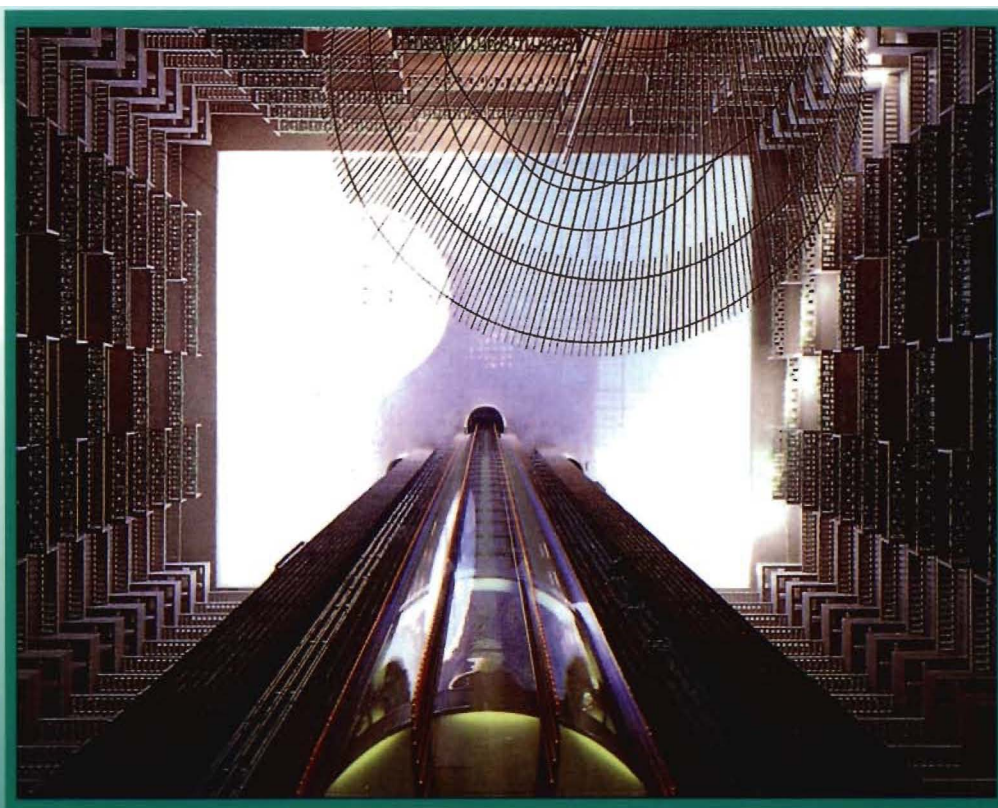


C U A R T A E D I C I Ó N

# CÁLCULO

DIFERENCIAL E INTEGRAL



PEARSON  
Prentice  
Hall

®

EDWARDS Y PENNEY

---

# ÁLGEBRA

## Fórmula cuadrática

Las soluciones de la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ están dadas por}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

## Notación factorial

Para cada entero positivo  $n$ ,

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots, 3 \cdot 2 \cdot 1;$$

por definición,  $0! = 1$ .

## Radicales

$$\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m = x^{m/n}$$

## Exponentes

$$(ab)^r = a^r b^r \quad a^r a^s = a^{r+s} \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$(a^r)^s = a^{rs} \quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

## Fórmula binomial

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$\text{En general, } (x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2$$

$$+ \dots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \dots + \binom{n}{n-j}x^jy^{n-1} + y^n,$$

donde el coeficiente binomial  $\binom{n}{m}$  es el entero  $\frac{n!}{m!(n-m)!}$

## Factorización

Si  $n$  es un entero positivo, entonces

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

Si  $n$  es un entero positivo *impar*, entonces

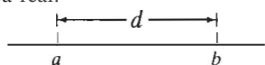
$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots - xy^{n-2} + y^{n-1}),$$

# GEOMETRÍA

## Fórmulas para la distancia

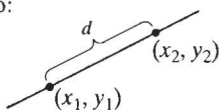
Distancia en la recta numérica real:

$$d = |a - b|$$



Distancia en el plano coordenado:

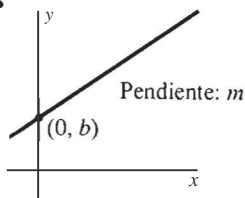
$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$



## Ecuaciones de rectas y círculos

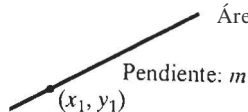
Ecuación pendiente-ordenada al origen:

$$y = mx + b$$



Ecuación punto-pendiente:

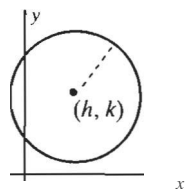
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$



Círculo con centro  $(h, k)$

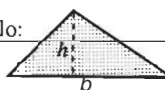
y radio  $r$ :

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$



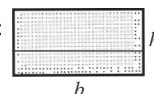
Área del triángulo:

$$A = \frac{1}{2}bh$$



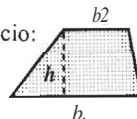
Área del rectángulo:

$$A = bh$$



Área del trapecio:

$$A = \frac{b_1 + b_2}{2}h$$

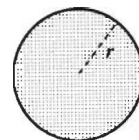


Área del círculo:

$$A = \pi r^2$$

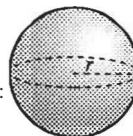
Circunferencia:

$$C = 2\pi r$$



Volumen de la esfera:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

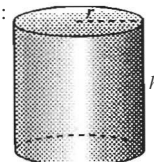


Volumen del cilindro:

$$V = \pi r^2 h$$

Área de la superficie lateral:

$$A = 2\pi r h$$



Área de la superficie:

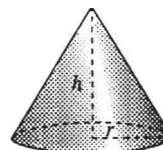
$$A = 4\pi r^2$$

Volumen del cono:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Área de la superficie lateral:

$$A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$



# TRIGONOMETRÍA:

$$\begin{aligned} \sin^2 A + \cos^2 A &= 1 && (\text{la identidad pitagórica}) \\ \tan^2 A + 1 &= \sec^2 A \end{aligned}$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 A - 1$$

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos 2A = \frac{1 + \cos 2A}{2}$$

$$\sin 2A = \frac{1 - \cos 2A}{2}$$

Véase los apéndices para más fórmulas de referencia.



## PROYECTOS

Los siguientes proyectos usan varias tecnologías y son la base para el estudio individual o para las tareas en laboratorio.

### CAPÍTULO

- |          |     |   |
|----------|-----|---|
| <b>1</b> | 1.1 | Solución de ecuaciones por medio del método de tabulación (pág. 13)               |
|          | 1.3 | Solución de ecuaciones por medio del método de aproximaciones sucesivas (pág. 31) |
|          | 1.4 | Más acerca de la solución de ecuaciones mediante aproximaciones (pág. 42)         |
| <b>2</b> | 2.1 | Aproximación gráfica de pendientes de curvas (pág. 59)                            |
|          | 2.2 | Estudio numérico de los límites (pág. 70)   |
|          | 2.4 | Aplicaciones de las ecuaciones cúbicas y cuárticas (pág. 91)                      |
| <b>3</b> | 3.1 | Estudio gráfico del crecimiento de poblaciones (pág. 106)                         |
|          | 3.5 | Extremos mediante aproximación a los ceros de derivadas (pág. 139)                |
|          | 3.6 | Solución gráfica de problemas de aplicación de máximos y mínimos (pág. 154)       |
|          | 3.9 | Implantación en calculadora/computadora del método de Newton (pág. 183)           |
| <b>4</b> | 4.4 | Solución gráfica de problemas de cajas no estándar (pág. 218)                     |
|          | 4.5 | Gráficas y soluciones de ecuaciones polinomiales (pág. 226)                       |
|          | 4.6 | Búsqueda de puntos críticos y puntos de inflexión en gráficas exóticas (pág. 241) |
| <b>5</b> | 5.4 | Cálculo numérico de sumas de Riemann (pág. 287)                                   |
|          | 5.8 | Cálculo automático de áreas (pág. 322)  |
|          | 5.9 | Búsqueda de $\ln 2$ y $\pi$ mediante integración numérica (pág. 335)              |
| <b>6</b> | 6.2 | Aproximación numérica de volúmenes de revolución (pág. 359)                       |
|          | 6.3 | Integrales de volumen y joyería de diseño personalizado (pág. 367)                |
|          | 6.4 | Aproximación numérica de la longitud de arco (pág. 375)                           |
| <b>7</b> | 7.1 | Aproximación del número $e$ mediante el cálculo de pendientes (pág. 407)          |
|          | 7.2 | Aproximación del número $e$ mediante integración numérica (pág. 417)              |
|          | 7.3 | Aproximación del número $e$ mediante cuadrados sucesivos (pág. 424)               |
|          | 7.4 | Paseo gráfico por donde nadie ha paseado (pág. 430)                               |
| <b>8</b> | 8.3 | Estudio gráfico de los límites de formas indeterminadas (pág. 463)                |
|          | 8.5 | Matemáticas del arco de San Luis (pág. 477)                                       |
| <b>9</b> | 9.2 | ¿Cuándo son equivalentes dos respuestas (integrales)? (pág. 484)                  |
|          | 9.5 | Crecimiento acotado de poblaciones y la ecuación logística (pág. 507)             |
|          | 9.8 | Aproximación numérica de integrales impropias (pág. 527)                          |





# **Cálculo Diferencial e Integral**



# Cálculo Diferencial e Integral

Cuarta Edición

**C. H. EDWARDS, Jr.**

*The University of Georgia, Athens*

**DAVID E. PENNEY**

*The University of Georgia, Athens*

Traducción:

**ÓSCAR ALFREDO PALMAS VELASCO**

Facultad de Ciencias, UNAM

Revisión técnica:

**VÍCTOR HUGO IBARRA MERCADO**

Licenciado en Física y Matemáticas

ESFM, IPN

Escuela de Actuaría, Universidad Anáhuac

Pearson  
Educación

MÉXICO • ARGENTINA • BRASIL • COLOMBIA • COSTA RICA • CHILE  
ESPAÑA • GUATEMALA • PERÚ • PUERTO RICO • VENEZUELA

*EDICION EN INGLÉS:*

Acquisitions Editor: George Lobell  
Editor in Chief: Tim Bozik  
Development Editor: Karen Kadin  
Production Editor: Edward Thomas  
Marketing Manager: Melissa Acuña  
Supplements Editor: Mary Hornby  
Production Manager: Trudy Pisciolli  
Design Director: Florence Dara Silverman  
Text Designer: Andrew Zulis  
Page Layout: Andrew Zutis, Karen Noferi  
Cover Designer: Patricia McGowan  
Cover Photo: Michael Portland  
Photo Editor: Lorinda Morris-Nariz  
Photo Research: Mira Schachne  
Editorial Assistance: Joanne Wendelken  
Text Composition: Intraactive Composition Corporation  
Art Studio: Network Graphics  
Copy Editor: Linda Thompson

*EDWARDS: CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL. 4a. Ed.*

---

Traducido del inglés de la obra: CALCULUS WITH ANALYTIC GEOMETRY (Brief edition), FOURTH EDITION.

All rights reserved. Authorized translation from English language edition published by Prentice-Hall, Inc.

Todos los derechos reservados. Traducción autorizada de la edición en inglés publicada por Prentice-Hall, Inc.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage and retrieval system, without permission in writing from the publisher.

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o método sin autorización por escrito del editor.

Derechos reservados © 1997 respecto a la primera edición en español publicada por

Calle 4 N° 25-2° piso Fracc. Ind. Alce Blanco.  
Naucalpan de Juárez. Edo. de México.  
C.P. 53370

ISBN 970-17-0056-2

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial. Reg. Núm. 1524.

Original English Language Edition Published by Prentice-Hall, Inc.

A Simon & Schuster Company.

Copyright © MCM.XCrv

All rights reserved

ISBN 0-13-457912-7

IMPRESO EN MÉXICO / PRINTED IN MEXICO

# Contenido

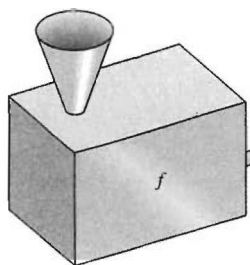
Sobre los autores

xi

Prefacio

xiii

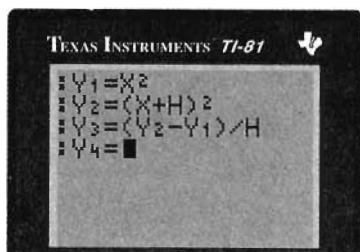
$x$



$f(x)$

## CAPÍTULO 1 Funciones y gráficas

- 1.1 Funciones y números reales 2  
    PROYECTOS 13
  - 1.2 El plano coordenado y las líneas rectas 14
  - 1.3 Gráficas de ecuaciones y funciones 23  
    PROYECTOS 31
  - 1.4 Un breve catálogo de funciones 33  
    PROYECTOS 42
  - 1.5 Una vista preliminar: ¿Qué es el cálculo? 42
- REPASO: DEFINICIONES, CONCEPTOS, RESULTADOS 46



## CAPÍTULO 2 Preludio al cálculo

49

- 2.1 Rectas tangentes y la derivada: Un primer vistazo 50  
    PROYECTO 59
  - 2.2 El concepto de límite 59  
    PROYECTO 70
  - 2.3 Más acerca de los límites 71
  - 2.4 El concepto de continuidad 81  
    PROYECTOS 91
- REPASO: DEFINICIONES, CONCEPTOS, RESULTADO 92

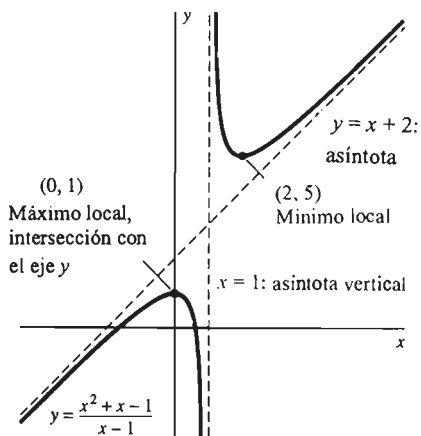




### CAPÍTULO 3 La derivada

94

3.1	La derivada y las razones de cambio	95
	PROYECTO	106
3.2	Reglas básicas de derivación	107
3.3	La regla de la cadena	118
3.4	Derivadas de funciones algebraicas	125
3.5	Máximos y mínimos de funciones en intervalos cerrados	131
	PROYECTO	139
3.6	Problemas de aplicación de máximos y mínimos	140
	PROYECTOS	154
3.7	Derivadas de las funciones trigonométricas	155
3.8	Derivación implícita y razones relacionadas	164
3.9	Aproximaciones sucesivas y el método de Newton	173
	PROYECTOS	183
REPASO: FÓRMULAS, CONCEPTOS, DEFINICIONES		185



### CAPÍTULO 4 Aplicaciones adicionales de la derivada

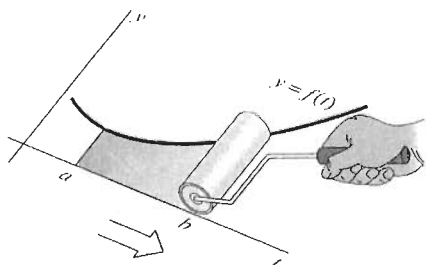
190

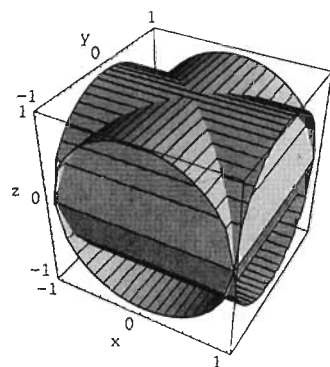
4.1	Introducción	191
4.2	Incrementos, diferenciales y aproximación lineal	191
4.3	Funciones crecientes y decrecientes y el teorema del valor medio	198
4.4	El criterio de la primera derivada	209
	PROYECTO	218
4.5	Graficación sencilla de curvas	219
	PROYECTOS	226
4.6	Derivadas de orden superior y concavidad	227
	PROYECTOS	241
4.7	Trazo de curvas y asíntotas	242
REPASO: DEFINICIONES, CONCEPTOS, RESULTADOS		250

### CAPÍTULO 5 La integral

254

5.1	Introducción	255
5.2	Antiderivadas o primitivas y problemas con condiciones iniciales	255
5.3	Cálculo de áreas elementales	268
5.4	Sumas de Riemann y la integral	279
	PROYECTOS	287
5.5	Evaluación de integrales	289
5.6	Valores promedio y el teorema fundamental del cálculo	296
5.7	Integración por sustitución	306
5.8	Áreas de regiones planas	313
	PROYECTOS	322
5.9	Integración numérica	323
	PROYECTOS	335
REPASO: DEFINICIONES, CONCEPTOS, RESULTADOS		336

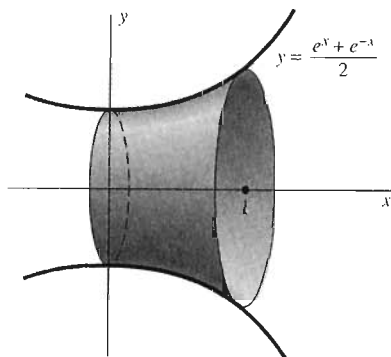




## CAPÍTULO 6 Aplicaciones de la integral

340

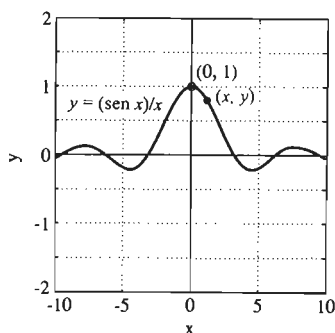
- 6.1 Construcción de fórmulas integrales 341
  - 6.2 Volúmenes por el método de secciones transversales 348  
PROYECTO 359
  - 6.3 Volúmenes por el método de capas cilíndricas 360  
PROYECTO 367
  - 6.4 Longitud de arco y área de superficies de revolución 367  
PROYECTO 375
  - 6.5 Ecuaciones diferenciales separables 376
  - 6.6 Fuerza y trabajo 383
- REPASO: DEFINICIONES, CONCEPTOS, RESULTADOS 393



## CAPÍTULO 7 Funciones exponenciales y logarítmicas

397

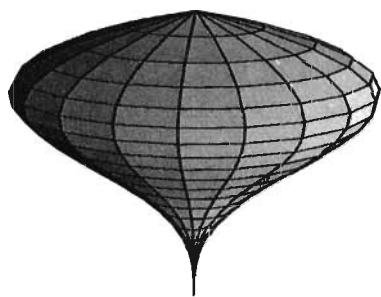
- 7.1 Exponenciales, logaritmos y funciones inversas 398  
PROYECTO 407
  - 7.2 El logaritmo natural 408  
PROYECTO 417
  - 7.3 La función exponencial 418  
PROYECTO 424
  - 7.4 Funciones exponenciales y logarítmicas generales 425  
PROYECTO 430
  - 7.5 Crecimiento y decaimiento naturales 431
  - \*7.6 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden y aplicaciones 439
- REPASO: DEFINICIONES, CONCEPTOS, RESULTADOS 445



## CAPÍTULO 8 Más acerca del cálculo de las funciones trascendentes

448

- 8.1 Introducción 449
  - 8.2 Funciones trigonométricas inversas 449
  - 8.3 Formas indeterminadas y regla de l'Hôpital 458  
PROYECTO 463
  - 8.4 Formas indeterminadas adicionales 464
  - 8.5 Funciones hiperbólicas y funciones hiperbólicas inversas 468  
PROYECTO 477
- REPASO: DEFINICIONES Y FÓRMULAS 478



9.1	Introducción	481
9.2	Tablas de integrales y sustituciones simples	481
	PROYECTO	484
9.3	Integrales trigonométricas	485
9.4	Integración por partes	492
9.5	Funciones racionales y fracciones parciales	499
	PROYECTO	507
9.6	Sustitución trigonométrica	508
9.7	Integrales que contienen polinomios cuadráticos	514
9.8	Integrales impropias	519
	PROYECTO	527
	RESUMEN	528

**Apéndices**

<b>A</b>	Repaso de trigonometría	A-1
<b>B</b>	Demostraciones de las propiedades del límite	A-7
<b>C</b>	La completitud del sistema de números reales	A-12
<b>D</b>	Demostraciones de la regla de la cadena	A-17
<b>E</b>	Existencia de la integral	A-18
<b>F</b>	Aproximaciones y sumas de Riemann	A-24
<b>G</b>	Regla de l'Hôpital y teorema del valor medio de Cauchy	A-28
<b>H</b>	Demostración de la fórmula de Taylor	A-30
<b>I</b>	Unidades de medida y factores de conversión	A-31
<b>J</b>	Fórmulas de álgebra, geometría y trigonometría	A-32
<b>K</b>	El alfabeto griego	A-34

**Respuestas a los problemas impares**

**Bibliografía para estudio posterior**

**Índice**

# Sobre los autores

**C. Henry Edwards**, University of Georgia, recibió su Ph. D. de la University of Tennessee en 1960. Después impartió clases en la University of Wisconsin por tres años y un año en el Institut for Advanced Studies (Princeton), como Alfred P. Sloan Research Fellow. El profesor Edwards acaba de cumplir su año 35 en la enseñanza (incluyendo la enseñanza del cálculo casi todos los años) y ha recibido premios de enseñanza de numerosas universidades. Su carrera ha ido de la investigación y dirección de tesis en topología e historia de las matemáticas a las matemáticas aplicadas, a las computadoras y la tecnología en matemáticas (su punto de atención en los últimos años). Además de sus textos de cálculo, cálculo avanzado, álgebra lineal y ecuaciones diferenciales, es bien conocido por los maestros de cálculo como el autor de *The Historical Development of the Calculus* (Springer-Verlag, 1979). Ha trabajado como investigador principal en tres proyectos recientes apoyados por la NSF: (1) Un proyecto para introducir tecnología en todo el curriculum de matemáticas en dos sistemas de escuelas públicas del noreste de Georgia (incluyendo *Maple* para estudiantes de los primeros cursos de álgebra); (2) un programa piloto *Calculus with Mathematica* en la University of Georgia; y (3) un proyecto de laboratorio de computación basado en *MATLAB* para estudiantes de últimos niveles de análisis numérico y matemáticas aplicadas.

**David E. Penney**, University of Georgia, terminó su Ph. D. en Tulane University en 1965, a la vez que impartía clases en la University of New Orleans. Anteriormente había trabajado en biofísica experimental en Tulane University y en el Veteran's Administration Hospital de Nueva Orleans. En realidad, comenzó a impartir clases de cálculo en 1957 y desde entonces ha impartido dicho curso cada periodo. Se unió al departamento de matemáticas en Georgia en 1966 y desde entonces ha recibido premios de enseñanza en varias universidades. Él es autor de varios artículos de investigación en teoría de números y topología y es autor o coautor de libros de álgebra lineal, ecuaciones diferenciales y cálculo.



# Prefacio

El papel y la práctica de las matemáticas a nivel global y mundial está sufriendo una revolución, con la influencia principal de la tecnología de cómputo. Las calculadoras y los sistemas de cómputo proporcionan a estudiantes y maestros la fuerza matemática que ninguna generación anterior podría haber imaginado. Incluso leemos en los periódicos eventos impresionantes, como el reciente anuncio de la demostración del último teorema de Fermat. En términos de las matemáticas, ¡seguramente *ésta* es la época más excitante en toda la historia! Así, al preparar esta nueva edición de **CÁLCULO** *diferencial e integral*, deseamos llevar a los estudiantes que lo utilicen algo de esta excitación.

También notamos que el curso de cálculo es la puerta principal para las carreras técnicas y profesionales para un número cada vez mayor de estudiantes en un rango cada vez mayor de curricula. Adonde volteemos (en las empresas, el gobierno, la ciencia y la tecnología), casi todo aspecto del trabajo profesional está relacionado con las matemáticas. Por tanto, hemos repensado el objetivo de proporcionar a los estudiantes de cálculo la base sólida para su trabajo posterior que deben obtener de su texto de cálculo.

Por primera vez desde que la versión original de este libro se publicó en 1982, esta cuarta edición ha sido revisada desde el principio hasta el fin. Los análisis y explicaciones han sido reescritos en un lenguaje que los estudiantes verán más vivo y accesible. Los temas que rara vez se tocan han sido recortados, para adecuarlos a un curso de cálculo más accesible. Hemos agregado notas históricas y biográficas para mostrar a los estudiantes el lado humano del cálculo, así como proyectos con calculadoras gráficas y laboratorios de cómputo (con opciones para *Derive*, *Maple* y *Mathematica*) para las secciones fundamentales del texto. De hecho, en esta edición se percibe un espíritu y un enfoque nuevos que reflejan el interés prevaleciente en las calculadoras gráficas y los sistemas de cómputo. En forma consistente con el énfasis gráfico del movimiento actual de reforma del cálculo, hemos casi duplicado el número de figuras en el texto, donde gran parte del nuevo material gráfico es generado por computadora. Muchas de estas figuras adicionales sirven para ilustrar un enfoque de más deliberación y exploración a la solución de problemas. Nuestra propia experiencia en la enseñanza sugiere que el uso de la tecnología contemporánea puede hacer que el cálculo sea más concreto y accesible a los estudiantes.

## Características de la cuarta edición

Al preparar esta edición, hemos aprovechado de los numerosos y valiosos comentarios y sugerencias de los usuarios de las primeras tres ediciones. Esta revisión ha sido tan completa que las modificaciones son demasiadas como para enumerarse aquí. Sin embargo, los párrafos siguientes resumen las modificaciones de mayor interés.



**Problemas adicionales** El número de problemas ha crecido poco a poco desde la primera edición y ahora suman casi 6000. En la tercera y cuarta ediciones hemos insertado muchos ejercicios de práctica adicionales al principio de los conjuntos de problemas, para garantizar que los estudiantes obtengan la confianza y habilidad de cómputo suficiente antes de pasar a los problemas más conceptuales que constituyen el objetivo real del cálculo. En esta edición hemos agregado también problemas basados en gráficos que enfatizan la comprensión conceptual y acostumbren a los estudiantes a utilizar las calculadoras gráficas.

**Nuevos ejemplos y detalles de cómputo** En muchas de las secciones de esta edición, hemos insertado un primer ejemplo más sencillo o reemplazado ejemplos ya existentes por otros cuyo cómputo es más sencillo. Además, insertado una línea o dos más de detalles de cómputo en muchos de los ejemplos resueltos para facilitar su seguimiento al estudiante. Realizamos estos cambios de modo que los cálculos no sean una barrera contra la comprensión conceptual.

**Material proyecto** Hemos insertado proyectos complementarios (un total de 48) en todo el libro. Cada proyecto utiliza algún aspecto de la tecnología actual de cómputo para ilustrar las ideas principales de la sección que lo precede, y cada uno contiene por lo general problemas adicionales cuya solución pretende usar una calculadora gráfica o una computadora. Las figuras y los datos ilustran el uso de calculadoras gráficas y sistemas de cómputo como *Derive*, *Maple* y *Mathematica*. Este material proyecto es adecuado para su uso en un laboratorio de computadoras o calculadoras conducido en relación con un curso estándar de cálculo, tal vez con una reunión a la semana. También se puede utilizar como base para las tareas con calculadoras gráficas o computadoras que los estudiantes deben realizar fuera de clase o para su estudio individual.

**Gráficos por computadora** Ahora que las calculadoras gráficas y las computadoras han llegado para quedarse, es posible y recomendable el creciente énfasis en la visualización gráfica, junto con el trabajo numérico y simbólico. Cerca de 250 figuras nuevas generadas con *MATLAB* ilustran el tipo de figuras que los estudiantes pueden producir por sí mismos con las calculadoras gráficas. Muchas de éstas se incluyen con material nuevo para problemas gráficos. Incluimos cerca de 100 gráficos a color generados con *Mathematica* para resaltar todas las secciones relacionadas con el material tridimensional.

**Material histórico y biográfico** Hemos insertado material histórico y biográfico al principio de cada capítulo para dar a los estudiantes una idea del desarrollo de nuestra materia por seres humanos reales, vivos. Ambos autores se basan en la historia de las mismas y creen que puede influir de manera favorable en la enseñanza de las matemáticas. Por esta razón, también aparecen en el texto varios comentarios históricos.

**Capítulos introductorios** Hemos insertado los capítulos 1 y 2 para un inicio más claro y rápido del cálculo. El capítulo 1 se centra en las funciones y las gráficas. Incluye ahora una sección que cataloga las funciones elementales del cálculo y proporciona una base para un énfasis temprano en las funciones trascendentes. El capítulo 1 concluye ahora con una sección dedicada a la pregunta “¿Qué es el cálculo?” El capítulo 2, de límites, comienza con una sección relativa a las rectas tangentes para motivar la introducción oficial de los límites en la sección 2.2. En

contraste con la tercera edición, esta edición trata los límites trigonométricos en todo el capítulo 2, para apoyar una introducción más rica y más visual del concepto de límite.

**Capítulos de derivación** La secuencia de los temas en los capítulos 3 y 4 varía un poco con respecto del orden tradicional. Intentamos dar confianza al estudiante presentando los temas en orden creciente de dificultad. La regla de la cadena aparece un poco temprano (en la sección 3.3) y tratamos las técnicas básicas de derivación de funciones algebraicas antes de analizar los máximos y mínimos en las secciones 3.5 y 3.6. La aparición de las funciones inversas se difiere ahora hasta el capítulo 7. La sección 3.7 trata ahora de las derivadas de las seis funciones trigonométricas. La derivación implícita y las razones relacionadas con ésta se combinan en una sola sección (Sección 3.8). El teorema del valor medio y sus aplicaciones se difieren hasta el capítulo 4. Las secciones 4.4 acerca del criterio de la primera derivada y 4.6 acerca de las derivadas de orden superior y la concavidad se han simplificado y adecuado al flujo del texto. Se ha agregado gran cantidad de material gráfico en las secciones de trazo de curvas con las que concluye el capítulo 4.

