la gráfica de f es simétrica con respecto al origen; esto es, f es una función impar. Ahora bien, las tres intercepciones solas no señalan el paso de la gráfica. Pero situando $(1, f(1))$ o bien $(1, -3)$, por ejemplo, se sabe por simetría que $(-1, -f(1))$ o $(-1, 3)$ también está en la gráfica. Luego de unir los cinco puntos mostrados en la Figura 1.35(a) con una línea continua, es razonable pensar que la gráfica de f será semejante a la mostrada en la Figura 1.35(b).

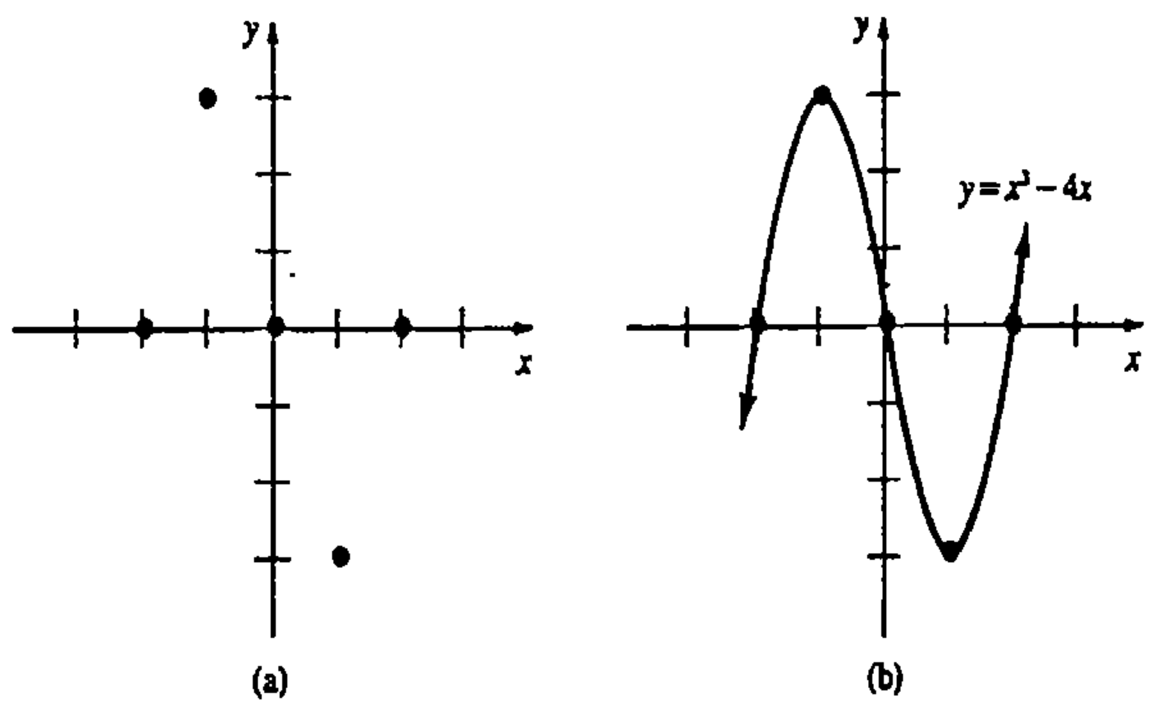


Figura 1.35

Obsérvese que las *funciones polinomiales* que contienen solamente *potencias pares* de x, son necesariamente *funciones pares*; las funciones polinomiales que constan totalmente de *potencias impares* de x, son *funciones impares*. Por consiguiente, se puede decir por simple inspección que las gráficas de $f(x) = x^2$, $f(x) = x^4$ y $f(x) = x^6 - x^4 + x^2 + 1$, son simétricas con respecto al eje y, mientras que las gráficas de $f(x) = x^3$, $f(x) = x^5$ y $f(x) = x^7 - x^3$ son simétricas con respecto al origen. La gráfica de una función polinomial como $f(x) = x^3 + 5x^2 - x + 6$, que contiene potencias pares e impares, no tiene ninguna de las dos simetrías. Debe procurarse no hacer generalizaciones a otros tipos de funciones; por ejemplo, podría decirse que la función valor absoluto $f(x) = |x|$ contiene solamente una potencia impar de x, pero su gráfica, que se muestra en la Figura 1.36, es simétrica con respecto al eje y. Desde luego, $f(x) = |x|$ no es una función polinomial.

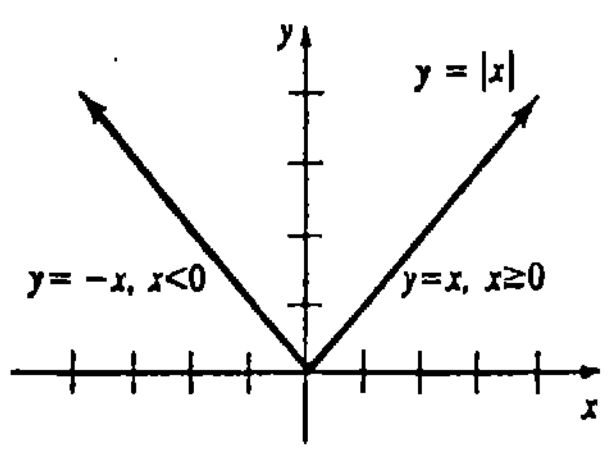


Figura 1.36

Ejemplo 13

Trazar la gráfica de $f(x) = \dfrac{3 - x}{x + 2}$.

Solución Primero se observa que la intercepción y es $f(0) = \frac{3}{2}$ y la intercepción x es 3. Luego, como $f(-x)$ no es igual a $f(x)$ ni a $-f(x)$, la gráfica de f no es simétrica con respecto al eje y o al origen. Cuando se trazan gráficas de funciones racionales, es importante tomar nota del dominio; en este caso, es evidente que el dominio de f es el conjunto de todos los números reales excepto -2. Como se muestra en la tabla adjunta, cuando x está cercano a -2, los valores del denominador $x + 2$ se encuentran cerca de cero. Por consiguiente, los valores funcionales correspondientes son grandes en valor absoluto. La gráfica de f se muestra en la Figura 1.37.

x	$f(x)$
-5	$-\frac{8}{3}$
-3	-6
-2.1	-51
-1.9	49
-1	4
0	$\frac{3}{2}$
1	$\frac{2}{3}$
3	0

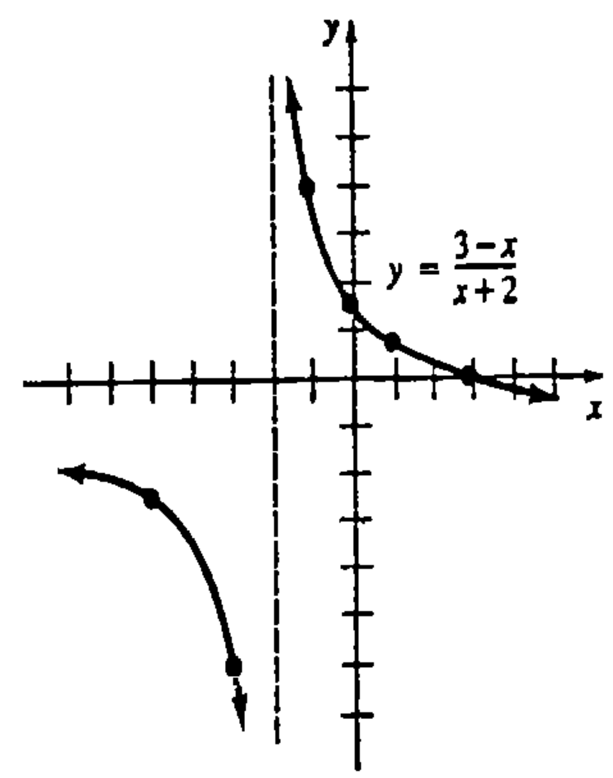


Figura 1.37

En la Sección 2.3 se examinarán con mayor detalle las gráficas de las funciones racionales.

Observación

En este libro se utilizarán puntas de flecha en una gráfica para denotar que no sigue nada inesperado; esto es, que la gráfica no se modifica notablemente cuando la curva se prolonga en la dirección indicada. Pero, ¿cómo sabemos, sin tener que realizar la penosa tarea de situar cada vez más puntos, que una gráfica como la que se muestra en la Figura 1.35 no es en realidad como la de la Figura 1.38? En el Capítulo 6 se verá que una de las múltiples capacidades del Cálculo permite dibujar con mucha precisión gráficas de funciones con un mínimo de trabajo y de ubicación de puntos. Mediante el Cálculo es asunto sencillo demostrar que la gráfica de $f(x) = x^3 - 4x$ no puede ser la mostrada en la Figura 1.38.

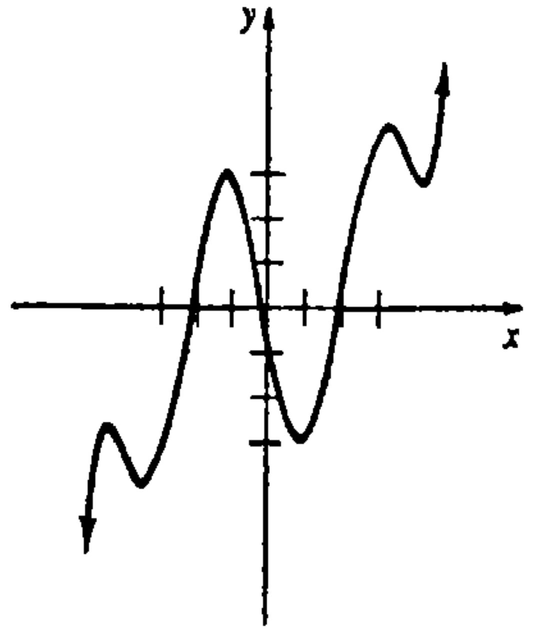


Figura 1.38

Ejercicios 1.4

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 966.

[1.4.1]

1. Dado que $f(x) = x^2 - x$, encuentre $f(-3)$, $f(1)$, $f(\sqrt{3})$ y $f(1 + a)$.

2. Dado que $f(x) = \sqrt{x + 4}$, halle $f(-3)$, $f(0)$, $f(1)$ y $f(5)$.

En los Problemas 3-6 encuentre $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$ y simplifique.

3. $f(x) = 6x - 9$ 4. $f(x) = x^2 + 2x - 4$

5. $f(x) = x^3$ 6. $f(x) = \dfrac{5}{x}$

En los Problemas 7-20 determine el dominio de la función dada.

7. $f(x) = \sqrt{x + 1}$ 8. $f(x) = x\sqrt{2x - 3}$

9. $f(x) = \dfrac{1 + x}{\sqrt{x}}$

10. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x - 2}$

11. $g(x) = \sqrt{25 - x^2}$

12. $g(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$

13. $F(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$ 14. $G(x) = \dfrac{1}{x^2 + x - 6}$

15. $Q(x) = \dfrac{x}{2 - 1/x}$

16. $H(x) = 7x^3 - x^{-2} + 8$

17. $f(x) = x^{3/2}$ 18. $f(x) = 1 + x^{2/3}$

19. $f(x) = \begin{cases} x, & x < 2 \\ x^2, & 2 \le x < 3 \end{cases}$

20. $g(x) = \begin{cases} x + 1, & x \le 0 \\ x - 6, & x \ge 1 \end{cases}$

En los Problemas 21-24 determine el contradominio o ámbito de la función dada.

21. $f(x) = 1 + x^2$ 22. $g(x) = (2x + 1)^2$

23. $g(x) = 4 - \sqrt{x}$ 24. $f(x) = 3 + \sqrt{4 - x^2}$

En los Problemas 25-28 vea si la gráfica dada es la de una función.

25.

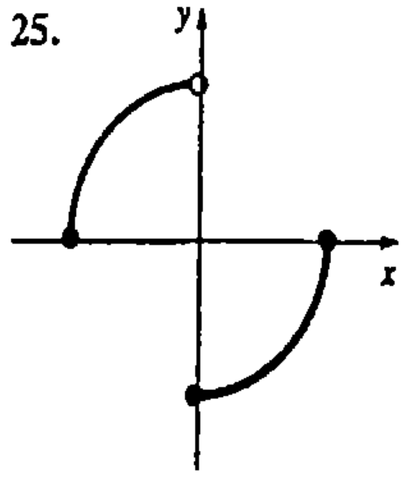


Figura 1 39

26.

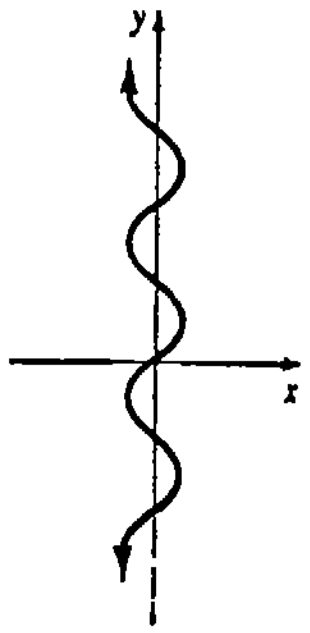


Figura 1.40

27.

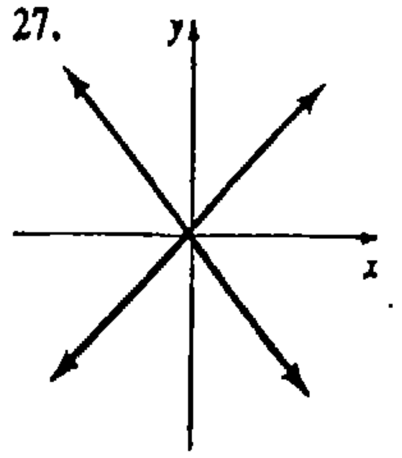


Figura 1 41

28.

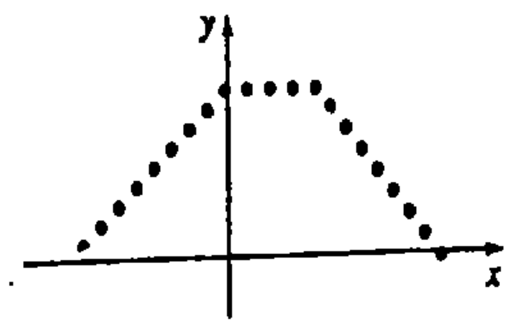


Figura 1.42

[1.4.2]

En los Problemas 29 y 30 encuentre

(a) $f(-2)$ (b) $f(0)$

(c) $f(0.9)$ (d) $f(1 + h)$, $h > 0$

para la función dada.

29. $f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \le 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$

30. $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ 3, & 0 \le x < 1 \\ 2x - 1, & x \ge 1 \end{cases}$

31. ¿Para qué valores de x es

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 0 \\ x^2, & x \ge 0 \end{cases}$$

igual a 25 y a -64?

32. Determine si los números -1 y 2 están en el ámbito (o "rango") de la función racional $f(x) = (2x - 1)/(x + 4)$.

En los Problemas 33-40 determine si la función dada es par, impar o ninguna de las dos.

33. $f(x) = x^6 - x^2 + 5$

34. $g(x) = (x + 2)^2$

35. $g(x) = x^3 - 1$

36. $f(x) = 4x^5 + 8x^3$

37. $f(x) = \dfrac{1}{x(x^2 + 1)}$

38. $f(x) = x^{2/3} + 4$

39. $F(x) = \dfrac{|x|}{x}$

40. $G(x) = x^2\sqrt{x^6 + 9}$

En los Problemas 41-56 trace la gráfica de la función dada.

41. $f(x) = -x^2$

42. $f(x) = x^2 + 1$

43. $f(x) = (x + 1)^2$

44. $f(x) = 1 - x^2$

45. $f(x) = x^3 + 2$

46. $f(x) = -x^3$

47. $f(x) = (x + 1)(x - 3)$

48. $f(x) = x^3 - x$

49. $f(x) = x^4$

50. $f(x) = x^5$

51. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

52. $f(x) = x^{-1/2}$

53. $f(x) = \begin{cases} 3, & x \le 1 \\ -3, & x > 1 \end{cases}$

54. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x, & x \ge 0 \end{cases}$

55. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < -1 \\ 1, & -1 \le x \le 1 \\ 2 - x^2, & x > 1 \end{cases}$

56. $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 0 \\ 2 - x, & 0 \le x < 2 \\ x - 2, & x \ge 2 \end{cases}$

57. Exprese el perímetro P de un cuadrado en función de su área A.

58. Exprese el área A de un círculo en función de su perímetro C.

59. Exprese el área A de un triángulo equilátero en función de la longitud s de uno de sus lados.

60. En el Problema 59 exprese A en función de la altura h del triángulo.

61. Exprese el volumen V de un cubo en función del área A de su base.

62. De una hoja cuadrada de cartón de 40 cm por lado se ha de hacer una caja sin tapa, recortando un cuadrado en cada una de las esquinas y luego doblando los bordes hacia arriba. Exprese el área A de la base de la caja en función de la longitud x del lado del cuadrado recortado.

63. El automóvil A pasa por el punto O hacia el este con una velocidad constante de 40 mph; el automóvil B pasa por el mismo punto una hora más tarde hacia el norte a una velocidad constante de 60 mph. Exprese la distancia d entre los automóviles en función del

tiempo t, si t se mide a partir del momento en que el automóvil B pasa por O. Véase la Figura 1.43.

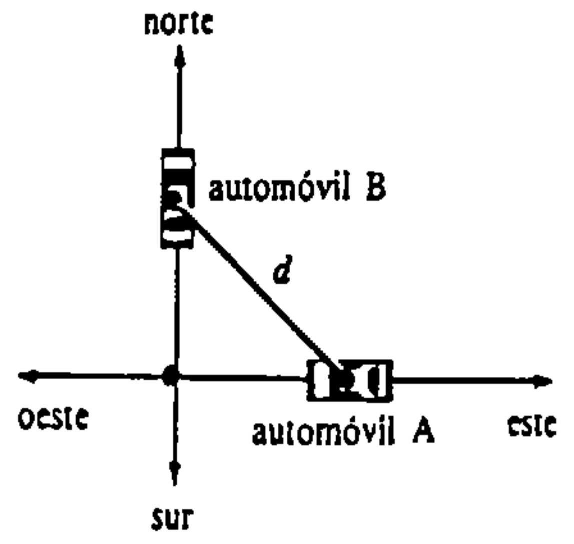


Figura 1.43

64. La piscina mostrada en la Figura 1.44 tiene 3 pie de profundidad mínima y 8 pie de profundidad máxima, 40 pie de largo, 30 pie de ancho, y el fondo es un plano inclinado. Exprese el volumen V del agua contenida en la piscina en función de la altura h del nivel del agua desde el extremo más profundo. (*Sugerencia: V* será una función definida por secciones.)

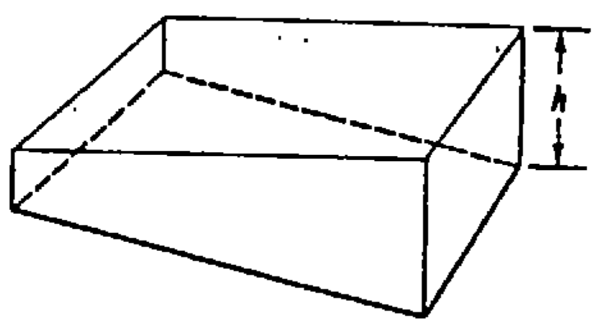


Figura 1.44

65. La Comisión Internacional para la Caza de Ballenas ha decretado que el peso W (en toneladas largas, de 2240 libras) de una ballena azul adulta se determina por la función lineal $W = (3.51)L - 192$, en donde L es la longitud y $L \geq 70$ pie.* Obtenga el peso de una ballena azul de 90 pie de longitud.

66. La longitud esperada (en centímetros) de un feto humano se determina por la función lineal $L = 1.53t - 6.7$, en donde $t \geq 12$ semanas. ¿Cuál es la longitud esperada de un feto de 36 semanas? ¿Cuáles son los incrementos semanales de la longitud? ¿Cuándo alcanza un feto una longitud de 1 pie (30.48 cm)?

67. La relación funcional entre grados Celsius (T_c) y grados Fahrenheit (T_f) es lineal. Exprese T_f en función de T_c si (0°C, 32°F) y (60°C, 140°F) están en la gráfica de T_f. Demuestre que 100°C es equivalente al punto de ebullición en escala Fahrenheit de 212°F.

68. La relación funcional entre grados Celsius T_c y grados Kelvin (o kelvins) T_k es lineal. Exprese T_k en función de T_c dado que (°C, 273 K) y (27°C, 300 K) se encuentran en la gráfica de T_k. El cero absoluto corresponde a 0 K. ¿A cuánto equivale 0 K en grados Celsius y en grados Fahrenheit? (Véase el Problema 67.)

69. Se lanza hacia arriba una pelota desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 96 pie por segundo. La altura de la pelota medida desde el suelo se determina por la función cuadrática $s(t) = -16t^2 + 96t$. ¿En qué instantes se encuentra la pelota en el suelo? Trace la gráfica de s sobre el intervalo de tiempo para el que $s(t) \geq 0$.

70. En el Problema 69 ¿en qué instantes se encuentra la pelota a 80 pie sobre el suelo? ¿A qué altura llega?

71. A menudo se supone que el peso W de un cuerpo está en función de su longitud L. Este supuesto se expresa mediante la función potencia $W = kL^3$, en donde k es una constante. Para cierto lagarto $k = 400$ g/m³. Determine el peso de un saurio de 0.5 m de largo.

Problemas para calculadora

72. Una relación entre el peso W y la longitud L de una ballena macho se expresa por la función potencia

$$W = 0.000137\,L^{3.18},$$

en donde W se mide en toneladas y L en pies. Determine el peso de una ballena macho de 100 pie de largo.

Problemas diversos

73. Toda función f puede escribirse como $f = f_e + f_o$, en donde $f_e = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ y $f_o = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$. Demuestre que f_e es una función par y f_o es una función impar.

Si x varía de x_1 a x_2, el valor del cambio o variación es $\Delta x = x_2 - x_1$ y el cambio correspondiente en el valor funcional es $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$. En los Problemas 74 y 75 encuentre los valores de Δx y Δy.

74. $f(x) = x^2 + 4x$, $x_1 = 4$, $x_2 = 7$

75. $f(x) = \sqrt{x+1}$, $x_1 = 3$, $x_2 = 8$

* Para $0 < L < 70$ las ballenas no son adultas aún y no se emplea la fórmula. Una ballena azul mide al nacer aproximadamente 24 pie (7.2 m) de largo.

1.5 Combinación de funciones

Suma, diferencia, producto y cociente

Una función f puede combinarse, con otra función g mediante operaciones aritméticas para formar otras funciones. La suma, $f + g$; la diferencia, $f - g$; el producto, fg, y el cociente, f/g, se definen como sigue.

DEFINICIÓN 1.2

Sean f y g funciones.

(*i*) Suma: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

(*ii*) Diferencia: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

(*iii*) Producto: $(fg)(x) = f(x)g(x)$

(*iv*) Cociente: $(f/g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ □

El dominio de $f + g$, $f - g$ y fg es la intersección del dominio de f con el dominio de g. Véase la Figura 1.45. El dominio del cociente f/g es la intersección de los dominios de f y g *sin* los números para los que $g(x) = 0$.

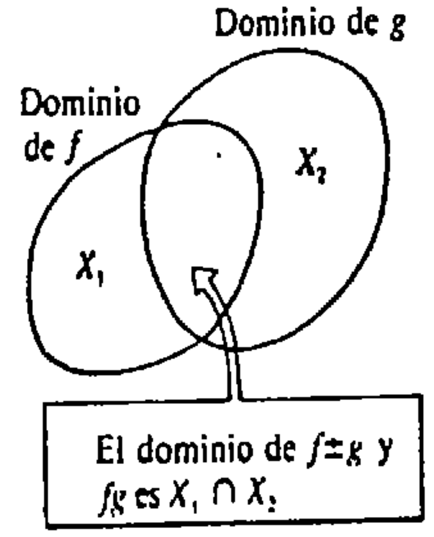


Figura 1.45

Ejemplo 1

Si $f(x) = 2x^2 - 5$ y $g(x) = 3x + 4$, encuentre $f + g$, $f - g$, fg y f/g.

Solución

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (2x^2 - 5) + (3x + 4) = 2x^2 + 3x - 1$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (2x^2 - 5) - (3x + 4) = 2x^2 - 3x - 9$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (2x^2 - 5)(3x + 4) = 6x^3 + 8x^2 - 15x - 20$$
$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x^2 - 5}{3x + 4}, \quad x \neq -\frac{4}{3}.$$

Ejemplo 2

Si $f(x) = \sqrt{x-1}$ y $g(x) = \sqrt{2-x}$, encuentre los dominios de fg y f/g.

Solución Los dominios de f y g son $[1, \infty)$ y $(-\infty, 2]$, respectivamente. Por lo tanto, el dominio del producto

$$(fg)(x) = \sqrt{x-1}\,\sqrt{2-x} = \sqrt{(x-1)(2-x)}$$

es la intersección de los dominios: $[1, 2]$. Sin embargo, el dominio del cociente

$$(f/g)(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2-x}} = \sqrt{\frac{x-1}{2-x}}$$

es $[1, 2)$ puesto que $g(x) = 0$ en $x = 2$.

Si f es una función constante —por ejemplo, $f = c$—, entonces de la Definición 1.2(*iii*) resulta que la función cg se define por

$$(cg)(x) = c \cdot g(x).$$

El dominio de cg es el dominio de g; por ejemplo, si $g(x) = 4x^3 - 3x$, entonces la función $5g$ es simplemente $(5g)(x) = 20x^3 - 15x$.

Composición

Una forma diferente de combinación de funciones es por **composición**.

DEFINICIÓN 1.3

Sean f y g funciones.

(*i*) La composición de f y g, que se simboliza $f \circ g$, es la función

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

(*ii*) La composición de g y f, que se expresa $g \circ f$, es la función

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)). \qquad \square$$

Una función compuesta tal como $f \circ g$ algunas veces se denomina "función de función". Se sobreentiende que los números representados por $g(x)$, en la parte (*i*) de la Definición 1.3, deben estar en el dominio de f. En otras palabras, el dominio de $f \circ g$ es aquel subconjunto del dominio de g para el cual $g(x)$ está en el dominio de f. Véase la Figura 1.46. Desde luego, en la parte (*ii*) de la Definición 1.3 $f(x)$ debe estar en el dominio de g.

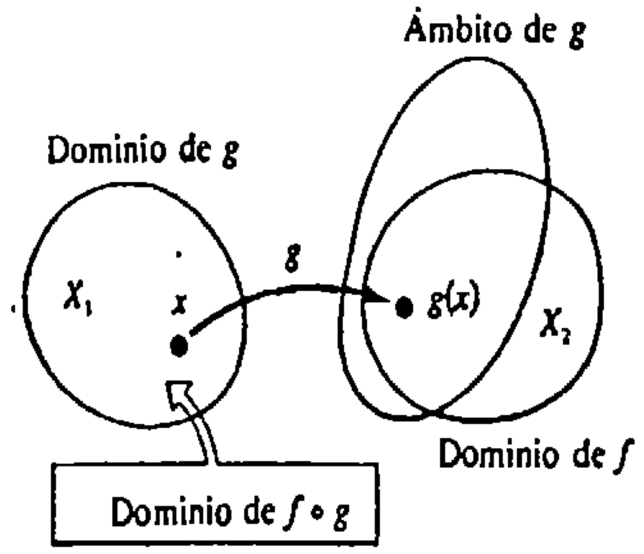


Figura 1.46

Ejemplo 3

Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2 + 1$, encuentre $f \circ g$ y $g \circ f$.

Solución

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1.$$

y

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = (x^2)^2 + 1 = x^4 + 1.$$

El ejemplo anterior muestra que, en general, $f \circ g \neq g \circ f$.

Ejemplo 4

Si $f(x) = 3x - \sqrt{x}$ y $g(x) = 2x + 1$, encuentre el dominio de $f \circ g$.

Solución

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 1) = 3(2x + 1) - \sqrt{2x+1} = 6x + 3 - \sqrt{2x+1}.$$

Para que $f \circ g$ esté definida, debe requerirse que $g(x) \geq 0$ o bien $2x + 1 \geq 0$; esto es, el dominio de $f \circ g$ está dado por $[-\frac{1}{2}, \infty)$.

Ejemplo 5

Expresar $F(x) = \sqrt{2x^2 + 5}$ como una composición $f \circ g$ de dos funciones f y g.

Solución Si se identifica $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 2x^2 + 5$, entonces

$$F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{2x^2 + 5}.$$

Solución alternativa Si se escoge $f(x) = \sqrt{2x+5}$ y $g(x) = x^2$, entonces la función F también puede expresarse como

$$F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{2g(x)+5} = \sqrt{2x^2+5}.$$

Gráficas desplazadas

Si c es una constante, las gráficas de la suma $f(x) + c$, de la diferencia $f(x) - c$ y de las composiciones $f(x + c)$ y $f(x - c)$ pueden obtenerse desplazando o trasladando la gráfica de f. Resumamos los resultados para $c > 0$.

Función	*Gráficas*
$y = f(x) + c$	Gráfica de $y = f(x)$ desplazada c unidades hacia arriba
$y = f(x) - c$	Gráfica de $y = f(x)$ desplazada c unidades hacia abajo
$y = f(x + c)$	Gráfica de $y = f(x)$ trasladada c unidades a la izquierda
$y = f(x - c)$	Gráfica de $y = f(x)$ trasladada c unidades a la derecha

Ejemplo 6

Las gráficas de $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - 1$, $y = (x + 1)^2$ y $y = (x-1)^2$ presentados en la Figura 1.47 se obtienen de la gráfica de $f(x) = x^2$, que se muestra en la Figura 1.31, trasladándola una unidad: hacia arriba, hacia abajo, a la izquierda y a la derecha, respectivamente.

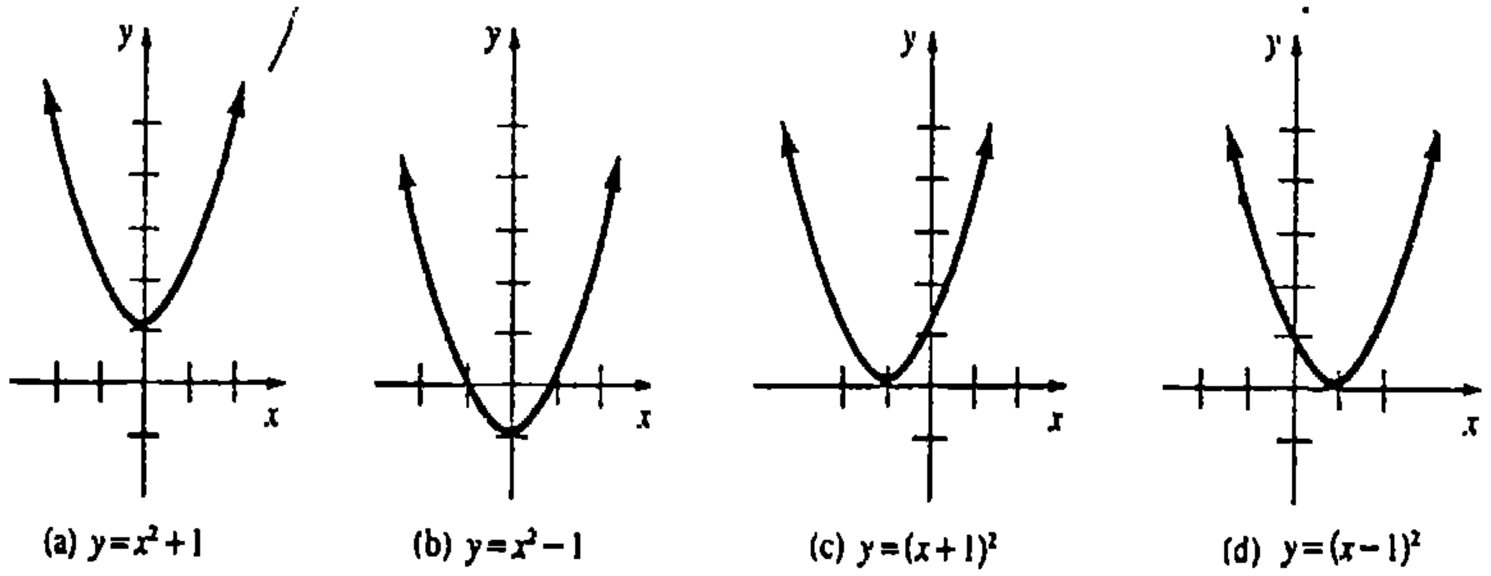


Figura 1.47

La gráfica de una función $y = f(x \pm c_1) \pm c_2$, $c_1 > 0$ y $c_2 > 0$, combina tanto un traslado vertical (hacia arriba o hacia abajo) como una horizontal (a la izquierda o a la derecha); por ejemplo, la gráfica de $y = f(x - c_1) + c_2$ es la gráfica de f desplazada c_1, unidades a la derecha y luego c_2 unidades hacia arriba. Para $c > 0$ la gráfica del producto $y = cf(x)$ conserva, más o menos, la misma forma que la gráfica de f. Sin embargo, la gráfica de $y = -cf(x)$, $c > 0$, es la gráfica de $y = cf(x)$ reflejada en el eje x; esto es, la gráfica *invierte su posición*.

Ejemplo 7

(*a*) La gráfica de $y = (x + 1)^2 - 1$, que se muestra en la Figura 1.48 (a), es la gráfica de $f(x) = x^2$ desplazada una unidad a la izquierda y luego una unidad hacia abajo.

(*b*) En la Figura 1.48(b) se compara la gráfica de $y = -\frac{1}{4}x^2$ con las gráficas de $f(x) = x^2$ y $y = \frac{1}{4}f(x) = \frac{1}{4}x^2$.

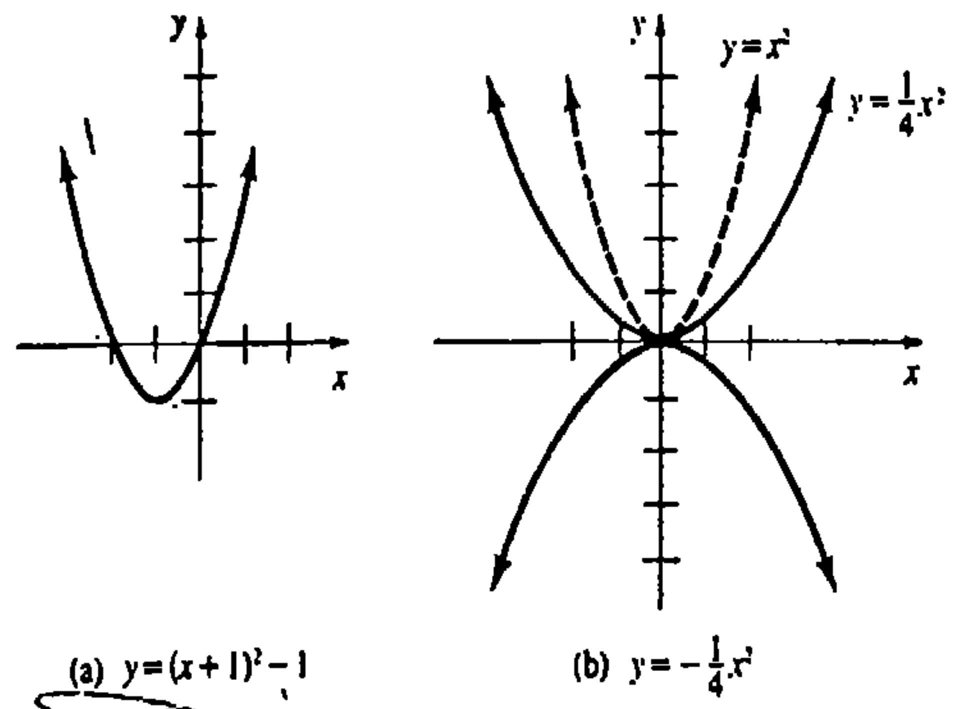


Figura 1.48

Ejercicios 1.5

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 966.

En los Problemas 1-10 encuentre $f + g$, $f - g$, fg y f/g.

1. $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = -4x + 8$
2. $f(x) = 5x^2$, $g(x) = 7x - 9$
3. $f(x) = 3x^2$, $g(x) = 4x^3$
4. $f(x) = x^2 - 3x$, $g(x) = x + 1$
5. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$
6. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$, $g(x) = \dfrac{x-3}{4x+2}$
7. $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $g(x) = x^2 + 3x - 4$
8. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$
9. $f(x) = x^3 + x^2$, $g(x) = 4x^3 - 4x^2$
10. $f(x) = \sqrt{x+3}$, $g(x) = \sqrt{x-1}$

En los Problemas 11-20 determine $f \circ g$ y $g \circ f$.

11. $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = x + 6$
12. $f(x) = 2x + 10$, $g(x) = \frac{1}{2}x - 5$
13. $f(x) = 4x + 1$, $g(x) = x^2$
14. $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3 + x^2$
15. $f(x) = \dfrac{3}{x}$, $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$
16. $f(x) = 2x + 4$, $g(x) = \dfrac{1}{2x+4}$
17. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$, $g(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$
18. $f(x) = 6$, $g(x) = x^3 + 9$
19. $f(x) = x^3 - 5$, $g(x) = \sqrt[3]{x+5}$
20. $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$

En los Problemas 21-24 encuentre ff, $f \circ (2f)$, $f \circ (1/f)$ y $(1/f) \circ f$.

21. $f(x) = 2x^3$
22. $f(x) = x^2 + 1$
23. $f(x) = \dfrac{2}{x^2}$
24. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

En los Problemas 25-28 halle $f(g(0))$, $f(g(\frac{1}{2}))$, $g(f(-2))$ y $g(f(g(1)))$.

25. $f(x) = 2x - 2,\ g(x) = 4x$

26. $f(x) = 3x + 1,\ g(x) = x^2 + 1$

27. $f(x) = x^2 + 1,\ g(x) = 2x^4 - 4x^2 + 3$

28. $f(x) = \dfrac{x}{x+1},\ g(x) = \dfrac{1}{2x+1}$

En los Problemas 29-32 encuentre los dominios de fg, f/g y $f \circ g$.

29. $f(x) = \sqrt{x},\ g(x) = \sqrt{25 - x^2}$

30. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x - 12},\ g(x) = x^2$

31. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x},\ g(x) = x^2 - 1$

32. $f(x) = \sqrt{x-1},\ g(x) = x^2 + 1$

En los Problemas 33-36 exprese las funciones dadas como una composición $f \circ g$ de dos funciones f y g.

33. $F(x) = 2x^4 - x^2$

34. $F(x) = \dfrac{1}{x^2 + 9}$

35. $F(x) = (x - 1)^2 + 6\sqrt{x - 1}$

36. $F(x) = 5 + |4x - 1|$

La composición de tres funciones f, g y h es la función

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))).$$

En los Problemas 37 y 38 encuentre $f \circ g \circ h$.

37. $f(x) = x^2 + 6,\ g(x) = 2x + 1,$
$h(x) = 3x - 2$

38. $f(x) = \sqrt{x - 5},\ g(x) = x^2 + 2,$
$h(x) = \sqrt{2x + 1}$

En los Problemas 39 y 40 exprese la función dada como una composición $f \circ g \circ h$ de tres funciones f, g y h.

39. $F(x) = \sqrt{x^3 + 2}$

40. $F(x) = \left(\dfrac{x^2}{x^2 + 1}\right)^{2/3}$

En los Problemas 41 y 42 encuentre una función g.

41. $f(x) = 2x - 5,\ (f \circ g)(x) = -4x + 13$

42. $f(x) = \sqrt{2x + 6},\ (f \circ g)(x) = 4x^2$

En los Problemas 43-46 cada gráfica es una gráfica desplazada o trasladada de la función que se indica. Encuentre una ecuación de la gráfica.

43. $y = \sqrt{x}$;

44. $y = |x|$;

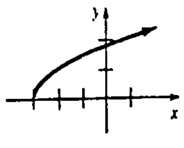


Figura 1.49

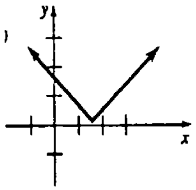


Figura 1.50

45. $y = -x^2$;

46. $y = x^3$;

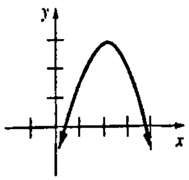


Figura 1.51

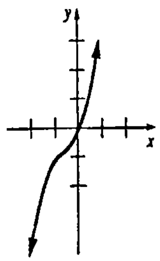


Figura 1.52

En los Problemas 47 y 48, completando el cuadrado, exprese la función dada en la forma $y = f(x \pm c_1) \pm c_2$, en donde $f(x) = x^2$. Trace las gráficas.

47. $y = x^2 + 4x$

48. $y = x^2 - 6x + 10$

Problemas diversos

49. Determine si $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$ es verdadero o falso.

50. Supóngase que $[-1, 1]$ es el dominio de $f(x) = x^2$. ¿Cuál es el dominio de $y = f(x - 2)$?

51. Dado que f y g son impares, determine si cada una de las funciones $f + g$, $f - g$, fg y f/g es par, impar o de ninguna de las dos clases.

52. Dado que f es impar y g es par, determine si cada una de las funciones $f + g$, $f - g$, fg y f/g es par, impar o ninguna de las dos.

En los Problemas 53 y 54 sea U la función definida por

$$U(x - a) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < a \\ 1, & x \ge a. \end{cases}$$

53. Trace las gráficas de las funciones:
(a) $y = U(x - 1)$,
(b) $y = U(x - 1) + U(x - 2)$, y
(c) $y = 2 - 3U(x - 2) + U(x - 3)$.

54. Dado que $f(x) = x^2$, compare las gráficas de $y = f(x - 3)$ y $y = f(x - 3)U(x - 3)$.

55. Suponga que f y g son las funciones definidas por secciones

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x + 2, & x \ge 0 \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x \le -1 \\ x - 5, & x > -1. \end{cases}$$

Encuentre $f + g$ y fg.

1.6 Funciones trigonométricas

Coseno y seno

Debe recordarse que en trigonometría la función coseno y la función seno de un ángulo t, que se denotan por $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$, respectivamente, pueden interpretarse de dos maneras:

(*i*) como las coordenadas x y y de un punto en un círculo unitario, como se muestra en la Figura 1.53 (a), o

(*ii*) como el cociente de las longitudes de lados de un triángulo rectángulo, como se muestra en la Figura 1.53 (*b*):

$$\cos t = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}, \qquad \operatorname{sen} t = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}.$$

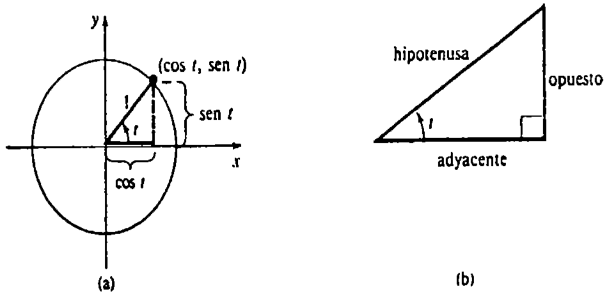


Figura 1.53

En la siguiente exposición se tratará la primera interpretación.

Medidas de ángulos

Un ángulo se mide en **grados** o en **radianes** como se aprecia en la figura 1.54 (a) el ángulo de un radián intercepta un arco de una unidad de longitud en una circunferencia de radio unitario. La semicircunferencia corresponde a un ángulo de π radianes, en donde π denota el número irracional 3.1415926 ... La equivalencia

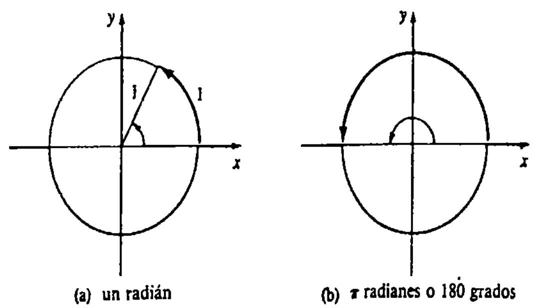


Figura 1.54

$$\pi \text{ radianes} = 180 \text{ grados } (180°)$$

puede usarse en las formas

$$1 \text{ radián} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \quad \text{o bien} \quad 1° = \frac{\pi}{180} \text{ radianes}$$

para realizar conversiones de una medida a otra. Por una división se obtiene la aproximación 1 rad $\approx$ 57.296°.

Ejemplo 1

(*a*) $\pi/9 \text{ rad} = (\pi/9)(180/\pi) = 20°$

(*b*) $15° = 15(\pi/180) = \pi/12 \text{ rad}$.

Puesto que en el estudio del Cálculo se utiliza casi exclusivamente la medida en radianes es recomendable que el lector se familiarice con el método para obtener los equivalentes en radianes de los ángulos que aparecen con frecuencia, como son 30°, 45°, 90°, 120°, etcétera. Algunos de estos ángulos se presentan en la tabla siguiente.

Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Terminología

Un ángulo central t en un círculo unitario se encuentra en posición normal si su vértice está en el origen y su lado inicial coincide con el eje x positivo. Los ángulos que se miden en dirección contraria a la de las manecillas del reloj tienen medida positiva, mientras que los ángulos medidos en el sentido de las manecillas, son negativos. Dos ángulos en posición normal son coterminales si tienen el mismo lado terminal. En la Figura 1.55 los ángulos coterminales $\pi/4$ y $-7\pi/4$ determinan el mismo punto en el círculo unitario.

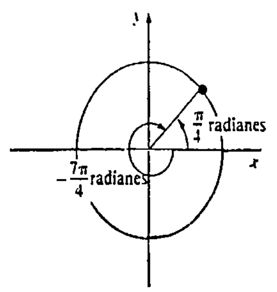


Figura 1.55

Funciones trigonométricas adicionales

Otras cuatro funciones trigonométricas se definen en términos de sen t y cos t:

$$\text{tangente: } \tan t = \frac{\text{sen } t}{\cos t}, \quad \text{cotangente: } \cot = \frac{\cos t}{\text{sen } t} = \frac{1}{\tan t}$$

$$\text{secante: } \sec t = \frac{1}{\cos t}, \quad \text{cosecante: } \csc t = \frac{1}{\text{sen } t}.$$

Valores numéricos

Utilizando la Figura 1.56 resultan evidentes los siguientes valores numéricos de sen t y cos t.

$$\text{sen } 0 = 0 \qquad \cos 0 = 1$$
$$\text{sen } \frac{\pi}{2} = 1 \qquad \cos \frac{\pi}{2} = 0$$
$$\text{sen } \pi = 0 \qquad \cos \pi = -1$$
$$\text{sen } \frac{3\pi}{2} = -1 \qquad \cos \frac{3\pi}{2} = 0$$
$$\text{sen } 2\pi = 0 \qquad \cos 2\pi = 1$$

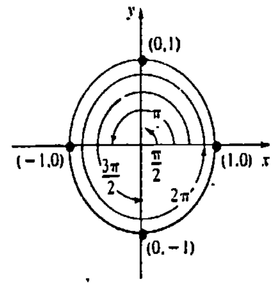


Figura 1.56

En este libro se usarán algunos valores adicionales de sen t y cos t que aparecen en la tabla siguiente. Estos valores aparecen con tanta frecuencia que merecen ser memorizados.

t (*radianes*)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen t	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos t	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1

Los valores de las otras funciones trigonométricas pueden obtenerse a partir de los valores del seno y del coseno.

Ejemplo 2

(*a*) $\tan\frac{\pi}{3} = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}.$

(*b*) $\sec\pi = \dfrac{1}{\cos\pi} = -1.$

(*c*) $\cot 2\pi$ no está definida.

La Figura 1.57 muestra los signos algebraicos de sen t y cos t en los cuatro cuadrantes del plano cartesiano. Con la ayuda de esta figura se puede extender la tabla anterior para ángulos con radianes tales como $7\pi/6$, $5\pi/3$, $7\pi/4$, etcétera.

Algunas identidades básicas

Como los ángulos t y $t + 2\pi$ son coterminales, los valores de las funciones seno y coseno se repiten cada 2π rad:

$$\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(t + 2\pi), \quad \cos t = \cos(t + 2\pi). \tag{1.28}$$

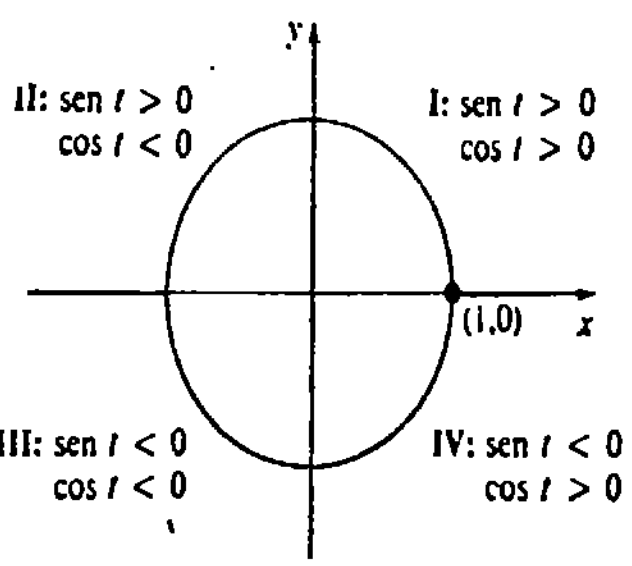


Figura 1.57

En virtud de las identidades (1.28), se dice que sen t y cos t son periódicas con periodo 2π. Puede demostrarse que tan t es periódica con periodo π:

$$\tan t = \tan(t + \pi). \tag{1.29}$$

Además, las funciones coseno y seno están relacionadas por la identidad fundamental

$$\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1, \tag{1.30}$$

en donde $\cos^2 t = (\cos t)^2$ y $\operatorname{sen}^2 t = (\operatorname{sen} t)^2$. Este resultado se deduce del hecho de que las coordenadas del punto (cos t, sen t) deben satisfacer la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ del círculo unitario. Si se divide (1.30), sucesivamente, entre $\cos^2 t$ y $\operatorname{sen}^2 t$, se obtienen

$$1 + \tan^2 t = \sec^2 t \tag{1.31}$$

$$1 + \cot^2 t = \csc^2 t. \tag{1.32}$$

Hay muchas otras identidades que implican a las funciones trigonométricas. Algunas de las más importantes se presentan a continuación, para futuras referencias.

$$\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t \tag{1.33}$$

$$\cos(-t) = \cos t \tag{1.34}$$

Fórmulas de adición

$$\operatorname{sen}(t_1 \pm t_2) = \operatorname{sen} t_1 \cos t_2 \pm \cos t_1 \operatorname{sen} t_2 \tag{1.35}$$

$$\cos(t_1 \pm t_2) = \cos t_1 \cos t_2 \mp \operatorname{sen} t_1 \operatorname{sen} t_2 \tag{1.36}$$

Fórmulas del ángulo doble

$$\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cos t \tag{1.37}$$

$$\cos 2t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t \tag{1.38}$$

Fórmulas del semiángulo

$$\operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos t) \tag{1.39}$$

$$\cos^2 \frac{t}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos t) \tag{1.40}$$

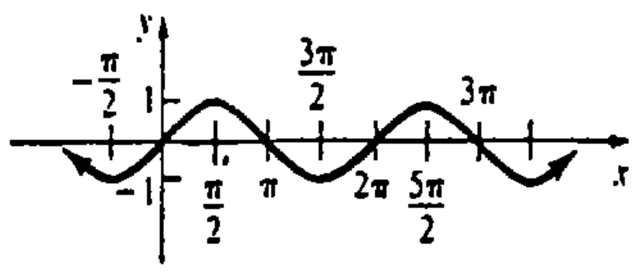
Las dos últimas fórmulas serán particularmente útiles en las formas equivalentes

$$\operatorname{sen}^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t) \quad \text{y} \quad \cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t). \tag{1.41}$$

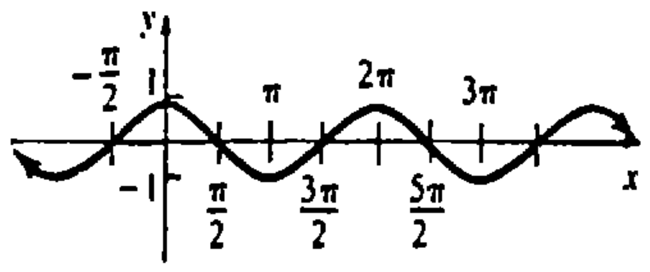
Las funciones seno y coseno son funciones en el sentido más estricto de la Definición 1.1; para cada ángulo t existe solamente un valor de sen t y un valor de cos t. Puesto que la longitud s de un arco sobre una circunferencia de radio r está relacionada con su ángulo central t mediante $s = rt$, en donde t está en radianes, se deduce que, para un círculo unitario, $s = t$. En otras palabras, para cualquier número real s existe un ángulo cuya medida en radianes es s. Por consiguiente, las funciones seno y coseno tienen como dominio común el conjunto R de los números reales; por ejemplo, cuando se escribe sen 2, se sobreentiende que significa sen (2 rad) y *no*, sen 2°. Introduciendo los símbolos usuales x y y para denotar la variable independiente y dependiente, se escribe

$$y = \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad y = \cos x.$$

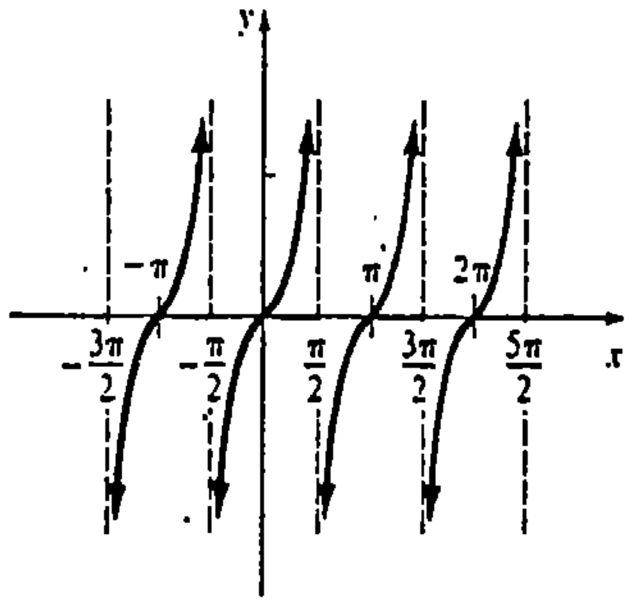
En las gráficas de la Figura 1.58 se resume la información pertinente acerca del dominio y del contradominio de cada función trigonométrica.



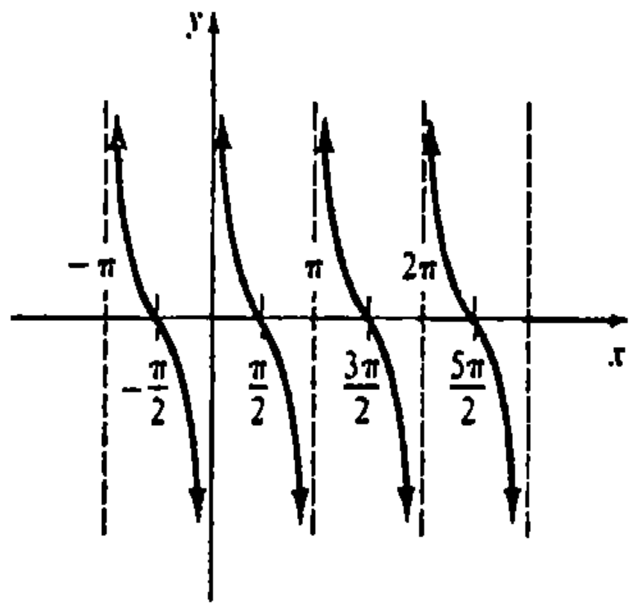
(a) y = sen x
Dominio: R
Contradominio: $-1 \le y \le 1$



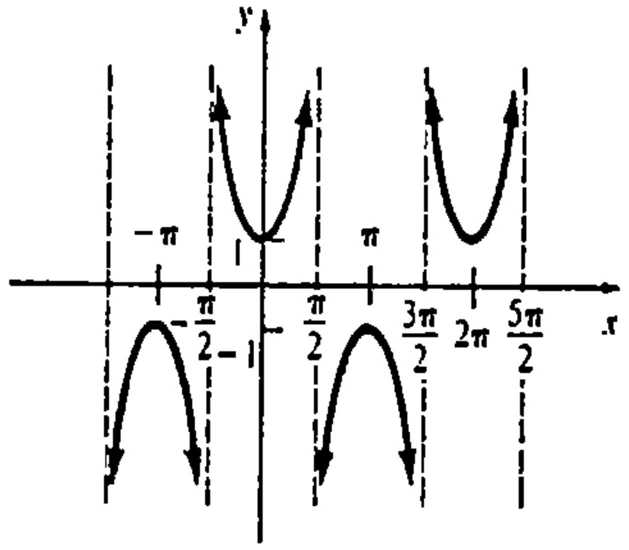
(b) $y = \cos x$
Dominio: R
Contradominio: $-1 \le y \le 1$



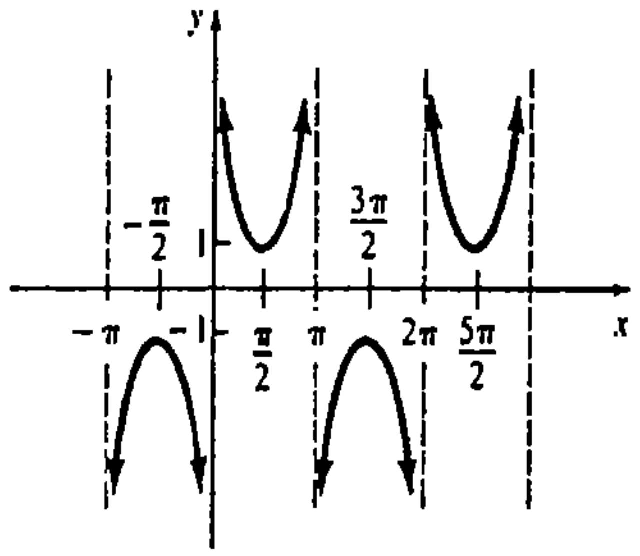
(c) $y = \tan x$
Dominio: $x \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, n número entero
Contradominio: R



(d) $y = \cot x$
Dominio: $x \neq n\pi$, n número entero
Contradominio: R



(e) $y = \sec x$
Dominio: $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$, n número entero
Contradominio: $y \geq 1, y \leq -1$



(f) $y = \csc x$
Dominio: $x \neq n\pi$, n número entero
Contradominio: $y \geq 1, y \leq -1$

Figura 1.58

Un examen de las gráficas de la Figura 1.58 revela claramente la naturaleza periódica de las funciones trigonométricas; por ejemplo, la porción de la gráfica de y = sen x en el intervalo $[0, 2\pi]$ se repite cada 2π unidades. También, las funciones seno y coseno tienen amplitud 1, puesto que vale 1 unidad la distancia máxima a la que un punto de las gráficas y = sen x y $y = \cos x$ puede estar respecto del eje x. En general, las funciones

$$y = A \operatorname{sen} kx, \quad k > 0$$

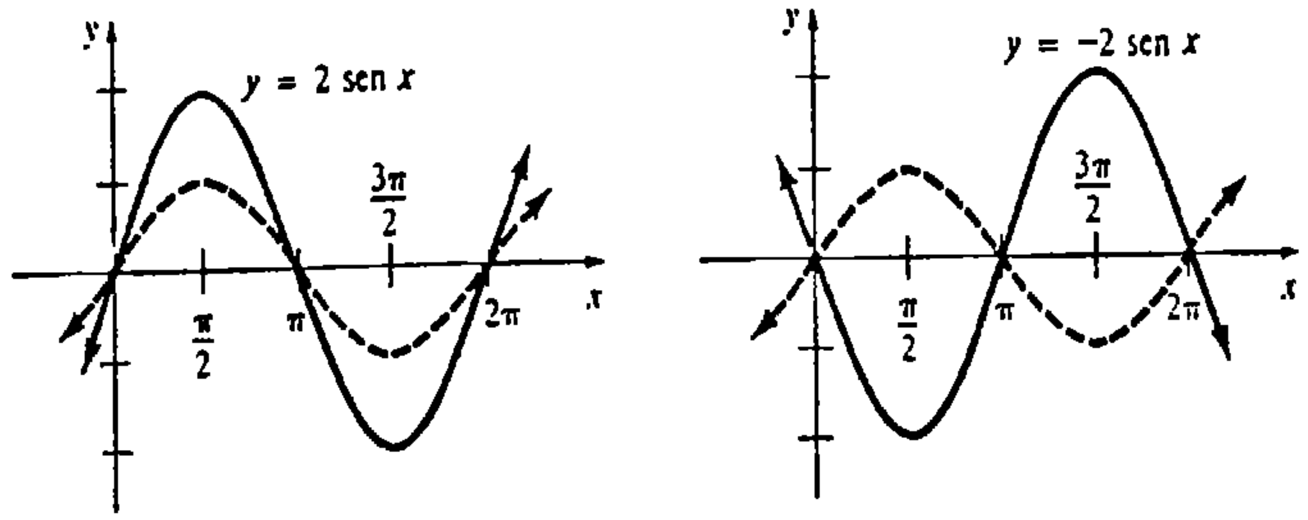
$$y = A \cos kx, \quad k > 0$$

tienen amplitud $|A|$ y periodo $2\pi/k$. Obsérvese que las cuatro funciones trigonométricas restantes no tienen amplitud.

Ejemplo 3

Comparar las gráficas de $y = 2$ sen x y $y = -2$ sen x.

Solución En cada caso la función tiene amplitud 2 y periodo 2π. Para fines de comparación, la curva de trazo intermitente de la Figura 1.59 es la gráfica de y = sen x.



(a) (b)

Figura 1.59

Ejemplo 4

Trazar la gráfica de $y = \cos 4x$.

Solución La amplitud de la función es 1 y su periodo es $2\pi/4 = \pi/2$. Para fines de comparación, la curva de trazo intermitente de la Figura 1.60 en la gráfica de $y = \cos x$.

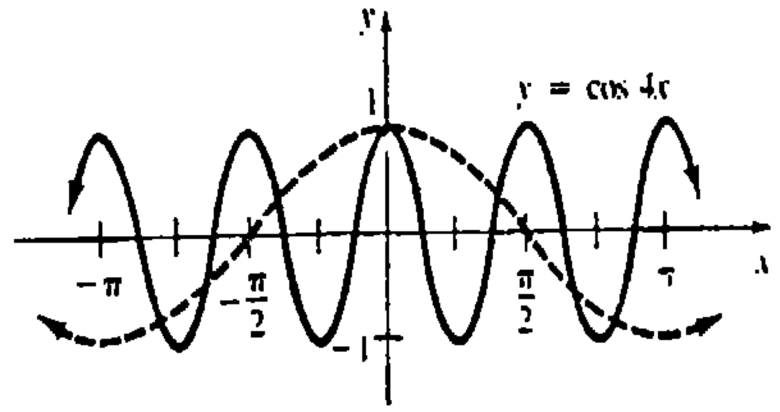


Figura 1.60

Ejemplo 5

Trazar la gráfica de y = sen $(x - \pi/2)$.

Solución Por lo expuesto en la Sección 1.5 la gráfica de y = sen $(x - \pi/2)$ es la gráfica de y = sen x trasladada $\pi/2$ unidades a la derecha. En efecto, la gráfica de y = sen $(x - \pi/2)$ que se muestra en la figura 1.61 es también la gráfica de $y = -\cos x$, puesto que (1.35) implica que sen $(x - \pi/2) = -\cos x$.

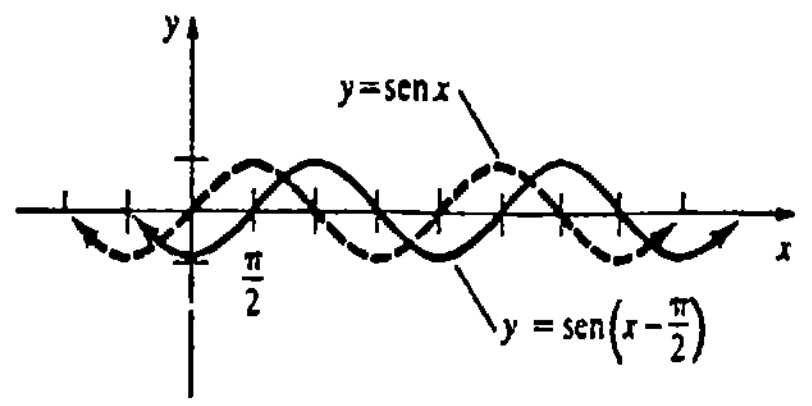


Figura 1.61

Ejemplo 6

Si $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = x^2$ encontrar fg, f/g, $f \circ g$ y $g \circ f$.

Solución

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = x^2 \operatorname{sen} x$$
$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \operatorname{sen} x^2$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\operatorname{sen} x)^2 = \operatorname{sen}^2 x.$$

Observaciones

(*i*) En varias ocasiones se utilizó la notación $\operatorname{sen}^2 x$ para $(\operatorname{sen} x)^2$. Por regla general, las potencias de exponente entero positivo de las funciones trigonométricas se escriben sin emplear paréntesis; por ejemplo, $(\cos x)^3$ y $(\tan x)^5$ expresan lo mismo que $\cos^3 x$ y $\tan^5 x$, respectivamente. Debe tenerse cuidado en no confundir expresiones como $\sec^2 x$ y $\cot^6 x$ con $\sec x^2$ y $\cot x^6$.

(*ii*) Las funciones polinomiales, las racionales y las funciones potencia $y = kx^n$, en donde n es un número racional, pertenecen a una clase conocida como funciones algebraicas. Una función algebraica implica un número finito de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y raíces de polinomios; por ejemplo, $y = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 5}}$ es una función algebraica. Las seis funciones trigonométricas presentadas en esta sección pertenecen a una clase diferente conocida como funciones trascendentes (denominadas también como funciones trascendentales). Una función trascendente es aquella que no es algebraica. En los Capítulos 7 y 8 se encontrarán otras funciones trascendentales.

(*iii*) Se observó que cada una de las funciones trigonométricas es periódica. En un contexto más general, se dice que una función f es periódica si existe un número positivo p tal que $f(x + p) = f(x)$ para todo número x en el dominio de f. Si p es el menor número positivo para el que $f(x + p) = f(x)$, entonces p es el periodo de la función f. La función que aparece en la Figura 1.62 tiene periodo 1.

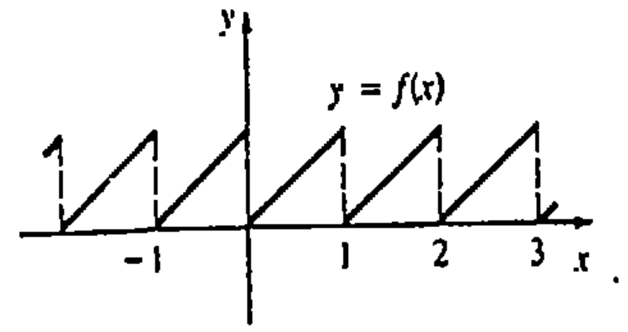


Figura 1.62

Ejercicios 1.6

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 967.

En los Problemas 1-6 convierta de radianes a grados.

1. $\pi/20$ 2. $2\pi/9$ 3. $11\pi/6$
4. $5\pi/18$ 5. $-4\pi/3$ 6. $-9\pi/4$

En los Problemas 7-12 convierta de grados a radianes.

7. 210° 8. 225° 9. 300°
10. 315° 11. −150° 12. −420°

En los Problemas 13-24 encuentre el valor de la cantidad dada.

13. $\operatorname{sen}(-\pi/6)$ 14. $\cos 9\pi/4$
15. $\operatorname{sen} 4\pi/3$ 16. $\tan 5\pi/4$
17. $\sec \pi/6$ 18. $\csc(-3\pi/4)$
19. $\cot 2\pi/3$ 20. $\operatorname{sen} 11\pi/6$
21. $\tan 7\pi/6$ 22. $\csc 5\pi/6$
23. $\cos 5\pi/2$ 24. $\cot(-\pi/3)$

25. Dado que $\operatorname{sen} t = -2/\sqrt{5}$ y $\cos t = 1/\sqrt{5}$, encuentre los valores de las cuatro funciones trigonométricas restantes.

26. Dado que $\cos t = \frac{1}{10}$, encuentre todos los valores posibles de $\operatorname{sen} t$.

27. Dado que $\operatorname{sen} t = -\frac{1}{4}$ y que el lado terminal del ángulo t está en el cuarto cuadrante, halle los valores de las cinco funciones trigonométricas restantes.

28. Dado que $\tan t = -3$ y que el lado terminal del ángulo t está en el segundo cuadrante, encuentre los valores de las cinco funciones trigonométricas restantes.

29. Dado que $\csc t = -\sqrt{2}$ y que el lado terminal del ángulo t está en el tercer cuadrante, halle los valores de las cinco funciones trigonométricas restantes.

30. Encuentre todas las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} t = -\sqrt{3}/2$ en el intervalo $[\pi, 3\pi/2]$.

En los Problemas 31-40 utilice las identidades (1.35)-(1.40) para encontrar los valores de la cantidad dada o para demostrar dicha identidad.

31. $\operatorname{sen} \pi/12$ 32. $\cos 5\pi/12$
33. $\cos 5\pi/8$ 34. $\operatorname{sen} 3\pi/8$

35. $\operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t$

36. $\cos\left(t + \frac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} t$

37. $\cos(t + \pi) = -\cos t$

38. $\operatorname{sen}(\pi - t) = \operatorname{sen} t$

39. $\tan(t + \pi) = \tan t$

40. $\cot(t - \pi) = \cot t$

En los Problemas 41 y 42 explique por qué no hay algún ángulo t que satisfaga la ecuación dada.

41. $\operatorname{sen} t = \frac{4}{3}$ 42. $\sec t = \frac{1}{2}$

En los Problemas 43-56 trace la gráfica de la función dada.

43. $y = -\cos x$ 44. $y = 2 \cos x$
45. $y = 1 + \operatorname{sen} x$ 46. $y = 1 + \cos x$
47. $y = 2 - \operatorname{sen} x$ 48. $y = -1 + \operatorname{sen} x$
49. $y = -\tan x$ 50. $y = 2 + \sec x$
51. $y = 3 \cos 2x$ 52. $y = \frac{5}{2} \operatorname{sen} 2\pi x$
53. $y = 2 \operatorname{sen}(-\pi x)$ 54. $y = \cos \frac{1}{2} x$
55. $y = \cos(x - \pi/2)$ 56. $y = \operatorname{sen}(x + \pi)$

En los Problemas 57-62 determine fg, f/g, $f \circ g$ y $g \circ f$.

57. $f(x) = 1 + 4x$, $g(x) = \cos x$ 58. $f(x) = x^2$, $g(x) = \operatorname{sen} x^2$

59. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$

60. $f(x) = 1 + x^2$, $g(x) = \tan x$

61. $f(x) = 1 + \cos 2x$, $g(x) = \sqrt{x}$

62. $f(x) = \tan 2x$, $g(x) = \cot 2x$

63. A menudo se utilizan funciones trigonométricas de la forma $y = a + b \operatorname{sen} \omega(t - t_0)$, en donde a, b, ω y t_0 son constantes, como modelos ecológicos para simular fenómenos que ocurren periódicamente, tales como variación de la temperatura, amplitud de las mareas y duración de los días. Supóngase que

$$T(t) = 70 + 10 \operatorname{sen} \frac{\pi}{12}(t - 9)$$

representa temperatura.

(a) Demuestre que $T(t + 24) = T(t)$.

(b) ¿En qué momento en $[0, 24]$ es $T(t) = 70$?

(c) ¿Cuál es la temperatura máxima? ¿En qué momento en $[0, 24]$ ocurre?

(d) ¿Cuál es la temperatura mínima? ¿En qué momento en $[0, 24]$ ocurre dicho mínimo?

64. Cuando una persona camina, la componente vertical de la fuerza ejercida por un pie sobre el suelo se puede aproximar mediante una función trigonométrica de la forma $F(t) = K(\cos \pi t/T - q \cos 3\pi t/T)$, en donde $K > 0$ y $0 < q < 1$. Las constantes K y q dependen del modo particular de caminar. El pie se posa en el suelo en el tiempo $t = -T/2$ y se levanta del mismo en el tiempo $t = T/2$.

(a) Demuestre que $F(-T/2) = F(T/2) = 0$.

(b) Demuestre que $F(t + 2T) = F(t)$.

(c) Para $T = 1$, $K = 2$ y $q = \frac{1}{2}$, trace la gráfica de la función F en el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

En los Problemas 65-70 determine si la función dada es par, impar o ninguna de las dos.

65. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

66. $f(x) = x \cos x$

67. $f(x) = x + \tan x$

68. $f(x) = x^2 \sec x$

69. $f(x) = \cos(x + \pi)$

70. $f(x) = 2 + 5 \csc x$

Problemas diversos

71. Si $f(x) = A \operatorname{sen} kx$, $k > 0$, demuestre que $f\left(x + \dfrac{2\pi}{k}\right) = f(x)$.

72. Si $f(x) = A \tan kx$, $k > 0$, demuestre que $f\left(x + \dfrac{\pi}{k}\right) = f(x)$.

En los Problemas 73-76 trace la gráfica de la función dada.

73. $f(x) = x + \operatorname{sen} x$

74. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

75. $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

76. $f(x) = x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

Examen • Capítulo 1

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 968.

En los Problemas 1-16 conteste verdadero o falso.

1. El intervalo $[a, a)$ no contiene números reales. ______

2. $22/7 = \pi$ ______

3. $\tan \pi/6 = \cot 4\pi/3$ ______

4. Si $a < b$, entonces $a^2 < b^2$. V

5. La solución de $|x + 1| > -2$ es $(-\infty, \infty)$. ______

6. Las rectas $2x + 3y = 5$ y $-2x + 3y = 1$ son perpendiculares. ______

7. La pendiente de la recta $y = -7$ no está definida. ______

8. Si f es una función y $f(a) = f(b)$, entonces $a = b$. ✓

9. El dominio de la composición $f \circ g$ es la intersección del dominio de f y el dominio de g. ______

10. La función $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2$ es una función impar. ______

11. La función $f(x) = 5x^2 \cos x$ es una función par. ______

12. La gráfica de $y = f(x + 3)$ es la gráfica de $y = f(x)$ trasladada 3 unidades a la derecha. V

13. La función $y = -10 \sec x$ tiene amplitud 10. ______

14. Si t_1 y t_2 son ángulos coterminales, entonces $\cos t_1 = \cos t_2$. ______

15. El contradominio de la función $f(x) = 2 + \cos x$ es $[1, 3]$. ______

16. Si $\cos t =$, entonces $\cos(t + 3\pi) = -\frac{1}{4}$. ______

En los Problemas 17-34 llene los espacios en blanco.

17. Si $a < 0$, entonces $|-a| =$ ______.

18. La solución de $|-x + 3| \geq 7$ es ______.

19. Si $(-2, 6)$ es el punto medio del segmento de recta que va de $P_1(x_1, 3)$ a $P_2(8, y_2)$, entonces $x_1 =$ ______ y $y_2 =$ ______.

20. Una recta con abscisa en el origen -4 y ordenada en el origen 32, tiene pendiente ______.

21. Las rectas $6x + 2y = 1$ y $kx - 9y = 5$ son paralelas si $k =$ ______.

22. La gráfica de la ecuación $5x = 2y^3 + y$ es simétrica con respecto a ______.

23. Si (a, b) es un punto del tercer cuadrante, entonces $(-a, b)$ es un punto del ______ cuadrante.

24. El dominio de la función $f(x) = \sqrt{x + 2}/x$ es ______.

25. El contradominio (o ámbito) de la función $f(x) = 10/(x^2 + 1)$ es ______.

26. La intercepción y de la gráfica de $f(x) = (2x - 4)/(5 - x)$ es ______.

27. Las intercepciones x de la gráfica de $f(x) = x^2 + 2x - 35$ son ______.

28. Si $f(x) = 4x^2 + 7$ y $g(x) = 2x + 3$, entonces $(f \circ g)(1) =$ 107 y $(g \circ f)(1) =$ 25.

29. Si $f(x) = 2x - 8$, entonces $(f \circ f)(x) =$ ______ y $(f \circ f \circ f)(x) =$ ______.

30. El periodo de la función $f(x) = -5 \cos 6x$ es ______.

31. En grados, $5\pi/18$ rad $=$ ______.

32. El conjunto de puntos $P(x, y)$ en la circunferencia $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 7$ son equidistantes del punto ______.

33. Una ecuación de la recta que pasa por $(-5, 11)$ y que es paralela a la recta $y = -3$ es ______.

34. Una circunferencia con centro en el origen y que pasa por $(1, 1)$ tiene un radio ______.

35. Encuentre una ecuación de la recta que pasa por $(3, -8)$ y que es paralela a la recta $2x + y = 10$.

36. Encuentre una ecuación de la recta que pasa por el origen y por el punto de intersección de las gráficas de $x + y = 1$ y $2x - y = -7$.

37. Encuentre una ecuación de la familia de circunferencias que pasan por el origen y que tienen sus centros en la recta $y = x$.

38. Encuentre una ecuación de la circunferencia con centro en $(1, 2)$ y que sea tangente a la recta $x = 7$.

39. Encuentre las intercepciones x y y, y el centro de la elipse $x^2 + 9y^2 - 18y - 72 = 0$.

40. Encuentre todos los números del dominio de $f(x) = 2x^2 - 7x$ que correspondan al número 4 de su contradominio.

41. La anchura de una caja rectangular es 3 veces su longitud, y su altura es 2 veces su largo. Exprese el volumen V de la caja en función de su longitud l, de su anchura w y de su altura h.

42. Una caja cerrada, en forma de cubo, va a construirse con dos materiales diferentes. El material de los lados cuesta 1 centavo (de dólar) por centímetro cuadrado, y el material de las tapas superior e inferior cuesta 2.5 centavos (de dólar) por centímetro cuadrado. Exprese el costo total C de la pieza en función de la longitud x de un lado.

43. Por el método de depreciación en línea recta, el monto anual de la depreciación se define como

$$\frac{\text{costo inicial} - \text{valor de rescate}}{\text{vida útil estimada}}$$

Una máquina que cuando era nueva costaba \$50,000 (dólares) tiene un valor de rescate de \$10,000 a los 10 años. ¿Cuál es el valor de la máquina al cabo de 4 años?

44. Supóngase que $f(x) = \sqrt{x + 4}$ y $g(x) = \sqrt{2 - x}$.

(a) ¿Cuál es el dominio de $f(-2x)$?

(b) ¿Cuál es el dominio de $f(x^2)$?

(c) ¿Cuál es el dominio de $g(x^2)$?

(d) ¿Cuál es el dominio de $(f + g)(x)$?

(e) ¿Cuál es el dominio de $(f/g)(x)$?

45. Supóngase que $\operatorname{sen} t = \frac{3}{5}$ y $\cos t = \frac{4}{5}$.

(a) ¿En qué cuadrante está el lado terminal del ángulo t?

(b) Encuentre los valores de las cuatro funciones trigonométricas restantes.

(c) Obtenga los valores de sen $2t$ y cos $2t$.

46. Si $f(x) = \cos x$, demuestre que para cualquier número real h,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \cos x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) - \operatorname{sen} x\left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right).$$

En los Problemas 47 y 48 resuelva la ecuación dada en los intervalos indicados.

47. $4\cos^2 t - 1 = 0$; $[-\pi/2, \pi/2]$; $[0, \pi]$

48. $2\operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen} t - 1 = 0$; $[0, \pi]$; $[\pi/2, 3\pi/2]$

En los Problemas 49 y 50 complete la gráfica.

49. f es una función par.

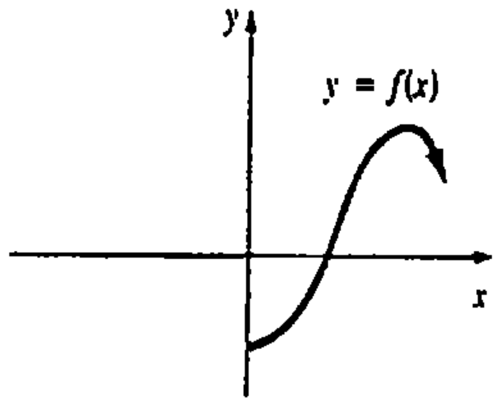


Figura 1.63

50. f es una función impar.

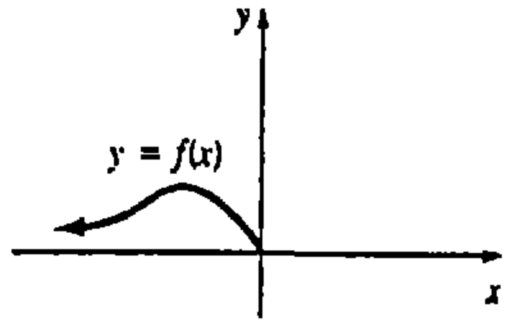


Figura 1.64

En los Problemas 51 y 52 relacione los puntos dados con la gráfica de una función.

51.

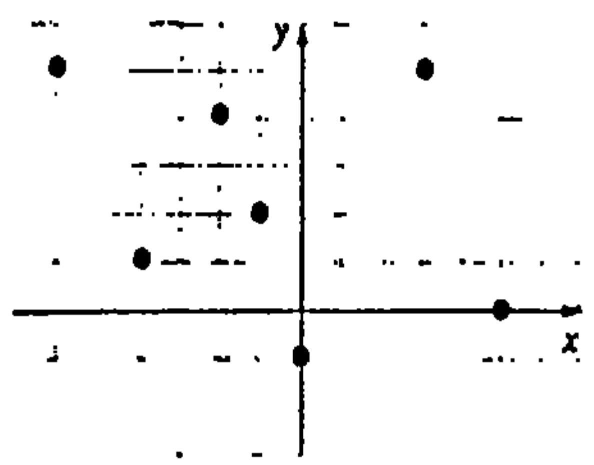


Figura 1.65

52.

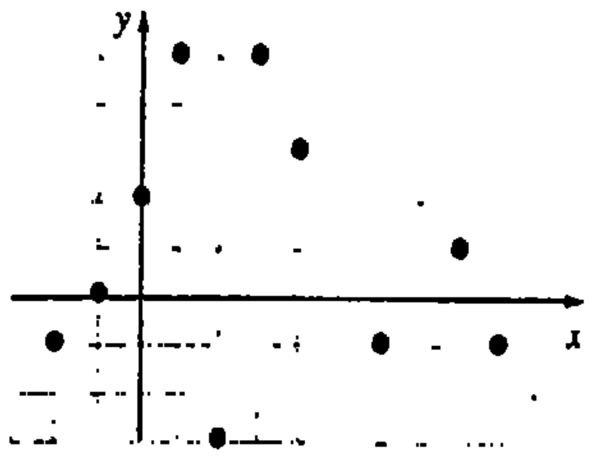


Figura 1.66

Límites de funciones

Dos de los conceptos más importantes en el estudio del Cálculo son las nociones de función y de **límite** de una función. En este capítulo se tratará especialmente de determinar si los valores $f(x)$ de una función f tienden a un número fijo L cuando x tiende a un número a. Usando el símbolo → en lugar de la expresión "tiende a" preguntamos:

$$¿f(x) \to L \text{ cuando } x \to a?$$

2.1 Noción intuitiva de límite

Límite de una función cuando x tiende a un número

Considérese la función

$$f(x) = \frac{16 - x^2}{4 + x}$$

cuyo dominio es el conjunto de todos los números reales excepto −4. Aunque $f(-4)$ no está definido, $f(x)$ puede calcularse para cualquier valor de x *cercano* a −4. La tabla de la Figura 2.1 muestra que cuando x se acerca a −4 por la izquierda o por la derecha, los valores funcionales $f(x)$ están acercándose a 8; esto es, cuando x está próximo a −4, $f(x)$ está próximo a 8. Entonces, 8 es el **límite** de f cuando x tiende a −4 y se escribe,

$$f(x) \to 8 \quad \text{cuando} \quad x \to -4 \quad \text{o bien} \quad \lim_{x \to -4} \frac{16 - x^2}{4 + x} = 8.$$

x	$f(x)$
−4.1	8.1
−4.01	8.01
−4.001	8.001
−3.9	7.9
−3.99	7.99
−3.999	7.999

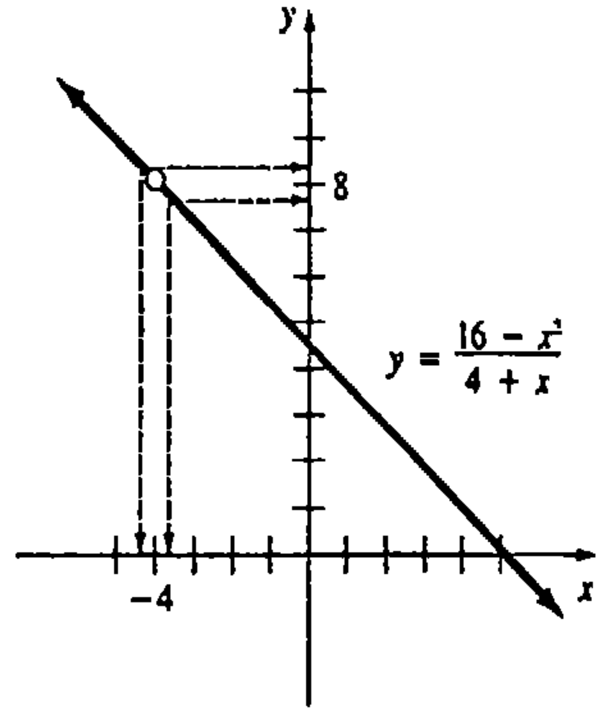


Figura 2.1

Para $x \neq -4$ se puede simplificar f mediante cancelación:

$$f(x) = \frac{16 - x^2}{4 + x} = \frac{(4 + x)(4 - x)}{4 + x} = 4 - x.$$

Como se observa en la Figura 2.1, la gráfica de f es esencialmente la de $y = 4 - x$, excepto que la gráfica de f tiene un hueco en el punto que corresponde a $x = -4$. Cuando x se aproxima cada vez más a −4, lo cual se representa con las dos puntas de flecha sobre el eje x, simultáneamente las dos puntas de flecha sobre el eje y se aproximan cada vez más al número 8.

Definición intuitiva

La noción de que **$f(x)$ tiende al número L cuando x tiende al número a** se define, en general, de la manera siguiente:

> Si $f(x)$ puede aproximarse arbitrariamente a un número finito L, tomando a x suficientemente cercano pero distinto de un número a, tanto por el lado izquierdo como por el derecho de a, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Se usará la notación $x \to a^-$ para denotar que x tiende a a por la *izquierda* y $x \to a^+$ para expresar que x tiende a a por la *derecha*. De este modo, si los límites unilaterales $\lim_{x \to a^-} f(x)$ y $\lim_{x \to a^+} f(x)$ tienen un valor común L,

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L,$$

se dice entonces que $\lim_{x \to a} f(x)$ *existe* y se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Usualmente se hará referencia al número L como el **límite de f en a**. Sin embargo, se debe observar que:

> La existencia del límite de una función f en a no depende de si f está realmente definida *en* a, sino solamente de si f está definida para x *cerca* de a.

Ejemplo 1

La Figura 2.2 muestra la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 2x + 2$. Como se observa en la gráfica y en la tabla adjunta, parece razonable que

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = -6 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 4^+} f(x) = -6$$

y en consecuencia

$$\lim_{x \to 4} f(x) = -6.$$

x	$f(x)$
3.9	−5.41000
3.99	−5.94010
3.999	−5.99400
4.1	−6.61000
4.01	−6.06010
4.001	−6.00600

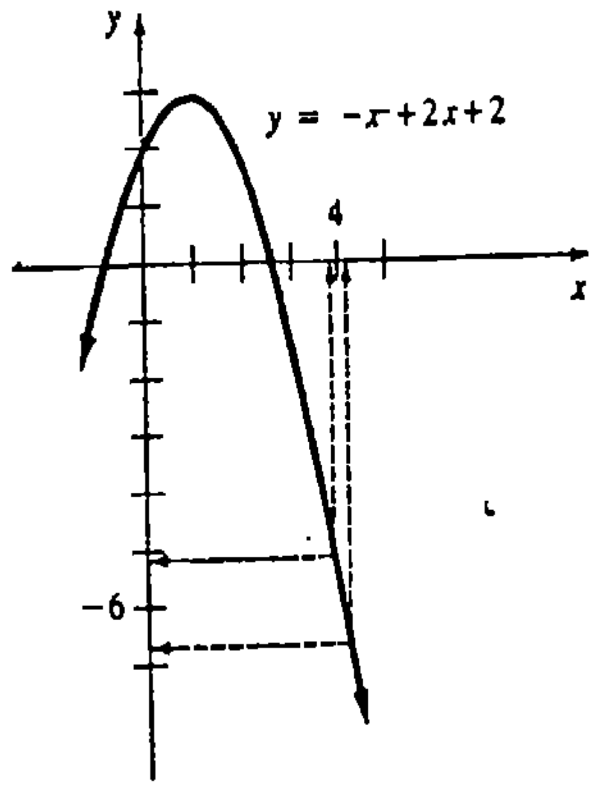


Figura 2.2

Obsérvese que la función dada en el Ejemplo 1 está definida en $x = 4$, pero en ningún momento se sustituye $x = 4$ en la función para encontrar el valor de $\lim_{x \to 4} f(x)$. En el ejemplo siguiente, es claro que $\lim_{x \to 2} f(x)$ existe pero $f(2)$ no está definida.

Ejemplo 2

En la Figura 2.3 se presenta la gráfica de la función definida por secciones

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ -x + 6, & x > 2 \end{cases}$$

De la gráfica y de la tabla adjunta, se observa que $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$.

x	$f(x)$
1.9	3.61000
1.99	3.96010
1.999	3.99600
2.1	3.90000
2.01	3.99000
2.001	3.99900

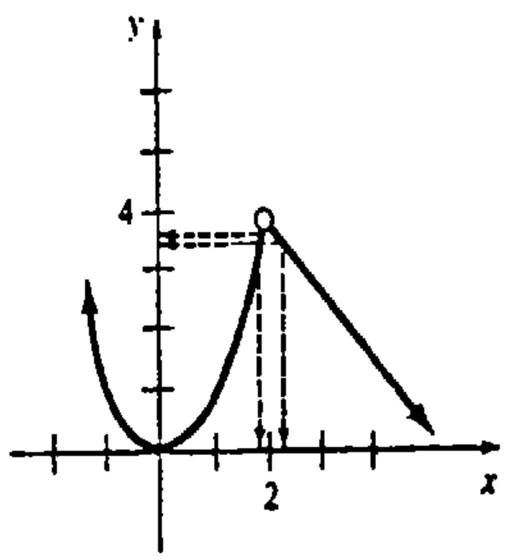


Figura 2.3

Ejemplo 3

En la Figura 2.4 se presenta la gráfica de la función definida por secciones

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \le 5 \\ -x + 10, & x > 5. \end{cases}$$

De la gráfica y de la tabla adjunta, se observa que

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = 7 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 5^+} f(x) = 5.$$

Como $\lim_{x\to 5^-} f(x) \neq \lim_{x\to 5^+} f(x)$, se concluye que $\lim_{x\to 5} f(x)$ no existe.

x	$f(x)$
4.9	6.9
4.99	6.99
4.999	6.999
5.1	4.9
5.01	4.99
5.001	4.999

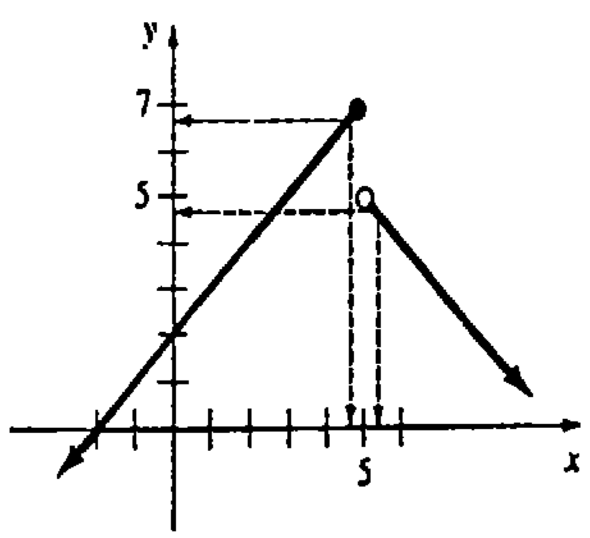


Figura 2.4

Ejemplo 4

Si x es cualquier número real, el valor $f(x)$ "producido" por la función mayor entero $f(x) = [x]$ se define como el entero más grande que no excede a x; por ejemplo,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad f\left(-\frac{1}{4}\right) = -1, \quad f(4.8) = 4, \quad \text{y} \quad f(3) = 3.$$

La gráfica de f se muestra en la Figura 2.5. En ella se observa que $f(n)$ está definida para todo entero n; sin embargo, $\lim_{x\to n} f(x)$ no existe. Por ejemplo, cuando x tiende al número 3, los dos límites unilaterales existen pero tienen valores diferentes:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2 \quad \text{mientras que} \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = 3.$$

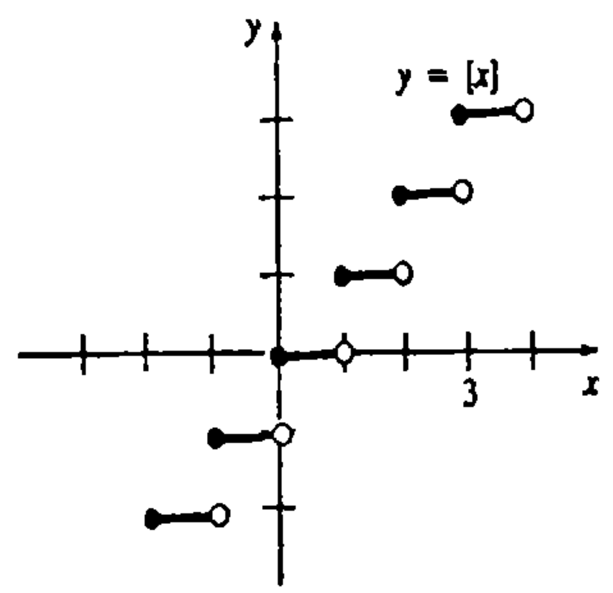


Figura 2.5

Ejemplo 5

En la Figura 2.6 la gráfica de $y = f(x)$ muestra que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0.$$

Por lo que,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

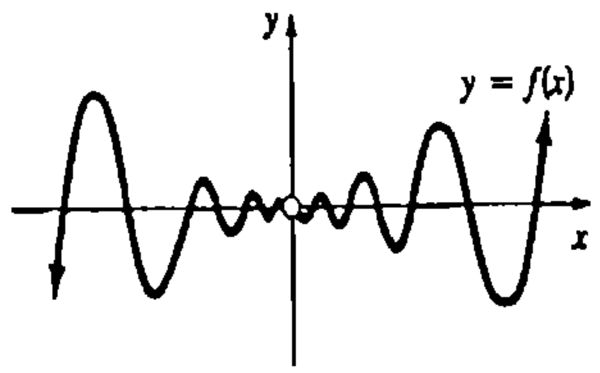


Figura 2.6

Ejemplo 6

En la Figura 2.7 la gráfica de $y = f(x)$ muestra que cuando x tiende a 2 por la izquierda, los valores funcionales $f(x)$ se vuelven cada vez más grandes, o sea, $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ no existe. Esto es suficiente para decir que $\lim_{x\to 2} f(x)$ no existe.

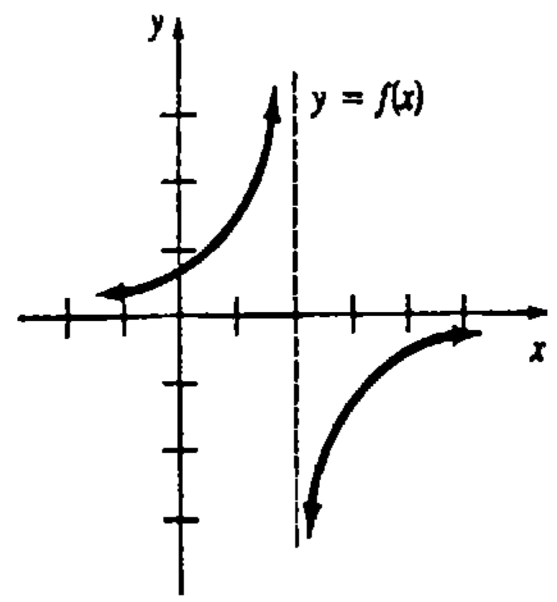


Figura 2.7

No siempre es una tarea fácil determinar si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, mediante la gráfica de una función f.

Ejemplo 7

Únicamente a partir de los datos de la tabla siguiente, se conjetura en forma natural que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1.$$

x	$\dfrac{\text{sen } x}{x}$
−0.1	0.9983341
−0.01	0.9999833
−0.001	0.9999998
0.1	0.9983341
0.01	0.9999833
0.001	0.9999998

Ejemplo 8

La tabla siguiente sugiere que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$$

x	$\dfrac{1-\cos x}{x}$
−0.1	−0.0499583
−0.01	−0.0049999
−0.001	−0.0005001
−0.0001	−0.0000510
0.1	0.0499583
0.01	0.0049999
0.001	0.0005001
0.0001	0.0000510

Ejercicios 2.1

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 968.

En los Problemas 1-12 trace una gráfica para encontrar el límite dado, si es que existe.

1. $\lim_{x\to 2}(3x+2)$
2. $\lim_{x\to -2}(x^2-1)$
3. $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)$
4. $\lim_{x\to 5}\sqrt{x-1}$
5. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$
6. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-3x}{x}$
7. $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$
8. $\lim_{x\to 2}|x-2|$
9. $\lim_{x\to 0} f(x)$ cuando $f(x) = \begin{cases} x+3, & x<0 \\ -x+3, & x\ge 0\end{cases}$
10. $\lim_{x\to 2} f(x)$ cuando $f(x) = \begin{cases} x, & x<2 \\ x+1, & x\ge 2\end{cases}$
11. $\lim_{x\to 2} f(x)$ cuando $f(x) = \begin{cases} x^2-2x, & x<2 \\ 1, & x=2 \\ x^2-6x+8, & x>2\end{cases}$
12. $\lim_{x\to 0} f(x)$ cuando $f(x) = \begin{cases} x^2, & x<0 \\ 2, & x=0 \\ \sqrt{x}-1, & x>0\end{cases}$

En los Problemas 13-16 utilice la gráfica dada para encontrar cada límite, si es que existe.

(a) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 1} f(x)$

13.

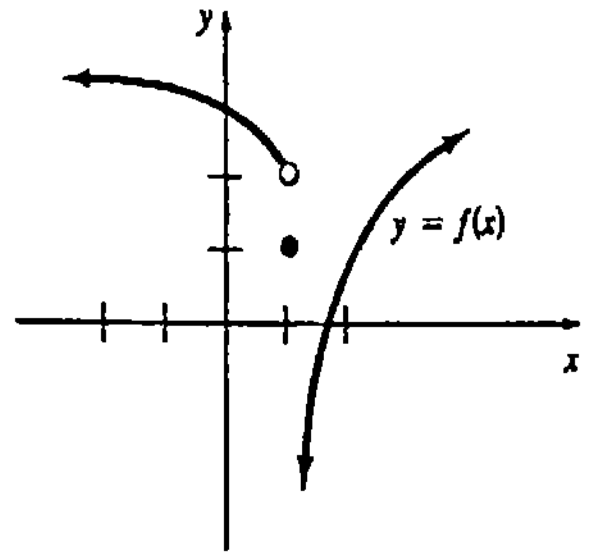


Figura 2.8

14.

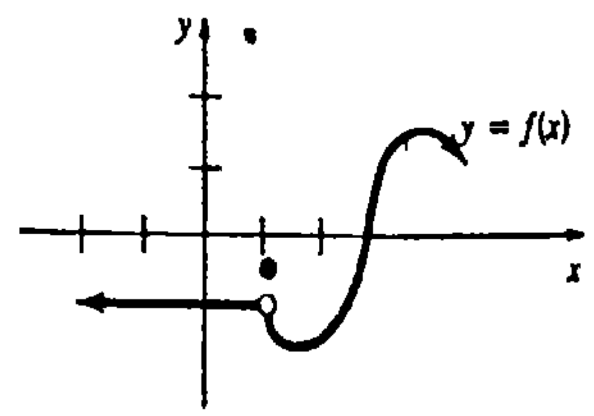


Figura 2.9

15.

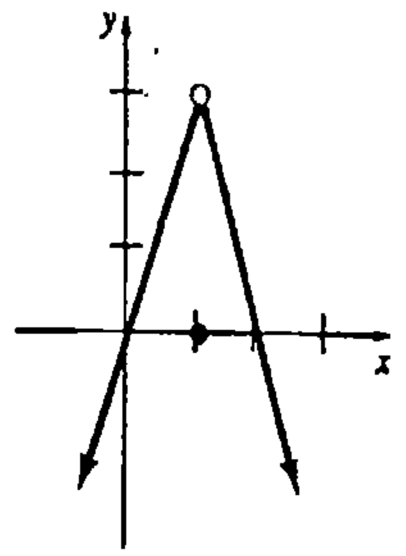


Figura 2.10

16.

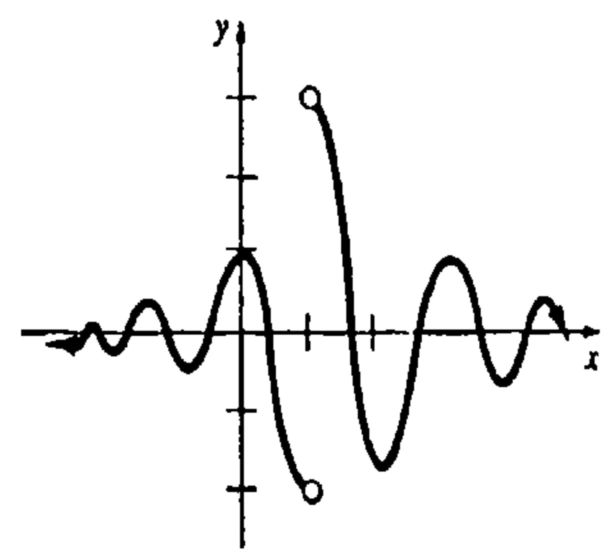


Figura 2.11

En los Problemas 17-20 utilice la gráfica dada para encontrar cada límite, si es que existe.

(a) $\lim_{x\to -2} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 0} f(x)$

(c) $\lim_{x\to 1} f(x)$ (d) $\lim_{x\to 2} f(x)$

17.

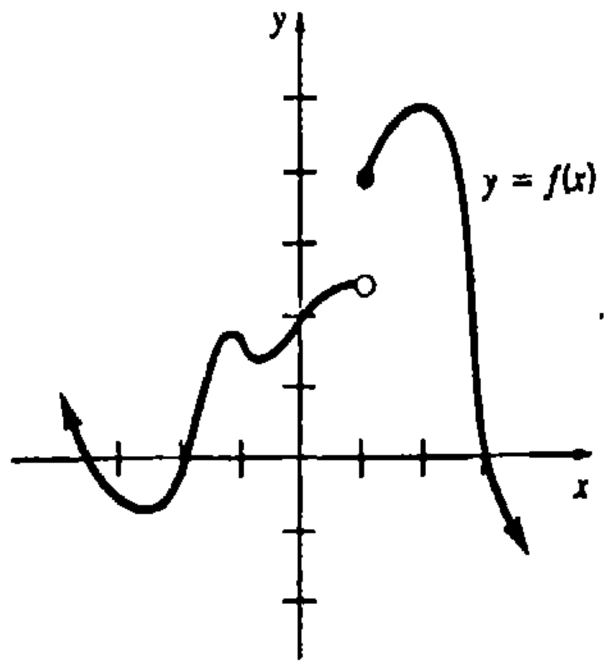


Figura 2.12

18

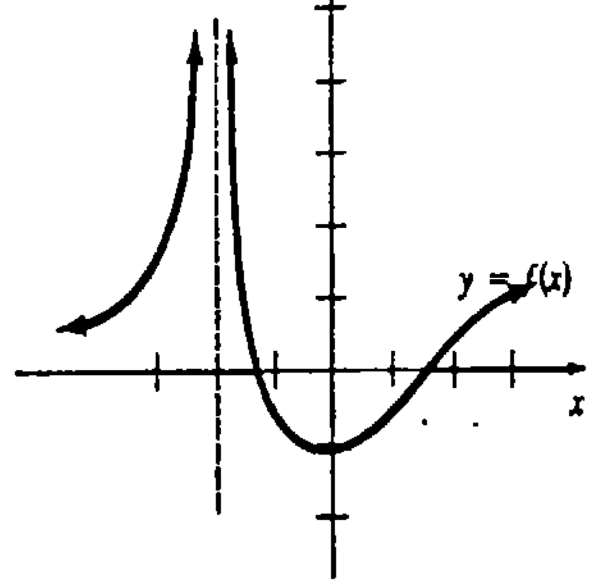


Figura 2.13

19.

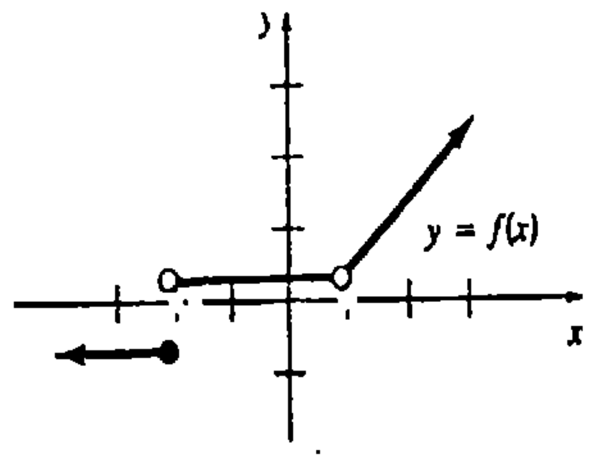


Figura 2.14

20.

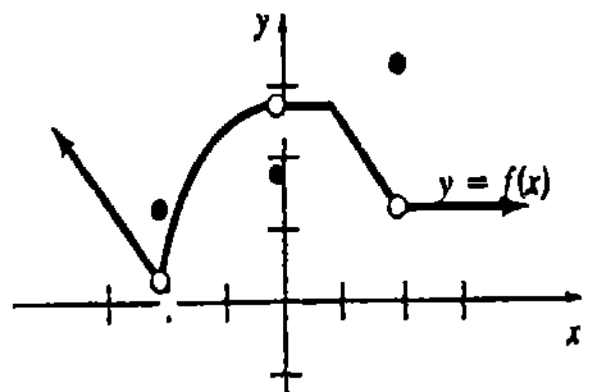


Figura 2.15

En los Problemas 21-24 trace una gráfica para determinar si es correcta la proposición de límite dada. Si no lo es, formule la proposición correcta.

21. $\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$

22. $\lim_{x\to 1} \sqrt{1-x} = 0$

23. $\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x} = 0$

24. $\lim_{x\to 2} \sqrt{4-x^2} = 0$

Problemas para calculadora

En los Problemas 25-30 utilice una calculadora para investigar el límite dado y conjeture acerca de su valor.

25. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2-\sqrt{x+4}}{x}$

26. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

27. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{sen} 3x}$

28. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$

29. $\lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

30. $\lim_{x\to 3} \left[\dfrac{6}{x^2-9} - \dfrac{6\sqrt{x-2}}{x^2-9}\right]$

2.2 Teoremas acerca de límites

La intención del tratamiento informal presentado en la Sección 2.1 fue dar al lector un conocimiento intuitivo de cuándo un límite existe o no. Sin embargo, no es deseable ni práctico que en todos los casos se llegue a una conclusión acerca de la existencia de un límite mediante una gráfica o una tabla de valores funcionales. Deben desarrollarse medios para poder evaluar límites, o discernir su inexistencia, de una manera más o menos mecánica. Los teoremas que se considerarán en esta sección establecen los medios adecuados. Las demostraciones de algunos de estos resultados se presentan en el Apéndice II.

TEOREMA 2.1

Si c es una constante, entonces $\lim_{x\to a} c = c$.

Ejemplo 1

Por el Teorema 2.1,

(*a*) $\lim_{x\to 2} 10 = 10$ y (*b*) $\lim_{x\to 0} \pi = \pi$.

TEOREMA 2.2

$$\lim_{x\to a} x = a \qquad \square$$

Ejemplo 2

Por el Teorema 2.2,

(*a*) $\lim_{x\to 2} x = 2$ y (*b*) $\lim_{x\to 0} x = 0$.

TEOREMA 2.3

Si c es una constante, entonces

$$\lim_{x\to a} c\,f(x) = c \lim_{x\to a} f(x). \qquad \square$$

Ejemplo 3

Por los Teoremas 2.2 y 2.3,

(*a*) $\lim_{x\to 8} 5x = 5 \lim_{x\to 8} x = 5 \cdot 8 = 40$ y

(*b*) $\lim_{x\to -2}(-\frac{3}{2}x) = -\frac{3}{2} \lim_{x\to -2} x = (-\frac{3}{2}) \cdot (-2) = 3.$

TEOREMA 2.4

Si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, entonces es único. $\square$

TEOREMA 2.5

Límite de una suma, de un producto y de un cociente

Sean $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$. Entonces

(*i*) $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L_1 + L_2,$

(*ii*) $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = L_1 L_2,$ y

(*iii*) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2},\quad L_2 \neq 0.$ $\square$

En otras palabras, el Teorema 2.5 se puede enunciar como sigue: cuando existen los límites

(*i*) *el límite de una suma es la suma de los límites,*
(*ii*) *el límite de un producto es el producto de los límites, y*
(*iii*) *el límite de un cociente es el cociente de los límites siempre que el límite del denominador sea diferente de cero.*

Nota: Si los límites existen, entonces el Teorema 2.5 también es aplicable a los límites unilaterales. Más aún, el Teorema 2.5 se extiende lo mismo a diferencias que a sumas, productos y cocientes en que intervienen más de dos funciones.

Ejemplo 4

Evaluar $\lim\limits_{x\to 5} (10x + 7)$.

Solución Por los Teoremas 2.1, 2.2 y 2.3 se sabe que existen $\lim_{x\to 5} 7$ y $\lim_{x\to 5} 10x$. De aquí que, por el Teorema 2.5(*i*)

$$\lim_{x\to 5}(10x + 7) = \lim_{x\to 5} 10x + \lim_{x\to 5} 7 = 10 \lim_{x\to 5} x + \lim_{x\to 5} 7$$
$$= 10 \cdot 5 + 7 = 57.$$

Límite de una potencia

El Teorema 2.5(*ii*) puede emplearse para calcular el límite de una potencia de exponente entero positivo de una función; por ejemplo, si $\lim_{x\to a} f(x) = L$, entonces

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^2 = \lim_{x\to a} f(x) \cdot f(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} f(x) = L^2.$$

El teorema siguiente establece el resultado general.

TEOREMA 2.6

Sean $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y n un entero positivo, entonces

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^n = L^n. \qquad \square$$

Para el caso especial $f(x) = x$, el resultado dado en el Teorema 2.6 da lugar a

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n. \tag{2.1}$$

Ejemplo 5

Determinar $\lim\limits_{x\to 10} x^3$.

Solución Por (2.1),

$$\lim_{x\to 10} x^3 = 10^3 = 1000.$$

Ejemplo 6

Evaluar $\lim\limits_{x\to 3} (x^2 - 5x + 6)$.

Solución Como todos los límites existen,

$$\lim_{x\to 3}(x^2 - 5x + 6) = \lim_{x\to 3} x^2 - \lim_{x\to 3} 5x + \lim_{x\to 3} 6$$
$$= 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0.$$

Ejemplo 7

Evaluar $\lim\limits_{x\to 1} (4x - 1)^5$.

Solución Primero se observa que

$$\lim_{x\to 1}(4x - 1) = \lim_{x\to 1} 4x - \lim_{x\to 1} 1 = 3.$$

Luego se sigue del Teorema 2.6 que

$$\lim_{x\to 1}(4x - 1)^5 = 3^5 = 243.$$

Límite de una función polinomial

Es posible utilizar (2.1) y el Teorema 2.5(*i*) para calcular el límite de una función polinomial general. Si

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

es una función polinomial, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0)$$
$$= \lim_{x\to a} c_n x^n + \lim_{x\to a} c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \lim_{x\to a} c_1 x + \lim_{x\to a} c_0$$
$$= c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1} + \cdots + c_1 a + c_0.$$

En otras palabras, para calcular el límite de una función polinomial f cuando x tiende al número real a, sólo se necesita evaluar la función *en* a,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a). \tag{2.2}$$

Un repaso del Ejemplo 6 muestra que si $f(x) = x^2 - 5x + 6$, entonces el $\lim_{x\to 3} f(x)$ está dado por $f(3) = 0$.

Para determinar el límite de una función racional se puede emplear (2.2) junto con el Teorema 2.5(*iii*).

Ejemplo 8

Determinar $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x - 4}{6x + 2}$.

Solución Por (2.2), $\lim_{x\to-1}(3x-4) = -7$ y $\lim_{x\to-1}(6x+2) = -4$. Como el límite del denominador es diferente de cero, por el Teorema 2.5(*iii*), se observa que

$$\lim_{x\to-1}\frac{3x-4}{6x+2} = \frac{\lim_{x\to-1}(3x-4)}{\lim_{x\to-1}(6x+2)} = \frac{-7}{-4} = \frac{7}{4}.$$

No debe quedar la impresión de que *siempre* puede encontrarse el límite de una función sustituyendo o "probando" con el número real a.

Ejemplo 9

Evaluar $\lim_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^2+x-2}$.

Solución El límite de este cociente no puede escribirse inmediatamente como el cociente de límites porque $\lim_{x\to1}(x^2+x-2) = 0$. Sin embargo, si se simplifica *primero*, puede aplicarse al Teorema 2.5(*iii*),

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+x-2} = \lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x\to1}\frac{1}{x+2} = \frac{\lim_{x\to1}1}{\lim_{x\to1}(x+2)} = \frac{1}{3}.$$

Límite de una raíz

El límite de la raíz n-ésima de una función, es la raíz n-ésima del límite siempre que el límite exista y tenga una raíz n-ésima real.

TEOREMA 2.7

Sea $\lim_{x\to a}f(x) = L$ y sea n un entero positivo. Si $L > 0$ cuando n es cualquier entero positivo, o si $L \leq 0$ cuando n es un entero positivo impar, entonces

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{1/n} = L^{1/n}. \qquad \square$$

Ejemplo 10

Evaluar $\lim_{x\to9}\sqrt{x}$.

Solución Como $\lim_{x\to9}x = 9 > 0$, se sabe por el Teorema 2.7 que

$$\lim_{x\to9}\sqrt{x} = [\lim_{x\to9}x]^{1/2} = 9^{1/2} = 3.$$

Ejemplo 11

Determinar $\lim_{x\to-8}\dfrac{x-\sqrt[3]{x}}{2x+10}$.

Solución Como $\lim_{x\to-8}(2x+10) = -6 \neq 0$, por los Teoremas 2.5(*iii*) y 2.7 se observa que

$$\lim_{x\to-8}\frac{x-\sqrt[3]{x}}{2x+10} = \frac{\lim_{x\to-8}x - [\lim_{x\to-8}x]^{1/3}}{\lim_{x\to-8}(2x+10)} = \frac{-8-(-8)^{1/3}}{-6} = \frac{-6}{-6} = 1.$$

Algunas veces puede detectarse a simple vista cuándo un *límite no existe.*

TEOREMA 2.8

Si $\lim_{x\to a}f(x) = L_1 \neq 0$ y $\lim_{x\to a}g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to a}f(x)/g(x)$ no existe.

Demostración Se dará una demostración indirecta de este resultado basada en el Teorema 2.5. Supóngase que $\lim_{x\to a}f(x) = L_1 \neq 0$, $\lim_{x\to a}g(x) = 0$ y que $\lim_{x\to a}f(x)/g(x)$ existe y es igual a L_2, entonces

$$L_1 = \lim_{x\to a}f(x) = \lim_{x\to a}g(x)\cdot\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}g(x)\cdot\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0\cdot L_2 = 0.$$

Se ha probado el teorema al contradecir el supuesto de que $L_1 \neq 0$. $\square$

Ejemplo 12

Por el Teorema 2.8 puede observarse que

$$\lim_{x\to5}\frac{4x+7}{x^2-25}$$

no existe porque $\lim_{x\to5}(4x+7) = 27 \neq 0$ y $\lim_{x\to5}(x^2-25) = 0$.

El último teorema de esta sección tiene varios nombres: **Teorema de interposición, Teorema de intercalación, Teorema de estricción** y algunos otros. Como se muestra en la Figura 2.16, si $f(x)$ se interpone entre $g(x)$ y $h(x)$ para todo x cercano al número a, y si se sabe que las funciones g y h tienen un límite común L cuando $x\to a$, cabe razonar que f también tiende a L cuando $x\to a$.

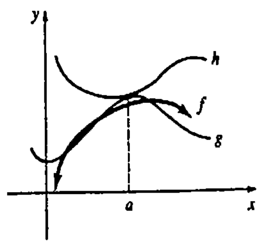


Figura 2.16

TEOREMA 2.9

Teorema de interposición

Si f, g y h son funciones para las cuales $g(x) \le f(x) \le h(x)$ para todo x en un intervalo abierto que contiene al número a, excepto posiblemente el mismo a, y si $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

Ejemplo 13

Evaluar $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.

Solución Para $x \ne 0$ se tiene que $-1 \le \operatorname{sen} 1/x \le 1$. Por lo tanto,

$$-x^2 \le x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \le x^2.$$

Si se hacen las identificaciones $g(x) = -x^2$ y $h(x) = x^2$, se sigue de (2.2) que $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} h(x) = 0$. De este modo, por el Teorema de interposición se concluye que

$$\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0.$$

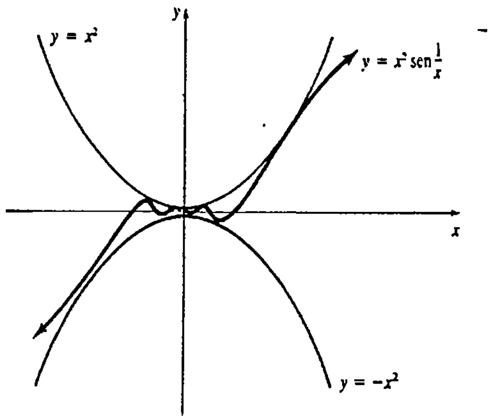


Figura 2.17

Observaciones

(*i*) En matemáticas, el estudiante debe tener cuidado con lo que una definición o un teorema *no* dicen. Por eso, de vez en cuando se concluye el estudio de una sección con algunas palabras de advertencia acerca de la posibilidad de darle a una definición o a un teorema una extensión o una limitación injustificadas.

(*ii*) El Teorema 2.5(*i*) no dice que el límite de una suma es *siempre* la suma de los límites. La gráfica de $f(x) = 1/x$ de la Figura 1.32(*a*) muestra que $\lim_{x\to 0} 1/x$ no existe. Por consiguiente,

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right] \ne \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}.$$

Sin embargo,

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

(*iii*) Puede ser que el límite de un producto exista aun cuando no sea el producto de los límites; por ejemplo,

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \frac{1}{x} \ne \lim_{x\to 0} x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{x},$$

no obstante que

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

(*iv*) El Teorema 2.8 no dice que el límite de un cociente no exista siempre que el límite del denominador sea cero. El Ejemplo 9 proporciona un contraejemplo a esa interpretación. Sin embargo, el Teorema 2.8 sí establece que el límite de un cociente no existirá siempre que el límite del denominador sea cero y el límite del numerador sea diferente de cero. Además, sería una generalización destructiva concluir que el Teorema 2.8 proporciona la única manera en la que un límite puede no existir.

Ejercicios 2.2

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 968.

En los Problemas 1-44 encuentre el límite dado, si es que existe.

1. $\lim_{x\to -5} 17$
2. $\lim_{x\to 7} \cos \pi$
3. $\lim_{x\to 3} (-4)x$
4. $\lim_{x\to -2} x^2$
5. $\lim_{x\to -1} (x^3 - 4x + 1)$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{x+5}{3x}$
7. $\lim_{t\to 1} (3t-1)(5t^2+2)$
8. $\lim_{t\to -2} (t+4)^2$
9. $\lim_{s\to 7} \frac{s^2-21}{s+2}$
10. $\lim_{x\to 6} \frac{x^2-6x}{x^2-7x+6}$
11. $\lim_{x\to 6} \sqrt{2x-5}$
12. $\lim_{s\to 8} (1+\sqrt[3]{s})$
13. $\lim_{t\to 1} \frac{\sqrt{t}}{t^2+t-2}$
14. $\lim_{x\to 2} x^2\sqrt{x^2+5x+2}$
15. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$
16. $\lim_{x\to -3} \frac{2x+6}{4x^2-36}$
17. $\lim_{x\to 0} \left(x - \frac{1}{x-1}\right)$
18. $\lim_{t\to 0} \left(\frac{4}{t} - 1\right)t$
19. $\lim_{t\to -1} \frac{t^3+1}{t^2-1}$
20. $\lim_{x\to -2} x\sqrt{x+4}\,\sqrt[3]{x-6}$
21. $\lim_{x\to 0^+} \frac{(x+2)(x^5-1)^3}{(\sqrt{x}+4)^2}$
22. $\lim_{x\to 0} x^3(x^4+2x^3)^{-1}$
23. $\lim_{x\to 0} \left[\frac{x^2+3x-1}{x} + \frac{1}{x}\right]$
24. $\lim_{x\to 2} \left[\frac{1}{x-2} - \frac{6}{x^2+2x-8}\right]$
25. $\lim_{x\to 3^+} \frac{(x+3)^2}{\sqrt{x-3}}$
26. $\lim_{x\to 3} (x-4)^{99}(x^2-7)^{10}$
27. $\lim_{x\to 10} \sqrt{\frac{10x}{2x+5}}$
28. $\lim_{r\to 1} \frac{\sqrt{(r^2+3r-2)^3}}{\sqrt[3]{(5r-3)^2}}$
29. $\lim_{h\to 4} \sqrt{\frac{h}{h+5}}\left(\frac{h^2-16}{h-4}\right)^2$

30. $\lim_{t\to 2} (t+2)^{3/2}(2t+4)^{1/3}$

31. $\lim_{t\to 1^+} \dfrac{3t}{-1+\sqrt{t}}$ 32. $\lim_{s\to 8^-} \dfrac{16-s^{4/3}}{4-s^{2/3}}$

33. $\lim_{x\to 0^-} \sqrt[5]{\dfrac{x^3-64x}{x^2+2x}}$ 34. $\lim_{x\to -1^+}\left(8x+\dfrac{2}{x}\right)^5$

35. $\lim_{t\to 1}(at^2-bt)^2$ 36. $\lim_{x\to -1}\sqrt{u^2x^2+2xu+1}$

37. $\lim_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$ 38. $\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[(x+h)^3-x^3]$

39. $\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}\right)$

40. $\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ $(x>0)$

41. $\lim_{t\to 1}\dfrac{\sqrt{t}-1}{t-1}$ 42. $\lim_{u\to 5}\dfrac{\sqrt{u+4}-3}{u-5}$

43. $\lim_{v\to 0}\dfrac{\sqrt{25+v}-5}{\sqrt{1+v}-1}$ 44. $\lim_{x\to 1}\dfrac{4-\sqrt{x+15}}{x^2-1}$

En los Problemas 45 y 46 encuentre $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ para la función dada.

45. $f(x)=3x^2+1$ 46. $f(x)=x^2-2x+7$

En los Problemas 47 y 48 utilice el Teorema de interposición para establecer el límite dado.

47. $\lim_{x\to 0} x^2\operatorname{sen}^2\dfrac{1}{x}=0$ 48. $\lim_{x\to 0} x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}=0$

En los Problemas 49 y 50 utilice el Teorema de interposición para evaluar el límite dado.

49. $\lim_{x\to 2} f(x)$ cuando $2x-1\le f(x)\le x^2-4x+7,\quad x\neq 2$

50. $\lim_{x\to 0} f(x)$ cuando $|f(x)-1|\le x^2,\quad x\neq 0$

Problema diverso

51. Si $|f(x)|\le B$ para todo x, demuestre que $\lim_{x\to 0} x^2 f(x)=0$.

2.3 Límites en los que interviene infinitó

Definición intuitiva

El límite de una función f cuando x tiende al número a no existirá siempre que los valores funcionales crezcan o decrezcan sin cota. En la Figura 2.18(a), el hecho de que los valores funcionales $f(x)$ crezcan sin cota cuando x tiene el valor a se denota mediante

$$f(x)\to\infty,\ \text{cuando } x\to a \quad \text{o bien} \quad \lim_{x\to a} f(x)=\infty.$$

En la Figura 2.18(b) los valores funcionales decrecen sin cota cuando x tiende al valor a,

$$f(x)\to -\infty \quad \text{cuando} \quad x\to a.$$

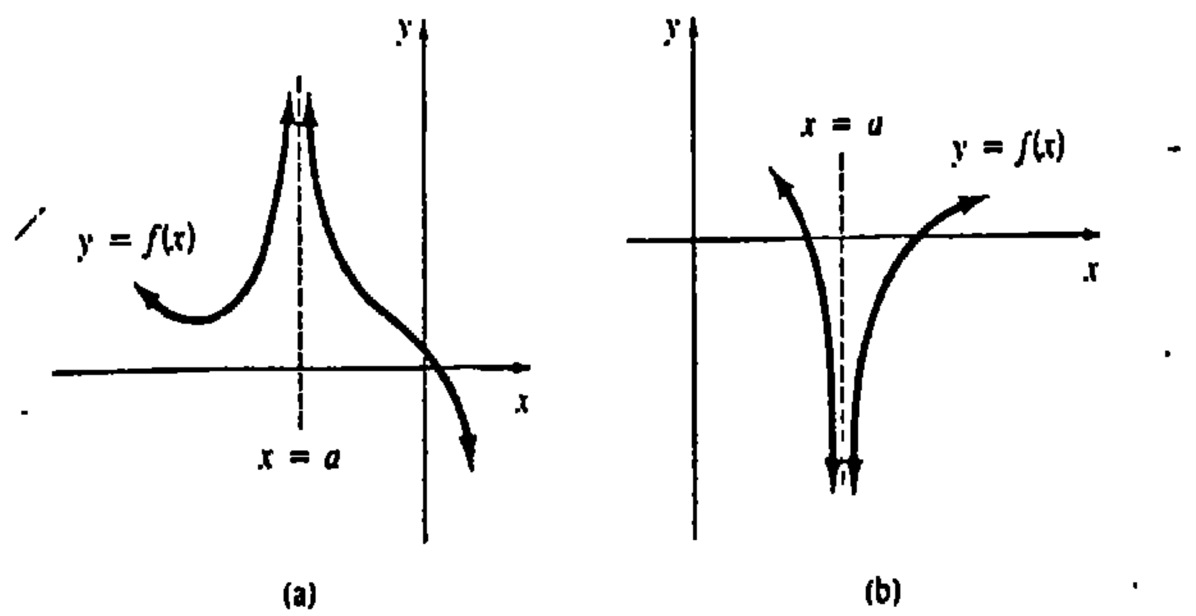


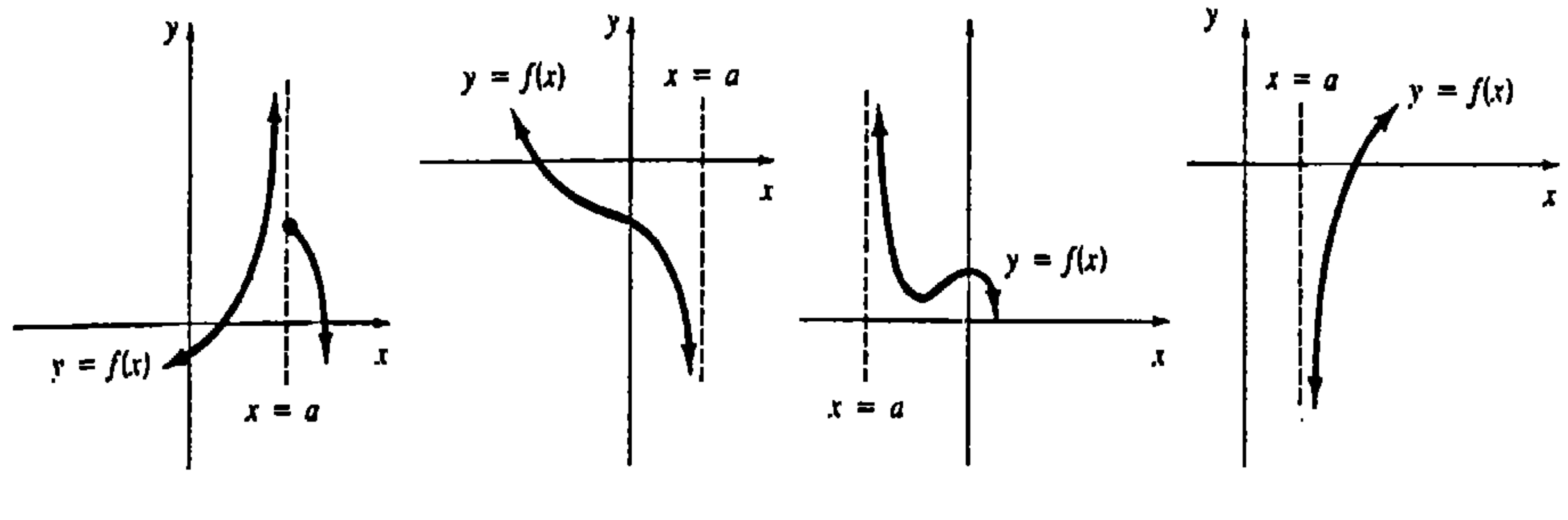
Figura 2.18

A continuación se resume esta noción de un límite infinito.

Si $|f(x)|$ puede hacerse arbitrariamente grande al tomar el valor de x suficientemente cercano a pero diferente del número a, tanto por la izquierda como por la derecha de a, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \quad \text{o bien} \quad \lim_{x\to a} f(x)=-\infty$$

De modo semejante, la Figura 2.19 muestra el comportamiento no acotado de una función cuando x tiende al valor a por un lado.



(a) $\lim_{x\to a^-} f(x)=\infty$ (b) $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ (c) $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$ (d) $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

Figura 2.19

Asíntotas verticales

Generalmente, cualquier límite de los tipos

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to a} f(x)=-\infty,$$
$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty,\quad \text{y}$$
$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$$

es un límite infinito. Si se cumple alguna de las condiciones anteriores, entonces la recta $x=a$ es una asíntota vertical de la gráfica de f.

Ejemplo 1

A partir de la tabla y de la gráfica de la Figura 2.20, se observa que los valores de la función $f(x)=2/(x-1)$ decrecen sin cota cuando $x\to 1-$ y crecen sin cota cuando $x\to 1^+$, esto es,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$$

y

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\infty.$$

x	$f(x)$
0.9	−20
0.99	−200
0.999	−2000
1.1	20
1.01	200
1.001	2000

La recta $x = 1$ es una asíntota vertical.

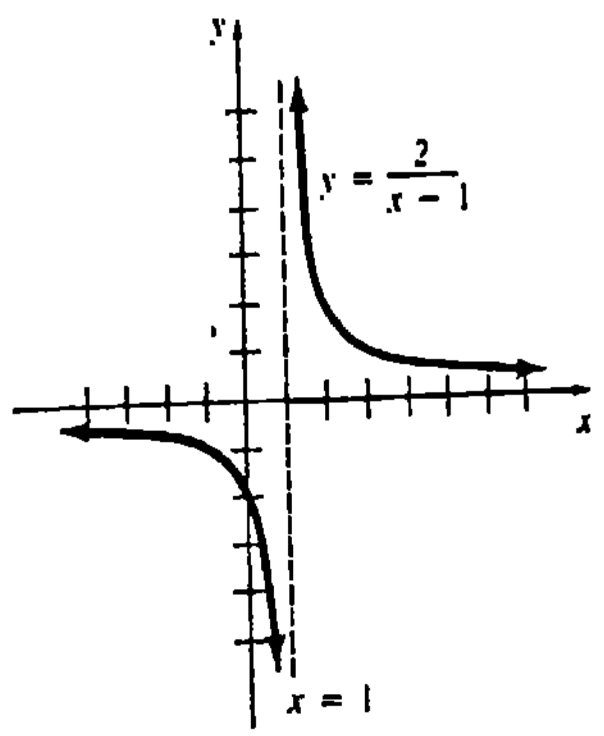


Figura 2.20

Ejemplo 2

Graficar la función $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$.

Solución El análisis revela que el dominio de f es $(-2, \infty)$, y que su intercepción y es 0. A partir de la tabla siguiente se concluye que f decrece sin cota cuando x tiende a -2 por la derecha:

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty.$$

Por lo cual, la recta $x = -2$ es una asíntota vertical. La gráfica de f se muestra en la Figura 2.21.

x	$f(x)$
-1.9	-6.01
-1.99	-19.90
-1.999	-63.21
-1.9999	-199.90

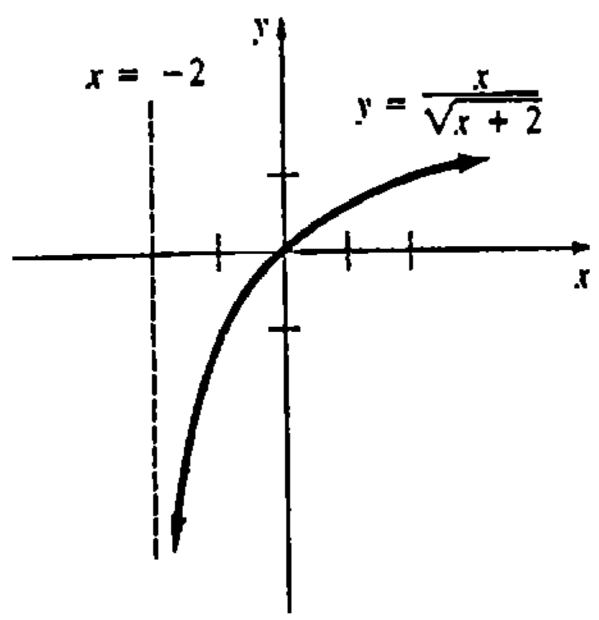


Figura 2.21

Ejemplo 3

La gráfica de $f(x) = 1/x^2$ dada en la Figura 2.22 muestra que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

La recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

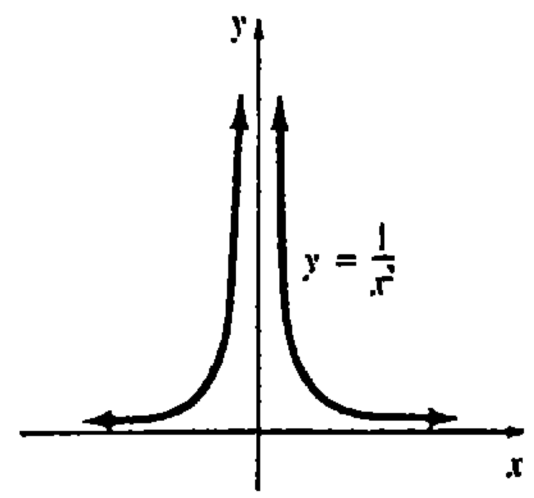


Figura 2.22

Ejemplo 4

La gráfica de $f(x) = 1/(x-2)^3$ dada en la Figura 2.23 muestra que

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{(x-2)^3} = -\infty$$

y

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{(x-2)^3} = \infty.$$

La recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

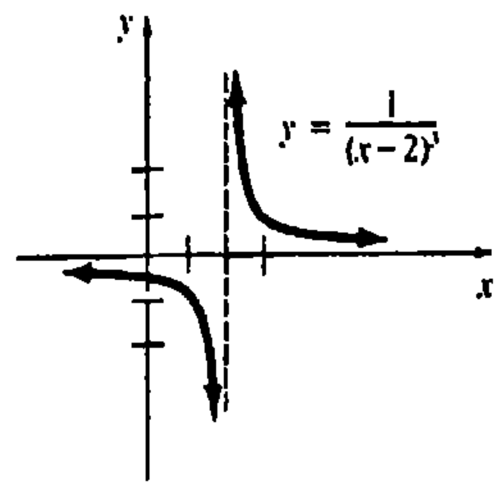


Figura 2.23

Los dos ejemplos anteriores ilustran el teorema siguiente.

TEOREMA 2.10

(*i*) Si n es un entero positivo par, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^n} = \infty.$$

(*ii*) Si n es un entero positivo impar, entonces

$$\lim_{x \to a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = \infty. \qquad \square$$

Para funciones racionales, las asíntotas verticales pueden encontrarse mediante simple inspección.

Supóngase que $f(x) = P(x)/Q(x)$, en donde P y Q son funciones polinomiales. Si $Q(a) = 0$ y $P(a) \neq 0$, entonces $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de f.

Ejemplo 5

Determinar las asíntotas verticales de $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{(x^2+1)(x^2-6x+8)}$.

Solución f es una función racional con $P(x) = x^2 + x + 1$ y

$$Q(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 6x + 8) = (x^2 + 1)(x - 2)(x - 4).$$

Como el denominador Q es cero solamente para 2 y 4, y como $P(2) \neq 0$ y $P(4) \neq 0$, se sigue que las rectas $x = 2$ y $x = 4$ son asíntotas verticales.

Ejemplo 6

La función racional $f(x) = (x^2 - 9)/(x - 3)$ *no* tiene asíntota vertical en $x = 3$. ¿Por qué no?

Límites al infinito

Una función f podría aproximarse a un valor constante L al crecer o decrecer sin cota la variable independiente x. Se expresa

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \text{o bien} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

para denotar un límite al infinito. La Figura 2.24 muestra cuatro posibilidades del comportamiento de una función f cuando x se hace grande en valor absoluto.

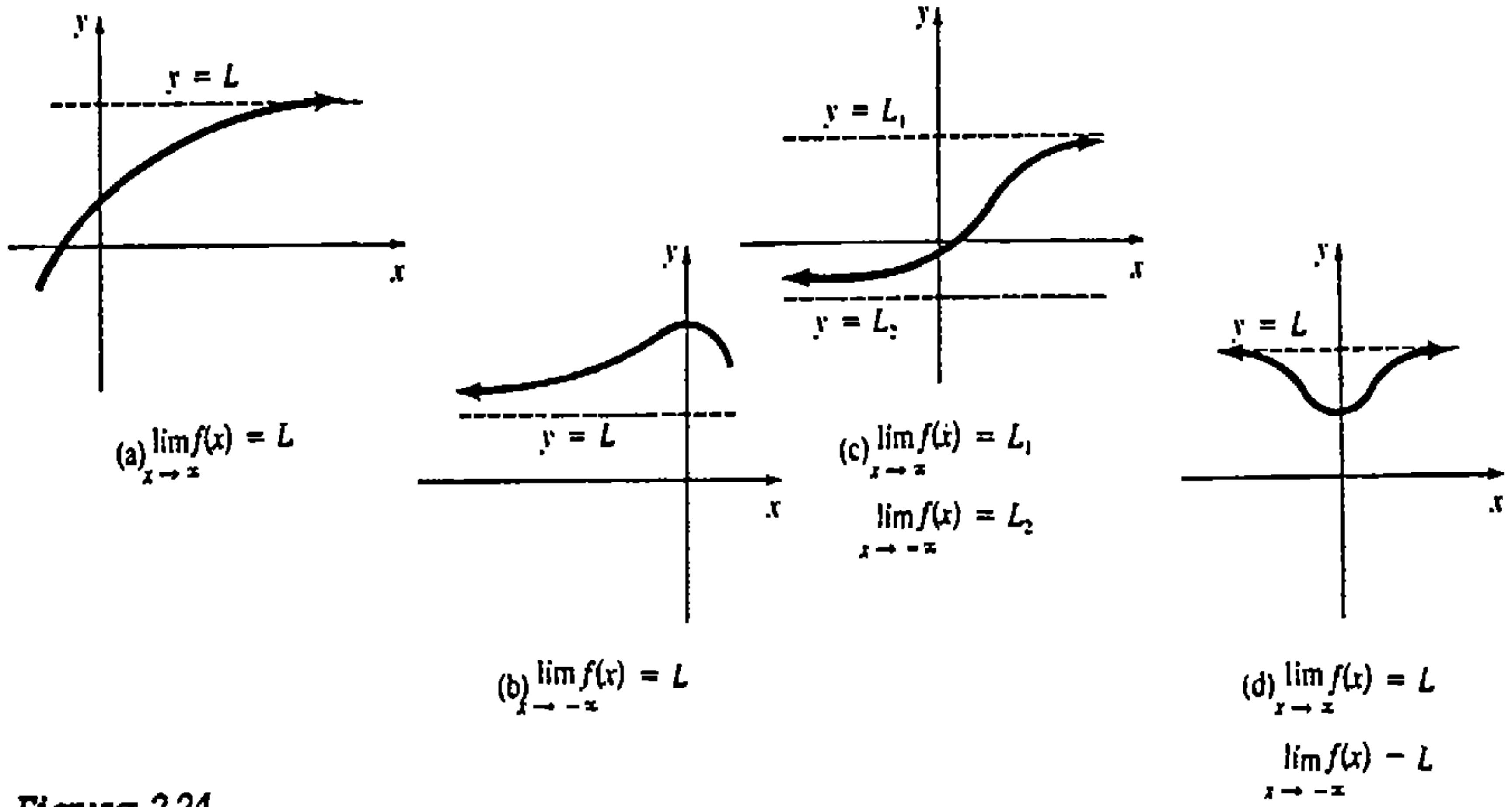


Figura 2.24

Definición intuitiva

A continuación se da una definición intuitiva del concepto de $f(x) \to L$ cuando $x \to \infty$.

Si $f(x)$ puede hacerse arbitrariamente cercana a un número finito L tomando x suficientemente grande, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$.

Puede darse una definición semejante para $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.

Asíntotas horizontales

Si $f(x) \to L$ ya sea cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$, se dice que la recta $y = L$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de f. En la Figura 2.24(c) la función tiene dos asíntotas horizontales, $y = L_1$ y $y = L_2$.

Ejemplo 7

Otro examen de las Figuras 2.20 y 2.22 muestra que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x - 1} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

De este modo, $y = 0$ es una asíntota horizontal de las gráficas de ambas funciones $f(x) = 2/(x - 1)$ y $f(x) = 1/x^2$.

El siguiente teorema es útil para evaluar límites al infinito.

TEOREMA 2.11

Sea t un número racional positivo. Si x^t está definida, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^t} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^t} = 0. \qquad \square$$

Ejemplo 8

(*a*) Por el teorema 2.11 se tiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{1/2}} = 0.$$

(*b*) Como $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ está definida para $x < 0$, por los Teoremas 2.3 y 2.11 se sigue que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{6}{\sqrt[3]{x}} = 0.$$

Generalmente, si $F(x) = f(x)/g(x)$, entonces los resultados de los límites para las formas $\lim_{x\to a} F(x)$, $\lim_{x\to\infty} F(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} F(x)$, se resumen en la tabla siguiente.

Forma del límite: $x \to a, \infty$, *o* $-\infty$	$\frac{L}{\pm\infty}$	$\frac{\pm\infty}{L}$	$\frac{L}{0}$
El límite es	0	infinito	infinito

Además los resultados sobre límites del Teorema 2.5 se verifican reemplazando el símbolo a por ∞ o $-\infty$ siempre y cuando los límites existan; por ejemplo,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to\infty} g(x)} \tag{2.3}$$

siempre que existan $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} g(x)$ y que $\lim_{x\to\infty} g(x) \neq 0$.

Ejemplo 9

Evaluar $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-6x^4 + x^2 + 1}{2x^4 - x}$.

Solución No es posible aplicar (2.3) a la función como está dada, porque $\lim_{x\to\infty}[-6x^4 + x^2 + 1) = -\infty$ y $\lim_{x\to\infty}(2x^4 - x) = \infty$. Sin embargo, si se dividen el numerador y el denominador entre x^4, puede escribirse

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-6x^4 + x^2 + 1}{2x^4 - x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-6 + (1/x^2) + (1/x^4)}{2 - (1/x^3)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}[-6 + (1/x^2) + (1/x^4)]}{\lim\limits_{x\to\infty}[2 - (1/x^3)]}$$

$$= \frac{-6 + 0 + 0}{2 + 0} = -3.$$

Esto significa que la recta $y = -3$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función.

El ejemplo anterior ilustra un procedimiento general para determinar el comportamiento de una función racional $f(x) = P(x)/Q(x)$ cuando $x \to \infty$ o bien $x \to -\infty$:

Divídanse el numerador y el denominador entre la potencia más alta de x que esté en el denominador.

Ejemplo 10

Evaluar $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 - x^3}{3x + 2}$.

Solución Si se dividen el numerador y el denominador entre x,

$$\frac{1 - x^3}{3x + 2} = \frac{(1/x) - x^2}{3 + (2/x)},$$

se observa que la función tiene la forma límite $-\infty/3$ cuando $x \to \infty$. De aquí que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1 - x^3}{x + 2} = -\infty.$$

Ejemplo 11

Graficar la función $f(x) = \dfrac{x^2}{1 - x^2}$.

Solución Nótese que la gráfica de f es simétrica con respecto al eje y, la intercepción y es 0, y las asíntotas verticales son $x = -1$ y $x = 1$. Ahora, si se escribe

$$f(x) = \frac{x^2}{1 - x^2} = \frac{1}{(1/x^2) - 1},$$

se observa que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 1}{\lim\limits_{x\to\infty}[(1/x^2) - 1]} = \frac{1}{0 - 1} = -1.$$

Por lo cual la recta $y = -1$ es una asíntota horizontal. La gráfica de f se muestra en la Figura 2.25.

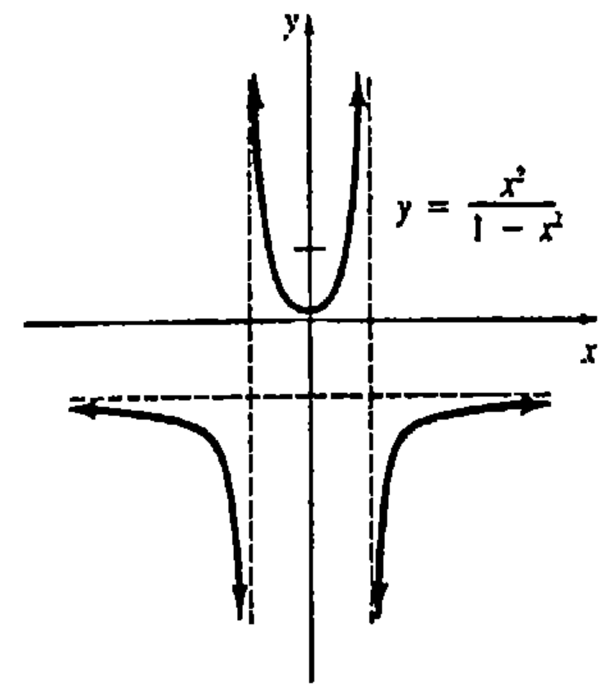


Figura 2.25

Ejemplo 12

Determinar si la gráfica de $f(x) = \dfrac{5x}{\sqrt{x^2 + 4}}$ tiene asíntotas horizontales.

Solución Para investigar el límite de f cuando $x \to \infty$, se procede como en los Ejemplos 9, 10 y 11. Primero, para $x \geq 0$, $\sqrt{x^2} = x$; por lo tanto, el denominador de f puede escribirse como

$$\sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{x^2}\sqrt{1 + 4/x^2} = x\sqrt{1 + 4/x^2}.$$

La división del numerador y el denominador entre x permite aplicar luego los Teoremas 2.5(*iii*), 2.7 y 2.11,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x}{\sqrt{x^2 + 4}} = \lim_{x\to\infty}\frac{5}{\sqrt{1 + 4/x^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 5}{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty} 1 + \lim\limits_{x\to\infty}(4/x^2)}} = \frac{5}{1} = 5.$$

Ahora, para $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x$, y

$$\sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{x^2}\sqrt{1 + 4/x^2} = -x\sqrt{1 + 4/x^2}.$$

En este caso, al dividir el numerador y el denominador entre $-x$ se obtiene

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x}{\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-5}{\sqrt{1+4/x^2}} = \frac{-5}{1} = -5.$$

De este modo, la gráfica de f tiene las asíntotas horizontales $y = 5$ y $y = -5$.

Ejemplo 13

El alcohol es eliminado del organismo por los pulmones, por los riñones y mediante procesos químicos en el hígado. A niveles de concentración moderados el hígado efectúa la mayor parte del trabajo de eliminación del alcohol, mientras que pulmones y riñones eliminan menos del 5%. El hígado procesa el alcohol de la corriente sanguínea en una proporción r relacionada con la concentración de alcohol en la sangre x según una función racional de la forma

$$r(x) = \frac{\alpha x}{x + \beta}$$

para ciertas constantes positivas α y β. Este es un caso especial de la llamada **Ley de Michaelis-Menten**. Nótese que $r(0) = 0$ y que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha x}{x + \beta} = \alpha.$$

Como los valores de r aumentan cuando x crece, se puede interpretar α como la proporción de eliminación máxima posible. Para los seres humanos un valor típico de α es 0.22 gramos por litro y por minuto.*

Observaciones

(*i*) Tal vez el lector haya escuchado la descripción de una asíntota como: "recta a la cual se aproxima la gráfica de una función sin cruzarla nunca". Si una función posee una asíntota vertical, entonces su gráfica nunca la podrá cruzar (¿por qué?). Sin embargo, la Figura 2.26 muestra que una gráfica puede cruzar una asíntota horizontal muchas veces.

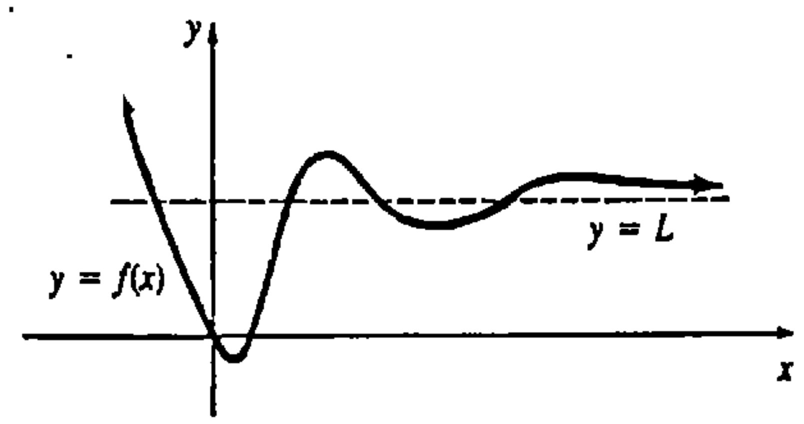


Figura 2.26

* Basado en F. Lundquist y H. Wolthers, "Kinetics of Alcohol Elimination in Man", *Acta Pharmacol. et Toxicol.*, (1958) 14:265-289.

(*ii*) La gráfica de una función puede tener muchas asíntotas verticales. Debería meditarse al respecto y proporcionar una respuesta a la pregunta: ¿cuántas asíntotas horizontales puede tener la gráfica de una función?

(*iii*) Debe recalcarse que proposiciones como $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ significan que los límites *no existen*. El símbolo ∞ no representa ningún número y no debe ser tratado como tal.

Ejercicios 2.3

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 968.

En los Problemas 1-16 trace la gráfica de la función dada. Identifique las asíntotas verticales y las horizontales.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$
2. $f(x) = \dfrac{3}{5-x}$
3. $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$
4. $f(x) = \dfrac{-2x+1}{x+1}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$
6. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$
7. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$
8. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-x-6}$
9. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
10. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
11. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$
12. $f(x) = \dfrac{x^2-x}{x^2-1}$
13. $f(x) = \dfrac{1}{x^2(x-2)}$
14. $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2+4}$
15. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$
16. $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

En los Problemas 17-20 utilice la gráfica dada para evaluar

(a) $\lim_{x\to2^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to2^+} f(x)$

(c) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ (d) $\lim_{x\to\infty} f(x)$

17.

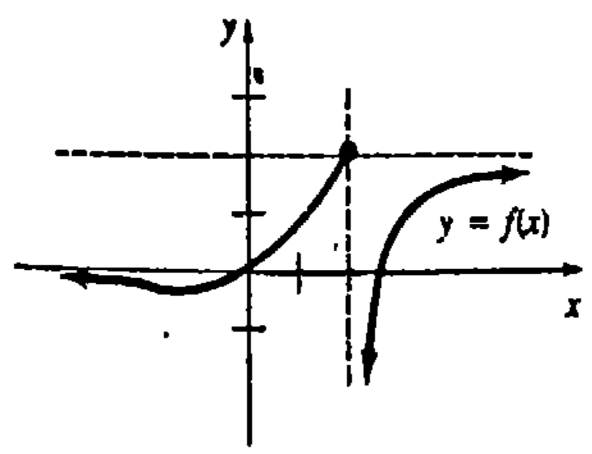


Figura 2.27

18.

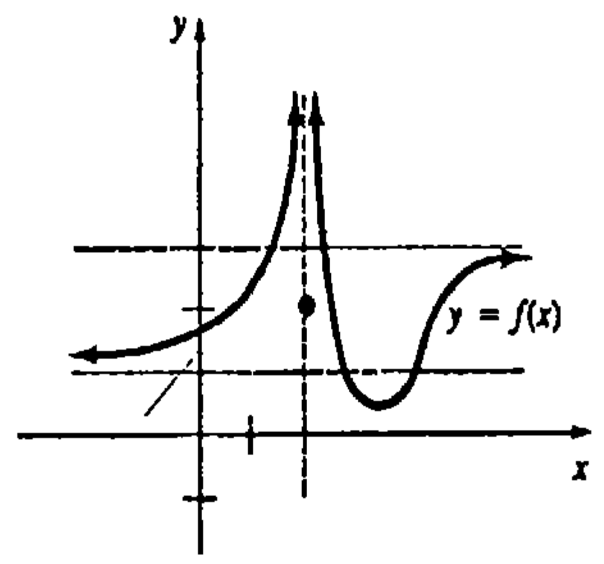


Figura 2.28

19.

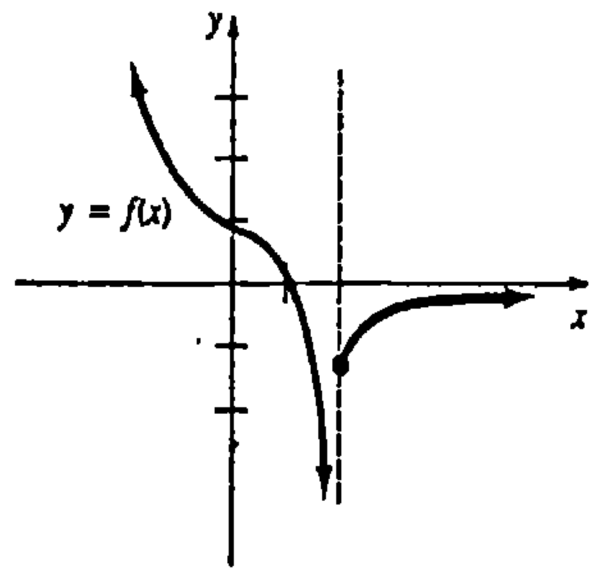


Figura 2.29

20.

$y = \frac{1}{x^3}$

$y = x^{-3}$

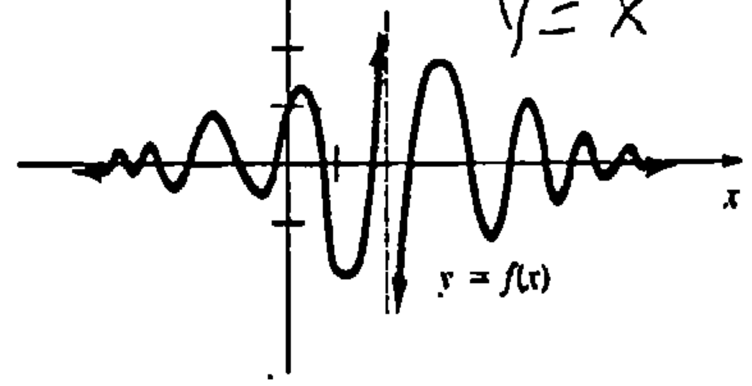


Figura 2.30

En los Problemas 21-48 obtenga el valor del límite indicado.

21. $\lim_{x\to 5^-} \dfrac{1}{x-5}$

22. $\lim_{x\to 6} \dfrac{4}{(x-6)^2}$

23. $\lim_{x\to -4^+} \dfrac{2}{(x+4)^3}$

24. $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{10}{x^2-4}$

25. $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-1)^4}$

26. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{-1}{\sqrt{x}}$

27. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{2+\operatorname{sen} x}{x}$

28. $\lim_{x\to \pi^+} \csc x$

29. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^2-3x}{4x^2+5}$

30. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^2}{1+x^{-2}}$

31. $\lim_{x\to \infty}\left(5-\dfrac{2}{x^4}\right)$

32. $\lim_{x\to -\infty}\left(\dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)$

33. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{2-1/x}{x^2+1}$

34. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x-x^{-3}}{3x+x^{-2}}$

35. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{8-\sqrt{x}}{1+4\sqrt{x}}$

36. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{1+7\sqrt[3]{x}}{2\sqrt[3]{x}}$

37. $\lim_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x}{x+2}-\dfrac{x-1}{2x+6}\right)$

38. $\lim_{x\to \infty}\left(\dfrac{x}{3x+1}\right)\left(\dfrac{4x^2+1}{2x^2+x}\right)^3$

39. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{4x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

40. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{9x^2+6}}{5x-1}$

41. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{2x+1}{\sqrt{3x^2+1}}$

42. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{-5x^2+6x+3}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$

43. $\lim_{x\to \infty} \sqrt{\dfrac{3x+2}{6x-8}}$

44. $\lim_{x\to -\infty} \sqrt[3]{\dfrac{2x-1}{7-16x}}$

45. $\lim_{x\to \infty}(x-\sqrt{x^2+1})$ (*Sugerencia:* racionalice el numerador.)

46. $\lim_{x\to \infty}(\sqrt{x^2+5x}-x)$

47. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{|x-5|}{x-5}$

48. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{|4x|+|x-1|}{x}$

En los Problemas 49 y 50 trace la gráfica de una función que satisfaga las condiciones dadas.

49. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $f(2) = 0$, $\lim_{x\to \infty} f(x) = 0$

50. $f(0) = 1$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x\to \infty} f(x) = -2$

En los Problemas 51 y 52 halle las intercepciones con los ejes y las asíntotas verticales y horizontales. Trace la gráfica de f.

51. $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$

52. $f(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2-1}}$

53. Según la teoría de la relatividad de Einstein, la masa m de un cuerpo que se mueve con una velocidad v es $m = m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$, en donde m_0 es la masa inicial y c es la velocidad de la luz. ¿Qué sucede con m cuando $v \to c^-$?

54. Un problema importante de la ciencia pesquera consiste en calcular el número de peces que desovan actualmente en los ríos y emplear esta información para predecir el número de peces maduros o "reclutas" que volverán a los ríos durante el siguiente periodo de reproducción. Si S es el número de peces hembra y R el número de reclutas, la función hembra-recluta de Beverton y Holt* es $R(S) = S/(\alpha S + \beta)$, en donde α y β son constantes positivas. Demuestre que esta función predice un reclutamiento aproximadamente constante cuando el número de hembras es suficientemente grande.

Problemas para calculadora

En los Problemas 55-58 utilice una calculadora para investigar el límite dado y formule una hipótesis acerca de su valor.

55. $\lim_{x\to \infty} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{2}{x^2}$

56. $\lim_{x\to \infty} x \operatorname{sen} \dfrac{3}{x}$

57. $\lim_{x\to \infty}\left(\cos \dfrac{1}{x}\right)^x$

58. $\lim_{x\to (\pi/2)^-} \dfrac{\tan x}{\tan 5x}$

59. Considérese la función $f(x) = (1+x)^{1/x}$. Utilice una calculadora para investigar los valores $f(x)$ cuando (*a*) $x \to -1^+$, (*b*) $x \to 0$ y (*c*) $x \to \infty$.

60. Trace la gráfica de la función f del Problema 59 para $x > -1$.

* Basado en R. J. H. Beverton y S. J. Holt's, *On the Dynamics of Exploited Fish Populations*, H. M. S. O. (Londres), 1957, pp. 44-50.

Problemas diversos

En los Problemas 61-66 sea $f(x) = P(x)/Q(x)$ una función racional, en donde

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

y

$$Q(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0.$$

Obtenga $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

61. Grado de P < grado de Q.

62. Grado de P = grado de Q.

63. Grado de P > grado de Q.

64. $P(x) = 1$, grado de $Q \geq 1$.

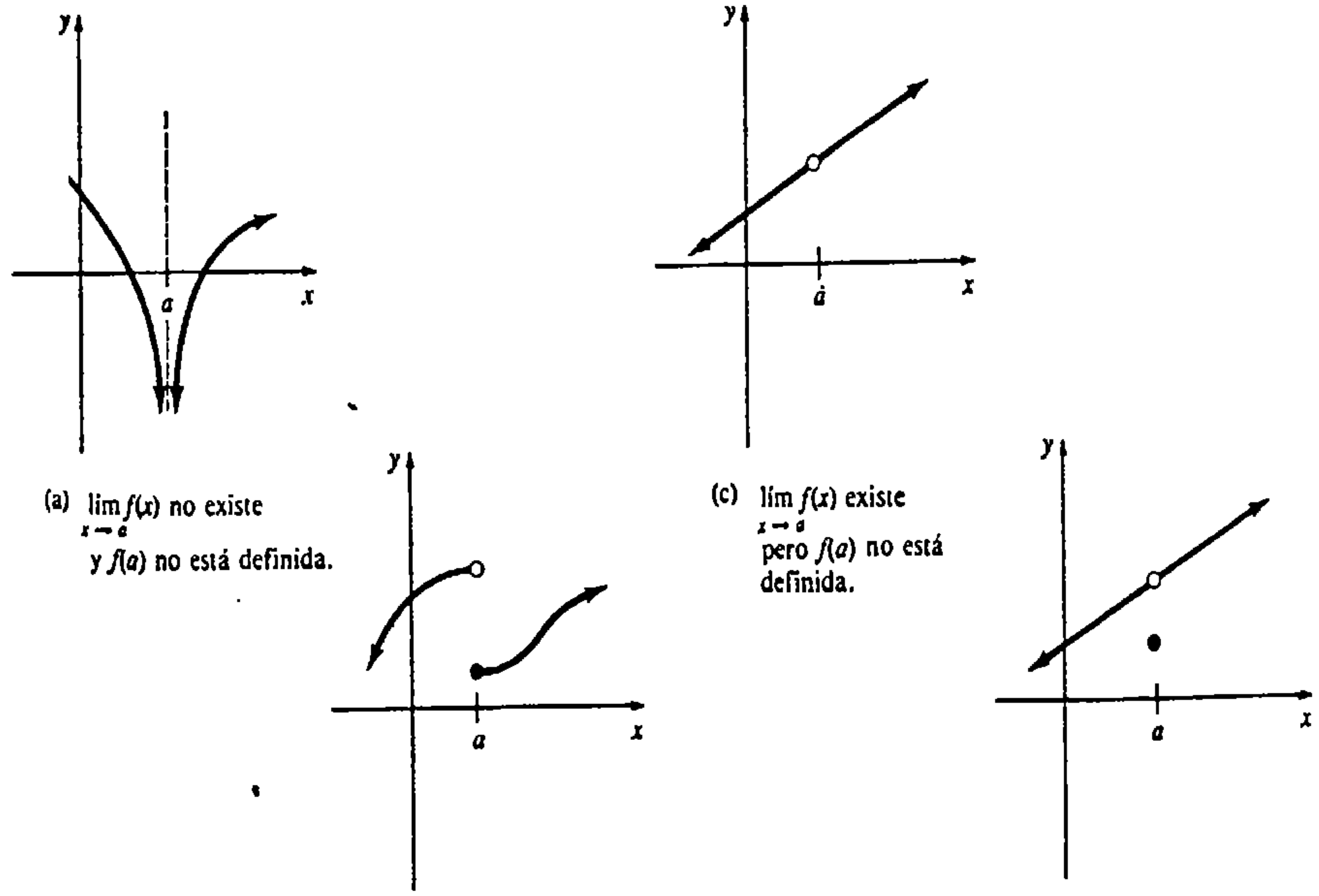
65. $Q(x) = 1$, grado de $P \geq 1$.

66. $Q(x) = xP(x)$.

2.4 Continuidad

En explicaciones anteriores acerca del trazo de gráficas se ha empleado la frase "unir los puntos con una línea continua". Esta frase evoca la imagen de una gráfica, que es una curva *continua* y regular; esto es, una curva sin aberturas o interrupciones. En efecto, una función continua se describe a menudo como aquella cuya gráfica puede dibujarse sin levantar la pluma o el lápiz del papel.

Antes de establecer la definición precisa de continuidad, en la Figura 2.31 se ilustran algunos ejemplos intuitivos de gráficas de funciones que no son continuas, o sea discontinuas, en un número a.



(a) $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe y $f(a)$ no está definida.

(b) $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe pero $f(a)$ está definida.

(c) $\lim_{x\to a} f(x)$ existe pero $f(a)$ no está definida.

(d) $\lim_{x\to a} f(x)$ existe $f(a)$ está definida, pero $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$.

Figura 2.31

Continuidad en un número a

La Figura 2.31 sugiere la condición triple siguiente para la continuidad de una función f en un número a.

DEFINICIÓN 2.1

Se dice que una función f es **continua en un número** a si

(*i*) $f(a)$ está definida,

(*ii*) $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, y

(*iii*) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. □

Ejemplo 1

La función $f(x) = (x^3-1)/(x-1) = x^2+x+1$, $x \neq 1$ es discontinua en 1, puesto que $f(1)$ no está definida. Véase la Figura 2.32. Sin embargo, f es continua en cualquier número $x \neq 1$.

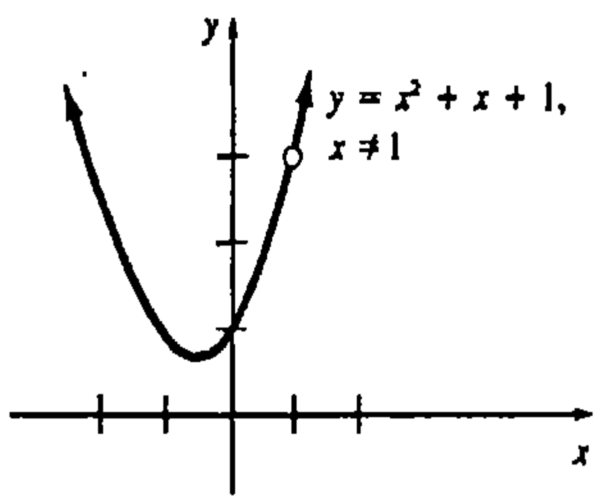


Figura 2.32

Ejemplo 2

La Figura 2.33 muestra la gráfica de la función definida por secciones

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 5, & x = 2 \\ -x+6, & x > 2. \end{cases}$$

Ahora bien,

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} x^2 = 4 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+}(-x+6) = 4 \end{aligned}\right\} \text{ implica que } \lim_{x\to 2} f(x) = 4.$$

Como $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2) = 5$, mediante (*iii*) de la Definición 2.1 se observa que f es discontinua en 2.

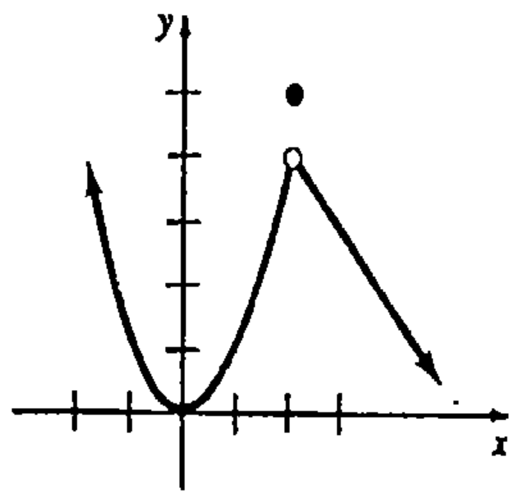


Figura 2.33

Continuidad en un intervalo

Una función f es **continua en un intervalo abierto** (a, b) si lo es en todo número del intervalo. Una función f es **continua en un intervalo cerrado** $[a, b]$ si es continua en (a, b), y además,

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b).$$

Las extensiones de estos conceptos a intervalos como (a, ∞), $(-\infty, b)$, $(-\infty, \infty)$, $[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, b]$, $[a, \infty)$ se efectúan de la manera esperada.

Ejemplo 3

(*a*) Como es evidente en la Figura 2.34(*a*), $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ es continua en el intervalo abierto $(-1, 1)$ pero no lo es en el intervalo cerrado $[-1, 1]$, puesto que ni $f(-1)$ ni $f(1)$ están definidas.

(*b*) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ es continua en $[-1, 1]$. Obsérvese en la Figura 2.34(*b*) que

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 0.$$

(*c*) $f(x) = \sqrt{x-1}$ es continua en $[1, \infty)$ puesto que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \sqrt{x-1} = \sqrt{a-1} = f(a), \qquad a > 1$$

y

$$\lim_{x\to 1^+} = \sqrt{x-1} = f(1) = 0.$$

Véase la Figura 2.34(c)

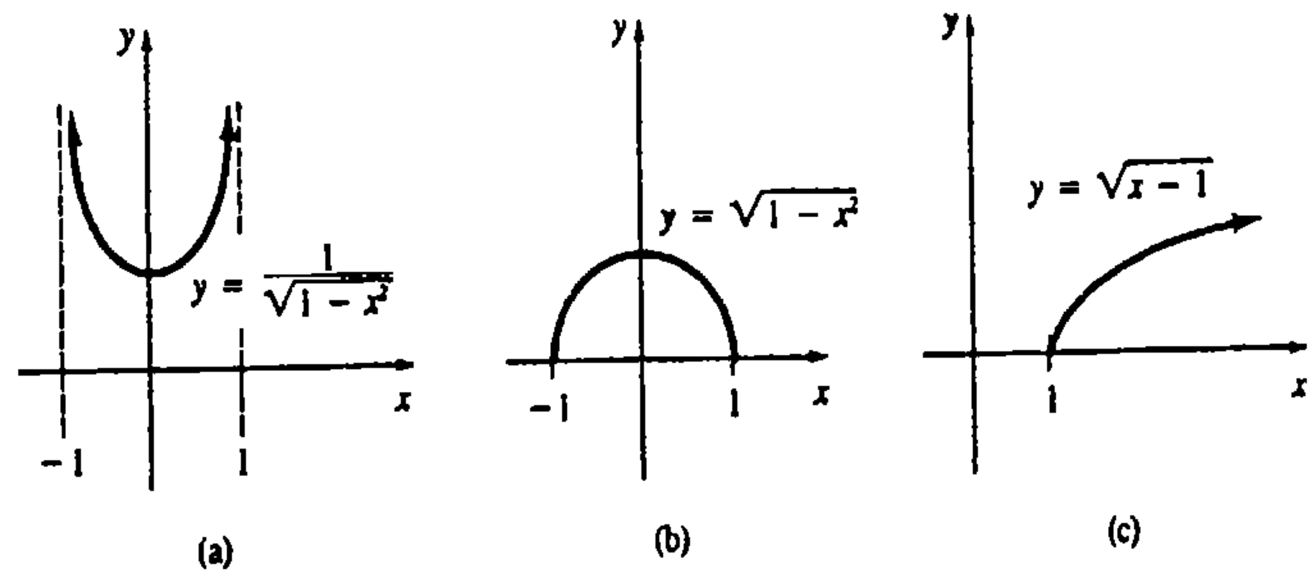


Figura 2.34

Un repaso de las gráficas de la Figura 1.58 indica que las funciones seno y coseno son continuas en $(-\infty, \infty)$. Las funciones tangente y secante son discontinuas en $x = (2n+1)\pi/2$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Las funciones cotangente y cosecante son discontinuas en $x = n\pi$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

TEOREMA 2.12

Continuidad de una suma, un producto y un cociente

Si f y g son funciones continuas en un número a, entonces cf (c es una constante), $f+g$, fg y f/g con $g(a) \neq 0$, también son continuas en a.

Demostración *Demostración de la continuidad de fg*

Como f y g son continuas en el número a, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = g(a).$$

De aquí, por el Teorema 2.5(*ii*) se tiene que

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = (\lim_{x\to a} f(x)) \cdot (\lim_{x\to a} g(x)) = f(a)g(a). \quad \square$$

Las demostraciones de las partes restantes del Teorema 2.12 se obtienen de manera semejante.

Como la Definición 2.1 implica que $f(x) = x$ es continua en todo número x, tras sucesivas aplicaciones del Teorema 2.12 se observa que las funciones

$$x, x^2, x^3, \ldots, x^n$$

son continuas también en $(-\infty, \infty)$. Así, una nueva aplicación del Teorema 2.12 muestra que

una función polinomial es continua en $(-\infty, \infty)$.*

Consecuentemente,

una función racional $f(x) = P(x)/Q(x)$, en donde P y Q son funciones polinomiales, es continua en todo número x para el que $Q(x) \neq 0$.

Límite de una función compuesta

El teorema siguiente establece que si una función f es continua, entonces el límite de la función es la función evaluada en el límite.

TEOREMA 2.13

Si $\lim_{x\to a} g(x) = L$ y f es continua en L, entonces

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x)) = f(L). \quad \square$$

El Teorema 2.13 es útil para probar otros teoremas. Si la función g es continua en un número a y f es continua en $g(a)$, entonces se observa que

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x)) = f(g(a)).$$

En otras palabras,

la función compuesta $f \circ g$ de dos funciones continuas f y g es también continua.

Queda como ejercicio probar el Teorema 2.6 a partir del Teorema 2.13.

Ejemplo 4

$f(x) = \sqrt{x}$ es continua en $[0, \infty)$ y $g(x) = 2 + \operatorname{sen} x$ es continua en $(-\infty, \infty)$. Pero, como $g(x) \geq 1 > 0$ para todo x, la función compuesta

*Veáse (2.2) de la Sección 2.2.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{2 + \operatorname{sen} x}$$

es continua en todo número real a.

La Figura 2.35 ilustra la factibilidad del resultado siguiente acerca de las funciones continuas.

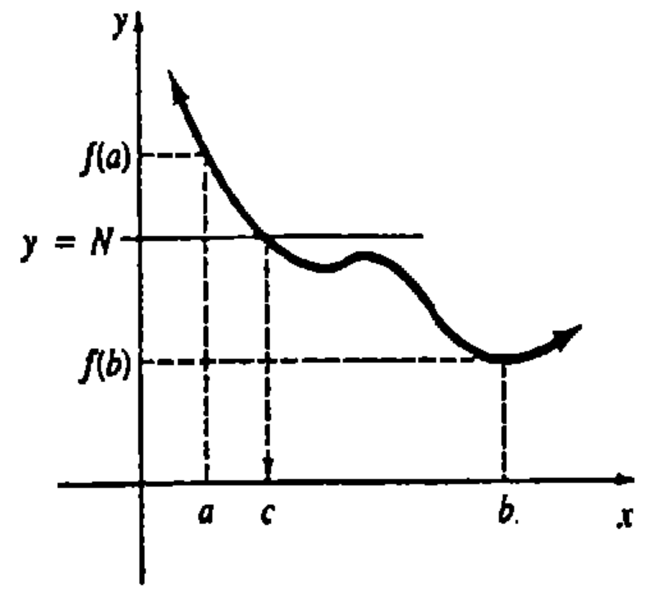


Figura 2.35

TEOREMA 2.14

Teorema del valor intermedio

Si f denota una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ para el cual $f(a) \neq f(b)$, y si N es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe al menos un número c entre a y b tal que $f(c) = N$. $\square$

El teorema del valor intermedio establece que una función f continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$. Dicho de otro modo, f no "brinca" ningunos valores.

Ejemplo 5

La función polinomial $f(x) = x^2 - x - 5$ es continua en el intervalo $[-1, 4]$ y $f(-1) = -3$, $f(4) = 7$. El Teorema 2.14 garantiza que hay una solución para $c^2 - c - 5 = N$ en $[-1, 4]$, para cualquier número N para el que $-3 \leq N \leq 7$. Específicamente, si se escoge $N = 1$, entonces $c^2 - c - 5 = 1$ es equivalente a

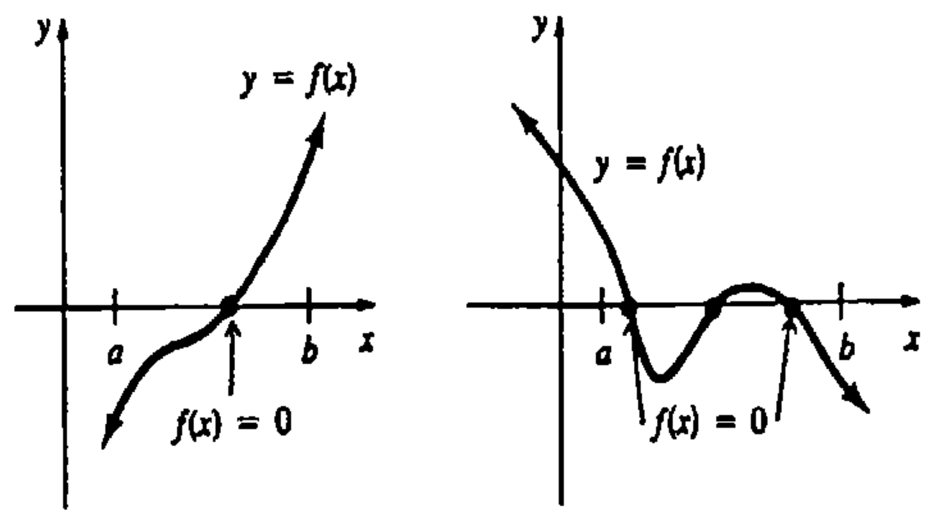
$$c^2 - c - 6 = 0 \quad \text{o bien} \quad (c - 3)(c + 2) = 0.$$

Aunque la última ecuación tiene dos soluciones, solamente el valor $c = 3$ está entre -1 y 4.

El ejemplo anterior sugiere un corolario del teorema del valor intermedio.

Si f satisface la hipótesis del Teorema 2.14, y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos algebraicos opuestos, entonces existe algún valor de x entre a y b para el que $f(x) = 0$.

Este hecho a menudo se usa para localizar los ceros reales de una función continua f. La Figura 2.36 muestra varias posibilidades.



(a) $f(a) < 0,\ f(b) > 0$ (b) $f(a) > 0,\ f(b) < 0$

Figura 2.36

En el Ejemplo 5, $f(-1) < 0$ y $f(4) > 0$, conducen a $x^2 - x - 5 = 0$ para al menos un valor de x entre -1 y 4.

Observación

Con frecuencia se le da un nombre especial a la discontinuidad de una función.

- Si $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de $y = f(x)$, entonces f tiene una **discontinuidad infinita** en a.
- Si $\lim_{x\to a^-} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = L_2$ y $L_1 \neq L_2$, entonces f tiene una **discontinuidad finita** o una **discontinuidad de salto** en a. La función $y = f(x)$ mostrada en la Figura 2.37 tiene una discontinuidad de salto en 0, ya que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$. La función mayor entero* $f(x) = [x]$ tiene una discontinuidad de salto en cada valor entero de x.
- Si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, pero f no está definida en a, o bien $f(a) \neq \lim_{x\to a} f(x)$, entonces f tiene una **discontinuidad eliminable** en a; por ejemplo, la función $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ no está definida en 1 pero $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$. Al definir $f(1) = 2$, la nueva función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

es continua en todo número.

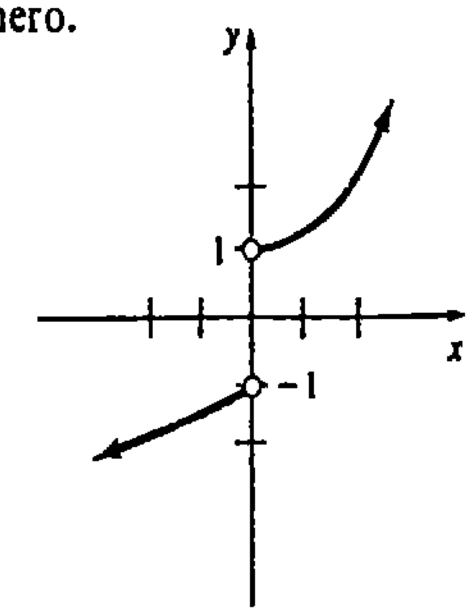


Figura 2.37

*Veáse el Ejemplo 4 de la Sección 2.1.

Ejercicios 2.4

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 969.

En los Problemas 1-10 determine, si los hay, los números en los que la función dada es discontinua.

1. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7$

2. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

3. $f(x) = (x^2 - 9x + 18)^{-1}$

4. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^4 - 1}$

5. $f(x) = \dfrac{x - 1}{\operatorname{sen} 2x}$

6. $f(x) = \dfrac{\tan x}{x + 3}$

7. $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \le x < 2 \\ x, & x > 2 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}, & x \neq 5 \\ 10, & x = 5 \end{cases}$

En los Problemas 11-22 determine si la función dada es continua en los intervalos indicados.

11. $f(x) = x^2 + 1$
 (a) $[-1, 4]$ (b) $[5, \infty)$

12. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
 (a) $(-\infty, \infty)$ (b) $(0, \infty)$

13. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
 (a) $(0, 4]$ (b) $[1, 9]$

14. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$
 (a) $[-3, 3]$ (b) $[3, \infty)$

15. $f(x) = \tan x$
 (a) $[0, \pi]$ (b) $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

16. $f(x) = \csc x$
 (a) $(0, \pi)$ (b) $(2\pi, 3\pi)$

17. $f(x) = \dfrac{x}{x^3 + 8}$
 (a) $[-4, -3]$ (b) $(-\infty, \infty)$

18. $f(x) = \dfrac{1}{|x| - 4}$
 (a) $(-\infty, -1]$ (b) $[1, 6]$

19. $f(x) = \dfrac{x}{2 + \sec x}$
 (a) $(-\infty, \infty)$ (b) $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$

20. $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$
 (a) $\left[\dfrac{1}{\pi}, \infty\right)$ (b) $\left[-\dfrac{2}{\pi}, \dfrac{2}{\pi}\right]$

21.

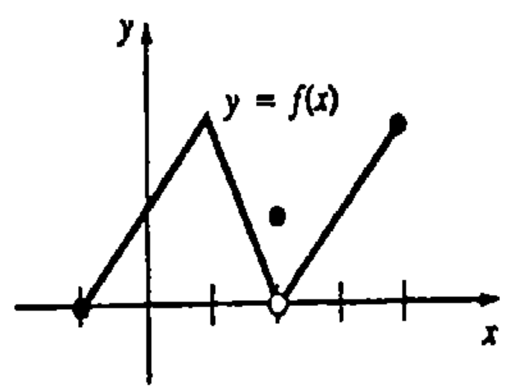


Figura 2.38

 (a) $[-1, 3]$ (b) $(2, 4]$

22.

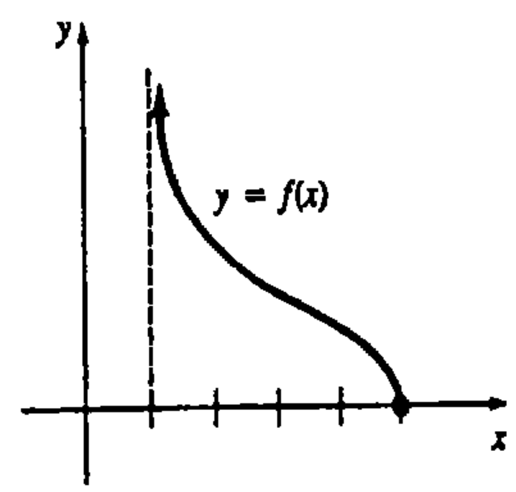


Figura 2.39

 (a) $[2, 4]$ (b) $[1, 5]$

En los Problemas 23-26 encuentre los valores de m y n de modo que la función dada sea continua.

23. $f(x) = \begin{cases} mx, & x < 4 \\ x^2, & x \geq 4 \end{cases}$

24. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ m, & x = 2 \end{cases}$

25. $f(x) = \begin{cases} mx, & x < 3 \\ n, & x = 3 \\ -2x + 9, & x > 3 \end{cases}$

26. $f(x) = \begin{cases} mx - n, & x < 1 \\ 5, & x = 1 \\ 2mx + n, & x > 1 \end{cases}$

En los Problemas 27 y 28, $[x]$, denota el mayor entero que no excede a x. Trace una gráfica para determinar los números en los que la función dada es discontinua.

27. $f(x) = [2x - 1]$ 28. $f(x) = [x] - x$

En los Problemas 29-36 use el Teorema 2.13 para evaluar el límite dado.

29. $\lim\limits_{x \to \pi/6} \operatorname{sen}(2x + \pi/3)$ 30. $\lim\limits_{x \to \pi^2} \cos \sqrt{x}$

31. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \operatorname{sen}(\cos x)$

32. $\lim\limits_{x \to \pi/2} (1 + \cos(\cos x))$

33. $\lim\limits_{t \to \pi} \cos\left(\dfrac{t^2 - \pi^2}{t - \pi}\right)$

34. $\lim\limits_{t \to 0} \tan\left(\dfrac{\pi t}{t^2 + 3t}\right)$

35. $\lim\limits_{t \to \pi} \sqrt{t - \pi + \cos^2 t}$

36. $\lim\limits_{t \to 1} (4t + \operatorname{sen} 2\pi t)^3$

En los Problemas 37-40 verifique el teorema del valor intermedio para f en el intervalo dado. Encuentre un valor de c en el intervalo para el valor indicado de N.

37. $f(x) = x^2 - 2x$, $[1, 5]$; $N = 8$

38. $f(x) = x^2 + x + 1$, $[-2, 3]$; $N = 6$

39. $f(x) = x^3 - 2x + 1$, $[-2, 2]$; $N = 1$

40. $f(x) = \dfrac{10}{x^2 + 1}$, $[0, 1]$; $N = 8$

41. Dado que f es continua en $[a, b]$ y $f(a) = 5$ y $f(b) = 20$, demuestre que hay un número c en (a, b) tal que $f(c) = 10$.

42. Dado que $f(x) = x^5 + 2x - 7$, demuestre que hay un número c tal que $f(c) = 50$.

43. Dado que $f(x) = x^5 + x - 1$, verifique que hay un número c tal que $f(c) = 0$.

44. Dado que f y g son continuas en $[a, b]$ tales que $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b)$, demuestre que hay un número c en (a, b) tal que $f(c) = g(c)$.

45. Demuestre que la ecuación $2x^3 = 1 - x$ tiene una solución en $[0, 1]$.

46. Pruebe que la ecuación

$$\frac{x^2 + 1}{x + 3} + \frac{x^4 + 1}{x - 4} = 0$$

tiene una solución en el intervalo $(-3, 4)$.

Problemas diversos

47. Sea f continua y $f(x) > 0$ para todo x en $(1, 2]$. Dado que $f(1) = -3$, demuestre que f es discontinua en $[1, 2]$.

48. Dado que f y g son continuas en un número a, demuestre que $f + g$ es continua en a.

49. Si f y g son continuas en un número a, y $g(a) \neq 0$, pruebe que f/g es continua en a.

50. Demuestre que la función de Dirichlet*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ es racional} \\ 0 & x \text{ es irracional} \end{cases}$$

es discontinua en todo número real a. ¿Qué aspecto tiene la gráfica de f?

51. Demuestre el Teorema 2.6.

52. Demuestre que $(\operatorname{sen} x)/x = 1/2$ para algún valor de x entre 0 y π.

53. Sea $f(x) = [x]$ la función mayor entero y $g(x) = \cos x$. Determine los números en los que $f \circ g$ es discontinua.

54. ¿Puede $f(x) = 1/(x - 1)$ definirse en 1 de modo que la función resultante sea continua en este número?

*La función se nombra así en honor del matemático alemán Peter Gustav Dirichlet (1805-1859).

55. ¿Cómo debería definirse $f(x) = (x - 9)/(\sqrt{x} - 3)$ en 9 para que la función resultante fuese continua en este número?

56. Considere las funciones

$$f(x) = |x| \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Trace las gráficas de $f \circ g$ y $g \circ f$. Determine si $f \circ g$ y $g \circ f$ son continuas en 0.

57. Supóngase que f es continua y que $f(x) \neq 0$ para todo x en $[a, b]$. Demuestre que $f(x) < 0$ o bien $f(x) > 0$ para todo x en el intervalo.

(O) 2.5 Definición de límite

En esta sección se considerará una noción alternativa de límite con base en conceptos analíticos en vez de conceptos intuitivos. Si bien las gráficas y las tablas de valores funcionales pueden ser convincentes para determinar si un límite existe o no, el lector debe prever que todas las calculadoras trabajan sólo con aproximaciones y que las gráficas se pueden trazar sin precisión. Una demostración de la existencia de un límite nunca debe basarse en la habilidad personal para dibujar ilustraciones; aunque una buena comprensión de las definiciones intuitivas de $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to \infty} f(x)$ dadas en las Secciones 2.1 y 2.3 es suficiente para proseguir el estudio del Cálculo en este texto, tales "definiciones" son demasiado vagas para considerarlas en la demostración de teoremas. A fin de ofrecer una demostración rigurosa de la existencia de un límite, o para demostrar los teoremas de la Sección 2.2, hay que comenzar primero con la definición precisa de límite.

2.5.1 Definición $\epsilon - \delta$ de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

Intentemos demostrar que

$$\lim_{x \to 2} (2x + 6) = 10$$

elaborando la idea siguiente: "si puede hacerse que $f(x) = 2x + 6$ esté arbitrariamente cercana a 10 tomando a x suficientemente cercano a 2, tanto por un lado como por el otro, pero sin llegar a ser igual a 2, entonces $\lim_{x \to 2} f(x) = 10$". Es necesario precisar los conceptos de "arbitrariamente cercano" y "suficientemente cercano". Para establecer un criterio de cercanía arbitraria, se requiere que la distancia entre los números $f(x)$ y 10 sea menor que 0.1, esto es,

$$|f(x) - 10| < 0.1 \quad \text{o bien} \quad 9.9 < f(x) < 10.1. \tag{2.4}$$

Luego, ¿cuán próximo a 2 debe estar x para satisfacer (2.4)? Para averiguarlo puede resolverse la desigualdad

$$9.9 < 2x + 6 < 10.1$$

por álgebra ordinaria, y obtener que

$$1.95 < x < 2.05.$$

De este modo, para una "cercanía arbitraria a 10" de 0.1, entonces "suficientemente cercano a 2" significa estar a una distancia de menos de 0.05 por cualquier lado del 2. En otras palabras, si x es un número diferente de 2 en el intervalo abierto $(1.95, 2.05)$, entonces se garantiza que $f(x)$ está en $(9.9, 10.1)$.

Tratemos de generalizar mediante el mismo ejemplo. Supóngase que ε (épsilon) denota un número *positivo pequeño cualquiera* que sea la medida de la cercanía o proximidad arbitraria al número 10. Si se requiere que

$$|f(x) - 10| < \varepsilon \quad \text{o bien} \quad 10 - \varepsilon < f(x) < 10 + \varepsilon, \tag{2.5}$$

entonces de $f(x) = 2x + 6$ y por álgebra, se obtendrá

$$2 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 2 + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.6}$$

El empleo de valores absolutos y un nuevo símbolo δ (delta) permite escribir (2.5) y (2.6) como

$$|f(x) - 10| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - 2| < \delta,$$

en donde $\delta = \varepsilon/2$. De este modo, para un nuevo valor de ε, por ejemplo, $\varepsilon = 0.001$, $\delta = \varepsilon/2 = 0.0005$ indica la cercanía correspondiente al 2. Para cualquier número x diferente de 2* en (1.9995, 2.0005), hay la seguridad de que $f(x)$ está en (9.999, 10.001). Véase la Figura 2.40.

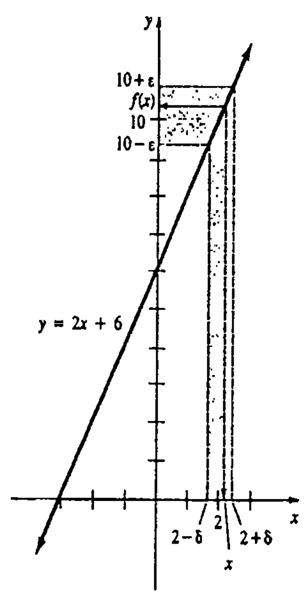


Figura 2.40

Definición de límite

A continuación se presenta la definición de $\lim_{x\to a} f(x) = L$. Esta es la denominada **definición $\varepsilon - \delta$ de límite.**

*Esto explica que se use $0 < |x-2| < \delta$ en lugar de $|x-2| < \delta$. Téngase presente que al considerar $\lim_{x\to 2} f(x)$ no interesa f *en* 2.

DEFINICIÓN 2.2

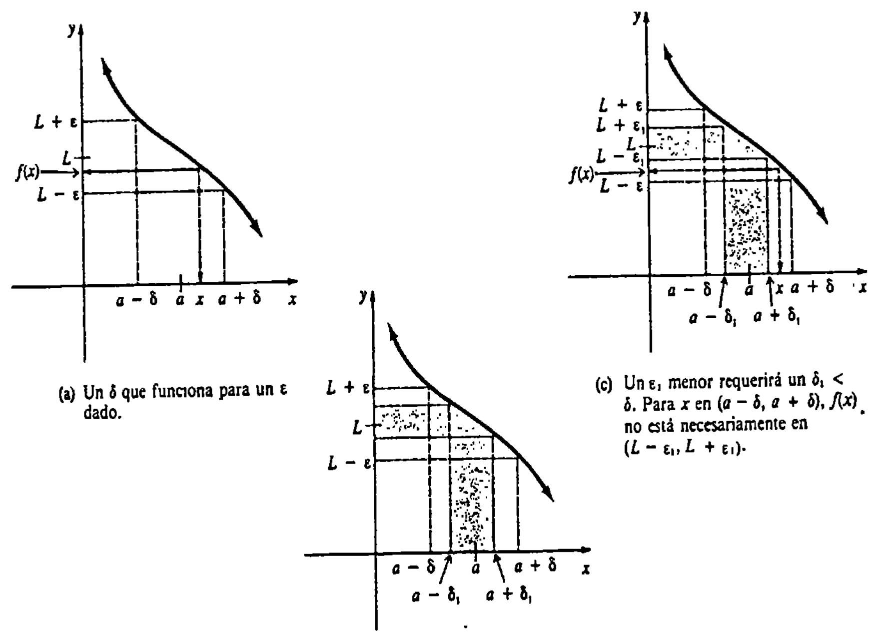
Supóngase una función f definida en un intervalo abierto que contiene al número a, excepto posiblemente en el propio a. Entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta. \quad \square$$

Sea $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y supóngase que $\delta > 0$ es el número que "funciona" de acuerdo con la Definición 2.2 para un $\varepsilon > 0$ dado. Como se muestra en la Figura 2.41(a), todo x en $(a - \delta, a + \delta)$, con la posible excepción del propio a, tendrá su imagen $f(x)$ en $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Además, como se indica en la Figura 2.41(b), escoger un $\delta_1 < \delta$ también "funciona" para el mismo ε en el sentido de que todo x en $(a - \delta_1, a + \delta_1)$ distinto de a, nos da $f(x)$ en $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Sin embargo, la Figura 2.41(c) muestra que escoger un ε_1 menor, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, requerirá obtener un nuevo valor de δ.



(a) Un δ que funciona para un ε dado.

(b) Un δ_1 menor también funcionará para el mismo ε.

(c) Un ε_1 menor requerirá un $\delta_1 < \delta$. Para x en $(a - \delta, a + \delta)$, $f(x)$ no está necesariamente en $(L - \varepsilon_1, L + \varepsilon_1)$.

Figura 2.41

Ejemplo 1

Demostrar que $\lim_{x\to 3} (5x + 2) = 17$.

Solución Para cualquier $\varepsilon > 0$ dado, sin considerar su pequeñez, se desea encontrar un δ tal que

$$|(5x + 2) - 17| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |x - 3| < \delta.$$

Para hacerlo considérese

$$|(5x + 2) - 17| = |5x - 15| = 5|x - 3|.$$

Así es que para hacer que $|(5x + 2) - 17| = 5|x - 3| < \varepsilon$, sólo se necesita realizar $0 < |x - 3| < \varepsilon/5$; esto es, se escoge $\delta = \varepsilon/5$.

Verificación Si $0 < |x - 3| < \varepsilon/5$, entonces

$$5|x - 3| < \varepsilon$$
$$|5x - 15| < \varepsilon$$
$$|(5x + 2) - 17| < \varepsilon.$$

Ejemplo 2

Demostrar que $\lim_{x\to -4} \dfrac{16 - x^2}{4 + x} = 8.$

Solución

$$\left|\frac{16 - x^2}{4 + x} - 8\right| = |4 - x - 8| = |-x - 4| = |x + 4| = |x - (-4)|$$

Así es que,
$$\left|\frac{16 - x^2}{4 + x} - 8\right| = |x - (-4)| < \varepsilon$$

siempre que se tenga $0 < |x - (-4)| < \varepsilon$; esto es, se elige $\delta = \varepsilon$.

Ejemplo 3

Considérese la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

A partir de la gráfica de f en la Figura 2.42, es posible ver intuitivamente, que $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe. Sin embargo, para *demostrarlo* se procederá indirectamente.

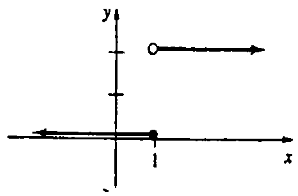


Figura 2.42

Supóngase que $\lim_{x\to 1} f(x) = L$. Entonces, por la Definición 2.2, se sabe que para la elección $\varepsilon = \frac{1}{2}$ debe existir un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \frac{1}{2} \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - 1| < \delta.$$

Ahora escójase $x = 1 + \delta/2$ a la derecha de 1. Como

$$0 < \left|1 + \frac{\delta}{2} - 1\right| = \left|\frac{\delta}{2}\right| < \delta,$$

debe tenerse que

$$\left|f\left(1 + \frac{\delta}{2}\right) - L\right| = |2 - L| < \frac{1}{2}. \tag{2.7}$$

Escójase $x = 1 - \delta/2$ a la izquierda de 1. Pero

$$0 < \left|1 - \frac{\delta}{2} - 1\right| = \left|-\frac{\delta}{2}\right| < \delta$$

implica que

$$\left|f\left(1 - \frac{\delta}{2}\right) - L\right| = |0 - L| = |L| < \frac{1}{2}. \tag{2.8}$$

De (2.7) y (2.8) se obtiene, respectivamente, que

$$\frac{3}{2} < L < \frac{5}{2} \quad \text{y} \quad -\frac{1}{2} < L < \frac{1}{2}.$$

Como no hay un L capaz de satisfacer ambas desigualdades, se concluirá que $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe.

Límites unilaterales

Para terminar, se establecerán las definiciones de los **límites unilaterales** $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$.

DEFINICIÓN 2.3

Supóngase que una función f está definida en un intervalo abierto (b, a). Entonces

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, de manera que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que } a - \delta < x < a. \qquad \square$$

DEFINICIÓN 2.4

Supóngase que una función f está definida en un intervalo abierto (a, c). Entonces

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, de manera que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que } a < x < a + \delta. \qquad \square$$

Ejemplo 4

Demostrar que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

Solución

$$|\sqrt{x} - 0| = |\sqrt{x}| = \sqrt{x}.$$

Por lo tanto, $|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$ siempre que $0 < x < 0 + \varepsilon^2$; esto es, escójase $\delta = \varepsilon^2$.

Verificación Si $0 < x < \varepsilon^2$, entonces

$$0 < \sqrt{x} < \varepsilon$$
$$|\sqrt{x}| < \varepsilon$$
$$|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon.$$

2.5.2 Definiciones de $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

En las dos definiciones siguientes se formalizan los conceptos

$$f(x) \to \infty \text{ (o bien } -\infty) \text{ cuando } x \to a, \text{ y}$$
$$f(x) \to L \text{ cuando } x \to \infty \text{ (o bien } -\infty)$$

DEFINICIÓN 2.5

(*i*) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ significa que para cada $M > 0$ existe un $\delta > 0$, de manera que $f(x) > M$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$.

(*ii*) $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ significa que para cada $M < 0$ existe un $\delta > 0$, de modo que $f(x) < M$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$. $\square$

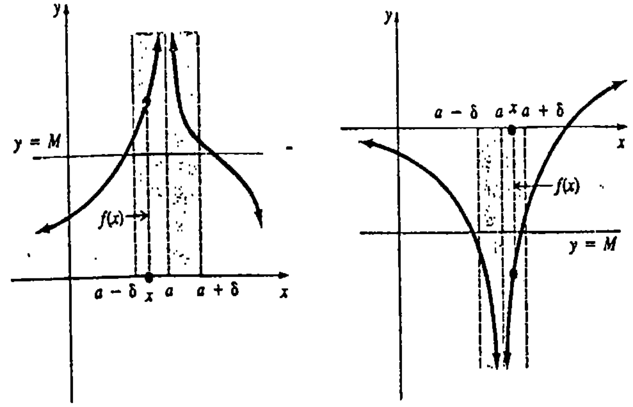
Las partes (*i*) y (*ii*) de la Definición 2.5 se ilustran en las Figuras 2.43(a) y 2.43(b), respectivamente.

DEFINICIÓN 2.6

(*i*) $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N > 0$, de manera que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x > N$.

(*ii*) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N < 0$, de modo que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x < N$. $\square$

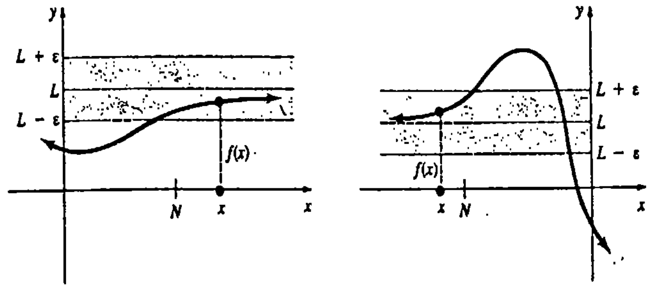
Las partes (*i*) y (*ii*) de la Definición 2.6 se ilustran en la Figuras 2.44(a) y 2.44(b), respectivamente.



(a) Para un M dado, siempre que $a - \delta < x < a + \delta$, $x \neq a$, entonces $f(x) > M$.

(b) Para un M dado, siempre que $a - \delta < x < a + \delta$, $x \neq a$, entonces $f(x) < M$.

Figura 2.43



(a) Para un ε dado, $x > N$ implica que $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$.

(b) Para un ε dado, $x < N$ implica que $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$.

Figura 2.44

Ejemplo 5

Demostrar que $\lim_{x \to \infty} \dfrac{3x}{x + 1} = 3$.

Solución Mediante la Definición 2.6(*i*) para cualquier $\varepsilon > 0$, debe encontrarse un $N > 0$ de manera que

$$\left|\frac{3x}{x+1} - 3\right| < \varepsilon \quad \text{siempre que } x > N.$$

Si se considera $x > 0$, se tendrá que

$$\left|\frac{3x}{x+1} - 3\right| = \left|\frac{-3}{x+1}\right| < \frac{3}{x+1} < \frac{3}{x} < \varepsilon$$

siempre que $x > 3/\varepsilon$. De aquí, escójase $N = 3/\varepsilon$; por ejemplo, si $\varepsilon = 0.01$, entonces $N = 3/(0.01) = 300$ garantizará que $|f(x) - 3| < 0.01$ siempre que $x > 300$.

Observación

Al terminar esta sección es posible que se esté de acuerdo con W. Whewell, quien en 1858 escribió que "un límite es una concepción. . . peculiar". Durante muchos años posteriores a la invención del Cálculo, ocurrida en el siglo XVII, los matemáticos discutieron y debatieron acerca de la naturaleza de un límite. Existía cierta conciencia de que la intuición, las gráficas y los ejemplos numéricos de razones entre cantidades que tienden a cero, proporcionan cuando mucho una débil cimentación para dicho concepto fundamental. Como se verá al principio del capítulo siguiente, el concepto de límite desempeña un papel importante en el Cálculo. El estudio de esta disciplina pasó por varios periodos de creciente rigor matemático, que comenzó con el francés Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) y continuó posteriormente con el matemático alemán, un antiguo maestro de bachillerato, Karl Wilhelm Weierstrass (1815-1897). Weierstrass colocó el concepto de límite sobre bases firmes con la definición $\varepsilon - \delta$.

Augustin Cauchy
Cortesía de Culver Pictures.

Karl Weierstrass

Ejercicios 2.5

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 969.

[2.5.1]

En los Problemas 1-20 use las Definiciones 2.2, 2.3 ó 2.4 para demostrar el resultado de límite dado

1. $\lim_{x\to5} 10 = 10$
2. $\lim_{x\to-2} \pi = \pi$
3. $\lim_{x\to3} x = 3$
4. $\lim_{x\to4} 2x = 8$
5. $\lim_{x\to-1}(x + 6) = 5$
6. $\lim_{x\to0}(x - 4) = -4$
7. $\lim_{x\to0}(3x + 7) = 7$
8. $\lim_{x\to1}(9 - 6x) = 3$
9. $\lim_{x\to2} \dfrac{2x - 3}{4} = \dfrac{1}{4}$
10. $\lim_{x\to1/2} 8(2x + 5) = 48$

11. $\lim_{x\to-5} \dfrac{x^2 - 25}{x + 5} = -10$
12. $\lim_{x\to3} \dfrac{x^2 - 7x + 12}{2x - 6} = -\dfrac{1}{2}$
13. $\lim_{x\to0} \dfrac{8x^5 + 12x^4}{x^4} = 12$
14. $\lim_{x\to1} \dfrac{2x^3 + 5x^2 - 2x - 5}{x^2 - 1} = 7$
15. $\lim_{x\to0} x^2 = 0$
16. $\lim_{x\to0} 8x^3 = 0$
17. $\lim_{x\to0^+} \sqrt{5x} = 0$
18. $\lim_{x\to(1/2)^+} \sqrt{2x - 1} = 0$
19. $\lim_{x\to0^-} f(x) = -1, \quad f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 0 \\ 2x + 1, & x > 0 \end{cases}$
20. $\lim_{x\to1^+} f(x) = 3, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ 3, & x > 1 \end{cases}$

En los Problemas 21-24 demuestre que $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe.

21. $f(x) = \begin{cases} 2, & x < 1 \\ 0, & x \ge 1 \end{cases}; \quad a = 1$
22. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \le 3 \\ -1, & x > 3 \end{cases}; \quad a = 3$
23. $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 0 \\ 2 - x, & x > 0 \end{cases}; \quad a = 0$
24. $f(x) = \dfrac{1}{x}; \quad a = 0$

Problemas diversos

25. Demuestre que $\lim_{x\to3} x^2 = 9$. (*Sugerencia:* Considere sólo aquellos números x para los que $2 < x < 4$.)

26. Demuestre que $\lim_{x\to2} 1/x = \frac{1}{2}$. (*Sugerencia:* Considere sólo aquellos números x para los que $1 < x < 3$.)

27. Pruebe que $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$, $a > 0$. (*Sugerencia:* Use la identidad

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = |\sqrt{x} - \sqrt{a}| \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

y el hecho de que $\sqrt{x} \ge 0$.)

28. Demuestre que $\lim_{x\to0} f(x) = 0$, en donde

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ es racional} \\ 0, & x \text{ es irracional} \end{cases}$$

[2.5.2]

En los Problemas 29-32 use la Definición 2.6 para demostrar el resultado de límite dado.

29. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{5x - 1}{2x + 1} = \dfrac{5}{2}$
30. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x}{3x + 8} = \dfrac{2}{3}$
31. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{10x}{x - 3} = 10$
32. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x^2 + 1} = 1$

Examen • Capítulo 2

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 969.

En los Problemas 1-14 conteste si el concepto es verdadero o falso.

1. $\lim_{x\to2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} = 12$ _____

2. $\lim_{x\to5} \sqrt{x - 5} = 0$ _____

3. Si $\lim_{x\to a} f(x) = 3$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ no existe. _____

4. Si $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe y $\lim_{x\to a} g(x)$ existe, entonces $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ no existe. _____

5. Una asíntota es una recta a la que la gráfica de una función se acerca sin cruzarla nunca. _____

6. Si $f(x) = P(x)/Q(x)$ es una función racional y $Q(a) = 0$, entonces la recta $x = a$ es una asíntota vertical. _____

7. La gráfica de una función racional $f(x) = P(x)/Q(x)$ tiene una asíntota horizontal solamente si el grado de $P(x)$ es igual al grado de $Q(x)$. _____

8. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. _____

9. Cualquier función polinomial es continua en $(-\infty, \infty)$. _____

10. Si $f(x) = x^5 + 3x - 1$, ahí existe un número c en $(-2, 2)$ tal que $f(c) = 0$. _____

11. Si f y g son continuas en 2, entonces f/g es continua en 2. ______

12. Supóngase que $f(x) = [x]$ es la función mayor entero. f no es continua en el intervalo $[0, 1]$. ______

13. La gráfica de una función puede tener a lo más dos asíntotas horizontales. ______

14. La función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 5} & \text{si } x \neq 5 \\ 4 & \text{si } x = 5 \end{cases}$ es discontinua en 5. ______

En los Problemas 15-28 llene los espacios en blanco.

15. $\lim_{x \to 2} (3x^2 - 4x) =$ ______

16. $\lim_{x \to 3} (5x^2)^0 =$ ______

17. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{2x - 1}{3 - 10x} =$ ______

18. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x + 1} =$ ______

19. $\lim_{x \to \_\_} \dfrac{1}{x - 3} = -\infty$ 20. $\lim_{x \to \_\_} (5x + 2) = 22$

21. $\lim_{x \to \_\_} x^3 = -\infty$ 22. $\lim_{x \to \_\_} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \infty$

23. Si $f(x) = 2(x-4)/|x-4|$, $x \neq 4$ y $f(4) = 9$, entonces $\lim_{x \to 4^-} f(x) =$ ______.

24. Supóngase que $x^2 - x^4/3 \leq f(x) \leq x^2$ para todo x, entonces $\lim_{x \to 0} f(x)/x^2 =$ ______.

25. Si f es continua en un número a y si $\lim_{x \to a} f(x) = 10$, entonces $f(a) =$ ______.

26. $f(x) = \dfrac{2x - 1}{4x^2 - 1}$ es discontinua en $x = \frac{1}{2}$ porque ______.

27. $f(x) = \begin{cases} kx + 1 & \text{si } x \leq 3 \\ 2 - kx & \text{si } x > 3 \end{cases}$ es continua en 3 si $k =$ ______.

28. Si $\lim_{x \to -5} g(x) = -9$ y $f(x) = x^2$, entonces $\lim_{x \to -5} f(g(x)) =$ ______.

En los Problemas 29-38 suponga que $\lim_{x \to a} f(x) = 4$ y que $\lim_{x \to a} g(x) = 2$. Obtenga el límite dado, si es que existe.

29. $\lim_{x \to a} [5f(x) + 6]$ 30. $\lim_{x \to a} [f(x)]^3$

31. $\lim_{x \to a} \dfrac{1}{g(x)}$ 32. $\lim_{x \to a} \sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$

33. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x) - 2}$ 34. $\lim_{x \to a} \dfrac{[f(x)]^2 - 4[g(x)]^2}{f(x) - 2g(x)}$

35. $\lim_{x \to a^+} f(x)$ 36. $\lim_{x \to a^-} f(x)g(x)$

37. $\lim_{x \to a} xg(x)$

38. $\lim_{x \to a} \dfrac{6x + 3}{xf(x) + g(x)}$, $a \neq -\dfrac{1}{2}$

39. Determine los intervalos en los que

$$f(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2 - 4x + 3}$$

es continua.

40. Trace la gráfica de una función f que satisfaga las condiciones siguientes:

$$f(0) = 1, \quad f(4) = 0, \quad f(6) = 0,$$
$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = \infty, \text{ y}$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = 2.$$

En los Problemas 41 y 42 encuentre las asíntotas verticales y horizontales de la gráfica de f.

41. $f(x) = \dfrac{2x^3 - 7}{(4x^2 - 25)(x + 9)}$

42. $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x + 4}{x - 3}}$

Problema para calculadora

43. Utilice una calculadora para investigar $\lim_{x \to 0^+} x^x$. ¿Considera que existe $\lim_{x \to 0} x^x$?

La derivada

Los fundamentos del Cálculo tienen sus raíces en el análisis de muchos problemas geométricos y físicos. En la Sección 3.1 se estudiarán los problemas de determinar una recta tangente a una gráfica y de evaluar la velocidad de un cuerpo en movimiento. Estos dos problemas aparentemente distintos en realidad son uno mismo. Las soluciones de ambos dan lugar a la noción de *razón de cambio instantánea* (o *tasa de variación instantánea*) de una función. Esto es a lo que se refiere el Cálculo diferencial.

3.1 Razón de cambio de una función

3.1.1 Tangente a una gráfica

Supóngase que $y = f(x)$ es una función continua cuya gráfica se muestra en la Figura 3.1(a). Si la gráfica de f posee una recta tangente L en un punto P, como se ilustra en la Figura 3.1(b), el problema es determinar su ecuación. Para hacerlo se necesita: (a) las coordenadas de P y (b) la pendiente m_{tan} de L. Las coordenadas de P no presentan dificultad, puesto que un punto de la gráfica se obtiene especificando un valor de x, por ejémplo, $x = a$, en el dominio de f. Las coordenadas del punto de tangencia son $(a, f(a))$.

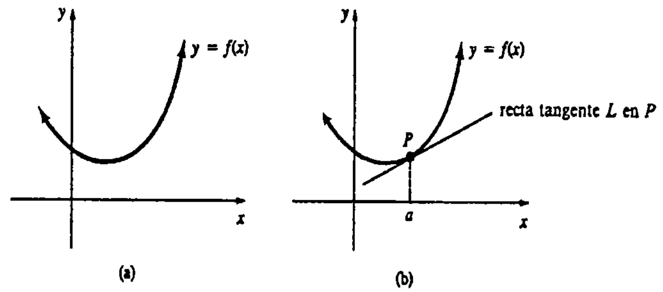


Figura 3.1

Una manera de *aproximar* la pendiente m_{tan} consiste en determinar las pendientes de *rectas secantes* que pasen por el punto fijo P y cualquier otro punto Q de la gráfica. Si P tiene coordenadas $(a, f(a))$ y se hace Q por coordenadas $(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$, entonces, como se muestra en la Figura 3.2(a), la pendiente de la recta secante que pasa por P y Q es

$$m_{sec} = \frac{\text{cambio en la coordenada } y}{\text{cambio en la coordenada } x}$$

$$= \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{(a + \Delta x) - a}.$$

Si

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a),$$

entonces

$$m_{sec} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Cuando el valor de Δx es pequeño, ya sea positivo o negativo, se obtienen puntos Q y Q' de la gráfica de f a cada lado del punto P, pero cercanos a él. Es de esperar que, a su vez, las pendientes m_{PQ} y $m_{PQ'}$ estén muy cerca de la pendiente de la recta tangente L. Véase la Figura 3.2(b).

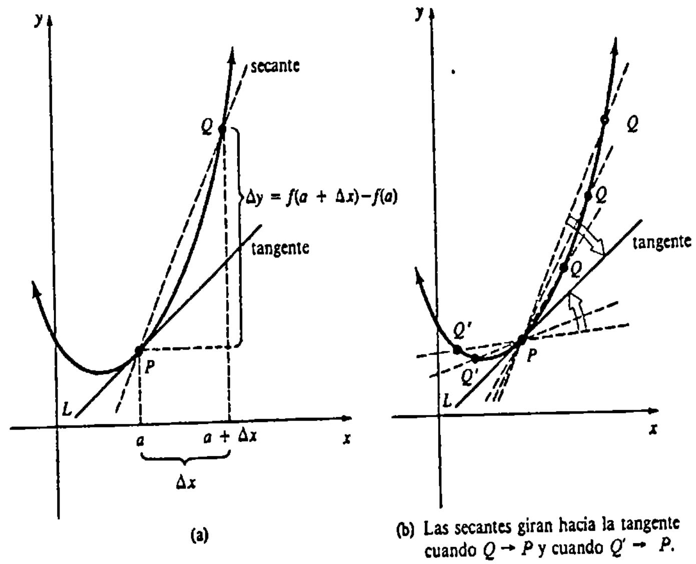


Figura 3.2

Ejemplo 1

Obtener la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en $(1, 1)$.

Solución Como un inicio, se elige $\Delta x = 0.1$ y se encuentra la pendiente de la recta secante que pasa por $(1, 1)$ y $(1.1, (1.1)^2)$:

(*i*) $f(1.1) = (1.1)^2 = 1.21$

(*ii*) $\Delta y = f(1.1) - f(1) = 1.21 - 1 = 0.21$

(*iii*) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0.21}{0.1} = 2.1.$

La tabla siguiente sugiere que la pendiente de la recta tangente que se muestra en la Figura 3.3 es $m_{tan} = 2$.

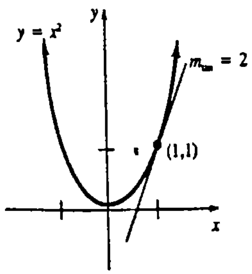


Figura 3.3

Δx	$1 + \Delta x$	$f(1)$	$f(1 + \Delta x)$	Δy	$\Delta y/\Delta x$
0.1	1.1	1	1.21	0.21	2.1
0.01	1.01	1	1.0201	0.0201	2.01
0.001	1.001	1	1.002001	0.002001	2.001
−0.1	0.9	1	0.81	−0.19	1.9
−0.01	0.99	1	0.9801	−0.0199	1.99
−0.001	0.999	1	0.998001	−0.001999	1.999

Con base en la Figura 3.2(b), el Ejemplo 1 y la intuición, podría decirse que si la gráfica de una función $y = f(x)$ tiene una recta tangente L en un punto P, entonces L debe ser la recta que es el *límite* de las secantes que pasan por P y Q cuando $Q \to P$, y de las secantes que pasan por P y Q' cuando $Q' \to P$. Además, la pendiente $m_{\tan}$ de L debe ser el *valor límite* de los valores $m_{\sec}$ cuando $\Delta x \to 0$. Esto se resume como sigue.

DEFINICIÓN 3.1

Sea $y = f(x)$ una función continua. La **recta tangente** a la gráfica en el punto $(a, f(a))$, es la que pasa por tal punto y su pendiente es

$$m_{\tan} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{3.1}$$

siempre que el límite exista. □

La pendiente de la recta tangente en $(a, f(a))$ se conoce también como **pendiente de la curva** en el punto. La Definición 3.1 implica que una tangente en $(a, f(a))$ es *única*, puesto que un punto y una pendiente determinan una sola recta.

Sintetizamos la aplicación de la Definición 3.1 en cuatro pasos.

Calcular:

(*i*) $f(a)$ y $f(a + \Delta x)$

(*ii*) $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$

(*iii*) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$

(*iv*) $m_{\tan} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Ejemplo 2

Utilizar la Definición 3.1 para hallar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en $(1, f(1))$.

Solución

(*i*) $f(1) = 1^2 = 1$.
Para cualquier $\Delta x \neq 0$,

$$f(1 + \Delta x) = (1 + \Delta x)^2 = 1 + 2\,\Delta x + (\Delta x)^2$$

(*ii*) $\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = [1 + 2\,\Delta x + (\Delta x)^2] - 1$
$= 2\,\Delta x + (\Delta x)^2 \quad = \Delta x(2 + \Delta x)$

(*iii*) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x(2 + \Delta x)}{\Delta x}$
$= 2 + \Delta x.$

De este modo, la pendiente de la tangente en $(1, f(1))$ está dada por

(*iv*) $m_{\tan} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2 + \Delta x) = 2.$

Ejemplo 3

Encontrar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 5x + 6$ en todo punto $(a, f(a))$.

Solución

(*i*) $f(a) = 5a + 6$. Para cualquier $\Delta x \neq 0$,

$$f(a + \Delta x) = 5(a + \Delta x) + 6 = 5a + 5\,\Delta x + 6$$

(*ii*) $y = f(a + \Delta x) - f(a) = [5a + 5\,\Delta x + 6] - [5a + 6]$
$= 5\,\Delta x$

(*iii*) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{5\,\Delta x}{\Delta x} = 5$

De este modo, en todo punto de la gráfica de $f(x) = 5x + 6$ se tiene que

(*iv*) $m_{\tan} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 5 = 5.$

El lector debe poder explicar por qué la respuesta del Ejemplo 3 no resulta sorprendente.

Ejemplo 4

Encontrar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en $(1, 1)$.

Solución Por el Ejemplo 2, la pendiente de la tangente en $(1, 1)$ es $m_{\tan} = 2$. La forma punto-pendiente de una recta da

$$y - 1 = 2(x - 1) \quad \text{o bien} \quad y = 2x - 1.$$

Ejemplo 5

Obtener la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = -x^2 + 6x$ en $(4, f(4))$.

-2(4)+6 = -8+6
= -2

Solución

-1(6)+6 = -16+6
= -10

(*i*) $f(4) = -4^2 + 6(4) = 8$. Para cualquier $\Delta x \neq 0$,

$$f(4 + \Delta x) = -(4 + \Delta x)^2 + 6(4 + \Delta x)$$
$$= -16 - 8\,\Delta x - (\Delta x)^2 + 24 + 6\,\Delta x$$
$$= 8 - 2\,\Delta x - (\Delta x)^2$$

(*ii*) $\Delta y = f(4 + \Delta x) - f(4) = [8 - 2\,\Delta x - (\Delta x)^2] - 8$
$= -2\,\Delta x - (\Delta x)^2 \;= \Delta x(-2 - \Delta x)$

(*iii*) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x(-2 - \Delta x)}{\Delta x} = -2 - \Delta x$

(*iv*) $m_{\tan} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (-2 - \Delta x) = -2.$

La Figura 3.4 muestra la gráfica de f y la recta tangente con pendiente -2 en (4, 8).

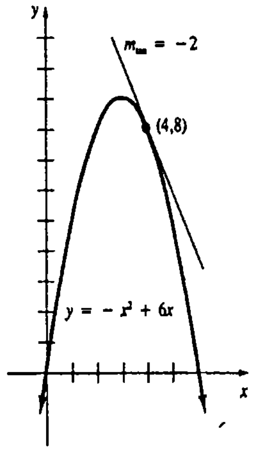


Figura 3.4

Tangentes verticales

Puede suceder que el límite (3.1) no exista para una función f en un número a y aun así haya tangente en $(a, f(a))$. La recta tangente a una gráfica en un punto puede ser vertical, en cuyo caso la pendiente no está definida. En la Sección 3.9 se abordará el concepto de tangente vertical.

Ejemplo 6

Puede demostrarse que la gráfica de $y = x^{1/3}$ posee una recta tangente vertical en el origen, aunque no se proseguirá por el momento con los detalles. En la Figura 3.5 se observa que el eje y es tangente a la gráfica en (0, 0).

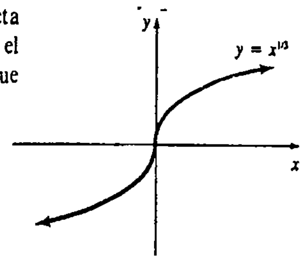


Figura 3.5

Puede no haber tangente

Por otra parte, la gráfica de una función f *no tendrá* recta tangente en un punto siempre que:

(*i*) f sea discontinua en $x = a$, o

(*ii*) la gráfica de f tenga una esquina en $(a, f(a))$.

Además, la gráfica de f *podría no tener* recta tangente en un punto en el cual

(*iii*) la gráfica tenga un pico o vértice.

Ejemplo 7

Las Figuras 3.6(a) y 3.6(b) muestran las gráficas de dos funciones que son discontinuas, aunque definidas, en $x = a$. Ninguna de las dos gráficas tiene tangente en $(a, f(a))$. En la Figura 3.6(c) se esperaría poder tener una tangente a la gráfica de f en todos los puntos, *excepto* en $x = a$.

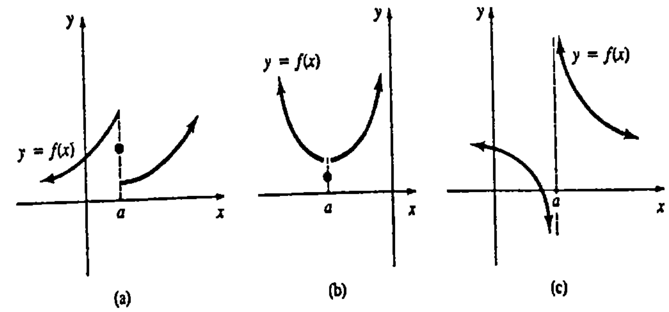


Figura 3.6

La Figura 3.7 muestra qué es lo que "anda mal" en un pico o esquina en la gráfica de una función f. Las rectas secantes que pasan por P y Q tienden a L_2 cuando $Q \to P$, pero en cambio las rectas secantes a través de P y Q' tienden a una recta diferente, L_1, cuando $Q' \to P$. Téngase presente que *cuando se dice que una recta tangente existe en un punto P de la gráfica de una función, significa que hay solamente una recta tangente.*

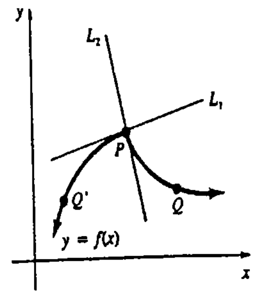


Figura 3.7

Ejemplo 8

La Figura 3.8(a) muestra la gráfica de una función en la que la recta tangente no existe en dos puntos en los que se tienen esquinas. En la Figura 3.8(b) no existe recta tangente en la punta formada. Sin embargo, en la Figura 3.8(c) la gráfica tiene una punta en la que existe una tangente vertical.

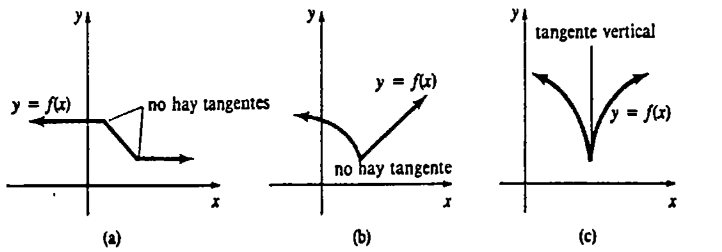


Figura 3.8

Ejemplo 9

Demostrar que la gráfica de $f(x) = |x|$ no tiene tangente en (0, 0).

Solución El examen de la gráfica de f en la Figura 3.9 revela una esquina o punta en el origen. Para demostrar que la tangente no existe, hay que examinar

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}. \tag{3.2}$$

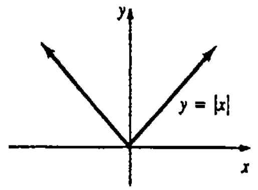


Figura 3.9

Ahora bien, para $\Delta x > 0$,

$$\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

mientras que para $\Delta x < 0$,

$$\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Como $\lim_{\Delta x \to 0^+} |\Delta x|/\Delta x = 1$ y $\lim_{\Delta x \to 0^-} |\Delta x|/\Delta x = -1$, concluimos que el límite (3.2) no existe. Así es que la gráfica no posee tangente en (0, 0).

Razón de cambio

La pendiente $\Delta y/\Delta x$ de una recta secante que pasa por $(a, f(a))$ se llama también **razón media de cambio** (o **tasa media de variación**) de f en a. Se dice que la pendiente $m_{\tan} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y/\Delta x$ es la **razón de cambio instantánea** (o **tasa de variación instantánea**) de la función en a; por ejemplo, si $m_{\tan} = \frac{1}{10}$ en un punto $(a, f(a))$, no podríamos esperar que los valores de f cambiaran notablemente para valores de x cerca de a.

Observación

Debe recordarse que en geometría plana una tangente a un *circunferencia* en un punto P es una recta que corta, o toca, su gráfica solamente en el punto P. La Figura 3.10 muestra que este concepto no se hace extensivo a la gráfica de una función. La recta L es tangente en P pero corta a la gráfica de f en tres puntos. La recta L' corta a la gráfica de f solamente en P pero no es tangente a la misma.

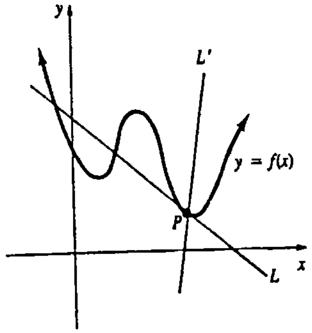


Figura 3.10

3.1.2 Velocidad instantánea

Casi cualquier persona tiene una noción intuitiva de velocidad como una rapidez con la cual se recorre una distancia en cierto intervalo de tiempo. Cuando un autobús recorre, por ejemplo, 60 millas en una hora, su *velocidad media* (o *promedio*) debe haber sido de 60 mi/h. Por supuesto, es difícil mantener la razón o tasa de 60 mi/h durante todo el viaje, porque el autobús reduce la velocidad al pasar por poblaciones, y la aumenta al rebasar vehículos. En otras palabras, la velocidad varía en el tiempo. Si el servicio de una compañía de autobuses requiere que el vehículo recorra las 60 millas que hay de una ciudad a otra en una hora, el conductor sabe instintivamente que debe compensar una velocidad inferior a 60 mi/h viajando a velocidades superiores a ésta en otros puntos del trayecto. El hecho de saber que la velocidad promedio es de 60 mi/h no responde, sin embargo, a la pregunta: ¿cuál es la velocidad del autobús en un instante particular?*

Velocidad media

En general, la **velocidad media** o **rapidez media** de un objeto móvil es la razón de cambio de la posición con respecto al tiempo, definida mediante

$$v_m = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo del recorrido}} \tag{3.3}$$

Considérese ahora a un corredor que realiza una carrera de 10 km en un tiempo de 1 h 15 min (1.25 h). La velocidad media del corredor durante la carrera fue

$$v_m = \frac{10}{1.25} = 8 \text{ km/h}.$$

* El conductor sólo necesita ver el velocímetro y observar, por ejemplo: "voy a 45 mi/h". Esto puede no ser obvio para una persona que observe en la carretera el desplazamiento del autobús.

Pero supóngase que ahora se desea determinar la velocidad *exacta* v del corredor en el instante en el que se ha cumplido media hora de carrera. Si la distancia recorrida en el intervalo de tiempo de 0 h a 0.5 h es de 5 km, entonces

$$v_m = \frac{5}{0.5} = 10 \text{ km/h}.$$

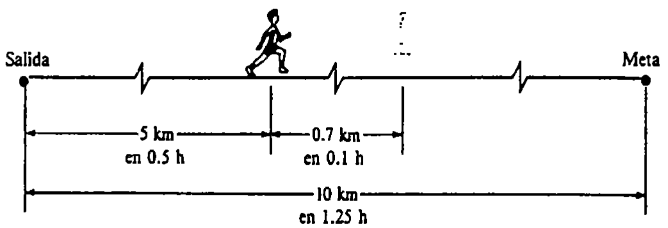


Figura 3.11

De nuevo, este número no es una medida, o tal vez ni siquiera un buen indicador, de la rapidez instantánea v a la cual el corredor se mueve al cabo de 0.5 h de carrera. Si se determina que en 0.6 h el corredor está a 5.7 km de la línea de salida, entonces la velocidad media de 0 h a 0.6 h es $v_m = 5.7/0.6 = 9.5$ km/h. Sin embargo, *durante* el intervalo de tiempo de 0.5 h a 0.6 h.

$$v_m = \frac{5.7 - 5}{0.6 - 0.5} = 7 \text{ km/h}.$$

Este número es una medida más realista de la razón v. Véase la Figura 3.11. Reduciendo el intervalo de tiempo entre 0.5 h y el instante que corresponda a una posición con medida cercana a 5 km, se espera obtener aún mejores aproximaciones a la velocidad del corredor cuando el tiempo es 0.5 h.

Movimiento rectilíneo

Para generalizar los conceptos anteriores, supóngase que un objeto, o una partícula, situado en un punto P, se mueve sobre una recta coordenada, ya sea vertical u horizontal, como se muestra en la Figura 3.12. Además, supóngase que la partícula se mueve de manera que su posición, o coordenada, sobre la recta, está dada por una función $s = f(t)$,

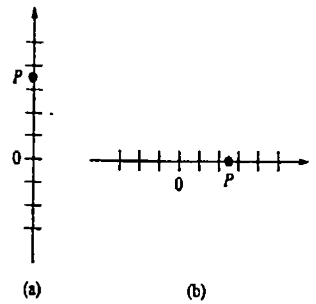


Figura 3.12

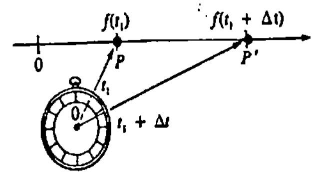


Figura 3.13

en donde t representa tiempo. Los valores de s son distancias dirigidas medidas desde O, en unidades como centímetros, metros, pies, millas, etc. Cuando P está a la derecha o arriba de O, tomamos $s > 0$, mientras que $s < 0$ cuando P está a la izquierda o abajo de O. Un movimiento que tiene lugar en una línea recta se llama **movimiento rectilíneo.**

Si una partícula se encuentra en el punto P en el tiempo t_1 y en P' en el tiempo $t_1 + \Delta t$, entonces las coordenadas de los puntos son $f(t_1)$ y $f(t_1 + \Delta t)$, como se muestra en la Figura 3.13. Por (3.3) la velocidad media de la partícula en el intervalo de tiempo $[t_1, t_1 + \Delta t]$ es

$$v_m = \frac{\text{cambio en la posición}}{\text{cambio en el tiempo}} = \frac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t}$$

o bien

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{3.4}$$

Esto sugiere que el límite de (3.4) cuando $\Delta t \to 0$ daría la **razón de cambio instantánea** de $f(t)$ en t_1, o sea, la **velocidad instantánea.**

DEFINICIÓN 3.2

Sea $s = f(t)$ una función que da la posición de un objeto en movimiento en línea recta. La **velocidad instantánea** en el tiempo t_1 está dada por

$$v(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{3.5}$$

siempre que el límite exista. □

Nota: excepto por notación e interpretación, no existe diferencia matemática alguna entre (3.1) y (3.5).

Ejemplo 10

La altura s sobre el suelo, de una pelota que se deja caer desde la parte superior del St Louis Gateway Arch está dada por $s = -4.9t^2 + 192$, en donde s se mide en metros y t en segundos.* Encontrar la velocidad instantánea de la pelota cuando $t_1 = 3$ s.

Solución Se utiliza el mismo procedimiento de los cuatro pasos empleado en los primeros ejemplos.

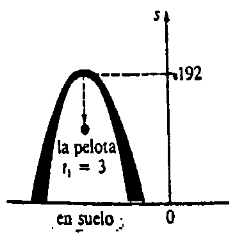


Figura 3.14

* Esta no es una fórmula inventada; la altura del arco es de 630 pie o 192 m. En la Sección 6.8 se verá cómo se deduce la fórmula.

(i) $f(3) = -4.9(9) + 192 = 147.9$. Para cualquier $\Delta t \neq 0$,

$$f(3 + \Delta t) = -4.9(3 + \Delta t)^2 + 192$$
$$= -4.9(\Delta t)^2 - 29.4\,\Delta t + 147.9$$

(ii) $$\Delta s = f(3 + \Delta t) - f(3)$$
$$= [-4.9(\Delta t)^2 - 29.4\,\Delta t + 147.9] - 147.9$$
$$= -4.9(\Delta t)^2 - 29.4\,\Delta t$$
$$= \Delta t(-4.9\,\Delta t - 29.4)$$

(iii) $$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta t(-4.9\,\Delta t - 29.4)}{\Delta t} = -4.9\,\Delta t - 29.4$$

(iv) $$v(3) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}(-4.9\,\Delta t - 29.4) = -29.4 \text{ m/s}.$$

El signo menos es significativo, porque la pelota se mueve en dirección opuesta a la positiva, que es hacia arriba. El número $f(3) = 147.9$ es la altura de la pelota sobre el suelo a los 3 segundos.

En la Sección 4.1 se estudiará el movimiento rectilíneo con mayor detalle.

Observación

Tal vez el lector haya notado que el propósito de utilizar (3.1) y (3.5) es cancelar Δx y Δt en los cocientes $\Delta y/\Delta x$ y $\Delta s/\Delta t$ *antes* de pasar al límite. Si el estudiante no puede efectuar ésto en alguno de los problemas siguientes, debe revisar con cuidado los pasos algebraicos.

Ejercicios 3.1

Las respuestas a los problemas de número impar empiézan en la página 970.

[3.1.1]
En los Problemas 1-6 trace la gráfica de la función y de la recta tangente en el punto dado. Obtenga la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos que correspondan a los valores de x indicados.

1. $f(x) = -x^2 + 9$, $(2, 5)$; $x = 2$, $x = 2.5$
2. $f(x) = x^2 + 4x$, $(0, 0)$; $x = -1/4$, $x = 0$
3. $f(x) = x^3$, $(-2, -8)$; $x = -2$, $x = -1$
4. $f(x) = 1/x$, $(1, 1)$; $x = 0.9$, $x = 1$
5. $f(x) = \text{sen } x$, $(\pi/2, 1)$; $x = \pi/2$, $x = 2\pi/3$
6. $f(x) = \cos x$, $(-\pi/3, 1/2)$; $x = -\pi/2$, $x = -\pi/3$

En los Problemas 7-16 determine la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función dada, en el punto indicado.

7. $f(x) = 2x - 1$; $(4, 7)$
8. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$; $(a, f(a))$
9. $f(x) = x^2$; $(3, 9)$
10. $f(x) = x^2 + 4$; $(-1, 5)$
11. $f(x) = 2x^2 + 8x$; $(0, 0)$
12. $f(x) = x^2 - 5x + 4$; $(2, -2)$
13. $f(x) = x^3$; $(1, f(1))$
14. $f(x) = -x^3 + x^2$; $(2, f(2))$

15. $f(x) = 1/x$; $(1/3, f(1/3))$
16. $f(x) = 1/(x - 1)^2$; $(0, f(0))$

En los Problemas 17-22 encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada, en el valor de x indicado.

17. $f(x) = 1 - x^2$; $x = 5$
18. $f(x) = (x + 2)^2$; $x = -3$
19. $f(x) = (x - 1)^4 + 6x$; $x = 1$
20. $f(x) = 4x + 10$; $x = 7$
21. $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2x}$; $x = 0$
22. $f(x) = 4 - \dfrac{8}{x}$; $x = -1$

En los Problemas 23 y 24 determine la razón media de cambio de la función dada en el intervalo indicado.

23. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x$; $[-1, 2]$
24. $f(x) = \cos x$; $[-\pi, \pi]$

En los Problemas 25-28 señale los valores de x para los que la recta tangente a la gráfica sea posiblemente horizontal, vertical o que no exista.

25.

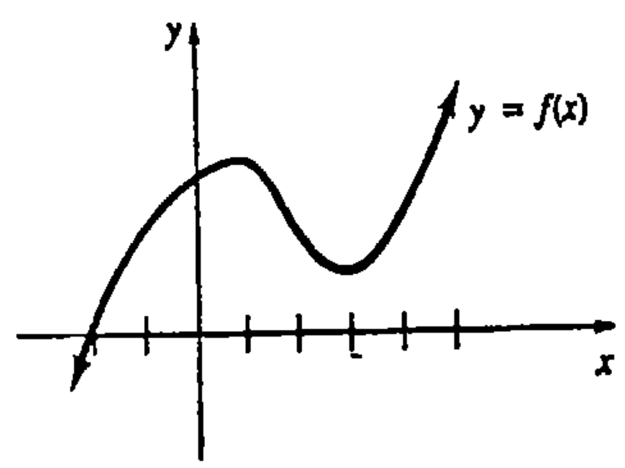


Figura 3.15

26.

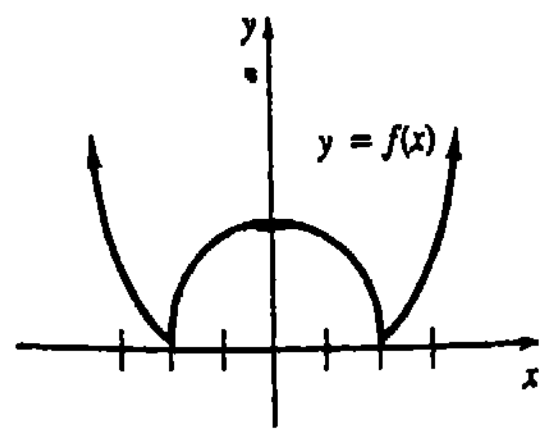


Figura 3.16

27.

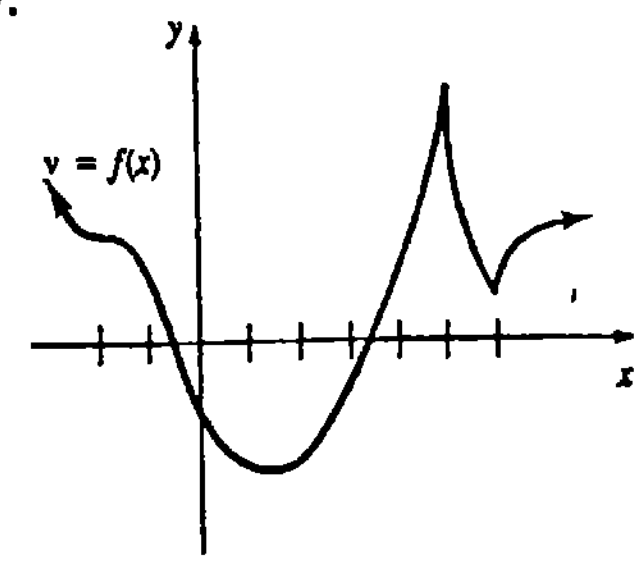


Figura 3.17

28.

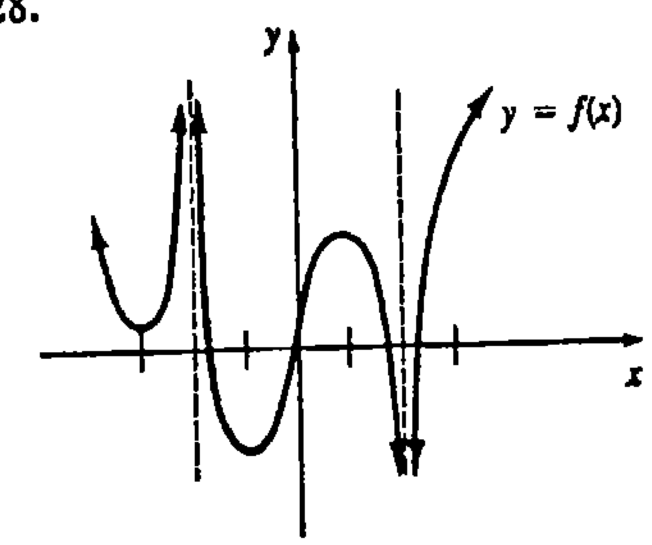


Figura 3.18

Problemas diversos

29. Sea $y = f(x)$ una función par cuya gráfica posee una recta tangente con pendiente m en (x_0, y_0). Demuestre que la pendiente de la tangente en $(-x_0, y_0)$ es $-m$. (*Sugerencia:* $f(-x_0 + \Delta x) = f(x_0 - \Delta x)$.)

30. Sea $y = f(x)$ una función impar cuya gráfica posee una recta tangente con pendiente m en (x_0, y_0). Demuestre que la pendiente de la tangente en $(-x_0, y_0)$ es m.

Problemas para calculadora

31. Considere la función $f(x) = \sqrt{3x + 1}$.

(a) ¿Cuál es el valor de $\Delta y/\Delta x$ en $x = 0$?

(b) Complete la tabla siguiente usando valores con cuatro decimales. Formule una conjetura del valor de la pendiente de la tangente a la gráfica de f en $x = 0$.

Δx	Δy	$\Delta y/\Delta x$
0.2		
0.1		
0.01		

−0.2		
−0.1		
−0.01		

32. Considere la función $f(x) = \tan x$.

(a) Calcule el cociente $(\tan 0.1)/0.1$.

(b) ¿En qué punto de la gráfica de f es el número obtenido en la parte (a) una aproximación a la pendiente de la recta tangente?

[3.1.2]

33. Un auto recorre las 290 millas entre Los Angeles y Las Vegas en 5 horas. ¿Cuál es su velocidad media?

34. Dos señales de una carretera distan entre sí $\frac{1}{2}$ milla. Un avión de la Patrulla de Caminos observa que un auto recorre la distancia entre las señales en 40 s. ¿Será detenido el auto por exceso de velocidad? (Suponga que el límite de velocidad es de 55 mi/h.)

35. Un avión jet promedia 920 km/h al volar los 3500 km entre Hawai y San Francisco. ¿Cuántas horas dura el vuelo?

36. Una carrera de maratón se realiza sobre un trayecto recto de 26 millas. La carrera se inicia al mediodía. A la 1:30 P.M. un corredor pasa la señal de las 10 millas y a las 3:10 P.M. pasa la señal de las 20 millas. ¿Cuál es la velocidad media del corredor entre la 1:30 P.M. y las 3:10 P.M.?

En los Problemas 37 y 38, la posición de una partícula sobre una recta coordenada horizontal está determinada por la función dada. Encuentre la velocidad instantánea de la partícula en el tiempo indicado.

37. $f(t) = -4t^2 + 10t + 6;\ t = 3$

38. $f(t) = t^2 + \dfrac{1}{5t+1};\ t = 0$

39. La altura sobre el suelo de una pelota que se deja caer desde una altura inicial de 122.5 m está dada por $s(t) = 122.5 - 4.9t^2$, en donde s se mide en metros y t en segundos.

(a) ¿Cuál es la velocidad instantánea cuando $t = \frac{1}{2}$?

(b) ¿En qué instante choca la pelota contra el suelo?

(c) ¿Cuál es la velocidad de impacto?

40. La altura de un proyectil lanzado desde el nivel del suelo está dada por $s(t) = -16t^2 + 256t$, en donde s se mide en pies y t en segundos.

(a) Determine la altura del proyectil cuando $t = 2$, $t = 6$, $t = 9$ y $t = 10$.

(b) ¿Cuál es la velocidad media del proyectil entre $t = 2$ y $t = 5$?

(c) Demuestre que es cero la velocidad media entre $t = 7$ y $t = 9$. Interprete físicamente.

(d) ¿En qué instante choca el proyectil contra el suelo?

(e) Determine la velocidad instantánea en el tiempo t_1.

(f) ¿Cuál es la velocidad de impacto?

(g) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el proyectil?

3.2 La derivada

En la sección anterior se vio que si la gráfica de una función $y = f(x)$ posee una tangente en el punto $(a, f(a))$, entonces la pendiente de ésta es

$$m_{\tan} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Para una función dada usualmente es posible obtener una fórmula, o regla general, que proporcione el valor de la pendiente de la recta tangente. Esto se realiza evaluando

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{3.6}$$

para *cualquier* x (para el cual exista el límite). Luego se sustituye un valor de x *después* de haber encontrado el límite. El límite (3.6) se llama **derivada** de f y se denota por f'.

DEFINICIÓN 3.3
La derivada de una función $y = f(x)$ con respecto a x es

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{3.7}$$

siempre que este límite exista. □

La derivada $f'(x)$ también se llama **razón de cambio instantánea** de la función $y = f(x)$ con respecto a la variable x.

Reconsideremos ahora los Ejemplos 1 y 2 de la Sección 3.1.

Ejemplo 1

Encontrar la derivada de $f(x) = x^2$.

Solución Como anteriormente, el procedimiento consta de cuatro pasos:

(*i*) $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2$

(*ii*) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = [x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2] - x^2 = \Delta x[2x + \Delta x]$

(*iii*) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x[2x + \Delta x]}{\Delta x} = 2x + \Delta x$

(*iv*) $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [2x + \Delta x] = 2x.$

En el ejemplo anterior, $f'(x) = 2x$ es otra función de x que se *deriva* (de aquí el nombre de derivada) de la función original. También debe observarse que el resultado del Ejemplo 2 de la Sección 3.1 se obtiene evaluando $f'(x)$ *en* $x = 1$.

Ejemplo 2

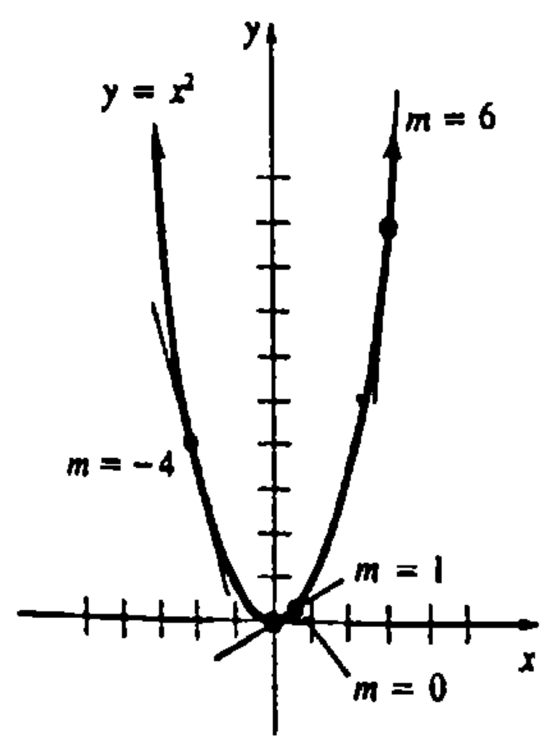


Figura 3.19

Para $f(x) = x^2$, encontrar $f'(-2)$, $f'(0)$, $f'(\frac{1}{2})$ y $f'(3)$. Interpretar.

Solución Del Ejemplo 1, se sabe que $f'(x) = 2x$. Por tanto, $f'(-2) = -4$, $f'(0) = 0$, $f'(\frac{1}{2}) = 1$ y $f'(3) = 6$. Como puede observarse en la Figura 3.19, estos valores representan las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de $y = x^2$ en $(-2, 4)$, $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ y $(3, 9)$, respectivamente.

Ejemplo 3

Encontrar la derivada de $f(x) = -x^2 + 4x + 1$.

Solución En este caso el lector debe poder demostrar que

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x[-2x - \Delta x + 4].$$

Por lo tanto,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x[-2x - \Delta x + 4]}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} [-2x - \Delta x + 4] = -2x + 4.$$

Ejemplo 4

Encontrar la derivada de $f(x) = x^3$.

Solución Para determinar $f(x + \Delta x)$, se usa el teorema del binomio.

(*i*) $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\,\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$

(*ii*) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = [x^3 + 3x^2\,\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3] - x^3$
$= \Delta x[3x^2 + 3x\,\Delta x + (\Delta x)^2]$

(*iii*) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x[3x^2 + 3x\,\Delta x + (\Delta x)^2]}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\,\Delta x + (\Delta x)^2$

(*iv*) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} [3x^2 + 3x\,\Delta x + (\Delta x)^2] = 3x^2.$

Ejemplo 5

Hallar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^3$ en $x = \frac{1}{2}$.

Solución Puesto que hemos visto que $f'(x) = 3x^2$, se deduce que la pendiente de la tangente en $x = \frac{1}{2}$ es

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

La ordenada del punto de tangencia es $f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$. Así que la recta tangente en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$ está dada por

$$y - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \text{o bien} \quad y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}.$$

La gráfica de la función y la recta tangente se presentan en la Figura 3.20.

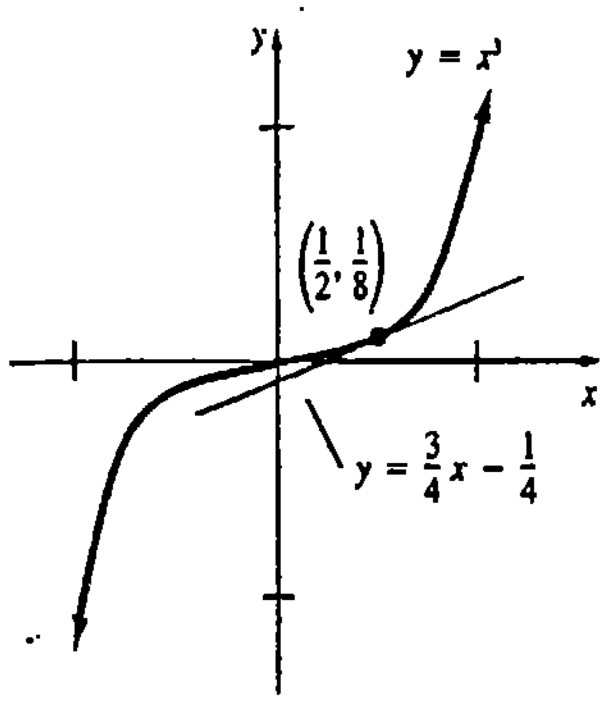


Figura 3.20

Símbolos

La siguiente es una lista de algunos de los símbolos usados en las publicaciones de matemáticas para denotar la derivada de una función:

$$f'(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad y', \quad \dot{y}, \quad Dy, \quad D_x y.$$

El segundo símbolo, tiene su origen, obviamente, en la notación Δy y Δx: $dy/dx = \lim_{\Delta x\to 0} \Delta y/\Delta x$. En este texto se emplearán los tres primeros símbolos. Para una función como $f(x) = x^2$, se escribe $f'(x) = 2x$; si esta misma función se expresa $y = x^2$, entonces se utiliza $dy/dx = 2x$ o bien $y' = 2x$.

Valor de una derivada

En un número especificado a, el valor de la derivada se denota por

$$f'(a), \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}, \quad \text{o bien} \quad y'(a).$$

Ejemplo 6

El valor de la derivada de $y = x^2$ en 5 es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=5} = 2x\Big|_{x=5} = 10.$$

Operación

El proceso de obtención de una derivada se llama **diferenciación** (o **derivación**). Si $f'(a)$ existe, se dice que f es **diferenciable en** a. La **operación de diferenciación con respecto a la variable** x se representa mediante el símbolo d/dx; por ejemplo, ya se ha visto que

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}(-x^2 + 4x + 1) = -2x + 4.$$

Tangentes horizontales

Si $y = f(x)$ es continua en $x = a$ y $f'(a) = 0$, entonces la tangente en $(a, f(a))$ es horizontal. En el Ejemplo 2 se vio que para $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, así es que $f'(0) = 0$. Por consiguiente, la tangente a la gráfica es horizontal en $(0, f(0))$, o bien $(0, 0)$. En el Ejemplo 3 vimos que $f'(x) = -2x + 4$ para $f(x) = -x^2 + 4x + 1$. Obsérvese que en este caso $f'(x) = 0$ cuando $-2x + 4 = 0$, o bien $x = 2$. Luego, hay una tangente horizontal en $(2, f(2))$, o bien $(2, 5)$.

Dominio de f'

El dominio de f', definida por (3, 7), es el conjunto de números para los que el límite existe. Una derivada no existe en un número a, por las mismas razones que una tangente a la gráfica no existe:

(*i*) la función es discontinua en $x = a$, o (*ii*) la gráfica tiene una punta o pico en $(a, f(a))$. Además, puesto que la derivada da la pendiente, f' no existe

(*iii*) en un punto $(a, f(a))$ en el que la tangente a la gráfica es vertical.*

El dominio de f' es necesariamente un subconjunto del dominio de f.

Ejemplo 7

(*a*) La función $f(x) = 1/(2x-1)$ es discontinua en 1/2. Por lo tanto, f no es diferenciable en este valor.

(*b*) La gráfica de $f(x) = |x|$ posee una punta o esquina en el origen. En el Ejemplo 9 de la Sección 3.1, se vio que $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y/\Delta x$ no existe en 0, así que f no es diferenciable ahí.

(*c*) En el Ejemplo 6 de la Sección 3.1, se vio que la gráfica de $f(x) = x^{1/3}$ posee una tangente vertical en el origen. Por lo cual, la función f no es diferenciable en 0. Véase el Problema 24 de los Ejercicios 3.2.

Diferenciabilidad en un intervalo

Se dice que una función es **diferenciable**.

(*i*) **en un intervalo abierto** (a, b) cuando f' existe para todo número del intervalo,

(*ii*) **en un intervalo cerrado** $[a, b]$ cuando f es diferenciable en (a, b) y ambas

$$f'_+(a) = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}, \qquad f'_-(b) = \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(b+\Delta x)-f(b)}{\Delta x} \tag{3.8}$$

existen.

Los límites en (3.8) se llaman **derivada por la derecha** y **derivada por la izquierda**, respectivamente. Una función es diferenciable en $[a, \infty)$ cuando lo es en (a, ∞) y tiene derivada por la derecha en a. Una definición semejante en términos de la derivada por la izquierda se aplica para la diferenciabilidad en $(-\infty, a]$. Puede demostrarse que

f es diferenciable en un número c de un intervalo (a, b) si y solo si $f'_+(c) = f'_-(c)$.

Ejemplo 8

La función

$$f(x) = x^2, \qquad -1 \le x \le 2$$

es diferenciable en $[-1, 2]$ puesto que $f'(x) = 2x$ para todo número x en $(-1, 2)$ y

$$f'_-(2) = 4 \quad \text{y} \quad f'_+(-1) = -2.$$

Véase la Figura 3.21.

* Recuérdese que la pendiente de una recta vertical no está definida.

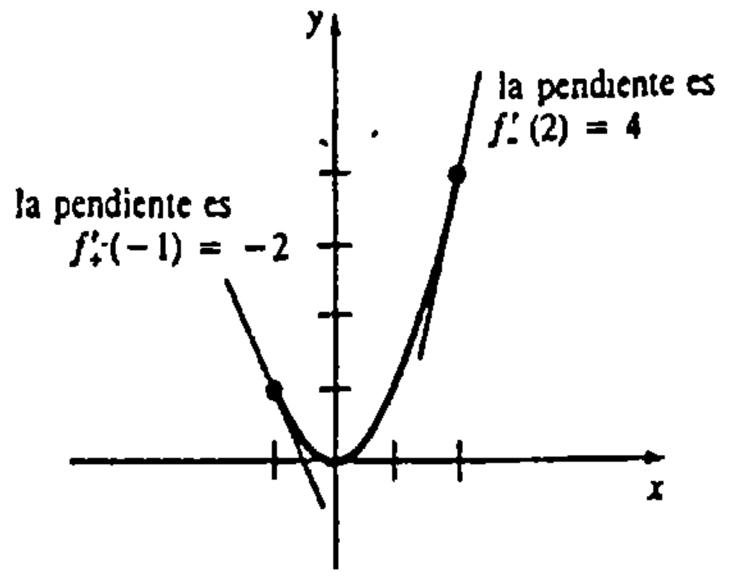


Figura 3.21

Ejemplo 9

La función $f(x) = x^2$ es diferenciable en $(-\infty, \infty)$.

Ejemplo 10

Como $f(x) = 1/x$ es discontinua en $x = 0$, f no es diferenciable en ningún intervalo que contenga a 0.

Ejemplo 11

Demostrar que

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ x+1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

no es diferenciable en $x = 1$.

Solución. La Figura 3.22 muestra que la gráfica de f tiene una esquina en $(1, 2)$. Ahora bien,

$$f'_+(1) = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{[(1+\Delta x)+1]-2}{\Delta x} = 1,$$

mientras que

$$f'_-(1) = \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2-2}{\Delta x} = 0.$$

Como $f'_+(1) \neq f'_-(1)$, f no es diferenciable en 1. Consecuentemente, f no es diferenciable en los intervalos que contengan a 1.

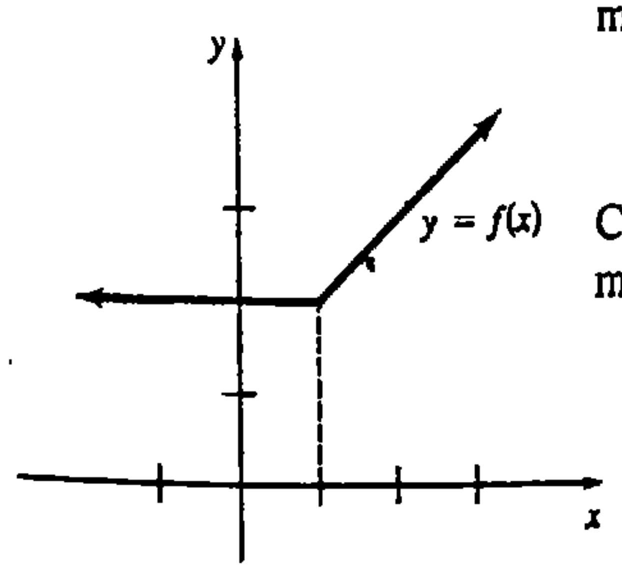


Figura 3.22

Ejemplo 12

Se deja como ejercicio demostrar que $f(x) = \sqrt{x}$ es diferenciable en $(0, \infty)$ pero no en $[0, \infty)$. Véase el Problema 23. La grafica de f en la Figura 3.23, ¿proporciona alguna idea de por qué $f'_+(0)$ no existe?

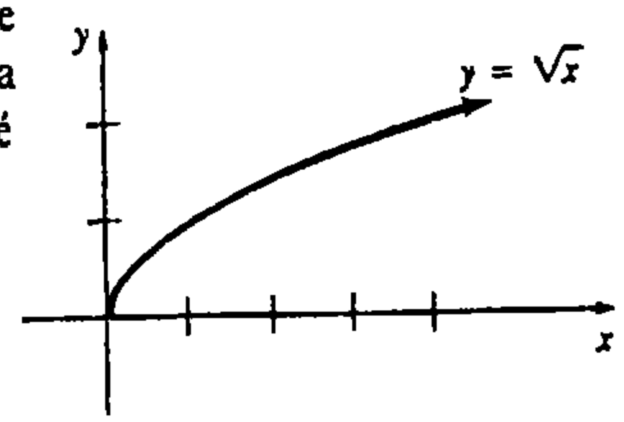


Figura 3.23

En el Ejemplo 11 la función f es continua en 1 pero no diferenciable en ese número. En otras palabras, la *continuidad no implica la diferenciabilidad*. Sin embargo, la proposición recíproca de la anterior es verdadera: *la diferenciabilidad implica la continuidad.*

TEOREMA 3.1

Si f es diferenciable en un número a, entonces f es continua en a. □

Este resultado no es difícil de probar y se deja como ejercicio. Véase el Problema 40 de los Ejercicios 3.2.

Observaciones

(i) En la discusión precedente se vio que la derivada de una función es en sí misma una función que proporciona la pendiente de una recta tangente. La derivada, sin embargo, *no* es una ecuación de una recta tangente. También es incorrecto decir que $y - y_0 = f'(x) \cdot (x - x_0)$ es una ecuación de la tangente en (x_0, y_0). Recuérdese que $f'(x)$ debe evaluarse en x_0 *antes* de emplearse en la forma punto-pendiente. Si f es diferenciable en x_0, entonces una ecuación de la recta tangente en (x_0, y_0) es $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

(ii) La notación dy/dx se debe a Leibniz, mientras que Newton usó $\dot{y}$ para representar una *fluxión* (la derivada). Este último símbolo no logró gran popularidad entre los matemáticos y en la actualidad lo usan principalmente los físicos. Por razones tipográficas, la llamada notación con "puntos" de Newton ha cedido su lugar a la notación con "primas".

Isaac Newton (1642-1727), matemático y físico inglés, alcanzó la fama en 1687 con la publicación de su ley de la gravitación universal en su tratado *Philosophiae Naturalis Mathematica*. El matemático y filósofo alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) publicó una versión breve de su cálculo en un artículo de una revista científica en 1684. Pero, como era bien sabido que los manuscritos de Newton acerca del *método de las fluxiones* databan de alrededor de 1670, Leibniz fue acusado de apropiarse de las ideas contenidas en esos trabajos inéditos. Alimentada por orgullos nacionalistas, se puso en boga durante muchos años una controversia acerca de quién fue el primero en "inventar" el Cálculo. En la actualidad los historiadores generalmente concuerdan en que tanto Leibniz como Newton arribaron a muchas

Isaac Newton

Culver Pictures, Inc.

Gottfried Leibniz

de las premisas fundamentales del Cálculo independientemente uno del otro. Leibniz y Newton son considerados pues "co-inventores" de esta materia.*

(iii) Los matemáticos, entre el siglo XVII y el siglo XIX, creían que una función continua *usualmente* poseía derivada. (En esta sección hemos observado excepciones.) En 1872 el matemático alemán Karl Weierstrass destruyó en definitiva esta aseveración al publicar un ejemplo de una función continua en todo número real, pero que en ninguno es diferenciable.

Ejercicios 3.2

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 970.

En los Problemas 1-16 use la Definición 3.3 para encontrar la derivada de la función dada.

1. $f(x) = 10$
2. $f(x) = x - 1$
3. $f(x) = -3x + 5$
4. $f(x) = \pi x$
5. $f(x) = 3x^2$
6. $f(x) = -x^2 + 1$
7. $f(x) = 4x^2 - x + 6$
8. $f(x) = (x + 1)^2$
9. $f(x) = x^3 + x$
10. $f(x) = 2x^3 + x^2$
11. $y = -x^3 + 15x^2 - x$
12. $y = x^4$
13. $y = \dfrac{1}{x}$
14. $y = \dfrac{2}{x + 1}$
15. $y = \dfrac{x}{x - 1}$
16. $y = \dfrac{2x + 3}{x + 4}$

En los Problemas 17-20 determine la derivada de la función dada. Obtenga una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el valor indicado de x.

17. $f(x) = 4x^2 + 7x$; $x = -1$
18. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - 4$; $x = 0$
19. $y = x - \frac{1}{x}$; $x = 1$
20. $y = 2x + 1 + \frac{6}{x}$; $x = 2$
21. Obtener la razón de cambio instantánea de $y = 1/x^2$ con respecto a x.
22. Determine el punto de la gráfica de $f(x) = x^2 + 8x + 10$, en donde la tangente sea horizontal.

* En realidad, el concepto de límite y sus aplicaciones se remontan hasta el matemático griego Arquímedes (c. 287-212 A.C.).

23. (a) Obtenga la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$. (*Sugerencia:* multiplique numerador y denominador de $\Delta y/\Delta x$ por $(x + \Delta x)^{1/2} + x^{1/2}$.)

(b) ¿Cuál es el dominio de f'?

(c) Demuestre que $f'_+(0)$ no existe.

24. (a) Obtenga la derivada de $f(x) = x^{1/3}$. (*Sugerencia:* multiplique numerador y denominador de $\Delta y/\Delta x$ por $(x + \Delta x)^{2/3} + (x + \Delta x)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}$.)

(b) ¿Cuál es el dominio de f'?

En los Problemas 25-28 use los procedimientos delineados en los Problemas 23 y 24 para evaluar la derivada de la función dada. Determine el dominio de f'.

25. $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

26. $f(x) = 1/\sqrt{x}$

27. $f(x) = (x - 4)^{1/3}$

28. $f(x) = (4x)^{1/3} + 7$

En los Problemas 29 y 30 demuestre que la función continua dada no es diferenciable en el valor de x indicado.

29. $f(x) = \begin{cases} -x + 2, & x \le 2 \\ 2x - 4, & x > 2 \end{cases}$; $x = 2$

30. $f(x) = \begin{cases} 3x, & x < 0 \\ -4x, & x \ge 0 \end{cases}$; $x = 0$

31. Demuestre que si $f(x) = k$ es una función constante, entonces $f'(x) = 0$. Interprétese geométricamente lo anterior.

32. Demuestre que si $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, es una función lineal, entonces $f'(x) = a$. Interprétese geométricamente.

En los Problemas 33-36 trace la gráfica de f' a partir de la gráfica de f.

33.

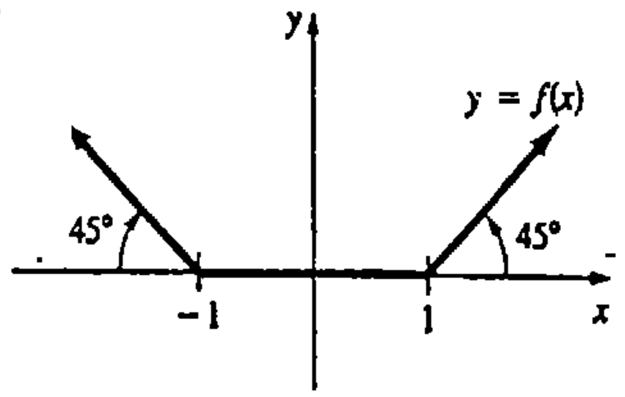


Figura 3.24

34.

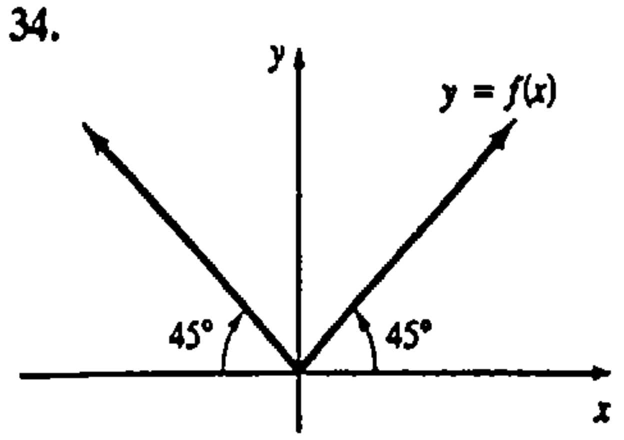


Figura 3.25

35.

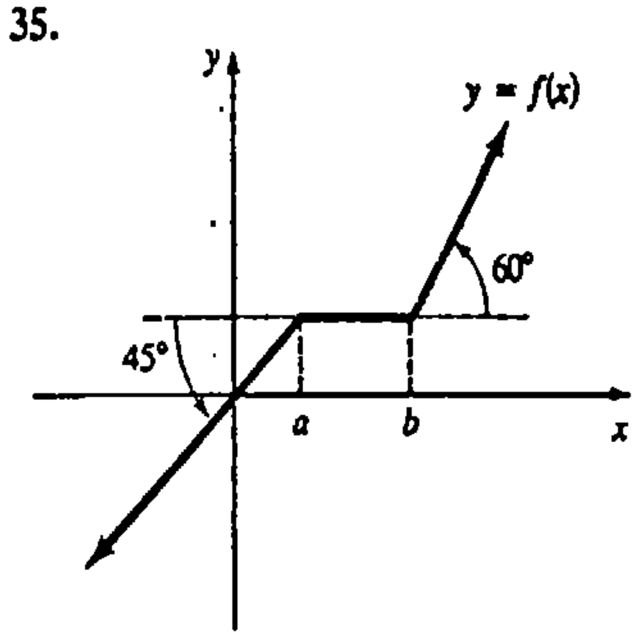


Figura 3.26

36.

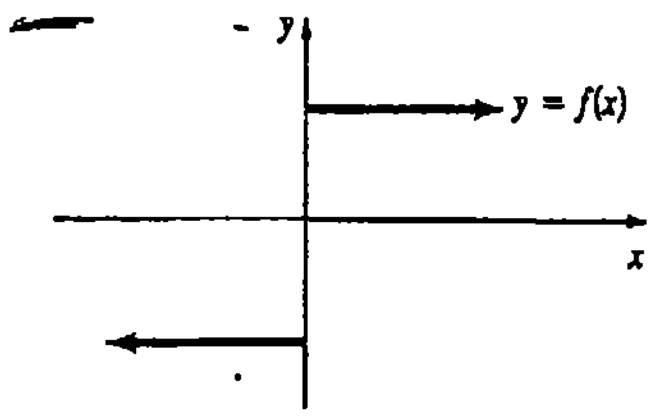


Figura 3.27

Problemas diversos

37. Una formulación alternativa de la derivada de una función f en un número a es

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (3.9)$$

siempre que el límite exista. Demuestre que (3.9) es equivalente a (3.7) cuando $x = a$. (*Sugerencia:* sea $\Delta x = x - a$.)

38. Use (3.9) para obtener la derivada de $f(x) = 6x^2$ en cualquier número a.

39. Utilice (3.9) para encontrar la derivada de $f(x) = x^{3/2}$ en cualquier número a.

40. Use (3.9) para demostrar el Teorema 3.1. (*Sugerencia:* tome el límite de

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) \text{ cuando } x \to a$$

y aplique el hecho de que el límite de una diferencia es la diferencia de los límites, y el límite de un producto es el producto de los límites, siempre que existan todos los límites.)

3.3 Reglas de diferenciación I: reglas de la potencia y de la suma

La definición de la derivada tiene la desventaja obvia de ser un poco laboriosa y difícil de aplicar. Se verá ahora que la derivada de una función tal como $f(x) = 6x^{100} + x^{35}$ puede obtenerse, por así decirlo, de un "plumazo". $(x+1)^2 = 2(1)$ $= 2$

Regla de la potencia

El procedimiento esbozado en los Ejemplos 1 y 4 de la Sección 3.2, para diferenciar $f(x) = x^2$ y $f(x) = x^3$, puede ser empleado para encontrar la derivada de $f(x) = x^n$ para todo entero positivo n. El punto de partida es nuevamente el teorema del binomio. Para un entero positivo n,

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &= (x + \Delta x)^n \\ &= x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n. \end{aligned}$$

Así que,

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) \\ &= \left[x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n\right] - x^n \\ &= \Delta x\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1}\right] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta x\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1}\right]}{\Delta x} \\ &= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Puesto que cada término de (3.10) posterior al primero contiene un factor de Δx, se deduce que

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}.$$

Se acaba de demostrar justamente el teorema siguiente.

TEOREMA 3.2
Regla de la potencia

Si n es un entero positivo, entonces

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}. \quad (3.11)$$

□

La regla de la potencia establece simplemente que para diferenciar x^n:

Se coloca el exponente como factor

$$(\ )x^{(\ )-1}$$

Se disminuye en 1 el exponente

Obsérvese que las derivadas de $y = x^2$ y $y = x^3$ se obtienen de (3.11):

$$y = x^2, \quad \frac{dy}{dx} = 2x^{2-1} = 2x;$$

$$y = x^3, \quad \frac{dy}{dx} = 3x^{3-1} = 3x^2.$$

Ejemplo 1

Diferenciar $y = x^6$.

Solución Por la regla de la potencia (3.11),

$$\frac{dy}{dx} = 6x^{6-1} = 6x^5.$$

Ejemplo 2

Diferenciar $y = x$.

Solución Identificando $n = 1$, se tiene por (3.11) que

$$\frac{dy}{dx} = 1x^{1-1} = 1x^0 = 1.$$

El resultado siguiente es inmediato porque la gráfica de $f(x) = k$, siendo k una constante, es una recta horizontal y, por lo tanto, su pendiente ($f'(x)$) es cero.

TEOREMA 3.3

Función constante

Si $f(x) = k$ es una función constante, entonces $f'(x) = 0$. (3.12)

Demostración

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = k - k = 0.$$

Por lo tanto, $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y/\Delta x = 0$. □

Ejemplo 3

Se tiene por (3.12) que

(*a*) $\dfrac{d}{dx} 5 = 0$, y (*b*) $\dfrac{d}{dx} \pi^3 = 0$.

Obsérvese el resultado de la parte (*b*) del Ejemplo 3. Es un *error común* aplicar la regla de la potencia y escribir $d/dx\,(\pi^3) = 3 \cdot \pi^2$. Téngase presente que (3.11) se aplica solamente a una *base variable* x. Además, (3.12) implica que (3.11) se cumple para el caso $n = 0$: si $x \neq 0$, $f(x) = x^0 = 1$ y $f'(x) = 0 = 0 \cdot x^{0-1}$.

TEOREMA 3.4

Múltiplo constante de una función

Si c es una constante cualquiera y f es diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x). \tag{3.13}$$

Demostración Sea $G(x) = cf(x)$. De modo que

$$\begin{aligned} G'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{G(x + \Delta x) - G(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x + \Delta x) - cf(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} c\left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] \\ &= c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= cf'(x). \end{aligned}$$

□

Ejemplo 4

Diferenciar $y = 5x^3$.

Solución Por (3.11) y (3.13),

$$\frac{dy}{dx} = 5 \cdot \frac{d}{dx} x^3 = 5(3x^2) = 15x^2.$$

TEOREMA 3.5

Regla de la suma

Si f y g son funciones diferenciables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x). \tag{3.14}$$

Demostración Sea $G(x) = f(x) + g(x)$. Por tanto,

$$G'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{G(x + \Delta x) - G(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x) + g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= f'(x) + g'(x). \qquad \square$$

Ejemplo 5

Diferenciar $y = x^5 + x^2$.

Solución Por (3.11) y (3.14) se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}x^5 + \frac{d}{dx}x^2 = 5x^4 + 2x.$$

Se ve ahora rápidamente que la derivada de la función $f(x) = 6x^{100} + x^{35}$, mencionada en la observación introductoria, es $f'(x) = 600x^{99} + 35x^{34}$.

Puesto que $f(x) - g(x) = f(x) + [-g(x)]$, la regla de la suma (3.14) también se cumple para la *diferencia* de dos funciones.

Ejemplo 6

Diferenciar $y = 9x^7 - 3x^4$.

Solución En vista de (3.11), (3.13) y (3.14), puede escribirse

$$\frac{dy}{dx} = 9\frac{d}{dx}x^7 - 3\frac{d}{dx}x^4 = 63x^6 - 12x^3.$$

La regla de la suma (3.14) se extiende también a cualquier suma finita de funciones. Por consiguiente, toda función polinomial es diferenciable.

Ejemplo 7

Diferenciar $y = 4x^5 - \frac{1}{2}x^4 + 9x^3 + 10x^2 - 13x + 6.$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = 4\frac{d}{dx}x^5 - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}x^4 + 9\frac{d}{dx}x^3 + 10\frac{d}{dx}x^2 - 13\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}6.$$

Puesto que $\frac{d}{dx}6 = 0$, se obtiene que

$$\frac{dy}{dx} = 20x^4 - 2x^3 + 27x^2 + 20x - 13.$$

Ejemplo 8

Encontrar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 7x$ en $x = -1$.

Solución La ordenada del punto que corresponde a $x = -1$ es $f(-1) = 8$. Ahora bien,

$$f'(x) = 12x^3 + 6x^2 - 7$$

así que

$$f'(-1) = -13.$$

La forma punto-pendiente proporciona una ecuación de la recta tangente en $(-1, 8)$:

$$y - 8 = -13(x + 1) \quad \text{o bien} \quad y = -13x - 5.$$

Recta normal

La recta normal a una gráfica en un punto P es la que es perpendicular a la recta tangente en P.

Ejemplo 9

Encontrar una ecuación de la recta normal a la gráfica de $y = x^2$ en $x = 1$.

Solución Como $dy/dx = 2x$, se sabe que $m_{\tan} = 2$ en $(1, 1)$. Así que la pendiente de la recta normal mostrada en la Figura 3.28 es $m = -\frac{1}{2}$. Su ecuación es

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$$

o bien

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

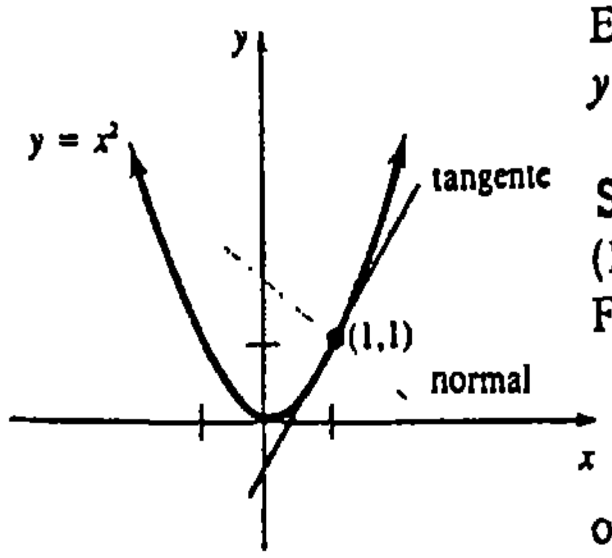


Figura 3.28

Observación

En los diferentes contextos de la ciencia, la ingeniería y la administración, las funciones se expresan a menudo en términos de variables distintas de x y de y. Correspondientemente, debe adaptarse la notación de la derivada a nuevos símbolos; por ejemplo,

$$v(t) = 32t, \qquad v'(t) = \frac{dv}{dt} = 32$$

$$A(r) = \pi r^2, \qquad A'(r) = \frac{dA}{dr} = 2\pi r$$

$$H(z) = \frac{1}{4}z^6, \qquad H'(z) = \frac{dH}{dz} = \frac{3}{2}z^5$$

$$D(p) = 800 - 120p + 5p^2, \qquad D'(p) = \frac{dD}{dp} = -120 + 10p.$$

Ejercicios 3.3

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 970.

En los Problemas 1-20 encuentre la derivada de la función dada.

1. $y = x^9$
2. $y = 4x^{12}$
3. $y = \pi^6/12$
4. $y = -18$
5. $y = 7x^2 - 4x$
6. $y = 6x^3 + 3x^2 - 10$
7. $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 3x^4 + 9x^2 + 1$
8. $f(x) = -\frac{2}{3}x^6 + 4x^5 - 13x^2 + 8x + 2$
9. $f(x) = x^3(4x^2 - 5x - 6)$
10. $f(x) = \dfrac{2x^5 + 3x^4 - x^3}{x^2}$
11. $f(x) = (x + 1)^2$
12. $f(x) = (9 + x)(9 - x)$
13. $h(u) = (4u)^3$
14. $P(t) = (2t)^4 - (2t)^2$
15. $F(z) = 6z^3 + az^2 + a^3$, a es constante
16. $g(w) = \dfrac{w^n - 5^n}{n}$, n es un entero positivo
17. $G(\beta) = -3\beta^4 + 7\beta^3 - 5\beta^2 + 2$
18. $Q(u) = \dfrac{u^5 + 4u^2 - 3}{6}$
19. $f(x) = \dfrac{x^2}{(x^2 + 5)^{-2}}$
20. $f(x) = (x^3 + x^2)^3$

En los Problemas 21-24 halle una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor de x indicado.

21. $y = 2x^3 - 1;\ x = -1$
22. $y = \frac{1}{2}x^2 + 3;\ x = 2$
23. $y = 4x^2 - 4x - 20;\ x = 3$
24. $y = -x^3 + 6x^2;\ x = 1$

En los Problemas 25-28 encuentre el(los) punto(s) de la gráfica de la función dada en donde la tangente sea horizontal.

25. $y = x^2 - 8x + 5$
26. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$
27. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$
28. $y = x^4 - 4x^3$

En los Problemas 29-32 encuentre una ecuación de la recta normal a la gráfica de la función dada en el valor de x indicado.

29. $y = -x^2 + 1;\ x = 2$
30. $y = x^3;\ x = 1$
31. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2;\ x = 4$
32. $y = x^4 - x;\ x = -1$
33. Determine el punto de la gráfica de $f(x) = 2x^2 - 3x + 6$ en el que la pendiente de la recta tangente sea 5.
34. Determine el punto de la gráfica de $f(x) = x^2 - x$ en el que la recta tangente sea $3x - 9y - 4 = 0$.
35. Halle el punto de la gráfica de $f(x) = x^2 - x$ en el que la pendiente de la recta normal sea 2.
36. Obtenga el(los) punto(s) de la gráfica de $f(x) = x^2$ en los que la recta tangente tenga ordenada en el origen -2.
37. Encuentre el(los) punto(s) de la gráfica de $f(x) = x^2 - 5$ en los que la recta tangente tenga abscisa en el origen -3.
38. Obtenga el punto de la gráfica de $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x$ en el que la recta tangente sea paralela a la recta $3x - 2y + 1 = 0$.
39. Halle una ecuación de una recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^3$ que sea perpendicular a la recta $y = -3x$.
40. Obtenga ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de $f(x) = x^2 + 2x$ que pasen por $(0, -1)$.
41. Determine un punto en cada una de las gráficas de $f(x) = x^2 + x$ y $g(x) = 2x^2 + 4x + 1$ en los que las rectas tangentes sean paralelas.
42. Obtenga valores de a y de b tales que la pendiente de la tangente a la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx$ en $(1, 4)$ sea -5.
43. Determine los valores de b y c de manera que la gráfica de $f(x) = x^2 + bx$ posea la recta tangente $y = 2x + c$ en $x = -3$.
44. La altura s, sobre el suelo, de un proyectil en el tiempo t está dada por
$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0,$$
en donde g, v_0 y s_0 son constantes. Encuentre la razón de cambio instantánea de s con respecto a t en $t = 4$.
45. El volumen V de una esfera de radio r es $V = (4\pi/3)r^3$. Determine el área S de la superficie de la esfera, si S es la razón de cambio instantánea del volumen con respecto al radio.
46. Según Poiseuille*, la velocidad v de la sangre en una arteria con sección transversal circular de radio R, es $v(r) = (P/4vl)(R^2 - r^2)$, en donde P, v y l son constantes. ¿Cuál es la velocidad de la sangre cuando el valor de r es tal que $v'(r) = 0$?
47. La energía potencial de un sistema resorte-masa cuando el muelle se estira una distancia de x unidades, es $U(x) = (k/2)x^2$, en donde k es la constante del resorte. La fuerza ejercida sobre la masa es $F = -dU/dx$. Determine la fuerza si la constante del resorte es 30 N/m y se estira $\frac{1}{2}$ m.†

3.4 Reglas de diferenciación II: reglas del producto y del cociente

En la sección precedente se vio que la regla de la suma (3.14) proviene de las propiedades del límite; esto es, el límite de una suma es la suma de los límites siempre que existan. También se sabe que cuando los límites existen, el límite de un producto es el producto de los límites. Por lo tanto, una conjetura natural sería que la derivada de un producto fuera el producto de las derivadas. Sin embargo, la regla para diferenciar el producto de dos funciones *no* es así de simple.

TEOREMA 3.6

Regla del producto

Si f y g son funciones diferenciables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x). \tag{3.15}$$

Demostración Sea $G(x) = f(x)g(x)$. Entonces

$$G'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{G(x + \Delta x) - G(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

* Jean Louis Poiseuille (1799-1869), físico francés.
† Véase en la página 347 un repaso de las unidades de fuerza.

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) \overbrace{- f(x+\Delta x)g(x) + f(x+\Delta x)g(x)}^{\text{cero}} - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x+\Delta x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} + g(x)\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} g(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \tag{3.16}$$

Como f es diferenciable, también es continua y

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) = f(x).$$

Además, $\lim_{\Delta x \to 0} g(x) = g(x)$. Por consiguiente, (3.16) se convierte en

$$G'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x). \qquad \square$$

La regla del producto se memoriza usualmente en forma verbal:

La primera función por la derivada de la segunda más la segunda función por la derivada de la primera.

Ejemplo 1

Diferenciar (o derivar) $y = (x^3 - 2x^2 + 4)(8x^2 + 5x)$.

Solución Por la regla del producto (3.15),

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{(x^3 - 2x^2 + 4)}_{\text{primera}} \cdot \underbrace{\frac{d}{dx}(8x^2 + 5x)}_{\text{derivada de la segunda}} + \underbrace{(8x^2 + 5x)}_{\text{segunda}} \cdot \underbrace{\frac{d}{dx}(x^3 - 2x^2 + 4)}_{\text{derivada de la primera}}$$

$$= (x^3 - 2x^2 + 4)(16x + 5) + (8x^2 + 5x)(3x^2 - 4x).$$

Aunque (3.15) está establecida solamente para el producto de dos funciones, se puede aplicar también a funciones con un número mayor de factores.

Ejemplo 2

Diferenciar $y = (4x + 1)(2x^2 - x)(x^3 - 8x)$.

Solución Se identifican los dos primeros factores como "la primera función".

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{(4x + 1)(2x^2 - x)}_{\text{primera}} \underbrace{\frac{d}{dx}(x^3 - 8x)}_{\text{derivada de la segunda}} + \underbrace{(x^3 - 8x)}_{\text{segunda}} \underbrace{\frac{d}{dx}(4x + 1)(2x^2 - x)}_{\text{derivada de la primera}}$$

Para encontrar la derivada de la primera función, debe aplicarse la regla del producto por segunda ocasión. Así que,

$$\frac{dy}{dx} = (4x + 1)(2x^2 - x) \cdot (3x^2 - 8) + (x^3 - 8x) \cdot \underbrace{[(4x + 1)(4x - 1) + (2x^2 + x) \cdot 4]}_{\text{regla del producto de nuevo}}$$

$$= (4x + 1)(2x^2 - x)(3x^2 - 8) + (16x^2 - 1)(x^3 - 8x) + 4(2x^2 + x)(x^3 - 8x).$$

La derivada del cociente de dos funciones está dada por el teorema siguiente

TEOREMA 3.7

Regla del cociente

Si f y g son funciones diferenciables y $g(x) \neq 0$, entonces

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \tag{3.17}$$

Demostración Sea $G(x) = f(x)/g(x)$. Entonces,

$$G'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{G(x+\Delta x) - G(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)f(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x g(x+\Delta x)g(x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)f(x+\Delta x) \overbrace{- g(x)f(x) + g(x)f(x)}^{\text{cero}} - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x g(x+\Delta x)g(x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)\left[\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] - f(x)\left[\dfrac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right]}{g(x+\Delta x)g(x)}$$

$$= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}. \qquad \square$$

En forma verbal, la regla del cociente es:

El denominador multiplicado por la derivada del numerador, menos el numerador multiplicado por la derivada del denominador, todo dividido entre el denominador al cuadrado.

Ejemplo 3

Diferenciar (o derivar) $y = \dfrac{3x^2 - 1}{2x^3 + 5x^2 + 7}$.

Solución Por la regla del cociente (3.17),

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\overset{\text{denominador}}{(2x^3+5x^2+7)}\cdot\overset{\text{derivada del numerador}}{\frac{d}{dx}(3x^2-1)}-\overset{\text{numerador}}{(3x^2-1)}\cdot\overset{\text{derivada del denominador}}{\frac{d}{dx}(2x^3+5x^2+7)}}{(2x^3+5x^2+7)^2}$$

$$=\frac{(2x^3+5x^2+7)\cdot 6x-(3x^2-1)\cdot(6x^2+10x)}{(2x^3+5x^2+7)^2}$$

$$=\frac{-6x^4+6x^2+52x}{(2x^3+5x^2+7)^2}.$$

Ejemplo 4

Obtener una ecuación de la recta tangente a la gráfica de

$$f(x)=\frac{6x^3}{x^3+1}\quad\text{en } x=1.$$

Solución Se utiliza la regla del cociente para encontrar la derivada,

$$f'(x)=\frac{(x^3+1)\cdot\frac{d}{dx}6x^3-6x^3\cdot\frac{d}{dx}(x^3+1)}{(x^3+1)^2}$$

$$=\frac{(x^3+1)\cdot 18x^2-6x^3\cdot(3x^2)}{(x^3+1)^2}=\frac{18x^2}{(x^3+1)^2}.$$

Cuando $x = 1$, la pendiente de la recta tangente es

$$f'(1)=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}.$$

El punto de tangencia es $(1, f(1))$ o bien $(1, 3)$. Por lo tanto, una ecuación de la recta tangente es

$$y-3=\frac{9}{2}(x-1)\quad\text{o bien}\quad y=\frac{9}{2}x-\frac{3}{2}.$$

El ejemplo siguiente muestra que la derivada de una función puede utilizar una combinación de reglas.

Ejemplo 5

Diferenciar $y=\dfrac{(x^2+1)(2x^2+1)}{(3x^2+1)}$.

Solución Se comienza con la regla del cociente y luego utilizamos la regla del producto al diferenciar el numerador:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(3x^2+1)\cdot\overset{\text{la regla del producto aquí}}{\frac{d}{dx}[(x^2+1)(2x^2+1)]}-(x^2+1)(2x^2+1)\cdot\frac{d}{dx}(3x^2+1)}{(3x^2+1)^2}$$

$$=\frac{(3x^2+1)[(x^2+1)4x+(2x^2+1)2x]-(x^2+1)(2x^2+1)6x}{(3x^2+1)^2}$$

$$=\frac{12x^5+8x^3}{(3x^2+1)^2}.$$

Hasta ahora la regla de la potencia (3.11) de la Sección 3.3, está limitada al caso en el que el exponente es un entero positivo o cero. Se verá ahora que esta regla es válida incluso si el exponente es un entero negativo. Si n denota un entero positivo, entonces $-n$ es un entero negativo. Puesto que $x^{-n} = 1/x^n$, resulta que podemos obtener la derivada de x^{-n} por la regla del cociente:

$$\frac{d}{dx}x^{-n}=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^n}\right]=\frac{x^n\cdot\frac{d}{dx}1-1\cdot\frac{d}{dx}x^n}{(x^n)^2}$$

$$=\frac{0-nx^{n-1}}{x^{2n}}=-\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}}=-nx^{n-1-2n}$$

$$=-nx^{-n-1}.$$

Se acaba de demostrar que cuando $m = -n$ es un entero negativo,

$$\frac{d}{dx}x^m=mx^{m-1}, \tag{3.18}$$

Ejemplo 6

Diferenciar $y = x^{-2}$.

Solución Como se muestra en (3.18), el procedimiento para diferenciar o derivar una potencia con exponente entero negativo es el mismo de antes: se coloca el exponente como factor y se reduce en 1 el valor del exponente. Se tiene pues, que

$$\frac{dy}{dx}=-2x^{-2-1}=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}.$$

Ejemplo 7

Diferenciar $y = 5x^3 - 1/x^4$.

Solución Primero se escribe la función dada como

$$y=5x^3-x^{-4}.$$

De este modo,

$$\frac{dy}{dx} = 5 \cdot 3x^2 - (-4)x^{-5} = 15x^2 + \frac{4}{x^5}.$$

Observación

Las reglas del producto y del cociente usualmente dan lugar a expresiones que requieren simplificación. Si la respuesta del lector a un problema no se parece a la de la sección de respuestas del libro, tal vez no haya efectuado las simplificaciones suficientes. No debe contentarse simplemente con llevar a cabo la mecánica de las diferentes reglas; siempre es una buena idea que practique sus habilidades algebraicas.

También debe notar el estudiante que la regla del cociente se usa a menudo cuando no se requiere; por ejemplo, aunque la regla del cociente puede utilizarse para diferenciar

$$y = \frac{x^5}{6} \quad y \quad y = \frac{10}{x^3},$$

es más sencillo escribir

$$y = \frac{1}{6}x^5 \quad y \quad y = 10x^{-3}$$

y luego utilizar la regla de la potencia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{6}x^4 \quad y \quad \frac{dy}{dx} = -30x^{-4}.$$

Ejercicios 3.4

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 970.

En los Problemas 1-26 encuentre la derivada de la función dada.

1. $y = 1/x$
2. $y = (2/x^3)^2$
3. $y = 6x^2 + x^{-2}$
4. $y = 5x^4 - 1/2x^5$
5. $y = (x^2 - 7)(x^3 + 4x + 2)$
6. $y = (7x + 1)(x^4 - x^3 - 9x)$
7. $f(x) = \left(4 + \frac{1}{x}\right)\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)$
8. $f(x) = \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$
9. $f(x) = \frac{10}{x^2 + 1}$
10. $f(x) = 5(4x - 3)^{-1}$
11. $G(x) = \frac{3x + 1}{2x - 5}$
12. $F(x) = \frac{2 - 3x}{7 - x}$
13. $y = (6x - 1)^2$
14. $y = (x^4 + 5x)^2$
15. $g(t) = \frac{t^2}{2t^2 + t + 1}$
16. $p(y) = \frac{y^2 - 10y + 2}{y(y^2 - 1)}$
17. $H(z) = (z + 1)(2z + 1)(3z + 1)$
18. $Q(r) = (r^2 + 1)(r^3 - r)(3r^4 + 2r - 1)$
19. $y = \frac{(2x + 1)(x - 5)}{3x + 2}$
20. $y = \frac{x^5}{(x^2 + 1)(x^3 + 4)}$
21. $y = \frac{2 - 1/x^3}{3 + 1/x^2}$
22. $y = \frac{x^{-2}}{x^{-3} + x^{-2} + 1}$
23. $f(u) = \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^3} + \frac{1}{u^4}$

24. $h(v) = \frac{1}{v + v^2 + v^3 + v^4}$
25. $y = \left(\frac{x + 1}{x + 3}\right)(x^2 - 2x - 1)$
26. $y = (x + 1)\left(x + 1 - \frac{1}{x + 2}\right)$

En los Problemas 27-30 encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor de x indicado.

27. $y = 1/x^2$; $x = 1/2$
28. $y = 4x - 1/x$; $x = -1$
29. $y = (2x^2 - 4)(x^3 + 5x + 3)$; $x = 0$
30. $y = \frac{5x}{x^2 + 1}$; $x = 2$

En los Problemas 31-34 determine el(los) punto(s) de la gráfica de la función dada en los que la tangente sea horizontal.

31. $y = (x^2 - 4)(x^2 - 6)$
32. $y = x(x - 1)^2$
33. $y = \frac{x^2}{x^4 + 1}$
34. $y = \frac{1}{x^2 - 6x}$

En los Problemas 35-38 determine el(los) punto(s) de la gráfica de la función dada en los que la tangente tenga la pendiente indicada.

35. $y = 4x^{-1}$; $m_{\tan} = -64$
36. $y = x - 1/x^2$; $m_{\tan} = 55$
37. $y = \frac{x + 3}{x + 1}$; $m_{\tan} = -\frac{1}{8}$
38. $y = (x + 1)(2x + 5)$; $m_{\tan} = -3$

En los problemas 39 y 40 utilice los datos $f(1) = 2$, $f'(1) = -3$, y $g(1) = g'(1) = 6$ para evaluar la derivada dada.

39. $\left.\frac{d}{dx}f(x)g(x)\right|_{x=1}$
40. $\left.\frac{d}{dx}\frac{1 + 2f(x)}{x - g(x)}\right|_{x=1}$

En los problemas 41-44 encuentre los valores de x para los que $f'(x) > 0$.

41. $f(x) = 5/x^2$
42. $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$
43. $f(x) = (2x + 1)(x + 4)$
44. $f(x) = x + 4/x$

45. La ley de la gravitación universal establece que la fuerza F de atracción entre dos cuerpos de masas m_1 y m_2, separados una distancia r, es $F = km_1m_2/r^2$, en donde K es una constante. ¿Cuál es la razón de cambio instántanea de F con respecto a r cuando $r = \frac{1}{2}$ km?

46. La energía potencial U entre dos átomos situados en una molécula diatómica está dada por $U(x) = q_1/x^{12} - q_2/x^6$, en donde q_1 y q_2 son constantes positivas; x es la distancia entre los átomos. La fuerza ejercida entre dichos átomos se define como $F(x) = -U'(x)$. Demuestre que $F(\sqrt[6]{2q_1/q_2}) = 0$.

Problemas diversos

47. Considere tres maneras diferente· de evaluar la derivada de

$$y = \frac{4x^6 - x^2 + 3}{x^4}.$$

48. Sea $y = f(x)g(x)h(x)$ en donde f, g y h son funciones diferenciables. Use la regla del producto para demostrar que

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(x)h'(x) + f(x)h(x)g'(x) + g(x)h(x)f'(x).$$

49. Sea $y = f(x)$ una función diferenciable.
    (a) Encuentre dy/dx para $y = [f(x)]^2$.
    (b) Encuentre dy/dx para $y = [f(x)]^3$.
    (c) Infiera una regla para determinar la derivada de $y = [f(x)]^n$, en donde n es un entero positivo.

50. Use la definición de derivada para demostrar que cuando g es diferenciable y $g(x) \neq 0$, entonces

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right] = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

51. Utilice el resultado del Problema 50, el hecho de que $f(x)/g(x) = f(x) \cdot [1/g(x)]$, y la regla del producto para deducir la regla del cociente (3.17).

3.5 Derivadas de las funciones trigonométricas

3.5.1 Algunos resultados preliminares acerca de límites

Recuérdese de las Secciones 1.6 y 2.4 que las funciones seno y coseno son continuas en $(-\infty, \infty)$. Por lo tanto, los dos resultados siguientes sobre límites se deducen inmediatamen de la Definición 2.1:

$$\lim_{t\to 0} \operatorname{sen} t = 0, \tag{3.19}$$

$$\lim_{t\to 0} \cos t = 1. \tag{3.20}$$

También, en el Ejemplo 7 de la Sección 2.1, se ilustró el hecho de que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1. \tag{3.21}$$

Ahora se demuestra este resultado.

Considérese una circunferencia de radio 1 centrada en el origen. Como se muestra en la Figura 3.29, sea la región sombreada *OPR* un sector con ángulo central t tal que $0 < t < \pi/2$. En la misma figura se aprecia que las áreas de los triángulos *OPR* y *OQR* proporcionan cotas inferior y superior, respectivamente, para el área del sector *OPR*:

$$\text{área del } \Delta OPR < \text{área del sector } OPR < \text{área del } \Delta OQR \tag{3.22}$$

La altura del ΔOPR es $\overline{OP}$ sen $t = 1 \cdot \operatorname{sen} t = \operatorname{sen} t$, así que

$$\text{área del } \Delta OPR = \frac{1}{2}\overline{OR}\cdot\text{(altura)}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \operatorname{sen} t = \frac{1}{2}\operatorname{sen} t. \tag{3.23}$$

Además, $\overline{QR}/\overline{OR} = \tan t$ o $\overline{QR} = \tan t$ de manera que

$$\text{área del } \Delta OQR = \frac{1}{2}\overline{OR}\cdot\overline{QR}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan t = \frac{1}{2}\tan t. \tag{3.24}$$

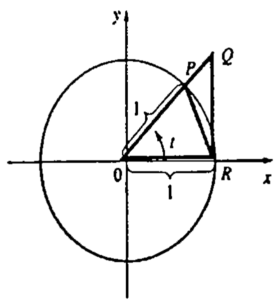


Figura 3.29

Finalmente, el área de un sector circular es $\frac{1}{2}r^2\theta$, en donde r es el radio del círculo y θ es el ángulo central medido en radianes. De esta manera,

$$\text{área del sector } OPR = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot t = \frac{1}{2}t. \tag{3.25}$$

Usando (3.23), (3.24) y (3.25) en (3.22) se obtiene

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen} t < \frac{1}{2}t < \frac{1}{2}\tan t$$

o bien

$$1 < \frac{t}{\operatorname{sen} t} < \frac{1}{\cos t}. \tag{3.26}$$

Por las propiedades de las desigualdades, (3.26) es equivalente a

$$\cos t < \frac{\operatorname{sen} t}{t} < 1.$$

Ahora hacemos que $t \to 0$ en el último resultado. Puesto que $(\operatorname{sen} t)/t$ está interpuesto entre 1 y $\cos t$ (el cual tiende a 1), se deduce del teorema de interposición que $\lim_{t\to 0} (\operatorname{sen} t)/t = 1$. Aunque se ha supuesto que $0 < t < \pi/2$, el mismo resultado se cumple para $-\pi/2 < t < 0$. (Véase el Problema 27.)

Ejemplo 1

Evaluar $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} 4t}{t}$.

Solución Sea $u = 4t$ de manera que $t = u/4$. Vemos que cuando $t \to 0$, necesariamente $u \to 0$, y por lo tanto,

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} 4t}{t} = \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u/4} = 4\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 4\cdot 1 = 4.$$

Usando un argumento semejante al ilustrado en el último ejemplo, es posible demostrar que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} kt}{t} = k. \tag{3.27}$$

También,

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{(\operatorname{sen} t)/t} = \frac{\lim_{t\to 0} 1}{\lim_{t\to 0}(\operatorname{sen} t)/t} = 1$$

implica que

$$\lim_{t\to 0} \frac{t}{\operatorname{sen} t} = 1. \tag{3.28}$$

Ejemplo 2

Evaluar $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 5t}{t^2}$.

Solución Se reescribe la función como

$$\frac{\operatorname{sen} 5t}{t} \cdot \frac{\operatorname{sen} 5t}{t}$$

y se usa (3.27):

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 5t}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5t}{t} \cdot \frac{\operatorname{sen} 5t}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5t}{t} \cdot \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5t}{t}$$
$$= 5 \cdot 5 = 25.$$

Otro resultado de límite que se usará inmediatamente es

$$\lim_{t\to 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0. \tag{3.29}$$

Para obtenerlo, obsérvese que

$$\frac{1-\cos t}{t} = \frac{(1-\cos t)(1+\cos t)}{t(1+\cos t)}$$
$$= \frac{1-\cos^2 t}{t(1+\cos t)} = \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t(1+\cos t)}$$
$$= \frac{\operatorname{sen} t}{t} \cdot \frac{\operatorname{sen} t}{1+\cos t},$$

y así

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \cdot \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{1+\cos t}$$
$$= 1 \cdot 0 = 0.$$

3.5.2 Derivadas *sen x y cos x*

Se obtiene la derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$ recurriendo a la definición $f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \Delta y/\Delta x$. En este caso

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$
$$= \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x$$
$$= \operatorname{sen} x \cos \Delta x + \cos x \operatorname{sen} \Delta x - \operatorname{sen} x \qquad \boxed{\text{Fórmula de adición}}$$
$$= \operatorname{sen} x(\cos \Delta x - 1) + \cos x \operatorname{sen} \Delta x$$

y

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{sen} x \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} + \cos x \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x}.$$

Empleando el Teorema 2.5(*ii*) y los resultados (3.21) y (3.24) puede escribirse

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{sen} x \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} + \cos x \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x}$$
$$= \operatorname{sen} x \cdot 0 + \cos x \cdot 1.$$

En conclusión

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x. \tag{3.30}$$

De manera semejante puede demostrarse que

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x. \tag{3.31}$$

(Véase el Problema 65 de los Ejercicios 3.5).

Ejemplo 3

Obtener la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $x = \pi/2$ y en $x = 4\pi/3$.

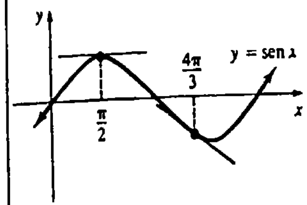


Figura 3.30

Solución Se sabe por (3.30) que

$$f'(x) = \cos x,$$

así que,

$$f'(\pi/2) = \cos \pi/2 = 0,$$
$$f'(4\pi/3) = \cos 4\pi/3 = -1/2.$$

En la Figura 3.30 puede observarse que la recta tangente en $(\pi/2, 1)$ es horizontal.

Las funciones trigonométricas restantes

Las fórmulas (3.30) y (3.31) se pueden emplear juntamente con las reglas de diferenciación para encontrar la derivada de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante.

Para diferenciar o derivar $\tan x = \operatorname{sen} x/\cos x$, puede emplearse la regla del cociente

$$\frac{d}{dx}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\cos x \frac{d}{dx}\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \frac{d}{dx}\cos x}{(\cos x)^2}$$
$$= \frac{\cos x(\cos x) - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Como $1/\cos^2 x = (1/\cos x)^2 = \sec^2 x$, se tiene el resultado siguiente.

$$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x. \tag{3.32}$$

La fórmula para la derivada de la cotangente se obtiene de una manera análoga y se deja como ejercicio. (Véase el Problema 66 de los Ejercicios 3.5.)

$$\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x. \tag{3.33}$$

Ahora bien, $\sec x = 1/\cos x$. Por lo tanto, puede emplearse de nuevo la regla del cociente para encontrar la derivada de la función secante:

$$\frac{d}{dx}\sec x = \frac{d}{dx}\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x \frac{d}{dx}1 - 1 \cdot \frac{d}{dx}\cos x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \qquad (3.34)$$

Al escribir

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \sec x \tan x$$

se puede expresar (3.34) como

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x. \qquad (3.35)$$

El último resultado también se deduce de la regla del cociente:

$$\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x. \qquad (3.36)$$

(Véase el Problema 67 de los Ejercicios 3.5.)

Ejemplo 4

Diferenciar $y = x^2 \operatorname{sen} x$.

Solución La regla del producto junto con (3.30) da lugar a

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \frac{d}{dx}\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \frac{d}{dx}x^2$$
$$= x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x.$$

Ejemplo 5

Diferenciar $y = (\cos x)(x - \cot x)$.

Solución Por la regla del producto, (3.31), y (3.33),

$$\frac{dy}{dx} = (\cos x)\frac{d}{dx}(x - \cot x) + (x - \cot x)\frac{d}{dx}\cos x$$
$$= (\cos x)(1 + \csc^2 x) + (x - \cot x)(-\operatorname{sen} x)$$
$$= 2\cos x - x \operatorname{sen} x + \cos x \csc^2 x.$$

Ejemplo 6

Diferenciar $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2 + \sec x}$.

Solución Por la regla del cociente, (3.30) y (3.35),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2 + \sec x)\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \frac{d}{dx}(2 + \sec x)}{(2 + \sec x)^2}$$
$$= \frac{(2 + \sec x)\cos x - \operatorname{sen} x(\sec x \tan x)}{(2 + \sec x)^2}$$
$$= \frac{1 + 2\cos x - \tan^2 x}{(2 + \sec x)^2}.$$

Ejercicios 3.5

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 971.

[3.5.1]
En los Problemas 1-26 encuentre el valor de cada límite, si es que existe.

1. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3t}{2t}$
2. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(-4t)}{t}$
3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{4 + \cos x}$
4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$
5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x}{\cos 3x}$
6. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{3x}$
7. $\lim_{t\to 0} \dfrac{1}{t \sec t \csc 4t}$
8. $\lim_{t\to 0} 5t \cot 2t$
9. $\lim_{t\to 0} \dfrac{2\operatorname{sen}^2 t}{t \cos^2 t}$
10. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2(t/2)}{\operatorname{sen} t}$
11. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 6t}{t^2}$
12. $\lim_{t\to 0} \dfrac{t^3}{\operatorname{sen}^2 3t}$
13. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x - 1)}{2x - 2}$
14. $\lim_{x\to 2\pi} \dfrac{x - 2\pi}{\operatorname{sen} x}$
15. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{x}$
16. $\lim_{t\to \pi/2} \dfrac{1 + \operatorname{sen} t}{\cos t}$
17. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(3x - \pi/2)}{x}$
18. $\lim_{x\to -2} \dfrac{\operatorname{sen}(5x + 10)}{4x + 8}$
19. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3t}{\operatorname{sen} 7t}$
20. $\lim_{t\to 0} \operatorname{sen} 2t \csc 3t$
21. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}}$
22. $\lim_{t\to 0} \dfrac{1 - \cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$
23. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(x + 2\sqrt{\operatorname{sen} x})^2}{x}$
24. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1 - \cos x)^2}{x}$
25. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{\cos^2 x - 1}$
26. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x + \tan x}{x}$

Problemas diversos

27. Demuestre (3.21) cuando $-\pi/2 < t < 0$.
28. Demuestre que $\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 1$.

Problemas para calculadora

29. (a) Sea t medido en grados. Complete la tabla siguiente usando valores con cuatro decimales.

t	45	30	15	5	1	0.1
$\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$						

(b) Calcule $\pi/180$ con cuatro decimales.

(c) Dado que t es medido en grados, haga una conjetura acerca del valor de $\lim_{t\to 0} (\operatorname{sen} t)/t$.

30. Sea t medido en radianes. Use una calculadora para investigar si $\lim_{t\to 0} (1 - \cos t)/t^2$ existe.

[3.5.2]

En los Problemas 31-54 halle la derivada de la función dada.

31. $y = x^2 - \cos x$
32. $y = 4x^3 + x + \operatorname{sen} x$

33. $y = 1 + 7\,\text{sen}\,x - \tan x$

34. $y = 3\cos x - 5\cot x$

35. $y = x\,\text{sen}\,x$

36. $y = (x^3 - 2)\tan x$

37. $y = \text{sen}\,x\cos x$

38. $y = \cos x\cot x$

39. $y = (x^2 + \text{sen}\,x)\sec x$

40. $y = \csc x\tan x$

41. $f(x) = (\csc x)^{-1}$

42. $f(x) = \dfrac{2}{\cos x\cot x}$

43. $f(x) = \dfrac{\cot x}{x + 1}$

44. $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x}{1 + \cos x}$

45. $y = \dfrac{x^2}{1 + 2\tan x}$

46. $y = \dfrac{2 + \text{sen}\,x}{x}$

47. $F(\theta) = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{1 + \cos\theta}$

48. $g(z) = \dfrac{1 + \csc z}{1 + \sec z}$

49. $G(u) = \text{sen}^2 u$

50. $H(v) = (1 + \cos v)(v - \text{sen}\,v)$

51. $y = \cos^2 x + \text{sen}^2 x$

52. $y = x^3\cos x - x^3\,\text{sen}\,x$

53. $y = x^2\,\text{sen}\,x\tan x$

54. $y = \dfrac{1 + \text{sen}\,x}{x\cos x}$

En los Problemas 55 y 56 considere la gráfica de la función dada en el intervalo $[0, 2\pi]$. Encuentre el(los) punto(s) en los que la tangente sea horizontal.

55. $f(x) = x + \cos x$

56. $f(x) = \text{sen}\,x + \cos x$

En los Problemas 57-60 encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor de x indicado.

57. $f(x) = \cos x;\ x = \pi/3$

58. $f(x) = \tan x;\ x = \pi$

59. $f(x) = \sec x;\ x = \pi/6$

60. $f(x) = \csc x;\ x = \pi/2$

En los Problemas 61-64 encuentre una ecuación de la recta normal a la gráfica de la función dada en el valor de x indicado.

61. $f(x) = \text{sen}\,x;\ x = 4\pi/3$

62. $f(x) = \tan^2 x;\ x = \pi/4$

63. $f(x) = x\cos x;\ x = \pi$

64. $f(x) = \dfrac{x}{1 + \text{sen}\,x};\ x = \pi/2$

Problemas diversos

65. Demuestre (3.31).

66. Demuestre (3.33).

67. Demuestre (3.36).

68. Si t se mide en grados, entonces $\lim_{t\to 0}[(\text{sen}\,t)/t] = \pi/180$ y $\lim_{t\to 0}(1 - \cos t)/t = 0$. Demuestre que si x se midió en grados,

$$\frac{d}{dx}\,\text{sen}\,x = \frac{\pi}{180}\cos x$$

y

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\frac{\pi}{180}\,\text{sen}\,x.$$

En los Problemas 69 y 70 encuentre la derivada de la función dada empleando primero una identidad trigonométrica.

69. $f(x) = \text{sen}\,2x$

70. $f(x) = \cos^2\dfrac{x}{2}$

3.6 Reglas de diferenciación III: regla de la cadena

Supóngase que se desea diferenciar (o derivar)

$$y = (x^5 + 1)^2. \tag{3.37}$$

Al escribir (3.37) como

$$y = (x^5 + 1)\cdot(x^5 + 1),$$

puede encontrarse la derivada utilizando la regla del producto:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (x^5 + 1)\frac{d}{dx}(x^5 + 1) + (x^5 + 1)\frac{d}{dx}(x^5 + 1)\\ &= (x^5 + 1)\cdot 5x^4 + (x^5 + 1)\cdot 5x^4 = 2(x^5 + 1)\cdot 5x^4.\end{aligned} \tag{3.38}$$

De manera semejante, para diferenciar $y = (x^5 + 1)^3$, puede escribirse $y = (x^5 + 1)^2\cdot(x^5 + 1)$ y emplearse tanto la regla del producto como el resultado dado en (3.38). Se demuestra inmediatamente que

$$\frac{d}{dx}(x^5 + 1)^3 = 3(x^5 + 1)^2\cdot 5x^4. \tag{3.39}$$

Regla de la potencia para funciones

Un examen a (3.38) y (3.39) revela una pauta para diferenciar una potencia de una función; por ejemplo, en (3.39) se observa que

Se baja el exponente

El exponente se disminuye en 1

$$3(x^5 + 1)^2\cdot 5x^4.$$

Derivada de la función que está entre paréntesis

Para enfatizar, si se representa una función diferenciable por [ ], se manifiesta que

$$\frac{d}{dx}[\ \ ]^n = n[\ \ ]^{n-1}\frac{d}{dx}[\ \ ]. \tag{3.40}$$

Posteriormente en esta sección se demostrará que (3.40) se cumple para *todo* entero n. El resultado general se expresa en el teorema siguiente.

TEOREMA 3.8

Regla de la potencia para funciones (exponentes enteros)

Si n es un entero y g es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1}g'(x). \tag{3.41}$$

□

Ejemplo 1

Diferenciar $y = (4x)^{100}$.

Solución Primero se ilustra un *error común*:

$$\frac{dy}{dx} = 100(4x)^{99}.$$

El resultado es incorrecto porque no se multiplicó la expresión por la derivada de la función que está entre paréntesis. El procedimiento correcto es:

$$\frac{dy}{dx} = 100(4x)^{99} \cdot \frac{d}{dx}4x = 100(4x)^{99} \cdot 4 = 400(4x)^{99}.$$

Ejemplo 2

Diferenciar $y = (2x^3 + 4x + 1)^4$.

Solución Se identifica $g(x) = 2x^3 + 4x + 1$ y $n = 4$. De (3.41) se deduce que

$$\frac{dy}{dx} = 4(2x^3 + 4x + 1)^3 \frac{d}{dx}(2x^3 + 4x + 1)$$
$$= 4(2x^3 + 4x + 1)^3(6x^2 + 4).$$

Ejemplo 3

Diferenciar $y = \frac{(x^2 - 1)^3}{(5x + 1)^8}$.

Solución Primero se aplica la regla del cociente,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(5x + 1)^8 \frac{d}{dx}(x^2 - 1)^3 - (x^2 - 1)^3 \frac{d}{dx}(5x + 1)^8}{(5x + 1)^{16}}$$

y luego la regla de la potencia para funciones,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(5x + 1)^8 \cdot 3(x^2 - 1)^2 \cdot 2x - (x^2 - 1)^3 \cdot 8(5x + 1)^7 \cdot 5}{(5x + 1)^{16}}$$
$$= \frac{6x(5x + 1)^8(x^2 - 1)^2 - 40(5x + 1)^7(x^2 - 1)^3}{(5x + 1)^{16}}$$
$$= \frac{(x^2 - 1)^2(-10x^2 + 6x + 40)}{(5x + 1)^9}.$$

Ejemplo 4

Para diferenciar $y = 1/(x^2 + 1)$, podría utilizarse, por supuesto, la regla del cociente. Sin embargo, también es posible usar la regla de la potencia para funciones:

$$y = (x^2 + 1)^{-1}$$
$$\frac{dy}{dx} = (-1)(x^2 + 1)^{-2} \frac{d}{dx}(x^2 + 1)$$
$$= (-1)(x^2 + 1)^{-2}\, 2x$$
$$= \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Ejemplo 5

Diferenciar $y = \frac{1}{(7x^5 - x^4 + 2)^{10}}$.

Solución Se escribe la función dada como

$$y = (7x^5 - x^4 + 2)^{-10}.$$

Se identifica $n = -10$ y se usa la regla de la potencia (3.41):

$$\frac{dy}{dx} = -10(7x^5 - x^4 + 2)^{-11} \frac{d}{dx}(7x^5 - x^4 + 2).$$
$$= \frac{-10(35x^4 - 4x^3)}{(7x^5 - x^4 + 2)^{11}}.$$

Ejemplo 6

Diferenciar (o derivar) $y = \tan^2 x$.

Solución Para hacer énfasis, primero se escribe $y = (\tan x)^2$ y luego se utiliza (3.41):

$$\frac{dy}{dx} = 2(\tan x) \frac{d}{dx} \tan x.$$

Al emplear (3.32) de la Sección 3.5, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = 2 \tan x \sec^2 x.$$

Regla de la cadena

Una potencia de una función se puede escribir como una función compuesta. Si $f(x) = x^n$ y $u = g(x)$, entonces $f(u) = f(g(x)) = [g(x)]^n$. La regla de la potencia (3.41) es un caso especial de la **regla de la cadena** para diferenciar funciones compuestas.

TEOREMA 3.9

Regla de la cadena

Si $y = f(u)$ es una función diferenciable de u y $u = g(x)$ es una función diferenciable de x, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x). \quad (3.42)$$

□

Demostración para $\Delta u \neq 0$ Para $\Delta x \neq 0$,

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x) \quad (3.43)$$

o bien

$$g(x + \Delta x) = g(x) + \Delta u = u + \Delta u.$$

Además,

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u) = f(g(x + \Delta x)) - f(g(x)).$$

Cuando x y $x + \Delta x$ están en algún intervalo abierto para el cual $\Delta u \neq 0$, puede escribirse

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Puesto que g se supone diferenciable, es continua. Consecuentemente, cuando $\Delta x \to 0$, $g(x + \Delta x) \to g(x)$ y de esta manera vemos por (3.43) que $\Delta u \to 0$. Así que,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \left(\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}\right).$$

De la definición de derivada, se deduce que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \qquad \square$$

La suposición de que $\Delta u \neq 0$ en algún intervalo no se cumple para toda función diferenciable g. Si bien el resultado dado en (3.42) permanece válido cuando $\Delta u = 0$, la demostración anterior no.

Demostración de la regla de la potencia para funciones

Como se señaló previamente, una potencia de una función puede escribirse como $y = u^n$, en donde n es un entero y $u = g(x)$. Puesto que $dy/du = nu^{n-1}$ y $du/dx = g'(x)$, por la regla de la cadena puede verse que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx} = n[g(x)]^{n-1}g'(x).$$

Esta es la regla de la potencia (3.41).

Funciones trigonométricas

Las derivadas de las funciones trigonométricas compuestas con una función diferenciable g, se obtienen como otra consecuencia directa de la regla de la cadena. Por ejemplo, si $y = \operatorname{sen} u$, en donde $u = g(x)$, entonces $dy/du = \cos u$. Por lo tanto, (3.42) implica que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos u \frac{du}{dx},$$

o, en forma equivalente,

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}[\quad] = \cos[\quad]\frac{d}{dx}[\quad].$$

Resumiendo los seis resultados:

I $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen} u = \cos u \dfrac{du}{dx}$ II $\dfrac{d}{dx}\cos u = -\operatorname{sen} u \dfrac{du}{dx}$

III $\dfrac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u \dfrac{du}{dx}$ IV $\dfrac{d}{dx}\cot u = -\csc^2 u \dfrac{du}{dx}$

V $\dfrac{d}{dx}\sec u = \sec u \tan u \dfrac{du}{dx}$ VI $\dfrac{d}{dx}\csc u = -\csc u \cot u \dfrac{du}{dx}$

Ejemplo 7

Diferenciar $y = \cos 4x$.

Solución Por II,

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen} 4x \frac{d}{dx}(4x) = -4 \operatorname{sen} 4x.$$

Ejemplo 8

Derivar (o diferenciar) $y = \tan(6x^2 + 1)$.

Solución Por III,

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2(6x^2 + 1) \cdot \frac{d}{dx}(6x^2 + 1) = 12x \sec^2(6x^2 + 1).$$

Ejemplo 9

Diferenciar $y = (9x^3 + 1)^2 \operatorname{sen} 5x$.

Solución Primero se utiliza la regla del producto,

$$\frac{dy}{dx} = (9x^3 + 1)^2 \frac{d}{dx}\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 5x \frac{d}{dx}(9x^3 + 1)^2$$

y en seguida la regla de la potencia (3.41) y I,

$$\frac{dy}{dx} = (9x^3 + 1)^2 \cdot 5\cos 5x + \operatorname{sen} 5x \cdot 2(9x^3 + 1) \cdot 27x^2$$
$$= (9x^3 + 1)(45x^3 \cos 5x + 54x^2 \operatorname{sen} 5x + 5\cos 5x).$$

Ejemplo 10

Diferenciar $y = \cos^4(7x^3 + 6x - 1)$.

Solución Empleando la regla de la potencia (3.41) y II:

$$\frac{dy}{dx} = 4\cos^3(7x^3 + 6x - 1) \cdot \frac{d}{dx}\cos(7x^3 + 6x - 1)$$
$$= 4\cos^3(7x^3 + 6x - 1)(-\operatorname{sen}(7x^3 + 6x - 1) \cdot \frac{d}{dx}(7x^3 + 6x - 1))$$
$$= -4(21x^2 + 6)\cos^3(7x^3 + 6x - 1)\operatorname{sen}(7x^3 + 6x - 1).$$

Ejercicios 3.6

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 971.

En los Problemas 1-36 encuentre la derivada de la función dada.

1. $y = (-5x)^{30}$
2. $y = (3/x)^{14}$
3. $y = (2x^2 + x)^{200}$
4. $y = \left(x - \frac{1}{x^2}\right)^5$
5. $y = \frac{1}{(x^3 - 2x^2 + 7)^4}$
6. $y = \frac{1}{x^4 + x^2 + 1}$
7. $y = (3x - 1)^4(-2x + 9)^5$
8. $y = x^4(x^2 + 1)^6$
9. $y = \operatorname{sen}^3 x$
10. $y = \sec^2 x$
11. $f(x) = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^2$
12. $f(x) = \frac{3x - 4}{(5x + 2)^3}$
13. $f(x) = [x + (x^2 - 4)^3]^{10}$
14. $f(x) = \left[\frac{1}{(x^3 - x + 1)^2}\right]^4$
15. $g(t) = (t^{-1} + t^{-2} + t^{-3})^{-4}$
16. $F(\theta) = (2\theta + 1)^3 \tan^2\theta$
17. $H(u) = (2 + u \operatorname{sen} u)^{-3}$
18. $q(t) = \frac{(1 + \cos t)^2}{(1 + \operatorname{sen} t)^3}$
19. $P(v) = \frac{v(2v - 5)^4}{(v + 1)^8}$
20. $R(s) = (s + 1)^2(s + 2)^3(s + 3)^4$
21. $y = \operatorname{sen}(\pi x + 1)$
22. $y = -2\cos(-3x + 7)$
23. $y = \operatorname{sen}^2 4x$
24. $y = \operatorname{sen} 4x^2$
25. $y = \sqrt{x}\cos\sqrt{x}$
26. $y = \operatorname{sen} 2x \cos 3x$
27. $y = \tan\frac{1}{x}$
28. $y = \cot^3 8x$
29. $F(\theta) = \frac{\operatorname{sen} 5\theta}{\cos 6\theta}$
30. $h(t) = \frac{t + \operatorname{sen} 4t}{10 + \cos 3t}$
31. $f(x) = (\sec 4x + \tan 2x)^5$
32. $f(x) = \csc^2 x - \csc x^2$
33. $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$
34. $f(x) = \tan\left(\cos\frac{x}{2}\right)$
35. $f(x) = \operatorname{sen}^3(4x^2 - 1)$
36. $f(x) = [\cos(x^3 + x^2)]^{-4}$

En los Problemas 37-40 obtenga la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor de x indicado.

37. $y = (x^2 + 2)^3;\ x = -1$
38. $y = \frac{1}{(3x + 1)^2};\ x = 0$
39. $y = \operatorname{sen} 3x + 4x\cos 5x;\ x = \pi$
40. $y = 50x - \tan^3 2x;\ x = \pi/6$

En los Problemas 41-44 encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor de x indicado.

41. $y = \left(\frac{x}{x + 1}\right)^2;\ x = -\frac{1}{2}$
42. $y = x^2(x - 1)^3;\ x = 2$
43. $y = \tan 3x;\ x = \pi/4$
44. $y = (-1 + \cos 4x)^3;\ x = \pi/8$

45. Encuentre el(los) punto(s) de la gráfica de $f(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$ en donde la recta tangente sea horizontal. ¿Tiene tangentes verticales la gráfica de f?

46. La función $H = (k/mg)\operatorname{sen}^2\theta$, con k, m y g constantes, representa la altura alcanzada por un saltamontes cuyo ángulo de salto es θ. Determine los valores de θ para los cuales $dH/d\theta = 0$.

47. La función $R = (v_0^2/g)\operatorname{sen} 2\theta$ proporciona el alcance de un proyectil lanzado formando un ángulo θ con la horizontal, y con una velocidad v_0. Si v_0 y g son constantes, encuentre aquellos valores de θ para los que $dR/d\theta = 0$.

48. Determine los valores de t en los que la razón de cambio instantánea de $g(t) = \operatorname{sen} t + \frac{1}{2}\cos 2t$ sea cero.

En los Problemas 49 y 50 sean $y = f(u)$ y $u = g(x)$ funciones diferenciables.

(a) Calcular dy/dx sin formar $f(g(x))$.

(b) Verificar la respuesta de la parte (a) encontrando $f(g(x))$ y $\frac{d}{dx}f(g(x))$.

49. $y = u^3 + 2u,\ u = x^9 + 4x^2$
50. $y = u^4 + 5u^3 - 7u^2 + 8u - 1,\ u = x^3$

51. Sea F una función diferenciable. ¿A qué es igual
$$\frac{d}{dx}F(3x)?$$

52. Sea G una función diferenciable. ¿A qué es igual
$$\frac{d}{dx}[G(-x^2)]^2?$$

53. Suponga que $\frac{d}{du}f(u) = \frac{1}{u}$. ¿A qué es igual $\frac{d}{dx}f(-10x + 7)$?

54. Suponga que $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$. ¿A qué equivale $\frac{d}{dx}f(x^3)$?

Problemas diversos

55. Dado que f sea una función impar diferenciable, use la regla de la cadena para demostrar que f' es una función par.

56. Dado que f sea una función par diferenciable, use la regla de la cadena para demostrar que f' es una función impar.

3.7 Derivadas de orden superior

La segunda derivada

La derivada $f'(x)$ es una función que proviene de una función $y = f(x)$. Diferenciando la primera derivada $f'(x)$ se obtiene otra función, llamada **segunda derivada**, la cual se denota por $f''(x)$. En términos del símbolo de derivación d/dx, se define la segunda derivada con respecto a x como la función obtenida diferenciando $y = f(x)$ dos veces consecutivas:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

La segunda derivada se denota comúnmente por

$$f''(x), \quad y'', \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \text{o bien} \quad D_x^2 y.$$

Normalmente, se usará uno de los tres primeros símbolos.

Ejemplo 1

Obtener la segunda derivada de $y = x^3 - 2x^2$.

Solución La primera derivada es

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x.$$

La segunda derivada resulta de diferenciar la primera:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(3x^2 - 4x) = 6x - 4.$$

Ejemplo 2

La primera derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$ es

$$f'(x) = \cos x.$$

Luego, la segunda derivada es

$$f''(x) = -\operatorname{sen} x.$$

Ejemplo 3

Obtener la segunda derivada de $y = (x^3 + 1)^4$.

Solución Se encuentra la primera derivada mediante la regla de la potencia para funciones:

$$\frac{dy}{dx} = 4(x^3 + 1)^3 \frac{d}{dx} x^3 = 12x^2(x^3 + 1)^3.$$

Para encontrar la segunda derivada, se usará ahora las reglas del producto y de la potencia:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= 12x^2 \frac{d}{dx}(x^3 + 1)^3 + (x^3 + 1)^3 \frac{d}{dx} 12x^2 \\ &= 108x^4 (x^3 + 1)^2 + 24x(x^3 + 1)^3 \\ &= (x^3 + 1)^2(132x^4 + 24x). \end{aligned}$$

Suponiendo que todas las derivadas existen, puede diferenciarse una función $y = f(x)$ tantas veces como se quiera. La tercera derivada es la derivada de la segunda derivada. La cuarta derivada es la derivada de la tercera derivada, y así sucesivamente. Denotamos la tercera y la cuarta derivadas por d^3y/dx^3 y por d^4y/dx^4, respectivamente, y se las define mediante

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right), \quad \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right).$$

En general, si n es un entero positivo, entonces la enésima derivada se define por

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Otras notaciones para las primeras n derivadas son

$$\begin{array}{lllll} f'(x), & f''(x), & f'''(x), & f^{(4)}(x), \ldots, f^{(n)}(x), \\ y', & y'', & y''', & y^{(4)}, \ldots, y^{(n)}, \text{ y} \\ D_xy, & D_x^2y, & D_x^3y, & D_x^4y, \ldots, D_x^ny. \end{array}$$

Ejemplo 4

Obtener las primeras cinco derivadas de

$$f(x) = 2x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 5x - 10.$$

Solución Se tiene que

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8x^3 - 18x^2 + 14x + 5 \\ f''(x) &= 24x^2 - 36x + 14 \\ f'''(x) &= 48x - 36 \\ f^{(4)}(x) &= 48 \\ f^{(5)}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Después de reflexionar un momento, el lector se convencerá de que la $(n + 1)$-ésima derivada de una función polinomial de grado n es cero.

Ejemplo 5

Obtener la tercera derivada de $y = \frac{1}{x^3}$.

Solución Escribiendo $y = x^{-3}$, se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = -3x^{-4}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (-3)(-4)x^{-5} = 12x^{-5},$$

y

$$\frac{d^3y}{dx^3} = (12)(-5)x^{-6} = -\frac{60}{x^6}.$$

Ejercicios 3.7

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 971.

En los Problemas 1-20 encuentre la segunda derivada de la función dada.

1. $y = -x^2 + 3x - 7$
2. $y = 15x^2 - \pi^2$
3. $y = (-4x + 9)^2$
4. $y = 2x^5 + 4x^3 - 6x^2$
5. $y = 10x^{-2}$
6. $y = \left(\frac{2}{x^2}\right)^3$
7. $y = x^3 + 8x^2 - \frac{2}{x^4}$
8. $y = \frac{x^6 - 7x^3 + 1}{x^2}$
9. $f(x) = x^2(3x - 4)^3$
10. $f(x) = (x^2 + 5x - 1)^4$
11. $g(t) = \frac{2t - 3}{t + 2}$
12. $h(z) = \frac{z^2}{z + 1}$

13. $f(x) = \cos 10x$ 14. $f(x) = \tan \frac{x}{2}$

15. $f(x) = x \operatorname{sen} x$ 16. $f(x) = \operatorname{sen}^2 5x$

17. $r(\theta) = \dfrac{1}{3 + 2\cos\theta}$ 18. $H(\theta) = \dfrac{\cos\theta}{\theta}$

19. $f(x) = \sec x$ 20. $f(x) = \cos x^2$

En los Problemas 21-24 encuentre la derivada indicada.

21. $y = 4x^6 + x^5 - x^3;\ \dfrac{d^4y}{dx^4}$

22. $y = \dfrac{2}{x};\ \dfrac{d^5y}{dx^5}$

23. $f(x) = \operatorname{sen} \pi x;\ f'''(x)$

24. $f(x) = \dfrac{1}{\sec(2x + 1)};\ f^{(5)}(x)$

Dado que n sea un entero positivo en los Problemas 25 y 26, encuentre una fórmula para la derivada indicada.

25. $\dfrac{d^n}{dx^n} x^n$ 26. $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(\dfrac{1}{1 - 2x}\right)$

En los Problemas 27 y 28 encuentre el(los) punto(s) de la gráfica de f en los cuales $f''(x) = 0$.

27. $f(x) = x^3 + 12x^2 + 20x$

28. $f(x) = x^4 - 2x^3$

En los Problemas 29 y 30 determine intervalos para los que $f'' > 0$ e intervalos para los que $f''(x) < 0$.

29. $f(x) = (x - 1)^3$ 30. $f(x) = x^3 + x^2$

31. Obtenga una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ en el punto en el que el valor de la segunda derivada sea cero.

32. Obtenga una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^4$ en el punto en el que el valor de la tercera derivada sea 12.

33. Si $f(x) = \cos(x/3)$, ¿cuál es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f'' en $x = 2\pi$?

34. Determine el(los) punto(s) de la gráfica de $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 1$ en los cuales (a) $f''(x) = f(x)$, y (b) $f''(x) = f'(x)$.

35. Si $f(3) = -4$, $f'(3) = 2$ y $f''(3) = 5$, ¿a qué es igual

$$\frac{d^2}{dx^2} f^2(x)\Big|_{x=3}?$$

36. Si $f'(0) = -1$ y $g'(0) = 6$, ¿a qué es igual

$$\frac{d^2}{dx^2}[xf(x) + xg(x)]\Big|_{x=0}?$$

Problemas diversos

37. Demuestre que para constantes cualesquiera C_1, C_2 y k, $y = C_1\cos kx + C_2\operatorname{sen} kx$ satisface la ecuación $y'' + k^2y = 0$.

38. Demuestre que para constantes cualesquiera $C_1 \neq 0$ y C_2, $y = (-1/C_1)(1 - C_1^2x^2)^{1/2} + C_2$ satisface la ecuación $xy'' = y' + (y')^3$.

39. Pruebe que $y = \cos x + \operatorname{sen} x + x\cos x + x \operatorname{sen} x$ satisface la ecuación $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

40. Sea $f(x) = x^3 + 2x$.
   (a) Obtenga $f'(x)$ y $f''(x)$.
   (b) En general,

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x},$$

siempre que este límite exista. Use $f'(x)$ obtenida en la parte (a) y la definición precedente para encontrar $f''(x)$.

Supóngase que $y = f(x)$ es una función diferenciable dos veces. La curvatura de la gráfica de f en el punto $x, y)$ se define como

$$\kappa = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}.$$

Un valor pequeño de κ en un punto indica que la gráfica es aproximadamente recta en la cercanía del punto.

41. Demuestre que la curvatura de la gráfica de una función lineal es cero en todo punto.

42. Demuestre que $\kappa = 1$ en todo punto de la semicircunferencia definida por $y = \sqrt{1 - x^2}$.

43. Calcule la curvatura de la gráfica de $f(x) = x^2$ en $x = 0$. ¿Cuál es el valor límite de κ cuando $x \to \infty$? Interprete geométricamente.

3.8 Diferenciación (o derivación) implícita

Funciones explícitas e implícitas

Una función en la que la variable dependiente se expresa únicamente en términos de la variable independiente x, a saber, $y = f(x)$, se dice que es una función explícita; por ejemplo, $y = \frac{1}{2}x^3 - 1$ es una función explícita, mientras que una ecuación equivalente $2y - x^3 + 2 = 0$ se dice que define a la función implícitamente.

Ahora bien, como ya sabemos, la ecuación

$$x^2 + y^2 = 4 \tag{3.44}$$

describe una circunferencia de radio 2 con centro en el origen. La ecuación (3.44) no es una función, puesto que para toda selección de x en el intervalo $-2 < x < 2$ corresponden dos valores de y. Sin embargo, como se muestra en la Figura 3.31, considerando la semicircunferencia superior o la inferior, se obtiene una función. Se dice que (3.44) define *al menos* dos funciones implícitas de x en el intervalo $-2 \leq x \leq 2$. En este caso, puede verse que la semicircunferencia superior está descrita por la función

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \qquad -2 \leq x \leq 2,$$

mientras que la semicircunferencia inferior está dada por

$$g(x) = -\sqrt{4 - x^2}, \qquad -2 \leq x \leq 2.$$

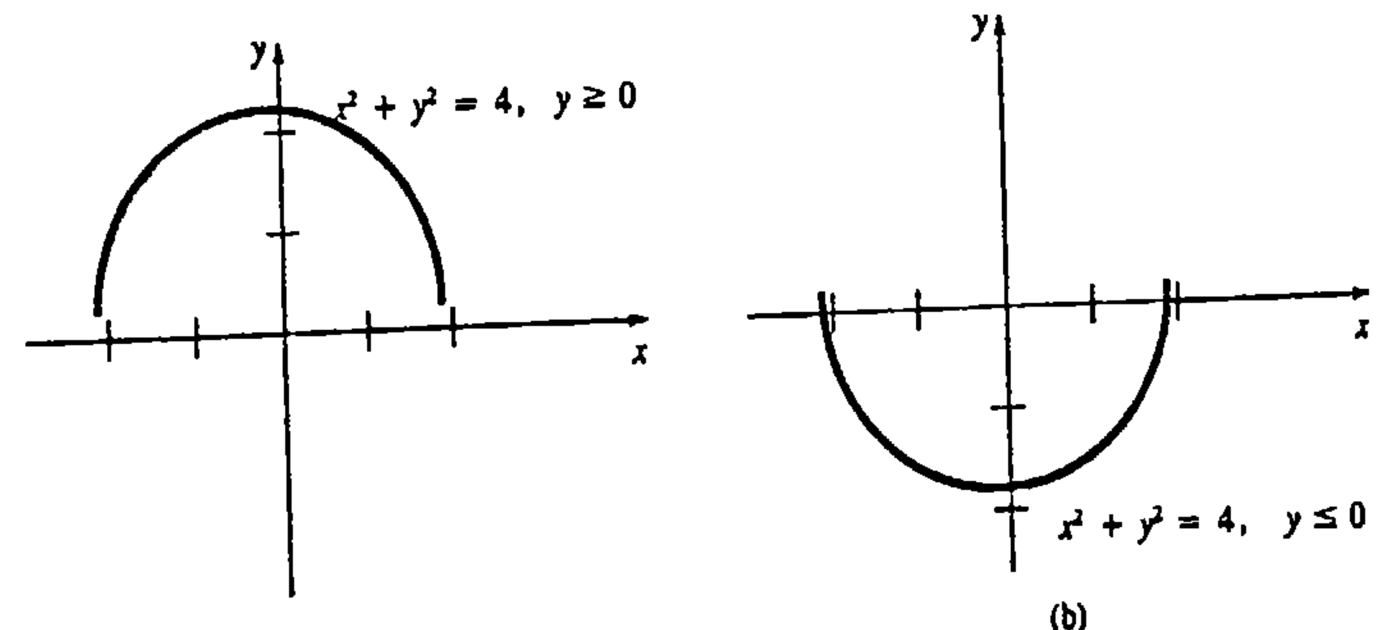


Figura 3.31

Obsérvese que tanto

$$x^2 + [f(x)]^2 = 4 \quad \text{y} \quad x^2 + [g(x)]^2 = 4$$

son identidades en $-2 \leq x \leq 2$.

Una ecuación más complicada, tal como

$$x^4 + x^2y^3 - y^5 = 2x + 1,$$

podría determinar varias funciones implícitas en un intervalo del eje x restringido adecuadamente e incluso podría ser imposible despejar y en términos de x. Sin embargo, en algunos casos puede determinarse la derivada dy/dx mediante un procedimiento conocido como **diferenciación implícita**. Este procedimiento consiste en diferenciar ambos miembros de una ecuación con respecto a x, empleando las reglas de diferenciación y luego despejar dy/dx. Puesto que se considera a y, determinada por la ecuación dada, como una función diferenciable, la regla de la potencia para funciones proporciona el resultado útil

$$\frac{d}{dx}y^n = ny^{n-1}\frac{dy}{dx}, \tag{3.45}$$

en donde n es un entero.

Ejemplo 1

Encuentre dy/dx si $x^2 + y^2 = 4$.

Solución Al diferenciar ambos miembros de la ecuación y utilizar luego (3.45), se tiene:

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}4$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Despejando la derivada, resulta que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \tag{3.46}$$

Como se muestra en (3.46) del ejemplo precedente, la diferenciación (o derivación) implícita usualmente da lugar a una derivada que depende de ambas variables x y y.

Ejemplo 2

Hallar la pendiente de la tangente a la gráfica de $x^2 + y^2 = 4$ en $x = 1$.

Solución Puesto que $x = 1$ implica que $y^2 = 3$ o bien $y = \pm\sqrt{3}$, se observa en la Figura 3.32 que hay rectas tangentes en $(1, \sqrt{3})$ y $(1, -\sqrt{3})$. Usando (3.46) del Ejemplo 1, las pendientes de estas rectas tangentes están dadas por

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,\sqrt{3})} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

y

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,-\sqrt{3})} = -\frac{1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

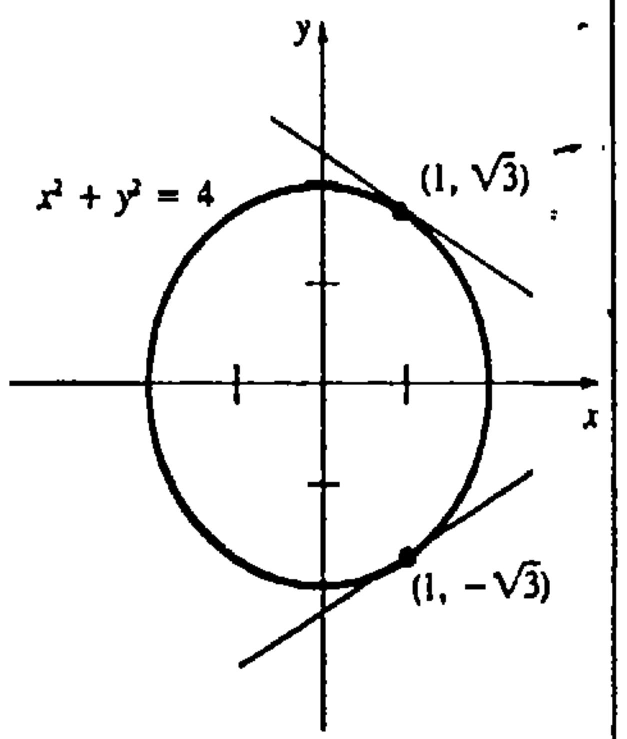


Figura 3.32

Ejemplo 3

Obtener dy/dx si $x^4 + x^2y^3 - y^5 = 2x + 1$.

Solución En este caso se usa (3.45) y la regla del producto:

$$\frac{d}{dx}x^4 + \underbrace{\frac{d}{dx}x^2y^3}_{\text{La regla del producto aquí}} - \frac{d}{dx}y^5 = \frac{d}{dx}2x + \frac{d}{dx}1$$

$$4x^3 + x^2 \cdot 3y^2\frac{dy}{dx} + 2xy^3 - 5y^4\frac{dy}{dx} = 2$$

$$(3x^2y^2 - 5y^4)\frac{dy}{dx} = 2 - 4x^3 - 2xy^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - 4x^3 - 2xy^3}{3x^2y^2 - 5y^4}.$$

Ejemplo 4

Obtener d^2y/dx^2 si $x^2 + y^2 = 4$.

Solución Por el Ejemplo 1, se sabe que la primera derivada es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

De aquí que, por la regla del cociente

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{y \cdot 1 - x \cdot \frac{dy}{dx}}{y^2}$$

$$= -\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} \qquad \boxed{\text{Sustituyendo } dy/dx}$$

$$= -\frac{y^2 + x^2}{y^3}.$$

En vista de que $x^2 + y^2 = 4$, puede escribirse la segunda derivada como

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4}{y^3}.$$

Ejemplo 5

Obtener dy/dx si $\operatorname{sen} y = y\cos 2x$.

Solución

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} y = \frac{d}{dx}y\cos 2x$$

$$\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = y(-\operatorname{sen} 2x \cdot 2) + \cos 2x \cdot \frac{dy}{dx}$$
$$(\cos y - \cos 2x)\frac{dy}{dx} = -2y \operatorname{sen} 2x$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y \operatorname{sen} 2x}{\cos y - \cos 2x}$$

Observación

No es fácil determinar cuándo una ecuación define una función implícitamente. Así que, en ausencia de criterios, se sobreentiende que encontrar dy/dx mediante diferenciación implícita podría, en algunos casos, no ser más que una manipulación formal de símbolos. Por ejemplo, el lector puede verificar que $x^2 + y^2 = c$ implica que $dy/dx = -x/y$ para cualquier selección de la constante c. Pero para $c < 0$ la ecuación no proporciona función real alguna, así que dy/dx carece de sentido para estos valores. (Véanse los Problemas 35 y 36 de los Ejercicios 3.8.)

Ejercicios 3.8

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 971.

En los Problemas 1-20 suponga que la ecuación dada define por lo menos una función diferenciable. Use diferenciación implícita para encontrar dy/dx.

1. $y^2 - 2y = x$
2. $4x^2 + y^2 = 8$
3. $xy^2 - x^2 + 4 = 0$
4. $(y - 1)^2 = 4(x + 2)$
5. $x + xy - y^2 - 20 = 0$
6. $y^3 - 2y + 3x^3 = 4x + 1$
7. $x^3y^2 = 2x^2 + y^2$
8. $x^5 - 6xy^3 + y^4 = 1$
9. $(x^2 + y^2)^6 = x^3 - y^3$
10. $y = (x - y)^2$
11. $y^{-3}x^6 + y^6x^{-3} = 2x + 1$
12. $y^4 - y^2 = 10x - 3$
13. $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 25$
14. $\dfrac{x + y}{x - y} = x$
15. $y^2 = \dfrac{x - 1}{x + 2}$
16. $\dfrac{x}{y^2} + \dfrac{y^2}{x} = 5$
17. $xy = \operatorname{sen}(x + y)$
18. $x + y = \cos xy$
19. $x = \sec y$
20. $x \operatorname{sen} y - y \cos x = 1$

En los Problemas 21 y 22 encuentre la derivada indicada.

21. $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta;\ dr/d\theta$
22. $\pi r^2 h = 100;\ dh/dr$

En los Problemas 23 y 24 obtenga dy/dx en el punto indicado.

23. $xy^2 + 4y^3 + 3x = 0;\ (1, -1)$
24. $y = \operatorname{sen} xy;\ (\pi/2, 1)$

En los Problemas 25 y 26 encuentre dy/dx en el valor indicado.

25. $2y^2 + 2xy - 1 = 0;\ x = 1/2$
26. $y^3 + 2x = 7y;\ y = 1$

En los Problemas 27-30 encuentre una ecuación de la recta tangente en el punto o valor indicado.

27. $x^4 + y^3 = 24;\ (-2, 2)$
28. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1;\ x = 3$
29. $\tan y = x;\ y = \pi/4$
30. $3y + \cos y = x^2;\ (1, 0)$

En los Problemas 31 y 32 determine el(los) punto(s) de la gráfica de la ecuación dada en donde la tangente sea horizontal.

31. $x^2 - xy + y^2 = 3$
32. $y^2 = x^2 - 4x + 7$
33. Obtenga el(los) punto(s) de la gráfica de $x^2 + y^2 = 25$ en los cuales la pendiente de la tangente sea $\frac{1}{2}$.
34. Determine el punto de intersección de las tangentes a la gráfica de $x^2 + y^2 = 25$ en $(-3, 4)$ y $(-3, -4)$.

En los Problemas 35 y 36 encuentre dy/dx pero demuestre que la ecuación dada no define función real alguna.

35. $x^2 - 6x + y^2 + 8y + 27 = 0$ (*Sugerencia:* complete el cuadrado.)
36. $x^4 + 3x^2y^2 + 5 = 0$

En los Problemas 37-42 encuentre d^2y/dx^2.

37. $4y^3 = 6x^2 + 1$
38. $xy^4 = 5$
39. $x + y = \operatorname{sen} y$
40. $y^2 - x^2 = \tan 2x$
41. $x^2 + 2xy - y^2 = 1$
42. $x^3 + y^3 = 27$

En los Problemas 43 y 44 utilice primero diferenciación implícita para encontrar dy/dx. Luego exprese y explícitamente en términos de x y derive. Demuestre que las dos respuestas son equivalentes.

43. $x^3y = x + 1$
44. $y \operatorname{sen} x = x - 2y$

Problemas diversos

45. El ángulo θ entre dos curvas (para el que $0 < \theta < \pi$) se define como el ángulo que forman sus tangentes en el punto de intersección P. Si m_1 y m_2 son las pendientes de las rectas tangentes en P, se puede demostrar que $\tan \theta = (m_1 - m_2)/(1 + m_1m_2)$. Determine el ángulo entre las gráficas de $x^2 + y^2 + 4y = 6$ y $x^2 + 2x + y^2 = 4$ en $(1, 1)$.
46. Trace la gráfica de $y^2 = x^2(2 - x)$. Muestre gráficamente cómo la ecuación dada puede definir varias funciones.

En los Problemas 47 y 48 suponga que tanto x como y son funciones diferenciables de una variable t. Encuentre dy/dt en términos de x, y y dx/dt.

47. $x^2 + y^2 = 25$
48. $x^2 + xy + y^2 - y = 9$

Problema para calculadora

49. La gráfica de $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$ que se muestra en la Figura 3.33 se llama lemniscata o lemniscato.

(a) Determine los puntos de la gráfica que correspondan a $x = 1$. Utilice valores con dos decimales.

(b) Obtenga una ecuación de la recta tangente a la gráfica en cada uno de los puntos obtenidos en la parte (a).

(c) Halle los puntos de la gráfica en los que la tangente sea horizontal.

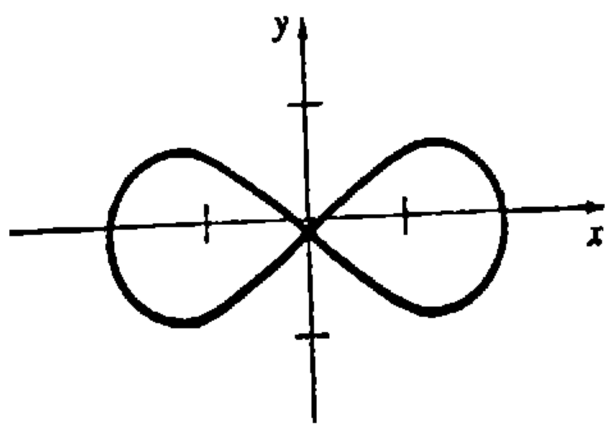


Figura 3.33

3.9 Reglas de diferenciación IV: extensión de las reglas de la potencia

En las Secciones 3.3 y 3.6 se restringió a exponentes *enteros* la regla de la potencia y la regla de la potencia para funciones:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \tag{3.47}$$

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}, \qquad u = g(x). \tag{3.48}$$

La diferenciación implícita proporciona una manera de extender tanto (3.47) como (3.48) al caso de exponentes *racionales*. Si p y q son enteros, $q \neq 0$, entonces para aquellos valores de x para los que $x^{p/q}$ es un número real,

$$y = x^{p/q} \tag{3.49}$$

es una función que da lugar a

$$y^q = x^p. \tag{3.50}$$

Ahora bien, suponiendo que y' existe y que $y \neq 0$, mediante diferenciación implícita resulta que

$$\frac{d}{dx}y^q = \frac{d}{dx}x^p$$

$$qy^{q-1}\frac{dy}{dx} = px^{p-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}} = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{(x^{p/q})^{q-1}} = \frac{p}{q}x^{(p/q)-1}. \qquad \text{[por (3.49)]}$$

Este último resultado conduce a la siguiente extensión de (3.47).

TEOREMA 3.10

Regla de la potencia (exponentes racionales)

Si p/q es un número racional, entonces

$$\frac{d}{dx}x^{p/q} = \frac{p}{q}x^{(p/q)-1}. \tag{3.51}$$

□

Obsérvese que (3.51) se reduce a (3.47) cuando $p = n$ y $q = 1$. Además, no hay nada nuevo que memorizar en (3.51); es la misma regla de antes: *se coloca el exponente como factor y se reduce el exponente en 1.*

Ejemplo 1

Diferenciar $y = \sqrt{x}$.

Solución Primero se escribe la función dada como $y = x^{1/2}$ y luego se utiliza (3.51):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{(1/2)-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Ejemplo 2

Obtener una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = \sqrt{x}$ en $x = 4$.

Solución Cuando $x = 4$, $y = \sqrt{4} = 2$. Por el Ejemplo 1 resulta que la pendiente de la recta tangente en (4, 2) es

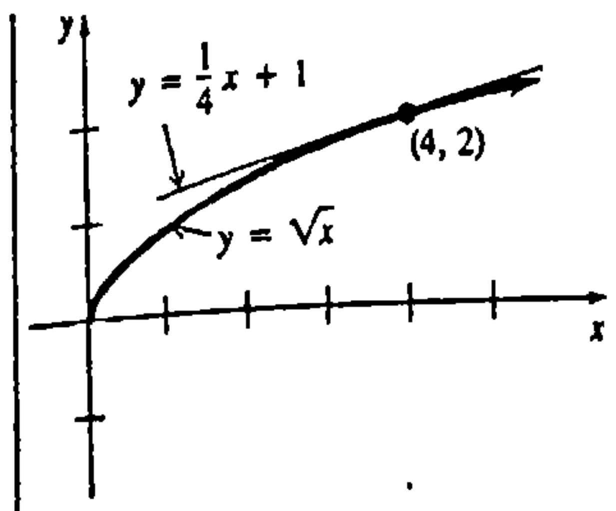


Figura 3.34

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=4} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

Entonces una ecuación de la recta tangente es

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4) \qquad \text{o bien} \qquad y = \frac{1}{4}x + 1.$$

La Figura 3.34 muestra las gráficas de la función y de la recta tangente.

Ejemplo 3

Diferenciar o derivar $y = 1/\sqrt{x}$.

Solución Puesto que $y = x^{-1/2}$, de (3.51) resulta que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}x^{(-1/2)-1} = -\frac{1}{2}x^{-3/2}.$$

Ejemplo 4

Diferenciar $y = 9\sqrt[3]{x} + 4\sqrt{x^3}$.

Solución Empleando exponentes racionales, la función dada puede expresarse como $y = 9x^{1/3} + 4x^{3/2}$. Así que,

$$\frac{dy}{dx} = 9(1/3)x^{(1/3)-1} + 4(3/2)x^{(3/2)-1}$$

$$= 3x^{-2/3} + 6x^{1/2}.$$

Puede demostrarse, de manera semejante a la que dio lugar a (3.51), que la regla de la potencia para funciones (3.48) también es cierta para exponentes racionales. Este resultado se resume en el teorema siguiente.

TEOREMA 3.11

Regla de la potencia para funciones (exponentes racionales)

Si p/q es un número racional y g es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^{p/q} = \frac{p}{q}[g(x)]^{(p/q)-1}\cdot g'(x) \tag{3.52}$$

□

Ejemplo 5

Diferenciar $y = (4x + 1)^{1/3}$.

Solución Por (3.52),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(4x+1)^{(1/3)-1}\frac{d}{dx}(4x+1) = \frac{4}{3}(4x+1)^{-2/3}.$$

Ejemplo 6

Diferenciar $y = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

Solución Se utiliza (3.52) y en seguida la regla del cociente,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{1+x}{1-x}\right]^{-1/2}\cdot\frac{d}{dx}\frac{1+x}{1-x}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1+x}{1-x}\right]^{-1/2}\cdot\frac{(1-x)\cdot 1-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2}\left[\frac{1+x}{1-x}\right]^{-1/2}$$

Ejemplo 7

Diferenciar $y = (3x^2 + \sqrt{x^2+1})^5$.

Solución La regla de la potencia para funciones (3.52) da lugar a

$$\frac{dy}{dx} = 5(3x^2+\sqrt{x^2+1})^4\cdot\frac{d}{dx}(3x^2+\sqrt{x^2+1})$$

$$= 5(3x^2+\sqrt{x^2+1})^4\cdot\left[6x+\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}\cdot 2x\right]$$

$$= 5(3x^2+\sqrt{x^2+1})^4\left[6x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right].$$

Tangentes verticales

Las gráficas de muchas funciones con exponentes racionales poseen tangentes verticales.

DEFINICIÓN 3.4

Sea $y = f(x)$ continua en $x = a$. Se dice que la gráfica de f tiene una tangente vertical en $(a, f(a))$ si $\lim_{x\to a}|f'(x)| = \infty$.

Ejemplo 8

Para $f(x) = x^{2/3}$, se tiene que

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}}.$$

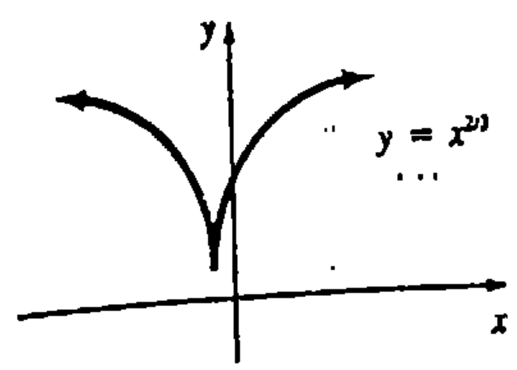


Figura 3.35

Nótese que $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \infty$, mientras que $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty$.* Puesto que f es continua en $x = 0$ y $|f'(x)| \to \infty$ cuando $x \to 0$, concluimos que el eje y es una tangente vertical en (0, 0). Este hecho es evidente en la gráfica de la Figura 3.35.

Observación

En el Capítulo 8 los resultados (3.47) y (3.48) serán extendidos, aún más, para cualquier exponente real (esto es, racional o irracional).

Ejercicios 3.9

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 972.

En los Problemas 1-20 encuentre la derivada de la función dada.

1. $y = 10x^{3/2}$
2. $y = 8x^{-1.2}$
3. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$
4. $y = \sqrt[5]{x^3}$
5. $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
6. $y = \sqrt{4x^2+9}$
7. $y = (x^2+1)(x^2-4)^{2/3}$
8. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$
9. $y = \left(\dfrac{x-9}{x+2}\right)^{3/2}$
10. $y = \sqrt{2x+1}\,\sqrt[3]{3x-1}$
11. $y = \operatorname{sen}\sqrt{x}$
12. $y = x\cot\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
13. $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$
14. $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$
15. $g(t) = [(t^2-1)(t^3+4t)]^{1/3}$
16. $H(z) = \dfrac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}+3}$
17. $q(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{\theta+\operatorname{sen}\theta}}$
18. $r(\theta) = \sqrt{\cos 4\theta}$
19. $F(s) = \sqrt[5]{(s^4+1)^2}$
20. $g(u) = u^{2/3}(u^{1/3}+1)^3$

En los Problemas 21-26 halle la segunda derivada de la función dada.