**Capítulos de integración** Se han insertado nuevos ejemplos más sencillos en los capítulos 5 y 6. Las primitivas (anteriormente al final del capítulo 4) abren ahora el capítulo 5. La sección 5.4 (sumas de Riemann) se ha simplificado en gran medida, eliminando las sumas superiores e inferiores, enfatizado en vez de ellas las sumas con puntos medios o con extremos. Muchos maestros piensan ahora que las primeras aplicaciones de la integral no deben confinarse al estándar de cálculo de áreas y volúmenes; la sección 6.5 es una sección opcional que presenta las ecuaciones diferenciales separables. Para eliminar la redundancia, el material de centroides y el teorema de Pappus se pasa al capítulo 15 (Integrales múltiples), donde se puede estudiar en un contexto más natural.

**Opciones tempranas para las funciones trascendentes** Se dispone de dos versiones “tempranas de funciones trascendentes”: una que incluye el cálculo de varias variables y una que sólo trata el cálculo de una variable. En la versión “regular”, la flexible organización del capítulo 7 comienza con el “enfoque del bachillerato” de las funciones exponenciales, seguido de la idea de un logaritmo como la potencia a la que debemos elevar la base  $a$  para obtener el número  $x$ . Sobre esta base, la sección 7.1 hace un repaso sencillo de las leyes de los exponentes y de los logaritmos e investiga de manera informal la derivación de las funciones exponencial y logarítmica. Esta sección acerca del cálculo diferencial elemental de las exponenciales y los logaritmos se puede estudiar en cualquier momento, después de la sección 3.3 (regla de la cadena). Si esto se hace, entonces se puede estudiar la sección 7.2 (basada en la definición del logaritmo como una integral) en cualquier momento, después de definir la integral en el capítulo 5 (junto con gran parte del resto del capítulo 7, como desee el maestro). De esta forma, el texto se puede adecuar a un curso más sencillo que incluya de manera temprana las funciones exponenciales en el cálculo diferencial y/o de manera temprana las funciones logarítmicas en el cálculo integral.

Las demás funciones trascendentes (funciones trigonométricas inversas e hiperbólicas) se estudian ahora en el capítulo 8. Este capítulo recién reorganizado incluye ahora las formas indeterminadas y la regla del'Hôpital (más temprano que en la tercera edición).

**Técnicas de integración modernizadas** El capítulo 9 está organizado para adecuarse a los maestros que piensan que los métodos de integración formal necesitan ahora un menor énfasis, en vista de las técnicas modernas para la integración numérica y simbólica. Es de suponer que todos deseen tratar las primeras cuatro secciones del capítulo (hasta la integración por partes en la sección 9.4). El método de fracciones parciales aparece en la sección 9.5 y las sustituciones trigonométricas y las integrales con polinomios cuadráticos aparecen después, en las secciones 9.6 y 9.7. Las integrales impropias aparecen ahora en la sección 9.8 y las sustituciones de racionalización más particulares han sido desplazadas a los problemas del capítulo 9. Este reordenamiento del capítulo 9 lo hace más conveniente para detenerse cuando el maestro lo desee.

**Ecuaciones diferenciales** Muchos maestros de cálculo piensan ahora que las ecuaciones diferenciales deben estudiarse de la forma más temprana y frecuente posible. Las ecuaciones diferenciales más sencillas, de la forma  $y' = f(x)$ , aparecen en una subsección al final de la sección 5.2. La sección 6.5 ilustra las aplicaciones de la integral a la solución de ecuaciones diferenciales separables. La sección 9.5 incluye aplicaciones del método de fracciones parciales a problemas de población y a la ecuación logística. De esta forma, hemos distribuido algo del espíritu y el sabor de las ecuaciones diferenciales en el texto, de modo que parecía claro eliminar el último capítulo de nuestra tercera edición, dedicado exclusivamente a las ecuaciones diferenciales. Sin embargo, los que así lo deseen pueden comunicarse con Prentice Hall para solicitar las secciones adecuadas para el uso complementario de Edwards y Penney, *Ecuaciones diferenciales elementales y problemas con condiciones en la frontera*, tercera edición.

## Mantenimiento de la fuerza tradicional

Aunque se han agregado muchas características nuevas, siguen presentes cinco objetivos relacionados entre sí: **concretez, legibilidad, motivación, aplicabilidad y precisión.**

**Concretez** La fuerza del cálculo es impresionante por sus respuestas precisas a preguntas y problemas reales. En el necesario desarrollo conceptual del cálculo, mantenemos siempre la pregunta central: ¿Cómo *calcularlo* realmente? Enfatizamos de manera particular los ejemplos, aplicaciones y problemas concretos que sirven para resaltar el desarrollo de la teoría y demostrar la admirable versatilidad del cálculo en el estudio de importantes cuestiones científicas.

**Legibilidad** Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas se complican con frecuencia por las dificultades en el lenguaje. Nuestro estilo de escritura parte de la creencia de que la exposición llana, intuitiva y precisa, hace más accesibles las matemáticas (y por tanto más fáciles de aprender) sin pérdida de rigor. En esta edición hemos intentado hacer que nuestro lenguaje sea claro y atractivo para los estudiantes, de modo que ellos puedan y *quieran* leerlo, permitiendo entonces a los maestros concentrar el tiempo de la clase en los aspectos menos rutinarios de la enseñanza del cálculo.

**Motivación** Nuestra exposición se centra en los ejemplos del empleo del cálculo para resolver problemas reales de interés para las personas reales. Al seleccionar tales problemas para los ejemplos y ejercicios, hemos utilizado el punto de vista de que el interés estimulante y el estudio eficaz motivante van de

la mano. Intentamos aclarar a los estudiantes la forma en que el conocimiento obtenido con cada concepto o técnica valdrá el esfuerzo. En los análisis teóricos, en particular, intentamos proporcionar una imagen intuitiva del objetivo antes de perseguirlo.

**Aplicaciones** Las diversas aplicaciones del cálculo son lo que atrae a muchos estudiantes hacia la materia, y las aplicaciones realistas proporcionan una valiosa motivación y refuerzo para todos ellos. Nuestro libro es bien conocido por el amplio rango de aplicaciones incluidas, pero no es necesario ni recomendable que cada curso abarque todas las aplicaciones en el mismo. Cada sección o subsección que se pueda omitir sin pérdida de continuidad se marca con un asterisco. Esto proporciona flexibilidad para que un maestro determine su propio énfasis.

**Precisión** Nuestro tratamiento del cálculo es completo (aunque esperamos que sea menos que enciclopédico). Más que sus antecesores, esta edición fue sujeta a un proceso amplio de revisión para ayudar a garantizar su precisión. Por ejemplo, esencialmente todas las respuestas a problemas en la sección de respuestas al final de esta edición ha sido verificada con *Mathematica*. Con respecto a la selección y secuencia de los temas matemáticos, nuestro enfoque es tradicional. Sin embargo, un examen cercano del tratamiento de los temas estándar puede delatar nuestra propia participación en el movimiento actual por revitalizar la enseñanza del cálculo. Continuamos en favor de un enfoque intuitivo que enfatice la comprensión conceptual y el cuidado en la formulación de las definiciones y conceptos fundamentales del cálculo. Algunas de las demostraciones que se pueden omitir a criterio del maestro aparecen al final de las secciones, mientras que otras se difieren a los apéndices. De esta forma, damos amplio margen para la variación en la búsqueda del equilibrio adecuado entre el rigor y la intuición.

## Agradecimientos

Todos los autores experimentados conocen el valor de la revisión crítica durante la preparación y revisión de un manuscrito. En nuestro trabajo con varias ediciones de este libro, nos hemos beneficiado en gran medida con el consejo de los siguientes revisores, excepcionalmente hábiles:

Leon E. Arnold, Delaware County Community College

H. L. Bentley, University of Toledo

Michael L. Berry, West Virginia Wesleyan College

William Blair, Northern Illinois University

George Cain, Georgia Institute of Technology

Wil Clarke, Atlantic Union College

Peter Colwell, Iowa State University

William B. Francis, Michigan Technological University

Dianne H. Haber, Westfield State College

John C. Higgins, Brigham Young University

W. Cary Huffman, Loyola University of Chicago  
Calvin Jongsma, Dordt College  
Morris Kalka, Tulane University  
Louise E. Knouse, Le Tourneau College  
Catherine Lilly, Westfield State College  
Joyce Longman, Villanova University  
E. D. McCune, Stephen F. Austin State University  
Arthur L. Moser, Illinois Central College  
Barbara Moses, Bowling Green University  
Barbara L. Osofsky, Rutgers University at New Brunswick  
John Petro, Western Michigan University  
James P. Qualey, Jr., University of Colorado  
Thomas Roe, South Dakota State University  
Lawrence Runyan, Shoreline Community College  
William L. Siegmann, Rensselaer Polytechnic Institute  
John Spellman, Southwest Texas State University  
Virginia Taylor, University of Lowell  
Samuel A. Truitt, Jr., Middle Tennessee State University  
Robert Urbanski, Middlesex County College  
Robert Whiting, Villanova University  
Cathleen M. Zucco, Le Moyne College

Muchas de las mejoras realizadas a esta obra deben acreditarse a nuestros colegas y los usuarios de las primeras tres ediciones en Estados Unidos, Canadá y otros países. Estamos agradecidos con aquellos que nos han escrito, particularmente los estudiantes, y esperamos que continúen haciéndolo. Agradecemos a Betty Miller de West Virginia University su diligente resolución de los problemas y a Terri Bittner, quien junto con su equipo en Laurel Tutoring (San Carlos, California) verificaron la precisión de *toda* solución a los ejemplos y los ejercicios impares. También pensamos que la calidad del libro terminado es un testimonio adecuado de la capacidad, diligencia y talento de un equipo excepcional en Prentice Hall. Damos las gracias particularmente a George Lobell y Priscilla McGeehon, editores de matemáticas; Karen Karlin, editor de desarrollo, Ed Thomas, editor de producción; y Andy Zutis, diseñador. Por último, no podemos agradecer lo suficiente a Alice Fitzgerald Edwards y Carol Wilson Penney su apoyo, ánimo y paciencia continuos.

C. H. E., Jr  
hedwards@math.uga.edu

D. E. P.  
dpenney@math.uga.edu

Athens, Georgia

# **Cálculo Diferencial e Integral**





# Funciones y gráficas

O Es posible que el erudito francés del siglo XVII René Descartes sea más recordado hoy en día como filósofo que como matemático. Pero muchos de nosotros estamos familiarizados con el "plano cartesiano", en donde la posición de un punto  $P$  queda determinada por sus coordenadas  $(x, y)$ .

O Durante su época de estudiante, con frecuencia Descartes tenía permiso de levantarse tarde, debido a su supuesta salud quebrantada. Él afirmaba que pensaba más claramente acerca de la filosofía, la ciencia y las matemáticas cuando estaba cómodamente acostado en las frías mañanas. Después de graduarse en derecho (lo que estudió aparentemente con poco entusiasmo), Descartes viajó con varios ejércitos por algunos años, pero más como un caballero que como un militar profesional.

O Después de establecerse por fin (en Holanda), Descartes publicó en 1637 su famoso tratado filosófico *Discurso del método* (Del buen razonamiento y la búsqueda de la verdad en las ciencias). Uno de los tres apéndices de su obra establecía su nuevo enfoque "analítico" de la geo-

metría. Su principal idea (establecida casi en forma simultánea por su coterráneo Pierre de Fermat) fue la correspondencia entre una *ecuación* y su *gráfica*, que era por lo general una curva en el plano. La ecuación se podía utilizar para estudiar la curva, o viceversa.

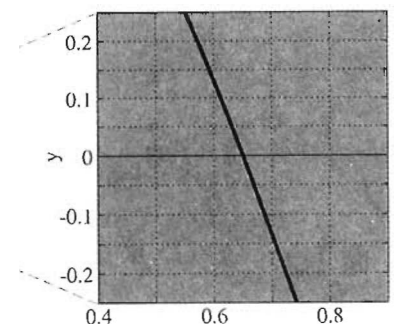
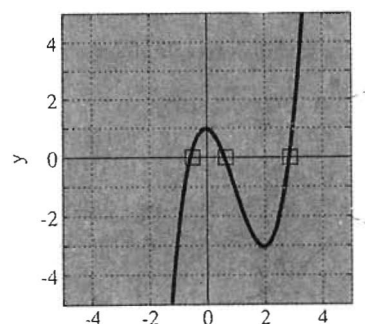
O Supongamos que queremos resolver la *ecuación*  $f(x) = 0$ . Sus soluciones son los puntos de intersección de la gráfica  $y = f(x)$  con el eje  $x$ , de modo que una imagen precisa de la curva muestra el número y posiciones aproximadas de las soluciones de la ecuación. Por ejemplo, la gráfica de

$$y = x^3 - 3x^2 + 1$$

tiene tres intersecciones con el eje  $x$ , lo que muestra que la ecuación

$$x^3 - 3x^2 + 1 = 0$$

tiene tres soluciones reales (una entre -1 y 0, otra entre 0 y 1, y una más entre 2 y 3). Una calculadora gráfica moderna o un programa de graficación para computadora pueden aproximar estas soluciones de manera más precisa, amplificando las regiones donde se localizan. Por ejemplo, la región central agrandada muestra que la solución correspondiente es  $x \approx 0.65$ .



La gráfica de  $y = x^3 - 3x^2 + 1$

# 1.1

## Funciones y números reales

El cálculo es uno de los logros supremos del intelecto humano. Esta disciplina matemática surge principalmente de los estudios realizados en el siglo XVII por Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Sin embargo, algunas de sus ideas datan de la época de Arquímedes (287-212 a.C.) y tuvieron su origen en culturas tan diversas como la de Grecia, Egipto, Babilonia, India, China y Japón. Muchos de los descubrimientos científicos que han formado nuestra civilización durante los últimos tres siglos hubieran sido imposibles sin el uso del cálculo.

El principal objetivo del cálculo es el análisis de problemas de cambio y movimiento. Estos problemas son fundamentales, pues vivimos en un mundo de cambios constantes, pleno de cuerpos en movimiento y con fenómenos de flujo y reflujo. En consecuencia, el cálculo sigue siendo un tema de gran trascendencia; en la actualidad, este cuerpo de técnicas de cómputo continúa sirviendo como el lenguaje cuantitativo principal de la ciencia y la tecnología.

Gran parte del cálculo implica el empleo de los números reales o de variables para describir las cantidades cambiantes y el uso de funciones para describir las relaciones entre las diversas variables. En esta sección inicial haremos en primer lugar un repaso de la notación y terminología de los números reales y después analizaremos las funciones con más detalle.

### NÚMEROS REALES

Los **números reales** son familiares al lector. Son los números que se usan en forma común en la mayor parte de las mediciones. La masa, la velocidad, la temperatura y la carga de un cuerpo se miden mediante números reales. Éstos se pueden representar por desarrollos decimales **finitos** o **infinitos**; de hecho, todo número real tiene un desarrollo decimal infinito, pues un desarrollo finito puede seguir con una infinidad de ceros:

$$\frac{3}{8} = 0.375 = 0.37500000 \dots$$

Cualquier decimal **periódico**, como

$$\frac{7}{22} = 0.318181818 \dots,$$

representa un número **racional**, dado como el cociente de dos enteros. Recíprocamente, todo número racional se representa mediante un desarrollo decimal periódico, como los que se muestran aquí. El desarrollo decimal de un número **irracional** (un número que no es racional), como

$$\sqrt{2} = 1.414213562 \dots \quad \text{o} \quad \pi = 3.141592653589793 \dots,$$

es infinito y no periódico.

La interpretación geométrica de los números reales como puntos en la **recta real** (o *recta numérica real*)  $\mathbf{R}$  también debe serle familiar. Cada número real es representado precisamente por un punto de  $\mathbf{R}$ , y cada punto de  $\mathbf{R}$  representa precisamente un número real. Por convención, los números positivos están a la derecha de cero y los números negativos a la izquierda, como en la figura 1.1.1.

Las siguientes propiedades de las desigualdades de números reales son fundamentales y se usan con frecuencia:

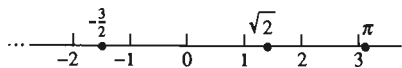


Figura 1.1.1 La recta real  $\mathbf{R}$

Si  $a < b$  y  $b < c$ , entonces  $a < c$ .

Si  $a < b$ , entonces  $a + c < b + c$ . (1)

Si  $a < b$  y  $c > 0$ , entonces  $ac < bc$ .

Si  $a < b$  y  $c < 0$ , entonces  $ac > bc$ .

Las últimas dos proposiciones significan que una desigualdad se preserva cuando sus miembros se multiplican por un número *positivo*, pero se *invierte* cuando se multiplican por un número *negativo*.

## VALOR ABSOLUTO

La distancia (no negativa) en la recta real entre cero y el número real  $a$  es el **valor absoluto** de  $a$ , que se escribe  $|a|$ . En forma equivalente,

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0; \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases} \quad (2)$$

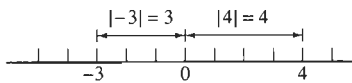
La notación  $a \geq 0$  significa que  $a$  es *mayor* que cero o igual a cero. La ecuación (2) implica que  $|a| \geq 0$  para todo número real  $a$  y que  $|a| = 0$  si y sólo si  $a = 0$ .

**EJEMPLO 1** Como lo muestra la figura 1.1.2,

$$|4| = 4 \quad \text{y} \quad |-3| = 3.$$

Además,  $|0| = 0$  y  $|\sqrt{2} - 2| = 2 - \sqrt{2}$ , donde esto último es cierto, pues  $2 > \sqrt{2}$ . Así,  $\sqrt{2} - 2 < 0$  y entonces

$$|\sqrt{2} - 2| = -(\sqrt{2} - 2) = 2 - \sqrt{2}.$$



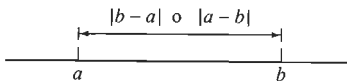
**Figura 1.1.2** El valor absoluto de un número real es simplemente su distancia al cero (Ejemplo 1)

Las propiedades siguientes de los valores absolutos se usan con frecuencia:

$$\begin{aligned} |a| &= |-a| = \sqrt{a^2} \geq 0, \\ |ab| &= |a| |b|, \\ -|a| &\leq a \leq |a| \quad \text{y} \\ |a| &< b \quad \text{si y sólo si} \quad -b < a < b. \end{aligned} \quad (3)$$

La **distancia** entre los números reales  $a$  y  $b$  se define como  $|a - b|$  (o  $|b - a|$ ; no existe diferencia). Esta distancia es simplemente la longitud del segmento de recta de la recta real  $\mathbf{R}$  con extremos  $a$  y  $b$  (figura 1.1.3).

Las propiedades de las desigualdades y de los valores absolutos en las ecuaciones (1) a (3) implican el siguiente e importante teorema.



**Figura 1.1.3** La distancia entre  $a$  y  $b$

### Desigualdad del triángulo

Para todos los números reales  $a$  y  $b$ ,

$$|a + b| \leq |a| + |b|. \quad (4)$$

**Demostración** Hay que considerar varios casos, según si los números  $a$  y  $b$  son positivos o negativos y cuál de ellos tenga el mayor valor absoluto. Si ambos son positivos, entonces también lo es  $a + b$ ; por tanto,

$$|a + b| = a + b = |a| + |b|. \quad (5)$$

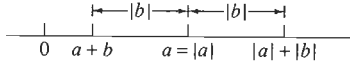
Si  $a > 0$  y  $b < 0$ , con  $|b| < |a|$ , entonces

$$0 < a + b < a,$$

de modo que

$$|a + b| = a + b < a = |a| < |a| + |b|, \quad (6)$$

como se muestra en la figura 1.1.4. Los demás casos son similares. En particular, vemos que la desigualdad del triángulo es en realidad una igualdad (como en la ecuación (5)) a menos que  $a$  y  $b$  tengan signos distintos, en cuyo caso es una desigualdad estricta [como en la ecuación (6)].  $\square$



**Figura 1.1.4** La desigualdad del triángulo con  $a > 0$ ,  $b < 0$  y  $|b| < |a|$

## INTERVALOS

Supongamos que  $S$  es un conjunto (colección) de números reales. Es común describir  $S$  mediante la notación

$$S = \{x : \text{condición}\},$$

donde la “condición” es verdadera para todos los números  $x$  en  $S$  y falsa para todos los números  $x$  que no están en  $S$ . Los conjuntos más importantes de números reales en cálculo son los **intervalos**. Si  $a < b$ , entonces el **intervalo abierto**  $(a, b)$  se define como el conjunto

$$(a, b) = \{x : a < x < b\}$$

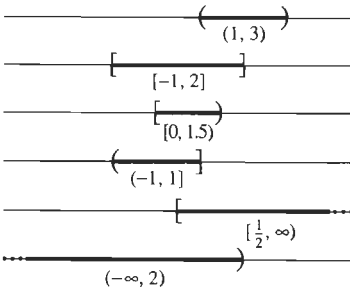
de números reales, y el **intervalo cerrado**  $[a, b]$  es

$$[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}.$$

Así, un intervalo cerrado contiene a sus extremos, mientras que un intervalo abierto no. También usaremos los **intervalos semiabiertos**

$$[a, b) = \{x : a \leq x < b\} \quad \text{y} \quad (a, b] = \{x : a < x \leq b\}.$$

Así, el intervalo abierto  $(1, 3)$  es el conjunto de aquellos números reales  $x$  tales que  $1 < x < 3$ , el intervalo cerrado  $[-1, 2]$  es el conjunto de números reales  $x$  tales que  $-1 \leq x \leq 2$  y el intervalo semiabierto  $(-1, 2)$  es el conjunto de números reales  $x$  tales que  $-1 < x \leq 2$ . En la figura 1.1.5 mostramos algunos ejemplos de tales intervalos, así como algunos intervalos **no acotados**, que tienen formas tales como



$$[a, \infty) = \{x : x \geq a\},$$

$$(-\infty, a] = \{x : x \leq a\},$$

$$(a, \infty) = \{x : x > a\} \quad \text{y}$$

$$(-\infty, a) = \{x : x < a\}.$$

**Figura 1.1.5** Algunos ejemplos de intervalos de números reales

El símbolo  $\infty$ , que denota infinito, es simplemente una convención de notación y *no* representa a un número real; la recta real  $\mathbf{R}$  *no* tiene “extremos en infinito”. El uso de este símbolo es motivado por la descripción breve y natural  $(\pi, \infty)$  y  $(-\infty, 2)$  para los conjuntos

$$\{x : x \geq \pi\} \quad \text{y} \quad \{x : x < 2\}$$

de todos los números reales  $x$  tales que  $x \geq \pi$  y  $x < 2$ , respectivamente.

## FUNCIONES

La clave para el análisis matemático de una situación geométrica o científica es por lo general el reconocimiento de las relaciones entre las variables que describen la situación. Tal relación puede ser una fórmula que exprese a una variable en *función* de otra. Por ejemplo, el área  $A$  de un círculo de radio  $r$  está dada por  $A = \pi r^2$  (figura 1.1.6). El volumen  $V$  y área de la superficie  $S$  de una esfera de radio  $r$  están dados por

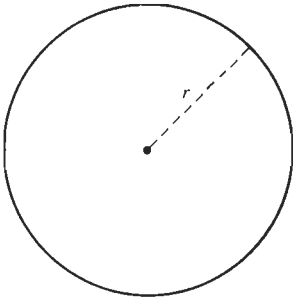


Figura 1.1.6 Círculo: área  $A = \pi r^2$ , circunferencia  $C = 2\pi r$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{y} \quad S = 4\pi r^2,$$

respectivamente (figura 1.1.7). Después de  $t$  segundos ( $s$ ) que un cuerpo se deja caer desde el reposo, éste ha caído una distancia

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

pies y tiene una velocidad de  $v = gt$  pies/seg (ft/s), donde  $g \approx 32$  pies/seg<sup>2</sup> es la aceleración debida a la gravedad. El volumen  $V$  en litros (L) de 3 gramos (g) de bióxido de carbono ( $\text{CO}_2$ ) a 27°C está dado en términos de su presión  $p$  en atmósferas (atm) por  $V = 1.68/p$ . Éstos son ejemplos de funciones reales de variable real.

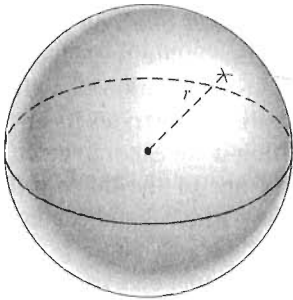


Figura 1.1.7 Esfera: volumen  $V = 4/3\pi r^3$ , área de la superficie  $S = 4\pi r^2$

### Definición de función

Una **función** real  $f$  definida en un conjunto  $D$  de números reales es una regla que asigna a cada número  $x$  en  $D$  exactamente un número real, denotado con  $f(x)$ .

El conjunto  $D$  de todos los números reales para los que  $f(x)$  está definida es el **dominio** o **dominio de definición** de la función  $f$ . El número  $f(x)$ , que se lee “ $f$  de  $x$ ”, es el **valor** de  $f$  en el número (o punto)  $x$ . El conjunto de los valores  $y = f(x)$  es el **rango** de  $f$ . Es decir, el rango de  $f$  es el conjunto

$$\{y : y = f(x) \text{ para algún } x \text{ en } D\}$$

En esta sección nos ocuparemos más del dominio de una función que de su rango.

Con frecuencia, una función queda descrita mediante una fórmula que especifica la forma de calcular el número  $f(x)$  en términos del número  $x$ . El símbolo  $f(\ )$  se puede considerar como una operación a realizar siempre que se inserte un número o expresión dentro de los paréntesis.

### EJEMPLO 2 La fórmula

$$f(x) = x^2 + x - 3 \quad (7)$$

es la regla de una función  $f$  cuyo dominio es toda la recta real  $\mathbf{R}$ . Algunos valores de  $f$  son  $f(-2) = -1$ ,  $f(0) = -3$  y  $f(3) = 9$ . Algunos valores más de la función  $f$  son

$$f(4) = (4)^2 + 4 - 3 = 17,$$

$$f(c) = c^2 + c - 3,$$

$$f(2 + h) = (2 + h)^2 + (2 + h) - 3$$

$$= (4 + 4h + h^2) + (2 + h) - 3 = 3 + 5h + h^2 \quad \text{y}$$

$$f(-t^2) = (-t^2)^2 + (-t^2) - 3 = t^4 - t^2 - 3.$$



Quando describimos la función  $f$  con la fórmula  $y = f(x)$ , llamamos a  $x$  la **variable independiente** y a  $y$  la **variable dependiente** pues el valor de  $y$  depende (mediante  $f$ ) de la elección de  $x$ . Cuando  $x$  cambia, o varía, también lo hace  $y$ . La forma en que  $y$  varía con  $x$  queda determinada por la regla de la función  $f$ . Por ejemplo, si  $f$  es la función de la ecuación (7), entonces  $y = -1$  cuando  $x = -2$ ,  $y = -3$  cuando  $x = 0$  y  $y = 9$  cuando  $x = 3$ .

Tal vez sea útil visualizar la dependencia del valor  $y = f(x)$  con respecto de  $x$  pensando una función como una especie de máquina que acepta como entrada un número  $x$  y que produce entonces como salida el número  $f(x)$ , desplegándolo o imprimiéndolo (figura 1.1.8).

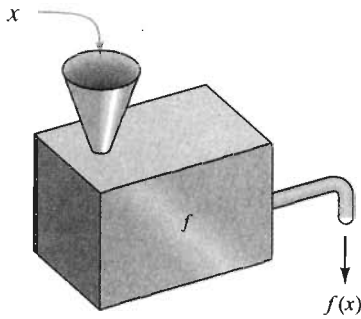


Figura 1.1.8 Una "máquina función"

Una máquina de este tipo es la calculadora común de bolsillo, con una tecla para la raíz cuadrada. Cuando se usa como dato un número no negativo  $x$  y se oprime esta tecla, la calculadora despliega (una aproximación de) el número  $\sqrt{x}$ . Observe que el dominio de esta *función raíz cuadrada*  $f(x) = \sqrt{x}$  es el conjunto de todos los números reales no negativos, puesto que ningún número negativo tiene una raíz cuadrada real. Su rango es también el conjunto de todos los números reales no negativos, pues el símbolo  $\sqrt{x}$  siempre denota la raíz cuadrada *no negativa* de  $x$ . La calculadora ilustra su conocimiento del dominio, desplegando una reacción adversa si pedimos que calcule la raíz cuadrada de un número negativo (a menos que sea una de las calculadoras más sofisticadas, como la TI-85 o la HP-48S, que pueden trabajar con números complejos).

No toda función tiene una regla dada por una única fórmula sencilla, como  $f(x) = \sqrt{x}$ . Por ejemplo, si escribimos

entonces hemos definido una función perfectamente válida, con dominio  $\mathbf{R}$ . Algunos de sus valores son  $f(-3) = 3$ ,  $f(0) = 0$  y  $f(2) = 4$ . La función del ejemplo 3 se define inicialmente por medio de una descripción verbal en vez de utilizar fórmulas.

**EJEMPLO 3** Para cada número real  $x$ , con  $f(x)$  se denota el máximo entero que es menor o igual que  $x$ . Por ejemplo,  $f(2.5) = 2$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(-3.5) = -4$  y  $f(\pi) = 3$ . Si  $n$  es un entero, entonces  $f(x) = n$  para todo número real  $x$  en el intervalo semiabierto  $[n, n + 1)$ . Esta función  $f$  se llama la **función máximo entero** y se denota con frecuencia como

(8)

Así,  $\llbracket 2.5 \rrbracket = 2$ ,  $\llbracket 0 \rrbracket = 0$ ,  $\llbracket -3.5 \rrbracket = -4$  y  $\llbracket \pi \rrbracket = 3$ . Observe que aunque  $\llbracket x \rrbracket$  está definida para todo real  $x$ , el rango de la función máximo entero sólo consta del conjunto de los enteros.

¿Cuál debería ser el dominio de una función si éste no ha sido especificado? Ésta es una situación común y ocurre cuando damos una función  $f$  escribiendo solamente su fórmula  $y = f(x)$ . Si no se especifica un dominio, se conviene que el dominio  $D$  es el conjunto de todos los números reales  $x$  para los que la expresión  $f(x)$  produce un número real. Por ejemplo, el dominio de  $f(x) = 1/x$  es el conjunto de todos los números reales distintos de cero (pues  $1/x$  está definido precisamente cuando  $x \neq 0$ ).

**EJEMPLO 4** Determine el dominio de la función  $g$  con la fórmula

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+4}}.$$

**Solución** Para que la raíz cuadrada  $\sqrt{2x+4}$  esté definida, es necesario que  $-2x+4 \geq 0$ . Esto es válido si  $2x \geq -4$  y por tanto cuando  $x \geq -2$ . Para que el recíproco  $1/\sqrt{2x+4}$  esté definido, también necesitamos que  $\sqrt{2x+4} \neq 0$  y así que  $x \neq -2$ . En estos términos, el dominio de  $g$  es el intervalo  $D = (-2, \infty)$ .

## FUNCIONES Y APLICACIONES

El estudio de un problema de aplicación se basa con frecuencia en la definición de una función que capture la esencia de una situación geométrica o física. Los ejemplos 5 y 6 ilustran este proceso.

**EJEMPLO 5** Una caja rectangular con base cuadrada tiene volumen 125. Exprese el área total de su superficie  $A$  como una función de la longitud de una arista  $x$  de su base.

**Solución** El primer paso es hacer un dibujo y etiquetar las dimensiones adecuadas. La figura 1.1.9 muestra una caja rectangular con base cuadrada con longitud de arista  $x$  en la base y altura  $y$ . Tenemos que el volumen de la caja es

$$V = x^2y = 125. \quad (9)$$

Tanto la tapa como el fondo de la caja tienen área  $x^2$  y cada uno de sus cuatro lados verticales tiene área  $xy$ , por lo que el área total de su superficie es

$$A = 2x^2 + 4xy. \quad (10)$$

Pero ésta es una fórmula para  $A$  en términos de las *dos* variables  $x$  y  $y$ , antes que una función de la *sola* variable  $x$ . Para eliminar  $y$  y obtener entonces  $A$  solamente en términos de  $x$ , despejamos  $y$  en la ecuación (9) para obtener  $y = 125/x^2$  y después sustituimos este resultado en la ecuación (10), obteniendo

$$A = 2x^2 + 4x \cdot \frac{125}{x^2} = 2x^2 + \frac{500}{x}.$$

Así, el área de la superficie, dada como una función de la longitud  $x$  de una arista es

$$A(x) = 2x^2 + \frac{500}{x}, \quad 0 < x < \infty. \quad (11)$$

Es necesario especificar el dominio, pues los valores negativos de  $x$  tienen sentido en la *fórmula* de la ecuación (11) pero no pertenecen al dominio de la *función*  $A$ . Esto se debe a que todo  $x > 0$  determina una de estas cajas, el dominio sí contiene a todos los números positivos.

---

**COMENTARIO** En el ejemplo 5, nuestro objetivo era expresar la variable dependiente  $A$  como *función* de la variable independiente  $x$ . En un principio, la situación geométrica nos proporcionaba

1. La *fórmula* de la ecuación (10) que expresa  $A$  en términos de  $x$  y la variable adicional  $y$ , y

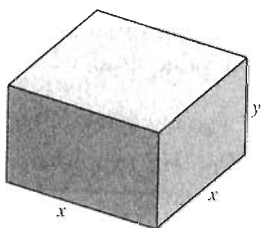


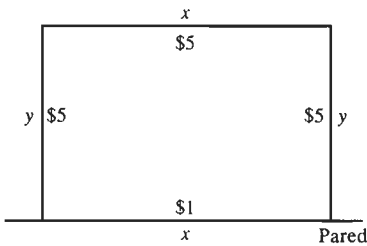
Figura 1.1.9 La caja del ejemplo 5

2. La *relación* de la ecuación (9) entre  $x$  y  $y$ , que usamos para eliminar  $y$  y con ello obtener  $A$  como función únicamente de  $x$ .

Veremos que éste es un patrón común en muchos problemas diversos de aplicación, como el siguiente.

**EL PROBLEMA DEL CORRAL DE LOS ANIMALES** Usted debe construir un corral rectangular para animales. Para ahorrar material, usará una pared como uno de los cuatro lados. El pie de cerca para los otros tres lados cuesta \$5 y debe gastar \$1 por cada pie de pintura para la parte de la pared que forma el cuarto lado del corral. Si puede gastar \$180, ¿cuáles dimensiones maximizan el área del corral que puede construir?

La figura 1.1.10 muestra el corral para los animales y sus dimensiones  $x$  y  $y$ , junto con el costo por pie de cada uno de sus cuatro lados. Cuando nos enfrentamos a un problema de aplicación expresado de manera verbal como éste, nuestra primera pregunta es, ¿por dónde debemos comenzar? El concepto de función es la clave para poder manejar esta situación. Si expresamos la cantidad por maximizar (la variable dependiente) como una función de alguna variable independiente, entonces tenemos una tarea tangible por realizar: Determinar el valor máximo que alcanza la función.



**Figura 1.1.10** El corral para los animales

**EJEMPLO 6** En relación con el problema del corral para los animales, exprese el área  $A$  del corral como función de la longitud  $x$  de su lado en la pared.

**Solución** El área  $A$  del corral rectangular de longitud  $x$  y ancho  $y$  es

$$A = xy. \quad (12)$$

Cuando multiplicamos la longitud de cada lado en la figura 1.1.10 por su costo por pie y sumamos los resultados, tenemos que el costo total  $C$  del corral está dado por

$$C = x + 5y + 5x + 5y.$$

De modo que

$$6x + 10y = 180, \quad (13)$$

puesto que tenemos dado que  $C = 180$ . Elegimos  $x$  como la variable independiente y usamos la relación en la ecuación (13) para eliminar la variable adicional  $y$  de la fórmula del área en la ecuación (12). Despejamos  $y$  en la ecuación (13) y sustituimos el resultado

$$y = \frac{1}{10}(180 - 6x) = \frac{3}{5}(30 - x) \quad (14)$$

en la ecuación (12). Así, obtenemos la función deseada

$$A(x) = \frac{3}{5}(30x - x^2)$$

que expresa el área  $A$  como función de la longitud  $x$ .

Además de esta fórmula para la función  $A$ , también debemos especificar su dominio. Sólo si  $x > 0$  obtenemos rectángulos reales, pero vemos que es más conveniente incluir también el valor  $x = 0$ . Este valor de  $x$  corresponde a un “rectángulo degenerado” de base nula y altura

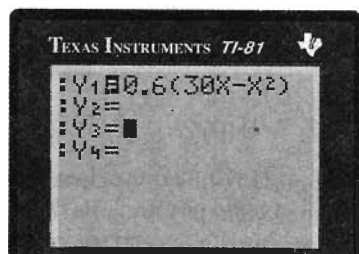
$$y = \frac{3}{5} \cdot 30 = 18,$$

$x$	$A(x)$
0	0
5	75
10	120
15	135 ←
20	120
25	75
30	0

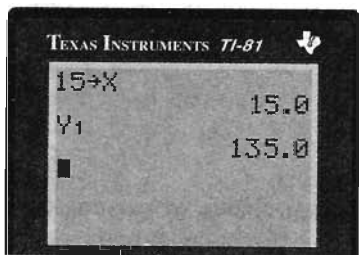
**Figura 1.1.11** Área  $A(x)$  de un corral con lado de longitud  $x$

$x$	$A(x)$
10	120
11	125.4
12	129.6
13	132.6
14	134.4
15	135 ←
16	134.4
17	132.6
18	129.6
19	125.4
20	120

**Figura 1.1.12** Más indicios de que  $x = 15$  proporciona un área maximal  $A = 135$



**Figura 1.1.13** Una calculadora programada para evaluar  $A(x) = 0.6 \cdot (30x - x^2)$



**Figura 1.1.14** Cálculo del aparente valor máximo  $A(15) = 135$

que es consecuencia de la ecuación (14). Por razones análogas, tenemos la restricción  $y \geq 0$ . Como

$$y = \frac{3}{5}(30 - x),$$

esto implica que  $x \leq 30$ . Así, la definición completa de la función área es

$$A(x) = \frac{3}{5}(30x - x^2), \quad 0 \leq x \leq 30. \quad (15)$$

El ejemplo 6 ilustra una parte importante de la solución de un problema típico relacionado con las aplicaciones de las matemáticas. El dominio de una función es una parte necesaria de su definición, y para cada función debemos especificar el dominio de valores de la variable independiente. En las aplicaciones, usamos los valores de la variable independiente adecuados para el problema en cuestión.

## ESTUDIO NUMÉRICO

Armados con el resultado del ejemplo 6, podríamos atacar el problema del corral para animales calculando una tabla de valores de la función área  $A(x)$  en la ecuación (15). Tal tabla aparece en la figura 1.1.11. Los datos de esta tabla sugieren enfáticamente que el área máxima es  $A = 135$  pies cuadrados, valor que se alcanza con una longitud del lado  $x = 15$  pies, en cuyo caso la ecuación (14) da  $y = 9$  pies. Esta conjetura parece corroborarse con los datos más refinados de la figura 1.1.12.

Así, parece que el corral para animales con área maximal (y un costo de \$180) tiene un largo  $x = 15$  pies y ancho  $y = 9$  pies. Sin embargo, las tablas de las figuras 1.1.11 y 1.1.12 muestran solamente valores *enteros* de  $x$ , por lo que sigue existiendo la posibilidad de que la longitud  $x$  del corral con área maximal *no* sea un entero. En consecuencia, las solas tablas numéricas no concluyen el tema. Se necesita una nueva idea matemática para *demostrar* que  $A(15) = 135$  es el valor máximo de

$$A(x) = \frac{3}{5}(30x - x^2), \quad 0 \leq x \leq 30$$

para *toda*  $x$  en su dominio. Atacaremos el problema de nuevo en la sección 1.3 después de un repaso de las coordenadas rectangulares en la sección 1.2.

**NOTA** Muchas calculadoras científicas permiten al usuario programar una función dada para evaluarla varias veces y con ello calcular sin problemas tablas como las de las figuras 1.1.11 y 1.1.12. Por ejemplo, la figura 1.1.13 muestra la pantalla de una calculadora TI-81 programada para evaluar la variable dependiente

$$Y_1 = A(x) = (0.6)(30x - x^2)$$

cuando el valor deseado  $x = x$  de la variable independiente se guarda y se introduce el nombre de la variable dependiente (figura 1.1.14).

## TABULACIÓN DE FUNCIONES

El uso de una calculadora para tabular los valores de una función (como en las figuras 1.1.11 y 1.1.12) es una técnica sencilla con una cantidad sorprendente de aplicaciones. Aquí ilustramos un método para resolver una ecuación de la forma  $f(x) = 0$  mediante la *tabulación repetida* de los valores  $f(x)$  de la función  $f$ .

Para dar un ejemplo específico, suponga que preguntamos cuál valor de  $x$  en la ecuación (15) proporciona un corral para animales de área  $A = 100$ . Entonces necesitamos resolver la ecuación

$$A(x) = \frac{3}{2}(30x - x^2) = 100,$$

que es equivalente a la ecuación

$$f(x) = \frac{3}{2}(30x - x^2) - 100 = 0. \quad (16)$$

Ésta es una ecuación cuadrática que se podría resolver mediante la fórmula cuadrática del álgebra básica, pero queremos dar un punto de vista más directo y numérico. La razón es que el enfoque numérico se puede aplicar aunque no se disponga de una fórmula sencilla (como la fórmula cuadrática).

Los datos de la figura 1.1.11 sugieren que un valor de  $x$  para el que  $A(x) = 100$  está en algún lugar entre  $x = 5$  y  $x = 10$  y que un segundo valor de este tipo está entre  $x = 20$  y  $x = 25$ . De hecho, al sustituir en la ecuación (16) obtenemos

$$f(5) = -25 < 0 \quad \text{y} \quad f(10) = 20 > 0.$$

El hecho de que  $f(x)$  sea *negativo* en un extremo del intervalo  $[5, 10]$  pero *positivo* en el otro extremo sugiere que  $f(x)$  se *anula* en algún punto entre  $x = 5$  y  $x = 10$ .

Para ver *dónde*, tabulamos valores de  $f(x)$  en  $[5, 10]$ . En la tabla de la figura 1.1.15 vemos que

$$f(7) = -3.4 < 0 \quad \text{y} \quad f(8) = 5.6 > 0,$$

así que nos centramos ahora en el intervalo  $[7, 8]$ .

Al tabular  $f(x)$  en  $[7, 8]$  obtenemos la tabla de la figura 1.1.16, donde vemos que

$$f(7.3) = -0.574 < 0 \quad \text{y} \quad f(7.4) = 0.344 > 0.$$

Por tanto, tabulamos  $f(x)$  una vez más, ahora en el intervalo  $[7.3, 7.4]$ . En la figura 1.1.17 vemos que

$$f(7.36) \approx -0.02 \quad \text{y} \quad f(7.37) \approx 0.07.$$

Como  $f(7.36)$  está mucho más cerca de cero que  $f(7.37)$ , concluimos que la solución deseada de la ecuación (16) está dada aproximadamente por  $x \approx 7.36$ , con una precisión de dos cifras decimales. Si se necesita más precisión, podríamos continuar calculando  $f(x)$  en intervalos cada vez más pequeños.

Si partiéramos del intervalo  $[20, 25]$  y procediéramos de manera análoga, encontraríamos el segundo valor  $x \approx 22.64$  tal que  $f(x) = 0$ . (Usted debe verificarlo como práctica.)

Por último, vamos a calcular los valores correspondientes del ancho y del corral tales que  $A = xy = 100$ :

□ Si  $x \approx 7.36$ , entonces  $y \approx 13.59$ .

□ Si  $x \approx 22.64$ , entonces  $y \approx 4.42$ .

Así, bajo la restricción de costo del problema del corral, podemos construir un rectángulo de 7.36 por 13.59 pies o uno de 22.64 por 4.42 pies, ambos de área 100 pies cuadrados.

Este *método de tabulación repetida* se puede aplicar a un amplio rango de ecuaciones de la forma  $f(x) = 0$ . Si el intervalo  $[a, b]$  contiene una solución y los

$x$	$f(x)$
5	-25.0
6	-13.6
7	-3.4
→ 8	5.6 ←
9	13.4
10	20.0

Figura 1.1.15 Valores de  $f(x)$  en  $[5, 10]$

$x$	$f(x)$
7.0	-3.400
7.1	-2.446
7.2	-1.504
→ 7.3	-0.574 ←
7.4	0.334
7.5	1.250
7.6	2.144
7.7	3.026
7.8	3.896
7.9	4.754
8.0	5.600

Figura 1.1.16 Valores de  $f(x)$  en  $[7, 8]$

$x$	$f(x)$
7.30	-0.5740
7.31	-0.4817
7.32	-0.3894
7.33	-0.2973
7.34	-0.2054
7.35	-0.1135
→ 7.36	-0.0218 ←
7.37	0.0699
7.38	0.1614
7.39	0.2527
7.40	0.3440

Figura 1.1.17 Valores de  $f(x)$  en  $[7.3, 7.4]$

valores extremos  $f(a)$  y  $f(b)$  difieren en signo, entonces podemos aproximar esta solución tabulando valores en subintervalos cada vez más pequeños. Los problemas 61 a 70 y los proyectos al final de esta sección son aplicaciones de este método numérico concreto para la solución aproximada de ecuaciones.

## 1.1 Problemas

Simplifique cada expresión en los problemas 1 a 10, escribiéndola sin usar símbolos de valor absoluto.

- |                            |                              |
|----------------------------|------------------------------|
| 1. $ 3 - 17 $              | 2. $ -3  -  17 $             |
| 3. $ -0.25 - \frac{1}{4} $ | 4. $ 5  -  -7 $              |
| 5. $ (-5)(4 - 9) $         | 6. $\frac{ -6 }{ 4  +  -2 }$ |
| 7. $ (-3)^3 $              | 8. $ 3 - \sqrt{3} $          |
| 9. $ \pi - \frac{22}{7} $  | 10. $- 7 - 4 $               |

En los problemas 11 a 14, determine y simplifique cada uno de los siguientes valores: (a)  $f(-a)$ ; (b)  $f(a^{-1})$ ; (c)  $f(\sqrt{a})$ ; (d)  $f(a^2)$

- |                                |                                   |
|--------------------------------|-----------------------------------|
| 11. $f(x) = \frac{1}{x}$       | 12. $f(x) = x^2 + 5$              |
| 13. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 5}$ | 14. $f(x) = \sqrt{1 + x^2 + x^4}$ |

En los problemas 15 a 20, determine todos los valores de  $a$  tales que  $g(a) = 5$ .

- |                               |                               |
|-------------------------------|-------------------------------|
| 15. $g(x) = 3x + 4$           | 16. $g(x) = \frac{1}{2x - 1}$ |
| 17. $g(x) = \sqrt{x^2 + 16}$  | 18. $g(x) = x^3 - 3$          |
| 19. $g(x) = \sqrt[3]{x + 25}$ | 20. $g(x) = 2x^2 - x + 4$     |

En los problemas 21 a 26, calcule y simplifique después la cantidad  $f(a + h) - f(a)$ .

- |                          |                              |
|--------------------------|------------------------------|
| 21. $f(x) = 3x - 2$      | 22. $f(x) = 1 - 2x$          |
| 23. $f(x) = x^2$         | 24. $f(x) = x^2 + 2x$        |
| 25. $f(x) = \frac{1}{x}$ | 26. $f(x) = \frac{2}{x + 1}$ |

En los problemas 27 a 30, determine el rango de valores de la función dada.

$$27. f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

28.  $f(x) = \lceil 3x \rceil$  (Recuerde que  $\lceil x \rceil$  es el máximo entero que no excede a  $x$ .)

29.  $f(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$

30.  $f(x)$  es el costo (en centavos) por el envío en primera clase de una carta en los Estados Unidos que pesa  $x$  onzas,  $0 < x < 12$ .

En 1993, el costo era de 29 centavos de dólar por la primera onza, más 23 centavos por cada onza adicional o fracción de ésta.

En los problemas 31 a 45, determine el dominio más amplio (de números reales) en donde la fórmula dada determina una función (real).

- |                                  |   |
|----------------------------------|---|
| 31. $f(x) = 10 - x^2$            | 32. $f(x) = x^3 + 5$                            |
| 33. $f(t) = \sqrt{t^2}$          | 34. $g(t) = (\sqrt{t})^2$                       |
| 35. $f(x) = \sqrt{3x - 5}$       | 36. $g(t) = \sqrt[3]{t + 4}$                    |
| 37. $f(t) = \sqrt{1 - 2t}$       | 38. $g(x) = \frac{1}{(x + 2)^2}$                |
| 39. $f(x) = \frac{2}{3 - x}$     | 40. $g(t) = \left(\frac{2}{3 - t}\right)^{1/2}$ |
| 41. $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$      | 42. $h(z) = \frac{1}{\sqrt{4 - z^2}}$           |
| 43. $f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{x}}$ | 44. $f(x) = \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}$         |
| 45. $g(t) = \frac{t}{ t }$       |   |

46. Expresar el área  $A$  de un cuadrado como una función de su perímetro  $P$ .

47. Expresar la circunferencia  $C$  de un círculo como una función de su área  $A$ .

48. Expresar el volumen  $V$  de una esfera como una función del área de su superficie  $S$ .

49. Dado que  $0^\circ\text{C}$  es igual a  $32^\circ\text{F}$ , y un cambio de temperatura de  $1^\circ\text{C}$  es igual a un cambio de  $1.8^\circ\text{F}$ , exprese la temperatura Celsius  $C$  como una función de la temperatura Fahrenheit  $F$ .

50. Muestre que si un rectángulo tiene base  $x$  y perímetro 100 (figura 1.1.18), entonces su área  $A$  está dada por la función

$$A(x) = x(50 - x), \quad 0 \leq x \leq 50.$$

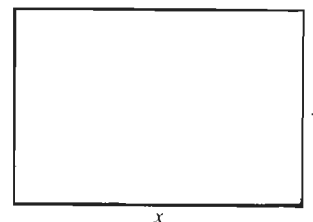


Figura 1.1.18  $A = xy$  (problema 50)

51. Un rectángulo con base de longitud  $x$  está inscrito en un círculo de radio 2 (figura 1.1.19). Expresé el área del rectángulo como una función de  $x$ .

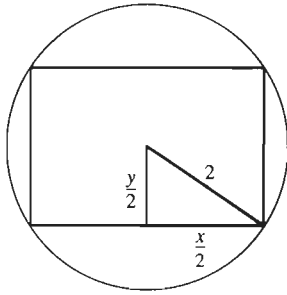


Figura 1.1.19  $A = xy$  (problema 51)

52. Un campo petrolero con 20 pozos ha estado produciendo 4000 barriles diarios. Por cada nuevo pozo que se perfora, la producción diaria de cada pozo decrece en 5 barriles. Escriba la producción diaria total del campo petrolero como una función del número  $x$  de nuevos pozos perforados.

53. Suponga que una caja rectangular tiene un volumen de 324 centímetros cúbicos y una base cuadrada de longitud  $x$  centímetros. El material de la base de la caja cuesta 2 centavos el centímetro cuadrado y el material para la tapa y los cuatro lados cuesta un centavo el centímetro cuadrado. Expresé el costo total de la caja como una función de  $x$ . Véase la figura 1.1.20.

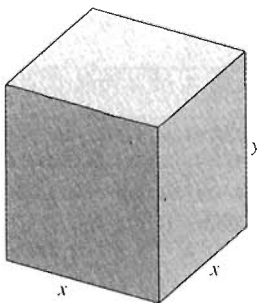


Figura 1.1.20  $V = x^2y$  (problema 53)

54. Un rectángulo de perímetro fijo igual a 36 se rota en torno de uno de sus lados  $S$  para generar un cilindro circular recto. Expresé el volumen  $V$  de este cilindro como una función del largo  $x$  del lado  $S$ . Véase la figura 1.1.21.

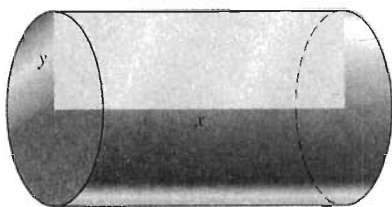


Figura 1.1.21  $V = \pi xy^2$  (problema 54)

55. Un cilindro circular recto tiene volumen 1000 pulgadas cúbicas y el radio de su base tiene  $r$  pulgadas. Expresé el área total de la superficie  $A$  como una función de  $r$ . Véase la figura 1.1.22.

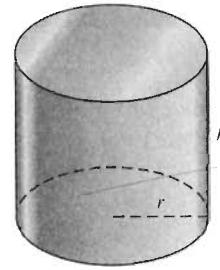


Figura 1.1.22  $V = \pi r^2h$  (problema 55)

56. Una caja rectangular tiene un área de la superficie de 600 centímetros cuadrados y una base cuadrada con una longitud de arista de  $x$  centímetros. Expresé el volumen  $V$  de la caja como una función de  $x$ .

57. Una caja sin tapa se construye a partir de una pieza cuadrada de cartón de lado 50 pulgadas. En primer lugar, se cortan cuatro cuadrados, cada uno con una longitud de lado igual a  $x$  pulgadas, de las cuatro esquinas del cartón (figura 1.1.23). Entonces, las pestañas resultantes se voltean hacia arriba (se doblan a lo largo de las líneas punteadas) para formar los cuatro lados de la caja, que tendrá entonces una base cuadrada y una profundidad de  $x$  pulgadas. Expresé el volumen  $V$  como una función de  $x$ .

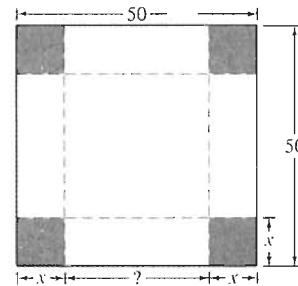


Figura 1.1.23 Se doblan las aristas para formar una caja (problema 57)

58. Continúe el problema 50 estudiando en forma numérica el área de un rectángulo de perímetro 100. ¿Cuáles dimensiones (largo y ancho) parecen maximizar el área de tal rectángulo?

59. Determine numéricamente el número de nuevos pozos petroleros que deben perforarse para maximizar la producción diaria total del campo petrolero del problema 52.

60. Analice numéricamente el área total de la superficie  $A$  de la caja rectangular del ejemplo 5. Suponga que  $x \geq 1$  y  $y \geq 1$ . ¿Cuáles dimensiones de  $x$  y  $y$  parecen minimizar  $A$ ?

En los problemas 61 a 70, se dan una ecuación cuadrática  $ax^2 + bx + c = 0$  y un intervalo  $[p, q]$  que contiene a una de

sus soluciones. Use el método de tabulación repetida para aproximar esta solución con dos cifras decimales correctas o correctamente redondeadas. Verifique que sus resultados coinciden con una de las dos soluciones dadas por la fórmula cuadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

61.  $x^2 - 3x + 1 = 0$ , [0, 1]

62.  $x^2 - 3x + 1 = 0$ , [2, 3]

63.  $x^2 + 2x - 4 = 0$ , [1, 2]

64.  $x^2 + 2x - 4 = 0$ , [-4, -3]

65.  $2x^2 - 7x + 4 = 0$ , [0, 1]

66.  $2x^2 - 7x + 4 = 0$ , [2, 3]

67.  $x^2 - 11x + 25 = 0$ , [3, 4]

68.  $x^2 - 11x + 25 = 0$ , [7, 8]

69.  $3x^2 + 23x - 45 = 0$ , [1, 2]

70.  $3x^2 + 23x - 45 = 0$ , [-10, -9]

## 1.1 Proyectos

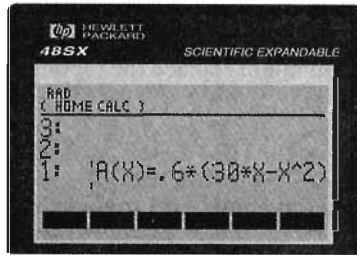


Figura 1.1.24 Una calculadora preparada para definir la función  $A(x) = \frac{3}{5}(30x - x^2)$

En los proyectos aquí descritos, usted va a aplicar el método de la tabulación repetida usando una calculadora científica o una computadora. La figura 1.1.24 muestra una calculadora HP-48 preparada para definir la función  $A(x) = \frac{3}{5}(30x - x^2)$  cuando usted oprima la tecla **DEFINE**. Entonces, el valor de  $A(x)$  se puede calcular escribiendo el valor deseado de  $x$  y oprimiendo la tecla **A**.

Algunos sistemas de cómputo tienen “directivas en línea” para la tabulación de funciones. La tabla de la figura 1.1.25 enumera los comandos para varios sistemas comunes que pueden usarse para tabular valores de la función  $f(x)$  en el intervalo  $[a, b]$  con subintervalos de longitud  $h$ . La fórmula que define  $f(x)$  y los números  $a$ ,  $b$  y  $h$  se introducen como en el comando típico

$$\text{table}(0.6*(30*x - x^2), x=7 \text{ to } x=8 \text{ step } 0.1)$$

para tabular la función  $f(x) = \frac{3}{5}(30x - x^2)$  en el intervalo  $[7, 8]$ .

<b>BASIC</b>	FOR x = a to b STEP h : PRINT x.f(x) : NEXT
<i>Derive</i>	[VECTOR(x,x,a,b,h) . VECTOR(f(x),x,a,b,h)]
<i>Maple</i>	for x from a by h to b do print (x.f(x)) od
<i>Mathematica</i>	MatrixForm[ Table[ {x.f[x]} . {x.a,b,h} ] ]
<i>(X)PLORE</i>	table( f(x) . x = a to x = b step h )

Figura 1.1.25 Comandos para la tabulación de la función  $f(x)$

**PROYECTO A** Suponga que necesita encontrar la raíz cuadrada (positiva) de 2 con una precisión de tres cifras decimales, pero que su calculadora no tiene la tecla de raíz cuadrada, sino solamente las teclas para las cuatro operaciones aritméticas  $+$ ,  $-$ ,  $\times$  y  $\div$ . A pesar de eso, ¿podría aproximar con precisión  $\sqrt{2}$  usando una calculadora tan sencilla?

Simplemente está buscando un número  $x$  tal que  $x^2 = 2$ ; es decir, que cumpla  $x^2 - 2 = 0$ . Así  $x = \sqrt{2}$  es una solución de la ecuación

$$f(x) = x^2 - 2 = 0. \tag{17}$$

Aun con una calculadora simple de cuatro funciones, puede calcular fácilmente cualquier valor deseado de  $f(x)$ : sólo multiplique  $x$  por  $x$  y reste después 2. En consecuencia, puede tabular con facilidad los valores de la función  $f(x) = x^2 - 2$ .