21. $y = x + \sqrt{x}$
22. $y = 18x^{4/3}$
23. $y = \dfrac{x^{5/3}+6x^{4/3}-9x^{1/3}}{x}$
24. $y = (\sqrt{x}+1)^4$
25. $F(\theta) = (\operatorname{sen}\theta)^{2.4}$
26. $f(t) = \left(\dfrac{t}{t+6}\right)^{0.3}$

En los Problemas 27-30 encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor de x indicado.

27. $y = x^{1/3}$; $x = 8$
28. $y = \sqrt{2x+1}$; $x = 4$
29. $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+3}}$; $x = 1$
30. $y = (\tan 2x)^{1/3}$; $x = \pi/8$

* Trate de visualizar lo que pasa con las rectas tangentes a la gráfica cuando $x \to 0^+$ y $x \to 0^-$.

En los Problemas 31-34 utilice diferenciación implícita para encontrar dy/dx.

31. $x + \sqrt{xy} + y = 1$

32. $xy^2 = \sqrt{x+1}$

33. $2y^{3/2} = 3x(x^2 - 1)^{3/2}$

34. $(6x)^{1/2} + (8y)^{3/2} = 2$

35. La gráfica de $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, que se muestra en la Figura 3.36 se llama **hipocicloide**. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica en $x = \frac{1}{8}$.

36. Encuentre d^2y/dx^2 para la ecuación del Problema 35.

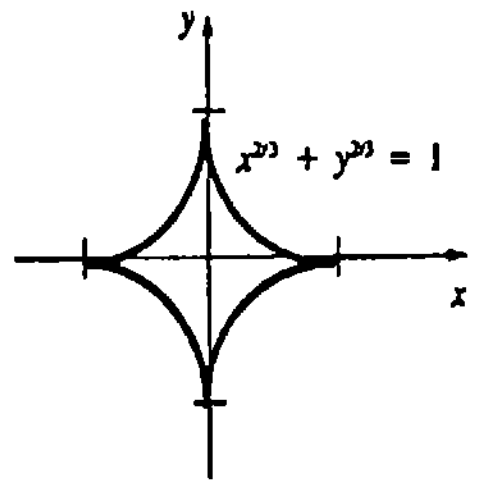


Figura 3.36

En los Problemas 37-42 determine si la gráfica de la función dada tiene tangentes verticales.

37. $y = (2x - 8)^{2/3}$ 38. $y = 4x^2 + 6x^{1/3}$

39. $f(x) = x^{-1/3} + 1$ 40. $f(x) = (x^2 + 9)^{1/3}$

41. $f(x) = \dfrac{1}{x^{1/3} + 1}$

42. $f(x) = (x + 1)^{1/3}(x - 5)^{2/3}$

43. La función $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, con g constante, proporciona el periodo de un péndulo simple de longitud L. Dado que g = 32 pie/s², encuentre dT/dL cuando L = 2 pie.

44. Según G. K. Zipf, el número N de ciudades de Estados Unidos que tienen una población de más de q millones, se calcula mediante $N = 24q^{-1.3}$. Encuentre la razón de cambio instantánea de N con respecto a q.

45. La velocidad v de un cohete a y kilómetros del centro de la Tierra está dada por $v = \sqrt{2k/y - 2k/R + v_0^2}$ en donde k, R y v_0 son constantes. Determine dv/dy.

46. Según la teoría de la relatividad, la masa m de un cuerpo que se mueve con velocidad v es $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, en donde m_0 es la masa inicial y c es la velocidad de la luz. Encuentre dm/dv.

47. En circunstancias especiales la función

$$g(\gamma) = F_0/\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2},$$

en donde F_0, w y 2 son constantes, proporciona la amplitud de movimiento de una masa sujeta a un resorte en vibración. Verifique que $g'(w^2 - 2\lambda^2) = 0$.

48. La cantidad X de sustancia presente en el tiempo t durante una reacción química de tercer orden, está dada por

$$X(t) = \left(\frac{X_0^2}{2kX_0^2 t + 1}\right)^{1/2},$$

en donde X_0 y k son constantes. Encuentre $X'(1)$.

49. El área de la superficie S de un ser humano con peso W está calculada por $S = 0.11W^{2/3}$. Encuentre dS/dW.

Problema para calculadora

50. Una estimación del porcentaje de saturación de la hemoglobina en un ser humano está dada por

$$f(P) = \frac{0.013P^{2.7}}{1 + 0.00013P^{2.7}},$$

en donde P representa la presión parcial del oxígeno en el plasma. Halle la razón de cambio instantánea de f cuando $P = 40$.

3.10 Diferenciales

Iniciamos el tema de la derivada con el problema de encontrar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función $y = f(x)$. Como se muestra en la Figura 3.37, el punto de partida para resolver este problema fue la consideración de

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

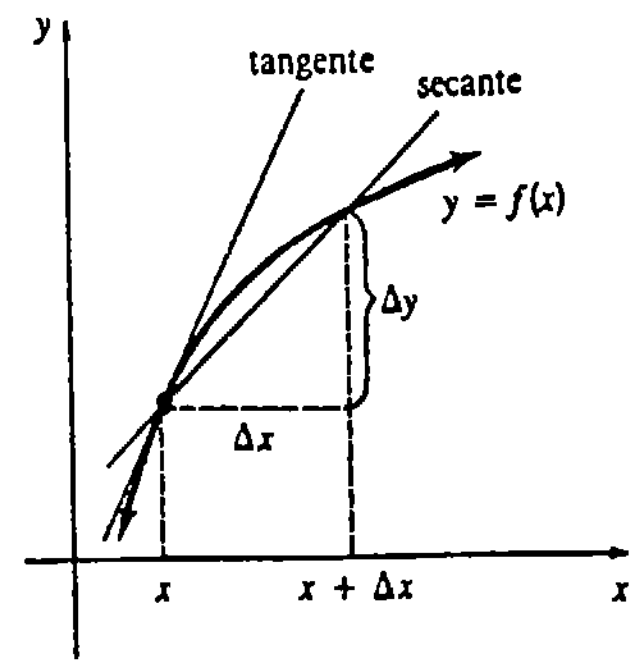


Figura 3.37

Para valores pequeños de Δx, $m_{\text{sec}} \approx m_{\text{tan}}$ o bien $\Delta y/\Delta x \approx m_{\text{tan}}$. Pero sabiendo que $m_{\text{tan}} = f'(x)$ puede escribirse

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$$

o bien

$$\Delta y \approx f'(x)\,\Delta x. \tag{3.53}$$

Por conveniencia le pondremos otro nombre al número Δx, como sigue:

DEFINICIÓN 3.5

Al incremento Δx se le llama la **diferencial de la variable independiente** x y se denota por dx; esto es, $dx = \Delta x$. □

También redenominaremos con otro nombre a la cantidad $f'(x)\Delta x$ de (3.53).

DEFINICIÓN 3.6

A la función $f'(x)\Delta x$ se la llama la **diferencial de la variable dependiente** y, y se denota por dy; esto es, $dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$. □

Interpretación geométrica de dy

Puesto que la pendiente de una tangente a la gráfica es

$$m_{\tan} = \frac{\text{ascenso}}{\text{avance}} = f'(x) = \frac{f'(x)\,\Delta x}{\Delta x}, \qquad \Delta x \neq 0,$$

resulta que el ascenso de la recta tangente se puede interpretar como dy.* Puede verse en la Figura 3.38 que cuando Δx es muy pequeño ($\Delta x \approx 0$),

$$\Delta y \approx dy. \tag{3.54}$$

* Por esta razón, el símbolo de la derivada dy/dx tiene la apariencia de un cociente. Para calcular dy, parece como si se multiplicaran ambos miembros de la igualdad $dy/dx = f'(x)$ por el denominador de la izquierda. Aunque este *no* es el caso, estrictamente hablando, puede procederse de esta manera *formalmente*.

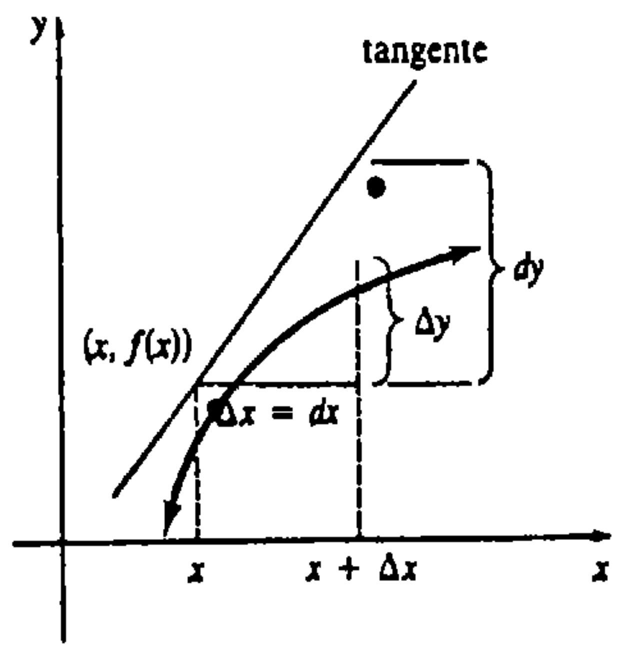


Figura 3.38

Ejemplo 1

(*a*) Obtener Δy y dy para $y = 5x^2 + 4x + 1$.

(*b*) Comparar los valores de Δy y dy para $x = 6$, $\Delta x = dx = 0.02$.

Solución

(*a*) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$
$= [5(x + \Delta x)^2 + 4(x + \Delta x) + 1] - [5x^2 + 4x + 1]$
$= 10x\,\Delta x + 4\,\Delta x + 5(\Delta x)^2$.

Ahora bien, por la Definición 2.6,

$$dy = (10x + 4)\,dx.$$

Como $dx = \Delta x$, obsérvese que $\Delta y = (10x + 4)\Delta x + 5(\Delta x)^2$ y $dy = (10x + 4)\Delta x$ difieren en la cantidad $5(\Delta x)^2$.

(*b*) Cuando $x = 6$, $\Delta x = 0.02$

$$\Delta y = 10(6)(0.02) + 4(0.02) + 5(0.02)^2 = 1.282,$$

mientras que

$$dy = (10(6) + 4)(0.02) = 1.28.$$

La diferencia entre las respuestas es, por supuesto, $5(0.02)^2 = 0.002$.

Aproximaciones

Cuando $\Delta x \approx 0$, las diferenciales proporcionan una manera de "predecir" el valor de $f(x + \Delta x)$ conociendo el valor de la función y su derivada en x. Como puede verse en la Figura 3.39, si x varía en una cantidad Δx entonces la variación correspondiente de la función es $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ y de esta manera

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y.$$

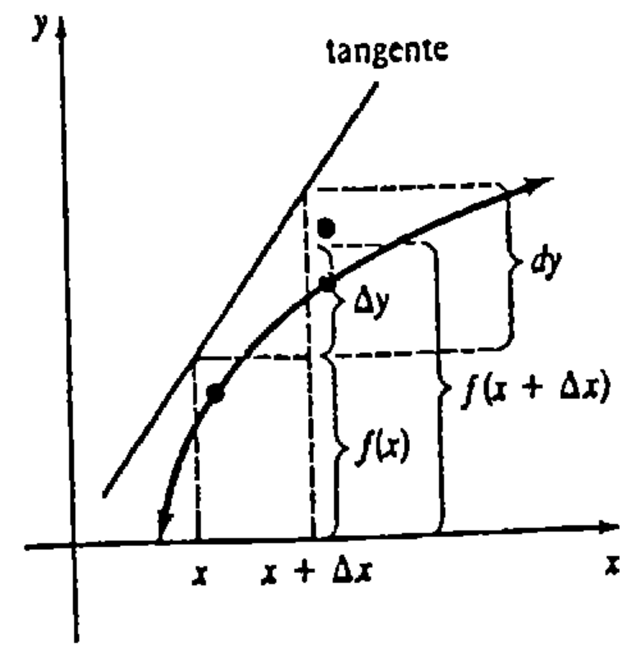


Figura 3.39

Pero en vista de (3.54), para una variación pequeña de x, puede escribirse $f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy$. Esto es,

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,dx. \qquad (3.55)$$

Ejemplo 2

Utilizar (3.55) para encontrar una aproximación a $\sqrt{25.4}$.

Solución

Primeramente, se identifica la función $f(x) = \sqrt{x}$. Se desea calcular el valor aproximado de $f(x + \Delta x) = \sqrt{x + \Delta x}$ cuando $x = 25$ y $\Delta x = 0.4$. Ahora bien,

$$dy = \frac{1}{2}x^{-1/2}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\Delta x$$

de manera que (3.55) da lugar a

$$\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\Delta x. \qquad (3.56)$$

Cuando $x = 25$ y $\Delta x = 0.4$, (3.56) se convierte en

$$\sqrt{25.4} \approx \sqrt{25} + \frac{1}{2\sqrt{25}}(0.4) = 5.04.$$

Error

El error en un cálculo se define como

$$\textbf{error} = \textbf{valor real} - \textbf{valor aproximado} \qquad (3.57)$$

Sin embargo, en la práctica el

$$\textbf{error relativo} = \frac{\textbf{error}}{\textbf{valor real}} \qquad (3.58)$$

usualmente es más importante que el error (absoluto). Por otra parte, al producto: (error relativo) · 100 se le llama **porcentaje de error**. Con la ayuda de una calculadora, $\sqrt{25.4} = 5.03984$ es correcta hasta la quinta cifra decimal. Así que el error en el Ejemplo 2 es -0.00016, el error relativo es -0.00003 y el porcentaje de error es -0.003%.

Ejemplo 3

La medida efectuada al lado de un cubo es de 30 cm, con un error posible de ±0.02 cm. ¿Cuál es el error máximo posible aproximado en el volumen del cubo?

Solución El volumen de un cubo es $V = x^3$, en donde x es la longitud del lado. Si Δx representa el error en la longitud del lado, entonces el error correspondiente en el volumen es

$$\Delta V = (x + \Delta x)^3 - x^3.$$

Para simplificar, se utiliza la diferencial $dV = 3x^2dx = 3x^2\Delta x$ como una aproximación a ΔV. Así que, para $x = 30$ y $\Delta x = \pm 0.02$, el error máximo aproximado es

$$dV = 3(30)^2(\pm 0.02) = \pm 54 \text{ cm}^3.$$

En el ejemplo precedente, parece considerable un error de alrededor de 54 cm³ en el volumen, para un error de 0.02 cm en la longitud de lado. Pero, obsérvese que, si el error relativo es $\Delta V/V$, entonces el error relativo aproximado es dV/V. Cuando $x = 30$, $V = 27{,}000$, el error relativo máximo aproximado es $\pm 54/27{,}000 = \pm 1/500$, y el porcentaje máximo de error es aproximadamente ±0.2%.

Reglas para las diferenciales

Las reglas de diferenciación consideradas en este capítulo se pueden expresar en términos de diferenciales; por ejemplo, si $u = f(x)$ y $v = g(x)$ y $y = f(x) + g(x)$, entonces $dy/dx = f'(x) + g'(x)$. Por lo tanto, $dy = [f'(x) + g'(x)]dx = f'(x)dx + g'(x)dx = du + dv$. Resumiendo las equivalentes de las reglas de la suma, del producto y del cociente:

$$d(u + v) = du + dv \tag{3.59}$$

$$d(uv) = u\,dv + v\,du \tag{3.60}$$

$$d(u/v) = \frac{v\,du - u\,dv}{u^2}. \tag{3.61}$$

Como lo muestra el ejemplo siguiente, hay poca necesidad de memorizar (3.59), (3.60) y (3.61).

Ejemplo 4

Obtener dy para $y = x^2\cos 3x$.

Solución Para determinar la diferencial de una función, podemos simplemente multiplicar su derivada por dx. Así, por la regla del producto,

$$\frac{dy}{dx} = x^2(-\operatorname{sen} 3x \cdot 3) + \cos 3x\,(2x)$$

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right) dx = (-3x^2\operatorname{sen} 3x + 2x\cos 3x)\,dx. \tag{3.62}$$

Solución alternativa Aplicando (3.60) se obtiene

$$dy = x^2d(\cos 3x) + \cos 3x\,d(x^2)$$
$$= x^2(-\operatorname{sen} 3x \cdot 3\,dx) + \cos 3x(2x\,dx). \tag{3.63}$$

Factorizando dx en (3.63) resulta (3.62).

Ejercicios 3.10

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 972.

En los Problemas 1-10 halle la diferencial dy.

1. $y = 10$
2. $y = x^4 + 3x^2$
3. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$
4. $y = \sqrt[4]{x^7}$
5. $y = 12(x^4 - 1)^{1/3}$
6. $y = x^2(1 - x)^5$
7. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$
8. $y = \dfrac{x}{(3x - 1)^4}$
9. $y = x\cos x - \operatorname{sen} x$
10. $y = (2x + 1)\csc 2x$

En los Problemas 11-18 determine Δy y dy.

11. $y = x^2 + 1$
12. $y = 3x^2 - 5x + 6$
13. $y = (x + 1)^2$
14. $y = x^3$
15. $y = \dfrac{3x + 1}{x}$
16. $y = \dfrac{1}{x^2}$
17. $y = \operatorname{sen} x$
18. $y = -4\cos 2x$

En los Problemas 19 y 20 complete la tabla siguiente para cada función.

x	Δx	Δy	dy	$\Delta y - dy$
2	1			
2	0.5			
2	0.1			
2	0.01			

19. $y = 5x^2$
20. $y = \dfrac{1}{x}$

En los Problemas 21-30 utilice el concepto de diferencial para encontrar una aproximación a la expresión dada.

21. $\sqrt{37}$
22. $\dfrac{1}{\sqrt{96}}$
23. $(1.8)^5$
24. $9^{2/3}$
25. $\dfrac{(0.9)^4}{(0.9) + 1}$
26. $(1.1)^3 + 6(1.1)^2$
27. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 0.4\right)$
28. $\operatorname{sen} 1°$
29. $\operatorname{sen} 33°$
30. $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + 0.1\right)$

31. El área de un círculo de radio es $A = \pi r^2$.
    (a) Dado que el radio de un círculo cambie de 4 cm a 5 cm, calcule el cambio exacto del área.
    (b) ¿Cuál es el cambio aproximado del área?

32. Según Poiseuille, la resistencia R de un vaso sanguíneo de longitud l y radio r es $R = kl/r^4$, en donde k es una constante. Dado que l es constante, encuentre el cambio aproximado de R cuando r cambia de 0.2 mm a 0.3 mm.

33. Muchas pelotas de golf consisten de una cubierta esférica sobre un núcleo sólido. Encuentre el volumen exacto de la cubierta si su espesor es t y el radio del núcleo es r. (*Sugerencia:* el volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Considere esferas concéntricas de radio r y $r + \Delta r$.) Use diferenciales para encontrar una aproximación al volumen de la cubierta. Véase la Figura 3.40. Encuentre una aproximación al volumen de la cubierta si $r = 0.8$ plg y $t = 0.04$ plg.

34. Un tubo de metal tiene 1.5 m de largo. Encuentre una aproximación al volumen del metal si el radio inte-

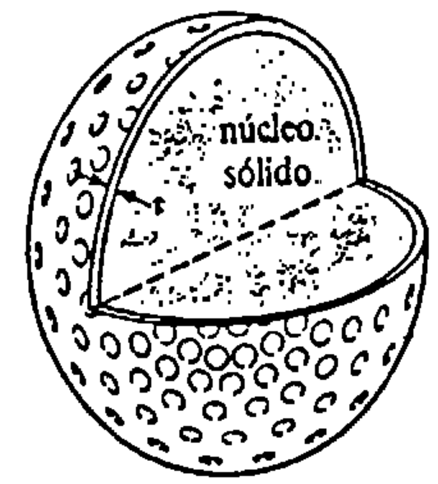


Figura 3.40

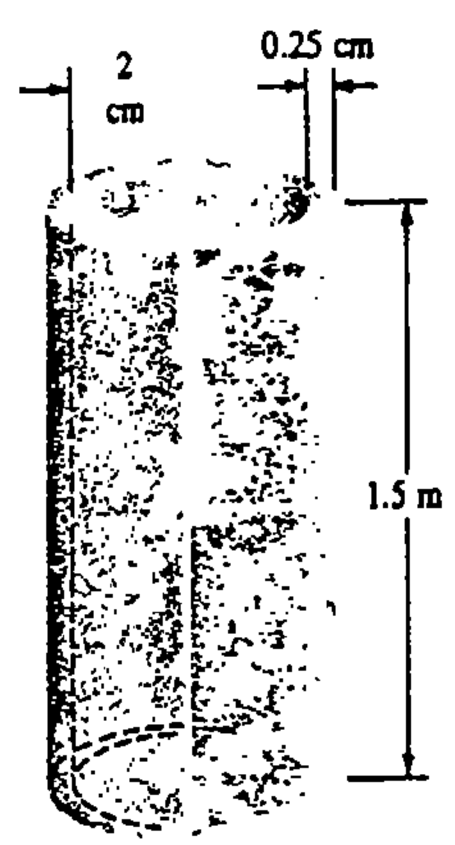


Figura 3.41

rior del tubo es de 2 cm y su espesor es de 0.25 cm. Véase la Figura 3.41.

35. La medición efectuada del lado de un cuadrado fue de 10 cm, con un error posible de ±0.3 cm. Utilice diferenciales para evaluar una aproximación al error máximo en el área. Halle el error relativo aproximado y el porcentaje aproximado de error.

36. Un tanque de almacenamiento de aceite en forma de cilindro circular vertical tiene una altura de 5 m. El radio mide 8 m, con un error posible de ±0.25 m. Utilice diferenciales para calcular el error máximo en el volumen. Encuentre el error relativo aproximado y el porcentaje aproximado de error.

37. En el estudio de ciertos procesos adiabáticos, la presión P de un gas se relaciona con el volumen V que ocupa mediante $P = c/V^{\gamma}$, en donde c y γ son constantes. Demuestre que el error relativo aproximado en P es proporcional al error relativo aproximado en V.

38. El alcance R de un proyectil con una velocidad inicial v_0 y un ángulo de elevación θ está dado por $R = (v_0^2/g)$ sen 2θ, en donde g es la aceleración de la gravedad. Si v_0 y θ se mantienen constantes, demuestre que el porcentaje de error en el alcance es proporcional al porcentaje de error en g.

39. Utilizar la fórmula del Problema 38 para determinar el alcance de un proyectil cuando la velocidad inicial es de 256 pie/s, el ángulo de elevación es de 45° y la aceleración de la gravedad es de 32 pie/s². ¿Cuál es la variación aproximada del alcance del proyectil si la velocidad inicial se aumenta a 266 pie/s?

40. La aceleración de la gravedad g no es constante, sino que varía con la altitud. Para propósitos prácticos, en la superficie de la Tierra g se considera como 32 pie/s², 980 cm/s² o 9.8 m/s².

(a) Por la ley de la gravitación universal, la fuerza F entre un cuerpo de masa m_1 y la Tierra con masa m_2 es $F = km_1m_2/r^2$, en donde k es constante y r es la distancia al centro de la Tierra. Alternativamente, la segunda ley de Newton del movimiento implica que $F = m_1g$. Demuestre que $g = km_2/r^2$.

(b) Utilice la parte (a) para demostrar que $dg/g = -2dr/r$.

(c) Sea r = 6400 km en la superficie de la tierra. Utilice la parte (b) para demostrar que el valor aproximado de g a una altitud de 16 km es de 9.75 m/s².

Problemas para calculadora

41. En el Problema 23 use una calculadora para obtener el error. Calcule el error relativo y el porcentaje de error.

42. El periodo (en segundos) de un péndulo simple de longitud L es $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, en donde g es la aceleración de la gravedad. Calcule la variación exacta del periodo si L se aumenta de 4 a 5 m. Luego, utilice diferenciales para encontrar una aproximación a la variación del periodo. Suponga $g = 9.8\ m/s^2$.

43. En el Problema 42, si L se fija en 4 metros, encuentre una aproximación a la variación del periodo si el péndulo se traslada a una altitud en donde $g = 9.75\ m/s^2$.

3.11 Método de Newton

Existen pocos métodos directos para encontrar las raíces de una ecuación

$$f(x) = 0.$$

Para *ecuaciones polinomiales* de grado cuatro o menor, puede resolverse siempre la ecuación por medio de una fórmula que expresa las respuestas en términos de los coeficientes

de $f(x)$. Se sabe, desde luego, que $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, puede resolverse por la fórmula cuadrática. Uno de los más grandes éxitos dentro de las matemáticas fue la demostración de que las ecuaciones polinomiales de grado mayor que cuatro no pueden resolverse por medio de alguna fórmula.* Así que, resolver la ecuación algebraica

$$x^5 - 3x^2 + 4x - 6 = 0 \tag{3.64}$$

plantea un serio aprieto, a menos que el polinomio se pueda factorizar. Además, a menudo se requiere en análisis científico encontrar raíces de ecuaciones trascendentes tales como

$$f(x) = \tan x. \tag{3.65}$$

En el caso de problemas como (3.64) y (3.65), es común emplear una técnica que da lugar a una *aproximación* o *estimación* de las raíces. Uno de tales procedimientos, conocido como el **método de Newton**†, emplea la derivada de una función.

Una técnica iterativa

Supóngase que f es diferenciable y que c representa la raíz desconocida de $f(x) = 0$; esto es, $f(c) = 0$. Se denota por x_0 un número escogido arbitrariamente como una primera aproximación a c. Si $f(x_0) \neq 0$, se calcula $f'(x_0)$ y, como se muestra en la Figura 3.42, se traza una tangente a la gráfica de f en $(x_0, f(x_0))$. Si se denota ahora por x_1 a la intersección x de esta recta, debe tenerse que

$$\text{pendiente de la recta} = f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Despejando x_1 se obtiene

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Se repite el procedimiento en $(x_1, f(x_1))$ y se denota por x_2 la intersección x de la segunda recta tangente. De

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

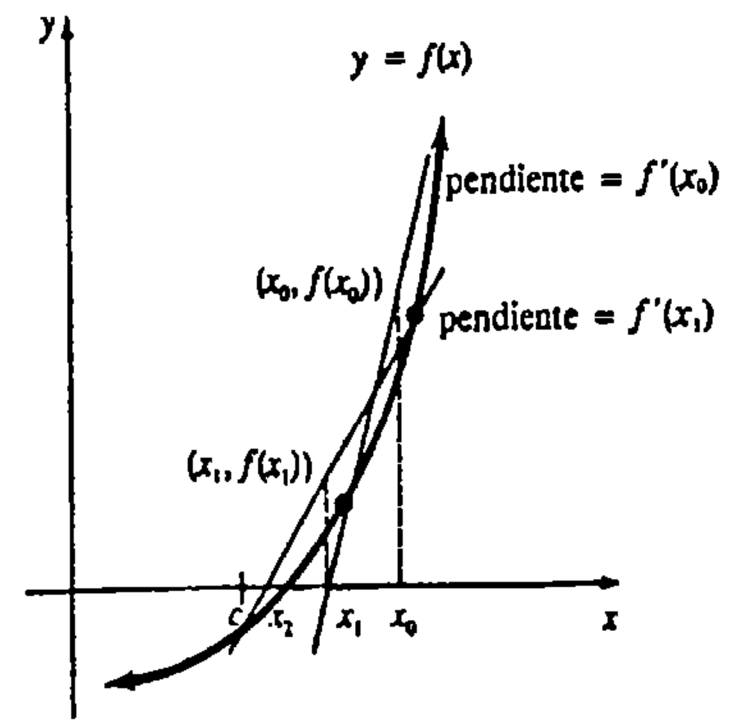


Figura 3.42

* Esto fue demostrado por el matemático noruego Niels Henrik Abel (1802-1829).

† También se llama método de Newton-Raphson.

se obtiene

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Continuando en esta forma, se determina x_{n+1} como

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \qquad (3.66)$$

El uso reiterativo, o **iteración**, de (3.66) da lugar a una sucesión $x_1, x_2, x_3, \ldots$ de aproximaciones que se espera converja a la raíz c; esto es, $x_n \to c$ cuando n aumenta.

Análisis gráfico

Antes de aplicar (3.66) tratemos de determinar la existencia y el número de raíces reales de $f(x) = 0$ de modo gráfico; por ejemplo, el número irracional $\sqrt{3}$ se puede interpretar ya sea como

(*i*) una raíz de la ecuación cuadrática $x^2 - 3 = 0$, y, por lo tanto, como un cero de la función continua $f(x) = x^2 - 3$, o bien

(*ii*) la abscisa de un punto de intersección de las gráficas de $y = x^2$ y $y = 3$.

Ambas interpretaciones se ilustran en la Figura 3.43. Desde luego, otra razón para emplear una gráfica es que permite escoger la aproximación inicial x_0 de modo que esté cerca de la raíz c.

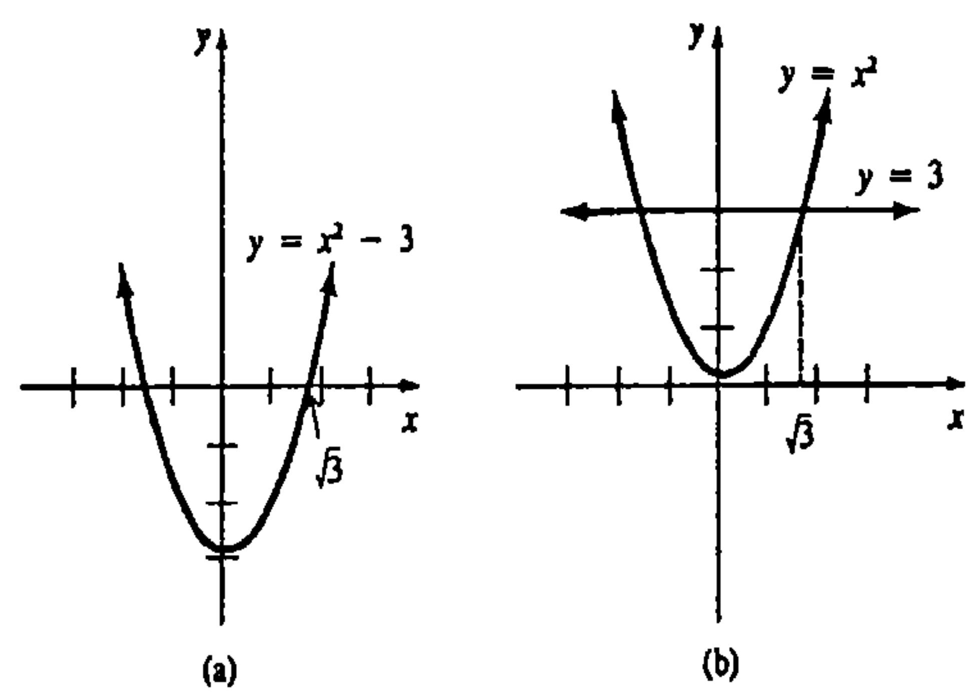


Figura 3.43

Ejemplo 1

Determinar el número de raíces reales de $x^3 - x + 1 = 0$.

Solución De las gráficas de $y = x^3$ y $y = x - 1$ que se muestran en la Figura 3.44, se concluye que la ecuación

$$x^3 = x - 1$$

o bien

$$x^3 - x + 1 = 0$$

tiene solamente una raíz real.*

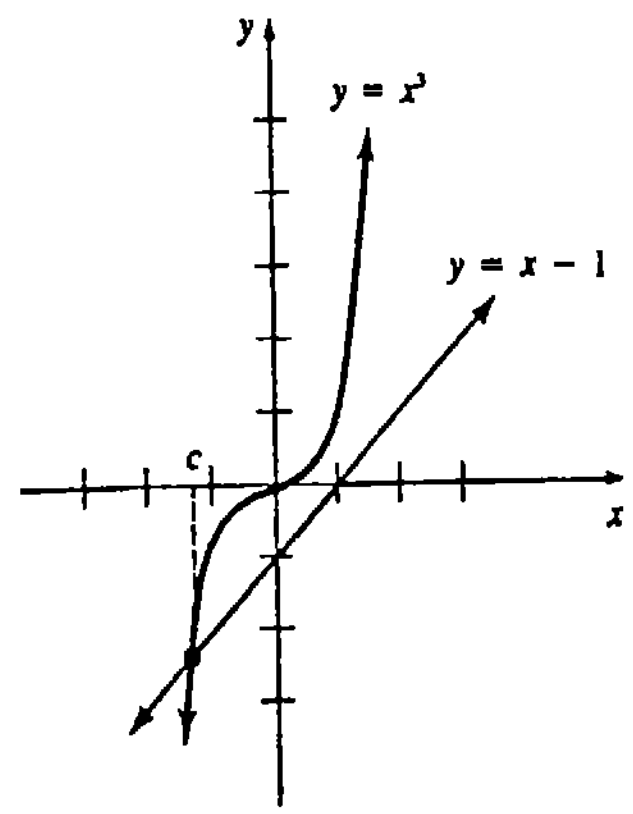


Figura 3.44

Ejemplo 2

Aproximar $\sqrt{3}$ por el método de Newton.

Solución Si se define $f(x) = x^2 - 3$, entonces $f'(x) = 2x$, y (3.66) se convierte en

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 3}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right).$$

Como $1 < \sqrt{3} < 2$, parece razonable escoger $x_0 = 1$. Así que,

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{3}{x_0}\right) = \frac{1}{2}(1 + 3) = 2$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{3}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{3}{2}\right) = 1.75$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{3}{x_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{4} + \frac{12}{7}\right) \approx 1.7321$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\left(x_3 + \frac{3}{x_3}\right) \approx 1.7321.$$

Puesto que no hay diferencia significativa entre x_3 y x_4, se justifica detener la iteración. En efecto, puede demostrarse que $\sqrt{3} \approx 1.73205$ es precisa hasta la quinta cifra decimal.

* Una ecuación polinomial cúbica con coeficientes reales siempre tiene *al menos* una raíz real, porque las raíces complejas deben aparecer por pares.

Ejemplo 3

Utilizar el método de Newton para obtener una aproximación a la raíz real de $x^3 - x + 1 = 0$.

Solución Sea $f(x) = x^3 - x + 1$, de modo que $f'(x) = 3x^2 - 1$. Por lo tanto, (3.66) es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n + 1}{3x_n^2 - 1} = \frac{2x_n^3 - 1}{3x_n^2 - 1}.$$

Si nos interesa una precisión de tres y posiblemente cuatro decimales, puede llevarse a cabo la iteración hasta que dos iterantes consecutivos coincidan en sus cuatro primeros decimales. También, la Figura 3.44 nos sugiere tomar $x_0 = -1.5$ como la aproximación inicial. Consecuentemente,

$$x_1 = \frac{2x_0^3 - 1}{3x_0^2 - 1} = \frac{2(-1.5)^3 - 1}{3(-1.5)^2 - 1} \approx -1.3478$$

$$x_2 = \frac{2x_1^3 - 1}{3x_1^2 - 1} \approx -1.3252$$

$$x_3 = \frac{2x_2^3 - 1}{3x_2^2 - 1} \approx -1.3247$$

$$x_4 = \frac{2x_3^3 - 1}{3x_3^2 - 1} \approx -1.3247.$$

Por lo tanto, la raíz de la ecuación dada es aproximadamente -1.3247.*

Ejemplo 4

Encontrar la raíz positiva menor de $2x = \tan x$.

Solución La Figura 3.45 muestra que la ecuación tiene un número infinito de raíces. Con $f(x) = 2x - \tan x$ y $f'(x) = 2 - \sec^2 x$, (3.66) se convierte en

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2x_n - \tan x_n}{2 - \sec^2 x_n}.$$

Como las calculadoras y las computadoras no tienen una rutina para evaluar la secante, se expresa la última ecuación en términos de sen x y cos x:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2x_n \cos^2 x_n - \operatorname{sen} x_n \cos x_n}{2\cos^2 x_n - 1}. \qquad (3.67)$$

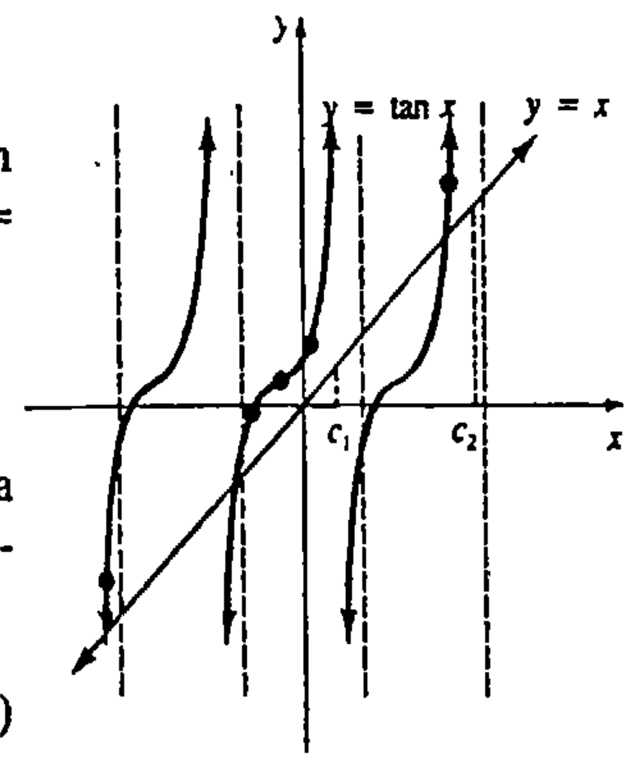


Figura 3.45

* Si el lector está empleando una calculadora en este ejemplo, podría encontrarse en dificultades al calcular valores como $(-1.5)^3$ y $(-1.3478)^3$ usando la tecla $\boxed{y^x}$. La razón por la cual esta función requiere usualmente que $y > 0$, será explicada en la Sección 8.4. Pero en realidad no hay ningún problema, puesto que $(-1.5)^3 = -(1.5)^3$ y $(-1.3478)^3 = (1.3478)^3$.

Conforme a la Figura 3.45, parece que la primera raíz positiva está cerca de $x_0 = 1$. La iteración de (3.67) da lugar entonces a

$$x_1 \approx 1.3105 \qquad x_4 \approx 1.1659$$
$$x_2 \approx 1.2239 \qquad x_5 \approx 1.1656$$
$$x_3 \approx 1.1761 \qquad x_6 \approx 1.1656.$$

Se concluye que la primera raíz positiva es aproximadamente 1.1656.

Véase programa BASIC para el método de Newton en la Pág. 1013 (No. 1).

El ejemplo precedente ilustra la importancia de la selección del valor inicial x_0. El estudiante debe verificar que escoger $x_0 = \frac{1}{2}$ en (3.67) conduce a una sucesión de valores $x_1, x_2, x_3, \ldots$ que converge a la raíz obvia $c = 0$.

Observaciones

Surgen algunos problemas en relación con el método de Newton:

(*i*) Debe calcularse $f'(x)$. Sobra decir que la forma de $f'(x)$ podría ser impresionante cuando la ecuación $f(x) = 0$ es complicada.

(*ii*) Si la raíz c de $f(x) = 0$ está cerca de un valor para el cual $f'(x) = 0$, entonces el denominador de (3.66) estará tendiendo a cero. Esto requiere calcular $f(x_n)$ y $f'(x_n)$ con un alto grado de precisión. Un cálculo de este tipo usualmente exige una computadora con una rutina de doble precisión.

(*iii*) Es necesario encontrar una ubicación aproximada de una raíz de $f(x) = 0$ antes de escoger x_0. Acompañan a esto las dificultades usuales del trazo de la gráfica. Pero, peor aún, la iteración de (3.66) *puede ser no convergente* para un x_0 elegido imprudentemente o, tal vez, en forma precipitada. En la Figura 3.46(a) puede verse que x_2 está indefinido porque $f'(x_1) = 0$. En la Figura 3.46(b) se observa lo que puede pasar con las rectas tangentes cuando x_0 no está cerca de c. Obsér-

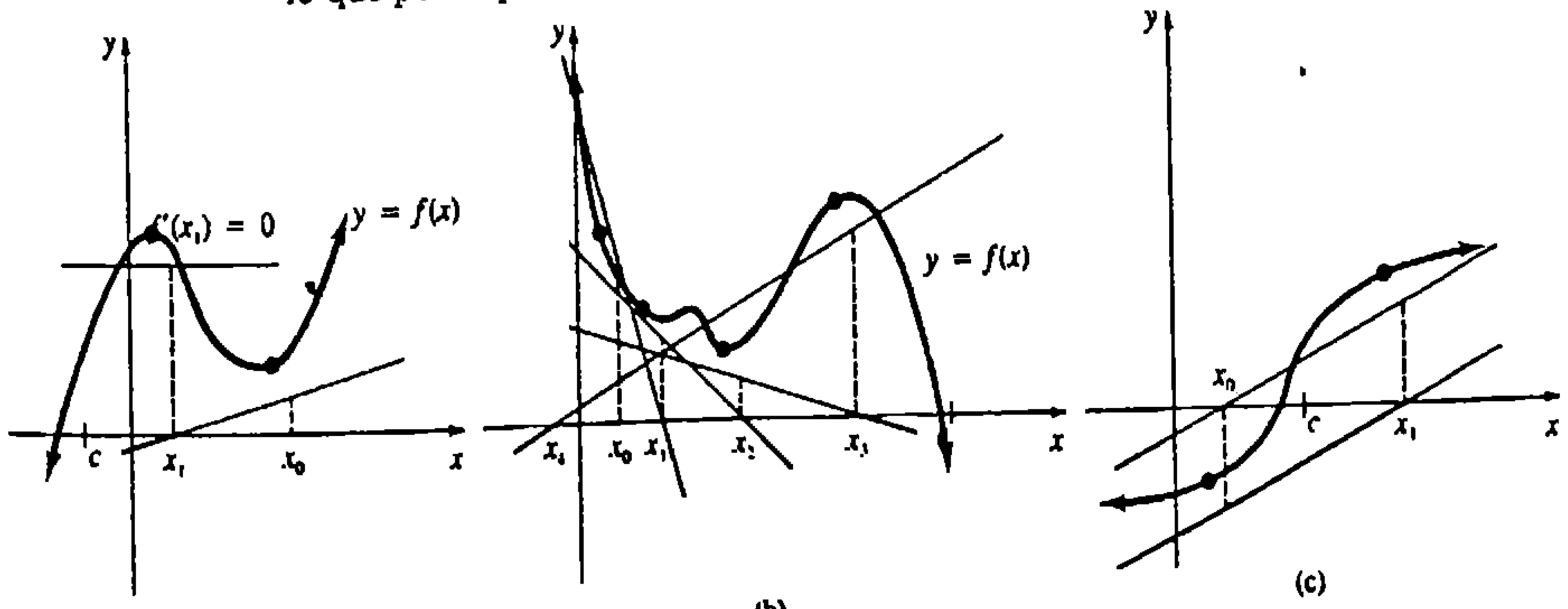


Figura 3.46

vese en la Figura 3.46(c) que cuando $f(x_0) = -f(x_1)$ y $f'(x_0) = f'(x_1)$, las rectas tangentes "brincarán" alternadamente de un punto $(x_0, f(x_0))$ a otro $(x_1, f(x_1))$. (Véanse los Problemas 21-22.)

No obstante estos tres problemas, la ventaja principal del método de Newton es que cuando converge a una raíz lo hace usualmente con bastante rapidez. Puede demostrarse que en ciertas condiciones el método de Newton converge *cuadráticamente*. Esto significa, grosso modo, que el número de lugares de precisión puede duplicarse, pero no necesariamente, en cada iteración.

Ejercicios 3.11

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 972.

En donde sea apropiado efectúe la iteración de (3.66) hasta que los iterantes sucesivos coincidan en las primeras cuatro cifras decimales.

En los Problemas 1-4 determine gráficamente si la ecuación dada tiene algunas raíces reales.

1. $x^3 = -2 + \operatorname{sen} x$ 2. $x^3 - 3x = x^2 - 1$
3. $x^4 + x^2 - 2x + 3 = 0$ 4. $\tan x = \cos x$

En los Problemas 5-8 use el método de Newton para encontrar una aproximación al número dado.

5. $\sqrt{10}$ 6. $1 + \sqrt{5}$
7. $\sqrt[3]{4}$ 8. $\sqrt[5]{2}$

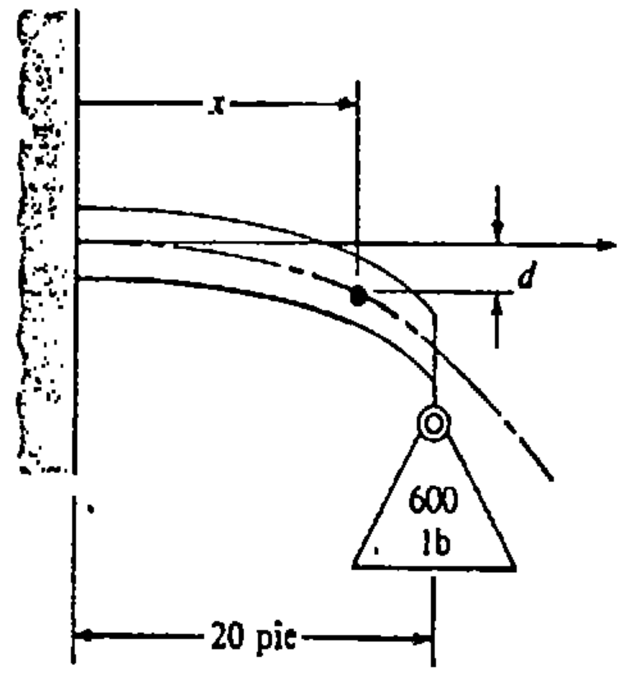


Figura 3.47

En los Problemas 9-14 use el método de Newton, si es necesario, para encontrar aproximaciones a todas las raíces reales de las ecuaciones dadas.

9. $x^3 = -x + 1$ 10. $x^3 - x^2 + 1 = 0$
11. $x^4 + x^2 - 3 = 0$ 12. $x^4 = 2x + 1$
13. $x^2 = \operatorname{sen} x$ 14. $x + \cos x = 0$

15. Encontrar la menor intersección x positiva de la gráfica de $f(x) = 3 \cos x + 4 \operatorname{sen} x$.

16. Considere la función $f(x) = x^5 + x^2$. Use el método de Newton para aproximar al menor número positivo para el cual $f(x) = 4$.

17. Una viga en voladizo (cantiléver) de 20 pie de longitud con una carga de 600 lb en su extremo, sufre una deflexión de magnitud $d = (60x^2 - x^3)/16{,}000$, en donde d se mide en pulgadas y x en pies. Véase la Figura 3.47. Use el método de Newton para aproximar el valor de x que corresponde a una deflexión de 0.01 plg.

18. Una columna cilíndrica maciza vertical, de radio fijo r y que soporta su propio peso, finalmente se pandeará cuanto se incremente su altura. Puede demostrarse que la altura máxima, o crítica, de tal columna es $h_{cr} = kr^{2/3}$, en donde k es una constante y r se mide en metros. Use el método de Newton para aproximar el diámetro de una columna para la cual h_{cr} = 10 m y k = 35.

19. Un rayo de luz que emana de un punto P en un medio A, cuyo índice de refracción es n_1, incide en la superficie de un medio B, cuyo índice de refracción es n_2. Puede demostrarse, con base en la ley de Snell (véase el Problema 45 de los Ejercicios 4.7), que el rayo se refracta tangencialmente a la superficie cuando el ángulo tiene el valor crítico determinado por $\operatorname{sen} \theta_c = n_2/n_1$, $0 < \theta_c < 90°$. Para ángulos de incidencia mayores que el ángulo crítico, toda la luz se refleja hacia el interior del medio A. Véase la Figura 3.48. Si n_2 = 1 para el aire y n_1 = 1.5 para el vidrio, use el método de Newton para aproximar θ_c en radianes.

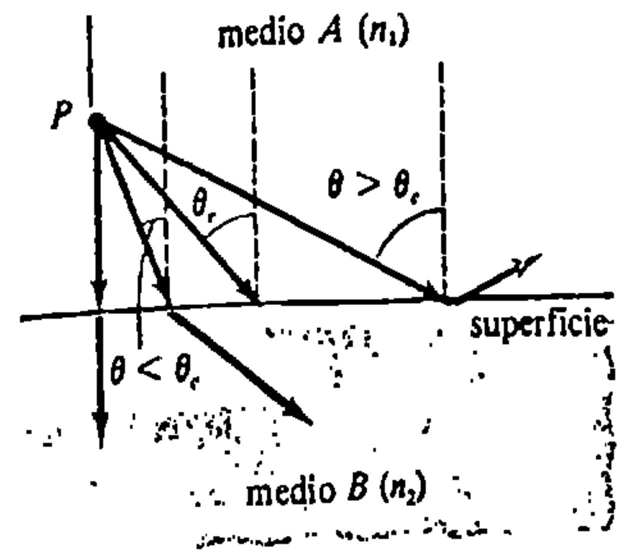


Figura 3.48

20. Para un puente colgante, la longitud s de un cable entre dos soportes verticales, cuya separación es l (distancia horizontal) está relacionada con la flecha d del cable mediante

$$s = l + \frac{8d^2}{3l} - \frac{32d^4}{5l^3}.$$

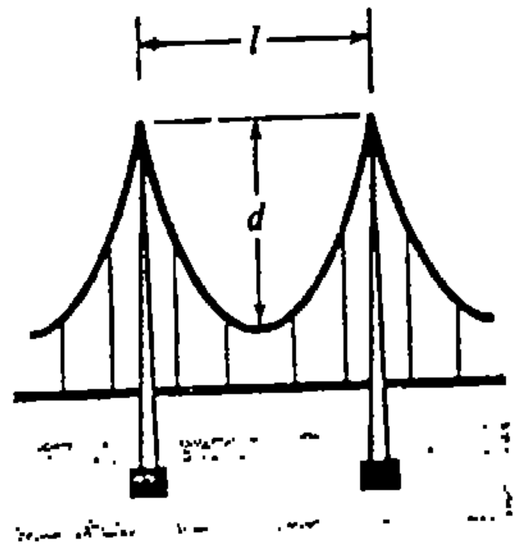


Figura 3.49

Véase la Figura 3.49. Si s = 404 pie y l = 400 pie, use el método de Newton para evaluar aproximadamente la flecha. Redondee su respuesta a una cifra decimal.* (*Indicación:* la raíz c satisface $20 < c < 30$.)

Problemas diversos

21. Sea f una función diferenciable. Demuestre que si $f(x_0) = -f(x_1)$ y $f'(x_0) = f'(x_1)$, entonces (3.66) implica que $x_2 = x_0$.

22. Dada

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{4 - x} & \text{si } x < 4 \\ \sqrt{x - 4} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

obsérvese que $f(4) = 0$. Demuestre que para cualquier selección de x_0 el método de Newton no convergerá a la raíz. (*Sugerencia:* Véase el Problema 21.)

23. Demuestre que para encontrar la raíz r-ésima de un número N, (3.66) se convierte en

$$x_{n+1} = \frac{1}{r}\left[(r - 1)x_n + \frac{N}{x_n^{r-1}}\right].$$

Examen • Capítulo 3

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 972.

En los Problemas 1-16 conteste verdadero o falso.

1. La razón de cambio instantánea de $y = f(x)$ con respecto a x en x_0 es la pendiente de la recta tangente a la gráfica en $(x_0, f(x_0))$. ______

2. Si f es diferenciable para todo valor de x, entonces f es continua para todo valor de x. ______

3. Si f no es diferenciable en $x = a$, no existe tangente a la gráfica en $(a, f(a))$. ______

4. Para $f(x) = -x^2 + 5x + 1$ una ecuación de la recta tangente es $f'(x) = -2x + 5$. ______

5. La función $f(x) = x/(x^2 + 9)$ es diferenciable en el intervalo $[-3, 3]$. ______

6. La función $f(x) = |x - 2|$ no es diferenciable en $(-\infty, \infty)$. ______

7. La derivada de un producto es el producto de las derivadas. ______

8. Una función polinomial tiene recta tangente en cada punto de su gráfica. ______

9. Si $f'(x) = g'(x)$, entonces $f(x) = g(x)$. ______

10. Las reglas de la potencia consideradas en este capítulo para diferenciar $f(x) = x^n$ implican que $\frac{d}{dx} x^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\, x^{\sqrt{2}-1}$. ______

11. Si $f(x) = \sqrt{2kx}$, con k constante, entonces $f'(x) = k/f(x)$. ______

* La fórmula para s es solamente una aproximación.

12. En $x = -1$ la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ es paralela a la recta $y = 2$. ______

13. Si f es continua y $f(a)f(b) < 0$, existe una raíz de $f(x) = 0$ en el intervalo (a, b). ______

14. La ecuación $x^4 = -x + 3$ tiene dos raíces reales. ______

15. El método de Newton siempre converge cuando la aproximación inicial x_0 se escoge muy cerca de la raíz c. ______

16. El método de Newton no convergerá a la raíz real de $x^3 - 2x^2 + x - 7 = 0$ para $x_0 = 1$. ______

En los Problemas 17-30 llene los espacios en blanco.

17. Si k es constante y n un entero positivo, entonces $\frac{d}{dx}k^n$ ______.

18. Si $y = f(x)$ es una función continua, la razón media de cambio de f en el intervalo $[a, a + \Delta x]$ es ______.

19. Para $f(x) = x^3$ la pendiente de la tangente en $(3, f(3))$ es

$$m_{\tan} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\_\_ + \Delta x)^3 - (\_\_)}{\Delta x}.$$

20. La función $f(x) = \cot x$ no es diferenciable en $[0, \pi]$ porque ______.

21. Si $f'(x) = x^2$, entonces $\frac{d}{dx}f(x^3) =$ ______.

22. Si $f(2) = 1, f'(2) = 5, g(2) = 2$ y $g'(2) = -3$, entonces $\left.\frac{d}{dx}\frac{x^2 f(x)}{g(x)}\right|_{x=2} =$ ______.

23. Si $y = \operatorname{sen} x$, entonces $\frac{d^4y}{dx^4} =$ ______.

24. Si $y = f(x)$ es una función polinomial de grado 3, entonces $\frac{d^4}{dx^4}f(x) =$ ______.

25. Si $f'(4) = 6$ y $g'(4) = 3$, entonces la pendiente de la tangente a la gráfica de $y = 2f(x) - 5g(x)$ en $x = 4$ es ______.

26. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{5x} =$ ______.

27. $\lim_{t \to 1} \frac{1 - \cos^2(t - 1)}{t - 1} =$ ______.

28. La pendiente de la recta perpendicular a la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \tan x$ en $x = \pi/3$ es ______.

29. Para $f(x) = 1/(1 - 3x)$ la razón de cambio instantánea de f' en $x = 0$ es ______.

30. El dominio de f' para $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x - 1}$ es ______.

31. Dado que $y = \cos x^2$, encuentre todos los valores de x para los que $dy/dx = 0$.

32. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = (x + 3)/(x - 2)$ en $x = 0$.

33. Encuentre ecuaciones para las rectas que pasen por $(0, -9)$ y sean tangentes a la gráfica de $y = x^2$.

34. Encuentre Δy y dy para la función $y = x + 1/x$.

35. Use una diferencial para determinar una aproximación para $1/\sqrt[3]{68}$.

36. Dado que $x^2 - y^2 = x^3y$ define una función diferenciable, encuentre dy/dx.

37. Dada $x^{1/3} + y^{1/3} = 1$, obtenga d^2y/dx^2.

38. Considere la ecuación $y^3 = 64x^2$. Use dos métodos diferentes para encontrar dy/dx.

En los Problemas 39-50 encuentre la derivada de la función dada.

39. $y = \frac{\cos 4x}{4x + 1}$

40. $y = 10 \cot 8x$

41. $f(x) = 2 + 2x + x^{-2} + x^2$

42. $f(x) = x^3 \operatorname{sen}^2 5x$

43. $F(t) = (t + \sqrt{t^2 + 1})^{10}$

44. $g(u) = \sqrt{\frac{6u - 1}{u + 7}}$

45. $G(x) = \frac{4x^{0.3}}{5x^{0.2}}$

46. $h(\theta) = \theta^{1.5}(\theta^2 + 1)^{0.5}$

47. $y = \sqrt[4]{x^4 + 16}\,\sqrt[3]{x^3 + 8}$

48. $y = \tan^2(\cos 2x)$

49. $y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

50. $y = \frac{1}{x^3 + 4x^2 - 6x + 11}$

En los Problemas 51-54 obtenga la derivada indicada

51. $y = (3x)^{5/2}; \frac{d^3y}{dx^3}$

52. $y = \operatorname{sen}(x^3 - 2x); \frac{d^2y}{dx^2}$

53. $s = t^2 + \frac{1}{t^2}; \frac{d^2s}{dt^2}$

54. $W = \frac{v - 1}{v + 1}; \frac{d^3W}{dv^3}$

En los Problemas 55 y 56 use el método de Newton para encontrar la raíz indicada. Lleve a cabo el método hasta que dos iterantes consecutivos coincidan en sus cuatro primeros decimales.

55. $x^3 - 4x + 2 = 0$, la mayor raíz positiva

56. $\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 = \frac{1}{2}$, la menor raíz positiva

4

Aplicaciones de la derivada

La derivada es una razón de cambio. Geométricamente, tal razón de cambio es la pendiente de una recta tangente a la gráfica de una función. En la Sección 4.1 se explicará con más detalles un concepto discutido brevemente en la Sección 3.1; a saber, la razón de cambio con respecto al tiempo de una función que da la posición de un objeto en movimiento, es la velocidad del objeto. Sin embargo, en la Sección 4.2 se verá que una razón de cambio con respecto al tiempo tiene otras interpretaciones. La noción de razón, junto con el problema de encontrar los valores máximo y mínimo de una función, son los temas centrales de estudio en este capítulo.

4.1 Movimiento rectilíneo y la derivada

En la Sección 3.1 se llamó **movimiento rectilíneo** al de un objeto en línea recta, bien sea horizontal o vertical. A una función s que proporcione la coordenada del objeto sobre dicha recta se la llama **función de posición**. La variable t representa el tiempo y $s(t)$ es una distancia dirigida que se mide en centímetros, metros, pies, millas, etcétera, desde un punto de referencia $s = 0$. Recuérdese que en una escala horizontal se considera positiva la dirección s hacia la derecha de $s = 0$, y en una escala vertical, la dirección s hacia arriba.

Ejemplo 1

Una partícula se mueve sobre una recta horizontal, de acuerdo con la función de posición $s(t) = -t^2 + 4t + 3$, en donde s se mide en metros y t en segundos. ¿Cuál es la posición de la partícula a los 0, 2 y 6 segundos?

Solución Sustituyendo en la función de posición, se tiene que

$$s(0) = 3, \quad s(2) = 7, \quad \text{y} \quad s(6) = -9.$$

Como se muestra en la Figura 4.1, $s(6) = -9 < 0$ significa que la posición de la partícula es a la izquierda del punto de referencia $s = 0$.

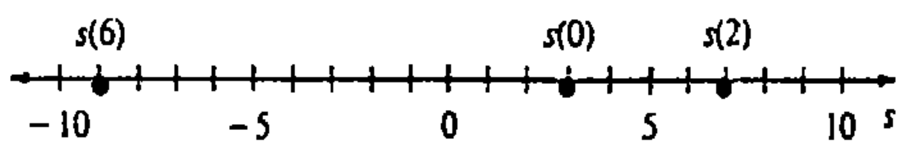


Figura 4.1

Velocidad y aceleración

Si la velocidad media de un cuerpo en movimiento según un intervalo de tiempo Δt es

$$\frac{\text{cambio en la posición}}{\text{cambio en el tiempo}} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t},$$

entonces la razón de cambio instantánea es la velocidad, dada por

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Así que se tiene lo siguiente:

> Si s es una función de posición de un objeto que se mueve en línea recta, entonces su **función de velocidad** en el tiempo t es
>
> $$v(t) = \frac{ds}{dt}.$$
>
> Se llama **rapidez** del objeto en el tiempo t a $|v(t)|$.*

* Esta nomenclatura corresponde impropiamente a la terminología en inglés. Se traduce así la palabra *speed*, como concepto limitado de la velocidad (*velocity*). (N. del RT.)

La velocidad se mide en centímetros por segundo (cm/s), metros por segundo (m/s), pies por segundo (pies/s), kilómetros por hora (km/h), millas por hora (mi/h), etcétera.

A su vez, es posible evaluar la razón de cambio de la velocidad.

> Si $v(t)$ es la velocidad de un objeto que se mueve en línea recta, entonces su **función de aceleración** en el tiempo t es
>
> $$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Las unidades típicas para medir la aceleración son: metros por segundo por segundo (m/s^2), pies por segundo por segundo ($pies/s^2$), millas por hora por hora (mi/h^2), etcétera. A menudo se leen literalmente las unidades de aceleración; por ejemplo "metros por segundo al cuadrado".

Significado de los signos algebraicos

En la Sección 4.4 se verá que siempre que la derivada de una función f es *positiva* en un intervalo I, f es *creciente* en I. Geométricamente, la gráfica de una función creciente se eleva cuando x aumenta. De manera similar, si la derivada de una función f es *negativa* en I, entonces f es *decreciente*, lo cual significa que su gráfica va hacia abajo cuando x aumenta. Así que cuando $v(t) = s'(t) > 0$, puede decirse que $s(t)$ es creciente y que el objeto se mueve hacia la *derecha*. Una velocidad negativa indica movimiento hacia la *izquierda*. De manera semejante, cuando $a(t) > 0$ la velocidad es *creciente*, mientras que si $a(t) < 0$, la velocidad es *decreciente*. Por ejemplo, una aceleración de -25 m/s^2 significa que la velocidad está decreciendo 25 m/s en cada segundo. No hay que confundir "velocidad decreciente" con el concepto de "reducir la marcha"; por ejemplo, considérese una piedra que cae desde lo alto de un gran edificio. La aceleración de la gravedad es una constante negativa, -9.8 m/s^2. El signo negativo significa que la velocidad de la piedra decrece comenzando desde cero. Cuando la piedra choca contra el suelo su rapidez $|v(t)|$ es muy grande, pero $v(t) < 0$. Adviértase que un objeto que se mueve en una línea recta horizontal irá reduciendo su marcha cuando $v(t) > 0$ (movimiento hacia la derecha) y $a(t) < 0$ (velocidad decreciente), o cuando $v(t) < 0$ (movimiento hacia la izquierda) y $a(t) > 0$ (velocidad creciente). En otras palabras, un objeto está reduciendo su marcha cuando su rapidez $|v(t)|$ es decreciente. En física se usa el término *deceleración* cuando un cuerpo móvil reduce su marcha.

Ejemplo 2

En el Ejemplo 1 las funciones de velocidad y de aceleración de la partícula son, respectivamente,

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = -2t + 4 \quad \text{y} \quad a(t) = \frac{dv}{dt} = -2.$$

En los tiempos 0, 2 y 6 segundos, las velocidades son $v(0) = 4$ cm/s, $v(2) = 0$ cm/s y $v(6) = -8$ cm/s, respectivamente. Puesto que la aceleración es siempre negativa, la velocidad es siempre decreciente. Nótese que $v(t) = 2(-t + 2) > 0$ para $t < 2$ y $v(t) = 2(-t + 2) < 0$ para $t > 2$. Si se considera que el tiempo sea tanto negativo como positivo, entonces la partícula se mueve hacia la derecha durante el intervalo de tiempo $(-\infty, 2)$, y hacia la izquierda durante el intervalo de tiempo $(2, \infty)$. El movimiento se puede representar mediante la gráfica dada en la Figura 4.2(a). Puesto que el movimiento tiene lugar realmente *sobre* la recta horizontal, el lector debe visualizar el desplazamiento de un punto P que corresponda a la proyección de un punto de la gráfica sobre la recta horizontal. Véase la Figura 4.2(b).

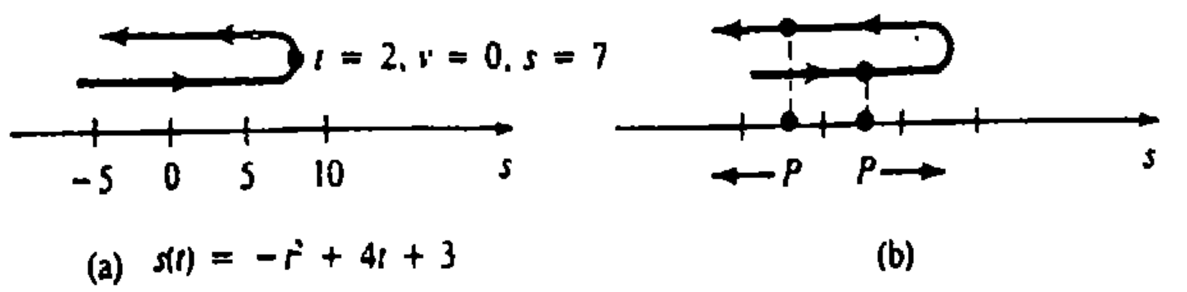


Figura 4.2

Ejemplo 3

Una partícula se mueve sobre una recta horizontal, de acuerdo con la función de posición $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - t$. Determinar los intervalos de tiempo en los que la partícula está reduciendo su marcha.

Solución Una inspección de los signos algebraicos de

$$v(t) = t^2 - 1 = (t + 1)(t - 1)$$

y

$$a(t) = 2t,$$

los cuales se muestran en la escala del tiempo de la Figura 4.3, indica que $v(t)$ y $a(t)$ tienen signos contrarios; por lo tanto, la partícula está reduciendo su marcha en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$.

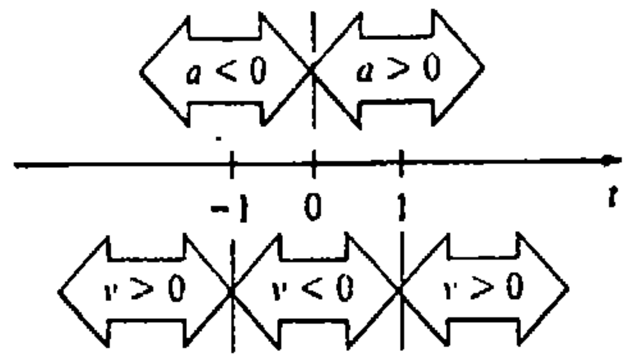


Figura 4.3

Ejemplo 4

Un objeto se mueve en una recta horizontal, de acuerdo con la función de posición $s(t) = t^4 - 18t^2 + 25$, en donde s se mide en centímetros y t en segundos. Utilizar una gráfica para representar el movimiento durante el intervalo de tiempo $[-4, 4]$.

Solución La función de velocidad es

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 4t^3 - 36t$$
$$= 4t(t + 3)(t - 3)$$

y la funcion de aceleración es

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = 12t^2 - 36$$
$$= 12(t + \sqrt{3})(t - \sqrt{3}).$$

Ahora bien, de las soluciones de $v(t) = 0$, pueden determinarse los intervalos de tiempo para los cuales $s(t)$ es creciente o decreciente. Con base en la información dada en las tablas siguientes, se traza la gráfica mostrada en la Figura 4.4.

Intervalo de tiempo	*Signo de v(t)*	*Sentido del movimiento*
$(-4, -3)$	$-$	izquierda
$(-3, 0)$	$+$	derecha
$(0, 3)$	$-$	izquierda
$(3, 4)$	$+$	derecha

Tiempo	*Posición*	*Velocidad*	*Aceleración*
−4	−7	−112	156
−3	−56	0	72
0	25	0	−36
3	−56	0	72
4	−7	112	156

Intervalo de tiempo	*Signo de a(t)*	*Velocidad*
$(-4, -\sqrt{3})$	$+$	creciente
$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$-$	decreciente
$(\sqrt{3}, 4)$	$+$	creciente

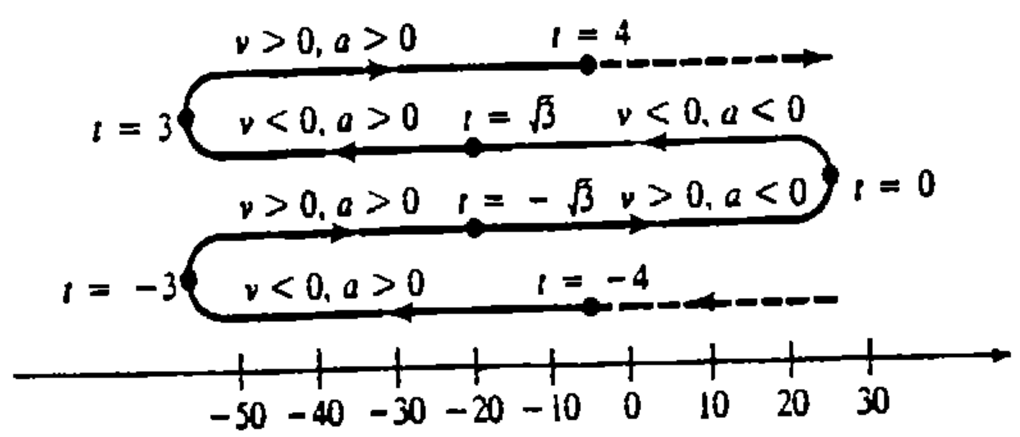


Figura 4.4

Un examen de la Figura 4.4 muestra que la partícula reduce su marcha en los intervalos de tiempo $(-4, -3)$, $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, 3)$.

Ejercicios 4.1

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 972.

En los Problemas 1-8, s es la función de posición de una partícula que se mueve en una recta horizontal. Determine la posición, la velocidad, la rapidez y la aceleración de la partícula en los tiempos señalados.

1. $s(t) = 4t^2 - 6t + 1;\ t = \frac{1}{2},\ t = 3$
2. $s(t) = (2t - 6)^2;\ t = 1,\ t = 4$
3. $s(t) = -t^3 + 3t^2 + t;\ t = -2,\ t = 2$
4. $s(t) = t^4 - t^3 + t,\ t = -1,\ t = 3$
5. $s(t) = t - \frac{1}{t};\ t = \frac{1}{4},\ t = 1$
6. $s(t) = \frac{t}{t+2};\ t = -1,\ t = 0$
7. $s(t) = t + \operatorname{sen} \pi t;\ t = 1,\ t = \frac{3}{2}$
8. $s(t) = t \cos \pi t;\ t = \frac{1}{2},\ t = 1$

En los Problemas 9-12, s es una función de posición de una partícula que se mueve en una recta horizontal.

9. $s(t) = t^2 - 4t - 5$
   (a) ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $s(t) = 0$?
   (b) ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $s(t) = 7$?
10. $s(t) = t^3 - 3t^2 + 8$
   (a) ¿Cuál es la posición de la partícula cuando $v(t) = 0$?
   (b) ¿Cuál es la posición de la partícula cuando $a(t) = 0$?
11. $s(t) = t^3 - 4t$
   (a) ¿Cuál es la aceleración de la partícula cuando $v(t) = 2$?
   (b) ¿Cuál es la posición de la partícula cuando $a(t) = 18$?
12. $s(t) = t^2 + 6t + 10$
   (a) ¿Cuál es la posición de la partícula cuando $s(t) = v(t)$?
   (b) ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $v(t) = -a(t)$?

En los Problemas 13 y 14, s es la función de posición de una partícula que se mueve sobre una recta horizontal. Determine los intervalos de tiempo en los que la partícula está disminuyendo su marcha.

13. $s(t) = t^3 - 27t$
14. $s(t) = t^4 - t^3$

En los Problemas 15-24, s es la función de posición de una partícula que se mueve en una recta horizontal. Encuentre las funciones de velocidad y de aceleración. Represente con una gráfica el movimiento durante el intervalo de tiempo indicado.

15. $s(t) = t^2;\ [-1, 3]$
16. $s(t) = t^3;\ [-2, 2]$
17. $s(t) = t^2 - 4t - 2;\ [-1, 5]$
18. $s(t) = (t + 3)(t - 1);\ [-3, 1]$
19. $s(t) = 2t^3 - 6t^2;\ [-2, 3]$
20. $s(t) = (t - 1)^2(t - 2);\ [-2, 3]$
21. $s(t) = 3t^4 - 8t^3;\ [-1, 3]$
22. $s(t) = t^4 - 4t^3 - 8t^2 + 60;\ [-2, 5]$
23. $s(t) = t - 4\sqrt{t};\ [1, 9]$
24. $s(t) = 1 + \cos \pi t;\ [-1/2, 5/2]$
25. En la Figura 4.5 se muestra la gráfica de una función de posición en el plano st. Complete la tabla adjunta, indicando si $v(t)$ y $a(t)$ son positivas, negativas o cero.

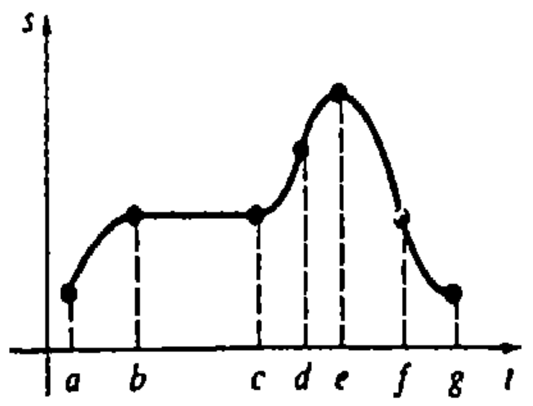


Figura 4.5

Intervalo	$v(t)$	$a(t)$
(a, b)		
(b, c)		
(c, d)		
(d, e)		
(e, f)		
(f, g)		

26. En la Figura 4.6 se muestra la gráfica de la función de velocidad v de una partícula que se mueve en una recta horizontal. Trace una gráfica posible de la función de posición s.

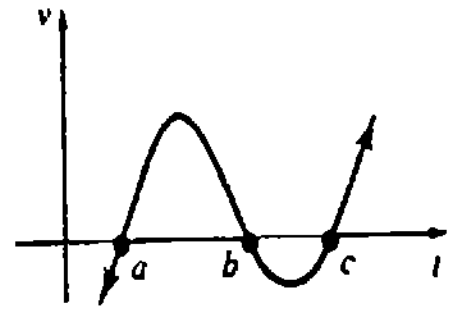


Figura 4.6

27. La altura (en pies) de un proyectil lanzado verticalmente hacia arriba, desde el nivel del suelo, está dada por $s(t) = -16t^2 + 48t$.
   (a) Determine el intervalo de tiempo para el cual $v > 0$ y el intervalo de tiempo para el cual $v < 0$.
   (b) Halle la altura máxima alcanzada por el proyectil.
28. Una partícula se mueve en una recta horizontal, según la función de posición $s(t) = -t^2 + 10t - 20$, en donde s se mide en centímetros y t en segundos. Determine la distancia total recorrida por la partícula durante el intervalo de tiempo $[-1, 6]$.

Cuando no se toma en cuenta la fricción, la distancia s (en pies) que desciende un cuerpo sobre un plano inclinado un ángulo θ, está dada por $s(t) = 16t^2 \operatorname{sen} \theta$, $[0, t_1]$, en donde $s(0) = 0$, $s(t_1) = L$, y t se mide en segundos. Véase la Figura 4.7. Utilice esta información en los Problemas 29 y 30.

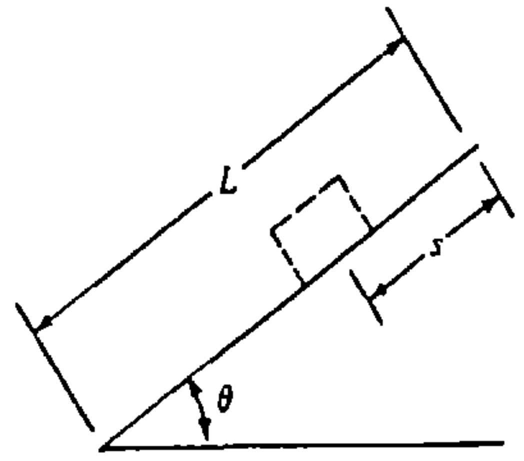


Figura 4.7

29. Un objeto baja deslizándose por una cuesta de 256 pie de largo, cuya inclinación es de 30°. ¿Cuál es la velocidad y la aceleración al pie de la rampa?
30. Un participante en una carrera de carritos hechos de cajas de jabón rueda cuesta abajo en la pendiente que se muestra en la Figura 4.8. ¿Cuáles son la velocidad y la aceleración al final de la pendiente?

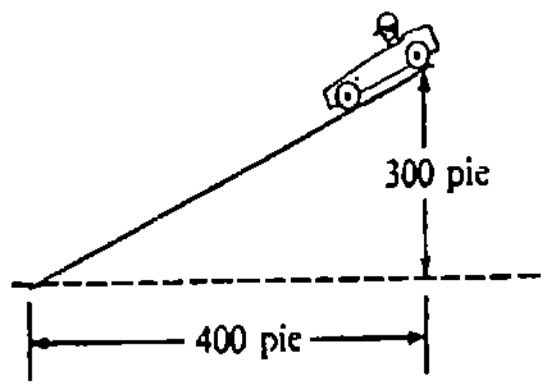


Figura 4.8

31. Una cubeta atada a la cuerda de un torno circular, se deja caer en línea recta bajo la influencia de la gravedad. Si la distancia que desciende la cubeta es igual a la medida en radianes del ángulo indicado en la Figura 4.9, entonces $\theta = \frac{1}{2} gt^2$, en donde g = 32 pie/s² es la aceleración de la gravedad. Obtenga la razón de cambio de la coordenada y de un punto P de la circunferencia del torno cuando $t = \sqrt{\pi}/4$ segundos. Interprete el resultado.

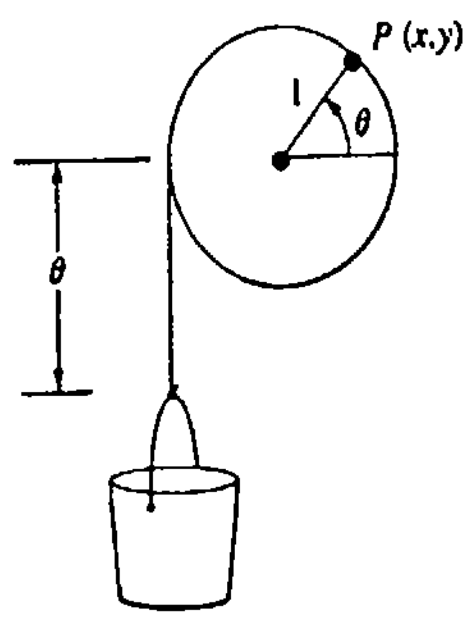
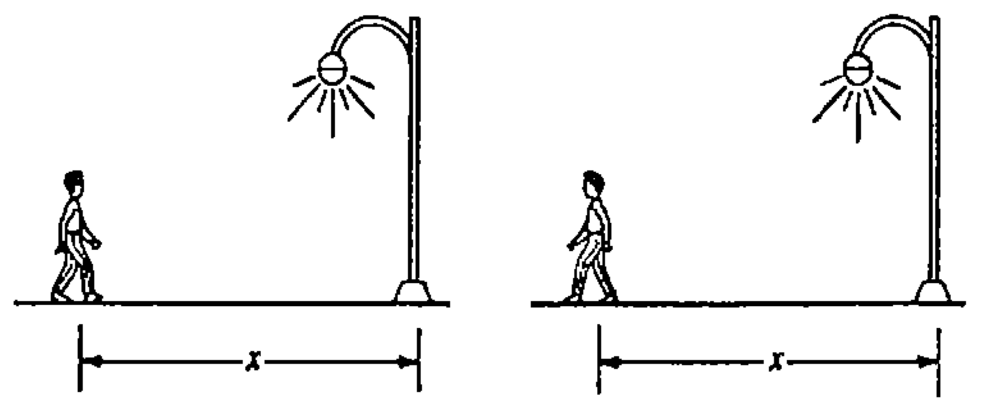


Figura 4.9

4.2 Razones de cambio relacionadas

La derivada dy/dx de una función $y = f(x)$ es su razón de cambio instantánea con respecto a la variable x. Cuando una función describe posición o distancia, entonces su razón de cambio con respecto al tiempo se interpreta como velocidad. En general, una razón de cambio (o intensidad de variación) con respecto al tiempo es la respuesta a la pregunta "¿Cuán *rápido* varía una cantidad?" Por ejemplo, si V representa un volumen que varía o cambia en el tiempo, entonces dV/dt es la razón, o la rapidez, a la cual está variando el volumen con respecto al tiempo t. Una razón de, por ejemplo, $dV/dt = 10$ cm³/s, significa que el volumen está aumentando 10 centímetros cúbicos cada segundo. De manera semejante, si una persona va caminando *hacia* el poste de alumbrado que se ve en la Figura 4.10(a), a una razón constante de 3 pie/s entonces $dx/dt = -3$ pie/s. Por otra parte, si la persona camina *alejándose* del poste entonces $dx/dt = 3$ pie/s. Las razones negativa y positiva significan, desde luego, que la distancia x está decreciendo y creciendo, respectivamente.



(a) $dx/dt < 0$ (b) $dx/dt > 0$

Figura 4.10

En esta sección trataremos de las razones de cambio relacionadas. Puesto que los problemas se plantearán verbalmente, deberán ser interpretados en términos de símbolos matemáticos. Usualmente es buena práctica proceder como sigue:

(*i*) Dibujar una ilustración.

(*ii*) Designar con símbolos todas las cantidades que varían en el tiempo

(*iii*) Analizar el enunciado del problema y distinguir cuáles razones se *conocen* y cuál es la razón que se *requiere*.

(*iv*) Plantear una ecuación que relacione las variables.

(*v*) Derivar la ecuación obtenida en el paso (*iv*) con respecto al tiempo. Este paso requiere del uso de *diferenciación implícita*. La ecuación resultante de la diferenciación, relaciona *las razones* según las cuales cambian las variables.

Recuérdese que si y denota una función de x, entonces la regla de la potencia para funciones da

$$\frac{d}{dx}y^n = ny^{n-1}\frac{dy}{dx}, \qquad (4.1)$$

en donde n es un número racional. Desde luego, (4.1) es aplicable a cualquier función, por ejemplo, r, z o x, que depende de t:

$$\frac{d}{dt}r^n = nr^{n-1}\frac{dr}{dt}, \quad \frac{d}{dt}x^n = nx^{n-1}\frac{dx}{dt}, \quad \frac{d}{dt}z^n = nz^{n-1}\frac{dz}{dt} \qquad (4.2)$$

etcétera.

Ejemplo 1

Un cuadrado se expande con el tiempo. ¿Cómo se relaciona la razón de aumento del área del cuadrado con la razón de aumento de la longitud de su lado?

Solución En cualquier instante el área A es una función de la longitud x del lado:

$$A = x^2. \qquad (4.3)$$

Así que las razones relacionadas se obtienen derivando (4.3) con respecto al tiempo. Con la ayuda del segundo resultado de (4.2), se ve que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}x^2$$

es lo mismo que

$$\frac{dA}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}.$$

razones relacionadas

Ejemplo 2

Se inyecta aire a un globo esférico a razón de 20 pie³/min. ¿A qué razón varía el radio cuando mide 3 pie?

Solución Como se muestra en la Figura 4.11, se denota el radio del globo por r y su volumen por V. Ahora bien, la interpretación de "se inyecta aire. . . a razón de 20 pie³/min" significa que

Dado: $\dfrac{dV}{dt} = 20$ pie³/min.

entonces

Se quiere: $\left.\dfrac{dr}{dt}\right|_{r=3}$.

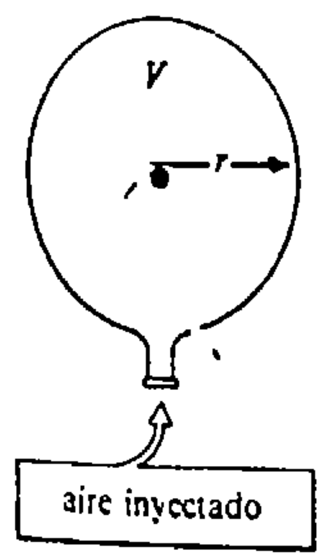


Figura 4.11

Finalmente, la fórmula del volumen de una esfera proporciona una relación entre V y r.

Se conoce: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad (4.4)$

Derivando (4.4) con respecto a t y empleando el primer resultado de (4.2) se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{4}{3}\pi\frac{d}{dt}r^3\\ &= \frac{4}{3}\pi\left(3r^2\frac{dr}{dt}\right)\\ &= 4\pi r^2\frac{dr}{dt}.\end{aligned}$$

Pero $dV/dt = 20$; por lo tanto, $20 = 4\pi r^2 dr/dt$ da

$$\frac{dr}{dt} = \frac{20}{4\pi r^2} = \frac{5}{\pi r^2}.$$

Así que,

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=3} = \frac{5}{9\pi}\text{ pie/min} \approx 0.18\text{ pie/min.}$$

Ejemplo 3

Una mujer que trota con rapidez constante de 10 km/h pasa por un punto P hacia el norte. Diez minutos más tarde un hombre que trota a razón constante de 9 km/h pasa por el mismo punto hacia el este. ¿Cuán rápido varía la distancia entre los trotadores veinte minutos después de que el hombre pasa por P?

Solución Se mide el tiempo en horas a partir del instante en que el hombre pasa por el punto P. Como se muestra en la Figura 4.12, en $t > 0$ supóngase que el hombre H y la mujer M se encuentran a x y y kilómetros, respectivamente, del punto P. Sea z la distancia correspondiente entre los dos corredores. De modo que

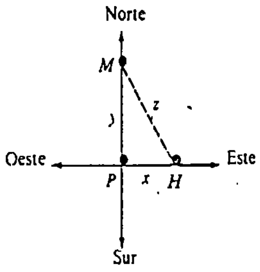


Figura 4.12

Dados: $\dfrac{dx}{dt} = 9$ km/h, $\dfrac{dy}{dt} = 10$ km/h.

Se quiere: $\left.\dfrac{dz}{dt}\right|_{t=1/3}$ [20 min = 1/3 h]

Se conoce: Por el teorema de Pitágoras, las variables x, y y z están relacionadas por

$$z^2 = x^2 + y^2. \tag{4.5}$$

Derivando (4.5) con respecto a t:

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}. \tag{4.6}$$

Sustituyendo en (4.6) las razones conocidas resulta que

$$z\frac{dz}{dt} = 9x + 10y.$$

Cuando $t = \frac{1}{3}$ h se emplea la relación distancia = (velocidad) • (tiempo) para obtener $x = 9 \cdot (\frac{1}{3}) = 3$ km. Puesto que la mujer ha corrido $\frac{1}{6}$ h (10 min) más, entonces $y = 10 \cdot (\frac{1}{3} + \frac{1}{6}) = 5$ km. Así que cuando $t = \frac{1}{3}$ h, $z = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$ km. Finalmente,

$$\sqrt{34}\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1/3} = 9 \cdot 3 + 10 \cdot 5$$

o bien,

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1/3} = \frac{77}{\sqrt{34}} \approx 13.21\text{ km/h.}$$

Ejemplo 4

Un faro se localiza en una pequeña isla a 2 mi (millas) de una costa recta. El haz luminoso del faro gira a una velocidad constante de 6 grados por segundo. ¿Con qué rapidez va desplazándose el rayo de luz a lo largo de la costa en un punto que se encuentra a 3 mi del punto costero más cercano al faro?

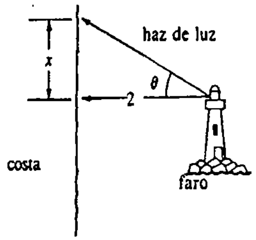


Figura 4.13

Solución Primero introducimos las variables θ y x como se muestra en la Figura 4.13. Además, se cambia la información de θ a radianes, recordando que 1° equivale a $\pi/180$ radianes. Así,

Dado: $\dfrac{d\theta}{dt} = 6 \cdot \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{\pi}{30}$ rad/s

Se quiere: $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{x=3}$

Se conoce: $\dfrac{x}{2} = \tan\theta$ o bien $x = 2\tan\theta$.

Derivando la última ecuación con respecto a t resulta:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}\\ &= \frac{\pi}{15}\sec^2\theta.\end{aligned}$$

$\frac{4}{4}+\frac{9}{4}=\frac{13}{4}$

En el instante $x = 3$, $\tan\theta = 3/2$, así que de la identidad trigonométrica $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$, se tiene que $\sec^2\theta = 13/4$. Por lo tanto,

$\frac{9}{4}$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=3} = \frac{\pi}{15}\cdot\frac{13}{4} = \frac{13\pi}{60}\text{ mi/s.}$$

En física la **cantidad de movimiento** (ímpetu o moméntum) de un cuerpo de masa m, que se mueve en línea recta con velocidad v, se define como $p = mv$.

Ejemplo 5

Un aeroplano de 10^5 kg de masa vuela en línea recta, al tiempo en que se forma hielo en los bordes delanteros de sus alas a una razón constante de 30 kg/h. Véase la Figura 4.14.

(*a*) ¿Cuál es la razón de cambio de la cantidad de movimiento del avión, si vuela a 800 km/h?

(*b*) ¿Cuál es la razón de cambio de la cantidad de movimiento del avión cuando $t = 1$ h, si en ese instante su velocidad es de 750 km/h y aumenta a razón de 20 km/h?

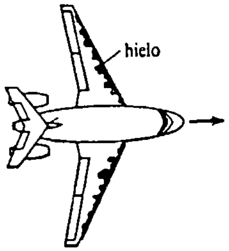


Figura 4.14

Solución

(*a*) **Dado:** $\frac{dm}{dt} = 30$ kg/h

Se quiere: $\frac{dp}{dt}$

Se conoce: La cantidad de movimiento es $p = mv$.

Ahora bien, si v es constante, entonces

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dm}{dt}v = 30 \cdot 800 = 2.4 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{km/h}^2$$

(*b*) **Dados:** $\frac{dm}{dt} = 30$ kg/h, $\quad v(1) = 750, \quad$ y $\quad \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=1} = 20$ km/h²

Se quiere: $\left.\frac{dp}{dt}\right|_{t=1}$

Se conoce: La cantidad de movimiento es $p = mv$.

Cuando varían tanto m como v, la regla del producto da

$$\frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}.$$

Por lo tanto,

$$\left.\frac{dp}{dt}\right|_{t=1} = 10^5 \cdot 20 + 750 \cdot 30 = 2.0225 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{km/h}^2.$$

Observaciones

Las fórmulas enlistadas a continuación pueden ser de utilidad en los problemas que siguen.

Área de un círculo: $A = \pi r^2$

Área de un trapecio: $A = h(l_1 + l_2)/2$

Área de la superficie de una esfera: $S = 4\pi r^2$

Volumen de un cilindro circular: $V = \pi r^2 h$

Volumen de un cono circular: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Volumen de un cono truncado:* $V = \frac{\pi}{3}h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$

Volumen de una esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Ejercicios 4.2

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 973.

1. Un cubo se expande con el tiempo. ¿Cómo se relaciona la razón de aumento del volumen con la razón de incremento de la longitud de su lado?

2. El volumen de una caja rectangular es $V = xyz$. Si se sabe que cada lado aumenta a razón constante de 10 cm/min, encuentre la razón a la cual aumenta el volumen cuando $x = 1$ cm, $y = 2$ cm y $z = 3$ cm.

3. Una placa en forma de triángulo equilátero se expande con el tiempo. Cada lado aumenta a razón constante de 2 cm/h. ¿Con qué rapidez crece el área cuando cada lado mide 8 cm?

4. En el Problema 3, ¿cuál es la razón de crecimiento del área en el instante en que el valor de ésta es $\sqrt{75}$ cm²?

5. Un bote navega hacia el acantilado vertical que se muestra en la Figura 4.15. ¿Cómo están relacionadas las razones de cambio de x, s y θ?

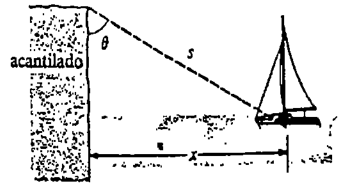


Figura 4.15

6. La resistencia total R en un circuito eléctrico en paralelo que consta de dos resistores con resistencias R_1 y R_2 está dada por $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$. Cada resistencia varía en el tiempo. ¿Cómo están relacionadas dR/dt, dR_1/dt y dR_2/dt?

7. Un insecto va a lo largo de la gráfica de $y = x^2 + 4x + 1$, en donde x y y se miden en centímetros. Si la abscisa x varía a razón constante de 3 cm/min, ¿cuán rápido está variando la ordenada en el punto (2, 13)?

8. En el Problema 7, ¿qué tan rápido varía la ordenada cuando el insecto está 6 cm arriba del eje x?

9. Una partícula se mueve sobre la gráfica de $y^2 = x + 1$ de manera que $dx/dt = 4x + 4$. ¿Cuál es el de dy/dt cuando $x = 8$?

10. Una partícula en movimiento continuo se mueve sobre la gráfica de $4y = x^2 + x$. Halle el punto de la gráfica en el que sean iguales la razón de cambio de la abscisa y la razón de cambio de la ordenada.

11. En la expansión adiabática del aire, la presión P y el volumen V están relacionados por $PV^{1.4} = k$, en donde k es una constante. En cierto momento la presión es 100 lbf/plg² y el volumen es de 32 plg³. ¿A qué razón está variando la presión en ese instante si el volumen está decreciendo a razón de 2 plg³/s?

12. Una piedra soltada en un estanque tranquilo produce una onda circular. Si el radio de la onda aumenta a razón constante de 2 pie/s,

(a) ¿Con qué rapidez aumenta el diámetro?
(b) ¿Con qué rapidez crece la circunferencia?
(c) ¿Cuán rápidamente crece el área cuando el radio es de 3 pie?
(d) ¿Con qué rapidez aumenta el área cuando su valor es 8π pie²?

* Véase la Figura 6.34.

13. Un tanque de aceite en forma de cilindro circular de radio igual a 8 m se está llenando según una razón constante de 10 m^3/min. ¿Con qué rapidez sube el nivel del aceite?

14. Cuando un depósito de agua cilíndrico de 40 pie de diámetro se descarga, el nivel del agua disminuye a razón constante de $\frac{3}{2}$ pie/min. ¿Con qué rapidez está disminuyendo el volumen del agua?

15. Un abrevadero de 20 pie de largo tiene sus extremos verticales en forma de triángulos equiláteros. Si se le bombea agua a razón constante de 4 pie^3/min, ¿con qué rapidez está subiendo el nivel del agua cuando está a 1 pie de altura sobre el fondo?

16. Un abrevadero con extremos verticales en forma de trapecios tiene las dimensiones que se muestran en la Figura 4.16. Si se le bombea agua a razón constante de $\frac{1}{2}$ m^3/s, ¿con qué rapidez está subiendo el nivel del agua cuando esta a $\frac{1}{4}$ m sobre el fondo?

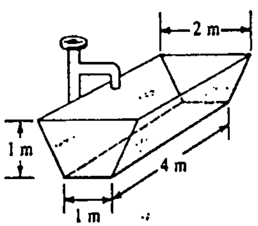


Figura 4.16

17. El agua escapa por la parte inferior del depósito cónico que se muestra en la Figura 4.17, a razón constante de 1 pie^3/min. ¿Con qué rapidez varía el nivel del agua cuando su altura sobre el fondo es de 6 pie? ¿A qué razón cambia el radio del espejo de agua en ese instante?

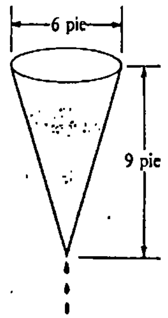


Figura 4.17

18. Una persona de 5 pie de estatura se aleja de un poste de alumbrado de 20 pie de altura a razón constante de 3 pie/s. Véase la Figura 4.10(b).

(a) ¿Con qué razón aumenta la longitud de la sombra de la persona?
(b) ¿Cuán rápidamente se aleja la punta de su sombra de la base del poste?

19. Una escalera de 15 pie se apoya sobre un muro de una casa. El pie de la escalera se separa de la base del muro a razón constante de 2 pie/min. ¿A qué razón se desliza la parte superior de la escalera por el muro cuando el pie de la misma está a 5 pie del muro?

20. La cuerda de una cometa se desenrolla a razón constante de 3 pie/s. Si a una altura de 200 pie el viento arrastra la cometa horizontalmente, ¿cuál es la rapidez con que se mueve la cometa cuando se han desenrollado 400 pie de cuerda?

21. Un avión que vuela paralelo al nivel del suelo a una velocidad constante de 600 mi/h, se aproxima a una estación de radar. Si la altitud del avión es de 2 mi, ¿con qué rapidez decrece la distancia entre el avión y la estación cuando la distancia horizontal entre ellos es de 1.5 mi? Véase la Figura 4.18.

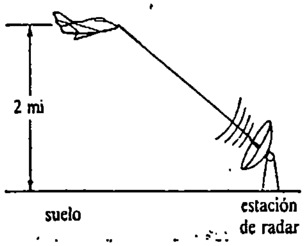


Figura 4.18

22. Respecto al Problema 21, en el punto que está directamente arriba de la estación de radar, el avión inicia un ascenso a 30° manteniendo la misma velocidad. ¿Con qué rapidez crece la distancia entre el avión y la estación de radar un minuto más tarde? (*Sugerencia:* repase la ley de los cosenos.)

23. Un avión a una altitud de 4 km pasa directamente sobre un telescopio de rastreo que se encuentra en tierra. Cuando el ángulo de elevación es de 60°, se observa que dicho ángulo decrece a razón de 30 grados por minuto. ¿Cuál es la velocidad del avión?

24. Un cohete viaja a razón constante de 1000 mi/h según un ángulo de 45° con la horizontal. Véase la Figura 4.19.

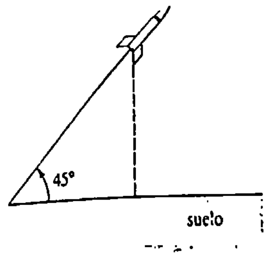


Figura 4.19

(a) ¿Con qué rapidez aumenta su altitud?
(b) ¿Cuál es la velocidad respecto a tierra del cohete?

25. Un telescopio de rastreo, localizado a 1.25 km del punto de lanzamiento de un cohete, sigue a éste, que asciende verticalmente. Cuando el ángulo de elevación es de 60°, dicho ángulo aumenta a razón de 3 grados por segundo. ¿A qué velocidad se mueve el cohete en ese instante?

26. El volumen V comprendido entre dos esferas concéntricas se está ensanchando. El radio de la esfera exterior crece a razón constante de 2 m/h, mientras que el radio de la esfera interna decrece con rapidez constante de $\frac{1}{2}$ m/h. ¿A qué razón está variando V cuando el radio exterior es 3 m, y el radio interior, de 1 m?

27. Muchos objetos esféricos, tales como las gotas de agua de lluvia, las bolas de nieve y las bolas de naftalina, se evaporan a una razón proporcional a sus áreas de superficie. Demuestre que en este caso el radio del objeto decrece a razón constante.

28. Si la rapidez de variación del volumen de una esfera es constante, demuestre que la razón de variación de su área de superficie es inversamente proporcional al radio.

29. Dos buques petroleros parten de la misma terminal flotante. Uno de ellos zarpa al mediodía hacia el Este a una velocidad de 10 nudos. (1 nudo = 1 milla náutica por hora. Una milla náutica es igual a 6080 pie o 1.15 millas terrestres.) El otro buque zarpa a la 1:00 P.M. hacia el norte a una velocidad de 15 nudos. ¿A qué razón está variando la distancia entre los dos barcos a las 2:00 P.M.?

30. A las 8:00 A.M. un barco S_1 debe estar a 20 km al norte de un barco S_2. El barco S_1 navega hacia el sur a una velocidad de 9 km/h y el barco S_2 navega hacia el oeste a una velocidad de 12 km/h. ¿A qué razón varía la distancia entre los dos barcos a las 9:20 A.M.?

31. La arena del reloj cónico que se muestra en la Figura 4.20 fluye de la mitad superior a la mitad inferior, a una razón constante de 4 cm^3/s. Suponga que, a cualquier hora, la altura del cúmulo inferior de arena es h y que tiene la forma de un cono truncado. Exprese la razón a la cual h aumenta en términos de h.

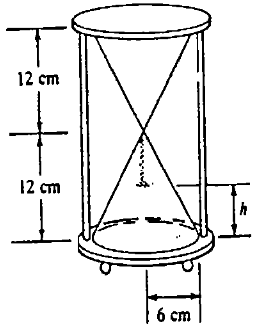


Figura 4.20

32. La "rueda de la fortuna" que se muestra en la Figura 4.21 da una vuelta cada dos minutos. ¿Con qué rapidez se eleva una pasajera en el instante en que se encuentra a 94 pie arriba del suelo? ¿Cuál es su velocidad horizontal en el mismo instante?

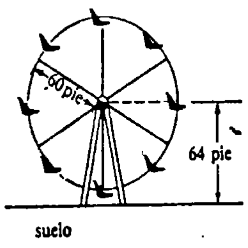


Figura 4.21

4.3 Extremos de funciones

Extremos absolutos

Supóngase que una función f está definida en un intervalo I. Los valores **máximo** y **mínimo** de f en I (si hay algunos) se llaman **extremos** de la función. En las dos siguientes definiciones, se distinguen dos clases de extremos.

DEFINICIÓN 4.1

Extremos absolutos

(*i*) Un número $f(c_1)$ es un **máximo absoluto** de una función f si $f(x) \le f(c_1)$ para todo x en el dominio de f.

(*ii*) Un número $f(c_1)$ es un **mínimo absoluto** de una función f si $f(x) \ge f(c_1)$ para todo x en el dominio de f. □

Los extremos absolutos se denominan también **extremos globales**. La Figura 4.22 muestra varias posibilidades.

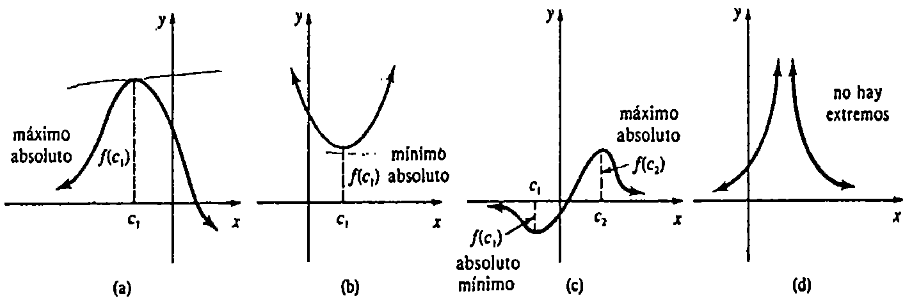


Figura 4.22

Ejemplo 1

(*a*) Para $f(x) = \operatorname{sen} x$, su máximo absoluto es $f(\pi/2) = 1$ y su mínimo absoluto es $f(3\pi/2) = -1$.*

(*b*) La función $f(x) = x^2$ tiene el mínimo absoluto $f(0) = 0$ pero no tiene máximo absoluto.

(*c*) $f(x) = 1/x$ no tiene máximo absoluto ni mínimo absoluto.

Al considerar los extremos es muy importante el intervalo en el que una función está definida.

Ejemplo 2

(*a*) $f(x) = x^2$, definida solamente en el intervalo *cerrado* $[1, 2]$, tiene el máximo absoluto $f(2) = 4$ y el mínimo absoluto $f(1) = 1$. Véase la Figura 4.23.

* Por la periodicidad, los valores máximo y mínimo también ocurren en $x = \pi/2 + 2n\pi$ y $x = 3\pi/2 + 2n\pi$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, respectivamente.

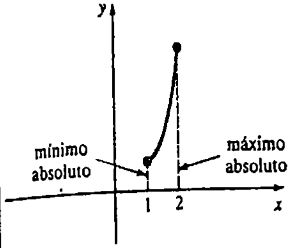


Figura 4.23

(*b*) Por otra parte, si $f(x) = x^2$ está definida en el intervalo *abierto* $(1, 2)$, entonces f no tiene extremos absolutos. En este caso, $f(1)$ y $f(2)$ no están definidas.

(*c*) $f(x) = x^2$, definida en $[-1, 2]$, tiene el máximo absoluto $f(2) = 4$ pero ahora el mínimo absoluto es $f(0) = 0$. Véase la Figura 4.24.

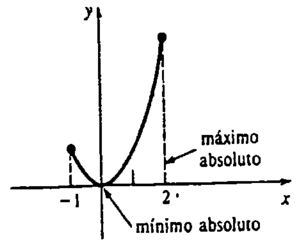


Figura 4.24

Las partes (*a*) y (*c*) del Ejemplo 2 ilustran el resultado siguiente.

TEOREMA 4.1

Teorema de los valores extremos

Una función f continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ siempre tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto en el intervalo. □

En otras palabras, cuando f es continua en $[a, b]$, existen números $f(c_1)$ y $f(c_2)$ tales que $f(c_1) \le f(x) \le f(c_2)$ para todo x en $[a, b]$.

Extremos en la frontera

Cuando un extremo absoluto de una función ocurre en una de las fronteras de un intervalo I, como en las partes (*a*) y (*c*) del Ejemplo 2, se dice que es un **extremo en la frontera**. Cuando I no es un intervalo cerrado, como $[a, b)$, $(-\infty, b)$ o $[a, \infty)$, entonces aun cuando f sea continua no hay garantía de que exista un extremo absoluto. Véase la Figura 4.25.

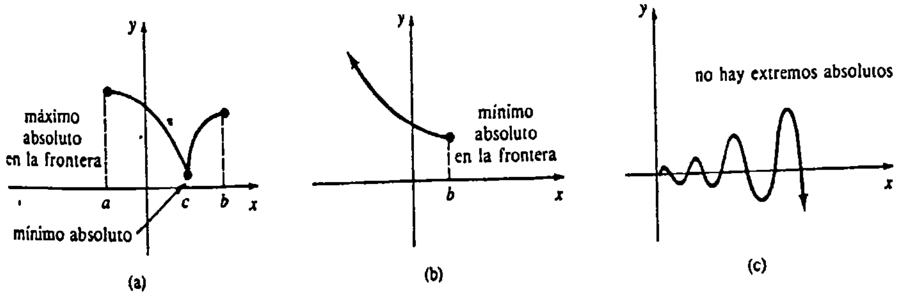


Figura 4.25

Extremos relativos

La función descrita en la Figura 4.26(a) no tiene extremos absolutos. Sin embargo, supóngase que se centra la atención en los valores de x que están cercanos a, o en la *vecindad* de, los números c_1 y c_2. Como se muestra en la Figura 4.26(b), $f(c_1)$ es el valor máximo de la función en el intervalo (a_1, b_1) y $f(c_2)$ es un valor mínimo en el intervalo (a_2, b_2). Estos **extremos relativos o locales** se definen como sigue.

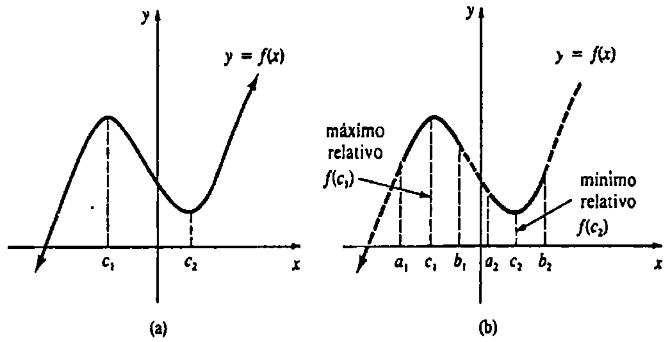


Figura 4.26

DEFINICIÓN 4.2
Extremos relativos

(*i*) Un número $f(c_1)$ es un **máximo relativo** de una función f, si $f(x) \le f(c_1)$ para todo x en algún intervalo abierto que contenga a c_1.

(*ii*) Un número $f(c_1)$ es un **mínimo relativo** de una función f, si $f(x) \ge f(c_1)$ para todo x en algún intervalo abierto que contenga a c_1. □

Como consecuencia de la Definición 4.2, puede concluirse que todo extremo absoluto, con la *excepción* de un extremo en la frontera, es también un extremo relativo. Un extremo absoluto en la frontera está excluido como extremo relativo, con base en el hecho técnico de que un intervalo abierto contenido en el dominio de la función no puede encontrarse alrededor de un punto frontera del intervalo.

Un examen de las Figuras 4.26 y 4.27 indica que si c es un valor en el cual una función f tiene un extremo relativo, entonces $f'(c) = 0$ o bien $f'(c)$ no existe.

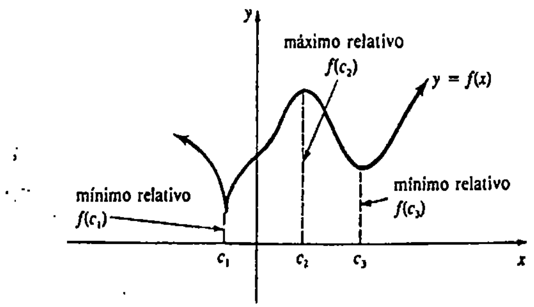


Figura 4.27

DEFINICIÓN 4.3

Un **valor crítico** de una función f es un número c en su dominio para el cual $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe. □

Ejemplo 3

Encontrar los valores críticos de $f(x) = x^3 - 15x + 6$.

Solución

$$f'(x) = 3x^2 - 15$$
$$= 3(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$$

Los valores críticos son aquellos números para los cuales $f'(x) = 0$, a saber, $-\sqrt{5}$ y $\sqrt{5}$.

Ejemplo 4

Encontrar los valores críticos de $f(x) = (x + 4)^{2/3}$.

Solución Por la regla de la potencia para funciones,

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x + 4)^{-1/3}$$
$$= \frac{2}{3(x + 4)^{1/3}}.$$

En este caso se ve que $f'(x)$ no existe cuando $x = -4$. Puesto que -4 está en el dominio de f, se concluye que es un valor crítico.

Ejemplo 5

Encontrar los valores críticos de $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$.

Solución Por la regla del cociente, luego de simplificar, se encuentra que

$$f'(x) = \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2}.$$

Ahora bien, $f'(x) = 0$ cuando $x = 0$ y $x = 2$, mientras que $f'(x)$ no existe cuando $x = 1$. Sin embargo, una inspección a f revela que $x = 1$ no está en su dominio, así que los únicos valores críticos son 0 y 2.

TEOREMA 4.2

Si una función f tiene un extremo relativo en un número c, entonces c es un valor crítico.

Demostración Supóngase que $f(c)$ es un extremo relativo.

(*i*) Si $f'(c)$ no existe, entonces c es un valor crítico por la Definición 4.3.

(*ii*) Si $f'(c)$ existe, hay tres posibilidades: $f'(c) > 0$, $f'(c) < 0$, o bien $f'(c) = 0$. Para el razonamiento, supóngase además que $f(c)$ es un máximo relativo. Por lo tanto, por la Definición 4.2, existe algún intervalo abierto que contiene a c en el cual

$$f(c + \Delta x) \le f(c), \tag{4.7}$$

en donde el número Δx es suficientemente pequeño en valor absoluto. La desigualdad (4.7) implica entonces que

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \le 0 \quad \text{para } \Delta x > 0 \tag{4.8}$$

y

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \ge 0 \quad \text{para } \Delta x < 0. \tag{4.9}$$

Pero puesto que $\lim_{\Delta x \to 0} [f(c + \Delta x) - f(c)]/\Delta x$ existe y es igual a $f'(c)$, las expresiones (4.8) y (4.9) muestran que $f'(c) \le 0$ y $f'(c) \ge 0$, respectivamente. La única manera en que esto puede suceder es teniendo $f'(c) = 0$. Se deja como ejercicio la demostración del caso en el que $f(c)$ es un mínimo relativo. □

Se ha visto que una función continua en un intervalo *cerrado* tiene tanto un máximo absoluto como un mínimo absoluto. El teorema siguiente señala dónde pueden ocurrir estos extremos.

TEOREMA 4.3
Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces un extremo absoluto ocurre en un punto frontera del intervalo o en un valor crítico en el intervalo abierto (a, b). □

Obtención de los extremos absolutos

Se resume el Teorema 4.3 de la manera siguiente. Para encontrar un extremo absoluto de una función f continua en $[a, b]$:

(*i*) Evaluar f en a y en b.
(*ii*) Determinar todos los valores críticos $c_1, c_2, \ldots, c_n$ en (a, b).
(*iii*) Evaluar f en todos los valores críticos.
(*iv*) El más grande y el más pequeño de los valores de la lista.

$$f(a), f(b), f(c_1), \ldots, f(c_n)$$

son el máximo absoluto y el mínimo absoluto, respectivamente, de f en el intervalo $[a, b]$.

Ejemplo 6

Encontrar los extremos absolutos de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 2$ en (*a*) $[-3, 1]$, (*b*) $[-3, 8]$.

Solución Se necesita solamente evaluar f en las fronteras de cada intervalo y en los valores críticos dentro de cada intervalo abierto. De

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 3(x + 2)(x - 4),$$

se observa que los valores críticos de la función son -2 y 4.

(*a*) De los datos de la tabla adjunta, es evidente que el máximo absoluto de f en $[-3, 1]$ es $f(-2) = 30$ y el mínimo absoluto es el extremo en la frontera $f(1) = -24$

en $[-3, 1]$			
x	-3	-2	1
$f(x)$	20	30	-24

(*b*) En el intervalo $[-3, 8]$ se observa que $f(4) = -78$ es un mínimo absoluto y $f(8) = 130$ es un máximo absoluto en la frontera.

en $[-3, 8]$				
x	-3	-2	4	8
$f(x)$	20	30	-78	130

Observaciones

(*i*) Una función puede, desde luego, tomar sus valores máximo y mínimo más de una vez en un intervalo. La Figura 4.28 ilustra dos casos posibles.

(*ii*) El recíproco del Teorema 4.2 no es necesariamente cierto; esto es, un valor crítico de una función no siempre corresponde a un extremo relativo. Considérese $f(x) = x^3$ y $g'(x) = x^{1/3}$. Las derivadas $f'(x) = 3x^2$ y $g(x) = (1/3)x^{-2/3}$ muestran que 0 es un valor crítico de ambas funciones. Pero, como se observa en las gráficas de f y g de la Figura 4.29, ninguna de las dos funciones tiene extremo alguno.

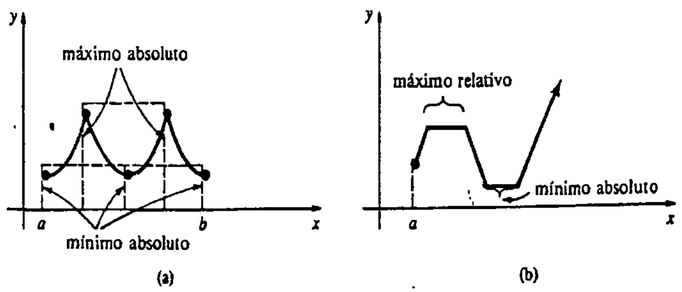
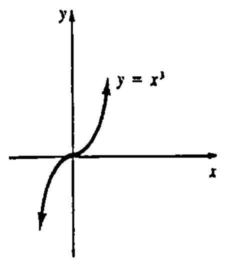
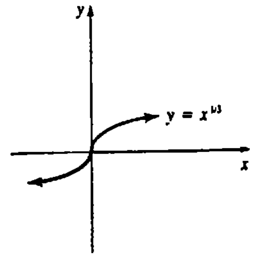


Figura 4.28



(a)



(b)

Figura 4.29

Ejercicios 4.3

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 973.

En los Problemas 1-12 encuentre los valores críticos de la función dada.

1. $f(x) = 2x^2 - 6x + 8$
2. $f(x) = x^3 + x - 2$
3. $f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 36x$
4. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7$
5. $f(x) = \dfrac{1 + x}{\sqrt{x}}$
6. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$
7. $f(x) = (4x - 3)^{1/3}$
8. $f(x) = x^{2/3} + x$
9. $f(x) = (x - 1)^2 \sqrt[3]{x + 2}$
10. $f(x) = \dfrac{x + 4}{\sqrt[3]{x + 1}}$
11. $f(x) = -x + \operatorname{sen} x$
12. $f(x) = \cos 4x$

En los Problemas 13-22 encuentre los extremos absolutos de la función dada en el intervalo indicado.

13. $f(x) = -x^2 + 6x$; $[1, 4]$
14. $f(x) = (x - 1)^2$; $[2, 5]$
15. $f(x) = x^{2/3}$; $[-1, 8]$
16. $f(x) = x^{2/3}(x^2 - 1)$; $[-1, 1]$
17. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$; $[-3, 2]$
18. $f(x) = -x^3 - x^2 + 5x$; $[-2, 2]$
19. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$; $[-4, 3]$
20. $f(x) = x^4 + 4x^3 - 10$; $[0, 4]$
21. $f(x) = x^4(x - 1)^2$; $[-1, 2]$
22. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}$; $[1/4, 1/2]$

En los Problemas 23 y 24 encuentre todos los valores críticos. Distinga entre extremos absolutos, absolutos en la frontera y relativos.

23. $f(x) = x^2 - 2|x|$; $[-2, 3]$
24. $f(x) = \begin{cases} 4x + 12, & -5 \le x \le -2 \\ x^2, & -2 < x \le 1 \end{cases}$

25. Considere la función continua f definida en $[a, b]$ que se muestra en la Figura 4.30. Dado que de c_1 a c_{10} son valores críticos:

(a) Enliste los valores críticos en los que $f'(x) = 0$.
(b) Enumere los valores críticos en los que $f'(x)$ no está definida.

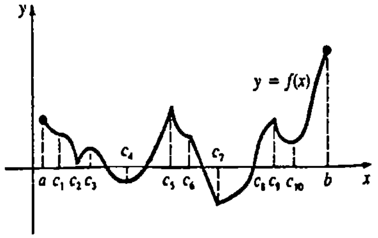


Figura 4.30

(c) Distinga entre los extremos absolutos y absolutos en la frontera.
(d) Distinga entre los máximos relativos y los mínimos relativos.

26. Considere la función $f(x) = x + 1/x$. Demuestre que el mínimo relativo es mayor que el máximo relativo.
27. Dibuje la gráfica de una función continua que carezca de extremos absolutos, pero que tenga un máximo relativo y un mínimo relativo que sean del mismo valor.
28. Proporcione un ejemplo de función continua, definida en un intervalo cerrado $[a, b]$, para el cual el máximo absoluto es igual que el mínimo absoluto.
29. Sea $f(x) = [x]$ la función mayor entero. Demuestre que todo valor de x es un valor crítico.
30. Demuestre que $f(x) = (ax + b)/(cx + d)$ no tiene valores críticos cuando $ad - bc \neq 0$. ¿Qué sucede cuando $ad - bc = 0$?
31. La altura que alcanza un proyectil lanzado desde el nivel del suelo está dada por $s(t) = -16t^2 + 320t$, en donde t se mide en segundos y s en pies.
32. El médico francés Jean Louis Poiseuille descubrió que la velocidad v (en cm/s) de la sangre que fluye a través de una arteria de sección transversal circular está dada por $v(r) = (P/4vl)(R^2 - r^2)$, en donde P, v y l son constantes positivas. Véase la Figura 4.31.

(a) Determine un intervalo cerrado en el cual v esté definida.
(b) Determine las velocidades máxima y mínima de la sangre.

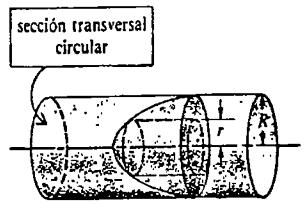


Figura 4.31

Problemas diversos

33. Sea $f(x) = x^n$, en donde n es un entero positivo. Determine los valores de n para los cuales f tiene un extremo relativo.
34. Demuestre que una función polinomial de grado n puede tener a lo sumo $n - 1$ valores críticos.
35. Supóngase que f es una función par continua tal que $f(a)$ es un mínimo relativo. ¿Qué se puede decir acerca de $f(-a)$?
36. Supóngase que f es una función impar continua tal que $f(a)$ es un máximo relativo. ¿Qué se puede decir acerca de $f(-a)$?
37. Demuestre el Teorema 4.2 en el caso en el que $f(c)$ es un mínimo relativo.

4.4 Teorema de Rolle y teorema del valor medio

Cuando $y = f(x)$ es continua y diferenciable en un intervalo $[a, b]$, parece razonable que si $f(a) = f(b) = 0$, entonces su gráfica debe ser como se indica en la Figura 4.32. Cada gráfica sugiere, a su vez, que tiene que haber al menos un punto de ella que corresponda a un número c, en (a, b), en el cual la tangente sea horizontal. Véase la Figura 4.32(c) y (d). Este resultado es formalizado como el teorema de Rolle.*

TEOREMA 4.4

Teorema de Rolle

Sea f continua en $[a, b]$, diferenciable en (a, b) y tal que $f(a) = f(b) = 0$. Entonces existe un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

* Michel Rolle, matemático francés (1652-1719).

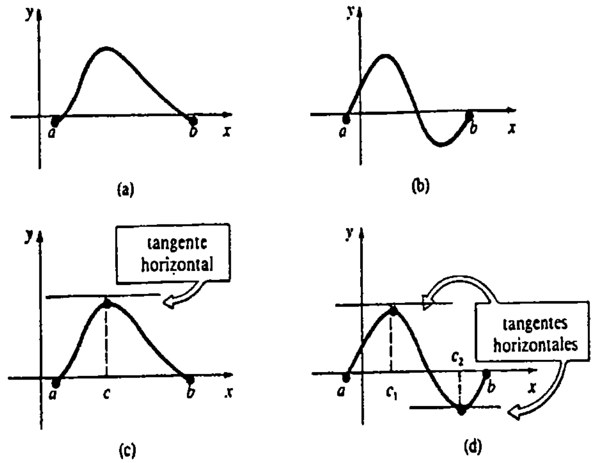


Figura 4.32

Demostración Se hace para el caso en el que $f(x) > 0$ para todo x en (a, b). Del análisis de la Sección 4.3, se sabe que f alcanza un máximo absoluto en algún número c en (a, b). Esto debe ocurrir en un valor crítico. Puesto que f es diferenciable, resulta que $f'(c) = 0$.

Ejemplo 1

Considérese la función $f(x) = -x^3 + x$ definida en $[-1, 1]$. Como f es una función polinomial, es continua en $[-1, 1]$ y diferenciable en $(-1, 1)$. También, $f(-1) = f(1) = 0$. Así que se satisfacen las hipótesis del teorema de Rolle. Se concluye que debe haber al menos un número en $(-1, 1)$ para el cual $f'(x) = -3x^2 + 1$ es cero. Para encontrar este número, se resuelve $f'(c) = 0$, o bien $-3c^2 + 1 = 0$. Esta conduce a *dos* soluciones en el intervalo, $c_1 = -\sqrt{3}/3$ y $c_2 = \sqrt{3}/3$.

Nótese en el ejemplo precedente que la función f dada satisface las hipótesis del teorema de Rolle en $[0, 1]$, así como en $[-1, 1]$. En el caso del intervalo $[0, 1]$, $f'(c) = -3c^2 + 1 = 0$ da lugar a la única solución $c = \sqrt{3}/3$.

El teorema de Rolle es útil para demostrar el siguiente resultado importante.

TEOREMA 4.5
Teorema del valor medio para derivadas

Sea f continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b). Entonces existe un número c en (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demostración Como se muestra en la Figura 4.33, denótese por $D(x)$ la distancia vertical entre un punto de la gráfica de $y = f(x)$ y la recta secante que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Puesto que la ecuación de la recta secante es

$$y - f(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b),$$

se tiene que, como se muestra en la figura,

$$D(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b)\right]. \qquad (4.10)$$

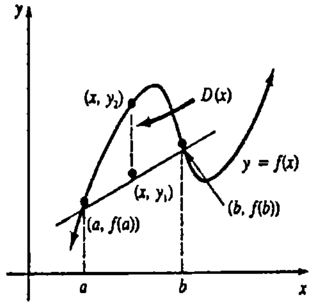


Figura 4.33

Puesto que $D(a) = D(b) = 0$ y D es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), el teorema de Rolle implica que hay algún número c en (a, b) para el cual $D'(c) = 0$. En vista de (4.10),

$$D'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y así $D'(c) = 0$ es lo mismo que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad \square$$

El Teorema 4.5 también se llama **Teorema del valor medio.**

Geométricamente, el teorema del valor medio afirma que la pendiente de la recta tangente en $(c, f(c))$ es igual a la pendiente de la secante que pasa por $(a, f(a))$,

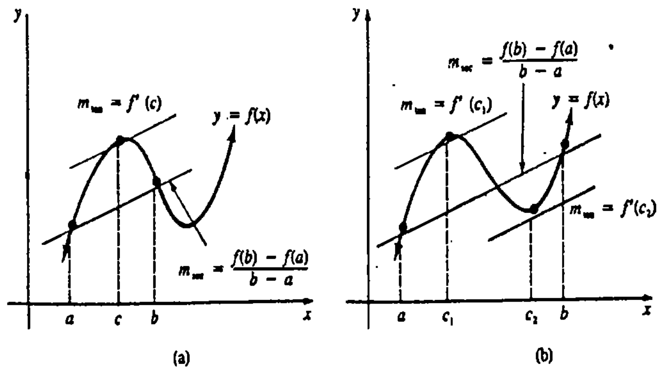


Figura 4.34

$(b, f(b))$. También puede haber más de un número c en (a, b) para los cuales las rectas tangente y secante son paralelas, como se indica en la Figura 4.34(b).

Ejemplo 2

Dada la función $f(x) = x^3 - 12x$ definida en $[-1, 3]$, ¿existe algún número c en $(-1, 3)$ que satisfaga la conclusión del teorema del valor medio?

Solución Puesto que f es una función polinomial, es continua en $[-1, 3]$ y diferenciable en $(-1, 3)$. Ahora bien,

$$f(3) = -9 \quad \text{y} \quad f(-1) = 11,$$
$$f'(x) = 3x^2 - 12 \quad \text{y} \quad f'(c) = 3c^2 - 12$$

y, por consiguiente, debe tenerse que

$$\frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{-20}{4} = 3c^2 - 12.$$

Así que $3c^2 = 7$. Aunque la última ecuación tiene dos soluciones, la única solución en $(-1, 3)$ es $c = \sqrt{7/3} \approx 1.53$.

El teorema del valor medio es muy útil para demostrar otros teoremas. Recuérdese de la Sección 3.3 que si $f(x) = k$ es una función constante, entonces $f'(x) = 0$. El recíproco de este resultado está dado por el siguiente teorema.

TEOREMA 4.6

Si $f'(x) = 0$ para todo x en un intervalo $[a, b]$, entonces $f(x)$ es constante en el intervalo.

Demostración Sean x_1 y x_2 números cualesquiera en $[a, b]$ tales que $x_1 < x_2$. Por el teorema del valor medio, existe un número c en (x_1, x_2) tal que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c).$$

Pero, $f'(c) = 0$ por hipótesis. Por consiguiente, $f(x_2) - f(x_1) = 0$, o bien $f(x_1) = f(x_2)$. Puesto que x_1 y x_2 son escogidos arbitrariamente, la función f tiene el mismo valor en todos los puntos del intervalo. Así que f es constante. □

Funciones creciente y decreciente

Se utilizará el teorema del valor medio para relacionar los conceptos de funciones creciente y decreciente con la noción de derivada.

DEFINICIÓN 4.4

Sea f una función definida en un intervalo I.

(*i*) Se dice que f es creciente en I si $f(x_1) < f(x_2)$ cuando x_1 y x_2 son números en I que satisfacen $x_1 < x_2$.

(*ii*) Se dice que f es decreciente en I si $f(x_1) > f(x_2)$ cuando x_1 y x_2 son números en I que satisfacen $x_1 < x_2$. □

En otras palabras, la gráfica de una función creciente se eleva cuando x aumenta, mientras que la gráfica de una función decreciente desciende cuando x aumenta. La gráfica de la Figura 4.35 ilustra una función f que es creciente en $[b, c]$ y $[d, e]$, y decreciente en $[a, b]$, $[c, d]$ y $[e, h]$.

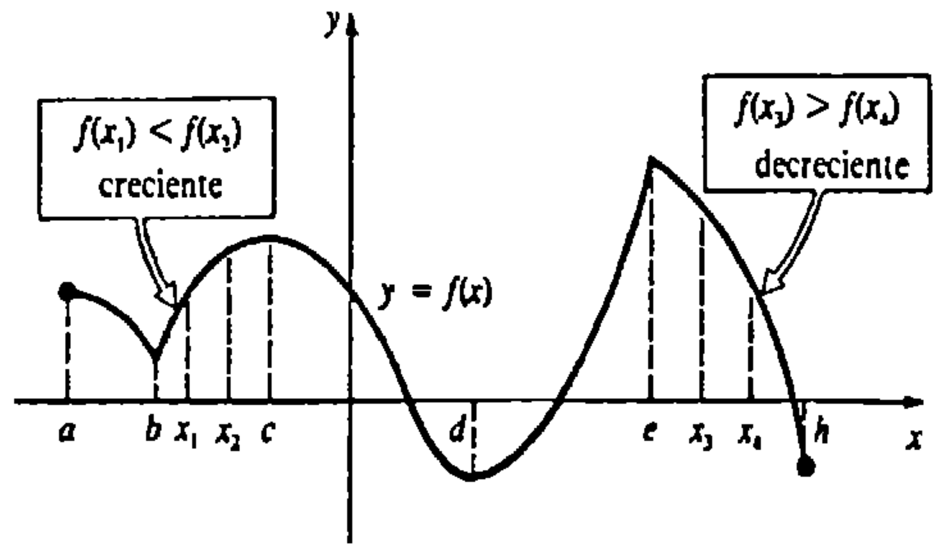


Figura 4.35

TEOREMA 4.7

Sea f continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b).

(*i*) Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b), entonces f es creciente en $[a, b]$.

(*ii*) Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, b), entonces f es decreciente en $[a, b]$.

Demostración de (*i*) Sean x_1 y x_2 números cualesquiera en $[a, b]$ tales que $x_1 < x_2$. Por el teorema del valor medio, existe un número c en (x_1, x_2) tal que $[f(x_2) - f(x_1)]/(x_2 - x_1) = f'(c)$. Pero $f'(c) > 0$ por hipótesis. Por consiguiente, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, o bien $f(x_1) < f(x_2)$. Puesto que x_1 y x_2 son elegidos arbitrariamente, resulta de la Definición 4.4 que f es creciente en $[a, b]$. □

Ejemplo 3

Determinar los intervalos en los que $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x$ es creciente y los intervalos en los que f es decreciente.

Solución La derivada es

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 3(x + 2)(x - 4).$$

Para determinar cuándo $f'(x) > 0$ y $f'(x) < 0$, debe resolverse

$$(x + 2)(x - 4) > 0 \quad \text{y} \quad (x + 2)(x - 4) < 0,$$

respectivamente. Una manera de resolver estas desigualdades es examinar los signos algebraicos de los factores $(x + 2)$ y $(x - 4)$ en los intervalos de la recta numérica determinados por los valores críticos -2 y 4: $(-\infty, -2]$, $[-2, 4]$, $[4, \infty)$. Véase la Figura 4.36.

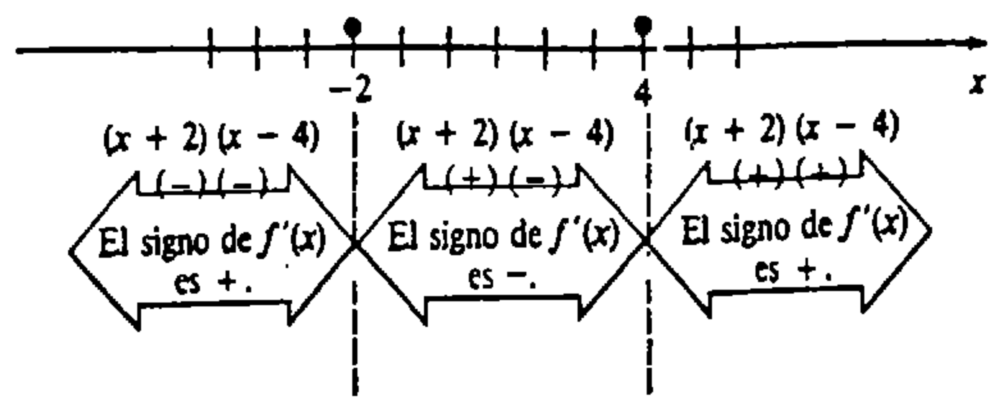


Figura 4.36

La información está resumida en la tabla adjunta.

Intervalo	*Signo de $f'(x)$*	$y = f(x)$
$(-\infty, -2]$	+	creciente
$[-2, 4]$	−	decreciente
$[4, \infty)$	+	creciente

Ejemplo 4

Determinar los intervalos en los que $f(x) = x^{2/3}$ es creciente y los intervalos en los que f es decreciente.

Solución Obsérvese que $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

no está definida en 0. Puesto que 0 está en el dominio de f, se concluye que es un valor crítico. Utilizando los hechos de que $\sqrt[3]{x} < 0$ para $x < 0$ y $\sqrt[3]{x} > 0$ para $x > 0$, se llega a la información dada en la tabla adjunta.

Intervalo	*Signo de $f'(x)$*	$y = f(x)$
$(-\infty, 0]$	−	decreciente
$[0, \infty)$	+	creciente

Si una función f es discontinua en uno o en ambos extremos de $[a, b]$, entonces $f'(x) > 0$ (o $f'(x) < 0$) en (a, b) implica que f es creciente (decreciente) en el intervalo abierto (a, b).

Observaciones

(*i*) Las recíprocas de las partes (*i*) y (*ii*) del Teorema 4.7 no son necesariamente ciertas. En otras palabras, cuando f es una función creciente (o decreciente) en un intervalo, no se deduce que $f'(x) > 0$ (o $f'(x) < 0$). Una función podría ser, por ejemplo, creciente pero sin embargo no diferenciable.

(*ii*) La conclusión del teorema de Rolle también se cumple cuando la condición $f(a) = f(b) = 0$ se reemplaza por $f(a) = f(b)$.

Ejercicios 4.4

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 973.

En los Problemas 1-10 determine si la función dada satisface las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo indicado. Si es así, encuentre todos los valores de c que satisfagan la conclusión del teorema.

1. $f(x) = x^2 - 4$; $[-2, 2]$
2. $f(x) = x^2 - 6x + 5$; $[1, 5]$
3. $f(x) = x^3 + 27$; $[-3, -2]$
4. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x$; $[0, 4]$
5. $f(x) = x^3 + x^2$; $[-1, 0]$
6. $f(x) = x(x - 1)^2$; $[0, 1]$
7. $f(x) = \operatorname{sen} x$; $[-\pi, 2\pi]$
8. $f(x) = \tan x$; $[0, \pi]$
9. $f(x) = x^{2/3} - 1$; $[-1, 1]$
10. $f(x) = x^{2/3} - 3x^{1/3} + 2$; $[1, 8]$

En los Problemas 11-20 determine si la función dada satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo indicado. Si es así, encuentre todos los valores de c que satisfagan la conclusión del teorema.

11. $f(x) = x^2$; $[-1, 7]$
12. $f(x) = -x^2 + 8x - 6$; $[2, 3]$
13. $f(x) = x^3 + x + 2$; $[2, 5]$
14. $f(x) = x^4 - 2x^2$; $[-3, 3]$
15. $f(x) = 1/x$; $[-10, 10]$
16. $f(x) = x + \frac{1}{x}$; $[1, 5]$
17. $f(x) = 1 + \sqrt{x}$; $[0, 9]$
18. $f(x) = \sqrt{4x + 1}$; $[2, 6]$
19. $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$; $[-2, -1]$
20. $f(x) = x^{1/3} - x$; $[-8, 1]$

En los Problemas 21-40 determine los intervalos en los que la función dada f es creciente y los intervalos en los que f es decreciente.

21. $f(x) = x^2 + 5$
22. $f(x) = x^3$
23. $f(x) = x^2 + 6x - 1$
24. $f(x) = -x^2 + 10x + 3$
25. $f(x) = x^3 - 3x^2$
26. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + 1$
27. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 9$
28. $f(x) = 4x^5 - 10x^4 + 2$
29. $f(x) = 1 - x^{1/3}$
30. $f(x) = x^{2/3} - 2x^{1/3}$
31. $f(x) = x + \frac{1}{x}$
32. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$
33. $f(x) = x\sqrt{8 - x^2}$
34. $f(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
35. $f(x) = \frac{5}{x^2 + 1}$
36. $f(x) = \frac{x^2}{x + 1}$
37. $f(x) = x(x - 3)^2$
38. $f(x) = (x^2 - 1)^3$
39. $f(x) = \operatorname{sen} x$
40. $f(x) = -x + \tan x$

41. Un automovilista entra a una autopista y recibe un talón marcado a la 1:15 P.M. Sesenta millas más adelante, cuando el automovilista paga el peaje a las 2.15 P.M., recibe también una boleta de infracción. Explique esto por medio del teorema del valor medio. Suponga que el límite de velocidad es 55 mi/h.

42. En el análisis de la tos humana, se considera que la tráquea es un tubo cilíndrico. El flujo de aire (en cm³/s) por la tráquea durante su contracción está dado por

$$V(r) = kr^4(r_0 - r), \qquad r_0/2 \le r \le r_0,$$

en donde k es una constante positiva y r_0 es su radio cuando no hay diferencia de presión en los extremos del tubo traqueal. Determine un intervalo en el que V sea creciente y un intervalo en el que V sea decreciente. ¿Qué radio proporcionará el máximo flujo de aire?

Problemas diversos

43. Considérese la función $f(x) = x^4 + x^3 - x - 1$. Use esta función y el teorema de Rolle para demostrar que la ecuación $4x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ tiene al menos una raíz en $[-1, 1]$.

44. Demuestre que la ecuación $ax^3 + bx + c = 0$, $a > 0$, $b > 0$, no puede tener dos raíces reales. (*Sugerencia:* considere la función $f(x) = ax^3 + bx + c$. Supóngase que hay dos números r_1 y r_2 tales que $f(r_1) = f(r_2) = 0$.)

45. Demuestre que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene a lo sumo dos raíces reales. (*Sugerencia:* considere la función $f(x) = ax^2 + bx + c$. Supóngase que hay tres números distintos r_1, r_2 y r_3 tales que $f(r_1) = f(r_2) = f(r_3) = 0$.)

46. Para una función polinomial cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, demuestre que el valor de x_3 que satisface la conclusión del teorema del valor medio en cualquier intervalo $[x_1, x_2]$ es $x_3 = (x_1 + x_2)/2$.

Problemas para calculadora

En los Problemas 47 y 48 utilice una calculadora para encontrar un valor de c que satisfaga la conclusión del teorema del valor medio.*

47. $f(x) = \cos 2x$; $[0, \pi/4]$

48. $f(x) = 1 + \operatorname{sen} x$; $[\pi/4, \pi/2]$

4.5 Trazo de gráficas y la primera derivada

El saber si una función tiene o no extremos relativos es una gran ayuda para trazar su gráfica.

Recuérdese que cuando una función tiene un extremo relativo, éste debe ocurrir en un valor crítico. Encontrando los valores críticos de una función, se obtiene una *lista de las abscisas que corresponden, posiblemente, a extremos relativos*. Se combinarán ahora las ideas de las dos secciones precedentes, para concebir dos criterios para determinar cuándo un valor crítico es realmente la coordenada x de un extremo relativo.

Criterio de la primera derivada

Supóngase que f es diferenciable en (a, b) y que c es un valor crítico en el intervalo. Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, c) y $f'(x) < 0$ para todo x en (c, b), entonces la gráfica de f sobre el intervalo (a, b) debe ser como se indica en la Figura 4.37(*a*); esto es, $f(c)$ es un máximo relativo. Por otra parte, cuando $f'(x) < 0$ para todo x en (a, c) y $f'(x) > 0$ para todo x en (c, b), entonces $f(c)$ es un mínimo relativo, como se muestra en la Figura 4.37(b). Hemos demostrado un caso especial del teorema siguiente.

TEOREMA 4.8

Criterio de la primera derivada para extremos relativos

Sea f continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), excepto posiblemente en el valor crítico c.

(*i*) Si $f'(x) > 0$ para $a < x < c$ y $f'(x) < 0$ para $c < x < b$, entonces $f(c)$ es un máximo relativo.

(*ii*) Si $f'(x) < 0$ para $a < x < c$ y $f'(x) > 0$ para $c < x < b$, entonces $f(c)$ es un mínimo relativo.

* En las calculadoras comunes esto requerirá el uso de las teclas INV ó f^{-1}. Por ejemplo, si se especifica el valor de sen x, entonces la función INV dará un valor de x en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Véase la Sección 7.2.

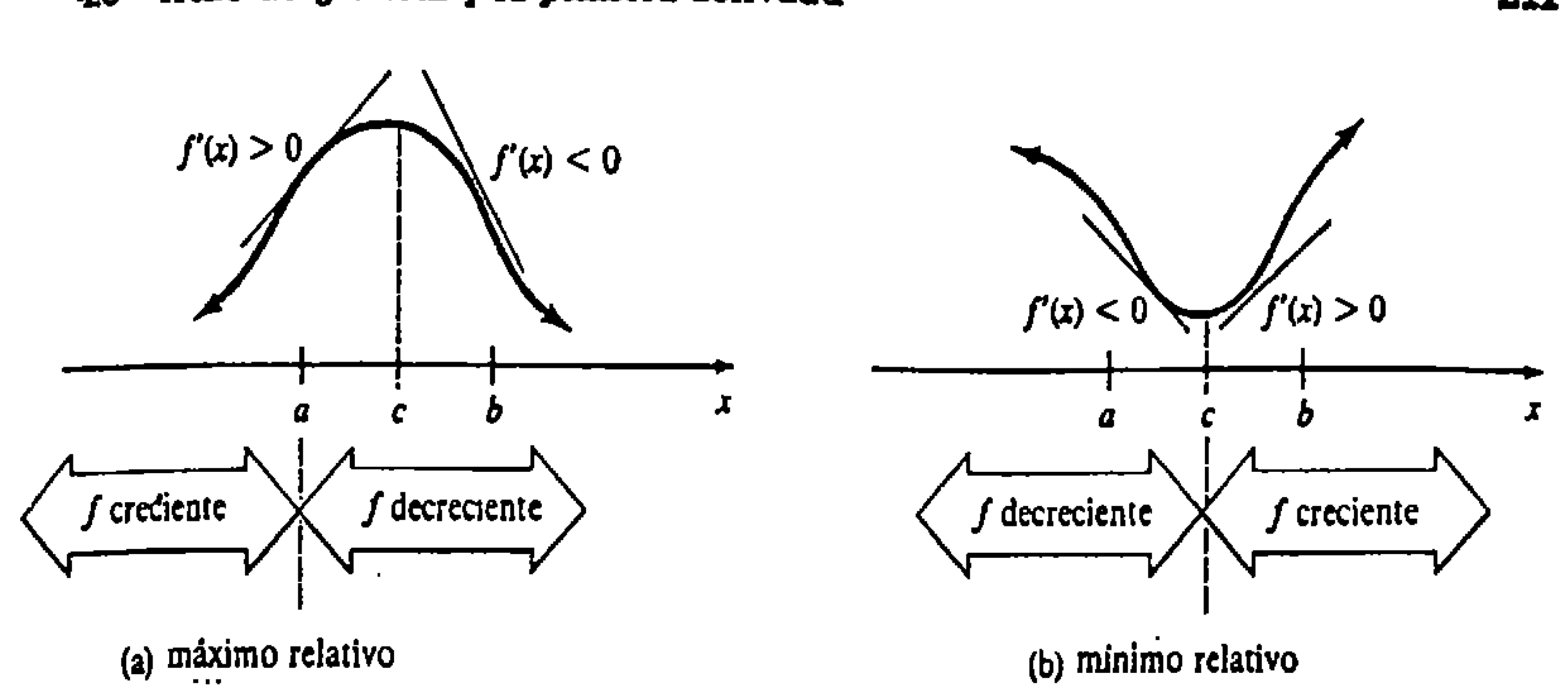


Figura 4.37

(*iii*) Si $f'(x)$ tiene el mismo signo algebraico en $a < x < c$ y $c < x < b$, entonces $f(c)$ no es un extremo. □

Ejemplo 1

Trazar la gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$.

Solución La primera derivada

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x + 1)(x - 3) \tag{4.11}$$

da lugar a los valores críticos -1 y 3. Ahora bien, el criterio de la primera derivada es esencialmente el procedimiento empleado para encontrar los intervalos en los que f es creciente o decreciente. Utilizando (4.11) se observa en la Figura 4.38(a) que $f'(x) > 0$ para $-\infty < x < -1$ y $f'(x) < 0$ para $-1 < x < 3$. De la parte (*i*) del Teorema 4.8 resulta que $f(-1) = 7$ es un máximo relativo. De manera semejante, $f'(x) < 0$ para $-1 < x < 3$ y $f'(x) > 0$ para $3 < x < \infty$. Así que, por la parte (*ii*) del Teorema 4.8, $f(3) = -25$ es un mínimo relativo.

Ahora bien, la gráfica de la función tiene intercepción y, $f(0) = 2$. Además, un examen de la ecuación $x^3 - 3x^2 - 9x + 2 = 0$ indica que -2 es una raíz real y, por consiguiente, una intercepción x. Dividiendo luego entre el factor $x + 2$ se obtiene $(x + 2)(x^2 - 5x + 1) = 0$. La fórmula cuadrática revela dos intercepciones x adicionales:

$$\frac{5 - \sqrt{21}}{2} \approx 0.21 \quad \text{y} \quad \frac{5 + \sqrt{21}}{2} \approx 4.79.$$

Toda esta información en conjunto conduce a la gráfica mostrada en la Figura 4.38(b).

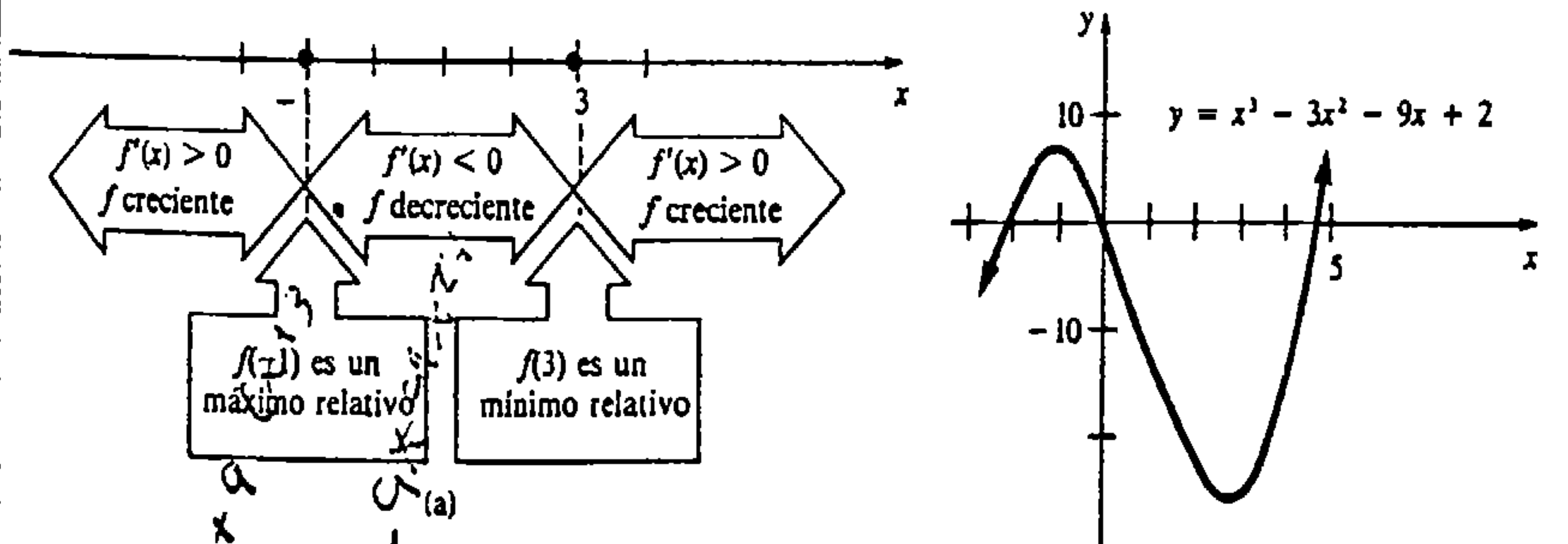


Figura 4.38

Ejemplo 2

Trazar la gráfica de $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Solución Un examen de la función puesta en la forma $f(x) = (x^2 + 1)/x$ revela que la gráfica de f no tiene intersecciones con los ejes, que $x = 0$ es una asíntota vertical y que la gráfica de f es simétrica con respecto al origen, puesto que $f(-x) = -f(x)$. Ahora bien,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

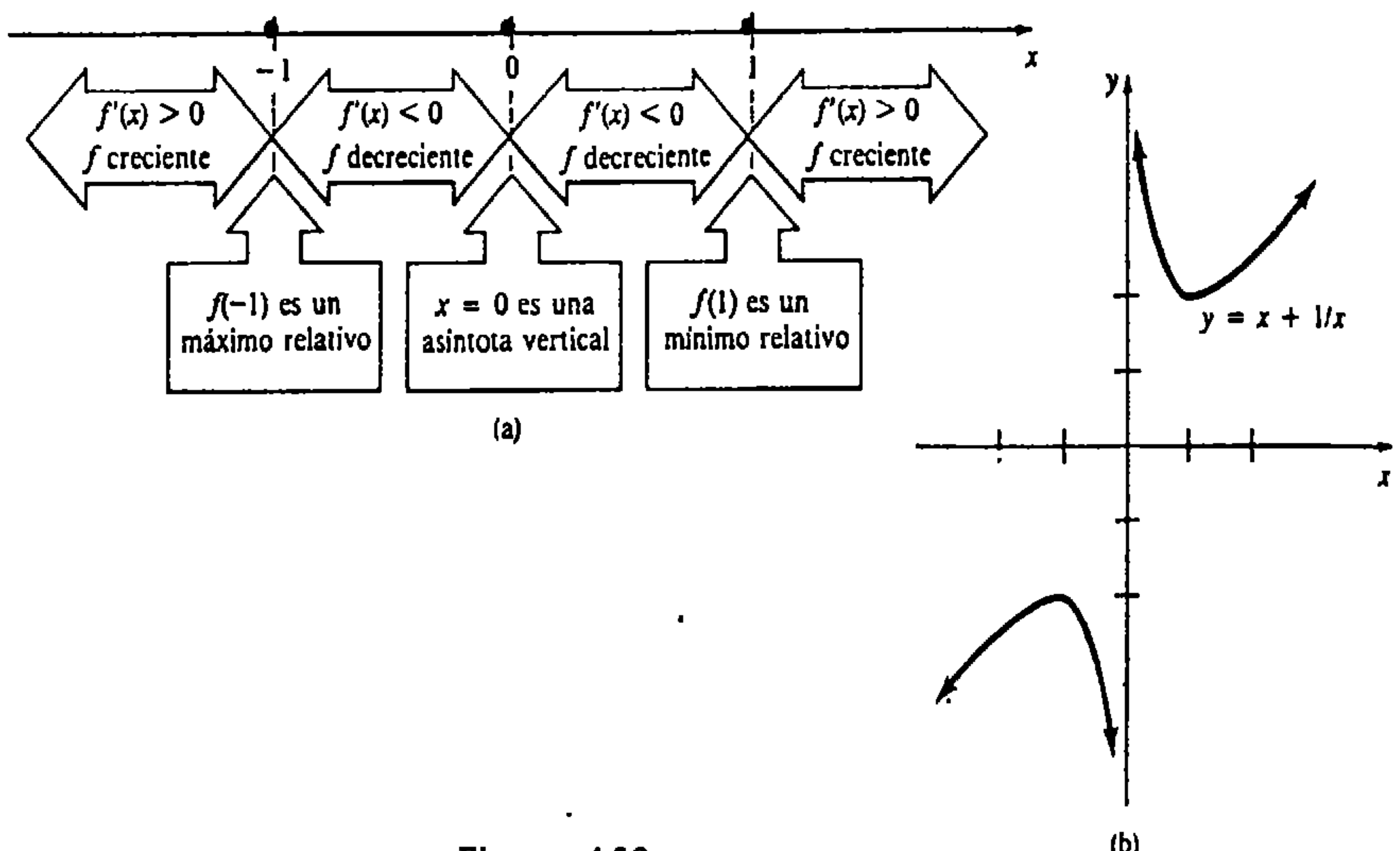


Figura 4.39

muestra que −1 y 1 son valores críticos. En la Figura 4.39(a) se observa que $f'(x) > 0$ para $-\infty < x < -1$ y $f'(x) < 0$ para $-1 < x < 0$. Así que, por el criterio de la primera derivada, se concluye que $f(-1) = -2$ es un máximo relativo. Por la simetría resulta que $f(1) = 2$ es un mínimo relativo. La gráfica de f se muestra en la Figura 4.39(b).

Ejemplo 3

Trazar la gráfica de $f(x) = -x^{5/3} + 5x^{2/3}$.

Solución La derivada es

$$f'(x) = -\frac{5}{3}x^{2/3} + \frac{10}{3}x^{-1/3}$$
$$= \frac{5}{3}x^{-1/3}(-x + 2).$$

Obsérvese que f' no existe en 0, pero 0 está en el dominio de la función puesto que $f(0) = 0$. Los valores críticos son 0 y 2. El criterio de la primera derivada, ilustrado en la Figura 4.40(a), muestra que $f(0) = 0$ es un mínimo relativo y que $f(2) = -(2)^{5/3} + 5(2)^{2/3} \approx 4.76$ es un máximo relativo. Además, puesto que $|f'(x)| \to \infty$ cuando $x \to 0$, hay una tangente vertical en (0, 0). Finalmente, escribiendo $f(x) = x^{2/3}(-x + 5)$, se observa que las intercepciones x son 0 y 5. La gráfica de f se muestra en la Figura 4.40(b).

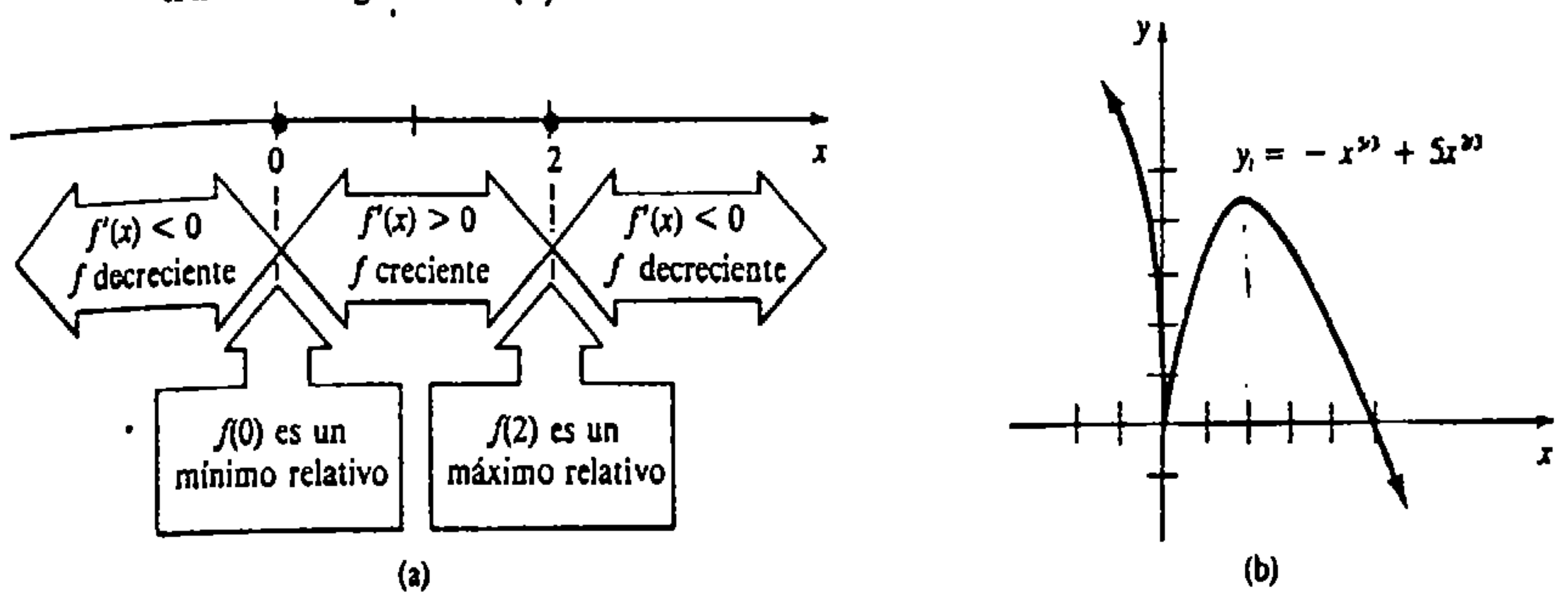


Figura 4.40

Ejemplo 4

Trazar la gráfica de $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$.

Solución La derivada

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$

muestra que 0 y 3 son valores críticos. Ahora bien, como se ve en la Figura 4.41(a), f' tiene el mismo signo algebraico en $(-\infty, 0)$ y $(0, 3)$. Por consiguiente, $f(0) = 10$ no es un extremo. En este caso $f'(0) = 0$ significa solamente que hay una tangente horizontal en (0, 10). Sin embargo, por el criterio de la primera derivada es evidente que $f(3) = -17$ es un mínimo relativo. En efecto, la gráfica de f que se presenta en la Figura 4.41(b) muestra que $f(3)$ también es un mínimo absoluto. En conclusión, se ve que

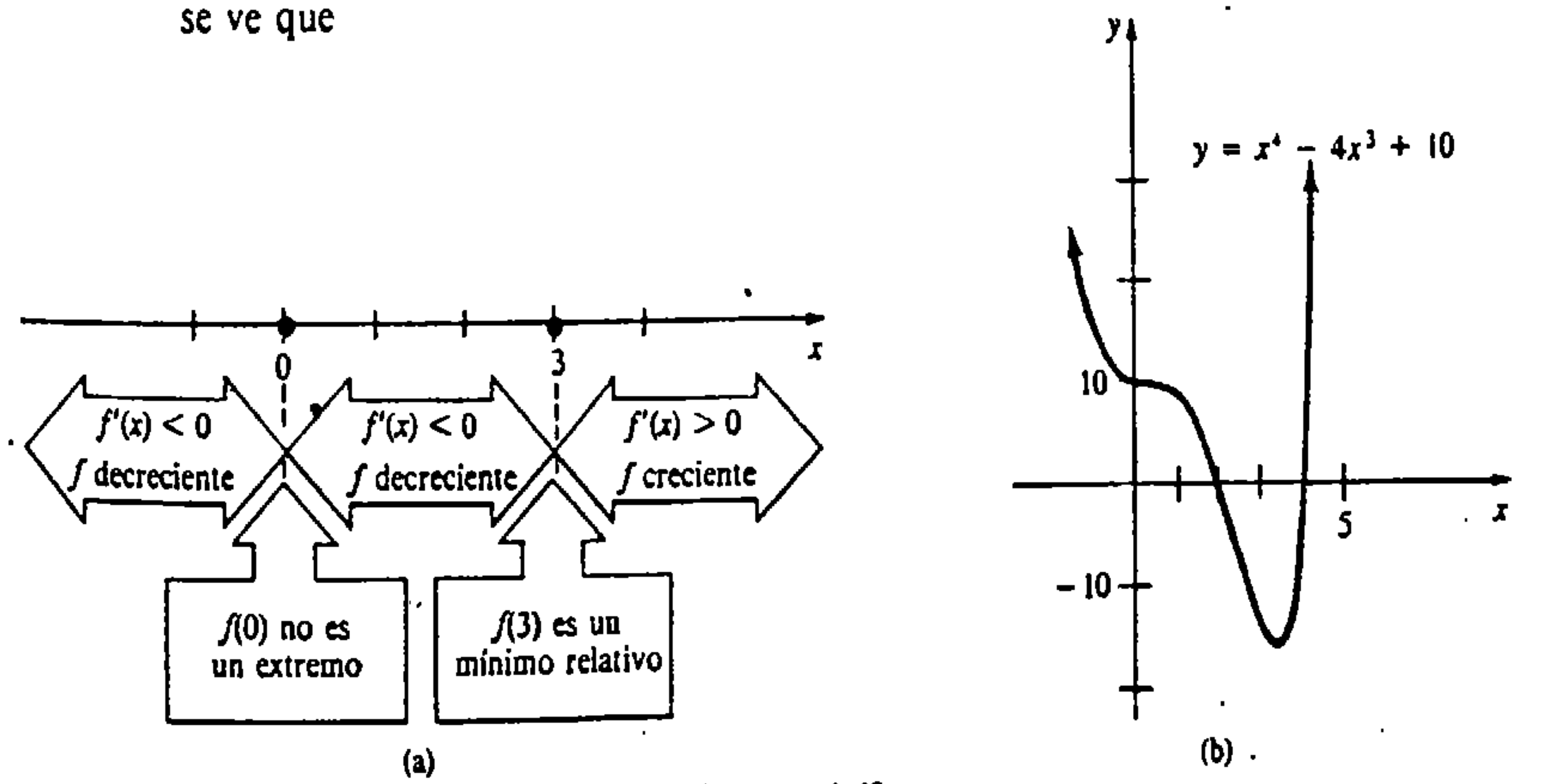
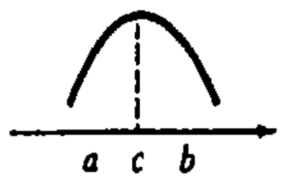
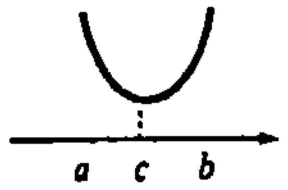
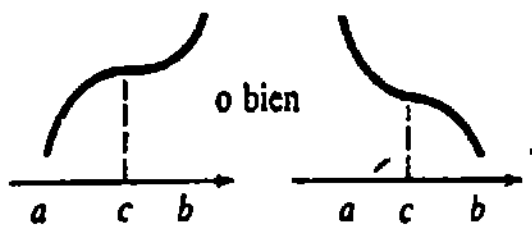


Figura 4.41

la gráfica de f tiene dos intercepciones x. Desafortunadamente, las soluciones reales de $x^4 - 4x^3 + 10 = 0$ no son obvias.

Observación

Se concluye con un resumen tabular del Teorema 4.8, para su uso como una fácil referencia en la solución de los problemas siguientes.

Criterio de la primera derivada			
Valor crítico	*Intervalo*	*Signo de $f'(x)$ en el intervalo*	*Conclusión*
c	(a, c) (c, b)	$+$ $-$	 $f(c)$ es un máximo relativo
c	(a, c) (c, b)	$-$ $+$	 $f(c)$ es un mínimo relativo
c	(a, c) (c, b)	$+ \quad -$ o bien $+ \quad -$	 o bien no hay extremo

Ejercicios 4.5

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 974.

En los Problemas 1-26 utilice el criterio de la primera derivada para encontrar los extremos relativos de la función dada. Trace la gráfica. Encuentre las intersecciones con los ejes cuando sea posible.

1. $f(x) = -x^2 + 2x + 1$
2. $f(x) = (x - 1)(x + 3)$
3. $f(x) = x^3 - 3x$
4. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1$
5. $f(x) = x(x - 2)^2$
6. $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 1$
7. $f(x) = x^4 + 4x$
8. $f(x) = (x^2 - 1)^2$
9. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 2x^2$
10. $f(x) = 2x^4 - 16x^2 + 3$
11. $f(x) = 4x^5 - 5x^4$
12. $f(x) = (x - 2)^2(x + 3)^3$
13. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$
14. $f(x) = x + \dfrac{25}{x}$
15. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}$
16. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$
17. $f(x) = \dfrac{10}{x^2 + 1}$
18. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$
19. $f(x) = (x - 4)^{2/3}$
20. $f(x) = (x^2 - 1)^{1/3}$
21. $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$
22. $f(x) = x(x^2 - 5)^{1/3}$
23. $f(x) = x - 12x^{1/3}$
24. $f(x) = x^{4/3} + 32x^{1/3}$
25. $f(x) = x^{2/3}(x^2 - 16)$
26. $f(x) = (x - 1)^{2/3}(x - 11)$

En los Problemas 27-30 utilice la gráfica de f' para bosquejar la representación gráfica posible de f.

27.

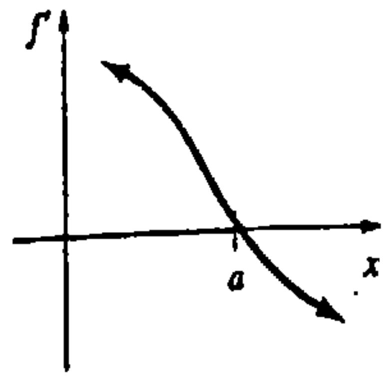


Figura 4.42

28.

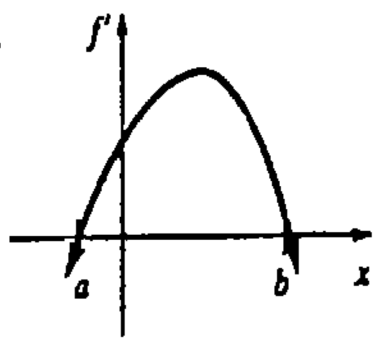


Figura 4.43

29.

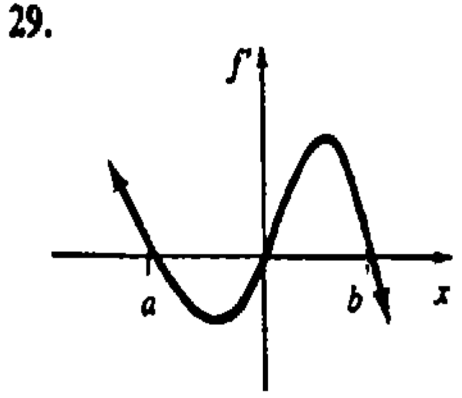


Figura 4.44

30.

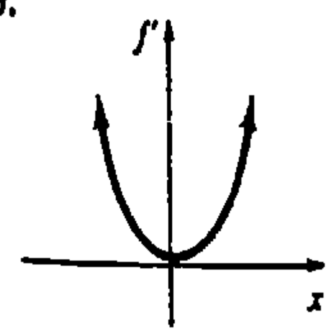


Figura 4.45

En los Problemas 31 y 32 utilice la gráfica de f para bosquejar la gráfica de f'.

31.

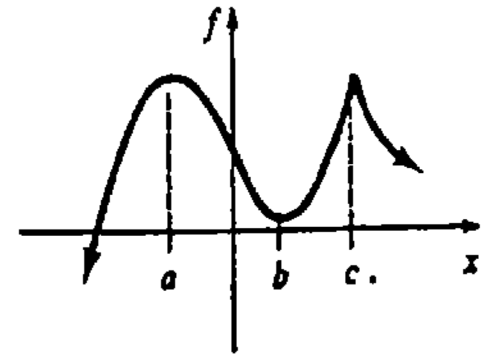


Figura 4.46

32.

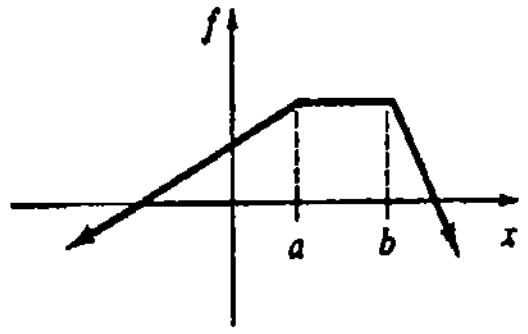


Figura 4.47

En los Problemas 33 y 34 dibuje una gráfica de una función continua f que tenga las propiedades especificadas.

33. $f(-1) = 0, f(0) = 1$
$f'(3)$ no existe, $f'(5) = 0$
$f'(x) > 0, x < 3$ y $x > 5$
$f'(x) < 0, 3 < x < 5$

34. $f(0) = 0$
$f'(-1) = 0, f'(0) = 0, f'(1) = 0$
$f'(x) < 0, x < -1, -1 < x < 0$
$f'(x) > 0, 0 < x < 1, x > 1$

En los Problemas 35 y 36 determine en dónde tiene un máximo relativo o un mínimo relativo la pendiente de la tangente a la gráfica de la función dada.

35. $f(x) = x^3 + 6x^2 - x$
36. $f(x) = x^4 - 6x^2$

37. **(a)** A partir de la gráfica de $g(x) = \operatorname{sen} 2x$ determine los intervalos para los cuales $g(x) > 0$ y los intervalos para los cuales $g(x) < 0$.
(b) Encuentre los valores críticos de $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$. Utilice el criterio de la primera derivada y la información de la parte **(a)** para encontrar los extremos relativos de f.
(c) Trace la gráfica de la función f de la parte **(b)**.

38. **(a)** Encuentre los valores críticos de $f(x) = x - \operatorname{sen} x$.

(b) Demuestre que f no tiene extremos relativos.
(c) Trace la gráfica de f.

39. Encuentre valores de a, b y c tales que $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenga un máximo relativo de 6 en $x = 2$ y que la gráfica de f tenga intercepción y igual a 4.

40. Encuentre valores de a, b, c y d tales que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un mínimo relativo de -3 en $x = 0$ y un máximo relativo de 4 en $x = 1$.

Problemas diversos

41. Suponga que f es una función diferenciable cuya gráfica es simétrica respecto al eje y. Demuestre que $f'(0) = 0$. ¿Tiene f necesariamente un extremo relativo en $x = 0$?

42. Sean m y n enteros positivos. Demuestre que $f(x) = x^m(x-1)^n$ siempre tiene un mínimo relativo.

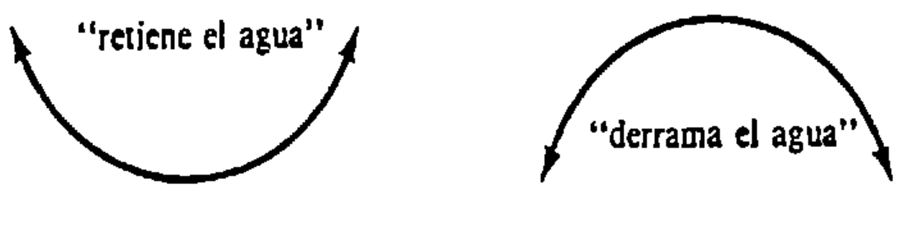
4.6 Trazo de gráficas y la segunda derivada

En la siguiente exposición, se tiene como objetivo relacionar el concepto de concavidad de una gráfica con la segunda derivada de una función.

Concavidad

Probablemente el lector tenga una idea intuitiva de lo que significa concavidad. Las Figuras 4.48(a) y 4.48(b) ilustran formas geométricas que son **cóncava hacia arriba** y **cóncava hacia abajo**, respectivamente.* A menudo se dice que una forma que es cóncava hacia arriba "retiene el agua", mientras que una forma que es cóncava hacia abajo "derrama el agua". La gráfica que se muestra en la Figura 4.49 es cóncava hacia arriba en el intervalo (b, c) y cóncava hacia abajo en (a, b) y (c, d).

Se formula la definición de concavidad en términos de la derivada.



(a) cóncava hacia arriba (b) cóncava hacia abajo

Figura 4.48

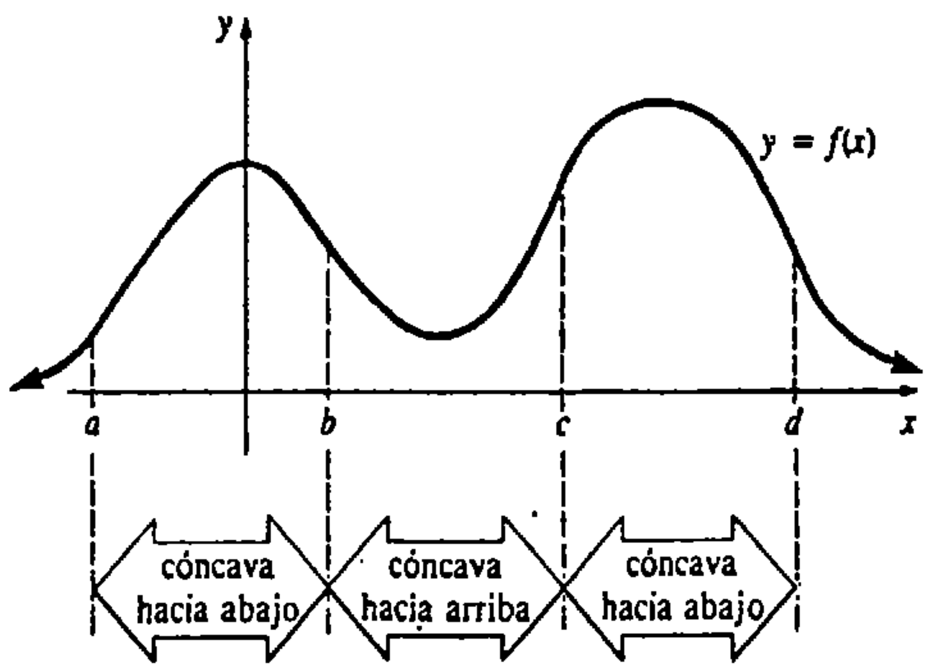


Figura 4.49

* El Gateway Arch en San Luis Missouri, es cóncavo hacia abajo. Los cables entre los soportes del puente Golden Gate son cóncavos hacia arriba.

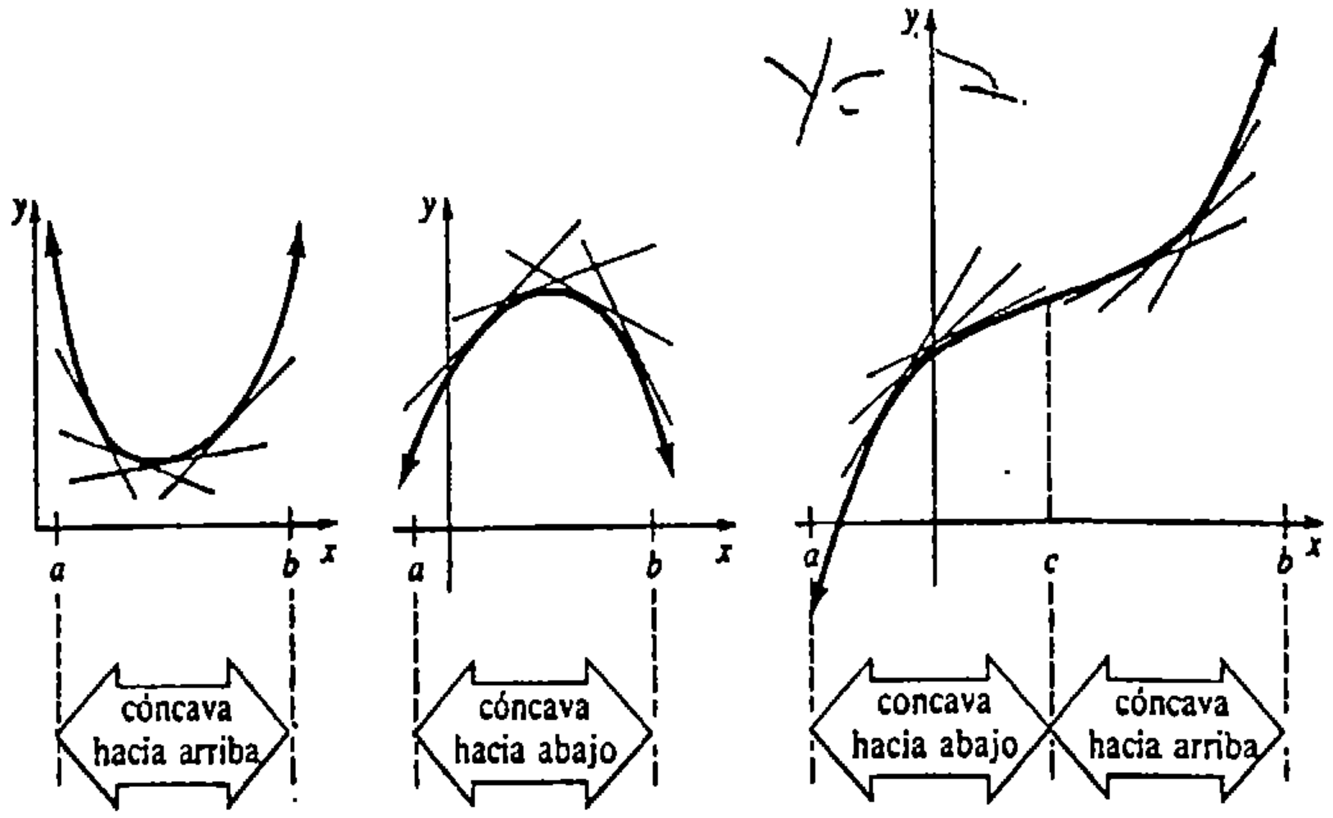
DEFINICIÓN 4.5

Sea f diferenciable en (a, b).

(*i*) Si f' es una función creciente en (a, b), entonces la gráfica de f es **cóncava hacia arriba** en el intervalo.

(*ii*) Si f' es una función decreciente en (a, b), entonces la gráfica de f es **cóncava hacia abajo** en el intervalo. □

En otras palabras, si la pendiente de la recta tangente aumenta (disminuye) en (a, b), entonces la gráfica de la función es cóncava hacia arriba (abajo) en el intervalo. En la Figura 4.50 está ilustrada la razón de ser de la Definición 4.5. En forma equivalente, la gráfica de una función es cóncava hacia arriba, en un intervalo, si en cualquier punto la gráfica está situada por *encima* de la tangente en el punto. Una gráfica que es cóncava hacia abajo en un intervalo está situada por *debajo* de las rectas tangentes.



(a) f' es creciente de − a +
(b) f' es decreciente de + a −
(c) f' es decreciente en (a, c); f' es creciente en (c, b)

Figura 4.50

Concavidad y la segunda derivada

De la Sección 4.4 recordamos que el signo algebraico de la derivada de una función indica cuándo la función es creciente o decreciente en un intervalo. Específicamente, si la función a la que se refiere la última oración es la derivada f', entonces puede concluirse que el signo algebraico de la derivada f'' indica cuándo f' es creciente o bien decreciente en un intervalo. Por ejemplo, si $f''(x) > 0$ en (a, b), entonces f' aumenta en (a, b). En vista de la Definición 4.5, si f' aumenta en (a, b), entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en el intervalo. Por lo tanto, se llega al siguiente criterio de concavidad.

TEOREMA 4.9

Criterio de concavidad

Sea f una función para la cual ~~f'' existe en (a, b).~~

(*i*) Si $f''(x) > 0$ para todo x en (a, b), entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en (a, b).

(*ii*) Si $f''(x) < 0$ para todo x en (a, b), entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en (a, b). □

Ejemplo 1

Determinar los intervalos en los que la gráfica de $f(x) = -x^3 + \frac{9}{2}x^2$ es cóncava hacia arriba y en los que es cóncava hacia abajo.

Solución De

$$f'(x) = -3x^2 + 9x$$
$$f''(x) = -6x + 9 = 6\left(-x + \frac{3}{2}\right),$$

se tiene que $f''(x) > 0$ cuando $6(-x + \frac{3}{2}) > 0$ o $x < 3/2$ y que $f''(x) < 0$ cuando $6(-x + \frac{3}{2}) < 0$ o $x > 3/2$. Del Teorema 4.9 resulta que la gráfica de f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 3/2)$ y cóncava hacia abajo en $(3/2, \infty)$.

Punto de inflexión

La gráfica de la función del ejemplo precedente cambia de concavidad en el punto que corresponde a $x = 3/2$. Cuando x aumenta pasando por $3/2$, la gráfica de f cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo *en* el punto $(3/2, 27/4)$. Un punto de la gráfica de una función en donde la concavidad cambia de arriba hacia abajo, o viceversa, se llama **punto de inflexión**. En forma más precisa, se tiene la definición siguiente.

DEFINICIÓN 4.6

Sea f continua en c. Un punto $(c, f(c))$ es un **punto de inflexión** si existe un intervalo abierto (a, b) que contiene a c, de tal suerte que la gráfica de f es, ya sea

(*i*) cóncava hacia arriba en (a, c) y cóncava hacia abajo en (c, b), o

(*ii*) cóncava hacia abajo en (a, c) y cóncava hacia arriba en (c, b). □

La Figura 4.51 muestra la gráfica de una función $y = f(x)$ que tiene tres puntos de inflexión: $(a f(a))$, $(b, f(b))$ y $(c, f(c))$. Nótese que $(d, f(d))$ no es un punto de inflexión, puesto que la gráfica es cóncava hacia arriba en los dos intervalos (c, d) y (d, e).

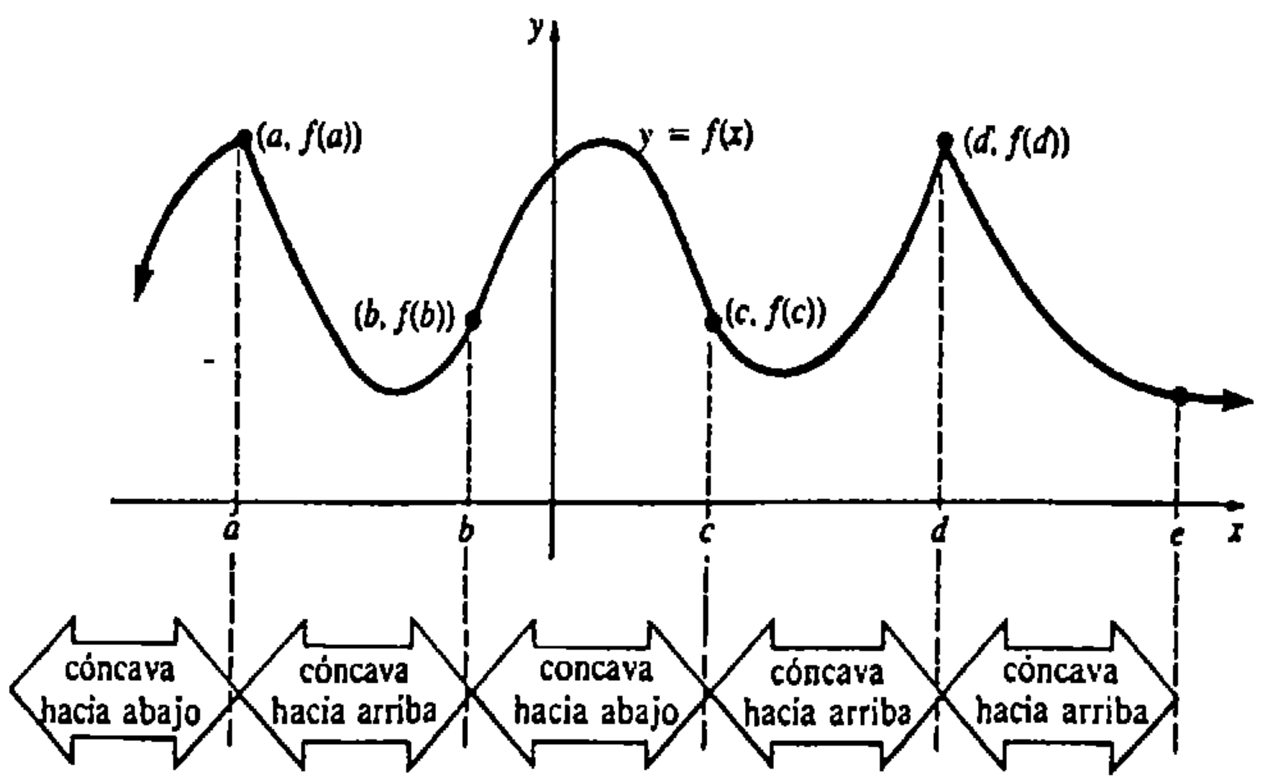


Figura 4.51

Como consecuencia de las Definiciones 4.5 y 4.6 se observa que:

Un punto de inflexión $(c, f(c))$ *ocurre en un número* c *para el cual* $f''(c) = 0$ *o bien* $f''(c)$ *no existe.*

Ejemplo 2

Encontrar todos los puntos de inflexión de $f(x) = -x^3 + x^2$.

Solución Las derivadas primera y segunda de f son, respectivamente,

$$f'(x) = -3x^2 + 2x \quad \text{y} \quad f''(x) = -6x + 2.$$

Puesto que $f''(x) = 0$ en $1/3$, el punto $(1/3, 2/27)$ es el único punto de inflexión *posible*. Ahora bien,

$$f''(x) = 6(-x + 1/3) > 0 \quad \text{para } x < 1/3$$
$$f''(x) = 6(-x + 1/3) < 0 \quad \text{para } x > 1/3$$

implica que la gráfica de f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 1/3)$ y hacia abajo en $(1/3, \infty)$. Así que, $(1/3, f(1/3))$ o bien $(1/3, 2/27)$ es un punto de inflexión.

Ejemplo 3

Encontrar todos los puntos de inflexión de $f(x) = 5x - (x - 4)^{1/3}$.

Solución De

$$f'(x) = 5 - \frac{1}{3}(x - 4)^{-2/3} \quad \text{y} \quad f''(x) = \frac{2}{9}(x - 4)^{-5/3},$$

se ve que f'' no existe en 4. Puesto que $f''(x) < 0$ para $x < 4$ y $f''(x) > 0$ para $x > 4$, la gráfica de f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 4)$ y hacia arriba en $(4, \infty)$. Ahora bien, 4 está en el dominio de f, así que $(4, f(4))$ o $(4, 20)$ es un punto de inflexión.

Ejemplo 4

Un examen de las gráficas $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$ y $y = \tan x$ de la Figura 4.52 parecería indicar que las intercepciones x de la gráfica de cada función son las abscisas de puntos de inflexión. Se invita al lector a demostrar que efectivamente este es el caso. Véanse los Problemas 17, 18 y 20 de los Ejercicios 4.6.

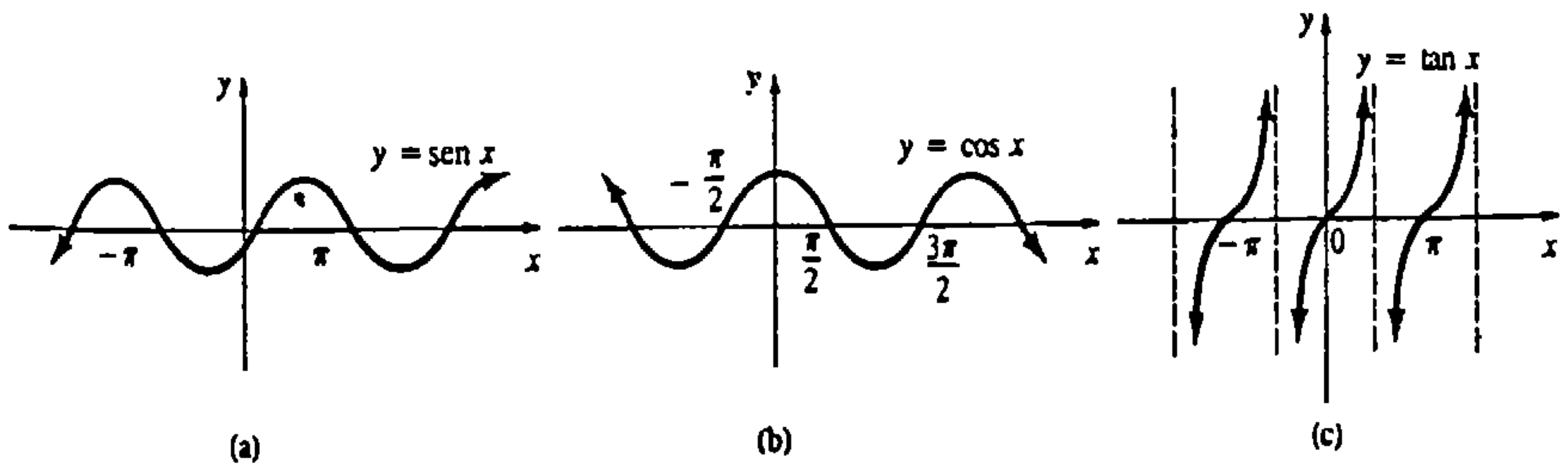


Figura 4.52

La concavidad de una gráfica se puede relacionar con la noción de extremos relativos.

Criterio de la segunda derivada

Si c es un valor crítico de $y = f(x)$ y, digamos, $f''(c) > 0$, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en cierto intervalo (a, b) que contiene a c. Entonces $f(c)$ es, necesariamente, un mínimo relativo. De manera semejante, $f''(c) < 0$ en un valor crítico c implica que $f(c)$ es un máximo relativo. Esto, que se llama **criterio de la segunda derivada**, se ilustra en la Figura 4.53.

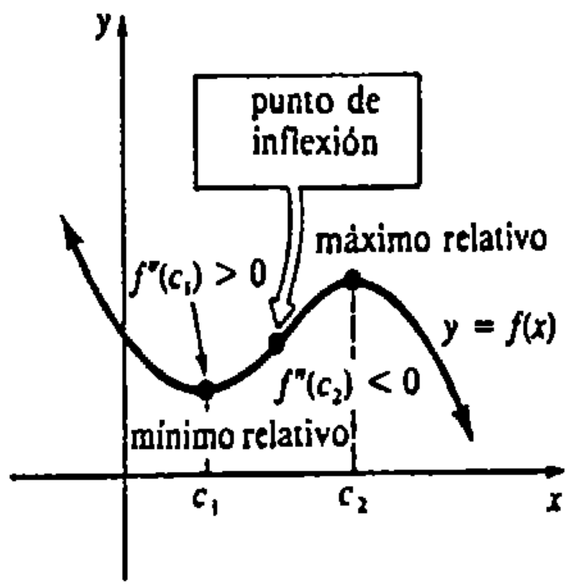


Figura 4.53

TEOREMA 4.10

Criterio de la segunda derivada para extremos relativos

Sea f una función para la cual f'' existe en un intervalo (a, b) que contiene al número crítico c.

(*i*) Si $f''(c) > 0$, entonces $f(c)$ es un mínimo relativo.

(*ii*) Si $f''(c) < 0$, entonces $f(c)$ es un máximo relativo. □

En este momento uno podría preguntar: ¿por qué es necesario otro criterio para extremos relativos cuando ya se tiene el criterio de la primera derivada? Si la función bajo consideración es polinomial, es muy fácil calcular la segunda derivada. Para emplear el Teorema 4.10 se necesita solamente determinar el signo algebraico de f'' *en* el valor crítico. Compárese esto con determinar el signo de f' en números que estén a la derecha y a la izquierda del valor crítico. Si f' no es fácilmente factorizada, este procedimiento puede ser un poco difícil. Por otra parte, puede ser igualmente tedioso usar el Teorema 4.10 en el caso de algunas funciones en las que intervienen productos, cocientes, potencias, etcétera. En pocas palabras, tanto el Teorema 4.8 como el 4.10 tienen ventajas y desventajas.

Ejemplo 5

Trazar la gráfica de $f(x) = x^4 - x^2$.

Solución

$$f'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1)$$
$$f''(x) = 12x^2 - 2$$

Por consiguiente, los valores críticos de f son 0, $-\sqrt{2}/2$ y $\sqrt{2}/2$. En la tabla adjunta se resume el criterio de la segunda derivada.

x	*Signo de* $f''(x)$	$f(x)$	*Conclusión*
0	−	0	máx. rel.
$\sqrt{2}/2$	+	−1/4	mín. rel.
$-\sqrt{2}/2$	+	−1/4	mín. rel.

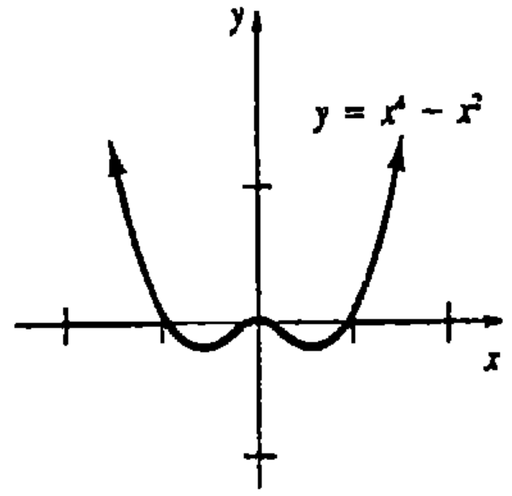


Figura 4.54

Ahora bien, de $f(x) = x^2(x^2 - 1) = x^2(x + 1)(x - 1)$ se ve que la gráfica de f pasa por (0, 0), (−1, 0) y (1, 0). Además, como f es un polinomio con potencias pares solamente, se concluye que su gráfica es simétrica con respecto al eje y (función par). Véase la Figura 4.54. El lector debe verificar también que la gráfica tiene dos puntos de inflexión: $(-\sqrt{6}/6, -5/36)$ y $(\sqrt{6}/6, -5/36)$.

Ejemplo 6

Trazar la gráfica de $f(x) = 2\cos x - \cos 2x$.

Solución

$$f'(x) = -2 \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} 2x$$
$$f''(x) = -2\cos x + 4\cos 2x$$

Utilizando la identidad trigonométrica $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, la ecuación $f'(x) = 0$ se simplifica a $\operatorname{sen} x(1 - 2\cos x) = 0$. Las soluciones de $\operatorname{sen} x = 0$ son $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ y las soluciones de $\cos x = 1/2$ son $\pm\pi/3, \pm 5\pi/3, \ldots$ Pero como f tiene periodo 2π*, es suficiente considerar solamente aquellos valores críticos en $[0, 2\pi]$, a saber, $0, \pi/3, \pi, 5\pi/3$ y 2π. En la tabla adjunta se resume el criterio de la segunda derivada aplicado a estos valores. La gráfica de f se muestra en la Figura 4.55.

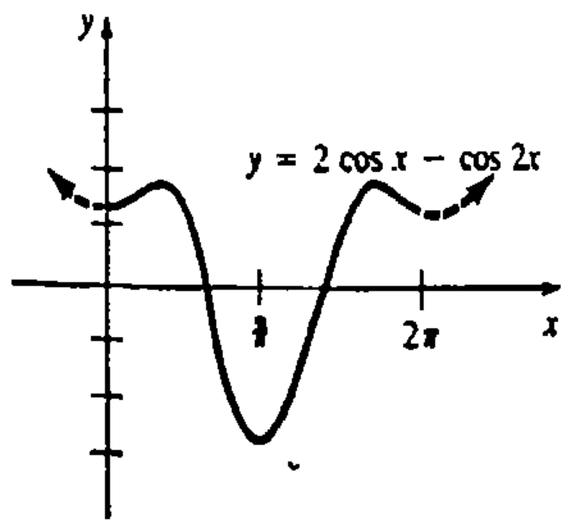


Figura 4.55

x	*Signo de* $f''(x)$	$f(x)$	*Conclusión*
0	+	1	mín. rel.
$\pi/3$	−	3/2	máx. rel.
π	+	−3	mín. rel.
$5\pi/3$	−	3/2	máx. rel.
2π	+	1	mín. rel.

* Se invita al lector a que lo demuestre.

Observaciones

(*i*) Del Teorema 4.9 no debe adquirirse la impresión de que cuando una gráfica es cóncava hacia arriba (o hacia abajo) en un intervalo (a, b) entonces $f''(x) > 0$ (o $f''(x) < 0$) para *todo* x en el intervalo. Las condiciones establecidas en las partes (*i*) y (*ii*) del Teorema 4.9 son suficientes pero no necesarias. Por ejemplo, de la Figura 4.56 y la Definición 4.5 resulta claro que la función dos veces diferenciable $f(x) = x^4$ es cóncava hacia arriba en cualquier intervalo que contenga al origen. Pero de $f''(x) = 12x^2$ vemos que $f''(0) = 0$.

(*ii*) Las nociones intuitivas de "retiene el agua" y "derrama el agua" no son, desde luego, sinónimos de los conceptos de cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo, respectivamente. A partir de las Figuras 4.57 y 4.58 podría sostenerse que la gráfica de $f(x) = |x|$ "retiene el agua" en $(-1, 1)$ y que la gráfica de $g(x) = 1 - x^{2/3}$ "derrama el agua" en $(-1, 1)$. Pero no puede asignarse concavidad a ninguna de las dos gráficas en $(-1, 1)$ puesto que ni f ni g son diferenciables en el intervalo. Además, hay funciones diferenciables cuyas gráficas no tienen concavidad. En el Problema 50 de los ejercicios se pide al lector que proporcione un ejemplo de una de tales funciones. (Esto no es muy difícil.)

(*iii*) Recuérdese que si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión, entonces $f''(c) = 0$ o $f''(c)$ no existe. La recíproca de esta proposición no es necesariamente cierta. No se puede concluir, del simple hecho de que $f''(c) = 0$ o que $f''(c)$ no existe, que $(c, f(c))$ es un punto de inflexión. Por ejemplo, la segunda derivada de la función $f(x) = x^4$ es cero en $x = 0$. Puede verse en la Figura 4.56 que $(0, f(0))$ no es un punto de inflexión, puesto que la gráfica es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$. También, para $f(x) = 1/x$, se observa que $f''(x)2/x^3$ es indefinida en $x = 0$ y $f''(x) < 0$ para $x < 0$ y $f''(x) > 0$ para $x > 0$. Sin embargo, 0 no es la abscisa de un punto de inflexión, puesto que f no es continua en este valor. Véase la Figura 4.59.

(*iv*) Es importante notar que el criterio de la segunda derivada *no* establece que si $f(c)$ es un extremo relativo, entonces $f''(c) > 0$, o bien $f''(c) < 0$. En la Figura 4.58 puede verse que $f(x) = 1 - x^{2/3}$ tiene un máximo absoluto en 0 pero $f''(0)$ no existe. De manera semejante, $f(x) = x^4$ tiene un mínimo absoluto de 0 pero $f''(0) = 0$. Así que *el criterio de la segunda derivada puede no conducir a alguna*

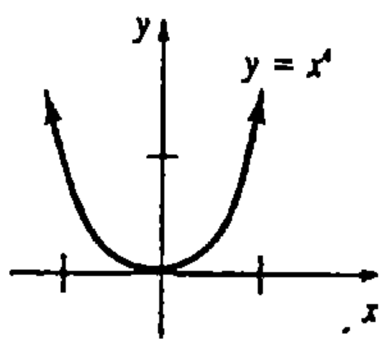


Figura 4.56

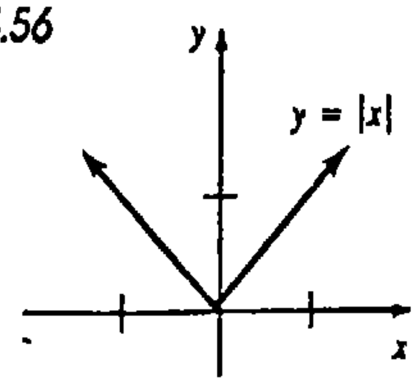


Figura 4.57

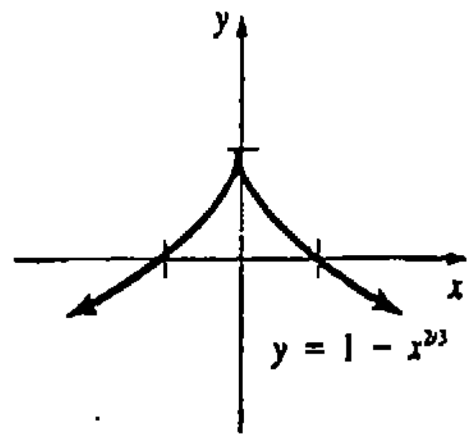


Figura 4.58

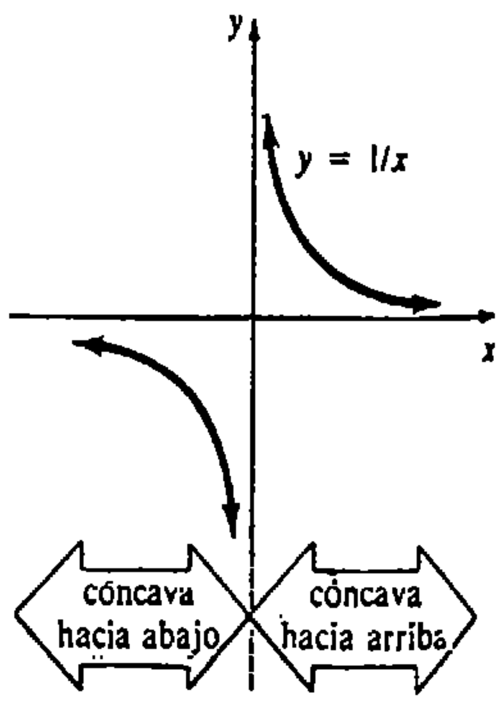


Figura 4.59

conclusión. Siempre que falle el criterio de la segunda derivada, debe usarse el criterio de la primera derivada.

(*v*) En conclusión, se resume el Teorema 4.10 y la observación precedente.

Criterio de la Segunda Derivada		
Valor crítico	$f''(x)$ *en el valor crítico*	*Conclusión*
c	+	$f(c)$ es un mínimo relativo
c	−	$f(c)$ es un máximo relativo
c	0	no hay conclusión

Ejercicios 4.6

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 975.

En los Problemas 1-12 utilice la segunda derivada para determinar los intervalos en los que la función dada es cóncava hacia arriba y en los que es cóncava hacia abajo.

1. $f(x) = -x^2 + 7x$
2. $f(x) = -(x + 2)^2 + 8$
3. $f(x) = -x^3 + 6x^2 + x - 1$
4. $f(x) = (x + 5)^3$
5. $f(x) = x(x - 4)^3$
6. $f(x) = 6x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 3$
7. $f(x) = x^{1/3} + 2x$
8. $f(x) = x^{8/3} - 20x^{2/3}$
9. $f(x) = x + \dfrac{9}{x}$
10. $f(x) = \sqrt{x^2 + 10}$
11. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3}$
12. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 2}$
13. Demuestre que la gráfica de $f(x) = \sec x$ es cóncava hacia arriba en aquellos intervalos en los que $\cos x > 0$ y cóncava hacia abajo en aquellos para los que $\cos x < 0$.
14. Demuestre que la gráfica de $f(x) = \csc x$ es cóncava hacia arriba en aquellos intervalos para los que $\operatorname{sen} x > 0$, y cóncava hacia abajo en aquellos para los que $\operatorname{sen} x < 0$.

En los Problemas 15-20 utilice la segunda derivada para localizar todos los puntos de inflexión.

15. $f(x) = x^4 - 12x^2 + x - 1$
16. $f(x) = x^{5/3} + 4x$
17. $f(x) = \operatorname{sen} x$
18. $f(x) = \cos x$
19. $f(x) = x - \operatorname{sen} x$
20. $f(x) = \tan x$

En los Problemas 21-32 utilice el criterio de la segunda derivada, cuando sea aplicable, para encontrar los extremos relativos de la función dada. Trace la gráfica. Encuentre los puntos de inflexión y las intersecciones con los ejes, cuando sea posible.

21. $f(x) = -(2x - 5)^2$
22. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 12x$

23. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

24. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

25. $f(x) = 6x^5 - 10x^3$

26. $f(x) = x^3(x + 1)^2$

27. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$

28. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

29. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

30. $f(x) = x\sqrt{x - 6}$

31. $f(x) = x^{1/3}(x + 1)$

32. $f(x) = x^{1/2} - \frac{1}{4}x$

33. $f(x) = \cos 3x$, $[0, 2\pi]$

34. $f(x) = 2 + \text{sen } 2x$, $[0, 2\pi]$

35. $f(x) = \cos x + \text{sen } x$, $[0, 2\pi]$

36. $f(x) = 2 \text{ sen } x + \text{sen } 2x$, $[0, 2\pi]$

En los Problemas 37-40 determine si la función dada tiene un extremo relativo en el valor crítico indicado.

37. $f(x) = \text{sen } x \cos x$; $\pi/4$

38. $f(x) = x \text{ sen } x$; 0

39. $f(x) = \tan^2 x$; π

40. $f(x) = (1 + \text{sen } 4x)^3$; $\pi/8$

En los Problemas 41 y 42 trace la gráfica de una función continua f que tenga las propiedades dadas.

41. $f(-2) = 0, f(4) = 0$
$f'(3) = 0, f'(1) = 0, f''(2) = 0$
$f''(x) < 0, x < 1, x > 2$
$f''(x) > 0, 1 < x < 2$

42. $f(0) = 5, f(2) = 0$
$f'(2) = 0, f''(3)$ no existe
$f''(x) > 0, x < 3$
$f''(x) < 0, x > 3$

43. Encuentre valores de a, b y c tales que la gráfica de $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ pase por $(-1, 0)$ y tenga un punto de inflexión en $(1, 1)$.

44. Obtenga valores de a, b y c tales que la gráfica de $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ tenga una tangente horizontal en el punto de inflexión $(1, 1)$.

Problemas diversos

45. Utilice el criterio de la segunda derivada como una ayuda para trazar la gráfica de $f(x) = \text{sen}(1/x)$. Observe que f es discontinua en $x = 0$.

46. Demuestre que la gráfica de una función polinomial general
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$,
$a_n \neq 0$,
puede tener a lo sumo $n - 2$ puntos de inflexión.

47. Sea $f(x) = (x - x_0)^n$ en donde n es un entero positivo.

(a) Demuestre que $(x_0, 0)$ es un punto de inflexión de la gráfica de f si n es impar.

(b) Pruebe que $(x_0, 0)$ no es un punto de inflexión de la gráfica de f pero que corresponde a un mínimo relativo cuando n es par.

48. Demuestre que la gráfica de una función polinomial cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, es cóncava hacia arriba en el eje x cuando $a > 0$ y hacia abajo cuando $a < 0$.

49. Sea f una función para la cual f''' existe en un intervalo (a, b) que contiene al número c. Si $f''(c) = 0$ y $f'''(c) \neq 0$, ¿qué se puede decir acerca de $(c, f(c))$?

50. Proporcione un ejemplo de una función diferenciable cuya gráfica no posea concavidad.

51. Demuestre o refute: Un punto de inflexión de una función f debe ocurrir en un valor crítico de f'.

52. Demuestre o refute: la función

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$.

4.7 Otras aplicaciones de los extremos

En la ciencia, la ingeniería y la administración es frecuente interesarse por los valores máximo y mínimo de funciones; por ejemplo, una compañía está naturalmente interesada en maximizar los ingresos al mismo tiempo que en minimizar los costos. La próxima vez que el lector vaya a un supermercado intente este experimento: lleve consigo una pequeña regla y mida la altura y el diámetro de *todas* las latas que contengan, por ejemplo, 16 onzas de alimento (28.9 plg³). El hecho de que todas las latas de este volumen especificado tengan las mismas medidas no es una casualidad, puesto que existen dimensiones específicas que minimizarán la cantidad de metal utilizado y, por consiguiente, minimizarán el costo de fabricación a la compañía. Así por el estilo, muchos de los llamados autos económicos tienen aspectos que son notablemente semejantes. No se trata precisamente del simple hecho de que una compañía copie el éxito de otra, sino, más bien, que para un volumen determinado los ingenieros procuran lograr un diseño que minimice la cantidad de material empleado.

Sugerencias útiles

En los ejemplos y problemas que siguen se *dará* una función, o bien, habrá que interpretar la descripción verbal para *establecer* una función de la cual se busca un valor máximo o mínimo. Estos son los tipos de problemas verbales que realzan el poderío del cálculo y proporcionan una de las muchas respuestas posibles a la añeja pregunta de: "¿para qué sirve?" A continuación se señalan los pasos importantes en la solución de un problema de aplicación de máximos y mínimos.

(*i*) Desarrolle una actitud positiva y analítica. Lea el problema lentamente. No nada más se esfuerce por obtener una respuesta.

(*ii*) Cuando sea necesario, dibuje una ilustración.

(*iii*) Introduzca variables y fíjese en toda relación que exista entre ellas.

(*iv*) Utilizando todas las variables necesarias, establezca una función que deba ser maximizada o minimizada. Si se usa más de una variable, entonces emplee una relación entre ellas para reducir la función a una variable.

(*v*) Haga notar el intervalo en el cual la función está definida. Determine todos los valores críticos.

(*vi*) Si la función que va a ser maximizada o minimizada es continua y definida en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces pruebe si hay extremos en las fronteras. Si el extremo deseado no ocurre en la frontera, debe ocurrir en un valor crítico dentro del intervalo abierto (a, b).

(*vii*) Si la función que va a ser maximizada o minimizada está definida en un intervalo que no es cerrado, entonces debe emplearse un criterio de derivada en cada valor crítico.

En el primer ejemplo, por única vez, se señalarán los pasos correspondientes.

Ejemplo 1

Determinar dos números no negativos cuya suma sea 15 tales que el producto de uno con el cuadrado del otro sea máximo.

Solución

(ii) No es posible hacer un dibujo o esquema.

(iii) Denótese por x y y los dos números no negativos; esto es $x \geq 0$ y $y \geq 0$. Nótese que está dado que $x + y = 15$.

(iv) Denotamos por P el producto:

$$\underbrace{P}_{\text{producto}} = \underbrace{x}_{\text{un número}} \; \underbrace{y^2}_{\text{cuadrado del otro}}$$

De *(iii)*, se puede usar $y = 15 - x$ para expresar P sólo en términos de x:

$$P(x) = x(15 - x)^2.$$

(v) La función $P(x)$ está definida solamente para $0 \leq x \leq 15$, puesto que, si $x > 15$, entonces $y = 15 - x$ sería negativo, contrario a las condiciones dadas. Ahora bien, por la regla del producto,

$$\begin{aligned} P'(x) &= x \cdot 2(15 - x)(-1) + (15 - x)^2 \\ &= (15 - x)(15 - 3x). \end{aligned}$$

Así que el único valor crítico en $(0, 15)$ es $x = 5$.

(vi) La prueba en los puntos frontera del intervalo revela que $P(0) = P(15) = 0$ es el valor mínimo del producto. Por consiguiente, $P(5) = 5(10)^2 = 500$ debe ser el valor máximo. Los dos números no negativos son 5 y 10.

Ejemplo 2

En física se demuestra que cuando no se considera la resistencia del aire, el alcance horizontal R de un proyectil está dado por

$$R = \frac{v_0^2}{g}\,\mathrm{sen}\,2\theta, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi/2, \tag{4.12}$$

en donde v_0 es la velocidad inicial constante, g es la aceleración de la gravedad y θ es el ángulo de elevación o de partida. Véase la Figura 4.60.

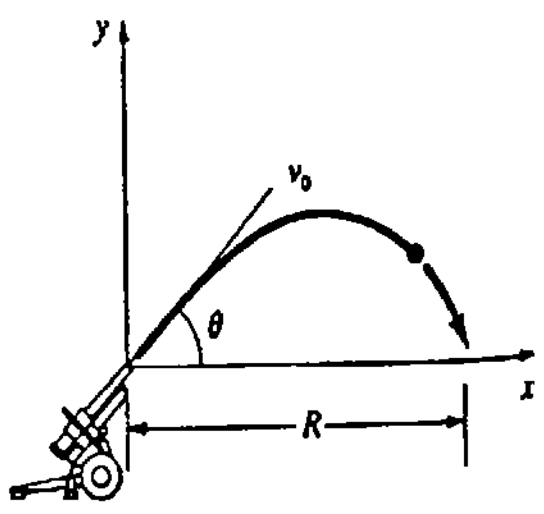


Figura 4.60

De

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{v_0^2}{g}\,2\cos 2\theta,$$

puede verse que $dR/d\theta = 0$ cuando $\cos 2\theta = 0$ o $2\theta = \pi/2$. Por consiguiente, el único valor crítico en $(0, \pi/2)$ es $\theta = \pi/4$. Como en el Ejemplo 1, los puntos frontera dan el alcance mínimo: $R(0) = R(\pi/2) = 0$ y así $R(\pi/4) = v_0^2/g$ es el alcance máximo.* En otras palabras, para lograr el máximo alcance, el proyectil debe ser disparado a un ángulo de 45° con la horizontal.

Ejemplo 3

Un abrevadero de 20 pie de largo tiene sus extremos en forma de triángulos isósceles cuyos lados iguales son de 4 pie de longitud. Determinar la anchura en la parte superior de un extremo triangular, de manera que el volumen del abrevadero sea máximo.

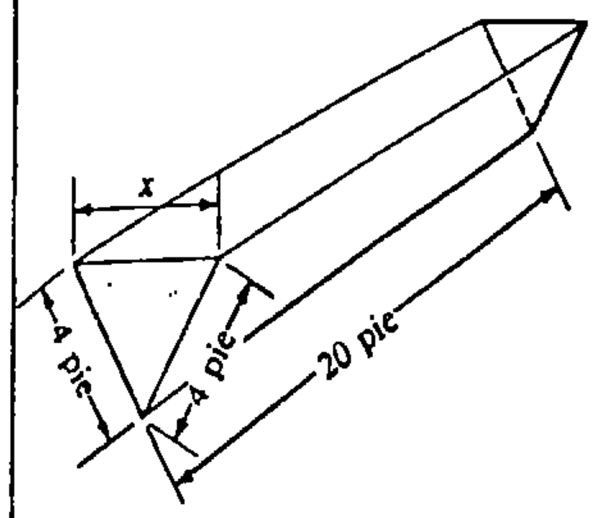


Figura 4.61

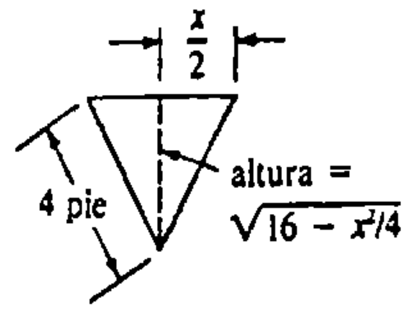


Figura 4.62

Solución En la Figura 4.61 se ilustra el abrevadero con la dimensión incógnita. Su volumen es

$$V = (\text{área del extremo triangular}) \cdot (\text{longitud}).$$

De la Figura 4.62 y el teorema de Pitágoras, el área del extremo triangular es $x\sqrt{16 - x^2/4}$. Consecuentemente, el volumen en función de x es

$$\begin{aligned} V(x) &= \left(\frac{1}{2}x\sqrt{16 - x^2/4}\right) \cdot 20 \\ &= 5x\sqrt{64 - x^2}. \end{aligned}$$

Además, $V(x)$ solamente tiene sentido en el intervalo cerrado $[0, 8]$. (¿Por qué?).

Derivando y simplificando se obtiene

$$V'(x) = -10\,\frac{x^2 - 32}{(64 - x^2)^{1/2}}.$$

Aunque $V'(x) = 0$ para $x = \pm 4\sqrt{2}$, el único valor crítico de V en $[0, 8]$ es $4\sqrt{2}$. Puesto que $V(0) = V(8) = 0$, se concluye que el volumen máximo ocurre cuando la anchura en la parte superior del abrevadero es de $4\sqrt{2}$ pie. El volumen máximo es $V(4\sqrt{2}) = 160$ pie³.

Nota: A menudo un problema dado puede resolverse en más de una forma. En el Ejemplo 1 se podría también expresar la función P, o sea el producto, en términos del símbolo y:

$$\begin{aligned} P &= xy^2 \\ &= (15 - y)y^2 \\ &= 15y^2 - y^3. \end{aligned}$$

---

* Con la resistencia del aire, un proyectil caerá a una distancia menor que este valor. Recuerde tomar esto en cuenta la próxima vez que dispare un cañón. También, tómese un minuto y compare la distancia máxima a que puede ser lanzada una pelota de golf en la Tierra cuando $v_0 = 160$ pie/s, $g = 32$ pie/s², con lo que sería en la Luna, donde $g = 5.4$ pie/s².

En esta forma P' se puede encontrar sin usar la regla del producto. También, con vista de lince, el lector debería verificar que la solución del Ejemplo 3 es ligeramente "más limpia" si la anchura en la parte superior del abrevadero se designa por $2x$ en lugar de por x. En efecto, como lo muestra el ejemplo siguiente, el Ejemplo 3 se puede resolver utilizando una variable completamente diferente.

Ejemplo 4

Solución alternativa del Ejemplo 3 Como se muestra en la Figura 4.63, denótese por θ el ángulo entre la vertical y uno de los lados. Por trigonometría, la altura y la base del extremo triangular son $4\cos\theta$ y $8\,\text{sen}\,\theta$, respectivamente. Expresado en función de θ, V se convierte en

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \frac{1}{2}(4\cos\theta)(8\,\text{sen}\,\theta)\cdot 20 \\ &= 320\,\text{sen}\,\theta\cos\theta \\ &= 160(2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta) \quad \boxed{\text{Fórmula del ángulo doble}} \\ &= 160\,\text{sen}\,2\theta. \end{aligned}$$

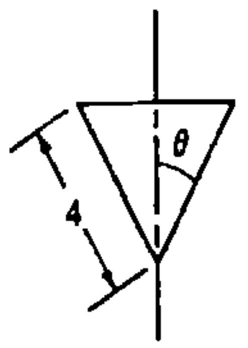


Figura 4.63

en donde $0 \le \theta \le \pi/2$. Procediendo como en el Ejemplo 2, se encuentra que el valor máximo $V = 160$ pie³ ocurre en $\theta = \pi/4$. La anchura en la parte superior del abrevadero, o sea la base del triángulo isósceles, es $8\,\text{sen}\,\pi/4 = 4\sqrt{2}$ pie.

Ejemplo 5

Un terreno rectangular que tiene 1500 m² va a ser cercado y dividido en dos porciones iguales mediante una cerca adicional paralela a dos de los lados. Encontrar las dimensiones del terreno que requieran la menor cantidad de cerca.

Solución Se introducen las variables x y y de forma que $xy = 1500$, como se muestra en la Figura 4.64. Entonces la función que se desea minimizar es la suma de las longitudes de las cinco porciones de cerca:

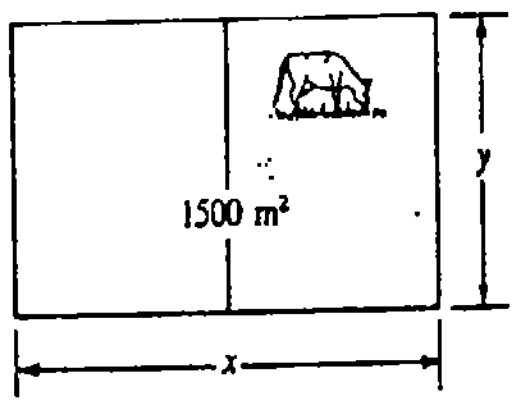


Figura 4.64

$$L = 2x + 3y.$$

Pero $y = 1500/x$ permite escribir

$$L(x) = 2x + \frac{4500}{x},$$

en donde el único requisito para la variable x es que sea no negativa. Así que, a diferencia de los ejemplos anteriores, la función que se está considerando *no está definida en un intervalo cerrado*. De

$$L'(x) = 2 - \frac{4500}{x^2},$$

se obtiene $x^2 = 2250$ y se concluye que el único valor crítico es $15\sqrt{10}$. Pasando a la segunda derivada

$$L''(x) = \frac{13{,}500}{x^3},$$

se observa que $L''(15\sqrt{10}) > 0$. Por el criterio de la segunda derivada resulta que $L(15\sqrt{10}) = 2(15\sqrt{10}) + 4500/15\sqrt{10} = 60\sqrt{10}$ metros es la cantidad mínima de cerca requerida. Volviendo a la relación $xy = 1500$, se encuentra el valor de y y se concluye que las dimensiones del terreno deben ser de $15\sqrt{10}$ metros $\times$ $10\sqrt{10}$ metros.

Observaciones

Como un lector observador, usted podría cuestionar al menos dos aspectos del Ejemplo 5. ¿En qué parte de la solución intervino el supuesto de que el terreno se iba a dividir en dos porciones iguales? En efecto, no intervino. Lo importante es que la cerca divisoria sea paralela a dos de los lados. Pregúntese usted mismo a qué sería igual $L(x)$ si este *no* fuera el caso. Sin embargo, la posición real de la cerca divisoria entre los lados es irrelevante mientras sea paralela a ellos.

En un problema aplicado, naturalmente se está interesado sólo en los extremos absolutos. Por lo tanto, otra pregunta podría ser: puesto que la función L no está definida en un intervalo cerrado y el criterio de la segunda derivada no garantiza extremos absolutos, ¿cómo se puede estar seguro de que $L(15\sqrt{10})$ es un mínimo absoluto? En algunas ocasiones puede sostenerse la existencia de un extremo absoluto a partir del contexto físico del problema, pero un procedimiento tal vez mejor es, en caso de duda, trazar una gráfica. La Figura 4.65 responde la pregunta para $L(x)$.

Si sucede que una función diferenciable f tiene solamente *un* valor crítico c en un intervalo abierto (a, b)*, entonces el lector debe poder convencerse de la validez del resultado siguiente.

Si un criterio de derivada indica que $f(c)$ es un máximo o un mínimo relativo, entonces $f(c)$ es un máximo o un mínimo absoluto.

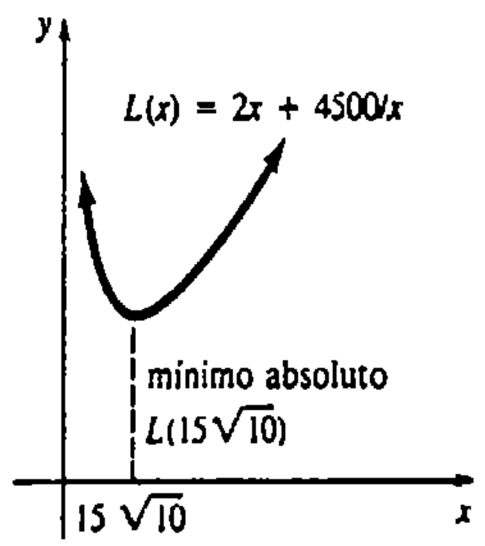


Figura 4.65

Ejercicios 4.7

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 976.

1. Encuentre dos números no negativos cuya suma sea 60 y cuyo producto sea máximo.

2. Obtenga dos números no negativos cuyo producto sea 50 y cuya suma sea mínima.

3. Determine un número que exceda a su cuadrado en la mayor cantidad.

4. Sean m y n enteros positivos. Encuentre dos números no negativos cuya suma sea S y tales que el pro-

* Esto incluye a $(0, \infty)$, $(-\infty, 0)$ y $(-\infty, \infty)$.

ducto de la m-ésima potencia de uno con la n-ésima potencia del otro sea máximo.

5. Determine el(los) punto(s) de la gráfica de $y^2 = 6x$ más cercanos a

(a) $(5, 0)$, (b) $(3, 0)$.

6. Halle el punto de la gráfica de $x + y = 1$ más cercano a $(2, 3)$.

7. Determine el punto de la gráfica de $y = x^3 - 4x^2$ en el que la recta tangente tenga la pendiente mínima.

8. Determine el punto de la gráfica de $y = 8x^2 + 1/x$ en el que la recta tangente tenga la pendiente máxima.

9. Un ranchero tiene a la mano 3000 pie de cerca. Determine las dimensiones de un corral rectangular que abarque el área máxima.

10. Un granjero desea construir un corral rectangular de 128,000 pie², con un lado a lo largo de un acantilado vertical. La cerca cuesta 1.50 dólares por pie en el lado del acantilado y 2.50 por pie en los otros tres lados. Encuentre las dimensiones del corral de manera que el costo de construcción sea mínimo.

11. Se va a construir una caja rectangular abierta con base cuadrada y un volumen de 32,000 cm³. Encuentre las dimensiones que requieran la menor cantidad de material.

12. En el Problema 11, encuentre las dimensiones de la caja cerrada que requieran la menor cantidad de material.

13. Una hoja rectangular de metal con perímetro de 4 m va a ser enrollada para formar la cara lateral de un recipiente cilíndrico. Encuentre las dimensiones del recipiente con el máximo volumen.

14. Un terreno rectangular se va a cercar y dividir en tres porciones iguales mediante dos cercas divisorias paralelas a dos de los lados. Véase la Figura 4.66.

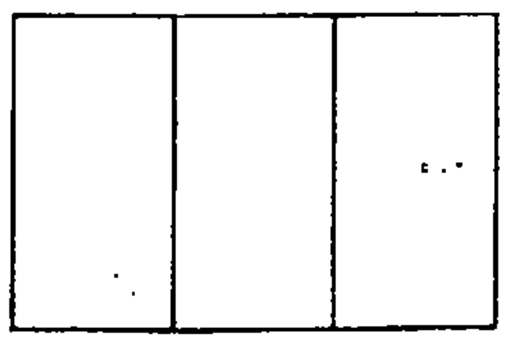


Figura 4.66

(a) Si el área que debe abarcarse es 4000 m², encuentre las dimensiones del terreno que requieren la menor cantidad de cerca.

(b) Si la cerca total que va a usarse es de 8000 m, encuentre las dimensiones del terreno abarcado que tenga la mayor área.

15. De una pieza cuadrada de cartón se va a formar una caja abierta por arriba, cortando un cuadrado en cada una de las esquinas y doblando los bordes. Dado que el cartón mide 40 cm por lado, encuentre las dimensiones de la caja que darán lugar al volumen máximo. ¿Cuál es el valor de éste? Véase la Figura 4.67.

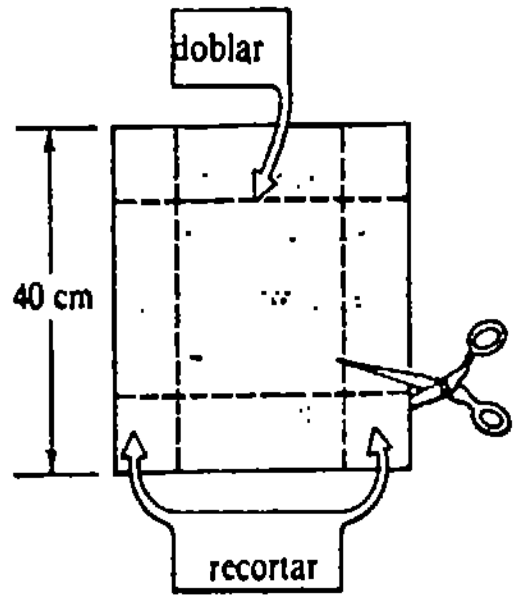
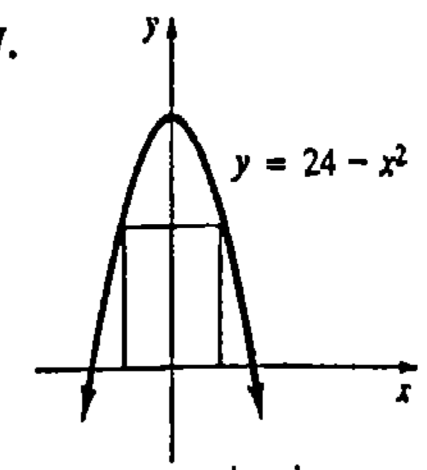


Figura 4.67

16. Una página impresa va a tener márgenes de 2 plg en los lados y de 1 plg en las partes superior e inferior. El área de la porción impresa es de 32 plg². Determine las dimensiones de la página de manera que se utilice la menor cantidad de papel.

En los Problemas 17-20 encuentre las dimensiones de la región sombreada, de forma que su área sea máxima.

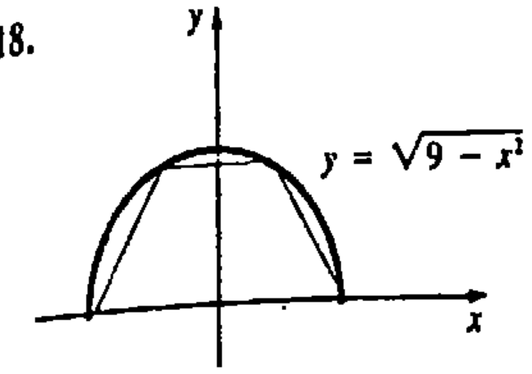
17.



rectángulo

Figura 4.68

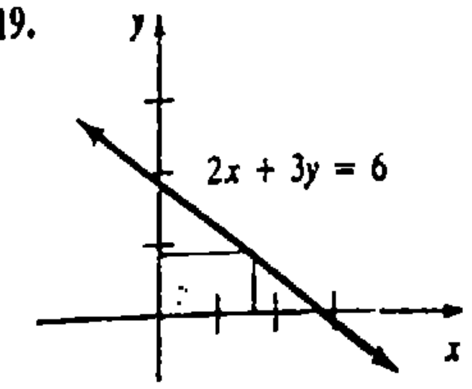
18.



trapecio

Figura 4.69

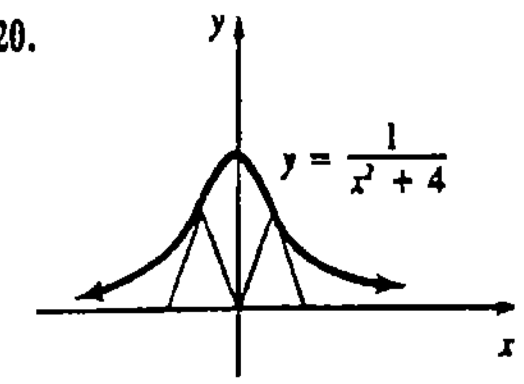
19.



rectángulo

Figura 4.70

20.



dos triángulos isósceles

Figura 4.71

21. Encuentre las dimensiones del cilindro circular recto de mayor volumen que puede inscribirse en un cono circular recto de radio R y altura H.

22. Obtenga las dimensiones del cono circular recto de mayor volumen que puede inscribirse en una esfera de radio R.

23. Una canaleta de sección transversal rectangular se fabrica doblando porciones iguales en cada orilla de una pieza de hojalata de 30 cm de ancho. ¿Cuáles son las dimensiones de la sección transversal que hacen que el volumen sea máximo?*

24. Se va a fabricar un canal, de forma que su sección transversal sea un trapecio isósceles con las dimensiones indicadas en la Figura 4.72. Determine el valor de θ de manera que el volumen sea máximo.

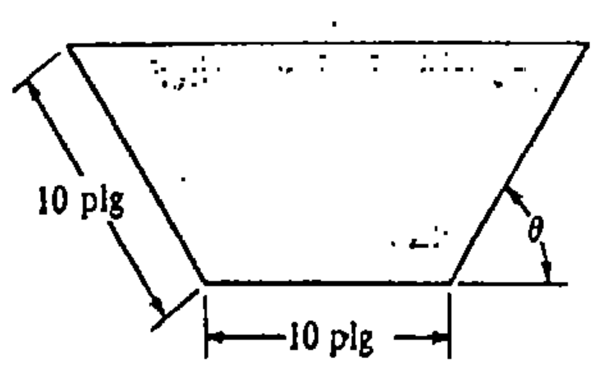
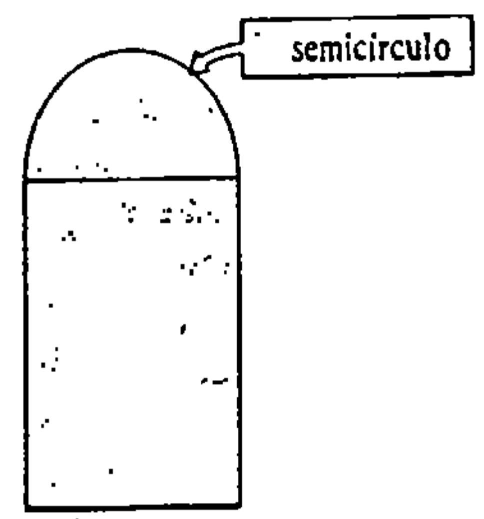


Figura 4.72

25. Encuentre las dimensiones de la lata cilíndrica para jugo que utilice la menor cantidad de material cuando el volumen del envase es de 32 plg³.

26. Un vaso de plástico de forma de cono circular recto va a tener un volumen de 24π cm³. Encuentre las dimensiones que minimizarán la cantidad de material empleado. (*Indicación:* el área de la superficie lateral de un cono es $A = \pi rL$, en donde r es su radio y L es su altura inclinada.)

27. Una "ventana normanda" consiste de un rectángulo coronado por un semicírculo. Encuentre las dimensiones de la ventana con área máxima si su perímetro es de 10 m. Véase la Figura 4.73.



ventana normanda

Figura 4.73

28. Resuelva otra vez el Problema 27 dado que el rectángulo sea coronado por un triángulo equilátero.

29. Una persona desea cortar un pedazo de alambre de 1 m de largo en dos trozos. Uno de ellos se va a doblar en forma de círculo y el otro en forma de cuadrado. ¿Cómo debe cortarse el alambre para que la suma de las áreas sea máxima?

30. En el Problema 29, suponga que un trozo de alambre se dobla en forma de círculo y el otro en forma de triángulo equilátero. ¿Cómo debe cortarse el alam-

* Lea de nuevo el Ejemplo 3 y reflexione por qué la longitud de la pieza de metal no tiene que especificarse.

bre para que la suma de las áreas sea mínima? ¿Cómo para que sea máxima?

31. La sección transversal de una viga rectangular de madera cortada de un tronco circular de diámetro d tiene longitud x y anchura y. Véase la Figura 4.74. La resistencia de la viga varía en proporción directa al producto de la longitud y al cuadrado de la anchura. Calcule las dimensiones de la sección transversal de la viga de mayor resistencia.

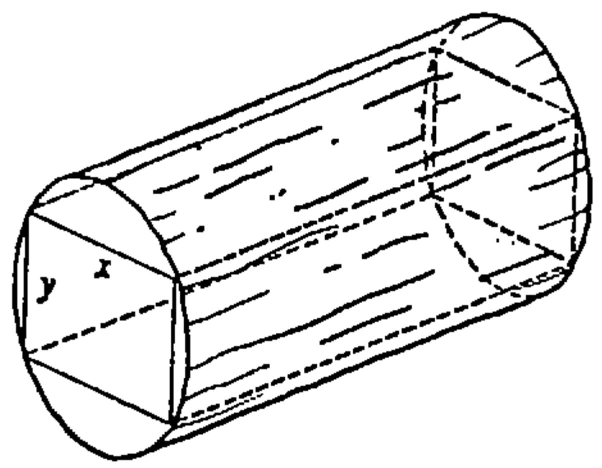


Figura 4.74

32. El reglamento del Servicio Postal de Estados Unidos establece que una caja rectangular enviada por correo de cuarta clase debe satisfacer el requisito de que la longitud más el perímetro de un extremo de la caja no debe exceder de 100 plg. Dado que se vaya a construir una caja de tal forma que su altura sea la mitad de su anchura, encuentre las dimensiones de la caja que tenga volumen máximo.

33. Si el número de turistas que hacen un recorrido en autobús a una ciudad es exactamente 30, una empresa cobra $20 (dólares) por persona. Por cada persona adicional a las 30, se reduce el cobro personal en $0.50. ¿Cuál es el número de turistas que debe llevar un autobús para maximizar los ingresos de la empresa?

34. Una empresa rentadora de camiones obtiene una ganancia de $84 (dólares) por camión al rentar hasta 50 unidades. Debido a que se incrementan los costos de mantenimiento y los pagos a los empleados, la empresa deja de ganar $1 (dólar) por cada camión rentado adicional a los 50. Determine el número de unidades que deben alquilarse para que la ganancia sea máxima. ¿Cuál es su monto?

35. La energía potencial entre dos átomos en una molécula diatómica está dada por $U(x) = 2/x^{12} - 1/x^6$. Evalúe la energía potencial mínima entre los dos átomos.

36. La altura de un proyectil lanzado con una velocidad inicial constante v_0 y con un ángulo de elevación θ_0, está dada por

$$y = (\tan \theta_0)x - (g/2v_0^2 \cos^2\theta_0)x^2,$$

en donde x es su desplazamiento horizontal medido desde el punto de lanzamiento. Demuestre que la altura máxima alcanzada por el proyectil es $h = (v_0^2/2g)\text{sen}^2\theta_0$.

37. Cuando se hace un orificio en la pared de un depósito cilíndrico lleno de agua, el chorro resultante da en el suelo a una distancia de x pies de la base, en donde $x = 2\sqrt{y(h-y)}$. Véase la Figura 4.75. ¿En qué punto debe hacerse el orificio en la pared de tal modo que el chorro alcance la máxima distancia a la base? ¿Cuál es su valor?

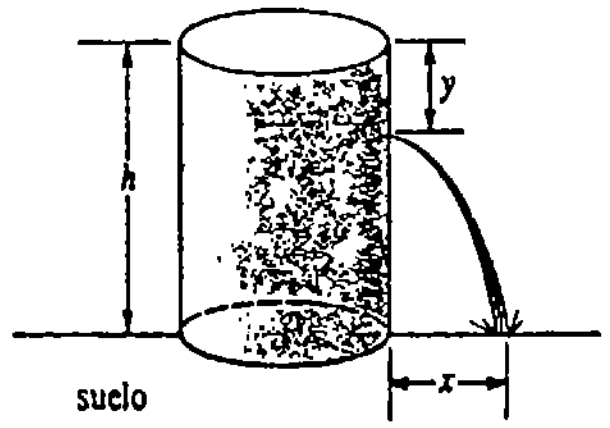


Figura 4.75

38. El costo anual total para una empresa por reabastecer las existencias agotadas de un solo artículo está dado algunas veces por $C(x) = (a/2)x + (b + cx)q/x$, en donde a, b, c y q son constantes positivas y x representa el tamaño del lote del nuevo pedido. Determine el costo anual mínimo.

39. La iluminancia E producida por una fuente de luz de intensidad I a una distancia r de la fuente, está dada por $E = I/r^2$. La iluminancia total originada por dos lámparas de intensidades $I_1 = 125$ e $I_2 = 216$ es la suma de las iluminancias. Si los focos luminosos están separados una distancia de 10 m, encuentre el punto P entre ellos en donde la iluminancia total sea mínima. Véase la Figura 4.76.

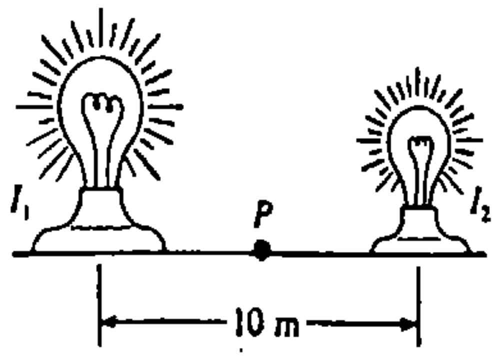


Figura 4.76

40. La iluminancia E en cualquier punto P sobre el borde de una mesa circular, producida por una lámpara colocada directamente arriba de su centro, está dada por $E = (I \cos \theta)/r^2$. Véase la Figura 4.77. Dado que el radio de la mesa sea de 1 m e $I = 100$, encuentre la altura a la que debe colocarse la luz para que E sea máxima.

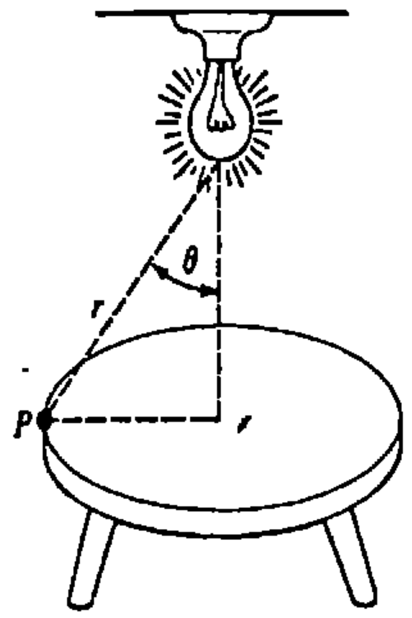


Figura 4.77

41. Determine la longitud máxima de una tabla delgada que pueda transportarse horizontalmente alrededor de la esquina en ángulo recto que se muestra en la Figura 4.78. (*Sugerencia:* utilice triángulos semejantes.)

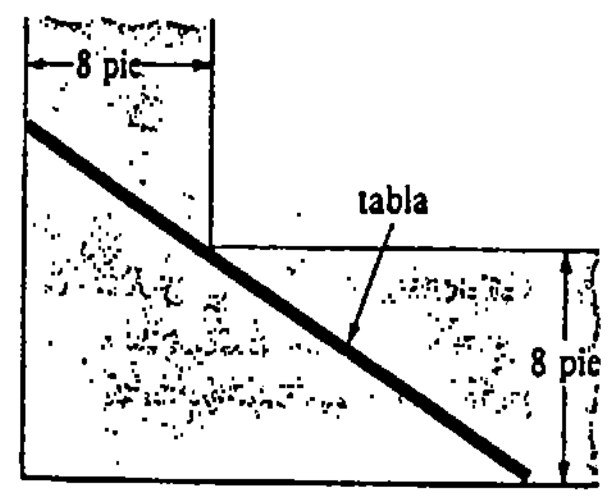


Figura 4.78

42. A medianoche, un barco A está 50 km al norte de otro barco B. El navío A navega hacia el sur a 20 km/h y el B navega hacia el oeste a 10 km/h. ¿A qué hora será mínima la distancia entre las embarcaciones? (*Sugerencia:* utilice distancia = velocidad × tiempo.)

43. Se va a construir un oleoducto desde una refinería hasta unos tanques de almacenamiento, cruzando un pantano. Véase la Figura 4.79. El costo de construcción a través del pantano es de $25,000 (dólares) por milla y sobre el terreno firme es de $20,000 por milla. ¿Cómo debe tenderse el oleoducto para que el costo de construcción sea mínimo?

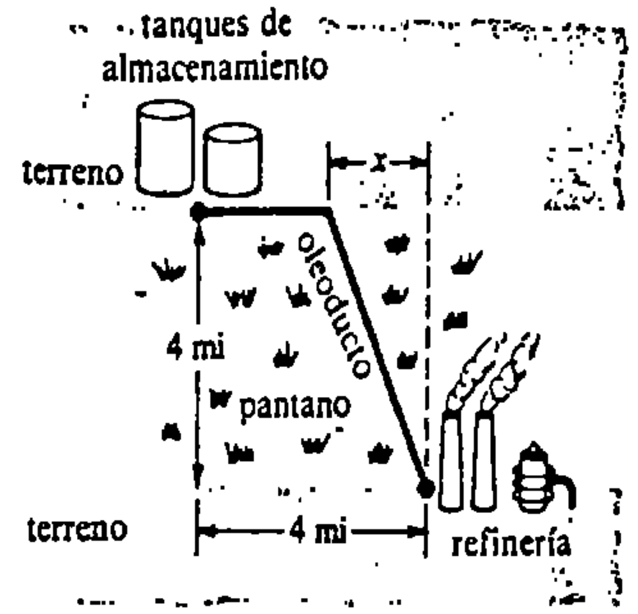


Figura 4.79

44. Resuelva el Problema 43, si ahora el costo por milla a través del pantano es el doble del costo por milla sobre el terreno firme.

45. El principio de Fermat* en óptica establece que la luz viaja de un punto A (en el plano xy) en un medio, a un punto B en otro medio, por una trayectoria que requiera el tiempo mínimo. Denote la velocidad de la luz en el medio que contiene al punto A por c_1 y la velocidad de la luz en el medio que contiene al punto B por c_2. Demuestre que el tiempo de recorrido de A a B es mínimo cuando los ángulos θ_1 y θ_2 que se muestran en la Figura 4.80 satisfacen la ley de Snell†

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{c_1} = \frac{\text{sen } \theta_2}{c_2}.$$

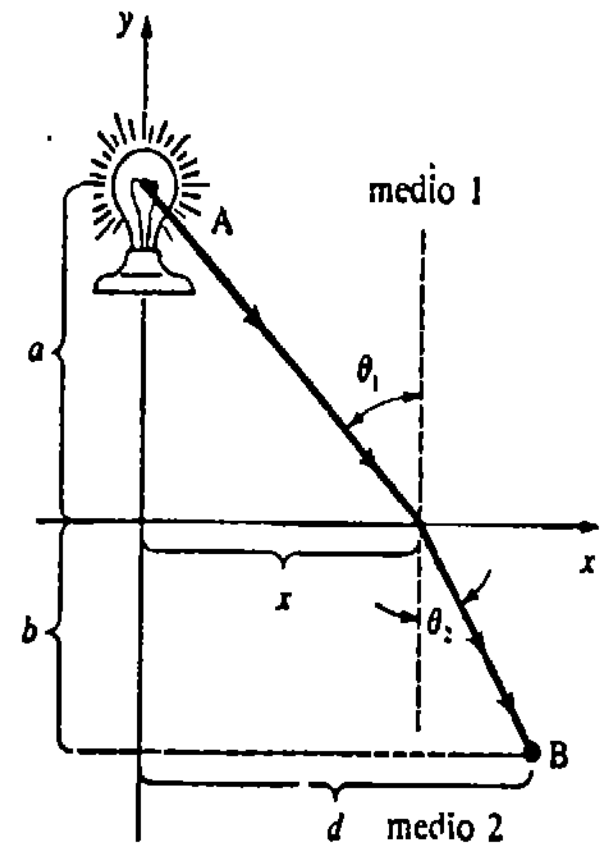


Figura 4.80

* Pierre de Fermat (1601-1665), matemático francés, famoso por sus numerosas contribuciones a la teoría de los números.
† Willebord Snell (1591-1626), matemático y astrónomo holandés.

46. La sangre es transportada a través del organismo por el sistema vascular, que consiste de vasos capilares, venas, arteriolas y arterias. Un aspecto considerado en el problema de minimizar la energía empleada en impulsar la sangre, a través de los distintos órganos, consiste en evaluar un ángulo θ óptimo para la *ramificación vascular*, de manera que la resistencia total al paso de la sangre a lo largo de una trayectoria que va de un vaso sanguíneo grande a uno más pequeño sea mínima. Véase la Figura 4.81. Utilice la ley de Poiseuille, que establece que la resistencia R de un vaso sanguíneo de longitud l y radio r es $R = kl/r^4$ (véase el Problema 32 de los Ejercicios 3.10), en donde k es una constante, para demostrar que la resistencia total

$$R = k(x/r_1^4) + k(y/r_2^4)$$

a lo largo de la trayectoria $P_1P_2P_3$ es mínima cuando $\cos\theta = r_2^4/r_1^4$. (*Sugerencia:* exprese x y y en términos de θ y a).

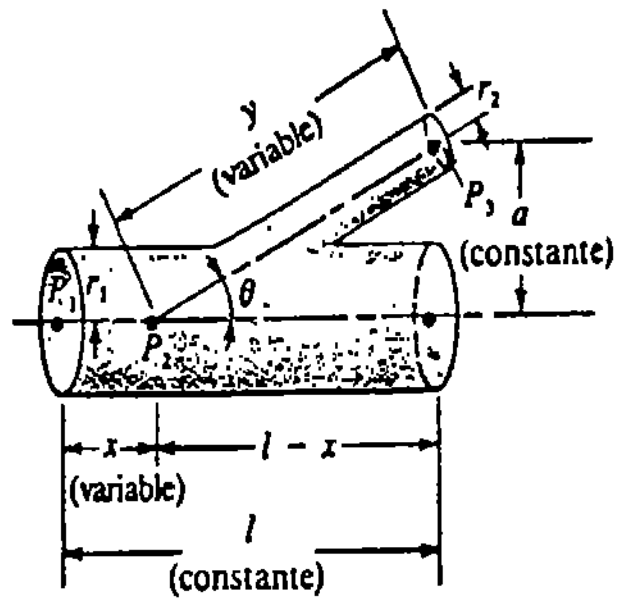


Figura 4.81

47. Los médicos utilizan varias fórmulas empíricas para graduar una dosis infantil D_c de un fármaco particular en términos de una dosis de adulto D_a. La fórmula de Young establece que

$$D_c = \frac{t}{t+12} D_a,$$

en donde t es la edad en años, mientras que la fórmula de Cowling establece que

$$D_c = \frac{t+1}{12} D_a.$$

¿Para qué edad resulta máxima la diferencia entre las dos fórmulas? ¿Cuál es la diferencia máxima?

48. La rapidez P, en mg (de carbono)/(m³/h), a la que tiene lugar la fotosíntesis para ciertas especies de fitoplancton, está relacionada con la intensidad de iluminación E (en 10^3 pie-candelas) por la función

$$P = \frac{100\,I}{I^2 + I + 4}.$$

¿Para qué valor de la iluminación es P máxima?

Problema para calculadora

49. Los grandes huesos de los mamíferos se pueden representar como tubos cilíndricos huecos, llenos de médula, de radio exterior R y radio interior r. Los huesos deben ser ligeros pero a la vez capaces de resistir ciertos momentos de flexión. Se puede demostrar que para resistir un momento flexionante M, la masa m por unidad de longitud del hueso y la médula está dada por

$$m = \pi\rho\left[\frac{M}{K(1-x^4)}\right]^{2/3}\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right),$$

en donde ρ es la densidad del hueso y K una constante positiva. Si $x = r/R$, demuestre que m es mínima cuando $r = 0.63\,R$ (aproximadamente).

(O) 4.8 Aplicaciones de la derivada en economía

Ingreso, costo y utilidad

Cuando una empresa pone a la venta un producto a p unidades monetarias por unidad, el ingreso obtenido en la producción de x unidades es

$$I = px. \tag{4.13}$$

Con frecuencia, el precio depende del número de unidades producidas de manera lineal $p = ax + b$ de forma que (4.13) se convierte en

$$\begin{aligned} I(x) &= x(ax + b) \\ &= ax^2 + bx. \end{aligned} \tag{4.14}$$

La función (4.14) es un ejemplo de función de ingreso. Además, si $C(x)$ denota el costo de producir x unidades, entonces la utilidad de la empresa se define como

$$U(x) = I(x) - C(x).$$

Además de esto, se dice que

$$Q(x) = \frac{C(x)}{x}$$

es el costo medio o costo por unidad.

Una empresa naturalmente se interesa en maximizar la utilidad: $U(x)$ y minimizar el costo unitario: $Q(x)$. Una función de costo típica consiste de

$$C = \text{costos variables} + \text{costos fijos.}$$

Así que, en

$$C(x) = 200x + 600 \quad \text{y} \quad C(x) = x^2 + 640x + 950, \tag{4.15}$$

las constantes 600 y 950 son los costos fijos y podrían representar renta, primas de seguros, etcétera. Dado que se supone que $x \geq 0$, nótese que el valor mínimo de cada una de las funciones en (4.15) es $C(0)$.

Ejemplo 1

Una empresa determina que en la producción de x unidades de un artículo sus funciones de ingreso y de costo son, respectivamente, $I(x) = -3x^2 + 970x$ y $C(x) = 2x^2 + 500$. Encontrar la utilidad máxima y el costo medio mínimo.

Solución La utilidad para $x \geq 0$ es

$$\begin{aligned} U(x) &= (-3x^2 + 970x) - (2x^2 + 500) \\ &= -5x^2 + 970x - 500. \end{aligned}$$

De

$$\begin{aligned} U'(x) &= -10x + 970 \\ U''(x) &= -10, \end{aligned}$$

puede verse que $x = 97$ es un valor crítico y que $U''(97) < 0$. Así que, el criterio de la segunda derivada implica que $U(97) = 46{,}545$ unidades monetarias es un máximo.

Ahora bien, para $x > 0$ el costo medio es

$$Q(x) = \frac{2x^2 + 500}{x} = 2x + \frac{500}{x},$$

de manera que

$$Q'(x) = 2 - \frac{500}{x^2}$$

$$Q''(x) = \frac{1000}{x^3}.$$

Resolviendo $Q'(x) = 0$ resulta que $x = \sqrt{250}$. Por consiguiente, $Q''(\sqrt{250}) > 0$ implica que $Q(\sqrt{250})$ es un mínimo. Debido a que la empresa solamente puede producir un número entero de unidades, se utiliza $\sqrt{250} \approx 16$ para encontrar el costo medio mínimo *aproximado*, o sea $Q(16) = 43.25$ unidades monetarias.

El lector puede usar el ejemplo anterior para verificar que la utilidad máxima no ocurre necesariamente en el mismo nivel de producción que corresponde al ingreso máximo.

Funciones marginales

En la economía el término **función marginal** usualmente se refiere a la derivada de esa función.

DEFINICIÓN 4.7

Ingreso marginal: $IM = I'(x)$

Costo marginal: $CM = C'(x)$

Utilidad marginal $UM = U'(x)$ □

Para captar el sentido de estas funciones, considérese el caso de la función de ingreso I. Cuando $\Delta x = 1$, el cociente

$$\frac{\Delta I}{\Delta x} = \frac{I(x + \Delta x) - I(x)}{\Delta x} = I(x + 1) - I(x)$$

proporciona la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(x, I(x))$ y $(x + 1, I(x + 1))$ de la gráfica de I. Véase la Figura 4.82. Puesto que la pendiente de esta secante es una aproximación a la pendiente de la tangente en $(x, I(x))$, la derivada $I'(x)$ proporciona el *valor aproximado del cambio en el ingreso debido a una unidad de aumento en la producción.*

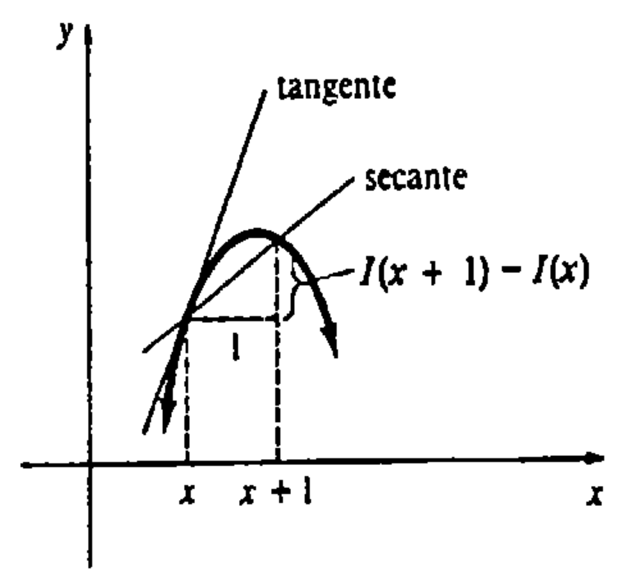


Figura 4.82

Ejemplo 2

Para la función de ingreso del Ejemplo 1, evaluar el ingreso obtenido de la producción de la cuadragésima primera unidad. Aproxime este valor por medio del ingreso marginal.

Solución De $I(x) = 3x^2 + 970x$, puede verse que el ingreso por producir 40 unidades es $I(40) = 34{,}000$, y el ingreso por producir 41 unidades es $I(41) = 34{,}727$. Por consiguiente, el ingreso por la producción de la cuadragésima primera, o bien una unidad más, es

$$I(41) - I(40) = 727 \text{ unidades monetarias.}$$

Para comparación,

$$IM = I'(x) = -6x + 970$$

y

$$IM(40) = 730 \text{ unidades monetarias.}$$

El lector debe darse cuenta de que todo lo que se está haciendo en el ejemplo precedente es evaluar aproximadamente el cambio de una función por medio de una diferencial; a saber, $\Delta I \approx dI$ cuando $\Delta x = 1$.

Ejemplo 3

El costo de producción de x unidades de un artículo está dado por $C(x) = x2 + 560x + 1000$. Obtenga el costo aproximado de producción de la quincuagésima unidad.

Solución En vez de calcular el costo exacto $C(50) - C(49)$, se utiliza el concepto de costo marginal. La derivada

$$CM = C'(x) = 2x + 560$$

evaluada en $x = 49$ da una aproximación al costo de producción de una unidad más (la 50ª),

$$CM(49) = 658 \text{ unidades monetarias.}$$

Demanda

El número D de unidades de un producto **demandado** por los consumidores es función del precio p de cada unidad. Intuitivamente, se esperaría que $D(p)$ fuera pequeño cuando p fuera grande.

Para un cambio Δp en el precio, el cociente

$$\frac{\dfrac{D(p + \Delta p) - D(p)}{D(p)}}{\dfrac{\Delta p}{p}} \tag{4.16}$$

es el cambio proporcionado en la demanda dividido entre el cambio proporcionado en el precio. Simplificando (4.16) y tomando límite cuando $\Delta p \to 0$ resulta que

$$\lim_{\Delta p \to 0} \frac{p}{D(p)} \cdot \frac{D(p + \Delta p) - D(p)}{\Delta p} = \frac{p}{D(p)} \cdot D'(p).$$

Puesto que $D(p)$ es una función decreciente, es de esperar que $D'(p) < 0$. Por esta razón se acostumbra introducir un signo menos y referirse a la cantidad resultante

$$\eta = -\frac{p}{D(p)} \cdot D'(p)$$

como la **elasticidad de la demanda.**

Casos

Cuando $\eta < 1$ los economistas dicen que la demanda es **inelástica**; en este caso el cambio porcentual de la cantidad demandada es menor que el cambio porcentual del precio. Si $\eta > 1$ se dice que la demanda es **elástica** y el cambio porcentual de la cantidad demandada es mayor que el cambio porcentual del precio. Cuando $\eta = 1$ el cambio porcentual de la cantidad demandada es igual al del precio.

Ejemplo 4

Si $D(p) = -p^2 + 400$, $0 \le p \le 20$, determinar si la demanda es elástica o inelástica en $p = 6$.

Solución $D'(p) = -2p$, $D'(6) = -12$ y $D(6) = 364$. Así que

$$\eta = -\frac{6}{D(6)} \cdot D'(6) = \frac{72}{364} \approx 0.2 < 1$$

implica que la demanda es inelástica.

El resultado del ejemplo anterior se puede interpretar diciendo que en $p = 6$ hay aproximadamente 0.2% de disminución en la cantidad demandada por 1% de aumento en el precio. Si suponemos que el precio aumenta, digamos 10%, entonces la cantidad demandada disminuiría aproximadamente en $10(0.2) = 2\%$.

En general, cuando una demanda es elástica, o bien inelástica, a un nivel del precio p, entonces un aumento porcentual del precio trae consigo una disminución en la cantidad demandada. Esta disminución es mayor para una demanda elástica que para una inelástica. El ingreso disminuye en el caso de la demanda elástica y aumenta en el de la inelástica. Cuando $\eta = 1$, un aumento en el precio no produce cambio en el ingreso.

Ejercicios 4.8

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 976.

En los Problemas 1 y 2 encuentre el ingreso máximo, la utilidad máxima y el costo medio mínimo.

1. $I(x) = -x^2 + 400x$, $C(x) = x^2 + 40x + 100$
2. $I(x) = x(-2x + 60)$, $C(x) = 2x^2 + 12x + 18$
3. Dada la función de ingreso $I(x) = -x^2 + 80x$,
   (a) Encuentre el ingreso marginal en $x = 10$.
   (b) Compare el resultado de la parte (a) con $I(11) - I(10)$.
4. Una empresa encuentra que su costo de producción de x unidades de un artículo es $C(x) = 3x^2 + 5x + 10$. Evalúe el costo aproximado de producción de la vigésima primera unidad.
5. Sea $C(x) = 3x^2 + 100$ el costo de producción de x unidades de un artículo. Compare el costo exacto de producción de la trigésima primera unidad con el costo marginal en $x = 30$ y $x = 31$.
6. Suponga que $I(x) = -x^2 + 1000x$ y $C(x) = 20x + 600$ son las funciones de ingreso y de costo, respectivamente, al producir x unidades de un artículo. ¿Cuál es la utilidad obtenida de la venta de 50 unidades? ¿Cuál es el monto aproximado en el cambio de la utilidad por la venta de una unidad más?
7. Dado que $I(x) = x(-x + 300)$ sea una función de ingreso, demuestre que el ingreso marginal siempre es decreciente.
8. Dado que $C(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x + 1000$ sea una función de costo, determine el(los) intervalo(s) para los que el costo es creciente. Determine si hay algunos intervalos en los que el costo marginal sea creciente.

9. Demuestre que la utilidad máxima ocurre cuando el ingreso marginal es igual al costo marginal.
10. Demuestre que el costo medio mínimo ocurre cuando el costo medio es igual al costo marginal.

En los Problemas 11-16 calcule la elasticidad de la demanda para la función de demanda dada, en el precio indicado. Determine si la demanda es elástica o inelástica.

11. $D(p) = -4p + 500$, $0 \le p \le 125$; $p = 50$
12. $D(p) = -10p + 850$, $0 \le p \le 85$; $p = 40$
13. $D(p) = -2p^2 + 200$, $0 \le p \le 10$; $p = 6$
14. $D(p) = (20 - p)^2$, $0 \le p \le 20$; $p = 10$
15. $D(p) = 800\sqrt{30 - p}$, $0 \le p \le 30$; $p = 14$
16. $D(p) = 1000 + \dfrac{200}{\sqrt{p + 4}}$, $p \ge 0$; $p = 21$
17. Calcule la elasticidad de la demanda para $D(p) = -2p^2 + 800$, $0 \le p \le 20$, en $p = 15$. Si el precio aumenta en 6%, determine el cambio aproximado en la cantidad demandada.
18. Calcule la elasticidad de la demanda para $D(p) = \sqrt{25 - p^2}$, $0 \le p \le 5$, en $p = 2$. Si el precio disminuye en 21%, determine el cambio aproximado en la cantidad demandada.
19. Para la función de demanda del Problema 18, encuentre el nivel de precio para el cual $\eta = 4$.
20. Para la función de demanda $D(p) = -4p + 1000$, $0 \le p \le 250$, determine los precios para los que la demanda sea elástica.

Examen • Capítulo 4

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 977.

En los Problemas 1-10 indique si es verdadero o falso.

1. Si f es creciente en un intervalo, entonces $f'(x) > 0$ en el intervalo. ______
2. Una función f tiene un extremo en un número c cuando $f'(c) = 0$. ______
3. Una partícula en movimiento rectilíneo reduce su marcha cuando la velocidad $v(t)$ decrece. ______
4. Para una partícula en movimiento rectilíneo, la aceleración es la primera derivada de la velocidad. ______
5. Si $f''(x) < 0$ para todo x en el intervalo (a, b), entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en el intervalo. ______
6. Si $f''(c) = 0$, entonces $(c, f(c))$ es un punto de inflexión. ______
7. Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) = f(b) = 0$, entonces existe algún valor c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$. ______
8. La gráfica de un polinomio cúbico puede tener a lo sumo un punto de inflexión. ______
9. Una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ tiene un máximo y un mínimo absolutos. ______
10. Todo extremo absoluto es también extremo relativo. ______

En los Problemas 11 y 12 proporcione la(s) razón(es) de por qué la proposición dada es falsa.

11. Si $f(c)$ es un máximo relativo, entonces $f'(c) = 0$ y $f'(x) > 0$ para $x < c$ y $f'(x) < 0$ para $x > c$.
12. Si $f(c)$ es un mínimo relativo, entonces $f''(c) > 0$.

En los Problemas 13-16 halle los extremos absolutos de la función dada en el intervalo indicado.

13. $f(x) = x^3 - 75x + 150$; $[-3, 4]$
14. $f(x) = 4x^2 - \dfrac{1}{x}$; $[1/4, 1]$
15. $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 4}$; $[-1, 3]$
16. $f(x) = (x^2 - 3x + 5)^{1/2}$; $[1, 3]$
17. Dibuje la gráfica de una función continua que tenga las propiedades siguientes:

$$\begin{array}{ll} f(0) = 1, & f(2) = 3 \\ f'(0) = 0, & f'(2) \text{ no existe} \\ f'(x) > 0, & x < 0 \\ f'(x) > 0, & 0 < x < 2 \\ f'(x) < 0, & x > 2. \end{array}$$

18. Utilice la primera y la segunda derivadas como una ayuda para comparar las gráficas de

$$y = x + \operatorname{sen} x$$

y

$$y = x + \operatorname{sen} 2x.$$

19. La posición de una partícula que se mueve en una recta horizontal está dada por $s(t) = -t^3 + 6t^2$. Trace la gráfica del movimiento en el intervalo de tiempo $[-1, 5]$. ¿En qué tiempo es máxima la función de velocidad? ¿Corresponde este punto a la máxima rapidez?

20. La altura sobre el suelo de un proyectil disparado verticalmente es $s(t) = -4.9t^2 + 14.7t + 49$, en donde s está medida en metros y t en segundos. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el proyectil? ¿Con qué rapidez choca el proyectil contra el suelo?

21. Considere la función $f(x) = x \operatorname{sen} x$. Utilice f y el teorema de Rolle para demostrar que la ecuación $\cot x = -1/x$ tiene una solución en el intervalo $(0, \pi)$.

22. Demuestre que la función $f(x) = x^{1/3}$ no satisface la hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[-1, 8]$, pero sin embargo se puede encontrar un número c en $(-1, 8)$ tal que $f'(c) = [f(b) - f(a)]/(b - a)$. Explique lo anterior.

En los Problemas 23-26 halle los extremos relativos de la función dada. Trace la gráfica.

23. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$

24. $f(x) = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2$

25. $f(x) = 4x - 6x^{2/3} + 2$

26. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

En los Problemas 27-30 encuentre los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función dada. No trace la gráfica.

27. $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2$

28. $f(x) = x^6 - 3x^4 + 5$

29. $f(x) = 10 - (x - 3)^{1/3}$

30. $f(x) = x(x - 1)^{5/2}$

31. Una polea está asegurada a la orilla de un muelle que está 15 pie por encima de la superficie del agua. Un pequeño bote es tirado hacia el muelle por medio de una cuerda que pasa sobre la polea. La cuerda está atada a la proa del bote a 3 pie por arriba del nivel del agua. Si se tira de la cuerda a una razón constante de 1 pie/s, ¿con qué rapidez se aproximará el bote al muelle cuando se encuentra a 16 pie de éste?

32. Cae agua dentro de un depósito hemisférico de 10 m de radio, a razón de $\frac{1}{2}$ m³/min. El agua escapa por un orificio en la base del depósito a razón de $\frac{1}{4}$ m³/min. Se puede demostrar que en cualquier instante el volumen del agua en el depósito es

$$V = 10\pi h^2 - \frac{\pi}{3}h^3.*$$

Véase la Figura 4.83. ¿Cómo es la profundidad del agua, creciente o decreciente? ¿Cuál es la razón de cambio de la profundidad del agua cuando el depósito está lleno a la mitad de su capacidad?

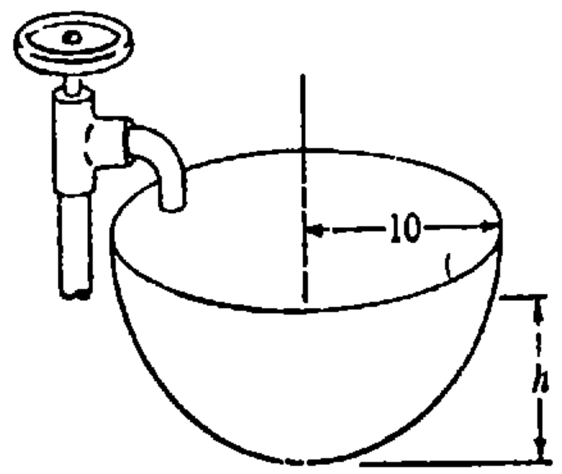


Figura 4.83

33. Considere la escalera cuyo pie se desliza alejándose de la base del muro vertical que se muestra en la Figura 4.84. Demuestre que la razón a la que θ_1 aumenta es igual a la razón a la que θ_2 disminuye.

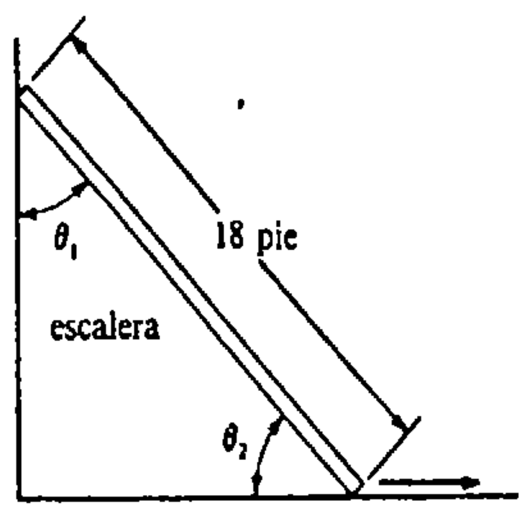


Figura 4.84

34. Una pila eléctrica con fuerza electromotriz (fem) E y resistencia interna constante r está conectada en serie con un resistor de resistencia R. Entonces la corriente en el circuito es $I = E/(r + R)$. Encuentre el valor de R para el cual es máxima la potencia $P = RI^2$ disipada en la carga externa. Dicho valor se llama *impedancia de acoplamiento*.

* Se pedirá al lector deducir esta fórmula. Véase el Problema 36 de los Ejercicios 6.3

35. Dos bobinas (o inductores) que conducen corrientes iguales producen un campo magnético en un punto Q del eje x de intensidad

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 r_0^2 I\left\{\left[r_0^2 + \left(x + \frac{r_0}{2}\right)^2\right]^{-3/2} + \left[r_0^2 + \left(x - \frac{r_0}{2}\right)^2\right]^{-3/2}\right\},$$

en donde μ_0, r_0 e I son constantes. Véase la Figura 4.85. Demuestre que el valor mínimo de B ocurre en $x = 0$.

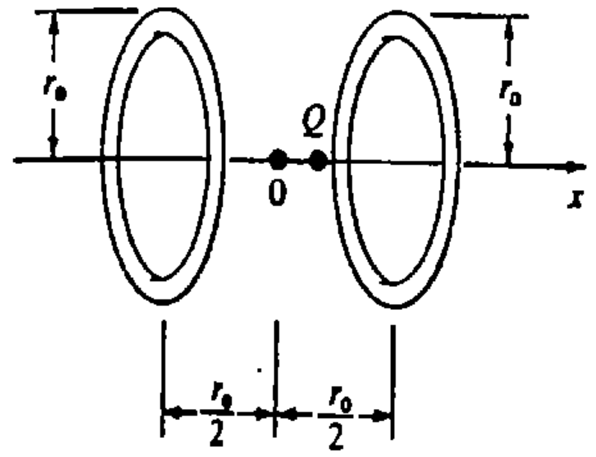


Figura 4.85

36. La velocidad del aire a través de la tráquea (en cm/s) de radio r es

$$v = V(r)/\pi r^2, \quad r_0/2 \le r \le r_0,$$

en donde

$$V(r) = kr^4(r_0 - r), \quad k > 0, \quad r_0 > 0$$

es el flujo volumétrico del aire. ¿Qué radio proporcionará la máxima velocidad?

37. Algunas aves vuelan más lento sobre el agua que sobre tierra. Un ave vuela con velocidades constantes de 6 km/h sobre el agua, y de 10 km/h sobre tierra. Use la información de la Figura 4.86 para determinar la trayectoria que debe seguir el ave a fin de minimizar el tiempo total de vuelo entre la playa de una isla y su nido situado en la playa de otra isla.

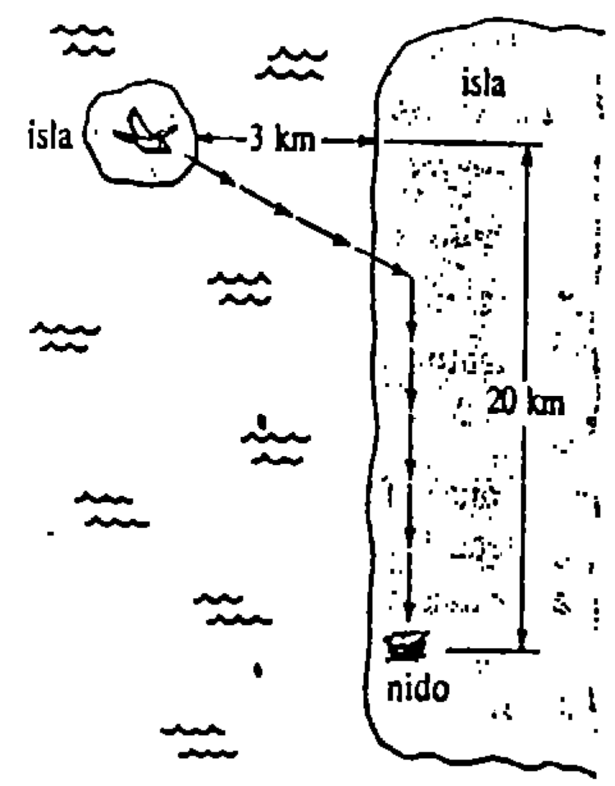


Figura 4.86

38. El área de un sector circular de radio r y longitud de arco s es $A = \frac{1}{2}rs$. Véase la Figura 4.87. Evalúe el área máxima de un sector limitado por un perímetro de 60 cm.

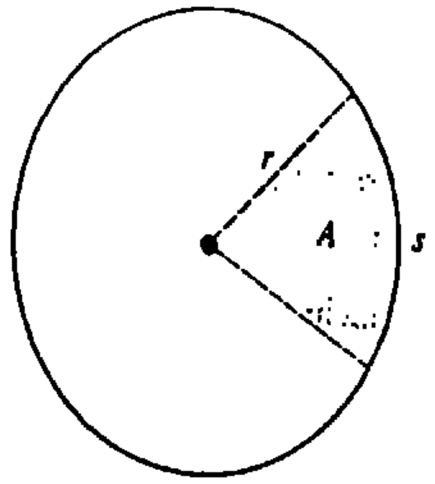


Figura 4.87

39. Encuentre el valor mínimo de la suma de un número no negativo y su recíproco.

40. Un granjero desea utilizar 100 m de cerca para construir una valla diagonal que conecte a dos muros existentes, los que se encuentran en ángulo recto. ¿Cómo debe efectuarse esto para que sea máxima el área limitada por los muros y la valla?

41. Dos postes de antena de TV se encuentran en un techo, afianzados mediante alambres sujetos en un mismo punto entre los postes. Véase la Figura 4.88. ¿En dónde debe localizarse el punto para minimizar la cantidad de alambre empleado?

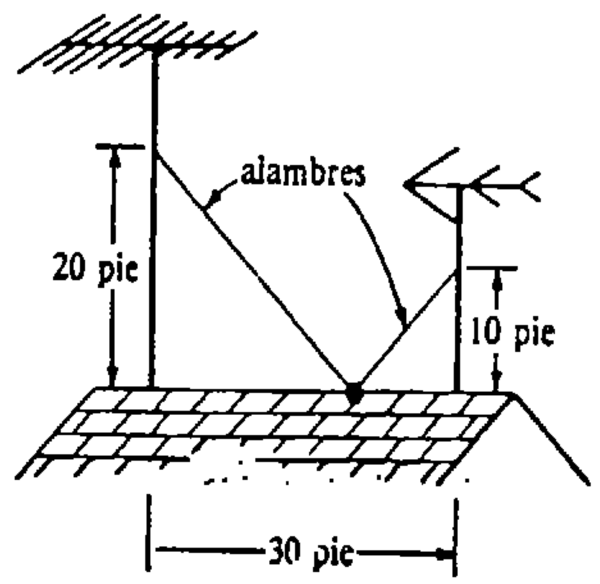


Figura 4.88

42. Una estatua está colocada sobre un pedestal, como se muestra en la Figura 4.89. ¿A qué distancia del pedestal debe pararse una persona para maximizar el ángulo visual θ? (*Sugerencia:* repase la identidad tri-

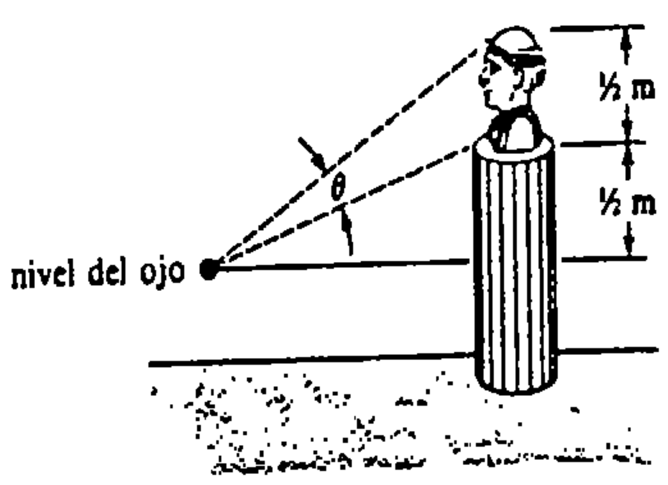


Figura 4.89

gonométrica para $\tan(\theta_2 - \theta_1)$. También, es suficiente maximizar $\tan \theta$ en vez de θ. ¿Por qué?)

43. Según el principio de Fermat, un rayo de luz originado en el punto A y reflejado por una superficie plana al punto B, viaja por la trayectoria que requiere el menor tiempo. Véase la Figura 4.90. Suponga que son constantes la velocidad de la luz c, y h_1, h_2, d. Demuestre que el tiempo es mínimo cuando $\tan \theta_1 = \tan \theta_2$. Puesto que $0 < \theta_1 < \pi/2$ y $0 < \theta_2 < \pi/2$, resulta que $\theta_1 = \theta_2$. En otras palabras, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión. (*Nota:* la Figura 4.90 es imprecisa a propósito.)

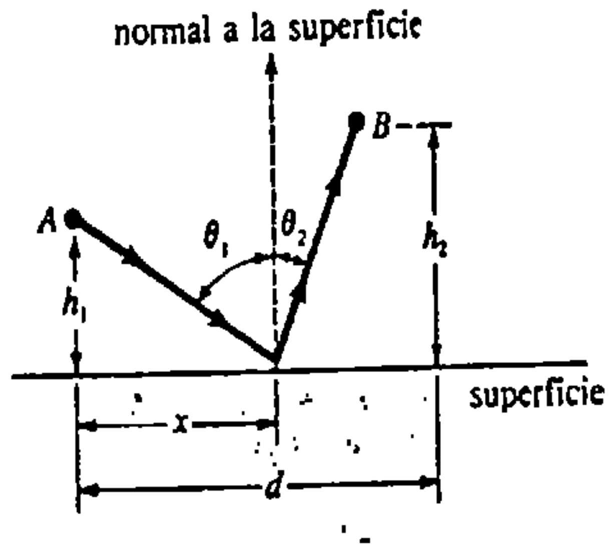


Figura 4.90

44. Determine las dimensiones de un cono circular recto que tenga el mínimo volumen V, que circunscribe a una esfera de radio r. Véase la Figura 4.91. (*Sugerencia:* utilice triángulos semejantes.)

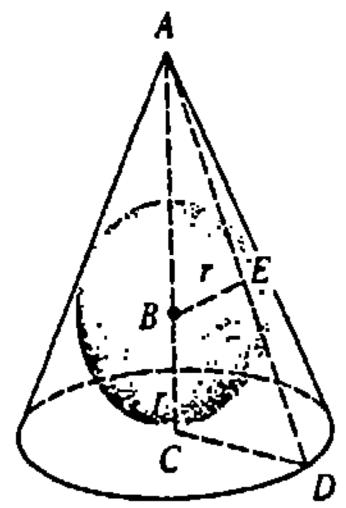


Figura 4.91

45. Un recipiente en forma de cilindro circular recto tiene un volumen de 100 plg³. La tapa del recipiente cuesta tres tantos por unidad de área de lo que cuestan la base y la superficie lateral. Demuestre que las dimensiones que dan el costo mínimo de fabricación son tales que la altura es cuatro veces el radio.

46. Una hoja de papel tiene 8 plg de ancho. Una de las esquinas se dobla hasta la otra orilla de la hoja como se muestra en la Figura 4.92. Encuentre la anchura x de la parte doblada, de tal forma que la longitud L del doblez sea mínima.

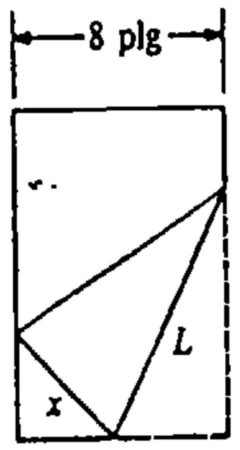


Figura 4.92

47. Una empresa determina que en la fabricación y venta de x unidades de un producto sus funciones de ingreso y de costo son $I(x) = x(-3x + 660)$ y $c(x) = x^2 + 196x + 400$, respectivamente. Halle

(a) El ingreso máximo,

(b) La utilidad máxima,

(c) El costo medio mínimo,

(d) El ingreso aproximado por la venta del undécimo artículo, y

(e) La utilidad aproximada por la venta del trigésimo primer artículo.

(f) ¿Cuánto pierde la empresa si no vende unidad alguna?

48. Suponga que la función $D(p) = -2p + 50$, $0 \le p \le 25$, representa la demanda de un producto. ¿Cuánto varía aproximadamente la cantidad demandada cuando el precio de cada unidad del producto cambia de \$10.00 a \$11.80?

La integral

5.1 Antiderivadas
5.2 Integrales indefinidas y la sustitución con u
5.3 La notación de sumatoria (o con sigma)
5.4 Área bajo una gráfica
5.5 La integral definida
5.5.1 Definición de la integral definida
(O) 5.5.2 Una definición según $\epsilon - \delta$
5.6 Propiedades de la integral definida
5.7 El teorema fundamental del Cálculo
5.8 Integración aproximada
Examen • Capítulo 5

Los últimos capítulos trataron de la definición, propiedades y aplicaciones de la derivada. Ahora se pasará del Cálculo diferencial al Cálculo integral. A esta última de las dos ramas principales del Cálculo, Leibniz la llamó originalmente *calculus summatorius*. En 1696, persuadido por el matemático suizo Johann Bernoulli, Leibniz le cambió el nombre a *calculus integralis*. Tal como lo sugiere el nombre original en latín, la noción de suma será importante en el desarrollo completo de la **integral**.

5.1 Antiderivadas

En los Capítulos 3 y 4 se hizo referencia únicamente al problema básico siguiente: Dada una función f encontrar su derivada f'. En el presente capítulo y subsecuentes de este libro, se verá que un problema igualmente importante es:

Dada una función f, encontrar una función cuya derivada sea la f dada.

Esto es, para una función dada f, se desea encontrar otra función F para la cual $F'(x) = f(x)$ para todo x en cierto intervalo.

DEFINICIÓN 5.1

Se dice que una función F es una **antiderivada** de una función f si $F'(x) = f(x)$ en algún intervalo. □

Ejemplo 1

Una antiderivada de $f(x) = 2x$ es $F(x) = x^2$, puesto que $F'(x) = 2x$.

Siempre hay más de una antiderivada de una función. En el caso del ejemplo precedente, $F_1(x) = x^2 - 1$ y $F_2(x) = x^2 + 10$ son también antiderivadas de $f(x) = 2x$, puesto que $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$. En efecto, si F es una antiderivada de una función f, entonces $G(x) = F(x) + C$ también lo es, para cualquier constante C. Esto es una consecuencia del hecho de que

$$G'(x) = \frac{d}{dx}(F(x) + C) = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x).$$

Entonces, $F(x) + C$ representa un *conjunto de funciones* del cual cada miembro tiene una derivada igual a $f(x)$. Se demostrará ahora que cualquier antiderivada de f debe ser de la forma $G(x) = F(x) + C$; esto es, *dos antiderivadas de la misma función pueden diferir cuando mucho en una constante*. Por consiguiente, $F(x) + C$ es *la antiderivada más general de $f(x)$*.

TEOREMA 5.1

Si $G'(x) = F'(x)$ para todo x en algún intervalo $[a, b]$, entonces

$$G(x) = F(x) + C$$

para todo x en el intervalo.

Demostración Supóngase que se define $g(x) = G(x) - F(x)$. Entonces, como $G'(x) = F'(x)$, resulta que $g'(x) = G'(x) - F'(x) = 0$ para todo x en $[a, b]$. Si x_1 y x_2 son dos números arbitrarios que satisfacen $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, del teorema del valor medio (Teorema 4.5) se deduce que existe un número k en el intervalo abierto (x_1, x_2) para el cual

$$g'(k) = \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1}$$

o bien

$$g(x_2) - g(x_1) = g'(k)(x_2 - x_1).$$

Pero $g'(x) = 0$ para todo x en $[a, b]$; en particular $g'(k) = 0$. Por consiguiente, $g(x_2) - g(x_1) = 0$ o bien $g(x_2) = g(x_1)$. Puesto que, por hipótesis, x_1 y x_2 son dos números diferentes cualesquiera, en el intervalo, y como los valores funcionales $g(x_1)$ y $g(x_2)$ son iguales, debe concluirse que la función $g(x)$ es una constante C. Así que $g(x) = C$ implica que

$$G(x) - F(x) = C$$

o bien

$$G(x) = F(x) + C.$$ □

De ahora en adelante se hará referencia a $F(x) + C$ simplemente como *la* antiderivada de $f(x)$.

Ejemplo 2

(*a*) La antiderivada de $f(x) = 2x$ es $G(x) = x^2 + C$.

(*b*) La antiderivada de $f(x) = 2x + 5$ es $G(x) = x^2 + 5x + C$ puesto que $G'(x) = 2x + 5$.

Notación de la integral indefinida

Por conveniencia introduzcamos una notación para una antiderivada de una función. Si $F'(x) = f(x)$, la antiderivada más general de f se representará mediante

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Al símbolo $\int$ se le llama **símbolo de la integral**, y a la notación $\int f(x)dx$ se le llama **integral indefinida** de $f(x)$ con respecto a x. La función $f(x)$ se denomina **integrando**. El proceso de encontrar una antiderivada recibe el nombre de **antidiferenciación** o **integración**. Al número C se le llama una **constante de integración**. Así como $d/dx(\quad)$ denota diferenciación *con respecto a x*, el símbolo $\int(\quad)dx$ denota integración *con respecto a x*.

La integral indefinida de una potencia

Al diferenciar la potencia x^n, el exponente n se pone como factor y se disminuye en 1 el valor del exponente original. Para hallar una antiderivada de x^n, la opuesta de la regla de diferenciación sería: *aumentar el exponente en 1 y dividir entre el nuevo exponente $n + 1$*. La regla análoga, para la integral indefinida, según la regla de la diferenciación de una potencia, es como sigue:

Si n es un número racional, entonces para $n \neq -1$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C. \tag{5.1}$$

Demostración Del Teorema 3.9,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\right) = (n+1)\frac{x^{(n+1)-1}}{n+1}+0$$
$$= x^n. \qquad \square$$

Nota: El resultado dado en (5.1) no incluye el caso en el que $n = -1$. No se ha encontrado aún ninguna función cuya derivada sea $x^{-1} = 1/x$. Este caso se considerará en el Capítulo 8.

Ejemplo 3

Evaluar (*a*) $\int x^6\,dx$ (*b*) $\int \frac{1}{x^5}\,dx$.

Solución

(*a*) Con $n = 6$, de (5.1) resulta que

$$\int x^6\,dx = \frac{x^7}{7} + C.$$

(*b*) Escribiendo $1/x^5$ como x^{-5} e identificando $n = -5$, de (5.1) se tiene que

$$\int x^{-5}\,dx = \frac{x^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{4x^4} + C.$$

Ejemplo 4

Evaluar $\int \sqrt{x}\,dx$.

Solución Primero se escribe

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx$$

y con $n = 1/2$ se obtiene, de (5.1), que

$$\int x^{1/2}\,dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}x^{3/2} + C.$$

Debe tenerse presente que los *resultados de integración siempre se pueden comprobar mediante la diferenciación*; por ejemplo,

integración

$$\int \boxed{x^2}\,dx = \boxed{\frac{x^3}{3} + C.}$$

comprobación
mediante diferenciación

Ejemplo 5

Evaluar $\int dx$.

Solución Como $\int dx = \int 1 \cdot dx$, y puesto que $d/dx(x + C) = 1 + 0 = 1$, de la definición de antiderivada resulta que

$$\int dx = x + C.$$

El resultado del Ejemplo 5 se puede obtener también a partir de (5.1) con $n = 0$.

La siguiente propiedad de las integrales indefinidas es una consecuencia inmediata del hecho de que la derivada de una suma es la suma de las derivadas.

TEOREMA 5.2

Si $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = g(x)$, entonces

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$
$$= F(x) \pm G(x) + C. \qquad \square$$

Obsérvese que no hay razón para usar dos constantes de integración, puesto que

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = (F(x) + C_1) \pm (G(x) + C_2)$$
$$= F(x) \pm G(x) + (C_1 \pm C_2)$$
$$= F(x) \pm G(x) + C,$$

en donde se ha reemplazado $C_1 \pm C_2$ por la constante única C.

Ejemplo 6

Evaluar $\int (x^{-1/2} + x^4)\,dx$.

Solución En virtud del Teorema 5.2 y de (5.1) se puede escribir

$$\int (x^{-1/2} + x^4)\,dx = \int x^{-1/2}\,dx + \int x^4\,dx$$
$$= \frac{x^{1/2}}{1/2} + \frac{x^5}{5} + C$$
$$= 2x^{1/2} + \frac{x^5}{5} + C.$$

TEOREMA 5.3

Si $F'(x) = f(x)$, entonces

$$\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

para cualquier constante k. $\square$

La antiderivada, o integral indefinida, de cualquier suma finita puede obtenerse integrando cada término.

Ejemplo 7

Evaluar $\int\left(4x - 2x^{-1/3} + \frac{5}{x^2}\right) dx$.

Solución De la discusión precedente resulta que

$$\begin{aligned}\int\left(4x - 2x^{-1/3} + \frac{5}{x^2}\right) dx &= 4\int x\,dx - 2\int x^{-1/3} + 5\int x^{-2}\,dx \\ &= 4\cdot\frac{x^2}{2} - 2\cdot\frac{x^{2/3}}{2/3} + 5\cdot\frac{x^{-1}}{-1} + C \\ &= 2x^2 - 3x^{2/3} - 5x^{-1} + C.\end{aligned}$$

Ejercicios 5.1

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 977.

En los Problemas 1-20 evalúe la integral indefinida dada.

1. $\int 3\,dx$
2. $\int (4x - 1)\,dx$
3. $\int x^5\,dx$
4. $\int 5x^{1/4}\,dx$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$
6. $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$
7. $\int (1 - t^{-0.52})\,dt$
8. $\int 10w\sqrt{w}\,dw$
9. $\int (3x^2 + 2x - 1)\,dx$
10. $\int\left(2\sqrt{t} - t - \frac{9}{t^2}\right) dt$
11. $\int (4x + 1)^2\,dx$
12. $\int (\sqrt{x} - 1)^2\,dx$
13. $\int (x + 2)(x - 2)\,dx$
14. $\int \frac{x^3 + 8}{x + 2}\,dx$
15. $\int \frac{r - 10}{r^3}\,dr$
16. $\int \frac{(x + 1)^2}{\sqrt{x}}\,dx$
17. $\int \frac{x^{-1} - x^{-2} + x^{-3}}{x^2}\,dx$
18. $\int\left(\frac{5}{\sqrt[3]{s^2}} + \frac{2}{\sqrt{s^3}}\right) ds$
19. $\int (4w - 1)^3\,dw$
20. $\int (5u - 1)(3u^2 + 2)\,du$

21. Obtenga una función f cuya gráfica pase por el punto (2, 3) y que también satisfaga $f'(x) = 2x - 1$.

22. Obtenga una función f de manera que $f'(x) = 1/\sqrt{x}$ y $f(9) = 1$.

23. Si $f''(x) = 2x$, encuentre $f'(x)$ y $f(x)$.

24. Obtenga una función f tal que $f''(x) = 1$, $f'(-1) = 2$ y $f(-1) = 0$.

En los Problemas 25 y 26 efectúe las operaciones indicadas.

25. $\frac{d}{dx}\int (x^2 - 4x + 5)\,dx$

26. $\int \frac{d}{dx}(x^2 - 4x + 5)\,dx$

27. Una cubeta o balde que contiene un líquido, gira alrededor de un eje vertical a una velocidad angular constante ω. El contorno en el plano xy de la sección transversal del líquido en rotación se determina a partir de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2}{g}x.$$

Encuentre $y = f(x)$, con los ejes de coordenadas como se muestra en la Figura 5.1.

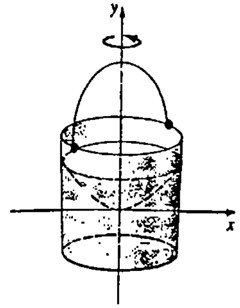


Figura 5.1

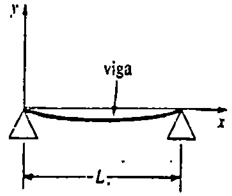


Figura 5.2

28. Los extremos de una viga de longitud L descansan sobre dos apoyos, como se indica en la Figura 5.2. La forma de la viga flexionada (o curva elástica) por una carga uniforme, se determina a partir de

$$EIy'' = \frac{qL}{2}x - \frac{q}{2}x^2,$$

en donde E, I y q son constantes. Encuentre $y = f(x)$ si $f(0) = 0$ y $f'(L/2) = 0$.

En los Problemas 29-32 verifique mediante diferenciación el resultado indicado.

29. $\int \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}\,dx = \sqrt{2x + 1} + C$

30. $\int (2x^2 - 4x)^9(x - 1)\,dx = \frac{1}{40}(2x^2 - 4x)^{10} + C$

31. $\int x \operatorname{sen} x^2\,dx = -\frac{1}{2}\cos x^2 + C$

32. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx = -\frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x} + C$

5.2 Integrales indefinidas y la sustitución con *u*

Hasta ahora se han considerado solamente antiderivadas de potencias racionales de x:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1. \tag{5.2}$$

En la presente exposición se examinarán las reglas análogas para integrales indefinidas, tanto por la regla de la potencia para funciones (Teorema 3.9) como por las fórmulas de derivación de funciones trigonométricas (I-VI de la Sección 3.6).

Integral indefinida de la potencia de una función

Si se desea encontrar una función F tal que

$$\int (5x + 1)^{1/2}\,dx = F(x) + C,$$

se debe tener que

$$F'(x) = (5x + 1)^{1/2}.$$

Razonando "hacia atrás", podría afirmarse que para obtener $(5x + 1)^{1/2}$ se debió haber diferenciado $(5x + 1)^{3/2}$. Entonces se ve que podríamos proceder como en (5.2):

$$\int (5x + 1)^{1/2}\,dx = \frac{(5x + 1)^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}(5x + 1)^{3/2} + C. \tag{5.3}$$

Lamentablemente la "respuesta" en (5.3) no funciona puesto que la regla de la potencia para funciones da

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{2}{3}(5x+1)^{3/2}+C\right] = \frac{2}{3}\frac{3}{2}(5x+1)^{1/2}\cdot 5$$
$$= 5(5x+1)^{1/2} \neq (5x+1)^{1/2}.$$

A fin de tomar en cuenta el factor 5 faltante en (5.3), se utiliza el Teorema 5.3 y un poco de ingenio:

$$\begin{aligned}\int (5x+1)^{1/2}\,dx &= \int (5x+1)^{1/2}\boxed{\frac{1}{5}\cdot 5}\,dx \qquad \boxed{\text{igual a 1}}\\ &= \frac{1}{5}\int \boxed{(5x+1)^{1/2}5}\,dx \qquad \boxed{\text{derivada de } \frac{(5x+1)^{3/2}}{3/2}}\\ &= \frac{1}{5}\frac{2}{3}(5x+1)^{3/2}+C\\ &= \frac{2}{15}(5x+1)^{3/2}+C\end{aligned}$$

Ahora el lector debe verificar mediante diferenciación que la última función es efectivamente una antiderivada de $(5x+1)^{1/2}$.

La clave para evaluar integrales indefinidas tales como

$$\int \frac{x}{(4x^2+3)^6}\,dx \quad \text{y} \quad \int \operatorname{sen} 10x\,dx$$

radica en el resultado siguiente, que es la forma de integración indefinida de la regla de la cadena.

TEOREMA 5.4

Si F es una antiderivada de f, entonces

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C. \tag{5.4}$$

Demostración Por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Por consiguiente, en virtud de la definición de antiderivada,

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C. \qquad \square$$

En particular, si $F(x) = x^{n+1}/(n+1)$, en donde n es un número racional, y si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$F(g(x)) = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}F(g(x)) = [g(x)]^n g'(x).$$

Por lo tanto, el Teorema 5.4 implica de inmediato que

$$\int [g(x)]^n g'(x)\,dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C. \tag{5.5}$$

A un nivel práctico es útil a menudo *cambiar la variable* dada en un problema de integración, empleando las sustituciones

$$u = g(x), \qquad du = g'(x)\,dx$$

en (5.4). Así que (5.5) puede resumirse de la manera siguiente.

Si n es un número racional y $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces para $n \neq -1$

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C. \tag{5.6}$$

Ejemplo 1

Evaluar $\int \frac{x}{(4x^2+3)^6}\,dx.$

Solución Se escribe la integral como

$$\int (4x^2+3)^{-6}x\,dx$$

y se hacen las identificaciones

$$u = 4x^2+3 \quad \text{y} \quad du = 8x\,dx.$$

Para emplear (5.6) es necesario tener la forma *precisa* $\int u^{-6}du$. Con este fin se ajusta el integrando, multiplicando y dividiendo por 8:

$$\begin{aligned}\int (4x^2+3)^{-6}x\,dx &= \frac{1}{8}\int \overbrace{(4x^2+3)^{-6}}^{u^{-6}}\overbrace{(8x\,dx)}^{du}\\ &= \frac{1}{8}\int u^{-6}\,du\\ &= \frac{1}{8}\cdot\frac{u^{-5}}{-5}+C\\ &= -\frac{1}{40}(4x^2+3)^{-5}+C.\end{aligned}$$

Comprobación Por la regla de la potencia para funciones

$$\frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{40}(4x^2+3)^{-5}+C\right] = \left(-\frac{1}{40}\right)(-5)(4x^2+3)^{-6}(8x)$$
$$= \frac{x}{(4x^2+3)^6}.$$

Ejemplo 2

Evaluar $\int (x^2+2)^3\,x\,dx.$

Solución

Si

$$u = x^2 + 2 \quad \text{entonces, } du = 2x\,dx.$$

Así que,

$$\int (x^2+2)^3\,x\,dx = \frac{1}{2}\int \overbrace{(x^2+2)^3}^{u^3}\overbrace{(2x\,dx)}^{du}$$
$$= \frac{1}{2}\int u^3\,du$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^4}{4} + C_1$$
$$= \frac{1}{8}(x^2+2)^4 + C_1. \qquad (5.7)$$

Solución alternativa Si se utiliza el teorema del binomio antes de integrar, se tiene que

$$\int (x^2+2)^3\,x\,dx = \int (x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8)x\,dx$$
$$= \int (x^7 + 6x^5 + 12x^3 + 8x)\,dx$$
$$= \frac{x^8}{8} + 6\cdot\frac{x^6}{6} + 12\cdot\frac{x^4}{4} + 8\cdot\frac{x^2}{2} + C_2$$
$$= \frac{1}{8}x^8 + x^6 + 3x^4 + 4x^2 + C_2. \qquad (5.8)$$

Obsérvese que (5.7) puede escribirse como

$$\frac{1}{8}(x^2+2)^4 + C_1 = \frac{1}{8}x^8 + x^6 + 3x^4 + 4x^2 + 2 + C_1.$$

Aunque (5.7) y (5.8) no son exactamente iguales, ambos resultados difieren solamente en una constante.

Ejemplo 3

Evaluar $\int \sqrt[3]{(7-2x^3)^4}\,x^2\,dx$.

Solución Primero se escribe la integral como

$$\int (7-2x^3)^{4/3}x^2\,dx$$

y luego se hacen las identificaciones

$$u = 7 - 2x^3, \qquad du = -6x^2\,dx.$$

Por consiguiente,

$$\int (7-2x^3)^{4/3}x^2\,dx = -\frac{1}{6}\int (7-2x^3)^{4/3}(-6x^2\,dx)$$
$$= -\frac{1}{6}\int u^{4/3}\,du$$
$$= -\frac{1}{6}\frac{u^{7/3}}{7/3} + C$$
$$= -\frac{3}{6\cdot 7}u^{7/3} + C$$
$$= -\frac{1}{14}(7-2x^3)^{7/3} + C.$$

Integrales indefinidas de funciones trigonométricas

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces las fórmulas de diferenciación

$$\frac{d}{dx}\,\text{sen}\,u = \cos u\,\frac{du}{dx} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}(-\cos u) = \text{sen}\,u\,\frac{du}{dx}$$

dan lugar, a su vez, a las fórmulas de integración

$$\int \cos u\,\frac{du}{dx}\,dx = \text{sen}\,u + C \qquad (5.9)$$
$$\int \text{sen}\,u\,\frac{du}{dx}\,dx = -\cos u + C. \qquad (5.10)$$

Como $du = g'(x)\,dx = \frac{du}{dx}\,dx$, (5.9) y (5.10) son equivalentes a

$$\int \cos u\,du = \text{sen}\,u + C$$

y

$$\int \text{sen}\,u\,du = -\cos u + C.$$

En general, las expresiones I-VI de la Sección 3.6 dan lugar a los resultados de integración siguientes:

I' $\int \cos u\,du = \text{sen}\,u + C$ II' $\int \text{sen}\,u\,du = -\cos u + C$

III' $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$ IV' $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$

V' $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$ VI' $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$

Ejemplo 4

Evaluar $\int 3 \cos 3x \, dx$.

Solución

Si $\quad u = 3x \quad$ entonces $du = 3\,dx$.

Por consiguiente, puede verse que el problema es exactamente de la forma I':

$$\int \cos \overbrace{3x}^{u} \overbrace{(3\,dx)}^{du} = \int \cos u \, du$$
$$= \operatorname{sen} u + C$$
$$= \operatorname{sen} 3x + C.$$

Como en la exposición de (5.6), la diferencial du es probablemente la parte más importante de cada una de las expresiones I'-VI'. Antes de aplicar alguno de estos resultados, puede ser necesario "arreglar" o ajustar un integrando, multiplicando y dividiendo por una constante para obtener la du apropiada.

Ejemplo 5

Evaluar $\int \operatorname{sen} 10x \, dx$.

Solución

Si

$$u = 10x, \quad \text{entonces se necesita } du = 10\,dx.$$

En consecuencia,

$$\int \operatorname{sen} 10x \, dx = \frac{1}{10} \int \operatorname{sen} 10x(10\,dx)$$
$$= \frac{1}{10} \int \operatorname{sen} u \, du$$
$$= \frac{1}{10}(-\cos u) + C \qquad \text{(de II')}$$
$$= -\frac{1}{10} \cos 10x + C.$$

Después de algún tiempo, inténtese realizar una integración sin recurrir a la sustitución con u.

Ejemplo 6

Evaluar $\int \sec^2(1 - 4x) \, dx$.

Solución

$$\int \sec^2(1 - 4x) \, dx = -\frac{1}{4} \int \sec^2(1 - 4x)(-4\,dx)$$
$$= -\frac{1}{4} \tan(1 - 4x) + C. \qquad \text{(por III')}$$

Comprobación

$$\frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{4} \tan(1 - 4x) + C\right] = -\frac{1}{4} \sec^2(1 - 4x) \frac{d}{dx}(1 - 4x)$$
$$= -\frac{1}{4} \sec^2(1 - 4x)(-4) = \sec^2(1 - 4x).$$

El ejemplo siguiente muestra que no toda integral indefinida de una función trigonométrica es de alguno de los tipos I'-VI':

Ejemplo 7

Evaluar $\int \cos^4 x \operatorname{sen} x \, dx$.

Solución Para enfatizar, se reescribe la expresión como

$$\int (\cos x)^4 \operatorname{sen} x \, dx.$$

Con las identificaciones

$$u = \cos x \quad \text{y} \quad du = -\operatorname{sen} x \, dx,$$

se reconoce que

$$\int (\cos x)^4 \operatorname{sen} x \, dx = -\int (\cos x)^4(-\operatorname{sen} x \, dx) = -\int u^4 \, du.$$

Por consiguiente, en virtud de (5.6) se obtiene

$$\int (\cos x)^4 \operatorname{sen} x \, dx = -\frac{u^5}{5} + C = -\frac{1}{5} \cos^5 x + C.$$

En ocasiones puede ser necesario usar una identidad trigonométrica para resolver un problema.

Ejemplo 8

Evaluar $\int \cos^2 x \, dx$.

Solución Debe verificarse que la integral *no* es de la forma $\int u^2 du$. Ahora bien, recuérdese de las fórmulas del semiángulo que $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$. Por lo tanto,

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2}\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\int [1 + \cos 2x]\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x(2\, dx)\right] \quad \text{[por el Teorema 5.2]}$$
$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right] + C \quad \text{[por (5.2) y 1']}$$
$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C.$$

En el Capítulo 9 se verán con mayor detalle sustituciones e integrales de potencias de funciones trigonométricas.

Observación

El ejemplo siguiente ilustra un procedimiento común, pero *totalmente incorrecto*, para evaluar una integral indefinida:

$$\int (4 + x^2)^{1/2}\, dx = \frac{1}{2x}\int (4 + x^2)^{1/2} 2x\, dx \qquad \left(\frac{1}{2x}\cdot 2x = 1\right)$$
$$= \frac{1}{2x}\int u^{1/2}\, du$$
$$= \frac{1}{2x}\cdot\frac{3}{2}(4 + x^2)^{3/2} + C.$$

El lector debe verificar que de la diferenciación de esta última función *no* resulta $(4 + x^2)^{1/2}$. El error está en el primer renglón de la "solución". *Las variables*, en este caso $2x$, *no pueden sacarse del símbolo de la integral.* Si $u = x^2 + 4$, entonces al integrando le falta la función $du = 2x dx$; de hecho, no hay manera de ajustar la expresión para adaptarse a la forma dada en (5.6). Por ahora, la integral $\int (4 + x^2)^{1/2} dx$ simplemente no puede evaluarse.

Ejercicios 5.2

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 977.

En los Problemas 1-42 evalúe la integral indefinida dada.

1. $\int \sqrt{1 - 4x}\, dx$
2. $\int (8x + 2)^{1/3}\, dx$
3. $\int \frac{dx}{(5x + 1)^3}$
4. $\int (7 - x)^{49}\, dx$
5. $\int \sqrt[5]{(3 - 4x)^3}\, dx$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x + 1)^2}}$
7. $\int (x^2 - 2x + 1)^3\, dx$
8. $\int (4y^2 + 4y + 1)^{3/2}\, dy$
9. $\int 2x\sqrt{x^2 + 4}\, dx$
10. $\int x\sqrt[3]{7x^2 + 1}\, dx$
11. $\int \frac{z}{\sqrt[3]{z^2 + 9}}\, dz$
12. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{(1 - x^2)^2}}\, dx$

13. $\int (4x^2 - 16x + 7)^4(x - 2)\, dx$
14. $\int (x^2 + 2x - 10)^{2/3}(5x + 5)\, dx$
15. $\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt[3]{x^3 + 3x - 16}}\, dx$
16. $\int \frac{s(s^3 - 4)}{\sqrt{s^5 - 10s^2 + 6}}\, ds$
17. $\int \sqrt{3 - \frac{2}{v}}\,\frac{dv}{v^2}$
18. $\int \sqrt{\frac{x^3 + 1}{x^3}}\,\frac{dx}{x^4}$
19. $\int \sqrt[3]{\frac{1 - \sqrt[3]{x}}{x^2}}\, dx$
20. $\int \sqrt{\frac{2 + 3\sqrt{x}}{x}}\, dx$
21. $\int \operatorname{sen} 4x\, dx$
22. $\int 5\cos\frac{x}{2}\, dx$
23. $\int x\cos x^2\, dx$
24. $\int x^2\sec^2 x^3\, dx$
25. $\int \frac{1}{\sec(5x + 1)}\, dx$
26. $\int \sec x(\sec x + \tan x)\, dx$
27. $\int \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\cos\theta}\, d\theta$
28. $\int (1 + \cot^2 x)\, dx$
29. $\int \frac{\csc\sqrt{x}\cot\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$
30. $\int \frac{\operatorname{sen} 1/x}{x^2}\, dx$
31. $\int \operatorname{sen}^5 3x\cos 3x\, dx$
32. $\int \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{4 + \cos t}}\, dt$
33. $\int \tan^2 2x\sec^2 2x\, dx$
34. $\int \tan x\sec^2 x\, dx$
35. $\int \tan^2 7x\, dx$
36. $\int \tan 5v\sec 5v\, dv$
37. $\int \frac{2 + \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx$
38. $\int \frac{(1 + \operatorname{sen} x)^4}{\sec x + \tan x}\, dx$
39. $\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$
40. $\int \cos^2 \pi x\, dx$
41. $\int (z + 1)\csc^2(z^2 + 2z)\, dz$
42. $\int \frac{\cos\sqrt[3]{1 - 3x}}{\sqrt[3]{(1 - 3x)^2}}\, dx$

43. Obtenga una función f cuya gráfica pase por el punto $(\pi, -1)$ y que satisfaga también $f'(x) = 1 - \operatorname{sen} x$.

44. Encuentre una función f tal que $f''(x) = (1 + 2x)^5$, $f(0) = 0$ y $f'(0) = 0$.

Problemas diversos

45. Demuestre que

(a) $\int \operatorname{sen} x\cos x\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C_1$,

(b) $\int \operatorname{sen} x\cos x\, dx = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C_2$,

(c) $\int \operatorname{sen} x\cos x\, dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_3$.

46. En el Problema 45:

(a) Verifique que la derivada de cada una de las respuestas de las partes (a), (b) y (c) es $\operatorname{sen} x\cos x$.

(b) Mediante una identidad trigonométrica, demuestre cómo puede obtenerse el resultado de (b) a partir de la respuesta de la parte (a).

(c) Sumando los resultados de (a) y (b), obtenga el resultado de la parte (c).

En los Problemas 47-50 evalúe la integral indefinida dada.

47. $\int \cos^3 x\, dx$
(*Sugerencia:* $\cos^3 x = \cos^2 x \cdot \cos x$)

48. $\int \operatorname{sen}^3 2x\, dx$

49. $\int \frac{t}{\sqrt{t + 2}}\, dt$ (*Sugerencia:* $t = t + 2 - 2$)

50. $\int \frac{4z + 3}{(4z + 5)^3}\, dz$

5.3 La notación de sumatoria (o con sigma)

Una integral puede ser *indefinida* o *definida*. Posteriormente se verá que la integral definida se define como el límite de una cierta clase de *adición* o *suma*. Por lo tanto, resulta útil introducir una notación especial que permita escribir una suma o sumatoria de constantes, tal como

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n,$$
$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2, \text{ y}$$
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1},$$

de manera concisa.

Sea a_k un número real que depende de un entero k. Se denota la suma o sumatoria

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

por el símbolo

$$\sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{5.11}$$

Como se utiliza Σ, la letra griega sigma mayúscula, a (5.11) se le llama **notación de sumatoria o notación con sigma**. A la variable k se le denomina **índice sumatorio**. Así que, $\sum_{k=1}^{n} a_k$ es la sumatoria de todos los números de la forma a_k cuando k toma los valores sucesivos $k = 1$, $k = 2, \ldots,$ y termina con $k = n$.

Ejemplo 1

(*a*) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(3k-1) = [3(1)-1] + [3(2)-1] + [3(3)-1] + [3(4)-1] + [3(5)-1]$
$= 2 + 5 + 8 + 11 + 14.$

(*b*) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}$

(*c*) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 98^3 + 99^3 + 100^3.$

Ejemplo 2.

(*a*) La sumatoria de los diez primeros enteros impares positivos

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 19$$

puede escribirse en forma concisa como

$$\sum_{k=1}^{10}(2k-1).$$

(*b*) También se verifica fácilmente que la suma de los diez primeros enteros pares positivos

$$2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 20$$

queda como

$$\sum_{k=1}^{10} 2k.$$

No es necesario que el índice sumatorio empiece con el valor $k = 1$; por ejemplo

$$\sum_{k=3}^{5} 2^k = 2^3 + 2^4 + 2^5 \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{5} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5.$$

Obsérvese que la sumatoria de la parte (*a*) del Ejemplo 2 también se puede escribir como

$$\sum_{k=0}^{9}(2k+1).$$

Sin embargo, en una discusión general se supondrá siempre que el índice sumatorio empieza en $k = 1$. Esta suposición es más bien por conveniencia que por necesidad.

Al índice sumatorio se le llama a menudo **variable ficticia**, puesto que el símbolo en sí no es importante; los valores enteros sucesivos del índice y la sumatoria correspondiente son lo importante. En general,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{m=1}^{n} a_m$$

y así sucesivamente.

Ejemplo 3

$$\sum_{k=1}^{10} 4^k = \sum_{i=1}^{10} 4^i = \sum_{j=1}^{10} 4^j = 4^1 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^{10}$$

La siguiente es una lista de algunas de las propiedades importantes de la notación de sumatoria.

TEOREMA 5.5

Para enteros positivos m y n,

(*i*) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c\, a_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$, en donde c es cualquier constante

(*ii*) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$

(*iii*) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k, \qquad m < n$ □

La demostración de la fórmula (*i*) es una consecuencia inmediata de la ley distributiva. Las demostraciones de (*ii*) y (*iii*) se dejan como ejercicios.

Ejemplo 4

(*a*) De los Teoremas 5.5(*i*) y 5.5(*ii*), se obtiene que

$$\sum_{k=1}^{20}(3k^2 + 4k) = 3\sum_{k=1}^{20} k^2 + 4\sum_{k=1}^{20} k.$$

(*b*) Por el Teorema 5.5(*iii*), puede escribirse

$$\sum_{k=1}^{50} k^2 = \sum_{k=1}^{3} k^2 + \sum_{k=4}^{50} k^2$$
$$= (1^2 + 2^2 + 3^2) + (4^2 + 5^2 + 6^2 + \cdots + 50^2).$$

Si c es una constante, esto es, independiente de un índice sumatorio k, entonces $\sum_{k=1}^{n} c$ significa

$$c + c + c + \cdots + c.$$

Puesto que hay n términos c en la suma anterior se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} c = n \cdot c \tag{5.12}$$

Ejemplo 5

De (5.12),

$$\sum_{k=1}^{75} 6 = 75 \cdot 6 = 450.$$

La sumatoria de los n primeros enteros positivos puede escribirse $\sum_{k=1}^{n} k$. Si se denota el resultado o suma por S, entonces

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n \tag{5.13}$$

también puede escribirse como

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1. \tag{5.14}$$

Si se suma (5.13) y (5.14), entonces

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)}_{n \text{ términos de } n+1}$$
$$= n(n+1).$$

Despejando S resulta

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

o bien

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{5.15}$$

Ejemplo 6

Obtener la suma de los 100 primeros enteros positivos consecutivos.

Solución La sumatoria requerida es

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100 = \sum_{k=1}^{100} k$$

con $n = 100$, de (5.15) resulta que

$$\sum_{k=1}^{100} k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{100(101)}{2}$$
$$= 50(101) = 5050.$$

Fórmulas de sumatorias

Las fórmulas (5.12) y (5.15) son dos de las varias fórmulas de sumatorias que se utilizarán en las secciones siguientes. Se incluyen para completar la lista que sigue. El número n es un entero positivo.

$$\text{I} \quad \sum_{k=1}^{n} c = nc$$

$$\text{II} \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\text{III} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\text{IV} \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\text{V} \quad \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}.$$

Como ya se ha visto, I y II se pueden deducir fácilmente; las deducciones de las fórmulas restantes no son tan simples. El lector debe poder deducir III con la ayuda de las sugerencias proporcionadas en los Problemas 41 y 42.

Ejemplo 7

Evaluar $\sum_{k=1}^{10} k^2$.

Solución Con $n = 10$, de la fórmula III se tiene que

$$\sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{10(11)(21)}{6} = 385.$$

Ejemplo 8

Evaluar $\sum_{k=1}^{10}(k+2)^3$.

Solución Por el teorema del binomio y el Teorema 5.5(*ii*),

$$\sum_{k=1}^{10}(k+2)^3 = \sum_{k=1}^{10}(k^3+6k^2+12k+8)$$
$$= \sum_{k=1}^{10}k^3 + 6\sum_{k=1}^{10}k^2 + 12\sum_{k=1}^{10}k + \sum_{k=1}^{10}8.$$

Con $n = 10$, en virtud de las fórmulas IV, III, II y I, respectivamente, resulta que

$$\sum_{k=1}^{10}(k+2)^3 = \frac{10^2 11^2}{4} + 6\,\frac{10(11)(21)}{6} + 12\,\frac{10(11)}{2} + 10\cdot 8$$
$$= 3025 + 2310 + 660 + 80 = 6075.$$

Ejercicios 5.3

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 977.

En los Problemas 1-10 desarrolle la sumatoria indicada.

1. $\sum_{k=1}^{5} 3k$
2. $\sum_{k=1}^{5}(2k-3)$
3. $\sum_{k=1}^{4}\frac{2^k}{k}$
4. $\sum_{k=1}^{4}\frac{3^k}{k}$
5. $\sum_{k=1}^{10}\frac{(-1)^k}{2k+5}$
6. $\sum_{k=1}^{10}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$
7. $\sum_{j=2}^{5}(j^2-2j)$
8. $\sum_{m=0}^{4}(m+1)^2$
9. $\sum_{k=1}^{5}\cos k\pi$
10. $\sum_{k=1}^{5}\frac{\operatorname{sen} k\pi/2}{k}$

En los Problemas 11-20 exprese la sumatoria dada usando la notación con sigma.

11. $2^2+4^2+6^2+8^2+10^2+12^2$
12. $1+2^2+3^2+4^2+5^2$
13. $3+5+7+9+11+13+15$
14. $2+4+8+16+32+64$
15. $1+4+7+10+\cdots+37$
16. $2+6+10+14+\cdots+38$
17. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$
18. $-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{4}{5}-\frac{5}{6}$
19. $6+6+6+6+6+6+6+6$
20. $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+\sqrt{5}+\cdots+3$

En los Problemas 21-30 obtenga el valor de la suma correspondiente.

21. $\sum_{k=1}^{20} 2k$
22. $\sum_{k=0}^{50}(-3k)$
23. $\sum_{k=1}^{10}(k+1)$
24. $\sum_{k=1}^{1000}(2k-1)$
25. $\sum_{k=1}^{6}(k^2+3)$
26. $\sum_{k=1}^{5}(6k^2-k)$
27. $\sum_{p=0}^{10}(p^3+4)$
28. $\sum_{i=-1}^{10}(2i^3-5i+3)$
29. $\sum_{j=1}^{10}(4j^4-7)$
30. $\sum_{k=1}^{5}(k^2+1)^2$

Problemas diversos

31. Obtenga el valor de $\sum_{k=21}^{60}k^2$. (*Sugerencia:* Examine $\sum_{k=1}^{60}k^2 - \sum_{k=1}^{20}k^2$.)

32. Obtenga el valor de $\sum_{k=-30}^{30}k^2$.

33. Halle el valor de $\sum_{k=1}^{400}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$.

34. Obtenga el valor de $\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k(k+1)}$. (*Sugerencia:* $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$.)

35. (a) Evalúe $\sum_{k=1}^{n}[f(k)-f(k-1)]$.

(b) En los Problemas 33 y 34 identifique una función f de tal manera que las sumatorias sean de la forma señalada en la parte (a). A una sumatoria de la forma dada en la parte (a) se la llama telescópica.

36. Demuestre que $\sum_{k=3}^{10}(2k-5)$ y $\sum_{j=0}^{7}(2j+1)$ son iguales.

37. Determine si $\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)$ y $\sum_{j=4}^{n+3}(j-1)(j-2)$ son iguales.

38. Demuestre el Teorema 5.5(*ii*).

39. Demuestre el Teorema 5.5(*iii*).

40. Considere el cociente

$$\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{1+2+3+\cdots+n}$$

para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5. Halle el valor del cociente para cualquier valor entero positivo de n. Use este resultado para deducir la fórmula de sumatoria III

41. (a) Utilice el Problema 35, parte (a) para demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^2-k^2] = -1+(n+1)^2 = n^2+2n.$$

(b) Utilice el hecho de que $(k+1)^2-k^2 = 2k+1$ para demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^2-k^2] = n+2\sum_{k=1}^{n}k.$$

(c) Compare los resultados de las partes (a) y (b) para deducir la fórmula de sumatoria II.

42. Aplique el procedimiento esbozado en el Problema 41 a la sumatoria $\Sigma_{k=1}^{n}[(k+1)^3-k^3]$ para deducir la fórmula de sumatoria III.

43. Deduzca una fórmula para la sumatoria de los n primeros enteros pares positivos.

44. En sus experimentos sobre la gravedad, Galileo* encontró que la distancia que una masa desciende a lo largo de un plano inclinado en intervalos de tiempo consecutivos es proporcional a un entero impar positivo. Por consiguiente, la distancia total s que una masa recorre en n segundos, en donde n es un entero positivo, es proporcional a $1+3+5+\ldots+2n-1$. Demuestre que el recorrido total de una masa en un plano inclinado es proporcional al cuadrado del tiempo transcurrido n.

5.4 Área bajo una gráfica

Así como el concepto de la derivada proviene del problema geométrico de trazar una tangente a una curva, el problema histórico que conduce a la definición de la integral definida es el de calcular áreas. Concretamente interesa evaluar el área A de una región limitada por el eje x, la gráfica de una función *no negativa*† $y = f(x)$ definida en cierto intervalo $[a, b]$, y

* Galileo Galilei (1564-1642), físico y astrónomo italiano.

† El requisito de que f sea no negativa en $[a, b]$ significa que ninguna porción de su gráfica en el intervalo está por debajo del eje x.

(*i*) las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, como se muestra en la Figura 5.3(a), o bien

(*ii*) las intercepciones x de la gráfica mostrada en la Figura 5.3(b).

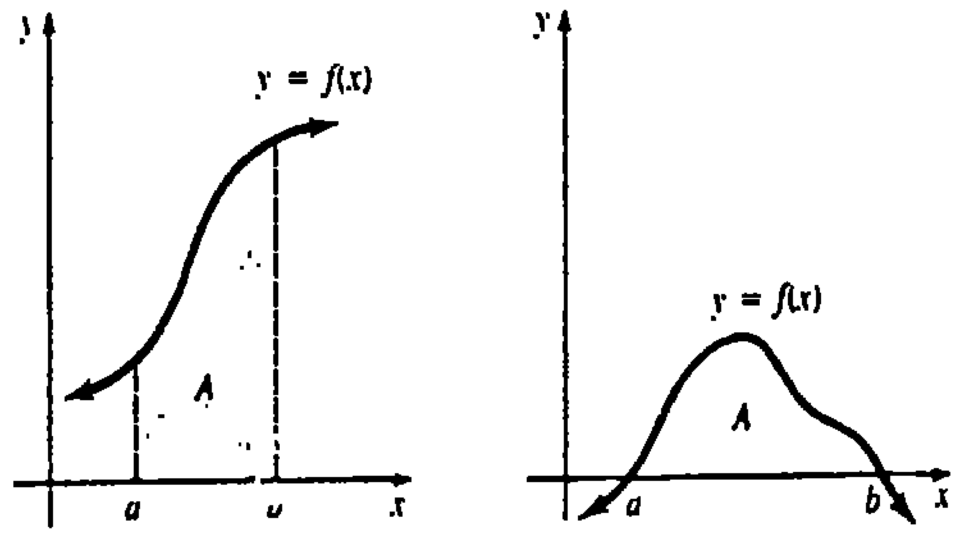


Figura 5.3

Se llamará a esta área, simplemente, área bajo la gráfica de f.

Supóngase por lo pronto que no se conoce una fórmula para evaluar el área A del triángulo rectángulo dado en la Figura 5.4. Superponiendo un sistema coordenado cartesiano al triángulo, como se muestra en la Figura 5.5, puede verse que el problema es el mismo que evaluar el área en el primer cuadrante limitada por las rectas $y = (h/b)x$, $y = 0$ (el eje x) y $x = b$. En otras palabras, determinar el área bajo la gráfica de $y = (h/b)x$ en el intervalo $[0, b]$.

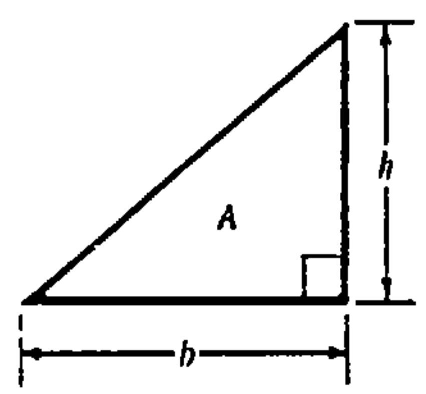


Figura 5.4

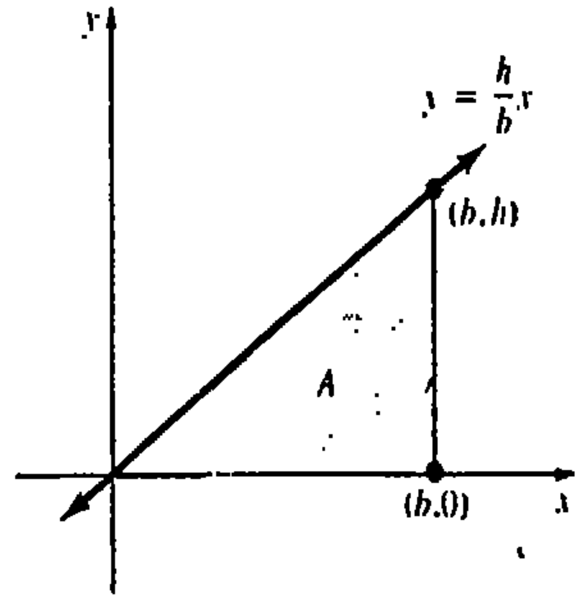


Figura 5.5

La Figura 5.6 indica tres maneras diferentes de evaluar *aproximadamente* el área total A utilizando rectángulos.

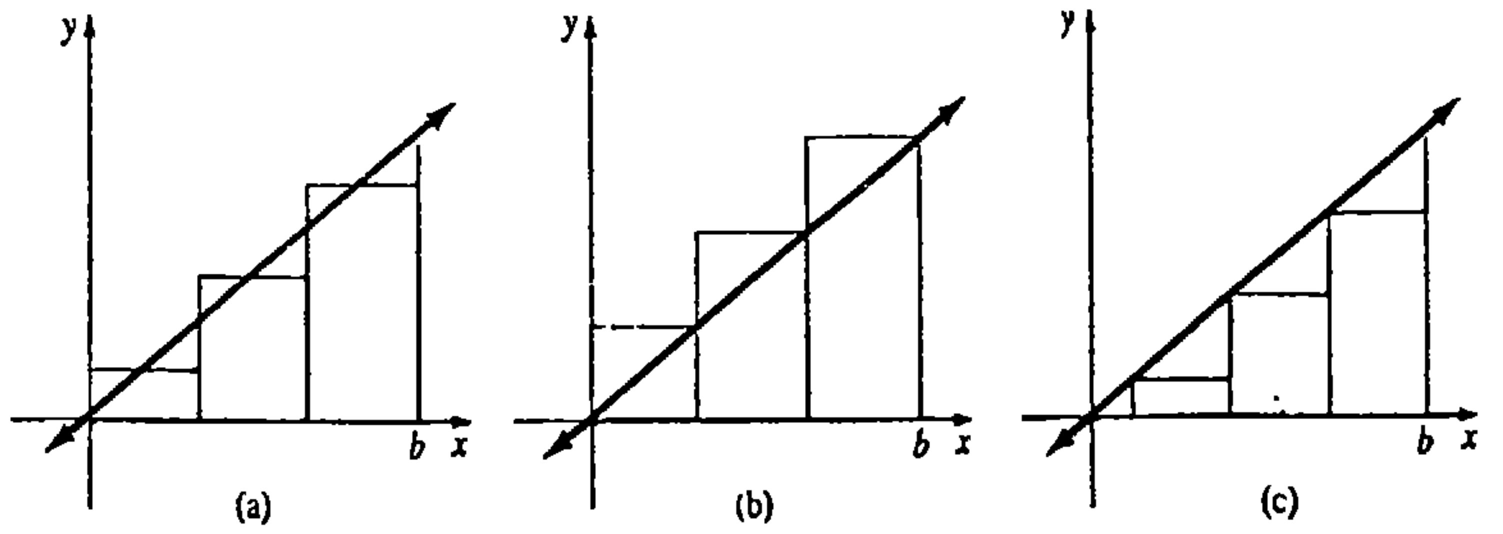


Figura 5.6

Por conveniencia, sigamos con mayor detalle el procedimiento sugerido en la Figura 5.6(b). Supóngase, como se muestra en la Figura 5.7(a), que el intervalo $[0, b]$ se divide en n subintervalos de igual amplitud $\Delta x = b/n$. Si se denota la frontera derecha de cada uno de estos intervalos por x_k^*, entonces

$$x_1^* = \Delta x = \frac{b}{n}$$

$$x_2^* = 2\,\Delta x = 2\left(\frac{b}{n}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_k^* = k\,\Delta x = k\left(\frac{b}{n}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_n^* = n\,\Delta x = n\left(\frac{b}{n}\right).$$

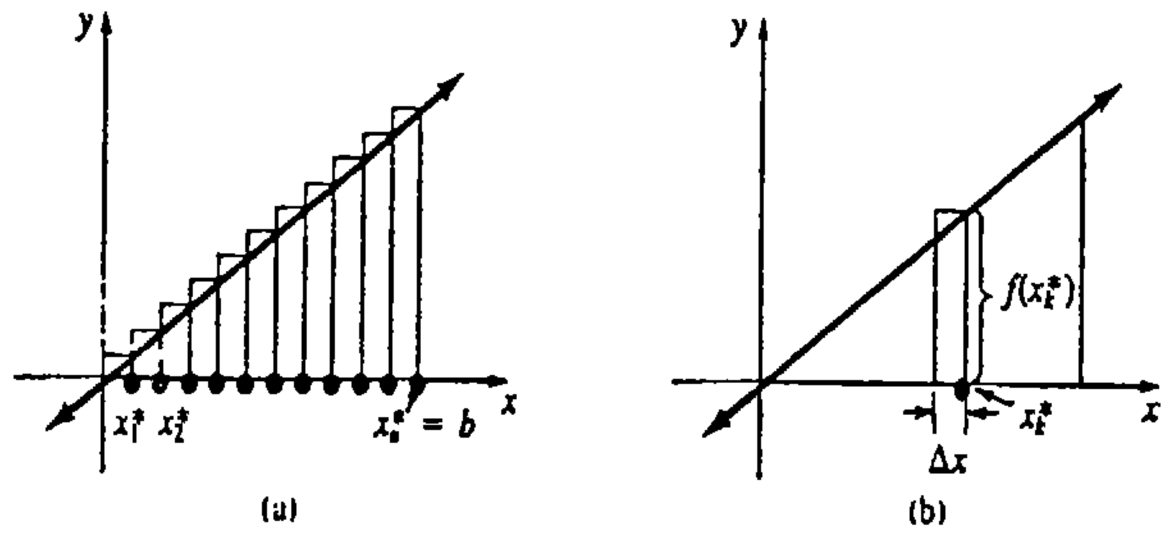


Figura 5.7

La altura del rectángulo construido sobre el subintervalo k-ésimo está dada por $f(x_k^*)$, de tal manera que el área del rectángulo general es entonces $f(x_k^*)\Delta x$. Véase la Figura 5.7(b).

Sumando las áreas de los n rectángulos se obtiene una aproximación al número A. Escribimos

$$A \approx f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x,$$

o bien, usando la notación con sigma,

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x. \tag{5.16}$$

Parece razonable que se pueda reducir el error introducido por este método de aproximación (el área de cada rectángulo es mayor que el área bajo la curva en un subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$) haciendo una *partición* de $[0, b]$ en subdivisiones más finas. En otras palabras, se espera obtener una mejor aproximación al valor A usando más y más rectángulos $(n \to \infty)$ de amplitud decreciente $(\Delta x \to 0)$.

Ahora bien,

$$f(x) = \frac{h}{b}x, \quad x_k^* = k\left(\frac{b}{n}\right), \quad f(x_k^*) = \frac{h}{n}\cdot k, \quad \text{y} \quad \Delta x = \frac{b}{n},$$

de manera que con la ayuda de la fórmula de sumatoria II de la sección precedente, (5.16) se convierte en

$$A \approx \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{h}{n}\cdot k\right)\frac{b}{n}$$
$$= \frac{bh}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$$
$$= \frac{bh}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{bh}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Finalmente, cuando $n \to \infty$ se obtiene, como era de esperarse,

$$A = \frac{1}{2}bh \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\,bh.$$

El problema general

Pasemos ahora del ejemplo específico precedente al problema general de evaluar el área A bajo la gráfica de una función continua $y = f(x)$ en un intervalo $[a, b]$. Se supondrá también que $f(x) \geq 0$ para todo x en el intervalo, como se muestra en la Figura 5.8.

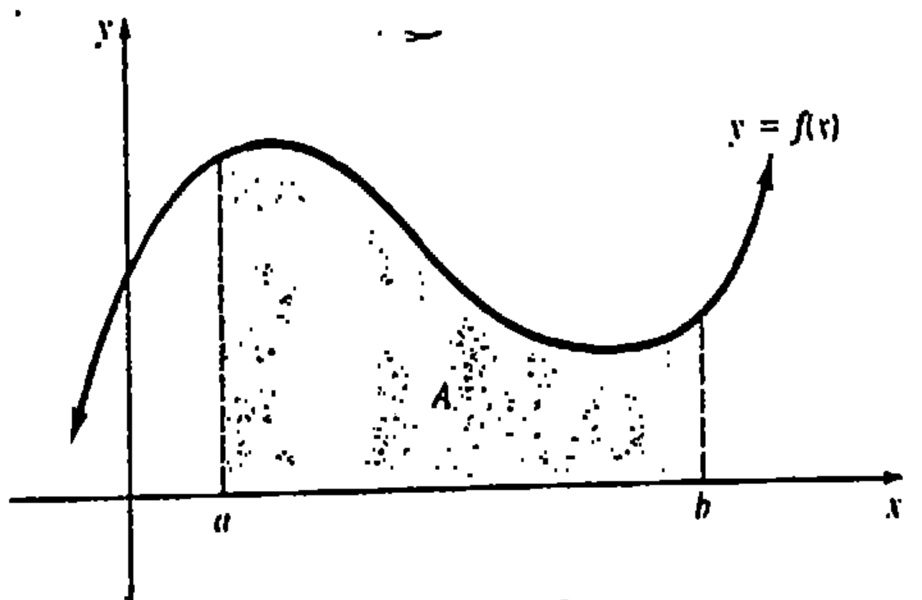


Figura 5.8

El área A puede aproximarse sumando las áreas de n rectángulos determinados sobre el intervalo, como se indica en la Figura 5.9

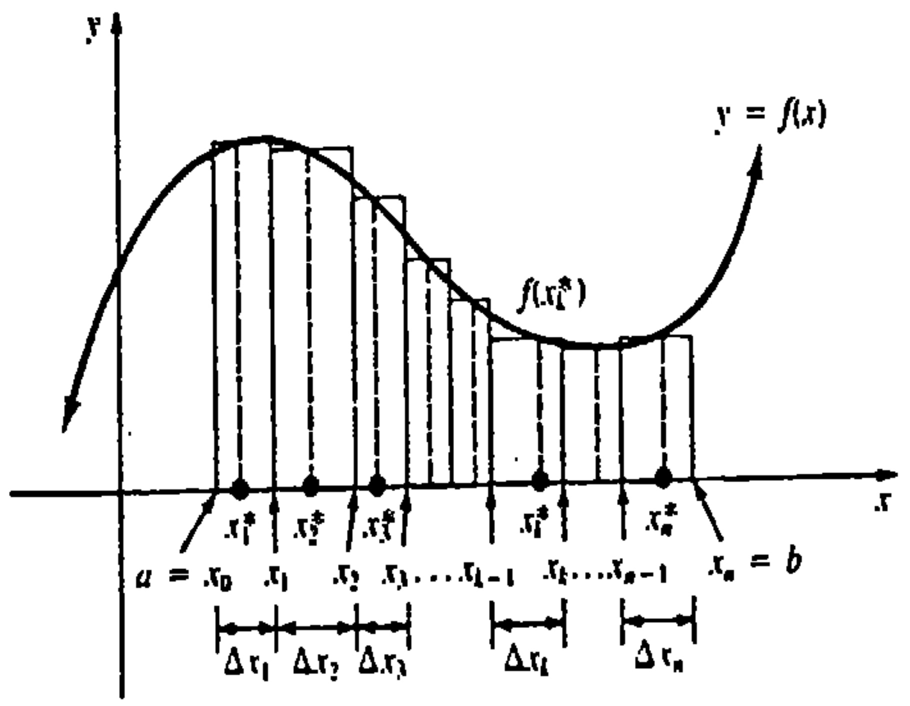


Figura 5.9

Un procedimiento posible para determinar A se resume en seguida.

1. Dividir el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, en donde $x_0 = a$, $x_n = b$ y
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$
2. Denotar la longitud de cada subintervalo por Δx_k, en donde $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Los subintervalos no son necesariamente de la misma amplitud.
3. Elegir cualquier número x_k^* en cada subintervalo.
4. Formar el producto $f(x_k^*)\,\Delta x_k$. Éste representa el área de un rectángulo sobre el k-ésimo subintervalo.
5. Formar la sumatoria $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x_k$. Esta da la suma de las áreas de los n rectángulos y constituye una aproximación al valor de A.

Con estos preliminares, es posible ahora definir el concepto de área bajo una gráfica.

DEFINICIÓN 5.2

Sea f continua en $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para todo x en el intervalo. Se define el área A bajo la gráfica en el intervalo como

$$A = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x_k. \qquad (5.17)$$

□

En Cálculo avanzado se demuestra que cuando f es continua, el límite en (5.17) siempre existe, sin tener en cuenta la manera empleada para dividir $[a, b]$; esto es, se pueden tomar o no los subintervalos de igual longitud, y los puntos x_k^* escogerse en forma totalmente arbitraria en los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$.

Al utilizar la fórmula (5.17) es conveniente, para fines prácticos, realizar dos cosas:

(*i*) Dividir el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud. Puesto que $b - a$ es la longitud total del intervalo dado, entonces $\Delta x = (b - a)/n$ es la amplitud de cada uno de los n intervalos.

(*ii*) Hacer que los x_k^* sean la frontera derecha de cada subintervalo. Consecuentemente, si $x_0 = a$, entonces

$$x_1^* = x_0 + \Delta x = a + \frac{b-a}{n}$$
$$x_2^* = x_0 + 2\,\Delta x = a + 2\left(\frac{b-a}{n}\right)$$
$$\vdots$$
$$x_k^* = x_0 + k\,\Delta x = a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)$$
$$\vdots$$
$$x_n^* = x_0 + n\,\Delta x = a + n\left(\frac{b-a}{n}\right) = b.$$

Sustituyendo x_k^* por $a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)$ y Δx_k por $(b-a)/n$ en (5.17), resulta que el área A también está dada por

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}. \tag{5.18}$$

Puesto que $\Delta x = (b-a)/n$, puede verse que $\Delta x \to 0$ es lo mismo que $n \to \infty$.

Ejemplo 1

Evaluar el área A bajo la gráfica de $f(x) = x + 2$ en el intervalo $[0, 4]$.

Solución El área está limitada por el trapecio indicado en la Figura 5.10(a). Haciendo que la amplitud de los subintervalos sea

$$\Delta x = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$$

y con $a = 0$ y $b = 4$, (5.18) se convierte en

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(0 + k\frac{4}{n}\right)\frac{4}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{4k}{n}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4k}{n} + 2\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\left[\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n} k + 2\sum_{k=1}^{n} 1\right].$$

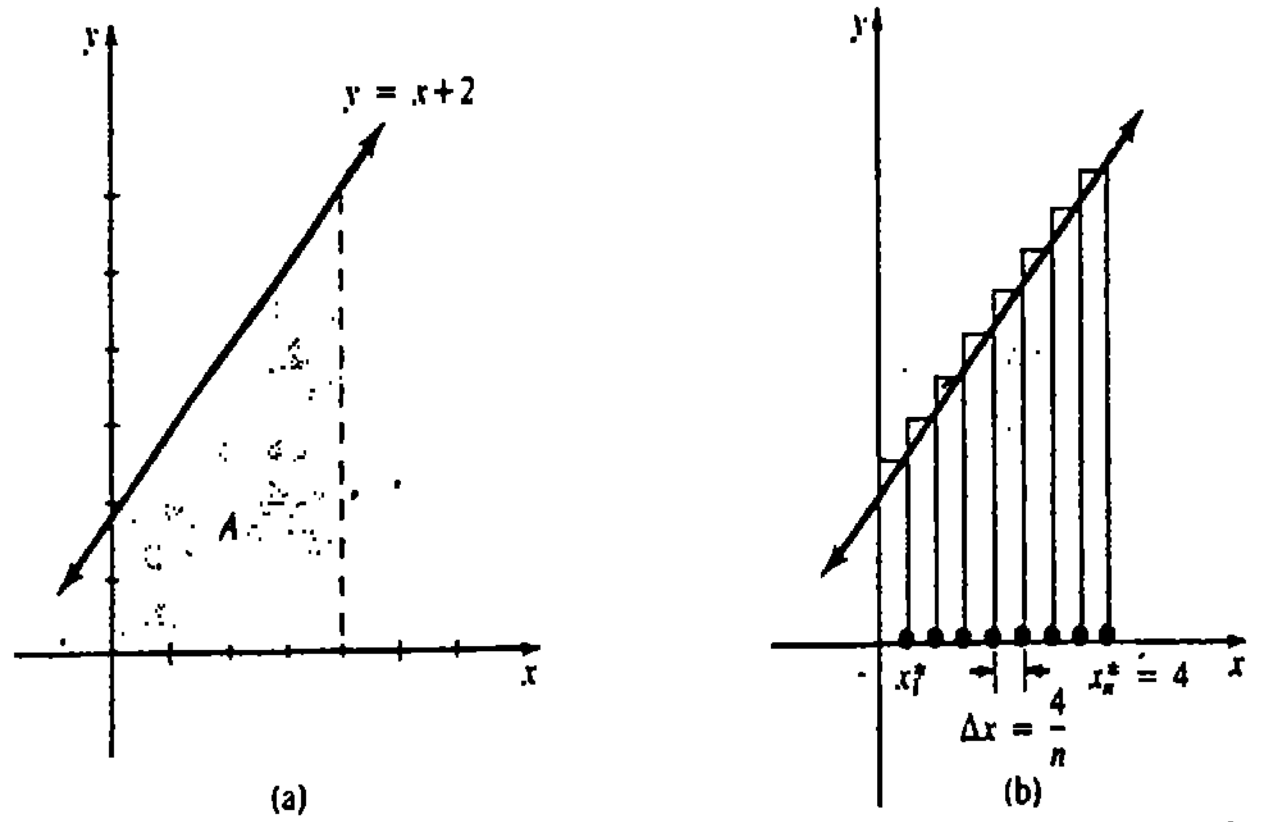


Figura 5.10

n^2+1 / n

$1+\frac{1}{n}$

Ahora bien por las fórmulas de sumatorias I y II de la Sección 5.3,

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\left[\frac{4}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + 2n\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{16}{2}\,\frac{n(n+1)}{n^2} + 8\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[8\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 8\right] \qquad = 8\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 8\lim_{n\to\infty} 1$$
$$= 8 + 8 = 16 \text{ unidades cuadradas.}$$

Ejemplo 2

Determinar el área A bajo la gráfica de $f(x) = 4 - x^2$ en el intervalo $[-1, 2]$.

Solución El área está indicada en la Figura 5.11(a). Se hace que la longitud de cada subintervalo sea

$$\Delta x = \frac{2-(-1)}{n} = \frac{3}{n}.$$

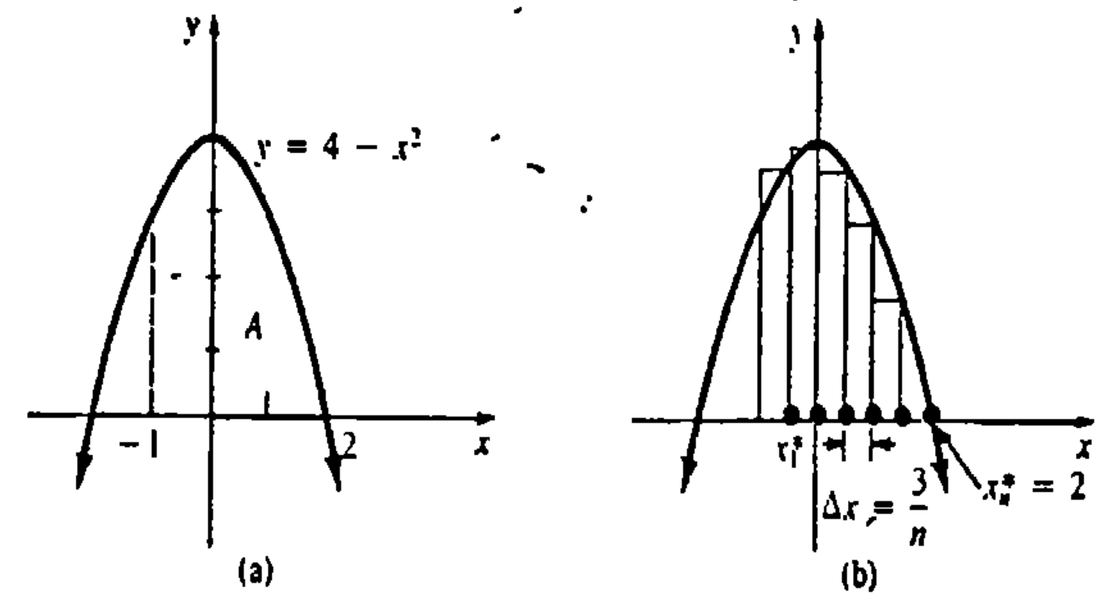


Figura 5.11

Con el propósito de destacar los conceptos, repásense los pasos que conducen a la fórmula (5.18). Empezando en $x = -1$, la frontera derecha de cada subintervalo es

$$x_1^* = -1 + \frac{3}{n}$$
$$x_2^* = -1 + 2\left(\frac{3}{n}\right)$$
$$\vdots$$
$$x_k^* = -1 + k\left(\frac{3}{n}\right)$$
$$\vdots$$
$$x_n^* = -1 + n\left(\frac{3}{n}\right) = 2.$$

Entonces la altura de cada rectángulo es

$$f(x_1^*) = f\left(-1 + \frac{3}{n}\right) = 4 - \left[-1 + \frac{3}{n}\right]^2$$
$$f(x_2^*) = f\left(-1 + 2\left(\frac{3}{n}\right)\right) = 4 - \left[-1 + 2\left(\frac{3}{n}\right)\right]^2$$
$$\vdots$$
$$f(x_k^*) = f\left(-1 + k\left(\frac{3}{n}\right)\right) = 4 - \left[-1 + k\left(\frac{3}{n}\right)\right]^2$$
$$\vdots$$
$$f(x_n^*) = f\left(-1 + n\left(\frac{3}{n}\right)\right) = f(2) = 4 - (2)^2 = 0.$$

El área del k-ésimo rectángulo es

$$f(x_k^*)\frac{3}{n} = \left(4 - \left[-1 + k\frac{3}{n}\right]^2\right)\frac{3}{n} \quad = \left(3 + 6\frac{k}{n} - 9\frac{k^2}{n^2}\right)\frac{3}{n}.$$

Sumando las áreas de los n rectángulos resulta que $A \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)3/n$. Cuando el número de rectángulos tiende a infinito, se tiene que

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\left(3 + 6\frac{k}{n} - 9\frac{k^2}{n^2}\right)\frac{3}{n} \quad = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(3 + 6\frac{k}{n} - 9\frac{k^2}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left[3\sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{9}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2\right].$$

Empleando las fórmulas de sumatorias I, II y III de la última sección, resulta que

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left[3n + \frac{6}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} - \frac{9}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[9 + 3\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)\right] = 9 + 3 - 3 = 9 \text{ unidades cuadradas.}$$

Ejercicios 5.4

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 978.

En los Problemas 1-20 evalúe el área bajo la gráfica de la función dada en el intervalo indicado.

1. $f(x) = 4$, $[2, 5]$
2. $f(x) = 7$, $[-4, 8]$
3. $f(x) = x$, $[0, 6]$
4. $f(x) = 2x$, $[1, 3]$
5. $f(x) = 2x + 1$, $[1, 5]$
6. $f(x) = 3x - 6$, $[2, 4]$
7. $f(x) = x^2$, $[0, 2]$
8. $f(x) = x^2$, $[-2, 1]$
9. $f(x) = 1 - x^2$, $[-1, 1]$
10. $f(x) = 2x^2 + 3$, $[-3, -1]$
11. $f(x) = x^2 + 2x$, $[1, 2]$
12. $f(x) = (x - 1)^2$, $[0, 2]$
13. $f(x) = x^3$, $[0, 1]$
14. $f(x) = -x^3$, $[-3, 0]$
15. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, $[0, 2]$
16. $f(x) = (x + 1)^3$, $[-1, 1]$
17. $f(x) = x^4$, $[0, 2]$
18. $f(x) = 16 - x^4$, $[-1, 0]$
19. $f(x) = |x|$, $[-1, 3]$
20. $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x < 1 \\ x + 1, & 1 \le x \le 4 \end{cases}$
21. Trace la gráfica de $y = 1/x$ en $\frac{1}{2} \le x \le \frac{5}{2}$. Dividiendo el intervalo en cuatro subintervalos de igual amplitud, construya rectángulos que aproximen el área A bajo la gráfica. Use primero la frontera derecha de cada subintervalo y luego la frontera izquierda.
22. Repita el Problema 21 para $y = \cos x$ en $-\pi/2 \le x \le \pi/2$.
23. Deduzca una fórmula análoga a (5.18) en la que x_k^* sea escogido como la frontera izquierda de cada subintervalo.
24. Encuentre el área de la región del primer cuadrante limitada por las gráficas de $x = 0$, $y = 9$ y $y = x^2$.
25. Determine el área de la región del primer cuadrante limitada por las gráficas de $y = x$ y $y = x^2$.
26. El área del trapecio dado en la Figura 5.12 es
$$A = \left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right)b.$$
Deduzca esta fórmula.

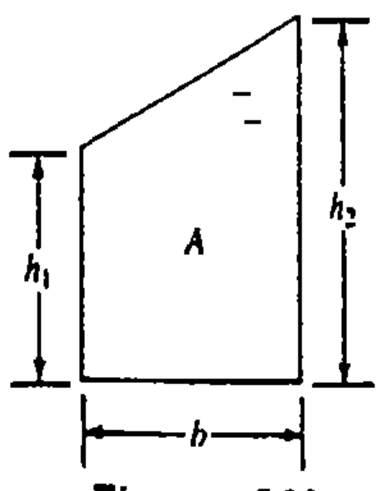


Figura 5.12

En los Problemas 27 y 28 determine una región cuya área A esté dada por la fórmula. No intente evaluar.

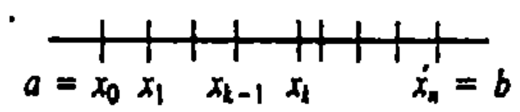
27. $A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{4 - \frac{4k^2}{n^2}}\,\frac{2}{n}$
28. $A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n}\right)\frac{\pi}{n}$
29. Halle el área bajo la gráfica de $y = \sqrt{x}$ en $0 \le x \le 1$ considerando el área bajo la gráfica de $y = x^2$ en $0 \le x \le 1$.
30. Encuentre el área bajo la gráfica de $y = \sqrt[3]{x}$ en $0 \le x \le 8$ considerando el área bajo la gráfica de $y = x^3$ en $0 \le x \le 2$.

5.5 La integral definida

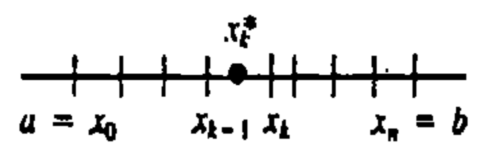
5.5.1 Definición de la integral definida

Ahora es posible formular el concepto de integral definida. Para hacerlo, considérense los cinco pasos siguientes.

$y = f(x)$

1. Admítase que f está definida en un intervalo cerrado $[a, b]$.
2. Divídase el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de amplitud $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Denótese por P la partición
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$


3. Sea $\|P\|$ la amplitud del subintervalo más largo. Al número $\|P\|$ se le llama **norma** de la partición P.
4. Escójase un número x_k^* en cada subintervalo.
5. Establézcase la sumatoria



$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k. \tag{5.19}$$

Las sumatorias de la forma (5.19), para las distintas particiones de $[a, b]$, se conocen como **sumatorias (o sumas) de Riemann**, en honor del famoso matemático alemán Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866).

Aunque el procedimiento anterior parece muy semejante al de los cinco pasos que conducen a la definición de área bajo una gráfica, existen ciertas diferencias importantes. Obsérvese que una suma de Riemann no requiere que f sea continua ni no negativa en el intervalo $[a, b]$. Así que (5.19) no necesariamente representa una aproximación al área bajo una gráfica. Téngase presente que "área bajo una gráfica" se refiere al *área comprendida entre la gráfica de una función no negativa y el eje x*. Si $f < 0$ en $[a, b]$, una sumatoria de Riemann podría contener términos $f(x_k^*)\Delta x_k$, en donde $f(x_k^*) < 0$, como se muestra en la Figura 5.13. En este caso los productos $f(x_k^*)\,\Delta x_k$ son números que son los negativos de las áreas de rectángulos trazados por debajo del eje x.

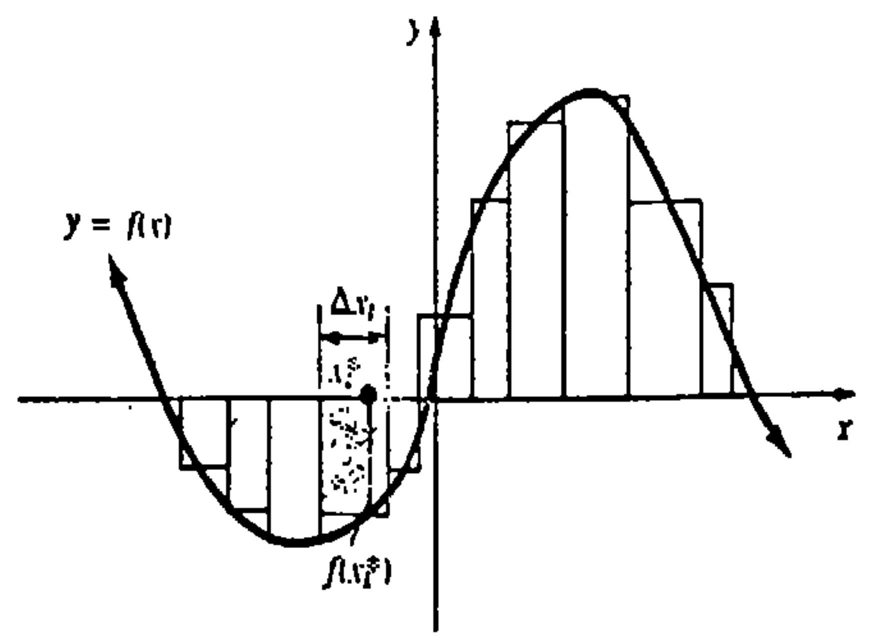


Figura 5.13

Ejemplo 1

Calcular la suma de Riemann para $f(x) = x^2 - 4$ en $[-2, 3]$ con cinco subintervalos determinados por

$$x_0 = -2, \quad x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = \frac{7}{4}, \quad x_5 = 3,$$

y

$$x_1^* = -1, \quad x_2^* = -\frac{1}{4}, \quad x_3^* = \frac{1}{2}, \quad x_4^* = \frac{3}{2}, \quad x_5^* = \frac{5}{2}.$$

Solución La Figura 5.14 muestra los puntos x_k y x_k^* en el intervalo.

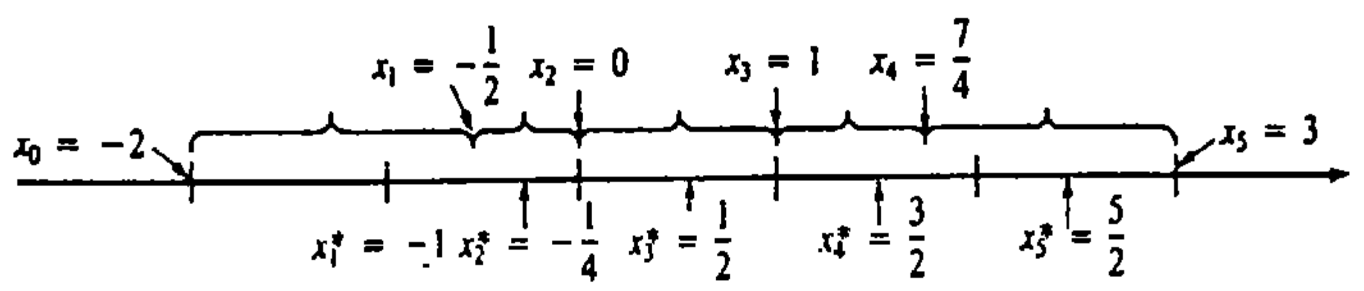


Figura 5.14

Ahora bien,

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0 = -\frac{1}{2} - (-2) = \frac{3}{2}$$

$$\Delta x_2 = x_2 - x_1 = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Delta x_3 = x_3 - x_2 = 1 - 0 = 1$$

$$\Delta x_4 = x_4 - x_3 = \frac{7}{4} - 1 = \frac{3}{4}$$

$$\Delta x_5 = x_5 - x_4 = 3 - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}$$

y

$$f(x_1^*) = f(-1) = -3$$

$$f(x_2^*) = f\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{63}{16}$$

$$f(x_3^*) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{4}$$

$$f(x_4^*) = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{7}{4}$$

$$f(x_5^*) = f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{9}{4}.$$

Por lo tanto, la sumatoria de Riemann es

$$f(x_1^*)\,\Delta x_1 + f(x_2^*)\,\Delta x_2 + f(x_3^*)\,\Delta x_3 + f(x_4^*)\,\Delta x_4 + f(x_5^*)\,\Delta x_5$$

$$= (-3)\left(\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{63}{16}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{15}{4}\right)(1) + \left(-\frac{7}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{9}{4}\right)\left(\frac{5}{4}\right)$$

$$= -\frac{279}{32} \approx -8.72.$$

Para una función f definida en un intervalo $[a, b]$, hay un número infinito de sumas de Riemann posibles para una partición dada P del intervalo, puesto que los números x_k^* se pueden escoger arbitrariamente en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$.

Ejemplo 2

Evaluar la sumatoria de Riemann para la función y la partición de $[-2, 3]$ del Ejemplo 1 si $x_1^* = -\frac{3}{2}$, $x_2^* = -\frac{1}{8}$, $x_3^* = \frac{3}{4}$, $x_4^* = \frac{3}{2}$ y $x_5^* = 2.1$.

Solución

$$f(x_1^*) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{7}{4}$$

$$f(x_2^*) = f\left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{255}{64}$$

$$f(x_3^*) = f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{55}{16}$$

$$f(x_4^*) = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{7}{4}$$

$$f(x_5^*) = f(2.1) = 0.41$$

Puesto que los números Δx_k son los mismos de antes, se tiene que

$$f(x_1^*)\,\Delta x_1 + f(x_2^*)\,\Delta x_2 + f(x_3^*)\,\Delta x_3 + f(x_4^*)\,\Delta x_4 + f(x_5^*)\,\Delta x_5$$

$$= \left(-\frac{7}{4}\right)\left(\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{255}{64}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{55}{16}\right)(1) + \left(-\frac{7}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) + (0.41)\left(\frac{5}{4}\right) \approx -8.85.$$

Como con (5.17) y (5.18) de la Sección 5.4, nos interesa una clave especial de límite de (5.19): Si las sumatorias de Riemann $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$ son cercanas a un número L para *toda* partición P de $[a, b]$ para la cual la norma $\|P\|$ es cercana a cero, entonces

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x_k = L \qquad (5.20)$$

y se dice que L es la **integral definida** de f en el intervalo $[a, b]$. Si existe el límite (5.20), se dice que la función f **es integrable** en el intervalo. En la siguiente definición se introducirá un nuevo símbolo para el número L.

DEFINICIÓN 5.3

Sea f una función definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces la **integral definida** de f de a a b, denotada por $\int_a^b f(x)dx$, se define como

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x_k. \qquad (5.21)$$

□

En la definición precedente, a los números a y b se les llama **límites de integración inferior y superior**, respectivamente. El símbolo de la integral $\int$, usado primero por Leibniz, es una S alargada, por relación a la palabra "suma". Obsérvese también que $\|P\| \to 0$ siempre implica que el número de subintervalos n se hace infinito ($n \to \infty$). Sin embargo, el hecho de que $n \to \infty$ no necesariamente implica que $\|P\| \to 0$, como se muestra en la Figura 5.15. El siguiente resultado importante se establece sin demostración.