Aplique el método de tabulación repetida para aproximar  $\sqrt{2}$  con una precisión de tres cifras decimales. Use cualquier calculadora o computadora disponible, pero no use su función raíz cuadrada.



De manera similar, podría aplicar el método de tabulación repetida para encontrar aproximaciones de tres cifras decimales para las raíces

- $\sqrt{17}$  como una solución de  $x^2 = 17$ ,
- $\sqrt[3]{25}$  como una solución de  $x^3 = 25$ , o
- $\sqrt[5]{100}$  como una solución de  $x^5 = 100$ .

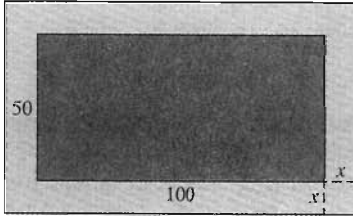


Figura 1.1.26 Área rectangular con corredor

**PROYECTO B** La figura 1.1.26 muestra un área rectangular de 50 por 100 pies que usted planea encerrar con un corredor de ancho  $x$  que cuesta 25 centavos por pie cuadrado. Si tiene \$250 para pagar el corredor, determine el valor de  $x$  con una aproximación de 0.01 pies. Exprese primero el área del corredor como la diferencia de las áreas de los rectángulos exterior e interior de la figura 1.1.26. Después muestre que

$$(2x + 100)(2x + 50) - 5000 = 1000. \quad (18)$$

Finalmente, aproxime  $x$  por tabulación repetida.

Para otras posibilidades más interesantes, puede reemplazar el área rectangular con

- Un área en forma de L,
- Un área en forma de triángulo rectángulo isósceles, un triángulo equilátero o un triángulo rectángulo 3-4-5,
- Un área en forma de ventana normanda (un rectángulo coronado por un semicírculo), o
- Un hexágono regular.

Para comparar resultados, haga que el área en cada caso tenga un perímetro aproximado de 300 pies.

## 1.2 El plano coordenado y las líneas rectas

Imagine el plano liso y llano bidimensional de la geometría de Euclides. Instale una copia de la recta numérica real  $\mathbf{R}$ , con la línea horizontal y los números positivos a la derecha. Añada otra copia de  $\mathbf{R}$  perpendicular a la primera, de modo que las dos líneas se intersequen en sus respectivos ceros. La línea vertical debe tener sus números positivos por arriba de la línea horizontal, como en la figura 1.2.1; los números negativos deben estar por debajo de ésta. La línea horizontal se llama eje  $x$  y la línea vertical se llama eje  $y$ .

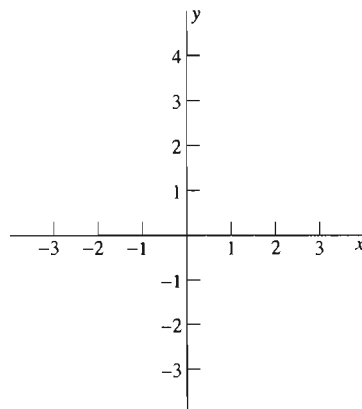


Figura 1.2.1 El plano coordenado

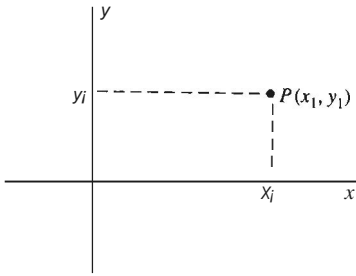


Figura 1.2.2 El punto  $P$  tiene coordenadas rectangulares  $(x_1, Y_1)$

Al agregar estas características, obtenemos el plano coordenado, ya que entonces es posible localizar cualquier punto dado mediante un par de números llamados *coordenadas del punto*. He aquí cómo: Si  $P$  es un punto en el plano, trace perpendiculares de  $P$  a los ejes coordenados, como se muestra en la figura 1.2.2. Una perpendicular interseca al eje  $x$  en la coordenada  $x$  (o abscisa) de  $P$ , etiquetada como  $X_1$  en la figura 1.2.2. La otra interseca al eje  $y$  en la coordenada  $y$  (o ordenada)  $Y_1$  en  $P$ . El par de números  $(x_1, Y_1)$ , en ese orden, se llama el par coordenado de  $P$ , o simplemente las coordenadas de  $P$ . Para ser concisos, hablamos de "el punto  $P(x_1, y_1)$ ".

Este sistema de coordenadas se llama sistema de coordenadas rectangulares, o sistema de coordenadas cartesianas (pues su uso en geometría fue popularizado en la década de 1630 por el matemático y filósofo francés René Descartes [1596-1650]). El plano con estas coordenadas se denota  $R^2$ , ya que usamos dos copias de  $R$ ; se conoce también como plano cartesiano.

Las coordenadas rectangulares son fáciles de usar, ya que  $P(x_1, y_1)$  y  $Q(x_2, y_2)$  señalan al mismo punto si y sólo si  $x_1 = x_2$  y  $y_1 = y_2$ . Por tanto, si usted sabe que  $P$  y  $Q$  son puntos diferentes, debe concluir que  $P$  y  $Q$  tienen diferentes abscisas, diferentes ordenadas, o ambas.

El punto de simetría  $(0, 0)$  donde se cruzan los ejes coordenados se llama origen. Todos los puntos en el eje  $x$  tienen coordenadas de la forma  $(x, 0)$ . Aunque el número real  $x$  no es lo mismo que el punto geométrico  $(x, 0)$ , hay situaciones en que es más útil pensarlos como lo mismo. Observaciones similares se aplican a los puntos  $(0, y)$  en el eje  $y$ .

El concepto de distancia en el plano coordenado se basa en el teorema de Pitágoras: Si  $ABC$  es un triángulo rectángulo con su ángulo recto en el punto  $C$  e hipotenusa  $e$ , como en la figura 1.2.3, entonces

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (1)$$

El recíproco del teorema de Pitágoras también es cierto: Si los tres lados de un triángulo dado satisfacen la relación de Pitágoras en la ecuación (1), entonces el ángulo opuesto al lado  $e$  debe ser un ángulo recto.

La distancia  $d(P_1, P_2)$  entre los puntos  $P_1$  y  $P_2$  es, por definición, la longitud de la línea recta que une  $P_1$  y  $P_2$ . La fórmula siguiente da  $d(P_1, P_2)$  en términos de las coordenadas de los dos puntos.

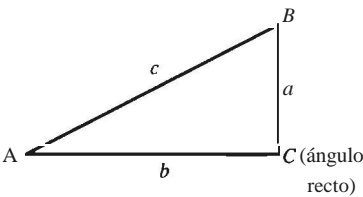


Figura 1.2.3 El teorema de Pitágoras

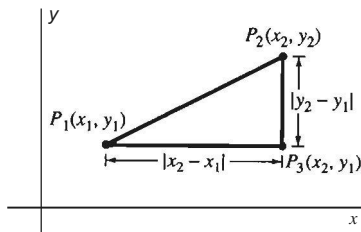


Figura 1.2.4 Use este triángulo para deducir la fórmula de la distancia

**Fórmula de la distancia**

La distancia entre los dos puntos  $P_1(x_1, Y_1)$  y  $P_2(x_2, Y_2)$  es

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (2)$$

**Demostración** Si  $x_1 \neq x_2$  y  $y_1 \neq y_2$ , entonces la fórmula de la ecuación (2) es consecuencia del teorema de Pitágoras. Use el triángulo rectángulo con vértices  $P_1, P_2$  y  $P_3(x_2, y_1)$  que se muestra en la figura 1.2.4.

Si  $x_1 = x_2$ , entonces  $P_1$  y  $P_2$  están en una línea vertical. En este caso

$$d(P_1, P_2) = |y_2 - y_1| = \sqrt{(y_2 - y_1)^2}.$$

Esto concuerda con la fórmula de la ecuación (2) ya que  $x_1 = x_2$ . El caso restante, en donde  $y_1 = y_2$  es similar.  $\square$

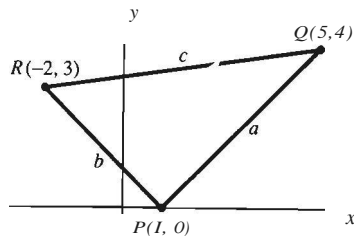


Figura 1.2.5 ¿Es éste un triángulo rectángulo (ejemplo 1)?

**EJEMPLO 1** Muestre que el triángulo  $PQR$  con vértices  $P(1, 0)$ ,  $Q(5, 4)$  y  $R(-2, 3)$  es un triángulo rectángulo (figura 1.2.5).

**Solución** La fórmula de la distancia da

$$a^2 = [d(P, Q)]^2 = (5 - 1)^2 + (4 - 0)^2 = 32,$$

$$b^2 = [d(P, R)]^2 = (-2 - 1)^2 + (3 - 0)^2 = 18 \quad \text{y}$$

$$c^2 = [d(Q, R)]^2 = (-2 - 5)^2 + (3 - 4)^2 = 50.$$

Ya que  $a^2 + b^2 = c^2$  el *recíproco* del teorema de Pitágoras implica que  $RPQ$  es un ángulo recto. El ángulo recto está en  $P$  ya que  $P$  es el vértice opuesto al lado más largo,  $QR$ .

Otra aplicación de la fórmula de la distancia es una expresión para las coordenadas del punto medio  $M$  del segmento de recta  $P_1P_2$  con puntos extremos  $P_1$  y  $P_2$  (figura 1.2.6). Retomando de la geometría que  $M$  es el (único) punto del segmento de recta  $P_1P_2$  que está a la misma distancia de  $P_1$  y  $P_2$ . La siguiente fórmula nos dice que las coordenadas de  $M$  son los *promedios* de las coordenadas correspondientes de  $P_1$  y  $P_2$ .

#### Fórmula para el punto medio

El **punto medio** del segmento de recta con extremos  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$  es el punto  $M(\bar{x}, \bar{y})$  con coordenadas

$$\bar{x} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad \bar{y} = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \quad (3)$$

**Demostración** Si sustituye las coordenadas de  $P_1$ ,  $M$  y  $P_2$  en la fórmula de la distancia, verá que  $d(P_1, M) = d(P_2, M)$ . Todo lo que resta es mostrar que  $M$  se encuentra en el segmento de recta  $P_1P_2$ . En el problema 31, le pedimos hacer esto y así completar la demostración.  $\square$

## LÍNEAS RECTAS Y PENDIENTES

Queremos definir la *pendiente* de una línea recta, una medida de su elevación o descenso de izquierda a derecha. Dada una recta no vertical  $L$  en el plano coordenado, elegimos dos puntos  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$  en  $L$ . Consideramos los **incrementos**  $\Delta x$  y  $\Delta y$  (que se leen “delta x” y “delta y”) en las coordenadas  $x$  y  $y$  de  $P_1$  a  $P_2$ , que se definen como

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad \text{y} \quad \Delta y = y_2 - y_1. \quad (4)$$

Los ingenieros (y otros) llaman a  $\Delta x$  la **carrera** de  $P_1$  a  $P_2$  y  $\Delta y$  la **elevación** de  $P_1$  a  $P_2$  como en la figura 1.2.7. La **pendiente**  $m$  de una recta no vertical  $L$  es entonces la razón entre la elevación y la carrera:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (5)$$

Esto también es la definición en ingeniería civil y otras áreas (incluyendo el cálculo). En un texto de agrimensura encontrará la idea nemotécnica

$$\text{"pendiente"} = \frac{\text{elevación}}{\text{carrera}}.$$

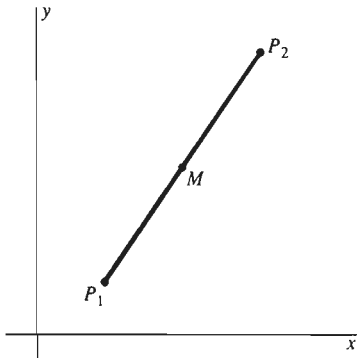


Figura 1.2.6 El punto medio  $M$

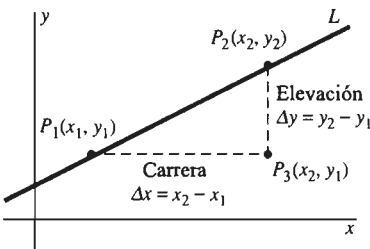
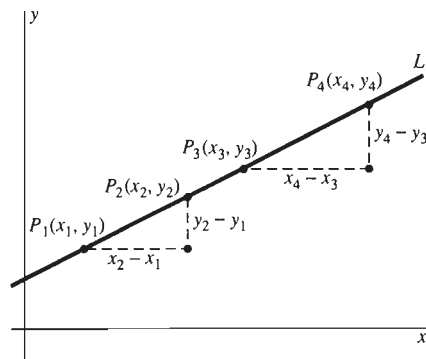


Figura 1.2.7 La pendiente de una línea recta



**Figura 1.2.8** El resultado del cálculo de la pendiente no depende de los puntos de  $L$  que se usen

Recordemos que los lados correspondientes de triángulos semejantes (es decir, con ángulos iguales) tienen razones iguales. Por tanto, si  $P_3(x_3, y_3)$  y  $P_4(x_4, y_4)$  son dos puntos distintos en  $L$ , entonces la semejanza de los triángulos de la figura 1.2.8 implica que

$$\frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

En consecuencia, la pendiente  $m$  definida en la ecuación (5) *no* depende de una elección particular de  $P_1$  y  $P_2$ .

Si la recta  $L$  es horizontal, entonces  $\Delta y = 0$ . En este caso la ecuación (5) da  $m = 0$ . Si  $L$  es vertical, entonces  $\Delta x = 0$  y la pendiente de  $L$  *no está definida*. Por lo que tenemos las siguientes proposiciones:

Las rectas horizontales tienen pendiente nula.

Las rectas verticales no tienen pendiente definida.

**EJEMPLO 2** (a) La pendiente de la recta que pasa por los puntos  $(3, -2)$  y  $(-1, 4)$  es

$$m = \frac{4 - (-2)}{(-1) - 3} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}.$$

(b) Los puntos  $(3, -2)$  y  $(7, -2)$  tienen la misma coordenada  $y$ . Así, la recta que pasa a través de ellos es horizontal y entonces tiene pendiente nula.

(c) Los puntos  $(3, -2)$  y  $(3, 4)$  tienen la misma coordenada  $x$ . Por lo tanto, la recta que pasa a través de ellos es vertical y entonces su pendiente no está definida.

## ECUACIONES DE LÍNEAS RECTAS

Nuestra meta inmediata es poder escribir las ecuaciones de líneas rectas dadas. Es decir, si  $L$  es una línea recta en el plano coordenado, deseamos construir un enunciado matemático, una ecuación, acerca de los puntos  $(x, y)$  en el plano. Queremos que esta ecuación sea *verdadera* cuando  $(x, y)$  sea un punto sobre  $L$  y *falsa* cuando  $(x, y)$  no lo sea. Es claro que esta ecuación utilizará a  $x$  y a  $y$ , así como algunas constantes numéricas determinadas por la propia  $L$ . Para escribir esta ecuación, el concepto de pendiente de  $L$  es esencial.

Supongamos, entonces, que  $P(x_0, y_0)$  es un punto fijo de una recta  $L$  no vertical con pendiente  $m$ . Sea  $P(x, y)$  cualquier *otro* punto en  $L$ . Aplicamos la ecuación (5) con  $P$  y  $P_0$  en vez de  $P_1$  y  $P_2$  para ver que

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0};$$

es decir,

$$y - y_0 = m(x - x_0). \quad (6)$$

Como el punto  $(x_0, y_0)$  satisface la ecuación (6), al igual que cada punto de  $L$ , y ya que ningún otro punto del plano puede satisfacer dicha ecuación, (6) es realmente una ecuación para la recta dada  $L$ . En resumen, tenemos el siguiente resultado.

**La ecuación punto–pendiente**

El punto  $P(x, y)$  está en la recta con pendiente  $m$  y pasa por el punto fijo  $(x_0, y_0)$  si y sólo si satisface la ecuación

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad (6)$$

La ecuación (6) es la ecuación *punto–pendiente* de  $L$ , debido en parte a que las coordenadas del punto  $(x_0, y_0)$  y la pendiente  $m$  de  $L$  se pueden leer directamente de la ecuación.

**EJEMPLO 3** Escriba una ecuación para la recta  $L$  que pasa por los puntos  $P_1(1, -1)$  y  $P_2(3, 5)$ .

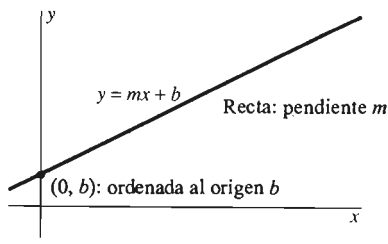
**Solución** La pendiente  $m$  de  $L$  se puede obtener de los dos puntos dados:

$$m = \frac{5 - (-1)}{3 - 1} = 3.$$

Cualquiera de los puntos  $P_1$  o  $P_2$  puede servir como el punto fijo. Usaremos  $P_1(1, -1)$ . Entonces, con la ayuda de la ecuación (6), la ecuación punto–pendiente de  $L$  es

$$y + 1 = 3(x - 1).$$

Si es adecuada la simplificación, escribimos  $3x - y = 4$ .



**Figura 1.2.9** La línea recta con ecuación  $y = mx + b$  tiene pendiente  $m$  y ordenada al origen  $b$ .

La ecuación (6) se puede escribir de la forma

$$y = mx + b, \quad (7)$$

donde  $b = y_0 - mx_0$  es una constante. Como  $y = b$  cuando  $x = 0$ , la **ordenada al origen** de  $L$  es el punto  $(0, b)$  que se muestra en la figura 1.2.9. Las ecuaciones (6) y (7) son formas diferentes de la ecuación de una línea recta.

**La ecuación punto–ordenada al origen**

El punto  $P(x, y)$  está en la recta con pendiente  $m$  y ordenada al origen  $b$  si y sólo si las coordenadas de  $P$  satisfacen la ecuación

$$y = mx + b \quad (7)$$

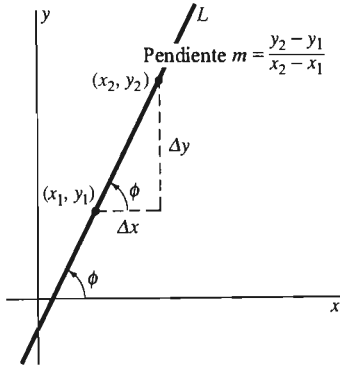
Probablemente haya notado que ambas ecuaciones (6) y (7) se pueden escribir en la forma de la ecuación general lineal

$$Ax + By = C, \quad (8)$$

donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  son constantes. Recíprocamente, si  $B \neq 0$ , entonces la ecuación (8) se puede escribir en la forma de la ecuación (7) si dividimos cada término entre  $B$ . En consecuencia, la ecuación (8) representa una línea recta con pendiente dada

por el coeficiente de  $x$  después de despejar  $y$  en la ecuación. Si  $B = 0$ , entonces la ecuación (8) se reduce a la ecuación de una recta vertical:  $x = K$  (donde  $K$  es una constante). Si  $A = 0$ , la ecuación (8) se reduce a la ecuación de una recta horizontal  $y = H$  ( $H$  una constante). Así, vemos que en todos los casos la ecuación (8) es la ecuación de una línea recta, a menos que  $A = B = 0$ . Recíprocamente, toda línea recta en el plano coordenado (incluso una vertical) tiene una ecuación de la forma (8).

## RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES



**Figura 1.2.10** ¿Cómo se relaciona el ángulo de inclinación  $\phi$  con la pendiente  $m$ ?

Si la recta  $L$  no es horizontal, debe cruzar al eje  $x$ . Entonces, su **ángulo de inclinación** es el ángulo  $\phi$  medido en dirección contraria a la de las manecillas del reloj, desde el eje  $x$  positivo hasta  $L$ . Esto implica que  $0^\circ < \phi < 180^\circ$  si  $\phi$  se mide en grados. La figura 1.2.10 aclara el hecho de que este ángulo  $\phi$  y la pendiente  $m$  de una recta no vertical están relacionados mediante la ecuación

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \phi. \quad (9)$$

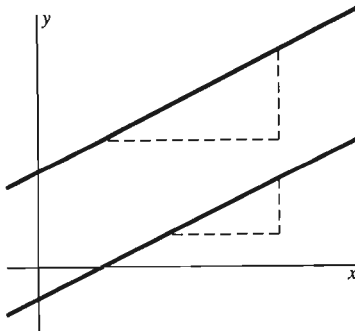
Esto es cierto, pues si  $\phi$  es un ángulo agudo en un triángulo rectángulo, entonces  $\tan \phi$  es la razón entre el cateto opuesto a  $\phi$  y el cateto adyacente al mismo ángulo.

La intuición le indicará correctamente que dos rectas son paralelas si y sólo si tienen el mismo ángulo de inclinación. Así, la ecuación (9) implica que dos rectas paralelas no verticales tienen la misma pendiente y que dos rectas con la misma pendiente deben ser paralelas. Esto termina la demostración del teorema 1.

### Teorema 1 *Pendientes de rectas paralelas*

Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

El teorema 1 se puede demostrar también sin el uso de la función tangente. Las dos rectas que se muestran en la figura 1.2.11 son paralelas si y sólo si los dos triángulos rectángulos son semejantes, lo que es equivalente al hecho de que las pendientes de las rectas sean iguales.



**Figura 1.2.11** Dos rectas paralelas

**EJEMPLO 4** Escriba una ecuación de la recta  $L$  que pasa por el punto  $P(3, -2)$  y es paralela a la recta  $L'$  que tiene la ecuación  $x + 2y = 6$ .

**Solución** Cuando despejamos  $y$  en la ecuación de  $L'$ , obtenemos  $y = -\frac{1}{2}x + 3$ , por lo que  $L'$  tiene pendiente  $m = -\frac{1}{2}$ . Como  $L$  tiene la misma pendiente, su ecuación punto-pendiente es entonces

$$y + 2 = -\frac{1}{2}(x - 3),$$

o, si lo prefiere,  $x + 2y = -1$ .

### Teorema 2 *Pendientes de rectas perpendiculares*

Dos rectas  $L_1$  y  $L_2$  con pendientes  $m_1$  y  $m_2$ , respectivamente, son perpendiculares si y sólo si

$$m_1 m_2 = -1 \quad (10)$$

Es decir, la pendiente de cada una es el *recíproco negativo* de la pendiente de la otra.

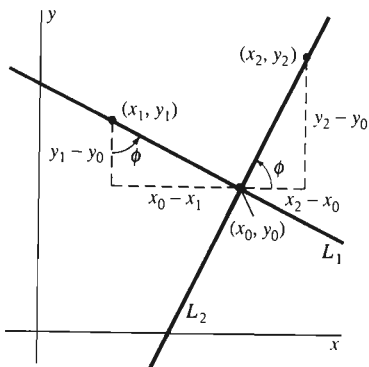


Figura 1.2.12 Ilustración de la demostración del teorema 2

**Demostración** Si las dos rectas  $L_1$  y  $L_2$  son perpendiculares y la pendiente de cada una existe, entonces ninguna de ellas es horizontal o vertical. Así, la situación se parece a la de la figura 1.2.12, donde las dos rectas se intersecan en el punto  $(x_0, y_0)$ . Es fácil ver que los dos triángulos rectángulos son semejantes, por lo que la igualdad de razones de lados correspondientes se escribe

$$m_2 = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} = \frac{x_0 - x_1}{y_1 - y_0} = -\frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} = -\frac{1}{m_1}.$$

Así, la ecuación (10) es válida si las dos rectas son perpendiculares. Este argumento se puede invertir para demostrar el recíproco, que las rectas son perpendiculares si  $m_1 m_2 = -1$ .  $\square$

**EJEMPLO 5** Escriba una ecuación de la recta  $L$  que pasa por el punto  $P(3, -2)$  y que es perpendicular a la recta  $L'$  con la ecuación  $x + 2y = 6$ .

**Solución** Como vimos en el ejemplo 4, la pendiente de  $L'$  es  $m' = -\frac{1}{2}$ . Por el teorema 2, la pendiente de  $L$  es  $m = -1/m' = 2$ . Así,  $L$  tiene la ecuación punto-pendiente

$$y + 2 = 2(x - 3);$$

en forma equivalente,  $2x - y = 8$ .

Será útil recordar que el *signo* de la pendiente  $m$  de la recta  $L$  indica si la recta se inclina hacia arriba o hacia abajo cuando los ojos la recorren de izquierda a derecha. Si  $m > 0$ , entonces el ángulo de inclinación  $\phi$  de  $L$  debe ser un ángulo agudo, pues  $m = \tan \phi$ . En este caso,  $L$  “sube” a la derecha. Si  $m < 0$ , entonces  $\phi$  es obtuso, de modo que  $L$  “baja”. La figura 1.2.13 muestra la geometría detrás de estas observaciones.

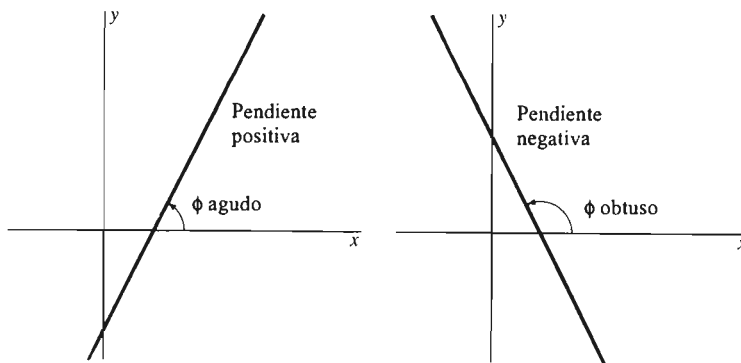


Figura 1.2.13 Pendientes positiva y negativa; efecto sobre  $\phi$

## ESTUDIO GRÁFICO

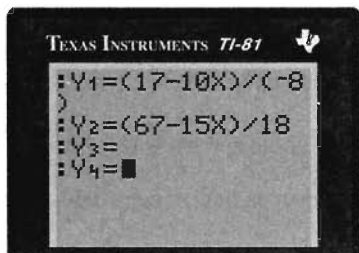
Muchos problemas matemáticos requieren la solución simultánea de un par de ecuaciones lineales de la forma

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2. \end{aligned} \tag{11}$$

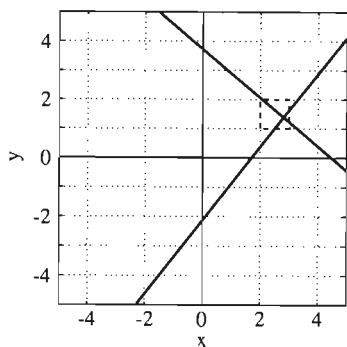
Las gráficas de estas dos ecuaciones son un par de rectas en el plano  $xy$ . Si estas dos rectas no son paralelas, entonces deben intersectarse en un único punto  $P$  cuyas

coordenadas  $(x_0, y_0)$  conforman la solución de (11). Es decir,  $x = x_0$  y  $y = y_0$  son los (únicos) valores de  $x$  y  $y$  para los cuales ambas ecuaciones en (11) son verdaderas.

En el álgebra elemental, usted estudió varios métodos de eliminación y sustitución para resolver sistemas lineales como (11). El ejemplo 6 ilustra un *método gráfico* alternativo que a veces es más útil cuando se dispone de una utilería gráfica (una calculadora gráfica o una computadora con un programa de graficación).



**Figura 1.2.14** Una calculadora preparada para graficar las rectas de la ecuación (12) (Ejemplo 6)



**Figura 1.2.15**  $-5 \leq x \leq 5$ ,  $-5 \leq y \leq 5$  (Ejemplo 6)

**EJEMPLO 6** Queremos analizar la solución simultánea de las ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 10x - 8y &= 17 \\ 15x + 18y &= 67. \end{aligned} \quad (12)$$

Para muchas calculadoras gráficas, es necesario despejar primero  $y$  en cada ecuación:

$$\begin{aligned} y &= (17 - 10x)/(-8) \\ y &= (67 - 15x)/18. \end{aligned} \quad (13)$$

La figura 1.2.14 muestra una calculadora preparada para graficar las dos rectas representadas por las ecuaciones en (12), y la figura 1.2.15 muestra el resultado en la *ventana de visión*  $-5 \leq x \leq 5$ ,  $-5 \leq y \leq 5$ .

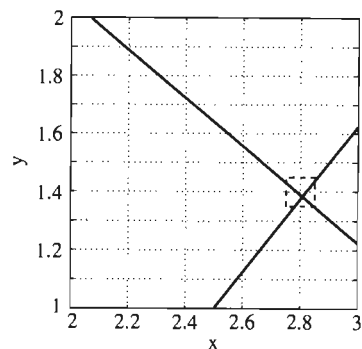
Antes de continuar, observe que en la figura 1.2.15, las dos rectas *parecen* perpendiculares. Pero sus pendientes,  $(-10)/(-8) = \frac{5}{4}$  y  $(-15)/18 = -\frac{5}{6}$ , *no* son recíprocos negativos entre sí. El teorema 2 implica que las dos rectas *no* son perpendiculares.

Las figuras 1.2.16, 1.2.17 y 1.2.18 muestran aproximaciones sucesivas del punto de intersección de las dos rectas. El recuadro punteado de cada figura es la ventana de visión de la siguiente. Si observamos la figura 1.2.18, vemos que el punto de intersección está dado por las aproximaciones

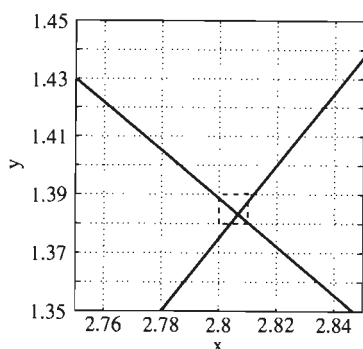
$$x \approx 2.807, \quad y \approx 1.383, \quad (14)$$

redondeado a tres cifras decimales.

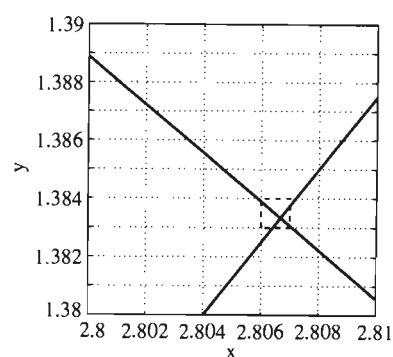
El resultado en (14) se puede verificar al igualar los miembros derechos en (13) y despejar  $x$ . Esto nos da  $x = 421 / 150 \approx 2.8067$ . La sustitución de este valor en cualquiera de las ecuaciones (13) nos da  $y = 83 / 60 \approx 1.3833$ .



**Figura 1.2.16**  $2 \leq x \leq 3$ ,  $1 \leq y \leq 2$  (Ejemplo 6)



**Figura 1.2.17**  $2.75 \leq x \leq 2.85$ ,  $1.35 \leq y \leq 1.45$  (Ejemplo 6)



**Figura 1.2.18**  $2.80 \leq x \leq 2.81$ ,  $1.38 \leq y \leq 1.39$  (Ejemplo 6)



El método gráfico ilustrado por el ejemplo 6 produce por lo general soluciones aproximadas que son lo bastante precisas para propósitos prácticos. Pero el método es particularmente útil para las ecuaciones *no lineales*, para las que no se dispone de técnicas algebraicas de solución.

## 1.2 Problemas

Tres puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  están en una misma línea recta si y sólo si la pendiente de  $AB$  es igual a la pendiente de  $BC$ . En los problemas 1 a 4, grafique los tres puntos dados y determine entonces si están o no en una sola recta.

1.  $A(-1, -2)$ ,  $B(2, 1)$ ,  $C(4, 3)$
2.  $A(-2, 5)$ ,  $B(2, 3)$ ,  $C(8, 0)$
3.  $A(-1, 6)$ ,  $B(1, 2)$ ,  $C(4, -2)$
4.  $A(-3, 2)$ ,  $B(1, 6)$ ,  $C(8, 14)$

En los problemas 5 y 6, use el concepto de pendiente para mostrar que los cuatro puntos dados son los vértices de un paralelogramo.

5.  $A(-1, 3)$ ,  $B(5, 0)$ ,  $C(7, 4)$ ,  $D(1, 7)$
6.  $A(7, -1)$ ,  $B(-2, 2)$ ,  $C(1, 4)$ ,  $D(10, 1)$

En los problemas 7 y 8, muestre que los tres puntos dados son los vértices de un triángulo rectángulo.

7.  $A(-2, -1)$ ,  $B(2, 7)$ ,  $C(4, -4)$
8.  $A(6, -1)$ ,  $B(2, 3)$ ,  $C(-3, -2)$

En los problemas 9 a 13, determine la pendiente ( $m$ ) y la ordenada al origen ( $b$ ) de la recta con la ecuación dada. Grafique después dicha recta.

9.  $2x = 3y$
10.  $x + y = 1$
11.  $2x - y + 3 = 0$
12.  $3x + 4y = 6$
13.  $2x = 3 - 5y$

En los problemas 14 a 23, escriba una ecuación de la recta  $L$  descrita.

14.  $L$  es vertical y su abscisa al origen es 7.
15.  $L$  es horizontal y pasa por  $(3, -5)$ .
16.  $L$  tiene abscisa al origen 2 y ordenada al origen  $-3$ .
17.  $L$  pasa por  $(2, -3)$  y  $(5, 3)$ .
18.  $L$  pasa por  $(-1, -4)$  y tiene pendiente  $1/2$ .
19.  $L$  pasa por  $(4, 2)$  y tiene un ángulo de inclinación de  $135^\circ$ .
20.  $L$  tiene pendiente 6 y ordenada al origen 7.
21.  $L$  pasa por  $(1, 5)$  y es paralela a la recta con ecuación  $2x + y = 10$ .

22.  $L$  pasa por  $(-2, 4)$  y es perpendicular a la recta con ecuación  $x + 2y = 17$ .

23.  $L$  es la mediatriz del segmento de recta con extremos  $(-1, 2)$  y  $(3, 10)$ .

24. Determine la distancia perpendicular desde el punto  $(2, 1)$  hasta la recta con ecuación  $y = x + 1$ .

25. Determine la distancia perpendicular entre las rectas paralelas  $y = 5x + 1$  y  $y = 5x + 9$ .

26. Los puntos  $A(-1, 6)$ ,  $B(0, 0)$  y  $C(3, 1)$  son tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Determine el cuarto vértice. (¿Qué ocurre si se omite la palabra *consecutivo*?)

27. Demuestre que las diagonales del paralelogramo del problema 26 se bisecan entre sí.

28. Muestre que los puntos  $A(-1, 2)$ ;  $B(3, -1)$ ,  $C(6, 3)$  y  $D(2, 6)$  son los vértices de un rombo (un paralelogramo con todos los lados de igual longitud). Demuestre después que las diagonales de este rombo son perpendiculares entre sí.

29. Los puntos  $A(2, 1)$ ,  $B(3, 5)$  y  $C(7, 3)$  son los vértices de un triángulo. Demuestre que la recta que une los puntos medios de  $AB$  y  $BC$  es paralela a  $AC$ .

30. Una mediana de un triángulo es una recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto. Demuestre que las tres medianas del triángulo del problema 29 se intersecan en un solo punto.

31. Complete la demostración de la fórmula para el punto medio, en la ecuación (3). Es necesario mostrar que el punto  $M$  está en el segmento  $P_1P_2$ . Una forma de hacer esto es mostrar que la pendiente de  $P_1M$  es igual a la pendiente de  $MP_2$ .

32. Sea  $P(x_0, y_0)$  un punto del círculo con centro  $C(0, 0)$  y radio  $r$ . Recuerde que la recta tangente al círculo en  $P$  es perpendicular al radio  $CP$ . Demuestre que la ecuación de esta recta tangente es  $x_0x + y_0y = r^2$ .

33. La temperatura Fahrenheit  $F$  y la temperatura absoluta  $K$  satisfacen una ecuación lineal. Además,  $K = 273.16$  cuando  $F = 32$  y  $K = 373.16$  cuando  $F = 212$ . Exprese  $K$  en términos de  $F$ . ¿Cuál es el valor de  $F$  cuando  $K = 0$ ?

34. La longitud  $L$  (en centímetros) de una varilla de cobre es una función lineal de su temperatura Celsius  $C$ . Si  $L = 124.942$  cuando  $C = 20$  y  $L = 125.134$  cuando  $C = 110$ , exprese  $L$  en términos de  $C$ .

35. La propietaria de una tienda determina que puede vender 980 galones de leche cada semana, a \$1.69 el galón, y 1220 galones de leche cada semana a \$1.49 el galón. Suponga que existe una relación lineal entre el precio y las ventas. ¿Cuántos galones esperaría vender a \$1.56 el galón?

36. La figura 1.2.19 muestra las gráficas de las ecuaciones

$$17x - 10y = 57$$

$$25x - 15y = 17.$$

¿Son paralelas estas rectas? En caso contrario, determine su punto de intersección. Si tiene una utilería de graficación, determine la solución mediante una aproximación gráfica y mediante métodos algebraicos precisos.

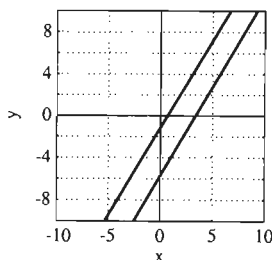


Figura 1.2.19 Las rectas del problema 36

En los problemas 37 a 46, use una calculadora gráfica o una computadora para aproximar de manera gráfica (con tres decimales correctos o correctamente redondeados) la solución del sistema lineal dado. Después, verifique su solución aproximada resolviendo el sistema mediante un método algebraico preciso.

37.  $2x + 3y = 5$   
 $2x + 5y = 12$

38.  $6x + 4y = 5$   
 $8x - 6y = 13$

39.  $3x + 3y = 17$   
 $3x + 5y = 16$

40.  $2x + 3y = 17$   
 $2x + 5y = 20$

41.  $4x + 3y = 17$   
 $5x + 5y = 21$

42.  $4x + 3y = 15$   
 $5x + 5y = 29$

43.  $5x + 6y = 16$   
 $7x + 10y = 29$

44.  $5x + 11y = 21$   
 $4x + 10y = 19$

45.  $6x + 6y = 31$   
 $9x + 11y = 37$

46.  $7x + 6y = 31$   
 $11x + 11y = 47$

47. Justifique la frase “ningún otro punto del plano puede satisfacer” que va después de la ecuación (6).

48. El análisis de la ecuación lineal  $Ax + By = C$  en la ecuación (8) no incluye una descripción de la gráfica de esta ecuación si  $A = B = 0$ . ¿Cuál es la gráfica en este caso?

### 1.3 Gráficas de ecuaciones y funciones

En la sección 1.2 vimos que los puntos  $(x, y)$  que satisfacen la ecuación lineal  $Ax + By = C$  forman un conjunto muy simple: una línea recta (si  $A$  y  $B$  no se anulan en forma simultánea). En contraste, el conjunto de puntos  $(x, y)$  que satisfacen la ecuación

$$x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x^2y^2 = y^2 + 4xy^2 - y^4$$

forman la curva exótica de la figura 1.3.1 (¡Aunque esto no es obvio!) Pero la línea recta y esta curva complicada son ejemplos de *gráficas*.

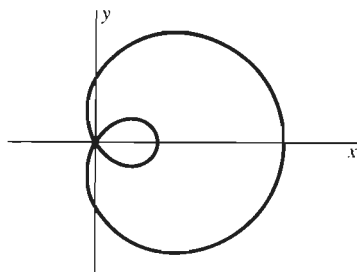


Figura 1.3.1 La gráfica de la ecuación  $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x^2y^2 = y^2 + 4xy^2 - y^4$

#### Definición Gráfica de una ecuación

La **gráfica** de una ecuación en dos variables  $x$  y  $y$  es el conjunto de todos los puntos  $(x, y)$  en el plano que satisfacen la ecuación.

Por ejemplo, la fórmula de la distancia nos dice que la gráfica de la ecuación

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{1}$$

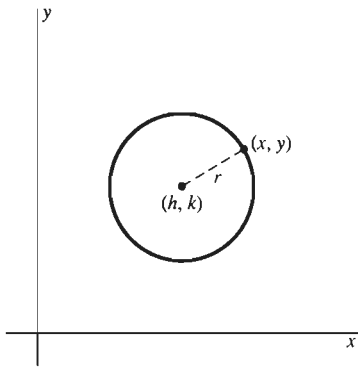


Figura 1.3.2 Un círculo trasladado

es el círculo de radio  $r$  con centro en el origen  $(0, 0)$ . Más en general, la gráfica de la ecuación

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad (2)$$

es el círculo de radio  $r$  con centro  $(h, k)$ . Esto es consecuencia de la fórmula de la distancia, pues la distancia entre los puntos  $(x, y)$  y  $(h, k)$  de la figura 1.3.2 es  $r$ .

**EJEMPLO 1** La ecuación del círculo con centro  $(3, 4)$  y radio 10 es

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 100,$$

que también se puede escribir en la forma

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y - 75 = 0.$$

Podemos considerar el círculo general, ecuación (2), como una *traslación* del círculo con centro en el origen de la ecuación (1): Cada punto del primero se obtiene mediante una traslación (desplazamiento) de cada punto del plano  $xy$   $h$  unidades a la derecha y  $k$  unidades hacia arriba. (Un valor negativo de  $h$  corresponde a una traslación  $|h|$  unidades a la izquierda; un valor negativo de  $k$  indica una traslación hacia abajo.) Usted puede ver que la ecuación (2) del círculo trasladado con centro  $(h, k)$  se puede obtener mediante la ecuación (1), reemplazando  $x$  con  $x - h$  y  $y$  con  $y - k$ . Veremos que este principio se aplica a curvas arbitrarias:

Quando la gráfica de una ecuación se traslada  $h$  unidades hacia la derecha y  $k$  unidades hacia arriba, la ecuación de la curva trasladada se obtiene de la ecuación original mediante el reemplazo de  $x$  con  $x - h$  y  $y$  con  $y - k$ .

Observe que podemos escribir la ecuación de un círculo trasladado en la ecuación (2) de la forma general

$$x^2 + y^2 + ax + by = c. \quad (3)$$

¿Qué podemos hacer entonces cuando encontremos una ecuación que ya está en la forma de la ecuación (3)? Primero reconocemos que es una ecuación de un círculo. A continuación, podemos descubrir su centro y radio por medio de la técnica de *completar el cuadrado*. Para esto, observemos que

$$x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4},$$

lo que muestra que  $x^2 + ax$  se puede completar para obtener un cuadrado perfecto agregándole el cuadrado de la *mitad* del coeficiente de  $x$ .

**EJEMPLO 2** Determine el centro y radio del círculo que tiene por ecuación

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 12.$$

**Solución** Completamos el cuadrado por separado para cada variable  $x$  y  $y$ . Esto nos da

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = 12 + 4 + 9;$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25.$$

Por lo tanto, el círculo, que se muestra en la figura 1.3.3, tiene centro  $(2, -3)$  y radio 5. Al despejar  $y$  de la última ecuación obtenemos

$$y = -3 \pm \sqrt{25 - (x - 2)^2}.$$

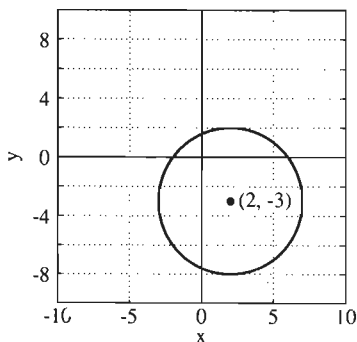


Figura 1.3.3 El círculo del ejemplo 2

Así, el círculo consta de las gráficas de las *dos* funciones

$$y_1(x) = -3 + \sqrt{25 - (x - 2)^2}$$

y

$$y_2(x) = -3 - \sqrt{25 - (x - 2)^2}$$

que describen sus semicírculos superior e inferior. La figura 1.3.4 muestra una calculadora gráfica preparada para graficar este círculo.

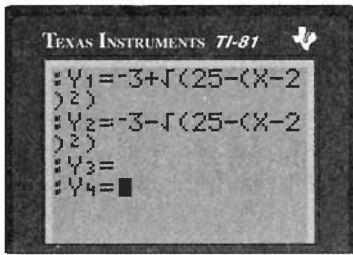


Figura 1.3.4 Una calculadora gráfica preparada para graficar el círculo del ejemplo 2

## GRÁFICAS DE FUNCIONES

La gráfica de una función es un caso particular de la gráfica de una ecuación.

### Definición Gráfica de una función

La gráfica de la función  $f$  es la gráfica de la ecuación  $y = f(x)$ .

Así, la gráfica de la función  $f$  es el conjunto de puntos en el plano que tienen la forma  $(x, f(x))$ , donde  $x$  está en el dominio de  $f$ . Puesto que la segunda coordenada de tal punto está determinada de manera única por su primera coordenada, obtenemos el siguiente y útil principio:

Ninguna recta *vertical* puede intersecar la gráfica de una función en más de un punto.

Otra alternativa es

Cada recta vertical que pasa por un punto del dominio de una función interseca su gráfica en exactamente un punto.

Si examina la figura 1.3.1, por estas observaciones verá que la gráfica que ahí aparece no puede ser la gráfica de una *función*, aunque *si es* la gráfica de una ecuación.

**EJEMPLO 3** Construya la gráfica de la función valor absoluto  $f(x) = |x|$ .

**Solución** Recuerde que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0; \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

De modo que la gráfica de  $y = |x|$  consta de la mitad derecha de la recta  $y = x$  junto con la parte izquierda de la recta  $y = -x$ , como se muestra en la figura 1.3.5.

**EJEMPLO 4** Haga un bosquejo de la gráfica de la función recíproca

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

**Solución** Examinaremos cuatro casos naturales.

- Cuando  $x$  es positivo y numéricamente grande,  $f(x)$  es pequeño y positivo.
- Cuando  $x$  es positivo y cercano a cero,  $f(x)$  es grande y positivo.

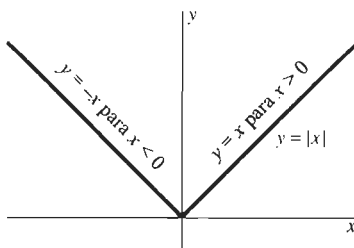
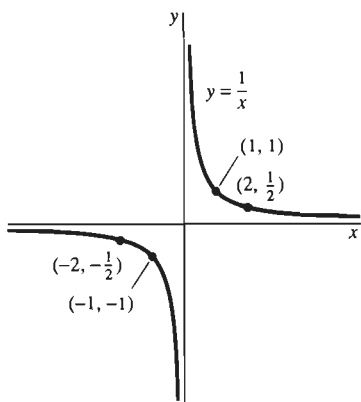


Figura 1.3.5 La gráfica de la función valor absoluto  $y = |x|$  del ejemplo 3



**Figura 1.3.6** La gráfica de la función recíproca  $y = 1/x$  del ejemplo 4

- Cuando  $x$  es negativo y numéricamente pequeño (negativo y cercano a cero),  $f(x)$  es grande y negativo.
- Cuando  $x$  es grande y negativo ( $x$  es negativo pero  $|x|$  es grande),  $f(x)$  es pequeño y negativo (negativo y cercano a cero).

Para comenzar con la gráfica, podemos localizar unos cuantos puntos, como  $(1, 1)$ ,  $(-1, -1)$ ,  $(10, 0.1)$ ,  $(0.1, 10)$ ,  $(-10, -0.1)$  y  $(-0.1, -10)$ . El resultado de la información desplegada aquí sugiere que la gráfica real se parece mucho a la que se muestra en la figura 1.3.6.

La figura 1.3.6 tiene un “hueco”, o “discontinuidad” en la gráfica de  $y = 1/x$  cuando  $x = 0$ . De hecho, el hueco se llama *discontinuidad infinita* puesto que  $y$  crece sin límite cuando  $x$  tiende a cero por la derecha, mientras que  $y$  decrece sin límite cuando  $x$  tiende a cero por la izquierda. Este fenómeno es indicado por lo general por la presencia de denominadores que se anulan en ciertos valores de  $x$ , como en el caso de las funciones

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{y} \quad f(x) = \frac{1}{x^2},$$

que le pediremos grafique en los problemas.

**EJEMPLO 5** La figura 1.3.7 muestra la gráfica de la función máximo entero  $f(x) = \llbracket x \rrbracket$  del ejemplo 3 de la sección 1.1. Observe los “saltos” que aparecen en los valores enteros de  $x$ . En las calculadoras, la función máximo entero se denota usualmente con  $\lfloor \text{INT} \rfloor$ ; en algunos lenguajes de programación, es FLOOR.

**EJEMPLO 6** Grafique la función con la fórmula

$$f(x) = x - \llbracket x \rrbracket - \frac{1}{2}.$$

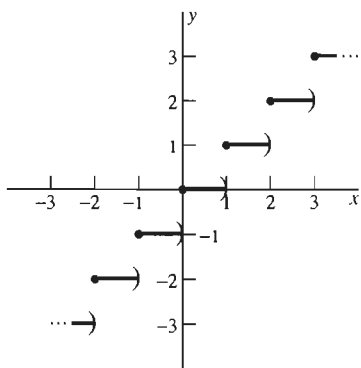
**Solución** Recuerde que  $\llbracket x \rrbracket = n$ , donde  $n$  es el máximo entero que no excede a  $x$ :  $n \leq x < n + 1$ . Por lo tanto, si  $n$  es un entero, entonces

$$f(n) = n - n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

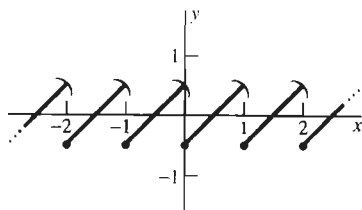
Esto implica que el punto  $(n, -\frac{1}{2})$  está en la gráfica para cada entero  $n$ . A continuación, si  $n \leq x < n + 1$  (donde, de nuevo,  $n$  es un entero), entonces

$$f(x) = x - n - \frac{1}{2}.$$

Como  $y = x - n - \frac{1}{2}$  tiene como gráfica una línea recta de pendiente 1, esto implica que la gráfica de  $f$  tiene la forma que se muestra en la figura 1.3.8. Esta *función diente de sierra* es otro ejemplo de función discontinua. Los valores de  $x$  donde el valor de  $f(x)$  tiene un salto son los **puntos de discontinuidad** de la función  $f$ . Así, los puntos de discontinuidad de la función diente de sierra son los enteros. Cuando  $x$  tiende al entero  $n$  por la izquierda, el valor de  $f(x)$  tiende a  $+1/2$ , pero  $f(x)$  salta



**Figura 1.3.7** La gráfica de la función (escalera) máximo entero  $f(x) = \llbracket x \rrbracket$  del ejemplo 5



**Figura 1.3.8** La gráfica de la función diente de sierra  $f(x) = x - \llbracket x \rrbracket - \frac{1}{2}$  del ejemplo 6

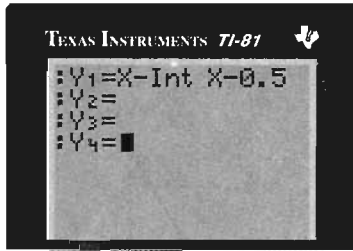


Figura 1.3.9 Una calculadora gráfica preparada para graficar la función diente de sierra del ejemplo 6

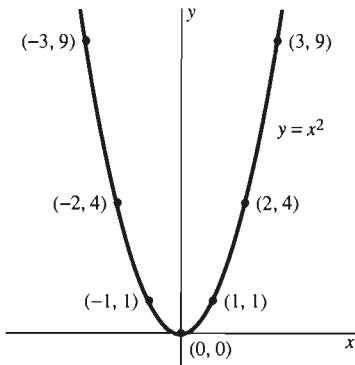


Figura 1.3.10 La gráfica de la parábola  $y = x^2$  del ejemplo 7

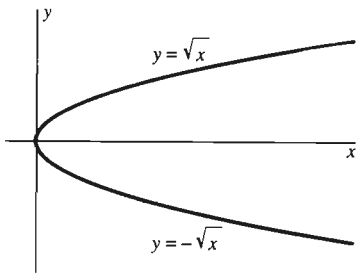


Figura 1.3.11 La gráfica de la parábola  $x = y^2$  del ejemplo 8

súbitamente al valor  $-1/2$  cuando  $x = n$ . En la sección 2.4 damos una definición precisa de la continuidad y la discontinuidad de las funciones. La figura 1.3.9 muestra una calculadora gráfica preparada para graficar la función diente de sierra.

## PARÁBOLAS

La gráfica de una función *cuadrática* de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0) \quad (4)$$

es una *parábola*, cuya forma se parece a la de la parábola particular del ejemplo 7.

**EJEMPLO 7** Construir la gráfica de la parábola  $y = x^2$ .

**Solución** Determinamos algunos puntos en una breve tabla de valores.

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

Quando trazamos una curva suave que pasa por estos puntos, obtenemos la curva que aparece en la figura 1.3.10.

La parábola  $y = -x^2$  sería similar a la de la figura 1.3.10, pero se abriría hacia abajo en vez de hacia arriba. Más en general, la gráfica de la ecuación

$$y = ax^2 \quad (5)$$

es una parábola con su *vértice* en el origen, si  $a \neq 0$ . Esta parábola se abre hacia arriba si  $a > 0$  y hacia abajo si  $a < 0$ . [Por el momento, podemos considerar el vértice de una parábola como el punto donde “cambia de dirección”. El vértice de una parábola de la forma  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) es siempre el origen. Una definición precisa del *vértice* de una parábola aparece en el capítulo 10.]

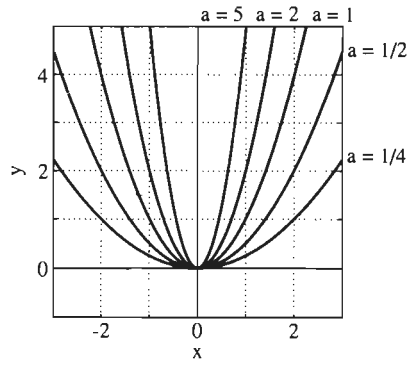
**EJEMPLO 8** Construir las gráficas de las funciones  $f(x) = \sqrt{x}$  y  $g(x) = -\sqrt{x}$ .

**Solución** Después de tabular y unir los puntos, como en el ejemplo 7, obtenemos la parábola  $y^2 = x$  que aparece en la figura 1.3.11. Esta parábola se abre hacia la derecha. La mitad superior es la gráfica de  $f(x) = \sqrt{x}$ , mientras que la mitad inferior es la gráfica de  $g(x) = -\sqrt{x}$ . Así, la unión de las gráficas de estas dos funciones es la gráfica de una *sola* ecuación,  $y^2 = x$ . (Compare esto con el círculo del ejemplo 2.) Más en general, la gráfica de la ecuación

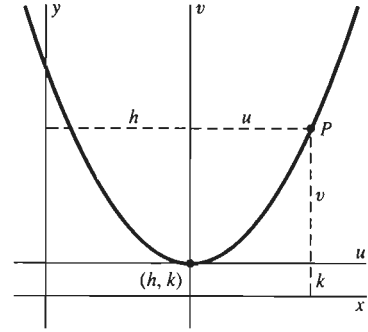
$$x = by^2 \quad (6)$$

es una parábola con vértice en el origen, si  $b \neq 0$ . Esta parábola se abre hacia la derecha si  $b > 0$  (como en la figura 1.3.11) y hacia la izquierda si  $b < 0$ .

El *tamaño* del coeficiente  $a$  en la ecuación (5) [o de  $b$  en la ecuación (6)] determina el “ancho” de la parábola; su *signo* determina la dirección en la que se



**Figura 1.3.12** Parábolas con anchos diversos



**Figura 1.3.13** Una parábola trasladada

abre. Específicamente, mientras más grande sea  $a > 0$ , la parábola crece más rápidamente y es más angosta (figura 1.3.12).

La parábola de la figura 1.3.13 tiene la forma de la “parábola estándar” del ejemplo 7, pero su vértice está localizado en el punto  $(h, k)$ . En el sistema de coordenadas  $u, v$  que se indica, la ecuación de esta parábola es  $v = u^2$ , en analogía con la ecuación (5), con  $a = 1$ . Pero las coordenadas  $uv$  y las coordenadas  $xy$  están relacionadas de la manera siguiente:

$$u = x - h, \quad v = y - k.$$

Por tanto, la ecuación de esta parábola en las coordenadas  $xy$  es

$$y - k = (x - h)^2. \quad (7)$$

Así, cuando la parábola  $y = x^2$  se traslada  $h$  unidades a la derecha y  $k$  unidades hacia arriba, la ecuación en (7) de la parábola trasladada se obtiene reemplazando  $x$  por  $x - h$  y  $y$  por  $y - k$ . Ésta es otra instancia del *principio de traslación* que observamos con los círculos.

Más en general, la gráfica de cualquier ecuación de la forma

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0) \quad (8)$$

puede reconocerse como una parábola trasladada, completando primero el cuadrado en  $x$  para obtener una ecuación de la forma

$$y - k = a(x - h)^2. \quad (9)$$

La gráfica de esta ecuación es una parábola con su vértice en  $(h, k)$ .

**EJEMPLO 9** Determine la forma de la gráfica de la ecuación

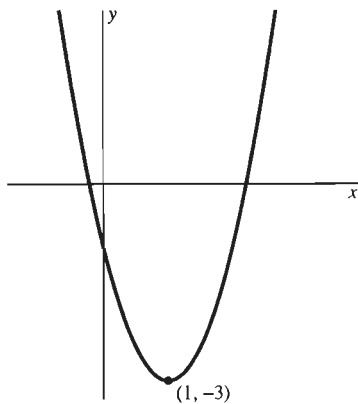
$$y = 2x^2 - 4x - 1. \quad (10)$$

**Solución** Si completamos el cuadrado en  $x$ , la ecuación (10) toma la forma

$$y = 2(x^2 - 2x + 1) - 3;$$

$$y + 3 = 2(x - 1)^2.$$

Por tanto, la gráfica de la ecuación (10) es la parábola que aparece en la figura 1.3.14. Se abre hacia arriba, y su vértice está en  $(1, -3)$ .



**Figura 1.3.14** La parábola  $y = 2x^2 - 4x - 1$  del ejemplo 9

## APLICACIONES DE LAS FUNCIONES CUADRÁTICAS

En la sección 1.1 vimos que un cierto tipo de problema de aplicación nos pedía determinar el valor máximo o mínimo alcanzado por cierta función  $f$ . Si la función  $f$  es una función cuadrática, como en la ecuación (4), entonces la gráfica de  $y = f(x)$  es una parábola. En este caso, el valor máximo (o mínimo) de  $f(x)$  corresponde al punto más alto (o más bajo) de la parábola. Por tanto, podemos determinar ese valor máximo (o mínimo) en forma gráfica (al menos, en forma aproximada) haciendo un acercamiento al vértice de la parábola.