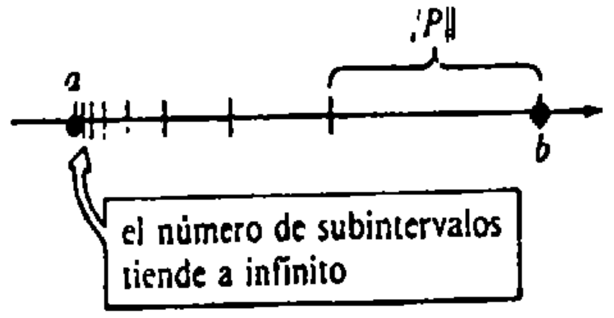


Figura 5.15

TEOREMA 5.6

Si f es continua en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx$ existe; esto es, f es integrable en el intervalo. □

Partición regular

Cuando una integral definida existe,

el límite en (5.21) existe para toda forma posible de partición de $[a, b]$, y para toda forma de selección de los x_k^* en los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$.

En particular, escogiendo los subintervalos de igual longitud

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{y} \quad x_k^* = a + k\frac{b-a}{n}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

puede escribirse

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b}{}\right.$$

A una partición P de $[a, b]$ en la que los subintervalos son de la misma amplitud, se le llama **partición regular**.

El lector podría concluir que las formulaciones de $\int_a^b f(x)dx$ dadas en (5.21) y (5.22) son exactamente las mismas que (5.17) y (5.18) de la Sección 5.4 para el caso general de evaluar el área bajo la curva $y = f(x)$ en $[a, b]$. En cierto modo esto es correcto; sin

embargo, la Definición 5.3 es un concepto más general puesto que, como se hizo notar anteriormente, no se está requiriendo que f sea continua en $[a, b]$ o que $f(x) \geq 0$ en el intervalo.* Así que, *una integral definida no necesariamente corresponde a una área.*

Ejemplo 3

Evaluar $\int_{-2}^{1} x^3\,dx$.

Solución Puesto que $f(x) = x^3$ es continua en $[-2, 1]$, se sabe, por el Teorema 5.6, que la integral definida existe. Empleamos una partición regular y el resultado dado en (5.22). Escogiendo

$$\Delta x = \frac{1-(-2)}{n} = \frac{3}{n} \quad \text{y} \quad x_k^* = -2 + k\cdot\frac{3}{n},$$

se tiene que

$$f\left(-2 + \frac{3k}{n}\right) = \left(-2 + \frac{3k}{n}\right)^3$$

$$= -8 + 36\left(\frac{k}{n}\right) - 54\left(\frac{k^2}{n^2}\right) + 27\left(\frac{k^3}{n^3}\right).$$

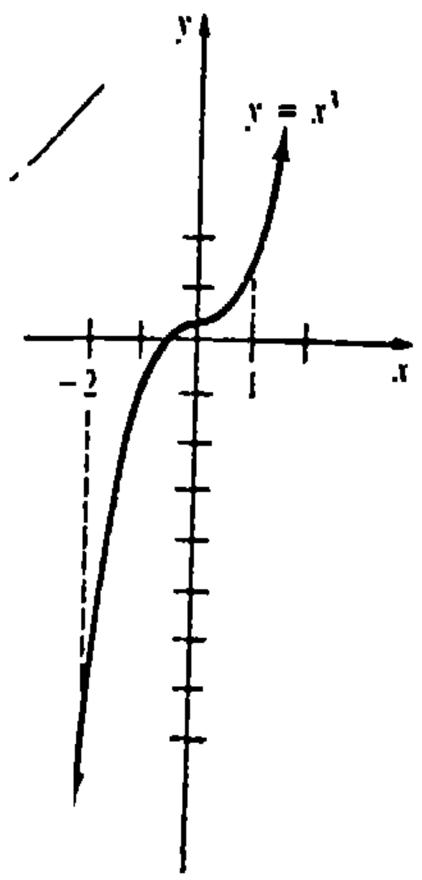


Figura 5.16

Entonces resulta de (5.22) que

$$\int_{-2}^{1} x^3\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(-2 + \frac{3k}{n}\right)\frac{3}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[-8 + 36\left(\frac{k}{n}\right) - 54\left(\frac{k^2}{n^2}\right) + 27\left(\frac{k^3}{n^3}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left[-8n + \frac{36}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} - \frac{54}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{27}{n^3}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[-24 + 54\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 27\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) + \frac{81}{4}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= -24 + 54 - 27(2) + \frac{81}{4} = -\frac{15}{4}.$$

La Figura 5.16 muestra que no se está considerando una área.

Ejemplo 4

Los valores de las sumas de Riemann en los Ejemplos 1 y 2 son aproximaciones al valor de la integral definida $\int_{-2}^{3}(x^2 - 4)\,dx$. Se deja como ejercicio demostrar que

* Se exhorta al lector a estudiar detenidamente las observaciones con las que concluye esta sección.

$$\int_{-2}^{3}(x^2 - 4)\,dx = -\frac{25}{3} \approx -8.33.$$

Véase el Problema 18 de los Ejercicios 5.5.

Véase programa BASIC para la aproximación en la Pág 1013 (No. 2)

(O) 5.5.2 Una definición según ϵ-δ

Sea f una función definida en $[a, b]$ y supóngase que L denota un número real. El concepto intuitivo de que las sumas de Riemann son próximas a L siempre que la norma $\|P\|$ de una partición P es cercana a cero, puede expresarse de manera precisa usando los símbolos ϵ-δ introducidos en la Sección 2.5. Cuando se dice que f es integrable en $[a, b]$, significa que para todo número real $\epsilon > 0$ existe un número real $\delta > 0$ tal que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x_k - L\right| < \varepsilon \tag{5.23}$$

siempre que P sea una partición de $[a, b]$ para la cual $\|P\| < \delta$ y los x_k^* sean números en $[x_{k-1}, x_k]$. En otras palabras,

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x_k$$

existe y es igual al número L.

Observaciones

(*i*) Hay funciones que están definidas para todo valor de x en $[a, b]$ para las cuales el límite (5.21) no existe. También *puede ser* que la integral definida no exista, si la función f no está definida para todos los valores de x en el intervalo; por ejemplo, se verá más adelante por qué no existe una integral tal como $\int_{-3}^{2}(1/x)\,dx$. Obsérvese que $y = 1/x$ es discontinua en $x = 0$ y no es acotada en el intervalo. Sin embargo, no debe concluirse a partir de este ejemplo particular que cuando una función f tenga una discontinuidad en $[a, b]$, necesariamente $\int_a^b f(x)\,dx$ no exista. (Véase el Problema 31 de los Ejercicios 5.5.) La continuidad de una función f en $[a, b]$ es suficiente pero no necesaria para garantizar la existencia de $\int_a^b f(x)\,dx$. El conjunto de funciones continuas en $[a, b]$ es un subconjunto del conjunto de las funciones que son integrables en el intervalo.

Es importante que el lector esté enterado de otras condiciones suficientes para integrabilidad. Si una función f

es acotada en $[a, b]$; esto es, si existe una constante positiva B tal que $-B \le f(x) \le B$ para todo x en el intervalo, y

tiene sólo un número finito de discontinuidades en $[a, b]$,

entonces f es integrable en $[a, b]$. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} 4, & 0 \le x < 2 \\ 1, & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

es discontinua en $x = 2$ pero acotada en $[0, 3]$. Por consiguiente, $\int_0^3 f(x)\,dx$ existe.

(*ii*) Como se mencionó antes, una integral definida no necesariamente es una área, puesto que la Definición 5.3 no requiere que f sea no negativa en $[a, b]$. ¿Qué es entonces una integral definida? Por ahora, aceptemos el hecho de que una integral definida es simplemente un número real. Compárese esto con la integral indefinida, la cual es una función (o un conjunto de funciones). ¿Es el área bajo la gráfica de una función no negativa continua una integral definida? La respuesta es sí. Se volverá al asunto de evaluar áreas después de estudiar ciertas propiedades de la integral definida.

(*iii*) El procedimiento resumido en (5.22) tiene una utilidad limitada como un medio práctico para calcular una integral definida. En las próximas secciones se verá que en ciertas ocasiones hay una forma más fácil de encontrar el número $\int_a^b f(x)\,dx$.

Ejercicios 5.5

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 978.

[5.5.1]

En los Problemas 1-8 calcule la suma de Riemann para la función dada en el intervalo indicado. Especifique $\|P\|$.

1. $f(x) = x$, $[0, 4]$, dos subintervalos;
$x_0 = 0, x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = 4;$
$x_1^* = 2, x_2^* = 3$

2. $f(x) = -2x$, $[-1, 2]$, tres subintervalos;
$x_0 = -1, x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 1, x_3 = 2;$
$x_1^* = -\frac{1}{2}, x_2^* = 0, x_3^* = \frac{3}{2}$

3. $f(x) = 3x + 1$, $[0, 3]$, cuatro subintervalos;
$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = \frac{5}{3}, x_3 = \frac{7}{3}, x_4 = 3;$
$x_1^* = \frac{1}{2}, x_2^* = \frac{4}{3}, x_3^* = 2, x_4^* = \frac{8}{3}$

4. $f(x) = x - 4$, $[-2, 5]$, cinco subintervalos;
$x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{2},$
$x_4 = 3, x_5 = 5;$
$x_1^* = -\frac{3}{2}, x_2^* = -\frac{1}{2}, x_3^* = 0, x_4^* = 2, x_5^* = 4$

5. $f(x) = x^2$, $[-1, 1]$, cuatro subintervalos;
$x_0 = -1, x_1 = -\frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{4}, x_3 = \frac{3}{4}, x_4 = 1;$
$x_1^* = -\frac{3}{4}, x_2^* = 0, x_3^* = \frac{1}{2}, x_4^* = \frac{7}{8}$

6. $f(x) = x^2 + 1$, $[1, 3]$, tres subintervalos;
$x_0 = 1, x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = \frac{5}{2}, x_3 = 3;$
$x_1^* = \frac{5}{4}, x_2^* = \frac{7}{4}, x_3^* = 3$

7. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $[0, 2\pi]$, tres subintervalos;
$x_0 = 0, x_1 = \pi, x_2 = \frac{3\pi}{2}, x_3 = 2\pi;$
$x_1^* = \frac{\pi}{2}, x_2^* = \frac{7\pi}{6}, x_3^* = \frac{5\pi}{4}$

8. $f(x) = \cos x$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, cuatro subintervalos;
$x_0 = -\frac{\pi}{2}, x_1 = -\frac{\pi}{4}, x_2 = 0, x_3 = \frac{\pi}{3}, x_4 = \frac{\pi}{2};$
$x_1^* = -\frac{\pi}{3}, x_2^* = -\frac{\pi}{6}, x_3^* = \frac{\pi}{4}, x_4^* = \frac{\pi}{3}$

9. Dada $f(x) = x - 2$ en $[0, 5]$, calcule la suma de Riemann empleando una partición con cinco subintervalos de igual longitud. Sea x_k^*, $k = 1, 2, \ldots, 5$, la frontera derecha de cada subintervalo.

10. Dada $f(x) = x^2 - x + 1$ en $[0, 1]$, calcule la suma de Riemann empleando una partición con tres subintervalos de igual longitud. Sea x_k^*, $k = 1, 2, 3$, la frontera izquierda de cada subintervalo.

En los Problemas 11-20 utilice (5.22) para evaluar la integral definida dada.

11. $\int_1^9 3\,dx$

12. $\int_{-1}^{4} (-2)\,dx$

13. $\int_{-3}^{1} x\,dx$

14. $\int_{0}^{3} x\,dx$

15. $\int_{0}^{2} (x^2 - 1)\,dx$

16. $\int_{0}^{3} (x^2 - 2x)\,dx$

17. $\int_{1}^{2} (x^2 - x)\,dx$

18. $\int_{-2}^{3} (x^2 - 4)\,dx$

19. $\int_{0}^{1} (x^3 - 1)\,dx$

20. $\int_{0}^{2} (3 - x^3)\,dx$

21. Sea $f(x) = k$ una función constante en $[a, b]$. Utilice (5.22) para demostrar que $\int_a^b k\,dx = k(b - a)$.

22. Sea P cualquier partición de $[a, b]$. Utilice el Problema 21 para demostrar que

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a.$$

Interprete geométricamente este resultado.

En los Problemas 23 y 24 utilice (5.22) para obtener el resultado dado.

23. $\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$

24. $\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$

En los Problemas 25 y 26 sea P una partición del intervalo indicado y x_k^* un número en el subintervalo k-ésimo. Escriba la suma dada como una integral definida.

25. $\lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{9 + (x_k^*)^2}\,\Delta x_k$; $[-2, 4]$

26. $\lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (\tan x_k^*)\,\Delta x_k$; $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

En los Problemas 27 y 28 sea P una partición regular del intervalo indicado y x_k^* la frontera derecha de cada subintervalo. Escriba la suma dada como una integral definida.

27. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{4k + 2}{n^2}$; $[0, 2]$

28. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{n + 3k}$; $[1, 4]$

Problemas diversos

29. Considere la función definida para todo x en el intervalo $[-1, 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ racional} \\ 1, & x \text{ irracional.} \end{cases}$$

Demuestre que $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ no existe. (*Sugerencia:* El resultado del Problema 22 puede ser útil.)

30. Evaluar la integral definida $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$ empleando una partición regular de $[0, \frac{\pi}{2}]$ y haciendo que x_k^* sea el punto medio de cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Utilice los resultados

(a) $\cos\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos(2n - 1)\theta = \dfrac{\text{sen}\, 2n\theta}{2\,\text{sen}\,\theta}$

(b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n\,\text{sen}(\pi/4n)} = \dfrac{4}{\pi}$.

[5.5.2]

31. Considere la función discontinua definida para todo x en el intervalo $[0, 2]$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable en el intervalo y que $\int_0^2 f(x)\,dx = 0$. (*Sugerencia:* Utilice (5.23).)

5.6 Propiedades de la integral definida

Las dos definiciones siguientes resultan útiles cuando se trabaja con integrales definidas.

DEFINICIÓN 5.4

Si $f(a)$ existe, entonces

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

□

DEFINICIÓN 5.5

Si f es integrable en $[a, b]$, entonces

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

□

Ejemplo 1

Por la Definición 5.4,

$$\int_1^1 (x^3 + 3x)\,dx = 0.$$

Ejemplo 2

En el Ejemplo 3 de la Sección 5.5 se vio que $\int_{-2}^{1} x^3\,dx = -15/4$. De la Definición 5.5 resulta que

$$\int_1^{-2} x^3\,dx = -\int_{-2}^{1} x^3\,dx = -\left(-\frac{15}{4}\right) = \frac{15}{4}.$$

El teorema siguiente proporciona algunas de las propiedades básicas de la integral definida. Estas propiedades son análogas a las propiedades de la notación de sumatoria presentadas en el Teorema 5.5, lo mismo que a las propiedades de la integral indefinida, o antiderivada, discutidas en la Sección 5.1.

TEOREMA 5.7

Sean f y g funciones integrables en $[a, b]$. Entonces,

(*i*) $\int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$, en donde k es cualquier constante.

(*ii*) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$.

(*iii*) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, en donde c es cualquier número en $[a, b]$.

□

Se notará que el Teorema 5.7(*ii*) se extiende a cualquier suma finita de funciones integrables en el intervalo.

A la variable independiente x en una integral definida se le llama **variable ficticia** de integración. El valor de la integral no depende del símbolo usado. En otras palabras,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(r)\,dr = \int_a^b f(s)\,ds = \int_a^b f(t)\,dt$$

y así sucesivamente.

Ejemplo 3

$$\int_{-2}^{1} x^3\,dx = \int_{-2}^{1} r^3\,dr = \int_{-2}^{1} t^3\,dt = -\frac{15}{4}.$$

Para una partición dada P de un intervalo $[a, b]$, intuitivamente parece que la suma

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k$$

es simplemente la amplitud del intervalo $b - a$. Así que, se tiene lo siguiente (véase el Problema 22 de los Ejercicios 5.5):

TEOREMA 5.8

Para cualquier constante k,

$$\int_a^b k\,dx = k\int_a^b dx$$
$$= k(b-a).$$

□

Ejemplo 4

Por el Teorema 5.8,

$$\int_2^8 5\,dx = 5\int_2^8 dx$$
$$= 5(8-2) = 30.$$

Ejemplo 5

Evaluar $\int_{-2}^{1}(x^3+4)\,dx$.

Solución Por el Teorema 5.7(*ii*) puede escribirse

$$\int_{-2}^{1}(x^3+4)\,dx = \int_{-2}^{1}x^3\,dx + \int_{-2}^{1}4\,dx.$$

Ahora bien, por el Teorema 5.8 y el resultado conocido

$$\int_{-2}^{1}x^3\,dx = -\frac{15}{4}$$

resulta que

$$\int_{-2}^{1}(x^3+4)\,dx = \left(-\frac{15}{4}\right) + 4[1-(-2)]$$
$$= 12 - \frac{15}{4} = \frac{33}{4}.$$

Finalmente, cuando $f(x) \ge 0$ en $[a, b]$, no es sorprendente el siguiente resultado.

TEOREMA 5.9

Sea f integrable en $[a, b]$ y $f(x) \ge 0$ para todo x en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge 0.$$

□

Ejercicios 5.6

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 978.

En los Problemas 1-40 use las definiciones y los teoremas de esta sección para evaluar la integral definida dada. Donde sea apropiado, utilice los resultados conocidos

$$\int_{-1}^{3}x^3\,dx = 20,\quad \int_{-1}^{3}x^2\,dx = \frac{28}{3},\quad \int_{-1}^{3}x\,dx = 4,$$
$$\int_0^{\pi/3}\operatorname{sen}x\,dx = \frac{1}{2},\quad \text{y}\quad \int_0^{\pi/2}\cos x\,dx = 1.$$

1. $\int_3^6 4\,dx$
2. $\int_{-2}^{5}(-2)\,dx$
3. $\int_{-1}^{1}5\,dx$
4. $\int_{-3}^{-3}6\,dx$
5. $\int_1^{-2}\left(\frac{1}{2}\right)dx$
6. $\int_4^{-4}(-7)\,dx$
7. $\int_3^{-1}x^3\,dx$
8. $-\int_3^{-1}10x\,dx$
9. $\int_{-1}^{3}6x^2\,dx$
10. $\int_{-1}^{3}\frac{1}{5}x^3\,dx$
11. $\int_{-1}^{3}(-x)^3\,dx$
12. $\int_{-1}^{3}(2x)^3\,dx$
13. $\int_{-1}^{3}(x^3+1)\,dx$
14. $\int_{-1}^{3}(x^3-2)\,dx$
15. $\int_{-1}^{3}(2x^3-10)\,dx$
16. $\int_{-1}^{3}\left(5-\frac{1}{4}x^3\right)dx$
17. $\int_{-1}^{3}t^3\,dt$
18. $\int_{-1}^{3}(u^3+u)\,du$
19. $\int_{-1}^{3}(-x^3+2x-11)\,dx$
20. $\int_{-1}^{3}x(x-1)(x+2)dx$
21. $\int_{-1}^{3}(x+1)^3\,dx$
22. $\int_{-1}^{3}(t+2)(t^2-2t+4)\,dt$
23. $\int_{-1}^{0}x^3\,dx + \int_0^3 x^3\,dx$
24. $\int_{-1}^{2}x^3\,dx + \int_2^3 x^3\,dx$
25. $\int_{-1}^{1/2}2t\,dt - \int_3^{1/2}2t\,dt$
26. $\int_{-1}^{1}(5u^3+1)\,du - \int_3^1(5u^3+1)\,du$
27. $\int_0^3 x^3\,dx + \int_3^0 x^3\,dx$
28. $\int_{-1}^{-1}x^3\,dx + \int_{-1}^{3}(x^3-4)\,dx$
29. $\int_0^{\pi/3}6\operatorname{sen}\theta\,d\theta$
30. $\int_0^{\pi/3}(9-2\operatorname{sen}x)\,dx$
31. $\int_0^{\pi/4}\operatorname{sen}x\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi/3}\operatorname{sen}x\,dx$
32. $\int_1^5\cos^2 x\,dx + \int_1^5\operatorname{sen}^2 x\,dx$
33. $\int_0^{\pi/2}\cos^2\frac{x}{2}\,dx$
34. $\int_0^{\pi/3}\frac{\operatorname{sen}2x}{\cos x}\,dx$
35. $\int_{\pi/4}^{\pi/4}\frac{dt}{\operatorname{sen}t}$
36. $\int_0^{\pi/3}(1+\cos x)\,dx + \int_{\pi/3}^{\pi/2}\cos x\,dx$
37. $\int_0^4 x\,dx + \int_0^4(9-x)\,dx$
38. $\int_{-1}^{0}t^2\,dt + \int_0^2 x^2\,dx + \int_2^3 u^2\,du$
39. $\int_{\pi/2}^{0}10\cos(t+\pi)\,dt$
40. $\int_0^{\pi/3}(1+\cos x\tan x)\,dx$

Problemas diversos

41. Si f es integrable en $[a, b]$, entonces f^2 también lo es. Demuestre que $\int_a^b [f(x)]^2dx \ge 0$.

42. Si f y g son integrables en $[a, b]$ y $f(x) \ge g(x)$ para todo x en $[a, b]$, demuestre que $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$. (*Sugerencia:* Considere $f(x)-g(x)$ y el Teorema 5.9.)

En los Problemas 43 y 44, utilice el Problema 42 para establecer el resultado dado.

43. $\int_0^1 x^3\,dx \le \int_0^1 x^2\,dx$
44. $\int_0^{\pi/4}(\cos x - \operatorname{sen}x)\,dx \ge 0$

5.7 El teorema fundamental del Cálculo

Al final de la Sección 5.5, se señaló que había una forma más fácil de evaluar una integral definida que la de determinar el límite de una suma. Esta "forma más fácil" es por medio del llamado *teorema fundamental del Cálculo*. En este teorema se verá que el concepto de una antiderivada de una función continua proporciona el puente entre el Cálculo diferencial y el Cálculo integral.

Primera forma del teorema fundamental del Cálculo

Supóngase que f es continua y que $f(t) \geq 0$ para todo t en cierto intervalo $[a, b]$. De esta manera, la integral

$$\int_a^b f(t)\,dt \tag{5.24}$$

existe y representa el área bajo la gráfica de f en el intervalo. Ahora bien, si x es cualquier número en $[a, b]$, entonces la *función*

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{5.25}$$

da el área bajo la gráfica en el intervalo $[a, x]$. Véase la Figura 5.17. Si $\Delta x > 0$, entonces

$$A(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt \tag{5.26}$$

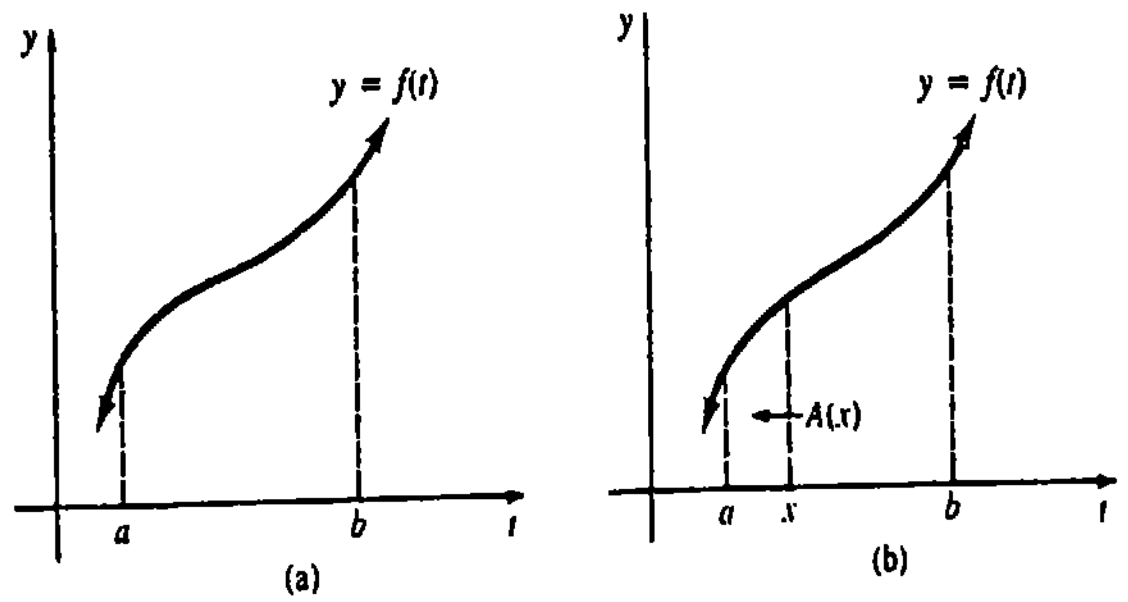


Figura 5.17

es el área indicada en la Figura 5.18(a), mientras que la diferencia

$$A(x + \Delta x) - A(x) \tag{5.27}$$

es el área mostrada en la Figura 5.18(b).

Puesto que f es continua en el intervalo cerrado $[x, x + \Delta x]$, se sabe por el teorema de los valores extremos, Teorema 4.1, que adquiere un valor mínimo m y un valor máximo M en el intervalo. Como lo sugiere la Figura 5.19, la diferencia (5.27) está comprendida entre los números $m\Delta x$ y $M\Delta x$:

$$m\,\Delta x \leq A(x + \Delta x) - A(x) \leq M\,\Delta x.^*$$

* Aunque, para fines de ilustración, se ha mostrado a f como función creciente en la Figura 5.19, las desigualdades se cumplen para cualquier función continua en $[x, x + \Delta x]$.

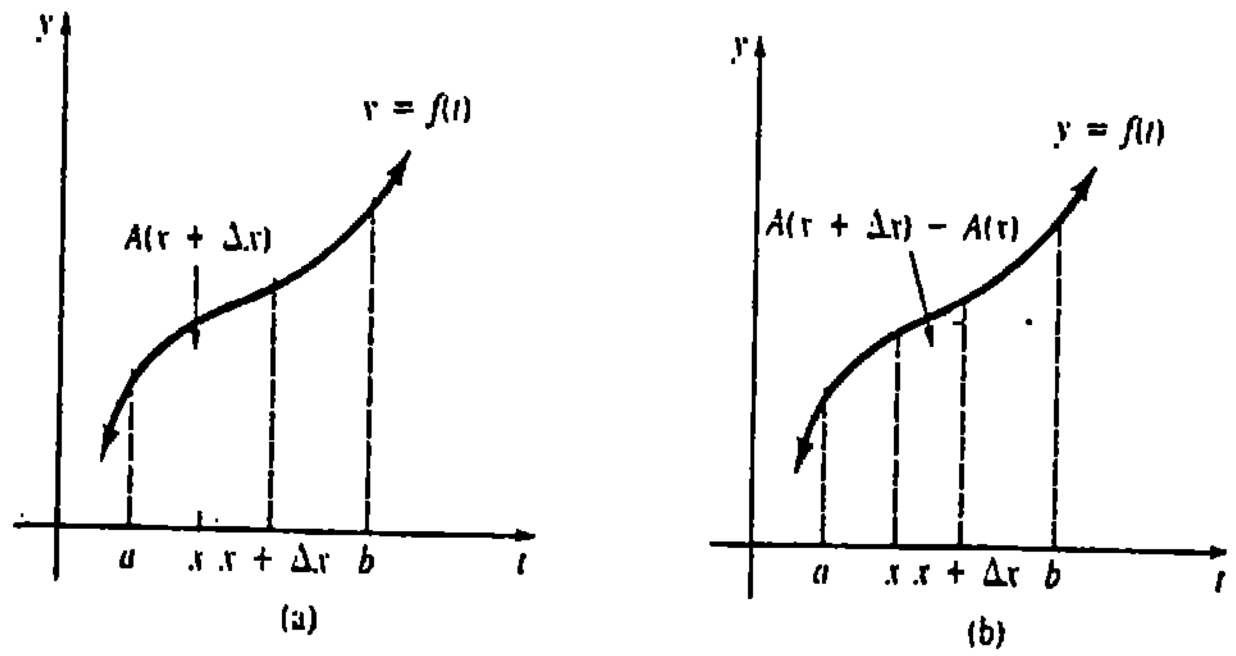


Figura 5.18

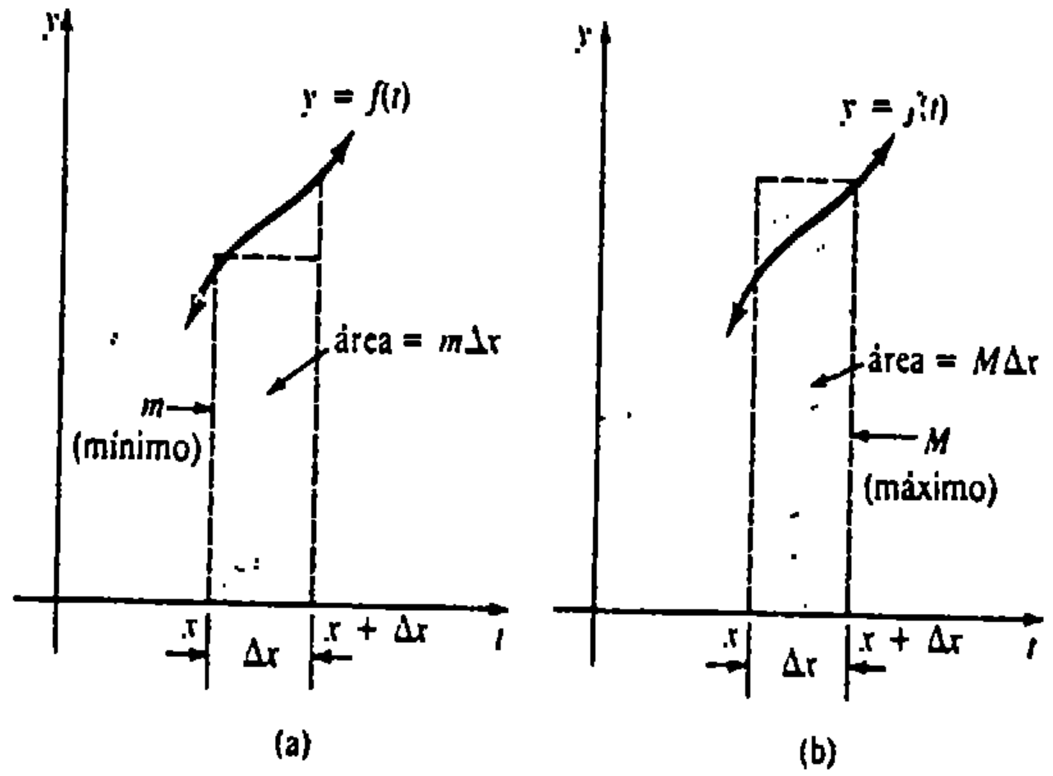


Figura 5.19

Dividiendo entre Δx resulta luego que

$$m \leq \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} \leq M.$$

Usando el hecho de que $\lim_{\Delta x \to 0^+} m = \lim_{\Delta x \to 0^+} M = f(x)$, se obtiene que

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} = f(x). \tag{5.28}$$

En virtud de la definición de derivada, se puede escribir (5.28) como

$$A'(x) = f(x). \tag{5.29}$$

Un argumento semejante se aplica para $\Delta x < 0$.

La discusión anterior sugiere el teorema siguiente conocido como la primera forma, o la *forma de derivada*, del **teorema fundamental del Cálculo**.

TEOREMA 5.1C

Sea f continua en $[a, b]$ y sea x cualquier número en el intervalo. Si $G(x)$ es la función definida por

$$G(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

entonces $G'(x) = f(x)$. □

Aquí se ha elegido denotar la integral $\int_a^x f(t)dt$ por $G(x)$, puesto que en el contexto del Teorema 5.10, la función f no requiere ser no negativa en $[a, b]$, y así la integral no necesita representar una medida de área como lo fue con $A(x)$ en (5.25).

Ejemplo 1

(a) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{-2}^x t^3\, dt = x^3$ (b) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^x \sqrt{t^2+1}\, dt = \sqrt{x^2+1}$

Segunda forma del teorema fundamental del Cálculo

Para una función continua f, la proposición

$$G'(x) = f(x)$$

para $G(x) = \int_a^x f(t)dt$, significa que $G(x)$ es una antiderivada del integrando. Si F es cualquier antiderivada de f, se sabe por el Teorema 5.1 que $G(x) - F(x) = C$ o bien $G(x) = F(x) + C$, en donde C es una constante arbitraria. De ello resulta que para cualquier x en $[a, b]$

$$F(x) + C = \int_a^x f(t)\, dt. \tag{5.30}$$

Si se sustituye $x = a$ en (5.30), entonces

$$F(a) + C = \int_a^a f(t)\, dt$$

implica que $C = -F(a)$, ya que $\int_a^a f(t)dt = 0$. Entonces, (5.30) se convierte en

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Puesto que la última ecuación es válida en $x = b$ se tiene que

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\, dt. \tag{5.31}$$

Hemos demostrado una segunda forma, o *forma de antiderivada*, sumamente útil, del **teorema fundamental del Cálculo.**

TEOREMA 5.11

Sea f continua en $[a, b]$, y F cualquier función para la cual $F'(x) = f(x)$. Entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a). \tag{5.32}$$

□

La diferencia en (5.32) se escribe usualmente

$$F(x)\Big]_a^b;$$

esto es,

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\, dx}_{\substack{\text{integral}\\ \text{definida}}} = \underbrace{\int f(x)\, dx\Big]_a^b}_{\substack{\text{integral}\\ \text{indefinida}\\ \text{o antiderivada}}} = F(x)\Big]_a^b.$$

Puesto que el Teorema 5.11 indica que se puede usar *cualquier* antiderivada, siempre es posible escoger que la constante de integración C sea cero. Obsérvese que si $C \neq 0$, entonces

$$(F(x) + C)\Big]_a^b = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a) = F(x)\Big]_a^b.$$

Ejemplo 2

En el Ejemplo 3 de la Sección 5.5 se recurrió a la definición bastante larga de la integral definida para demostrar que

$$\int_{-2}^1 x^3\, dx = -\frac{15}{4}.$$

Como $F(x) = x^4/4$ es una antiderivada de $f(x) = x^3$, se obtiene ahora inmediatamente que

$$\int_{-2}^1 x^3\, dx = \frac{x^4}{4}\Big]_{-2}^1 \quad = \frac{1}{4} - \frac{(-2)^4}{4} \quad = \frac{1}{4} - \frac{16}{4} = -\frac{15}{4}.$$

Ejemplo 3

Evaluar $\displaystyle\int_1^3 x\, dx.$

Solución Una antiderivada de $f(x) = x$ es $F(x) = x^2/2$. Consecuentemente, el Teorema 5.11 da lugar a

$$\int_1^3 x\, dx = \frac{x^2}{2}\Big]_1^3 \quad = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4.$$

Ejemplo 4

Evaluar $\displaystyle\int_{-2}^2 (3x^2 - x + 1)\, dx.$

Solución Se aplica (5.1) de la Sección 5.1 a cada término del integrando y luego se utiliza el teorema fundamental:

$$\int_{-2}^2 (3x^2 - x + 1)\, dx = \left(x^3 - \frac{x^2}{2} + x\right)\Big]_{-2}^2 = (8 - 2 + 2) - (-8 - 2 - 2) = 20$$

Ejemplo 5

Evaluar $\int_{\pi/6}^{\pi} \cos x \, dx$.

Solución Una antiderivada de $f(x) = \cos x$ es $F(x) = \text{sen } x$. Por lo tanto,

$$\int_{\pi/6}^{\pi} \cos x \, dx = \text{sen } x \Big]_{\pi/6}^{\pi}$$
$$= \left[\text{sen } \pi - \text{sen } \frac{\pi}{6}\right] = \left[0 - \frac{1}{2}\right] = -\frac{1}{2}.$$

Demostración alternativa del Teorema 5.11 Vale la pena examinar todavía otra demostración del Teorema 5.11, empleando la premisa básica de que una integral definida es un límite de una sumatoria. Si F es una antiderivada de f, entonces $F'(x) = f(x)$. Como F es diferenciable en (a, b), el teorema del valor medio para derivadas garantiza que existe un x_k^* en cada subintervalo (x_{k-1}, x_k) de la partición $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, de tal manera que

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(x_k^*)(x_k - x_{k-1})$$
$$= F'(x_k^*) \, \Delta x_k \qquad = f(x_k^*) \, \Delta x_k.$$

Ahora se tiene que

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0)$$
$$= F(x_n) + \underbrace{F(x_1) - F(x_1) + F(x_2) - F(x_2) + \cdots + F(x_{n-1}) - F(x_{n-1})}_{\text{cero}} - F(x_0)$$
$$= [F(x_1) - F(x_0)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \cdots + [F(x_n) - F(x_{n-1})]$$
$$= \sum_{k=1}^{n}[F(x_k) - F(x_{k-1})] \quad = \sum_{k=1}^{n} F'(x_k^*)\Delta x_k \qquad = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k. \tag{5.33}$$

Pero, $\lim_{\|P\| \to 0} [F(b) - F(a)] = F(b) - F(a)$, así que el límite de (5.33) cuando $\|P\| \to 0$ es

$$F(b) - F(a) = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k. \tag{5.34}$$

Por la Definición 5.3, el lado derecho de (5.34) es $\int_a^b f(x) \, dx$.

Sustitución en una integral definida

Recuérdese de la Sección 5.2 que algunas veces se utilizó una sustitución como una ayuda para evaluar una integral indefinida de la forma $\int f(g(x))g'(x)dx$. Se debe tener cuidado al usar una sustitución en una integral definida $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx$, ya que puede procederse de *dos* maneras:

(*i*) Evaluar la integral indefinida por medio de la sustitución $u = g(x)$. Regresar a la variable x sustituyendo $u = g(x)$ en la antiderivada y luego aplicar el teorema fundamental del Cálculo usando los límites originales de integración $x = a$ y $x = b$.

(*ii*) Alternativamente, puede evitarse el regreso a la variable x cambiando los límites de integración por los valores que le correspondan a u en $x = a$ y en $x = b$.

El último método, que usualmente es más rápido, se resume en el teorema que sigue.

TEOREMA 5.12

Sea $u = g(x)$ una función que tiene una derivada continua en el intervalo $[a, b]$, y sea f una función que es continua en el contradominio de g. Si $F'(u) = f(u)$ y $c = g(a)$, $d = g(b)$, entonces

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) \, dx = F(d) - F(c).$$

Demostración

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) \, dx = \int_c^d f(u) \frac{du}{dx} \, dx$$
$$= \int_c^d f(u) \, du$$
$$= F(u)\Big]_c^d = F(d) - F(c). \qquad \square$$

Ejemplo 6

Evaluar $\int_0^2 \sqrt{2x^2 + 1} \, x \, dx$.

Solución Se ilustrará el procedimiento descrito anteriormente en (*i*). Para evaluar la integral indefinida $\int \sqrt{2x^2 + 1} \, x \, dx$, se usa

$$u = 2x^2 + 1 \quad \text{y} \quad du = 4x \, dx.$$

De esta manera,

$$\int \sqrt{2x^2 + 1} \, x \, dx = \frac{1}{4} \int \sqrt{2x^2 + 1}(4x \, dx) \qquad \boxed{\text{sustitución}}$$
$$= \frac{1}{4} \int u^{1/2} \, du$$
$$= \frac{1}{4} \frac{u^{3/2}}{3/2} + C$$
$$= \frac{1}{6}(2x^2 + 1)^{3/2} + C.$$

Por lo tanto, por el Teorema 5.11,

$$\int_0^2 \sqrt{2x^2 + 1} \, x \, dx = \frac{1}{6}(2x^2 + 1)^{3/2}\Big]_0^2$$
$$= \frac{1}{6}[9^{3/2} - 1^{3/2}]$$
$$= \frac{1}{6}[27 - 1] = \frac{13}{2}$$

El segundo procedimiento se ilustra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 7

En el Ejemplo 6, si $u = 2x^2 + 1$, obsérvese que $x = 0$ implica que $u = 1$ y que $x = 2$ da $u = 9$. Así que,

$$\int_0^2 \sqrt{2x^2+1}\, x\, dx = \frac{1}{4}\int_1^9 u^{1/2}\, du \quad \text{límites de } u\text{: integración con respecto a } u$$
$$= \frac{1}{4}\left.\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_1^9$$
$$= \frac{1}{6}[9^{3/2} - 1^{3/2}] = \frac{13}{2}.$$

Observación

La forma de antiderivada del teorema fundamental del Cálculo es un instrumento sumamente importante y poderoso para evaluar integrales definidas. ¿Por qué preocuparse por obtener un engorroso límite de una suma, cuando el valor de $\int_a^b f(x)dx$ puede obtenerse evaluando $\int f(x)dx$ en los dos números a y b? Esto es verdad hasta cierto punto. Sin embargo, es hora de aprender otro hecho importante de la vida matemática: hay funciones para las cuales la antiderivada $\int f(x)dx$ *no se puede* expresar en términos de *funciones elementales**. La simple funcion continua $f(x) = \sqrt{x^3+1}$ no tiene una antiderivada que sea una función elemental. Aunque puede decirse, en virtud del Teorema 5.6, que la integral definida $\int_0^1 \sqrt{x^3+1}\,dx$ existe, el Teorema 5.11 no proporciona ninguna ayuda para encontrar su valor: En la siguiente sección se considerarán problemas de esta clase. (Véanse los Problemas 58 y 59 de los Ejercicios 5.7.)

Ejercicios 5.7

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 978.

En los Problemas 1-40 evalúe la expresión dada

1. $\frac{d}{dx}\int_0^x (3t^2 - 2t)\, dt$
2. $\frac{d}{dx}\int_x^9 \sqrt{u+2}\, du$
3. $\int_3^7 dx$
4. $\int_2^{10} (-4)\, dx$
5. $\int_{-1}^2 (2x+3)\, dx$
6. $\int_{-5}^4 t^2\, dt$
7. $\int_1^3 (6x^2 - 4x + 5)\, dx$
8. $\int_{-2}^1 (12x^5 - 36)\, dx$
9. $\int_0^{\pi/2} \text{sen}\, x\, dx$
10. $\int_{-\pi/3}^{\pi/4} \cos\theta\, d\theta$
11. $\int_{1/2}^{3/4} \frac{1}{u^2}\, du$
12. $\int_{1/4}^1 \frac{2}{\sqrt{x}}\, dx$
13. $\int_{-1}^1 \sqrt[3]{x}\, dx$
14. $\int_0^8 \sqrt[3]{t^2}\, dt$
15. $\int_0^2 x(1-x)\, dx$
16. $\int_3^2 x(x-2)(x+2)\, dx$
17. $\int_{-1}^1 (7x^3 - 2x^2 + 5x - 4)\, dx$
18. $\int_{-3}^{-1} (x^3 - 4x + 8)\, dx$

* Las *funciones elementales* que se han visto hasta ahora son sumas, productos, cocientes y potencias de funciones polinomiales y trigonométricas: Más adelante se añadirán a esta lista las funciones trigonométricas inversas y las funciones logarítmica y exponencial.

19. $\int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\, dx$
20. $\int_2^4 \frac{x^2+8}{x^2}\, dx$
21. $\int_0^5 (2-\sqrt{x})^2\, dx + \int_5^9 (2-\sqrt{x})^2\, dx$
22. $\int_{-2}^0 (x+1)^2\, dx + \int_0^3 (x+1)^2\, dx$
23. $\int_{-4}^2 \left(\frac{x}{2}+1\right)^5 dx$
24. $\int_1^3 \frac{1}{x^2+10x+25}\, dx$
25. $\int_{-4}^{12} \sqrt{z+4}\, dz$
26. $\int_0^{7/2} (2x+1)^{-1/3}\, dx$
27. $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}\, dx$
28. $\int_{-2}^1 \frac{t}{(t^2+1)^2}\, dt$
29. $\int_{1/2}^1 \left(1+\frac{1}{x}\right)^3 \frac{1}{x^2}\, dx$
30. $\int_1^4 \frac{\sqrt[3]{1+4\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$
31. $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\, dx$
32. $\int_{-1}^1 \frac{u^3+u}{(u^4+2u^2+1)^5}\, du$
33. $\int_0^{\pi/8} \sec^2 2x\, dx$
34. $\int_{\sqrt{\pi/4}}^{\sqrt{\pi/2}} x\csc x^2 \cot x^2\, dx$
35. $\int_{-1/2}^{3/2} (x - \cos\pi x)\, dx$
36. $\int_1^4 \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\, dx$
37. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\, \text{sen}\, x\, dx$
38. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \text{sen}\, x \cos x\, dx$
39. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1+\cos\theta}{(\theta + \text{sen}\,\theta)^2}\, d\theta$
40. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sec x + \tan x)^2\, dx$

En los Problemas 41-44 evalúe la integral definida dada.

41. $\int_{-3}^1 |x|\, dx$
42. $\int_0^4 |2x-6|\, dx$
43. $\int_{-8}^3 \sqrt{|x|+1}\, dx$
44. $\int_0^2 |x^2-1|\, dx$
45. Use la sustitución $u = t + 1$ para evaluar.
$$\int_0^3 t\sqrt{t+1}\, dt.$$
46. Utilice la sustitución $u = 2x + 1$ para evaluar
$$\int_0^4 \frac{x^2}{\sqrt{2x+1}}\, dx.$$

En los Problemas 47 y 48 evalúe la integral definida dada.

47. $\int_{-1}^2 \left\{\int_1^x 12t^2\, dt\right\} dx$
48. $\int_0^{\pi/2} \left\{\int_0^t \text{sen}\, x\, dx\right\} dt$

En los Problemas 49 y 50 sea $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ y $G'(x) = f(x)$.

49. (a) ¿Qué es $G(x^2)$? (b) ¿Qué es $[G(x^2)]'$?
50. (a) ¿Qué es $G(x^3 + 2x)$?
(b) ¿Qué es $[G(x^3 + 2x)]'$?

En los Problemas 51 y 52 determine $F'(x)$.

51. $F(x) = \int_{6x-1}^0 \sqrt{4t+9}\, dt$
52. $F(x) = \int_{3x}^{x^2} \frac{1}{t^2+1}\, dt$ (*Sugerencia:* Use dos integrales.)

Problemas diversos

En los Problemas 53 y 54, sea P una partición del intervalo indicado y x_k^* un número en el k-ésimo subintervalo. Determine el valor del límite dado.

53. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^n (2x_k^* + 5)\,\Delta x_k$; $[-1, 3]$
54. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^n \cos\frac{x_k^*}{4}\,\Delta x_k$; $[0, 2\pi]$

En los Problemas 55 y 56 sean P una partición regular del intervalo indicado y x_k^* un número en el k-ésimo subintervalo. Establezca el resultado dado.

55. $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^n \text{sen}\, x_k^* = 2$; $[0, \pi]$
56. $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\sum_{k=1}^n x_k^* = 0$, $[-1, 1]$
57. Lea otra vez el Teorema 5.11 y dé una razón de por qué el procedimiento siguiente es *incorrecto.*
$$\int_{-1}^1 x^{-2}\, dx = -x^{-1}\Big]_{-1}^1 = -1 + (-1) = -2.$$

58. Acepte (de buena fe) la aproximación siguiente

$$(1 + x^3)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^6 + \frac{1}{16}x^9. \quad (5.35)$$

Use (5.35) para obtener una aproximación para $\int_0^1 (x^3 + 1)^{1/2}\,dx$.

Problema para calculadora

59. Encuentre un valor aproximado para la integral $\int_0^1 (x^3 + 1)^{1/2}\,dx$ empleando una suma de Riemann, una partición regular de [0, 1] en cinco subintervalos, y x_i^* como la frontera derecha de cada subintervalo.

5.8 Integración aproximada

La vida en las matemáticas sería sumamente agradable si la antiderivada de toda función continua se pudiera expresar en términos de funciones elementales, como las funciones polinómicas, racionales o trigonométricas. Pero este no es el caso. Por consiguiente, el Teorema 5.11 no puede usarse para evaluar toda integral definida. Algunas veces lo mejor que se puede hacer es *aproximar* el valor de $\int_a^b f(x)dx$. En esta sección final, consideraremos dos de tales procedimientos numéricos.

En la exposición siguiente es útil considerar de nuevo a la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ como el área bajo la gráfica de f en $[a, b]$. Aunque la continuidad de f es esencial, no hay necesidad real de que $f(x) \geq 0$ en el intervalo.

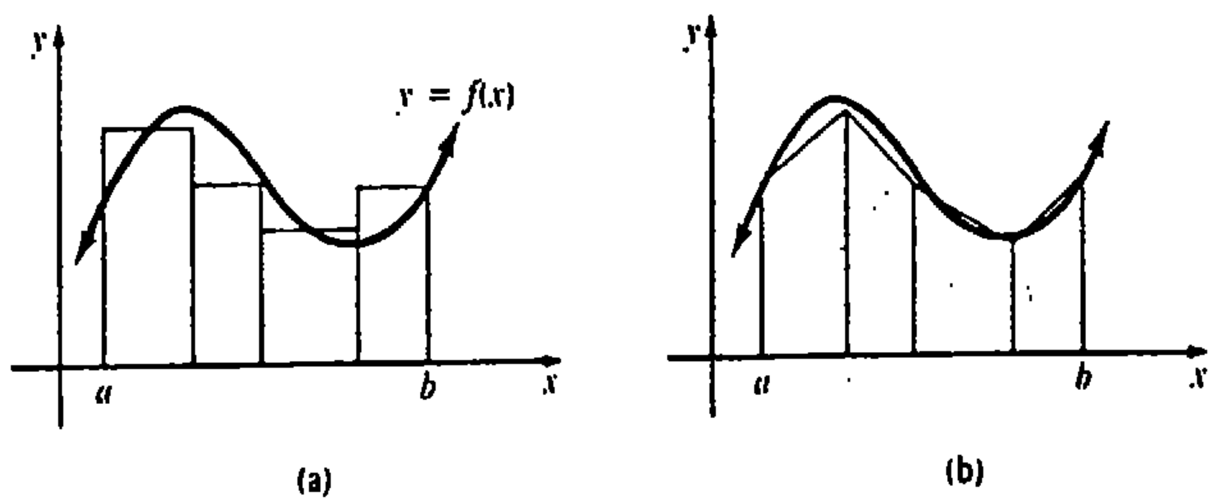


Figura 5.20

Una forma de aproximar una integral definida es proceder de la misma manera que en la discusión inicial acerca de evaluar el área bajo una gráfica; a saber, construir elementos rectangulares y sumar sus áreas. Esta es básicamente la idea de una suma de Riemann. Sin embargo, parece razonable a partir de la Figura 5.20(b) que se puede obtener una mejor estimación de $\int_a^b f(x)dx$ sumando áreas de trapecios en vez de áreas de rectángulos.

Regla trapecial

El área del trapecio mostrado en la Figura 5.21(a) es

$$h\frac{l_1 + l_2}{2}.$$

Así que, para un elemento trapecial como el mostrado en la Figura 5.21(b) su área A_k es

$$A_k = \Delta x_k \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}.$$

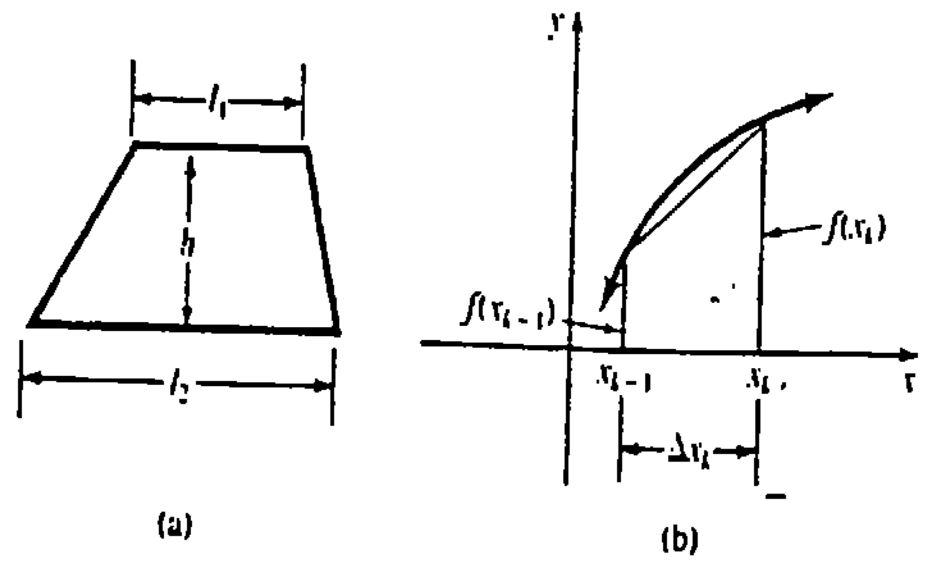


Figura 5.21

En general, para una *partición regular* de un intervalo $[a, b]$ en el cual una función f es continua, la llamada regla del trapecio está dada por

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \Delta x \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + \Delta x \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \cdots + \Delta x \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}. \quad (5.36)$$

Como $\Delta x = (b - a)/n$, (5.36) se reduce a

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)], \quad (5.37)$$

en donde $x_0 = a$, $x_n = b$ y $x_k = a + k\,\Delta x$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Por ejemplo, como la función $f(x) = 1/x$ es continua en cualquier intervalo $[a, b]$ que no incluya el origen, se sabe que $\int_a^b dx/x$ existe. Sin embargo, no hemos visto, hasta ahora, ninguna función F tal que $F'(x) = 1/x$; esto es, no conocemos una antiderivada de f.

Ejemplo 1

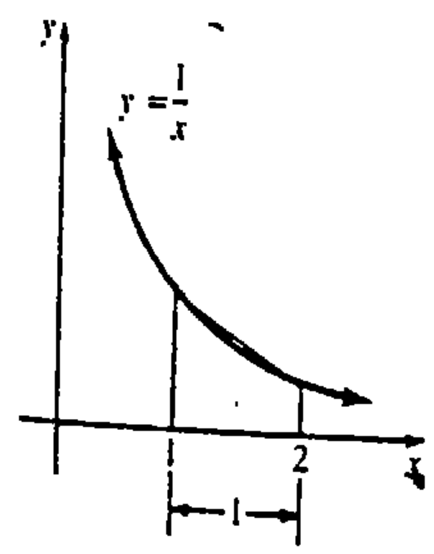


Figura 5.22

Aproximar $\int_1^2 dx/x$ mediante la regla trapecial para $n = 1$, $n = 2$ y $n = 6$.

Solución Como se muestra en la Figura 5.22, el caso $n = 1$ es un trapecio en el que $\Delta x = 1$, $f(1) = 1$ y $f(2) = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, de (5.37),

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 1\frac{1 + \frac{1}{2}}{2} = 0.7500.$$

Cuando $n = 2$, la Figura 5.23 muestra $\Delta x = \frac{1}{2}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + \Delta x = \frac{3}{2}$, $x_2 = 1 + 2\,\Delta x = 2$ y $f(x_0) = 1$, $f(x_1) = \frac{2}{3}$, $f(x_2) = \frac{1}{2}$. Por consiguiente, (5.37) da lugar a

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{4}\left[1 + 2\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2}\right] \approx 0.7083.$$

Finalmente, cuando $n = 6$, $\Delta x = \frac{1}{6}$ y $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + \Delta x = \frac{7}{6}$, $x_2 = 1 + 2\,\Delta x = \frac{4}{3}$ y así sucesivamente. Usando la información de la tabla adjunta, (5.37) da lugar a

k	x_k	$f(x_k)$
0	1	1
1	$\frac{7}{6}$	$\frac{6}{7}$
2	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$
3	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$
4	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{5}$
5	$\frac{11}{6}$	$\frac{6}{11}$
6	2	$\frac{1}{2}$

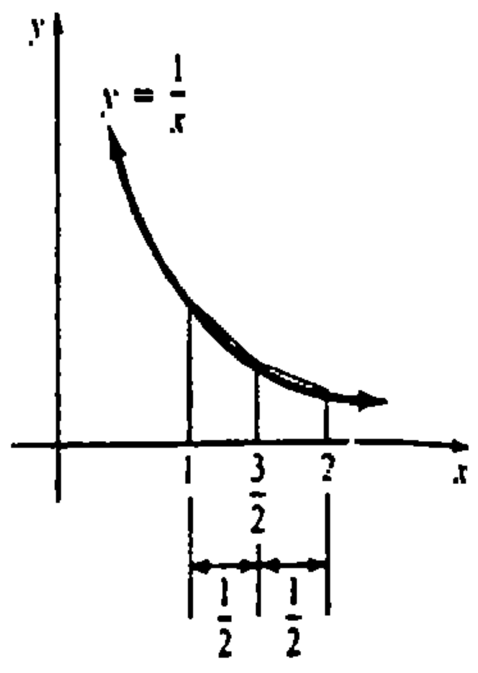


Figura 5.23

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{12}\left[1 + 2\left(\frac{6}{7}\right) + 2\left(\frac{3}{4}\right) + 2\left(\frac{2}{3}\right) + 2\left(\frac{3}{5}\right) + 2\left(\frac{6}{11}\right) + \frac{1}{2}\right]$$
$$\approx 0.6949.$$

Error en la regla trapecial

Supóngase que $I = \int_a^b f(x)dx$ y que T_n es una aproximación de I empleando n trapecios. Se define el **error** en el método como*

$$E_n = |I - T_n|.$$

Por medio del resultado siguiente puede obtenerse una cota superior para el error. La demostración se omite.

TEOREMA 5.13

Si existe un número $M > 0$ tal que $|f''(x)| \le M$ para todo x en $[a, b]$, entonces

$$E_n \le \frac{M(b-a)^3}{12n^2}. \tag{5.38}$$

□

Obsérvese que esta cota superior para el error E_n es inversamente proporcional a n^2. Así que, si se duplica el número de trapecios, el error E_{2n} es menor que $\frac{1}{4}$ de la cota de error para E_n. El ejemplo siguiente muestra cómo puede utilizarse (5.38) para determinar el número de trapecios que den lugar a una precisión especificada.

Ejemplo 2

Determinar un valor de n de modo que (5.37) dé una aproximación a $\int_1^2 dx/x$ que sea exacta hasta dos cifras decimales.

* A veces se le da el nombre de *error de discretización*.

Solución Para $f(x) = 1/x$ se tiene $f''(x) = 2/x^3$. Como f'' decrece en $[1, 2]$, resulta que $f''(x) \le f''(1) = 2$ para todo x en el intervalo. Así que, con $M = 2$ y $b - a = 1$, se quiere

$$\frac{2(1)^3}{12n^2} < 0.005 \quad \text{o} \quad n^2 > \frac{100}{3} \approx 33.$$

Tomando $n \ge 6$ obtenemos la exactitud deseada.

El Ejemplo 2 indica que la tercera aproximación $\int_1^2 dx/x \approx 0.6949$ obtenida en el Ejemplo 1 es exacta hasta dos cifras decimales. Por vía de comparación, se sabe que la estimación $\int_1^2 dx/x \approx 0.6931$ es correcta hasta cuatro cifras decimales.

Ejemplo 3

Aproximar $\int_{1/2}^1 \cos\sqrt{x}\,dx$ por la regla trapecial de modo que el error sea menor que 0.001.

Solución La segunda derivada de $f(x) = \cos\sqrt{x}$ es

$$f''(x) = \frac{1}{4x}\left(\frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \cos\sqrt{x}\right).$$

Como $|\operatorname{sen}\sqrt{x}/\sqrt{x}| \le 1$ y $|\cos\sqrt{x}| \le 1$, se puede escribir $|f''(x)| \le \frac{1}{4}x$. Por lo tanto, resulta que $|f''(x)| \le \frac{1}{2}$ en el intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$. Entonces, con $M = \frac{1}{2}$ y $b - a = \frac{1}{2}$, se desea

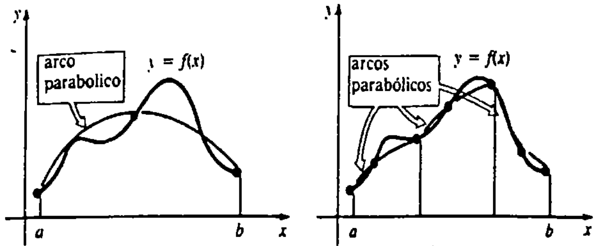
$$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3}{12n^2} < 0.001 \quad \text{o} \quad n^2 > \frac{125}{24} \approx 5.21.$$

Por consiguiente, para obtener la exactitud deseada es suficiente escoger $n = 3$ y $\Delta x = \frac{1}{6}$. En virtud de (5.37), con la ayuda de una calculadora para obtener la información de la tabla adjunta, encontramos que

$$\int_{1/2}^1 \cos\sqrt{x}\,dx \approx \frac{1}{12}\left[\cos\sqrt{\frac{1}{2}} + 2\cos\sqrt{\frac{2}{3}} + 2\cos\sqrt{\frac{5}{6}} + \cos 1\right]$$
$$\approx 0.3244.$$

k	x_k	$f(x_k)$
0	$\frac{1}{2}$	0.7602
1	$\frac{2}{3}$	0.6848
2	$\frac{5}{6}$	0.6115
3	1	0.5403

Aunque no es obvio a partir de una figura, se puede obtener un mejor método de aproximar una integral definida $\int_a^b f(x)dx$, considerando una serie de arcos parabólicos en lugar de una serie de cuerdas, como en la regla trapecial. Puede demostrarse que un



(a) un arco (b) tres arcos

Figura 5.24

arco parabólico que pase por *tres* puntos específicos, se "ajustará" a la gráfica de f mejor que una sola línea recta. Véase la Figura 5.24. Sumando las áreas bajo los arcos parabólicos, se obtiene una aproximación a la integral.

Para empezar, encontremos el área bajo un arco de una parábola que pase por los tres puntos $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, en donde $x_0 < x_1 < x_2$ y $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = h$. Como se muestra en la Figura 5.25, esto puede hacerse encontrando el área bajo la gráfica de $y = Ax^2 + Bx + C$ en el intervalo $[-h, h]$ de tal manera que P_0, P_1 y P_2 tengan coordenadas $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$ y (h, y_2), respectivamente. El intervalo $[-h, h]$ se escoge para simplificar; el área en cuestión no depende de la ubicación del eje y. Claramente,

$$\text{Área} = \int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\, dx$$

$$= \left(A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx\right)\Big]_{-h}^{h} \quad = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C). \tag{5.39}$$

Pero, como la gráfica debe pasar por $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$ y (h, y_2), se debe tener que

$$y_0 = Ah^2 - Bh + C \tag{5.40}$$

$$y_1 = C \tag{5.41}$$

$$y_2 = Ah^2 + Bh + C. \tag{5.42}$$

Sumando (5.40) y (5.42) y usando (5.41), se encuentra $2Ah^2 = y_0 + y_2 - 2y_1$. Así que, (5.39) puede expresarse como

$$\text{Área} = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2). \tag{5.43}$$

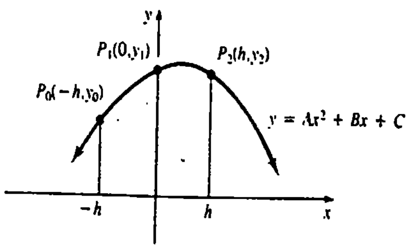


Figura 5.25

Regla de Simpson

Supóngase ahora que $y = f(x)$ es continua en $[a, b]$ y que el intervalo es partido en n subintervalos de anchura igual a $\Delta x = (b - a)/n$, en donde *n es un entero par.* Como se muestra en la Figura 5.26, en cada subintervalo $[x_{k-2}, x_k]$ de anchura $2\Delta x$, se aproxima la gráfica de f mediante un arco de una parábola que pase por los puntos P_{k-2}, P_{k-1} y P_k de la gráfica que corresponde a las fronteras y al punto medio del subintervalo. Si A_k denota el área bajo la parábola en $[x_{k-2}, x_k]$, resulta de (5.43) que

$$A_k = \frac{\Delta x}{3}[f(x_{k-2}) + 4f(x_{k-1}) + f(x_k)]$$

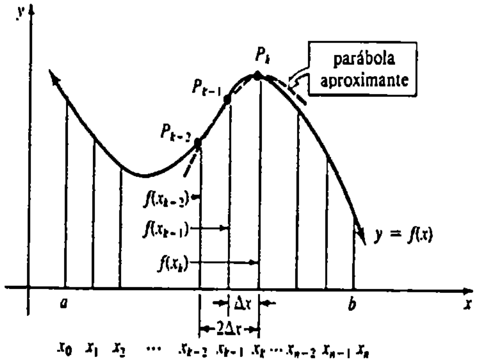


Figura 5.26

Así que, la regla de Simpson* consiste en sumar todas las A_k:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{\Delta x}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \frac{\Delta x}{3}[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)]$$

$$+ \cdots + \frac{\Delta x}{3}[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]. \tag{5.44}$$

Usando $\Delta x = (b - a)/n$, (5.44) se convierte en

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{3n}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots$$

$$+ 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)], \tag{5.45}$$

en donde $x_0 = a$, $x_n = b$ y $x_k = a + k\,\Delta x$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Se notará de nuevo que el entero n en (5.45) debe ser par, puesto que cada A_k representa área bajo un arco parabólico en un subintervalo de anchura $2\Delta x$.

Error en la regla de Simpson

Si $I = \int_a^b f(x)dx$, entonces, como antes, el error en el método es

$$E_n = |I - S_n|,$$

en donde S_n denota el segundo miembro de (5.45). El teorema siguiente establece una cota superior para E_n que emplea una cota superior de la cuarta derivada.

* Nombrada así en honor del matemático inglés Thomas Simpson (1710-1761).

TEOREMA 5.14

Si existe un número $M > 0$ tal que $|f^{(4)}(x)| \le M$ para todo x en $[a, b]$, entonces

$$E_n \le \frac{M(b-a)^5}{180n^4}. \qquad (5.46)$$

□

Ejemplo 4

Determinar un valor de n de manera que (5.45) dé una aproximación a $\int_1^2 dx/x$ que sea exacta hasta dos cifras decimales.

Solución Para $f(x) = 1/x$, $f^{(4)}(x) = 24/x^5$ y en $[1, 2]$, $f^{(4)}(x) \le f^{(4)}(1) = 24$. Entonces, con $M = 24$ resulta de (5.46) que

$$\frac{24(1)^6}{180n^4} < 0.005 \quad \text{o} \quad n^4 > \frac{80}{3} \approx 26.67$$

y entonces $n > 2.27$. Como n debe ser un entero par, es suficiente tomar $n \ge 4$.

Ejemplo 5

Aproximar $\int_1^2 dx/x$ con la regla de Simpson para $n = 4$.

Solución Cuando $n = 4$ se tiene que $\Delta x = \frac{1}{4}$. De (5.45) y la tabla adjunta se obtiene

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{12}\left[1 + 4\left(\frac{4}{5}\right) + 2\left(\frac{2}{3}\right) + 4\left(\frac{4}{7}\right) + \frac{1}{2}\right]$$

$$\approx 0.6933.$$

k	x_k	$f(x_k)$
0	1	1
1	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{5}$
2	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$
3	$\frac{7}{4}$	$\frac{4}{7}$
4	2	$\frac{1}{2}$

En el ejemplo precedente, téngase presente que aunque se emplea $n = 4$, la función $f(x) = 1/x$ está siendo aproximada sólo por dos arcos parabólicos. También, recuérdese, que la regla trapecial dio $\int_1^2 dx/x \approx 0.6949$ con $n = 6$ y que 0.6931 es un valor estimado de la integral correcto hasta cuatro cifras decimales.

Observaciones

(*i*) En ciertas circunstancias la regla trapecial dará el valor exacto de una integral $\int_a^b f(x)dx$. Es evidente que el lado derecho de (5.37) producirá el valor exacto siempre que f sea una función lineal. Véase el Problema 31.

(*ii*) En general, la regla de Simpson producirá una mayor exactitud que la regla trapecial. Así que, ¿por qué ocuparnos siquiera de esta última regla? En ciertos casos la regla del trapecio, que es un poco más sencilla, da una exactitud suficiente para el propósito considerado. Además, el requisito de que n debe ser un entero par en la regla de Simpson puede impedir sus aplicaciones a un problema determinado. Véase el Problema 16. También, para encontrar una cota del error en la regla de Simpson se debe calcular y luego encontrar una cota superior para la cuarta derivada. La expresión de $f^{(4)}(x)$ puede ser, desde luego, muy complicada. La cota del error en la regla trapecial depende de la segunda derivada.

(*iii*) Puesto que el análisis de esta sección está basado en el ajuste de funciones lineales y cuadráticas a la gráfica de una función dada f, el lector podría preguntar si el paso siguiente es tratar de ajustar la gráfica de f con arcos de funciones cúbicas, o incluso cuárticas. Efectivamente, se puede hacer. Una aproximación cúbica utilizaría cuatro puntos sobre tres intervalos de igual anchura Δx. Un arco cuártico utilizaría cinco puntos, y así sucesivamente. De esta manera, se genera una sucesión de fórmulas de aproximación conocidas como **fórmulas de Newton-Cotes**. Debido a su creciente complejidad, y a otros problemas inherentes, las fórmulas de Newton-Cotes de orden mayor que dos se usan rara vez.

(*iv*) Finalmente, es interesante notar que la regla de Simpson dará el valor exacto de $\int_a^b f(x)dx$ siempre que f sea una función polinomial, lineal, cuadrática o incluso cúbica. Véase el Problema 33.

Véanse programas BASIC para la Regla Trapecial y para la Regla de Simpson en la Pág. 1014 (No. 3 y No. 4).

Ejercicios 5.8

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 978.

En los Problemas 1 y 2 compare el valor exacto de la integral con la aproximación obtenida de la regla trapecial para el valor indicado de n.

1. $\int_1^3 (x^3 + 1)\,dx$; $n = 4$

2. $\int_0^2 \sqrt{x+1}\,dx$; $n = 6$

En los Problemas 3-10 utilice la regla del trapecio para obtener una aproximación a la integral dada para el valor indicado de n.

3. $\int_1^6 \frac{dx}{x}$; $n = 5$ 4. $\int_0^2 \frac{dx}{3x+1}$; $n = 4$

5. $\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx$; $n = 10$

6. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$; $n = 5$ 7. $\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{x+\pi}\,dx$; $n = 6$

8. $\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx$; $n = 3$ 9. $\int_0^2 \cos x^2\,dx$; $n = 6$

10. $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$; $n = 5$ (*Sugerencia:* Defina $f(0) = 1$.)

11. Determine el número de trapecios necesarios de modo que una aproximación a $\int_{-1}^2 dx/(x+3)$ sea exacta hasta dos cifras decimales.

12. Determine el número de trapecios necesarios de modo que el error en una aproximación a $\int_0^{1.5} \operatorname{sen}^2 x\,dx$ sea menor que 0.0001.

13. Utilice la regla trapecial de modo que una aproximación al área bajo la gráfica de $f(x) = 1/(1 + x^2)$ en $[0, 2]$ sea exacta hasta dos cifras decimales. (*Sugerencia:* Examine $f'''(x)$).

14. El dominio de $f(x) = 10^x$ es el conjunto de los números reales y $f(x) > 0$ para todo x. Use la regla trapecial para aproximar el área bajo la gráfica de f en $[-2, 2]$ con $n = 4$.

15. Use los datos de la Figura 5.27 y la regla del trapecio para encontrar una aproximación al área bajo la gráfica de la función continua f en el intervalo $[1, 4]$.

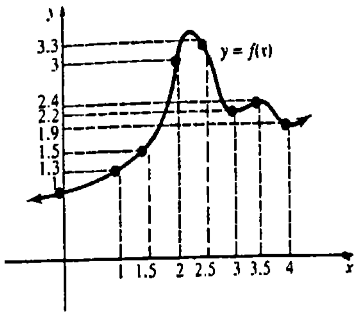
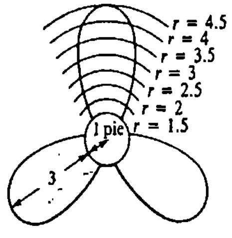


Figura 5.27

16. El llamado momento de inercia I de una hélice de barco de tres aspas, cuyas dimensiones se muestran en la Figura 5.28(a), está dado por

$$I = \frac{3\rho\pi}{2g} + \frac{3\rho}{g}\int_1^{4.5} r^2 A\,dr,$$

en donde ρ es la densidad del metal, g es la aceleración de la gravedad y A es el área de una sección transversal del propulsor a una distancia de r pies desde el centro del cubo. Si $\rho = 570$ lb/pie³ para el bronce, utilice los datos de la Figura 5.28(b) (tabla de abajo) y la regla trapecial para encontrar una aproximación a I.



(a)

r pie	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5
A (pie)	0.3	0.50	0.62	0.70	0.60	0.50	0.27	0

(b)

Figura 5.28

En los Problemas 17 y 18 compare el valor exacto de la integral con la aproximación obtenida a partir de la regla de Simpson para el valor indicado de n.

17. $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx;\ n = 4$

18. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\,dx;\ n = 2$

En los Problemas 19-26 emplee la regla de Simpson para obtener una aproximación a la integral dada para el valor indicado de n.

19. $\int_{1/2}^{5/2} \frac{dx}{x};\ n = 4$

20. $\int_0^5 \frac{dx}{x+2};\ n = 6$

21. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2};\ n = 4$

22. $\int_{-1}^1 \sqrt{x^2+1}\,dx;\ n = 2$

23. $\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x+\pi}\,dx;\ n = 6$

24. $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx;\ n = 4$

25. $\int_2^4 \sqrt{x^3+x}\,dx;\ n = 4$

26. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{2+\operatorname{sen} x};\ n = 2$

27. Usando la regla de Simpson, determine n de modo que el error al aproximar $\int_1^3 dx/x$ sea menor que 10^{-5}. Compare con el valor de n necesario en la regla trapecial para dar la misma exactitud.

28. Encuentre una cota superior para el error al aproximar $\int_0^3 dx/(2x+1)$ por la regla de Simpson con $n = 6$.

29. Use la regla de Simpson para encontrar una aproximación al área de paso bajo el arco mostrado en la Figura 5.29.

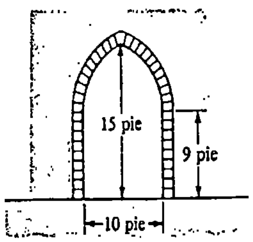


Figura 5.29

30. Use la regla de Simpson para lograr una aproximación al volumen del vehículo espacial cuyas áreas transversales, mostradas en la Figura 5.30, están espaciadas a intervalos de 4 m.

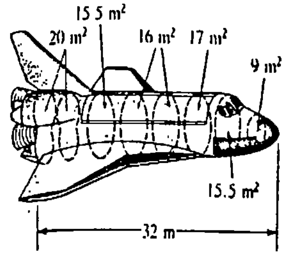


Figura 5.30

Problemas diversos

31. Demuestre que la regla trapecial da el valor exacto de

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

cuando $f(x) = c_1x + c_0$, y c_0 y c_1 son constantes. ¿Por qué esto es geométricamente razonable?

32. Verifique el resultado del Problema 31 comparando el valor exacto de

$$\int_0^4 (2x+5)\,dx$$

con los valores obtenidos de la regla trapecial con $n = 2$ y $n = 4$.

33. Demuestre que la regla de Simpson da el valor exacto de

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

en donde $f(x) = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$, con c_0, c_1, c_2 y c_3 constantes.

34. Verifique el resultado del Problema 33 comparando el valor exacto de

$$\int_{-1}^3 (x^3 - x^2)\,dx$$

con los valores obtenidos de la regla de Simpson con $n = 2$ y $n = 4$.

Examen • Capítulo 5

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 978.

En los Problemas 1-16 conteste verdadero o falso.

1. Si $f'(x) = 3x^2 + 2x$, entonces, necesariamente, $f(x) = x^3 + x^2$.

2. $\sum_{k=2}^{6}(2k-3) = \sum_{j=0}^{4}(2j+1)$. ____

3. $\sum_{k=1}^{40} 5 = \sum_{k=1}^{20} 10$. ____

4. $\int_1^3 \sqrt{t^2+7}\,dt = -\int_3^1 \sqrt{t^2+7}\,dt$. ____

5. $\int_0^1 t^2\,dt + \int_1^0 x^2\,dx = 0$. ____

6. Si f es integrable, entonces f es continua. ____

7. Una integral definida es siempre una área bajo una gráfica. ____

8. $\int \operatorname{sen} x\,dx = \cos x + C$. ____

9. Si P es una partición de $[a, b]$ con n subintervalos, entonces $n \to \infty$ implica $\|P\| \to 0$. ____

10. Si $\int_a^b f(x)dx > 0$, entonces $f(x) > 0$ para todo x en $[a, b]$. ____

11. La regla de Simpson generalmente da una mejor aproximación para una integral definida que la regla trapecial. ____

12. La regla del trapecio puede usarse solamente para integrales

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

para las cuales $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$. ____

13. Para usar la regla de Simpson, el intervalo $[a, b]$ debe dividirse en un número par de subintervalos. ____

14. La regla de Simpson da el valor exacto de

$$\int_0^5 (x^3 - 4x^2 + 8x + 10)\,dx$$

con $n = 100$. ____

15. Si $|f^{(4)}(x)| \leq M$ para todo x en $[a, b]$, entonces el error E_{2n} en la regla de Simpson es menor que $\frac{1}{16}$ de la cota del error para E_n. ____

16. Para aproximar

$$\int_{-1}^{2} f(x)\, dx$$

usando una partición regular para la cual $\Delta x = \frac{3}{10}$, la regla de Simpson utilizará cinco arcos parabólicos.

______

En los Problemas 17-26 llene los espacios en blanco.

17. Si G es una antiderivada de f, entonces $G'(x) =$ ______.

18. $\int \frac{d}{dx} x^2\, dx =$ ______.

19. El valor de $\frac{d}{dx} \int_3^x \sqrt{t^2 + 5}\, dt$ en $x = 1$ es______.

20. Usando la notación con sigma la suma $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \frac{4}{9} + \frac{5}{11}$ puede ser expresada como ______

21. El valor de $\sum_{k=1}^{15} 3k^2$ es ______.

22. Si $u = t^2 + 1$, entonces la integral definida

$$\int_2^4 t(t^2 + 1)^{1/3}\, dt \text{ se convierte en } \frac{1}{2} \int_{-}^{-} u^{1/3}\, du.$$

23. El área bajo la gráfica de $f(x) = 5x$ en el intervalo $[0, 10]$ es______.

24. Si el intervalo $[1, 6]$ se divide en cuatro subintervalos determinados por $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{5}{2}$, $x_3 = 5$ y $x_4 = 6$, la norma de la partición es______.

25. Una partición de un intervalo en la que los subintervalos son ______ se dice que es una partición regular.

26. Si P es una partición de $[0, 4]$ y x_k^* es un número en el k-ésimo subintervalo, entonces

$$\lim_{|P| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k^*}\, \Delta x_k$$

es la definición de la integral definida ______. Por el teorema fundamental del Cálculo, el valor de esta integral definida es ______.

En los Problemas 27-36 evalúe la integral dada.

27. $\int_{-1}^{1} (4x^3 - 6x^2 + 2x - 1)\, dx$

28. $\int_1^9 \frac{6}{\sqrt{x}}\, dx$

29. $\int (5t + 1)^{100}\, dt$

30. $\int \frac{w}{\sqrt{3w^2 - 1}}\, dw$

31. $\int_0^{\pi/4} (\operatorname{sen} 2x - 5 \cos 4x)\, dx$

32. $\int_{\pi^2/9}^{\pi^2} \frac{\operatorname{sen} \sqrt{z}}{\sqrt{z}}\, dz$

33. $\int_4^4 (-2x^2 + x^{1/2})\, dx$

34. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} dx + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^2 x\, dx$

35. $\int \cot^6 8x \csc^2 8x\, dx$

36. $\int \csc 3x \cot 3x\, dx$

37. Una cubeta con las dimensiones (en pies) mostradas en la Figura 5.31, se llena a razón constante de $dV/dt = \frac{1}{4}$ pie³/min. En $t = 0$ la báscula marca 31.2 lb. Si el agua pesa 62.4 lb/pie³, ¿cuánto marca la báscula al cabo de 8 min? ¿Cuándo se llenará la cubeta? (*Sugerencia:* Véase la página 193 para la fórmula del volumen de un cono truncado.).

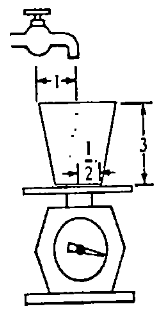


Figura 5.31

38. Evaluar:

(a) $\int_0^1 \frac{d}{dt} \left[\frac{10t^4}{(2t^3 + 6t + 1)^2} \right] dt$

(b) $\int_{\pi/2}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^{10} t}{16t^7 + 1}\, dt$

39. Supóngase que se usa la regla trapecial para aproximar la integral

$$\int_0^2 x^2\, dx$$

con $n = 4$. ¿Cuál es el error en el método?

40. Supóngase que se desea aproximar

$$\int_{1/2}^{3} dx/x$$

con una exactitud de tres cifras decimales. Compare el valor de n que se necesita para la regla trapecial con el que se necesita para la regla de Simpson.

En los Problemas 41 y 42 use (a) la regla del trapecio, y (b) la regla de Simpson, para obtener una aproximación a la integral dada para el valor indicado de n.

41. $\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\, dx$, $n = 4$

42. $\int_1^7 x^2 \sqrt{2x - 1}\, dx$, $n = 6$

Aplicaciones de la integral

Aunque en la Sección 6.1 se vuelve al problema de determinar áreas mediante el uso de la integral definida, el lector verá en las secciones subsecuentes de este capítulo que las integrales, tanto definidas como indefinidas, tienen muchas interpretaciones además de la de área.

6.1 Área, y área entre dos gráficas

Si f es una función continua no negativa en $[a, b]$, entonces, como ya se ha visto, el área bajo la gráfica de f en el intervalo es

$$A = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Supóngase ahora que $f(x) \le 0$ para todo x en $[a, b]$ como se muestra en la Figura 6.1(a). Como $-f(x) \ge 0$ se define que el área limitada por la gráfica de $y = f(x)$ y el eje x, desde $x = a$ hasta $x = b$, es el área A bajo la gráfica de $y = -f(x)$ en $[a, b]$. El área A se muestra en la Figura 6.1(b). Escrita como una integral definida, se tiene que

$$A = \int_a^b -f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx.$$

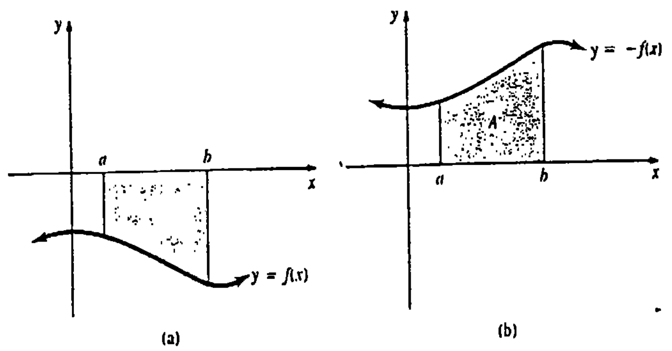


Figura 6.1

Como $-f(x) = |f(x)|$ en $[a, b]$, esto sugiere la definición siguiente.

DEFINICIÓN 6.1

Si $y = f(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces el área A limitada por su gráfica en el intervalo y el eje x está dada por

$$A = \int_a^b |f(x)|\, dx. \tag{6.1}$$

□

Ejemplo 1

Obtener el área limitada por la gráfica de $y = x^3$ y el eje x en $[-2, 1]$.

Solución De (6.1) se tiene que

$$A = \int_{-2}^1 |x^3|\, dx.$$

En la Figura 6.2 se han comparado la gráfica de $y = x^3$ con la gráfica de $y = |x^3|$. Como $x^3 < 0$ para $x < 0$, se tiene que

$$|f(x)| = \begin{cases} -x^3, & -2 \le x < 0 \\ x^3, & 0 \le x < 1. \end{cases}$$

Así, por la Definición 6.1 y el Teorema 5.7(*iii*),

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^1 |x^3|\, dx = \int_{-2}^0 -x^3\, dx + \int_0^1 x^3\, dx \\ &= -\frac{x^4}{4}\Big]_{-2}^0 + \frac{x^4}{4}\Big]_0^1 \\ &= 0 - \left(-\frac{16}{4}\right) + \frac{1}{4} - 0 = \frac{17}{4} \text{ unidades cuadradas.} \end{aligned}$$

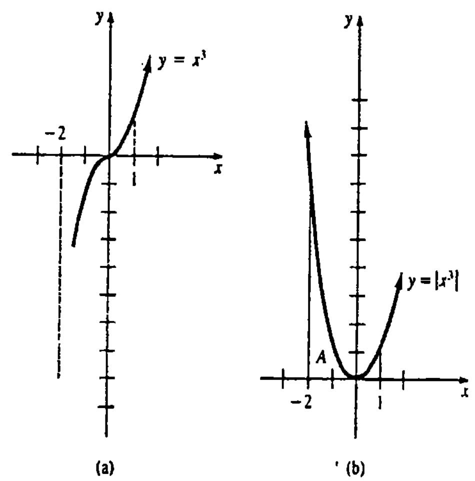


Figura 6.2

Ejemplo 2

Obtener el área limitada por la gráfica de $y = x^2 + 2x$ y el eje x en $[-2, 2]$.

Solución Las gráficas de $y = f(x)$ y $y = |f(x)|$ en el intervalo $[-2, 2]$ están dadas en la Figura 6.3. Ahora bien,

$$|f(x)| = \begin{cases} -(x^2 + 2x), & -2 \le x < 0 \\ x^2 + 2x, & 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$A = \int_{-2}^2 |f(x)|\, dx = \int_{-2}^0 -(x^2 + 2x)\, dx + \int_0^2 (x^2 + 2x)\, dx$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big]_{-2}^{0} + \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right)\Big]_{0}^{2}$$

$$= 0 - \left(\frac{8}{3} - 4\right) + \left(\frac{8}{3} + 4\right) - 0 = 8 \text{ unidades cuadradas.}$$

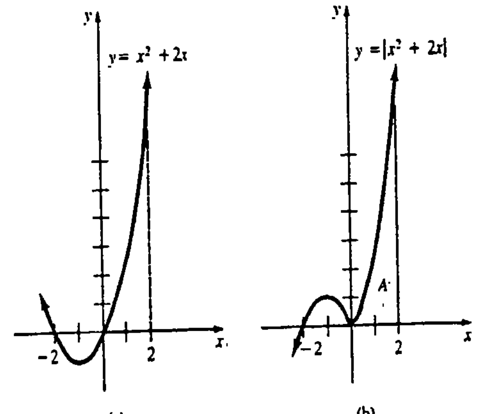


Figura 6.3

Ejemplo 3

Evaluar el área limitada por la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ y el eje x en $[0, 2\pi]$.

Solución De (6.1),

$$A = \int_0^{2\pi} |\operatorname{sen} x|\, dx.$$

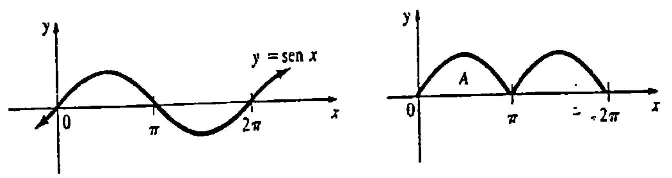


Figura 6.4

Como se indica en la Figura 6.4(a), $\operatorname{sen} x < 0$ en el intervalo $(\pi, 2\pi)$, así que

$$|f(x)| = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & 0 \le x \le \pi \\ -\operatorname{sen} x, & \pi < x \le 2\pi. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$A = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\operatorname{sen} x)\, dx$$
$$= -\cos x\Big]_0^{\pi} + \cos x\Big]_{\pi}^{2\pi}$$
$$= -\cos \pi + \cos 0 + (\cos 2\pi - \cos \pi)$$
$$= -(-1) + 1 + (1 - (-1)) = 4 \text{ unidades cuadradas.}$$

Observando la simetría de la gráfica en la Figura 6.4(b), el área requerida en el Ejemplo 3 también puede obtenerse de $2\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx$.

Área comprendida entre dos gráficas

Lo expuesto anteriormente es un caso especial del problema más general de determinar el área de una región comprendida *entre* dos gráficas. El área *bajo* la gráfica de una función no negativa continua $y = f(x)$ en $[a, b]$, es el área de la región comprendida entre su propia gráfica y la de la función $y = 0$ (el eje x), de $x = a$ a $x = b$.

Supóngase que $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son continuas en $[a, b]$ y que $f(x) \ge g(x)$ para todo x en el intervalo. Véase la Figura 6.5. Sea P una partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$. Si se elige un x_k^* en cada subintervalo, se pueden determinar n rectángulos correspondientes cuya área está dada por

$$\Delta A_k = [f(x_k^*) - g(x_k^*)]\, \Delta x_k.$$

El área de la región entre las dos gráficas es aproximadamente

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k^*) - g(x_k^*)]\, \Delta x_k,$$

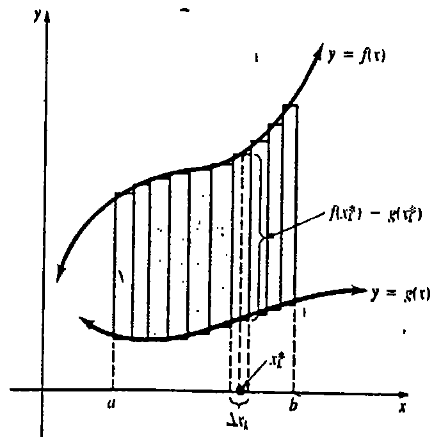


Figura 6.5

y esto a su vez indica que el área exacta es

$$A = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(x_k^*) - g(x_k^*)]\, \Delta x_k.$$

Puesto que f y g son continuas, $f - g$ también lo es. Por consiguiente, el límite anterior existe, y es, por definición, la integral definida

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx. \tag{6.2}$$

En general, se tiene la definición siguiente.

DEFINICIÓN 6.2

Sean f y g funciones continuas en un intervalo $[a, b]$. Entonces el área A de la región comprendida entre sus gráficas en el intervalo está dada por

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx. \tag{6.3}$$

□

Obsérvese que (6.3) se reduce a (6.1) cuando $g(x) = 0$, para todo x en $[a, b]$. También, si $f(x) \geq g(x)$, de tal modo que $f(x) - g(x) \geq 0$ en el intervalo, entonces (6.3) es lo mismo que (6.2). Sin embargo, se recomienda *no memorizar* una fórmula como la (6.3), pero sí trazar las gráficas necesarias. Si las curvas se cortan en el intervalo, entonces la posición relativa de las curvas puede cambiar. En todo caso, en cualquier subintervalo de $[a, b]$ el integrando apropiado es siempre la

(*ordenada de la gráfica superior*) − (*ordenada de la gráfica inferior*).

Ejemplo 4

Obtener el área de la región limitada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$.

Solución Como se muestra en la Figura 6.6, el área en cuestión se localiza en el primer cuadrante, y las gráficas se cortan o intersecan en los puntos (0, 0) y (1, 1); (esto es, 0 y 1 son las soluciones de $x^2 = \sqrt{x}$). Como $y = \sqrt{x}$ es la gráfica superior en el intervalo (0, 1), resulta de (6.3) que

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx = \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_0^1$$
$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3} \text{ unidades cuadradas.}$$

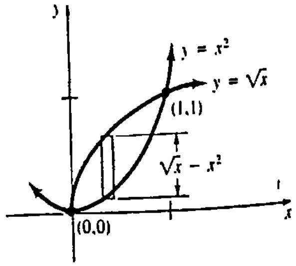


Figura 6.6

Ejemplo 5

Determinar el área de la región limitada por las gráficas de $y = x^2 + 2x$ y $y = -x + 4$ en $[-4, 2]$.

Solución Denótense las funciones dadas por

$$y_1 = x^2 + 2x$$
$$y_2 = -x + 4.$$

Se verifica fácilmente que las gráficas se intersecan en los puntos $(-4, 8)$ y $(1, 3)$. Además, una inspección a la Figura 6.7 muestra que en el intervalo $(-4, 1)$, $y_2 = -x + 4$ es la gráfica superior, mientras que en el intervalo $(1, 2)$, $y_1 = x^2 + 2x$ es la gráfica superior. Por consiguiente, el área total es la suma de

$$A_1 = \int_{-4}^{1} (y_2 - y_1)\, dx \quad \text{y} \quad A_2 = \int_1^2 (y_1 - y_2)\, dx.$$

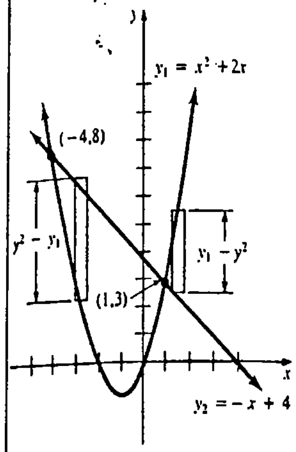


Figura 6.7

Así que,

$$A = A_1 + A_2$$
$$= \int_{-4}^{1} (y_2 - y_1)\, dx + \int_1^2 (y_1 - y_2)\, dx$$
$$= \int_{-4}^{1} [(-x + 4) - (x^2 + 2x)]\, dx + \int_1^2 [(x^2 + 2x) - (-x + 4)]\, dx$$
$$= \int_{-4}^{1} (-x^2 - 3x + 4)\, dx + \int_1^2 (x^2 + 3x - 4)\, dx$$
$$= \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 4x\right)\Bigg]_{-4}^{1} + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - 4x\right)\Bigg]_1^2$$
$$= \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4\right) - \left(\frac{64}{3} - 24 - 16\right) + \left(\frac{8}{3} + 6 - 8\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 4\right)$$
$$= \frac{71}{3} \text{ unidades cuadradas.}$$

Ejemplo 6

Obtener el área de la región limitada por las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ en $[\pi/4, 5\pi/4]$.

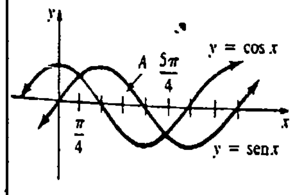


Figura 6.8

Solución De la Figura 6.8 puede verse que $y = \operatorname{sen} x$ es la gráfica superior en todo el intervalo. Por lo tanto,

$$A = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\operatorname{sen} x - \cos x)\, dx$$
$$= (-\cos x - \operatorname{sen} x)\Big]_{\pi/4}^{5\pi/4}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= 2\sqrt{2} \approx 2.83 \text{ unidades cuadradas.}$$

A veces no es conveniente integrar con respecto a la variable x para evaluar el área limitada por dos gráficas.

Ejemplo 7

Calcular el área de la región limitada por las gráficas de $y^2 = 1 - x$ y $2y = x + 2$.

Solución Advertimos que la ecuación $y^2 = 1 - x$ es equivalente a dos funciones, $y_2 = \sqrt{1-x}$ y $y_1 = -\sqrt{1-x}$ para $x \leq 1$. Definiendo $y_3 = \frac{1}{2}x + 1$, puede verse de la Figura 6.9 que la altura de un elemento de área en el intervalo $(-8, 0)$ es $y_3 - y_1$, mientras que la altura de un elemento en el intervalo $(0, 1)$ es $y_2 - y_1$. Así que, integrando con respecto a x, el área es la suma de

$$A_1 = \int_{-8}^{0} (y_3 - y_1)\, dx \quad \text{y} \quad A_2 = \int_{0}^{1} (y_2 - y_1)\, dx;$$

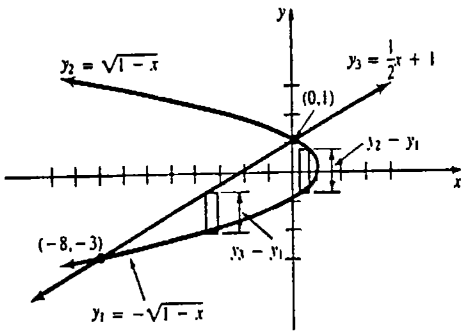


Figura 6.9

esto es,

$$A = \int_{-8}^{0}\left[\left(\frac{1}{2}x + 1\right) - (-\sqrt{1-x})\right] dx + \int_{0}^{1} [\sqrt{1-x} - (-\sqrt{1-x})]\, dx$$
$$= \int_{-8}^{0}\left(\frac{1}{2}x + 1 + \sqrt{1-x}\right) dx + 2\int_{0}^{1} \sqrt{1-x}\, dx$$
$$= \left(\frac{1}{4}x^2 + x - \frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right)\Big]_{-8}^{0} - \frac{4}{3}(1-x)^{3/2}\Big]_{0}^{1}$$
$$= -\frac{2}{3}\cdot 1^{3/2} - \left(16 - 8 - \frac{2}{3}\cdot 9^{3/2}\right) - \frac{4}{3}\cdot 0 + \frac{4}{3}\cdot 1^{3/2}$$
$$= \frac{32}{3} \text{ unidades cuadradas.}$$

Ejemplo 8

Solución alternativa al Ejemplo 7 Para evaluar el área en el Ejemplo 7, se evita la necesidad de usar dos integrales estableciendo rectángulos horizontales y empleando a y como la variable independiente. Si se definen $x_2 = 1 - y^2$ y $x_1 = 2y - 2$, entonces, como se muestra en la Figura 6.10, el área de un elemento horizontal es

$$\Delta A_k = [(\text{abscisa de la gráfica de la derecha}) - (\text{abscisa de la gráfica de la izquierda})] \cdot (\text{anchura}).$$

Esto es,

$$\Delta A_k = [x_2^* - x_1^*]\, \Delta y_k,$$

en donde

$$x_2^* = 1 - (y_k^*)^2, \quad x_1^* = 2y_k^* - 2, \quad \text{y} \quad \Delta y_k = y_k - y_{k-1}.$$

Sumando los rectángulos en la dirección y positiva resulta que

$$A = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} [x_2^*(y) - x_1^*(y)]\, \Delta y_k,$$

En donde $\|P\|$ es la norma de una partición P del intervalo $-3 \leq y \leq 1$. En otras palabras,

$$A = \int_{-3}^{1} (x_2 - x_1)\, dy,$$

en donde el límite inferior -3, y el límite superior 1, son las ordenadas de los puntos de intersección $(-8, -3)$ y $(0, 1)$, respectivamente. Sustituyendo los valores indicados de x_2 y x_1 se obtiene

$$A = \int_{-3}^{1} [(1 - y^2) - (2y - 2)]\, dy = \int_{-3}^{1} (-y^2 - 2y + 3)\, dy$$
$$= \left(-\frac{y^3}{3} - y^2 + 3y\right)\Big]_{-3}^{1} \quad = \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3\right) - \left(\frac{27}{3} - 9 - 9\right)$$
$$= \frac{32}{3} \text{ unidades cuadradas.}$$

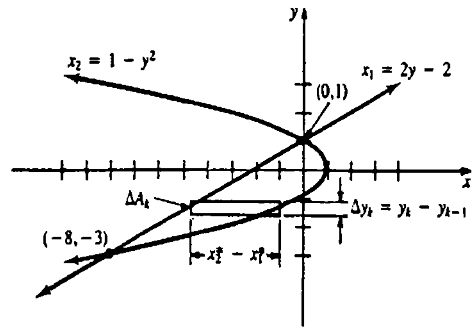


Figura 6.10

Ejercicios 6.1

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página A-978

En los Problemas 1-20 determine el área limitada por la gráfica de la función dada y el eje x en el intervalo indicado.

1. $y = x^2 - 1$; $[-1, 1]$
2. $y = x^2 - 1$; $[0, 2]$
3. $y = x^3$; $[-3, 0]$
4. $y = 1 - x^3$; $[0, 2]$
5. $y = x^2 - 3x$; $[0, 3]$
6. $y = -(x+1)^2$; $[-1, 0]$
7. $y = x^3 - 6x$; $[-1, 1]$
8. $y = x^3 - 3x^2 + 2$; $[0, 2]$
9. $y = (x-1)(x-2)(x-3)$; $[0, 3]$
10. $y = x(x+1)(x-1)$; $[-1, 1]$
11. $y = \dfrac{x^2-1}{x^2}$; $[1/2, 3]$
12. $y = \dfrac{x^2-1}{x^2}$; $[1, 2]$
13. $y = \sqrt{x} - 1$; $[0, 4]$
14. $y = 2 - \sqrt{x}$; $[0, 9]$
15. $y = \sqrt[3]{x}$; $[-2, 3]$
16. $y = 2 - \sqrt[3]{x}$; $[-1, 8]$
17. $y = \operatorname{sen} x$; $[-\pi, \pi]$
18. $y = 1 + \cos x$; $[0, 3\pi]$
19. $y = -1 + \operatorname{sen} x$; $[-3\pi/2, \pi/2]$
20. $y = \sec^2 x$; $[0, \pi/3]$

En los Problemas 21-48 halle el área de la región limitada por las gráficas de las funciones dadas.

21. $y = x$, $y = -2x$, $x = 3$
22. $y = x$, $y = 4x$, $x = 2$
23. $y = x^2$, $y = 4$
24. $y = x^2$, $y = x$
25. $y = x^3$, $y = 8$, $x = -1$
26. $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$, primer cuadrante
27. $y = 4(1 - x^2)$, $y = 1 - x^2$
28. $y = 2(1 - x^2)$, $y = x^2 - 1$
29. $y = x$, $y = 1/x^2$, $x = 3$
30. $y = x^2$, $y = 1/x^2$, $y = 9$, primer cuadrante
31. $y = -x^2 + 6$, $y = x^2 + 4x$
32. $y = x^2$, $y = -x^2 + 3x$
33. $y = x^{2/3}$, $y = 4$
34. $y = 1 - x^{2/3}$, $y = x^{2/3} - 1$
35. $y = x^2 - 2x - 3$, $y = 2x + 2$, en $[-1, 6]$
36. $y = -x^2 + 4x$, $y = \frac{3}{2}x$
37. $x = 3y^2$, $x = 6$
38. $x = y^2$, $x = 0$, $y = 1$
39. $x = -y$, $x = 2 - y^2$
40. $x = y^2$, $x = 6 - y^2$
41. $x = y^2 + 2y + 2$, $x = -y^2 - 2y + 2$
42. $x = y^2 - 6y + 1$, $x = -y^2 + 2y + 1$
43. $y = x^3 - x$, $y = x + 4$, $x = -1$, $x = 1$
44. $x = y^3 - y$, $x = 0$
45. $y = \cos x$, $y = \operatorname{sen} x$, $x = 0$, $x = \pi/2$
46. $y = 2 \operatorname{sen} x$, $y = -x$, $x = \pi/2$
47. $y = 4 \operatorname{sen} x$, $y = 2$, en $[\pi/6, 5\pi/6]$
48. $y = 2\cos x$, $y = -\cos x$, en $[-\pi/2, \pi/2]$

Problemas diversos

49. Considere la región limitada por las gráficas de $y^2 = -x - 2$, $y = 2$, $y = -2$ y $y = 2(x-1)$. Determine el área de la región integrando con respecto a x.

50. Calcule el área de la región dada en el Problema 49, integrando con respecto a y.

51. Obtenga el área del triángulo con vértices en $(1, 1)$, $(2, 4)$ y $(3, 2)$.

52. Establezca una integral definida que represente el área del círculo correspondiente a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$. No intente evaluarla.

53. El área de un círculo de radio a es πa^2. Utilice esta información para evaluar las siguientes integrales definidas

(a) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

54. Dado que una función f sea continua en un intervalo $[a, b]$, puede demostrarse que existe un número c en el intervalo abierto (a, b) para el cual el número $f(c)(b-a)$ es igual a $\int_a^b f(x)dx$. Interprete este resultado geométricamente en términos del área bajo la gráfica de f en el intervalo.

55. Sea f una función integrable en $[-a, a]$. Demuestre la regla de la función par: $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$. Interprete geométricamente.

56. Sea f una función integrable impar en $[-a, a]$. Demuestre la regla de la función impar: $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$. Interprete geométricamente.

En los Problemas 57-60 utilice los Problemas 55 y 56 para evaluar la integral definida dada.

57. $\displaystyle\int_{-2}^2 |x|\,dx$
58. $\displaystyle\int_{-1}^1 x^5\sqrt{x^2+1}\,dx$
59. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t\cos t\,dt$
60. $\displaystyle\int_{-1}^1 (x^2 + 2|x| + 1)\,dx$

61. Un trapecio está limitado por las gráficas de $f(x) = Ax + B$, $x = a$, $x = b$ y $x = 0$. Demuestre que el área de dicho trapecio es $\dfrac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$.

6.2 Determinación de volúmenes por elementos de sección

En esta sección y en las dos siguientes se demostrará cómo puede utilizarse la integral definida para evaluar los volúmenes de ciertos sólidos.

Volumen de un sólido: método de los elementos de sección

Supóngase que V es el volumen del sólido mostrado en la Figura 6.11, limitado por planos perpendiculares al eje x en $x = a$ y en $x = b$. Supóngase, además, que se conoce una función continua $A(x)$ que da el área de la sección transversal, **elemento de sección**, que se obtiene rebanando o cortando el sólido con un plano perpendicular al eje x. Por ejemplo, para $a < x_1 < x_2 < b$ las áreas de los elementos de sección mostrados en la Figura 6.11 son $A(x_1)$ y $A(x_2)$.

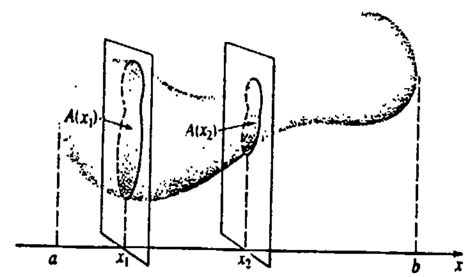


Figura 6.11

Ahora, sea P la partición

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

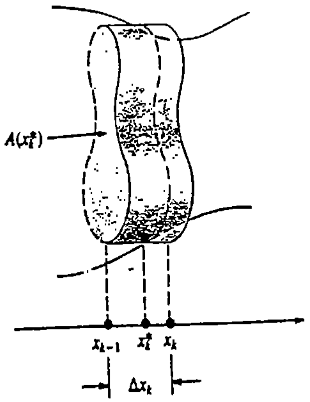


Figura 6.12

y x_k^* cualquier número en $[x_{k-1}, x_k]$. Entonces una aproximación al volumen del sólido en este subintervalo es el volumen del elemento cilíndrico recto que se muestra ampliado en la Figura 6.12. Como el volumen de un *cilindro recto* es

$$\Delta V_k = (\text{área de la base}) \cdot (\text{altura}) = A(x_k^*)(x_k - x_{k-1}) = A(x_k^*)\,\Delta x_k,$$

resulta que una aproximación al volumen del sólido en $[a, b]$ es

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} A(x_k^*)\,\Delta x_k.$$

De este modo, concluimos que el volumen exacto es

$$V = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} A(x_k^*)\,\Delta x_k,$$

lo cual es la definición de la integral definida

$$V = \int_a^b A(x)\,dx.$$

Hemos expresado así el resultado formal.

DEFINICIÓN 6.3

Sea V el volumen de un sólido limitado por planos que son perpendiculares al eje x en $x = a$ y $x = b$. Si $A(x)$ es una función continua, que da el área de una sección transversal del sólido determinada por un plano perpendicular al eje x en cualquier punto x en $[a, b]$, entonces el volumen del sólido es

$$V = \int_a^b A(x)\,dx. \qquad \square$$

Ejemplo 1

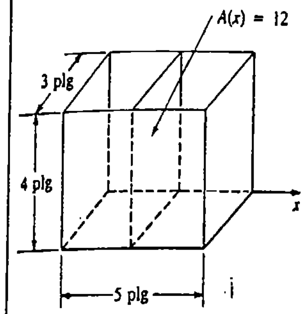


Figura 6.13

Considérese el ejemplo muy sencillo de evaluar el volumen de la caja rectangular que se muestra en la Figura 6.13. El área de la sección transversal es la función constante

$$A(x) = 12 \text{ plg}^2.$$

Aunque se sabe que el volumen es $V = 3 \times 4 \times 5 = 60$ plg^3, de la Definición 6.3 también resulta que

$$V = \int_0^5 12\,dx = 12x\Big]_0^5$$

$$= 12[5 - 0] = 60 \text{ plg}^3.$$

Ejemplo 2

Evaluar el volumen V del cono circular recto que se muestra en la Figura 6.14(a).

Solución El área de una sección transversal, obtenida mediante una sección a x unidades de la base del cono, es πR^2. El examen de la Figura 6.14(b) muestra que R está relacionado con x por triángulos semejantes. Así,

$$\frac{h}{r} = \frac{h - x}{R}$$

de modo que

$$R = \frac{r}{h}(h - x).$$

Por lo tanto,

$$A(x) = \pi R^2 = \pi \frac{r^2}{h^2}(h - x)^2.$$

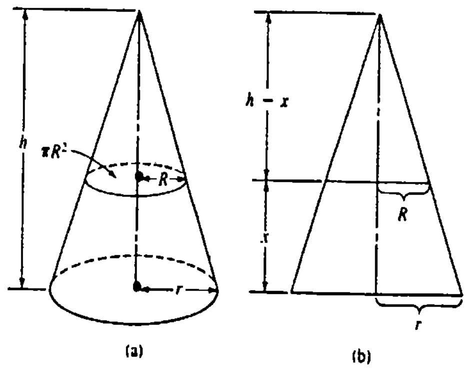


Figura 6.14

Por la Definición 6.3, el volumen del cono

$$V = \int_0^h \pi \frac{r^2}{h^2}(h-x)^2\,dx = -\pi\frac{r^2}{h^2}\int_0^h (h-x)^2(-dx)$$
$$= -\pi\frac{r^2}{h^2}\left[\frac{(h-x)^3}{3}\right]_0^h = -\pi\frac{r^2}{h^2}\left[0 - \frac{h^3}{3}\right]$$
$$= \frac{\pi}{3}r^2h.$$

Ejercicios 6.2

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 978.

1. Un poste de energía eléctrica de 75 pie de altura tiene una sección transversal en forma de triángulo equilátero. Dado que la longitud de un lado sea $(75-x)/10$, en donde x es la distancia en pies desde el suelo, obtenga el volumen del poste.

2. La sección transversal de una pirámide es un cuadrado de x pie de lado, ubicado a x pie de su vértice. Dado que la pirámide tenga 100 pie de altura, halle su volumen.

3. Un sólido tiene una sección transversal cuadrada perpendicular a su base. Dado que la base sea un círculo de radio $r = 4$ pie, obtener el volumen del sólido.

4. Las secciones transversales perpendiculares a la base de un sólido son triángulos equiláteros. Dado que la base sea un círculo de radio $r = 4$ pie, halle el volumen del sólido.

5. La base de un sólido está limitada por las curvas $x = y^2$ y $x = 4$ en el plano xy. Las secciones transversales perpendiculares al eje x son rectángulos para los que la altura es 4 tantos de la base. Determine el volumen del sólido.

6. La base de un sólido está limitada por la curva $y = 4 - x^2$ y el eje x. Las secciones transversales perpendiculares al eje x son triángulos equiláteros. Encuentre el volumen del sólido.

7. La base de un sólido es un triángulo isósceles cuya base es 4 pie, y la altura, 5 pie. Las secciones transversales perpendiculares a la altura son semicírculos. Encuentre el volumen del sólido.

8. Los ejes de dos cilindros circulares rectos, que tienen cada uno un radio $r = 3$ pie, se intersecan en ángulos rectos. Halle el valor del volumen resultante.

9. La base de un sólido es un triángulo rectángulo isósceles formado por los ejes de coordenadas y la recta $x + y = 3$. Las secciones transversales perpendiculares al eje y son cuadradas. Obtenga el volumen del sólido.

10. Un agujero de un pie de radio se forma por el centro de una esfera maciza de radio $r = 2$ pie. Evalúe el volumen del sólido restante.

6.3 Sólidos de revolución: métodos de los discos y de las arandelas (o rodajas)

Si una región R en el plano xy se hace girar en torno a un eje L, generará un sólido llamado **sólido de revolución**. Véase la Figura 6.15. Como se demostró en la sección precedente, puede determinarse el volumen V de un sólido por medio de una integral definida, siempre que se conozca la función $A(x)$ que da el área de la sección transversal formada al pasar un plano a través del sólido perpendicularmente a un eje. Cuando se evalúa el volumen de un sólido de revolución, siempre es posible encontrar $A(x)$; el eje en cuestión

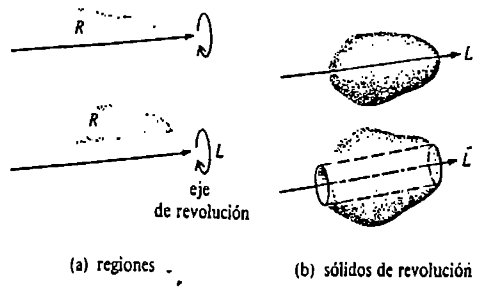


Figura 6.15

es el eje de revolución. Los dos métodos considerados en esta sección son sólo casos especiales de la Definición 6.3.

Método de los discos

Sea R la región limitada por la gráfica de una función continua no negativa $y = f(x)$, el eje x, y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, como se muestra en la Figura 6.16. Se evalúa el volumen V del sólido de revolución resultante al hacer girar esa región en torno al eje x.

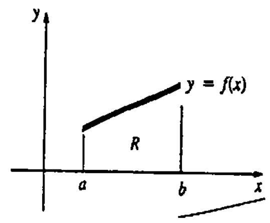


Figura 6.16

Sea P una partición de $[a, b]$, y sea x_k^* un número cualquiera en el k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Cuando el elemento rectangular de anchura $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ y altura $f(x_k^*)$ se hace girar en torno al eje x, se genera un disco, como se muestra en la Figura 6.17(b).

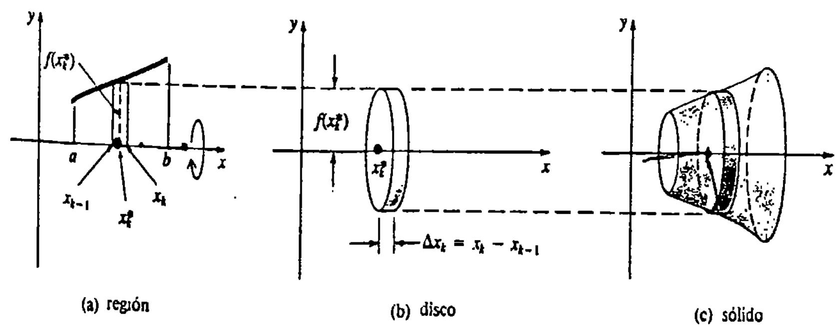


Figura 6.17

Ahora bien, el volumen de un elemento cilíndrico circular recto, o disco, de radio r y altura h es

$$(\text{área de la base}) \cdot (\text{altura}) = \pi r^2 h.$$

De modo que, si se hace la identificación $r = f(x_k^*)$, $h = \Delta x_k$, el volumen de un disco representativo es

$$\Delta V_k = \pi[f(x_k^*)]^2 \, \Delta x_k.$$

Puesto que una partición con n subintervalos produce n discos de este tipo, la suma

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} \pi[f(x_k^*)]^2 \, \Delta x_k$$

representa una aproximación al volumen del sólido que se muestra en la Figura 6.17(c). Esto indica que el volumen exacto es

$$V = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \pi[f(x_k^*)]^2 \, \Delta x_k.$$

o bien

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx. \tag{6.4}$$

Obsérvese que (6.4) es un caso especial de la Definición 6.3, con $A(x) = \pi[f(x)]^2$.

Si una región R se hace girar alrededor de algún otro eje, entonces puede ser que (6.4) simplemente no sea aplicable al problema de evaluar el volumen del sólido resultante. Más bien que aplicar una fórmula a ciegas, se debe plantear una integral apropiada, analizando cuidadosamente la configuración geométrica en cada problema.

Ejemplo 1

Obtener el volumen V del sólido formado haciendo girar la región limitada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ y $x = 4$ en torno al eje x.

Solución La Figura 6.18(a) muestra la región en cuestión. Ahora bien, el volumen del disco que se muestra en la Figura 6.18(b) es

$$\begin{aligned} \Delta V_k &= (\text{área de la base}) \cdot (\text{altura}) \\ &= \pi[f(x_k^*)]^2 \, \Delta x_k \\ &= \pi[(x_k^*)^{1/2}]^2 \, \Delta x_k \\ &= \pi x_k^* \, \Delta x_k. \end{aligned}$$

Entonces, el volumen apropiado es

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} \pi x_k^* \, \Delta x_k.$$

Tomando el límite de la última suma cuando $\|P\| \to 0$ se obtiene

$$V = \pi \int_0^4 x \, dx = \pi \frac{x^2}{2}\Big]_0^4 = 8\pi \text{ unidades cúbicas.}$$

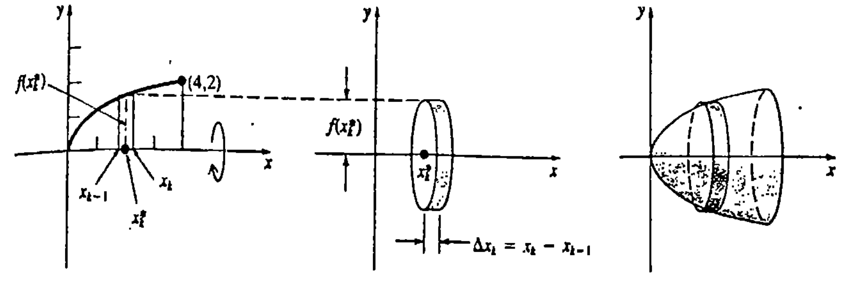


Figura 6.18

Método de las arandelas o rodajas

Supóngase que la región R, limitada por las gráficas de las funciones continuas $y = f(x)$, $y = g(x)$, y las rectas $x = a$ y $x = b$, como se muestra en la Figura 6.19(a), se hace girar en torno al eje x. Entonces el elemento rectangular comprendido entre las dos gráficas en $[x_{k-1}, x_k]$ generará una **rodaja** o **arandela**, como se muestra en la Figura 6.19(b). El volumen de la rodaja es

$$\begin{aligned} \Delta V_k &= (\text{volumen del disco}) - (\text{volumen del agujero}) \\ &= \pi[f(x_k^*)]^2 \, \Delta x_k - \pi[g(x_k^*)]^2 \, \Delta x_k \\ &= \pi([f(x_k^*)]^2 - [g(x_k^*)]^2) \, \Delta x_k. \end{aligned}$$

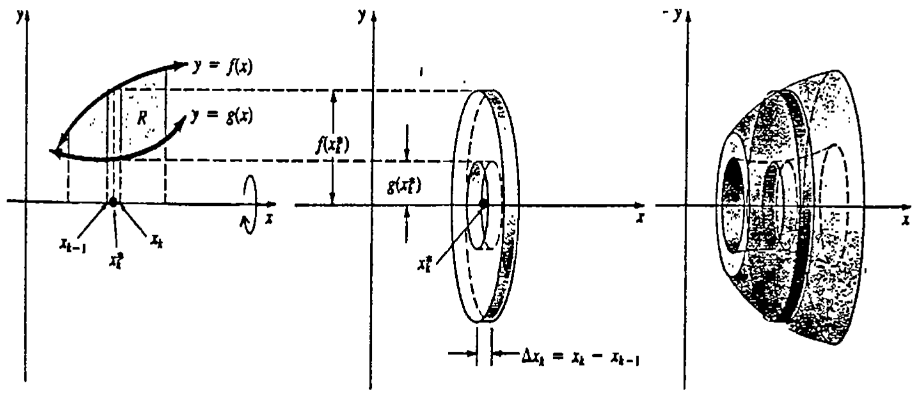


Figura 6.19

Una aproximación al volumen es

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} \pi([f(x_k^*)]^2 - [g(x_k^*)]^2) \, \Delta x_k.$$

Esto sugiere que cuando $\|P\| \to 0$ el volumen exacto del sólido está dado por

$$V = \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - g(x)]^2)\,dx. \qquad (6.5)$$

La fórmula 6.5 es un caso especial de la Definición 6.3, con $A(x) = \pi([f(x)]^2 - [g(x)]^2)$. Además, (6.5) se reduce a (6.4) cuando $g(x) = 0$.

Ejemplo 2

Obtener el volumen V del sólido formado haciendo girar la región limitada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ y $x = 4$ en torno al eje y.

Solución La región se muestra en la Figura 6.20(a). Cuando el elemento rectangular horizontal de altura $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$ se pone en rotación en torno al eje y, se obtiene la arandela ilustrada en la Figura 6.20(b). Como en la exposición general anterior, el volumen elemental es

$$\begin{aligned}\Delta V_k &= (\text{volumen del disco}) - (\text{volumen del agujero})\\ &= \pi 4^2\,\Delta y_k - \pi(x_k^*)^2\,\Delta y_k\\ &= \pi[16 - (x_k^*)^2]\,\Delta y_k.\end{aligned}$$

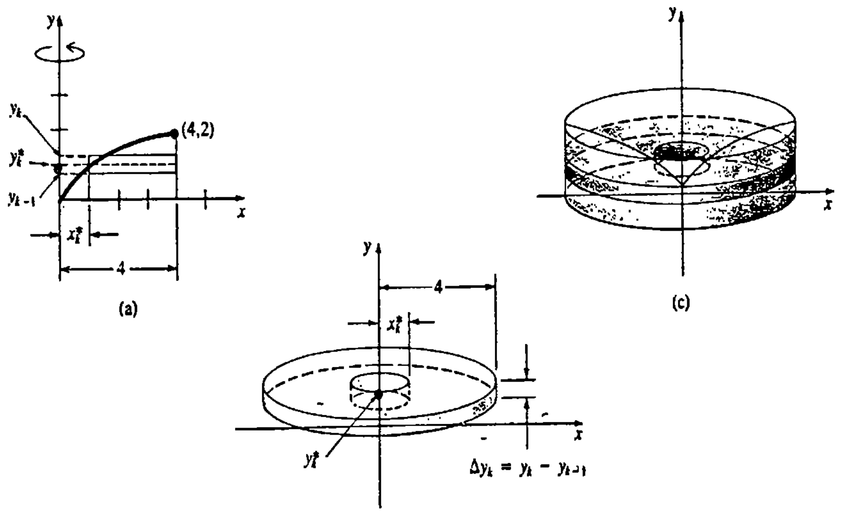


Figura 6.20

En este caso la función dada implica que $x_k^* = (y_k^*)^2$. De modo que, el volumen aproximado del sólido es

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} \pi[16 - (y_k^*)^4]\,\Delta y_k.$$

El uso de un rectángulo horizontal de altura Δy_k corresponde a una partición del intervalo $[0, 2]$ en el eje y. Por consiguiente, se concluye que el volumen exacto está dado por la integral definida

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^2 (16 - y^4)\,dy\\ &= \pi\left(16y - \frac{y^5}{5}\right)\Big]_0^2 = \frac{128\pi}{5} \text{ unidades cúbicas.}\end{aligned}$$

Ejemplo 3

Obtener el volumen V del sólido formado haciendo girar la región limitada por las gráficas de $y = x + 2$, $y = x$, $x = 0$ y $x = 3$ alrededor del eje x.

Solución Como se ve en la Figura 6.21, cuando un elemento rectangular vertical de anchura Δx_k, se hace girar en torno al eje x, se produce una arandela que tiene el volumen

$$\Delta V_k = \pi(x_k^* + 2)^2\,\Delta x_k - \pi(x_k^*)^2\,\Delta x_k = \pi(4x_k^* + 4)\,\Delta x_k.$$

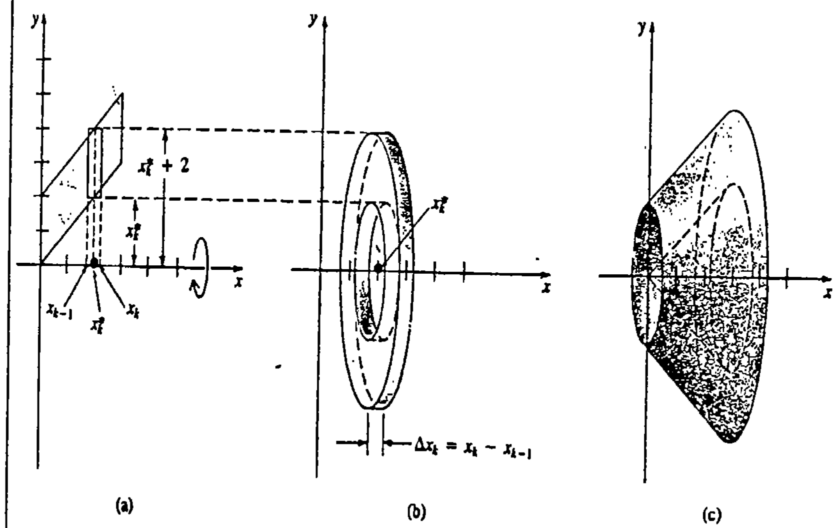


Figura 6.21

Los procedimientos usuales de suma y de límite dan lugar a

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^3 (4x + 4)\,dx\\ &= \pi(2x^2 + 4x)\Big]_0^3 = 30\pi \text{ unidades cúbicas.}\end{aligned}$$

Giro en torno a una recta

El ejemplo siguiente muestra cómo determinar el volumen de un sólido de revolución cuando una región gira en derredor de un eje que no es un eje de coordenadas.

Ejemplo 4

Hallar el volumen V del sólido que se forma haciendo girar la región dada en el Ejemplo 2, en torno a la recta $x = 4$.

Solución Por inspección de la Figura 6.22, se observa que un elemento rectangular horizontal de anchura Δy_k genera un disco sólido de volumen

$$\Delta V_k = \pi(4 - x_k^*)^2\,\Delta y_k,$$

en donde, como antes, $x_k^* = (y_k^*)^2$. Esto conduce a la integral

$$V = \pi\int_0^2 (4 - y^2)^2\,dy$$

$$= \pi\int_0^2 (16 - 8y^2 + y^4)\,dy$$

$$= \pi\left(16y - \frac{8}{3}y^3 + \frac{y^5}{5}\right)\bigg]_0^2 = \frac{256\pi}{15} \text{ unidades cúbicas.}$$

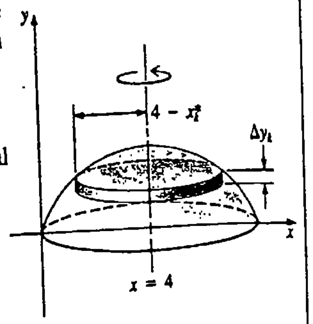


Figura 6.22

Ejercicios 6.3

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 979.

Los Problemas 1-6 se refieren a la Figura 6.23. Utilice el método de los discos o el de las arandelas para evaluar el volumen del sólido de revolución que se forma haciendo girar la región dada en torno a la recta indicada.

1. R_1 en torno a OC
2. R_1 en torno a OA
3. R_2 alrededor de OA
4. R_2 en derredor de OC
5. R_1 en torno a AB
6. R_2 en torno a AB

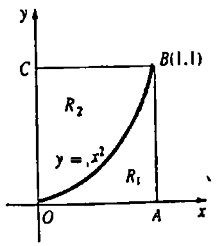


Figura 6.23

En los Problemas 7-32 obtenga el volumen del sólido de revolución que se forma haciendo rotar la región limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas en torno a la recta o eje indicado.

7. $y = 9 - x^2, y = 0$, eje x
8. $y = x^2 + 1, x = 0, y = 5$; eje y
9. $y = \frac{1}{x}, x = 1, y = \frac{1}{2}$; eje y
10. $y = \frac{1}{x}, x = \frac{1}{2}, x = 3, y = 0$; eje x
11. $y = x^2, y = 2x$; eje y
12. $y = x^2, y = \sqrt{x}$; eje x
13. $y = (x - 2)^2, x = 0, y = 0$; eje x
14. $y = (x + 1)^2, x = 0, y = 0$; eje y
15. $y = 4 - x^2, y = 1 - \frac{1}{4}x^2$; eje x
16. $y = 1 - x^2, y = x^2 - 1$; eje y

17. $x + y = 3, y = 2x, x = 0$; eje y
18. $x + y = 2, x = 0, y = 0, y = 1$; eje x
19. $y = \sqrt{x - 1}, x = 5, y = 0; x = 5$
20. $x = y^2, x = 1; x = 1$
21. $y = x^{1/3}, x = 0, y = 1; y = 2$
22. $x = -y^2 + 2y, x = 0; x = 2$
23. $x^2 - y^2 = 16, x = 5$; eje y
24. $y = x^2 - 6x + 9, y = 9 - \frac{1}{2}x^2$; eje x
25. $x = y^2, y = x - 6$; eje y
26. $y = x^3 + 1, x = 0, y = 9$; eje y
27. $y = x^3 - x, y = 0$; eje x
28. $y = \operatorname{sen} x, y = 0, 0 \le x \le \pi$; eje x
29. $y = |\cos x|, y = 0, 0 \le x \le 2\pi$; eje x
30. $y = \sec x, x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4}, y = 0$; eje x
31. $y = \tan x, y = 0, x = \frac{\pi}{4}$; eje x
32. $y = \operatorname{sen} x, y = \cos x, x = 0$, eje x

Problemas diversos

33. Halle el volumen del sólido de revolución que se forma haciendo girar la región limitada por las gráficas de $y = \operatorname{sen}^2 x$, $y = 0$, $0 \le x \le \pi$, en torno al eje x. (*Indicación:* $\operatorname{sen}^4 x = \operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen}^2 x$.)

34. Demuestre que el volumen de un cono circular recto de radio r y altura h es $V = (\pi/3)r^2h$. (*Sugerencia:* considere $y = (r/h)x$, $0 \le x \le h$.)

35. Demuestre que el volumen de una esfera de radio r es $V = (4/3)\pi r^3$. (*Sugerencia:* considere $x^2 + y^2 = r^2$.)

36. Un abrevadero hemisférico de radio r se llena con agua hasta una profundidad h. Demuestre que el volumen del agua es $V = \pi rh^2 - (\pi/3)h^3$.

37. La gráfica de la ecuación $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a > b > 0$, es una elipse. Halle el volumen del sólido de revolución que se forma al hacer girar la región limitada por $y = 0$ y la gráfica, en los cuadrantes primero y segundo, en torno al eje x. Al sólido resultante se le conoce como esferoide alargado.

38. Deduzca la fórmula del volumen de un cono truncado dada en la página 193. (*Sugerencia:* considere la recta que pasa por $(0, r_1)$ y (h, r_2).)

Problema para calculadora

39. La función $y = f(x)$ es positiva y continua en el intervalo $[0.6, 1]$. Se sabe que

x	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$f(x)$	1.8	2.0	2.2	2.5	2.7

La región limitada por la gráfica de f en el intervalo se hace girar en torno al eje x. Utilice una técnica numérica apropiada para aproximar, hasta una cifra decimal, el volumen del sólido de revolución.

6.4 Sólidos de revolución: método de las envolventes (o cortezas)

En la sección precedente se vio que un elemento rectangular de área que es perpendicular a un eje de revolución generará un disco o una rodaja circular. Obsérvese, sin embargo, que si se hiciera girar el elemento rectangular que se muestra en la Figura 6.24(a) en torno a una recta paralela al elemento, en este caso el eje y, se generaría una **envolvente** o **corteza** como la que se muestra en la Figura 6.24(b).

Para hallar el volumen del sólido de revolución que se muestra en la Figura 6.24(c), se forma una partición P de $[a, b]$, con n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$. Como el volumen de una envolvente o corteza es la diferencia

$$\Delta V_k = (\text{volumen del cilindro exterior}) - (\text{volumen del cilindro interior})$$

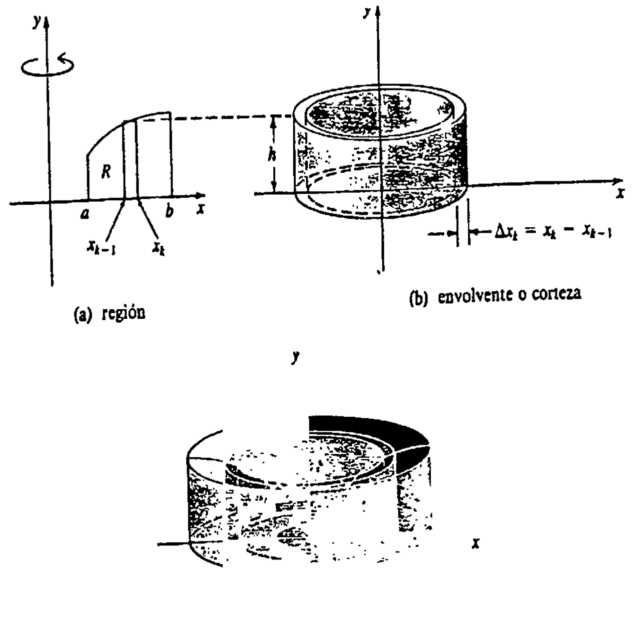


Figura 6.24

resulta de la Figura 6.24(b) que

$$\begin{aligned}\Delta V_k &= \pi x_k^2 h - \pi x_{k-1}^2 h = \pi[x_k^2 - x_{k-1}^2]h \\ &= \pi[x_k + x_{k-1}][x_k - x_{k-1}]h.\end{aligned} \tag{6.6}$$

Si se define $x_k^* = \frac{1}{2}(x_k + x_{k-1})$, entonces x_k^* es el punto medio del subintervalo de longitud $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Además, $x_k + x_{k-1} = 2x_k^*$. Por lo tanto, haciendo la identificación $h = f(x_k^*)$, el volumen (6.6) del elemento puede expresarse como

$$\Delta V_k = 2\pi\, x_k^*\, f(x_k^*)\, \Delta x_k.$$

Una aproximación al volumen es

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi x_k^* f(x_k^*)\, \Delta x_k. \tag{6.7}$$

Cuando la norma $\|P\|$ de la partición tiende a cero, es de esperar que el límite de (6.7) sea la integral definida

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx \tag{6.8}$$

Dado que es imposible analizar cada caso posible, se recomienda al lector, nuevamente, no memorizar una fórmula particular tal como la (6.8). Por otra parte, es importante poder plantear la integral para un problema dado sin necesidad de pasar por un análisis prolongado. Para lograr esto, imagínese que se parte una corteza y se la endereza

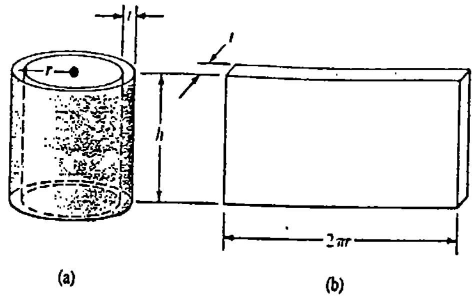


Figura 6.25

para formar un sólido rectangular delgado como el de la Figura 6.25(b). Entonces el volumen de la corteza es

$$\begin{aligned}\text{volumen} &= (\text{longitud}) \cdot (\text{anchura}) \cdot (\text{espesor}) \\ &= (\text{circunferencia del cilindro}) \cdot (\text{altura}) \cdot (\text{espesor}) \\ &= 2\pi r h t.\end{aligned} \tag{6.9}$$

Ejemplo 1

Utilícese el método de las envolventes para evaluar el volumen V del sólido de revolución dado en el Ejemplo 2 de la sección precedente.

Solución De la Figura 6.26, se puede hacer la identificación $r = x_k^*$, $h = y_k^*$, $t = \Delta x_k$. De modo que, en virtud de (6.9),

$$\Delta V_k = 2\pi x_k^* y_k^*\, \Delta x_k = 2\pi x_k^* \sqrt{x_k^*}\, \Delta x_k,$$

y así

$$\begin{aligned}V &= 2\pi \int_0^4 x \cdot x^{1/2}\, dx = 2\pi \int_0^4 x^{3/2}\, dx \\ &= 2\pi \frac{2}{5} x^{5/2}\Big]_0^4 = \frac{4\pi}{5} 4^{5/2} = \frac{128\pi}{5} \text{ unidades cúbicas.}\end{aligned}$$

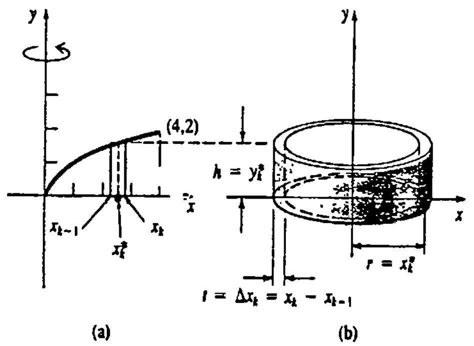


Figura 6.26

No siempre es conveniente, o incluso posible, emplear el método de los discos o el de las arandelas para determinar el volumen de un sólido de revolución.

Ejemplo 2

Encontrar el volumen V del sólido que se forma haciendo girar la región limitada por las gráficas de $x = y^2 - 2y$ y $x = 3$ en torno a la recta $y = 1$.

Solución En este caso, un elemento rectangular de área, que sea perpendicular a una recta horizontal y que se haga girar en torno a la recta $y = 1$, generará un disco. Puesto que el radio del disco no se mide desde el eje x, sino desde la recta $y = 1$, será necesario resolver $x = y^2 - 2y$ para hallar y en términos de x. Se puede evitar este inconveniente usando elementos horizontales de área, los cuales generan luego la corteza indicada en la Figura 6.27(b). Obsérvese que cuando $x = 3$, la ecuación $3 = y^2 - 2y$, o equivalentemente $(y + 1)(y - 3) = 0$, tiene las soluciones -1 y 3. Así que es necesario dividir solamente el intervalo $[1, 3]$ del eje y. Luego de hacer las identificaciones $r = y_k^* - 1$, $h = 3 - x_k^*$ y $t = \Delta y_k$, resulta de (6.9) que el volumen de una corteza es

$$\begin{aligned}\Delta V_k &= 2\pi(y_k^* - 1)(3 - x_k^*)\,\Delta y_k\\ &= 2\pi(y_k^* - 1)(3 - [(y_k^*)^2 - 2y_k^*])\,\Delta y_k.\end{aligned}$$

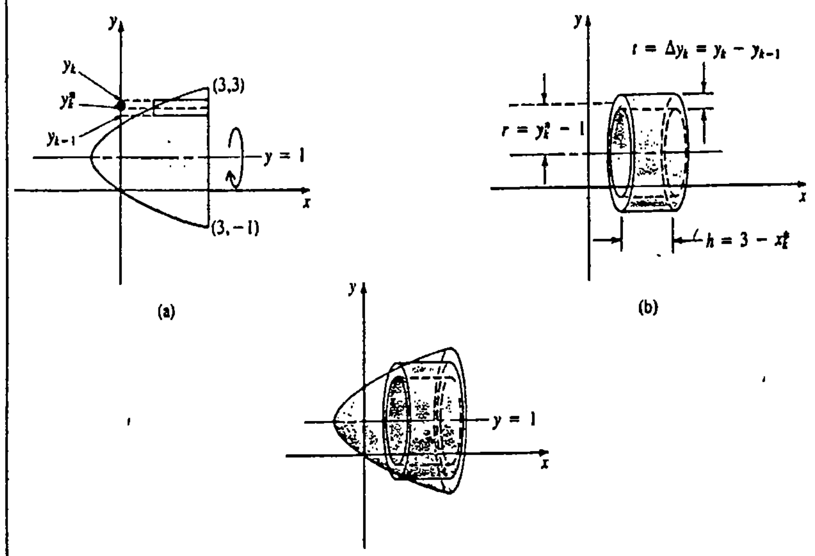


Figura 6.27

El volumen es

$$\begin{aligned}V &= 2\pi\int_1^3 (y - 1)(3 - y^2 + 2y)\,dy\\ &= 2\pi\int_1^3 (-y^3 + 3y^2 + y - 3)\,dy\\ &= 2\pi\left(-\frac{y^4}{4} + y^3 + \frac{y^2}{2} - 3y\right)\Big]_1^3\\ &= 2\pi\left[\left(-\frac{81}{4} + 27 + \frac{9}{2} - 9\right) - \left(-\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{2} - 3\right)\right]\\ &= 8\pi \text{ unidades cúbicas.}\end{aligned}$$

Ejemplo 3

Encontrar el volumen V del sólido que se forma al girar en torno al eje y la región del primer cuadrante limitada por las gráficas de $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = x(x - 1)(x - 2)$ y $x = 0$.

Solución Como se ve en la Figura 6.28, un elemento vertical de área, de anchura Δx_k, genera una corteza de volumen

$$\Delta V_k = 2\pi x_k^*[\sqrt{4 - (x_k^*)^2} - x_k^*(x_k^* - 1)(x_k^* - 2)]\,\Delta x_k.$$

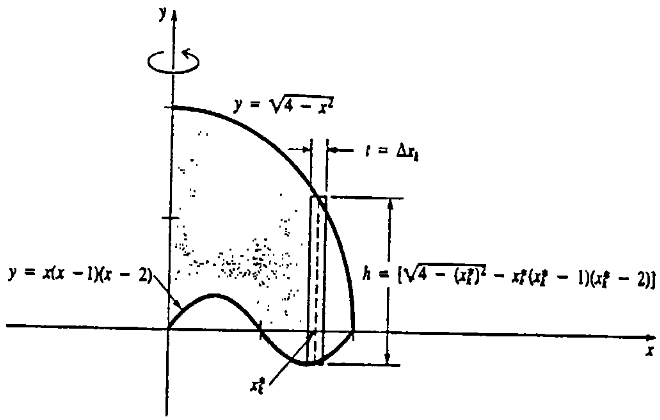


Figura 6.28

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}V &= 2\pi\int_0^2 [x\sqrt{4 - x^2} - x(x - 1)(x - 2)]\,dx\\ &= 2\pi\int_0^2\left[-\frac{1}{2}(4 - x^2)^{1/2}(-2x) - x^3 + 3x^2 - 2x\right]dx\\ &= 2\pi\left[-\frac{1}{3}(4 - x^2)^{3/2} - \frac{x^4}{4} + x^3 - x^2\right]_0^2\\ &= \frac{16\pi}{3} \text{ unidades cúbicas.}\end{aligned}$$

Ejercicios 6.4

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 979.

Los Problemas 1-6 se refieren a la Figura 6.29. Use el método de las cortezas para evaluar el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región dada en torno a la recta indicada.

1. R_1 en torno a OC
2. R_1 en torno a OA
3. R_2 en torno a BC
4. R_2 en torno a OA
5. R_1 alrededor de AB
6. R_2 en derredor de AB

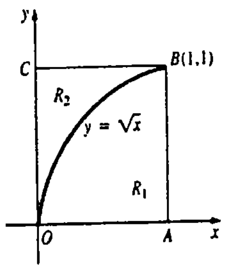


Figura 6.29

En los Problemas 7-30 utilice el método de las cortezas para determinar el volumen del sólido de revolución que se forma haciendo girar la región limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas en torno a la renta o eje indicado.

7. $y = x, x = 0, y = 5$; eje x
8. $y = 1 - x, x = 0, y = 0; y = -2$
9. $y = x^2, x = 0, y = 3$; eje x
10. $y = x^2, x = 2, y = 0$; eje y
11. $y = x^2, x = 1, y = 0; x = 3$
12. $y = x^2, y = 9$; eje x
13. $y = x^2 + 4, x = 0, x = 2, y = 2$; eje y
14. $y = x^2 - 5x + 4, y = 0$; eje y
15. $y = (x - 1)^2, y = 1$; eje x
16. $y = (x - 2)^2, y = 4; x = 4$
17. $y = x^{1/3}, x = 1, y = 0; y = -1$
18. $y = x^{1/3} + 1, y = -x + 1, x = 1; x = 1$
19. $y = x^2, y = x$; eje y
20. $y = x^2, y = x; x = 2$
21. $y = x^3, y = x + 6, x = 0$; eje y
22. $y = x^3 - x, y = 0$ (segundo cuadrante); eje y
23. $y = x^2 - 2, y = -x^2 + 2, x = 0$ (segundo cuadrante); eje y
24. $y = x^2 - 4x, y = -x^2 + 4x; x = -1$
25. $x = y^2 - 5y, x = 0$; eje x
26. $x = y^2 + 2, y = x - 4, y = 1$; eje x
27. $y = \sqrt{x - 1}, x = 0, y = 0, y = 3; y = 3$
28. $y = \sqrt{x}, y = \sqrt{1 - x}, y = 0$; eje x
29. $y = \operatorname{sen} x^2, x = 0, y = 1$; eje y
30. $x^2 - y^2 = 1, x = \sqrt{5}, y = 0$, (primer cuadrante); eje y

Problemas diversos

31. Utilice el método de las cortezas para deducir la fórmula del volumen de un cono circular recto. (Véase el Problema 34 de los Ejercicios 6.3.)

32. Utilice el método de las cortezas o envolventes para deducir la fórmula del volumen de una esfera.

33. La región limitada por $x = 0$ y la gráfica de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a > b > 0,$$

en los cuadrantes primero y cuarto, se hace girar en torno al eje y. Aplique el método de las cortezas para hallar el volumen del sólido de revolución. Al sólido resultante se le conoce como esferoide achatado.

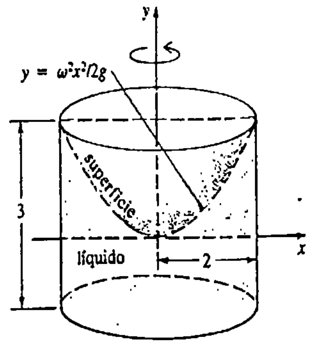


Figura 6.30

34. Una cubeta cilíndrica de 2 pie de radio, que contiene un líquido, gira en torno al eje y, con una velocidad angular constante ω. La superficie del líquido tiene una sección transversal parabólica dada por $y = \omega^2x^2/2g, -2 \le x \le 2$.* Use el método de las cortezas para encontrar el volumen del líquido en la cubeta giratoria, dado que la altura de la cubeta sea de 3 pie. Véase la Figura 6.30.

6.5 Longitud de arco

Funciones alisadas

Si $y = f(x)$ tiene una primera derivada continua en un intervalo $[a, b]$, entonces se dice que su gráfica es alisada y a f se le llama por extensión función alisada. Como implica su nombre, una gráfica de este tipo no tiene partes agudas o salientes. En esta sección se determinará la longitud de una gráfica alisada.

Supóngase que f tiene una gráfica de esta clase en $[a, b]$, y que P denota la partición arbitraria

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Como de costumbre, sea la longitud de cada subintervalo dada por $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, y $\|P\|$, la longitud del subintervalo mayor. Como se muestra en la Figura 6.31, la longitud de la cuerda entre $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ y $(x_k, f(x_k))$ es una aproximación a la longitud de la porción de la gráfica entre estos puntos. La longitud de la cuerda es

$$\Delta s_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}. \qquad (6.10)$$

Por el teorema del valor medio, se sabe que existe un x_k^* en cada subintervalo abierto (x_{k-1}, x_k) tal que

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(x_k^*)$$

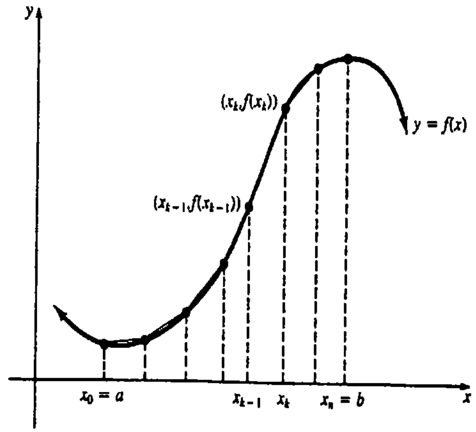


Figura 6.31

* Véase el Problema 27 de los Ejercicios 5.1.

o bien

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(x_k^*)(x_k - x_{k-1}).$$

Sustituyendo en (6.10) resulta

$$\Delta s_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + [f'(x_k^*)]^2(x_k - x_{k-1})^2}$$
$$= \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}(x_k - x_{k-1}) = \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\,\Delta x_k.$$

La suma

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta s_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\,\Delta x_k$$

da una aproximación a la longitud total de la gráfica en $[a, b]$. Cuando $\|P\| \to 0$, se obtiene

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x^*)]^2}\,\Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx. \quad (6.11)$$

Lo anteriormente expuesto sugiere emplear la ecuación (6.11) como la definición de la longitud de la gráfica en el intervalo.

DEFINICIÓN 6.4

Sea f' una función para la cual f' es continua en un intervalo $[a, b]$. La longitud s de la gráfica en el intervalo, o **longitud de arco**, está dada por

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx. \quad (6.12)$$

□

De una gráfica que tiene longitud de arco se dice que es **rectificable**.

Ejemplo 1

Obtener la longitud de la gráfica de $y = 4x^{3/2}$ del origen (0, 0) al punto (1, 4).

Solución La gráfica de la función en [0, 1] está dada en la Figura 6.32. Ahora bien,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 6x^{1/2}$$

es continua en el intervalo; por lo tanto, de (6.12) resulta que

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + [6x^{1/2}]^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 36x}\,dx$$
$$= \int_0^1 (1 + 36x)^{1/2}\,dx \quad = \frac{1}{36}\int_0^1 (1 + 36x)^{1/2}(36\,dx)$$
$$= \frac{1}{54}(1 + 36x)^{3/2}\Big]_0^1 \quad = \frac{1}{54}[37^{3/2} - 1] \approx 4.1493.$$

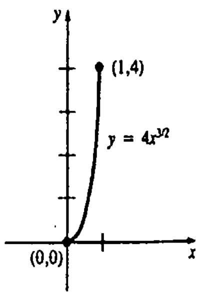


Figura 6.32

Diferencial de longitud de arco

Si $s = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\,dt$, entonces por el Teorema 5.10

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2},$$

y consecuentemente,

$$ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx. \quad (6.13)$$

A esta última función se la llama **diferencial de longitud de arco** y puede utilizarse para evaluar aproximadamente longitudes de curvas. Empleando $dy = f'(x)dx$, (6.13) se escribe a menudo como

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \quad \text{o} \quad (ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2. \quad (6.14)$$

La integral en (6.12) conduce con frecuencia a problemas en los que se necesitan técnicas de integración especiales. Véase el Capítulo 9. Pero incluso con estos procedimientos subsecuentes, no *siempre* es posible evaluar la integral indefinida $\int \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$ en términos de las funciones elementales ordinarias, ni aun para algunas de las funciones más simples. Véase el Problema 21 de los Ejercicios 6.5.

Ejercicios 6.5

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 979.

En los Problemas 1-10 determine la longitud de la gráfica de la ecuación dada en el intervalo indicado.

1. $y = x$; $[-1, 1]$
2. $y = 2x + 1$; $[0, 3]$
3. $y = x^{3/2} + 4$; (0, 4) hasta (1, 5)
4. $y = 3x^{2/3}$; $[1, 8]$
5. $y = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2}$; $[1, 4]$
6. $(y + 1)^2 = 4(x + 1)^3$; $(-1, -1)$ hasta (0, 1)
7. $y = \frac{1}{3}x^{3/2} - x^{1/2}$; $[1, 4]$
8. $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$; $[2, 4]$
9. $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8x^2}$; $[2, 3]$
10. $y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{12x^3}$; $[1, 2]$

En los Problemas 11-14 establezca, pero no evalúe, una integral para la longitud de la gráfica de la función dada, en el intervalo indicado.

11. $y = x^2$; $[-1, 3]$
12. $y = 2\sqrt{x + 1}$; $[-1, 3]$
13. $y = \operatorname{sen} x$; $[0, \pi]$
14. $y = \tan x$; $[-\pi/4, \pi/4]$

Sea $x = g(y)$, en donde g' es continua en un intervalo $[c, d]$ en el eje y. Entonces la longitud de la gráfica en el intervalo es

$$s = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\,dy \quad (6.15)$$

En los Problemas 15 y 16 utilice la fórmula (6.15) para hallar la longitud de la gráfica de la ecuación dada, en el intervalo indicado.

15. $x = 4 - y^{2/3}$; $[0, 8]$
16. $5x = y^{5/2} + 5y^{-1/2}$; $[4, 9]$

Problemas diversos

17. Considere la longitud de la gráfica de $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ en el primer cuadrante.

(a) Demuestre que el uso de la ecuación (6.12) conduce a un integrando discontinuo.

(b) Suponiendo que se puede emplear el teorema fundamental del cálculo para evaluar la integral obtenida en la parte (a), determine la longitud total de la gráfica.

18. Establezca, pero no haga el intento de evaluar, una integral que dé la longitud total de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a > b > 0$.

19. Dado que la circunferencia de un círculo de radio r es $2\pi r$, encuentre el valor de la integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

20. Utilice (6.15) para aproximar la longitud de la gráfica de $y = x^4/4$ de $(2, 4)$ a $(2.1, 4.862025)$.

Problemas para calculadora

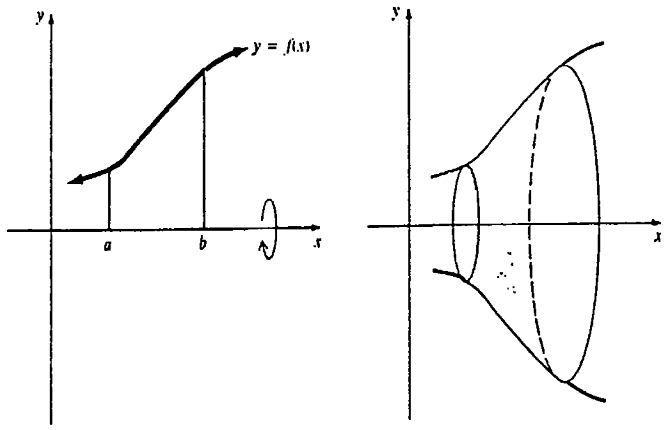
21. Utilice la regla trapecial, con $n = 10$, para obtener una aproximación a la longitud de la gráfica de $y = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$.

22. Utilice la regla de Simpson, con $n = 4$, para tener una aproximación a la longitud de la gráfica de $y = \frac{1}{3}x^3 + 1$ de $(0, 1)$ a $(2, \frac{11}{3})$.

6.6 Superficies de revolución

Superficie de revolución — respecto al eje x

Como se vio en las Secciones 6.3 y 6.4, cuando la gráfica de una función continua $y = f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ se hace girar en torno al eje x, genera un sólido de revolución. En esta sección se determinará el área de la superficie correspondiente; esto es, la de una **superficie de revolución**, como se muestra en la Figura 6.33(b).



(a) gráfica (b) superficie

Figura 6.33

Para deducir la fórmula del área de una superficie de revolución, se observa primero que el área lateral (sin las bases superior e inferior) de un cono circular recto *truncado*, que se muestra en la Figura 6.34, está dada por

$$\pi[r_1 + r_2]L, \tag{6.16}$$

en donde r_1 y r_2 son los radios de las bases superior e inferior, y L es la longitud de generatriz. Véase el Problema 14 de los Ejercicios 6.6.

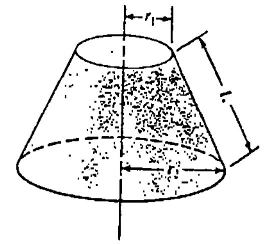
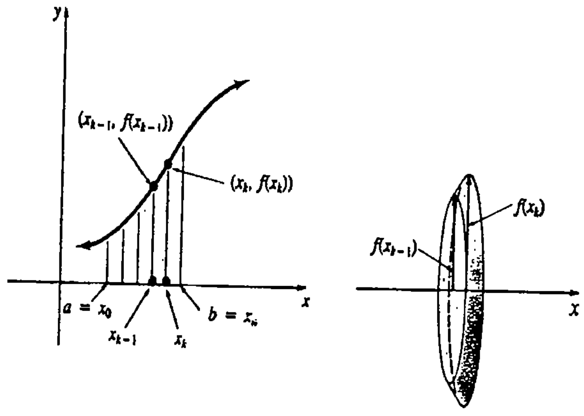


Figura 6.34

Supóngase ahora que $y = f(x)$ es una función alisada y que $f(x) \geq 0$ en el intervalo $[a, b]$. Sea P una partición del intervalo:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$



(a) (b)

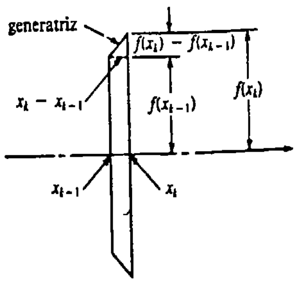
Figura 6.35

Si se unen ahora los puntos $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ y $(x_k, f(x_k))$ que se muestran en la Figura 6.35(a) con una cuerda, se forma un trapecio. Cuando esta figura se hace girar en torno al eje x, se genera un cono truncado con radios $f(x_{k-1})$ y $f(x_k)$. Véase la Figura 6.35(b). Como se muestra en la sección transversal en la Figura 6.36, la generatriz puede obtenerse del teorema de Pitágoras:

$$\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$$

Así que, en virtud de (6.16) el área de la superficie de este elemento es

$$\Delta S_k = \pi[f(x_k) + f(x_{k-1})]\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$$



vista lateral del cono truncado

Figura 6.36

$$= \pi[f(x_k) + f(x_{k-1})] \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2}(x_k - x_{k-1})$$

$$= \pi[f(x_k) + f(x_{k-1})] \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2}\, \Delta x_k$$

en donde $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Esta última cantidad es una aproximación al área real de la superficie de revolución en el subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$.

Ahora, como en el análisis de la longitud de arco, se recurre al teorema del valor medio para derivadas a fin de asegurar que existe un x_k^* en (x_{k-1}, x_k) tal que

$$f'(x_k^*) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

Esto sugiere que el área de la superficie está dada por

$$\lim_{\|P\|\to 0} \pi\sum_{k=1}^{n}[f(x_k) + f(x_{k-1})] \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\, \Delta x_k.$$

Como también es de esperar que $f(x_{k-1})$ y $f(x_k)$ tiendan al límite común $f(x)$, la última ecuación se transforma en

$$2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Lo anterior es un argumento de la plausibilidad de la siguiente definición.

DEFINICIÓN 6.5

Sea f una función para la cual f' es continua y $f(x) \geq 0$ para todo x en el intervalo $[a, b]$. El área S de la superficie que se obtiene haciendo girar la gráfica de f en el intervalo en torno al eje x está dada por

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \tag{6.17}$$

□

Ejemplo 1

Encuentre el área S de la superficie que se forma haciendo girar la gráfica de $y = \sqrt{x}$ en el intervalo [1, 4] en derredor del eje x.

Solución Se tiene que $f(x) = x^{1/2}, f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = 1/(2\sqrt{x})$ y de (6.17) de la Definición 6.5

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_1^4 \sqrt{x}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\, dx \\ &= 2\pi \int_1^4 \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx \\ &= 2\pi \int_1^4 \sqrt{x}\sqrt{\frac{4x+1}{4x}}\, dx \\ &= \pi \int_1^4 \sqrt{4x+1}\, dx \\ &= \frac{\pi}{4}\int_1^4 (4x+1)^{1/2}(4\, dx) \\ &= \frac{\pi}{6}(4x+1)^{3/2}\Big]_1^4 \\ &= \frac{\pi}{6}[17^{3/2} - 5^{3/2}] \approx 30.85 \text{ unidades cuadradas.} \end{aligned}$$

Véase la Figura 6.37.

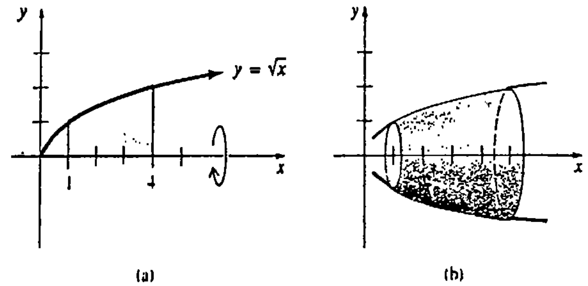


Figura 6.37

Superficie de revolución — respecto al eje y

Puede demostrarse que si la gráfica de una función continua $y = f(x)$ en $[a, b]$, $0 \leq a < b$, se hace girar alrededor del eje y, entonces el área S de la superficie de revolución resultante está dada por

$$S = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \tag{6.18}$$

Como en (6.17), se supone en (6.18) que $f'(x)$ es también continua en el intervalo $[a, b]$.

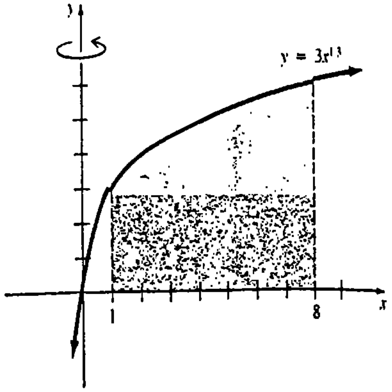
Ejemplo 2

Determinar el área S de la superficie formada haciendo girar $y = 3x^{1/3}$ en el intervalo [1, 8] en torno al eje y.

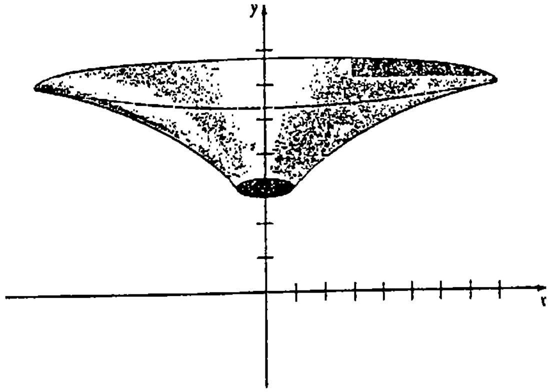
Solución Se tiene que $f'(x) = x^{-2/3}$, de modo que de (6.18) resulta

$$
\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_1^8 x\sqrt{1 + x^{-4/3}}\, dx \\
&= 2\pi \int_1^8 x^{1/3}\sqrt{x^{4/3} + 1}\, dx \\
&= 2\pi\left(\frac{3}{4}\right) \int_1^8 (x^{4/3} + 1)^{1/2}\left(\frac{4}{3}x^{1/3}\, dx\right) \\
&= \pi(x^{4/3} + 1)^{3/2}\Big]_1^8 \\
&= \pi[17^{3/2} - 2^{3/2}] \\
&\approx 211.32 \text{ unidades cuadradas.}
\end{aligned}
$$

Véase la Figura 6.38.



(a)



(b)

Figura 6.38

Ejercicios 6.6

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 979.

En los Problemas 1-10, determine el área de la superficie que se forma haciendo girar cada gráfica en el intervalo dado en torno al eje indicado.

1. $y = 2\sqrt{x}$, $[0, 8]$; eje x
2. $y = \sqrt{x + 1}$, $[1, 5]$; eje x
3. $y = x^3$, $[0, 1]$; eje x
4. $y = x^{1/3}$, $[1, 8]$; eje y
5. $y = x^2 + 1$, $[0, 3]$; eje y
6. $y = 4 - x^2$, $[0, 2]$; eje y
7. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $[x_1, x_2]$, $-a < x_1 < x_2 < a$; eje x
8. $y = \sqrt{16 - x^2}$; $[0, \sqrt{7}]$; eje y
9. $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8x^2}$, $[1, 2]$; eje y
10. $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4x}$, $[1, 2]$; eje x

Problemas diversos

11. Evalúe el área de la superficie que se forma haciendo girar $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $[-a, a]$, en torno al eje x.

12. Demuestre que el área de la superficie lateral de un cono circular recto, de radio r y generatriz L, es πrL. (*Indicación:* un cono partido lateralmente y enderezado forma un sector circular de área $\frac{1}{2}L^2\theta$.)

13. Utilice el Problema 12 para demostrar que el área de la superficie lateral de un cono circular recto de radio r y altura h está dada por $\pi r\sqrt{r^2 + h^2}$. Deduzca el mismo resultado empleando (6.16) o (6.17).

14. Utilice el resultado del Problema 12 para deducir la fórmula (6.16). (*Sugerencia:* considere un cono completo de radio r_2 y generatriz L_2. Corte la parte superior cónica. El uso de triángulo semejantes puede ser útil.)

15. Demuestre que el área de la superficie de un cono circular recto truncado, de radios r_1 y r_2, y altura h, está dada por $\pi(r_1 + r_2)\sqrt{h^2 + (r_2 - r_1)^2}$.

16. Sea $y = f(x)$ una función no negativa continua en $[a, b]$ que tiene una primera derivada continua en el intervalo. Demuestre que si la gráfica de f se hace girar en torno a una recta horizontal $y = L$, entonces el área S de la superficie de revolución resultante está dada por

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x) - L| \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

17. Use el resultado del Problema 16 para encontrar una integral definida que dé el área de la superficie que se forma haciendo girar $y = x^{2/3}$, $[1, 8]$, en torno a la recta $y = 4$. No evalúe.

Problema para calculadora

18. Utilice la regla trapecial con $n = 5$ para encontrar una aproximación al área de la superficie que se forma haciendo girar la gráfica de $y = \frac{1}{2}x^2$ en el intervalo $[0, 2]$ en torno al eje x.

6.7 Valor medio de una función y teorema del valor medio

Promedios

Todo estudiante está enterado respecto de lo que son los promedios. Si en un semestre hubo cuatro exámenes, en los cuales un estudiante obtuvo 80%, 75%, 85% y 92%, entonces su calificación media es

$$\frac{80 + 75 + 85 + 92}{4}$$

o sea 83%. En general, dados n números $a_1, a_2, \ldots, a_n$, se dice que su media aritmética, media o promedio, simplemente, es

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Supóngase ahora que se tiene una función continua f definida en un intervalo $[a, b]$. Para n números arbitrariamente elegidos x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, tales que $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b$, la media del conjunto de valores funcionales correspondiente es

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k). \qquad (6.19)$$

Ejemplo 1

Considerar la función $f(x) = x^2$ en $[0, 3]$. Si $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1, x_3 = \frac{3}{2}, x_4 = 2$, entonces

$$\frac{f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2)}{4} = \frac{\frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{4} + 4}{4} = \frac{15}{8}.$$

Si se considera ahora el conjunto de valores $f(x)$ que corresponden a *todos* los puntos x en un intervalo, resulta evidente que no se puede emplear una suma discreta como en (6.19). Por ejemplo, para $f(x) = x^2$ en $[0, 3]$, los valores de la función abarcan desde un mínimo de $f(0) = 0$ hasta un máximo de $f(3) = 9$. Como se indica en la Figura 6.39, se espera intuitivamente que exista un valor medio $A(f)$ tal que $f(0) \leq A(f) \leq f(3)$.

Volviendo al caso general de una función continua definida en un intervalo cerrado $[a, b]$, sea P una partición del intervalo en n subintervalos de igual longitud, $\Delta x = (b - a)/n$. Si x_k^* es un número elegido en cada subintervalo, entonces la media

$$\frac{f(x_1^*) + f(x_2^*) + \cdots + f(x_n^*)}{n}$$

puede escribirse como

$$\frac{f(x_1^*) + f(x_2^*) + \cdots + f(x_n^*)}{\frac{b-a}{\Delta x}} \tag{6.20}$$

puesto que $n = (b - a)/\Delta x$. Expresando (6.20) como

$$\frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) \Delta x$$

y tomando el límite de esta última expresión cuando $\|P\| = \Delta x \to 0$, se obtiene la integral definida

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx. \tag{6.21}$$

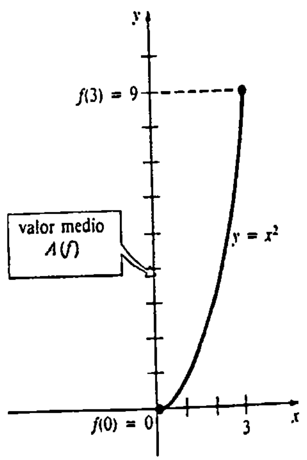


Figura 6.39

Ya que se supuso a f continua en $[a, b]$, denótense su mínimo y su máximo en el intervalo por m y M, respectivamente. Multiplicando

$$m \leq f(x_k^*) \leq M$$

por $\Delta x > 0$ y sumando, se obtiene

$$\sum_{k=1}^{n} m \,\Delta x \leq \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) \,\Delta x \leq \sum_{k=1}^{n} M \,\Delta x.$$

Como $\sum_{k=1}^{n} \Delta x = b - a$, esta última expresión puede escribirse como

$$(b - a)m \leq \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) \,\Delta x_k \leq (b - a)M.$$

De esta manera cuando $\Delta x \to 0$, resulta que

$$(b - a)m \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq (b - a)M.$$

Se concluye que el número (6.21) satisface

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \leq M.$$

Por el teorema del valor intermedio, f toma todos los valores entre m y M. Por consiguiente, el número dado por (6.21) corresponde en realidad a un valor de la función en el intervalo. Esto sugiere establecer la definición siguiente.

DEFINICIÓN 6.6

Sea f continua en $[a, b]$. El **valor medio de f en el intervalo** es el número

$$A(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx. \tag{6.22}$$

□

Aunque interesan principalmente las funciones continuas, la Definición 6.6 es válida para cualquier función integrable en el intervalo.

Ejemplo 2

Encontrar el valor medio de $f(x) = x^2$ en $[0, 3]$.

Solución De (6.22) de la Definición 6.6, se obtiene

$$\begin{aligned} A(f) &= \frac{1}{3-0} \int_0^3 x^2\, dx \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big]_0^3 \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{27}{3}\right) = 3. \end{aligned}$$

Algunas veces es posible determinar el valor de x en el intervalo que corresponde al valor medio de una función.

Ejemplo 3

Determinar el valor de x en el intervalo $[0, 3]$ que corresponda al valor medio de la función $f(x) = x^2$.

Solución Puesto que la función $f(x) = x^2$ es continua en el intervalo cerrado $[0, 3]$, se sabe, por el Teorema 2.14, que existe un número c entre 0 y 3 de manera que

$$f(c) = c^2 = A(f).$$

Pero, por el Ejemplo 2, se sabe que $A(f) = 3$. Así que la ecuación

$$c^2 = 3 \quad \text{tiene las soluciones } c = \pm\sqrt{3}.$$

Como se muestra en la Figura 6.40, la única solución de esta ecuación en $[0, 3]$ es $c = \sqrt{3}$.

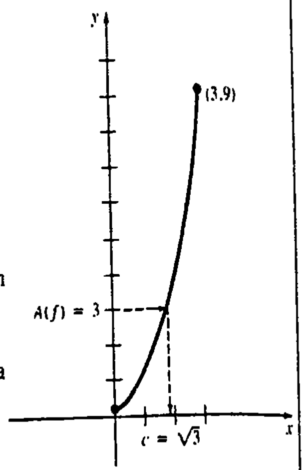


Figura 6.40

Teorema del valor medio para integrales definidas

Lo que sigue es una consecuencia inmediata de la discusión precedente.

TEOREMA 6.1
Teorema del valor medio para integrales definidas

Sea f continua en $[a, b]$. Entonces existe un número c en el intervalo abierto (a, b) tal que

$$f(c)(b - a) = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad \square$$

Si $f(x) \geq 0$ para todo x en $[a, b]$, entonces el Teorema 6.1 establece simplemente que hay algún valor c en (a, b) para el cual el área del rectángulo de altura $f(c)$ y anchura $b - a$ es la misma que el área bajo la gráfica indicada en la Figura 6.41.

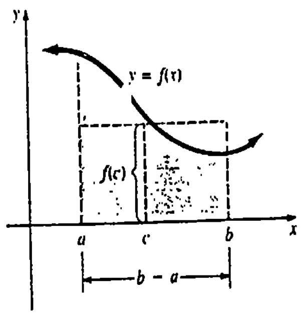


Figura 6.41

Ejemplo 4

Encontrar la altura $f(c)$ de un rectángulo, de tal manera que el área A bajo la gráfica de $y = x^2 + 1$, en $[-2, 2]$ sea igual a $f(c)[2 - (-2)] = 4f(c)$.

Solución Este es básicamente el mismo tipo de problema que el ilustrado en el Ejemplo 3. Ahora bien, el área bajo la gráfica es

$$A = \int_{-2}^{2}(x^2 + 1)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg]_{-2}^{2} = \frac{28}{3}.$$

También, $4f(c) = 4(c^2 + 1)$, de modo que

$$4(c^2 + 1) = \frac{28}{3}$$

implica $c^2 = \frac{4}{3}$. Las dos soluciones $c = 2/\sqrt{3}$ y $c = -2/\sqrt{3}$ están en el intervalo $(-2, 2)$. La altura del rectángulo es $f(c) = (\pm 2/\sqrt{3})^2 + 1 = \frac{7}{3}$. Véase la Figura 6.42.

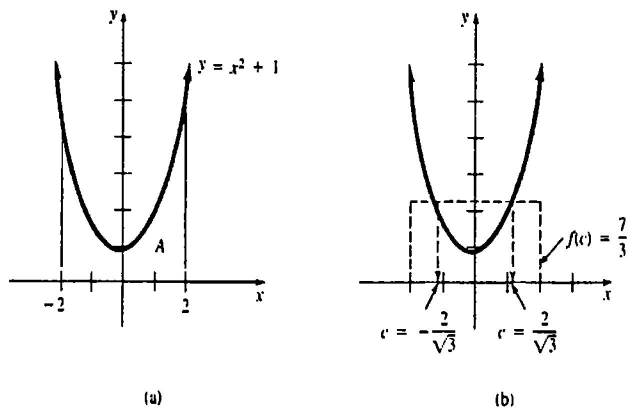


Figura 6.42

Ejercicios 6.7

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 979

En los Problemas 1-20 obtenga el valor medio $A(f)$ de la función dada en el intervalo indicado.

1. $f(x) = 4x$; $[-3, 1]$
2. $f(x) = 2x + 3$; $[-2, 5]$
3. $f(x) = x^2 + 10$; $[0, 2]$
4. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$; $[-1, 1]$
5. $f(x) = 3x^2 - 4x$; $[-1, 3]$
6. $f(x) = (x + 1)^2$; $[0, 2]$
7. $f(x) = x^3$; $[-2, 2]$
8. $f(x) = x(3x - 1)^2$; $[0, 1]$
9. $f(x) = \sqrt{x}$; $[0, 9]$
10. $f(x) = \sqrt{5x + 1}$; $[0, 3]$
11. $f(x) = x\sqrt{x^2 + 16}$; $[0, 3]$

12. $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1/3} \frac{1}{x^2}; \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

13. $f(x) = \frac{1}{x^3}; \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$

14. $f(x) = x^{2/3} - x^{-2/3}; [1, 4]$

15. $f(x) = \frac{2}{(x+1)^2}; [3, 5]$

16. $f(x) = \frac{(\sqrt{x} - 1)^3}{\sqrt{x}}; [4, 9]$

17. $f(x) = \operatorname{sen} x; [-\pi, \pi]$

18. $f(x) = \cos 2x; \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

19. $f(x) = \csc^2 x; \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$

20. $f(x) = \frac{\operatorname{sen} \pi x}{\cos^2 \pi x}; \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

21. Para $f(x) = x^2 + 2x$, encuentre un valor de c en el intervalo $[-1, 1]$ para el cual $f(c) = A(f)$.

22. Para $f(x) = \sqrt{x + 3}$, obtenga un valor de c en el intervalo $[1, 6]$ para el cual $f(c) = A(f)$.

23. El valor medio de una función no negativa continua $y = f(x)$ en el intervalo $[1, 5]$ es $A(f) = 3$. ¿Cuál es el área bajo la gráfica en el intervalo?

24. El área bajo la gráfica de una función no negativa continua $y = f(x)$ en el intervalo $[-3, 4]$ es 21 unidades cuadradas. ¿Cuál es el valor medio de la función en el intervalo?

25. La función $T(t) = 100 + 3t - \frac{1}{2}t^2$ se aproxima a la temperatura a las t horas después del mediodía en un día típico de agosto, en Las Vegas. Encuentre la temperatura media entre el mediodía y las 6 P.M.

26. Una empresa determina que el ingreso obtenido por la venta de x unidades de un producto está dado por $R(x) = 50 + 4x + 3x^2$. Encuentre el ingreso medio para las ventas desde $x = 1$ a $x = 5$. Compare el resultado con la media $\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5} R(k)$.

27. Denote por $s(t)$ la posición de una partícula en un eje horizontal como función del tiempo t. La velocidad media v_m durante el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ es $v_m = [s(t_2) - s(t_1)]/(t_2 - t_1)$. Demuestre que $v_m = A(v)$.

28. En ausencia de amortiguamiento, la posición de una masa m sujeta a un resorte que vibra libremente está dada por la función $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$, en donde A, ω y ϕ son constantes. El periodo de oscilación es $2\pi/\omega$. La energía potencial del sistema es $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$, en donde k es la llamada constante del resorte. La energía cinética del sistema es $K = \frac{1}{2}mv^2$, en donde $v = dx/dt$. Si $\omega^2 = k/m$, demuestre que la energía potencial media y la energía cinética media en un periodo son iguales a $\frac{1}{4}kA^2$.

29. El *teorema del impulso y la cantidad de movimiento* establece que el cambio de la cantidad de movimiento (o ímpetu) de un cuerpo en un intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ es $mv_1 - mv_0 = (t_1 - t_0)\overline{F}$, en donde mv_0 es el ímpetu inicial, mv_1 es la cantidad de movimiento final, y $\overline{F}$ es la fuerza media que actúa sobre el cuerpo durante el intervalo. Evalúe el cambio en el ímpetu de un martinete que cae sobre un pilote entre los tiempos $t = 0$ y $t = t_1$ si

$$F(t) = k\left[1 - \left(\frac{2t}{t_1} - 1\right)^2\right],$$

en donde k es una constante.

30. La velocidad de la sangre, en cm/s, en una pequeña arteria, está dada por $v(r) = (P/4\nu l)(R^2 - r^2)$, $0 \le r \le R$, en donde P es la presión sanguínea, ν es la viscosidad de la sangre, l es la longitud de la arteria y R es el radio de la arteria. Encuentre el valor medio de $v(r)$ en el intervalo $[0, R]$.

Problemas diversos

31. Si $y = f(x)$ es una función diferenciable, encuentre el valor medio de f' en el intervalo $[x, x + h]$, en donde $h > 0$.

32. Para una función lineal $f(x) = ax + b$, $a > 0$, $b > 0$, demuestre que el valor medio de la función en $[x_1, x_2]$ es $A(f) = aX + b$, en donde X es la abscisa del punto medio del intervalo.

33. Dado que n sea un entero positivo y $a > 1$, demuestre que el valor medio de $f(x) = (n + 1)x^n$ en el intervalo $[1, a]$ es $A(f) = a^n + a^{n-1} + \ldots + a + 1$.

34. El valor cuadrático medio de una función continua en un intervalo $[a, b]$ se define como

$$\frac{1}{b - a}\int_a^b [f(x)]^2\, dx.$$

Calcule el valor medio y el valor cuadrático medio de $f(x) = (x + 1)^{-1/3}$ en $[0, 7]$.

6.8 El movimiento rectilíneo y la integral

Si $s = f(t)$ es la función de posición de un objeto que se mueve en una línea recta, entonces sabemos que

$$\text{velocidad} = v(t) = \frac{ds}{dt}$$

$$\text{aceleración} = a(t) = \frac{dv}{dt}.$$

Como consecuencia inmediata de la definición de antiderivada, las cantidades s y v se pueden expresar como integrales indefinidas

$$s(t) = \int v(t)\, dt \tag{6.23}$$

$$v(t) = \int a(t)\, dt. \tag{6.24}$$

Conociendo la **posición inicial** $s(0)$ y la **velocidad inicial** $v(0)$, se pueden obtener valores específicos de las constantes de integración empleadas en (6.23) y (6.24).

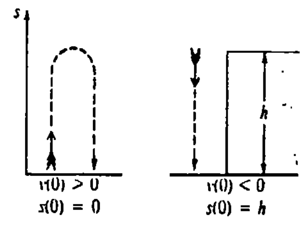


Figura 6.43

Recuérdese que cuando un cuerpo se mueve horizontalmente en una recta, el sentido positivo es hacia la derecha. Para el movimiento en una recta vertical, el sentido positivo es hacia arriba. Si una flecha es disparada hacia arriba desde el nivel del suelo, entonces $s(0) = 0$, $v(0) > 0$, mientras que si la flecha es disparada hacia abajo desde cierta altura inicial, digamos a h metros del suelo, entonces $s(0) = h$, $v(0) < 0$ como se muestra en la Figura 6.43. La fuerza de la gravedad actúa sobre un cuerpo que se mueve en una recta vertical cerca de la superficie de la Tierra, tal como la flecha disparada hacia arriba. Esta fuerza ocasiona que un cuerpo se acelere. Cerca de la superficie de la Tierra, la aceleración de la gravedad, $a(t)$, se supone que es constante y está dada por

$$-32 \text{ pie/s}^2, \qquad -9.8 \text{ m/s}^2 \qquad \text{o bien} \qquad -980 \text{ cm/s}^2$$

Ejemplo 1

Un proyectil es disparado verticalmente hacia arriba desde el nivel del suelo, con una velocidad inicial de 49 m/s. ¿Cuál es su velocidad a los $t = 2$ s? ¿Cuál es la máxima altura alcanzada por el proyectil? ¿Cuánto dura el proyectil en el aire? ¿Cuál es su velocidad de impacto?

Solución Se utiliza $a(t) = -9.8$ y

$$v(t) = \int(-9.8)t = -9.8t + C_1. \tag{6.25}$$

De la condición inicial dada $v(0) = 49$, puede verse que (6.25) implica que $C_1 = 49$. Por consiguiente,

$$v(t) = -9.8t + 49$$

y de esta manera $v(2) = -9.8(2) + 49 = 29.4$ m/s. Obsérvese que $v(2) > 0$ implica que el proyectil está viajando hacia arriba.

Entonces, la altura del proyectil, medida desde el nivel del suelo, es

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \int(-9.8t + 49)\,dt$$

$$= -4.9t^2 + 49t + C_2. \tag{6.26}$$

Puesto que el proyectil parte desde el nivel del suelo $s(0) = 0$ y (6.26) da $C_2 = 0$. Por consiguiente,

$$s(t) = -4.9t^2 + 49t. \tag{6.27}$$

Cuando el proyectil alcanza su altura máxima, $v(t) = 0$. Resolviendo $-9.8t + 49 = 0$ resulta $t = 5$. La altura correspondiente se obtiene de (6.27): $s(5) = 122.5$ m.

Finalmente, para encontrar el tiempo en el que el proyectil choca contra el suelo, se resuelve $s(t) = 0$, o sea, $-4.9t^2 + 49t = 0$. Escribiendo esta última ecuación como $-4.9t(t - 10) = 0$, puede verse que el proyectil dura en el aire 10 s. La velocidad de impacto es $v(10) = -49$ m/s.*

Ejemplo 2

Una pelota de tenis es tirada verticalmente hacia abajo desde una altura de 54 pie, con una velocidad inicial de 8 pie/s. Si golpea en la cabeza a una persona de 6 pie de estatura, ¿cuál es su velocidad de impacto? Véase la Figura 6.44.

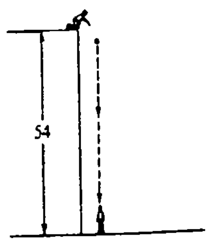


Figura 6.44

Solución En este caso $a(t) = -32$, $s(0) = 54$ y, puesto que la pelota es arrojada hacia abajo, $v(0) = -8$. Entonces

$$v(t) = \int(-32)dt + C_1 = -32t + C_1.$$

Empleando la velocidad inicial $v(0) = -8$, se tiene que $C_1 = -8$. Por lo tanto,

$$v(t) = -32t - 8.$$

* Cuando no se considera la resistencia del aire, la magnitud de la velocidad de impacto es igual a la de la velocidad inicial hacia arriba al nivel del suelo. Esto no es cierto cuando se toma en consideración la resistencia del aire. Véase el Problema 30 de los Ejercicios 6.8.

A continuación se obtiene

$$s(t) = \int(-32t - 8)\,dt$$

Se sabe que cuando $t = 0$, $s = 54$, y de este modo la última ecuación implica que $C_2 = 54$. Por consiguiente,

$$s(t) = -16t^2 - 8t + 54.$$

Para determinar el tiempo que corresponde a $s = 6$ se resuelve

$$-16t^2 - 8t + 54 = 6.$$

Simplificando resulta $-8(2t - 3)(t + 2) = 0$ y $t = \frac{3}{2}$ s. La velocidad de la pelota al golpear a la persona es entonces $v(\frac{3}{2}) = -56$ pie/s.

Distancia

La distancia total que recorre un objeto en una recta en un intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ está dada por la integral definida

$$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt. \tag{6.28}$$

El valor absoluto es necesario en (6.28), ya que el objeto puede moverse hacia la izquierda y por consiguiente tener una velocidad negativa en cierto lapso de tiempo.

Ejemplo 3

La función de posición de un objeto que se mueve en una recta coordenada es $s(t) = t^2 - 6t$, en donde s se mide en centímetros y t en segundos. Encuentre la distancia recorrida en el intervalo de tiempo [0, 9].

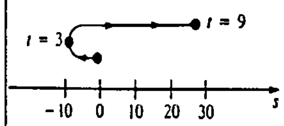


Figura 6.45

Solución La función velocidad $v(t) = ds/dt = 2t - 6 = 2(t-3)$ muestra que el movimiento es como se indica en la Figura 6.45; a saber, $v < 0$ para $0 \le t < 3$ y $v \ge 0$ para $3 \le t \le 9$. Por consiguiente, en virtud de (6.28) la distancia recorrida es

$$\int_0^9 |2t - 6|\,dt = \int_0^3 -(2t - 6)\,dt + \int_3^9 (2t - 6)\,dt$$

$$= (-t^2 + 6t)\Big]_0^3 + (t^2 - 6t)\Big]_3^9$$

$$= (-9 + 18) + (81 - 54) - (9 - 18)$$

$$= 45 \text{ cm}.$$

Desde luego, este resultado debe coincidir con el número obtenido contando simplemente las unidades entre $s(0)$ y $s(3)$, y entre $s(3)$ y $s(9)$, en la Figura 6.45.

Ejercicios 6.8

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 979.

En los Problemas 1-6 un cuerpo se mueve en una recta con velocidad $v(t)$. Encuentre la función de posición $s(t)$.

1. $v(t) = 6$; $s = 5$ cuando $t = 2$
2. $v(t) = 2t + 1$; $s = 0$ cuando $t = 1$
3. $v(t) = t^2 - 4t$; $s = 6$ cuando $t = 3$
4. $v(t) = \sqrt{4t + 5}$; $s = 2$ cuando $t = 1$
5. $v(t) = -10\cos(4t + \pi/6)$; $s = \frac{5}{4}$ cuando $t = 0$
6. $v(t) = 2\,\text{sen}\,3t$; $s = 0$ cuando $t = \pi$

En los Problemas 7-12 un cuerpo se mueve en una recta con aceleración $a(t)$. Encuentre $v(t)$ y $s(t)$.

7. $a(t) = -5$; $v = 4$ y $s = 2$ cuando $t = 1$
8. $a(t) = 6t$; $v = 0$ y $s = -5$ cuando $t = 2$
9. $a(t) = 3t^2 - 4t + 5$; $v = -3$ y $s = 10$ cuando $t = 0$
10. $a(t) = (t - 1)^2$; $v = 4$ y $s = 6$ cuando $t = 1$
11. $a(t) = 7t^{1/3} - 1$; $v = 50$ y $s = 0$ cuando $t = 8$
12. $a(t) = 100\cos 5t$; $v = -20$ y $s = 15$ cuando $t = \pi/2$

13. El conductor de un automóvil que viaja a una velocidad constante de 88 km/h quita la vista de la carretera durante 2 s. ¿Qué distancia recorre el auto en este tiempo?

14. Se deja caer una pelota (estando en reposo) desde una altura de 144 pie. ¿Cuánto tiempo transcurre para que la pelota choque contra el suelo? ¿A qué velocidad lo hace?

15. Se deja caer un huevo desde lo alto de un edificio y se estrella a los 4 s de ser soltado. ¿Qué altura tiene el edificio?

16. Se deja caer una piedra dentro de un pozo y el impacto con el agua se oye 2 s después. Si la velocidad del sonido en el aire es de 1080 pie/s, encuentre la profundidad del pozo.

17. Una flecha se dispara verticalmente hacia arriba, desde el nivel del suelo, con una velocidad inicial de 24.5 m/s. ¿A qué altura se eleva?

18. ¿A qué altura ascendería la flecha del Problema 17 en el planeta Marte, donde la aceleración de la gravedad es de 3.6 m/s²?

19. Una pelota de golf es lanzada verticalmente hacia arriba, desde el techo de un edificio de 384 pie de altura, con una velocidad inicial de 32 pie/s. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota? ¿En qué instante choca la pelota contra el suelo?

20. En el Problema 19, ¿cuál es la velocidad de la pelota de golf cuando pasa frente a un observador que está en una ventana a 256 pie del suelo?

21. Una persona lanza un malvavisco verticalmente hacia abajo, con una velocidad inicial de 16 pie/s, desde una ventana situada a 102 pie del suelo. Si el malvavisco pega en la cabeza de una persona de 6 pie de estatura, ¿cuál es la velocidad de impacto?

22. La persona golpeada en la cabeza en el Problema 21 sube hasta lo alto de una escalera de 22 pie de altura y lanza una piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad de 96 pie/s. Si la piedra golpea al culpable al nivel de 102 pie, ¿cuál es la velocidad de impacto?

En los Problemas 23-28 un objeto se mueve en una recta según la función de posición dada. Si s se mide en centímetros, encuentre la distancia recorrida por el objeto en el intervalo de tiempo indicado.

23. $s(t) = t^2 - 2t$; $[0, 5]$
24. $s(t) = -t^2 + 4t + 7$; $[0, 6]$
25. $s(t) = t^3 - 3t^2 - 9t$; $[0, 4]$
26. $s(t) = t^4 - 32t^2$; $[1, 5]$
27. $s(t) = 6\,\text{sen}\,\pi t$; $[1, 3]$
28. $s(t) = (t - 3)^2$; $[2, 7]$

Problemas diversos

29. Si un cuerpo se mueve en línea recta con una aceleración constante a, y $v = v_0$ cuando $s = 0$, demuestre que

$$v^2 = v_0^2 + 2as. \quad \left(\textit{Sugerencia: } \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v.\right)$$

30. Demuestre que cuando no se considera la resistencia del aire, un proyectil disparado verticalmente hacia arriba desde el nivel del suelo regresa a él con una rapidez igual a la velocidad inicial v_0.

31. Supóngase que la aceleración de la gravedad en un planeta es la mitad de la que existe en la Tierra. Demuestre que una pelota lanzada verticalmente hacia arriba, desde la superficie del planeta, alcanzaría una altura máxima igual al doble que en la Tierra cuando se emplea la misma velocidad inicial.

32. En el Problema 31, supóngase que la velocidad inicial de la pelota en el planeta es v_0 y que en la Tierra es $2v_0$. Compare las alturas máximas alcanzadas. Determine la velocidad inicial de la pelota en la Tierra (en términos de v_0), de tal suerte que la altura máxima alcanzada sea la misma que en el planeta.

6.9 Trabajo mecánico

En física, cuando una fuerza *constante F* desplaza un objeto una distancia d, en la misma dirección de la fuerza, el trabajo (mecánico) realizado se define como el producto

$$W = Fd. \tag{6.29}$$

Por ejemplo, si una fuerza de 10 lb (libras) mueve un objeto 7 pie en la misma dirección de la fuerza, entonces el trabajo realizado es de 70 pie-libras (o libras-pies).

Unidades

En la tabla siguiente se da una lista de unidades empleadas comúnmente.

Cantidad	*Sistema inglés*	*Sistema MKS (S.I.)*	*Sistema CGS*
Fuerza	libra (lb)	newton (N)	dina
Distancia	pie (pie)	metro (m)	centímetro (cm)
Trabajo	pie-libra (pie • lb)	newton-metro (joule)	dina-centímetro (ergio)

Así que, si una fuerza de 300 N desplaza un objeto 15 m, el trabajo realizado es de 4500 N • m, o 4500 joules (J). Para propósitos de comparación, observamos que

$$1 \text{ N} = 10^5 \text{ dinas} = 0.2247 \text{ lb}$$

$$1 \text{ pie} \cdot \text{lb} = 1.356 \text{ J} = 1.356 \times 10^7 \text{ erg}.$$

Por consiguiente, 70 pie • lb es equivalente a 94.92 J, y 4500 J equivalen a 3318.58 pie • lb.

Ahora bien, si $F(x)$ es una fuerza *variable* continua que actúa a través de un intervalo $[a, b]$, el trabajo no es simplemente un producto como en (6.29). Supóngase que P es la partición

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

y que Δx_k es la longitud del k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Sea x_k^* elegido arbitrariamente en cada subintervalo. Si los números Δx_k son pequeños, se puede considerar como constante la fuerza que actúa sobre cada subintervalo. Por consiguiente, el trabajo realizado de x_{k-1} a x_k está dado por la aproximación

$$\Delta W_k = F(x_k^*)\,\Delta x_k.$$

Así que, una aproximación al trabajo realizado de a a b es

$$F(x_1^*)\,\Delta x_1 + F(x_2^*)\,\Delta x_2 + \cdots + F(x_n^*)\,\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} F(x_k^*)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta W_k.$$

Es natural suponer que el trabajo exacto realizado por F sobre el intervalo es

$$W = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} F(x_k^*)\,\Delta x_k.$$

Se resume la discusión precedente con la definición que sigue.

DEFINICIÓN 6.7

Sea F continua en el intervalo $[a, b]$ y supóngase que $F(x)$ representa la fuerza en un valor x del intervalo. Entonces el trabajo W realizado por la fuerza al mover un objeto de a a b es

$$W = \int_a^b F(x)\,dx. \tag{6.30}$$

□

Nota: Si F es constante, $F(x) = k$ para todo x n el intervalo, entonces (6.30) se convierte en $W = \int_a^b k\,dx = kx]_a^b = k(b - a)$. lo cual es congruente con (6.29).

Problemas con resortes

La ley de Hooke* establece que cuando un resorte se estira (o se comprime) más allá de su longitud natural, la fuerza restauradora elástica ejercida por el resorte es directamente proporcional a la magnitud del alargamiento (o acortamiento) x. De modo que para estirar un resorte x unidades, se necesita la fuerza

$$F(x) = kx, \tag{6.31}$$

en donde k es una constante de proporcionalidad. Véase la Figura 6.46.

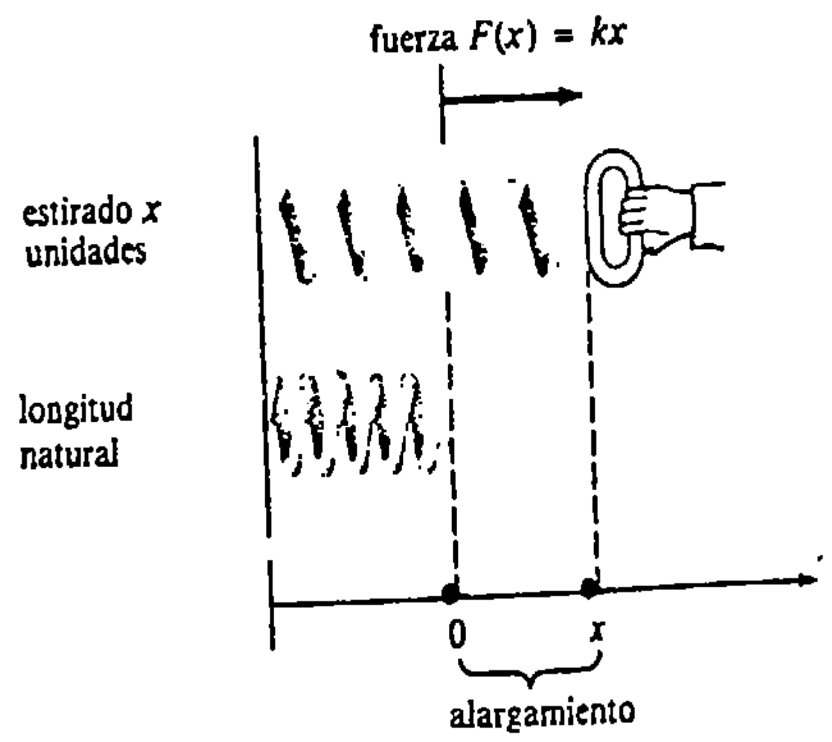


Figura 6.46

* Dada a conocer por el físico inglés Robert Hooke (1635-1703) en 1678.

Ejemplo 1

Se requiere una fuerza de 130 N para estirar un resorte 50 cm. Determinar el trabajo realizado al estirar el resorte 20 cm más allá de su longitud natural (sin estirar).

Solución Cuando una fuerza se mide en newtons, las distancias se expresan comúnmente en metros. Puesto que $x = 50$ cm $= \frac{1}{2}$ m cuando $F = 130$ N, (6.31) se convierte en

$$130 = k\left(\frac{1}{2}\right),$$

lo cual implica que $k = 260$ N/m. Así que, $F = 260x$. Ahora bien, 20 cm $= \frac{1}{5}$ m, de manera que el trabajo realizado al estirar el resorte esta longitud es

$$W = \int_0^{1/5} 260x\,dx = 130x^2\Big]_0^{1/5} = \frac{26}{5} = 5.2 \text{ joules}.$$

Nota: Supóngase que la longitud natural del resorte del Ejemplo 1 es 40 cm. Una manera equivalente de plantear el problema es: encontrar el trabajo realizado al estirar el resorte hasta una longitud de 60 cm. Puesto que el alargamiento es $60 - 40 = 20$ cm $= \frac{1}{5}$ m, se integra $F = 260x$ todavía en el intervalo $[0, \frac{1}{5}]$. Sin embargo, si el problema fuera obtener el trabajo realizado al estirar el mismo resorte de 50 cm a 60 cm, entonces se integraría en el intervalo $[\frac{1}{10}, \frac{1}{5}]$. En esta situación estamos partiendo de una posición en la que el resorte ya está estirado 10 cm ($\frac{1}{10}$m).

Trabajo realizado en contra de la gravedad

En virtud de la ley de la gravitación universal, la fuerza entre un planeta (o luna) de masa m_1 y un cuerpo de masa m_2 está dada por

$$F = k\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{6.32}$$

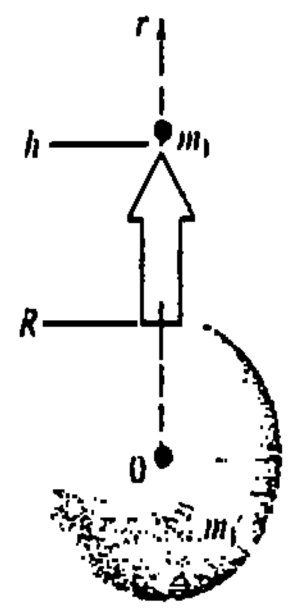


Figura 6.47

en donde k es una constante y r es la distancia del centro del planeta a la masa m_2. Véase la Figura 6.47. El trabajo efectuado al levantar la masa m_2 desde la superficie de un planeta de radio R hasta una altura h, puede obtenerse usando (6.32) en (6.30):

$$W = \int_R^{R+h} k\frac{m_1m_2}{r^2}\,dr = km_1m_2\left(-\frac{1}{r}\right)\Big]_R^{R+h}$$
$$= km_1m_2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right). \tag{6.33}$$

En el sistema métrico (S.I.), $k = 6.67 \times 10^{-11}$ N • m²/kg². Algunas masas y valores de R se dan en la tabla adjunta.

	m_1(kg)	R(m)
Venus	4.9×10^{24}	6.2×10^6
Tierra	6.0×10^{24}	6.4×10^6
Luna	7.3×10^{22}	1.7×10^6
Marte	6.4×10^{22}	3.3×10^6

Ejemplo 2

El trabajo realizado al levantar una carga de 5000 kg desde la superficie de la Tierra hasta una altura de 30,000 m (0.03 × 10⁶ m) resulta de (6.33) y la tabla anterior:

$$W = (6.67 \times 10^{-11})(6.0 \times 10^{24})(5000)\left(\frac{1}{6.4 \times 10^6} - \frac{1}{6.43 \times 10^6}\right)$$
$$\approx 1.46 \times 10^9 \text{ joules.}$$

Problemas de bombas

Cuando un líquido que pesa γ lb por pie cúbico, por ejemplo, es bombeado desde un depósito, el trabajo realizado al mover un volumen fijo, o una lámina del líquido, d pies en dirección vertical es

$$\begin{aligned} W &= (\text{fuerza}) \cdot (\text{distancia}) \\ &= (\text{peso por unidad de volumen}) \cdot (\text{volumen}) \cdot (\text{distancia}) \\ &= \gamma \cdot (\text{volumen}) \cdot d. \end{aligned} \tag{6.34}$$

En física a la cantidad γ se la llama peso específico del líquido. Para el agua, $\gamma = 62.4$ lb/pie³, o bien, 9800 N/m³.

Ejemplo 3

Un depósito hemisférico de 20 pie de radio está lleno con agua hasta una profundidad de 15 pie. Determinar el trabajo realizado al bombear toda el agua hasta la parte superior del depósito.

Solución Como se muestra en la Figura 6.48, supóngase que el eje x positivo está dirigido *hacia abajo* y que el origen está en el centro del hemisferio. Como la sección transversal del depósito es un semicírculo, x y y están relacionadas por $x^2 + y^2 = (20)^2$, $0 \le x \le 20$. Supóngase ahora que el subintervalo [5, 20] se parte en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de longitud Δx_k. Sea x_k^* un punto cualquiera en el k-ésimo subintervalo y denotemos por ΔW_k a una aproximación al trabajo realizado por la bomba al elevar una lámina de agua de espesor Δx_k hasta la parte superior del depósito. De (6.34) resulta que

$$\Delta W_k = \underbrace{(62.4\pi(y_k^*)^2\,\Delta x_k)}_{\text{fuerza}} \cdot \underbrace{x_k^*}_{\text{distancia}},$$

en donde $(y_k^*)^2 = 400 - (x_k^*)^2$. Por consiguiente, el trabajo realizado por la bomba es aproximadamente

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta W_k = \sum_{k=1}^{n} 62.4\pi[400 - (x_k^*)^2]x_k^*\,\Delta x_k.$$

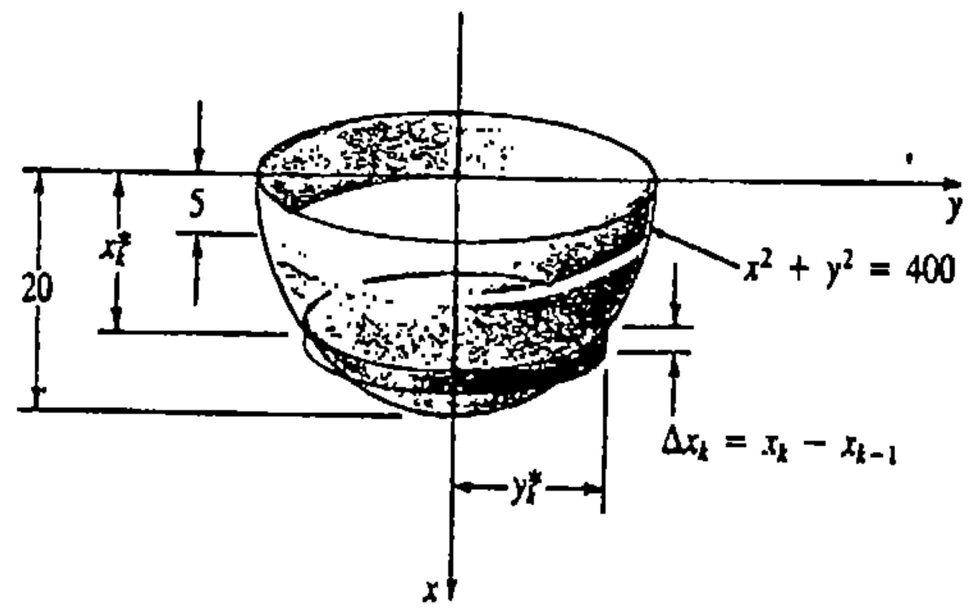


Figura 6.48

El trabajo efectuado al bombear toda el agua a la parte superior del depósito es el límite de esta última expresión cuando $\|P\| \to 0$; esto es,

$$W = \int_5^{20} 62.4\pi(400 - x^2)x\,dx = 62.4\pi\left[200x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_5^{20}$$
$$= (62.4\pi)(35,156.25) \approx 6,891,869 \text{ pie} \cdot \text{lb}$$

Vale la pena proseguir el análisis del ejemplo precedente si se hubiera tomado la dirección positiva del eje x *hacia arriba* y el origen estuviera en el centro del fondo del depósito.

Ejemplo 4

Solución alternativa al Ejemplo 3 Con los ejes tal como se muestran en la Figura 6.49 puede verse que la lámina de agua debe ser elevada una distancia de $20 - x_k^*$ pie. Pero como el centro del semicírculo está en (20, 0), ahora x y y están relacionadas por $(x - 20)^2 + y^2 = 400$. Por consiguiente,

$$\Delta W_k = \underbrace{(62.4\pi(y_k^*)^2\,\Delta x_k)}_{\text{fuerza}} \cdot \underbrace{(20 - x_k^*)}_{\text{distancia}}$$
$$= 62.4\pi[400 - (x - 20)^2](20 - x_k^*)\,\Delta x_k$$

y

$$W = 62.4\pi \int_0^{15} [400 - (x - 20)^2](20 - x)\, dx$$

$$= 62.4\pi \int_0^{15} (x^3 - 60x^2 + 800x)\, dx$$

Obsérvense los nuevos límites de integración. El lector debe verificar que el valor de W en este caso es igual que en el Ejemplo 3.

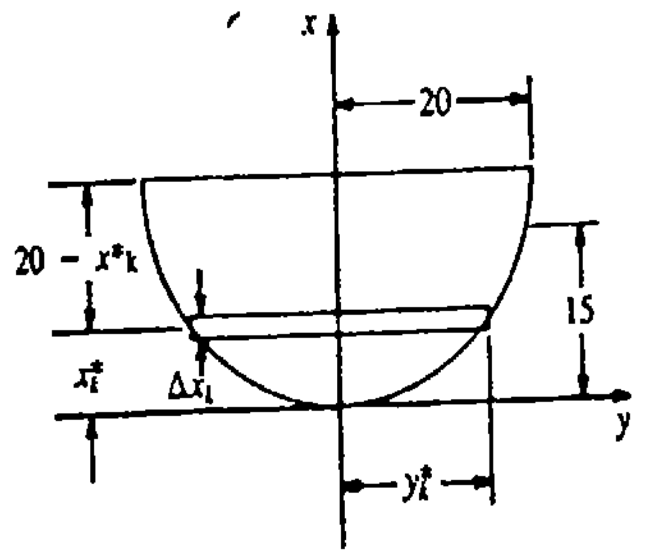


Figura 6.49

Ejercicios 6.9

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 979.

1. Encuentre el trabajo realizado cuando una fuerza de 55 lb mueve un objeto 20 yardas en la misma dirección de la fuerza.

2. Una fuerza de 100 N es aplicada a un objeto a un ángulo de 30°, medido a partir de la horizontal. Si el objeto se mueve 8 m horizontalmente, encuentre el trabajo efectuado por la fuerza.

3. En 1977 George Willig, quien pesaba 165 lb, escaló el exterior del edificio World Trade Center en la ciudad de Nueva York hasta una altura de 1350 pie, en 3.5 horas, a razón de 6.4 pie/min. ¿Cuánto vale el trabajo realizado por George?

4. Una persona empuja contra una pared fija, con una fuerza horizontal de 75 lb. ¿Cuánto vale el trabajo realizado?

5. Una masa que pesa 10 lb estira un resorte $\frac{1}{2}$ pie. ¿Qué tanto estirará al mismo resorte una masa que pesa 8 lb?

6. Un resorte tiene una longitud natural de 0.5 m. Una fuerza de 50 N estira el resorte a una longitud de 0.6 m.

   (a) ¿Qué fuerza es necesaria para estirar el resorte x metros?

   (b) ¿Qué fuerza se requiere para estirar el resorte a una longitud de 1 m?

   (c) ¿Qué longitud tiene el resorte cuando es estirado por una fuerza de 200 N?

7. En el Problema 6,

   (a) Obtenga el trabajo realizado al estirar el resorte 0.2 m.

   (b) Determine el trabajo realizado al estirar el resorte de una longitud de 1 m a 1.1 m.

8. Se requiere una fuerza de $F = \frac{3}{2}x$ lb para estirar un resorte de 10 plg una distancia de x pulgadas adicionales.

   (a) Encuentre el trabajo realizado al estirar el resorte a una longitud de 16 plg.

   (b) Obtenga el trabajo realizado al estirar el resorte 16 plg.

9. Una masa que pesa 10 lb está suspendida de un resorte de 2 pie. El resorte es estirado 8 plg y luego se quita la masa.

   (a) Encuentre el trabajo realizado al estirar el resorte a una longitud de 3 pie.

   (b) Halle el trabajo realizado al estirar el resorte de una longitud de 4 pie a una de 5 pie.

10. Una fuerza de 50 lb acorta en 3 plg a un resorte de 15 plg de longitud. Encuentre el trabajo realizado al acortar el resorte a una longitud final de 5 plg.

11. Calcule el trabajo realizado al elevar una masa de 10,000 kg desde la superficie terrestre hasta una altura de 500 km.

12. Encuentre el trabajo realizado al elevar una masa de 50,000 kg desde la superficie de la Luna hasta una altura de 200 km.

13. Un depósito cilíndrico recto de 12 pie de altura y 3 pie de radio está lleno de agua. Encuentre el trabajo realizado al bombear toda el agua hasta la parte superior del depósito.

14. Un depósito con forma de cono circular recto, con su vértice hacia abajo, está lleno de agua a la mitad de su capacidad. Si su altura es de 20 pie y su diámetro de 8 pie, encuentre el trabajo realizado al bombear toda el agua hasta la parte superior del depósito. (*Sugerencia:* suponga que el origen está en el vértice del cono.)

15. Con referencia al depósito del Problema 14, encuentre el trabajo al bombear toda el agua hasta un punto situado a 5 pie sobre la parte superior del depósito.

16. Un depósito horizontal con secciones transversales semicirculares contiene aceite que pesa 80 lb/pie³. El depósito tiene 10 pie de diámetro y 25 pie de longitud. Si su profundidad es de 3 pie, determine el trabajo realizado al bombear todo el aceite a la parte superior del depósito.

17. Un depósito tiene secciones transversales en forma de triángulos isósceles con el vértice hacia abajo. La parte superior del depósito tiene 6 pie de ancho, su altura es de 4 pie y su longitud, de 10 pie. Determine el trabajo realizado al llenar el depósito, a través de un orificio en su fondo, mediante una bomba localizada a 5 pie por debajo de su vértice.

18. Una cadena de ancla de 100 pie, que pesa 20 lb/pie, cuelga verticalmente sobre el costado de un barco. ¿Cuánto trabajo se realiza al tirar 40 pie de la cadena?

19. Una cubeta que contiene inicialmente 20 pie³ de agua es levantada verticalmente desde el nivel del suelo. Si el agua se escapa a razón de $\frac{1}{2}$ pie³ por pie de distancia vertical, halle el trabajo realizado al levantar la cubeta hasta la altura en la que quede vacía.

20. La fuerza de atracción entre un electrón y el núcleo de un átomo es inversamente proporcional al cuadrado de su distancia. Si la distancia inicial entre ellos es de 1 unidad, calcule el trabajo realizado por una fuerza externa que aleja al electrón a una distancia que es 4 veces la distancia inicial.

21. Un cohete que pesa 2,500,000 lb cargado de combustible, lleva un transbordador espacial de 200,000 lb. Suponga que en las primeras etapas del lanzamiento el cohete consume el combustible a razón de 100 lb por pie.

   (a) Exprese el peso total del sistema en términos de su altitud sobre la superficie terrestre. Véase la Figura 6.50.

   (b) Calcule el trabajo que se realiza al elevar el sistema a una altitud de 1000 pie.

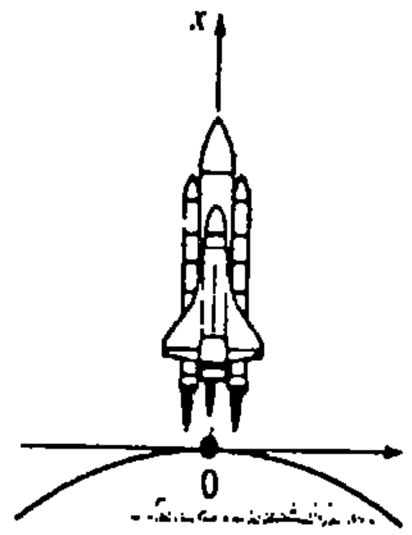


Figura 6.50

22. En termodinámica, si un gas encerrado en un cilindro se dilata contra un pistón, de tal manera que el volumen del gas varía de v_1 a v_2, entonces el trabajo que se realiza sobre el citado pistón está dado por $W = \int_{v_1}^{v_2} p\, dv$, en donde p es la presión (fuerza por unidad de área). En una expansión adiabática* de un gas ideal, la presión y el volumen están relacionados por $pv^\gamma = k$, en donde γ y k son constantes. Cuando $\gamma \neq 1$, demuestra que

$$W = \frac{p_2v_2 - p_1v_1}{1 - \gamma}.$$

Problemas diversos

23. Una fuerza horizontal F mueve un cuerpo de masa m de un punto x_1 a un punto x_2 sobre una superficie sin rozamiento, como se muestra en la Figura 6.51. En tales puntos el cuerpo se mueve con velocidades respectivas v_1 y v_2, en donde $v_2 > v_1$. Demuestre que

* Esto significa que no entra ni sale calor del sistema.

el trabajo realizado por la fuerza es igual al aumento de la energía cinética

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2.$$

(*Sugerencia:* aplique la segunda ley de Newton $F = ma$, y exprese la aceleración a en términos de la velocidad v).

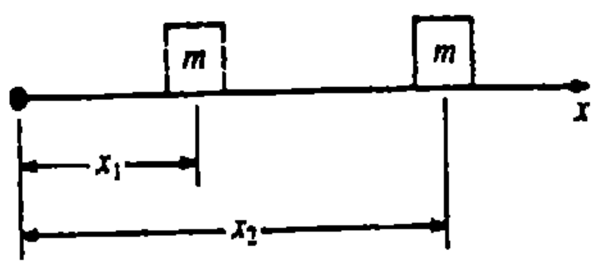


Figura 6.51

24. Demuestre que cuando un cuerpo de peso mg es levantado verticalmente de un punto y_1 a un punto y_2, siendo $y_2 > y_1$, el trabajo efectuado es igual al cambio de la energía potencial $W = mg\,y_2 - mg\,y_1$.

Problemas para calculadora

25. (a) Utilice (6.33) a fin de demostrar que el trabajo requerido para elevar una masa m_2 hasta un punto a una "distancia infinita" de la superficie del planeta es $W = km_1m_2/R$.

(b) Si a la masa m_2 se le imparte una velocidad v_0 en la superficie del planeta para permitirle alcanzar una "distancia infinita" respecto a la superficie de éste, entonces se debe tener que

$$\frac{1}{2}m_2v_0^2 = k\frac{m_1m_2}{R}.$$

Utilice esta relación para encontrar la "velocidad de escape" v_0 respecto de cualquier planeta. Use los datos de la tabla de la página 350 para obtener v_0 en el caso de la Tierra y del planeta Marte.

26. En la Figura 6.52 se presenta la gráfica de una fuerza variable F. Usando elementos rectangulares de área, halle una aproximación al trabajo realizado al mover una partícula de $x = 1$ a $x = 5$. Aplique luego la regla trapecial.

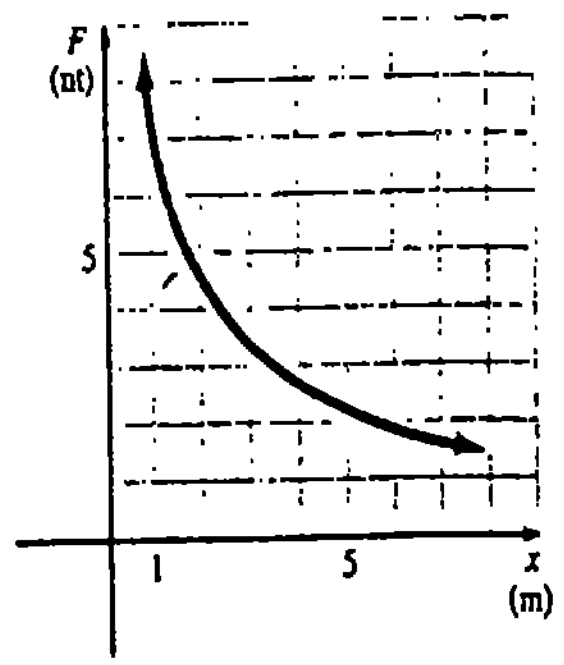


Figura 6.52

27. Una fuerza variable continua $F(x)$ actúa en el intervalo [0, 1], en donde F se mide en newtons y x en metros. Se determina que

x(m)	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$F(x)$(N)	0	50	90	150	210	260

Aplique una técnica numérica apropiada para aproximar el trabajo realizado en el intervalo.

6.10 Presión hidrostática

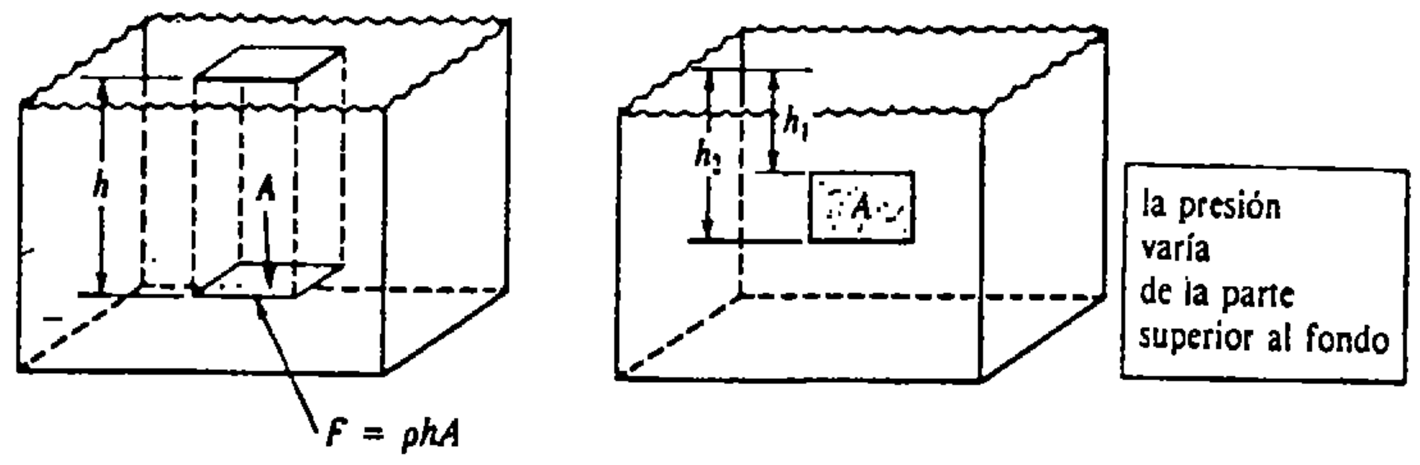
Cuando una superficie plana *horizontal* se sumerge en el seno de un líquido, la fuerza sobre la superficie está dada por

$$\begin{aligned} F &= (\text{presión del líquido}) \cdot (\text{área de la superficie}) \\ &= (\text{fuerza por unidad de área}) \cdot (\text{área de la superficie}) \qquad (6.35) \end{aligned}$$

Si γ es el peso específico del líquido (peso por unidad de volumen) y A es el área de la placa horizontal sumergida a una profundidad h, como se muestra en la Figura 6.53(a), entonces 6.35 es igual a

$$\begin{aligned} F &= (\text{peso por unidad de volumen}) \cdot (\text{profundidad}) \cdot (\text{área de la superficie}) \\ &= \gamma hA. \qquad (6.36) \end{aligned}$$

Sin embargo, cuando una superficie plana *vertical* se sumerge, la presión hidrostática varía con la profundidad. Véase la Figura 6.53(b). Por ejemplo, la presión hidrostática sobre un dique vertical es menor en la parte superior que en su base.



(a) plano horizontal (b) plano vertical

Figura 6.53

Ejemplo 1

Una placa rectangular plana con dimensiones de 5 pie × 6 pie se sumerge horizontalmente en agua hasta una profundidad de 10 pie. Determinar la presión y la fuerza sobre la placa.

Solución Recuérdese que el peso específico del agua es de 62.4 lb/pie³. Por consiguiente,

$$\text{presión} = \rho h = 62.4(10) = 624 \text{ lb/pie}^2.$$

Puesto que el área de la superficie de la placa es de 30 pie², de (6.36) resulta que la fuerza sobre la placa es

$$F = 624(30) = 18{,}720 \text{ lb}.$$

Para determinar la fuerza total F sobre una superficie plana sumergida verticalmente, se emplea una de las formas del principio de Pascal:*

La presión ejercida por un líquido a una profundidad h es la misma en todas las direcciones.

De esta manera, si un recipiente grande con un fondo plano y paredes verticales está lleno con agua hasta una profundidad de 10 pie, la presión de 624 lb/pie² en su fondo se aplica igualmente a las paredes.

Supóngase ahora que una placa plana vertical, limitada por las rectas horizontales $x = a$ y $x = b$ y las gráficas de $y = f(x)$ y $y = g(x)$, se sumerge en un líquido como

* Blaise Pascal (1623-1662), matemático, científico y filósofo francés.

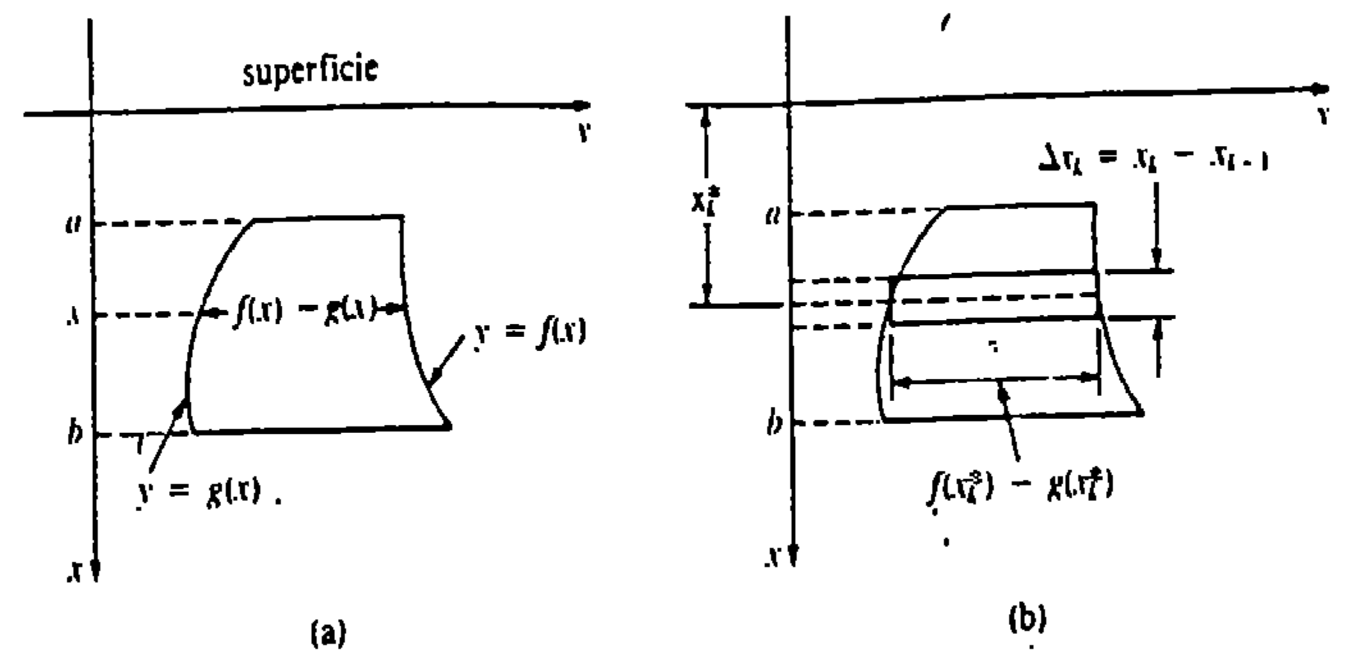


Figura 6.54

se muestra en la Figura 6.54. Denótese por $f(x) - g(x)$ a la anchura de la placa en cualquier punto x de $[a, b]$ y sea P cualquier partición del intervalo. Si x_k^* es un punto cualquiera en el k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, de (6.36) concluimos que la fuerza debida a la presión hidrostática sobre el elemento rectangular correspondiente está aproximada por

$$\Delta F_k = \gamma \cdot x_k^* \cdot [f(x_k^*) - g(x_k^*)]\, \Delta x_k,$$

en donde, como antes, γ denota el peso específico del líquido. De este modo, una aproximación a la fuerza sobre la placa completa es

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta F_k = \sum_{k=1}^{n} \gamma x_k^* [f(x_k^*) - g(x_k^*)]\, \Delta x_k.$$

Esto sugiere que la fuerza total es

$$F = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \gamma x_k^* [f(x_k^*) - g(x_k^*)]\, \Delta x_k.$$

DEFINICIÓN 6.8

Sea γ el peso específico de un fluido y sean f y g funciones continuas en $[a, b]$. La fuerza F ejercida por el fluido sobre la placa sumergida de la Figura 6.54 está dada por

$$F = \int_a^b \rho x [f(x) - g(x)]\, dx. \qquad \square$$

Ejemplo 2

Una placa en forma de triángulo isósceles de 3 pie de altura y de 4 pie de ancho se sumerge verticalmente, con su base hacia abajo y a 5 pie de la superficie del agua. Encontrar la fuerza causada por la presión hidrostática en la placa.

Solución Por conveniencia, se coloca el eje x positivo a lo largo del eje de simetría de la placa triangular, con el origen en la superficie del agua. Como se indica en la Figura 6.55, se parte el intervalo $[2, 5]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ y se elige un punto

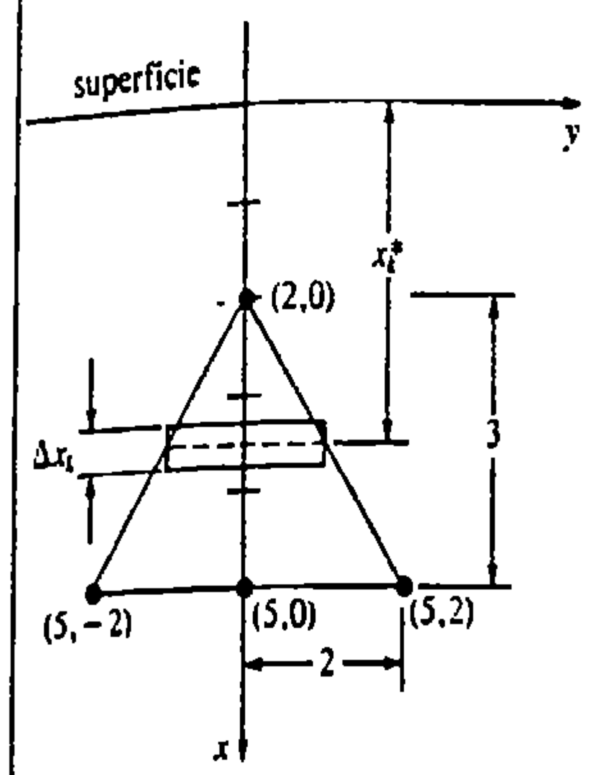


Figura 6.55

x_k^* en cada subintervalo. Puesto que la ecuación de la recta que contiene a los puntos $(2, 0)$ y $(5, 2)$ es

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3},$$

se concluye por la simetría que la anchura del elemento rectangular que se muestra en la Figura 6.55 es

$$2y_k^* = 2\left(\frac{2}{3}x_k^* - \frac{4}{3}\right).$$

Ahora bien, $\rho = 62.4$ lb/pie³, de manera que la fuerza sobre aquella porción de la placa que corresponde al k-ésimo subintervalo es aproximada por

$$\Delta F_k = (62.4) \cdot x_k^* \cdot 2\left(\frac{2}{3}x_k^* - \frac{4}{3}\right) \Delta x_k.$$

Formando la sumatoria $\sum_{k=1}^{n} \Delta F_k$ pasando al límite cuando $\|P\| \to 0$ resulta que

$$\begin{aligned} F &= \int_2^5 (62.4)2x\left(\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}\right) dx \\ &= 124.8 \int_2^5 \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x\right) dx \\ &= 124.8\left[\frac{2}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^2\right]_2^5 \\ &= 124.8\left(\frac{108}{9}\right) \approx 1497.6 \text{ lb.} \end{aligned}$$

Ejercicios 6.10

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 979.

1. Considere los depósitos de fondo circular que se muestran en la Figura 6.56. Cada uno está lleno de agua cuyo peso específico es de 9800 N/m³. Encuentre la presión y la fuerza sobre el fondo de cada depósito.

2. Una piscina en forma de un paralelepípedo rectangular tiene dimensiones de 30 pie × 15 pie × 9 pie. Encuentre la presión y la fuerza ejercidas sobre el fondo plano, si la piscina está llena con agua hasta una profundidad de 8 pie. Véase la Figura 6.57.

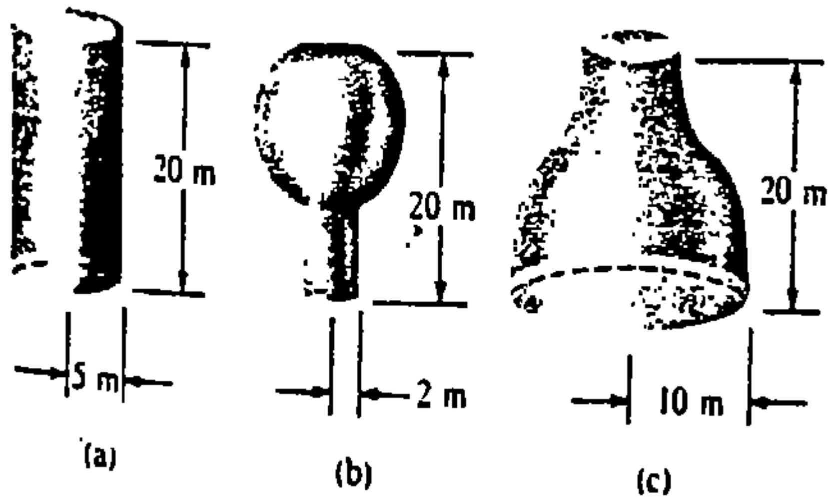


Figura 6.56

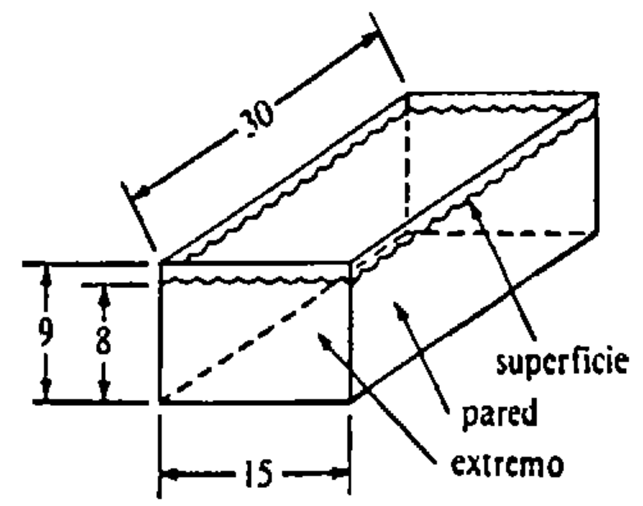


Figura 6.57

3. Respecto a la piscina del Problema 2, encuentre la fuerza ejercida por el agua sobre una de las paredes laterales y sobre uno de los extremos verticales. Véase la Figura 6.57.

4. Una placa en forma de triángulo equilátero, de $\sqrt{3}$ pie de lado, se sumerge verticalmente, con su base hacia abajo y con su vértice a 1 pie bajo la superficie del agua. Encuentre la fuerza causada por la presión hidrostática sobre la placa.

5. Encuentre la fuerza sobre la placa del Problema 4, si ésta se suspende con su base hacia arriba y a 1 pie bajo la superficie del agua.

6. Una placa triangular se sumerge verticalmente en agua como se muestra en la Figura 6.58. Calcule la fuerza causada por la presión hidrostática sobre la placa.

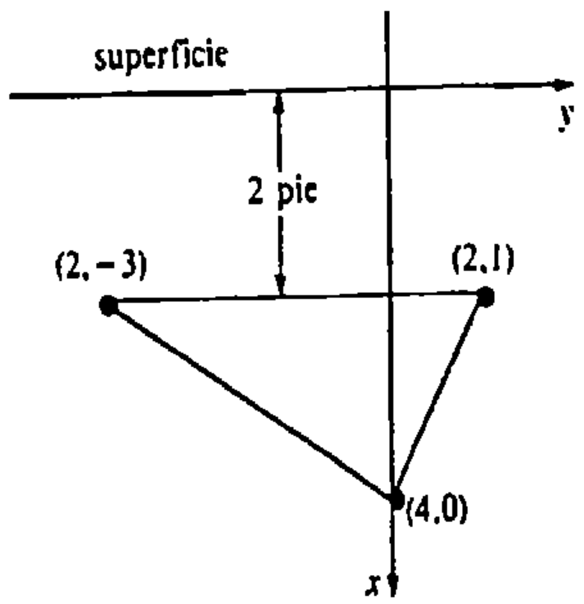


Figura 6.58

7. Suponiendo que el eje x positivo está hacia abajo, una placa limitada por la parábola $x = y^2$ y la recta $x = 4$, se sumerge verticalmente en aceite que tiene peso específico 50 lb/pie³. Si el vértice de la parábola está en la superficie, encuentre la fuerza causada por la presión hidrostática sobre la placa.

8. Suponiendo que el eje x positivo está hacia abajo, una placa limitada por la parábola $x = y^2$ y la recta $y = -x + 2$ se sumerge verticalmente en agua. Si el vértice de la parábola está en la superficie, encuentre la fuerza causada por la presión hidrostática sobre la placa.

9. Un abrevadero lleno de agua tiene extremos verticales en forma de trapecios, como se muestra en la Figura 6.59. Encuentre la fuerza debida a la presión hidrostática sobre uno de esos extremos.

10. Un abrevadero lleno de agua tiene extremos verticales de la forma que se muestra en la Figura 6.60. Encuentre la fuerza ejercida por el agua sobre uno de esos extremos.

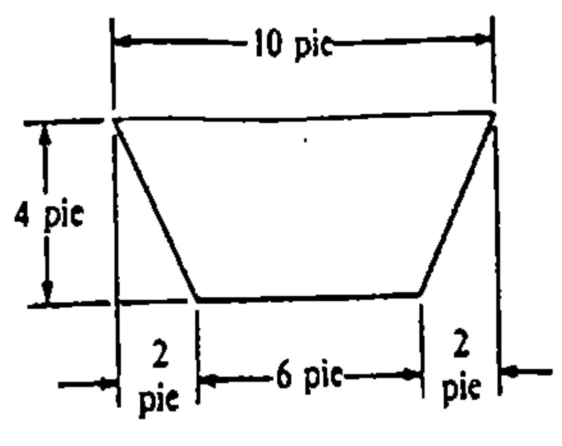


Figura 6.59

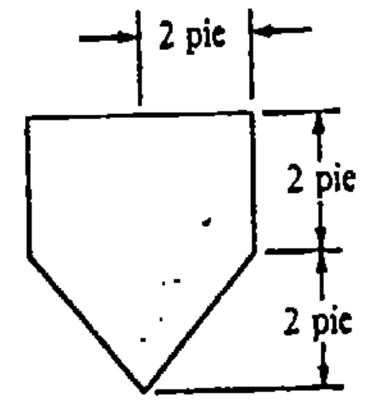


Figura 6.60

11. Un extremo vertical de una piscina llena tiene la forma dada en la Figura 6.61. Encuentre la fuerza ejercida por la presión hidrostática sobre este extremo.

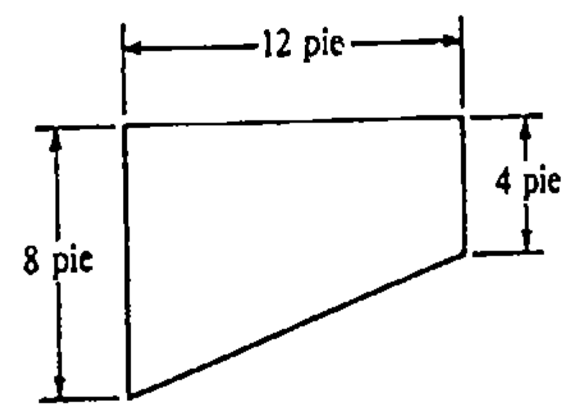


Figura 6.61

12. Un depósito en forma de cilindro circular recto de diámetro 10 pie reposa sobre su costado. El depósito está lleno hasta la mitad con aceite que tiene un peso específico de 60 lb/pie³. Encuentre la fuerza ejercida por el aceite sobre uno de los extremos del depósito.

13. Una placa circular de radio igual a 4 pie se sumerge verticalmente de manera que su centro queda a 10 pie bajo la superficie del agua. Halle la fuerza ejercida por el agua sobre la placa. (*Sugerencia:* para simplificar, considere el origen en el centro de la placa y el eje x positivo hacia abajo.)

14. Un depósito, cuyos extremos son de la forma de la elipse $x^2/4 + y^2/9 = 1$, se sumerge en un líquido que tiene peso específico γ, de manera que las placas de los extremos quedan verticales. Encuentre la fuerza causada por la presión hidrostática sobre uno de los extremos, si su centro está a 10 pie bajo la superficie del líquido. (*Sugerencia:* proceda como en el Problema 13 y aplique el hecho de que el área de una elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ es πab.)

Problemas diversos

15. Considere la piscina rectangular que se muestra en la Figura 6.62(a) cuyos extremos son trapecios. La piscina está llena de agua. Tomando el eje x positivo como se muestra en la Figura 6.62(b), calcule la fuerza ejercida por el agua sobre el fondo de la piscina. (*Sugerencia:* exprese la profundidad d en términos de x.)

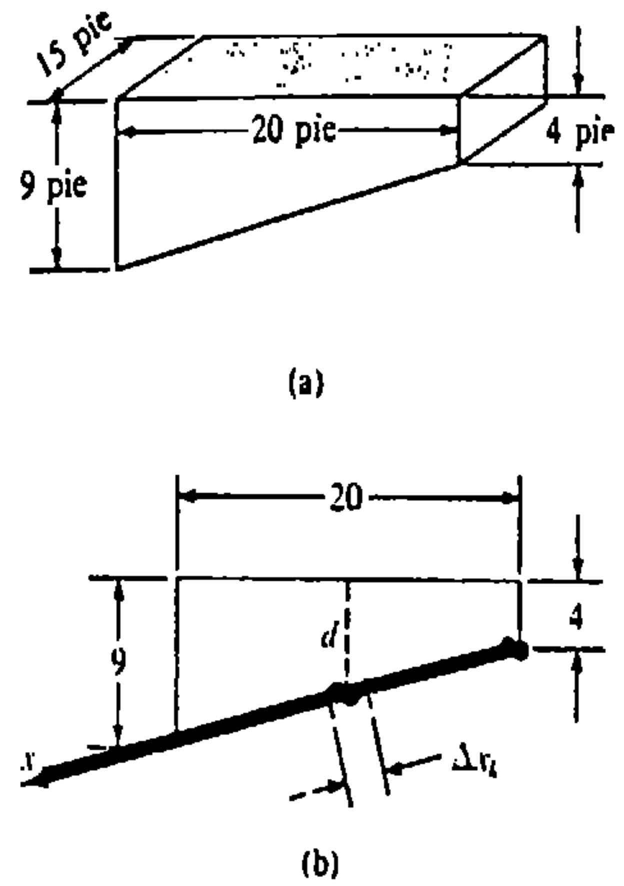


Figura 6.62

16. Se construye un dique de tierra con las dimensiones que se muestran en la Figura 6.63(a). Tomando el eje x positivo como se muestra en la Figura 6.63(b), encuentre la fuerza ejercida por el agua sobre la pared inclinada del dique.

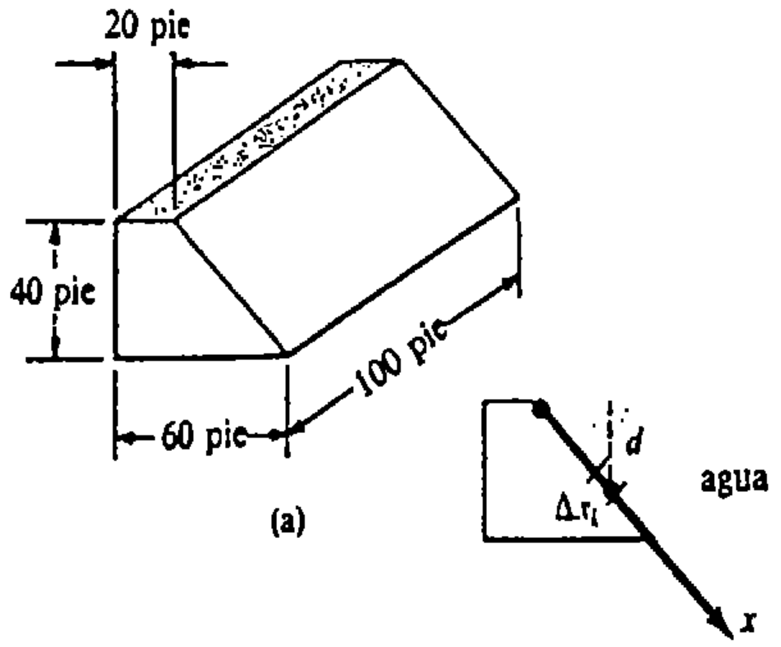


Figura 6.63 (b)

17. Analice el Problema 16 con el eje x positivo que se muestra en la Figura 6.64.

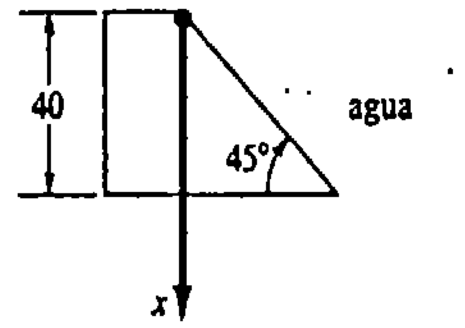


Figura 6.64

18. Un bloque sólido en forma de cubo, de 2 pie de lado, se sumerge en un gran depósito de agua. La cara superior del bloque está en posición horizontal a 3 pie bajo la superficie del agua. Halle la fuerza total (en las seis caras) causada por la presión hidrostática en el bloque.

6.11 Centro de masa de una barra o varilla

Momento y masa

Si x denota la distancia dirigida del origen O a una masa m, como se muestra en la Figura 6.65, se dice que el producto mx es el **momento de la masa*** con respecto al origen. En la tabla siguiente se indican algunas unidades.

* También se le llama *momento de masa*, específicamente.

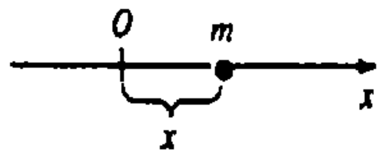


Figura 6.65

Cantidad	Sistema Inglés	Sistema MKS (S.I.)	Sistema CGS
Masa	slug	kilogramo (kg)	gramo (g)
Momento de masa	slug • pie	kilogramo-metro	gramo-centímetro

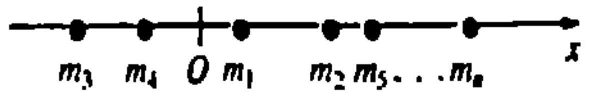


Figura 6.66

Ahora bien, para n masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$, a las distancias dirigidas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, respectivamente de O, como en la Figura 6.66, se dice que

$$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n = \sum_{k=1}^{n} m_k$$

es la **masa total del sistema**, y que

$$M_O = m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n = \sum_{k=1}^{n} m_kx_k$$

es el **momento del sistema con respecto al origen**. Si

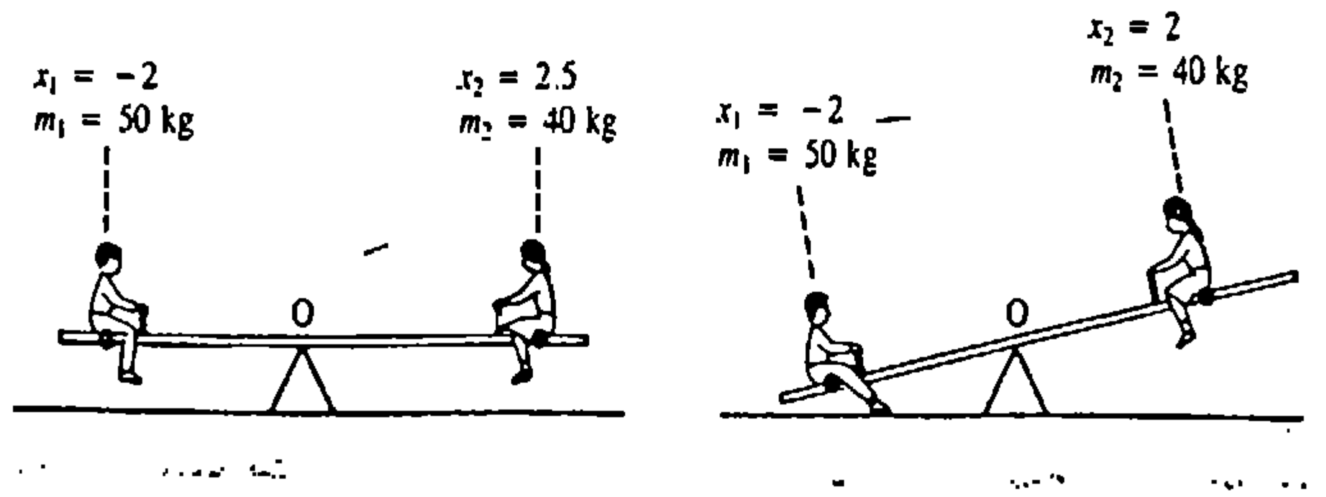
$$\sum_{k=1}^{n} m_kx_k = 0,$$

se dice que el sistema está en **equilibrio**. Véase la Figura 6.67. Si el sistema de masas de la Figura 6.66 no está en equilibrio, hay un punto P con coordenada $\bar{x}$ tal que

$$\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - \bar{x}) = 0 \quad \text{o bien} \quad \sum_{k=1}^{n} m_kx_k - \bar{x}\sum_{k=1}^{n} m_k = 0.$$

Despejando $\bar{x}$ resulta

$$\bar{x} = \frac{M_O}{m} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_kx_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}. \tag{6.37}$$



(a) balancín (subibaja) en equilibrio puesto que $m_1x_1 + m_2x_2 = 0$

(b) balancín (subibaja) en desequilibrio puesto que $m_1x_1 + m_2x_2 \neq 0$

Figura 6.67

Al punto con coordenada $\bar{x}$ se le llama **centro de masa** (o **centro de gravedad**) del sistema.*

Puesto que (6.37) implica que

$$\bar{x}\left(\sum_{k=1}^{n} m_k\right) = \sum_{k=1}^{n} m_kx_k,$$

resulta que $\bar{x}$ es la distancia dirigida del origen a un punto en el que puede considerarse que está concentrada la masa total del sistema.

Ejemplo 1

Tres cuerpos, de masas 4 kg, 6 kg y 10 kg, se localizan en $x_1 = -2$, $x_2 = 4$ y $x_3 = 9$, respectivamente. Las distancias se miden en metros. Localizar el centro de masa.

Solución En virtud de (6.37)

$$\bar{x} = \frac{4 \cdot (-2) + 6 \cdot 4 + 10 \cdot 9}{4 + 6 + 10} = \frac{106}{20} = 5.3.$$

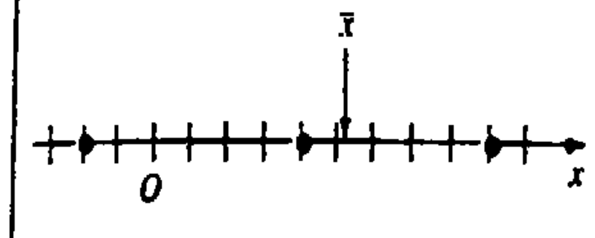


Figura 6.68

La Figura 6.68 muestra que el centro de masa está a 5.3 m a la derecha del origen.

Varilla con densidad variable

Considérese ahora el problema de situar el centro de masa de una varilla de longitud L que tiene una **densidad lineal variable** ρ. Se supone que la varilla coincide con el eje x en el intervalo $[0, L]$, como se muestra en la Figura 6.69, y que la densidad es una función continua $\rho(x)$ medida en slugs/pie, kg/m o g/cm. Luego de formar una partición P del intervalo, se elige un punto x_k^* en $[x_{k-1}, x_k]$. El número

$$\Delta m_k = \rho(x_k^*)\,\Delta x_k$$

es una aproximación a la masa de la porción de la varilla sobre el subintervalo. También, el momento de este elemento de masa con respecto al origen es aproximado por

$$(\Delta M_O)_k = x_k^*\rho(x_k^*)\,\Delta x_k.$$

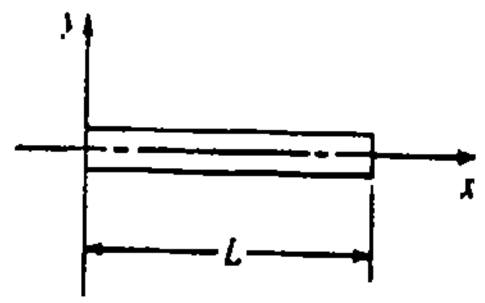


Figura 6.69

* En un sistema en el cual la aceleración de la gravedad varía de masa a masa, el centro de gravedad no es lo mismo que el centro de masa.

Por consiguiente, concluimos que

$$m = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(x_k^*)\,\Delta x_k = \int_0^L \rho(x)\,dx$$

y

$$M_O = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} x_k^* \rho(x_k^*)\,\Delta x_k = \int_0^L x\rho(x)dx$$

son la masa de la varilla y su momento con respecto al origen, respectivamente. Luego resulta de $\bar{x} = M_O/m$ que el centro de masa de la varilla está dado por

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L x\rho(x)\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx}. \tag{6.38}$$

Obsérvese la semejanza entre (6.38) y (6.37). Como se muestra en la Figura 6.70, una varilla suspendida por una cuerda fija a su centro de masa quedará colgada en perfecto equilibrio.

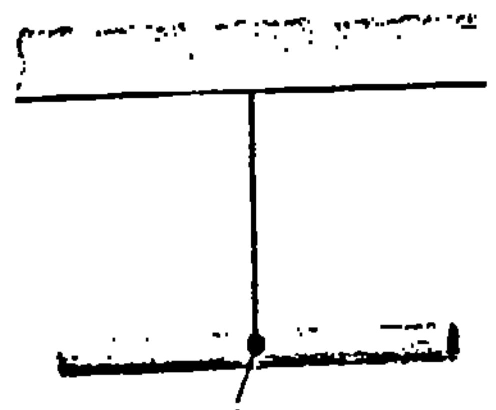


Figura 6.70

Ejemplo 2

Demostrar que si una varilla tiene densidad lineal constante, entonces el centro de masa se encuentra en su centro geométrico.

Solución Denótese por L la longitud de la varilla y sea $\rho = k$ (kg/m) la densidad. Su masa en kilogramos es

$$m = \int_0^L k\,dx = kx\Big]_0^L = kL$$

y su momento con respecto al origen en kg • m es

$$M_O = \int_0^L kx\,dx = \frac{k}{2}x^2\Big]_0^L = \frac{k}{2}L^2.$$

Así que, en virtud de (6.38), se tiene que

$$\bar{x} = \frac{\frac{k}{2}L^2}{kL} = \frac{L}{2}.$$

Ejemplo 3

Una varilla de 16 cm de longitud tiene una densidad lineal (en g/cm) dada por $\rho(x) = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 16$. Situar su centro de masa.

Solución La masa de la varilla (en gramos) es

$$m = \int_0^{16} x^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big]_0^{16} = \frac{128}{3}.$$

El momento respecto al origen (en g • cm) es

$$M_O = \int_0^{16} x \cdot x^{1/2}\,dx = \int_0^{16} x^{3/2}\,dx$$
$$= \frac{2}{5}x^{5/2}\Big]_0^{16} = \frac{2048}{5}.$$

En virtud de (6.38) se tiene que

$$\bar{x} = \frac{2048/5}{128/3} = 9.6.$$

Esto es, el centro de masa de la varilla está a 9.6 cm del extremo izquierdo de la varilla, el cual coincide con el origen.

Ejercicios 6.11

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 979.

En los Problemas 1-4, encuentre el centro de masa del sistema de masas dado. La masa m_k se localiza en el eje x en un punto cuya distancia dirigida desde el origen es x_k. Supóngase que la masa se mide en gramos y la distancia en centímetros.

1. $m_1 = 2$, $m_2 = 5$; $x_1 = 4$, $x_2 = -2$

2. $m_1 = 6$, $m_2 = 1$, $m_3 = 3$; $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = -3$, $x_3 = 8$

3. $m_1 = 10$, $m_2 = 5$, $m_3 = 8$, $m_4 = 7$; $x_1 = -5$, $x_2 = 2$, $x_3 = 6$, $x_4 = -3$

4. $m_1 = 2$, $m_2 = \frac{3}{2}$, $m_3 = \frac{7}{2}$, $m_4 = \frac{1}{2}$; $x_1 = 9$, $x_2 = -4$, $x_3 = -6$, $x_4 = -10$

5. Dos masas están situadas en los extremos de una tabla uniforme de masa despreciable, como se muestra en la Figura 6.71. ¿En dónde debe situarse el punto de apoyo, de manera que el sistema esté en equilibrio? (*Sugerencia:* aunque el origen puede situarse dondequiera, acordemos elegirlo en el punto medio entre las masas.)

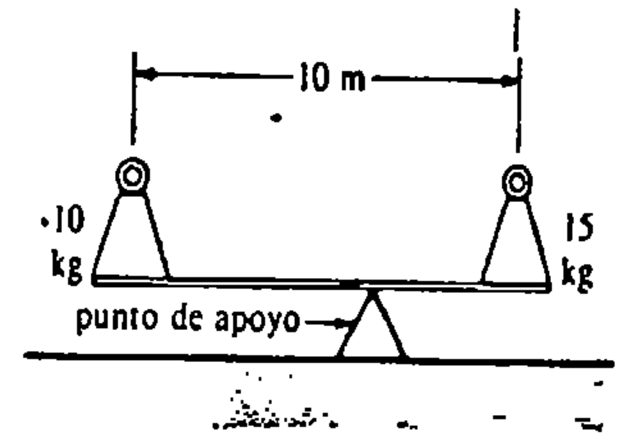


Figura 6.71

6. Una barra metálica uniforme, de masa igual a 4 kg y longitud 2 m, soporta dos masas, como se muestra en la Figura 6.72. ¿En dónde debe sujetar el alambre a la barra, de manera que el sistema cuelgue en equilibrio?

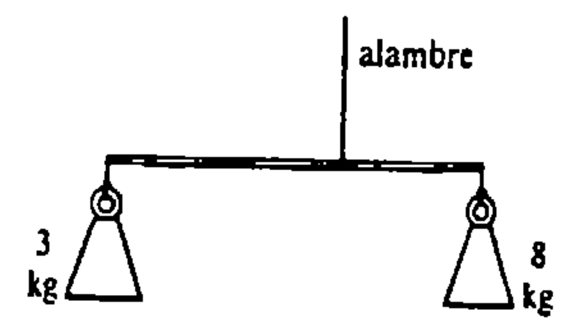


Figura 6.72

En los Problemas 7-14, una varilla con densidad lineal $\rho(x)$ kg/m coincide con el eje x en el intervalo indicado. Encuentre su centro de masa.

7. $\rho(x) = 2x + 1$; $[0, 5]$

8. $\rho(x) = -x^2 + 2x$; $[0, 2]$

9. $\rho(x) = x^{1/3}$; $[0, 1]$

10. $\rho(x) = -x^2 + 1$; $[0, 1]$

11. $\rho(x) = |x - 2|$; $[0, 2]$

12. $\rho(x) = 1 + |x - 1|$; $[0, 3]$

13. $\rho(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$; $[0, 2]$

14. $\rho(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 2 \\ 2, & 2 \le x \le 3 \end{cases}$; $[0, 3]$

15. La densidad de una varilla de 10 pie de largo varía proporcionalmente al cuadrado de la distancia al extremo izquierdo. Ubique su centro de masa, si la densidad en su punto medio es de 12.5 slug/pie.

16. La densidad lineal de una varilla de 3 m de largo varía proporcionalmente a la distancia al extremo derecho. Encuentre la densidad lineal en el centro de la varilla, si su masa total es de 6 kg.

17. Una varilla de densidad lineal $\rho(x)$ kg/m coincide con el eje x en el intervalo $[0, 6]$. Si $\rho(x) = x(6 - x) + 1$, ¿en dónde se esperaría intuitivamente que estuviera el centro de masa? (*Sugerencia:* trace la gráfica de $\rho(x)$.) Demuestre su aseveración.

18. La densidad lineal de una varilla, en kg/m, está dada por $\rho(x) = \sqrt{2x + 1}$. Encuentre la densidad media en el intervalo $[0, 4]$.

Problemas diversos

19. Encuentre el centro de masa de las tres masas m_1, m_2 y m_3 localizadas en los vértices del triángulo equilátero que se muestra en la Figura 6.73. (*Sugerencia:* encuentre primero el centro de masa de m_1 y m_2).

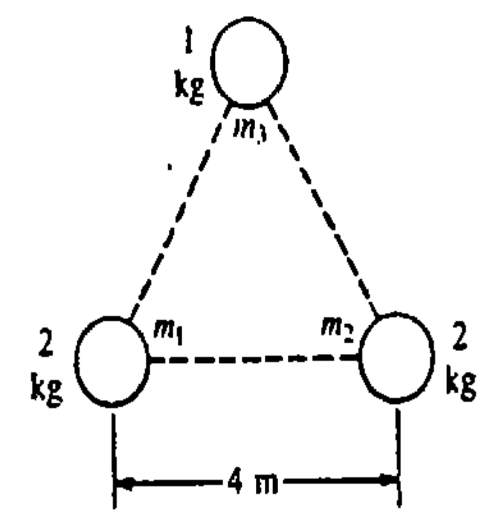


Figura 6.73

20. Una varilla de densidad lineal $\rho(x) = \sqrt{4 - x^2}$ coincide con el eje x en $[0, 2]$. Encuentre su centro de masa. (*Sugerencia:* para evaluar $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$, considere la interpretación geométrica de una integral como una área. Véase el Problema 53 de los Ejercicios 6.1.)

6.12 Centroide de una región plana

Para n masas, localizadas en el plano xy como se indica en la Figura 6.74, el centro de masa del sistema se define como el punto $(\bar{x}, \bar{y})$, en donde

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k} = \frac{\text{momento del sistema con respecto al eje } y}{\text{masa total}}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k} = \frac{\text{momento del sistema con respecto al eje } x}{\text{masa total}}.$$

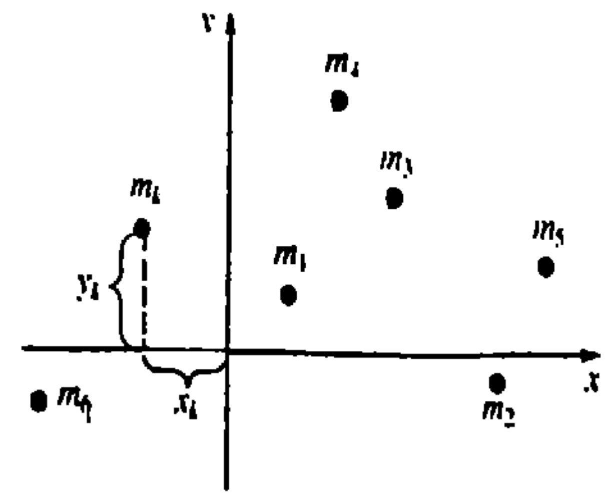


Figura 6.74

Lámina

Vayamos ahora al problema de localizar el centro de masa de una delgada capa bidimensional de materia, o **lámina**, que tiene una densidad constante ρ (masa por unidad de área). Cuando ρ es constante, se dice que la lámina es **homogénea**. Como se muestra en la Figura 6.75, supóngase que la lámina coincide con una región R del plano xy limitada por la gráfica de una función no negativa continua $y = f(x)$, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Si P es una partición del intervalo $[a, b]$, entonces la masa del elemento rectangular que se muestra en la Figura 6.75(b) es

$$\Delta m_k = \rho\, \Delta A_k = \rho f(x_k^*)\, \Delta x_k,$$

en donde, en este caso, se toma x_k^* como el punto medio del subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ y ρ es la densidad constante. El momento de este elemento con respecto al eje y es

$$\begin{aligned}(\Delta M_y)_k &= x_k^*\, \Delta m_k = x_k^*(\rho\, \Delta A_k) \\ &= \rho x_k^*\, f(x_k^*)\, \Delta x_k.\end{aligned}$$

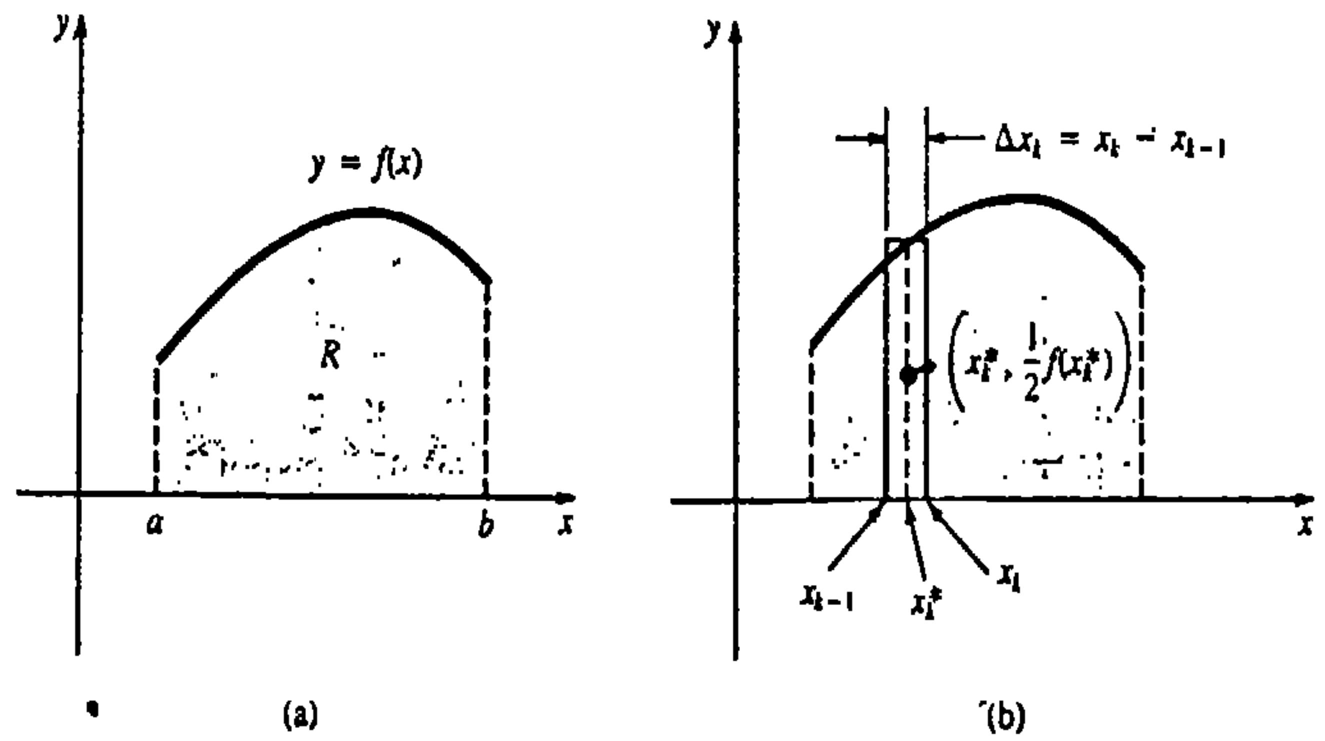


Figura 6.75

Como la densidad es constante, el centro de masa del elemento está necesariamente en su centro geométrico $(x_k^*, \frac{1}{2}f(x_k^*))$. Por consiguiente, el momento del elemento con respecto al eje x es

$$(\Delta M_x)_k = \frac{1}{2}f(x_k^*)[\rho\, \Delta A_k] = \frac{1}{2}\rho[f(x_k^*)]^2\, \Delta x_k.$$

En conclusión

$$m = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho f(x_k^*)\,\Delta x_k = \int_a^b \rho f(x)\,dx$$

$$M_y = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho x_k^* f(x_k^*)\,\Delta x_k = \int_a^b \rho x f(x)\,dx$$

y

$$M_x = \lim_{\|P\|\to 0} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \rho [f(x_k^*)]^2\,\Delta x_k = \frac{1}{2}\int_a^b \rho [f(x)]^2\,dx.$$

De esta manera, las coordenadas del centro de masa de la lámina se definen como

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b \rho x f(x)\,dx}{\int_a^b \rho f(x)\,dx},$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b \rho [f(x)]^2\,dx}{\int_a^b \rho f(x)\,dx} \tag{6.39}$$

Centroide

Obsérvese que la densidad constante ρ se cancelará en las ecuaciones de arriba para $\bar{x}$ y $\bar{y}$, y que el denominador $\int_a^b f(x)dx$ será entonces el área A de la región R. En otras palabras, el centro de masa depende solamente de la forma de R:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\int_a^b x f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx},$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [f(x)]^2\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}. \tag{6.40}$$

Para destacar la diferencia entre el objeto físico, que es la lámina homogénea, y el objeto geométrico, que es la región plana R, se dice que las ecuaciones (6.40) definen las coordenadas del centroide de la región.

Ejemplo 1

Situar el centroide de la región del primer cuadrante limitada por la gráfica de $y = 9 - x^2$, el eje x y el eje y.

Solución La región se muestra en la Figura 6.76. Ahora bien, si $f(x) = 9 - x^2$, entonces

$$\Delta A_k = f(x_k^*)\,\Delta x_k$$
$$(\Delta M_y)_k = x f(x_k^*)\,\Delta x_k$$

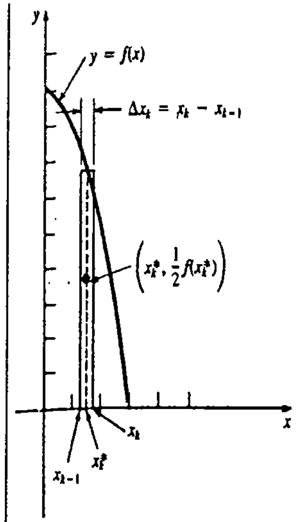


Figura 6.76

$$(\Delta M_x)_k = \frac{1}{2} f(x_k^*)[f(x_k^*)\,\Delta x_k]$$
$$= \frac{1}{2}[f(x_k^*)]^2\,\Delta x_k.$$

Por lo tanto,

$$A = \int_0^3 (9 - x^2)\,dx$$
$$= \left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\Big]_0^3 = 18,$$

$$M_y = \int_0^3 x(9 - x^2)\,dx$$
$$= \left(\frac{9}{2}x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Big]_0^3 = \frac{81}{4},$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^3 (9 - x^2)^2\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^3 (81 - 18x^2 + x^4)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(81x - 6x^3 + \frac{x^5}{5}\right)\Big]_0^3 = \frac{324}{5}.$$

De (6.40) resulta que las coordenadas del centroide son

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{81/4}{18} = \frac{9}{8}$$
$$\bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{324/5}{18} = \frac{54}{15}.$$

Ejemplo 2

Situar el centroide de la región limitada por las gráficas de $x = y^2 + 1$, $x = 0$, $y = 2$ y $y = -2$.

Solución La región se muestra en la Figura 6.77. Una inspección a la figura sugiere usar elementos rectangulares horizontales. Si $f(y) = y^2 + 1$, entonces

$$\Delta A_k = f(y_k^*)\,\Delta y_k$$
$$(\Delta M_x)_k = y_k^* f(y_k^*)\,\Delta y_k$$
$$(\Delta M_y)_k = \frac{1}{2} f(y_k^*)[f(y_k^*)\,\Delta y_k] = \frac{1}{2}[f(y_k^*)]^2\,\Delta y_k$$

y así,

$$A = \int_{-2}^{2} (y^2 + 1)\,dy$$
$$= \left(\frac{y^3}{3} + y\right)\Big]_{-2}^{2} = \frac{28}{3},$$

$$M_x = \int_{-2}^{2} y(y^2 + 1)\,dy$$
$$= \left(\frac{y^4}{4} + \frac{y^2}{2}\right)\Big]_{-2}^{2} = 0,$$
$$M_y = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} (y^2 + 1)^2\,dy$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} (y^4 + 2y^2 + 1)\,dy$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{y^5}{5} + \frac{2}{3}y^3 + y\right)\Big]_{-2}^{2} = \frac{206}{15}.$$

De esta manera, se tiene que

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{206/15}{28/3} = \frac{103}{60},$$
$$\bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{0}{28/3} = 0.$$

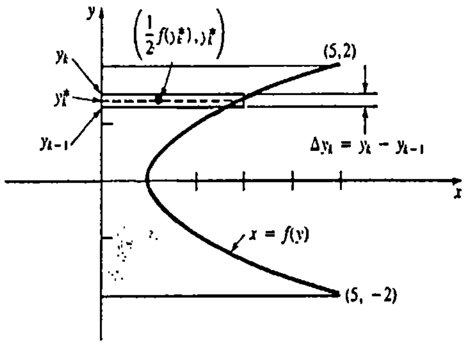


Figura 6.77

Como sería de esperar, puesto que la lámina es simétrica con respecto al eje x, el centroide está en el eje de simetría. Se observa también que el centroide queda fuera de la región.

Ejemplo 3

Localizar el centroide de la región limitada por las gráficas de $y = -x^2 + 3$ y $y = x^2 - 2x - 1$.

Solución La Figura 6.78 muestra la región en cuestión. Puede verse que los puntos de intersección de las gráficas son $(-1, 2)$ y $(2, -1)$. Ahora bien, si $f(x) = -x^2 + 3$ y $g(x) = x^2 - 2x - 1$, entonces el área de la región es

$$A = \int_{-1}^{2} [f(x) - g(x)]\,dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)\,dx$$
$$= \left(-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x\right)\Big]_{-1}^{2} = 9.$$

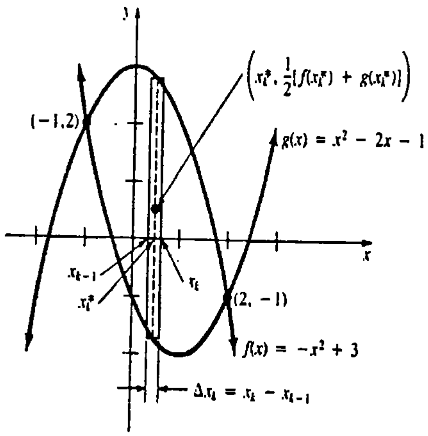


Figura 6.78

Puesto que las coordenadas del punto medio del elemento indicado son $(x_i^*, \frac{1}{2}[f(x_i^*) + g(x_i^*)])$, resulta que

$$M_y = \int_{-1}^{2} x[f(x) - g(x)]\,dx = \int_{-1}^{2} (-2x^3 + 2x^2 + 4x)\,dx$$
$$= \left(-\frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2x^2\right)\Big]_{-1}^{2} = \frac{9}{2},$$
$$M_x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} [f(x) + g(x)][f(x) - g(x)]\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} ([f(x)]^2 - [g(x)]^2)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} [(-x^2 + 3)^2 - (x^2 - 2x - 1)^2]\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} (4x^3 - 8x^2 - 4x + 8)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(x^4 - \frac{8}{3}x^3 - 2x^2 + 8x\right)\Big]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}.$$

De esta manera, las coordenadas del centroide son

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{9/2}{9} = \frac{1}{2},$$
$$\bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{9/2}{9} = \frac{1}{2}.$$

Ejercicios 6.12

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 979.

En los Problemas 1-4, ubique el centro de masa del sistema de masas dado. La masa m_k se localiza en el punto P_k. Supóngase que la masa se mide en gramos y la distancia en centímetros.

1. $m_1 = 3$, $m_2 = 4$; $P_1 = (-2, 3)$, $P_2 = (1, 2)$
2. $m_1 = 1$, $m_2 = 3$, $m_3 = 2$; $P_1 = (-4, 1)$, $P_2 = (2, 2)$, $P_3 = (5, -2)$
3. $m_1 = 4$, $m_2 = 8$, $m_3 = 10$; $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (-5, 2)$, $P_3 = (7, -6)$
4. $m_1 = 1$, $m_2 = \frac{1}{2}$, $m_3 = 4$, $m_4 = \frac{5}{2}$; $P_1 = (9, 3)$, $P_2 = (-4, -6)$, $P_3 = (\frac{3}{2}, -1)$, $P_4 = (-2, 10)$.

En los Problemas 5-24, encuentre el centroide de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas.

5. $y = 2x + 4$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$
6. $y = x + 1$, $y = 0$, $x = 3$
7. $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$
8. $y = x^2 + 2$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$
9. $y = x^3$, $y = 0$, $x = 3$
10. $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$
11. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$
12. $x = y^2$, $x = 1$
13. $y = x^2$, $y - x = 2$
14. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$
15. $y = x^3$, $y = x^{1/3}$, primer cuadrante
16. $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$, segundo cuadrante
17. $x^3y = 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$
18. $y = x^2 - 2x + 1$, $y = -4x + 9$
19. $x = y^2 - 1$, $y = -1$, $y = 2$, $x = -2$
20. $y = x^2 - 4x + 6$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$
21. $y = 4 - 4x^2$, $y = 1 - x^2$
22. $y^2 + x = 1$, $y + x = -1$
23. $y = x$, $y = -2x + 6$, $y = 0$
24. $y = x$, $y = -2x + 6$, $x = 0$

En los Problemas 25 y 26, aplique la simetría para localizar $\bar{x}$, y la integración para hallar $\bar{y}$ de la región limitada por las gráficas de las funciones dadas.

25. $y = 1 + \cos x$, $y = 1$, $-\pi/2 \le x \le \pi/2$
26. $y = 4 \operatorname{sen} x$, $y = -\operatorname{sen} x$, $0 \le x \le \pi$

Problemas diversos

27. Localice el centroide de la región limitada por las gráficas de $y = \sqrt{25 - x^2}$ y $y = 0$. (*Sugerencia:* el área de un círculo es πr^2.)

28. Sitúe el centroide de la región del primer cuadrante limitada por las gráficas de $y = 3\sqrt{1 - x^2/4}$, $y = 0$, y $x = 0$. (*Sugerencia:* el área de una elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ es πab.)

29. Sea L un eje en un plano, y R una región en el mismo plano, que no corta a L. El primer teorema de Pappus* establece que cuando R se hace girar en torno a L, el volumen V del sólido de revolución resultante es igual al área A de R por la longitud de la trayectoria recorrida por el centroide de R. Como se muestra en la Figura 6.79, sea la región R limitada por las gráficas de $y = f_1(x)$ y $y = f_2(x)$. Demuestre que si R se hace girar en torno al eje x, entonces $V = (2\pi\bar{y})A$, en donde A es el área de la región.

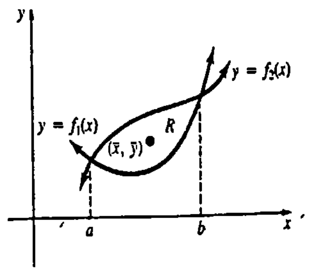


Figura 6.79

* Pappus de Alejandría (aprox. 350 d.C.).

30. Verifique el primer teorema de Pappus haciendo girar la región limitada por $y = x^2 + 1$, $y = 1$, $x = 2$ en torno al eje x.

31. Sitúe el centroide de la región plana que se muestra en la Figura 6.80. (*Sugerencia:* localice el centroide de cada una de las tres partes.)

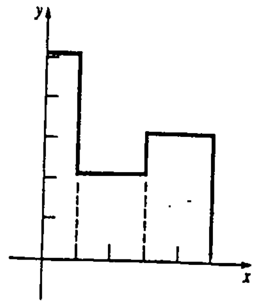


Figura 6.80

(O) 6.13 Otras aplicaciones

Respuesta cardiaca

En fisiología, la respuesta cardíaca R del corazón se define como el volumen de sangre que el corazón impele por unidad de tiempo. Una respuesta cardiaca anormal es indicativa de una enfermedad.

Una manera de medir esta respuesta es el llamado **método de dilución por tinción.** Una cantidad D de tinte, medida en miligramos, se inyecta en la arteria pulmonar cerca del corazón, como se muestra en la Figura 6.81. El tinte circula a través de los pulmones y de las venas pulmonares hacia la aurícula izquierda del corazón, y finalmente a través de la aorta. Una sonda insertada en esta última comprueba la cantidad de tinte que sale del corazón, en valores del tiempo igualmente espaciados dentro de un intervalo $[0, T]$ (por ejemplo, cada segundo, hasta los 30 segundos).

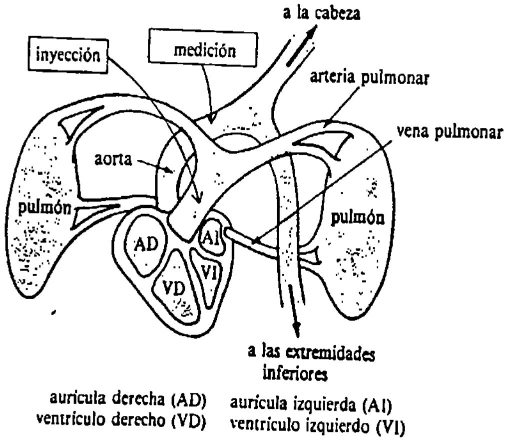


Figura 6.81

Para determinar R, supóngase que la concentración de tinte en cualquier instante está dada por una función continua $c(t)$. El intervalo $[0, T]$ se subdivide luego en n subintervalos de igual longitud $\Delta t = t_k - t_{k-1} = T/n$. La cantidad de tinte que circula frente al punto de medición durante un intervalo de tiempo $[t_{k-1}, t_k]$ está dada por la aproximación

$$\begin{aligned}\Delta D_k &= (\text{concentración}) \cdot (\text{volumen}) = (\text{concentración}) \cdot (\text{proporción} \cdot \text{tiempo})\\ &= (\text{concentración}) \cdot (\text{volumen/tiempo}) \cdot (\text{tiempo})\\ &= c(x_k^*) \cdot R \cdot \Delta t,\end{aligned}$$

en donde t_k^* es algún valor en $[t_{k-1}, t_k]$. La cantidad aproximada de tinte que circula frente al punto de observación en la aorta durante el intervalo de tiempo $[0, T]$ es

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta D_k = \sum_{k=1}^{n} c(t_k^*)R\,\Delta t = R\sum_{k=1}^{n} c(t_k^*)\,\Delta t. \tag{6.41}$$

Haciendo que $n \to \infty$ en (6.35) se ve que la cantidad total de tinte que circula frente al punto de observación es

$$D = R\int_0^T c(t)\,dt. \tag{6.42}$$

Despejando R de (6.42) resulta que

$$R = \frac{D}{\int_0^T c(t)\,dt}.^{*} \tag{6.43}$$

Ejemplo 1

Se inyecta 5 mg de tinte en la arteria pulmonar. Determinar la respuesta cardiaca del corazón durante un periodo de 30 s, si la concentración del tinte es $c(t) = -(1/100)\,t(t-30)$ mg/l (miligramos por litro).

Solución En virtud de (6.43), se tiene que

$$R = \frac{5}{\int_0^{30} -\frac{1}{100}t(t-30)\,dt} = \frac{5}{\left(-\frac{t^3}{300} + \frac{3}{20}t^2\right)\Big]_0^{30}}$$

$$= \frac{1}{9} \text{ litros por segundo} = \frac{1}{9}(60) \approx 6.67 \text{ litros por minuto.}$$

Flujo de sangre en una arteria

La velocidad de la sangre (en cm/s) en una arteriola (arteria pequeña) que tiene una sección transversal circular de radio R, fue determinada por Poiseuille como

$$v(r) = \frac{P}{4\nu l}(R^2 - r^2), \qquad 0 \le r \le R. \tag{6.44}$$

* El valor de R dado en (6.43) es en realidad una aproximación a la respuesta cardiaca. En la práctica, la gráfica de $c(t)$ es una que sea apropiada para aproximar al conjunto de puntos dados $(0, c(0)), (1, c(1)), \ldots$.

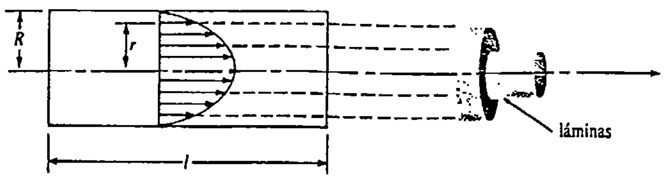


Figura 6.82

en donde P es la presión sanguínea, ν es la viscosidad de la sangre y l la longitud de la arteriola. Al flujo descrito por (6.44) se le llama *flujo laminar*, ya que, como se muestra en la Figura 6.82, se considera que la sangre fluye en cortezas o *láminas* cilíndricas paralelas a las paredes de la arteriola a una distancia r del centro.

Se puede evaluar el volumen de sangre F, o flujo total, dentro de una arteria en una unidad de tiempo, mediante integración definida. Para ver esto, subdividamos $[0, R]$ en n subintervalos $[r_{k-1}, r_k]$. De la Figura 6.83, se tiene que el volumen de sangre por unidad de tiempo dentro de una lámina de radio r_k^* y espesor Δr_k es

$$\Delta F_k = 2\pi r_k^*\, v(r_k^*)\,\Delta r_k.$$

Tomando el límite cuando $n \to \infty$ de la suma

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta F_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi r_k^* v(r_k^*)\,\Delta r_k$$

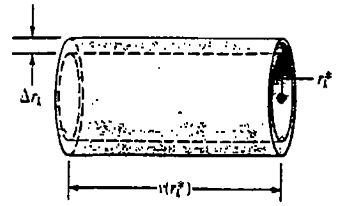
se ve que

$$\begin{aligned}F &= \int_0^R 2\pi r v(r)\,dr\\ &= \frac{\pi P}{2\nu l}\int_0^R r(R^2 - r^2)\,dr\\ &= \frac{\pi P}{2\nu l}\left(R^2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Big]_0^R\end{aligned}$$

o bien

$$F = \frac{\pi P R^4}{8\nu l}. \tag{6.45}$$

En otras palabras, la ley de Poiseuille (6.45) indica que el volumen de sangre en una arteriola por unidad de tiempo es proporcional a la cuarta potencia del radio. La fórmula



ampliación de un elemento laminar de sangre (en una unidad de tiempo)

Figura 6.83

(6.45) se aplica al flujo laminar; esto significa usualmente que R abarca desde $R = 2.5$ cm para la aorta, hasta $R = 1/1000$ cm para un vaso capilar.

Ingreso total

Si un propietario recibe ingresos a razón de \$18,000 al año por la renta de un apartamento, el ingreso que se recauda en, digamos, 15 años es

$$\text{razón} \times \text{tiempo} = \$18{,}000 \times 15 = \$270{,}000.$$

Obsérvese que el ingreso total, en este caso, también puede expresarse como la integral definida

$$\int_0^{15} 18{,}000\, dt = 18{,}000\, t\Big]_0^{15} = \$270{,}000.$$

Supóngase ahora que el ingreso que proviene de cierta fuente fluctúa continuamente, a razón de $f(t)$ dólares por año durante un período de T años. ¿Cuál es el ingreso total obtenido durante el intervalo $[0, T]$? Como lo sugiere el sencillo ejemplo anterior, la respuesta puede expresarse como una integral definida. El análisis es muy semejante al del modelo de la respuesta cardiaca.

Divídase el intervalo $[0, T]$ en n subintervalos de igual longitud $\Delta t = t_k - t_{k-1} = T/n$. El ingreso aproximado obtenido durante un periodo $[t_{k-1}, t_k]$ es

$$\Delta r_k = f(t_k^*)\, \Delta t,$$

en donde t_k^* es algún valor en $[t_{k-1}, t_k]$. La suma

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta r_k = \sum_{k=1}^{n} f(t_k^*)\, \Delta t$$

es aproximadamente el ingreso r obtenido en T años. El ingreso total r se obtiene de esta última expresión, haciendo $n \to \infty$:

$$r = \int_0^T f(t)\, dt.$$

Superávit del consumidor y del productor

Los economistas han empleado la integral definida para definir los conceptos de **superávit del consumidor** y **superávit del productor**.

La demanda de un producto por los consumidores, lo mismo que la cantidad suministrada al mercado por los fabricantes, se puede expresar a menudo como una función del precio unitario. Sean $D(x)$ y $S(x)$ el número de unidades demandadas y el número de unidades suministradas, respectivamente, cuando el producto se vende a un precio unitario x. Si la demanda es igual a la oferta,

$$D(x) = S(x),$$

se dice que el mercado está en **equilibrio** y al precio correspondiente del producto se le llama **precio de equilibrio**. Si p es el precio de equilibrio y b es el precio para el cual la demanda del producto es cero ($D(b) = 0$), a la integral

$$SC = \int_p^b D(x)\, dx \qquad (6.46)$$

se la llama **superávit del consumidor**. Cuando el mercado está en equilibrio, el hecho de que haya una demanda por el producto aun a precios más altos significa que aquellos consumidores que estuvieran dispuestos a pagar un precio mayor se beneficiarían. El SC representa, en unidades monetarias, los ahorros combinados realizados por estos consumidores.

A la integral

$$SP = \int_c^p S(x)\, dx, \qquad (6.47)$$

en donde $S(c) = 0$, se le llama **superávit del productor**. Con el precio del producto fijado al precio de equilibrio p, el SP representa los ahorros combinados realizados por aquellos productores que estuvieran dispuestos a suministrar el producto aun a precios más bajos.

Ejemplo 2

Supóngase que la demanda y la oferta de un producto que se vende a x dólares por unidad son $D(x) = 1000 - 20x$ y $S(x) = x^2 + 10x$, respectivamente. Calcule los superávits del consumidor y del productor.

Solución Resulta claro que $D(x) = 0$ cuando $b = 50$, que $S(x) = 0$ cuando $x = 0$, y que $D(x) = S(x)$ para $P = 20$. Como se muestra en la Figura 6.84, SC representa el área bajo la gráfica de $D(x)$ en el intervalo $[20, 50]$ y SP el área bajo la gráfica de $S(x)$ en $[0, 20]$.

De (6.46) se obtiene

$$SC = \int_{20}^{50} (1000 - 20x)\, dx$$
$$= (1000x - 10x^2)\Big]_{20}^{50} = \$9000,$$

y de (6.47),

$$SP = \int_0^{20} (x^2 + 10x)\, dx$$
$$= \left(\frac{x^3}{3} + 5x^2\right)\Big]_0^{20} \approx \$4666.67.$$

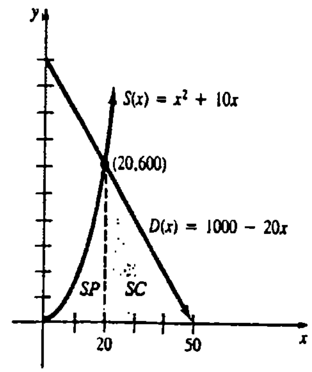


Figura 6.84

Ejercicios 6.13

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 980.

1. Determine la respuesta cardiaca de un corazón durante 24 s, si se emplean 5 mg de tinte y

$$c(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 2, \\ -\frac{1}{40}(t^2 - 26t + 48), & 2 \le t \le 24, \end{cases}$$

en donde $c(t)$ se mide en miligramos por litro.

2. Evalúe la respuesta cardiaca de un corazón durante 30 s, si se emplean 5 mg de tinte y

$$c(t) = \begin{cases} \frac{4}{21}t, & 0 \le t < 15, \\ -\frac{4}{21}t + \frac{40}{7}, & 15 \le t \le 30, \end{cases}$$

en donde $c(t)$ se mide en miligramos por liltro.

3. Evalúe la concentración media en el Problema 1 en $[0, 24]$.

4. Evalúe la concentración media en el Problema 2 en $[0, 30]$.

5. Suponiendo que la presión sanguínea es constante, determine el porcentaje de decrecimiento del volumen de sangre que circula a través de una arteriola por unidad de tiempo, cuando el radio de la misma se reduce de 1 cm a 0.5 cm.

6. La velocidad media de la sangre a través de una arteriola, por una sección transversal circular de radio R y área A, se define como

$$\bar{v} = \frac{1}{A}\int_0^R 2\pi r v(r)\, dr,$$

en donde $v(r)$ está dada por (6.44). (a) Demuestre que $\bar{v} = PR^2/8\nu l$. (b) Demuestre que $\bar{v}$ es la mitad de la velocidad máxima de la sangre.

7. Evalúe el ingreso total obtenido en 4 años, si la razón de ingresos en dólares por año es $f(t) = 1200(t - 5)^2$.

8. Evalúe el ingreso total obtenido en 8 años, si la razón de ingresos en dólares por año es $f(t) = 600\sqrt{1 + 3t}$.

9. Calcule la razón media de flujo de ingresos durante 10 años, si la razón de ingresos en dólares por año está dada por $f(t) = 3t^2 + 4t + 200$.

10. Encuentre la razón media de flujo de ingresos durante 8 años, si la razón de ingresos es la que se da en el Problema 8.

En los Problemas 11-16, encuentre los superávits del consumidor y del productor.

11. $S(x) = 2x$, $D(x) = 100 - 2x$

12. $S(x) = \frac{3}{2}x$, $D(x) = 3000 - 6x$

13. $S(x) = x^2 - 4$, $D(x) = -x + 8$

14. $S(x) = 4x^2 + 4x$, $D(x) = -12x + 48$

15. $S(x) = 2x^2 + 3x$, $D(x) = 36 - x^2$

16. $S(x) = x^2 + 16x$, $D(x) = x^2 - 16x + 64$, $0 \le x \le 8$

Problemas diversos

17. Demuestre que si el ingreso marginal es $IM = f(x)$ y el costo marginal es $CM = g(x)$, entonces el cambio de la utilidad U entre un nivel de producción de $x = a$ unidades y un nivel de producción de $x = b$ unidades es $\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$.

18. Aplique el Problema 17 para evaluar el cambio de la utilidad cuando $f(x) = -6x + 60$, $g(x) = 15$, y el nivel de producción cambia de 3 a 7 unidades.

19. La ley del ingreso de Pareto establece que el número de personas con ingresos entre $x = a$ (unidades monetarias) y $x = b$ es $N = \int_a^b Ax^{-k}\, dx$, en donde A es una constante y k es una constante racional empírica mayor que 1. El ingreso medio de todas estas personas se define como

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\int_a^b Ax^{1-k}\, dx.$$

Evalúe $\bar{x}$.

Examen • Capítulo 6

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 980.

En los Problemas 1-12, responda verdadero o falso.

1. Cuando $\int_a^b f(x)\, dx > 0$, la integral da el área bajo la gráfica de $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$. ______

2. $\int_0^3 (x - 1)\, dx$ es el área bajo la gráfica de $y = x - 1$ en $[0, 3]$. ______

3. La integral $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$ da el área entre las gráficas de las funciones continuas f y g, siempre que $f(x) \ge g(x)$ para todo x en $[a, b]$. ______

4. Los métodos de los discos y de las arandelas para evaluar volúmenes de sólidos de revolución son casos especiales del método de las secciones transversales o de elementos de sección. ______

5. El valor medio $A(f)$ de una función continua en un intervalo $[a, b]$ es necesariamente un número que satisface $m \le A(f) \le M$, en donde m y M son los valores mínimo y máximo de f en el intervalo, respectivamente. ______

6. Si f y g son continuas en $[a, b]$, entonces el valor medio de $f + g$ es $A(f + g) = A(f) + A(g)$. ______

7. El centro de masa de un lápiz con densidad lineal constante ρ está en su centro geométrico. ______

8. El centro de masa de una lámina que coincide con una región plana R es un punto de R en el cual la lámina quedaría suspendida en equilibrio. ______

9. La presión sobre el fondo plano de una piscina es la misma que la presión horizontal sobre las paredes verticales a la misma profundidad. ______

10. Considere una lata delgada circular con radio de 6 plg y un depósito circular con radio de 50 pie. Si ambos tienen fondo plano y están llenos de agua hasta una profundidad de 1 pie, entonces la presión hidrostática sobre el fondo del depósito es mayor que la presión sobre el fondo de la lata. ______

11. Si $s(t)$ es la función de posición de un cuerpo que se mueve en una recta, entonces $\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$ es la distancia que el cuerpo recorre en el intervalo $[t_1, t_2]$. ______

12. En ausencia de la resistencia del aire, cuando se dejan caer simultáneamente desde la misma altura, una bala de cañón chocará contra el suelo primero que un malvavisco. ______

En los Problemas 13-18, llene los espacios en blanco.

13. La unidad de trabajo en el sistema MKS (o S.I.) de unidades es ______.

14. Para efectos de calentamiento, un corredor cuyo peso es de 200 lb empuja contra un árbol durante 5 min, con una fuerza constante de 60 lb, y luego corre 2 millas en 10 min. El trabajo total realizado es ______.

15. El trabajo realizado por una fuerza constante de 100 lb aplicada en un ángulo de 60° con la horizontal durante una distancia de 50 pie es ______.

16. Si una fuerza de 80 N estira un resorte que tiene inicialmente 1 m de largo hasta una longitud de 1.5 m, entonces el resorte medirá ______ m de largo cuando se le aplique una fuerza de 100 N.

17. Las coordenadas del centroide de una región R son $(2, 5)$ y el momento de la región con respecto al eje x es 30. Por consiguiente, el área de R es ______ unidades cuadradas.

18. La gráfica de una función con primera derivada continua se dice que es ______.

En los Problemas 19-28 establezca, pero no evalúe, la(s) integral(es) que dé(n) el área de la región sombreada en cada figura.

19.

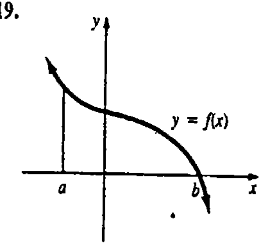


Figura 6.85

20.

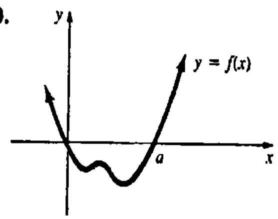


Figura 6.86

21.

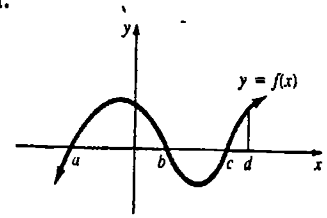


Figura 6.87

22

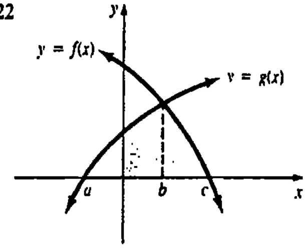


Figura 6.88

23.

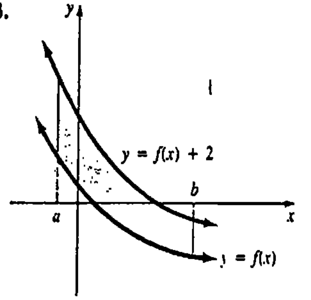


Figura 6.89

24.

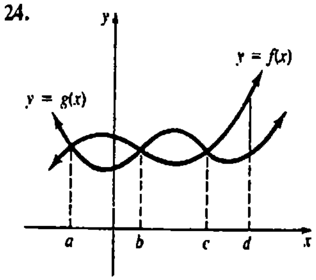


Figura 6.90

25.

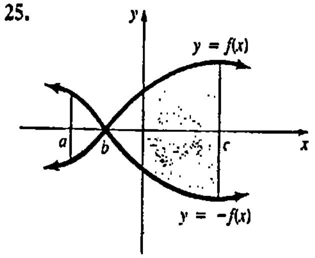


Figura 6.91

26.

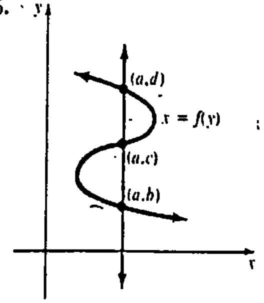


Figura 6.92

27.

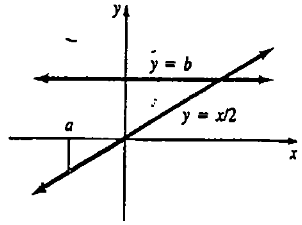


Figura 6.93

28.

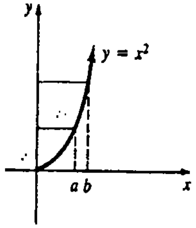


Figura 6.94

En los Problemas 29-32 considere la región sombreada R de la Figura 6.95. Establezca, pero no evalúe, la(s) integral(es) que dé(n) la cantidad indicada.

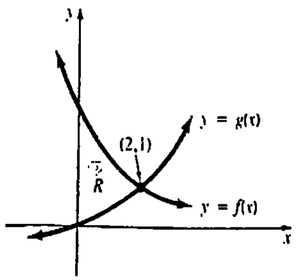


Figura 6.95

29. El centroide de la región.

30. El volumen del sólido de revolución que se forma haciendo girar R en torno al eje x.

31. El volumen del sólido de revolución que se produce haciendo girar R en torno al eje y.

32. El volumen del sólido de revolución que se forma haciendo girar R alrededor de la recta $x = 2$.

33. Encuentre el valor medio de $f(x) = x^{3/2} + x^{1/2}$ en $[1, 4]$.

34. Encuentre un valor de x en el intervalo $[0, 3]$ que corresponda al valor medio de la función $f(x) = 2x - 1$.

35. Un resorte cuya longitud natural es de $\frac{1}{2}$ m se estira hasta una longitud de 1 m, mediante una fuerza de 50 N. Determine el trabajo realizado al estirar el resorte de una longitud de 1 m a una de 1.5 m.

36. El trabajo realizado al estirar un resorte 6 plg más allá de su longitud natural es de 10 pie • lb. Halle la constante del resorte.

37. Un depósito, en forma de cubo de 10 pie de lado, está lleno de agua. Calcule el trabajo realizado al bombear toda el agua hasta un punto a 5 pie por encima del depósito.

38. Una cubeta que pesa 2 lb contiene 30 lb de líquido. Cuando la cubeta es levantada verticalmente a razón de 1 pie/s, el líquido se escapa a razón de $\frac{1}{4}$ lb/s. Calcule el trabajo realizado al subir la cubeta una distancia de 5 pie.

39. En el Problema 38, evalúe el trabajo realizado al subir la cubeta hasta el punto en el que quede vacía.

40. Una roca es lanzada verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Luna, con una velocidad inicial de 44 pie/s.

(a) Si la aceleración de la gravedad en la Luna es de 5.5 pie/s², determine la altura máxima alcanzada. Compare con el caso de la Tierra.

(b) En su descenso, la roca le pega en la cabeza a un astronauta de 6 pie de estatura, ¿cuál es la velocidad de impacto?

41. Encuentre la longitud de la gráfica de $y = (x-1)^{3/2}$ de $(1, 0)$ a $(5, 8)$.

42. La densidad lineal de una varilla de 6 m de largo es una función lineal de la distancia a su extremo izquierdo. La densidad en el punto medio de la varilla es de 11 kg/m, y en el extremo derecho es de 17 kg/m. Obtenga el centro de masa de la varilla.

43. Una placa plana, en forma de un cuarto de círculo, se sumerge verticalmente en aceite como se muestra en la Figura 6.96. Si la densidad del aceite es de 800 kg/m³, calcule la fuerza producida por la presión hidrostática sobre la placa.

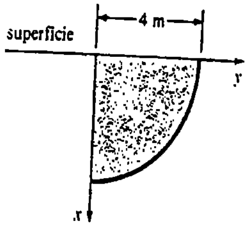


Figura 6.96

44. Tres masas están suspendidas por barras rígidas uniformes de masa despreciable, como se muestra en la Figura 6.97. Determine en dónde deben colocarse los alambres indicados, de manera que el sistema completo penda en equilibrio.

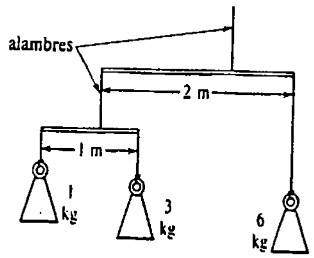


Figura 6.97

Funciones trigonométricas inversas

El objetivo de este capítulo es estudiar el concepto general de inversa de una función, así como las derivadas e integrales en las que intervienen seis nuevas funciones; a saber, las funciones trigonométricas inversas.

7.1 Funciones inversas

Funciones inyectivas

Recuérdese que una función es una regla de correspondencia que asigna a cada valor x, en su dominio X, un único valor y en su contradominio (o ámbito). Esta regla no impide tener el mismo número y asociado a *dos* valores *diferentes* de x. Por ejemplo, para $f(x) = x^2$, el valor $y = 9$ ocurre tanto para $x = -3$ como para $x = 3$; esto es, $f(-3) = f(3) = 9$. Por otra parte, para la función $f(x) = x^3$ el valor $y = 64$ ocurre *solamente* en $x = 4$. A las funciones de esta última clase se les da el nombre especial de **inyectivas** o *biunívocas* (o **"uno a uno"**).

DEFINICIÓN 7.1

Se dice que una función es **inyectiva** (o **biunívoca**) si todo elemento de su contradominio corresponde a exactamente un elemento de su dominio X. □

Prueba de la recta horizontal

Interpretado geométricamente, esto significa que una recta horizontal (y = constante) puede cortar a la gráfica de una función inyectiva a lo sumo en un punto. Además, si toda recta horizontal que corte a la gráfica de una función lo hace a lo más en un punto, entonces la función es necesariamente inyectiva. Una función *no* es inyectiva si una recta horizontal corta a su gráfica más de una vez.

Ejemplo 1

Las gráficas de $g(x) = -x^2 + 2x + 4$ y $f(x) = -4x + 3$, mostradas en la Figura 7.1, indican que hay dos elementos x_1 y x_2 en el dominio de g, para los cuales $g(x_1) = g(x_2) = c$, pero solamente un elemento x_1 en el dominio de f para el cual $f(x_1) = c$. Por lo tanto, g no es inyectiva pero f sí lo es.

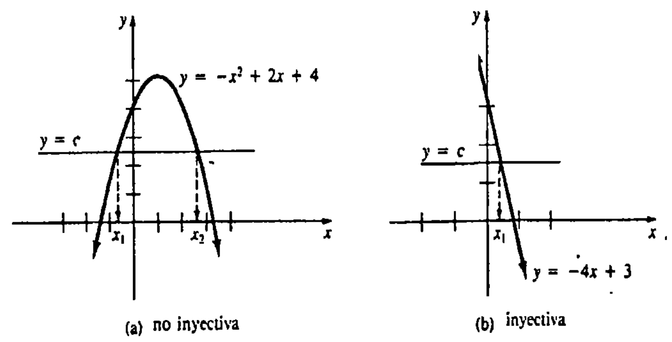


Figura 7.1

Inversa de una función inyectiva

supóngase que f es una función inyectiva que tiene dominio X y contradominio Y Puesto que cada elemento y de Y corresponde precisamente a un elemento x de X la función f debe determinar en realidad una función g "opuesta", cuyo dominio es Y y su contradominio es X. Como se ve en la Figura 7.2, f y g deben satisfacer

$$f(x) = y \quad \text{y} \quad g(y) = x$$

o bien

$$f(g(y)) = y \quad \text{y} \quad g(f(x)) = x. \tag{7.1}$$

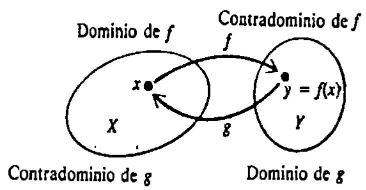


Figura 7.2

A la función g se le da el nombre formal de **inversa de f**. Se resumen ahora los resultados de (7.1), denotando cada variable independiente por x.

DEFINICIÓN 7.2

Sea f una función inyectiva con dominio X y contradominio Y. La inversa de f es una función g con dominio y y contradominio x, para la cual

$$f(g(x)) = x \quad \text{para todo } x \text{ en } Y$$

y

$$g(f(x)) = x \quad \text{para todo } x \text{ en } X \tag{7.2}$$

□

Simbólicamente, la inversa de una función f se escribe por lo general f^{-1} y se lee "f inversa". Esta última notación, aunque común, es impropia. Hay que señalar que $f^{-1}(x)$ *no* es lo mismo que $[f(x)]^{-1} = 1/f(x)$. En términos de esta nueva notación, (7.2) se transforma en

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{y} \quad f^{-1}(f(x)) = x. \tag{7.3}$$

Determinación de f^{-1}

La primera ecuación de (7.3) puede utilizarse explícitamente para encontrar la inversa de una función inyectiva.

Ejemplo 2

Hallar la inversa de $f(x) = \dfrac{1}{2x - 3}$, $x \neq \dfrac{3}{2}$.

Solución Un examen de la Figura 7.3 muestra que f es inyectiva. Por lo tanto, en virtud de (7.3),

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{1}{2f^{-1}(x) - 3} = x.$$

Despejando $f^{-1}(x)$ de esta última ecuación:

$$2f^{-1}(x) - 3 = \frac{1}{x}$$

$$2f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{2x}.$$

Comprobación

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{1}{2\left(\frac{3x+1}{2x}\right) - 3} = \frac{x}{3x+1-3x} = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{3\left(\frac{1}{2x-3}\right)+1}{2\left(\frac{1}{2x-3}\right)} = \frac{\frac{2x}{2x-3}}{\frac{2}{2x-3}} = x.$$

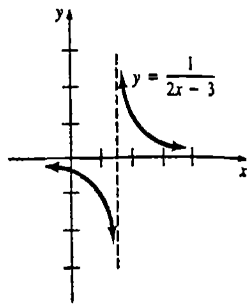


Figura 7.3

Obsérvese en el Ejemplo 2 que, como se analizó, el dominio de f (todos los números reales excepto $\frac{3}{2}$), y el contradominio de f (todos los números reales excepto 0), son el contradominio y el dominio de f^{-1}, respectivamente.

Una manera alternativa de obtener f^{-1}

La inversa de una función f puede hallarse de manera diferente. Si g es la inversa de f, entonces $x = g(y)$. Así que se necesita solamente

(*i*) despejar el símbolo x de $y = f(x)$, y siguiendo la convención,

(*ii*) redenominar a la variable dependiente x como y y a la variable independiente y como x.

El ejemplo siguiente ilustra este procedimiento.

Ejemplo 3

Obtener la inversa de $f(x) = -4x + 3$.

Solución Por el Ejemplo 1 se sabe que f es inyectiva y por lo tanto tiene inversa. Escribiendo ahora f como $y = -4x + 3$, y despejando x en términos de y:

$$x = \frac{-y+3}{4}.$$

Redenominando las variables resulta luego

$$y = \frac{-x+3}{4} \quad \text{o} \quad f^{-1}(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}.$$

Gráficas de f y f^{-1}

Sea (a, b) cualquier punto de la gráfica de una función inyectiva f. Entonces $f(a) = b$ y

$$f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a$$

implica que (b, a) está en la gráfica de f^{-1}. Como los puntos (a, b) y (b, a) son simétricos con respecto a la recta $y = x$, se observa en la Figura 7.4(b) que la gráfica de f^{-1} es una reflexión de la gráfica de f en la recta $y = x$.

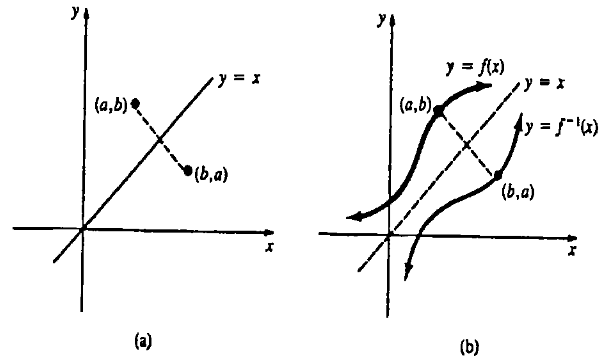


Figura 7.4

Ejemplo 4

Las gráficas de la función $f(x) = -4x + 3$ y de su inversa $f^{-1}(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$ (del Ejemplo 3) se comparan en la Figura 7.5.

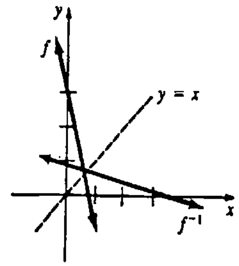


Figura 7.5

Ejemplo 5

Hallar la inversa de $f(x) = x^3$ y comparar las gráficas de f y f^{-1}.

Solución $y = x^3$ implica que $x = y^{1/3}$. Así que, $f^{-1}(x) = x^{1/3}$. Las gráficas de f y f^{-1} se presentan en la Figura 7.6.

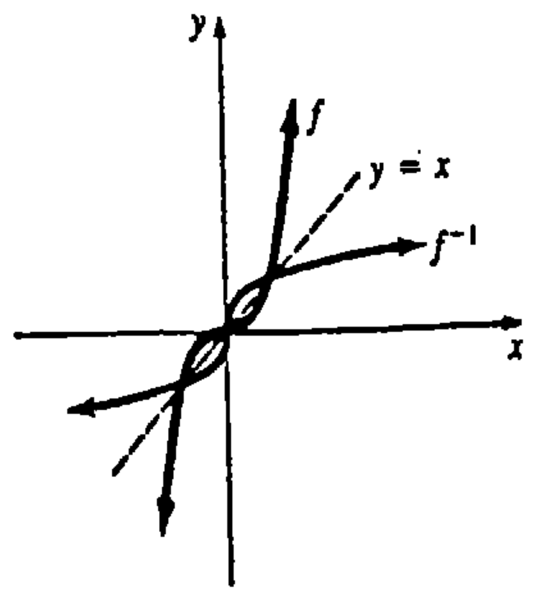


Figura 7.6

Continuidad de f^{-1}

Se establecerán sin demostración los dos teoremas siguientes.

TEOREMA 7.1

Sea f una función inyectiva continua en un intervalo $[a, b]$. Entonces, f^{-1} es continua en el intervalo con fronteras $f(a)$ y $f(b)$. □

TEOREMA 7.2

Sea f continua y creciente en un intervalo $[a, b]$. Entonces, f^{-1} existe y es continua y creciente en $[f(a), f(b)]$. □

Ejemplo 6

Demostrar que $f(x) = 5x^3 + 8x - 9$ tiene inversa.

Solución Como f es una función polinomial, es continua. También,

$$f'(x) = 15x^2 + 8 > 0 \quad \text{para todo } x$$

implica que f es creciente en $(-\infty, \infty)$. En virtud del Teorema 7.2 se deduce que f^{-1} existe.

Nota: El Teorema 7.2 también se cumple cuando la palabra "creciente" se reemplaza con la palabra "decreciente". (En este caso el intervalo para f^{-1} es $[f(b), f(a)]$.)

Derivada de f^{-1}

En el resultado siguiente conviene denotar la inversa de una función $y = f(x)$ por $x = g(y)$, como se hizo originalmente.

TEOREMA 7.3

Sea f una función diferenciable que tiene una inversa g. Entonces, g es diferenciable cuando $dy/dx = f'(x) \neq 0$ y

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}. \tag{7.4}$$

Demostración Como f es diferenciable se tiene que, es continua, de modo que

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \to 0 \quad \text{cuando } \Delta x \to 0.$$

Por el Teorema 7.1, g es continua; por lo tanto, $\Delta x \to 0$ siempre que $\Delta y \to 0$. Así que,

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta y/\Delta x} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{dy/dx}.$$ □

Aunque la notación en (7.4) facilitó su demostración y tiene una importancia mnemotécnica obvia, es deseable escribir el resultado en forma alternativa:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}. \tag{7.5}$$

Con la redenominación usual de las variables, (7.5) es

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}. \tag{7.6}$$

A su vez, si f^{-1} denota a la inversa en lugar de g, entonces (7.6) se transforma finalmente en

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \tag{7.7}$$

La ecuación (7.7) muestra claramente que para calcular la derivada de f^{-1} debe conocerse explícitamente $f^{-1}(x)$. Sin embargo, si (a, b) es un punto conocido de la gráfica de f, (7.7) permite evaluar la derivada de f^{-1} en (b, a) sin tener una ecuación que defina a $f^{-1}(x)$.

Ejemplo 7

Para la función del Ejemplo 6, evaluar la pendiente de la tangente a la gráfica de f^{-1} en $(f(1), 1)$.

Solución Como $f(x) = 5x^3 + 8x - 9$, se tiene $f(1) = 4$,

$$f'(x) = 15x^2 + 8 \quad \text{y} \quad f'(1) = 23.$$

Ahora bien $f(1) = 4$ implica que $f^{-1}(4) = 1$. Así que, (7.7) da

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(f^{-1}(4))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{23}.$$

En otras palabras, la pendiente de la tangente a la gráfica de f en $(1, 4)$ es 23, y la pendiente de la tangente a la gráfica de f^{-1} en $(4, 1)$ es la recíproca, $\frac{1}{23}$.

En secciones subsecuentes, se verá que suele ser posible encontrar la derivada de una función inversa recurriendo a la diferenciación implícita.

Cuando una función no es inyectiva, no tiene inversa. No obstante, puede encontrarse una inversa de una función después de restringir adecuadamente su dominio.

Ejemplo 8

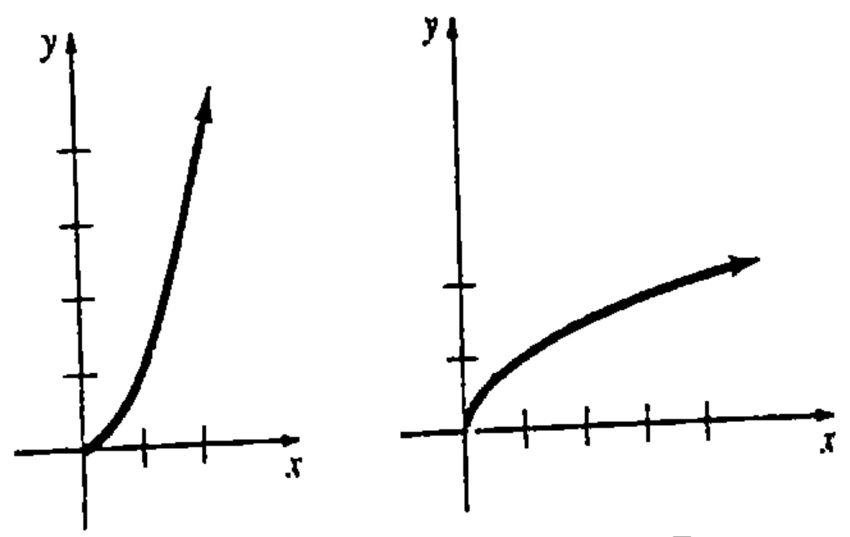
En nuestro análisis inicial, vimos que $f(x) = x^2$ no es inyectiva. Sin embargo, requiriendo que x sea no negativo, se ve que en virtud de la Figura 7.7(a) y el Teorema 7.2, la nueva función

$$F(x) = x^2, \qquad x \geq 0$$

tiene la inversa

$$F^{-1}(x) = \sqrt{x}, \qquad x \geq 0,$$

la cual se muestra en la Figura 7.7(b).



(a) $F(x) = x^2, x \geqslant 0$ (b) $F^{-1}(x) = \sqrt{x}, x \geqslant 0$

Figura 7.7

Observación

Una función inyectiva f solamente puede tener una inversa. En otras palabras, f^{-1} es única.

Ejercicios 7.1

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 980.

En los Problemas 1-10, determine si la función dada es inyectiva (o biunívoca), examinando su gráfica. Si es así, encuentre su inversa.

1. $f(x) = 5$
2. $f(x) = 6x - 9$
3. $f(x) = \frac{1}{3}x + 3$
4. $f(x) = |x + 1|$
5. $f(x) = \frac{4}{x}$
6. $f(x) = \frac{1}{3x + 6}$
7. $f(x) = x^4 + 2$
8. $f(x) = x^3 - 8$
9. $f(x) = x(x - 5)$
10. $f(x) = x^5$

En los Problemas 11-16 cada función es inyectiva. Encuentre su inversa.

11. $f(x) = \sqrt[3]{2x - 4}$
12. $f(x) = 5x - \frac{2}{x}$
13. $f(x) = (-x + 9)^3$
14. $f(x) = 6 - (10x - 2)^{1/5}$
15. $f(x) = \frac{1}{1 + 8x^3}$
16. $f(x) = 10 + x^{3/5}$

En los Problemas 17 y 18 demuestre, sin trazar gráficas, que la función dada tiene inversa. No intente encontrar f^{-1}.

17. $f(x) = 10x^3 + 8x + 12$
18. $f(x) = -7x^5 - 6x^3 - 2x + 17$

En los Problemas 19-24, sin encontrar la inversa, determine el dominio y el ámbito (o contradominio) de f^{-1}.

19. $f(x) = \sqrt{x + 2}$
20. $f(x) = 3 + \sqrt{2x - 1}$
21. $f(x) = \frac{1}{x + 3}$
22. $f(x) = \frac{x - 1}{x - 4}$
23. $f(x) = (x - 5)^2, x \geq 5$
24. $f(x) = x^2 + 2x + 6, x \geq -1$

En los Problemas 25 y 26 dibuje la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f.

25.

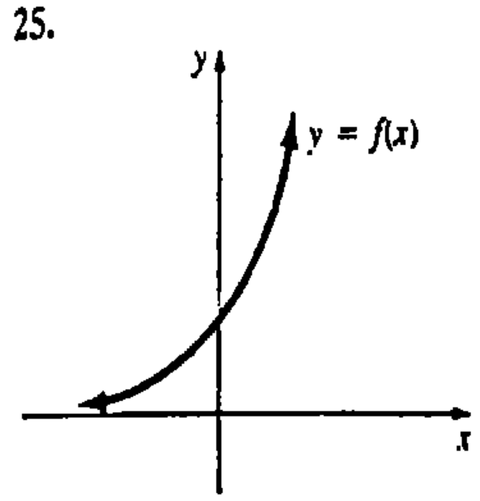


Figura 7.8

26.

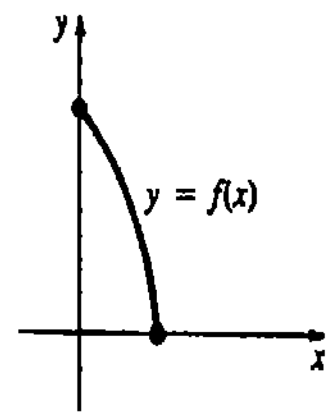


Figura 7.9

En los Problemas 27 y 28 trace la gráfica de f a partir de la gráfica de f^{-1}.

27.

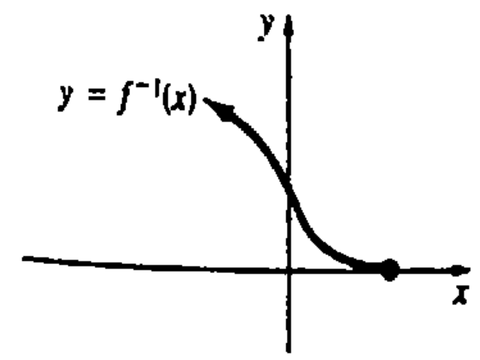


Figura 7.10

28.

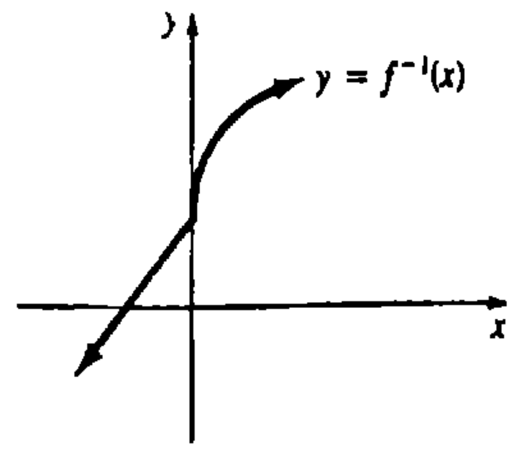


Figura 7.11

En los Problemas 29 y 30 utilice (7.7) para encontrar la derivada de la función inversa en el punto indicado.

29. $f(x) = 2x^3 + 8;\ (f(\frac{1}{2}), \frac{1}{2})$
30. $f(x) = -x^3 - 3x + 7;\ (f(-1), -1)$

En los Problemas 31-34, sin encontrar la inversa, obtenga el punto correspondiente de la gráfica de f^{-1} en el valor indicado de x, y una ecuación de la recta tangente en este punto.

31. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x - 7;\ x = 3$
32. $f(x) = \frac{2x + 1}{4x - 1};\ x = 0$
33. $f(x) = (x^5 + 1)^3;\ x = 1$
34. $f(x) = 8 - 6\sqrt[3]{x + 2};\ x = -3$

En los Problemas 35 y 36 encuentre f^{-1}. Obtenga $(f^{-1})'$ empleando (7.7). Verifique el resultado mediante diferenciación directa de f^{-1}.

35. $f(x) = \frac{2x + 1}{x}$
36. $f(x) = (5x + 7)^3$

En los Problemas 37 y 38, halle f^{-1} luego de restringir adecuadamente el dominio de f.

37. $f(x) = (5 - 2x)^2$
38. $f(x) = 3x^2 + 9$

Problemas diversos

39. Una definición equivalente de funcion inyectiva o biunívoca es: una función f es inyectiva si y sólo si $x_1 \neq x_2$ implica que $f(x_1) \neq f(x_2)$, siempre que x_1 y x_2 estén en el dominio de f. Aplique esta definición para demostrar que $f(x) = 3x + 7$ es inyectiva.

40. Emplee la definición de una función inyectiva dada en el Problema 39 para demostrar que es inyectiva una función creciente, o bien, decreciente. (*Sugerencia:* $x_1 \neq x_2$ implica $x_1 < x_2$ o $x_1 > x_2$).

41. Demuestre que la función $f(x) = \int_1^x dt/t$, $x > 0$ posee una inversa.

42. Sea f^{-1} la inversa de una función f. Si f y f^{-1} son diferenciables, aplique diferenciación implícita y $f(f^{-1}(x)) = x$ para deducir el resultado dado en (7.7).

43. Si f y $(f^{-1})'$ son diferenciables, aplique (7.7) para demostrar que $(f^{-1})''(x) = -f''(f^{-1}(x))/[f'(f^{-1}(x))]^3$.

44. Supóngase que f es una función con periodo p, $f(x + p) = f(x)$. ¿Puede f tener una función inversa?

7.2 Funciones trigonométricas inversas

Inspeccionando sus gráficas y observando que

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x,$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x,$$

$$\tan(x + \pi) = \tan x,$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

$$\cos\frac{\pi}{4} = \cos\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

y

$$\cot\frac{\pi}{2} = \cot\frac{3\pi}{2} = 0$$

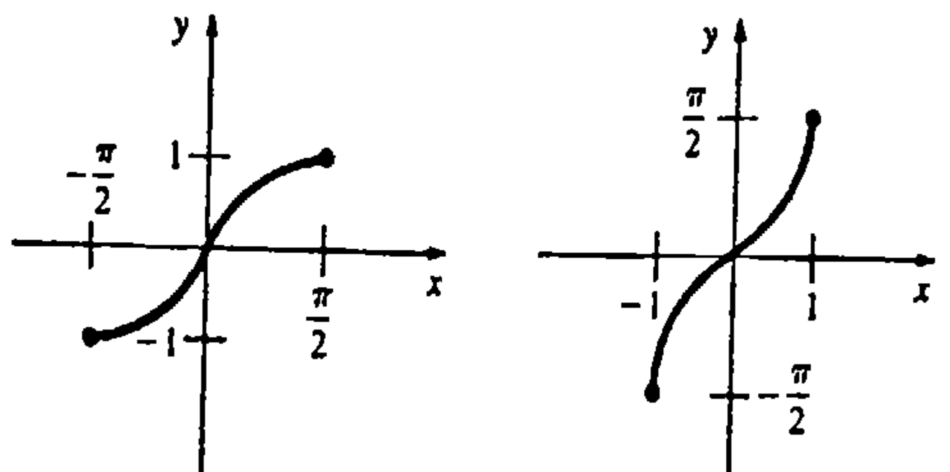
el lector se convencerá de que ninguna de las funciones trigonométricas es inyectiva. Sin embargo, procediendo como en el Ejemplo 8 de la Sección 7.1, se puede encontrar la inversa de cada función trigonométrica *en un dominio restringido.*

Seno inverso

Al considerar $y = \operatorname{sen} x$ solamente en el intervalo cerrado $-\pi/2 \le x \le \pi/2$, se observa inmediatamente en virtud de la Figura 7.12(a) que para cada valor de y en $[-1, 1]$ hay solamente un x correspondiente en $[-\pi/2, \pi/2]$. Además, obsérvese que esta nueva función cumple con el criterio del Teorema 7.2 y, por tanto, tiene una inversa. Enfatizando, el dominio y el contradominio de la función original se convierten, respectivamente, en el contradominio y el dominio de la inversa. Conforme a la anterior,

el seno inverso, simbolizado $\operatorname{sen}^{-1}x$, se define por

$$y = \operatorname{sen}^{-1}x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \operatorname{sen} y, \tag{7.8}$$



(a) $y = \operatorname{sen} x,\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ (b) $y = \operatorname{sen}^{-1} x \quad -1 \le x \le 1$

Figura 7.12

en donde $-1 \le x \le 1$ y $-\pi/2 \le y \le \pi/2$.

En otras palabras,

el seno inverso de un número es el ángulo (en radianes) cuyo seno es x,

siempre que este ángulo satisfaga $-\pi/2 \le \operatorname{sen}^{-1}x \le \pi/2$. La gráfica de $y = \operatorname{sen}^{-1}x$ se presenta en la Figura 7.12(b).

Ejemplo 1

Evaluar $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Solución Sea $y = \operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{2}/2)$. Un ángulo y para el cual $\operatorname{sen} y = \sqrt{2}/2$ es $y = \pi/4$. Puesto que este es el único número en $[-\pi/2, \pi/2]$ para el cual esto es cierto, puede escribirse

$$\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Notación

Para no confundir $\operatorname{sen}^{-1}x$ con el recíproco $(\operatorname{sen} x)^{-1} = 1/\operatorname{sen} x$, se utiliza a menudo una notación alternativa:

$$\operatorname{arcsen} x = \operatorname{sen}^{-1}x$$

que se lee "arco seno de x", o bien, "ángulo cuyo seno es x".

Ejemplo 2

Evaluar $\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Solución Si $y = \operatorname{arcsen}\frac{1}{2}$, entonces $\frac{1}{2} = \operatorname{sen} y$. El único número y en $[-\pi/2, \pi/2]$ para el cual esto es cierto es $\pi/6$, es decir,

$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Nota: Aunque algunas calculadoras dan

$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = 30°,$$

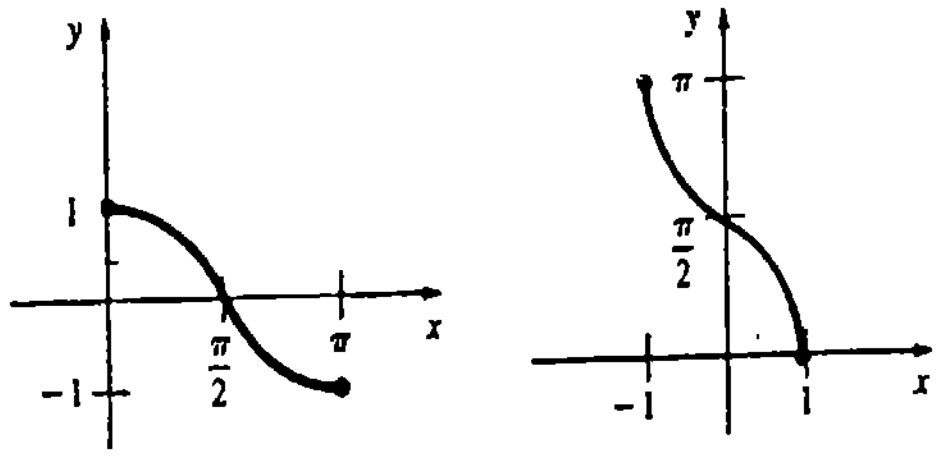
esto es *incorrecto*, estrictamente hablando. El resultado de una función trigonométrica inversa es un ángulo *medido en radianes.*

Coseno inverso

La función $y = \cos x$ es continua y decreciente en el intervalo $[0, \pi]$. Por lo tanto, el coseno inverso se define por

$$y = \cos^{-1}x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \cos y, \tag{7.9}$$

en donde $-1 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq \pi$.
Las gráficas de $y = \cos x$ y $y = \cos^{-1}x$ se ilustran en la Figura 7.13.



(a) $y = \cos x,\ 0 \leq x \leq \pi$ (b) $y = \cos^{-1} x,\ -1 \leq x \leq 1$

Figura 7.13

Ejemplo 3

Evaluar $\cos^{-1}(-1)$.

Solución Sea $y = \cos^{-1}(-1)$. En virtud de (7.9) se tiene que el único número y en el intervalo cerrado $[0, \pi]$ para el cual $\cos y = -1$ es $y = \pi$. Así que,

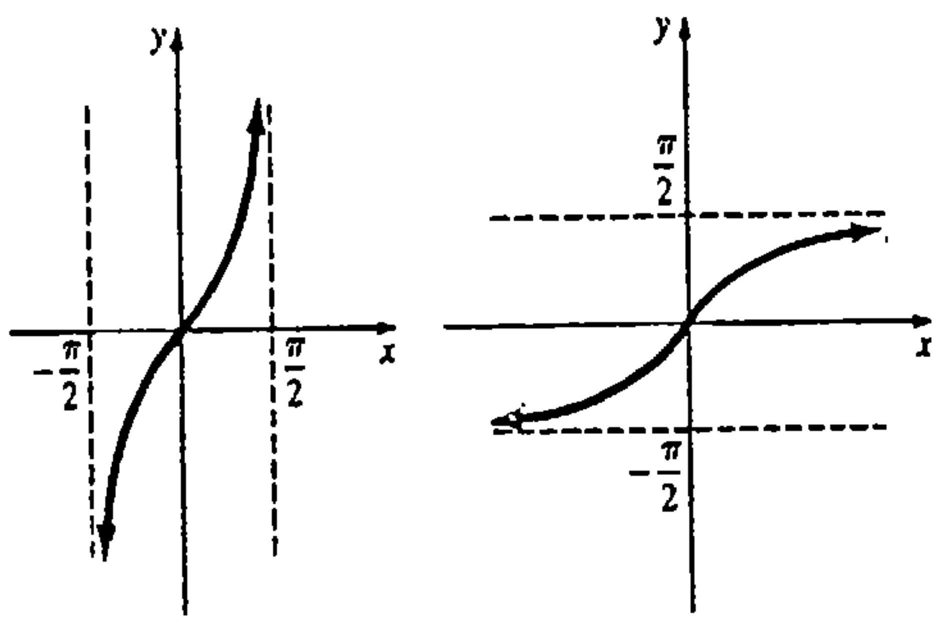
$$\cos^{-1}(-1) = \pi.$$

Tangente inversa

En el intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$, $y = \tan x$ es continua y creciente. De modo que, la tangente inversa se define por

$$y = \tan^{-1}x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \tan y, \tag{7.10}$$

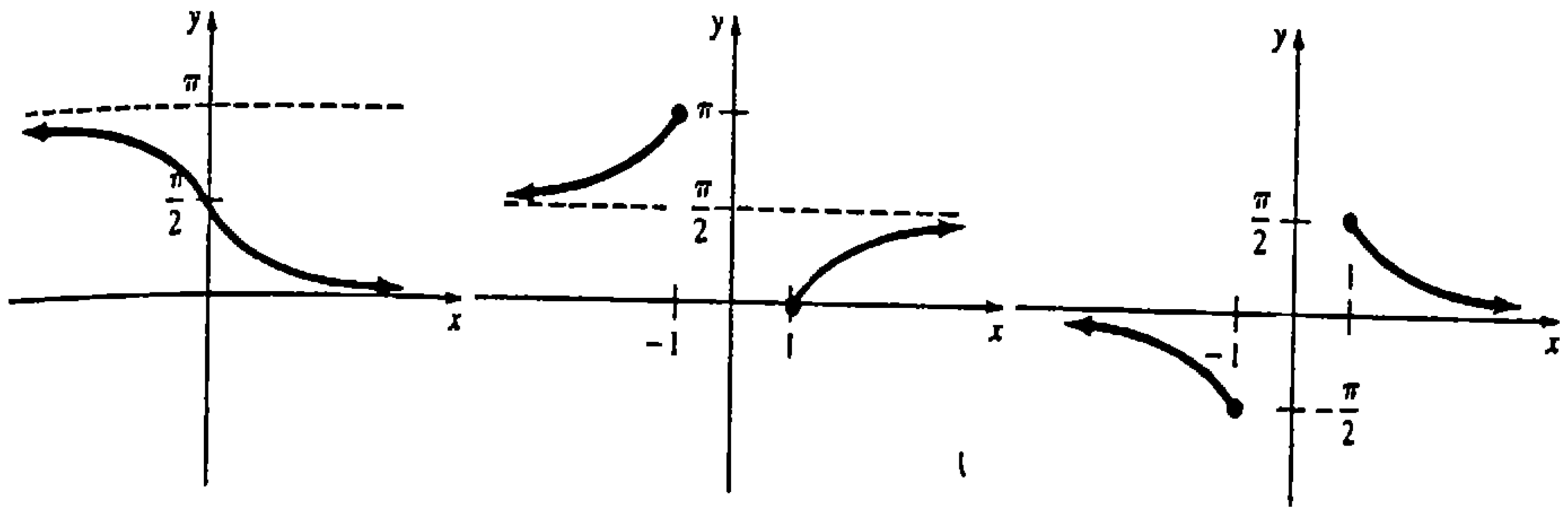
en donde $-\infty < x < \infty$ y $-\pi/2 < y < \pi/2$.
Véase la Figura 7.14.



(a) $y = \tan x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ (b) $y = \tan^{-1} x,\ -\infty < x < \infty$

Figura 7.14

Con sus dominios restringidos adecuadamente, las funciones trigonométricas restantes también tienen inversas. La definición siguiente resume (7.8), (7.9) y (7.10), junto con las definiciones de las inversas de la cotangente, secante y cosecante. Recomendamos al lector comparar las gráficas de $y = \cot^{-1}x$, $y = \sec^{-1}x$ y $y = \csc^{-1}x$, presentadas en la Figura 7.15, con las porciones pertinentes de las gráficas de $y = \cot x$, $y = \sec x$ y $y = \csc x$ (véase la página 52).



(a) $y = \cot^{-1} x,\ -\infty < x < \infty$ (b) $y = \sec^{-1} x,\ |x| \geq 1$ (c) $y = \csc^{-1} x,\ |x| \geq 1$

Figura 7.15

DEFINICIÓN 7.3
Funciones trigonométricas inversas

(*i*) $y = \operatorname{sen}^{-1}x$ si y sólo si $x = \operatorname{sen} y$,
$|x| \leq 1$ y $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$

(*ii*) $y = \cos^{-1}x$ si y sólo si $x = \cos y$,
$|x| \leq 1$ y $0 \leq y \leq \pi$

(*iii*) $y = \tan^{-1}x$ si y sólo si $x = \tan y$,
$-\infty < x < \infty$ y $-\pi/2 < y < \pi/2$

(*iv*) $y = \cot^{-1}x$ si y sólo si $x = \cot y$,
$-\infty < x < \infty$ y $0 < y < \pi$

(*v*) $y = \sec^{-1}x$ si y sólo si $x = \sec y$,
$|x| \geq 1$ y y es un número en $[0, \pi/2)$
o $(\pi/2, \pi]$

(*vi*) $y = \csc^{-1}x$ si y solo si $x = \csc y$,
$|x| \geq 1$ y y es un número en $[-\pi/2, 0)$
o $(0, \pi/2]$. □

Comó para la función seno, la partícula "arc" también sirve para denotar la inversa de cualquiera de las otras cinco funciones trigonométricas. Se emplearán ambas notaciones alternativamente.

Ejemplo 4

Evaluar $\operatorname{arcsec}(-\sqrt{2})$.

Solución Sea $y = \operatorname{arcsec}(-\sqrt{2})$, de modo que $-\sqrt{2} = \sec y$ o $\cos y = -1/\sqrt{2}$. El único número y en $[0, \pi/2)$ o $(\pi/2, \pi]$ que satisface estas condiciones es $y = 3\pi/4$. Como $\sec 3\pi/4 = -\sqrt{2}$, se tiene que

$$\operatorname{arcsec}(-\sqrt{2}) = \frac{3\pi}{4}.$$

Ejemplo 5

Evaluar $\cos\left(\tan^{-1}\frac{2}{3}\right)$.

Solución Sea $y = \tan^{-1}\frac{2}{3}$, de modo que $\frac{2}{3} = \tan y$. Utilizando como ayuda el triángulo de la Figura 7.16, puede verse que

$$\cos\left(\tan^{-1}\frac{2}{3}\right) = \cos y = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

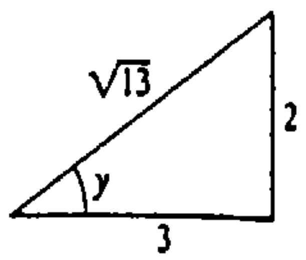


Figura 7.16

Ejemplo 6

Evaluar $\cos(\operatorname{sen}^{-1}1)$

Solución Como $\operatorname{sen}^{-1}1 = \pi/2$, se tiene que

$$\cos(\operatorname{sen}^{-1}1) = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

La tangente inversa es especialmente importante en aplicaciones.

Ejemplo 7

En una microcomputadora la función arcotangente es intrínseca, o está incorporada, al lenguaje de programación BASIC, mientras que las funciones arcoseno y arcocoseno no lo son. Para escribir un programa en el que intervenga, por ejemplo, el arcoseno, el programador debe utilizar lo que se conoce como "función definida por el usuario" que exprese el arco seno en términos del arco tangente.

Si $t = \operatorname{sen}^{-1}x$, se puede interpretar x como el cateto de un triángulo rectángulo opuesto a t, y a 1 como la hipotenusa del triángulo. En la Figura 7.17, se observa que el cateto adyacente al ángulo t es $\sqrt{1 - x^2}$. Por lo tanto,

$$\tan t = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$t = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

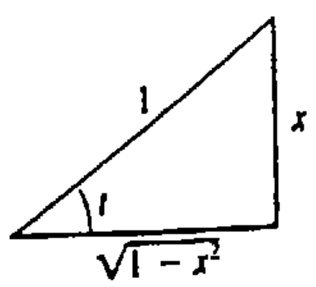


Figura 7.17

o bien

$$\operatorname{sen}^{-1}x = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}. \qquad (7.11)$$

Puede deducirse un resultado semejante para el coseno inverso. Véase el Problema 36.

Aunque se dedujo la fórmula (7.11) a partir de un triángulo en el cual $0 < t < \pi/2$, el resultado es válido para $-\pi/2 < t < \pi/2$.

Ejemplo 8

El llamado *ángulo de reposo* de un bloque a punto de resbalar sobre un plano inclinado se define mediante

$$\theta = \tan^{-1}f, \qquad (7.12)$$

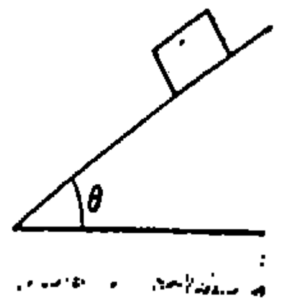


Figura 7.18

en donde f es el coeficiente de fricción. (Para madera sobre madera $0.3 \le f \le 0.6$). Véase la Figura 7.18. Para un ángulo mayor que $\tan^{-1}f$, el bloque se deslizará hacia abajo del plano inclinado.

Observación

El contradominio de una función trigonométrica inversa es arbitrario hasta cierto punto, ya que una función trigonométrica tiene una inversa en cualquier intervalo del eje x para el cual la función sea inyectiva. Por ejemplo, también se podría sencillamente limitar el dominio de $y = \operatorname{sen} x$ al intervalo $[\pi/2, 3\pi/2]$, dando lugar con ello a $y = \operatorname{sen}^{-1}x$, $|x| \le 1$ cuyo contradominio está dado por $\pi/2 \le y \le 3\pi/2$. Los ámbitos o contradominios especificados en (*i*)—(*iv*) de la Definición 7.3 están estipulados universalmente, y resultaron de la limitación más lógica y conveniente de la función original. De esta manera, al ver $\arccos x$ o $\tan^{-1}x$ en cualquier contexto, se sabe que

$$0 \le \arccos x \le \pi \quad \text{y} \quad -\pi/2 < \tan^{-1}x < \pi/2.$$

Las convenciones en (*i*)—(*iii*) son las mismas que se usan en las calculadoras manuales cuando se emplean las teclas $\operatorname{sen}^{-1}x$, $\cos^{-1}x$ y $\tan^{-1}x$. Tal vez interese saber que no ha habido acuerdo acerca de los ámbitos de las funciones $y = \sec^{-1}x$, $y = \csc^{-1}x$. Por ejemplo, en contraste con (*v*) de la Definición 7.3, algunos textos de cálculo definen

$$y = \sec^{-1}x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \sec y,$$
$$|x| \ge 1 \quad \text{y } y \text{ es un número en } [0, \pi/2) \quad \text{o} \quad [\pi, 3\pi/2). \qquad (7.13)$$

Un argumento en pro de los contradominios dados en (*v*) y (*vi*) es que se cumplen las identidades simples $\sec^{-1}x = \cos^{-1}(1/x)$ y $\csc^{-1}x = \operatorname{sen}^{-1}(1/x)$. En la observación final de la siguiente sección, se da un argumento a favor del ámbito o contradominio especificado en (7.13).

Ejercicios 7.2

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 981.

En los Problemas 1-24, obtenga el valor exacto de la expresión dada. No use calculadora ni tablas.

1. $\operatorname{sen}^{-1}(0)$
2. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$
3. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
4. $\operatorname{sen}^{-1}(-1)$
5. $\arctan(1)$
6. $\tan^{-1}(\sqrt{3})$
7. $\cot^{-1}(-1)$
8. $\sec^{-1}(-1)$
9. $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
10. $\operatorname{arccot}(-\sqrt{3})$
11. $\operatorname{arcsec}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$
12. $\csc^{-1}(-\sqrt{2})$
13. $\cos\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2}\right)$
14. $\operatorname{sen}(\cos^{-1}0)$
15. $\tan^{-1}(\cos\pi)$
16. $\cos^{-1}\left(\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$
17. $\operatorname{sen}\left(\arctan\frac{4}{3}\right)$
18. $\cos\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{2}{5}\right)$
19. $\tan\left(\cot^{-1}\frac{1}{2}\right)$
20. $\csc\left(\tan^{-1}\frac{2}{3}\right)$
21. $\sec(\tan^{-1}1)$
22. $\operatorname{arcsen}\left(\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$
23. $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$
24. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right)$

En los Problemas 25-30, evalúe la expresión dada por medio de una identidad trigonométrica apropiada.

25. $\operatorname{sen}(2\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{3})$
26. $\cos(2\cos^{-1}\frac{3}{4})$
27. $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{3}} + \arccos\frac{2}{3}\right)$
28. $\operatorname{sen}(\arctan 2 - \arctan 1)$
29. $\cos(\tan^{-1}4 - \tan^{-1}3)$
30. $\cos(\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2} + \cos^{-1}\frac{1}{2})$

En los Problemas 31-34, escriba la expresión dada como una cantidad algebraica en términos de x.

31. $\operatorname{sen}(\arccos x)$
32. $\cos\left(\tan^{-1}\frac{x}{2}\right)$
33. $\tan(\sec^{-1}x)$
34. $\sec(\cot^{-1}x)$

En los Problemas 35 y 36 verifique las identidades

35. $\operatorname{sen}^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

36. $\cos^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

En los Problemas 37 y 38 resuelva para x.

37. $2\operatorname{arcsen}(2x-5) = \pi$

38. $3x + \frac{\pi}{3} = \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

39. Si $t = \operatorname{sen}^{-1}(-2/\sqrt{5})$, encuentre $\cos t$, $\tan t$, $\cot t$, $\sec t$ y $\csc t$.

40. Si $\theta = \arctan(0.6)$, encuentre $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$ y $\csc\theta$.

Problemas para calculadora

41. Use una calculadora para verificar que

$$\tan(\tan^{-1}1.3) = 1.3 \quad \text{y} \quad \tan^{-1}(\tan 1.3) = 1.3$$

y

$$\tan(\tan^{-1}5) = 5 \quad \text{y} \quad \tan^{-1}(\tan 5) = -1.2832.$$

Explique por qué $\tan^{-1}(\tan 5) \neq 5$.

42. Sea $x = 1.7$ radianes. Compare, si es posible, los valores de $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x)$ y $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}x)$. Explique las diferencias.

43. (a) Para un automóvil que se mueve a una velocidad v, el ángulo de peralte de una curva para el cual no hay empuje lateral sobre las ruedas está dado por

$$\phi = \tan^{-1}\frac{v^2}{Rg}, \tag{7.14}$$

en donde g es la aceleración de la gravedad y R es el radio de la curva. Véase la Figura 7.19. ¿Con qué ángulo debe peraltarse una carretera para un auto que va a 55 mph en una curva de 700 pie de radio? (*Sugerencia:* utilice unidades congruentes.)

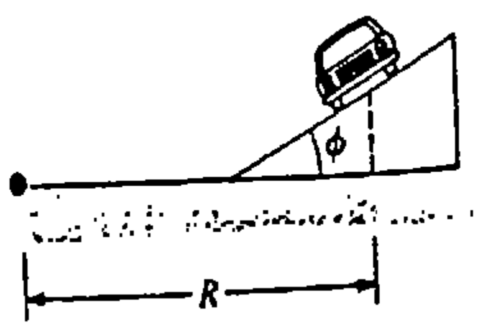


Figura 7.19

(b) Si f es el coeficiente de fricción entre el auto y la carretera y $\theta = \tan^{-1}f$ se define por (7.12) como en la página 395; entonces la velocidad máxima a la que un auto puede viajar sobre la curva sin resbalar es $v_m^2 = gR\tan(\theta + \phi)$, en donde ϕ es un ángulo de inclinación o peralte dado. Si $f = 0.25$, encuentre v_m para la carretera inclinada al ángulo determinado en la parte (a).

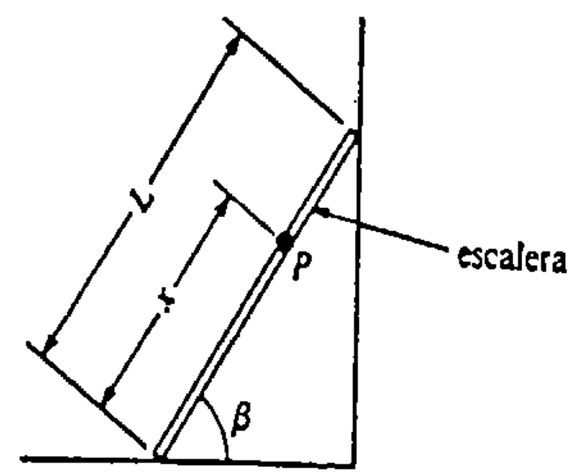


Figura 7.20

44. Considere una escalera de longitud L apoyada contra una casa, con una carga en el punto P, como se ve en la Figura 7.20. El ángulo β, al cual la escalera está a punto de resbalar, se define mediante

$$\frac{x}{L} = \frac{f}{1+f^2}(f + \tan\beta),$$

en donde f es el coeficiente de fricción entre la escalera y el suelo.

(a) Encuentre β cuando $f = 1$ y la carga está en la parte superior de la escalera.

(b) Obtenga β cuando $f = 0.5$ y la carga está a los $\frac{3}{4}$ de la longitud de la escalera desde el suelo.

45. Un avión vuela hacia el oeste con una velocidad constante v_1 y el viento sopla del norte con una velocidad constante v_2. El curso del avión al sur del oeste está dado por $\theta = \tan^{-1}v_2/v_1$. Véase la Figura 7.21. Determine el curso de un avión que vuela hacia el oeste a 300 km/h si sopla un viento del norte a 60 km/h.

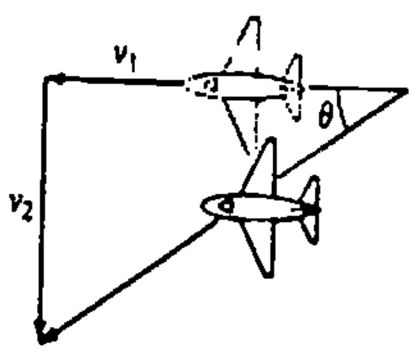


Figura 7.21

Problema diverso

46. Evalúe $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}(-2))$ sin la ayuda de una calculadora.

7.3 Derivadas e integrales en las que intervienen funciones trigonométricas inversas

Derivadas

La derivada de una función trigonométrica inversa puede obtenerse, con un esfuerzo mínimo, por medio de la derivación implícita. Un repaso a las Figuras 7.14(b), 7.15(a) y al Teorema 7.3 revela que la tangente inversa y la cotangente inversa son diferenciables para todo x. Sin embargo, las cuatro funciones trigonométricas inversas restantes no son diferenciables ni en $x = -1$ ni en $x = 1$. Limitaremos nuestra atención a la deducción de las fórmulas de las derivadas del seno inverso, la tangente inversa y la secante inversa y se dejarán las otras como ejercicios.

Seno inverso

Para $-1 < x < 1$ y $-\pi/2 < y < \pi/2$,

$$y = \operatorname{sen}^{-1}x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \operatorname{sen} y.$$

Por lo tanto, la derivación implícita da lugar a

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}\operatorname{sen} y$$

$$1 = \cos y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}. \tag{7.15}$$

Por la restricción dada sobre la variable y, $\cos y > 0$ y $\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$. Sustituyendo esta cantidad en (7.15), se habrá demostrado que

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{7.16}$$

Como ya se dijo, obsérvese que (7.16) no está definida en $x = -1$ ni en $x = 1$.

Tangente inversa

Para $-\infty < x < \infty$ y $-\pi/2 < y < \pi/2$,

$$y = \tan^{-1}x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \tan y$$

y de esta manera

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}\tan y$$

$$1 = \sec^2 y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y}. \tag{7.17}$$

Como $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$, (7.17) se convierte en

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1 + x^2}. \tag{7.18}$$

Secante inversa

Para $|x| > 1$ y $0 < y < \pi/2$ o $\pi/2 < y < \pi$,

$$y = \sec^{-1}x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \sec y.$$

Derivando implícitamente la última ecuación resulta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \tan y}. \tag{7.19}$$

En vista de las restricciones sobre y,

$$x = \sec y > 0, \quad \tan y = \sqrt{\sec^2 y - 1} = \sqrt{x^2 - 1}, \quad x > 1$$

$$x = \sec y < 0, \quad \tan y = -\sqrt{\sec^2 y - 1} = -\sqrt{x^2 - 1}, \quad x < -1.$$

Así que para $|x| > 1$, $\sec y \tan y$ es lo mismo que $|x|\sqrt{x^2 - 1}$. Se escribe entonces

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1}x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}. \tag{7.20}$$

Desde luego, (7.20) es congruente con la Figura 7.15(b); la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la secante inversa es siempre positiva.

La derivada de la composición de una función trigonométrica inversa con una función diferenciable $u = g(x)$ se obtiene a partir de la regla de la cadena.

I $\quad \dfrac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1}u = \dfrac{1}{\sqrt{1 - u^2}}\dfrac{du}{dx}$ $\qquad$ II $\quad \dfrac{d}{dx}\cos^{-1}u = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - u^2}}\dfrac{du}{dx}$

III $\quad \dfrac{d}{dx}\tan^{-1}u = \dfrac{1}{1 + u^2}\dfrac{du}{dx}$ $\qquad$ IV $\quad \dfrac{d}{dx}\cot^{-1}u = \dfrac{-1}{1 + u^2}\dfrac{du}{dx}$

V $\quad \dfrac{d}{dx}\sec^{-1}u = \dfrac{1}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}\dfrac{du}{dx}$ $\qquad$ VI $\quad \dfrac{d}{dx}\csc^{-1}u = \dfrac{-1}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}\dfrac{du}{dx}$

Ejemplo 1

Derivar $y = \operatorname{sen}^{-1}5x$.

Solución En virtud de I,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - (5x)^2}}\frac{d}{dx}5x = \frac{5}{\sqrt{1 - 25x^2}}.$$

Ejemplo 2

Derivar $y = \tan^{-1}\sqrt{2x + 1}$.

Solución En virtud de III,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1 + (\sqrt{2x + 1})^2}\frac{d}{dx}(2x + 1)^{1/2}\\ &= \frac{1}{1 + (2x + 1)}\cdot\frac{1}{2}(2x + 1)^{-1/2}\cdot 2\\ &= \frac{1}{(2x + 2)\sqrt{2x + 1}}.\end{aligned}$$

Ejemplo 3

Derivar $y = \sec^{-1}x^2$.

Solución Para $x^2 > 1$, se tiene en virtud de V,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x^2\sqrt{(x^2)^2 - 1}}\frac{d}{dx}x^2\\ &= \frac{2x}{x^2\sqrt{x^4 - 1}} = \frac{2}{x\sqrt{x^4 - 1}}.\end{aligned}$$

Obsérvese que no se utiliza el valor absoluto, puesto que $x^2 > 0$.

Integrales

De las fórmulas de derivación I—VI, se obtienen fórmulas de integración equivalentes. Sin embargo, para ser breves, consideraremos solamente las análogas de I, II y III:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{sen}^{-1} u + C \tag{7.21}$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1} u + C \tag{7.22}$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \sec^{-1}|u| + C. \tag{7.23}$$

Se sobreentiende que la variable u está restringida apropiadamente en (7.21) y (7.23). Téngase presente que en (7.21) se tiene $|u| < 1$ y en (7.23), $|u| > 1$.

Ejemplo 4

Evaluar $\int \frac{dx}{\sqrt{100 - x^2}}$.

Solución Factorizando 100 en el radical e identificando

$$u = \frac{x}{10}, \qquad du = \frac{dx}{10}$$

de (7.21) se obtiene el resultado:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{100-x^2}} = \frac{1}{10}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{10}\right)^2}}$$

$$= \int \frac{\frac{dx}{10}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{10}\right)^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \operatorname{sen}^{-1} u + C \qquad = \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{10} + C.$$

Ejemplo 5

Determinar el área bajo la gráfica de $f(x) = 1/(1 + x^2)$ en el intervalo $[-1, 1]$.

Solución En virtud de la Figura 7.22 se concluye que

$$A = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x\Big]_{-1}^{1}$$

$$= \tan^{-1} 1 - \tan^{-1}(-1)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ unidades cuadradas.}$$

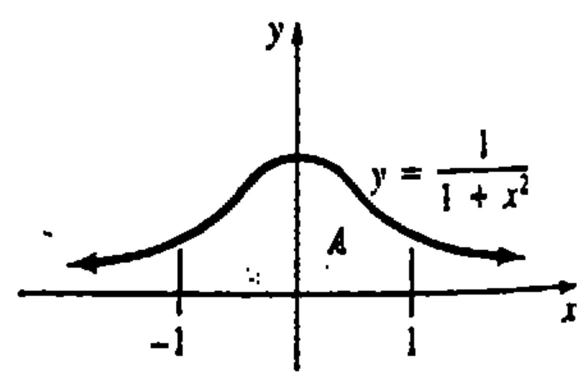


Figura 7.22

Ejemplo 6

Evaluar $\int \frac{(\tan^{-1} x)^2}{1+x^2}\,dx$.

Solución Debe ser claro inmediatamente que la integral no es de ninguna de las tres formas (7.21)—(7.23). Pero si se identifica

$$u = \tan^{-1} x \quad \text{y} \quad du = \frac{dx}{1+x^2},$$

entonces

$$\int \frac{(\tan^{-1} x)^2}{1+x^2}\,dx = \int u^2\,du$$

$$= \frac{u^3}{3} + C \quad = \frac{(\tan^{-1} x)^3}{3} + C.$$

Al enfrentarse con el problema de evaluar $\int f(x)dx$, en donde $f(x) = P(x)/Q(x)$ es una función racional, una regla de trabajo es:

Si el grado de $P(x)$ es mayor que o igual al grado de $Q(x)$, efectuar la división antes de la integración; esto es,

$$P(x) = \text{un polinomio} + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

en donde el grado de $R(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$.

Ejemplo 7

Evaluar $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$.

Solución El integrando invita a efectuar la división:

$$\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}.$$

En vista de este resultado, se tiene inmediatamente

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = x - \tan^{-1} x + C.$$

Por conveniencia, se extenderá (7.21), (7.22) y (7.23) de la manera siguiente. Para $a > 0$,

$$\text{I}' \quad \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$$

$$\text{II}' \quad \int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$$

$$\text{III}' \quad \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{|u|}{a} + C.$$

Obsérvese que el resultado del Ejemplo 4 se obtiene identificando $a = 10$ y $u = x$ en I'.

Ejemplo 8

Evaluar $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4 - 16}}$.

Solución A primera vista, la integral no parece ser de ninguna de las formas I'—III'. Pero, multiplicando el numerador y el denominador del integrando por x, puede reconocerse

$$u = x^2, \quad du = 2x\,dx, \quad \text{y} \quad a = 4.$$

Por lo tanto, en virtud de III',

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4 - 16}} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2\sqrt{x^4 - 16}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - 4^2}}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sec^{-1}\frac{u}{4} + C = \frac{1}{8}\sec^{-1}\frac{x^2}{4} + C.$$

Completar el cuadrado

Para utilizar las fórmulas de integración I'—III', podría ser necesario *completar el cuadrado* en una expresión cuadrática $ax^2 + bx + c$.

Ejemplo 9

Evaluar $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 6x - 9x^2}}$.

Solución Primero se completa el cuadrado:

$$4 - 6x - 9x^2 = 4 - (9x^2 + 6x)$$
$$= 4 - 9\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\right)$$
$$= 5 - (3x + 1)^2.$$

Enseguida puede identificarse

$$u = 3x + 1, \quad du = 3\,dx, \quad \text{y} \quad a = \sqrt{5}.$$

De I' resulta que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 6x - 9x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{3\,dx}{\sqrt{5 - (3x + 1)^2}}$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - u^2}}$$
$$= \frac{1}{3}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{\sqrt{5}} + C$$
$$= \frac{1}{3}\operatorname{sen}^{-1}\frac{3x + 1}{\sqrt{5}} + C.$$

Observación

En la Observación de la Sección 7.2 se mencionó que no ha habido acuerdo respecto al contradominio de $y = \sec^{-1}x$. En la formulación alternativa, y es un número en $[0, \pi/2)$ o en $[\pi, 3\pi/2)$. Un argumento en favor de esta segunda interpretación es que la derivada de la secante inversa no involucra valores absolutos. Véase el Problema 60 de los Ejercicios 7.3.

Ejercicios 7.3

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 981.

En los Problemas 1-18, encuentre la derivada de la función dada.

1. $y = \operatorname{sen}^{-1}(5x - 1)$
2. $y = \cos^{-1}\frac{x + 1}{3}$
3. $y = 4\cot^{-1}\frac{x}{2}$
4. $y = 2x - 10\sec^{-1}5x$
5. $y = 2\sqrt{x}\tan^{-1}\sqrt{x}$
6. $y = (\tan^{-1}x)(\cot^{-1}x)$
7. $y = \frac{\operatorname{sen}^{-1}2x}{\cos^{-1}2x}$
8. $y = \frac{\operatorname{sen}^{-1}x}{\operatorname{sen} x}$
9. $y = \frac{1}{\tan^{-1}x^2}$
10. $y = \frac{\sec^{-1}x}{x}$
11. $y = 2\operatorname{sen}^{-1}x + x\cos^{-1}x$
12. $y = \cot^{-1}x - \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$
13. $y = \left(x^2 - 9\tan^{-1}\frac{x}{3}\right)^3$
14. $y = \sqrt{x - \cos^{-1}(x + 1)}$
15. $F(t) = \tan^{-1}\frac{t - 1}{t + 1}$
16. $g(t) = \arccos\sqrt{3t + 1}$
17. $f(x) = \operatorname{arcsen}(\cos 4x)$
18. $f(x) = \tan(\operatorname{sen}^{-1}x^2)$

En los Problemas 19 y 20, utilice derivación implícita para encontrar dy/dx.

19. $\tan^{-1}y = x^2 + y^2$
20. $\operatorname{sen}^{-1}y - \cos^{-1}x = 1$

En los Problemas 21-38, evalúe la integral dada.