Por ejemplo, recordemos el problema del corral para animales de la sección 1.1. En el ejemplo 6 vimos que el área  $A$  del corral (véase figura 1.3.15) está dada como una función de la longitud  $x$  de su base como

$$A(x) = \frac{3}{5}(30x - x^2), \quad 0 \leq x \leq 30. \quad (11)$$

La figura 1.3.16 muestra la gráfica  $y = A(x)$  y las figuras 1.3.17 a 1.3.19 muestran acercamientos sucesivos de la región cercana al punto más alto (vértice) de la parábola. El rectángulo punteado en cada figura es la ventana de visión de la siguiente. La figura 1.3.19 parece indicar que el área máxima del corral es  $A(15) = 135$ . De acuerdo a la figura, es claro que el valor máximo de  $f(x)$  está a una distancia menor de 0.001 de  $A = 135$ .

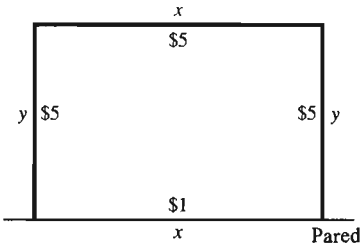


Figura 1.3.15 El corral para los animales

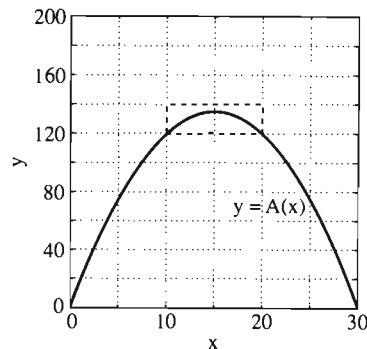


Figura 1.3.16 La gráfica  $A(x)$

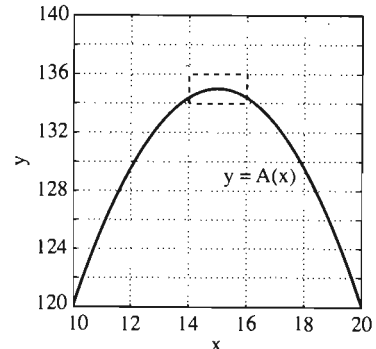


Figura 1.3.17 El primer acercamiento

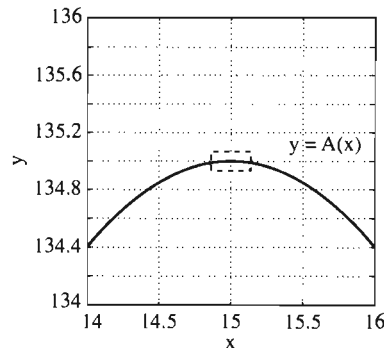


Figura 1.3.18 El segundo acercamiento

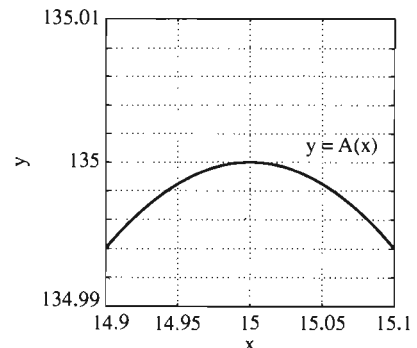
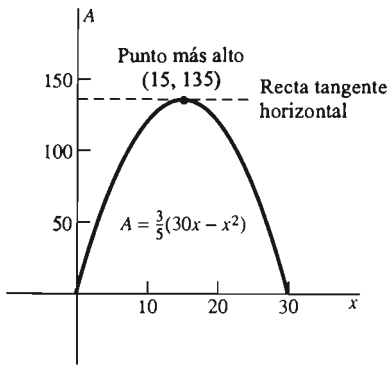


Figura 1.3.19 El tercer acercamiento

Podemos verificar que el valor máximo es *precisamente*  $f(15) = 135$ , completando el cuadrado, como en el ejemplo 9:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{3}{5}(x^2 - 30x) = -\frac{3}{5}(x^2 - 30x + 225 - 225) \\ &= -\frac{3}{5}(x^2 - 30x + 225) + 135; \end{aligned}$$





**Figura 1.3.20** La gráfica de  $A(x) = \frac{3}{5}(30x - x^2)$  para  $0 \leq x \leq 30$

es decir,

$$A - 135 = -\frac{3}{5}(x - 15)^2. \quad (12)$$

La ecuación (12) implica que la gráfica de la ecuación (11) es la parábola que se muestra en la figura 1.3.20, que se abre hacia abajo desde su vértice (15, 135). Esto *demuestra* que el valor máximo de  $A(x)$  en el intervalo  $[0, 30]$  es el valor  $A(15) = 135$ , como lo sugerían nuestro estudio numérico de la sección 1.1 y el estudio gráfico de esta sección. Cuando observamos la ecuación (12) en la forma

$$A(x) = 135 - \frac{3}{5}(x - 15)^2,$$

es claro e inobjetable que el máximo valor posible de  $135 - \frac{3}{5}u^2$  es 135, cuando  $u = x - 15 = 0$ ; es decir, cuando  $x = 15$ .

La técnica de completar cuadrados es algo limitada: Se puede usar para determinar valores máximos y mínimos únicamente de funciones *cuadráticas*. Uno de nuestros objetivos en el cálculo es desarrollar una técnica más general que se pueda aplicar a una variedad mucho más amplia de funciones.

La base de esta técnica más general reside en la siguiente observación. Una inspección visual de la gráfica de

$$A(x) = \frac{3}{5}(30x - x^2)$$

en la figura 1.3.20 sugiere que la recta tangente a la curva en su punto más alto es horizontal. Si *supiéramos* que la recta tangente a la gráfica en su punto más alto debe ser horizontal, entonces nuestro problema se reduciría a mostrar que (15, 135) es el único punto de la gráfica de  $y = A(x)$  donde la recta tangente es horizontal.

Pero, ¿qué queremos decir por la *recta tangente* a una curva arbitraria? Contestaremos esta pregunta en la sección 2.1. La respuesta abrirá la puerta a la posibilidad de determinar valores máximos y mínimos de funciones virtualmente arbitrarias.

### 1.3 Problemas

Trace cada uno de los círculos trasladados en los problemas 1 a 6. Indique el centro y radio respectivo.

1.  $x^2 + y^2 = 4x$
2.  $x^2 + y^2 + 6y = 0$
3.  $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 2$
4.  $x^2 + y^2 + 10x - 20y + 100 = 0$
5.  $2x^2 + 2y^2 + 2x - 2y = 1$
6.  $9x^2 + 9y^2 - 6x - 12y = 11$

Trace cada una de las parábolas trasladadas de los problemas 7 a 12. Indique el vértice respectivo.

- |                           |                         |
|---------------------------|-------------------------|
| 7. $y = x^2 - 6x + 9$     | 8. $y = 16 - x^2$       |
| 9. $y = x^2 + 2x + 4$     | 10. $2y = x^2 - 4x + 8$ |
| 11. $y = 5x^2 + 20x + 23$ | 12. $y = x - x^2$       |

La gráfica de la ecuación  $(x - h)^2 + (y - k)^2 = C$  es un círculo si  $C > 0$ , es el único punto  $(h, k)$  si  $C = 0$ , y no tiene puntos si  $C < 0$ . (¿Por qué?) Identifique las gráficas de las ecuaciones

en los problemas 13 a 16. Si la gráfica es un círculo, dé su centro y su radio.

13.  $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$
14.  $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 0$
15.  $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 20 = 0$
16.  $2x^2 + 2y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$

Trace las gráficas de las funciones en los problemas 17 a 40. Tome en cuenta el dominio de definición de cada función, y grafique los puntos que estime necesario.

17.  $f(x) = 2 - 5x, \quad -1 \leq x \leq 1$
18.  $f(x) = 2 - 5x, \quad 0 \leq x < 2$
19.  $f(x) = 10 - x^2$
20.  $f(x) = 1 + 2x^2$
21.  $f(x) = x^3$
22.  $f(x) = x^4$
23.  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$
24.  $f(x) = -\sqrt{9 - x^2}$
25.  $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$
26.  $f(x) = \frac{1}{1 - x}$

$$27. f(x) = \frac{1}{x+2}$$

$$28. f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$29. f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$30. f(x) = \frac{|x|}{x}$$

$$31. f(x) = \frac{1}{2x+3}$$

$$32. f(x) = \frac{1}{(2x+3)^2}$$

$$33. f(x) = \sqrt{1-x}$$

$$34. f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

$$35. f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$$

$$36. f(x) = |2x-2|$$

$$37. f(x) = |x| + x$$

$$38. f(x) = |x-3|$$

$$39. f(x) = |2x+5|$$

$$40. f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Grafique las funciones dadas en los problemas 41 a 46. Indique los puntos de discontinuidad, si existen.

$$41. f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$42. f(x) = 1, \text{ si } x \text{ es un entero; en caso contrario, } f(x) = 0.$$

$$43. f(x) = \llbracket 2x \rrbracket$$

$$44. f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$$

$$45. f(x) = \llbracket x \rrbracket - x$$

$$46. f(x) = \llbracket x \rrbracket + \llbracket -x \rrbracket + 1$$

En los problemas 47 a 54, use una calculadora gráfica o computadora para determinar (mediante acercamientos) el punto más alto o más bajo (según el caso)  $P$  de la parábola dada. Determine las coordenadas de  $P$  hasta dos cifras

decimales, correctas o correctamente redondeadas. Verifique entonces sus resultados, completando el cuadrado para determinar el vértice real de la parábola.

$$47. y = 2x^2 - 6x + 7$$

$$48. y = 2x^2 - 10x + 11$$

$$49. y = 4x^2 - 18x + 22$$

$$50. y = 5x^2 - 32x + 49$$

$$51. y = -32 + 36x - 8x^2$$

$$52. y = -53 - 34x - 5x^2$$

$$53. y = 3 - 8x - 3x^2$$

$$54. y = -28 + 34x - 9x^2$$

En los problemas 55 a 58, use el método de completar el cuadrado para graficar la función adecuada y determine entonces el valor máximo o mínimo solicitado.

55. Si se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de 96 pies/segundo, entonces su altura después de  $t$  segundos es  $y = 96t - 16t^2$  (pies). Determine la altura máxima que alcanza la pelota.

56. Determine el área máxima posible del rectángulo descrito en el problema 50 de la sección 1.1.

57. Determine el valor máximo posible del producto de dos números positivos cuya suma es 50.

58. En el problema 52 de la sección 1.1, se le pidió que expresara la producción diaria de un pozo petrolero específico como una función  $P = f(x)$  del número  $x$  de nuevos pozos perforados. Construya la gráfica de  $f$ , y úsela para determinar el valor de  $x$  que maximiza a  $P$ .

### 1.3 Proyectos

Estos proyectos necesitan una calculadora gráfica o una computadora con un programa para graficación.

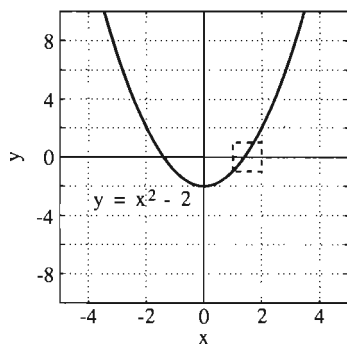
Con la calculadora gráfica típica, puede realizar acercamientos sucesivos, oprimiendo simplemente la tecla **ZOOM**. La figura 1.3.21 enumera las instrucciones para graficación en los sistemas de cómputo comunes. Mediante ese sistema, usted puede por lo general definir cada ventana de visión sucesiva en forma explícita, como en la instrucción típica

```
plot(x^2 - 2, x = -5..5, y = -10..10)
```

para graficar  $f(x) = x^2 - 2$  en la ventana  $-5 \leq x \leq 5, -10 \leq y \leq 10$ .

<i>Derive</i>	Author f (x) , después usar los comandos Plot y Zoom
<i>Maple</i>	plot ( f (x) , x = a..b, y = c..d)
<i>Mathematica</i>	Plot[ f[x], {x,a,b} , PlotRange -> {c,d} ]
<i>(X)PLORE</i>	window ( a,b, c,d ) graph( f (x), x )

**Figura 1.3.21** Instrucciones para graficar la función  $f(x)$



**Figura 1.3.22** Determinación de la raíz cuadrada (positiva) de 2

**PROYECTO A** El proyecto A de la sección 1.1 analiza el número  $\sqrt{2}$  como la solución positiva de la ecuación

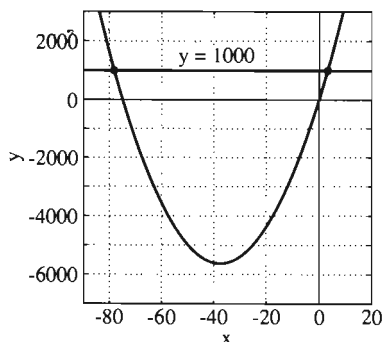
$$x^2 - 2 = 0,$$

que es igual a la intersección de la parábola

$$y = x^2 - 2$$

y el eje  $x$  positivo. Partimos de la figura 1.3.22 y aproximamos  $\sqrt{2}$  (con una precisión de cuatro cifras decimales) en forma gráfica (es decir, mediante el **método de aproximaciones sucesivas**).

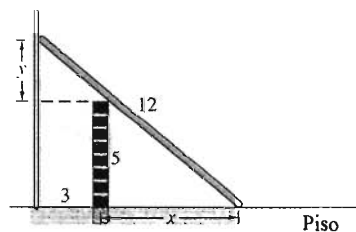
En forma análoga, se puede aplicar el método de aproximaciones sucesivas para determinar aproximaciones con hasta cuatro cifras decimales de raíces como  $\sqrt{17}$ ,  $\sqrt[3]{25}$  y  $\sqrt[3]{100}$ .



**Figura 1.3.23** La recta y la parábola en el problema del corredor

**PROYECTO B** El proyecto B de la sección 1.1 trata de un corredor de  $x$  pies de ancho que rodea a un área rectangular de 50 por 100 pies. Concluye del análisis en esa sección que si el área total solamente del corredor debe ser 1000 pies cuadrados, entonces  $x$  debe ser la abscisa de un punto de intersección de la recta  $y = 1000$  con la parábola

Aplique entonces el método de aproximaciones sucesivas para determinar (con una precisión de cuatro cifras decimales) los dos puntos de intersección que se muestran en la figura 1.3.23. ¿Existen en nuestro problema realmente dos valores posibles de  $x$ ?



**Figura 1.3.24** La escalera del proyecto C

**PROYECTO C** La figura 1.3.24 muestra una escalera de 12 pies recargada sobre una cerca de 5 pies y que llega hasta una pared alta localizada a 3 pies de la cerca. Queremos determinar la distancia  $x$  desde la base de la escalera hasta la parte inferior de la cerca.

Desarrolle con cuidado el análisis siguiente. Al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo grande de la figura 1.3.24 obtenemos

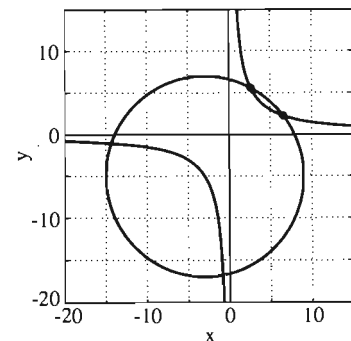
$$(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 144, \quad (13)$$

la ecuación de un círculo con centro  $(-3, -5)$  y radio 12. Observe después que los dos triángulos pequeños de la figura son semejantes. Por lo tanto,

$$\frac{y}{3} = \frac{5}{x},$$

de modo que

$$y = \frac{15}{x}. \quad (14)$$



**Figura 1.3.25** El círculo y la hipérbola en el problema de la escalera

La gráfica de la ecuación (14) es esencialmente la misma que la del ejemplo 4 (véase figura 1.3.6), con una discontinuidad infinita en  $x = 0$ .

Las gráficas de las ecuaciones (13) y (14) se muestran juntas en la figura 1.3.25. Los dos puntos de intersección indicados en el primer cuadrante proporcionan *dos* posiciones físicamente posibles de la escalera. Aplique el método de aproximaciones sucesivas para determinarlas, de modo que  $x$  y  $y$  tengan una precisión de hasta cuatro cifras decimales. Trace, a escala, las dos posibilidades. ¿Por qué los dos puntos de intersección del tercer cuadrante no proporcionan otras dos posiciones físicamente posibles de la escalera?

## 1.4 **Un breve catálogo de funciones**

En esta sección daremos una visión de varias funciones que se usan en las aplicaciones del cálculo para describir fenómenos cambiantes en nuestro mundo. Nuestro punto de vista será principalmente gráfico. El objetivo es que usted tenga una comprensión general de las principales diferencias entre los diversos tipos de funciones. En capítulos posteriores usaremos el cálculo para analizar con más detalle las gráficas que presentamos aquí.

### COMBINACIONES DE FUNCIONES

En primer lugar nos concentraremos en las funciones sencillas, pues muchas funciones variadas y complejas se pueden formar a partir de funciones “bloque de construcción” sencillas. Aquí analizaremos algunas de las formas de combinar funciones para obtener otras nuevas.

Supongamos que  $f$  y  $g$  son funciones y que  $c$  es un número real fijo. El **múltiplo (escalar)  $cf$** , la **suma  $f+g$** , la **diferencia  $f-g$** , el **producto  $f \cdot g$**  y el **cociente  $f/g$**  son las nuevas funciones determinadas por estas fórmulas:

$$(cf)(x) = cf(x), \quad (1)$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (2)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), \quad (3)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \text{y} \quad (4)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}. \quad (5)$$

Las combinaciones en las ecuaciones (2) a (4) están definidas para todo número  $x$  que esté en el dominio de  $f$  y en el dominio de  $g$ . En la ecuación (5) pedimos que  $g(x) \neq 0$ .

**EJEMPLO 1** Sean  $f(x) = x^2 + 1$  y  $g(x) = x - 1$ . Entonces

$$(3f)(x) = 3(x^2 + 1),$$

$$(f + g)(x) = (x^2 + 1) + (x - 1) = x^2 + x,$$

$$(f - g)(x) = (x^2 + 1) - (x - 1) = x^2 - x + 2,$$

$$(f \cdot g)(x) = (x^2 + 1)(x - 1) = x^3 - x^2 + x - 1 \quad \text{y}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1} \quad (x \neq 1).$$

**EJEMPLO 2** Si  $f(x) = \sqrt{1-x}$  para  $x \leq 1$  y  $g(x) = \sqrt{1+x}$  para  $x \geq -1$ , entonces la suma y producto de  $f$  y  $g$  están definidas donde *tanto  $f$  como  $g$*  lo están. Así, el dominio de

$$f(x) + g(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$$

y

$$f(x) \cdot g(x) = \sqrt{1-x}\sqrt{1+x} = \sqrt{1-x^2}$$

es el intervalo cerrado  $[-1, 1]$ . Pero el dominio del cociente

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

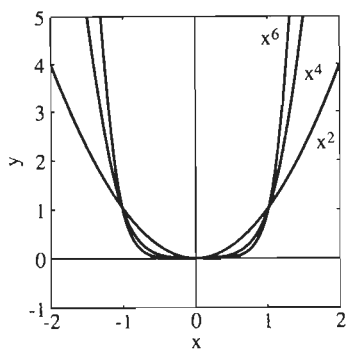
es el intervalo semiabierto  $(-1, 1]$ , pues  $g(-1) = 0$ .

## POLINOMIOS

Un **polinomio** de grado  $n$  es una función de la forma

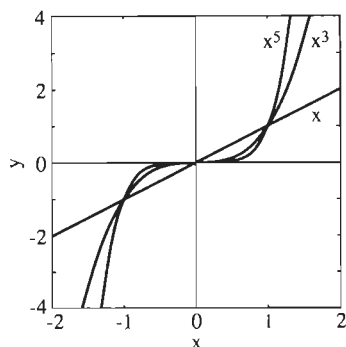
$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (6)$$

donde los coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_n$  son números reales fijos. Así, un polinomio de grado  $n$  es una suma de múltiplos constantes de las **funciones potencia**



**Figura 1.4.1** Gráficas de funciones potencia de grado par (ejemplo 3)

**EJEMPLO 3** Las gráficas de las funciones potencia de grado par  $x^2, x^4, x^6, \dots$  abren todas hacia arriba, como se muestra en la figura 1.4.1. Pero las gráficas de las funciones potencia de grado impar  $x^1, x^3, x^5, \dots$  van todas de suroeste a noreste, como se muestra en la figura 1.4.2. En ambos casos, mientras mayor es el exponente  $n$ , más “plana” es la gráfica  $y = x^n$  cerca del origen.



**Figura 1.4.2** Gráficas de funciones potencia de grado impar (ejemplo 3)

Un polinomio de primer grado es simplemente una *función lineal*  $a_1 x + a_0$  cuya gráfica es una línea recta (véase la sección 1.2). Un polinomio de segundo grado es una *función cuadrática* cuya gráfica  $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  es una parábola (véase la sección 1.3).

Recordemos que una **raíz** (o **cero**) de la función  $f$  es una solución de la ecuación

$$f(x) = 0. \quad (8)$$

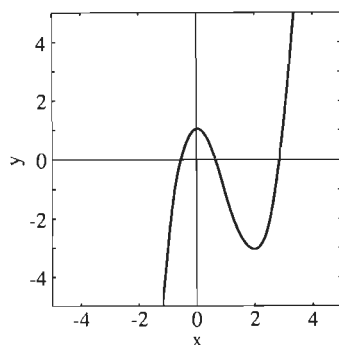
¿Es obvio para usted que *las raíces de  $f(x)$  son precisamente las intersecciones con el eje  $x$  de la gráfica*

$$y = f(x)? \quad (9)$$

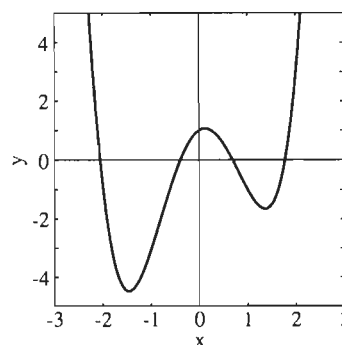
De hecho, una de las razones principales para nuestro interés en la gráfica de una función es ver el número y posición aproximada de sus raíces.

Una clave para comprender las gráficas de polinomios de orden superior es el *teorema fundamental del álgebra*, el cual establece que todo polinomio de grado  $n$  tiene  $n$  raíces (posiblemente complejas o repetidas). Esto implica que un polinomio de grado  $n$  *no tiene más de  $n$  raíces reales distintas*.

**EJEMPLO 4** Las figuras 1.4.3 y 1.4.4 muestran polinomios que tienen el número máximo de raíces reales permitidas por el teorema fundamental del



**Figura 1.4.3**  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$  tiene tres raíces reales (ejemplo 4)



**Figura 1.4.4**  $f(x) = x^4 - 4x^2 + x + 1$  tiene cuatro raíces reales (ejemplo 4)

álgebra. Pero las figuras 1.4.1 y 1.4.2 muestran polinomios de grado alto con solamente una raíz real. Y la función cuadrática

$$f(x) = x^2 + 4x + 13 = (x + 2)^2 + 9$$

no tiene raíces. (¿Por qué no?) De hecho, si  $n$  es par, un polinomio de grado  $n$  puede tener cualquier número de raíces reales, de 0 a  $n$  (de 1 a  $n$  si  $n$  es impar).

En el capítulo 4 usaremos el cálculo para estudiar las gráficas de los polinomios (y de otras funciones) en forma más completa. Ahí veremos que la gráfica de cualquier polinomio comparte varias características cualitativas con las de las figuras 1.4.1 a 1.4.4.

Si  $p(x)$  es un polinomio de grado par, entonces  $y = p(x)$  va en la misma dirección (ya sea  $+\infty$  o  $-\infty$ ) cuando  $x$  tiende a  $+\infty$  y a  $-\infty$ . Si  $p(x)$  es un polinomio de grado impar, entonces  $y$  va en direcciones opuestas cuando  $x$  tiende a  $+\infty$  y a  $-\infty$ . Además, “entre los extremos” a la derecha y a la izquierda, un polinomio de grado  $n$  tiene a lo más  $n-1$  “dobles”. Así, los dos dobles de la figura 1.4.3 son el máximo que puede tener la gráfica de un polinomio de tercer grado (cúbico) y los tres dobles de la figura 1.4.4 son lo más que puede tener la gráfica de un polinomio de cuarto grado (cuártico). (Una tarea del capítulo 4 será precisar la noción de “doble” de una curva.)

## FUNCIONES RACIONALES

Así como un número racional es el cociente de dos enteros, una **función racional** es un cociente

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad (10)$$

de dos polinomios  $p(x)$  y  $q(x)$ . Las gráficas de las funciones racionales y de los polinomios tienen varias características en común. Por ejemplo, una función racional sólo tiene un número finito de raíces, pues  $f(x)$  en la ecuación (10) sólo se puede anular si el polinomio del numerador  $p(x)$  se anula. De manera análoga, la gráfica de una función racional sólo puede tener un número finito de dobles.

Pero el polinomio del denominador de la ecuación (10) puede tener una raíz en un punto  $x = a$  donde el numerador no se anule. En este caso, el valor de  $f(x)$  será muy grande cuando  $x$  esté muy cerca de  $a$ . Esta observación implica que la gráfica de una función racional puede tener una característica que la gráfica de un polinomio no puede: una *asintota*.

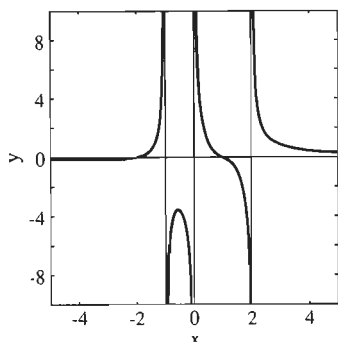
**EJEMPLO 5** La figura 1.4.5 muestra la gráfica de la función racional

$$f(x) = \frac{(x + 2)(x - 1)}{x(x + 1)(x - 2)}. \quad (11)$$

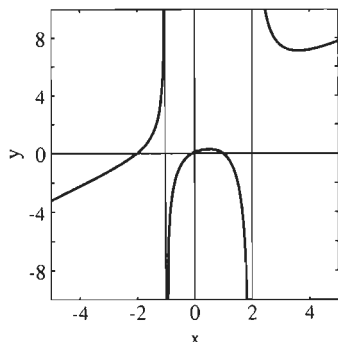
Observe las intersecciones con el eje  $x$ ,  $x = -2$  y  $x = 1$ , correspondientes a las raíces del numerador  $(x + 2)(x - 1)$ . Las rectas verticales  $x = -1$ ,  $x = 0$  y  $x = 2$  que aparecen en la gráfica corresponden a las raíces del denominador  $x(x + 1)(x - 2)$ . Estas rectas verticales son *asintotas* de la gráfica de  $f$ .

**EJEMPLO 6** La figura 1.4.6 muestra la gráfica de la función racional

$$f(x) = \frac{x(x + 2)(x - 1)}{(x + 1)(x - 2)}. \quad (12)$$



**Figura 1.4.5** La gráfica de la función racional de la ecuación (11) (ejemplo 5)



**Figura 1.4.6** La gráfica de la función racional de la ecuación (12) (ejemplo 6)

Las intersecciones con el eje  $x$   $x = -2$ ,  $x = 0$  y  $x = 1$  corresponden a las raíces del numerador, mientras que las asíntotas  $x = -1$  y  $x = 2$  corresponden a las raíces del denominador.

Usted debe poder (al contar las intersecciones con el eje  $x$  y las asíntotas) asociar las funciones racionales en las ecuaciones (11) y (12) con sus gráficas en las figuras 1.4.5 y 1.4.6 sin saber de antemano cuál era cuál.

## FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

En el apéndice A incluimos un repaso de trigonometría. En la trigonometría elemental, una función trigonométrica como  $\sin A$ ,  $\cos A$  o  $\tan A$  se define por lo general primero como una función de un *ángulo*  $A$  en un triángulo rectángulo. Pero ahora, una función trigonométrica de un *número* corresponde a esa función del ángulo medido en  $x$  radianes. Así,

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{y} \quad \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

pues  $\pi/6$  es la medida en radianes de un ángulo de  $30^\circ$ .

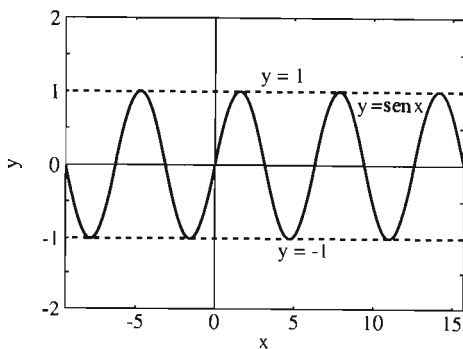


Figura 1.4.7  $y = \sin x$

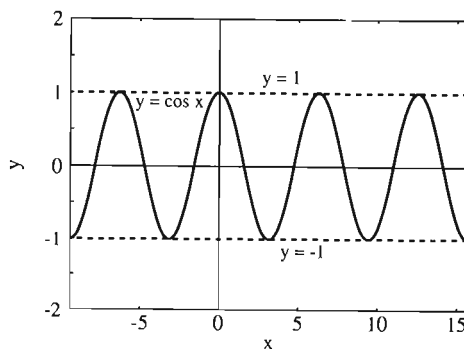


Figura 1.4.8  $y = \cos x$

Las figuras 1.4.7 y 1.4.8 muestran las gráficas  $y = \sin x$  y  $y = \cos x$  de las funciones seno y coseno, respectivamente. El valor de cada una oscila entre  $+1$  y  $-1$ , exhibiendo la *periodicidad* característica de las funciones trigonométricas:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x. \quad (13)$$

Si trasladamos la gráfica  $y = \cos x$   $\pi/2$  unidades a la derecha, obtenemos la gráfica  $y = \sin x$ . Esta observación conduce a la relación familiar

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x. \quad (14)$$

La figura 1.4.9 muestra la curva del seno trasladada que se obtiene al trasladar el origen al punto  $(1, 2)$ . Su ecuación se obtiene reemplazando  $x$  y  $y$  en  $y = \sin x$  con  $x - 1$  y  $y - 2$ , respectivamente:

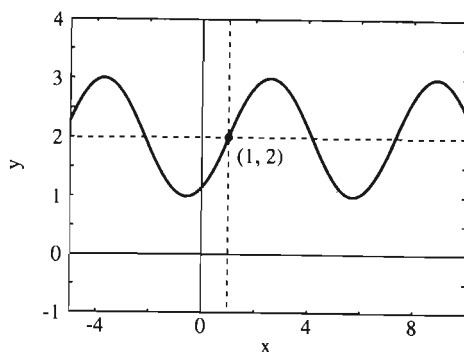


Figura 1.4.9 La curva seno trasladada  $y - 2 = \text{sen}(x - 1)$

$$y - 2 = \text{sen}(x - 1); \quad \text{es decir,} \quad (15)$$

$$y = 2 + \text{sen}(x - 1).$$

Nuestro mundo está lleno de cantidades que oscilan, como las funciones trigonométricas. Piense en la alternancia del día y de la noche, la repetición sin fin de las estaciones, el ciclo mensual de la luna, las mareas altas y bajas, el ritmo de su corazón.

**EJEMPLO 7** La figura 1.4.10 muestra el comportamiento de tipo coseno de las temperaturas en Athens, Georgia. La temperatura promedio  $T$  (en °F) en un día  $t$  meses después del 15 de julio está dada en forma aproximada por

$$T = 61.3 + 17.9 \cos(0.5236t).$$

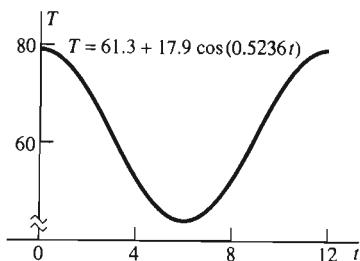


Figura 1.4.10 Temperatura diaria promedio en Athens, Georgia,  $t$  meses después del 15 de julio (ejemplo 7)

La periodicidad y el comportamiento oscilatorio de las funciones trigonométricas las hacen algo diferentes a las funciones polinomiales. Como

$$\text{sen } n\pi = 0 \quad \text{y} \quad \cos\left(\frac{2n + 1}{2} \pi\right) = 0 \quad (16)$$

para  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , vemos que las ecuaciones trigonométricas sencillas

$$\text{sen } x = 0 \quad \text{y} \quad \cos x = 0 \quad (17)$$

tienen una *infinidad de soluciones*. En contraste, una ecuación polinomial puede tener solamente un número finito de soluciones.

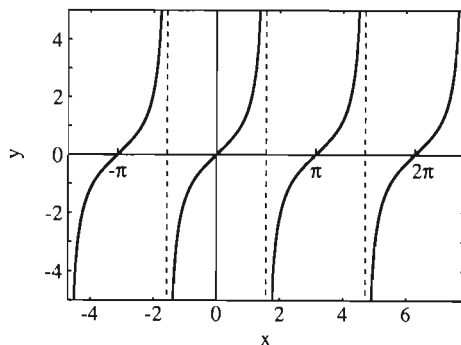


Figura 1.4.11  $y = \tan x$

La figura 1.4.11 muestra la gráfica de  $y = \tan x$ . Las intersecciones con el eje  $x$  corresponden a las raíces del numerador  $\text{sen } x$  en



$$\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}, \quad (18)$$

mientras que las asíntotas corresponden a las raíces del denominador  $\cos x$ . Observe los “huecos infinitos” en la gráfica  $y = \tan x$  en todos los múltiplos enteros impares de  $\pi/2$ . Llamamos a estos huecos *discontinuidades*, fenómeno que analizaremos más adelante, en el capítulo 2.

## FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Una **función exponencial** es una función de la forma

$$f(x) = a^x, \quad (19)$$

donde la **base**  $a$  es un número real fijo, una constante. Observe la diferencia entre una función exponencial y una función potencia. En la función potencia  $x^n$ , la *variable*  $x$  es elevada a una exponente *constante*; en la función exponencial  $a^x$ , una *constante* se eleva a un exponente *variable*.

Muchas computadoras y calculadoras programables usan  $a^x$  para denotar la exponencial  $a^x$ . Si  $a > 1$ , entonces la gráfica de  $y = a^x$  se parece mucho a las de la figura 1.4.12, que muestra  $y = 2^x$  y  $y = 10^x$ . La gráfica de una función exponencial con base  $a$ ,  $a > 1$ , crece siempre, de izquierda a derecha. Por tanto, dicha gráfica no es como la gráfica de un polinomio o de una función trigonométrica. Mientras más grande sea la base  $a$ , más rápidamente crecerá la curva  $y = a^x$  (para  $x > 0$ ). Así,  $y = 10^x$  crece más rápido que  $y = 2^x$ .

Si reemplazamos  $x$  en la ecuación (19) por  $-x$ , obtenemos la función  $a^{-x}$ . Su gráfica  $y = a^{-x}$  *decrece* de izquierda a derecha si  $a > 1$ . La figura 1.4.13 muestra las gráficas de  $y = 3^{-x}$  y  $y = 7^{-x}$ .

Mientras las funciones trigonométricas se usan para describir fenómenos periódicos de flujo y reflujo, las funciones exponenciales se usan para describir cantidades naturales que siempre crecen o siempre decrecen.

**EJEMPLO 8** Sea  $P(t)$  el número de roedores después de  $t$  meses en cierta población prolífica, que se duplica cada mes. Si existen  $P(0) = 10$  roedores inicialmente, entonces existen

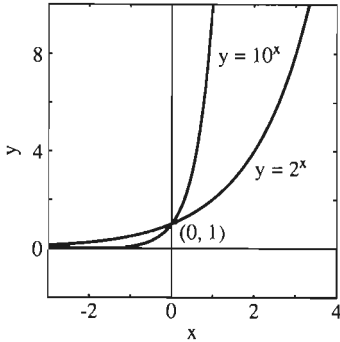
- $P(1) = 10 \cdot 2^1 = 20$  roedores después de 1 mes,
- $P(2) = 10 \cdot 2^2 = 40$  roedores después de 2 meses,
- $P(3) = 10 \cdot 2^3 = 80$  roedores después de 3 meses,

y así sucesivamente. De este modo, la población de roedores después de  $t$  meses está dada por la función exponencial

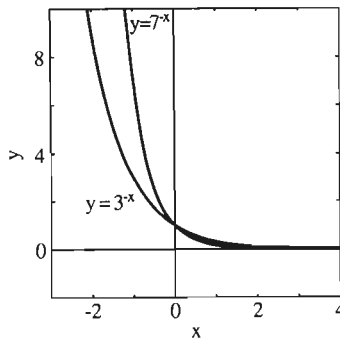
$$P(t) = 10 \cdot 2^t \quad (20)$$

si  $t$  es un entero no negativo. Bajo las condiciones adecuadas, la ecuación (20) da una aproximación precisa de la población de roedores, aunque  $t$  no sea un entero.

**EJEMPLO 9** Suponga que invierte \$5000 en una cuenta de mercado de dinero que paga 8% anual. Esto significa que la cantidad en la cuenta es multiplicada por 1.08 al final de cada año. Sea  $A(t)$  la cantidad en su cuenta al cabo de  $t$  años. Entonces:



**Figura 1.4.12** Funciones exponenciales crecientes  $y = 2^x$  y  $y = 10^x$



**Figura 1.4.13** Funciones exponenciales decrecientes  $y = 3^{-x}$  y  $y = 7^{-x}$

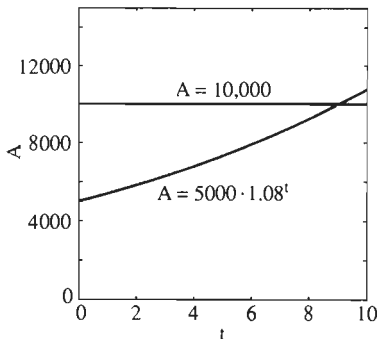


Figura 1.4.14 La gráfica del ejemplo 9

- $A(1) = 5000 \cdot 1.08^1$  (\$5400) después de 1 año,
- $A(2) = 5000 \cdot 1.08^2$  (\$5832) después de 2 años,
- $A(3) = 5000 \cdot 1.08^3$  (\$6298.56) después de 3 años,

y así sucesivamente. En estos términos, después de  $t$  años ( $t$  un entero no negativo), la cantidad en su cuenta estará dada por la función exponencial

$$A(t) = 5000 \cdot 1.08^t. \quad (21)$$

En el caso de una tasa de interés ligeramente menor (cerca de 7.696%) compuesta *continua* (en vez de anual), esta fórmula también es válida cuando  $t$  no es un entero. La figura 1.4.14 muestra la gráfica  $A(t) = 5000 \cdot 1.08^t$ , así como la recta horizontal  $A = 10,000$ . En esta gráfica vemos, por ejemplo, que la cantidad en la cuenta se duplica (a \$10,000) después de aproximadamente  $t = 9$  años. Podríamos aproximar el “tiempo de duplicación”  $t$  de manera más precisa realizando una aproximación a la gráfica cerca de la intersección de la recta horizontal y la curva creciente.

En analogía con las funciones trigonométricas inversas que tal vez haya estudiado en trigonometría, los logaritmos son “inversos” de las funciones exponenciales. El **logaritmo en base  $a$**  del número positivo  $x$  es el exponente a la que hay que elevar  $a$  para obtener  $x$ . Es decir,

$$y = \log_a x \quad \text{si} \quad a^y = x. \quad (22)$$

La tecla **LOG** de la mayor parte de las calculadoras proporciona el *logaritmo común* en base 10,  $\log_{10}x$ . La tecla **LN** proporciona el *logaritmo natural*

$$\ln x = \log_e x, \quad (23)$$

donde  $e$  es un número irracional especial:

$$e = 2.71828\ 18284\ 59045\ 23536\ \dots \quad (24)$$

Usted verá la importancia de esta base en el capítulo 7.

La figura 1.4.15 muestra las gráficas  $y = \ln x$  y  $y = \log_{10} x$ . Ambas gráficas pasan por el punto  $(1, 0)$  y crecen siempre (aunque de manera lenta) de izquierda a derecha. Como las funciones exponenciales nunca asumen valores negativos ni se anulan, los números negativos no están en el dominio de cualquier función logarítmica, ni tampoco el cero.

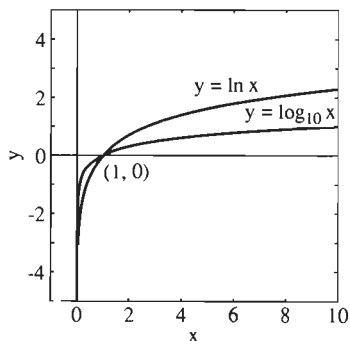


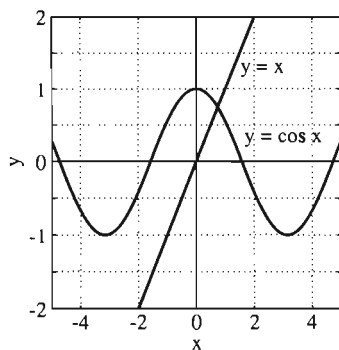
Figura 1.4.15 Las funciones logaritmo común y natural

## ECUACIONES TRASCENDENTES

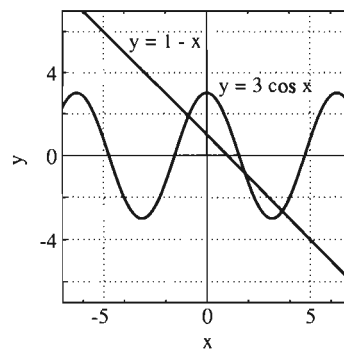
Las funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas se llaman comúnmente funciones *trascendentes*. Como vimos en la ecuación (17) una ecuación que incluye funciones trascendentes puede tener una infinidad de soluciones. Pero también puede tener un número finito de soluciones: saber cuál de las dos posibilidades ocurre puede ser difícil de determinar. Una vía es escribir la ecuación dada en la forma

$$f(x) = g(x), \quad (25)$$

donde las funciones  $f$  y  $g$  se puedan graficar con facilidad. Entonces, las soluciones de la ecuación (25) corresponden a las intersecciones de las dos gráficas  $y = f(x)$  y  $y = g(x)$ .



**Figura 1.4.16** Resolución de la ecuación  $x = \cos x$  del ejemplo 10



**Figura 1.4.17** Resolución de la ecuación  $1 - x = 3 \cos x$  del ejemplo 11

**EJEMPLO 10** El único punto de intersección de las gráficas  $y = x$  y  $y = \cos x$  que se muestra en la figura 1.4.16, indica que la ecuación

$$x = \cos x \quad (26)$$

sólo tiene una solución. Además, la gráfica muestra la información adicional de que la solución está en el intervalo  $(0, 1)$ .

**EJEMPLO 11** Las gráficas de  $y = 1 - x$  y  $y = 3 \cos x$  se muestran en la figura 1.4.17. En contraste con el ejemplo 10, existen tres puntos de intersección de las gráficas. Esto muestra que la ecuación

$$1 - x = 3 \cos x \quad (27)$$

tiene una solución negativa y dos soluciones positivas. Se pueden aproximar mediante acercamientos (por separado) en los tres puntos de intersección.

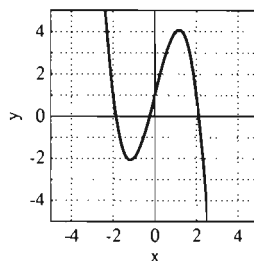
## 1.4 Problemas

En los problemas 1 a 10, determine  $f + g$ ,  $f \cdot g$  y  $f/g$ , y dé el dominio de definición de cada una de estas nuevas funciones.

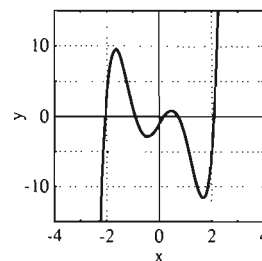
En los problemas 11 a 14, relacione el polinomio dado con su gráfica, entre las que aparecen en las figuras 1.4.18 a 1.4.21.

1.  $f(x) = x + 1$ ,  $g(x) = x^2 + 2x - 3$
2.  $f(x) = \frac{1}{x - 1}$ ,  $g(x) = \frac{1}{2x + 1}$
3.  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = \sqrt{x - 2}$
4.  $f(x) = \sqrt{x + 1}$ ,  $g(x) = \sqrt{5 - x}$
5.  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ,  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$
6.  $f(x) = \frac{x - 1}{x - 2}$ ,  $g(x) = \frac{x + 1}{x + 2}$
7.  $f(x) = x$ ,  $g(x) = \text{sen } x$
8.  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = \cos x^2$
9.  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ,  $g(x) = \tan x$
10.  $f(x) = \cos x$ ,  $g(x) = \tan x$

11.  $f(x) = x^3 - 3x + 1$
12.  $f(x) = 1 + 4x - x^3$
13.  $f(x) = x^4 - 5x^3 + 13x + 1$
14.  $f(x) = 2x^5 - 10x^3 + 6x - 1$



**Figura 1.4.18**



**Figura 1.4.19**

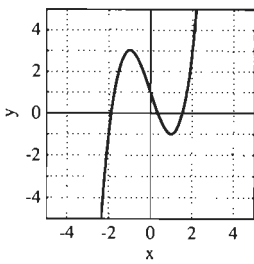


Figura 1.4.20

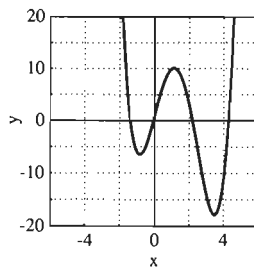


Figura 1.4.21

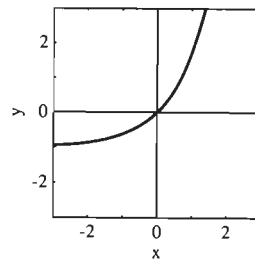


Figura 1.4.26

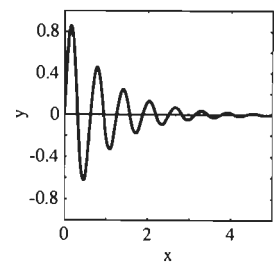


Figura 1.4.27

En los problemas 15 a 18, relacione la función racional dada con su gráfica, entre las que aparecen en las figuras 1.4.22 a 1.4.25.

15.  $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x-2)}$

16.  $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$

17.  $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$

18.  $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-1}$

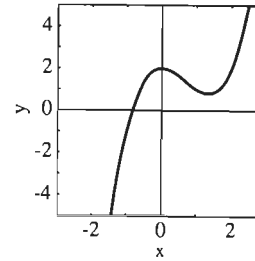


Figura 1.4.28

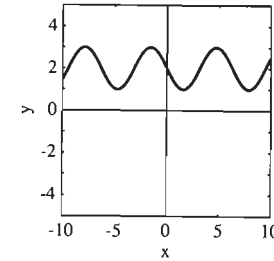


Figura 1.4.29

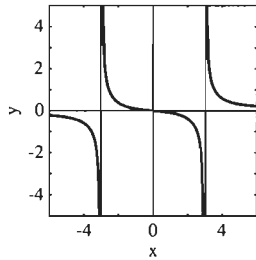


Figura 1.4.22

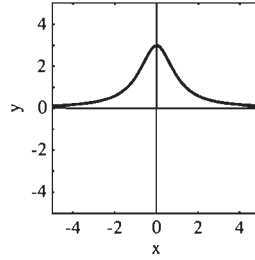


Figura 1.4.23

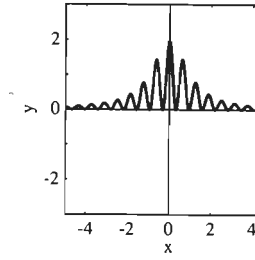


Figura 1.4.30

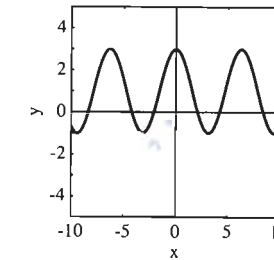


Figura 1.4.31

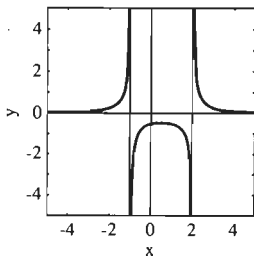


Figura 1.4.24

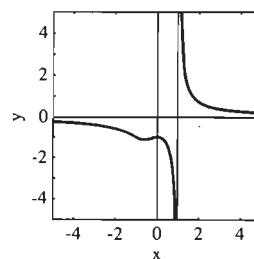


Figura 1.4.25

En los problemas 19 a 24, relacione la función dada con su gráfica entre las que aparecen en las figuras 1.4.26 a 1.4.31.

19.  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$

20.  $f(x) = 1 + 2 \cos x$

21.  $f(x) = 2 - \sin x$

22.  $f(x) = e^x - 1$

23.  $f(x) = \frac{1 + \cos 10x}{1 + x^2}$

24.  $f(x) = e^{-x} \sin 10x$

Use una calculadora gráfica (o un programa de graficación por computadora) para determinar mediante inspección visual de las gráficas el número de soluciones reales de las ecuaciones en los problemas 25 a 36.

25.  $x^3 - 3x + 1 = 0$

26.  $x^3 - 3x + 2 = 0$

27.  $x^3 - 3x + 3 = 0$

28.  $x^4 - 3x^3 + 5x - 4 = 0$

29.  $x^4 - 3x^3 + 5x + 4 = 0$

30.  $3 \cos x = x + 1$

31.  $3 \cos x = x - 1$

32.  $x = 5 \cos x$

33.  $x = 7 \cos x$

34.  $\ln x = \cos x \quad (x > 0)$

35.  $\ln x = 2 \cos x \quad (x > 0)$

36.  $\frac{x}{5} = \cos x + \ln x \quad (x > 0)$

Estos proyectos necesitan usar una calculadora gráfica o una computadora con un programa de graficación (como se analizó en los proyectos de la sección 1.3). Cada uno pide la solución gráfica de una o más ecuaciones mediante el método de aproximaciones sucesivas. Determine cada solución pedida con una precisión de tres cifras decimales.

1. Determine todas las soluciones reales de las ecuaciones cúbicas

(a)  $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$  (Fig. 1.4.3);

(b)  $x^3 - 3x^2 - 2 = 0$ .

2. Determine todas las soluciones reales de la ecuación de cuarto grado

$$x^4 - 4x^2 + x + 1 = 0 \quad (\text{Fig. 1.4.4}).$$

3. (a) Suponga que invierte \$5000 en una cuenta que paga un interés compuesto continuo, con una tasa de interés anual de 7.696%, de modo que la cantidad en depósito al tiempo  $t$  (en años) está dada por

$$A(t) = 5000 \cdot 1.08^t.$$

Partiendo de la figura 1.4.14, determine en forma gráfica cuánto tiempo (redondeando a días) tarda en duplicarse la inversión inicial de \$5000. (b) Si la tasa de interés fuera de 9.531%, compuesta continua, entonces la cantidad que tendría en depósito después de  $t$  años sería

$$A(t) = 5000 \cdot (1.10)^t.$$

Determine en forma gráfica el tiempo que tardaría la inversión en *triplicarse*.

4. Suponga que una población está descrita por una función exponencial, como en el ejemplo 8. (a) Si esta población se duplica en seis meses, ¿cuánto tiempo tarda en triplicarse? (b) Si esta población se triplica en seis meses, ¿cuánto tiempo tarda en duplicarse?

5. Determine todas las soluciones reales de las ecuaciones

(a)  $x = \cos x$  (Fig. 1.4.16);

(b)  $x^2 = \cos x$ ;

(c)  $1 - x = 3 \cos x$  (Fig 1.4.17).

6. Determine todas las soluciones *positivas* de las ecuaciones

(a)  $2^x = 3 \cos x$ ;

(b)  $2^x = 3 \cos 4x$ .

## 1.5 Una vista preliminar: ¿Qué es el cálculo?

Seguramente usted tiene en mente esta pregunta al iniciar el estudio del cálculo, que puede constar de varios cursos. Después de nuestro repaso de funciones y gráficas en las secciones 1.1 a 1.4, podemos dar una vista preliminar de algunos de los siguientes capítulos, donde se desarrollan los conceptos centrales del cálculo.

### LOS DOS PROBLEMAS FUNDAMENTALES

El cuerpo de la técnica de cómputo que constituye “el cálculo” gira en torno de dos problemas geométricos fundamentales que las personas han estudiado desde

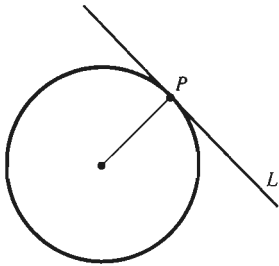


Figura 1.5.1 La recta tangente  $L$  que toca al círculo en el punto  $P$

hace más de 2000 años. Cada problema está relacionado con la gráfica  $y=f(x)$  de una función dada.

El primer problema fundamental es éste: ¿Qué entendemos por la *recta tangente* a la curva  $y=f(x)$  en un punto dado? La palabra *tangente* surge del latín *tangens*, “tocar”. Así, una recta tangente a una curva es aquella que “sólo toca” a la curva. Las rectas tangentes a los círculos (figura 1.5.1) son bien conocidas por la geometría elemental. La figura 1.5.2 muestra la recta tangente a la parábola  $y=x^2$  en el punto  $(1, 1)$ . En la sección 2.1 veremos que esta recta tangente particular tiene pendiente 2, por lo que su ecuación punto-pendiente es

$$y - 1 = 2 \cdot (x - 1); \quad \text{es decir,} \quad y = 2x - 1.$$

Nuestro primer problema es encontrar rectas tangentes en casos más generales.

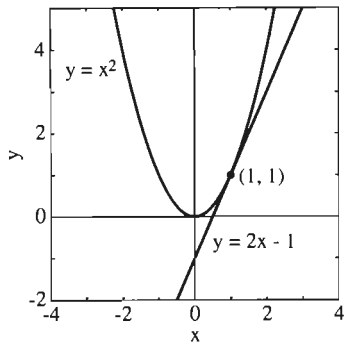


Figura 1.5.2 La recta tangente a la parábola  $y=x^2$  en el punto  $(1, 1)$

**El problema de la tangente** Dado un punto  $P(x, f(x))$  sobre la curva  $y=f(x)$ , ¿cómo calculamos la pendiente de la recta tangente en  $P$  (figura 1.5.3)?

Comenzaremos el análisis de este problema en el capítulo 2. Si denotamos por  $m(x)$  la pendiente de la recta tangente en  $P(x, f(x))$ , entonces  $m$  es una *nueva función*. Podríamos llamarle de manera informal la *función predictora de pendientes* para la curva  $y=f(x)$ . En cálculo, esta función predictora de pendientes es la **derivada** de la función  $f$ . En el capítulo 3 aprenderemos a calcular derivadas de una amplia variedad de funciones, y en los capítulos 3 y 4 veremos numerosas aplicaciones de las derivadas para la solución de problemas reales. Esto nos da una introducción a esa parte del cálculo llamada *cálculo diferencial*.

El problema de la tangente es un problema geométrico; así entonces, es una cuestión puramente matemática. Pero su respuesta (en la forma de derivadas) es la clave para la solución de diversos problemas de aplicación en muchas áreas científicas y técnicas. Los ejemplos 1 y 2 le sugerirán las *conexiones* que son la clave para el papel fundamental del cálculo en la ciencia y la tecnología.

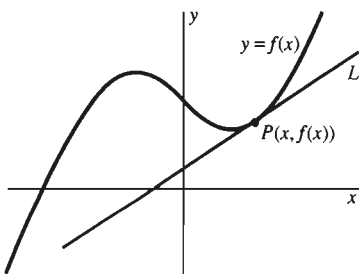


Figura 1.5.3 ¿Cuál es la pendiente de la recta  $L$  tangente a la gráfica  $y=f(x)$  en el punto  $P(x, f(x))$ ?

**EJEMPLO 1** Suponga que está manejando un automóvil a lo largo de un camino largo y recto (figura 1.5.4). Si  $f(t)$  denota la *distancia* (en millas) que ha recorrido el auto hasta el tiempo  $t$  (en horas), entonces la pendiente de la recta tangente a la curva  $y=f(t)$  en el punto  $(t, f(t))$  (figura 1.5.5) es la *velocidad* (en millas por hora) del auto en el tiempo  $t$ .

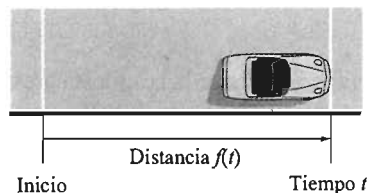


Figura 1.5.4 Un automóvil en un camino recto (ejemplo 1)

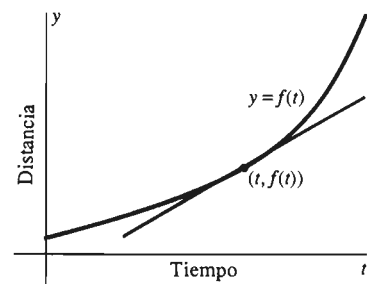
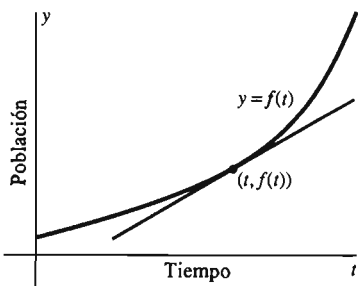


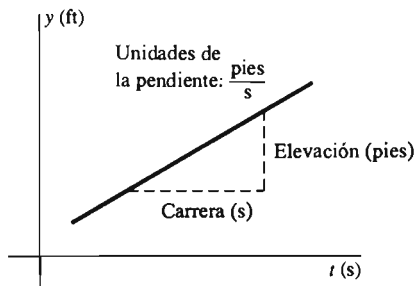
Figura 1.5.5 La pendiente de la recta tangente en el punto  $(t, f(t))$  es la velocidad en el tiempo  $t$  (ejemplo 1)



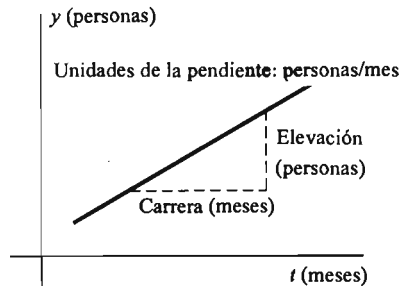
**Figura 1.5.6** La tasa de crecimiento de  $f(t)$  en el instante  $t$  es la pendiente de la recta tangente en el punto  $(t, f(t))$  (ejemplo 2)

**EJEMPLO 2** Suponga que  $f(t)$  denota el número de personas en los Estados Unidos que tienen una seria enfermedad en el instante  $t$  (medido en días a partir del inicio del año). Entonces, la pendiente de la recta tangente a la curva  $y = f(t)$  en el punto  $(t, f(t))$  (figura 1.5.6) es la *tasa de crecimiento* (el número de personas que contraen la enfermedad por día) de la población infectada en el instante  $t$ .