21. $\int \frac{dx}{1 + 25x^2}$
22. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$
23. $\int_0^{1/4} (1 - 4x^2)^{-1/2}\,dx$
24. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^6 - 4}}$
25. $\int \frac{2x - 3}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$
26. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\tan^{-1}x}{1 + x^2}\,dx$
27. $\int \frac{1 - x^2}{1 + x^2}\,dx$
28. $\int \frac{x^4 - x^3 + 3x^2 - 3x + 4}{x^2 + 3}\,dx$
29. $\int \frac{4t}{\sqrt{2 - 3t^2}}\,dt$
30. $\int \frac{\theta}{\sqrt{1 - \theta^4}}\,d\theta$
31. $\int \frac{dx}{5 + 2x^2}$
32. $\int \frac{(3x^2 - 7)^{-1/2}}{x}\,dx$
33. $\int_0^{\sqrt{2}/2} \sqrt{\frac{\operatorname{arcsen} x}{1 - x^2}}\,dx$
34. $\int_{-1}^{1} \frac{dt}{4 + (t - 1)^2}$
35. $\int \frac{dx}{(x + 1)\sqrt{x^2 + 2x}}$
36. $\int \frac{dx}{16x^2 - 8x + 26}$
37. $\int \frac{x^3 + 4x^2 + 8x + 1}{x^2 + 4x + 8}\,dx$

38. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-6x-x^2}}$

39. Halle la pendiente de la tangente a la gráfica de $y = \operatorname{sen}^{-1}x/2$ en $x = 1$.

40. Obtenga una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x\tan^{-1}x$ en $x = 1$.

41. Halle los extremos relativos de $y = -2x + 3\tan^{-1}x$.

42. Determine si la gráfica de $y = x \operatorname{arcsen} x$ tiene puntos de inflexión.

43. Calcule el área bajo la gráfica de

$$y = (24 + 2x - x^2)^{-1/2}$$

en el intervalo [2, 4].

44. La región limitada por las gráficas de $y = (4 + x^2)^{-1/2}$, $x = 1$, $x = 3$ y $y = 0$ se hace girar en torno al eje x. Obtenga el volumen del sólido de revolución.

45. La región limitada por las gráficas de

$$y = \frac{1}{x^2\sqrt{x^4-16}}, \quad x = \frac{5}{2}, \quad x = 4 \quad \text{y} \quad y = 0$$

se hace girar en torno al eje y. Determine el volumen del sólido de revolución.

46. Halle la longitud de la gráfica de $y = \sqrt{2-x^2}$ en [0, 1].

47. Un barco es tirado hacia un muelle por medio de un torno (*winch* o malacate). El equipo está situado en la orilla del muelle y se halla a 10 pie sobre el nivel al que la cuerda de remolque está sujeta a la proa del barco. La cuerda es tirada a razón constante de 1 pie/s. Aplique una función trigonométrica inversa para determinar la razón de cambio del ángulo de elevación entre la proa del barco y la orilla del muelle, cuando quedan 30 pie de la cuerda.

48. El faro buscador de un barco de patrulla que se encuentra $\frac{1}{2}$ km mar adentro, sigue a un cochecillo de playa ("dune buggy") que se mueve paralelamente al agua a lo largo de una playa recta. El vehículo viaja a razón constante de 15 km/h. Aplique una función trigonométrica inversa para determinar la velocidad a la cual gira el faro cuando el vehículo está a $\frac{1}{2}$ km del punto de la playa más cercano al barco.

49. Un vitral que mide 20 pie de altura está a 10 pie sobre el nivel del ojo de un observador. Utilice funciones trigonométricas inversas para determinar a qué distancia de la pared debe situarse el observador, de modo que sea máximo el ángulo visual al nivel del ojo entre la base y la parte superior del vitral.

50. Aplique diferenciales para aproximar $\cos^{-1}(0.47)$.

Problemas para calculadora

51. Aplique el método de Newton para obtener una aproximación a la raíz positiva de $\tan^{-1}x = x/4$.

52. Aplique el método de Newton para aproximar la abscisa del punto de intersección de las gráficas de $y = \tan^{-1}x$ y $y = \cos^{-1}x$.*

53. Aplique la regla de Simpson, con $n = 4$, para obtener una aproximación a $\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx$.

54. Considere la región limitada por las gráficas de

$$y = \frac{18}{9+x^2}, \quad x = 0, \quad x = 3 \quad \text{y} \quad y = 0.$$

Aproxime a una cifra decimal las coordenadas del centroide de la región. (*Sugerencia:* en esta ocasión no se conoce

$$\int_0^3 \frac{dx}{(9+x^2)^2} \quad \text{ni} \quad \int_0^3 \frac{x\,dx}{9+x^2}.$$

Aplique la regla de Simpson con $n = 4$.)

Problemas diversos

55. Para $|x| < 1$ y $0 < y < \pi$, demuestre que

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

56. Para $-\infty < x < \infty$ y $0 < y < \pi$, demuestre que

$$\frac{d}{dx}\cot^{-1}x = \frac{-1}{1+x^2}.$$

57. Para $|x| > 1$ y $-\pi/2 < y < 0$ o $0 < y < \pi/2$, demuestre que

$$\frac{d}{dx}\csc^{-1}x = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

58. Utilice $\sec^{-1}x = \cos^{-1}(1/x)$ y la derivada del coseno inverso para deducir el resultado (7.20).

59. Emplee $\csc^{-1}x = \operatorname{sen}^{-1}(1/x)$ y la derivada del seno inverso para deducir el resultado del Problema 57

60. Supóngase que $y = \sec^{-1}x$ y $x = \sec y$ son equivalentes cuando y es un número en $[0, \pi/2)$ o en $[\pi, 3\pi/2)$. Aplique derivación implícita para demostrar que

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1}x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

para $|x| > 1$.

61. Demuestre que si $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}x + \cos^{-1}x$, entonces $f'(x) = 0$. Interprete el resultado.

62. Resuelva de nuevo el Problema 61 para $f(x) = \tan^{-1}x + \tan^{-1}1/x$.

* Si el lector utiliza una computadora, podría reexaminar el Ejemplo 7 y el Problema 36 de la Sección 7.2.

Examen • Capítulo 7

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 981.

En los Problemas 1-14, responda verdadero o falso.

1. Si f no es biunívoca o inyectiva, entonces f^{-1} no existe. _____

2. Si (3, 1) está en la gráfica de una función inyectiva f, entonces (1, 3) está en la gráfica de f^{-1}. _____

3. La gráfica de f es una reflexión de la gráfica de f^{-1} en la recta $y = x$. _____

4. Toda función lineal $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, es inyectiva. _____

5. Si f es continua pero no inyectiva, entonces alguna recta horizontal debe cortar su gráfica en al menos dos puntos. _____

6. La función $y = \operatorname{sen} x$, $0 \le x \le \pi$, no tiene inversa. _____

7. La función $f(x) = x^5 + x^3 + x$ no tiene inversa. _____

8. Sea P un punto de la gráfica de una función inyectiva diferenciable f, y sea P' el punto correspondiente en la gráfica de f^{-1}. Si $m \neq 0$ es la pendiente de la tangente en P, entonces $1/m$ es la pendiente de la tangente en P'. _____

9. $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}x$ no es diferenciable en $x = 1$. _____

10. Si $t = \tan^{-1}(-1/2)$, entonces $\cos t = -2/\sqrt{5}$. _____

11. $\operatorname{arcsen}(1) = 90°$ _____

12. $\tan^{-1}x = 1/\tan x$ _____

13. $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{5\pi}{6}$ _____

14. $\sec(\arctan(-1)) = -\sqrt{2}$ _____

15. Dado que $f(x) = 8/(1 - x^3)$ es una función inyectiva, encuentre f^{-1} y $(f^{-1})'$.

16. Dado que $f(x) = 10 - \sqrt{x+3}$ es una función inyectiva, sin encontrar una ecuación explícita para f^{-1}, obtenga

(a) Su dominio y su contradominio, y

(b) Una ecuación de la recta tangente a su gráfica en $(f(6), 6)$.

En los Problemas 17-24 encuentre dy/dx.

17. $y = \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{3}{x}$

18. $y = \cos x \cos^{-1}x$

19. $y = (\cot^{-1}x)^{-1}$

20. $y = x\operatorname{arcsec}(2x - 1)$

21. $y = 2\cos^{-1}x + 2x\sqrt{1-x^2}$

22. $y = x^2\tan^{-1}\sqrt{x^2-1}$

23. $y - x = \operatorname{sen}^{-1}y$

24. $(1 + 9x^2)y^2 = \cot^{-1}3x$

En los Problemas 25-30 evalúe la integral dada.

25. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$

26. $\displaystyle\int \frac{x^{-1/2}}{\sqrt{1-x}}\,dx$

27. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{(\cos^{-1}x)^2\sqrt{1-x^2}}$

28. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^4-15}{x^2+4}\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{7-6x-x^2}}$

30. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x(x+4)}}$

31. Calcule el área de la región del primer cuadrante limitada por las gráficas de $y = 1/(1 + x^2)$, $y = 1/\sqrt{1-x^2}$, y $x = \frac{1}{2}$.

32. Considere el péndulo plano mostrado en la Figura 7.23, que oscila entre los puntos A y C. Si B está

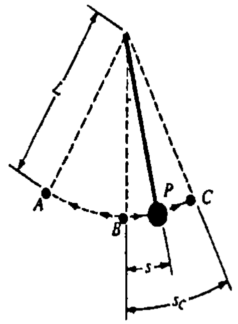


Figura 7.23

a medio camino entre A y C, se puede demostrar que el tiempo que emplea el péndulo para desplazarse entre los puntos B y P es

$$t = \int_0^s \sqrt{\frac{L}{g(s_C^2 - x^2)}}\, dx.$$

(a) Demuestre que $t = \sqrt{\frac{L}{g}} \operatorname{sen}^{-1} \frac{s}{s_C}$.

(b) Aplique el resultado de la parte (a) para determinar el tiempo de recorrido de B a C.

(c) Aplique (b) para determinar el *periodo* T del péndulo; esto es, el tiempo de una oscilación de A a C y de nuevo a A.

33. Demuestre que el área de la región sombreada en la Figura 7.24 es $2 \operatorname{sen} a - a^2$.

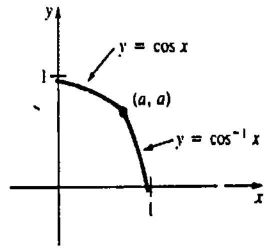


Figura 7.24

8 Funciones logarítmica y exponencial

Hay todavía algunas lagunas en nuestro conocimiento de la derivada. Hasta ahora, solamente hemos podido derivar $y = x^n$ cuando el exponente n es un número racional. Además, no hemos encontrado ninguna función cuya derivada sea $1/x = x^{-1}$.

Esto significa que es posible evaluar $\int x^n\, dx$ solamente cuando n es racional, con la excepción del número $n = -1$. En este capítulo se estudiarán dos funciones trascendentales más, lo cual permite contestar a las preguntas siguientes: ¿se puede dar significado a expresiones como x^π o $x^{\sqrt{2}}$? ¿Es $y = x^{\sqrt{2}}$ una función? Si es así, ¿cuál es su derivada? ¿Qué es $\int x^{-\pi}\, dx$? ¿Qué es $\int x^n\, dx$ cuando n es irracional?

8.1 La función logarítmica (natural)

La función $y = 1/t$, que es discontinua en $t = 0$, se muestra en la Figura 8.1(a). Como se indica en la Figura 8.1(b), $1/t > 0$ para $t > 0$, de suerte que el área bajo la gráfica en el intervalo $[1, x]$ está dada por $\int_1^x dt/t$. Esta integral de apariencia simple define una función de x de importancia tan grande que se le da un nombre especial.

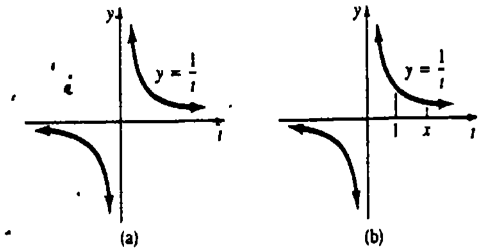


Figura 8.1

DEFINICIÓN 8.1

Para $x > 0$, la **función logarítmica natural** se define como

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}. \qquad (8.1)$$

□

Usualmente el símbolo $\ln x$ se expresa simplemente como "ele ene de x".

Ejemplo 1

Obtener el valor de ln 2.

Solución En la Sección 5.8 se utilizó la regla trapecial para evaluar $\int_1^2 dt/t$. El Ejemplo 1 de esa sección indica que

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dt}{t} \approx 0.6949.$$

Una consideración de las áreas mostradas en la Figura 8.2 establece una desigualdad para el valor de ln 2:

$$\frac{1}{2} < \ln 2 < 1. \qquad (8.2)$$

La expresión (8.2) resultará útil para trazar la gráfica de la función logarítmica natural.

La palabra "logaritmo" indudablemente trae recuerdos de cálculos formidables con los logaritmos **comunes**, o **de base 10**, en las matemáticas previas al Cálculo. Es importante darse cuenta de que (8.1) *no* es el logaritmo de base 10. Aunque puede parecer un consejo extraño, es mejor olvidarse de la noción de base de un logaritmo para el estudio de esta sección. Nuestra meta inmediata es mostrar que $\ln x$ se "comporta como", o más precisamente, tiene las mismas propiedades que el logaritmo común. Sin embargo,

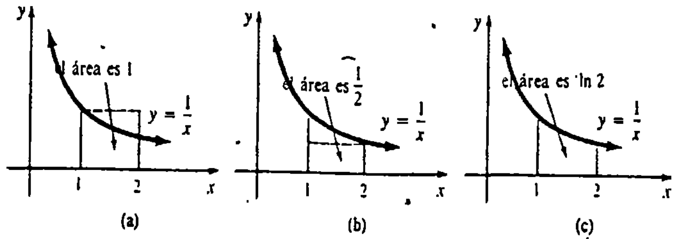


Figura 8.2

en este momento no diremos por qué (8.1) se la llama una función "natural". Al final de este capítulo la respuesta debe ser obvia.

Derivada de ln x

La derivada de la función logarítmica natural puede encontrarse rápidamente de la forma para derivadas del teorema fundamental del cálculo. Recuérdese que $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$.

Por lo tanto, $\frac{d}{dx}\int_1^x 1/t\,dt = 1/x$. En otras palabras,

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}, \qquad x > 0. \qquad (8.3)$$

Nota: En (8.1) y (8.3) está inherente la respuesta a una de las preguntas planteadas en el prólogo de este capítulo, a saber, la función logarítmica natural es una antiderivada de x^{-1}.

El resultado dado en (8.3) se generaliza por la regla de la cadena a la composición de la función logarítmica natural y una función diferenciable positiva $u = g(x)$:

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}, \qquad u > 0. \qquad (8.4)$$

Leyes del logaritmo natural

Se pondrá en uso inmediato el resultado (8.4) al demostrar las leyes del logaritmo natural, las cuales se resumen en el teorema siguiente.

TEOREMA 8.1

Sean a y b números reales positivos y t un número racional. Entonces,

(*i*) $\ln ab = \ln a + \ln b$.

(*ii*) $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

(*iii*) $\ln a^t = t \ln a$.

Demostración de (*i*) Definamos una función $F(x) = \ln ax$ y sea $f(x) = \ln x$. En virtud de (8.3) y (8.4),

$$F'(x) = \frac{1}{ax}\cdot\frac{d}{dx}ax = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x} = f'(x).$$

Así que, de la definición de antiderivada

$$F(x) = f(x) + C.$$

Pero, puesto que $\ln 1 = \int_1^1 dt/t = 0$, se tiene que

$$F(1) = f(1) + C$$
$$\ln a = \ln 1 + C,$$

y así $C = \ln a$. Por lo tanto, $F(x) = \ln x + \ln a$. Sustituyendo $x = b$ resulta

$$\ln ab = \ln b + \ln a$$
$$= \ln a + \ln b.$$

Demostración de *(iii)* Definamos dos funciones $F(x) = \ln x^t$ y $G(x) = t \ln x$, en donde t es un número racional. Entonces de (8.4)

$$F'(x) = \frac{1}{x^t} \cdot tx^{t-1} = \frac{t}{x},$$

y de (8.3)

$$G'(x) = \frac{t}{x}.$$

Como antes, se puede escribir

$$F(x) = G(x) + C$$
$$F(1) = G(1) + C$$
$$\ln 1 = t \ln 1 + C.$$

En este caso $C = 0$. Sustituyendo $x = a$ en $\ln x^t = t$ en x resulta

$$\ln a^t = t \ln a.$$ □

La demostración de la propiedad *(ii)* puede obtenerse de *(i)* y *(iii)* y se deja como ejercicio.

Gráfica de ln x

Primero observamos que

$$\ln 1 = 0 \tag{8.5}$$

significa que la gráfica de $y = \ln x$ corta al eje x en (1, 0). En seguida,

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} > 0 \quad \text{para } x > 0 \tag{8.6}$$

implica que $y = \ln x$ es una función creciente en el intervalo $(0, \infty)$. Además,

$$\frac{d^2}{dx^2} \ln x = \frac{d}{dx}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \text{para } x > 0 \tag{8.7}$$

demuestra que la gráfica de $y = \ln x$ debe ser cóncava hacia abajo en $(0, \infty)$. También, cuando n es un entero, *(iii)* de las leyes de los logaritmos y la desigualdad (8.2) dan

$$\ln 2^n = n \ln 2 > \frac{n}{2}. \tag{8.8}$$

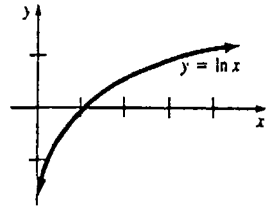
En virtud de (8.8) concluimos que $\ln x$ puede hacerse arbitrariamente grande eligiendo que x sea grande; esto es

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty. \tag{8.9}$$

Finalmente, puesto que $-\ln(1/x) = \ln x$ (¿por qué?) y $\lim_{x\to 0^+} 1/x = \infty$, se tiene entonces

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty. \tag{8.10}$$

Reuniendo la información en (8.5), (8.6), (8.7), (8.9) y (8.10) se origina la gráfica de $y = \ln x$ que se muestra en la Figura 8.3(a). Desde luego, es posible obtener puntos (aproximados) de la gráfica empleando la información del Ejemplo 1 y la propiedad $\ln 2^n = n \ln 2$. Se dan algunos valores numéricos en la tabla adjunta a la gráfica.



(a)

x	$\ln x$
$\frac{1}{4}$	$-2 \ln 2 \approx -1.39$
$\frac{1}{2}$	$-\ln 2 \approx -0.69$
4	$2 \ln 2 \approx 1.39$
8	$3 \ln 2 \approx 2.08$
64	$6 \ln 2 \approx 4.17$

(b)

Figura 8.3

y = ln x *tiene inversa*

Una inspección más minuciosa de su gráfica debe convencer al lector de que la función logarítmica natural es inyectiva (biunívoca). Para cualquier número real r, hay solamente un valor de x_0 para el cual $r = \ln x_0$. Véase la Figura 8.4. También, en vista del hecho de que es una función creciente para $x > 0$, resulta del Teorema 7.2 que la función logarítmica natural tiene inversa. Esta función inversa será estudiada en la sección siguiente.

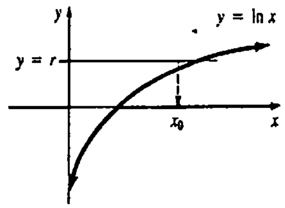


Figura 8.4

Aunque el dominio de la función logarítmica natural $y = \ln x$ es el conjunto de los números reales positivos, el dominio de $y = \ln |x|$ se extiende al conjunto de números reales excepto $x = 0$. Además,

$$\text{para } x > 0, \qquad \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x},$$

$$\text{para } x < 0, \qquad \frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{1}{(-x)}\frac{d}{dx}(-x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

Se ha demostrado que

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0. \tag{8.11}$$

Ejemplo 2

Obtener la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = \ln|x|$ en $x = 2$ y en $x = -2$.

Solución Puesto que (8.11) da $dy/dx = 1/x$, se tiene

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-2} = -\frac{1}{2}.$$

Obsérvese en la Figura 8.5 que la gráfica de $y = \ln|x|$ es simétrica con respecto al eje y.

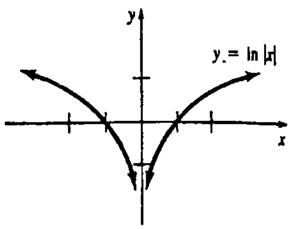


Figura 8.5

Cuando $u = g(x)$ es una función diferenciable, la regla de la cadena da, adicionalmente,

$$\frac{d}{dx}\ln|u| = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}, \qquad u \neq 0. \tag{8.12}$$

Ejemplo 3

Derivar

(*a*) $y = \ln(2x - 3)$, y (*b*) $y = \ln|2x - 3|$.

Solución

(*a*) Para $2x - 3 > 0$, se tiene en virtud de (8.4) que,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x-3}\frac{d}{dx}(2x-3) = \frac{2}{2x-3}. \tag{8.13}$$

(*b*) Para $2x - 3 \neq 0$, se tiene por (8.12) que,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x-3}\frac{d}{dx}(2x-3) = \frac{2}{2x-3}. \tag{8.14}$$

Aunque (8.13) y (8.14) *aparentemente* son iguales, no son la misma función definitivamente. La diferencia es simplemente que el dominio de (8.13) es $(\frac{3}{2}, \infty)$, mientras que el dominio de (8.14) es el conjunto de números reales excepto $x = \frac{3}{2}$.

Ejemplo 4

Derivar $y = \ln x^3$.

Solución Debido a que x^3 debe ser positivo, se sobreentiende que $x > 0$. Por lo tanto, en virtud de (8.4),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^3}\frac{d}{dx}x^3 = \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x}.$$

Solución alternativa Por la propiedad (*iii*) se puede escribir primero

$$y = 3\ln x$$

y luego derivar para obtener el mismo resultado anterior.

Ejemplo 5

Las funciones $f(x) = \ln x^4$ y $g(x) = 4\ln x$ no son iguales. Puesto que $x^4 > 0$ para todo $x \neq 0$, el dominio de f es el conjunto de los números reales excepto $x = 0$. El dominio de g es $(0, \infty)$. De manera que

$$f'(x) = \frac{4}{x}, \quad x \neq 0, \quad \text{mientras que } g'(x) = \frac{4}{x}, \quad x > 0.$$

Ejemplo 6

Derivar $y = \ln \dfrac{x^{1/2}(2x+7)^4}{(3x^2+1)^2}$.

Solución Aplicando las propiedades de los logaritmos, se puede escribir para $x > 0$,

$$\begin{aligned} y &= \ln x^{1/2}(2x+7)^4 - \ln(3x^2+1)^2 \\ &= \ln x^{1/2} + \ln(2x+7)^4 - \ln(3x^2+1)^2 \\ &= \frac{1}{2}\ln x + 4\ln(2x+7) - 2\ln(3x^2+1) \end{aligned}$$

y así

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + 4\cdot\frac{1}{2x+7}\cdot 2 - 2\cdot\frac{1}{3x^2+1}\cdot 6x \\ &= \frac{1}{2x} + \frac{8}{2x+7} - \frac{12x}{3x^2+1}. \end{aligned}$$

Ejemplo 7

Derivar $y = \ln(\ln x)$.

Solución En virtud de (8.4),

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\ln x}\frac{d}{dx}(\ln x) \\ &= \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln x}. \end{aligned}$$

Observación

Se debe tener cuidado al trabajar con logaritmos. Obsérvese que

$\ln x^2$ *no es lo mismo que* $(\ln x)^2$,

$\ln(x^2 + 4)$ *no es lo mismo que* $\ln x^2 + \ln 4$, y

$\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(3x+2)}$ *no es lo mismo que* $\ln(x+1) - \ln(3x+2)$.

Ejercicios 8.1

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 981.

En los Problemas 1-4, determine el dominio de la función dada.

1. $f(x) = \ln(x+1)$
2. $f(x) = \ln x^2$
3. $f(x) = \ln|x^2 - 1|$
4. $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

En los Problemas 5-8, determine si f y g son funciones iguales.

5. $f(r) = \ln x^6$, $g(x) = 6 \ln x$
6. $f(x) = \ln x^{1/3}$, $g(x) = \frac{1}{3}\ln x$
7. $f(x) = \ln x(x^4 + 3)$, $g(x) = \ln x + \ln(x^4 + 3)$
8. $f(x) = \ln(2x + 7)$, $g(x) = \ln 2x + \ln 7$

En los Problemas 9-32, encuentre la derivada de la función dada.

9. $y = 10 \ln x$
10. $y = \ln 10x$
11. $y = \ln x^{1/2}$
12. $y = (\ln x)^{1/2}$
13. $y = \ln(x^4 + 3x^2 + 1)$
14. $y = \ln(x^2 + 1)^{20}$
15. $y = x^2 \ln x^3$
16. $y = x - \ln|5x + 1|$
17. $y = \dfrac{\ln x}{x}$
18. $y = x(\ln x)^2$
19. $y = \ln \dfrac{x}{x+1}$
20. $y = \dfrac{\ln 4x}{\ln 2x}$
21. $y = -\ln|\cos x|$
22. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
23. $y = \dfrac{1}{\ln x}$
24. $y = \ln \dfrac{1}{x}$
25. $f(x) = \ln(x \ln x)$
26. $g(x) = \sqrt{\ln \sqrt{x}}$
27. $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$
28. $w(\theta) = \theta \operatorname{sen}(\ln 5\theta)$
29. $H(t) = \ln t^2(3t^2 + 6)$
30. $G(t) = \ln \sqrt{5t + 1}(t^3 + 4)^6$
31. $f(x) = \ln \dfrac{(x+1)(x+2)}{x+3}$
32. $f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{(3x+2)^5}{x^4 + 7}}$

En los Problemas 33-38, utilice derivación implícita para encontrar dy/dx.

33. $y^2 = \ln xy$
34. $y = \ln(x + y)$
35. $x + y^2 = \ln \dfrac{x}{y}$
36. $y = \ln xy^2$
37. $xy = \ln(x^2 + y^2)$
38. $x^2 + y^2 = \ln(x + y)^2$

39. Encontrar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = \ln x$ en $x = 1$.

40. Obtener la pendiente de la tangente a la gráfica de $y = (\ln|x|)^2$ en $x = 1$.

41. Determinar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = \ln(x^2 - 3)$ en $x = 2$.

42. Calcular la pendiente de la tangente a la gráfica de y' en el punto donde sea 4 la pendiente de la tangente a la gráfica de $y = \ln x^2$.

43. Determinar el punto de la gráfica de $y = \ln 2x$ en el cual la recta tangente sea perpendicular a $x + 4y = 1$.

44. Si $y = \ln x$, encuentre $d^n y/dx^n$.

En los Problemas 45-48, dibuje la gráfica de la función dada.

45. $y = -\ln x$
46. $y = 2 + \ln x$

47. $y = \ln(x - 2)$
48. $y = \ln|x + 1|$

49. Para $x > 0$, verifique que tanto $y = x^{-1/2}$ como $y = x^{-1/2} \ln x$ satisfacen la ecuación $4x^2 \, d^2y/dx^2 + 8x \, dy/dx + y = 0$.

50. Para $x > 0$, verifique que $y = c_1 x^{-1} \cos(\sqrt{2} \ln x) + c_2 x^{-1} \operatorname{sen}(\sqrt{2} \ln x)$, en donde c_1 y c_2 son constantes, satisface la ecuación $x^2 y'' + 3xy' + 3y = 0$.

Problemas para calculadora

En los Problemas 51 y 52, demuestre gráficamente que la ecuación dada posee solamente una raíz real. Aplique el método de Newton para aproximar la raíz a tres cifras decimales.

51. $\ln x = 2$
52. $x + \ln x - 3 = 0$

Problemas diversos

53. Aplique (*iii*) del Teorema 8.1 para demostrar que $\ln 1/b = -\ln b$.

54. Aplique (*i*) del Teorema 8.1 y el resultado del Problema 53 para demostrar (*ii*) del Teorema 8.1. (*Sugerencia:* $\ln a/b = \ln(a \cdot 1/b)$.)

8.2 La función exponencial (natural)

En la sección precedente observamos que $y = \ln x$ es una función inyectiva y, consecuentemente, tiene inversa. La inversa de la función logarítmica natural se denota por $y = \exp x$ y se la llama **la función exponencial natural, o simplemente función exponencial.**

DEFINICIÓN 8.2

$$y = \exp x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \ln y. \qquad \square$$

Ámbito y dominio

Como el dominio de la función logarítmica natural es el conjunto de los números positivos reales, resulta que el ámbito o contradominio de la función exponencial es el mismo conjunto. En otras palabras,

$$\exp x > 0$$

para todo x. De manera semejante, puesto que el valor de $y = \ln x$ puede ser cualquier número real, el dominio de $y = \exp x$ es el conjunto de los números reales.

En virtud de (7.2) de la Sección 7.1, se tiene que

$$\ln(\exp x) = x \quad \text{para todo } x \quad \text{y} \quad \exp(\ln x) = x, \quad x > 0. \qquad (8.15)$$

El número e

El número exp 1 es de tal importancia en matemáticas que se denota por el símbolo e*, esto es,

$$e = \exp 1.$$

Se puede demostrar que con doce cifras decimales

$$e = 2.718281828459\ldots \qquad (8.16)$$

* Se empleó la letra e en honor del matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783). Sin duda, Euler merece ser llamado uno de los más grandes matemáticos que jamás hayan existido.

El número e, al igual que el número π, es irracional y trascendental.† En el Problema 64 de los Ejercicios 8.2 se pide al lector demostrar que $2.7 < e < 2.8$.

Ahora bien, en virtud de (8.15), se sabe que $\ln(\exp x) = x$ y por lo tanto $\ln(\exp 1) = 1$. Este último resultado es equivalente a

$$\ln e = 1. \tag{8.17}$$

Ahora, si t es un número racional, se tiene de (8.17) y (*iii*) de las leyes del logaritmo natural, que

$$\ln e^t = t \ln e = t \cdot 1 = t. \tag{8.18}$$

Pero, en vista de la Definición 8.2, (8.18) es lo mismo que

$$e^t = \exp t. \tag{8.19}$$

El resultado dado en (8.19) sugiere que e^x sea definido *para cualquier número real* x de la manera siguiente.

DEFINICIÓN 8.3

Para cualquier número real x,

$$e^x = \exp x.$$ □

En lo sucesivo, se eliminará la notación $\exp x$, para usar e^x exclusivamente. De ahora en adelante, a la función $y = e^x$ se la llamará la **función exponencial con base e**. Al número x también se le llama **exponente** de la base e.

Hagamos ahora un resumen de la discusión precedente empleando el símbolo e.

- $y = e^x$ si y sólo si $x = \ln y$ (8.20)
- $y = e^x$ es la inversa de $y = \ln x$ (8.21)
- El dominio de $y = e^x$ es $(-\infty, \infty)$ (8.22)
- El contradominio de $y = e^x$ es $(0, \infty)$. Esto significa que $e^x > 0$ para todo x. (8.23)
- $\ln e^x = x$ para todo x. (8.24)
- $e^{\ln x} = x, x > 0$. (8.25)

Los valores numéricos de e^x han sido tabulados extensivamente (véase la Tabla II) y la mayoría de las calculadoras manuales científicas tienen una tecla marcada $\boxed{e^x}$.

† Un *número trascendental* es aquel que *no* es raíz de una ecuación polinomial con coeficientes enteros. El matemático francés Charles Hermite (1822-1901) demostró en 1873 que el número e es trascendental, mientras que el matemático alemán Ferdinand Lindemann demostró nueve años más tarde que π es trascendental. Esta última demostración probó de manera concluyente que es imposible la "cuadratura del círculo" con regla y compás.

Ejemplo 1

Mediante una calculadora se obtiene

$$e^2 \approx 7.3891.$$

Gráfica de $y = e^x$

Como $y = e^x$ es la inversa de la función logarítmica natural, su gráfica se puede obtener por reflexión de la gráfica de $y = \ln x$ a través de la recta $y = x$. Véase la Figura 8.6.

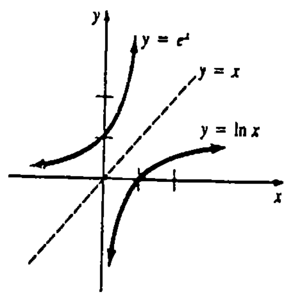


Figura 8.6

Ley de los exponentes

Las leyes siguientes para e^x son las leyes bien conocidas de los exponentes.

TEOREMA 8.2

Sean r y s número reales cualesquiera y t un número racional. Entonces,

(*i*) $e^0 = 1$ (*ii*) $e^1 = e$

(*iii*) $e^r e^s = e^{r+s}$ (*iv*) $\dfrac{e^r}{e^s} = e^{r-s}$

(*v*) $(e^r)^t = e^{rt}$ (*vi*) $e^{-r} = \dfrac{1}{e^r}$.

Demostración de (*i*) $e^0 = 1$ puesto que $\ln 1 = 0$.

Demostración de (*iv*) Sean $M = e^r$ y $N = e^s$, de modo que $r = \ln M$ y $s = \ln N$, respectivamente. En virtud de (*ii*) de las leyes del logaritmo natural

$$\ln \frac{M}{N} = \ln M - \ln N = r - s.$$

Así que, de (8.20)

$$\frac{M}{N} = e^{r-s}$$

o bien

$$\frac{e^r}{e^s} = e^{r-s}.$$

Demostración de (vi) Sean $M = e^{-r}$. Entonces, (8.20) da

$$\ln M = -r$$
$$-\ln M = r$$
$$\ln M^{-1} = r$$
$$\ln \frac{1}{M} = r$$
$$\frac{1}{M} = e^{r}$$
$$M = \frac{1}{e^{r}}$$
$$e^{-r} = \frac{1}{e^{r}}. \quad \square$$

Las demostraciones de (*iii*) y (*v*) se dejan como ejercicios.

Ejemplo 2

Si $y > 0$ es un número tal que $\ln y = -1$, entonces (8.20) da $y = e^{-1}$. Por (*vi*) del Teorema 8.2

$$y = \frac{1}{e},$$

y de (8.16) resulta que

$$e^{-1} \approx 0.3679.$$

Derivada de e^x

Sabemos que si

$$y = e^{x}, \quad \text{entonces} \quad \ln y = x.$$

Derivando la última ecuación implícitamente con respecto a x resulta

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 \quad \text{o} \quad \frac{dy}{dx} = y.$$

Como $y = e^{x}$, se obtiene el resultado notable*

$$\frac{d}{dx} e^{x} = e^{x}. \tag{8.26}$$

Aplicando la regla de la cadena, (8.26) se generaliza inmediatamente a

$$\frac{d}{dx} e^{u} = e^{u} \frac{du}{dx}, \tag{8.27}$$

en donde $u = g(x)$ es una función diferenciable.

* Se puede demostrar que $y = e^{x}$ es la *única* función cuya gráfica pasa por (0, 1) para la cual la derivada es la misma función. Cualquier función de la familia $y = Ce^{x}$, siendo C una constante arbitraria, también satisface $y' = y$.

Ejemplo 3

Derivar $y = e^{4x}$.

Solución En virtud de (8.27),

$$\frac{dy}{dx} = e^{4x} \cdot \frac{d}{dx}(4x) = e^{4x}(4) = 4e^{4x}.$$

Ejemplo 4

Derivar $y = e^{1/x^3}$.

Solución En virtud de (8.27),

$$\frac{dy}{dx} = e^{1/x^3} \cdot \frac{d}{dx}(x^{-3}) = e^{1/x^3}(-3x^{-4})$$
$$= -\frac{3e^{1/x^3}}{x^4}.$$

Ejemplo 5

Derivar $y = \ln(e^{4x} + e^{-4x})$.

Solución En virtud de (8.4) de la sección precedente y de (8.27), se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^{4x} + e^{-4x}} \cdot \frac{d}{dx}(e^{4x} + e^{-4x})$$
$$= \frac{1}{e^{4x} + e^{-4x}} \cdot (4e^{4x} - 4e^{-4x}) = \frac{4(e^{4x} - e^{-4x})}{e^{4x} + e^{-4x}}.$$

Ejemplo 6

Hallar la pendiente de la recta tangente a $y = e^{2\sqrt{x}} \ln 3x$ en $x = 1$.

Solución Por la regla del producto, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = e^{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{3x} \cdot 3 + \ln 3x \cdot e^{2\sqrt{x}} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

y de esta manera

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = e^{2} + e^{2}\ln 3 = e^{2}(1 + \ln 3).$$

Ejemplo 7

La derivada de $f(x) = e^{kx}$ es $f'(x) = ke^{kx}$. Como $e^{kx} > 0$, se observa que

$$f'(x) < 0 \quad \text{para} \quad k < 0 \quad \text{y} \quad f'(x) > 0 \quad \text{para} \quad k > 0.$$

Esto demuestra que f es una función creciente en $(-\infty, \infty)$ cuando $k > 0$, y una función decreciente en el intervalo cuando $k < 0$. La gráfica de f para el caso $k = -1$ se presenta en la Figura 8.7.

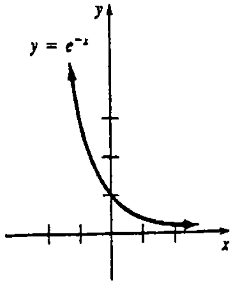


Figura 8.7

Ejemplo 8

Trazar la gráfica de $y = xe^{x/2}$.

Solución Puede verse que como $f(0) = 0$, la gráfica pasa por el origen. Ya no hay otras intersecciones x. También, cuando $x < 0, y < 0$, y para $x > 0, y > 0$. Ahora bien, la derivada es

$$\frac{dy}{dx} = xe^{x/2} \cdot \frac{1}{2} + e^{x/2}$$
$$= \frac{1}{2}e^{x/2}(x + 2).$$

Haciendo este último resultado igual a cero se origina el valor crítico -2. Puesto que

$$\frac{dy}{dx} < 0 \quad \text{para } x < -2 \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} > 0 \quad \text{para } x > -2,$$

concluimos, en virtud del criterio de la primera derivada, que $f(-2) = -2e^{-1}$ es un mínimo relativo. Una inspección a la Figura 8.8 indica también que este valor es un mínimo absoluto de la función.

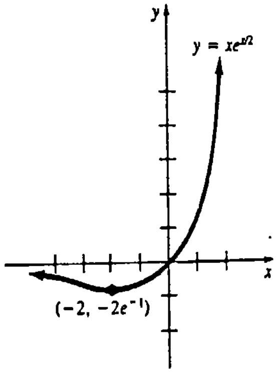


Figura 8.8

e como un límite

El número e puede ser expresado como un límite. En el Capítulo 10 se demostrará que

$$\lim_{h \to 0} (1 + h)^{1/h} = e. \qquad (8.28)$$

La tabla siguiente (obtenida por medio de una calculadora) simplemente sugiere el resultado anterior.

h	$(1 + h)^{1/h}$
0.1	2.5937425
0.01	2.7048138
0.001	2.7169238
0.0001	2.7181459
0.00001	2.7182546
−0.0001	2.7184177
−0.00001	2.7182818

Si se hace $n = 1/h$, $h > 0$, entonces cuando $h \to 0$ se tiene que $n \to \infty$; por lo tanto, (8.28) puede escribirse en la forma alterna

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \qquad (8.29)$$

Estos resultados de límite son importantes y deben recordarse. En efecto, (8.28) a menudo se toma como la *definición* del número e. El origen de (8.28) puede verse en la Sección 8.5.

Ejercicios 8.2

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 982.

En los Problemas 1—30, encuentre la derivada de la función dada.

1. $y = e^{-x}$
2. $y = e^{2x+3}$
3. $y = e^{\sqrt{x}}$
4. $y = e^{\cos 10x}$
5. $y = \dfrac{e^{-2x}}{x}$
6. $y = x^3e^{4x}$
7. $y = \sqrt{1 + e^{-5x}}$
8. $y = \dfrac{1}{(e^{2x} - e^{-2x})^2}$
9. $y = \ln(x^4 + e^{x^2})$
10. $y = \ln \sqrt{e^x + e^{-x}}$
11. $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
12. $y = \dfrac{e^{7x}}{e^{-x}}$
13. $y = e^{\ln x}$
14. $y = \ln e^x$
15. $y = e^{3x}\ln(x^2 + 1)$
16. $y = \dfrac{\ln x}{e^x}$
17. $y = e^{\frac{x+2}{x-2}}$
18. $y = \ln\left|\dfrac{1 + e^{2x}}{1 - e^{2x}}\right|$
19. $y = e^{e^{x^2}}$
20. $y = (e^3)^{x-1}$
21. $y = e^{2x}e^{3x}e^{4x}$
22. $y = e^x + e^{x+e^x}$
23. $F(t) = e^{t^{1/3}} + (e^t)^{1/3}$
24. $g(t) = e^{-t}\tan e^t$
25. $f(x) = (2x + 1)^3e^{-(1-x)^4}$
26. $f(x) = e^{x\sqrt{x^2+1}}$
27. $f(x) = \dfrac{xe^x}{x + e^x}$
28. $f(x) = xe^{2x}\ln x$
29. $f(x) = \tan^{-1}e^{2x}$
30. $f(x) = x \sec e^{-x}$

En los Problemas 31-36, utilice derivación implícita para encontrar dy/dx.

31. $y = e^{x+y}$
32. $\ln y = x + e^y$
33. $y = \cos e^{xy}$
34. $y = e^{(x+y)^2}$
35. $x + y^2 = e^{x/y}$
36. $e^x + e^y = y$

En los Problemas 37-40, determine la derivada indicada.

37. $y = e^{-4x}$; $\dfrac{d^3y}{dx^3}$
38. $y = \operatorname{sen} e^{2x}$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

39. $y = \ln(e^x + 1);\ \dfrac{d^2y}{dx^2}$ 40. $y = xe^x;\ \dfrac{d^4y}{dx^4}$

41. Obtenga una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = e^x$ en $x = 1$.

42. Obtenga una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = \ln(e^x + 1)$ en $x = 0$.

43. Determine la pendiente de la recta normal a la gráfica de $y = (x - 1)e^{-x}$ en $x = 0$.

44. Halle el punto de la gráfica de $y = e^x$ en el cual la recta tangente sea paralela a $3x - y = 7$.

En los Problemas 45-48, dibuje la gráfica de la función dada.

45. $y = -e^x$ 46. $y = 1 + e^{-x}$

47. $y = 2 - e^{-x}$ 48. $y = e^x + e^{-x}$

En los Problemas 49-54, halle los extremos relativos de cada función. Trace la gráfica.

49. $y = xe^{-x}$ 50. $y = \dfrac{e^x}{x}$

51. $y = e^{-x^2}$ 52. $y = e^{(x-2)^2}$

53. $y = x \ln x$ 54. $y = \dfrac{\ln x}{x}$

55. Verifique que $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x}$, en donde C_1 y C_2 son constantes, satisface la ecuación $y'' + y' - 6y = 0$.

56. Verifique que tanto $y = e^{-2x}$ como $y = xe^{-2x}$ satisfacen la ecuación $y'' + 4y' + 4y = 0$.

57. La corriente $i(t)$ en un circuito eléctrico en serie que contiene un inductor y un resistor está dada por

$$i(t) = \frac{E_0}{R} + Ce^{-(R/L)t},$$

en donde E_0, R, L y C son constantes. Demuestre que i satisface la ecuación $L\ di/dt + Ri = E_0$.

58. A la gráfica de $P(t) = ac/(bc + e^{-at})$, en donde a, b y c son constantes, se la llama **curva logística** y ocurre en un modelo matemático de una población que se expande en forma limitada. Demuestre que P satisface la ecuación logística $dP/dt = P(a - bP)$.

59. Demuestre que la curva logística $P(t) = 2/(1 + e^{-2t})$ no tiene extremos relativos. Encuentre los puntos de inflexión. Trace la gráfica de $P(t)$.

60. A la gráfica de $P(t) = e^{a/b}e^{-ce^{-bt}}$, en donde a, b y c son constantes, se la llama **curva de Gompertz**.* Demuestre que P satisface $dP/dt = P(a - b \ln P)$.

Problemas para calculadora

61. El modelo de Jenss (1937) representa la fórmula de mayor precisión obtenida empíricamente para predecir la estatura h (en centímetros) en términos de la edad t (en años) para niños en edad preescolar (de 3 meses a 6 años):

$$h = 79.04 + 6.39t - e^{3.26-0.99t}.$$

(a) ¿Qué estatura predice este modelo para un niño de dos años de edad?

(b) ¿Cuál es la rapidez de aumento de estatura a los dos años de edad?

(c) ¿A qué edad es más alta la rapidez de crecimiento? (*Sugerencia:* $h'(t)$ es una función continua definida en el intervalo cerrado $[\frac{1}{4}, 6]$.)

62. El peso de muchos animales puede ser representado (modelado) por una función de Von Bertalanffy $W(t) = a[1 - be^{-ct}]^3$ para ciertas constantes positivas a, b y c. Para una población de elefantas, el peso (en kilogramos) a la edad t (en años) está dada por

$$W(t) = 2600[1 - 0.51e^{-0.075t}]^3.$$

(a) Demuestre que $W(t)$ es creciente para $t > 0$.

(b) Calcule e interprete $\lim_{t\to\infty} W(t)$.

(c) ¿Con qué rapidez aumenta de peso una elefanta recién nacida?

(d) Una elefanta adulta pesa 1600 kg. Determine su edad.

(e) ¿A qué edad es máxima la razón de crecimiento de una elefanta?

63. Considere la función $f(n) = (1 + 1/n)^n$. Use una calculadora para completar la tabla siguiente.

n	$f(n)$
100	
1000	
10,000	
100,000	
1,000,000	

* Se denomina así en honor de Benjamin Gompertz (1779-1865), matemático inglés.

64. (a) Aplique la regla trapecial con $n = 1$ para establecer la desigualdad

$$\int_1^{2.7} \frac{dt}{t} < 1 < \int_1^{2.8} \frac{dt}{t}.$$

(b) Utilice la parte (a) para demostrar que

$$\ln 2.7 < \ln e < \ln 2.8.$$

(c) Pruebe que $2.7 < e < 2.8$.

65. Resuelva la ecuación $e^{2x} - e^x - 12 = 0$. (*Sugerencia:* haga $z = e^x$.)

66. Demuestre gráficamente que la ecuación $e^{-x} = 3x$ tiene solamente una raíz real. Aplique el método de Newton para aproximar la raíz hasta tres cifras decimales.

Problemas diversos

67. Demuestre (*iii*) del Teorema 8.2.

68. Demuestre (*v*) del Teorema 8.2.

69. Dibuje la gráfica de $y = e^{|x|}$. Determine dy/dx. ¿Es diferenciable la función en 0?

70. Demuestre que la función $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$ es periódica con periodo igual a 2π. Encuentre los extremos relativos y los puntos de inflexión de f. Dibuje la gráfica de f.

71. Encuentre una función que satisfaga $dy/dx = y$ cuya gráfica pase por $(0, 5)$.

72. Dadas $f(x) = \ln x$ y $f^{-1}(x) = e^x$, aplique (7.1) de la Sección 7.1 para demostrar que $(d/dx)e^x = e^x$.

73. Demuestre que para $x > 0$, $e^x > x + 1$. (*Sugerencia:* considere $f(x) = e^x - x - 1$).

74. Utilice (8.28) de esta sección para demostrar que para todo número real r

$$e^r = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n.$$

75. Si se invierten una suma P a una tasa de interés anual r capitalizado t veces al año, el monto S al cabo de m años es

$$S = P\left(1 + \frac{r}{t}\right)^{tm}.$$

Cuando el interés es **capitalizado continuamente**, el monto se define como

$$S = P \lim_{t\to\infty}\left(1 + \frac{r}{t}\right)^{tm}.$$

Aplique el resultado del Problema 74 para demostrar que $S = Pe^{rm}$.

Problema para calculadora

76. Aplique los resultados del Problema 75 para comparar el monto cuando se invierten $5000 al 10% de interés anual capitalizado trimestralmente por 3 años, con el monto que resulta cuando se aplica interés capitalizado continuamente.

8.3 Integrales en las que intervienen las funciones logarítmica y exponencial

Como consecuencia de las fórmulas de derivación (8.11) y (8.12) de la Sección 8.1, obtenemos las fórmulas de antiderivación o integración indefinida que dan lugar al logaritmo natural

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \tag{8.30}$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C. \tag{8.31}$$

De manera semejante, (8.26) y (8.27) de la sección precedente se convierten en

$$\int e^x\, dx = e^x + C \tag{8.32}$$

$$\int e^u\, du = e^u + C. \tag{8.33}$$

Ejemplo 1

Calcular el área A limitada por la gráfica de $y = 1/x$ y el eje x en el intervalo $[-2, -\frac{1}{2}]$.

Solución Como $f(x) = 1/x < 0$ en el intervalo, de (8.30) y de la Definición 6.1 resulta que

$$A = \int_{-2}^{-1/2} \left|\frac{1}{x}\right| dx = -\int_{-2}^{-1/2} \frac{1}{x}\, dx$$
$$= -\ln|x|\Big]_{-2}^{-1/2} = -\ln\left|-\frac{1}{2}\right| + \ln|-2|$$
$$= \ln 2 - (\ln 1 - \ln 2)$$
$$= 2 \ln 2 \approx 1\ 3863 \text{ unidades cuadradas.}$$

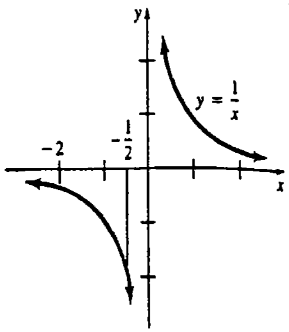


Figura 8.9

El área se indica en la Figura 8.9.

Ejemplo 2

Evaluar $\int \frac{dx}{x-7}$.

Solución Si

$$u = x - 7, \quad \text{entonces } du = dx.$$

En virtud de (8.31) resulta que

$$\int \frac{dx}{x-7} = \int \frac{du}{u}$$
$$= \ln|u| + C$$
$$= \ln|x-7| + C.$$

Ejemplo 3

Evaluar $\int \frac{x^2}{x^3+5}\, dx$.

Solución Si

$$u = x^3 + 5, \quad \text{entonces } du = 3x^2\, dx.$$

Por lo tanto, por (8.31) se tiene

$$\int \frac{x^2}{x^3+5}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2\, dx}{x^3+5}$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln|u| + C = \frac{1}{3}\ln|x^3+5| + C$$

Ejemplo 4

Evaluar $\int \frac{dx}{1+e^{-2x}}$.

Solución La integral dada no es de la forma (8.31); sin embargo, si se multiplica el numerador y el denominador por e^{2x}, se tiene

$$\int \frac{dx}{1+e^{-2x}} = \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\, dx.$$

Ahora si

$$u = e^{2x} + 1, \quad \text{entonces } du = 2e^{2x}\, dx$$

y por lo tanto,

$$\int \frac{dx}{1+e^{-2x}} = \int \frac{e^{2x}\, dx}{e^{2x}+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}\, dx}{e^{2x}+1}$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln|e^{2x}+1| + C = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + C.$$

Obsérvese que los valores absolutos se pueden omitir, ya que $e^{2x} + 1 > 0$.

Ejemplo 5

Evaluar $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx$.

Solución Aunque esta integral es semejante en apariencia a la del ejemplo precedente, obsérvese que $e^{2x} = (e^x)^2$ y si $u = e^x$, $du = e^x\, dx$, entonces

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx = \int \frac{du}{1+u^2}$$
$$= \tan^{-1} u + C = \tan^{-1} e^x + C.$$

Ejemplo 6

Evaluar $\int e^{5x}\, dx$.

el inverso de U

Solución Sea

$$u = 5x \quad \text{de modo que } du = 5\, dx.$$

Entonces en virtud de (8 33)

$$\int e^{5x}\, dx = \frac{1}{5}\int e^{5x}(5\, dx)$$
$$= \frac{1}{5}e^u + C = \frac{1}{5}e^{5x} + C.$$

Ejemplo 7

Evaluar $\int \frac{e^{4/x}}{x^2}\,dx$.

Solución Usando

$$u = \frac{4}{x} \quad \text{resulta } du = -\frac{4}{x^2}\,dx.$$

Por (8.33) se tiene

$$\int \frac{e^{4/x}}{x^2}\,dx = -\frac{1}{4}\int e^{4/x}\left(-\frac{4}{x^2}\,dx\right)$$
$$= -\frac{1}{4}\int e^u\,du = -\frac{1}{4}e^u + C$$
$$= -\frac{1}{4}e^{4/x} + C.$$

Ejemplo 8

Evaluar $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$.

Solución Al escribir la integral como

$$\int (1+e^x)^{-1/2} e^x\,dx$$

y hacer

$$u = 1 + e^x, \qquad du = e^x\,dx.$$

Se reconoce que

$$\int (1+e^x)^{-1/2}e^x\,dx = \int u^{-1/2}\,du$$
$$= 2u^{1/2} + C = 2(1+e^x)^{1/2} + C.$$

Ejemplo 9

Obtener el área A de la región limitada por las gráficas de $y = e^{x-1}$ y $y = 1/x$ en el intervalo [2, 3].

Solución Si se denotan las funciones dadas por $f(x) = e^{x-1}$ y $g(x) = 1/x$, entonces una inspección a la Figura 8.10 muestra que $f(x) - g(x) \geq 0$ en el intervalo. De la Definición 6.2 resulta que

$$A = \int_2^3 \left(e^{x-1} - \frac{1}{x}\right) dx = \left(e^{x-1} - \ln x\right)\Big]_2^3$$
$$= e^2 - e - \ln 3 + \ln 2 \approx 4.2653 \text{ unidades cuadradas.}$$

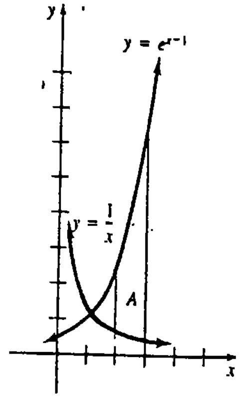


Figura 8.10

Las fórmulas de integración enumeradas enseguida, que relacionan algunas funciones trigonométricas con la función logarítmica natural, ocurren tan a menudo en la práctica que merecen atención especial

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C \tag{8.34}$$

$$\int \cot x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C \tag{8.35}$$

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C \tag{8.36}$$

$$\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x| + C \tag{8.37}$$

Para obtener (8.34) se escribe

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx$$
$$= -\int \frac{(-\operatorname{sen} x)\,dx}{\cos x} = -\int \frac{du}{u}$$
$$= -\ln|u| + C \qquad = -\ln|\cos x| + C.$$

Se verificará (8.36) mediante derivación:

$$\frac{d}{dx}\ln|\sec x + \tan x| = \frac{1}{\sec x + \tan x}\,\frac{d}{dx}(\sec x + \tan x)$$
$$= \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x}$$
$$= \frac{\sec x(\tan x + \sec x)}{\sec x + \tan x} = \sec x.$$

Por definición, $\ln|\sec x + \tan x|$ es una antiderivada de $\sec x$. También, cada una de las fórmulas anteriores se puede escribir en una forma general tal como

$$\int \tan u\, du = -\ln|\cos u| + C,$$

en donde $u = g(x)$ y $du = g'(x)\, dx$.

Ejemplo 10

Evaluar $\int x \sec x^2\, dx$.

Solución Sea

$$u = x^2 \quad \text{y} \quad du = 2x\, dx.$$

Entonces, en virtud de (8.36),

$$\int x \sec x^2\, dx = \frac{1}{2}\int \sec x^2 (2x\, dx)$$
$$= \frac{1}{2}\int \sec u\, du = \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln|\sec x^2 + \tan x^2| + C.$$

Ejercicios 8.3

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 982.

En los Problemas 1-44, evalúe la integral dada.

1. $\int \frac{dx}{3x}$
2. $\int \frac{dx}{x+4}$
3. $\int \frac{dx}{2x-1}$
4. $\int (5x+6)^{-1}\, dx$
5. $\int \frac{x}{x^2+1}\, dx$
6. $\int \frac{x^2}{5x^3+8}\, dx$
7. $\int \frac{x+2}{x^2+4x-3}$
8. $\int \frac{2x^2+1}{2x^3+3x-1}\, dx$
9. $\int \frac{x}{x+1}\, dx$
10. $\int \frac{x^2-2x+5}{x}\, dx$
11. $\int \frac{(x+3)^2}{x+2}\, dx$
12. $\int \frac{dx}{x^{1/3}(x^{2/3}+1)}$
13. $\int \frac{dx}{x\ln x}$
14. $\int \frac{dx}{x\ln\sqrt{x}}$
15. $\int \frac{\ln x}{x}\, dx$
16. $\int \frac{dx}{x(\ln x)^2}$
17. $\int x^{-1}\sqrt[3]{1+\ln x}\, dx$
18. $\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}\, dx$
19. $\int e^{10x}\, dx$
20. $\int \frac{dx}{e^{4x}}$
21. $\int x^2 e^{-2x^3}\, dx$
22. $\int \frac{e^{1/x^3}}{x^4}\, dx$
23. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$
24. $\int e^x \tan e^x\, dx$
25. $\int e^{-2x^2+4}x\, dx$
26. $\int (2-e^{3x})^2\, dx$
27. $\int (1+e^x)^3\, dx$
28. $\int \frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^3}\, dx$
29. $\int \frac{1+e^t}{e^t}\, dt$
30. $\int \frac{e^\theta}{1+e^\theta}\, d\theta$
31. $\int \frac{(e^{2x}-e^{-2x})^2}{e^x}\, dx$
32. $\int \frac{e^x[\ln(1+e^x)]^2}{1+e^x}\, dx$

33. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\, dx$
34. $\int \frac{dx}{e^x+1}$
35. $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\, dx$
36. $\int \frac{e^{3x}+e^{2x}}{e^x-1}\, dx$
37. $\int_0^4 \frac{dx}{2x+1}$
38. $\int_{-2}^{-1} \frac{dt}{t-3}$
39. $\int_{-3}^{3} xe^{-x^2}\, dx$
40. $\int_{-1}^{0} \frac{4+e^{x+1}}{e^x}\, dx$
41. $\int \tan 5x\, dx$
42. $\int x(1-\cot x^2)\, dx$
43. $\int (1+\sec\theta)^2\, d\theta$
44. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} 2x}$

45. Obtener el área bajo la gráfica de $y = 2x^{-1}$ en el intervalo $[\frac{1}{2}, 4]$.

46. Determine el área de la región limitada por las gráficas de $y = x$, $y = 1/x$ y $x = 3$.

47. Halle el área de la región limitada por las gráficas de $y = 1/x$ y $3x + 3y + 10 = 0$.

48. Obtenga el área limitada por la gráfica de $y = (x-1)^{-1}$ y el eje x en el intervalo $[-4, -2]$.

49. Determine el área bajo la gráfica de $y = e^{-2x}$ en el intervalo $[0, 2]$.

50. Calcule el área de la región limitada por las gráficas de $y = e^x$, $y = -e^{-x}$, $x = 0$ y $x = 1$.

51. Evalúe $\int_{-1}^{1}(e^x - 1)\, dx$ y determine si la integral representa un área. Si no es así, encuentre el área limitada por la gráfica del integrando y el eje x en el intervalo dado.

52. La región del primer cuadrante limitada por las gráficas de $y = 1/(1+x^2)$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ y $y = 0$ se hace girar en torno al eje y. Halle el volumen del sólido de revolución.

53. La región del primer cuadrante limitada por las gráficas $y = e^x$, $x = 0$, $x = 2$ y $y = 0$ se hace girar en torno al eje x. Calcule el volumen del sólido de revolución.

54. La región del primer cuadrante limitada por las gráficas de $y = 1/\sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 4$ y $y = 0$ se gira en derredor del eje x. Encuentre el volumen del sólido de revolución.

55. La región del primer cuadrante limitada por las gráficas de $y = e^{-x^2}$ $x = 0$, $x = 1$ y $y = 0$ se gira en torno al eje y. Halle el volumen del sólido de revolución.

56. Obtenga la longitud de la gráfica de $y = \ln(\cos x)$ en el intervalo $[0, \pi/4]$.

57. Determine la longitud de la gráfica de $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ en el intervalo $[0, \ln 2]$.

58. Calcule el área de la superficie que se forma por rotación de la gráfica de la función del Problema 57 en el intervalo indicado, alrededor del eje x.

59. Evalúe

(a) $e^{4\int dx/x}$ (b) $e^{\int \frac{x-1}{x+1}dx}$

60. Si $f(x) = \ln x$, demuestre que el valor medio de f' en $[a, b]$, $0 < a < b$, es $\frac{1}{b-a}\ln\frac{a}{b}$.

Problemas para calculadora

61. (a) Aplique la regla trapecial para obtener una aproximación de $\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$ en la que haya un error menor que 0.01.

(b) ¿Cuántos trapecios se requieren para producir una aproximación precisa hasta dos cifras decimales? ¿Y hasta cuatro cifras decimales?

62. Resuelva de nuevo el Problema 61 aplicando la regla de Simpson.

Problemas diversos

En los Problemas 63-66, verifique el resultado dado.

63. $\int \ln x\, dx = x\ln x - x + C$

64. $\int xe^x\, dx = xe^x - e^x + C$

65. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

66. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\, dx$
$= \sqrt{x^2+a^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right| + C$

67. Considere el área bajo la gráfica de $y = \ln x$ en el intervalo $[1, e]$.

(a) Aplique el resultado dado en el Problema 63 para evaluar el área.

(b) Determine un método integral en alternativa para evaluar la misma área.

68. Verifique la fórmula dada en (8.35).

69. Compruebe la fórmula dada en (8.37).

70. Aplique derivación para demostrar que

$$\int \csc x\,dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C.$$

Concilie este resultado con (8.37).

71. Si $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4}\right] = x\ln x$, ¿qué es

$$\int x \ln x\,dx?$$

72. Si $\dfrac{d}{dx}\left[x^2e^x - 2xe^x + 2e^x\right] = x^2e^x$, ¿qué es

$$\int x^2e^x\,dx?$$

8.4 Funciones exponencial y logarítmica con otras bases

La propiedad

$$a^t = e^{\ln a^t} = e^{t\ln a},$$

en donde t es un número racional y $a > 0$, sugiere la definición siguiente.

DEFINICIÓN 8.4

Si r es cualquier número real y $a > 0$, entonces

$$a^r = e^{r\ln a}. \tag{8.38}$$

□

El uso explícito de (8.38) es para dar significado a a^r cuando r es un número irracional.

Ejemplo 1

(a) $5^\pi = e^{\pi\ln 5}$ (b) $10^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3}\ln 10}$

Puede ser que el lector haya encontrado interesante el ejemplo anterior pero que todavía se haga la pregunta legítima: ¿qué hacer con una cantidad como $10^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3}\ln 10}$? Las personas curiosas pueden "dar un salto" y leer la observación con que concluye esta sección.

Leyes de los exponentes

Las siguientes leyes de los exponentes son resultados inmediatos de la Definición 8.4. Se demostrará la tercera propiedad y se dejarán algunas de las otras como ejercicios.

TEOREMA 8.3

Sean r y s números reales cualesquiera. Para $a > 0$

(i) $a^0 = 1$ (ii) $a^1 = a$

(iii) $a^ra^s = a^{r+s}$ (iv) $(ab)^r = a^rb^r$

(v) $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ (vi) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$

(vii) $(a^r)^s = a^{rs}$ (viii) $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$.

Demostración de (*iii*) En virtud de (8.38) se puede escribir

$$a^r = e^{r\ln a} \quad y \quad a^s = e^{s\ln a}.$$

Por lo tanto, por la propiedad (*iii*) de las leyes de los exponentes dada en la Sección 8.2,

$$a^ra^s = e^{r\ln a}e^{s\ln a} = e^{r\ln a + s\ln a} = e^{(r+s)\ln a} = a^{r+s}.$$

□

Como otra consecuencia de la Definición 8.4, es posible extender ahora la propiedad (*iii*) de las leyes del logaritmo natural para incluir el caso en el que el exponente es un número irracional.

TEOREMA 8.4

Sea r cualquier número real. Para $a > 0$,

$$\ln a^r = r\ln a.$$

Demostración Como $y = e^x$ es equivalente a $\ln y = x$, vemos que $a^r = e^{r\ln a}$ da lugar a $\ln a^r = r\ln a$. □

Función exponencial con base a

Recuérdese que $y = e^x$ es una función diferenciable cuyo dominio es el conjunto de los números reales. Del mismo modo, la Definición 8.4 implica que

$$f(x) = a^x, \quad a > 0 \tag{8.39}$$

es también una función diferenciable que tiene el mismo dominio. Se dice que f es una **función exponencial con base a**. Además, puesto que $y = e^{kx}$ es creciente para $k > 0$, de (8.38) resulta que siempre que $a > 1$, $\ln a > 0$, y $f(x) = a^x$ es una función creciente en $(-\infty, \infty)$. Para $0 < a < 1$, $\ln a < 0$, y así $f(x) = a^x$ es una función decreciente. Las gráficas características de las funciones exponenciales que ilustran estos dos casos son semejantes a las gráficas de e^x y e^{-x}, respectivamente. Las gráficas de $y = 3^x$ y $y = (\frac{1}{3})^x = 3^{-x}$ se muestran en la Figura 8.11.

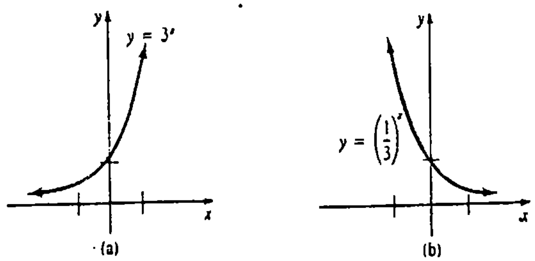


Figura 8.11

Derivada de aˣ

La derivada de a^x se obtiene de la derivada de e^x:

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{x\ln a} = e^{x\ln a}\frac{d}{dx}x\ln a = e^{x\ln a}\ln a. \tag{8.40}$$

Usando (8.38) en (8.40) resulta

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a. \tag{8.41}$$

En (8.41) se puede ver, de nuevo, la importancia del número e; la derivada de una función exponencial con una base diferente de e, lleva el factor adicional de $\ln a$.

La regla de la cadena proporciona el resultado general. Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx} a^u = a^u \frac{du}{dx} \ln a. \tag{8.42}$$

Obsérvese que cuando $a = e$, $\ln e = 1$; entonces (8.41) y(8.42) se reducen, a su vez, a (8.26) y (8.27) de la Sección 8.2.

Ejemplo 2

Derivar $y = 10^x$.

Solución En virtud de (8.41),

$$\frac{dy}{dx} = 10^x \ln 10.$$

Ejemplo 3

Derivar $y = 3^{\cos 5x}$.

Solución En virtud de (8.42),

$$\frac{dy}{dx} = 3^{\cos 5x}\left(\frac{d}{dx}\cos 5x\right)\ln 3 = 3^{\cos 5x}(-5 \operatorname{sen} 5x)\ln 3.$$

Ejemplo 4

Derivar $y = 5^{x^3} e^{-x^2}$.

Solución En virtud de la regla del producto,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 5^{x^3}\frac{d}{dx}e^{-x^2} + e^{-x^2}\frac{d}{dx}5^{x^3}\\ &= 5^{x^3}(-2xe^{-x^2}) + e^{-x^2}(5^{x^3}3x^2 \ln 5)\\ &= 5^{x^3}e^{-x^2}(-2x + 3x^2 \ln 5).\end{aligned}$$

El lector debe comprobar por derivación que

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \tag{8.43}$$

$$\int a^u\, du = \frac{a^u}{\ln a} + C \tag{8.44}$$

son las formas integrales de (8.41) y (8.42), respectivamente.

Ejemplo 5

Evaluar $\int 8^x\, dx$.

Solución En virtud de (8.43),

$$\int 8^x\, dx = \frac{8^x}{\ln 8} + C.$$

Ejemplo 6

Evaluar $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$.

Solución Identificando

$$a = 2, \quad u = x^{1/2}, \quad \text{y} \quad du = \frac{1}{2}x^{-1/2}\, dx,$$

por (8.44) se tiene que

$$\begin{aligned}\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx &= 2\int 2^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\, dx\right)\\ &= 2\int 2^u\, du = 2\left(\frac{2^u}{\ln 2}\right) + C\\ &= 2\left(\frac{2^{\sqrt{x}}}{\ln 2}\right) + C = \frac{2^{1+\sqrt{x}}}{\ln 2} + C.\end{aligned}$$

La regla de la potencia vista de nuevo

Por último es posible plantear y demostrar la regla de la potencia para derivación en el caso de un exponente real, *racional* o *irracional*.

TEOREMA 8.5

Regla de la potencia (exponentes reales)

Si r es cualquier número real, entonces

$$\frac{d}{dx} x^r = rx^{r-1}. \tag{8.45}$$

Demostración En vista de la definición 8.4, se puede escribir

$$x^r = e^{r \ln x}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dx}x^r = e^{r\ln x}\frac{d}{dx}(r\ln x)$$
$$= \frac{r}{x}e^{r\ln x} = \frac{r}{x}x^r = rx^{r-1}. \qquad \square$$

Alternativamente, puede deducirse (8.45) tomando el logaritmo en ambos miembros de $y = x^r$ y empleando luego la derivación implícita.

Ejemplo 7

Derivar (*a*) $y = \sqrt{3}^{\,x}$, (*b*) $y = x^{\sqrt{3}}$.

Solución

(*a*) En virtud de (8.41),

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{3}^{\,x}\ln\sqrt{3}.$$

(*b*) Por (8.45),

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{3}\,x^{\sqrt{3}-1}.$$

El resultado dado en (8.45) se extiende también a potencias de funciones.

Ejemplo 8

Derivar $y = (x^4 + e^{-3x})^e$.

Solución

$$\frac{dy}{dx} = e(x^4 + e^{-3x})^{e-1}\frac{d}{dx}(x^4 + e^{-3x})$$
$$= e(x^4 + e^{-3x})^{e-1}(4x^3 - 3e^{-3x}).$$

El resultado dado en (8.45) junto con la definición fundamental de los logaritmos naturales son los "eslabones perdidos" necesarios para evaluar la integral indefinida $\int x^r\,dx$ *en el caso de cualquier exponente real* r:

$$\int x^r\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + C, & r \neq -1 \\ \ln|x| + C, & r = -1. \end{cases} \tag{8.46}$$

Ejemplo 9

Evaluar $\int x^\pi\,dx$.

Solución En virtud de (8.46),

$$\int x^\pi\,dx = \frac{x^{\pi+1}}{\pi+1} + C.$$

Comprobación Por (8.45),

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{\pi+1}}{\pi+1} + C\right) = (\pi+1)\frac{x^\pi}{\pi+1} = x^\pi.$$

Función logarítmica con base a

Cuando la base a es positiva y $a \neq 1$, la función exponencial $y = a^x$ es inyectiva y, por lo tanto, posee una función inversa denotada por $y = \log_a x$. A esta última función se la llama **función logarítmica con base** a. Análogamente a (8.20) de la Sección 8.2,

$$y = \log_a x \quad \text{si y sólo si} \quad x = a^y. \tag{8.47}$$

Esta es la interpretación del logaritmo que normalmente se utiliza en un curso de matemáticas previas al Cálculo. Como el ámbito o contradominio de la función exponencial es el dominio de su inversa, el dominio de la función logarítmica es el conjunto de los números reales positivos.

En virtud de (8.24) y (8.20) de la Sección 8.2, puede finalmente afirmarse que la base del logaritmo natural es el número e:

$$\ln x = \log_e x.$$

Leyes de los logaritmos

Las leyes formuladas para $\ln x$ también se cumplen para $\log_a x$. Desde luego, como en el Teorema 8.4, para $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, la propiedad

$$\log_a b^r = r\log_a b$$

es válida para cualquier número real r.

Derivada de $\log_a x$

A fin de encontrar la derivada de la función logarítmica $y = \log_a x$, se toma el logaritmo natural en ambos lados de $x = a^y$:

$$\ln x = y\ln a,$$

y se aplica la derivación implícita,

$$\frac{1}{x} = \frac{dy}{dx}\ln a$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\ln a}.$$

En otras palabras,

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x\ln a}. \tag{8.48}$$

Como es usual, el caso general puede obtenerse de la regla de la cadena. Si $u = g(x)$ es una función derivable (o diferenciable), entonces

$$\frac{d}{dx}\log_a|u| = \frac{1}{u \ln a}\frac{du}{dx}. \tag{8.49}$$

Ejemplo 10

Obtener la pendiente de la tangente a la gráfica de $y = \log_{10}x$ en $x = \frac{1}{2}$.

Solución De (8.48),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln 10}.$$

Con la ayuda de una calculadora,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1/2} = \frac{2}{\ln 10} \approx 0.8686.$$

Ejemplo 11

Derivar $y = \log_5|x^3 - x|$.

Solución De (8.49),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x^3 - x)\ln 5}\cdot\frac{d}{dx}(x^3 - x)$$
$$= \frac{3x^2 - 1}{(x^3 - x)\ln 5}.$$

Ejemplo 12

Derivar $y = \log_2 x^4(x^2 + 1)^\pi$.

Solución Por las leyes de los logaritmos, escribimos primero

$$y = 4\log_2|x| + \pi\log_2(x^2 + 1).$$

Obsérvese que $x^4 = |x|^4$ y $x^2 + 1 > 0$. Así que en virtud de (8.49) se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{x \ln 2} + \frac{2\pi x}{(x^2 + 1)\ln 2}.$$

Observación

La Definición 8.4 proporciona un medio para estimar el valor numérico de un número tal como $10^{\sqrt{3}}$, bien sea a través de valores tabulados o de calculadora con e^x y $\ln x$. Empleando una calculadora,

$$10^{\sqrt{3}} = e^{(1.7321\ldots)(2.3026)}$$
$$\approx e^{3.9882} \approx 53.9574.$$

Muchas calculadoras científicas también poseen la tecla $\boxed{y^x}$. Calculando $\sqrt{3}$ e introduciendo $y = 10$, la función y^x da lo que parece ser una forma alternativa y directa para obtener el valor de $10^{\sqrt{3}}$. En realidad, una calculadora utiliza la rutina $e^{x\ln y}$ para evaluar y^x. Esto se muestra con este simple experimento: se sabe que $(-5)^2 = 25$ pero cuando se utiliza $\boxed{y^x}$ con $y = -5$ y $x = 2$, muchas calculadoras muestran un mensaje de error. Una relectura cuidadosa de la Definición 8.4 indicará el por qué.*

Ejercicios 8.4

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 983.

En los Problemas 1-6, escriba cada número como una potencia de e. Obtenga una aproximación con al menos dos cifras significativas.

1. 2^π
2. $5^{\sqrt{2}}$
3. 10^e
4. $6^{-2.3}$
5. $7^{-\sqrt{3}}$
6. $\left(\frac{3}{2}\right)^{2\pi}$

En los Problemas 7-36, encuentre la derivada de la función dada.

7. $y = 4^x$
8. $y = 2 - 3^x$
9. $y = 10^{-2x}$
10. $y = 9^{3x+1}$
11. $y = 20^{x^2}$
12. $y = 5^{\sqrt{x}}$
13. $y = \pi^{\sqrt{2}}$
14. $y = 2^{\operatorname{sen} 5x}$
15. $y = x^2 2^x$
16. $y = e^x x^e$
17. $y = x^{\sqrt{3}}$
18. $y = \left(\frac{1}{3x}\right)^{\sqrt{3}}$
19. $y = x^{\operatorname{sen} 2}$
20. $y = (\cos x)^{\pi/2}$
21. $f(t) = (t^4 + 3t^2)^{\ln 4}$
22. $g(t) = (t^2)^e$
23. $f(x) = \dfrac{4^x}{1 + e^x}$
24. $f(x) = \dfrac{(x + 1)^\pi}{\pi^{x+1}}$
25. $f(x) = \sqrt{5^x}$
26. $f(x) = \dfrac{25^x}{5^{-x}}$
27. $H(x) = \dfrac{1}{(\ln x)^{1/e}}$
28. $P(v) = \tan(2^{-v^2})$
29. $y = \log_4 x$
30. $y = (\ln 5)^x$
31. $y = (\ln x)(\log_{10}x)$
32. $y = \ln(\log_{10}x)$
33. $y = x^\pi \log_3|6x - 4|$
34. $y = \log_{10}\dfrac{x^2 + 1}{x^4 + 9}$
35. $f(x) = 3^{x^3}\log_3 x^3$
36. $f(x) = (\log_5 3x)^7$

En los Problemas 37-40, encuentre la derivada indicada.

37. $y = 9^x;\ \dfrac{d^2y}{dx^2}$
38. $y = x3^x;\ \dfrac{d^2y}{dx^2}$
39. $y = (2x)^e;\ \dfrac{d^3y}{dx^3}$
40. $y = (\log_{10}x)^2;\ \dfrac{d^2y}{dx^2}$

En los Problemas 41-44, aplique derivación implícita para evaluar dy/dx.

41. $2^y = xy$
42. $x^2 + y^2 = 4^x - 4^{-x}$
43. $y + e^y = \log_{10}|x|$
44. $\log_2 xy = \sqrt{2x + 1}$

En los Problemas 45-60, evalúe la integral dada.

45. $\int 7^x\,dx$
46. $\int \dfrac{dx}{7^{2x}}$
47. $\int (10^x)^{1/3}\,dx$
48. $\int 2^x 4^x\,dx$
49. $\int_2^3 10^{-x}\,dx$
50. $\int_0^1 t^2 3^{-t^3}\,dt$
51. $\int \left(x^{\sqrt{3}} + \sqrt{3}^{\,x}\right) dx$
52. $\int (x + 1)^e\,dx$
53. $\int 2^t(1 + 2^t)^{20}\,dt$
54. $\int (1 + 2^t)^2\,dt$

* Algunas de las mejores calculadoras tienen un control interconstruido para determinar si el exponente es entero. Si este es el caso, la calculadora utilizará entonces una rutina diferente para calcular y^x.

55. $\int_{-1}^{1} e^t 2^{e^t}\, dt$

56. $\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2^{\cos 2x}}\, dx$

57. $\int (1 + 2^{\tan\theta})^2 \sec^2\theta\, d\theta$

58. $\int_1^{10} \frac{(\log_{10} x)^3}{x}\, dx$

59. $\int \frac{5^x}{1+5^x}\, dx$

60. $\int \frac{5^x}{1+25^x}\, dx$

61. Halle la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = 4^x$ en $x = 3$.

62. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x + x^x$ en $x = 1$.

63. Determine el área de la región del primer cuadrante limitada por las gráficas de $y = 2^x$, $y = 2^{-x}$ y $x = 4$.

64. Determine el volumen del sólido de revolución que se forma haciendo girar la región limitada por las gráficas de $y = 2^{x^2}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$ en torno al eje y.

Problemas diversos

65. Demostrar (*i*) del Teorema 8.3.

66. Demostrar (*v*) del Teorema 8.3.

67. Probar (*vii*) del Teorema 8.3.

(O) 8.5 Un enfoque alterno de la función logarítmica natural

El lector habrá notado que las consideraciones de las funciones logarítmicas y exponenciales hechas durante las últimas cuatro secciones han sido sutiles y tienen poca semejanza con los conceptos estudiados en un curso de matemáticas previas al cálculo. En un curso elemental, normalmente se encuentra uno primero con una función exponencial

$$y = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x \text{ cualquier número real}$$

y se demuestra que tal función posee una inversa llamada función logarítmica. Recuérdese que "logaritmo" es una palabra que significa el exponente de la base a que da el número x; esto es

$$y = \log_a x \text{ es equivalente a } x = a^y.$$

A partir de las leyes de los exponentes, se procede luego a deducir las propiedades y las leyes de los logaritmos. Exactamente el inverso de este método se presentó en las Secciones 8.1 y 8.2. ¿Porqué la diferencia? La respuesta es sencilla. En las matemáticas previas al Cálculo, se *supone pero nunca se demuestra* que a^x tiene sentido, o está bien definida, para $a > 0$ y para todo número real x. En el caso de un exponente racional p/q, en donde p y q son enteros, $a^{p/q} = (a^{1/q})^p$ cuando $a^{1/q}$ es un número real. Pero, ¿cómo se interpreta un número con un exponente irracional como 2^{π}?

¿Qué interpretación debe emplearse en Cálculo? Comenzar con la definición integral de la función logarítmica, o bien comenzar con una noción intuitiva de a^x y su inversa, provoca cierta controversia entre los profesores de matemáticas.

De las observaciones anteriores no debe obtener el lector la impresión de que a^x no puede definirse primero de modo riguroso. En efecto, para cualquier número real x, a^x se define de la manera siguiente.

DEFINICIÓN 8.5

Supóngase que a es cualquier número real positivo, que x es un número real fijo y t es un número racional. Entonces,

$$a^x = \lim_{t \to x} a^t. \qquad \square$$

Ejemplo 1

Se puede demostrar que el límite de la sucesión de números con exponentes racionales

$$2^3, 2^{3.1}, 2^{3.14}, 2^{3.141}, 2^{3.1416}, \ldots$$

es el número 2^{π}.

Con la Definición 8.5 como base, se pueden demostrar luego las diversas propiedades de la función exponencial. sin embargo, las demostraciones, por ejemplo, de las leyes de los exponentes, están por encima del nivel de un primer curso de Cálculo.

Derivada de $\log_a x$

Aunque en las Secciones 8.1 y 8.2 se han estudiado dos funciones nuevas, se obtuvieron sus derivadas sin recurrir a los principios elementales, a saber, $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y/\Delta x$. Independientemente de consideraciones anteriores, supóngase por el resto de la discusión que $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ está bien definida y es una función inyectiva continua cuya inversa es la función continua $y = \log_a x$, $x > 0$. Las ecuaciones siguientes muestran cómo encontrar la derivada del logaritmo a partir de la definición de derivada:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \log_a \frac{x + \Delta x}{x} && \text{(álgebra y leyes de los logaritmos)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) && \text{(álgebra)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x}\frac{x}{\Delta x} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) && \text{(álgebra, } x/x = 1\text{)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} && \text{(leyes de los logaritmos)} \\
&= \frac{1}{x} \log_a\left[\lim_{\Delta x \to 0}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right]. && (8.50)
\end{aligned}$$

El último paso se justifica recurriendo a la continuidad de la función y suponiendo que el límite dentro del paréntesis existe. Hagamos el cambio de varible $h = \Delta x/x$ en (8.50). Como x está fijo, $\Delta x \to 0$ implica que $h \to 0$. Consecuentemente,

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} = \lim_{h \to 0}(1 + h)^{1/h}.$$

Recuérdese de (8.28) de la Sección 8.2 que

$$\lim_{h \to 0}(1 + h)^{1/h} = e,$$

en donde $e = 2.71828\ldots$ Por lo tanto, (8.50) se transforma en

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x}\log_a e. \qquad (8.51)$$

Cuando se hace la elección "natural" de $a = e$, (8.51) se reduce a

$$\frac{d}{dx}\log_e x = \frac{1}{x}$$

ya que $\log_e e = 1$.* Por consiguiente, se dice que $\log_e x$ es el "logaritmo natural" y se abrevia esta función por

$$\log_e x = \ln x.$$

Ejercicios 8.5

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 983.

Problemas para calculadora

1. Conjeture el valor de

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

completando la tabla de la derecha.

Δx	$(e^{\Delta x} - 1)/\Delta x$
0.1	
0.01	
0.001	
0.0001	
−0.0001	

2. Aplique la definición de derivada junto con el resultado obtenido en el Problema 1 para encontrar dy/dx para $y = e^x$.

8.6 Diferenciación logarítmica

La propiedad elemental de que, si $a = b$, $a > 0$, $b > 0$, entonces $\ln a = \ln b$, es sorprendentemente útil para encontrar las derivadas de expresiones complicadas.

Ejemplo 1

Obtener la derivada de

$$y = \frac{\sqrt[3]{x^4 + 6x^2}(8x + 3)^5}{(2x^2 + 7)^{2/3}}.$$

Solución Si bien se podría evaluar dy/dx mediante la aplicación de las reglas del cociente, del producto y de la potencia, todo este procedimiento puede evitarse tomando primero el logaritmo del valor absoluto de ambos miembros de la ecuación dada, simplificando, y derivando *luego* implícitamente. Se tiene que

$$\begin{aligned}\ln|y| &= \ln\sqrt[3]{x^4 + 6x^2} + \ln|8x + 3|^5 - \ln(2x^2 + 7)^{2/3} \\ &= \frac{1}{3}\ln(x^4 + 6x^2) + 5\ln|8x + 3| - \frac{2}{3}\ln(2x^2 + 7).\end{aligned}$$

Tomando la derivada con respecto a x resulta

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^4 + 6x^2}\cdot(4x^3 + 12x) + 5\cdot\frac{1}{8x + 3}\cdot 8 - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2x^2 + 7}\cdot 4x$$

* Aquellos lectores que posean perspicacia y buena memoria habrán advertido que (8.51) no es lo mismo que (8.48) de la Sección 8.4. Los resultados son equivalentes, puesto que $\log_a e = 1/\log_e a$. ¡Demuéstrelo!

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= y\left[\frac{4x^3 + 12x}{3(x^4 + 6x^2)} + \frac{40}{8x + 3} - \frac{8x}{3(2x^2 + 7)}\right] \\ &= \frac{\sqrt[3]{x^4 + 6x^2}(8x + 3)^5}{(2x^2 + 7)^{2/3}}\left[\frac{4x^3 + 12x}{3(x^4 + 6x^2)} + \frac{40}{8x + 3} - \frac{8x}{3(2x^2 + 7)}\right].\end{aligned}$$

Al proceso ilustrado en el ejemplo precedente se le llama **diferenciación (o derivación) logarítmica.***

En la Sección 8.4 se estudió el hecho de que una función que tiene la forma

$$y = (\text{variable})^{\text{constante}},$$

en donde la constante es cualquier número real, se puede derivar por la regla de la potencia. La derivación logarítmica proporciona un medio para encontrar la derivada de una expresión de la forma

$$y = (\text{variable})^{\text{variable}}$$

Ejemplo 2

Derivar $y = x^{\sqrt{x}}$, $x > 0$.

Solución Tomando logaritmo en ambos lados de la ecuación dada resulta

$$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\ln x.$$

La derivación implícita da luego

$$\begin{aligned}\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^{-1/2}\cdot\ln x \\ \frac{dy}{dx} &= y\left[\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right] = x^{\sqrt{x}}\left[\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right] \\ &= x^{\sqrt{x}-1/2}\left(1 + \frac{1}{2}\ln x\right).\end{aligned}$$

Podría ser necesario tomar el logaritmo de los miembros de una ecuación dada más de una vez para calcular la derivada.

Ejemplo 3

Derivar $y = (x^2 + 1)^{(x+1)^x}$, $x > -1$.

Solución Puesto que la ecuación

$$\ln y = (x + 1)^x\ln(x^2 + 1)$$

* Este método de derivación es atribuido al matemático suizo Johann Bernoulli (1667-1758).

involucra todavía una base variable con un exponente variable, se toma el logaritmo por segunda ocasión:

$$\begin{aligned}\ln(\ln y) &= \ln((x+1)^x \ln(x^2+1))\\ &= x\ln(x+1) + \ln(\ln(x^2+1)).\end{aligned}$$

Finalmente, derivando con respecto a x resulta

$$\frac{1}{\ln y}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = x\cdot\frac{1}{x+1} + \ln(x+1) + \frac{1}{\ln(x^2+1)}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = y\ln y\left[\frac{x}{x+1} + \ln(x+1) + \frac{2x}{(x^2+1)\ln(x^2+1)}\right]$$

$$= (x^2+1)^{(x+1)^x}(x+1)^x\ln(x^2+1)\left[\frac{x}{x+1} + \ln(x+1) + \frac{2x}{(x^2+1)\ln(x^2+1)}\right]$$

Observación

Nótese cuidadosamente que la regla de la potencia no es aplicable a $y = x^x$. En otras palabras, la derivada *no* es xx^{x-1}. Se deja como ejercicio demostrar que la derivada de $y = x^x$ es $dy/dx = x^x(1 + \ln x)$. Véase el Problema 8 de los Ejercicios 8.6.

Ejercicios 8.6

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 983.

En los Problemas 1-20, aplique derivación logarítmica para evaluar dy/dx.

1. $y = \sqrt{\dfrac{(2x+1)(3x+2)}{4x+3}}$

2. $y = \dfrac{x^{10}\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{8x^2+2}}$

3. $y = \dfrac{(x^3-1)^5(x^4+3x^3)^4}{(7x+5)^9}$

4. $y = x\sqrt{x+1}\,\sqrt[3]{x^2+2}$

5. $y = \dfrac{x^{2/3}}{\sqrt{(x^2+2x+3)(2x^4+x^2+1)}}$

6. $y = (x+2)^3(x^2-1)^2(4-5x)^6(2x^3-x)^7$

7. $y = (x^2+4)^{2x}$

8. $y = x^x$

9. $y = x^x 2^x$

10. $y = x^{2^x}$

11. $y = x(x-1)^x$

12. $y = \dfrac{(x^2+1)^x}{x^2}$

13. $y = (x^6+x^4)^{\ln x}$

14. $y = x^{(x+1)^{\ln x}}$

15. $y = (\ln x)^x$

16. $y = (x^2+4x+7)^{x^2+\ln x}$

17. $y = x^{\cos x}$

18. $y = x(\operatorname{sen} x)^x$

19. $y = x^{e^x}$

20. $y = x^{x^x}$

21. Obtenga una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^{x+2}$ en $x = 1$.

22. Determinar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x(\ln x)^x$ en $x = e$.

En los Problemas 23 y 24, evalúe d^2y/dx^2.

23. $y = x^{2x}$

24. $y = (\operatorname{sen} x)^{e^x}$

Problemas diversos

25. Obtenga una fórmula general para la derivada de $y = u^v$, en donde $u = f(x)$ y $v = g(x)$ son funciones diferenciables.

26. Derivar $y = \tan x^x$.

8.7 Ecuaciones diferenciales separables y sus aplicaciones

Antes de considerar algunas aplicaciones de las funciones e^x y $\ln x$, se requiere examinar el concepto de ecuación diferencial.

DEFINICIÓN 8.6

Una ecuación diferencial de primer orden separable (o de variables separables) es una ecuación $F(x, y, y') = 0$ que puede expresarse en la forma

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x). \tag{8.52}$$

□

También se dice que una ecuación de la forma (8.52) tiene *variables separables*; por ejemplo,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{8.53}$$

$$y' = y \tag{8.54}$$

son separables, ya que pueden escribirse respectivamente como

$$y\frac{dy}{dx} = -x \tag{8.55}$$

y

$$\frac{1}{y}y' = 1. \tag{8.56}$$

El lector debe verificar que la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} + 2y = x$$

no es separable.

Es una práctica común expresar una ecuación separable en términos de diferenciales. Las ecuaciones (8.55) y (8.56) pueden ser escritas alternativamente como

$$y\,dy = -x\,dx \quad \text{y} \quad \frac{dy}{y} = dx.$$

En general (8.52) se expresa como $h(y)\,dy = g(x)\,dx$.

• *Soluciones*

Se desea *resolver* una ecuación de la forma (8.52). Una **solución** es cualquier función diferenciable, definida explícita o implícitamente, que cuando se sustituye en la ecuación diferencial, la reduce a una identidad.

Si $y = f(x)$ denota una solución de (8.52), se debe tener

$$h(f(x))f'(x) = g(x)$$

y por lo tanto, por integración,

$$\int h(f(x))f'(x)\,dx = \int g(x)\,dx. \tag{8.57}$$

Pero $dy = f'(x)\,dx$, por lo cual (8.57) es lo mismo que

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx. \tag{8.58}$$

La ecuación (8.58) indica el procedimiento para resolver ecuaciones diferenciales separables: integrar en ambos lados de

$$h(y)\,dy = g(x)\,dx.$$

Ejemplo 1

Resolver $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$.

Solución Se escribe la ecuación dada como

$$y\,dy = -x\,dx$$

y se integra en ambos miembros:

$$\int y\,dy = -\int x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C.$$

Así que una familia de soluciones está definida por $x^2 + y^2 = C_1$, en donde se ha reemplazado $2C$ por C_1.

Ejemplo 2

Resolver $\dfrac{dy}{dt} = ky$, en donde k es una constante. (8.59)

Solución Se escribe la ecuación como

$$\frac{dy}{y} = k\,dt$$

y se integra

$$\int \frac{dy}{y} = k\int dt.$$

Suponiendo $y > 0$,

$$\ln y = kt + C_1$$

o bien

$$y = e^{kt+C_1} = e^{C_1}e^{kt}.$$

Representando e^{C_1} como C, resulta

$$y = Ce^{kt}. \tag{8.60}$$

La ecuación diferencial simple (8.59) tiene muchas aplicaciones. Por ejemplo, en biología se observa a menudo que, en cualquier instante, la rapidez dN/dt con la cual se reproducen ciertas bacterias, es proporcional al número N de bacterias presentes en ese instante. También, durante lapsos breves, la población $P(t)$ de animales pequeños, como los roedores, puede predecirse con bastante precisión mediante la solución de $dP/dt = kP$. En física, (8.59) proporciona un modelo para aproximar la cantidad restante $A(t)$ de una sustancia que se desintegra por radiactividad. La ecuación (8.59) podría también representar la rapidez a la cual tiene lugar una reacción química.

Ejemplo 3

Un cultivo tiene inicialmente un número N_0 de bacterias. Para $t = 1$ hora, el número de bacterias medido es $(\frac{3}{2})N_0$. Si la rapidez de reproducción se supone proporcional al número de bacterias presentes en un momento dado, determinar el tiempo necesario para que el número de bacterias se triplique.

Solución En primer lugar se resuelve la ecuación diferencial

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

con la condición $N(0) = N_0$.

En virtud de (8.60) del Ejemplo 2, se puede escribir

$$N(t) = Ce^{kt}. \tag{8.61}$$

Para $t = 0$ se deduce de (8.61) que $N_0 = Ce^0 = C$, y por lo tanto, $N(t) = N_0e^{kt}$. Luego para $t = 1$ se tiene

$$N(1) = \frac{3}{2}N_0 = N_0e^k \quad \text{o bien} \quad e^k = \frac{3}{2}.$$

Con cuatro cifras decimales,

$$k = \ln\frac{3}{2} = 0.4055.$$

En consecuencia, para cualquier tiempo $t \geq 0$

$$N(t) = N_0e^{0.4055t}.$$

A fin de tener el valor de t para el cual las bacterias se han triplicado, se despeja t de

$$3N_0 = N_0e^{0.4055t}$$

Así,

$$0.4055t = \ln 3$$

$$t = \frac{\ln 3}{0.4055} \approx 2.7 \text{ h}.$$

Véase la Figura 8.12

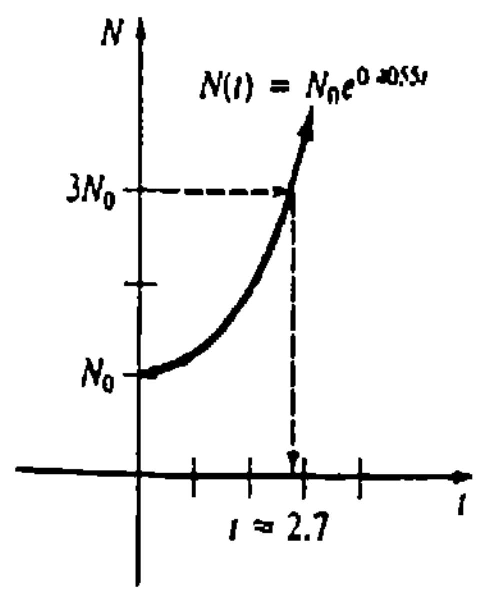


Figura 8.12

Nota: Se puede escribir de otra forma la función $N(t)$ obtenida en el ejemplo precedente. De las leyes de los exponentes,

$$\begin{aligned} N(t) &= N_0 e^{kt} \\ &= N_0 (e^k)^t = N_0 \left(\frac{3}{2}\right)^t \end{aligned}$$

ya que $e^k = \frac{3}{2}$. Esta última solución proporciona un método conveniente para calcular $N(t)$ para valores enteros positivos pequeños de t; también muestra claramente la influencia de la observación experimental en $t = 1$ sobre la solución para todo instante. Se observa también que el número real de bacterias presentes inicialmente; esto es, en el instante $t = 0$, es irrelevante para calcular el tiempo requerido para triplicar el número de bacterias en el cultivo. El tiempo necesario para triplicar, por ejemplo, 100 o 10,000 bacterias, sigue siendo 2.7 horas, aproximadamente.

Enfriamiento

La ley de Newton del enfriamiento dice que en un cuerpo en el que se reduce su temperatura, la rapidez con que varía la misma $T(t)$ es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura constante T_0 del medio que lo rodea; esto es,

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_0), \qquad (8.62)$$

en donde k es una constante de proporcionalidad.

Ejemplo 4

Al sacar un pastel del horno, su temperatura es de 300°F. Tres minutos después, su temperatura es de 200°F. Determinar la temperatura del pastel para cualquier instante posterior a su salida del horno, si la temperatura del ambiente es de 70°F.

Solución Se debe resolver el problema

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 70), \qquad T(0) = 300,$$

y determinar el valor de k, de modo que $T(3) = 200$.

Suponiendo $T > 70$, resulta por separación de variables que

$$\begin{aligned} \frac{dT}{T - 70} &= k\,dt \\ \ln(T - 70) &= kt + C_1 \\ T - 70 &= C_2 e^{kt} \qquad (C_2 = e^{C_1}) \\ T &= 70 + C_2 e^{kt}. \end{aligned}$$

Cuando $t = 0$, $T = 300$, de modo que $300 = 70 + C_2$ da $C_2 = 230$, y por lo tanto $T = 70 + 230\,e^{kt}$.

De $T(3) = 200$ se obtiene

$$e^{3k} = \frac{13}{23}$$

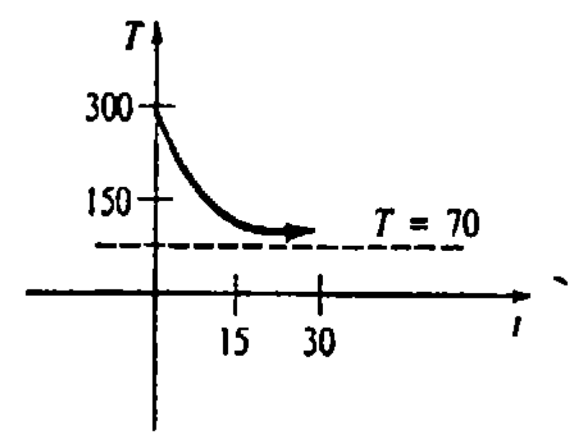
y así, con cuatro cifras decimales, una calculadora da

$$k = \frac{1}{3} \ln \frac{13}{23} = -0.1902.$$

En consecuencia,

$$T(t) = 70 + 230e^{-0.1902t}$$

En la Figura 8.13 se presenta la gráfica de T, junto con algunos valores calculados.



(a)

$T(t)$	t (*minutos*)
75°	20.1
74°	21.3
73°	22.8
72°	24.9
71°	28.6
70.5°	32.3

(b)

Figura 8.13

Ejercicios 8.7

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 983.

En los Problemas 1-10, resuelva por separación de variables la ecuación diferencial dada.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3}{x^2}$

2. $xy' = 4y$

3. $xy' - y = 1$

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2y^2}{1 + x}$

5. $\dfrac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$

6. $\dfrac{dy}{dx} + y = ye^{x+2}$

7. $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{2y + 3}{4x + 5}\right)^2$

8. $\operatorname{sen} 3x\,dx + 2y\cos^3 3x\,dy = 0$

9. $\sec^2 x\,dy + \csc y\,dx = 0$

10. $(1 + x^2 + y^2 + x^2y^2)\,dy = y\,dx$

11. Se sabe que la población de cierta comunidad aumenta con una rapidez proporcional al número de personas presentes, en cualquier instante. Encuentre la población $P(t)$ para cualquier instante. Si la población se ha duplicado en 5 años, ¿en cuánto tiempo se triplicará, y en cuánto se cuadruplicará?

12. Suponga que se sabe que la población de la comunidad del Problema 11 es de 10,000 al cabo de 3 años. ¿Cuál era la población inicial y cuál será a los 10 años?

13. Había inicialmente 100 mg (miligramos) presentes de una sustancia radiactiva. Al cabo de 6 horas la masa disminuyó en 3%. Si la rapidez de decrecimiento radiactivo en cualquier instante es proporcional a la cantidad de la sustancia presente, determine la cantidad $A(t)$ que queda en un instante cualquiera. ¿Qué cantidad queda al cabo de 24 horas?

14. La **semivida** (o **"vida media"**) de una sustancia radiactiva es el tiempo que transcurre para que se desintegre la mitad de los átomos contenidos en una cantidad inicial. Determine la semivida de la sustancia del Problema 13.

15. Un reactor de regeneración transforma el uranio 238, que es relativamente estable, en el isótopo pluto-

nio 239. Al cabo de 15 años se determina que 0.043% de la cantidad inicial A_0 del plutonio se ha desintegrado. Si la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad de la sustancia presente, determine la semivida del isótopo. (Véase el Problema 14.)

16. Cuando un rayo vertical de luz atraviesa una sustancia transparente, la tasa con que su intensidad I disminuye es proporcional a $I(t)$, en donde t representa el espesor del medio en pies. En agua de mar muy clara, la intensidad a 3 pie bajo la superficie es un 25% de la intensidad inicial I_0 del rayo incidente. ¿Cuál es la intensidad del rayo a 15 pie bajo la superficie del mar?

17. Cuando el interés se capitaliza *continuamente*, la cantidad S invertida aumenta a una tasa proporcional a la cantidad presente en un instante cualquiera: $dS/dt = rS$, en donde r es la tasa de interés anual.

(a) Evalúe la suma acumulada al final de 5 años cuando se depositan \$5000 en una cuenta de ahorros que produce el 5 % anual de interés, capitalizado continuamente.

(b) ¿En cuántos años se duplicará la suma depositada inicialmente?

(c) Use una calculadora para comparar el número obtenido en la parte (a) con el valor

$$S = 5000\left(1 + \frac{0.0575}{4}\right)^{5(4)}$$

Este último valor representa la cantidad que se acumularía si el interés se capitalizara trimestralmente.

18. Un termómetro se saca de una habitación (en donde la temperatura del aire es de 70°F), al exterior, en donde la temperatura es de 10°F. Al cabo de $\frac{1}{2}$ minuto el termómetro marca 50°F. ¿Cuánto marcará el termómetro al cabo de $t = 1$ minuto? ¿Cuánto tiempo demorará el termómetro en alcanzar los 15°F?

19. Un termómetro se lleva del interior de una habitación al exterior, en donde la temperatura del aire es de 5°F. Al cabo de 1 minuto el termómetro marca 55°F, y al cabo de 5 minutos marca 30°F. ¿Cuál es la temperatura inicial de la habitación?

20. La ecuación diferencial (8.62) también se cumple cuando un objeto absorbe calor del medio que lo rodea. Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial es de 20°C, se deja caer dentro de un recipiente con agua hirviendo. ¿Cuánto tiempo demorará la barra en alcanzar los 90°C, si se sabe que su temperatura aumentó 2° en 1 segundo? ¿Cuánto demorará la barra en alcanzar los 98°C?

21. La segunda ley de Kirchhhoff dice que en un circuito en serie que contiene sólo un resistor y un inductor, la suma de las caídas de tensión (o voltaje) a través del inductor ($L(di/dt)$) y del resistor (iR), es igual al voltaje (E) suministrado al circuito. Véase la Figura 8.14. Se obtiene así la ecuación diferencial para la corriente $i(t)$

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E,$$

en donde L y R son constantes, conocidas como inductancia y resistencia, respectivamente. Determine la corriente i si E vale 12 volts (voltios), la inductancia es de $\frac{1}{2}$ henry (henrio), la resistencia es de 10 ohms (ohmios), e $i(0) = 0$.

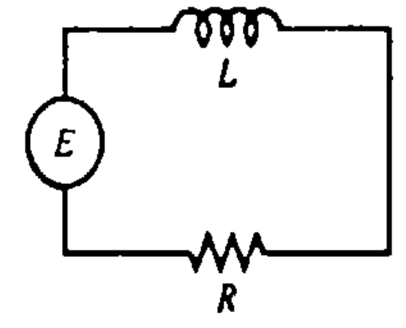


Figura 8.14

22. Un acumulador (batería) de 30 V (volts) se conecta a un circuito en serie en el cual la inductancia es 0.1 H (henry) y la resistencia es de 50 Ω (ohms). Calcule la corriente $i(t)$ si $i(0) = 0$. Determine el comportamiento de la corriente para valores grandes del tiempo. (Véase el Problema 21.)

23. En algunas circunstancias, un cuerpo B de masa m que va cayendo (en el caso de un paracaidista), encuentra una resistencia del aire proporcional a su velocidad instantánea $v(t)$. Véase la Figura 8.15.

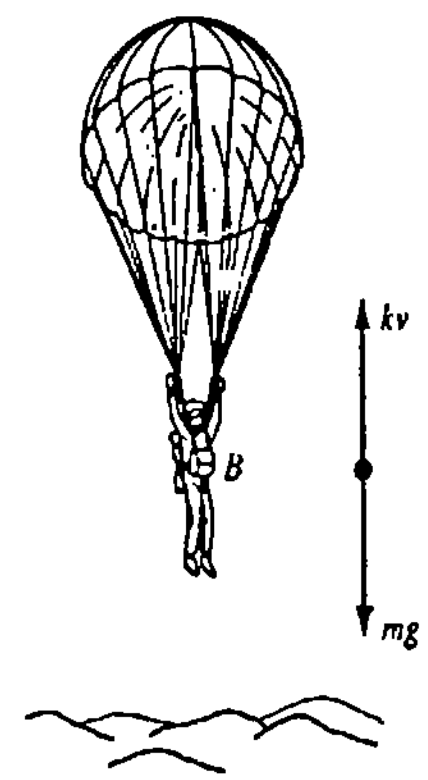


Figura 8.15

Igualando la suma de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, mg-kv, con la aceleración (segunda ley de Newton), resulta la ecuación diferencial

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv, \qquad k > 0.$$

Resuelva tal ecuación sujeta a $v(0) = v_0$ y determine la velocidad límite del cuerpo. Si la distancia s está relacionada con la velocidad $ds/dt = v$, obtenga una expresión explícita para s, si se sabe además que $s(0) = s_0$.

24. La rapidez con que un fármaco se disemina en la corriente sanguínea se rige por la ecuación diferencial

$$\frac{dX}{dt} = A - BX,$$

en donde A y B son constantes positivas. La función $X(t)$ describe la concentración del producto en la corriente sanguínea en cualquier instante t. Determine el valor límite de X cuando $t \to \infty$. ¿En qué momento la concentración es igual a la mitad de dicho valor límite? Suponga que $X(0) = 0$.

25. La altura del nivel h del agua que fluye por un orificio situado en el fondo de un depósito cilíndrico, se expresa por

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_2}{A_1}\sqrt{2gh}, \qquad g = 32 \text{ pie/s}^2,$$

en donde a_1 y A_2 son las áreas transversales del depósito y del orificio, respectivamente. Véase la Figura 8.16. Resuelva la ecuación diferencial si la altura del agua para $t = 0$ es de 20 pie, y $A_1 = 50$ pie² y $a_2 = \frac{1}{4}$ pie². ¿En qué instante queda vacío el depósito?

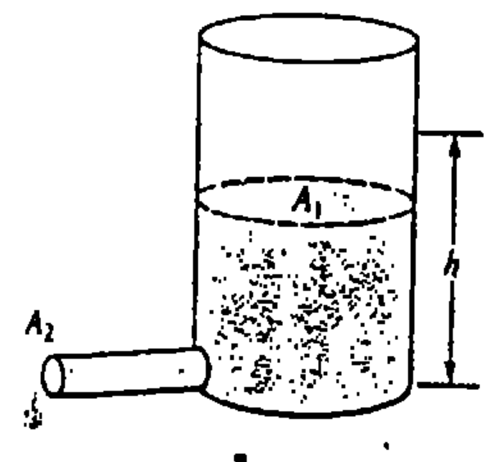


Figura 8.16

26. La energía del sistema resorte-masa mostrado en la Figura 8.17 es igual a la suma de las energías potencial y cinética:

$$E = \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

en donde k es la constante elástica del resorte, m es la masa y y es el desplazamiento de la masa con respecto a una posición de equilibrio. Si E es constante, aplique separación de variables para demostrar que

$$y = \sqrt{\frac{2E}{k}}\,\text{sén}\left(\pm\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + C\sqrt{\frac{k}{2E}}\right),$$

en donde C es una constante arbitraria.

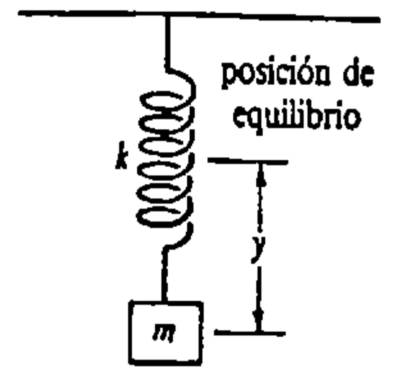


Figura 8.17

Problema para calculadora

27. Un cohete se lanza desde la superficie de la Tierra, verticalmente hacia arriba, con una velocidad inicial v_0. Véase la Figura 8.18. Si la dirección positiva se toma hacia arriba, entonces, en ausencia de resistencia del aire, la ecuación diferencial de la velocidad v luego de que el combustible se ha consumido es

$$v\frac{dv}{dy} = -\frac{k}{y^2},$$

en donde k es una constante positiva.

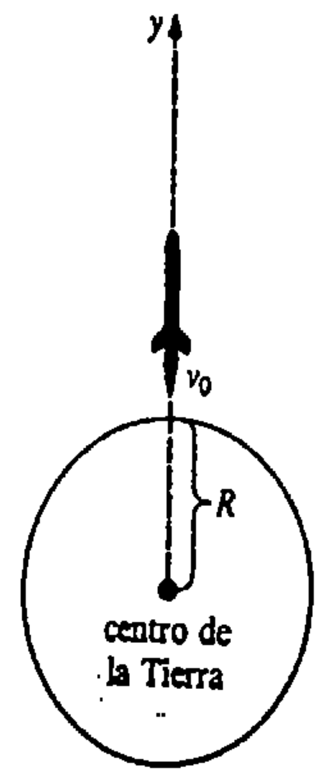


Figura 8.18

(a) Resuelva la ecuación diferencial.

(b) Si $k = gR^2$, $R = 4000$ millas, use una calculadora para demostrar que la "velocidad de escape" de un cohete es $v_0 = 25{,}000$ mi/h, aproximadamente.

Problemas diversos

28. Si P_0 es la población inicial de una comunidad, demuestre que si P se rige por $dP/dt = kP$, entonces

$$\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{t_2} = \left(\frac{P_2}{P_0}\right)^{t_1},$$

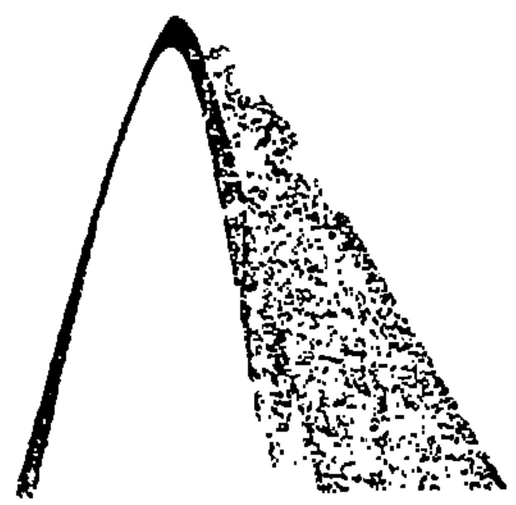
en donde $P_1 = P(t_1)$ y $P_2 = P(t_2)$, $t_1 < t_2$.

29. Suponga que la rapidez de decrecimiento de una sustancia radiactiva es, en cualquier instante, proporcional a la cantidad $A(t)$ presente. Si $A_1 = A(t_1)$ y $A_2 = A(t_2)$, y además $t_1 < t_2$, demuestre que la semivida de la sustancia es

$$t = \frac{(t_2 - t_1)\ln 2}{\ln A_1/A_2}.$$

8.8 Funciones hiperbólicas

Si el lector ha visitado alguna vez el Gateway Arch, de San Luis, Missouri, què tiene 640 pie de altura, tal vez haya dirigido la pregunta: ¿qué forma tiene el arco?, y haya recibido la un tanto enigmática respuesta: tiene la forma de una catenaria invertida. La palabra "catenaria" proviene de la palabra latina *catena*, que significa literalmente cadena colgante (los romanos usaban la catena como traílla para perros). Se puede demostrar que la forma asumida por un alambre, un cable o una cuerda, largos y flexibles, cuando cuelgan entre dos puntos suspendidos bajo la acción de su propio peso, es la forma que tiene la gráfica de la función $f(x) = (k/2)(e^{cx} + e^{-cx})$, para elecciones apropiadas de las constantes c y k. En el estudio de las matemáticas aplicadas ocurren con mucha frecuencia combinaciones como la anterior, que involucran a e^x y e^{-x}; por tal motivo justifican definiciones especiales.



Fotografía de Frank Siteman/ Stock, Boston, Inc.

Gateway Arch

DEFINICIÓN 8.7

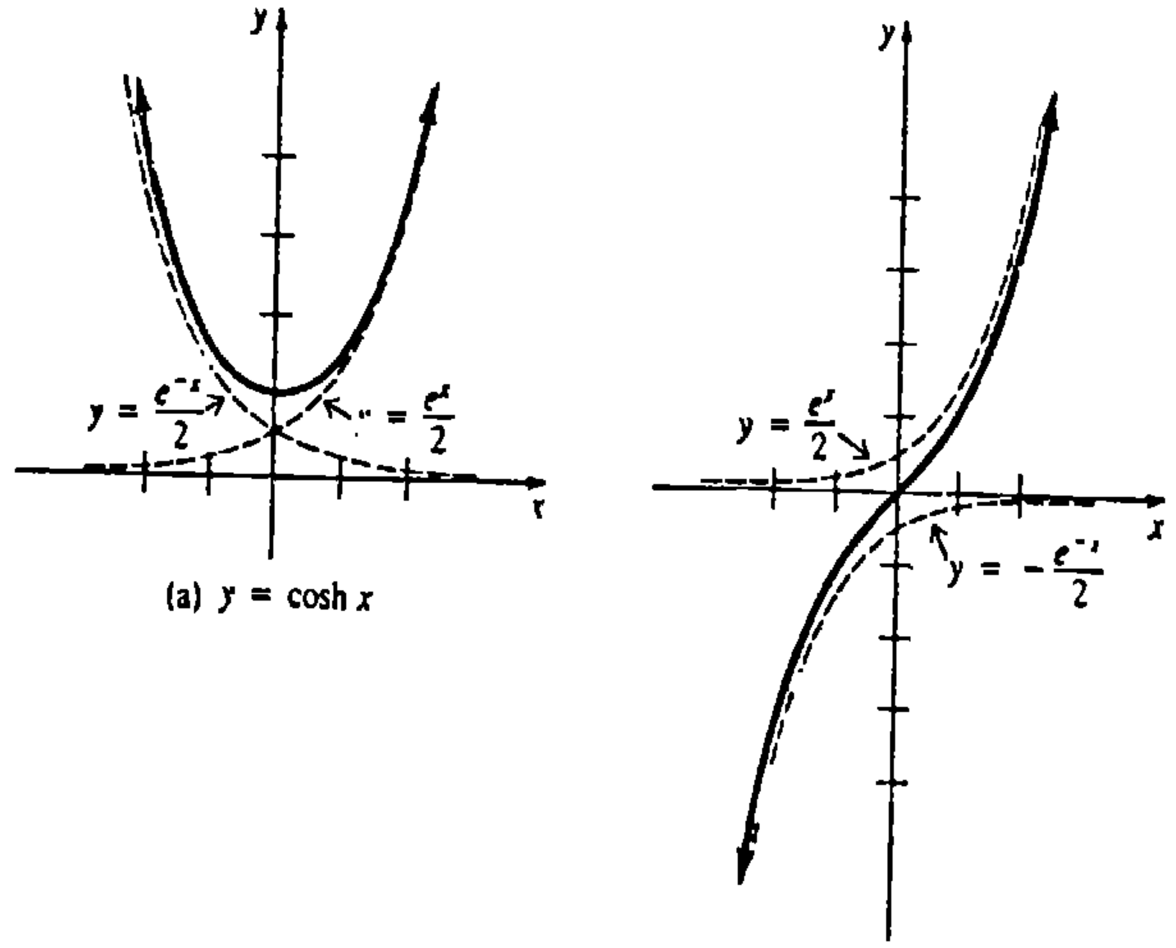
Para cualquier número real x, el seno hiperbólico de x es

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

y el coseno hiperbólico de x es

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \qquad \square$$

En la Figura 8.19 se presentan las gráficas de estas dos funciones. Cuatro funciones hiperbólicas adicionales se definen como sigue



(a) $y = \cosh x$

(b) $y = \operatorname{senh} x$

Figura 8.19

DEFINICIÓN 8.8

Para cualquier número real x,

(*i*) **la tangente hiperbólica** de x es

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

(*ii*) **la cotangente hiperbólica** de x es

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \qquad x \neq 0$$

(*iii*) **la secante hiperbólica** de x es

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}},$$

(*iv*) **la cosecante hiperbólica** de x es

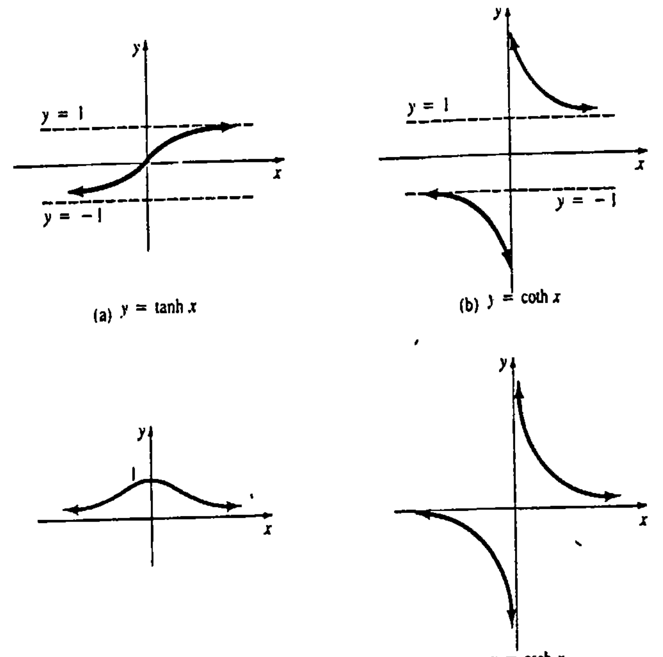
$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}, \qquad x \neq 0. \qquad \square$$

Una identidad fundamental en trigonometría es

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1. \tag{8.63}$$

En las funciones hiperbólicas la análoga a (8.63) es

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1. \tag{8.64}$$



(a) $y = \tanh x$ (b) $y = \coth x$ (c) $y = \operatorname{sech} x$ (d) $y = \operatorname{csch} x$

Figura 8.20

La fórmula (8.64) se verifica fácilmente aplicando las definiciones de $\cosh x$ y $\operatorname{senh} x$ y se deja como ejercicio para el lector.

Las gráficas de $\tanh x$, $\coth x$, $\operatorname{sech} x$ y $\operatorname{csch} x$ se presentan en la Figura 8.20.

Derivadas de las funciones hiperbólicas

Las derivadas de las funciones hiperbólicas se deducen de (8.27) de la Sección 8.2 y de las reglas de diferenciación; por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \frac{d}{dx}\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}e^x - \frac{d}{dx}e^{-x}\right]$$
$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad = \cosh x.$$

De manera semejante, de la definición del coseno hiperbólico debe ser evidente que

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x.$$

Para derivar, por ejemplo, la tangente hiperbólica, se aplica la regla del cociente y la identidad (8.64):

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \frac{d}{dx}\frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{\cosh x \cdot \frac{d}{dx}\operatorname{senh} x - \operatorname{senh} x \cdot \frac{d}{dx}\cosh x}{\cosh^2 x}$$

$$= \frac{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$
$$= \operatorname{sech}^2 x.$$

Las derivadas de las seis funciones hiperbólicas en el caso más general se deducen de la regla de la cadena. Se supone que $u = g(x)$ es una función diferenciable.

$$\text{I} \quad \frac{d}{dx}\operatorname{senh} u = \cosh u \frac{du}{dx}$$

$$\text{II} \quad \frac{d}{dx}\cosh u = \operatorname{senh} u \frac{du}{dx}$$

$$\text{III} \quad \frac{d}{dx}\tanh u = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\text{IV} \quad \frac{d}{dx}\coth u = -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\text{V} \quad \frac{d}{dx}\operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx}$$

$$\text{VI} \quad \frac{d}{dx}\operatorname{csch} u = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx}$$

Se debe observar con cuidado la ligera diferencia entre las fórmulas II y V, y sus análogas para las funciones trigonométricas.

Ejemplo 1

Derivar $y = \operatorname{senh}\sqrt{2x + 1}$.

Solución En virtud de I,

$$\frac{dy}{dx} = \cosh\sqrt{2x+1}\left(\frac{1}{2}(2x + 1)^{-1/2} \cdot 2\right)$$
$$= \frac{\cosh\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}.$$

'Ejemplo 2

Derivar $y = \coth x^3$.

Solución En virtud de IV

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{csch}^2 x^3 \cdot 3x^2.$$

Ejemplo 3

Evaluar la derivada de $y = \dfrac{3x}{4 + \cosh 2x}$ en $x = 0$.

Solución Por la regla del cociente,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(4 + \cosh 2x) \cdot 3 - 3x(\operatorname{senh} 2x \cdot 2)}{(4 + \cosh 2x)^2}.$$

De la Definición 8.7 se ve que cuando $x = 0$ $\operatorname{senh} 0 = 0$ y $\cosh 0 = 1$. Así que,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}.$$

Integrales de funciones hiperbólicas

Las formas integrales de las fórmulas de derivación anteriores se resumen como sigue.

$$\text{I}' \quad \int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u + C$$

$$\text{II}' \quad \int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u + C$$

$$\text{III}' \quad \int \operatorname{sech}^2 u\, du = \tanh u + C$$

$$\text{IV}' \quad \int \operatorname{csch}^2 u\, du = -\coth u + C$$

$$\text{V}' \quad \int \operatorname{sech} u \tanh u\, du = -\operatorname{sech} u + C$$

$$\text{VI}' \quad \int \operatorname{csch} u \coth u\, du = -\operatorname{csch} u + C$$

Ejemplo 4

Evaluar $\int \cosh 5x\, dx$.

Solución Si

$$u = 5x, \quad \text{entonces } du = 5\, dx.$$

En virtud de I′

$$\int \cosh 5x\, dx = \frac{1}{5}\int \cosh 5x(5\, dx) = \frac{1}{5}\int \cosh u\, du$$
$$= \frac{1}{5}\operatorname{senh} u + C \quad = \frac{1}{5}\operatorname{senh} 5x + C.$$

Ejemplo 5

Evaluar $\int x \operatorname{csch} x^2 \coth x^2\, dx$.

Solución Si

$$u = x^2, \quad \text{entonces } du = 2x\, dx.$$

En virtud de VI′,

$$\int x \operatorname{csch} x^2 \coth x^2\, dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{csch} x^2 \coth x^2 (2x\, dx)$$
$$= \frac{1}{2}\int \operatorname{csch} u \coth u\, du = -\frac{1}{2}\operatorname{csch} x^2 + C.$$

Ejemplo 6

Evaluar $\int \tanh x\, dx$.

Solución Obsérvese primero que la integral dada no tiene ninguna de las seis formas presentadas en I′—VI′. Sin embargo, si se escribe

$$\int \tanh x\, dx = \int \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}\, dx,$$

se pueden efectuar las identificaciones

$$u = \cosh x \quad \text{y} \quad du = \operatorname{senh} x\, dx.$$

Por lo tanto,

$$\int \tanh x\, dx = \int \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}\, dx = \int \frac{du}{u}$$
$$= \ln|u| + C \quad = \ln(\cosh x) + C$$

ya que $\cosh x > 0$ para todo número real x.

Observaciones

(*i*) Como se mencionó en la introducción de esta sección, la gráfica de cualquier función de la forma $f(x) = (k/2)(e^{cx} + e^{-cx}) = k \cosh cx$, en donde k y c son constantes, se llama **catenaria**. La forma asumida por un alambre o un cable pesado tendido entre dos postes es básicamente la forma de la gráfica de un coseno hiperbólico. Más aún, si dos anillos circulares se mantienen verticales y no están muy separados entre sí, entonces una película de jabón desplegada entre los anillos formará una superficie de área mínima llamada **catenoide**, que es una catenaria de revolución. Véase la Figura 8.21.

(*ii*) La semejanza entre las funciones trigonométricas y las hiperbólicas se extiende más allá de las fórmulas de derivación y de las identidades básicas (véase los Problemas 53-64 de los Ejercicios 8.8).

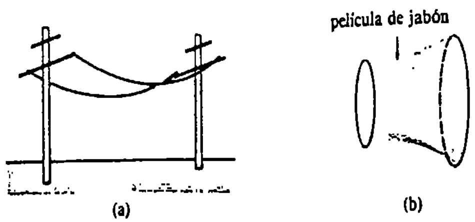


Figura 8.21

Si t es un ángulo medido en radianes cuyo lado terminal es OP, entonces las coordenadas de P, cuando está en la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$, son $(\cos t, \operatorname{sen} t)$. Ahora bien, el área del sector circular sombreado que se muestra en la Figura 8.22 es $A = \frac{1}{2}t$, y así $t = 2A$.* De esta manera las *funciones circulares* $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$ pueden ser consideradas como funciones del área A.

Tal vez el lector ya sepa que la gráfica de la ecuación $x^2 - y^2 = 1$ se llama *hipérbola*. Puesto que $\cosh t \geq 1$ y $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$, resulta que las coordenadas de un punto P de la rama derecha de la hipérbola son $(\cosh t, \operatorname{senh} t)$. Más aún, no es muy difícil demostrar que el área del sector hiperbólico mostrado en la Figura 8.23 está relacionado con el número t por $t = 2A$. (Véanse los Problemas 71 y 72 de los Ejercicios 8.8). Por lo cual puede verse aquí el origen del nombre "función hiperbólica".

(*iii*) A diferencia de las funciones trigonométricas, las funciones hiperbólicas *no* son periódicas.

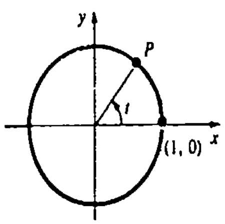


Figura 8.22

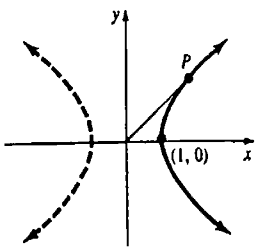


Figura 8.23

Ejercicios 8.8

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 983.

1. Si $\operatorname{senh} x = -\frac{1}{2}$, halle los valores de las funciones hiperbólicas restantes.

2. Si $\cosh x = 3$, encuentre los valores de las funciones hiperbólicas restantes.

En los Problemas 3-26 encuentre la derivada de la función dada.

3. $y = \cosh 10x$
4. $y = \operatorname{sech} 8x$
5. $y = \tanh \sqrt{x}$
6. $y = \operatorname{csch} \frac{1}{x}$

* Recuérdese que el área de un sector circular es $A = \frac{1}{2} r^2\theta$, en donde θ se mide en radianes. Hágase $r = 1$ y $\theta = t$.

7. $y = \operatorname{sech}(3x - 1)^2$
8. $y = \operatorname{senh} e^{x^2}$
9. $y = \coth(\cosh 3x)$
10. $y = \tanh(\operatorname{senh} x^3)$
11. $y = \operatorname{senh} 2x \cosh 3x$
12. $y = \operatorname{sech} x \coth 4x$
13. $y = x \cosh x^2$
14. $y = \dfrac{\operatorname{senh} x}{x}$
15. $y = \operatorname{senh}^3 x$
16. $y = \cosh^4 \sqrt{x}$
17. $f(x) = (x - \cosh x)^{2/3}$
18. $f(x) = \sqrt{4 + \tanh 6x}$
19. $f(x) = \ln(\cosh 4x)$
20. $f(x) = \ln^2(\operatorname{sech} x)$
21. $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + \cosh x}$
22. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2 + \operatorname{senh} x}$
23. $F(t) = e^{\operatorname{senh} t}$
24. $H(t) = e^t e^{\operatorname{csch} t^2}$
25. $g(t) = \dfrac{\operatorname{sen}^{-1} t}{1 + \operatorname{senh} 2t}$
26. $w(t) = \dfrac{\tanh t}{(1 + \cosh t)^2}$

27. Obtenga una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = \operatorname{senh} 3x$ en $x = 0$.

28. Determine una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = \cosh x$ en $x = 1$.

En los Problemas 29-46 evalúe la integral dada.

29. $\int \operatorname{senh} 8x \, dx$
30. $\int \left(x^2 + \cosh \frac{x}{6}\right) dx$
31. $\int \cosh(5x - 4) \, dx$
32. $\int x \operatorname{senh}(1 - x^2) \, dx$
33. $\int x^2 \operatorname{sech}^2 x^3 \, dx$
34. $\int \dfrac{\operatorname{csch}^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$
35. $\int \dfrac{\operatorname{csch} \sqrt[3]{x} \coth \sqrt[3]{x}}{(\sqrt[3]{x})^2} \, dx$
36. $\int \operatorname{sech} 2x \tanh 2x \, dx$
37. $\int \cosh^2 x \operatorname{senh} x \, dx$
38. $\int \sqrt{1 + \operatorname{senh} 2x} \cosh 2x \, dx$
39. $\int \dfrac{\operatorname{senh} 5x}{7 + \cosh 5x} \, dx$
40. $\int x \coth x^2 \, dx$
41. $\int e^{-\cosh 3x} \operatorname{senh} 3x \, dx$
42. $\int \dfrac{e^{\tanh x}}{\cosh^2 x} \, dx$
43. $\int (\cosh^2 x - 1)^3 \cosh x \, dx$
44. $\int \tanh x \operatorname{sech}^2 x \, dx$
45. $\int e^x \cosh e^x \, dx$
46. $\int e^x \cosh x \, dx$

47. Calcular el área bajo la gráfica de $y = \cosh x$ en el intervalo $[-1, 1]$.

48. Obtenga el área de la región comprendida entre la gráfica de $y = \operatorname{senh} x$ y el eje x en $[-1, 1]$.

49. Determine el área de la región limitada por las gráficas de $y = \cosh x$, $y = x$, $x = -1$ y $x = 3$.

50. Calcule el volumen del sólido de revolución que se forma al hacer girar la región limitada por las gráficas de $y = \operatorname{sech} x$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$ en torno al eje x.

51. Obtenga el volumen del sólido de revolución que se forma haciendo girar la región limitada por las gráficas de $y = \operatorname{senh} x^2$, $y = 0$ y $x = \sqrt{3}$ en torno al eje y.

52. Encuentre la longitud de la gráfica de $y = \cosh x$ en el intervalo $[0, 2]$.

Problemas diversos

En los Problemas 53-58 demuestre la identidad indicada.

53. $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$
54. $\cosh(-x) = \cosh x$
55. $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$
56. $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$
57. $\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$
58. $\cosh x + \operatorname{senh} x = e^x$
59. $\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$
60. $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$
61. $\tanh(x + y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$

62. $\tanh 2x = \dfrac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}$

63. $\operatorname{senh} 2x = 2\operatorname{senh} x\cosh x$

64. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$
$= 2\cosh^2 x - 1$
$= 2\operatorname{senh}^2 x + 1$

65. Evalúe

(a) $\cosh(\ln x)$, (b) $\operatorname{senh}(\ln x)$.

66. Demuestre d^2y/dx^2 para

(a) $y = \tanh x$ (b) $y = \operatorname{sech} x$.

67. Verifique que $y = C_1\cosh kx + C_2\operatorname{senh} kx$ satisface la ecuación $y'' - k^2y = 0$ para cualesquiera constantes C_1 y C_2.

68. Demuestre IV en la forma

$$\frac{d}{dx}\coth x = -\operatorname{csch}^2 x.$$

69. Demuestre V en la forma

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x\tanh x.$$

70. Pruebe VI en la forma

$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x\coth x.$$

71 Demuestre que el área de la región sombreada en la Figura 8.24 está dada por

$$A(t) = \frac{1}{2}\cosh t\operatorname{senh} t - \int_1^{\cosh t}\sqrt{x^2-1}\,dx.$$

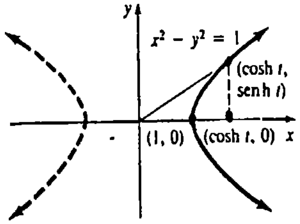


Figura 8.24

72. (a) Aplique el resultado del Problema 71 para demostrar que $A(0) = 0$ y $A'(t) = \frac{1}{2}$.

(b) Aplique la parte (a) para demostrar que $A(t) = \frac{1}{2}t$.

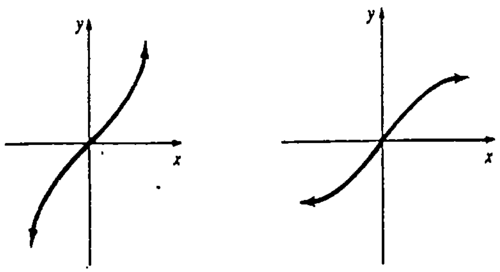
73. Pruebe que para cualquier entero positivo n,

$$(\cosh x + \operatorname{senh} x)^n = \cosh nx + \operatorname{senh} nx.$$

8.9 Funciones hiperbólicas inversas

Para cualquier número real y en el ámbito o contradominio del seno hiperbólico, corresponde solamente un número real x en su dominio. En otras palabras, $y = \operatorname{senh} x$ es una función inyectiva y, por consiguiente, tiene una función inversa, la cual se expresa $y = \operatorname{senh}^{-1}x$. Como en nuestra exposición anterior de las funciones trigonométricas inversas en la Sección 7.2, esta última notación es equivalente a $x = \operatorname{senh} y$.

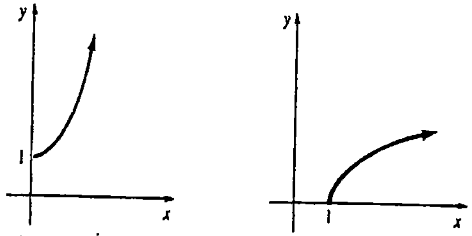
En la Figura 8.25 se comparan las gráficas de $y = \operatorname{senh} x$ y $y = \operatorname{senh}^{-1}x$.



(a) $y = \operatorname{senh} x$ (b) $y = \operatorname{senh}^{-1} x$

Figura 8.25

El coseno hiperbólico no es una función inyectiva, y por lo tanto no posee una función inversa a menos que su dominio sea restringido. Una inspección a la Figura 8.26 muestra que cuando el dominio de $y = \cosh x$ se restringe a los valores $x \geq 0$ ($y \geq 1$), su función inversa $y = \cosh^{-1}x$ se define para $x \geq 1$ ($y \geq 0$).



(a) $y = \cosh x$, $x \geq 0$ (b) $y = \cosh^{-1}x$, $x \geq 1$

Figura 8.26

Las definiciones de las seis funciones hiperbólicas inversas, junto con las restricciones apropiadas para la variable x, se resumen en seguida.

DEFINICIÓN 8.9

(*i*)	$y = \operatorname{senh}^{-1}x$	si y sólo si	$x = \operatorname{senh} y$	
(*ii*)	$y = \cosh^{-1}x$	si y sólo si	$x = \cosh y$,	$x \geq 1$
(*iii*)	$y = \tanh^{-1}x$	si y sólo si	$x = \tanh y$,	$\lvert x\rvert < 1$
(*iv*)	$y = \coth^{-1}x$	si y sólo si	$x = \coth y$,	$\lvert x\rvert > 1$
(*v*)	$y = \operatorname{sech}^{-1}x$	si y sólo si	$x = \operatorname{sech} y$,	$0 < x \leq 1$
(*vi*)	$y = \operatorname{csch}^{-1}x$	si y sólo si	$x = \operatorname{csch} y$,	$x \neq 0$.

□

En la Figura 8.27 (página 460) se presentan las gráficas de las cuatro últimas funciones de la Definición 8.9.

Las funciones hiperbólicas inversas como logaritmos

Puesto que todas las funciones hiperbólicas están definidas en términos de combinaciones de e^x, no debe causar ninguna sorpresa encontrar que las funciones hiperbólicas inversas se pueden expresar en términos del logaritmo natural. Por ejemplo, $y = \operatorname{senh}^{-1}x$ es equivalente a

$$x = \operatorname{senh} y$$

de modo que

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

$$2x = \frac{e^{2y}+1}{e^y}$$

o bien

$$e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0.$$

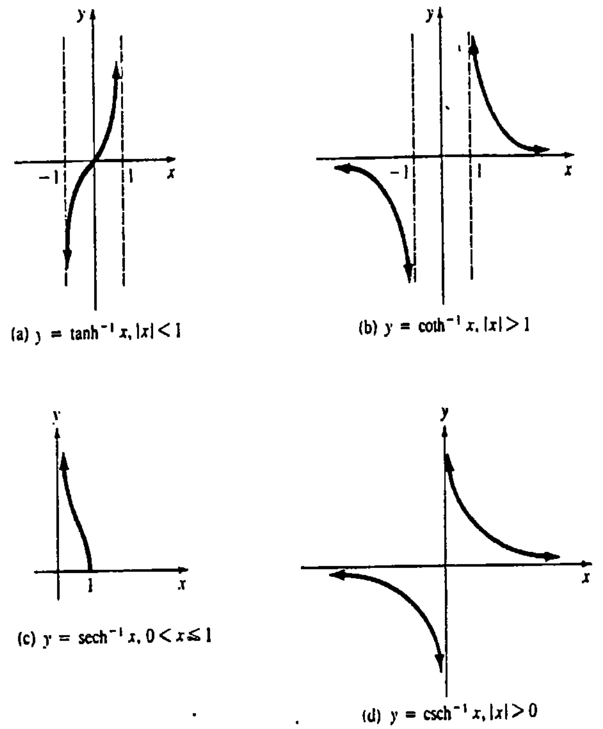


Figura 8.27

Como esta última ecuación es cuadrática en e^y, se obtiene

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}.$$

Ahora bien, la solución correspondiente al signo menos debe ser rechazada, puesto que $e^y > 0$, pero $x - \sqrt{x^2+1} < 0$. Se tiene así que

$$e^y = x + \sqrt{x^2+1}$$

o bien

$$y = \operatorname{senh}^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

De manera semejante, para $y = \tanh^{-1}x$, $|x| < 1$, se tiene que

$$x = \tanh y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

$$e^y(1-x) = (1+x)e^{-y}$$

$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

$$2y = \ln\frac{1+x}{1-x}$$

o bien

$$y = \tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

Se han demostrado dos de los resultados del teorema siguiente. Las demostraciones restantes se dejan como ejercicios.

TEOREMA 8.6

(*i*) $\operatorname{senh}^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

(*ii*) $\cosh^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}), \quad x \geq 1$

(*iii*) $\tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad |x| < 1$

(*iv*) $\coth^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \quad |x| > 1$

(*v*) $\operatorname{sech}^{-1}x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right), \quad 0 < x \leq 1$

(*vi*) $\operatorname{csch}^{-1}x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right), \quad x \neq 0$ □

Derivadas

Para obtener la derivada de una función hiperbólica inversa puede procederse de dos maneras. Por ejemplo, si

$$y = \operatorname{senh}^{-1}x,$$

entonces por definición

$$x = \operatorname{senh} y.$$

Aplicando derivación implícita se puede escribir

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\operatorname{senh} y)$$

$$1 = \cosh y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{senh}^2 y + 1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Por otra parte, en virtud del Teorema 8.6(*i*) se sabe que

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

Por lo tanto, de la derivada del logaritmo se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2} \cdot 2x\right)$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Se ha demostrado un caso especial de la parte I de los resultados siguientes. Las demostraciones de las partes restantes se dejan como ejercicios. La función $u = g(x)$ es diferenciable.

I $\quad \dfrac{d}{dx}\operatorname{senh}^{-1}u = \dfrac{1}{\sqrt{u^2+1}}\dfrac{du}{dx}$

II $\quad \dfrac{d}{dx}\cosh^{-1}u = \dfrac{1}{\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}, \qquad u > 1$

III $\quad \dfrac{d}{dx}\tanh^{-1}u = \dfrac{1}{1-u^2}\dfrac{du}{dx}, \qquad |u| < 1$

IV $\quad \dfrac{d}{dx}\coth^{-1}u = \dfrac{1}{1-u^2}\dfrac{du}{dx}, \qquad |u| > 1$

V $\quad \dfrac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1}u = \dfrac{-1}{u\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}, \qquad 0 < u < 1$

VI $\quad \dfrac{d}{dx}\operatorname{csch}^{-1}u = \dfrac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}}\dfrac{du}{dx}, \qquad u \neq 0$

Ejemplo 1

Derivar $y = \cosh^{-1}(x^2+5)$.

Solución En virtud de II,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(x^2+5)^2-1}} \cdot 2x = \frac{2x}{\sqrt{x^4+10x^2+24}}.$$

Ejemplo 2

Derivar $y = \tanh^{-1}4x$.

Solución Por III,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-(4x)^2} \cdot 4 = \frac{4}{1-16x^2}.$$

Ejemplo 3

Derivar $y = e^{x^2}\operatorname{sech}^{-1}x$.

Solución Por la regla del producto y V, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2}\left(\frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}\right) + 2xe^{x^2}\operatorname{sech}^{-1}x = -\frac{e^{x^2}}{x\sqrt{1-x^2}} + 2xe^{x^2}\operatorname{sech}^{-1}x.$$

Integrales

Como en la Sección 7.3, nos limitaremos a dar tres fórmulas de integrales En virtud de I-IV se demuestra de inmediato que cuando a es una constante positiva

I′ $\quad \displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\frac{u}{a} + C$

II′ $\quad \displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \cosh^{-1}\frac{u}{a} + C, \qquad u > a > 0$

III′ $\quad \displaystyle\int \frac{du}{a^2-u^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\tanh^{-1}\dfrac{u}{a} + C, & |u| < a \\ \dfrac{1}{a}\coth^{-1}\dfrac{u}{a} + C, & |u| > a. \end{cases}$

Ejemplo 4

Evaluar $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}$.

Solución Si se identifica

$$a = 1, \qquad u = \sqrt{3}x, \qquad y \qquad du = \sqrt{3}\,dx,$$

se deduce luego de I′ que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\sqrt{3}\,dx}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{senh}^{-1}u + C = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{senh}^{-1}\sqrt{3}x + C.$$

Ejemplo 5

Evaluar $\displaystyle\int \frac{dx}{9-x^2}$.

Solución Con $a = 3$ y $u = x$, se obtiene de III′

$$\int \frac{dx}{9-x^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\tanh^{-1}\dfrac{x}{3} + C, & |x| < 3 \\ \dfrac{1}{3}\coth^{-1}\dfrac{x}{3} + C, & |x| > 3. \end{cases}$$

A veces sería deseable escribir las fórmulas integrales I′—III′ en términos de logaritmos en vez de en términos de las funciones hiperbólicas. Con la ayuda de las partes (*i*), (*ii*), (*iii*) y (*iv*) del Teorema 8.6, resulta que, cuando a es una constante positiva,

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2+a^2}) + C, \qquad (8.65)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2}) + C, \qquad u > a > 0 \tag{8.66}$$

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} \ln \dfrac{a+u}{a-u} + C, & |u| < a \\ \dfrac{1}{2a} \ln \dfrac{u+a}{u-a} + C, & |u| > a. \end{cases} \tag{8.67}$$

Obsérvese que la última integral puede expresarse en forma compacta como

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C, \qquad u \neq a. \tag{8.68}$$

Ejemplo 6

Obtener el área A bajo la gráfica de $y = 1/\sqrt{x^2+1}$ en el intervalo $[0, 2]$.

Solución La Figura 8.28 muestra el área en cuestión. Puesto que la función es no negativa, se obtiene de inmediato que

$$A = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1})\Big]_0^2$$

$$= \ln(2 + \sqrt{5}) \approx 1.4436 \text{ unidades cuadradas.}$$

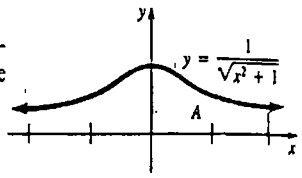


Figura 8.28

Observación

En la Sección 1.6 se señaló que las funciones se pueden clasificar en algebraicas o trascendentales. Las funciones estudiadas en los Capítulos 7 y 8:

- trigonométricas, trigonométricas inversas,
- logarítmicas, exponenciales, hiperbólicas, hiperbólicas inversas, y la
- función potencia $f(x) = x^r$, r es irracional,

son trascendentales, ya que no pueden construirse a partir de números reales y una variable x, mediante un número finito de adiciones, sustracciones, multiplicaciones, divisiones y radicaciones. Nótese que $y = x^{1/2}$ es una función algebraica, pero que $y = x^{\pi}$ es trascendental.

Ejercicios 8.9

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 984

En los Problemas 1-18 obtenga la derivada de la función dada.

1. $y = \operatorname{senh}^{-1} 3x$
2. $y = \cosh^{-1}\frac{x}{2}$
3. $y = \tanh^{-1}(1 - x^2)$
4. $y = \coth^{-1}\frac{1}{x}$
5. $y = \coth^{-1}(\csc x)$
6. $y = \operatorname{senh}^{-1}(\operatorname{sen} x)$

7. $y = x \operatorname{senh}^{-1} x^3$
8. $y = x^2 \operatorname{csch}^{-1} x$
9. $y = \dfrac{\operatorname{sech}^{-1} x}{x}$
10. $y = \dfrac{\coth^{-1} e^{2x}}{e^{2x}}$
11. $y = \ln(\operatorname{sech}^{-1} x)$
12. $y = \ln|\operatorname{csch}^{-1} x|$
13. $y = (\cosh^{-1} 6x)^{1/2}$
14. $y = \dfrac{1}{(\tanh^{-1} 2x)^3}$
15. $y = \sqrt{x^2 - 1} + \cosh^{-1} x$
16. $y = \dfrac{1}{1 - x^2} + \coth^{-1} 4x$
17. $y = \operatorname{senh}^{-1}(\cosh x)$
18. $y = \operatorname{senh}(\tanh^{-1} x)$

En los Problemas 19-36 evalúe la integral dada.

19. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 1}}$
20. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$
21. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - 4x^2}$
22. $\displaystyle\int \frac{dx}{4 - x^2}$
23. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 16}}$
24. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 + 9}}$
25. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4 + 1}}$
26. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{1 - x^4}$
27. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 2x}$
28. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x}}$
29. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}$
30. $\displaystyle\int \frac{dx}{-x^2 + 6x - 8}$
31. $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} - 1}}\,dx$
32. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{-x} - e^x}$
33. $\displaystyle\int \frac{\cos\theta}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2\theta}}\,d\theta$
34. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{2 - \operatorname{sen}^2 t}}\,dt$
35. $\displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{t^2 + 16}}\,dt$
36. $\displaystyle\int \frac{r}{1 - r^2}\,dr$

En los Problemas 37 y 38 exprese la antiderivada de la integral como un logaritmo natural. Halle el valor de la integral.

37. $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$
38. $\displaystyle\int_0^4 \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 9}}$

39. Obtenga el área bajo la gráfica de $y = 1/(1 - x^2)$ en el intervalo $[-3/4, 0]$.

40. Determine el área limitada por la gráfica de $y = 1/(1 - x^2)$ y el eje x en $[2, 5]$.

41. Calcule el área bajo la gráfica de $y = 1/\sqrt{x^2 - 1}$ en el intervalo $[2, 5]$.

42. Aplique el método de las cortezas para evaluar el volumen del sólido de revolución que se forma al hacer girar la región limitada por las gráficas de $y = 1/(1 - x^4)$, $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ y $y = 0$ en torno al eje y.

43. La ecuación diferencial que describe la forma de un alambre de densidad constante w que cuelga bajo su propio peso es

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{T}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

en donde T es una constante. Aplique separación de variables y la sustitución $P = dy/dx$ para resolver esta ecuación sujeta a $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

44. La velocidad $v(t)$ de un cuerpo de masa m que cae a través de un medio viscoso que opone una fuerza de resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad, satisface la ecuación diferencial.

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2,$$

en donde g es la aceleración de la gravedad y k es una constante positiva. Aplique separación de variables para demostrar que una solución de esta ecuación que satisface $v(0) = 0$ es

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}\,t\right).$$

¿A qué es igual $\lim_{t\to\infty} v(t)$? (*Sugerencia:* véase la Figura 8.20(a).)

Problemas diversos

45. Demuestre II en la forma

$$\frac{d}{dx}\cosh^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

46. Demuestre III en la forma

$$\frac{d}{dx}\tanh^{-1}x = \frac{1}{1 - x^2}.$$

47. Demuestre IV en la forma

$$\frac{d}{dx}\coth^{-1}x = \frac{1}{1 - x^2}.$$

48. Pruebe V en la forma

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1}x = \frac{-1}{x\sqrt{1 - x^2}}.$$

49. Demuestre VI en la forma

$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch}^{-1}x = \frac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}.$$

50. Aplique I' y el Teorema 8.6(*i*) para demostrar (8.65).

51. Aplique II' y el Teorema 8.6(*ii*) para demostrar (8.66).

52. Aplique III' y el Teorema 8.6(*iii*) y 8.6 (*iv*) para demostrar (8.67).

53. Utilice la identidad $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1/2}{1+x} + \dfrac{1/2}{1-x}$ para evaluar $\int dx/(1-x^2)$.

54. Aplique la forma $\int du/\sqrt{u^2+1}$ con $u = \tan\theta$ para evaluar $\int \sec\theta\, d\theta$ en términos de un logaritmo natural.

Examen • Capítulo 8

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 984.

En los Problemas 1-20 conteste verdadero o falso.

1. La función logarítmica natural es una antiderivada de x^{-1}. ____

2. $\dfrac{d}{dx}\log_{10}x = \dfrac{1}{x}$. ____

3. $\dfrac{d}{dx}2^x = x2^{x-1}$. ____

4. $\displaystyle\int_{-1}^{3}\frac{dx}{x} = \ln 3$. ____

5. $\displaystyle\int 10^{\pi}dx = \frac{10^{\pi+1}}{\pi+1} + C$. ____

6. La inversa de $y = e^x$ es $y = \ln x$. ____

7. Si $\ln x = 1$, entonces $x = e$. ____

8. Si $0 < a < b$, entonces $\ln a < \ln b$. ____

9. Para $a > 0$ y $b > 0$, $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$. ____

10. Si x es un número irracional y $a > 0$, entonces $\ln a^x = x\ln a$.

11. $\ln x^2 = 2\ln x$ para todo x. ____

12. $e^{\sqrt{x}} = \sqrt{e^x}$ para todo x. ____

13. $\exp(x+y) = (\exp x)\,.\,(\exp y)$. ____

14. Si $f(x) = \ln|x+1|$ y $g(x) = \ln(x+1)$, entonces $f'(x) = g'(x) = 1/(x+1)$ para todo $x \neq -1$. ____

15. $\dfrac{d}{dx}\cosh x = -\operatorname{senh} x$. ____

16. El coseno hiperbólico es una función par. ____

17. El coseno hiperbólico nunca es negativo. ____

18. $\cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x = 1$. ____

19. La función seno hiperbólico es inyectiva. ____

20. Toda función hiperbólica inversa se puede expresar como un logaritmo. ____

En los Problemas 21-30 llene los espacios en blanco.

21. $\ln e^3 =$ ____.

22. $\ln(\ln e) =$ ____.

23. $\ln\dfrac{e^a}{e^b} =$ ____.

24. $e^{-2\ln 3} =$ ____.

25. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = \ln x$ en $x = \frac{1}{2}$ es ____.

26. Para $f(x) = \ln|2x-4|$, el dominio de f' es ____.

27. Para derivar $f(x) = x^x$, se utiliza un proceso llamado ____.

28. Si $e^{-x} = 5$, entonces $x =$ ____.

29. La gráfica del coseno hiperbólico se llama ____.

30. El valor de $\cosh^{-1}1$ es ____.

En los Problemas 31-48 encuentre dy/dx.

31. $y = \ln(x\sqrt{4x-1})$

32. $y = (\ln\cos^2 x)^2$

33. $y = \operatorname{sen}(e^x\ln x)$

34. $y = x^3\log_3\sqrt{x}$

35. $y = e^x + e^{2x}$

36. $y = (e + e^2)^x$

37. $y = x^7 + 7^x + 7^{\pi}$

38. $y = (e^x + 1)^{-e}$

39. $y = (x^2 + e^{2x})^{\ln x}$

40. $y = 5^{x^2}x^{\operatorname{sen} x}$

41. $xy^2 = e^x - e^y$

42. $y = \ln xy$

43. $y = \operatorname{senh} e^{x^3}$

44. $y = (\tanh 5x)^{-1}$

45. $y = \cosh(\cosh x)$

46. $y = (\operatorname{sech}\sqrt{2}x)^{\sqrt{2}}$

47. $y = \operatorname{senh}^{-1}(\operatorname{sen}^{-1}x)$

48. $y = (\tan^{-1}x)(\tanh^{-1}x)$

En los Problemas 49-66 evalúe la integral indicada.

49. $\displaystyle\int\frac{x}{1-5x^2}dx$

50. $\displaystyle\int_1^2\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right]dx$

51. $\displaystyle\int\frac{x+1}{x(x+2)}dx$

52. $\displaystyle\int\frac{3x^2-4x+2}{x}dx$

53. $\displaystyle\int x^e\,dx$

54. $\displaystyle\int 3^{\cos x}\operatorname{sen} x\,dx$

55. $\displaystyle\int\cot 4x\,dx$

56. $\displaystyle\int x^2\sec x^3\,dx$

57. $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{e^{3x}}$

58. $\displaystyle\int\frac{dx}{e^{-x}(4+e^x)}$

59. $\displaystyle\int 2^t3^t4^t\,dt$

60. $\displaystyle\int 4^{\theta}e^{\theta}\,d\theta$

61. $\displaystyle\int\frac{\operatorname{senh} 1/x}{x^2}dx$

62. $\displaystyle\int\frac{\cosh(\ln 2x)}{x}dx$

63. $\displaystyle\int\frac{\cosh 3x}{\operatorname{senh}^4 3x}dx$

64. $\displaystyle\int(1+\tanh x)^{-1}\operatorname{sech}^2 x\,dx$

65. $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{9x^2+1}}$

66. $\displaystyle\int_{2e}^{3e}\frac{dx}{x\sqrt{(\ln x)^2-1}}$

67. La región del primer cuadrante limitada por las gráficas de $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y $x = \ln 6$ se hace girar en torno al eje x. Encuentre el volumen del sólido de revolución.

68. Determine el punto de la gráfica de $y = \ln 2x$, cuya recta tangente pase por el origen.

En los Problemas 69 y 70 resuelva la ecuación diferencial indicada, por separación de variables.

69. $\cos x\dfrac{dy}{dx} + (\operatorname{sen} x)y = 0$

70. $x\,dx - 3y^2(x+2)dy = 0$

71. El carbono 14 radiactivo se desintegra con una rapidez que, en cada instante, es proporcional a la cantidad presente en dicho instante. Se sabe que la semivida (o "vida media") del C-14 es de 5600 años. Determine la edad de un hueso fosilizado que contiene $\frac{1}{1000}$ de su cantidad original de C-14.

72. Se saca una barra de metal de un horno en el que la temperatura es de 150°C. y se coloca dentro de un depósito de agua cuya temperatura se mantiene constante a 30°C. Al cabo de $\frac{1}{4}$ de hora dentro del depósito, la temperatura de la barra es de 90°C. Calcule la temperatura de la barra al cabo de $\frac{1}{2}$ hora, y al cabo de 1 hora.

Técnicas de integración

A menudo ocurren integrales que no se pueden clasificar como una forma general tal como $\int u^n\,du$, o bien $\int e^u\,du$. Por ejemplo, no es posible evaluar $\int x^2\sqrt{x+1}\,dx$ mediante una aplicación inmediata de alguna de las fórmulas enumeradas en la página siguiente. Sin embargo, aplicando una *técnica de integración*, algunas veces se puede reducir una integral como ésta a una o más de las formas conocidas.

Repaso de fórmulas de integración

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1 \qquad \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$\int e^u\,du = e^u + C \qquad \int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C \qquad \int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$$

$$\int \sec^2 u\,du = \tan u + C \qquad \int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$$

$$\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C \qquad \int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$$

$$\int \cosh u\,du = \operatorname{senh} u + C \qquad \int \operatorname{senh} u\,du = \cosh u + C$$

$$\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C \qquad \int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$$

$$\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C \qquad \int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C \qquad \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{|u|}{a} + C$$

9.1 Sustituciones algebraicas

En muchas ocasiones en los Capítulos 5, 6, 7 y 8 se utilizó la sustitución $u = g(x)$ para evaluar integrales. Por ejemplo, $\int e^{x^2} x\,dx$ se reconoce como $(\frac{1}{2})\int e^u\,du$ cuando $u = x^2$. Ahora se extenderá la idea de la sustitución con u para integrales que no sean de la forma precisa $\int f(g(x))g'(x)\,dx$.

Ejemplo 1

Evaluar $\int x^2\sqrt{x+1}\,dx$.

Solución Si se hace

$$u = x + 1, \text{ entonces } x = u - 1, \qquad dx = du,$$

y

$$x^2 = (u-1)^2 = u^2 - 2u + 1$$
$$\sqrt{x+1} = u^{1/2}.$$

Así que,

$$\int x^2\sqrt{x+1}\,dx = \int (u^2 - 2u + 1)u^{1/2}\,du$$
$$= \int (u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2})\,du$$

$$= \frac{2}{7}u^{7/2} - \frac{4}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2} + C$$
$$= \frac{2}{7}(x+1)^{7/2} - \frac{4}{5}(x+1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C.$$

El lector debe verificar que la derivada del último renglón es efectivamente $x^2\sqrt{x+1}$.

La elección de la sustitución a emplear, dado el caso, no siempre es obvia. Por lo general, si el integrando contiene una potencia de una función, es conveniente probar haciendo que u sea tal función, *o bien* la propia potencia de la función. En el Ejemplo 1, la sustitución alternativa $u = \sqrt{x+1}$ o $u^2 = x + 1$ conduce a la integral diferente $2\int (1-u^2)^2u^2\,du$. Esta última puede evaluarse desarrollando el integrando y efectuando la integral de cada término.

Ejemplo 2

Evaluar $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$.

Solución Sea

$$u = \sqrt{x} \quad \text{de modo que} \quad x = u^2 \quad \text{y} \quad dx = 2u\,du.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = \int \frac{2u\,du}{u^2 + u}$$
$$= \int \frac{2\,du}{u+1}$$
$$= 2\ln|u+1| + C$$
$$= 2\ln(\sqrt{x} + 1) + C.$$

Integrandos que contienen una expresión cuadrática

Como se vio en los Capítulos 7 y 8, si un integrando contiene una expresión cuadrática, $ax^2 + bx + c$, *completar el cuadrado* puede conducir a una integral que sea posible expresar como función trigonométrica inversa o como función hiperbólica inversa. Desde luego que integrales más complejas pueden dar lugar también a otras funciones.

Ejemplo 3

Evaluar $\int \frac{x+4}{x^2 + 6x + 18}\,dx$.

Solución Luego de completar el cuadrado, la integral dada puede escribirse como

$$\int \frac{x+4}{x^2+6x+18}\,dx = \int \frac{x+4}{(x+3)^2 + 9}\,dx.$$

Ahora bien, si $u = x + 3$, entonces $x = u - 3$ y $dx = du$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{x+4}{x^2+6x+18}\,dx &= \int \frac{u+1}{u^2+9}\,du\\ &= \int \frac{u}{u^2+9}\,du + \int \frac{du}{u^2+9}\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+9}\,du + \int \frac{du}{u^2+9}\\ &= \frac{1}{2}\ln(u^2+9) + \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{u}{3} + C\\ &= \frac{1}{2}\ln[(x+3)^2+9] + \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x+3}{3} + C\\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+6x+18) + \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x+3}{3} + C.\end{aligned}$$

Ejemplo 4

Evaluar $\int_0^2 \frac{6x+1}{\sqrt[3]{3x+2}}\,dx$.

Solución Si

$$u = 3x+2, \quad \text{entonces } x = \frac{1}{3}(u-2) \quad \text{y} \quad dx = \frac{1}{3}\,du$$

$$6x + 1 = 2(u-2) + 1 = 2u - 3$$
$$\sqrt[3]{3x+2} = u^{1/3}.$$

Obsérvese ahora que cuando $x = 0$, $u = 2$, y cuando $x = 2$, $u = 8$. Por lo tanto, integrando en términos de la variable u, se obtiene

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{6x+1}{\sqrt[3]{3x+2}}\,dx &= \int_2^8 \frac{2u-3}{u^{1/3}}\frac{1}{3}\,du\\ &= \int_2^8 \left(\frac{2}{3}u^{2/3} - u^{-1/3}\right)du\\ &= \left(\frac{2}{5}u^{5/3} - \frac{3}{2}u^{2/3}\right)\Big]_2^8\\ &= \left(\frac{2}{5}\cdot 2^5 - \frac{3}{2}\cdot 2^2\right) - \left(\frac{2}{5}\cdot 2^{5/3} - \frac{3}{2}\cdot 2^{2/3}\right)\\ &= \frac{34}{5} - \frac{2}{5}\cdot 2^{5/3} + \frac{3}{2}\cdot 2^{2/3} \approx 7.9112.\end{aligned}$$

Observaciones

(*i*) Al resolver los ejercicios de este capítulo, el lector no debe preocuparse demasiado si no obtiene la misma respuesta que se da en el texto. Técnicas diferentes aplicadas a un mismo problema pueden conducir a respuestas que parecen diferentes. Recuérdese que dos antiderivadas de una misma función pueden diferir a lo sumo en una constante. Hay que tratar de resolver cualquier conflicto.

(*ii*) También puede ser útil recordar al llegar a este punto que la integración del cociente de dos funciones polinomiales, $P(x)/Q(x)$, se empieza usualmente efectuando la división si el grado de P es mayor que o igual al grado de Q.

(*iii*) Se recomienda al lector buscar problemas que puedan resolverse por métodos previos.

Ejercicios 9.1

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 984.

En los Problemas 1-36, evalúe la integral dada.

1. $\int x(x+1)^3\,dx$
2. $\int \frac{x^2}{(x-1)^4}\,dx$
3. $\int (2x+1)\sqrt{x-5}\,dx$
4. $\int (x^2-1)\sqrt{2x+1}\,dx$
5. $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$
6. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x+2}}\,dx$
7. $\int \frac{x+3}{(3x-4)^{3/2}}\,dx$
8. $\int (x^2+x)\sqrt[3]{x+7}\,dx$
9. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx$
10. $\int \frac{t}{\sqrt{t}+1}\,dt$
11. $\int \frac{\sqrt{t}-3}{\sqrt{t}+1}\,dt$
12. $\int \frac{\sqrt{r}+3}{r+3}\,dr$
13. $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx$
14. $\int \frac{x^5}{\sqrt[3]{x^2+4}}\,dx$
15. $\int \frac{x^2}{(x-1)^4}\,dx$
16. $\int \frac{2x+1}{(x+7)^2}\,dx$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$ (*Sugerencia:* Sea $u = x^{1/6}$.)
18. $\int \frac{\sqrt[6]{t}}{\sqrt[3]{t}+1}\,dt$
19. $\int \sqrt{e^x-1}\,dx$
20. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$
21. $\int \sqrt{1-\sqrt{v}}\,dv$
22. $\int \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{1-\sqrt{w}}}\,dw$
23. $\int \frac{2x+7}{x^2+2x+5}\,dx$
24. $\int \frac{6x-1}{4x^2+4x+10}\,dx$
25. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{16-6x-x^2}}\,dx$
26. $\int \frac{4x-3}{\sqrt{11+10x-x^2}}\,dx$
27. $\int_0^1 x\sqrt{5x+4}\,dx$
28. $\int_{-1}^0 x\sqrt[3]{x+1}\,dx$
29. $\int_1^{16} \frac{dx}{10+\sqrt{x}}$
30. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\,dx$
31. $\int_2^9 \frac{5x-6}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$
32. $\int_{-\sqrt{3}}^0 \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$
33. $\int_0^1 (1-\sqrt{x})^{50}\,dx$
34. $\int_0^4 \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^3}$
35. $\int_1^8 \frac{dx}{x^{1/3}+x^{2/3}}$
36. $\int_1^{64} \frac{x^{1/3}}{x^{2/3}+2}\,dx$

37. Obtenga el área bajo la gráfica de $y = 1/(x^{1/3}+1)$ en el intervalo $[0, 1]$.

38. Halle el área limitada por la gráfica de $y = x^3\sqrt{x+1}$ y el eje x en el intervalo $[-1, 1]$.

39. Obtenga el volumen del sólido de revolución que se forma haciendo girar la región limitada por las gráficas de $y = 1/(\sqrt{x}+1)$, $x = 0$, $x = 4$ y $y = 0$, en torno al eje y.

40. Determine el volumen del sólido de revolución que se forma haciendo girar la región del Problema 39 en torno al eje x.

9.2 Integración por partes

Supóngase que $u = f(x)$ y $v = g(x)$ son funciones diferenciables. Por la regla de la potencia se tiene entonces que

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x). \qquad (9.1)$$

La integración de (9.1)

$$f(x)g(x) = \int f(x)g'(x)\,dx + \int g(x)f'(x)\,dx$$

produce una fórmula

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx, \qquad (9.2)$$

que es sumamente útil para integrar ciertos productos. Este procedimiento se conoce como **integración por partes.** La idea básica contenida en (9.2) es evaluar la integral $\int f(x)g'(x)\,dx$ por medio de la evaluación de otra integral $\int g(x)f'(x\,dx$, la cual se espera que sea más sencilla.

La fórmula (9.2) usualmente se expresa en términos de las diferenciales $du = f'(x)\,dx$ y $dv = g'(x)\,dx$:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad (9.3)$$

Para aplicar este resultado, se comienza con una integración seguida por una derivación:

$$\int u\,\underset{\text{Paso 1: integrar}}{\boxed{dv}} = \overset{\text{Paso 2: derivar}}{\boxed{u}}\,v - \int v\,du.$$

El último paso es, por supuesto, la evaluación de $\int v\,du$.

Ejemplo 1

Evaluar $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$.

Solución Primeramente se escribe la integral como

$$\int x(x+1)^{-1/2}\,dx.$$

En esta última forma hay varias elecciones posibles para la función dv. Se podría tener $dv = (x+1)^{-1/2}\,dx$, $dv = x\,dx$, o simplemente $dv = dx$. Como una guía práctica, la elección de dv es determinada por lo que suceda en la segunda integral de (9.3). Si se elige específicamente

$$dv = (x+1)^{-1/2}\,dx \xrightarrow{\text{integrar}} v = 2(x+1)^{1/2} \qquad u = x \xrightarrow{\text{derivar}} du = dx.$$

entonces

Sustituyendo estas funciones en (9.3) resulta

$$\begin{aligned}\int x(x+1)^{-1/2}\,dx &= 2x(x+1)^{-1/2} - 2\int (x+1)^{1/2}\,dx\\ &= 2x(x+1)^{-1/2} - 2\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C\\ &= 2x(x+1)^{-1/2} - \frac{4}{3}(x+1)^{3/2} + C.\end{aligned}$$

Obsérvese que no es necesaria una constante en la integración de dv. La constante agregada al final del problema es una constante "colectiva". Además, el conocimiento de que se ha hecho la elección "correcta" se basa en el análisis retrospectivo pragmático: ¿funcionó el procedimiento? Para ver qué sucede cuando se hace una elección "incorrecta", considérese el Ejemplo 1, si en esta ocasión se selecciona

$$dv = x\,dx \qquad u = (x+1)^{-1/2}$$
$$v = \frac{1}{2}x^2 \qquad du = -\frac{1}{2}(x+1)^{-3/2}\,dx.$$

Aplicando (9.3) en este caso resulta

$$\int x(x+1)^{-1/2}\,dx = \frac{1}{2}x^2(x+1)^{-1/2} + \frac{1}{4}\int x^2(x+1)^{-3/2}\,dx.$$

El problema resulta evidente; la segunda integral $\int v\,du$ es más complicada que la original $\int u\,dv$. La selección alternativa $dv = dx$ también conduce a un callejón sin salida.

Ejemplo 2

Evaluar $\int x\tan^{-1}x\,dx$.

Solución Eligiendo

$$dv = x\,dx \qquad u = \tan^{-1}x$$
$$v = \frac{x^2}{2} \qquad du = \frac{dx}{1+x^2},$$

puede verse que (9.3) da

$$\int x\tan^{-1}x\,dx = \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx.$$

Para evaluar $\int x^2dx/(1+x^2)$, se efectúa la división (véase el Ejemplo 7 de la Sección 7.3). Por lo tanto,

$$\int x \tan^{-1}x\,dx = \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C.$$

Ejemplo 3

Evaluar $\int \sec^3 x\,dx$.

Solución Una inspección a la integral no revela ninguna elección obvia para dv. Sin embargo, escribiendo $\sec^3 x = \sec x \cdot \sec^2 x$, se puede identificar

$$dv = \sec^2 x\,dx \qquad u = \sec x$$
$$v = \tan x \qquad du = \sec x \tan x\,dx.$$

En virtud de (9.3) y de una identidad trigonométrica se deduce que

$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x\,dx$$
$$= \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1)\sec x\,dx$$
$$= \sec x \tan x + \int \sec x\,dx - \int \sec^3 x\,dx$$
$$= \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x\,dx.$$

Al llegar a este punto podría parecer que se entra a un círculo vicioso. En realidad, el problema ya está resuelto; se despeja $\int \sec^3 x\,dx$ de la última ecuación y se suma una constante de integración:

$$2\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|$$
$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C.$$

Ejemplo 4

Evaluar $\int x^3 \ln x\,dx$.

Solución Sean

$$dv = x^3\,dx \qquad u = \ln x$$
$$v = \frac{x^4}{4} \qquad du = \frac{1}{x}\,dx.$$

Integrando luego por partes resulta

$$\int x^3 \ln x\,dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^4 \cdot \frac{1}{x}\,dx$$
$$= \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C.$$

Algunos problemas pueden requerir integración por partes varias veces.

Ejemplo 5

Evaluar $\int x^2 e^{-x}\,dx$.

Solución Sean

$$dv = e^{-x}\,dx \qquad u = x^2$$
$$v = -e^{-x} \qquad du = 2x\,dx$$

de modo que

$$\int x^2 e^{-x}\,dx = -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x}\,dx.$$

En $\int x e^{-x}\,dx$, se aplica integración por partes por segunda ocasión con

$$dv = e^{-x}\,dx \qquad u = x$$
$$v = -e^{-x} \qquad du = dx.$$

Por lo tanto,

$$\int x^2 e^{-x}\,dx = -x^2 e^{-x} + 2\left[-x e^{-x} + \int e^{-x}\,dx\right]$$
$$= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C.$$

Por regla general, integrales del tipo $\int x^k(\ln x)^n\,dx$, $\int x^n e^{kx}\,dx$, y $\int x^n \operatorname{sen} kx\,dx$, en donde n es un entero positivo y k una constante, requerirán integración por partes n veces.

Ejemplo 6

Evaluar $\int x \operatorname{sen} 3x\,dx$.

Solución La elección

$$dv = \operatorname{sen} 3x\,dx \qquad u = x$$
$$v = -\frac{1}{3}\cos 3x \qquad du = dx$$

conduce a

$$\int x \operatorname{sen} 3x\,dx = -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{3}\int \cos 3x\,dx$$
$$= -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{9}\operatorname{sen} 3x + C.$$

Ejemplo 7

Evaluar $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$.

Solución Sean

$$dv = e^{2x}\,dx \qquad u = \cos 3x$$
$$v = \frac{1}{2}e^{2x} \qquad du = -3\operatorname{sen} 3x\,dx.$$

Entonces, $$\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\int e^{2x}\operatorname{sen} 3x\,dx. \tag{9.4}$$

Se aplica nuevamente integración por partes en $\int e^{2x}\operatorname{sen} 3x\,dx$, eligiendo

$$dv = e^{2x}\,dx \qquad u = \operatorname{sen} 3x$$
$$v = \frac{1}{2}e^{2x} \qquad du = 3\cos 3x\,dx.$$

De esta manera (9.4) se convierte en

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\operatorname{sen} 3x - \frac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3x\,dx\right]$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{4}e^{2x}\operatorname{sen} 3x - \frac{9}{4}\int e^{2x}\cos 3x\,dx.$$

Procediendo como en el Ejemplo 3, se despeja la integral original $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$:

$$\frac{13}{4}\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{4}e^{2x}\operatorname{sen} 3x$$
$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{2}{13}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{13}e^{2x}\operatorname{sen} 3x + C.$$

Se recomienda al lector resolver de nuevo el Ejemplo 7 utilizando

(*i*) $dv = \cos 3x\,dx$ en la integral original y
$dv = \operatorname{sen} 3x\,dx$ en la segunda; y

(*ii*) $dv = e^{2x}dx$ en la integral original y
$dv = \operatorname{sen} 3x\,dx$ en la segunda.

Integrales definidas

Una integral definida se puede evaluar aplicando integración por partes de la manera siguiente:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx.$$

Ejemplo 8

Determinar el área bajo la gráfica de $y = \ln x$ en el intervalo $[1, e]$.

Solución De la Figura 9.1 se observa que el área A está dada por

$$A = \int_1^e \ln x\,dx.$$

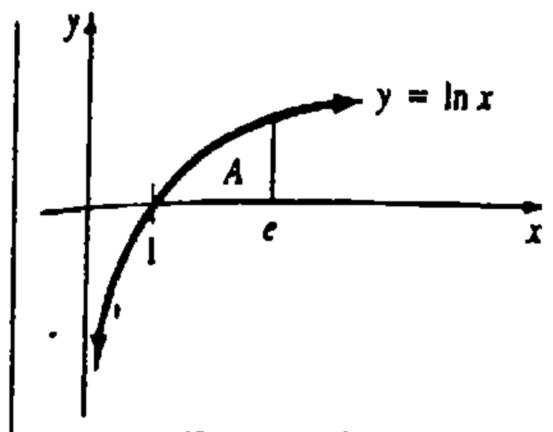


Figura 9.1

Eligiendo

$$dv = dx \qquad u = \ln x$$
$$v = x \qquad du = \frac{1}{x}dx,$$

se tiene $$A = x\ln x\Big]_1^e - \int_1^e x\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$= x\ln x\Big]_1^e - \int_1^e dx$$
$$= x\ln x\Big]_1^e - x\Big]_1^e$$
$$= e\ln e - \ln 1 - e + 1 = 1 \text{ unidad cuadrada}$$

ya que $\ln e = 1$ y $\ln 1 = 0$.

Ejercicios 9.2

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 984.

En los Problemas 1-40 evalúe la integral dada, usando integración por partes.

1. $\int x\sqrt{x+3}\,dx$
2. $\int \frac{x}{\sqrt{2x-5}}\,dx$
3. $\int \ln 4x\,dx$
4. $\int \ln(x+1)\,dx$
5. $\int x\ln 2x\,dx$
6. $\int x^{1/2}\ln x\,dx$
7. $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$
8. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x^3}}\,dx$
9. $\int (\ln t)^2\,dt$
10. $\int (t\ln t)^2\,dt$
11. $\int_0^2 x\ln(x+1)\,dx$
12. $\int_1^e x^2\ln x^2\,dx$
13. $\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx$
14. $\int_1^4 \frac{\tan^{-1}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$
15. $\int \operatorname{sen}^{-1}x\,dx$
16. $\int x^2\tan^{-1}x\,dx$
17. $\int xe^{3x}\,dx$
18. $\int x^2e^{5x}\,dx$
19. $\int x^3e^{x^2}\,dx$
20. $\int x^5e^{2x^3}\,dx$
21. $\int_2^4 xe^{-x/2}\,dx$
22. $\int_0^1 (x^2-x)e^{-x}\,dx$
23. $\int t\cos 8t\,dt$
24. $\int x\operatorname{senh} x\,dx$
25. $\int x^2\operatorname{sen} x\,dx$
26. $\int_0^\pi x^2\cos x\,dx$
27. $\int e^x\operatorname{sen} 4x\,dx$
28. $\int_{-\pi}^{\pi} e^x\cos x\,dx$
29. $\int \theta\sec\theta\tan\theta\,d\theta$
30. $\int e^{2t}\cos e^t\,dt$
31. $\int \operatorname{sen} x\cos 2x\,dx$
32. $\int \cosh x\cosh 2x\,dx$
33. $\int x^3\sqrt{x^2+4}\,dx$
34. $\int \frac{t^5}{(t^3+1)^2}\,dt$
35. $\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$
36. $\int \cos x\ln(\operatorname{sen} x)\,dx$
37. $\int \csc^3 x\,dx$
38. $\int x\sec^2 x\,dx$
39. $\int x\operatorname{sen}^2 x\,dx$
40. $\int x\tan^2 x\,dx$

En los Problemas 41 y 42 aplique primero una sustitución seguida por integración por partes.

41. $\int_0^4 \tan^{-1}\sqrt{x}\,dx$
42. $\int \operatorname{sen}\sqrt{x+2}\,dx$

43. Evalúe $\int \frac{\text{sen}^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ empleando dos métodos diferentes.

44. Evalúe $\int \text{sen}\, mx \cos nx\, dx$ aplicando integración por partes.

45. Halle el área bajo la gráfica de $y = 1 + \ln x$ en el intervalo $[e^{-1}, 3]$.

46. Determine el área limitada por la gráfica de $y = \tan^{-1}x$ y el eje x en el intervalo $[-1, 1]$.

47. La región del primer cuadrante limitada por las gráficas de $y = \ln x$, $x = 5$ y $y = 0$ se hace girar en torno al eje x. Calcule el volumen del sólido de revolución.

48. La región del primer cuadrante limitada por las gráficas de $y = e^x$, $x = 0$ y $y = 3$ se hace girar en torno al eje y. Obtenga el volumen del sólido de revolución.

49. La región del primer cuadrante limitada por las gráficas de $y = \text{sen}\, x$, $y = 0$, $0 \le x \le \pi$, se hace girar en torno al eje y. Encuentre el volumen del sólido de revolución.

50. (a) Demuestre que la integración por partes aplicada a $\int dx/x \ln x$, con $dv = dx/x$, $u = 1/\ln x$, $v = \ln x$ y $du = -dx/x(\ln x)^2$ conduce a $0 = 1$. Explique.

(b) Evalúe la integral de la parte (a) por otro método.

Problemas diversos

En los Problemas 51-54, establezca la fórmula dada.

51. $\int (\ln x)^n\, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1}\, dx$

52. $\int \text{sen}^n x\, dx = -\frac{\text{sen}^{n-1}x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \text{sen}^{n-2}x\, dx$

53. $\int \sec^n x\, dx = \frac{\sec^{n-2}x \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}x\, dx, \quad n \neq 1$

54. $\int e^{ax}\text{sen}\, bx\, dx = \frac{e^{ax}(a\,\text{sen}\, bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C$

55. Evalúe $\int \text{sen}^3 x\, dx$.

56. Evalúe $\int \sec^4 x\, dx$.

9.3 Integración de potencias de funciones trigonométricas

Con la ayuda de identidades trigonométricas, es posible evaluar integrales del tipo

$$\int \text{sen}^m x \cos^n x\, dx. \tag{9.5}$$

Se distinguirán dos casos.

Caso I m o n es un entero positivo impar.

Supóngase primero que m es un entero positivo impar. Escribiendo

$$\text{sen}^m x = \text{sen}^{m-1}x\, \text{sen}\, x,$$

en donde $m - 1$ es par, y empleando $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, el integrando de (9.5) se puede expresar como una *suma* de potencias de $\cos x$ por $\text{sen}\, x$. Se puede luego expresar la integral original como una suma de integrales, cada una de la forma reconocible

$$\int \cos^k x\, \text{sen}\, x\, dx = -\int \cos^k x(-\text{sen}\, x)\, dx = -\int u^k\, du.$$

Obsérvese que el exponente k no necesita ser entero.

Ejemplo 1

Evaluar $\int \text{sen}^3 x\, dx$.

Solución

$$\begin{aligned}\int \text{sen}^3 x\, dx &= \int \text{sen}^2 x\, \text{sen}\, x\, dx\\ &= \int (1 - \cos^2 x)\text{sen}\, x\, dx\\ &= \int \text{sen}\, x\, dx + \int \cos^2 x(-\text{sen}\, x)\, dx\\ &= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Evaluar $\int \text{sen}^5 x \cos^2 x\, dx$

Solución

$$\begin{aligned}\int \text{sen}^5 x\cos^2 x\, dx &= \int \cos^2 x\,\text{sen}^4 x\, \text{sen}\, x\, dx\\ &= \int \cos^2 x(\text{sen}^2 x)^2 \text{sen}\, x\, dx\\ &= \int \cos^2 x(1 - \cos^2 x)^2 \text{sen}\, x\, dx\\ &= \int \cos^2 x(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)\text{sen}\, x\, dx\\ &= -\int \cos^2 x(-\text{sen}\, x)\, dx + 2\int \cos^4 x(-\text{sen}\, x)\, dx\\ &\quad - \int \cos^6 x(-\text{sen}\, x)\, dx\\ &= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C\end{aligned}$$

Si n es un entero positivo impar, el procedimiento para la evaluación es el mismo excepto que se busca un integrando que sea una suma de potencias de $\text{sen}\, x$ por $\cos x$.

Ejemplo 3

Evaluar $\int \text{sen}^4 x \cos^3 x\, dx$.

Solución

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^4 x \cos^3 x\, dx &= \int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x \cos x\, dx\\ &= \int \operatorname{sen}^4 x(1 - \operatorname{sen}^2 x)\cos x\, dx\\ &= \int \operatorname{sen}^4 x(\cos x)\, dx - \int \operatorname{sen}^6 x(\cos x)\, dx\\ &= \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x - \frac{1}{7}\operatorname{sen}^7 x + C\end{aligned}$$

Caso II Tanto m como n son enteros pares no negativos.

Cuando ambos, m y n, son enteros pares no negativos, la evaluación de (9.5) depende mucho de las identidades

$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x, \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Ya se han visto los casos especiales

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx \quad \text{y} \quad \int \cos^2 x\, dx$$

varias veces.

Ejemplo 4

Evaluar $\int \cos^4 x\, dx$.

Solución

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x\, dx &= \int (\cos^2 x)^2\, dx\\ &= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx\\ &= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx\\ &= \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2}\right) dx\\ &= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx\\ &= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C\end{aligned}$$

Ejemplo 5

Evaluar $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx$

Solución

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2}\, dx\\ &= \frac{1}{4}\int (1 - \cos^2 2x)\, dx\\ &= \frac{1}{4}\int \left(1 - \frac{1 + \cos 4x}{2}\right) dx\\ &= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx\\ &= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C\end{aligned}$$

Solución alternativa

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx &= \int (\operatorname{sen} x \cos x)^2\, dx\\ &= \int \left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right)^2 dx\\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1 - \cos 4x}{2}\, dx\end{aligned}$$

El resto de la solución es igual que en la anterior.

Para evaluar una integral del tipo

$$\int \tan^m x \sec^n x\, dx, \tag{9.6}$$

se consideran tres casos,

Caso I n es un entero positivo par.

Si n es un entero positivo par, el procedimiento de evaluación es semejante al del Caso I para integrales del tipo (9.5). Empleando

$$\sec^n x = \sec^{n-2} x \sec^2 x$$

y la identidad $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$, se puede escribir la integral dada como una suma de integrales de la forma

$$\int \tan^k x \sec^2 x\, dx = \int u^k\, du$$

Ejemplo 6

Evaluar $\int \sqrt{\tan x}\sec^4 x\, dx$.

Solución

$$\int \sqrt{\tan x}\sec^4 x\, dx = \int (\tan x)^{1/2}\sec^2 x \sec^2 x\, dx$$

$$= \int (\tan x)^{1/2}(1 + \tan^2 x)\sec^2 x\, dx$$
$$= \int (\tan x)^{1/2}\sec^2 x\, dx + \int (\tan x)^{5/2}\sec^2 x\, dx$$
$$= \frac{2}{3}(\tan x)^{3/2} + \frac{2}{7}(\tan x)^{7/2} + C$$

Caso II m es un entero positivo impar.

Cuando m es un entero positivo impar, $m - 1$ es par. Empleando

$$\tan^m x \sec^n x = \tan^{m-1} x \sec^{n-1} x \sec x \tan x$$

y

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

la integral dada se puede escribir como una suma de integrales, cada una de la forma

$$\int \sec^k x \sec x \tan x\, dx = \int u^k\, du.$$

Ejemplo 7

Evaluar $\int \tan^3 x \sec^7 x\, dx$.

Solución

$$\int \tan^3 x \sec^7 x\, dx = \int \tan^2 x \sec^6 x \sec x \tan x\, dx$$
$$= \int (\sec^2 x - 1)\sec^6 x \sec x \tan x\, dx$$
$$= \int \sec^8 x(\sec x \tan x)\, dx - \int \sec^6 x(\sec x \tan x)\, dx$$
$$= \frac{1}{9}\sec^9 x - \frac{1}{7}\sec^7 x + C$$

Caso III m es par y n es impar.

Finalmente, si m es un entero positivo par y n es un entero positivo impar, escribimos el integrando en términos de $\sec x$ y se aplica integración por partes.

Ejemplo 8

Evaluar $\int \tan^2 x \sec x\, dx$.

Solución Escribiendo

$$\int \tan^2 x \sec x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\sec x\, dx$$

$$= \int \sec^3 x\, dx - \int \sec x\, dx,$$

se tienen dos integrales ya determinadas, previamente. La integración por partes da (véase el Ejemplo 3 de la Sección 9.2)

$$\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C_1. \qquad (9.7)$$

También,
$$\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C_2. \qquad (9.8)$$

Restando las expresiones (9.7) y (9.8) resulta finalmente

$$\int \tan^2 x \sec x\, dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x - \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C.$$

Aunque rigurosamente hablando el ejemplo siguiente no cae dentro de ninguno de los tres casos considerados para (9.6), el procedimiento es semejante al caso I.

Ejemplo 9

Evaluar $\int \tan^4 x\, dx$.

Solución

$$\int \tan^4 x\, dx = \int \tan^2 x \tan^2 x\, dx$$
$$= \int \tan^2 x(\sec^2 x - 1)\, dx$$
$$= \int (\tan x)^2\sec^2 x\, dx - \int \tan^2 x\, dx$$
$$= \int (\tan x)^2\sec^2 x\, dx - \int (\sec^2 x - 1)\, dx$$
$$= \int (\tan x)^2\sec^2 x\, dx - \int \sec^2 x\, dx + \int dx$$
$$= \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C$$

Observación

Las integrales del tipo $\int \cot^m x \csc^n x\, dx$ se tratan de manera análoga a (9.6).

Ejercicios 9.3

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 985.

En los Problemas 1-32, evalúe la integral dada.

1. $\int \cos^3 x\, dx$
2. $\int \operatorname{sen}^5 t\, dt$
3. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x\, dx$
4. $\int \operatorname{sen}^5 2x \cos^2 2x\, dx$

5. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \text{sen}^3\theta \sqrt{\cos\theta}\, d\theta$
6. $\int \frac{\cos^3 x}{\text{sen}^2 x}\, dx$
7. $\int_0^{\pi/2} \text{sen}^5 x \cos^5 x\, dx$
8. $\int_0^{\pi} \text{sen}^3 2t\, dt$
9. $\int \text{sen}^4 t\, dt$
10. $\int \cos^6\theta\, d\theta$
11. $\int \text{sen}^2 x \cos^4 x\, dx$
12. $\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^4 x \cos^2 x\, dx$
13. $\int \text{sen}^4 x \cos^4 x\, dx$
14. $\int \text{sen}^2 3x \cos^2 3x\, dx$
15. $\int_0^{\pi/3} \tan^2 x\, dx$
16. $\int (\tan x + \cot x)^2\, dx$
17. $\int \tan^3 2t \sec^4 2t\, dt$
18. $\int (2 - \sqrt{\tan x})^2 \sec^2 x\, dx$
19. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$
20. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan y \sec^4 y\, dy$
21. $\int \cot^{10} x \csc^4 x\, dy$
22. $\int (1 + \csc^2 t)^2\, dt$
23. $\int \tan^5 x\, dx$
24. $\int \cot^6 x\, dx$
25. $\int \tan^3 x (\sec x)^{-1/2}\, dx$
26. $\int \left(\tan \frac{x}{2} \sec \frac{x}{2}\right)^3 dx$
27. $\int \tan^2 x \sec^3 x\, dx$
28. $\int (1 + \tan x)^2 \sec x\, dx$
29. $\int \cos^2 x \cot x\, dx$
30. $\int \text{sen}\, x \sec^7 x\, dx$
31. $\int \frac{\sec^4(1 - t)}{\tan^8(1 - t)}\, dt$
32. $\int \frac{\text{sen}^3 \sqrt{t} \cos^2 \sqrt{t}}{\sqrt{t}}\, dt$

En los Problemas 33 y 34, encuentre el volumen del sólido de revolución que se forma haciendo girar la región limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas, en torno al eje x.

33. $y = \cos 2x,\ y = 0,\ 0 \le x \le \pi/6$
34. $y = \tan^2 x,\ y = 0,\ 0 \le x \le \pi/4$

Problemas diversos

En los Problemas 35-40, aplique las identidades trigonométricas

$$\text{sen}\, mx \cos nx = \frac{1}{2}[\text{sen}(m + n)x + \text{sen}(m - n)x]$$

$$\text{sen}\, mx\, \text{sen}\, nx = \frac{1}{2}[\cos(m - n)x - \cos(m + n)x]$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m - n)x + \cos(m + n)x]$$

para evaluar las integrales dadas.

35. $\int \text{sen}\, x \cos 2x\, dx$
36. $\int \cos 3x \cos 5x\, dx$
37. $\int \text{sen}\, 2x\, \text{sen}\, 4x\, dx$
38. $\int \frac{5 - 3\,\text{sen}\, 2x}{\sec 6x}\, dx$
39. $\int_0^{\pi/6} \cos 2x \cos x\, dx$
40. $\int_0^{\pi/2} \text{sen}\, \frac{3}{2}x\, \text{sen}\, \frac{1}{2}x\, dx$

9.4 Sustituciones trigonométricas

Cuando un integrando contiene potencias enteras de x y potencias enteras de alguna de las expresiones

$$\sqrt{a^2 - x^2}, \quad \sqrt{a^2 + x^2}, \quad \text{o bien} \quad \sqrt{x^2 - a^2}, \qquad a > 0,$$

es posible que se pueda evaluar las integrales por medio de una sustitución trigonométrica. Los tres casos considerados a continuación dependen, respectivamente de las identidades fundamentales:

$$1 - \text{sen}^2\theta = \cos^2\theta$$
$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$
$$\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta.$$

Caso I Integrandos que contienen $\sqrt{a^2 - x^2}$, $a > 0$

Si se hace $x = a\,\text{sen}\,\theta$, $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$, entonces

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - a^2\text{sen}^2\theta}\\ &= \sqrt{a^2(1 - \text{sen}^2\theta)}\\ &= \sqrt{a^2\cos^2\theta}\\ &= a\cos\theta.\end{aligned}$$

Cuando $\sqrt{a^2 - x^2}$ aparece en el denominador de un integrando; existe la restricción adicional $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.

Ejemplo 1

Evaluar $\int \frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2}}\, dx$.

Solución La identificación $a = 3$ conduce a las sustituciones

$$x = 3\,\text{sen}\,\theta \qquad dx = 3\cos\theta\, d\theta,$$

en donde $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. La integral se convierte en

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2}}\, dx &= \int \frac{9\,\text{sen}^2\theta}{\sqrt{9 - 9\,\text{sen}^2\theta}}(3\cos\theta\, d\theta)\\ &= 9\int \text{sen}^2\theta\, d\theta.\end{aligned}$$

Recuérdese que para evaluar esta última integral trigonométrica se hace uso de $\text{sen}^2\theta = (1 - \cos 2\theta)/2$:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2}}\, dx &= \frac{9}{2}\int (1 - \cos 2\theta)\, d\theta\\ &= \frac{9}{2}\theta - \frac{9}{4}\text{sen}\, 2\theta + C.\end{aligned}$$

Para expresar este resultado otra vez en términos de la variable x, observamos que $\text{sen}\,\theta = x/3$, $\cos\theta = \sqrt{1 - \text{sen}^2\theta} = \sqrt{9 - x^2}/3$, y $\theta = \text{sen}^{-1}(x/3)$. Puesto que $\text{sen}\, 2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$, resulta que

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2}}\, dx = \frac{9}{2}\text{sen}^{-1}\frac{x}{3} - \frac{1}{2}x\sqrt{9 - x^2} + C.$$

Ejemplo 2

Evaluar $\int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}\, dx$.

Solución Sea

$$x = \text{sen}\,\theta \qquad dx = \cos\theta\, d\theta,$$

entonces
$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}{\operatorname{sen}\theta}(\cos\theta\,d\theta)$$
$$= \int \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}\,d\theta$$
$$= \int \frac{1-\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}\,d\theta$$
$$= \int (\csc\theta - \operatorname{sen}\theta)\,d\theta$$
$$= \ln|\csc\theta - \cot\theta| + \cos\theta + C. \qquad (9.9)$$

Como $\cos\theta = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{1-x^2}$, $\csc\theta = 1/\operatorname{sen}\theta = 1/x$ y $\cot\theta = \cos\theta/\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-x^2}/x$, (9.9) se puede escribir como
$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx = \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + \sqrt{1-x^2} + C.$$

En los dos ejemplos precedentes, el retorno a la variable x se puede realizar de otra manera. Si se construye un triángulo rectángulo, como se muestra en la Figura 9.2, de manera que $\operatorname{sen}\theta = x/a$, entonces las otras funciones trigonométricas se pueden expresar fácilmente en términos de x. En el caso del Ejemplo 2, $\operatorname{sen}\theta = x/1$ y entonces, de la Figura 9.3 puede verse que $\cos\theta = \sqrt{1-x^2}$ y $\cot\theta = \cos\theta/\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-x^2}/x$.

Caso II Integrandos que contienen $\sqrt{a^2+x^2}$, $a > 0$

Supóngase que $x = a\tan\theta$, en donde $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Entonces,
$$\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+a^2\tan^2\theta}$$
$$= \sqrt{a^2(1+\tan^2\theta)}$$
$$= \sqrt{a^2\sec^2\theta}$$
$$= a\sec\theta.$$

Como en la exposición anterior, una integral en la que interviene un término algebraico $\sqrt{a^2+x^2}$ se transforma en una integral trigonométrica. Después de la integración puede eliminarse la variable θ empleando un triángulo rectángulo en donde $\tan\theta = x/a$. Véase la Figura 9.4.

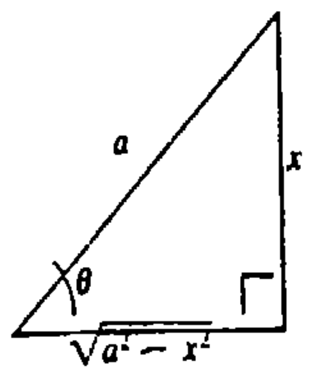


Figura 9.2

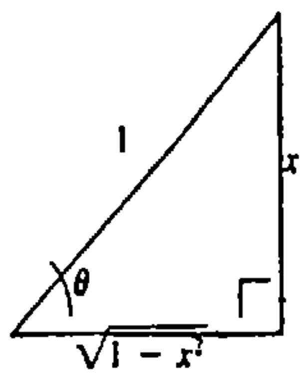


Figura 9.3

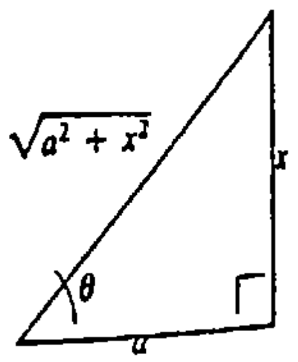


Figura 9.4

Ejemplo 3

Evaluar $\int \frac{dx}{(4+x^2)^{3/2}}$.

Solución Obsérvese que el integrando es una potencia entera de $\sqrt{4+x^2}$, ya que $(4+x^2)^{3/2} = (\sqrt{4+x^2})^3$. Ahora bien, cuando
$$x = 2\tan\theta \qquad dx = 2\sec^2\theta\,d\theta,$$
$\sqrt{4+x^2} = 2\sec\theta$, y $(4+x^2)^{3/2} = 8\sec^3\theta$. Así que,
$$\int \frac{dx}{(4+x^2)^{3/2}} = \int \frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{8\sec^3\theta}$$
$$= \frac{1}{4}\int \cos\theta\,d\theta$$
$$= \frac{1}{4}\operatorname{sen}\theta + C.$$

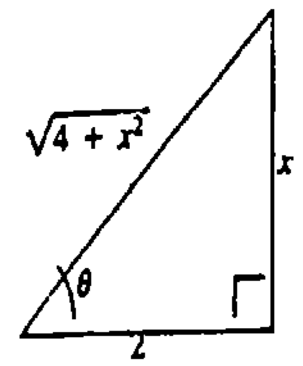


Figura 9.5

Del triángulo de la Figura 9.5, se tiene que $\operatorname{sen}\theta = x/\sqrt{4+x^2}$. Por lo tanto,
$$\int \frac{dx}{(4+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{4+x^2}} + C.$$

Caso III Integrandos que contienen $\sqrt{x^2-a^2}$, $a > 0$

Si en este último caso se utiliza la sustitución $x = a\sec\theta$, en donde $0 \le \theta < \pi/2$, o bien $\pi \le \theta < 3\pi/2$, entonces
$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2}$$
$$= \sqrt{a^2(\sec^2\theta - 1)}$$
$$= \sqrt{a^2\tan^2\theta}$$
$$= a\tan\theta.$$

Ejemplo 4

Evaluar $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^4}\,dx$.

Solución Haciendo
$$x = 4\sec\theta \qquad dx = 4\sec\theta\tan\theta\,d\theta$$
se obtiene
$$\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^4}\,dx = \int \frac{\sqrt{16\sec^2\theta - 16}}{256\sec^4\theta}(4\sec\theta\tan\theta\,d\theta)$$
$$= \frac{1}{16}\int \frac{\tan^2\theta}{\sec^3\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{16}\int \frac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\cos^3\theta\, d\theta$$
$$= \frac{1}{16}\int \text{sen}^2\theta(\cos\theta\, d\theta)$$
$$= \frac{1}{48}\text{sen}^3\theta + C.$$

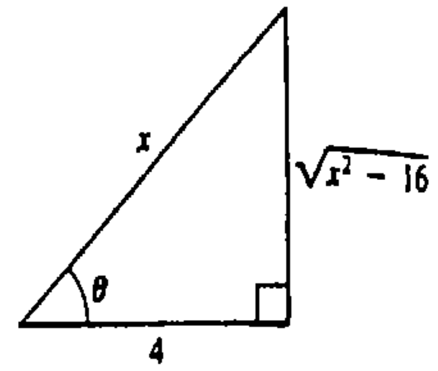


Figura 9.6

Con referencia al triángulo de la Figura 9.6, se ve que si $\sec\theta = x/4$, entonces $\cos\theta = 4/x$ y $\text{sen}\,\theta = \sqrt{x^2-16}/x$. Se deduce entonces que

$$\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^4}\,dx = \frac{1}{48}\frac{(x^2-16)^{3/2}}{x^3} + C.$$

Ejemplo 5

Encontrar la longitud de la gráfica de $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ en el intervalo $[0, 1]$.

Solución Recuérdese que la fórmula para la longitud de arco es $s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$. Como $dy/dx = x$, se tiene

$$s = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx.$$

Si ahora se sustituye

$$x = \tan\theta \qquad dx = \sec^2\theta\, d\theta,$$

los límites de integración en la integral definida resultante son $\theta = \tan^{-1}0 = 0$ y $\theta = \tan^{-1}1 = \pi/4$. Por lo tanto,

$$s = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\tan^2\theta}\,\sec^2\theta\, d\theta$$
$$= \int_0^{\pi/4} \sec^3\theta\, d\theta.$$

La antiderivada de $\sec^3\theta$ se obtuvo en el Ejemplo 3 de la Sección 9.2 empleando integración por partes:

$$s = \left(\frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta|\right)\Big]_0^{\pi/4}$$
$$= \frac{1}{2}\sec\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln\left|\sec\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{4}\right|$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1) \approx 1.1478.$$

Integrandos que contienen una expresión cuadrática

Completando el cuadrado, es posible expresar un integrando que contenga una expresión cuadrática en una de las formas siguientes:

$$a^2 - u^2, \qquad a^2 + u^2, \quad \text{o bien} \quad u^2 - a^2.$$

Las sustituciones apropiadas se resumen en la tabla adjunta.

Forma	*Sustitución*
$\sqrt{a^2-u^2}$	$u = a\,\text{sen}\,\theta$
$\sqrt{a^2+u^2}$	$u = a\tan\theta$
$\sqrt{u^2-a^2}$	$u = a\sec\theta$

Ejemplo 6

Evaluar $\int \frac{dx}{(x^2+8x+25)^{3/2}}$.

Solución Como

$$\int \frac{dx}{(x^2+8x+25)^{3/2}} = \int \frac{dx}{[9+(x+4)^2]^{3/2}},$$

se hace la identificación de $a^2 + u^2$ con $a = 3$ y $u = x + 4$. Usando

$$x + 4 = 3\tan\theta \qquad dx = 3\sec^2\theta\, d\theta,$$

se tiene

$$\int \frac{dx}{(x^2+8x+25)^{3/2}} = \int \frac{3\sec^2\theta\, d\theta}{[9+9\tan^2\theta]^{3/2}}$$
$$= \frac{1}{9}\int \frac{\sec^2\theta}{\sec^3\theta}\,d\theta$$
$$= \frac{1}{9}\int \cos\theta\, d\theta$$
$$= \frac{1}{9}\text{sen}\,\theta + C.$$

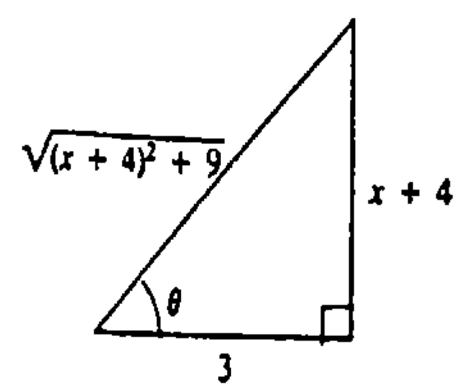


Figura 9.7

Una inspección al triángulo de la Figura 9.7 indica cómo expresar $\text{sen}\,\theta$ en términos de x. Se deduce entonces que

$$\int \frac{dx}{(x^2+8x+25)^{3/2}} = \frac{1}{9}\frac{x+4}{\sqrt{(x+4)^2+9}} + C$$
$$= \frac{x+4}{9\sqrt{x^2+8x+25}} + C$$

Observación

En los tres casos considerados anteriormente, son posibles otras sustituciones, aunque no necesariamente deseables. Por ejemplo, se puede utilizar $x = a\cos\theta$, $-\pi/2 \le \pi/2$ para eliminar el radical $\sqrt{a^2-x^2}$, $a > 0$:

$$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\cos^2\theta)}$$
$$= \sqrt{a^2\text{sen}^2\theta} = a|\text{sen}\,\theta|.$$

Del mismo modo, podemos emplear la *sustitución hiperbólica* $x = a \operatorname{senh} t$ para $\sqrt{a^2 + x^2}$, $a > 0$:

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + x^2} &= \sqrt{a^2(1 + \operatorname{senh}^2 t)}\\ &= \sqrt{a^2 \cosh^2 t}\\ &= a \cosh t.\end{aligned}$$

Véanse los Problemas 47 y 48 de los Ejercicios 9.4.

Ejercicios 9.4

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 985.

En los Problemas 1-40, evalúe la integral dada, mediante una sustitución trigonométrica, cuando sea apropiado.*

1. $\int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2}\,dx$
2. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}}\,dx$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 36}}$
4. $\int \sqrt{3 - x^2}\,dx$
5. $\int \sqrt{4 + x^2}\,dx$
6. $\int (1 - x^2)^{3/2}\,dx$
7. $\int x^3\sqrt{1 - x^2}\,dx$
8. $\int x^3\sqrt{x^2 - 1}\,dx$
9. $\int \frac{dx}{(x^2 - 4)^{3/2}}$
10. $\int (9 - x^2)^{-3/2}\,dx$
11. $\int x\sqrt{x^2 + 7}\,dx$
12. $\int \frac{x}{25 + x^2}\,dx$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}}$
14. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 25}}$
15. $\int \frac{dx}{x\sqrt{16 - x^2}}$
16. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16 - x^2}}$
17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^2}}$
18. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1 + x^2}}$
19. $\int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^4}\,dx$
20. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^4}\,dx$
21. $\int \frac{x^2}{(9 - x^2)^{3/2}}\,dx$
22. $\int \frac{x^2}{(4 + x^2)^{3/2}}\,dx$
23. $\int \frac{dx}{(1 + x^2)^2}$
24. $\int \frac{x^2}{(x^2 - 1)^2}\,dx$
25. $\int \frac{dx}{(4 + x^2)^{5/2}}$
26. $\int \frac{x^3}{(1 - x^2)^{5/2}}\,dx$
27. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 10}}$
28. $\int \frac{x}{\sqrt{4x - x^2}}\,dx$
29. $\int \frac{dx}{(x^2 + 6x + 13)^2}$.
30. $\int \frac{dx}{(11 - 10x - x^2)^2}$
31. $\int \frac{x - 3}{(5 - 4x - x^2)^{3/2}}\,dx$
32. $\int \frac{dx}{(x^2 + 2x)^{3/2}}$
33. $\int \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 13}\,dx$
34. $\int \frac{dx}{4 + (x - 3)^2}$
35. $\int \frac{x^2}{x^2 + 16}\,dx$
36. $\int \frac{\sqrt{4 - 9x^2}}{x}\,dx$
37. $\int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2}\,dx$
38. $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}\,dx$
39. $\int_0^5 \frac{dx}{(x^2 + 25)^{3/2}}$
40. $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2 - 1}}$
41. Determine el área bajo la gráfica de $y = 1/(x\sqrt{3 + x^2})$ en el intervalo $[1, \sqrt{3}]$.
42. Determine el área bajo la gráfica de $y = x^5\sqrt{1 - x^2}$ en el intervalo $[0, 1]$.
43. La región descrita en el Problema 41 se hace girar en torno al eje x. Halle el volumen del sólido de revolución.
44. La región del primer cuadrante limitada por las gráficas de $y = x/\sqrt{4 - x^2}$, $x = 1$ y $y = 0$ se hace girar en torno al eje y. Encuentre el volumen del sólido de revolución.
45. Calcule la longitud de la gráfica de $y = \ln x$ en el intervalo $[1, \sqrt{3}]$.
46. Calcule la longitud de la gráfica de $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ en el intervalo $[1, 2]$.

*Examine bien antes de proceder.

Problemas diversos

47. Evalúe la integral

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9 + x^2}}$$

empleando la sustitución hiperbólica $x = 3 \operatorname{senh} t$.

48. Evalúe la integral

$$\int \frac{(1 + x)^2}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$$

empleando la sustitución $x = \cos \theta$.

49. Demuestre la fórmula

$$\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C, \quad a > 0$$

50. Demuestre que el área limitada por la elipse $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$ es πab.

51. La región limitada por la gráfica de $(x - a)^2 + y^2 = r^2$, $r < a$, se hace girar en torno al eje y. Encuentre el volumen del sólido de revolución, llamado toro. Véase la Figura 9.8.

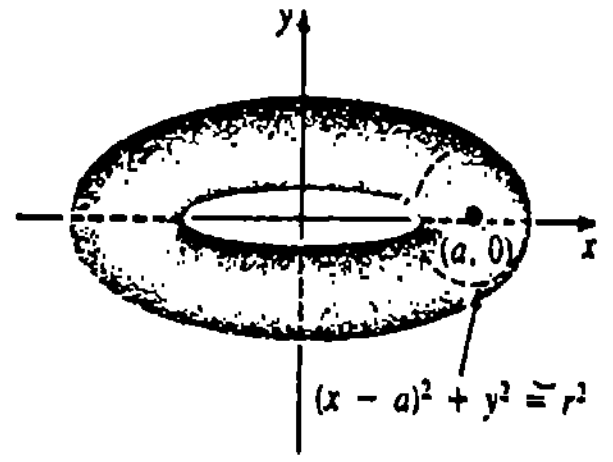


Figura 9.8

9.5 Fracciones parciales

9.5.1 Denominadores que contienen factores lineales

Cuando los términos de la suma

$$\frac{2}{x + 5} + \frac{1}{x + 1} \tag{9.10}$$

se combinan por medio de un común denominador, se obtiene la expresión racional individual

$$\frac{3x + 7}{(x + 5)(x + 1)}. \tag{9.11}$$

Supóngase ahora que se nos presenta el problema de evaluar la integral $\int (3x + 7)dx/[(x + 5)(x + 1)]$. La solución es obvia, por supuesto: se utiliza la igualdad de (9.10) y (9.11) para escribir

$$\begin{aligned}\int \frac{3x + 7}{(x + 5)(x + 1)}\,dx &= \int \left[\frac{2}{x + 5} + \frac{1}{x + 1}\right] dx\\ &= 2\ln|x + 5| + \ln|x + 1| + C.\end{aligned}$$

El ejemplo anterior ilustra un procedimiento para integrar ciertas funciones racionales $P(x)/Q(x)$, en donde el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$. Este método, conocido como **fracciones parciales**, consiste en descomponer dicha función racional en fracciones componentes más simples, y luego evaluar la integral término a término. En esta sección se estudiarán cuatro casos de descomposición en fracciones parciales.

Caso I Factores lineales no repetidos

Se establece, sin demostración, el siguiente resultado algebraico. Si

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\ldots(a_nx + b_n)},$$

en donde todos los factores $a_ix + b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ son distintos y el grado de $P(x)$ es menor que n, entonces existen constantes reales únicas $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tales que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{C_1}{a_1x + b_1} + \frac{C_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{C_n}{a_nx + b_n}.$$

Ejemplo 1

Evaluar $\int \frac{2x + 1}{(x - 1)(x + 3)}\,dx$.

Solución Suponemos que el integrando se puede expresar como

$$\frac{2x + 1}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 3}.$$

Combinando los términos del segundo miembro de la ecuación en un denominador común resulta

$$\frac{2x + 1}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{A(x + 3) + B(x - 1)}{(x - 1)(x + 3)}.$$

Puesto que los denominadores son idénticos,

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= A(x + 3) + B(x - 1) \\ &= (A + B)x + (3A - B), \end{aligned} \qquad (9.12)$$

los coeficientes de las potencias de x son iguales

$$\begin{aligned} 2 &= A + B \\ 1 &= 3A - B. \end{aligned}$$

Se pueden resolver luego estas ecuaciones simultáneas para A y B. Los resultados son $A = \frac{3}{4}$ y $B = \frac{5}{4}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x + 1}{(x - 1)(x + 3)}\,dx &= \int \left[\frac{3/4}{x - 1} + \frac{5/4}{x + 3}\right] dx \\ &= \frac{3}{4}\ln|x - 1| + \frac{5}{4}\ln|x + 3| + C. \end{aligned}$$

Nota: En el ejemplo precedente, los valores de A y B se pueden determinar de otra manera. Puesto que (9.12) es una identidad, esto es, la igualdad es cierta para todo valor de x, se cumple para $x = 1$ y $x = -3$ (los ceros del denominador). Haciendo $x = 1$ en (9.12) se obtiene $3 = 4A$, de donde resulta que $A = \frac{3}{4}$. De manera semejante, haciendo $x = -3$ en (9.12), se obtiene $-5 = (-4)B$ o sea $B = \frac{5}{4}$.

Ejemplo 2

Evaluar $\int \frac{x^3 - 2x}{x^2 + 3x + 2}\,dx$.

Solución Observamos primero que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador. Por lo tanto, efectuando la división se obtiene:

$$\int \frac{x^3 - 2x}{x^2 + 3x + 2}\,dx = \int \left[x - 3 + \frac{5x + 6}{x^2 + 3x + 2}\right] dx.$$

(x^2+2x+1)

Puesto que $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$,

$$\frac{5x + 6}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2}$$

y

$$5x + 6 = A(x + 2) + B(x + 1). \qquad (9.13)$$

Si se hace $x = -2$ y $x = -1$ en (9.13) puede verse de inmediato que $B = 4$ y $A = 1$, respectivamente. Así que,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 2x}{x^2 + 3x + 2}\,dx &= \int \left[x - 3 + \frac{1}{x + 1} + \frac{4}{x + 2}\right] dx \\ &= \frac{x^2}{2} - 3x + \ln|x + 1| + 4\ln|x + 2| + C. \end{aligned}$$

Ejemplo 3

Obtener el área A bajo la gráfica de $y = 1/x(x + 1)$ en el intervalo $[\frac{1}{2}, 2]$.

Solución El área en cuestión se muestra en la Figura 9.9. Se tiene que

$$A = \int_{1/2}^{2} \frac{dx}{x(x + 1)}.$$

Empleando fracciones parciales

$$\frac{1}{x(x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} = \frac{A(x + 1) + Bx}{x(x + 1)},$$

resulta que

$$\begin{aligned} 1 &= A(x + 1) + Bx \\ &= (A + B)x + A. \end{aligned}$$

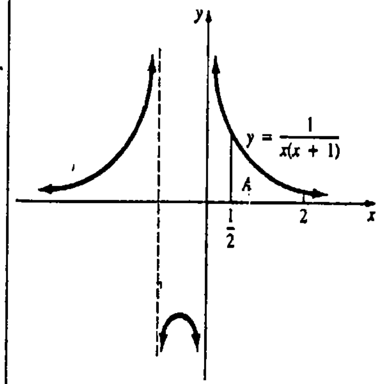


Figura 9.9

La solución del sistema

$$\begin{aligned} 0 &= A + B \\ 1 &= A \end{aligned}$$

es inmediata: $A = 1$, $B = -1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A &= \int_{1/2}^{2} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x + 1}\right] dx \\ &= (\ln|x| - \ln|x + 1|)\Big]_{1/2}^{2} \\ &= \ln\left|\frac{x}{x + 1}\right|\Big]_{1/2}^{2} = \ln 2 \approx 0.6831 \text{ unidades cuadradas.} \end{aligned}$$

Caso II Factores lineales repetidos

Si
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(ax+b)^n},$$
en donde $n > 1$ y el grado de $P(x)$ es menor que n, entonces se pueden encontrar constantes reales únicas $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tales que
$$\frac{P(x)}{(ax+b)^n} = \frac{C_1}{ax+b} + \frac{C_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(ax+b)^n}.$$

Ejemplo 4

Evaluar $\int \frac{x^2+2x+4}{(x+1)^3}\,dx$.

Solución La descomposición del integrando es
$$\frac{x^2+2x+4}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}.$$
Igualando los denominadores,
$$\begin{aligned} x^2+2x+4 &= A(x+1)^2 + B(x+1) + C \\ &= Ax^2 + (2A+B)x + (A+B+C), \end{aligned}$$
se obtiene el sistema de ecuaciones
$$\begin{aligned} 1 &= A \\ 2 &= 2A + B \\ 4 &= A + B + C. \end{aligned}$$
Resolviendo las ecuaciones resulta $A = 1$, $B = 0$ y $C = 3$. Por lo tanto,
$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+2x+4}{(x+1)^3}\,dx &= \int\left[\frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^3}\right]dx \\ &= \int\left[\frac{1}{x+1} + 3(x+1)^{-3}\right]dx \\ &= \ln|x+1| - \frac{3}{2}(x+1)^{-2} + D. \end{aligned}$$

Combinación de los casos

Cuando el denominador $Q(x)$ contiene tanto factores lineales distintos como repetidos, combinamos ambos casos.

Ejemplo 5

Evaluar $\int \frac{6x-1}{x^3(2x-1)}\,dx$.

Solución Se escribe
$$\frac{6x-1}{x^3(2x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{2x-1}$$

de donde resulta que
$$6x - 1 = Ax^2(2x-1) + Bx(2x-1) + C(2x-1) + Dx^3 \qquad (9.14)$$
$$= (2A+D)x^3 + (-A+2B)x^2 + (-B+2C)x - C. \qquad (9.15)$$
Si en (9.14) se hace $x = 0$ y $x = \frac{1}{2}$, encontramos que $C = 1$ y $D = 16$, respectivamente. Igualando ahora los coeficientes de x^3 y x^2 en (9.15), se obtiene
$$\begin{aligned} 0 &= 2A + D \\ 0 &= -A + 2B. \end{aligned}$$
Puesto que se conoce el valor D, de la primera ecuación resulta $A = -D/2 = -8$. De la segunda se obtiene luego $B = A/2 = -4$. Por lo tanto,
$$\begin{aligned} \int \frac{6x-1}{x^3(2x-1)}\,dx &= \int\left[-\frac{8}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{16}{2x-1}\right]dx \\ &= -8\ln|x| + 4x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-2} + 8\ln|2x-1| + E \\ &= 8\ln\left|\frac{2x-1}{x}\right| + 4x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-2} + E. \end{aligned}$$

9.5.2 Denominadores que contienen factores cuadráticos irreducibles*

Caso III Factores cuadráticos no repetidos

Supóngase que el denominador de la función racional $P(x)/Q(x)$ se puede expresar como un producto de factores cuadráticos irreducibles distintos $a_ix^2 + b_ix + c_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Si el grado de $P(x)$ es menor que $2n$, es posible encontrar constantes reales únicas $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$ tales que
$$\begin{aligned} &\frac{P(x)}{(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)\cdots(a_nx^2+b_nx+c_n)} \\ &= \frac{A_1x+B_1}{a_1x^2+b_1x+c_1} + \frac{A_2x+B_2}{a_2x^2+b_2x+c_2} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{a_nx^2+b_nx+c_n}. \end{aligned}$$

Ejemplo 6

Evaluar $\int \frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)}\,dx$.

Solución Escribimos
$$\frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3}$$

* La palabra "irreducible" significa que la expresión cuadrática $ax^2 + bx + c$ no se factoriza en el conjunto de los números reales. Esto ocurre cuando $b^2 - 4ac < 0$.

de lo cual se obtiene

$$\begin{aligned}4x &= (Ax + B)(x^2 + 2x + 3) + (Cx + D)(x^2 + 1)\\ &= (A + C)x^3 + (2A + B + D)x^2 + (3A + 2B + C)x + (3B + D).\end{aligned}$$

Como el denominador del integrando no tiene raíces reales, se comparan los coeficientes de las potencias de x:

$$\begin{aligned}0 &= A + C\\ 0 &= 2A + B + D\\ 4 &= 3A + 2B + C\\ 0 &= 3B + D\end{aligned}$$

Resolviendo las ecuaciones resulta $A = 1$, $B = 1$, $C = -1$ y $D = -3$. Por lo tanto,

$$\int \frac{4x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 3)}\,dx = \int\left[\frac{x + 1}{x^2 + 1} - \frac{x + 3}{x^2 + 2x + 3}\right] dx.$$

Ahora bien, la integral de cada término presenta todavía un ligero problema. Escribimos primero

$$\frac{x + 1}{x^2 + 1} = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} \tag{9.16}$$

y luego, después de completar el cuadrado,

$$\frac{x + 3}{x^2 + 2x + 3} = \frac{x + 1 + 2}{(x + 1)^2 + 2} = \frac{1}{2}\frac{2(x + 1)}{(x + 1)^2 + 2} + \frac{2}{(x + 1)^2 + 2}. \tag{9.17}$$

En los segundos miembros de (9.16) y (9.17) se reconoce que las integrales de los términos primeros y segundos son de las formas $\int du/u$ y $\int du/(u^2 + a^2)$, respectivamente. Se obtiene finalmente

$$\begin{aligned}&\int \frac{4x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 3)}\,dx\\ &= \int\left[\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{2}\frac{2(x + 1)}{(x + 1)^2 + 2} - \frac{2}{(x + 1)^2 + (\sqrt{2})^2}\right] dx\\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + \tan^{-1}x - \frac{1}{2}\ln[(x + 1)^2 + 2] - \sqrt{2}\tan^{-1}\frac{x + 1}{\sqrt{2}} + E\\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x + 3} + \tan^{-1}x - \sqrt{2}\tan^{-1}\frac{x + 1}{\sqrt{2}} + E.\end{aligned}$$

Caso IV Factores cuadráticos repetidos

Se considera ahora el caso en el que el integrando es $P(x)/(ax^2 + bx + c)^n$, en donde $ax^2 + bx + c$ es irreducible y $n > 1$. Si el grado de $P(x)$ es menor que $2n$, se pueden encontrar constantes reales únicas $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$ tales que

$$\frac{P(x)}{(ax^2 + bx + c)^n} = \frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}.$$

Ejemplo 7

Evaluar $\int \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2}\,dx.$

Solución La descomposición del integrando en fracciones parciales

$$\frac{x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 4)^2}$$

conduce a

$$\begin{aligned}x^2 &= (Ax + B)(x^2 + 4) + Cx + D\\ &= Ax^3 + Bx^2 + (4A + C)x + (4B + D),\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}0 &= A\\ 1 &= B\\ 0 &= 4A + C\\ 0 &= 4B + D.\end{aligned}$$

Resulta así que $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$ y $D = -4$. Por consiguiente,

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2}\,dx = \int\left[\frac{1}{x^2 + 4} - \frac{4}{(x^2 + 4)^2}\right] dx.$$

La integral del primer término es una tangente inversa. Sin embargo, para evaluar la integral del segundo término, se utiliza la sustitución trigonométrica $x = 2\tan\theta$:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} &= \int \frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{(4\tan^2\theta + 4)^2}\\ &= \frac{1}{8}\int \frac{\sec^2\theta}{\sec^4\theta}\,d\theta\\ &= \frac{1}{8}\int \cos^2\theta\,d\theta\\ &= \frac{1}{16}\int(1 + \cos 2\theta)\,d\theta\\ &= \frac{1}{16}\left(\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right)\\ &= \frac{1}{16}(\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta)\\ &= \frac{1}{16}\left[\tan^{-1}\frac{x}{2} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}\cdot\frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}}\right]\\ &= \frac{1}{16}\left[\tan^{-1}\frac{x}{2} + \frac{2x}{x^2 + 4}\right].\end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral original es

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2}\,dx &= \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} - 4\left[\frac{1}{16}\tan^{-1}\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\frac{x}{x^2 + 4}\right] + E\\ &= \frac{1}{4}\tan^{-1}\frac{x}{2} - \frac{x}{2(x^2 + 4)} + E.\end{aligned}$$

El ejemplo siguiente combina los cuatro casos precedentes.

Ejemplo 8

Determinar la forma de la descomposición en fracciones del integrando de

$$\int \frac{dx}{(3x+5)(x-2)^2(x^2+6)(x^2+x+1)^2}.$$

Solución Puesto que $3x + 5$ y $x - 2$ son factores lineales, mientras que tanto $x^2 + 6$ como $x^2 + x + 1$ son factores cuadráticos irreducibles, se puede escribir

$$\frac{1}{(3x+5)(x-2)^2(x^2+6)(x^2+x+1)^2}$$
$$= \frac{A}{3x+5} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+6} + \frac{Fx+G}{x^2+x+1} + \frac{Hx+K}{(x^2+x+1)^2}$$

Ejemplo 9

Evaluar $\int \frac{x+3}{x^4+9x^2}\,dx$.

Solución Como $x^4 + 9x^2 = x^2(x^2 + 9)$, se ve que el problema combina el factor cuadrático $x^2 + 9$ con el factor lineal repetido x. Por consiguiente, la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{x+3}{x^2(x^2+9)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+9}.$$

Procediendo como de costumbre, se tiene que

$$x + 3 = (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + 9Ax + 9B$$

y

$$\begin{aligned} 0 &= A + C \\ 0 &= B + D \\ 1 &= 9A \\ 3 &= 9B. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $A = \frac{1}{9}$, $B = \frac{1}{3}$, $C = -\frac{1}{9}$ y $D = -\frac{1}{3}$. Esto da

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^2(x^2+9)}\,dx &= \int\left[\frac{1/9}{x} + \frac{1/3}{x^2} - \frac{x/9+1/3}{x^2+9}\right]dx \\ &= \int\left[\frac{1/9}{x} + \frac{1/3}{x^2} - \frac{1}{18}\frac{2x}{x^2+9} - \frac{1}{3}\frac{1}{x^2+9}\right]dx \\ &= \frac{1}{9}\ln|x| - \frac{1}{3}x^{-1} - \frac{1}{18}\ln(x^2+9) - \frac{1}{9}\tan^{-1}\frac{x}{3} + E \\ &= \frac{1}{18}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+9}\right) - \frac{1}{3}x^{-1} - \frac{1}{9}\tan^{-1}\frac{x}{3} + E. \end{aligned}$$

Observación

Integrales como $\int dx/(x+2)^4$ y $\int (2x+1)/(x^2+1)^2\,dx$ *parecen* ser buenos candidatos para las fracciones parciales. Sin embargo, no es así. ¿Por qué? El lector debe poder evaluar estas integrales por otros medios.

Ejercicios 9.5

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 985.

[9.5.1]

En los Problemas 1-36, utilice fracciones parciales cuando sea apropiado para evaluar la integral indicada.

1. $\int \frac{dx}{x(x-2)}$
2. $\int \frac{dx}{x(2x+3)}$
3. $\int \frac{x+2}{2x^2-x}\,dx$
4. $\int \frac{3x+10}{x^2+2x}\,dx$
5. $\int \frac{dx}{x^2-9}$
6. $\int \frac{dx}{4x^2-25}$
7. $\int \frac{x+1}{x^2-16}\,dx$
8. $\int \frac{x+5}{(x+4)(x^2-1)}\,dx$
9. $\int \frac{dx}{x^2+4x+3}$
10. $\int \frac{dx}{x^2+x-2}$
11. $\int \frac{x}{2x^2+5x+2}\,dx$
12. $\int \frac{x+7}{x^2-3x-10}\,dx$
13. $\int \frac{x^2+2x-6}{x^3-x}\,dx$
14. $\int \frac{5x^2-x+1}{x^3-4x}\,dx$
15. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$
16. $\int \frac{dx}{(4x^2-1)(x+7)}$
17. $\int \frac{4t^2+3t-1}{t^3-t^2}\,dx$
18. $\int \frac{2x-11}{x^3+2x^2}\,dx$
19. $\int \frac{dx}{x^3+2x+x}$
20. $\int \frac{t-1}{t^4+6t^3+9t^2}\,dt$
21. $\int \frac{dx}{(x-3)^4}$
22. $\int \frac{4x^2-5x+7}{x^3}\,dx$
23. $\int \frac{2x-1}{(x+1)^3}\,dx$
24. $\int \frac{x^2+2x-6}{(x-1)^3}\,dx$
25. $\int \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx$
26. $\int \frac{dx}{x^2(x^2-4)^2}$
27. $\int \frac{dx}{(x^2+6x+5)^2}$
28. $\int \frac{dx}{(x^2-x-6)(x^2-2x-8)}$
29. $\int \frac{x^4+2x^2-x+9}{x^5+2x^4}\,dx$
30. $\int \frac{5x-1}{x(x-3)^2(x+2)^2}\,dx$
31. $\int \frac{x^4+3x^2+4}{(x+1)^2}\,dx$
32. $\int \frac{x^5-10x^3}{x^4-10x^2+9}\,dx$
33. $\int_2^4 \frac{dx}{x^2-6x+5}$
34. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-4}$
35. $\int_0^2 \frac{2x-1}{(x+3)^2}\,dx$
36. $\int_1^5 \frac{2x+6}{x(x+1)^2}\,dx$

37. Determine el área bajo la gráfica de $y = 1/(x^2 + 2x - 3)$ en el intervalo $[2, 4]$.

38. Halle el área limitada por la gráfica de $y = x/(x + 2)(x + 3)$ y el eje x en el intervalo $[-1, 1]$.

39. La región del primer cuadrante limitada por las gráficas de $y = 2/x(x + 1)$, $x = 1$, $x = 3$ y $y = 0$ en torno al eje x. Obtenga el volumen del sólido de revolución.

40. La región del primer cuadrante limitada por las gráficas de $y = 1/\sqrt{(x+1)(x+4)}$, $x = 0$, $x = 2$ y $y = 0$ se hace girar en torno al eje x. Encuentre el volumen del sólido de revolución.

41. La región del primer cuadrante limitada por las gráficas de $y = 4/(x + 1)^2$, $x = 0$, $x = 1$ y $y = 0$ gira alrededor del eje y. Encuentre el volumen del sólido de revolución.

42. Determine la longitud de la gráfica de $y = e^x$ en el intervalo $[0, \ln 2]$. (*Sugerencia:* Sea $u^2 = 1 + e^{2x}$.)

Problemas diversos

43. Evaluar $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^3}\,dx$. (*Sugerencia:* Sea $u^2 = 1 - x^2$.)

44. Evaluar la integral $\int \frac{x}{(ax+b)(cx+d)}\,dx$

(a) Cuando $bc - ad \neq 0$,

(b) Cuando $bc - ad = 0$.

En los Problemas 45 y 46 utilice fracciones parciales para evaluar la integral indicada.

45. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x + 2}\,dx$

46. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x - \cos^3 x}\,dx$

[9.5.2]

En los Problemas 47-76 utilice fracciones parciales cuando sea apropiado para evaluar la integral indicada.

47. $\int \frac{dx}{x^4 + 5x^2 + 4}$ 48. $\int \frac{dx}{x^4 + 13x^2 + 36}$

49. $\int \frac{x - 15}{(x^2 + 2x + 5)(x^2 + 6x + 10)}\,dx$

50. $\int \frac{x^2}{(x^2 + 8x + 20)(x^2 + 4x + 6)}\,dx$

51. $\int \frac{x - 1}{x(x^2 + 1)}\,dx$

52. $\int \frac{dx}{(x - 1)(x^2 + 3)}$

53. $\int \frac{2x - 3}{x^3 - 3x^2 + 9x - 27}\,dx$

54. $\int \frac{x + 4}{x^4 + 9x^2}\,dx$

55. $\int \frac{x}{(x + 1)^2(x^2 + 1)}\,dx$

56. $\int \frac{x^2}{(x - 1)^3(x^2 + 4)}\,dx$

57. $\int \frac{dt}{t^4 - 1}$ 58. $\int \frac{t^3}{t^4 - 16}\,dt$

59. $\int \frac{2x + 1}{(x^2 + 4)^2}\,dx$ 60. $\int \frac{dx}{(x^4 - 16)^2}$

61. $\int \frac{3x^2 - x + 1}{(x + 1)(x^2 + 2x + 2)}\,dx$

62. $\int \frac{4x - 5}{(x - 2)(x^2 + 4x + 8)}\,dx$

63. $\int \frac{dx}{x^3 - 1}$ 64. $\int \frac{dx}{x^4 + 27x}$

65. $\int \frac{dx}{(x^3 + x)^2}$ 66. $\int \frac{dx}{x^3(x^2 + 1)^2}$

67. $\int \frac{x^3 - 2x^2 + x - 3}{x^4 + 8x^2 + 16}\,dx$

68. $\int \frac{3x^2 + 2x - 4}{x^4 + 6x^2 + 9}\,dx$

69. $\int \frac{2x}{(4x^2 + 5)^3}\,dx$ 70. $\int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^3}\,dx$

71. $\int \frac{x^2 - 2x + 3}{x(x^2 + 2x + 2)^2}\,dx$

72. $\int \frac{x}{(x - 1)(x^2 + 4x + 5)^2}\,dx$

73. $\int_0^1 \frac{dx}{x^3 + x^2 + 2x + 2}$

74. $\int_0^1 \frac{x^2}{x^4 + 8x^2 + 16}\,dx$

75. $\int_{-1}^1 \frac{2x^3 + 5x}{x^4 + 5x^2 + 6}\,dx$

76. $\int_1^2 \frac{1}{x^5 + 4x^4 + 5x^3}\,dx$

77. Determine el área bajo la gráfica de

$$y = \frac{x^3}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)} \quad \text{en el intervalo } [0, 4].$$

78. Calcule el área limitada por la gráfica de $y = 3x^2/(x^3 - 1)$ y el eje x en el intervalo $[-1, \frac{1}{2}]$.

79. La región del primer cuadrante limitada por las gráficas de $y = 2x/(x^2 + 1)$, $x = 1$ y $y = 0$ en torno al eje x. Encuentre el volumen del sólido de revolución.

80. La región del primer cuadrante limitada por las gráficas de

$$y = \frac{8}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)},$$

$x = 0$, $x = 1$ y $y = 0$ se hace girar en torno al eje y. Obtenga el volumen del sólido de revolución.

Problema diverso

81. Evaluar $\int \frac{\sqrt[3]{x + 1}}{x}\,dx$. (*Sugerencia:* Sea $u^3 = x + 1$.)

9.6 Integración de funciones racionales de seno y coseno

Las integrales de expresiones racionales en las que intervengan sen x y cos x se pueden reducir a integrales de cocientes de polinomios por medio de la sustitución

$$u = \tan\frac{x}{2}. \tag{9.18}$$

Si $x/2$ representa el ángulo mostrado en la Figura 9.10, entonces

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}} \quad \text{y} \quad \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}.$$

De las identidades trigonométricas para ángulos dobles, resulta que

$$\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2u}{1 + u^2} \tag{9.19}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}. \tag{9.20}$$

Además, de (9.18)

$$\begin{aligned} du &= \sec^2\frac{x}{2}\frac{dx}{2} \\ &= \left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right)\frac{dx}{2} \\ &= (1 + u^2)\frac{dx}{2} \end{aligned}$$

y de esta manera

$$dx = \frac{2}{1 + u^2}\,du. \tag{9.21}$$

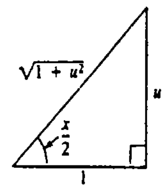


Figura 9.10

Ejemplo 1

Evaluar $\int \frac{dx}{2 + 2\operatorname{sen} x + \cos x}$.

Solución Utilizando (9.19), (9.20), (9.21) y simplificando, la integral dada se convierte en

$$\int \frac{dx}{2 + 2\operatorname{sen} x + \cos x} = \int \frac{2\,du}{u^2 + 4u + 3}.$$

Como $u^2 + 4u + 3 = (u + 1)(u + 3)$, empleamos fracciones parciales:

$$\int \frac{dx}{2 + 2\operatorname{sen} x + \cos x} = \int \left[\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u+3}\right] du$$
$$= \ln|u + 1| - \ln|u + 3| + C$$
$$= \ln\left|\frac{u+1}{u+3}\right| + C$$
$$= \ln\left|\frac{1 + \tan x/2}{3 + \tan x/2}\right| + C.$$

Ejercicios 9.6

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 986.

En los Problemas 1-12 evalúe la integral dada, mediante sustitución.

1. $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x + \cos x}$
2. $\int \frac{dx}{2 + \operatorname{sen} x + \cos x}$
3. $\int \frac{dx}{2 + \cos x}$
4. $\int \frac{dx}{4 - 5\operatorname{sen} x}$
5. $\int \frac{dx}{1 + \sec x}$
6. $\int \frac{\sec x}{\sec x + \tan x - 1}\, dx$
7. $\int \frac{dx}{\tan x + \operatorname{sen} x}$
8. $\int \frac{dx}{\cot x + \cos x}$
9. $\int \frac{\sec x}{1 + \cos x}\, dx$
10. $\int \frac{\csc x}{1 + \operatorname{sen} x}\, dx$
11. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + 2\cos x + 3\operatorname{sen} x}$
12. $\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 + \cos x}\, dx$
13. (a) Aplique el procedimiento de sustitución para evaluar
$$\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x}.$$
(b) Evalúe la integral de la parte (a) por otro método. (*Sugerencia:* Multiplique numerador y denominador por $1 - \operatorname{sen} x$.)
14. Determine el área bajo la gráfica de $y = 1/(1 + \cos x)$ en el intervalo $[0, \pi/2]$.

(O) 9.7 Repaso de aplicaciones

El propósito de esta breve sección es doble: repasar algunas aplicaciones de la integral que se han visto en capítulos anteriores, y al mismo tiempo, utilizar las técnicas del presente capítulo. Del lector dependerá decidir cuál método de integración es apropiado en un problema dado.

Ejercicios 9.7

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 986.

Áreas de superficies

1. Halle el área de la superficie que se forma haciendo girar $y = x^2/2$ en el intervalo $[0, 1]$, en torno al eje x.

2. Determine el área de la superficie que se forma haciendo girar $y = e^x$ en el intervalo $[0, \ln\sqrt{2}]$ en torno al eje x. (*Sugerencia:* Hágase $u = e^x$ primero.)

Valores medios

En los Problemas 3-6 encuentre el valor medio de la función dada, en el intervalo indicado.

3. $f(x) = \tan^{-1}\frac{x}{2}$; $[0, 2]$
4. $f(x) = x\operatorname{sen} x$; $[0, \pi]$
5. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x - 4}$; $[1, 2]$
6. $f(x) = (4 - x^2)^{-3/2}$; $[-1, 1]$

Movimiento rectilíneo

7. Un cuerpo se mueve en línea recta con velocidad $v(t) = e^{-t}\operatorname{sen} t$, medida en cm/s. Encuentre la función de posición $s(t)$ si se sabe que $s = 0$ cuando $t = 0$.

8. Un cuerpo se mueve en línea recta, con aceleración $a(t) = te^{-t}$, medida en cm/s². Encuentre la función de velocidad $v(t)$ y la función de la posición $s(t)$ si $v(0) = 1$ y $s(0) = -1$.

Problemas de bombas

9. La forma de un depósito para agua es la que corresponde al giro de la región limitada por las gráficas de $y = \operatorname{sen} \pi x$, $y = 0$, $0 \le x \le 1$, en torno al eje x, el cual se toma en dirección hacia abajo. El depósito está lleno hasta una profundidad de $\frac{1}{2}$ pie. Determine el trabajo efectuado al bombear toda el agua hasta la parte superior del depósito.

10. Un depósito para agua se forma haciendo girar la región limitada por las gráficas de $y = \ln x$, $y = 0$, $y = 2$ y $x = 0$ en torno al eje y, el cual se toma en dirección hacia arriba. Las dimensiones están expresadas en metros. Dado que el depósito esté lleno, encuentre el trabajo efectuado al bombear toda el agua hasta su parte superior.

Presión hidrostática

En los Problemas 11 y 12, encuentre la fuerza causada por la presión hidrostática sobre la placa vertical dada. Suponga que la placa está sumergida en agua y que las dimensiones están expresadas en pies.

11.

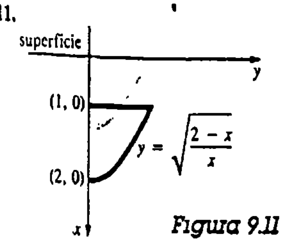


Figura 9.11

12.

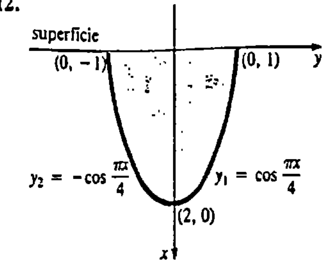


Figura 9.12

Centros de masa de varillas o barras

En los Problemas 13 y 14, una varilla de densidad lineal $\rho(x)$ kg/m coincide con el eje x en el intervalo indicado. Encuentre su centro de masa.

13. $\rho(x) = (9 - x^2)^{-3/2}$; $[0, \sqrt{5}]$
14. $\rho(x) = \sqrt{16 + x^2}$; $[0, 3]$

Centroides de regiones planas

En los Problemas 15-18, localice el centroide de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas.

15. $y = \operatorname{sen} x$, $y = 0$, $x = \pi/2$
16. $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 2$
17. $y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$
18. $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$

Separación de variables

19. Resuelva la siguiente ecuación logística* $dP/dt = P(a - bP)$, $a > 0$, $b > 0$, por separación de variables sujeta a $P(0) = P_0$.

20. La rapidez con que se forma un compuesto químico durante una reacción química de segundo orden está determinada por $dX/dt = k(a - X)(b - X)$, en donde k, a y b son constantes. Aplique separación de variables para resolver la ecuación diferencial en el caso $a \neq b$.

21. Una persona W se mueve, a partir del origen, en la dirección positiva del eje x, arrastrando un objeto

* Alrededor de 1840, el biólogo matemático belga P. F. Verhulst aplicó la ecuación logística como modelo matemático para predecir la población humana de varios países.

siguiendo la curva C, llamada *tractriz*, indicada en la Figura 9.13. El objeto se encuentra inicialmente en el eje y en $(0, s)$ y es tirado mediante una cuerda de longitud constante s que se mantiene tensa durante el movimiento. Resuelva la ecuación diferencial de la tractriz

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{s^2 - y^2}},$$

por separación de variables. Suponga que el punto inicial sobre el eje y es $(0, 10)$ y que la longitud de la cuerda es $s = 10$ pie.

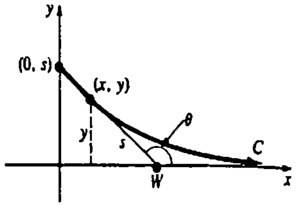


Figura 9.13

(O) 9.8 Comentarios acerca del uso de tablas de integrales

Hay ocasiones que dan lugar al uso de tablas de integrales. Algunas funciones se resisten a los métodos de integración convencionales considerados en este capítulo, y requieren métodos avanzados tales como el uso de variables complejas. Por otra parte, ciertas funciones simplemente presentan dificultades y se les puede encontrar una antiderivada elemental disponiendo de tiempo, energía y una pequeña dosis de ingenio.

En las cubiertas interiores se encuentra una lista extensa de fórmulas de integración. Algunas de ellas son ya familiares pero la mayoría son nuevas. Una tabla de integrales no es una solución para todos los problemas. Con frecuencia puede dedicarse una cantidad desmesurada de tiempo buscando las respuestas para integrales tales como

$$\int \frac{(4 - e^{-x})^{5/3}}{e^x}\,dx, \qquad \int \frac{x^3 + 4x}{(x-1)(x+5)}\,dx, \qquad \int e^{\operatorname{sen}\theta}\operatorname{sen}2\theta\,d\theta$$

cuando en realidad bastarían pocos minutos de análisis para "vencer" a los tres problemas juntos. En pocas palabras, una tabla de integrales debe ser más bien un último y no un primer recurso.

Ejemplo 1

Evaluar $\int \frac{x^3}{\sqrt{3 + 2x}}\,dx$ empleando las tablas.

Solución Con $u = x$, $a = 3$, $b = 2$ y $n = 3$, de la fórmula 61 de la tabla de integrales se tiene que

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{3+2x}}\,dx = \frac{2x^3\sqrt{3+2x}}{2\cdot 7} - \frac{2\cdot 3\cdot 3}{2\cdot 7}\int \frac{x^2}{\sqrt{3+2x}}\,dx.$$

Continuando, se aplica la fórmula 56 a la segunda integral:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{3+2x}}\,dx = \frac{1}{7}x^3\sqrt{3+2x} - \frac{9}{7}\left[\frac{2}{15\cdot 8}(8\cdot 9 + 3\cdot 4x^2 - 4\cdot 6x)\sqrt{3+2x}\right] + C$$

$$= \frac{1}{7}x^3\sqrt{3+2x} - \frac{54}{35}\sqrt{3+2x} - \frac{9}{35}x^2\sqrt{3+2x} + \frac{18}{35}x\sqrt{3+2x} + C.$$

Solución alternativa I Sea $u = 3 + 2x$ y procédase como en la Sección 9.1.

Solución alternativa II Sean $dv = (3 + 2x)^{-1/2}\,dx$, $u = x^3$ y aplíquese integración por partes.

Ejemplo 2

Evaluar $\int \sqrt{4x - x^2}\,dx$ empleando las tablas.

Solución De la fórmula 120, con $u = x$ y $a = 2$, se obtiene

$$\int \sqrt{4x - x^2}\,dx = \frac{x-2}{2}\sqrt{4x - x^2} + 2\cos^{-1}\left(\frac{2-x}{2}\right) + C.$$

Solución alternativa Escribir $4x - x^2 = 4 - (2 - x)^2$ y aplicar una sustitución trigonométrica.

Ejemplo 3

Evaluar $\int \frac{dx}{1 + e^x}$ empleando las tablas.

Solución De la fórmula 109, con $u = x$, $a = 1$ y $b = 1$,

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = x - \ln|1 + e^x| + C.$$

Solución alternativa

Escribir $$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1 + e^x - e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$$

e integrar término a término.

Ejercicios 9.8

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 986.

En los Problemas 1-20, evalúe la integral indicada, empleando la tabla de integrales dada en las cubiertas interiores.

1. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9 + x^2}}$
2. $\int x^2\sqrt{25 - x^2}\,dx$
3. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 5}}{x}\,dx$
4. $\int (4 - x^2)^{-3/2}\,dx$
5. $\int \frac{dx}{x(4 + 5x)^2}$
6. $\int \frac{x^4}{\sqrt{1 + x}}\,dx$
7. $\int t^2\sqrt{1 + 2t}\,dt$
8. $\int \frac{\sqrt{1+u}}{u}\,du$
9. $\int \frac{x^2}{(3 - x)^2}\,dx$
10. $\int \frac{dx}{x\sqrt{5 - x}}$
11. $\int \tan^5\theta\,d\theta$
12. $\int \cos 6y \cos 2y\,dy$
13. $\int \ln(x^2 + 16)\,dx$
14. $\int e^x\ln|e^{2x} - 1|\,dx$
15. $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} 2x}$
16. $\int \frac{x}{1 - \operatorname{sen} 4x}\,dx$

17. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{6x-x^2}}{x^2}\,dx$

19. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{10}x\,dx$

20. $\displaystyle\int_1^{e} x^9 \ln x\,dx$

Problemas diversos

En los Problemas 21 y 22, deduzca la fórmula general que se encuentra en la tabla de integrales, para la integral indicada.

21. $\displaystyle\int \frac{u}{a+bu}\,du$

22. $\displaystyle\int \frac{u}{(a+bu)^2}\,du$

Examen • Capítulo 9

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 986.

En los Problemas 1-10 conteste verdadero o falso.

1. Con el cambio de variable $u = 2x + 3$, la integral $\displaystyle\int_1^5 \frac{4x}{\sqrt{2x+3}}\,dx$ se convierte en $\displaystyle\int_5^{13} (u^{1/2} - 3u^{-1/2})\,du$. ______

2. La sustitución trigonométrica $u = a \sec\theta$ es apropiada para integrales que contienen $\sqrt{a^2+u^2}$. ______

3. El método de integración por partes se deduce de la regla del producto para derivación. ______

4. $\displaystyle\int_1^e 2x \ln x^2\,dx = e^2 + 1$. ______

5. El método de fracciones parciales no es aplicable a $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^3}$.

6. Se puede encontrar una descomposición en fracciones parciales de $x^2/(x+1)^2$ que tenga la forma $A/(x+1) + B/(x+1)^2$, en donde A y B son constantes. ______

7. Para evaluar $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$, se supone que es posible encontrar constantes A, B, C y D tales que

$$\frac{1}{(x^2-1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2-1} + \frac{Cx+D}{(x^2-1)^2}. \text{ ______}$$

8. Para evaluar $\int x^n e^x dx$, n entero positivo, se aplica integración por partes $n-1$ veces. ______

9. Para evaluar $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$ es necesario utilizar $x = 3\operatorname{sen}\theta$. ______

10. Al ser evaluada la integral $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\,dx$, es posible expresarla como una suma de potencias de $\cos x$. ______

En los Problemas 11-72 aplique los métodos de este capítulo, o los de los anteriores, para evaluar la integral indicada.

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+9}$

12. $\displaystyle\int e^{\sqrt{x+1}}\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+4)^3}$

16. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+4}\,dx$

17. $\displaystyle\int \frac{x^2+4}{x^2}\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{3x-1}{x(x^2-4)}\,dx$

19. $\displaystyle\int \frac{x-5}{x^2+4}\,dx$

20. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x+27}}{x}\,dx$

21. $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^9}{x}\,dx$

22. $\displaystyle\int (\ln 3x)^2\,dx$

23. $\displaystyle\int t \operatorname{sen}^{-1} t\,dt$

24. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{(x-1)^2}\,dx$

25. $\displaystyle\int (x+1)^3(x-2)\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^3(x-2)}$

27. $\displaystyle\int \ln(x^2+4)\,dx$

28. $\displaystyle\int 8t\,e^{2t^2}\,dt$

29. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+10x^3+25x^2}$

30. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+8x+25}$

31. $\displaystyle\int \frac{x}{x^3+3x^2-9x-27}\,dx$

32. $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2-x)(x^2+3)}\,dx$

33. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t}\,dt$

34. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{(\cos\theta)^{3/2}}\,d\theta$

35. $\displaystyle\int \tan^{10}x \sec^4 x\,dx$

36. $\displaystyle\int \frac{x\tan x}{\cos x}\,dx$

37. $\displaystyle\int y\cos y\,dy$

38. $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} x^3\,dx$

39. $\displaystyle\int (1+\operatorname{sen}^2 t)\cos^3 t\,dt$

40. $\displaystyle\int \frac{\sec^3\theta}{\tan\theta}\,d\theta$

41. $\displaystyle\int e^w(1+e^w)^5\,dw$

42. $\displaystyle\int (x-1)e^{-x}\,dx$

43. $\displaystyle\int \cot^3 4x\,dx$

44. $\displaystyle\int (3-\sec x)^2\,dx$

45. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^2 x\tan x\,dx$

46. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}^4 x\tan x\,dx$

47. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}\,dx$

48. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}\,dx$

49. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

50. $\displaystyle\int_{\ln 3}^{\ln 2} \sqrt{e^x+1}\,dx$

51. $\displaystyle\int e^x\cos 3x\,dx$

52. $\displaystyle\int x(x-5)^9\,dx$

53. $\displaystyle\int \cos(\ln t)\,dt$

54. $\displaystyle\int \sec^2 x\ln(\tan x)\,dx$

55. $\displaystyle\int \cos\sqrt{x}\,dx$

56. $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

57. $\displaystyle\int \cos x\operatorname{sen} 2x\,dx$

58. $\displaystyle\int (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\,dx$

59. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx$

60. $\displaystyle\int \frac{dx}{(8-2x-x^2)^{3/2}}$

61. $\displaystyle\int \tan^5 x\sec^3 x\,dx$

62. $\displaystyle\int \cos^4\frac{x}{2}\,dx$

63. $\displaystyle\int \frac{t^5}{1+t^2}\,dt$

64. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

65. $\displaystyle\int \frac{5x^3+x^2+6x+1}{(x^2+1)^2}\,dx$

66. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^2}\,dx$

67. $\displaystyle\int x\operatorname{sen}^2 x\,dx$

68. $\displaystyle\int (t+1)^2 e^{3t}\,dt$

69. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\cos x\,e^{\operatorname{sen} x}\,dx$

70. $\displaystyle\int e^x\tan^2 e^x\,dx$

71. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}}\,dx$

72. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\operatorname{sen} x+\cos x}$

10

Formas indeterminadas e integrales impropias

El material que se presenta en la Sección 10.2 y el Capítulo 11 requiere conocer más acerca de la determinación de límites. Por lo tanto, en la Sección 10.1 se considerará una regla muy sencilla y útil para evaluar ciertos límites por medio de la obtención de derivadas.

Como preparación para este capítulo, se recomienda al lector repasar las Secciones 2.1-2.4 y 5.5.

10.1 Regla de L'Hôpital

10.1.1 Formas indeterminadas

En el Capítulo 1 se consideraron límites de cocientes tales como

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x-4}{x-1} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-x}{3x^2+1}, \tag{10.1}$$

donde en el primer límite el numerador y el denominador tienden a cero cuando $x \to 1$, y en el segundo el numerador y el denominador tienden a ∞ cuando $x \to \infty$.

Terminología

En general, se dice que los límites

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

son **formas indeterminadas** si, cuando x tiende a a, a ∞ o a $-\infty$,

$$f(x)\to 0 \quad \text{y} \quad g(x)\to 0$$

o bien

$$|f(x)|\to\infty \quad \text{y} \quad |g(x)|\to\infty.*$$

Simbólicamente se denota una forma indeterminada por

$$0/0 \quad \text{o por} \quad \infty/\infty.$$

Ejemplo 1

(*a*) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ tiene la forma indeterminada 0/0, ya que

$$\operatorname{sen} x\to 0 \quad \text{y} \quad x\to 0 \quad \text{cuando} \quad x\to 0.$$

(*b*) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2}$ tiene la forma indeterminada ∞/∞, ya que

$$1/x\to\infty \quad \text{y} \quad -1/x^2\to-\infty \quad \text{cuando} \quad x\to 0^+.$$

(*c*) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x}$ tiene la forma indeterminada ∞/∞, puesto que

$$\ln x\to\infty \quad \text{y} \quad e^x\to\infty \quad \text{cuando} \quad x\to\infty.$$

Nota: Límites de la forma

$$0/k, \quad k/0, \quad \infty/k, \quad \text{y} \quad k/\infty,$$

* Por ejemplo, se podría tener $f(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$, o bien $f(x)\to-\infty$, $g(x)\to\infty$, y así sucesivamente.

en donde k es una constante distinta de cero, no son formas indeterminadas. El valor de un límite cuya forma es $0/k$ o k/∞ es cero, mientras que un límite cuya forma sea $k/0$, o bien ∞/k, no existe.

Para establecer si existen los límites de cocientes como los mostrados en (10.1), se recurre a la operación algebraica de factorización, cancelación y división. Sin embargo, recuérdese que en la demostración de $\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x)/x = 1$ se utilizó un razonamiento geométrico muy elaborado. No obstante, el álgebra y la intuición geométrica fallan lamentablemente al enfrentarse a un problema del tipo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{e^x - e^{-x}},$$

el cual tiene la forma indeterminada 0/0. El teorema que sigue será de ayuda para demostrar una regla que es sumamente útil para evaluar muchos límites que tienen forma indeterminada.

TEOREMA 10.1

Teorema del valor medio extendido*

Sean f y g continuas en $[a, b]$ y diferenciables en (a, b) y $g'(x) \neq 0$ para todo x en (a, b). Entonces, existe un número c en (a, b) tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \qquad \square$$

Obsérvese que el Teorema 10.1 se reduce al teorema del valor medio cuando $g(x) = x$. En los Problemas 41 y 42 se hace un esbozo de una demostración de este teorema, la cual recuerda la del Teorema 4.5.

La siguiente regla recibe su nombre en honor del matemático francés G. F. A. L'Hôpital. Se supone que f y g son diferenciables en los intervalos abiertos (r, a) y (a, s), y que $g'(x) \neq 0$ para $x \neq a$.

Regla de L'Hôpital*

Supóngase que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ es una forma indeterminada, y que $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ o $a \pm \infty$. Entonces,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{10.2}$$

$\square$

Demostración del caso 0/0 Puesto que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0,$$

* También llamado teorema del valor medio de Cauchy, en honor del eminente matemático francés Augustin Louis Cauchy (1789-1857).

Es discutible que el marqués Gillaume François Antoine de L'Hôpital (1661-1704) haya descubierto la regla que lleva su nombre. El resultado se debe probablemente a Johann Bernoulli. Sin embargo, L'Hôpital fue el primero en publicarla en su texto *Analyse des Infiniment Petits*. El libro fue publicado en 1696 y se considera como el primer texto de Cálculo Infinitesimal.

se puede suponer que $f(a) = 0$ y $g(a) = 0$. Entonces resulta que f y g son continuas en a. Además, como f y g son diferenciables, entonces son continuas tanto en (r, a) como en (a, s). Consecuentemente f y g son continuas en el intervalo (r, s). Ahora bien, el Teorema 10.1 es aplicable ya sea en $[x, a]$ o en $[a, x]$, para cualquier $x \neq a$. En cualquier caso, existe un número c entre x y a tal que

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Haciendo que $x \to a$ se implica que $c \to a$, y de esta manera

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L. \qquad \square$$

Ejemplo 2

Evaluar $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ por la regla de L'Hôpital.

Solución En el Ejemplo 1 se vio que el límite en cuestión tiene la forma 0/0. Así que, en virtud de (10.2) se puede escribir

derivada

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

derivada

Ejemplo 3

Evaluar $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{e^x - e^{-x}}$.

Solución Como el límite tiene la forma indeterminada 0/0, se aplica (10.2),

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x}{\frac{d}{dx}(e^x - e^{-x})} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

La expresión (10.2) también es válida cuando $x \to a$ se reemplaza por $x \to \infty$ o por $x \to -\infty$. La demostración del caso $x \to \infty$ puede obtenerse empleando la sustitución $x = 1/t$ en (10.2), y observando que $t \to 0^+$ es equivalente a $x \to \infty$.

Ejemplo 4

Evaluar $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{e^x}$.

Solución La forma es ∞/∞. Así que, en virtud de la regla de L'Hôpital,

derivada

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{xe^x}.$$

derivada

En este último límite, $xe^x \to \infty$ cuando $x \to \infty$, mientras que 1 permanece constante. Consecuentemente,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{xe^x} = 0.$$

Puede ser necesario aplicar la regla de L'Hôpital varias veces en el curso de la resolución de un problema.

Ejemplo 5

Evaluar $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^2 - 5x + 7}{4x^2 - 2x}$.

Solución La forma es claramente ∞/∞ y de esta manera por (10.2),

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6x^2 - 5x + 7}{4x^2 - 2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{12x - 5}{8x - 2}.$$

Puesto que el segundo límite todavía es ∞/∞, se aplica (10.2) por segunda vez:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{12x - 5}{8x - 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6x^2 - 5x + 7}{4x^2 - 2x} = \frac{3}{2}.$$

Ejemplo 6

Evaluar $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{3x}}{x^2}$.

Solución El límite en cuestión, así como la primera aplicación de (10.2), conducen a ∞/∞,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x}}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3e^{3x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{9e^{3x}}{2}.$$

Después de la segunda aplicación de (10.2), se observa que $e^{3x} \to \infty$, mientras que el denominador permanece constante. De ésto se concluye que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x}}{x^2} = \infty.$$

Ejemplo 7

Evaluar $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4}{e^{2x}}$.

Solución Se aplica (10.2) cuatro veces:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{e^{2x}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{4x^3}{2e^{2x}} \qquad (\infty/\infty)\\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{12x^2}{4e^{2x}} \qquad (\infty/\infty)\\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{2e^{2x}} \qquad (\infty/\infty)\\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{6}{4e^{2x}} = 0.\end{aligned}$$

Límites unilaterales

La regla de L'Hôpital puede aplicarse a límites unilaterales apropiados. Además, una forma de límite puede cambiar a veces, por ejemplo, de ∞/∞ a 0/0.

Ejemplo 8

Determinar $\lim\limits_{t\to\pi/2^+} \dfrac{\tan t}{\tan 3t}$.

Solución Se observa que $\tan t \to -\infty$, y $\tan 3t \to -\infty$ cuando $t \to \pi/2^+$. Por lo tanto, por (10.2),

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\pi/2^+} \frac{\tan t}{\tan 3t} &= \lim_{t\to\pi/2^+} \frac{\sec^2 t}{3\sec^2 3t} \qquad (\infty/\infty)\\ &= \lim_{t\to\pi/2^+} \frac{\cos^2 3t}{3\cos^2 t}.\end{aligned}$$

Esta última forma, que resulta de emplear $\sec t = 1/\cos t$, es ahora 0/0. Continuando,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\pi/2^+} \frac{\tan t}{\tan 3t} &= \lim_{t\to\pi/2^+} \frac{2\cos 3t(-3\operatorname{sen} 3t)}{6\cos t(-\operatorname{sen} t)}\\ &= \lim_{t\to\pi/2^+} \frac{2\operatorname{sen} 3t\cos 3t}{2\operatorname{sen} t\cos t} \qquad \boxed{\text{Fórmula del ángulo doble}}\\ &= \lim_{t\to\pi/2^+} \frac{\operatorname{sen} 6t}{\operatorname{sen} 2t}\\ &= \lim_{t\to\pi/2^+} \frac{6\cos 6t}{2\cos 2t} = \frac{-6}{-2} = 3\end{aligned}$$

Ejemplo 9

Evaluar $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x-1}}$.

Solución El límite tiene la forma indeterminada 0/0. Por lo tanto, por la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1/x}{(1/2)(x-1)^{-1/2}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2\sqrt{x-1}}{x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Observaciones

(*i*) En la aplicación de la regla de L'Hôpital, muchas lectores quizá interpreten erróneamente

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{como} \quad \lim_{x\to a} \frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

La regla utiliza el *cociente de derivadas* y *no* la *derivada de un cociente.*

(*ii*) Es conveniente analizar bien un problema antes de empezar a resolverlo. El límite $\lim_{x\to 0}(\cos x)/x$ es de la forma 1/0 y, por consiguiente, no existe. La falta de previsión matemática al escribir

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1} = 0$$

es una aplicación incorrecta de la regla de L'Hôpital. Por supuesto, la "respuesta" no tiene significado.

(*iii*) Sería agradable que la regla de L'Hôpital fuera una panacea para toda forma indeterminada, pero desafortunadamente no es así. Por ejemplo, $\lim_{x\to\infty} e^x/e^{x^2}$ es ciertamente de la forma ∞/∞, pero

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2xe^{x^2}}$$

no ofrece ayuda inmediata. La regla de L'Hôpital tampoco proporciona ayuda alguna en un problema como

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x}}{x}.$$

¿Por qué no?

10.1.2 Las formas $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0 y 1^∞

La forma $\infty - \infty$

A menudo se puede convertir un límite dado, que no sea inmediatamente 0/0 a ∞/∞, en una de estas formas mediante una combinación de álgebra y un poco de ingenio. El primer ejemplo ilustra $\infty - \infty$. Tal ejemplo debería destruir cualquier convicción injustificada de que $\infty - \infty = 0$.

Ejemplo 10

Evaluar $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{1+3x}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x}\right]$.

Solución Notamos que $(1 + 3x)/\operatorname{sen} x \to \infty$ y $1/x \to \infty$ cuando $x \to 0$. Sin embargo, después de escribir la diferencia como una sola fracción, se reconocerá la forma 0/0:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left[\frac{1+3x}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right] &= \lim_{x\to 0} \frac{3x^2 + x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{6x + 1 - \cos x}{x\cos x + \operatorname{sen} x} && \text{[aplicando (10.2)]} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{6 + \operatorname{sen} x}{-x\operatorname{sen} x + 2\cos x} && \text{[de nuevo (10.2)]} \\
&= \frac{6+0}{0+2} = 3.
\end{aligned}$$

La forma $0 \cdot \infty$

Mediante una manipulación adecuada con el álgebra, se puede aplicar a veces la regla de L'Hôpital a la forma límite $0 \cdot \infty$.*

Ejemplo 11

Evaluar $\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.

Solución Escríbase la expresión dada como

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen} 1/x}{1/x}$$

y reconocer que se tiene la forma 0/0. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen} 1/x}{1/x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{(-x^{-2})\cos 1/x}{(-x^{-2})} \\
&= \lim_{x\to\infty} \cos\frac{1}{x} = 1.
\end{aligned}$$

Las formas 0^0, ∞^0, 1^∞

Supóngase que $y = f(x)_{g(x)}$ tiende a la forma 0^0, ∞^0 o 1^∞ cuando $x \to a$ (o $x \to \infty$). Tomando el logaritmo natural de y:

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln f(x)^{g(x)} \\
&= g(x)\ln f(x),
\end{aligned}$$

se observa que

$$\lim_{x\to a} \ln y = \lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)$$

es de la forma $0 \quad \infty$. Si se supone que $\lim_{x\to a} \ln y = \ln (\lim_{x\to a} y) = L$, entonces $\lim_{x\to a} y = e^L$ o bien

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^L.$$

* No debe creerse que $\infty - \infty$ y $0 \cdot \infty$ pueden ser convertidas *siempre* a las formas más favorables 0/0 o ∞/∞.

Ejemplo 12

Evaluar $\lim_{x\to 0^+} x^{1/\ln x}$.

Solución La forma es 0^0. Ahora bien, si se hace $y = x^{1/\ln x}$, entonces

$$\ln y = \frac{1}{\ln x}\ln x = 1.$$

Obsérvese que en este caso no es necesaria la regla de L'Hôpital, puesto que

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = 1.$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 0^+} y = e^1$ o, en forma equivalente, $\lim_{x\to 0^+} x^{1/\ln x} = e$.

En el ejemplo siguiente se considera un resultado de límites importante, cuya demostración fue pospuesta en la Sección 8.2.

Ejemplo 13

Evaluar $\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x}$.

Solución La forma del límite es 1^∞. Si $y = (1+x)^{1/x}$, entonces

$$\ln y = \frac{1}{x}\ln(1+x).$$

Ahora bien, $\lim_{x\to 0} \ln(1+x)/x$ tiene la forma 0/0, y así por (10.2)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1/(1+x)}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1$$

Por tanto, $\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$.

Ejemplo 14

Evaluar $\lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{2x}$

Solución Como en el ejemplo precedente, la forma es 1^∞. Si

$$y = \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{2x} \text{ entonces } \ln y = 2x\ln\left(1 - \frac{3}{x}\right).$$

Obsérvese que la forma de $\lim_{x\to\infty} 2x\ln(1 - 3/x)$ es $\infty \cdot 0$, mientras que la forma de $\lim_{x\to\infty} 2\ln(1 - 3/x)/(1/x)$ es 0/0. Aplicando (10.2) a este último límite resulta

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} 2\,\frac{\ln(1-3/x)}{1/x} &= \lim_{x\to\infty} 2\,\frac{\dfrac{3/x^2}{(1-3/x)}}{-1/x^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-6}{(1-3/x)} = -6.
\end{aligned}$$

Se concluye así que

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x} = e^{-6}.$$

Ejercicios 10.1

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 987.

[10.1.1]

En los Problemas 1-38, aplique la regla de L'Hôpital donde sea apropiado para encontrar el límite, si existe.

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x}$
2. $\lim_{t\to 3}\frac{t^3-27}{t-3}$
3. $\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{\ln x}$
4. $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln 2x}{\ln 3x}$
5. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{3x+x^2}$
6. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{2x}$
7. $\lim_{t\to \pi}\frac{5\,\mathrm{sen}^2 t}{1+\cos t}$
8. $\lim_{\theta\to 1}\frac{\theta^2-1}{e^{\theta^2}-e}$
9. $\lim_{x\to 0}\frac{6+6x+3x^2-6e^x}{x-\mathrm{sen}\,x}$
10. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x^3}{5x+7x^3}$
11. $\lim_{x\to 0^+}\frac{\cot 2x}{\cot x}$
12. $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arcsen}(x/6)}{\arctan(x/2)}$
13. $\lim_{t\to 2}\frac{t^2+3t-10}{t^3-2t^2+t-2}$
14. $\lim_{r\to -1}\frac{r^3-r^2-5r-3}{(r+1)^2}$
15. $\lim_{x\to 0}\frac{x-\mathrm{sen}\,x}{x^3}$
16. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4}{x^2+1}$
17. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x}{x^2}$
18. $\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{4x}+x}{e^{4x}-3x}$
19. $\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln\sqrt{x}}{x-1}$
20. $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(3x^2+5)}{\ln(5x^2+1)}$
21. $\lim_{x\to 2}\frac{e^{x^2}-e^{2x}}{x}$
22. $\lim_{x\to 0}\frac{4^x-3^x}{x}$
23. $\lim_{x\to\infty}\frac{x\ln x}{x^2+1}$
24. $\lim_{t\to 0}\frac{1-\cosh t}{t^2}$
25. $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,5x}{x}$
26. $\lim_{x\to 0}\frac{(\mathrm{sen}\,2x)^2}{x^2}$
27. $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^4}$
28. $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{1/x}}{\mathrm{sen}(1/x)}$
29. $\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan^{-1}x}{x-\mathrm{sen}^{-1}x}$
30. $\lim_{t\to 1}\frac{t^{1/3}-t^{1/2}}{t-1}$
31. $\lim_{u\to\pi/2}\frac{\ln(\mathrm{sen}\,u)}{(2u-\pi)^2}$
32. $\lim_{\theta\to\pi/2}\frac{\tan\theta}{\ln(\cos\theta)}$
33. $\lim_{x\to-\infty}\frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}}$
34. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{2x^2}$
35. $\lim_{r\to 0}\frac{r-\cos r}{r-\mathrm{sen}\,r}$
36. $\lim_{t\to\pi}\frac{\csc 7t}{\csc 2t}$
37. $\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{\ln^2(1+3x)}$
38. $\lim_{x\to 3}\left(\frac{\ln x-\ln 3}{x-3}\right)^2.$

Problemas diversos

39. Demuestre que para cualquier entero n,
$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty.$$
40. Demuestre que para cualquier constante positiva k, $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^k}=0$.
41. Repase el teorema de Rolle y demuestre que, con las hipótesis del Teorema 10.1, $g(b)-g(a)\neq 0$. (*Sugerencia:* suponga $g(b)-g(a)=0$, o bien $g(b)=g(a)$. ¿Qué dice el teorema de Rolle?)
42. Defina la función
$$\phi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)].$$
(a) Demuestre que $\phi(a)=\phi(b)=0$.
(b) Aplique el teorema de Rolle de ϕ para obtener el resultado del Teorema 10.1.

[10.1.2]

En los Problemas 43-78 aplique la regla de L'Hôpital donde sea apropiado, para encontrar el límite, si existe.

43. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)$
44. $\lim_{x\to 0^+}(\cot x-\csc x)$
45. $\lim_{x\to\infty}x(e^{1/x}-1)$
46. $\lim_{x\to 0^+}x\ln x$
47. $\lim_{x\to 0^+}x^x$
48. $\lim_{x\to 1^-}x^{1/(1-x)}$
49. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{sen}\,x}\right]$
50. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\mathrm{sen}^{-1}x\right]$
51. $\lim_{x\to 0^+}x\left[\frac{1}{\tan x}-\frac{5}{x}\right]$
52. $\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(x+1)}\right]$
53. $\lim_{\theta\to 0}\theta\csc 4\theta$
54. $\lim_{x\to\pi/2^+}(\mathrm{sen}^2x)^{\tan x}$
55. $\lim_{x\to\infty}(2+e^x)^{e^{-x}}$
56. $\lim_{x\to 0^-}(1-e^x)^{x^2}$
57. $\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{3}{t}\right)^t$
58. $\lim_{h\to 0}(1+2h)^{4/h}$
59. $\lim_{x\to 0}x^{(1-\cos x)}$
60. $\lim_{\theta\to 0}(\cos 2\theta)^{1/\theta^2}$
61. $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2\mathrm{sen}^2(2/x)}$
62. $\lim_{x\to 1}(x^2-1)^{x^2}$
63. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{1+x}-\mathrm{sen}\,x\right]$
64. $\lim_{t\to\pi}(\cos 2t)^{t-\pi}$
65. $\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{5}{x^2+3x-4}\right]$
66. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right]$
67. $\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}$
68. $\lim_{x\to\infty}(x+e^x)^{2/x}$
69. $\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)$
70. $\lim_{t\to\pi/4}(t-\pi/4)\tan 2t$
71. $\lim_{t\to 3}\left[\frac{\sqrt{t+1}}{t^2-9}-\frac{2}{t^2-9}\right]$
72. $\lim_{x\to 0^+}x\ln(\mathrm{sen}\,x)$
73. $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{e^x}-x^2\right]$
74. $\lim_{x\to 0}(1+5\,\mathrm{sen}\,x)^{\cot x}$
75. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{3x+1}\right)^x$
76. $\lim_{\theta\to\pi/2^-}(\sec^3\theta-\tan^3\theta)$
77. $\lim_{x\to 0}(\mathrm{senh}\,x)^{\tan x}$
78. $\lim_{x\to 0^+}x^{\ln^2 x}$

Problemas para calculadora

En los Problemas 79 y 80 complete la tabla dada

79.

x	$(1+x)^{1/x^2}$
0.1	
0.01	

80.

x	$(1+x)^{1/x^2}$
−0.1	
−0.01	

Problemas diversos

81. Aplique la regla de L'Hôpital para evaluar
(a) $\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x^2}$ (b) $\lim_{x\to 0^-}(1+x)^{1/x^2}$
Reexamine los Problemas 79 y 80.
82. Evalúe $\lim_{x\to\infty}[\sqrt{x^2+x}-x]$ sin la ayuda de la regla de L'Hôpital.

En los Problemas 83 y 84 encuentre todos los enteros positivos n para los cuales existe el límite indicado.

83. $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{x^n}$
84. $\lim_{x\to 1^+}\frac{e^{x-1}-x}{(x-1)^n}$

10.2 Integrales impropias

En nuestro estudio de la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ se ha sobreentendido, hasta ahora, que

(*i*) los límites de integración son números finitos, y que

(*ii*) la función f es continua en $[a, b]$, o bien es acotada en ese intervalo, si es discontinua.

Cuando se elimina alguna de estas dos condiciones, se dice que la integral resultante es una **integral impropia**. En la primera subsección que sigue, se considerarán integrales de funciones que están definidas en intervalos no acotados. En la segunda subsección, se examinarán integrales de funciones que no son acotadas en intervalos acotados. En este último tipo de integral impropia, el integrando f tiene una *discontinuidad infinita* en cierto número del intervalo de integración.

10.2.1 Límites de integración infinitos

Primer tipo de integral impropia

Si f está definida en un intervalo no acotado, entonces hay tres integrales impropias posibles con límites de integración infinitos. Sus definiciones se resumen en seguida.

Si f es continua en $[a, \infty)$, entonces

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx. \tag{10.3}$$

Si f es continua en $(-\infty, a]$, entonces

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{s\to-\infty}\int_s^a f(x)\,dx. \tag{10.4}$$

Si f es continua para todo x, y a es *cualquier* número real, se tiene que

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx. \tag{10.5}$$

Cuando los límites (10.3) y (10.4) existen, se dice que las integrales **convergen**. Si el límite no existe, se expresa que la integral diverge. En (10.5) la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ converge si y sólo si convergen *tanto* $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ como $\int_a^\infty f(x)\,dx$. En otras palabras, por ejemplo, si $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ diverge, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ diverge, sin tener en cuenta si converge la otra integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

Ejemplo 1

Evaluar $\int_1^\infty x^2\,dx$, si es posible.

Solución Por (10.3),

$$\int_1^\infty x^2\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^2\,dx = \lim_{t\to\infty}\frac{x^3}{3}\Big]_1^t = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t^3}{3}-\frac{1}{3}\right).$$

Puesto que $\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t^3}{3}-\frac{1}{3}\right) = \infty$, concluimos que la integral diverge.

Ejemplo 2

Evaluar $\int_{-\infty}^{\infty} x^2\,dx$, si es posible.

Solución Como a puede elegirse arbitrariamente, escogemos $a = 1$ y escribimos

$$\int_{-\infty}^\infty x^2\,dx = \int_{-\infty}^1 x^2\,dx + \int_1^\infty x^2\,dx.$$

Pero, en el Ejemplo 1 se vio que divergía $\int_1^\infty x^2\,dx$.esto es suficiente para concluir que $\int_{-\infty}^\infty x^2\,dx$ también diverge.

Ejemplo 3

Evaluar $\int_2^\infty \frac{dx}{x^3}$, si es posible.

Solución Por (10.3),

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^3} = \lim_{t\to\infty}\int_2^t x^{-3}\,dx = \lim_{t\to\infty}\frac{x^{-2}}{-2}\Big]_2^t = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{8}-\frac{1}{2t^2}\right].$$

Puesto que $\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2t^2}\right) = \frac{1}{8}$, la integral converge y

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{8}.$$

Ejemplo 4

Determinar $\int_{-\infty}^0 \cos x\,dx$, si es posible.

Solución Por (10.4),

$$\int_{-\infty}^0 \cos x\,dx = \lim_{s\to-\infty}\int_s^0 \cos x\,dx = \lim_{s\to-\infty}\operatorname{sen} x\Big]_s^0 = \lim_{s\to-\infty}(-\operatorname{sen} s).$$

Como sen s oscila entre -1 y 1, se concluye que no existe $\lim_{s\to-\infty}(-\operatorname{sen} s)$. Por lo tanto, $\int_{-\infty}^0 \cos x\,dx$ diverge.

Ejemplo 5

Evaluar $\int_{-1}^\infty e^{-x}\,dx$, si es posible. interpretar geométricamente el resultado.

Solución Por (10.3),

$$\int_{-1}^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_{-1}^t e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty}(-e^{-x})\Big]_{-1}^t = \lim_{t\to\infty}[e - e^{-t}].$$

Como $\lim_{t\to\infty} e^{-t} = 0$, $\lim_{t\to\infty}[e - e^{-t}] = e$; y de esta manera la integral dada converge a e. En la Figura 10.1(a) puede verse que el área bajo la gráfica de la función no negativa $f(x) = e^{-x}$ en $[-1, t]$ es $e - e^{-t}$. Pero, haciendo $t\to\infty$, $e^{-t}\to 0$, y por lo tanto se puede interpretar $\int_{-1}^\infty e^{-x}\,dx = e$ como la medida del área bajo la gráfica de f en $[-1, \infty)$, como se muestra en la Figura 10.1(b).

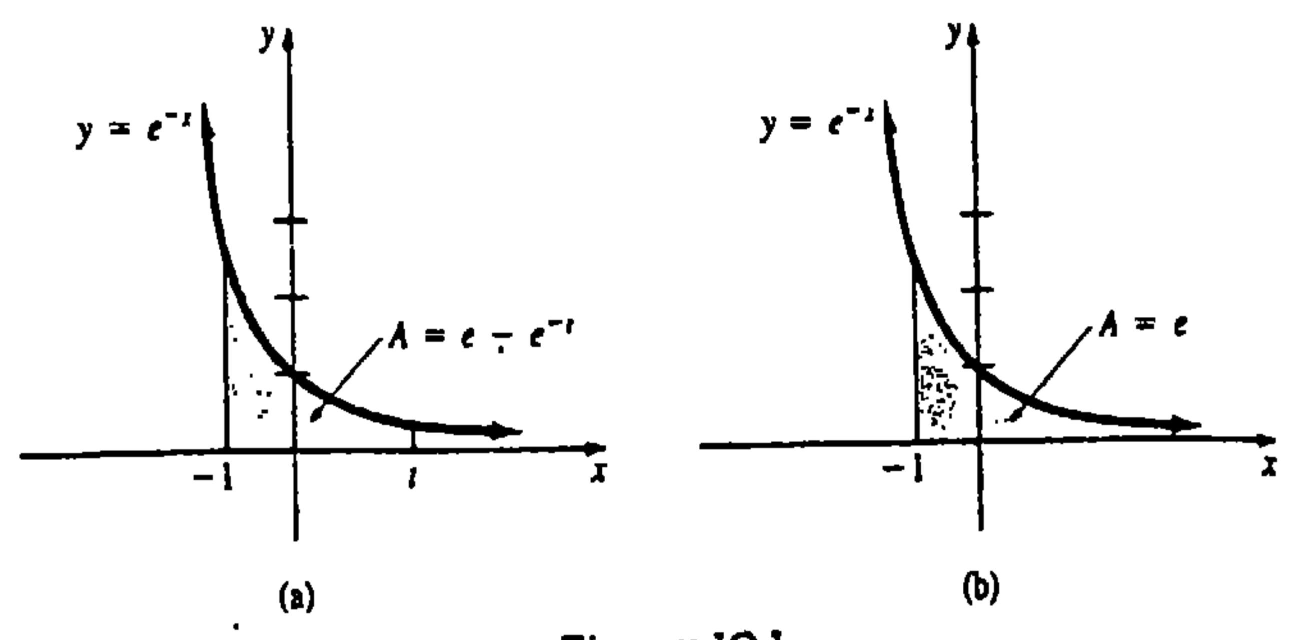


Figura 10.1

Ejemplo 6

Evaluar $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^x + 1}\, dx$, si es posible.

Solución Eligiendo $a = 0$ puede escribirse

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx.$$
$$= I_1 + I_2.$$

Examinemos primero I_1.

$$I_1 = \lim_{s\to-\infty} \int_s^0 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \lim_{s\to-\infty} \ln(e^x+1)\Big]_s^0 = \lim_{s\to-\infty}[\ln 2 - \ln(e^s+1)].$$

Como $e^s + 1 \to 1$ cuando $s \to -\infty$, $\ln(e^s + 1) \to 0$. Por lo tanto, $I_1 = \ln 2$.

En seguida se tiene

$$I_2 = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \lim_{t\to\infty} \ln(e^x+1)\Big]_0^t = \lim_{t\to\infty}[\ln(e^t+1) - \ln 2].$$

Sin embargo, $e^t + 1 \to \infty$ cuando $t \to \infty$, así que $\ln(e^t + 1) \to \infty$. Por lo tanto, I_2 diverge. Se deduce que $\int_{-\infty}^{\infty} e^x dx/(e^x + 1)$ es divergente.

Ejemplo 7

Se deja como ejercicio demostrar que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ converge y que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

Ejemplo 8

En (6.33) de la Sección 6.9 se vio que el trabajo efectuado al elevar una masa m_2 desde la superficie de un planeta de masa m_1 hasta una altura h, estaba dado por

$$W = \int_R^{R+h} \frac{km_1m_2}{r^2}\,dr,$$

en donde R es el radio del planeta. Por consiguiente, la cantidad de trabajo que se efectuaría al elevar m_2 hasta el infinito es

$$W = \int_R^{\infty} \frac{km_1m_2}{r^2}\,dr$$
$$= \lim_{t\to\infty} \int_R^t \frac{km_1m_2}{r^2}\,dr = \frac{km_1m_2}{R}.$$

Véase la Figura 10.2. Del Ejemplo 2 de la Sección 6.9, resulta que el trabajo efectuado al elevar una carga con masa de 5000 kg hasta una distancia infinita desde la superficie terrestre es

$$W = \frac{(6.67 \times 10^{-11})(6.0 \times 10^{24})(5000)}{6.4 \times 10^6} \approx 3.13 \times 10^{11} \text{ joules}.$$

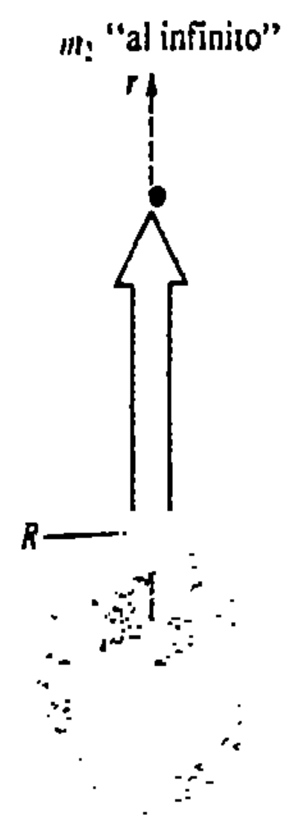


Figura 10.2

Observaciones

(*i*) El lector debe verificar que $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx = \int_{-\infty}^{0} x\,dx + \int_0^{\infty} x\,dx$ diverge, ya que divergen tanto $\int_{-\infty}^{0} x\,dx$ como $\int_0^{\infty} x\,dx$. Cuando se trabaja con integrales que tienen los dos límites infinitos, una *equivocación común* consiste en escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} x\,dx = \lim_{t\to\infty} \frac{x^2}{2}\Big]_{-t}^{t} = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2}\right] = 0.$$

Aunque 0 es una alternativa agradable para una integral divergente, esta "respuesta" es incorrecta. Las integrales del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ requieren la evaluación de *dos* límites *independientes*.

(*ii*) En nuestro trabajo previo con integrales, a menudo se escribió a la ligera que

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \tag{10.6}$$

Con las integrales impropias se debe proceder con un poco más de cuidado. Por ejemplo, la integral $\int_1^{\infty} [1/x - 1/(x + 1)]\,dx$ converge (véase el Problema 25 de los Ejercicios 10.2), pero

$$\int_1^{\infty}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right] dx \neq \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} - \int_1^{\infty} \frac{dx}{x+1}.$$

La propiedad (10.6) permanece válida para integrales impropias siempre que sean convergentes las integrales del lado derecho de la igualdad.

10.2.2 Integrales con integrando que tiende a infinito

Recuérdese que si f es continua en $[a, b]$, entonces existe la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$. Además, si $F'(x) = f(x)$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{10.7}$$

Sin embargo, no se puede evaluar una integral tal como

$$\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx \tag{10.8}$$

mediante el método simple y tradicional indicado en (10.7), ya que $f(x) = 1/x^2$ posee una discontinuidad infinita en $[-1, 2]$. Véase la Figura 10.3. En otras palabras, para la integral (10.8) el "procedimiento"

$$-x^{-1}\Big]_{-2}^{1} = (-1) - \left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

simplemente no tiene sentido. En consecuencia, tenemos otro tipo de integral que demanda un manejo especial.

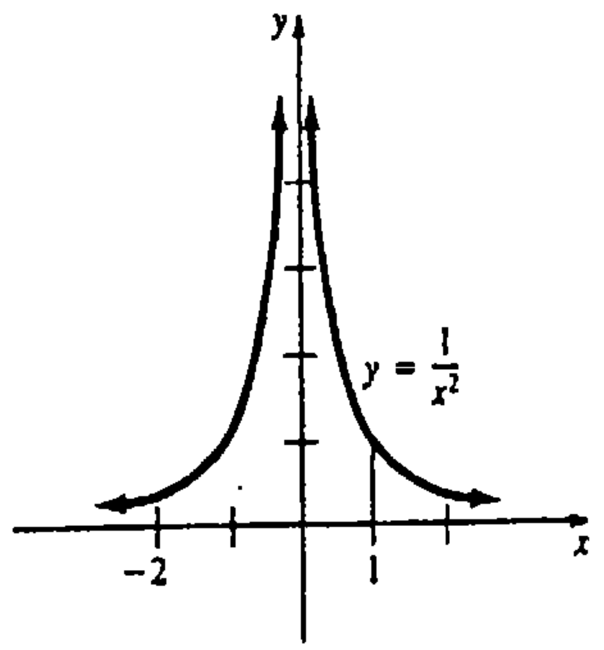


Figura 10.3

Segundo tipo de integral impropia

Una integral $\int_a^b f(x)\,dx$ también es impropia si f tiene una discontinuidad infinita en algún número del intervalo de integración. De nuevo distinguimos tres casos.

Si f es continua en $[a, b)$ y $|f(x)| \to \infty$ cuando $x \to b^-$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\, dx. \tag{10.9}$$

Si f es continua en $(a, b]$ y $|f(x)| \to \infty$ cuando $x \to a^+$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{s\to a^+} \int_s^b f(x)\, dx. \tag{10.10}$$

Si $|f(x)| \to \infty$ cuando $x \to c$ para algún c en (a, b) y si f es continua en todos los demás números de $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx. \tag{10.11}$$

Como antes, se dice que una integral impropia converge o diverge según sea que el límite que la define exista o no exista, correspondientemente. En (10.11) la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ converge si y sólo si $\int_a^c f(x)\,dx$ y $\int_c^b f(x)\,dx$ convergen en el sentido de (10.9) y (10.10), respectivamente.

Ejemplo 9

Evaluar $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$, si es posible.

Solución Obsérvese que $f(x) = 1/\sqrt{x} \to \infty$ cuando $x \to 0^+$. Así que, por (10.10),

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{s\to 0^+} \int_s^4 x^{-1/2}\, dx = \lim_{s\to 0^+} 2x^{1/2}\Big]_s^4 = \lim_{s\to 0^+} [4 - 2s^{1/2}].$$

Como $\lim_{s\to 0^+} [4 - 2s^{1/2}] = 4$, la integral converge y

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 4.$$

El valor 4 se puede considerar como una medida del área bajo la gráfica de f en el intervalo $[0, 4]$, como se ve en la Figura 10.4.

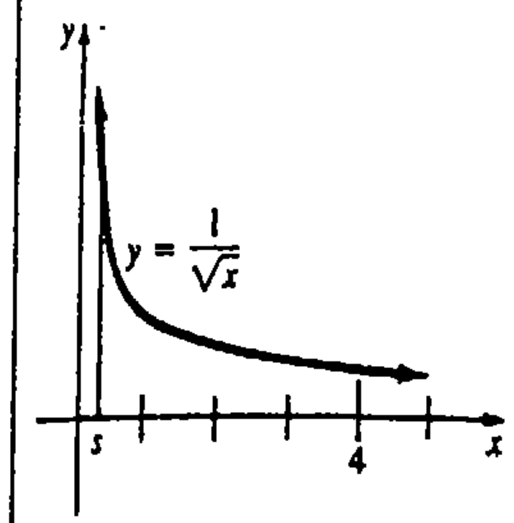


Figura 10.4

Ejemplo 10

Evaluar $\int_0^e \ln x\, dx$, si es posible.

Solución En este caso sabemos que $f(x) = \ln x \to -\infty$ cuando $x \to 0^+$. Aplicando (10.10) e integración por partes resulta

$$\int_0^e \ln x\, dx = \lim_{s\to 0^+} \int_s^e \ln x\, dx = \lim_{s\to 0^+} (x \ln x - x)\Big]_s^e = \lim_{s\to 0^+} s(1 - \ln s).$$

Ahora bien, cuando el límite se escribe

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{1 - \ln s}{1/s},$$

reconocemos la forma indeterminada ∞/∞. Así que, por la regla de L'Hôpital

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{1 - \ln s}{1/s} = \lim_{s\to 0^+} \frac{-1/s}{-1/s^2} = \lim_{s\to 0^+} s = 0.$$

La integral converge y

$$\int_0^e \ln x\, dx = 0.$$

Ejemplo 11

Evaluar $\int_1^5 \frac{dx}{(x-2)^{1/3}}$, si es posible.

Solución El integrando tiene una discontinuidad infinita en 2. Consecuentemente, en virtud de (10.11) se escribe

$$\int_1^5 \frac{dx}{(x-2)^{1/3}} = \int_1^2 (x-2)^{-1/3}\,dx + \int_2^5 (x-2)^{-1/3}\,dx = I_1 + I_2.$$

Ahora bien,

$$I_1 = \lim_{t\to 2^-}\int_1^t (x-2)^{-1/3}\,dx = \lim_{t\to 2^-}\frac{3}{2}(x-2)^{2/3}\Big]_1^t = \frac{3}{2}\lim_{t\to 2^-}[(t-2)^{2/3} - 1] = -\frac{3}{2}$$

$$I_2 = \lim_{s\to 2^+}\int_s^5 (x-2)^{-1/3}\,dx = \lim_{s\to 2^+}\frac{3}{2}(x-2)^{2/3}\Big]_s^5 = \frac{3}{2}\lim_{s\to 2^+}[3^{2/3} - (s-2)^{2/3}] = \frac{3^{5/3}}{2}.$$

Como convergen tanto I_1 como I_2, la integral dada converge, y

$$\int_1^5 \frac{dx}{(x-2)^{1/3}} = -\frac{3}{2} + \frac{3^{5/3}}{2} \approx 1.62.$$

Obsérvese de la Figura 10.5 que este último número no es una medida de área. ¿Por qué?

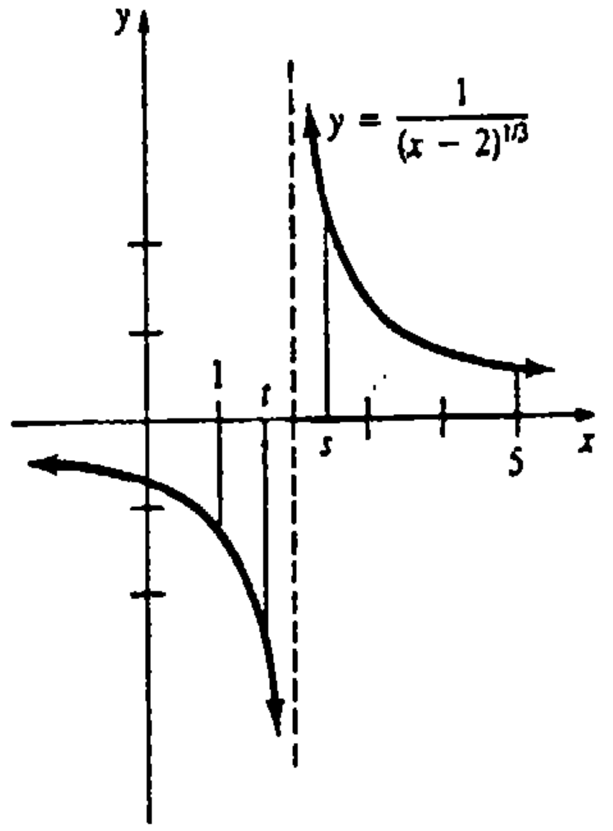


Figura 10.5

Ejemplo 12

Evaluar $\int_{-2}^{1} \frac{dx}{x^2}$, si es posible.

Solución Esta es la integral discutida en (10.8). Nuevamente en virtud de (10.11) se tiene

$$\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-2}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2}.$$

Como

$$\int_{-2}^{0} \frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to 0^-}\int_{-2}^{t} x^{-2}\,dx = \lim_{t\to 0^-} -x^{-1}\Big]_{-2}^{t} = \lim_{t\to 0^-}\left[-\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right] = \infty,$$

encontramos que no hay necesidad de evaluar $\int_0^1 dx/x^2$. La integral dada $\int_{-2}^{1} dx/x^2$ diverge.

Observaciones

(*i*) Es posible que una integral tenga límites de integración infinitos *y* un integrando con una discontinuidad infinita. Para determinar si converge una integral tal como

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

se secciona la integración en algún punto de continuidad del integrando que sea conveniente; por ejemplo, $x = 2$:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} + \int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Si convergen ambas integrales impropias del lado derecho de la igualdad, entonces la integral original es convergente. Véanse los Problemas 81 y 82 de los Ejercicios 10.2.

(*ii*) El integrando de $\int_a^b f(x)\,dx$ también puede tener discontinuidades infinitas tanto en $x = a$ como en $x = b$. En este caso la integral impropia se define por medio de (10.11). Por último, si un integrando f tiene una discontinuidad infinita en varios números de (a, b), entonces la integral impropia se define mediante una extensión natural de (10.11). Véanse los Problemas 83 y 84 de los Ejercicios 10.2.

Ejercicios 10.2

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 987.

[10.2.1]

En los Problemas 1-28, evalúe la integral impropia indicada o demuestre que es divergente.

1. $\int_3^\infty \frac{dx}{x^4}$
2. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$
3. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{0.99}}$
4. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1.01}}$
5. $\int_{-\infty}^{3} e^{2x}\,dx$
6. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\,dx$
7. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$
8. $\int_1^\infty \frac{\ln t}{t^2}\,dt$
9. $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^3}$
10. $\int_e^\infty \ln x\,dx$
11. $\int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2}\,dt$
12. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$
13. $\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{(x^2+9)^2}\,dx$
14. $\int_5^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}}$
15. $\int_2^\infty ue^{-u}\,du$
16. $\int_{-\infty}^{3} \frac{x^3}{x^4+1}\,dx$
17. $\int_{2/\pi}^{\infty} \frac{\text{sen}(1/x)}{x^2}\,dx$
18. $\int_{-\infty}^{\infty} \cos 3\theta\,d\theta$
19. $\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$
20. $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+3}$
21. $\int_0^\infty e^{-x}\,\text{sen}\,x\,dx$
22. $\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$
23. $\int_{1/2}^{\infty} \frac{x+1}{x^3}\,dx$
24. $\int_0^\infty (e^{-x} - e^{-2x})^2\,dx$
25. $\int_1^\infty \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right] dx$
26. $\int_0^\infty \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2+9}\right] dx$
27. $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2+6x+5}$
28. $\int_{-\infty}^{-3} \frac{dx}{x^2-4}$

En los Problemas 29 y 30, encuentre el área bajo la gráfica de la función dada, en el intervalo indicado.

29. $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^2}$; $[1, \infty)$

30. $f(x) = \dfrac{10}{x^2 + 25}$; $(-\infty, 5]$.

31. Considere la región comprendida entre las gráficas de $y = 1/x$ y $v = 0$ en el intervalo $[1, \infty)$.

(a) Demuestre que la región no tiene área finita.

(b) Demuestre que el sólido de revolución que se forma haciendo girar la región en torno al eje x tiene volumen finito. Véase la Figura 10.6.

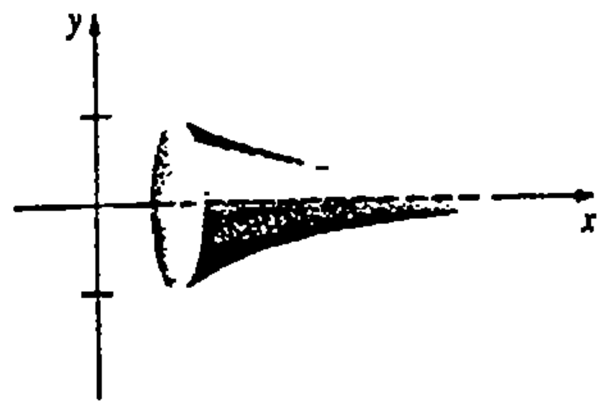


Figura 10.6

32. Halle el volumen del sólido de revolución que se forma haciendo girar la región comprendida entre las gráficas de $y = xe^{-x}$ y $y = 0$ en $[0, \infty)$, en torno al eje x.

33. Determine el trabajo efectuado en contra de la gravedad al elevar una carga con masa de 10,000 kg hasta una distancia infinita por arriba de la superficie lunar. (*Sugerencia:* revise la página 350 de la Sección 6.9.)

34. El trabajo efectuado por una fuerza externa al mover radialmente, una carga eléctrica de prueba q_0 desde un punto A hasta un punto B dentro del campo eléctrico de una carga q, se define como:

$$W = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0}\int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2};$$

Véase la Figura 10.7.

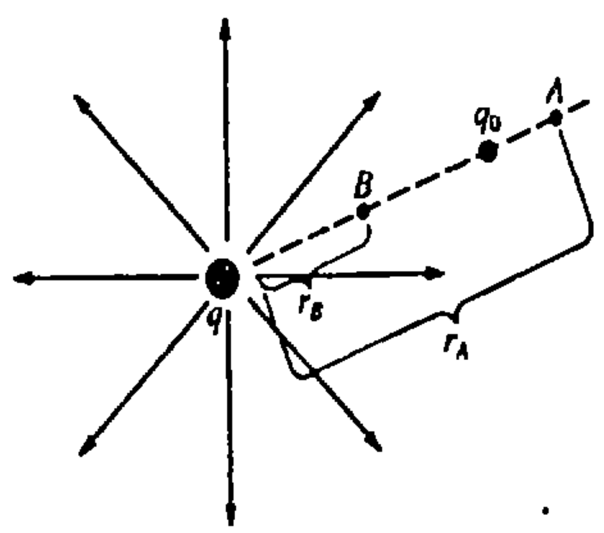


Figura 10.7

(a) Demuestre que $W = \dfrac{qq_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_B} - \dfrac{1}{r_A}\right)$.

(b) Calcule el trabajo efectuado al transportar la carga de prueba desde una distancia infinita hasta el punto B.

35. Una función densidad de probabilidad es cualquier función no negativa f definida en un intervalo $[a, b]$, para la cual $\int_a^b f(x)\,dx = 1$. Verique que

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ ke^{-kx}, & x \geq 0, \quad k > 0 \end{cases}$$

es una función densidad de probabilidad en $(-\infty, \infty)$.

36. El valor capital de una corriente continua de ingresos se define como $V = \int_0^\infty f(t)e^{-rt}\,dt$, en donde f es la rapidez con que fluye el ingreso por año, y r es la tasa anual de interés capitalizado continuamente. Encuentre el valor capital de una corriente de ingresos cuya rapidez es $f(t) = 500t$, si la tasa de interés es de 10%.

La **transformada de Laplace*** de una función $y = f(x)$, definida mediante

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

es muy útil en ciertos campos de la matemática aplicada. En los Problemas 37-40, obtenga la transformada de Laplace de la función indicada, y establezca una restricción sobre s para que la integral sea convergente.

37. $f(x) = 1$

38. $f(x) = x$

39. $f(x) = e^x$

40. $f(x) = e^{-5x}$

Problemas diversos

En los Problemas 41-44, determine todos los valores de k de manera que sea convergente la integral indicada.

41. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^k}$

42. $\displaystyle\int_{-\infty}^1 x^{2k}\,dx$

43. $\displaystyle\int_0^\infty e^{kx}\,dx$

44. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{(\ln x)^k}{x}\,dx$

---

* Pierre Simon de Laplace (1749-1827) fue un notable matemático y astrónomo francés, llamado por algunos de sus entusiastas contemporáneos, el "Newton de Francia". Aunque Laplace hizo uso de esta transformación integral particular en su trabajo en teoría de la probabilidad, es posible que la integral haya sido descubierta primero por Euler.

El siguiente es un criterio de comparación para convergencia. Supóngase que f y g son continuas y que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para $x \geq a$. Si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ también lo hará. En los Problemas 45-48 aplique este criterio para demostrar que la integral indicada converge.

45. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx$

46. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^3 + 4}$

47. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x + e^x}$

48. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$

49. Demuestre que no es finita el área de la superficie del sólido de revolución descrito en el Problema 31(b).* (*Sugerencia:* repase la sección 6.6 y considere la desigualdad $\sqrt{x^4 + 1}/x^3 > 1/x$.)

50. Otra integral de las matemáticas aplicadas es la llamada **función gamma:**

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt, \qquad \alpha > 0.$$

Demuestre que

(a) $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, y que

(b) $\Gamma(n + 1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n = n!$.[†]

51. La **distribución gamma** tiene un papel importante para modelar los tiempos de llegadas de los clientes a una ventanilla de retiros bancarios. También se usa esta distribución en los estudios de control de tránsito. En ambos casos una función densidad de probabilidad (véase el Problema 35) toma la forma $f(x) = cx^n e^{-\beta x}$, para $x > 0$, $\beta > 0$ y n entero positivo. Obtenga c de modo que $\int_0^\infty f(x)\,dx = 1$. (*Sugerencia:* sea $t = \beta x$ y aplíquese el resultado del Problema 50.)

Problemas para calculadora

52. (a) Demuestre que la integral convergente $\int_1^\infty e^{1/x}\,dx/x^{5/2}$ se puede escribir como $\int_0^1 t^{1/2}e^t\,dt$.

(b) Utilice el resultado de la parte (a) y la regla de Simpson con $n = 4$ para hallar una aproximación a la integral original.

---

* Esto significa que la parte *exterior* del cono que se muestra en la Figura 10.6 no puede recubrirse con una cantidad finita de pintura. Pero, puesto que el cono tiene volumen finito, se podría conjeturar (aunque incorrectamente) que la parte *interior* sí podría ser pintada llenando el cono con pintura.

† Una demostración rigurosa de este hecho requiere inducción matemática. El símbolo $n!$ se lee "factorial n".

[10.2.2]

En los Problemas 53-72 evalúe la integral impropia indicada o demuestre que diverge.

53. $\displaystyle\int_0^5 \frac{dx}{x}$

54. $\displaystyle\int_0^8 \frac{dx}{x^{2/3}}$

55. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{0.99}}$

56. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{1.01}}$

57. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2 - x}}$

58. $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$

59. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{5/3}}$

60. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x - 1}}$

61. $\displaystyle\int_0^1 x \ln x\,dx$

62. $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x \ln x}$

63. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan t\,dt$

64. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2\theta}{\sqrt{\tan\theta}}\,d\theta$

65. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}\,dx$

66. $\displaystyle\int_0^{27} \frac{e^{x^{1/3}}}{x^{2/3}}\,dx$

67. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{1 + x}}\,dx$

68. $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{x^2 - 1}$

69. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$

70. $\displaystyle\int_0^2 \frac{e^w}{\sqrt{e^w - 1}}\,dw$

71. $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$

72. $\displaystyle\int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1 - x}}\right]dx$

En los Problemas 73 y 74 determine si el área bajo la gráfica de la función dada en el intervalo indicado es finita.

73. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{16 - x^2}}$, $[0, 4]$

74. $f(x) = \sec x$, $[0, \pi/2]$

75. Considere la región comprendida entre las gráficas de $y = 1/\sqrt{x + 2}$ y $y = 0$ en el intervalo $[-2, 1]$.

(a) Demuestre que la región tiene área finita.

(b) Demuestre que el sólido de revolución que se forma haciendo girar la región en torno al eje x tiene volumen infinito.

76. La región comprendida entre las gráficas de $y = 1/x^{3/2}$ y $y = 0$ en el intervalo $[0, 4]$ se hace girar en torno al eje y. Determine si el volumen del sólido de revolución es finito.

77. Determine si es finita el área de la región comprendida entre las gráficas de

$$y = \frac{1}{x} \quad y \quad y = \frac{1}{x(x^2+1)}$$

en el intervalo $[0, 1]$.

78. Encuentre el área de la región comprendida entre las gráficas de $y = 1/\sqrt{x-1}$ y $y = -1/\sqrt{x-1}$ en el intervalo $[1, 5]$.

En los Problemas 79 y 80 determine todos los valores de k tales que la integral dada sea convergente.

79. $\int_0^1 \frac{dx}{x^k}$ 80. $\int_0^1 x^k \ln x \, dx$

En los Problemas 81-84 determine si la integral dada converge o diverge.

81. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ 82. $\int_{-\infty}^{4} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$

83. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 84. $\int_0^2 \frac{2x-1}{\sqrt[3]{x^2-x}}\,dx$

85. Examine si $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ es una integral impropia.

Examen • Capítulo 10

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 987.

En los Problemas 1-20 conteste verdadero o falso.

1. Un límite de la forma $\infty - \infty$ siempre tiene el valor 0. ____

2. Un límite de la forma ∞/∞ es indeterminado. ____

3. Un límite de la forma $0/\infty$ es indeterminado. ____

4. Si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ y $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ son ambos de la forma ∞/∞, entonces el primer límite no existe. ____

5. Un límite de la forma 1^{∞} siempre es 1. ____

6. Para una forma indeterminada, la regla de L'Hôpital dice que el límite de un cociente es igual a la derivada del cociente. ____

7. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ para todo entero n. ____

8. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1+\cos x}{x}$ ____

9. Si $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ y $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ convergen, entonces $\int_a^{\infty} [f(x) + g(x)]\,dx$ también converge. ____

10. Si $\int_a^{\infty} [f(x) + g(x)]\,dx$ converge, entonces $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ converge también. ____

11. Si f es continua para todo x y $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ diverge, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ diverge también. ____

12. La integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ se define por $\lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,dx$. ____

13. $\int_0^1 x^{-0.999}\,dx$ converge. ____

14. $\int_1^{\infty} x^{-0.999}\,dx$ diverge. ____

15. $\int_2^{\infty} \left[\frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{e^x-1}\right] dx$ diverge puesto que $\int_2^{\infty} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$ asimismo diverge. ____

16. Si $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$, entonces $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ converge. ____

17. Si una función positiva f tiene una discontinuidad infinita en un número de $[a, b]$, entonces el área bajo la gráfica en el intervalo también es infinita. ____

18. Cuando una región con área infinita se hace girar en torno a un eje, se genera siempre un sólido de revolución de volumen infinito. ____

19. $\int_0^{\pi} \sec^2 x\,dx = \tan x\Big]_0^{\pi} = 0$. ____

20. $\lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos x}{(x-\pi/2)^2} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{2(x-\pi/2)} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos x}{2} = 0$. ____

En los Problemas 21-36 evalúe el límite indicado, si existe.

21. $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+4x+4}{x^2+x-2}$ 22. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+5}{x^2-1}$

23. $\lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3} - \tan(\pi/x^2)}{x - \sqrt{3}}$ 24. $\lim_{\theta\to -\pi} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta + \pi}$

25. $\lim_{x\to 2} \frac{3x^2-4x-2}{x-2}$

26. $\lim_{x\to -\infty} \frac{-x^2+3x+1}{4x^2-2x}$

27. $\lim_{\theta\to 0} \frac{10\theta - 5\operatorname{sen} 2\theta}{10\theta - 2\operatorname{sen} 5\theta}$ 28. $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x}$

29. $\lim_{x\to\infty} x\left(\cos\frac{1}{x} - e^{2/x}\right)$

30. $\lim_{y\to 0} \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{\ln(y+1)}\right]$

31. $\lim_{t\to 0} \frac{(\operatorname{sen} t)^2}{\operatorname{sen} t^2}$

32. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 5x}{e^{3x/2} - e^{-x/2}}$

33. $\lim_{x\to 0^+} (3x)^{-1/\ln x}$ 34. $\lim_{x\to 0} (2x + e^{3x})^{4/x}$

35. $\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x+e^{2x}}{1+e^{4x}}\right)$ 36. $\lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^2$

En los Problemas 37-48 evalúe la integral indicada o demuestre que diverge.

37. $\int_0^3 x(x^2-9)^{-2/3}\,dx$

38. $\int_0^5 x(x^2-9)^{-2/3}\,dx$

39. $\int_{-\infty}^{0} (x+1)e^x\,dx$ 40. $\int_0^{\infty} \frac{e^{2x}}{e^{4x}+1}\,dx$

41. $\int_3^{\infty} \frac{dx}{1+5x}$ 42. $\int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2+4)^2}\,dx$

43. $\int_0^{e} \ln\sqrt{x}\,dx$ 44. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 t}{\tan^3 t}\,dt$

45. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1-\cos x}$ 46. $\int_0^{\infty} \frac{x}{x+1}\,dx$

47. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}}$ 48. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}}$

49. Determine el área de la región comprendida entre las gráficas de $y = e^{-x}$ y $y = e^{-3x}$ en $[0, \infty)$.

50. Considere la región comprendida entre las gráficas de $y = 1/(1-x)^{1/3}$ y $y = 0$ en el intervalo $[0, 1]$.

(a) Encuentre el área de la región.

(b) Determine el volumen del sólido de revolución que se forma haciendo girar la región en torno al eje x.

(c) Evalúe el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región en torno a la recta $x = 1$.

51. Considere la gráfica de $f(x) = (x^2-1)/(x^2+1)$ presentada en la Figura 10.8.

(a) Determine si tiene área finita la región R_1, comprendida entre la gráfica de f y su asíntota horizontal.

(b) Determine si tienen áreas finitas las regiones R_2 y R_3.

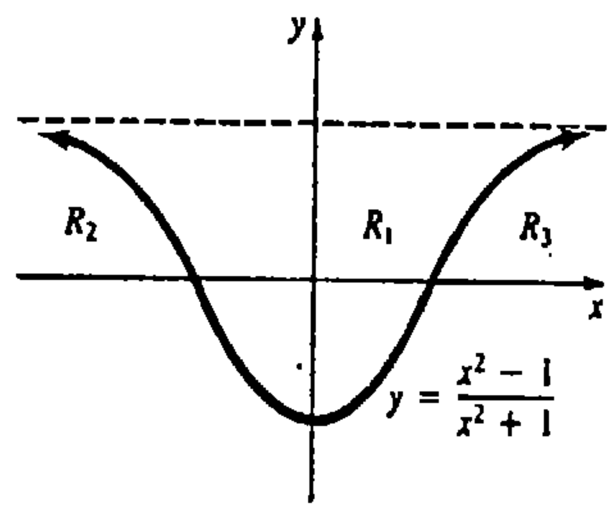


Figura 10.8

52. Demuestre que $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$.

53. En biología se llama *clase anual* a la colección de crías que resultan de un periodo de reproducción anual. En muchos modelos para la población de animales se supone que el número de crías $N(t)$ de una cierta clase anual vivas todavía después de t años, está dado por $N(t) = N_0 e^{-kt}$, para cierta $k > 0$. Además, se puede demostrar que el periodo medio de vida de un animal está dado por $E = (-1/N_0)\int_0^{\infty} tN'(t)\,dt$. Determine el periodo medio de vida del pez "Halibut del Pacífico", si $k = 0.2$.

11

Sucesiones y series

La experiencia diaria proporciona una noción de lo que es una **sucesión**. Por ejemplo, las expresiones "sucesión de eventos" o "sucesión de números" intuitivamente dan la idea de una disposición consecutiva de los eventos E o los números n, considerados en cierto orden: $E_1, E_2, E_3, \ldots$, o bien $n_1, n_2, n_3, \ldots$

Todo estudiante de matemáticas está familiarizado también con el hecho de que cualquier número real se puede escribir como una fracción decimal. Por ejemplo, el número racional $\frac{1}{3}$ tiene la representación

$$\frac{1}{3} = 0.3333\ldots,$$

en donde los tres misteriosos puntos suspensivos (...) significan que los dígidos 3 continúan interminablemente. Esto quiere decir que 0.3333 ... es la suma infinita o la **serie infinita**:

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10.000} + \cdots.$$

En este capítulo se verá que los conceptos de sucesión y serie infinita están relacionados.

11.1 Sucesiones

Si el dominio de una función f es el conjunto de los enteros positivos, entonces los elementos $f(n)$ de su contradominio se pueden disponer por orden creciente de n:

$$f(1), f(2), f(3), f(4), \ldots, f(n), \ldots.$$

Ejemplo 1

Si n es un entero positivo, entonces los primeros elementos del contradominio de $f(n) = (1 + 1/n)^n$ son

$$f(1) = 2, \quad f(2) = \frac{9}{4}, \quad f(3) = \frac{64}{27}, \ldots \qquad (11.1)$$

Las funciones cuyos dominios son el conjunto completo de los enteros positivos reciben un nombre especial.

DEFINICIÓN 11.1

Una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos.* □

Términos

En lugar de emplear la notación funcional de costumbre $f(n)$, una sucesión se denota usualmente por el símbolo $\{a_n\}$. Los **términos** de la sucesión (los elementos del ámbito o contradominio de la función) se forman haciendo que n tome los valores 1, 2, 3, . en el **término general** a_n. Así que, $\{a_n\}$ es equivalente a

$$a_1, a_2, a_3, \ldots.$$

Ejemplo 2

Escribir los cuatro primeros términos de las sucesiones

(*a*) $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$, (*b*) $\{n^2 + n\}$, (*c*) $\{(-1)^n\}$.

Solución Sustituyendo $n = 1, 2, 3, 4$ en los términos generales respectivos, obtenemos

(*a*) $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \ldots$ (*b*) $2, 6, 12, 20, \ldots$ (*c*) $-1, 1, -1, 1, \ldots.$

* Algunos textos emplean el término *sucesión infinita*. Cuando el dominio de una función es un subconjunto finito del conjunto de los enteros positivos se tiene una *sucesión finita*. Todas las sucesiones consideradas en esta discusión serían infinitas.

Sucesiones convergentes

En la sucesión (*a*) del ejemplo 2, es claro que cuando n se vuelve progresivamente más grande, los valores $a_n = 1/\sqrt{n}$ disminuyen sin cesar. En efecto, cuando $n \to \infty$, $1/\sqrt{n} \to 0$. Decimos que los términos $1/\sqrt{n}$ tienden al límite 0 y que la sucesión $\{1/\sqrt{n}\}$ converge a 0. Por el contrario, los términos de las sucesiones (*b*) y (*c*) no tienden a un límite cuando $n \to \infty$.

En general, se tiene la siguiente definición.

DEFINICIÓN 11.2

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ converge a un número L si para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo N tal que

$$|a_n - L| < \varepsilon \text{ siempre que } n > N. \qquad (11.2)$$

□

Sucesiones divergentes

Si $\{a_n\}$ es una sucesión convergente, (11.2) significa que los términos a_n se pueden acercar arbitrariamente a L para n suficientemente grande. Indicamos que una sucesión es convergente escribiendo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Cuando $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe, se dice entonces que la sucesión **diverge**. La Figura 11.1 ilustra varias maneras en las que una sucesión $\{a_n\}$ puede converger a un número L. Si $\{a_n\}$ converge, entonces todos los términos a_n, *excepto un número finito* de ellos, están en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, como se indica en la Figura 11.1(a).

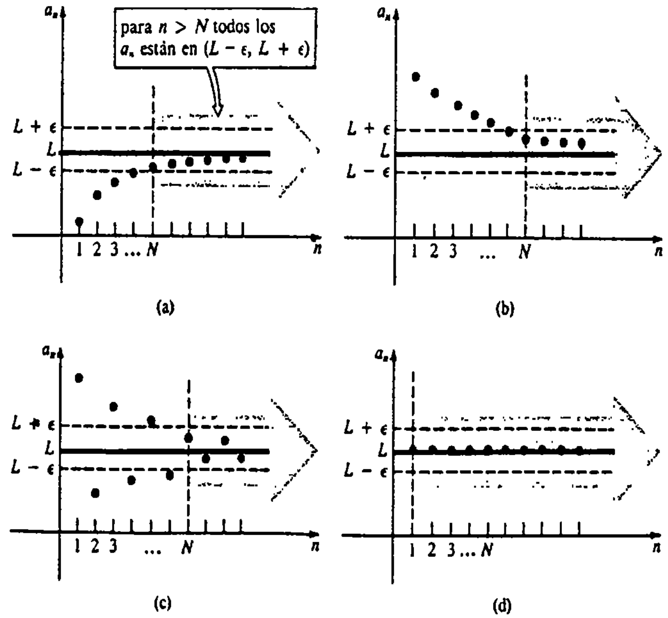


Figura 11.1

Ejemplo 3

Demostrar que $\{1/\sqrt{n}\}$ converge a 0, aplicando la Definición 11.2.

Solución Sea $\varepsilon > 0$ dado. Como los términos de la sucesión son positivos, la desigualdad $|a_n - 0| < \varepsilon$ equivale a

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

Esto implica que $\sqrt{n} > 1/\varepsilon$, o bien $n > 1/\varepsilon^2$. Por lo tanto, sólo se necesita elegir N como el primer entero positivo mayor que $1/\varepsilon^2$.

Si en el Ejemplo 3 hubiésemos elegido $\varepsilon = 0.01$, por ejemplo, entonces $|1/\sqrt{n} - 0| = 1/\sqrt{n} < 0.01$, siempre que $n > 10\,000$.

Para determinar en la práctica si una sucesión $\{a_n\}$ converge o diverge, se considera directamente $\lim_{n\to\infty} a_n$, y se procede como en el análisis de $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Así que, si

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{o bien} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty, \tag{11.3}$$

la sucesión $\{a_n\}$ es divergente necesariamente.

Ejemplo 4

La sucesión $\{n^2 + n\}$ es divergente ya que $\lim_{n\to\infty}(n^2 + n) = \infty$.

Una sucesión puede diverger de modo distinto al indicado en (11.3).

Ejemplo 5

La sucesión $\{(-1)^n\}$ diverge ya que no existe $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$. El término general $(-1)^n$ alterna entre 1 y −1 cuando $n\to\infty$.

Ejemplo 6

Determinar si la sucesión

$$\left\{\frac{3n(-1)^n}{n+1}\right\}$$

converge o diverge.

Solución

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n(-1)^n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3(-1)^n}{1+1/n}.$$

Aunque $3/(1 + 1/n) \to 3$ cuando $n \to \infty$, el límite precedente, no obstante, no existe. Debido al término $(-1)^n$, se ve que cuando $n \to \infty$

$$a_n \to 3, \text{ cuando } n \text{ es par, y } a_n \to -3, \text{ cuando } n \text{ es impar.}$$

La sucesión es divergente.

Sucesión constante

Una sucesión de constantes $c, c, c, \ldots$

se escribe $\{c\}$ y converge a c. Véase la Figura 11.1(d).

Ejemplo 7

La sucesión $\{\pi\}$ converge a π.

Ejemplo 8

Demostrar que la sucesión $\{(n + 1)^{1/n}\}$ converge a 1.

Solución Si $y = (x + 1)^{1/x}$, se reconoce entonces la forma indeterminada ∞^0 cuando $x \to \infty$. Por lo tanto, por la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 0.$$

Consecuentemente,

$$\lim_{n\to\infty} (n + 1)^{1/n} = e^0 = 1.$$

Ejemplo 9

Determinar si la sucesión

$$\left\{\sqrt{\frac{n}{9n+1}}\right\}$$

converge o diverge.

Solución Puesto que la regla de L'Hôpital muestra que $n/(9n + 1) \to \frac{1}{9}$. Cuando $n\to\infty$, podemos escribir

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{9n+1}} = \sqrt{\lim \frac{n}{9n+1}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}.$$

La sucesión converge a $\frac{1}{3}$.

Propiedades

Las siguientes **propiedades** de las sucesiones son análogas a las presentadas en los Teoremas 2.3 y 2.5.

TEOREMA 11.1

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones convergentes. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = L_2$, entonces

(*i*) $\lim_{n\to\infty} ka_n = k \lim_{n\to\infty} a_n = kL_1$, en donde k es constante (*ii*) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = L_1 + L_2$

(*iii*) $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = L_1 \cdot L_2$

(*iv*) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{L_1}{L_2}, \quad L_2 \neq 0.$ □

Ejemplo 10

En virtud del Ejemplo 3 y del Teorema 11.1(*i*), vemos que $\{5/\sqrt{n}\}$ converge a $5 \cdot 0 = 0$.

Ejemplo 11

Aplique el Teorema 11.1 para demostrar que $\{1/n\}$ converge a 0.

Solución Aplicando el Ejemplo 3 y el Teorema 11.1(*iii*),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \cdot 0 = 0.$$

Los dos siguientes teoremas deben parecer convincentes luego de una cierta reflexión.

TEOREMA 11.2

(*i*) Para $|r| < 1$ la sucesión $\{r^n\}$ converge a 0.

(*ii*) Para $|r| > 1$ la sucesión $\{r^n\}$ diverge. □

TEOREMA 11.3

Para cualquier número racional positivo r, la sucesión $\{1/n^r\}$ converge a 0. □

La demostración del Teorema 11.2(*i*) resulta de la Definición 11.2 y se deja como ejercicio.

Ejemplo 12

(*a*) La sucesión $\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n\right\}$, o sea $\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \ldots,$

diverge por el Teorema 11.2(*ii*) ya que $r = \frac{3}{2} > 1$.

(*b*) La sucesión $\{e^{-n}\}$ converge por el Teorema 11.2(*i*) ya que $e^{-1} = 1/e < 1$.

Ejemplo 13

Determinar si la sucesión

$$\left\{\frac{e^n}{n + 4e^n}\right\}$$

converge y diverge.

Solución Obsérvese que $e^n \to \infty$ y $n + 4e^n \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Si $f(x) = e^x/(x + 4e^x)$, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x)$ es de la forma indeterminada ∞/∞. Por la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x + 4e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1 + 4e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{4e^x} = \frac{1}{4}.$$

Así que, $$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n + 4e^n} = \frac{1}{4}.$$

La sucesión converge a $\frac{1}{4}$.

Ejemplo 14

Determinar si la sucesión

$$\left\{\frac{2 - 3e^{-n}}{6 + 4e^{-n}}\right\}$$

converge o diverge.

Solución Obsérvese que $2 - 3e^{-n} \to 2$ y $6 + 4e^{-n} \to 6$ cuando $n \to \infty$. Según el Teorema 11.1(*iv*),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 - 3e^{-n}}{6 + 4e^{-n}} = \frac{\lim_{n\to\infty}(2 - 3e^{-n})}{\lim_{n\to\infty}(6 + 4e^{-n})} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

La sucesión converge a $\frac{1}{3}$.

Ejemplo 15

En virtud de los Teoremas 11.1(*ii*) y 11.3 se ve que $\{10 + 4/n^{3/2}\}$ converge a 10.

Observación

En 1772 el astrónomo alemán Johann Elert Bode estudió la sucesión

$$0, 3, 6, 12, 24, 48, 96, \ldots$$

Sumando 4 a cada término y dividiendo el resultado entre 10, obtuvo

$$0.4, 0.7, 1.0, 1.6, 2.8, 5.2, 10.0, \ldots$$

Si el número 1 representa una unidad astronómica (u.a.),* entonces 0.4, 0.7, 1.0, 1.6, 5.2 y 10 predicen con bastante aproximación las distancias de los planetas Mercurio, Venus, la Tierra, Marte, Júpiter y Saturno, con respecto al Sol. Sin embargo, en aquella época no se sabía que existiera algún planeta a una distancia de 2.8 u.a. desde el Sol. El descubrimiento en 1781 del planeta Urano, a una distancia del Sol coincidente con el siguiente término de la sucesión de Bode (véase el Problema 56 de los Ejercicios 11.1), trajo consigo un frenesí de la actividad observatoria de los astrónomos en busca del planeta faltante. En 1801, el asteroide Ceres fue el primero de miles de ellos, que al ser descubiertos llenaron el llamado hueco planetario entre Marte y Júpiter. Las primeras especulaciones se centraron en la creencia de que los asteroides eran restos de un planeta que estalló. Véase la Figura 11.2.

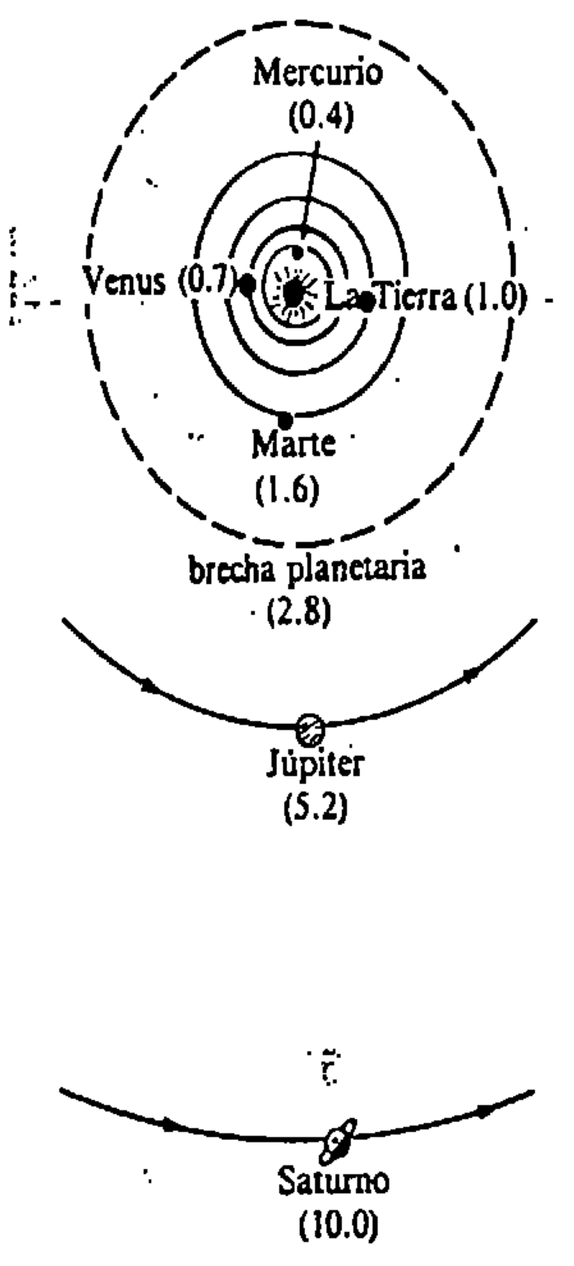


Figura 11.2

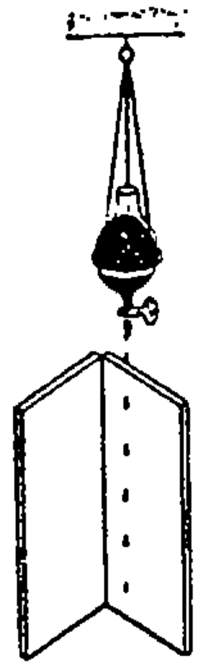


Figura 11.3

Muchos años atrás, Leonardo da Vinci (1452-1519) pudo percibir la velocidad de un cuerpo en caída examinando una sucesión. Leonardo hizo que cayeran gotas de agua, a intervalos de tiempo igualmente espaciados, entre dos tablillas cubiertas con papel secante. Cuando operaba un mecanismo de resorte, las tablas se cerraban rápidamente. Véase la Figura 11.3. Analizando la sucesión marcada de las manchas de agua, Leonardo descubrió que las distancias entre dos gotas consecutivas aumentaban en "una proporción aritmética continua". De esta manera descubrió la fórmula $v = gt$.

* Igual a 149 600 000 km (unos 93 millones de millas), o sea la distancia media entre el centro de la Tierra y el del Sol.

Ejercicios 11.1

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 987.

En los Problemas 1-10 escriba los cuatro primeros términos de la sucesión cuyo término general es a_n.

1. $a_n = \dfrac{1}{2n+1}$
2. $a_n = \dfrac{3}{4n-2}$
3. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$
4. $a_n = \dfrac{(-1)^n n^2}{n+1}$
5. $a_n = 3(-1)^{n-1}$
6. $a_n = 10(-1)^n$
7. $a_n = 10^n$
8. $a_n = 10^{-n}$
9. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$
10. $a_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}$

En los Problemas 11-16 aplique la Definición 11.2 para demostrar que cada sucesión converge al número indicado L.

11. $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}; L = 0$
12. $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}; L = 0$
13. $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}; L = 1$
14. $\left\{\dfrac{4n}{2n-1}\right\}; L = 2$
15. $\{10^{-n}\}; L = 0$
16. $\left\{\dfrac{e^n+1}{e^n}\right\}; L = 1$

En los Problemas 17-50 encuentre $\lim_{n\to\infty} a_n$, si es que existe, de cada sucesión con el término general a_n indicado.

17. $a_n = \dfrac{10}{\sqrt{n+1}}$
18. $a_n = \dfrac{1}{n^{3/2}}$
19. $a_n = \dfrac{1}{5n+6}$
20. $a_n = \dfrac{4}{2n+7}$
21. $a_n = \dfrac{3n-2}{6n+1}$
22. $a_n = \dfrac{n}{1-2n}$
23. $a_n = 20(-1)^{n+1}$
24. $a_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$
25. $a_n = \dfrac{n^2-1}{2n}$
26. $a_n = \dfrac{7n}{n^2+1}$
27. $a_n = \dfrac{n^2-3}{4n^2+n}$
28. $a_n = \dfrac{n^2}{1+2n^2}$
29. $a_n = ne^{-n}$
30. $a_n = n^3e^{-n}$
31. $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{n}$
32. $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{n+1}}$
33. $a_n = \cos n\pi$
34. $a_n = \operatorname{sen} n\pi$
35. $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$
36. $a_n = \dfrac{e^n}{\ln(n+1)}$
37. $a_n = \dfrac{5-2^{-n}}{7+4^{-n}}$
38. $a_n = \dfrac{2^n}{3^n+1}$
39. $a_n = \dfrac{2^n+1}{2^n}$
40. $a_n = 4 + \dfrac{3^n}{2^n}$
41. $a_n = n \operatorname{sen}\dfrac{6}{n}$
42. $a_n = \left(1 - \dfrac{5}{n}\right)^n$
43. $a_n = \dfrac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}$
44. $a_n = \dfrac{\pi}{4} - \arctan(n)$
45. $a_n = n^{2/(n+1)}$
46. $a_n = 10^{(n+1)/n}$
47. $a_n = \ln\left(\dfrac{4n+1}{3n-1}\right)$
48. $a_n = \dfrac{\ln n}{\ln 3n}$
49. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
50. $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

En los Problemas 51 y 52 escriba la sucesión dada en la forma $\{a_n\}$. Determine si la sucesión converge o diverge.

51. $\dfrac{2}{1}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{6}{5}, \ldots$
52. $1 + \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}, \ldots$
53. Se deja caer una pelota desde una altura inicial de 15 pie sobre una losa de concreto. Cada vez que rebota, alcanza una altura de $\frac{2}{3}$ de la altura anterior. Véase la Figura 11.4. Determine qué altura alcanza en su tercero y en su enésimo rebotes.

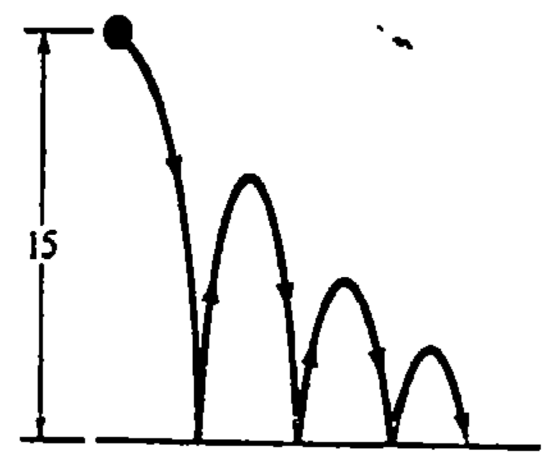


Figura 11.4

54. Una pelota que cae desde una gran altura, recorre 16 pie durante el primer segundo, 48 pie durante el segundo instante, 80 pie durante el tercero, y así sucesivamente. ¿Cuánto recorre la pelota durante el sexto segundo?

55. Un paciente ingiere 15 mg (miligramos) de un medicamento al día. Si el 80% del fármaco acumulado es eliminado diariamente por las funciones corporales, escriba los primeros seis términos de la sucesión $\{A_n\}$, en donde A_n es la cantidad de medicamento presente en el cuerpo del paciente inmediatamente después de la enésima dosis.

56. Las distancias medias del Sol a los planetas Urano, Neptuno y Plutón son iguales a 19.19, 30.07 y 39.46 u.a., respectivamente. Determine cuán bien concuerdan estos números con los tres términos siguientes de la sucesión de Bode dada en la página 541.

61. $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n;\ a_1 = -1$

62. $a_{n+1} = 2a_n - 1;\ a_1 = 2$

63. $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n-1}};\ a_1 = 1,\ a_2 = 3$

64. $a_{n+1} = 2a_n - 3a_{n-1};\ a_1 = 2,\ a_2 = 4$

65. En su obra *Liber Abacci*, publicada en 1202, Leonardo Fibonacci, de Pisa, especuló acerca de la reproducción de los conejos:

> "¿Cuántas parejas de conejos se producirán en un año comenzando con una sola, si cada mes cada pareja origina una nueva que se vuelve reproductiva a partir del segundo mes?"

Discierna el modelo de la tabla siguiente y complétela.

	Al iniciar	Después de cada mes 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Parejas de adultos	1	1	2	3	5	8	13	21					
Parejas de no adultos	0	1	1	2	3	5	8	13					
Total de parejas	1	2	3	5	8	13	21	34					

Problemas diversos

Si $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ son sucesiones tales que $a_n \le b_n \le c_n$ para todo n, y $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, entonces $\lim_{n\to\infty} b_n = L$. En los Problemas 57-60 aplique este **Teorema de interposición** para establecer la convergencia de la sucesión indicada.

57. $\left\{\frac{\operatorname{sen}^2 n}{4^n}\right\}$

58. $\left\{\frac{|\cos n|}{n^2}\right\}$

59. $\left\{\sqrt{16 + \frac{1}{n^2}}\right\}$

60. $\left\{\frac{\ln n}{n(n+2)}\right\}$

Se puede definir sucesiones de manera recurrente. En los problemas 61-64 escriba los cuatro términos siguientes a los términos iniciales indicados, para cada sucesión.

66. Para la sucesión definida de manera recurrente por $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$. Escriba los cinco términos siguientes a los dos iniciales. Examine de nuevo el Problema 65.

67. Aplique la Definición 11.2 para demostrar el Teorema 11.2(*i*) suponiendo que $0 < \varepsilon < 1$.

68. Demuestre que para cualquier número real x, la sucesión $\{(1 + x/n)^n\}$ converge a e^x.

Problemas para calculadora

69. Considere la sucesión cuyos tres primeros términos son

$$1 + \frac{1}{2},\quad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}},\quad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}},\ \ldots$$

(a) ¿Cuáles son los términos cuarto y quinto?

(b) Obtenga los valores numéricos de los cinco primeros términos de la sucesión.

(c) Formule una conjetura acerca de la convergencia o divergencia de la sucesión.

70. Se sabe que la sucesión

$$\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right\}$$

converge a la llamada constante de Euler-Mascheroni, γ. Calcule los diez primeros términos de la sucesión.

11.2 Sucesiones monótonas

Una clase importante de sucesiones la forman las llamadas **sucesiones monótonas**, las cuales se definen como sigue.

DEFINICIÓN 11.3

Se dice que una sucesión es **monótona** cuando es

(*i*) **creciente:** $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$, o bien

(*ii*) **decreciente:** $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > a_{n+1} > \cdots$, o bien

(*iii*) **no decreciente:** $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le a_n \le a_{n+1} \le \cdots$, o bien

(*iv*) **no creciente:** $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots \ge a_n \ge a_{n+1} \ge \cdots$ □

Ejemplo 1

(*a*) Las sucesiones $4, 6, 8, 10, \ldots$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

$5, 5, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 3, \ldots$

son monótonas. Son, respectivamente, creciente, decreciente y no creciente.

(*b*) La sucesión $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots$ no es monótona.

No siempre es claro cuándo una sucesión es creciente, decreciente, etc. Los dos ejemplos siguientes ilustran tres modos posibles de manifestar monotonía.

Ejemplo 2

Demuestre que $\{n/e^n\}$ es una sucesión decreciente.

Solución Si se define $f(x) = x/e^x$, entonces $f(n) = a_n$. Ahora bien,

$$f'(x) = \frac{1 - x}{e^x} < 0 \text{ para } x > 1$$

implica que f es decreciente en $[1, \infty)$. Por lo tanto, la sucesión dada es decreciente.

Solución alternativa

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{n} = \frac{n+1}{ne} = \frac{1}{e} + \frac{1}{ne} < 1 \quad \text{para } n \geq 1$$

implica que $a_{n+1} < a_n$ para $n \geq 1$.

Ejemplo 3

La sucesión $\left\{\frac{2n+1}{n+1}\right\}$ o sea $\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \ldots$

parece ser creciente. Puesto que

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+3}{n+2} - \frac{2n+1}{n+1} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0 \quad \text{para todo } n,$$

resulta que $a_{n+1} > a_n$ para todo n.

DEFINICIÓN 11.4

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es **acotada** si existe un número positivo B tal que $|a_n| \leq B$ para todo n. □

Ejemplo 4

La sucesión $\left\{\frac{2n+1}{n+1}\right\}$ está acotada por arriba por 2, ya que

$$\frac{2n+1}{n+1} \leq \frac{2n+2}{n+1} = \frac{2(n+1)}{n+1} = 2.$$

Además, $(2n+1)/(n+1) \geq 0$ muestra que la sucesión es acotada por abajo por 0.* Así que, $0 \leq (2n+1)/(n+1) \leq 2$ para todo n, implica que la sucesión es acotada. Desde luego, los términos de la sucesión también son acotados por abajo por -2, lo cual permite escribir $|(2n+1)/(n+1)| \leq 2$ para todo n.

El siguiente resultado será útil en secciones subsecuentes de este capítulo.

TEOREMA 11.4

Toda sucesión monótona acotada es convergente.

Demostración Se demostrará el teorema para el caso de una sucesión no decreciente. Por hipótesis $\{a_n\}$ es acotada, por lo que $|a_n| \leq B$, para todo n. Esto significa, a su vez, que el conjunto infinito de términos $S = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$ es acotado por arriba, y por lo tanto, tiene una cota superior mínima L.† En realidad la sucesión converge a L. Para $\varepsilon > 0$ se sabe que $L - \varepsilon < L$, y consecuentemente, $L - \varepsilon$ no es cota superior de S (no hay cotas superiores menores que la mínima). Por lo tanto, existe un entero positivo N tal que $a_N > L - \varepsilon$. Pero, como $\{a_n\}$ es no decreciente

$$L - \varepsilon \leq a_N \leq a_{N+1} \leq a_{N+2} \leq a_{N+3} \leq \cdots \leq L + \varepsilon.$$

De esto se deduce que para $n > N$, $L - \varepsilon \leq a_n \leq L + \varepsilon$, o sea $|a_n - L| < \varepsilon$. En virtud de la Definición 11.2 se concluye que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. □

* En efecto, por el Ejemplo 3 es claro que los términos son acotados por abajo por el primer término de la sucesión.

† Este es uno de los axiomas básicos de las matemáticas. Se le conoce como la **propiedad de completitud del sistema de los números reales.**

Ejemplo 5

Se demostró que la sucesión

$$\left\{\frac{2n+1}{n+1}\right\}$$

es monótona (Ejemplo 3), y acotada (Ejemplo 4). Por lo tanto, por el Teorema 11.4 la sucesión es convergente.

Ejemplo 6

Demostrar que la sucesión

$$\left\{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}\right\}$$

es convergente.

Solución En primer lugar el cociente

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)(2n+2)} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$$
$$= \frac{2n+1}{2n+2} < 1$$

muestra que $a_{n+1} < a_n$ para todo n. La sucesión es monótona puesto que es decreciente. En seguida, de

$$0 < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{2n-1}{2n} < 1, \text{ (¿Por qué?)}$$

es claro que la sucesión es acotada. Del Teorema 11.4 resulta que la sucesión es convergente.

Observación

Toda sucesión convergente $\{a_n\}$ es necesariamente acotada. Pero de esto no se deduce que toda sucesión acotada sea convergente. En el Problema 25 de los Ejercicios 11.2, se pide al lector proporcionar un ejemplo que ilustre esta última proposición. Por otra parte, si una sucesión $\{a_n\}$ no es acotada, entonces es necesariamente divergente.

Ejercicios 11.2

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 988.

En los Problemas 1-12 determine si la sucesión dada es monótona. Si es así, indique si es creciente, decreciente, no decreciente o no creciente.

1. $\left\{\dfrac{n}{3n+1}\right\}$
2. $\left\{\dfrac{10+n}{n^2}\right\}$
3. $\{(-1)^n\sqrt{n}\}$
4. $\{(n-1)(n-2)\}$
5. $\left\{\dfrac{e^n}{n}\right\}$
6. $\left\{\dfrac{e^n}{n^5}\right\}$
7. $\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}$*
8. $\left\{\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right\}$
9. $\left\{n+\dfrac{1}{n}\right\}$
10. $\{n^2+(-1)^n n\}$
11. $\{(\operatorname{sen} 1)(\operatorname{sen} 2)\ldots(\operatorname{sen} n)\}$
12. $\left\{\ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)\right\}$

En los Problemas 13-24 aplique el Teorema 11.4 para demostrar que converge la sucesión dada.**

13. $\left\{\dfrac{4n-1}{5n+2}\right\}$
14. $\left\{\dfrac{6-4n^2}{1+n^2}\right\}$
15. $\left\{\dfrac{3^n}{1+3^n}\right\}$
16. $\{n5^{-n}\}$
17. $\{e^{1/n}\}$
18. $\left\{\dfrac{n!}{n^n}\right\}$
19. $\left\{\dfrac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\right\}$
20. $\left\{\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}\right\}$
21. $\{\tan^{-1} n\}$
22. $\left\{\dfrac{\ln(n+3)}{n+3}\right\}$
23. $(0.8), (0.8)^2, (0.8)^3, .$
24. $\sqrt{3}, \sqrt{\sqrt{3}}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}, .\,.$

Problemas diversos

25. Dé un ejemplo de una sucesión acotada que no sea convergente.

26. Considere la sucesión $\{a_n\}$ definida por

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)a_n, \quad n \geq 2.$$

Demuestre que $\{a_n\}$ es convergente.

27. Demuestre que $\{\int_1^n e^{-t^2}\,dt\}$ converge. (*Indicación:* Para $x \geq 1$, $e^{-x^2} \leq e^{-x}$.)

28. Demuestre que la sucesión

$$\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right\}$$

es acotada y monótona, y por lo tanto, convergente.† (*Sugerencia:* Primero demuestre la desigualdad

$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots +$

$$\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} < \ln n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

considerando el área bajo la gráfica de $y = 1/x$ en $[1, n]$.)

11.3 Series infinitas

El concepto de *serie* está íntimamente relacionado con el concepto de *sucesión*. Si $\{a_n\}$ es la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \ldots$, entonces a la suma indicada

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{11.4}$$

* Recuérdese que el símbolo $n!$ significa $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)\,n$.

** Por supuesto, en algunos de estos problemas el límite real se puede obtener por otros métodos.

† A este límite se le llama la constante de Euler-Mascheroni y se denota por γ. Por el Problema 70 de los Ejercicios 11.1, $\gamma \approx 0.5772 \ldots$

se le llama serie infinita.* Los elementos a_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, se llaman los términos de la serie; a_n se denomina término general. Se presenta (11.4) en forma compacta como $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, o bien Σa_k, por conveniencia.

Ejemplo 1

En las observaciones iniciales de este capítulo se indicó que la representación decimal del número racional $\frac{1}{3}$ es, en realidad, una serie infinita

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k}.$$

La pregunta que trataremos de contestar en esta y en las siguientes secciones es:

¿Cuándo una serie infinita "tiene por suma" un número?

Intuitivamente es de esperar que $\frac{1}{3}$ sea la suma de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} 3/10^k$. Pero, también intuitivamente, puede esperarse que una serie como

$$100 + 1000 + 10{,}000 + 100{,}000 + \cdots$$

no tenga suma. En otras palabras, no es de esperar que esta última serie "tenga por suma" un número —o sea, *converja*— a dicho número. El concepto de convergencia de una serie infinita se define en términos de la convergencia de una clase especial de sucesión.

Sucesión de sumas parciales

Para cada serie infinita Σa_k existe una sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ definida como sigue:

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1\\
S_2 &= a_1 + a_2\\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3\\
&\ \vdots\\
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

Ejemplo 2

La sucesión de sumas parciales de $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{3}{10^k}$ es

$$S_1 = \frac{3}{10}$$

$$S_2 = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2}$$

*Los términos "serie infinita" y "serie" se usan aquí indistintamente.

$$S_3 = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3}$$

$$\vdots$$

$$S_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots + \frac{3}{10^n}$$

$$\vdots$$

En el Ejemplo 2, cuando n es muy grande S_n dará una buena aproximación a $\frac{1}{3}$, y de esta manera parece razonable escribir

$$\frac{1}{3} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{10^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k}.$$

Esto conduce a la definición siguiente.

DEFINICIÓN 11.5

Se dice que una serie infinita $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es **convergente** si converge la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$; esto es,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S.$$

El número S es la **suma** de la serie. Si $\lim_{n\to\infty} S_n$ no existe, se dice entonces que la serie es **divergente**. □

Ejemplo 3

Demostrar que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+4)(k+5)}$$

es convergente.

Solución El término general de la serie se puede expresar por fracciones parciales como

$$a_n = \frac{1}{k+4} - \frac{1}{k+5}.$$

Así que el término general de la sucesión de sumas parciales es

$$S_n = \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right] + \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right] + \left[\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right] + \cdots + \left[\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}\right]$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \cdots - \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{n+5}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} 1/(n+5) = 0$, resulta que $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{5}$. Por lo tanto, la serie converge y así

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+4)(k+5)} = \frac{1}{5}.$$

Serie desplegable (o "telescópica")

Se dice que la serie del Ejemplo 3 es una serie desplegable o "telescópica", cuando se considera la forma en la que el término general de la sucesión de sumas parciales se despliega o extiende hasta quedar con dos términos. (Véase el Problema 53 de los Ejercicios 11.3.)

Series geométricas

A una serie de la forma

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} \tag{11.5}$$

se la llama **serie geométrica**.

TEOREMA 11.5

Una serie geométrica converge a $\frac{a}{1-r}$ para $|r| < 1$ y diverge para $|r| \geq 1$, $a \neq 0$.

Demostración Considérese el término general de la sucesión de sumas parciales de (11.5):

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}. \tag{11.6}$$

Multiplicando por r ambos miembros de (11.6) resulta

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n. \tag{11.7}$$

Se resta (11.7) de (11.6) y se despeja luego a S_n:

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$(1-r)S_n = a(1-r^n)$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}. \tag{11.8}$$

Ahora bien, por el Teorema 11.2 sabemos que $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ para $|r| < 1$. Consecuentemente,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}, \qquad |r| < 1.$$

Si $|r| > 1$, $\lim_{n\to\infty} r^n$ no existe, así que el límite de (11.8) tampoco existe. La demostración de que una serie geométrica diverge cuando $r = \pm 1$, se deja como ejercicio. (Véase el Problema 55 de los Ejercicios 11.3.) □

Ejemplo 4

En la serie geométrica

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots,$$

se identifica $a = 1$ y $r = -\frac{1}{3}$. Como $|-\frac{1}{3}| < 1$, la serie converge. Por el Teorema 11.5 la suma de la serie es

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-(-1/3)} = \frac{3}{4}.$$

Ejemplo 5

La serie geométrica

$$\sum_{k=1}^{\infty} 5\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} = 5 + \frac{15}{2} + \frac{45}{4} + \frac{135}{8} + \cdots$$

diverge porque $|r| = \frac{3}{2} > 1$.

Serie armónica

Otro ejemplo de serie divergente es la llamada serie armónica:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}. \tag{11.9}$$

El término general de la sucesión de sumas parciales de (11.9) está dado por

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Así que,

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &= S_n + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &\geq S_n + \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ términos}} = S_n + n \cdot \frac{1}{2n} = S_n + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

La desigualdad $S_{2n} \geq S_n + \frac{1}{2}$ implica que la sucesión de sumas parciales no es acotada. Para ver lo anterior, observamos que

$$S_2 \geq S_1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S_4 \geq S_2 + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

$$S_8 \geq S_4 + \frac{1}{2} \geq 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$S_{16} \geq S_8 + \frac{1}{2} \geq \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3,$$

y así sucesivamente. Por lo tanto, concluimos que la serie armónica es divergente.

Si a_n y S_n son los términos generales de una serie y de la correspondiente sucesión de sumas parciales, respectivamente, entonces $a_n = S_n - S_{n-1}$. Ahora bien, si la serie converge a un número S, entonces $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ y $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$. Esto implica que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$. Se ha establecido así el siguiente teorema.

TEOREMA 11.6

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. □

Criterio para la divergencia de una serie

El Teorema 11.6 dice simplemente que cuando converge una serie infinita es necesario que tienda a cero el término enésimo, o general, de la serie. De anera equivalente, se concluye que:

> Si el término enésimo de una serie infinita no tiende a cero cuando $n\to\infty$, entonces la serie no converge.

Formalizamos este resultado como un criterio de divergencia.

TEOREMA 11.7

Criterio del término enésimo para divergencia

Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge. □

Ejemplo 6

Considérese la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4k-1}{5k+3}.$$

Puesto que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{5n+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{4-1/n}{5+3/n} = \frac{4}{5} \neq 0,$$

del Teorema 11.7, se deduce que la serie es divergente.

Formularemos los teoremas siguientes sin demostración

TEOREMA 11.8

Si c es una constante, entonces tanto $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ como $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ son convergentes, o bien, divergentes. □

TEOREMA 11.9

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ convergen a S_1 y S_2, respectivamente, entonces $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ converge a $S_1 + S_2$. □

TEOREMA 11.10

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty} b_k$ es divergente, entonces $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ es divergente. □

Ejemplo 7

En virtud del Teorema 11.5, se podrá ver que las series geométricas $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^{k-1}$ y $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{3})^{k-1}$ convergen a 2 y $\frac{3}{2}$, respectivamente. Por lo tanto, por el Teorema 11.9, $\sum_{k=1}^{\infty}[(\frac{1}{2})^{k-1} + (\frac{1}{3})^{k-1}]$ converge a $2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$.

Ejemplo 8

Por el Ejemplo 3 es claro que $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(k + 4)(k + 5)$ converge. Puesto que $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ es la serie armónica divergente, del Teorema 11.10 resulta que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(k + 4)(k + 5)} + \frac{1}{k}\right]$$

es divergente, también.

Observaciones

(*i*) Todo número racional es una fracción decimal conmensurable o una fracción decimal inconmensurable periódica.* Toda fracción decimal de esta última clase es una serie geométrica. Así, $\sum_{k=1}^{\infty} 3/10^k$ converge puesto que $r = \frac{1}{10} < 1$, y por tanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k} = \frac{3/10}{1 - 1/10} = \frac{3/10}{9/10} = \frac{1}{3}.$$

(*ii*) Obsérvese cuidadosamente lo que dicen los Teoremas 11.6 y 11.7. Específicamente el Teorema 11.6 *no* dice que si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces Σa_k converge. En realidad, si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, la serie puede ser convergente o divergente. Por ejemplo, en la serie armónica $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$, $a_n = 1/n$ y $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$, pero la serie diverge.

(*iii*) Para determinar la convergencia es posible, y a veces conveniente, eliminar u omitir los primeros términos de una serie. En otras palabras, series infinitas como $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$, $N > 1$, que difieren a lo sumo en un número finito de términos, son ambas convergentes o ambas divergentes. Desde luego, si eliminamos los primeros $N - 1$ términos de una serie convergente, se altera la suma de la serie.

* También una fracción decimal conmensurable, tal como 0.5, es una decimal periódica en el sentido de que puede expresarse como 0.5 = 0.5000 ...

Ejercicios 11.3

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 988.

En los Problemas 1-10 escriba los cuatro primeros términos de cada serie.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k + 1}{k}$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k}$
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k + 1)}$
4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k3^k}$
5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + 1}{n!}$*
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^2 + 1}$
7. $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2m)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m - 1)}$
8. $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m - 1)}{m!}$
9. $\sum_{j=3}^{\infty} \frac{\cos j\pi}{2j + 1}$
10. $\sum_{i=5}^{\infty} i \operatorname{sen} \frac{i\pi}{2}$

En los Problemas 11-20 determine si converge o diverge la serie geométrica indicada. Si es convergente, halle la suma de la serie.

11. $\sum_{k=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{5}\right)^{k-1}$
12. $\sum_{k=1}^{\infty} 10\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$
13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}}$
14. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{k-1}$
15. $\sum_{r=1}^{\infty} 5^r 4^{-r}$
16. $\sum_{s=1}^{\infty} (-3)^s 7^{-s}$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} 1000(0.9)^n$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1.1)^n}{1000}$
19. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^k}$
20. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}\right)^k$

En los Problemas 21-24 escriba cada fracción decimal periódica como un cociente de dos enteros.

21. 0.222 . . .
22. 0.555 . .
23. 0.616161 . . .
24. 0.393939 . . .

En los Problemas 25-30 obtenga la suma de cada serie convergente.

25. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k + 1)}$
26. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k + 1)(k + 2)}$
27. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}$
28. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 7k + 12}$
29. $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\right]$
30. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k - 1}{4^k}$

*Por definición, 0! = 1.

En los Problemas 31-40 demuestre que cada serie es divergente.

31. $\sum_{k=1}^{\infty} 10$
32. $\sum_{k=1}^{\infty} (5k + 1)$
33. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k + 1}$
34. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + 1}{k^2 + 2k + 3}$
35. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$
36. $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{k}{3k + 1}\right)$
37. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{10}{k}$
38. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6k}$
39. $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{k}\right]$
40. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} k}{k}$

En los Problemas 41-44 determine los valores de x para los cuales converge la serie indicada.

41. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{k-1}$
42. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{k-1}$
43. $\sum_{k=1}^{\infty} (x + 1)^k$
44. $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^{2k}$

45. Considere la pelota en rebote, descrita en el Problema 53 de los Ejercicios 11.1. Si la bola rebota indefinidamente, ¿cuál es la distancia total que recorrerá?

46. Cuando una pelota se deja caer desde una altura h, demora $T = \sqrt{2h/g}$ segundos en llegar al suelo. (¿Por qué?) Si la bola rebota siempre hasta cierta fracción $q(0 < q < 1)$ de su altura anterior, obtenga una fórmula para el tiempo que transcurre hasta que la pelota queda en reposo.

47. Para erradicar plagas en la agricultura (como la mosca del Mediterráneo), se sueltan moscas machos esterilizadas a intervalos regulares de tiempo, dentro de la población general. Sea N_0 el número de moscas que se liberan cada día, y s, la proporción de las que sobreviven un día determinado. De los N_0 machos esterilizados originales, $N_0 s^n$ sobrevivirán n semanas consecutivas. Por lo tanto, el número total de tales insectos que sobreviven n semanas después que el programa ha empezado, es $N_0 + N_0 s + N_0 s^2 + \ldots + N_0 s^n$. ¿A qué valor tiende esta suma cuando $n \to \infty$? Si $s = 0.9$ y se necesitan 10,000 machos esterilizados

para controlar la población de insectos en cierta región, determine el número de los que se deben soltar cada día.

48. En determinadas circunstancias, la cantidad de un fármaco que se acumula en el cuerpo de un paciente después de un período largo es $A_0 + A_0e^{-k} + A_0e^{-2k} + \ldots$, en donde $k > 0$ es una constante, y A_0 es la dosis diaria del medicamento. Halle la suma de esta serie.

49. Un paciente ingiere 15 mg al día de un producto medicinal. Si 80% del fármaco acumulado es eliminado diariamente por las funciones corporales, ¿qué cantidad de medicamento se acumulará después de un período largo (esto es, cuando $n \to \infty$)? (Supóngase que la medida de la acumulación se realiza inmediatamente después de administrar cada dosis. Véase el Problema 55 de los Ejercicios 11.1.)

50. A una partícula que se mueve en línea recta, se le aplica una fuerza, de manera que cada segundo la partícula recorre sólo la mitad de la distancia que ha recorrido en el segundo anterior. Si la partícula recorre 20 cm en el primer segundo, ¿qué distancia total recorrerá?

Problemas diversos

51. Demuestre que $\sum_{k=1}^{\infty} 1/\sqrt{k}$ es divergente probando que $S_n \ge \sqrt{n}$.

52. Aplique el hecho de que $k! \ge 2^{k-1}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ para demostrar que $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k!$ es convergente

53. Demuestre que si $\lim_{n\to\infty} f(n+1) = L$, en donde L es un número, entonces $\sum_{k=1}^{\infty}[f(k+1) - f(k)] = L - f(1)$.

54. Halle la suma de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_k^{k+1} xe^{-x}\,dx\right).$$

55. Demuestre que una serie geométrica $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$ diverge cuando $r = \pm 1$.

56. Determine si la suma de dos series divergentes es divergente necesariamente.

57. Supóngase que la sucesión $\{a_n\}$ converge a un número $L \neq 0$. Demuestre que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es divergente.

58. Encuentre todos los valores de x en $(-\pi/2, \pi/2)$ para los cuales.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-\tan x} - \sum_{k=0}^{n} \tan^k x\right) = 0.$$

59. Determine si es válido el siguiente razonamiento: Si $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$, entonces $2S = 2 + 4 + 8 + \ldots = S - 1$. Despejando S de $2S = S - 1$, resulta $S = -1$.

60. Determine si $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$ converge o diverge.

11.4 Series con términos positivos

Salvo que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sea una serie desplegable (o telescópica), o bien una serie geométrica, es tarea difícil, si no es que inútil, demostrar la convergencia o la divergencia de una serie, directamente a partir de la sucesión de sumas parciales. Sin embargo, usualmente es posible determinar si una serie converge o diverge por aplicación de un *criterio* que utiliza solamente los términos de la serie. En esta sección examinaremos cuatro de tales criterios que son aplicables a series infinitas con *términos positivos*.

Criterio de la integral

El primer criterio que consideraremos relaciona los conceptos de convergencia y divergencia de una integral impropia con la convergencia y la divergencia de una serie infinita.

TEOREMA 11.11
Criterio de la integral

Supóngase que f es una función continua que es no negativa y decreciente para $x \ge 1$, tal que $f(k) = a_k$ para $k \ge 1$. Si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge también. Si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ diverge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es divergente.

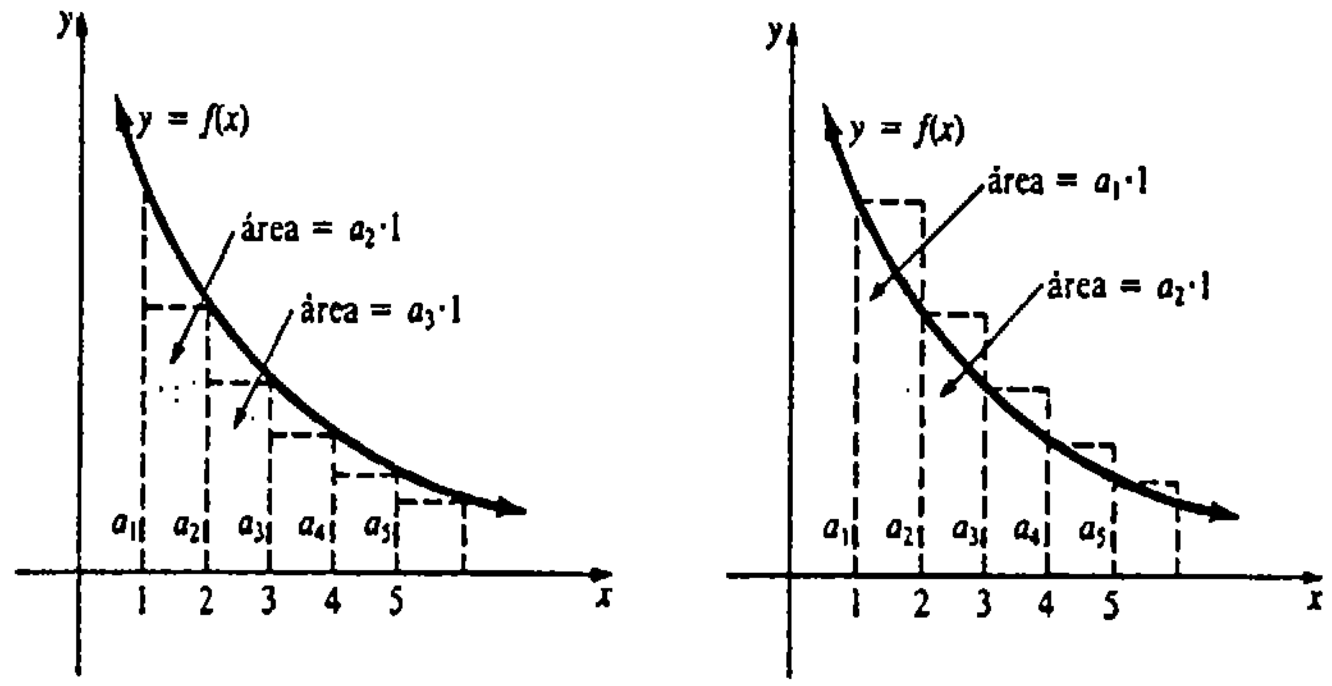
Demostración Si la gráfica de f es como la que se presenta en la Figura 11.5, considerando las áreas de los rectángulos mostrados en la figura, resulta que

$$0 \le a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n \le \int_1^n f(x)\,dx \le a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}$$

o sea

$$S_n - a_1 \le \int_1^n f(x)\,dx \le S_{n-1}.$$

De la desigualdad $S_n - a_1 \le \int_1^n f(x)\,dx$, es claro que $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe siempre que $\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)\,dx$ exista también. Por otra parte, de $S_{n-1} \ge \int_1^n f(x)\,dx$, se concluye que $\lim_{n\to\infty} S_{n-1}$ no existe siempre que $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ sea divergente. □



(a) (b)

Figura 11.5

Nota: En el criterio de la integral, si la serie de términos positivos es de la forma $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$, entonces empleamos

$$\int_N^{\infty} f(x)\,dx, \text{ en donde } f(k) = a_k.$$

Ejemplo 1

Determinar si $\sum_{k=3}^{\infty}\frac{\ln k}{k}$ es convergente

Solución La función $f(x) = (\ln x)/x$ es continua y decreciente* en $[3, \infty)$ y $f(k) = a_k = (\ln k)/k$. Ahora bien,

$$\int_3^{\infty}\frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_3^b \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}(\ln x)^2\Big]_3^b = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}[(\ln b)^2 - (\ln 3)^2] = \infty$$

muestra que la serie diverge.

* Demuestre lo anterior examinando $f'(x)$.

Serie p

El criterio de la integral es particularmente útil para la llamada serie p:

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}. \qquad (11.10)$$

La serie armónica divergente $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ es una serie p en la que $p = 1$. El siguiente resultado se deduce inmediatamente del criterio de la integral y se deja como ejercicio.

TEOREMA 11.12

La serie p $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^p$ converge para $p > 1$ y diverge para $p \le 1$. □

Ejemplo 2

(*a*) La serie $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^{1/2}$ diverge, ya que $p = \frac{1}{2} < 1$.

(*b*) La serie $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ converge, puesto que $p = 2 > 1$.

Criterios de comparación

A menudo es posible determinar la convergencia o divergencia de una serie $\sum a_k$ *comparando* sus términos con los de una *serie de prueba* $\sum b_k$ que se sabe si es convergente o divergente.

TEOREMA 11.13

Criterio de comparación

Supongamos que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ son series con términos positivos.

(*i*) Si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge, y $a_k \le b_k$ para todo entero positivo k, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente.

(*ii*) Si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge, y $a_k \ge b_k$ para todo entero positivo k, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es divergente.

Demostración Sean $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ y $T_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ los términos generales de las sucesiones de sumas parciales de $\sum a_k$ y $\sum b_k$, respectivamente.

(*i*) Si $\sum b_k$ es una serie convergente para la cual $a_k \le b_k$, entonces $S_n \le T_n$. Como $\lim_{n\to\infty} T_n$ existe, $\{S_n\}$ es una sucesión creciente acotada —y por lo tanto, convergente—, por el Teorema 11.4. De modo que $\sum a_k$ es convergente.

(*ii*) Si $\sum b_k$ diverge y $a_k \ge b_k$, se tiene que $S_n \ge T_n$. Como T_n aumenta sin cota, también lo hace S_n. Por lo tanto, $\sum a_k$ es divergente. □

Ejemplo 3

Determinar si es convergente o divergente $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3+4}$.

Solución Observamos que

$$\frac{k}{k^3+4} \le \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^2}.$$

Como la serie dada es menor término a término que la serie p convergente $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ (véase el Ejemplo 2), se deduce que la serie dada también convergente.

Ejemplo 4

Determinar si es convergente o divergente $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k+2)}{k}$.

Solución Puesto que $\ln(k + 2) > 1$ para $k \ge 1$,

$$\frac{\ln(k+2)}{k} > \frac{1}{k}.$$

como $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ diverge, la serie dada es divergente.

Otro tipo de criterio de comparación comprende tomar el límite del cociente del término general de una serie y el término general de una serie de prueba, que se sabe que es convergente o divergente.

TEOREMA 11.14

Criterio de comparación en el límite

Supóngase que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ son series con términos positivos y que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

(*i*) Si L es una constante positiva, entonces ambas series son convergentes o ambas son divergentes.

(*ii*) Si $L = 0$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge también.

(*iii*) Si $\lim_{n\to\infty} [a_n/b_n] = \infty$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es divergente.

Demostración de (*i*) Como $\lim_{n\to\infty} [a_n/b_n] = L > 0$, es posible elegir n suficientemente grande, por ejemplo $n \ge N$ para cierto entero positivo N, de manera que

$$\frac{1}{2}L \le \frac{a_n}{b_n} \le \frac{3}{2}L.$$

Esta desigualdad implica que $a_n \le \frac{3}{2} L\, b_n$ para $n \ge N$. Si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge, del criterio de comparación se deduce que $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ es convergente y, por lo tanto, también $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge. Además, puesto que $\frac{1}{2} L\, b_n \le a_n$ para $n \ge N$, se ve que si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge, entonces $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ son divergentes. □

El criterio de comparación en el límite es a menudo aplicable a series para las cuales el criterio de comparación es inconveniente.

Ejemplo 5

El lector puede advertir que es difícil aplicar el criterio de comparación a la serie $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(k^3 - 5k^2 + 1)$. Sin embargo, sabemos que $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^3$ es una serie p convergente ($p = 3 > 1$). Por lo tanto, con

$$a_n = \frac{1}{n^3 - 5n^2 + 1} \quad \text{y} \quad b_n = \frac{1}{n^3},$$

tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3 - 5n^2 + 1} = 1.$$

De la parte (*i*) del Teorema 11.14, resulta que la serie dada es convergente.

Si el término general a_n de una serie Σa_k es un cociente, ya sea de potencias racionales de n o de raíces de polinomios en n, es posible discernir el término general b_n a partir de una serie de prueba Σb_k, examinando el "comportamiento del grado" de a_n para valores grandes de n. En otras palabras, para encontrar un candidato para b_n se necesita solamente examinar el cociente de las *potencias mayores de n* en el numerador y el denominador de a_n.

Ejemplo 6

Determinar si es o no convergente $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\sqrt[3]{8k^5 + 7}}$.

Solución Para valores grandes de n, $a_n = n/\sqrt[3]{8n^5 + 7}$ "se comporta" como un múltiplo constante de

$$\frac{n}{\sqrt[3]{n^5}} = \frac{n}{n^{5/3}} = \frac{1}{n^{2/3}}.$$

Así que se ensaya con la serie p divergente

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2/3}} \qquad \left(p = \frac{2}{3} < 1\right)$$

como serie de prueba:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n/\sqrt[3]{8n^5 + 7}}{1/n^{2/3}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^5}{8n^5 + 7}\right)^{1/3} = \frac{1}{2}.$$

De modo que, por la parte (*i*) del Teorema 11.14 la serie dada diverge.

Criterio de la razón

El último criterio que consideraremos emplea el límite del cociente del $(n + 1)$-ésimo término entre el enésimo término de la serie.

TEOREMA 11.15

Criterio de la razón

Supongamos que $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$ es una serie de términos positivos tales que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$

(*i*) Si $L < 1$, la serie es convergente.

(*ii*) Si $L > 1$, o si $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \infty$, la serie es divergente.

(*iii*) Si $L = 1$, el criterio no es concluyente.

Demostración de (*i*) Sea r un número positivo tal que $0 \le L \le r < 1$. Para n suficientemente grande, por ejemplo $n \ge N$ para cierto entero positivo N, $a_{n+1}/a_n < r$, esto es,

$$a_{n+1} < r\,a_n, \qquad n \ge N.$$

Esta desigualdad implica que

$$a_{N+1} < r\,a_N$$
$$a_{N+2} < r\,a_{N+1} < a_N r^2$$
$$a_{N+3} < r\,a_{N+2} < a_N r^3$$

y así sucesivamente. Así que la serie $\Sigma_{k=N+1}^{\infty} a_k$ converge por comparación con la serie geométrica convergente $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_N r^k$. Puesto que $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$ difiere de $\Sigma_{k=N+1}^{\infty} a_k$ a lo sumo por un número finito de términos, se concluye que la primera serie también converge.

Demostración de (*ii*) Sea r un número finito tal que $1 < r < L$. Entonces para n suficientemente grande, digamos $n \ge N$ para cierto entero positivo N, $a_{n+1}/a_n > r$ o sea $a_{n+1} > r\,a_n$. Para $r > 1$, esta última desigualdad implica que $a_{n+1} > a_n$ y de esta manera $\lim_{n\to\infty} a_n \ne 0$. Por el Teorema 11.7 vemos que $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge. □

Ejemplo 7

Determinar si es convergente o divergente $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k!}$.

Solución

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{5^n} = \lim_{n\to\infty} 5\,\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} 5\,\frac{n!}{n!(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n+1} = 0.$$

Puesto que $L = 0 < 1$, del Teorema 11.15(*i*) se deduce que la serie es convergente.

Ejemplo 8

Determinar si es convergente o divergente $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$.

Solución

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \qquad \text{(Véase [8.29] en la Sección 8.2)}$$

Puesto que $L = e > 1$, del Teorema 11.15(*ii*) se deduce que la serie es divergente.

Observaciones

(*i*) Cuando se aplica el criterio de la integral, debe tenerse en cuenta que el valor de la integral impropia convergente $\int_1^\infty f(x)\,dx$ no está relacionado con la suma de la serie.

(*ii*) Los criterios examinados en esta sección dicen cuándo una serie tiene suma, pero ninguno de ellos da una indicación respecto del valor de la suma. Sabiendo que hay convergencia, es posible luego sumar cinco, cien o mil términos en una computadora para obtener una aproximación a la suma.

(*iii*) Las conclusiones del criterio de la integral para $\sum_{k=n}^\infty a_k$ son válidas también si la función no negativa continua f no comienza a decrecer hasta que $x \geq N \geq n$. Para la serie $\sum_{k=1}^\infty (\ln k)/k$, la función $f(x) = (\ln x)/x$ decrece en el intervalo $[3, \infty)$. No obstante, en el criterio de la integral es posible utilizar $\int_1^\infty (\ln x)/x\,dx$.

(*iv*) Las hipótesis de (*i*) y (*ii*) del criterio de comparación también se pueden debilitar, lo cual da lugar a un teorema más fuerte. Solamente se requiere que $a_k \leq b_k$, o bien $a_k \geq b_k$, para k suficientemente grande y no para todos los enteros positivos.

(*v*) En la aplicación del criterio de comparación básico, a menudo es fácil llegar a un punto en donde la serie dada es menor término a término que una serie divergente. Por ejemplo, $1/(5^k + \sqrt{k}) \leq 1/\sqrt{k}$ es ciertamente verdadero y $\sum_{k=1}^\infty 1/\sqrt{k}$ diverge. Este tipo de razonamiento no prueba nada acerca de $\sum_{k=1}^\infty 1/(5^k + \sqrt{k})$. Pero esta serie converge. ¿Por qué? De manera semejante no se puede llegar a ninguna conclusión demostrando que una serie es mayor término a término que una serie convergente.

La tabla siguiente resume el criterio de comparación. Sea $\sum a_k$ una serie de términos positivos.

Comparación de términos	*Serie de prueba* $\sum b_k$	*Conclusión acerca de* $\sum a_k$
$a_k \leq b_k$	converge	converge
$a_k \leq b_k$	diverge	ninguna
$a_k \geq b_k$	diverge	diverge
$a_k \geq b_k$	converge	ninguna

(*vi*) El criterio de la razón siempre conducirá al caso no concluyente cuando se aplique a una serie p. Demuéstrelo con $\sum_{k=1}^\infty 1/k^2$ y vea lo que sucede.

Ejercicios 11.4

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 988.

En los Problemas 1-52 aplique un criterio apropiado para determinar si la serie indicada converge o diverge. En algunos casos puede aplicarse más de un criterio.

1. $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^{1.1}}$
2. $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^{0.99}}$
3. $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2k+7}$
4. $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{10+\sqrt{k}}$
5. $\sum_{k=1}^\infty \frac{k}{3k+1}$
6. $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2+5}$
7. $\sum_{k=1}^\infty ke^{-k^2}$
8. $\sum_{k=1}^\infty \frac{\arctan k}{1+k^2}$
9. $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(k+1)(k+2)}$
10. $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k+\sqrt{k}}$
11. $\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k \ln k}$
12. $\sum_{k=3}^\infty \frac{\ln k}{k^5}$
13. $\sum_{k=2}^\infty \frac{(\ln k)^{-2}}{k}$
14. $\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k\sqrt{\ln k}}$
15. $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$
16. $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$
17. $\sum_{n=1}^\infty \frac{n^2-n+2}{3n^5+n^2}$
18. $\sum_{n=2}^\infty \frac{n}{(4n+1)^{3/2}}$
19. $\sum_{k=1}^\infty \frac{2+\operatorname{sen} k}{\sqrt[3]{k^4+1}}$
20. $\sum_{k=1}^\infty \frac{3}{2+\operatorname{sen} k}$
21. $\sum_{k=1}^\infty \frac{1+8^k}{3+10^k}$
22. $\sum_{k=1}^\infty \frac{(1.1)^k}{4k}$
23. $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{3^k+k}$
24. $\sum_{k=1}^\infty \frac{1+3^k}{2^k}$
25. $\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{\ln k}$
26. $\sum_{k=2}^\infty \frac{2k+1}{k \ln k}$
27. $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k!}$
28. $\sum_{k=1}^\infty \frac{2^k}{k!}$
29. $\sum_{k=1}^\infty \frac{k!}{1000^k}$
30. $\sum_{k=1}^\infty k\left(\frac{2}{3}\right)^k$
31. $\sum_{j=1}^\infty \frac{j+e^{-j}}{5^j(j+9)}$
32. $\sum_{n=1}^\infty \frac{5n^2+2n}{3n(n^2+1)}$
33. $\sum_{n=1}^\infty \frac{1+1/n}{10^n}$
34. $\sum_{i=1}^\infty \frac{ie^{-i}}{i+1}$
35. $\sum_{j=1}^\infty \frac{j^{10}}{(1.1)^j}$
36. $\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j^5(0.99)^j}$
37. $\sum_{j=1}^\infty \ln\left(5+\frac{1}{5^j}\right)$
38. $\sum_{j=1}^\infty \frac{e^{1/j}}{j^2}$
39. $\sum_{n=1}^\infty \frac{4^{n-1}}{n3^{n+2}}$
40. $\sum_{n=1}^\infty \frac{n^3 2^{n+3}}{7^{n-1}}$
41. $\sum_{k=2}^\infty \frac{k+\ln k}{k^3+2k-1}$
42. $\sum_{k=1}^\infty \frac{\operatorname{sen}(1/k)}{k}$
43. $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^k}$
44. $\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{ke}{k+1}\right)^k$
45. $\sum_{k=1}^\infty \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt[3]{64k^9+40}}$
46. $\sum_{k=1}^\infty \frac{5k^2+k-k^{-1}}{2k^3+2k^2+8}$
47. $\sum_{k=1}^\infty \frac{k!}{(2k)!}$
48. $\sum_{k=1}^\infty \frac{(2k)!}{k!(2k)^k}$
49. $\sum_{k=1}^\infty \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{k!}$
50. $\sum_{k=1}^\infty \frac{k!}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}$
51. $\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 4} + \frac{3}{4\cdot 5} + \frac{4}{5\cdot 6} + \cdots$
52. $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{2}{2\cdot 9} + \frac{6}{3\cdot 27} + \frac{24}{4\cdot 81} + \cdots$

En los Problemas 53 y 54 determine los valores no negativos de p para los cuales converge la serie indicada.

53. $\sum_{k=1}^\infty kp^k$
54. $\sum_{k=1}^\infty k^2\left(\frac{2}{p}\right)^k$

En los Problemas 55 y 56 determine todos los valores reales de p para los cuales converge la serie indicada.

55. $\sum_{k=1}^\infty \frac{k^p}{k!}$
56. $\sum_{k=2}^\infty \frac{\ln k}{k^p}$

Problemas diversos

Sea $\sum a_k$ una serie de términos positivos para la cual $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{1/n} = L$. **El criterio de la raíz** dice que si $L < 1$, la serie es convergente; si $L > 1$, o $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{1/n} = \infty$, la serie diverge. Cuando $L = 1$ el criterio no es concluyente. En los Problemas 57-60 aplique el criterio de la raíz para determinar si la serie indicada converge o diverge.

57. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^{2k+1}}{k^k}$

58. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^k}$

59. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$

60. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{k}\right)^k$

61. Demuestre el Teorema 11.12.

62. Suponga que $a_k > 0$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$. Demuestre que si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ también converge. ¿Es verdadera la proposición recíproca?

63. La sucesión de Fibonacci* $\{F_n\}$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$$

se define por la fórmula recurrente $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, en donde $F_1 = 1$, $F_2 = 1$. Verifique que el término general de la sucesión es

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

demostrando que esta expresión satisface la fórmula recurrente.

64. Sea F_n el término general de la sucesión de Fibonacci dada en el Problema 63. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

65. Sea $\{F_n\}$ la sucesión de Fibonacci dada en el Problema 63. Demuestre que la serie

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n}$$

es convergente.

11.5 Series alternantes y convergencia absoluta

Una serie que tenga cualquiera de las formas

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$$

o bien $$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + (-1)^n a_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k,$$

en donde $a_k > 0$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$, se dice que es una **serie alternante (o alterna)**. Puesto que $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ es precisamente un múltiplo de $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$, nos limitaremos a considerar esta última serie.

Ejemplo 1

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

y $$\frac{\ln 2}{4} - \frac{\ln 3}{8} + \frac{\ln 4}{16} - \frac{\ln 5}{32} + \cdots = \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \frac{\ln k}{2^k}$$

son ejemplos de series alternas.

Criterio de las series alternantes

La primera serie del Ejemplo 1, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$, se llama **serie armónica alternante.** Aunque la serie armónica $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ diverge, la introducción de términos positivos y negativos en la sucesión de sumas parciales de la serie armónica alterna basta para producir una serie convergente. Demostraremos que $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}/k$ converge, por medio del criterio siguiente.

* Véanse los Problemas 63 y 64 de los Ejercicios 11.1.

TEOREMA 11.16

Criterio de la series alternantes

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y $a_{k+1} \leq a_k$ para todo entero positivo k, entonces $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ converge.

Demostración Consideremos las sumas parciales que contienen $2n$ términos:

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n}$$
$$= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}). \tag{11.11}$$

Puesto que $a_k - a_{k+1} \geq 0$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$, tenemos que

$$S_2 \leq S_4 \leq S_6 \leq \cdots \leq S_{2n} \leq \cdots.$$

Así que la sucesión $\{S_{2n}\}$ de las sumas que contienen un número par de términos de la serie, es una sucesión monótona reescribiendo (11.11) como

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - a_{2n}$$

muestra que $S_{2n} < a_1$ para todo entero positivo n. Por lo tanto, $\{S_{2n}\}$ está acotada. Por el Teorema 11.4 $\{S_{2n}\}$ converge a un límite S. Ahora bien,

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$$

implica que $$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S + 0 = S.$$

Esto demuestra que la sucesión de sumas parciales que contienen un número impar de términos, también converge a S. □

Ejemplo 2

Demostrar que la serie armónica alternante

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

es convergente.

Solución Con la identificación $a_n = 1/n$, tenemos de inmediato que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{y} \quad a_{k+1} \leq a_k$$

puesto que $1/(k+1) \leq 1/k$ para $k \geq 1$. Del Teorema 11.6 se deduce que converge la serie alterna.

Ejemplo 3

La serie alternante

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2k+1}{3k-1}$$

diverge, ya que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-1} = \frac{2}{3}.$

Recuérdese que por el Teorema 11.6 es necesario que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ para la convergencia de *cualquier serie infinita.*

Aunque pudiera parecer una tarea sencilla demostrar que $a_{k+1} \le a_k$, a menudo no es así.

Ejemplo 4

Determinar si $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sqrt{k}}{k+1}$.

Solución Para demostrar que los términos de la serie satisfacen la condición $a_{k+1} \le a_k$, consideremos la función $f(x) = \sqrt{x}/(x+1)$ para la cual $f(k) = a_k$. En virtud de que

$$f'(x) = -\frac{x-1}{2\sqrt{x}(x+1)^2} < 0 \quad \text{para } x > 1,$$

vemos que la función f decrece para $x > 1$. Por lo tanto, $a_{k+1} \le a_k$ es cierta para $k \ge 1$. Ahora bien, la regla de L'Hôpital muestra que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \quad \text{y así} \quad \lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Por lo tanto, la serie alternante converge por el Teorema 11.16.

Error en la aproximación de la suma de una serie alternante

El teorema siguiente es útil para aproximar la suma de una serie alterna convergente. Su demostración se deja como ejercicio.

TEOREMA 11.17

Supongamos que la serie alternante $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$, $a_k > 0$, converge a un número S. Si S_n es la enésima suma parcial de la serie y $a_{k+1} \le a_k$ para todo k, entonces $|S_n - S| < a_{n+1}$ para todo n. □

El Teorema 11.17 expresa que el **error** $|S_n - S|$ entre la enésima suma parcial y la suma de la serie es menor que el valor absoluto del $(n+1)$-ésimo término de la serie.

Ejemplo 5

Evaluar aproximadamente la suma de la serie convergente

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}$$

hasta cuatro cifras decimales.

Solución El Teorema 11.17 indica que debemos tener

$$a_{n+1} = \frac{1}{(2n+2)!} < 0.00005.$$

Ahora bien, de

$$n = 1, \quad a_2 = \frac{1}{4!} \approx 0.041667$$

$$n = 2, \quad a_3 = \frac{1}{6!} \approx 0.001389$$

$$n = 3, \quad a_4 = \frac{1}{8!} \approx 0.000025 < 0.00005,$$

vemos que

$$S_3 = \frac{1}{2!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} \approx 0.4597$$

tiene la precisión deseada.

DEFINICIÓN 11.6

Convergencia absoluta

Se dice que una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es **absolutamente convergente** si $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ converge. □

Ejemplo 6

La serie alternante

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$$

es absolutamente convergente, ya que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

es una serie p que converge.

DEFINICIÓN 11.7

Convergencia condicional

Se dice que una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es **condicionalmente convergente** si $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ diverge, y $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge. □

Ejemplo 7

En el Ejemplo 2 se vio que la serie armónica alternante $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}/k$ es convergente. Pero, tomando el valor absoluto de cada término resulta la serie armónica divergente $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$. Así que, $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}/k$ converge condicionalmente.

El resultado siguiente demuestra que toda serie absolutamente convergente es también convergente.

TEOREMA 11.18

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ también converge.

Demostración Si $c_k = a_k + |a_k|$, entonces $c_k \leq 2|a_k|$. Puesto que $\sum|a_k|$ converge, del criterio de comparación resulta que $\sum c_k$ es convergente. Además,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(c_k - |a_k|)$$

converge, ya que tanto $\sum c_k$ como $\sum|a_k|$ convergen. Pero

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty}(c_k - |a_k|).$$

Por lo tanto, $\sum a_k$ es convergente. □

Obsérvese que como $\sum|a_k|$ es una serie de términos positivos, pueden utilizarse los criterios de la sección precedente para determinar la convergencia o la divergencia.

Ejemplo 8

Determinar si es convergente o divergente $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{1+k^2}$.

Solución Del criterio de la integral resulta que $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(1+k^2)$ es convergente. (¡Demuéstrelo!) Por lo tanto, la serie alterna es absolutamente convergente, por la Definición 11.6. Del Teorema 11.18 concluimos que la serie dada es convergente.

La siguiente forma modificada del Criterio de la razón puede ser aplicada directamente a una serie alternante.

TEOREMA 11.19

Criterio de la razón

Supongamos que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es una serie de términos no nulos tales que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L.$$

(*i*) Si $L < 1$, la serie es absolutamente convergente.

(*ii*) Si $L > 1$, o si $\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n| = \infty$, la serie es divergente.

(*iii*) Si $L = 1$, el criterio no es concluyente. □

Ejemplo 9

Determinar si converge o diverge $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}2^{2k-1}}{k3^k}$.

Solución

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}2^{2n+1}}{(n+1)3^{n+1}}\cdot\frac{n3^n}{(-1)^{n+1}2^{2n-1}}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4n}{3(n+1)} = \frac{4}{3}.$$

Puesto que $L = \frac{4}{3} > 1$, del Teorema 11.19(*ii*) vemos que la serie alterna es divergente.

Observaciones

(*i*) La conclusión del Teorema 11.16 permanece cierta cuando la hipótesis "$a_{k+1} \leq a_k$ para todo entero positivo k" se reemplaza con la condición "$a_{k+1} \leq a_k$ para k suficientemente grande". Para la serie alternante $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}(\ln k)/k^{1/3}$, se demuestra fácilmente que $a_{k+1} \leq a_k$ para $k \geq 21$, mediante el procedimiento empleado en el Ejemplo 4. Además, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Por lo tanto, la serie converge por el criterio de la series alternantes.

(*ii*) Si se encuentra que la serie de valores absolutos $\sum|a_k|$ es divergente, entonces no se puede sacar una conclusión referente a la convergencia o divergencia de la serie $\sum a_k$.

(*iii*) Si $\sum a_k$ es absolutamente convergente, entonces los términos de la serie pueden ser reacomodados o reagrupados de cualquier manera, y la serie resultante será convergente al mismo número que la serie original. Por lo contrario, si los términos de una serie condicionalmente convergente se escriben en un orden distinto, la nueva serie puede diverger o converger a un número totalmente diferente. Se deja como ejercicio demostrar que si S es la suma de la serie armónica alterna convergente

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots,$$

entonces la serie reordenada

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Converge a $\frac{3}{2}S$. Véase el Problema 50 de los Ejercicios 11.5. Se recomienda también reflexionar sobre el siguiente "razonamiento".

$$2S = 2\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \cdots\right]$$
$$= 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \cdots$$

$$= (2 - 1) - \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{6} + \cdots$$
$$= S.$$

Dividiendo entre S, se obtiene la interesante conclusión de que $2 = 1$.

Ejercicios 11.5

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 988.

En los Problemas 1-14 aplique el criterio de las series alternantes para determinar si la serie indicada es convergente.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+2}$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$
3. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{k}{k+1}$
4. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{k}{k^2+1}$
5. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k^2+2}{k^3}$
6. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{3k-1}{k+5}$
7. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{3^k}\right)$
8. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k+1}{4^k}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4\sqrt{n}}{2n+1}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt[3]{n}}{n+1}$
11. $\sum_{n=2}^{\infty}(\cos n\pi)\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$
12. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{k}\frac{\sqrt{k^2+1}}{k^3}$
13. $\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k}\frac{k}{\ln k}$
14. $\sum_{k=3}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\ln k^{10}}{k}$

En los Problemas 15-32 determine si la serie indicada es absolutamente convergente, condicionalmente convergente, o divergente.

15. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$
16. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k+5}}$
17. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(\frac{2}{3}\right)^k$
18. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2^{2k}}{3^k}$
19. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{k}{5^k}$
20. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}(k2^{-k})^2$
21. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}$
22. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{(k!)^2}{(2k)!}$
23. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k!}{100^k}$
24. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{5^{2k-3}}{10^{k+2}}$
25. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{k}{1+k^2}$
26. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k}{1+k^4}$
27. $\sum_{k=1}^{\infty}\cos k\pi$
28. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right)}{\sqrt{k+1}}$
29. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right)$
30. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right)}{k^2}$
31. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\left[\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right]$
32. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}[\sqrt{k+1}-\sqrt{k}]$

En los Problemas 33 y 34 aproxime la suma de la serie convergente con el número indicado de cifras decimales.

33. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!}$; cinco
34. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}$; tres

En los Problemas 35 y 36 encuentre el menor entero positivo n de modo que S_n aproxime la suma de la serie convergente hasta el número indicado de cifras decimales.

35. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^3}$; dos
36. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$; tres

En los Problemas 37 y 38 aproxime la suma de la serie convergente de modo que el error sea menor que la cantidad indicada.

37. $1 - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{4^4} + \cdots$; 10^{-3}
38. $1 - \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} - \frac{4}{5^4} + \cdots$; 10^{-4}

En los Problemas 39 y 40 calcule el error al emplear la suma parcial indicada como una aproximación a la suma de la serie convergente.

39. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$; S_{100}
40. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k\,2^k}$; S_6

Problemas diversos

En los Problemas 41 y 46 diga por qué no es aplicable a la serie indicada el criterio de las series alternantes. Determine si la serie converge o diverge.

41. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(k\pi/6)}{\sqrt{k^4+1}}$
42. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{100+(-1)^k 2^k}{3^k}$

43. $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - - + + \cdots$

44. $\frac{1}{1} - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} - - - + + + + \cdots$

45. $\frac{2}{1} - \frac{1}{1} + \frac{2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \cdots$

(*Sugerencia:* Considere las sumas parciales S_{2n} para $n = 1, 2, 3, \ldots$)

46. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - - - - - \cdots$

47. Determine si converge o diverge cada una de las series siguientes.

(a) $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$
(b) $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots$
(c) $1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots$
(d) $1 + (-1 + 1) + (-1 + 1 - 1) + \cdots$

48. Demuestre el Teorema 11.17. (*Sugerencia:* Pruebe que

$$S - S_n = (-1)^{n+2}a_{n+1} + (-1)^{n+3}a_{n+2} + (-1)^{n+4}a_{n+3} + \cdots.)$$

En los Problemas 49 y 50 utilice

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

para demostrar el resultado indicado.

49. $\frac{1}{2}S = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} - \cdots$

50. $\frac{3}{2}S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots$

51. Si Σa_k es absolutamente convergente, demuestre que Σa_k^2 converge. (*Sugerencia:* Para n suficientemente grande, $|a_n| < 1$. ¿Por qué?)

11.6 Series de potencias

A una serie que contenga potencias de exponente entero no negativo de una variable x

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} c_kx^k, \qquad (11.12)$$

en donde los c_k son constantes que dependen de k, se la llama **serie de potencias en** x. La serie (11.12) es sólo un caso particular de la forma más general

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k, \qquad (11.13)$$

a la cual se llama **serie de potencias en** $x - a$. El problema que se plantea en esta sección es:

Encontrar los valores de x para los cuales converge una serie de potencias.

Obsérvese que (11.12) y (11.13) convergen a c_0 cuando $x = 0$ y $x = a$, respectivamente.*

* Es conveniente definir $x^0 = 1$ y $(x-a)^0 = 1$, aun cuando $x = 0$ y $x = a$, respectivamente.

Ejemplo 1

La serie de potencias

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

se reconoce como una serie geométrica con $r = x$. Por lo tanto, la serie converge para los valores de x que satisfacen $|x| < 1$, o bien $-1 < x < 1$.

Intervalo de convergencia

Al conjunto de todos los números reales x para los cuales converge una serie de potencias, se le llama su **intervalo de convergencia**. Considerando el caso general, una serie de potencias en $x - a$ puede converger

(*i*) en un *intervalo finito* centrado en a: $(a - r, a + r)$, $[a - r, a + r)$, $(a - r, a + r]$ o $[a - r, a + r]$; o bien

(*ii*) en un *intervalo infinito* $(-\infty, \infty)$; o

(*iii*) *sólo* en el *punto* $x = a$.

En los casos respectivos, se dice que el **radio de convergencia** es r, ∞ o bien 0. La Figura 11.6 ilustra el caso $(a - r, r + a)$.

El criterio de la razón, como se expresa en el Teorema 11.19, es especialmente útil para encontrar un intervalo de convergencia.

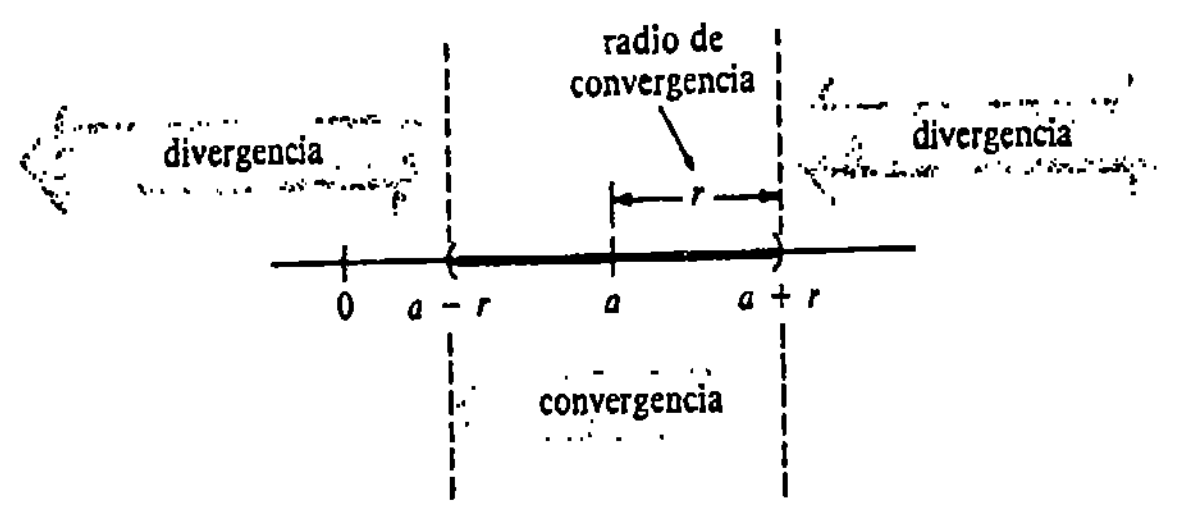


Figura 11.6

Ejemplo 2

Hallar el intervalo de convergencia de

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k(k+1)^2}.$$

Solución

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}(n+2)^2}\cdot\frac{2^n(n+1)^2}{x^n}\right|.$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2\frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2}$$

En virtud de la parte (*i*) del Teorema 11.19, existe convergencia absoluta siempre que este límite sea estrictamente menor que la unidad. Así que la serie es absolutamente convergente para aquellos valores de x que satisfacen $|x|/2 < 1$ o $|x| < 2$; esto es, la serie convergerá para cualquier número x del intervalo abierto $(-2, 2)$. Sin embargo, si $|x|/2 = 1$, o sea cuando $x = 2$ y $x = -2$, el criterio de la razón no da información. Hay que realizar por separado comprobaciones de la convergencia de la serie en estos puntos de frontera. Sustituyendo x por el valor 2 se obtiene $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(k+1)^2$, que es convergente por comparación con la serie p convergente $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$. De manera semejante, sustituyendo x por el valor -2 resulta la serie alterna $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k/(k+1)^2$, la cual es evidentemente convergente. (¿Por qué?) Concluimos que el intervalo de convergencia es el intervalo cerrado $[-2, 2]$. El radio de convergencia es 2. La serie diverge si $|x| > 2$.

Ejemplo 3

Determinar el intervalo de convergencia de

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Solución Por el Teorema 11.19 tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}|x| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}.$$

Puesto que $\lim_{n\to\infty}|x|/(n+1) = 0$ para cualquier elección de x, la serie converge absolutamente para todo número real. Así que el intervalo de convergencia es $(-\infty, \infty)$ y el radio de convergencia, ∞.

Ejemplo 4

Determinar intervalo de convergencia de

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-5)^k}{k3^k}.$$

Solución

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-5)^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}\cdot\frac{n3^n}{(x-5)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)\frac{|x-5|}{3} = \frac{|x-5|}{3}$$

La serie converge absolutamente si $|x-5|/3 < 1$ o sea $|x-5| < 3$. Esta última desigualdad da lugar al intervalo abierto $(2, 8)$. En $x = 2$ y $x = 8$, obtenemos, respectivamente, $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k/k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$. La primera serie converge por el criterio de las series alternantes, la segunda es la serie armónica divergente. Por lo tanto, el intervalo de convergencia es $[2, 8)$. El radio respectivo es 3. La serie diverge si $x < 2$ o bien $x \geq 8$.

Ejemplo 5

Obtener el intervalo de convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} k!(x+10)^k$.

Solución

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!(x+10)^{n+1}}{n!(x+10)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1)|x+10| = \begin{cases}\infty, & x \neq -10\\ 0, & x = -10.\end{cases}$$

La serie diverge para todo número real x, *excepto* para $x = -10$. En $x = -10$, obtenemos una serie convergente que consiste toda en ceros. El radio de convergencia es 0.

Ejercicios 11.6

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 989.

En los Problemas 1-22 encuentre el intervalo de convergencia de la serie de potencias indicada.

1. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}x^k$
2. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^2}$
3. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k}x^k$
4. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{5^k}{k!}x^k$
5. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-3)^k}{k^3}$
6. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x+7)^k}{\sqrt{k}}$
7. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{10^k}(x-5)^k$
8. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+2)^2}(x-4)^k$
9. $\sum_{k=0}^{\infty}k!2^k x^k$
10. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k-1}{k^{2k}}x^k$
11. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(3x-1)^k}{k^2+k}$
12. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4x-5)^k}{3^k}$
13. $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^k}{\ln k}$
14. $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k x^k}{k\ln k}$
15. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{3^{2k}}(x+7)^k$
16. $\sum_{k=1}^{\infty}k^3 2^{4k}(x-1)^k$
17. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2k)}{k!}(x-2)^k$
18. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{1\cdot3\cdot5\cdots(2k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^k$
19. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-3)^k}{(k+1)(k+2)}(x-1)^k$
20. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k}{(-2)^k k(k+1)}(x+5)^k$
21. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(k!)^2}\left(\frac{x-2}{3}\right)^k$
22. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(6-x)^{k+1}}{\sqrt{2k+1}}$

Problemas diversos

En los Problemas 23-30 la serie indicada no es una serie de potencias. No obstante, encuentre todos los valores de x para los cuales converge la serie.

23. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x^k}$
24. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{7^k}{x^{2k}}$
25. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^k$
26. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\left(\frac{x}{x+2}\right)^k$
27. $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{k^2}$
28. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{(kx)^k}$
29. $\sum_{k=0}^{\infty}e^{kx}$
30. $\sum_{k=0}^{\infty}k!e^{-kx^2}$
31. Encuentre todos los valores de x en $[0, 2\pi]$ para los cuales converge $\sum_{k=0}^{\infty}(2/\sqrt{3})^k\operatorname{sen}^k x$.
32. Demuestre que $\sum_{k=1}^{\infty}(\operatorname{sen} kx)/k^2$ converge para todos los valores reales de x.

Sea $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ una serie para la cual $\lim_{n\to\infty}(|a_n|)^{1/n} = L$. El criterio de la raíz dice que si $L < 1$, la serie es absolutamente convergente; si $L > 1$, o si $\lim_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} = \infty$, la serie diverge. Cuando $L = 1$ el criterio no es concluyente. En los Problemas 33-36 aplique el criterio de la raíz para obtener el intervalo de convergencia de la serie indicada.

33. $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^k}{(\ln k)^k}$
34. $\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)^k(x+1)^k$
35. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^k(x+3)^k$
36. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}(x-e)^k$

11.7 Derivación e integración de series de potencias

Una serie de potencias representa una función

Para cada x en su intervalo de convergencia, una serie de potencias* $\sum c_k x^k$ converge a un número. Así, una serie de potencias define o *representa* una función f cuyo dominio es el intervalo de convergencia. Para cada x en el intervalo citado, se define el valor funcional $f(x)$ mediante la suma de la serie:

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k. \tag{11.14}$$

Los tres teoremas siguientes, que se establecen sin demostración, contestan algunas preguntas fundamentales respecto a una función representada por una serie de potencias. En cada teorema se supone que la serie (11.14) converge en un intervalo $(-r, r)$ para el cual el radio de convergencia es positivo, o bien ∞.

TEOREMA 11.20

Si $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$, entonces f es continua en cada x de $(-r, r)$. □

Derivación de una serie de potencias

TEOREMA 11.21

Si $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$, entonces f es diferenciable en cada x de $(-r, r)$ y

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^{k-1}. \tag{11.15}$$

□

La conclusión (11.15) simplemente expresa que una serie de potencias puede derivarse término a término como en el caso de un polinomio:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{d}{dx}c_0 + \frac{d}{dx}c_1x + \frac{d}{dx}c_2x^2 + \frac{d}{dx}c_3x^3 + \cdots + \frac{d}{dx}c_nx^n + \cdots\\ &= c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \cdots + nc_nx^{n-1} + \cdots\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^{k-1}.\end{aligned}$$

* Por conveniencia se limita el estudio a las series de potencias en x. Desde luego, los resultados de esta sección se aplican también a las series de potencias en $x - a$.

El radio de convergencia de (11.15) es el mismo que el de $\sum c_k x^k$. Así que aplicando el Teorema 11.21 a f', definida en (11.15), es claro que f' es diferenciable en cada x de $(-r, r)$; esto es,

$$f''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3 x + \cdots + n(n-1)c_n x^{n-2} + \cdots$$
$$= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}.$$

Continuando de esta manera se concluye que:

Una función f representada por una serie de potencias en $(-r, r)$, $r > 0$, posee derivadas de todos los órdenes en el intervalo.

Integración de una serie de potencias

Al igual que en (11.15), el proceso de integración de una serie de potencias también se lleva a cabo término a término:

$$\int f(x)\,dx = \int c_0\,dx + \int c_1 x\,dx + \int c_2 x^2\,dx + \cdots + \int c_n x^n\,dx + \cdots$$
$$= \left(c_0 x + \frac{c_1}{2}x^2 + \frac{c_3}{3}x^3 + \cdots + \frac{c_n}{n+1}x^{n+1} + \cdots\right) + C$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}x^{k+1} + C.$$

Esto se resume en el teorema siguiente.

TEOREMA 11.22

Si $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, entonces

$$\int f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}x^{k+1} + C. \qquad (11.16)$$

□

Para integrales definidas, (11.16) implica que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\left(\int_a^b x^k\,dx\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1},$$

para números cualesquiera a y b en $(-r, r)$.

Ejemplo 1

Obtener una representación en serie de potencias para la función $f(x) = 1/(1+x)$.

Solución Recuérdese que una serie geométrica converge a $a/(1-r)$ si $|r| < 1$. Identificando $a = 1$, $r = -x$, vemos que

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k, \qquad (11.17)$$

para cualquier x en $(-1, 1)$.

Ejemplo 2

La derivación de (11.17) término a término da lugar a una representación en serie de potencias para $1/(1+x^2)$ en $(-1, 1)$:

$$\frac{-1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + \cdots + (-1)^n n x^{n-1} + \cdots$$

o

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 + \cdots + (-1)^{n+1} n x^{n-1} + \cdots$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} k x^{k-1}.$$

Ejemplo 3

Obtener una representación en serie de potencias para $\ln(1+x)$ en $(-1, 1)$.

Solución Sustituyendo $x = t$ en (11.17) resulta

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^n t^n + \cdots.$$

Así que para cualquier x en $(-1, 1)$;

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x dt - \int_0^x t\,dt + \int_0^x t^2\,dt - \cdots + (-1)^n \int_0^x t^n\,dt + \cdots$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots.$$

Pero, $\int_0^x dt/(1+t) = \ln(1+t)]_0^x = \ln(1+x)$, y de esta manera

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}x^{k+1}. \qquad (11.18)$$

Ejemplo 4

Aproximar $\ln(1.2)$ con cuatro cifras decimales.

Solución Sustituyendo $x = 0.2$ en (11.18) resulta

$$\ln(1.2) = 0.2 - \frac{(0.2)^2}{2} + \frac{(0.2)^3}{3} - \frac{(0.2)^4}{4} + \frac{(0.2)^5}{5} - \frac{(0.2)^6}{6} + \cdots \qquad (11.19)$$
$$= 0.2 - 0.02 + 0.00267 - 0.0004 + 0.000064 - 0.00001067 + \cdots$$
$$\approx 0.1823. \qquad (11.20)$$

Si se denota por S la suma de la serie (11.19) del ejemplo precedente, entonces por el Teorema 11.17 se sabe que $|S_n - S| < a_{n+1}$. El número indicado en (11.20) es exacto hasta cuatro cifras decimales, ya que, para la quinta suma parcial, $|S_5 - S| < 0.00001067 < 0.00005$.

Observación

Es interesante advertir que si el intervalo de convergencia de una representación en serie de potencias para una función f, es el intervalo abierto $(-r, r)$, entonces la representación en serie de potencias para $\int_0^x f(t)\,dt$ *puede* converger en una o en ambas fronteras del intervalo. El lector debe comprobar que la serie (11.18) diverge en $x = -1$, pero converge en $x = 1$. En este último valor se descubre que la suma de la serie armónica alterna está dada por:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots.$$

Ejercicios 11.7

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 989.

En los Problemas 1-14 obtenga una representación en serie de potencias para la función dada. Indique el intervalo de convergencia.

1. $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{(1 - x)^2}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{5 + 3x}$
4. $f(x) = \dfrac{6}{2 - x}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{(1 - x)^3}$
6. $f(x) = \dfrac{x^2}{(1 + x)^3}$
7. $f(x) = \ln(4 + x)$
8. $f(x) = \ln(1 + 2x)$
9. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$
10. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$
11. $f(x) = \tan^{-1}x$
12. $f(x) = \ln(1 + x^2)$
13. $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1 + t^2)\,dt$
14. $f(x) = \displaystyle\int_0^x \tan^{-1}t\,dt$

En los Problemas 15 y 16 encuentre el dominio de la función indicada.

15. $f(x) = \dfrac{x}{3} - \dfrac{x^2}{2 \cdot 3^2} + \dfrac{x^3}{3 \cdot 3^3} - \dfrac{x^4}{4 \cdot 3^4} + \cdots$
16. $f(x) = 1 + 2x + \dfrac{4x^2}{1 \cdot 2} + \dfrac{8x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$

En los Problemas 17-22 utilice series infinitas para aproximar la cantidad indicada hasta cuatro cifras decimales.

17. $\ln(1.1)$
18. $\tan^{-1}(0.2)$
19. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{1 + x^3}$
20. $\displaystyle\int_0^{1/3} \frac{x}{1 + x^4}\,dx$
21. $\displaystyle\int_0^{0.3} x\tan^{-1}x\,dx$
22. $\displaystyle\int_0^{1/2} \tan^{-1}x^2\,dx$

Problemas diversos

23. Si
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k + 1)!}x^{2k+1},$$
para $-\infty < x < \infty$, demuestre que $f''(x) + f(x) = 0$.

24. (a) Si
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$
para $-\infty < x \le \infty$, demuestre que $f'(x) = f(x)$.

(b) Demuestre que
$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$
resolviendo la ecuación diferencial de la parte (a) por separación de variables. (*Sugerencia:* $f(0) = 1$.)

En los Problemas 25 y 26 aplique el resultado del Problema 24(b) para hallar una representación en serie de potencias para la función indicada.

25. $f(x) = e^{-x}$
26. $f(x) = e^{x/5}$

En los Problemas 27-30 aplique el resultado del Problema 24(b) para aproximar la cantidad indicada con cuatro cifras decimales.

27. $\dfrac{1}{e}$
28. $e^{-1/2}$
29. $\displaystyle\int_0^{0.2} e^{-x^2}\,dx$
30. $\displaystyle\int_0^{1} e^{-x^2/2}\,dx$

31. Aplique el Problema 11 para demostrar que
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

32. Se sabe que la serie del Problema 31 converge lentamente. Demuéstrelo encontrando el menor entero positivo n, tal que S_n aproxime a $\pi/4$ con cuatro cifras decimales.

11.8 Serie de Taylor

Series de Taylor y de Maclaurin de una función f

Cuando una serie de potencias representa una función f en un intervalo $(a-r, a+r)$, $r > 0$,

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \cdots + c_n(x - a)^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x - a)^k, \tag{11.21}$$

existe una relación entre los coeficientes c_k y las derivadas de f. Por el Teorema 11.21, puede escribirse

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x - a) + 3c_3(x - a)^2 + \cdots \tag{11.22}$$
$$f''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(x - a) + \cdots \tag{11.23}$$
$$f'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1c_3 + \cdots \tag{11.24}$$

y así sucesivamente. Evaluando (11.21), 11.22), (11.23) y (11.24) en $x = a$ resulta

$$f(a) = c_0, \quad f'(a) = 1!c_1, \quad f''(a) = 2!c_2 \quad \text{y} \quad f'''(a) = 3!c_3,$$

respectivamente. En general, $f^{(n)}(a) = n!c_n$, o

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \qquad n \ge 0. \tag{11.25}$$

Cuando $n = 0$ se interpreta la derivada "de orden cero" como $f(a)$ y $0! = 1$. Sustituyendo (11.25) en (11.21) resulta

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k, \tag{11.26}$$

que es válida para todos los valores de x en $(a-r, a+r)$, $r > 0$. Esta serie se llama **serie de Taylor de f en a.*** El caso especial $a = 0$ de una serie de Taylor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k, \tag{11.27}$$

se llama **serie de Maclaurin de f.**†

Por otra parte, si se tiene una función diferenciable f, surge la pregunta natural:

¿Podemos desarrollar f en una serie de Taylor (11.26)?

* Llamada en honor del matemático inglés Brook Taylor (1685-1731), quien publicó este resultado en 1715.

† Llamada en honor del matemático escocés, y anteriormente alumno de Newton, Colin Maclaurin (1698-1746).

Formalmente, la respuesta es sí, calculando simplemente los coeficientes como lo dicta (11.25).

Ejemplo 1

Obtener la serie de Taylor de $f(x) = \ln x$ en $a = 1$.

Solución Se tiene que

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \ln x, & f(1) &= 0\\
f'(x) &= \frac{1}{x}, & f'(1) &= 1\\
f''(x) &= -\frac{1}{x^2}, & f''(1) &= -1\\
f'''(x) &= \frac{1\cdot 2}{x^3}, & f'''(1) &= 2!\\
&\vdots\\
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}, & f^{(n)}(1) &= (-1)^{n-1}(n-1)!.
\end{aligned}
$$

(11.25) y (11.26) dan lugar así a

$$(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k. \tag{11.28}$$

Con la ayuda del criterio de la razón, se encuentra que esta serie converge para todos los valores de x en el intervalo $(0, 2]$.

Teorema de Taylor

De (11.26) resulta evidente que una función f puede tener una serie de Taylor en a solamente si posee derivadas finitas de todo orden en este valor. De esta manera, $f(x) = \ln x$ no posee serie de Maclaurin. (¿Por qué?). Por otra parte, debe notarse que aun si f posee derivadas de todos los órdenes y genera una serie de Taylor convergente en algún intervalo, no se sabe si la serie converge a $f(x)$ para todo valor de x en el intervalo. (Véase el Problema 43 de los Ejercicios 11.8.) Si así es, se dice que la serie *representa* a la función dada en el intervalo. Hasta el momento no se ha demostrado que la serie (11.28) representa a $\ln x$ en $(0, 2]$. La respuesta a este problema puede obtenerse considerando el **teorema de Taylor**.

TEOREMA 11.23

Teorema de Taylor

Sea f una función tal que $f^{(n+1)}(x)$ existe para todo x en el intervalo $(a-r, a+r)$. Entonces para todo x en el intervalo

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

en donde

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{11.29}$$

se llama **polinomio de Taylor de grado n de f en a**, y

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{11.30}$$

se llama **forma de Lagrange del residuo.*** El número c está entre a y x. □

Como la demostración de este teorema desviaría el propósito principal de este análisis, se incluye en el Apéndice III. La importancia del Teorema 11.23 radica en el hecho de que los $P_n(x)$ son las sumas parciales de la serie de Taylor y que

$$P_n(x) = f(x) - R_n(x).$$

Por lo tanto, de

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x)$$

se ve que si $R_n(x)\to 0$ cuando $n\to\infty$, entonces la sucesión de sumas parciales converge a $f(x)$. En resumen:

TEOREMA 11.24

Si f tiene derivadas de todos los órdenes en todo x del intervalo $(a-r, a+r)$, y si $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para todo x en el intervalo, entonces

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \quad □$$

En la práctica, la demostración de que el residuo R_n tiende a cero cuando $n \to \infty$ depende a menudo del hecho de que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0. \tag{11.31}$$

Este último resultado se deduce aplicando el Teorema 11.6 a la serie $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$, que es absolutamente convergente para todos los números reales. (Véase el Ejemplo 3 de la Sección 11.6.)

Ejemplo 2

Representa $f(x) = \cos x$ con una serie de Maclaurin.

Solución Se tiene,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \cos x, & f(0) &= 1\\
f'(x) &= -\operatorname{sen} x, & f'(0) &= 0
\end{aligned}
$$

* Hay varias formas del residuo. Esta forma se debe al matemático francés Joseph Louis Lagrange (1736-1813).

$$f''(x) = -\cos x, \qquad f''(0) = -1$$
$$f'''(x) = \operatorname{sen} x, \qquad f'''(0) = 0$$

y así sucesivamente. De (11.27) obtenemos

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}. \tag{11.32}$$

El criterio de la razón muestra que (11.30) converge absolutamente para todos los valores reales de x. Para probar que en efecto cos x es representada por la serie (11.32), debemos probar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Para este fin, observamos que las derivadas de f satisfacen

$$|f^{(n+1)}(x)| = \begin{cases} |\operatorname{sen} x|, & \text{si } n \text{ es par} \\ |\cos x|, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

En ambos casos $|f^{(n+1)}(c)| \le 1$ para cualquier número real c, y de esta manera

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Para cualquier elección fija, pero arbitraria, de x, $\lim_{n\to\infty} |x|^{n+1}/(n+1)! = 0$ por (11.31). Pero, $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$ implica que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Por lo tanto,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

es una representación válida de cos x para todo número real x.

Ejemplo 3

Representar $f(x) = \operatorname{sen} x$ con una serie de Taylor en $a = \pi/3$.

Solución Se tiene que

$$f(x) = \operatorname{sen} x, \qquad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$f'(x) = -\cos x, \qquad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$
$$f''(x) = -\operatorname{sen} x, \qquad f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$f'''(x) = -\cos x, \qquad f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

y así sucesivamente. Por lo tanto, la serie de Taylor en $\pi/3$ que corresponde a sen x, es

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2 \cdot 1!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots. \tag{11.33}$$

Del criterio del cociente se deduce nuevamente que (11.33) converge absolutamente para todos los valores reales de x. A fin de demostrar que

$$\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2 \cdot 1!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots$$

para todo real x, obsérvese que $|f^{(n+1)}(c)| \le 1$, como en el ejemplo precedente. Esto implica que $|R_n(x)| \le |x - \pi/3|^{n+1}/(n+1)!$, de donde resulta que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, con la ayuda de (11.31).

Ejemplo 4

Demostrar que la serie (11.28) representa a $f(x) = \ln x$ en el intervalo (0, 2].

Solución Para $f(x) = \ln x$, la enésima derivada está dada por

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

Por lo tanto,

$$f^{(n+1)}(c) = \frac{(-1)^n n!}{c^{n+1}}$$

y

$$|R_n(x)| = \left| \frac{(-1)^n n!}{c^{n+1}} \cdot \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \frac{1}{n+1} \left| \frac{x-1}{c} \right|^{n+1},$$

en donde c es cierto número de (0, 2] entre 1 y x.

Si $1 \le x \le 2$, entonces $0 < x - 1 \le 1$. Como $1 < c < x$, debemos tener $0 < x - 1 \le 1 < c$ y, consecuentemente, $(x-1)/c < 1$. Por lo tanto

$$|R_n(x)| \le \frac{1}{n+1} \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

En el caso $0 < x < 1$, es posible demostrar también que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Se omite la demostración.* Por lo tanto,

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \cdots$$

para todos los valores de x en el intervalo (0, 2].

Resumen de algunas series de Maclaurin importantes:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \qquad -\infty < x < \infty \tag{11.34}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \qquad -\infty < x < \infty \tag{11.35}$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \qquad -\infty < x < \infty \tag{11.36}$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad -\infty < x < \infty \tag{11.37}$$

$$\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad -\infty < x < \infty \tag{11.38}$$

* Esta parte de la demostración se basa usualmente en una forma integral del residuo $R_n(x)$ que no consideraremos.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)} x^{k+1}, \quad -1 < x \le 1 \qquad (11.39)$$

Se pide al lector demostrar la validez de las representaciones (11.34), (11.36), (11.37) y (11.38) como ejercicio.

Algunas gráficas de polinomios de Taylor

En el Ejemplo 2 se vio que la serie de Taylor de $f(x) = \cos x$ en $a = 0$ representa a la función para todo x, ya que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Resulta siempre de interés ver gráficamente cómo convergen a la función las sumas parciales de la serie de Taylor, que son los polinomios de Taylor definidos en (11.29). En la Figura 11.7 son comparadas las gráficas de los polinomios de Taylor $P_0(x)$, $P_2(x)$, $P_4(x)$ y $P_{10}(x)$ en $a = 0$, con la gráfica de $f(x) = \cos x$. En la Figura 11.7(e) se presenta una comparación de valores numéricos.

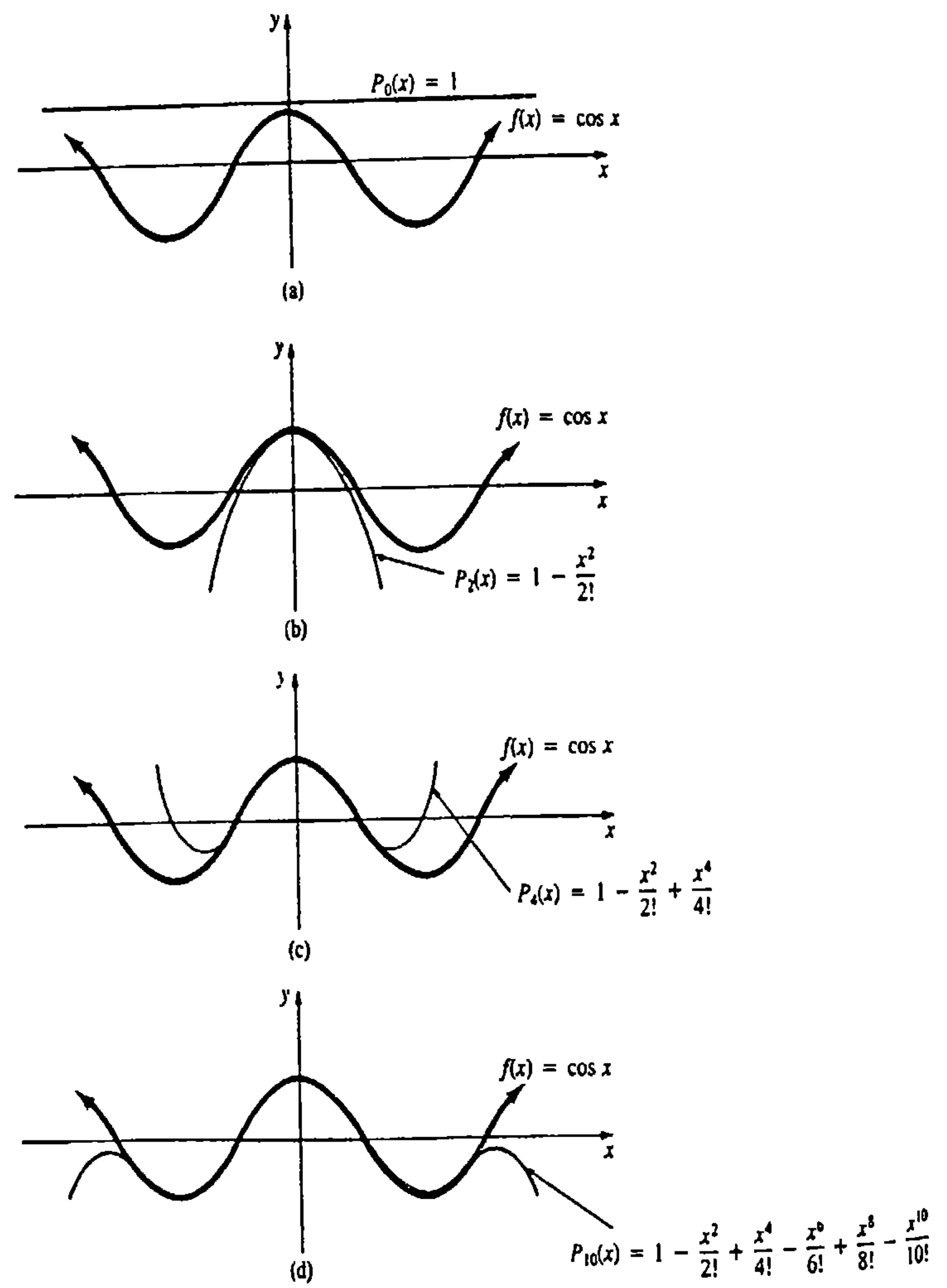


Figura 11.7

x	$P_2(x)$	$P_4(x)$	$P_{10}(x)$	$\cos x$
$\pi/6$	0.86292	0.86605	0.86603	0.86603
$\pi/4$	0.69157	0.70743	0.70711	0.70711
$\pi/3$	0.45169	0.50180	0.50000	0.5
$\pi/2$	−0.23370	0.01997	0.00000	0

(*e*)

Figura 11.7 (continuación)

Aproximaciones con polinomios de Taylor

Cuando el valor de x está cerca del número a ($x \approx a$), se puede emplear el polinomio de Taylor $P_n(x)$ de una función f en a para aproximar al valor funcional $f(x)$. El error en esta aproximación está dado por

$$|f(x) - P_n(x)| = |R_n(x)|.$$

Ejemplo 5

Aproximar $e^{-0.2}$ con $P_3(x)$. Determínese la precisión de la aproximación.

Solución Debido a que el valor $x = -0.2$ está cerca de cero, se emplea el polinomio de Taylor $P_3(x)$ de $f(x) = e^x$ en $a = 0$. De $f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x$ y (11.29) resulta que

$$P_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$
$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

y $$P_3(-0.2) = 1 + (-0.2) + \frac{1}{2}(-0.2)^2 + \frac{1}{6}(-0.2)^3 \approx 0.81867.$$

Consecuentemente, $$e^{-0.2} \approx 0.81867. \qquad (11.40)$$

Ahora bien, por (11.30) es posible escribir

$$|R_3(x)| = \frac{e^c}{4!}|x|^4 < \frac{|x|^4}{4!}$$

puesto que $-0.2 < c < 0$ y $e^c < 1$. Así,

$$|R_3(-0.2)| < \frac{|-0.2|^4}{24} < 0.0001$$

implica que el resultado (11.40) es preciso hasta tres cifras decimales.

Observaciones

(*i*) El método de la serie de Taylor para encontrar una serie de potencias de una función, y luego demostrar que la serie representa a la función, tiene una obvia y gran desventaja. Es casi imposible obtener una expresión general para la enésima derivada de la mayoría de las funciones. Así que, a menudo se está limitado a encontrar sólo los primeros coeficientes c_n. Véanse los Problemas 25 y 26 de los Ejercicios 11.8.

(*ii*) El teorema de Taylor también se llama **Teorema del Valor Medio Generalizado.*** El caso $n = 0$ se reduce al teorema del valor medio usual presentado en la página 204. Quienes lean el Apéndice III verán que la demostración del Teorema 11.23, al igual que la del Teorema 4.5, se basa en la construcción de una función especial y el teorema de Rolle.

(*iii*) Es fácil pasar por alto el significado de los resultados (11.26) y (11.27). Supóngase que se desea encontrar la serie de Maclaurin de $f(x) = 1/(2-x)$. Desde luego, es posible utilizar (11.26), lo cual se pide al lector en el Problema 1. Por otra parte, en virtud del análisis de la sección precedente, también debe reconocerse que puede obtener una representación de f en serie de potencias utilizando series geométricas. Lo importante es: *Una serie de potencias, en su intervalo de convergencia, es la serie de Taylor o de Maclaurin de la función, sin que importe cómo se obtiene.*

Ejercicios 11.8

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 989.

En los Problemas 1-10, aplique (11.27) para encontrar la serie de Maclaurin de la función indicada.

1. $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{1+5x}$
3. $f(x) = \ln(1+x)$
4. $f(x) = \ln(1+2x)$
5. $f(x) = \operatorname{sen} x$
6. $f(x) = \cos 2x$
7. $f(x) = e^x$
8. $f(x) = e^{-x}$
9. $f(x) = \operatorname{senh} x$
10. $f(x) = \cosh x$

11. Demuestre que la serie obtenida en el Problema 5 representa a sen x para todo valor real de x.

12. Demuestre que la serie obtenida en el Problema 7 representa a e^x para todo valor real de x.

13. Demuestre que la serie que se obtuvo en el Problema 9 representa a senh x para todo valor real de x.

14. Demuestre que la serie obtenida en el Problema 10 representa a cosh x para todo valor real de x.

En los Problemas 15-24 aplique (11.26) para encontrar la serie de Taylor de la función dada en el valor indicado de a.

15. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $a = 4$
16. $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$
17. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = \pi/4$
18. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = \pi/2$
19. $f(x) = \cos x$, $a = \pi/3$
20. $f(x) = \cos x$, $a = \pi/6$
21. $f(x) = \ln x$, $a = 2$
22. $f(x) = \ln(x+1)$, $a = 2$
23. $f(x) = e^x$, $a = 1$
24. $f(x) = e^{-2x}$, $a = 1/2$

En los Problemas 25 y 26 aplique (11.27) para obtener los cuatro primeros términos no nulos de la serie de Maclaurin de la función indicada.

25. $f(x) = \tan x$
26. $f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$

* No confundir con el Teorema 10.1.

En los Problemas 27-34 aplique resultados o problemas previos para hallar la serie de Maclaurin de la función indicada.

27. $f(x) = e^{-x^2}$
28. $f(x) = x^2e^{-3x}$
29. $f(x) = x\cos x$
30. $f(x) = \operatorname{sen}\sqrt{x}$
31. $f(x) = \ln(1-x)$
32. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$
33. $f(x) = \sec^2 x$
34. $f(x) = \ln(\cos x)$

En los Problemas 35-38 aproxime la cantidad dada utilizando el polinomio de Taylor $P_n(x)$ para los valores indicados de n y a. Determine la precisión de la aproximación.

35. sen 46°, $n = 2$, $a = \pi/4$. (*Sugerencia:* Convierta 46° a radianes.)

36. cos 29°, $n = 2$, $a = \pi/6$

37. $e^{0.3}$, $n = 4$, $a = 0$

38. senh(0.1), $n = 3$, $a = 0$

En los Problemas 39 y 40 utilice series infinitas para aproximar hasta cuatro cifras decimales la cantidad indicada.

39. $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\,dx$
40. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$

Problemas diversos

41. Si $i = \sqrt{-1}$, utilice (11.34) para obtener **la fórmula de Euler.**

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta.$$

42. Utilice la fórmula de Euler del Problema 41 para demostrar que

(a) $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

(b) $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}.$

43. Utilice (11.27) para encontrar la serie de Maclaurin de

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(*Sugerencia:* $f'(0) = \displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$. Sea $t = \Delta x$.)

44. Utilice la serie de Maclaurin de cos x y una identidad trigonométrica para encontrar la serie de Maclaurin de $\operatorname{sen}^2 x$.

45. Para nivelar una carretera de gran longitud L, se debe establecer un margen debido a la curvatura de la Tierra.

(a) Utilice (11.27) para demostrar que los tres primeros términos no nulos de la serie de Maclaurin de $f(x) = \sec x$ son

$$1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \cdots$$

(b) Para valores pequeños de x, utilice la aproximación

$$\sec x = 1 + \frac{1}{2}x^2$$

y la Figura 11.8 para demostrar que la corrección por nivelación es $y = L^2/2R$, en donde R es el radio de la Tierra.

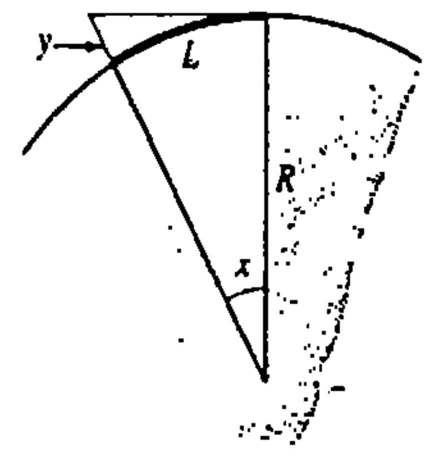


Figura 11.8

(c) Calcule el valor necesario en pulgadas de la corrección por nivelación en el caso de una longitud de carretera de 1 milla. Use $R = 4000$ millas.

46. Una onda de longitud L viaja de izquieda a derecha en agua de profundidad d, como se ilustra en la Figura 11.9. Puede demostrarse que la velocidad v de la onda está relacionada con L y d por la función $v = \sqrt{(gL/2\pi)\tanh(2\pi d/L)}$.

(a) Demuestre que en agua profunda $v \approx \sqrt{gL/2\pi}$.

(b) Utilice (11.27) para encontrar los tres primeros términos no nulos de la serie de Maclaurin de $f(x) = \tanh x$. Demuestre que cuando d/L es pequeño, entonces $v \approx \sqrt{gd}$. En otras palabras, en agua somera (o poco profunda) la velocidad de la onda es independiente de la longitud de onda.

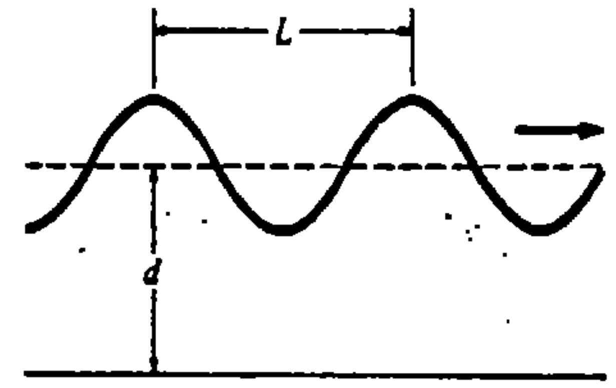


Figura 11.9

11.9 Serie binomial

Teorema del binomio

De las matemáticas básicas se sabe que

$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$$
$$(1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3,$$

y, en general, si m es un entero no negativo,

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots + x^m. \qquad (11.41)$$

El desarrollo de $(1+x)^m$ en (11.41) teorema del binomio. Este resultado sugiere la definición siguiente.

DEFINICIÓN 11.8

Para cualquier número real r, la serie

$$1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n + \cdots \qquad (11.42)$$

recibe el nombre de **serie binomial**. □

Obsérvese que (11.42) solamente termina cuando r es un entero no negativo. En este caso (11.42) se reduce a (11.41).

El criterio de la razón muestra que la serie binomial converge si $|x| < 1$, y diverge si $|x| > 1$. La serie binomial define así una función f infinitamente diferenciable en el intervalo $(-1, 1)$. No debe causar gran sorpresa saber que la función representada por (11.42) es $f(x) = (1, + x)^r$. Puesto que la demostración de este hecho conduce a una ecuación diferencial separable, el lector puede practicar sus habilidades siguiendo los pasos de guía indicados en el Problema 18 de los Ejercicios 11.9.

TEOREMA 11.25

Si $|x|<1$, entonces para todo número real r

$$(1 + x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n + \cdots. \qquad (11.43)$$

□

Ejemplo 1

Obtener una representación en serie de potencias para $\sqrt{1 + x}$.

Solución Con $r = \frac{1}{2}$, de (11.43) resulta que para $|x| < 1$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3 + \cdots$$
$$+ \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^n + \cdots$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2^2 2!}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2^3 3!}x^3 + \cdots$$
$$+ (-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^n + \cdots$$

En ciencias se utiliza a menudo una serie binomial para obtener aproximaciones.

Ejemplo 2

En la teoría de la relatividad de Einstein, la masa de una partícula que se mueve con una velocidad v en relación con un observador, es

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad (11.44)$$

en donde m_0 es la masa en reposo de la partícula y c es la velocidad de la luz.

Muchos de los resultados de la física clásica no se cumplen en el caso de partículas como los electrones, los cuales se mueven casi a la velocidad de la luz. La energía cinética ya no es $K = \frac{1}{2}m_0v^2$, sino que se expresa como

$$K = mc^2 - m_0c^2. \qquad (11.45)$$

Si se identifica $r = -\frac{1}{2}$ y $x = -v^2/c^2$ en (11.44), se tiene que $|x| < 1$, puesto que ninguna partícula móvil puede rebasar la velocidad de la luz. Por lo tanto, (11.45) puede escribirse:

$$K = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-x}} - m_0c^2$$
$$= m_0c^2[(1-x)^{-1/2} - 1]$$
$$= m_0c^2\left[\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \cdots\right) - 1\right]$$
$$= m_0c^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{v^4}{c^4}\right) + \frac{5}{16}\left(\frac{v^6}{c^6}\right) + \cdots\right]. \qquad (11.46)$$

En el caso en que v es mucho menor que c, los términos de (11.46) posteriores al primero son despreciables. Esto conduce al resultado bien conocido

$$K \approx m_0c^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right] = \frac{1}{2}m_0v^2.$$

Ejercicios 11.9

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 989.

En los Problemas 1-10 utilice (11.43) para obtener los cuatro primeros términos de la representación en serie de potencias de la función indicada. Proporcione el radio de convergencia.

1. $f(x) = \sqrt[3]{1 + x}$ 2. $f(x) = \sqrt{1 - x}$

3. $f(x) = \sqrt{9 - x}$ 4. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 5x}}$

5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ 6. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1 - x^2}}$

7. $f(x) = (4 + x)^{3/2}$ 8. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{(1 + x)^5}}$

9. $f(x) = \dfrac{x}{(2 + x)^2}$ 10. $f(x) = x^2(1 - x^2)^{-3}$

En los Problemas 11 y 12 explique por qué el error en la aproximación dada es menor que la cantidad indicada. (*Sugerencia:* Repase el Teorema 11.17.)

11. $(1 + x)^{1/3} \approx 1 + \dfrac{x}{3};\ \dfrac{1}{9}x^2$

12. $(1 + x^2)^{-1/2} \approx 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{8}x^4;\ \dfrac{5}{16}x^6$

13. Encuentre una representación en serie de potencias para $\operatorname{sen}^{-1}x$ empleando

$$\operatorname{sen}^{-1}x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

14. (a) Demuestre que la longitud de una cuarta parte de la elipse está dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta,$$

en donde $k^2 = (a^2 - b^2)/a^2 < 1$. Esta integral se llama integral elíptica completa de segunda clase.

(b) Demuestre que

$$a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta = a\frac{\pi}{2} - \frac{a}{2}\frac{\pi}{4}k^2 - \frac{a}{8}\frac{3\pi}{16}k^4 - \cdots$$

15. En la Figura 11.10 un cable colgante está sostenido en los puntos A y B, y soporta una carga uniformemente distribuida (tal como la calzada de un puente). Si $y = (4d/l^2)x^2$ es la ecuación del cable, demuestre que su longitud está dada por

$$s = l + \frac{8d^2}{3l} - \frac{32d^4}{5l^3} + \cdots$$

Véase el Problema 20 de los Ejercicios 3.11.

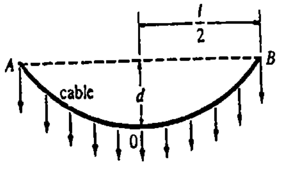


Figura 11.10

16. Aproxime las integrales siguientes hasta tres cifras decimales.

(a) $\displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{1 + x^3}\, dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt[3]{1 + x^4}\, dx.$

Problemas diversos

17. Por la ley de los cosenos, el potencial en el punto A de la Figura 11.11 debido a una carga unitaria en el punto B, es $1/R = (1 - 2xr + r^2)^{-1/2}$, en donde $x = \cos\theta$. Se dice que la expresión $(1 - 2xr + r^2)^{-1/2}$ es la función generatriz de los llamados polinomios de Legendre $P_k(x)$, ya que

$$(1 - 2xr + r^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)r^k.$$

Utilice (11.43) para encontrar $P_0(x)$, $P_1(x)$ y $P_2(x)$.

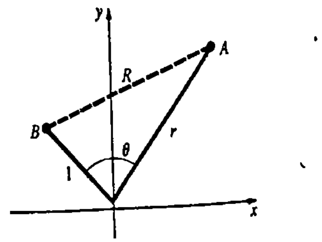


Figura 11.11

18. (a) Supóngase que

$$f(x) = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

para $|x| < 1$. Encuentre $f'(x)$ y $xf'(x)$.

(b) Demuestre que

$$(n+1)\frac{r(r-1)\cdots(r-n)}{(n+1)!} + n\frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!} = r\frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}.$$

(c) Demuestre que $f'(x) + xf'(x) = rf(x)$.

(d) Resuelva la siguiente ecuación diferencial $(1 + x)f'(x) = rf(x)$ sujeta a $f(0) = 1$, por separación de variables.

En los Problemas 19 y 20 utilice (11.43) para encontrar una representación en serie de potencias de $(x - 1)$ de la función indicada. (*Sugerencia:* $1 + x = 2 + (x - 1)$).

19. $f(x) = \sqrt{1 + x}$ 20. $f(x) = (1 + x)^{-2}$

Examen • Capítulo 11

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 990.

En los Problemas 1-22 conteste verdadero o falso.

1. Toda sucesión acotada converge. _____

2. Si una sucesión no es monótona, no es convergente. _____

3. La sucesión $\left\{\dfrac{10^n}{2^{n^2}}\right\}$ no es monótona. _____

4. Si $a_n \le B$ para todo n y $a_{n+1}/a_n \ge 1$ para todo n, entonces $\{a_n\}$ converge. _____

5. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$ para todo valor de x. _____

6. Si $\{a_n\}$ es una sucesión convergente, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ siempre converge. _____

7. Si $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces Σa_k es convergente. _____

8. Si Σa_k^2 converge, entonces Σa_k también converge. _____

9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ converge para $p = 1.0001$. _____

10. La serie $2 + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \ldots$ es divergente. _____

11. Si $\Sigma|a_k|$ diverge, entonces Σa_k diverge también. _____

12. Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k > 0$, converge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}a_k$ es convergente. _____

13. Si $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ converge absolutamente, entonces $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\dfrac{a_k}{k}$ converge. _____

14. Si Σb_k converge y $a_k \ge b_k$ para todo entero positivo k, entonces Σa_k es convergente. _____

15. Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, entonces Σa_k converge absolutamente. _____

16. Toda serie de potencias tiene un radio de convergencia no nulo. _____

17. Una serie de potencias converge absolutamente para todo valor de x de su intervalo de convergencia. _____

18. Una serie de potencias $\Sigma_{k=0}^{\infty} C_k x^k$ representa una función infinitamente diferenciable en un intervalo $(-r, r)$ de convergencia. _____

19. Una serie de potencias $\Sigma_{k=0}^{\infty} C_k x^k$ converge para $-1 < x < 1$ y es convergente para $x = 1$. La serie debe converger también para $x = -1$. _____

20. $f(x) = \ln x$ no puede ser representada por una serie de Maclaurin. _____

21. $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k$ en un intervalo si $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. _____

22. El intervalo de convergencia de la serie de potencias $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$ es $(-1, 1)$. _____

En los Problemas 23-30 llene los espacios en blanco.

23. Si $\{a_n\}$ converge a 4 y $\{b_n\}$ converge a 5, entonces $\{a_n b_n\}$ converge a _____, $\{a_n + b_n\}$ converge a _____, $\{a_n/b_n\}$ converge a _____ y $\{a_n^2\}$ converge a _____.

24. Para aproximar la suma de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{10^k}$ hasta cuatro cifras decimales, se necesita solamente emplear la _____ suma parcial.

25. La suma de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} 4\left(\frac{2}{3}\right)^k$ es _____.

26. Si $\Sigma\, a_k$ converge y $\Sigma\, b_k$ diverge, entonces $\Sigma(a_k + b_k)$ _____.

27. La serie $\sum_{k=1}^{\infty}[\tan^{-1}k - \tan^{-1}(k+1)]$ converge a _____.

28. La serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ representa a la función $f(x) =$ _____ para todo x.

29. La representación en serie binomial de $f(x) = (4 + x)^{1/2}$ tiene radio de convergencia. _____

30. La serie geométrica $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5}{x}\right)^{k-1}$ converge para los siguientes valores de x _____.

En los Problemas 31-40 determine si la serie indicada es convergente o divergente.

31. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k^2+1)^2}$

32. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + e^{-k}}$

33. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{e^{k^2}}$

34. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k^2 + 4k + 6}$

35. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}\ln k}{k^4 + 4}$

36. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} k}{k^{3/2}}$

37. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{\sqrt[3]{k^6 - 4k}}$

38. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{\ln k}}$

39. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^k}{\sqrt{k}}$

40. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k^2)!}{(k!)^2}$

En los Problemas 41 y 42 encuentre la suma de la serie convergente indicada.

41. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} + 3}{(1.01)^{k-1}}$

42. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 11k + 30}$

En los Problemas 43-46 encuentre el intervalo de convergencia de la serie de potencias indicada.

43. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k^3} x^k$

44. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4^k}(2x-1)^k$

45. $\sum_{k=1}^{\infty} k!(x+5)^k$

46. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2x)^k}{\ln k}$

47. Obtenga el radio de convergencia de

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3k-1)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4k-1)} x^k.$$

48. Encuentre todos los valores de x para los cuales $\sum_{k=1}^{\infty}(\cos x)^k$ converge.

En los Problemas 49-52 obtenga los tres primeros términos no nulos de la serie de Maclaurin de la función indicada, por cualquier método.

49. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1 + x^3}}$

50. $f(x) = \frac{x}{2 - x}$

51. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$

52. $f(x) = \int_0^x e^{\sqrt{t}}\, dt$

53. Halle la serie de Taylor de $f(x) = \cos x$ en $a = \pi/2$.

54. Demuestre que la serie del Problema 53 representa a la función probando que $R_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

12 Geometría analítica en el plano

Para los antiguos geómetras griegos como Euclides (300 A.C.) y Arquímedes (287-212 A.C.), una **sección cónica** era una curva de intersección de un plano y un cono de dos mantos o ramas. Véase la Figura 12.1. Sin embargo, en este capítulo se verá como la **parábola**, la **elipse** y la **hipérbola** se definen por medio de distancias. Utilizando un sistema de coordenadas cartesianas y la fórmula de la distancia, se obtienen ecuaciones para las cónicas.

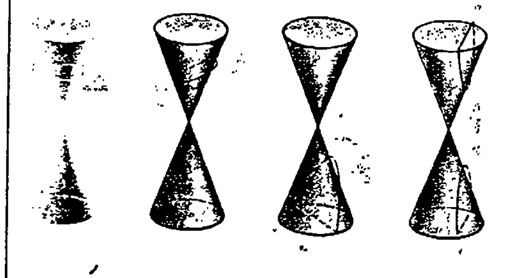


Figura 12.1

12.1 La parábola

La gráfica de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, es una parábola. Sin embargo, no toda parábola es la gráfica de una función de x.

DEFINICIÓN 12.1

Una **parábola** es el conjunto de todos los puntos P del plano que son equidistantes de una recta fija L, llamada **directriz**, y de un punto F, llamado **foco**. □

Una parábola tiene un **eje** de simetría que pasa por el foco F y es perpendicular a la directriz, como se muestra en la Figura 12.2. El punto medio entre F y L sobre el eje se llama **vértice** de la parábola.

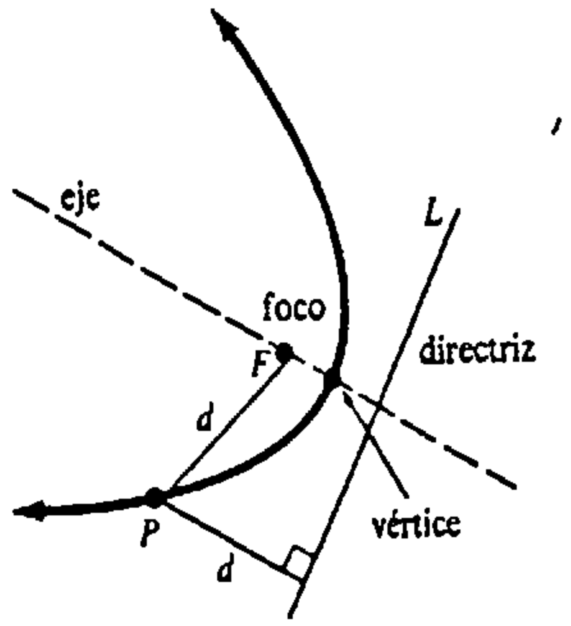
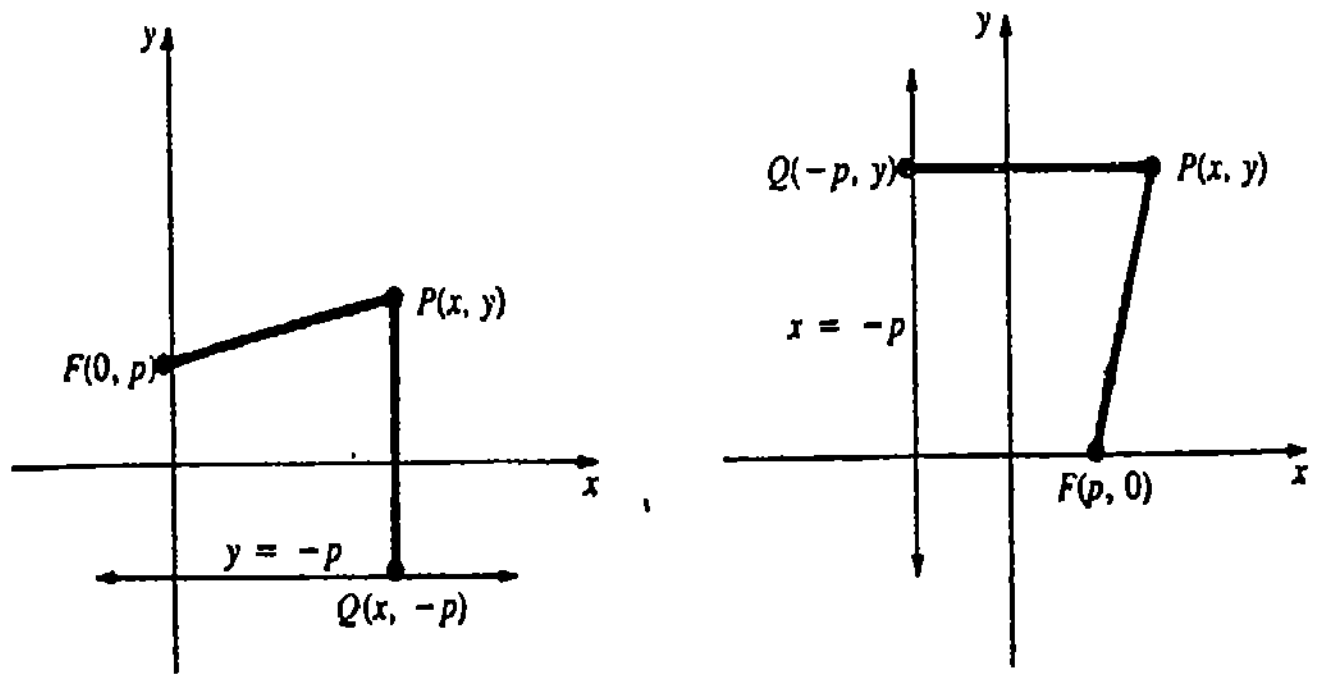


Figura 12.2

Ecuación de una parábola

Para describir una parábola analíticamente, supóngase que la directriz es la recta horizontal $y = -p$ y que el foco es $F(0, p)$. Empleando la Definición 12.1 y la Figura 12.3(a), se ve que $d(F, P) = d(P, Q)$ equivale a

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = y + p.$$



(a) (b)

Figura 12.3

Elevando al cuadrado ambos miembros y simplificando,

$$x^2 = 4py. \tag{12.1}$$

Se dice que (12.1) es la **forma estándar** de la ecuación de una parábola con foco $F(0, p)$ y directriz $y = -P$. De manera semejante, si la directriz y el foco son $x = -p$ y $F(p, 0)$, respectivamente, resulta que la forma estándar de la ecuación de la parábola es

$$y^2 = 4px. \tag{12.2}$$

Véase la Figura 12.3(b).

Aunque en la Figura 12.3 se supone que $p > 0$, no es necesario, desde luego, que así sea. La tabla siguiente resume la información referente a las ecuaciones (12.1) y (12.2).

Ecuación	*Vértice*	*Eje*	*Foco*	*Directriz*	*La gráfica se extiende hacia*
$x^2 = 4py$	$(0, 0)$	$x = 0$	$(0, p)$	$y = -p$	arriba si $p > 0$; abajo si $p < 0$
$y^2 = 4px$	$(0, 0)$	$y = 0$	$(p, 0)$	$x = -p$	derecha si $p > 0$; la izquierda si $p < 0$

Ejemplo 1

La comparación de la ecuación $y = x^2$ con (12.1) permite identificar $4p = 1$, y así $p = \frac{1}{4}$. Por lo tanto, el foco de la parábola es $(0, \frac{1}{4})$ y su directriz es $y = -\frac{1}{4}$. Véase la Figura 12.4.

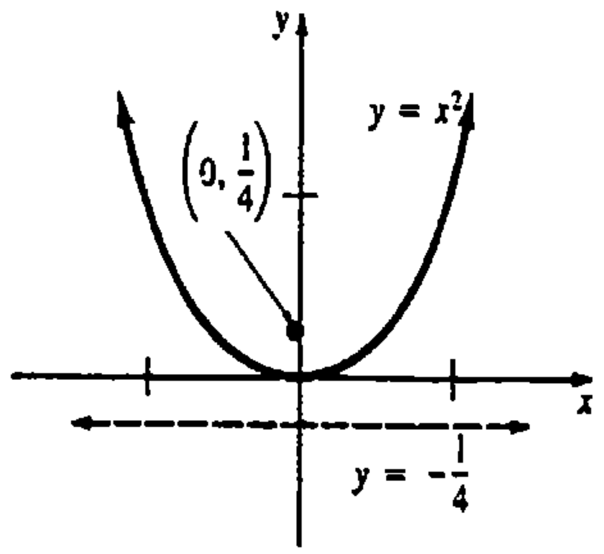


Figura 12.4

Ejemplo 2

Obtener el foco y la directriz de la parábola cuya ecuación es $x = -\frac{1}{8}y^2$. Trace la gráfica.

Solución Escribiendo la ecuación dada como $y^2 = -8x$, de (12.2) resulta que $4p = -8$ y $p = -2$. Por lo tanto, el foco y la directriz son $(-2, 0)$ y $x = 2$, respectivamente. Como $p < 0$, la parábola se extiende hacia la izquierda, como se muestra en la Figura 12.5.

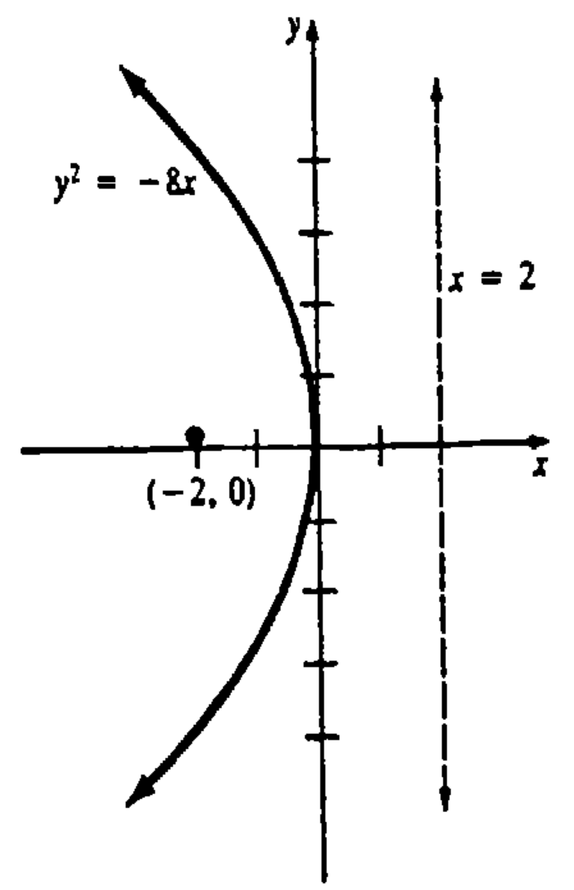


Figura 12.5

Vértice en (h, k)

En general, la forma estándar de la ecuación de una parábola con vértice (h, k) está dada por

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \tag{12.3}$$

o por

$$(y - k)^2 = 4p(x - h). \tag{12.4}$$

La Figura 12.6 ilustra dos gráficas posibles de (12.3) y (12.4). Como en (12.1) y (12.2), para localizar el foco y la directriz se necesita solamente medir $|p|$ unidades a lo largo del eje de la parábola. Se mide hacia arriba y hacia abajo del vértice o a ambos lados del mismo. La tabla siguiente resume la información referente a (12.3) y (12.4).

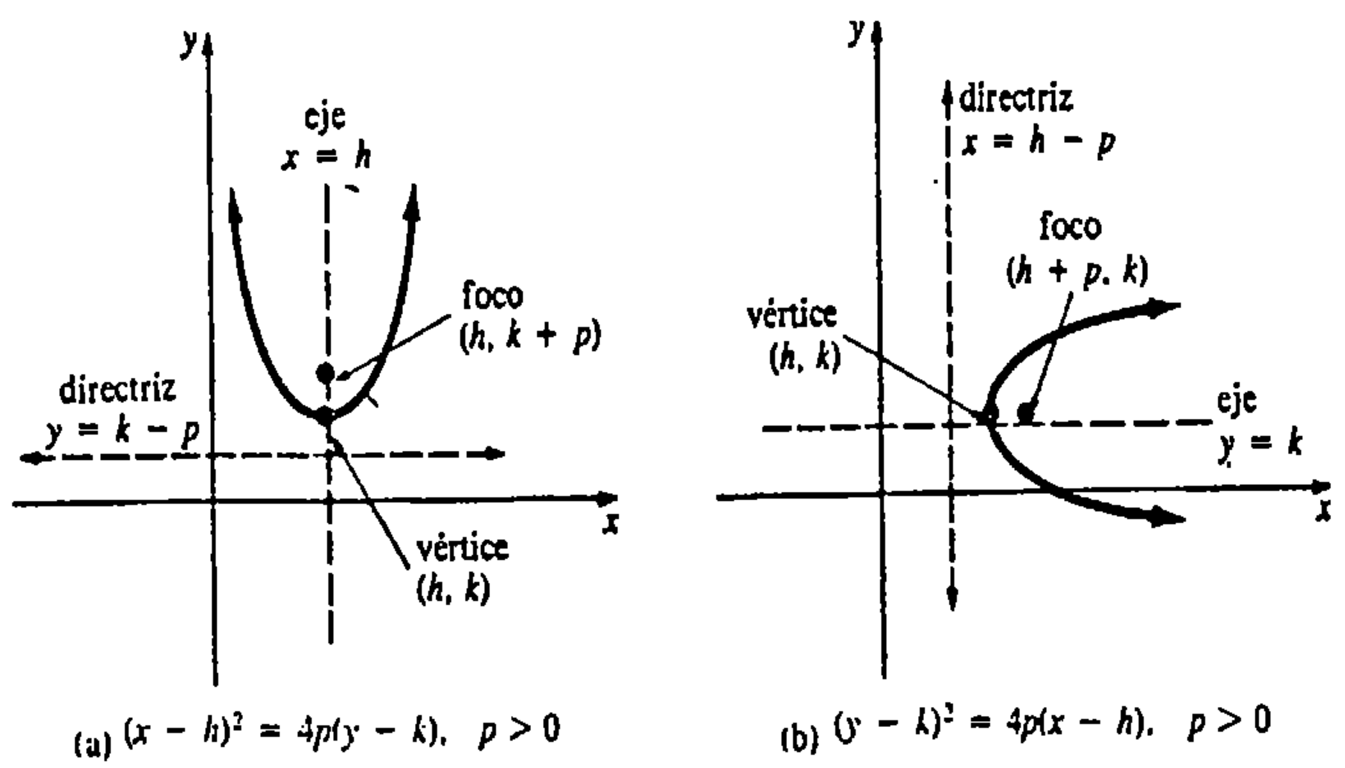


Figura 12.6

Ecuación	*Vértice*	*Eje*	*Foco*	*Directriz*	*La gráfica se extiende hacia*
$(x - h)^2 = 4p(y - k)$	(h, k)	$x = h$	$(h, k + p)$	$y = k - p$	arriba si $p > 0$; abajo si $p < 0$
$(y - k)^2 = 4p(x - h)$	(h, k)	$y = k$	$(h + p, k)$	$x = h - p$	la derecha si $p > 0$, la izquierda si $p < 0$

Ejemplo 3

Obtener una ecuación de la parábola con vértice $(2, -3)$ y directriz $y = 4$. Determinar el foco.

Solución Se debe tener $h = 2$ y $k = -3$. Como su directriz es y = constante, la ecuación debe ser de la forma (12.3). Además, la Figura 12.7 indica que $|p| = 7$. Por otra parte, $p = -7$ ya que la gráfica debe extenderse hacia abajo. (Esto se deduce también resolviendo simplemente $k - p = 4$.) Así que una ecuación de la parábola es $(x - 2)^2 = 4(-7)(y - (-3))$, o sea $(x - 2)^2 = -28(y + 3)$. El foco es $(2, -10)$.

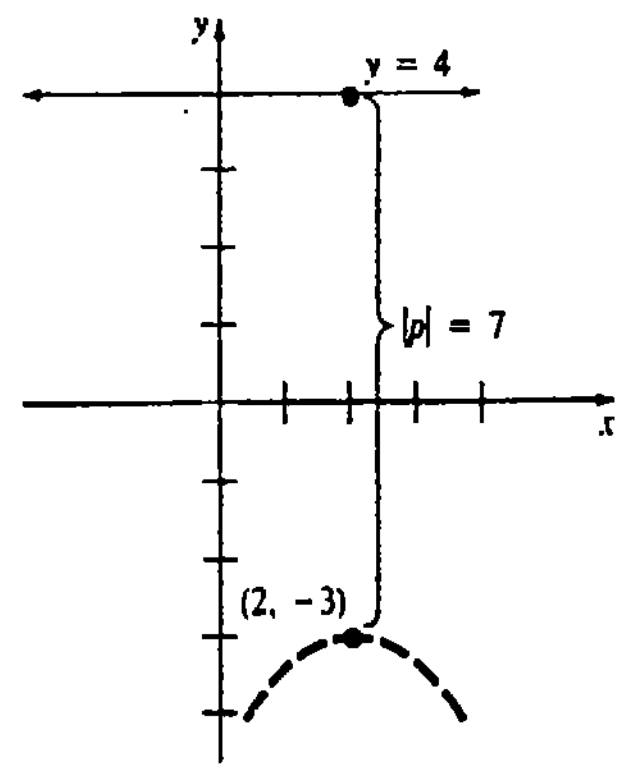


Figura 12.7

Ejemplo 4

Hallar el vértice, el eje, el foco, la directriz y la gráfica de la parábola cuya ecuación es $y^2 - 8y = 4x - 8$.

Solución Completando el cuadrado en y, resulta

$$y^2 - 8y + 16 = 4x + 8 \quad \text{o bien} \quad (y - 4)^2 = 4(x + 2).$$

Identificando la última ecuación con (12.4) se muestra que el vértice es $(-2, 4)$ y el eje es $y = 4$. Ahora bien, $4p = 4$ implica que $p = 1 > 0$, y de esta manera la parábola se extiende hacia la derecha, y su foco y su directriz son $(-1, 4)$ y $x = -3$, respectivamente. El lector debe poder verificar que la gráfica presentada en la Figura 12.8 tiene intercepciones y iguales a $4 - 2\sqrt{2}$ y $4 + 2\sqrt{2}$, e intercepción x igual a 2.

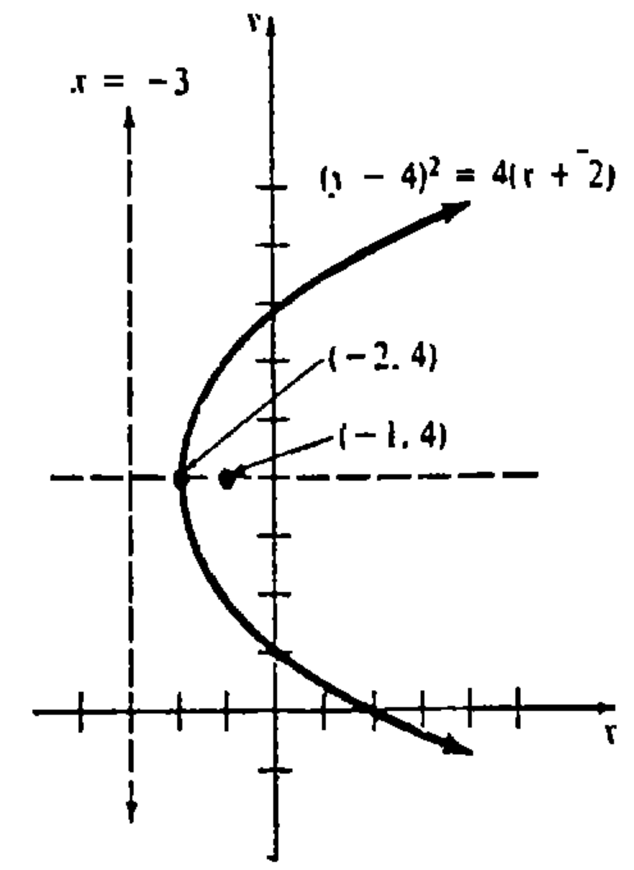


Figura 12.8

Observación

El diseño de objetos como reflectores, faros de automóvil, telescopios de reflexión, y antenas de microondas, se basa en una propiedad muy conveniente de la parábola. Si al espejo de un telescopio de reflexión de forma parabólica, llegan rayos de luz paralelos, por ejemplo de una estrella lejana, se puede demostrar que entonces todos los rayos se reflejarán dirigiéndose al foco. Véase el Problema 38 de los Ejercicios 12.1. Por otra parte, si una fuente luminosa se coloca en el foco de una superficie parabólica reflectora, entonces se producirá un haz de rayos paralelos al eje de la parábola. Otros ejemplos de formas parabólicas son las de los cables principales de un puente colgante y la trayectoria de un proyectil lanzado oblicuamente. Véanse las Figuras 12.9(b) y 12.9(c). En ciertas circunstancias, la curva de persecución de un tiburón en busca de su presa, también es parabólica.

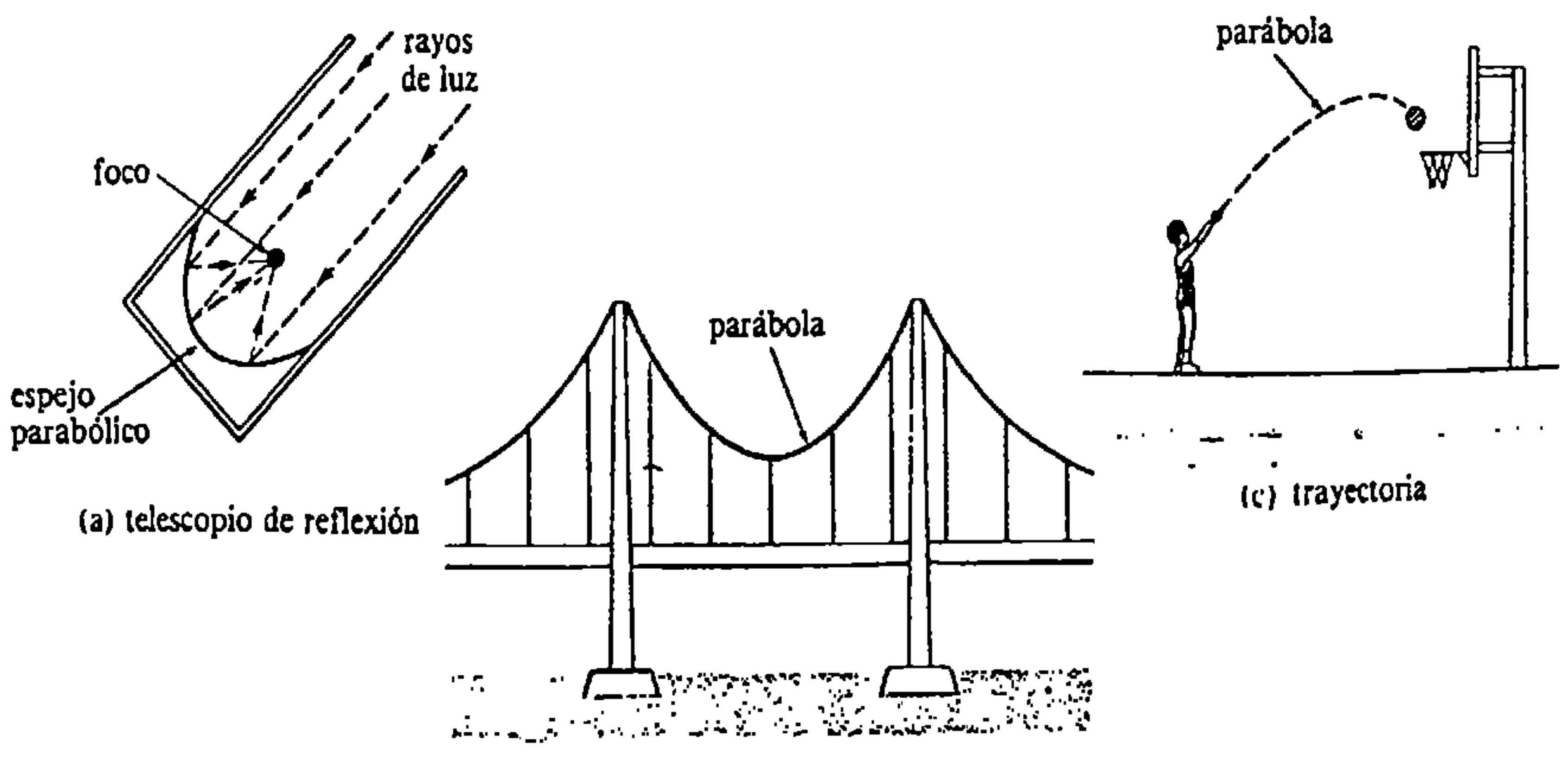


Figura 12.9

Ejercicios 12.1

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 990.

En los Problemas 1-20 encuentre el vértice, el foco, la directriz, y trace la gráfica de la parábola cuya ecuación se indica.

1. $-2x^2 = y$
2. $x^2 = 8y$
3. $y^2 = 12x$
4. $\frac{1}{4}x^2 = -y$
5. $y^2 = -10x$
6. $y^2 = 5x$
7. $(x - 1)^2 = 4y$
8. $(y + 2)^2 = x$
9. $(y - 3)^2 + 8 = 2x$
10. $-(x + 2)^2 = 4y - 16$
11. $(x - 4)^2 = 4(y + 3)$
12. $(2y + 3)^2 = -16(2x + 1)$
13. $y = x^2 + 4x + 6$
14. $3y = -x^2 + 3x + 7$
15. $y^2 - 6y = 4x + 3$
16. $x = y^2 + 10y + 27$
17. $6x^2 + 24x - 8y + 19 = 0$
18. $-x^2 + 6x - 4y - 9 = 0$
19. $2(x + 3) = -y(y + 5)$
20. $2y = x(2 - x)$

En los Problemas 21-30 encuentre una ecuación de la parábola que satisfaga las condiciones indicadas.

21. Vértice (0, 0), eje $x = 0$, pasa por $(-1, 4)$
22. Vértice (1, 2), eje $y = 0$, pasa por (0, 0)
23. Vértice (1, 1), directriz $x = 4$
24. Vértice $(3, -2)$, directriz $y = 2$
25. Foco $(-2, 4)$, vértice (1, 4)
26. Foco (0, 0), vértice $(0, \frac{3}{2})$
27. Foco (0, 4), directriz $x = -5$
28. Foco $(2, -\frac{5}{2})$, directriz $2y - 1 = 0$
29. Eje $x = 0$, pasa por (1, 3) y (2, 6)
30. Eje $y = 0$, pasa por (2, 1) y $(11, -2)$

31. Obtenga una ecuación de la recta tangente a la parábola cuya ecuación es $x = y^2 + 2y + 1$ en $y = 3$.

32. En el Problema 31, determine el área de la región comprendida entre la parábola y la gráfica de $x = 4$.

33. La distancia entre dos soportes verticales de un puente colgante es de 100 m y la flecha del cable es de 15 m.

(a) Si el cable tiene forma de parábola, obtenga su ecuación. Supóngase que el vértice está en el punto medio (el más bajo) del cable.

(b) ¿Cuál es la altura del cable a 30 m del centro?

34. El telescopio de reflexión de Monte Palomar utiliza un espejo de contorno circular de 200 plg de diámetro. El perfil del espejo según un diámetro es una parábola cuya distancia focal es de 55.5 pie.

(a) Encuentre una ecuación de la sección parabólica.

(b) ¿Cuál es la profundidad máxima del espejo?

Problemas diversos

35. La **cuerda focal normal*** es el segmento de recta que pasa por el foco, es perpendicular al eje y tiene sus extremos en la parábola. Véase la Figura 12.10. Demuestre que la longitud de la cuerda focal normal es $4p$, tanto para $x^2 = 4py$ como para $y^2 = 4px$.

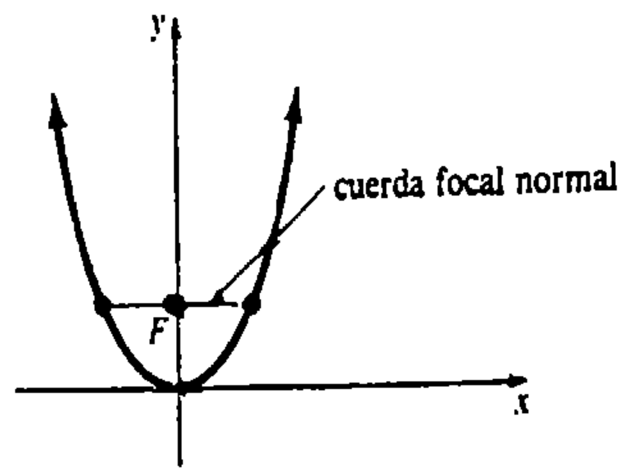


Figura 12.10

* La cuerda focal normal se conoce también como *lado recto* de la parábola.

36. Utilice el Problema 35 para evaluar la longitud de la cuerda focal normal de $y = \frac{1}{3}x^2$.

37. Demuestre que las rectas tangentes en los extremos de la cuerda focal normal de $x^2 = 4py$, son perpendiculares entre sí.

38. Sea L la recta tangente a la gráfica de $y^2 = 4px$ en $P(x_0, y_0)$, como se muestra en la Figura 12.11.

(a) Obtenga una ecuación de la recta tangente en P.

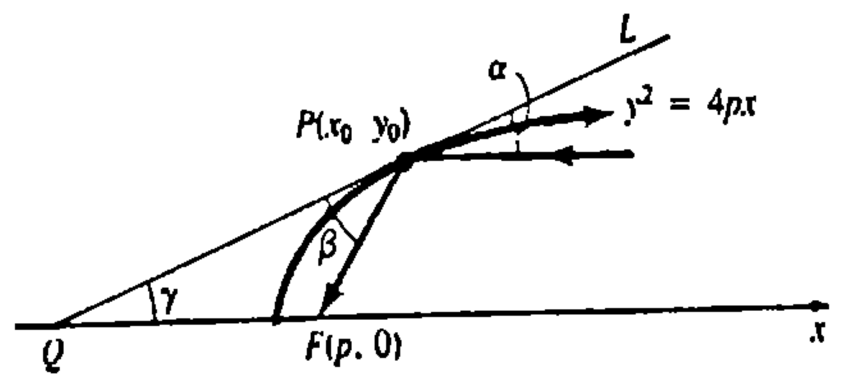


Figura 12.11

(b) Demuestre que la intercepción x de L es $(-x_0, 0)$.

(c) Demuestre también que los segmentos QF y PF son de la misma longitud.

(d) Demuestre asimismo que $\alpha = \beta = \gamma$.

39. (a) Determine el vértice y el foco de una parábola cuya ecuación es $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$.

(b) Empleando la ecuación de la parte (a), encuentre la parábola que pasa por (0, 5), (1, 4) y (−2, 13).

40. Demuestre que el vértice es el punto de una parábola más cercano al foco. (*Sugerencia:* considere $x^2 = 4py$.)

41. La distancia d de un punto (x_0, y_0) a una recta $ax + by + c = 0$ está dada por $d = |ax_0 + by_0 + c|/\sqrt{a^2 + b^2}$. Aplique este hecho y la Definición 12.1 para obtener una ecuación de la parábola que tenga su foco en (1, 2) y que la recta $x - y - 3 = 0$ sea su directriz.

12.2 La elipse

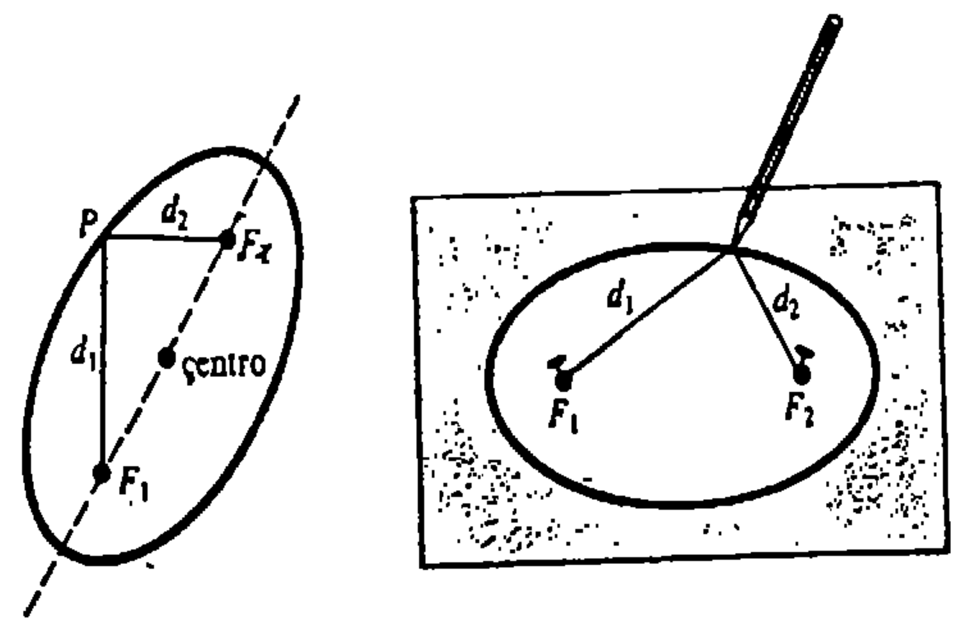
La elipse se define como sigue:

DEFINICIÓN 12.2

Una elipse es el conjunto de puntos P del plano tales que la suma de las distancias entre P y dos puntos fijos F_1 y F_2, llamados focos, es constante. □

Si P es un punto de la elipse y $d_1 = d(F_1, P)$, $d_2 = d(F_2, P)$ y $k > 0$ es una constante, como se muestra en la Figura 12.12(a), la Definición 12.2 afirma que

$$d_1 + d_2 = k. \tag{12.5}$$



(a) $d_1 + d_2 = k$ (b)

Figura 12.12

El punto medio del segmento de recta F_1F_2 se llama centro de la elipse. Se puede utilizar (12.5) a nivel práctico para dibujar una elipse. La Figura 12.12(b) muestra que si un cordón de longitud k se sujeta a un papel con dos tachuelas, entonces se puede trazar una elipse aplicando la punta de un lápiz contra la cuerda y moviéndolo alrededor de manera que la cuerda se mantenga tensa.

Ecuación de una elipse

Escójase por conveniencia $k = 2a$, y sitúense los focos en el eje x con coordenadas $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$. De 12.5 resulta que

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

o bien

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}. \tag{12.6}$$

Se elevan al cuadrado ambos miembros de (12.6) y se simplifica:

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2$$

$$a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Elevando al cuadrado nuevamente resulta

$$a^2[(x - c)^2 + y^2] = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

o bien

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \tag{12.7}$$

Con referencia a la Figura 12.13, se ve que los puntos F_1, F_2 y P forman un triángulo. Puesto que la llamada desigualdad del triángulo expresa que la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que la longitud del lado restante, debe tenerse que $2a > 2c$, o bien $a > c$. Por lo tanto, $a^2 - c^2 > 0$. Escribiendo

$$b^2 = a^2 - c^2, \tag{12.8}$$

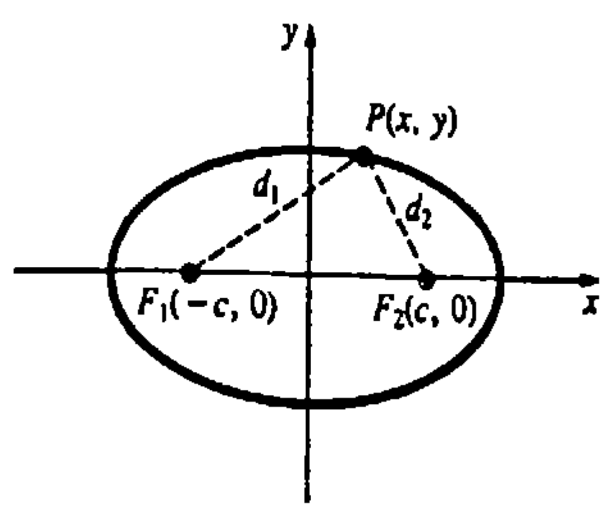


Figura 12.13

la forma estándar de la ecuación de una elipse con focos $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ se convierte en

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{12.9}$$

El **eje mayor** de una elipse es el segmento rectilíneo que pasa por su centro, que contiene a los focos y sus puntos extremos están en la elipse. El segmento de recta que pasa por el centro, perpendicular al eje mayor y con sus extremos en la elipse se llama **eje menor.** Haciendo ahora $y = 0$ en la ecuación (12.9) se manifiesta que $-a$ y a son las intercepciones x, mientras que $x = 0$ conduce a las intercepciones y, $-b$ y b. Los puntos correspondientes $(\pm a, 0)$ y $(0, \pm b)$ se denominan **vértices.** Como $a > b$, el eje mayor de una elipse es necesariamente más largo que su eje menor.

Si los focos están en el eje y, en $F_1(0, -c)$ y $F_2(0, c)$, entonces, repitiendo el análisis anterior, se demostrará que una ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \tag{12.10}$$

en donde $b^2 = a^2 - c^2$, igual que antes.

Ejemplo 1

Obtener los vértices y los focos de la elipse cuya ecuación es $6x^2 + 3y^2 = 54$. Trazar la gráfica.

Solución Dividiendo ambos miembros entre 54,

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{18} = 1,$$

vemos que $18 > 9$, así que identificamos la ecuación con (12.10). De $a^2 = 18$, $b^2 = 9$ se concluye que los vértices son $(0, \pm 3\sqrt{2})$ y $(\pm 3, 0)$. El eje mayor es vertical con extremos en $(0, -3\sqrt{2})$ y $(0, 3\sqrt{2})$. Ahora bien, $c^2 = a^2 - b^2 = 9$ implica que $c = 3$. Por lo tanto, los focos están en el eje y, en $(0, -3)$ y $(0, 3)$. La gráfica se presenta en la Figura 12.14.

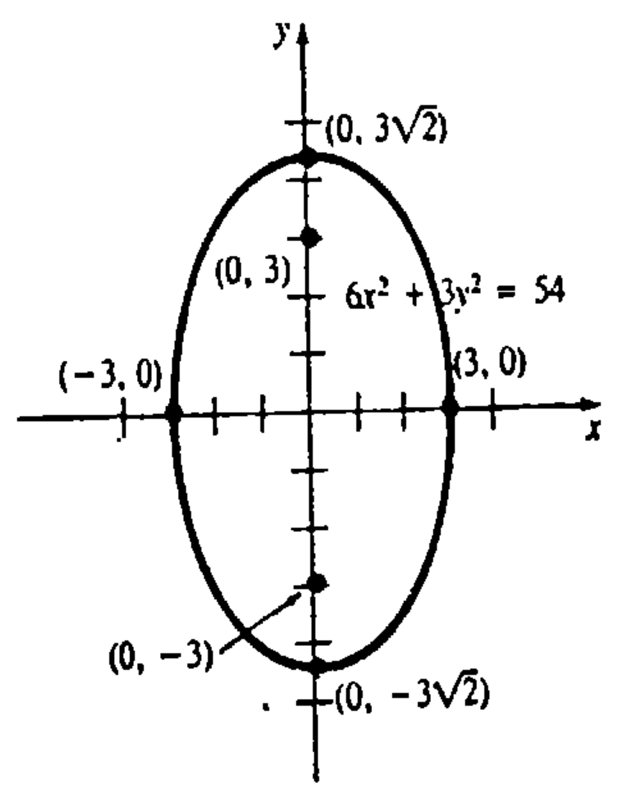


Figura 12.14

Ejemplo 2

Obtener una ecuación de la elipse que tenga un foco en (2,0) y su intercepción x sea 5.

Solución Puesto que el foco dado está en el eje x, la ecuación debe ser de la forma (12.9). Consecuentemente, $c = 2$, $a = 5$ y de (12.8), $b^2 = 25 - 4 = 21$. Entonces la ecuación deseada es

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1.$$

Centro en (h, k)

Cuando el centro está en (h, k), la forma estándar de la ecuación de una elipse es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{12.11}$$

o bien

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1. \tag{12.12}$$

En ambos casos se cumple todavía que $a > c$ y $b^2 = a^2 - c^2$. Pero, para (12.11) los focos están localizados en la recta horizontal $y = k$ en $(h \pm c, k)$. Para (12.12) los focos están en la recta vertical $x = h$ en $(h, k \pm c)$. Para obtener los vértices de una elipse con centro (h, k), se sustituye, sucesivamente, $x = h$ y $y = k$ en su ecuación y se despeja y y x.

Ejemplo 3

Determinar los vértices y los focos de la elipse cuya ecuación es

$$9x^2 - 36x + 25y^2 + 150y + 36 = 0.$$

Trazar la gráfica.

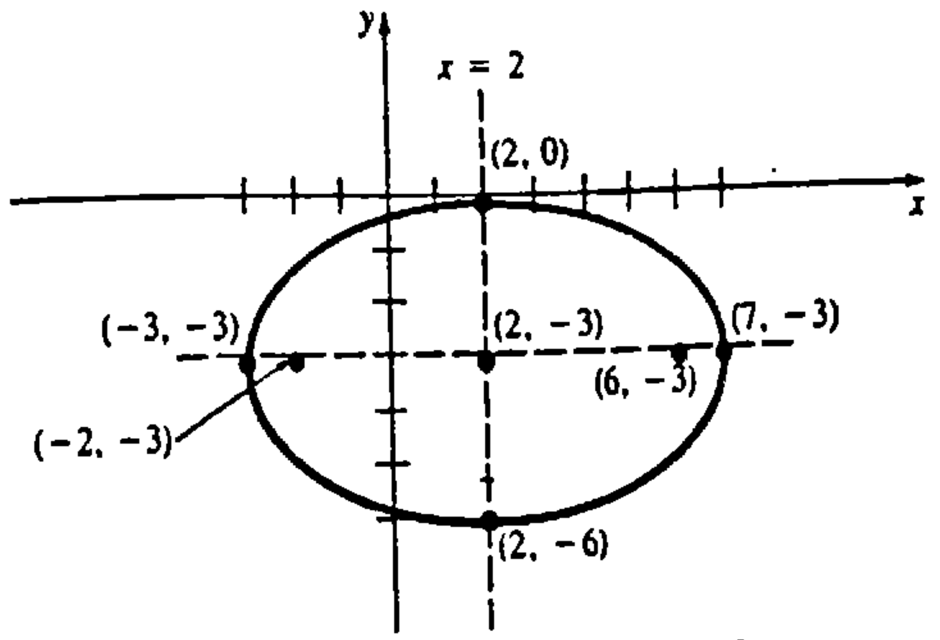
Solución Completando el cuadrado tanto en x como en y y simplificando,

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1.$$

El centro de la elipse es $(2, -3)$ y, como $25 > 9$, por (12.11) sus ejes mayor y menor están sobre las rectas $y = -3$ y $x = 2$, respectivamente. Resolviendo ahora

$$\frac{(x-2)^2}{25} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

resulta $x = 2 \pm 5$ y $y = -3 \pm 3$. Por lo tanto, los vértices son $(7, -3)$, $(-3, -3)$, $(2, 0)$ y $(2, -6)$. Alternativamente, los vértices se pueden encontrar moviéndose $a = 5$ unidades a la derecha y a la izquierda del centro a lo largo de $y = -3$, y $b = 3$ unidades arriba y abajo del centro a lo largo de $x = 2$. Finalmente, $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$ muestra que $c = 4$ y que los focos son $(-2, -3)$ y $(6, -3)$. La gráfica se presenta en la Figura 12.15.



$9x^2 - 36x + 25y^2 + 150y + 36 = 0$

Figura 12.15

Observación

La elipse tiene una propiedad de reflexión semejante a la parábola. Si una fuente de luz o sonido se coloca en uno de los focos de una elipse, por ejemplo, en F_1 de la Figura 12.16, entonces los rayos o las ondas se reflejarán hacia el otro foco F_2. Por ejemplo, si se construye una mesa de billar en forma de elipse con una tronera en uno de los focos, entonces cualquier tiro que se origine en el otro foco nunca fallará, y la bola entrará siempre a la tronera. De manera semejante, si un techo es elíptico con dos focos en el piso, pero considerablemente separados entre sí, entonces cualquiera que hable en voz baja en uno de los focos será escuchado en el otro. Por ejemplo, dos famosas "galerías de susurros" existen en Statuary hall en el Capitolio de Washington, D.C., y en el Tabernáculo Mormón de Salt Lake City, Utah. Véase el Problema 38 de los Ejercicios 12.2.

Figura 12.16

Ejercicios 12.2

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 990.

En los Problemas 1-20 encuentre los vértices, los focos y la gráfica de la elipse cuya ecuación se indica.

1. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$
2. $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$
3. $x^2 + \frac{y^2}{10} = 1$
4. $\frac{x^2}{6} + y^2 = 1$
5. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 2$
6. $9x^2 + y^2 = 9$
7. $4x^2 + 7y^2 = 28$
8. $2x^2 + 4y^2 = 1$
9. $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{36} = 1$
10. $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1$
11. $\frac{(x-2)^2}{64} + \frac{(y-2)^2}{36} = 1$
12. $\frac{(2x+1)^2}{4} + \frac{(3y-2)^2}{16} = 1$
13. $2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = 4$
14. $x^2 + 9(y-2)^2 = 81$
15. $3x^2 + y^2 - 6y = 0$

16. $y^2 = 2x(1 - x)$
17. $9x^2 + 25y^2 + 18x + 50y = 191$
18. $x^2 + 2y^2 + x + y = 0$
19. $5x^2 + y^2 - 40x - 4y + 83 = 0$
20. $4x^2 + 12y^2 - 4x - 24y + 1 = 0$

En los Problemas 21-30 obtenga una ecuación de la elipse que satisfaga las condiciones indicadas.

21. Centro (0, 0), vértices (5, 0) y (0, −2)
22. Vértices (±4, 0) y (0, ±7)
23. Vértices (0, ±4), focos (0, ±2)
24. Vértices (−1, 1) y (5, 1), focos (4, 1) y (0, 1)
25. Vértices (−5, −2) y (3, −2), focos (−1, −5) y (−1, 1).
26. Vértices (3, −3), (3, 9), (3, −7) y (3, 13)
27. Focos $(\pm\sqrt{7}, 0)$, longitud del eje menor $\sqrt{3}$
28. Focos $(1 \pm \sqrt{3}, 1)$, longitud del eje mayor 6
29. Vértices $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$, pasa por (2, −1)
30. Vértices (±6, 2), pasa por (4, 4)
31. Determine la(s) pendiente(s) de la(s) recta(s) tangente(s) a la elipse cuya ecuación es $9x^2 + 5y^2 + 18x - 10y - 27 = 0$, en $x = 1$.
32. Encuentre una ecuación de la recta normal a la elipse cuya ecuación es $x^2 + 4(y-1)^2 = 16$, en $(2\sqrt{3}, 2)$.
33. El arco de un puente de mampostería es una semielipse de 90 pie de luz, y cuya altura en el centro es de 30 pie. ¿Cuál es la altura del arco a 15 pie del centro?

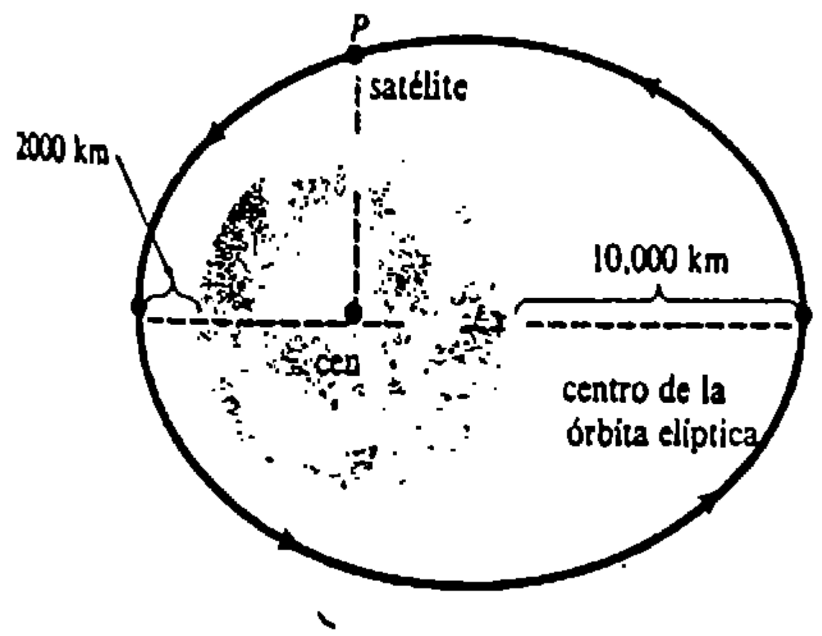


Figura 12.17

34. Un satélite es puesto en órbita elíptica alrededor de la Tierra. El radio terrestre mide 6 000 km (aproximadamente), y su centro se localiza en uno de los focos de la órbita.

    (a) Utilice la información dada en la Figura 12.17 para obtener una ecuación de la órbita.

    (b) ¿Cuál es la altura del satélite sobre la superficie de la Tierra en el punto P?

35. El segmento de recta que pasa por un foco, perpendicular al eje mayor y con puntos extremos en la elipse, se llama **cuerda focal normal**. Véase la Figura 12.18. Demuestre que la longitud de una cuerda focal normal de una elipse con centro en el origen es $2b^2/a$.

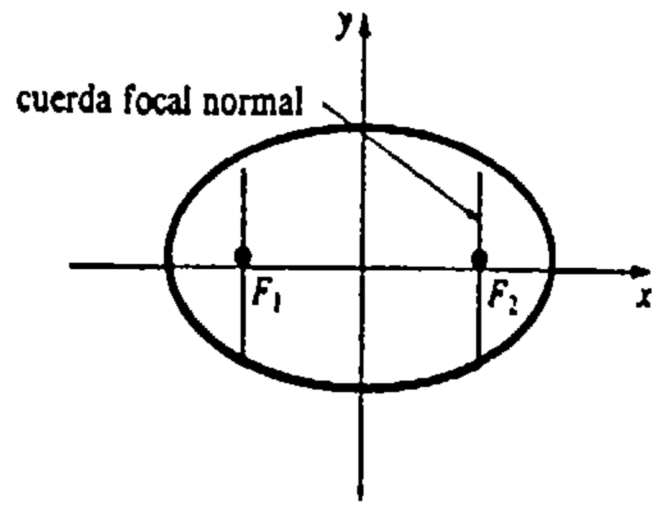


Figura 12.18

36. Resuelva de nuevo la parte (b) del Problema 34 empleando la información del Problema 35.
37. Demuestre que el punto de la elipse cuya ecuación es $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, más cercano al foco $(c, 0)$, es el vértice $(a, 0)$.
38. Sea L la recta tangente a la gráfica de $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ en $P(x_0, y_0)$, como se muestra en la Figura 12.19. Demuestre que $\alpha = \beta$.

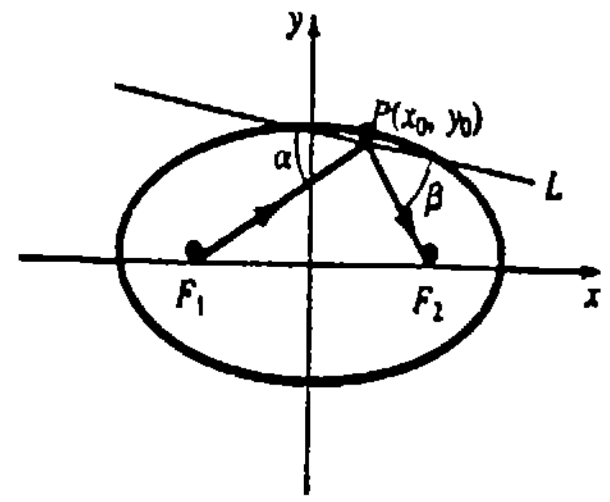


Figura 12.19

La excentricidad de una elipse se define como c/a. En los Problemas 39 y 40, encuentre la excentricidad de la elipse cuya ecuación se indica.

39. $\dfrac{(x-3)^2}{25} + \dfrac{(y+4)^2}{16} = 1$

40. $x^2 + 4y^2 - 2x - 24y + 21 = 0$

41. Demuestre que la circunferencia de una elipse cuya ecuación es $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ es

$$4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta,$$

en donde $e = c/a$.

Problema para calculadora

42. Aplique el resultado del Problema 41 y la regla de Simpson* con $n = 4$ para obtener una aproximación al perímetro de la elipse cuya ecuación es $x^2/25 + y^2/9 = 1$.

12.3 La hipérbola

La definición de una hipérbola es análoga a la definición de la elipse, con una excepción: la palabra "suma" se reemplaza por "diferencia".

DEFINICIÓN 12.3

Una **hipérbola** es el conjunto de puntos P del plano tales que la diferencia de las distancias entre dos puntos fijos F_1 y F_2, llamados **focos**, es una constante. □

Una hipérbola consta de dos **mantos** o **ramas**, como se muestra en la Figura 12.20. El punto medio del segmento F_1F_2 es el centro de la hipérbola. Si P es un punto de la curva, entonces

$$|d_1 - d_2| = k, \tag{12.13}$$

en donde $d_1 = d(F_1, P)$ y $d_2 = d(F_2, P)$.

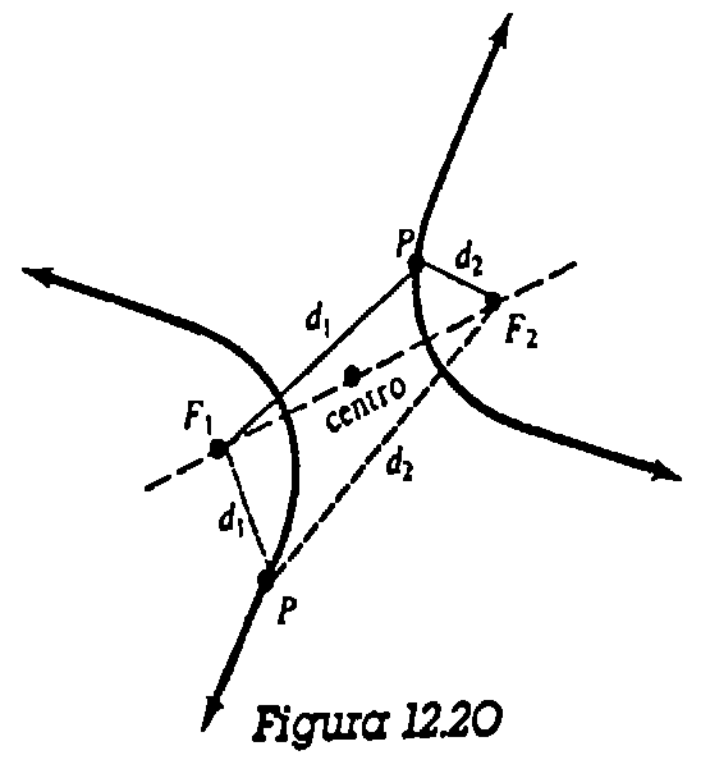


Figura 12.20

Ecuación de una hipérbola

Procediendo como en el caso de la elipse, los focos se sitúan en el eje x en $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$, y la constante k se toma como igual a $2a$ por conveniencia algebraica. Escribiendo (12.13) como

* La antiderivada $\int \sqrt{1 - e^2\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta$ no puede ser expresada como una función elemental.

$$d_1 - d_2 = \pm 2a \tag{12.14}$$

o bien

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

se eleva al cuadrado, se simplifica, y de nuevo elevamos al cuadrado:

$$\begin{aligned}
(x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2\\
\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= cx - a^2\\
a^2[(x-c)^2 + y^2] &= c^2x^2 - 2a^2cx + a^4\\
x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2)\\
\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} &= 1.
\end{aligned} \tag{12.15}$$

De la Figura 12.21, se ve que la desigualdad del triángulo da

$$d_1 < d_2 + 2c \quad \text{y} \quad d_2 < d_1 + 2c,$$

o equivalentemente,

$$d_1 - d_2 < 2c \quad \text{y} \quad d_2 - d_1 < 2c.$$

Utilizando (12.14) las desigualdades precedentes implican $2a < 2c$, o sea $a < c$. Así que, si definimos la constante positiva

$$b^2 = c^2 - a^2, \tag{12.16}$$

(12.15) se convierte en

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{12.17}$$

Obsérvese que la gráfica de (12.17) tiene intercepciones x iguales a $\pm a$, pero no posee intercepciones y, puesto que $-y^2/b^2 = 1$ no tiene solución real. Los puntos $(-a, 0)$ y $(a, 0)$ son **vértices** de la hipérbola. El segmento de recta que pasa por el centro con sus puntos extremos en los vértices, se llama **eje transverso**. También es común en la

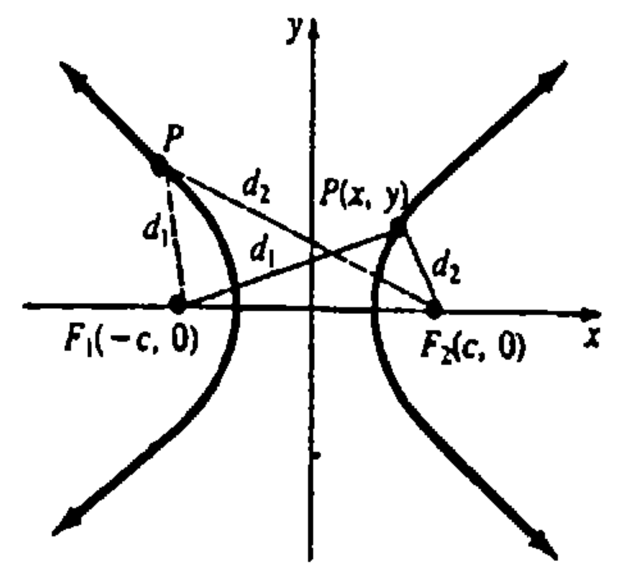
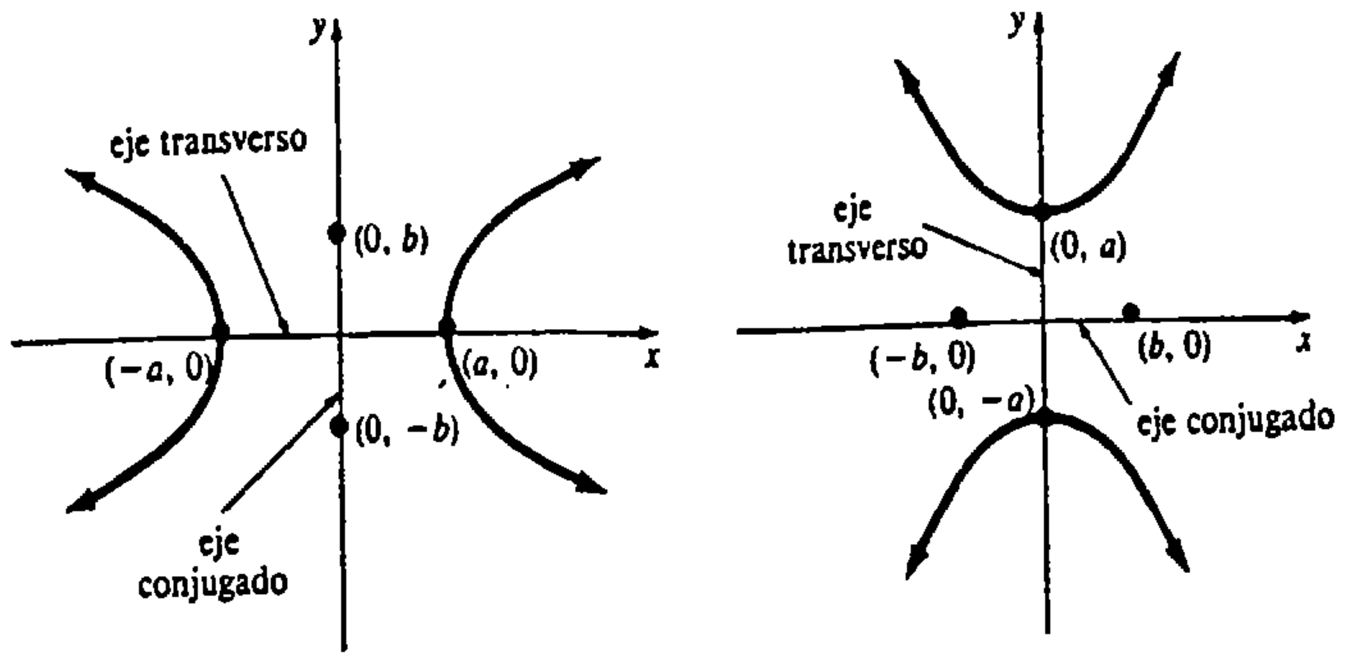


Figura 12.21



(a) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (b) $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

Figura 12.22

práctica referirse al segmento rectilíneo con puntos extremos $(0, -b)$ y $(0, b)$, y que pasa por el centro perpendicularmente al eje transverso, como **eje conjugado**. Véase la Figura 12.22(a).

Cuando los focos se sitúan en el eje y en $F_1(0, -c)$ y $F_2(0, c)$, entonces la forma estándar de la ecuación es

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad (12.18)$$

en donde nuevamente $b^2 = c^2 - a^2$. El eje transverso tiene sus extremos en $(0, -a)$ y $(0, a)$, y los del eje conjugado son $(-b, 0)$ y $(b, 0)$ como se indica en la Figura 12.22(b).

Asíntotas

Despejando y en términos de x, de (12.17) resulta

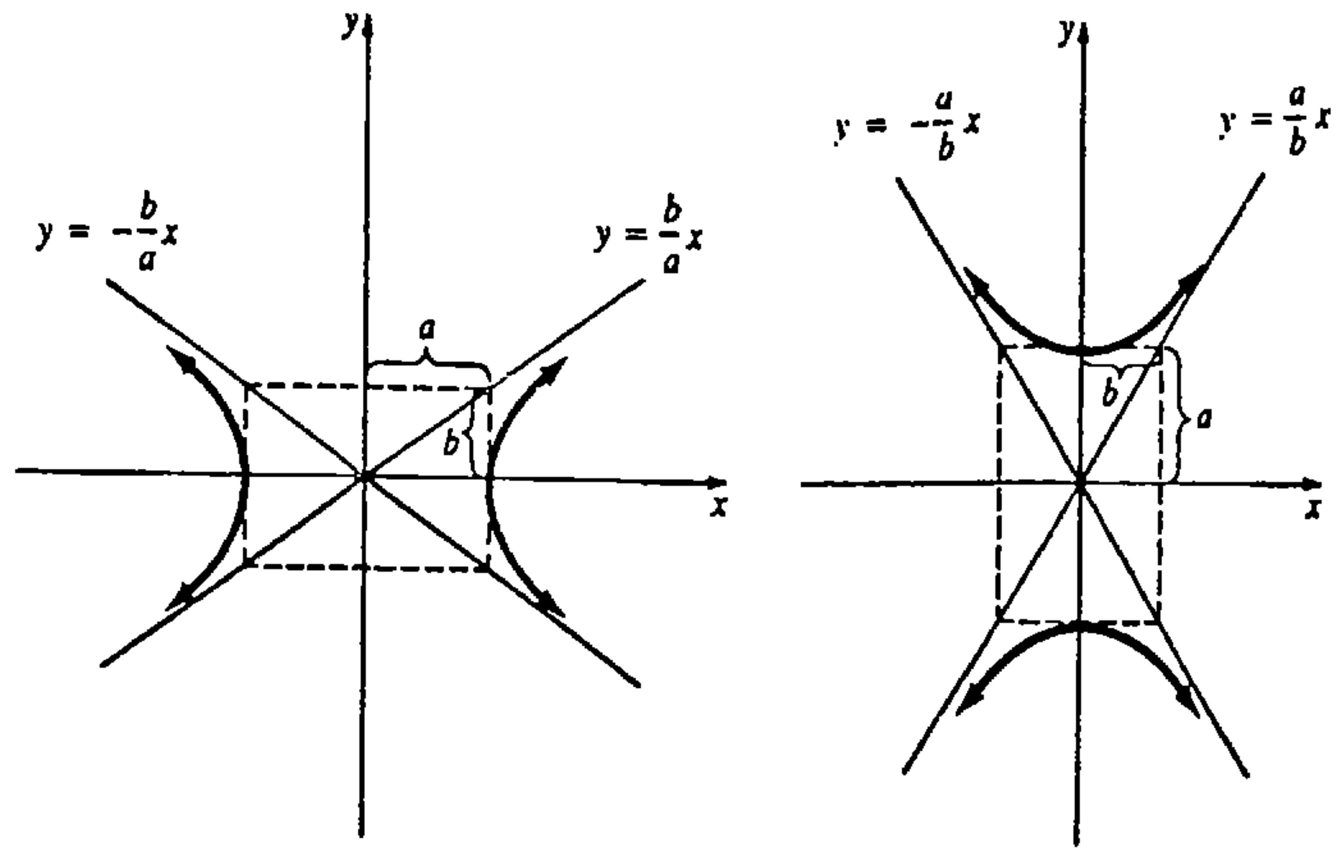
$$y = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

Obsérvese que cuando el valor de x es muy grande, el valor del término a^2/x^2 se hace muy pequeño. Esto significa geométricamente que para valores grandes de x, la hipérbola está próxima a las rectas

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Tales líneas, que pasan por el centro de la hipérbola, se llaman **asíntotas**. En el caso de (12.18), las asíntotas son $y = (a/b)x$ y $y = -(a/b)x$. Mejor que memorizar solamente las fórmulas, las ecuaciones de las asíntotas se pueden encontrar con el siguiente método mnemotécnico: Reemplazar 1 con 0 en las ecuaciones estándares (12.17) y (12.18), y factorizar la diferencia de cuadrados,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{o bien} \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 0.$$



(a) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (b) $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

Figura 12.23

Trazando primero las asíntotas, se tiene una pauta para dibujar una hipérbola con bastante precisión como se muestra en la Figura 12.23.

Ejemplo 1

Obtener los vértices, focos y asíntotas de la hipérbola cuya ecuación es $x^2 - y^2/9 = 1$. Trazar luego la gráfica.

Solución Escribiendo

$$\frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1,$$

se identifica la ecuación con (12.17) y concluimos que el eje transverso es horizontal. Haciendo $y = 0$ resulta $x^2 = 1$, y de esta manera los vértices son $(-1, 0)$ y $(1, 0)$. Puesto que $a^2 = 1$, $b^2 = 9$, (12.16) implica que $c^2 = a^2 + b^2 = 10$ y $c = \sqrt{10}$. Las coordenadas de los focos son $(-\sqrt{10}, 0)$ y $(\sqrt{10}, 0)$. Finalmente de

$$x^2 - \frac{y^2}{3^2} = 0 \quad \text{o bien} \quad \left(x + \frac{y}{3}\right)\left(x - \frac{y}{3}\right) = 0$$

vemos que las asíntotas son $y = -3x$ y $y = 3x$. Trazando las asíntotas y los vértices se obtiene la hipérbola de la Figura 12.24.

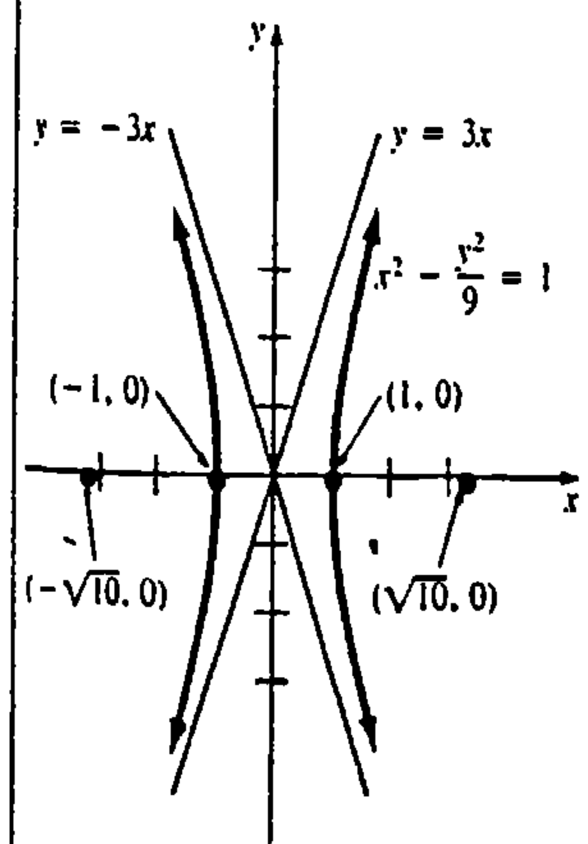


Figura 12.24

Centro en (h, k)

Las análogas de (12.17) y (12.18) son

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad (12.19)$$

y

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \qquad (12.20)$$

cuando el centro de la hipérbola está en (h, k). Para cada una de las ecuaciones, $b^2 = c^2 - a^2$. Las asíntotas, que pasan por (h, k), se pueden encontrar a partir de los factores de

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 0 \quad \text{o bien} \quad \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 0.$$

Para hallar los dos vértices, se hace $y = k$ en (12.19) y despejamos x, o bien, $x = h$ en (12.20) y se despeja y. A nivel práctico, para encontrar los vértices se necesita solamente medir a unidades a partir del centro, ya sea horizontal o verticalmente. De manera semejante, los focos están a c unidades del centro: $(h \pm c, k)$ para (12.19) y $(h, k \pm c)$ para (12.20).

Ejemplo 2

Obtener los vértices, focos y asíntotas de la hipérbola cuya ecuación es $(y-2)^2/4 - (x+2)^2/4 = 1$. Trazar luego la gráfica.

Solución Identificando la ecuación con la forma estándar (12.20), se ve inmediatamente que el centro es $(-2, 2)$, y $a^2 = 4$, $b^2 = 4$, $c^2 = 8$. Además, se concluye lo siguiente:

Eje transverso: vertical

Vértices: $a = 2$ unidades arriba y abajo del centro a lo largo de la recta $x = -2$; esto es, $(-2, 4)$ y $(-2, 0)$. (Compruébese esto resolviendo $(y-2)^2/4 = 1$.)

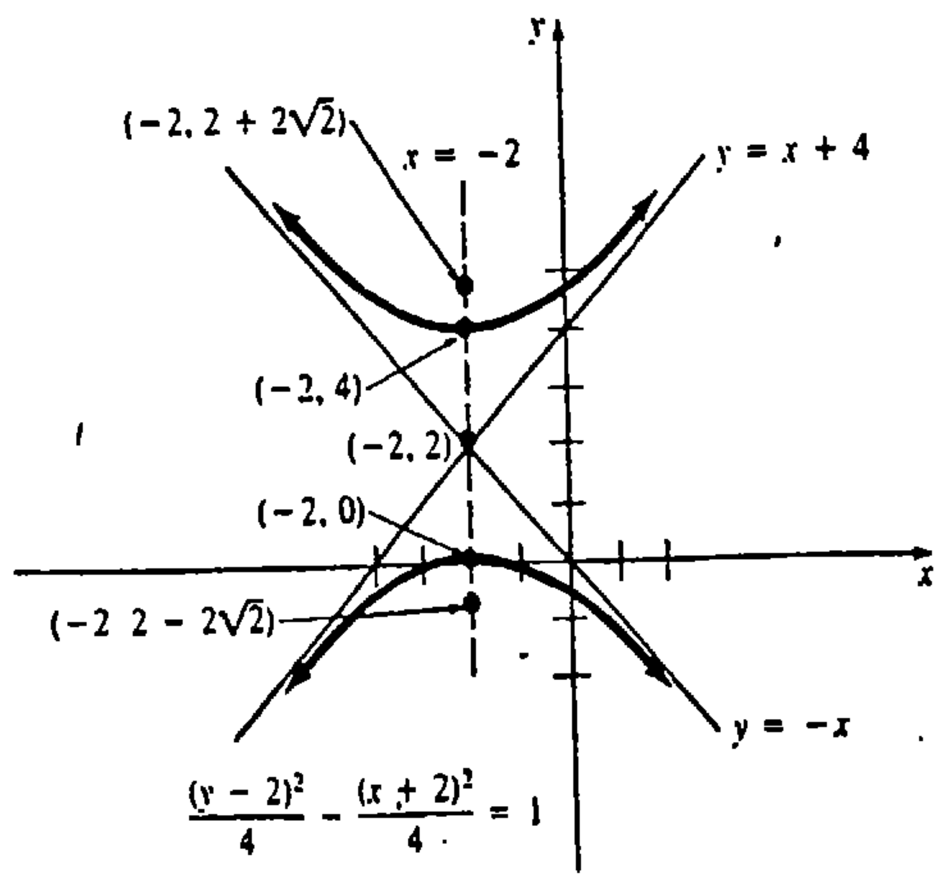


Figura 12.25

Focos: $c = 2\sqrt{2}$ unidades arriba y abajo del centro, a lo largo de la recta $x = -2$; esto es, $(-2, 2 + 2\sqrt{2})$ y $(-2, 2 - 2\sqrt{2})$.

Asíntotas: $\dfrac{(y-2)^2}{4} - \dfrac{(x+2)^2}{4} = 0$ implica que $y - 2 = -(x+2)$ y $y - 2 = x + 2$, o sea $y = -x$ y $y = x + 4$.

Empleando las asíntotas y los vértices, se tiene la gráfica que se muestra en la Figura 12.25.

Ejemplo 3

Obtener una ecuación de la hipérbola con focos $(5, -2)$, $(5, 4)$ y un vértice en $(5, 3)$.

Solución Puesto que el centro debe estar en el punto medio del segmento comprendido entre $(5, -2)$ y $(5, 4)$, resulta que $h = 5$ y $k = (-2 + 4)/2 = 1$. El centro es $(5, 1)$. Además, de la Figura 12.26 se ve que $a = 2$ y

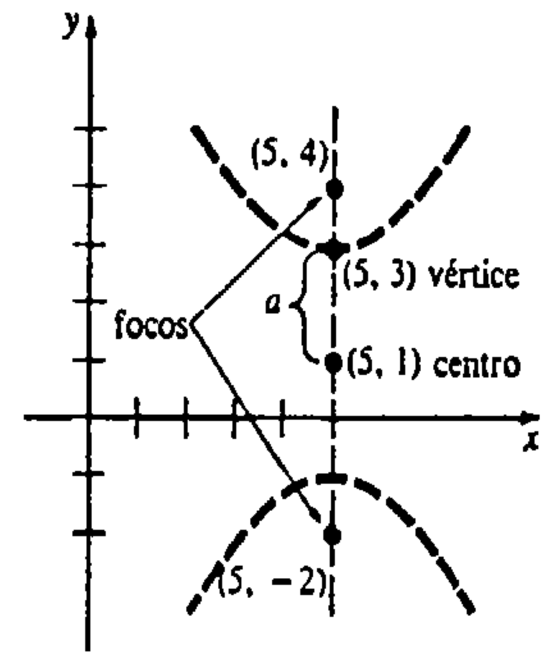


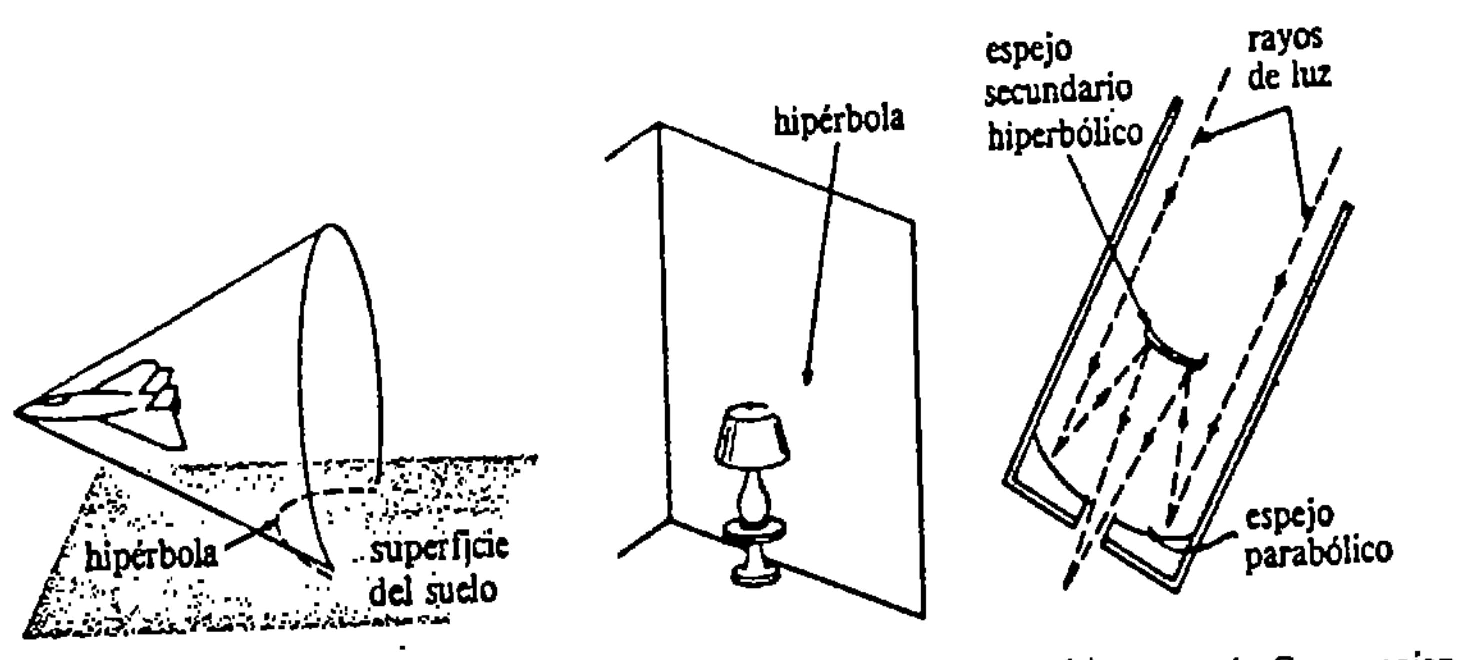
Figura 12.26

$a^2 = 4$. Con $c = 3$ y $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 1 = 8$, de (12.20) una ecuación es

$$\frac{(y-1)^2}{4} - \frac{(x-5)^2}{8} = 1.$$

Observación

Un avión que vuele a velocidad supersónica paralelamente a la superficie de la tierra, dejará una "huella" acústica hiperbólica sobre la superficie, como se muestra en la Figura 12.27(a). La intersección de una pared y el cono de luz que emane de una lámpara de mesa con pantalla troncocónica, es una hipérbola. Véase la Figura 12.27(b). El telescopio reflector Cassegranian, esquematizado en la Figura 12.27(c), utiliza un espejo secundario hiperbólico convexo para reflejar los rayos de luz hacia atrás, haciéndolos pasar a través de un orificio, hasta un ocular situado detrás del reflector parabólico primario. Este tipo de telescopios utiliza el hecho de que un rayo de luz dirigido a lo largo de una recta y a través de un foco de un espejo hiperbólico, se reflejará según una recta que pasa por el otro foco. Véanse la Figura 12.31 y el Problema 38 de los Ejercicios 12.3.



(a) "huella" acústica (b) luz de una lámpara sobre una pared (c) telescopio Cassegranian

Figura 12.27

En la mecánica se demuestra usualmente que la órbita de un cuerpo o de una partícula atómica que se mueva en un campo central de fuerzas, cuya intensidad varía proporcionalmente a $1/r^2$, debe ser una sección cónica. La **primera ley de Kepler para el movimiento planetario*** dice que la órbita de un planeta debe ser una elipse con el Sol en uno de sus focos. La órbita de un cometa "periódico", como el cometa de Halley, también es elíptica. El "periodo" de este cometa, o sea el tiempo que demora en recorrer su órbita completamente, es aproximadamente igual a 75 años. La órbita de un cometa "no periódico", o sea uno que nunca regresa al sistema solar, puede ser parabólica o bien hiperbólica, como se indica en la Figura 12.28. Cuando una estrella pasa suficientemente cerca de otra alterando su órbita, la nueva órbita será hiperbólica.

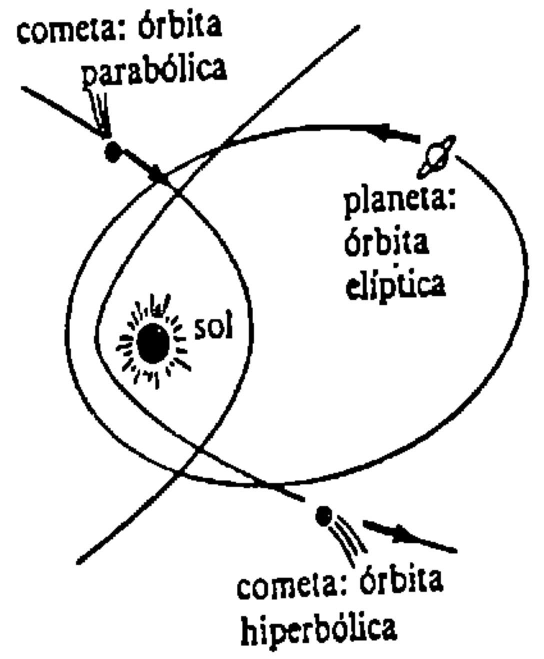


Figura 12.28

* Esta es una de las tres leyes del movimiento planetario propuestas por el astrónomo alemán Johann Kepler (1571-1630). En sus escritos dio a entender la ley de la gravitación sosteniendo que la Tierra y la Luna eran mantenidas en sus órbitas por cierta "fuerza vital". El fue también el primero en proponer que las mareas eran ocasionadas por la atracción lunar sobre los océanos. Kepler fue además de matemático, astrólogo y místico. Su madre fue acusada de brujería.

Ejercicios 12.3

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 990.

En los Problemas 1-20 obtenga los vértices, focos, asíntotas y gráfica de la hipérbola cuya ecuación se indica.

1. $\dfrac{x^2}{4^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = 1$

2. $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{9} = 1$

3. $y^2 - x^2 = 9$

4. $2x^2 - y^2 = 4$

5. $4x^2 - 25y^2 = 100$

6. $y^2 - x^2 + 10 = 0$

7. $16x^2 - 9y^2 + 144 = 0$

8. $4y^2 - 9x^2 = 1$

9. $(x - 1)^2 - (y - 2)^2 = 1$

10. $\dfrac{(y - 3)^2}{9} - x^2 = 1$

11. $\dfrac{(y + 1)^2}{36} - \dfrac{(x - 4)^2}{4} = 1$

12. $\dfrac{(x + 3/2)^2}{25} - \dfrac{(y - 5/2)^2}{9} = 1$

13. $\dfrac{(2x - 1)^2}{16} - \dfrac{(3y + 4)^2}{36} = 1$

14. $\frac{4}{9}(x + 2)^2 - \frac{16}{9}(y + 3)^2 + 1 = 0$

15. $25(y - 5)^2 - 4(x + 2)^2 = 100$

16. $x^2 + 5x - y^2 + 3y = 1$

17. $x(x - 4) = y(y - 2)$

18. $(3x - y - 10)(3x + y - 8) = 9$

19. $x^2 - y^2 + 8x - 2y - 10 = 0$

20. $9y^2 - 64x^2 + 90y - 128x = 415$

En los Problemas 21-30 halle una ecuación de la hipérbola que satisfaga las condiciones indicadas.

21. Centro $(0, 0)$, vértices $(\pm3, 0)$, un foco en $(5, 0)$

22. Focos $(0, \pm3)$, un vértice en $(0, 1)$

23. Focos $(2 \pm 5\sqrt{2}, -7)$, longitud del eje transverso 10.

24. Centro $(0, 0)$, un foco en $(\frac{5}{2}, 0)$, longitud del eje conjugado 8

25. Vértices $(1, -1)$ y $(1, 5)$, un foco en $(1, -2)$

26. Centro $(-2, -5)$, longitud del eje transverso horizontal 14, longitud del eje conjugado 12

27. Vértices $(0, \pm4)$, pasa por $(\frac{1}{2}, -3\sqrt{2})$

28. Vértices $(\pm\ , 0)$, asíntotas $y = \pm x$

29. Focos $(\pm3, 0)$, asíntotas $y = \pm\sqrt{3}x$

30. Centro $(2, 4)$, un vértice en $(2, 5)$, una asíntota $2y - x - 6 = 0$

31. Determine los puntos de la hipérbola cuya ecuación es $2x^2 - y^2 = 14$ en los que la pendiente de la tangente sea 4.

32. Para la ecuación $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ demuestre que el área A de la región sombreada de la Figura 12.29 es

$$A = \frac{1}{2}ab \ln\left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right).$$

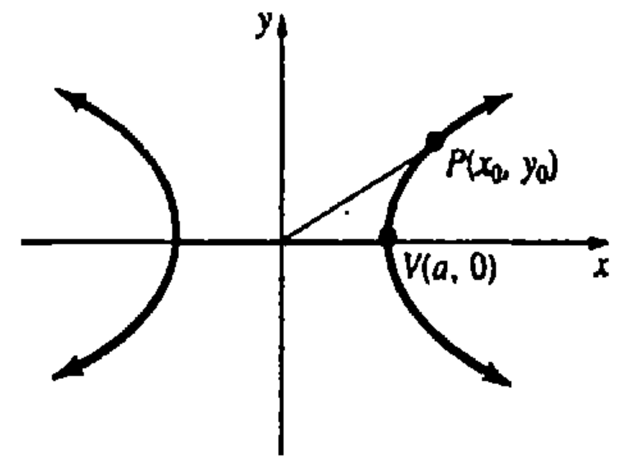


Figura 12.29

33. La región del primer cuadrante limitada por las gráficas de $x^2/4 - y^2 = 1$, una asíntota, $y = 3$ y $y = 0$, se hace girar en torno al eje y. Determine el volumen del sólido de revolución.

34. El disparo de un cañón es escuchado en tres puntos cuyas coordenadas son $P_1(0, 3)$, $P_2(12, 6)$ y $P_3(0, -3)$, en donde la distancia se mide en kilómetros. Por medio de equipo acústico se determina que tal arma está 2 km más cerca de P_1 que de P_3.

(a) Demuestre que la posición del cañón debe estar sobre una rama de una hipérbola.

(b) Si se determina que la pieza de artillería se encuentra en la recta que pasa por P_2 y P_3, encuentre su posición.*

Problemas diversos

35. El segmento de recta que pasa por un foco, perpendicular al eje transverso y con sus extremos en la hipérbola, se llama **cuerda focal normal**. Véase la Figura 12.30. Demuestre que la longitud de una cuerda focal normal de una hipérbola con centro en el origen es $2b^2/a$.

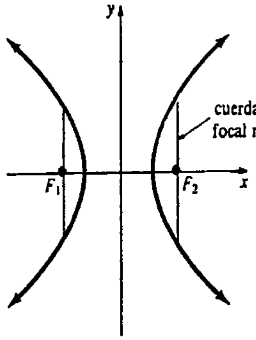


Figura 12.30

36. **Hipérbolas conjugadas.** Son dos hipérbolas tales que el eje transverso de cada una es el eje conjugado de la otra. Utilizando los mismos ejes de coordenadas, trace la gráfica de $x^2/36 - y^2/4 = 1$ y su conjugada.

37. Una **hipérbola rectangular** (u **ortogonal**) es aquella cuyas asíntotas son perpendiculares. Determine cuáles de las hipérbolas cuyas ecuaciones se indican en los Problemas 1-20 son rectangulares.

38. Sea L la recta tangente a la gráfica de $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ en $P(x_0, y_0)$, como se muestra en la Figura 12.31. Demuestre que $\alpha = \beta$.

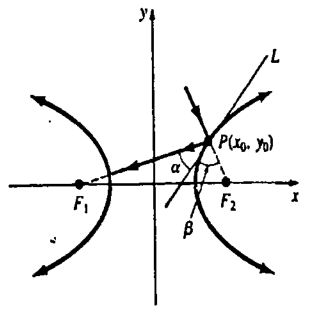


Figura 12.31

La **excentricidad** de una hipérbola se define como c/a. En los Problemas 39 y 40 evalúe la excentricidad de la hipérbola cuya ecuación se indica.

39. $y^2 - \dfrac{x^2}{8} = 1$

40. $20(x + 1)^2 - 16(y - 1)^2 = 320$

(O) 12.4 Traslación y rotación de ejes

Considérese la elipse cuya ecuación es

$$\frac{(x-3)^2}{6^2} + \frac{(y-4)^2}{3^2} = 1.$$

Si hacemos $X = x - 3$ y $Y = y - 4$, la ecuación se convierte en

$$\frac{X^2}{6^2} + \frac{Y^2}{3^2} = 1.$$

* En tiempos de guerra este método se empleó para localizar artillería enemiga. La misma idea se utiliza en el sistema LORAN (*long-range navigation*), en donde la posición de un barco puede determinarse calculando la diferencia de tiempos entre las señales de radio procedentes de dos estaciones conocidas.

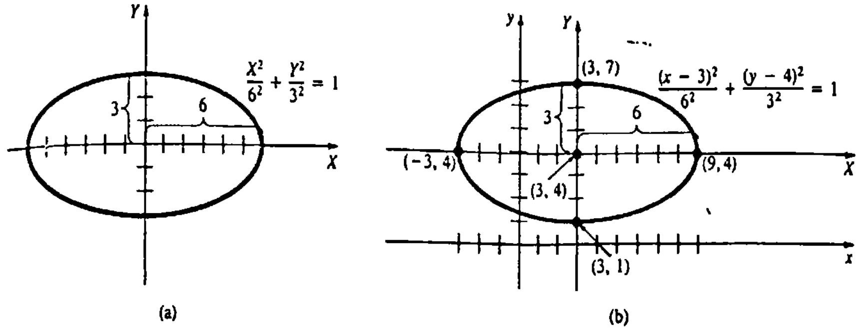


Figura 12.32

En función de un nuevo sistema de coordenadas XY, la gráfica de la ecuación es como se muestra en la Figura 12.32(a). El centro de la elipse corresponde a la condición simultánea $X = 0$, $Y = 0$, que a su vez, es el punto (3, 4) en el plano xy. Superponiendo el plano xy sobre el plano XY, obtenemos los puntos indicados en la Figura 12.32(b).

Traslación de ejes

Ecuaciones como $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ y $(x - h)^2/a^2 + (y - k)^2/b^2 = 1$ se pueden simplificar por medio de la sustitución $X = x - h$, $Y = y - k$, y trazar sus gráficas fácilmente en función de X y Y. En general, las ecuaciones

$$X = x - h, \quad Y = y - k$$

o bien

$$x = X + h, \quad y = Y + k$$

definen una **traslación de ejes**, o una traslación entre el plano xy y el plano XY. En relación con el plano xy, la ecuación del eje Y es $x = h$ y la del eje X es $y = k$. El origen O' del plano XY es el punto (h, k) del plano xy como se muestra en la Figura 12.33.

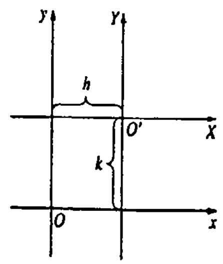


Figura 12.33

Rotación de ejes

En comparación con la traslación de ejes, puede obtenerse todavía otro sistema de coordenadas mediante una **rotación de ejes**. Si el eje x positivo se hace girar un ángulo θ, $0 < \theta < 90°$, alrededor del origen, obtenemos los ejes X y Y que se muestran en la Figura 12.34. Es un ejercicio sencillo de trigonometría (véase el Problema 25) demostrar que

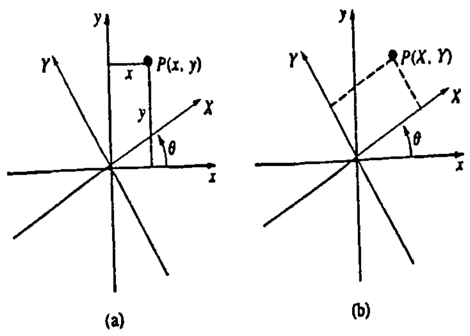


Figura 12.34

si (X, Y) son las coordenadas de un punto en el nuevo sistema de coordenadas, entonces sus coordenadas xy son

$$x = X\cos\theta - Y\,\text{sen}\,\theta \qquad (12.21)$$

y

$$y = X\,\text{sen}\,\theta + Y\cos\theta.$$

Resolviendo (12.21) para evaluar X y Y se obtiene una manera de convertir coordenadas xy en las coordenadas XY:

$$X = x\cos\theta + y\,\text{sen}\,\theta \qquad (12.22)$$
$$Y = -x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta.$$

Ejemplo 1

El eje x positivo se gira 30°. Encuentre las coordenadas XY del punto cuyas coordenadas xy son (4, 6).

Solución Con $\theta = 30°$, $x = 4$ y $y = 5$, tenemos que (12.22) que

$$X = 4\cos 30° + 6\,\text{sen}\,30°$$
$$Y = -4\,\text{sen}\,30° + 6\cos 30°$$

o bien

$$X = 2\sqrt{3} + 3 \approx 6.5$$
$$Y = -2 + 3\sqrt{3} \approx 3.2.$$

En la Figura 12.35 se muestran el punto y los ejes girados.

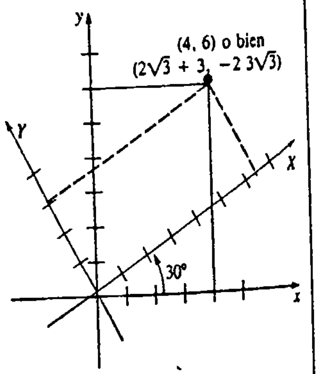


Figura 12.35

Eliminación del término xy

Una rotación apropiada de los ejes permite eliminar el término xy de

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \qquad (12.23)$$

y llegar a una ecuación de la forma

$$AX^2 + CY^2 + DX + EY + F = 0. \qquad (12.24)$$

Si (12.24) define un lugar geométrico real de puntos que no sea un punto o una recta,* su gráfica será entonces una sección cónica.

Sustituyendo las ecuaciones (12.21) en (12.23) y simplificando, se observa que el coeficiente del término XY es cero siempre que

$$2(c - a)\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + b(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) = 0$$

o, de manera equivalente, $\quad (a - c)\,\text{sen}\,2\theta = b\cos 2\theta. \qquad (12.25)$

Obsérvese que si $a = c$ en (12.23), entonces $a - c = 0$ en (12.25). La ecuación resultante, $\cos 2\theta = 0$, implica que una rotación en un ángulo $\theta = 45°$ eliminará el término xy de (12.23). Sin embargo, si $a \neq c$, entonces tal eliminación se puede realizar eligiendo θ como el ángulo para el cual

$$\tan 2\theta = \frac{b}{a - c}. \qquad (12.26)$$

Ejemplo 2

La sencilla ecuación $xy = 1$ se puede volver a escribir en términos de X y Y sin el producto xy. Como $a = c = 0$, empleamos $\theta = 45°$ en (12.21):

$$x = \frac{X}{\sqrt{2}} - \frac{Y}{\sqrt{2}}$$
$$y = \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}}.$$

Así que, $xy = 1$ equivale a

$$\left(\frac{X}{\sqrt{2}} - \frac{Y}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}}\right) = 1$$

o bien

$$\frac{X^2}{2} - \frac{Y^2}{2} = 1.$$

La ecuación es una forma estándar de una hipérbola con vértices $(\pm\sqrt{2}, 0)$ en el sistema de coordenadas XY, como se ilustra en la Figura 12.36.

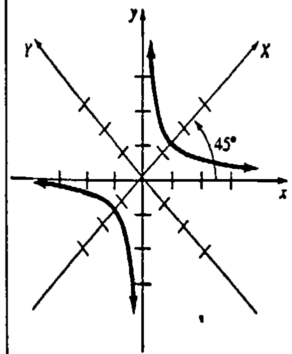


Figura 12.36

* Estos se llaman cónicas degeneradas.

En el caso ligeramente más complicado de que $a - c \neq 0$, las identidades

$$\cos 2\theta = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\theta}}, \quad \text{sen } \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}}, \quad \cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}} \qquad (12.27)$$

resultan ser muy útiles.†

Ejemplo 3

Eliminar el término xy de la ecuación

$$9x^2 + 12xy + 4y^2 + 2x - 3y = 0.$$

mediante rotación de ejes. Identificar y trazar la gráfica.

Solución Identificando $a = 9$, $b = 12$ y $c = 4$, en virtud de (12.26) tenemos que $\tan 2\theta = \frac{12}{5}$. Como 2θ es un ángulo del primer cuadrante, (12.27) da lugar a

$$\cos 2\theta = \frac{5}{13}, \qquad \text{sen } \theta = \frac{2}{\sqrt{13}}, \qquad \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Por lo tanto las ecuaciones (12.21) se convierten en

$$x = \frac{3}{\sqrt{13}}X - \frac{2}{\sqrt{13}}Y$$
$$y = \frac{2}{\sqrt{13}}X + \frac{3}{\sqrt{13}}Y.$$

Sustituyendo estas ecuaciones en $9x^2 + 12xy + 4y^2 + 2x - 3y = 0$ y simplificando,

$$Y = \sqrt{13}X^2.$$

Así que la gráfica de la ecuación dada es una parábola. De $\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}(\frac{12}{5})$, vemos que el eje x positivo es girado un ángulo $\theta \approx 33.7°$. La gráfica de la ecuación se presenta en la Figura 12.37.

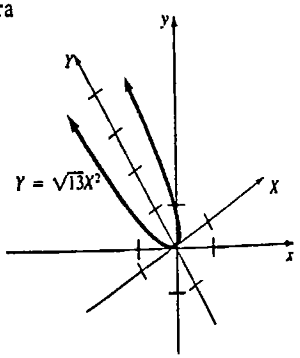


Figura 12.37

† La primera identidad proviene de $1 + \tan^2 2\theta = \sec^2 2\theta$. Las dos siguientes son las fórmulas del semiángulo.

Ejercicios 12.4

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 990.

En los Problemas 1-4 los dos puntos están dados en coordenadas xy. Encuentre las coordenadas XY del primer punto si el origen trasladado O' es el segundo punto.

1. $(3, 2)$; $(1, 3)$
2. $(-1, 7)$; $(-4, 3)$
3. $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$; $(2, -5)$
4. $(-6, -8)$; $(2, -8)$

En los Problemas 5-10 utilice traslación de ejes para examinar la diferencia entre las gráficas de los pares de ecuaciones indicadas.

5. $y = |x|$
   $y = |x - 1| + 4$
6. $y = x^{2/3}$
   $y = (x + 2)^{2/3} - 1$
7. $y = \text{sen } x$
   $y = \text{sen}(x + \pi/2)$
8. $y = x^2$
   $y = x^2 - 6x + 7$
9. $x^2 - y^2 = 4$
   $(x + 1)^2 - (y - 1)^2 = 4$
10. $4x^2 + y^2 = 16$
    $4(x - 5)^2 + y^2 = 16$

En los Problemas 11-14 el eje x positivo se hace girar el ángulo indicado. Encuentre las coordenadas XY del punto que tiene las coordenadas xy indicadas.

11. $(6, 2)$; $45°$
12. $(-2, 8)$; $30°$
13. $(-1, -1)$; $60°$
14. $(5, 3)$; $15°$

En los Problemas 15 y 16 obtenga las coordenadas XY del punto cuyas coordenadas xy se dan para el ángulo de rotación indicado. No utilice calculadora ni tablas.

15. $(5, -5)$; $\tan^{-1}\frac{4}{3}$
16. $(20, 10)$; $\tan^{-1}\frac{1}{3}$

En los Problemas 17-22 aplique rotación de ejes para eliminar el término xy en la ecuación indicada. Identifique y trace la gráfica.

17. $x^2 + xy + y^2 = 4$
18. $2x^2 - 3xy - 2y^2 = 5$
19. $x^2 - 2xy + y^2 = 8x + 8y$
20. $3x^2 + 4xy = 16$
21. $4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$
22. $x^2 - xy + y^2 - 4x - 4y = 20$
23. Dada $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 + 2x - 2\sqrt{3}y = 0$:

    (a) Mediante rotación de ejes demuestre que la gráfica de la ecuación es una parábola.

    (b) Encuentre las coordenadas XY del foco. Utilice esta información para encontrar las coordenadas xy del foco.

    (c) Encuentre una ecuación de la directriz en términos de las coordenadas XY. Utilice esta información para hallar una ecuación de la directriz en términos de las coordenadas xy.
24. Dada $13x^2 - 8xy + 7y^2 = 30$:

    (a) Mediante rotación de ejes demuestre que la gráfica de la ecuación es una elipse.

    (b) Encuentre las coordenadas XY de los focos. Utilice esta información para obtener las coordenadas xy de los focos.

    (c) Halle las coordenadas xy de los vértices.

Problemas diversos

25. (a) Utilice la Figura 12.38 para demostrar que $X = d\cos\phi$, $Y = d\,\text{sen }\phi$, y $x = d\cos(\theta + \phi)$, $y = d\,\text{sen}(\theta + \phi)$.

    (b) Utilice los resultados de la parte (a) para deducir las ecuaciones (12.21).

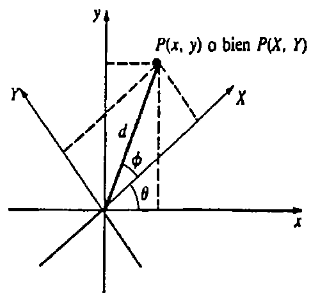


Figura 12.38

26. Trace la gráfica de la ecuación $xy = 3x - 2y + 6$. Excepto cuando (12.23) describe un punto o una recta, su gráfica será:

    (i) una parábola si $b^2 - 4ac = 0$,

(*ii*) una elipse si $b^2 - 4ac < 0$,

(*iii*) una hipérbola si $b^2 - 4ac > 0$.

En los Problemas 27-30, determine el tipo de la gráfica sin trazarla.

27. $x^2 - 3xy + y^2 = 5$

28. $2x^2 - 2xy + 2y^2 = 1$

29. $4x^2 - 4xy + y^2 - 6 = 0$

30. $x^2 + \sqrt{3}xy - \frac{1}{2}y^2 = 0$

Examen • Capítulo 12

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 991.

En los Problemas 1-14 conteste verdadero o falso.

1. En una parábola, la distancia del vértice al foco es igual a la distancia del vértice a la directriz.

2. La directriz de $y^2 = 4px$, $p < 0$, es perpendicular al eje y positivo. ____

3. El eje menor de una elipse biseca al eje mayor.
____

4. Para una elipse cuya ecuación es $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, los números a, b y c están relacionados por $a^2 = b^2 + c^2$. ____

5. Para una hipérbola, los números c y a satisfacen $c > a$. ____

6. Los focos de $(x - h)^2/a^2 + (y - k)^2/b^2 = 1$ son $(h, k \pm c)$. ____

7. Un rayo de luz que se origine en uno de los focos de una elipse y que incida en su contorno (supuesto reflector) se reflejará necesariamente hacia el otro foco. ____

8. Las asíntotas de $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ son perpendiculares. ____

9. Las asíntotas de una hipérbola siempre pasan por el origen. ____

10. Las ramas de una hipérbola son dos parábolas.
____

11. Si (0, 4), (3, 6), (6, 4) y (3, 2) son vértices de una elipse, entonces su eje mayor es vertical. ____

12. Si P es un punto de la rama izquierda de la hipérbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, entonces $d(P, F_1) - d(P, F_2) < 0$, en donde $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ son los focos.
____

13. La directriz de una parábola debe ser vertical, o bien horizontal. ____

14. Las intercepciones y de la gráfica de $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ son $(\pm b, 0)$. ____

En los Problemas 15-24, en cada espacio en blanco escriba la respuesta requerida para la ecuación indicada.

15. $y = 2x^2$, foco ____

16. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$, focos ____

17. $4x^2 + 5(y - 2)^2 = 20$, focos ____

18. $25y^2 - 4x^2 = 100$, asíntotas ____

19. $8(y + 3) = (x - 1)^2$, directriz ____

20. $\frac{(x + 1)^2}{36} + \frac{(y + 7)^2}{16} = 1$, vértices ____

21. $x^2 - 2y^2 = 18$, longitud del eje conjugado
____

22. $y = x^2 + 4x - 6$, vértice ____

23. $(x - 4)^2 - (y + 1)^2 = 4$, puntos extremos del eje transverso ____

24. $\frac{(x - 3)^2}{7} + \frac{(y + 3/2)^2}{8} = 1$, ecuación de la recta que contiene el eje mayor ____

25. Un satélite gira alrededor del planeta Júpiter, en una órbita elíptica en la que el centro del planeta ocupa uno de los focos. La longitud del eje mayor de la órbita es 10^9 m, y la longitud del eje menor, 6×10^8 m. Determine la distancia mínima entre el satélite y el centro de Júpiter. ¿Cuál es la distancia máxima?

26. Obtenga una ecuación de la hipérbola cuyas asíntotas son $3y = 5x$ y $3y = -5x$ y que tiene sus vértices en (0, 10) y (0, −10).

13

Ecuaciones paramétricas y coordenadas polares

Una ecuación rectangular o cartesiana no es la única manera de describir una curva en el plano, y a menudo no es la más conveniente. En esta sección consideraremos dos formas adicionales de representar una curva. Uno de estos métodos utiliza un tipo especial de sistema de coordenadas.

13.1 Ecuaciones paramétricas

Movimiento curvilíneo

El movimiento de una partícula a lo largo de una curva se llama **movimiento curvilíneo.** En física se demuestra que el movimiento de un proyectil en el plano xy, como el de una pelota de golf al ser golpeada*, está regido por el hecho de que su aceleración en las direcciones x y y satisface las condiciones

$$a_x = 0, \qquad a_y = -g, \tag{13.1}$$

en donde g es la aceleración de la gravedad y $a_x = d^2x/dt^2$, $a_y = d^2y/dt^2$. En $t = 0$ se toma $x = 0$, $y = 0$, y las componentes x, y de la velocidad inicial v_0 son

$$v_0 \cos \theta_0 \quad \text{y} \quad v_0 \operatorname{sen} \theta_0,$$

respectivamente. Véase la Figura 13.1. Tomando dos antiderivadas en (13.1), en virtud de las condiciones iniciales resulta que las coordenadas x, y de la pelota son

$$\begin{aligned} x &= (v_0 \cos \theta_0)t \\ y &= -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)t. \end{aligned} \tag{13.2}$$

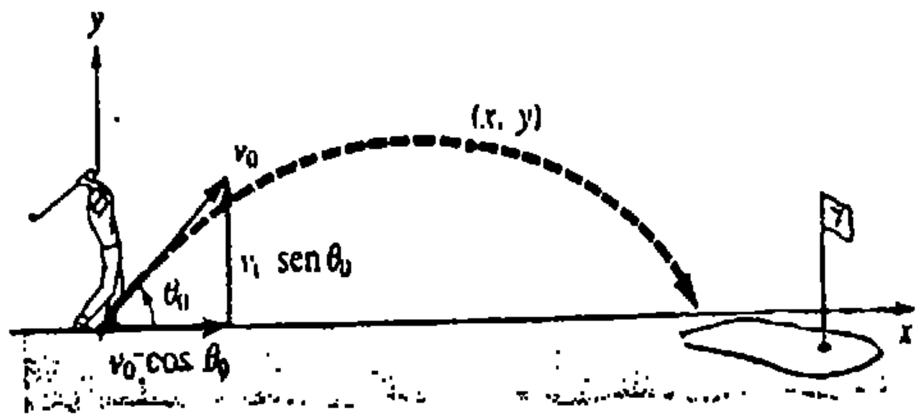


Figura 13.1

Estas ecuaciones, que dan la posición de la bola en el plano xy en el tiempo t, se dice que son **ecuaciones paramétricas.** La variable t se denomina **parámetro** y está restringida a un intervalo $0 \le t \le T$, en donde T es el tiempo en el que la pelota choca contra el suelo.

En general, una curva en el plano xy se *define* en términos de ecuaciones paramétricas.

DEFINICIÓN 13.1

Una curva plana C es un conjunto de puntos $P(x, y)$ cuyas coordenadas están dadas por las **ecuaciones paramétricas.**

$$x = f(t), \qquad y = g(t),$$

en donde f y g son continuas en un intervalo I. □

* Suponiendo que no se le da un efecto especial. Se desprecian también los efectos de la resistencia del aire.

Ejemplo 1

Trazar la gráfica de la curva que tiene las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2, \qquad y = t^3, \qquad -1 \le t \le 2.$$

Solución Para toda elección de t en $[-1, 2]$, obtenemos un par ordenado (x, y), como se muestra en la tabla adjunta. Uniendo los puntos con una curva alisada, se obtiene la gráfica de la Figura 13.2. Si se considera en términos de movimiento, entonces, cuando t aumenta de -1 a 2, un punto P parte de $(1, -1)$, avanza hacia arriba por la rama inferior, pasa suavemente a la rama superior y finalmente se detiene en $(4, 8)$.

t	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
x	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4
y	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{27}{8}$	8

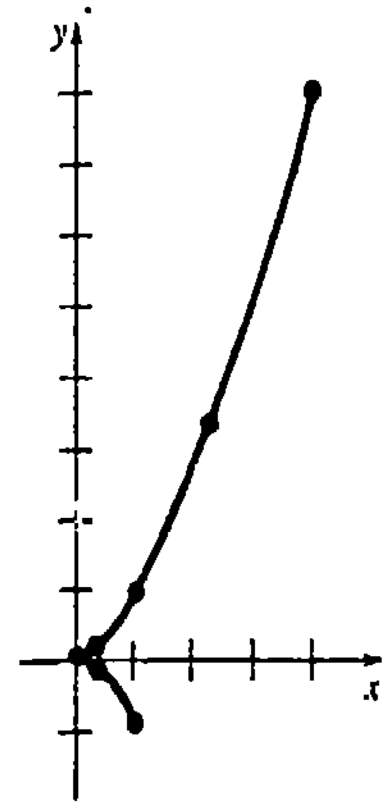


Figura 13.2

Desde luego, no es necesario que un parámetro tenga relación con el tiempo. También, cuando no se especifica el intervalo I, usualmente se sobreentiende que es $-\infty < t < \infty$ o bien todos los números reales para los que están definidas f y g.

Ejemplo 2

Una circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ puede ser parametrizada en términos de un ángulo central. De la Figura 13.3 se ve que las ecuaciones

$$x = a \cos \theta, \qquad y = a \operatorname{sen} \theta, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi, \tag{13.3}$$

proporcionan todos los puntos de la circunferencia.

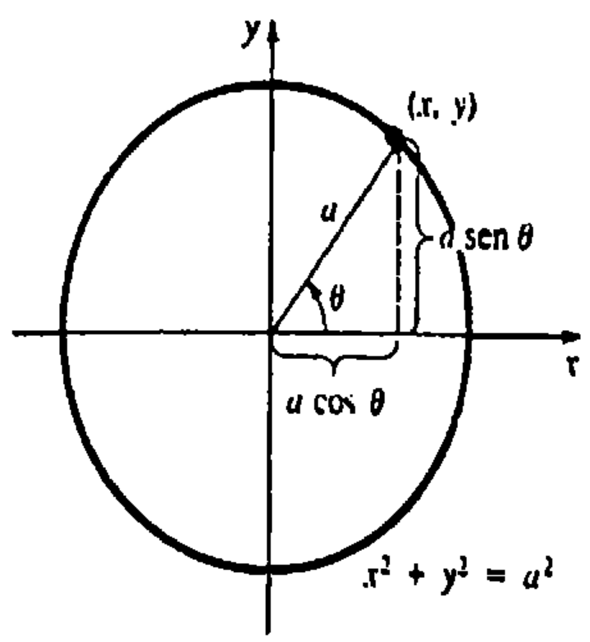


Figura 13.3

Ejemplo 3

En el Ejemplo 2, la semicircunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \le y \le a$ se da paramétricamente por $x = a \cos \theta$, $y = a \operatorname{sen} \theta$, $0 \le \theta \le \pi$.

Eliminación del parámetro

Dado un conjunto de ecuaciones paramétricas, a veces es deseable eliminar el parámetro para obtener una ecuación cartesiana. A fin de quitar el parámetro del (13.3), simplemente se elevan x y y al cuadrado:

$$x^2 + y^2 = a^2\cos^2\theta + a^2\operatorname{sen}^2\theta \quad \text{implica que } x^2 + y^2 = a^2$$

puesto que $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$.

Ejemplo 4

(*a*) De la primera ecuación (13.2) $t = x/(v_0 \cos \theta_0)$ de manera que la segunda ecuación da lugar a

$$y = -\frac{g}{2(v_0 \cos \theta_0)^2}x^2 + (\tan \theta_0)x.$$

Así que la trayectoria de cualquier proyectil lanzado a un ángulo $0 < \theta_0 < \pi/2$, es necesariamente una parábola.

(*b*) En el Ejemplo 1, la eliminación del parámetro proporciona la ecuación cartesiana $y = \pm x^{3/2}$, $0 \le x \le 4$.

Pendiente

Sean $x = f(t)$ y $y = g(t)$ funciones diferenciables que definen una curva C. La pendiente de una tangente a C es dy/dx. Para calcular esta derivada, se forma

$$\Delta x = f(t + \Delta t) - f(t) \quad \text{y} \quad \Delta y = g(t + \Delta t) - g(t)$$

y

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y/\Delta t}{\Delta x/\Delta t}$$

de modo que

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim_{\Delta t \to 0} \Delta y/\Delta t}{\lim_{\Delta t \to 0} \Delta x/\Delta t}$$

siempre que el límite del denominador no sea cero. En resumen:

Si $x = f(t)$ y $y = g(t)$ son diferenciables, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \tag{13.4}$$

siempre que $f'(t) \ne 0$.

Ejemplo 5

Encuentre la pendiente de la tangente a la curva $x = 1/(t^2 + 1)$, $y = t^3$ en $t = 2$.

Solución

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2t}{(t^2 + 1)^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = 3t^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3t^2}{-2t/(t^2 + 1)^2} = -\frac{3}{2}t(t^2 + 1)^2$$

La pendiente es $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=2} = -75$.

Derivadas de orden superior

Escribiendo (13.4) como

$$\frac{d}{dx}(\quad) = \frac{d(\quad)/dt}{dx/dt},$$

resulta evidente que la segunda derivada está dada por

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}y' = \frac{dy'/dt}{dx/dt}.$$

La tercera derivada es $d^3y/dx^3 = (dy''/dt)/(dx/dt)$, y así sucesivamente.

Ejemplo 6

Obtener d^3y/dx^3 para $x = 4t + 6$, $y = t^2 + t - 2$.

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2t + 1}{4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{2/4}{4} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dy''/dt}{dx/dt} = \frac{0}{4} = 0$$

Longitud de una curva

Se dice que una curva C, dada paramétricamente por

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad a \le t \le b,$$

es alisada si f' y g' son continuas en $[a, b]$ y no son simultáneamente nulas en (a, b). Si P es una partición de $[a, b]$ dada por

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b,$$

entonces, como se muestra en la Figura 13.4, parece razonable que C puede aproximarse mediante una trayectoria poligonal que pase por los puntos $Q_k(f(t_k), g(t_k))$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Denotando la longitud del segmento rectilíneo de Q_{k-1} a Q_k por $|Q_{k-1}Q_k|$ la longitud aproximada de C es

$$\sum_{k=1}^{n} |Q_{k-1}Q_k|,$$

en donde

$$|Q_{k-1}Q_k| = \sqrt{[f(t_k) - f(t_{k-1})]^2 + [g(t_k) - g(t_{k-1})]^2}. \tag{13.5}$$

Ahora bien, puesto que f y g tienen derivadas continuas, el teorema del valor medio (véase la Sección 4.4) afirma que existen números u_k^* y v_k^* en (t_{k-1}, t_k) tales que

$$\begin{aligned} f(t_k) - f(t_{k-1}) &= f'(u_k^*)(t_k - t_{k-1}) \\ &= f'(u_k^*)\,\Delta t_k \end{aligned} \tag{13.6}$$

y

$$\begin{aligned} g(t_k) - g(t_{k-1}) &= g'(v_k^*)(t_k - t_{k-1}) \\ &= g'(v_k)\,\Delta t_k. \end{aligned} \tag{13.7}$$

Sustituyendo (13.6) y (13.7) en (13.5) y simplificante resulta

$$\sum_{k=1}^{n} |Q_{k-1}Q_k| = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[f'(u_k^*)]^2 + [g'(v_k^*)]^2}\,\Delta t_k. \tag{13.8}$$

Haciendo $\|P\| \to 0$ en (13.8), ello sugiere definir* la longitud de una curva alisada mediante

$$s = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt. \tag{13.9}$$

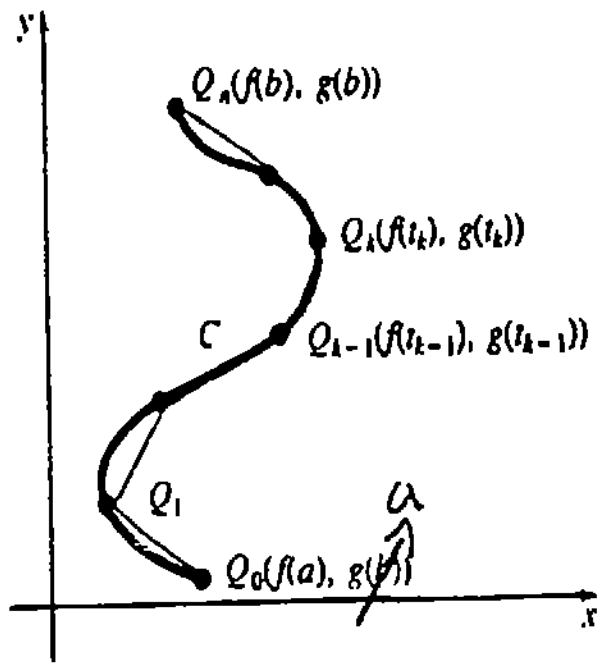


Figura 13.4

* El límite de la suma (13.8) no es la definición usual de una integral definida, ya que se tratan dos números (u_k^* y v_k^*) en (t_{k-1}, t_k), en vez de uno. Empleamos la escapatoria tradicional de los libros de texto apelando a la confianza: Se *puede* demostrar rigurosamente que (13.9) resulta de (13.8) tomando $\|P\| \to 0$.

Ejemplo 7

Hallar la longitud de la curva $x = 4t$, $y = t^2$, $0 \le t \le 2$.

Solución Como $f'(t) = 4$ y $g'(t) = 2t$, por (13.9)

$$\begin{aligned} s &= \int_0^2 \sqrt{16 + 4t^2}\,dt \\ &= 2\int_0^2 \sqrt{4 + t^2}\,dt. \end{aligned}$$

Utilizando la sustitución trigonométrica $t = 2\tan\theta$, la última integral se convierte en

$$s = 8\int_0^{\pi/4} \sec^3\theta\,d\theta.$$

La integración por partes conduce a (véase el Ejemplo 3, Sección 9.2)

$$\begin{aligned} s &= [4\sec\theta\tan\theta + 4\ln|\sec\theta + \tan\theta|]_0^{\pi/4} \\ &= 4\sqrt{2} + 4\ln(\sqrt{2} + 1) \approx 9.1823. \end{aligned}$$

Observaciones

(*i*) Una curva C puede tener más de una parametrización. Por ejemplo, revisando $x = t$, $y = 2t^2$, $-\infty < t < \infty$ y $x = t^3/4$, $y = t^6/8$, $-\infty < t < \infty$, se advierte que ambos conjuntos de ecuaciones representan a $y = 2x^2$.* Sin embargo, se debe tener cuidado al trabajar con ecuaciones paramétricas. La eliminación del parámetro en $x = t^2$, $y = 2t^4$, $-\infty < t < \infty$ parecería dar lugar a la misma parábola $y = 2x^2$, pero no es así, porque para cualquier valor de t, $t^2 \ge 0$ y de esta manera $x \ge 0$. En otras palabras, el último conjunto es una representación paramétrica sólo de la rama derecha de la parábola: $y = x^2$, $x \ge 0$. Se recomienda al lector resolver los Problemas 15-17 de los Ejercicios 13.1.

(*ii*) Una curva C descrita por una función continua $y = f(x)$ *siempre* se puede parametrizar haciendo $x = t$. Un conjunto de ecuaciones paramétricas para C es $x = t$, $y = f(t)$.

(*iii*) La gráfica de una función diferenciable puede tener solamente una tangente en un punto. Por el contrario, la gráfica de una curva descrita paramétricamente puede tener dos tangentes en un punto dado. Piense por qué esto es posible, y luego resuelva el Problema 47 de los Ejercicios 13.1.

* Obsérvese que no es necesario que un punto corresponda al mismo valor del parámetro en cada conjunto. Por ejemplo, (1, 2) se obtiene de $t = 1$ en el primer conjunto, y en cambio, de $t = \sqrt[3]{4}$ en el segundo conjunto.

Ejercicios 13.1

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 991.

En los Problemas 1 y 2 complete la tabla para el conjunto indicado de ecuaciones paramétricas.

1. $x = 2t + 1$
   $y = t^2 + t$

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x							
y							

2. $x = \cos t$
   $y = \operatorname{sen}^2 t$

t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$5\pi/6$	$7\pi/4$
x							
y							

En los Problemas 3-10 trace la gráfica de la curva que tenga el conjunto indicado de ecuaciones paramétricas.

3. $x = t - 1,\ y = 2t - 1;\ -1 \le t \le 5$
4. $x = 3t,\ y = t^2 - 1;\ -2 \le t \le 3$
5. $x = \sqrt{t},\ y = 5 - t;\ t \ge 0$
6. $x = 3 + 2\operatorname{sen} t,\ y = 4 + \operatorname{sen} t;\ -\pi/2 \le t \le \pi/2$
7. $x = 4\cos t,\ y = 4\operatorname{sen} t;\ -\pi/2 \le t \le \pi/2$
8. $x = t^3 + 1,\ y = t^2 - 1;\ -2 \le t \le 2$
9. $x = e^t,\ y = e^{3t};\ 0 \le t \le \ln 2$
10. $x = -e^t,\ y = e^{-t};\ t \ge 0$

En los Problemas 11-14 elimine el parámetro del conjunto indicado de ecuaciones paramétricas y obtenga una ecuación cartesiana que tenga la misma gráfica.

11. $x = t^2,\ y = t^4 + 3t^2 - 1$
12. $x = t^3 + t + 4,\ y = -2t^3 - 2t$
13. $x = \cos 2\theta,\ y = \operatorname{sen}\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$
14. $y = \ln t,\ x = e^t,\ t > 0$

15. Muestre gráficamente la diferencia entre las gráficas siguientes
    (a) $y = x$ y $x = \operatorname{sen} t,\ y = \cos t$
    (b) $y = x^2$ y $x = -\sqrt{t},\ y = t,\ t \ge 0$
    (c) $y = \dfrac{x^2}{4} - 1$ y $x = 2t,\ y = t^2 - 1,$ $-1 \le t \le 2$

16. Determine cuáles de los siguientes conjuntos de ecuaciones paramétricas tienen la misma gráfica que la ecuación cartesiana $xy = 1$.
    (a) $x = \dfrac{1}{2t+1},\ y = 2t + 1$
    (b) $x = t^{1/2},\ y = t^{-1/2}$
    (c) $x = \cos t,\ y = \sec t$
    (d) $x = t^2 + 1,\ y = (t^2 + 1)^{-1}$
    (e) $x = e^{-2t},\ y = e^{2t}$
    (f) $x = t^3,\ y = t^{-3}$

17. Determine si son iguales la gráfica de la ecuación cartesiana $x^2 - y^2 = 1$ y la gráfica de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son $x = \cosh t,\ y = \operatorname{senh} t$.

18. Trace la gráfica de la curva que tiene las ecuaciones paramétricas $x = 1 + 2\cosh t,\ y = 2 + 3\operatorname{senh} t$.

En los Problemas 19 y 20 muestre gráficamente la diferencia entre los conjuntos indicados de ecuaciones paramétricas.

19. $x = a\cos t,\ y = a\operatorname{sen} t,\ a > 0,\ 0 \le t \le \pi$
    $x = a\operatorname{sen} t,\ y = a\cos t,\ a > 0,\ 0 \le t \le \pi$

20. $x = a\cos t,\ y = b\operatorname{sen} t,\ a > b > 0,\ \pi \le t \le 2\pi$
    $x = a\operatorname{sen} t,\ y = b\cos t,\ a > b > 0,\ \pi \le t \le 2\pi$

En los Problemas 21-24 halle una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la curva dada, en el valor indicado de t o en el punto indicado.

21. $x = t^3 + 3t,\ y = 6t^2 + 1;\ t = -1$
22. $x = 2t + 4,\ y = t^2 + \ln t;\ t = 1$
23. $x = t^2 + t,\ y = t^2;\ (2, 4)$
24. $x = t^4 - 9,\ y = t^4 - t^2;\ (0, 6)$

25. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $x = 4\operatorname{sen} 2t,\ y = 2\cos t,\ 0 \le t \le 2\pi$, en $(2\sqrt{3}, 1)$?

26. ¿En qué punto de la gráfica de $x = t^2,\ y = t^3 + 1$ la recta tangente está dada por $y + 3x - 5 = 0$?

En los Problemas 27 y 28 determine los puntos, si los hay, de la gráfica de la curva indicada en los que la tangente es horizontal

27. $x = 5t + 2,\ y = 2t^3 + 3t^2 + 6$
28. $x = t^2 + 3t - 2,\ y = 2t^3 - 24t + 10$

En los Problemas 29-32 encuentre dy/dx, d^2y/dx^2 y d^3y/dx^3.

29. $x = 3t^2,\ y = 6t^3$
30. $x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t$
31. $x = e^{-t},\ y = e^{2t} + e^{3t}$
32. $x = \dfrac{1}{2}t^2 + t,\ y = \dfrac{1}{2}t^2 - t$

33. Un pistón está unido por medio de una biela de longitud L, a un mecanismo de manivela de radio r, como se muestra en la Figura 13.5. Parametrice las coordenadas del punto P en términos del ángulo ϕ.

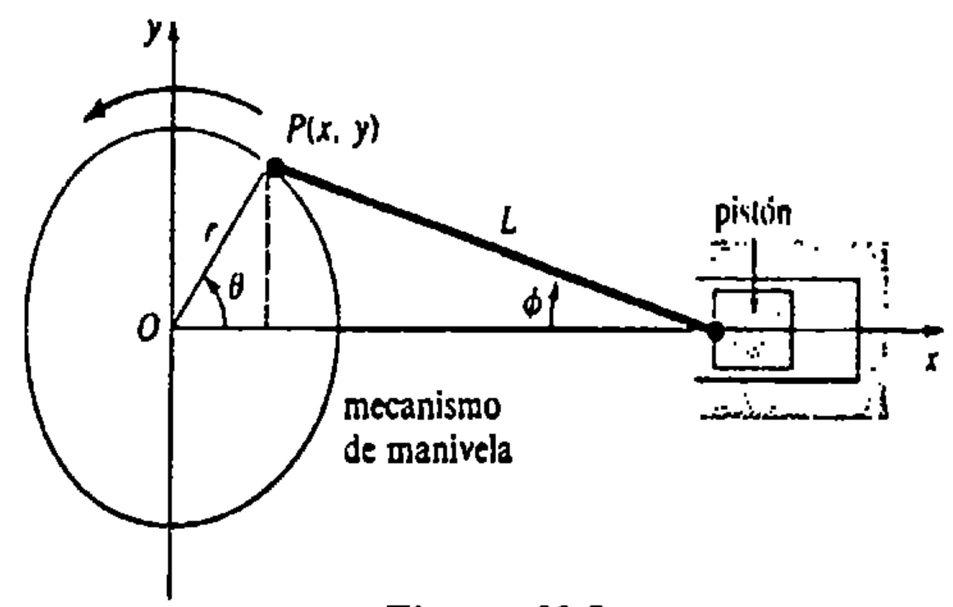


Figura 13.5

34. Los extremos de una varilla de longitud L deslizan sobre una ranura horizontal y una vertical que coinciden con los ejes x y y, respectivamente.
    (a) Parametrice las coordenadas del punto P de la Figura 13.6(a) en términos de ϕ. Demuestre que P describe una trayectoria circular cuando ϕ varía de 0 a $\pi/2$.
    (b) Si P se localiza como lo muestra la Figura 13.6(b), demuestre que describe una trayectoria elíptica cuando ϕ varía de 0 a $\pi/2$.
    (c) Parametrice las coordenadas de P de la Figura 13.6(b) en términos de θ.

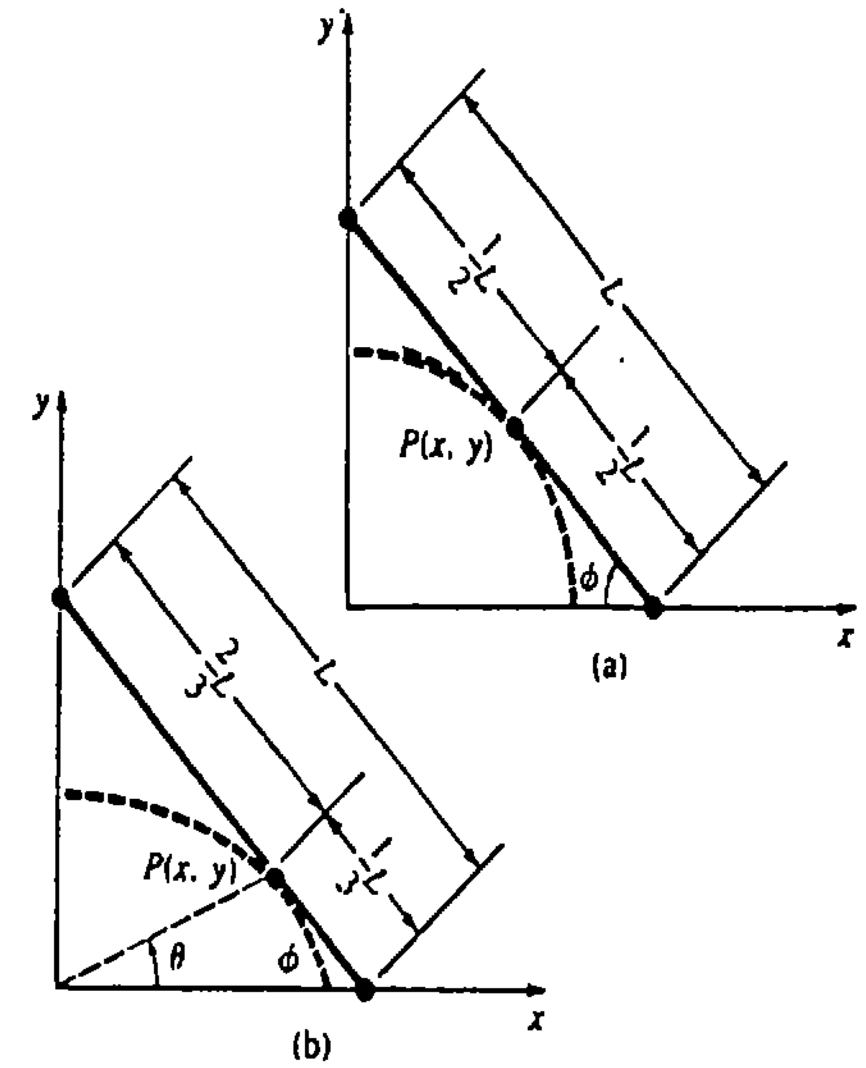


Figura 13.6

35. Un punto P marcado en el borde de un aro circular de radio a, se encuentra en el origen cuando el diámetro del aro está situado sobre el eje y. El aro rueda a lo largo del eje x en la dirección positiva. Utilizando el ángulo θ indicado en la Figura 13.7, obtenga las ecuaciones paramétricas de la trayectoria descrita por P. Esta curva se llama cicloide.*

* En el siglo XVII dos problemas fueron extensivamente estudiados por el físico holandés, Christian Huygens (1629-1695) y los matemáticos suizos, Jakob (1654-1705) y Johann Bernoulli (1667-1748). Consideremos un alambre flexible (sin fricción) fijo en los puntos A y B, y una cuenta que puede deslizarse por el alambre empezando en el punto P. Véase la Figura 13.8. ¿Existe alguna configuración particular del mismo tal que el tiempo para que la cuenta se deslice hasta B sea el mismo, sin que importe el punto inicial de la cuenta? Además, ¿cuál sería la configuración del alambre de modo que la cuenta se deslice de P a B en el tiempo mínimo? Se demostró que las llamadas *tautócrona* (en mismo tiempo) y *braquistócrona* (en tiempo mínimo) son semiarcos invertidos de una cicloide. Se recomienda al lector la excelente película: *Cycloidal Curves or Tales from the Wankenburg Woods*. (Curvas cicloidales o cuentos de los bosques de Wankenburg), de Wards Natural Science Co., Monterey, California, E.U.A.

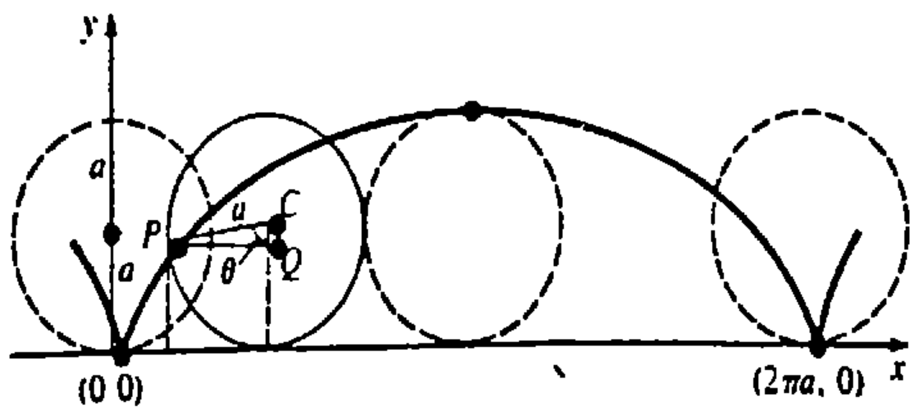


Figura 13.7

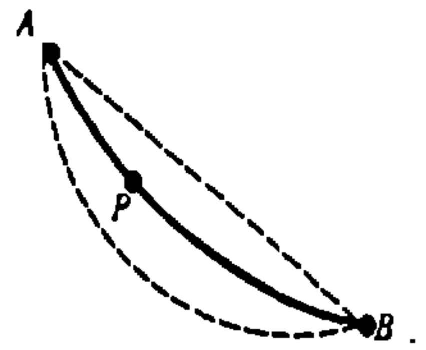


Figura 13.8

36. Un punto Q describe una trayectoria circular de radio r y un punto P se mueve en la forma mostrada en la Figura 13.9. Si R es constante, obtenga las ecuaciones paramétricas de la trayectoria descrita por P. Esta curva se llama **epitrocoide**.*

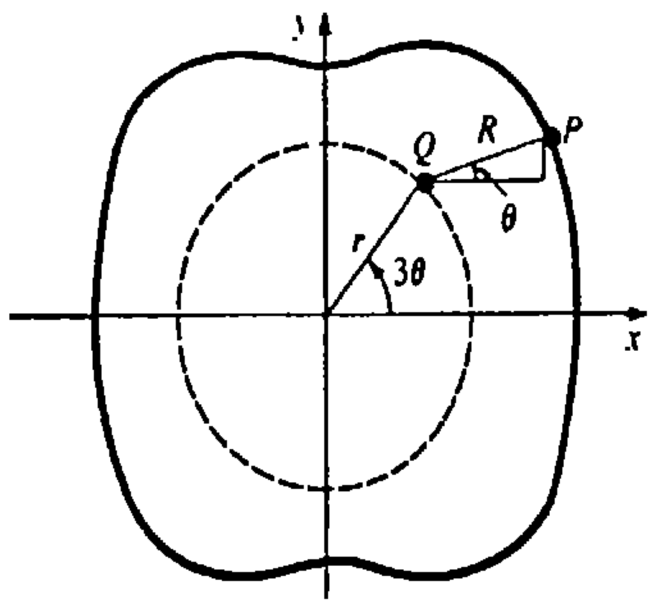


Figura 13.9

37. Considere una circunferencia de radio a, tangente al eje x en el origen O. Si B es un punto de la recta horizontal que pasa por $(0, 2a)$, sea A el punto en el que el segmento OB corta a la circunferencia. La proyección vertical de AB da lugar al segmento de recta BP, como se muestra en la Figura 13.10. Halle las ecuaciones paramétricas de la trayectoria descrita por

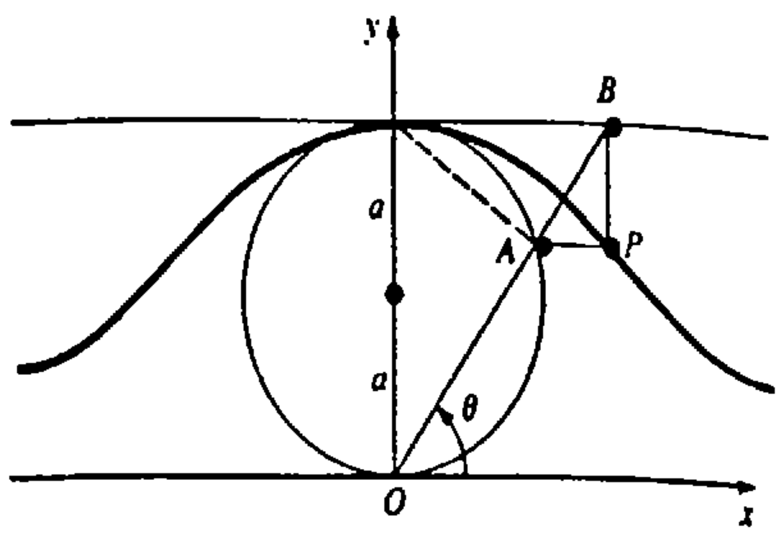


Figura 13.10

el punto P, cuando A recorre la circunferencia. La curva se denomina **Bruja de Agnesi**. †

38. En el Problema 37, elimine el parámetro y demuestre que la curva tiene la ecuación cartesiana $y = 8a^3/(x^2 + 4a^2)$.

En los Problemas 39-42 encuentre la longitud de la curva indicada.

39. $x = \frac{5}{3}t^3 + 2,\ y = 4t^3 + 6;\ 0 \le t \le 2$

40. $x = \frac{1}{3}t^3,\ y = \frac{1}{2}t^2;\ 0 \le t \le \sqrt{3}$

41. $x = e^t \operatorname{sen} t,\ y = e^t \cos t;\ 0 \le t \le \pi$

42. $x = \cos^3 t,\ y = \operatorname{sen}^3 t;\ 0 \le t \le \pi/2$

Problemas diversos

43. Utilice $dy/dx = (dy/dt)/(dx/dt)$ y

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

para deducir (13.9).

44. Obtenga la longitud del arco de la cicloide mostrada en la Figura 13.7.

45. Sea C una curva descrita por $y = F(x)$, en donde F es una función no negativa continua en $x_1 \le x \le x_2$. Si C está dada paramétricamente por $x = f(t), y = g(t), a \le t \le b, f'$ y g continuas, demuestre que el área bajo la gráfica de C es $\int_a^b g(t)f'(t)\, dt$.

46. Utilice el Problema 45 para demostrar que el área bajo un arco de la cicloide de la Figura 13.7 es el triple del área del aro circular.

47. (a) Verifique que las ecuaciones paramétricas $x = t^2 - t,\ y = t^3 - 3t$ dan el mismo punto P en $t = -1$ y $t = 2$.

(b) Halle ecuaciones de las rectas tangentes en P.

(c) Trace la gráfica de la curva y las rectas tangentes.

* Quienes conocen de motores de automóviles reconocerán la curva descrita por P como la forma del alojamiento del rotor del motor Wankel.

† En honor de la matemática y filósofa italiana María Gaetana Agnesi (1718-1799). La curva fue estudiada primero por Fermat y Guido Grandi (1672-1742). Grandi llamó a la curva *versoria*, que en latín es el nombre de una cierta clase de cuerda marina. Cuando Agnesi escribió su texto sobre geometría analítica, confundió la palabra "versoria" con *versiera*, que significa "duende femenino". Subsecuentemente, cuando el libro de Agnesi fue traducido al inglés el "duende femenino" se convirtió en una "bruja".

13.2 Sistema de coordenadas polares

Hasta ahora hemos estado usando un sistema de coordenadas rectangulares para especificar un punto P en el plano. Podemos considerar este sistema como una red de rectas horizontales y verticales. Las coordenadas de P son determinadas por la intersección de dos rectas, una perpendicular a una recta de referencia horizontal llamada eje x, y la otra perpendicular a una recta de referencia vertical llamada eje y. Como una alternativa, en coordenadas polares, un punto P puede ser ubicado por medio de una red de circunferencias centradas en un punto O, llamado **polo**, y semirrectas o rayos que emanan de O. Tómese como eje de referencia una semirrecta horizontal dirigida hacia la derecha de O, y desígnese por **eje polar**. Especificando una distancia dirigida r a partir de O y un ángulo θ, medido en radianes, cuyo lado inicial es el eje polar y cuyo lado terminal es el rayo OP, las coordenadas del punto P son entonces (r, θ). Véase la Figura 13.11.

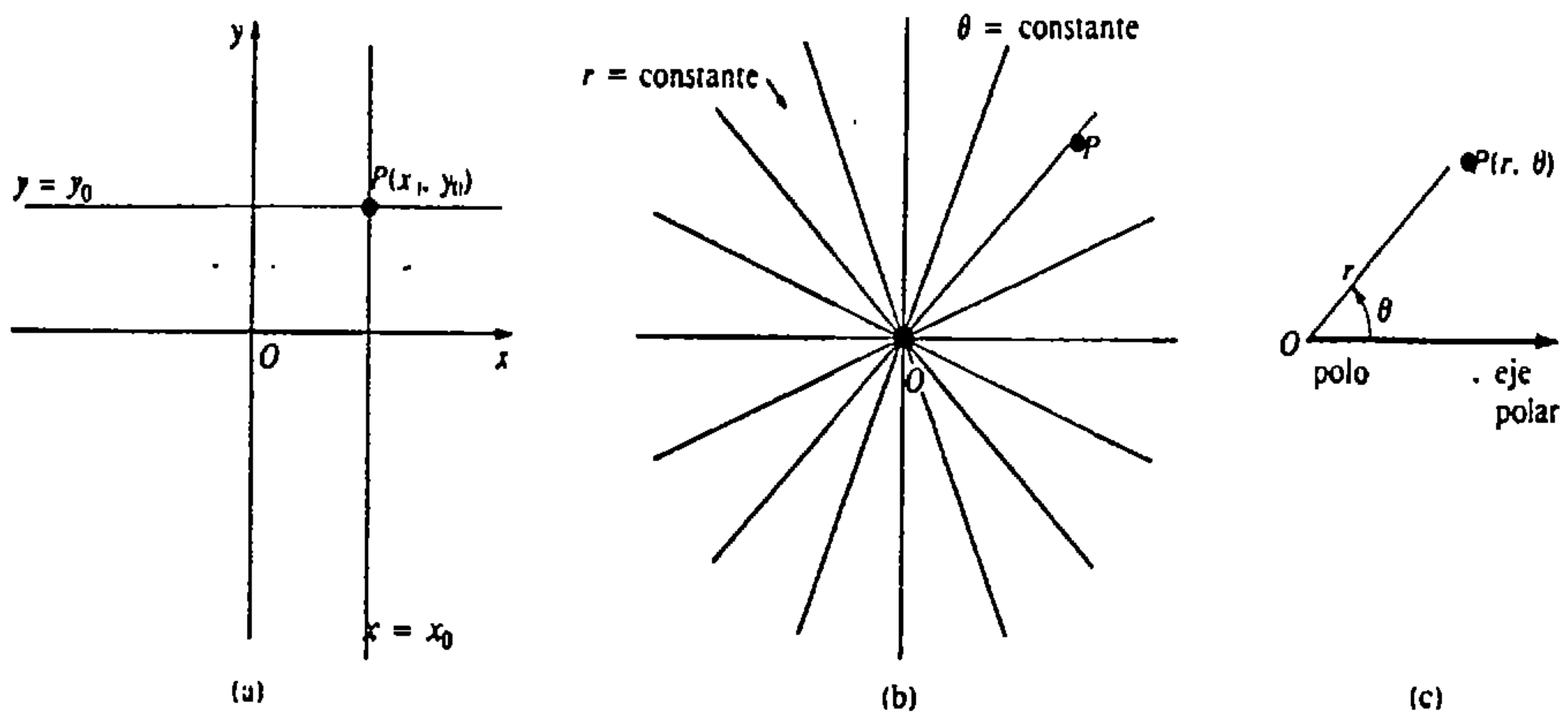


Figura 13.11

Convenciones

En coordenadas polares se adoptan las siguientes convenciones.

(*i*) Los ángulos $\theta > 0$ se miden en sentido opuesto al de las manecillas del reloj, a partir del eje polar, en tanto que los ángulos $\theta < 0$ se miden en el mismo sentido de las manecillas.

(*ii*) Para situar un punto $(-r, \theta)$, $-r < 0$, se miden $|r|$ unidades a la largo del rayo $\theta + \pi$.

(*iii*) Las coordenadas del polo O son $(0, \theta)$; θ es cualquier ángulo.

Ejemplo 1

Localizar los puntos cuyas coordenadas polares se indican.

(*a*) $\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$, (*b*) $\left(2, -\frac{\pi}{4}\right)$, (*c*) $\left(-3, \frac{3\pi}{4}\right)$.

Solución

(*a*) Se miden 4 unidades a lo largo del rayo $\pi/6$. Véase la Figura 13.12(a).

(*b*) Se miden 2 unidades a lo largo del rayo $-\pi/4$. Véase la Figura 13.12(b).

(*c*) Se miden 3 unidades a lo largo del rayo $3\pi/4 + \pi = 7\pi/4$. De manera equivalente, es posible medir 3 unidades a lo largo del rayo $3\pi/4$ prolongado *hacia atrás*, a través del polo. Obsérvese cuidadosamente en la Figura 13.12(c) que el punto $(-3, 3\pi/4)$ no está en el mismo cuadrante que el lado terminal del ángulo indicado.

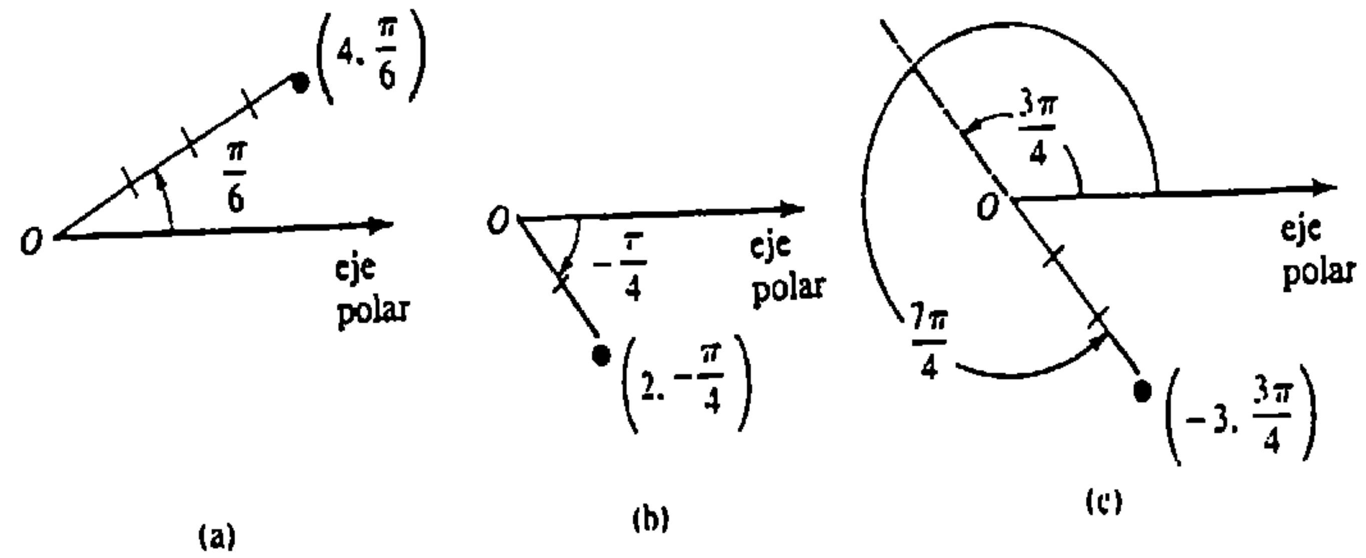


Figura 13.12

A diferencia del sistema de coordenadas rectangulares, la descripción de un punto en coordenadas polares no es única. Esto es una consecuencia inmediata del hecho de que

$$(r, \theta) \quad \text{y} \quad (r, \theta + 2n\pi), \quad n \text{ entero}$$

son equivalentes. Para agravar el problema, pueden ser utilizados valores negativos de r.

Ejemplo 2

Las siguientes son algunas representaciones alternativas del punto $(2, \pi/6)$:

$$\left(2, \frac{13\pi}{6}\right), \quad \left(2, -\frac{11\pi}{6}\right), \quad \left(-2, \frac{7\pi}{6}\right), \quad \left(-2, -\frac{5\pi}{6}\right).$$

Conversión de coordenadas polares a coordenadas rectangulares

Superponiendo un sistema de coordenadas rectangulares a un sistema de coordenadas polares, como se muestra en la Figura 13.13, una descripción polar de un punto se puede convertir a coordenadas rectangulares utilizando

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta. \tag{13.10}$$

Estas fórmulas son válidas para cualquier valor de r.

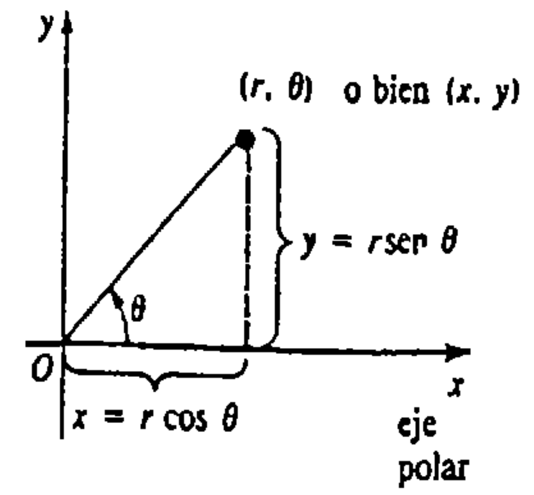


Figura 13.13

Ejemplo 3

Convierta $(2, \pi/6)$ de coordenadas polares a rectangulares.

Solución Con $r = 2$, $\theta = \pi/6$, tenemos de (13.10)

$$x = 2\cos\frac{\pi}{6} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$y = 2\,\text{sen}\frac{\pi}{6} = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Así que, $(2, \pi/6)$ es equivalente a $(\sqrt{3}, 1)$ en coordenadas rectangulares.

Conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas polares

En virtud de la Figura 13.13 debe ser evidente que x, y, r y θ están relacionados también por

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}. \tag{13.11}$$

Estas ecuaciones se emplean para convertir las coordenadas rectangulares (x, y) a coordenadas polares (r, θ).

Ejemplo 4

Convertir $(-1, 1)$ de coordenadas rectangulares a polares.

Solución Con $x = -1$, $y = 1$, tenemos de (13.11)

$$r^2 = 2 \quad \text{y} \quad \tan\theta = -1.$$

Ahora bien, $r = \pm\sqrt{2}$, y dos de los muchos ángulos posibles que satisfacen $\tan\theta = -1$, son $3\pi/4$ y $7\pi/4$. En la Figura 13.14 se ve que dos representaciones del punto indicado son

$$\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right) \quad \text{y} \quad \left(-\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right).$$

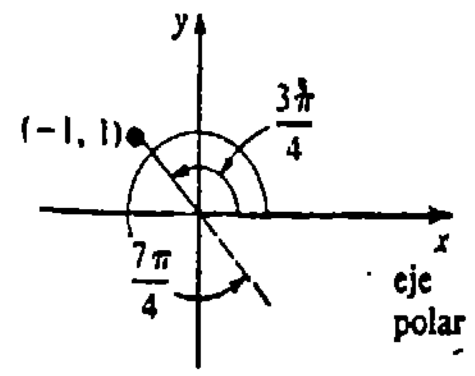


Figura 13.14

Advertencia: En el Ejemplo 4 obsérvese que $(-\sqrt{2}, 3\pi/4)$ y $(\sqrt{2}, 7\pi/4)$ *no* son representaciones polares de $(-1, 1)$.* En otras palabras, no es posible juntar simplemente *cualquier* ángulo θ y *cualquier* valor de r que satisfagan (13.11); estas soluciones deben ser también congruentes con (13.10).

En virtud de las ecuaciones (13.10), una ecuación cartesiana puede expresarse a menudo como una ecuación polar $r = f(\theta)$.

Ejemplo 5

Determinar una ecuación polar que tenga la misma gráfica que el círculo $x^2 + y^2 = 4y$.

Solución Utilizando $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, escribimos

$$r^2\cos^2\theta + r^2\text{sen}^2\theta = 4r\,\text{sen}\,\theta$$
$$r^2(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) = 4r\,\text{sen}\,\theta$$
$$r(r - 4\,\text{sen}\,\theta) = 0.$$

Esta última ecuación implica que

$$r = 0 \quad \text{o bien} \quad r = 4\,\text{sen}\,\theta.$$

Como $r = 0$ determina *solamente* el polo O, concluimos que una ecuación polar de la circunferencia es $r = 4\,\text{sen}\,\theta$. Obsérvese que las coordenadas del polo relativas a esta ecuación, se pueden tomar como $(0, \pi)$.

Ejemplo 6

Obtener una ecuación polar que tenga la misma gráfica que la parábola $x^2 = 8(2 - y)$.

Solución

$$r^2\cos^2\theta = 8(2 - r\,\text{sen}\,\theta)$$
$$r^2(1 - \text{sen}^2\theta) = 16 - 8r\,\text{sen}\,\theta$$
$$r^2 = r^2\text{sen}^2\theta - 8r\,\text{sen}\,\theta + 16$$
$$r^2 = (r\,\text{sen}\,\theta - 4)^2$$
$$r = \pm(r\,\text{sen}\,\theta - 4)$$

Despejando r se obtiene

$$r = \frac{4}{1 + \text{sen}\,\theta} \quad \text{o bien} \quad r = \frac{-4}{1 - \text{sen}\,\theta}. \tag{13.12}$$

Como al reemplazar (r, θ) por $(-r, \theta + \pi)$ en la segunda ecuación de (13.12) se obtiene la primera ecuación,* es posible considerar simplemente que la ecuación polar de la parábola es $r = 4/(1 + \text{sen}\,\theta)$.

* $(-\sqrt{2}, 3\pi/4)$ y $(\sqrt{2}, 7\pi/4)$ representan las coordenadas rectangulares $(1, -1)$.
* Recuérdese que por la convención (*ii*), (r, θ) y $(-r, \theta + \pi)$ representan el mismo punto.

Ejemplo 7

Obtener una ecuación cartesiana que tenga la misma gráfica que la ecuación polar $r^2 = 9\cos 2\theta$.

Solución Primero se emplea la identidad trigonométrica para el coseno del doble de un ángulo:

$$r^2 = 9(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta).$$

De $r^2 = x^2 + y^2$, $\cos\theta = x/r$, $\text{sen}\,\theta = x/r$, resulta que

$$x^2 + y^2 = 9\left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{y^2}{x^2 + y^2}\right)$$

o bien

$$(x^2 + y^2)^2 = 9(x^2 - y^2).$$

La sección siguiente se dedicará al trazo de gráficas con ecuaciones polares.

Ejercicios 13.2

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 991.

En los Problemas 1-4 trace el punto cuyas coordenadas polares se indican.

1. $(2, \pi)$
2. $(-4, \pi/3)$
3. $(4, -3\pi/2)$
4. $(-5, -\pi/6)$

En los Problemas 5-8 encuentre otras representaciones en coordenadas polares del punto indicado que satisfagan

(*a*) $r > 0$, $\theta < 0$, (*b*) $r > 0$, $\theta > 2\pi$;
(*c*) $r < 0$, $\theta > 0$; y (*d*) $r < 0$, $\theta < 0$.

5. $(6, 3\pi/4)$
6. $(10, \pi/2)$
7. $(2, 2\pi/3)$
8. $(5, \pi/4)$

En los Problemas 9-12, halle las coordenadas rectangulares de cada uno de los puntos cuyas coordenadas polares se indican.

9. $(-1, 2\pi/3)$
10. $(1/2, 7\pi/4)$
11. $(-7, -\pi/3)$
12. $(\sqrt{3}, -11\pi/6)$

En los Problemas 13-16, determine coordenadas polares que satisfagan (*a*) $r > 0$, $-\pi \le \theta \le \pi$ y (*b*) $r < 0$, $-\pi \le \theta \le \pi$, para cada uno de los puntos cuyas coordenadas rectangulares se indican.

13. $(-3, -3)$
14. $(0, -5)$
15. $(\sqrt{3}, -1)$
16. $(\sqrt{2}, \sqrt{6})$

En los Problemas 17-26, obtenga una ecuación polar cuya gráfica sea igual a la de la ecuación cartesiana indicada.

17. $y = 5$
18. $x + 1 = 0$
19. $y = 7x$
20. $3x + 8y + 6 = 0$
21. $y^2 = -4x + 4$
22. $x^2 - 12y - 36 = 0$
23. $x^2 + y^2 = 36$
24. $x^2 - y^2 = 25$
25. $x^2 + y^2 + x = \sqrt{x^2 + y^2}$
26. $x^3 + y^3 - xy = 0$
27. Demuestre que una ecuación polar que tiene la misma gráfica que la ecuación cartesiana de una circunferencia que pase por el origen con centro en $(a/2, 0)$ es $r = a\cos\theta$.
28. Demuestre que una ecuación polar que tiene la misma gráfica que $x^2 + y^2 = ay$ es $r = a\,\text{sen}\,\theta$. ¿Cuál es su gráfica?

En los Problemas 29-40 encuentre una ecuación cartesiana que tenga la misma gráfica que la ecuación polar indicada.

29. $r = 2\sec\theta$
30. $r\cos\theta = -4$
31. $r = 6\,\text{sen}\,2\theta$
32. $2r = \tan\theta$
33. $r^2 = 4\,\text{sen}\,2\theta$
34. $r^2\cos 2\theta = 16$
35. $r + 5\,\text{sen}\,\theta = 0$
36. $r = 2 + \cos\theta$

37. $r = \dfrac{2}{1 + 3\cos\theta}$

38. $r(4 - \operatorname{sen}\theta) = 10$

39. $r = \dfrac{5}{3\cos\theta + 8\operatorname{sen}\theta}$

40. $r = 3 + 3\sec\theta$

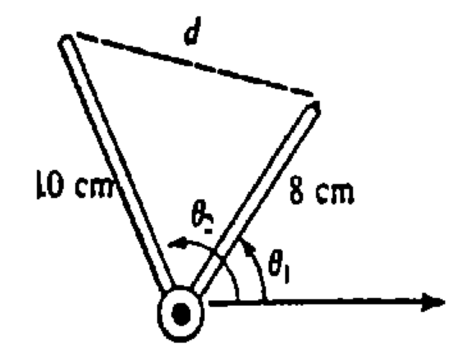


Figura 13.15

Problemas diversos

41. En los Problemas 39 y 40 de la Sección 12.2, se definió la excentricidad de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ como $e = c/a$, en donde $c^2 = a^2 - b^2$. Demuestre que una ecuación polar que tiene la misma gráfica que la elipse es $r^2(1 - e^2\cos^2\theta) = b^2$.

42. Demuestre que la distancia $d(P_1, P_2)$ entre dos puntos cuyas coordenadas polares son $P_1(r_1, \theta_1)$ y $P_2(r_2, \theta_2)$ está dada por

$$d(P_1, P_2) = [r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)]^{1/2}.$$

43. Los dos brazos de palanca de la Figura 13.15 giran en torno a un eje común, de manera que $\theta_1 = 4t$ y $\theta_2 = 6t$ en donde t se mide en segundos. ¿Con qué rapidez varía la distancia entre los extremos de los brazos cuando $t = \pi/4$?

44. Una recta L, que no pase por el polo, es determinada completamente por un punto y una dirección. Supóngase que (p, α), $p > 0$, son coordenadas polares de un punto Q. Demuestre que una ecuación polar de una recta que pase por Q y sea perpendicular al segmento de recta de longitud p indicado en la Figura 13.16, es $r\cos(\theta - \alpha) = p$.

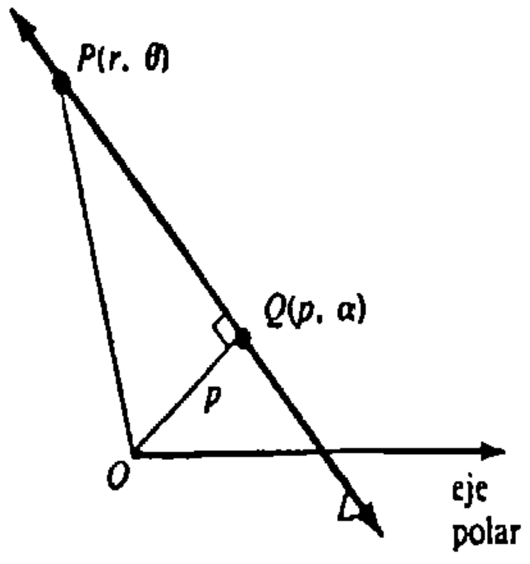


Figura 13.16

45. Demuestre que una ecuación cartesiana de la recta L del Problema 44 es $x\cos\alpha + y\,\operatorname{sen}\alpha = p$.

46. Aplique el resultado del Problema 45 para encontrar la distancia del origen a la recta $4x - 3y = 9$. (*Sugerencia:* Divida la ecuación entre $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. ¡Explique esto!)

13.3 Gráficas de ecuaciones polares

La gráfica de una ecuación polar $r = f(\theta)$ es el conjunto de puntos P con *al menos* un par de coordenadas que satisfacen la ecuación.

Se inicia nuestra consideración acerca del trazo de gráficas de ecuaciones polares con la análoga polar de la sencilla ecuación cartesiana $y = x$.

Ejemplo 1

Trazar la gráfica de $r = \theta$.

Solución Cuando $\theta \geq 0$ aumenta, r también aumenta, y los puntos (r, θ) van dando vueltas alrededor del polo en sentido opuesto al de las manecillas del reloj. Esto se ilustra mediante la porción azul de la gráfica de la Figura 13.17. La porción negra de la gráfica se obtiene trazando puntos para $\theta < 0$.

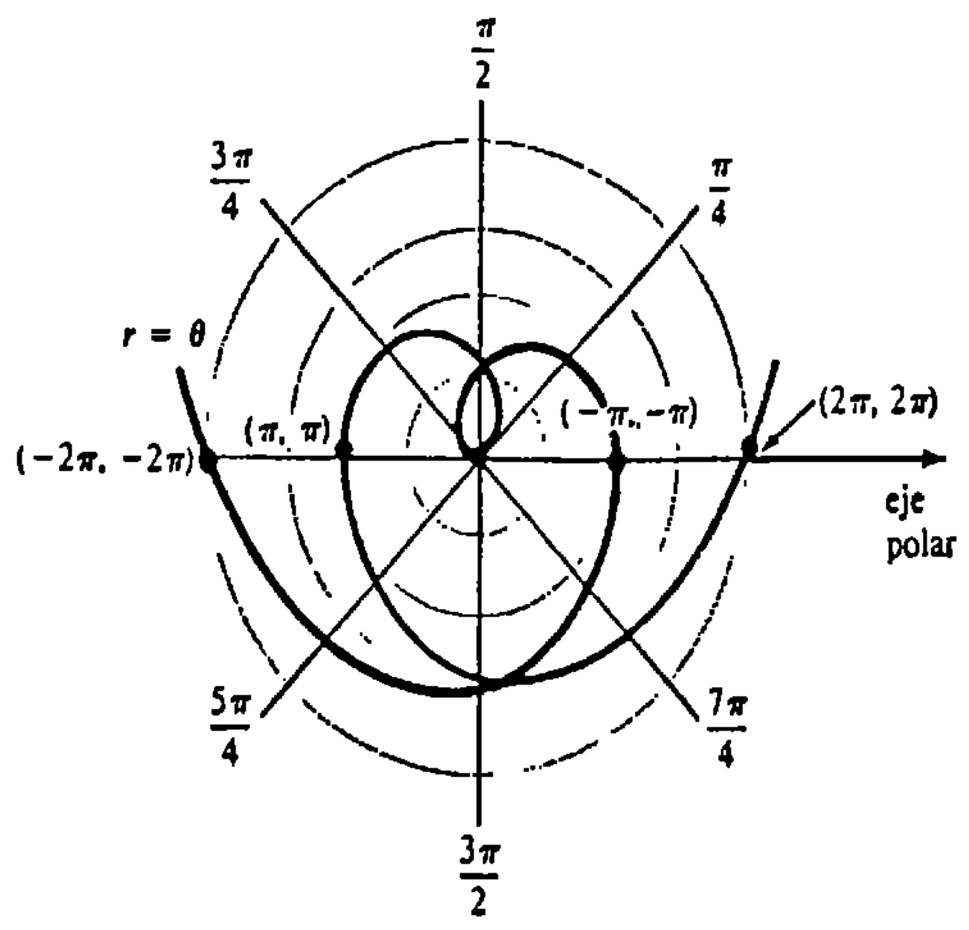


Figura 13.17

A muchas gráficas en coordenadas polares se les asignan, con mucha razón, nombres especiales. La gráfica presentada en el Ejemplo 1 es un caso especial de $r = a\theta$. A tal gráfica de esta ecuación se la llama **espiral de Arquímedes**.

Además de la situación básica de puntos, a menudo se puede utilizar la *simetría* para trazar la gráfica de una ecuación polar.

Simetría

Para facilitar el trazo y el análisis de las gráficas de ecuaciones polares, se superpondrán coordenadas rectangulares sobre el sistema de coordenadas polares, como se muestra en la Figura 13.18. Una gráfica polar puede tener tres tipos de simetría, como se indica en la figura. Una gráfica polar es:

(*i*) **simétrica con respecto al eje y** si tanto (r, θ) como $(r, \pi - \theta)$ están en la gráfica;

(*ii*) **simétrica con respecto al eje x** si tanto (r, θ) como $(r, -\theta)$ están en la gráfica; y

(*iii*) **simétrica con respecto al origen** si tanto (r, θ) como $(-r, \theta)$ se hallan en la gráfica.

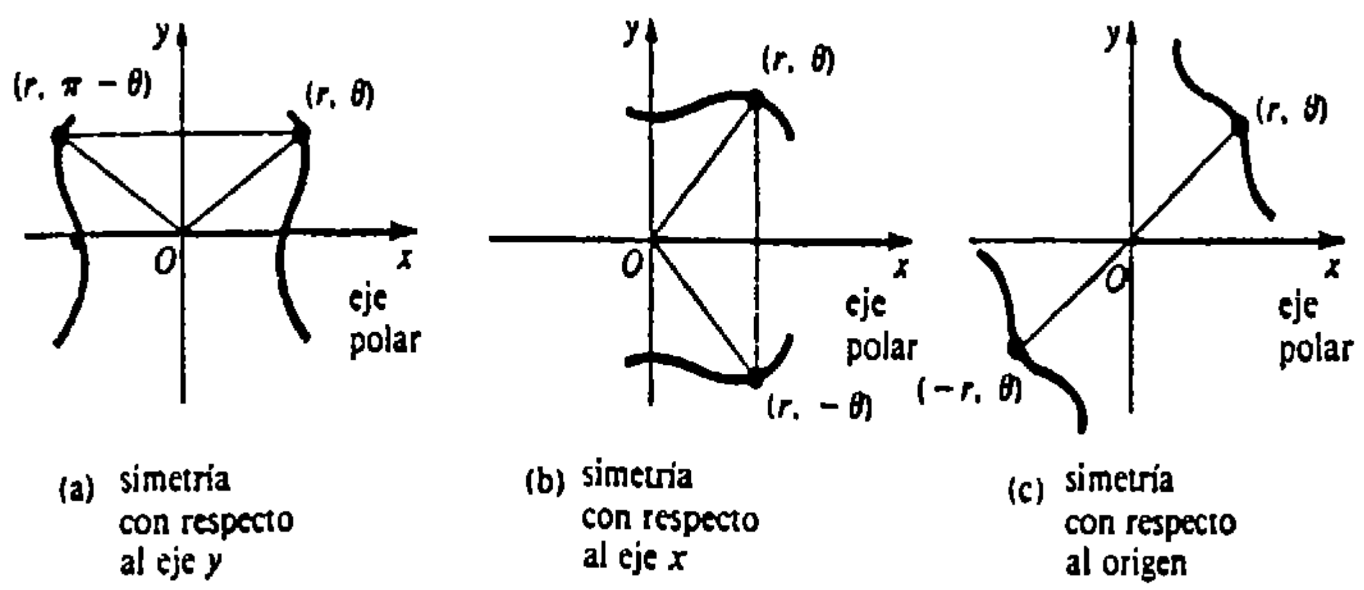


Figura 13.18

Por consiguiente, la gráfica de una ecuación polar es simétrica con respecto

(i) al eje y, si reemplazando θ por $\pi - \theta$ resulta una ecuación equivalente;

(ii) al eje x, si reemplazando θ por $-\theta$ resulta una ecuación equivalente;

(iii) al origen, si sustituyendo r por $-r$ resulta una ecuación equivalente.

Ejemplo 2

Puesto que $\text{sen}(\pi - \theta) = \text{sen}\,\theta$, la gráfica de $r = 3 - 3\,\text{sen}\,\theta$ es simétrica con respecto al eje y. Reemplazando a su vez θ por $-\theta$ y r por $-r$ no resulta la ecuación original. Por lo tanto, ninguna conclusión se puede deducir en cuanto a simetrías adicionales de la gráfica.

Ejemplo 3

Trazar la gráfica de $r = 3 - 3\,\text{sen}\,\theta$.

Solución Utilizando la información de los Ejemplos 2 y 3 y situando los puntos que corresponden a los datos de la tabla siguiente, obtenemos la gráfica de la Figura 13.19.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$11\pi/6$	2π
r	3	$\frac{3}{2}$	0.4	0	0.4	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{9}{2}$	5.6	6	5.6	$\frac{9}{2}$	3

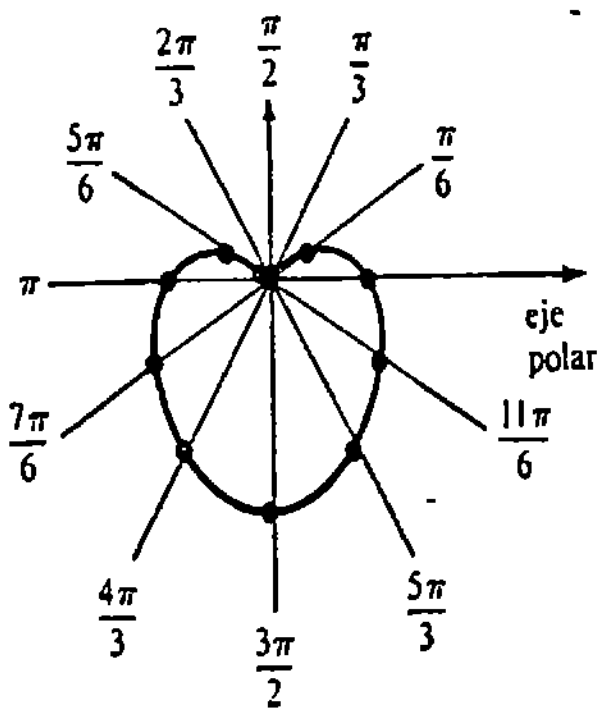


Figura 13.19

Cardioides y limazones (caracoles)

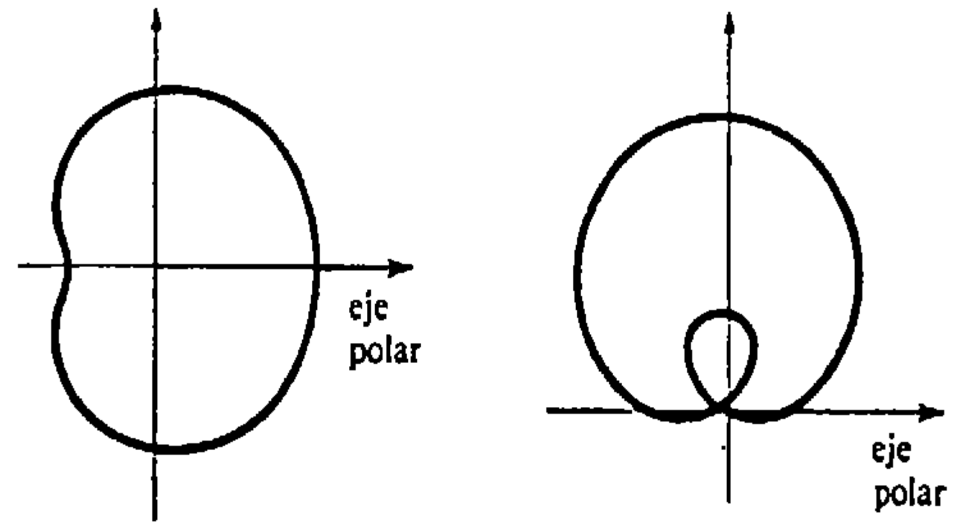
La ecuación del Ejemplo 3 es miembro de una familia de ecuaciones polares que tienen su gráfica en forma de un "corazón" que pasa por el origen. La gráfica de cualquier ecuación polar de la forma

$$r = a \pm a\,\text{sen}\,\theta \quad \text{o bien} \quad r = a \pm a\cos\theta$$

se llama **cardioide**. Además, las cardioides son casos especiales de otras curvas polares conocidas como **limazones** o **caracoles**:

$$r = a \pm b\,\text{sen}\,\theta \quad \text{o bien} \quad r = a \pm b\cos\theta.$$

Cuando $|a| > |b|$, una limazón es semejante a una cardioide pero no pasa por el origen. Cuando $|b| > |a|$, un caracol tiene un rizo interior. En la Figura 13.20 se ilustran ambos tipos de curvas.



(a) $r = a + b\cos\theta$, $a > b > 0$ (b) $r = a + b\,\text{sen}\,\theta$, $0 < a < b$

Figura 13.20

Ejemplo 4

Trazar la gráfica de $r = 2\cos 2\theta$.

Solución Puesto que

$$\cos(-2\theta) = \cos 2\theta \quad \text{y} \quad \cos 2(\pi - \theta) = \cos 2\theta,$$

concluimos que la gráfica es simétrica con respecto a los ejes x y y. Aunque la ecuación dada tiene periodo π,* un momento de "reflexión" debe convencer al lector de que se necesita solamente considerar $0 \le \theta \le \pi/2$. Utilizando los datos de la tabla siguiente, es claro que la porción en línea punteada de la gráfica de la Figura 13.21, se completa por simetría. La gráfica se llama **rosa de cuatro ramas (o pétalos)**.

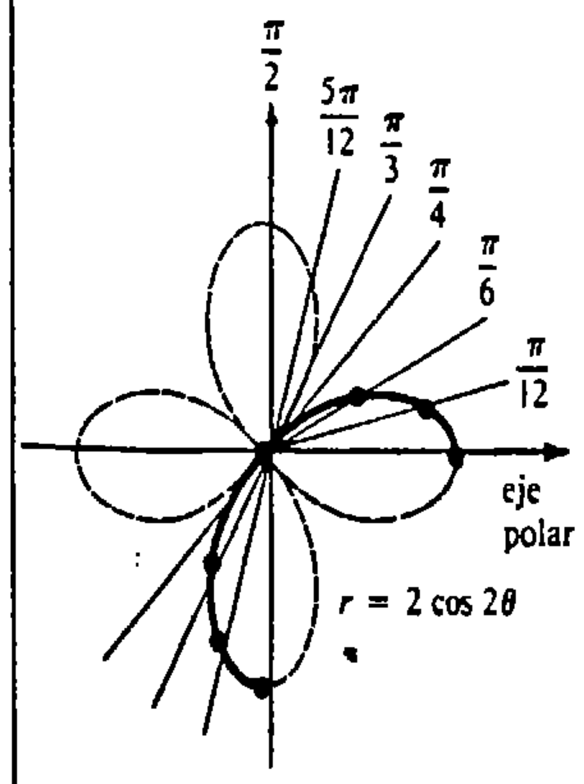


Figura 13.21

* Esto no significa que la gráfica esté necesariamente *completa* después de situar puntos para $0 \le \theta \le \pi$. Más bien significa que los valores de r se repiten para $\pi \le \theta \le 2\pi$. En este caso la gráfica se completa en $[0, 2\pi]$.

θ	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
r	2	1.7	1	0	−1	−1.7	−2

Rosas y circunferencias

En general, si n es un entero positivo, las gráficas de

$$r = a \operatorname{sen} n\theta \quad \text{o bien} \quad r = a \cos n\theta, \qquad n \geq 2$$

se llaman rosas. Si n es impar, el número de ramas o pétalos es n; si n es par, hay $2n$ pétalos. Las gráficas del caso $n = 1$:

$$r = a \operatorname{sen} \theta \quad \text{o bien} \quad r = a \cos \theta$$

son circunferencias que pasan por el origen, con diámetro $|a|$ y centros en el eje y y el eje x, respectivamente.

Pendiente de una tangente a una gráfica polar

De manera un poco asombrosa, la pendiente de una recta tangente a la gráfica de una ecuación polar $r = f(\theta)$ *no* es la derivada $dr/d\theta$. La pendiente de una tangente sí es dy/dx. Para evaluar esta derivada utilizamos $r = f(\theta)$ y $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$, a fin de escribir primero ecuaciones paramétricas de la curva:

$$x = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = f(\theta)\operatorname{sen}\theta.$$

Entonces,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}.$$

Ejemplo 5

Se debe obtener la pendiente de la tangente a la gráfica de $r = 4 \operatorname{sen} 3\theta$, en $\theta = \pi/6$.

Solución De las ecuaciones paramétricas

$$x = 4 \operatorname{sen} 3\theta \cos\theta, \qquad y = 4 \operatorname{sen} 3\theta \operatorname{sen}\theta,$$

resulta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{4 \operatorname{sen} 3\theta \cos\theta + 12\cos 3\theta \operatorname{sen}\theta}{-4 \operatorname{sen} 3\theta \operatorname{sen}\theta + 12 \cos 3\theta \cos\theta}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi/6} = -\sqrt{3}.$$

En la Figura 13.22 se ilustran la gráfica de la ecuación, la que reconocemos como una rosa de tres pétalos, y la recta tangente.

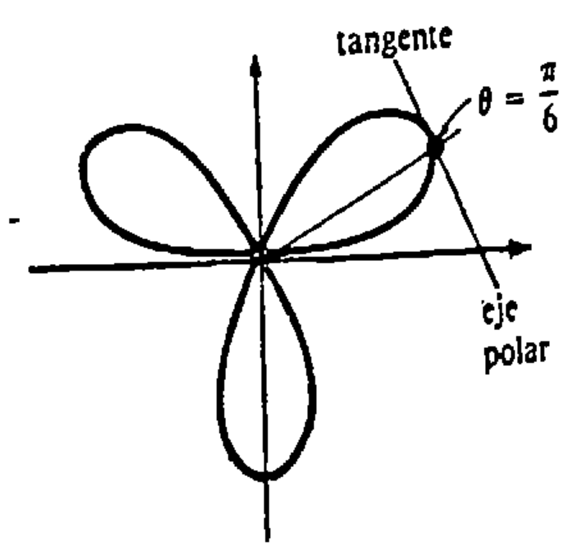


Figura 13.22

Observaciones

(*i*) Esta es una buena oportunidad para repasar la diferencia entre condiciones necesarias y suficientes. Las pruebas de simetría de la gráfica de una ecuación polar son suficientes pero difícilmente necesarias. Téngase presente que cuando falla una prueba de simetría de la gráfica de una ecuación cartesiana, podemos decir en definitiva que la gráfica no posee tal simetría particular. En coordenadas rectangulares, las pruebas de simetría son necesarias y suficientes. En contraste, si por ejemplo, para una ecuación polar falla la prueba de simetría con respecto al eje x, la gráfica puede tener tal simetría. Obsérvese que en el Ejemplo 2 se dijo "ninguna conclusión" en vez de "no es simétrica" cuando una prueba no resultó. Debido a que un punto tiene muchas coordenadas polares, es posible idear pruebas alternativas. Véanse los Problemas 43-46 de los Ejercicios 13.3.

(*ii*) También se presentan problemas cuando se determina en dónde se cortan dos curvas polares. Por ejemplo, la Figura 13.23 muestra que las circunferencias $r = \cos\theta$ y $r = \operatorname{sen}\theta$ tienen dos puntos de intersección. Pero resolviendo simultáneamente las dos ecuaciones: $\cos\theta = \operatorname{sen}\theta$ se llega solamente a $(\sqrt{2}/2, \pi/4)$. El problema que se presenta aquí es que el polo es $(0, \pi/2)$ en la primera curva, pero es $(0, 0)$ en la segunda. Esto es análogo a que las curvas alcancen el mismo punto en tiempos diferentes. Además, *un punto puede estar en la gráfica de una ecuación, aun cuando sus coordenadas indicadas no satisfagan la ecuación*. El lector debe verificar que $(2, \pi/2)$ es otra descripción del punto $(-2, 3\pi/2)$ en la gráfica de $r = 1 + 3 \operatorname{sen}\theta$. Pero, obsérvese que las coordenadas de $(2, \pi/2)$ no satisfacen la ecuación.

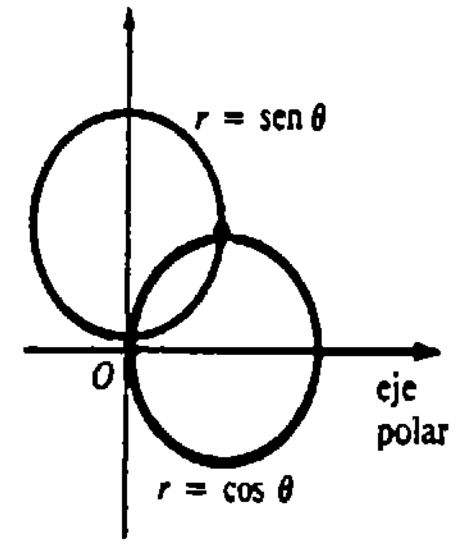


Figura 13.23

Ejercicios 13.3

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 992.

En los Problemas 1-22 trace la gráfica de la ecuación polar indicada.

1. $r = 6$
2. $r = -1$
3. $\theta = \pi/3$
4. $\theta = 5\pi/6$
5. $r = 2\theta,\ \theta \leq 0$
6. $r = 3\theta,\ \theta \geq 0$
7. $r = 1 + \cos\theta$
8. $r = 5 - 5 \operatorname{sen}\theta$
9. $r = 2(1 + \operatorname{sen}\theta)$
10. $2r = 1 - \cos\theta$
11. $r = 3 + 2\cos\theta$
12. $r = -1 + 2 \operatorname{sen}\theta$
13. $r = 2 + 4 \operatorname{sen}\theta$
14. $r = 4 - \cos\theta$
15. $r = 3\cos 3\theta$
16. $r = 3 \operatorname{sen} 4\theta$
17. $r = \operatorname{sen} 5\theta$
18. $r = 5 \operatorname{sen}\theta$
19. $r = 6\cos\theta$
20. $r = -2\cos\theta$
21. $r = \tan\theta$
22. $r = \sec\theta$

En los Problemas 23-26 trace las gráficas de las lemniscatas (o lemniscatos).

23. $r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta$ 24. $r^2 = 4 \cos 2\theta$

25. $r^2 = -25 \cos 2\theta$ 26. $r^2 = -9 \operatorname{sen} 2\theta$

En los Problemas 27 y 28 trace las gráficas de las espirales.

27. $r = 2^\theta, \theta \geq 0$ (logarítmica)

28. $r\theta = \pi, \theta > 0$ (hiperbólica)

29. Trace la gráfica de la cisoide de Diocles $r = \sec\theta - \cos\theta$.

30. Dibuje la gráfica de la concoide de Nicómedes $r = \csc\theta - 2$.

En los Problemas 31-34, determine la pendiente de la tangente en el valor indicado de θ.

31. $r = \theta, \theta = \pi/2$

32. $r = \operatorname{sen}\theta, \theta = \pi/6$

33. $r = 2 + 3\cos\theta, \theta = \pi/3$

34. $r = 10 \operatorname{sen} 5\theta, \theta = \pi/4$

35. Encuentre una ecuación cartesiana de la recta tangente a la gráfica de $r = 1/(1 + \cos\theta)$ en $\theta = \pi/2$.

36. Halle una ecuación polar de la recta tangente a la gráfica de $r = 2\cos 3\theta$ en $\theta = 2\pi/3$. (*Sugerencia:* Determine primero una ecuación cartesiana.)

En los Problemas 37-40, encuentre los puntos de intersección de las gráficas del par indicado de ecuaciones polares.

37. $r = 2$, $r = 4 \operatorname{sen}\theta$ 38. $r = \operatorname{sen}\theta$, $r = \operatorname{sen} 2\theta$

39. $r = 1 - \cos\theta$, $r = 1 + \cos\theta$ 40. $r = -\operatorname{sen}\theta$, $r = \cos\theta$

En los Problemas 41 y 42 utilice el hecho de que

$$r = f(\theta) \quad \text{y} \quad -r = f(\theta + \pi) \qquad (13.13)$$

describen la misma curva, como una ayuda para encontrar los puntos de intersección del par indicado de ecuaciones polares.

41. $r = 3$, $r = 6 \operatorname{sen} 2\theta$ 42. $r = \cos 2\theta$, $r = 1 + \cos\theta$

En los Problemas 43-46 identifique las simetrías, si el par indicado de puntos está en la gráfica de $r = f(\theta)$.

43. $(r, \theta), (-r, \pi - \theta)$ 44. $(r, \theta), (r, \theta + \pi)$

45. $(r, \theta), (-r, \theta + 2\pi)$ 46. $(r, \theta), (-r, -\theta)$

En los Problemas 47 y 48, sea $r = f(\theta)$ una ecuación polar. Interprete geométricamente el resultado indicado.

47. $f(-\theta) = f(\theta)$ (función par)

48. $f(-\theta) = -f(\theta)$ (función impar)

Problemas diversos

49. Demuestre que la tangente del ángulo ψ, medido en sentido opuesto a las manecillas del reloj desde la recta OP hasta la tangente a la gráfica de $r = f(\theta)$ en $P(r, \theta)$, está dada por

$$\tan\psi = \frac{r}{dr/d\theta}.$$

Suponga que $\phi > \theta$, como se muestra en la Figura 13.24. (*Sugerencia:* ¿Cómo están relacionadas $\tan\psi$ y $\tan(\phi - \theta)$? ¿A qué es igual $\tan\phi$?)

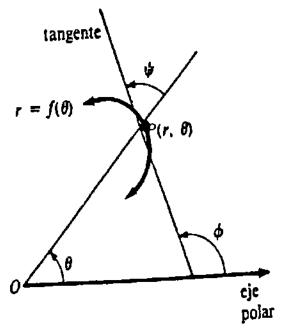


Figura 13.24

50. Aplique el Problema 49 para hallar el angulo ψ para $r = 1/(1 + \cos\theta)$ en $\theta = \pi/3$.

13.4 Área y longitud de arco en coordenadas polares

Supongamos que $r = f(\theta)$ es una función continua no negativa en $[\alpha, \beta]$, en donde $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$. Para evaluar el área A de la región mostrada en la Figura 13.25(a)

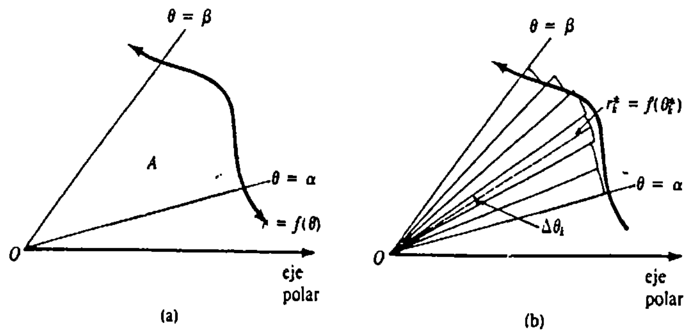


Figura 13.25

comprendida entre la gráfica de f y los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$, se empieza formando una partición P de $[\alpha, \beta]$:

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n = \beta.$$

Si θ_k^* es cualquier número en el k-ésimo subintervalo $[\theta_{k-1}, \theta_k]$, entonces el área del *sector circular* de radio $r_k = f(\theta_k^*)$ indicado en la Figura 13.25(b) es

$$\Delta A_k = \frac{1}{2}[f(\theta_k^*)]^2\, \Delta\theta_k,$$

en donde $\Delta\theta_k = \theta_k - \theta_{k-1}$, es su ángulo central. A su vez, la suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}[f(\theta_k^*)]^2\, \Delta\theta_k \qquad (13.14)$$

da una aproximación a A. Entonces se define A mediante el límite de (13.14) cuando la norma de la partición tiende a cero:

$$A = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}[f(\theta_k^*)]^2\, \Delta\theta_k = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}[f(\theta)]^2\, d\theta$$

o simplemente

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\, d\theta. \qquad (13.15)$$

Ejemplo 1

Determinar el área de la región limitada por la espiral $r = \theta$, $\theta \geq 0$ entre los rayos $\theta = 0$ y $\theta = 7\pi/4$.

Solución En virtud de (13.15) el área mostrada en la Figura 13 26 es

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{7\pi/4} \theta^2\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\theta^3}{3}\Big]_0^{7\pi/4}$$

$$= \frac{343}{384}\pi^3 \approx 27.70 \text{ unidades cuadradas.}$$

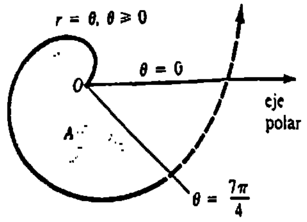


Figura 13.26

Ejemplo 2

Obtener el área de la región común a los interiores de la cardioide $r = 2 - 2\cos\theta$, y el caracol $r = 2 + \cos\theta$.

Solución Un examen de la Figura 13.27 muestra que se necesitan dos integrales. Resolviendo simultáneamente las ecuaciones dadas:

$$2 - 2\cos\theta = 2 + \cos\theta \quad \text{o bien} \quad \cos\theta = 0$$

se llega a $\theta = \pi/2$, de modo que un punto de intersección es $(2, \pi/2)$. Por simetría,

$$A = 2\left\{\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (2 - 2\cos\theta)^2\, d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} (2 + \cos\theta)^2\, d\theta\right\}$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} (4 + 4\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/2}\left(1 - 2\cos\theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi}\left(4 + 4\cos\theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= 4\left[\frac{3}{2}\theta - 2\,\text{sen}\,\theta + \frac{1}{4}\,\text{sen}\,2\theta\right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{9}{2}\theta + 4\,\text{sen}\,\theta + \frac{1}{4}\,\text{sen}\,2\theta\right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{21}{4}\pi - 12 \approx 4.49 \text{ unidades cuadradas.}$$

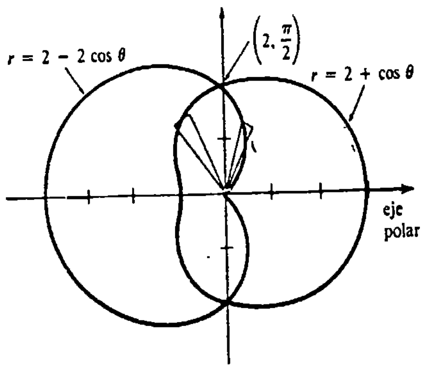


Figura 13.27

Ejemplo 3

Obtener el área del rizo interior del caracol $r = 1 + 2\cos\theta$.

Solución Dicho rizo corresponde a $2\pi/3 \le \theta \le 4\pi/3$, como se ve en la Figura 13.28. Aunque $r \le 0$ para estos valores de θ, el hecho de que (13.15) utiliza $r^2 \ge 0$ permite escribir

$$A = \frac{1}{2}\int_{2\pi/3}^{4\pi/3} (1 + 2\cos\theta)^2\, d\theta$$

$$= \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 0.54 \text{ unidades cuadradas.}$$

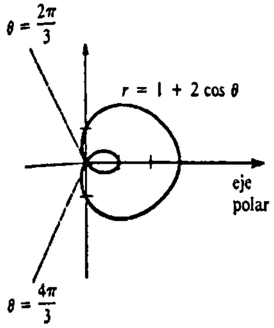


Figura 13.28

Área entre dos gráficas

El área A de la región sombreada mostrada en la Figura 13.29 puede evaluarse restando áreas. Si f y g son continuas en $[\alpha, \beta]$ y $f(\theta) \ge g(\theta)$ en el intervalo, entonces el área comprendida entre las gráficas de $r = f(\theta)$, $r = g(\theta)$, $\theta = \alpha$, y $\theta = \beta$ es

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [f(\theta)]^2\, d\theta - \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [g(\theta)]^2\, d\theta.$$

Escrita como una sola integral, el área está dada por

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta ([f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2)\, d\theta. \qquad (13.16)$$

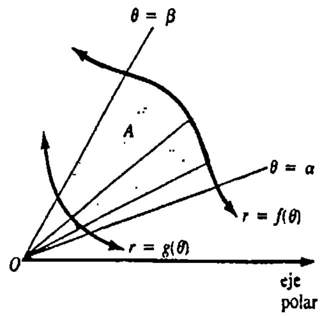


Figura 13.29

Ejemplo 4

Obtener el área de la región del primer cuadrante que es exterior a la circunferencia $r = 1$ e interior a la rosa de cuatro pétalos $r = 2\,\text{sen}\,2\theta$.

Solución Resolviendo simultáneamente las dos ecuaciones:

$$1 = 2\,\text{sen}\,2\theta \quad \text{o bien} \quad \text{sen}\,2\theta = \frac{1}{2}$$

se implica que $2\theta = \pi/6$ y $2\theta = 5\pi/6$. Así que, $(1, \pi/12)$ y $(1, 5\pi/12)$ son dos puntos de intersección en el primer cuadrante. El área en cuestión se indica sombreada en la Figura 13.30. En virtud de (13.16),

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_{\pi/12}^{5\pi/12} [4\,\text{sen}^2 2\theta - 1]\, d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{\pi/12}^{5\pi/12} \left[4\left(\frac{1-\cos 4\theta}{2}\right) - 1\right] d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{1}{2}\text{sen } 4\theta\right]_{\pi/12}^{5\pi/12} \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0.96 \text{ unidades cuadradas.} \end{aligned}$$

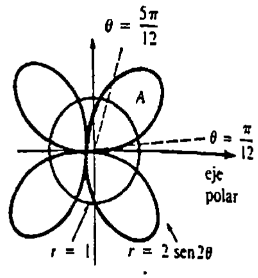


Figura 13.30

Longitud de arco de gráficas polares

Hemos visto que si $r = f(\theta)$ es la ecuación de una curva en coordenadas polares, entonces las ecuaciones paramétricas de C son

$$x = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = f(\theta)\,\text{sen}\,\theta, \qquad \alpha \le \theta \le \beta.$$

Si f tiene derivada continua, entonces es sencillo deducir una fórmula para la longitud de arco en coordenadas polares. Puesto que

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\,\text{sen}\,\theta, \qquad \frac{dy}{dx} = f'(\theta)\,\text{sen}\,\theta + f(\theta)\cos\theta$$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = [f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2,$$

la expresión (13.9) de la Sección 13.1 se convierte en

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta. \tag{13.17}$$

Ejemplo 5

Obtener la longitud de la cardioide $r = 1 + \cos\theta$ para $0 \le \theta \le \pi$.

Solución En la Figura 13.31 se muestra la porción de la gráfica completa. Ahora bien, $dr/d\theta = -\text{sen}\,\theta$, de modo que

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 = \text{sen}^2\theta + (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) = 2 + 2\cos\theta.$$

y

$$s = \sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{1 + \cos\theta}\, d\theta.$$

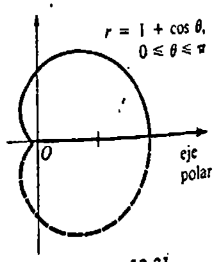


Figura 13.31

Para evaluar esta última integral, empleamos la identidad trigonométrica $\cos^2\theta/2 = (1 + \cos\theta)/2$:

$$s = 2\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 4\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\Big]_0^\pi = 4.$$

Se deja al lector como ejercicio examinar por qué la longitud de la cardioide completa $(0 \le \theta \le 2\pi)$ del ejemplo precedente, no es $s = 2\int_0^{2\pi} (\cos\theta/2)d\theta$.

Ejercicios 13.4

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 992

En los Problemas 1-10, determine el área de la región limitada por la gráfica de la ecuación polar indicada.

1. $r = 2\,\text{sen}\,\theta$
2. $r = 10\cos\theta$
3. $r = 4 + 4\cos\theta$
4. $r = 1 - \text{sen}\,\theta$
5. $r = 3 + 2\,\text{sen}\,\theta$
6. $r = 2 + \cos\theta$
7. $r = 3\,\text{sen}\,2\theta$
8. $r = \cos 4\theta$
9. $r = 2\,\text{ser}\,3\theta$
10. $r = 4\cos 5\theta$
11. Considere la lemniscata $r^2 = 9\cos 2\theta$.
    (a) Explique por qué $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 9\cos 2\theta\, d\theta$ no es el área de la región limitada por la gráfica.
    (b) Encuentre el área de la región limitada por la gráfica, empleando una integral apropiada.
12. Repita el Problema 11 para $r^2 = \text{sen}\,2\theta$.

En los Problemas 13-18, encuentre el área de la región limitada por la gráfica de la ecuación polar y los rayos indicados.

13. $r = 2\theta,\ \theta \ge 0,\ \theta = 0,\ \theta = 3\pi/2$
14. $r\theta = \pi,\ \theta \ge 0,\ \theta = \pi/2,\ \theta = \pi$
15. $r = e^\theta,\ \theta = 0,\ \theta = \pi$
16. $r = 10e^{-\theta},\ \theta = 1,\ \theta = 2$
17. $r = \tan\theta,\ \theta = 0,\ \theta = \pi/4$
18. $r\,\text{sen}\,\theta = 5,\ \theta = \pi/6,\ \theta = \pi/3$
19. Evalúe el área de la región que es exterior al círculo $r = 1$, e interior a la rosa de tres pétalos $r = 2\cos 3\theta$.
20. Encuentre el área de la región común a los interiores de las circunferencias $r = \cos\theta$ y $r = \text{sen}\,\theta$.
21. Determine el área de la región que es interior a la circunferencia $r = 5\,\text{sen}\,\theta$, y exterior al caracol o limazón $r = 3 - \text{sen}\,\theta$.
22. Encuentre el área de la región común a los interiores de las gráficas de las ecuaciones del Problema 21.
23. Evalúe el área de la región que es interior a la cardioide $r = 4 - 4\cos\theta$ y exterior a la circunferencia $r = 6$.
24. Encuentre el área de la región común a los interiores de las gráficas de las ecuaciones del Problema 23.
25. Encuentre el área de la región interior al caracol $r = 1 + 2\,\text{sen}\,\theta$. (*Indicación:* El área *no* es
$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + 2\,\text{sen}\,\theta)^2\, d\theta.)$$
26. Encuentre el área que está fuera del rizo interior, pero dentro del caracol que tiene la ecuación polar del Problema 25.
27. Encuentre el área de la región exterior a la circunferencia $r = 1$, e interior a la lemniscata $r^2 = 4\cos 2\theta$.
28. Encuentre el área de la región común a los interiores de la circunferencia $r = 4\,\text{sen}\,\theta$ y de la cardioide $r = 1 + \text{sen}\,\theta$.

En los Problemas 29-32 encuentre la longitud de la curva para los valores indicados de θ.

29. $r = e^{\theta/2},\ 0 \le \theta \le 4$
30. $r = 2e^{-\theta},\ 0 \le \theta \le \pi$

31. $r = \theta, 0 \leq \theta \leq 1$

32. $r = 3 - 3\cos\theta, 0 \leq \theta \leq \pi$

Problemas diversos

33. La cantidad de movimiento angular (o ímpetu angular) de una partícula de masa m en movimiento, se define en coordenadas polares como $L = mr^2\, d\theta/dt$. Supóngase que las coordenadas de la partícula en los tiempos $t = a$ y $t = b$, $a < b$, son (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2), respectivamente. Si L es constante, demuestre que el área A descrita por r es $A = L(b - a)/2m$.*

(O) 13.5 Repaso de las secciones cónicas

En el Capítulo 12 vimos que la parábola, la elipse y la hipérbola estaban definidas por tres propiedades diferentes. Sin embargo, es posible formular una definición general de una sección cónica que unifique estas tres definiciones anteriores.

DEFINICIÓN 13.2

Una **sección cónica** es un conjunto de puntos P del plano para los cuales la relación de la distancia $d(P, F)$ a un punto fijo F y la distancia $d(P, Q)$ a una recta fija L, es constante. □

La recta fija L es una **directriz** y la relación constante $d(P,F)/d(P,Q)$ se llama **excentricidad** de la cónica, la cual se denota usualmente por la letra e.†

Ecuaciones polares de las cónicas

La ecuación

$$\frac{d(P,F)}{d(P,Q)} = e \quad \text{o bien} \quad d(P,F) = ed(P,Q) \tag{13.18}$$

se interpreta fácilmente utilizando coordenadas polares. Supongamos que F está situado en el polo y que L está a p unidades ($p > 0$) a la izquierda de F y es perpendicular al eje polar prolongado. En virtud de la Figura 13.32 vemos que (13.18) es lo mismo que

$$r = e(p + r\cos\theta) \quad \text{o bien} \quad r - er\cos\theta = ep. \tag{13.19}$$

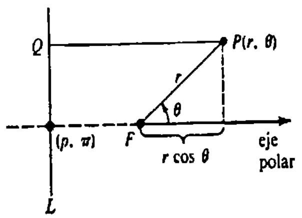


Figura 13.32

* Cuando el Sol se considera en el origen, esta ecuación demuestra la segunda ley de Kepler del movimiento planetario: El radio vector, que une el centro de un planeta con el centro del Sol, describe áreas iguales en tiempos iguales. Las leyes de Kepler, que se basaban en datos observados precisos, fueron demostradas subsecuentemente por Newton, aplicando el Cálculo y su ley de la gravitación universal.

† No confundir esto con el número e del Capítulo 8.

Despejando r resulta

$$r = \frac{ep}{1 - e\cos\theta}. \tag{13.20}$$

Si la directriz se elige a la derecha de F pasando por $(p, 0)$, entonces el único cambio en (13.20) es que el signo negativo en el denominador se convierte en positivo.

Para ver que la Definición 13.2 da lugar a las ecuaciones conocidas de las cónicas, superpongamos un sistema de coordenadas rectangulares sobre el sistema de coordenadas polares con el origen en el polo y el eje x positivo coincidiendo con el eje polar. Luego se expresa (13.19) en coordenadas rectangulares, y simplifica:

$$\sqrt{x^2 + y^2} - ex = ep$$
$$x^2 + y^2 = e^2x^2 + 2e^2px + e^2p^2$$
$$(1 - e^2)x^2 - 2e^2px + y^2 = e^2p^2. \tag{13.21}$$

Cuando $e = 1$, (13.21) se convierte en

$$-2px + y^2 = p^2 \quad \text{o bien} \quad y^2 = 2p\left(x - \frac{p}{2}\right)$$

que es una ecuación de una parábola cuyo eje es el eje x, cuyo vértice está en $(-p/2, 0)$, y cuyo foco está en el origen. Completando el cuadrado se puede demostrar que la gráfica de (13.21) es una elipse cuando $0 < e < 1$, y una hipérbola cuando $e > 1$. En cada caso F es un foco de la cónica.

Cuando la directriz se elige paralela al eje polar, entonces la ecuación de la cónica es alguna de las siguientes

$$r = \frac{ep}{1 + e\,\text{sen}\,\theta} \quad \text{o bien} \quad r = \frac{ep}{1 - e\,\text{sen}\,\theta}.$$

Específicamente, $r = ep/(1 + e\,\text{sen}\,\theta)$ describe una cónica cuya directriz es paralela al eje polar y pasa por $(p, \pi/2)$, mientras que la directriz de $r = ep/(1 - e\,\text{sen}\,\theta)$ pasa por $(p, 3\pi/2)$.

Se resume el análisis precedente como sigue:

La ecuación polar

$$r = \frac{ep}{1 \pm e\cos\theta} \tag{13.22}$$

es una sección cónica cuyo eje coincide con el eje x.

La ecuación polar

$$r = \frac{ep}{1 \pm e\,\text{sen}\,\theta} \tag{13.23}$$

es una sección cónica cuyo eje coincide con el eje y.

Las ecuaciones (13.22) y (13.23) dan lugar a las diversas cónicas que corresponden a los siguientes valores de e:

una **parábola**, si $e = 1$,

una **elipse**, si $0 < e < 1$,

una **hipérbola**, si $e > 1$.

Compare (13.18) cuando $e = 1$, con la Definición 12.1.

Ejemplo 1

Identificar las cónicas

(*a*) $r = \dfrac{6}{1 + 2\,\text{sen}\,\theta}$, (*b*) $r = \dfrac{4}{3 - \cos\theta}$.

Solución (*a*) La comparación con (13.23) permite hacer la identificación $e = 2$. La sección cónica es una hipérbola.

(*b*) Dividiendo numerador y denominador entre 3, la ecuación dada es

$$r = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{1}{3}\cos\theta}.$$

De esta manera, de (13.22) vemos que $e = \frac{1}{3}$, y por lo tanto la sección cónica es una elipse.

Gráficas

Se puede obtener una gráfica aproximada de una cónica definida por (13.22) o (13.23), conociendo la orientación de su eje y evaluando las intercepciones *x* y *y*, y los vértices. En el caso de (13.22), los dos vértices en el eje de una elipse o una hipérbola se tienen en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. Cuando $e = 1$ el denominador de (13.22) contiene $1 - \cos\theta$ o bien $1 + \cos\theta$; consecuentemente, el vértice de una parábola puede estar solamente en uno de los valores: $\theta = 0$, o bien $\theta = \pi$. Para (13.23) los vértices de una elipse o una hipérbola ocurren en $\theta = \pi/2$ y $\theta = 3\pi/2$. Uno de los valores $\theta = \pi/2$, o bien $\theta = 3\pi/2$, darán el vértice de una parábola.

Ejemplo 2

Trazar la gráfica de $r = \dfrac{2}{1 + 2\cos\theta}$.

Solución De (13.22) concluimos que la ecuación describe una hipérbola ($e = 2$) cuyo eje transverso es horizontal (debido a $\cos\theta$). En vista del análisis anterior:

Vértices: $(\frac{2}{3}, 0)$, $(-2, \pi)$

intercepciones y: $(2, \pi/2)$, $(2, 3\pi/2)$.

En la Figura 13.33 se presenta la gráfica de la ecuación.

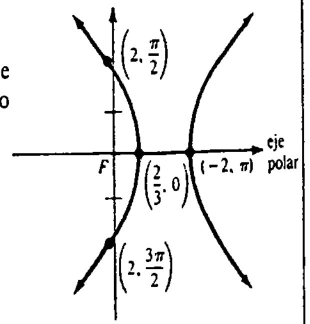


Figura 13.33

Ejemplo 3

Trazar la gráfica de $r = \dfrac{4}{3 - 2\,\text{sen}\,\theta}$.

Solución Escribiendo

$$r = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{2}{3}\text{sen}\,\theta},$$

resulta que $e = \frac{2}{3}$, y de esta manera la sección cónica es una elipse cuyo eje mayor es vertical (debido a sen θ). Se deduce que:

Vértices: $(4, \pi/2)$, $(\frac{4}{5}, 3\pi/2)$

intercepciones x: $(\frac{4}{3}, 0)$, $(\frac{4}{3}, \pi)$.

En la Figura 13.34 se presenta la gráfica de la ecuación.

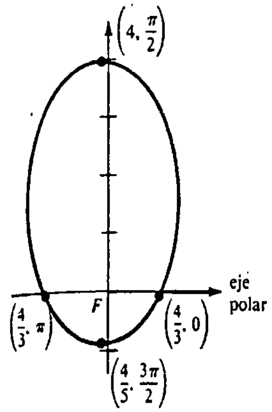


Figura 13.34

Observación

En coordenadas rectangulares la excentricidad de una elipse (hipérbola) se define como la relación de la distancia entre los focos a la longitud del eje mayor (eje transverso). Véanse los Problemas 39 y 40 de los Ejercicios 12.2 y 12.3. Se pide al lector verificar que $e = c/a$ en el caso de $r = ep/(1 - e\cos\theta)$ para $0 < e < 1$. Véase el Problema 23 de los Ejercicios 13.5.

Las formas de las elipses y las hipérbolas están relacionadas con las magnitudes de sus excentricidades. Cuando *e* está cercana a cero, la gráfica de una elipse es casi circular. Una elipse cuya excentricidad es próxima a uno es necesariamente alargada.* Para la hipérbola son válidas observaciones semejantes. Véase la Figura 13.35. Una circunferencia puede considerarse como un caso límite de (13.22) o (13.23) en el que $e \to 0$ y $p \to \infty$.

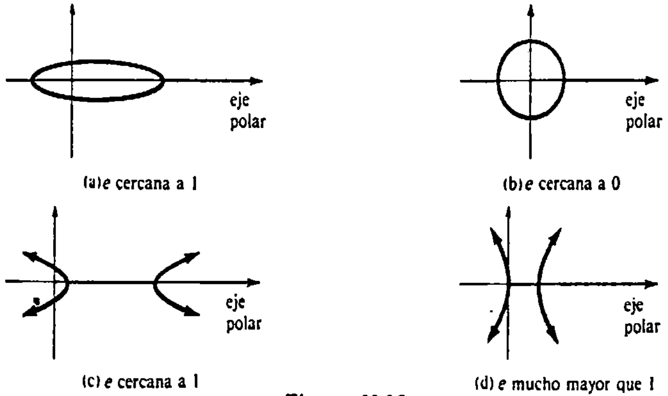


Figura 13.35

* Las órbitas de siete de los nueve planetas tienen excentricidades menores que 0.01 y, por lo tanto, no se apartan mucho de la forma circular. Mercurio y Plutón son las excepciones, con órbitas que tienen excentricidades 0.206 y 0.249, respectivamente. Muchos asteroides tienen órbitas muy excéntricas. Un caso notable es la órbita del asteroide Hidalgo con $e = 0.66$.

Ejercicios 13.5

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 993

En los Problemas 1-10 determine la excentricidad, identifique la sección cónica, y trace su gráfica.

1. $r = \dfrac{2}{1 + \cos\theta}$ 2. $r = \dfrac{2}{2 - \operatorname{sen}\theta}$

3. $r = \dfrac{15}{4 - \cos\theta}$ 4. $r = \dfrac{5}{2 - 2\operatorname{sen}\theta}$

5. $r = \dfrac{4}{1 + 2\operatorname{sen}\theta}$ 6. $r = \dfrac{12}{6 + 2\operatorname{sen}\theta}$

7. $r = \dfrac{18}{3 + 6\cos\theta}$ 8. $r = \dfrac{6\sec\theta}{\sec\theta - 1}$

9. $r = \dfrac{10}{5 + 4\operatorname{sen}\theta}$ 10. $r = \dfrac{2}{2 + 5\cos\theta}$

En los Problemas 11-14, encuentre una ecuación polar de la sección cónica con un foco en el polo y cuya excentricidad y directriz son las indicadas.

11. $e = 1, r = -3\sec\theta$ 12. $e = \dfrac{2}{3}, r = -2\csc\theta$

13. $e = \dfrac{5}{2}, r = 6\csc\theta$ 14. $e = \dfrac{1}{2}, r = 4\sec\theta$.

En los Problemas 15 y 16, obtenga una ecuación polar de la parábola con foco en el polo y vértice en el punto indicado.

15. $(5/2, \pi/2)$ 16. $(3, \pi)$

17. Suponga que la órbita de un satélite alrededor del Sol (la Tierra o la Luna) es una elipse en la que el Sol (la Tierra o la Luna) está en uno de sus focos. Sea una ecuación de la órbita la dada por $r = ep/(1 - e\cos\theta)$, $0 < e < 1$, y sean r_p la longitud de r en el *perihelio* (*perigeo* o *perilunio*) y r_a la longitud de r en el *afelio* (*apogeo* o *apolunio*).* Véase la Figura 13.36. Demuestre que la excentricidad de la órbita está dada por $e = (r_a - r_p)/(r_a + r_p)$.

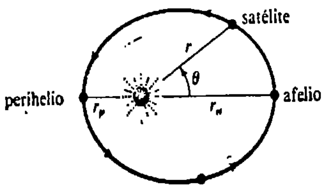


Figura 13.36

18. Un satélite de telecomunicaciones está a 12,000 km sobre la Tierra cuando se halla en su apogeo. La excentricidad de su órbita es 0.2. Aplique el resultado del Problema 17 para determinar su distancia en el perigeo.

19. Obtenga una ecuación polar de la órbita del satélite del Problema 18. (*Sugerencia:* r_a ocurre en $\theta = 0$.)

20. Utilice la información del Problema 17 para encontrar la ecuación polar de la órbita de la Tierra alrededor del Sol si $r_p = 1.47 \times 10^8$ km y $r_a = 1.52 \times 10^8$ km.

Problemas diversos

21. (a)* Deduzca $r = ep/(1 + e\cos\theta)$.

(b) Deduzca $r = ep/(1 \pm e\operatorname{sen}\theta)$.

22. Con la orientación de la directriz L mostrada en la Figura 13.37, demuestre que la ecuación polar de una sección cónica es $r = ep/[1 + e\cos(\theta + \phi)]$.

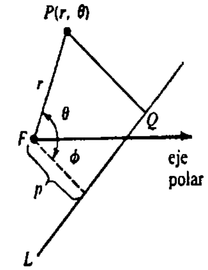


Figura 13.37

23. Considere la ecuación polar $r = ep/(1 - e\cos\theta)$, $0 < e < 1$.

(a) Completando el cuadrado, demuestre que la gráfica de (13.21) es una elipse y que F es un foco en el origen.

(b) Demuestre que $e = c/a$.

24. Verifique que el área de la región limitada por la gráfica de la ecuación polar $r = ep/(1 + e\cos\theta)$, $0 < e < 1$, es $\pi e^2 d^2/(1 - e^2)^{3/2}$. (*Sugerencia:* Utilice la sustitución $u = \tan(\theta/2)$.)

* Estos son los puntos de la órbita en los que r es mínima o máxima, respectivamente.

Examen • Capítulo 13

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 993.

En los Problemas 1-20 conteste verdadero o falso.

1. Si los puntos $(-r, \theta)$ y $(r, \theta + \pi)$ están en la gráfica de la ecuación polar $r = f(\theta)$, la gráfica es simétrica con respecto al origen. ______

2. La gráfica de la curva $x = t^2$, $y = t^4 + 1$ es igual a la gráfica de $y = x^2 + 1$. ______

3. La gráfica de $r = 4\cos\theta$ es una circunferencia con centro en $(2, 0)$. ______

4. $(3, \pi/6)$ y $(-3, -5\pi/6)$ son coordenadas polares del mismo punto. ______

5. Las coordenadas rectangulares de un punto en el plano son únicas. ______

6. La gráfica de la "rosa" $r = 5\operatorname{sen}6\theta$ tiene seis "pétalos". ______

7. El punto $(4, 3\pi/2)$ no está en la gráfica de $r = 4\cos 2\theta$ ya que sus coordenadas no satisfacen la ecuación. ______

8. La excentricidad de una parábola es $e = 1$. ______

9. El eje transverso de la hipérbola $r = 5/(2 + 3\cos\theta)$ está a lo largo del eje x. ______

10. La gráfica de la elipse $r = 90/(15 - \operatorname{sen}\theta)$ es casi circular. ______

11. Las coordenadas rectangulares del punto que tiene coordenadas polares $(-\sqrt{2}, 5\pi/4)$, son $(1, 1)$. ______

12. La gráfica de $r = -5\sec\theta$ es una recta. ______

13. El lado terminal del ángulo θ siempre está en el mismo cuadrante que el punto (r, θ). ______

14. La pendiente de la tangente a la gráfica de $r = e^\theta$ en $\theta = \pi/2$ es -1. ______

15. Las gráficas de las cardioides $r = 3 + 3\cos\theta$ y $r = -3 + 3\cos\theta$ son iguales. ______

16. El área limitada por $r = \cos 2\theta$ es $2\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta\, d\theta$. ______

17. El área limitada por $r = 2\operatorname{sen}3\theta$ es $6\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}^2 3\theta\, d\theta$. ______

18. El área limitada por $r = 1 - 2\cos\theta$ es $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta)^2\, d\theta$. ______

19. El área limitada por $r^2 = 36\cos 2\theta$ es $18\int_0^{2\pi} \cos 2\theta\, d\theta$. ______

20. La coordenada θ de un punto de intersección de las gráficas de $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$ debe satisfacer la ecuación $f(\theta) = g(\theta)$. ______

21. Encuentre una ecuación de la recta normal a la gráfica de la curva $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \le t \le 2\pi$ en $t = \pi/3$.

22. Determine la longitud de la curva del Problema 21.

23. Encuentre los puntos de la gráfica de la curva $x = t^2 + 4$, $y = t^3 - 9t^2 + 2$ en los que la recta tangente sea paralela a $6x + y = 8$.

24. Determine los puntos de la gráfica de la curva $x = t^2 + 1$; $y = 2t$ para los que la recta tangente pase por $(1, 5)$.

25. Considere la siguiente ecuación cartesiana $y^2 = 4x^2(1 - x^2)$.

(a) Explique por qué es necesario que $|x| \le 1$.

(b) Si $x = \operatorname{sen} t$, entonces $|x| \le 1$. Encuentre ecuaciones paramétricas que tengan la misma gráfica que la ecuación dada.

(c) Utilizando ecuaciones paramétricas, determine los puntos de la gráfica de la curva en los que la tangente sea horizontal.

(d) Trace la gráfica.

26. Halle el área de la región exterior a la circunferencia $r = 4\cos\theta$, e interior al caracol $r = 3 + \cos\theta$.

27. Encuentre el área de la región común a los interiores de la circunferencia $r = 3\operatorname{sen}\theta$ y la cardioide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$.

28. Bosqueje la figura del área A descrita por $A = \int_0^{\pi/2} (25 - 25\operatorname{sen}^2\theta)\, d\theta$, en coordenadas polares.

29. Encuentre (a) una ecuación cartesiana, y (b) una ecuación polar, de la recta tangente a la gráfica de $r = 2\operatorname{sen}2\theta$ en $\theta = \pi/4$.

30. Obtenga una ecuación cartesiana que tenga la misma gráfica que $r = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta$.

31. (a) Demuestre que la gráfica del bifolio $r = 3\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta$ es simétrica con respecto al eje y.

(b) Trace la gráfica de la ecuación.

32. Encuentre una ecuación polar que tenga la misma gráfica que $(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 9(x^2 + y^2)$.

En los Problemas 33 y 34 evalúe el área de la región sombreada. Cada circunferencia tiene radio igual a 1.

33.

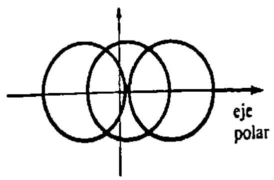


Figura 13.38

34.

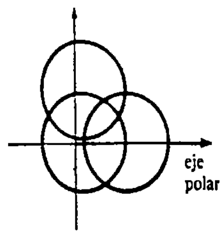


Figura 13.39

14 Vectores y el espacio tridimensional

Hasta ahora hemos realizado la mayoría del estudio del Cálculo en el mundo del plano cartesiano de dos dimensiones o espacio bidimensional. En los siguientes capítulos se considerará primordialmente el análisis matemático en tres dimensiones, o bien en el espacio tridimensional.

14.1 Sistema de coordenadas rectangulares en tres dimensiones

Una manera de describir la posición de un punto P en el plano, consiste en asignarle coordenadas relativas a dos ejes mutuamente ortogonales (o perpendiculares),* llamados ejes x y y. Si P es el punto de intersección de la recta $x = a$ (perpendicular al eje x) y la recta $y = b$ (perpendicular al eje y), entonces se dice que los elementos de la pareja (o **díada**) **ordenada** (a, b) son las **coordenadas cartesianas rectangulares** del punto. Véase la Figura 14.1.

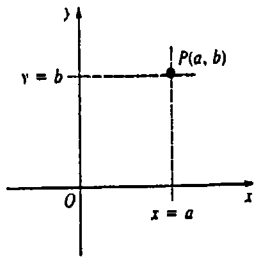


Figura 14.1

En el espacio de tres dimensiones se construye un sistema de coordenadas rectangulares utilizando tres ejes mutuamente ortogonales. El punto en el que estos ejes se cortan se llama el **origen**, O. Estos ejes, mostrados en la Figura 14.2(a), se denominan mediante la llamada **regla de la mano derecha**: Si los dedos extendidos de la mano derecha señalan en la dirección positiva del eje x y luego se encorvan apuntando hacia el eje y (positivo), entonces el pulgar apuntará en la dirección de un nuevo eje perpendicular al plano de los ejes x y y. Este nuevo eje se designa como el eje z.† Las líneas punteadas de la Figura 14.2(a) representan los ejes negativos. Ahora bien, si

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

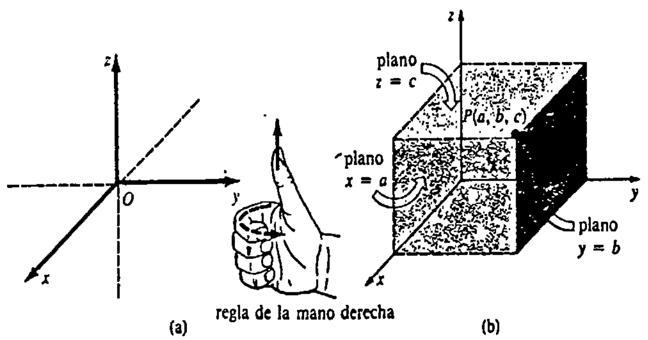


Figura 14.2

* Estos términos son sinónimos.

† Si en la Figura 14.2(a) se intercambian los ejes x y y, se dice que el sistema coordenado es *izquierdo*.

son tres planos perpendiculares al eje x, eje y y eje z, respectivamente, el punto P en el cual se cortan dichos planos se puede representar por una **tríada ordenada** de números (a, b, c) llamados **coordenadas cartesianas rectangulares** del punto. Los números a, b y c se denominan **coordenadas** x, y, z de $P(a, b, c)$, respectivamente. Véase la Figura 14.2(b).

Octantes

Cada pareja (o par) de ejes coordenados determina un **plano coordenado**. Los ejes x y y determinan el plano xy, los ejes x y z determinan el plano xz, y así sucesivamente. Los planos coordenados dividen al espacio tridimensional en ocho partes conocidas como **octantes**. El octante en el cual las tres coordenadas de un punto son *positivas*, se llama *primer octante*. No existe ningún acuerdo para denominar a los otro siete octantes.

La tabla siguiente resume las coordenadas de un punto que se encuentre en un eje coordenado o en un plano coordenado. Es posible también describir, por ejemplo, el plano xy mediante la simple ecuación $z = 0$, como se ve en la tabla. De manera semejante, el plano xz es $y = 0$, y el plano yz es $x = 0$.

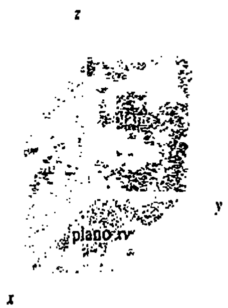


Figura 14.3

Ejes	*Coordenadas*	*Plano*	*Coordenadas*
x	$(a, 0, 0)$	xy	$(a, b, 0)$
y	$(0, b, 0)$	xz	$(a, 0, c)$
z	$(0, 0, c)$	yz	$(0, b, c)$

Ejemplo 1

Ubicar los puntos $(4, 5, 6)$, $(3, -3, -1)$, $(-2, -2, 0)$.

Solución De los tres puntos mostrados en la Figura 14.4, solamente $(4, 5, 6)$ está en el primer octante. El punto $(-2, -2, 0)$ está en el plano xy.

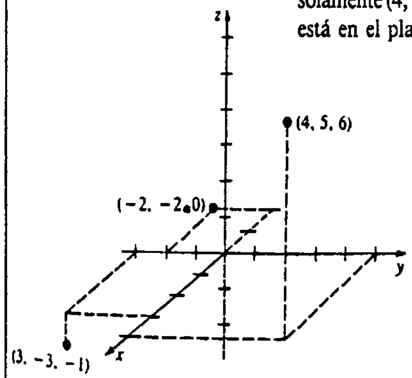


Figura 14.4

Fórmula de la distancia

Para obtener la distancia entre dos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ en el espacio tridimensional, consideremos primero sus proyecciones sobre el plano xy. La distancia entre $(x_1, y_1, 0)$ y $(x_2, y_2, 0)$ se obtiene de la fórmula usual de la distancia en el plano, que es $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, como se ve en la Figura 14.5. Por lo tanto, en virtud del teorema de Pitágoras aplicado al triángulo rectángulo $P_1P_3P_2$,

$$[d(P_1, P_2)]^2 = [\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}]^2 + |z_2 - z_1|^2$$

o bien

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (14.1)$$

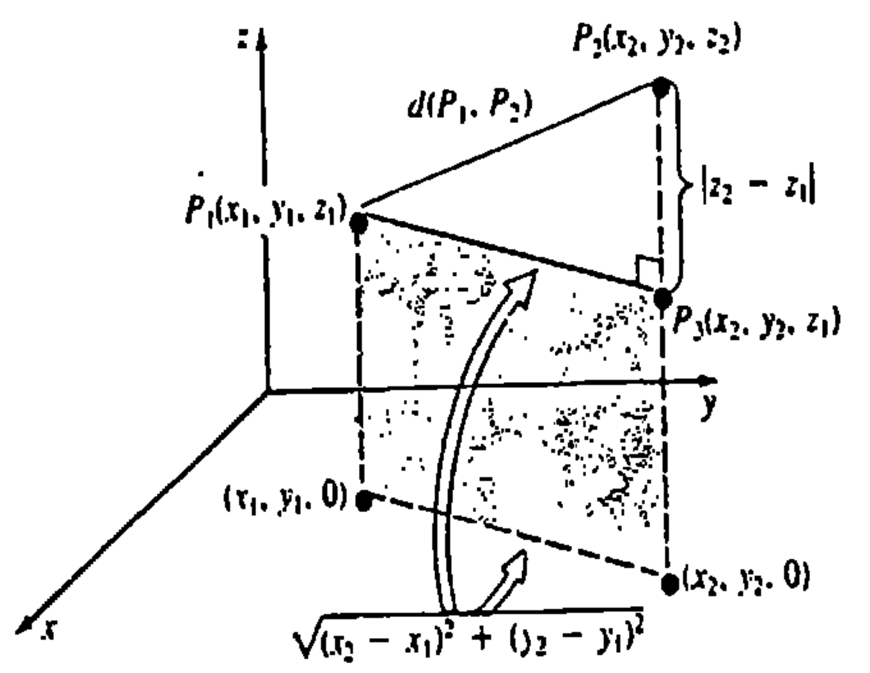


Figura 14.5

Ejemplo 2

Obtener la distancia entre (2, −3, 6) y (−1, −7, 4).

Solución Por (14.1),

$$d = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (-3 - (-7))^2 + (6 - 4)^2} = \sqrt{29}.$$

Fórmula del punto medio

Las fórmulas para encontrar el punto medio de un segmento de recta que une dos puntos en el espacio bidimensional, se extienden de una manera análoga para el espacio de tres dimensiones. Si $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos distintos, entonces las coordenadas del punto medio del segmento que los une, son

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right). \qquad (14.2)$$

Ejemplo 3

Las coordenadas del punto medio del segmento rectilíneo que une los dos puntos del Ejemplo 2 son

$$\left(\frac{2 + (-1)}{2}, \frac{-3 + (-7)}{2}, \frac{6 + 4}{2}\right) \text{ o bien } \left(\frac{1}{2}, -5, 5\right).$$

Ejercicios 14.1

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 993.

En los Problemas 1-6 sitúe el punto dado. Utilice los mismos ejes coordenados.

1. (1, 1, 5) **2.** (0, 0, 4) **3.** (3, 4, 0)
4. (6, 0, 0) **5.** (6, −2, 0) **6.** (5, −4, 3)

En los Problemas 7-10 describa geométricamente todos los puntos $P(x, y, z)$ que satisfagan la condición indicada.

7. $z = 5$ **8.** $x = 1$
9. $x = 2, y = 3$ **10.** $x = 4, y = -1, z = 7$

11. Proporcione las coordenadas de los vértices del paralelepípedo rectángulo cuyos lados son los planos coordenados y los planos $x = 2$, $y = 5$, $z = 8$.

12. En la Figura 14.6 se muestran dos vértices de un paralelepípedo rectángulo que tiene sus lados paralelos a los planos coordenados. Halle las coordenadas de los seis vértices restantes.

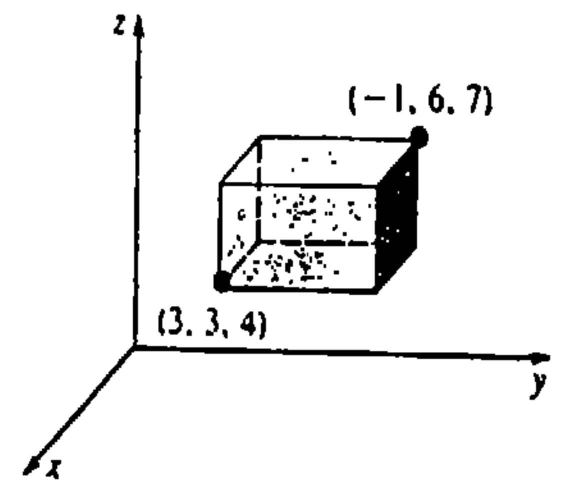


Figura 14.6

13. Considere el punto $P(-2, 5, 4)$.

(a) Si desde P se trazan rectas perpendiculares a los planos coordenados, ¿cuáles son las coordenadas del pie de cada perpendicular?

(b) Si desde P se traza una recta perpendicular al plano $z = -2$, ¿cuáles son las coordenadas del pie de la citada perpendicular?

(c) Localice el punto del plano $x = 3$ más cercano a P.

14. Determine una ecuación del plano o los planos (paralelos a alguno de los planos coordenados) que contengan a cada par de puntos dado.

(a) (3, 4, −5), (−2, 8, −5)
(b) (1, −1, 1), (1, −1, −1)
(c) (−2, 1, 2), (2, 4, 2)

En los Problemas 15-20 describa la localización de los puntos $P(x, y, z)$ que satisfagan cada ecuación.

15. $xyz = 0$ **16.** $x^2 + y^2 + z^2 = 0$
17. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 0$
18. $(x - 2)(z - 8) = 0$ **19.** $z^2 - 25 = 0$
20. $x = y = z$

En los Problemas 21 y 22 determine la distancia entre los puntos indicados.

21. (3, −1, 2), (6, 4, 8)
22. (−1, −3, 5), (0, 4, 3)

En los Problemas 23-26 los tres puntos que se indican forman un triángulo. Determine cuáles triángulos son isósceles y cuáles son rectángulos.

23. (0, 0, 0), (3, 6, −6), (2, 1, 2)
24. $(0, 0, 0), (1, 2, 4), (3, 2, 2\sqrt{2})$
25. (1, 2, 3), (4, 1, 3), (4, 6, 4)
26. (1, 1, −1), (1, 0, 1), (0, −1, 1)

En los Problemas 27 y 28 utilice la fórmula de la distancia para demostrar que los puntos dados son colineales.

27. $P_1(1, 2, 0), P_2(-2, -2, -3), P_3(7, 10, 6)$
28. $P_1(2, 3, 2), P_2(1, 4, 4), P_3(5, 0, -4)$

En los Problemas 29 y 30 encuentre el valor de la incógnita.

29. $P_1(x, 2, 3), P_2(2, 1, 1); d(P_1, P_2) = \sqrt{21}$
30. $P_1(x, x, 1), P_2(0, 3, 5); d(P_1, P_2) = 5$

En los Problemas 31 y 32 encuentre las coordenadas del punto medio del segmento de recta que une los puntos indicados.

31. $\left(1, 3, \frac{1}{2}\right), \left(7, -2, \frac{5}{2}\right)$

32. $(0, 5, -8), (4, 1, -6)$

33. Las coordenadas del punto medio del segmento que une a $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(2, 3, 6)$ son $(-1, -4, 8)$. Halle las coordenadas de P_1.

34. Sea P_3 el punto medio del segmento de recta que une a $P_1(-3, 4, 1)$ y a $P_2(-5, 8, 3)$. Encuentre las coordenadas del punto medio del segmento que une a

(a) P_1 y P_3.

(b) P_3 y P_2.

14.2 Vectores

Escalares y vectores

En la ciencia y la ingeniería, se distinguen dos clases importantes de cantidades, **escalares** y **vectores**. Un **escalar** es simplemente un número real, o bien una cantidad que sólo tiene *magnitud*. Por ejemplo, la longitud, la temperatura o la presión sanguínea, se representan por números como 80 m, 20°C, y la relación sistólica-diastólica 120/80. Un **vector**, por otra parte, se describe usualmente como una cantidad que tiene tanto *magnitud* como *dirección*. Un vector se representa gráficamente mediante una flecha, y se simboliza mediante una literal en tipo negro **v**, o bien como $\vec{v}$ o $\overrightarrow{AB}$. Los ejemplos de cantidades vectoriales mostrados en la Figura 14.7 son peso **w**, velocidad **v**, y la fuerza retardatriz de fricción $\mathbf{F}_f$.

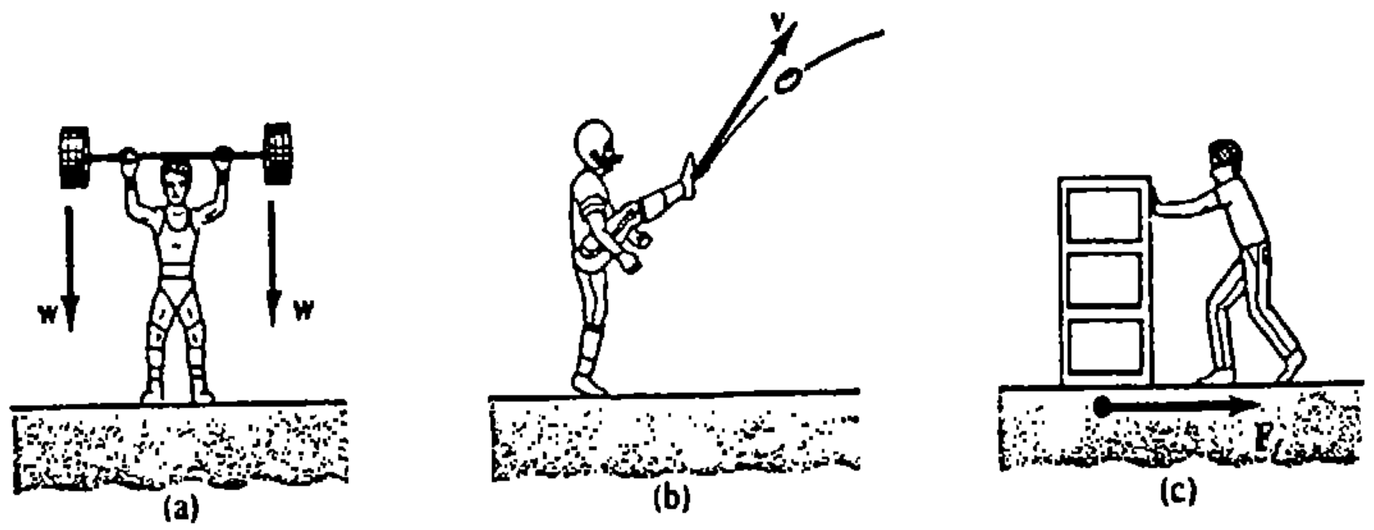


Figura 14.7

Notación y terminología

Un vector cuyo punto inicial (u origen) es A y cuyo punto terminal (o extremo) es B se escribe $\overrightarrow{AB}$. La magnitud de tal vector se indica por $|\overrightarrow{AB}|$. Dos vectores que tienen la misma magnitud y la misma dirección, se dice que son **iguales** *sin que importe su localización en el espacio*. De esta manera, en la Figura 14.8 se tiene que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Se dice

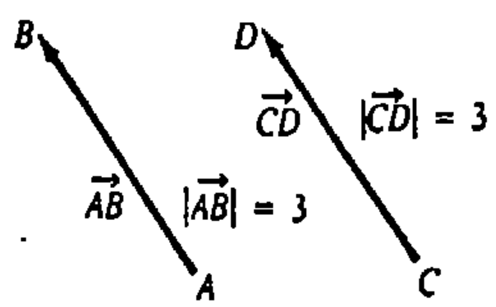


Figura 14.8

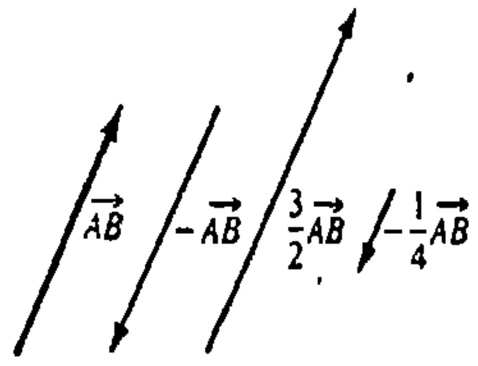


Figura 14.9

que los vectores son **libres**. Ello significa que un vector se puede desplazar en el espacio siempre que su magnitud y su dirección no sean modificadas. El **negativo** de un vector $\overrightarrow{AB}$, que se simboliza por $-\overrightarrow{AB}$, es un vector que tiene la misma magnitud de $\overrightarrow{AB}$, pero su dirección es la opuesta. Si $k \neq 0$ es un escalar, el **múltiplo de un vector**, $k\overrightarrow{AB}$, es un vector que tiene magnitud igual a $|k|$ veces la de $\overrightarrow{AB}$, y cuyo sentido depende del signo algebraico de k. Cuando $k = 0$, decimos que $0\overrightarrow{AB} = \mathbf{0}$ es el **vector cero**.* Dos vectores son **paralelos** si y sólo si son mutuamente vectores múltiplos distintos de cero. Véase la Figura 14.9.

Adición y sustracción

Se puede considerar que dos vectores no paralelos tienen su punto inicial común, tal como A en la Figura 14.10(a). De esta manera, si los vectores no paralelos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son los lados del paralelogramo de la Figura 14.10(b), se dice que el vector que forma la diagonal principal, o sea $\overrightarrow{AD}$, es la **suma** o **resultante** de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Se escribe

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

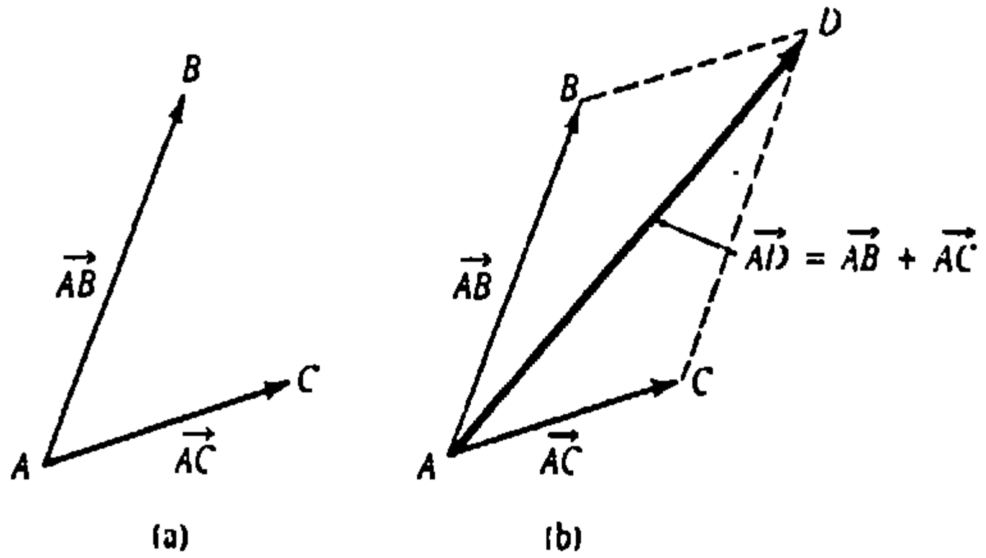


Figura 14.10

La **diferencia** de dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ se define mediante

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC}).$$

La diferencia $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ puede interpretarse como la diagonal principal del paralelogramo con lados $\overrightarrow{AB}$ y $-\overrightarrow{AC}$, según se ve en la Figura 14.11(a). Sin embargo, también es posible

* La pregunta de cuál es la dirección de **0**, se contesta usualmente diciendo que al vector cero se le puede asignar *cualquier* dirección. Para ser más precisos, el vector **0** se necesita para constituir un álgebra vectorial.

interpretar el mismo vector diferencia como el tercer lado de un triángulo con lados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, como lo muestra la Figura 14.11(b). En esta segunda interpretación, obsérvese que el vector diferencia $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ apunta hacia el punto terminal del vector *del cual* se resta el segundo vector. Desde luego, cuando $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \mathbf{0}.$$

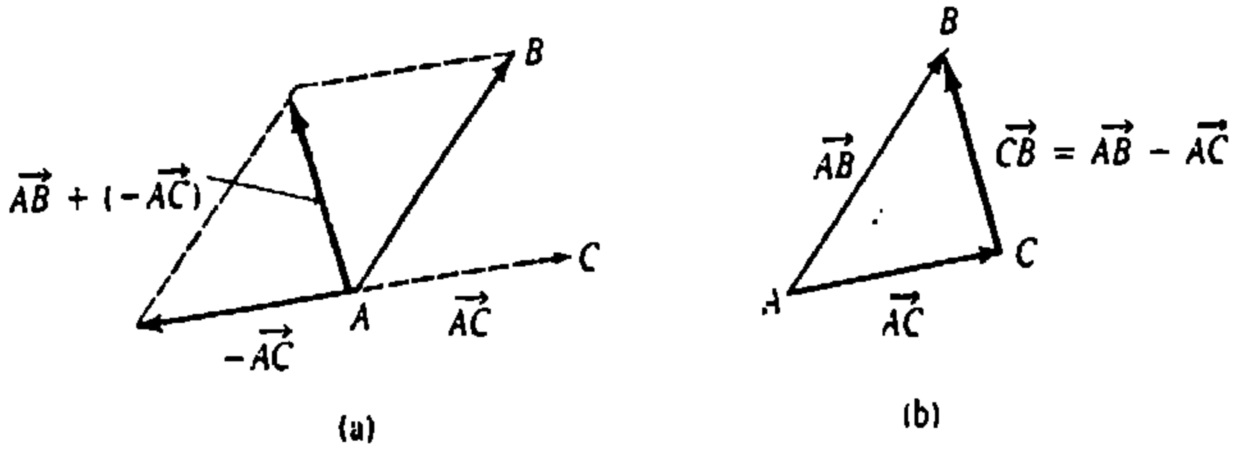


Figura 14.11

Vectores en el sistema de coordenadas rectangulares

El vector mostrado en la Figura 14.12 cuyo punto inicial es el origen de coordenadas O y cuyo punto terminal es $P(x_1, y_1, z_1)$ se llama **vector de posición** del punto P y se escribe

$$\overrightarrow{OP} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle.$$

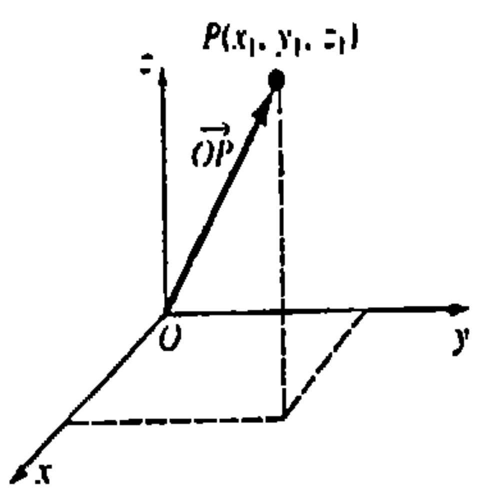


Figura 14.12

Componentes

En general, un vector **a** en el espacio tridimensional es cualquier tríada ordenada de números reales,

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle.$$

Se dice que los números a_1, a_2 y a_3 son las **componentes** del vector **a**. Debe notarse que **a** no es *necesariamente* un vector de posición.

Ejemplo 1

El desplazamiento comprendido entre los puntos de la Figura 14.13(a) se representa por $\langle 1, 4, 3 \rangle$. El vector de posición de $\langle 1, 4, 3 \rangle$ es el que parte del origen y termina en el punto $P(1, 4, 3)$, como se ve en la Figura 14.13(b).

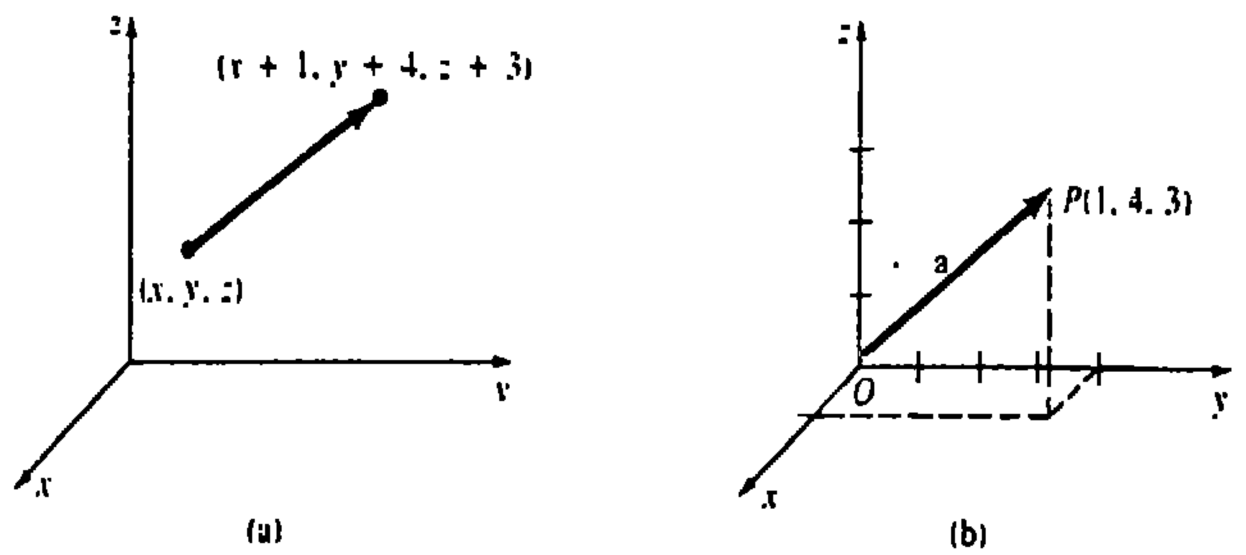


Figura 14.13

DEFINICIÓN 14.1

Sean $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ vectores en el espacio tridimensional.

(*i*) Adición: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$. (14.3)

(*ii*) Multiplicidad: $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$. (14.4)

(*iii*) Igualdad: $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ si y sólo si

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad a_3 = b_3. \tag{14.5}$$

□

Sustracción

En virtud de (14.4), el *negativo* de un vector está dado por

$$(-1)\mathbf{b} = \langle -b_1, -b_2, -b_3 \rangle.$$

Podemos entonces definir la sustracción, o la diferencia, de dos vectores mediante

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle. \tag{14.6}$$

En la Figura 14.14(a) se ilustra la suma de dos vectores $\overrightarrow{OP_1}$ y $\overrightarrow{OP_2}$. En la Figura 14.14(b) el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$, cuyo punto inicial es P_1 y que termina en el punto P_2, es la diferencia de vectores de posición

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle.$$

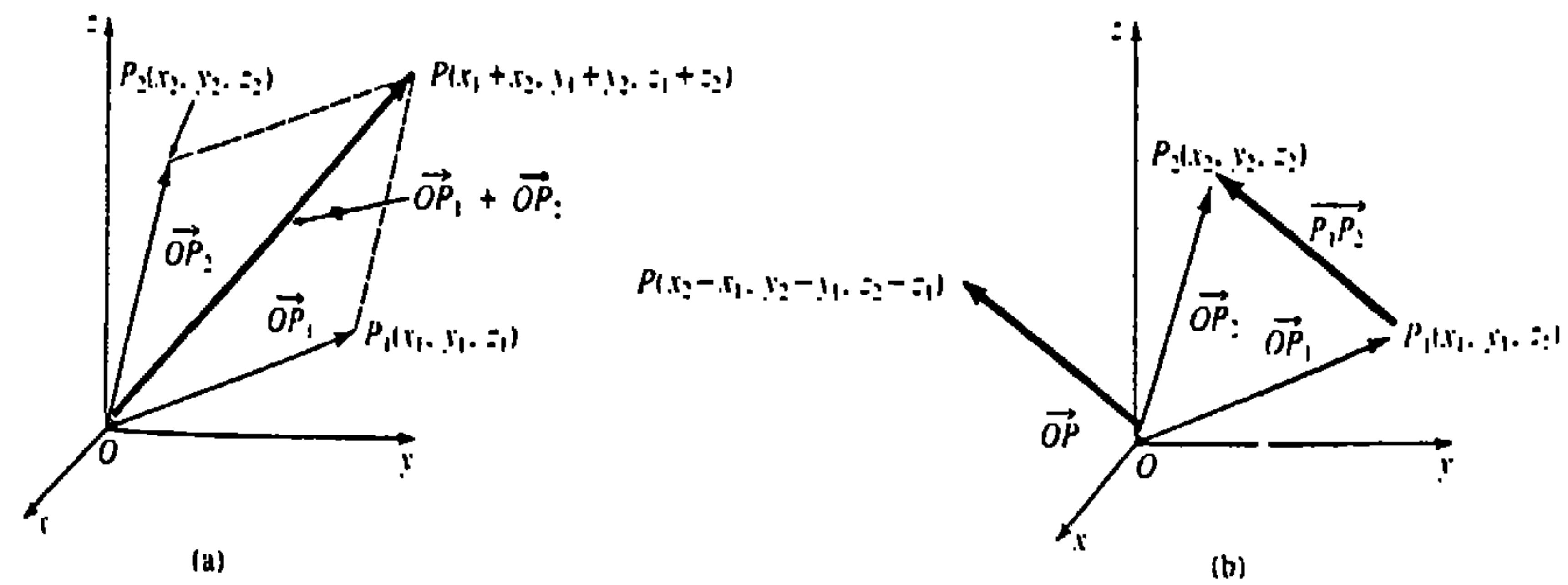


Figura 14.14

El vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ puede trazarse empezando en el punto terminal de $\overrightarrow{OP_1}$ y finalizando en el punto terminal de $\overrightarrow{OP_2}$, o bien como el vector de posición $\overrightarrow{OP}$ cuyo punto terminal tiene las coordenadas $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, como se muestra en la Figura 14.14(b). Recuérdese que $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{P_1P_2}$ se consideran iguales ya que tienen la misma magnitud y la misma dirección.

Ejemplo 2

Si $\mathbf{a} = \langle 2, 1, 4\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -2, -6, 3\rangle$ determine

(*a*) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, (*b*) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, (*c*) $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$.

Solución Aplicamos (14.3), (14.4) y (14.6).

(*a*) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle 2 + (-2), 1 + (-6), 4 + 3\rangle = \langle 0, -5, 7\rangle$

(*b*) $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle 2 - (-2), 1 - (-6), 4 - 3\rangle = \langle 4, 7, 1\rangle$

(*c*) $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = \langle 4, 2, 8\rangle + \langle -6, -18, 9\rangle = \langle -2, -16, 17\rangle$

Propiedades

La definición de un vector por componentes puede utilizarse para verificar cada una de las propiedades siguientes

(*i*) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (Ley conmutativa)

(*ii*) $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ (Ley asociativa)

(*iii*) $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ (Identidad aditiva)

(*iv*) $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ (Inverso aditivo)

(*v*) $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$, en donde k es un escalar

(*vi*) $(k_1 + k_2)\mathbf{a} = k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{a}$, en donde k_1 y k_2 son escalares

(*vii*) $(k_1)(k_2\mathbf{a}) = (k_1k_2)\mathbf{a}$, en donde k_1 y k_2 son escalares

(*viii*) $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$

(*xi*) $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$

Magnitud

La magnitud, longitud o norma de un vector **a** se denota por $|\mathbf{a}|$. De acuerdo con el teorema de Pitágoras y la Figura 14.15 concluimos que

si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, entonces $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Claramente, $|\mathbf{a}| \geq 0$.

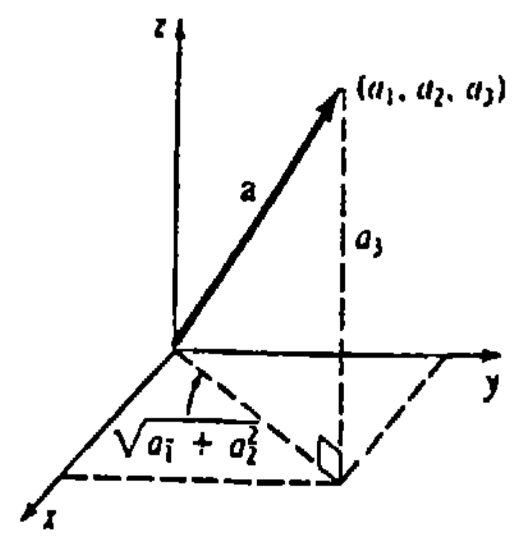


Figura 14.15

Vectores unitarios

Cualquier vector **a** distinto de cero puede dar lugar a un vector unitario **u** multiplicándolo por el recíproco de su magnitud. El vector $\mathbf{u} = (1/|\mathbf{a}|)\mathbf{a}$ es un vector unitario, ya que

$$|\mathbf{u}| = \left|\frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}\right| = \frac{1}{|\mathbf{a}|}|\mathbf{a}| = 1.$$

Ejemplo 3

Dado $\mathbf{a} = \langle 2, -1, 3\rangle$, obtenga un vector unitario

(*a*) en la misma dirección de **a**

(*b*) en la dirección opuesta de **a**.

Solución Se determina primero la magnitud:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{4 + (-1)^2 + 9} = \sqrt{14}.$$

(*a*) Un vector unitario en la misma dirección de **a** es

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{14}}\langle 2, -1, 3\rangle = \left\langle \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right\rangle.$$

(*b*) Un vector unitario en la dirección opuesta de **a** es

$$-\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}\right\rangle.$$

Los vectores **i**, **j**, **k**

En vista de (14.3) y (14.4), cualquier vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ se puede representar como una suma:

$$\begin{aligned}\langle a_1, a_2, a_3\rangle &= \langle a_1, 0, 0\rangle + \langle 0, a_2, 0\rangle + \langle 0, 0, a_3\rangle \\ &= a_1\langle 1, 0, 0\rangle + a_2\langle 0, 1, 0\rangle + a_3\langle 0, 0, 1\rangle. \qquad (14.7)\end{aligned}$$

A los vectores unitarios $\langle 1, 0, 0\rangle$, $\langle 0, 1, 0\rangle$, $\langle 0, 0, 1\rangle$ se les asignan usualmente los simbolos especiales **i**, **j** y **k**. Así que, si

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle, \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle, \quad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle,$$

(14.7) se convierte en

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}. \qquad (14.8)$$

Se dice que los vectores **i**, **j**, **k** forman una base para el sistema tridimensional de vectores.

Vectores componentes

En (14.8) el vector **a** ha sido *descompuesto* en sus *vectores componentes* $a_1\mathbf{i}$, $a_2\mathbf{j}$, y $a_3\mathbf{k}$. En la Figura 14.16(b), vemos que los vectores componentes son mutuamente *ortogonales* y que **a** es el *resultante* de ellos.

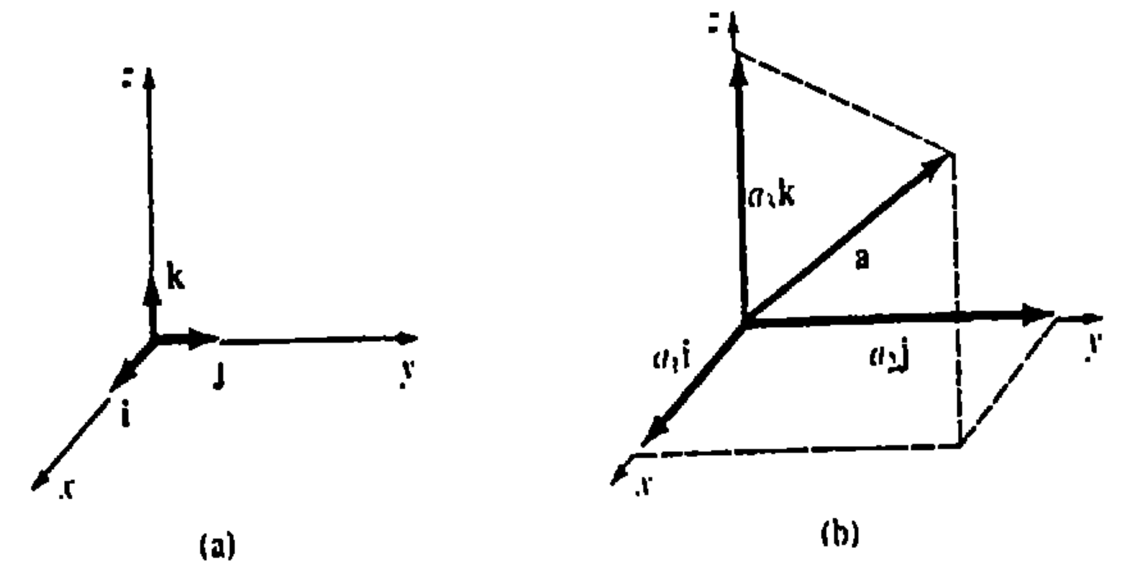


Figura 14.16

Ejemplo 4

(*a*) $\langle 4, 7, -10\rangle = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$

(*b*) $(2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) + (8\mathbf{i} + 13\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = 10\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

(*c*) $|\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}| = \sqrt{3}$

(*d*) $10\left(3\mathbf{i} - \mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{k}\right) = 30\mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

(*e*) $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 9\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ son paralelos ya que $\mathbf{b} = \frac{3}{2}\mathbf{a}$.

Vectores en un plano

Un vector situado en un plano coordenado tiene un componente cero. Por ejemplo, los vectores en los planos *xy*, *yz* y *xz* se escriben

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}, \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{j} + b_2\mathbf{k}, \quad \text{y} \quad \mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{k},$$

respectivamente.

Ejemplo 5

(*a*) El vector $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ está en el plano coordenado *xz*.

(*b*) $|5\mathbf{i} + 3\mathbf{k}| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$.

Ejemplo 6

Si $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$, represente gráficamente

(*a*) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, (*b*) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Solución

(*a*) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

(*b*) $\mathbf{a} - \mathbf{b} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

En la Figura 14.17 se muestran las gráficas de estos dos vectores en el plano *xy*

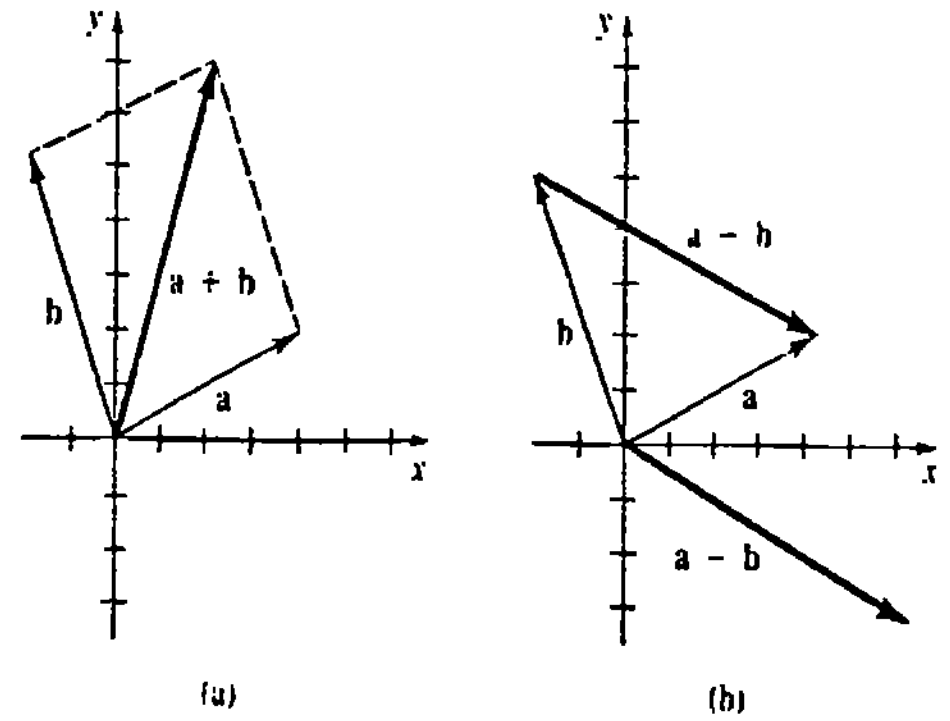


Figura 14.17

Ejercicios 14.2

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 994

En los Problemas 1-6 determine (*a*) 3**a**, (*b*) **a** + **b**, (*c*) **a** − **b**, (*d*) |**a** + **b**|, y (*e*) |**a** − **b**|.

1. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
2. $\mathbf{a} = \langle 1, 1, 2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 3, -4\rangle$
3. $\mathbf{a} = \langle 4, 0, 2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0, -5, 3\rangle$
4. $\mathbf{a} = \frac{1}{6}\mathbf{i} - \frac{1}{6}\mathbf{j} + \frac{5}{6}\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{5}{6}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}$
5. $\mathbf{a} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i}$
6. $\mathbf{a} = \langle 1, 3, -1\rangle$, $\mathbf{b} = -5\mathbf{a}$

En los Problemas 7-12 determine (*a*) 4**a** − 2**b**, (*b*) −3**a** − 5**b**.

7. $\mathbf{a} = \langle 1, -3, 2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 1, -2\rangle$
8. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$
9. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
10. $\mathbf{a} = \langle 2, 0, 0\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0, -3, 0\rangle$
11. $\mathbf{a} = \langle 4, 10, -8\rangle$, $\mathbf{b} = -2\langle 1, 3, 4\rangle$
12. $\mathbf{a} = \langle 3, 1, 1\rangle + \langle -1, 2, -2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 6, 5, 4\rangle - \langle 1, 2, 1\rangle$

En los Problemas 13-16 obtenga el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$. Represente gráficamente $\overrightarrow{P_1P_2}$ y determine su vector de posición correspondiente.

13. $P_1(3, 2, 0)$, $P_2(5, 7, 0)$
14. $P_1(-2, -1, 0)$, $P_2(4, -5, 0)$
15. $P_1(3, 3, 3)$, $P_2(5, 5, 5)$
16. $P_1(0, 3, 4)$, $P_2(2, 0, 4)$
17. Determine cuáles de los siguientes vectores son paralelos a $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

(a) $-4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

(b) $-\mathbf{i} - \frac{3}{2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$

(c) $10\mathbf{i} + 15\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

(d) $2(\mathbf{i} + \mathbf{k}) - 3(\mathbf{j} + \mathbf{k})$

(e) $8\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

(f) $(5\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) - (7\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$

18. Obtenga un escalar c de manera que $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + c\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ sean paralelos.

En los Problemas 19 y 20 halle $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ para los vectores indicados.

19. $\mathbf{a} = \langle 5, 1, -2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -2, 4, 6\rangle$, $\mathbf{c} = \langle 3, 10, -8\rangle$

20. $\mathbf{a} = \langle 1, 1, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 4, 3, 0\rangle$, $\mathbf{c} = \langle 0, -2, 9\rangle$

En los Problemas 21 y 22 encuentre un vector unitario (*a*) en la misma dirección de $\mathbf{a}$, y (*b*) en la dirección opuesta de $\mathbf{a}$.

21. $\mathbf{a} = \langle 2, 1, 2\rangle$ 22. $\mathbf{a} = \langle -3, 4, 5\rangle$

En los Problemas 23 y 24, $\mathbf{a} = \langle 2, 0, -2\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -1, 1, 1\rangle$. Halle un vector unitario que tenga la misma dirección del vector indicado.

23. $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 24. $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$

En los Problemas 25 y 26 encuentre un vector $\mathbf{b}$ que sea paralelo al vector dado y tenga la magnitud indicada.

25. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + \sqrt{6}\mathbf{k}$, $|\mathbf{b}| = 2$

26. $\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{k}$, $|\mathbf{b}| = 3$

27. Obtenga un vector en la dirección opuesta de $\mathbf{a} = \langle 4, 10, -20\rangle$ pero que tenga $\frac{3}{4}$ de su longitud.

28. Dado que $\mathbf{a} = \langle 1, 1, 1\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -1, 0, -2\rangle$, encuentre un vector en la misma dirección de $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, pero que tenga 5 veces su longitud.

En los Problemas 29 y 30 utilice la figura dada para trazar el vector indicado.

29. $3\mathbf{b} - \mathbf{a}$ 30. $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

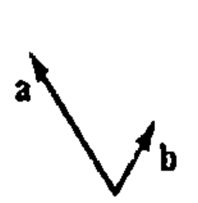


Figura 14.18

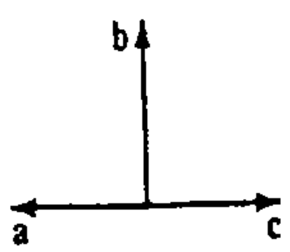


Figura 14.19

En los Problemas 31 y 32 exprese el vector $\mathbf{x}$ en términos de los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

31.

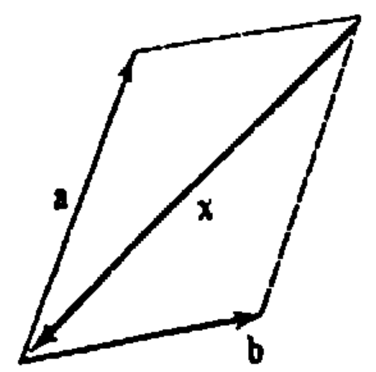


Figura 14.20

32.

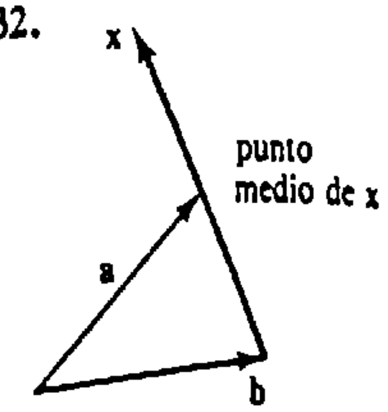


Figura 14.21

En los Problemas 33 y 34 utilice la figura dada para demostrar el resultado indicado.

33. $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ 34. $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$

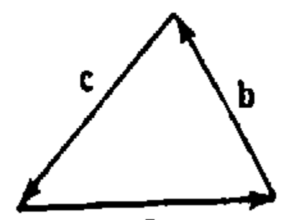


Figura 14.22

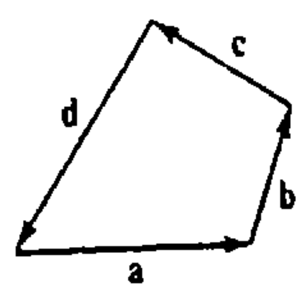


Figura 14.23

35. Al caminar, el pie de una persona golpea el suelo con una fuerza $\mathbf{F}$, que forma un ángulo θ con la vertical. En la Figura 14.24, el vector $\mathbf{F}$ está descompuesto en los vectores componentes $\mathbf{F}_g$, paralelo al suelo, y $\mathbf{F}_n$, perpendicular al mismo. Para que el pie no resbale, la fuerza $\mathbf{F}_g$ debe ser contrarrestada por la fuerza contraria de fricción $\mathbf{F}_f$; esto es, $\mathbf{F}_f = -\mathbf{F}_g$.

(a) Utilice el hecho de que $|\mathbf{F}_f| = \mu|\mathbf{F}_n|$, en donde μ es el coeficiente de fricción o rozamiento, para demostrar que $\tan\theta = \mu$. El pie no resbalará para ángulos menores que o iguales a θ.

(b) Dado que $\mu = 0.6$ para un tacón de goma que golpea contra un piso de asfalto, encuentre el ángulo que no ocasiona resbalamiento.

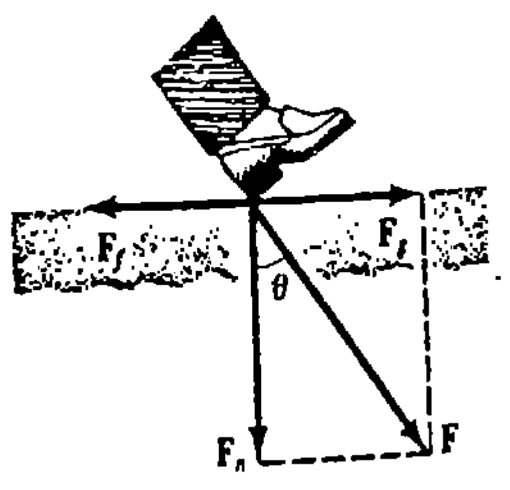


Figura 14.24

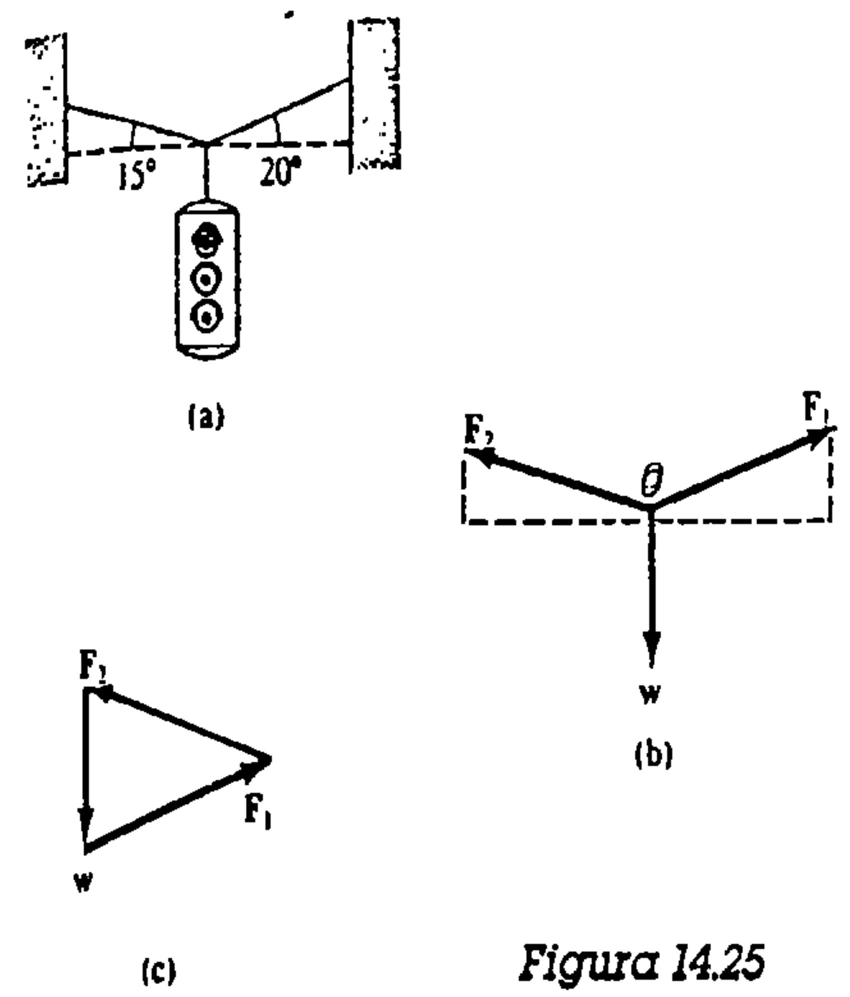


Figura 14.25

36. Un semáforo de 200 lb de peso cuelga en equilibrio sostenido por dos cables. Represéntese por $\mathbf{w}$ el peso del semáforo, y por $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ las fuerzas en los dos cables, como se muestra en la Figura 14.25(b). En virtud de la Figura 14.25(c) se ve que una condición de equilibrio es

$$\mathbf{w} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}. \tag{14.9}$$

(Véase el Problema 33). Si

$$\mathbf{w} = -200\mathbf{j},$$

$$\mathbf{F}_1 = (|\mathbf{F}_1|\cos 20°)\mathbf{i} + (|\mathbf{F}_1|\operatorname{sen} 20°)\mathbf{j},$$

$$\mathbf{F}_2 = -(|\mathbf{F}_2|\cos 15°)\mathbf{i} + (|\mathbf{F}_2|\operatorname{sen} 15°)\mathbf{j},$$

aplique (14.9) para determinar la magnitud de $\mathbf{F}_1$ y de $\mathbf{F}_2$. (*Sugerencia:* repase la Definición 14.1(*iii*).)

Problemas diversos

37. Sean P_1 y P_2 puntos en el espacio. Si M es el punto medio del segmento de recta que los une, demuestre que $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2})$.

38. Utilizando vectores demuestre que las diagonales de un paralelogramo se bisecan mutuamente. (*Sugerencia:* Sean M el punto medio de una diagonal y N el de la otra).

39. Utilizando vectores demuestre que el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado, y tiene la mitad de su longitud.

40. Sean P_1, P_2, P_3 puntos distintos tales que $\mathbf{a} = \overrightarrow{P_1P_2}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{P_2P_3}$ y $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{P_1P_3}$.

(a) ¿Cuál es la relación de $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ a $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$?

(b) ¿En qué condición es $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$?

14.3 Producto escalar

En esta sección y en la siguiente, consideraremos dos clases de *productos de vectores*, los cuales se originaron en el estudio de la mecánica y la electricidad y magnetismo. Primero consideramos el llamado **producto escalar**.*

DEFINICIÓN 14.2

El **producto escalar** de dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es el escalar

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta, \tag{14.10}$$

en donde θ es el ángulo entre los vectores, tal que $0 \le \theta \le \pi$. □

La Figura 14.26 ilustra el ángulo θ en tres casos. Cuando los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ no son paralelos, θ es el *menor* de los dos ángulos posibles entre ellos.

* Conocido también como producto interior y producto punto.

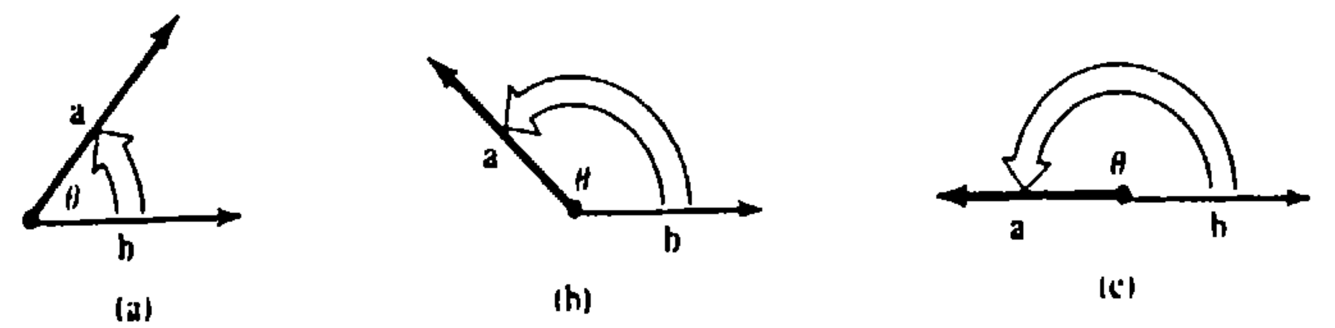


Figura 14.26

Ejemplo 1

En virtud de (14.10) obtenemos

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1, \quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = 1, \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1 \tag{14.11}$$

ya que $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$, y $\cos\theta = 1$ en cada caso.

Propiedades

El producto escalar posee las siguientes propiedades.

(*i*) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$ si $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ o bien $\mathbf{b} = \mathbf{0}$

(*ii*) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ (Ley conmutativa)

(*iii*) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ (Ley distributiva)

(*iv*) $\mathbf{a}\cdot(k\mathbf{b}) = (k\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = k(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$, en donde k es un escalar

(*v*) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} \geq 0$

(*vi*) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$.

Cada una de las propiedades anteriores, con la posible excepción de (*iii*), debe ser evidente en virtud de (14.10). Obsérvese que (*vi*) dice que la magnitud de un vector

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

se puede escribir como

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Vectores ortogonales

Si **a** y **b** son vectores no nulos, la Definición 14.2 implica que

(*i*) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} > 0$ si y sólo si θ es agudo.

(*ii*) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} < 0$ si y sólo si θ es obtuso, y

(*iii*) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$ si y sólo si $\cos\theta = 0$.

Sin embargo, en el último caso el único número de $[0, \pi]$ para el cual $\cos\theta = 0$ es $\theta = \pi/2$. Así que se llega al resultado siguiente.

TEOREMA 14.1

Dos vectores no nulos **a** y **b** son ortogonales si y sólo si $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$. □

Ejemplo 2

En virtud del Teorema 14.1 y del hecho de que el producto escalar es conmutativo, resulta de inmediato que

$$\begin{aligned}\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} &= \mathbf{j}\cdot\mathbf{i} = 0\\ \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} &= \mathbf{k}\cdot\mathbf{j} = 0\\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} &= \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = 0.\end{aligned} \tag{14.12}$$

Definición alternativa del producto escalar

Por la propiedad distributiva de este producto podemos escribir

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})\cdot(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})\\ &= a_1\mathbf{i}\cdot(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) + a_2\mathbf{j}\cdot(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})\\ &\quad + a_3\mathbf{k}\cdot(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})\\ &= a_1b_1(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}) + a_1b_2(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}) + a_1b_3(\mathbf{i}\cdot\mathbf{k})\\ &\quad + a_2b_1(\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}) + a_2b_2(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}) + a_2b_3(\mathbf{j}\cdot\mathbf{k})\\ &\quad + a_3b_1(\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}) + a_3b_2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}) + a_3b_3(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\end{aligned} \tag{14.13}$$

En vista de (14.11) y (14.12), la expresión (14.13) se reduce ahora a una forma alternativa del producto punto:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \tag{14.14}$$

En otras palabras, el producto escalar de dos vectores es la *suma de los productos de sus componentes correspondientes.**

Ejemplo 3

Si $\mathbf{a} = 10\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, entonces

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (10)(-\tfrac{1}{2}) + (2)(4) + (-6)(-3) = 21.$$

Ejemplo 4

Si $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, entonces

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (-3)(2) + (-1)(14) + (4)(5) = 0.$$

Por el Teorema 14.1, concluimos que **a** y **b** son ortogonales.

* La fórmula (14.14) puede obtenerse también de la ley de los cosenos. Puesto que un breve repaso de trigonometría nunca hace daño, lo exhortamos a que resuelva el Problema 39 de los Ejercicios 14.3.

Ángulo entre dos vectores

Igualando las dos formas del producto punto, (14.10) y (14.14), puede determinarse el ángulo entre dos vectores a partir de

$$\cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}. \tag{14.15}$$

Ejemplo 5

Encuentre el ángulo entre $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Solución

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{14}, \qquad |\mathbf{b}| = \sqrt{27}, \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 14$$

Por lo tanto, (14.15) da

$$\cos\theta = \frac{14}{\sqrt{14}\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{42}}{9}$$

y de esta manera

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{42}}{9}\right) \approx 0.77 \text{ radianes}$$

o bien, $\theta \approx 44.94°$.

Componente de a *sobre* b

El uso de la propiedad distributiva y (14.12) nos permite expresar los componentes de un vector $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ en función del producto escalar:

$$a_1 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{i}, \qquad a_2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{j}, \qquad a_3 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{k}. \tag{14.16}$$

Simbólicamente se tiene para los componentes de **a**,

$$\text{comp}_{\mathbf{i}}\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{i}, \qquad \text{comp}_{\mathbf{j}}\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{j}, \qquad \text{comp}_{\mathbf{k}}\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{k}. \tag{14.17}$$

Veremos ahora que el procedimiento indicado en (14.17) se extiende para encontrar la **componente de a según un vector arbitrario b**. Obsérvese que en cualquiera de los dos casos mostrados en la Figura 14.27,

$$\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cos\theta. \tag{14.18}$$

En la Figura 14.27(b), $\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} < 0$, ya que $\pi/2 < \theta \le \pi$. Ahora bien, escribiendo (14.18) como

$$\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta}{|\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|},$$

se ve que

$$\text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}. \tag{14.19}$$

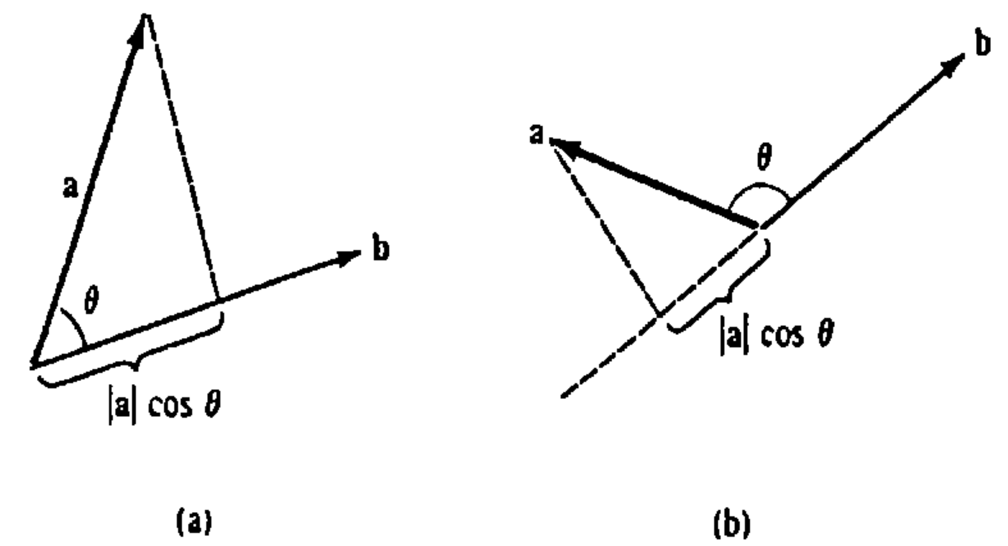


Figura 14.27

En otras palabras,

> *para encontrar la componente de* **a** *según un vector* **b**, *se determina el producto escalar de* **a** *con un vector unitario en la dirección de* **b**.

Ejemplo 6

Si $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, encuentre

(*a*) $\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$, (*b*) $\text{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$.

Solución

(*a*) $|\mathbf{b}| = \sqrt{6}$, $\dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$. En virtud de (14.19),

$$\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k})\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = -\frac{3}{\sqrt{6}}.$$

(*b*) Modificando (14.19) como corresponde, $\text{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$. Por lo tanto,

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{29}, \qquad \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{\sqrt{29}}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}),$$

y

$$\text{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k})\cdot\frac{1}{\sqrt{29}}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) = -\frac{3}{\sqrt{29}}.$$

Proyección de a *sobre* b

Como se ilustra en la Figura 14.28(a), la proyección de un vector **a** sobre cualquiera de las direcciones determinadas por **i**, **j**, **k** es simplemente el *vector* formado multiplicando la componente de **a** en la dirección especificada, por un vector unitario en esa dirección; por ejemplo,

$$\text{proy}_{\mathbf{i}}\mathbf{a} = (\text{comp}_{\mathbf{i}}\mathbf{a})\mathbf{i} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} = a_1\mathbf{i}$$

y así sucesivamente. La Figura 14.28(b) muestra el caso general de la **proyección de a sobre b**:*

* También llamada **proyección ortogonal de a sobre b**.

$$\text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = (\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a})\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}. \qquad (14.20)$$

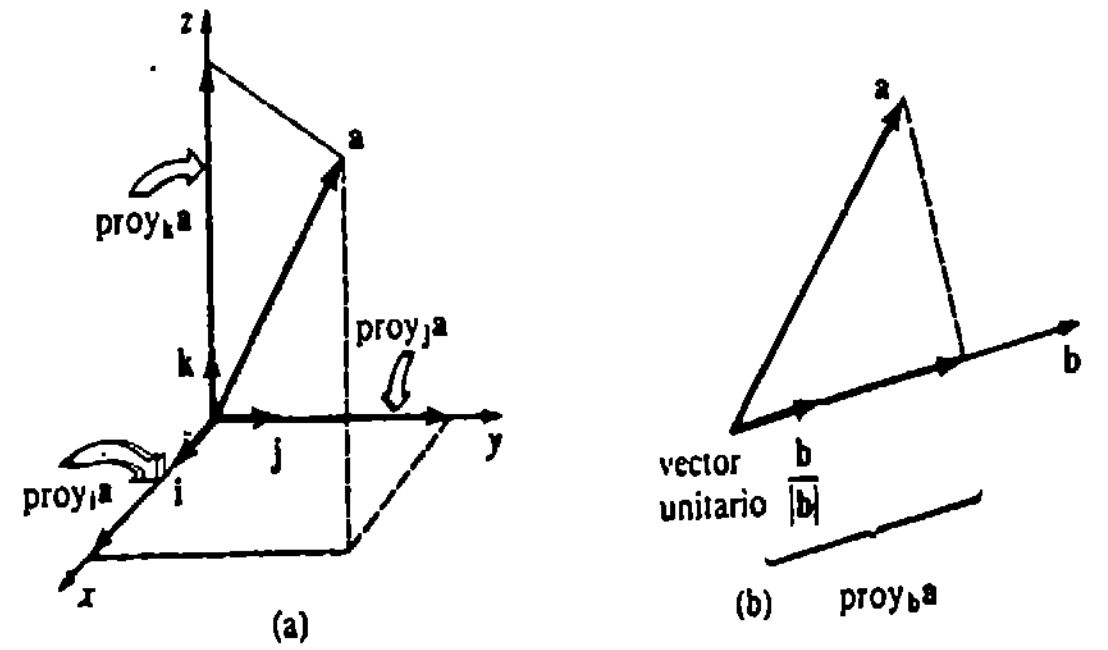


Figura 14.28

Ejemplo 7

Obtener la proyección de $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j}$ sobre el vector $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. Hacer la representación gráfica.

Solución Encontramos primero la componente de **a** sobre **b**. Puesto que $|\mathbf{b}| = \sqrt{13}$, en virtud de (14.19),

$$\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = (4\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot \frac{1}{\sqrt{13}}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) = \frac{11}{\sqrt{13}}.$$

Así que de (14.20),

$$\text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \left(\frac{11}{\sqrt{13}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right)(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) = \frac{22}{13}\mathbf{i} + \frac{33}{13}\mathbf{j}.$$

La representación gráfica de este vector se muestra en la Figura 14.29.

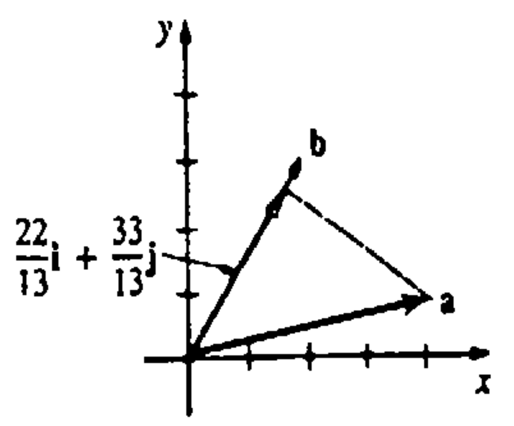


Figura 14.29

Proyección de a sobre $\mathbf{b}^{\perp}$

Si $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, cualquier vector **a** puede proyectarse sobre **b** lo mismo que sobre un vector $\mathbf{b}^{\perp}$, de magnitud $|\mathbf{b}|$, que sea ortogonal a **b**. De la Figura 14.30 se ve que **a** puede descomponerse en dos proyecciones:

$$\text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} + \text{proy}_{\mathbf{b}^{\perp}}\mathbf{a} = \mathbf{a}. \qquad (14.21)$$

La ecuación (14.21) permite definir la proyección de **a** sobre $\mathbf{b}^{\perp}$:

$$\text{proy}_{\mathbf{b}^{\perp}}\mathbf{a} = \mathbf{a} - \text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}. \qquad (14.22)$$

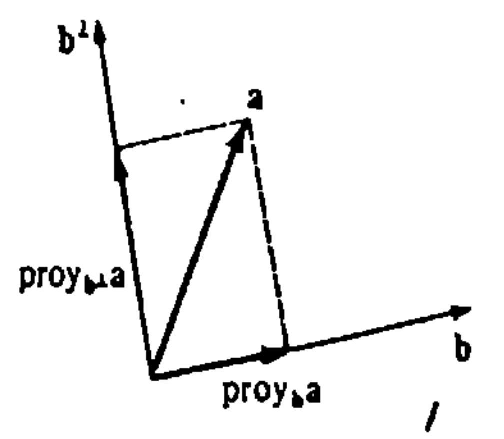


Figura 14.30

Ejemplo 8

Si $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, encuentre

(*a*) $\text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$, (*b*) $\text{proy}_{\mathbf{b}^{\perp}}\mathbf{a}$.

Solución Puesto que $|\mathbf{b}| = 3$,

$$\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = (3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \cdot \frac{1}{3}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = \frac{15}{3} = 5.$$

(*a*) $\text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = (5)\left(\frac{1}{3}\right)(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = \frac{10}{3}\mathbf{i} + \frac{5}{3}\mathbf{j} + \frac{10}{3}\mathbf{k}$

(*b*) $\text{proy}_{\mathbf{b}^{\perp}}\mathbf{a} = \mathbf{a} - \text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$

$$= (3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}) - \left(\frac{10}{3}\mathbf{i} + \frac{5}{3}\mathbf{j} + \frac{10}{3}\mathbf{k}\right) = -\frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{8}{3}\mathbf{j} + \frac{5}{3}\mathbf{k}$$

Interpretación física del producto escalar

En la Sección 6.9 vimos que cuando una fuerza constante de magnitud F hace mover un objeto una distancia d en la misma dirección de la fuerza, el trabajo realizado es simplemente

$$W = Fd. \qquad (14.23)$$

Sin embargo, si una fuerza constante **F** aplicada a un cuerpo actúa formando un ángulo θ con la dirección del movimiento, entonces el trabajo realizado por **F** se define como el producto de la componente de **F** en la dirección del desplazamiento y la distancia $|\mathbf{d}|$ que recorre el cuerpo:

$$W = (|\mathbf{F}| \cos \theta)|\mathbf{d}| = |\mathbf{F}||\mathbf{d}| \cos \theta.$$

Véase la Figura 14.31. De la Definición 14.2 resulta que si **F** causa un desplazamiento **d** de un cuerpo, entonces el trabajo realizado es

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}. \qquad (14.24)$$

Obsérvese que (14.24) se reduce a (14.23) cuando $\theta = 0$.

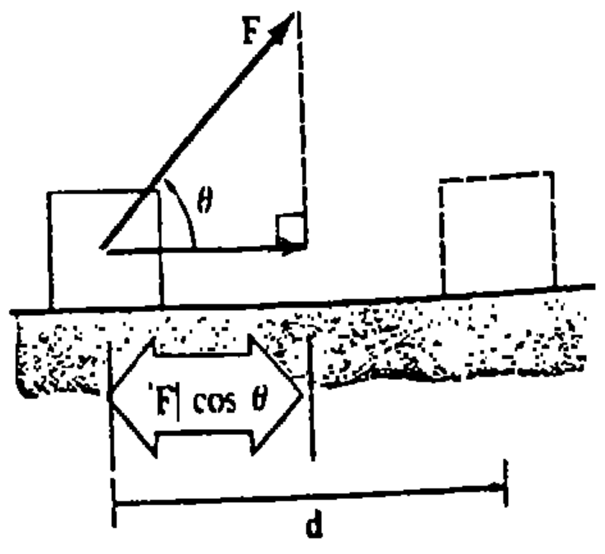


Figura 14.31

Ejemplo 9

Determinar el trabajo realizado por una fuerza constante $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ si su punto de aplicación en un bloque se traslada de $P_1(1, 1)$ a $P_2(4, 6)$. Suponga que $|\mathbf{F}|$ está medida en newtons y $|\mathbf{d}|$ está en metros.

Solución El desplazamiento del bloque está dado por

$$\mathbf{d} = \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}.$$

De (14.24) resulta que el trabajo realizado es

$$W = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) \cdot (3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) = 26 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Ejercicios 14.3

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 994.

En los Problemas 1 y 2 encuentre $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ si el ángulo más pequeño entre **a** y **b** es como se indica.

1. $|\mathbf{a}| = 10, |\mathbf{b}| = 5, \theta = \frac{\pi}{4}$

2. $|\mathbf{a}| = 6, |\mathbf{b}| = 12, \theta = \frac{\pi}{6}$

En los Problemas 3-14 $\mathbf{a} = \langle 2, -3, 4\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 2, 5\rangle$, y $\mathbf{c} = \langle 3, 6, -1\rangle$. Halle el número o el vector indicado.

3. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
4. $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$
5. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
6. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
7. $\mathbf{a} \cdot (4\mathbf{b})$
8. $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{c})$
9. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$
10. $(2\mathbf{b}) \cdot (3\mathbf{c})$
11. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$
12. $(2\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{a} - 2\mathbf{b})$
13. $\left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}}\right)\mathbf{b}$
14. $(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a}$

15. Determine qué parejas de los vectores siguientes son ortogonales.
    (a) $\langle 2, 0, 1\rangle$ (b) $3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$
    (c) $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$ (d) $\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$
    (e) $\langle 1, -1, 1\rangle$ (f) $\langle -4, 3, 8\rangle$

16. Determine un escalar c de modo que sean ortogonales las parejas de vectores indicadas.
    (a) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - c\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ (b) $\mathbf{a} = \langle c, \frac{1}{2}, c\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -3, 4, c\rangle$

17. Halle un vector $\mathbf{v} = \langle x_1, y_1, 1\rangle$ que sea ortogonal tanto a $\mathbf{a} = \langle 3, 1, -1\rangle$ como a $\mathbf{b} = \langle -3, 2, 2\rangle$.

18. Determine un escalar c de manera que el ángulo entre $\mathbf{a} = \mathbf{i} + c\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ sea de 45°.

En los Problemas 19-22 encuentre el ángulo θ entre los vectores indicados.

19. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$

20. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
21. $\mathbf{a} = \langle 2, 4, 0\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, -1, 4\rangle$
22. $\mathbf{a} = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -4, 6\rangle$

En los Problemas 23-26, $\mathbf{a} = \langle 1, -1, 3\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 2, 6, 3\rangle$. Halle el número indicado.

23. $\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$
24. $\text{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$
25. $\text{comp}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$
26. $\text{comp}_{2\mathbf{b}}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$

En los Problemas 27 y 28 encuentre la componente del vector dado, en la dirección que va del origen al punto indicado.

27. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$; $P(3, 10)$
28. $\mathbf{a} = \langle 2, 1, -1\rangle$, $P(1, -1, 1)$

En los Problemas 29-32 determine (*a*) $\text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$ y (*b*) $\text{proy}_{\mathbf{b}^\perp}\mathbf{a}$.

29. $\mathbf{a} = -5\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
30. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{i}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j}$
31. $\mathbf{a} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
32. $\mathbf{a} = \langle 1, 1, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -2, 2, -1\rangle$

En los Problemas 33 y 34 $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$. Obtenga el vector indicado.

33. $\text{proy}_{(\mathbf{a}+\mathbf{b})}\mathbf{a}$
34. $\text{proy}_{(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\perp}\mathbf{b}$

35. Un trineo es arrastrado horizontalmente sobre el hielo mediante una cuerda atada a su parte delantera. Una fuerza de 20 lb que actúa formando un ángulo de 60° con la horizontal mueve al trineo una distancia de 100 pie. Calcule el trabajo realizado.

36. Evalúe el trabajo realizado si el punto en el que la fuerza constante $\mathbf{F} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ se aplica a un objeto, se desplaza de $P_1(3, 1, -2)$ a $P_2(2, 4, 6)$. Suponga que $|\mathbf{F}|$ está en newtons, y $|\mathbf{d}|$, en metros.

37. Un bloque con peso **w** es arrastrado sobre una superficie horizontal sin fricción por una fuerza constante **F** de 30 N de magnitud, en la dirección indicada por un vector **d**. Véase la Figura 14.32. Supóngase que $|\mathbf{d}|$ se mide en metros.
    (a) ¿Cuál es el trabajo realizado por el peso **w**?
    (b) ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza **F** si $\mathbf{d} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$?

38. Una fuerza constante **F** de 3 lb de magnitud se aplica al bloque mostrado en la Figura 14.33. **F** tiene la misma dirección que el vector $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$. Halle el trabajo realizado en la dirección del movimiento si el bloque se traslada de $P_1(3, 1)$ a $P_2(9, 3)$. Supóngase que la distancia está medida en pies.

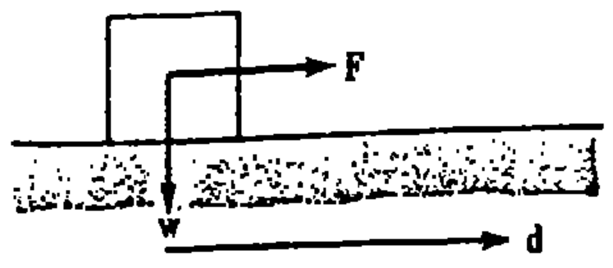


Figura 14.32

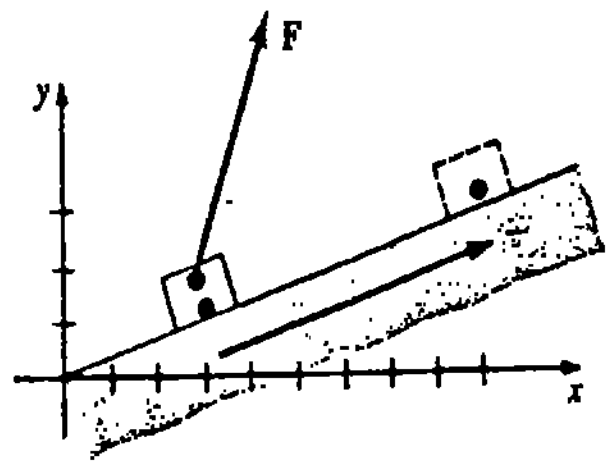


Figura 14.33

Problemas diversos

39. Utilice la Figura 14.34 con $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, y la Ley de los Cosenos para demostrar (14.14).

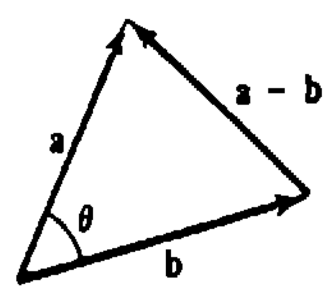


Figura 14.34

40. Aplique el producto escalar o punto para demostrar la **desigualdad de Cauchy-Schwarz**: $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \le |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$.

41. Aplique el producto punto para demostrar la desigualdad del triángulo, $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$. (*Sugerencia:* Considere la propiedad (*vi*).)

42. Demuestre que el vector $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ es perpendicular a la recta cuya ecuación es $ax + by + c = 0$. (*Sugerencia:* Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ puntos distintos de la recta.)

43. Aplique el resultado del Problema 42 y la Figura 14.35 para demostrar que la distancia d de un pun-

to $P_1(x_1, y_1)$ a una recta $ax + by + c = 0$ es $d = |ax_1 + by_1 + c|/\sqrt{a^2 + b^2}$.

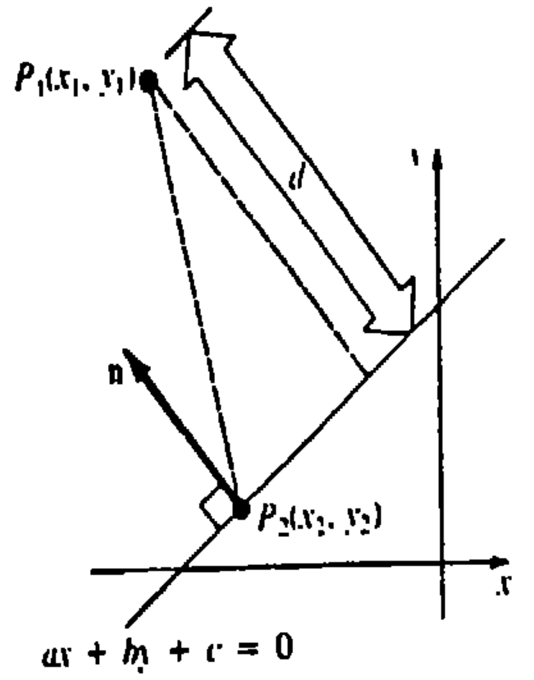


Figura 14.35

44. Los ángulos α, β y γ que un vector $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ forma con respecto a los vectores **i**, **j**, **k**, se llaman **ángulos directores** del vector. Véase la Figura 14.36. Utilice el producto de punto para demostrar que

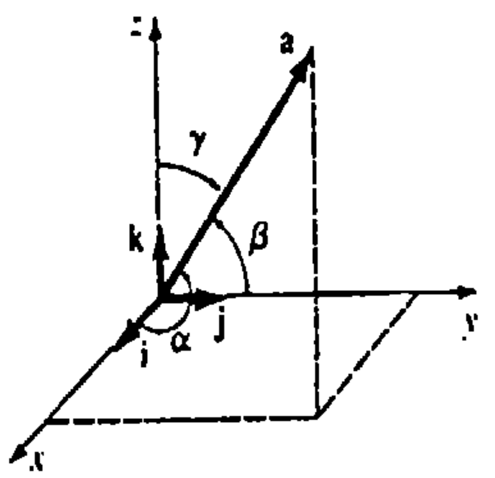


Figura 14.36

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}. \tag{14.25}$$

Los números definidos en (14.25) se llaman **cosenos directores** del vector.

45. Determine que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

46. Determine un vector unitario cuyos ángulos directores con respecto a los tres ejes de coordenadas sean iguales.

Problemas para calculadora

En los Problemas 47-49 aplique el resultado del Problema 44 para determinar los ángulos directores del vector indicado.

47. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

48. $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

49. $\mathbf{a} = \langle 1, 0, -\sqrt{3} \rangle$

50. Un avión se encuentra a 4 km de altura, 5 km al sur y 7 km al este de un aeropuerto. Véase la Figura 14.37. Calcule los ángulos directores del avión.

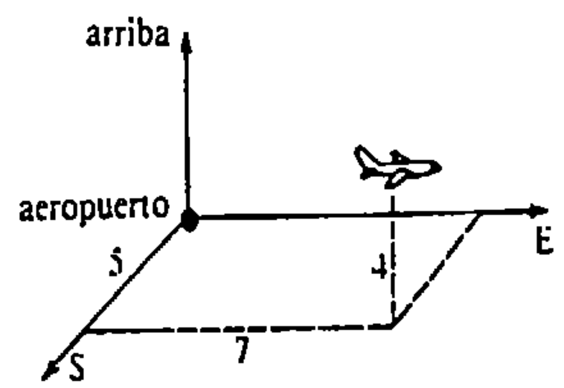


Figura 14.37

14.4 Producto vectorial

Repaso

Puesto que el conocimiento de los determinantes de orden 2 y de orden 3 es importante para la discusión que sigue, recordamos los siguientes hechos.

(*a*) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$

(*b*) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$

A esto se le llama **desarrollo del determinante por cofactores del primer renglón.**

(*c*) Cuando se intercambian dos renglones de un determinante, el determinante que resulta es el negativo del original.

Vea en el Apéndice I un repaso de las propiedades de los determinantes.

En contraste con el producto punto, que es un número o escalar, el producto vectorial* de dos vectores es obviamente un vector.

DEFINICIÓN 14.3

El **producto vectorial** de dos vectores **a** y **b** es el vector

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \operatorname{sen}\theta)\mathbf{n}, \tag{14.26}$$

en donde θ es el ángulo entre los vectores tal que $0 \le \theta \le \pi$, y **n** es un vector unitario perpendicular al plano de **a** y **b**, con dirección indicada por la regla de la mano derecha.

Si los dedos extendidos de la mano derecha apuntan en dirección del vector **a** y luego se encorvan hasta apuntar hacia el vector **b**, el pulgar indicará la dirección de **n** y por lo tanto de **a** × **b**, como se ve en la Figura 14.38(a). La regla de la mano derecha muestra la dirección de **b** × **a** en la Figura 14.38(b).

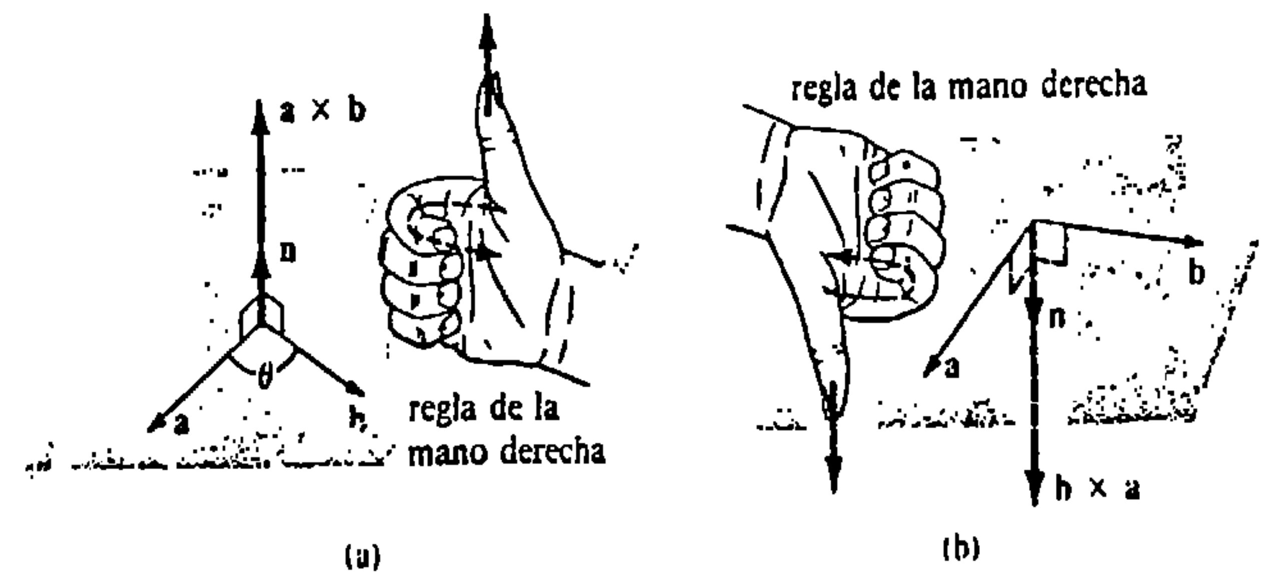


Figura 14.38

Ejemplo 1

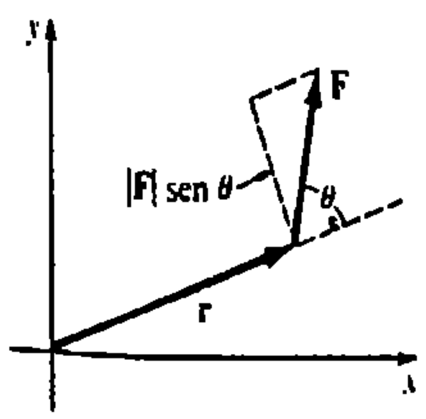


Figura 14.39

En física se dice que una fuerza **F** que actúa en el extremo de un vector de posición **r** produce un **momento de fuerza** o **torque** τ definido por $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, como se muestra en la Figura 14.39. Por ejemplo, si $|\mathbf{F}| = 20$ N, $|\mathbf{r}| = 3.5$ m, $\theta = 30°$, entonces en virtud de (14.26) $|\tau| = (3.5)(20)$ sen $30° = 35$ N-m. Si **F** y **r** están en el plano de la página, la regla de la mano derecha implica que la dirección de τ es hacia afuera de la página, y perpendicular a la misma (apunta hacia el lector).

* Al producto vectorial también se le llama **producto exterior** o **producto cruz**.

Propiedades

El producto vectorial tiene las siguientes **propiedades**.

(*i*) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ si $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ o bien $\mathbf{b} = \mathbf{0}$

(*ii*) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

(*iii*) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$

(*iv*) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

} Leyes distributivas

(*v*) $\mathbf{a} \times (k\mathbf{b}) = (k\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, en donde k es un escalar

(*vi*) $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$

(*vii*) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$

(*viii*) $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$

La propiedad (*vi*) resulta de (14.26) porque $\theta = 0$. Las propiedades (*vii*) y (*viii*) son simplemente declaraciones del hecho de que $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es perpendicular al plano que contiene a $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. La propidad (*ii*) debe ser clara intuitivamente en virtud de la Figura 14.38.

Vectores paralelos

Cuando el ángulo entre dos vectores no nulos es $\theta = 0$, o bien $\theta = \pi$, entonces sen $\theta = 0$, y de esta manera debe tenerse $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$. Esto se expresa formalmente en el teorema que sigue.

TEOREMA 14.2

Dos vectores no nulos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son **paralelos** si y sólo si $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$. □

Ejemplo 2

(*a*) En virtud de la propiedad (*vi*),

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}. \tag{14.27}$$

(*b*) Si $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = -6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k} = -3\mathbf{a}$, entonces $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son paralelos. Por lo tanto, por el Teorema 14.2 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$. Obsérvese que este resultado se obtiene también combinando las propiedades (*v*) y (*vi*).

Si $\mathbf{a} = \mathbf{i}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j}$, entonces de (14.26)

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \left(|\mathbf{i}||\mathbf{j}| \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{n} = \mathbf{n}.$$

Pero, puesto que k es un vector perpendicular al plano que contiene a $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ con la dirección indicada por la regla de la mano derecha, entonces $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$.

Ejemplo 3

El producto vectorial de cualquier par de vectores del conjunto $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ se puede obtener con la siguiente regla mnemotecnica circular

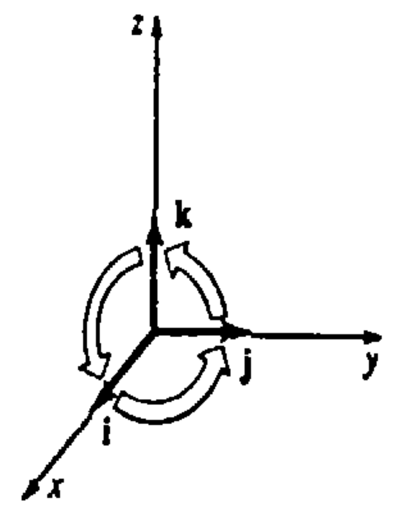


Figura 14.40

esto es,

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \mathbf{i} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} \end{aligned}\right\} \text{ y por la propiedad } (ii) \quad \left\{\begin{aligned} \mathbf{j} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{k} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{j} \end{aligned}\right. \tag{14.28}$$

Véase la Figura 14.40

Definición alternativa del producto vectorial

Tal como se hizo para el producto escalar, puede utilizarse la ley distributiva para llegar a una forma alternativa del producto cruz

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\ &= a_1\mathbf{i} \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) + a_2\mathbf{j} \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\ &\quad + a_3\mathbf{k} \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\ &= a_1b_1(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + a_1b_2(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + a_1b_3(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) \\ &\quad + a_2b_1(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + a_2b_2(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + a_2b_3(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) \\ &\quad + a_3b_1(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + a_3b_2(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + a_3b_3(\mathbf{k} \times \mathbf{k}). \end{aligned} \tag{14.29}$$

Utilizando las fórmulas (14.27) y (14.28), (14.29) se reduce a

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}. \tag{14.30}$$

Con una ojeada rápida a la parte (*a*) del repaso introductorio, observamos que (14.30) puede escribirse como sigue

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}. \tag{14.31}$$

Un examen de la parte (*b*) del repaso revela, a su vez, que (14.31) equivale a

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{14.32}$$

Ejemplo 4

Si $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, determinar $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Solución

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= -3\mathbf{i} + 19\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$$

La parte (*c*) del repaso, junto con (14.32), dan lugar a una demostración fácil de la propiedad (*ii*):

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

Productos especiales

El llamado **triple producto escalar** de tres vectores **a**, **b** y **c** es

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

Ahora bien,

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \cdot \left[\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}\right]$$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

De manera que

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (14.33)$$

Además, por las propiedades de los determinantes,

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

El **triple producto vectorial** de tres vectores **a**, **b** y **c** es

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

Se deja como ejercicio demostrar que

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}. \qquad (14.34)$$

Áreas y volumen

Puede considerarse que dos vectores **a** y **b** no nulos y no paralelos son los lados de un paralelogramo. **El área A de un paralelogramo es**

$$A = (\text{base}) \cdot (\text{altura})$$

De la Figura 14.41(a) resulta que

$$A = |\mathbf{b}|(|\mathbf{a}|\operatorname{sen}\theta) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\operatorname{sen}\theta$$

o bien

$$A = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|. \qquad (14.35)$$

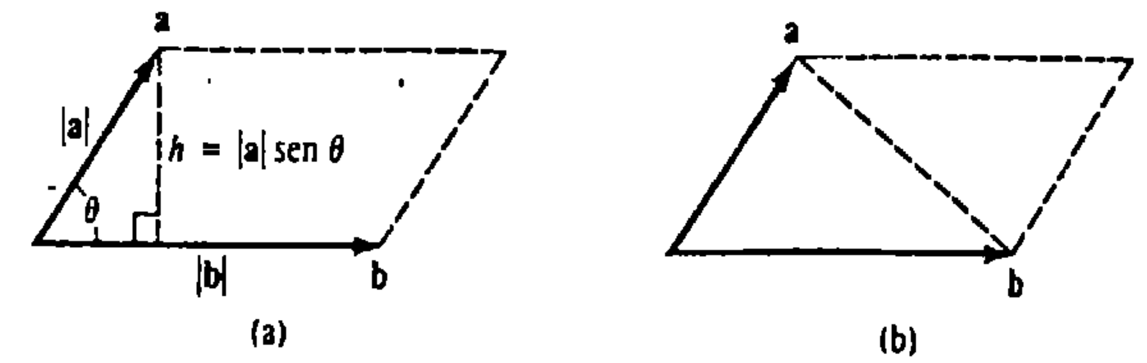


Figura 14.41

Del mismo modo, de la Figura 14.41(b) se ve que el área de un triángulo con lados **a** y **b** es

$$A = \frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|. \qquad (14.36)$$

De manera semejante, el volumen del paralelepípedo mostrado en la Figura 14.42 es

$$V = (\text{área de la base})(\text{altura})$$
$$= |\mathbf{b} \times \mathbf{c}||\text{comp}_{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}\mathbf{a}|$$
$$= |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|\left|\mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|}\right|$$

o bien

$$V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|. \qquad (14.37)$$

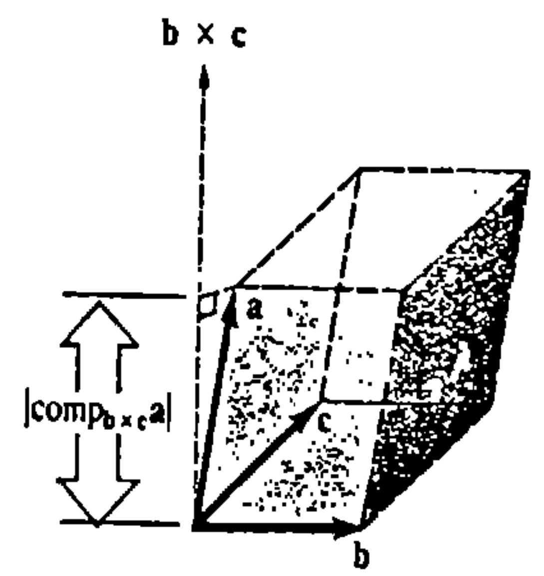


Figura 14.42

Ejemplo 5

Evaluar el área del triángulo determinado por los puntos $P_1(1, 1, 1)$, $P_2(2, 3, 4)$ y $P_3(3, 0, -1)$.

Solución Los vectores $\overrightarrow{P_1P_2}$ y $\overrightarrow{P_2P_3}$ pueden considerarse como dos de los lados del triángulo. Puesto que

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

y

$$\overrightarrow{P_2P_3} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k},$$

tenemos

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= -\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 5\mathbf{k}.$$

En virtud de (14.36) el área es

$$A = \frac{1}{2}|-\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 5\mathbf{k}| = \frac{3}{2}\sqrt{10} \text{ unidades cuadradas.}$$

Observación

Al trabajar con vectores se debe tener cuidado de no confundir los símbolos punto (•) y cruz (×) con los símbolos de la multiplicación ordinaria, y especialmente en el uso, o falta de uso, de los paréntesis. Por ejemplo, expresiones como

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{bc}$$

no tienen significado o no están *bien definidos*.

Ejercicios 14.4

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 994.

En los Problemas 1-10 determine $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

1. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$
2. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - \mathbf{k}$
3. $\mathbf{a} = \langle 1, -3, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 0, 4\rangle$
4. $\mathbf{a} = \langle 1, 1, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -5, 2, 3\rangle$
5. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$
6. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$
7. $\mathbf{a} = \langle \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 4, 6, 0\rangle$
8. $\mathbf{a} = \langle 0, 5, 0\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -3, 4\rangle$
9. $\mathbf{a} = \langle 2, 2, -4\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -3, -3, 6\rangle$
10. $\mathbf{a} = \langle 8, 1, -6\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, -2, 10\rangle$

En los Problemas 11 y 12 evalúe $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}$.

11. $P_1(2, 1, 3)$, $P_2(0, 3, -1)$, $P_3(-1, 2, 4)$
12. $P_1(0, 0, 1)$, $P_2(0, 1, 2)$, $P_3(1, 2, 3)$

En los Problemas 13 y 14, (*a*) calcule $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ y enseguida $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. (*b*) Verifique los resultados de la parte (*a*) mediante (14.34) de esta sección.

13. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
 $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
 $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
14. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}$
 $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$
 $\mathbf{c} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$

En los Problemas 15-32 encuentre el número o el vector indicado *sin* utilizar (14.32), (14.33) o (14.34).

15. $(2\mathbf{i}) \times \mathbf{j}$
16. $\mathbf{i} \times (-3\mathbf{k})$
17. $\mathbf{k} \times (2\mathbf{i} - \mathbf{j})$
18. $\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{k})$
19. $[(2\mathbf{k}) \times (3\mathbf{j})] \times (4\mathbf{j})$
20. $(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \times \mathbf{i}$
21. $(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (\mathbf{i} + 5\mathbf{k})$
22. $\mathbf{i} \times \mathbf{k} - 2(\mathbf{j} \times \mathbf{i})$
23. $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{k})$
24. $\mathbf{i} \cdot [\mathbf{j} \times (-\mathbf{k})]$
25. $|4\mathbf{j} - 5(\mathbf{i} \times \mathbf{j})|$
26. $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \cdot (3\mathbf{j} \times \mathbf{i})$
27. $\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j})$
28. $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{i}$
29. $(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j}$
30. $(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i})(\mathbf{i} \times \mathbf{j})$
31. $2\mathbf{j} \cdot [\mathbf{i} \times (\mathbf{j} - 3\mathbf{k})]$
32. $(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) \times (\mathbf{j} \times \mathbf{i})$

En los Problemas 33-40, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Obtenga el número o el vector indicado.

33. $\mathbf{a} \times (3\mathbf{b})$
34. $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

35. $(-\mathbf{a}) \times \mathbf{b}$
36. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$
37. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$
38. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$
39. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
40. $(4\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

En los Problemas 41-44 calcule el área del triángulo determinado por los puntos indicados.

41. $P_1(1, 1, 1)$, $P_2(1, 2, 1)$, $P_3(1, 1, 2)$
42. $P_1(0, 0, 0)$, $P_2(0, 1, 2)$, $P_3(2, 2, 0)$
43. $P_1(1, 2, 4)$, $P_2(1, -1, 3)$, $P_3(-1, -1, 2)$
44. $P_1(1, 0, 3)$, $P_2(0, 0, 6)$, $P_3(2, 4, 5)$

En los Problemas 45 y 46 determine el volumen del paralelepípedo para el cual los vectores indicados son tres de sus aristas.

45. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
46. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$
47. El vector $\mathbf{a}$ se encuentra en el plano xy y el vector $\mathbf{b}$ sobre el eje z positivo, como se muestra en la Figura 14.43. Sus magnitudes son $|\mathbf{a}| = 6.4$ y $|\mathbf{b}| = 5$.
 (a) Utilizar la Definición 14.3 para evaluar $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.
 (b) Aplicar la regla de la mano derecha para hallar la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
 (c) Emplear la parte (b) para expresar $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ en términos de los vectores unitarios $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.
48. Dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ se encuentran en el plano xz de manera que el ángulo entre ellos es 120°. Si $|\mathbf{a}| = \sqrt{27}$ y $|\mathbf{b}| = 8$, halle todos los valores posibles de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

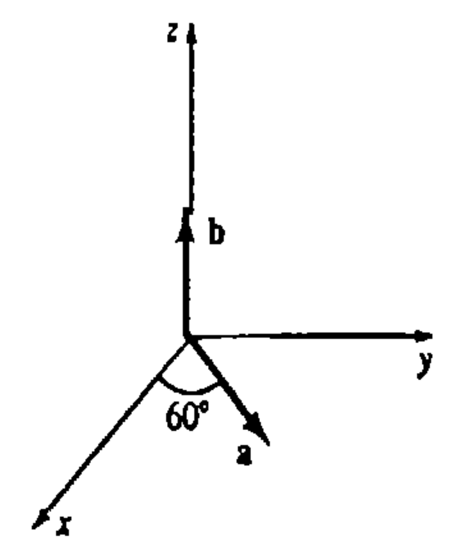


Figura 14.43

Problemas diversos

49. Supóngase que $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son vectores no nulos tales que $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$. ¿Qué conclusión geométrica se puede obtener respecto de $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$?
50. Demuestre que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$.
51. Demuestre o refute que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$.
52. Demuestre que $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.
53. Verifique que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$.
54. Demuestre la identidad de Lagrange*

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2.$$

55. Determine si $a \times b = a \times c$ implica que $b = c$.
56. Demuestre que $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 2\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

14.5 Rectas en el espacio tridimensional

Ecuación vectorial

Al igual que en el plano, dos puntos distintos cualesquiera en el espacio de tres dimensiones determinan una recta única que pasa por ellos. Para encontrar una ecuación de la recta que pasa por $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ supongamos que $P(x, y, z)$ es *cualquier* punto de la recta. Con referencia a la Figura 14.44, si $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OP_1}$ y $\mathbf{r}_2 = \overrightarrow{OP_2}$, se ve que el vector $\mathbf{a} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ es paralelo al vector $\mathbf{r} - \mathbf{r}_2$. Así que,

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_2 = t(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \tag{14.38}$$

* Joseph Louis Lagrange (1738-1813), matemático francés, fue llamado por Napoleón Bonaparte una "pirámide excelsa de... las ciencias matemáticas."

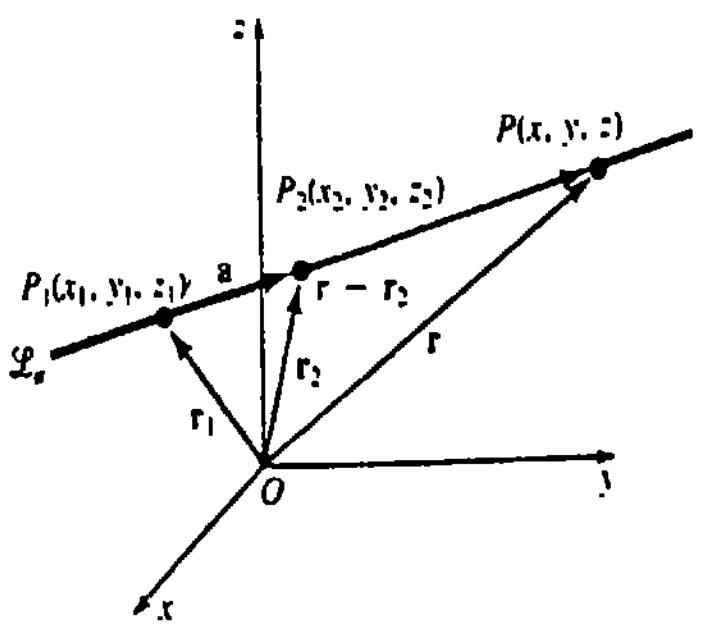


Figura 14.44

Si escribimos

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle = \langle a_1, a_2, a_3\rangle,$$

entonces (14.38) implica que una **ecuación vectorial** de la recta $\mathcal{L}_a$ es

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t\mathbf{a}. \tag{14.39}$$

Al vector **a** se le llama **vector director** de la recta.

Nota: Puesto que $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ es también paralelo a $\mathcal{L}_a$, otra ecuación vectorial de la recta es $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$. También $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t(-\mathbf{a})$ y $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t(k\mathbf{a})$, en donde k es un escalar, son ciertamente ecuaciones de $\mathcal{L}_a$.

Ejemplo 1

Obtener una ecuación vectorial de la recta que pasa por (2, −1, 8) y (5, 6, −3).

Solución Se define

$$\mathbf{a} = \langle 2 - 5, -1 - 6, 8 - (-3)\rangle = \langle -3, -7, 11\rangle.$$

Las siguientes son tres ecuaciones vectoriales posibles de la recta:

$$\langle x, y, z\rangle = \langle 2, -1, 8\rangle + t\langle -3, -7, 11\rangle \tag{14.40}$$

$$\langle x, y, z\rangle = \langle 5, 6, -3\rangle + t\langle -3, -7, 11\rangle \tag{14.41}$$

$$\langle x, y, z\rangle = \langle 5, 6, -3\rangle + t\langle 3, 7, -11\rangle. \tag{14.42}$$

Ecuaciones paramétricas

Escribiendo (14.39) como

$$\begin{aligned}\langle x, y, z\rangle &= \langle x_2 + t(x_2 - x_1), y_2 + t(y_2 - y_1), z_2 + t(z_2 - z_1)\rangle \\ &= \langle x_2 + a_1t, y_2 + a_2t, z_2 + a_3t\rangle\end{aligned}$$

e igualando componentes,

$$x = x_2 + a_1t, \quad y = y_2 + a_2t, \quad z = z_2 + a_3t. \tag{14.43}$$

Las ecuaciones (14.43) se llaman **ecuaciones paramétricas** de la recta.

Ejemplo 2

Obtener ecuaciones paramétricas de la recta del Ejemplo 1.

Solución De (14.40) resulta que

$$x = 2 - 3t, \quad y = -1 - 7t, \quad z = 8 + 11t. \tag{14.44}$$

Se puede obtener de (14.42) otro conjunto de ecuaciones paramétricas:

$$x = 5 + 3t, \quad y = 6 + 7t, \quad z = -3 - 11t. \tag{14.45}$$

Obsérvese en el Ejemplo 2 que el valor $t = 0$ en (14.44) da (2, −1, 8), mientras que en (14.45), se debe usar $t = -1$ para obtener el mismo punto.

Ejemplo 3

Encontrar un vector **a** que sea paralelo a la recta $\mathcal{L}_a$ cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = 4 + 9t, \quad y = -14 + 5t, \quad z = 1 - 3t.$$

Solución Los coeficientes (o bien, múltiplos constantes no nulos de los coeficientes) del parámetro en cada ecuación, son las componentes de un vector que es paralelo a la recta. Así que, $\mathbf{a} = 9\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ es paralelo a $\mathcal{L}_a$ y, por lo tanto, es un vector director de la recta.

Forma simétrica

Obsérvese de (14.43) que podemos eliminar el parámetro escribiendo

$$t = \frac{x - x_2}{a_1} = \frac{y - y_2}{a_2} = \frac{z - z_2}{a_3}.$$

Las ecuaciones resultantes

$$\frac{x - x_2}{a_1} = \frac{y - y_2}{a_2} = \frac{z - z_2}{a_3} \tag{14.46}$$

se dice que son la **forma simétrica** de una recta.

Ejemplo 4

Obtener ecuaciones en forma simétrica de la recta que pasa por (4, 10, −6) y (7, 9, 2).

Solución Se define $a_1 = 7 - 4 = 3$, $a_2 = 9 - 10 = -1$ y $a_3 = 2 - (-6) = 8$. De (14.46) resulta que una forma simétrica es

$$\frac{x-7}{3} = \frac{y-9}{-1} = \frac{z-2}{8}.$$

Naturalmente suponemos que en (14.46) los números a_1, a_2 y a_3 son todos diferentes de cero. Si, por ejemplo, $a_1 = 0$, entonces de (14.43) resulta que $x = x_2$.

Ejemplo 5

Obtener ecuaciones en forma simétrica de la recta que pasa por (5, 3, 1) y (2, 1, 1).

Solución Se define $a_1 = 5 - 2 = 3$, $a_2 = 3 - 1 = 2$ y $a_3 = 1 - 1 = 0$. Una forma simétrica de la recta se escribe como

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y-3}{2}, \qquad z = 1.$$

En otras palabras, la forma simétrica describe una recta en el plano $z = 1$.

Una recta en el espacio se determina también especificando un punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y un vector director **a**. Por el punto P_1 pasa solamente una recta $\mathscr{L}_a$ paralela al vector dado. Si $P(x, y, z)$ es un punto en la recta $\mathscr{L}_a$ mostrada en la Figura 14.45, entonces, como anteriormente,

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_1} = t\mathbf{a} \quad \text{o bien} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}.$$

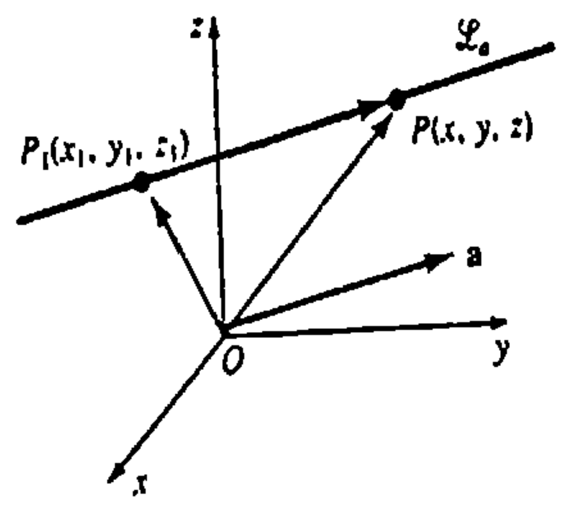


Figura 14.45

Ejemplo 6

Escribir las ecuaciones vectorial, paramétricas y en forma simétrica de la recta que pasa por (4, 6, −3) y es paralela a $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Solución

Vectorial: $\langle x, y, z\rangle = \langle 4, 6, -3\rangle + t\langle 5, -10, 2\rangle$

Paramétricas: $x = 4 + 5t, \quad y = 6 - 10t, \quad z = -3 + 2t$

Forma simétrica: $\dfrac{x-4}{5} = \dfrac{y-6}{-10} = \dfrac{z+3}{2}$

Rectas ortogonales y paralelas

Sean **a** y **b** vectores directores de las rectas $\mathscr{L}_a$ y $\mathscr{L}_b$, respectivamente.

DEFINICIÓN 14.4

(*i*) $\mathscr{L}_a$ y $\mathscr{L}_b$ son **ortogonales** si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, y

(*ii*) $\mathscr{L}_a$ y $\mathscr{L}_b$ son **paralelas** si $\mathbf{a} = k\mathbf{b}$ para algún escalar no nulo k. □

Ejemplo 7

Las rectas

$$\mathscr{L}_a: x = 4 - 2t, \quad y = 1 + 4t, \quad z = 3 + 10t$$
$$\mathscr{L}_b: x = s, \quad y = 6 - 2s, \quad z = \frac{1}{2} - 5s$$

son paralelas puesto que $\mathbf{a} = -2\mathbf{b}$ (o bien $\mathbf{b} = -\frac{1}{2}\mathbf{a}$), en donde

$$\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 10\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}.$$

Ejemplo 8

Determinar si las rectas

$$\mathscr{L}_a: x = -6 - t, \quad y = 20 + 3t, \quad z = 1 + 2t$$
$$\mathscr{L}_b: x = 5 + 2s, \quad y = -9 - 4s, \quad z = 1 + 7s$$

son ortogonales.

Solución Fijándonos en los coeficientes de los parámetros, es claro que

$$\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$$

son los vectores directores de $\mathscr{L}_a$ y $\mathscr{L}_b$, respectivamente. Como

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -2 - 12 + 14 = 0,$$

las rectas son ortogonales.

Obsérvese que (*i*) de la Definición 14.4 no requiere que las dos rectas se corten para ser ortogonales. La Figura 14.46 muestra dos rectas perpendiculares que no se cortan; en otras palabras, $\mathscr{L}_a$ puede ser perpendicular al plano que contiene a $\mathscr{L}_b$.

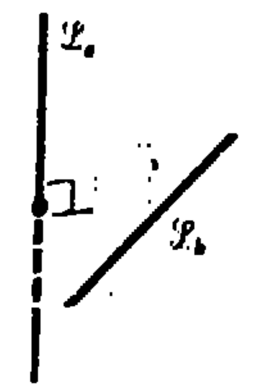


Figura 14.46

Ejemplo 9

Determinar si se cortan las rectas $\mathcal{L}_a$ y $\mathcal{L}_b$ del Ejemplo 8.

Solución Puesto que un punto de intersección (x, y, z) es común a ambas rectas, debemos tener

$$\left.\begin{aligned} -6 - t &= 5 + 2s \\ 20 + 3t &= -9 - 4s \\ 1 + 2t &= 1 + 7s \end{aligned}\right\} \quad \text{o bien} \quad \left\{\begin{aligned} 2s + t &= -11 \\ 4s + 3t &= -29 \\ -7s + 2t &= 0. \end{aligned}\right. \qquad (14.47)$$

Ahora se resuelven simultáneamente *dos* ecuaciones cualesquiera, y se emplea la ecuación restante para comprobar. Eligiendo la primera y la tercera, encontramos a partir de

$$\begin{aligned} 2s + t &= -11, \\ -7s + 2t &= 0 \end{aligned}$$

que $s = -2$ y $t = -7$. La sustitución de estos valores en la segunda ecuación produce la identidad $-8 - 21 = -29$.* Así que, $\mathcal{L}_a$ y $\mathcal{L}_b$ se cortan. Para encontrar el punto de intersección, utilizamos, por ejemplo, $s = -2$:

$$x = 5 + 2(-2), \qquad y = -9 - 4(-2), \qquad z = 1 + 7(-2)$$

o bien $(1, -1, -13)$.

Ejercicios 14.5

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 994

En los Problemas 1-4 halle una ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos indicados.

1. $(1, 2, 1), (3, 5, -2)$
2. $(0, 4, 5), (-2, 6, 3)$
3. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right), \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
4. $(10, 2, -10), (5, -3, 5)$

En los Problemas 5-8 encuentre ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos indicados.

5. $(2, 3, 5), (6, -1, 8)$
6. $(2, 0, 0), (0, 4, 9)$
7. $(1, 0, 0), (3, -2, -7)$
8. $(0, 0.5), (-2, 4, 0)$

En los Problemas 9-12 halle ecuaciones en forma simétrica de la recta que pasa por los puntos indicados.

9. $(1, 4, -9), (10, 14, -2)$
10. $\left(\frac{2}{3}, 0, -\frac{1}{4}\right), \left(1, 3, \frac{1}{4}\right)$
11. $(4, 2, 1), (-7, 2, 5)$
12. $(-5, -2, -4), (1, 1, 2)$

En los Problemas 13-16 encuentre ecuaciones paramétricas y una forma simétrica de la recta que pasa por el punto dado y es paralela al vector dado.

13. $(4, 6, -7)$, $\mathbf{a} = \left\langle 3, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle$
14. $(1, 8, -2)$, $\mathbf{a} = -7\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$
15. $(0, 0, 0)$, $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
16. $(0, -3, 10)$, $\mathbf{a} = \langle 12, -5, -6 \rangle$
17. Obtener ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $(6, 4, -2)$ y es paralela a la recta $x/2 = (1 - y)/3 = (z - 5)/6$.
18. Obtener ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $(1, 2, 8)$ y que es (a) paralela al eje y, (b) perpendicular al plano xy.
19. Demuestre que las rectas dadas por $\mathbf{r} = t\langle 1, 1, 1 \rangle$ y $\mathbf{r} = \langle 6, 6, 6 \rangle + t\langle -3, -3, -3 \rangle$ son una misma.
20. Determine cuáles de las rectas siguientes son ortogonales y cuáles son paralelas.
    (a) $\mathbf{r} = \langle 1, 0, 2 \rangle + t\langle 9, -12, 6 \rangle$
    (b) $x = 1 + 9t, y = 12t, z = 2 - 6t$
    (c) $x = 2t, y = -3t, z = 4t$
    (d) $x = 5 + t, y = 4t, z = 3 + \frac{5}{2}t$
    (e) $x = 1 + t, y = \frac{3}{2}t, z = 2 - \frac{3}{2}t$
    (f) $\dfrac{x + 1}{-3} = \dfrac{y + 6}{4} = \dfrac{z - 3}{-2}$

En los Problemas 21 y 22 determine los puntos de intersección de la recta dada y los tres planos coordenados.

21. $x = 4 - 2t, y = 1 + 2t, z = 9 + 3t$
22. $\dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y + 2}{3} = \dfrac{z - 4}{2}$

En los Problemas 23-26 determine si se cortan las rectas dadas. Si es así, halle el punto de intersección.

23. $x = 4 + t, y = 5 + t, z = -1 + 2t$
    $x = 6 + 2s, y = 11 + 4s, z = -3 + s$
24. $x = 1 + t, y = 2 - t, z = 3t$
    $x = 2 - s, y = 1 + s, z = 6s$
25. $x = 2 - t, y = 3 + t, z = 1 + t$
    $x = 4 + s, y = 1 + s, z = 1 - s$
26. $x = 3 - t, y = 2 + t, z = 8 + 2t$
    $x = 2 + 2s, y = -2 + 3s, z = -2 + 8t$

El ángulo entre dos rectas $\mathcal{L}_a$ y $\mathcal{L}_b$ es el ángulo entre sus vectores directores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. En los Problemas 27 y 28 determine el ángulo entre las rectas dadas.

27. $x = 4 - t, y = 3 + 2t, z = -2t;$
    $x = 5 + 2s, y = 1 + 3s, z = 5 - 6s$
28. $\dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{x + 5}{7} = \dfrac{z - 1}{-1}; \dfrac{x + 3}{-2} = x - 9 = \dfrac{z}{4}$

En los Problemas 29 y 30 las rectas que se dan están en un mismo plano. Encuentre ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto indicado y que es perpendicular a este plano.

29. $x = 3 + t, y = -2 + t, z = 9 + t$
    $x = 1 - 2s, y = 5 + s, z = -2 - 5s;$
    $(4, 1, 6)$
30. $\dfrac{x - 1}{3} = \dfrac{y + 1}{2} = \dfrac{z}{4}$
    $\dfrac{x + 4}{6} = \dfrac{y - 6}{4} = \dfrac{z - 10}{8}; (1, -1, 0)$

Problema diverso

31. Dos rectas $\mathcal{L}_a$ y $\mathcal{L}_b$ que no se cortan y que no son paralelas, se denominan **rectas cruzadas**. Dos rectas que se cruzan están en planos paralelos. Si P_1 y P_2 son puntos de la recta $\mathcal{L}_a$, y P_3 y P_4 son puntos de la recta $\mathcal{L}_b$, utilice el vector $\overrightarrow{P_1P_3}$, mostrado en la Figura 14.47, para demostrar que la distancia mínima d entre $\mathcal{L}_a$ y $\mathcal{L}_b$ es

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_1P_3} \cdot (\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_3P_4})|}{|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_3P_4}|}.$$

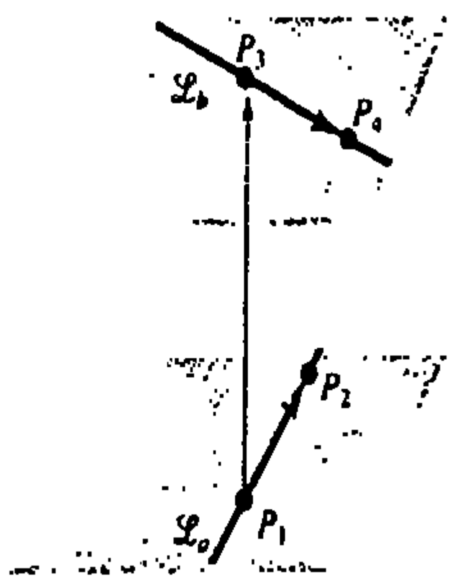


Figura 14.47

* Si la ecuación restante no se hubiera satisfecho, las rectas *no* se cortarían.

14.6 Planos

Ecuación vectorial

Por un punto dado $P_1(x_1, y_1, z_1)$ pasa una infinidad de planos. Sin embargo, si se especifican un punto P_1 y un vector $\mathbf{n}$, existe solamente *un* plano $\mathcal{P}$ que contiene a P_1 y en el que se tiene el **vector normal n** perpendicular al plano, como se muestra en la Figura

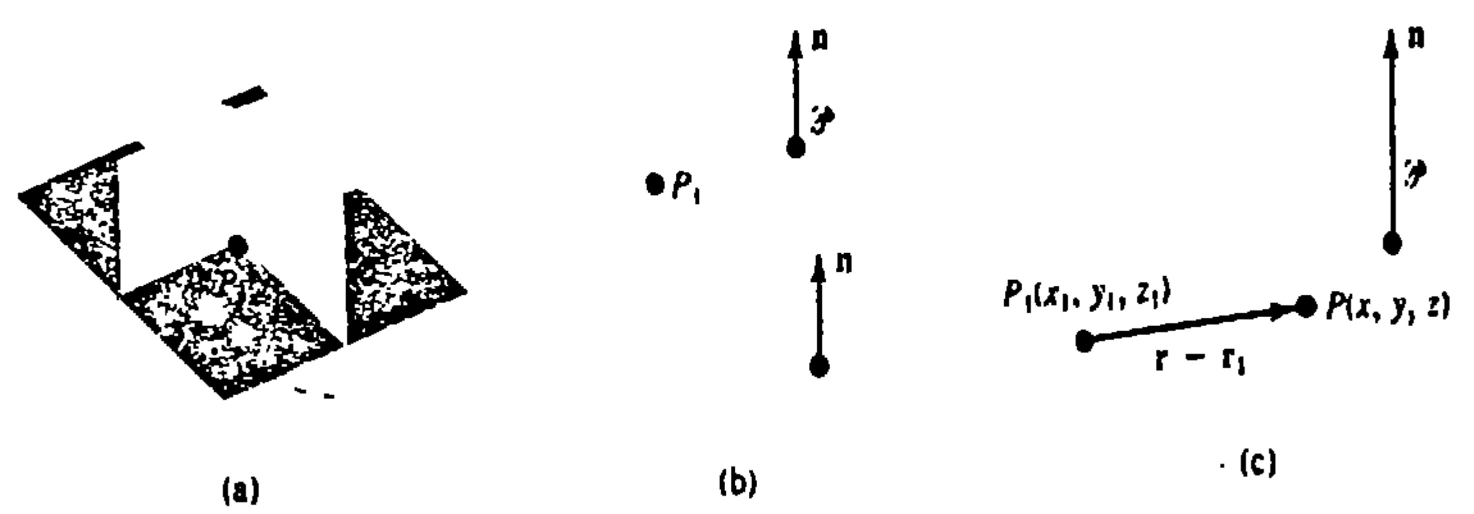


Figura 14.48

14.48(b). Además, si $P(x, y, z)$ es un punto cualquiera de $\mathcal{P}$, y $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OP_1}$, entonces $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ está en el plano, como se muestra en la Figura 14.48(c). Se concluye que una ecuación vectorial del plano es

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = 0. \qquad (14.48)$$

Ecuación cartesiana

Si específicamente el vector normal es $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, (14.48) da lugar a una ecuación cartesiana del plano que contiene a $P_1(x_1, y_1, z_1)$.

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0. \qquad (14.49)$$

Ejemplo 1

Obtener una ecuación del plano que contiene al punto (4, −1, 3) y es perpendicular al vector $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$.

Solución De (14.49) resulta de inmediato que

$$2(x - 4) + 8(y + 1) - 5(z - 3) = 0 \quad \text{o bien} \quad 2x + 8y - 5z + 15 = 0.$$

La ecuación (14.49) se puede escribir siempre como $ax + by + cz + d = 0$, haciendo $d = -ax_1 - by_1 - cz_1$. Demostraremos ahora que, recíprocamente, toda ecuación lineal

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad a, b \text{ y } c \text{ no son todos nulos} \qquad (14.50)$$

es un plano.

TEOREMA 14.3

La gráfica de cualquier ecuación $ax + by + cz + d = 0$, con a, b y c no todos nulos, es un plano con el vector normal $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$.

Demostración Supongamos que x_0, y_0 y z_0 son números que satisfacen la ecuación indicada. Entonces $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ implica que $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$. Sustituyendo este último valor de d en la ecuación original resulta, luego de simplificar,

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

o bien, en términos de vectores,

$$[a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}] \cdot [(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}] = 0.$$

Esta ecuación implica que $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ es normal al plano que contiene al punto (x_0, y_0, z_0) y al vector

$$(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}.$$ □

Ejemplo 2

Un vector normal al plano $3x - 4y + 10z - 8 = 0$ es $\mathbf{n} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$.

Un múltiplo no nulo de un vector normal es, desde luego, también perpendicular al plano.

Tres puntos no colineales P_1, P_2 y P_3 determinan también un plano.* Para obtener la ecuación del plano, necesitamos solamente formar dos vectores entre dos pares de puntos. Su producto cruz es un vector normal al plano que contiene a estos vectores, como se muestra en la Figura 14.49. Si $P(x, y, z)$ representa un punto cualquiera del plano, y $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OP_1}$, $\mathbf{r}_2 = \overrightarrow{OP_2}$, $\mathbf{r}_3 = \overrightarrow{OP_3}$, entonces $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ (o, en su caso, $\mathbf{r} - \mathbf{r}_2$, o bien $\mathbf{r} - \mathbf{r}_3$) está en el plano. Por lo tanto,

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot [(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)] = 0, \qquad (14.51)$$

es una ecuación vectorial del plano. Se recomienda no memorizar la fórmula anterior. El procedimiento es igual al de (14.48), con la excepción de que el vector normal al plano se obtiene por medio del producto vectorial.

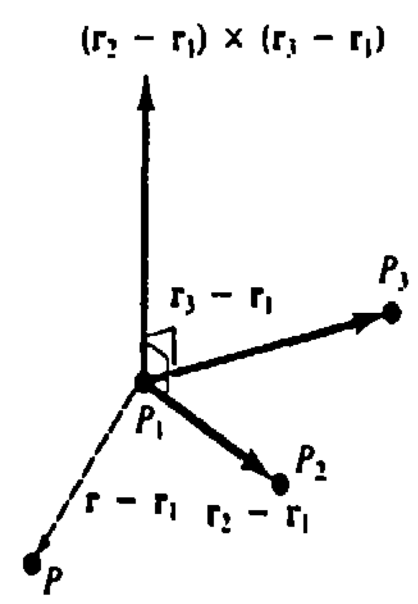


Figura 14.49

Ejemplo 3

Obtener una ecuación del plano que contiene a (1, 0, −1), (3, 1, 4) y (2, −2, 0).

Solución Necesitamos tres vectores. Emparejando los puntos de la izquierda como se muestra, resultan los vectores de la derecha. El orden en el que se efectúen las restas no importa.

---

* Si uno se ha sentado alguna vez a una mesa de cuatro patas que se mece, sería bueno pensar en reemplazarla con una de tres.

$$\left.\begin{array}{r}(1, 0, -1)\\(3, 1, 4)\\(2, -2, 0)\\(x, y, z)\end{array}\right\}\quad \begin{array}{l}\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}\\ \mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}\\ \mathbf{w} = (x-2)\mathbf{i} + (y+2)\mathbf{j} + z\mathbf{k}\end{array}$$

Entonces,

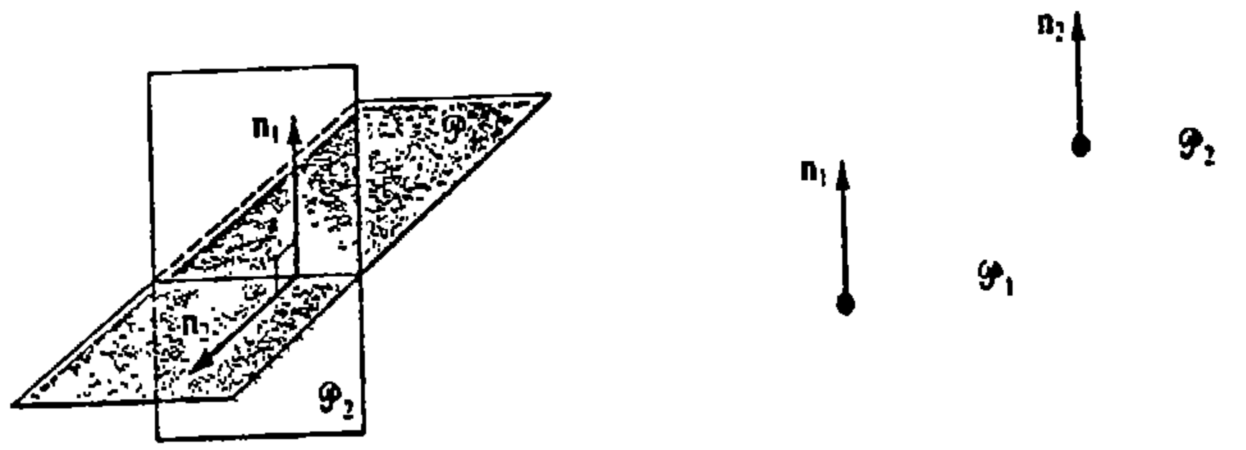
$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & 1 & 5\\ 1 & 3 & 4\end{vmatrix} = -11\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}.$$

Por (14.51) se ve que una ecuación vectorial del plano es $\mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = 0$. La ecuación anterior da lugar a

$$-11(x-2) - 3(y+2) + 5z = 0 \quad \text{o bien} \quad -11x - 3y + 5z + 16 = 0.$$

Planos perpendiculares y planos paralelos

Si $\mathbf{n}_1$ es un vector normal al plano $\mathcal{P}_1$ y $\mathbf{n}_2$ es un vector normal al plano $\mathcal{P}_2$, entonces la Figura 14.50 muestra la razón de ser de la definición siguiente.



(a) planos ortogonales (b) planos paralelos

Figura 14.50

DEFINICIÓN 14.5

(*i*) $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son ortogonales si $\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2 = 0$.

(*ii*) $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son paralelos si $\mathbf{n}_1 = k\mathbf{n}_2$ para algún escalar k distinto de cero. □

Ejemplo 4

Los planos dados por

$$\begin{aligned}2x - 4y + 8z &= 3\\ 2x - 4y + 8z &= 7\\ x - 2y + 4z &= 0\\ -3x + 6y - 12z &= 1\end{aligned}$$

son paralelos.

Gráficas

La gráfica de (14.50) sigue siendo un plano si faltan una, o incluso dos de las variables. Por ejemplo, vimos que las gráficas de

$$x = x_0, \qquad y = y_0, \qquad z = z_0,$$

en donde x_0, y_0, z_0 son constantes, representan planos perpendiculares a los ejes x, y y z, respectivamente. Para trazar la gráfica de un plano, por lo general debe tratarse de encontrar

(*i*) las intercepciones x, y y z, y si es necesario,

(*ii*) las trazas del plano.

Una traza de un plano es la recta de intersección del mismo con un plano coordenado.

Ejemplo 5

Trazar la gráfica de la ecuación $2x + 3y + 6z = 18$.

Solución Haciendo

$$\begin{aligned}y = 0,\ z = 0 &\quad \text{resulta } x = 9;\\ x = 0,\ z = 0 &\quad \text{resulta } y = 6;\\ x = 0,\ y = 0 &\quad \text{resulta } z = 3.\end{aligned}$$

Las intercepciones x, y y z son entonces 9, 6 y 3, respectivamente. Utilizamos los puntos $(9, 0, 0)$, $(0, 6, 0)$ y $(0, 0, 3)$ para trazar la gráfica del plano en el primer octante, como se muestra en la Figura 14.51.

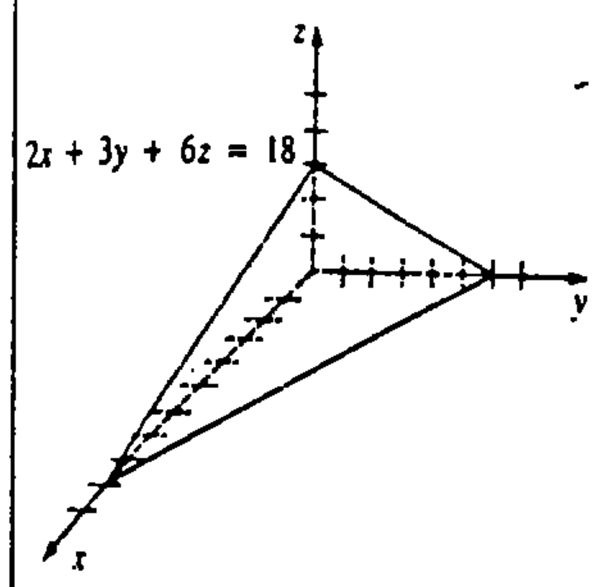


Figura 14.51

Ejemplo 6

Trazar la gráfica de la ecuación $6x + 4y = 12$.

Solución En dos dimensiones la gráfica de la ecuación es una recta con intercepción x igual a 2, e intercepción y igual a 3. Sin embargo, en tres dimensiones esta recta es la traza de un plano en el plano coordenado xy. Dado que z no está especificada, puede ser cualquier número real. En otras palabras, (x, y, z) es un punto en el plano siempre que x y y estén relacionados por la ecuación dada. La gráfica es un plano paralelo al eje z, como se muestra en la Figura 14.52.

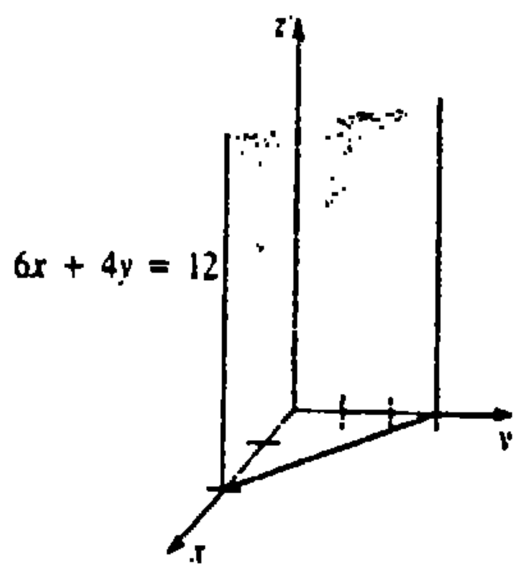


Figura 14.52

Ejemplo 7

Trazar la gráfica de la ecuación $x + y - z = 0$.

Solución Observemos primero que el plano pasa por el origen (0, 0, 0). Ahora bien, la traza del plano en el plano $xz(y = 0)$ es $z = x$, mientras que su traza en el plano $yz(x = 0)$ es $z = y$. Dibujando estas dos rectas se llega a la gráfica mostrada en la Figura 14.53.

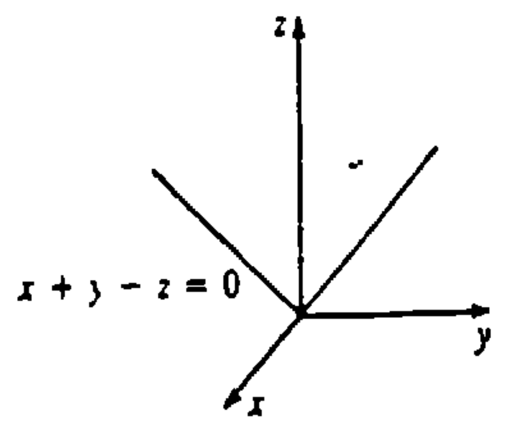


Figura 14.53

Dos planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ que no son paralelos deben cortarse según una recta $\mathcal{L}$. Véase la Figura 14.54. El ejemplo siguiente muestra una manera de encontrar ecuaciones paramétricas de la recta de intersección.

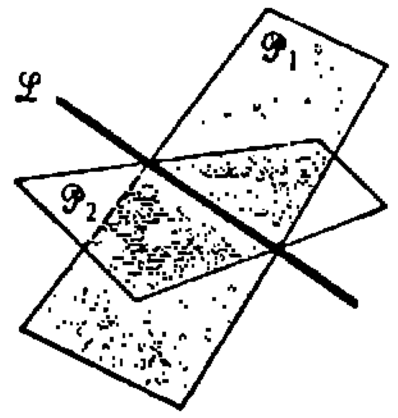


Figura 14.54

Ejemplo 8

Obtenga ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de

$$2x - 3y + 4z = 1$$
$$x - y - z = 5.$$

Solución En un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, se elige una variable arbitrariamente, por ejemplo, $z = t$, y se despejan x y y de

$$2x - 3y = 1 - 4t$$
$$x - y = 5 + t.$$

Continuando,

$$x = 14 + 7t, \qquad y = 9 + 6t, \qquad z = t.$$

Estas son ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los planos indicados.

Ejercicios 14.6

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 994.

En los Problemas 1-6 halle una ecuación del plano que contiene al punto dado y es perpendicular al vector dado.

1. $(5, 1, 3)$; $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
2. $(1, 2, 5)$; $4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
3. $(6, 10, -7)$; $-5\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$
4. $(0, 0, 0)$; $6\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
5. $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$; $6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$
6. $(-1, 1, 0)$; $-\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

En los Problemas 7-12 encuentre, si es posible, una ecuación de un plano que contenga a los puntos que se dan.

7. $(3, 5, 2)$, $(2, 3, 1)$, $(-1, -1, 4)$
8. $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 3, -1)$
9. $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(3, 2, -1)$
10. $(0, 0, 3)$, $(0, -1, 0)$, $(0, 0, 6)$
11. $(1, 2, -1)$, $(4, 3, 1)$, $(7, 4, 3)$
12. $(2, 1, 2)$, $(4, 1, 0)$, $(5, 0, -5)$

En los Problemas 13-22 determine una ecuación del plano que satisfaga las condiciones indicadas.

13. Contiene a $(2, 3, -5)$ y es paralelo a $x + y - 4z = 1$.
14. Contiene al origen y es paralelo a $5x - y + z = 6$.
15. Contiene a $(3, 6, 12)$ y es paralelo al plano xy.
16. Contiene a $(-7, -5, 18)$ y es perpendicular al eje y.
17. Contiene a las rectas $x = 1 + 3t$, $y = 1 - t$, $z = 2 + t$; $x = 4 + 4s$, $y = 2s$, $z = 3 + s$.
18. Contiene a las rectas $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-5}{6}$; $\mathbf{r} = \langle 1, -1, 5\rangle + t\langle 1, 1, -3\rangle$.
19. Contiene a las rectas paralelas $x = 1 + t$, $y = 1 + 2t$, $z = 3 + t$; $x = 3 + s$, $y = 2s$, $z = -2 + s$.
20. Contiene al punto $(4, 0, -6)$ y a la recta $x = 3t$, $y = 2t$, $z = -2t$.
21. Contiene a $(2, 4, 8)$ y es perpendicular a la recta $x = 10 - 3t$, $y = 5 + t$, $z = 6 - \frac{1}{2}t$.
22. Contiene a $(1, 1, 1)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $(2, 6, -3)$ y $(1, 0, -2)$.
23. Determine cuáles de los planos siguientes son ortogonales, y cuáles, paralelos.
    (a) $2x - y + 3z = 1$
    (b) $x + 2y + 2z = 9$
    (c) $x + y - \frac{3}{2}z = 2$
    (d) $-5x + 2y + 4z = 0$
    (e) $-8x - 8y + 12z = 1$
    (f) $-2x + y - 3z = 5$
24. Obtenga ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a $(-4, 1, 7)$ y es perpendicular al plano $-7x + 2y + 3z = 1$.
25. Determine cuáles de los planos siguientes son perpendiculares a la recta $x = 4 - 6t$, $y = 1 + 9t$, $z = 2 + 3t$.
    (a) $4x + y + 2x = 1$
    (b) $2x - 3y + z = 4$
    (c) $10x - 15y - 5z = 2$
    (d) $-4x + 6y + 2z = 9$
26. Determine cuáles de los planos siguientes son paralelos a la recta $(1 - x)/2 = (y + 2)/4 = z - 5$.
    (a) $x - y + 3z = 1$
    (b) $6x - 3y = 1$
    (c) $x - 2y + 5z = 0$
    (d) $-2x + y - 2z = 7$

En los Problemas 27 y 28 halle el punto de intersección del plano y la recta indicados.

27. $2x - 3y + 2z = -7$; $x = 1 + 2t$, $y = 2 - t$, $z = -3t$
28. $x + y + 4z = 12$; $x = 3 - 2t$, $y = 1 + 6t$, $z = 2 - \frac{1}{2}t$

En los Problemas 29 y 30 obtenga ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los planos indicados.

29. $5x - 4y - 9z = 8$
    $x + 4y + 3z = 4$
30. $x + 2y - z = 2$
    $3x - y + 2z = 1$

En los Problemas 31 y 32 encuentre ecuaciones paramétricas de la recta que sea paralela a los planos dados y que pase por el punto indicado.

31. $x + y - 4z = 2$
$2x - y + z = 10$; $(5, 6, -12)$

32. $2x + z = 0$
$-x + 3y + z = 1$; $(-3, 5, -1)$

En los Problemas 33 y 34 encuentre una ecuación del plano que contenga a la recta dada y que sea ortogonal al plano indicado.

33. $x = 4 + 3t$, $y = -t$, $z = 1 + 5t$; $x + y + z = 7$

34. $\dfrac{2 - x}{3} = \dfrac{y + 2}{5} = \dfrac{z - 8}{2}$; $2x - 4y - z + 16 = 0$

En los Problemas 35-38 trace la gráfica de la ecuación indicada.

35. $5x + 2y + z = 10$

36. $3x + 2z = 9$

37. $-y - 3z + 6 = 0$

38. $3x + 4y - 2z - 12 = 0$

Problemas diversos

39. Sean $P_1(x_1, y_1, z_1)$ un punto del plano $ax + by + cz + d = 0$ y $\mathbf{n}$ un vector normal al plano. Véase la Figura 14.55. Si $P_2(x_2, y_2, z_2)$ es cualquier punto fuera del plano, demuestre que la distancia D de un punto al plano está dada por

$$D = \frac{|ax_2 + by_2 + cz_2 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

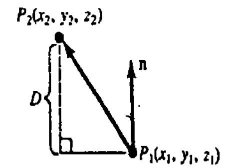


Figura 14.55

40. El ángulo entre dos planos se define como el ángulo agudo entre sus vectores normales. Véase la Figura 14.56. Calcule el ángulo entre $x - 3y + 2z = 14$ y $-x + y + z = 10$.

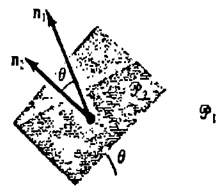


Figura 14.56

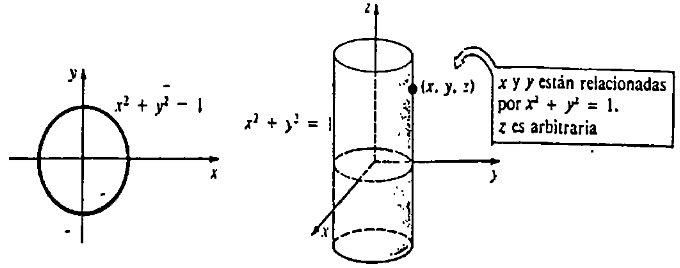
14.7 Superficies

14.7.1 Cilindros

En el espacio bidimensional la gráfica de $x^2 + y^2 = 1$ es una circunferencia con centro en el origen. Sin embargo, en el espacio de tres dimensiones es posible interpretar la gráfica del conjunto

$$\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, z \text{ arbitrario}\}$$

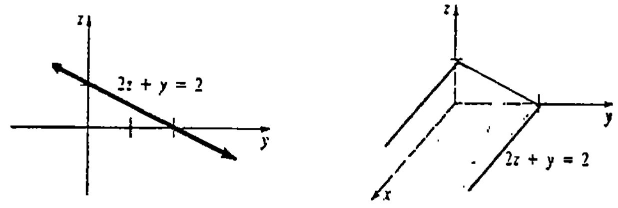
como una superficie, que es el *cilindro* circular recto mostrado en la Figura 14.57(b). En la sección anterior ya hemos visto que una recta en un plano coordenado bidimensional se convierte en un plano en el espacio tridimensional.



(a) circunferencia (b) cilindro circular

Figura 14.57

Ejemplo 1



(a) recta (b) plano

Figura 14.58

La superficie ilustrada en el ejemplo anterior también se llama cilindro. En otras palabras, en tres dimensiones un cilindro no siempre es un cilindro circular recto.

En general, si C es una curva en un plano y $\mathcal{L}$ es una recta no paralela al plano, entonces el conjunto de todos los puntos (x, y, z) que es generado por una recta móvil que recorre C paralelamente a $\mathcal{L}$, se denomina **cilindro**. A la curva C se la llama **directriz** del cilindro. Véase la Figura 14.59.

Así que cuando una ecuación de una curva en un plano coordenado se la considera en tres dimensiones, se vuelve una ecuación de un cilindro perpendicular a dicho plano.

Si las gráficas de $f(x, y) = c_1$, $g(y, z) = c_2$, $h(x, z) = c_3$ son *curvas* en el espacio bidimensional de sus planos coordenados respectivos, entonces sus gráficas en el espacio tridimensional son *superficies* llamadas *cilindros*. Se genera un cilindro por medio de una recta móvil que recorre la curva paralelamente al eje coordenado representado por la variable faltante en su ecuación.

La Figura 14.60 muestra una curva C definida por $f(x, y) = c_1$ en el plano xy y una sucesión de rectas llamadas *regladuras* que representan diversas posiciones de una generatriz que recorre C moviéndose paralelamente al eje z.

En los cuatro ejemplos siguientes se compara la gráfica de una ecuación en un plano coordenado con su interpretación como un cilindro en el espacio de tres dimensiones. Como en la Figura 14.58(b), se indica solamente una porción del cilindro.

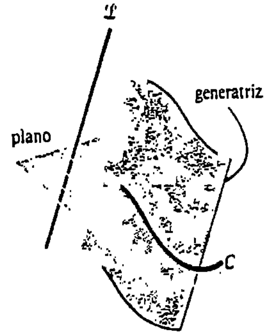


Figura 14.59

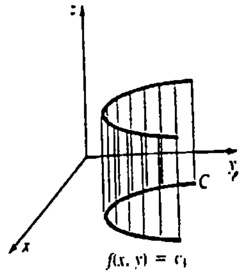
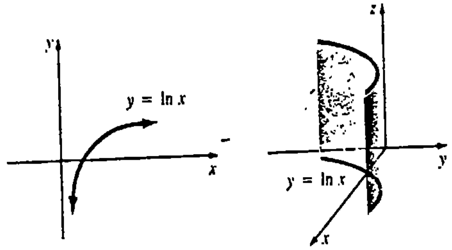


Figura 14.60

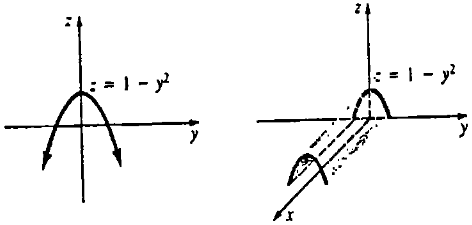
Ejemplo 2



(a) curva logarítmica (b) cilindro logarítmico

Figura 14.61

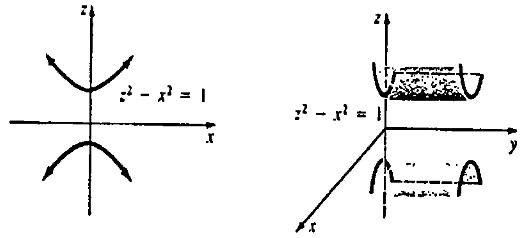
Ejemplo 3



(a) parábola (b) cilindro parabólico

Figura 14.62

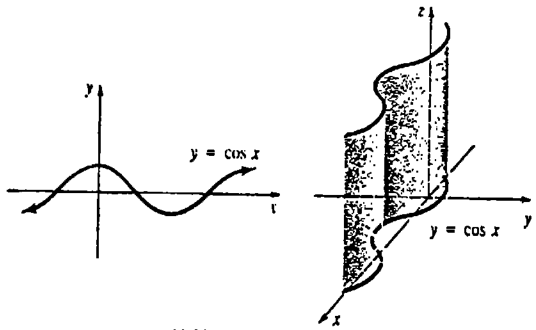
Ejemplo 4



(a) hipérbola (b) cilindro hiperbólico

Figura 14.63

Ejemplo 5



(a) curva senoidal* (b) cilindro senoidal

Figura 14.64

14.7.2 Esferas

Una esfera puede definirse por medio de la fórmula de la distancia, como en el caso de la circunferencia.

DEFINICIÓN 14.6

Una **esfera** es el conjunto de todos los puntos P del espacio tridimensional que equidistan de un punto fijo llamado **centro**.

Si r denota la distancia fija, o **radio** de la esfera, y si el centro es $P_1(a, b, c)$, entonces un punto $P(x, y, z)$ se encuentra en la esfera si y sólo si $[d(P_1, P)]^2 = r^2$, o sea

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2. \tag{14.52}$$

* La gráfica de cos x es la gráfica de la función *seno* trasladada $\pi/2$ radianes hacia la izquierda.

Ejemplo 6

La gráfica de $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ es una esfera de radio 5 con centro en el origen, ya que $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$. La gráfica de la ecuación se presenta en la Figura 14.65.

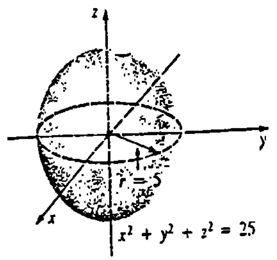


Figura 14.65

Traza de una superficie

Una **traza de una superficie** es una curva formada por la intersección de una superficie y un plano coordenado. Obsérvese que en la Figura 14.65 la traza de la esfera en el plano xy es la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$. En los planos xz y yz, las trazas de la esfera son las circunferencias $x^2 + z^2 = 25$ y $y^2 + z^2 = 25$, respectivamente.

Ejemplo 7

La gráfica de la ecuación $(x - 5)^2 + (y - 7)^2 + (z - 6)^2 = 9$ es una esfera con centro en $(5, 7, 6)$ y radio igual a 3. Su gráfica se encuentra en el primer octante y se presenta en la Figura 14.66

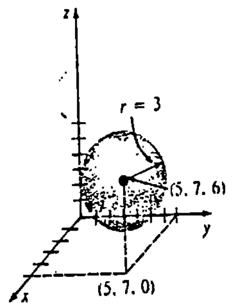


Figura 14.66

Ejemplo 8

Obtener una ecuación de la esfera cuyo centro es $(4, -3, 0)$ y que es tangente al plano xz.

Solución La distancia (perpendicular) del punto dado al plano xz, y por lo tanto

el radio de la esfera, es el valor absoluto de la coordenada y, $|-3| = 3$. De manera que una ecuación de la esfera es $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 3^2$. Véase la Figura 14.67.

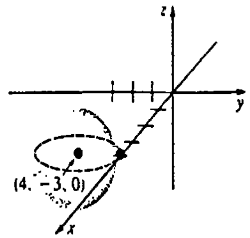


Figura 14.67

Ejemplo 9

Obtener el centro y el radio de la esfera cuya ecuación es

$$16x^2 + 16y^2 + 16z^2 - 16x + 8y - 32z + 16 = 0.$$

Solución Dividiendo entre 16 y completando el cuadrado en x, y y z resulta que

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 + (z - 1)^2 = 5.$$

El centro y el radio de la esfera son $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 1)$ y $\sqrt{5}$, respectivamente.

14.7.3 Superficies cuádricas

La ecuación de la esfera dada en (14.52) es sólo un caso particular de la ecuación de segundo grado

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0. \tag{14.53}$$

Cuando A, B y C no son todos nulos, se dice que la gráfica de una ecuación de la forma (14.53) es una **superficie cuádrica**, si describe un lugar geométrico real. Por ejemplo, tanto el cilindro elíptico $x^2/4 + y^2/9 = 1$ como el cilindro parabólico $z = y^2$ son superficies cuádricas. Concluiremos esta sección considerando seis superficies cuádricas adicionales y bien conocidas.

Elipsoide

Se dice que la gráfica de cualquier ecuación de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a > 0, b > 0, c > 0 \tag{14.54}$$

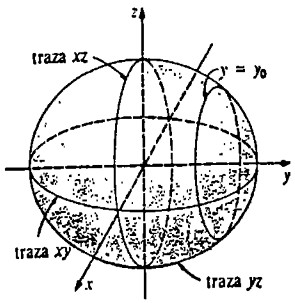
es un **elipsoide**. Para $|y_0| < b$, la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y_0^2}{b^2}$$

representa una familia de elipses (o circunferencias si $a = c$) paralelas al plano xz que se forman cortando la superficie mediante planos $y = y_0$. Eligiendo, cada uno a su vez, $x = x_0$, $z = z_0$, encontraríamos que los cortes de la superficie son elipses (o circunferencias) paralelas a los planos yz y xy, respectivamente. La Figura 14.68 resume las trazas en los planos coordenados y proporciona una gráfica característica.

Plano coordenado	*Traza*
xy $(z = 0)$	elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
xz $(y = 0)$	elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
yz $(x = 0)$	elipse: $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

(a)



(b)

Figura 14.68

Hiperboloide de una hoja

La gráfica de una ecuación de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a > 0, b > 0, c > 0 \tag{14.55}$$

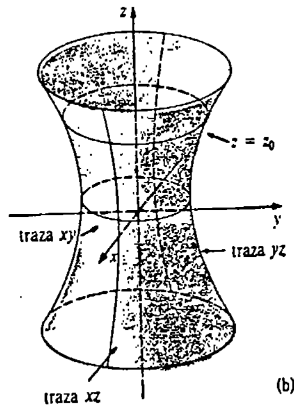
se llama **hiperboloide de una hoja**. En este caso, un plano $z = x_0$, paralelo al plano xy, corta la superficie en secciones transversales elípticas (o circulares, si $a = b$). Las ecuaciones de estas elipses son

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z_0^2}{c^2}.$$

La elipse más pequeña, $z_0 = 0$, corresponde a la traza en el plano xy. En la Figura 14.69 se presenta un resumen de las trazas y una gráfica característica de (14.55).

Plano coordenado	*Traza*
xy $(z = 0)$	elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
xz $(y = 0)$	hipérbola: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.
yz $(x = 0)$	hipérbola: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

(a)



(b)

Figura 14.69

Hiperboloide de dos hojas

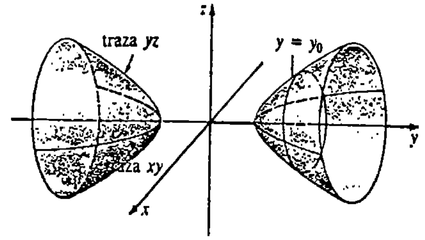
Como se ve en la Figura 14.70(b), una gráfica de

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a > 0, b > 0, c > 0 \tag{14.56}$$

es llamada apropiadamente **hiperboloide de dos hojas**.

Plano coordenado	*Traza*
xy $(z = 0)$	hipérbola: $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
xz $(y = 0)$	ninguna
yz $(x = 0)$	hipérbola: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

(a)



(b)

Figura 14.70

Para $|y_0| > b$ la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{y_0^2}{b^2} - 1$ describe la curva elíptica de intersección de la superficie con el plano $y = y_0$.

Paraboloide

La gráfica de una ecuación de la forma

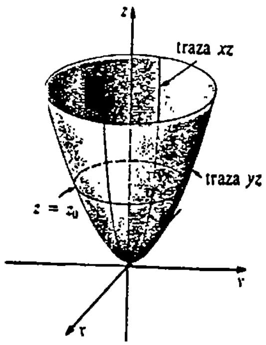
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz \tag{14.57}$$

se llama **paraboloide**. En la Figura 14.71(b) vemos que para $c > 0$, los planos $z = z_0 > 0$, paralelos al plano xy, cortan la superficie en elipses cuyas ecuaciones son

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz_0.$$

Plano coordenado	*Traza*
xy $(z = 0)$	punto: $(0, 0)$
xz $(y = 0)$	parábola: $\frac{x^2}{a^2} = cz$
yz $(x = 0)$	parábola: $\frac{y^2}{b^2} = cz$

(a)



(b)

Figura 14.71

Cono

La gráfica de una ecuación de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \quad a > 0, b > 0, c > 0. \tag{14.58}$$

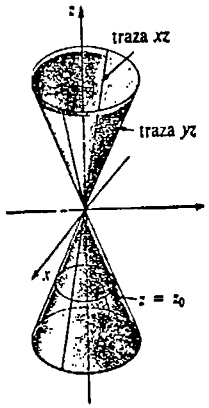
se llama **cono elíptico** (o circular, si $a = b$). Para z_0 arbitrario, los planos paralelos al plano xy cortan la superficie en elipses cuyas ecuaciones son

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z_0^2}{c^2}.$$

En la Figura 14.72(b) se muestra una gráfica característica de (14.58).

Plano coordenado	Traza
xy ($z = 0$)	punto: (0, 0)
xz ($y = 0$)	rectas: $z = \pm\frac{c}{a}x$
yz ($x = 0$)	rectas: $z = \pm\frac{c}{b}y$

(a)



(b)

Figura 14.72

Paraboloide hiperbólico

La última superficie cuádrica que consideraremos se conoce como **paraboloide hiperbólico** y es la gráfica de toda ecuación de la forma

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = cz, \quad a > 0, b > 0 \tag{14.59}$$

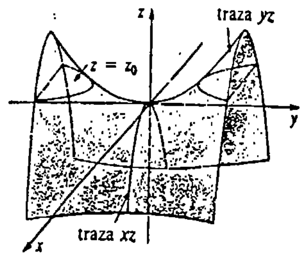
Obsérvese que para $c > 0$, los planos $z = z_0$, paralelos al plano xy, cortan la superficie en hipérbolas cuyas ecuaciones son

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = cz_0.$$

En la Figura 14.73(b) se muestra la forma característica de silla de montar de un paraboloide hiperbólico.

Plano coordenado	Traza
xy ($z = 0$)	rectas: $y = \pm\frac{a}{b}x$
xz ($y = 0$)	parábola: $-\frac{x^2}{b^2} = cz$
yz ($x = 0$)	parábola: $\frac{y^2}{a^2} = cz$

(a)



(b)

Figura 14.73

Variación de las ecuaciones

El intercambio de posición de las variables en las ecuaciones (14.54)-(14.59) no altera la naturaleza básica de una superficie, pero *sí* cambia la orientación de la superficie en el espacio. Por ejemplo, las gráficas de

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1 \quad \text{y} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{14.60}$$

son aún hiperboloides de una hoja. De manera semejante, los dos signos menos que en (14.56) caracterizan hiperboloides de dos hojas, pueden ocurrir en cualquier parte de la ecuación. Similarmente,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = cy \quad \text{y} \quad \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = cx \tag{14.61}$$

son paraboloides. Las gráficas de ecuaciones de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = cy \quad \text{y} \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = cx \tag{14.62}$$

son paraboloides hiperbólicos.

Ejemplo 10

Identificar (*a*) $y = x^2 + z^2$ y (*b*) $y = x^2 - z^2$. Comparar las gráficas.

Solución En virtud de las primeras ecuaciones de (14.61) y (14.62) con $a = 1$, $b = 1$ y $c = 1$, se identifica la gráfica de (*a*) como un paraboloide y la gráfica de (*b*) como un paraboloide hiperbólico. En el caso de la ecuación (*a*), un plano $y = y_0$, $y_0 > 0$, corta la superficie según circunferencias cuyas ecuaciones son $y_0 = x^2 + z^2$. Por otra parte, un plano $y = y_0$ corta la gráfica de la ecuación (*b*) en hipérbolas $y_0 = x^2 - z^2$. En la Figura 14.74 se comparan las gráficas.

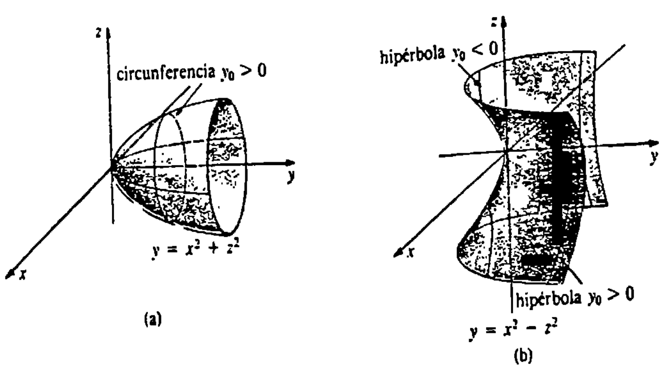


Figura 14.74

Ejemplo 11

Identificar (*a*) $2x^2 - 4y^2 + z^2 = 0$, (*b*) $-2x^2 + 4y^2 + z^2 = -36$.

Solución

(*a*) A partir de

$$\frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{4} = y^2,$$

se identifica la gráfica como un cono.

(*b*) Por

$$\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{36} = 1,$$

se ve que la gráfica es un hiperboloide de dos hojas.

Origen en (h, k, l)

Cuando el origen se traslada a (h, k, l), las ecuaciones de las superficies cuádricas se convierten en

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1$$

y así sucesivamente.

Ejemplo 12

Escribiendo la ecuación $z = 4 - x^2 - y^2$ como

$$-(z-4) = x^2 + y^2,$$

se reconoce la ecuación de un paraboloide (circular). El signo menos que aparece frente al término del primer miembro de la igualdad indica que la gráfica del paraboloide se extiende hacia abajo a partir de (4, 0, 0). Véase la Figura 14.75.

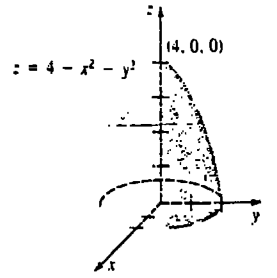


Figura 14.75

Ejercicios 14.7

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 995.

[14.7.1]

En los Problemas 1-10 dibuje la gráfica del cilindro indicado.

1. $y = x^2$
2. $x^2 + z^2 = 25$
3. $y^2 + z^2 = 9$
4. $z = y^2$
5. $z = e^{-x}$
6. $z = 1 - e^y$
7. $y^2 - x^2 = 4$
8. $z = \cosh y$
9. $z = \operatorname{sen} x$
10. $y = \dfrac{1}{x^2}$

[14.7.2]

En los Problemas 11-14 trace la gráfica de la ecuación dada.

11. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
12. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 16$
13. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$
14. $(x+3)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 4$

En los Problemas 15-18 determine el centro y el radio de la esfera con la ecuación dada.

15. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y - 4z - 7 = 0$
16. $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4x - 12z + 9 = 0$
17. $x^2 + y^2 + z^2 - 16z = 0$
18. $x^2 + y^2 + z^2 - x + y = 0$

En los Problemas 19-22 halle una ecuación de la esfera que satisfaga las condiciones indicadas.

19. Centro (−1, 4, 6); radio $\sqrt{3}$
20. Centro (5, 2, −2); tangente al plano yz
21. Centro en el eje y positivo; radio 2; tangente a $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.
22. Centro en la recta $x = 2t$, $y = 3t$, $z = 6t$, $t > 0$, a una distancia de 21 unidades del origen; radio 5.

[14.7.3]

En los Problemas 23-34 identifique y trace la gráfica de la superficie cuádrica.

23. $x^2 + y^2 = z$
24. $-x^2 + y^2 = z^2$
25. $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 = 36$
26. $x^2 + y^2 - z^2 = -4$
27. $36x^2 - y^2 + 9z^2 = 144$
28. $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 100$
29. $y^2 + 5z^2 = x^2$
30. $-9x^2 + 16y^2 = 144z$
31. $y = 4x^2 - z^2$
32. $9z + x^2 + y^2 = 0$
33. $x^2 - y^2 - z^2 = 4$
34. $-x^2 + 9y^2 + z^2 = 9$

En los Problemas 35-38 trace la gráfica de la superficie cuádrica.

35. $z = 3 + x^2 + y^2$

36. $y + x^2 + 4z^2 = 4$

37. $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 - z^2 = 1$

38. $5x^2 + (y - 5)^2 + 5z^2 = 25$

Problemas diversos

39. Una superficie cuádrica cuya ecuación es de una de las formas:

$$f(\sqrt{y^2 + z^2}, x) = 0, \quad g(\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0,$$

o bien $$h(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$

es una superficie de revolución respecto al eje x, y o z, respectivamente. ¿Cuáles de las superficies cuádricas de los Problemas 23-34 son superficies de revolución? Identifique el eje de revolución.

40. Utilice el resultado del Problema 39 para obtener la ecuación de la superficie de revolución que se obtiene al girar la gráfica de $4x^2 + y^2 = 16$ (*a*) en torno al eje y, (*b*) en torno al eje x.

41. Resuelva de nuevo el Problema 40 dado que la gráfica de $z = 2x^2$ se hace girar en torno al eje z.

42. Trace una gráfica de la superficie $x^2 + y^2 = \operatorname{sen}^2 z$ para $0 \le z \le 2\pi$.

Examen • Capítulo 14

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 996.

En los Problemas 1-10 conteste verdadero o falso.

1. Los vectores $\langle -4, -6, 10\rangle$ y $\langle -10, -15, 25\rangle$ son paralelos. ______

2. En el espacio tridimensional, tres puntos distintos cualesquiera determinan un plano. ______

3. La recta $x = 1 + 5t$, $y = 1 - 2t$, $z = 4 + t$ y el plano $2x + 3y - 4z = 1$ son perpendiculares. ______

4. Dos vectores no nulos **a** y **b** son paralelos si **a** × **b** = **0**. ______

5. Si **a** • **b** < 0, el ángulo entre **a** y **b** es obtuso. ______

6. Si **a** es un vector unitario, entonces **a** • **a** = 1. ______

7. El producto cruz (o exterior) de dos vectores no es conmutativo. ______

8. El punto terminal del vector **a** − **b** está en el punto terminal de **a**. ______

9. (**a** × **b**) • **c** = **a** • (**b** × **c**). ______

10. Si **a**, **b**, **c** y **d** son vectores coplanares no nulos, entonces (**a** × **b**) × (**c** × **d**) = **0**. ______

En los Problemas 11-30 llene los espacios en blanco.

11. El resultante de 3**i** + 4**j** + 5**k** y 6**i** − 2**j** − 3**k** es ______.

12. Si **a** • **b** = 0, los vectores no nulos **a** y **b** son ______.

13. (−**k**) × (5**j**) = ______.

14. **i** • (**i** × **j**) = ______

15. |−12**i** + 4**j** + 6**k**| = ______

16. $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} =$ ______

17. Un vector normal al plano $-6x + y - 7z + 10 = 0$ es ______.

18. La traza de la superficie $x^2 - y^2 + z^2 = 4$ en el plano xz es ______.

19. El punto de intersección de la recta $x - 1 = (y + 2)/3 = (z + 1)/2$ y el plano $x + 2y = 13$ es ______.

20. Un vector unitario que tiene la dirección opuesta de **a** = 4**i** + 3**j** − 5**k** es ______.

21. Si $\overrightarrow{P_1P_2} = \langle 3, 5, -4\rangle$ y P_1 tiene coordenadas $(2, 1, 7)$, entonces las coordenadas de P_2 son ______.

22. El punto medio del segmento de recta entre $P_1(4, 3, 10)$ y $P_2(6, -2, -5)$ tiene coordenadas ______.

23. Si |**a**| = 7.2, |**b**| = 10, y el ángulo entre **a** y **b** es de 135°, entonces **a** • **b** = ______.

24. Si **a** = ⟨3, 1, 0⟩, **b** = ⟨−1, 2, 1⟩ y **c** = ⟨0, −2, 2⟩, entonces **a** • (2**b** + 4**c**) = ______.

25. Las intersecciones x, y y z del plano $2x - 3y + 4z = 24$ son, respectivamente ______.

26. El ángulo θ entre los vectores **a** = **i** + **j** y **b** = **i** − **k** es ______.

27. El area de un triángulo con dos de sus lados dados por **a** = ⟨1, 3, −1⟩ y **b** = ⟨2, −1, 2⟩ es ______.

28. Una ecuación de la esfera con centro $(-5, 7, -9)$ y radio $\sqrt{6}$ es ______.

29. La distancia del plano $y = -5$ al punto $(4, -3, 1)$ es ______.

30. Los vectores $\langle 1, 3, c\rangle$ y $\langle -2, -6, 5\rangle$ son paralelos para c = ______, y ortogonales para c = ______.

En los Problemas 31-34 sean **a** = ⟨1, 2, −2⟩ y **b** = ⟨4, 3, 0⟩. Determine el número o el vector indicado.

31. $\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$

32. $\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$

33. $\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$

34. $\text{proy}_{\mathbf{b}}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$

En los Problemas 35-40 identifique la superficie cuya ecuación se da.

35. $x^2 + 4y^2 = 16$

36. $y + 2x^2 + 4z^2 = 0$

37. $x^2 + 4y^2 - z^2 = -9$

38. $x^2 + y^2 + z^2 = 10z$

39. $9z - x^2 + y^2 = 0$

40. $2x - 3y = 6$

41. Sea **r** el vector de posición de un punto variable $P(x, y, z)$ en el espacio. Si **a** es un vector constante, determine la superficie descrita por

(a) (**r** − **a**) • **r** = 0,

(b) (**r** − **a**) • **a** = 0.

42. Utilice el producto punto (o interior) para determinar si los puntos $(4, 2, -2)$, $(2, 4, -3)$, y $(6, 7, -5)$ son vértices de un triángulo rectángulo.

43. Halle ecuaciones simétricas de la recta que contiene a $(7, 3, -5)$ y es paralela a $(x - 3)/4 = (y + 4)/(-2) = (z - 9)/6$.

44. Obtenga ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a $(5, -9, 3)$ y es perpendicular al plano $8x + 3y - 4z = 13$.

45. Demuestre que las rectas $x = 1 - 2t$, $y = 3t$, $z = 1 + t$ y $x = 1 + 2s$, $y = -4 + s$, $z = -1 + s$ se cortan ortogonalmente.

46. Halle una ecuación del plano que contiene a $(0, 0, 0)$, $(2, 3, 1)$, $(1, 0, 2)$.

47. Determine una ecuación del plano que contiene a las rectas $x = t$, $y = 4t$, $z = -2t$, y $x = 1 + t$, $y = 1 + 4t$, $z = 3 - 2t$.

48. Obtenga una ecuación del plano que contiene a $(1, 7, -1)$ y es perpendicular a la recta de intersección de $-x + y - 8z = 4$ y $3x - y + 2z = 0$.

49. Una fuerza constante de 10 N en la dirección de **a** = **i** + **j**, mueve un bloque sobre una superficie sin fricción, desde $P_1(4, 1, 0)$ hasta $P_2(7, 4, 0)$. Si la distancia se mide en metros, calcule el trabajo realizado.

50. En el Problema 49, determine el trabajo realizado al mover el bloque entre los mismos puntos si otra fuerza constante de 50 N en la dirección de **b** = **i**, actúa simultáneamente con la fuerza original.

51. El agua arrojada por la manguera de una bomba de incendios ejerce una fuerza horizontal $\mathbf{F}_1$ de 200 lb de magnitud. Véase la Figura 14.76. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}_3$ que debe ejercer un bombero para sostener la manguera a un ángulo de 45° con la horizontal?

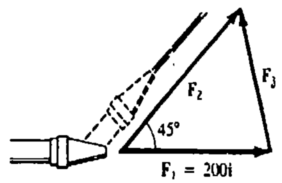


Figura 14.76

15

Funciones vectoriales

Las curvas en el plano, así como en el espacio tridimensional, pueden describirse por medio de ecuaciones paramétricas. Empleando las funciones de un conjunto de ecuaciones paramétricas como componentes, se construye una función vectorial que proporciona la posición de un punto de la curva. En este capítulo consideramos el Cálculo y las aplicaciones de estas funciones vectoriales.

15.1 Funciones vectoriales

15.1.1 Definición de función vectorial

Recordemos que una curva C en el plano xy puede ser parametrizada por

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad a \leq t \leq b.$$

En la ciencia y la ingeniería a menudo es conveniente introducir un vector **r** con las funciontes f y g como componentes,

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t)\rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}.$$

Se dice que **r** es una **función vectorial**. De manera semejante, una **curva en el espacio** es parametrizada por tres ecuaciones

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), \quad a \leq t \leq b. \qquad (15.1)$$

En forma correspondiente, se expresa una función vectorial mediante

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}.$$

Para un número dado t_0, el vector $\mathbf{r}(t_0)$ es el *vector de posición* de un punto P de la curva C, como se muestra en la Figura 15.1. En otras palabras, cuando t varía, es posible imaginar que la curva C está siendo trazada por la punta móvil de $\mathbf{r}(t)$.

Ya hemos visto un ejemplo de ecuaciones paramétricas así como la función vectorial de una curva en el espacio en la Sección 14.5, cuando se habló de la recta en el espacio tridimensional.

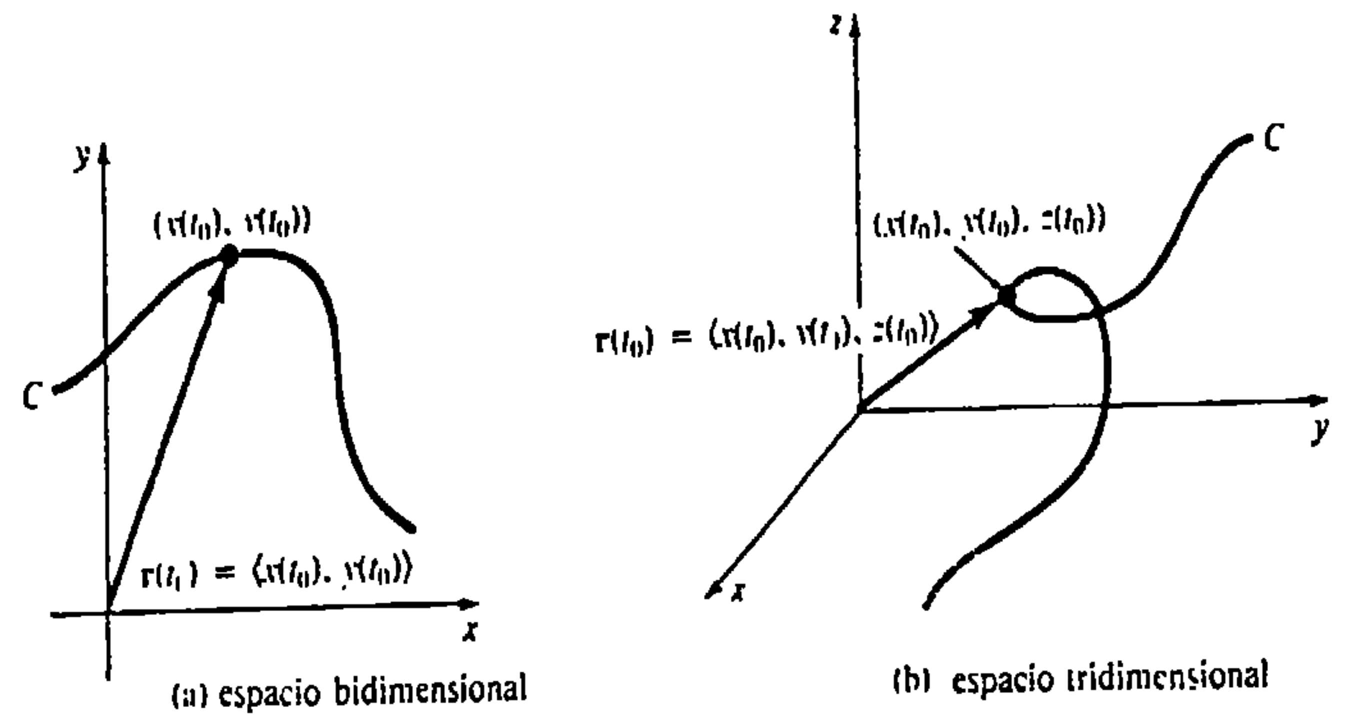


Figura 15.1

Ejemplo 1

Trazar la gráfica correspondiente a la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\,\mathrm{sen}\, t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \qquad t \geq 0.$$

Solución Las ecuaciones paramétricas de la curva son $x = 2\cos t$, $y = 2\,\mathrm{sen}\, t$, $z = t$. Eliminando el parámetro t de las dos primeras ecuaciones, se ve que los puntos de la curva están situados en el cilindro circular $x^2 + y^2 = 4$. Cuando el valor de t aumenta, la curva se extiende hacia arriba en forma de espiral, es decir, como *hélice circular*, según se ve en la Figura 15.2 y en la tabla adjunta.

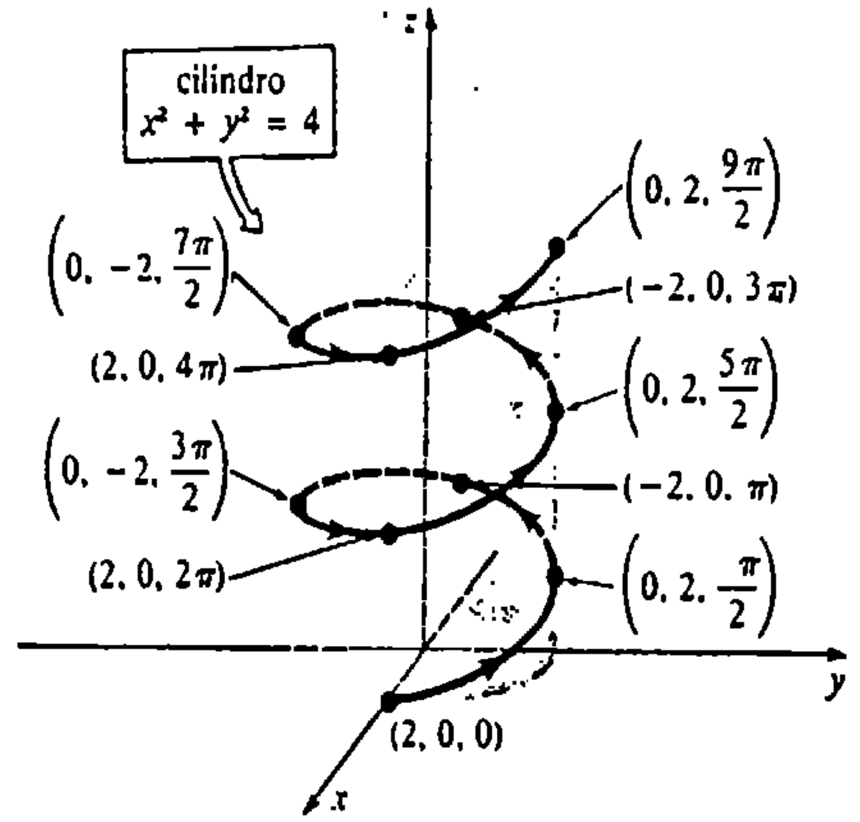


Figura 15.2

t	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$5\pi/2$	3π	$7\pi/2$	4π	$9\pi/2$
x	2	0	−2	0	2	0	−2	0	2	0
y	0	2	0	−2	0	2	0	−2	0	2
z	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$5\pi/2$	3π	$7\pi/2$	4π	$9\pi/2$

La curva del Ejemplo 1 es un caso especial de la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + b\,\mathrm{sen}\, t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}, \qquad a > 0, b > 0, c > 0,$$

la cual describe una *hélice elíptica*. Cuando $a = b$, la hélice es circular. El *paso* de una hélice se define como el número $2\pi c$. Los Problemas 9 y 10 de los Ejercicios 15.1 ilustran otros dos tipos de hélices.

Ejemplo 2

Trazar la gráfica correspondiente a la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\,\mathrm{sen}\, t\mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$

Solución Como en el Ejemplo 1, los puntos de la curva están situados en el cilindro $x^2 + y^2 = 4$. Sin embargo, dado que la coordenada z de cualquier punto tiene el valor constante $z = 3$, la curva es un círculo situado tres unidades arriba del plano xy. Véase la Figura 15.3.

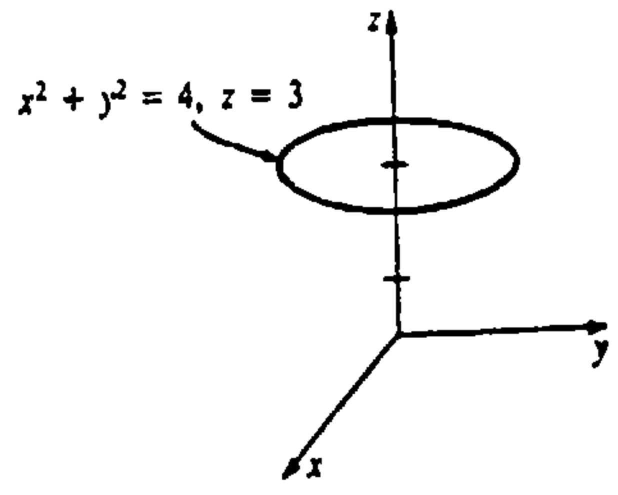


Figura 15.3

Ejemplo 3

Obtenga la función vectorial que describe la curva C de intersección del plano $y = 2x$ y el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$.

Solución Si hacemos $x = t$, entonces $y = 2t$, y de esta manera $z = 9 - t^2 - 4t^2 = 9 -$ La función vectorial que describe la traza de la superficie dada en el plano $y = 2x$, es $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (9 - 5t^2)\mathbf{k}$. Véase la Figura 15.4.

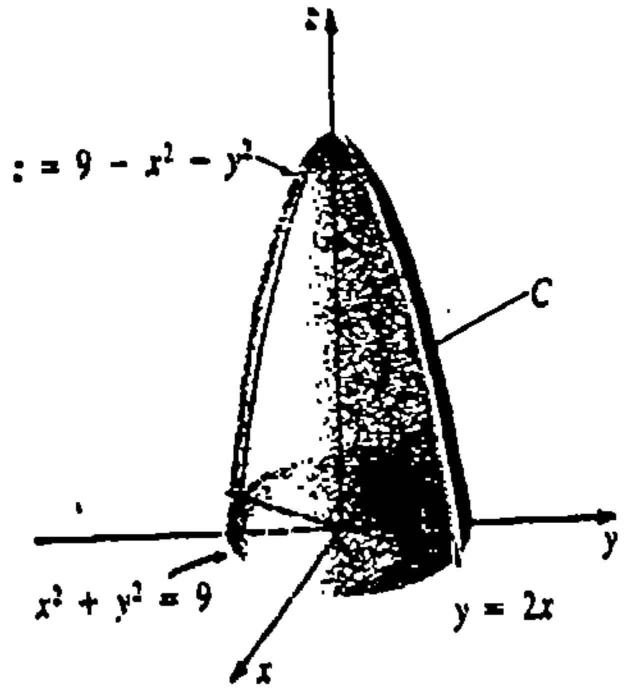


Figura 15.4

15.1.2 Cálculo de funciones vectoriales

Límites y continuidad

La noción fundamental de límite de una función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$ se define en términos de los límites de las funciones componentes.

DEFINICIÓN 15.1

Si existen $\lim_{t\to a} f(t)$, $\lim_{t\to a} g(t)$, y $\lim_{t\to a} h(t)$, entonces

$$\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t\to a} f(t), \lim_{t\to a} g(t), \lim_{t\to a} h(t)\right\rangle. \qquad \square$$

Como consecuencia inmediata de la Definición 15.1, tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 15.1

Si $\lim_{t\to a} \mathbf{r}_1(t) = \mathbf{L}_1$ y $\lim_{t\to a} \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{L}_2$, entonces

(*i*) $\lim_{t\to a} c\mathbf{r}_1(t) = c\mathbf{L}_1$, c en donde c es un escalar

(*ii*) $\lim_{t\to a} [\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$

(*iii*) $\lim_{t\to a} \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{L}_2$ $\square$

DEFINICIÓN 15.2

Se dice que una función vectorial $\mathbf{r}$ es continua en un número a si

(*i*) $\mathbf{r}(a)$ está definida,

(*ii*) $\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t)$ existe, y

(*iii*) $\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$. $\square$

En forma equivalente, $\mathbf{r}(t)$ es continua en un número a si y sólo si las funciones componentes f, g y h son continuas en a.

Derivadas de funciones vectoriales

DEFINICIÓN 15.3

La derivada de una función vectorial $\mathbf{r}$ es

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t}[\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)] \tag{15.2}$$

para todo t para el cual el límite exista. $\square$

La derivada de $\mathbf{r}$ también se escribe $d\mathbf{r}/dt$. El teorema siguiente demuestra que, a un nivel práctico, la derivada de una función vectorial se obtiene simplemente diferenciando sus funciones componentes.

TEOREMA 15.2

Si $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$, en donde f, g y h son diferenciables, entonces

$$\mathbf{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t)\rangle.$$

Demostración De (15.2) tenemos

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t}[\langle f(t + \Delta t), g(t + \Delta t), h(t + \Delta t)\rangle - \langle f(t), g(t), h(t)\rangle]$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \left\langle \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}, \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t}\right\rangle.$$

Tomando el límite de cada componente se obtiene el resultado deseado. $\square$

Curvas alisadas

Cuando las funciones componentes de una función vectorial **r** tienen primeras derivadas continuas y $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo t en el intervalo abierto (a, b), se dice que **r** es una **función alisada**, y la curva C descrita por **r** se llama **curva alisada**.

Interpretación geométrica de $\mathbf{r}'(t)$

Si el vector $\mathbf{r}'(t)$ no es **0** en un punto P, entonces puede dibujarse *tangente a la curva* en P. Como se ve en las partes (a) y (b) de la Figura 15.5, los vectores

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

y

$$\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}[\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)]$$

son paralelos. Suponiendo que $\lim_{\Delta t \to 0} \Delta\mathbf{r}/\Delta t$ existe, parece razonable concluir que $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ se acercan cuando $\Delta t \to 0$, y, en consecuencia, la posición límite del vector $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ es la recta tangente en P. En efecto, la recta tangente en P se *define* como la recta que pasa por P y es paralela a $\mathbf{r}'(t)$.

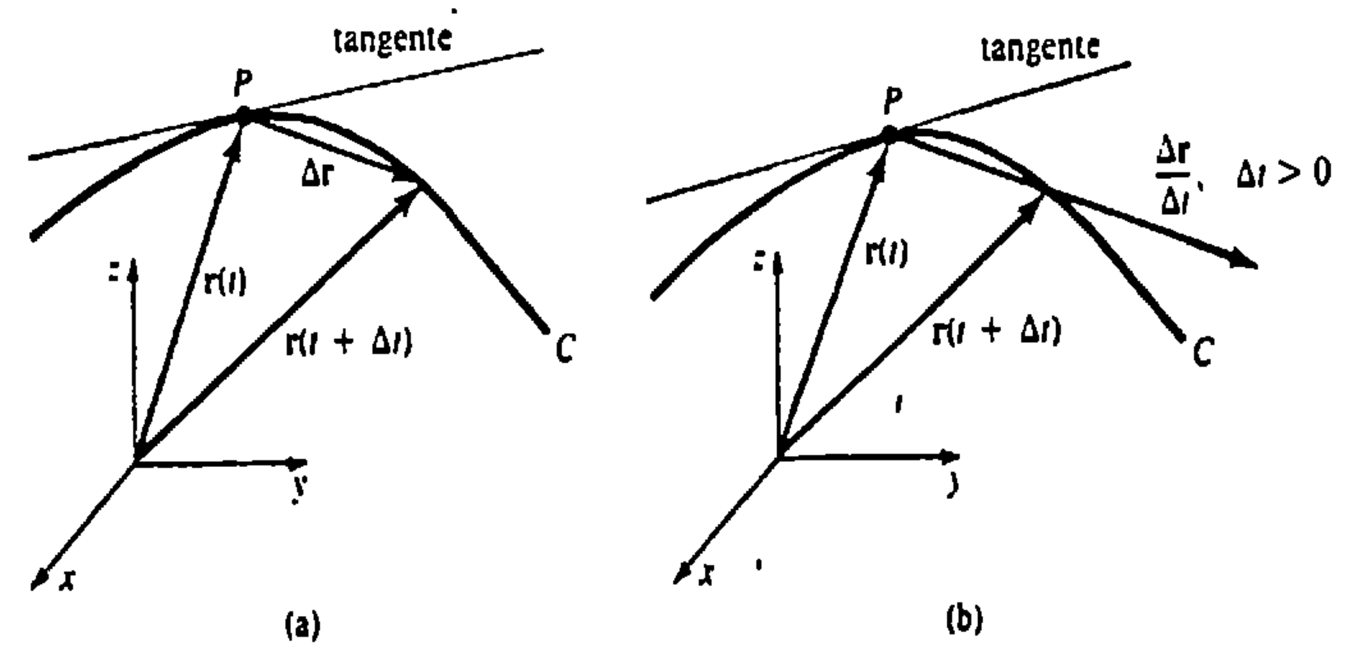


Figura 15.5

Ejemplo 4

Trazar la curva C que es descrita por un punto P cuya posición está dada por $\mathbf{r}(t) = \cos 2t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Trace $\mathbf{r}'(0)$ y $\mathbf{r}'(\pi/6)$.

Solución Eliminando el parámetro de las ecuaciones paramétricas $x = \cos 2t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, encontramos que C es la parábola $x = 1 - 2y^2$, $-1 \leq x \leq 1$. De

$$\mathbf{r}'(t) = -2 \operatorname{sen} 2t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j},$$

obtenemos $\quad \mathbf{r}'(0) = \mathbf{j} \quad$ y $\quad \mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}.$

En la Figura 15.6 estos vectores se han dibujado tangentes a la curva C en $(1,0)$ y en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, respectivamente.

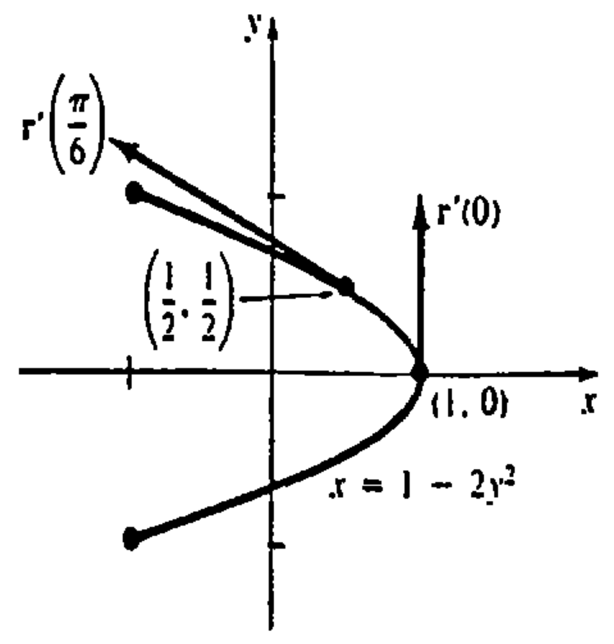


Figura 15.6

Ejemplo 5

Obtener ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva C cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = t^2, \qquad y = t^2 - t, \qquad z = -7t$$

en $t = 3$.

Solución La función vectorial que indica la posición de un punto P de la curva es

$$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t^2 - t)\mathbf{j} - 7t\mathbf{k}.$$

Entonces $\qquad \mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + (2t - 1)\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$

y $\qquad \mathbf{r}'(3) = 6\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k},$

que es tangente a C en el punto cuyo vector de posición es

$$\mathbf{r}(3) = 9\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 21\mathbf{k},$$

esto es, $P(9, 6, -21)$. Empleando las componentes de $\mathbf{r}'(3)$, vemos que

$$x = 9 + 6t, \qquad y = 6 + 5t, \qquad z = -21 - 7t.$$

son ecuaciones paramétricas de la recta tangente.

Derivadas de orden superior

Las derivadas de orden superior (o sucesivas) de una función vectorial se obtienen también diferenciando sus componentes. En el caso de la **segunda derivada** tenemos

$$\mathbf{r}''(t) = \langle f''(t), g''(t), h''(t)\rangle = f''(t)\mathbf{i} + g''(t)\mathbf{j} + h''(t)\mathbf{k}.$$

Ejemplo 6

Si $\qquad \mathbf{r}(t) = (t^3 - 2t^2)\mathbf{i} + 4t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k},$

entonces $\qquad \mathbf{r}'(t) = (3t^2 - 4t)\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - e^{-t}\mathbf{k}$

y $\qquad \mathbf{r}''(t) = (6t - 4)\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{k}.$

TEOREMA 15.3

Regla de la cadena

Si $\mathbf{r}$ es una función vectorial diferenciable y $s = u(t)$ es una función escalar diferenciable, entonces la derivada de $\mathbf{r}(s)$ con respecto a t es

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \mathbf{r}'(s)\,u'(t). \qquad \square$$

Ejemplo 7

Si $\mathbf{r}(s) = \cos 2s\mathbf{i} + \operatorname{sen} 2s\mathbf{j} + e^{-3s}\mathbf{k}$, en donde $s = t^4$, entonces

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = [-2\operatorname{sen} 2s\mathbf{i} + 2\cos 2s\mathbf{j} - 3e^{-3s}\mathbf{k}]4t^3$$
$$= -8t^3\operatorname{sen}(2t^4)\mathbf{i} + 8t^3\cos(2t^4)\mathbf{j} - 12t^3e^{-3t^4}\mathbf{k}.$$

Los detalles de la demostración del teorema siguiente se dejan como ejercicios.

TEOREMA 15.4

Sean $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ funciones vectoriales diferenciables y $u(t)$ una función escalar diferenciable

(*i*) $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{r}_1'(t) + \mathbf{r}_2'(t)$

(*ii*) $\dfrac{d}{dt}[u(t)\mathbf{r}_1(t)] = u(t)\mathbf{r}_1'(t) + u'(t)\mathbf{r}_1(t)$

(*iii*) $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2'(t) + \mathbf{r}_1'(t)\cdot\mathbf{r}_2(t)$

(*iv*) $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2'(t) + \mathbf{r}_1'(t)\times\mathbf{r}_2(t).$ $\square$

Nota: Dado que el producto cruz de dos vectores no es conmutativo, el orden en el que aparecen $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ en la parte (*iv*) del Teorema 15.4 debe ser observado estrictamente.

Integrales de funciones vectoriales

Si f, g y h son integrables, entonces las integrales indefinida y definida de una función vectorial $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ se definen respectivamente, por

$$\int \mathbf{r}(t)\,dt = \left[\int f(t)\,dt\right]\mathbf{i} + \left[\int g(t)\,dt\right]\mathbf{j} + \left[\int h(t)\,dt\right]\mathbf{k}$$
$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left[\int_a^b f(t)\,dt\right]\mathbf{i} + \left[\int_a^b g(t)\,dt\right]\mathbf{j} + \left[\int_a^b h(t)\,dt\right]\mathbf{k}.$$

La integral indefinida de $\mathbf{r}$ es otro vector $\mathbf{R} + \mathbf{c}$ tal que $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$.

Ejemplo 8

Si

$$\mathbf{r}(t) = 6t^2\mathbf{i} + 4e^{-2t}\mathbf{j} + 8\cos 4t\mathbf{k},$$

entonces

$$\int \mathbf{r}(t)\,dt = \left[\int 6t^2\,dt\right]\mathbf{i} + \left[\int 4e^{-2t}\,dt\right]\mathbf{j} + \left[\int 8\cos 4t\,dt\right]\mathbf{k}$$
$$= [2t^3 + c_1]\mathbf{i} + [-2e^{-2t} + c_2]\mathbf{j} + [2\operatorname{sen} 4t + c_3]\mathbf{k}$$
$$= 2t^3\mathbf{i} - 2e^{-2t}\mathbf{j} + 2\operatorname{sen} 4t\mathbf{k} + \mathbf{c},$$

en donde $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$.

Longitud de una curva en el espacio

Si $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ es una función alisada, entonces puede demostrarse, de manera semejante a la indicada en la Sección 13.1, que la longitud de la curva alisada descrita por $\mathbf{r}$ está dada por

$$s = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\,dt = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\,dt. \tag{15.3}$$

La longitud de arco como parámetro

Una curva plana o del espacio se puede parametrizar en términos de la longitud de arco s.

Ejemplo 9

Considérese la hélice del Ejemplo 1. Puesto que $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{5}$, de (15.3) resulta que la longitud de la curva desde $\mathbf{r}(0)$ hasta un punto arbitrario $\mathbf{r}(t)$ es

$$s = \int_0^t \sqrt{5}\,du = \sqrt{5}t,$$

en donde hemos utilizado u como una variable ficticia de integración. Empleando $t = s/\sqrt{5}$, la ecuación vectorial de la hélice es entonces una función de la longitud de arco:

$$\mathbf{r}(s) = 2\cos\frac{s}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + 2\operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{5}}\mathbf{j} + \frac{s}{\sqrt{5}}\mathbf{k}. \tag{15.4}$$

Son ecuaciones paramétricas de la hélice.

$$f(s) = 2\cos(s/\sqrt{5}), \qquad g(s) = 2\operatorname{sen}(s/\sqrt{5}), \qquad h(s) = s/\sqrt{5}.$$

La derivada de una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ con respecto al parámetro t es un vector tangente a la curva trazada por $\mathbf{r}$. Sin embargo, si la curva es parametrizada en términos de la longitud de arco s, entonces

$\mathbf{r}'(s)$ es un vector tangente unitario.

Para ver esto, considérese una curva descrita por $\mathbf{r}(s)$, en donde s es la longitud de arco. En virtud de (15.3) la longitud de la curva de $\mathbf{r}(0)$ a $\mathbf{r}(s)$ es

$$s = \int_0^s |\mathbf{r}'(u)|\,du.$$

La diferenciación de esta última ecuación con respecto a s da luego $|\mathbf{r}'(s)| = 1$.

Ejercicios 15.1

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 996.

[15.1.1]

En los Problemas 1-10 trace la gráfica correspondiente a la función vectorial indicada.

1. $\mathbf{r}(t) = 2\,\text{sen}\, t\mathbf{i} + 4\cos t\mathbf{j} + t\mathbf{k},\ t \geq 0$
2. $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \text{sen}\, t\mathbf{k},\ t \geq 0$
3. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k},\ t \geq 0$
4. $\mathbf{r}(t) = 4\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + 3\,\text{sen}\, t\mathbf{k}$
5. $\mathbf{r}(t) = \langle e^t, e^{2t}\rangle$
6. $\mathbf{r}(t) = \cosh t\mathbf{i} + 3\,\text{senh}\, t\mathbf{j}$
7. $\mathbf{r}(t) = \langle\sqrt{2}\,\text{sen}\, t, \sqrt{2}\,\text{sen}\, t, 2\cos t\rangle,$ $0 \leq t \leq \pi/2$
8. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + t\mathbf{k}$
9. $\mathbf{r}(t) = e^t\cos t\mathbf{i} + e^t\,\text{sen}\, t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$
10. $\mathbf{r}(t) = \langle t\cos t, t\,\text{sen}\, t, t^2\rangle$

[15.1.2]

11. Dado que $\mathbf{r}(t) = \dfrac{\text{sen}\, 2t}{t}\mathbf{i} + (t-2)^5\mathbf{j} + t\ln t\mathbf{k}$ encuentre $\lim\limits_{t\to 0} \mathbf{r}(t)$.
12. Dado que $\lim\limits_{t\to a} \mathbf{r}_1(t) = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\lim\limits_{t\to a} \mathbf{r}_2(t) = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, encuentre
    (a) $\lim\limits_{t\to a} [-4\mathbf{r}_1(t) + 3\mathbf{r}_2(t)]$
    (b) $\lim\limits_{t\to a} \mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2(t)$.

En los Problemas 13-16 encuentre $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{r}''(t)$ para la función vectorial indicada.

13. $\mathbf{r}(t) = \ln t\mathbf{i} + \dfrac{1}{t}\mathbf{j},\ t > 0$
14. $\mathbf{r}(t) = \langle t\cos t - \text{sen}\, t, t + \cos t\rangle$
15. $\mathbf{r}(t) = \langle te^{2t}, t^3, 4t^2 - t\rangle$
16. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + \tan^{-1}t\mathbf{k}$

En los Problemas 17-20 dibuje la curva C descrita por $\mathbf{r}$, y trace $\mathbf{r}'$ para el valor indicado de t.

17. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 6\,\text{sen}\, t\mathbf{j};\ t = \pi/6$
18. $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j};\ t = -1$
19. $\mathbf{r}(t) = 2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \dfrac{4}{1+t^2}\mathbf{k};\ t = 1$
20. $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\mathbf{i} + 3\,\text{sen}\, t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k};\ t = \pi/4$

En los Problemas 21 y 22 obtenga ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva dada en el valor indicado de t.

21. $x = t,\ y = \dfrac{1}{2}t^2,\ z = \dfrac{1}{3}t^3;\ t = 2$
22. $x = t^3 - t,\ y = \dfrac{6t}{t+1},\ z = (2t+1)^2;\ t = 1$

En los Problemas 23-28 determine la derivada que se indica. Suponga que todas las funciones vectoriales son diferenciables.

23. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)]$
24. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)\cdot(t\mathbf{r}(t))]$
25. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)\cdot(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t))]$
26. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) \times (\mathbf{r}_2(t) \times \mathbf{r}_3(t))]$
27. $\dfrac{d}{dt}\left[\mathbf{r}_1(2t) + \mathbf{r}_2\left(\dfrac{1}{t}\right)\right]$
28. $\dfrac{d}{dt}[t^3\mathbf{r}(t^2)]$

En los Problemas 29-32 evalúe la integral indicada.

29. $\displaystyle\int_{-1}^{2}(t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k})\,dt$
30. $\displaystyle\int_{0}^{4}(\sqrt{2t+1}\,\mathbf{i} - \sqrt{t}\,\mathbf{j} + \text{sen}\,\pi t\mathbf{k})\,dt$
31. $\displaystyle\int(te^t\mathbf{i} - e^{-2t}\mathbf{j} + te^{t^2}\mathbf{k})\,dt$
32. $\displaystyle\int\frac{1}{1+t^2}(\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k})\,dt$

En los Problemas 33-36 encuentre una función vectorial $\mathbf{r}$ que satisfaga las condiciones indicadas.

33. $\mathbf{r}'(t) = 6\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k};\ \mathbf{r}(0) = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
34. $\mathbf{r}'(t) = t\,\text{sen}\, t^2\mathbf{i} - \cos 2t\mathbf{j};\ \mathbf{r}(0) = \dfrac{3}{2}\mathbf{i}$
35. $\mathbf{r}''(t) = 12t\mathbf{i} - 3t^{-1/2}\mathbf{j} + 2\mathbf{k};\ \mathbf{r}'(1) = \mathbf{j},\ \mathbf{r}(1) = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}$
36. $\mathbf{r}''(t) = \sec^2 t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} - \text{sen}\, t\mathbf{k};\ \mathbf{r}'(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k},\ \mathbf{r}(0) = -\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

En los Problemas 37-40 determine la longitud de la curva correspondiente a la función vectorial dada en el intervalo indicado.

37. $\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\,\text{sen}\, t\mathbf{j} + ct\mathbf{k};\ 0 \leq t \leq 2\pi$
38. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\cos t\mathbf{j} + t\,\text{sen}\, t\mathbf{k};\ 0 \leq t \leq \pi$
39. $\mathbf{r}(t) = e^t\cos 2t\mathbf{i} + e^t\,\text{sen}\, 2t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k};\ 0 \leq t \leq 3\pi$
40. $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + \sqrt{3}t^2\mathbf{j} + \dfrac{2}{3}t^3\mathbf{k};\ 0 \leq t \leq 1$
41. Exprese la ecuación vectorial de la circunferencia $\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\,\text{sen}\, t\mathbf{j}$ como función de la longitud de arco s. Verifique que $\mathbf{r}'(s)$ es un vector unitario.
42. Si $\mathbf{r}(s)$ es la función vectorial dada en (15.4) compruebe que $\mathbf{r}'(s)$ es un vector unitario.
43. Si m es la masa de una partícula, la segunda ley de Newton del movimiento se puede expresar en forma vectorial como:
$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$
en donde $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ se llama cantidad de movimiento (o ímpetu) lineal. La cantidad de movimiento (o ímpetu) angular de la partícula con respecto al origen se define como $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, en donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición. Si el momento (o torque) aplicado a la partícula con respecto al origen es $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times d\mathbf{p}/dt$, demuestre que $\boldsymbol{\tau}$ es la razón de cambio de la cantidad de movimiento angular con respecto al tiempo.
44. La velocidad de una partícula en un fluído en movimiento se describe por medio de un campo de velocidades $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$, en donde las componentes v_i, $i = 1, 2, 3$ son funciones de x, y, z, y del tiempo t. Si $\mathbf{r}(t)$ es la función vectorial que da la posición de una partícula en cualquier instante, entonces $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$. Dado que $\mathbf{v} = 6t^2x\mathbf{i} - 4ty^2\mathbf{j} + 2t(z+1)\mathbf{k}$, determine $\mathbf{r}(t)$. (*Sugerencia:* Utilice la separación de variables.)
45. Supóngase que $\mathbf{r}$ es una función vectorial diferenciable para la cual $|\mathbf{r}(t)| = c$ para todo t. Demuestre que el vector tangente $\mathbf{r}'(t)$ es perpendicular al vector de posición $\mathbf{r}(t)$ para todo t.
46. En el Problema 45 describa geométricamente el tipo de curva C para la cual $|\mathbf{r}(t)| = c$.

Problemas diversos

47. Demuestre el Teorema 15.4(*ii*).
48. Demuestre el Teorema 15.4(*iii*).
49. Verifique el Teorema 15.4(*iv*).
50. Si $\mathbf{v}$ es un vector constante y $\mathbf{r}$ es integrable en $[a, b]$, demuestre que $\int_a^b \mathbf{v}\cdot\mathbf{r}(t)dt = \mathbf{v}\cdot\int_a^b \mathbf{r}(t)dt$.

15.2 Movimiento sobre una curva. Velocidad y aceleración

Supóngase que un cuerpo o una partícula móvil describe una trayectoria C, y que su posición en ella está dada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k},$$

en donde t representa el tiempo. Si f, g y h tienen segundas derivadas, entonces los vectores

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = f''(t)\mathbf{i} + g''(t)\mathbf{j} + h''(t)\mathbf{k}$$

se llaman **velocidad** y **aceleración** de la partícula, respectivamente. La función escalar $|\mathbf{v}(t)|$ es la **rapidez** de la partícula. Puesto que

$$|\mathbf{v}(t)| = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2},$$

la rapidez está relacionada con la longitud de arco s mediante $s'(t) = |\mathbf{v}(t)|$. En otras palabras, la longitud de arco está dada por

$$s = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{v}(t)|\, dt.$$

Del análisis de la Sección 15.1 resulta también que si $P(x_1, y_1, z_1)$ es la posición de la partícula en C en el instante t_1, entonces podemos dibujar

$$\mathbf{v}(t_1) \textit{ tangente a } C \textit{ en } P.$$

Para curvas descritas por

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$$

se tienen observaciones semejantes.

Ejemplo 1

La posición de una partícula móvil está dada por

$$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \frac{5}{2}t\mathbf{k}.$$

Trazar la trayectoria y los vectores $\mathbf{v}(2)$ y $\mathbf{a}(2)$.

Solución Como $x = t^2$, $y = t$, la trayectoria de la partícula se encuentra por arriba de la parábola $x = y^2$. Cuando $t = 2$ el vector de posición $\mathbf{r}(2) = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ indica que la partícula está en el punto $P(4, 2, 5)$. Ahora bien,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{5}{2}\mathbf{k}$$
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 2\mathbf{i}$$

de manera que $\quad \mathbf{v}(2) = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{5}{2}\mathbf{k} \quad$ y $\quad \mathbf{a}(2) = 2\mathbf{i}.$

Estos vectores se muestran en la Figura 15.7.

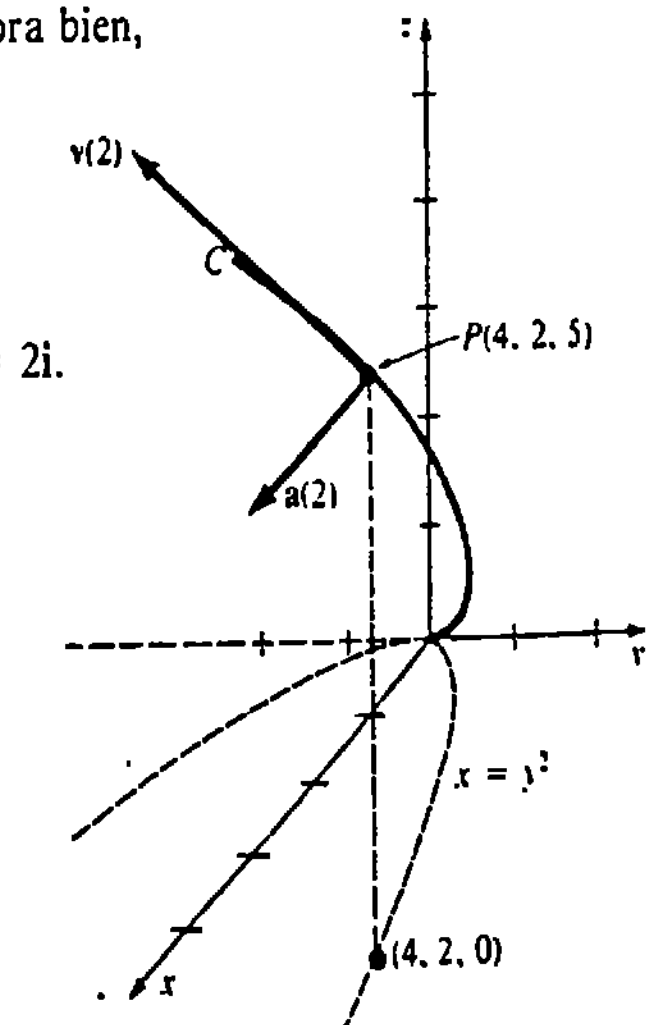


Figura 15.7

Si una partícula se mueve con una rapidez constante c, entonces su vector aceleración es perpendicular al vector velocidad $\mathbf{v}$. Para deducir esto, obsérvese que

$$|\mathbf{v}|^2 = c^2 \quad \text{o bien} \quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = c^2.$$

Se derivan ambos lados con respecto a t, y con la ayuda del Teorema 15.4(*iii*) obtenemos

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v} = 2\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0.$$

De esta manera,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v} = 0 \quad \text{o bien} \quad \mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{v}(t) = 0 \quad \text{para todo } t.$$

Ejemplo 2

Supóngase que la función vectorial del Ejemplo 2 de la Sección 15.1 representa la posición de una partícula que se mueve en una órbita circular. Trace los vectores velocidad y aceleración para $t = \pi/4$.

Solución Recuérdese que

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\, t\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

es el vector de posición de una partícula que se mueve sobre una órbita circular de radio 2 en el plano $z = 3$. Cuando $t = \pi/4$, la partícula está en el punto $P(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3)$. Ahora bien,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -2\,\text{sen}\, t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j}$$
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = -2\cos t\mathbf{i} - 2\,\text{sen}\, t\mathbf{j}.$$

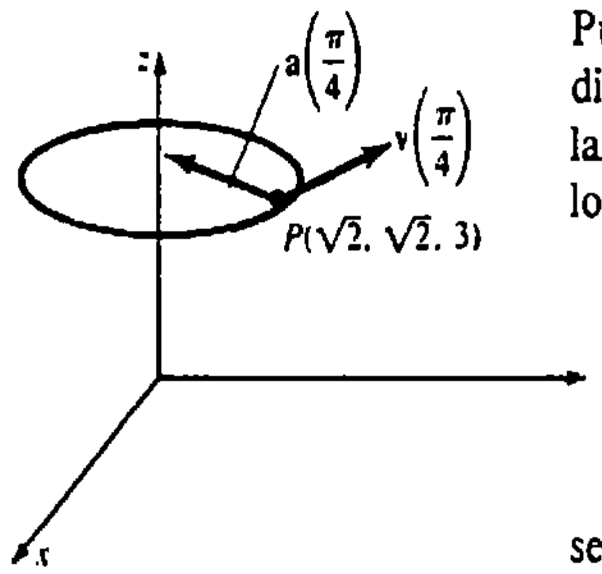


Figura 15.8

Puesto que la rapidez es $|\mathbf{v}(t)| = 2$ para todo instante t, de la discusión anterior a este ejemplo resulta que $\mathbf{a}(t)$ es perpendicular a $\mathbf{v}(t)$. (Verifique esto.) Como se muestra en la Figura 15.8, los vectores

$$\mathbf{v}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\mathbf{i} + 2\cos\frac{\pi}{4}\mathbf{j} = -\sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j}$$
$$\mathbf{a}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\cos\frac{\pi}{4}\mathbf{i} - 2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\mathbf{j} = -\sqrt{2}\mathbf{i} - \sqrt{2}\mathbf{j}$$

se trazan en el punto P. El vector $\mathbf{v}(\pi/4)$ es tangente a la trayectoria circular, y $\mathbf{a}(\pi/4)$ apunta hacia el centro de la circunferencia a lo largo de un radio.

Aceleración centrípeta

Para el movimiento circular en el plano, descrito por $\mathbf{r}(t) = r_0\cos\omega t\mathbf{i} + r_0\,\text{sen}\,\omega t\mathbf{j}$, r_0 y ω constantes, es evidente que $\mathbf{r}'' = -\omega^2\mathbf{r}$. Esto significa que el vector aceleración $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ apunta en la dirección opuesta a la del vector de posición $\mathbf{r}(t)$. Decimos en-

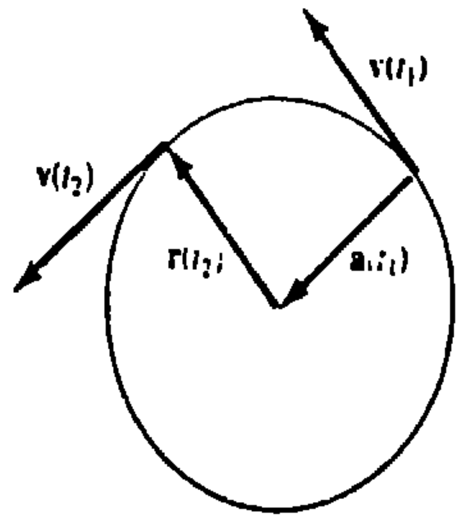


Figura 15.9

tonces que $\mathbf{a}(t)$ es una **aceleración centrípeta**. Véase la Figura 15.9. Si $v = |\mathbf{v}(t)|$ y $a = |\mathbf{a}(t)|$, se deja como ejercicio demostrar que $a = v^2/r_0$.

Movimiento curvilíneo en el plano

Muchas aplicaciones importantes de las funciones vectoriales ocurren al describir el movimiento curvilíneo en un plano. Por ejemplo, el movimiento planetario y de proyectiles se realizan en un plano.

Al analizar el movimiento de proyectiles balísticos* de corto alcance, empezamos con la aceleración de la gravedad expresada en la forma vectorial

$$\mathbf{a}(t) = -g\mathbf{j}.$$

Como se muestra en la Figura 15.10, si un proyectil se lanza con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0 = v_0 \cos\theta\mathbf{i} + v_0 \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$, desde una altura inicial $\mathbf{s}_0 = s_0\mathbf{j}$, entonces

$$\mathbf{v}(t) = \int (-g\mathbf{j})\, dt = -gt\mathbf{j} + \mathbf{c}_1,$$

en donde $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ implica que $\mathbf{c}_1 = \mathbf{v}_0$. Por lo tanto,

$$\mathbf{v}(t) = (-gt + v_0 \operatorname{sen}\theta)\mathbf{j} + (v_0\cos\theta)\mathbf{i}.$$

Integrando de nuevo y empleando $\mathbf{r}(0) = \mathbf{s}_0$ resulta

$$\mathbf{r}(t) = \left[-\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \operatorname{sen}\theta)t + s_0\right]\mathbf{j} + (v_0\cos\theta)t\mathbf{i}.$$

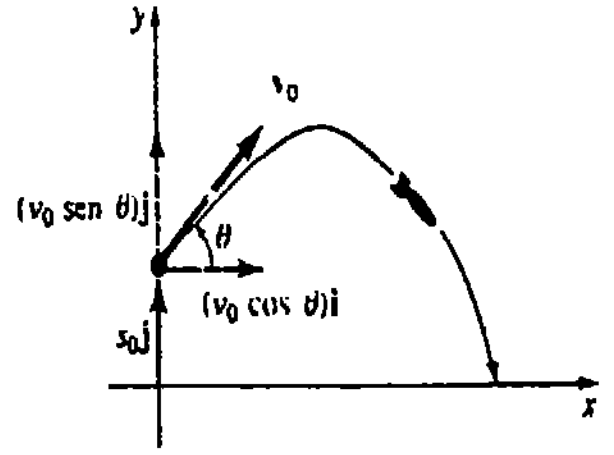


Figura 15.10

* Un proyectil es disparado o lanzado y no tiene autoimpulsión. En el análisis del movimiento balístico de *largo alcance*, se debe tomar en consideración la curvatura de la Tierra.

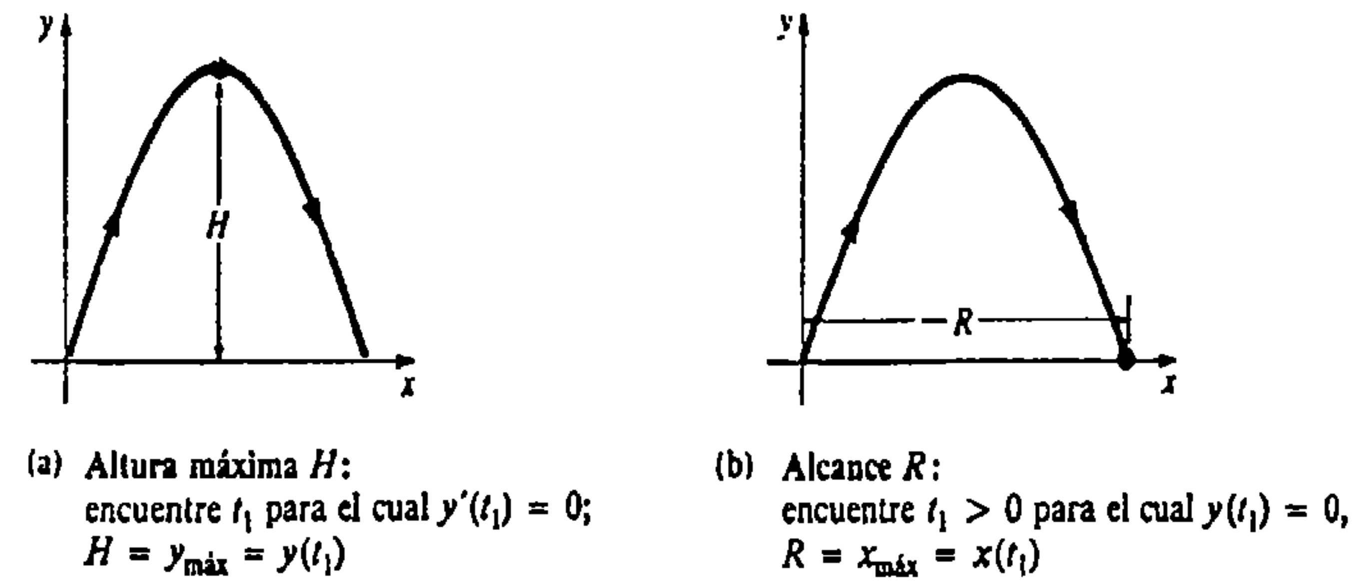


Figura 15.11

Por consiguiente, las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del proyectil son

$$x(t) = (v_0\cos\theta)t, \qquad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \operatorname{sen}\theta)t + s_0. \tag{15.5}$$

Naturalmente que interesa encontrar la altura máxima H y el alcance R logrado por un proyectil. Estas cantidades son los valores máximos de $y(t)$ y $x(t)$, respectivamente, como se muestra en la Figura 15.11.

Ejemplo 3

Un proyectil es lanzado desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 768 pie/s a un ángulo de elevación de 30°. Determine

(*a*) la función vectorial y las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del proyectil,

(*b*) la altura máxima alcanzada,

(*c*) el alcance del proyectil, y

(*d*) la velocidad o rapidez en el impacto contra el suelo.

Solución

(*a*) Inicialmente tenemos $\mathbf{s}_0 = \mathbf{0}$ y

$$\mathbf{v}_0 = (768\cos 30°)\mathbf{i} + (768 \operatorname{sen} 30°)\mathbf{j} = 384\sqrt{3}\mathbf{i} + 384\mathbf{j}. \tag{15.6}$$

Integrando $\mathbf{a}(t) = -32\mathbf{j}$ y empleando (15.6) resulta

$$\mathbf{v}(t) = (-32t + 384)\mathbf{j} + (384\sqrt{3})\mathbf{i}. \tag{15.7}$$

Integrando de nuevo se obtiene

$$\mathbf{r}(t) = (-16t^2 + 384t)\mathbf{j} + (384\sqrt{3}t)\mathbf{i}.$$

Por lo tanto, las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del proyectil son

$$x(t) = 384\sqrt{3}t, \qquad y(t) = -16t^2 + 384t. \tag{15.8}$$

(*b*) De (15.8) vemos que $dy/dt = 0$ cuando

$$-32t + 384 = 0 \quad \text{o bien} \quad t = 12.$$

Así, la altura máxima H alcanzada por el proyectil es

$$H = y(12) = -16(12)^2 + 384(12) = 2304 \text{ pie.}$$

(*c*) De (15.8) resulta que $y(t) = 0$ cuando

$$-16t(t - 24) = 0 \quad \text{o bien} \quad t = 0, \quad t = 24.$$

Entonces el alcance R vale

$$R = x(24) = 384\sqrt{3}(24) \approx 15{,}963 \text{ pie.}$$

(*d*) De (15.7) obtenemos la rapidez del proyectil en el impacto,

$$|\mathbf{v}(24)| = \sqrt{(-384)^2 + (384\sqrt{3})^2} = 768 \text{ pie/s.}$$

Observación

Hemos visto que la razón de cambio de la longitud de arco ds/dt es igual a la magnitud de la velocidad (rapidez) $|\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{r}'(t)|$. Sin embargo, como se verá en la siguiente sección, de ello *no* resulta que la *magnitud de la aceleración* d^2s/dt^2 sea igual a $|\mathbf{a}(t)| = |\mathbf{r}''(t)|$. Véase el Problema 18 de los Ejercicios 15.2.

Ejercicios 15.2

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 996.

En los Problemas 1-8 $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de una partícula móvil. Trace la gráfica de la curva y los vectores velocidad y aceleración en el instante indicado. Calcule la rapidez en dicho instante.

1. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \frac{1}{4}t^4\mathbf{j};\ t = 1$

2. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \frac{1}{t^2}\mathbf{j};\ t = 1$

3. $\mathbf{r}(t) = -\cosh 2t\mathbf{i} + \operatorname{senh} 2t\mathbf{j};\ t = 0$

4. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + (1 + \operatorname{sen} t)\mathbf{j};\ t = \pi/3$

5. $\mathbf{r}(t) = 2\mathbf{i} + (t-1)^2\mathbf{j} + t\mathbf{k};\ t = 2$

6. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k};\ t = 2$

7. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k};\ t = 1$

8. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + t\mathbf{k};\ t = 1$

9. Suponga que $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t^3 - 2t)\mathbf{j} + (t^2 - 5t)\mathbf{k}$ es el vector de posición de una partícula móvil. ¿En qué puntos pasa la partícula por el plano xy? ¿Cuál es su velocidad y su aceleración en estos puntos?

10. Suponga que una partícula se mueve en el espacio de manera que $\mathbf{a}(t) = \mathbf{0}$ para todo instante t. Describa su trayectoria.

11. Un proyectil es disparado desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 480 pie/s a un ángulo de elevación de 30°. Determine

(a) una función vectorial y ecuaciones paramétricas de la trayectoria del proyectil,

(b) la máxima altura alcanzada,

(c) el alcance del proyectil,

(d) la rapidez en el choque o impacto.

12. Resuelva el Problema 11 si el proyectil es lanzado con la misma rapidez inicial y el mismo ángulo de elevación, pero desde un acantilado de 1600 pie de altura.

13. Un auto inservible es arrojado desde lo alto de un acantilado costero vertical de 81 pie de altura con una velocidad de 4 pie/s. Calcule la velocidad con la que el auto hace impacto contra el agua.

14. Un proyectil pequeño es lanzado con una rapidez inicial de 98 m/s. Evalúe los ángulos de elevación posibles de manera que el alcance sea de 490 m.

15. Un jugador de futbol americano lanza una "bomba" de 100 yardas a un ángulo de 45° con la horizontal. ¿Cuál es la rapidez inicial del balón en el momento del lanzamiento?

16. Otro jugador lanza un balón con una misma rapidez inicial a un ángulo de 60° y luego a un ángulo de 30° con la horizontal. Demuestre que el alcance del balón es igual en ambos casos. Generalice este resultado para cualquier ángulo de lanzamiento $0 < \theta < \pi/2$.

17. Un proyectil es disparado por un cañón directamente a un blanco que se deja caer a partir del reposo simultáneamente al disparo del cañón. Demuestre que el proyectil dará en el blanco a la mitad de su caída. Véase la Figura 15.12. (*Sugerencia:* Supóngase que el origen está en la boca del cañón y que el ángulo de elevación es θ. Si $\mathbf{r}_p$ y $\mathbf{r}_t$ son los vectores de posición del proyectil y del blanco, respectivamente, ¿hay algún instante en el que $\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_t$?)

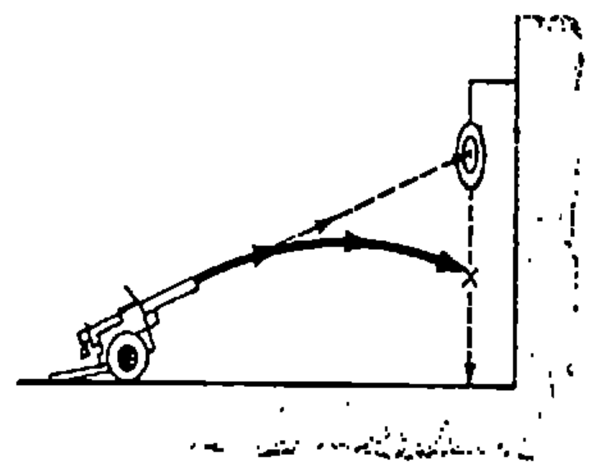


Figura 15.12

18. El movimiento de una partícula en el espacio descrito por

$$\mathbf{r}(t) = b\cos t\mathbf{i} + b\operatorname{sen} t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}, \qquad t \geq 0.$$

(a) Calcule $|\mathbf{v}(t)|$.

(b) Calcule $s = \int_0^t |\mathbf{v}(u)|\,du$ y verifique que ds/dt es igual al resultado de la parte (a).

(c) Verifique que $d^2s/dt^2 \neq |\mathbf{a}(t)|$.

19. Suponga que $\mathbf{r}(t) = r_0\cos\omega t\mathbf{i} + r_0\operatorname{sen}\omega t\mathbf{j}$ es el vector de posición de un objeto que se mueve en una circunferencia de radio r_0 en el plano xy. Si $|\mathbf{v}(t)| = v$, demuestre que la magnitud de la aceleración centrípeta es $a = |\mathbf{a}(t)| = v^2/r_0$.

Problemas para calculadora

20. Considere una ciclista que va por una pista plana circular de radio r_0. Si m es la masa combinada de la ciclista y de la bicicleta, llene los espacios en blanco de la Figura 15.13. (*Sugerencia:* Aplique el Problema 19 y la fórmula fuerza = masa × aceleración. Suponga que las direcciones positivas son hacia arriba y a la izquierda.) El vector resultante U indica la dirección en que la ciclista debe inclinarse para evitar la caída. Determine el ángulo ϕ al que debe inclinarse con respecto a la vertical si su velocidad es de 44 pie/s y el radio de la pista es de 60 pie.

21. El peso efectivo w_e de un cuerpo de masa m en el ecuador de la Tierra se define por $w_e = mg - ma$, en donde a es la magnitud de la aceleración centrípeta dada en el Problema 19. Determine el peso efectivo de una persona de 192 libras si el radio de la Tierra es 4000 millas, g = 32 pie/s y v = 1530 pie/s.

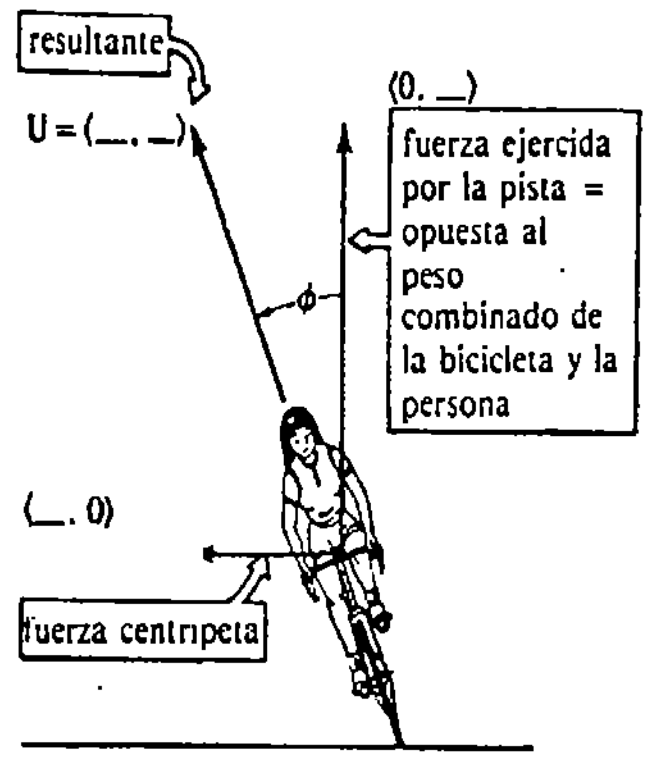


Figura 15.13

Problemas diversos

22. Un proyectil es lanzado con una rapidez inicial v_0 desde el nivel del suelo a un ángulo de elevación θ. Utilice (15.5) para demostrar que la altura máxima y el alcance del proyectil son

$$H = \frac{v_0^2\operatorname{sen}^2\theta}{2g}, \qquad R = \frac{v_0^2\operatorname{sen} 2\theta}{g},$$

respectivamente.

23. Utilice las expresiones (15.5) para demostrar que la trayectoria de un proyectil balístico es parabólica.

15.3 Componentes de la aceleración. Curvatura

Vector tangente unitario y vector normal unitario principal

Sea C una curva en el espacio descrita por $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, en donde f, g y h tienen segundas derivadas. Si $|\mathbf{r}'(t)| \neq 0$ en un punto P de C, definimos el vector tangente unitario en P mediante

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}. \tag{15.9}$$

Ahora bien, la velocidad de una partícula móvil en C es $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$, mientras que su rapidez es $ds/dt = v = |\mathbf{v}(t)|$. De manera que (15.9) implica que

$$\mathbf{v}(t) = v\mathbf{T}. \tag{15.10}$$

Derivando (15.10) con respecto a t se obtiene la aceleración

$$\mathbf{a}(t) = v\frac{d\mathbf{T}}{dt} + \frac{dv}{dt}\mathbf{T}. \tag{15.11}$$

Además, diferenciando $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1$ con ayuda del Teorema 15.4(*iii*), resulta que $\mathbf{T} \cdot d\mathbf{T}/dt = 0$. Por lo tanto, $\mathbf{T}$ y $d\mathbf{T}/dt$ son ortogonales en P. Si $|d\mathbf{T}/dt| \neq 0$, el vector

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|} \tag{15.12}$$

es un vector normal unitario de la curva C en P con dirección dada por $d\mathbf{T}/dt$. El vector $\mathbf{N}$ también se llama **vector normal principal**. Si definimos $\kappa = |d\mathbf{T}/dt|/ds/dt$, entonces $d\mathbf{T}/dt = \kappa v\mathbf{N}$ y así (15.11) se convierte en

$$\mathbf{a}(t) = \kappa v^2\mathbf{N} + \frac{dv}{dt}\mathbf{T}. \tag{15.13}$$

La función escalar κ se denomina **curvatura** de la curva C en P.*

Componentes tangencial y normal de la aceleración

Escribiendo (15.13) como

$$\mathbf{a}(t) = a_N\mathbf{N} + a_T\mathbf{T}, \tag{15.14}$$

vemos que el vector aceleración $\mathbf{a}$ es el resultante de dos vectores ortogonales $a_N\mathbf{N}$ y $a_T\mathbf{T}$. Véase la Figura 15.14. Las funciones escalares $a_T = dv/dt$ y $a_N = \kappa v^2$ se llaman **componentes tangencial y normal de la aceleración**, respectivamente. Obsérvese que la componente tangencial de la aceleración resulta de un cambio en la *magnitud* de la velocidad $\mathbf{v}$, mientras que la componente normal de la aceleración resulta de un cambio en la *dirección* de $\mathbf{v}$.

* Recuérdese de la Sección 15.1 que una curva en el espacio puede parametrizarse en términos de la longitud de arco s; en este caso la regla de la cadena da

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\frac{dt}{ds}\right| = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|.$$

En otras palabras, la curvatura es la magnitud de la razón de cambio del vector tangente unitario $\mathbf{T}$ con respecto a la longitud de arco.

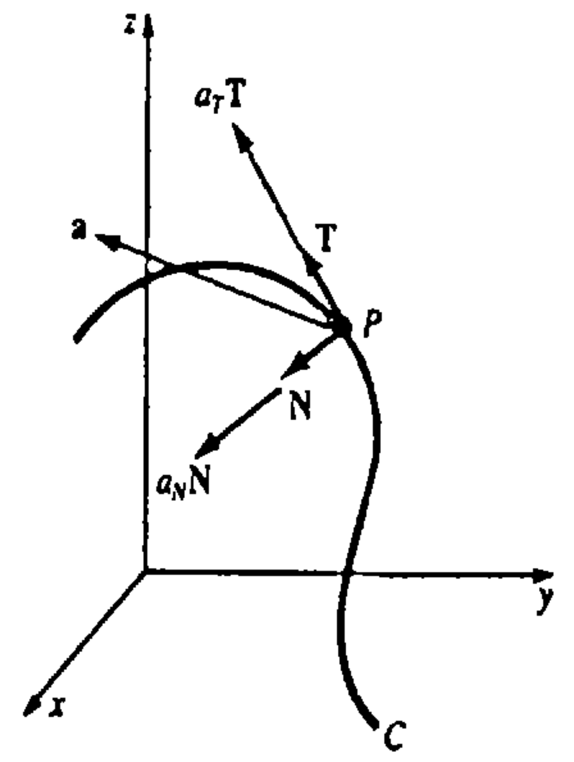


Figura 15.14

Vector binormal unitario

Un tercer vector unitario definido mediante

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$$

Recibe el nombre de **vector binormal**. Los tres vectores unitarios $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, y $\mathbf{B}$ forman un conjunto de vectores mutuamente ortogonales de orientación derecha, llamado **triedro móvil**. El plano de $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$ se denomina **plano osculador**;* el plano de $\mathbf{N}$ y $\mathbf{B}$ se llama **plano normal**, mientras que el plano de $\mathbf{T}$ y $\mathbf{B}$ es el **plano rectificador**. Véase la Figura 15.15.

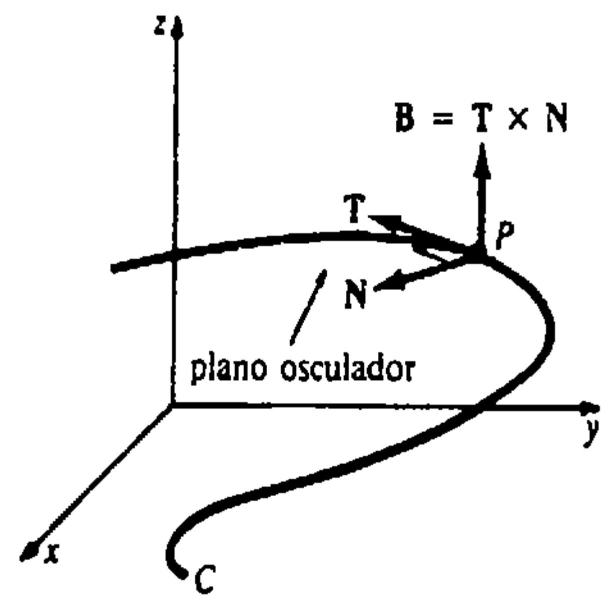


Figura 15.15

Ejemplo 1

La posición de una partícula móvil está dada por $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$. Encuentre los vectores $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ y $\mathbf{B}$. Determine la curvatura.

* Literalmente, "osculador" significa "besador".

Solución Puesto que $\mathbf{r}'(t) = -2\,\text{sen}\,t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{13}$, y así de (15.9), vemos que un vector tangente unitario es

$$\mathbf{T} = -\frac{2}{\sqrt{13}}\,\text{sen}\,t\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{13}}\cos t\mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{k}.$$

En seguida tenemos

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = -\frac{2}{\sqrt{13}}\cos t\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{13}}\,\text{sen}\,t\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Por lo tanto, (15.12) da el vector normal unitario principal

$$\mathbf{N} = -\cos t\mathbf{i} - \text{sen}\,t\mathbf{j}.$$

El vector binormal unitario es ahora

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\frac{2}{\sqrt{13}}\,\text{sen}\,t & \frac{2}{\sqrt{13}}\cos t & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ -\cos t & -\text{sen}\,t & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{3}{\sqrt{13}}\,\text{sen}\,t\mathbf{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\cos t\mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{k}.$$

Finalmente, la curvatura está dada por

$$\kappa = \frac{2/\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{2}{13}.$$

Fórmulas para a_T, a_N y la curvatura

Efectuando el producto escalar y luego el producto vectorial del vector $\mathbf{v} = v\mathbf{T}$ con la expresión (15.14), es posible obtener fórmulas explícitas para las componentes tangencial y normal de la aceleración y para la curvatura. Obsérvese que

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = a_N(v\underbrace{\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}}_{0}) + a_T(v\underbrace{\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}}_{1}) = a_T v$$

da la componente tangencial de la aceleración

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}. \tag{15.15}$$

Por otra parte,

$$\mathbf{v}\times\mathbf{a} = a_N(v\underbrace{\mathbf{T}\times\mathbf{N}}_{\mathbf{B}}) + a_T(v\underbrace{\mathbf{T}\times\mathbf{T}}_{\mathbf{0}}) = a_N v\mathbf{B}.$$

Como $|\mathbf{B}| = 1$, resulta que la componente normal de la aceleración es

$$a_N = \kappa v^2 = \frac{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}. \tag{15.16}$$

Despejando de (15.16) la curvatura se obtiene

$$\kappa = \frac{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3} = \frac{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}. \tag{15.17}$$

Ejemplo 2

Se dice que la curva descrita por $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{k}$ es un "cubo torcido". Si $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de una partícula móvil, determinar las componentes tangencial y normal de la aceleración para cualquier t. Evalúe la curvatura.

Solución

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = \mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$$

Puesto que $\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = t + 2t^3$ y $|\mathbf{v}| = \sqrt{1+t^2+t^4}$, de (15.15) resulta que

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{t+2t^3}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$$

Ahora bien, $$\mathbf{v}\times\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & 2t \end{vmatrix} = t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

y $|\mathbf{v}\times\mathbf{a}| = \sqrt{t^4+4t^2+1}$. De esta manera, (15.16) da

$$a_N = \kappa v^2 = \frac{\sqrt{t^4+4t^2+1}}{\sqrt{1+t^2+t^4}} = \sqrt{\frac{t^4+4t^2+1}{t^4+t^2+1}}.$$

De (15.17) obtenemos que la curvatura del cubo torcido está dada por

$$\kappa = \frac{(t^4+4t^2+1)^{1/2}}{(1+t^2+t^4)^{3/2}}.$$

Radio de curvatura

El recíproco de la curvatura, $\rho = 1/\kappa$, se llama **radio de curvatura**. El radio de curvatura en un punto P de una curva es el radio de una circunferencia que se ajusta a la curva mejor que cualquiera otra. Por ejemplo, un automóvil que recorre una pista curvada, como se muestra en la Figura 15.16, puede considerarse que se mueve sobre una circunfe-

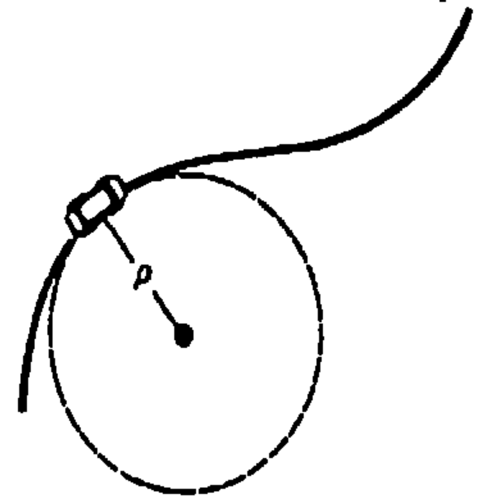


Figura 15.16

rencia de radio ρ, en cualquier instante. Por consiguiente, la componente normal de su aceleración $a_N = \kappa v^2$ debe ser igual a la magnitud de su aceleración centrípeta $a = v^2/\rho$. Por lo tanto, $\kappa = 1/\rho$ y $\rho = 1/\kappa$. Conociendo el radio de curvatura, es posible determinar la rapidez v a la cual un auto puede tomar una curva inclinada sin que derrape. (Esta es esencialmente la idea en el Problema 20 de los Ejercicios 15.2.)

Observación

Escribiendo (15.11) como

$$\mathbf{a}(t) = \frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{T}}{dt} + \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T},$$

advertimos que la magnitud de la aceleración (o "aceleración escalar") d^2s/dt^2, a la que se hace referencia en la observación pasada, aparece ahora como la componente tangencial a_T de la aceleración.

Ejercicios 15.3

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 997.

En los Problemas 1 y 2 determine el vector tangente unitario de la función de posición indicada.

1. $\mathbf{r}(t) = (t\cos t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (t\operatorname{sen} t + \cos t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, $t > 0$

2. $\mathbf{r}(t) = e^t\cos t\mathbf{i} + e^t\operatorname{sen} t\mathbf{j} + \sqrt{2}e^t\mathbf{k}$

3. Aplique el procedimiento mencionado en el Ejemplo 1 para encontrar $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$ y κ correspondientes al movimiento sobre una hélice circular general, descrita por

$$\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\operatorname{sen} t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}.$$

4. Aplique el procedimiento del Ejemplo 1 para demostrar que para el "cubo torcido" del Ejemplo 2, en $t = 1$:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}), \qquad \mathbf{N} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{k})$$

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{\sqrt{6}}(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}), \quad \text{y} \quad \kappa = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

En los Problemas 5 y 6 obtenga una ecuación del plano osculador de la curva en el espacio dada, en el punto que corresponda al valor indicado de t.

5. La hélice circular del Ejemplo 1; $t = \pi/4$.

6. El "cubo torcido" del Ejemplo 2; $t = 1$.

En los Problemas 7-16, $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de una partícula móvil. Determine las componentes tangencial y normal de la aceleración para cualquier valor de t.

7. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$

8. $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

9. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$

10. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} - t^3\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$

11. $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$

12. $\mathbf{r}(t) = \tan^{-1}t\mathbf{i} + \frac{1}{2}\ln(1 + t^2)\mathbf{j}$

13. $\mathbf{r}(t) = 5\cos t\mathbf{i} + 5\operatorname{sen} t\mathbf{j}$

14. $\mathbf{r}(t) = \cosh t\mathbf{i} + \operatorname{senh} t\mathbf{j}$

15. $\mathbf{r}(t) = e^{-t}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

16. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (2t - 1)\mathbf{j} + (4t + 2)\mathbf{k}$

17. Obtenga la curvatura de una hélice elíptica descrita por $\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + b\operatorname{sen} t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$; $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

18. (a) Halle la curvatura de una órbita elíptica descrita por $\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + b\operatorname{sen} t\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

(b) Demuestre que cuando $a = b$, la curvatura de una órbita circular es la constante $\kappa = 1/a$.

19. Demuestre que la curvatura de una línea recta es la constante $\kappa = 0$. (*Sugerencia:* Utilice (14.39) de la Sección 14.5.)

20. Halle la curvatura de la cicloide descrita por $\mathbf{r}(t) = a(t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j}$, $a > 0$, en $t = \pi$.

Problemas diversos

21. Sea C una curva plana descrita por $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, en donde f y g tienen segundas derivadas. Demuestre que la curvatura en un punto está dada por

$$\kappa = \frac{|f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)|}{([f'(t)]^2 + [g'(t)]^2)^{3/2}}.$$

22. Demuestre que si $y = F(x)$, la fórmula para κ en el Problema 21, se reduce a

$$\kappa = \frac{|F''(x)|}{[1 + (F'(x))^2]^{3/2}}.$$

23. Analice la curvatura cerca de un punto de inflexión de $y = F(x)$.

24. Demuestre que $|\mathbf{a}(t)|^2 = a_N^2 + a_T^2$.

Examen • Capítulo 15

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 997.

En los Problemas 1-10 conteste verdadero o falso.

1. Una partícula cuyo vector de posición es $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \sqrt{2}\operatorname{sen} t\mathbf{k}$, se mueve con rapidez constante. ____

2. La trayectoria de una partícula móvil cuyo vector de posición es $\mathbf{r}(t) = (t^2 + 1)\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$ se encuentra en un plano. ____

3. El vector binormal unitario es perpendicular al plano osculador. ____

4. Si $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de una partícula móvil, entonces el vector velocidad $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ y el vector aceleración $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ son ortogonales. ____

5. Si s es la longitud de arco de una curva C, entonces la magnitud de la velocidad de una partícula que se mueva sobre C es ds/dt. ____

6. Si s es la longitud de arco de una curva C, entonces la magnitud de la aceleración de una partícula en C es d^2s/dt^2. ____

7. Si el vector binormal se define por $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$, entonces el normal principal es $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$. ____

8. Si $\lim_{t\to a} \mathbf{r}_1(t) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\lim_{t\to a} \mathbf{r}_2(t) = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, entonces $\lim_{t\to a} \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) = 0$. ____

9. $\displaystyle\int_a^b [\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)]\,dt = \left[\int_a^b \mathbf{r}_1(t)\,dt\right] \cdot \left[\int_a^b \mathbf{r}_2(t)\,dt\right]$ ____

10. Si $\mathbf{r}(t)$ es diferenciable, entonces $\dfrac{d}{dt}|\mathbf{r}(t)|^2 = 2\mathbf{r}(t) \cdot \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$. ____

11. Determine la longitud de la curva descrita por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ en el intervalo $0 \le t \le \pi$.

12. El vector de posición de una partícula móvil está dado por $\mathbf{r}(t) = 5t\mathbf{i} + (1 + t)\mathbf{j} + 7t\mathbf{k}$. Dado que la partícula parte del punto correspondiente a $t = 0$, halle la distancia que recorre la partícula hasta el punto correspondiente a $t = 3$. ¿En qué punto habrá recorrido la partícula $80\sqrt{5}$ unidades a lo largo de la curva?

13. Obtenga ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva descrita por

$$\mathbf{r}(t) = -3t^2\mathbf{i} + 4\sqrt{t + 1}\,\mathbf{j} + (t - 2)\mathbf{k}$$

en $t = 3$.

14. Demuestre que la curva descrita por $\mathbf{r}(t) = t\cos t\mathbf{i} + t\operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ se encuentra sobre la superficie de un cono. Dibuje la curva.

15. Trace la curva descrita por $\mathbf{r}(t) = \cosh t\mathbf{i} + \operatorname{senh} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$.

16. Dado que $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}_2(t) = -t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + (t^2 + 1)\mathbf{k}$, calcule $(d/dt)\,[\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)]$ de dos maneras diferentes.

17. Dado que $\mathbf{r}_1(t) = \cos t\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}_2(t) = t^2\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + e^{2t}\mathbf{k}$, calcule $(d/dt)\,[\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)]$ de dos modos distintos.

18. Dado que $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, y $\mathbf{r}_3$ son diferenciables, evalúe $(d/dt)\,[\mathbf{r}_1(t) \cdot (\mathbf{r}_2(t) \times \mathbf{r}_3(t))]$.

19. Una fuerza continua de magnitud 2 actúa sobre una partícula de masa m. La fuerza tiene dirección paralela al eje y positivo. Si la partícula parte con una velocidad inicial $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ en $(1, 1, 0)$, determine el vector de posición de la partícula y las ecuaciones paramétricas de su trayectoria. (*Sugerencia:* $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.)

20. El vector de posición de una partícula móvil es $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1 - t^3)\mathbf{j}$.

(a) Dibuje la trayectoria de la partícula.

(b) Trace los vectores velocidad y aceleración en $t = 1$.

(c) Calcule la rapidez en $t = 1$.

21. Determine la velocidad y la aceleración de una partícula cuyo vector de posición es $\mathbf{r}(t) = 6t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, cuando atraviesa el plano $-x + y + z = -4$.

22. La velocidad de una partícula móvil es $\mathbf{v}(t) = -10t\mathbf{i} + (3t^2 - 4t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Si la partícula parte en $t = 0$ en $(1, 2, 3)$, ¿cuál es su posición en $t = 2$?

23. La aceleración de una partícula móvil es $\mathbf{a}(t) = \sqrt{2}\,\text{sen}\, t\mathbf{i} + \sqrt{2}\cos t\mathbf{j}$. Dado que la velocidad y la posición de la partícula en $t = \pi/4$ son $\mathbf{v}(\pi/4) = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{r}(\pi/4) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + (\pi/4)\mathbf{k}$, respectivamente, ¿cuál era la posición de la partícula en $t = 3\pi/4$?

24. Dado que

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}t^2\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{j} - \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}$$

es el vector de posición de una partícula móvil, obtenga las componentes tangencial y normal de la aceleración para cualquier t. Determine la curvatura.

25. Suponga que la función vectorial del Problema 15 es el vector de posición de una partícula móvil. Obtenga los vectores **T**, **N** y **B** en $t = 1$. Determine la curvatura en ese punto.

16 Cálculo diferencial de funciones de varias variables

En nuestro estudio del Cálculo hemos considerado, hasta ahora, únicamente funciones de una sola variable. Los conceptos anteriormente considerados, tales como límites, continuidad, derivadas, tangentes, valores máximos y mínimos, integrales, etc., se extienden también a las funciones de varias variables. El presente capítulo se dedica esencialmente al Cálculo Diferencial de dichas funciones de varias variables.

16.1 Funciones de dos o más variables

Recuérdese que una función de una variable $y = f(x)$ es una *regla de correspondencia* que asigna a un elemento x de un subconjunto de los números reales R, llamado *dominio* de f, uno y sólo un número real y. El conjunto $\{y \mid y = f(x)\}$ se llama *contradominio* de f. Probablemente ya se esté enterado de la existencia de funciones de dos o más variables.

Ejemplo 1

(*a*) $A = xy$, área de un rectángulo

(*b*) $V = \pi r^2 h$, volumen de un cilindro circular

(*c*) $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$, volumen de un cono

(*d*) $P = 2x + 2y$, perímetro de un rectángulo.

Ejemplo 2

(*a*) La presión P ejercida por un gas ideal encerrado, es una función de su temperatura T y de su volumen V,

$$P = k\left(\frac{T}{V}\right), \quad \text{en donde } k \text{ es una constante.}$$

(*b*) El área S de la superficie del cuerpo humano es una función del peso w y de la estatura h,

$$S = 0.1091 w^{0.425} h^{0.725}.$$

Funciones de dos variables

A continuación se presenta la definición formal de función de dos variables.

DEFINICIÓN 16.1

Una función **de dos variables** es una regla de correspondencia que asigna a cada pareja ordenada de números reales (x, y) de un subconjunto del plano uno y sólo un número z en el conjunto R de números reales. □

El conjunto de parejas ordenadas (x, y) se llama **dominio** de la función y el conjunto de valores correspondientes z se llama **contradominio (o ámbito)**. Una función de dos variables usualmente se escribe $z = f(x, y)$ y se lee "f de x, y". Las variables x y y se denominan **variables independientes** de la función, y z se llama **variable dependiente**.

Gráficas

La gráfica de una función $z = f(x, y)$ es una *superficie* en el espacio tridimensional. Véase la Figura 16.1.

Ejemplo 3

Una ecuación de un plano $ax + by + cz = d$, en donde $c \neq 0$ describe una función expresando

$$z = -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y + \frac{d}{c} \quad \text{o bien} \quad f(x, y) = -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y + \frac{d}{c}.$$

El dominio de esta función es todo el conjunto R^2 de parejas ordenadas de números reales.

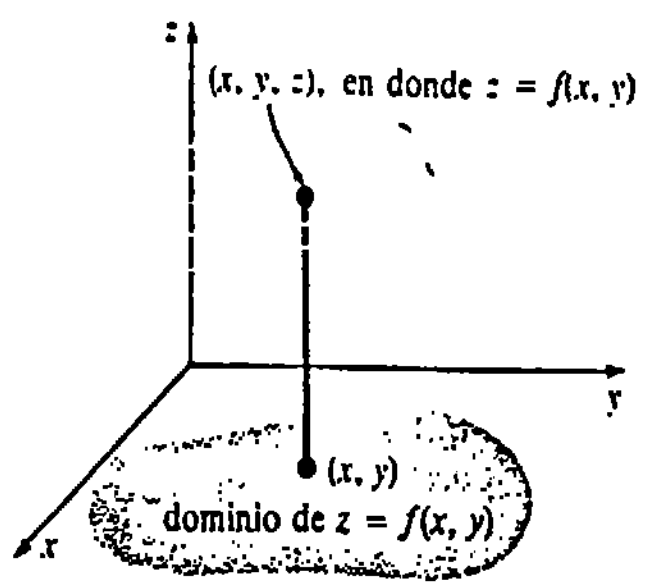


Figura 16.1

Ejemplo 4

La gráfica de la función

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

es el hemisferio* mostrado en la Figura 16.2. El dominio de la función es el conjunto de parejas ordenadas (x, y) que satisfacen $9 - x^2 - y^2 \geq 0$, o bien $x^2 + y^2 \leq 9$. El contradominio está definido por $0 \leq z \leq 3$.

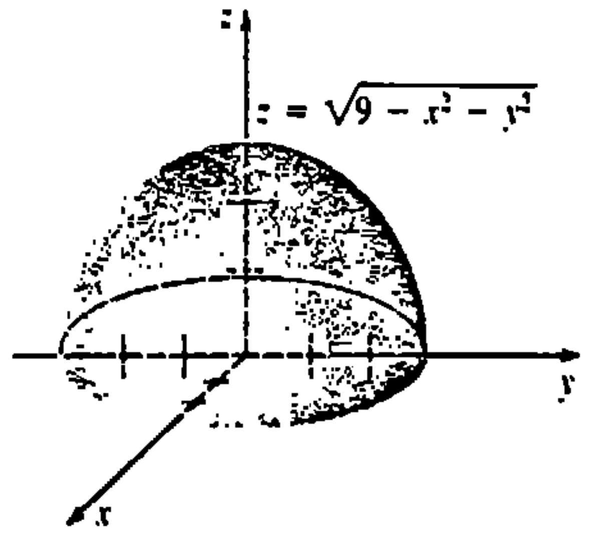


Figura 16.2

Ejemplo 5

Se debe reconocer la gráfica de $f(x, y) = x^2 + 9y^2$ como un paraboloide elíptico. El dominio de f es R^2. Puesto que $x^2 \geq 0$ y $y^2 \geq 0$, el ámbito de f está dado por $z \geq 0$.

* Verifique esto reemplazando el símbolo $f(x, y)$ por z y elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación.

Ejemplo 6

Dado que $f(x, y) = 4 + \sqrt{x^2 - y^2}$, encuentre

(a) $f(1, 0), f(5, 3), f(4, -2)$.

(b) Trace un esquema del dominio de la función.

Solución

(a) $f(1, 0) = 4 + \sqrt{1 - 0} = 5$

$f(5, 3) = 4 + \sqrt{25 - 9} = 4 + \sqrt{16} = 8$

$f(4, -2) = 4 + \sqrt{16 - (-2)^2} = 4 + \sqrt{20} = 4 + 2\sqrt{5}$

(b) El dominio de f consiste en todas las parejas ordenadas (x, y) para las cuales $x^2 - y^2 \geq 0$. El dominio consta de todos los puntos de las rectas $y = x$ y $y = -x$, y de los puntos de la región sombreada ubicada entre ellas, como se muestra en la Figura 16.3.

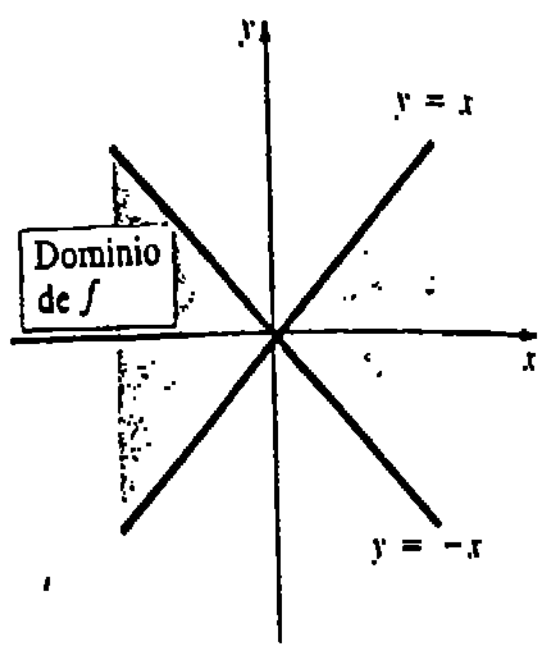


Figura 16.3

En la ciencia se encuentra uno a menudo con las palabras **isotérmica, equipotencial,** o **isobárica**. Estos términos se aplican a rectas o a curvas según las cuales la temperatura, el potencial o la presión barométrica, es *constante*.

Ejemplo 7

El potencial electrostático en un punto $P(x, y)$ del plano debido a una carga puntual unitaria colocada en el origen está dado por $U = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$. Si $U = c$, en donde c es una constante positiva, entonces $x^2 + y^2 = 1/c^2$. De esta manera, las líneas (o curvas) **equipotenciales** son círculos concéntricos alrededor de la carga, como se muestra en la Figura 16.4.

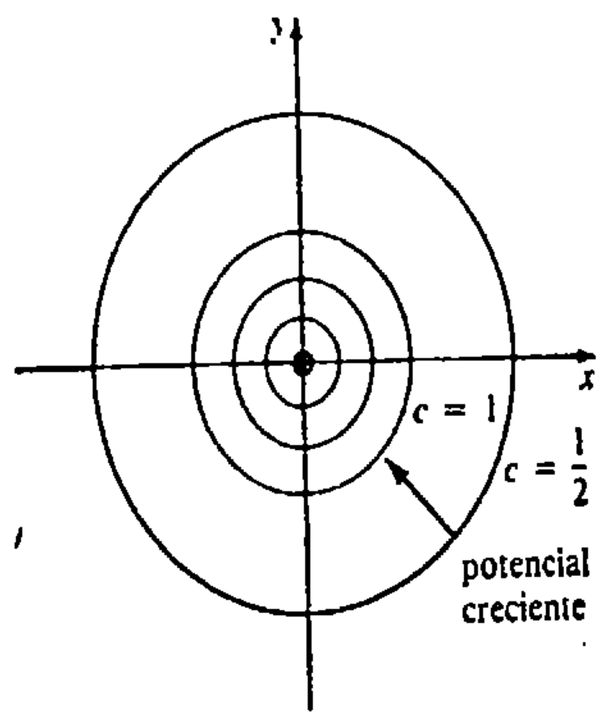


Figura 16.4

Nótese que en la Figura 16.4 podemos obtener una idea del comportamiento de la función U, específicamente en dónde es creciente (o decreciente), observando la dirección en la que aumenta c.

Líneas o curvas de nivel

En general, si una función de dos variables está dada por $z = f(x, y)$, entonces las curvas definidas por $f(x, y) = c$, para una c apropiada, se denominan **líneas de nivel** de f. La palabra "nivel" surge del hecho de que podemos interpretar $f(x, y) = c$ como la proyección sobre el plano xy de la curva de intersección, o traza, de $z = f(x, y)$ y el plano $z = c$ (horizontal o de nivel). Véase la Figura 16.5.

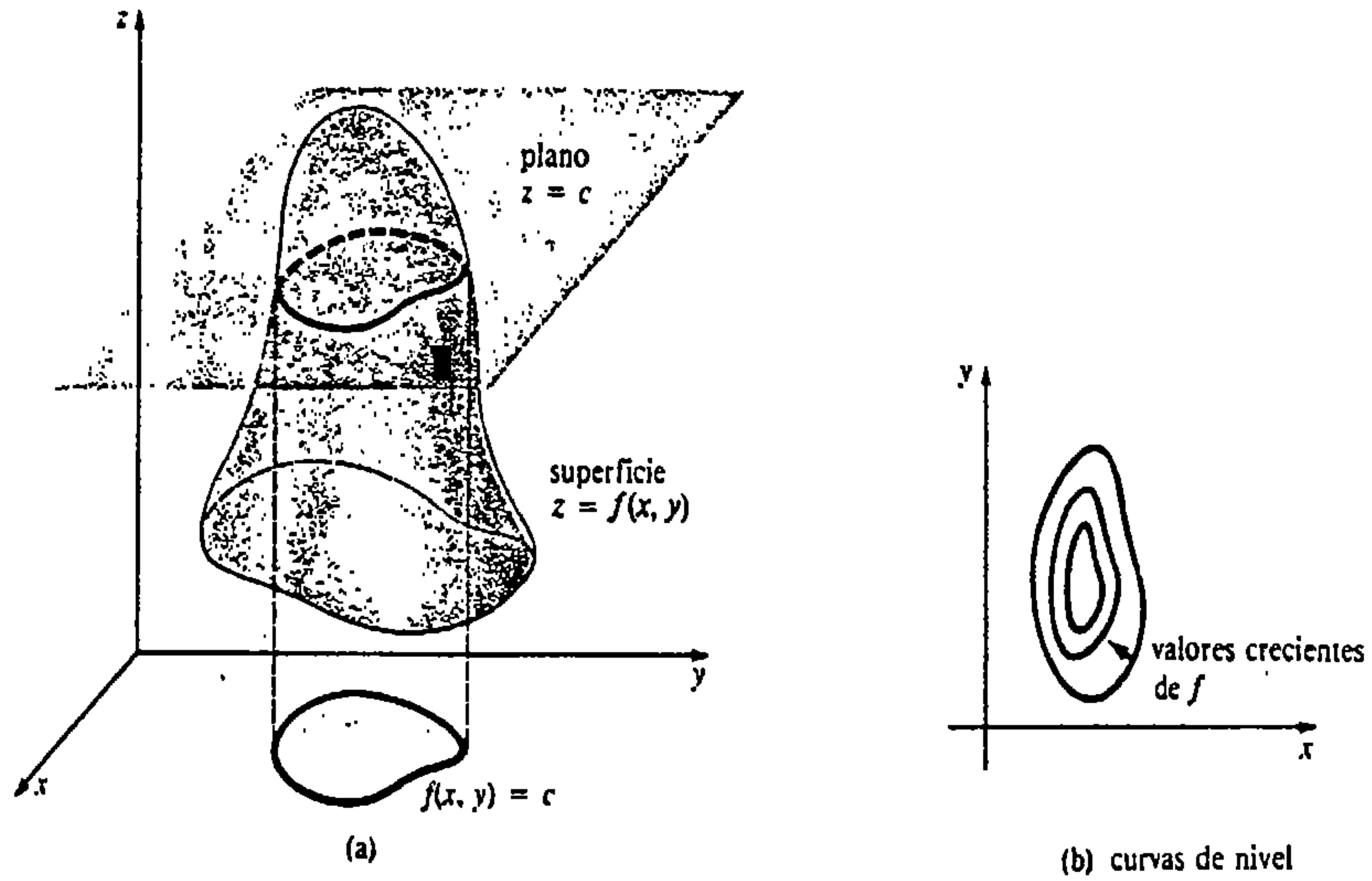


Figura 16.5

Ejemplo 8

Las curvas de nivel de $f(x, y) = y^2 - x^2$ están definidas por $y^2 - x^2 = c$. Cuando $c > 0$, o bien $c < 0$, un miembro de esta familia de curvas es una hipérbola, como se muestra en la Figura 16.6. Para $c = 0$, obtenemos las rectas $y = x$ y $y = -x$.

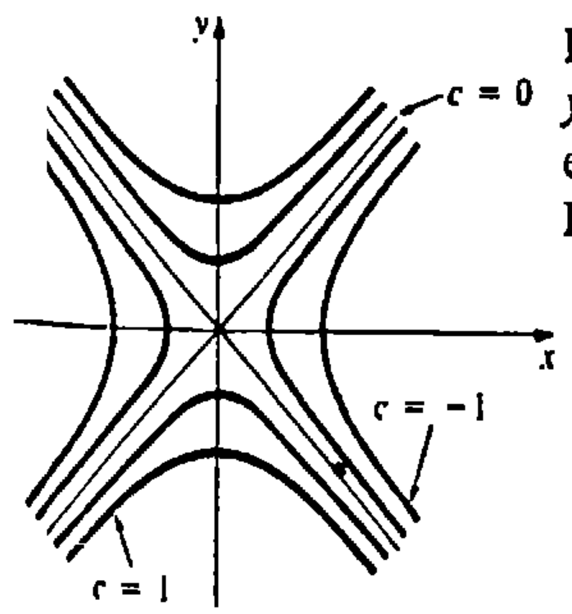


Figura 16.6

En topografía, las curvas $f(x, y) = c$ se llaman también **contornos de nivel** de una superficie. En la Figura 16.7 se ve que un mapa de relieve ilustra varios segmentos de

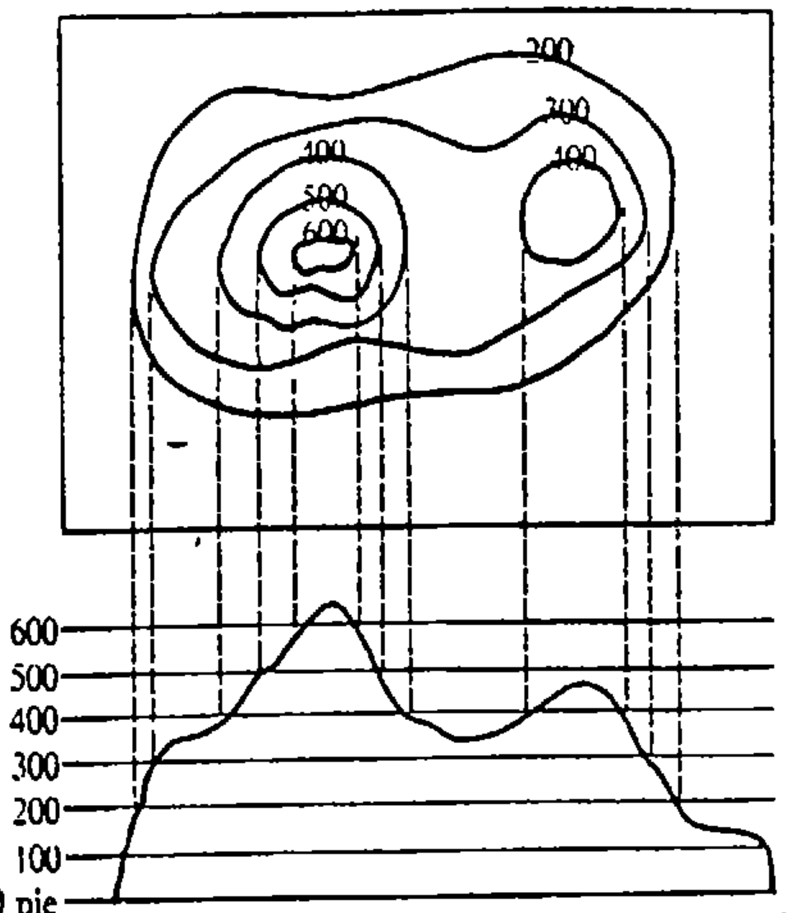


Figura 16.7

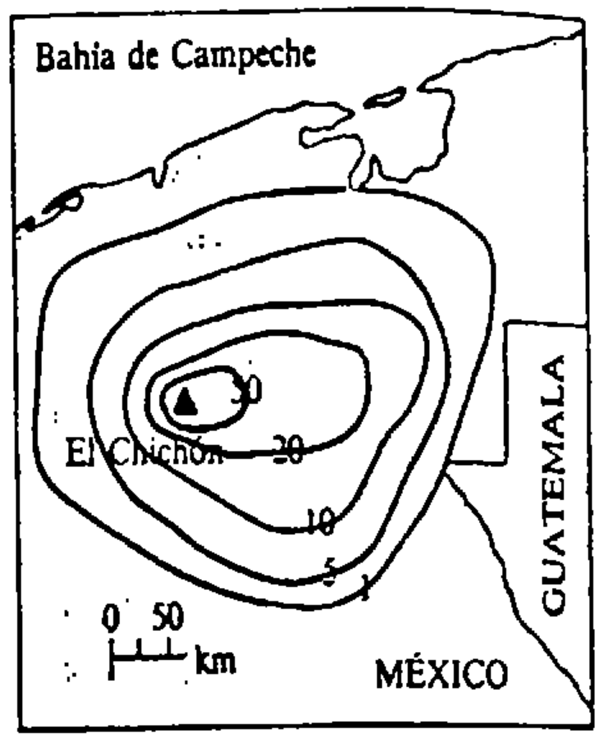


Figura 16.8

una colina o prominencia que tiene una altitud determinada. Esta es la idea de los contornos de la Figura 16.8, que muestran el espesor de la ceniza volcánica que circunda al volcán llamado El Chichón. Este volcán del estado de Chiapas, México, hizo erupción el 28 de marzo y el 4 de abril de 1982.

Graficación por computadora

En muchos casos la labor de trazar la gráfica de una función de dos variables es formidable. El uso de la **graficación por computadora** se ha extendido mucho en el análisis de superficies complicadas en el espacio tridimensional. Véanse las Figuras 16.9-16.16. Obsérvense las curvas de nivel generadas por computadora que se presentan en las Figuras 16.9 y 16.10. En la Figura 16.15 la función es

$$f(x, y) = 40 \exp\left[-\left(\frac{x-30}{20}\right)^2 - \left(\frac{y-35}{20}\right)^2\right] + 20 \exp\left[-\left(\frac{x-75}{10}\right)^2 - \left(\frac{y-15}{10}\right)^2\right]$$
$$+ 15 \exp\left[-\left(\frac{x-90}{10}\right)^2 - \left(\frac{y-55}{10}\right)^2\right] + 25 \exp\left[-\left(\frac{x-120}{12}\right)^2 - \left(\frac{y-20}{12}\right)^2\right].$$

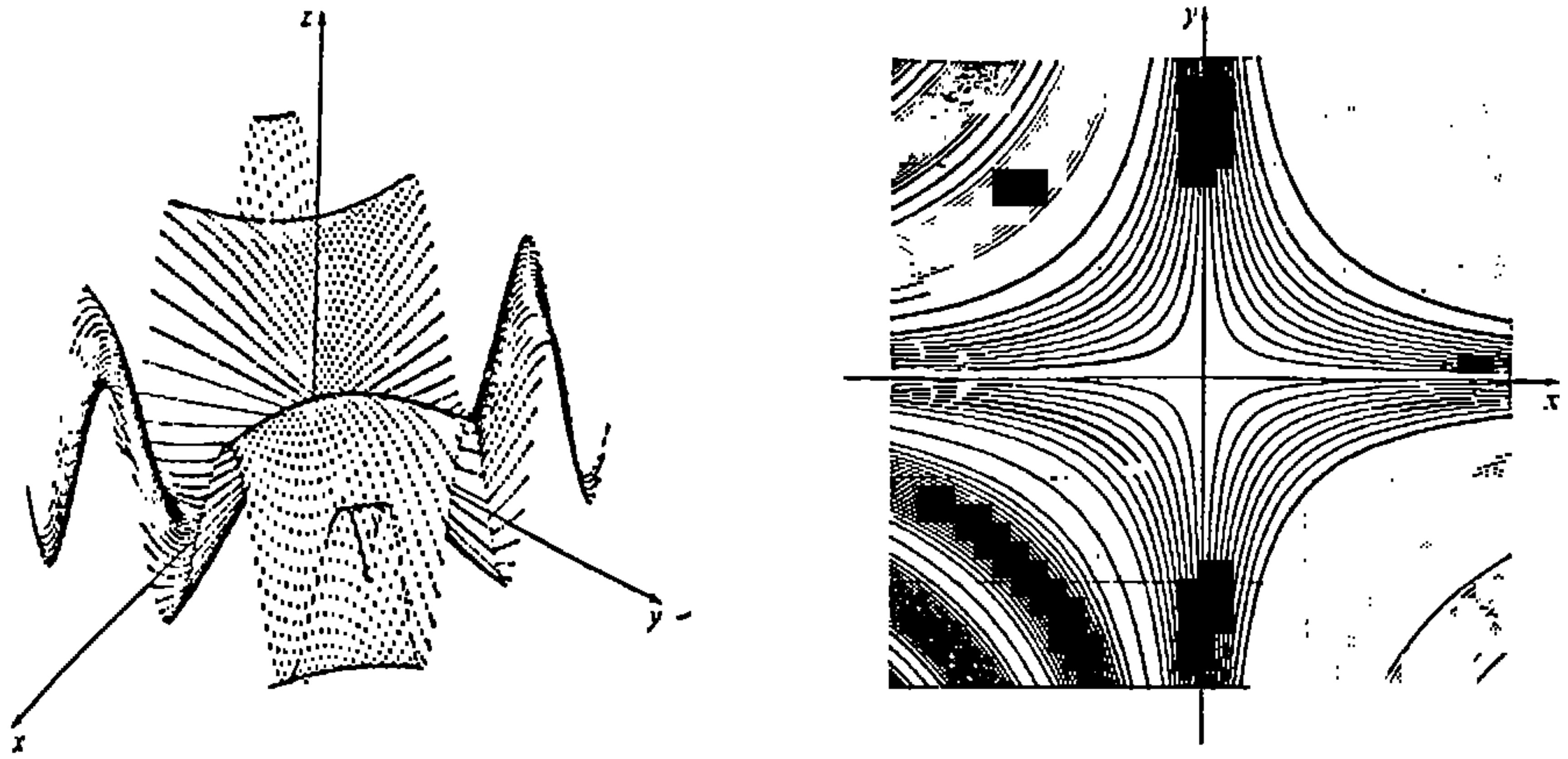
En la Figura 16.16 la función está definida por

$$f(x, y) = 2 + \sum_{k=1}^{6} (-1)^{k+1}[(x-\alpha_k)^2 + (y-\beta_k)^2]^{-1/2},$$

en donde

k	1	2	3	4	5	6
α_k	12	12	15	15	18	18
β_k	102.5	107.5	107.5	102.5	102.5	107.5

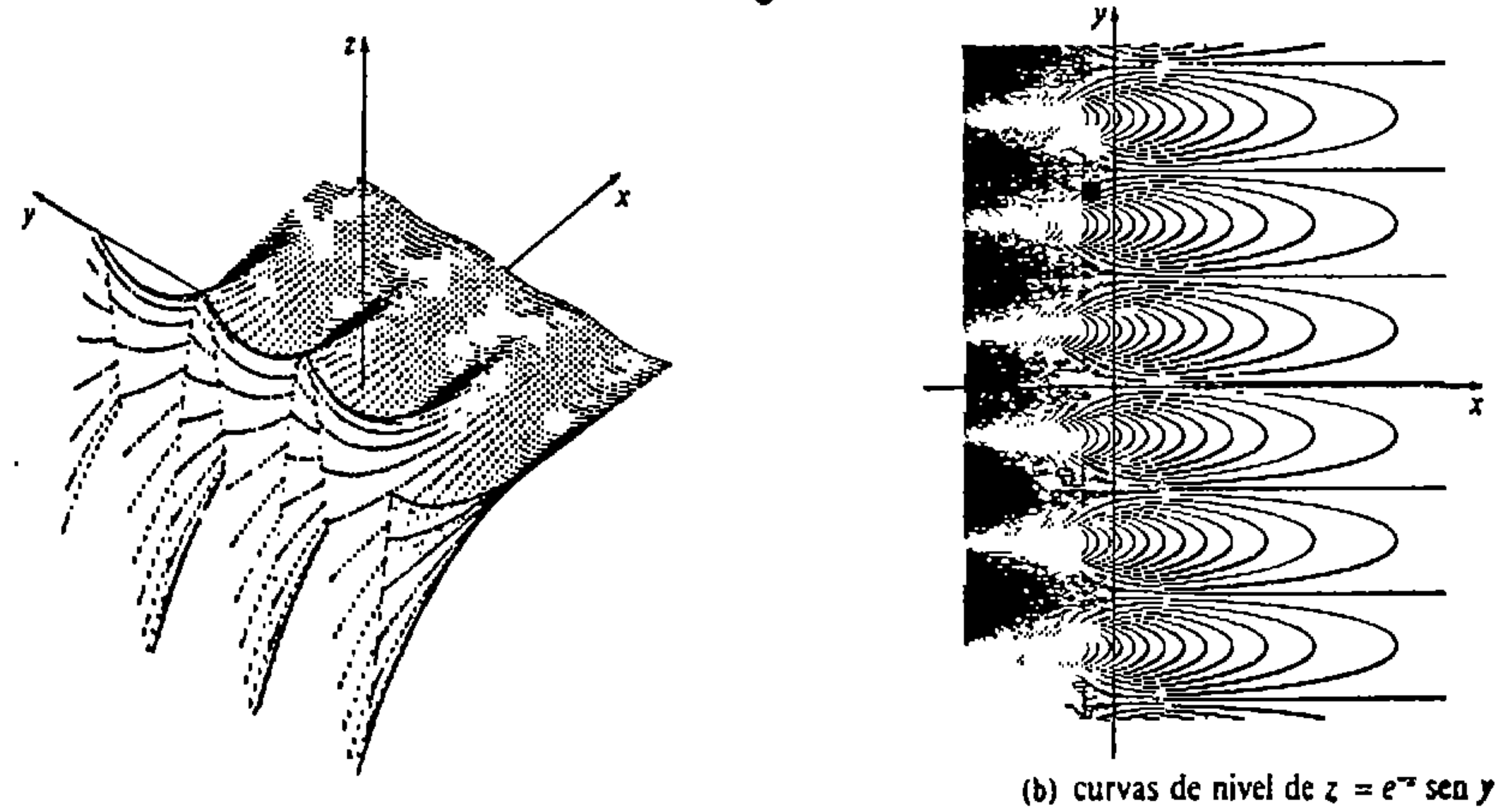
* Adaptada con el permiso de *National Geographic Magazine*.



(a) $z = 2 \operatorname{sen} xy$

(b) curvas de nivel de $z = 2 \operatorname{sen} xy$

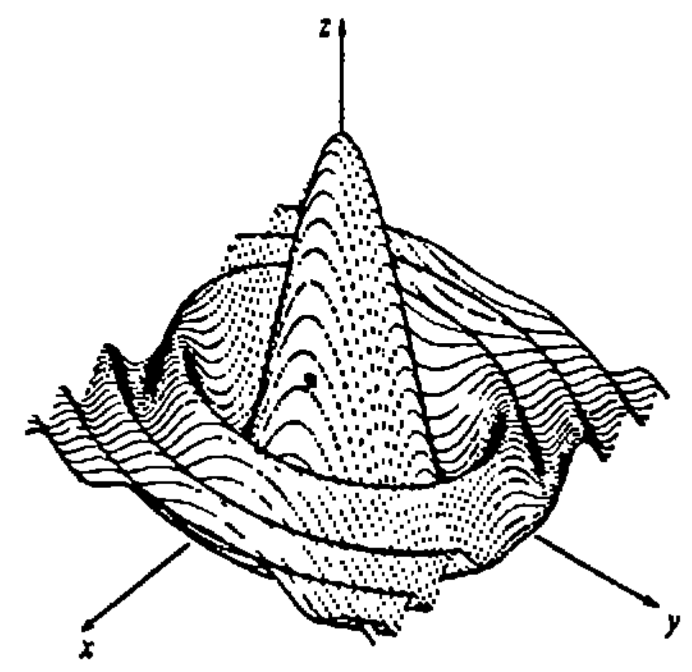
Figura 16.9



(a) $z = e^{-x} \operatorname{sen} y$

(b) curvas de nivel de $z = e^{-x} \operatorname{sen} y$

Figura 16.10

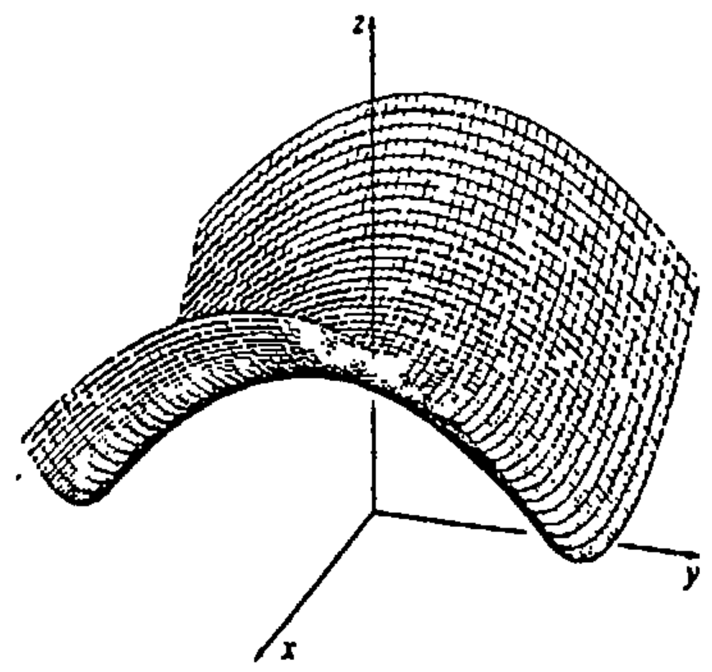


$z = \dfrac{\frac{1}{2}\cos(2x^2+y^2)}{1+2x^2+y^2}$

Figura 16.11

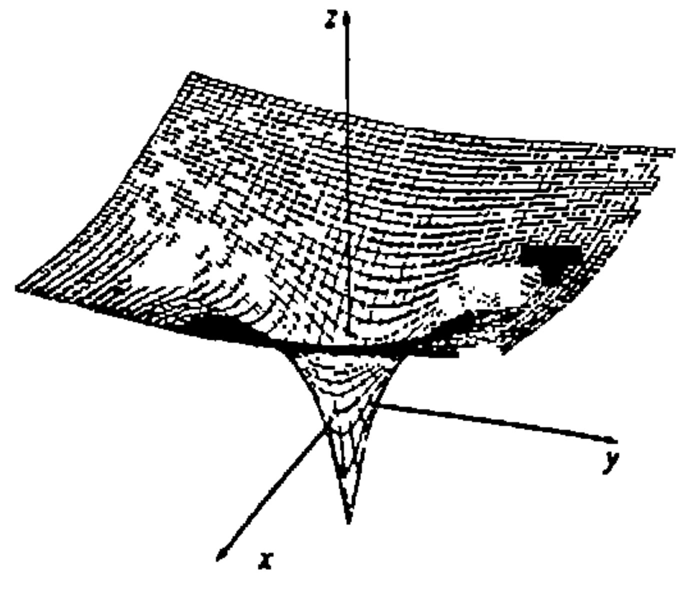
$z = \operatorname{sen}\frac{x}{2} \operatorname{sen} y$

Figura 16.12



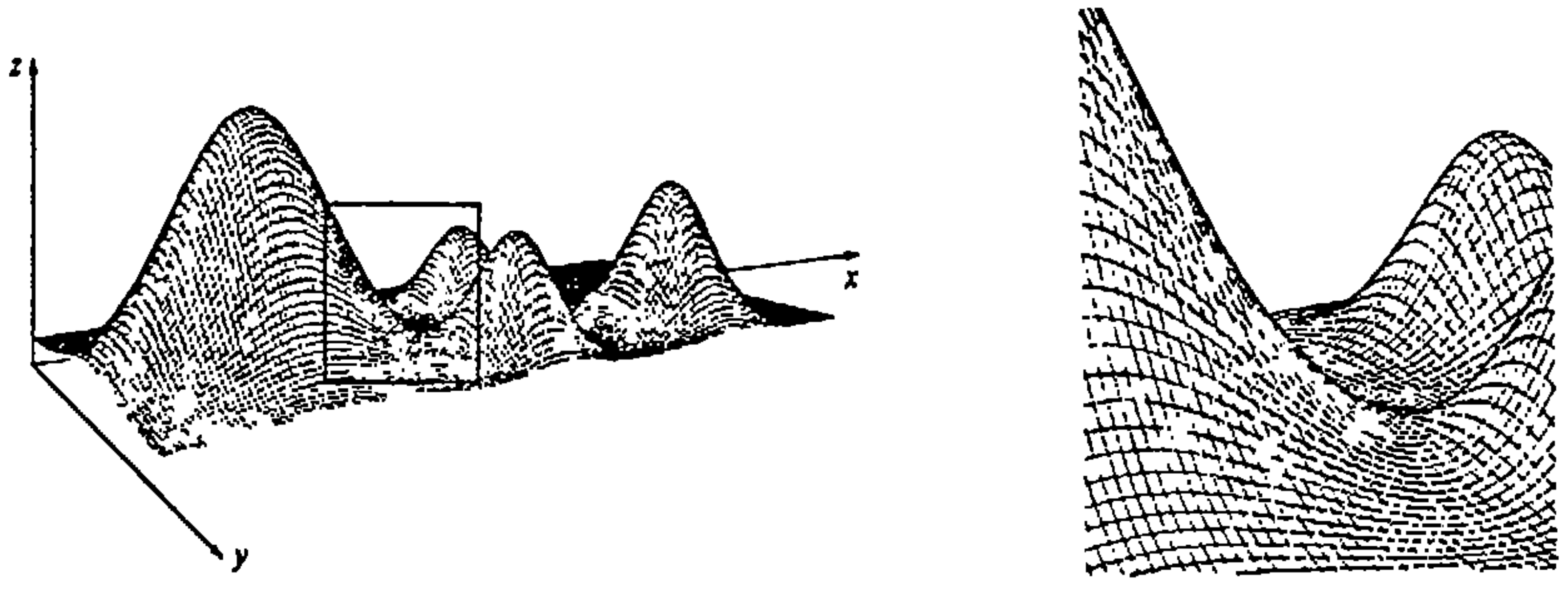
$z = 2x^2 - 2y^2 + 4$

Figura 16.13



$z = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2 + 0.005)$

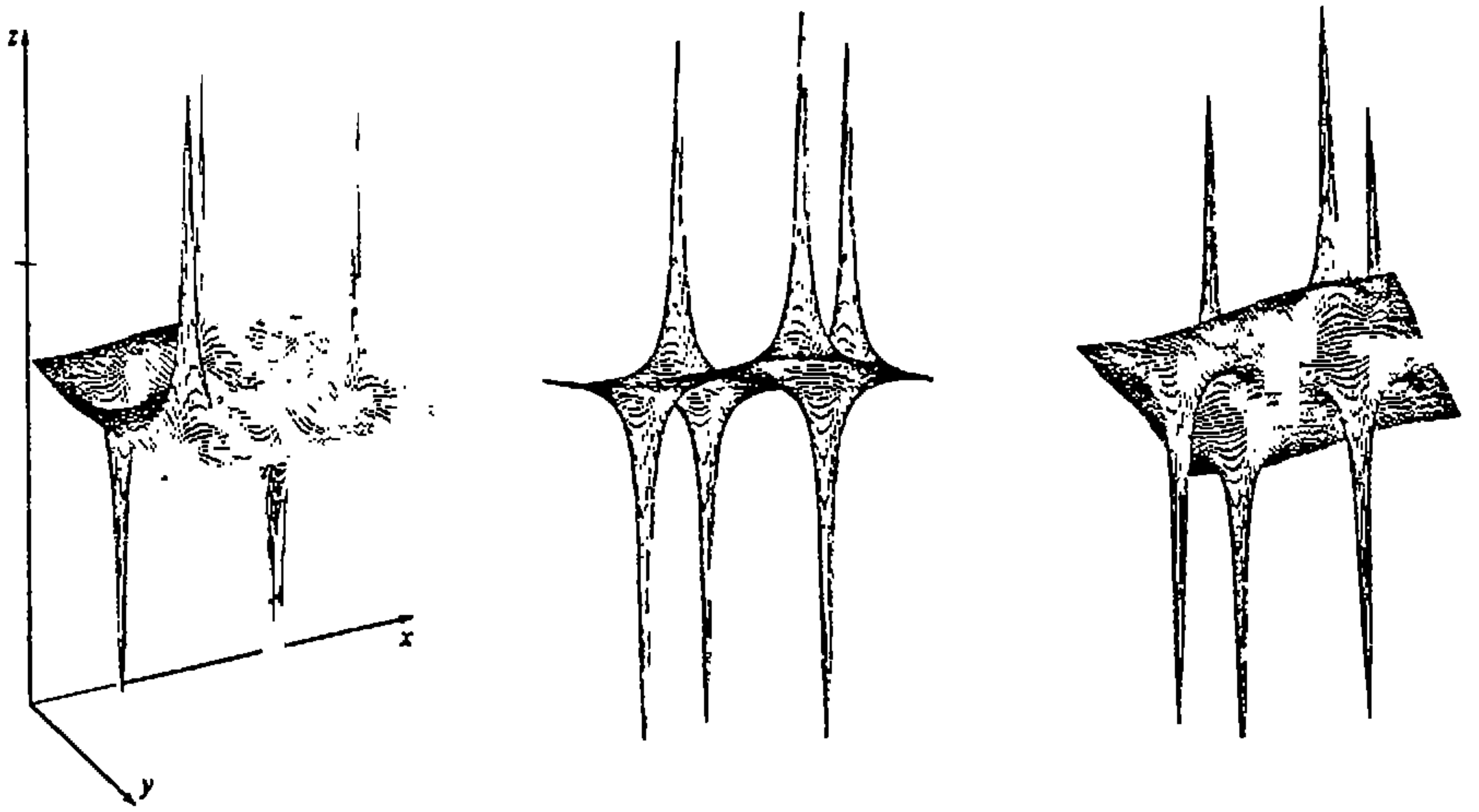
Figura 16.14



(a)

(b) "acercamiento" realizado por computadora de la región indicada en (a)

Figura 16.15



(a) vista superior de la superficie

(b) vista lateral de la superficie

(c) vista inferior de la superficie

Figura 16.16

Las puntas o picos de esta última gráfica corresponden a los puntos (α_k, β_k), $k = 1, 2, \ldots, 6$, en los cuales la función no está definida.

Funciones de tres o más variables

Las definiciones de funciones de tres o más variables son simplemente generalizaciones de la Definición 16.1. Por ejemplo, una **función de tres variables** es una regla de correspondencia que asigna a cada tríada (o tripleta) ordenada de números reales (x, y, z) de un subconjunto del espacio tridimensional, uno y sólo un número w en el conjunto R de números reales.

Ejemplo 9

$$F(x, y, z) = \frac{2x + 3y + z}{4 - x^2 - y^2 - z^2}$$

es un ejemplo de una función de tres variables. Su dominio es el conjunto de puntos (x, y, z) que satisfacen $x^2 + y^2 + z^2 \neq 4$; esto es, el dominio de F es todo el espacio de tres dimensiones, *excepto* los puntos de la superficie de una esfera de radio 2 centrada en el origen.

Ejemplo 10

(*a*) $V = xyz$, volumen de una caja rectangular.

(*b*) La ley de Poiseuille dice que la intensidad de flujo de un fluido viscoso (como la sangre) a través de un conducto (como una arteria) es

$$Q = k\frac{R^4}{L}(p_1 - p_2), \quad \text{en donde } k \text{ es una constante,}$$

en donde R es el radio del conducto, L su longitud, y p_1 y p_2 presiones en los extremos del conducto. Este es un ejemplo de una función de *cuatro variables.*

Nota: Puesto que se ocuparían cuatro dimensiones, no es posible trazar la gráfica de una función de tres variables.

Superficies de nivel

Para una función de tres variables $w = F(x, y, z)$, las superficies definidas por $F(x, y, z) = c$, para valores apropiados de c, se llaman **superficies de nivel***.

Ejemplo 11

Las superficies de nivel de $F(x, y, z) = 2x - 3y + 4z$ son planos paralelos definidos por $2x - 3y + 4z = c$.

* Esta es una denominación impropia, aunque usual, puesto que las superficies de nivel usualmente no son llanas. En este caso, nivel no significa plano horizontal.

Ejemplo 12

Para $c \neq 0$, las superficies de nivel de $F(x, y, z) = (x^2 + y^2)/z$ están dadas por $x^2 + y^2 = cz$. En la Figura 16.17 se muestran algunos miembros de esta familia de paraboloides.

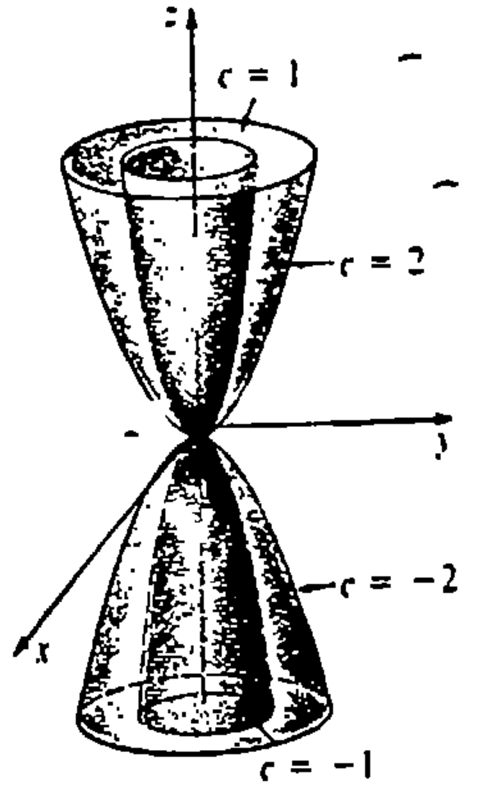


Figura 16.17

Ejercicios 16.1

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 997.

En los Problemas 1-10 determine el dominio de las funciones indicadas.

1. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$
2. $f(x, y) = (x^2 - 9y^2)^{-2}$
3. $f(x, y) = \dfrac{y^2}{y + x^2}$
4. $f(x, y) = x^2 - y^2\sqrt{4 + y}$
5. $f(s, t) = s^3 - 2t^2 + 8st$
6. $f(u, v) = \dfrac{u}{\ln(u^2 + v^2)}$
7. $g(r, s) = e^{2r}\sqrt{s^2 - 1}$
8. $g(\theta, \phi) = \dfrac{\tan\theta + \tan\phi}{1 - \tan\theta\tan\phi}$
9. $H(u, v, w) = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - 16}$
10. $F(x, y, z) = \dfrac{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}{z - 5}$

En los Problemas 11-14 trace un croquis del dominio de la función dada.

11. $f(x, y) = \sqrt{x} - \sqrt{y}$
12. $f(x, y) = \sqrt{(1 - x^2)(y^2 - 4)}$
13. $f(x, y) = \sqrt{\ln(y - x + 1)}$
14. $f(x, y) = e^{\sqrt{xy+1}}$

En los Problemas 15-18 determine el ámbito o contradominio de la función indicada.

15. $f(x, y) = 10 + x^2 + 2y^2$
16. $f(x, y) = x + y + z$
17. $F(x, y, z) = \operatorname{sen}(x + 2y + 3z)$
18. $F(x, y, z) = 7 - e^{xyz}$

En los Problemas 19-22 evalúe la función dada en los puntos indicados.

19. $f(x, y) = \int_x^y (2t - 1)\,dt$; $(2, 4), (-1, 1)$
20. $f(x, y) = \ln\dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$; $(3, 0), (5, -5)$
21. $F(x, y, z) = (x + 2y + 3z)^2$; $(-1, 1, -1)$, $(2, 3, -2)$

22. $F(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2}$; $(\sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{6})$, $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{3}\right)$

En los Problemas 23-28 analice la gráfica de la función que se indica.

23. $z = x$
24. $z = y^2$
25. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
26. $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$
27. $z = \sqrt{9 - x^2 - 3y^2}$
28. $z = -\sqrt{16 - x^2 - y^2}$

En los Problemas 29-34 dibuje algunas de las curvas de nivel asociadas a la función indicada.

29. $f(x, y) = x + 2y$
30. $f(x, y) = y^2 - x$
31. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2 - 1}$
32. $f(x, y) = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}$
33. $f(x, y) = e^{y - x^2}$
34. $f(x, y) = \tan^{-1}(y - x)$

En los Problemas 35-38 mencione la curva de nivel pero no realice su trazo.

35. $F(x, y, z) = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{z^2}{4}$
36. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
37. $F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 6z^2$
38. $F(x, y, z) = 4y - 2z + 1$

39. Dibuje las gráficas de algunas de las superficies de nivel asociadas a $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ para $c = 0$, $c > 0$, y $c < 0$.

40. Dado que

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9},$$

encuentre las intercepciones x, y, z de la superficie de nivel que pasa por $(-4, 2, -3)$.

41. La temperatura, la presión y el volumen de un gas ideal encerrado están relacionados por $T = 0.01\,PV$, en donde T, P y V están medidas en grados Kelvin, atmósferas y litros, respectivamente. Dibuje las líneas isotérmicas o isotermas $T = 300\,K$, $400\,K$ y $600\,K$.

42. Exprese la altura de una caja rectangular con base cuadrada, como una función del volumen y de la longitud de un lado de la caja.

43. Una lata para refresco gaseoso se construye con una envolvente lateral de hojalata, y con tapa y base de aluminio. Dado que el costo de la tapa es de 1.8 ₵ (centavos de dólar) por unidad cuadrada, de 1 ₵ por unidad cuadrada para la base, y de 2.3 ₵ por unidad cuadrada para la envolvente, determine la función de costo $C(r, h)$, en donde r es donde el radio de la lata, y h su altura.

44. Se va a construir una caja rectangular cerrada con una hoja de cartón de 500 cm². Exprese el volumen V como una función de la longitud x y del ancho y.

45. Una tapa cónica descansa sobre la parte superior de un cilindro circular, como se muestra en la Figura 16.18. Si la altura de la tapa es dos tercios de la altura del cilindro, exprese el volumen del sólido como una función de las variables indicadas.

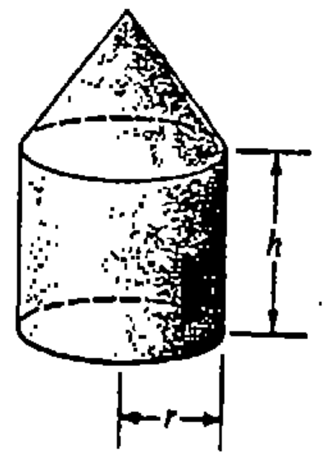


Figura 16.18

46. En la Figura 16.19 se muestra un cilindro cortado oblicuamente (como los que usan en muestras de pañuelos de papel). Exprese la longitud t del corte como una función de x, y y z.

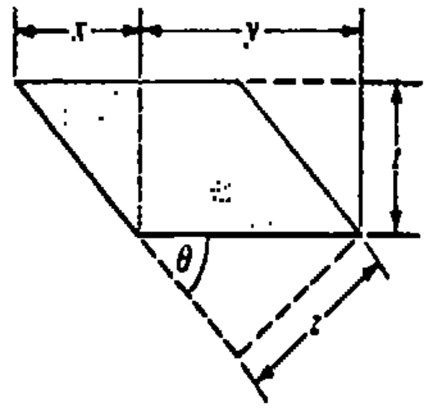


Figura 16.19

47. En medicina se usan a menudo fórmulas para el área de una superficie (véase el Ejemplo 2) para determinar las dosis de medicamentos, ya que se supone que una dosis D de un fármaco y el área de una superficie S son directamente proporcionales. La siguiente función puede utilizarse para obtener una estimación rápida del área de la superficie corporal de

un ser humano: $S = 2ht$, en donde h es la estatura (en cm) y t es la circunferencia máxima del muslo (en cm). Calcule el área superficial de una persona de 156 cm de estatura con una circunferencia máxima del muslo de 50 cm. Calcule su propia área de superficie.

Problemas para calculadora

48. La potencia requerida por un colibrí para revolotear suspendido en el aire está determinada por

$$P = \sqrt{w^3/2\rho A},$$

en donde w es su peso, ρ es la densidad del aire, y A es el área descrita por sus alas en movimiento. Calcule P para un colibrí cuya masa es de 2.5×10^{-3} kg, $A = 2.2 \times 10^{-3}$ m^2 y $\rho = 1.2$ kg/m^3. (*Sugerencia:* Aplique $w = mg$.)

49. Durante su investigación en el Antártico en el invierno de 1941, el Dr. Paul A. Siple ideó la siguiente función para definir el factor de enfriamiento por venteo:

$$H(v, T) = (10\sqrt{v} - v + 10.5)(33 - T),$$

en donde H se mide en kcal/m^{2}h, v es la velocidad del viento en m/s, y T es la temperatura en °C. Un ejemplo de tal índice es: 1000 = frío muy fuerte, 1200 = frío excesivamente fuerte, y 1400 = frío de congelación (la carne expuesta se congela de inmediato). Determine dicho factor para −6.67°C(20°F) con una velocidad de viento igual a 20 m/s (45 mi/h).

50. Referente al Problema 49, el factor de enfriamiento por venteo se expresa a menudo como una temperatura equivalente. Utilice la tabla adjunta para determinar los factores de enfriamiento por venteo.

(a) $H(45, 20)$
(b) $H(20, -5)$
(c) $H(15, -25)$

51. El consumo total de energía C en calorías por hora de una persona con coeficiente metabólico r, peso w y estatura h se determina mediante $C = 0.2rw^{0.425}h^{0.725}$. Calcule el consumo de energía de un corredor con masa de 80 kg, 1.6 m de estatura y con coeficiente metabólico de 600 cal/m^{2}h.

52. En una prueba atlética de halterismo, un levantador de pesas de la categoría de peso completo, con masa de 110 kg, logra un levantamiento de 210 kg. En la categoría de peso mosca, una persona con masa de 50 kg levanta 130 kg. ¿Cómo pueden compararse estas hazañas de halterofilia? ¿Quién sería juzgado mejor levantador en una competición global? Se han propuesto varias fórmulas para levantamientos con "handicap". Sean w_l el peso (o masa) levantado (en kg) y w_b el peso (o masa) del levantador (en kg).

(a) Fórmula empleada en una prueba de "Super-estrellas" de halterismo: $h = w_l - w_b$
(b) Fórmula de Austin: $h = w_l/w_b^{3/4}$
(c) Fórmula clásica: $h = w_l/w_b^{2/3}$
(d) Fórmula de O'Carroll: $h = w_l/(w_b - 35)^{1/3}$

Aplique estas fórmulas para determinar cuál es mejor levantador, el de peso completo o el de peso mosca.

velocidad del viento (mi/h)	Temperatura T(°F)															
	45	40	35	30	25	20	15	10	5	0	−5	−10	−15	−20	−25	−30
4	45	40	35	30	25	20	15	10	5	0	−5	−10	−15	−20	−25	−30
5	43	37	32	27	22	16	11	6	0	−5	−10	−15	−21	−26	−31	−36
10	34	28	22	16	10	3	−3	−9	−15	−22	−27	−34	−40	−46	−52	−58
15	29	23	16	9	2	−5	−11	−18	−25	−31	−38	−45	−51	−58	−65	−72
20	26	19	12	4	−3	−10	−17	−24	−31	−39	−46	−53	−60	−67	−74	−81
25	23	16	8	1	−7	−15	−22	−29	−36	−44	−51	−59	−66	−74	−81	−88
30	21	13	6	−2	−10	−18	−25	−33	−41	−49	−56	−64	−71	−79	−86	−93
35	20	12	4	−4	−12	−20	−27	−35	−43	−52	−58	−67	−74	−82	−89	−97
40	19	11	3	−5	−13	−21	−29	−37	−45	−53	−60	−69	−76	−84	−92	−100
45	18	10	2	−6	−14	−22	−30	−38	−46	−54	−62	−70	−78	−85	−93	−102

16.2 Límites y continuidad

16.2.1 Análisis informal

Para funciones de una variable, en muchos casos fue posible formular un juicio acerca de la existencia de $\lim_{x\to a} f(x)$ a partir de la gráfica de $y = f(x)$. Utilizamos también el hecho de que existe $\lim_{x\to a} f(x)$ si y sólo si $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existen y son iguales al mismo número L. En tal caso, $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

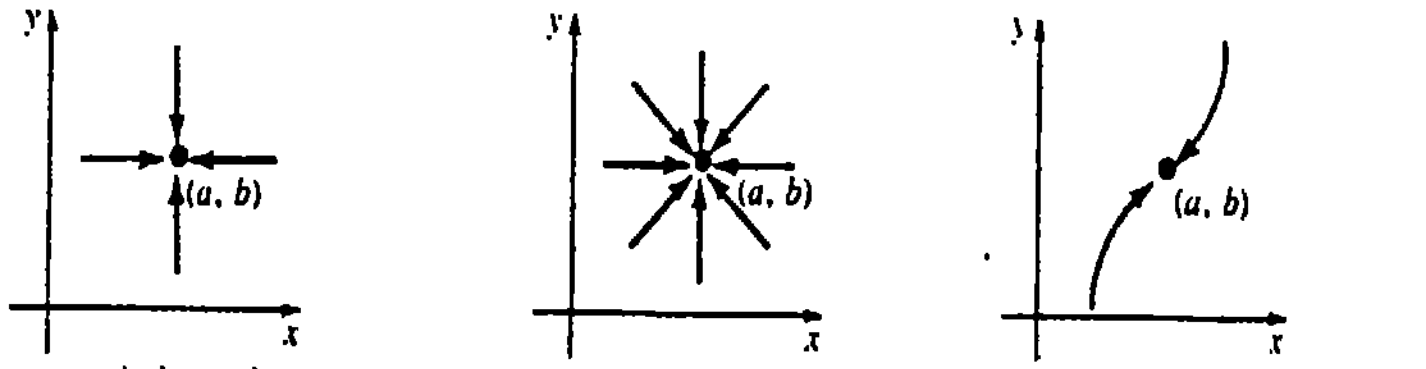
Cuando se consideraron límites de funciones de dos variables la situación es más exigente. Para la mayoría de las funciones no es conveniente ni siquiera rutinariamente posible analizar un límite esbozando una gráfica de $z = f(x, y)$. Intuitivamente, f tiene un límite en un punto (a, b) si los valores funcionales $f(x, y)$ tienden a un número L cuando (x, y) tiende a (a, b). Se escribe $f(x, y) \to L$ cuando $(x, y) \to (a, b)$, o bien

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L.$$

En forma más precisa, f tiene un límite L en un punto (a, b) si los puntos $(x, y, f(x, y))$ del espacio se pueden acercar arbitrariamente a (a, b, L) siempre que (x, y) esté suficientemente próximo a (a, b).

La notación de que (x, y) "tiende" a un punto (a, b) no es tan simple como en las funciones de una variable, en donde $x \to a$ significa que x tiende a a solamente por la izquierda o por la derecha. En el plano xy hay, desde luego, infinidad de maneras de tender a un punto (a, b). Para que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ exista se requiere ahora que f tienda al mismo número L por *toda* curva o trayectoria posible que pase por (a, b), como se muestra en la Figura 16.20. Puesto en forma negativa:

(16.1) Si $f(x, y)$ *no* tiende al mismo número L por dos trayectorias diferentes hacia (a, b), entonces $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ no existe.



(a) a lo largo de rectas verticales y horizontales que pasen por (a, b)
(b) a lo largo de todas las rectas que pasen por (a, b)
(c) a lo largo de todas las curvas que pasen por (a, b)

Figura 16.20

Ejemplo 1

Demuestre que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - 3y^2}{x^2 + 2y^2}$ no existe.

Solución La función $f(x, y) = (x^2 - 3y^2)/(x^2 + 2y^2)$ está definida en todos los puntos excepto (0, 0). Dos formas de tender a (0, 0) son: según el eje x ($y = 0$) y según el eje y ($x = 0$). Tenemos que

$$\text{sobre } y = 0, \qquad \lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x, 0) = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = 1$$

$$\text{sobre } x = 0, \qquad \lim_{(0,y)\to(0,0)} f(0, y) = \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0 - 3y^2}{0 + 2y^2} = -\frac{3}{2}.$$

En vista de (16.1) se concluye que el límite no existe.

Ejemplo 2

Demuestre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ no existe.

Solución En este caso los límites según los ejes x y y son iguales:

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x, 0) = \lim_{(0,y)\to(0,0)} f(0, y) = 0.$$

Sin embargo, esto *no* significa que exista $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$, ya que no hemos examinado cada trayectoria hacia $(0, 0)$. Se prueba ahora cualquier recta que pase por el origen, dada por $y = mx$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1 + m^2}.$$

Como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ depende de la pendiente de la recta sobre la cual se tiende al origen, concluimos que no existe el límite. Por ejemplo,

$$\text{sobre } y = x, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \frac{1}{2}$$

$$\text{sobre } y = 2x, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \frac{2}{5}.$$

Ejemplo 3

Demostrar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y}{x^6 + y^2}$ no existe.

Solución Sea $f(x, y) = x^3y/(x^6 + y^2)$. Se anima al lector a que demuestre que por cualquier recta $y = mx$, $m \neq 0$, que pase por $(0, 0)$, así como por cualquier parábola $y = kx^2$, $k \neq 0$, que pase por $(0, 0)$, se tiene que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$. Aunque esto corresponde a una infinidad de trayectorias hacia el origen, el límite no existe, ya que sobre $y = x^3$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6}{x^6 + x^6} = \frac{1}{2}.$$

Continuidad

Una función $z = f(x, y)$ es **continua en** (a, b) si $f(a, b)$ está definida, además si el $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ existe, y éste es igual a $f(a, b)$; esto es, f es continua en (a, b) si

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

Una función $z = f(x, y)$ es continua en una región R del plano xy si f es continua en todo punto de R. La suma y el producto de dos funciones continuas, son continuos; el cociente de dos funciones continuas es continuo, excepto en los puntos en donde el denominador es cero. Asimismo, si g es una función de dos variables, continua en (a, b), y si F es una función de una variable, continua en $g(a, b)$, entonces la función compuesta $f(x, y) = F(g(x, y))$ es continua en (a, b). Por último, la gráfica de una función continua es una superficie sin quiebres.

Funciones polinómicas y racionales

Una **función polinómica** o **polinomial** de dos variables consiste en la suma de potencias x^my^n, en donde m y n son enteros no negativos. El cociente de dos funciones polinomiales se llama **función racional**. Las funciones polinómicas son continuas en todo el plano xy, y las funciones racionales son continuas excepto en los puntos en donde el denominador vale cero.

Ejemplo 4

$f(x, y) = 3x^4y^2 - x^3y + xy^3$ es una función polinómica de dos variables.

Ejemplo 5

La función racional $f(x, y) = xy/(y - x)$ es continua excepto en los puntos de la recta $y = x$.

Ejemplo 6

Evaluar $\lim\limits_{(x,y)\to(1,4)} \dfrac{x + 2y}{x^2 + y}$.

Solución Puesto que la función racional $f(x, y) = (x + 2y)/(x^2 + y)$ es continua en $(1, 4)$, el límite es $f(1, 4) = \frac{9}{5}$.

Ejemplo 7

Evaluar $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2 - y^2}{x - y}$.

Solución

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2 - y^2}{x - y} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x - y)(x + y)}{x - y} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} (x + y) = 2.$$

Ejemplo 8

Como $F(x) = e^x$ es continua para todos los números reales, la función compuesta $f(x, y) = e^{x/(y - 2x)}$ es continua, excepto en los puntos de la recta $y = -2x$.

(O) 16.2.2 Definición de límite según ϵ-δ

Terminología

Como en la Sección 2.5, la definición de límite de una función $z = f(x, y)$ en un punto (a, b) se da en términos de ϵ-δ. Antes de formular la definición, se necesita introducir algo de terminología. Si R es una región del plano xy, entonces se dice que un punto (a, b) es un **punto interior** de R si existe *algún* círculo con centro en (a, b) que contenga sólo puntos de R. Por contraste, (a, b) es un **punto de frontera** de R si todo círculo con centro en (a, b) contiene tanto puntos de R como puntos que no son de R. Se expresa que la región R es **abierta** si no contiene puntos de frontera, y **cerrada** si contiene todos sus puntos de frontera. Véase la Figura 16.21.

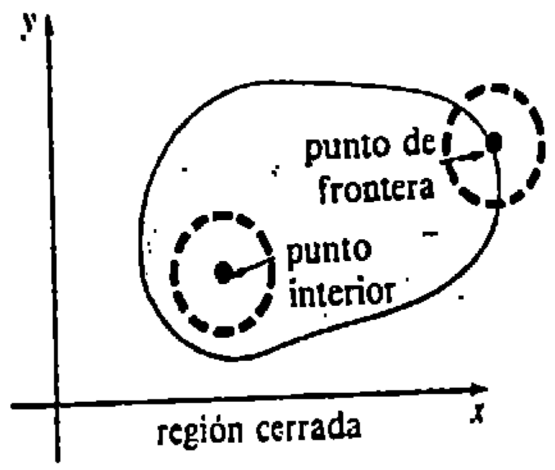


Figura 16.21

DEFINICIÓN 16.2

Sea f una función de dos variables que está definida en todo punto (x, y) del interior de un círculo con centro en (a, b), excepto posiblemente en (a, b). Entonces

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

significa que para todo $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que

$$|f(x, y) - L| < \epsilon \quad \text{siempre que } 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta. \qquad \square$$

Como se ilustra en la Figura 16.22, cuando f tiene límite en (a, b), para un $\epsilon > 0$ dado, no importa cuán pequeño sea, es posible tener un círculo de radio δ con

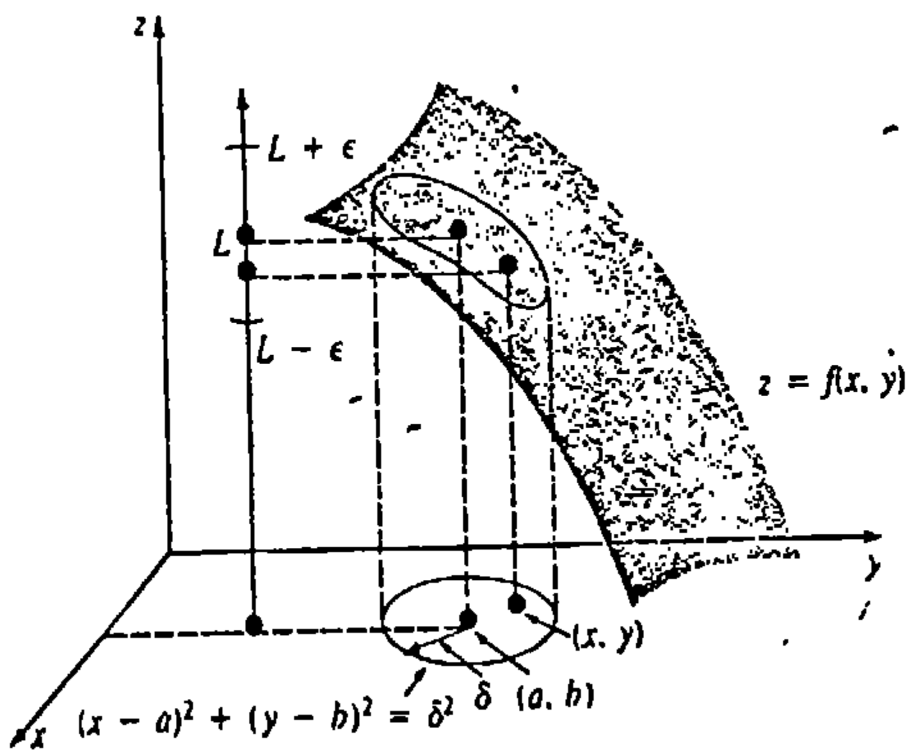


Figura 16.22

centro en (a, b) de modo que $L - \epsilon < f(x, y) < L + \epsilon$ para todo punto interior $(x, y) \neq (a, b)$ del círculo. Como se mencionó anteriormente, los valores de f están cerca de L siempre que (x, y) esté suficientemente próximo a (a, b). El concepto de "suficientemente cerca" se define por el número δ.

Observación

Las definiciones de límite y continuidad para funciones de tres o más variables son extensiones naturales de las ya consideradas. Por ejemplo, $w = F(x, y, z)$ es continua en (a, b, c) si

$$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} F(x, y, z) = F(a, b, c).$$

La función polinómica de tres variables $F(x, y, z) = xy^2z^3$ es continua en todo el espacio tridimensional. La función racional

$$F(x, y, z) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

es continua en todos los puntos excepto en $(0, 0, 0)$.

Ejercicios 16.2

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 998.

[16.2.1]

En los Problemas 1-20 evalúe el límite indicado, si es que existe.

1. $\lim_{(x,y)\to(5,-1)} (x^2 + y^2)$
2. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2 - y}{x - y}$
3. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$
4. $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{4x^2 - y^2}{16x^4 - y^4}$
5. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2}$
6. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 - y}{x^2 + 2y^2}$
7. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$
8. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6xy^2}{x^2 + y^4}$
9. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen} xy}{xy}$
10. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen} xy}{x^2 + y^2}$
11. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3 + y^2}$
12. $\lim_{(x,y)\to(\pi,\pi/4)} \cos(3x + y)$
13. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - 3y + 1}{x + 5y - 3}$
14. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4 + 5y^4}$
15. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^3 + y^3}$
16. $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2y}{x^3 + y^3}$
17. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy - x - y + 1}{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2}$
18. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y^2 + xy - 2x^2}{y - x}$
19. $\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x + y}{xy + 1}$
20. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \ln(2x^2 - y^2)$

En los Problemas 21-24 determine dónde se continua la función dada.

21. $f(x, y) = \sqrt{x} \cos \sqrt{x + y}$
22. $f(x, y) = y^2e^{1/xy}$
23. $f(x, y) = \tan \frac{x}{y}$
24. $f(x, y) = \ln(4x^2 + 9y^2 + 36)$

En los Problemas 25 y 26 determine si la función dada es continua en las regiones indicadas.

25. $f(x, y) = \begin{cases} x + y, & x \geq 2 \\ 0, & x < 2 \end{cases}$
    (a) $x^2 + y^2 < 1$
    (b) $x \geq 0$
    (c) $y > x$

26. $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}}$

(a) $y \geq 3$

(b) $|x| + |y| < 1$

(c) $(x - 2)^2 + y^2 < 1$

27. Demuestre que

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{2x^2 + 2y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua en cada variable separadamente en $(0, 0)$; esto es, $f(x, 0)$ y $f(0, y)$ son continuas en $x = 0$ y $y = 0$, respectivamente. Demuestre que, sin embargo, f no es continua en $(0, 0)$.

28. Demuestre que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = 0.$$

(*Sugerencia:* Utilice $x^3 \leq (x^2 + y^2)^{3/2}$.)

[16.2.2]

En los Problemas 29 y 30 aplique la Definición 16.2 para demostrar el resultado indicado; esto es, halle δ para cualquier $\epsilon > 0$ arbitrario. (*Sugerencia:* Utilice coordenadas polares.)

29. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy^2}{x^2 + y^2} = 0$

30. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2} = 0$

16.3 Diferenciación parcial

La derivada de una función de una variable $y = f(x)$ está definida por

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Puede definirse exactamente de la misma manera una derivada de una función de dos variables $z = f(x, y)$ con respecto a *cada una* de las variables.

DEFINICIÓN 16.3

Si $z = f(x, y)$, entonces la derivada parcial con respecto a x es

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \qquad (16.2)$$

y la derivada parcial con respecto a y es

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}, \qquad (16.3)$$

siempre que exista cada límite. □

En (16.2) la variable y no cambia en el proceso de límite; esto es, y se mantiene fija. De manera semejante, en (16.3) la variable x se mantiene fija. Entonces las dos derivadas parciales (16.2) y (16.3) representan las *razones de cambio* o *intensidades de variación* de f con respecto a x y y, respectivamente. A nivel práctico:

Para evaluar $\partial z/\partial x$, aplíquense las leyes de la diferenciación ordinaria considerando a y como constante.

Para evaluar $\partial z/\partial y$, aplíquense las leyes de la diferenciación ordinaria considerando a x como constante.

Ejemplo 1

Si $z = 4x^3y^2 - 4x^2 + y^6 + 1$, determinar

(*a*) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, (*b*) $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Solución (*a*) Se mantiene fija a y y se tratan las constantes de la manera usual. Así,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 12x^2y^2 - 8x.$$

(*b*) Considerando a x como una constante, obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 8x^3y + 6y^5.$$

Símbolos alternativos

Las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ se representan también con otros símbolos. Si $z = f(x, y)$, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = z_x = f_x \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = z_y = f_y.$$

Un símbolo como $\partial/\partial x$ denota la *operación* de tomar una derivada parcial, en este caso con respecto a x; por ejemplo,

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) = 2x.$$

Ejemplo 2

Si $f(x, y) = x^5y^{10}\cos(xy^2)$, determinar f_y.

Solución Cuando x se mantiene fija, obsérvese que

$$f(x, y) = x^5 \underbrace{y^{10}\cos(xy^2)}_{\boxed{\text{producto de dos funciones de } y}}.$$

Por lo tanto, por la regla del producto,

$$f_y(x, y) = x^5y^{10}[-2xy\,\text{sen}(xy^2)] + 10x^5y^9\cos(xy^2).$$

Ejemplo 3

La función $S = 0.1091w^{0.425}h^{0.725}$ relaciona el área de superficie (en pies cuadrados) del cuerpo de una persona en función del peso w (en libras) y la estatura h (en pulgadas). Evaluar $\partial S/\partial w$ cuando $w = 150$ y $h = 72$. Interprétese el resultado.

Solución

$$\frac{\partial S}{\partial w} = (0.1091)(0.425)w^{-0.575}h^{0.725}$$

$$\left.\frac{\partial S}{\partial w}\right|_{(150,72)} = (0.1091)(0.425)(150)^{-0.575}(72)^{0.725} \approx 0.058.$$

La derivada parcial $\partial S/\partial w$ es la razón a la que cambia el área de superficie de una persona de estatura fija, como un adulto, con respecto al peso. Dado que las unidades de la derivada son pie²/lb, se ve que una ganancia de 1 lb; con h fija en 72, da por resultado un incremento del área superficial de la piel de aproximadamente $0.058 \approx 1/17$ pie².

Interpretación geométrica

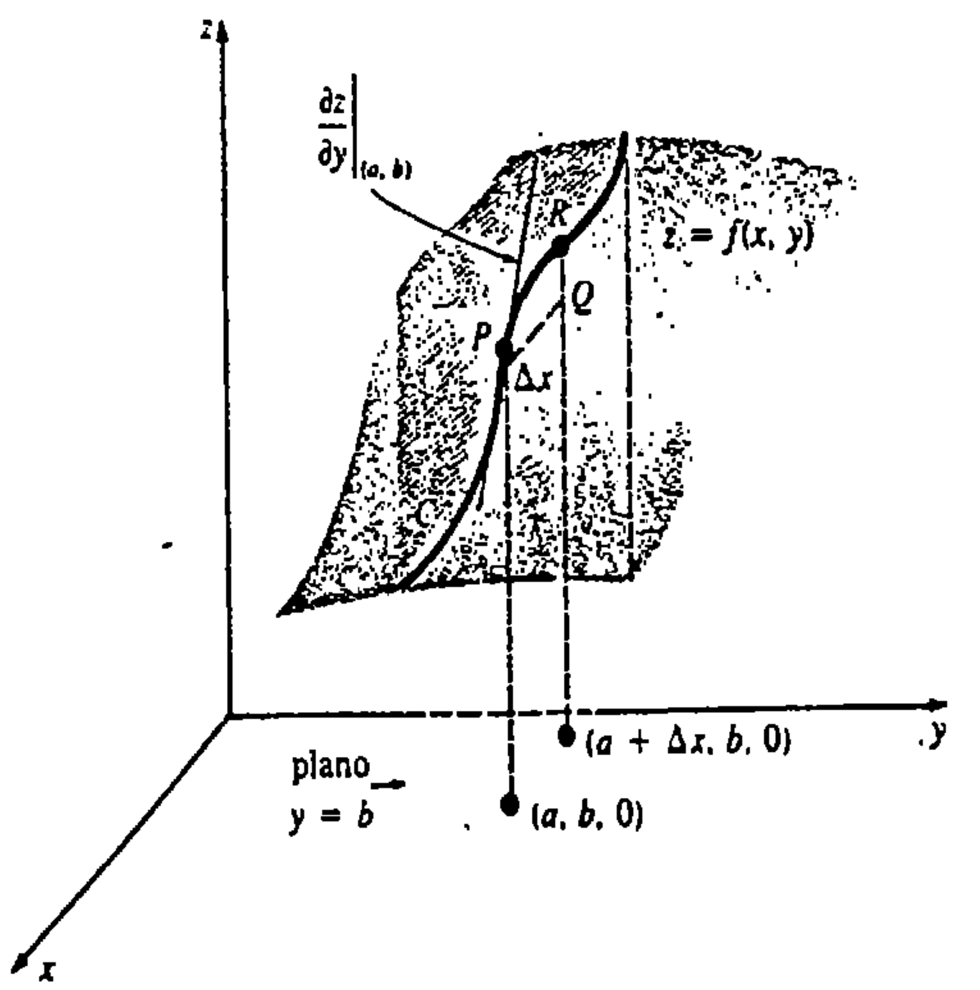
Cuando y es constante, por ejemplo $y = b$, la traza de la superficie $z = f(x, y)$ en el plano $y = b$ es una curva C, como se ve en la Figura 16.23(a). Si definimos la pendiente de la secante que pasa por los puntos P y R indicados, como

$$\frac{f(a + \Delta x, b) - f(a, b)}{\Delta x},$$

entonces

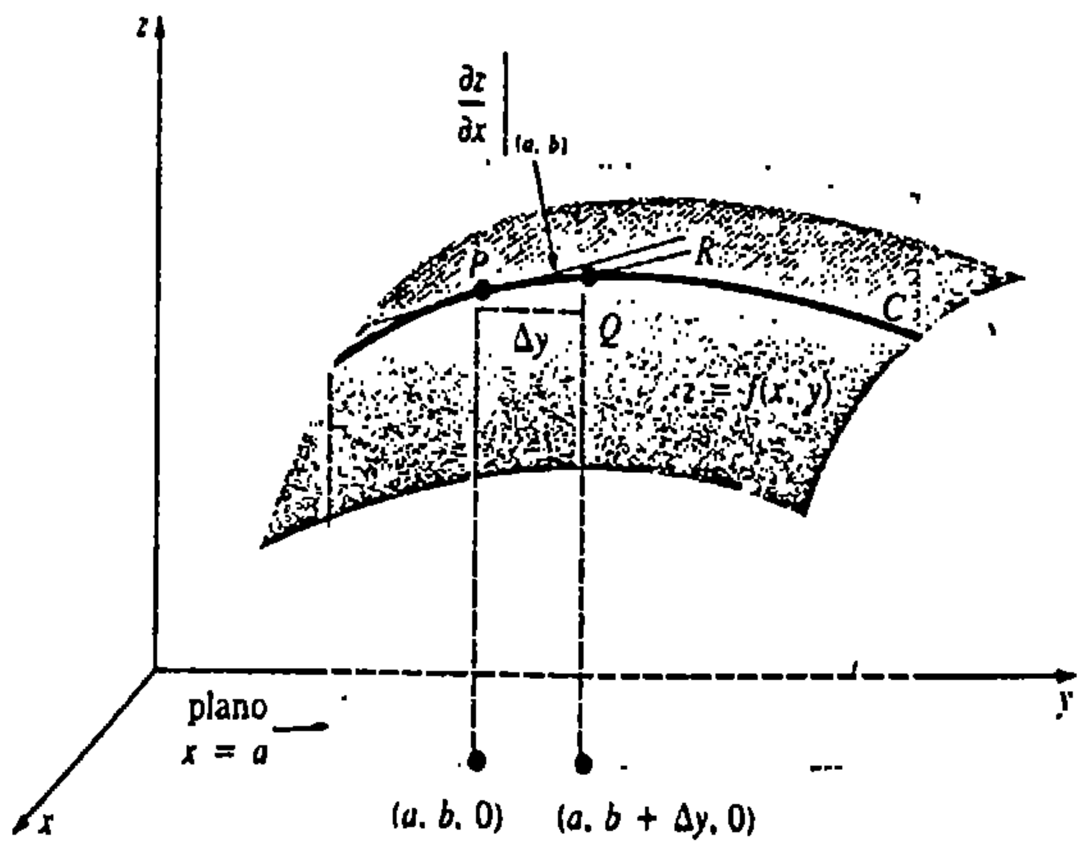
$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,b)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x, b) - f(a, b)}{\Delta x}.$$

En otras palabras, puede interpretarse $\partial z/\partial x$ como la pendiente de la tangente en cualquier punto (para el cual el límite exista) de una curva C de intersección entre la superficie



(a)

Figura 16.23



(b)

$z = f(x, y)$ y un plano y = constante. A su vez, el examen de la Figura 16.23(b) revela que $\partial z/\partial y$ es la pendiente de la tangente en un punto de la curva de intersección entre la superficie $z = f(x, y)$ y un plano x = constante.

Ejemplo 4

Para $z = 9 - x^2 - y^2$, determine la pendiente de la recta tangente en $(2, 1, 4)$ en: (a) el plano $x = 2$, y (b) en el plano $y = 1$.

Solución (a) Especificando el plano $x = 2$, se mantienen constantes todos los valores de x. Por lo tanto, se calcula la derivada parcial con respecto a y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y.$$

En $(2, 1, 4)$ la pendiente es

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)} = -2.$$

(b) En el plano $y = 1$, y es constante, y se determina la derivada parcial con respecto a x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x.$$

En $(2, 1, 4)$ la pendiente vale

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)} = -4.$$

Véase la Figura 16.24

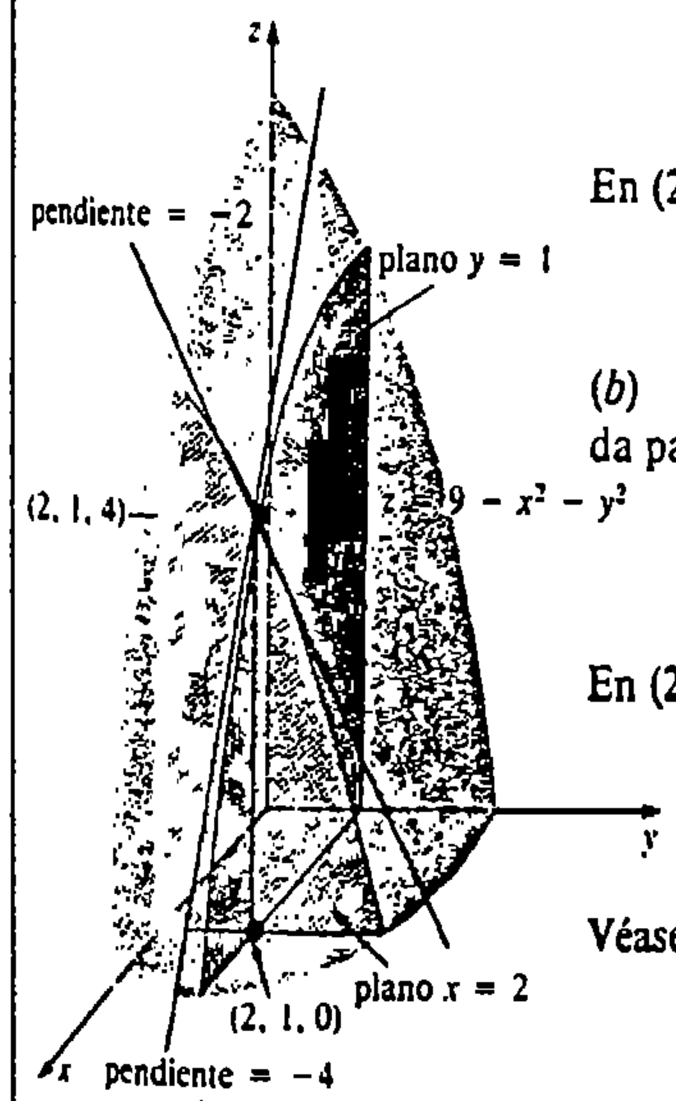


Figura 16.24

Funciones de tres o más variables

Las razones de cambio de una función de tres variables $w = F(x, y, z)$ en las direcciones x, y y z son $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ y $\partial w/\partial z$, respectivamente. Por ejemplo, para calcular $\partial w/\partial x$, se deriva con respecto a x en la manera usual manteniendo constantes tanto a y como a z. De esta manera extendemos el proceso de diferenciación parcial a funciones de cualquier número de variables.

Ejemplo 5

Si $w = \dfrac{x^2 - z^2}{y^2 + z^2}$, determine $\dfrac{\partial w}{\partial z}$.

Solución Aplicando la regla del cociente, con x y y constantes:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{(y^2 + z^2)(-2z) - (x^2 - z^2)2z}{(y^2 + z^2)^2}$$
$$= -\frac{2z(x^2 + y^2)}{(y^2 + z^2)^2}.$$

Ejemplo 6

Si $F(x, y, t) = e^{-3\pi t} \cos 4x \operatorname{sen} 6y$, entonces las derivadas parciales con respecto a x, y y t son, respectivamente,

$$F_x(x, y, t) = -4e^{-3\pi t} \operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} 6y$$
$$F_y(x, y, t) = 6e^{-3\pi t} \cos 4x \cos 6y$$
$$F_t(x, y, t) = -3\pi e^{-3\pi t} \cos 4x \operatorname{sen} 6y.$$

Derivadas de orden superior y mixtas

Las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ de una función de dos variables $z = f(x, y)$, son en sí funciones de x y y. Consecuentemente, es posible calcular **segundas derivadas parciales**, y parciales de mayor orden. Además, puede hallarse la derivada parcial de $\partial z/\partial x$ con respecto a y, y la derivada parcial de $\partial z/\partial y$ con respecto a x. A estos últimos tipos de derivadas parciales se les llama **derivadas parciales mixtas**. En resumen, para $z = f(x, y)$:

Derivadas parciales de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right);$$

Derivadas parciales de tercer orden:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right).$$

Derivadas parciales de segundo orden mixtas:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Las derivadas parciales de orden superior para funciones de tres o más variables se definen de manera semejante.

Símbolos alternativos

Las derivadas parciales de segundo y de tercer órdenes se denotan por f_{xx}, f_{yy}, f_{xxx}, etcétera. La notación con subíndices para segundas derivadas parciales mixtas es f_{xy}, o bien f_{yx}. Obsérvese que

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} \quad \text{y} \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}.$$

Aunque no lo demostraremos, si una función f tiene segundas derivadas parciales continuas, entonces es irrelevante el orden en el que se determine una segunda derivada parcial mixta; esto es,

$$f_{xy} = f_{yx}. \qquad 16.4)$$

Ejemplo 7

Si $\quad z = x^2y^2 - y^3 + 3x^4 + 5$

encuentre $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}, \quad$ y $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$.

Solución

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2 + 12x^3, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2y - 3y^2,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^2 + 36x^2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^2 - 6y,$$
$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 72x, \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = -6,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y - 3y^2) = 4xy.$$

$2xy^2 + 12x$

$xy^2 + 12$

Verifique usted que también $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = 4xy$.

Ejemplo 8

Si $F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^4 + z^6}$, determinar F_{yxz}.

Solución F_{yxz} es una derivada parcial de tercer orden mixta. Primero se obtiene la derivada parcial con respecto a y mediante la regla de la potencia para funciones:

$$F_y = \frac{1}{2}(x^2 + y^4 + z^6)^{-1/2}4y^3$$
$$= 2y^3(x^2 + y^4 + z^6)^{-1/2}.$$

Entonces,

$$F_{yz} = (F_y)_z = (2y^3)\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2 + y^4 + z^6)^{-3/2}6z^5$$
$$= -6y^3z^5(x^2 + y^4 + z^6)^{-3/2}.$$

Finalmente, por la regla del producto,

$$F_{yzz} = (F_{yz})_z = -6y^3z^5\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2 + y^4 + z^6)^{-5/2}(6z^5)$$
$$-30y^3z^4(x^2 + y^4 + z^6)^{-3/2}$$
$$= y^3z^4(x^2 + y^4 + z^6)^{-5/2}(24z^6 - 30x^2 - 30y^4).$$

Observación

Si $w = F(x, y, z)$ tiene derivadas parciales continuas de cualquier orden, entonces de manera análoga a (16.4),

$$F_{xyz} = F_{yzx} = F_{zyx}$$
$$F_{xxy} = F_{yxx} = F_{xyx}$$

y así sucesivamente.

Ejercicios 16.3

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 998.

En los Problemas 1 y 2 aplique la Definición 16.3 para evaluar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ para la función indicada.

1. $z = 3x^2y + 4xy^2$

2. $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y}$

En los Problemas 3-20 encuentre las primeras derivadas parciales de la función indicada.

3. $z = x^2 - xy^2 + 4y^5$

4. $z = -x^3 + 6x^2y^3 + 5y^2$

5. $z = \dfrac{4\sqrt{x}}{3y^2 + 1}$

6. $z = 4x^3 - 5x^2 + 8x$

7. $z = (x^3 - y^2)^{-1}$

8. $z = (-x^4 + 7y^2 + 3y)^6$

9. $z = \cos^2 5x + \operatorname{sen}^2 5y$

10. $z = e^{x^2 \tan^{-1} y^2}$

11. $f(x, y) = xe^{x^3 y}$

12. $f(\theta, \phi) = \phi^2 \operatorname{sen}\dfrac{\theta}{\phi}$

13. $f(x, y) = \dfrac{3x - y}{x + 2y}$

14. $f(x, y) = \dfrac{xy}{(x^2 - y^2)^2}$

15. $g(u, v) = \ln(4u^2 + 5v^3)$

16. $h(r, s) = \dfrac{\sqrt{r}}{s} - \dfrac{\sqrt{s}}{r}$

17. $w = 2\sqrt{x}y - ye^{y/z}$

18. $w = xy \ln xz$

19. $F(u, v, x, t) = u^2w^2 - uv^3 + vw\cos(ut^2) + (2x^2t)^4$

20. $G(p, q, r, s) = (p^2q^3)^{r^4 s^5}$

21. Dado que $z = 4x^3y^4$, determine la pendiente de la recta tangente en $(1, -1)$ en el plano (a) $x = 1$, (b) $y = -1$.

22. Dado que $f(x, y) = 18xy/(x + y)$, halle para $(-1, 4, -24)$,

(a) ecuaciones paramétricas de la recta tangente en el plano $x = -1$,

(b) ecuaciones simétricas de la recta tangente en el plano $y = 4$.

En los Problemas 23-30 evalúe la derivada parcial indicada.

23. $z = e^{xy}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

24. $z = x^4y^{-2}$; $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}$

25. $f(x, y) = 5x^2y^2 - 2xy^3$; f_{xy}

26. $f(p, q) = \ln\dfrac{p + q}{q^2}$; f_{qp}

27. $w = u^2v^3t^3$; w_{tuv}

28. $w = \dfrac{\cos(u^2v)}{t^3}$; w_{vvt}

29. $F(r, \theta) = e^{r^2}\cos\theta$; $F_{r\theta r}$

30. $H(s, t) = \dfrac{s + t}{s - t}$; H_{tts}

En los Problemas 31 y 32 verifique que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$.

31. $z = x^6 - 5x^4y^3 + 4xy^2$

32. $z = \tan^{-1}(2xy)$

En los Problemas 33 y 34 compruebe que son iguales las derivadas parciales indicadas.

33. $x = u^3v^4 - 4u^2v^2t^3 + v^2t$; w_{uvt}, w_{tvu}, w_{vut}

34. $F(\eta, \xi, \tau) = (\eta^3 + \xi^2 + \tau)^2$; $F_{\eta\xi\eta}$, $F_{\xi\eta\eta}$, $F_{\eta\eta\xi}$

En los Problemas 35-38, suponga que la ecuación dada define a z como una función de las dos variables restantes. Aplique derivación implícita para determinar las primeras derivadas parciales.

35. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

36. $z^2 = x^2 + y^2z$

37. $z^2 + u^2v^3 - uvz = 0$

38. $se^t - e^{st} + 4s^3t = z$

39. El área A de un paralelogramo con base x y altura y sen θ, es $A = xy \operatorname{sen}\theta$. Determine todas las primeras derivadas parciales.

40. El volumen del cono truncado que se muestra en la Figura 16.25, es $V = (\pi/3)h(r^2 + rR + R^2)$. Obtenga todas las primeras derivadas parciales.

Figura 16.25

En los Problemas 41 y 42 verifique que la función dada satisface la ecuación de Laplace.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

41. $z = \ln(x^2 + y^2)$

42. $z = e^{x^2 - y^2}\cos 2xy$

En los Problemas 43 y 44 verifique que la función indicada satisface la ecuación de onda.

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

43. $u = \cos at \operatorname{sen} x$

44. $u = \cos(x + at) + \operatorname{sen}(x - at)$

45. La concentración molecular $C(x, t)$ de un líquido está dada por $C(x, t) = t^{-1/2}e^{-x^2/kt}$. Verifique que esta función satisface la ecuación de difusión.

$$\frac{k}{4}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial t}.$$

46. El potencial electrostático en un punto $P(x, y)$ del plano debido a una carga puntual unitaria en el origen está dado por $U = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$. En (3, 4) determine la razón de cambio de U en la dirección: (a) del eje x, (b) del eje y.

47. El desplazamiento vertical de una cuerda larga sujeta en el origen, pero que cae bajo la acción de su propio peso, está dado por

$$u(x, t) = \begin{cases} -\dfrac{g}{2a^2}(2axt - x^2), & 0 \le x \le at, \\ -\dfrac{1}{2}gt^2, & x > at. \end{cases}$$

Véase la Figura 16.26.

(a) Evalúe $\partial u/\partial t$. Interprete el resultado.

(b) Determine $\partial u/\partial x$ para $x > at$. Interprete el resultado.

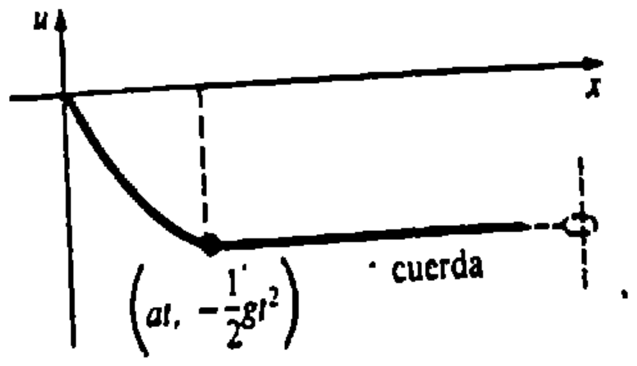


Figura 16.26

48. La presión P ejercida por un gas ideal encerrado está dada por $P = k(T/V)$, en donde k es una constante, T es temperatura y V es volumen. Determine
(a) la razón de cambio de P con respecto a V,
(b) la razón de cambio de V con respecto a T, y
(c) la razón de cambio de T con respecto a P.

49. La temperatura T de una placa plana rectangular está dada por $T(x, y) = xy(2 - x)(2 - y)$, si $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$. En $(1, \frac{1}{2})$, determine la razón de cambio de T,
(a) con respecto a x,
(b) con respecto a y.

Problema para calculadora

50. Para la función área superficial de la piel

$$S = 0.1091w^{0.425}h^{0.725}$$

considerada en el Ejemplo 3, evalúe $\partial S/\partial h$ para $w = 60$, $h = 36$. Si una muchacha crece en estatura de 36 a 37 pulgadas, manteniendo su peso fijo en 60 lb, ¿cuál es el incremento aproximado de su área superficial de piel?

Problemas diversos

51. Formule una definición de límite que sea análoga a la Definición 16.3 para
(a) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, (b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, (c) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$.

52. Obtenga una función $z = f(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3 + 2y + \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2 + 2x + 1.$$

16.4 Diferencial total

Incremento de la variable dependiente

La noción de diferenciabilidad de una función de cualquier número de variables independientes, depende del incremento de la variable dependiente. Recuérdese que para una función de *una variable* $y = f(x)$,

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

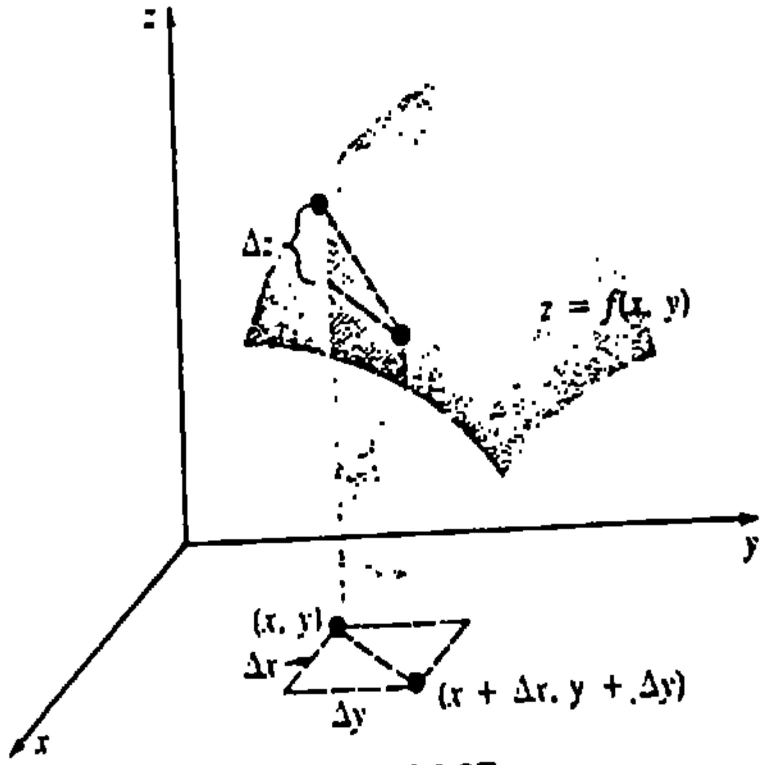


Figura 16.27

De manera análoga, para una función de *dos variables* $z = f(x, y)$, se define

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \tag{16.5}$$

La Figura 16.27 muestra que Δz da la magnitud del cambio de la función cuando (x, y) varía a $(x + \Delta x + y + \Delta y)$.

Ejemplo 1

Evaluar Δz para $z = x^2 - xy$. ¿Cuál es el cambio en la función de $(1, 1)$ a $(1.2, 0.7)$?

Solución En virtud de (16.5),

$$\begin{aligned}\Delta z &= [(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x)(y + \Delta y)] - (x^2 - xy)\\ &= (2x - y)\,\Delta x - x\,\Delta y + (\Delta x)^2 - \Delta x\,\Delta y.\end{aligned} \tag{16.6}$$

Con $x = 1$, $y = 1$, $\Delta x = 0.2$, $\Delta y = -0.3$,

$$\Delta z = (1)(0.2) - (1)(-0.3) + (0.2)^2 - (0.2)(-0.3) = 0.6.$$

Fórmula fundamental del incremento

Un breve repaso del incremento Δz en (16.6) muestra que en los dos primeros términos los coeficientes de Δx y Δy son $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$, respectivamente. El importante teorema siguiente demuestra que esto no es accidental.

TEOREMA 16.1

Supóngase que $z = f(x, y)$ tiene derivadas parciales continuas $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ en una región rectangular definida por $a < x < b$, $c < y < d$. Si (x, y) es cualquier punto de esta región, entonces existen ε_1 y ε_2, que son funciones de Δx y Δy tales que

$$\Delta z = f_x(x, y)\,\Delta x + f_y(x, y)\,\Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y, \tag{16.7}$$

en donde $\varepsilon_1 \to \varepsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$.

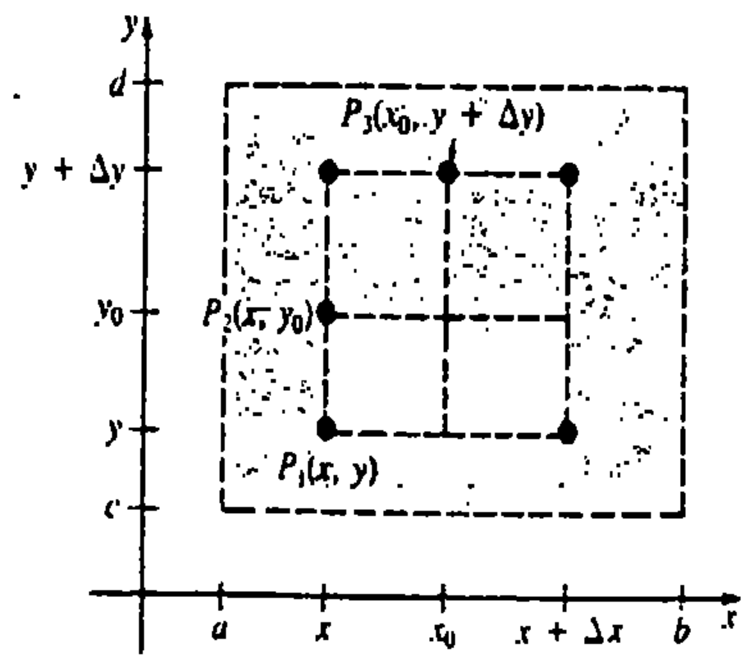


Figura 16.28

Demostración Sumando y restando $f(x, y + \Delta y)$ en (16.5),

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)].$$

Aplicando luego el teorema del valor medio a cada expresión puesta en corchetes resulta

$$\Delta z = f_x(x_0, y + \Delta y)\,\Delta x + f_y(x, y_0)\,\Delta y, \tag{16.8}$$

en donde x_0 está entre x y $x + \Delta x$, y y_0 se halla entre y y $y + \Delta y$. Véase la Figura 16.28, en donde se ilustra el caso en el que $\Delta x > 0$ y $\Delta y > 0$. Defínase ahora

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= f_x(x_0, y + \Delta y) - f_x(x, y) \\ \varepsilon_2 &= f_y(x, y_0) - f_y(x, y). \end{aligned} \tag{16.9}$$

Cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$, entonces $P_2 \to P_1$ y $P_3 \to P_1$, como se muestra en la figura. Puesto que f_x y f_y se suponen continuas en la región,

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \varepsilon_1 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \varepsilon_2 = 0.$$

Resolviendo (16.9) para determinar $f_x(x_0, y + \Delta y)$ y $f_y(x, y_0)$, y sustituyendo en (16.8), se obtiene el resultado

$$\Delta z = f_x(x, y)\,\Delta x + f_y(x, y)\,\Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y. \qquad \square$$

Ejemplo 2

En el Ejemplo 1 puede tomarse $\epsilon_1 = \Delta x$ y $\epsilon_2 = -\Delta x$.

Diferencial total de $z = f(x, y)$

Por sugerencia de (16.7) definimos ahora la **diferencial total**, o simplemente la **diferencial**, de una función $z = f(x, y)$.

DEFINICIÓN 16.4

Sea $z = f(x, y)$ una función para la cual existen las primeras derivadas parciales f_x y f_y. Entonces,

(*i*) **Las diferenciales** de las variables independientes son

$$dx = \Delta x, \qquad dy = \Delta y.$$

(*ii*) **La diferencial total** de la función es

$$\begin{aligned} dz &= f_x(x, y)\,dx + f_y(x, y)\,dy \\ &= \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy. \end{aligned} \qquad \square$$

Ejemplo 3

Si $z = x^2 - xy$, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -x$$

de modo que

$$dz = (2x - y)\,dx - x\,dy.$$

Del Teorema 16.1 resulta inmediatamente que cuando f_x y f_y son continuas, y cuando Δx y Δy son pequeños, entonces dz es una aproximación para Δz:

$$dz \approx \Delta z.$$

Ejemplo 4

El cambio de la función del Ejemplo 1 se puede aproximar empleando la diferencial del Ejemplo 3,

$$dz = (1)(0.2) - (1)(-0.3) = 0.5.$$

Ejemplo 5

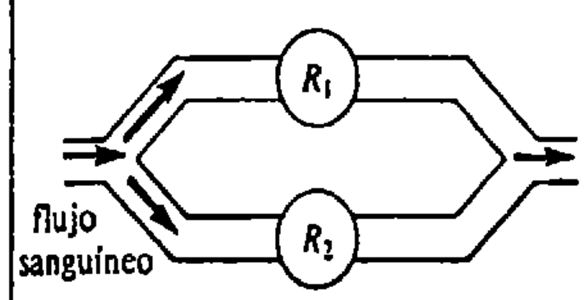


Figura 16.29

El sistema cardiovascular humano es semejante a circuitos eléctricos conectados en serie y en paralelo. Por ejemplo, cuando la sangre fluye a través de dos resistencias vasculares en paralelo, como se muestra en la 16.29, entonces la resistencia equivalente R del circuito es

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{o sea} \quad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Si los porcentajes de error al medir R_1 y R_2 son $\pm 0.2\%$ y $\pm 0.6\%$, respectivamente, calcular el porcentaje máximo de error aproximado de R.

Solución Tenemos $\Delta R_1 = \pm 0.002\,R_1$ y $\Delta R_2 = \pm 0.006 R_2$. Ahora bien,

$$dR = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2}\,dR_1 + \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2}\,dR_2$$

y entonces

$$\begin{aligned} |\Delta R| \approx |dR| &\le \left|\frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2}(\pm 0.002 R_1)\right| + \left|\frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2}(\pm 0.006 R_2)\right| \\ &= R\left[\frac{0.002 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{0.006 R_1}{R_1 + R_2}\right] \\ &\le R\left[\frac{0.006 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{0.006 R_1}{R_1 + R_2}\right] = (0.006)R. \end{aligned}$$

Así que el error relativo máximo está dado por la aproximación $|dR|/R \approx 0.006$; por lo tanto, el porcentaje máximo de error es aproximadamente 0.6%.

Diferenciabilidad de $z = f(x, y)$

Aunque hemos considerado derivadas parciales y la diferencial de una función $z = f(x, y)$, no hemos definido todavía la **diferenciabilidad** de f. Este concepto se expresa en términos de la fórmula fundamental del incremento (16.7).

DEFINICIÓN 16.5

Se dice que la función $z = f(x, y)$ es diferenciable en (x, y) si Δz puede escribirse como

$$\Delta z = f_x(x, y)\,\Delta x + f_y(x, y)\,\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

en donde

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1 = \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2 = 0. \quad \square$$

TEOREMA 16.2

Si $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ son continuas en todo punto (x, y) de una región rectangular definida por $a < x < b, c < y < d$, entonces $z = f(x, y)$ es diferenciable en la región.

No es de sorprender que *la diferenciabilidad* de $z = f(x, y)$ *implica su continuidad.*

TEOREMA 16.3

Si $z = f(x, y)$ es diferenciable en (x, y), entonces f es continua en (x, y). $\square$

Diferencial total de $w = F(x, y, z)$

La definición 16.4 se generaliza a funciones de tres o más variables. Específicamente, si $w = F(x, y, z)$, entonces

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz.$$

Ejemplo 6

Si $w = x^2 + 2y^3 + 3z^4$, entonces

$$dw = 2x\,dx + 6y^2\,dy + 12z^3\,dz.$$

Observaciones

(*i*) Puesto que $dy \approx \Delta y$ cuando $f'(x)$ existe y Δx es pequeño, parece razonable esperar que $dz = f_x(x, y)\,\Delta x + f_y(x, y)\,\Delta y$ proporcione una buena aproximación a Δz para Δx y Δy pequeños. Pero las cosas no son así de simples para las funciones de varias variables; hay funciones para las cuales dz y Δz no se aproximan aún cuando Δx y Δy sean pequeños. La garantía de que $dz \approx \Delta z$ para incrementos pequeños de las variables independientes proviene de la continuidad, y no simplemente de la existencia de $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$.

(*ii*) Cuando se resuelvan los Problemas 3-6 de los Ejercicios 16.4, se descubrirá que no son únicas las funciones ϵ_1 y ϵ_2 introducidas en (16.7) del Teorema 16.1.

Ejercicios 16.4

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 998.

En los Problemas 1-4 compare los valores de Δz y dz para la función indicada cuando (x, y) varía del primer punto al segundo.

1. $z = 3x + 4y + 8$; $(2, 4)$, $(2.2, 3.9)$
2. $z = 2x^2y + 5y$; $(0, 0)$, $(0.2, -0.1)$
3. $z = (x + y)^2$; $(3, 1)$, $(3.1, 0.8)$
4. $z = x^2 + x^2y^2 + 2$; $(1, 1)$, $(0.9, 1.1)$

En los Problemas 5-8, obtenga funciones ϵ_1 y ϵ_2 a partir de como se define Δz en (16.7) del Teorema 16.1.

5. $z = 5x^2 + 3y - xy$
6. $z = 10y^2 + 3x - x^2$
7. $z = x^2y^2$
8. $z = x^3 - y^3$

En los Problemas 9-20 halle la diferencia total de la función indicada.

9. $z = x^2 \operatorname{sen} 4y$
10. $z = xe^{x^2-y^2}$
11. $z = \sqrt{2x^2 - 4y^3}$
12. $z = (5x^3y + 4y^5)^3$
13. $f(s, t) = \dfrac{2s - t}{s + 3t}$
14. $g(r, \theta) = r^2 \cos 3\theta$
15. $w = x^2y^4z^{-5}$
16. $w = e^{-z^2}\cos(x^2 + y^4)$
17. $F(r, s, t) = r^3 + s^{-2} - 4t^{1/2}$
18. $G(\rho, \theta, \phi) = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta$
19. $w = \ln\left(\dfrac{uv}{st}\right)$
20. $w = \sqrt{u^2 + s^2t^2 - v^2}$
21. Cuando la sangre fluye por tres resistencias vasculares R_1, R_2, R_3 en paralelo, la resistencia equivalente R del circuito es
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$
Dado que el porcentaje de error al medir cada resistencia es $\pm 0.9\%$, calcule el porcentaje máximo de error aproximado en R.
22. La presión P de un gas ideal encerrado está definida por $P = k(T/V)$, en donde V es el volumen, T es la temperatura y k es una constante. Dado que los porcentajes de error al medir T y V son a lo sumo de 0.6% y 0.8%, respectivamente, evalúe el porcentaje máximo de error aproximado en P.
23. La tensión T en la cuerda del yo-yo mostrado en la Figura 16.30 es
$$T = mg\frac{R}{2r^2 + R^2},$$

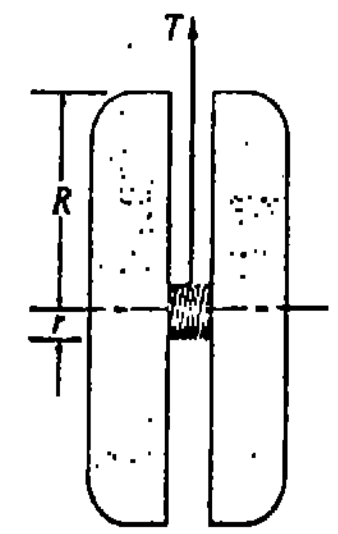


Figura 16.30

en donde mg es su peso constante. Determine el cambio aproximado de la tensión si R y r se incrementan de 4 cm y 0.8 cm, a 4.1 cm y 0.9 cm, respectivamente. ¿Aumenta o disminuye la tensión?

24. Calcule el incremento aproximado del volumen de un cilindro circular recto si su altura aumenta de 10 cm a 10.5 cm y su radio aumenta de 5 cm a 5.3 cm. ¿Cuál es el nuevo volumen aproximado?
25. Si la longitud, la anchura y la altura de una caja rectangular cerrada se incrementan en 2%, 5% y 8%, respectivamente, ¿cuál es el porcentaje aproximado de incremento en el volumen?
26. Si en el Problema 25 la longitud, el ancho y la altura originales fueran de 3 pie, 1 pie y 2 pie, respectivamente, ¿cuál sería el incremento aproximado del área de la superficie? ¿Cuál es la nueva área de superficie aproximada?
27. La función $S = 0.1091\, w^{0.425}h^{0.725}$ da el área de la superficie corporal de una persona, en términos del peso w y la estatura h. Si el error en la medida de w es a lo sumo 3%, y el error en la medida de h es a lo más de 5%, ¿cuál es el porcentaje máximo de error aproximado en la medida de S?
28. La impedancia Z del circuito en serie mostrado en la Figura 16.31 es $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$, en donde R es la resistencia, $X = 1000L - 1/(1000C)$ es la reactan-

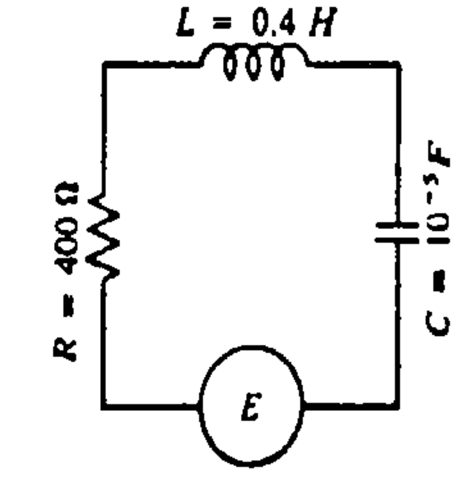


Figura 16.31

cia neta, L es la inductancia y C es la capacitancia. Si los valores R, L y C indicados en la Figura 16.31 se incrementan a 425 Ω (ohms), 0.45 H (henrys) y 1.1×10^{-5} F (farads), respectivamente, ¿cuál es el cambio aproximado de la impedancia del circuito? ¿Cuánto vale la nueva impedancia aproximada?

En los Problemas 29 y 30 aplique el concepto de diferencial para encontrar una aproximación a la expresión indicada.

29. $\sqrt{102} + \sqrt[4]{80}$

30. $\sqrt{\frac{35}{63}}$

16.5 Diferenciales exactas

Con frecuencia es importante poder decir de un vistazo cuándo una expresión diferencial como

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy \tag{16.10}$$

es la diferencial total de una función $z = f(x, y)$.

DEFINICIÓN 16.6

Se dice que una expresión diferencial (16.10) es una **diferencial exacta** si existe una función f tal que

$$df = P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy.$$

□

Ejemplo 1

La expresión $x^2y^3dx + x^3y^2dy$ es una diferencial exacta ya que es la diferencial total de $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3y^3$. Verificar esto.

El resultado siguiente proporciona un criterio para determinar cuándo (16.10) es exacta.

TEOREMA 16.4

Sean P y Q continuas y con primeras derivadas parciales continuas en una región rectangular del plano xy. Entonces, (16.10) es una diferencial exacta si y sólo si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{16.11}$$

para todo (x, y) en la región.

Demostración Si (16.10) es una diferencial exacta, existe una función f tal que

$$df = P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Puesto que $\partial f/\partial x = P$ y $\partial f/\partial y = Q$, tenemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Por la continuidad, las derivadas parciales mixtas son iguales y de esta manera obtenemos el resultado de (16.11). Recíprocamente, supóngase ahora que $\partial P/\partial y =$

$\partial Q/\partial x$. Deseamos encontrar una función f tal que $\partial f/\partial x = P$ y $\partial f/\partial y = Q$ Resulta así que

$$f(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\, dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\, dy, \tag{16.12}$$

en donde (x_0, y_0) es un punto fijo de la región, es la función que se busca. En la segunda integral de (16.12), la variable x se mantiene fija.

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\, dx + \frac{\partial}{\partial x}\int_{y_0}^{y} Q(x, y)\, dy \\ &= P(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dy \\ &\qquad\qquad \downarrow \\ &= P(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy \qquad \text{(por hipótesis)} \\ &= P(x, y_0) + P(x, y) - P(x, y_0) \\ &= P(x, y). \end{aligned}$$

Se deja como ejercicio verificar que $\partial f/\partial y = Q$. □

Ejemplo 2

Determinar si las expresiones diferenciales siguientes son exactas.

(*a*) $(2y^2 - 2y)\, dx + (2xy - x)\, dy$

(*b*) $2xy\, dx + (x^2 - 1)\, dy = 0$

Solución

(*a*)

$$P = 2y^2 - 2y, \qquad Q = 2xy - x$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4y - 2, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y - 1$$

Puesto que $\partial P/\partial y \neq \partial Q/\partial x$, la expresión no es exacta. En otras palabras, no existe una función f cuya diferencial total sea $(2y^2 - 2y)\, dx + (2xy - x)\, dy$.

(*b*)

$$P = 2xy, \qquad Q = x^2 - 1$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

La expresión es exacta.

Ecuaciones diferenciales exactas

La ecuación diferencial de primer orden

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0 \tag{16.13}$$

también se dice que es **exacta** cuando $P\, dx + Q\, dy$ es una diferencial exacta. Cuando (16.13) es exacta, es equivalente a $df(x, y) = 0$. Por lo tanto, una familia de soluciones de la ecuación está dada implícitamente por $f(x, y) = C$.

Ejemplo 3

Resolver $2xy\,dx + (x^2 - 1)\,dy = 0$.

Solución En la parte (*b*) del Ejemplo 2 se demostró que la ecuación es exacta. Consecuentemente, existe una función f tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1.$$

Integrando la primera de estas ecuaciones* con respecto a x resulta

$$f = x^2y + g(y),$$

en donde $g(y)$ es la "constante" de integración. Tomando la derivada parcial de esta expresión con respecto a y, e igualando el resultado a Q se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + g'(y) = x^2 - 1.$$

De aquí resulta que $g'(y) = -1$, $g(y) = -y$ y de esta manera $f = x^2y - y$. Entonces, una familia de soluciones de la ecuación es $x^2y - y = C$.

Ejemplo 4

Resolver $(\cos x \operatorname{sen} x - xy^2)\,dx + (y - x^2y)\,dy = 0$

con la condición $y(0) = 0$.

Solución La ecuación es exacta, ya que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2xy = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Ahora bien, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = y - x^2y$ implica que $f = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2y^2 + h(x)$.

Tomamos luego la derivada parcial de esta expresión con respecto a x e iguálese el resultado a P:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -xy^2 + h'(x) = \cos x \operatorname{sen} x - xy^2$$

$$h'(x) = \cos x \operatorname{sen} x$$

$$h(x) = \int \operatorname{sen} x(\cos x\,dx) \quad = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x.$$

De $f = \frac{1}{2}(y^2 - x^2y^2 + \operatorname{sen}^2 x)$ se obtiene una familia de soluciones $y^2 - x^2y^2 + \operatorname{sen}^2 x = C_1$, en donde se ha reemplazado $2C$ por C_1. Por último, sustituyendo las condiciones indicadas $x = 0$, $y = 0$ en la última ecuación, se obtiene de inmediato $C_1 = 4$. Consecuentemente, una solución al problema es $y^2 - x^2y^2 + \operatorname{sen}^2 x = 4$.

* Podrían integrarse cualquiera de estas ecuaciones.

Ejercicios 16.5

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 999.

En los Problemas 1-24 determine si la ecuación diferencial indicada es exacta. Si así es, resuélvala.

1. $(2x + 4)\,dx + (3y - 1)\,dy = 0$
2. $(2x + y)\,dx - (x + 6y)\,dy = 0$
3. $(5x + 4y)\,dx + (4x - 8y^3)\,dy = 0$
4. $(\operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x)\,dx + (\cos x + x\cos y - y)\,dy = 0$
5. $(2y^2x - 3)\,dx + (2yx^2 + 4)\,dy = 0$
6. $\left(2y - \frac{1}{x} + \cos 3x\right)\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x^2} - 4x^3 + 3y \operatorname{sen} 3x = 0$
7. $(x + y)(x - y)\,dx + x(x - 2y)\,dy = 0$
8. $\left(1 + \ln x + \frac{y}{x}\right)dx = (1 - \ln x)\,dy$
9. $(y^3 - y^2 \operatorname{sen} x - x)\,dx + (3xy^2 + 2y\cos x)\,dy = 0$
10. $(x^3 + y^3)\,dx + 3xy^2\,dy = 0$
11. $(y \ln y - e^{-xy})\,dx + \left(\frac{1}{y} + x \ln y\right)dy = 0$
12. $\frac{2x}{y}\,dx - \frac{x^2}{y^2}\,dy = 0$
13. $x\frac{dy}{dx} = 2xe^x - y + 6x^2$
14. $(3x^2y + e^y)\,dx + (x^3 + xe^y - 2y)\,dy = 0$
15. $\left(1 - \frac{3}{x} + y\right)dx + \left(1 - \frac{3}{y} + x\right)dy = 0$
16. $(e^y + 2xy\cosh x)y' + xy^2 \operatorname{senh} x + y^2\cosh x = 0$
17. $\left(x^2y^3 - \frac{1}{1 + 9x^2}\right)dx + x^3y^2\,dy = 0$
18. $(5y - 2x)y' - 2y = 0$
19. $(\tan x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)\,dx + \cos x \cos y\,dy = 0$
20. $(3x\cos 3x + \operatorname{sen} 3x - 3)\,dx + dy = 0$
21. $(1 - 2x^2 - 2y)\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 4xy$
22. $(2y \operatorname{sen} x \cos x - y + 2y^2e^{xy^2})\,dx = (x - \operatorname{sen}^2 x - 4xye^{xy^2})\,dy$
23. $(4x^3y - 15x^2 - y)\,dx + (x^4 + 3y^2 - x)\,dy = 0$
24. $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)dx + \left(ye^y + \frac{x}{x^2 + y^2}\right)dy = 0$

Problemas diversos

25. Determinar una función $P(x, y)$ tal que

$$P(x, y)\,dx + \left(xe^{xy} + 2xy + \frac{1}{x}\right)dy = 0$$

sea una ecuación diferencial exacta.

26. Determinar una función $Q(x, y)$ tal que

$$\left(y^{1/2}x^{-1/2} + \frac{x}{x^2 + y}\right)dx + Q(x, y)\,dy = 0$$

sea una ecuación diferencial exacta.

27. Hallar una constante k de manera que

$$(y^3 + kxy^4 - 2x)\,dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)\,dy = 0$$

sea una ecuación diferencial exacta.

28. Si f es la función definida en (16.12), verifique que $\partial f/\partial y = Q$.

16.6 Regla de la cadena

La regla de la cadena para funciones de una variable establece que si $y = f(u)$ es una función diferenciable de u, y $u = g(x)$ es una función diferenciable de x, entonces la derivada de la función compuesta es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}. \qquad (16.14)$$

Para una función compuesta de dos variables $z = f(u, v)$, en donde $u = g(x, y)$ y $v = h(x, y)$, se podría naturalmente esperar *dos* fórmulas análogas a (16.14), ya que es posible calcular tanto $\partial z/\partial x$ como $\partial z/\partial y$. La regla de la cadena para funciones de dos variables se resume como sigue.

TEOREMA 16.5
Regla de la cadena
Si $z = f(u, v)$ es diferenciable y $u = g(x, y)$ y $v = h(x, y)$ tienen primeras derivadas parciales continuas, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (16.15)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Demostración Se verifica el segundo de estos resultados. Si $\Delta x = 0$, entonces

$$\Delta z = f(g(x, y + \Delta y), h(x, y + \Delta y)) - f(g(x, y), h(x, y)).$$

Ahora bien, si

$$\Delta u = g(x, y + \Delta y) - g(x, y), \qquad \Delta v = h(x, y + \Delta y) - h(x, y),$$

entonces $g(x, y + \Delta y) = u + \Delta u, \qquad h(x, y + \Delta y) = v + \Delta v.$

Por lo tanto, Δz se puede expresar como

$$\Delta z = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v).$$

Puesto que f es diferenciable, de la fórmula del incremento (16.7) de la Sección 16.4 resulta que

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial z}{\partial v}\Delta v + \varepsilon_1 \Delta u + \varepsilon_2 \Delta v,$$

en donde, recordemos, $\varepsilon_1(\Delta u, \Delta v)$ y $\varepsilon_2(\Delta u, \Delta_\cdot)$ son funciones de Δu y Δv con la propiedad

$$\lim_{(\Delta u, \Delta v)\to(0,0)} \varepsilon_1 = 0, \quad \lim_{(\Delta u, \Delta v)\to(0,0)} \varepsilon_2 = 0.$$

Puesto que ε_1 y ε_2 no son funciones definidas unívocamente, se puede encontrar siempre un par de funciones para las cuales $\varepsilon_1(0, 0) = 0, \varepsilon_2(0, 0) = 0$. Por consiguiente, ε_1 y ε_2 son continuas en (0, 0). Por lo tanto,

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\Delta u}{\Delta y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\Delta v}{\Delta y} + \varepsilon_1\frac{\Delta u}{\Delta y} + \varepsilon_2\frac{\Delta v}{\Delta y}.$$

Tomando ahora el límite de esta expresión cuando $\Delta y \to 0$ resulta

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + 0 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + 0 \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

ya que Δu y Δv tienden ambas a cero cuando $\Delta y \to 0$. □

Ejemplo 1

Si $z = u^2 - v^3$ y $u = e^{2x-3y}$, $v = \text{sen}(x^2 - y^2)$, determine $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$.

Solución Puesto que $\partial z/\partial u = 2u$ y $\partial z/\partial v = -3v^2$, de (16.15) resulta que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2u(2e^{2x-3y}) - 3v^2[2x\cos(x^2 - y^2)]$$
$$= 4ue^{2x-3y} - 6xv^2\cos(x^2 - y^2) \qquad (16.16)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2u(-3e^{2x-3y}) - 3v^2[(-2y)\cos(x^2 - y^2)]$$
$$= -6ue^{2x-3y} + 6yv^2\cos(x^2 - y^2). \qquad (16.17)$$

Por supuesto, en el Ejemplo 1 se podría sustituir las expresiones de u y v en la función original, y luego hallar las derivadas parciales directamente. De la misma manera, las respuestas (16.16) y (16.17) pueden ser expresadas en términos de x y y.

Caso especial

Si $z = f(u, v)$ es diferenciable, y $u = g(t)$ y $v = h(t)$ son funciones diferenciables de una sola variable t, entonces el Teorema 16.5 implica que la derivada ordinaria dz/dt es

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}. \qquad (16.18)$$

Generalizaciones

Los resultados (16.15) y (16.18) se generalizan de inmediato a cualquier número de variables. Si $z = f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y cada una de las variables $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ son funciones de $x_1, x_2, \ldots, x_k$, entonces con hipótesis semejantes a las del Teorema 16.5, resulta

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}, \qquad (16.19)$$

en donde $i = 1, 2, \ldots, k$. De manera semejante, si las u_i, n donde $i = 1, 2, \ldots, n$, son funciones diferenciables de una sola variable t, entonces

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{du_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{du_n}{dt}. \qquad (16.20)$$

Ejemplo 2

Si $r = x^2 + y^2z^3$ y $x = uve^{st}$, $y = u^2 - v^2 + st^2$, $z = \text{sen}(uvst)$, evalúe $\partial r/\partial s$.

Solución
$$\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$
$$= 2x(tuve^{st}) + 2yz^3(t^2) + 3y^2z^2(uvt\cos(uvst)).$$

Ejemplo 3

Si $z = u^2v^3w^4$ y $u = t^2$, $v = 5t - 8$, $w = t^3 + t$, determine dz/dt.

Solución

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dt}$$
$$= 2uv^3w^4(2t) + 3u^2v^2w^4(5) + 4u^2v^3w^3(3t^2 + 1).$$

Solución alternativa Derivar $z = t^4(5t - 8)^3(t^3 + t)^4$ con la regla del producto.

Ejercicios 16.6

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 999.

En los Problemas 1-10 determine las derivadas parciales indicadas.

1. $z = e^{uv^2}$; $u = x^3$, $v = x - y^2$; $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

2. $z = u^2 \cos 4v$; $u = x^2y^3$, $v = x^3 + y^3$; $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

3. $z = 4x - 5y^2$; $x = u^4 - 8v^3$, $y = (2u - v)^2$; $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$

4. $z = \frac{x - y}{x + y}$; $x = \frac{u}{v}$, $y = \frac{v^2}{u}$; $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$

5. $w = (u^2 + v^2)^{3/2}$; $u = e^{-t}\operatorname{sen}\theta$, $v = e^{-t}\cos\theta$; $\frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial \theta}$

6. $w = \tan^{-1}\sqrt{uv}$; $u = r^2 - s^2$, $v = r^2s^2$; $\frac{\partial w}{\partial r}, \frac{\partial w}{\partial s}$

7. $R = rs^2t^4$; $r = ue^{v^2}$, $s = ve^{-u^2}$, $t = e^{u^2v^2}$; $\frac{\partial R}{\partial u}, \frac{\partial R}{\partial v}$

8. $Q = \ln(pqr)$; $p = t^2 \operatorname{sen}^{-1} x$, $q = \frac{x}{t^2}$, $r = \tan^{-1}\frac{x}{t}$; $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial t}$

9. $w = \sqrt{x^2 + y^2}$; $x = \ln(rs + tu)$, $y = \frac{t}{u}\cosh rs$; $\frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial r}, \frac{\partial w}{\partial u}$

10. $s = p^2 + q^2 - r^2 + 4t$; $p = \phi e^{3\theta}$, $q = \cos(\phi + \theta)$, $r = \phi\theta^2$, $t = 2\phi + 8\theta$; $\frac{\partial s}{\partial \phi}, \frac{\partial s}{\partial \theta}$

En los Problemas 11-16 evalúe la derivada indicada.

11. $z = \ln(u^2 + v^2)$; $u = t^2$, $v = t^{-2}$; $\frac{dz}{dt}$

12. $z = u^3v - uv^4$; $u = e^{-5t}$, $v = \sec 5t$; $\frac{dz}{dt}$

13. $w = \cos(3u + 4v)$; $u = 2t + \frac{\pi}{2}$, $v = -t - \frac{\pi}{4}$; $\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=\pi}$

14. $w = e^{xy}$; $x = \frac{4}{2t + 1}$, $y = 3t + 5$; $\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=0}$

15. $p = \frac{r}{2s + t}$; $r = u^2$, $s = \frac{1}{u^2}$, $t = \sqrt{u}$; $\frac{dp}{du}$

16. $r = \frac{xy^2}{z^3}$, $x = \cos s$, $y = \operatorname{sen} s$, $z = \tan s$; $\frac{dr}{ds}$

17. Si F y G tienen segundas derivadas parciales, demuestre que $u(x, t) = F(x + at) + G(x - at)$ satisface la ecuación de onda.

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

18. Sean $\eta = x + at$ y $\xi = x - at$. Demuestre que la ecuación de onda del Problema 17 se transforma en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\, \partial \xi} = 0,$$

en donde $u = f(\eta, \xi)$.

19. Si $u = f(x, y)$ y $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, verifique que la ecuación de Laplace $\partial^2u/\partial x^2 + \partial^2u/\partial y^2 = 0$ se transforma en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

20. Si $z = f(u)$ es una función diferenciable de una variable y $u = g(x, y)$ posee primeras derivadas parciales, obtenga $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$.

21. Aplique el resultado del Problema 20 para demostrar que para cualquier función diferenciable f, entonces $z = f(y/x)$ satisface la ecuación $x\,\partial z/\partial x + y\,\partial z/\partial y = 0$.

22. La tensión eléctrica o voltaje, a lo largo de un conductor aumenta a razón de 2 V/min, y la resistencia disminuye a razón de 1 Ω/min. Aplique la fórmula $I = E/R$ y la regla de la cadena para evaluar la razón a la que varía la corriente que pasa por el conductor cuando $R = 50$ Ω (ohms) y $E = 60$ V (volts).

23. El lado marcado x del triángulo de la Figura 16.32 aumenta a razón de 0.3 cm/s, el lado marcado y aumenta a razón de 0.5 cm/s, y el ángulo comprendido θ crece a razón de 0.1 rad/s. Aplique la regla de la cadena para encontrar la razón de cambio del área del triángulo en el instante en el que $x = 10$ cm, $y = 8$ cm y $\theta = \pi/6$.

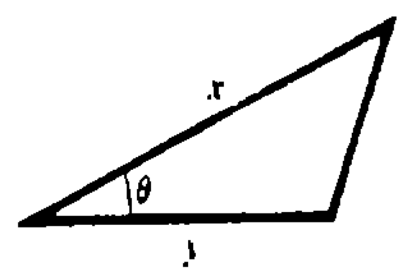


Figura 16.32

24. La ecuación de Van der Waals* del estado para el gas real CO_2 es

$$P = \frac{0.08T}{V - 0.0427} - \frac{3.6}{V^2}.$$

Si dT/dt y dv/dt son las intensidades de variación de la temperatura y del volumen, respectivamente, aplique la regla de la cadena para evaluar dP/dt.

Problemas para calculadora

25. Un infante crece a razón de 2 plg/año y aumenta de peso a razón de 4.2 lb/año. Utilice la fórmula $S = 0.1091\, w^{0.425}h^{0.725}$ y la regla de la cadena para determinar la razón de cambio del área de la superficie del niño cuando pesa 25 lb y su estatura es de 29 plg.

26. Una partícula se mueve en el espacio tridimensional de manera que sus coordenadas en cualquier instante son $x = 4\cos t$, $y = 4\operatorname{sen} t$, $z = 5t$; $t \geq 0$. Aplique la regla de la cadena para evaluar la razón de cambio de su distancia al origen

$$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

cuando $t = 5\pi/2$ segundos.

Problemas diversos

27. Si $z = f(x, y)$ es una función diferenciable y y es una función diferenciable de x, demuestre que

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

28. Si $f(x, y) = 0$ define implícitamente a y como función diferenciable de x, demuestre que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$$

En los Problemas 29-32 evalúe dy/dx por dos métodos: (a) derivación implícita, (b) el resultado del Problema 28.

29. $x^3 - 2x^2y^2 + y = 1$ 30. $x + 2y^2 = e^y$

31. $y = \operatorname{sen} xy$ 32. $(x + y)^{2/3} = xy$

33. Si $F(x, y, z) = 0$ define implícitamente a z como función diferenciable de x y y, demuestre que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}.$$

34. Repita el Problema 33 para demostrar que

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}.$$

En los Problemas 35-38 aplique los resultados de los Problemas 33 y 34 para determinar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$.

35. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

36. $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$

37. $xy^2z^3 + x^2 - y^2 = 5z^2$ 38. $z = \ln(xyz)$

39. La ecuación de estado de un sistema termodinámico es $F(P, V, T) = 0$, en donde P, V y T son presión, volumen y temperatura, respectivamente. Si la ecuación define a V como función de P y T, y también define a T como función de V y P, aplique sucesivamente los resultados de los Problemas 33 y 34 para demostrar que

$$\frac{\partial V}{\partial T} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial T}}{\frac{\partial F}{\partial V}} = \frac{1}{\frac{\partial T}{\partial V}}.$$

40. Se dice que una función f es **homogénea de grado** n si $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$. Cuando f tiene primeras derivadas parciales, demuestre que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf.$$

* J. D. Van der Waals (1837-1923), físico holandés.

16.7 Derivada direccional

Gradiente de una función

En esta sección y en la siguiente, conviene introducir un nuevo vector basado en la diferenciación parcial. Cuando el **operador diferencial vectorial**

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{o bien } \nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

se aplica a una función diferenciable $z = f(x, y)$, o bien $w = F(x, y, z)$, se dice que los vectores

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} \tag{16.21}$$

$$\nabla F(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\mathbf{k} \tag{16.22}$$

son los **gradientes** de las funciones respectivas. El símbolo ∇, que es una delta griega mayúscula invertida, recibe el nombre de "del" o "nabla". El vector ∇f usualmente se lee "grad f". (También "nabla f", o "del f", desde luego.)

Ejemplo 1

Calcule $\nabla f(x, y)$ para $f(x, y) = 5y - x^3y^2$.

Solución En virtud de (16.21),

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(5y - x^3y^2)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}(5y - x^3y^2)\mathbf{j}$$
$$= -3x^2y^2\mathbf{i} + (5 - 2x^3y)\mathbf{j}.$$

Ejemplo 2

Si $F(x, y, z) = xy^2 + 3x^2 - z^3$, halle $\nabla F(x, y, z)$ en $(2, -1, 4)$.

Solución Por (16.22),

$$\nabla F(x, y, z) = (y^2 + 6x)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} - 3z^2\mathbf{k}$$

y así $\qquad \nabla F(2, -1, 4) = 13\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 48\mathbf{k}.$

Generalización de la derivación parcial

Las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ dan la pendiente de una tangente a la traza, o curva de intersección, de la superficie $z = f(x, y)$ y planos verticales que sean paralelos a los ejes coordenados x y y, respectivamente. De manera equivalente, $\partial z/\partial x$ es la razón de cambio de la función en la dirección del vector $\mathbf{i}$, y $\partial z/\partial y$ es la razón de cambio de $z = f(x, y)$ en la dirección de $\mathbf{j}$. No hay motivo para limitar la atención a sólo dos direcciones;

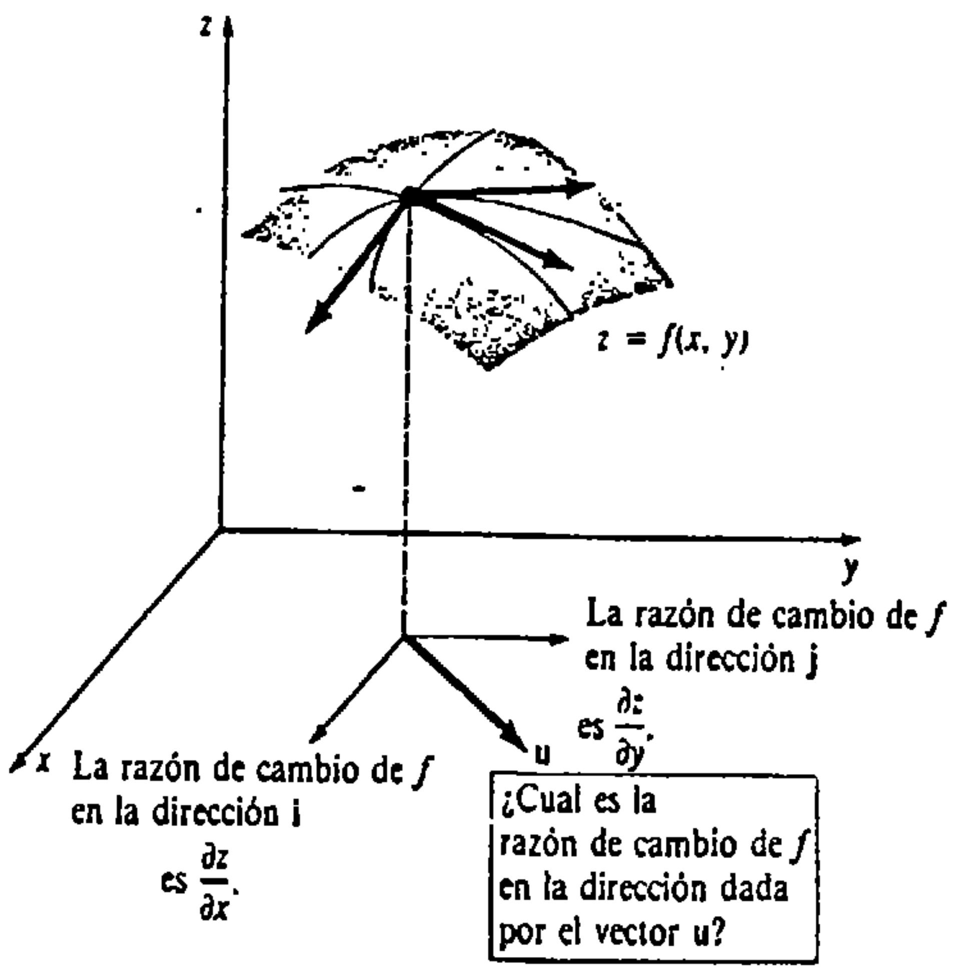


Figura 16.33

es posible encontrar la razón de cambio de una función diferenciable en *cualquier* dirección. Véase la Figura 16.33.

Supóngase que $\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$ es un vector unitario en el plano xy que forma un ángulo θ con el eje x positivo, y que es paralelo al vector $\mathbf{v}$ que va de $(x, y, 0)$ a $(x + \Delta x, y + \Delta y, 0)$. Si $h = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} > 0$, entonces $\mathbf{v} = h\mathbf{u}$. Supóngase además que el plano perpendicular al plano xy que contiene a estos puntos corta a la superficie $z = f(x, y)$ en una curva C. Se pregunta, ¿cuál es la pendiente de la tangente a C en un punto P con coordenadas $(x, y, f(x, y))$ en la dirección dada por $\mathbf{v}$? Véase la Figura 16.34.

En la Figura 16.34 es claro que $\Delta x = h\cos\theta$ y $\Delta y = h\operatorname{sen}\theta$, de modo que la pendiente de la recta secante indicada es

$$\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{h} = \frac{f(x + h\cos\theta, y + h\operatorname{sen}\theta) - f(x, y)}{h} \tag{16.23}$$

Es de esperar que la pendiente de la tangente en P sea el límite de (16.23) cuando $h \to 0$. Tal pendiente es la razón de cambio de f en P en la dirección especificada por el vector unitario $\mathbf{u}$. Esto conduce a la definición siguiente.

DEFINICIÓN 16.7

La **derivada direccional** de $z = f(x, y)$ en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$ es

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x + h\cos\theta, y + h\operatorname{sen}\theta) - f(x, y)}{h} \tag{16.24}$$

siempre que el límite exista. □

Obsérvese que (16.24) es realmente una generalización de (16.2) y (16.3) de la Sección 16.3 ya que:

$$\theta = 0 \text{ implica que } D_{\mathbf{i}}f(x, y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial z}{\partial x},$$

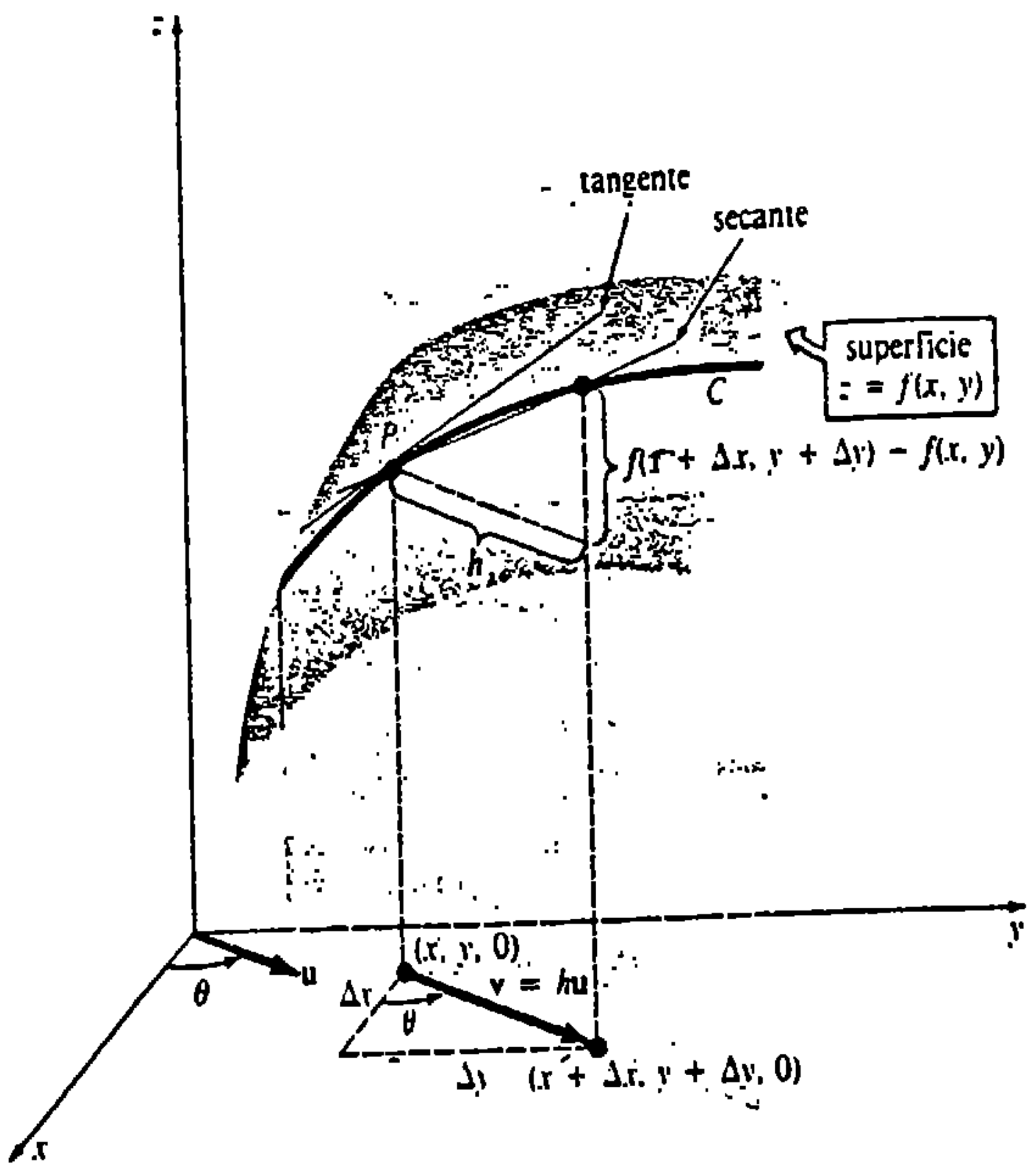


Figura 16.34

y $\theta = \frac{\pi}{2}$ implica que $D_{\mathbf{j}}f(x, y) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Método para calcular la derivada direccional

Aunque podría utilizarse (16.24) para determinar $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ para una función dada, se busca un procedimiento más eficiente, como es usual. El teorema siguiente demuestra cómo el concepto de gradiente de una función juega un papel clave en el cálculo de una derivada direccional.

TEOREMA 16.6

Si $z = f(x, y)$ es una función diferenciable de x y y y $\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$, entonces

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}. \tag{16.25}$$

Demostración Sean x, y y θ fijos, de manera que

$$g(t) = f(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)$$

es una función de una variable. Se desea comparar el valor de $g'(0)$ obtenido por dos métodos diferentes. Primero, por la definición de derivada

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(0 + h) - g(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h\cos\theta, y + h\operatorname{sen}\theta) - f(x, y)}{h} \\ &= D_{\mathbf{u}}f(x, y). \end{aligned} \tag{16.26}$$

En segundo lugar, por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} g'(t) &= f_1(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)\frac{d}{dt}(x + t\cos\theta) \\ &\quad + f_2(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)\frac{d}{dt}(x + t\operatorname{sen}\theta) \\ &= f_1(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)\cos\theta \\ &\quad + f_2(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta. \end{aligned} \tag{16.27}$$

El 1 y el 2 se refieren aquí a las derivadas parciales de $f(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)$ con respecto a $x + t\cos\theta$ y $y + t\operatorname{sen}\theta$, respectivamente. Cuando $t = 0$, obsérvese que $x + t\cos\theta$ y $y + t\operatorname{sen}\theta$ son simplemente x y y, y por lo tanto (16.27) se convierte en

$$g'(0) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\theta. \tag{16.28}$$

Comparando (16.28) con (16.26) resulta luego

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(x, y) &= f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\theta \\ &= [f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}] \cdot (\cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}) \\ &= \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3

Obtener la derivada direccional de $f(x, y) = 2x^2y^3 + 6xy$ en $(1, 1)$ en la dirección de un vector unitario cuyo ángulo con el eje x positivo es $\pi/6$.

Solución Puesto que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy^3 + 6y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 6x^2y^2 + 6x,$$

entonces

$$\nabla f(x, y) = (4xy^3 + 6y)\mathbf{i} + (6x^2y^2 + 6x)\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \nabla f(1, 1) = 10\mathbf{i} + 12\mathbf{j}.$$

Ahora bien, para $\theta = \pi/6$, $\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$ es

$$\mathbf{u} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}.$$

Por lo tanto,

$$D_{\mathbf{u}}f(1, 1) = \nabla f(1, 1) \cdot \mathbf{u} = (10\mathbf{i} + 12\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\right) = 5\sqrt{3} + 6.$$

Ejemplo 4

Considérese el plano que es perpendicular al plano xy y que pasa por los puntos $P(2, 1)$ y $Q(3, 2)$. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de este plano con la superficie $f(x, y) = 4x^2 + y^2$ en $(2, 1, 17)$ en la dirección de Q?

Solución Se desea $D_{\mathbf{u}}f(2, 1)$ en la dirección dada por el vector $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Pero como $\overrightarrow{PQ}$ no es un vector unitario, se forma $\mathbf{u}(1/\sqrt{2})\mathbf{i} + (1/\sqrt{2})\mathbf{j}$. Ahora bien,

$$\nabla f(x, y) = 8x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \nabla f(2, 1) = 16\mathbf{i} + 2\mathbf{j}.$$

Por lo tanto, la pendiente requerida es

$$D_{\mathbf{u}}f(2, 1) = (16\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}\right) = 9\sqrt{2}.$$

Funciones de tres variables

Para una función $w = F(x, y, z)$ la derivada direccional se define mediante

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x + h\cos\alpha, y + h\cos\beta, z + h\cos\gamma) - F(x, y, z)}{h}$$

en donde α, β, y γ son los ángulos directores del vector $\mathbf{u}$ medidos con relación a los ejes x, y, z positivos, respectivamente.* Véase la página 678. Pero de la misma manera que antes, puede demostrarse que

$$D_{\mathbf{u}}F(x, y, z) = \nabla F(x, y, z) \cdot \mathbf{u} \tag{16.29}$$

Observemos que como $\mathbf{u}$ es un vector unitario, en virtud de (14.19) de la Sección 14.3 resulta que

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \text{comp}_{\mathbf{u}}\nabla f(x, y) \quad \text{y} \quad D_{\mathbf{u}}F(x, y, z) = \text{comp}_{\mathbf{u}}\nabla F(x, y, z).$$

Además, (16.29) revela que

$$D_{\mathbf{k}}F(x, y, z) = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Ejemplo 5

Evaluar la derivada direccional de $F(x, y, z) = xy^2 - 4x^2y + z^2$ en $(1, -1, 2)$ en la dirección de $6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

Solución Se tiene que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y^2 - 8xy, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2xy - 4x^2, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z$$

de modo que $\nabla F(x, y, z) = (y^2 - 8xy)\mathbf{i} + (2xy - 4x^2)\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$

$$\nabla F(1, -1, 2) = 9\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

Como

$$|6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}| = 7, \qquad \mathbf{u} = \frac{6}{7}\mathbf{i} + \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{3}{7}\mathbf{k}$$

es un vector unitario en la dirección indicada. Por (16.29),

$$D_{\mathbf{u}}F(1, -1, 2) = (9\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{6}{7}\mathbf{i} + \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{3}{7}\mathbf{k}\right) = \frac{54}{7}.$$

* Nótese que el numerador de (16.24) se puede escribir como

$$f(x + h\cos\alpha, y + h\cos\beta) - f(x, y),$$

donde $\beta = (\pi/2) - \alpha$.

Valor máximo de la derivada direccional

Supóngase que f representa una función de dos o de tres variables. Puesto que (16.25) y (16.29) expresan la derivada direccional como un producto escalar, de la Definición 14.2 resulta que

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f &= |\nabla f||\mathbf{u}|\cos\theta \\ &= |\nabla f|\cos\theta. \qquad (|\mathbf{u}| = 1) \end{aligned}$$

Debido a que $0 \le \theta \le \pi$, se tiene $-1 \le \cos\theta \le 1$ y consecuentemente,

$$-|\nabla f| \le D_{\mathbf{u}}f \le |\nabla f|.$$

En otras palabras,

el valor máximo de la derivada direccional es $|\nabla f|$
y ocurre cuando $\mathbf{u}$ tiene la misma dirección que ∇f (16.30)
(cuando $\cos\theta = 1$),

asimismo

el valor mínimo de la derivada direccional es $-|\nabla f|$
y ocurre cuando $\mathbf{u}$ y ∇f tienen direcciones opuestas (16.31)
(cuando $\cos\theta = -1$).

Ejemplo 6

En el Ejemplo 5 el valor máximo de la derivada direccional de F en $(1, -1, 2)$ es $|\nabla F(1, -1, 2)| = \sqrt{133}$. El valor mínimo de $D_{\mathbf{u}}F(1, -1, 2)$ es entonces $-\sqrt{133}$.

El gradiente apunta en dirección del aumento más rápido de f

Expresado en otra forma, (16.30) y (16.31) dicen:

el vector gradiente ∇f apunta en la dirección en la cual f crece con más rapidez; mientras que $-\nabla f$ apunta en la dirección en que decrece f más rápidamente.

Ejemplo 7

En Los Angeles, California, EUA, se realiza anualmente una carrera ciclista hacia la cima de una colina siguiendo un camino conocido como el más empinado de la ciudad. Para entender por qué un ciclista, con un poco de cordura, zigzagueará en el trayecto, supóngase que la gráfica de $z = f(x, y) = 4 - \frac{2}{3}\sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le 4$, mostrada en la Figura 16.35(a), es un modelo matemático de la colina. El gradiente de f es

$$\nabla f(x, y) = \frac{2}{3}\left[\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{i} + \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{j}\right] = \frac{2/3}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{r},$$

en donde $\mathbf{r} = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ es un vector que apunta hacia el centro de la base circular.

De manera que el ascenso de más pendiente de la colina es un camino recto cuya proyección en el plano xy es un radio de la base circular. Como $D_{\mathbf{u}}f = \text{comp}_{\mathbf{u}}\,\nabla f$, un ciclista zigzagueará, o buscará una dirección $\mathbf{u}$ distinta de la de ∇f, para reducir esta componente

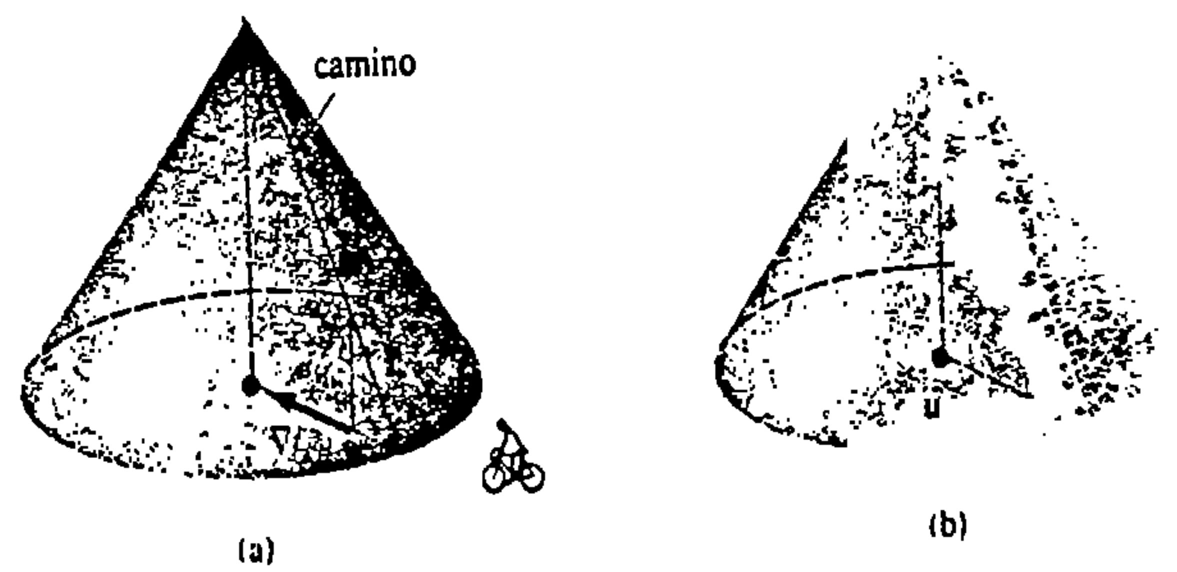


Figura 16.35

Ejemplo 8

La temperatura en una caja rectangular es aproximada por

$$T(x, y, z) = xyz(1 - x)(2 - y)(3 - z), \qquad 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 3.$$

Si un mosquito se localiza en $(\frac{1}{2}, 1, 1)$, ¿en qué dirección debe volar para enfriarse lo más rápidamente posible?

Solución El gradiente de T es

$$\nabla T(x, y, z) = yz(2 - y)(3 - z)(1 - 2x)\mathbf{i} + xz(1 - x)(3 - z)(2 - 2y)\mathbf{j} + xy(1 - x)(2 - y)(3 - 2z)\mathbf{k}.$$

Por lo tanto,

$$\nabla T\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) = \frac{1}{4}\mathbf{k}$$

El mosquito debe volar en la dirección de $-\frac{1}{4}\mathbf{k}$ para que su temperatura disminuya más rápidamente; esto es, debe bajar en picada hacia el piso de la caja, en donde la temperatura es $T(x, y, 0) = 0$.

Ejercicios 16.7

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 999.

En los Problemas 1-4 calcule el gradiente de la función indicada.

1. $f(x, y) = x^2 - x^3y^2 + y^4$
2. $f(x, y) = y - e^{-2x^2y}$
3. $F(x, y, z) = \dfrac{xy^2}{z^3}$

4. $F(x, y, z) = xy \cos yz$

En los Problemas 5-8 encuentre el gradiente de la función dada en el punto indicado.

5. $f(x, y) = x^2 - 4y^2$; $(2, 4)$
6. $f(x, y) = \sqrt{x^3y - y^4}$; $(3, 2)$
7. $F(x, y, z) = x^2z^2\text{sen}\,4y$; $(-2, \pi/3, 1)$
8. $F(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$; $(-4, 3, 5)$

En los Problemas 9 y 10 aplique la definición 16.7 para evaluar $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ dado que $\mathbf{u}$ forma el ángulo indicado con el eje x positivo.

9. $f(x, y) = x^2 + y^2$; $\theta = 30°$
10. $f(x, y) = 3x - y^2$; $\theta = 45°$

En los Problemas 11-20 obtenga la derivada direccional de la función dada en el punto y en la dirección indicados.

11. $f(x, y) = 5x^3y^6$; $(-1, 1)$, $\theta = \pi/6$
12. $f(x, y) = 4x + xy^2 - 5y$; $(3, -1)$, $\theta = \pi/4$
13. $f(x, y) = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$; $(2, -2)$, $\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
14. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x + y}$; $(2, -1)$, $6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$
15. $f(x, y) = (xy + 1)^2$; $(3, 2)$, en dirección hacia $(5, 3)$.
16. $f(x, y) = x^2\tan y$; $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\pi}{3}\right)$, en la dirección negativa del eje x.
17. $F(x, y, z) = x^2y^2(2z + 1)^2$; $(1, -1, 1)$, $\langle 0, 3, 3\rangle$
18. $F(x, y, z) = \dfrac{x^2 - y^2}{z^2}$; $(2, 4, -1)$, $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
19. $F(x, y, z) = \sqrt{x^2y + 2y^2z}$; $(-2, 2, 1)$, en la dirección negativa del eje z.
20. $F(x, y, z) = 2x - y^2 + z^2$; $(4, -4, 2)$, en dirección hacia el origen.

En los Problemas 21 y 22 considere el plano que pasa por los puntos P y Q, y que es perpendicular al plano xy. Evalúe la pendiente de la tangente a la curva de intersección de este plano y la gráfica de la función dada, en el punto indicado y en dirección hacia Q.

21. $f(x, y) = (x - y)^2$; $P(4, 2)$, $Q(0, 1)$; $(4, 2, 4)$
22. $f(x, y) = x^3 - 5xy + y^2$; $P(1, 1)$, $Q(-1, 6)$; $(1, 1, -3)$.

En los Problemas 23-26 encuentre un vector que indique la dirección en la cual la función dada aumenta más rápidamente en el punto indicado. Halle la razón de cambio máxima.

23. $f(x, y) = e^{2x}\text{sen}\,y$; $(0, \pi/4)$
24. $f(x, y) = xye^{x-y}$; $(5, 5)$
25. $F(x, y, z) = x^2 + 4xz + 2yz^2$; $(1, 2, -1)$
26. $F(x, y, z) = xyz$; $(3, 1, -5)$

En los Problemas 27-30 obtenga un vector que indique la dirección en la cual la función dada disminuye más rápidamente en el punto indicado. Encuentre la razón de cambio mínima.

27. $f(x, y) = \tan(x^2 + y^2)$ $(\sqrt{\pi/6}, \sqrt{\pi/6})$
28. $f(x, y) = x^3 - y^3$; $(2, -2)$
29. $F(x, y, z) = \sqrt{xz}e^y$; $(16, 0, 9)$
30. $F(x, y, z) = \ln\dfrac{xy}{z}$; $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{3}\right)$
31. Determine las derivadas direccionales de $f(x, y) = x + y^2$ en $(3, 4)$ en la dirección de un vector tangente a la gráfica de $2x^2 + y^2 = 9$ en $(2, 1)$.
32. Si $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - x$, encuentre todos los puntos en donde $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ sea cero, en la dirección de $\mathbf{u} = (1, \sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j})$.
33. Suponga que $\nabla f(a, b) = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. Encuentre un vector unitario $\mathbf{u}$ de manera que
    (a) $D_{\mathbf{u}}f(a, b) = 0$,
    (b) $D_{\mathbf{u}}f(a, b)$ sea máxima,
    (c) $D_{\mathbf{u}}f(a, b)$ sea mínima.
34. Supóngase que $D_{\mathbf{u}}f(a, b) = 6$. ¿Cuál es el valor de $D_{-\mathbf{u}}f(a, b)$?
35. (a) Si $f(x, y) = x^3 - 3x^2y^2 + y^3$, encuentre la derivada direccional de f en un punto (x, y) en la dirección de $\mathbf{u} = (1/\sqrt{10})(3\mathbf{i} + \mathbf{j})$.
    (b) Si $F(x, y) = D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ de la parte (a), halle $D_{\mathbf{u}}F(x, y)$.
36. Considere el potencial gravitacional

$$U(x, y) = \frac{-Gm}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

en donde G y m son constantes. Demuestre que U aumenta o disminuye más rápidamente a lo largo de una recta que pasa por el origen.

38. Suponga que

$$D_{\mathbf{u}}f(a, b) = 7, \quad D_{\mathbf{v}}f(a, b) = 3,$$

$$\mathbf{u} = \frac{5}{13}\mathbf{i} - \frac{12}{13}\mathbf{j}, \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \frac{5}{13}\mathbf{i} + \frac{12}{13}\mathbf{j}.$$

Evalúe $\nabla f(a, b)$.

39. Considere la placa rectangular mostrada en la Figura 16.36. La temperatura en un punto (x, y) de la placa está dada por $T(x, y) = 5 + 2x^2 + y^2$. Determine la dirección en que un insecto debe ir, partiendo de (4, 2), para que se enfríe lo más rápidamente posible.

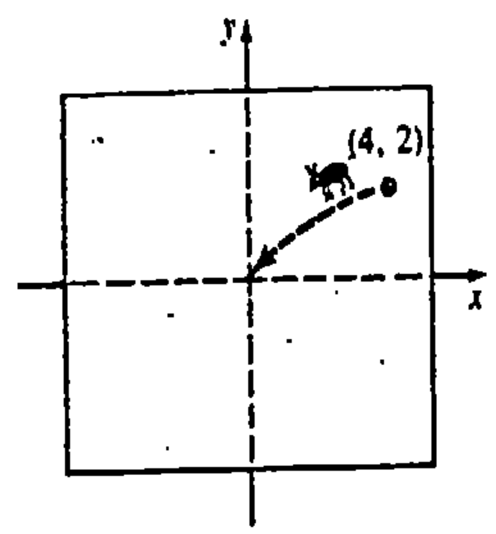


Figura 16.36

40. En el Problema 39, obsérvese que (0, 0) es el punto más frío de la placa. Encuentre la trayectoria que el insecto que busca el frío, ha de tomar hacia el origen, a partir de (4, 2). Si $\langle x(t), y(t)\rangle$ es la ecuación vectorial de la trayectoria, aplique el hecho de que $-\nabla T(x, y) = \langle x'(t), y'(t)\rangle$. ¿Por qué se verifica esto? (*Sugerencia:* Recuerde la separación de variables.)

Problemas diversos

41. Halle una función f tal que

$\nabla f = (3x^2 + y^3 + ye^{xy})\mathbf{i} + (-2y^2 + 3xy^2 + xe^{xy})\mathbf{j}$.

42. Sean f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} continuas, y $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores unitarios. Demuestre que $D_{\mathbf{u}}D_{\mathbf{v}}f = D_{\mathbf{v}}D_{\mathbf{u}}f$.

En los Problemas 43-46 suponga que f y g son funciones diferenciables de dos variables. Demuestre la identidad indicada.

43. $\nabla(cf) = c\,\nabla f$

44. $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$

45. $\nabla(fg) = f\,\nabla g + g\,\nabla f$

46. $\nabla\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g\,\nabla f - f\,\nabla g}{g^2}$

47. Si $F(x, y, z) = f_1(x, y, z)\mathbf{i} + f_2(x, y, z)\mathbf{j} + f_3(x, y, z)\mathbf{k}$ y

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

demuestre que

$$\nabla \times F = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

16.8 Plano tangente

Interpretación geométrica del gradiente-funciones de dos variables

Supóngase que $f(x, y) = c$ es la *curva de nivel* de la función diferenciable $z = f(x, y)$ que pasa por un punto especificado $P(x_0, y_0)$; esto es, $f(x_0, y_0) = c$. Si dicha curva de nivel es parametrizada por las funciones diferenciables

$$x = g(t),\ y = h(t) \quad \text{tales que} \quad x_0 = g(t_0),\ y_0 = h(t_0),$$

entonces la derivada de $f(g(t), h(t)) = c$ con respecto a t es

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0. \tag{16.32}$$

Introduciendo

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}'(t) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j}$$

(16.32) se convierte en $\nabla f \cdot \mathbf{r}' = 0$. Para $t = t_0$ específicamente,

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0. \tag{16.33}$$

De manera que, si $\mathbf{r}'(t_0) \neq 0$, el vector $\nabla f(x_0, y_0)$ es ortogonal al vector tangente $\mathbf{r}'(t_0)$ en $P(x_0, y_0)$. Se interpreta que esto significa que

∇f es perpendicular a la curva de nivel en P.

Véase la Figura 16.37.

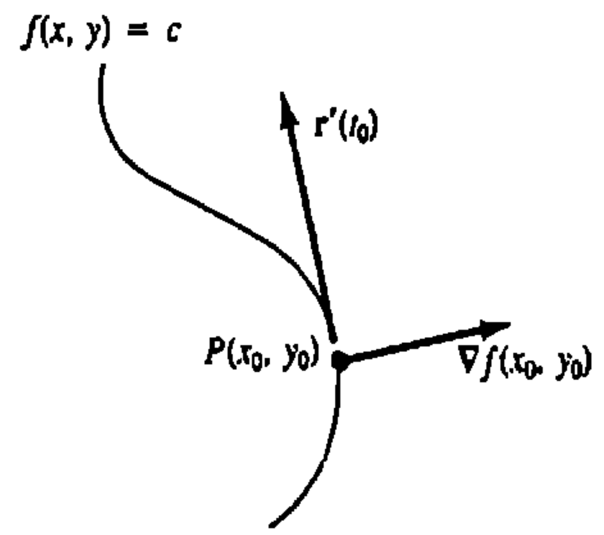


Figura 16.37

Ejemplo 1

Encuentre la curva de nivel de $f(x, y) = -x^2 + y^2$ que pasa por (2, 3). Trace el gradiente en el punto.

Solución Como $f(2, 3) = -4 + 9 = 5$, la curva de nivel es la hipérbola $-x^2 + y^2 = 5$. Ahora bien,

$$\nabla f(x, y) = -2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \nabla f(2, 3) = -4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}.$$

La Figura 16.38 muestra la curva de nivel y $\nabla f(2, 3)$.

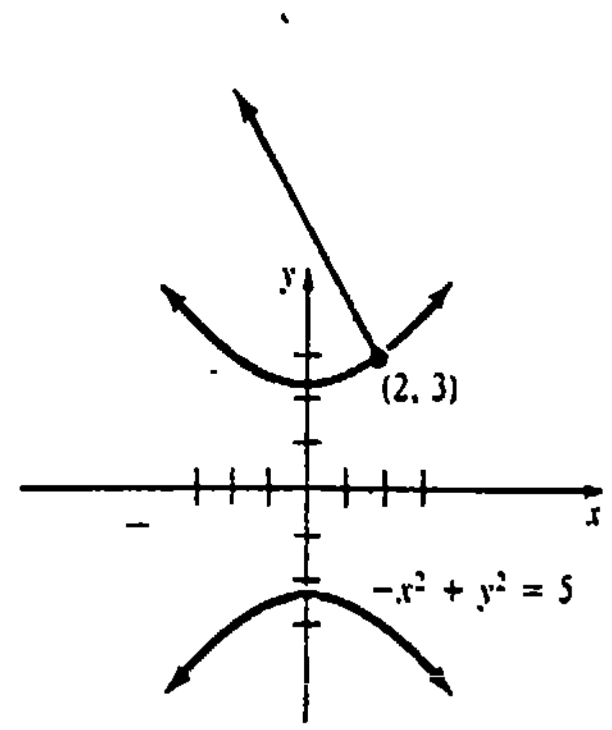


Figura 16.38

Interpretación geométrica del gradiente-funciones de tres variables

Procediendo como antes, sea $F(x, y, z) = c$ la *superficie de nivel* de una función diferenciable $w = F(x, y, z)$ que pasa por $P(x_0, y_0, z_0)$. Si las funciones diferenciables

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t)$$

son las ecuaciones paramétricas de una curva C *sobre* la superficie para la cual $x_0 = f(t_0)$, $y_0 = g(t_0)$, $z_0 = h(t_0)$, entonces la derivada de $F(f(t), g(t), h(t)) = 0$ implica que

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

o bien

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}\right) = 0. \qquad (16.34)$$

Para $t = t_0$ en particular (16.34) es

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0. \qquad (16.35)$$

De esta manera, cuando $\mathbf{r}'(t_0) \neq 0$, el vector $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es ortogonal al vector tangente $\mathbf{r}'(t_0)$. Puesto que este argumento es válido para cualquier curva diferenciable que pase por $P(x_0, y_0, z_0)$ sobre la superficie, concluimos que

∇F es perpendicular (normal) a la superficie de nivel en P.

Véase la Figura 16.39.

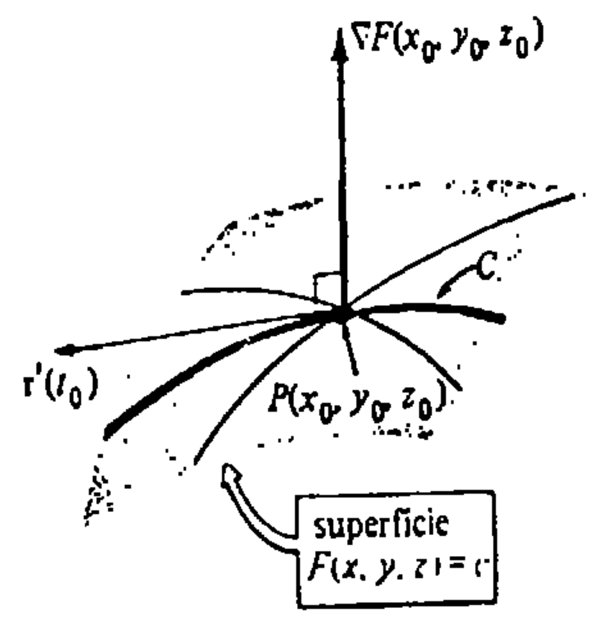


Figura 16.39

Ejemplo 2

Supóngase que $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ es la superficie de nivel de $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ que pasa por el punto $P(1, 1, 1)$. Entonces, $\nabla F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ y $\nabla F(1, 1, 1) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ es normal a la superficie en P, como se muestra en la Figura 16.40.

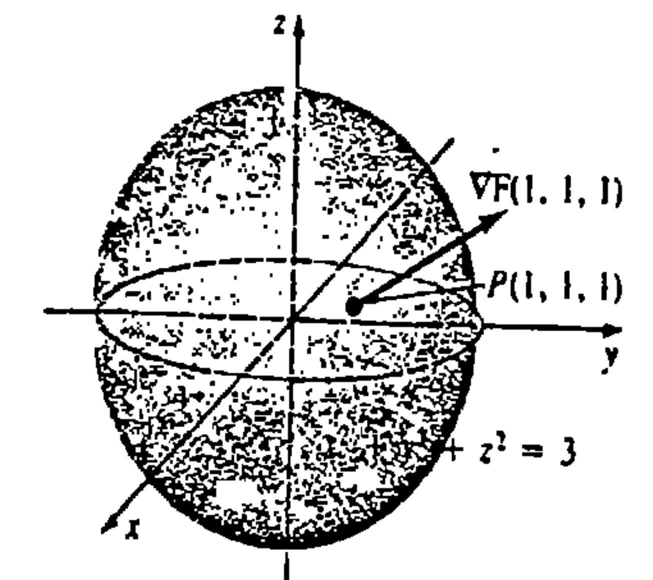


Figura 16.40

Plano tangente

En los primeros capítulos de este libro se examinaron ecuaciones de rectas tangentes a gráficas de funciones. En el espacio tridimensional podemos resolver ahora problemas análogos de encontrar ecuaciones de planos tangentes a superficies. Si $F(x, y, z) = c$ es la ecuación de una superficie, se define el plano tangente en $P(x_0, y_0, z_0)$ como el plano que pasa por P con vector normal $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ siempre que este gradiente no sea cero. De modo que si (x, y, z) y (x_0, y_0, z_0) son puntos del plano tangente, y $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}_0$ son sus respectivos vectores de posición, una ecuación vectorial del plano tangente es

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

o bien

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \qquad (16.36)$$

Véase la Figura 16.41.

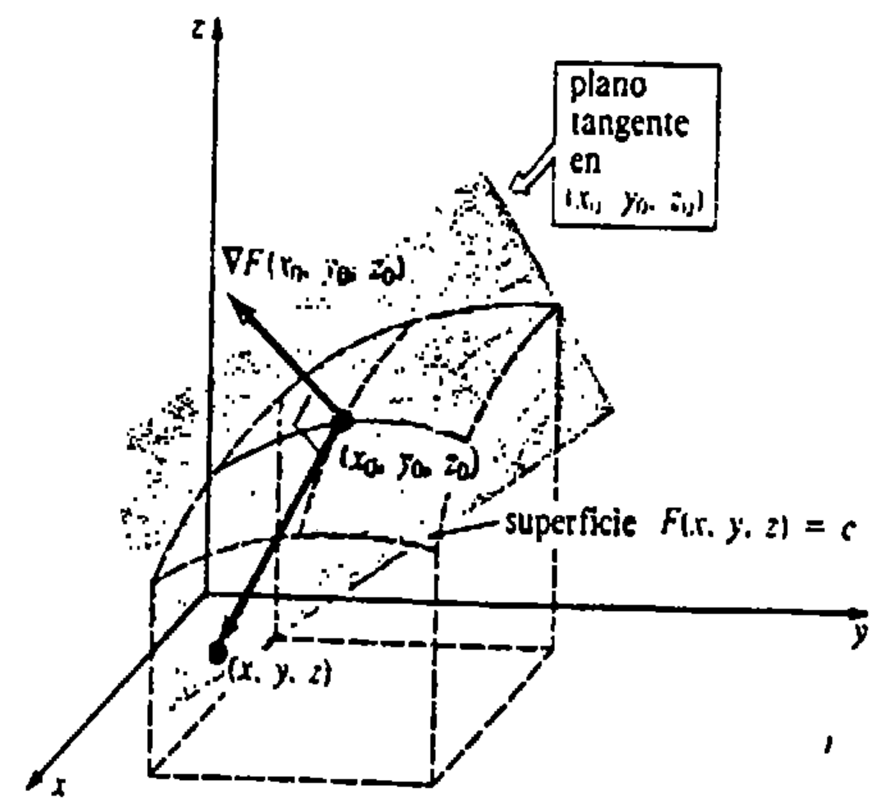


Figura 16.41

Ejemplo 3

Halle una ecuación del plano tangente a la gráfica de $x^2 - 4y^2 + z^2 = 16$ en $(2, 1, 4)$.

Solución Definiendo $F(x, y, z) = x^2 - 4y^2 + z^2$, la superficie dada es la superficie de nivel $F(x, y, z) = F(2, 1, 4) = 16$ que pasa por $(2, 1, 4)$. Entonces,

$$\nabla F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} - 8y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \nabla F(2, 1, 4) = 4\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 8\mathbf{k}.$$

En virtud de (16.36) resulta que una ecuación del plano tangente es

$$4(x - 2) - 8(y - 1) + 8(z - 4) = 0 \quad \text{o bien} \quad x - 2y + 2z = 8.$$

Superficies dadas por $z = f(x, y)$

Para una superficie dada explícitamente por $z = f(x, y)$, definimos $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, o bien $F(x, y, z) = z - f(x, y)$. De manera que un punto (x_0, y_0, z_0) está en la gráfica de $z = f(x, y)$ si y sólo si está también en la superficie de nivel $F(x, y, z) = 0$. Esto resulta de que $F(x_0, y_0, z_0) = f(x_0, y_0) - z_0 = 0$.

Ejemplo 4

Obtener una ecuación del plano tangente a la gráfica de $z = 4x + y^2$ en $(-1, 3, 5)$.

Solución Defínase $F(x, y, z) = 4x + y^2 - z$ de manera que la superficie de nivel de F que pasa por los puntos dados es $F(x, y, z) = F(-1, 3, 5)$ o sea $F(x, y, z) = 0$. Entonces,

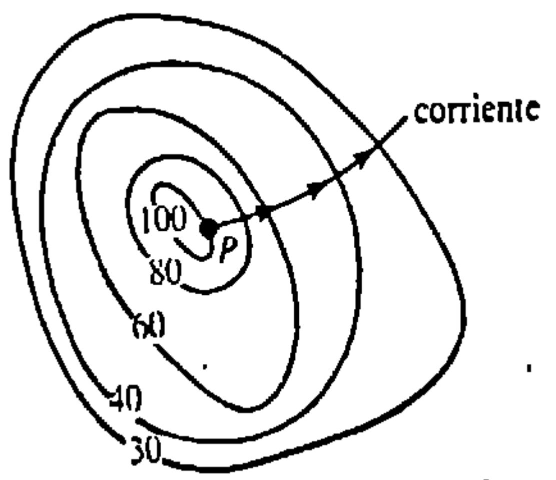
$$\nabla F(x, y, z) = 4\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \nabla F(-1, 3, 5) = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Así, en virtud de (16.36) la ecuación deseada es

$$4(x + 1) + 6(y - 3) - (z - 5) = 0 \quad \text{o} \quad 4x + 6y - z = 9.$$

Observación

El agua que escurre por una colina sigue una trayectoria que va en la dirección del máxi-
mo cambio de la altitud. La Figura 16.42 muestra los contornos, o curvas, de nivel de
una colina. Una corriente que empiece en el punto P tomará una trayectoria perpendicu-
lar a las líneas de nivel. Después de haber leído las Secciones 16.7 y 16.8 el lector debe poder explicar por qué.



contornos de nivel de una colina

Figura 16.42

Ejercicios 16.8

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 999.

En los Problemas 1-12 trace la curva o superficie de nivel que pase por el punto indicado. Dibuje un croquis del gradiente en el punto.

1. $f(x, y) = x - 2y$; $(6, 1)$
2. $f(x, y) = \dfrac{y + 2x}{x}$; $(1, 3)$
3. $f(x, y) = y - x^2$; $(2, 5)$
4. $f(x, y) = x^2 + y^2$; $(-1, 3)$
5. $f(x, y) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$; $(-2, -3)$
6. $f(x, y) = \dfrac{y^2}{x}$; $(2, 2)$
7. $f(x, y) = (x - 1)^2 - y^2$; $(1, 1)$
8. $f(x, y) = \dfrac{y - 1}{\operatorname{sen} x}$; $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{3}{2}\right)$
9. $F(x, y, z) = y + z$; $(3, 1, 1)$
10. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$; $(1, 1, 3)$
11. $F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $(3, 4, 0)$
12. $F(x, y, z) = x^2 - y^2 + z$; $(0, -1, 1)$

En los Problemas 13 y 14 halle los puntos de la superficie dada en los que el gradiente sea paralelo al vector indicado.

13. $z = x^2 + y^2$; $4\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$
14. $x^3 + y^2 + z = 15$; $27\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + \mathbf{k}$

En los Problemas 15-24 obtenga una ecuación del plano tangente a la gráfica de la ecuación dada en el punto dado.

15. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; $(-2, 2, 1)$
16. $5x^2 - y^2 + 4z^2 = 8$; $(2, 4, 1)$
17. $x^2 - y^2 - 3z^2 = 5$; $(6, 2, 3)$
18. $xy + yz + zx = 7$; $(1, -3, -5)$
19. $z = 25 - x^2 - y^2$; $(3, -4, 0)$
20. $xz = 6$; $(2, 0, 3)$
21. $z = \cos(2x + y)$; $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$
22. $x^2y^3 + 6z = 10$; $(2, 1, 1)$
23. $z = \ln(x^2 + y^2)$; $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$
24. $z = 8e^{-2y}\operatorname{sen} 4x$; $\left(\dfrac{\pi}{24}, 0, 4\right)$

En los Problemas 25 y 26 encuentre los puntos de la superficie dada en los que el plano tangente sea paralelo al plano indicado.

25. $x^2 + y^2 + z^2 = 7$; $2x + 4y + 6z = 1$
26. $x^2 - 2y^2 - 3z^2 = 33$; $8x + 4y + 6z = 5$
27. Halle puntos de la superficie $x^2 + 4x + y^2 + z^2 - 2z = 11$ en los cuales el plano tangente sea horizontal.
28. Determine puntos de la superficie $x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy = 16$ en los cuales el plano tangente sea paralelo (a) al plano xz, (b) al plano yz, y (c) al plano xy.

Problemas diversos

En los Problemas 29 y 30 demuestre que la segunda ecuación es una del plano tangente a la gráfica de la primera ecuación, en (x_0, y_0, z_0).

29. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$; $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} + \dfrac{zz_0}{c^2} = 1$
30. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$; $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} + \dfrac{zz_0}{c^2} = 1$
31. Demuestre que todo plano tangente a la gráfica de $z^2 = x^2 + y^2$ pasa por el origen.
32. Demuestre que la suma de las intercepciones x, y y z de todo plano tangente a la gráfica de $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = a$ es el número a.

La recta perpendicular al plano tangente a una superficie en un punto P se dice que es una **recta normal** en P. En los Problemas 33 y 34, obtenga ecuaciones paramétricas de la recta normal en el punto indicado. En los Problemas 35 y 36, halle ecuaciones simétricas de la recta normal.

33. $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$; $(1, -1, 1)$
34. $z = 2x^2 - 4y^2$; $(3, -2, 2)$
35. $z = 4x^2 + 9y^2 + 1$; $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, 3\right)$

36. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$; $(3, 4, 5)$

37. Demuestre que toda recta normal a la gráfica de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ pasa por el origen.

38. Se dice que dos superficies son **ortogonales** en un punto P de intersección, si son ortogonales sus rectas normales en P. Demuestre que las superficies dadas por $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$ son ortogonales en P si y sólo si $F_xG_x + F_yG_y + F_zG_z = 0$.

En los Problemas 39 y 40 aplique el resultado del Problema 38 para demostrar que las superficies indicadas son ortogonales en sus puntos de intersección.

39. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$; $-x^2 + y^2 + z^2 = 0$

40. $x^2 - y^2 + z^2 = 4$; $z = 1/xy^2$

16.9 Extremos de funciones de dos variables

Si $z = f(x, y)$ es continua en una región rectangular cerrada R cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados x, y, entonces, de manera análoga al Teorema 4.1, f tiene un **máximo absoluto** y un **mínimo absoluto** en la región. Esto es, existen puntos (c, d) y (a, b) en R de modo que

$$f(c, d) \le f(x, y) \le f(a, b)$$

para todo punto (x, y) de R. Desde luego, f puede tener también **extremos relativos** (o **locales**) en R. Supóngase por vía de ilustración que (a, b) es un punto interior de R en el que f tiene un máximo, y consideremos además que f tiene primeras y segundas derivadas parciales. Como se ve en la Figura 16.43, en la curva C_1 de intersección de la superficie y el plano $x = a$, se debe tener

$$f_y(a, b) = 0 \quad \text{y} \quad f_{yy}(a, b) \le 0.*$$

De manera semejante, en la curva C_2, que es la traza de la superficie en el plano $y = b$, tenemos

$$f_x(a, b) = 0 \quad \text{y} \quad f_{xx}(a, b) \le 0.$$

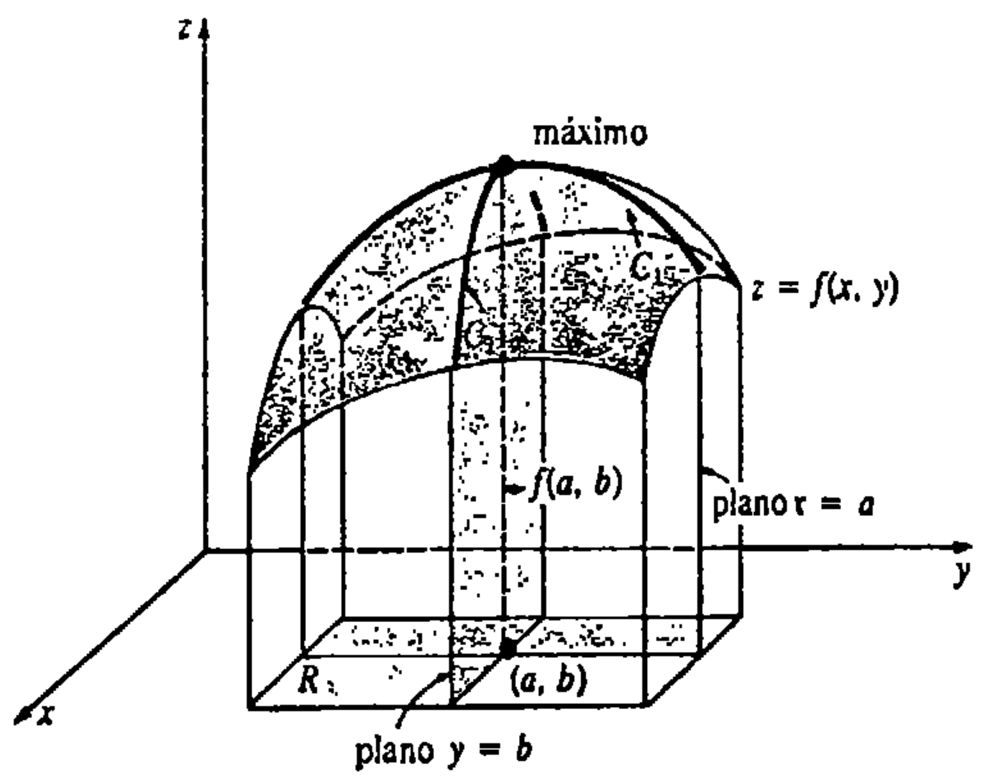


Figura 16.43

* ¿Recuerda usted la relación entre concavidad y la segunda derivada?

Por contraste, si $z = f(x, y)$ tiene un mínimo en (a, b), es de esperar que

$$f_x(a, b) = 0, \quad f_y(a, b) = 0 \quad \text{y} \quad f_{xx}(a, b) \ge 0, \quad f_{yy}(a, b) \ge 0.$$

Puntos críticos

El análisis precedente sugiere que para encontrar un extremo de $z = f(x, y)$, deben resolverse $f_x(x, y) = 0$ y $f_y(x, y) = 0$ *simultáneamente*.* Esto conduce a la definición siguiente de punto crítico.

DEFINICIÓN 16.8

Si $z = f(x, y)$ tiene primeras derivadas parciales, entonces las soluciones de

$$f_x(x, y) = 0 \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = 0$$

se llaman **puntos críticos**. □

Los puntos críticos corresponden a puntos en donde f podría *posiblemente* tener un extremo relativo. En algunos textos los puntos críticos se llaman también **puntos estacionarios**.

Ejemplo 1

Hallar todos los puntos críticos de $f(x, y) = x^3 + y^3 - 27x - 12y$.

Solución Las primeras derivadas parciales son

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 27 \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = 3y^2 - 12.$$

Por lo tanto, $f_x(x, y) = 0$ y $f_y(x, y) = 0$ implican que

$$x^2 = 9 \quad \text{y} \quad y^2 = 4$$

y entonces $x = \pm 3$, $y = \pm 2$. De manera que; hay cuatro puntos críticos $(3, 2)$, $(-3, 2)$, $(3, -2)$ y $(-3, -2)$.

Criterio de las segundas derivadas parciales

El teorema siguiente proporciona condiciones suficientes para comprobar extremos relativos. No se dará la demostración del teorema.

TEOREMA 16.7

Criterio de las segundas derivadas parciales para extremos relativos

Sea (a, b) un punto crítico de $z = f(x, y)$ y supóngase que f_{xx}, f_{yy} y f_{xy} son continuas en una región rectangular que contiene a (a, b). Sea $D(x, y) = f_{xx}(x, y)\,f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2$.

* En forma alternativa, la ecuación de un plano tangente a la gráfica de $z = f(x, y)$ en cualquier punto (a, b) es

$$z - f(a, b) = (x - a)f_x(a, b) + (y - b)f_y(a, b).$$

Razonando como en el caso de las rectas tangentes, se buscarán los planos tangentes horizontales. En un punto (a, b) donde el plano tangente es horizontal, su ecuación debe ser $z = f(a, b)$, y entonces $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$.

(*i*) Si $D(a, b) > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces $f(a, b)$ es un mínimo relativo.

(*ii*) Si $D(a, b) > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces $f(a, b)$ es un máximo relativo.

(*iii*) Si $D(a, b) < 0$, entonces $f(a, b)$ no es un extremo.

(*iv*) Si $D(a, b) = 0$, no se puede deducir ninguna conclusión con respecto a extremos relativos. □

Ejemplo 2

Determinar los extremos de $f(x, y) = 4x^2 + 2y^2 - 2xy - 10y - 2x$.

Solución Las primeras derivadas parciales son

$$f_x(x, y) = 8x - 2y - 2 \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = 4y - 2x - 10.$$

Resolviendo las ecuaciones simultáneas

$$8x - 2y = 2 \quad \text{y} \quad -2x + 4y = 10$$

resulta el único punto crítico (1, 3). Ahora bien,

$$f_{xx}(x, y) = 8, \quad f_{yy}(x, y) = 4, \quad f_{xy}(x, y) = -2$$

y así $D(x, y) = (8)(4) - (-2)^2 = 28$. Puesto que $D(1, 3) > 0$ y $f_{xx}(1, 3) > 0$, por (*i*) del Teorema 16.7 se deduce que $f(1, 3) = -16$ es un mínimo relativo.

Punto de silla

En el caso (*iii*) del Teorema 16.7, el punto crítico (a, b) se llama **punto de silla** (de montar).

Ejemplo 3

Determine los extremos de $f(x, y) = 6xy - x^2 - y^2 + 10$.

Solución De $f_x(x, y) = 6y - 2x$ y $f_y(x, y) = 6x - 2y$, resulta que la solución de

$$6y - 2x = 0 \quad \text{y} \quad 6x - 2y = 0$$

es (0, 0). Ahora bien, $f_{xx}(x, y) = -2$, $f_{yy}(x, y) = -2$ y $f_{xy}(x, y) = 6$. Las ecuaciones

$$f_{xx}(0, 0) = -2 \quad \text{y} \quad f_{yy}(0, 0) = -2$$

parecerían implicar por sí mismas que $f(0, 0) = 10$ es un máximo relativo. Sin embargo, $D(0, 0) = (-2)(-2) - 6^2 < 0$ indica que $f(0, 0)$ no es un valor extremo y que (0, 0) es un punto de silla. Obsérvese que a lo largo de $y = x$, $f(x, y) = 4x^2 + 10 \geq 10$ en la vecindad de (0, 0).

Ejemplo 4

Obtener los extremos de $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 9x$.

Solución De

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x - 3)(x + 1)$$

y

$$f_y(x, y) = 3y^2 - 6y = 3y(y - 2)$$

y las ecuaciones

$$(x - 3)(x + 1) = 0 \quad \text{y} \quad y(y - 2) = 0,$$

se hallan cuatro puntos críticos (3, 0), (3, 2), (−1, 0), (−1, 2). Puesto que

$$f_{xx} = 6x - 6, \quad f_{yy} = 6y - 6, \quad \text{y} \quad f_{xy} = 0,$$

obtenemos $D(x, y) = 36(x - 1)(y - 1)$. El criterio de las segundas derivadas parciales se resume en la tabla adjunta.

Punto crítico (a, b)	$D(a, b)$	$f_{xx}(a, b)$	$f(a, b)$	*Conclusión*
(3, 0)	negativo	positivo	−27	no es extremo
(3, 2)	positivo	positivo	−31	mín. rel.
(−1, 0)	positivo	negativo	5	máx. rel.
(−1, 2)	negativo	negativo	1	no es extremo

Observaciones

(*i*) Se podría haber notado una ligera diferencia entre la definición de punto crítico y la de valor crítico. Recuérdese que un número c en el dominio de $y = f(x)$ es un valor crítico si $f'(c) = 0$, o bien $f'(c)$ no existe. De manera semejante, $z = f(x, y)$ puede tener un extremo en un punto (a, b), en donde f_x y f_y no existan, pero el Teorema 16.7 ciertamente no es aplicable en dicho punto. Véanse los Problemas 34 y 35 de los Ejercicios 16.9. Para funciones de dos variables, no hay un criterio de primeras derivadas parciales conveniente al cual recurrir.

(*ii*) El nombre de "punto de silla" para un punto crítico (a, b) para el cual $D(a, b) < 0$, proviene del hecho de que en una vecindad de tal punto, la superficie se comporta esencialmente como el paraboloide hiperbólico, que tiene la forma de una silla de montar. Véase la Figura 16.44.

(*iii*) El método de solución del sistema $f_x(x, y) = 0, f_y(x, y) = 0$ no siempre será obvio especialmente cuando f_x y f_y no son lineales. En los problemas que siguen no tema ejercitar sus habilidades algebraicas.

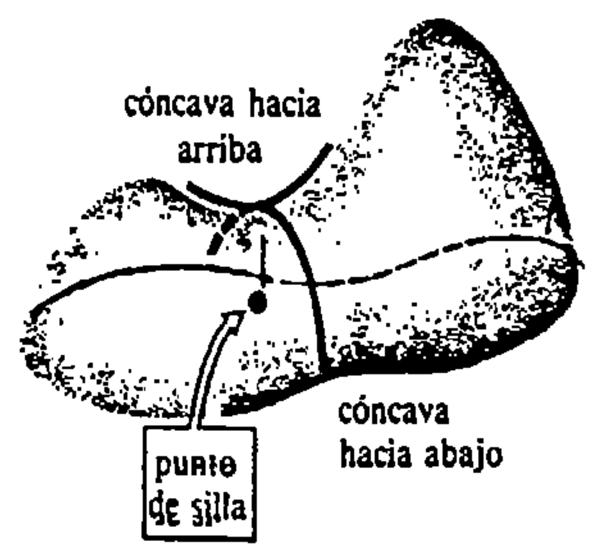


Figura 16.44

Ejercicios 16.9

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 999.

En los Problemas 1-20 halle todos los extremos relativos de la función indicada.

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 5$
2. $f(x, y) = 4x^2 + 8y^2$
3. $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 8x + 6y$
4. $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 6x + 8y$
5. $f(x, y) = 5x^2 + 5y^2 + 20x - 10y + 40$
6. $f(x, y) = -4x^2 - 2y^2 - 8x + 12y + 5$
7. $f(x, y) = 4x^3 + y^3 - 12x - 3y$
8. $f(x, y) = -x^3 + 2y^3 + 27x - 24y + 3$
9. $f(x, y) = 2x^2 + 4y^2 - 2xy - 10x - 2y + 2$
10. $f(x, y) = 5x^2 + 5y^2 + 5xy - 10x - 5y + 18$
11. $f(x, y) = (2x - 5)(y - 4)$
12. $f(x, y) = (x + 5)(2y + 6)$
13. $f(x, y) = -2x^3 - 2y^3 + 6xy + 10$
14. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy + 27$
15. $f(x, y) = xy - \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{y} + 8$
16. $f(x, y) = -3x^2y - 3xy^2 + 36xy$
17. $f(x, y) = xe^x \operatorname{sen} y$
18. $f(x, y) = e^{y^2 - 3y + x^2 + 4x}$
19. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$
20. $f(x, y) = \operatorname{sen} xy$

21. Determine tres números positivos cuya suma sea 21, de modo que su producto P sea máximo. (*Sugerencia:* Exprese P en función de dos variables solamente.)

22. Encuentre las dimensiones de una caja rectangular con volumen de un pie cúbico que tenga un área de superficie S mínima.

23. Determine el punto del plano $x + 2y + z = 1$ más cercano al origen. (*Sugerencia:* considere el cuadrado de la distancia.)

24. Halle la distancia mínima entre el punto (2, 3, 1) y el plano $x + y + z = 1$.

25. Encuentre todos los puntos de la superficie $xyz = 8$ que estén más cercanos al origen. Obtenga la distancia mínima.

26. Encuentre la distancia más corta entre las rectas

$$\mathscr{L}_1: x = t,\ y = 4 - 2t,\ z = 1 + t$$
$$\mathscr{L}_2: x = 3 + 2s,\ y = 6 + 2s,\ z = 8 - 2s.$$

¿En qué puntos de las rectas ocurre el mínimo?

27. Calcule el volumen máximo de una caja rectangular con lados paralelos a los planos coordenados y que pueda inscribirse en el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0,$$

28. El volumen de un elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0.$$

es $V = 4\pi abc/3$. Demuestre que el elipsoide de máximo volumen que satisface $a + b + c =$ constante, es una esfera.

29. Se va a construir una caja rectangular cerrada de manera que su volumen sea de 60 pie³. Los costos del material de la tapa y de la base son de 10 y de 20 centavos (de dólar) por pie cuadrado, respectivamente. El costo de los lados es de 2 centavos por pie cuadrado. Determine la función de costo $C(x, y)$, en donde x y y son la longitud y la anchura de la caja, respectivamente. Evalúe las dimensiones de la caja que darán el costo mínimo.

30. Una función de ingreso es $R(x, y) = x(100 - 6x) + y(192 - 4y)$, en donde x, y denotan el número de artículos vendidos de dos productos. Dado que la función de costo correspondiente es

$$C(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 4xy - 8x + 20,$$

determine la utilidad máxima. (*Sugerencia:* utilidad = ingreso − costo.)

31. En estadística se desea con frecuencia ajustar una curva aproximativa a un conjunto de puntos datos (x_i, y_i), en donde $i = 1, \ldots, n$. Una medida de la "bondad del ajuste" es la suma S de los cuadrados de las distancias entre las ordenadas de la curva aproximativa y las ordenadas de los puntos datos. para una función lineal aproximativa $y = ax + b$, llamada recta de regresión, se tiene que

$$S = \sum_{i=1}^{n} [(ax_i + b) - y_i]^2.$$

Véase la Figura 16.45. Se desea, desde luego, que S sea mínima. Demuestre que $\partial S/\partial a = 0$ y $\partial S/\partial b = 0$ cuando

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

y

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

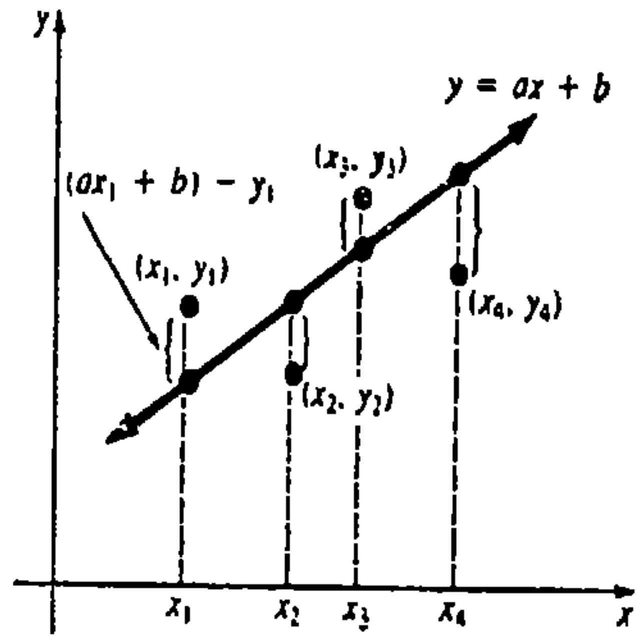


Figura 16.45

32. Una pieza de hojalata de 24 plg de ancho se dobla para formar un abrevadero cuya sección transversal es un trapecio isósceles. Véase la Figura 16.44. Calcule x y θ de manera que el área de la sección transversal sea máxima. ¿Cuál es el valor de tal área máxima?

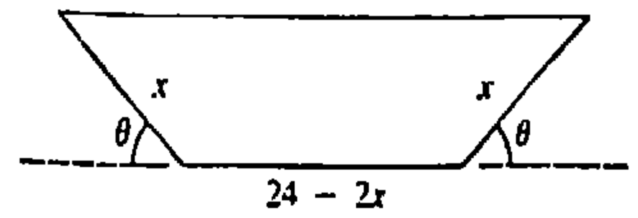


Figura 16.46

33. El pentágono mostrado en la Figura 16.47 formado por un triángulo isósceles que corona a un rectángulo, tiene un perímetro fijo P. Encuentre x, y, y θ de manera que el área del pentágono sea máxima.

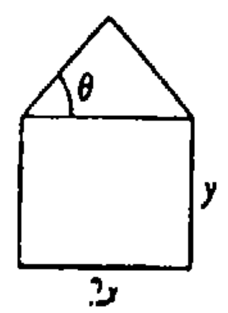


Figura 16.47

Problemas diversos

En los Problemas 34-37 demuestre que la función indicada tiene un extremo absoluto pero que el Teorema 16.7 no es aplicable.

34. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
35. $f(x, y) = 16 - x^{2/3} - y^{2/3}$
36. $f(x, y) = 1 - x^4y^2$
37. $f(x, y) = 5x^2 + y^4 - 8$

Una función f continua en un conjunto cerrado acotado S tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto en S. En los Problemas 38-41 halle los extremos absolutos de la función indicada en el conjunto de puntos definido por $x^2 + y^2 \le 1$. (*Sugerencia:* Examine la función en el interior y en la frontera de S. Parametrice dicha frontera.)

38. $f(x, y) = -x^2 - 3y^2 + 4y + 1$
39. $f(x, y) = x + \sqrt{3}y$
40. $f(x, y) = xy$
41. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$

(O) 16.10 Multiplicadores de Lagrange

En los Problemas 21-28 de los Ejercicios 16.9, se pidió determinar el máximo o el mínimo de una función sujeta a una condición adicional o **restricción**. Tal condición se utilizó para eliminar una de las variables de la función de modo que fuera aplicable el criterio de las segundas derivadas parciales. En el presente estudio se examina otro procedimiento para determinar los llamados *extremos con restricciones*, de una función.

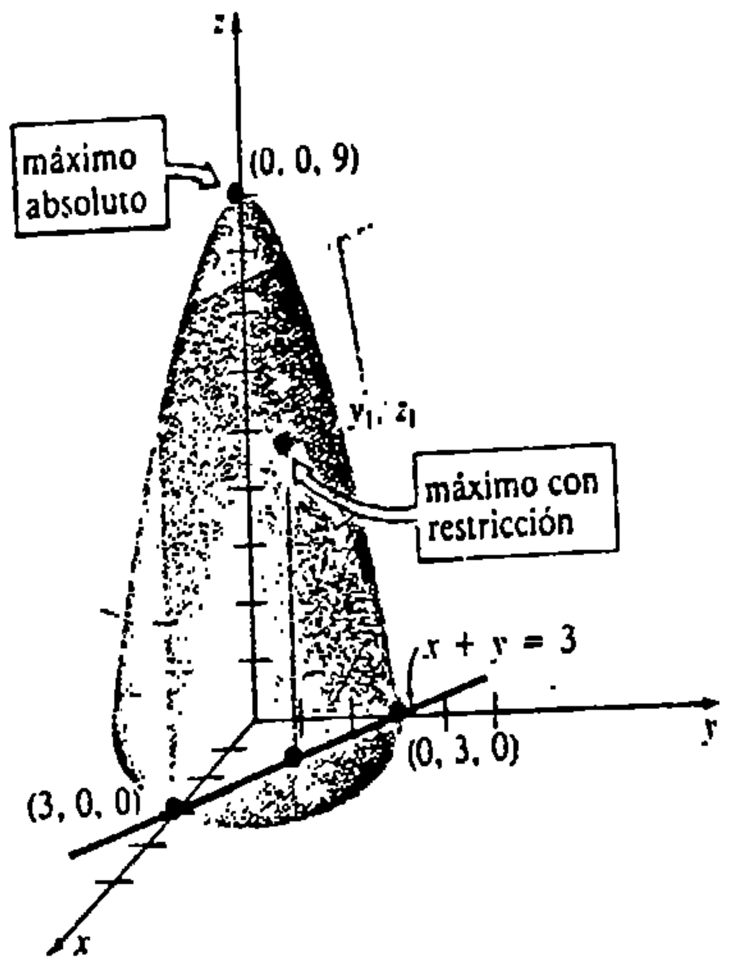
Ejemplo 1

Determinar geométricamente si $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$, sujeta a $x + y = 3$, tiene un extremo.

Solución La gráfica de $x + y = 3$ es un plano que corta al paraboloide dado por $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$, como se ve en la Figura 16.48(b). De la figura es evidente que la función tiene un *máximo con restricción* para ciertos x_1 y y_1 que satisfacen $0 < x_1 < 3$, $0 < y_1 < 3$ y $x_1 + y_1 = 3$. La tabla adjunta parece indicar también que este nuevo máximo es $f(1.5, 1.5) = 4.5$. Obsérvese que no pueden emplearse números como $x = 1.7$ y $y = 2.4$, ya que estos valores no satisfacen la restricción $x + y = 3$.

x	y	$f(x, y)$
0.5	2.5	2.5
1	2	4
1.25	1.75	4.375
1.5	1.5	4.5
1.75	1.25	4.375
2	1	4
2.5	0.5	2.5

(a)



(b)

Figura 16.48

Es posible analizar el Ejemplo 1 en forma alternativa por medio de curvas de nivel. A las curvas de nivel $9 - x^2 - y^2 = c$, para c creciente, corresponden valores también crecientes de f, como se muestra en la Figura 16.49. El valor máximo de f (o sea, c) sujeta

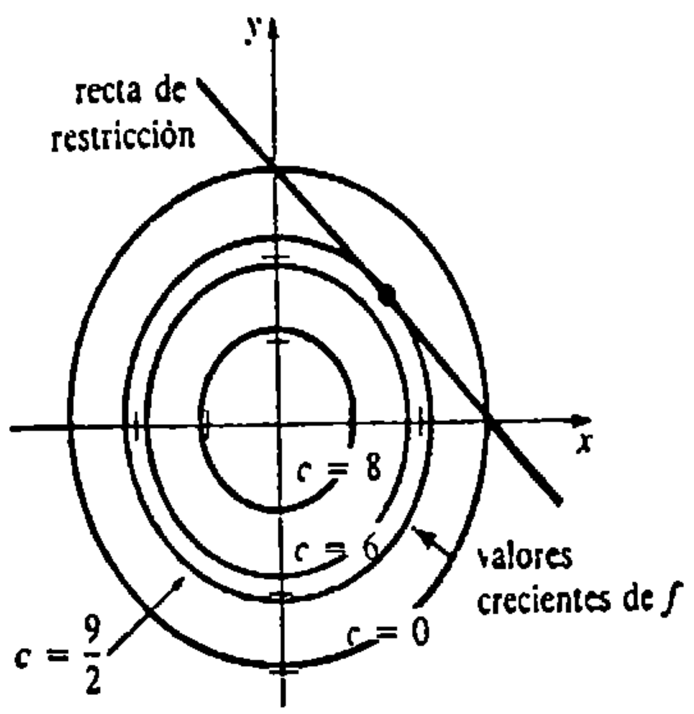


Figura 16.49

a la restricción, ocurre donde la curva de nivel $c = \frac{9}{2}$ corta, o más precisamente, es tangente, a la recta $x + y = 3$. Resolviendo simultáneamente $x^2 + y^2 = \frac{9}{2}$ y $x + y = 3$, se tiene que el punto de tangencia es $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$.

Método de los multiplicadores de Lagrange

Para generalizar el estudio precedente, supóngase que deseamos encontrar extremos de la función $z = f(x, y)$ sujeta a una restricción dada por $g(x, y) = 0$. Por la Figura 16.50 parece razonable esperar que para encontrar, por ejemplo, un máximo de f con restricción, necesitamos solamente encontrar la curva de nivel más alto $f(x, y) = c$ que sea tangente a la gráfica de la ecuación restrictiva $g(x, y) = 0$. Ahora bien, recordemos que ∇f y ∇g son perpendiculares a las curvas $f(x, y) = c$ y $g(x, y) = 0$, respectivamente. Por lo tanto, si $\nabla g \neq \mathbf{0}$ en un punto P de tangencia de las curvas, entonces ∇f y ∇g son paralelos en P; esto es, se hallan situados a lo largo de una normal común. Por lo tanto, para cierto escalar no nulo λ, en este punto se tendrá

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad \text{o bien} \quad \begin{aligned} f_x(x, y) &= \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) &= \lambda g_y(x, y) \end{aligned}.$$

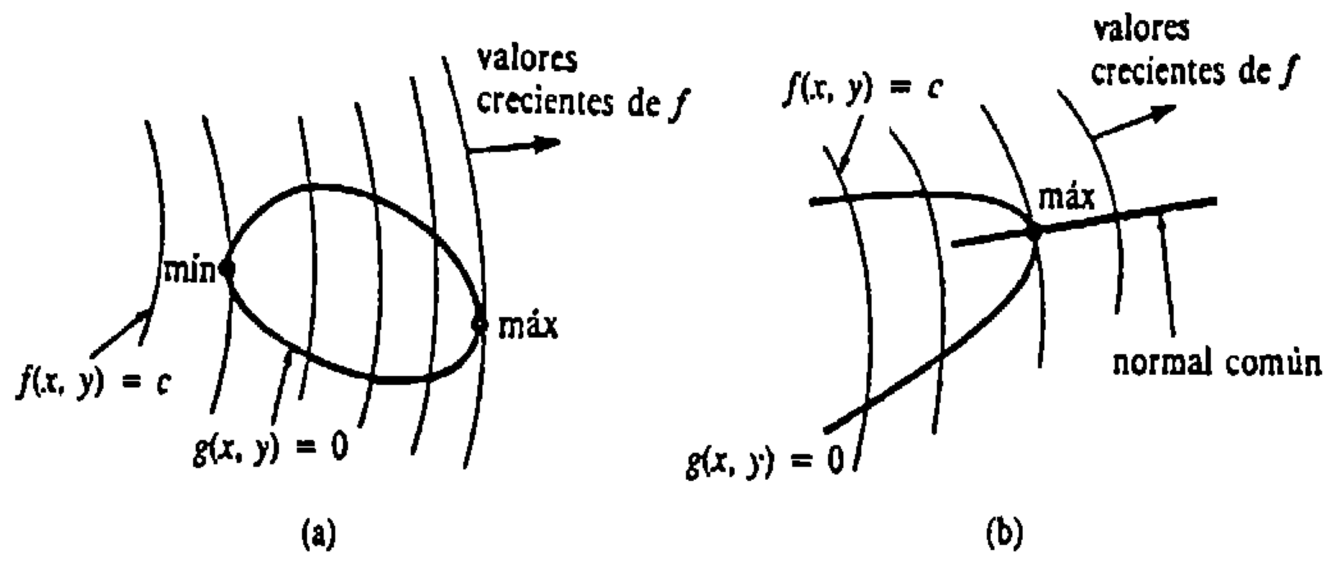


Figura 16.50

Este argumento geométrico sugiere el procedimiento siguiente, conocido como **método de los multiplicadores de Lagrange**.

Para evaluar los extremos de $z = f(x, y)$ sujeta a la restricción $g(x, y) = 0$, resuélvase el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) &= \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) &= 0. \end{aligned} \tag{16.37}$$

Los puntos (x, y) en donde f tiene un extremo, estarán entre las soluciones (x, y, λ) del sistema.

La variable adicional λ se llama **multiplicador de Lagrange**.

Ejemplo 2

Aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange para obtener el máximo de $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ sujeta a $x + y = 3$.

Solución Definiendo $g(x, y) = x + y - 3$ y empleando $f_x = -2x$, $f_y = -2y$, $g_x = 1$, $g_y = 1$, el sistema (16.37) es

$$-2x = \lambda$$
$$-2y = \lambda$$
$$x + y - 3 = 0.$$

Igualando la primera y la segunda ecuaciones resulta $-2x = -2y$, o bien $x = y$. Sustituyendo este resultado en la tercera ecuación se obtiene $2y - 3 = 0$, o sea $y = \frac{3}{2}$. Así que $x = y = \frac{3}{2}$, y el máximo con restricciones es $f(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = \frac{9}{2}$.

Ejemplo 3

Un cilindro circular recto cerrado tendrá un volumen de 1000 pie^3. La tapa y la base del cilindro se hacen de un metal que cuesta 2 dólares por pie cuadrado. La cara lateral se cubre con un metal que cuesta 2.5 dólares por pie cuadrado. Calcule el costo de construcción mínimo.

Solución La función de costo es

$$C(r, h) = \underbrace{2(2\pi r^2)}_{\boxed{\text{costo de la base y de la tapa}}} + \underbrace{2.5(2\pi rh)}_{\boxed{\text{costo de la envolvente lateral}}}$$
$$= 4\pi r^2 + 5\pi rh.$$

Ahora bien, de la restricción $1000 = \pi r^2 h$, puede identificarse $g(r, h) = \pi r^2 h - 1000$, y entonces $C_r = 8\pi r + 5\pi h$, $C_h = 5\pi r$, $g_r = 2\pi rh$, y $g_h = \pi r^2$. Luego debe resolverse

$$8\pi r + 5\pi h = 2\lambda\pi rh$$
$$5\pi r = \lambda\pi r^2$$
$$\pi r^2 h - 1000 = 0.$$

Multiplicando la primera ecuación por r y la segunda por $2h$ y restando se obtiene

$$8\pi r^2 - 5\pi rh = 0 \quad \text{o bien} \quad \pi r(8r - 5h) = 0.$$

Puesto que $r = 0$ no satisface la ecuación de restricción, se toma $r = \frac{5}{8}h$. La restricción da luego

$$h^3 = \frac{1000 \cdot 64}{25\pi} \quad \text{o sea} \quad h = \frac{40}{\sqrt[3]{25\pi}}.$$

De esta manera, $r = 25/\sqrt[3]{25\pi}$. El costo mínimo con restricciones es

$$C\left(\frac{25}{\sqrt[3]{25\pi}}, \frac{40}{\sqrt[3]{25\pi}}\right) = 4\pi\left(\frac{25}{\sqrt[3]{25\pi}}\right)^2 + 5\pi\left(\frac{25}{\sqrt[3]{25\pi}}\right)\left(\frac{40}{\sqrt[3]{25\pi}}\right)$$
$$= 300\sqrt[3]{25\pi} \approx \$1,284.75.$$

Funciones de tres variables

Para evaluar los extremos de una función de tres variables $w = F(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = 0$, se resuelve:

$$\begin{aligned} F_x(x, y, z) &= \lambda g_x(x, y, z) \\ F_y(x, y, z) &= \lambda g_y(x, y, z) \\ F_z(x, y, z) &= \lambda g_z(x, y, z) \\ g(x, y, z) &= 0. \end{aligned} \tag{16.38}$$

Ejemplo 4

Determine los extremos de $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeta a $2x - 2y - z = 5$.

Solución Con $g(x, y, z) = 2x - 2y - z - 5$, el sistema (16.38) es

$$2x = 2\lambda$$
$$2y = -2\lambda$$
$$2z = -\lambda$$
$$2x - 2y - z - 5 = 0.$$

Empleando $\lambda = x = -y = -2z$, la última ecuación da $x = \frac{10}{9}$ y así $y = \frac{10}{9}$, $z = -\frac{5}{9}$. De esta manera, un extremo con restricción es

$$F\left(\frac{10}{9}, -\frac{10}{9}, -\frac{5}{9}\right) = \frac{225}{81}.$$

Observaciones

(*i*) Nótese el uso de la palabra "extremo" en el último ejemplo. Aquí la cuestión es que el método de los multiplicadores de Lagrange no tiene un indicador interconstruido que indique $\boxed{\text{MÁX}}$ o $\boxed{\text{MÍN}}$ cuando se obtiene un extremo. Además del procedimiento gráfico descrito al principio de esta sección, otra manera de convencerse de la naturaleza del extremo consiste en compararlo con valores obtenidos calculando la función dada en otros puntos que satisfagan la ecuación de restricción. En efecto, así se halla que 225/81 es realmente un *mínimo* con restricciones de la función del Ejemplo 4.

(*ii*) En los Problemas 23 y 24 vemos cómo es adaptado el método de los multiplicadores de Lagrange a problemas de optimización con dos restricciones.

Ejercicios 16.10

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 1000.

En los Problemas 1 y 2 trace las curvas de nivel de la función f dada y la ecuación de restricción indicada. Determine si f tiene extremos con restricción.

1. $f(x, y) = x + 3y$, sujeta a $x^2 + y^2 = 1$

2. $f(x, y) = xy$, sujeta a $\frac{1}{2}x + y = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

En los Problemas 3-18 aplique el método de los multiplicadores de Lagrange para evaluar los extremos con restricción de la función dada.

3. Problema 1.

4. Problema 2.

5. $f(x, y) = xy$, sujeta a $x^2 + y^2 = 2$

6. $f(x, y) = x^2 + y^2$, sujeta a $2x + y = 5$

7. $f(x, y) = 3x^2 + 3y^2 + 5$, sujeta a $x - y = 1$

8. $f(x, y) = 4x^2 + 2y^2 + 10$, sujeta a $4x^2 + y^2 = 4$

9. $f(x, y) = x^2 + y^2$, sujeta a $x^4 + y^4 = 1$

10. $f(x, y) = 8x^2 - 8xy + 2y^2$, sujeta a $x^2 + y^2 = 10$

11. $f(x, y) = x^3y$, sujeta a $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

12. $f(x, y) = xy^2$, sujeta a $x^2 + y^2 = 27$

13. $F(x, y, z) = x + 2y + z$, sujeta a $x^2 + y^2 + z^2 = 30$

14. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, sujeta a $x + 2y + 3z = 4$

15. $F(x, y, z) = xyz$, sujeta a $x^2 + y^2/4 + z^2/9 = 1$, $x > 0, y > 0, z > 0$

16. $F(x, y, z) = xyz + 5$, sujeta a $x^3 + y^3 + z^3 = 24$

17. $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$, sujeta a $x + y + z = 1$, $x > 0, y > 0, z > 0$

18. $F(x, y, z) = 4x^2y^2z^2$, sujeta a $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x > 0, y > 0, z > 0$

19. Proporcione una interpretación geométrica de los extremos del Problema 9.

20. Proporcione una interpretación geométrica de los extremos del Problema 14.

21. Calcule el área máxima de un triángulo rectángulo cuyo perímetro es de 4 unidades.

22. Obtenga las dimensiones de una caja rectangular abierta con volumen máximo, si su área de superficie es de 75 cm². ¿Cuáles son las dimensiones si la caja es cerrada?

23. Un depósito cilíndrico recto está coronado por una tapa cónica como se muestra en la Figura 16.51. El radio del depósito es de 3 m y su área de superficie total es de $81\pi m^2$. Calcule las alturas x y y de manera que el volumen del depósito sea máximo. (*Sugerencia:* El área de la superficie del cono es $3\pi\sqrt{9 + y^2}$.)

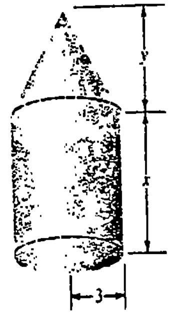


Figura 16.51

24. En los negocios, un índice de utilidad U es una función que proporciona una medida de la satisfacción obtenida por la compra de cantidades variables, x y y, de dos productos adquiridos sobre una base regular. Si $U(x, y) = x^{1/3}y^{2/3}$ es un índice de utilidad, determine sus extremos con sujeción a $x + 6y = 18$.

25. El proceso de Haber y Bosch* produce amoníaco mediante la unión directa de nitrógeno e hidrógeno en condiciones de presión constante P y temperatura constante:

$$N_2 + 3H_2 \overset{\text{catalizador}}{\rightleftharpoons} 2NH_3.$$

Las presiones parciales x, y, z del hidrógeno, nitrógeno, y amoníaco satisfacen la ecuación $x + y + z = P$ y la ley de equilibrio $z^2/xy^3 = k$, en donde k es una constante. La cantidad máxima de amoníaco ocurre cuando se obtiene la presión parcial máxima del amoníaco. Encuentre el valor máximo de z.

26. Obtenga el punto $P(x, y)$, $x > 0, y > 0$, de la superficie $xy^2 = 1$, que sea el más cercano al origen. Demuestre que el segmento de recta del origen a P es perpendicular a la tangente en P.

27. Halle el valor máximo de $F(x, y, z) = \sqrt[3]{xyz}$ en el plano $x + y + z = k$.

* Fritz Haber (1868-1934) fue un químico alemán que ganó el premio Nobel de química en 1918 por inventar este proceso. Carl Bosch (1874-1940), cuñado de Haber, era un ingeniero químico que hizo práctico este proceso en gran escala. Bosch ganó el premio Nobel de química en 1931. Durante la Primera Guerra Mundial el gobierno alemán utilizó el proceso Haber-Bosch para producir grandes cantidades de fertilizantes y explosivos. Haber fue expulsado posteriormente por Adolfo Hitler.

28. Aplique el resultado del Problema 27 para demostrar la desigualdad

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x + y + z}{3}.$$

Problemas diversos

A fin de optimizar una función $F(x, y, z)$ sujeta a dos restricciones $g(x, y, z) = 0$ y $h(x, y, z) = 0$, deben resolverse

$$\begin{aligned} F_x(x, y, z) &= \lambda g_x(x, y, z) + \mu h_x(x, y, z) \\ F_y(x, y, z) &= \lambda g_y(x, y, z) + \mu h_y(x, y, z) \\ F_z(x, y, z) &= \lambda g_z(x, y, z) + \mu h_z(x, y, z) \\ g(x, y, z) &= 0, \quad h(x, y, z) = 0. \end{aligned} \tag{16.39}$$

En los Problemas 29 y 30 utilice (16.39) para encontrar el mínimo de la función $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeta a las restricciones indicadas.

29. $2x + y + z = 1$, $-x + 2y - 3z = 4$

30. $4x + z = 7$, $z^2 = x^2 + y^2$

31. Proporcione una interpretación geométrica del extremo mencionado en el Problema 29.

32. Proporcione una interpretación geométrica del extremo que se trata en el Problema 30.

33. Exprese las tres primeras ecuaciones de (16.39) como un gradiente.

Examen • Capítulo 16

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 1000.

En los Problemas 1-10 conteste verdadero o falso.

1. Si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ tiene el mismo valor para una infinidad de aproximadamente o accesos hacia (a, b), entonces el límite existe.

2. Los dominios de las funciones $f(x, y) = \sqrt{\ln(x^2 + y^2 - 16)}$ y $g(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 16)$ son iguales. _____

3. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x + y}{x - y}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

es continua en $(0, 0)$. _____

4. La función $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^3$ es continua en todas partes. _____

5. Si $\partial z/\partial x = 0$, entonces z = constante. _____

6. Si $\nabla f = 0$, entonces f = constante. _____

7. ∇z es perpendicular a la gráfica de $z = f(x, y)$. _____

8. ∇f apunta en la dirección en la cual f aumenta más rápidamente. _____

9. Si f tiene segundas derivadas parciales continuas, entonces $f_{xy} = f_{yx}$. _____

10. Si $f_x(x, y) = 0$ y $f_y(x, y) = 0$ en (a, b), entonces $f(a, b)$ es un extremo relativo. _____

En los Problemas 11-12 llene los espacios en blanco.

11. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{3x^2 + xy^2 - 3xy - y^3}{x^2 - y^2} =$ _____.

12. $f(x, y) = \dfrac{xy^2 + 1}{x - y + 1}$ es continua excepto en los puntos _____.

13. Para $f(x, y) = 3x^2 + y^2$ la curva de nivel que pasa por $(2, -4)$ es _____.

14. Si $p = g(\eta, \xi)$, $q = h(\eta, \xi)$, entonces $\dfrac{\partial}{\partial \xi} T(p, q) =$ _____.

15. Si $r = g(w)$, $s = h(w)$, entonces $\dfrac{d}{dw} F(r, s) =$ _____.

16. Si s es la distancia que un cuerpo recorre en caída libre en el tiempo t, entonces se puede obtener la aceleración de la gravedad g a partir de $g = 2s/t^2$. Errores pequeños Δs y Δt en las mediciones de s y t, respectivamente, darán por resultado un error en g aproximado igual a _____.

17. $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x\, \partial z\, \partial y^2}$ en notación con subíndices es _____.

18. f_{xyy} en notación con ∂ es _____.

19. Si $f(x, y) = \displaystyle\int_x^y F(t)\, dt$, entonces $\dfrac{\partial f}{\partial x} =$ _____.

20. En (x_0, y_0, z_0) la función $F(x, y, z) = x + y + z$ crece más rápidamente en la dirección de _____.

21. Si $F(x, y, z) = f(x, y)g(y)h(z)$, entonces $F_{xyz} =$ ______.

22. Si $w = F(x, y, z)$ tiene derivadas parciales continuas de cualquier orden, enumere todas las derivadas parciales de tercer orden posibles. ______

En los Problemas 23-32 calcule la derivada indicada.

23. $z = ye^{-x^3y}$; z_y

24. $z = \ln(\cos(uv))$; z_u

25. $f(r, \theta) = \sqrt{r^3 + \theta^2}$; $f_{r\theta}$

26. $f(x, y) = (2x + xy^2)^2$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

27. $z = \cosh(x^2y^3)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

28. $z = (e^{x^2} + e^{-y^2})^2$; $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}$

29. $F(s, t, v) = s^3t^5v^{-4}$; F_{stv}

30. $w = \dfrac{xy}{z} + \dfrac{xz}{y} + \dfrac{yz}{x}$; $\dfrac{\partial^4 w}{\partial x\,\partial y^2\,\partial z}$

31. $f(x, y) = x^2y - y^2x$; D_uf en la dirección de $2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$.

32. $F(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$; D_uF en la dirección de $-2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

33. Trace un croquis del dominio de

(a) $f(x, y) = \sqrt{1 - (x + y)^2}$,

(b) $f(x, y) = \dfrac{1}{\ln(y - x)}$.

34. Obtenga Δz para $z = 2xy - y^2$.

En los Problemas 35 y 36 halle la diferencial total de la función indicada.

35. $z = \dfrac{x - 2y}{4x + 3y}$

36. $A = 2xy + 2yz + 2zx$

En los Problemas 37 y 38 determine si la ecuación indicada es exacta. Si así es, resuélvala.

37. $2x\cos y^3\,dx = (3x^2y^2\operatorname{sen} y^3 + 1)\,dy$

38. $(3x^2 + 2y^3)\,dx + y^2(6x + 1)\,dy = 0$

39. Obtenga ecuaciones simétricas de la recta tangente en $(-\sqrt{5}, 1, 3)$ a la traza de $z = \sqrt{x^2 + 4y^2}$ en el plano $x = -\sqrt{5}$.

40. Encuentre la pendiente de la recta tangente en $(2, 3, 10)$ a la curva de intersección de la superficie $z = xy + x^2$ y el plano vertical que pasa por $P(2, 3)$ y $Q(4, 5)$ en dirección hacia Q.

41. Considere la función $f(x, y) = x^2y^4$. En $(1, 1)$ ¿cuál es:

(a) la razón de cambio de f en la dirección de $\mathbf{i}$?

(b) la razón de variación de f en la dirección de $\mathbf{i}$-$\mathbf{j}$?

(c) la razón de cambio de f en la dirección de $\mathbf{j}$?

42. Sea $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(a) Si $x = 3\operatorname{sen} 2t$, $y = 4\cos 2t$, $z = 5t^3$, calcule $\dfrac{dw}{dt}$

(b) Si $x = 3\operatorname{sen} 2\dfrac{t}{r}$, $y = 4\cos 2\dfrac{r}{t}$, $z = 5t^3r^3$, evalúe $\dfrac{\partial w}{\partial t}$.

43. Encuentre una ecuación del plano tangente a la gráfica de $z = \operatorname{sen} xy$ en $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

44. Determine si hay puntos de la superficie $z^2 + xy - 2x - y^2 = 1$ en los cuales el plano tangente sea paralelo a $z = 2$.

45. Encuentre una ecuación del plano tangente al cilindro $x^2 + y^2 = 25$ en $(3, 4, 6)$.

46. ¿En qué punto es la derivada direccional de $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3 - 3x^2$ en la dirección de $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ mínima?

47. Determine las dimensiones de la caja rectangular de máximo volumen que está en el primer octante limitada por los planos coordenados y el plano $x + 2y + z = 6$. Véase la Figura 16.52.

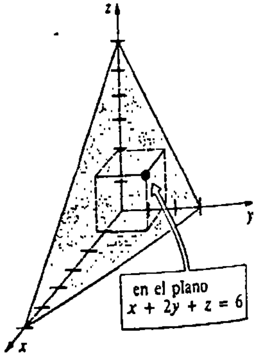


Figura 16.52

48. El porcentaje de error al medir la altura de un cono circular recto es ±2% y el radio se mide con un error de ±1.5%. ¿Cuál es el porcentaje máximo de error aproximado al medir el volumen?

49. La velocidad del péndulo cónico mostrado en la Figura 16.53 está dada por $v = r\sqrt{g/y}$, en donde $g = 980$ cm/s². Si r disminuye de 20 cm a 19 cm, y y aumenta de 25 cm a 26 cm. ¿Cuál es el cambio aproximado de la velocidad del péndulo?

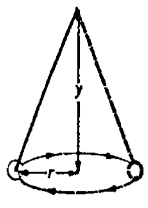


Figura 16.53

50. Encuentre la derivada direccional de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en $(3, 4)$ en la direccional de (a) $\nabla f(1, -2)$, (b) $\nabla f(3, 4)$.

51. Las llamadas temperaturas de régimen permanente (o estado estable), dentro de un círculo de radio R están dadas por la **fórmula de Poisson***.

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta - \phi)} f(\phi)\,d\phi.$$

Derivando formalmente dentro del signo de la integral, demuestre que U satisface

$$r^2U_{rr} + rU_r + U_{\theta\theta} = 0.$$

52. La función de producción Cobb-Douglas $z = f(x, y)$ está definida por $z = Ax^{\alpha}y^{\beta}$, en donde A, α y β son constantes. El valor de z se llama producción eficiente para los insumos x y y. Demuestre que

$$f_x = \frac{\alpha z}{x}, \quad f_y = \frac{\beta z}{y}, \quad f_{xx} = \frac{\alpha(\alpha - 1)z}{x^2},$$

$$f_{yy} = \frac{\beta(\beta - 1)z}{y^2}, \quad \text{y} \quad f_{xy} = f_{yx} = \frac{\alpha\beta z}{xy}.$$

En los Problemas 53-56 supóngase que $f_x(a, b) = 0$, $f_y(a, b) = 0$. Si las derivadas parciales de orden superior indicadas, se evalúan en (a, b), determine, si es posible, si $f(a, b)$ es un extremo relativo.

53. $f_{xx} = 4, f_{yy} = 6, f_{xy} = 5$

54. $f_{xx} = 2, f_{yy} = 7, f_{xy} = 0$

55. $f_{xx} = -5, f_{yy} = -9, f_{xy} = 6$

56. $f_{xx} = -2, f_{yy} = -8, f_{xy} = 4$

57. Exprese el área A de un triángulo rectángulo en función de la longitud L de su hipotenusa y uno de sus ángulos agudos θ.

58. En relación con la Figura 16.54, exprese la altura h de la colina en función de los ángulos θ y ϕ.

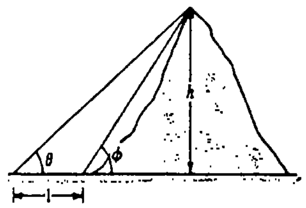


Figura 16.54

59. El pasillo rectangular mostrado en la Figura 16.55 tiene anchura constante z. Exprese el área A del andador en términos de x, y, z.

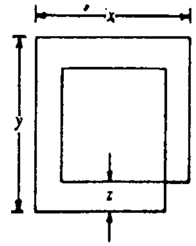


Figura 16.55

60. Una caja abierta hecha de plástico tiene la forma de un paralelepípedo rectangular. Las dimensiones exteriores de la caja están dadas en la Figura 16.56. Si el plástico tiene 0.5 cm de espesor, determine el volumen aproximado del plástico.

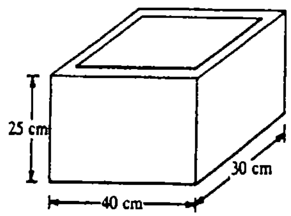


Figura 16.56

* Siméon Denis Poisson (1781-1840), matemático y físico francés.

1

Integrales múltiples

Concluimos el estudio del cálculo de funciones de varias variables con las definiciones y aplicaciones de las integrales definidas bidimensional y tridimensional. Estas integrales se llaman por lo común **integral doble** e **integral triple**, respectivamente.

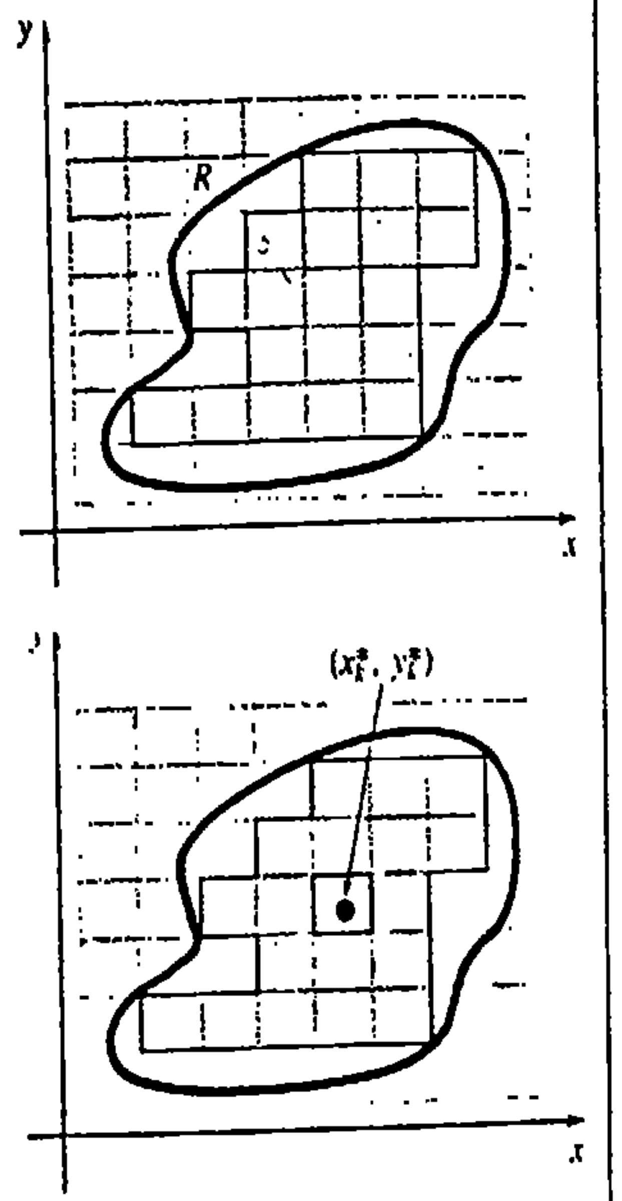
17.1 Integral doble

Recordemos de la Sección 5.5 que la definición de la integral definida de una función de una sola variable está dada por el límite de una suma o sumatoria:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x_k$$

Los cinco pasos que conducen a esta definición están resumidos en la columna izquierda de la tabla adjunta. En la columna derecha se indican los pasos análogos que conducen al concepto de una *integral definida bidimensional*, conocida comúnmente como **integral doble** de una función f de dos variables.

$y = f(x)$	$z = f(x, y)$
1. Considérese que f está definida en un intervalo cerrado $[a, b]$.	Sea f definida en una región cerrada y acotada R.
2. Forme una partición P del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de longitudes Δx_k.	Por medio de una cuadrícula (o red de rectas verticales y horizontales paralelas a los ejes coordenados), forme una partición P de R en n subregiones rectangulares R_k de áreas ΔA_k contenidas totalmente en R.
3. Sea $\|P\|$ la norma de la partición, o sea la longitud del subintervalo mayor.	Sea $\|P\|$ la norma de la partición, o sea la longitud de la diagonal mayor de las R_k.
4. Elíjase un x_k^* en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$.	Selecciónese un punto (x_k^*, y_k^*) en cada subregión R_k.
5. Evalúe la suma $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x_k$.	Evalúe la suma $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\,\Delta A_k$.



De esta manera se tiene la siguiente definición.

DEFINICIÓN 17.1

Sea f una función de dos variables definida en una región cerrada R. Entonces la **integral doble de** f en R está dada por

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\,\Delta A_k. \qquad (17.1)$$

□

Integrabilidad

Se dice que f es **integrable** en R, si existe el límite (17.1). Si f es continua en R, entonces f es necesariamente integrable en R. Para una partición de P de R en subregiones R_k con (x_k^*, y_k^*) en R_k, se llama **suma de Riemann** a una sumatoria de la forma $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\,\Delta A_k$.

Área

Cuando $f(x, y) = 1$ en R, entonces $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k$ dará simplemente el área A de la región; esto es,

$$A = \iint_R dA. \qquad (17.2)$$

Volumen

Si $f(x, y) \geq 0$ en R, entonces, como se muestra en la Figura 17.1, el producto $f(x_k^*, y_k^*)\,\Delta A_k$ se puede interpretar como el volumen de un prisma rectangular de altura $f(x_k^*, y_k^*)$ y base con área ΔA_k. La suma de los volúmenes $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\,\Delta A_k$ es una aproximación al **volumen** V del sólido que se encuentra *arriba* de la región R y *debajo* de la superficie $z = f(x, y)$. El límite de esta suma cuando $\|P\| \to 0$, si existe, dará el volumen exacto de este sólido; esto es, si f es no negativa en R, entonces

$$V = \iint_R f(x, y)\,dA. \qquad (17.3)$$

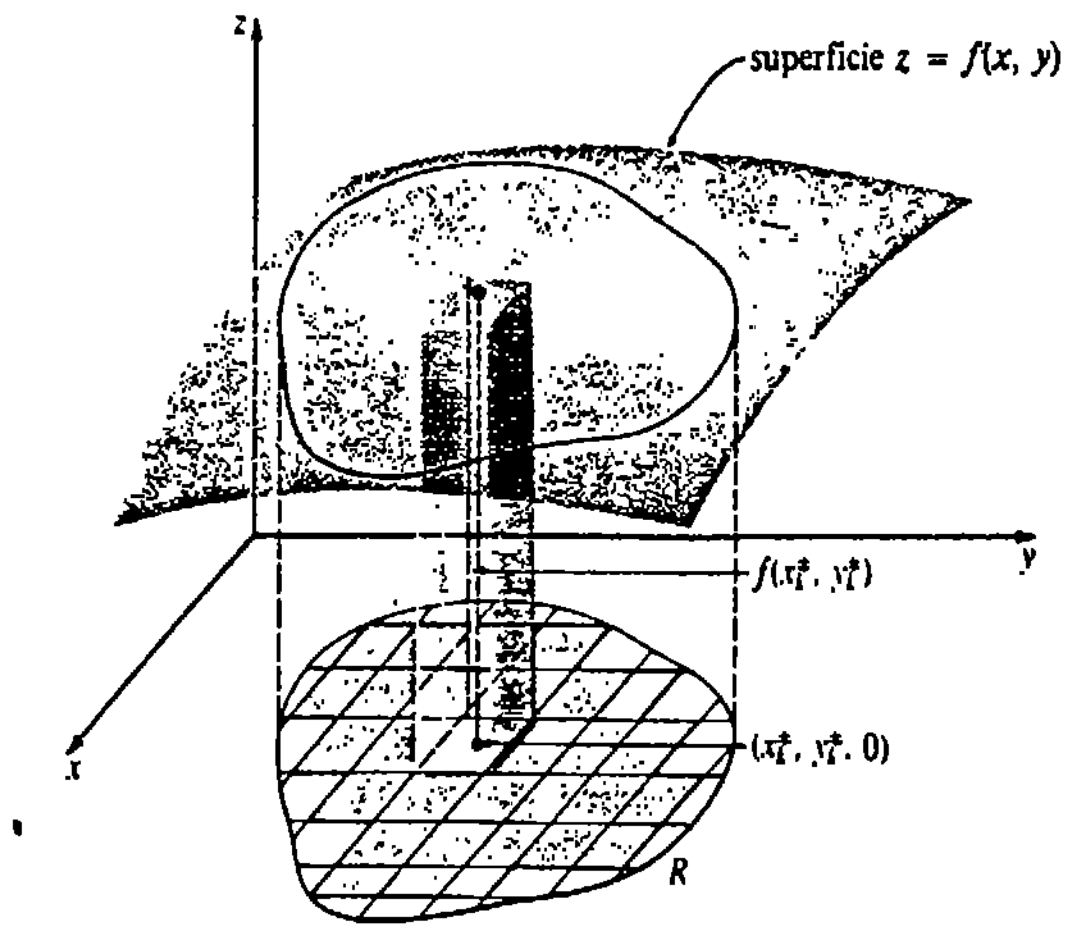


Figura 17.1

Propiedades

Las siguientes propiedades de la integral doble son análogas a las de la integral definida dadas en el Teorema 5.7.

TEOREMA 17.1

Sean f y g funciones de dos variables integrables en una región R. Entonces

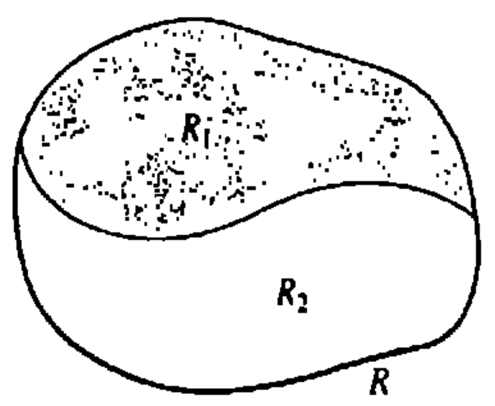
(*i*) $\iint_R k f(x, y)\, dA = k \iint_R f(x, y)\, dA$, en donde k es cualquier constante.

(*ii*) $\iint_R [f(x, y) \pm g(x, y)]\, dA = \iint_R f(x, y)\, dA \pm \iint_R g(x, y)\, dA$

(*iii*) $\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_{R_1} f(x, y)\, dA + \iint_{R_2} f(x, y)\, dA$, en donde R_1 y R_2

son subregiones de R que no se traslapan y $R = R_1 \cup R_2$. □

La parte (*iii*) del Teorema 17.1 es la equivalente en dos dimensiones a $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$. La Figura 17.2 ilustra la dimensión de una región en subregiones R_1 y R_2 para las cuales $R = R_1 \cup R_2$. R_1 y R_2 no pueden tener puntos en común excepto posiblemente en su frontera común. Además, el Teorema 17.1(*iii*) se extiende a cualquier número finito de subregiones que no se traslapen y cuya unión sea R.



$R = R_1 \cup R_2$

Figura 17.2

Observación

Desde luego no toda integral doble da un volumen. Para la superficie $z = f(x, y)$ mostrada en la Figura 17.3, $\iint_R f(x, y)\, dA$ es un número real pero no es un volumen, ya que f no es no negativa en R.

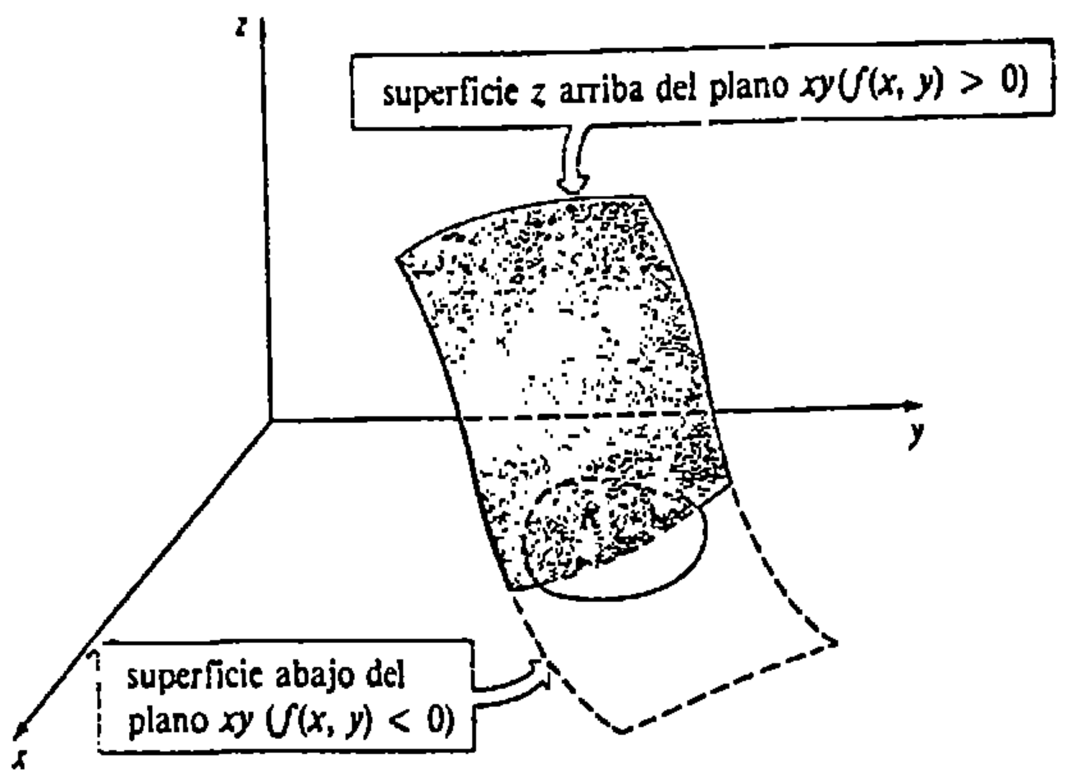


Figura 17.3

Ejercicios 17.1

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 1001

1. Consideremos la región R del primer cuadrante que se encuentra limitada por las gráficas de $x^2 + y^2 = 16$, $y = 0$, y $x = 0$. Aproxime la integral doble $\iint_R (x + 3y + 1)\, dA$ empleando una suma de Riemann y los R_k mostrados en la Figura 17.4. Elija (x_k^*, y_k^*) en el centro geométrico de cada R_k.

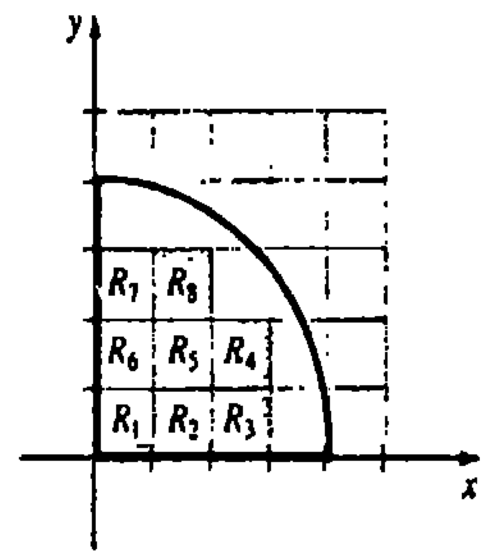


Figura 17.4

2. Considere la región R limitada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = 4$. Coloque una red o cuadrícula sobre R que corresponda a las rectas $x = -2, x = -\frac{3}{2}, x = -1, \ldots, x = 2$; $y = 0, y = \frac{1}{2}, y = 1, \ldots, y = 4$. Aproxime la integral doble $\iint_R xy\, dA$ empleando una suma de Riemann, en donde los (x_k^*, y_k^*) se elijan en la esquina inferior derecha de cada rectángulo completo R_k en R.

En los Problemas 3-6 evalúe $\iint_R 10\, dA$ en la región R indicada.

3.

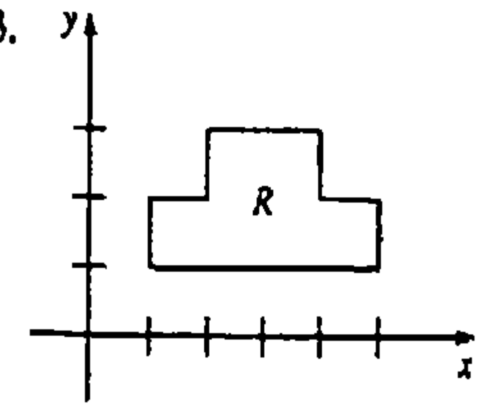


Figura 17.5

4.

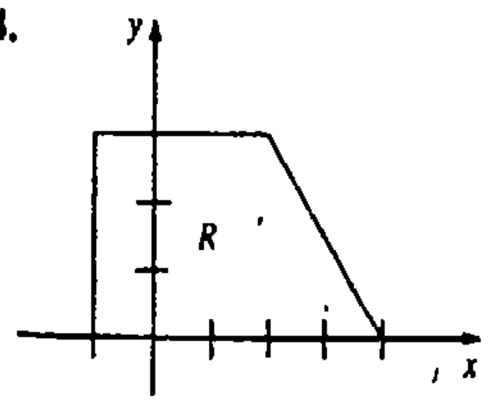


Figura 17.6

5.

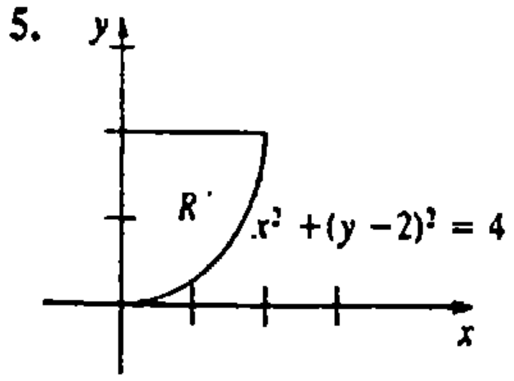


Figura 17.7

6.

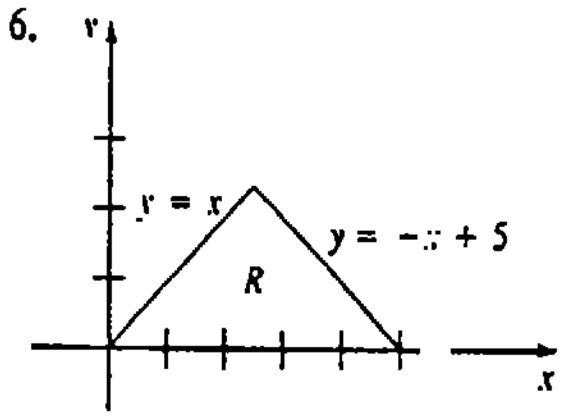


Figura 17.8

7. Considere la región R limitada por la gráfica de $(x - 3)^2 + y^2 = 9$. ¿Representa la integral doble $\iint_R (x + 5y)\, dA$ un volumen? Explique.

8. Considere la región R del segundo cuadrante limitada por las gráficas de $-2x + y = 6$, $x = 0$, $y = 0$. ¿Representa la integral doble $\iint_R (x^2 + y^2)\, dA$ un volumen? Explique.

En los Problemas 9-14 suponga que

$$\iint_R x\, dA = 3, \qquad \iint_R y\, dA = 7,$$

y que el área de R es 8. Evalúe la integral doble indicada.

9. $\iint_R 10\, dA$

10. $\iint_R -5x\, dA$

11. $\iint_R (2x + 4y)\, dA$

12. $\iint_R (x - y)\, dA$

13. $\iint_R (3x + 7y + 1)\, dA$

14. $\iint_R y^2\,dA - \iint_R (2+y)^2\,dA$

En los Problemas 15 y 16, sean R_1 y R_2 regiones que no se traslapan y sea $R = R_1 \cup R_2$.

15. Si $\iint_{R_1} f(x,y)\,dA = 4$ y $\iint_{R_2} f(x,y)\,dA = 14$, ¿Cuál es el valor de $\iint_R f(x,y)\,dA$?

16. Suponer $\iint_R f(x,y)\,dA = 25$ y $\iint_{R_1} f(x,y)\,dA = 30$. ¿Cuál es el valor de $\iint_{R_2} f(x,y)\,dA$?

17.2 Integrales iteradas

Integración parcial

Podemos definir la **integración parcial** de manera análoga al proceso de diferenciación parcial.

Si $F(x, y)$ es una función tal que $F_y(x,y) = f(x,y)$, entonces la **integral parcial de f con respecto a y** es

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy = F(x,y)\Big]_{g_1(x)}^{g_2(x)} = F(x, g_2(x)) - F(x, g_1(x)).$$

De manera semejante, si $G(x, y)$ es una función tal que $G_x(x,y) = f(x,y)$, entonces la **integral parcial de f con respecto a x** es

$$\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx = G(x,y)\Big]_{h_1(y)}^{h_2(y)} = G(h_2(y), y) - G(h_1(y), y).$$

En otras palabras, para evaluar $\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy$, mantenemos x fija, mientras que en $\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx$ mantenemos y fija.

Ejemplo 1

Evaluar (*a*) $\int_1^2 \left(6xy^2 - 4\frac{x}{y}\right) dy$ (*b*) $\int_{-1}^3 \left(6xy^2 - 4\frac{x}{y}\right) dx$.

Solución

x fija

(*a*) $\int_1^2 \left(6xy^2 - 4\frac{x}{y}\right) dy = \left[2xy^3 - 4x\ln|y|\right]_1^2$

x fija

$= (16x - 4x\ln 2) - (2x - 4x\ln 1)$

$= 14x - 4x\ln 2$

y fija

(*b*) $\int_{-1}^3 \left(6xy^2 - 4\frac{x}{y}\right) dx = \left[3x^2y^2 - 2\frac{x^2}{y}\right]_{-1}^3$

y fija

$= \left(27y^2 - \frac{18}{y}\right) - \left(3y^2 - \frac{2}{y}\right)$

$= 24y^2 - \frac{16}{y}$

En el ejemplo precedente debe observarse que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[2xy^3 - 4x\ln|y|\right] = 6xy^2 - 4\frac{x}{y}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[3x^2y^2 - 2\frac{x^2}{y}\right] = 6xy^2 - 4\frac{x}{y}.$$

Ejemplo 2

Evaluar $\int_{x^2}^{x} \operatorname{sen} xy\,dy$.

Solución Tratando a x como constante, obtenemos

$$\int_{x^2}^{x} \operatorname{sen} xy\,dy = -\frac{\cos xy}{x}\Big]_{x^2}^{x} = -\frac{\cos x^2}{x} + \frac{\cos x^3}{x}.$$

Regiones de tipo I y II

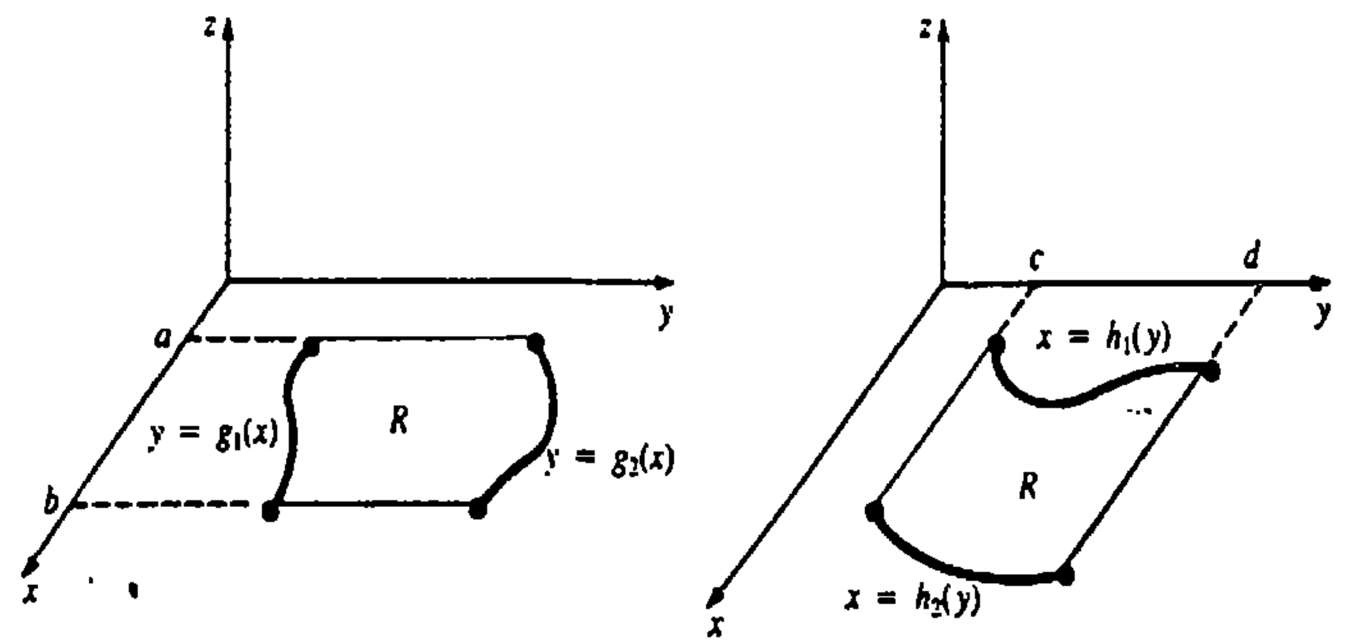
La región que se muestra en la Figura 17.9(a),

$$R: a \le x \le b, \qquad g_1(x) \le y \le g_2(x),$$

donde las funciones de frontera g_1 y g_2 son continuas, se llama **región de tipo I**. La región de la Figura 17.9(b),

$$R: c \le y \le d, \qquad h_1(y) \le x \le h_2(y),$$

en donde h_1 y h_2 son continuas, se denomina **región de tipo II**.



(a) Región de tipo I (b) Región de tipo II

Figura 17.9

Integrales iteradas

Puesto que la integral parcial $\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy$ es una función sólo de x, podemos a su vez integrar la función resultante con respecto a x ahora. Si f es continua en una región de tipo I, entonces

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx \qquad (17.4)$$

es una integral iterada de f en la región. La idea básica en (17.4) es realizar *integraciones sucesivas*. La integral parcial da una función de x, la cual es luego integrada en la manera usual, de $x = a$ a $x = b$. El resultado final de ambas integraciones será un número real. De manera semejante, definimos una integral iterada de una función continua f en una región de tipo II mediante

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx \right] dy. \qquad (17.5)$$

Ejemplo 3

Evaluar la integral iterada de $f(x, y) = 2xy$ en la región que se muestra en la Figura 17.10.

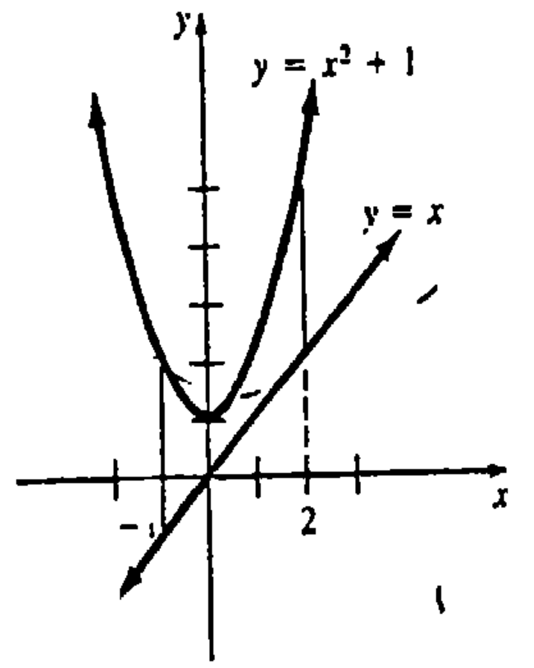


Figura 17.10

Solución La región es de tipo I y así, por (17.4), tenemos

$$\int_{-1}^{2} \int_{x}^{x^2+1} 2xy\, dy\, dx = \int_{-1}^{2} \left[\int_{x}^{x^2+1} 2xy\, dy \right] dx = \int_{-1}^{2} \left[xy^2 \right]_{x}^{x^2+1} dx$$
$$= \int_{-1}^{2} [x(x^2+1)^2 - x^3]\, dx$$
$$= \left[\frac{1}{6}(x^2+1)^3 - \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^{2} = \frac{63}{4}.$$

Ejemplo 4

Evaluar $\int_0^4 \int_y^{2y} (8x + e^y)\, dx\, dy$.

Solución De (17.5) se ve que

$$\int_0^4 \int_y^{2y} (8x + e^y)\, dx\, dy = \int_0^4 \left[\int_y^{2y} (8x + e^y)\, dx \right] dy$$

$$= \int_0^4 \left[4x^2 + xe^y \right]_y^{2y} dy$$
$$= \int_0^4 [(16y^2 + 2ye^y) - (4y^2 + ye^y)]\, dy$$
$$= \int_0^4 (12y^2 + ye^y)\, dy \qquad \boxed{\text{Integración por partes}}$$
$$= \left[4y^3 + ye^y - e^y \right]_0^4$$
$$= 257 + 3e^4 \approx 420.79.$$

Ejemplo 5

Evaluar $\int_{-1}^{3} \int_{1}^{2} \left(6xy^2 - 4\frac{x}{y}\right) dy\, dx$.

Solución Por el resultado de (*a*) del Ejemplo 1,

$$\int_{-1}^{3} \int_{1}^{2} \left(6xy^2 - 4\frac{x}{y}\right) dy\, dx = \int_{-1}^{3} \left[\int_{1}^{2} \left(6xy^2 - 4\frac{x}{y}\right) dy \right] dx$$
$$= \int_{-1}^{3} (14x - 4x \ln 2)\, dx$$
$$= \left[7x^2 - 2x^2 \ln 2 \right]_{-1}^{3}$$
$$= 56 - 16 \ln 2 \approx 44.91.$$

Una inspección a la Figura 17.11 convencerá de que una región rectangular R definida por $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ es simultáneamente una región de tipo I y de tipo II. Si f es continua en R, se puede demostrar que

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy.$$

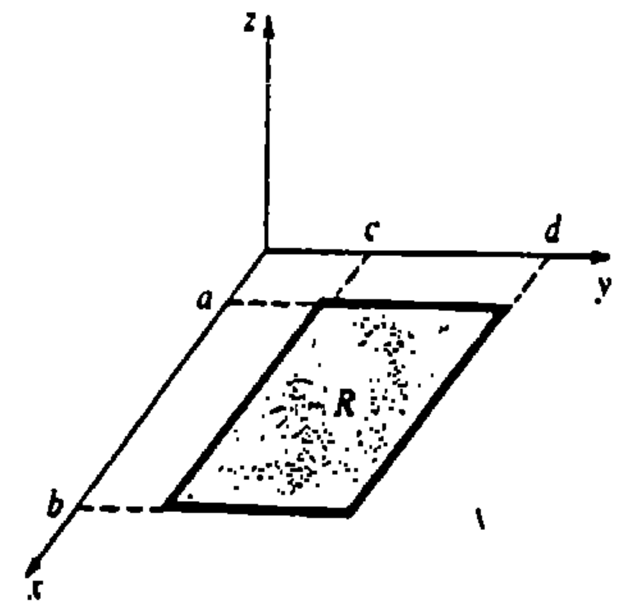


Figura 17.11

El lector debe verificar que

$$\int_1^2 \int_{-1}^3 \left(6xy^2 - 4\frac{x}{y}\right) dx\, dy$$

da el mismo resultado que el de la integral iterada del ejemplo 5.

Ejercicios 17.2

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 1001.

En los Problemas 1-4 evalúe la integral parcial indicada.

1. $\int_{-1}^{3} (6xy - 5e^y)\, dx$
2. $\int_1^2 \tan xy\, dy$
3. $\int_1^{3x} x^3 e^{xy}\, dy$
4. $\int_{\sqrt{y}}^{y^3} (8x^3y - 4xy^2)\, dx$

En los Problemas 5-8 verifique la igualdad indicada.

5. $\int_{-1}^2 \int_0^3 x^2\, dy\, dx = \int_0^3 \int_{-1}^2 x^2\, dx\, dy$
6. $\int_{-2}^2 \int_2^4 (2x + 4y)\, dx\, dy = \int_2^4 \int_{-2}^2 (2x + 4y)\, dy\, dx$
7. $\int_1^3 \int_0^\pi (3x^2y - 4\,\text{sen}\, y)\, dy\, dx = \int_0^\pi \int_1^3 (3x^2y - 4\,\text{sen}\, y)\, dx\, dy$
8. $\int_0^1 \int_0^2 \left(\frac{8y}{x+1} - \frac{2x}{y^2+1}\right) dx\, dy = \int_0^2 \int_0^1 \left(\frac{8y}{x+1} - \frac{2x}{y^2+1}\right) dy\, dx$

En los Problemas 8-30 evalúe la integral iterada indicada.

9. $\int_1^2 \int_{-x}^{x^2} (8x - 10y + 2)\, dy\, dx$
10. $\int_{-1}^1 \int_0^y (x + y)^2\, dx\, dy$
11. $\int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} (2x - y)\, dx\, dy$
12. $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos x} (1 + 4y\tan^2 x)\, dy\, dx$
13. $\int_0^\pi \int_y^{3y} \cos(2x + y)\, dx\, dy$
14. $\int_1^2 \int_0^{\sqrt{x}} 2y\,\text{sen}\, \pi x^2\, dy\, dx$
15. $\int_1^{\ln 3} \int_0^x 6e^{x+2y}\, dy\, dx$
16. $\int_0^1 \int_0^{2y} e^{-y^2}\, dx\, dy$
17. $\int_0^3 \int_{x+1}^{2x+1} \frac{1}{\sqrt{y - x}}\, dy\, dx$
18. $\int_0^1 \int_0^y x(y^2 - x^2)^{3/2}\, dx\, dy$
19. $\int_1^9 \int_0^x \frac{1}{x^2 + y^2}\, dy\, dx$
20. $\int_0^{1/2} \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx\, dy$
21. $\int_1^e \int_1^y \frac{y}{x}\, dx\, dy$
22. $\int_1^4 \int_1^{\sqrt{x}} 2ye^{-x}\, dy\, dx$
23. $\int_0^6 \int_0^{\sqrt{25-y^2}/2} \frac{1}{\sqrt{(25 - y^2) - x^2}}\, dx\, dy$
24. $\int_0^2 \int_{y^2}^{\sqrt{20-y^2}} y\, dx\, dy$
25. $\int_{\pi/2}^{\pi} \int_{\cos y}^0 e^x \text{sen} y\, dx\, dy$
26. $\int_0^1 \int_0^{y^{1/3}} 6x^2 \ln(y + 1)\, dx\, dy$
27. $\int_\pi^{2\pi} \int_0^x (\cos x - \text{sen}\, y)\, dy\, dx$
28. $\int_1^3 \int_0^{1/x} \frac{1}{x+1}\, dy\, dx$
29. $\int_{\pi/12}^{5\pi/12} \int_1^{\sqrt{2\,\text{sen}\, 2\theta}} r\, dr\, d\theta$
30. $\int_0^{\pi/3} \int_{3\cos\theta}^{1+\cos\theta} r\, dr\, d\theta$

En los Problemas 31-34 dibuje la región de integración de la integral iterada indicada.

31. $\int_0^2 \int_1^{2x+1} f(x, y)\, dy\, dx$
32. $\int_1^4 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y)\, dx\, dy$
33. $\int_{-1}^3 \int_0^{\sqrt{16-y^2}} f(x, y)\, dx\, dy$
34. $\int_{-1}^2 \int_{-x^2}^{x^2+1} f(x, y)\, dy\, dx$

Problemas diversos

35. Si f y g son integrables, demuestre que

$$\int_c^d \int_a^b f(x)g(y)\, dx\, dy = \left(\int_a^b f(x)\, dx\right)\left(\int_c^d g(y)\, dy\right).$$

17.3 Evaluación de integrales dobles

Las integrales iteradas de la sección precedente proporcionan los medios para evaluar una integral doble $\iint_R f(x, y)\, dA$ en una región de tipo I o de tipo II, o bien una región tal que pueda expresarse como la unión de un número finito de estas regiones.

TEOREMA 17.2

Sea f continua en una región R.
(*i*) Si R es de tipo I, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx. \tag{17.6}$$

(*ii*) Si R es de tipo II, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy. \tag{17.7}$$

□

El Teorema 17.2 es el análogo para integrales dobles del Teorema Fundamental del Cálculo, Teorema 5.11. Aunque el Teorema 17.2 es difícil de demostrar, podemos adquirir cierto sentido intuitivo de su significado considerando volúmenes. Sean R una región de tipo I y $z = f(x, y)$ continua y no negativa en R. El área A del plano vertical, tal como se muestra en la Figura 17.12, es el área bajo la traza de la superficie $z = f(x, y)$ en el plano x = constante, y por lo tanto está dada por la integral parcial

$$A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

Variando ahora x se suman todas estas áreas desde $x = a$ hasta $x = b$, y se obtiene el volumen V del sólido situado arriba de R y debajo de la superficie:

$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx.$$

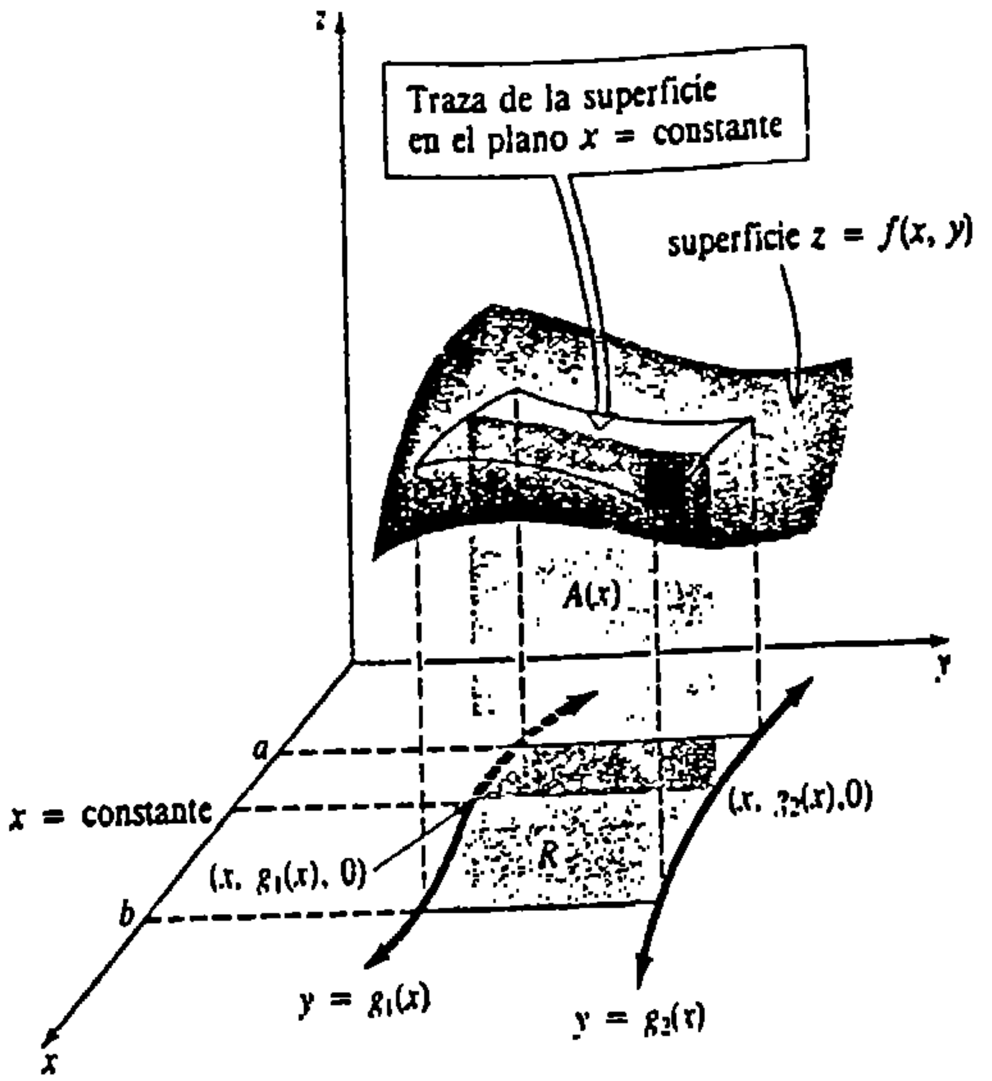


Figura 17.12

Pero, como ya se vio en (17.3) de la Sección 17.1, este volumen también está dado por la integral doble

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA.$$

Ejemplo 1

Evaluar la integral doble $\iint_R e^{x+3y}\, dA$ en la región limitada por las gráficas de $y = 1$, $y = 2$, $y = x$, y $y = -x + 5$.

Solución Como se ve en la Figura 17.13, la región es de tipo II; por lo tanto, por (17.7) integramos primero con respecto a x de la frontera izquierda $x = y$, a la frontera derecha $x = 5 - y$:

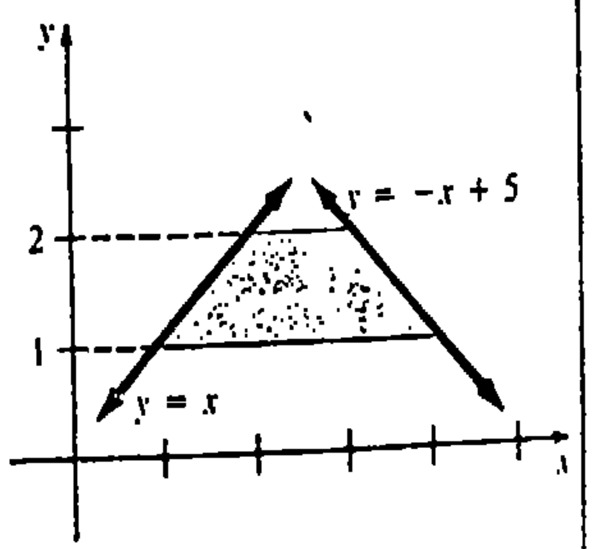
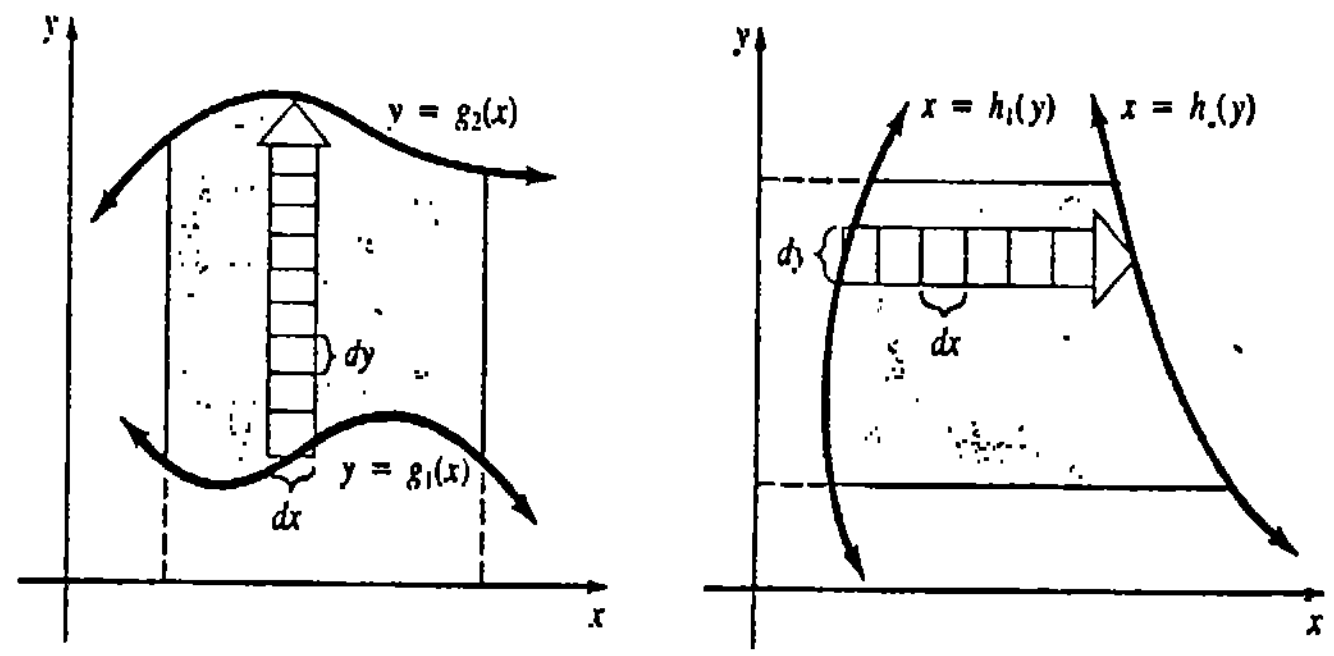


Figura 17.13

$$\iint_R e^{x+3y}\, dA = \int_1^2 \int_y^{5-y} e^{x+3y}\, dx\, dy$$
$$= \int_1^2 e^{x+3y}\Big]_y^{5-y} dy$$
$$= \int_1^2 \left[e^{5+2y} - e^{4y}\right] dy$$
$$= \left[\frac{1}{2}e^{5+2y} - \frac{1}{4}e^{4y}\right]_1^2$$
$$= \frac{1}{2}e^9 - \frac{1}{4}e^8 - \frac{1}{2}e^7 + \frac{1}{4}e^4 \approx 2771.64.$$

Como una ayuda para reducir una integral doble a una integral iterada con límites de integración correctos, es útil visualizar, como se sugiere precisamente en la discusión anterior, la integral doble como un proceso de sumatoria doble.*
En una región de tipo I la integral iterada $\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$ primero es una sumatoria en la dirección y. Gráficamente, esto se indica por la flecha vertical en la Figura 17.14(a); el rectángulo típico de la flecha tiene por área $dy\, dx$. La dy colocada antes de la dx significa que los "volúmenes" $f(x, y)\, dy\, dx$ de prismas construidos sobre los rectángulos, se suman verticalmente con respecto a y desde la curva frontera inferior g_1, hasta la curva frontera superior g_2. La dx que sigue a la dy significa que el resultado de cada sumatoria vertical se suma luego horizontalmente con respecto a x desde la izquierda ($x = a$) hasta la derecha ($x = b$). Para integrales dobles en regiones de tipo II, son válidas observaciones semejantes. Véase la Figura 17.14(b). Recuérdese de (17.2) de la Sección 17.1 que cuando $f(x, y) = 1$, la integral doble $A = \iint_R dA$ da el área de la región. De esta manera, la Figura 17.14(a) muestra que $\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\, dx$ suma las *áreas* rectangulares verticalmente y luego horizontalmente, mientras que la Figura 17.14(b) muestra que $\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx\, dy$ suma las áreas rectangulares horizontalmente y luego en forma vertical.



(a) Región de tipo I (b) Región de tipo II

Figura 17.14

Ejemplo 2

Aplique una integral doble para determinar el área de la región limitada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = 8 - x^2$.

Solución En la Figura 17.15 se presentan las gráficas y sus puntos de intersección. Puesto que R es evidentemente de tipo I, en virtud de (17.6) resulta que

$$A = \iint_R dA = \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{8-x^2} dy\, dx$$

* Aunque no proseguiremos con los detalles, la integral doble se puede definir en términos de un límite de una suma doble tal como

$$\sum_i \sum_j f(x_i^*, y_j^*)\, \Delta y_j\, \Delta x_i \quad \text{o bien} \quad \sum_j \sum_i f(x_i^*, y_j^*)\, \Delta x_i\, \Delta y_j.$$

$$= \int_{-2}^{2} [(8 - x^2) - x^2]\, dx = \int_{-2}^{2} (8 - 2x^2)\, dx$$

$$= \left[8x - \frac{2}{3}x^3\right]_{-2}^{2} \qquad = \frac{64}{3} \text{ unidades cuadradas.}$$

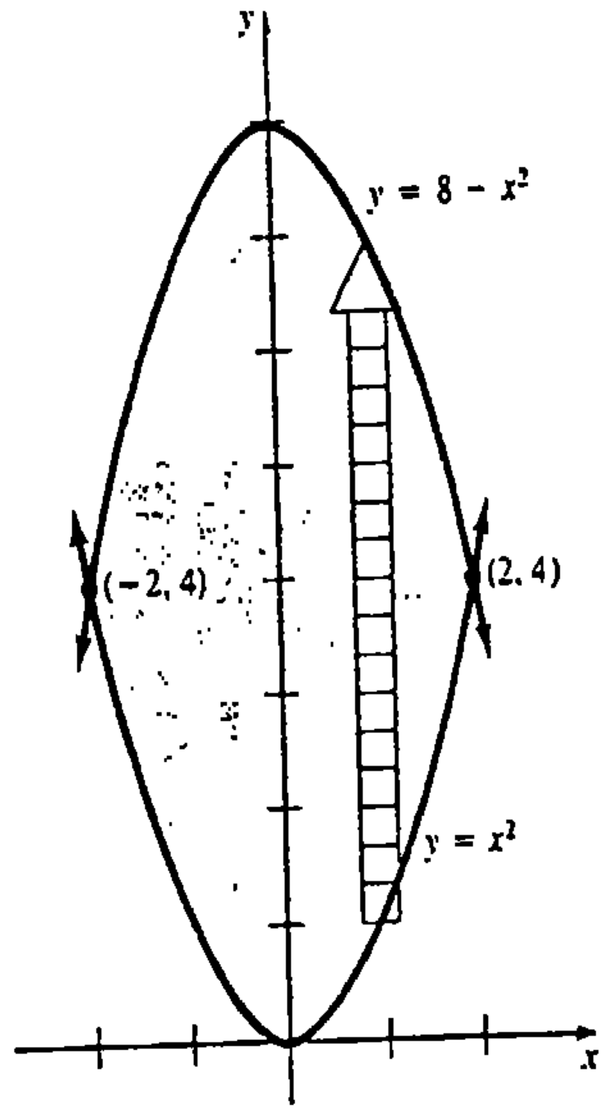


Figura 17.15

Se reconocerá a

$$A = \iint_R dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\, dx = \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)]\, dx$$

como la fórmula del área comprendida entre dos gráficas, descrita en la Sección 6.1.

Ejemplo 3

Aplicar una integral doble para determinar el volumen V del sólido del primer octante limitado por los planos coordenados y las gráficas de $x^2 + y^2 = 1$ y $z = 3 - x - y$.

Solución De la Figura 17.16(a) se ve que el volumen está dado por $V = \iint_R (3 - x - y)\, dA$. Dado que la Figura 17.16(b) muestra que R es de tipo I, en virtud de (17.6) se tiene que

$$V = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (3 - x - y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[3y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_0^1 \left[3\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2\right] dx$$

Sustitución trigonométrica

$$= \left[3 \operatorname{sen}^{-1} x + \frac{3}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}(1 - x^2)^{3/2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^3\right]_0^1$$

$$= \frac{3\pi}{2} - \frac{2}{3} \approx 4.05 \text{ unidades cúbicas.}$$

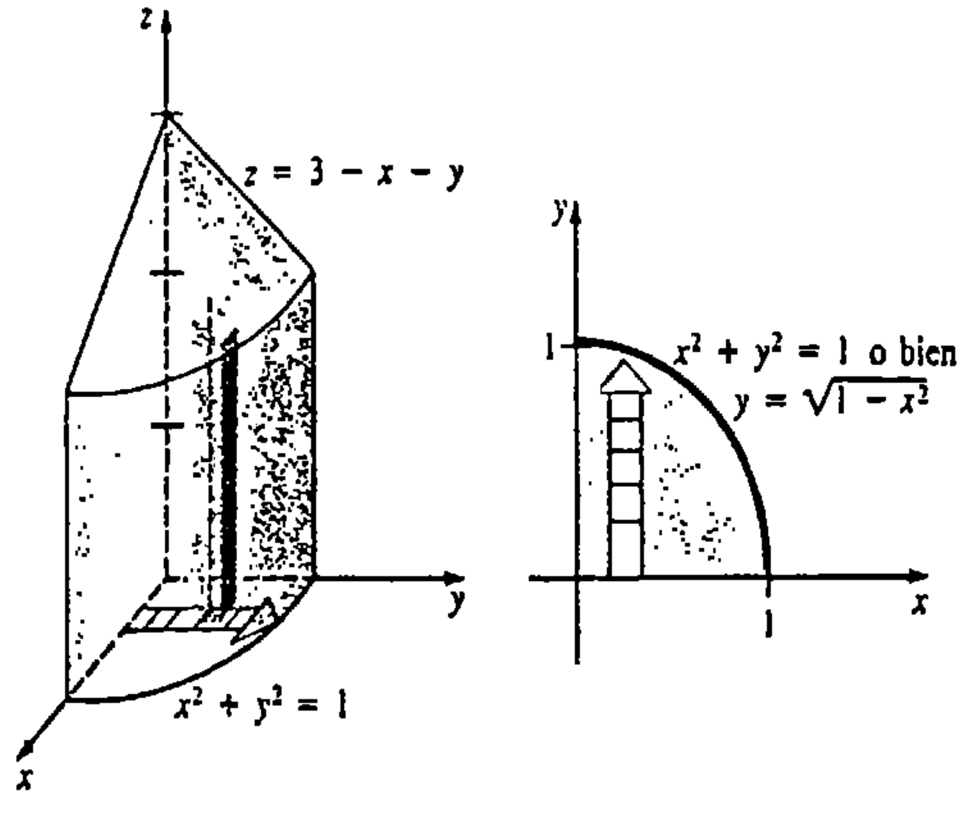


Figura 17.16

La reducción de una integral doble a alguna de las integrales iteradas (17.6) o (17.7), depende de (a) el tipo de la región, y (b) de la propia función. Los dos ejemplos siguientes ilustran cada caso.

Ejemplo 4

Evaluar $\iint_R (x + y)\, dA$ en la región limitada por las gráficas de $x = y^2$ y $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

Solución La región, que se indica en la Figura 17.17(a), se puede expresar como la unión $R = R_1 \cup R_2$ de dos regiones de tipo I. Resolviendo $y^2 = 2y + 3$ se halla que los puntos de intersección de las dos gráficas son $(1, -1)$ y $(9, 3)$. De esta manera, en virtud de (17.6) y del Teorema 17.1(*iii*),

$$\iint_R (x + y)\, dA = \iint_{R_1} (x + y)\, dA + \iint_{R_2} (x + y)\, dA$$

$$= \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} (x + y)\, dy\, dx + \int_1^9 \int_{x/2-3/2}^{\sqrt{x}} (x + y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dx + \int_1^9 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{x/2-3/2}^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^1 2x^{3/2}\,dx + \int_1^9 \left(x^{3/2} + \frac{11}{4}x - \frac{5}{8}x^2 - \frac{9}{8}\right) dx$$

$$= \frac{4}{5}x^{5/2}\Big]_0^1 + \left[\frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{11}{8}x^2 - \frac{5}{24}x^3 - \frac{9}{8}x\right]_1^9 \approx 46.93.$$

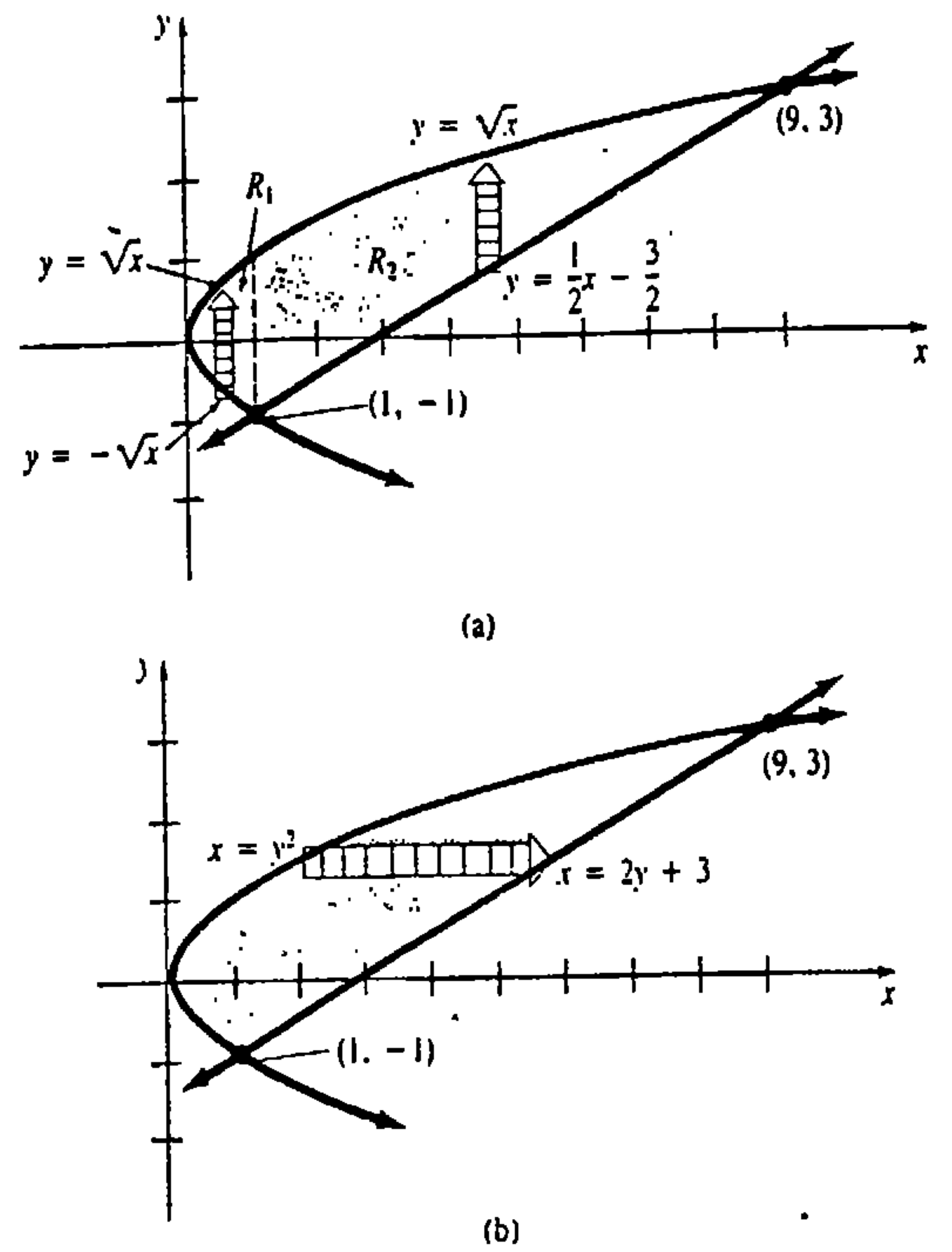


Figura 17.17

Solución alternativa Interpretando la región como una sola región de tipo II, vemos de la Figura 17.17(b) que

$$\iint_R (x+y)\,dA = \int_{-1}^{3}\int_{y^2}^{2y+3} (x+y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-1}^{3} \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_{y^2}^{2y+3} dy$$

$$= \int_{-1}^{3} \left[-\frac{y^4}{2} - y^3 + 4y^2 + 9y + \frac{9}{2}\right] dy$$

$$= \left[-\frac{y^5}{10} - \frac{y^4}{4} + \frac{4}{3}y^3 + \frac{9}{2}y^2 + \frac{9}{2}y\right]_{-1}^{3} \approx 46.93.$$

Obsérvese que la respuesta del ejemplo precedente no representa el volumen del sólido situado arriba de R y debajo del plano $z = x + y$. ¿Por qué no?

Inversión del orden de integración

Un problema puede volverse más fácil cuando el orden de integración se cambia o invierte, como lo ilustra el último ejemplo. Además algunas integrales iteradas que pueden ser imposibles de evaluar empleando un orden de integración podrían evaluarse invirtiendo el orden de integración.

Ejemplo 5

Evaluar $\iint_R xe^{y^2}\,dA$ en la región R del primer cuadrante limitada por las gráficas de $y = x^2$, $x = 0$, $y = 4$.

Solución Cuando se considera como una región de tipo I, de la Figura 17.18(a) tenemos que

$$\iint_R xe^{y^2}\,dA = \int_0^2 \int_{x^2}^4 xe^{y^2}\,dy\,dx.$$

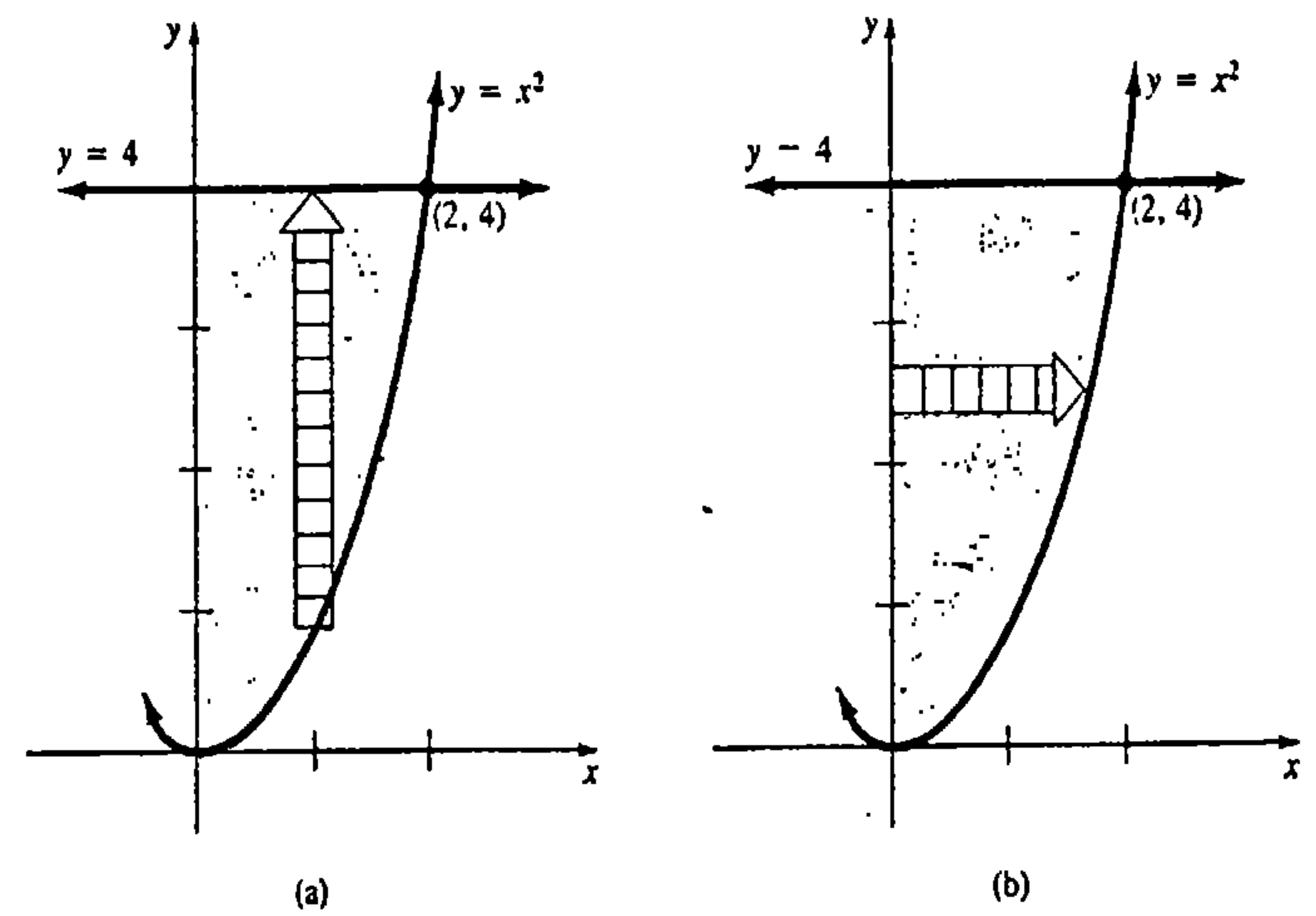


Figura 17.18

Aquí la dificultad es que la integral parcial $\int_{x^2}^4 xe^{y^2}\,dy$ no se puede evaluar, ya que e^{y^2} no tiene antiderivada elemental con respecto a y. Sin embargo, como se ve en la Figura 17.18(b), es posible interpretar la misma región como una de tipo II definida por $0 \le y \le 4$, $0 \le x \le \sqrt{y}$. Por lo tanto, en virtud de (17.7)

$$\iint_R xe^{y^2}\,dA = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} xe^{y^2}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^4 \frac{x^2}{2}e^{y^2}\Big]_0^{\sqrt{y}} dy = \int_0^4 \frac{1}{2}ye^{y^2}\,dy$$

$$= \frac{1}{4}e^{y^2}\Big]_0^4 = \frac{1}{4}(e^{16} - 1).$$

Observación

Se anima al lector a aprovechar las simetrías para minimizar su trabajo cuando determine áreas y volúmenes mediante integración doble. En el caso de volúmenes, asegúrese de que *tanto* la región *como* la superficie considerada sobre ella posean simetrías correspondientes. Véase el Problema 17 de los Ejercicios 17.3.

Ejercicios 17.3

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 1001.

En los Problemas 1-8 evalúe la integral doble en la región R limitada por las gráficas de las ecuaciones indicadas. Elija el orden de integración más conveniente.

1. $\iint_R x^3y^2\, dA,\ y = x,\ y = 0,\ x = 1$

2. $\iint_R (x + 1)\, dA,\ y = x,\ x + y = 4,\ x = 0$

3. $\iint_R (2x + 4y + 1)\, dA,\ y = x^2,\ y = x^3$

4. $\iint_R xe^y\, dA$, R la misma del Problema 1.

5. $\iint_R 2xy\, dA,\ y = x^3,\ y = 8,\ x = 0$

6. $\iint_R \frac{x}{\sqrt{y}}\, dA,\ y = x^2 + 1,\ y = 3 - x^2$

7. $\iint_R \frac{y}{1 + xy}\, dA,\ y = 0,\ y = 1,\ x = 0,\ x = 1$

8. $\iint_R \operatorname{sen}\frac{\pi x}{y}\, dA,\ x = y^2,\ x = 0,\ y = 1,\ y = 2$

En los Problemas 9 y 10 evalúe $\iint_R (x + y)\, dA$, donde R es la región indicada.

9.

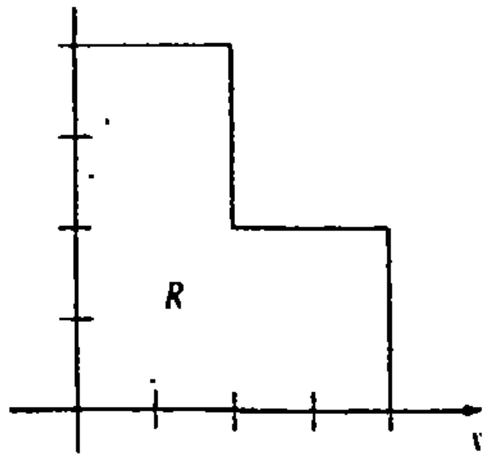


Figura 17.19

10.

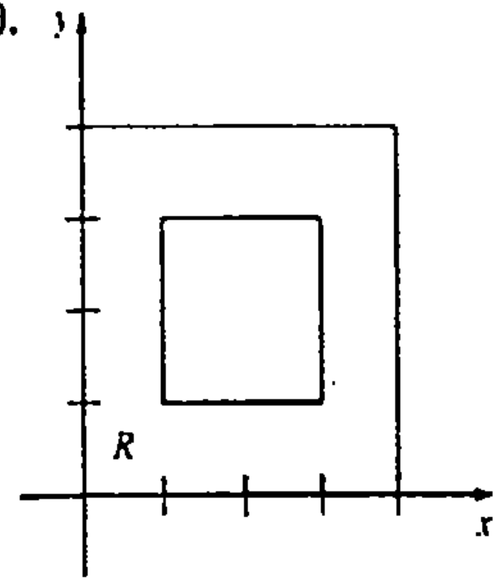


Figura 17.20

En los Problemas 11-16 aplique una integral doble para determinar el área de la región R limitada por las gráficas de las ecuaciones indicadas.

11. $y = -x,\ y = 2x - x^2$

12. $x = y^2,\ x = 2 - y^2$

13. $y = e^x,\ y = \ln x,\ x = 1,\ x = 4$

14. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2,\ x + y = 4$

15. $y = -2x + 3,\ y = x^3,\ x = -2$

16. $y = -x^2 + 3x,\ y = -2x + 4,\ y = 0$

17. Considere el sólido limitado por las gráficas de $x^2 + y^2 = 4$, $z = 4 - y$ y $z = 0$ mostrado en la Figura 17.21. Elija y evalúe la integral correcta que represente el volumen V del sólido.

(a) $4\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4 - y)\, dy\, dx$

(b) $2\int_{-2}^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4 - y)\, dy\, dx$

(c) $2\int_{-2}^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}} (4 - y)\, dx\, dy$

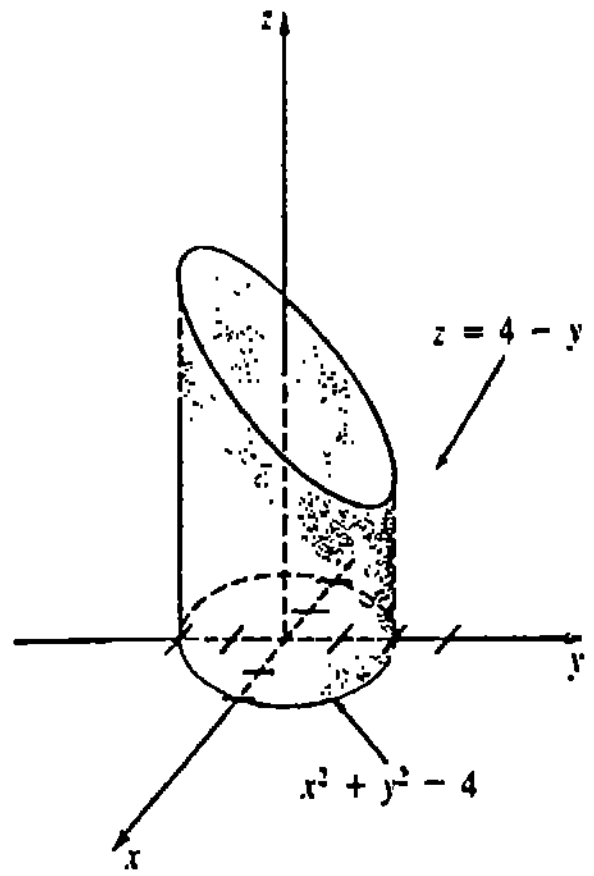


Figura 17.21

18. Considere el sólido limitado por las gráficas de $x^2 + y^2 = 4$ y $y^2 + z^2 = 4$. En la Figura 17.22 se muestra la octava parte del sólido. Elija y evalúe la integral correcta que represente el volumen V del sólido.

(a) $4\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4 - y^2)^{1/2}\, dy\, dx$

(b) $8\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}} (4 - y^2)^{1/2}\, dx\, dy$

(c) $8\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4 - x^2)^{1/2}\, dy\, dx$

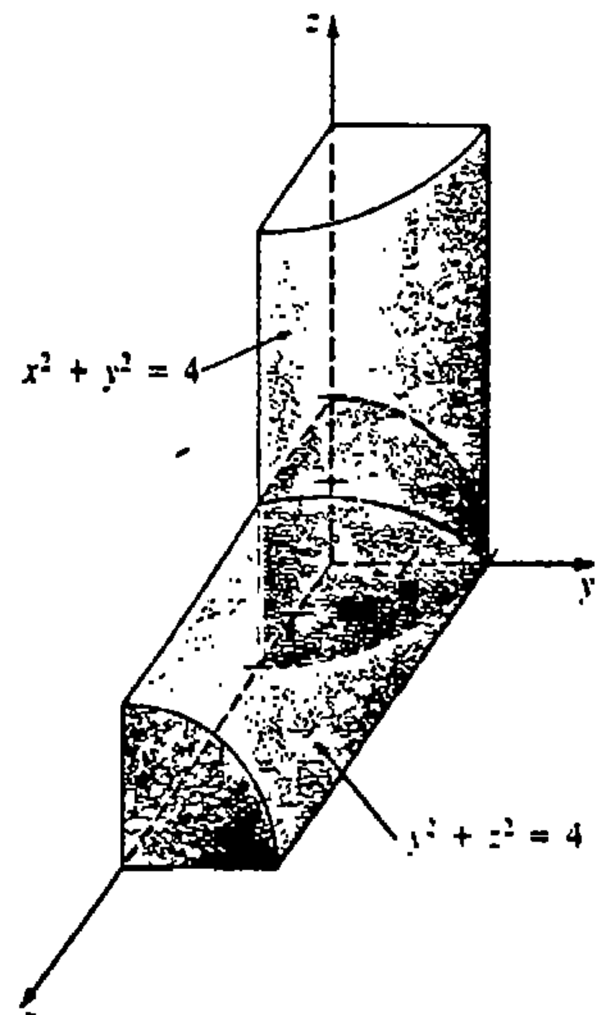


Figura 17.22

En los Problemas 19-28 determine el volumen del sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones indicadas.

19. $2x + y + z = 6,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$, primer octante.

20. $z = 4 - y^2,\ x = 3,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$, primer octante

21. $x^2 + y^2 = 4,\ x - y + 2z = 4,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$, primer octante

22. $y = x^2,\ y + z = 3,\ z = 0$

23. $z = 1 + x^2 + y^2,\ 3x + y = 3,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$, primer octante

24. $z = x + y,\ x^2 + y^2 = 9,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$, primer octante

25. $yz = 6,\ x = 0,\ x = 5,\ y = 1,\ y = 6,\ z = 0$

26. $z = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2,\ z = 0$

27. $z = 4 - y^2,\ x^2 + y^2 = 2x,\ z = 0$

28. $z = 1 - x^2,\ z = 1 - y^2,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$, primer octante

Si $f_2(x, y) \geq f_1(x, y)$ para todo (x, y) de una región R, entonces el volumen del sólido entre las dos superficies y sobre R, es $V = \iint_R [f_2(x, y) - f_1(x, y)]\, dA$. En los Problemas 29 y 32 aplique este resultado para evaluar el volumen comprendido entre las gráficas de las ecuaciones indicadas.

29. $x + 2y + z = 4,\ z = x + y,\ x = 0,\ y = 0$, primer octante

30. $z = x^2 + y^2,\ z = 9$

31. $z = x^2,\ z = -x + 2,\ x = 0,\ y = 0,\ y = 5$, primer octante

32. $2z = 4 - x^2 - y^2,\ z = 2 - y$

En los Problemas 33-38 invierta el orden de integración.

33. $\int_0^2\int_0^{y^2} f(x, y)\, dx\, dy$

34. $\int_{-5}^5\int_0^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y)\, dx\, dy$

35. $\int_0^3\int_1^{e^x} f(x, y)\, dy\, dx$

36. $\displaystyle\int_0^2\int_{y/2}^{3-y} f(x, y)\,dx\,dy$

37. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt[3]{x}} f(x, y)\,dy\,dx + \int_1^2\int_0^{2-x} f(x, y)\,dy\,dx$

38. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx\,dy + \int_1^2\int_0^{\sqrt{2-y}} f(x, y)\,dx\,dy$

En los Problemas 39-42 evalúe la integral iterada que se indica invirtiendo el orden de integración.

39. $\displaystyle\int_0^1\int_x^1 x^2\sqrt{1+y^4}\,dy\,dx$

40. $\displaystyle\int_0^1\int_{2y}^2 e^{-y/x}\,dx\,dy$

41. $\displaystyle\int_0^2\int_{y^2}^4 \cos\sqrt{x^3}\,dx\,dy$

42. $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x\sqrt{1-x^2-y^2}\,dy\,dx$

17.4 Centro de masa y momentos

Láminas con densidad variable — centro de masa

En la Sección 6.12 vimos que si ρ es una densidad superficial (masa por unidad de área) constante, entonces la masa de la lámina que coincide con una región limitada por las gráficas de $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$, es

$$m = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\rho f(x_k^*)\,\Delta x_k = \int_a^b \rho f(x)\,dx. \tag{17.8}$$

Si una lámina correspondiente a una región R tiene una *densidad variable* $\rho(x, y)$, donde ρ es no negativa y continua en R, entonces de manera análoga a (17.8) definimos su **masa** m mediante la integral doble

$$m = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\rho(x_k^*, y_k^*)\,\Delta A_k = \iint_R \rho(x, y)\,dA. \tag{17.9}$$

Al igual que en la Sección 6.12, se definen las coordenadas del **centro de masa** de la lámina mediante

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m}, \tag{17.10}$$

en donde

$$M_y = \iint_R x\rho(x, y)\,dA \quad \text{y} \quad M_x = \iint_R y\rho(x, y)\,dA \tag{17.11}$$

son los **momentos** de la lámina respecto de los ejes y y x, respectivamente. El centro de masa es el punto en donde se considera concentrada toda la masa de la lámina. Si $\rho(x, y)$ = constante, el centro de masa corresponde al centroide de la lámina.

Ejemplo 1

Una lámina tiene la forma de la región del primer cuadrante limitada por las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, entre $x = 0$ y $x = \pi/4$. Ubicar su centro de masa si la densidad es $\rho(x, y) = y$.

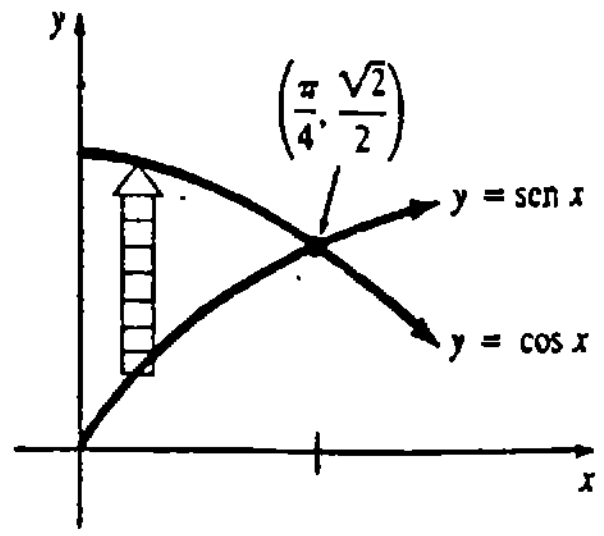


Figura 17.23

Solución De la Figura 17.23 vemos que

$$\begin{aligned} m &= \iint_R y\,dA &&= \int_0^{\pi/4}\int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} y\,dy\,dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{y^2}{2}\Big]_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} dx &&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \cos 2x\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x\Big]_0^{\pi/4} &&= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Fórmula del ángulo doble

Ahora bien,

$$\begin{aligned} M_y &= \iint_R xy\,dA &&= \int_0^{\pi/4}\int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} xy\,dy\,dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}xy^2\Big]_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} dx &&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} x\cos 2x\,dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8}\cos 2x\right]_0^{\pi/4} &&= \frac{\pi - 2}{16}. \end{aligned}$$

Integración por partes

De manera semejante,

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_R y^2\,dA \\ &= \int_0^{\pi/4}\int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} y^2\,dy\,dx = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} (\cos^3 x - \operatorname{sen}^3 x)\,dx \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} [\cos x(1 - \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen} x(1 - \cos^2 x)]\,dx \\ &= \frac{1}{3}\left[\operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + \cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^{\pi/4} = \frac{5\sqrt{2} - 4}{18}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, en virtud de (17.10)

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{(\pi - 2)/16}{1/4} = \frac{\pi - 2}{4} \approx 0.29$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{(5\sqrt{2} - 4)/18}{1/4} = \frac{10\sqrt{2} - 8}{9} \approx 0.68.$$

De esta manera, el centro de masa tiene las coordenadas aproximadas (0.29, 0.68).

Ejemplo 2

Una lámina tiene la forma de la región limitada por la gráfica de $x^2/4 + y^2/16 = 1$, $0 \le y \le 4$, y $y = 0$. Localizar su centro de masa si la densidad es $\rho(x, y) = |x|y$.

Solución De la Figura 17.24 vemos que la región es simétrica con respecto al eje y. Además, puesto que $\rho(-x, y) = \rho(x, y)$, ρ es simétrica con respecto a dicho eje. Dado que la coordenada y del centro de masa debe estar en el eje de simetría, se tiene que $\bar{x} = 0$. Utilizando la simetría,

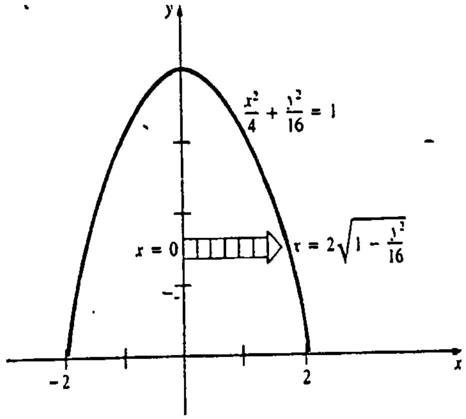


Figura 17.24

$$
\begin{aligned}
m &= \iint_R |x|y \, dA \\
&= 2\int_0^4 \int_0^{2\sqrt{1-y^2/16}} xy \, dx \, dy \\
&= \int_0^4 x^2 y \Big]_0^{2\sqrt{1-y^2/16}} dy \\
&= 4\int_0^4 \left(y - \frac{1}{16}y^3\right) dy \\
&= 4\left[\frac{y^2}{2} - \frac{1}{64}y^4\right]_0^4 = 16.
\end{aligned}
$$

De manera semejante,

$$M_x = \iint_R |x|y^2 \, dA = 2\int_0^4 \int_0^{2\sqrt{1-y^2/16}} xy^2 \, dx \, dy = \frac{512}{15}.$$

De (17.10)

$$\bar{y} = \frac{512/15}{16} = \frac{32}{15}.$$

Las coordenadas del centro de masa son entonces (0, 32/15).

Momentos de inercia

Las integrales M_x y M_y de (17.11) se llaman también **momentos de primer orden** de una lámina respecto de los ejes x y y, respectivamente. Los llamados **momentos de segundo orden**, o **momentos de inercia**, de una lámina con respecto a los ejes x y y, son definidos a su vez por las integrales dobles

$$I_x = \iint_R y^2\rho(x, y) \, dA \quad \text{y} \quad I_y = \iint_R x^2\rho(x, y) \, dA. \tag{17.12}$$

El momento de inercia es el equivalente rotacional de la masa. Para el movimiento de traslación, la energía cinética está dada por $K = \frac{1}{2}mv^2$, donde m es masa y v es velocidad lineal. La energía cinética de una partícula de masa m que gira a una distancia r de un eje es $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(r\omega)^2 = \frac{1}{2}(mr^2)\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$, en donde $I = mr^2$ es su momento de inercia respecto al eje de rotación y ω es la velocidad angular.

Ejemplo 3

Calcular el momento de inercia con respecto al eje y del disco homogéneo delgado de masa m que se muestra en la Figura 17.25.

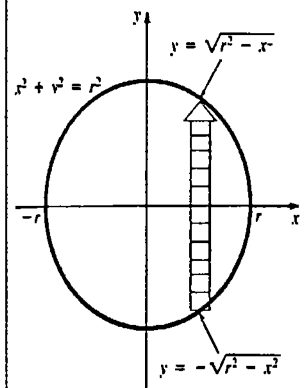


Figura 17.25

Solución Puesto que el disco es homogéneo, su densidad es la constante $\rho(x, y) = m/\pi r^2$. Por lo tanto, de (17.12)

$$
\begin{aligned}
I_y &= \iint_R x^2\left(\frac{m}{\pi r^2}\right) dA \\
&= \frac{m}{\pi r^2}\int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} x^2 \, dy \, dx \\
&= \frac{2m}{\pi r^2}\int_{-r}^{r} x^2\sqrt{r^2 - x^2} \, dx \qquad \boxed{\text{Sustitución trigonométrica}} \\
&= \frac{2mr^2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\theta \, d\theta \\
&= \frac{mr^2}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 2\theta \, d\theta \\
&= \frac{mr^2}{4\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \cos 4\theta) \, d\theta = \frac{1}{4}mr^2.
\end{aligned}
$$

Radio de giro

El **radio de giro** de una lámina de masa m y con momento de inercia I con respecto a un eje, se define como

$$R_g = \sqrt{\frac{I}{m}}. \tag{17.13}$$

Puesto que (17.13) implica que $I = mR_g^2$, el radio de giro se interpreta como la distancia radial a la que la lámina, considerada como una masa puntual, puede girar en torno al eje sin que varíe la inercia rotacional del cuerpo. En el Ejemplo 3 el radio de giro es $R_g = \sqrt{I_y/m} = \sqrt{(mr^2/4)/m} = r/2$.

Observación

Del Ejemplo 2 no se debe concluir que el centro de masa debe hallarse siempre en un eje de simetría de la lámina. Hay que tener presente que la función densidad $\rho(x, y)$ debe ser también simétrica con respecto a ese eje.

Ejercicios 17.4

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 1001.

En los Problemas 1-10 localice el centro de masa de la lámina que tiene la forma y la densidad indicadas.

1. $x = 0, x = 4, y = 0, y = 3; \rho(x, y) = xy$
2. $x = 0, y = 0, 2x + y = 4; \rho(x, y) = x^2$
3. $y = x, x + y = 6, y = 0; \rho(x, y) = 2y$
4. $y = |x|, y = 3; \rho(x, y) = x^2 + y^2$
5. $y = x^2, x = 1, y = 0; \rho(x, y) = x + y$
6. $x = y^2, x = 4; \rho(x, y) = y + 5$
7. $y = 1 - x^2, y = 0$; densidad en un punto P directamente proporcional a la distancia al eje x.
8. $y = \operatorname{sen} x, 0 \leq x \leq \pi, y = 0$; densidad en un punto P directamente proporcional a la distancia al eje y.
9. $y = e^x, x = 0, x = 1, y = 0; \rho(x, y) = y^3$
10. $y = \sqrt{9 - x^2}, y = 0; \rho(x, y) = x^2$

En los Problemas 11-14 encuentre el momento de inercia respecto al eje x de la lámina que tiene la forma y la densidad indicadas.

11. $x = y - y^2, x = 0; \rho(x, y) = 2x$
12. $y = x^2, y = \sqrt{x}; \rho(x, y) = x^2$
13. $y = \cos x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, y = 0; \rho(x, y) = k$ (constante)
14. $y = \sqrt{4 - x^2}, x = 0, y = 0$, primer cuadrante; $\rho(x, y) = y$

En los Problemas 15-18 encuentre el momento de inercia respecto al eje y de la lámina que tiene la forma y la densidad indicadas.

15. $y = x^2, x = 0, y = 4$, primer cuadrante; $\rho(x, y) = y$
16. $y = x^2, y = \sqrt{x}; \rho(x, y) = x^2$
17. $y = x, y = 0, y = 1, x = 3; \rho(x, y) = 4x + 3y$
18. La misma R e igual densidad que en el Problema 7.

En los Problemas 19 y 20 halle el radio de giro respecto al eje indicado de la lámina que tiene la forma y la densidad indicadas.

19. $x = \sqrt{a^2 - y^2}, x = 0; \rho(x, y) = x$; eje y
20. $x + y = a, a > 0, x = 0, y = 0; \rho(x, y) = k$ (constante); eje x

El momento polar de inercia de una lámina con respecto al origen se define como

$$I_0 = \iint_R (x^2 + y^2)\rho(x, y)\, dA = I_x + I_y.$$

En los Problemas 21-24 determine el momento polar de inercia de la lámina que tiene la forma y la densidad indicadas.

21. $x + y = a, a > 0, x = 0, y = 0; \rho(x, y) = k$ (constante)
22. $y = x^2, y = \sqrt{x}; \rho(x, y) = x^2$ (*Sugerencia:* Véanse los Problemas 12 y 16).
23. $x = y^2 + 2, x = 6 - y^2$; densidad en un punto P inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al origen.
24. $y = x, y = 0, y = 3, x = 4; \rho(x, y) = k$ (constante)
25. Calcule el radio de giro en el Problema 21.
26. Demuestre que el momento polar de inercia con respecto al centro de una placa rectangular homogénea delgada de masa m, anchura w, y longitud l, es $I_0 = m/12(l^2 + w^2)$.

17.5 Integrales dobles en coordenadas polares

Supóngase que R es una región limitada por las gráficas de las ecuaciones polares $r = g_1(\theta)$, $r = g_2(\theta)$, y los rayos $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$, y que f es una función de r y θ que es continua en R. Para definir la integral doble de f en R, se emplean rayos y círculos concéntricos para dividir la región en una red de "rectángulos polares" o subregiones R_k. Véanse las Figuras 17.26(a) y 17.26(b). El área ΔA_k de una subregión típica R_k, que se muestra en la Figura 17.26(c), es la diferencia entre las áreas de dos sectores circulares:

$$\begin{aligned}\Delta A_k &= \frac{1}{2}r_{k+1}^2\,\Delta\theta_k - \frac{1}{2}r_k^2\,\Delta\theta_k \\ &= \frac{1}{2}(r_{k+1}^2 - r_k^2)\,\Delta\theta_k = \frac{1}{2}(r_{k+1} + r_k)(r_{k+1} - r_k)\,\Delta\theta_k \\ &= r_k^*\,\Delta r_k\,\Delta\theta_k,\end{aligned}$$

en donde $\Delta r_k = r_{k+1} - r_k$ y r_k^* denota el radio medio $(r_{k+1} + r_k)/2$. Eligiendo (r_k^*, θ_k^*) en cada R_k, la integral doble de f en R es

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(r_k^*, \theta_k^*) r_k^*\,\Delta r_k\,\Delta\theta_k = \iint_R f(r, \theta)\, dA.$$

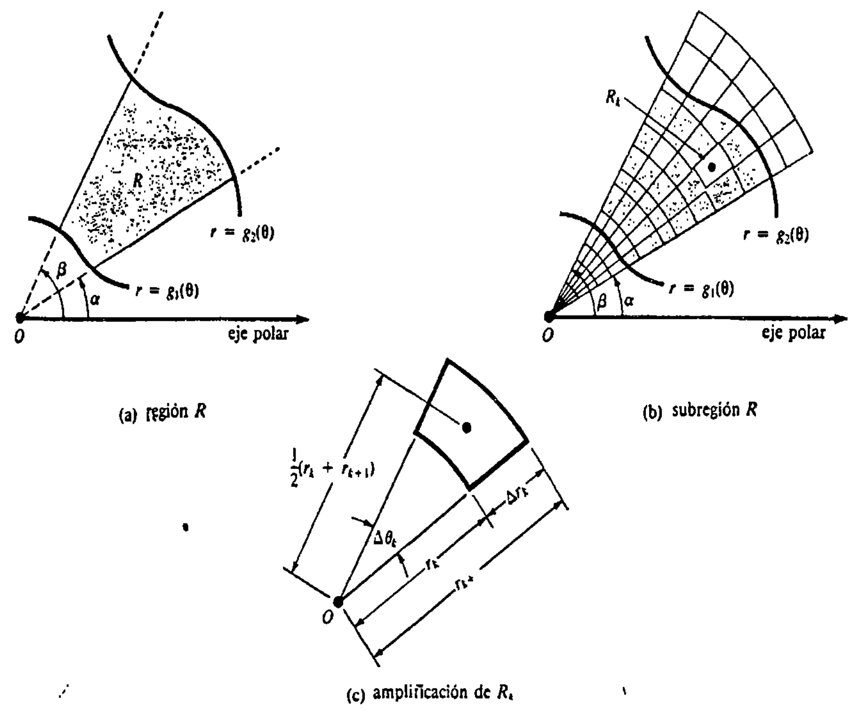


Figura 17.26

La integral doble se evalúa entonces por medio de la integral iterada,

$$\iint_R f(r, \theta)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r, \theta)\, r\, dr\, d\theta. \tag{17.14}$$

Por otra parte, si la región R es como se indica en la Figura 17.27, la integral doble de f en R es entonces

$$\iint_R f(r, \theta)\, dA = \int_a^b \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} f(r, \theta)\, r\, d\theta\, dr. \tag{17.15}$$

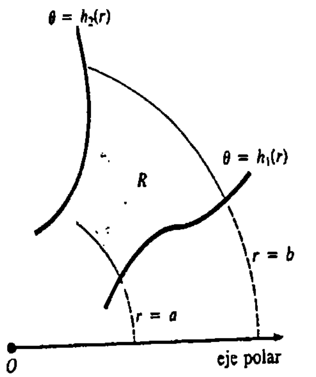


Figura 17.27

Ejemplo 1

Localizar el centro de masa de la lámina que corresponde a la región limitada por un pétalo de la rosa $r = 2\,\text{sen}\, 2\theta$ en el primer cuadrante; la densidad en un punto P de la lámina es directamente proporcional a la distancia al polo.

Solución Haciendo variar θ de 0 a $\pi/2$, se obtiene la gráfica de la Figura 17.28. Ahora bien, $d(0, P) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2} = |r|$. Por lo tanto, $\rho(r, \theta) = k|r|$, en donde k es una constante de proporcionalidad. En virtud de (17.9) de la Sección 17.4,

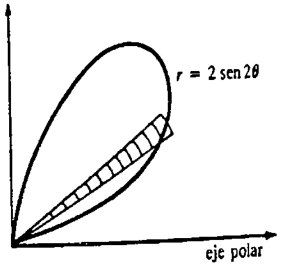


Figura 17.28

$$\begin{aligned} m &= \iint_R k|r|\, dA \\ &= k \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\,\text{sen}\, 2\theta} (r) r\, dr\, d\theta \\ &= k \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2\,\text{sen}\, 2\theta} d\theta \\ &= \frac{8}{3}k \int_0^{\pi/2} \text{sen}^3 2\theta\, d\theta \\ &= \frac{8}{3}k \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 2\theta)\,\text{sen}\, 2\theta\, d\theta \\ &= \frac{8}{3}k\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{6}\cos^3 2\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{16}{9}k. \end{aligned}$$

Puesto que $x = r\cos\theta$, puede escribirse

$$M_y = k \iint_R x|r|\, dA$$

como

$$\begin{aligned} M_y &= k \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\,\text{sen}\, 2\theta} r^3 \cos\theta\, dr\, d\theta \\ &= k \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4}\cos\theta\right]_0^{2\,\text{sen}\, 2\theta} d\theta \\ &= 4k \int_0^{\pi/2} \text{sen}^4 2\theta \cos\theta\, d\theta \\ &= 4k \int_0^{\pi/2} 16\,\text{sen}^4\theta \cos^4\theta \cos\theta\, d\theta \qquad \boxed{\text{Fórmula del ángulo doble}} \\ &= 64k \int_0^{\pi/2} \text{sen}^4\theta \cos^5\theta\, d\theta \\ &= 64k \int_0^{\pi/2} \text{sen}^4\theta(1 - \text{sen}^2\theta)^2 \cos\theta\, d\theta \\ &= 64k \int_0^{\pi/2} (\text{sen}^4\theta - 2\,\text{sen}^6\theta + \text{sen}^8\theta)\cos\theta\, d\theta \\ &= 64k\left[\frac{1}{5}\text{sen}^5\theta - \frac{2}{7}\text{sen}^7\theta + \frac{1}{9}\text{sen}^9\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{512}{315}k. \end{aligned}$$

De manera semejante, empleando $x = r\,\text{sen}\,\theta$, se tiene

$$M_x = k \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\,\text{sen}\, 2\theta} r^2 \text{sen}\,\theta\, dr\, d\theta = \frac{512}{315}k.^*$$

En este caso las coordenadas rectangulares de centro de masa son

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{512k/315}{16k/9} = \frac{32}{35}.$$

Ejemplo 2

Obtener el volumen del sólido que se encuentra bajo el hemisferio $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y arriba de la región limitada por la gráfica de la circunferencia $r = \text{sen}\,\theta$.

Solución De la Figura 17.29,

$$V = \iint_R \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dA.$$

En coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, y entonces la ecuación del hemisferio se convierte en $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} = \sqrt{1 - r^2}$. Utilizando la simetría,

* Podríamos haber argumentado que $M_x = M_y$ y por lo tanto $\bar{x} = \bar{y}$, puesto que la lámina y la función densidad son simétricas con respecto al rayo $\theta = \pi/4$.

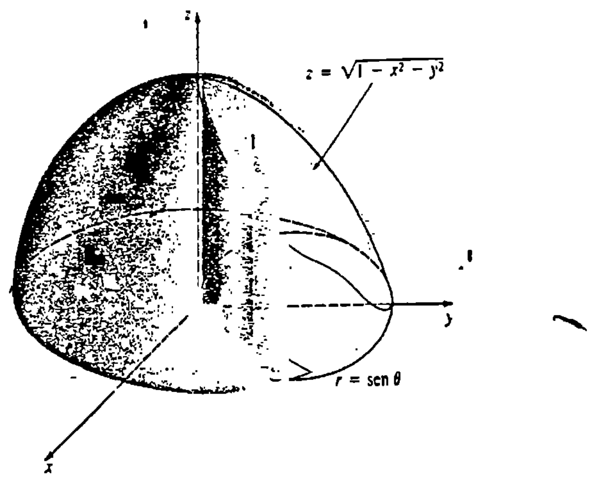


Figura 17.29

$$V = \iint_R \sqrt{1 - r^2}\, dA$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{\operatorname{sen}\theta} (1 - r^2)^{1/2} r\, dr\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{3}(1 - r^2)^{3/2}\right]_0^{\operatorname{sen}\theta} d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}[1 - (1 - \operatorname{sen}^2\theta)^{3/2}]\, d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}[1 - (\cos^2\theta)^{3/2}]\, d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}[1 - \cos^3\theta]\, d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}[1 - (1 - \operatorname{sen}^2\theta)\cos\theta]\, d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\left[\theta - \operatorname{sen}\theta + \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{3} - \frac{4}{9} \approx 0.60 \text{ unidades cúbicas.}$$

Área

Obsérvese que si $f(r, \theta) = 1$ en (17.14), entonces el área de la región R de la Figura 17.26(a) está dada por

$$A = \iint_R dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} r\, dr\, d\theta.$$

La misma observación es válida para (17.15) y la Figura 17.27 cuando $f(r, \theta) = 1$.

Observación

Se invita al lector a reconsiderar el Ejemplo 2. La gráfica de la circunferencia $r = \operatorname{sen}\theta$ se obtiene haciendo variar θ de 0 a π. Sin embargo, efectúese la integración iterada

$$V = \int_0^{\pi}\int_0^{\operatorname{sen}\theta} (1 - r^2)^{1/2} r\, dr\, d\theta$$

y véase si obtiene la respuesta *incorrecta* $\pi/3$. ¿Qué es lo que está mal?

Ejercicios 17.5

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 1001.

En los Problemas 1-4 aplique una integral doble en coordenadas polares para determinar el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones polares indicadas.

1. $r = 3 + 3\operatorname{sen}\theta$
2. $r = 2 + \cos\theta$
3. $r = 2\operatorname{sen}\theta$, $r = 1$, área común
4. $r = 8\operatorname{sen}4\theta$, un pétalo

En los Problemas 5-10 determine el volumen del sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones indicadas.

5. Un pétalo de $r = 5\cos 3\theta$, $z = 0$, $z = 4$
6. $x^2 + y^2 = 4$, $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $z = 0$
7. Entre $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 9$, $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, $z = 0$
8. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 = 25$, $z = 0$
9. $r = 1 + \cos\theta$, $z = y$, $z = 0$, primer octante
10. $r = \cos\theta$, $z = 2 + x^2 + y^2$, $z = 0$

En los Problemas 11-16 localice el centro de masa de la lámina que tiene la forma y la densidad indicadas.

11. $r = 1$, $r = 3$, $x = 0$, $y = 0$, primer cuadrante; $\rho(r, \theta) = k$(constante)
12. $r = \cos\theta$; densidad en un punto P directamente proporcional a la distancia al polo
13. $y = \sqrt{3}x$, $y = 0$, $x = 3$; $\rho(r, \theta) = r^2$
14. $r = 4\cos 2\theta$, primero y segundo cuadrantes; $\rho(r, \theta) = k$ (constante).
15. Fuera de $r = 2$ y dentro de $r = 2 + 2\cos\theta$, $y = 0$, primer cuadrante; densidad en un punto P inversamente proporcional a la distancia al polo.
16. $r = 2 + 2\cos\theta$, $y = 0$, primero y segundo cuadrantes; $\rho(r, \theta) = k$ (constante)

En los Problemas 17-20 evalúe el momento de inercia indicado de la lámina que tiene la forma y la densidad dadas.

17. $r = a$; $\rho(r, \theta) = k$ (constante); I_x
18. $r = a$; $\rho(r, \theta) = \dfrac{1}{1 + r^4}$; I_x
19. Fuera de $r = a$ y dentro de $r = 2a\cos\theta$; densidad en un punto P inversamente proporcional al cubo de la distancia al polo; I_y
20. Fuera de $r = 1$ y dentro de $r = 2\operatorname{sen}2\theta$, primer cuadrante; $\rho(r, \theta) = \sec^2\theta$; I_y

En los Problemas 21-24 determine el **momento polar de inercia** $I_0 = \iint_R r^2\rho(r, \theta)\, dA = I_x + I_y$ de la lámina que tiene la forma y la densidad indicadas.

21. $r = a$; $\rho(r, \theta) = k$(constante) (*Sugerencia:* Utilice el Problema 17 y el hecho de que $I_x = I_y$.)
22. $r = \theta$, $0 \le \theta \le \pi$, $y = 0$; densidad en un punto P proporcional a la distancia al polo.
23. $r\theta = 1$, $\frac{1}{3} \le \theta \le 1$, $r = 1$, $r = 3$, $y = 0$; densidad en un punto P inversamente proporcional a la distancia al polo. (*Sugerencia:* Integre primero con respecto a θ.)
24. $r = 2a\cos\theta$; $\rho(r, \theta) = k$(constante)

En los Problemas 25-30 evalúe la integral iterada indicada cambiando a coordenadas polares.

25. $\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$

26. $\int_{0}^{\sqrt{2}/2}\int_{y}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$

27. $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$

28. $\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\sqrt{\pi-x^2}} \operatorname{sen}(x^2+y^2)\,dy\,dx$

29. $\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dy\,dx + \int_{1}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dy\,dx$

30. $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{2y-y^2}} (1-x^2-y^2)\,dx\,dy$

17.6 Área de superficies

En el plano se vio que la longitud de un arco de la gráfica de $y = f(x)$ de $x = a$ a $x = b$ estaba dada por

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx. \tag{17.16}$$

En tres dimensiones, el problema que es la contraparte al de la longitud de arco, es el de evaluar el área $A(S)$ de la porción de la superficie S determinada por la función diferenciable $z = f(x, y)$ en una región R del plano xy.

Supongamos que se forma una partición P de R empleando rectas paralelas a los ejes x y y, como se muestra en la Figura 17.30(a). Entonces P consiste de n elementos rectangulares R_k de área $\Delta A_k = \Delta x_k\,\Delta y_k$ que se encuentran totalmente dentro de R. Sea $(x_k, y_k, 0)$ un punto cualquiera de un R_k. Como se ve en la Figura 17.30(a), proyectando los lados de R_k hacia arriba, se determinan dos cantidades: una porción S_k de la superficie, y una porción T_k de un plano tangente en $(x_k, y_k, f(x_k, y_k))$. Parece razonable suponer que cuando R_k es pequeño, el área ΔT_k de T_k es aproximadamente igual al área ΔS_k de S_k.

Para evaluar el área de T_k elíjase $(x_k, y_k, 0)$ en una esquina de R_k, como se muestra en la Figura 17.30(b). Los vectores indicados **u** y **v**, que forman dos de los lados de T_k, están dados por

$$\mathbf{u} = \Delta x_k\mathbf{i} + f_x(x_k, y_k)\,\Delta x_k\mathbf{k}$$
$$\mathbf{v} = \Delta y_k\mathbf{j} + f_y(x_k, y_k)\,\Delta y_k\mathbf{k},$$

en donde $f_x(x_k, y_k)$ y $f_y(x_k, y_k)$ son las pendientes de las rectas que contienen a **u** y **v**, respectivamente. Ahora, en virtud de (14.35) de la Sección 14.4, se sabe que

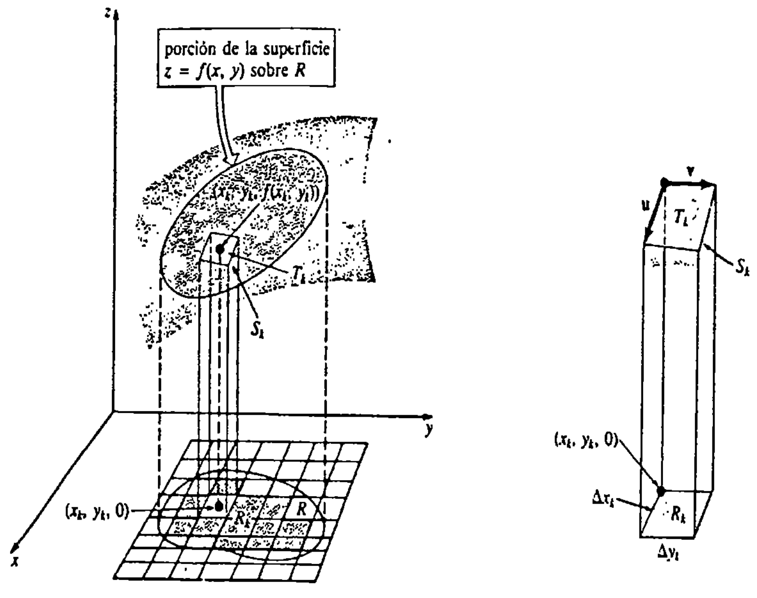
$$\Delta T_k = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|,$$

en donde

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x_k & 0 & f_x(x_k, y_k)\,\Delta x_k \\ 0 & \Delta y & f_y(x_k, y_k)\,\Delta y_k \end{vmatrix}$$
$$= [-f_x(x_k, y_k)\mathbf{i} - f_y(x_k, y_k)\mathbf{j} + \mathbf{k}]\,\Delta x_k\,\Delta y_k.$$

En otras palabras,

$$\Delta T_k = \sqrt{[f_x(x_k, y_k)]^2 + [f_y(x_k, y_k)]^2 + 1}\,\Delta x_k\,\Delta y_k.$$



(a) (b) amplificación de R_k, S_k y T_k

Figura 17.30

En consecuencia, el área A es aproximadamente

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f_x(x_k, y_k)]^2 + [f_y(x_k, y_k)]^2}\,\Delta x_k\,\Delta y_k.$$

Si se toma el límite de la sumatoria anterior cuando $\|P\| \to 0$, ello induce a pensar que el **área de la superficie sobre** R está dada por

$$A(S) = \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\,dA. \tag{17.17}$$

Nota: Se podría haber conjeturado la forma de (17.17) extendiendo de manera natural a dos variables la estructura de una variable de (17.16).

Ejemplo 1

Halle el área de superficie de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está arriba del plano xy y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = b^2$, $0 < b < a$.

Solución Si definimos $z = f(x, y)$ mediante $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, entonces

$$f_x(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

y de esta manera $1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 = \dfrac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}$.

Por lo tanto, (17.17) es

$$A(S) = \iint_R \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dA,$$

en donde R está indicada en la Figura 17.31. Para evaluar esta integral doble, se cambiará a coordenadas polares:

$$\begin{aligned} A(S) &= a \int_0^{2\pi} \int_0^b (a^2 - r^2)^{-1/2} r\, dr\, d\theta \\ &= a \int_0^{2\pi} \left[-(a^2 - r^2)^{1/2}\right]_0^b d\theta \\ &= a(a - \sqrt{a^2 - b^2}) \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2\pi a(a - \sqrt{a^2 - b^2}) \text{ unidades cuadradas.} \end{aligned}$$

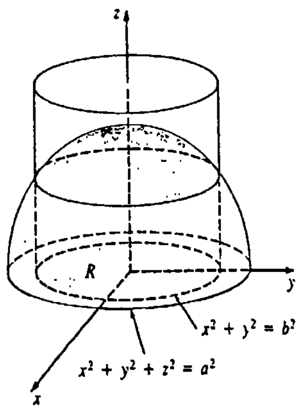


Figura 17.31

Ejemplo 2

Determine el área de las porciones de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que están dentro del cilindro $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

Solución El área de la superficie que está arriba y abajo del plano xy, se muestra sombreada en la Figura 17.32. Al igual que en el Ejemplo 1, (17.17) se reduce a

$$A(S) = 2 \iint_R \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\, dA,$$

en donde R es la región limitada por la gráfica de $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. El factor 2 adicional proviene de la simetría. Ahora bien, en coordenadas polares la frontera de R es simplemente $r = 2\cos\theta$. De esta manera,

$$\begin{aligned} A(S) &= 4 \int_0^{\pi} \int_0^{2\cos\theta} (4 - r^2)^{-1/2} r\, dr\, d\theta \\ &= 8(\pi - 2) \approx 9.13 \text{ unidades cuadradas.} \end{aligned}$$

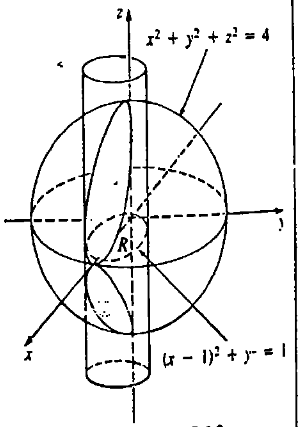


Figura 17.32

Diferencial de área

La función $dS = \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA$ se llama **diferencial de área**. Utilizaremos esta función en la Sección 18.3.

Ejercicios 17.6

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 1001.

1. Determine el área de la porción del plano $2x + 3y + 4z = 12$ que está limitada por los planos coordenados en el primer octante.

2. Obtenga el área de la porción del plano $2x + 3y + 4z = 12$ que está arriba de la región del primer cuadrante limitada por la gráfica de $r = \operatorname{sen} 2\theta$.

3. Determine el área de la porción del cilindro $x^2 + z^2 = 16$ situada arriba de la región del primer cuadrante limitada por las gráficas de $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 5$.

4. Calcule el área de la porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está abajo del plano $z = 2$.

5. Calcule el área de la porción del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ que está arriba del plano xy.

6. Obtenga el área de las porciones de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ ubicadas dentro del cono $z^2 = x^2 + y^2$.

7. Calcule el área de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ que está arriba de la región del primer cuadrante limitada por las gráficas de $x = 0$, $y = 0$, $4x^2 + y^2 = 25$. (*Sugerencia:* Integre primero con respecto a x.)

8. Determine el área de la porción de la gráfica de $z = x^2 - y^2$ que está en el primer octante dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

9. Halle el área de las porciones de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que están dentro del cilindro $x^2 + y^2 = ay$.

10. Obtener el área de las porciones del cono $z^2 = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ que están dentro del cilindro $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

11. Calcule el área de las porciones del cilindro $y^2 + z^2 = a^2$ que están dentro del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. (*Sugerencia:* Véase la Figura 17.22.)

12. Aplique el resultado del Ejemplo 1 para demostrar que el área de una esfera de radio a es $4\pi a^2$. (*Sugerencia:* Considere un límite cuando $b \to a$.)

13. Determine el área de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está comprendida entre $y = c_1$ y $y = c_2$, $0 < c_1 < c_2 < a$. (*Sugerencia:* Utilice coordenadas polares en el plano xz.)

14. Demuestre que el área encontrada en el Problema 13 es igual al área de la superficie del cilindro $x^2 + z^2 = a^2$, entre $y = c_1$ y $y = c_2$.

17.7 Integral triple

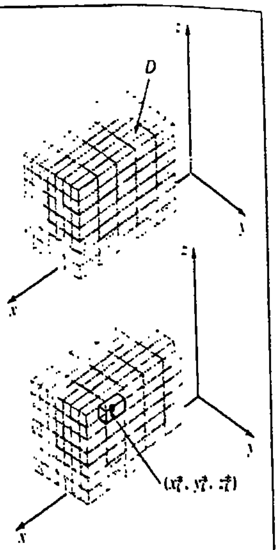
Los pasos que conducen a la definición de la *integral definida tridimensional* o **integral triple** $\iiint_D F(x, y, z)\, dV$ son totalmente semejantes a los de la integral doble.

DEFINICIÓN 17.2

Sea F una función de tres variables definida en una región cerrada D del espacio. Entonces la **integral triple de F en D** está dada por

$$\iiint_D F(x, y, z)\, dV = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} F(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\, \Delta V_k. \tag{17.18}$$

□

$w = F(x, y, z)$	
1. Considere que F está definida en una región D cerrada y acotada del espacio. 2. Por medio de una red tridimensional de planos verticales y horizontales paralelos a los planos coordenados, forme una partición P de D en n subregiones (cajas) D_k de volúmenes ΔV_k contenidas totalmente en D. 3. Sea $\|P\|$ la norma de la partición, o sea la longitud de la diagonal mayor de los D_k. 4. Elija un punto (x_k^*, y_k^*, z_k^*) en cada subregión D_k. 5. Forme la sumatoria $$\sum_{k=1}^{n} F(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\,\Delta V_k.$$	

Como en nuestros anteriores análisis acerca de la integral, cuando F es continua en D, el límite (17.18) existe; esto es, F es integrable en D.

Evaluación por integrales iteradas

Si la región D está limitada por arriba por la gráfica de $z = f_2(x, y)$, y por abajo por la gráfica de $z = f_1(x, y)$, entonces puede demostrarse que la integral triple (17.18) se puede expresar como una integral doble de la integral parcial $\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} F(x, y, z)\,dz$. Esto es,

$$\iiint_D F(x, y, z)\,dV = \iint_R \left[\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} F(x, y, z)\,dz\right] dA,$$

en donde R es la proyección ortogonal de D sobre el plano xy. Si en particular R es una región de tipo I, entonces, como se muestra en la Figura 17.33, la integral triple de F en D puede escribirse como una integral iterada:

$$\iiint_D F(x, y, z)\,dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} F(x, y, z)\,dz\,dy\,dx. \qquad (17.19)$$

Para evaluar la integral iterada (17.19), se empieza evaluando la integral parcial

$$\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} F(x, y, z)\,dz$$

en la cual *tanto x como y* se mantienen fijas.

En una integral doble hay solamente dos órdenes posibles de integración, $dy\,dx$ y $dx\,dy$. La integral triple (17.19) ilustra uno de *seis* posibles órdenes de integración:

$$dz\,dy\,dx \quad dz\,dx\,dy \quad dy\,dx\,dz$$
$$dx\,dy\,dz \quad dx\,dz\,dy \quad dy\,dz\,dx.$$

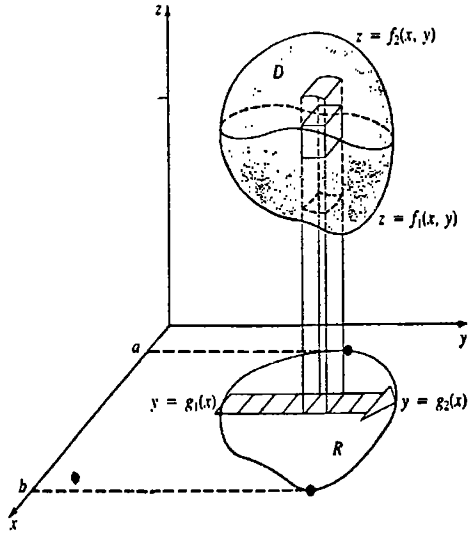


Figura 17.33

Las dos últimas diferenciales indican el plano coordenado en el que está situada la región R. Por ejemplo, la integral iterada correspondiente al orden de integración $dx\,dz\,dy$ debe tener la forma

$$\int_c^d \int_{k_1(y)}^{k_2(y)} \int_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} F(x, y, z)\,dx\,dz\,dy.$$

La interpretación geométrica de esta integral y la región R de integración en el plano yz se muestran en la Figura 17.34.

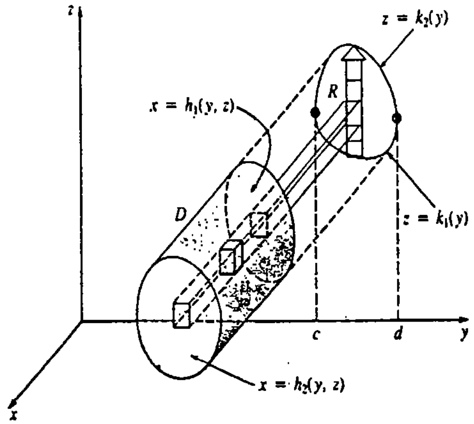


Figura 17.34

Aplicaciones

En seguida se da una lista de las aplicaciones clásicas de la integral triple.

1. Si $F(x, y, z) = 1$, entonces

$$V = \iiint_D dV$$

es el **volumen** del sólido D.

2. Si $\rho(x, y, z)$ es densidad, entonces

$$m = \iiint_D \rho(x, y, z)\, dV$$

es la **masa** del sólido D.

3. Las integrales

$$M_{xy} = \iiint_D z\rho(x, y, z)\, dV, \qquad M_{xz} = \iiint_D y\rho(x, y, z)\, dV,$$

$$M_{yz} = \iiint_D x\rho(x, y, z)\, dV$$

son los **momentos de primer orden**, o momentos, simplemente, del sólido con respecto a los planos coordenados indicados por los subíndices. Las coordenadas del **centro de masa** de D están dadas por

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \qquad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Si $\rho(x, y, z)$ = constante, el centro de masa se llama **centroide** del sólido.

4. Las integrales

$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV, \qquad I_y = \iiint_D (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV,$$

$$I_z = \iiint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dV$$

son los **momentos de segundo orden**, o **momentos de inercia** de D con respecto a los ejes de coordenadas indicados por los subíndices.

5. Al igual que en la Sección 17.4, si I es un momento de inercia del sólido con respecto a un eje dado, entonces el **radio de giro** es

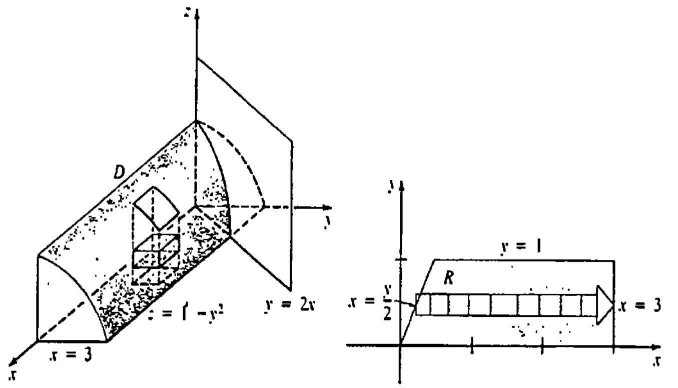
$$R_g = \sqrt{\frac{I}{m}}.$$

Ejemplo 1

Obtener el volumen del sólido del primer octante limitado por las gráficas de $z = 1 - y^2$, $y = 2x$, y $x = 3$.

Solución Como se indica en la Figura 17.35(a), la primera integración con respecto a z será de 0 a $1 - y^2$. Además, en la Figura 17.35(b) se ve que la proyección del sólido D en el plano xy es una región de tipo II. Por lo tanto, si integramos con respecto a x de $y/2$ a 3. La última integración es con respecto a y de 0 a 1. De manera que

$$\begin{aligned} V = \iiint_D dV &= \int_0^1 \int_{y/2}^3 \int_0^{1-y^2} dz\, dx\, dy \\ &= \int_0^1 \int_{y/2}^3 (1 - y^2)\, dx\, dy = \int_0^1 \Big[x - xy^2\Big]_{y/2}^3 dy \\ &= \int_0^1 \left(3 - 3y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y^3\right) dy = \left[3y - y^3 - \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{8}y^4\right]_0^1 \\ &= \frac{15}{8} \text{ unidades cúbicas.} \end{aligned}$$



(a) (b)

Figura 17.35

Debe observarse que el volumen del ejemplo anterior se podría haber obtenido muy fácilmente mediante una integral doble.

Ejemplo 2

Obtener la integral triple que dé el volumen del sólido que tiene la forma determinada por el cono $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ y el paraboloide $x = 6 - y^2 - z^2$.

Solución Sustituyendo, $y^2 + z^2 = x^2$ en $y^2 + z^2 = 6 - x$, resulta que $x^2 = 6 - x$, o bien, $(x + 3)(x - 2) = 0$. De esta manera, las dos superficies se cortan en el plano $x = 2$. La proyección de la curva de intersección sobre el plano yz es $y^2 + z^2 = 4$. Utilizando la simetría y con referencia las Figuras 17.36(a) y 17.36(b), se ve que

$$V = \iiint_D dV = 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{y^2+z^2}}^{6-y^2-z^2} dx\, dz\, dy.$$

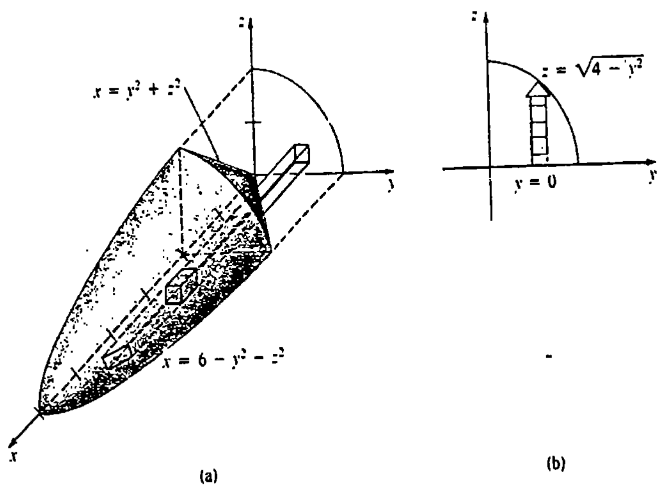


Figura 17.36

Aunque la evaluación de esta integral es sencilla, ciertamente es "confusa". Se regresará a esta integral en la siguiente sección después de haber examinado integrales triples en otros sistemas de coordenadas.

Ejemplo 3

Un sólido tiene la forma determinada por las gráficas del cilindro $|x| + |y| = 1$* y los planos $z = 2$ y $z = 4$. Ubicar su centro de masa si la densidad está dada por $\rho(x, y, z) = kz$, en donde k es constante.

Solución En la Figura 17.37(a) se muestran el sólido y su proyección ortogonal sobre una región R de tipo I en el plano xy. Puesto que la función densidad $\rho(x, y, z) = kz$ es simétrica en R, concluimos que el centro de masa está en el eje z; esto es, solamente es necesario calcular m y M_{xy}. Por simetría de la Figura 17.37(b) resulta que

$$\begin{aligned} m &= 4\int_0^1\int_0^{1-x}\int_2^4 kz\,dz\,dy\,dx \\ &= 4k\int_0^1\int_0^{1-x}\frac{z^2}{2}\Big]_2^4 dy\,dx \\ &= 24k\int_0^1\int_0^{1-x} dy\,dx \\ &= 24k\int_0^1 (1-x)\,dx \\ &= 24k\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 12k, \end{aligned}$$

* Esto es equivalente a cuatro rectas: $x + y = 1, x > 0, y > 0$; $x - y = 1, x > 0, y < 0$; etcétera.

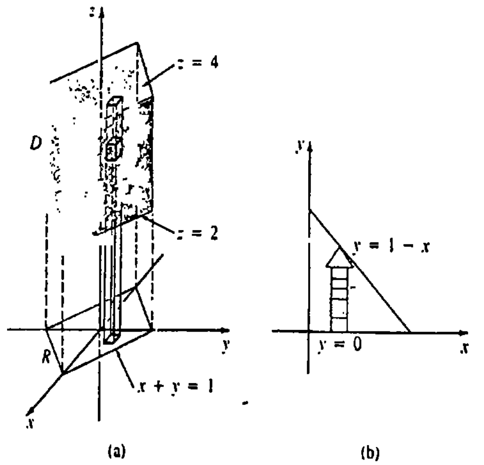


Figura 17.37

y

$$\begin{aligned} M_{xy} &= 4\int_0^1\int_0^{1-x}\int_2^4 kz^2\,dz\,dy\,dx &&= 4k\int_0^1\int_0^{1-x}\frac{z^3}{3}\Big]_2^4 dy\,dx \\ &= \frac{224}{3}k\int_0^1\int_0^{1-x} dy\,dx &&= \frac{112}{3}k. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{112k/3}{12k} = \frac{28}{9}.$$

Entonces las coordenadas del centro de masa son $(0, 0, \frac{28}{9})$.

Ejemplo 4

Obtener el momento de inercia del sólido del Ejemplo 3 con respecto al eje z. Determinar el radio de giro.

Solución $I_z = \iiint_D (x^2 + y^2)\,kz\,dV$. Utilizando de nuevo la simetría, se puede escribir esta integral triple como

$$\begin{aligned} I_z &= 4k\int_0^1\int_0^{1-x}\int_2^4 (x^2+y^2)z\,dz\,dy\,dx \\ &= 4k\int_0^1\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\frac{z^2}{2}\Big]_2^4 dy\,dx \\ &= 24k\int_0^1\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\,dy\,dx \\ &= 24k\int_0^1\left[x^2y + \frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x} dx \end{aligned}$$

$$= 24k\int_0^1 \left[x^2 - x^3 + \frac{1}{3}(1-x)^3\right] dx$$

$$= 24k\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{12}(1-x)^4\right]_0^1 = 4k.$$

Como $m = 12k$, resulta que el radio de giro es

$$R_g = \sqrt{\frac{I_z}{m}} = \sqrt{\frac{4k}{12k}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ejemplo 5

Cambiar el orden de integración de

$$\int_0^6\int_0^{4-2x/3}\int_0^{3-x/2-3y/4} F(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

a $dy\, dx\, dz$.

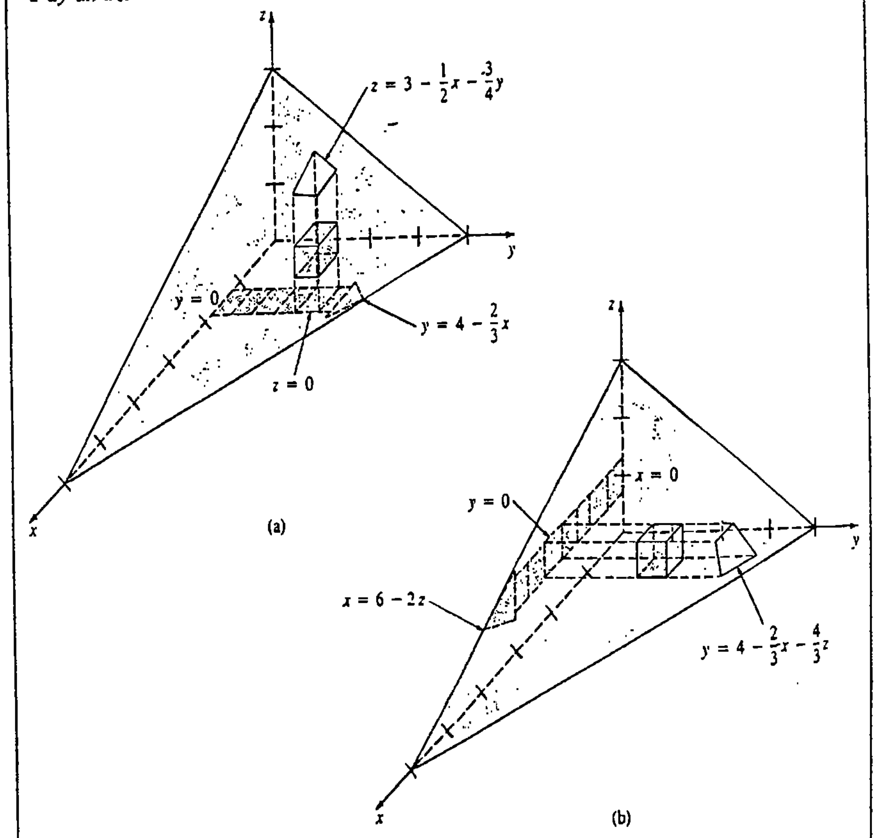


Figura 17.38

Solución La región D es el sólido del primer octante limitado por los tres planos coordenados y el plano $2x + 3y + 4z = 12$. Refiriéndonos a la Figura 17.38(b) y a la tabla siguiente, se concluye que

Orden de Integración	*Primera Integración*	*Segunda Integración*	*Tercera Integración*
$dz\, dy\, dx$	0 a $3 - x/2 - 3y/4$	0 a $4 - 2x/3$	0 a 6
$dy\, dx\, dz$	0 a $4 - 2x/3 - 4z/3$	0 a $6 - 2z$	0 a 3

$$\int_0^6\int_0^{4-2x/3}\int_0^{3-x/2-3y/4} F(x, y, z)\, dz\, dy\, dx = \int_0^3\int_0^{6-2z}\int_0^{4-2x/3-4z/3} F(x, y, z)\, dy\, dx\, dz.$$

Ejercicios 17.7

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 1001.

En los Problemas 1-6 evalúe la integral iterada indicada.

1. $\int_2^4\int_{-2}^2\int_{-1}^1 (x + y + z)\, dx\, dy\, dz$

2. $\int_1^3\int_1^x\int_2^{xy} 24xy\, dz\, dy\, dx$

3. $\int_0^6\int_0^{6-x}\int_0^{6-x-z} dy\, dz\, dx$

4. $\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{\sqrt{y}} 4x^2z^3\, dz\, dy\, dx$

5. $\int_0^{\pi/2}\int_0^{y^2}\int_0^{y} \cos\left(\frac{x}{y}\right) dz\, dx\, dy$

6. $\int_0^{\sqrt{2}}\int_{\sqrt{y}}^2\int_0^{e^{x^2}} x\, dz\, dx\, dy$

7. Evalúe $\iiint_D z\, dV$, en donde D es la región del primer octante limitada por las gráficas de $y = x$, $y = x - 2$, $y = 1$, $y = 3$, $z = 0$, $z = 5$.

8. Evalúe $\iiint_D (x^2 + y^2)\, dV$, en donde D es la región limitada por las gráficas de $y = x^2$, $z = 4 - y$, $z = 0$.

En los Problemas 9 y 10 cambie el orden de integración indicado, a cada uno de los otros cinco órdenes.

9. $\int_0^2\int_0^{4-2y}\int_{x+2y}^4 F(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$

10. $\int_0^2\int_0^{\sqrt{36-9x^2}/2}\int_1^3 F(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

En los Problemas 11 y 12 considere el sólido mostrado en la figura. Establezca, pero no evalúe, las integrales que dan el volumen V del sólido empleando los órdenes de integración indicados.

11. (a) $dz\, dy\, dx$ (b) $dx\, dz\, dy$ (c) $dy\, dx\, dz$

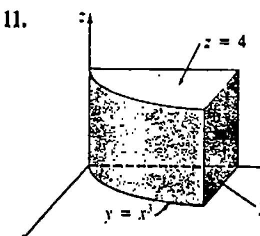


Figura 17.39

12. (a) $dx\, dz\, dy$ (b) $dy\, dx\, dz$ (c) $dz\, dx\, dy$ (*Sugerencia:* Esto requerirá dos integrales.)

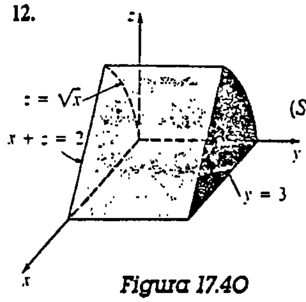


Figura 17.40

En los Problemas 13-16 represente la región D cuyo volumen V esté dado por la integral iterada.

13. $\int_0^4 \int_0^3 \int_0^{2-2x/3} dx\,dz\,dy$

14. $4\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_4^{\sqrt{25-x^2-y^2}} dz\,dx\,dy$

15. $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^5 dz\,dy\,dx$

16. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^4 dz\,dy\,dx$

En los Problemas 17-20 determine el volumen del sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones indicadas.

17. $x = y^2,\ 4 - x = y^2,\ z = 0,\ z = 3$

18. $x^2 + y^2 = 4,\ z = x + y$, los planos coordenados, primer octante.

19. $y = x^2 + z^2,\ y = 8 - x^2 - z^2$

20. $x = 2,\ y = x,\ y = 0,\ z = x^2 + y^2,\ z = 0$

21. Localice el centro de masa del sólido mostrado en la Figura 17.39 si la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia al plano xy.

22. Obtenga el centroide del sólido de la Figura 17.40, si la densidad es constante.

23. Ubique el centro de masa del sólido limitado por las gráficas de $x^2 + z^2 = 4,\ y = 0$, y $y = 3$ si la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia del plano xz.

24. Determine el centro de masa del sólido limitado por las gráficas de $y = x^2,\ y = x,\ z = y + 2,\ z = 0$, si la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia al plano xy.

En los Problemas 25 y 26 establezca, pero no evalúe, las integrales iteradas que dan la masa del sólido que tiene la forma y la densidad indicadas.

25. $x^2 + y^2 = 1,\ z + y = 8,\ z - 2y = 2;$ $\rho(x, y, z) = x + y + 4$

26. $x^2 + y^2 - z^2 = 1,\ z = -1,\ z = 2;\ \rho(x, y, z) = z^2$ (*Sugerencia:* No utilice $dz\,dy\,dx$.)

27. Calcule el momento de inercia del sólido de la Figura 17.39 con respecto al eje y, si la densidad es como se indica en el Problema 21. Evalúe el radio de giro.

28. Determine el momento de inercia del sólido de la Figura 17.40 con respecto al eje x, si la densidad es constante. Halle el radio de giro.

29. Obtenga el momento de inercia con respecto al eje z del sólido del primer octante, que está limitado por los planos coordenados y la gráfica de $x + y + z = 1$, si la densidad es constante.

30. Evalúe el momento de inercia con respecto al eje y del sólido limitado por las gráficas de $z = y,\ z = 4 - y,\ z = 1,\ z = 0,\ x = 2,\ x = 0$, si la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia al plano yz.

En los Problemas 31 y 32 establezca, pero no evalúe, la integral iterada que proporcione el momento de inercia indicado del sólido que tiene la forma y la densidad dadas.

31. $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z = 5$; densidad en un punto P directamente proporcional a la distancia al origen; I_z.

32. $x^2 + z^2 = 1,\ y^2 + z^2 = 1$; densidad en un punto P directamente proporcional a la distancia al plano yz; I_y.

17.8 Integrales triples en otros sistemas de coordenadas

Dependiendo de la geometría de una región en el espacio tridimensional, la evaluación de una integral triple en esa región puede ser más fácil utilizando un nuevo sistema de coordenadas.

17.8.1 Coordenadas cilíndricas

El sistema de **coordenadas cilíndricas** combina la descripción polar de un punto en el plano con la descripción rectangular de la componente z de un punto en el espacio. Como se ve en la Figura 17.41(a), las coordenadas cilíndricas de un punto P se denotan por la tríada ordenada (r, θ, z). La palabra "cilíndricas" proviene del hecho de que un punto P en el espacio es determinado por la intersección de los planos z = constante, θ = constante, con un cilindro r = constante. Véase la Figura 17.41(b).

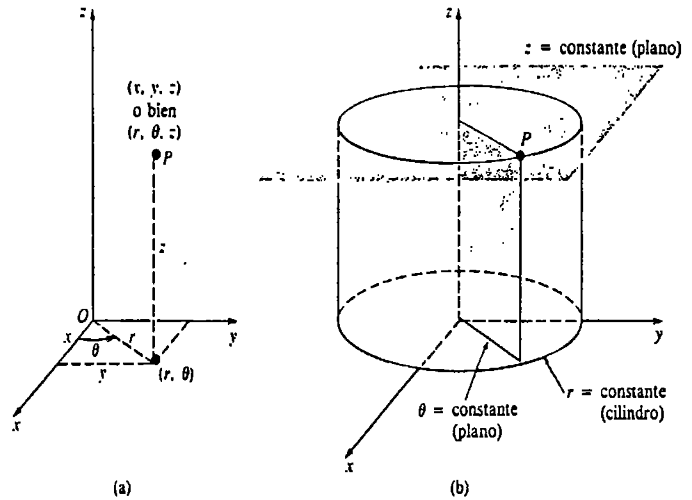


Figura 17.41

Conversión de coordenadas cilíndricas a coordenadas rectangulares

De la Figura 17.41(a) vemos también que las coordenadas rectangulares (x, y, z) de un punto se pueden obtener a partir de las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) por medio de

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta, \qquad z = z. \tag{17.20}$$

Ejemplo 1

Convierta $(8, \pi/3, 7)$ de coordenadas cilíndricas a coordenadas rectangulares.

Solución En virtud de (17.20),

$$x = 8\cos\frac{\pi}{3} = 8\left(\frac{1}{2}\right) = 4$$
$$y = 8\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\sqrt{3}$$
$$z = 7.$$

De esta manera, $(8, \pi/3, 7)$ equivale a $(4, 4\sqrt{3}, 7)$ en coordenadas rectangulares.

Conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas

Para expresar coordenadas rectangulares (x, y, z) como coordenadas cilíndricas, se emplean

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}, \qquad z = z. \tag{17.21}$$

Integrales triples en coordenadas cilíndricas

Recordemos de la Sección 17.5 que el área de un "rectángulo polar" es $\Delta A = r^* \Delta r\, \Delta\theta$, en donde r^* es el radio medio. De la Figura 17.42(a) se ve que el volumen de una "cuña cilíndrica" es simplemente

$$\Delta V = (\text{área de la base}) \cdot (\text{altura}) = r^* \Delta r\, \Delta\theta\, \Delta z.$$

De esta manera, si $F(r, \theta, z)$ es una función continua en la región D, como la que se muestra en la Figura 17.42(b), entonces la integral triple de F en D está dada por

$$\iiint_D F(r, \theta, z)\, dV = \iint_R \left[\int_{f_1(r,\theta)}^{f_2(r,\theta)} F(r, \theta, z)\, dz\right] dA$$
$$= \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{f_1(r,\theta)}^{f_2(r,\theta)} F(r, \theta, z) r\, dz\, dr\, d\theta.$$

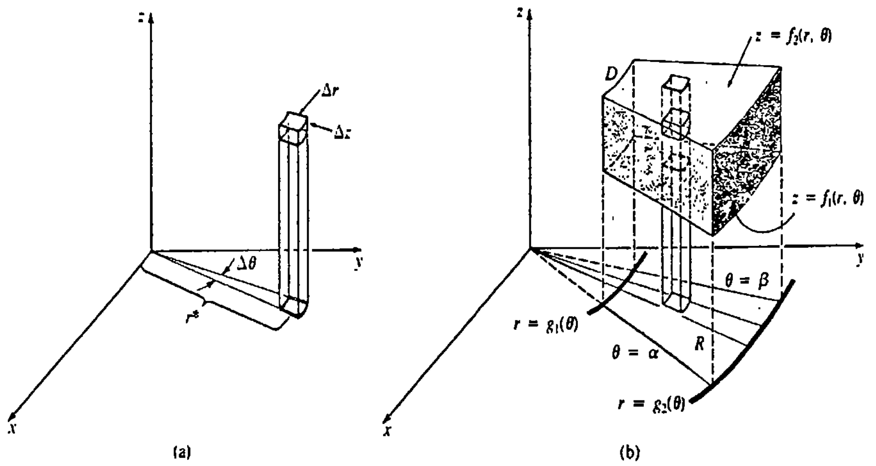


Figura 17.42

Ejemplo 2

Un sólido en el primer octante tiene la forma determinada por la gráfica del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y los planos $z = 1$, $x = 0$, $y = 0$. Obtenga el centro de masa si la densidad está dada por $\rho(r, \theta, z) = r$.

Solución En vista de (17.21), la ecuación del cono es $z = r$. Por lo tanto, de la Figura 17.43 resulta que

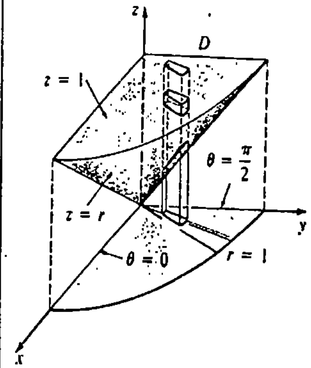


Figura 17.43

$$m = \iiint_D r\, dV$$
$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_r^1 r(r\, dz\, dr\, d\theta)$$
$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^2 z\Big]_r^1 dr\, d\theta$$
$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 (r^2 - r^3)\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{24},$$

$$M_{xy} = \iiint_D zr\, dV$$
$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_r^1 zr^2\, dz\, dr\, d\theta$$
$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \frac{z^2}{2}r^2\Big]_r^1 dr\, d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 (r^2 - r^4)\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{30},$$

$$M_{xz} = \iiint_D r^2 \operatorname{sen}\theta\, dV \qquad (y = r \operatorname{sen}\theta)$$
$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_r^1 r^3 \operatorname{sen}\theta\, dz\, dr\, d\theta$$
$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^3 z \operatorname{sen}\theta\Big]_r^1 dr\, d\theta$$
$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 (r^3 - r^4)\operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta = \frac{1}{20},$$

$$M_{yz} = \iiint_D r^2 \cos\theta\, dV \qquad (x = r\cos\theta)$$
$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_r^1 r^3 \cos\theta\, dz\, dr\, d\theta = \frac{1}{20}.$$

Por lo tanto,

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{1/20}{\pi/24} = \frac{6}{5\pi} \approx 0.38$$
$$\bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{1/20}{\pi/24} = \frac{6}{5\pi} \approx 0.38$$
$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\pi/30}{\pi/24} = \frac{4}{5} = 0.8.$$

El centro de masa tiene las coordenadas aproximadas (0.38, 0.38, 0.8).

Ejemplo 3

Evaluar la integral de volumen

$$V = 4\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{y^2+z^2}}^{6-y^2-z^2} dx\, dz\, dy$$

del Ejemplo 2 de la Sección 17.7.

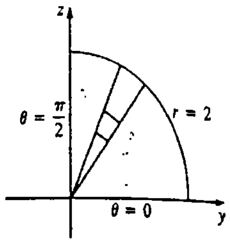


Figura 17.44

Solución Si introducimos coordenadas polares en el plano yz mediante $y = r\cos\theta$, $z = r\,\text{sen}\,\theta$, entonces las coordenadas cilíndricas de un punto en el espacio de tres dimensiones son (r, θ, x). La analogía polar de la Figura 17.36(b) se muestra en la Figura 17.44. Ahora bien, como $y^2 + z^2 = r^2$,

$$x = \sqrt{y^2+z^2} = r \quad \text{y} \quad x = 6 - y^2 - z^2 = 6 - r^2.$$

Por lo tanto, la integral se convierte en

$$\begin{aligned} V &= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^2\int_r^{6-r^2} r\, dx\, dr\, d\theta \\ &= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^2 rx\Big]_r^{6-r^2} dr\, d\theta \\ &= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^2 (6r - r^3 - r^2)\, dr\, d\theta \\ &= 4\int_0^{\pi/2}\left[3r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3}\right]_0^2 d\theta \\ &= \frac{64}{3}\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{32\pi}{3} \text{ unidades cúbicas.} \end{aligned}$$

17.8.2 Coordenadas esféricas

Como se ve en la Figura 17.45(a), las **coordenadas esféricas** de un punto P se definen mediante la tríada ordenada (ρ, ϕ, θ), en donde ρ es la distancia del origen a P, ϕ es el ángulo entre el eje z positivo y el vector $\overrightarrow{OP}$, y θ es el ángulo medido del eje x positivo al vector proyección $\overrightarrow{OQ}$ de $\overrightarrow{OP}$.* La Figura 17.45(b) muestra que un punto P en el espacio se determina por la intersección de un cono ϕ = constante, un plano θ = constante, y una esfera ρ = constante; de lo cual se origina el nombre coordenadas "esféricas".

Conversión de coordenadas esféricas a coordenadas rectangulares

Para transformar de coordenadas esféricas (ρ, ϕ, θ) a coordenadas rectangulares (x, y, z), se observa de la Figura 17.45(a) que

$$x = |\overrightarrow{OQ}|\cos\theta, \qquad y = |\overrightarrow{OQ}|\,\text{sen}\,\theta, \qquad z = |\overrightarrow{OP}|\cos\phi.$$

* θ es el mismo ángulo de las coordenadas polares y cilíndricas.

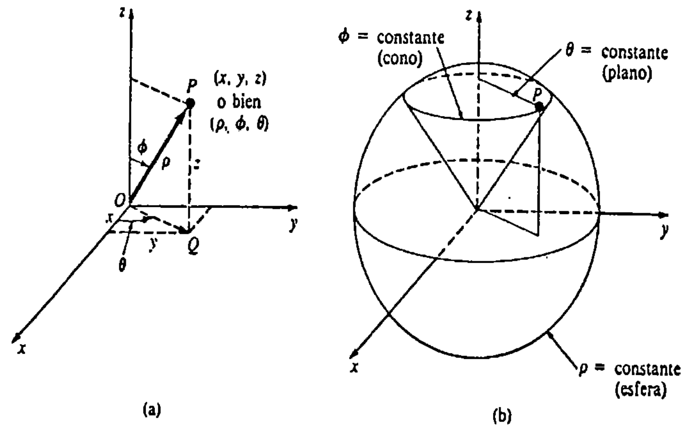


Figura 17.45

Puesto que $|\overrightarrow{OQ}| = \rho\,\text{sen}\,\phi$ y $|\overrightarrow{OP}| = \rho$, las ecuaciones precedentes se convierten en

$$x = \rho\,\text{sen}\,\phi\cos\theta, \qquad y = \rho\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta, \qquad z = \rho\cos\phi. \tag{17.22}$$

Se acostumbra tomar $\rho \geq 0$ y $0 \leq \phi \leq \pi$.

Ejemplo 4

Convierta $(6, \pi/4, \pi/3)$ de coordenadas esféricas a coordenadas rectangulares y cilíndricas.

Solución Identificando $\rho = 6$, $\phi = \pi/4$ y $\theta = \pi/3$, de (17.22) resulta que las coordenadas rectangulares del punto están dadas por

$$\begin{aligned} x &= 6\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} = 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y &= 6\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\,\text{sen}\frac{\pi}{3} = 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{6}}{2} \\ z &= 6\cos\frac{\pi}{4} = 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Ahora bien, de (17.21) vemos que $r^2 = (3\sqrt{2}/2)^2 + (3\sqrt{6}/2)^2 = 18$, y entonces $r = 3\sqrt{2}$. De esta manera, las coordenadas cilíndricas del punto son (r, θ, z), o sea $(3\sqrt{2}, \pi/3, 3\sqrt{2})$.

Conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas

Para transformar de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas, se emplea

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}, \qquad \cos\phi = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \tag{17.23}$$

Integrales triples en coordenadas esféricas

Como se ve en la Figura 17.46, el volumen de una "cuña esférica" está dado por la aproximación

$$\Delta V \approx \rho^2 \operatorname{sen} \phi\, \Delta\rho\, \Delta\phi\, \Delta\theta.$$

De esta manera, en una integral triple de una función de coordenadas esféricas continua $F(\rho, \phi, \theta)$, la diferencial de volumen dV está dada por

$$dV = \rho^2 \operatorname{sen} \phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta.$$

Una integral triple típica en coordenadas esféricas tiene la forma

$$\iiint_D F(\rho, \phi, \theta)\, dV = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{f_1(\phi,\theta)}^{f_2(\phi,\theta)} F(\rho, \phi, \theta) \rho^2 \operatorname{sen} \phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta.$$

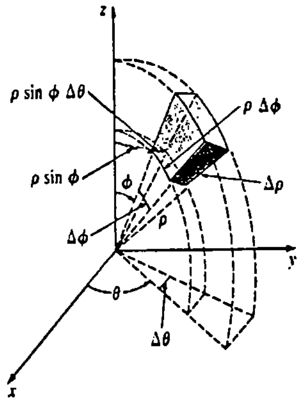


Figura 17.46

Ejemplo 5

Utilizar coordenadas esféricas para evaluar el volumen del sólido del Ejemplo 2.

Solución Aplicando (17.22).

$$z = 1 \quad \text{se convierte en} \quad \rho = \sec \phi$$

y

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{se convierte en} \quad \phi = \pi/4.$$

Como se indica en la Figura 17.47,

$$V = \iiint_D dV$$

expresado como una integral iterada, es

$$V = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sec\phi} \rho^2 \operatorname{sen} \phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta.$$

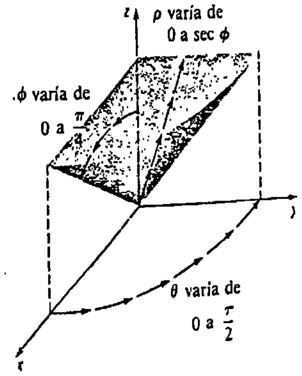


Figura 17.47

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \frac{\rho^3}{3}\Big]_0^{\sec\phi} \operatorname{sen} \phi\, d\phi\, d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \sec^3\phi \operatorname{sen} \phi\, d\phi\, d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \tan \phi \sec^2\phi\, d\phi\, d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \tan^2\phi \Big]_0^{\pi/4} d\theta \\ &= \frac{1}{6} \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{12} \text{ unidades cúbicas.} \end{aligned}$$

Ejemplo 6

Obtener el momento de inercia con respecto al eje z del sólido homogéneo comprendido entre las esferas

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 + z^2 = b^2, \qquad a < b.$$

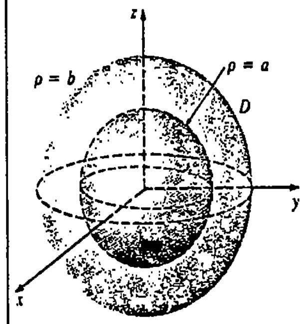


Figura 17.48

Solución Si $\delta(\rho, \theta, \phi) = k$ es la densidad,* entonces

$$I_z = \iiint_D (x^2 + y^2) k\, dV.$$

De (17.22) encontramos $x^2 + y^2 = \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi$, y de la primera ecuación de (17.23) se ve que las ecuaciones de las esferas son simplemente $\rho = a$ y $\rho = b$. Véase la Figura 17.48. Consecuentemente, en coordenadas esféricas la integral anterior se convierte en

$$\begin{aligned} I_z &= k \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_a^b \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi (\rho^2 \operatorname{sen} \phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta) \\ &= k \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_a^b \rho^4 \operatorname{sen}^3 \phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta \\ &= k \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\rho^5}{5} \operatorname{sen}^3\phi \Big]_a^b d\phi\, d\theta \\ &= \frac{k}{5}(b^5 - a^5) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (1 - \cos^2\phi) \operatorname{sen} \phi\, d\phi\, d\theta \\ &= \frac{k}{5}(b^5 - a^5) \int_0^{2\pi} \Big[-\cos \phi + \frac{1}{3}\cos^3\phi\Big]_0^{\pi} d\theta \\ &= \frac{4k}{15}(b^5 - a^5) \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{8\pi k}{15}(b^5 - a^5). \end{aligned}$$

* Debe emplearse aquí un símbolo diferente para denotar la densidad, a fin de evitar confusión con el símbolo ρ de las coordenadas esféricas.

Observación

Las coordenadas esféricas se utilizan en la navegación. Si consideramos a la Tierra como una esfera de radio fijo con centro en el origen, entonces un punto P puede ser localizado especificando dos ángulos θ y ϕ. Cuando ϕ se mantiene constante la curva resultante se llama **círculo paralelo**, como se muestra en la Figura 17.49. Los valores fijos de θ dan por resultado curvas llamadas **círculos máximos**. Se llama **meridiano** a la mitad de uno de estos círculos máximos que une los polos norte y sur. La intersección de un paralelo y un meridiano da la posición de un punto P. Si $0° \le \phi \le 180°$ y $-180° \le \theta \le 180°$, los ángulos $90° - \phi$ y θ se denominan **latitud y longitud geográficas** de P, respectivamente. El llamado **primer meridiano** corresponde a una longitud de $0°$. La latitud del ecuador es de $0°$; las latitudes de los polos norte y sur son, respectivamente, $+90°$ (o $90°$ norte) y $-90°$ (o $90°$ sur).

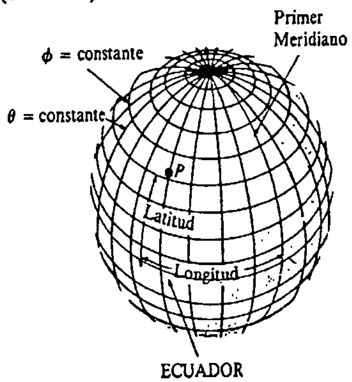


Figura 17.49

Ejercicios 17.8

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 1002.

[17.8.1]
En los Problemas 1-4 convierta a coordenadas rectangulares el punto dado en coordenadas cilíndricas.

1. $\left(10, \frac{3\pi}{4}, 5\right)$ 2. $\left(2, \frac{5\pi}{6}, -3\right)$

3. $\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}, -4\right)$ 4. $\left(4, \frac{7\pi}{4}, 0\right)$

En los Problemas 5-8 convierta a coordenadas cilíndricas el punto dado en coordenadas rectangulares.

5. $(1, -1, -9)$ 6. $(2\sqrt{3}, 2, 17)$

7. $(-\sqrt{2}, \sqrt{6}, 2)$ 8. $(1, 2, 7)$

En los Problemas 9-12 convierta a coordenadas cilíndricas la ecuación indicada.

9. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ 10. $x + y - z = 16$

11. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 12. $x^2 + z^2 = 16$

En los Problemas 13-16 convierta a coordenadas rectangulares la ecuación indicada.

13. $z = r^2$ 14. $z = 2r \operatorname{sen} \theta$

15. $r = 5 \sec \theta$ 16. $\theta = \pi/6$

En los problemas restantes utilice integrales triples y coordenadas cilíndricas.

En los Problemas 17-20 determine el volumen del sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones indicadas.

17. $x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 + z^2 = 16, z = 0$

18. $z = 10 - x^2 - y^2, z = 1$

19. $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 25, z = 0$

20. $y = x^2 + z^2, 2y = x^2 + z^2 + 4$

21. Obtenga el centroide del sólido homogéneo limitado por el hemisferio $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ y el plano $z = 0$.

22. Localice el centro de masa del sólido limitado por las gráficas de $y^2 + z^2 = 16$, $x = 0$, y $x = 5$, si la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia al plano yz.

23. Obtenga el momento de inercia con respecto al eje z del sólido limitado por arriba por el hemisferio $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, y por abajo por el plano $z = 2$, si la densidad en un punto P es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al eje z.

24. Determine el momento de inercia con respecto al eje x del sólido limitado por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 1$, si la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia al eje z.

[17.8.2]
En los Problemas 25-28 convierta el punto dado en coordenadas esféricas (a) a coordenadas rectangulares, y (b) a coordenadas cilíndricas.

25. $\left(\frac{2}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$ 26. $\left(5, \frac{5\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right)$

27. $\left(8, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ 28. $\left(\frac{1}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$

En los Problemas 29-32 convierta a coordenadas esféricas los puntos dados en coordenadas rectangulares.

29. $(-5, -5, 0)$ 30. $(1, -\sqrt{3}, 1)$

31. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$ 32. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$

En los Problemas 33-36 convierta a coordenadas esféricas la ecuación indicada.

33. $x^2 + y^2 + z^2 = 64$ 34. $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$

35. $z^2 = 3x^2 + 3y^2$ 36. $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$

En los Problemas 37-40 convierta a coordenadas rectangulares la ecuación indicada.

37. $\rho = 10$ 38. $\phi = \pi/3$

39. $\rho = 2 \sec \phi$ 40. $\rho \operatorname{sen}^2\phi = \cos \phi$

En los problemas restantes utilice integrales triples y coordenadas esféricas.

En los Problemas 41-44 encuentre el volumen del sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones indicadas.

41. $z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 + z^2 = 9$

42. $x^2 + y^2 + z^2 = 4, y = x, y = \sqrt{3}x, z = 0$, primer octante

43. $z^2 = 3x^2 + 3y^2, x = 0, y = 0, z = 2$, primer octante.

44. Dentro de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y fuera de $z^2 = x^2 + y^2$.

45. Ubique el centroide del sólido homogéneo limitado por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$.

46. Halle el centro de masa del sólido limitado por el hemisferio $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y el plano $z = 0$, si la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia al plano xy.

47. Calcule la masa del sólido limitado por arriba por el hemisferio $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$, y por abajo por el plano $z = 4$, si la densidad en un punto P es inversamente proporcional a la distancia al origen. (*Sugerencia:* Exprese el límite de integración ϕ superior como un coseno inverso.)

48. Calcule el momento de inercia con respecto al eje z del sólido limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, si la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia al origen.

Examen • Capítulo 17

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 1002.

En los Problemas 1-4 conteste verdadero o falso.

1. $\int_{-2}^{3}\int_{1}^{5} e^{x^2-y}\,dx\,dy = \int_{1}^{5}\int_{-2}^{3} e^{x^2-y}\,dy\,dx$ ______

2. Si I es la parcial integral $\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\,dy$, entonces $\partial I/\partial y = 0$. ______

3. Para toda función continua f,

$$\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} f(x, y)\, dy\, dx = 2 \int_0^1 \int_{x^2}^{1} f(x, y)\, dy\, dx. \_\_\_\_$$

4 El centro de masa de una lámina que posee simetría está siempre en el eje de simetría. ____

En los Problemas 5-12 llene los espacios en blanco.

5. $\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} dx\, dy$ da el área de un ____.

6. La región limitada por las gráficas de $9x^2 + y^2 = 36$, $y = -2$, $y = 5$ es de tipo ____.

7. $\int_2^4 f_y(x, y)\, dy =$ ____.

8. Si $\rho(x, y, z)$ es densidad, entonces la integral iterada que da la masa del sólido limitado por el elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$, es ____.

9. $\int_0^2\int_{y^2}^{2y} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{\_}^{\_}\int_{\_}^{\_} f(x, y)\, dy\, dx$

10. Las coordenadas rectangulares del punto $\left(6, \frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right)$ dado en coordenadas esféricas son ____.

11. La ecuación del paraboloide $z = x^2 + y^2$ en coordenadas cilíndricas es ____, mientras que en coordenadas esféricas la ecuación es ____.

12. En coordenadas cilíndricas y esféricas la ecuación del plano $y = x$ es ____.

En los Problemas 13-22 evalúe la integral indicada.

13. $\int_{y^3}^{y} y^2 \operatorname{sen} xy\, dx$

14. $\int_{1/x}^{e^x} \frac{x}{y^2}\, dy$

15. $\int_0^2\int_0^{2x} y e^{y-x}\, dy\, dx$

16. $\int_0^4\int_x^4 \frac{1}{16 + x^2}\, dy\, dx$

17. $\int_3^5\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta} 3r^2\, dr\, d\theta\, dz$

18. $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{\operatorname{sen} z}\int_0^{\ln x} e^y\, dy\, dx\, dz$

19. $\iint_R 5\, dA$ en donde R está limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 64$.

20. $\iint_R dA$ en donde R está limitada por la cardioide $r = 1 + \cos\theta$.

21. $\iint_R (2x + y)\, dA$ en donde R está limitada por las gráficas de $y = \frac{1}{2}x$, $x = y^2 + 1$, $y = 0$.

22. $\iiint_D x\, dV$ en donde D está limitada por los planos $z = x + y$, $z = 6 - x - y$, $x = 0$, $y = 0$.

23. Empleando coordenadas rectangulares, exprese como una integral iterada la siguiente integral:

$$\iint_R \frac{1}{x^2 + y^2}\, dA$$

en donde R es la región del primer cuadrante limitada por las gráficas de $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$, $x = 0$, $y = x$. No evalúe.

24. Determine la integral doble del Problema 23 empleando coordenadas polares.

En los Problemas 25 y 26 dibuje la región de integración

25. $\int_{-2}^{2}\int_{-x^2}^{x^2} f(x, y)\, dy\, dx$

26. $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_0^{x^2+y^2} F(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$

27. Invierta el orden de integración y evalúe

$$\int_0^1\int_y^{\sqrt[3]{y}} \cos x^2\, dx\, dy.$$

28. Considere $\iiint_D F(x, y, z)\, dV$, en donde D es la región del primer octante limitada por los planos $z = 8 - 2x - y$, $z = 4$, $x = 0$, $y = 0$. Exprese la integral triple como seis integrales iteradas diferentes.

En los Problemas 29 y 30 utilice un sistema de coordenadas apropiado para evaluar la integral indicada.

29. $\int_0^2\int_{1/2}^{1}\int_0^{\sqrt{x-x^2}} (4z + 1)\, dy\, dx\, dz$

30. $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2)^4\, dz\, dy\, dx$

31. Determine el área de la porción de la gráfica de $z = xy$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

32. Calcule el volumen de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ empleando una integral triple (a) en coordenadas rectangulares, (b) en coordenadas cilíndricas, y (c) en coordenadas esféricas.

33. Determine el volumen del sólido comprendido entre los conos $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = \sqrt{9x^2 + 9y^2}$, y el plano $z = 3$.

34. Una lámina tiene la forma de la región del primer cuadrante limitada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = x^3$. Localice el centro de masa si la densidad en un punto P es directamente proporcional al cuadrado de la distancia al origen.

35. Obtenga el momento de inercia de la lámina descrita en el Problema 34 con respecto al eje y.

18

Cálculo integral vectorial

Hasta ahora hemos estudiado tres clases de integrales: la integral definida, la integral doble y la integral triple. En el presente capítulo introduciremos dos nuevas clases de integrales, las de **línea** y las de **superficie**. El desarrollo de estos conceptos depende mucho de los métodos vectoriales.

18.1 Integrales de línea

Terminología

La noción de integración de una función definida en un intervalo se puede generalizar a la de integración de una función *definida a lo largo de una línea (recta o curva)*. Para este fin necesitamos introducir una terminología referente a líneas o curvas. Supongamos que C es una curva parametrizada por $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \le t < b$, y que A y B son los puntos $(f(a), g(a))$ y $(f(b), g(b))$, respectivamente. De la Sección 13.1 recordemos que

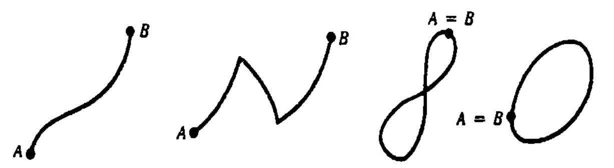
(*i*) C es una **curva alisada** si f' y g' son continuas en $[a, b]$ y no son cero simultáneamente en (a, b). Además que

(*ii*) C es **alisada parte por parte** si se puede expresar como la unión de un número finito de curvas suaves alisadas.

(*iii*) C es una **curva cerrada** si $A = B$.

(*iv*) C es una **curva cerrada simple** si $A = B$ y la curva no se cruza a sí misma.

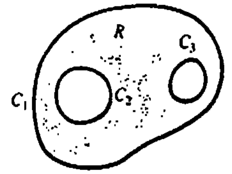
(*v*) Si C no es una curva cerrada, entonces el **sentido positivo** de C es el sentido correspondiente a los valores crecientes de t.



(a) curva alisada (b) curva alisada parte por parte (c) curva cerrada pero no simple (d) curva cerrada simple

Figura 18.1

La Figura 18.1 ilustra cada uno de los tipos de curvas definidas en (*i*)-(*iv*). La región R, *interior* a una curva cerrada simple, se dice que es **simplemente conexa**. Una región simplemente conexa no tiene "agujeros". Véase la Figura 18.2.



R no es simplemente conexa

Figura 18.2

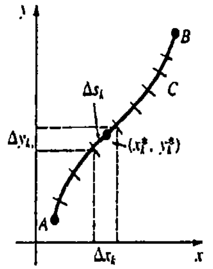
Integrales de línea en el plano

Los cinco pasos siguientes conducen a las definiciones de tres integrales de línea (o de curva) en el plano.

$$z = G(x, y)$$

1. Sea G definida en alguna región que contiene a la curva alisada C definida por $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \le t \le b$.
2. Divídase C en n subarcos de longitudes Δs_k según la partición $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ de $[a, b]$. Sean Δx_k y Δy_k las longitudes de las proyecciones de cada subarco sobre los ejes x y y, respectivamente.
3. Sea $\|P\|$ la **norma** de la subdivisión, o sea la longitud del subarco más largo.
4. Elija un punto (x_k^*, y_k^*) en cada subarco.
5. Forme las sumas

$$\sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*)\,\Delta x_k, \quad \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*)\,\Delta y_k, \quad \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*)\,\Delta s_k.$$



DEFINICIÓN 18.1

Sea G una función de dos variables x y y definida en una región del plano que contiene a una curva alisada C. Entonces

(*i*) la **integral de línea de G a lo largo de C de A a B con respecto a x** es

$$\int_C G(x, y)\,dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*)\,\Delta x_k;$$

(*ii*) la **integral de línea de G a lo largo de C de A a B con respecto a y** es

$$\int_C G(x, y)\,dy = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*)\,\Delta y_k;$$

(*iii*) la **integral de línea de G a lo largo de C de A a B con respecto a la longitud de arco** es

$$\int_C G(x, y)\,ds = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*)\,\Delta s_k. \quad \square$$

Se puede demostrar que si $G(x, y)$ es continua en C, entonces existen las integrales definidas en (*i*), (*ii*) y (*iii*). Supondremos la continuidad de G naturalmente.

Método de evaluación

Si C es una curva cerrada suave parametrizada por $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \le t \le b$, entonces se tiene de inmediato

$$\int_C G(x, y)\,dx = \int_a^b G(f(t), g(t))f'(t)\,dt \tag{18.1}$$

$$\int_C G(x, y)\,dy = \int_a^b G(f(t), g(t))g'(t)\,dt. \tag{18.2}$$

Además, aplicando (6.14) de la Sección 6.5 y la parametrización indicada encontramos $ds = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt$. Por lo tanto,

$$\int_C G(x, y)\,ds = \int_a^b G(f(t), g(t))\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt. \tag{18.3}$$

Alternativamente, si la curva C es definida mediante una función explícita $y = f(x)$, $a \le x \le b$, puede utilizarse x como un parámetro. Empleando $dy = f'(x)\,dx$ y $ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$, las integrales de línea precedentes se convierten, respectivamente, en

$$\int_C G(x, y)\,dx = \int_a^b G(x, f(x))\,dx \tag{18.4}$$

$$\int_C G(x, y)\,dy = \int_a^b G(x, f(x))f'(x)\,dx \tag{18.5}$$

$$\int_C G(x, y)\,ds = \int_a^b G(x, f(x))\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx. \tag{18.6}$$

Una integral de línea a lo largo de una curva *alisada parte por parte* C se define como la *suma* de las integrales en cada una de las curvas alisadas cuya unión es C. Por ejemplo, si C está compuesta por las curvas alisadas C_1 y C_2, entonces

$$\int_C G(x, y)\,ds = \int_{C_1} G(x, y)\,ds + \int_{C_2} G(x, y)\,ds.$$

Ejemplo 1

Evaluar (*a*) $\int_C xy^2\,dx$, (*b*) $\int_C xy^2\,dy$, (*c*) $\int_C xy^2\,ds$ en el cuarto de circunferencia C definido por $x = 4\cos t$, $y = 4\,\text{sen}\,t$, $0 \le t \le \pi/2$. Véase la Figura 18.3.

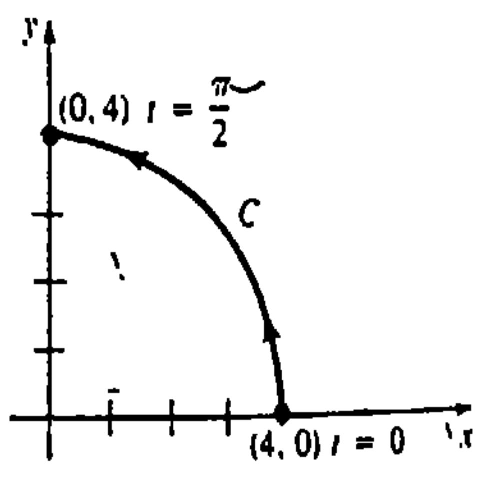


Figura 18.3

Solución

(*a*) En virtud de (18.1),

$$\begin{aligned}\int_C xy^2\,dx &= \int_0^{\pi/2} (4\cos t)(16\,\text{sen}^2 t)(-4\,\text{sen}\,t\,dt)\\ &= -256\int_0^{\pi/2} \text{sen}^3 t\cos t\,dt\\ &= -256\left[\frac{1}{4}\text{sen}^4 t\right]_0^{\pi/2} = -64.\end{aligned}$$

(*b*) Por (18.2),

$$\begin{aligned}\int_C xy^2\,dy &= \int_0^{\pi/2} (4\cos t)(16\,\text{sen}^2 t)(4\cos t\,dt)\\ &= 256\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 t\cos^2 t\,dt \qquad \boxed{\text{Identidades trigonométricas}}\\ &= 256\int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\text{sen}^2 2t\,dt\\ &= 64\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 - \cos 4t)\,dt\\ &= 32\left[t - \frac{1}{4}\,\text{sen}\,4t\right]_0^{\pi/2} = 16\pi.\end{aligned}$$

(*c*) En virtud de (18.3),

$$\begin{aligned}\int_C xy^2\,ds &= \int_0^{\pi/2} (4\cos t)(16\,\text{sen}^2 t)\sqrt{16(\cos^2 t + \text{sen}^2 t)}\,dt\\ &= 256\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 t\cos t\,dt\\ &= 256\left[\frac{1}{3}\text{sen}^3 t\right]_0^{\pi/2} = \frac{256}{3}.\end{aligned}$$

Notación

En muchas aplicaciones se presentan integrales de línea como una suma

$$\int_C P(x, y)\,dx + \int_C Q(x, y)\,dy.$$

Se acostumbra escribir esta suma como una integral sin paréntesis, como

$$\int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy \quad \text{o simplemente} \quad \int_C P\,dx + Q\,dy. \tag{18.7}$$

Ejemplo 2

Evaluar $\int_C xy\,dx + x^2\,dy$ en donde C está dada por $y = x^3$, $-1 \le x \le 2$.

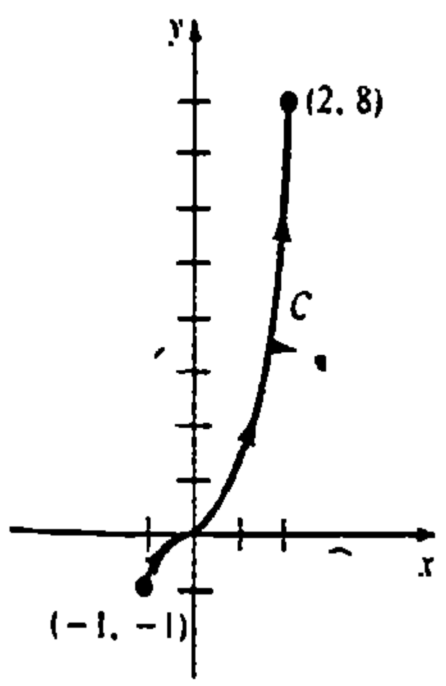


Figura 18.4

Solución En la Figura 18.4 se ilustra la curva C. Como $y = x^3$, entonces $dy = 3x^2\,dx$. Empleando x como parámetro, de (18.4) y (18.5) resulta que

$$\begin{aligned}\int_C xy\,dx + x^2\,dy &= \int_{-1}^2 x(x^3)\,dx + x^2(3x^2\,dx)\\ &= \int_{-1}^2 4x^4\,dx\\ &= \frac{4}{5}x^5\Big]_{-1}^2 = \frac{132}{5}.\end{aligned}$$

Recuérdese que para integrales definidas

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Las integrales de línea poseen una propiedad semejante. Si $\overrightarrow{AB}$ denota integración a lo largo de una línea o curva C de A a B, entonces, como se muestra en la Figura 18.5,

$$\int_{\overrightarrow{AB}} P\,dx + Q\,dy = -\int_{\overleftarrow{AB}} P\,dx + Q\,dy$$

o en forma equivalente,

$$\int_{\overrightarrow{AB}} P\,dx + Q\,dy + \int_{\overleftarrow{AB}} P\,dx + Q\,dy = 0. \qquad (18.8)$$

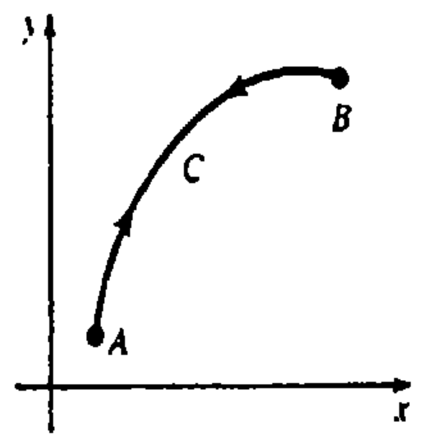


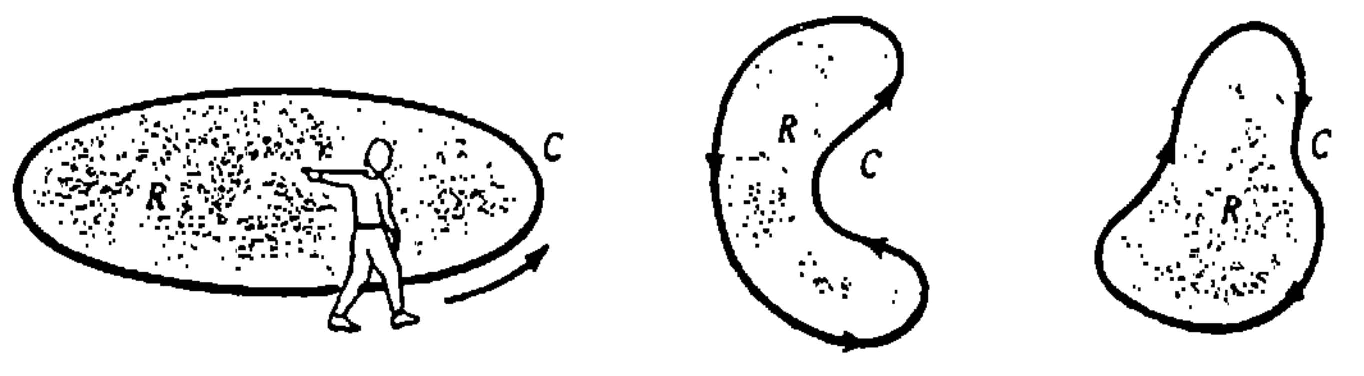
Figura 18.5

Integrales de línea a lo largo de curvas cerradas simples

En una curva cerrada simple C, es necesario precisar el sentido de integración ya que el punto inicial A y el punto terminal B usualmente no se especifican. Se expresa que el sentido positivo de una curva cerrada simple C es aquel en el que se debe mover un punto sobre la curva, o bien el sentido en el que debería caminar una persona sobre C para que la región R limitada por C se mantenga a su izquierda. Véase la Figura 18.6(a). Los sentidos *positivo* y *negativo* corresponden convencionalmente al *sentido contrario al del reloj* y al *sentido del reloj*, respectivamente, como se ilustra en las Figuras 18.6(b) y 18.6(c). Las integrales de línea en curvas cerradas simples se expresan

$$\oint_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy, \qquad \oint_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy, \qquad \oint_C F(x, y)\,ds,$$

etcétera. Los símbolos $\oint_C$ y $\oint_C$ se refieren a integraciones en los sentidos positivo y negativo, respectivamente.



(a) sentido positivo (b) sentido positivo (c) sentido negativo

Figura 18.6

Ejemplo 3

Evaluar $\oint_C x\,dx$ en donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

Solución Parametrizando la curva como $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$, el sentido positivo de C corresponde al sentido en que t aumenta Por lo tanto,

$$\oint_C x\,dx = \int_0^{2\pi} \cos t(-\operatorname{sen} t\,dt) = \frac{1}{2}\cos^2 t\Big]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}[1 - 1] = 0.$$

Ejemplo 4

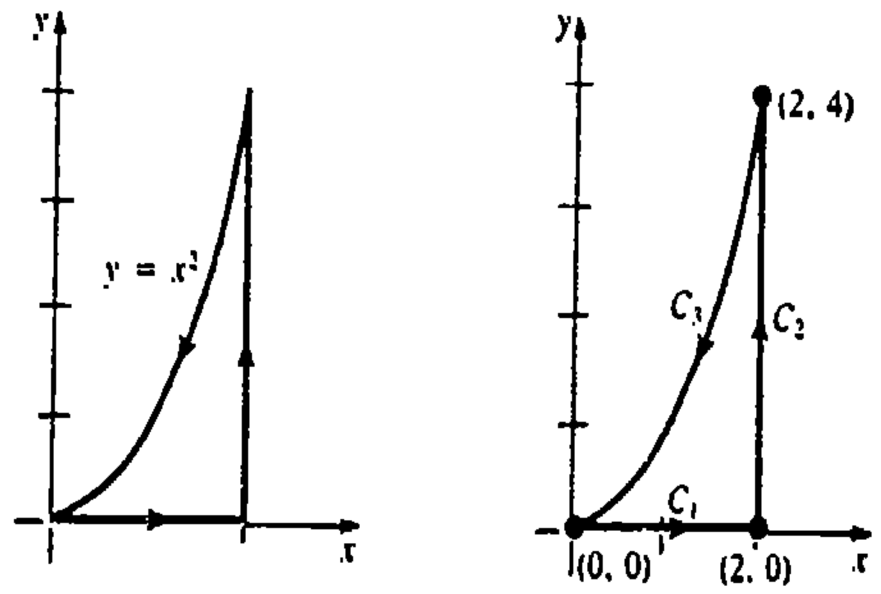
Evaluar $\oint_C y^2dx - x^2dy$ en la curva C mostrada en la Figura 18.7(a).

Solución Puesto que C es alisada parte por parte, expresamos la integral como una suma de integrales. Simbólicamente,

$$\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3},$$

en donde C_1, C_2 y C_3 son las curvas mostradas en la Figura 18.7(b). En C_1, se emplea x como parámetro. Como $y = 0$, $dy = 0$; por lo tanto,

$$\int_{C_1} y^2\,dx - x^2\,dy = \int_0^2 0\,dx - x^2(0) = 0.$$



(a) (b)

Figura 18.7

En C_2, se usa y como parámetro. De $x = 2$, $dx = 0$,

$$\int_{C_2} y^2\,dx - x^2\,dy = \int_0^4 y^2(0) - 4\,dy$$
$$= -\int_0^4 4\,dy = -4y\Big]_0^4 = -16.$$

Finalmente, en C_3 se emplea de nuevo x como parámetro. De $y = x^2$ obtenemos $dy = 2x\,dx$ y así

$$\begin{aligned}\int_{C_3} y^2\,dx - x^2\,dy &= \int_2^0 x^4\,dx - x^2(2x\,dx)\\ &= \int_2^0 (x^4 - 2x^3)\,dx\\ &= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4\right]_2^0 = \frac{8}{5}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\quad \oint_C y^2\,dx - x^2\,dy = 0 - 16 + \frac{8}{5} = -\frac{72}{5}.$

Integrales de línea en el espacio

Las integrales de línea de una función G de tres variables, $\int_C G(x, y, z)dx$, $\int_C G(x, y, z)dy$ y $\int_C G(x, y, z)ds$ se definen de manera análoga a la Definición 18.1. Sin embargo, se añade a esa lista una cuarta **integral de línea a lo largo de una curva C en el espacio con respecto a z:**

$$\int_C G(x, y, z)\,dz = \lim_{P \to 0} \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\,\Delta z_k. \tag{18.9}$$

Método de evaluación

Si C es una curva alisada en el espacio tridimensional definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), \quad a \le t \le b,$$

entonces la integral (18.9) puede evaluarse empleando

$$\int_C G(x, y, z)\,dz = \int_a^b G(f(t), g(t), h(t))h'(t)\,dt.$$

Las integrales $\int_C G(x, y, z)\,dx$ y $\int_C G(x, y, z)\,dy$ se evalúan de manera semejante. La integral de línea con respecto a la longitud de arco es

$$\int_C G(x, y, z)\,ds = \int_a^b G(f(t), g(t), h(t))\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\,dt.$$

En el espacio tridimensional a menudo se trata con integrales de línea en forma de suma, como en (18.7):

$$\int_C P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz.$$

Ejemplo 5

Evaluar $\int_C y\,dx + x\,dy + z\,dz$, en donde C es la hélice $x = 2\cos t$, $y = 2\,\text{sen}\,t$, $z = t$, $0 \le t \le 2\pi$.

Solución Sustituyendo las expresiones de x, y, z junto con $dx = -2\,\text{sen}\,t$, $dy = 2\cos t$, $dz = dt$, resulta que

$$\begin{aligned}\int_C y\,dx + x\,dy + z\,dz &= \int_0^{2\pi} \underbrace{-4\,\text{sen}^2 t\,dt + 4\cos^2 t\,dt}_{\text{Fórmula del ángulo doble}} + t\,dt\\ &= \int_0^{2\pi} (4\cos 2t + t)\,dt\\ &= \left[2\,\text{sen}\,2t + \frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi^2.\end{aligned}$$

Campos vectoriales

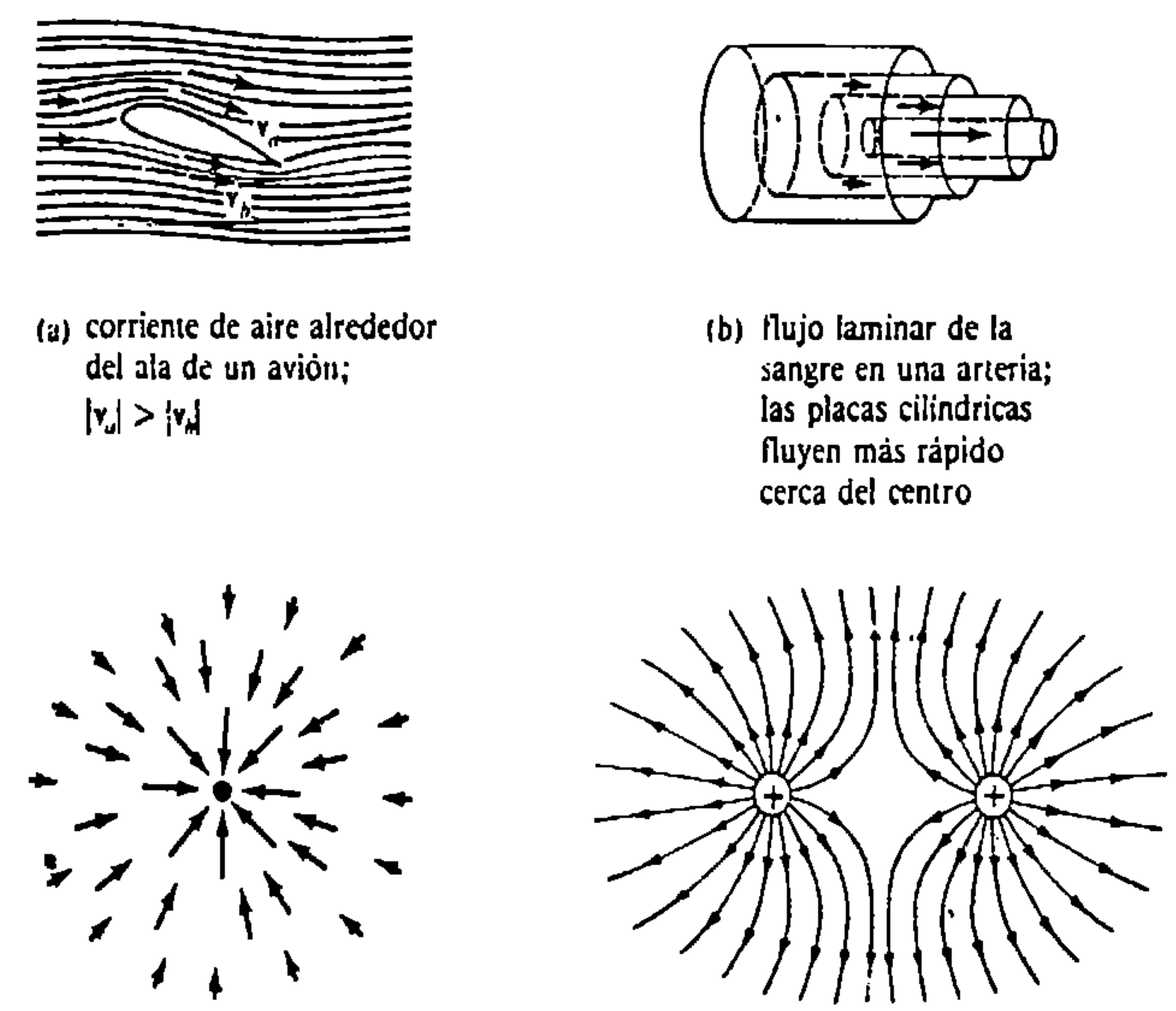
Funciones vectoriales como

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$$

y

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

también se llaman **campos vectoriales**. Por ejemplo, el movimiento de una corriente de aire o de un líquido se puede describir por medio de un *campo de velocidades* (o *de velocidad*) en el que se puede asignar a cada punto un vector que represente la velocidad de una partícula en dicho punto. Véanse las Figuras 18.8(a) y 18.8(b). El concepto de *campo de fuerzas* (o *de fuerza*) juega un papel importante en mecánica, electricidad y magnetismo. Véanse las Figuras 18.8(c) y 18.8(d).



(a) corriente de aire alrededor del ala de un avión; $|\mathbf{v}_a| > |\mathbf{v}_b|$

(b) flujo laminar de la sangre en una arteria; las placas cilíndricas fluyen más rápido cerca del centro

(c) campo de fuerzas inversamente proporcional al cuadrado de la distancia; la magnitud de la fuerza de atracción es grande cerca de la partícula

(d) líneas de fuerza alrededor de dos cargas eléctricas positivas iguales

Figura 18.8

Trabajo

En el Capítulo 6 vimos que el trabajo realizado al mover un objeto de $x = a$ a $x = b$ por aplicación de una fuerza $F(x)$, que varía en magnitud pero no en dirección, está dado por la integral

$$W = \int_a^b F(x)\,dx. \tag{18.10}$$

En general, un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ que actúa en cada punto de una curva alisada C: $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \le t \le b$, varía tanto en magnitud como en dirección. Véase la Figura 18.9(a). Si A y B son los puntos $(f(a), g(a))$ y $(f(b), g(b))$, respectivamente, se pregunta ¿cuál es el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ cuando su punto de aplicación se desplaza a lo largo de C, de A a B? Para contestar esta pregunta supongamos que C se divide en n subarcos de longitud Δs_k. En cada subarco $\mathbf{F}(x_k^*, y_k^*)$ es una fuerza constante. Si la longitud del vector $\Delta\mathbf{r}_k = (x_k - x_{k-1})\mathbf{i} + (y_k - y_{k-1})\mathbf{j} = \Delta x_k\mathbf{i} + \Delta y_k\mathbf{j}$ es una aproximación a la longitud del k-ésimo subarco, como se muestra en la Figura 18.9(b), entonces el trabajo aproximado realizado por $\mathbf{F}$ en el subarco es

$$\begin{aligned}(|\mathbf{F}(x_k^*, y_k^*)| \cos\theta)|\Delta\mathbf{r}_k| &= \mathbf{F}(x_k^*, y_k^*) \cdot \Delta\mathbf{r}_k \\ &= P(x_k^*, y_k^*)\,\Delta x_k + Q(x_k^*, y_k^*)\,\Delta y_k.\end{aligned}$$

Sumando estos elementos de trabajo y pasando al límite, resulta natural definir **el trabajo realizado por F a lo largo de C** como la integral de línea

$$W = \int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \tag{18.11}$$

Forma vectorial

Si C es una curva descrita por una función vectorial $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, entonces $d\mathbf{r}/dt = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}$ sugiere definir $d\mathbf{r} = [f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}]\,dt = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$. De esta manera, (18.11) puede escribirse en forma vectorial.

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \tag{18.12}$$

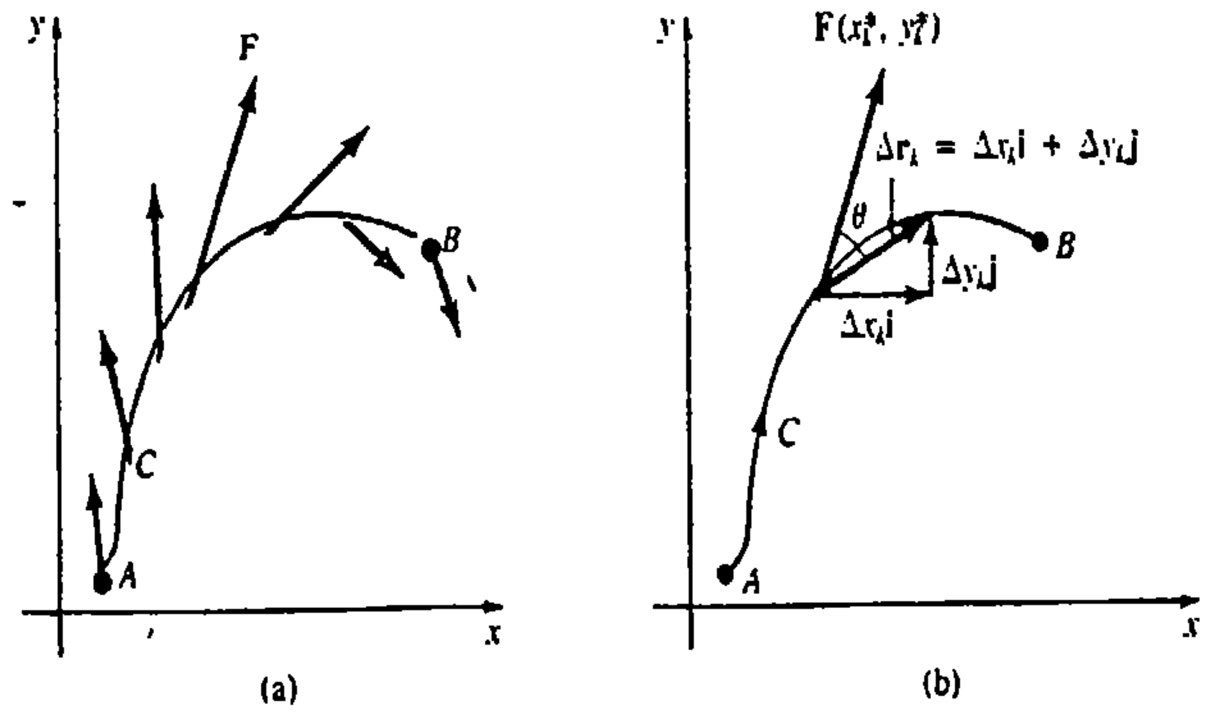


Figura 18.9

en donde $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$. Ahora bien, puesto que

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt},$$

hacemos $d\mathbf{r} = \mathbf{T}\,ds$, en donde $\mathbf{T} = d\mathbf{r}/ds$ es un vector tangente unitario* a C. Por lo tanto,

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds = \int_C \operatorname{comp}_{\mathbf{T}}\mathbf{F}\,ds. \tag{18.13}$$

En otras palabras, *el trabajo realizado por una fuerza* **F** *a lo largo de una curva C se debe completamente a la componente tangencial de* **F**.

La definición de trabajo dada en (18.12) y (18.13) se extiende a una fuerza $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ que actúa a lo largo de una curva C en el espacio. En este caso $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$.

Ejemplo 6

Determinar el trabajo realizado por

(*a*) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ y (*b*) $\mathbf{F} = \frac{3}{4}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$

a lo largo de la curva C descrita por $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j}$, desde $t = 0$ hasta $t = \pi$.

Solución

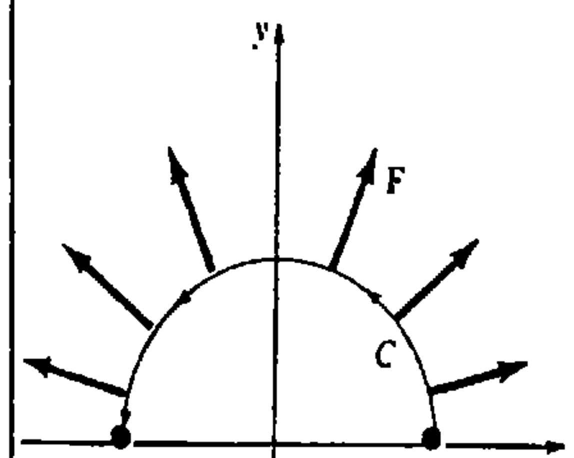


Figura 18.10

(*a*) La función vectorial $\mathbf{r}(t)$ da las ecuaciones paramétricas $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le \pi$, a las cuales se reconoce como una semicircunferencia. El campo de fuerzas $\mathbf{F}$ es ortogonal a C en todo punto (¿por qué?), como se ve en la Figura 18.10. Puesto que las componentes tangenciales de $\mathbf{F}$ son cero, el trabajo realizado a lo largo de C es nulo. Para ver esto se emplea (18.11):

$$\begin{aligned}W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_0^\pi (\cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j}) \cdot (-\operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j})\,dt \\ &= \int_0^\pi (-\cos t \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t \cos t)\,dt = 0.\end{aligned}$$

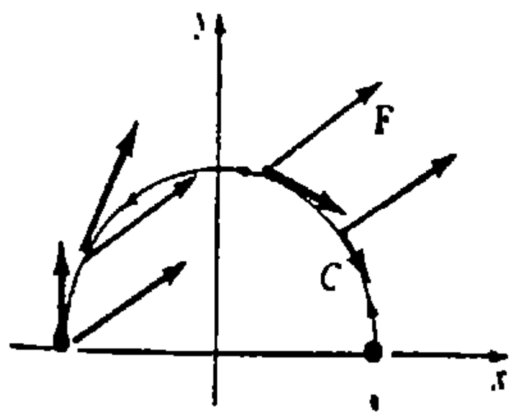


Figura 18.11

(*b*) En la Figura 18.11 los vectores en azul son las proyecciones de **F** sobre los vectores tangentes unitarios. El trabajo realizado por **F** es

$$\begin{aligned}W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C \left(\frac{3}{4}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\right) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{3}{4}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\right) \cdot (-\operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j})\,dt \\ &= \int_0^\pi \left(-\frac{3}{4}\operatorname{sen} t + \frac{1}{2}\cos t\right) dt \\ &= \left(\frac{3}{4}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\right)\Big]_0^\pi = -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

La unidad de trabajo depende de la unidad de $|\mathbf{F}|$ y de la unidad de distancia.

* Véase la Sección 15.1.

Circulación

La integral de línea de un campo vectorial F alrededor de una curva cerrada simple C se dice que es la **circulación** de F en C; esto es,

$$\text{circulación} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds.$$

En particular, si F es el campo de velocidades de un fluido, entonces la circulación es una medida de la cantidad con la cual el fluido tiende a hacer girar la curva C en sentido opuesto al del reloj. Por ejemplo, si F es perpendicular a T en todo (x, y) de C, entonces $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = 0$ y la curva no se mueve en absoluto. Por otra parte, $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds > 0$ y $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds < 0$ significa que el fluido tiende a hacer girar C en sentido contrario al del reloj y en el mismo sentido, respectivamente. Véase la Figura 8.12.

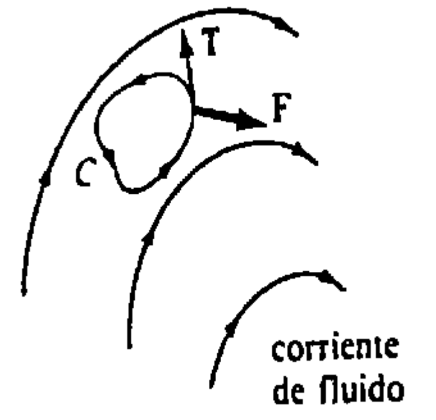


Figura 18.12

Ejercicios 18.1

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 1002.

En los Problemas 1-4 evalúe $\int_C G(x, y)\, dx$, $\int_C G(x, y)\, dy$ y $\int_C G(x, y)\, ds$ en la curva C indicada.

1. $G(x, y) = 2xy$; $x = 5 \cos t$, $y = 5 \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le \pi/4$

2. $G(x, y) = x^3 + 2xy^2 + 2x$; $x = 2t$, $y = t^2$, $0 \le t \le 1$

3. $G(x, y) = 3x^2 + 6y^2$; $y = 2x + 1$, $-1 \le x \le 0$

4. $G(x, y) = x^2/y^3$; $2y = 3x^{2/3}$, $1 \le x \le 8$

En los Problemas 5 y 6 evalúe $\int_C G(x, y, z)\, dx$, $\int_C G(x, y, z)\, dy$, $\int_C G(x, y, z)\, dz$ y $\int_C G(x, y, z)\, ds$ en la curva C dada.

5. $G(x, y, z) = z$; $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = t$, $0 \le t \le \pi/2$

6. $G(x, y, z) = 4xyz$; $x = \frac{1}{3}t^3$, $y = t^2$, $z = 2t$, $0 \le t \le 1$

En los Problemas 7-10 evalúe $\int_C (2x + y)dx + xy\, dy$ en la curva C que indica entre $(-1, 2)$ y $(2, 5)$.

7. $y = x + 3$

8. $y = x^2 + 1$

9.

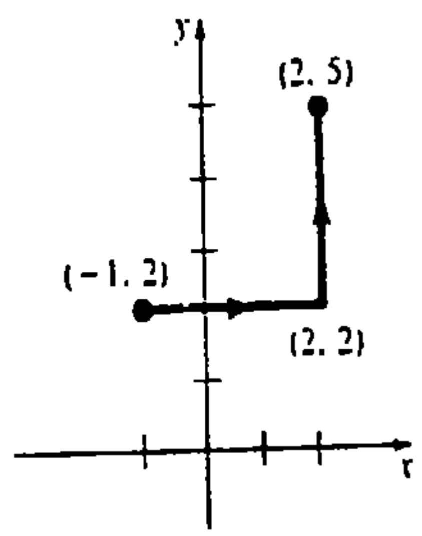


Figura 18.13

10.

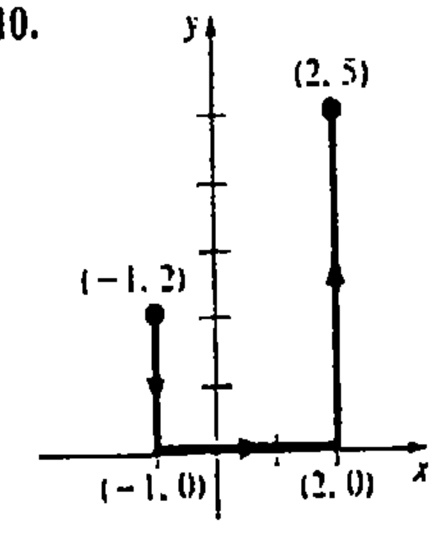


Figura 18.14

En los Problemas 11-14 evalúe $\int_C y\, dx + x\, dy$ en la curva C indicada, entre $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

11. $y = x^2$

12. $y = x$

13. C consiste en los segmentos de recta de $(0, 0)$ a $(0, 1)$ y de $(0, 1)$ a $(1, 1)$.

14. C consiste en los segmentos de recta de $(0, 0)$ a $(1, 0)$ y de $(1, 0)$ a $(1, 1)$.

15. Evalúe $\int_C (6x^2 + 2y^2)dx + 4xy\, dy$, en donde C está dada por $x = \sqrt{t}$, $y = t$, $4 \le t \le 9$.

16. Evalúe $\int_C -y^2 dx + xy\, dy$, en donde C está dada por $x = 2t$, $y = t^3$, $0 \le t \le 2$.

17. Evalúe $\int_C 2x^3 y\, dx + (3x + y)dy$, en donde C está dada por $x = y^2$ de $(1, -1)$ a $(1, 1)$.

18. Determine $\oint_C 4x\, dx + 2y\, dy$ en donde C está dada por $x = y^3 + 1$ de $(0, -1)$ a $(9, 2)$.

En los Problemas 19-20 evalúe $\oint_C (x^2 + y^2)dx - 2xy\, dy$ en la curva cerrada simple C indicada.

19.

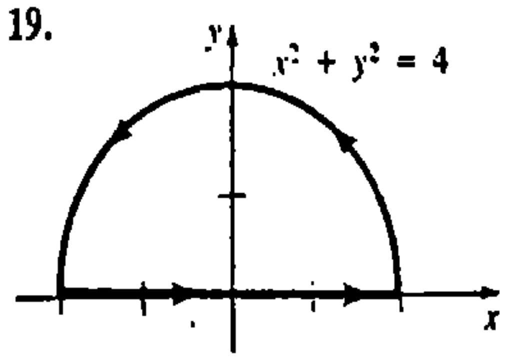


Figura 18.15

20.

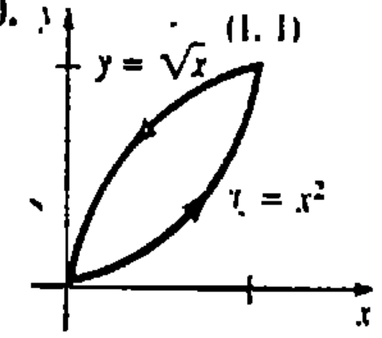


Figura 18.16

21. Determine $\oint_C x^2 y^3 dx - xy^2 dy$, en donde C es el cuadrado con vértices $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ y $(1, -1)$.

22. Evalúe $\oint_C xy^2 dx + x^2 y\, dy$, en donde C es el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(0, 4)$ y $(2, 4)$.

23. Evalúe $\oint_C (x^2 - y^2)ds$, en donde C es el círculo $x^2 + y^2 = 25$.

24. Determine $\oint_C y\, dx - x\, dy$, en donde C es la elipse $x = 2 \cos t$, $y = 3 \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$. ¿A qué es igual $\oint_C y\, dx - x\, dy$?

En los Problemas 25-28 evalúe $\int_C y\, dx + z\, dy + x\, dz$ en la curva C indicada, entre $(0, 0, 0)$ y $(6, 8, 5)$.

25. C consiste en los segmentos de recta de $(0, 0, 0)$ a $(2, 3, 4)$ y de $(2, 3, 4)$ a $(6, 8, 5)$.

26. $x = 3t$, $y = t^3$, $z = \frac{5}{4}t^2$

27.

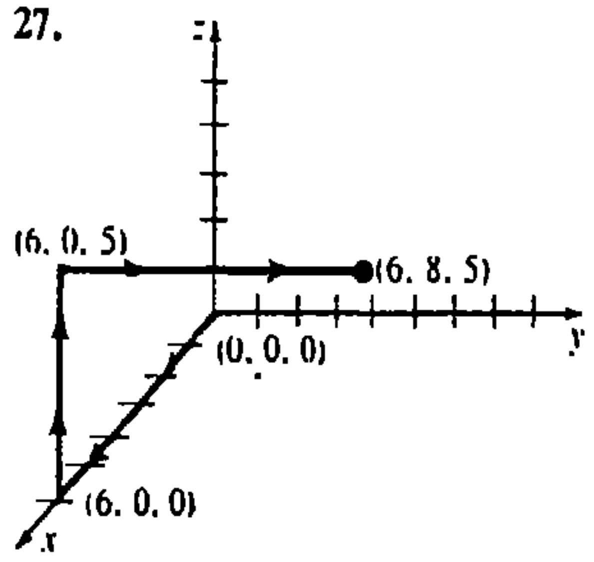


Figura 18.17

28.

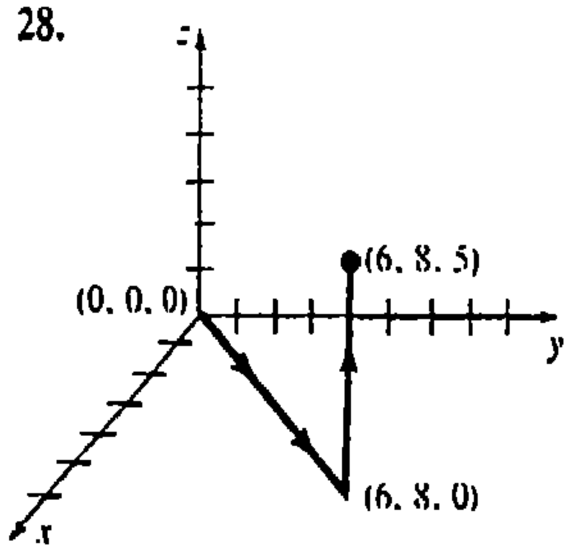


Figura 18.18

En los Problemas 29 y 30 evalúe $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

29. $\mathbf{F}(x, y) = y^3\mathbf{i} - x^2y\mathbf{j}$; $\mathbf{r}(t) = e^{-2t}\mathbf{i} + e^t\mathbf{j}$, $0 \le t \le \ln 2$

30. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x\mathbf{i} + xe^{xy}\mathbf{j} + xye^{xyz}\mathbf{k}$; $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$

31. Calcule el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ que actúa a lo largo de $y = \ln x$ de $(1, 0)$ a $(e, 1)$.

32. Calcule el trabajo efectuado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + 4y^2\mathbf{j}$ que actúa a lo largo de la curva alisada parte por parte que consiste en los segmentos de recta de $(-2, 2)$ a $(0, 0)$ y de $(0, 0)$ a $(2, 3)$.

33. Determine el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y) = (x + 2y)\mathbf{i} + (6y - 2x)\mathbf{j}$ que actúa en sentido opuesto al del reloj una vez, alrededor del triángulo con vértices $(1, 1)$, $(3, 1)$ y $(3, 2)$.

34. Determine el trabajo efectuado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ que actúa a lo largo de la curva dada por $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ desde $t = 1$ hasta $t = 3$.

35. Calcule el trabajo realizado por una fuerza constante $\mathbf{F}(x, y) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ que actúa en sentido opuesto al del reloj una vez alrededor del círculo $x^2 + y^2 = 9$.

36. En un campo de fuerzas inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, se tiene que $\mathbf{F} = c\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$, en donde c es una constante y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.* Calcule el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la recta de $(1, 1, 1)$ a $(3, 3, 3)$.

Problemas diversos

37. Supóngase que una curva alisada C es descrita por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ para $a \le t \le b$. Sean la aceleración, la velocidad y la rapidez $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, y $v = |\mathbf{v}|$, respectivamente. Aplicando la segunda ley de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, demuestre que, en ausencia de fricción, el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ al mover una partícula de masa constante m desde un punto A en $t = a$ hasta un punto B en $t = b$ es igual al cambio de energía cinética:

$$K(B) - K(A) = \frac{1}{2}m[v(b)]^2 - \frac{1}{2}m[v(a)]^2.$$

$\left(\textit{Sugerencia:}\text{ Considere } \frac{d}{dt}v^2 = \frac{d}{dt}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}.\right)$

38. Si $\rho(x, y)$ es la densidad longitudinal de un alambre (masa por unidad de longitud), entonces $m = \int_C \rho(x, y)ds$ es la masa del alambre. Determine la masa de un alambre que tiene la forma de la semicircunferencia $x = 1 + \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le \pi$, si la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia al eje y.

39. Las coordenadas del centro de masa de un alambre con densidad variable están dadas por $\bar{x} = M_y/m$, $\bar{y} = M_x/m$, en donde

$$m = \int_C \rho(x, y)\, ds, \qquad M_x = \int_C y\rho(x, y)\, ds,$$
$$\text{y} \quad M_y = \int_C x\rho(x, y)\, ds.$$

Localice el centro de masa del alambre del Problema 38.

40. Considere las tres curvas que unen $(0, 0)$ y $(2, 4)$:

$$C_1: x = t, \quad y = 2t, \quad 0 \le t \le 2,$$
$$C_2: x = t, \quad y = t^2, \quad 0 \le t \le 2,$$
$$C_3: x = 2t - 4, y = 4t - 8, 2 \le t \le 3.$$

Demuestre que $\int_{C_1} xy\, ds = \int_{C_3} xy\, ds$ pero $\int_{C_1} xy\, ds \ne \int_{C_2} xy\, ds$. Explique lo anterior.

18.2 Integrales de línea independientes de la trayectoria

El concepto de diferencial exacta desempeña un papel importante en la discusión que sigue. Se recomienda dar un repaso a la Sección 16.5.

El valor de una integral de línea $\int_C P\, dx + Q\, dy$ depende generalmente de la línea o trayectoria que une dos puntos A y B. Sin embargo, hay excepciones. Una integral de línea cuyo valor es igual para *toda* curva que conecta A y B se dice que es **independiente de la trayectoria.**

* Obsérvese que la magnitud de $\mathbf{F}$ es inversamente proporcional a $|\mathbf{r}|^2$.

Ejemplo 1

La integral $\int_C y\, dx + x\, dy$ tiene el mismo valor en cada una de las trayectorias C que unen $(0,0)$ y $(1,1)$ mostradas en la Figura 18.19. Se debe recordar de los Problemas 11-14 de los Ejercicios 18.1, que en estas trayectorias

$$\int_C y\, dx + x\, dy = 1.$$

En el Ejemplo 2 demostraremos que la integral indicada es independiente de la trayectoria.

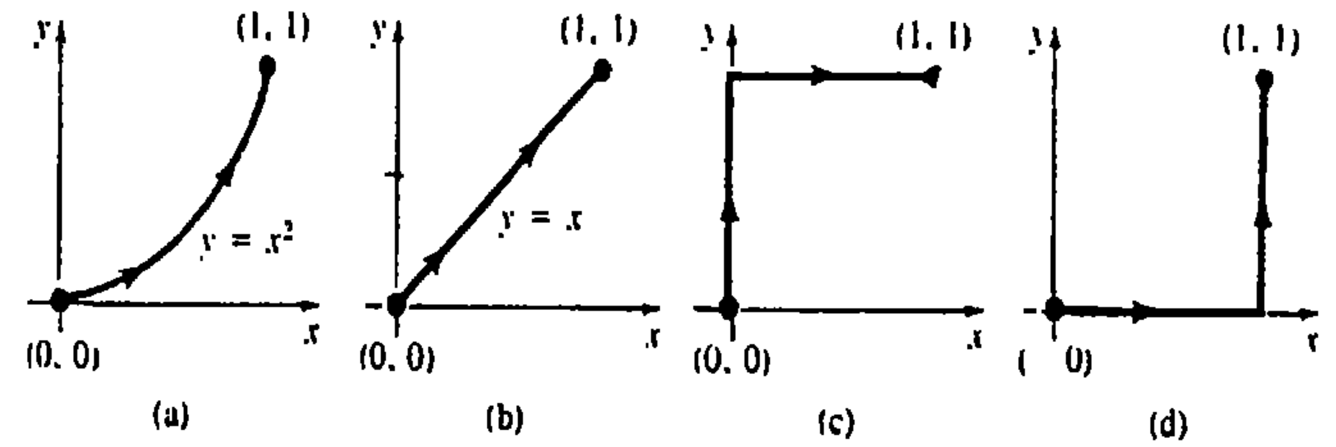


Figura 18.19

Un teorema fundamental

El teorema siguiente establece una relación importante entre las nociones aparentemente dispares de independencia de la trayectoria y de diferenciales exactas. Además, proporciona una manera de evaluar integrales de línea independientes de la trayectoria, análoga al Teorema fundamental del cálculo:

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a).$$

Por esta razón el resultado se llama a veces **Teorema fundamental para integrales de línea.**

TEOREMA 18.1

Supóngase que existe una función $\phi(x, y)$ tal que $d\phi = P\, dx + Q\, dy$; esto es, $P\, dx + Q\, dy$ es una diferencial exacta. Entonces $\int_C P\, dx + Q\, dy$ depende solamente de los puntos extremos A y B de la trayectoria C, y

$$\int_C P\, dx + Q\, dy = \phi(B) - \phi(A).$$

Demostración Sea C una trayectoria alisada definida paramétricamente por $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \le t \le b$, y sean $(f(a), g(a))$ y $(f(b), g(b))$ las coordenadas de A y B, respectivamente. Entonces, por la regla de la cadena

$$\int_C P\, dx + Q\, dy = \int_a^b \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right) dt$$
$$= \int_a^b \frac{d\phi}{dt}\, dt$$
$$= \phi(f(t), g(t))\Big]_a^b$$

$$= \phi(f(b), g(b)) - \phi(f(a), g(a))$$
$$= \phi(B) - \phi(A). \qquad \square$$

Se impone formular dos observaciones. El teorema también es válido para curvas alisadas parte por parte, pero la demostración anterior tendría que ser modificada considerando cada arco alisado de la curva C. Además, el recíproco del teorema también se verifica. Por lo tanto,

$$\int_C P\,dx + Q\,dy \text{ es independiente de la trayectoria si y sólo si } P\,dx + Q\,dy \text{ es una diferencial exacta.} \tag{18.14}$$

Notación

Una integral de línea $\int_C P\,dx + Q\,dy$, que es independiente de la trayectoria entre los puntos extremos A y B, a menudo se simboliza por

$$\int_A^B P\,dx + Q\,dy.$$

Ejemplo 2

En el Ejemplo 1 obsérvese que $d(xy) = y\,dx + x\,dy$. Esto es, $y\,dx + x\,dy$ es una diferencial exacta. Por lo tanto, $\int_C y\,dx + x\,dy$ es independiente de la trayectoria entre cualquier par de puntos A y B. Específicamente, si A y B son $(0, 0)$ y $(1, 1)$, respectivamente, entonces por el Teorema 18.1,

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} y\,dx + x\,dy = \int_{(0,0)}^{(1,1)} d(xy) = xy\Big]_{(0,0)}^{(1,1)} = 1.$$

Criterio para la independencia de la trayectoria

En vista del enunciado (18.14), el mismo criterio dado en el Teorema 16.14 para determinar una diferencial exacta se convierte en criterio, o prueba, para la independencia de la trayectoria.

TEOREMA 18.2

Sean P y Q continuas y con primeras derivadas parciales continuas en una región simplemente conexa. Entonces $\int_C P\,dx + Q\,dy$ es independiente de la trayectoria C si y sólo si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

para todo (x, y) en la región. $\square$

Ejemplo 3

Demostrar que la integral $\int_C (x^2 - 2y^3)dx + (x + 5y)dy$ no es independiente de la trayectoria C.

Solución De $P = x^2 - 2y^3$ y $Q = x + 5y$, obtenemos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -6y^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1.$$

Como $\partial P/\partial y \neq \partial Q/\partial x$, la integral no es independiente de la trayectoria.

Ejemplo 4

Demostrar que $\int_C (y^2 - 6xy + 6)dx + (2xy - 3x^2)dy$ es independiente de cualquier trayectoria C entre $(-1, 0)$ y $(3, 4)$. Evaluar.

Solución Identificando $P = y^2 - 6xy + 6$ y $Q = 2xy - 3x^2$ resulta que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y - 6x \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y - 6x.$$

Como $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$, la integral es independiente de la trayectoria y existe una función ϕ tal que $\partial\phi/\partial x = y^2 - 6xy + 6$ y $\partial\phi/\partial y = 2xy - 3x^2$. Empleando el método de integración parcial de la Sección 16.5, resulta $\phi = xy^2 - 3x^2y + 6x$. En otras palabras,

$$d(xy^2 - 3x^2y + 6x) = (y^2 - 6xy + 6)\,dx + (2xy - 3x^2)\,dy.$$

Por consiguiente,

$$\int_{(-1,0)}^{(3,4)} (y^2 - 6xy + 6)\,dx + (2xy - 3x^2)\,dy = \int_{(-1,0)}^{(3,4)} d(xy^2 - 3x^2y + 6x)$$
$$= (xy^2 - 3x^2y + 6x)\Big]_{(-1,0)}^{(3,4)}$$
$$= (48 - 108 + 18) - (-6)$$
$$= -36.$$

Solución alternativa Puesto que la integral es independiente de la trayectoria, podemos integrar a lo largo de cualquier curva conveniente que una los puntos dados. En particular, $y = x + 1$ es una de tales curvas. Empleando x como parámetro resulta

$$\int_C (y^2 - 6xy + 6)\,dx + (2xy - 3x^2)\,dy$$
$$= \int_{-1}^{3} [(x + 1)^2 - 6x(x + 1) + 6]\,dx + [2x(x + 1) - 3x^2]\,dx$$
$$= \int_{-1}^{3} (-6x^2 - 2x + 7)\,dx = -36.$$

Campos vectoriales conservativos

Si $\int_C P\,dx + Q\,dy$ es independiente de la trayectoria C, sabemos que existe una función ϕ tal que

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy = P\,dx + Q\,dy$$
$$= (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}) \cdot (dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j}) = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

en donde $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ es un campo vectorial y $P = \partial\phi/\partial x$, $Q = \partial\phi/\partial y$. En otras palabras, el campo vectorial **F** es un gradiente de la función ϕ. Como $\mathbf{F} = \nabla\phi$, se dice a veces que **F** es un **campo de gradiente** y entonces la función ϕ es una **función potencial** de **F**. En un campo de fuerzas de gradiente **F**, el trabajo realizado por la fuerza sobre una partícula que se mueve de la posición A a la B, es el mismo para todas las trayectorias entre estos puntos. Además, el trabajo realizado por la fuerza a lo largo de una trayectoria cerrada vale *cero*. Véase el Problema 22 de los Ejercicios 18.2. Por esta razón, se expresa también que tal campo de fuerzas es **conservativo**. En un campo conservativo **F** se cumple la *ley de la conservación de la energía mecánica*: Para una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria en un campo conservativo, se verifica que,

Energía Cinética + Energía Potencial = Constante.

Véase el Problema 25. En un dominio simplemente conexo las hipótesis del Teorema 18.2 implican que un campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ es un campo de gradiente (esto es, conservativo) si y sólo si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{18.15}$$

Ejemplo 5

Demostrar que el campo vectorial $\mathbf{F} = (y^2 + 5)\mathbf{i} + (2xy - 8)\mathbf{j}$ es un campo de gradiente. Obtener una función potencial de **F**.

Solución Identificando $P = y^2 + 5$ y $Q = 2xy - 8$, de (18.15) resulta que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y.$$

Por lo tanto, **F** es un campo de gradiente y entonces existe una función potencial ϕ que satisface

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = y^2 + 5 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 2xy - 8.$$

Procediendo como en la Sección 16.5, se halla que $\phi = xy^2 - 8y + 5x$.

Comprobación
$$\nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{j} = (y^2 + 5)\mathbf{i} + (2xy - 8)\mathbf{j}.$$

Observaciones

(*i*) El criterio para independencia de la trayectoria de las integrales de línea en el espacio tridimensional, está dado en los ejercicios.

(*ii*) Una fuerza de fricción, como la resistencia del aire, es *no conservativa*. Las fuerzas no conservativas son *disipativas* en el sentido de que su acción reduce la energía cinética sin un aumento correspondiente en la energía potencial. En otras palabras, si el trabajo realizado $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ depende de la trayectoria, entonces **F** es no conservativa.

Ejercicios 18.2

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 1002.

En los Problemas 1-10 demuestre que la integral indicada es independiente de la trayectoria. Evalúe en dos formas: (a) Encuentre una función ϕ tal que $d\phi = P\,dx + Q\,dy$, y (b) integre a lo largo de cualquier trayectoria conveniente entre los puntos.

1. $\int_{(0,0)}^{(2,2)} x^2\,dx + y^2\,dy$

2. $\int_{(1,1)}^{(2,4)} 2xy\,dx + x^2\,dy$

3. $\int_{(1,0)}^{(3,2)} (x + 2y)\,dx + (2x - y)\,dy$

4. $\int_{(0,0)}^{(\pi/2,0)} \cos x \cos y\,dx + (1 - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)\,dy$

5. $\int_{(4,1)}^{(4,4)} \frac{-y\,dx + x\,dy}{y^2}$ sobre cualquier trayectoria que no cruce al eje x.

6. $\int_{(1,0)}^{(3,4)} \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ sobre cualquier trayectoria que no pase por el origen.

7. $\int_{(1,2)}^{(3,6)} (2y^2x - 3)\,dx + (2yx^2 + 4)\,dy$

8. $\int_{(-1,1)}^{(0,0)} (5x + 4y)\,dx + (4x - 8y^3)\,dy$

9. $\int_{(0,0)}^{(2,8)} (y^3 + 3x^2y)\,dx + (x^3 + 3y^2x + 1)\,dy$

10. $\int_{(-2,0)}^{(1,0)} (2x - y \operatorname{sen} xy - 5y^4)\,dx - (20xy^3 + x \operatorname{sen} xy)\,dy$

Si $\partial P/\partial y$, $\partial P/\partial z$, $\partial Q/\partial x$, $\partial Q/\partial z$, $\partial R/\partial x$, $\partial R/\partial y$ son continuas en una región rectangular del espacio tridimensional, entonces $\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ es independiente de la trayectoria si y sólo si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \tag{18.16}$$

En los Problemas 11-14 aplique este criterio para demostrar que la integral indicada es independiente de la trayectoria. Evalúe.

11. $\int_{(1,1,1)}^{(2,4,8)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$

12. $\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} 2x\,dx + 3y^2\,dy + 4z^3\,dz$

13. $\int_{(1,1,\ln 3)}^{(2,2,\ln 3)} e^{2z}\,dx + 3y^2\,dy + 2xe^{2z}\,dz$

14. $\int_{(-2,3,1)}^{(0,0,0)} 2xz\,dx + 2yz\,dy + (x^2 + y^2)\,dz$

En los Problemas 15-20 determine si el campo vectorial indicado es un campo de gradiente. Si es así, encuentre una función potencial ϕ de **F**.

15. $\mathbf{F}(x, y) = (4x^3y^3 + 3)\mathbf{i} + (3x^4y^2 + 1)\mathbf{j}$

16. $\mathbf{F}(x, y) = 2xy^3\mathbf{i} + 3y^2(x^2 + 1)\mathbf{j}$

17. $\mathbf{F}(x, y) = y^2\cos xy^2\mathbf{i} - 2xy \operatorname{sen} xy^2\mathbf{j}$

18. $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2 + 1)^{-2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$

19. $\mathbf{F}(x, y) = (x^3 + y)\mathbf{i} + (x + y^3)\mathbf{j}$

20. $\mathbf{F}(x, y) = 2e^{2y}\mathbf{i} + xe^{2y}\mathbf{j}$

21. La ley de la atracción gravitacional entre dos masas m_1 y m_2 está dada por $\mathbf{F} = -Gm_1m_2\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$, en donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Aplique (18.16) para demostrar que **F** es conservativa. Determine una función potencial de **F**.

22. Si **F** es un campo de fuerzas conservativo, demuestre que es cero el trabajo realizado a lo largo de cualquier trayectoria cerrada simple.

23. Determine el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y, z) = 8xy^3z\mathbf{i} + 12x^2y^2z\mathbf{j} + 4x^2y^3\mathbf{k}$ que actúa a lo largo de la hélice $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ de $(2, 0, 0)$ a $(1, \sqrt{3}, \pi/3)$. Asimismo, de $(2, 0, 0)$ a $(0, 2, \pi/2)$. (*Sugerencia:* Aplique (18.16) para demostrar que **F** es conservativo.)

24. Una partícula en el plano es atraída hacia el origen con una fuerza $\mathbf{F} = |\mathbf{r}|^n\mathbf{r}$, en donde n es un entero positivo y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ es el vector de posición de la partícula. Demuestre que **F** es conservativa. Calcule el trabajo realizado al mover la partícula entre (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

Problemas diversos

25. Suponga que **F** es un campo de fuerzas conservativo con función potencial ϕ. En física, a la función $p = -\phi$ se la llama **energía potencial**. Como $\mathbf{F} = -\nabla p$, la segunda ley de Newton se convierte en

$$m\mathbf{r}'' = -\nabla p \quad \text{o bien} \quad m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p = \mathbf{0}.$$

Integrando $m\frac{dv}{dt}\cdot\frac{dr}{dt} + \nabla p \cdot \frac{dr}{dt} = 0$ con respecto a t, deduzca la ley de la conservación de la energía mecánica: $\frac{1}{2}mv^2 + p =$ constante. (*Sugerencia:* Véase el Problema 37 de los Ejercicios 18.1.)

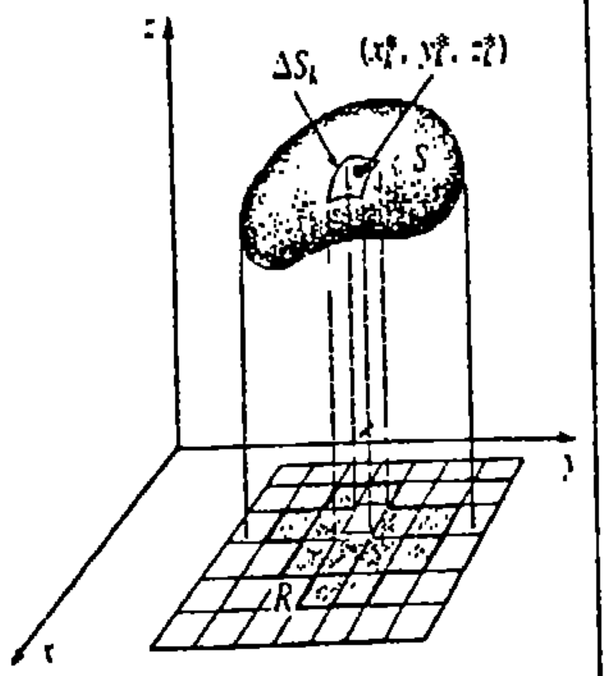
26. Supóngase que C es una curva alisada que une los puntos A (para $t = a$) y B (para $t = b$), y que p es la energía potencial definida en el Problema 25. Si $\mathbf{F}$ es un campo de fuerzas conservativo y $K = \frac{1}{2}mv^2$ es la energía cinética, demuestre que $p(B) + K(B) = p(A) + K(A)$.

18.3 Integrales de superficie

El último tipo de integral que se considerará se llama **integral de superficie**, y comprende a una función G de tres variables definida en una superficie S. Los cinco pasos preparatorios para la definición de esta integral se semejan a combinaciones de los pasos que conducen a la integral de línea, con respecto a la longitud de arco, y los pasos que llevan a la integral doble.

$$w = G(x, y, z)$$

1. Considérese que G está definida en una región del espacio tridimensional que contiene una superficie S que es la gráfica de una función $z = f(x, y)$. Sea la proyección R de la superficie sobre el plano xy una región de tipo I o de tipo II.
2. Dividir la superficie en n partes de áreas ΔS_k correspondientes a una partición P de R en n rectángulos R_k de áreas ΔA_k.
3. Sea $\|P\|$ la **norma** de la partición, es decir, la longitud de la diagonal mayor de los R_k.
4. Elegir un punto (x_k^*, y_k^*, z_k^*) en cada elemento parte de área.
5. Formar la suma
$$\sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\,\Delta S_k.$$



DEFINICIÓN 18.2

Sea G una función de tres variables definida en una región del espacio que contiene una superficie S. Entonces la **integral de superficie de F en S** está dada por

$$\iint_S G(x, y, z)\,dS = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\,\Delta S_k. \tag{18.17}$$

□

Método de evaluación

De la Sección 17.6 recordemos que si $z = f(x, y)$ es la ecuación de una superficie S, entonces la diferencial de la superficie es

$$dS = \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\,dA.$$

De esta manera, si G, f, f_x y f_y son continuas en una región que contiene a S, puede evaluarse (18.17) por medio de una integral doble.

$$\iint_S G(x, y, z)\,dS = \iint_R G(x, y, f(x, y))\sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\,dA. \tag{18.18}$$

Obsérvese que cuando $G = 1$ (18.18) se reduce a la fórmula del área de una superficie.

Proyección de S en otros planos

Si $y = g(x, z)$ es la ecuación de una superficie S que se proyecta en una región R del plano xz, entonces

$$\iint_S G(x, y, z)\,dS = \iint_R G(x, g(x, z), z)\sqrt{1 + [g_x(x, z)]^2 + [g_z(x, z)]^2}\,dA. \tag{18.19}$$

De manera semejante, si $x = h(y, z)$ es la ecuación de una superficie que se proyecta sobre el plano yz, entonces la análoga de (18.18) es

$$\iint_S G(x, y, z)\,dS = \iint_R G(h(y, z), y, z)\sqrt{1 + [h_y(y, z)]^2 + [h_z(y, z)]^2}\,dA. \tag{18.20}$$

Masa de una superficie

Supongamos que $\rho(x, y, z)$ representa la densidad superficial en cualquier punto, o sea la masa por unidad de área, entonces la **masa** m de la superficie es

$$m = \iint_S \rho(x, y, z)\,dS. \tag{18.21}$$

Ejemplo 1

Determinar la masa de la superficie del paraboloide $z = 1 + x^2 + y^2$ en el primer octante para $1 \le z \le 5$, si la densidad en un punto P de la superficie es directamente proporcional a la distancia al plano xy.

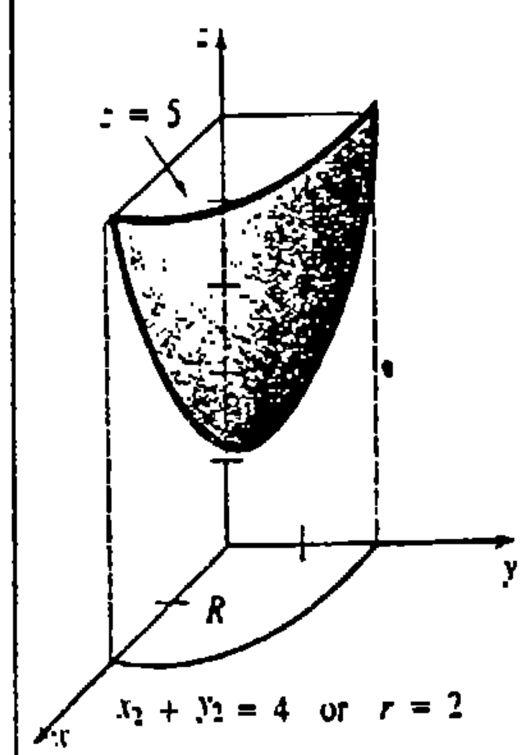


Figura 18.20

Solución En la Figura 18.20 se muestran la superficie en cuestión y su proyección sobre el plano xy. Ahora bien, como $\rho(x, y, z) = kz$ y $z = 1 + x^2 + y^2$, (18.21) y (18.18) dan

$$m = \iint_S kz\,dS = k\iint_R (1 + x^2 + y^2)\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dA.$$

Cambiando a coordenadas polares, se tiene

$$
\begin{aligned}
m &= k\int_0^{\pi/2}\int_0^2 (1+r^2)\sqrt{1+4r^2}\, r\, dr\, d\theta \\
&= k\int_0^{\pi/2}\int_0^2 [r(1+4r^2)^{1/2} + r^3(1+4r^2)^{1/2}]\, dr\, d\theta \quad \boxed{\text{Integración por partes}} \\
&= k\int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{12}(1+4r^2)^{3/2} + \frac{1}{12}r^2(1+4r^2)^{3/2} - \frac{1}{120}(1+4r^2)^{5/2}\right]_0^2 d\theta \\
&= \frac{k\pi}{2}\left[\frac{5(17)^{3/2}}{12} - \frac{17^{5/2}}{120} - \frac{3}{40}\right] \approx 19.2k.
\end{aligned}
$$

Integrales de campos vectoriales

Si $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ es el campo de velocidad en un fluido, entonces, como se muestra en la Figura 18.21(b), el volumen del fluido que pasa a través de un elemento de área dS por unidad de tiempo es aproximado por

$$(\text{altura}) \cdot (\text{área de la base}) = (\text{comp}_{\mathbf{n}}\mathbf{F})\, dS = (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\, dS,$$

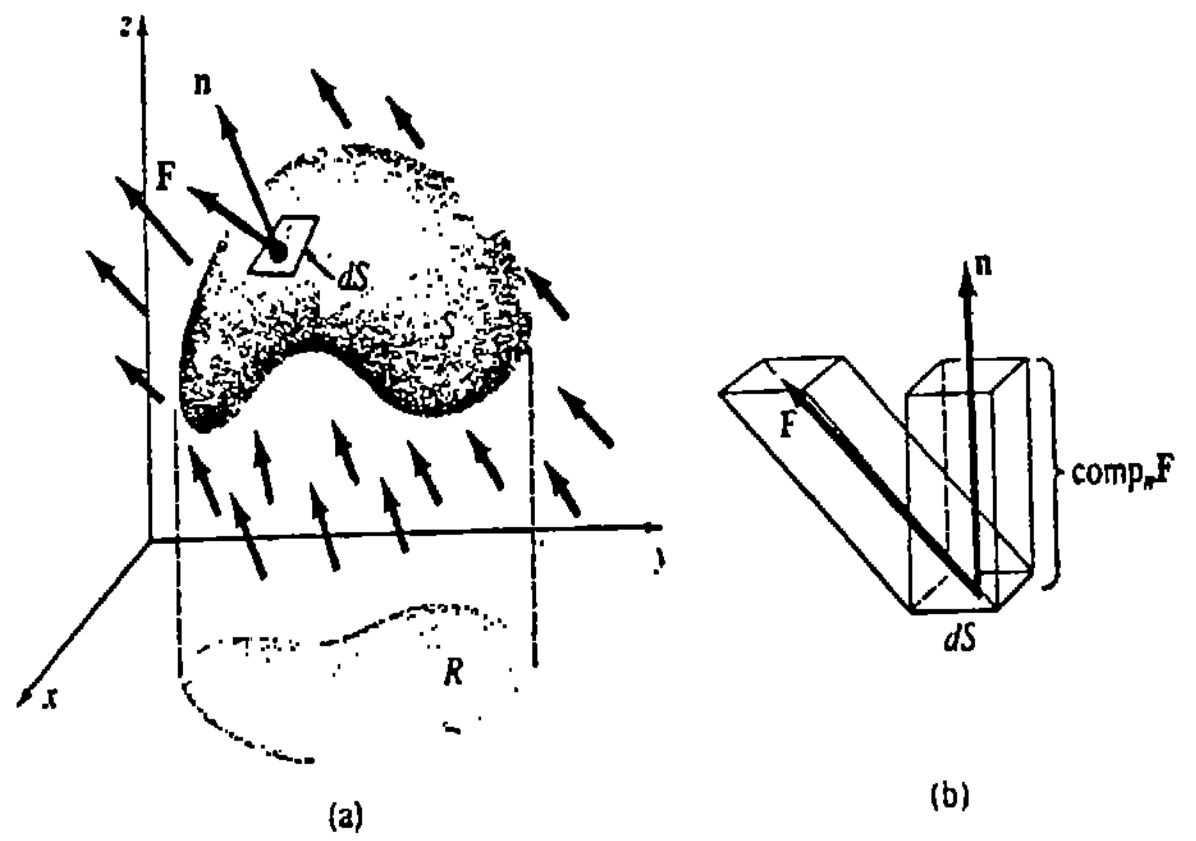


Figura 18.21

en donde n es un vector normal unitario a la superficie. El volumen total fluido que atraviesa S por unidad de tiempo se llama **flujo de F a trvés de** S y está dado por

$$\text{Flujo} = \iint_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\, dS. \qquad (18.22)$$

En el caso de una superficie cerrada S, si n es el vector normal exterior (interior), entonces (18.22) da el volumen del fluido que pasa hacia afuera (hacia adentro) de S por unidad de tiempo.

Ejemplo 2

Supóngase que $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ representa la velocidad de un líquido. Determine el flujo de F a través de la superficie S dada por la parte del plano $z = 6 - 3x - 2y$ situada en el primer octante.

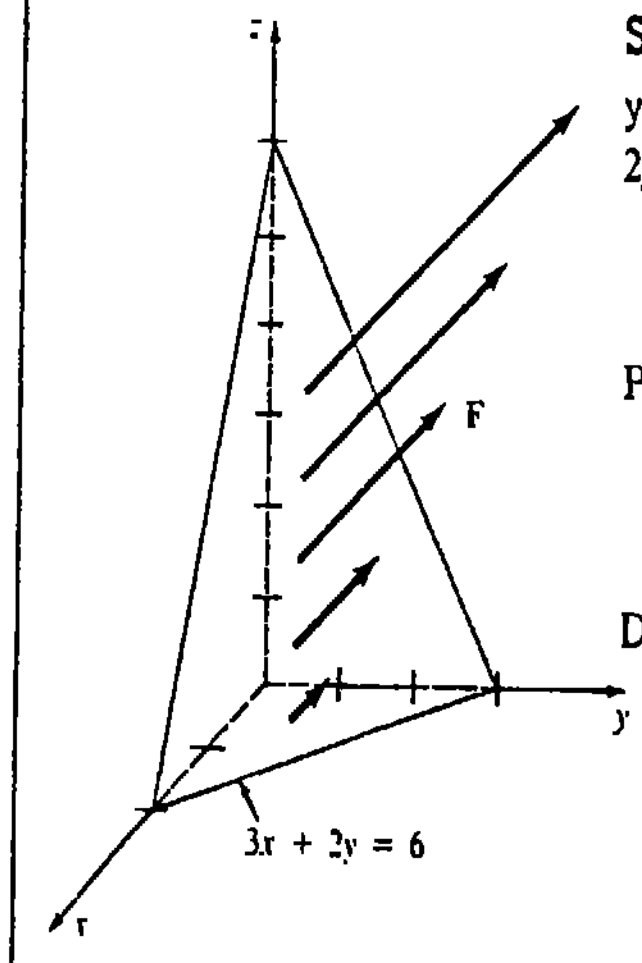


Figura 18.22

Solución En la Figura 18.22 se ilustran el campo vectorial y la superficie. Si el plano está definido por $g(x, y, z) = 3x + 2y + z - 6 = 0$, entonces un vector normal unitario es*

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g}{|\nabla g|} = \frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{k}.$$

Por lo tanto,

$$\text{Flujo} = \iint_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\, dS = \frac{1}{\sqrt{14}}\iint_S 3z\, dS.$$

De (18.18) se obtiene entonces que

$$
\begin{aligned}
\text{Flujo} &= \frac{1}{\sqrt{14}}\iint_R 3(6 - 3x - 2y)(\sqrt{14}\, dA) \\
&= 3\int_0^2\int_0^{3-3x/2} (6 - 3x - 2y)\, dy\, dx = 18.
\end{aligned}
$$

Observaciones

(*i*) Dependiendo de la naturaleza del campo vectorial, la integral (18.22) puede representar diversas clases de flujo. Por ejemplo, flujo eléctrico, flujo magnético, flujo de calor, etcétera.

(*ii*) En el Ejemplo 2 existe una ambigüedad, ya que siempre hay dos vectores normales a una superficie: uno "superior" y uno "inferior". En los problemas que siguen se tomará siempre el "normal superior"; esto es, el normal con componente k positiva. Para una superficie cerrada consideraremos que n es un normal exterior.

Ejercicios 18.3

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 1002.

En los Problemas 1-10 évalúe $\iint_S G(x, y, z)\, dS$.

1. $G(x, y, z) = x$; S es la porción del cilindro $z = 2 - x^2$ en el primer octante limitada por $x = 0$, $y = 0$, $y = 4$, $z = 0$.

2. $G(x, y, z) = xy(9 - 4z)$; la misma superficie del Problema 1.

3. $G(x, y, z) = xz^3$; S es el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

4. $G(x, y, z) = x + y + z$; S es el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre $z = 1$ y $z = 4$.

5. $G(x, y, z) = (x^2 + y^2)z$; S es la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ en el primer octante.

* Véase la Sección 16.8.

6. $G(x, y, z) = z^2$; S es la porción del plano $z = x + 1$ dentro del cilindro $y = 1 - x^2$, $0 \le y \le 1$.

7. $G(x, y, z) = xy$; S es la porción del paraboloide $2z = 4 - x^2 - y^2$ dentro de $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

8. $G(x, y, z) = 2z$; S es la porción del paraboloide $2z = 1 + x^2 + y^2$ en el primer octante limitada por $x = 0$, $y = \sqrt{3}x$, $z = 1$.

9. $G(x, y, z) = 24\sqrt{yz}$; S es la porción del cilindro $y = x^2$ en el primer octante limitada por $y = 0$, $y = 4$, $z = 0$, $z = 3$. (*Sugerencia:* Aplicar (18.19).)

10. $G(x, y, z) = (1 + 4y^2 + 4z^2)^{1/2}$; S es la porción del paraboloide $x = 4 - y^2 - z^2$ en el primer octante fuera del cilindro $y^2 + z^2 = 1$ (*Sugerencia:* Aplicar (18.20).)

En los Problemas 11 y 12 determine la masa de la superficie dada con la función densidad indicada.

11. S es la porción del plano $x + y + z = 1$ en el primer octante; la densidad en un punto P es directamente proporcional al cuadrado de la distancia al plano yz.

12. S es el hemisferio $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$; $\rho(x, y, z) = |xy|$.

En los Problemas 13-16 sea **F** un campo vectorial. Determine el flujo de **F** a través de la superficie indicada. Utilice el normal superior **n** de S.

13. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + 2z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$; S es la porción del cilindro $y^2 + z^2 = 4$ en el primer octante limitada por $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $z = 0$.

14. $\mathbf{F} = z\mathbf{k}$; S es la porción del paraboloide $z = 5 - x^2 - y^2$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

15. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S es la misma superficie del Problema 14.

16. $\mathbf{F} = -x^3y\mathbf{i} + yz^3\mathbf{j} + xy^3\mathbf{k}$; S es la porción del plano $z = x + 3$ en el primer octante dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

17. Supóngase que $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ representa temperatura y que la "fluencia" del calor está dada por el campo vectorial $\mathbf{F} = -\nabla T$. Determine el flujo de calor hacia afuera de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. (*Sugerencia:* El área de la superficie de una esfera de radio a es $4\pi a^2$.)

18. Determine el flujo de $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ hacia afuera del cubo unitario $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$. Véase la Figura 18.23. Aplique el hecho

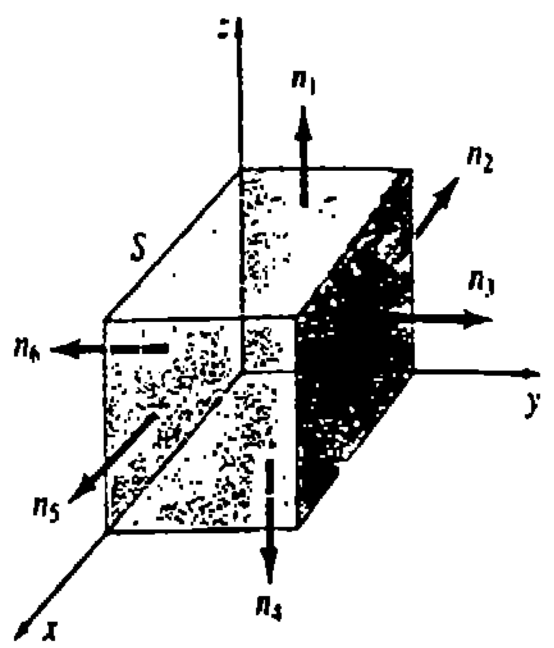


Figura 18.23

de que el flujo hacia afuera del cubo es la suma de los flujos hacia afuera de las caras.

19. La ley de Coulomb dice que el campo eléctrico **E** debido a una carga puntual q en el origen está dada por $\mathbf{E} = kq\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$, en donde k es una constante y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Determine el flujo hacia afuera de una esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

20. Si $\sigma(x, y, z)$ es la densidad superficial de carga en un campo electrostático, entonces la carga total en una superficie S es $Q = \iint_S \sigma(x, y, z)\,dS$. Calcule la carga total en la porción del hemisferio $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 9$ si la densidad de carga en un punto P de la superficie es directamente proporcional a la distancia desde el plano xy.

Problemas diversos

21. Sean $z = f(x, y)$ la ecuación de una superficie S y **F** el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$. Demuestre que

$$\iint_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,dS = \iint_R \left[-P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} - Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} + R(x, y, z)\right] dA.$$

22. Las coordenadas del centroide de una superficie están definidas por

$$\bar{x} = \iint_S x\,dS/A(S), \quad \bar{y} = \iint_S y\,dS/A(S),$$

$$\bar{z} = \iint_S z\,dS/A(S).$$

en donde $A(S)$ es el área de la superficie. Localice el centroide de la porción del plano $2x + 3y + z = 6$ en el primer octante.

23. Utilice la información del Problema 22 para situar el centroide del hemisferio $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

18.4 Divergencia y rotacional

Hemos visto que si un campo vectorial de fuerzas **F** es conservativo, se puede expresar como el gradiente de una función potencial ϕ,

$$\mathbf{F} = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}.$$

El operador gradiente

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

empleado en el gradiente se puede combinar con un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ de dos maneras adicionales. Supondremos a continuación que P, Q y R tienen derivadas parciales continuas.

DEFINICIÓN 18.3

El **rotacional** de un campo vectorial $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ es el vector

$$\text{rot } F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}. \quad \square$$

En la práctica se puede calcular rot **F** a partir del producto vectorial del operador gradiente y el vector **F**:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \tag{18.23}$$

DEFINICIÓN 18.4

La **divergencia** de un campo vectorial $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ es la función escalar

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \quad \square$$

Obsérvese que div **F** también se puede expresar en términos del operador gradiente como:

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}P(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y}Q(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial z}R(x, y, z). \tag{18.24}$$

Ejemplo 1

Si $\mathbf{F} = (x^2y^3 - z^4)\mathbf{i} + 4x^5y^2z\mathbf{j} - y^4z^6\mathbf{k}$, determine

(*a*) rot **F** y (*b*) div **F**.

Solución

(*a*) De (18.23),

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2y^3 - z^4 & 4x^5y^2z & -y^4z^6 \end{vmatrix}$$

$$= (-4y^3z^6 - 4x^5y^2)\mathbf{i} + 4z^3\mathbf{j} + (20x^4y^2z - 3x^2y^2)\mathbf{k}.$$

(*b*) De (18.24),

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y^3 - z^4) + \frac{\partial}{\partial y}(4x^5y^2z) + \frac{\partial}{\partial z}(-y^4z^6)$$

$$= 2xy^3 + 8x^5yz - 6y^4z^5.$$

Se pide al lector demostrar las dos siguientes propiedades importantes. Si f es una *función escalar* con segundas derivadas parciales continuas, entonces

$$\text{rot}(\text{grad} f) = \nabla \times \nabla f = \mathbf{0}. \tag{18.25}$$

Además, si $\mathbf{F}$ es un *campo vectorial* que tiene segundas derivadas parciales continuas, resulta que

$$\text{div}(\text{rot } \mathbf{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0. \tag{18.26}$$

Véanse los Problemas 19 y 20 de los Ejercicios 18.4.

Interpretaciones físicas

El concepto de "rotacional" fue introducido primero por Maxwell* en sus estudios de campos electromagnéticos. Sin embargo, el rotacional se entiende fácilmente en relación con el flujo de fluidos. Si un dispositivo de paletas, como el que se muestra en la Figura 18.24, se introduce en la corriente de un fluido, entonces el rotacional del campo de velocidad $\mathbf{F}$ es una medida de la tendencia del fluido a hacer girar el dispositivo en torno a su eje vertical w. Si rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, se expresa entonces que la corriente del fluido es irrotacional, lo cual significa que está libre de vórtices o remolinos que causarían que las paletas

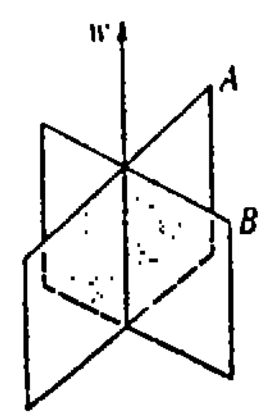
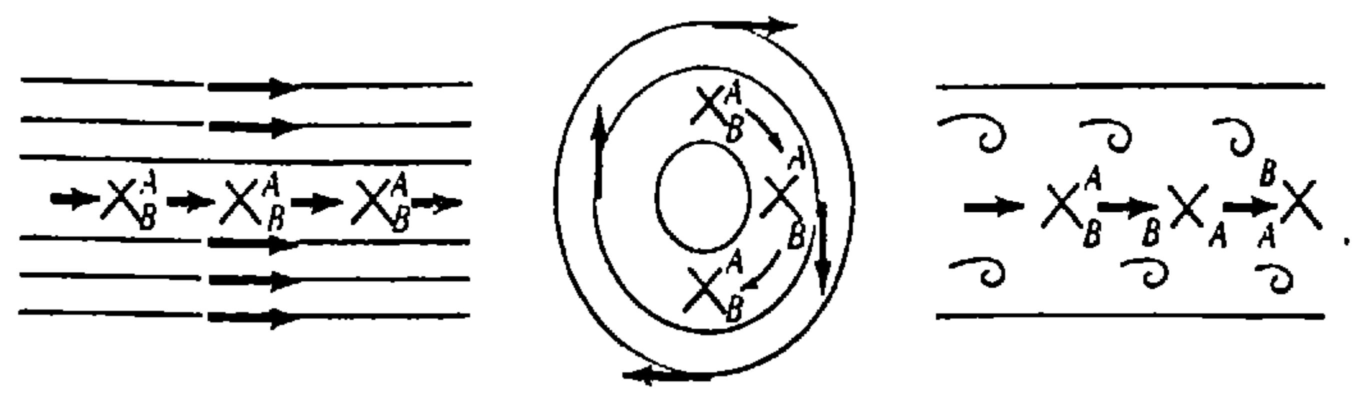


Figura 18.24

* James Clerk Maxwell (1831-1879), físico escocés.



(a) corriente irrotacional (b) corriente irrotacional (c) corriente rotacional

Figura 18.25

giraran.* En la Figura 18.25 el eje w de los álabes apunta perpendicularmente hacia afuera de la página. En la Figura 18.25(b) obsérvese que "irrotacional" *no* significa que el fluido no gira. Véase el Problema 28 de los Ejercicios 18.4 para otra interpretación del rotacional.

La divergencia de un campo vectorial también se puede interpretar en el contexto de la fluencia o flujo de fluidos. Una medida de la razón de cambio de la densidad del fluido en un punto es simplemente div $\mathbf{F}$. En otras palabras, div $\mathbf{F}$ es una medida de la compresibilidad del fluido. Si $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, se dice que el fluido es **incompresible**. En la teoría electromagnética, si $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, se dice que el campo vectorial $\mathbf{F}$ es **solenoidal**.

Ejercicios 18.4

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 1002

En los Problemas 1-6 determine el rotacional y la divergencia del campo vectorial indicado.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x^2y\mathbf{i} + 2xz^3\mathbf{j} + y^4\mathbf{k}$
2. $\mathbf{F}(x, y, z) = 5y^3\mathbf{i} + \left(\frac{1}{2}x^3y^2 - xy\right)\mathbf{j} - (x^3yz - xz)\mathbf{k}$
3. $\mathbf{F}(x, y, z) = xe^{-z}\mathbf{i} + 4yz^2\mathbf{j} + 3ye^{-z}\mathbf{k}$
4. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz \ln x\mathbf{i} + (2x - 3yz)\mathbf{j} + xy^2z^3\mathbf{k}$
5. $\mathbf{F}(x, y, z) = xye^x\mathbf{i} - x^3yze^z\mathbf{j} + xy^2e^y\mathbf{k}$
6. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 \text{sen } yz\mathbf{i} + z \cos xz^3\mathbf{j} + ye^{5xy}\mathbf{k}$

En los Problemas 7-14 sean $\mathbf{a}$ un vector constante y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Verifique la identidad indicada.

7. div $\mathbf{r} = 3$
8. rot $\mathbf{r} = \mathbf{0}$
9. $(\mathbf{a} \times \nabla) \times \mathbf{r} = -2\mathbf{a}$
10. $\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{a}$
11. $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 0$
12. $\mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{r}) = \mathbf{0}$
13. $\nabla \times [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\mathbf{a}] = 2(\mathbf{r} \times \mathbf{a})$
14. $\nabla \cdot [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\mathbf{a}] = 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})$

En los Problemas 15-22 verifique la identidad indicada. Suponga la continuidad de todas las derivadas parciales.

15. $\nabla \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{G}$
16. $\nabla \times (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \times \mathbf{G}$
17. $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = f(\nabla \cdot \mathbf{F}) + \mathbf{F} \cdot \nabla f$
18. $\nabla \times (f\mathbf{F}) = f(\nabla \times \mathbf{F}) + (\nabla f) \times \mathbf{F}$
19. rot(grad f) $= \mathbf{0}$
20. div(rot $\mathbf{F}$) $= 0$
21. div$(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \text{rot } \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \text{rot } \mathbf{G}$
22. rot(rot $\mathbf{F}$ + grad f) = rot(rot $\mathbf{F}$).
23. Demuestre que

$$\nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Esto se conoce como el **laplaciano** y también se denota por $\nabla^2 f$.

* En la nomenclatura en inglés se utiliza para el rotacional el término *curl*, que significa "rizo". (N. de E.)

24. Demuestre que $\nabla \cdot (f\,\nabla f) = f\,\nabla^2 f - |\nabla f|^2$ en donde $\nabla^2 f$ es el laplaciano definido en el Problema 23. (*Sugerencia:* Véase el Problema 17.)

25. Toda función escalar f para la cual $\nabla^2 f = 0$ se dice que es **armónica**. Verifique que $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ es armónica excepto en el origen. La expresión $\nabla^2 f = 0$ se llama **ecuación de Laplace**.

26. Compruebe que

$$f(x, y) = \arctan\left(\frac{2y}{x^2 + y^2 - 1}\right),$$

$x^2 + y^2 \neq 1$, satisface la ecuación de Laplace en dos variables.

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

27. Sea $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ el vector de posición de una masa m_1 y supongamos que la masa m_2 se localiza en el origen. Si la fuerza de atracción gravitacional es

$$\mathbf{F} = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r},$$

verifique que rot $\mathbf{F} = 0$ y div $\mathbf{F} = 0$.

28. Suponga que un cuerpo gira con una velocidad angular constante ω en torno a un eje. Si $\mathbf{r}$ es el vector de posición de un punto P del cuerpo, medido desde el origen, entonces el vector velocidad lineal $\mathbf{v}$ de rotación es $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Véase la Figura 18.26. Si $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{i} + \omega_2\mathbf{j} + \omega_3\mathbf{k}$, demuestre que $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}$ rot $\mathbf{v}$.

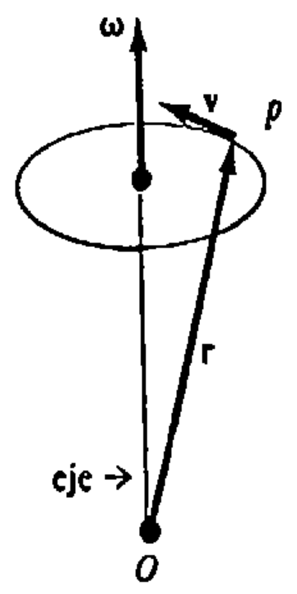


Figura 18.26

En los Problemas 29 y 30 supóngase que f y g tienen segundas derivadas parciales continuas. Demuestre que el campo vectorial indicado es solenoidal. (*Sugerencia:* Véase el Problema 21.)

29. $\mathbf{F} = \nabla f \times \nabla g$ 30. $\mathbf{F} = \nabla f \times (f\,\nabla g)$

31. Si $\mathbf{F} = y^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$, determine el flujo de $\nabla \times \mathbf{F}$ a través de la porción del elipsoide $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ en el primer octante que está limitada por $y = 0$, $y = x$, $z = 0$.

32. El campo vectorial de velocidad para el flujo bidimensional de un fluido ideal alrededor de un cilindro está dado por

$$\mathbf{V}(x, y) = A\left[\left(1 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right)\mathbf{i} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\mathbf{j}\right]$$

para una constante positiva A. Véase la Figura 18.27.

(a) Demuestre que cuando el punto (x, y) está lejos del origen, $\mathbf{V}(x, y) \approx A\mathbf{i}$.

(b) Demuestre que $\mathbf{V}$ es irrotacional.

(c) Demuestre que $\mathbf{V}$ es incompresible.

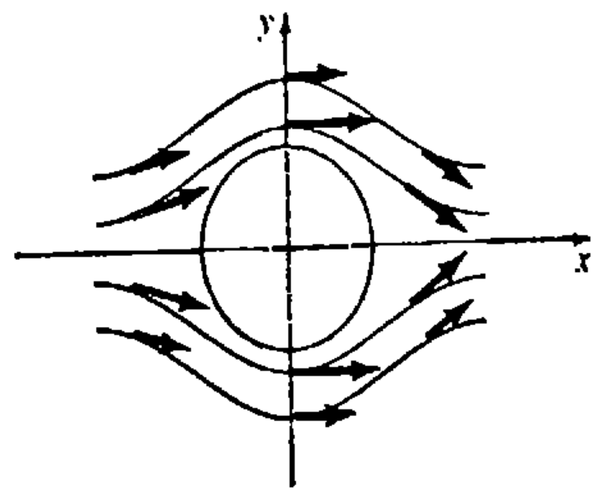


Figura 18.27

18.5 Teoremas de integrales

18.5.1 Teorema de Green

Uno de los teoremas más importantes del cálculo integral vectorial relaciona una integral de línea alrededor de una curva cerrada simple alisada parte por parte, con una integral doble en la región limitada por la curva.

*Teorema de Green en el plano**

Supóngase que C es una curva cerrada simple alisada parte por parte que limita a una región R. Si P, Q, $\partial P/\partial y$ y $\partial Q/\partial x$ son continuas en R, entonces

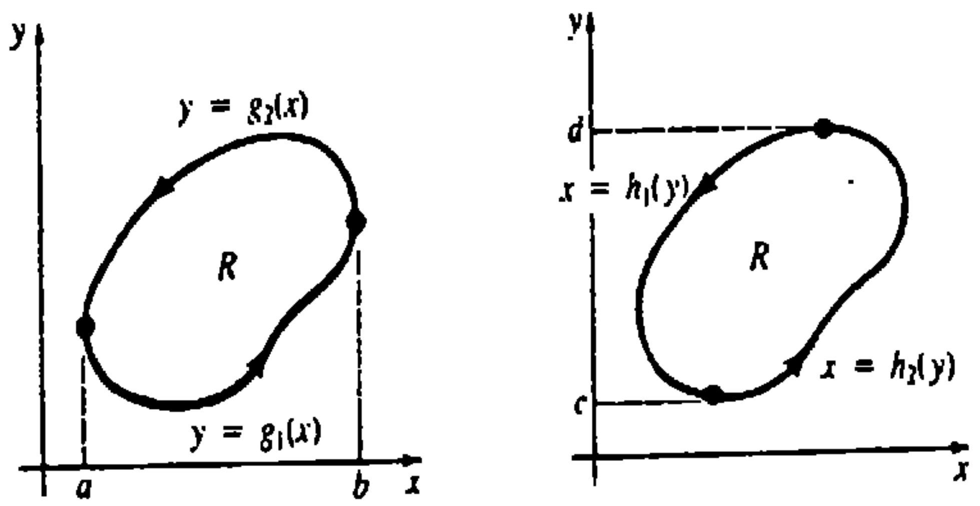
$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA. \tag{18.27}$$

Demostración parcial Demostraremos (18.27) sólo para una región R que sea simultáneamente de los tipos I y II:

$$R: g_1(x) \le y \le g_2(x), \quad a \le x \le b$$
$$R: h_1(y) \le x \le h_2(y), \quad c \le y \le d.$$

Utilizando la Figura 18.28(a),

$$\begin{aligned} -\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\,dA &= -\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\,dx \\ &= -\int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))]\,dx \\ &= \int_a^b P(x, g_1(x))\,dx + \int_b^a P(x, g_2(x))\,dx \\ &= \oint_C P(x, y)\,dx. \end{aligned} \tag{18.28}$$



(a) R como región de tipo I (b) R como región de tipo II

Figura 18.28

De manera semejante de la Figura 18.28(b)

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA &= \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy \\ &= \int_c^d [Q(h_2(y), y) - Q(h_1(y), y)]\,dy \\ &= \int_c^d Q(h_2(y), y)\,dy + \int_d^c Q(h_1(y), y)\,dy \\ &= \oint_C Q(x, y)\,dy. \end{aligned} \tag{18.29}$$

* Llamado así en honor de George Green (1793-1841), matemático y físico inglés. Las palabras "en el plano" indican que el teorema se generaliza al espacio tridimensional. En efecto así es —continúe leyendo.

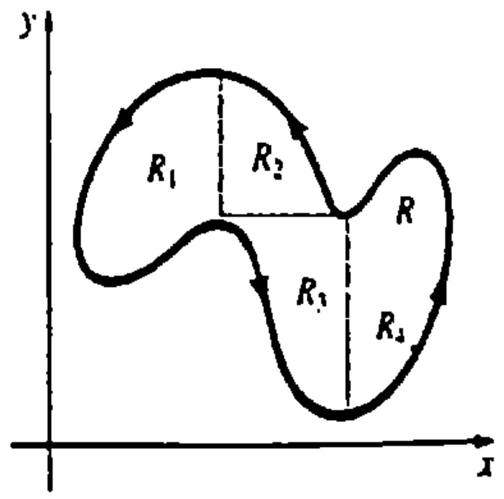


Figura 18.29

Sumando las expresiones (18.28) y (18.29) se obtiene (18.27). □

El teorema es aplicable a regiones más complicadas, como la mostrada en la Figura 18.29, aunque la demostración anterior no es válida para esos casos. La demostración consiste en descomponer R en un número finito de subregiones a las cuales se pueda aplicar (18.27), y luego se suman los resultados.

Ejemplo 1

Evaluar $\oint_C (x^2 - y^2)dx + (2y - x)dy$, en donde C consiste en la frontera de la región del primer cuadrante que está limitada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = x^3$.

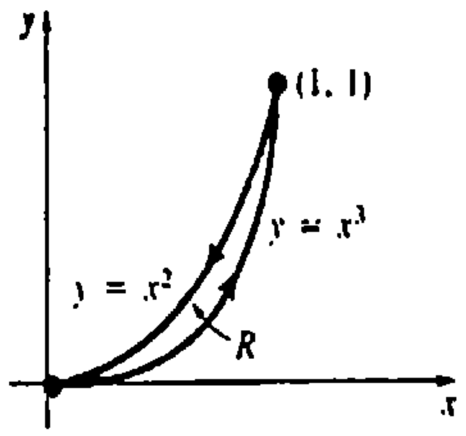


Figura 18.30

Solución Si $P(x, y) = x^2 - y^2$ y $Q(x, y) = 2y - x$, entonces $\partial P/\partial y = -2y$ y $\partial Q/\partial x = -1$. En virtud de (18.27) y la Figura 18.30, se tiene que

$$\begin{aligned}\oint_C (x^2 - y^2)\,dx + (2y - x)\,dy &= \iint_R (-1 + 2y)\,dA \\ &= \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} (1 - 2y)\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 \Big[y - y^2\Big]_{x^3}^{x^2} dx \\ &= \int_0^1 (x^6 - x^4 - x^3 + x^2)\,dx = \frac{11}{420}.\end{aligned}$$

Notamos que la integral de línea del Ejemplo 1 podría haber sido evaluada de manera directa empleando la variable x como parámetro. Sin embargo, en el ejemplo siguiente, examine el problema de evaluar la integral de línea indicada en la forma usual.

Ejemplo 2

Evaluar $\oint_C (x^5 + 3y)dx + (2x - e^{y^3})dy$, en donde C es la circunferencia $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 4$.

Solución Identificando $P(x,y) = x^5 + 3y$ y $Q(x, y) = 2x - e^{y^3}$, tenemos $\partial P/\partial y = 3$ y $\partial Q/\partial x = 2$. Por lo tanto, (18.27) da

$$\begin{aligned}\oint_C (x^5 + 3y)\,dx + (2x - e^{y^3})\,dy &= \iint_R [2 - 3]\,dA \\ &= -\iint_R dA.\end{aligned}$$

Puesto que la integral doble $\iint_R dA$ da el área de la región R limitada por la circunferencia de radio 2,

$$\oint_C (x^5 + 3y)\,dx + (2x - e^{y^3})\,dy = -4\pi.$$

Ejemplo 3

Sea C la línea cerrada que consta de los cuatro segmentos de recta C_1, C_2, C_3, y C_4, mostrados en la Figura 18.31. El teorema de Green no es aplicable a la integral de línea

$$\oint_C \frac{x}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{y}{x^2 + y^2}\,dy$$

ya que P, Q, $\partial P/\partial y$ y $\partial Q/\partial x$ no son continuas en el origen.

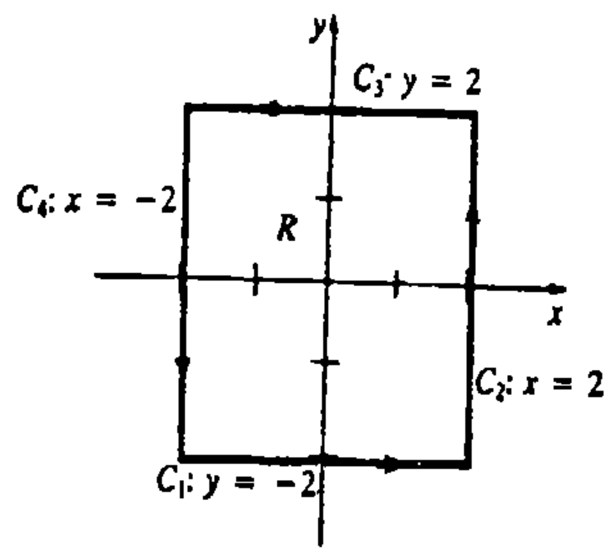


Figura 18.31

Ejemplo 4

Evaluar $\oint_C \frac{x}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{y}{x^2 + y^2}\,dy$, en donde C es la línea cerrada que consta de las siete partes mostradas en la Figura 18.32.

Solución Debido a que

$$P(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad Q(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2},$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

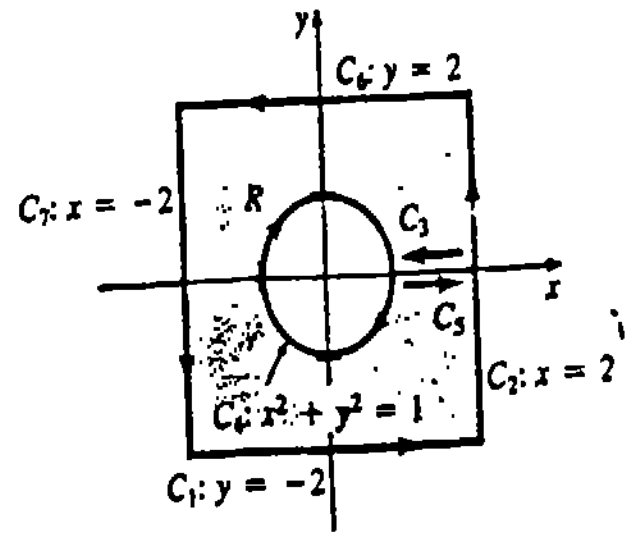


Figura 18.32

son continuas en la región R limitada por C es posible aplicar el teorema de Green:

$$\oint_C \frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy = \iint_R \left[-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \left(-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)\right] dA = 0.$$

18.5.2 Teorema de Stokes y el Teorema de la divergencia

Forma vectorial del Teorema de Green

Si $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ es un campo vectorial bidimensional, entonces

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}. \tag{18.30}$$

En vista de (18.12) y (18.13) de la Sección 18.1, el teorema de Green (18.27) se puede expresar en notación vectorial como

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_R (\text{rot } \mathbf{F})\cdot\mathbf{k}\,dA. \tag{18.31}$$

Esto es, la integral de línea de la componente tangencial de $\mathbf{F}$ es la integral doble de la componente normal de rot $\mathbf{F}$.

Teorema de Green en el espacio tridimensional

La forma vectorial del teorema de Green (18.31) se generaliza a partir de una curva cerrada simple en el plano a una curva cerrada simple en el espacio de tres dimensiones. Supongamos que $z = f(x, y)$ es una función continua que tiene primeras derivadas parciales continuas y cuya gráfica es una superficie S sobre una región R del plano xy. Sea C una curva cerrada simple que forma la frontera de S y supóngase que su proyección C_{xy} sobre el plano xy forma la frontera de R. La dirección positiva en C se define por la dirección positiva en C_{xy}. Sean, además, $\mathbf{T}$ un vector tangente unitario de C, y $\mathbf{n}$ un vector normal unitario *superior* de S. Véase la Figura 18.33. La forma tridimensional del teorema de Green, que ahora presentamos, se llama Teorema de Stokes.*

* George G. Stokes (1819-1903), matemático y físico irlandés.

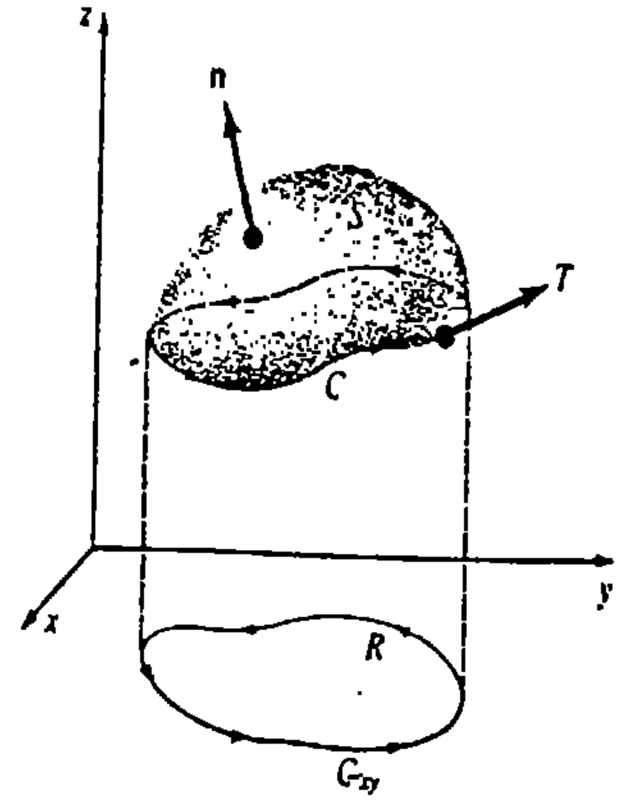


Figura 18.33

TEOREMA 18.4

Teorema de Stokes

Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ un campo vectorial para el cual P, Q y R son continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en una región que contiene a una superficie S. Si C es la frontera de S recorrida en el sentido positivo, entonces

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C (\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\,ds = \iint_S (\text{rot } \mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,dS. \tag{18.32}$$

□

El Teorema 18.4 no es el enunciado completo del teorema de Stokes. Está limitado a superficies como la mostrada en la Figura 18.33, en las que podemos tomar a $\mathbf{n}$ como un normal superior. El enunciado completo y la demostración del Teorema 18.4 para superficies de dos caras, o superficies con *orientación*, se pueden encontrar en la mayoría de los libros de cálculo avanzado.

Ejemplo 5

Sea S la parte del cilindro $z = 1 - x^2$ para $0 \le x \le 1$, $-2 \le y \le 2$. Verificar el teorema de Stokes si $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$.

Solución En la Figura 18.34 se muestran la superficie S, la curva C, que se compone de la unión de C_1, C_2, C_3 y C_4, y la región R.

La Integral de Superficie: De $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$, resulta que

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & yz & xz \end{vmatrix} = -y\mathbf{i} - z\mathbf{j} - x\mathbf{k}.$$

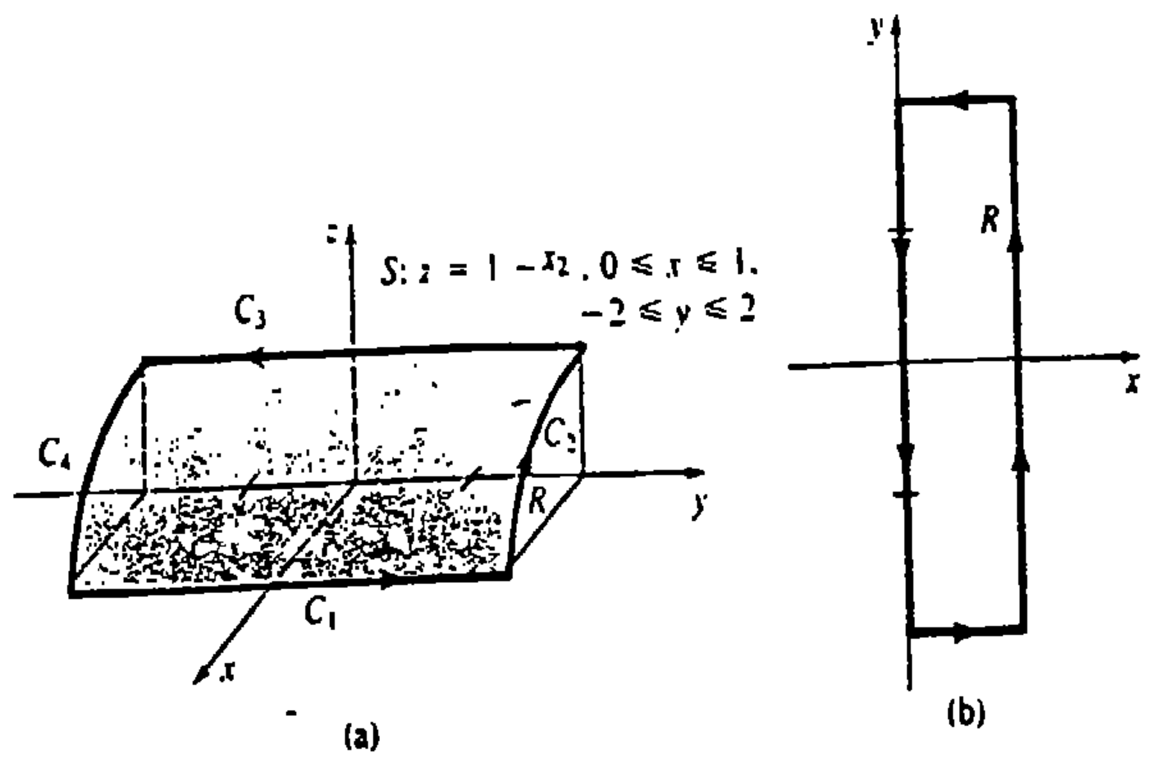


Figura 18.34

Ahora bien, si $g(x, y, z) = z + x^2 - 1 = 0$ define al cilindro, el vector normal superior es

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g}{|\nabla g|} = \frac{2x\mathbf{i} + \mathbf{k}}{\sqrt{4x^2+1}}.$$

Por lo tanto,

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iint_S \frac{-2xy - x}{\sqrt{4x^2+1}}\, dS.$$

Para evaluar esta integral de superficie, aplicamos (18.18) de la Sección 18.3:

$$\begin{aligned}\iint_S \frac{-2xy - x}{\sqrt{4x^2+1}}\, dS &= \iint_R (-2xy - x)\, dA \\ &= \int_0^1 \int_{-2}^2 (-2xy - x)\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \left[-xy^2 - xy\right]_{-2}^2 dx \\ &= \int_0^1 (-4x)\, dx = -2. \qquad (18.33)\end{aligned}$$

La Integral de Línea: Se expresa $\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}$. En C_1: $x = 1$, $z = 0$, $dx = 0$, $dz = 0$, de esta manera

$$\int_{C_1} y(0) + y(0)\, dy + 0 = 0.$$

En C_2: $y = 2$, $z = 1 - x^2$, $dy = 0$, $dz = -2x\, dx$, de modo que

$$\int_{C_2} 2x\, dx + 2(1 - x^2)0 + x(1 - x^2)(-2x\, dx)$$
$$= \int_1^0 (2x - 2x^2 + 2x^4)\, dx = -\frac{11}{15}.$$

En C_3: $x = 0$, $z = 1$, $dx = 0$, $dz = 0$, de esta manera

$$\int_{C_3} 0 + y\, dy + 0 = \int_2^{-2} y\, dy = 0.$$

En C_4: $y = -2$, $z = 1 - x^2$, $dy = 0$, $dz = -2x\, dx$, modo que

$$\int_{C_4} -2x\, dx - 2(1 - x^2)0 + x(1 - x^2)(-2x\, dx)$$
$$= \int_0^1 (-2x - 2x^2 + 2x^4) = -\frac{19}{15}$$

Por lo tanto,

$$\oint_C xy\, dx + yz\, dy + xz\, dz = 0 - \frac{11}{15} + 0 - \frac{19}{15} = -2,$$

lo que, desde luego, coincide con (18.33).

Ejemplo 6

Evaluar $\oint_C z\, dx + x\, dy + y\, dz$, en donde C es la traza del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ en el plano $y + z = 2$. Véase la Figura 18.35.

Solución Si $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, entonces

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Además, si $g(x, y, z) = y + z - 2 = 0$ define al plano, entonces el normal superior es

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g}{|\nabla g|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}.$$

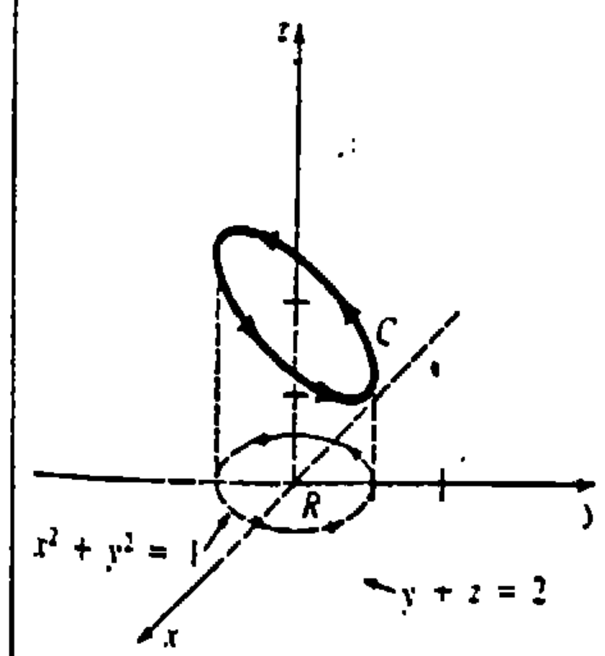


Figura 18.35

Por lo tanto, de (18.32)

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \left[(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}\right)\right] dS \\ &= \sqrt{2} \iint_S dS \\ &= \sqrt{2} \iint_R \sqrt{2}\, dA = 2\pi.\end{aligned}$$

Obsérvese que si F es el gradiente de una función escalar, entonces, en vista de (18.26) de la Sección 18.4, (18.32) implica que la circulación $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ es cero. A la inversa, puede demostrarse que si la circulación es nula para toda curva cerrada simple, entonces F es el gradiente de una función escalar. En otras palabras, F es irrotacional si y sólo si $\mathbf{F} = \nabla\phi$, en donde ϕ es el potencial para F. En forma equivalente, esto proporciona un criterio para un campo vectorial conservativo.

F es un campo vectorial conservativo si y sólo si rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Teorema de la divergencia

Sean $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ y $\mathbf{T} = (dx/ds)\mathbf{i} + (dy/ds)\mathbf{j}$ un vector *tangente unitario* a una curva plana cerrada simple C. En (18.31) vimos que $\oint_C (\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})ds$ se puede evaluar mediante una integral doble que implica a rot F. De manera semejante, si $\mathbf{n} = (dy/ds)\mathbf{i} - (dx/ds)\mathbf{j}$ es un *vector normal unitario* a C (examine $\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}$), entonces $\oint_C (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})ds$ puede expresarse en términos de una integral doble de div F. Por el teorema de Green,

$$\begin{aligned}\oint_C (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\, ds &= \oint_C P\, dy - Q\, dx \\ &= \iint_R \left[\frac{\partial P}{\partial x} - \left(-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right] dA \\ &= \iint_R \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right] dA.\end{aligned}$$

Esto es,

$$\oint_C (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\, ds = \iint_R \operatorname{div}\mathbf{F}\, dA. \tag{18.34}$$

La expresión (18.34) es un caso del **Teorema de la divergencia**. El que sigue es una generalización de (18.34) al espacio tridimensional.

TEOREMA 18.5
Teorema de la divergencia

Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ un campo vectorial para el cual P, Q y R son continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en una región que contiene a una superficie S, la cual forma la frontera de una región cerrada y acotada D en el espacio. Entonces

$$\iint_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\, dS = \iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV, \tag{18.35}$$

en donde n es un normal exterior a S. □

En la Figura 18.36 se muestra una superficie típica S que satisface la hipótesis del Teorema 18.5, junto con varias posiciones de n. Para la demostración del teorema consulte un libro más avanzado.

* También llamado Teorema de Gauss en honor del matemático alemán Karl Friedrich Gauss (1777-1855). A menudo se designa a Gauss como "el principe de los matemáticos" debido a su gran genio.

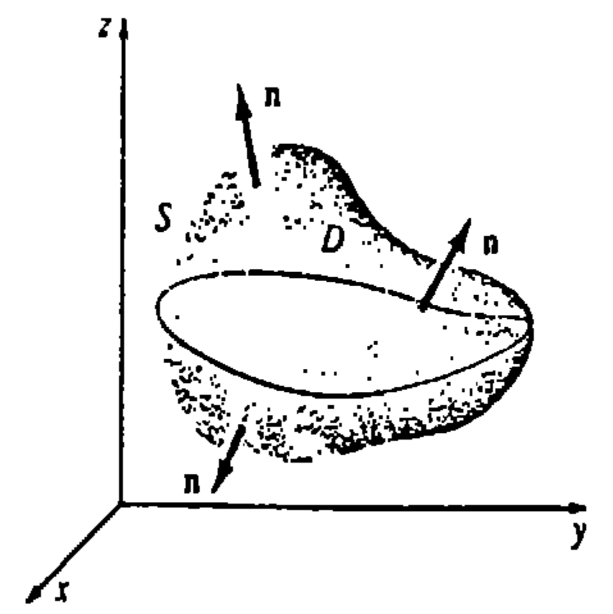


Figura 18.36

Ejemplo 7

Sea D la región limitada por el hemisferio $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9$, $1 \le z \le 3$, y el plano $z = 1$. Verifique el teorema de la divergencia si $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z-1)\mathbf{k}$.

Solución La región cerrada D se muestra en la Figura 18.37.

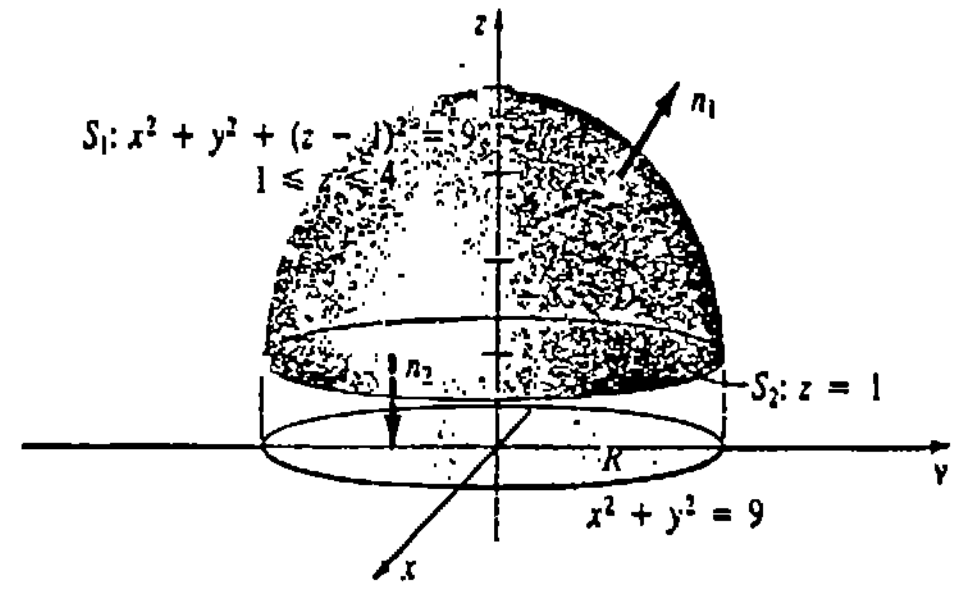


Figura 18.37

La Integral Triple: Como $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z-1)\mathbf{k}$, vemos que div $\mathbf{F} = 3$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV &= \iiint_D 3\, dV \\ &= 3\iiint_D dV \\ &= 3\left[\frac{2}{3}\pi 3^3\right] = 54\pi.\end{aligned} \tag{18.36}$$

En el último cálculo aplicamos el hecho de que $\iiint_D dV$ proporciona el volumen del hemisferio.

La Integral de Superficie: Se expresa $\iint_S = \iint_{S_1} + \iint_{S_2}$ en donde S_1 es el hemisferio y S_2 es el plano $z = 1$. Si S_1 es una superficie de nivel de $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z-1)^2$, entonces un vector normal exterior es

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g}{|\nabla g|} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z-1)\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2}} = \frac{x}{3}\mathbf{i} + \frac{y}{3}\mathbf{j} + \frac{z-1}{3}\mathbf{k}.$$

Ahora bien,

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} + \frac{(z-1)^2}{3} = 3$$

y de esta manera de (18.18) de la Sección 18.3,

$$\iint_{S_1} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iint_R (3)\left(\frac{3}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}\, dA\right)$$
$$= 9 \int_0^{2\pi} \int_0^3 (9 - r^2)^{-1/2} r\, dr\, d\theta = 54\pi.$$

En S_2, tomamos

$$\mathbf{n} = -\mathbf{k} \quad \text{de manera que} \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -z + 1.$$

Pero, puesto que $z = 1$, $\iint_{S_2} (-z + 1)\, dS = 0$. Por lo tanto, es claro que

$$\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = 54\pi + 0 = 54\pi$$

coincide con (18.36).

Ejemplo 8

Si $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + y^2z\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$, evaluar $\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})dS$, en donde S es el cubo unitario definido por $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$.

Solución Véanse la Figura 18.23 y el Problema 18 de los Ejercicios 18.3. En lugar de evaluar seis integrales de superficie, aplicamos el teorema de la divergencia. Dado que $\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = y + 2yz + 3z^2$, de (18.35), se tiene que

$$\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iiint_D (y + 2yz + 3z^2)\, dV$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (y + 2yz + 3z^2)\, dx\, dy\, dz$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 (y + 2yz + 3z^2)\, dy\, dz$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} + y^2 z + 3yz^2\right]_0^1 dz$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + z + 3z^2\right) dz$$
$$= \left[\frac{1}{2}z + \frac{z^2}{2} + z^3\right]_0^1 = 2.$$

Ejercicios 18.5

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 1002.

[18.5.1]

En los Problemas 1-10 aplique el teorema de Green para evaluar la integral indicada.

1. $\oint_C 2y\, dx + 5x\, dy$ en donde C es la circunferencia $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$.

2. $\oint_C (x + y^2)dx + (2x^2 - y)dy$ en donde C es la frontera de la región determinada por las gráficas de $y = x^2$, $y = 4$.

3. $\oint_C (x^4 - 2y^3)dx + (2x^3 - y^4)dy$ en donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.

4. $\oint_C (x - 3y)dx + (4x + y)dy$ en donde C es el rectángulo con vértices $(-2, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 2)$, $(-2, 2)$.

5. $\oint_C 2xy\, dx + 3xy^2\, dy$ donde C es el triángulo con vértices $(1, 2)$, $(2, 2)$, $(2, 4)$.

6. $\oint_C e^{2x} \operatorname{sen} 2y\, dx + e^{2x} \cos 2y\, dy$ en donde C es la elipse $9(x - 1)^2 + 4(x - 3)^2 = 36$.

7. $\oint_C xy\, dx + x^2\, dy$ en donde C es la frontera de la región determinada por las gráficas de $x = 0$, $x^2 + y^2 = 1$, $x \ge 0$.

8. $\oint_C e^{x^2}\, dx + 2 \tan^{-1} x\, dy$ en donde C es el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 1)$.

9. $\oint_C \frac{1}{3}y^3\, dx + (xy + xy^2)dx$ en donde C es la frontera de la región del primer cuadrante determinada por las gráficas de $y = 0$, $x = y^2$, $x = 1 - y^2$.

10. $\oint_C xy^2\, dx + 3 \cos y\, dy$ en donde C es la frontera de la región del primer cuadrante determinada por las gráficas de $y = x^2$, $y = x^3$.

En los Problemas 11 y 12 evalúe la integral indicada sobre cualquier trayectoria cerrada simple C.

11. $\oint_C ay\, dx + bx\, dy$ 12. $\oint_C P(x)\, dx + Q(y)\, dy$

En los Problemas 13 y 14 sea R la región limitada por C. Demuestre la expresión indicada.

13. $\oint_C x\, dy = -\oint_C y\, dx =$ área de R.

14. $\frac{1}{2}\oint_C -y\, dx + x\, dy =$ área de R.

En los Problemas 15 y 16 aplique los resultados de los Problemas 13 y 14 para determinar el área de la región limitada por la curva cerrada indicada.

15. La hipocicloide $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$ $a > 0$, $0 \le t \le 2\pi$.

16. La elipse $x = a \cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$, $a > 0$, $b > 0$, $0 \le t \le 2\pi$.

17. Evaluar $\oint_C (\cos x^2 - y)dx + \sqrt{y^3 + 1}\, dy$ sobre la curva cerrada mostrada en la Figura 18.38. (*Sugerencia:* Véase el Problema 16.)

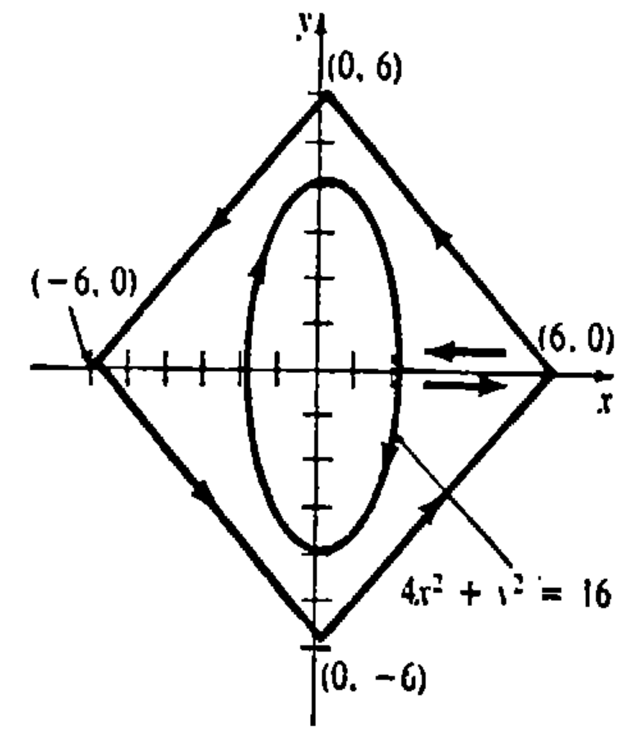


Figura 18.38

18. Considere la integral

$$\oint_{C_1} \frac{-y^3\, dx + xy^2\, dy}{(x^2 + y^2)^2}$$

en donde C_1 es la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$.

(a) Explique por qué al aplicar el teorema de Green se obtiene el resultado *incorrecto*: $\oint_{C_1} = 0$.

(b) Si C_2 es la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$, utilice la curva de la Figura 18.39 y el teorema de

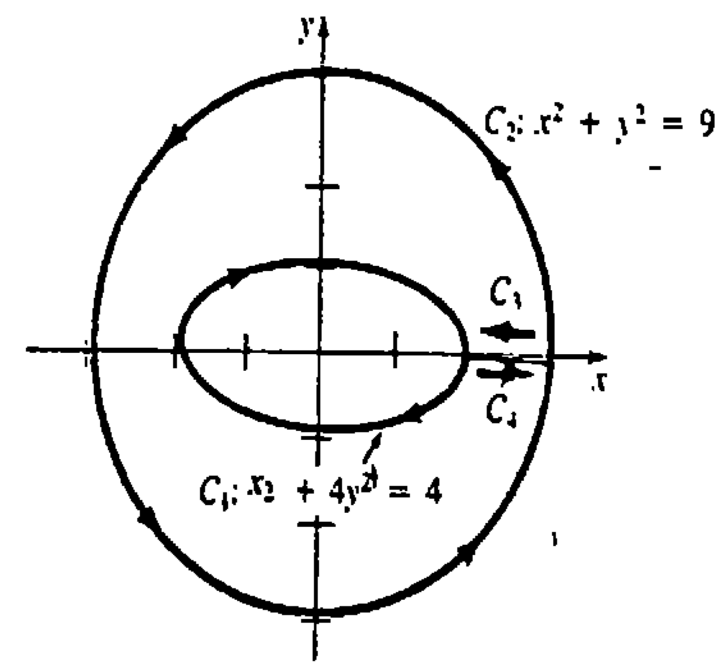


Figura 18.39

Green para demostrar que $\oint_{C_1} = \oint_{C_2}$. (*Sugerencia:* Véase (18.8) de la Sección 18.1.)

(c) Obtenga el valor de la integral de la parte (a). (*Sugerencia:* Aplique la parte (b).)

En los Problemas 19 y 20 aplique el teorema de Green para evaluar el trabajo realizado por la fuerza **F** indicada alrededor de la curva cerrada de la Figura 18.40.

19. $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$

20. $\mathbf{F} = -xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j}$

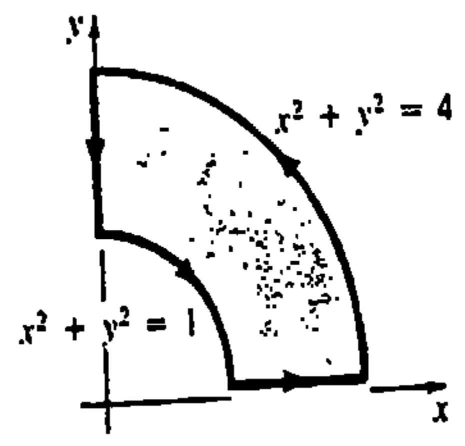


Figura 18.40

Problemas diversos

21. Sean P y Q continuas y con primeras derivadas parciales continuas en una región simplemente conexa del plano xy. Si $\int_A^B P\,dx + Q\,dy$ es independiente de la trayectoria, demuestre que $\oint_C P\,dx + Q\,dy = 0$ en toda curva cerrada simple alisada parte por parte C, contenida en la región.

22. Sea R una región limitada por una curva cerrada simple alisada parte por parte C. Demuestre que las coordenadas del centroide de la región están dadas por

$$\bar{x} = \frac{1}{2A}\oint_C x^2\,dy, \qquad \bar{y} = -\frac{1}{2A}\oint_C y^2\,dx.$$

[18.5.2]

En los Problemas 23 y 24 verifique el teorema de Stokes.

23. $\mathbf{F} = 5y\mathbf{i} - 5x\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; S es la porción del plano $z = 1$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

24. $\mathbf{F} = 2z\mathbf{i} - 3x\mathbf{j} + 4y\mathbf{k}$; S es la porción del paraboloide $z = 16 - x^2 - y^2$ para $z \geq 0$.

25. Aplique el teorema de Stokes para evaluar $\oint_C (2z + x)\,dx + (y - z)\,dy + (x + y)\,dz$, en donde C es el triángulo con vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

26. Si $\mathbf{F} = z^2y\cos xy\mathbf{i} + z^2x(1 + \cos xy)\mathbf{j} + 2z\,\mathrm{sen}\,xy\mathbf{k}$, aplique el teorema de Stokes para evaluar

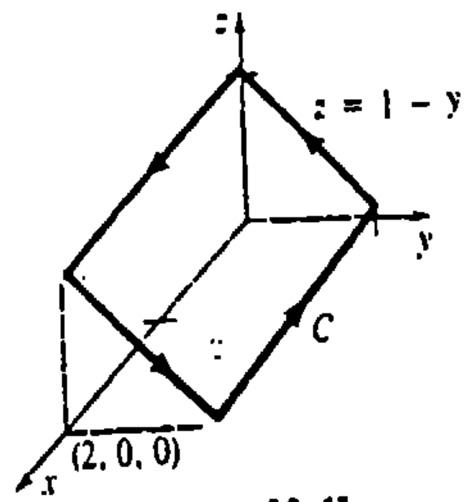


Figura 18.41

$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, en donde C es la frontera de la porción del plano $z = 1 - y$ mostrada en la Figura 18.41.

27. Aplique el teorema de Stokes para evaluar $\oint_C xy\,dx + 2yz\,dy + xz\,dz$, en donde C está dada en el Problema 26.

28. Aplique el teorema de Stokes para evaluar $\oint_C (x + 2z)\,dx + (3x + y)\,dy + (2y - z)\,dz$, en donde C es la curva de intersección del plano $x + 2y + z = 4$ con los planos coordenados.

29. Aplique el teorema de Stokes para evaluar la circulación $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, en donde $\mathbf{F} = y^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ y C es la traza del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ en el plano $x + y + z = 1$.

30. Si $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$, aplique el teorema de Stokes para evaluar $\iint_S (\mathrm{rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})dS$, en donde S es la porción de la esfera $x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 25$ para $z \geq 0$.

31. Sea D la región limitada por el cubo unitario definido por $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$. Verifique el teorema de la divergencia si $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$.

32. Si $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + 4z^3\mathbf{k}$, aplique el teorema de la divergencia para evaluar $\iint_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})dS$, en donde S es el paralelepípedo definido por $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 3$.

33. Si $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$, aplique el teorema de la divergencia para evaluar $\iint_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})dS$, en donde S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

34. Si $\mathbf{F} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})/(x^2 + y^2 + z^2)$, utilice el teorema de la divergencia para evaluar $\iint_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,dS$, en donde S es la superficie de la región limitada por las esferas concéntricas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $b > a$.

35. Si $\mathbf{F} = y^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$, aplique el teorema de la divergencia para evaluar $\iint_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})dS$, en donde S es la superficie de la región limitada por $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 = 3$, $z = 0$.

36. Si $\mathbf{F} = (x^2 + \mathrm{sen}\,y)\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + xy^3\mathbf{k}$, aplique el teorema de la divergencia para evaluar $\iint_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,dS$, en donde S es la superficie de la región limitada por $y = x^2$, $z = 9 - y$, $z = 0$.

Problemas diversos

En los Problemas 37-41 suponga que S forma la frontera de una región cerrada D.

37. Si **a** es un vector constante, demuestre que $\iint_S (\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})\,dS = 0$.

38. Si $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ y P, Q y R tienen segundas derivadas parciales continuas, demuestre que $\iint_S (\mathrm{rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,dS = 0$.

39. Si f y g son funciones escalares con segundas derivadas parciales continuas, demuestre que*

$$\iint_S (f\nabla g)\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_D (f\nabla^2 g - \nabla f\cdot\nabla g)\,dV.$$

40. Si f y g son funciones escalares con segundas derivadas parciales continuas, demuestre que

$$\iint_S (f\nabla g - g\nabla f)\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_D (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,dV.$$

41. Si f es una función escalar con primeras derivadas parciales continuas, demuestre que

$$\iint_S f\mathbf{n}\,dS = \iiint_D \nabla f\,dV.$$

(*Sugerencia:* Aplique (18.35) a $f\mathbf{a}$, en donde **a** es un vector constante, y el Problema 17 de los Ejercicios 18.4.)

42. La fuerza boyante o empuje hidrostático sobre un objeto flotante es $\mathbf{B} = -\iint_S p\mathbf{n}\,dS$, en donde p es la presión del fluido. La presión p se relaciona con la densidad del fluido $\rho(x, y, z)$ mediante una ley de hidrostática: $\nabla p = \rho(x, y, z)\mathbf{g}$, en donde **g** es la aceleración constante de la gravedad. Si el peso del objeto es $\mathbf{W} = m\mathbf{g}$, aplique el resultado del Problema 41 para demostrar el principio de Arquímedes, $\mathbf{B} + \mathbf{W} = \mathbf{0}$. Véase la Figura 18.42.

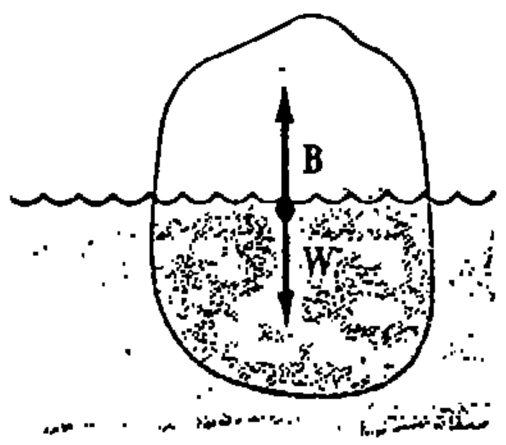


Figura 18.42

43. Aplique el teorema de Stokes para evaluar $\oint_C z\,dx + x\,dy + y\,dz$, en donde C es la curva de intersección del plano $x + y + z = 0$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (*Sugerencia:* Repase la Sección 13.4. Recuerde que el área de una elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ es πab.)

44. Evalúe la integral de línea del Problema 29 por métodos directos.

Examen • Capítulo 18

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 1002.

En los Problemas 1-12 conteste verdadero o falso. Suponga la continuidad de P, Q, y sus primeras derivadas parciales, donde sea apropiado.

1. La integral $\int_C (x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy$, en donde C está dada por $y = x^3$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$, tiene el mismo valor sobre la curva $y = x^4$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$. _____

2. El valor de la integral $\int_C 2xy\,dx - x^2\,dy$ entre dos puntos A y B depende de la trayectoria C. _____

3. Si C_1 y C_2 son dos curvas alisadas tales que $\int_{C_1} P\,dx + Q\,dy = \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy$, entonces $\int_C P\,dx + Q\,dy$ es independiente de la trayectoria. _____

4. Si el trabajo $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ depende de la curva C, entonces **F** es no conservativo. _____

5. Si $\partial P/\partial x = \partial Q/\partial y$, entonces $\int_C P\,dx + Q\,dy$ es independiente de la trayectoria. _____

6. En un campo de fuerzas conservativo **F**, el trabajo realizado por **F** alrededor de una curva cerrada simple es cero. _____

7. Suponiendo la continuidad de todas las derivadas parciales, $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$. _____

* Las expresiones de los Problemas 39 y 40 se llaman *identidades de Green.*

8. La integral de superficie de la componente normal del rotacional de un campo vectorial conservativo $\mathbf{F}$ sobre una superficie S es igual a cero. ____

9. El trabajo realizado por una fuerza $\mathbf{F}$ a lo largo de una curva C se debe totalmente a la componente tangencial de $\mathbf{F}$. ____

10. Para un campo vectorial bidimensional $\mathbf{F}$ en el plano $z = 0$, el teorema de Stokes es igual al teorema Green. ____

11. Si $\mathbf{F}$ es un campo de fuerzas conservativo, entonces la suma de las energías potencial y cinética de un objeto es constante. ____

12. Si $\int_C P\,dx + Q\,dy$ es independiente de la trayectoria, entonces $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ es el gradiente de alguna función ϕ. ____

En los Problemas 13-20 llene los espacios en blanco.

13. Si $\phi = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ es una función potencial de un campo de fuerzas conservativo $\mathbf{F}$, entonces $\mathbf{F} =$ ____.

14. Si $\mathbf{F} = f(x)\mathbf{i} + g(y)\mathbf{j} + h(z)\mathbf{k}$, entonces rot $\mathbf{F} =$ ____.

En los Problemas 15-18, $\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} + 2xyz\mathbf{k}$.

15. $\nabla \cdot \mathbf{F} =$ ____

16. $\nabla \times \mathbf{F} =$ ____

17. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) =$ ____

18. $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) =$ ____

19. Si C es la elipse $2(x - 10)^2 + 9(y + 13)^2 = 3$, entonces $\oint_C (y - 7e^{x^3})\,dx + (x + \ln\sqrt{y})\,dy =$ ____.

20. Si $\mathbf{F}$ es el campo de velocidad de un fluido para el cual rot $\mathbf{F} = 0$, entonces se dice que $\mathbf{F}$ es ____.

21. Evaluar $\displaystyle\int_C \frac{z^2}{x^2 + y^2}\,ds$, en donde C está dada por $x = \cos 2t$, $y = \operatorname{sen} 2t$, $z = 2t$, $\pi \le t \le 2\pi$.

22. Evaluar $\int_C (xy + 4x)\,ds$, en donde C está dada por $2x + y = 2$ de $(1, 0)$ a $(0, 2)$.

23. Evaluar $\int_C 3x^2y^2\,dx + (2x^3y - 3y^2)\,dy$, en donde C está dada por $y = 5x^4 + 3x^2 - 14x + 4$ de $(0, 0)$ a $(1, -2)$.

24. Demuestre que $\displaystyle\oint_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} = 2\pi$, en donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

25. Evaluar $\int_C y \operatorname{sen} \pi z\,dx + x^2e^y\,dy + 3xyz\,dz$, en donde C está dada por $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ de $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$.

26. Si $\mathbf{F} = 4y\mathbf{i} + 6x\mathbf{j}$ y C está dada por $x^2 + y^2 = 1$, evalúe $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ de dos maneras diferentes.

27. Determine el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F} = x \operatorname{sen} y\mathbf{i} + y \operatorname{sen} x\mathbf{j}$ que actúa a lo largo de los segmentos de recta de $(0, 0)$ a $(\pi/2, 0)$, y de $(\pi/2, 0)$ a $(\pi/2, \pi)$.

28. Calcule el trabajo realizado por
$$\mathbf{F} = \frac{2}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{1}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$$
de $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ a $(1, \sqrt{3})$ cuando actúa sobre la trayectoria mostrada en la Figura 18.43.

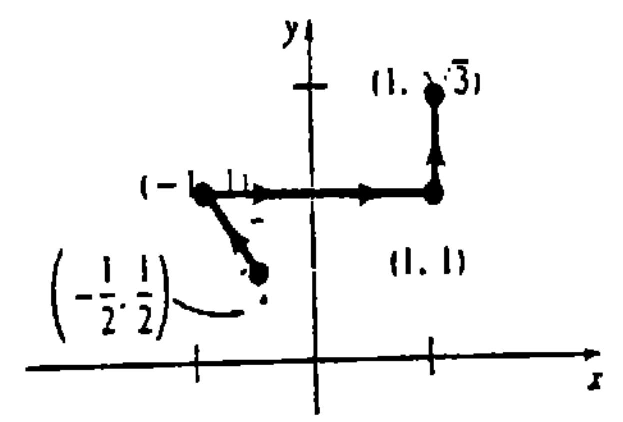


Figura 18.43

29. Evalúe $\iint_S (z/xy)\,dS$, en donde S es la porción del cilindro $z = x^2$ en el primer octante que está limitada por $y = 1$, $y = 3$, $z = 1$, $z = 4$.

30. Si $\mathbf{F} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, determine el flujo de $\mathbf{F}$ a través del cuadrado $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $z = 2$.

31. Si $\mathbf{F} = c\nabla(1/r)$, en donde c es constante y $|\mathbf{r}| = r$, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, calcule el flujo de $\mathbf{F}$ a través de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

32. Explique por qué el teorema de la divergencia no es aplicable en el Problema 31.

33. Determine el flujo de $\mathbf{F} = c\nabla(1/r)$ a través de cualquier superficie S que forme la frontera de una región cerrada y acotada del espacio que no contenga al origen.

34. Si $\mathbf{F} = 6x\mathbf{i} + 7z\mathbf{j} + 8y\mathbf{k}$, aplique el teorema de Stokes para evaluar $\iint_S (\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\,dS$, en donde S es la porción del paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

35. Aplique el teorema de Stokes para evaluar $\oint_C -2y\,dx + 3x\,dy + 10z\,dz$, en donde C es la circunferencia $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$, $z = 3$.

36. Determine el trabajo $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ realizado por la fuerza $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ alrededor de la curva C que se forma por la intersección del plano $z = 2 - y$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$.

37. Si $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, aplique el teorema de la divergencia para evaluar $\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\,dS$, en donde S es la superficie de la región limitada por $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = 1$.

38. Repita el Problema 37 para $\mathbf{F} = \frac{1}{3}x^3\mathbf{i} + \frac{1}{3}y^3\mathbf{j} + \frac{1}{3}z^3\mathbf{k}$.

39. Si $\mathbf{F} = (x^2 - e^y \tan^{-1} z)\mathbf{i} + (x + y)^2\mathbf{j} - (2yz + x^{10})\mathbf{k}$, aplique el teorema de la divergencia para evaluar $\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\,dS$, en donde S es la superficie de la región del primer octante limitada por $z = 1 - x^2$, $z = 0$, $z = 2 - y$, $y = 0$.

40. Supóngase que $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z^2 + 1)\mathbf{k}$ y que S es la superficie de la región limitada por $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, $z = c$. Evalúe $\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\,dS$ sin la ayuda del teorema de la divergencia. (*Sugerencia:* El área de la superficie lateral del cilindro es $2\pi ac$.)

19 Ecuaciones diferenciales

Ya nos hemos referido a la noción de ecuación diferencial de primer orden $F(x, y, y') = 0$. Recuérdese que en la Sección 8.7 examinamos ecuaciones separables y en la Sección 16.5 consideramos ecuaciones exactas. En esta discusión adicional y ciertamente breve de las ecuaciones diferenciales, se concentrará la atención en otros dos tipos de ecuaciones de primer orden, y en una clase importante de ecuaciones de segundo orden $F(x, y, y', y'') = 0$. El objetivo fundamental del estudio de las ecuaciones diferenciales es su *resolución*; es decir, obtener funciones diferenciables apropiadas, definidas ya sea explícita o implícitamente, que al ser sustituidas en la ecuación la reduzcan a una identidad.

19.1 Definiciones básicas y terminología

Si una ecuación contiene las derivadas diferenciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, se dice que es una **ecuación diferencial**. Las ecuaciones diferenciales se clasifican de acuerdo con las tres propiedades siguientes.

Clasificación según el tipo

Si una ecuación contiene sólo derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, se dice entonces que es una **ecuación diferencial ordinaria**

Ejemplo 1

Las ecuaciones

$$\frac{dy}{dx} - 5y = 1,$$
$$(x + y)\,dx - 4y\,dy = 0,$$
$$\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} = x,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

son ecuaciones diferenciales ordinarias.

Una ecuación que contiene las derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes se llama **ecuación diferencial parcial.**

Ejemplo 2

Las ecuaciones

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = x + y,$$
$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2k\frac{\partial u}{\partial t}$$

son ecuaciones diferenciales parciales.

Clasificación según el orden

El orden de la derivada más alta en una ecuación diferencial se llama **orden de la ecuación.**

Ejemplo 3

La ecuación $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = x$ es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. Puesto que la ecuación diferencial

$$x^2\,dy + y\,dx = 0$$

puede llevarse a la forma

$$x^2\frac{dy}{dx} + y = 0$$

dividiendo entre la diferencial dx, es un ejemplo de ecuación diferencial ordinaria de primer orden. La ecuación

$$c^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

es una ecuación diferencial parcial de cuarto orden.

Aunque las ecuaciones diferenciales parciales son muy importantes, su estudio exige una buena base en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias. En consecuencia, en este capítulo se limitará la atención a las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Una ecuación diferencial ordinaria general de orden n se representa con frecuencia mediante la expresión simbólica

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0. \qquad (19.1)$$

El siguiente es un caso especial de (19.1).

Clasificación según la linealidad o no linealidad

Se dice que una ecuación diferencial es **lineal** si tiene la forma

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

Debe hacerse notar que las ecuaciones diferenciales lineales se caracterizan por dos propiedades: (a) la variable dependiente y junto con todas sus derivadas son de primer grado; esto es, la potencia de cada término en y es 1; y (b) cada coeficiente depende sólo de la variable independiente x. Una ecuación en la que no se cumple lo anterior se dice que es **no lineal.**

Ejemplo 4

Las ecuaciones

$$x\,dy + y\,dx = 0$$
$$y'' - 2y' + y = 0$$

y

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} - x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$$

son ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primero, segundo y tercer orden, respectivamente. Por otra parte,

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$$

$$yy'' - 2y' = x + 1$$

y

$$\frac{d^3y}{dx^3} + y^2 = 0$$

son ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de primero, segundo y tercer orden, respectivamente.

Solución

Tal como se mencionó antes, nuestra meta es resolver o encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales.

DEFINICIÓN 19.1

Se dice que una función f cualquiera es solución de una ecuación diferencial, si sustituida en dicha ecuación la reduce a una identidad. □

Ejemplo 5

La función $y = e^{x^2}$ es una solución de

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 0. \tag{19.2}$$

Como

$$\frac{dy}{dx} = 2xe^{x^2}$$

es claro que

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 2xe^{x^2} - 2x(e^{x^2}) = 0.$$

Ejemplo 6

Las ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0 \quad y \quad (y')^2 + y^2 + 4 = 0$$

no tienen soluciones reales. ¿Por qué?

Soluciones explícitas e implícitas

Se distingue además entre soluciones explícitas e implícitas de las ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, ya vimos que $y = e^{x^2}$ es una solución explícita de la ecuación (19.2). Se dice que una relación $G(x, y) = 0$ define implícitamente una solución de (19.1) en un intervalo I si define una o más soluciones en I.

Ejemplo 7

$y = xe^x$ es una solución explícita de $y'' - 2y' + y = 0$. Para ver esto, se determina

$$y' = xe^x + e^x$$

y

$$y'' = xe^x + 2e^x.$$

Obsérvese que $y'' - 2y' + y = (xe^x + 2e^x) - 2(xe^x + e^x) + xe^x = 0.$

Ejemplo 8

La relación $x^2 + y^2 - 4 = 0$ es una solución implícita de la ecuación diferencial para $-2 < x < 2$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Derivando implícitamente se obtiene

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

o

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Se debe tener presente que una ecuación diferencial dada tiene generalmente un número infinito de soluciones. Por sustitución directa, podemos demostrar que cualquier función de la familia uniparamétrica $y = Ce^{x^2}$, en donde C es cualquier constante arbitraria, también satisface la ecuación (19.2). Tal como se indica en la Figura 19.1, $y \equiv 0$,* obtenida haciendo $C = 0$, también es una solución de la ecuación. En el Ejemplo 7 se vio que $y = xe^x$ es una solución de $y'' - 2y' + y = 0$; un repaso de lo ya dicho revela que $y = Cxe^x$ representa una familia de soluciones.

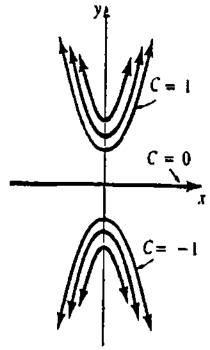


Figura 19.1

* Esto es, $y = 0$ para toda x.

Terminología adicional

El estudio de las ecuaciones diferenciales es semejante al del cálculo integral. Al evaluar una antiderivada o integral indefinida, utilizamos una sola constante de integración. De manera análoga, al resolver una ecuación diferencial de primer orden ya hemos visto que se obtiene una familia uniparamétrica de funciones $G(x, y, C) = 0$, tal que cada miembro de la familia es una solución de la ecuación diferencial. Desde luego, al resolver una ecuación diferencial de orden n, o sea $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, es de esperar obtener una **familia n-paramétrica** de soluciones $G(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0$.

Una solución de una ecuación diferencial que no contiene parámetros arbitrarios se llama **solución particular**. Una manera de obtener una solución particular es elegir valores específicos de los parámetros en una familia de soluciones. Por ejemplo, se ve de inmediato que $y = Ce^x$ es una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación elemental de primer orden $y' = y$. Para $C = 0, -2$ y 5 obtenemos las soluciones particulares $y \equiv 0$, $y = -2e^x$ y $y = 5e^x$, respectivamente.

A veces, una ecuación diferencial posee una solución que no puede obtenerse dando valores específicos a los parámetros en una familia de soluciones. A tal solución se le llama **solución singular**. Se dejará el concepto de solución singular para un curso más avanzado.

Si *todas* las soluciones de una ecuación diferencial de orden n pueden obtenerse a partir de $G(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0$ mediante valores apropiados de las C_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces se dice que la familia n-paramétrica es la **solución general o completa** de la ecuación diferencial.

Ejercicios 19.1

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 1003.

En los Problemas 1-10 determine si la ecuación diferencial dada es lineal o no lineal. Indique el orden de cada ecuación.

1. $(1 - x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x$
2. $x\dfrac{d^3y}{dx^3} - 2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$
3. $yy' + 2y = 1 + x^2$
4. $x^2\,dy + (y - xy - xe^x)\,dx = 0$
5. $x^3y^{(4)} - x^2y'' + 4xy' - 3y = 0$
6. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9y = \operatorname{sen} y$
7. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2}$
8. $\dfrac{d^2r}{dt^2} = -\dfrac{k}{r^2}$
9. $(\operatorname{sen} x)y''' - (\cos x)y' = 2$
10. $(1 - y^2)\,dx + x\,dy = 0$

En los Problemas 11-34 verifique que la función indicada es una solución de la ecuación diferencial dada. Donde sea apropiado, C_1 y C_2 son constantes.

11. $2y' + y = 0, \quad y = e^{-x/2}$
12. $y' + 4y = 32; \quad y \equiv 8$
13. $\dfrac{dy}{dx} - 2y = e^{3x}; \quad y = e^{3x} + 10e^{2x}$
14. $\dfrac{dy}{dt} + 20y = 24; \quad y = \dfrac{6}{5} - \dfrac{6}{5}e^{-20t}$
15. $y' = 25 + y^2; \quad y = 5\tan 5x$
16. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{\dfrac{y}{x}}; \quad y = (\sqrt{x} + C_1)^2, \quad x > 0$
17. $y' + y = \operatorname{sen} x; \quad y = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} x - \dfrac{1}{2}\cos x + 10e^{-x}$
18. $2xy\,dx + (x^2 + 2y)\,dy = 0; \quad x^2y + y^2 = C_1$
19. $x^2\,dy + 2xy\,dx = 0; \quad y = -\dfrac{1}{x^2}$

20. $(y')^3 + xy' = y; \quad y = x + 1$
21. $y = 2xy' + y(y')^2; \quad y^2 = C_1(x + \frac{1}{4}C_1)$
22. $y' = 2\sqrt{|y|}; \quad y = x|x|$
23. $y' - \dfrac{1}{x}y = 1; \quad y = x\ln x, \quad x > 0$
24. $\dfrac{dP}{dt} = P(a - bP); \quad P = \dfrac{aC_1e^{at}}{1 + bC_1e^{at}}$
25. $\dfrac{dX}{dt} = (2 - X)(1 - X); \quad \ln\dfrac{2 - X}{1 - X} = t$
26. $y' + 2xy = 1; \quad y = e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt + C_1e^{-x^2}$
27. $(x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0; \quad C_1(x + y)^2 = xe^{y/x}$
28. $y'' + y' - 12y = 0; \quad y = C_1e^{3x} + C_2e^{-4x}$
29. $y'' - 6y' + 13y = 0; \quad y = e^{3x}\cos 2x$
30. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0; \quad y = e^{2x} + xe^{2x}$
31. $y'' = y; \quad y = \cosh x + \operatorname{senh} x$
32. $y'' + 25y = 0; \quad y = C_1\cos 5x$
33. $y'' + (y')^2 = 0; \quad y = \ln|x + C_1| + C_2$
34. $y'' + y = \tan x; \quad y = -\cos x\ln(\sec x + \tan x)$

19.2 Ecuaciones diferenciales homogéneas de primer orden

Si una ecuación de primer orden $F(x, y, y') = 0$ en la forma diferencial

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$$

tiene la propiedad de que

$$P(tx, ty) = t^nP(x, y) \quad \text{y} \quad Q(tx, ty) = t^nQ(x, y),$$

se dice que tiene **coeficientes homogéneos** o que es una **ecuación homogénea**. El punto importante en la discusión siguiente es que una ecuación diferencial homogénea *siempre puede reducirse a una ecuación separable* por medio de una apropiada sustitución algebraica. Antes de proseguir con el método de solución para este tipo de ecuación diferencial, se examinará más de cerca la naturaleza de las funciones homogéneas.

DEFINICIÓN 19.2

Se dice que $f(x, y)$ es una función homogénea de grado n, si para algún número real n, $f(tx, ty) = t^nf(x, y)$. □

Ejemplo 1

(*a*) $f(x, y) = x - 3\sqrt{xy} + 5y$

$$f(tx, ty) = (tx) - 3\sqrt{(tx)(ty)} + 5(ty)$$
$$= tx - 3\sqrt{t^2xy} + 5ty = t[x - 3\sqrt{xy} + 5y] = tf(x, y)$$

La función es homogénea de grado uno.

(*b*) $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$

$$f(tx, ty) = \sqrt{t^3x^3 + t^3y^3} = t^{3/2}\sqrt{x^3 + y^3} = t^{3/2}f(x, y)$$

La función es homogénea de grado 3/2.

(c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$

$$f(tx, ty) = t^2x^2 + t^2y^2 + 1 \neq t^2 f(x, y)$$

ya que $t^2 f(x, y) = t^2x^2 + t^2y^2 + t^2$. La función no es homogénea.

(d) $f(x, y) = \dfrac{x}{2y} + 4$

$$f(tx, ty) = \frac{tx}{2ty} + 4 = \frac{x}{2y} + 4 = t^0 f(x, y)$$

La función es homogénea de grado cero.

Tal como lo muestran las partes (c) y (d) del Ejemplo 1, sumar una constante a una función destruye la homogeneidad, a *menos que* la función sea homogénea de grado cero. Además, en muchos casos es posible reconocer si una función es homogénea examinando el grado de cada término.

Ejemplo 2

(a) $f(x, y) = \underbrace{6\overbrace{x}^{\text{grado 1}}\overbrace{y^3}^{\text{grado 3}}}_{\text{grado 4}} - \underbrace{\underbrace{x^2}_{\text{grado 2}}\overbrace{y^2}^{\text{grado 2}}}_{\text{grado 4}}$

La función es homogénea de grado 4.

(b) $f(x, y) = \overbrace{x^2}^{\text{grado 2}} - \overbrace{y}^{\text{grado 1}}$

La función no es homogénea.

Método de resolución

Una ecuación de la forma $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, en donde P y Q tienen el mismo grado de homogeneidad, puede reducirse a una ecuación de variables separables empleando *cualquiera* de las sustituciones $y = ux$ o $x = vy$, en donde u y v son nuevas variables dependientes. En particular, si se elige $y = ux$, entonces $dy = u\,dx + x\,du$. Por lo tanto, la ecuación diferencial se transforma en

$$P(x, ux)\,dx + Q(x, ux)[u\,dx + x\,du] = 0.$$

Ahora bien, por la homogeneidad de P y Q se puede escribir

$$x^nP(1, u)\,dx + x^nQ(1, u)[u\,dx + x\,du] = 0$$

o

$$[P(1, u) + uQ(1, u)]\,dx + xQ(1, u)\,du = 0,$$

de lo cual se obtiene

$$\frac{dx}{x} + \frac{Q(1, u)\,du}{P(1, u) + uQ(1, u)} = 0.$$

Es necesario señalar que esta fórmula no debe memorizarse, más bien, *el procedimiento debe desarrollarse por completo cada vez.* La demostración de que la sustitución $x = vy$ también conduce a una ecuación separable se deja como ejercicio.

Ejemplo 3

Resolver $(x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0$.

Solución $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son ambas homogéneas de grado 2. Si hacemos $y = ux$, se obtiene

$$(x^2 + u^2x^2)\,dx + (x^2 - ux^2)[u\,dx + x\,du] = 0$$
$$x^2(1 + u)\,dx + x^3(1 - u)\,du = 0$$
$$\frac{1 - u}{1 + u}\,du + \frac{dx}{x} = 0$$
$$\left[-1 + \frac{2}{1 + u}\right] du + \frac{dx}{x} = 0$$
$$-u + 2\ln|1 + u| + \ln|x| + \ln|C| = 0*$$
$$-\frac{y}{x} + 2\ln\left|1 + \frac{y}{x}\right| + \ln|x| + \ln|C| = 0.$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos, la solución precedente puede escribirse en la forma alternativa.

$$C(x + y)^2 = xe^{y/x}.$$

Aunque la sustitución $y = ux$ puede usarse para toda ecuación homogénea, en la práctica se emplea la otra sustitución $x = vy$ siempre que la función $P(x, y)$ sea más simple que $Q(x, y)$. Además, podría suceder que después de aplicar una sustitución nos encontráramos con integrales que son difíciles, o incluso imposibles de evaluar; intercambiando sustituciones se puede llegar a un problema más fácil.

Ejemplo 4

Resolver $2x^3y\,dx + (x^4 + y^4)\,dy = 0$.

Solución Cada coeficiente es una función homogénea de grado cuatro. Puesto que el coeficiente de dx es ligeramente más simple que el coeficiente de dy, ensayamos $x = vy$. Se obtiene que

$$2v^3y^4[v\,dy + y\,dv] + (v^4y^4 + y^4)\,dy = 0$$

* Si la mayoría de las integraciones dan por resultado logaritmos, una elección apropiada de la constante de integración es $\ln|C|$, en vez de C.

$$2v^3y^5\,dv + y^4(3v^4 + 1)\,dy = 0$$

$$\frac{2v^3\,dv}{3v^4 + 1} + \frac{dy}{y} = 0$$

$$\frac{1}{6}\ln(3v^4 + 1) + \ln|y| = \ln|C_1|$$

o bien

$$3x^4y^2 + y^6 = C.$$

Si se hubiera empleado $y = ux$, se tendría

$$\frac{dx}{x} + \frac{u^4 + 1}{u^5 + 3u}\,du = 0.$$

Vale la pena reflexionar unos minutos en cómo evaluar la integral del segundo término de la última ecuación.

Ejercicios 19.2

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 1003.

En los Problemas 1-20 resuelva la ecuación diferencial indicada empleando una sustitución apropiada.

1. $(x - y)\,dx + x\,dy = 0$
2. $(x + y)\,dx + x\,dy = 0$
3. $x\,dx + (y - 2x)\,dy = 0$
4. $y\,dx = 2(x + y)\,dy$
5. $(y^2 + yx)\,dx - x^2\,dy = 0$
6. $(y^2 + yx)\,dx + x^2\,dy = 0$
7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - x}{y + x}$
8. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 3y}{3x + y}$
9. $-y\,dx + (x + \sqrt{xy})\,dy = 0$
10. $x\dfrac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2 + y^2}$
11. $2x^2y\,dx = (3x^3 + y^3)\,dy$
12. $(x^4 + y^4)\,dx - 2x^3y\,dy = 0$
13. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$
14. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x^2}{y^2} + 1$
15. $y\dfrac{dx}{dy} = x + 4ye^{-2x/y}$
16. $(x^2e^{-y/x} + y^2)\,dx = xy\,dy$
17. $\left(y + x\cot\dfrac{y}{x}\right)dx - x\,dy = 0$
18. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$
19. $(x^2 + xy - y^2)\,dx + xy\,dy = 0$
20. $(x^2 + xy + 3y^2)\,dx - (x^2 + 2xy)\,dy = 0$
21. Demuestre que la sustitución $x = vy$ reduce una ecuación homogénea a una con variables separables.

19.3 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Una ecuación diferencial lineal de primer orden es una ecuación de la forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \tag{19.3}$$

Ejemplo 1

Comparando directamente con (19.3), se ve que

$$x\frac{dy}{dx} - 4y = x^6e^x$$

es una ecuación diferencial lineal de primer orden. El lector podrá convencerse de que esta ecuación de primer orden no es separable, exacta ni homogénea.

Dividiendo (19.3) entre $a_1(x)$, se obtiene la forma más útil

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x). \tag{19.4}$$

Se buscan soluciones de (19.4) en un intervalo I en el cual P y f sean continuas.

Un factor integrante

Supóngase que la ecuación (19.4) se escribe en la forma diferencial

$$dy + [P(x)y - f(x)]\,dx = 0. \tag{19.5}$$

Las ecuaciones lineales poseen la conveniente propiedad de que siempre es posible hallar una función $\mu(x)$ tal que el múltiplo de (19.5)

$$\mu(x)\,dy + \mu(x)[P(x)y - f(x)]\,dx = 0 \tag{19.6}$$

es una ecuación diferencial exacta. Por el Teorema 16.4 se sabe que el primer miembro de la ecuación (19.6) será una diferencial exacta si

$$\frac{\partial}{\partial x}\mu(x) = \frac{\partial}{\partial y}\mu(x)[P(x)y - f(x)] \tag{19.7}$$

o bien

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu P(x).$$

Esta es una ecuación separable, a partir de la cual es posible determinar $\mu(x)$. Se tiene

$$\frac{d\mu}{\mu} = P(x)\,dx$$

$$\ln|\mu| = \int P(x)\,dx \tag{19.8}$$

de modo que

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}. \tag{19.9}$$

A la función $\mu(x)$ definida en (19.9) se la llama **factor integrante** (o **de integración**) de la ecuación lineal. Nótese que no es necesario usar una constante de integración en (19.8) ya que (19.6) no es afectada si se la multiplica por una constante. Además, $\mu(x) \neq 0$ para todo x de I, y es continua y diferenciable.

Es interesante observar que la ecuación (19.5) sigue siendo una ecuación diferencial exacta, incluso cuando $f(x) = 0$. De hecho, $f(x)$ no juega papel alguno en la determinación de $\mu(x)$, puesto que por (19.7) es claro que $\partial/\partial y\ (\mu(x)f(x)) = 0$. De esta manera,

$$e^{\int P(x)dx}\,dy + e^{\int P(x)dx}[P(x)y + f(x)]\,dx$$

y

$$e^{\int P(x)dx}\,dy + e^{\int P(x)dx}P(x)y\,dx$$

son ambas diferenciales exactas. Ahora se ecribe (19.6) en la forma

$$e^{\int P(x)dx}\,dy + e^{\int P(x)dx}P(x)y\,dx = e^{\int P(x)\,dx}f(x)\,dx$$

y se ve que es posible escribir la ecuación como

$$d[e^{\int P(x)dx}y] = e^{\int P(x)dx}f(x)\,dx.$$

Integrando la última ecuación resulta

$$e^{\int P(x)dx}y = \int e^{\int P(x)dx}f(x)\,dx + C$$

o bien

$$y = e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}f(x)\,dx + Ce^{-\int P(x)dx}. \qquad (19.10)$$

En otras palabras, si (19.4) tiene solución, ésta debe ser de la forma (19.10). Recíprocamente, puede verificarse fácilmente que (19.10) constituye una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación (19.4). Sin embargo, no se debe tratar de memorizar la fórmula (19.10). El procedimiento debe seguirse cada vez, de modo que es conveniente resumir los resultados.

Método de solución

Para resolver una ecuación diferencial lineal de primer orden, primero se la escribe en la forma (19.4), es decir, se hace el coeficiente de y' igual a la unidad. Multiplíquese luego toda la ecuación por el factor integrante:

$$e^{\int P(x)dx}.$$

El primer miembro de

$$e^{\int P(x)\,dx}\frac{dy}{dx} + P(x)e^{\int P(x)\,dx}y = e^{\int P(x)\,dx}f(x)$$

es la derivada del producto del factor integrante y la variable dependiente: $e^{\int P(x)\,dx}y$. Escríbase la ecuación en la forma

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)\,dx}y\right] = e^{\int P(x)\,dx}f(x)$$

y por último, intégrese en ambos miembros.

Ejemplo 2

Resolver $x\dfrac{dy}{dx} - 4y = x^6e^x$.

Solución Se escribe la ecuación como

$$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^5e^x. \qquad (19.11)$$

y se determina el factor integrante

$$e^{-4\int dx/x} = e^{-4\ln|x|} = e^{\ln x^{-4}} = x^{-4}.$$

Aquí se ha usado la identidad básica $b^{\log_b N} = N$. Ahora multiplíquese (19.11) por este término

$$x^{-4}\frac{dy}{dx} - 4x^{-5}y = xe^x \qquad (19.12)$$

y se obtiene así

$$\frac{d}{dx}[x^{-4}y] = xe^x.* \qquad (19.13)$$

Mediante integración por partes resulta

$$x^{-4}y = xe^x - e^x + C$$

o bien

$$y = x^5e^x - x^4e^x + Cx^4.$$

Ejemplo 3

Resolver $\dfrac{dy}{dx} - 3y = 0$.

Solución La ecuación ya está en la forma (19.4). Por consiguiente, el factor de integración es

$$e^{\int(-3)\,dx} = e^{-3x}$$

y de esta manera

$$e^{-3x}\frac{dy}{dx} - 3e^{-3x}y = 0$$

$$\frac{d}{dx}[e^{-3x}y] = 0$$

$$e^{-3x}y = C$$

y por lo tanto

$$y = Ce^{3x}.$$

Nótese que la ecuación diferencial del Ejemplo 3 también se puede resolver por separación de variables.

* El lector debe realizar las derivaciones indicadas, para convencerse de que las ecuaciones (19.11), (19.12) y (19.13) son todas formalmente equivalentes.

Solución general

Si se considera que $P(x)$ y $f(x)$ son continuas en un intervalo I, y que x_0 es un punto cualquiera del intervalo, entonces puede demostrarse que existe una sola solución del **problema de valor inicial:**

Resolver: $$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x) \tag{19.14}$$

Sujeta a: $$y(x_0) = y_0.$$

En realidad, *toda* solución de la ecuación en el intervalo I es de la forma (19.10). Así que obtener la solución de (19.14) es simplemente encontrar un valor apropiado de C en (19.10). Como consecuencia, se justifica llamar a (19.10) la **solución general** de la ecuación diferencial.

Ejemplo 4

Encontrar la solución general de

$$(x^2 + 9)\frac{dy}{dx} + xy = 0.$$

Solución Se escribe $$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{x^2 + 9}y = 0.$$

La función $P(x) = x/(x^2 + 9)$ es continua en $(-\infty, \infty)$. Ahora bien, el factor integrante de la ecuación es

$$e^{\int x\,dx/(x^2+9)} = e^{(1/2)\int 2x\,dx/(x^2+9)} = e^{(1/2)\ln(x^2+9)} = \sqrt{x^2 + 9}$$

de modo que

$$\sqrt{x^2+9}\,\frac{dy}{dx} + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}y = 0$$
$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x^2+9}\,y\right] = 0$$
$$\sqrt{x^2+9}\,y = C.$$

Por lo tanto, la solución general es

$$y = \frac{C}{\sqrt{x^2+9}}.$$

Ejemplo 5

Resolver $\frac{dy}{dx} + 2xy = x$ sujeta a $y(0) = -3$.

Solución Las funciones $P(x) = 2xy\,f(x) = x$ son continuas en $(-\infty, \infty)$. El factor integrante es

$$e^{2\int x\,dx} = e^{x^2}$$

de modo que

$$e^{x^2}\frac{dy}{dx} + 2xe^{x^2}y = xe^{x^2}$$
$$\frac{d}{dx}\left[e^{x^2}y\right] = xe^{x^2}$$
$$e^{x^2}y = \int xe^{x^2}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int e^{x^2}(2x\,dx)$$
$$= \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

De esta manera, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}.$$

La condición $y(0) = -3$ da $C = -\frac{7}{2}$, y por consiguiente la solución del problema de valor inicial en el intervalo es

$$y = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}e^{-x^2}.$$

Véase la Figura 19.2.

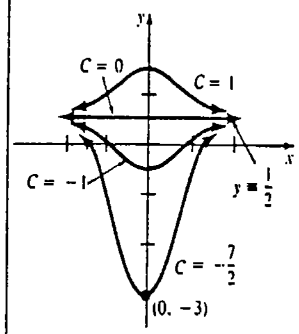


Figura 19.2

Ejemplo 6

Resolver $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + y^2}$.

Solución Comparándola con (19.3) se ve claramente que la ecuación no es lineal en la variable y. Sin embargo, si se toma la recíproca

$$\frac{dx}{dy} = x + y^2 \quad \text{o} \quad \frac{dx}{dy} - x = y^2$$

se advierte que es *lineal en x*. En este caso el factor integrante es $e^{-\int dy} = e^{-y}$. Por lo tanto, resulta que

$$\frac{d}{dy}\left[e^{-y}x\right] = y^2e^{-y}$$
$$e^{-y}x = \int y^2e^{-y}\,dy \qquad \boxed{\text{Integración por partes}}$$
$$= -y^2e^{-y} - 2ye^{-y} - 2e^{-y} + C$$
$$x = -y^2 - 2y - 2 + Ce^{y}.$$

Observación

La fórmula (19.10), que representa la solución general de (19.4), consta en realidad de la suma de dos soluciones. Se define

$$y = y_c + y_p, \tag{19.15}$$

en donde $\quad y_c = Ce^{-\int P(x)\,dx} \quad$ y $\quad y_p = e^{-\int P(x)\,dx}\int e^{\int P(x)\,dx} f(x)\,dx.$

Se demuestra fácilmente que la función y_c es la solución general de $y' + P(x)y = 0$, mientras que y_p es una solución de $y' + P(x)y = f(x)$. Como se verá en la Sección 19.5, la propiedad de aditividad de soluciones (19.15) para formar una solución general, es una propiedad intrínseca de las ecuaciones lineales.

Ejercicios 19.3

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 1003.

En los Problemas 1-22 halle la solución general de la ecuación diferencial indicada.

1. $\dfrac{dy}{dx} = 4y$
2. $\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$
3. $2\dfrac{dy}{dx} + 10y = 1$
4. $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 3$
5. $\dfrac{dy}{dx} + y = e^{3x}$
6. $\dfrac{dy}{dx} = y + e^x$
7. $y' + 3x^2y = x^2$
8. $y' + 2xy = x^3$
9. $x^2y' + xy = 1$
10. $y' = 2y + x^2 + 5$
11. $(x + 4y^2)\,dy + 2y\,dx = 0$
12. $\dfrac{dx}{dy} = x + y$
13. $x\,dy = (x \operatorname{sen} x - y)\,dx$
14. $(1 + x^2)\,dy + (xy + x^3 + x)\,dx = 0$
15. $(1 + e^x)\dfrac{dy}{dx} + e^xy = 0$
16. $(1 - x^3)\dfrac{dy}{dx} = 3x^2y$
17. $\cos x\dfrac{dy}{dx} + y \operatorname{sen} x = 1$
18. $\dfrac{dy}{dx} + y\cot x = 2\cos x$
19. $x\dfrac{dy}{dx} + 4y = x^3 - x$
20. $(1 + x)y' - xy = x + x^2$
21. $\dfrac{dr}{d\theta} + r\sec\theta = \cos\theta$
22. $\dfrac{dP}{dt} + 2tP = P + 4t - 2$

En los Problemas 23-30 resuelva la ecuación diferencial dada sujeta a la condición inicial indicada.

23. $\dfrac{dy}{dx} + 5y = 20, \quad y(0) = 2$
24. $y' = 2y + x(e^{3x} - e^{2x}), \quad y(0) = 2$
25. $(x + 1)\dfrac{dy}{dx} + y = \ln x, \quad y(1) = 10$
26. $xy' + y = e^x, \quad y(1) = 2$
27. $x(x - 2)y' + 2y = 0, \quad y(3) = 6$
28. $\operatorname{sen} x\dfrac{dy}{dx} + (\cos x)y = 0, \quad y\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$
29. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{y - x}, \quad y(5) = 2$
30. $\cos^2x\dfrac{dy}{dx} + y = 1, \quad y(0) = -3$

31. En el Problema 21 de los Ejercicios 8.7 se vio que la ecuación diferencial para la corriente $i(t)$ en un circuito simple L-R en serie es $L(di/dt) + Ri = E$, en donde L y R son constantes conocidas como inductancia y resistencia, respectivamente, y E es la tensión (o voltaje) aplicada. Resuelva la ecuación diferencial si se tiene que $E = E_0 \operatorname{sen} wt$ e $i(0) = i_0$.

32. Una célula está suspendida dentro de una solución que contiene un soluto a una concentración constante C_s. Suponga que la célula tiene un volumen constante V y que el área de su membrana permeable es la constante A. Por la ley de Fick*, la razón de cambio de su masa m es directamente proporcional al área A y a la diferencia $C_s - C(t)$, en donde $C(t)$ es la concentración del soluto en el interior de la célula en cualquier instante t. Determine $C(t)$ si $m = VC(t)$ y $C(0) = C_0$. Véase la Figura 19.3.

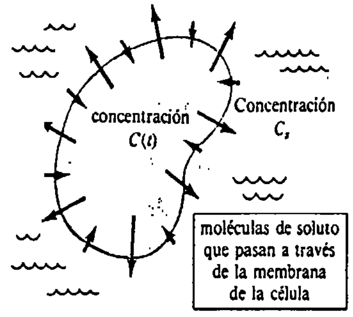


Figura 19.3

33. Se disuelven inicialmente 50 lb de sal en un recipiente grande que contiene 300 galones de agua. Se bombea salmuera al recipiente a razón de 3 galones por minuto (gal/min), y la solución debidamente mezclada se bombea hacia afuera del recipiente a razón de 2 gal/min. Si la concentración de la solución que entra es de 2 lb/gal, la ecuación diferencial para la cantidad A de sal (en libras) dentro del recipiente en cualquier instante es

$$\frac{dA}{dt} = (3)(2) - 2\left(\frac{A}{100 + t}\right).$$

Determine la cantidad de sal que hay en el recipiente en un instante cualquiera. Véase Figura 19.4.

34. El marcapaso esquematizado en la Figura 19.5 consta de una pila eléctrica, un capacitor (o condensador) y el corazón, que funciona como una resistencia en el circuito. Cuando el conmutador S se encuentra en P el capacitor se carga; cuando S está en Q el capacitor se descarga enviando un estímulo eléctrico al corazón. Durante este lapso la tensión eléctrica E aplicada al corazón está dada por

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{RC}E, \qquad t_1 < t < t_2,$$

en donde R y C son constantes. Determine $E(t)$ si $E(t_1) = E_0$ (la fuerza electromotriz de la pila). (Desde luego la conmutación (apertura y cierre) del interruptor es periódica a fin de simular el ritmo cardiaco natural, y producir la estimulación del corazón.

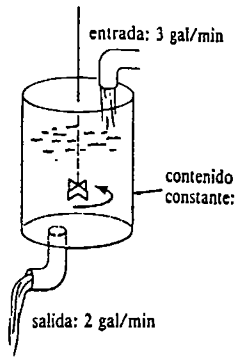


Figura 19.4

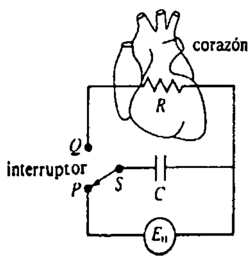


Figura 19.5

Problema diverso

35. Obtener una solución continua del problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} + y = f(x) \quad \text{en donde } f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

sujeta a $y(0) = 0$. (*Sugerencia:* Resuelva el problema en dos partes.)

* Adolf Fick (1829-1901), fisiólogo alemán.

19.4 Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden

Una ecuación diferencial de orden n tiene la forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x),$$

en donde los coeficientes son solamente funciones de x, y $y^{(n)}$ significa d^ny/dx^n. Cuando $g(x) \neq 0$ se expresa además que la ecuación es no **homogénea**, mientras que si la ecuación es de la forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

se dice que es **homogénea***. Tanto en esta como en la siguiente sección se tratará solamente de obtener soluciones de ecuaciones lineales de segundo orden con *coeficientes constantes reales*:

$$ay'' + by' + cy = g(x).$$

Se empezará considerando la ecuación homogénea

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{19.16}$$

TEOREMA 19.1

Principio de superposición

Sean y_1 y y_2 soluciones de la ecuación diferencial homogénea de segundo orden (19.16). Entonces la combinación lineal

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x),$$

en donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias, también es una solución de la ecuación.

Demostración Si $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, entonces

$$a[C_1y_1'' + C_2y_2''] + b[C_1y_1' + C_2y_2'] + c[C_1y_1 + C_2y_2]$$
$$= C_1\underbrace{[ay_1'' + by_1' + cy_1]}_{\text{cero}} + C_2\underbrace{[ay_2'' + by_2' + cy_2]}_{\text{cero}}$$
$$= C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0.$$

□

Corolarios (*a*) Si $y_1(x)$ es una solución de (19.16), entonces un múltiplo constante de ella, $y = C_1y_1(x)$, también es una solución. (*b*) La ecuación (19.16) siempre tiene la solución $y \equiv 0$.

□

* En este contexto, la palabra "homogénea" no se refiere a que los coeficientes sean funciones homogéneas.

TEOREMA 19.2

Sean y_1 y y_2 soluciones de la ecuación diferencial homogénea de segundo orden (19.16) tales que ninguna de ellas es múltiplo constante de la otra. Entonces toda solución de (19.16) se puede obtener a partir de la combinación lineal

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x). \tag{19.17}$$

□

Solución general

Se afirma que (19.17) del Teorema 19.2 es la solución general de la ecuación diferencial (19.16). En otras palabras, toda solución de (19.16) se puede obtener a partir de (19.17) especificando las constantes C_1 y C_2. Además, se dice que dos soluciones de (19.16) tales que ninguna es un múltiplo constante de la otra, son **linealmente independientes**. La solución general de (19.16) consiste en una combinación lineal de soluciones linealmente independientes.

Ejemplo 1

El lector debe verificar que $y_1 \equiv 0$ y $y_2 = e^{2x}$ son, ambas, soluciones de la ecuación $y'' + 2y' - 8y = 0$. Aunque y_2 no es un múltiplo constante de y_1, y_1 y y_2 no son linealmente independientes puesto que $y_1 = 0 \cdot y_2$.

El hecho sorprendente acerca de la ecuación (19.16) es que *todas* las soluciones son funciones exponenciales, o bien se forman a partir de funciones exponenciales.

Ecuación auxiliar

Si se ensaya una solución de la forma $y = e^{mx}$, entonces $y' = me^{mx}$ y $y'' = m^2e^{mx}$ de modo que (19.16) se transforma en

$$am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0 \quad \text{o bien} \quad e^{mx}[am^2 + bm + c] = 0.$$

Como e^{mx} nunca se anula para valores reales de x, es evidente que la única manera de que esta función exponencial pueda satisfacer la ecuación diferencial es eligiendo m de modo que sea una raíz de la ecuación cuadrática

$$am^2 + bm + c = 0.$$

Esta última ecuación se llama la **ecuación auxiliar** o **ecuación característica** de la ecuación diferencial (19.16). Serán considerados tres casos, a saber, que la ecuación auxiliar tenga raíces reales distintas, raíces reales iguales y, por último, raíces complejas conjugadas.

Caso I Suponiendo que la ecuación auxiliar de (19.16) tiene dos raíces reales distintas m_1 y m_2, se encuentran dos soluciones

$$y_1 = e^{m_1x} \quad \text{y} \quad y_2 = e^{m_2x}.$$

Puesto que y_1 y y_2 son linealmente independientes, se deduce que la solución general de la ecuación es

$$y = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x}. \tag{19.18}$$

Ejemplo 2

Resolver $2y'' - 5y' - 3y = 0$.

Solución Se resuelve primero la ecuación auxiliar:

$$2m^2 - 5m - 3 = 0 \quad \text{o bien} \quad (2m + 1)(m - 3) = 0$$

$$m_1 = -\frac{1}{2}, \qquad m_2 = 3.$$

Por lo tanto, por (19.18) la solución general es

$$y = C_1e^{-x/2} + C_2e^{3x}.$$

Caso II Cuando $m_1 = m_2$, necesariamente se obtiene sólo una solución exponencial $y_1 = e^{m_1x}$. Sin embargo, con una sustitución directa en (19.16) se puede demostrar que $y = u(x)e^{m_1x}$ también es solución siempre que $u(x) = x$. Véase el Problema 35 de los Ejercicios 19.4. Es decir, $y_1 = e^{m_1x}$ y $y_2 = xe^{m_1x}$ son soluciones linealmente independientes. Por lo tanto, la solución general es

$$y = C_1e^{m_1x} + C_2xe^{m_1x}. \tag{19.19}$$

Ejemplo 3

Resolver $y'' - 10y' + 25y = 0$.

Solución

$$m^2 - 10m + 25 = 0 \quad \text{o bien} \quad (m - 5)^2 = 0$$

$$m_1 = m_2 = 5$$

De esta manera, por (19.19) se ve que la solución general es

$$y = C_1e^{5x} + C_2xe^{5x}.$$

Números complejos

El último caso trata con números complejos*. Recuérdese del álgebra que se llama número complejo a un número de la forma $z = \alpha + i\beta$, en donde α y β son números reales e $i^2 = -1$ (a veces se escribe $i = \sqrt{-1}$). El número complejo $\bar{z} = \alpha - i\beta$ se llama el complejo conjugado de z. Ahora bien, de la fórmula cuadrática, las raíces de $am^2 + bm + c = 0$ se pueden expresar como

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Cuando $b^2 - 4ac < 0$, entonces m_1 y m_2 son complejos conjugados.

* Véase el Apéndice I.

Caso III Si m_1, y m_2 son complejos, entonces puede escribirse

$$m_1 = \alpha + i\beta \quad \text{y} \quad m_2 = \alpha - i\beta,$$

en donde α y β son reales, e $i^2 = -1$. En cuanto a la forma, no hay diferencia entre este caso y el Caso I, y por lo tanto la solución general es

$$y = c_1e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2e^{(\alpha-i\beta)x}. \tag{19.20}$$

Sin embargo, en la práctica es preferible trabajar con funciones reales en vez de exponenciales complejas. Ahora bien, puede escribirse (19.20) en una forma más práctica empleando la **fórmula de Euler**[†]

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta,$$

en donde θ es cualquier número real. En virtud de este resultado resulta que

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\,\text{sen}\,\beta x \quad \text{y} \quad e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\,\text{sen}\,\beta x,$$

en donde se utiliza $\cos(-\beta x) = \cos\beta x$ y $\text{sen}(-\beta x) = -\text{sen}\,\beta x$. De esta manera, (19.20) se transforma en

$$\begin{aligned} y &= e^{\alpha x}[c_1e^{i\beta x} + c_2e^{-i\beta x}] \\ &= e^{\alpha x}[c_1\{\cos\beta x + i\,\text{sen}\,\beta x\} + c_2\{\cos\beta x - i\,\text{sen}\,\beta x\}] \\ &= e^{\alpha x}[(c_1 + c_2)\cos\beta x + (c_1i - c_2i)\text{sen}\,\beta x]. \end{aligned}$$

Como $e^{\alpha x}\cos\beta x$ y $e^{\alpha x}\,\text{sen}\,\beta x$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial dada, es posible simplemente llamar C_1 a $c_1 + c_2$ y C_2 a $c_1i - c_2i$, y aplicar el principio de superposición para expresar la solución general

$$\begin{aligned} y &= C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\text{sen}\,\beta x \\ &= e^{\alpha x}[C_1\cos\beta x + C_2\text{sen}\,\beta x]. \end{aligned} \tag{19.21}$$

Ejemplo 4

Resolver $y'' + y' + y = 0$.

Solución

$$m^2 + m + 1 = 0 \quad \text{o bien} \quad m = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$m_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad m_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Por lo tanto, de (19.21) se ve que la solución general de la ecuación es

$$y = e^{-x/2}\left[C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\text{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right].$$

[†] En el Problema 41 de los Ejercicios 11.8 se pidió al lector demostrar esto.

Ejemplo 5

Las dos ecuaciones

$$y'' + k^2y = 0 \quad \text{y} \quad y'' - k^2y = 0$$

aparecen con frecuencia en la matemática aplicada. En el caso de la primera ecuación diferencial, la ecuación auxiliar $m^2 + k^2 = 0$ tiene las reaíces complejas $m_1 = ki$ y $m_2 = -ki$. De (19.21) se deduce que su solución general es

$$y = C_1\cos kx + C_2\operatorname{sen} kx.$$

La segunda ecuación diferencial tiene la ecuación auxiliar $m^2 - k^2 = 0$, con raíces reales $m_1 = k$ y $m_2 = -k$, de modo que su solución general es

$$y = C_1e^{kx} + C_2e^{-kx}. \tag{19.22}$$

Nótese que si en (19.22) se elige $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$, entonces

$$y = \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} = \cosh kx$$

es también una solución de la segunda ecuación. Además, cuando $C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = -\frac{1}{2}$, entonces (19.22) se transforma en

$$y = \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2} = \operatorname{senh} kx.$$

Puesto que cosh kx y senh kx son linealmente independientes, se obtiene una forma alternativa de la solución general de $y'' - k^2y = 0$:

$$y = C_1\cosh kx + C_2\operatorname{senh} kx.$$

Problema de valores iniciales

Un problema de valor inicial es

Resolver: $\quad ay'' + by' + cy = g(x)$

Sujeta a: $\quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0',$

en donde y_0 y y_0' son constantes arbitrarias. Una solución del problema es una función cuya gráfica pasa por (x_0, y_0), y tal que la pendiente de la curva en ese punto es y_0'. El ejemplo siguiente ilustra un problema de valor inicial para una ecuación homogénea.

Ejemplo 6

Resuelva $y'' - 4y' + 13y = 0$ sujeta a $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$.

Solución Las raíces de la ecuación auxiliar

$$m^2 - 4m + 13 = 0$$

son

$$m_1 = 2 + 3i \quad \text{y} \quad m_2 = 2 - 3i$$

de modo que

$$y = e^{2x}[C_1\cos 3x + C_2\operatorname{sen} 3x].$$

La condición $y(0) = -1$ implica que

$$-1 = e^0[C_1\cos 0 + C_2\operatorname{sen} 0] = C_1$$

por lo que puede escribirse

$$y = e^{2x}[-\cos 3x + C_2\operatorname{sen} 3x].$$

Derivando esta expresión y aplicando la segunda condición se obtiene

$$y' = e^{2x}[3\operatorname{sen} 3x + 3C_2\cos 3x] + 2e^{2x}[-\cos 3x + C_2\operatorname{sen} 3x]$$
$$2 = 3C_2 - 2$$

de modo que $C_2 = \frac{4}{3}$. Por lo tanto,

$$y = e^{2x}\left[-\cos 3x + \frac{4}{3}\operatorname{sen} 3x\right].$$

Ejercicios 19.4

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 1003.

En los Problemas 1-20 encuentre la solución general de la ecuación diferencial indicada.

1. $3y'' - y' = 0$ 2. $2y'' + 5y' = 0$
3. $y'' - 16y = 0$ 4. $y'' - 8y = 0$
5. $y'' + 9y = 0$ 6. $4y'' + y = 0$
7. $y'' - 3y' + 2y = 0$ 8. $y'' - y' - 6y = 0$
9. $\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} + 16y = 0$
10. $\frac{d^2y}{dx^2} - 10\frac{dy}{dx} + 25y = 0$
11. $y'' + 3y' - 5y = 0$ 12. $y'' + 4y' - y = 0$
13. $12y'' - 5y' - 2y = 0$ 14. $8y'' + 2y' - y = 0$
15. $y'' - 4y' + 5y = 0$
16. $2y'' - 3y' + 4y = 0$
17. $3y'' + 2y' + y = 0$ 18. $2y'' + 2y' + y = 0$
19. $9y'' + 6y' + y = 0$
20. $15y'' - 16y' - 7y = 0$

En los Problemas 21-30 resuelva la ecuación diferencial dada sujeta a las condiciones iniciales indicadas.

21. $y'' + 16y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -2$
22. $y'' - y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1$
23. $y'' + 6y' + 5y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$
24. $y'' - 8y' + 17y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -1$
25. $2y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0$
26. $y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 10$
27. $y'' + y' + 2y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0$
28. $4y'' - 4y' - 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 5$
29. $y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$
30. $y'' + y = 0, \quad y(\pi/3) = 0, \quad y'(\pi/3) = 2$

Problemas diversos

31. Las raíces de la ecuación auxiliar son $m_1 = 4$ y $m_2 = -5$. ¿Cuál es la ecuación diferencial correspondiente?

32. Las raíces de la ecuación auxiliar son $m_1 = 3 + i$ y $m_2 = 3 - i$. ¿Cuál es la ecuación diferencial correspondiente?

En los Problemas 33 y 34 utilice la solución supuesta $y = e^{mx}$ para encontrar la ecuación auxiliar, las raíces y la solución general de la ecuación diferencial de tercer orden indicada.

33. $y''' - 4y'' - 5y' = 0$

34. $y''' + 3y'' - 4y' - 12y = 0$

35. (a) Demuestre que si en el Caso II $m_1 = m_2$, la ecuación diferencial (19.16) debe ser de la forma $y'' - 2m_1y' + m_1^2y = 0$.

(b) Demuestre que la sustitución $y = u(x)e^{m_1x}$ en la ecuación diferencial de la parte (a) conduce a $u(x) = x$.

19.5 Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de segundo orden

Soluciones particulares

Ahora se tratará de encontrar la solución general de la ecuación no homogénea

$$ay'' + by' + cy = g(x), \tag{19.23}$$

en donde a, b y c son constantes y g es continua. Cualquier función y_p, que no contiene parámetros arbitrarios y que satisface (19.23), se llama **solución particular** de la ecuación. ecuación.

Ejemplo 1

$y_p = x^3 - x$ es una solución particular de

$$y'' - y' + 6y = 6x^3 - 3x^2 + 1$$

puesto que $y_p' = 3x^2 - 1$, $y_p'' = 6x$, y

$$\begin{aligned} y'' - y' + 6y &= 6x - (3x^2 - 1) + 6(x^3 - x) \\ &= 6x^3 - 3x^2 + 1. \end{aligned}$$

Solución general

El procedimiento para resolver la ecuación no homogénea (19.23) consta de dos pasos:

(*i*) Resolver la ecuación homogénea asociada

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

(*ii*) y luego encontrar *cualquier* solución particular de la ecuación no homogénea (19.23).

La suma de las soluciones obtenidas en (*i*) y (*ii*) constituye la solución general de (19.23).

TEOREMA 19.3

Sea y_p una solución dada de la ecuación no homogénea (19.23), y sea

$$y_c = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

la solución general de la ecuación homogénea asociada. Entonces, la solución general de la ecuación no homogénea es

$$\begin{aligned} y &= C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y_p(x) \\ &= y_c(x) + y_p(x). \end{aligned} \tag{19.24}$$

□

Se deja como ejercicio la demostración de que (19.24) es una solución de (19.23).

Función complementaria

En el Teorema 19.3, a la combinación lineal $y_c(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ se la llama **función complementaria** de la ecuación (19.23). En otras palabras, la solución general de una ecuación no homogénea es

y = función complementaria + cualquier solución particular.

Variación de parámetros

Una de las formas más populares para determinar una solución particular y_p de la ecuación diferencial lineal de segundo orden (19.23) se conoce como **método de variación de parámetros.** Para aplicar este método se expresará (19.23) en la forma

$$y'' + Py' + Qy = f(x) \tag{19.25}$$

dividiendo la ecuación entre a.

Supóngase que y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada a (19.25). Es decir,

$$y_1'' + Py_1' + Qy_1 = 0 \quad y \quad y_2'' + Py_2' + Qy_2 = 0.$$

Se pregunta ahora: ¿Es posible encontrar dos funciones u_1 y u_2 de modo que

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \tag{19.26}$$

sea una solución particular de (19.23)? Obsérvese que se ha supuesto que y_p tiene una forma semejante a $y_c = C_1y_1 + C_2y_2$, pero que se ha reemplazado C_1 y C_2 por los "parámetros variables" u_1 y u_2. Aplicando la regla del producto para derivar y_p se obtiene

$$y_p' = u_1y_1' + y_1u_1' + u_2y_2' + y_2u_2'. \tag{19.27}$$

Si además se exige que u_1 y u_2 sean funciones para las cuales

$$y_1u_1' + y_2u_2' = 0, \tag{19.28}$$

entonces (19.27) se transforma en

$$y_p' = u_1y_1' + u_2y_2'.$$

Continuando, se halla que

$$y_p'' = u_1y_1'' + y_1'u_1' + u_2y_2'' + y_2'u_2'$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} y_p'' + Py_p' + Qy_p &= u_1y_1'' + y_1'u_1' + u_2y_2'' + y_2'u_2' \\ &\quad + Pu_1y_1' + Pu_2y_2' + Qu_1y_1 + Qu_2y_2 \\ &= u_1\underbrace{[y_1'' + Py_1' + Qy_1]}_{\text{cero}} + u_2\underbrace{[y_2'' + Py_2' + Qy_2]}_{\text{cero}} \\ &\quad + y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x). \end{aligned}$$

En otras palabras, u_1 y u_2 deben ser funciones que además satisfagan la condición

$$y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x). \tag{19.29}$$

Las ecuaciones (19.28) y (19.29) constituyen un sistema lineal de ecuaciones para las derivadas u_1' y u_2'. Es decir, se deben resolver

$$\begin{aligned} y_1u_1' + y_2u_2' &= 0 \\ y_1'u_1' + y_2'u_2' &= f(x). \end{aligned}$$

Por la regla de Cramer* se obtiene

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} \quad \text{y} \quad u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}. \tag{19.30}$$

El determinante $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ se llama **wronskiano**† y se denota usualmente por W.

Ejemplo 2

Resolver $4y'' + 36y = \csc 3x$.

Solución Primero se escribe la ecuación en la forma

$$y'' + 9y = \frac{1}{4}\csc 3x.$$

Puesto que las raíces de la ecuación auxiliar $m^2 + 9 = 0$ son $m_1 = 3i$ y $m_2 = -3i$ se tiene

$$y_c = C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x.$$

$$W = \begin{vmatrix} \cos 3x & \operatorname{sen} 3x \\ -3 \operatorname{sen} 3x & 3\cos 3x \end{vmatrix} = 3.$$

De (19.30) se obtiene entonces

$$u_1' = -\frac{(\operatorname{sen} 3x)(\frac{1}{4}\csc 3x)}{3} = -\frac{1}{12}$$

* Véase el Apéndice 1.

† En honor del matemático y filósofo polaco, Joseph M. H. Wronski (1778-1853).

y

$$u_2' = \frac{(\cos 3x)(\frac{1}{4}\csc 3x)}{3} = \frac{1}{12}\frac{\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x}.$$

Integrando u_1' y u_2' resulta

$$u_1 = -\frac{1}{12}x \quad \text{y} \quad u_2 = \frac{1}{36}\ln|\operatorname{sen} 3x|.$$

Por lo tanto, de (19.26)

$$y_p = -\frac{1}{12}x\cos 3x + \frac{1}{36}(\operatorname{sen} 3x)\ln|\operatorname{sen} 3x|.$$

En consecuencia, la solución general es

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x - \frac{1}{12}x\cos 3x + \frac{1}{36}(\operatorname{sen} 3x)\ln|\operatorname{sen} 3x|. \end{aligned}$$

Constantes de integración

Al calcular las integrales indefinidas de u_1' y u_2' no es necesario introducir constantes. Esto es así porque

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= C_1y_1 + C_2y_2 + (u_1 + a_1)y_1 + (u_2 + b_1)y_2 \\ &= (C_1 + a_1)y_1 + (C_2 + b_1)y_2 + u_1y_1 + u_2y_2 \\ &= c_1y_1 + c_2y_2 + u_1y_1 + u_2y_2, \end{aligned}$$

en donde $c_1 = C_1 + a_1$ y $c_2 = C_2 + b_1$.

Coeficientes indeterminados

Cuando $g(x)$ consiste en

(*i*) una constante k,

(*ii*) un polimonio en x,

(*iii*) una función exponencial $e^{\alpha x}$

(*iv*) $\operatorname{sen} \beta x$, $\cos \beta x$,

o bien en sumas y productos finitos de estas funciones, es posible encontrar una solución particular de (19.23) por el **método de los coeficientes indeterminados**. En el caso especial* en el que las n funciones distintas $f_i(x)$ que aparecen en $g(x)$ o en sus derivadas, *no* aparez-

* Puede consultarse otro libro del autor de este texto: *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*, para ver más detalles acerca de este método.

can en la función complementaria y_c, es posible encontrar una solución particular y_p consistente en una combinación lineal:

$$y = \sum_{k=1}^{n} A_k f_k(x).$$

Se determinan los coeficientes A_k sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial dada.

Ejemplo 3

Resolver $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 4x^2$.

Solución La función complementaria es

$$y_c = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}.$$

Ahora bien, puesto que

$$g(x) = \underbrace{4x^2}_{\boxed{f_1(x)}}, \qquad g'(x) = \underbrace{8x}_{\boxed{f_2(x)}}, \qquad g''(x) = 8\cdot\underbrace{1}_{\boxed{f_3(x)}},$$

se busca una solución particular que tenga la estructura básica

$$y_p = Ax^2 + Bx + C. \tag{19.31}$$

Derivando (19.31) y sustituyendo en la ecuación dada resulta

$$\begin{aligned} y_p'' + 3y_p' + 2y_p &= 2A + 3B + 2C + (6A + 2B)x + 2Ax^2 \\ &= 4x^2. \end{aligned}$$

Igualando coeficientes en la última identidad, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2A + 3B + 2C &= 0 \\ 6A + 2B \quad\; &= 0 \\ 2A \qquad\qquad &= 4. \end{aligned}$$

Resolviendo resulta $A = 2$, $B = -6$ y $C = 7$. En consecuencia, $y_p = 2x^2 - 6x + 7$ y la solución general de la ecuación diferencial es $y = y_c + y_p$, o sea

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + 2x^2 - 6x + 7.$$

Ejemplo 4

Resolver $y'' + 2y' + 2y = -10xe^x + 5\,\mathrm{sen}\,x$.

Solución Las raíces de la ecuación auxiliar $m^2 + 2m + 2 = 0$ son $m_1 = -1 + i$ y $m_2 = -1 - i$, y de esta manera

$$y_c = e^{-x}(C_1\cos x + C_2\,\mathrm{sen}\,x).$$

En este caso

$$g(x) = -10\underbrace{xe^x}_{\boxed{f_1(x)}} + 5\,\underbrace{\mathrm{sen}\,x}_{\boxed{f_2(x)}}, \qquad g'(x) = 10xe^x - 10\underbrace{e^x}_{\boxed{f_3(x)}} + 5\underbrace{\cos x}_{\boxed{f_4(x)}}$$

indica que se puede encontrar una solución particular de la forma

$$y_p = Axe^x + Be^x + C\,\mathrm{sen}\,x + D\cos x.$$

Sustituyendo y_p en la ecuación diferencial y simplificando se obtiene

$$\begin{aligned} y_p'' + 2y_p' + 2y_p &= 5Axe^x + (4A + 5B)e^x + (C - 2D)\mathrm{sen}\,x \\ &\quad + (2C + D)\cos x \\ &= -10xe^x + 5\,\mathrm{sen}\,x \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} 5A \qquad &= -10 \\ 4A + 5B &= 0 \\ C - 2D &= 5 \\ 2C + D &= 0. \end{aligned}$$

Resulta que $A = -2$, $B = \frac{8}{5}$, $C = 1$ y $D = -2$. Por lo tanto,

$$y_p = -2xe^x + \frac{8}{5}e^x + \mathrm{sen}\,x - 2\cos x.$$

Luego la solución general es

$$y = e^{-x}(C_1\cos x + C_2\,\mathrm{sen}\,x) - 2xe^x + \frac{8}{5}e^x + \mathrm{sen}\,x - 2\cos x.$$

Ejercicios 19.5

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 1003.

En los Problemas 1-20 resuelva por el método de variación de parámetros la ecuación diferencial indicada

1. $y'' + y = \sec x$
2. $y'' + y = \tan x$
3. $y'' + y = \mathrm{sen}\,x$
4. $y'' + y = \sec x \tan x$
5. $y'' + y = \cos^2 x$
6. $y'' + y = \sec^2 x$
7. $y'' - y = \cosh x$
8. $y'' - y = \mathrm{senh}\,2x$
9. $y'' - 4y = e^{2x}/x$
10. $y'' - 9y = 9x/e^{3x}$
11. $y'' + 3y' + 2y = 1/(1 + e^x)$
12. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}/(1 + e^x)$
13. $y'' + 3y' + 2y = \mathrm{sen}\,e^x$
14. $y'' - 2y' + y = e^x \arctan x$
15. $y'' - 2y' + y = e^x/(1 + x^2)$
16. $y'' - 2y' + 2y = e^x \sec x$
17. $y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln x$
18. $y'' + 10y' + 25y = e^{-10x}/x^2$
19. $4y'' - 4y' + y = 8e^{-x} + x$
20. $4y'' - 4y' + y = e^{x/2}\sqrt{1 - x^2}$

En los Problemas 21 y 22 resuelva por el método de variación de parámetros la ecuación diferencial indicada, sujeta a las condiciones iniciales $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$.

21. $y'' - y = xe^x$

22. $2y'' + y' - y = x + 1$

En los Problemas 23-32 resuelva por el método de los coeficientes indeterminados la ecuación diferencial indicada.

23. $y'' - 9y = 54$

24. $2y'' - 7y' + 5y = -29$

25. $y'' + 4y' + 4y = 2x + 6$

26. $y'' - 2y' + y = x^3 + 4x$

27. $y'' + 25y = 6 \operatorname{sen} x$

28. $y'' - 4y = 7e^{4x}$

29. $y'' - 2y' - 3y = 4e^{2x} + 2x^3$

30. $y'' + y' + y = x^2e^x + 3$

31. $y'' - 8y' + 25y = e^{3x} - 6 \cos 2x$

32. $y'' - 5y' + 4y = 2 \sinh 3x$

En los Problemas 33 y 34 resuelva por el método de los coeficientes indeterminados la ecuación diferencial indicada, sujeta a las condiciones iniciales $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$.

33. $y'' - 64y = 16$

34. $y'' + 5y' - 6y = 10e^{2x}$

Problemas diversos

35. Dado que $y_1 = x$ y $y_2 = x \ln x$ son soluciones linealmente independientes de $x^2y'' - xy' + y = 0$, aplique el método de variación de parámetros para resolver $x^2y'' - xy' + y = 4x \ln x$.

36. Dado que $y_1 = x^2$ y $y_2 = x^3$ son soluciones linealmente independientes de $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$, aplique el método de variación de parámetros para resolver $x^2y'' - 4xy' + 6y = 1/x$.

37. Demuestre que (19.24) es una solución de (19.23).

19.6 Soluciones en serie de potencias

Algunas ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden con *coeficientes variables* se pueden resolver mediante series de potencias. El procedimiento consiste en suponer una solución de la forma

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n,$$

derivarla

$$\frac{dy}{dx} = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^{n-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2c_2 + 6c_3x + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^{n-2},$$

y sustituir los resultados en la ecuación diferencial, con la esperanza de poder determinar una relación de recurrencia que dé lugar a los coeficientes c_n. La serie de potencias representará entonces una solución de la ecuación diferencial en cierto intervalo de convergencia.

Resolver $y'' - 2xy = 0$.

Solución Se supone una solución $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$, entonces, como se demostró antes

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^{n-2}.$$

Por lo tanto,

$$y'' - 2xy = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_nx^{n+1}$$

$$= 2 \cdot 1c_2x^0 + \underbrace{\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)c_nx^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_nx^{n+1}}_{\text{ambas series empiezan con } x^1},$$

Haciendo $k = n - 2$ en la primera serie, y $k = n + 1$ en la segunda, resulta

$$y'' - 2xy = 2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2c_{k-1}x^k$$

$$= 2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty}[(k+2)(k+1)c_{k+2} - 2c_{k-1}]x^k = 0.$$

Entonces se debe tener

$$2c_2 = 0$$

y

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} - 2c_{k-1} = 0.$$

La última expresión escrita como

$$c_{k+2} = \frac{2c_{k-1}}{(k+2)(k+1)}, \quad k = 1, 2, 3 \ldots$$

se llama *relación de recurrencia* para los c_n. Iterando esta última fórmula se obtiene

$$c_3 = \frac{2c_0}{3 \cdot 2}$$

$$c_4 = \frac{2c_1}{4 \cdot 3}$$

$$c_5 = \frac{2c_2}{5 \cdot 4} = 0$$

$$c_6 = \frac{2c_3}{6 \cdot 5} = \frac{2^2}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}c_0$$

$$c_7 = \frac{2c_4}{7 \cdot 6} = \frac{2^2}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}c_1$$

$$c_8 = \frac{2c_5}{8 \cdot 7} = 0$$

$$c_9 = \frac{2c_6}{9 \cdot 8} = \frac{2^3}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}c_0$$

$$c_{10} = \frac{2c_7}{10 \cdot 9} = \frac{2^3}{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}c_1$$

$$c_{11} = \frac{2c_8}{11 \cdot 10} = 0$$

etcétera. Debe ser claro que tanto c_0 como c_1 son arbitrarios. Entonces

$$\begin{aligned}
y &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + c_6x^6 + c_7x^7 + c_8x^8 \\
&\quad + c_9x^9 + c_{10}x^{10} + c_{11}x^{11} + \cdot \\
&= c_0 + c_1x + 0 + \frac{2}{3\cdot 2}c_0x^3 + \frac{2}{4\cdot 3}c_1x^4 + 0 + \frac{2^2}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}c_0x^6 \\
&\quad + \frac{2^2}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}c_1x^7 + 0 + \frac{2^3}{9\cdot 8\cdot 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}c_0x^9 \\
&\quad + \frac{2^3}{10\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}c_1x^{10} + 0 + \cdots \\
&= c_0\left[1 + \frac{2}{3\cdot 2}x^3 + \frac{2^2}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}x^6 + \frac{2^3}{9\cdot 8\cdot 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}x^9 + \cdots\right] \\
&\quad + c_1\left[x + \frac{2}{4\cdot 3}x^4 + \frac{2^2}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}x^7 \right.\\
&\quad \left. + \frac{2^3}{10\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}x^{10} + \cdots\right].
\end{aligned}$$

Aunque es clara la forma en que se van generando los coeficientes en el ejemplo precedente, a veces es útil escribir las soluciones en términos de la notación de sumatoria. Aplicando las propiedades de los factoriales es posible escribir

$$y_1(x) = c_0\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k[1\cdot 4\cdot 7\cdots(3k-2)]}{(3k)!}x^{3k}\right]$$

y

$$y_2(x) = c_1\left[x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k[2\cdot 5\cdot 8\cdots(3k-1)]}{(3k+1)!}x^{3k+1}\right].$$

A esta forma se le puede aplicar el criterio del cociente para demostrar que cada serie converge para $|x| < \infty$.

Ejemplo 2

Resolver $(x^2 + 1)y'' + xy' - y = 0$.

Solución La suposición $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$ conduce a

$$\begin{aligned}
(x^2+1)&\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n \\
&= 2c_2x^0 - c_0x^0 + 6c_3x + c_1x - c_1x + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^n}_{k=n} \\
&\quad + \underbrace{\sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)c_nx^{n-2}}_{k=n-2} + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} nc_nx^n}_{k=n} - \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} c_nx^n}_{k=n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2c_2 - c_0 + 6c_3x \\
&\quad + \sum_{k=2}^{\infty}[k(k-1)c_k + (k+2)(k+1)c_{k+2} + kc_k - c_k]x^k \\
&= 2c_2 - c_0 + 6c_3x \\
&\quad + \sum_{k=2}^{\infty}[(k+1)(k-1)c_k + (k+2)(k+1)c_{k+2}]x^k = 0.
\end{aligned}$$

De esta manera, debe tenerse que $\quad 2c_2 - c_0 = 0$

$$c_3 = 0$$

$$(k+1)(k-1)c_k + (k+2)(k+1)c_{k+2} = 0$$

o bien, después de dividir entre $k + 1$,

$$c_2 = \frac{1}{2}c_0 \qquad c_3 = 0$$

$$c_{k+2} = -\frac{k-1}{k+2}c_k, \qquad k = 2, 3, 4\ldots$$

Iterando la última fórmula resulta que

$$\begin{aligned}
c_4 &= -\frac{1}{4}c_2 = -\frac{1}{2\cdot 4}c_0 = -\frac{1}{2^2 2!}c_0 \\
c_5 &= -\frac{2}{5}c_3 = 0 \\
c_6 &= -\frac{3}{6}c_4 = \frac{3}{2\cdot 4\cdot 6}c_0 = \frac{1\cdot 3}{2^3 3!}c_0 \\
c_7 &= -\frac{4}{7}c_5 = 0 \\
c_8 &= -\frac{5}{8}c_6 = -\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}c_0 = -\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4 4!}c_0 \\
c_9 &= -\frac{6}{9}c_7 = 0 \\
c_{10} &= -\frac{7}{10}c_8 = \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}c_0 = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^5 5!}c_0
\end{aligned}$$

etcétera. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
y &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + c_6x^6 + c_7x^7 \\
&\quad + c_8x^8 + \cdots \\
&= c_1x + c_0\left[1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2^2 2!}x^4 \right.\\
&\quad \left. + \frac{1\cdot 3}{2^3 3!}x^6 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4 4!}x^8 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^5 5!}x^{10} + \cdots\right].
\end{aligned}$$

Las soluciones son

$$y_1(x) = c_0\left[1 + \frac{1}{2}x^2 + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^{2n}\right],$$

$$y_2(x) = c_1x.$$

Ejercicios 19.6

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 1004.

En los Problemas 1—18 obtenga soluciones en serie de potencias de la ecuación diferencial indicada.

1. $y'' + y = 0$
2. $y'' - y = 0$
3. $y'' = y'$
4. $2y'' + y' = 0$
5. $y'' = xy$
6. $y'' + x^2y = 0$
7. $y'' - 2xy' + y = 0$
8. $y'' - xy' + 2y = 0$
9. $y'' + x^2y' + xy = 0$
10. $y'' + 2xy' + 2y = 0$
11. $(x - 1)y'' + y' = 0$
12. $(x + 2)y'' + xy' - y = 0$
13. $(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 0$
14. $(x^2 + 1)y'' - 6y = 0$
15. $(x^2 + 2)y'' + 3xy' - y = 0$
16. $(x^2 - 1)y'' + xy' - y = 0$
17. $y'' - (x + 1)y' - y = 0$
18. $y'' - xy' - (x + 2)y = 0$

19.7 Modelos de vibraciones

En el estudio de las vibraciones mecánicas la solución de la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = f(t) \tag{19.32}$$

describe el movimiento de una masa m sujeta a un resorte, la cual es impulsada por una fuerza $f(t)$. El movimiento tiene lugar en un medio que imparte una fuerza retardadora o de amortiguación $\beta\frac{dx}{dt}$. El término $m\frac{d^2x}{dt^2}$ se debe a la segunda ley de Newton, $F = ma$, mientras que el término kx se debe a la ley de Hooke, que dice que la fuerza de restitución del resorte es proporcional a su alargamiento x. La variable x se mide en relación con la **posición de equilibrio**. Véase la Figura 19.6. Cuando $f(t) = 0$ se expresa entonces que el movimiento de la masa es libre.

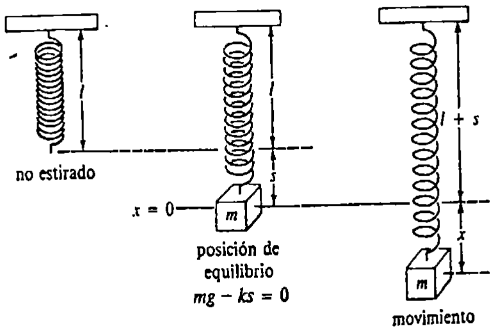


Figura 19.6

Adaptaremos la convención de que los desplazamientos medidos *hacia abajo* de la posición de equilibrio son *positivos*, mientras que los desplazamientos *hacia arriba* de tal

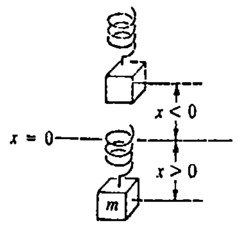


Figura 19.7

posición son *negativos*, como se muestra en la Figura 19.7. Con la ecuación (19.32), están asociadas dos condiciones iniciales obvias: $x(0) = a, x'(0) = b$, que representan la magnitud del desplazamiento inicial y la velocidad inicial, respectivamente. Por ejemplo: si $a > 0, b < 0$, la masa partirá desde una posición inferior a la de equilibrio con una velocidad hacia arriba. La solución de (19.32), sujeta a estas condiciones iniciales, es la **ecuación del movimiento** de la masa.

Movimiento armónico simple

Cuando $\beta = 0$ y $f(t) = 0$, el movimiento de la masa es no amortiguado y libre y se llama entonces **movimiento armónico simple**.

Ejemplo 1

Resolver e interpretar el problema de valores iniciales siguiente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0$$

$$x(0) = 10, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

Solución El problema equivale a tirar de una masa sujeta a un resorte hasta que se halle 10 unidades abajo de la posición de equilibrio, retenerla hasta $t = 0$ y luego soltarla de modo que parta del reposo. Aplicando las condiciones iniciales a la solución

$$x(t) = C_1\cos 4t + C_2\text{sen}\,4t$$

resulta

$$x(0) = 10 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0$$

de modo que $C_1 = 10$ y por lo tanto

$$x(t) = 10\cos 4t + C_2\text{sen}\,4t$$

$$\frac{dx}{dt} = -40\,\text{sen}\,4t + 4C_2\cos 4t$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0 + 4C_2 \cdot 1 = 0.$$

La última ecuación implica que $C_2 = 0$ y de esta manera la ecuación de movimiento es $x(t) = 10\cos 4t$.

La solución muestra claramente que una vez que el sistema se pone en movimiento, permanece moviéndose, y la masa oscila 10 unidades hacia cada lado de la posición de equilibrio $x = 0$. El periodo de este movimiento armónico simple es $2\pi/4 = \pi/2$, como se muestra en la Figura 19.8.

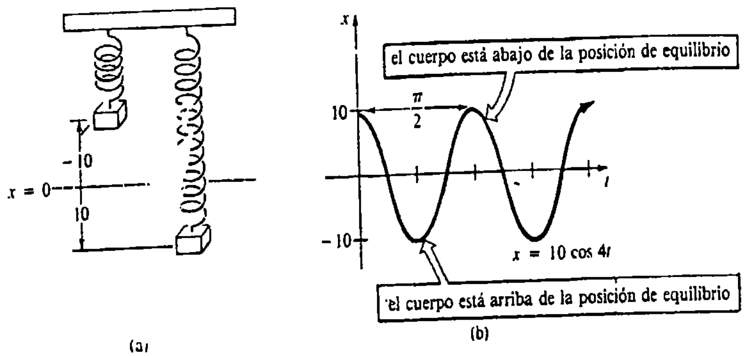


Figura 19.8

En contraste con el Ejemplo 1, resulta razonable que en el movimiento amortiguado libre la fuerza retardadora ocasione que los desplazamientos de la masa se vuelvan despreciables para valores grandes del tiempo; es decir, $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

Ejemplo 2

Un cuerpo que pesa 8 lb produce a un resorte un alargamiento de 2 pie. Suponiendo que una fuerza de amortiguación numéricamente igual a dos veces la velocidad instantánea actúa sobre el sistema, y que el cuerpo se suelta desde la posición de equilibrio con una velocidad hacia arriba de 3 pie/s, determine la ecuación del movimiento libre.

Solución Por la ley de Hooke se tiene que

$$8 = k(2) \quad \text{y así} \quad k = 4 \text{ lb/pie}$$

Puesto que el peso W del cuerpo está relacionado con su masa m mediante $W = mg$, entonces $m = W/g$. Por lo tanto,

$$m = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} \text{ geolibra}$$

Por (19.32), la ecuación diferencial del movimiento es entonces

$$\frac{1}{4}\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 4x = 0 \quad \text{o bien} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x = 0. \quad (19.33)$$

Las condiciones iniciales son

$$x(0) = 0, \qquad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = -3.$$

Ahora bien, la ecuación auxiliar de (19.33) es

$$m^2 + 8m + 16 = (m + 4)^2 = 0$$

de modo que $m_1 = m_2 = -4$. Por lo tanto,

$$x(t) = C_1e^{-4t} + C_2te^{-4t}.$$

La condición inicial $x(0) = 0$ exige de inmediato que $C_1 = 0$, mientras que, empleando $x'(0) = -3$, resulta que $C_2 = -3$. De esta manera, la ecuación del movimiento es

$$x(t) = -3te^{-4t}.$$

Para trazar la gráfica de $x(t)$, se determina el instante en el que $x'(t) = 0$:

$$x'(t) = -3(-4te^{-4t} + e^{-4t})$$
$$= -3e^{-4t}(1 - 4t).$$

Así que, cuando $t = \frac{1}{4}$,

$$x\left(\frac{1}{4}\right) = -3\left(\frac{1}{4}\right)e^{-1} = -0.276 \text{ pie}.$$

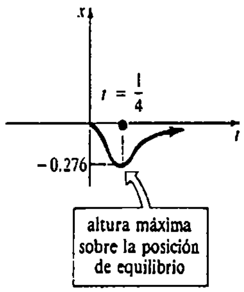


Figura 19.9

Como se muestra en la Figura 19.9, el significado que se da a este valor es que el cuerpo alcanza una altura máxima de 0.276 pie sobre la posición de equilibrio.

Nótese que el movimiento del sistema descrito en el Ejemplo 2 no es oscilatorio. Se deja como ejercicio demostrar que cuando $f(t) = 0$, el movimiento amortiguado es oscilatorio si $(\beta/m)^2 - 4k/m < 0$. Esto dice aproximadamente que el movimiento es oscilatorio cuando la constante del resorte es grande en comparación con el coeficiente de amortiguación β*.

El ejemplo siguiente ilustra el caso de movimiento forzado no amortiguado.

Ejemplo 3

Resolver el problema de valores iniciales

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = F_0 \operatorname{sen} \gamma t, \qquad F_0 = \text{constante},$$

$$x(0) = 0, \qquad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

Solución La función complementaria es $x_c(t) = C_1\cos \omega t + C_2\operatorname{sen} \omega t$. Aplicando el método de los coeficientes indeterminados, se obtiene la solución particular

* Se dice entonces que el sistema es **subamortiguado**. Véase el Problema 13 de los Ejercicios 19.7.

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \operatorname{sen} \gamma t.$$

De esta manera, la solución general de la ecuación es

$$x(t) = C_1\cos \omega t + C_2\operatorname{sen} \omega t + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \operatorname{sen} \gamma t.$$

Aplicando a esta solución las condiciones iniciales indicadas resulta $C_1 = 0$ y $C_2 = -\gamma F_0/\omega(\omega^2 - \gamma^2)$. Por lo tanto, la ecuación del movimiento es

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{-\gamma F_0}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)} \operatorname{sen} \omega t + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \operatorname{sen} \gamma t \\ &= \frac{F_0}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)}[-\gamma \operatorname{sen} \omega t + \omega \operatorname{sen} \gamma t], \qquad \gamma \neq \omega. \qquad (19.34) \end{aligned}$$

Resonancia pura

Aunque la igualdad (19.34) no está definida para $\gamma = \omega$, es interesante observar que su valor límite cuando $\gamma \to \omega$ puede ser obtenido aplicando la regla de L'Hôpital. Este proceso límite es análogo a "sintonizar" la frecuencia de la fuerza impulsora ($\gamma/2\pi$) con la frecuencia de las vibraciones libres ($\omega/2\pi$). Intuitivamente se espera que después de un tiempo se debería poder aumentar sustancialmente las amplitudes de vibración.* Para $\gamma = \omega$ definimos la solución como

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{\gamma \to \omega} F_0 \frac{-\gamma \operatorname{sen} \omega t + \omega \operatorname{sen} \gamma t}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)} \\ &= F_0 \lim_{\gamma \to \omega} \frac{\frac{d}{d\gamma}[-\gamma \operatorname{sen} \omega t + \omega \operatorname{sen} \gamma t]}{\frac{d}{d\gamma}[\omega^3 - \omega\gamma^2]} \\ &= F_0 \lim_{\gamma \to \omega} \frac{-\operatorname{sen} \omega t + \omega t \cos \gamma t}{-2\omega\gamma} \\ &= \frac{F_0}{2\omega^2}[\operatorname{sen} \omega t - \omega t \cos \omega t] \\ &= \frac{F_0}{2\omega^2} \operatorname{sen} \omega t - \frac{F_0}{2\omega} t \cos \omega t. \qquad (19.35) \end{aligned}$$

Tal como era de esperar, cuando $t \to \infty$ los desplazamientos se hacen grandes de hecho, $|x(t)| \to \infty$.

El fenómeno recién descrito se conoce como **resonancia pura**. La gráfica de la Figura 19.10 muestra un movimiento típico correspondiente a este caso.

* Si no se tiene en cuenta el efecto de los amortiguadores en un vehículo, la situación es aproximadamente equivalente a la que se presentaría en un autobús si algunos pasajeros situados en la parte de atrás saltaran en forma sincronizada con el movimiento vertical natural producido por fallas (por ejemplo grietas) de la carretera igualmente espaciadas. Suponiendo que no son lanzados hacia fuera, teóricamente estos pasajeros podrían hacer volcar el autobús.

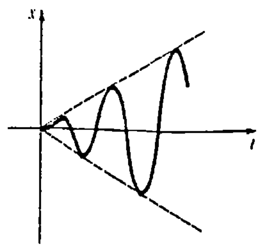


Figura 19.10

Para concluir, debe notarse que en realidad no es necesario usar un proceso límite en (19.34) para obtener la solución correspondiente a $\gamma = \omega$. La ecuación (19.35) se deduce también resolviendo directamente el problema de valores iniciales.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen} \omega t$$

$$x(0) = 0, \qquad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

mediante los métodos comunes.

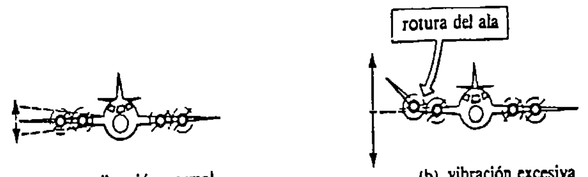
Observación:

Si en la realidad un sistema mecánico fuera descrito por una función como la (19.35) de esta sección, el sistema fallaría de modo inevitable; a la larga, las grandes oscilaciones del peso sujeto al resorte forzarían a éste más allá de lo permitido por su límite elástico. También se puede argüir que el modelo de resonancia (Figura 19.10) presentado es del todo irreal puesto que no considera los efectos retardadores de las fuerzas de amortiguación, las cuales están siempre presentes. Aunque es cierto que si se tiene en cuenta la amortiguación, por mínima que sea, no puede existir resonancia pura; sin embargo, pueden producirse grandes amplitudes de vibración (aunque acotadas cuando $t \to \infty$) que sean igualmente destructivas.

Si alguna vez, viajando en avión, uno ha mirado por una ventanilla, habrá observado que las alas del avión no son perfectamente rígidas. Una vibración razonable no sólo es tolerada sino que además es necesaria para impedir que el ala se quiebre como una varilla de vidrio. A fines de 1959 y a principios de 1960, dos aviones comerciales que en ese entonces eran de un modelo relativamente nuevo de avión de reacción se estrellaron, lo cual ilustra los efectos altamente nocivos originados por grandes oscilaciones o vibraciones.

Lo curioso de estos accidentes fue que ambos ocurrieron cuando los aviones estaban en pleno vuelo. Salvo que se produzca un choque durante la travesía, el periodo más seguro de cualquier vuelo es el que transcurre una vez que el avión ha alcanzado su altitud de crucero. Es sabido que un avión es más vulnerable a accidentes cuando es menos maniobrable, es decir, en el despegue o durante el aterrizaje. Luego, el que dos aviones se desplomaran no sólo puso en aprietos a la industria aeronáutica sino que además fue un problema en extremo enigmático para la ingeniería aerodinámica.

En accidentes de este tipo se sospecha de inmediato alguna falla estructural. Después de realizada una sólida investigación técnica, el origen del problema finalmente fue



(a) vibración normal

(b) vibración excesiva

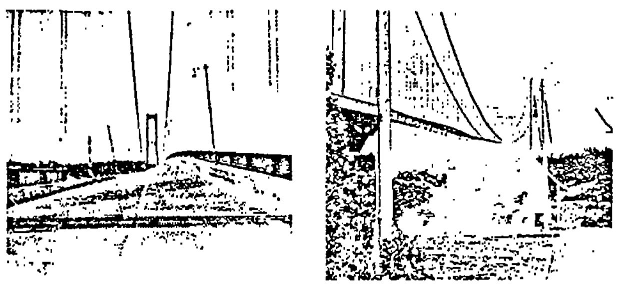
Figura 19.11

relacionado, en cada caso, con un motor y con la instalación que lo albergaba. A grandes rasgos, se determinó que cuando el avión sobrepasaba una velocidad crítica de alrededor de 400 mph, una hélice y su motor empezaba a vibrar produciendo una fuerza giroscópica que la instalación que albergaba al motor era incapaz de amortiguar. Esta fuerza externa de vibración se transfería al ala, la que a su vez ya estaba oscilando. En sí, esto no era por necesidad destructivamente peligroso puesto que las alas del avión se diseñan para resistir tensiones producidas por fuerzas poco comunes y excesivas. (De hecho, el ala en cuestión era tan increíblemente fuerte que los ingenieros y los pilotos que realizaban los ensayos, aún tratándolo de manera deliberada, no pudieron quebrarla en ninguna condición concebible de vuelo.) Por desgracia, después de un corto lapso de vibraciones rápidas del motor, la frecuencia de la fuerza impuesta disminuía, hasta acercarse y coincidir con la frecuencia máxima de vibración del ala (alrededor de 3 ciclos por segundo). La situación de resonancia que resultaba, al final conseguía lo que los ingenieros que realizaban las pruebas no podían hacer, es decir, las amplitudes de vibración del ala se hacían tan grandes como para quebrarla. El problema se resolvió en dos etapas. A todos los aviones de ese modelo se les exigió volar a velocidades sustancialmente menores que 400 mph hasta que cada avión pudiese ser modificado reforzando (o aumentando) en forma considerable la resistencia de las instalaciones de alojamiento de los motores. Se demostró que una instalación forzada era capaz de comunicar un efecto de amortiguación suficiente para impedir el fenómeno de resonancia crítica, incluso en el caso improbable de que después se produjesen vibraciones del motor.*

Un caso conocido es el de los soldados que por lo general no marchan por los puentes marcando el paso. La razón es simplemente tratar de evitar cualquier posibilidad de resonancia entre las vibraciones naturales inherentes a la estructura del puente y la frecuencia de la fuerza exterior producida por una multitud de pies que golpean el puente al unísono.

Los puentes son buenos ejemplos de sistemas mecánicos vibratorios sometidos de modo constante a fuerzas exteriores, ya sea por personas que caminan, por autos y camiones que circulan, por el agua que azota sus cimientos o bien, por el viento que sopla contra sus superestructuras. El 7 de noviembre de 1940, el puente Tacoma Narrows sobre el estrecho Puget, en Washington, se derrumbó. Sin embargo, su derrumbe no produjo sorpresa ya que era un hecho muy conocido por los habitantes del lugar que dicho puente tenía un movimiento ondulatorio vertical que muchas veces daba a los conductores que lo cruzaban unos minutos de emoción. El 7 de noviembre, sólo cuatro meses después de su estreno oficial, las amplitudes de estas ondulaciones se hicieron tan grandes que

* Para un relato fascinante no especializado, véase Robert J. Serling, *Loud and Clear*, Nueva York: Dell. 1970, capítulo 5.



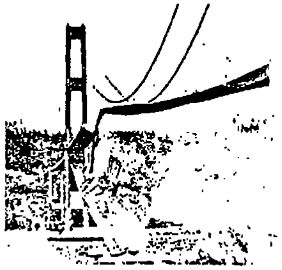


Figura 19.12

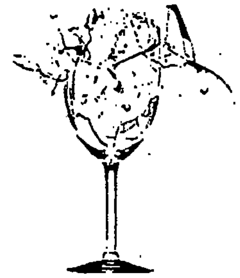


Figura 19.13

el puente se quebró y gran parte cayó al agua. En la investigación posterior se descubrió que el diseño deficiente de la superestructura hacía que el viento que la atravesaba se arremolinara en forma periódica. Cuando la frecuencia de esta fuerza periódica se acercaba a la frecuencia natural del puente, se producían grandes levantamientos de la calzada. En síntesis, el puente fue otra víctima del efecto destructivo de la resonancia mecánica. Como este desastre se estuvo gestando durante algunos meses, hubo suficientes oportunidades para filmar el fenómeno extraño y atemorizador de un puente corcoveando y estremeciéndose hasta el momento de su colapso final.† (Véase Figura 19.12.)

Las vibraciones acústicas pueden ser tan destructivas como las vibraciones mecánicas intensas. A veces, los cantantes de ópera y de jazz se enorgullecen de su capacidad de romper un vaso de vidrio de mala calidad. Se sabe que los sonidos del órgano y del flautín pueden romper las ventanas.

> "Los sacerdotes tocaron las trompetas, y cuando el pueblo, oído el sonido de las mismas, se puso a gritar clamorosamente, las murallas de la ciudad se derrumbaron. . ." *Josué* 6:20

¿Fue el poder de la resonancia acústica el que hizo que las murallas de Jericó se derrumbaran? Esto es lo que algunos eruditos contemporáneos conjeturan.

El fenómeno de resonancia no siempre es destructivo. Gracias a la resonancia en un circuito eléctrico se puede sintonizar un radiorreceptor a una estación determinada.

† National Committee for Fluid Mechanics Films, Educational Services, Inc., Watertown, Mass. También, consulte *American Society of Civil Engineers: Proceedings*. "Failure of the Tacoma Narrows Bridge", Vol. 69, pág. 1555-86, dic. 1943.

Ejercicios 19.7

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 1004.

En los Problemas 1 y 2, describa una posible interpretación física del problema de valor inicial indicado.

1. $\frac{4}{32}x'' + 3x = 0$

   $x(0) = -3, \quad x'(0) = -2$

2. $\frac{1}{16}x'' + 4x = 0$

   $x(0) = 0.7, \quad x'(0) = 0$

3. Un cuerpo que pesa 8 lb está sujeto a un resorte, y desarrolla un movimiento armónico simple. Determine la ecuación de movimiento si la constante del resorte vale 1 lb/pie y si el peso se suelta desde un punto situado a 6 pulgadas abajo de la posición de equilibrio, con una velocidad hacia abajo de $\frac{3}{2}$pie/s.

4. Un cuerpo con un peso de 24 lb sujeto a un resorte desarrolla un movimiento armónico simple. Cuando el peso se suspende del resorte, lo estira 4 pulgadas. Obtenga la ecuación de movimiento si el cuerpo se suelta desde el reposo en un punto que está 3 pulgadas arriba de la posición de equilibrio.

5. Una fuerza de 400 N (newtons) estira un resorte 2 m. Una masa de 50 kg sujeta al resorte desarrolla un movimiento armónico simple. Halle la ecuación del movimiento si la masa se suelta desde la posición de equilibrio con una velocidad hacia arriba de 10 m/s.

6. Un cuerpo que pesa 2 lb se sujeta a un resorte y desarrolla un movimiento armónico simple. Cuando $t = 0$, el cuerpo se suelta desde un punto que está a 8 pulgadas abajo de la posición de equilibrio con una velocidad hacia arriba de $\frac{4}{3}$ pie/s. Determine la ecuación del movimiento si la constante del resorte es $k = 4$ lb/pie.

En los Problemas 7 y 8, describa una posible interpretación física del problema de valores iniciales indicado.

7. $\frac{1}{16}x'' + 2x' + x = 0$

   $x(0) = 0, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = -1.5.$

8. $\frac{16}{32}x'' + x' + 2x = 0$

   $x(0) = -2, \quad x'(0) = 1$

9. Un cuerpo que pesa 4 lb sujeto a un resorte desarrolla un movimiento amortiguado libre. La constante del resorte vale 2 lb/pie y el medio ofrece una resistencia al movimiento del peso numéricamente igual a la velocidad instantánea. Si el cuerpo se suelta desde un punto que está 1 pie arriba de la posición de equilibrio con una velocidad hacia abajo de 8 pie/s, determine el instante en que el cuerpo pasa por la posición de equilibrio. Halle el instante en el cual el cuerpo alcanza su desplazamiento máximo desde la posición de equilibrio. ¿Cuál es la posición del mismo en dicho instante?

10. Una masa de 40 g estira un resorte 10 cm. Un mecanismo de amortiguación imparte una resistencia al movimiento numéricamente igual a 560 veces la velocidad instantánea. Obtenga la ecuación del movimiento si la masa se suelta desde la posición de equilibrio con una velocidad hacia abajo de 2 cm/s.

11. Al sujetar una masa de 1 slug a un resorte, éste se estira 2 pie y luego queda en reposo en la posición de equilibrio. A partir de $t = 0$, una fuerza exterior igual a $f(t) = e^{-t}\text{sen } 4t$ se aplica al sistema. Obtenga la ecuación del movimiento si el medio que rodea al sistema opone una fuerza de amortiguación numéricamente igual a 8 veces la velocidad instantánea.

12. Resuelva e interprete el problema de valores iniciales:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 5 \text{ sen } 3t$$

$$x(0) = 2, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

13. Como se muestra en la tabla adjunta, el movimiento libre de un sistema resorte-masa descrito por la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0, \qquad \beta > 0,$$

$(\beta/m)^2 - 4k/m$	*Movimiento*	*Solución general*
positivo	sobreamortiguado	
cero	críticamente amortiguado	
negativo	subamortiguado	

se clasifica según $(\beta/m)^2 - 4k/m$ sea positivo, cero o negativo. Complete la tabla anterior anotando la solución general apropiada en cada caso.

14. Un cuerpo que pesa 10 lb sujeto a un resorte, lo estira en 2 pie. El sistema se pone luego en movimiento en un medio que opone una resistencia numéricamente igual a $\beta(\beta > 0)$ veces la velocidad instantánea. Aplique los resultados del Problema 13 para determinar los valores de β, de modo que el movimiento sea: (a) sobreamortiguado, (b) críticamente amortiguado, (c) subamortiguado.

Examen • Capítulo 19

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 1004.

En los Problemas 1-10 conteste verdadero o falso.

1. La función $f(x, y) = x^2/y^2 + 9$ es homogénea de grado 0. ______

2. La ecuación de primer orden $x^2y' + 2xy = y^2$ es homogénea. ______

3. Toda ecuación diferencial de primer orden separable es homogénea. ______

4. La ecuación de primer orden $x^{10}y' = e^{8x}y + x^{20}$ es lineal. ______

5. Un factor integrante de $y' + 2y = 0$ es e^{2x}. ______

6. Si y_1 es una solución de $ay'' + by' + cy = 0$, entonces C_1y_1 también es una solución de dicha ecuación para toda número real C_1. ______

7. La solución general de $y'' + y = 0$ es $y = c_1 \cos x + C_2 \text{sen } x$. ______

8. $y_1 = e^{x}$ y $y_2 \equiv 0$ son soluciones linealmente independientes de $y'' + y' = 0$. ______

9. El movimiento no forzado y sin amortiguación, de una masa sujeta a un resorte, se llama movimiento armónico simple. ______

10. En presencia de amortiguación, no puede haber resonancia pura. ______

En los Problemas 11 y 12 resuelva la ecuación diferencial indicada.

11. $y\,dx + x\,dy = 0$ 12. $xy\frac{dy}{dx} = 3y^2 + x^2$

En los Problemas 13-16 obtenga la solución general de la ecuación diferencial indicada.

13. $y' - 10y = 30$

14. $xy' + (1 + x)y = e^{-x} \text{ sen } 2x$

15. $x^2y' + x(x + 2)y = e^x$ 16. $(2x + y)y' = 1$

En los Problemas 17 y 18 resuelva el problema de valores iniciales indicado.

17. $(x^2 + 4)\frac{dy}{dx} = 2x - 8xy, \quad y(0) = -1$

18. $y\frac{dx}{dy} - x = 2y^2, \quad y(1) = 5$

En los Problemas 19-22 obtenga la solución general de la ecuación diferencial indicada.

19. $y'' - 2y' - 2y = 0$ 20. $y'' - 8y = 0$

21. $y'' - 3y' - 10y = 0$

22. $4y'' + 20y' + 25y = 0$

En los Problemas 23 y 24 resuelva el problema de valores iniciales indicado.

23. $y'' + 36y = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 24, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -18$

24. $y'' + 4y' + 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 0$

En los Problemas 25 y 26 obtenga soluciones en serie de potencias de la ecuación diferencial indicada.

25. $y'' + xy = 0$ 26. $(x - 1)y'' + 3y = 0$

En los Problemas 27 y 28 resuelva cada ecuación diferencial por el método de variación de parámetros.

27. $y'' - 2y' + 2y = e^x \tan x$

28. $y'' - y = 2e^x/(e^x + e^{-x})$

29. Resuelva $y'' + y = \text{sen}^3 x$ sujeta a la condición $y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}$.

30. Sin intentar resolver, determine la forma de una solución particular de

$$y'' + 6y' + 9y = 5x^2 - 6x + 4x^2e^{2x} + 3e^{5x} - 2e^x \text{sen } 3x.$$

31. Aplique el método de los coeficientes indeterminados para resolver la siguiente ecuación: $y'' - y' - 12y = (x + 1)e^{2x}$.

Apéndices

Alfabeto Griego

α	A	Alfa	ν	N	Nu
β	B	Beta	ξ	Ξ	Xi
γ	Γ	Gama	o	O	Ómicron
δ	Δ	Delta	π	Π	Pi
ε	E	Épsilon	ρ	P	Ro
ζ	Z	Zeta	σ	Σ	Sigma
η	H	Eta	τ	T	Tau
θ	Θ	Teta	υ	Υ	Ípsilon
ι	I	Iota	ϕ	Φ	Fi
κ	K	Kapa	χ	X	Ji
λ	Λ	Lambda	ψ	Ψ	Psi
μ	M	Mu	ω	Ω	Omega

Apéndice I Repaso de matemáticas básicas
Apéndice II Algunas demostraciones ϵ-δ
Apéndice III Demostración del teorema de Taylor
Apéndice IV Tablas

Apéndice I

Repaso de matemáticas básicas

Conjuntos

Un conjunto A es una colección de objetos llamados los **elementos** de A. El símbolo $a \in A$ se emplea para indicar que a es un elemento de un conjunto A. Un conjunto B es un **subconjunto** de un conjunto A, representado como $B \subset A$, si todo elemento de B es también un elemento de A. Dos conjuntos A y B son iguales, $A = B$, si contienen los mismos elementos. La **unión** $A \cup B$ de dos conjuntos A y B es el conjunto que contiene los elementos que están en A, en B, o bien en ambos. La **intersección** $A \cap B$ es el conjunto de los elementos que están a la vez en A y en B. La intersección de los conjuntos A y B es el conjunto de elementos que son *comunes* a ambos conjuntos A y B. El conjunto $\varnothing$ que carece de elementos se llama **conjunto vacío**. Si $A \cap B = \varnothing$, entonces se dice que A y B son conjuntos **ajenos** o **disjuntos**.

Leyes de los exponentes

Si n es un entero positivo,

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \qquad x \neq 0.$$

Además,

$$x^0 = 1, \qquad x \neq 0.$$

Si m y n son enteros, entonces

(*i*) $x^m x^n = x^{m+n}$

(*ii*) $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}, \quad x \neq 0$

(*iii*) $(x^m)^n = x^{mn}$

(*iv*) $(xy)^n = x^n y^n$

(*v*) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}, \qquad y \neq 0.$

Exponentes racionales y radicales

Si m y n son enteros positivos,

$$x^{m/n} = (x^m)^{1/n} = (x^{1/n})^m$$
$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

siempre que todas las expresiones representen números reales. Las leyes de los exponentes son válidas también para números racionales.

Ejemplo 1

$$16^{3/4} = (16^{1/4})^3 = 2^3 = 8$$

Teorema del binomio

Si n es un entero positivo, el teorema del binomio dice que

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^r + \cdots + b^n,$$

en donde $r! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (r-1)r$. Por ejemplo,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Ejemplo 2

Desarrollar $(2x+4)^3$.

Solución Identificando $a = 2x$ y $b = 4$, del teorema del binomio resulta

$$(2x+4)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2 4 + 3(2x)(4)^2 + (4)^3$$
$$= 8x^3 + 48x^2 + 96x + 64.$$

Factorizaciones especiales

Diferencia de cuadrados: $X^2 - Y^2 = (X+Y)(X-Y)$

Diferencia de cubos: $X^3 - Y^3 = (X-Y)(X^2 + XY + Y^2)$

Suma de dos cubos: $X^3 + Y^3 = (X+Y)(X^2 - XY + Y^2)$

Ejemplo 3

(*a*) $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$

(*b*) $x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$

Completación del cuadrado

Para **completar el cuadrado** en una expresión cuadrática $x^2 + bx$, se suma y se resta el cuadrado de la mitad del coeficiente de x:

$$x^2 + bx = x^2 + bx + \underbrace{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}_{\text{cero}}$$
$$= \left(x^2 + bx + \frac{b^2}{4}\right) - \frac{b^2}{4} \qquad = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}.$$

Ejemplo 4

Completar el cuadrado en $x^2 + 16x$.

Solución

$$\begin{aligned} x^2 + 16x &= x^2 + 16x + 64 - 64 \\ &= (x + 8)^2 - 64. \end{aligned}$$

Nota: Para una expresión cuadrática $ax^2 + bx$, $a \neq 1$, escribimos primero

$$ax^2 + bx = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)$$

y luego se suma y se resta $(b/2a)^2$ *dentro* del paréntesis.

Ecuaciones

La ecuación $ax + b = 0$ se llama **ecuación de primer grado o lineal.** Una ecuación lineal tiene la solución única $x = -b/a$, $a \neq 0$. Una **ecuación de segundo grado o cuadrática** es $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$. Dos métodos para obtener las soluciones de una ecuación cuadrática, son la factorización y la fórmula de las cuadráticas. Recuérdese que esta última

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Cuando $b^2 - 4ac > 0$ la ecuación tiene dos soluciones reales distintas. Por ejemplo, de la fórmula de las cuadráticas vemos que las raíces o soluciones de $x^2 + x - 1 = 0$ son los números irracionales $(-1 - \sqrt{5})/2$ y $(-1 + \sqrt{5})/2$. Cuando $b^2 - 4ac = 0$ las soluciones de una ecuación cuadrática son iguales (o tienen *multiplicidad dos*). Cuando $b^2 - 4ac < 0$ las soluciones son números complejos.

Números complejos

Un **número complejo** es toda expresión de la forma

$$z = a + bi, \text{ en donde } \quad i^2 = -1.$$

Los números reales a y b se llaman **parte real** de z y **parte imaginaria** de z, respectivamente. En la práctica, el símbolo i se expresa como $i = \sqrt{-1}$. El número $\bar{z} = a - bi$ se llama **complejo conjugado** de z, o simplemente, **conjugado** de z.

Ejemplo 5

Si $z_1 = 4 + 5i$ y $z_2 = 3 - 2i$ son números complejos, entonces sus respectivos conjugados son

$$\bar{z}_1 = 4 - 5i \quad \text{y} \quad \bar{z}_2 = 3 - (-2)i = 3 + 2i.$$

Suma, diferencia y producto

La suma, la diferencia y el producto de dos números complejos $z_1 = a_1 + b_1i$ y $z_2 = a_2 + b_2i$, se definen como sigue:

(*i*) $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

(*ii*) $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$

(*iii*) $z_1z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i.$

En otras palabras, para sumar o restar dos números complejos, simplemente se suman o se restan las partes reales e imaginarias correspondientes. Para multiplicar dos números complejos aplicamos la ley distributiva y el hecho de que $i^2 = -1$.

Ejemplo 6

Si $z_1 = 4 + 5i$ y $z_2 = 3 - 2i$, entonces

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (4 + 3) + (5 - 2)i = 7 + 3i \\ z_1 - z_2 &= (4 - 3) + (5 - (-2))i = 1 + 7i \\ z_1z_2 &= (4 + 5i)(3 - 2i) \\ &= (4 + 5i)3 + (4 + 5i)(-2i) \\ &= 12 + 15i - 8i - 10i^2 \\ &= (12 + 10) + (15 - 8)i = 22 + 7i. \end{aligned}$$

El producto de un número complejo $z = a + bi$ y su conjugado $\bar{z} = a - bi$ es el *número real*

$$z\bar{z} = a^2 + b^2.$$

Cociente

El **cociente** de dos números complejos se obtiene multiplicando el numerador y el denominador de la expresión por el conjugado del denominador.

Ejemplo 7

Si z_1 y z_2 son los números complejos del Ejemplo 6, entonces

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{4 + 5i}{3 - 2i} = \frac{(4 + 5i)(3 + 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)} \\ &= \frac{2 + 23i}{3^2 + 2^2} = \frac{2}{13} + \frac{23}{13}i. \end{aligned}$$

Si $a > 0$, entonces la propiedad (*iv*) de las leyes de los exponentes implica que

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}\sqrt{-1} = \sqrt{a}i.$$

Ejemplo 8

$$\sqrt{-25} = \sqrt{25}\sqrt{-1} = 5i$$

Ejemplo 9

Por la fórmula de las cuadráticas, las soluciones de

$$x^2 - 4x + 20 = 0$$

son

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{64}i}{2}$$

o sea

$$x_1 = 2 + 4i, \qquad x_2 = 2 - 4i.$$

Como se ilustra en el último ejemplo, cuando una ecuación cuadrática con coeficientes reales tiene soluciones complejas, éstas son conjugadas entre sí.

Todo número real se puede considerar también como un número complejo tomando simplemente $b = 0$ en $z = a + bi$. En el siguiente diagrama se muestra la relación entre los números reales y los complejos.

- Números complejos
  - Números reales
    - Números racionales
      - Enteros
        - Enteros negativos
        - Cero
        - Enteros positivos
      - No enteros (fraccionarios)
    - Números irracionales

Determinantes

Un determinante de orden 2 es el número

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Ejemplo 10

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 4 \cdot 9 - (-3)(2) = 42.$$

Un determinante de orden 3 se puede evaluar desarrollando el determinante por medio de los cofactores del primer renglón:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Ejemplo 11

$$\begin{vmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 8(0) - 5(12) + 4(8) = -28$$

Cofactores

En general, el **cofactor** de un elemento que está en el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de un determinante, es el producto de $(-1)^{i+j}$ por el determinante que se forma eliminando dicho renglón y dicha columna. De esta manera, los cofactores de a_1, a_2 y a_3 son, respectivamente,

$$\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Por ejemplo, el cofactor de b_3 es $-\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$.

Algunas propiedades de los determinantes

(*i*) Si todos los elementos de un renglón (o una columna) son cero, entonces el valor del determinante es cero.

(*ii*) Si dos renglones (o dos columnas) son iguales, entonces el valor del determinante es cero.

(*iii*) El intercambio de dos renglones (o dos columnas) da por resultado el negativo del valor del determinante original.

(*iv*) Un determinante se puede desarrollar por medio de los cofactores de cualquier renglón (o columna).

Ejemplo 12

(*a*) En virtud de (*i*), $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

(*b*) Por (*ii*), $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0.$

(*c*) Puesto que $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2$, con base en (*iii*) se deduce que $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2.$

Ejemplo 13

Desarrollar el determinante $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Solución Aprovechando los ceros del segundo renglón, desarrollamos el determinante por medio de los cofactores de dicho renglón:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -2(8-3) = -10.$$

Regla de Cramer

Los sistemas de ecuaciones lineales pueden resolverse por medio de determinantes. La solución del sistema

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

es

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

siempre que el determinante de los coeficientes $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ no sea cero. Esta última condición también garantiza que sólo hay una solución. De manera semejante, el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

tiene la solución única

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

siempre que el determinante de los coeficientes no sea nulo. El procedimiento anterior ilustra la Regla de Cramer*.

Ejemplo 14

Resolver

$$x + 2y + z = 1$$
$$x + 3z = 4$$
$$4x + 2y + z = 5.$$

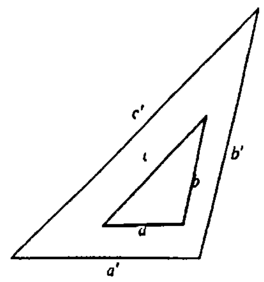
Solución Puesto que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 18$, el sistema se puede resolver por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{11}{18}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9}.$$

Triángulos semejantes

Las longitudes de los lados correspondientes en triángulos semejantes, son proporcionales. De esta manera, si la figura representa dos triángulos semejantes, las razones de las longitudes de los lados correspondientes son iguales:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

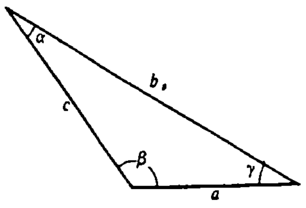


* Llamada así en honor del matemático suizo Gabriel Cramer (1704-1752).

Ley de los senos

Si en el triángulo mostrado se conocen: (a) la longitud de un lado y dos ángulos, o (b) las longitudes de dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, entonces las partes restantes del triángulo pueden determinarse a partir de la ley de los senos:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}=\frac{\operatorname{sen}\beta}{b}=\frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}.$$



Ley de los cosenos

Si, refiriéndonos al triángulo anterior, se conoce: (a) las longitudes de los tres lados, o (b) la longitud de dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, entonces las partes restantes del triángulo pueden determinarse a partir de la ley de los cosenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Ejercicios del Apéndice I

Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 1004.

En los Problemas 1-4 evalúe la expresión indicada.

1. $8^{2/3}$
2. $16^{-5/4}$
3. $\sqrt{(-5)^2}$
4. $\sqrt[3]{8x^3y^9}$

En los Problemas 5-8 aplique el teorema del binomio para desarrollar la expresión indicada.

5. $(3r-4s)^2$
6. $(x+y-1)^2$
7. $(2x-y)^3$
8. $(t^2+r^3)^3$

En los Problemas 9-12 factorice la expresión que se da.

9. $4x^2y^2-9$
10. x^4-y^4
11. $64a^3-b^3$
12. x^6-1

En los Problemas 13-16 complete el cuadrado en la expresión dada.

13. x^2-24x
14. x^2+3x
15. $2x^2+12x$
16. $-x^2+10x$

En los Problemas 17-26 resuelva la ecuación indicada.

17. $2x-3=6x+9$
18. $3(x-2)=-4(x-1)$
19. $4x^2=9$
20. $36x^2-4=0$
21. $5x^2=2x$
22. $3x^2+x=0$
23. $x^2+2x-15=0$
24. $x^2+6x+9=0$
25. $2x^2+2x-1=0$
26. $-x^2+3x+2=0$

En los Problemas 27-36 realice la operación que se indica. Escriba la respuesta en la forma $a+bi$.

27. $(6+5i)-(-8+2i)$
28. $3i(2+i)+4(1-2i)$
29. $(4+6i)(-2+5i)$
30. $(1-i)(1+i)(3+7i)$
31. $\dfrac{1+3i}{3-4i}$
32. $\dfrac{i}{1+i}$
33. $i\dfrac{2+i}{1-i}$
34. $\dfrac{1}{i(2-i)}$
35. i^5
36. i^{-8}

37. Dado el determinante $\begin{vmatrix}-5&6&0\\3&4&2\\-2&1&5\end{vmatrix}$ encuentre (a) el valor del cofactor del elemento que está en el tercer renglón y en la segunda columna, y (b) el valor del cofactor del elemento que está en el segundo renglón y en la segunda columna.

38. Si $\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=3$, determine los valores de los determinantes siguientes:

(a) $\begin{vmatrix}a_3&b_3&c_3\\a_2&b_2&c_2\\a_1&b_1&c_1\end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix}b_1&c_1&a_1\\b_2&c_2&a_2\\b_3&c_3&a_3\end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix}a_1&b_1&0\\a_2&b_2&0\\a_3&b_3&0\end{vmatrix}$

En los Problemas 39 y 40 desarrolle el determinante indicado por medio de cofactores que no sean los del primer renglón.

39. $\begin{vmatrix}2&-3&1\\0&2&-4\\0&6&5\end{vmatrix}$
40. $\begin{vmatrix}4&3&-1\\7&0&-2\\-1&5&8\end{vmatrix}$

En los Problemas 41 y 42 obtenga los valores de λ que satisfagan la ecuación indicada.

41. $\begin{vmatrix}3-\lambda&5\\1&-1-\lambda\end{vmatrix}=0$

42. $\begin{vmatrix}1-\lambda&-4&4\\0&3-\lambda&-2\\-2&0&-3-\lambda\end{vmatrix}=0$

En los Problemas 43-46 aplique la regla de Cramer para resolver el sistema de ecuaciones que se indica.

43. $\begin{aligned}-3x+y&=3\\2x-4y&=-6\end{aligned}$

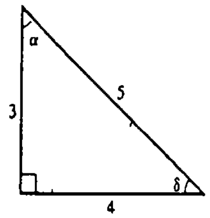
44. $\begin{aligned}x+y&=4\\2x-y&=2\end{aligned}$

45. $\begin{aligned}x-2y-3z&=3\\x+y-z&=5\\3x+2y\quad&=-4\end{aligned}$

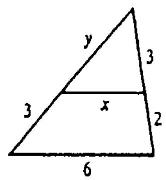
46. $\begin{aligned}x-y+6z&=-2\\-x+2y+4z&=9\\2x+3y-z&=\tfrac{1}{2}\end{aligned}$

En los Problemas 47 y 48 determine α, δ, x y y.

47.

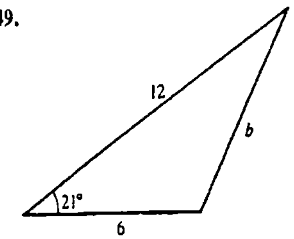


48.

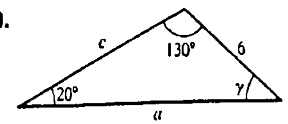


En los Problemas 49 y 50 halle las incógnitas indicadas en los triángulos dados.

49.



50.



Apéndice II

Algunas demostraciones ε-δ

Demostración del teorema 2.5(*i*) Sea $\varepsilon > 0$. Para demostrar (*i*) debe encontrarse un $\delta > 0$ de modo que

$$|f(x) + g(x) - L_1 - L_2| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta.$$

Como $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$, se sabe que existen números $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ para los cuales

$$|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \tag{II.1}$$

$$|g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta_2. \tag{II.2}$$

Ahora bien, si δ es el menor de δ_1 y δ_2, entonces se cumplen tanto (II.1) como (II.2) y de esta manera,

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - L_1 - L_2| &= |f(x) - L_1 + g(x) - L_2| \\ &\le |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

siempre que $0 < |x - a| < \delta$. □

Demostración del teorema 2.5(*ii*) Consideremos

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - L_1L_2| &= |f(x)g(x) - f(x)L_2 + f(x)L_2 - L_1L_2| \\ &\le |f(x)g(x) - f(x)L_2| + |f(x)L_2 - L_1L_2| \\ &= |f(x)||g(x) - L_2| + |L_2||f(x) - L_1| \\ &\le |f(x)||g(x) - L_2| + (1 + |L_2|)|f(x) - L_1|. \end{aligned} \tag{II.3}$$

Como $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$, sabemos que existen números $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\delta_3 > 0$ tales que $|f(x) - L_1| < 1$ o

$$|f(x)| < 1 + |L_1| \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta_1, \tag{II.4}$$

$$|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon/2}{1 + |L_2|} \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta_2, \tag{II.5}$$

$$|g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon/2}{1 + |L_1|} \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta_3. \tag{II.6}$$

Por lo tanto, si δ es el menor de δ_1, δ_2 y δ_3, de (II.3), (II.4), (II.5) y (II.6) resulta

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - L_1L_2| &< (1 + |L_1|) \cdot \frac{\varepsilon/2}{1 + |L_1|} \\ &\quad + (1 + |L_2|) \cdot \frac{\varepsilon/2}{1 + |L_2|} = \varepsilon. \end{aligned}$$ □

Demostración del teorema 2.5(*iii*) Primero se demostrará que

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L_2}, \quad L_2 \neq 0.$$

Consideremos

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L_2}\right| = \frac{|g(x) - L_2|}{|L_2||g(x)|}. \tag{II.7}$$

Como $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$, existe un $\delta_1 > 0$ tal que

$$|g(x) - L_2| < \frac{|L_2|}{2} \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta_1.$$

Para estos valores de x,

$$|L_2| = |g(x) - (g(x) - L_2)| \le |g(x)| + |g(x) - L_2| < |g(x)| + \frac{|L_2|}{2}$$

da lugar a

$$|g(x)| > \frac{|L_2|}{2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|L_2|}.$$

Por consiguiente, de (II.7)

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L_2}\right| < \frac{2}{|L_2|^2}|g(x) - L_2|. \tag{II.8}$$

Ahora bien, para $\varepsilon > 0$ existe un $\delta_2 > 0$ tal que

$$|g(x) - L_2| < \frac{|L_2|^2}{2}\varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta_2.$$

Si δ es el menor de δ_1 y δ_2, de (II.8) se obtiene

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L_2}\right| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta.$$

Concluiremos la demostración aplicando el Teorema 2.5(*ii*):

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} \cdot f(x) = \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} \cdot \lim_{x\to a} f(x) = \frac{L_1}{L_2}.$$ □

Ejercicios del Apéndice II

1. Aplique la Definición 2.2 para demostrar el Teorema 2.2.

2. Aplique la Definición 2.2 para demostrar el Teorema 2.3.

3. Si $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$, utilice la Definición 2.2 para demostrar que $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = L_1 - L_2$.

4. Use la Definición 2.2 para demostrar el Teorema de interposición. (*Sugerencia:* Para $\varepsilon > 0$ existen números δ_1 y δ_2 positivos tales que $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta_1$, y $L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta_2$. Sea δ el menor de δ_1 y δ_2.)

Apéndice III

Demostración del Teorema de Taylor Sea x un número fijo en $(a - r, a + r)$ y denotemos la diferencia entre $f(x)$ y el polinomio de Taylor de grado n de f en a, por

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Para todo t en el intervalo $[a, x]$ se define

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x - t) - \frac{f''(t)}{2!}(x - t)^2 - \cdots$$
$$- \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n - \frac{R_n(x)}{(x - a)^{n+1}}(x - t)^{n+1}. \qquad \text{(III.1)}$$

Manteniendo x constante, se deriva F con respecto a t aplicando las reglas del producto y de la potencia:

$$F'(t) = -f'(t) + \left[f'(t) - \frac{f''(t)}{1!}(x - t)\right]$$
$$+ \left[\frac{f''(t)}{1!}(x - t) - \frac{f'''(t)}{2!}(x - t)^2\right] + \cdots$$
$$+ \left[\frac{f^{(n)}(t)}{(n - 1)!}(x - t)^{n-1} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n\right]$$
$$+ \frac{R_n(x)(n + 1)}{(x - a)^{n+1}}(x - t)^n$$

para todo t en (a, x). Como la última suma tiene la propiedad "telescópica",

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n + \frac{R_n(x)(n + 1)}{(x - a)^{n+1}}(x - t)^n. \qquad \text{(III.2)}$$

Ahora bien, de (III.1) es evidente que F es continua en $[a, x]$ y que

$$F(x) = f(x) - f(x) - 0 - \cdots - 0 = 0.$$

Además,

$$F(a) = f(x) - P_n(x) - R_n(x) = 0.$$

Por consiguiente $F(t)$ satisface las hipótesis del Teorema de Rolle's (Teorema 4.4) y por consiguiente existe un número c entre a y x para el cual $F'(c) = 0$. De (III.2) obtenemos

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1}. \qquad \square$$

Apéndice IV Tablas

Tabla I Funciones trigonométricas

Grados	Radianes	sen	tan	cot	cos		
0	0.000	0.000	0.000		1.000	1.571	90
1	0.017	0.017	0.017	57.29	1.000	1.553	89
2	0.035	0.035	0.035	28.64	0.999	1.536	88
3	0.052	0.052	0.052	19.081	0.999	1.518	87
4	0.070	0.070	0.070	14.301	0.998	1.501	86
5	0.087	0.087	0.087	11.430	0.996	1.484	85
6	0.105	0.105	0.105	9.514	0.995	1.466	84
7	0.122	0.122	0.123	8.144	0.993	1.449	83
8	0.140	0.139	0.141	7.115	0.990	1.431	82
9	0.157	0.156	0.158	6.314	0.988	1.414	81
10	0.175	0.174	0.176	5.671	0.985	1.396	80
11	0.192	0.191	0.194	5.145	0.982	1.379	79
12	0.209	0.208	0.213	4.705	0.978	1.361	78
13	0.227	0.225	0.231	4.331	0.974	1.344	77
14	0.224	0.242	0.249	4.011	0.970	1.326	76
15	0.262	0.259	0.268	3.732	0.966	1.309	75
16	0.279	0.276	0.287	3.487	0.961	1.292	74
17	0.297	0.292	0.306	3.271	0.956	1.274	73
18	0.314	0.309	0.325	3.078	0.951	1.257	72
19	0.332	0.326	0.344	2.904	0.946	1.239	71
20	0.349	0.342	0.364	2.747	0.940	1.222	70
21	0.367	0.358	0.384	2.605	0.934	1.204	69
22	0.384	0.375	0.404	2.475	0.927	1.187	68
23	0.401	0.391	0.424	2.356	0.921	1.169	67
24	0.419	0.407	0.445	2.246	0.914	1.152	66
25	0.436	0.423	0.466	2.144	0.906	1.134	65
26	0.454	0.438	0.488	2.050	0.899	1.117	64
27	0.471	0.454	0.510	1.963	0.891	1.100	63
28	0.489	0.469	0.532	1.881	0.883	1.082	62
29	0.506	0.485	0.554	1.804	0.875	1.065	61
30	0.524	0.500	0.577	1.732	0.866	1.047	60
31	0.541	0.515	0.601	1.664	0.857	1.030	59
32	0.559	0.530	0.625	1.600	0.848	1.012	58
33	0.576	0.545	0.649	1.540	0.839	0.995	57
34	0.593	0.559	0.675	1.483	0.829	0.977	56
35	0.611	0.574	0.700	1.428	0.819	0.960	55
36	0.628	0.588	0.727	1.376	0.809	0.942	54
37	0.646	0.602	0.754	1.327	0.799	0.925	53
38	0.663	0.616	0.781	1.280	0.788	0.908	52
39	0.681	0.629	0.810	1.235	0.777	0.890	51
40	0.698	0.643	0.839	1.192	0.766	0.873	50
41	0.716	0.656	0.869	1.150	0.755	0.855	49
42	0.733	0.669	0.900	1.111	0.743	0.838	48
43	0.750	0.682	0.933	1.072	0.731	0.820	47
44	0.768	0.695	0.966	1.036	0.719	0.803	46
45	0.785	0.707	1.000	1.000	0.707	0.785	45
		cos	cot	tan	sen	Radianes	Grados

Tabla II Funciones exponenciales

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0.00	1.0000	1.0000	2.50	12.182	0.0821
0.05	1.0513	0.9512	2.60	13.464	0.0743
0.10	1.1052	0.9048	2.70	14.880	0.0672
0.15	1.1618	0.8607	2.80	16.445	0.0608
0.20	1.2214	0.8187	2.90	18.174	0.0550
0.25	1.2840	0.7788	3.00	20.086	0.0498
0.30	1.3499	0.7408	3.10	22.198	0.0450
0.35	1.4191	0.7047	3.20	24.533	0.0408
0.40	1.4918	0.6703	3.30	27.113	0.0369
0.45	1.5683	0.6376	3.40	29.964	0.0334
0.50	1.6487	0.6065	3.50	33.115	0.0302
0.55	1.7333	0.5769	3.60	36.598	0.0273
0.60	1.8221	0.5488	3.70	40.447	0.0247
0.65	1.9155	0.5220	3.80	44.701	0.0224
0.70	2.0138	0.4966	3.90	49.402	0.0202
0.75	2.1170	0.4724	4.00	54.598	0.0183
0.80	2.2255	0.4493	4.10	60.340	0.0166
0.85	2.3396	0.4274	4.20	66.686	0.0150
0.90	2.4596	0.4066	4.30	73.700	0.0136
0.95	2.5857	0.3867	4.40	81.451	0.0123
1.00	2.7183	0.3679	4.50	90.017	0.0111
1.10	3.0042	0.3329	4.60	99.484	0.0101
1.20	3.3201	0.3012	4.70	109.95	0.0091
1.30	3.6693	0.2725	4.80	121.51	0.0082
1.40	4.0552	0.2466	4.90	134.29	0.0074
1.50	4.4817	0.2231	5.00	148.41	0.0067
1.60	4.9530	0.2019	6.00	403.43	0.0025
1.70	5.4739	0.1827	7.00	1096.6	0.0009
1.80	6.0496	0.1653	8.00	2981.0	0.0003
1.90	6.6859	0.1496	9.00	8103.1	0.0001
2.00	7.3891	0.1353	10.00	22026.0	0.00005
2.10	8.1662	0.1225			
2.20	9.0250	0.1108			
2.30	9.9742	0.1003			
2.40	11.0232	0.0907			

Tabla III Logaritmos naturales

n	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0*		7.697	8.391	8.796	9.084	9.307	9.489	9.643	9.777	9.895
1	0.000	0.095	0.182	0.262	0.336	0.405	0.470	0.531	0.588	0.642
2	0.693	0.742	0.788	0.833	0.875	0.916	0.956	0.993	1.030	1.065
3	1.099	1.131	1.163	1.194	1.224	1.253	1.281	1.308	1.335	1.361
4	1.386	1.411	1.435	1.459	1.482	1.504	1.526	1.548	1.569	1.589
5	1.609	1.629	1.649	1.668	1.686	1.705	1.723	1.740	1.758	1.775
6	1.792	1.808	1.825	1.841	1.856	1.872	1.887	1.902	1.917	1.932
7	1.946	1.960	1.974	1.988	2.001	2.015	2.028	2.041	2.054	2.067
8	2.079	2.092	2.104	2.116	2.128	2.140	2.152	2.163	2.175	2.186
9	2.197	2.208	2.219	2.230	2.241	2.251	2.262	2.272	2.282	2.293
10	2.303	2.313	2.322	2.332	2.342	2.351	2.361	2.370	2.380	2.389

* Reste 10 si $n < 1$; por ejemplo, $\ln 0.3 \approx 8.796 - 10 = -1.204$.

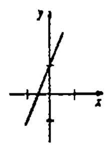
Respuestas a los problemas de número impar

Ejercicios 1.1, página 7

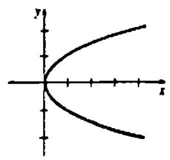
1. $[-4, 20)$ 3. $(-\infty, -2)$ 5. $\frac{3}{2} < x < 6$
7. $x \geq 20$ 9. $[-1, \infty)$ 11. $[3, 5]$
13. $(-\infty, -3)$ 15. $(\frac{9}{4}, \infty)$ 17. $(-\infty, 7]$
19. $[-2, 5)$ 21. $[-1, 2]$ 23. $-4 + a$
25. $a + 10$ 27. -9 o bien 9
29. $-\frac{19}{5}$ o bien 5 31. $(-4, 4)$ 33. $[0, 1]$
35. $(-5, -1)$ 37. $(-\infty, -6) \cup (6, \infty)$
39. $(-\infty, -1) \cup (6, \infty)$
41. No. La solución es $(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{4}, \infty)$.
43. $4 \leq x \leq 14$ 45. $<$ 47. $>$
49. $|x - 4| < 4$ 51. $|x - \frac{1}{2}| < \frac{7}{2}$

Ejercicios 1.2, página 18

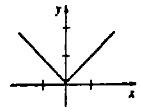
1. Cuarto cuadrante. 3. Tercer cuadrante.
5. Segundo cuadrante. 7. $2\sqrt{5}$ 9. 3
11. No es triángulo rectángulo. 13. Colineales.
15. $x = 4$ o bien $x = -2$ 17. $x^2 = 4y$
19. $(6, 2)$ 21. $(5, 5)$ 23. $(3, 0), (5, -6)$
25. No hay simetría;



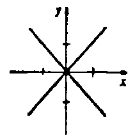
27. Simetría con respecto al eje x;



29. Simetría con respecto al eje y;



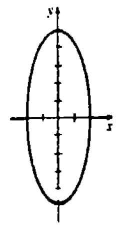
31. Simetría con respecto a los ejes x, y, y con respecto al origen;



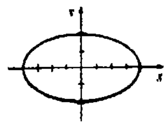
33. $(x - 4)^2 + (y + 6)^2 = 64$
35. $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$
37. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 17$

39. Circunferencia, $C(-4, 3)$, $r = 5$
41. Circunferencia, $C(3, -1)$, $r = \sqrt{28/3}$
43. La ecuación no describe una circunferencia, sino sólo el punto $(6, -4)$.

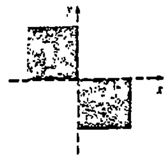
45.



47.

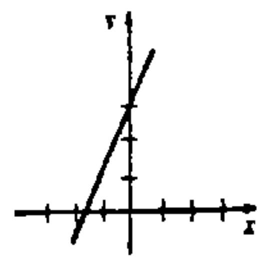


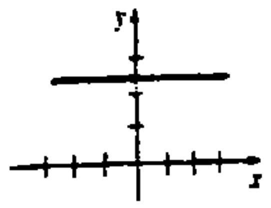
49. $\dfrac{(x - 2)^2}{4^2} + \dfrac{(y + 5)^2}{2^2} = 1$. $C(2, -5)$
51. La gráfica consiste en los ejes x y y.
53.



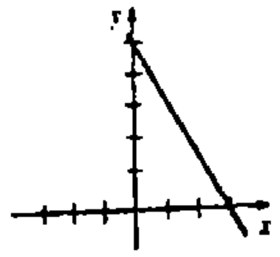
Ejercicios 1.3, página 26

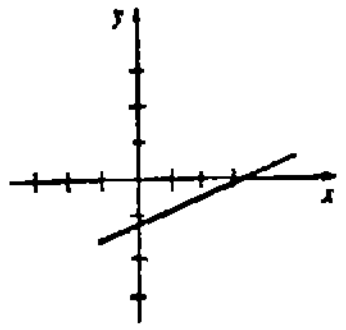
1. $-\frac{3}{2}$ 3. -3 5. $P_2(7, 3)$
7. $y = -x + 3$ 9. $y = 3x$
11. $y = x + 8$ 13. $y = -\frac{3}{2}$
15. $y = -2x + 4$ 17. $y = 4x$
19. $y = -3x + 9$ 21. $y = -x + 7$
23. $y = -x + 6$
25. $2, -\frac{3}{2}, 3$ 27. 0, ninguna, $\frac{5}{2}$



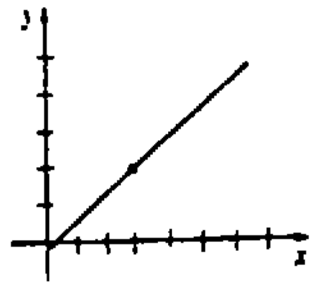


29. $-\frac{5}{3}, 3, 5$ 31. $\frac{3}{8}, \frac{10}{3}, -\frac{5}{4}$





33.



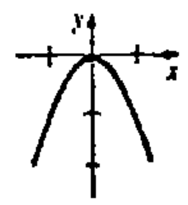
35. $-\frac{2}{5}$ 37. $-\frac{3}{4}$ 39. $-\frac{3}{7}$

41. Colineales. 47. $18\sqrt{13}/13$
49. $17\sqrt{37}/37$

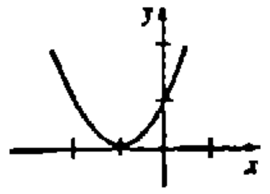
Ejercicios 1.4, página 38

1. $12, 0, 3 - \sqrt{3}, a^2 + a$ 3. 6
5. $3a^2 + 3ah + h^2$ 7. $[-1, \infty)$
9. $(0, \infty)$ 11. $[-5, 5]$
13. El conjunto de los números reales excepto 4.
15. El conjunto de los números reales excepto 0 y $\frac{1}{2}$
17. $[0, \infty)$ 19. $(-\infty, 3)$ 21. $[1, \infty)$
23. $(-\infty, 4]$ 25. Es función
27. No es función
29. $1, 3, 3.9, 1 + 2h + h^2$ 31. $5, -4$
33. Par 35. No es par ni impar
37. Impar 39. Impar

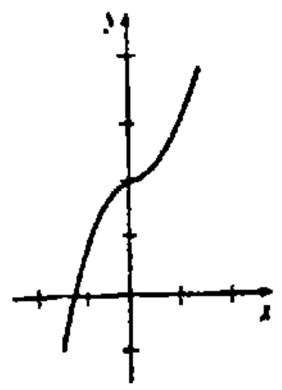
41.



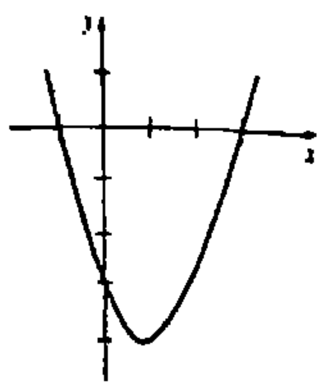
43.



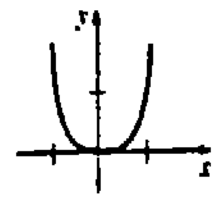
45.



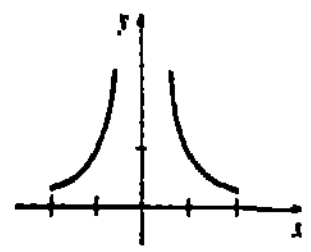
47.



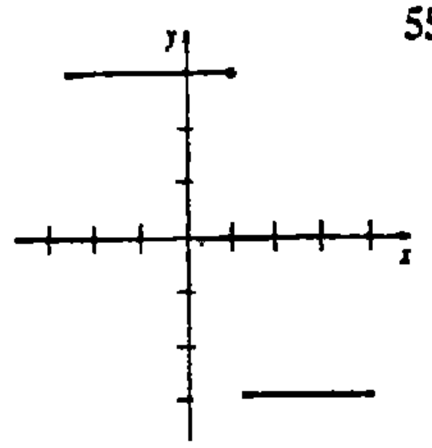
49.



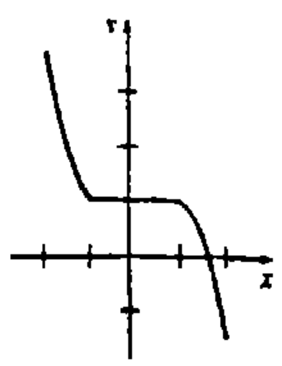
51.



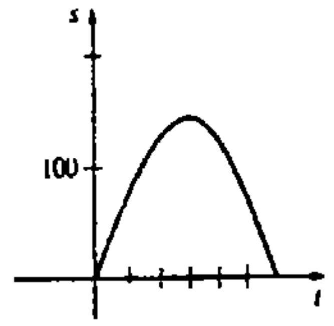
53.



55.



57. $P = 4\sqrt{A}$ 59. $A = (\sqrt{3}/4)s^2$
61. $V = A^{3/2}$ 63. $d = 20\sqrt{13t^2 + 8t + 4}$
65. 123.9 toneladas largas 67. $T_f = \frac{9}{5}T_c + 32$
69. $t = 0$ y $t = 6$

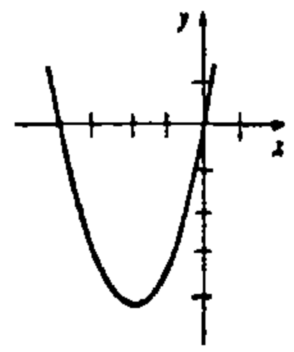


71. 50 g 75. $\Delta x = 5, \Delta y = 1$

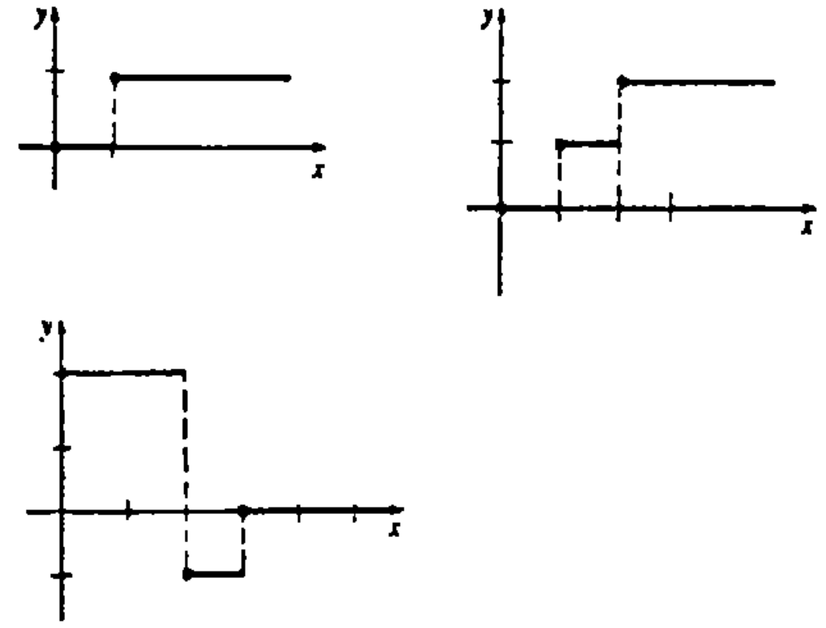
Ejercicios 1.5, página 45

1. $-2x + 13; 6x - 3; -8x^2 - 4x + 40;$ $(2x + 5)/(-4x + 8), x \neq 2$
3. $3x^2 + 4x^3; 3x^2 - 4x^3; 12x^5; 3/(4x), x \neq 0$
5. $\dfrac{x^2 + x + 1}{x(x + 1)}; \dfrac{x^2 - x - 1}{x(x + 1)}; \dfrac{1}{x + 1}; \dfrac{x^2}{x + 1};$ $x \neq 0$ y $x \neq -1$
7. $2x^2 + 5x - 7; -x + 1: x^4 + 5x^3 - x^2 - 17x + 12; (x + 3)/(x + 4), x \neq 1$ y $x \neq -4$
9. $5x^3 - 3x^2; -3x^3 + 5x^2; 4x^6 - 4x^4;$ $(x + 1)/(4x - 4), x \neq 0$ y $x \neq 1$
11. $3x + 16; 3x + 4$
13. $4x^2 + 1; 16x^2 + 8x + 1$
15. $(3x + 3)/x; 3/(3 + x)$

17. $-1/x; -(x + 5)/(2x + 1)$ 19. $x; x$
21. $4x^6, 128x^9, 1/(4x^9), 1/(16x^9)$
23. $4/x^4; x^4/8; 8/x^4; 2/x^4$
25. $-2; 2; -24; 24$
27. $10; 353/64; 1153; 19$
29. $[0, 5]; [0, 5); [-5, 5]$
31. $x \neq 0; x \neq 0, x \neq \pm 1; x \neq \pm 1$
33. $f(x) = 2x^2 - x, g(x) = x^2$
35. $f(x) = x^2 + 6\sqrt{x}, g(x) = x - 1$
37. $36x^2 - 36x + 15$
39. $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = x + 2, h(x) = x^3$
41. $g(x) = -2x + 9$ 43. $y = \sqrt{x + 3}$
45. $y = -(x - 2)^2 + 3$
47. $y = (x + 2)^2 - 4;$



49. Falsa.
51. $f + g$ y $f - g$ son impares, fg y f/g son pares.
53.



55. $(f + g)(x) = \begin{cases} x + x^2, & x \leq -1 \\ 2x - 5, & -1 < x < 0 \\ 2x - 3, & x \geq 0 \end{cases}$

$(fg)(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq -1 \\ x^2 - 5x, & -1 < x < 0 \\ x^2 - 3x - 10 & x \geq 0 \end{cases}$

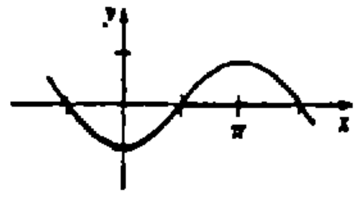
Ejercicios 1.6, página 55

1. $9°$ 3. $330°$ 5. $-240°$
7. $7\pi/6$ 9. $5\pi/3$ 11. $-5\pi/6$
13. $-\frac{1}{2}$ 15. $-\sqrt{3}/2$ 17. $2/\sqrt{3}$
19. $-1/\sqrt{3}$ 21. $1/\sqrt{3}$ 23. 0
25. $\tan t = -2$ 27. $\cos t = \sqrt{15}/4$

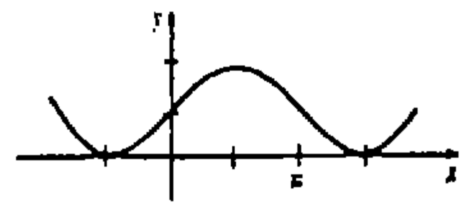
$\cot t = -\frac{1}{2}$
$\sec t = \sqrt{5}$
$\csc t = -\sqrt{5}/2$

$\tan t = -1/\sqrt{15}$
$\cot t = -\sqrt{15}$
$\sec t = 4/\sqrt{15}$
$\csc t = -4$

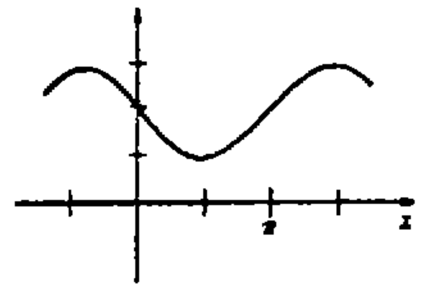
29. $\operatorname{sen} t = -1/\sqrt{2}$ 31. $(\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$
$\cos t = -1/\sqrt{2}$
$\tan t = 1$
$\cot t = 1$
$\sec t = -\sqrt{2}$
33. $-\sqrt{2 - \sqrt{2}}/2$
41. Para todo valor de t, $|\operatorname{sen} t| \leq 1$ y $|\cos t| \leq 1$
43.



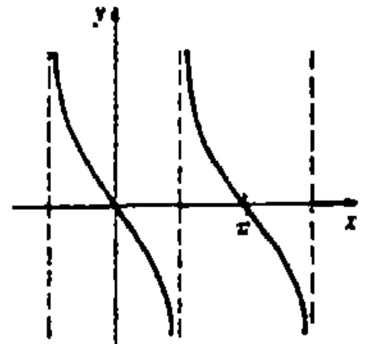
45.



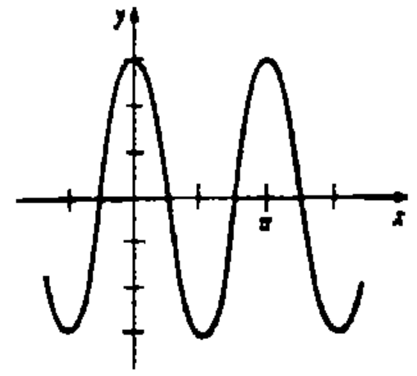
47.



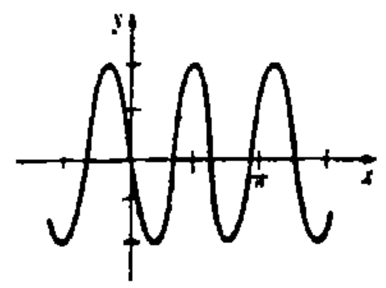
49.

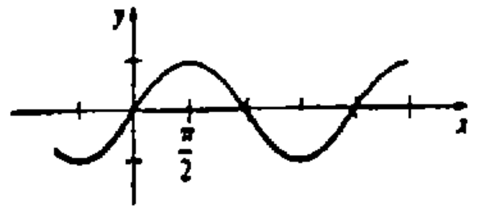


51.



53.



55.


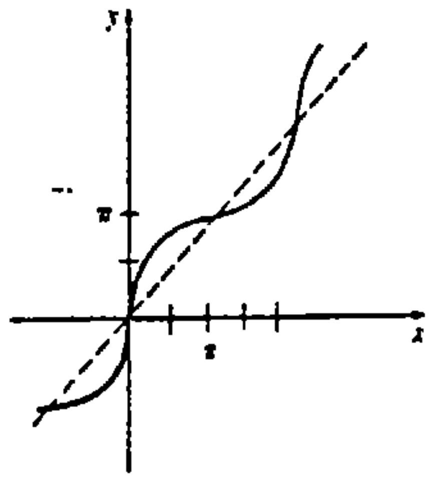
57. $(1 + 4x)\cos x$; $(1 + 4x)/\cos x$;
$1 + 4\cos x$; $\cos(1 + 4x)$

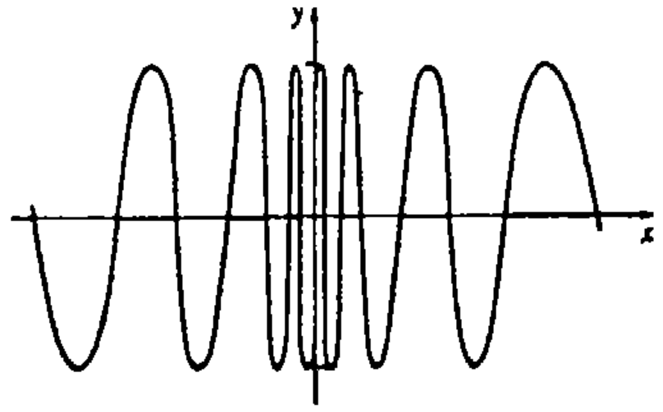
59. $\operatorname{sen} x \cos x$; $\tan x$; $\operatorname{sen}(\cos x)$; $\cos(\operatorname{sen} x)$

61. $\sqrt{x} + \sqrt{x}\cos 2x$; $(1 + \cos 2x)/\sqrt{x}$;
$1 + \cos(2\sqrt{x})$; $\sqrt{1 + \cos 2x}$

63. $t = 9$ y $t = 21$; 80° ocurre en $t = 15$;
60° ocurre en $t = 3$ 65. Par 67. Impar

69. Par

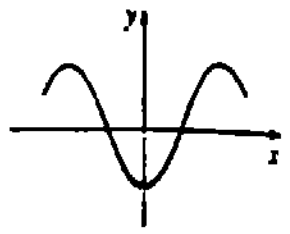
73.


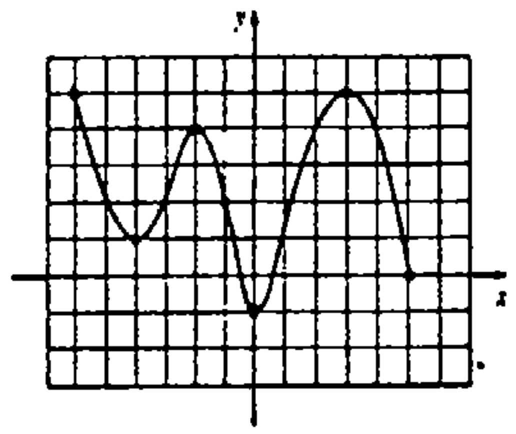
75.


Examen • Capítulo 1, página 56

1. Verdadero 3. Verdadero 5. Verdadero
7. Falso 9. Falso 11. Verdadero
13. Falso 15. Verdadero 17. $-a$
19. $-12, 9$ 21. -27 23. Cuarto
25. $(0, 10]$ 27. -7 y 5
29. $4x - 24$, $8x - 56$ 31. 50°
33. $y = 11$ 35. $y = -2x - 2$
37. $(x - h)^2 + (y - h)^2 = 2h^2$
39. intercepciones x: $-6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}$
intercepciones y: $-2, 4$
centro: $(0, 1)$
41. $V = 6l^3$, $V = 2w^3/9$, $V = 3h^3/4$
43. \$34,000
45. Primero: $\tan t = \frac{3}{4}$, $\cot t = \frac{4}{3}$, $\sec t = \frac{5}{4}$,
$\csc t = \frac{5}{3}$; $\frac{24}{25}$, $\frac{7}{25}$

47. $\pi/3$ y $-\pi/3$;
$\pi/3$ y $2\pi/3$

49.


51.


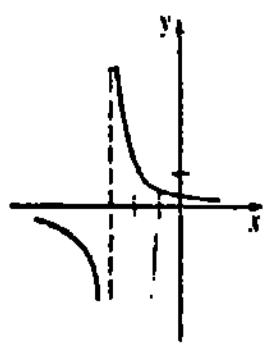
Ejercicios 2.1, página 65

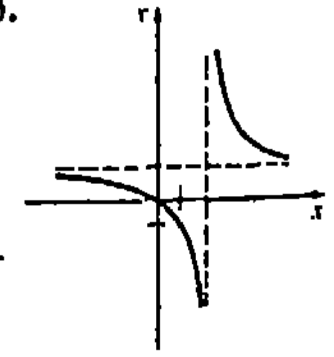
1. 8 3. No existe. 5. 2
7. No existe. 9. 3 11. 0
13. No existe; 2; no existe.
15. 3; 3; 3 17. 0; 2; no existe; 5
19. No existe; 0; 0; 1.
21. La proposición correcta debe ser
$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$.
23. Puesto que $\lim_{x\to 0^-} \sqrt[3]{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt[3]{x} = 0$, la proposición dada es correcta.
25. $-\frac{1}{4}$ 27. $\frac{1}{3}$ 29. $\frac{1}{4}$

Ejercicios 2.2, página 73

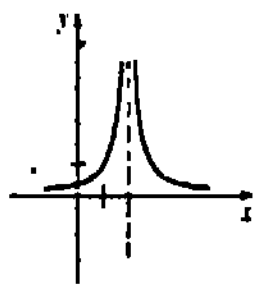
1. 17 3. -12 5. 4 7. 14
9. $\frac{28}{9}$ 11. $\sqrt{7}$ 13. No existe.
15. 3 17. 1 19. $-\frac{3}{2}$
21. $-\frac{1}{8}$ 23. 3
25. No existe 27. 2
29. $\frac{128}{3}$ 31. No existe. 33. -2
35. $a^2 - 2ab + b^2$ 37. $2x$
39. $-1/x^2$ 41. $\frac{1}{2}$ 43. $\frac{1}{5}$
45. 12 49. 3

Ejercicios 2.3, página 83

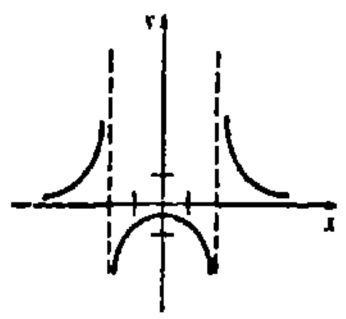
1.


3.


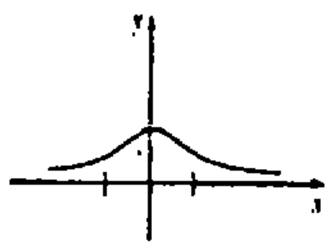
Asínt. vert. (AV): $x = -3$ AV: $x = 2$
Asínt. hor. (AH): $y = 0$. AH: $y = 1$

5.


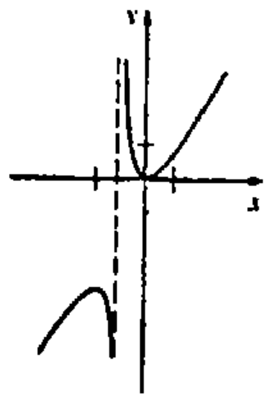
AV: $x = 2$
AH: $y = 0$

7.


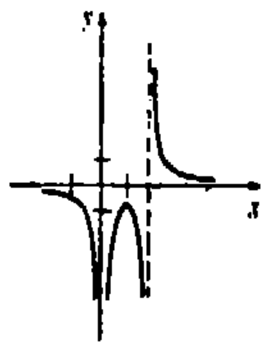
AV: $x = -2$ y $x = 2$
AH: $y = 0$

9.


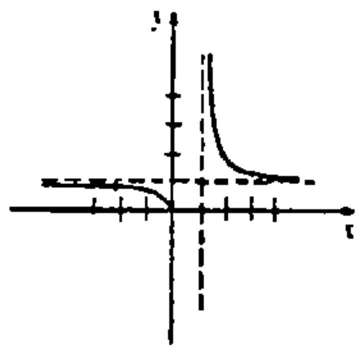
AV: Ninguna
AH: $y = 0$

11.


AV: $x = -1$
AH: Ninguna

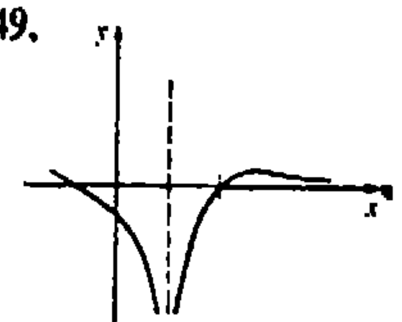
13.


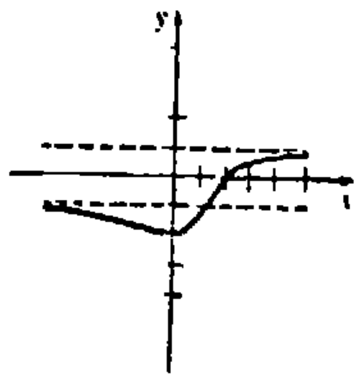
AV: $x = 0$ y $x = 2$
AH: $y = 0$

15.


AV: $x = 1$
AH: $y = 1$.

17. 2; $-\infty$; 0; 2 19. $-\infty$; $-\frac{3}{2}$; ∞; 0
21. $-\infty$ 23. ∞ 25. ∞ 27. ∞
29. $\frac{1}{4}$ 31. 5 33. 0
35. $-\frac{1}{4}$ 37. $\frac{5}{2}$ 39. 4
41. $-2/\sqrt{3}$ 43. $1/\sqrt{2}$ 45. 0
47. -1

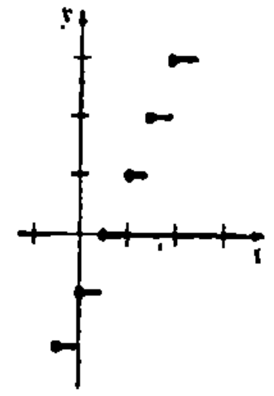
49.


51.


53. $m \to \infty$ 55. 2 57. 1
59. ∞; aproximadamente 2.72; 1 61. 0
63. ∞ 65. ∞

Ejercicios 2.4, página 91

1. Ninguno 3. 3 y 6
5. $n\pi/2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 7. 2
9. 0 11. continua; continua.
13. continua; continua.
15. No continua; no continua.
17. Continua; no continua.
19. No continua; no continua
21. No continua; continua 23. $m = 4$
25. $m = 1$, $n = 3$

27.


Discontinua en $n/2$, donde n es cualquier entero.
29. $\sqrt{3}/2$ 31. 0 33. 1 35. 1
37. $c = 4$ 39. $c = -\sqrt{2}, c = 0, c = \sqrt{2}$
53. $0, \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 2\pi, \ldots$
55. Defina $f(9) = 6$.

Ejercicios 2.5, página 100

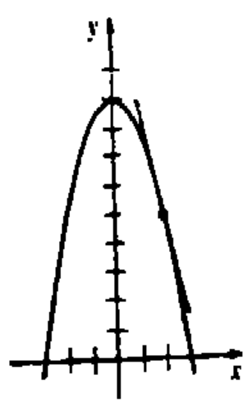
1. Haga $\delta = \varepsilon$. 3. Tome $\delta = \varepsilon$.
5. Haga $\delta = \varepsilon$. 7. Tome $\delta = \varepsilon/3$.
9. Haga $\delta = 2\varepsilon$. 11. Tome $\delta = \varepsilon$.
13. Haga $\delta = \varepsilon/8$. 15. Tome $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.
17. Haga $\delta = \varepsilon^2/5$. 19. Tome $\delta = \varepsilon/2$.
25. Puesto que $2 < x < 4$ es equivalente a $|x - 3| < 1$, tome a δ como el mínimo de 1 y $\varepsilon/7$.
27. Tome $\delta = \sqrt{a\varepsilon}$. 29. Tome $N = 7/4\varepsilon$.
31. Tome $N = -30/\varepsilon$.

Examen • Capítulo 2, página 101

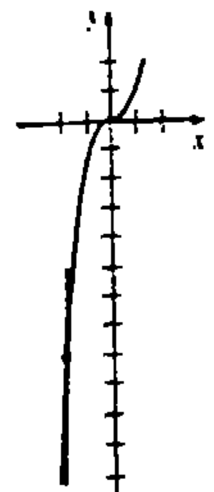
1. Verdadero 3. Verdadero 5. Falso
7. Falso 9. Verdadero 11. Falso
13. Verdadero 15. 4 17. $-\frac{1}{5}$
19. 3^- 21. $-\infty$ 23. -2
25. 10 27. $\frac{1}{6}$ 29. 26
31. $\frac{1}{2}$ 33. No existe 35. 4
37. $2a$ 39. $[-2, 1)$ y $(1, 2]$
41. Asíntotas verticales: $x = -\frac{5}{2}$, $x = \frac{5}{2}$, $x = -9$; asíntota horizontal: $y = \frac{1}{2}$ 43. 1; no

Ejercicios 3.1, página 114

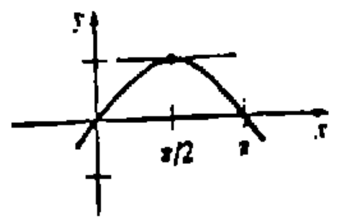
1. -4.5;



3. 7;



5. $(3\sqrt{3}-6)/\pi$;



7. 2 9. 6 11. 8 13. 3
15. -9 17. $y=-10x+26$
19. $y=6x$ 21. $y=-2x+1$ 23. 1
25. Posibles tangentes horizontales en $x=1$ y $x=3$
27. Posibles tangentes horizontales en $x=-2$ y $x=2$; posible tangente vertical en $x=5$; no existe tangente en $x=6$.

31. $(\sqrt{3\Delta x+1}-1)/\Delta x$;

0.2649	1.3246
0.1402	1.4018
0.0149	1.4889
−0.3675	1.8377
−0.1633	1.6334
−0.0151	1.5114

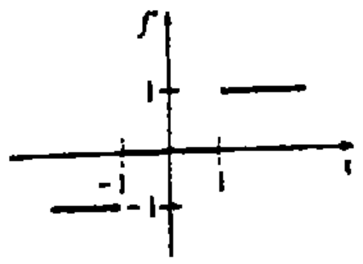
; 1.5

33. 58 mph 35. 3.8 h 37. -14
39. -4.9 m/s; 5 s; -49 m/s

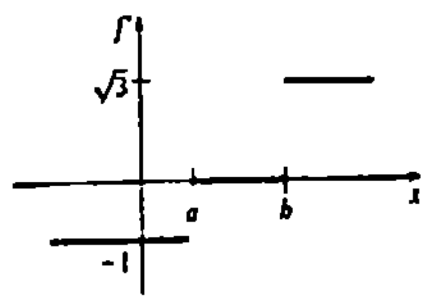
Ejercicios 3.2, página 123

1. 0 3. -3 5. $6x$ 7. $8x-1$
9. $3x^2+1$ 11. $-3x^2+30x-1$
13. $-1/x^2$ 15. $-1/(x-1)^2$
17. $y=-x-4$ 19. $y=2x-2$
21. $-2/x^3$
23. $1/(2\sqrt{x})$; $(0,\infty)$; Por el Teorema 2.8 $f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{\Delta x}}$ no existe.
25. $(2x+1)^{-1/2}$; $(-\frac{1}{2},\infty)$
27. $\frac{1}{3}(x-4)^{-2/3}$; $(-\infty,4)\cup(4,\infty)$

29. $f'_-(2)=-1$, mientras que $f'_+(2)=2$
31. La gráfica de una recta horizontal $f(x)=k$ tiene pendiente cero $(f'(x)=0)$.
33.



35.



39. $\frac{3}{2}a^{1/2}$

Ejercicios 3.3, página 130

1. $9x^8$ 3. 0 5. $14x-4$
7. x^4-12x^3+18x
9. $20x^4-20x^3-18x^2$ 11. $2x+2$
13. $192u^2$ 15. $18z^2+2az$
17. $-12\beta^3+21\beta^2-10\beta$
19. $6x^5+40x^3+50x$ 21. $y=6x+3$
23. $y=20x-56$ 25. $(4,-11)$
27. $(3,-25),(-1,7)$ 29. $y=\frac{1}{4}x-\frac{7}{2}$
31. $x=4$ 33. $(2,8)$
35. $(\frac{1}{4},-\frac{3}{16})$ 37. $(-1,-4),(-5,20)$
39. $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{27}$, $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{27}$
41. En la gráfica de f, $(-\frac{3}{2},\frac{3}{4})$; en la gráfica g, $(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$
43. $b=8$, $c=-9$ 45. $S=4\pi r^2$
47. $-15\,nt$

Ejercicios 3.4, página 136

1. $-1/x^2$ 3. $12x-2x^{-3}$
5. $5x^4-9x^2+4x-28$ 7. $8+\dfrac{8}{x^3}+\dfrac{3}{x^4}$
9. $\dfrac{-20x}{(x^2+1)^2}$ 11. $\dfrac{-17}{(2x-5)^2}$
13. $72x-12$ 15. $\dfrac{t^2+2t}{(2t^2+t+1)^2}$
17. $3(z+1)(2z+1)+(3z+1)(4z+3)$
19. $\dfrac{6x^2+8x-3}{(3x+2)^2}$ 21. $\dfrac{4x^3+9x^2+1}{(3x^3+x)^2}$
23. $-\dfrac{1}{u^2}-\dfrac{2}{u^3}-\dfrac{3}{u^4}-\dfrac{4}{u^5}$
25. $\dfrac{2x^2-2}{x+3}+\dfrac{2x^2-4x-2}{(x+3)^2}$
27. $y=-16x+12$ 29. $y=-20x-12$

31. $(0,24),(-\sqrt{5},-1),(\sqrt{5},-1)$
33. $(-1,\frac{1}{2}),(0,0),(1,\frac{1}{2})$
35. $(-\frac{1}{4},-16),(\frac{1}{4},16)$ 37. $(3,\frac{3}{2}),(-5,\frac{1}{2})$
39. -6 41. $x<0$ 43. $x>-\frac{9}{4}$
45. $-16km_1m_2$
49. $2f(x)f'(x)$; $3[f(x)]^2f'(x)$; $n[f'(x)]^{n-1}f'(x)$

Ejercicios 3.5, página 143

1. $\frac{3}{2}$ 3. 0 5. 1 7. 4 9. 0
11. 36 13. $\frac{1}{2}$ 15. No existe
17. 3 19. $\frac{3}{7}$ 21. 0 23. 4
25. $\frac{1}{2}$

29.

0.0157	0.0167	0.0173	0.0174	0.0175

; 0.0175; el límite resulta ser $\pi/180$
31. $2x+\operatorname{sen}x$ 33. $7\cos x-\sec^2x$
35. $x\cos x+\operatorname{sen}x$ 37. $\cos 2x$
39. $x^2\sec x\tan x+2x\sec x+\sec^2x$ 41. $\cos x$
43. $-\dfrac{\csc^2x+x\csc^2x+\cot x}{(x+1)^2}$
45. $\dfrac{4x\tan x-2x^2\sec^2x+2x}{(1+2\tan x)^2}$ 47. $\dfrac{1}{1+\cos\theta}$
49. $2\operatorname{sen}u\cos u$ 51. 0
53. $x^2\operatorname{sen}x\sec^2x+x^2\operatorname{sen}x+2x\operatorname{sen}x\tan x$
55. $(\pi/2,\pi/2)$
57. $3\sqrt{3}x+6y=\sqrt{3}\pi+3$
59. $6\sqrt{3}x-9\sqrt{3}y=\sqrt{3}\pi-18$
61. $12x-6y=16\pi+3\sqrt{3}$
63. $y=x-2\pi$ 69. $2\cos 2x$

Ejercicios 3.6, página 150

1. $-150(-5x)^{29}$ 3. $200(2x^2+x)^{199}(4x+1)$
5. $-4(x^3-2x^2+7)^{-5}(3x^2-4x)$
7. $-10(3x-1)^4(-2x+9)^4+12(-2x+9)^5(3x-1)^3$
9. $3\operatorname{sen}^2x\cos x$ 11. $\dfrac{8x(x^2-1)}{(x^2+1)^3}$
13. $10[x+(x^2-4)^3]^9[1+6x(x^2-4)^2]$
15. $4(t^{-1}+t^{-2}+t^{-3})^{-5}(t^{-2}+2t^{-3}+3t^{-4})$
17. $-3(2+u\operatorname{sen}u)^{-4}(u\cos u+\operatorname{sen}u)$
19. $\dfrac{(2v-5)^3(-6v^2+45v-5)}{(v+1)^9}$
21. $\pi\cos(\pi x+1)$
23. $8\operatorname{sen}4x\cos 4x$
25. $-\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$
27. $\left(\sec^2\dfrac{1}{x}\right)\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

29. $\dfrac{5\cos 6\theta\cos 5\theta+6\operatorname{sen}5\theta\operatorname{sen}6\theta}{\cos^2 6\theta}$
31. $5(\sec 4x+\tan 2x)^4(4\sec 4x\tan 4x+2\sec^2 2x)$
33. $\cos(\operatorname{sen}x)\cos x$
35. $24x\operatorname{sen}^2(4x^2-1)\cos(4x^2-1)$
37. -54 39. -7 41. $y=-8x-3$
43. $12x-2y=3\pi+2$
45. $(-\sqrt{3}/3,-3\sqrt{3}/16),(\sqrt{3}/3,3\sqrt{3}/16)$; no
47. $\theta=(2n+1)\pi/4$, $n=0,1,2,\ldots$
49. $(3u^2+2)(9x^8+8x)$ 51. $3F'(3x)$
53. $-10/(-10x+7)$

Ejercicios 3.7, página 153

1. -2 3. 32 5. $60x^{-4}$
7. $6x+16-40x^{-6}$
9. $(3x-4)(180x^2-192x+32)$
11. $-14(t+2)^{-3}$ 13. $-100\cos 10x$
15. $-x\operatorname{sen}x+2\cos x$
17. $-\dfrac{4\cos^2\theta+6\cos\theta+8\operatorname{sen}^2\theta}{(3+2\cos\theta)^3}$
19. $\sec^3x+\tan^2x\sec x$
21. $1440x^2+120x$ 23. $-\pi^3\cos\pi x$
25. $n!$ 27. $(-4,48)$
29. $(1,\infty)$; $(-\infty,1)$ 31. $y=-7x$
33. $\frac{1}{18}$ 35. -32
43. 2; $x\to 0$ cuando $x\to\infty$ implica que la gráfica se hace casi lineal para valores muy grandes de x.

Ejercicios 3.8, página 158

1. $1/(2y-2)$ 3. $(2x-y^2)/(2xy)$
5. $(y+1)/(2y-x)$
7. $(4x-3x^2y^2)/(2x^3y-2y)$
9. $[x^2-4x(x^2+y^2)^5]/[y^2+4y(x^2+y^2)^5]$
11. $(2x^4y^4+3y^{10}-6x^9y)/(6xy^9-3x^{10})$
13. $(1-x)/(y+4)$ 15. $3/[2y(x+2)^2]$
17. $[\cos(x+y)-y]/[x-\cos(x+y)]$
19. $\cos y\cot y$ 21. $(\cos 2\theta)/r$
23. $-\frac{2}{5}$ 25. $-\frac{1}{3}$ y $-\frac{2}{3}$
27. $-8x+3y=22$
29. $2x-4y=2-\pi$
31. $(1,2),(-1,-2)$
33. $(-\sqrt{5},2\sqrt{5}),(\sqrt{5},-2\sqrt{5})$
35. $(3-x)/(y+4)$; $(x-3)^2+(y+4)^2=-2$ no describe un lugar geométrico de puntos con coordenadas reales.
37. $(y^3-2x^2)/y^5$
39. $-(\operatorname{sen}y)/(1-\cos y)^3$ 41. $-2/(y-x)^3$
43. $y'=(1-3x^2y)/x^3$ es equivalente a $y'=-2x^{-3}-3x^{-4}$
45. $\pi/4$ 47. $-(x/y)\,dx/dt$

49. (1, 0.68), (1, −0.68); $y = 0.23x + 0.45$, $y = -0.23x + 0.91$; $(-\sqrt{6}/2, \sqrt{2}/2)$, $(-\sqrt{6}/2, -\sqrt{2}/2)$, $(\sqrt{6}/2, \sqrt{2}/2)$, $(\sqrt{6}/2, -\sqrt{2}/2)$

Ejercicios 3.9, página 163

1. $15x^{1/2}$ 3. $-\frac{4}{3}x^{-7/3}$ 5. $\frac{1}{2}x^{-1/2} - \frac{1}{2}x^{-3/2}$
7. $\frac{4}{3}(x^3 + x)(x^2 - 4)^{-1/3} + 2x(x^2 - 4)^{2/3}$
9. $\frac{33}{2}\frac{(x - 9)^{1/2}}{(x + 2)^{5/2}}$ 11. $\frac{1}{2}x^{-1/2}\cos\sqrt{x}$
13. $1 + x(x^2 + 1)^{-1/2}$
15. $\frac{1}{3}[(t^2 - 1)(t^3 + 4t)]^{-2/3}(5t^4 + 9t^2 - 4)$
17. $-\frac{1}{2}(\theta + \operatorname{sen}\theta)^{-3/2}(1 + \cos\theta)$
19. $\frac{8}{5}s^3(s^4 + 1)^{-3/5}$ 21. $-\frac{1}{4}x^{-3/2}$
23. $-\frac{2}{9}x^{-4/3} - \frac{4}{3}x^{-5/3} - 10x^{-8/3}$
25. $-2.4(\operatorname{sen}\theta)^{2.4} + 3.36(\operatorname{sen}\theta)^{0.4}\cos^2\theta$
27. $x - 12y = -16$ 29. $7x - 8y = 3$
31. $-(y + 2\sqrt{xy})/(x + 2\sqrt{xy})$
33. $y^{-1/2}(x^2 - 1)^{3/2}(6x^2 - 1)$
35. $8\sqrt{3}x + 8y = 4\sqrt{3}$, $8\sqrt{3}x - 8y = 4\sqrt{3}$
37. Tangente vertical en (4, 0)
39. Ninguna tangente vertical
41. Tangente vertical en (0, 1) 43. $\pi/8$
45. $-ky^{-2}(2kl/y - 2kl/R + v_0^2)^{-1/2}$
49. $(0.22W^{-1/3})/3$

Ejercicios 3.10, página 169

1. $dy = 0$ 3. $dy = -(2x)^{-3/2}\,dx$
5. $dy = 16x^3(x^4 - 1)^{-2/3}\,dx$
7. $dy = -\frac{4x}{(x^2 + 1)^2}\,dx$ 9. $dy = -x\operatorname{sen}x\,dx$
11. $\Delta y = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2$, $dy = 2x\,dx$
13. $\Delta y = 2(x + 1)\,\Delta x + (\Delta x)^2$, $dy = 2(x + 1)\,dx$
15. $\Delta y = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$, $dy = -\frac{1}{x^2}\,dx$
17. $\Delta y = \cos x\operatorname{sen}\Delta x + \operatorname{sen}x(\cos\Delta x - 1)$, $dy = \cos x\,dx$

19.

21	20	1
10.25	10	0.25
2.01	2	0.01
0.2001	0.2	0.001

21. 6.0833
23. 16 25. 0.325 27. 0.4
29. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{120} \approx 0.5453$ 31. 9π; 8π
33. El volumen exacto es $\Delta V = \frac{4}{3}\pi(3r^2t + 3rt^2 + t^3)$, el volumen aproximado es $dV = 4\pi r^2t$, donde $t = \Delta r$; $(01024)\pi$ plg³.

35. ±6 cm; ±0.06; ±6%
39. 2048 pie; 160 pie
41. 2.8957, 0.1532, 15.3246% 43. 0.10 s

Ejercicios 3.11, página 176

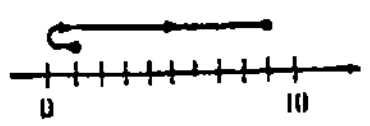
1. Una raíz real 3. Ninguna raíz real
5. 3.1623 7. 1.5874 9. 0.6823
11. −1.1414, 1.1414 13. 0, 0.8767
15. 2.4981 17. 1.6560 19. 0.7297

Examen • Capítulo 3, página 177

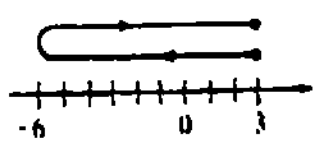
1. Verdadero 3. Falso 5. Verdadero
7. Falso 9. Falso 11. Verdadero
13. Verdadero 15. Falso 17. 0
19. 3; 27 21. $(x^3)^2 \cdot 3x^2$ 23. sen x
25. −3 27. 0 29. 18
31. $x = \sqrt{n\pi}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$
33. $y = 6x - 9$, $y = -6x - 9$
35. 0.2448 37. $2y^{1/3}/3x^{5/3}$
39. $-(16x\operatorname{sen}4x + 4\operatorname{sen}4x + 4\cos 4x)/(4x + 1)^2$
41. $2 - 2x^{-3} + 2x$
43. $10(t + \sqrt{t^2 + 1})^9(1 + t(t^2 + 1)^{-1/2})$
45. $0.08x^{-0.9}$
47. $x^2(x^4 + 16)^{1/4}(x^3 + 8)^{-2/3} + x^3(x^4 + 16)^{-3/4}(x^3 + 8)^{1/3}$
49. $\frac{2 + x^{1/3}}{3x^{1/3}(1 + x^{1/3})^2}$ 51. $\frac{405}{8}(3x)^{-1/2}$
53. $2 + 6t^{-4}$ 55. 1.6751

Ejercicios 4.1, página 186

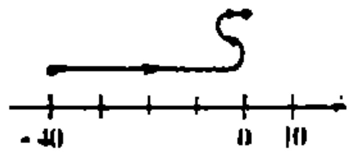
1. −3, −2, 2, 8; 19, 18, 18, 8
3. 18, −23, 23, 18; 6, 1, 1, −6
5. $-\frac{15}{4}$, 17, 17, −128; 0, 2, 2, −2
7. 1, $1 - \pi$, $\pi - 1$, 0; $\frac{1}{2}$, 1, 1, π^2
9. 6 y −6; 8 y −8
11. $6\sqrt{2}$, $-6\sqrt{2}$; 15 13. $(-\infty, -3)$, (0, 3)
15 $v(t) = 2t$, $a(t) = 2$



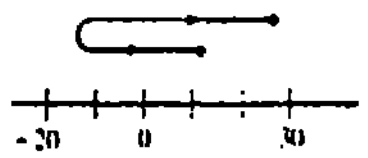
17. $v(t) = 2t - 4$, $a(t) = 2$



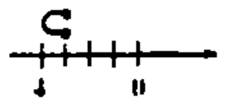
19. $v(t) = 6t^2 - 12t$, $a(t) = 12t - 12$



21. $v(t) = 12t^3 - 24t^2$, $a(t) = 36t^2 - 48t$



23. $v(t) = 1 - 2t^{-1/2}$, $a(t) = t^{-3/2}$



25.

positivo	negativo
cero	cero
positivo	positivo
positivo	negativo
negativo	negativo
negativo	positivo

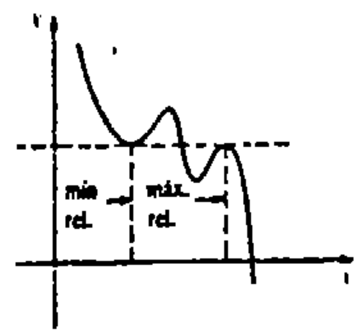
27. $v > 0$ en $(-\infty, \frac{3}{2})$, $v < 0$ en $(\frac{3}{2}, \infty)$; 36 pie
29. $64\sqrt{2}$ pie/s; 16 pie/s²
31. $-8\sqrt{\pi}$ pie/s; la coordenada y está disminuyendo

Ejercicios 4.2, página 193

1. $\frac{dV}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt}$ 3. $8\sqrt{3}$ cm²/h
5. $s\cos\theta\frac{d\theta}{dt} + \operatorname{sen}\theta\frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt}$
7. 24 cm/min 9. −6 o bien 6
11. $\frac{35}{4}$ lb/plg²/s 13. $5/(32\pi)$ m/min
15. $\sqrt{3}/10$ m/s
17. $-1/(4\pi)$ pie/s; $-1/(12\pi)$ pie/s
19. $-\sqrt{2}/2$ pie/s 21. −360 mi/h
23. $-8\pi/9$ km/min 25. $\pi/12$ km/s
29. 17 nudos 31. $\frac{dh}{dt} = \frac{16}{\pi(12 - h)^2}$

Ejercicios 4.3, página 202

1. $\frac{3}{2}$ 3. −1, 6 5. 1 7. $\frac{3}{4}$
9. −2, $-\frac{11}{7}$, 1 11. $2n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
13. Máx. abs. $f(3) = 9$; mín. abs. $f(1) = 5$
15. Máx. abs. $f(8) = 4$; mín. abs. $f(0) = 0$
17. Máx. abs. $f(0) = 2$; mín. abs. $f(-3) = -79$
19. Máx. abs. $f(3) = 8$; mín. abs $f(-4) = -125$
21. Máx. abs. $f(2) = 16$; mín. abs. $f(0) = f(1) = 0$
23. Máx. abs. en la frontera $f(3) = 3$; máx. rel. $f(0) = 0$; mín. abs.$f(-1) = f(1) = -1$
25. c_1, c_3, c_4, c_{10}; $c_2, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9$; mín. abs. $f(c_7)$, máx. abs. en la frontera $f(b)$; máximos relativos $f(c_3)$, $f(c_5)$, $f(c_9)$; mínimos relativos $f(c_2)$, $f(c_4)$, $f(c_7)$, $f(c_{10})$
27.



31. $s(t) \geq 0$ sólo para $0 \leq t \leq 20$; $s(10) = 1600$
33. n entero positivo par
35. $f(-a)$ es un mín. rel.

Ejercicios 4.4, página 209

1. $c = 0$
3. $f(-3) = 0$ pero $f(-2) \neq f(-3)$
5. $c = -\frac{2}{3}$ 7. $c = -\pi/2$, $\pi/2$, o bien $3\pi/2$
9. f no es diferenciable en el intervalo.
11. $c = 3$ 13. $c = \sqrt{13}$
15. f no es continua en el intervalo.
17. $c = \frac{9}{4}$ 19. $c = 1 - \sqrt{6}$
21. Creciente en $[0, \infty)$, decreciente en $(-\infty, 0]$
23. Creciente en $[-3, \infty)$, decreciente en $(-\infty, -3]$
25. Creciente en $(-\infty, 0]$ y $[2, \infty)$, decreciente en [0, 2]
27. Creciente en $[3, \infty)$, decreciente en $(-\infty, 0]$ y [0, 3].
29. Decreciente en $(-\infty, 0]$ y $[0, \infty)$.
31. Creciente en $(-\infty, -1]$ y $[1, \infty)$, decreciente en [−1, 0) y (0, 1]
33. Creciente en [−2, 2], decreciente en $(-2\sqrt{2}, -2]$ y $[2, 2\sqrt{2})$
35. Creciente en $(-\infty, 0]$, decreciente en $[0, \infty)$.
37. Creciente en $(-\infty, 1]$ y $[3, \infty)$, decreciente en [1, 3]
39. Creciente en $\left[-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$.

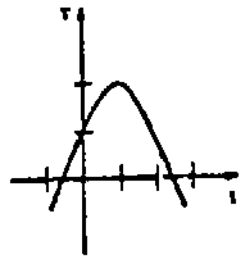
decreciente en $\left[\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right]$, en donde n es un entero.

41. Puesto que la velocidad media en el intervalo de tiempo es de 60 mph, el teorema del valor medio implica que debe haber algún instante en el intervalo en el cual la velocidad sea exactamente igual a 60 mph. Esto excede el límite de velocidad legal.

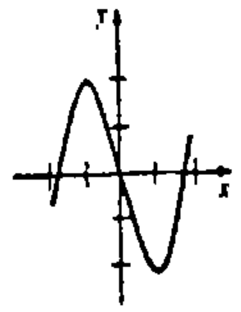
47. $c \approx 0.3451$ rad

Ejercicios 4.5, página 214

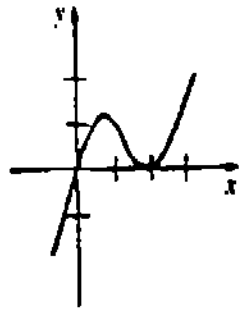
1. Máx. rel. $f(1) = 2$



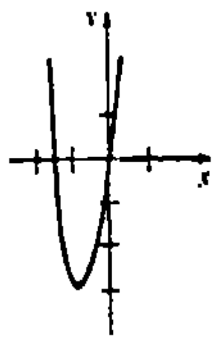
3. Máx. rel. $f(-1) = 2$;
mín. rel. $f(1) = -2$



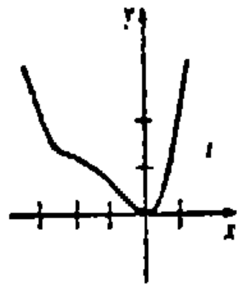
5. Máx. rel. $f(\frac{2}{3}) = \frac{32}{27}$;
mín. rel. $f(2) = 0$



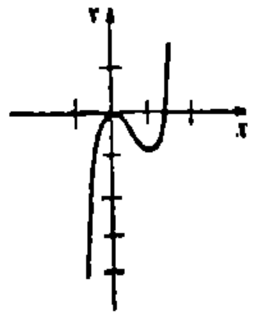
7. Mín. rel. $f(-1) = -3$



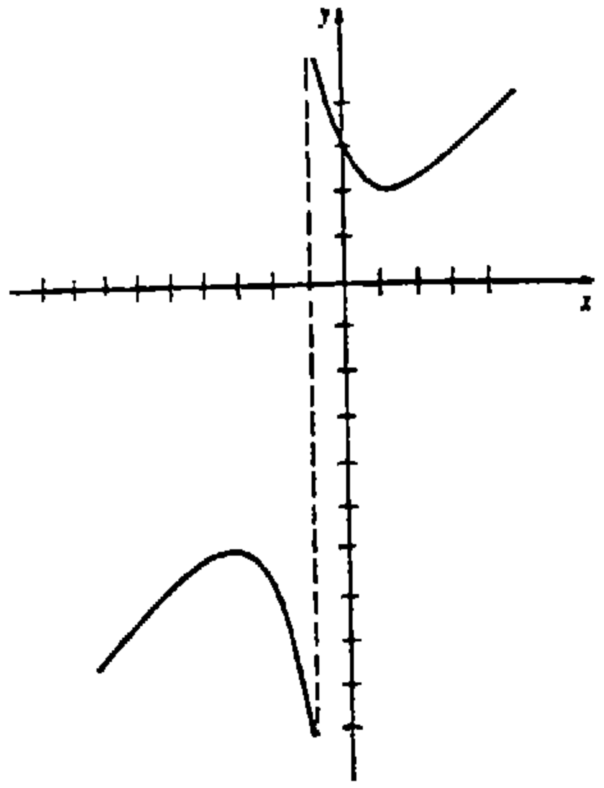
9. Mín. rel. $f(0) = 0$



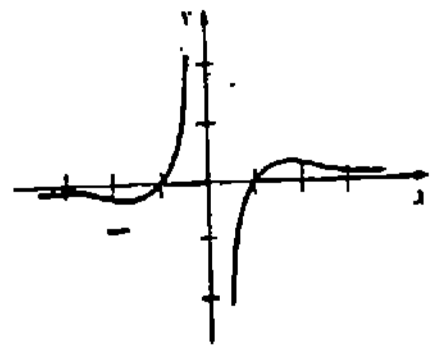
11. Máx. rel. $f(0) = 0$;
mín. rel. $f(1) = -1$



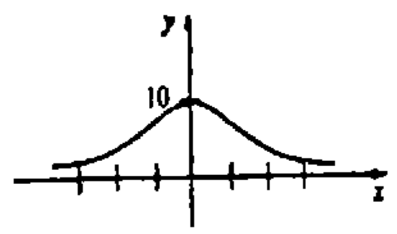
13. Máx. rel. $f(-3) = -6$;
mín. rel. $f(1) = 2$



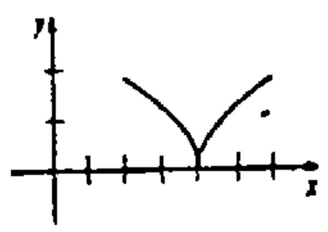
15. Máx. rel. $f(\sqrt{3}) = 2/3\sqrt{3}$;
mín. rel. $f(-\sqrt{3}) = -2/3\sqrt{3}$



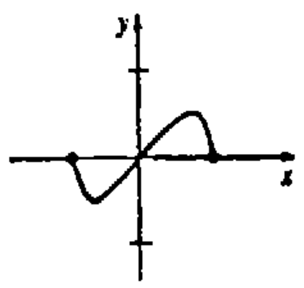
17. Máx. rel. $f(0) = 10$



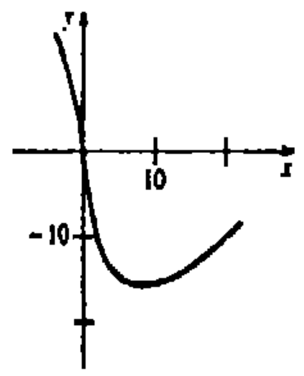
19. Mín. rel. $f(4) = 0$



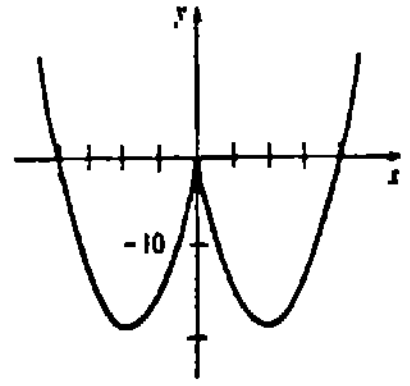
21. Máx. rel. $f(\sqrt{2}/2) = \frac{1}{2}$;
mín. rel. $f(-\sqrt{2}/2) = -\frac{1}{2}$



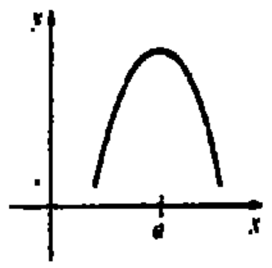
23. Mín. rel. $f(8) = -16$



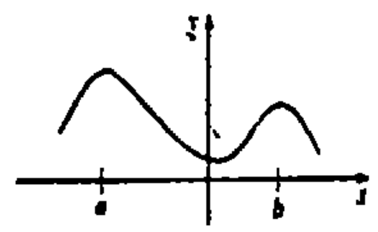
25. Máx. rel. $f(0) = 0$;
mín. rel. $f(-2) = -12(2)^{2/3}$;
mín. rel. $f(2) = -12(2)^{2/3}$



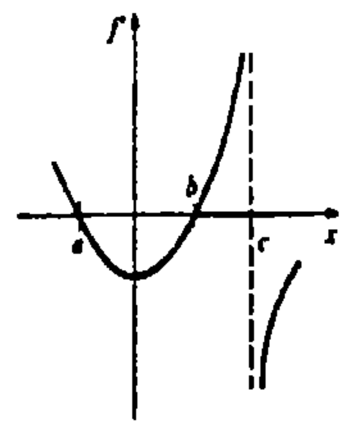
27.



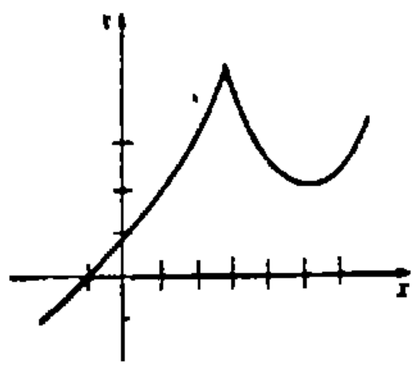
29.



31.

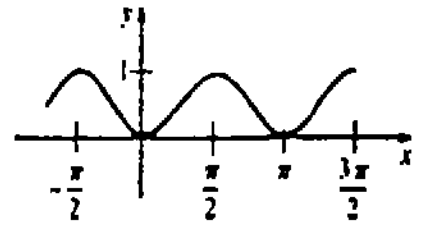


33.



35. Mín. rel. $f'(-2) = -13$

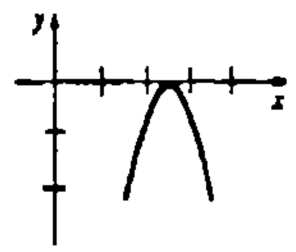
37. $n\pi/2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;
máx. rel. $f(-\pi/2) = f(\pi/2) = \cdots = 1$;
mín. rel. $f(0) = f(\pi) = \cdots = 0$



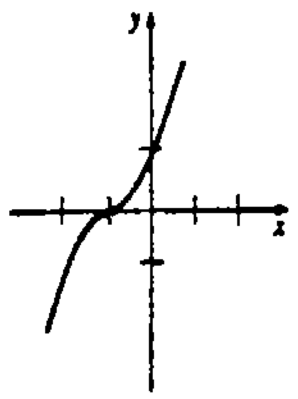
39. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$

Ejercicios 4.6, página 223

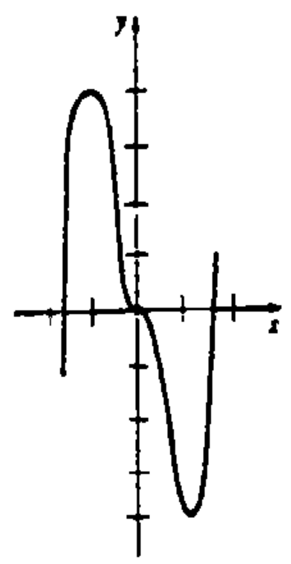
1. Cóncava hacia abajo en $(-\infty, \infty)$
3. Cóncava hacia arriba en $(-\infty, 2)$, cóncava hacia abajo en $(2, \infty)$
5. Cóncava hacia arriba en $(-\infty, 2)$ y en $(4, \infty)$, cóncava hacia abajo en $(2, 4)$
7. Cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0)$, cóncava hacia abajo en $(0, \infty)$
9. Cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$, cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$
11. Cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$, cóncava hacia abajo en $(-1, 1)$
15. $(-\sqrt{2}, -21 - \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, -21 + \sqrt{2})$
17. $(0, 0)$, $(\pm\pi, 0)$, $(\pm 2\pi, 0)$, . . .
19. $(0, 0)$, $(\pm\pi, \pm\pi)$, $(\pm 2\pi, \pm 2\pi)$,
21. Máx. rel. $f(\frac{5}{3}) = 0$



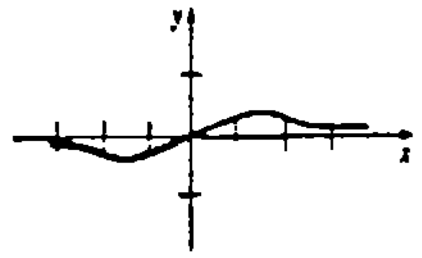
23. Punto de inflexión $(-1, 0)$



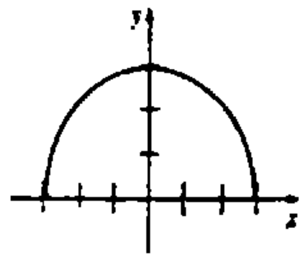
25. Max. rel. $f(-1) = 4$;
mín. rel. $f(1) = -4$;
puntos de inflexión $(0, 0)$, $(-\sqrt{2}/2, 7\sqrt{2}/4)$, $(\sqrt{2}/2, -7\sqrt{2}/4)$



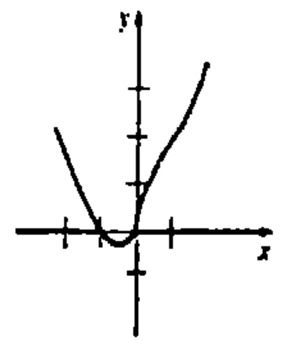
27. Máx. rel. $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}/4$; mín. rel. $f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}/4$; puntos de inflexión $(0, 0)$, $(-\sqrt{6}, -\sqrt{6}/8)$, $(\sqrt{6}, \sqrt{6}/8)$



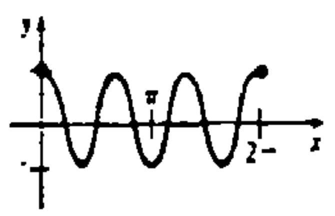
29. Máx. rel. $f(0) = 3$



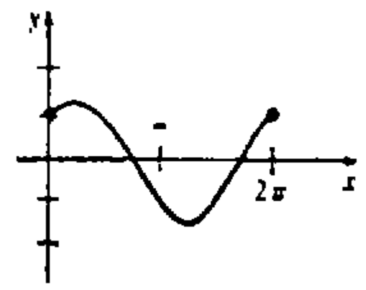
31. Mín. rel. $f(-\frac{1}{4}) = (-\frac{1}{4})^{1/3}(\frac{3}{4})$; puntos de inflexión $(0, 0)$, $(1, 2)$



33. Máx. rel. $f(2\pi/3) = f(4\pi/3) = 1$; mín. rel. $f(\pi/3) = f(\pi) = f(5\pi/3) = -1$; puntos de inflexión $(\pi/6, 0)$, $(\pi/2, 0)$, $(5\pi/6, 0)$, $(7\pi/6, 0)$, $(9\pi/6, 0)$, $(11\pi/6, 0)$

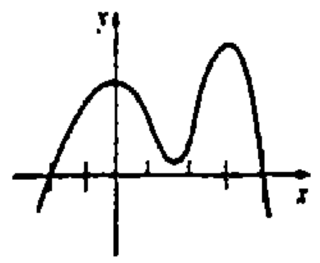


35. Máx. rel. $f(\pi/4) = \sqrt{2}$; mín. rel. $f(5\pi/4) = -\sqrt{2}$; puntos de inflexión $(3\pi/4, 0)$, $(7\pi/4, 0)$



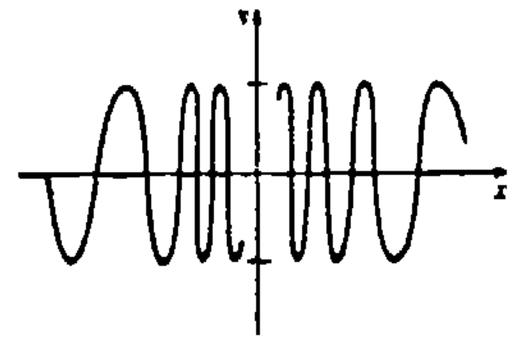
37. Máx. rel. $f(\pi/4) = \frac{1}{2}$
39. Mín. rel. $f(\pi) = 0$

41.



43. $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x$

45.



49. $(c, f(c))$ es un punto de inflexión.

Ejercicios 4.7, página 229

1. 30, 30 3. $\frac{1}{2}$
5. $(2, 2\sqrt{3})$, $(2, -2\sqrt{3})$; $(0, 0)$
7. $(4/3, -128/27)$ 9. 750 pie por 750 pie.
11. Base: 40 cm por 40 cm; altura: 20 cm.
13. Radio: $2/3\ \pi$ m; altura: $2/3$ m
15. Base: $\frac{80}{3}$cm por $\frac{80}{3}$ cm; altura: $\frac{20}{3}$ cm; volumen máximo: $128{,}000/27$ cm^3
17. Base: $4\sqrt{2}$; altura: 16
19. Base: $\frac{3}{2}$; altura: 1
21. Radio: $2R/3$; altura: $H/3$
23. Altura: $\frac{15}{2}$ cm; anchura: 15 cm
25. Radio: $\sqrt[3]{16/\pi}$; altura: $2\sqrt[3]{16/\pi}$
27. Radio de la porción circular: $10/(4 + \pi)$; anchura: $20/(4 + \pi)$; altura de la porción rectangular: $10/(4 + \pi)$
29. El alambre no debe cortarse en absoluto. Con el alambre completo forme una circunferencia de radio $\frac{1}{2}\pi$ m.
31. Longitud de la sección transversal: $\sqrt{3}d/3$; anchura de la sección transversal: $\sqrt{6}d/3$
33. 35
35. $-\frac{1}{8}$ 37. $y = h/2$; distancia máxima: h
39. A $\frac{50}{11}$ m de l_1 41. $16\sqrt{2}$ pie
43. Los costos mínimos ocurren cuando $x = 4$.
47. Sea y la diferencia entre la fórmula de Young y la de Cowling. Entonces y_{max} ocurre cuando $t = 12(\sqrt{2}-1) \approx 5$ años. Para esta edad $y_{max} \approx 0.04\ D_a$.

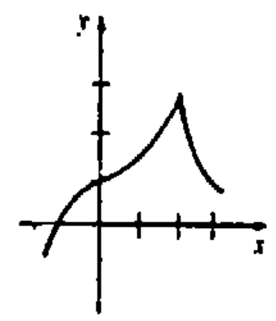
Ejercicios 4.8, página 238

1. 40,000; 16,100; 60 3. 60; 59

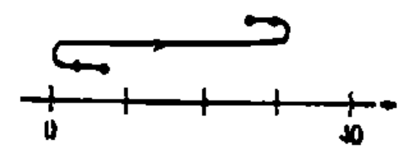
5. 183; 180, 186
7. $R''(x) < 0$ para todo $x > 0$ 11. $\frac{2}{3}$, inelástica
13. $\frac{9}{8}$, elástica 15. $\frac{7}{16}$, inelástica
17. $\frac{18}{7}$, disminuye aproximadamente 15.4%
19. 4.47

Examen • Capítulo 4, página 239

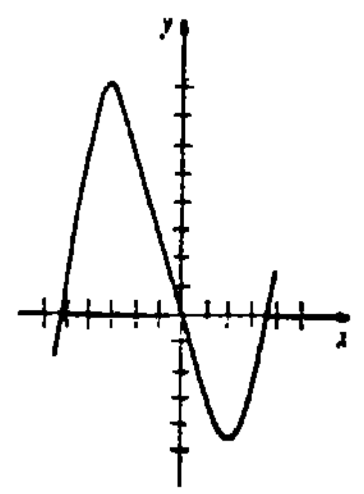
1. Falso 3. Falso 5. Verdadero
7. Falso 9. Verdadero
11. No es necesario que f sea diferenciable en c.
13. Máx. abs. $f(-3) = 348$; mín. abs. $f(4) = -86$
15. Máx. abs. $f(3) = \frac{9}{7}$, mín. abs. $f(0) = 0$
17.



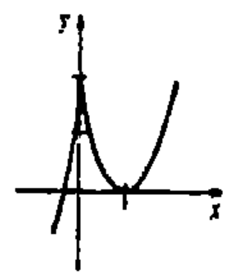
19. La velocidad máxima es $v(2) = 12$, la rapidez máxima es $|v(-1)| = |v(5)| = 15$



23. Máx. rel. $f(-3) = 81$; mín. rel. $f(2) = -44$



25. Máx. rel. $f(0) = 2$; mín. rel. $f(1) = 0$



27. Mín. rel. $f(0) = 0$; puntos de inflexión $(-3, 27)$, $(-1, 11)$
29. Punto de inflexión $(3, 10)$ 31. $\frac{5}{4}$ pie/s
37. Debe volar al punto que está a 17.75 km del nido.
39. 2
41. A 10 pie del poste de 10 pie de alto.
47. 36, 300; 13, 056; 236; 600; 224; 400

Ejercicios 5.1, página 248

1. $3x + C$ 3. $\frac{1}{6}x^6 + C$
5. $\frac{3}{2}x^{2/3} + C$ 7. $t - \frac{25}{12}t^{0.48} + C$
9. $x^3 + x^2 - x + C$ 11. $\frac{16}{3}x^3 + 4x^2 + x + C$
13. $\frac{1}{3}x^3 - 4x + C$ 15. $-r^{-1} + 5r^{-2} + C$
17. $-\frac{1}{2}x^{-2} + \frac{1}{3}x^{-3} - \frac{1}{4}x^{-4} + C$
19. $16w^4 - 16w^3 + 6w^2 - w + C$
21. $f(x) = x^2 - x + 1$
23. $f'(x) = x^2 + C_1, f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2$
25. $x^2 - 4x + 5$ 27. $y = \dfrac{\omega^2}{2g}x^2$

Ejercicios 5.2, página 256

1. $-\frac{1}{6}(1 - 4x)^{3/2} + C$ 3. $-\frac{1}{10}(5x + 1)^{-2} + C$
5. $-\frac{5}{32}(3 - 4x)^{8/5} + C$ 7. $\frac{1}{7}(x - 1)^7 + C$
9. $\frac{2}{3}(x^2 + 4)^{3/2} + C$ 11. $\frac{3}{4}(z^2 + 9)^{2/3} + C$
13. $\frac{1}{40}(4x^2 - 16x + 7)^5 + C$
15. $\frac{1}{2}(x^3 + 3x - 16)^{2/3} + C$
17. $\frac{1}{3}\left(3 - \frac{2}{v}\right)^{3/2} + C$ 19. $-\frac{9}{4}(1 - \sqrt[3]{x})^{4/3} + C$
21. $-\frac{1}{4}\cos 4x + C$ 23. $\frac{1}{2}\operatorname{sen} x^2 + C$
25. $\frac{1}{5}\operatorname{sen}(5x + 1) + C$ 27. $-2\cos\theta + C$
29. $-2\csc\sqrt{x} + C$ 31. $\frac{1}{18}\operatorname{sen}^6 3x + C$
33. $\frac{1}{6}\tan^3 2x + C$ 35. $\frac{1}{7}\tan 7x - x + C$
37. $-2\cot x - \csc x + C$
39. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$
41. $-\frac{1}{2}\cot(z^2 + 2z) + C$
43. $f(x) = x + \cos x - \pi$
47. $\operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$
49. $\frac{2}{3}(t + 2)^{3/2} - 4(t + 2)^{1/2} + C$

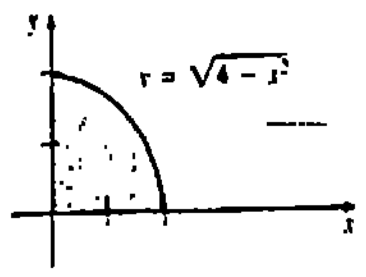
Ejercicios 5.3, página 262

1. $3 + 6 + 9 + 12 + 15$
3. $\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \frac{2^4}{4}$
5. $-\frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} + \frac{1}{21} - \frac{1}{23} + \frac{1}{25}$
7. $(2^2 - 4) + (3^2 - 6) + (4^2 - 8) + (5^2 - 10)$
9. $-1 + 1 - 1 + 1 - 1$ 11. $\sum_{k=1}^{6}(2k)^2$
13. $\sum_{k=1}^{7}(2k + 1)$ 15. $\sum_{k=0}^{12}(3k + 1)$
17. $\sum_{k=1}^{5}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ 19. $\sum_{k=1}^{8}6$
21. 420 23. 65 25. [illegible]
27. 3069 29. 102,582 31. [illegible]

33. 20
35. $-f(0) + f(n); f(k) = \sqrt{k}$ y $f(k) = -1/(k + 1)$ 37. Si, sea $j = k + 3$
43. $n(n + 1)$

Ejercicios 5.4, página 270

1. 12. 3. 18 5. 28 7. $\frac{8}{3}$
9. $\frac{4}{3}$ 11. $\frac{16}{3}$ 13. $\frac{1}{4}$ 15. 4
17. $\frac{32}{5}$ 19. 5 21. $\frac{17}{60}; \frac{25}{12}$
23. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}$
25. $\frac{1}{6}$ 27.



29. $\frac{2}{3}$

Ejercicios 5.5, página 277

1. $\frac{19}{2}; \frac{5}{2}$ 3. $\frac{33}{2}; 1$ 5. $\frac{189}{256}; \frac{3}{4}$
7. $(3 - \sqrt{2})\pi/4; \pi$ 9. 5 11. 24
13. -4 15. $\frac{2}{3}$ 17. $\frac{5}{6}$ 19. $-\frac{3}{4}$
25. $\int_{-2}^{4} \sqrt{9 + x^2}\, dx$ 27. $\int_0^2 (x + 1)\, dx$

Ejercicios 5.6, página 281

1. 12 3. 10 5. $-\frac{3}{2}$ 7. -20
9. 56 11. -20 13. 24 15. 0
17. 20 19. -56 21. 64
23. 20 25. 8 27. 0 29. 3
31. $\frac{1}{2}$ 33. $(\pi + 2)/4$ 35. 0
37. 36 39. 10
43. $x^3 \le x^2$ para todo x en $[0, 1]$.

Ejercicios 5.7, página 288

1. $3x^2 - 2x$ 3. 4 5. 12
7. 46 9. 1 11. $\frac{2}{3}$ 13. 0
15. $-\frac{2}{3}$ 17. $-\frac{28}{3}$ 19. $\frac{8}{3}$ 21. $\frac{9}{2}$
23. 21 25. $\frac{128}{3}$ 27. 1 29. $\frac{65}{4}$
31. $\sqrt{6} - \sqrt{3}$ 33. $\frac{1}{2}$ 35. 1
37. $\frac{2}{3}$ 39. $\frac{4\pi + 6}{(\pi + 3)(\pi + 2)}$ 41. 5
43. 22 45. $\frac{116}{15}$ 47. 3
49. $\int_a^{x^2} f(t)\, dt; 2xf(x^2)$ 51. $-6\sqrt{24x + 5}$

53. 28
55. El límite de la suma es igual a $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx$.
57. $f(x) = x^{-2}$ no es continua en $[-1, 1]$.
59. 1.1564135

Ejercicios 5.8, página 297

1. 22, 22.5 3. 1.8667 5. 1.1484
7. 0.4228 9. 0.4900 11. $n \ge 11$
13. 1.11 15. 7 17. $\frac{26}{3}$, 8.6611
19. 1.6222 21. 0.7854 23. 0.4683
25. 11.1053
27. Para la regla de Simpson: $n \ge 26$; para la regla trapecial: $n \ge 366$ 29. 130

Examen • Capítulo 5, página 299

1. Falso 3. Verdadero 5. Verdadero
7. Falso 9. Falso 11. Verdadero
13. Verdadero 15. Verdadero 17. $f(x)$
19. $\sqrt{6}$ 21. 3720 23. 250
25. De la misma longitud 27. -6
29. $\frac{1}{505}(5t + 1)^{101} + C$ 31. $\frac{1}{2}$
35. $-\frac{1}{56}\cot^7 8x + C$
37. 156 lb; aproximadamente en 20 min.
39. $E_4 = |\frac{8}{3} - 2.75| \approx 0.0833$
41. Regla trapecial: 0.3160; regla de Simpson: 0.3099

Ejercicios 6.1, página 312

1. $\frac{4}{3}$ 3. $\frac{81}{4}$ 5. $\frac{9}{2}$ 7. $\frac{11}{2}$
9. $\frac{11}{4}$ 11. $\frac{11}{6}$ 13. 2
15. $\frac{3}{4}(2^{4/3} + 3^{4/3})$ 17. 4 19. 2π
21. $\frac{27}{2}$ 23. $\frac{32}{3}$ 25. $\frac{81}{4}$ 27. 4
29. $\frac{10}{3}$ 31. $\frac{64}{3}$ 33. $\frac{128}{5}$ 35. $\frac{118}{3}$
37. $8\sqrt{2}$ 39. $\frac{9}{2}$ 41. $\frac{8}{3}$ 43. 8
45. $2\sqrt{2} - 2$ 47. $4\sqrt{3} - 4\pi/3$
49. $\frac{52}{3}$ 51. $\frac{5}{2}$ 53. $\pi a^2/4; \pi a^2/2$
57. 4 59. 0

Ejercicios 6.2, página 316

1. $(421,875)\sqrt{3}/1200$ 3. $\frac{1024}{3}$ 5. 128
7. $10\pi/3$ 9. 9

Ejercicios 6.3, página 322

1. $\pi/2$ 3. $4\pi/5$ 5. $\pi/6$
7. $1296\pi/5$ 9. $\pi/2$ 11. $8\pi/3$
13. $32\pi/5$ 15. 32π 17. 8π
19. $256\pi/15$ 21. $3\pi/5$ 23. 36π
25. $500\pi/3$ 27. $16\pi/105$ 29. π^2
31. $(4\pi - \pi^2)/4$ 33. $3\pi^2/8$
37. $4ab^2\pi/3$ 39. 6.4

Ejercicios 6.4, página 328

1. $4\pi/5$ 3. $\pi/6$ 5. $8\pi/15$
7. $250\pi/3$ 9. $36\sqrt{5}\pi/5$ 11. $3\pi/2$
13. 16π 15. $8\pi/5$ 17. $21\pi/10$
19. $\pi/6$ 21. $248\pi/15$ 23. 4π
25. $625\pi/6$ 27. $45\pi/2$
29. $(\pi^2 - 2\pi)/2$ 33. $4a^2b\pi/3$

Ejercicios 6.5, página 331

1. $2\sqrt{2}$ 3. $\frac{1}{27}[13^{3/2} - 8] \approx 1.44$
5. 45 7. $\frac{10}{3}$ 9. $\frac{4685}{288} \approx 16.27$
11. $\int_{-1}^{3} \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$ 13. $\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx$
15. $\frac{1}{27}[40^{3/2} - 8] \approx 9.07$
17. El integrando de $\int_0^1 x^{-1/3}\, dx$ es discontinuo en $[0, 1]$; 6
19. $\pi/2$ 21. 1.4804

Ejercicios 6.6, página 336

1. $208\pi/3$ 3. $(\pi/27)[10^{3/2} - 1] \approx 3.56$
5. $(\pi/6)[37^{3/2} - 1] \approx 117.32$ 7. $2\pi a(x_2 - x_1)$
9. $253\pi/20$ 11. $12\pi a^2/5$
17. $(2\pi/3)\int_1^8 (4x^{-1/3} - x^{1/3})\sqrt{9x^{2/3} + 4}\, dx$

Ejercicios 6.7, página 341

1. -4 3. $\frac{34}{3}$ 5. 3 7. 0 9. 2
11. $\frac{61}{9}$ 13. 24 15. $\frac{1}{12}$ 17. 0
19. $3\sqrt{3}/\pi$ 21. $-1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 0.15$
23. 12 25. 103° 29. $2k t_1/3$
31. $[f(x + h) - f(x)]/h$

Ejercicios 6.8, página 346

1. $s(t) = 6t - 7$
3. $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 15$
5. $s(t) = -\frac{5}{2}\operatorname{sen}(4t + \pi/6) + \frac{5}{2}$
7. $v(t) = -5t + 9$, $s(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 9t - \frac{9}{2}$
9. $v(t) = t^3 - 2t^2 + 5t - 3$, $s(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 - 3t + 10$
11. $v(t) = \frac{21}{4}t^{4/3} - t - 26$, $s(t) = \frac{63}{28}t^{7/3} - \frac{1}{2}t^2 - 26t - 48$
13. $\frac{11}{225}$ km 15. 256 pie 17. 30.62 m
19. 400 pie; 6 s 21. -80 pie/s
23. 17 cm 25. 34 cm 27. 24 cm

Ejercicios 6.9, página 352

1. 3300 pie-lb 3. 222,750 pie-lb
5. $\frac{2}{5}$ pie 7. 10 N · m; 27.5 N · m
9. 7.5 pie-lb; 37.5 pie-lb 11. 453.1 x 10^8 J
13. 127,030.9 pie-lb 15. 45,741.6 pie-lb
17. 57,408 pie-lb 19. 24,960 pie-lb
21. 2.65 x 10^9 pie-lb 25. $v_0 = \sqrt{2km_1/R}$, 11,183.13 m/s, 1608.5 m/ s
27. 126 N · m

Ejercicios 6.10, página 357

1. 196,000 N/m², 4,900,000π newtons (N); 196,000 N/m², 784,000π N; 196,000 N/m², 19,600,000π N
3. 59,904 lb; 29, 952 lb 5. 31.5 lb
7. 1280 lb 9. 3660.8 lb
11. 13,977.6 lb 13. 9984π lb
15. $30{,}420\sqrt{17}$ lb 17. $4{,}992{,}000\sqrt{2}$ lb.

Ejercicios 6.11, página 363

1. $\bar{x} = -\frac{2}{7}$ 3. $\bar{x} = -\frac{13}{30}$ 5. $\bar{x} = 1$
7. $\bar{x} = \frac{115}{36}$ 9. $\bar{x} = \frac{4}{7}$ 11. $\bar{x} = \frac{2}{3}$
13. $\bar{x} = \frac{11}{10}$ 15. $\bar{x} = \frac{15}{2}$
17. $\bar{x} = 3$ puesto que $\rho(x)$ es simétrica respecto a la recta $x = 3$.
19. Sitúe el origen de un sistema de coordenadas xy en el punto medio del segmento de recta que contiene a m_1 y m_2, con el eje x a lo largo de esta recta. Entonces el centro de masa tiene las coordenadas $(0, 2\sqrt{3}/5)$.

Ejercicios 6.12, página 370

1. $\bar{x} = -\frac{2}{7}, \bar{y} = \frac{17}{7}$ 3. $\bar{x} = \frac{17}{11}, \bar{y} = -\frac{20}{11}$
5. $\bar{x} = \frac{10}{9}, \bar{y} = \frac{28}{9}$ 7. $\bar{x} = \frac{3}{4}, \bar{y} = \frac{3}{10}$

9. $\bar{x} = \frac{12}{5}, \bar{y} = \frac{54}{7}$ 11. $\bar{x} = \frac{93}{35}, \bar{y} = \frac{45}{56}$
13. $\bar{x} = \frac{1}{2}, \bar{y} = \frac{8}{5}$ 15. $\bar{x} = \frac{16}{35}, \bar{y} = \frac{16}{33}$
17. $\bar{x} = \frac{3}{2}, \bar{y} = \frac{121}{540}$ 19. $\bar{x} = -\frac{7}{10}, \bar{y} = \frac{7}{8}$
21. $\bar{x} = 0, \bar{y} = 2$ 23. $\bar{x} = \frac{5}{3}, \bar{y} = \frac{2}{3}$
25. $\bar{x} = 0, \bar{y} = (\pi + 8)/8$
27. $\bar{x} = 0, \bar{y} = 20/3\pi$ 31. $\bar{x} = \frac{13}{6}, \bar{y} = \frac{5}{3}$

Ejercicios 6.13, página 376

1. 0.11 litros/s ≈ 6.76 litros/min
3. 1.85 miligramos/litro 5. 94%
7. \$49,600 9. 320 dólares/año
11. SC = \$625, SP = \$625
13. SC = \$12.50, SP = \$2.33
15. SC = \$45, SP = \$31.50
19. $\dfrac{1-k}{2-k}\,\dfrac{b^{2-k} - a^{2-k}}{b^{1-k} - a^{1-k}}$

Examen • Capítulo 6, página 376

1. Falso 3. Verdadero 5. Verdadero
7. Verdadero 9. Verdadero 11. Falso
13. Joules 15. 2500 pie-lb
17. 6 unidades cuadradas

19. $\int_a^b f(x)\,dx$

21. $\int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx$

23. $\int_a^b 2\,dx$

25. $-\int_a^b 2f(x)\,dx + \int_b^c 2f(x)\,dx$

27. $-\int_a^0 \frac{1}{2}x\,dx + \int_0^{2b}\left(b - \frac{1}{2}x\right)dx$

29. $\bar{x} = \dfrac{\int_0^2 x(f(x) - g(x))\,dx}{\int_0^2 (f(x) - g(x))\,dx}$,

$\bar{y} = \dfrac{\frac{1}{2}\int_0^2 ([f(x)]^2 - [g(x)]^2)\,dx}{\int_0^2 (f(x) - g(x))\,dx}$

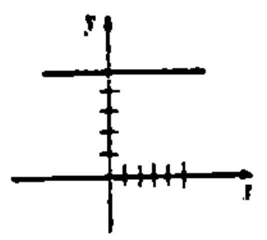
31. $2\pi\int_0^2 x(f(x) - g(x))\,dx$

33. $\frac{256}{45}$ 35. 37.5 joules (J)

37. 624,000 pie-lb 39. 2040 pie-lb
41. $(40^{3/2} - 8)/27$ 43. 17,066.7 N

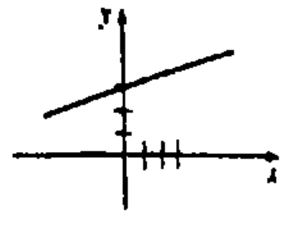
Ejercicios 7.1, página 388

1.



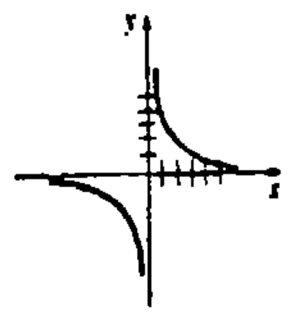
No es inyectiva

3.



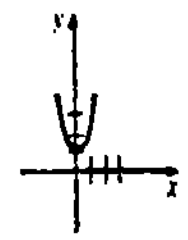
$f^{-1}(x) = 3x - 9$

5.



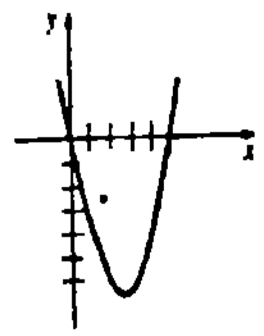
$f^{-1}(x) = 4/x$

7.



No es inyectiva

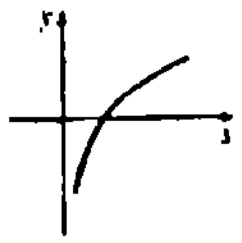
9.



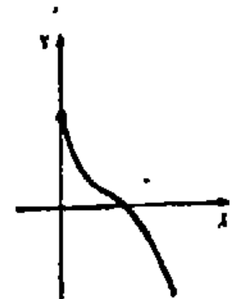
No es inyectiva

11. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2$
13. $f^{-1}(x) = -x^{1/3} + 9$
15. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{(1 - x)/8x}$
17. $f'(x) > 0$ para todo x muestra que f es creciente en $(-\infty, \infty)$. La conclusión se obtiene del Teorema 7.2.
19. Dominio: $[0, \infty)$
Contradominio: $[-2, \infty)$
21. Dominio: Todos los números reales excepto 0
Contradominio: Todos los números reales excepto -3
23. Dominio: $[0, \infty)$
Contradominio: $[5, \infty)$

25.



27.



29. $\frac{2}{3}$ 31. $(5, 3)$; $y = \frac{1}{10}x + \frac{5}{2}$
33. $(8, 1)$; $y = \frac{1}{60}x + \frac{13}{15}$
35. $f^{-1}(x) = 1/(x - 2)$;
$(f^{-1})'(x) = -1/(x - 2)^2$
37. Para $\geq \frac{5}{2}$, $f^{-1}(x) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x}$

41. $f'(x) = 1/x > 0$ para $x > 0$ muestra que f es creciente en $(0, \infty)$. La conclusión se obtiene del Teorema 7.2.

Ejercicios 7.2, página 396

1. 0 3. $3\pi/4$ 5. $\pi/4$ 7. $3\pi/4$
9. $-\pi/3$ 11. $5\pi/6$ 13. $\sqrt{3}/2$
15. $-\pi/4$ 17. $\frac{4}{5}$ 19. 2
21. $\sqrt{2}$ 23. $\pi/3$ 25. $4\sqrt{2}/9$
27. $\sqrt{3}(2 + \sqrt{10})/9$ 29. $13/\sqrt{170}$
31. $\sqrt{1 - x^2}$ 33. $\sqrt{x^2 - 1}$ 37. 3
39. $\cos t = \sqrt{5}/5$, $\tan t = -2$, $\cot t = -\frac{1}{2}$, $\sec t = \sqrt{5}$, $\csc t = -\sqrt{5}/2$
41. 5 no está en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.
43. 0.28 rad (16.2°); 114.26 pie/s
45. 0.20 rad o bien 11.31° al sur del oeste

Ejercicios 7.3, página 403

1. $\dfrac{5}{\sqrt{1 - (5x - 1)^2}}$ 3. $-8/(4 + x^2)$

5. $\dfrac{1}{1 + x} + x^{-1/2}\tan^{-1}\sqrt{x}$

7. $\dfrac{2(\cos^{-1}2x + \operatorname{sen}^{-1}2x)}{\sqrt{1 - 4x^2}(\cos^{-1}2x)^2}$

9. $\dfrac{-2x}{(1 + x^4)(\tan^{-1}x^2)^2}$

11. $\dfrac{2 - x}{\sqrt{1 - x^2}} + \cos^{-1}x$

13. $3\left(x^2 - 9\tan^{-1}\frac{x}{3}\right)^2\left(2x - \dfrac{27}{9 + x^2}\right)$

15. $1/(t^2 + 1)$ 17. $-4\operatorname{sen} 4x/|\operatorname{sen} 4x|$
19. $2x(1 + y^2)/(1 - 2y - y^3)$
21. $\frac{1}{5}\tan^{-1}5x + C$ 23. $\pi/12$
25. $-2(1 - x^2)^{1/2} - 3\operatorname{sen}^{-1}x + C$
27. $-x + 2\tan^{-1}x + C$
29. $-\frac{4}{3}(2 - 3t^2)^{1/2} + C$
31. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{10}}{5}x + C$
33. $\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{3/2}$ 35. $\sec^{-1}|x + 1| + C$
37. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{x + 2}{2}\right) + C$ 39. $\sqrt{3}/3$
41. Máx. rel. $f(\sqrt{2}/2) = -\sqrt{2} + 3\tan^{-1}(\sqrt{2}/2)$; mín. rel. $f(-\sqrt{2}/2) = \sqrt{2} + 3\tan^{-1}(-\sqrt{2}/2)$
43. $\operatorname{sen}^{-1}(\frac{3}{5}) - \operatorname{sen}^{-1}(\frac{1}{5})$
45. $\frac{\pi}{4}[\sec^{-1}(4) - \sec^{-1}(\frac{25}{16})]$

47. $\sqrt{2}/120$ rad/s 49. $10\sqrt{3}$ pie
51. 5.5730 53. 0.4389
61. f es constante.

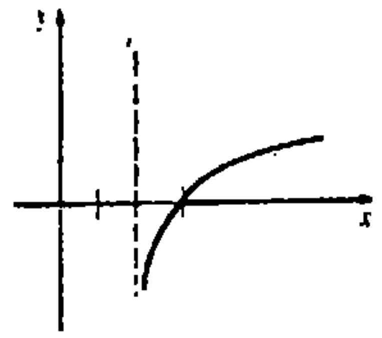
Examen • Capítulo 7, página 405

1. Verdadero 3. Verdadero 5. Verdadero
7. Falso 9. Verdadero 11. Falso
13. Falso
15. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x - 8}{x}}$, $(f^{-1})'(x) = \dfrac{8}{3x^2}\left(\dfrac{x - 8}{x}\right)^{-2/3}$
17. $-\dfrac{3|x|}{x^2\sqrt{x^2 - 9}}$ 19. $\dfrac{(\cot^{-1}x)^{-2}}{1 + x^2}$
21. $-4x^2/\sqrt{1 - x^2}$
23. $\sqrt{1 - y^2}/(\sqrt{1 - y^2} - 1)$
25. $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{2}{3}x + C$
27. $1/\pi$ 29. $\operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{x + 3}{4}\right) + C$
31. $\pi/6 - \tan^{-1}(\frac{1}{2})$

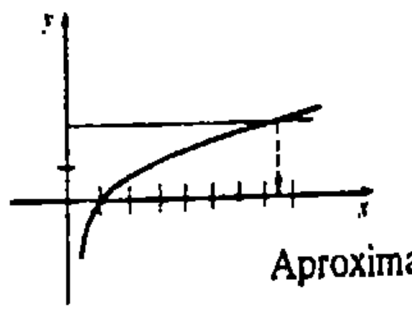
Ejercicios 8.1, página 414

1. $x > -1$ 3. $x \neq \pm 1$ 5. No
7. Sí 9. $10/x$ 11. $1/2x$
13. $(4x^3 + 6x)/(x^4 + 3x^2 + 1)$
15. $3x + 6x\ln x$ 17. $(1 - \ln x)/x^2$
19. $1/x(x + 1)$ 21. $\tan x$
23. $-1/x(\ln x)^2$ 25. $(1 + \ln x)/x\ln x$
27. $1/[(x\ln x)\ln(\ln x)]$
29. $12(t^2 + 1)/t(3t^2 + 6)$
31. $(x^2 + 6x + 7)/(x + 1)(x + 2)(x + 3)$
33. $y/x(2y^2 - 1)$ 35. $y(1 - x)/x(2y^2 + 1)$
37. $(2x - x^2y - y^3)/(x^3 + xy^2 - 2y)$
39. $y = x - 1$ 41. $y = 4x - 8$
43. $(\frac{1}{4}, -\ln 2)$
45.

47.



51.

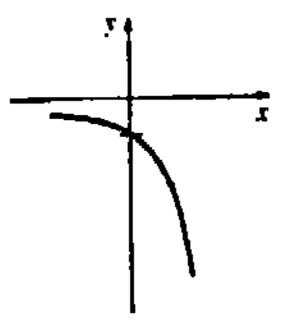


Aproximadamente 7.389

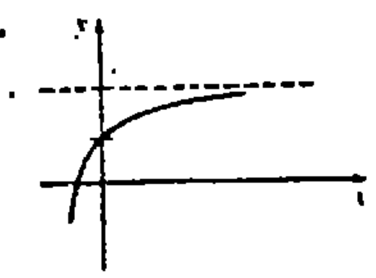
Ejercicios 8.2, página 421

1. $-e^{-x}$ 3. $\frac{1}{2}x^{-1/2}e^{\sqrt{x}}$
5. $-e^{-2x}(2x+1)/x^2$
7. $-\frac{5}{2}(1+e^{-5x})^{-1/2}e^{-5x}$
9. $(4x^3+2xe^{x^2})/(x^4+e^{x^2})$
11. $-4/(e^x-e^{-x})^2$ 13. 1
15. $2xe^{3x}/(x^2+1)+3e^{3x}\ln(x^2+1)$
17. $-4e^{(x+2)/(x-2)}/(x-2)^2$ 19. $2xe^{x^2}e^{e^{x^2}}$
21. $9e^{9x}$ 23. $\frac{1}{3}t^{-2/3}e^{t^{1/3}}+\frac{1}{3}e^{t/3}$
25. $(2x+1)^2e^{-(1-x)^4}[4(2x+1)(1-x)^3+6]$
27. $(x^2e^x+e^{2x})/(x+e^x)^2$
29. $2e^{2x}/(1+e^{4x})$ 31. $e^{x+y}/(1-e^{x+y})$
33. $(-ye^{xy}\operatorname{sen}e^{xy})/(1+xe^{xy}\operatorname{sen}e^{xy})$
35. $(-y^2+ye^{x/y})/(2y^3+xe^{x/y})$
37. $-64e^{-4x}$ 39. $e^x/(e^x+1)^2$
41. $y=ex$ 43. $-\frac{1}{2}$

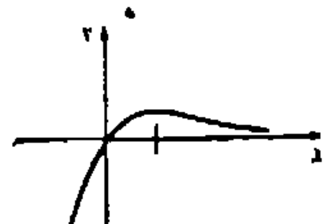
45.



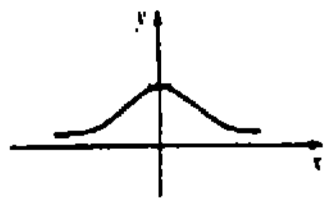
47.



49.



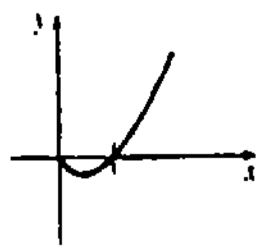
51.



$f(0)=1$ es un máx. abs.

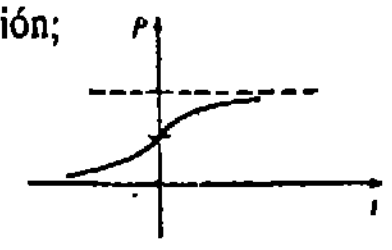
$f(1)=e^{-1}$ es un máx. abs.

53.



$f(e^{-1})=-e^{-1}$ es un mín. abs.

59. $P(t)>0$ para todo t; (0, 1) es un punto de inflexión;



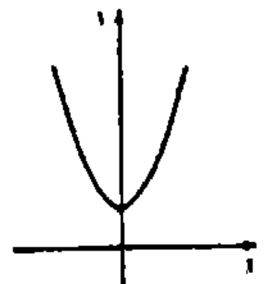
61. 88.22 cm; 9.95 cm/año; $\frac{1}{4}$ año

63.

$f(n)$
2.7048138
2.7169238
2.7181459
2.7182546
2.7182818

65. 1.3863

69.



$\frac{dy}{dx}=\begin{cases} e^x & x>0 \\ -e^{-x}, & x<0 \end{cases}$; no

71. $y=5e^x$

Ejercicios 8.3, página 428

1. $\frac{1}{3}\ln|x|+C$ 3. $\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$
5. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$
7. $\frac{1}{2}\ln|x^2+4x-3|+C$
9. $x-\ln|x+1|+C$
11. $\frac{1}{2}x^2+4x+\ln|x+2|+C$
13. $\ln(\ln x)+C$ 15. $\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$
17. $\frac{3}{4}(1+\ln x)^{4/3}+C$ 19. $\frac{1}{10}e^{10x}+C$
21. $-\frac{1}{6}e^{-2x^3}+C$ 23. $2e^{\sqrt{x}}+C$
25. $-\frac{1}{4}e^{-2x^2+4}+C$
27. $x+3e^x+\frac{3}{2}e^{2x}+\frac{1}{3}e^{3x}+C$
29. $-e^{-t}+t+C$
31. $\frac{1}{3}e^{3x}+2e^{-x}-\frac{1}{5}e^{-5x}+C$
33. $\ln(e^x+e^{-x})+C$
35. $e^x-\ln(e^x+1)+C$ 37. $\frac{1}{2}\ln 9$
39. 0 41. $-\frac{1}{5}\ln|\cos 5x|+C$
43. $\theta+2\ln|\sec\theta+\tan\theta|+\tan\theta+C$
45. $2\ln 8$ 47. $\frac{40}{9}-2\ln 3$
49. $\frac{1}{2}(1-e^{-4})$
51. $e-e^{-1}-2$ no es área; el área es $e+e^{-1}-2$.
53. $\frac{\pi}{2}(e^4-1)$ 55. $\pi(1-e^{-1})$ 57. $\frac{3}{4}$
59. C_1x^4, donde C_1 es una constante arbitraria; $C_1(x+1)^{-2}e^x$ donde C_1 es una constante arbitraria
61. 0.744; 6; 58 67. 1
71. $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$

Ejercicios 8.4, página 437

1. $e^{\pi\ln 2}$; 8.8 3. $e^{e\ln 10}$; 522
5. $e^{-\sqrt{5}\ln 7}$; 0.01 7. $4^x\ln 4$
9. $-2(10^{-2x})\ln 10$ 11. $2x20^{x^2}\ln 20$
13. 0 15. $x^2 2^x\ln 2+2x2^x$
17. $\sqrt{5}x^{\sqrt{5}-1}$ 19. $(\operatorname{sen}2)x^{(\operatorname{sen}2)-1}$
21. $(t^4+3t^2)^{(\ln 4)-1}(4t^3+6t)\ln 4$
23. $4^x(\ln 4+e^x\ln 4-e^x)/(1+e^x)^2$
25. $\frac{1}{2}5^{x/2}\ln 5$ 27. $-(\ln x)^{-1-1/e}/ex$
29. $1/(x\ln 4)$
31. $\ln x/(x\ln 10)+(\log_{10}x)/x$
33. $6x^\pi/(6x-4)\ln 3+\pi x^{\pi-1}\log_3|6x-4|$
35. $3^{x^3+1}/x\ln 3+x^2 3^{x^3+1}(\ln 3)(\log_3 x^3)$
37. $9^x(\ln 9)^2$ 39. $8e(e-1)(e-2)(2x)^{e-3}$
41. $y/(2^y\ln 2-x)$ 43. $1/(x+xe^y)\ln 10$
45. $7^x/\ln 7+C$ 47. $3(10^{x/3})/\ln 10+C$
49. $(10^{-2}-10^{-3})/\ln 10$
51. $x^{\sqrt{3}+1}/(\sqrt{3}+1)+\sqrt{3}^x/\ln\sqrt{3}+C$
53. $(1+2^t)^{21}/(21\ln 2)+C$
55. $(2^e-2^{e^{-1}})/\ln 2$
57. $\tan\theta+2^{1+\tan\theta}/\ln 2+2^{-1+2\tan\theta}/\ln 2+C$
59. $[\ln(1+5^x)]/\ln 5+C$ 61. $64\ln 4$
63. $255/(16\ln 2)$

Ejercicios 8.5, página 440

1.

$(e^{\Delta x}-1)/\Delta x$
1.0517092
1.0050167
1.0005000
1.0000500
0.9999500

Ejercicios 8.6, página 442

1. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(2x+1)(3x+2)}{4x+3}}\cdot\left[\frac{2}{2x+1}+\frac{3}{3x+2}-\frac{4}{4x+3}\right]$
3. $\frac{(x^3-1)^5(x^4+3x^3)^4}{(7x+5)^9}\cdot\left[\frac{15x^2}{x^3-1}+\frac{16x^3+36x^2}{x^4+3x^3}-\frac{63}{7x+5}\right]$
5. $\frac{x^{2/3}}{\sqrt{(x^2+2x+3)(2x^4+x^2+1)}}\cdot\left[\frac{2}{3x}-\frac{x+1}{x^2+2x+3}-\frac{4x^3+x}{2x^4+x^2+1}\right]$
7. $(x^2+4)^{2x}\left[\frac{4x^2}{x^2+4}+2\ln(x^2+4)\right]$

9. $x^x 2^x[1+\ln 2+\ln x]$
11. $x(x-1)^x\left[\frac{1}{x}+\frac{x}{x-1}+\ln(x-1)\right]$
13. $(x^6+x^4)^{\ln x}\left[\frac{(6x^2+4)\ln x}{x^3+x}+\frac{\ln(x^6+x^4)}{x}\right]$
15. $(\ln x)^x\left[\frac{1}{\ln x}+\ln(\ln x)\right]$
17. $x^{\cos x}\left[\frac{\cos x}{x}-(\operatorname{sen}x)\ln x\right]$
19. $x^{e^x}\left[\frac{e^x}{x}+e^x\ln x\right]$ 21. $y=3x-2$
23. $2x^{2x}\left[2(1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right]$
25. $vu^{v-1}\frac{du}{dx}+(u^v\ln u)\frac{dv}{dx}$

Ejercicios 8.7, página 447

1. $y^{-2}=2x^{-1}+C$ 3. $y=Cx-1$
5. $-3e^{-2y}=2e^{3x}+C$
7. $(2y+3)^{-1}=(8x+10)^{-1}+C$
9. $4\cos y=2x+\operatorname{sen}2x+C$
11. Aproximadamente 7.9 años; 10 años
13. $A(t)=100e^{-0.0051t}$; 88.5 miligramos
15. Aproximadamente 24,180 años
17. \$6665.45; 12; \$6651.82
19. Aproximadamente 64.5 grados
21. $i(t)=\frac{6}{5}-\frac{6}{5}e^{-20t}$
25. $v(t)=\frac{mg}{k}+\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)e^{-kt/m}$. $v\to mg/k$ cuando $t\to\infty$;
$s(t)=\frac{mg}{k}t-\frac{m}{k}\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)e^{-kt/m}+\frac{m}{k}\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)+s_0$
25. $2h^{1/2}=-\frac{t}{25}+4\sqrt{5}$; $100\sqrt{5}$ s
27. $v^2=2k/y-2k/R+v_0^2$

Ejercicios 8.8, página 456

1. $\operatorname{senh}x=-\frac{1}{2}$, $\cosh x=\sqrt{5}/2$, $\tanh x=-\sqrt{5}/5$, $\coth x=-\sqrt{5}$, $\operatorname{sech}x=2\sqrt{5}/5$, $\operatorname{csch}x=-2$
3. $10\operatorname{senh}10x$ 5. $\frac{1}{2}x^{-1/2}\operatorname{sech}^2\sqrt{x}$
7. $-6(3x-1)\operatorname{sech}(3x-1)^2\tanh(3x-1)^2$
9. $-3\operatorname{senh}3x\operatorname{csch}^2(\cosh 3x)$
11. $3\operatorname{senh}2x\operatorname{senh}3x+2\cosh 2x\cosh 3x$
13. $2x^2\operatorname{senh}x^2+\cosh x^2$
15. $3\operatorname{senh}^2x\cosh x$
17. $\frac{2}{3}(x-\cosh x)^{1/3}(1-\operatorname{senh}x)$

19. $4 \tanh 4x$ 21. $(e^x + 1)/(1 + \cosh x)^2$
23. $e^{\operatorname{senh} t}\cosh t$
25. $\dfrac{1 + \operatorname{senh} 2t - 2\sqrt{1 - t^2}\operatorname{sen}^{-1}t \cosh 2t}{\sqrt{1 - t^2}(1 + \operatorname{senh} 2t)^2}$
27. $y = 3x$ 29. $\frac{1}{8}\cosh 8x + C$
31. $\frac{1}{5}\operatorname{senh}(5x - 4) + C$
33. $\frac{1}{3}\tanh x^3 + C$ 35. $-3\operatorname{csch}\sqrt[3]{x} + C$
37. $\frac{1}{3}\cosh^3 x + C$
39. $\frac{1}{5}\ln(7 + \cosh 5x) + C$
41. $-\frac{1}{3}e^{-\cosh 3x} + C$ 43. $\frac{1}{7}\operatorname{senh}^7 x + C$
45. $\operatorname{senh} e^x + C$ 47. $2\operatorname{senh} 1$
49. $\operatorname{senh} 3 + \operatorname{senh} 1 - 4$ 51. $\pi(\cosh 3 - 1)$
65. $x/2 + 1/2x,\ x > 0;\ x/2 - 1/2x,\ x > 0$

Ejercicios 8.9, página 464

1. $3/\sqrt{9x^2 + 1}$ 3. $-2x/[1 - (1 - x^2)^2]$
5. $\sec x$ 7. $3x^3/\sqrt{x^6 + 1} + \operatorname{senh}^{-1}x^3$
9. $-1/x^2\sqrt{1 - x^2} - (\operatorname{sech}^{-1}x)/x^2$
11. $-1/(x\sqrt{1 - x^2}\operatorname{sech}^{-1}x)$
13. $3(\cosh^{-1}6x)^{-1/2}/\sqrt{36x^2 - 1}$
15. $(x + 1)/\sqrt{x^2 - 1}$
17. $\operatorname{senh} x/\sqrt{\cosh^2 x + 1}$ 19. $\frac{1}{2}\operatorname{senh}^{-1}2x + C$
21. $\begin{cases} \frac{1}{2}\tanh^{-1}2x + C, & |x| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\coth^{-1}2x + C, & |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$
o bien $\frac{1}{4}\ln\left|\dfrac{1 + 2x}{1 - 2x}\right| + C, \quad 2x \neq 1$
23. $\frac{1}{3}\cosh^{-1}\frac{3}{4}x + C;\ 3x > 4$
25. $\frac{1}{2}\operatorname{senh}^{-1}x^2 + C$
27. $\begin{cases} -\tanh^{-1}(x + 1) + C, & |x + 1| < 1 \\ -\coth^{-1}(x + 1) + C, & |x + 1| > 1 \end{cases}$
o bien $\frac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x + 2}{-x}\right| + C, \quad x + 1 \neq 1$
29. $\operatorname{senh}^{-1}(x + 2) + C$
31. $\cosh^{-1}e^x + C$
33. $\operatorname{senh}^{-1}(\operatorname{sen}\theta) + C$
35. $(t^2 + 16)^{1/2} + C$
37. Aproximadamente 2.6998
39. Aproximadamente 0.9730
41. Aproximadamente 0.9755
43. $y = (T/w)\cosh(wx/T) + 1 - T/w$
53. $\dfrac{1}{2}\ln|1 + x| - \dfrac{1}{2}\ln|1 - x| + C$
$= \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1 + x}{1 - x}\right| + C$

Examen • Capítulo 8, página 466

1. Verdadero 3. Falso 5. Falso
7. Verdadero 9. Falso 11. Falso
13. Verdadero 15. Falso 17. Verdadero
19. Verdadero 21. 3 23. $a - b$
25. 2 27. Diferenciación logarítmica
29. Catenaria 31. $1/x + 2/(4x - 1)$
33. $\cos(e^x\ln x)(e^x/x + e^x\ln x)$
35. $e^x + 2e^{2x}$ 37. $7x^6 + 7^x\ln 7$
39. $(x^2 + e^{2x})^{\ln x}\left[\dfrac{(2x + 2e^{2x})\ln x}{x^2 + e^{2x}} + \dfrac{\ln(x^2 + e^{2x})}{x}\right]$
41. $(e^x - y^2)/(2xy + e^y)$
43. $3x^2e^{x^3}\cosh e^{x^3}$
45. $\operatorname{senh}(\cosh x)\operatorname{senh} x$
47. $1/(\sqrt{1 - x^2}\sqrt{(\operatorname{sen}^{-1}x)^2 + 1})$
49. $-\frac{1}{10}\ln|1 - 5x^2| + C$
51. $\frac{1}{2}\ln|x(x + 2)| + C$
53. $x^{e+1}/(e + 1) + C$
55. $\frac{1}{4}\ln|\operatorname{sen} 4x| + C$ 57. $(1 - e^{-3})/3$
59. $(24)^t/\ln 24 + C$ 61. $-\cosh(1/x) + C$
63. $-\frac{1}{9}(\operatorname{senh} 3x)^{-3} + C$ 65. $\frac{1}{3}\operatorname{senh}^{-1}3$
67. $1225\pi/72$ 69. $y = C\cos x$
71. Aproximadamente 55,800 años

Ejercicios 9.1, página 473

1. $\frac{1}{5}(x + 1)^5 - \frac{1}{4}(x + 1)^4 + C$
3. $\frac{4}{5}(x - 5)^{5/2} + \frac{22}{3}(x - 5)^{3/2} + C$
5. $\frac{2}{3}(x - 1)^{3/2} + 2(x - 1)^{1/2} + C$
7. $\frac{2}{9}(3x - 4)^{1/2} - \frac{26}{9}(3x - 4)^{-1/2} + C$
9. $2\sqrt{x} - 2\tan^{-1}\sqrt{x} + C$
11. $t - 8\sqrt{t} + 8\ln(\sqrt{t} + 1) + C$
13. $\frac{3}{10}(x^2 + 1)^{5/3} - \frac{3}{4}(x^2 + 1)^{2/3} + C$
15. $-(x - 1)^{-1} - (x - 1)^{-2} - \frac{1}{3}(x - 1)^{-3} + C$
17. $2x^{1/2} + 3x^{1/3} + 6x^{1/6} + 6\ln|x^{1/6} - 1| + C$
19. $2\sqrt{e^x - 1} - 2\tan^{-1}\sqrt{e^x - 1} + C$
21. $-\frac{4}{3}(1 - \sqrt{v})^{3/2} + \frac{4}{5}(1 - \sqrt{v})^{5/2} + C$
23. $\ln|x^2 + 2x + 5| + \dfrac{5}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{x + 1}{2}\right) + C$
25. $-2\sqrt{16 - 6x - x^2} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{x + 3}{5}\right) + C$
27. $\frac{506}{375}$ 29. $6 + 20\ln\frac{11}{14}$ 31. $\frac{177}{2}$
33. $\frac{1}{1326}$ 35. $3 + 3\ln\frac{2}{3}$
37. $-\frac{3}{2} + 3\ln 2$ 39. $32\pi/3 - 4\pi\ln 3$

Ejercicios 9.2, página 479

1. $\frac{2}{3}x(x + 3)^{3/2} - \frac{4}{15}(x + 3)^{5/2} + C$
3. $x\ln 4x - x + C$
5. $(x^2/2)\ln 2x - x^2/4 + C$
7. $-x^{-1}\ln x - x^{-1} + C$
9. $t(\ln t)^2 - 2t\ln t + 2t + C$ 11. $\frac{3}{2}\ln 3$
13. $\pi/4 - \frac{1}{2}\ln 2$
15. $x\operatorname{sen}^{-1}x + (1 - x^2)^{1/2} + C$
17. $\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$
19. $\frac{1}{2}e^{x^2}(x^2 - 1) + C$
21. $-12e^{-2} + 8e^{-1}$
23. $\frac{1}{8}t\operatorname{sen} 8t + \frac{1}{64}\cos 8t + C$
25. $-x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x + 2\cos x + C$
27. $\frac{1}{17}e^x[\operatorname{sen} 4x - 4\cos 4x] + C$
29. $\theta\sec\theta - \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$
31. $\frac{1}{3}\cos x\cos 2x + \frac{2}{3}\operatorname{sen} x\operatorname{sen} 2x + C$
33. $\frac{1}{3}x^2(x^2 + 1)^{3/2} - \frac{2}{15}(x^2 + 1)^{5/2} + C$
35. $\frac{1}{2}x[\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$
37. $-\frac{1}{2}\csc x\cot x + \frac{1}{2}\ln|\csc x - \cot x| + C$
39. $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C$
41. $5\tan^{-1}2 - 2$ 43. $\frac{1}{2}(\operatorname{sen}^{-1}x)^2 + C$
45. $3\ln 3 + e^{-1}$
47. $5\pi(\ln 5)^2 - 10\pi\ln 5 + 8\pi$ 49. $2\pi^2$
55. $-\frac{1}{3}\operatorname{sen}^2 x\cos x - \frac{2}{3}\cos x + C$

Ejercicios 9.3, página 485

1. $\operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$
3. $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x - \frac{1}{6}\operatorname{sen}^6 x + C$ 5. $25\sqrt{2}/168$
7. $\frac{1}{60}$ 9. $\frac{3}{8}t - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4t + C$
11. $\frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2x + C$
13. $\frac{3}{128}x - \frac{1}{128}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{1024}\operatorname{sen} 8x + C$
15. $\sqrt{3} - \pi/3$
17. $\frac{1}{12}\tan^6 2t + \frac{1}{8}\tan^4 2t + C$
19. $\tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C$
21. $-\frac{1}{11}\cot^{11}x - \frac{1}{3}\cot^{13}x + C$
23. $\frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x - \ln|\cos x| + C$
25. $\frac{2}{3}\sec^{3/2}x + 2\sec^{-1/2}x + C$
27. $\frac{1}{4}\sec^3 x\tan x - \frac{1}{8}\sec x\tan x -$
$\frac{1}{8}\ln|\sec x + \tan x| + C$
29. $\ln|\operatorname{sen} x| + \frac{1}{2}\cos^2 x + C$
31. $\frac{1}{7}\tan^{-7}(1 - t) + \frac{1}{5}\tan^{-5}(1 - t) + C$
33. $\pi^2/12 + \sqrt{3}\pi/16$
35. $-\frac{1}{6}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos x + C$
37. $\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{12}\operatorname{sen} 6x + C$ 39. $\frac{5}{12}$

Ejercicios 9.4, página 492

1. $-\operatorname{sen}^{-1}x - \sqrt{1 - x^2}/x + C$
3. $\ln|x/6 + \sqrt{x^2 - 36}/6| + C$
5. $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + 4} + 2\ln|\sqrt{x^2 + 4}/2 + x/2| + C$
7. $-\frac{1}{3}(1 - x^2)^{3/2} + \frac{1}{5}(1 - x^2)^{5/2} + C$
9. $-x/4\sqrt{x^2 - 4} + C$ 11. $\frac{1}{3}(x^2 + 7)^{3/2} + C$
13. $\operatorname{sen}^{-1}(x/5) + C$
15. $\frac{1}{4}\ln|4/x - \sqrt{16 - x^2}/x| + C$
17. $\ln|\sqrt{x^2 + 1}/x - 1/x| + C$
19. $-(1 - x^2)^{3/2}/3x^3 + C$
21. $x/\sqrt{9 - x^2} - \operatorname{sen}^{-1}(x/3) + C$
23. $\frac{1}{2}\tan^{-1}x + x/[2(1 + x^2)] + C$
25. $x/[16\sqrt{4 + x^2}] - x^3/[48(4 + x^2)^{3/2}] + C$
27. $\ln|\sqrt{x^2 + 2x + 10}/3 + (x + 1)/3| + C$
29. $\frac{1}{16}\tan^{-1}[(x + 3)/2] +$
$(x + 3)/[8(x^2 + 6x + 13)] + C$
31. $-(5x + 1)/[9\sqrt{5 - 4x - x^2}] + C$
33. $\ln|x^2 + 4x + 13| + C$
35. $x - 4\tan^{-1}(x/4) + C$
37. $\sqrt{3} + 2\pi/3$ 39. $\sqrt{2}/50$
41. $(\sqrt{3}/3)\ln\left(\dfrac{\sqrt{2} - 1}{2 - \sqrt{3}}\right)$
43. $(\sqrt{3}\pi/9)(\sqrt{3} - 1 - \pi/12)$
45. $2 - \sqrt{2} - \ln(\sqrt{6} - \sqrt{3})$
47. $-\sqrt{9 + x^2}/9x + C$ 51. $2a\pi^2r^2$

Ejercicios 9.5, página 501

1. $-\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x - 2| + C$
3. $-2\ln|x| + \frac{5}{2}\ln|2x - 1| + C$
5. $-\frac{1}{6}\ln|x + 3| + \frac{1}{6}\ln|x - 3| + C$
7. $\frac{5}{8}\ln|x - 4| + \frac{3}{8}\ln|x + 4| + C$
9. $-\frac{1}{2}\ln|x + 3| + \frac{1}{2}\ln|x + 1| + C$
11. $-\frac{1}{6}\ln|2x + 1| + \frac{2}{3}\ln|x + 2| + C$
13. $6\ln|x| - \frac{7}{2}\ln|x + 1| - \frac{3}{2}\ln|x - 1| + C$
15. $\frac{1}{2}\ln|x + 1| - \ln|x + 2| + \frac{1}{2}\ln|x + 3| + C$
17. $-2\ln|t| - t^{-1} + 6\ln|t - 1| + C$
19. $\ln|x| - \ln|x + 1| + (x + 1)^{-1} + C$
21. $-\frac{1}{3}(x - 3)^{-3} + C$
23. $-2(x + 1)^{-1} + \frac{3}{2}(x + 1)^{-2} + C$
25. $-\frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-1} + C$
27. $-\frac{1}{32}\ln|x + 1| - \frac{1}{16}(x + 1)^{-1} + \frac{1}{32}\ln|x + 5| -$
$\frac{1}{16}(x + 5)^{-1} + C$

29. $-\frac{19}{16}\ln|x| - \frac{19}{8}x^{-1} + \frac{11}{8}x^{-2} - \frac{3}{2}x^{-3} + \frac{35}{16}\ln|x+2| + C$
31. $\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 6x - 10\ln|x+1| - 8(x+1)^{-1} + C$
33. $-\frac{1}{2}\ln 3$ 35. $2\ln\frac{5}{3} - \frac{14}{15}$
37. $\frac{1}{4}\ln\frac{15}{7}$ 39. $8\pi\ln\frac{2}{3} + 11\pi/3$
41. $8\pi\ln 2 - 4\pi$
43. $\frac{1}{4}\ln(1+\sqrt{1-x^2}) + \frac{1}{4}(1+\sqrt{1-x^2})^{-1} - \frac{1}{4}\ln|1-\sqrt{1-x^2}| - \frac{1}{4}(1-\sqrt{1-x^2})^{-1} + C$
45. $\ln|1+\operatorname{sen}x| - \ln|2+\operatorname{sen}x| + C$
47. $\frac{1}{3}\tan^{-1}x - \frac{1}{6}\tan^{-1}(x/2) + C$
49. $\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| - \frac{1}{2}\ln|x^2+6x+10| - 2\tan^{-1}(x+3) + C$
51. $-\ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \tan^{-1}x + C$
53. $\frac{1}{6}\ln|x-3| - \frac{1}{12}\ln(x^2+9) + \frac{1}{2}\tan^{-1}(x/3) + C$
55. $\frac{1}{2}(x+1)^{-1} + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C$
57. $-\frac{1}{4}\ln|t+1| + \frac{1}{4}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\tan^{-1}t + C$
59. $\frac{1}{16}\tan^{-1}(x/2) + (x-8)/[8(x^2+4)] + C$
61. $5\ln|x+1| - \ln|x^2+2x+2| - 7\tan^{-1}(x+1) + C$
63. $\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x^2+x+1| - (\sqrt{3}/3)\tan^{-1}[(2x+1)/\sqrt{3}] + C$
65. $-x^{-1} - \frac{3}{2}\tan^{-1}x - x/[2(x^2+1)] + C$
67. $\frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{11}{16}\tan^{-1}(x/2) + (12+5x)/[8(x^2+4)] + C$
69. $-\frac{1}{4}(4x^2+5)^{-1} + C$
71. $\frac{3}{4}\ln|x| - \frac{3}{8}\ln|x^2+2x+2| - 3\tan^{-1}(x+1) - (9x+8)/[4(x^2+2x+2)] + C$
73. $\frac{1}{6}\ln\frac{8}{3} + (\sqrt{2}/6)\tan^{-1}(\sqrt{2}/2)$ 75. 0
77. $\ln 9 - \frac{1}{2}\ln 17$
79. $\pi^2/2 - \pi$
81. $3(x+1)^{1/3} + \ln|(x+1)^{1/3} - 1| - \frac{1}{2}\ln|(x+1)^{2/3} + (x+1)^{1/3} + 1| - \sqrt{3}\tan^{-1}\{[2(x+1)^{1/3}+1]/\sqrt{3}\} + C$

Ejercicios 9.6, página 504

1. $\ln\left|1+2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$
3. $(2\sqrt{3}/3)\tan^{-1}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right] + C$
5. $-\tan(x/2) + 2\tan[\tan^{-1}(x/2)] + C$
7. $\frac{1}{2}\ln|\tan(x/2)| - \frac{1}{4}\tan^2(x/2) + C$
9. $-\tan(x/2) + \ln\left|\frac{1+\tan(x/2)}{1-\tan(x/2)}\right| + C$
11. $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{3}$
13. $-2/[1+\tan(x/2)] + C$; $\tan x - \sec x + C$

Ejercicios 9.7, página 504

1. $(\pi/8)[3\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2}+1)]$
3. $\pi/4 - \frac{1}{2}\ln 2$ 5. $\frac{1}{5}\ln\frac{4}{9}$
7. $s(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-t}\operatorname{sen}t - \frac{1}{2}e^{-t}\cos t$
9. Aproximadamente 31.8 pie-lb
11. Aproximadamente 49.01 lb 13. $\bar{x} = 3\sqrt{5}/5$
15. $\bar{x} = 1, \bar{y} = \pi/8$
17. $(1/\ln(2+\sqrt{3}), \pi/[6\ln(2+\sqrt{3})])$
19. $aP_0/[bP_0 + (a-bP_0)e^{-at}]$
21. $x = 10\ln(10/y + \sqrt{100-y^2}/y) - \sqrt{100-y^2}$

Ejercicios 9.8, página 507

1. $-\sqrt{9+x^2}/9x + C$
3. $\sqrt{x^2-5} - \sqrt{5}\cos^{-1}(\sqrt{5}/x) + C$
5. $1/(16+20x) - \frac{1}{16}\ln|(4+5x)/x| + C$
7. $\frac{1}{7}t^2(1+2t)^{3/2} - \frac{2}{105}(3t-1)(1+2t)^{3/2} + C$
9. $-(3-x) + 9/(3-x) + 6\ln|3-x| + C$
11. $\frac{1}{4}\tan^4\theta - \frac{1}{2}\tan^2\theta - \ln|\cos\theta| + C$
13. $x\ln(x^2+16) - 2x + 8\tan^{-1}(x/4) + C$
15. $-\frac{1}{2}\tan[(\pi/4) - x] + C$
17. $-\sqrt{2x-x^2} + \cos^{-1}(1-x) + C$
19. $63\pi/512$

Examen • Capítulo 9, página 508

1. Verdadero 3. Verdadero 5. Verdadero
7. Falso 9. Falso
11. $2\sqrt{x} - 18\ln(\sqrt{x}+9) + C$
13. $(x^2+4)^{1/2} + C$
15. $\frac{3}{256}\tan^{-1}(x/2) + x/[32(x^2+4)] + x/[32(x^2+4)^2] - x^3/[128(x^2+4)^2] + C$
17. $x - 4x^{-1} + C$
19. $\frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{5}{2}\tan^{-1}(x/2) + C$
21. $(\ln x)^{10}/10 + C$
23. $(t^2/2)\operatorname{sen}^{-1}t - \frac{1}{4}\operatorname{sen}^{-1}t + \frac{1}{4}t\sqrt{1-t^2} + C$
25. $\frac{1}{5}(x+1)^5 - \frac{3}{4}(x+1)^4 + C$
27. $x\ln(x^2+4) - 2x + 4\tan^{-1}(x/2) + C$
29. $-\frac{2}{125}\ln|x| - \frac{1}{25}x^{-1} + \frac{2}{125}\ln|x+5| - \frac{1}{25}(x+5)^{-1} + C$

31. $-\frac{1}{12}\ln|x+3| - \frac{1}{2}(x+3)^{-1} + \frac{1}{12}\ln|x-3| + C$
33. $\tan t - t + C$
35. $\frac{1}{13}\tan^{13}x + \frac{1}{11}\tan^{11}x + C$
37. $y\operatorname{sen}y + \cos y + C$
39. $\operatorname{sen}t - \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 t + C$
41. $\frac{1}{6}(1+e^w)^6 + C$
43. $-\frac{1}{8}\csc^2 4x - \frac{1}{4}\ln|\operatorname{sen}4x| + C$ 45. $\frac{1}{4}$
47. $\sec x - \tan x + x + C$
49. $\frac{5}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3$
51. $(e^x/10)[\cos 3x + 3\operatorname{sen}3x] + C$
53. $\frac{1}{2}t\cos(\ln t) + \frac{1}{2}t\operatorname{sen}(\ln t) + C$
55. $2\sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C$
57. $-\frac{2}{3}\cos^3 x + C$
59. $\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+5} + 2\ln|\sqrt{x^2+2x+5}/2 + (x+1)/2| + C$
61. $\frac{1}{7}\sec^7 x - \frac{2}{5}\sec^5 x + \frac{1}{3}\sec^3 x + C$
63. $\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C$
65. $\frac{5}{2}\ln(x^2+1) + \tan^{-1}x - \frac{1}{2}(x^2+1)^{-1} + C$
67. $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\operatorname{sen}2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C$
69. $\operatorname{sen}x\, e^{\operatorname{sen}x} - e^{\operatorname{sen}x} + C$ 71. $\sqrt{6} - 2$

Ejercicios 10.1, página 520

1. 0 3. 2 5. $\frac{1}{3}$ 7. 10
9. -6 11. $\frac{1}{2}$ 13. $\frac{7}{5}$ 15. $\frac{1}{6}$
17. No existe 19. $\frac{1}{2}$ 21. 0
23. 0 25. 5 27. No existe
29. -2 31. $-\frac{1}{8}$ 33. -1
35. No existe 37. $\frac{1}{9}$ 43. $-\frac{1}{2}$
45. 1 47. 1 49. 0 51. -4
53. $\frac{1}{4}$ 55. 1 57. e^3 59. 1
61. $\frac{1}{4}$ 63. 0 65. $\frac{1}{5}$ 67. 0
69. 1 71. $\frac{1}{24}$ 73. No existe
75. $e^{-1/3}$ 77. 1
79.

0.1	13,781
0.01	1.6×10^{43}

81. No existe; 0
83. 1 si $n = 1$; no existe si $n > 1$

Ejercicios 10.2, página 529

1. $\frac{1}{81}$ 3. Diverge 5. $\frac{1}{2}e^6$
7. Diverge 9. $\frac{1}{2}$ 11. 0
13. $-\frac{1}{18}$ 15. $3e^{-2}$ 17. 1
19. $\pi/2$ 21. $\frac{1}{2}$ 23. 4 25. $\ln 2$
27. $\frac{1}{4}\ln\frac{7}{3}$ 29. $\frac{1}{6}$
31. La integral $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ diverge; $\pi\int_1^\infty (1/x^2)\,dx = \pi$
33. 2.86×10^{10} joules 37. $1/s$, $s > 0$
39. $1/(s-1)$, $s > 1$
41. Diverge para $k \le 1$; converge para $k > 1$
43. Diverge para $k \ge 0$; converge para $k < 0$
45. Puesto que $\operatorname{sen}^2 x \le 1$, utilice $g(x) = 1/x^2$; la integral $\int_1^\infty (1/x^2)\,dx$ converge
47. En $[0, \infty)$, $1/(x+e^x) < 1/e^x = e^{-x}$; utilice $g(x) = e^{-x}$; la integral $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ converge
51. $c = \beta^{n+1}/n!$ 53. Diverge
55. 100 57. $2\sqrt{2}$ 59. Diverge
61. $-\frac{1}{4}$ 63. Diverge 65. Diverge
67. $-\frac{4}{3}$ 69. $\pi/4$ 71. $\pi/2$ 73. 4
75. $2\sqrt{3}$; la integral $\pi\int_{-2}^{1} dx/(x+2)$ diverge
77. $\frac{1}{2}\ln 2$
79. Diverge para $k \ge 1$; converge para $k < 1$
81. $\pi/2$ 83. π
85. Se acostumbra definir $f(0) = 1$. Por lo tanto no es integral impropia.

Examen • Capítulo 10, página 532

1. Falso 3. Falso 5. Falso
7. Verdadero 9. Verdadero 11. Verdadero
13. Verdadero 15. Falso 17. Falso
19. Falso 21. 0 23. $8\sqrt{3}\pi/9$
25. No existe 27. $\frac{4}{25}$ 29. -2
31. 1 33. e^{-1} 35. No existe
37. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{9}$ 39. 0 41. No existe
43. 0 45. No existe
47. $2 - 2e^{-1}$ 49. $\frac{2}{3}$
51. 2π; las áreas son infinitas 53. 5 años

Ejercicios 11.1, página 543

1. $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots$ 3. $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$
5. $3, -3, 3, -3, \ldots$

7. 10, 100, 1000, 10,000, . . .
9. $1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}, \ldots$
11. Elija $N > 1/\varepsilon$.
13. Elija $N > (1-\varepsilon)/\varepsilon$.
15. Elija $N > -(\ln \varepsilon)/\ln 10$. 17. 0
19. 0 21. $\frac{1}{2}$ 23. La sucesión diverge
25. La sucesión diverge 27. $\frac{1}{4}$ 29. 0
31. 0 33. La sucesión diverge 35. 0
37. $\frac{5}{7}$ 39. 1 41. 6 43. 1
45. 1 47. $\ln \frac{4}{3}$ 49. 0
51. $\{2n/(2n-1)\}$; converge a 1
53. $\frac{40}{9}$ pie; $15(\frac{2}{3})^n$
55. 15, 18, 18.6, 18.72, 18.74, 18.75, . . .
57. Use $a_n = 0$ y $c_n = 1/4^n$.
59. Use $a_n = 4$ y $c_n = 4 + 1/n$.
61. $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots$
63. $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots$
65.

34	55	89	144	233
21	34	55	89	144
55	89	144	233	377

69. $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}},\quad 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}}};$
1.5, 1.4, 1.4167, 1.4138, 1.4143, . . .; la sucesión parece converger a $\sqrt{2}$.

Ejercicios 11.2, página 548

1. Creciente 3. No monótona
5. Creciente 7. No creciente
9. Creciente 11. No monótona
13. Acotada y creciente
15. Acotada y creciente
17. Acotada y decreciente
19. Acotada y decreciente
21. Acotada y creciente
23. Acotada y decreciente 25. $\{(-1)^n\}$
27. La sucesión es creciente. También es acotada puesto que $0 \le \int_1^n e^{-t^2}\,dt \le \int_1^n e^{-t}\,dt < e^{-1}$.

Ejercicios 11.3, página 555

1. $3 + \frac{5}{2} + \frac{7}{3} + \frac{9}{4} + \cdots$
3. $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{20} + \cdots$
5. $1 + 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{6} + \cdots$
7. $2 + \frac{8}{3} + \frac{48}{15} + \frac{384}{105} + \cdots$
9. $-\frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \cdots$
11. Converge a $\frac{15}{4}$ 13. Converge a $\frac{2}{3}$
15. Diverge 17. Converge a 9000
19. Diverge 21. $\frac{2}{9}$ 23. $\frac{61}{99}$
25. 1 27. $\frac{1}{2}$ 29. $\frac{17}{6}$
31. Por el Teorema 11.7
33. Por el Teorema 11.7 35. Por el Teorema 11.7
37. La serie es un múltiplo constante de la serie armónica divergente y, por lo tanto, diverge por el Teorema 11.8.
39. Por el Teorema 11.10 41. $|x| < 2$
43. $-2 < x < 0$ 45. 75 pie
47. 1000 49. 18.75 miligramos
57. El argumento no es válido, ya que $1 + 2 + 4 + 8 \ldots$ es una serie divergente

Ejercicios 11.4, página 563

1. Converge 3. Diverge
5. Diverge 7. Converge
9. Converge 11. Diverge
13. Converge 15. Converge
17. Converge 19. Converge
21. Converge 23. Converge
25. Diverge 27. Converge
29. Diverge 31. Converge
33. Converge 35. Converge
37. Diverge 39. Diverge
41. Converge 43. Converge
45. Converge 47. Converge
49. Diverge 51. Diverge
53. $0 \le p < 1$ 55. p cualquier número real
57. Converge 59. Converge

Ejercicios 11.5, página 570

1. Converge 3. Diverge
5. Converge 7. Converge
9. Converge 11. Converge
13. Diverge 15. Condicionalmente convergente
17. Absolutamente convergente
19. Absolutamente convergente
21. Absolutamente convergente 23. Divergente
25. Condicionalmente convergente
27. Divergente
29. Condicionalmente convergente
31. Absolutamente convergente 33. 0.84147
39. Menor que $1/101 \approx 0.009901$

41. La serie contiene signos algebraicos mezclados, pero no es una serie alterna; converge
43. La serie no es alterna; converge
45. $a_{k+1} \le a_k$ no se satisface para k suficientemente grande; diverge.
47. Diverge; converge; converge; diverge
49. Si se suman ceros a la serie que da el valor $S/2$, no se altera su valor.

Ejercicios 11.6, página 574

1. $(-1, 1]$ 3. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 5. $[2, 4]$
7. $(-5, 15)$ 9. $\{0\}$ 11. $[0, \frac{2}{3}]$
13. $[-1, 1)$ 15. $(-16, 2)$ 17. $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$
19. $[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$ 21. $(-\infty, \infty)$
23. $x > 1$ o bien $x < -1$ 25. $x < -\frac{1}{2}$
27. $(-2, 2)$ 29. $x < 0$
31. $0 \le x < \pi/3$, $2\pi/3 < x < 4\pi/3$, $5\pi/3 < x \le 2\pi$ 33. $(-\infty, \infty)$ 35. $(-\frac{15}{4}, -\frac{9}{4})$

Ejercicios 11.7, página 578

1. $\sum_{k=0}^{\infty} x^k; (-1, 1)$ 3. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 3^k}{5^{k+1}} x^k; \left(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$
5. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)}{2} x^{k-2}; (-1, 1)$
7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k4^k} x^k; (-4, 4]$
9. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}; (-1, 1)$
11. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}; [-1, 1]$
13. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)(2k+3)} x^{2k+3}; [-1, 1]$
15. $(-3, 3]$ 17. 0.0953
19. 0.4854 21. 0.0088
25. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$ 27. 0.3678 29. 0.1973
31. Haga $x = 1$.

Ejercicios 11.8, página 586

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^{k+1}}$ 3. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}$
5. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ 7. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
9. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ 15. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{5^{k+1}} (x-4)^k$
17. $(\sqrt{2}/2) + (\sqrt{2}/2)(x - \pi/4) - (\sqrt{2}/2 \cdot 2!)(x - \pi/4)^2 - (\sqrt{2}/2 \cdot 3!)(x - \pi/4)^3 + \cdots$
19. $1/2 - (\sqrt{3}/2)(x - \pi/3) - (1/2 \cdot 2!)(x - \pi/3)^2 + (\sqrt{3}/2 \cdot 3!)(x - \pi/3)^3 + \cdots$
21. $\ln 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k2^k} (x-2)^k$
23. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e}{k!} (x-1)^k$
25. $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots$
27. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k}$ 29. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k+1}$
31. $-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}$
33. $1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{17}{45}x^6 + \cdots$
35. 0.71934; cuatro cifras decimales
37. 1.34983; cuatro cifras decimales
39. 0.3012 43. $0 + 0 + 0 + \cdots$
45. Iguale $\sec x = (R + y)/R$ con $1 + x^2/2$ y despeje y. De $L = Rx$, $y = Rx^2/2 = (Rx)^2/2R$ se transforma en $y = L^2/2R$. Para $L = 1$ milla, $y = 7.92$ pulgadas.

Ejercicios 11.9, página 590

1. $1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3^2 2!}x^2 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3^3 3!}x^3 + \cdots; 1$
3. $3 - \frac{3}{2 \cdot 9}x - \frac{3}{2^2 2! 9^2}x^2 - \frac{3(1 \cdot 3)}{2^3 3! 9^3}x^3 + \cdots; 9$
5. $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 2!}x^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 3!}x^6 + \cdots; 1$
7. $8 + \frac{8 \cdot 3}{2 \cdot 4}x + \frac{8 \cdot 3 \cdot 1}{2^2 2! 4^2}x^2 - \frac{8 \cdot 3 \cdot 1}{2^3 3! 4^3}x^3 + \cdots; 4$
9. $\frac{1}{4}x - \frac{2}{4 \cdot 2}x^2 + \frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 2^2 2!}x^3 - \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{4 \cdot 2^3 3!}x^4 + \cdots; 2$
11. $|S_2 - S| < a_3 = \frac{x^2}{9}$
13. $x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2^k k!(2k+1)} x^{2k+1}$
15. Desarrolle el integrando de $\int_0^{l/2} \sqrt{1 + (64d^2/l^4)x^2}\,dx$ en una serie binomial e integre término a término.
17. $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

19. $\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2^2}(x-1) - \frac{\sqrt{2}}{2^4 2!}(x-1)^2 + \frac{\sqrt{2}(1 \cdot 3)}{2^6 3!}(x-1)^3 + \cdots$

Examen • Capítulo 11, página 591

1. Falso 3. Verdadero 5. Verdadero
7. Falso 9. Verdadero 11. Falso
13. Verdadero 15. Falso 17. Falso
19. Falso 21. Verdadero 23. 20, 9, $\frac{4}{5}$, 16
25. 12 27. $-\pi/4$ 29. 4
31. Converge 33. Converge
35. Converge 37. Diverge
39. Diverge 41. $\frac{61{,}004}{201}$ 43. $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$
45. $\{-5\}$ 47. $\frac{4}{3}$
49. $1 - \frac{1}{3}x^5 + \frac{4}{3^2 2!}x^{10} + \cdots$
51. $x - \frac{2^2}{3!}x^3 + \frac{2^4}{5!}x^5 + \cdots$
53. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}(x - \pi/2)^{2k+1}$

Ejercicios 12.1, página 599

1. $(0, 0); (0, -\frac{1}{8}); y = \frac{1}{8}$
3. $(0, 0); (3, 0); x = -3$
5. $(0, 0); (-\frac{5}{2}, 0); x = \frac{5}{2}$
7. $(1, 0); (1, 1); y = -1$
9. $(4, 3); (\frac{9}{2}, 3); x = \frac{7}{2}$
11. $(4, -3); (4, -2); y = -4$
13. $(-2, 2); (-2, \frac{9}{4}); y = \frac{7}{4}$
15. $(-3, 3); (-2, 3); x = -4$
17. $(-2, -\frac{5}{8}); (-2, -\frac{7}{24}); y = -\frac{23}{24}$
19. $(\frac{13}{8}, -\frac{5}{2}); (\frac{9}{8}, -\frac{5}{2}); x = \frac{17}{8}$
21. $y = 4x^2$ 23. $(y-1)^2 = -12(x-1)$
25. $(y-4)^2 = -12(x-1)$
27. $(y-4)^2 = 10(x + \frac{5}{2})$
29. $y = x^2 + 2$ 31. $-x + 8y = 8$
33. $y = \frac{3}{500}x^2$; 5.4 m 39. $y = x^2 - 2x + 5$
41. $x^2 + y^2 + 2xy + 2x - 14y - 1 = 0$

Ejercicios 12.2, página 604

1. $(\pm 4, 0), (0, \pm 5); (0, \pm 3)$
3. $(\pm 1, 0), (0, \pm\sqrt{10}); (0, \pm 3)$
5. $(\pm 4, 0), (0, \pm 2\sqrt{2}); (\pm 2\sqrt{2}, 0)$
7. $(\pm\sqrt{7}, 0), (0, \pm 2); (\pm\sqrt{3}, 0)$
9. $(-4, 3), (6, 3), (1, -3), (1, 9); (1, 3 - \sqrt{11}), (1, 3 + \sqrt{11})$
11. $(-6, 2), (10, 2), (2, -4), (2, 8); (2 - 2\sqrt{7}, 2), (2 + 2\sqrt{7}, 2)$
13. $(-\frac{1}{2} - \sqrt{2}, 1), (-\frac{1}{2} + \sqrt{2}, 1), (-\frac{1}{2}, -1), (-\frac{1}{2}, 3); (-\frac{1}{2}, 1 - \sqrt{2}), (-\frac{1}{2}, 1 + \sqrt{2})$
15. $(-\sqrt{3}, 3), (\sqrt{3}, 3), (0, 0), (0, 6); (0, 3 - \sqrt{6}), (0, 3 + \sqrt{6})$
17. $(-6, -1), (4, -1), (-1, -4), (-1, 2); (-5, -1), (3, 1)$
19. $\left(4 - \frac{\sqrt{5}}{5}, 2\right), \left(4 + \frac{\sqrt{5}}{5}, 2\right), (4, 1), (4, 3); \left(4, 2 - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right), \left(4, 2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$
21. $x^2/25 + y^2/4 = 1$
23. $x^2/12 + y^2/16 = 1$
25. $(x+1)^2/16 + (y+2)^2/25 = 1$
27. $4x^2/31 + 4y^2/3 = 1$
29. $x^2/8 + y^2/2 = 1$ 31. $-\frac{18}{5}, \frac{18}{5}$
33. $20\sqrt{2}$ pie 39. $\frac{3}{5}$

Ejercicios 12.3, página 613

1. $(\pm 4, 0); (\pm 5, 0); y = \pm 3x/4$
3. $(0, \pm 3); (0, \pm 3\sqrt{2}); y = \pm x$
5. $(\pm 5, 0); (\pm\sqrt{29}, 0); y = \pm 2x/5$
7. $(0, \pm 4), (0, \pm 5); y = \pm 4x/3$
9. $(0, 2), (2, 2); (1 - \sqrt{2}, 2), (1 + \sqrt{2}, 2); y = x + 1, y = -x + 3$
11. $(4, -7), (4, 5); (4, -1 - 2\sqrt{10}), (4, -1 + 2\sqrt{10}); y = 3x - 13, y = -3x + 11$
13. $(-\frac{3}{2}, -\frac{4}{3}), (\frac{5}{2}, -\frac{4}{3}); (\frac{1}{2} - 2\sqrt{2}, -\frac{4}{3}), (\frac{1}{2} + 2\sqrt{2}, -\frac{4}{3}); 6x - 6y = 11, 6x + 6y = -5$
15. $(-2, 3), (-2, 7); (-2, 5 - \sqrt{29}), (-2, 5 + \sqrt{29}); -2x + 5y = 29, 2x + 5y = 21$
17. $(2 - \sqrt{3}, 1), (2 + \sqrt{3}, 1); (2 - \sqrt{6}, 1), (2 + \sqrt{6}, 1); y = x - 1, y = -x + 3$
19. $(-9, -1), (1, -1); (-4 - 5\sqrt{2}, -1), (-4 + 5\sqrt{2}, -1); y = x + 3, y = -x - 5$
21. $x^2/9 - y^2/16 = 1$
23. $(x-2)^2/25 - (y+7)^2/25 = 1$
25. $(y-2)^2/9 - (x-1)^2/7 = 1$
27. $y^2/16 - x^2/2 = 1$
29. $4x^2/9 - 4y^2/27 = 1$
31. $(2\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ 33. 12π
37. 3, 6, 9, 13, 16, 17, 19 39. 3

Ejercicios 12.4, página 619

1. $(2, -1)$ 3. $(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$

5. La gráfica de $y = |x|$ se traslada una unidad a la derecha y cuatro unidades hacia arriba.
7. La gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ se ha trasladado $\pi/2$ unidades a la izquierda.
9. La gráfica de $x^2 - y^2 = 4$ se ha trasladado una unidad a la izquierda y una unidad hacia arriba.
11. $(4\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$
13. $(-(1 + \sqrt{3})/2, (\sqrt{3} - 1)/2)$
15. $(-1, -7)$
17. Elipse girada 45°, $3X^2 + Y^2 = 8$
19. Parábola girada 45°, $Y^2 = 4\sqrt{2}X$
21. Elipse girada un ángulo $\theta \approx 26.6°$, $(X + \sqrt{5})^2/8 + Y^2/3 = 1$
23. $Y = X^2$; XY: $(0, \frac{1}{4})$; xy: $(-\frac{1}{8}, \sqrt{3}/8)$; $Y = -\frac{1}{4}$, $2x - 2\sqrt{3}y = 1$
27. Hipérbola 29. Parábola.

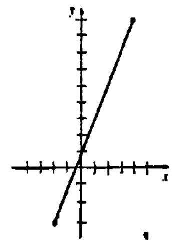
Examen • Capítulo 12, página 620

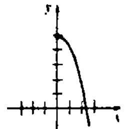
1. Verdadero 3. Verdadero 5. Verdadero
7. Verdadero 9. Falso 11. Falso
13. Falso 15. $(0, \frac{1}{8})$ 17. $(0, 2)$
19. $y = -5$ 21. 6
23. $(2, -1), (6, -1)$ 25. 10^8 m; 9×10^8 m

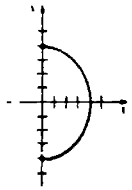
Ejercicios 13.1, página 628

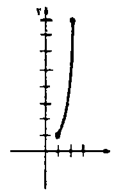
1.

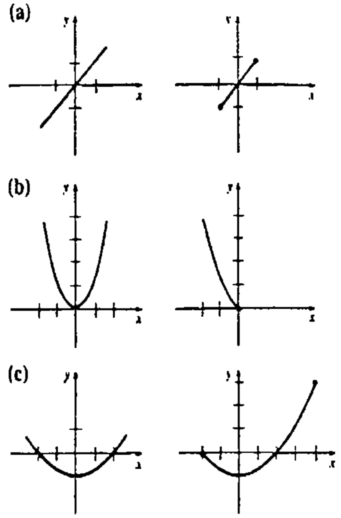
x	-5	-3	-1	1	3	5	7
y	6	2	0	0	2	6	12

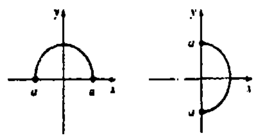
3.


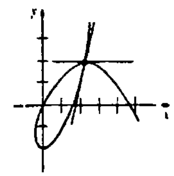
5.


7.


9.


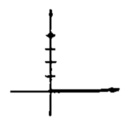
11. $y = x^2 + 3x - 1, x \geq 0$
13. $x = 1 - 2y^2, -1 \leq x \leq 1$
15. (a) (b) (c)


17. $x = \cosh t$, $y = \operatorname{senh} t$ es lo mismo que $x^2 - y^2 = 1$, $x \geq 1$
19.


21. $y = -2x - 1$ 23. $4x - 3y = -4$
25. $\sqrt{3}/4$ 27. $(2, 6), (-3, 7)$
29. $3t$, $1/(2t)$, $-1/(12t^3)$
31. $-2e^{3t} - 3e^{4t}, 6e^{4t} + 12e^{5t}, -24e^{5t} - 60e^{6t}$
33. $x = \pm\sqrt{r^2 - L^2\operatorname{sen}^2\phi}$, $y = L \operatorname{sen}\phi$
35. $x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$
37. $x = 2a\cot\theta$, $y = 2a\operatorname{sen}^2\theta$ 39. 52
41. $\sqrt{2}(e^{\pi} - 1)$
47. $(2, 2)$; $y = 2$ y $y = 3x - 4$;


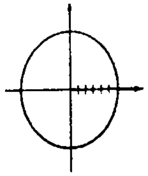
Ejercicios 13.2, página 635

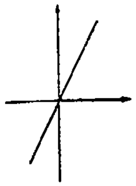
1.

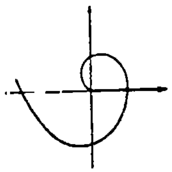

3.


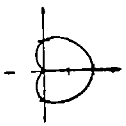
5. $(6, -5\pi/4)$; $(6, 11\pi/4)$; $(-6, 7\pi/4)$; $(-6, -\pi/4)$
7. $(2, -4\pi/3)$; $(2, 8\pi/3)$; $(-2, 5\pi/3)$; $(-2, -\pi/3)$
9. $(\frac{1}{2}, -\sqrt{3}/2)$ 11. $(-\frac{7}{2}, 7\sqrt{3}/2)$
13. $(3\sqrt{2}, -3\pi/4)$; $(-3\sqrt{2}, \pi/4)$
15. $(2, -\pi/6)$; $(-2, 5\pi/6)$
17. $r = 5 \csc\theta$ 19. $\theta = \tan^{-1}7$
21. $r = 2/(1 + \cos\theta)$ 23. $r = 6$
25. $r = 1 - \cos\theta$ 29. $x = 2$
31. $(x^2 + y^2)^3 = 144x^2y^2$
33. $(x^2 + y^2)^2 = 8xy$
35. $x^2 + y^2 + 5y = 0$
37. $8x^2 - 12x - y^2 + 4 = 0$
39. $3x + 8y = 5$ 43. $80/\sqrt{41}$ cm/s

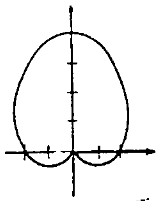
Ejercicios 13.3, página 641

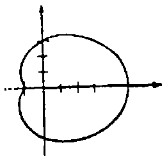
1.


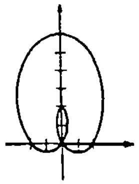
3.


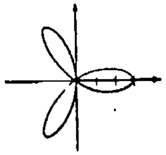
5.


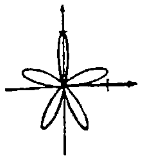
7.


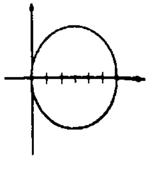
9.


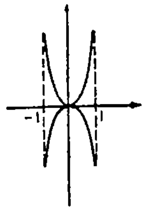
11.


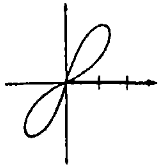
13.


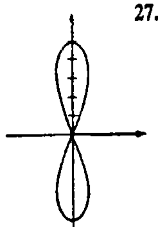
15.


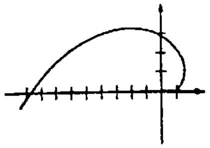
17.


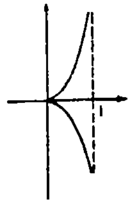
19.


21.


23.


25.


27.


29.


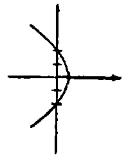
31. $-2/\pi$ 33. $\sqrt{3}/15$
35. $y = -x + 1$ 37. $(2, \pi/6)$, $(2, 5\pi/6)$
39. $(1, \pi/2)$, $(1, 3\pi/2)$, origen
41. $(3, \pi/12)$, $(3, 5\pi/12)$, $(3, 13\pi/12)$, $(3, 17\pi/12)$, $(3, -\pi/12)$, $(3, -5\pi/12)$, $(3, -13\pi/12)$, $(3, -17\pi/12)$
43. Simetría con respecto al eje x
45. Simetría con respecto al origen
47. Simetría con respecto al eje x

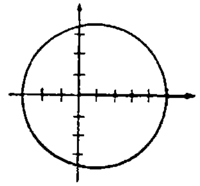
Ejercicios 13.4, página 647

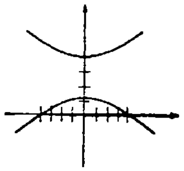
1. π 3. 24π 5. 11π 7. $9\pi/2$
9. π
11. $r^2 = 9\cos 2\theta$, no es no negativa en $[0, 2\pi]$; 9

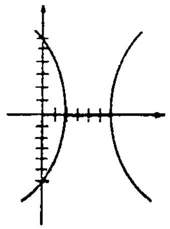
13. $9\pi^3/4$ 15. $\frac{1}{4}(e^{2\pi} - 1)$
17. $\frac{1}{8}(4 - \pi)$ 19. $\frac{1}{6}(2\pi + 3\sqrt{3})$
21. $\pi + 6\sqrt{3}$ 23. $10\sqrt{3} - 4\pi$
25. $\frac{1}{2}(4\pi + 3\sqrt{3})$ 27. $\sqrt{15} - \cos^{-1}(\frac{1}{4})$
29. $\sqrt{5}(e^2 - 1)$ 31. $\frac{1}{2}[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)]$
33. $A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_a^b r^2\frac{d\theta}{dt}\,dt$
$= \frac{1}{2}\int_a^b (L/m)\,dt = L(b - a)/2m$

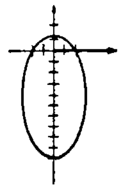
Ejercicios 13.5, página 652

1. $e = 1$, parábola


3. $e = \frac{1}{4}$, elipse


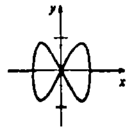
5. $e = 2$, hipérbola


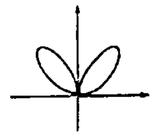
7. $e = 2$, hipérbola


9. $e = \frac{4}{5}$, elipse


11. $r = 3/(1 - \cos\theta)$
13. $r = 30/(2 + 5\,\text{sen}\,\theta)$
15. $r = 5/(1 + \text{sen}\,\theta)$
19. $r = 9600/(1 - 0.2\cos\theta)$

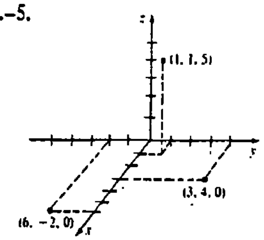
Examen • Capítulo 13, página 653

1. Falso 3. Verdadero 5. Verdadero
7. Falso 9. Verdadero 11. Verdadero
13. Falso 15. Verdadero 17. Verdadero
19. Falso 21. $3x + 3\sqrt{3}y = \pi$
23. $(4, 2)$, $(8, -26)$
25. $y^2 < 0$ para $|x| > 1$; $x = \text{sen}\,t$, $y = \text{sen}\,2t$; $(\sqrt{2}/2, 1)$, $(\sqrt{2}/2, -1)$, $(-\sqrt{2}/2, 1)$, $-\sqrt{2}/2, -1)$;


27. π
29. $x + y = 2\sqrt{2}$; $r = 2\sqrt{2}/(\cos\theta + \text{sen}\,\theta)$
31.


33. $4\pi/3 - \sqrt{3}$

Ejercicios 14.1, página 659

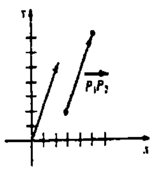
1.–5.


7. El conjunto $\{(x, y, 5) \mid x, y$ números reales$\}$ es un plano perpendicular al eje z, 5 unidades arriba del plano xy.
9. El conjunto $\{(2, 3, z) \mid z$ número real$\}$ es una recta perpendicular al plano xy en $(2, 3, 0)$.
11. $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$, $(2, 5, 0)$, $(0, 5, 0)$, $(0, 0, 8)$, $(2, 0, 8)$, $(2, 5, 8)$, $(0, 5, 8)$
13. $(-2, 5, 0)$, $(-2, 0, 4)$, $(0, 5, 4)$; $(-2, 5, -2)$; $(3, 5, 4)$
15. La unión de los planos coordenados
17. El punto $(-1, 2, -3)$
19. La unión de los planos $z = -5$ y $z = 5$
21. $\sqrt{70}$ 23. Triángulo rectángulo
25. Isósceles
27. $d(P_1, P_2) + d(P_1, P_3) = d(P_2, P_3)$

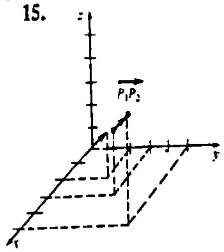
29. 6 o bien −2   31. $\langle 4, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\rangle$
33. $P_1(-4, -11, 10)$

Ejercicios 14.2, página 667

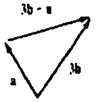
1. $6\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 18\mathbf{k}$; $\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$; $3\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$; $\sqrt{146}$; $3\sqrt{2}$
3. $\langle 12, 0, 6\rangle$; $\langle 4, -5, 5\rangle$; $\langle 4, 5, -1\rangle$; $\sqrt{66}$; $\sqrt{42}$
5. $3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$; $2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; $-2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; 3; 3
7. $\langle 6, -14, 12\rangle$; $\langle 2, 4, 4\rangle$
9. $4\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$; $-3\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
11. $\langle 20, 52, -16\rangle$; $\langle -2, 0, 64\rangle$
13.



15.



17. (b), (c), (e), (f)   19. $\langle 6, 15, -4\rangle$
21. $\langle \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\rangle$; $\langle -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\rangle$
23. $\langle \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3\rangle$
25. $\frac{3}{4}\mathbf{i} + \frac{7}{4}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{6}}{4}\mathbf{k}$
27. $\langle -3, -\frac{15}{2}, 15\rangle$
29.



31. $-(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ 35. Aproximadamente 31°

Ejercicios 14.3, página 676

1. $25\sqrt{2}$ 3. 12   5. −16
7. 48   9. 29   11. 25
13. $\langle -\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 2\rangle$ 15. (a) y (f), (c) y (d), (b) y (e)
17. $\langle \frac{4}{9}, -\frac{1}{3}, 1\rangle$ 19. 1.11 rad o 63.43°
21. 1.89 rad o 108.43°
23. $\frac{5}{7}$ 25. $-6\sqrt{11}/11$
27. $72\sqrt{109}/109$
29. $\langle -\frac{21}{5}, \frac{28}{5}\rangle$; $\langle -\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\rangle$
31. $\langle -\frac{12}{7}, \frac{6}{7}, \frac{4}{7}\rangle$; $\langle \frac{5}{7}, -\frac{20}{7}, \frac{45}{7}\rangle$ 33. $\langle \frac{72}{25}, \frac{96}{25}\rangle$
35. 1000 pie-lb   37. 0; 150 N · m
47. $\alpha = 74.5°$, $\beta = 57.69°$, $\gamma = 36.7°$
49. $\alpha = 60°$, $\beta = 90°$, $\gamma = 150°$

Ejercicios 14.4, página 684

1. $-5\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ 3. $\langle -12, -2, 6\rangle$
5. $-5\mathbf{i} + 7\mathbf{k}$ 7. $\langle -3, 2, 3\rangle$ 9. 0
11. $6\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ 13. $-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
15. $2\mathbf{k}$ 17. $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ 19. $-24\mathbf{k}$
21. $5\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$ 23. 0   25. $\sqrt{41}$
27. $-\mathbf{j}$ 29. 0   31. 6
33. $12\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 18\mathbf{k}$ 35. $-4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$
37. $-21\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + 22\mathbf{k}$ 39. −10
41. $\frac{1}{2}$ 43. $\frac{7}{2}$ 45. 10
47. 32; en el plano xy a 30° del eje x positivo hacia el eje y negativo; $16\sqrt{3}\mathbf{i} - 16\mathbf{j}$
49. **a**, **b**, y **c** son coplanares   55. No

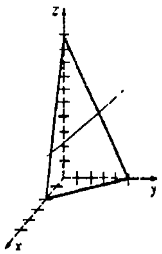
Ejercicios 14.5, página 690

1. $\langle x, y, z\rangle = \langle 1, 2, 1\rangle + t\langle 2, 3, -3\rangle$
3. $\langle x, y, z\rangle = \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\rangle + t\langle -2, 3, -\frac{3}{2}\rangle$
5. $x = 2 + 4t$, $y = 3 - 4t$, $z = 5 + 3t$
7. $x = 1 + 2t$, $y = -2t$, $z = -7t$
9. $\dfrac{x-1}{9} = \dfrac{y-4}{10} = \dfrac{z+9}{7}$
11. $\dfrac{x+7}{11} = \dfrac{z-5}{-4}$, $y = 2$
13. $x = 4 + 3t$, $y = 6 + \frac{1}{2}t$, $z = -7 - \frac{3}{2}t$; $\dfrac{x-4}{3} = 2y - 12 = \dfrac{2z+14}{-3}$
15. $x = 5t$, $y = 9t$, $z = 4t$; $\dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{9} = \dfrac{z}{4}$
17. $x = 6 + 2t$, $y = 4 - 3t$, $z = -2 + 6t$
19. Ambas rectas pasan por el origen y tienen vectores directores paralelos
21. $(0, 5, 15)$, $(5, 0, \frac{15}{2})$, $(10, -5, 0)$
23. $(2, 3, -5)$ 25. Las rectas no se cortan
27. 40.37°
29. $x = 4 - 6t$, $y = 1 + 3t$, $z = 6 + 3t$

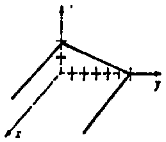
Ejercicios 14.6, página 697

1. $2x - 3y + 4z = 19$ 3. $5x - 3z = 51$
5. $6x + 8y - 4z = 11$
7. $5x - 3y + z = 2$ 9. $3x - 4y + z = 0$
11. Los puntos son colineales
13. $x + y - 4z = 25$ 15. $z = 12$
17. $-3x + y + 10z = 18$
19. $9x - 7y + 5z = 17$ 21. $6x - 2y + z = 12$
23. Ortogonales: (a) y (d), (b) y (c), (d) y (f), (b) y (e); paralelos: (a) y (f), (c) y (e)
25. (c) y (d)

25. (c) y (d)   27. $(-5, 5, 9)$
29. $x = 2 + t$, $y = \frac{1}{2} - t$, $z = t$
31. $x = 5 + t$, $y = 6 + 3t$, $z = -12 + t$
33. $3x - y - 2z = 10$
35.

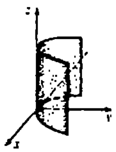


37.

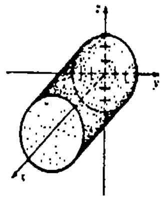


Ejercicios 14.7, página 709

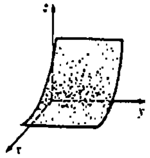
1.



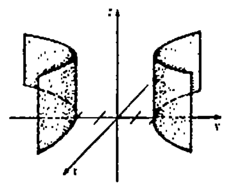
3.



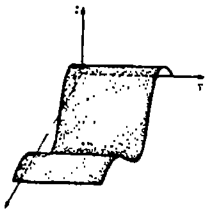
5.



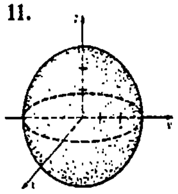
7.



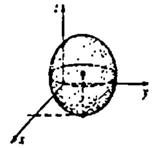
9.



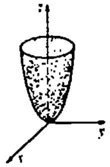
11.

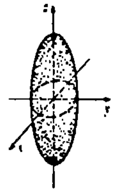


13.

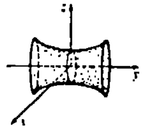


15. Centro $(-4, 3, 2)$; radio 6
17. Centro $(0, 0, 8)$; radio 8
19. $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 + (z - 6)^2 = 3$
21. $x^2 + (y - 4)^2 + z^2 = 4$ o bien $x^2 + (y - 8)^2 + z^2 = 4$
23. Paraboloide   25. Elipsoide

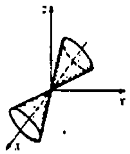


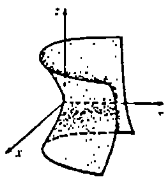


27. Hiperboloide de una hoja

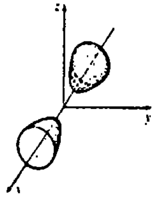


29. Cono elíptico   31. Paraboloide hiperbólico

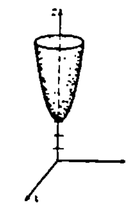




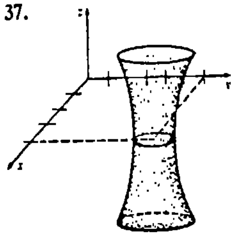
33. Hiperboloide de dos hojas



35.



37.



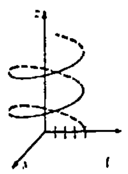
39. 23, eje z; 24, eje y; 26, eje z; 28, eje z; 32, eje z; 33, eje x.
41. $z = 2x^2 + 2y^2$

Examen • Capítulo 14, página 710

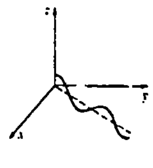
1. Verdadero 3. Falso 5. Verdadero
7. Verdadero 9. Verdadero 11. $9\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
13. $5\mathbf{i}$ 15. 14 17. $-6\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$
19. $(4, 7, 5)$ 21. $(5, 6, 3)$
23. $-36\sqrt{2}$ 25. 12, -8, y 6
27. $3\sqrt{10}/2$ 29. 2 unidades. 31. 2
33. $\frac{26}{9}\mathbf{i} + \frac{7}{9}\mathbf{j} + \frac{20}{9}\mathbf{k}$ 35. Cilindro elíptico
37. Hiperboloide de dos hojas
39. Paraboloide hiperbólico 41. Esfera; plano
43. $\dfrac{x-7}{4} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z+5}{6}$
45. Los vectores directos son ortogonales y el punto de intersección es $(3, -3, 0)$
47. $14x - 5y - 3z = 0$ 49. $30\sqrt{2}$ N · m
51. Aproximadamente 153 lb

Ejercicios 15.1, página 722

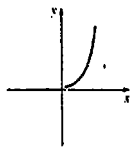
1.



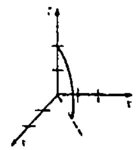
3.



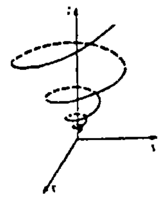
5.



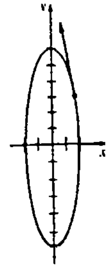
7.



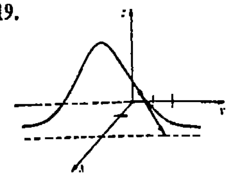
9.



11. $2\mathbf{i} - 32\mathbf{j}$
13. $(1/t)\mathbf{i} - (1/t^2)\mathbf{j}$; $-(1/t^2)\mathbf{i} + (2/t^3)\mathbf{j}$
15. $\langle e^{2t}(2t+1), 3t^2, 8t-1\rangle$; $\langle 4e^{2t}(t+1), 6t, 8\rangle$
17.



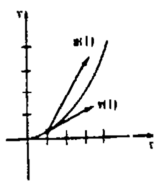
19.



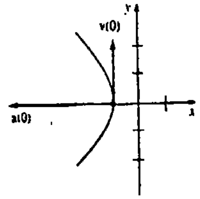
21. $x = 2 + t$, $y = 2 + 2t$, $z = \frac{8}{3} + 4t$
23. $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)$ 25. $\mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'''(t)]$
27. $2\mathbf{r}_1'(2t) - (1/t^2)\mathbf{r}_2'(1/t)$ 29. $\frac{3}{2}\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$
31. $e^t(t-1)\mathbf{i} + \frac{1}{2}e^{-2t}\mathbf{j} + \frac{1}{2}e^{t^2}\mathbf{k} + \mathbf{c}$
33. $(6t+1)\mathbf{i} + (3t^2 - 2)\mathbf{j} + (t^3 + 1)\mathbf{k}$
35. $(2t^3 - 6t + 6)\mathbf{i} + (7t - 4t^{3/2} - 3)\mathbf{j} + (t^2 - 2t)\mathbf{k}$
37. $2\sqrt{a^2 + c^2}\,\pi$ 39. $\sqrt{6}(e^{3\pi} - 1)$
41. $a\cos(s/a)\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}(s/a)\mathbf{j}$
45. Derive $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = c^2$

Ejercicios 15.2, página 728

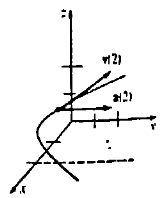
1. La rapidez vale $\sqrt{5}$



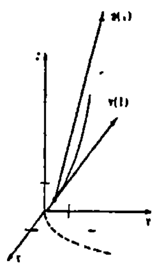
3. La rapidez vale 2



5. La rapidez vale $\sqrt{5}$



7. La rapidez vale $\sqrt{14}$



9. $(0, 0, 0)$ y $(25, 115, 0)$; $\mathbf{v}(0) = -2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{a}(0) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v}(5) = 10\mathbf{i} + 73\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{a}(5) = 2\mathbf{i} + 30\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
11. $\mathbf{r}(t) = (-16t^2 + 240t)\mathbf{j} + 240\sqrt{3}t\mathbf{i}$ y $x(t) = 240\sqrt{3}t$, $y(t) = -16t^2 + 240t$; 900 pie, aproximadamente 6235 pie; 480 pie/s
13. 72.11 pie/s 15. 97.98 pie/s
17. Suponga que (x_0, y_0) son las coordenadas del centro del blanco para $t = 0$. Entonces $\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_t$ cuando $t = x_0/(v_0\cos\theta = y_0/(v_0\mathrm{sen}\,\theta)$. Esto implica que $\tan\theta = y_0/x_0$. Es decir, apunte directamente al blanco cuando $t = 0$.
21. 191.33 lb
23. $y = -\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2 + (\tan\theta)x + s_0$ es la ecuación de una parábola.

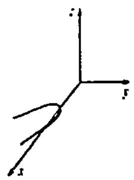
Ejercicios 15.3, página 734

1. $\mathbf{T} = (\sqrt{5}/5)(-\mathrm{sen}\,t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$
3. $\mathbf{T} = (a^2 + c^2)^{-1/2}(-a\,\mathrm{sen}\,t\mathbf{i} + a\cos t\mathbf{j} + c\mathbf{k})$, $\mathbf{N} = -\cos t\mathbf{i} - \mathrm{sen}\,t\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = (a^2 + c^2)^{-1/2}(c\,\mathrm{sen}\,t\mathbf{i} - c\cos t\mathbf{j} + a\mathbf{k})$, $\kappa = a/(a^2 + c^2)$
5. $3\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}y + 4z = 3\pi$
7. $4t/\sqrt{1 + 4t^2}$, $2/\sqrt{1 + 4t^2}$
9. $2\sqrt{6}$, 0, $t > 0$
11. $2t/\sqrt{1 + t^2}$, $2/\sqrt{1 + t^2}$
13. 0, 5 15. $-\sqrt{3}e^{-t}$, 0
17. $\kappa = \dfrac{\sqrt{b^2c^2\mathrm{sen}^2t + a^2c^2\cos^2t + a^2b^2}}{(a^2\mathrm{sen}^2t + b^2\cos^2t + c^2)^{3/2}}$
23. κ es cercana a cero.

Examen • Capítulo 15, página 735

1. Verdadero 3. Verdadero 5. Verdadero
7. Verdadero 9. Falso. 11. $\sqrt{2}\pi$
13. $x = -27 - 18t$, $y = 8 + t$, $z = 1 + t$

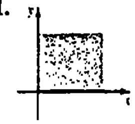
15.



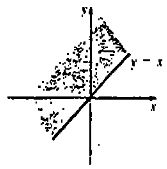
17. $-t^2\mathrm{sen}\,t + 2t\cos t - 2\,\mathrm{sen}\,t\cos t + 8t^3e^{2t} + 12t^2e^{2t}$
19. $(t+1)\mathbf{i} + (mt^2 + t + 1)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$
21. $\mathbf{v}(1) = 6\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v}(4) = 6\mathbf{i} + \mathbf{j} + 8\mathbf{k}$, $\mathbf{a}(t) = 2\mathbf{k}$ para todo t 23. $\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + (3\pi/4)\mathbf{k}$
25. $\mathbf{T} = (\tanh 1\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathrm{sech}\,1\mathbf{k})/\sqrt{2}$
$\mathbf{N} = \mathrm{sech}\,1\mathbf{i} - \tanh 1\mathbf{k}$
$\mathbf{B} = (-\tanh 1\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathrm{sech}\,1\mathbf{k})/\sqrt{2}$
$\kappa = \frac{1}{2}\cosh^2 1$

Ejercicios 16.1, página 746

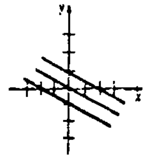
1. $\{(x, y) \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$
3. $\{(x, y) \mid y \neq x^2\}$
5. $\{(s, t) \mid s, t$ números reales$\}$
7. $\{(r, s) \mid |s| \geq 1\}$
9. $\{(u, v, w) \mid u^2 + v^2 + w^2 \geq 16\}$
11.



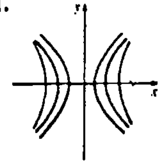
13.

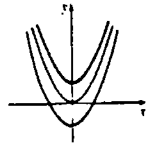


15. $\{z \mid z \geq 10\}$ 17. $\{w \mid |w| \leq 1\}$
19. 10, -2 21. 4, 4
23. Un plano que pasa por el origen y es perpendicular al plano xz
25. Mitad superior de un cono
27. Mitad superior de un elipsoide
29.

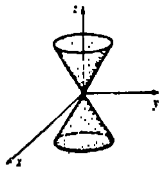


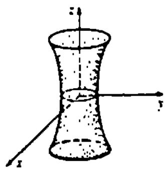
31.

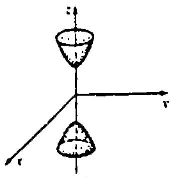


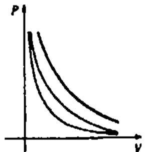
33. 

35. Cilindro elíptico 37. Elipsoide

39. 





41. 

43. $C(r, h) = 2.8\pi r^2 + 4.6\pi rh$
45. $V(r, h) = \frac{11}{9}\pi r^2 h$ 47. $15{,}600 \text{ cm}^2$
49. 1397.2 51. 1086.4 cal/h

Ejercicios 16.2, página 753

1. 26 3. No existe 5. $\frac{3}{2}$
7. No existe 9. 1
11. No existe 13. $-\frac{1}{3}$
15. No existe 17. No existe
19. No existe
21. $\{(x, y) \mid x \geq 0 \text{ y } y \geq -x\}$
23. $\{(x, y) \mid x/y \neq (2n + 1)\pi/2,$
$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$
25. Continua; no continua; no continua
29. Elija $\delta = \varepsilon/3$.

Ejercicios 16.3, página 760

1. $\partial z/\partial x = 6xy + 4y^2$, $\partial z/\partial y = 3x^2 + 8xy$
3. $\partial z/\partial x = 2x - y^2$, $\partial z/\partial y = -2xy + 20y^4$
5. $\partial z/\partial x = 2x^{-1/2}/(3y^2 + 1)$. $\partial z/\partial y =$
$-24\sqrt{x}y/(3y^2 + 1)^2$
7. $\partial z/\partial x = -3x^2(x^3 - y^2)^{-2}$, $\partial z/\partial y = 2y(x^3 - y^2)^{-2}$
9. $\partial z/\partial x = -10 \cos 5x \operatorname{sen} 5x$,
$\partial z/\partial y = 10 \operatorname{sen} 5y \cos 5y$
11. $f_x = e^{x^3y}(3x^3y + 1)$, $f_y = x^4e^{x^3y}$
13. $f_x = 7y/(x + 2y)^2$, $f_y = -7x/(x + 2y)^2$
15. $g_u = 8u/(4u^2 + 5v^3)$, $g_v = 15v^2/(4u^2 + 5v^3)$
17. $w_x = x^{-1/2}y$, $w_y = 2\sqrt{x} - (y/z)e^{y/z} - e^{y/z}$,
$w_z = (y^2/z^2)e^{y/z}$
19. $F_u = 2uw^2 - v^3 - vwt^2\operatorname{sen}(ut^2)$,
$F_v = -3uv^2 + w\cos(ut^2)$, $F_x = 128x^7t^4$,
$F_t = -2uvwt\operatorname{sen}(ut^2) + 64x^8t^3$
21. -16; 12 23. y^2e^{xy}
25. $20xy - 6y^2$ 27. $18uv^2t^2$
29. $-e^{r^2}(4r^2 + 2)\operatorname{sen}\theta$ 31. $-60x^3y^2 + 8y$
35. $\partial z/\partial x = -x/z$, $\partial z/\partial y = -y/z$
37. $\partial z/\partial u = (vz - 2uv^3)/(2z - uv)$,
$\partial z/\partial v = (uz - 3u^2v^2)/(2z - uv)$
39. $A_x = y \operatorname{sen}\theta$, $A_y = x \operatorname{sen}\theta$, $A_\theta = xy\cos\theta$
47. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \begin{cases} -gx/a, & 0 \leq x \leq at \\ -gt, & x > at \end{cases}$; para $x > at$

el movimiento es el de un cuerpo en caída libre;
$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ para $x > at$; la cuerda es horizontal.

49. 0; 1
51. $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_x(x + \Delta x, y) - f_x(x, y)}{\Delta x},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_y(x, y + \Delta y) - f_y(x, y)}{\Delta y},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_y(x + \Delta x, y) - f_y(x, y)}{\Delta x}$$

Ejercicios 16.4, página 766

1. $\Delta z = 0.2$, $dz = 0.2$
3. $\Delta z = -0.79$, $dz = -0.8$
5. $\varepsilon_1 = 5\,\Delta x$, $\varepsilon_2 = -\Delta x$
7. $\varepsilon_1 = y^2\,\Delta x + 4xy\,\Delta y + 2y\,\Delta x\,\Delta y$,
$\varepsilon_2 = x^2\,\Delta y + 2x\,\Delta x\,\Delta y + (\Delta x)^2\,\Delta y$
9. $dz = 2x \operatorname{sen} 4y\, dx + 4x^2\cos 4y\, dy$
11. $dz = 2x(2x^2 - 4y^3)^{-1/2}\, dx -$
$6y^2(2x^2 - 4y^3)^{-1/2}\, dy$
13. $df = 7t\, ds/(s + 3t)^2 - 7s\, dt/(s + 3t)^2$
15. $dw = 2xy^4z^{-5}\,dx + 4x^2y^3z^{-5}\,dy\, 5x^2y^4z^{-6}\,dz$
17. $dF = 3r^2\,dr - 2s^{-3}\,ds - 2t^{-1/2}\,dt$
19. $dw = du/u + dv/v - ds/s - dt/t$

21. 1.8% 23. $-mg(0.006)$, disminuye
25. 15% 27. 4.9% 29. 13.0907

Ejercicios 16.5, página 7

1. $x^2 + 4x + \frac{3}{2}y^2 - y = C$
3. $\frac{5}{2}x^2 + 4xy - 2y^4 = C$
5. $x^2y^2 - 3x + 4y = C$ 7. No es exacta
9. $xy^3 + y^2\cos x - \frac{1}{2}x^2 = C$ 11. No es exacta
13. $xy - 2xe^x + 2e^x - 2x^3 = C$
15. $x + y + xy - 3\ln|xy| = C$
17. $x^3y^3 - \tan^{-1}(3x) = C$
19. $-\ln|\cos x| + \cos x \operatorname{sen} y = C$
21. $y - 2x^2y - y^2 - x^4 = C$
23. $x^4y - 5x^3 - xy + y^3 = C$
25. $P(x, y) = ye^{xy} + y^2 - y/x^2 + h(x)$
27. $k = 10$

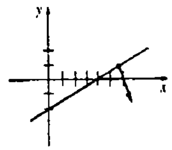
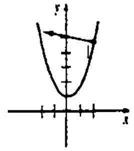
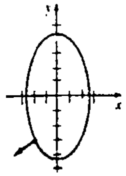
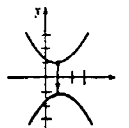
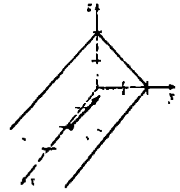
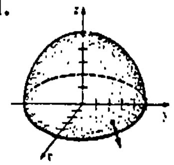
Ejercicios 16.6, página 774

1. $\partial z/\partial x = 3x^2v^2e^{uv^2} + 2uve^{uv^2}$, $\partial z/\partial y = -4yuve^{uv^2}$
3. $\partial z/\partial u = 16u^3 - 40y(2u - v)$,
$\partial z/\partial v = -96v^2 + 20y(2u - v)$
5. $\partial w/\partial t = -3u(u^2 + v^2)^{1/2}e^{-t}\operatorname{sen}\theta$
$\quad - 3v(u^2 + v^2)^{1/2}e^{-t}\cos\theta$,
$\partial w/\partial\theta = 3u(u^2 + v^2)^{1/2}e^{-t}\cos\theta$
$\quad - 3v(u^2 + v^2)^{1/2}e^{-t}\operatorname{sen}\theta$
7. $\partial R/\partial u = s^2t^4e^{v^2} - 4rst^4uve^{-u^2} + 8rs^2t^3uv^2e^{u^2v^2}$
$\partial R/\partial v = 2s^2t^4uve^{v^2} + 2rst^4e^{-u^2} + 8rs^2t^3u^2ve^{u^2v^2}$
9. $$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{xu}{(x^2 + y^2)^{1/2}(rs + tu)} + \frac{y\cosh rs}{u(x^2 + y^2)^{1/2}},$$
$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{xs}{(x^2 + y^2)^{1/2}(rs + tu)} + \frac{sty\operatorname{senh} rs}{u(x^2 + y^2)^{1/2}},$$
$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{xt}{(x^2 + y^2)^{1/2}(rs + tu)} - \frac{ty\cosh rs}{u^2(x^2 + y^2)^{1/2}}$$
11. $dz/dt = (4ut - 4vt^{-3})/(u^2 + v^2)$
13. $dw/dt|_{t=\pi} = -2$
15. $dp/du = 2u/(2s + t) + 4r/[u^3(2s + t)^2] -$
$r/[2u^{1/2}(2s + t)^2]$
23. $5.31 \text{ cm}^2/\text{s}$ 25. $0.5976 \text{ pie}^2/\text{año}$
29. $dy/dx = (4xy^2 - 3x^2)/(1 - 4x^2y)$
31. $dy/dx = y\cos xy/(1 - x\cos xy)$
35. $\partial z/\partial x = x/z$, $\partial z/\partial y = y/z$
37. $\partial z/\partial x = (2x + y^2z^3)/(10z - 3xy^2z^2)$,
$\partial z/\partial y = (2xyz^3 - 2y)/(10z - 3xy^2z^2)$

Ejercicios 16.7, página 782

1. $(2x - 3x^2y^2)\mathbf{i} + (-2x^3y + 4y^3)\mathbf{j}$
3. $(y^2/z^3)\mathbf{i} + (2xy/z^3)\mathbf{j} - (3xy^2/z^4)\mathbf{k}$
5. $4\mathbf{i} - 32\mathbf{j}$ 7. $2\sqrt{3}\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 4\sqrt{3}\mathbf{k}$
9. $\sqrt{3}x + y$ 11. $\frac{15}{2}(\sqrt{3} - 2)$
13. $-1/2\sqrt{10}$ 15. $98/\sqrt{5}$ 17. $-3\sqrt{2}$
19. -1 21. $-12/\sqrt{17}$
23. $\sqrt{2}\mathbf{i} + (\sqrt{2}/2)\mathbf{j}$, $\sqrt{5/2}$
25. $-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $2\sqrt{6}$
27. $-8\sqrt{\pi/6}\mathbf{i} - 8\sqrt{\pi/6}\mathbf{j}$, $-8\sqrt{\pi/3}$
29. $-\frac{3}{8}\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$, $-\sqrt{83281}/24$
31. $\pm 31/\sqrt{17}$
33. $\mathbf{u} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$; $\mathbf{u} = \frac{4}{5}\mathbf{j} + \frac{3}{5}\mathbf{j}$; $\mathbf{u} = -\frac{4}{5}\mathbf{i} - \frac{3}{5}\mathbf{j}$
35. $D_{\mathbf{u}}f = (9x^2 + 3y^2 - 18xy^2 - 6x^2y)/\sqrt{10}$;
$D_{\mathbf{u}}F = (-6x^2 - 54y^2 + 54x + 6y - 72xy)/10$
37. $(2, 5)$, $(-2, 5)$ 39. $-16\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
41. Una función posible es
$f(x, y) = x^3 - \frac{2}{3}y^3 + xy^3 + e^{xy}$.

Ejercicios 16.8, página 789

1. 
3. 
5. 
7. 
9. 
11. 

13. $(-4, -1, 17)$ 15. $-2x + 2y + z = 9$
17. $6x - 2y - 9z = 5$ 19. $6x - 8y + z = 50$
21. $2x + y - \sqrt{2}z = (4 + 5\pi)/4$
23. $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - z = 2$
25. $(1/\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -3/\sqrt{2})$
27. $(-2, 0, 5)$, $(-2, 0, -3)$
33. $x = 1 + 2t$, $y = -1 - 4t$, $z = 1 + 2t$
35. $(x - \frac{1}{2})/4 = (y - \frac{1}{3})/6 = -(z - 3)$

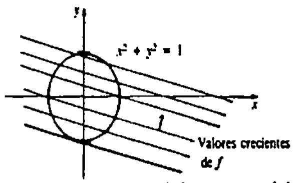
Ejercicios 16.9, página 794

1. Mín. rel. $f(0, 0) = 5$
3. Máx. rel. $f(4, 3) = 25$

5. Mín. rel. $f(-2, 1) = 15$
7. Máx. rel. $f(-1, -1) = 10$
mín. rel. $f(1, 1) = -10$
9. Mín. rel. $f(3, 1) = -14$ 11. No hay extremos
13. Máx. rel. $f(1, 1) = 12$
15. Mín. rel. $f(-1, -2) = 14$
17. Máx. rel. $f(-1, (2n + 1)\pi/2) = e^{-1}$, n impar
mín. rel. $f(-1, (2n + 1)\pi/2) = -e^{-1}$, n par
19. Máx. rel. $f((2m + 1)\pi/2, (2n + 1)\pi/2) = 2$,
m y n pares
mín. rel. $f((2m + 1)\pi/2, (2n + 1)\pi/2) = -2$,
m y n impares
21. $x = 7, y = 7, z = 7$ 23. $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$
25. $(2, 2, 2), (2, -2, -2), (-2, 2, -2), (-2, -2, 2)$; en estos puntos ocurre la distancia mínima que es $2\sqrt{3}$
27. $8\sqrt{3}abc/9$ 29. $x = 2, y = 2, z = 15$
33. $\theta = 30°, x = P/(4 + 2\sqrt{3})$,
$y = P(\sqrt{3} - 1)/2\sqrt{3}$
35. Máx. abs. $f(0, 0) = 16$
37. Mín. abs. $f(0, 0) = -8$
39. Máx. abs. $f(\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2) = 2$,
mín. abs. $f(-\frac{1}{2}, -\sqrt{3}/2) = -2$
41. Máx. abs. $f(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) =$
$f(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) = \frac{3}{2}$
mín. abs. $f(0, 0) = 0$

Ejercicios 16.10, página 799

1.

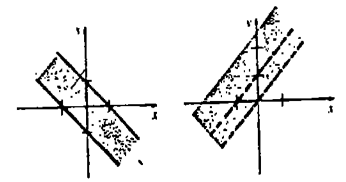


f manifiesta tener un máximo y un mínimo con restricciones
3. Máx. $f(1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10}) = \sqrt{10}$
mín. $f(-1/\sqrt{10}, -3/\sqrt{10}) = -\sqrt{10}$
5. Máx. $f(1, 1) = f(-1, -1) = 1$
mín. $f(1, -1) = f(-1, 1) = -1$
7. Mín. $f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \frac{13}{2}$
9. Máx. $f(1/\sqrt[4]{2}, 1/\sqrt[4]{2}) = f(-1/\sqrt[4]{2}, -1/\sqrt[4]{2})$
$= f(1/\sqrt[4]{2}, -1/\sqrt[4]{2})$
$= f(-1/\sqrt[4]{2}, 1/\sqrt[4]{2}) = \sqrt{2}$
mín. $f(0, 1) = f(0, -1) = f(1, 0) = f(-1, 0) = 1$
11. Máx. $f(\frac{9}{16}, \frac{1}{16}) = \frac{729}{65.536}$
mín. $f(0, 1) = f(1, 0) = 0$
13. Máx. $F(\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, \sqrt{5}) = 6\sqrt{5}$
mín. $F(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5}, -\sqrt{5}) = -6\sqrt{5}$

15. Máx. $F(1/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}, \sqrt{3}) = 2/\sqrt{3}$
17. Mín. $F(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{9}$
19. f es el cuadrado de la distancia de un punto (x, y) de la gráfica de $x^4 + y^4 = 1$ al origen. Los puntos $(\pm 1, 0)$ y $(0, \pm 1)$ son los más cercanos al origen, mientras que los puntos $(\pm 1/\sqrt[4]{2}, \pm 1/\sqrt[4]{2})$ son los más lejanos del origen.
21. Máx. $A(4/(2 + \sqrt{2}), 4/(2 + \sqrt{2})) =$
$4/(3 + 2\sqrt{2})$
23. Máx. $V(12 - 9/2\sqrt{5}, 6/\sqrt{5}) =$
$(9\pi/2)(24 - \sqrt{5})$
25. Máx $z = P + 4(2 - \sqrt{4} + \sqrt{27P})/\sqrt{27P}$
27. Máx. $F(k/3, k/3, k/3) = k/3$
29. Mín. $F(\frac{1}{3}, \frac{16}{15}, -\frac{11}{15}) = \frac{402}{225}$
31. F es el cuadrado de la distancia al origen de un punto (x, y) en la recta de intersección de los dos planos indicados. El punto $(\frac{1}{3}, \frac{16}{15}, -\frac{11}{15})$ es el más cercano al origen.
33. $\nabla F = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$

Examen • Capítulo 16, página 801

1. Falso 3. Falso 5. Falso
7. Falso 9. Verdadero 11. 2
13. La elipse $3x^2 + y^2 = 28$.
15. $\dfrac{\partial F}{\partial r} g'(w) + \dfrac{\partial F}{\partial s} h'(w)$ 17. f_{yyzx}
19. $-F(x)$
21. $f_x(x, y)g'(y)h'(z) + f_{xy}(x, y)g(y)h'(z)$
23. $e^{-x^3y}(-x^3y + 1)$ 25. $-\frac{3}{2}r^2\theta(r^3 + \theta^2)^{-3/2}$
27. $6x^2y\,\text{senh}(x^2y^3) + 9x^4y^4\cosh(x^2y^3)$
29. $-60s^2t^4v^{-5}$ 31. $(6x^2 - 2y^2 - 8xy)/\sqrt{40}$
33.



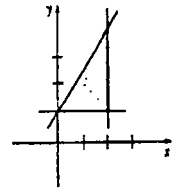
35. $dz = 11y\,dx/(4x + 3y)^2 - 11x\,dy/(4x + 3y)^2$
37. $x^2\cos y^3 - y = C$
39. $x = -\sqrt{5}, z - 3 = \frac{4}{3}(y - 1)$
41. $2; -2/\sqrt{2}; 4$
43. $4\pi x + 3y - 12z = 4\pi - 6\sqrt{3}$
45. $3x + 4y = 25$
47. $x = 2, y = 1, z = 2$
49. -8.77 cm/s 53. No es extremo
55. Máximo relativo 57. $A = \frac{1}{2}L^2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta$
59. $A = 2xz + 2yz - 5z^2$

Ejercicios 17.1, página 809

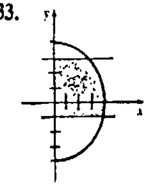
1. 52 3. 60 5. 10π
7. El integrando $f(x, y) = x + 5y$ no es no negativo en la región
9. 80 11. 34 13. 66 15. 18

Ejercicios 17.2, página 814

1. $24y - 20e^y$ 3. $x^2e^{3x^2} - x^2e^x$
9. 37 11. $-4\sqrt{2}/3$ 13. $-\frac{4}{21}$
15. $18 - e^3 + 3e$ 17. $\frac{10}{3}$
19. $(\pi/4)\ln 9$ 21. $\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$ 23. π
25. e^{-1} 27. $2 - \pi$ 29. $(3\sqrt{3} - \pi)/6$
31.



33.



Ejercicios 17.3, página 822

1. $\frac{1}{21}$ 3. $\frac{25}{84}$ 5. 96
7. $2\ln 2 - 1$ 9. 40 11. $\frac{9}{2}$
13. $e^4 - e + 3 - 4\ln 4$ 15. $\frac{63}{4}$
17. c. 16π 19. 18 21. 2π
23. 4 25. $30\ln 6$ 27. $15\pi/4$
29. $\frac{16}{9}$ 31. $\frac{35}{6}$
33. $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 f(x, y)\,dy\,dx$
35. $\displaystyle\int_1^{e^3} \int_{\ln y}^3 f(x, y)\,dx\,dy$
37. $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^3}^{2-y} f(x, y)\,dx\,dy$ 39. $(2^{3/2} - 1)/18$
41. $\frac{2}{3}$ sen 8

Ejercicios 17.4, página 828

1. $\bar{x} = \frac{8}{3}, \bar{y} = 2$ 3. $\bar{x} = 3, \bar{y} = \frac{3}{2}$
5. $\bar{x} = \frac{17}{21}, \bar{y} = \frac{55}{147}$ 7. $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{4}{7}$
9. $\bar{x} = (3e^4 + 1)/[4(e^4 - 1)]$
$\bar{y} = 16(e^5 - 1)/[25(e^4 - 1)]$
11. $\frac{1}{105}$ 13. $4k/9$ 15. $\frac{256}{21}$
17. $\frac{941}{10}$ 19. $a\sqrt{10}/5$ 21. $ka^4/6$
23. $16\sqrt{2}k/3$ 25. $a\sqrt{3}/3$

Ejercicios 17.5, página 833

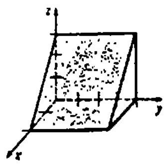
1. $27\pi/2$ 3. $(4\pi - 3\sqrt{3})/6$
5. $25\pi/3$ 7. $(2\pi/3)(15^{3/2} - 7^{3/2})$
9. $\frac{5}{4}$ 11. $\bar{x} = 13/3\pi, \bar{y} = 13/3\pi$
13. $\bar{x} = \frac{12}{5}, \bar{y} = 3\sqrt{3}/2$
15. $\bar{x} = (4 + 3\pi)/6, \bar{y} = \frac{4}{3}$ 17. $\pi a^4k/4$
19. $(ka/12)(15\sqrt{3} - 4\pi)$ 21. $\pi a^4k/2$
23. $4k$ 25. 9π 27. $(\pi/4)(e - 1)$
29. $3\pi/8$

Ejercicios 17.6, página 837

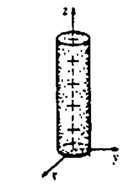
1. $3\sqrt{29}$ 3. $10\pi/3$
5. $(\pi/6)(17^{3/2} - 1)$ 7. $25\pi/6$
9. $2a^2(\pi - 2)$ 11. $8a^2$ 13. $2\pi a(c_2 - c_1)$

Ejercicios 17.7, página 845

1. 48 3. 36 5. -2 7. 50
9. $\displaystyle\int_0^4 \int_0^{2-\frac{1}{2}x} \int_{x+2y}^4 F(x, y, z)\,dz\,dy\,dx$;
$\displaystyle\int_0^2 \int_{2y}^4 \int_0^{z-2y} F(x, y, z)\,dx\,dz\,dy$;
$\displaystyle\int_0^4 \int_0^{z/2} \int_0^{z-2y} F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$;
$\displaystyle\int_0^4 \int_x^4 \int_0^{\frac{1}{2}(z-x)} F(x, y, z)\,dy\,dz\,dx$;
$\displaystyle\int_0^4 \int_0^z \int_0^{\frac{1}{2}(z-x)} F(x, y, z)\,dy\,dx\,dz$
11. $\displaystyle\int_0^2 \int_{x^3}^8 \int_0^4 dz\,dy\,dx$;
$\displaystyle\int_0^8 \int_0^4 \int_0^{\sqrt[3]{y}} dx\,dz\,dy$;
$\displaystyle\int_0^4 \int_0^2 \int_{x^3}^8 dy\,dx\,dz$
13.



15.



17. $16\sqrt{2}$ 19. 16π
21. $\bar{x} = \frac{4}{5}, \bar{y} = \frac{32}{7}, \bar{z} = \frac{8}{3}$
23. $\bar{x} = 0, \bar{y} = 2, \bar{z} = 0$
25. $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{2x+2}^{8-y} (x + y + 4)\,dz\,dy\,dx$

27. $2560k/3$; $\sqrt{80/9}$ 29. $k/30$

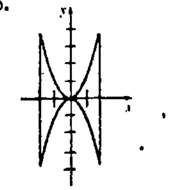
31. $k\int_{-5}^{5}\int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{5}(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dy\,dx$

Ejercicios 17.8, página 854

1. $(-10/\sqrt{2}, 10/\sqrt{2}, 5)$
3. $(\sqrt{3}/2, \frac{1}{2}, -4)$ 5. $(\sqrt{2}, -\pi/4, -9)$
7. $(2\sqrt{2}, 2\pi/3, 2)$ 9. $r^2 + z^2 = 25$
11. $r^2 - z^2 = 1$ 13. $z = x^2 + y^2$
15. $x = 5$ 17. $(2\pi/3)(64 - 12^{3/2})$
19. $625\pi/2$ 21. $(0, 0, 3a/8)$
23. $8\pi k/3$ 25. $(\sqrt{3}/3, \frac{1}{3}, 0)$; $(\frac{2}{3}, \pi/6, 0)$
27. $(-4, 4, 4\sqrt{2})$; $(4\sqrt{2}, 3\pi/4, 4\sqrt{2})$
29. $(5\sqrt{2}, \pi/2, 5\pi/4)$ 31. $(\sqrt{2}, \pi/4, \pi/6)$
33. $\rho = 8$ 35. $\phi = \pi/6$
37. $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ 39. $z = 2$
41. $9\pi(2 - \sqrt{2})$ 43. $2\pi/9$
45. $(0, 0, \frac{7}{6})$ 47. πk

Examen • Capítulo 17, página 855

1. Verdadero 3. Falso 5. Región cuadrada
7. $f(x, 4) - f(x, 2)$
9. $\int_0^4\int_{x/2}^{\sqrt{x}} f(x, y)\,dy\,dx$
11. $z = r^2$, $\rho = \csc\phi\cot\phi$
13. $-y\cos y^2 + y\cos y^4$
15. $e^2 - e^{-2} + 4$ 17. $\frac{10}{3}$ 19. 320π
21. $\frac{37}{60}$
23. $\int_0^{1/\sqrt{2}}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\frac{1}{x^2+y^2}\,dy\,dx + \int_{1/\sqrt{2}}^{3/\sqrt{2}}\int_{x}^{\sqrt{9-x^2}}\frac{1}{x^2+y^2}\,dy\,dx$
25.



27. $(1 - \cos 1)/2$ 29. $5\pi/8$
31. $(2\pi/3)(2^{3/2} - 1)$ 33. 8π
35. $41k/1512$

Ejercicios 18.1, página 870

1. $-125/3\sqrt{2}$; $-250(\sqrt{2} - 4)/12$; $\frac{125}{2}$
3. 3; 6; $3\sqrt{5}$
5. -1; $(\pi - 2)/2$; $\pi^2/8$; $\sqrt{2}\pi^2/8$ 7. 21
9. 30 11. 1 13. 1 15. 460
17. $\frac{26}{9}$ 19. $-\frac{64}{3}$ 21. $-\frac{8}{3}$ 23. 0
25. $\frac{123}{2}$ 27. 70 29. $-\frac{19}{8}$ 31. e
33. $-\frac{3}{2}$ 35. 0 39. $\bar{x} = \frac{3}{2}$, $\bar{y} = 2/\pi$

Ejercicios 18.2, página 877

1. $\frac{16}{3}$ 3. 14 5. 3 7. 330
9. 1096 11. 63 13. 16
15. $\phi = x^4y^3 + 3x + y$
17. No es campo de gradiente
19. $\phi = \frac{1}{4}x^4 + xy + \frac{1}{4}y^4$
21. $\phi = (Gm_1m_2)/|\mathbf{r}|$ 23. $4\sqrt{3}\pi$; 0

Ejercicios 18.3, página 881

1. $\frac{26}{3}$ 3. 0 5. 972π
7. $(3^{5/2} - 2^{7/2} + 1)/15$ 9. $9(17^{3/2} - 1)$
11. $k\sqrt{3}/12$ 13. 18 15. 28π
17. $-8\pi a^3$ 19. $4\pi kq$ 23. $(0, 0, a/2)$

Ejercicios 18.4, página 885

1. $(4y^3 - 6xz^2)\mathbf{i} + (2z^3 - 3x^2)\mathbf{k}$; $6xy$
3. $(3e^{-z} - 8yz)\mathbf{i} - xe^{-z}\mathbf{j}$; $e^{-z} + 4z^2 - 3ye^{-z}$
5. $(xy^2e^y + 2xye^y + x^3yze^z + x^3ye^z)\mathbf{i} - y^2e^y\mathbf{j} + (-3x^2yze^z - xe^x)\mathbf{k}$; $xye^x + ye^x - x^3ze^z$
31. 6

Ejercicios 18.5, página 897

1. 75π 3. 48π 5. $\frac{56}{3}$ 7. $\frac{2}{3}$
9. $\frac{1}{8}$
11. $(b - a) \times$ (área de la región limitada por C)
15. $3a^2\pi/8$ 17. $36 - 8\pi$ 19. $3\pi/2$
23. -40π 25. $\frac{3}{2}$ 27. -3
29. $-3\pi/2$ 31. $\frac{3}{2}$ 33. $12a^5\pi/5$
35. $62\pi/5$ 43. $\sqrt{3}\pi$

Examen • Capítulo 18, página 899

1. Verdadero 3. Falso 5. Verdadero
7. Verdadero 9. Verdadero 11. Verdadero
13. $\nabla\phi = -\dfrac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\mathbf{i} - \dfrac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\mathbf{j}$
15. $6xy$ 17. 0 19. 0
21. $56\sqrt{2}\pi^3/3$ 23. 12 25. $2 + 2/3\pi$
27. $\pi^2/2$ 29. $(\ln 3)(17^{3/2} - 5^{3/2})/12$
31. $-4\pi c$ 33. 0 35. 125π
37. 3π 39. $\frac{5}{3}$

Ejercicios 19.1, página 908

1. Lineal, segundo orden
3. No linear, primer orden
5. Lineal, cuarto orden
7. No linear, segundo orden
9. Lineal, tercer orden

Ejercicios 19.2, página 912

1. $x\ln|x| + y = Cx$
3. $(x - y)\ln|x - y| = y + C(x - y)$
5. $x + y\ln|x| = Cy$
7. $\ln(x^2 + y^2) + 2\tan^{-1}(y/x) = C$
9. $\ln|y| = 2\sqrt{x/y} + C$
11. $y^9 = C(x^3 + y^3)^2$
13. $(y/x)^2 = 2\ln|x| + C$
15. $e^{2x/y} = 8\ln|y| + C$
17. $x\cos(y/x) = C$ 19. $y + x = Cx^2e^{y/x}$

Ejercicios 19.3, página 918

1. $y = Ce^{4x}$ 3. $y = \frac{1}{10} + Ce^{-5x}$
5. $y = \frac{1}{4}e^{3x} + Ce^{-x}$ 7. $y = \frac{1}{3} + Ce^{-x^3}$
9. $y = x^{-1}\ln x + Cx^{-1}$
11. $x = -\frac{4}{5}y^2 + Cy^{-1/2}$
13. $y = -\cos x + (\operatorname{sen}x)/x + C/x$
15. $y = C/(e^x + 1)$
17. $y = \operatorname{sen}x + C\cos x$
19. $y = \frac{1}{7}x^3 - \frac{1}{5}x + Cx^{-4}$
21. $(\sec\theta + \tan\theta)r = \theta - \cos\theta + C$
23. $y = 4 - 2e^{-5x}$
25. $(x + 1)y = x\ln x - x + 21$
27. $y = 2x/(x - 2)$ 29. $x = \frac{1}{2}y + 8/y$
31. $i(t) = \dfrac{E_0L}{R^2 + \omega^2L^2}\left[\dfrac{R}{L}\operatorname{sen}\omega t - \omega\cos\omega t\right] + \left[i_0 + \dfrac{\omega E_0L}{R^2 + \omega^2L^2}\right]e^{-Rt/L}$
33. $A(t) = 600 - 550e^{-t/100}$
35. $y = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & 0 \le x \le 1 \\ (e - 1)e^{-x}, & x > 1 \end{cases}$

Ejercicios 19.4, página 925

1. $y = C_1 + C_2e^{x/3}$
3. $y = C_1e^{-4x} + C_2e^{4x}$
5. $y = C_1\cos 3x + C_2\operatorname{sen}3x$
7. $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$
9. $y = C_1e^{-4x} + C_2xe^{-4x}$
11. $y = C_1e^{(-3+\sqrt{29})x/2} + C_2e^{(-3-\sqrt{29})x/2}$
13. $y = C_1e^{2x/3} + C_2e^{-x/4}$
15. $y = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\operatorname{sen}x)$
17. $y = e^{-x/3}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{2}}{3}x + C_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{3}x\right)$
19. $y = C_1e^{-x/3} + C_2xe^{-x/3}$
21. $y = 2\cos 4x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}4x$
23. $y = -\frac{3}{4}e^{-5x} + \frac{3}{4}e^{-x}$
25. $y = -e^{x/2}\cos(x/2) + e^{x/2}\operatorname{sen}(x/2)$
27. $y \equiv 0$ 29. $y = e^{2(x-1)} - e^{x-1}$
31. $y'' + y' - 20y = 0$
33. $y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^{5x}$
35. La ecuación auxiliar debe ser $(m - m_1)^2$. $2m_1m + m_1^2 = 0$. Por consiguiente, la ecua ferencial es $y'' - 2m_1y' + m_1^2y = 0$.

Ejercicios 19.5, página 931

1. $y = C_1\cos x + C_2\operatorname{sen}x + x\operatorname{sen}x + \cos x\ln|\cos x|$
3. $y = C_1\cos x + C_2\operatorname{sen}x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}x - \frac{1}{2}x\cos x = C_1\cos x + C_3\operatorname{sen}x - \frac{1}{2}x\cos x$
5. $y = C_1\cos x + C_2\operatorname{sen}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos 2$
7. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{4}xe^x - \frac{1}{4}xe^{-x} = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}x\operatorname{senh}x$
9. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + \frac{1}{4}\left(e^{2x}\ln|x| - e^{-2x}\int_{x_0}^{x}\frac{e^{4t}}{t}\,dt\right)$, $x_0 > 0$
11. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x})\times\ln(1 + e^x)$
13. $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} - e^{-2x}\operatorname{sen}e^x$
15. $y = C_1e^x + C_2xe^x - \frac{1}{2}e^x\ln(1 + x^2) + xe^x\tan^{-1}x$
17. $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x}\ln x - \frac{3}{4}x^2e^{-x}$
19. $y = C_1e^{x/2} + C_2xe^{x/2} + \frac{8}{9}e^{-x} + x +$
21. $y = \frac{3}{8}e^{-x} + \frac{5}{8}e^x + \frac{1}{4}x^2e^x - \frac{1}{4}xe^x$
23. $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{3x} - 6$
25. $y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + \frac{1}{2}x + 1$
27. $y = C_1\cos 5x + C_2\operatorname{sen}5x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}x$
29. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} - \frac{4}{3}e^{2x} - \frac{2}{3}x^3 +$ $\frac{28}{9}x - \frac{80}{27}$
31. $y = e^{4x}(C_1\cos 3x + C_2\operatorname{sen}3x) + \frac{1}{10}e^3$ $\frac{126}{697}\cos 2x + \frac{96}{697}\operatorname{sen}2x$
33. $y = \frac{5}{8}e^{-8x} + \frac{5}{8}e^{8x} - \frac{1}{4}$
35. $y = C_1x + C_2x\ln x + \frac{2}{3}x(\ln x)^3$

Ejercicios 19.6, página 936

1. $y_1(x) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$;
$y_2(x) = c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

3. $y_1(x) = c_0$
$y_2(x) = c_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

5. $y_1(x) = c_0\left[1 + \frac{1}{3\cdot 2}x^3 + \frac{1}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}x^6 + \frac{1}{9\cdot 8\cdot 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}x^9 + \cdots\right]$
$y_2(x) = c_1\left[x + \frac{1}{4\cdot 3}x^4 + \frac{1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}x^7 + \frac{1}{10\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}x^{10} + \cdots\right]$

7. $y_1(x) = c_0\left[1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4!}x^4 - \frac{21}{6!}x^6 - \cdots\right]$
$y_2(x) = c_1\left[x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{5}{5!}x^5 + \frac{45}{7!}x^7 + \cdots\right]$

9. $y_1(x) = c_0\left[1 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{4^2}{6!}x^6 - \frac{7^2\cdot 4^2}{9!}x^9 + \cdots\right]$
$y_2(x) = c_1\left[x - \frac{2^2}{4!}x^4 + \frac{5^2\cdot 2^2}{7!}x^7 - \frac{8^2\cdot 5^2\cdot 2^2}{10!}x^{10} + \cdots\right]$

11. $y_1(x) = c_0$; $y_2(x) = c_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n$

13. $y_1(x) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$; $y_2(x) = c_1 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$

15. $y_1(x) = c_0\left[1 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{4\cdot 4!}x^4 + \frac{23\cdot 7}{8\cdot 6!}x^6 - \cdots\right]$
$y_2(x) = c_1\left[x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{14}{2\cdot 5!}x^5 - \frac{34\cdot 14}{4\cdot 7!}x^7 - \cdots\right]$

17. $y_1(x) = c_0[1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \cdots]$
$y_2(x) = c_1[x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots]$

Ejercicios 19.7, página 944

1. Un cuerpo que pesa 4 lb, sujeto a un resorte, se suelta desde un punto situado 3 unidades arriba de la posición de equilibrio con una velocidad inicial hacia arriba de 2 pie/s. La constante del resorte es de 3 lb/pie.

3. $x(t) = \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{3}{4}\operatorname{sen} 2t$

5. $x(t) = -5\operatorname{sen} 2t$

7. Un cuerpo que pesa 2 lb está sujeto a un resort cuya constante es 1 lb/pie. El sistema es amortiguad con una fuerza numéricamente igual al doble de la ve locidad instantánea. El peso parte de la posición d equilibrio con una velocidad hacia arriba de 1.5 pie/s

9. $x(t) = 5te^{-2\sqrt{2}t}$; $t = \sqrt{2}/4$, $x(\sqrt{2}/4) \approx 0.65$ pi

11. $x(t) = \frac{1}{625}e^{-4t}(24 + 100t) - \frac{1}{625}e^{-t}(24\cos 4t + 7\operatorname{sen} 4t)$

13. $x(t) = e^{-\beta t/2m}[C_1e^{-\sqrt{\beta^2-4km}\,t/2m} + C_2e^{\sqrt{\beta^2-4km}\,t/2m}]$;
$x(t) = C_1e^{-\beta t/2m} + C_2te^{-\beta t/2m}$;
$x(t) = e^{-\beta t/2m}[C_1\cos(\sqrt{4km-\beta^2}\,t/2m) + C_2\operatorname{sen}(\sqrt{4km-\beta^2}\,t/2m)]$

Examen • Capítulo 19, página 945

1. Verdadero 3. Falso 5. Verdadero
7. Verdadero 9. Verdadero 11. $xy = C$
13. $y = -3 + Ce^{10x}$ 15. $y = \frac{1}{2x^2}e^x + \frac{1}{x^2}e^{-x}$
17. $y = \frac{1}{4} - 320(x^2+4)^{-4}$
19. $y = C_1e^{(1-\sqrt{3})x} + C_2e^{(1+\sqrt{3})x}$
21. $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{5x}$
23. $y = -24\cos 6x + 3\operatorname{sen} 6x$
25. $y_1(x) = c_0\left[1 - \frac{1}{3\cdot 2}x^3 + \frac{1}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}x^6 - \frac{1}{9\cdot 8\cdot 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}x^9 + \cdots\right]$
$y_2(x) = c_1\left[x - \frac{1}{4\cdot 3}x^4 + \frac{1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}x^7 - \frac{1}{10\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}x^{10} + \cdots\right]$
27. $y = e^x(C_1\cos x + C_2\operatorname{sen} x) - e^x\cos x \ln|\sec x + \tan x|$
29. $y = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\sec x$
31. $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{4x} - \frac{1}{10}xe^{2x} - \frac{13}{100}e^{2x}$

Apéndice 1, página 956

1. 4 3. 5 5. $9r^2 - 24rs + 16s^2$
7. $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$
9. $(2xy - 3)(2xy + 3)$
11. $(4a - b)(16a^2 + 4ab + b^2)$ 13. $(x-12)^2 - 144$
15. $2(x+3)^2 - 18$ 17. -3 19. $-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$
21. $0, \frac{2}{5}$ 23. $-5, 3$ 25. $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$
27. $14 + 3i$ 29. $-38 + 8i$ 31. $-\frac{9}{25} + \frac{13}{25}i$
33. $-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$ 35. i 37. $10; -25$
39. 68 41. $-2, 4$ 43. $x = -\frac{3}{5}, y = \frac{6}{5}$
45. $x = -4, y = 4, z = -5$
47. $x = \frac{12}{5}, y = \frac{9}{5}$ 49. $b = 6.75$

Índice

D

E

F

Formas con funciones trigonométricas

63 $\int \operatorname{sen}^2 u\, du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

64 $\int \cos^2 u\, du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

65 $\int \tan^2 u\, du = \tan u - u + C$

66 $\int \cot^2 u\, du = -\cot u - u + C$

67 $\int \operatorname{sen}^3 u\, du = -\frac{1}{3}(2 + \operatorname{sen}^2 u)\cos u + C$

68 $\int \cos^3 u\, du = \frac{1}{3}(2 + \cos^2 u)\operatorname{sen} u + C$

69 $\int \tan^3 u\, du = \frac{1}{2}\tan^2 u + \ln|\cos u| + C$

70 $\int \cot^3 u\, du = -\frac{1}{2}\cot^2 u - \ln|\operatorname{sen} u| + C$

71 $\int \sec^3 u\, du = \frac{1}{2}\sec u \tan u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C$

72 $\int \csc^3 u\, du = -\frac{1}{2}\csc u \cot u + \frac{1}{2}\ln|\csc u - \cot u| + C$

73 $\int \operatorname{sen}^n u\, du = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\, du$

74 $\int \cos^n u\, du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u \operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\, du$

75 $\int \tan^n u\, du = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u\, du$

76 $\int \cot^n u\, du = \frac{-1}{n-1}\cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u\, du$

77 $\int \sec^n u\, du = \frac{1}{n-1}\tan u \sec^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\, du$

78 $\int \csc^n u\, du = \frac{-1}{n-1}\cot u \csc^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} u\, du$

79 $\int \operatorname{sen} au \operatorname{sen} bu\, du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

80 $\int \cos au \cos bu\, du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

81 $\int \operatorname{sen} au \cos bu\, du = -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C$

82 $\int u \operatorname{sen} u\, du = \operatorname{sen} u - u\cos u + C$

83 $\int u \cos u\, du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$

84 $\int u^n \operatorname{sen} u\, du = -u^n \cos u + n\int u^{n-1}\cos u\, du$

85 $\int u^n \cos u\, du = u^n \operatorname{sen} u - n\int u^{n-1}\operatorname{sen} u\, du$

86 $\int \operatorname{sen}^n u \cos^m u\, du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u \cos^{m+1} u}{n+m} + \frac{n-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^{n-2} u \cos^m u\, du$

$= \frac{\operatorname{sen}^{n+1} u \cos^{m-1} u}{n+m} + \frac{m-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^n u \cos^{m-2} u\, du$

87 $\int \frac{du}{1 - \operatorname{sen} au} = \frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{au}{2}\right) + C$

88 $\int \frac{du}{1 + \operatorname{sen} au} = -\frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{au}{2}\right) + C$

89 $\int \frac{u\, du}{1 - \operatorname{sen} au} = \frac{u}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{au}{2}\right) + \frac{2}{a^2}\ln\left|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{au}{2}\right)\right| + C$

Formas con funciones trigonométricas inversas

90 $\int \operatorname{sen}^{-1} u\, du = u \operatorname{sen}^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$

91 $\int \cos^{-1} u\, du = u\cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$

92 $\int \tan^{-1} u\, du = u\tan^{-1} u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + C$

93 $\int u \operatorname{sen}^{-1} u\, du = \frac{2u^2-1}{4}\operatorname{sen}^{-1} u + \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

94 $\int u\cos^{-1} u\, du = \frac{2u^2-1}{4}\cos^{-1} u - \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

95 $\int u\tan^{-1} u\, du = \frac{u^2+1}{2}\tan^{-1} u - \frac{u}{2} + C$

96 $\int u^n \operatorname{sen}^{-1} u\, du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\operatorname{sen}^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}\, du}{\sqrt{1-u^2}}\right], \quad n \neq -1$

97 $\int u^n \cos^{-1} u\, du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\cos^{-1} u + \int \frac{u^{n+1}\, du}{\sqrt{1-u^2}}\right], \quad n \neq -1$

98 $\int u^n \tan^{-1} u\, du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\tan^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}\, du}{1+u^2}\right], \quad n \neq -1$

Formas con funciones exponenciales y logarítmicas

9 $\int ue^{au}\, du = \frac{1}{a^2}(au - 1)e^{au} + C$

100 $\int u^n e^{au}\, du = \frac{1}{a}u^n e^{au} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}\, du$

11 $\int e^{au}\operatorname{sen} bu\, du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a \operatorname{sen} bu - b\cos bu) + C$

102 $\int e^{au}\cos bu\, du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\cos bu + b\operatorname{sen} bu) + C$

13 $\int \ln u\, du = u\ln u - u + C$

104 $\int \frac{1}{u\ln u}\, du = \ln|\ln u| + C$

15 $\int u^n \ln u\, du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)\ln u - 1] + C$

106 $\int u^m \ln^n u\, du = \frac{u^{m+1}\ln^n u}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int u^m \ln^{n-1} u\, du, \quad m \neq -1$

17 $\int \ln(u^2+a^2)\, du = u\ln(u^2+a^2) - 2u + 2a\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$

108 $\int \ln|u^2 - a^2|\, du = u\ln|u^2-a^2| - 2u + a\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$

19 $\int \frac{du}{a + be^u} = \frac{u}{a} - \frac{1}{a}\ln|a + be^u| + C$

Formas con funciones hiperbólicas

10 $\int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u + C$

111 $\int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u + C$

12 $\int \tanh u\, du = \ln\cosh u + C$

113 $\int \coth u\, du = \ln|\operatorname{senh} u| + C$

14 $\int \operatorname{sech} u\, du = \tan^{-1}|\operatorname{senh} u| + C$

115 $\int \operatorname{csch} u\, du = \ln|\tanh \frac{1}{2}u| + C$

16 $\int \operatorname{sech}^2 u\, du = \tanh u + C$

117 $\int \operatorname{csch}^2 u\, du = -\coth u + C$

118 $\int \operatorname{sech} u \tanh u\, du = -\operatorname{sech} u + C$

119 $\int \operatorname{csch} u \coth u\, du = -\operatorname{csch} u + C$

Formas en las que interviene $\sqrt{2au - u^2}$

120 $\int \sqrt{2au - u^2}\, du = \frac{u-a}{2}\sqrt{2au-u^2} + \frac{a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

121 $\int u\sqrt{2au-u^2}\, du = \frac{2u^2 - au - 3a^2}{6}\sqrt{2au-u^2} + \frac{a^3}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

122 $\int \frac{\sqrt{2au-u^2}}{u}\, du = \sqrt{2au-u^2} + a\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

123 $\int \frac{\sqrt{2au-u^2}}{u^2}\, du = -\frac{2\sqrt{2au-u^2}}{u} - \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

124 $\int \frac{du}{\sqrt{2au-u^2}} = \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

125 $\int \frac{u\, du}{\sqrt{2au-u^2}} = -\sqrt{2au-u^2} + a\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

126 $\int \frac{u\, du}{\sqrt{2au-u^2}} = -\frac{(u+3a)}{2}\sqrt{2au-u^2} + \frac{3a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

127 $\int \frac{du}{u\sqrt{2au-u^2}} = -\frac{\sqrt{2au-u^2}}{au} + C$

Algunas integrales definidas

128 $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x\, dx = \frac{\pi}{2}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

129 $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x\, dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}, \quad n = 1, 2, 3,$