**NOTA** La verdad de las afirmaciones hechas en estos dos ejemplos no tiene que serle evidente. ¡Para aprender cosas semejantes es que usted estudia el cálculo! Regresaremos a los conceptos de velocidad y razón de cambio al principio del capítulo 3.



**Figura 1.5.7** En este caso, la pendiente tiene las dimensiones de la velocidad (pies/segundo)

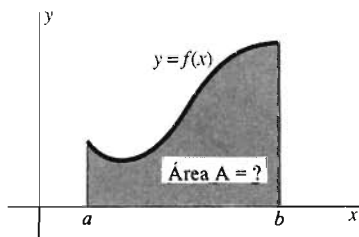


**Figura 1.5.8** En este caso, la pendiente tiene las dimensiones de la razón de cambio de la población.

Aquí nos conformaremos con la observación de que las rectas tangentes en ambos ejemplos tienen las *unidades* correctas. En el plano tiempo-distancia del ejemplo, si medimos el tiempo  $t$  (sobre el eje horizontal) en segundos y la distancia  $y$  (sobre el eje vertical) en pies (o metros), entonces la pendiente (“carrera/elevación”) de una línea recta tiene las dimensiones de pies (o metros) por segundo, las unidades adecuadas de la velocidad (figura 1.5.7). En forma análoga, en el plano  $ty$  del ejemplo 2, si medimos el tiempo  $t$  en meses y  $y$  se mide en personas, entonces la pendiente de una línea recta tiene las unidades adecuadas de personas por mes para medir la tasa de crecimiento de la población infectada (figura 1.5.8).

El segundo problema fundamental del cálculo es el problema del área. Dada la gráfica  $y = f(x)$ , ¿cuál es el área entre la gráfica de  $f$  y el eje  $x$ , por ejemplo, en un intervalo?

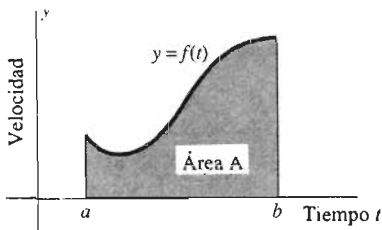
**El problema del área** Si  $f(x) \geq 0$  para  $x$  en el intervalo  $[a, b]$ , ¿cómo calculamos el área  $A$  de la región plana que está bajo la curva  $y = f(x)$  y sobre este intervalo (figura 1.5.9)?



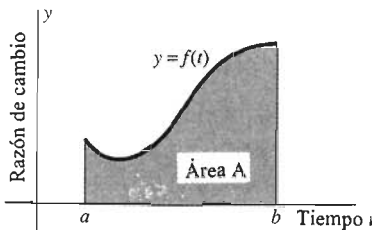
**Figura 1.5.9** El problema del área

Comenzaremos a analizar la respuesta a esta segunda pregunta en el capítulo 5. En cálculo, el área  $A$  es la *integral* de la función  $f$ . Los capítulos 5 y 6 se dedican al cálculo y aplicación de las integrales. Esto nos da una introducción a la otra parte del cálculo que se conoce como *cálculo integral*.

Como el problema de la tangente, el problema del área es una cuestión puramente matemática, pero su respuesta (en la forma de integrales) tiene extensas ramificaciones de importancia práctica. Los ejemplos 3 y 4 recuerdan un poco a los ejemplos 1 y 2.



**Figura 1.5.10** El área  $A$  debajo de la curva de velocidad es igual a la distancia recorrida durante el intervalo de tiempo  $a \leq t \leq b$  (ejemplo 3)



**Figura 1.5.11** El área  $A$  debajo de la curva de razón de cambio es igual al cambio neto de población desde el instante  $t = a$  hasta el instante  $t = b$  (ejemplo 4)

**EJEMPLO 3** Si  $f(t)$  denota la *velocidad* de un automóvil al tiempo  $t$ , entonces el área debajo de la curva  $y = f(t)$  sobre el intervalo  $[a, b]$  es igual a la *distancia* recorrida por el auto entre el instante  $t = a$  y el instante  $t = b$  (figura 1.5.10).

**EJEMPLO 4** Si  $f(t)$  denota la *razón de cambio* de una población infectada en el instante  $t$ , entonces el área debajo de la curva  $y = f(t)$  sobre el intervalo  $[a, b]$  es igual al cambio neto de *tamaño* de esta población entre el instante  $t = a$  y el instante  $t = b$  (figura 1.5.11).

Cuando analicemos las integrales en el capítulo 5, verá porque son ciertas las afirmaciones de los ejemplos 3 y 4.

## LA RELACIÓN FUNDAMENTAL

Los ejemplos 1 y 3 son dos caras de una misma moneda: existe una “relación inversa” entre la *distancia* recorrida y la *velocidad* de un automóvil en movimiento. Los ejemplos 2 y 4 muestran una relación similar entre el *tamaño* de una población y su *razón de cambio*.

Tanto la relación distancia/velocidad como la relación tamaño/razón de cambio ilustradas por los ejemplos 1 a 4 son consecuencias de una relación profunda y fundamental entre el problema de la tangente y el problema del área. Esta relación más general queda descrita por el *teorema fundamental del cálculo*, que analizaremos en la sección 5.6. Fue descubierto en 1666 por Isaac Newton, a la edad de 23 años, cuando aún era un estudiante en la universidad de Cambridge. Unos cuantos años después, fue descubierta de manera independiente por Gottfried Wilhelm Leibniz, quien entonces era un diplomático alemán en París, que estudiaba matemáticas en forma privada. Aunque el problema de la tangente y el problema del área tenían, ya entonces, cerca de 2000 años y que se habían hecho grandes adelantes en su solución por separado por predecesores de Newton y Leibniz, su descubrimiento conjunto de la relación fundamental entre los problemas del área y de la tangente los hicieron famosos como “inventores del cálculo”.

Así, el cálculo gira en torno del cómputo y *aplicación* de las derivadas y las integrales; es decir, de pendientes de rectas tangentes y áreas bajo gráficas. En este texto, se encontrarán aplicaciones concretas del cálculo a diferentes áreas de la ciencia y la tecnología. La lista siguiente de una docena de estas aplicaciones da un breve indicio del extraordinario alcance y poder real del cálculo.

- Suponga que usted fabrica y vende tiendas de campaña. ¿Cómo puede fabricar la tienda más grande con una cantidad dada de tela y con ello maximizar sus ganancias? (sección 3.6)
- Usted arroja a un lago un balón de corcho que tiene una cuarta parte de la densidad del agua. ¿A qué profundidad se hundirá? (sección 3.9)
- Un conductor involucrado en un accidente afirma que circulaba a sólo 40 km por hora. ¿Podría determinar de sus cicatrices la velocidad real del automóvil al momento del accidente? (sección 6.6)
- La gran pirámide de Khufu en Gizeh, Egipto, fue construida hace casi 4000 años. No existen registros personales de la construcción, pero aun así podemos



calcular el número aproximado de trabajadores que intervinieron en su construcción. (sección 6.6)

- Si la población de la tierra continúa su crecimiento con la tasa actual, ¿cuándo habrá lugar solamente parados? (sección 7.5)
- Las fábricas que contaminan el lago Erie son obligadas a cesar el vaciado de desechos en el lago de manera inmediata. ¿Cuánto tiempo tardarán los procesos naturales en restaurar el lago hasta un nivel aceptable de pureza? (sección 7.6)
- En 1845, el demógrafo belga Verhulst utilizó el cálculo para predecir con precisión el crecimiento de población de los Estados Unidos (con un error del 1%) hasta el siglo XX, mucho después de su muerte. ¿Cómo? (sección 9.5)
- Suponga que gana en la lotería y decide utilizar parte del premio para adquirir una “anualidad a perpetuidad” que le pagará a usted y sus herederos (y a los de éstos, *ad infinitum*) \$10,000 por año. ¿Cuál es el precio justo que debe cargar una compañía de seguros por tal anualidad? (sección 9.8)
- ¿Qué explica el hecho de que un reportero bien situado puede escuchar una conversación en voz baja entre dos diplomáticos que se encuentran a una distancia de 16 metros en la Whispering Gallery (Galería de los susurros) del Senado de los Estados Unidos, aunque esta conversación sea inaudible para las demás personas del mismo cuarto? (sección 10.5)
- Suponga que Pablo y María arrojan en forma alternada un dado de 6 caras, no cargado, hasta que alguien gana la apuesta obteniendo el primer “6”. ¿Cuál es la ventaja del que tira primero? (sección 11.3)
- ¿Cómo puede viajar un submarino en la obscuridad debajo de una capa de hielo polar, manteniendo un registro exacto de su posición sin estar en contacto por radio con el resto del mundo? (sección 12.4)
- Suponga que su club está organizando una carrera de autos sin motor para el derby anual en una colina. Usted puede elegir entre ruedas sólidas, ruedas de bicicleta con rayos delgados e incluso ruedas sólidas esféricas (como balines gigantes). ¿Podría aplicar el cálculo para determinar (sin experimentos que representen una pérdida de tiempo) cuál de ellas hace que el auto se desplace más rápido? (sección 15.5)

## Capítulo 1 Repaso: DEFINICIONES, CONCEPTOS, RESULTADOS

Use esta lista como una guía de los conceptos que tal vez necesite repasar.

1. Números racionales e irracionales
2. La recta numérica real
3. Propiedades de las desigualdades
4. Valor absoluto de un número real
5. Propiedades de la función valor absoluto
6. La desigualdad del triángulo
7. Intervalos abiertos y cerrados
8. La definición de función
9. El dominio de una función
10. Variables independientes y dependientes
11. El plano coordenado
12. El teorema de Pitágoras
13. La fórmula de la distancia
14. La fórmula para el punto medio
15. La pendiente de una línea recta
16. La ecuación punto-pendiente de una recta
17. La ecuación pendiente-ordenada al origen de una recta
18. La relación entre las pendientes de rectas paralelas
19. La relación entre las pendientes de rectas perpendiculares
20. La gráfica de una ecuación
21. La gráfica de una función
22. Ecuaciones y traslaciones de círculos
23. Parábolas y gráficas de funciones cuadráticas
24. Diferencias cualitativas entre las gráficas de los polinomios, las funciones racionales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas

## Capítulo 1 Problemas diversos

En los problemas 1 a 10, determine el dominio de definición de la función con la fórmula dada.

1.  $f(x) = \sqrt{x-4}$
2.  $f(x) = \frac{1}{2-x}$
3.  $f(x) = \frac{1}{x^2-9}$
4.  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$
5.  $f(x) = (1 + \sqrt{x})^3$
6.  $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$
7.  $f(x) = \sqrt{2-3x}$
8.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$
9.  $f(x) = (x-2)(4-x)$
10.  $f(x) = \sqrt{(x-2)(4-x)}$

11. De acuerdo con la ley de Boyle, la presión  $p$  (libras/pulgada cuadrada) y volumen  $V$  (pulgada cúbica) de cierto gas satisfacen la condición  $pV=800$ . ¿Cuál es el rango de valores posibles de  $p$ , dado que  $100 \leq V \leq 200$ ?

12. La relación entre la temperatura Fahrenheit  $F$  y la temperatura Celsius  $C$  está dada por

$$F = 32 + \frac{9}{5}C.$$

Si la temperatura de cierto día varía de un mínimo de  $70^\circ\text{F}$  a un máximo de  $90^\circ\text{F}$ , ¿cuál es el rango de temperatura en grados Celsius?

13. Un circuito eléctrico contiene una batería que proporciona  $E$  volts en serie con una resistencia de  $R$  ohms (figura 1.PD.1). Entonces, la corriente de  $I$  amperes que fluye en el circuito satisface la ley de Ohm,  $E = IR$ . Si  $E = 100$  y  $25 < R < 50$ , ¿cuál es el rango de valores posibles de  $I$ ?

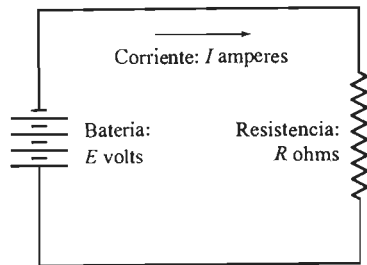


Figura 1.PD.1 El circuito eléctrico sencillo del problema 13

14. El periodo  $T$  (en segundos) de un péndulo simple de longitud  $L$  (en pies) está dado por  $T = 2\pi\sqrt{L/32}$ . Si  $3 < L < 4$ , ¿cuál es el rango posible de valores de  $T$ ?

15. Expresar el volumen  $V$  de un cubo como una función del área total  $S$  de su superficie.

16. La altura de cierto cilindro circular recto es igual a su radio. Expresar el área total de su superficie (incluyendo ambos extremos) como una función de su volumen  $V$ .

17. Expresar el área  $A$  de un triángulo equilátero como una función de su perímetro  $P$ .

18. Una pieza de alambre de 100 pulgadas de largo se corta en dos partes de longitudes  $x$  y  $100-x$ . La primera parte se dobla con la forma de un cuadrado, y la segunda con la forma de un círculo. Expresar la suma de las áreas del cuadrado y el círculo como una función de  $x$ .

En los problemas 19 a 24, escriba una ecuación para la línea recta  $L$  descrita.

19.  $L$  pasa por  $(-3, 5)$  y  $(1, 13)$ .
20.  $L$  pasa por  $(4, -1)$  y tiene pendiente  $-3$ .
21.  $L$  tiene pendiente  $1/2$  y  $y$  ordenada al origen  $-5$ .
22.  $L$  pasa por  $(2, -3)$  y es paralela a la recta con ecuación  $3x-2y=4$ .
23.  $L$  pasa por  $(-3, 7)$  y es perpendicular a la recta con ecuación  $y-2x=10$ .
24.  $L$  es la mediatriz del segmento que une  $(1, -5)$  con  $(3, -1)$ .

Trace las gráficas de las ecuaciones y funciones dadas en los problemas 25 a 34.

25.  $2x - 5y = 7$
26.  $|x - y| = 1$
27.  $x^2 + y^2 = 2x$
28.  $x^2 + y^2 = 4y - 6x + 3$
29.  $y = 2x^2 - 4x - 1$
30.  $y = 4x - x^2$
31.  $f(x) = \frac{1}{x+5}$
32.  $f(x) = \frac{1}{4-x^2}$
33.  $f(x) = |x-3|$
34.  $f(x) = |x-3| + |x+2|$

35. Aplique la desigualdad del triángulo dos veces para mostrar que

$$|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$$

para números reales arbitrarios  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

36. Escriba  $a = (a-b) + b$  para deducir por medio de la desigualdad del triángulo que

$$|a| - |b| \leq |a-b|$$

para números reales arbitrarios  $a$  y  $b$ .

37. Resuelva la desigualdad  $x^2 - x - 6 > 0$ . [Sugerencia: Concluya de la factorización  $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$  que las cantidades  $(x-3)$  y  $(x+2)$  son ambas positivas o ambas negativas. Considere los dos casos por separado para concluir que el conjunto solución es  $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$ .]

Use el método del problema 37 para resolver las desigualdades de los problemas 38 a 40.

38.  $x^2 - 3x + 2 < 0$

39.  $x^2 - 2x - 8 > 0$

40.  $2x \geq 15 - x^2$

Los restantes problemas necesitan una calculadora adecuada o una computadora. En los problemas 41 a 46, use el método de tabulación repetida o el método de aproximaciones sucesivas (o ambos) para determinar las dos raíces (con una precisión de tres cifras decimales; es decir, con tres dígitos correctos o correctamente redondeados a la derecha del punto decimal) de la ecuación algebraica dada. Usted debe verificar su trabajo con la ayuda de la fórmula cuadrática y una calculadora ordinaria.

41.  $x^2 - 5x - 7 = 0$

42.  $3x^2 - 10x - 11 = 0$

43.  $4x^2 - 14x + 11 = 0$

44.  $5x^2 + 24x - 35 = 0$

45.  $8x^2 + 33x - 36 = 0$

46.  $9x^2 + 74x - 156 = 0$

En los problemas 47 a 52, aplique el método de tabulación repetida o el método de aproximaciones sucesivas (o ambos) para determinar el punto más bajo de la parábola dada. Usted puede verificar su trabajo completando el cuadrado.

47.  $y = x^2 - 5x + 7$

48.  $y = 3x^2 - 10x + 11$

49.  $y = 4x^2 - 14x + 11$

50.  $y = 5x^2 + 24x + 35$

51.  $y = 8x^2 + 33x + 35$

52.  $y = 9x^2 + 74x + 156$

53. La figura 1.PD.2 muestra un retrato de 10 por 7 centímetros, con un marco de ancho  $x$  en la parte superior e inferior, y de ancho  $2x$  en cada lado. El área de la orilla es  $20 \text{ cm}^2$ . Use la tabulación repetida o las aproximaciones sucesivas para determinar  $x$ .

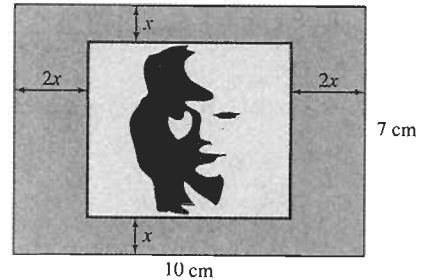


Figura 1.PD.2 El retrato enmarcado del problema 53

54. Un catálogo de ventas por correo exhibe un mantel de 60 por 35 pulgadas que encoge 7% en su área cuando se le lava por primera vez. La descripción también implica que la longitud y ancho decrecen por la misma cantidad  $x$ . Use la tabulación numérica o los métodos de aproximación para encontrar  $x$ .

Determine en forma gráfica el número de soluciones reales de cada una de las ecuaciones en los problemas 55 a 60.

55.  $x^3 - 7x + 3 = 0$

56.  $x^4 - 3x^2 + 4x - 5 = 0$

57.  $\text{sen } x = x^3 - 3x + 1$

58.  $\cos x = x^4 - x$

59.  $\cos x = \log_{10} x$

60.  $10^{-x} = \log_{10} x$

## Preludio al cálculo

□ El moderno lenguaje de programación de computadoras Ada recibe ese nombre en honor a Ada Byron, hija del poeta inglés Lord Byron. Su interés en la ciencia y las matemáticas le permitió estudiar, alrededor del año 1840 la máquina de diferencias, una calculadora mecánica de engranes construida por el matemático Charles Babbage para calcular tablas de valores de funciones. En aquel entonces, él diseñaba su máquina analítica más avanzada, una complicada máquina de cálculo muy adelantada a su tiempo, si la hubiera terminado. En 1843, Ada Byron escribió una serie de ensayos breves explicando la operación planeada de la máquina analítica y sus principios matemáticos fundamentales. Incluyó un prototipo de “programa de computación” para ilustrar la forma en

que los cálculos eran “programados” con anterioridad, usando un conjunto de tarjetas perforadas para especificar sus instrucciones.

### La máquina de diferencias

□ El cálculo ha sido llamado “el instrumento para calcular por excelencia.” Pero en nuestra época, el estudio y aplicación del cálculo ha sido reformado por las computadoras electrónicas. En este libro ilustramos los conceptos del cálculo por medio de resultados gráficos, numéricos y simbólicos generados por computadora. En el capítulo 2 utilizamos la tecnología de cómputo en forma sistemática para el estudio de los límites.

□ Casi exactamente un siglo después de la muerte de Ada Byron, el primer compilador moderno, pa-

ra la traducción de programas de lenguaje humano a instrucciones de lenguaje de máquina, fue desarrollado por Grace Murray Hopper. Como matemática y oficial de la marina de los Estados Unidos, Hopper había trabajado con las primeras computadoras electrónicas modernas desarrolladas durante e inmediatamente después de la Segunda Guerra Mundial. En 1967 fue llamada de nuevo al servicio activo para unir esfuerzos y estandarizar el lenguaje de computación COBOL para la marina. En 1985, a la edad de 79, fue nombrada contraalmirante. En 1986 se retiró, como la oficial en servicio de más edad, en una ceremonia a bordo del U.S.S. Constitution, el navío en servicio de más antigüedad en la marina.

## 2.1 Rectas tangentes y la derivada: un primer vistazo

Vimos al final de la sección 1.3 que ciertos problemas de aplicación implican la pregunta de lo que significa la *recta tangente*  $L$  en un punto  $P$  de una curva general  $y = f(x)$ . Aquí veremos que esta pregunta nos lleva a la introducción de una nueva función llamada la *derivada* de  $f$ . A su vez, la derivada implica el nuevo concepto del *límite* de una función. Nuestro uso de los límites será intuitivo e informal. De hecho, el propósito principal de esta sección es proporcionar la base y la motivación para el tratamiento de los límites en las secciones posteriores del capítulo 2. Comenzaremos un estudio detallado de las derivadas en el capítulo 3.

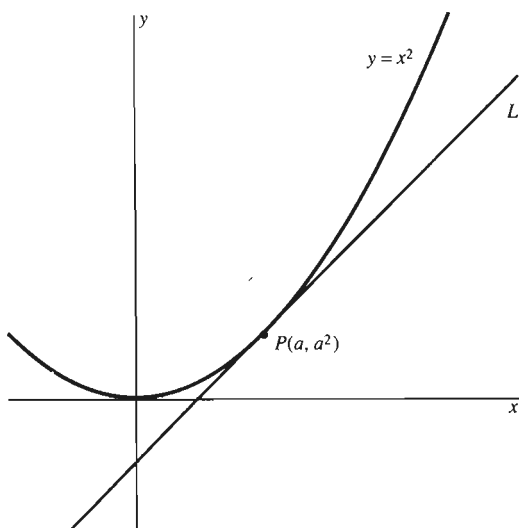
Para comenzar nuestro estudio de las rectas tangentes, debemos primero *definir* la recta tangente  $L$  en un punto arbitrario  $P$  de una curva  $y = f(x)$ . Nuestra idea intuitiva es ésta: la recta tangente  $L$  debe ser la línea recta que pasa a través de  $P$  y que tiene la misma dirección que la curva en  $P$ . Ya que la dirección de una recta queda determinada por su pendiente, nuestro plan para definir la recta tangente equivale a encontrar una “fórmula de predicción de la pendiente”, que dará la pendiente apropiada de la recta tangente. En el ejemplo 1 se ilustra este método en el caso de una de las curvas más sencillas, la parábola con ecuación  $y = x^2$ .

**EJEMPLO 1** Determine la pendiente de la recta tangente  $L$  a la parábola  $y = x^2$  en el punto  $P(a, a^2)$ .

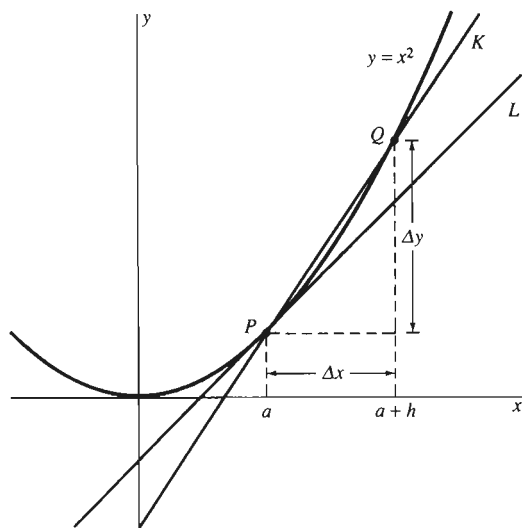
**Solución** La figura 2.1.1 muestra la parábola  $y = x^2$  y un punto típico  $P(a, a^2)$  en ella. La figura muestra también una estimación visual de la dirección de la recta tangente deseada  $L$  en  $P$ . Debemos encontrar la pendiente de  $L$ .

No podemos calcular inmediatamente la pendiente de  $L$ , ya que conocemos solamente las coordenadas de *un* punto  $P(a, a^2)$  en la recta  $L$ . Por ello, comenzamos con otra recta cuya pendiente *podemos* calcular. La figura 2.1.2 muestra la **recta secante**  $K$  que pasa por el punto  $P$  y el punto cercano  $Q(b, b^2)$  de la parábola  $y = x^2$ . Escribamos

$$h = \Delta x = b - a$$



**Figura 2.1.1** La recta tangente en  $P$  debe tener la misma dirección que la curva tiene en  $P$  (ejemplo 1)



**Figura 2.1.2** La recta secante  $K$  pasa por los dos puntos  $P$  y  $Q$ , los cuales podemos usar para determinar su pendiente (ejemplo 1)

como la diferencia de las abscisas de los puntos  $P$  y  $Q$ . (La notación  $\Delta x$  es tan antigua como el propio cálculo, pero significa lo mismo que hace 300 años: un **incremento**, o *cambio*, en el valor de  $x$ . Como analizamos en la sección 1.2 cuando presentamos el concepto de pendiente de una recta,  $\Delta x$  no es el producto de  $\Delta$  y  $x$  sino que debe pensarse como un solo símbolo, como  $h$ .) Entonces las coordenadas de  $Q$  están dadas por las fórmulas

$$b = a + h = a + \Delta x \quad y \quad b^2 = (a + h)^2 = (a + \Delta x)^2.$$

Por tanto, la diferencia entre las ordenadas de  $P$  y  $Q$  es

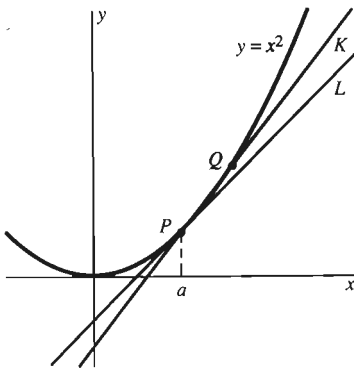
$$\Delta y = b^2 - a^2 = (a + h)^2 - a^2.$$

Puesto que  $Q \neq P$ , podemos usar la definición de pendiente para calcular la pendiente de la recta secante  $K$  que pasa por  $P$  y  $Q$ . Denotamos esta pendiente mediante la notación de función  $m(h)$ , ya que la pendiente  $m$  es una función de  $h$ : Si cambia el valor de  $h$ , cambia la recta  $K$  y entonces cambia su pendiente. Entonces,

$$m(h) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{(a + h)^2 - a^2}{(a + h) - a} = \frac{2ah + h^2}{h}. \quad (1)$$

Como  $h$  es distinto de cero, podemos cancelarlo en la última fracción. Así, tenemos que

$$m(h) = 2a + h. \quad (2)$$



**Figura 2.1.3** Cuando  $h \rightarrow 0$ ,  $Q$  tiende a  $P$  y  $K$  se mueve hasta coincidir con la recta tangente  $L$  (ejemplo 1)

Ahora imagine lo que sucede si se mueve el punto  $Q$  cada vez más cerca del punto  $P$ . (Esta situación corresponde a hacer tender  $h$  a cero.) La recta  $K$  sigue pasando por  $P$  y  $Q$ , pero pivotea alrededor del punto fijo  $P$ . Cuando  $h$  tiende a cero, la recta secante  $K$  se acerca hasta coincidir con la recta tangente  $L$ . Este fenómeno es sugerido en la figura 2.1.3, que muestra la recta secante  $K$  como casi indistinguible de la recta tangente  $L$ .

Por definición, la recta tangente  $L$  debe encontrarse en la *posición límite* de la recta secante  $K$ . Para ver precisamente lo que esto significa, examine lo que sucede a la pendiente de  $K$  cuando ésta pivotea hasta coincidir con  $L$ :

Cuando  $h$  tiende a cero,  
 $Q$  tiende a  $P$ , y entonces  
 $K$  tiende a  $L$ ; mientras que,  
 la pendiente de  $K$  tiende a la pendiente de  $L$ .

Pero encontramos en la ecuación (2) que la pendiente de la recta secante  $K$  es

$$m(h) = 2a + h.$$

Si pensamos en valores de  $h$  que se acerquen cada vez más a cero (como  $h = 0.01$ ,  $h = 0.0001$  y  $h = 0.000001$ ), entonces es claro, por la tabla de la figura 2.1.4, que

$$m(h) = 2a + h \text{ tiende a } 2a \text{ al tender } h \text{ a cero.}$$

Por tanto, *debemos* definir a la recta tangente  $L$  como la línea recta que pasa por  $P$  y que tiene pendiente

$$m = 2a.$$

En esta circunstancia, decimos que  $m = 2a$  es el **límite de  $m(h)$**  cuando  $h$  tiende a cero, y escribimos

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} m(h) = \lim_{h \rightarrow 0} (2a + h) = 2a. \quad (3)$$

$h$	$2a + h$
0.1	$2a + 0.1$
0.01	$2a + 0.01$
0.001	$2a + 0.001$
⋮	⋮
↓	↓
0	$2a$

**Figura 2.1.4** Cuando  $h$  tiende a cero,  $2a + h$  tiende a  $2a$  (ejemplo 1)

La frase  $h \rightarrow 0$  se lee “ $h$  tiende a cero”. Una alternativa para la forma en la ecuación (3) es

$$2a + h \rightarrow 2a \text{ cuando } h \rightarrow 0.$$

El resultado  $m = 2a$  de la ecuación (3) es un “predicador de la pendiente” para las rectas tangentes a la parábola  $y = x^2$ . Puede usarlo para escribir la *ecuación* de la recta tangente de la parábola  $y = x^2$  en cualquier punto deseado  $(a, a^2)$  de la parábola.

**EJEMPLO 2** Para determinar la ecuación de la recta tangente a la parábola  $y = x^2$  en el punto  $(3, 9)$ , sea  $a = 3$  en la ecuación (3). Vemos que la pendiente de la recta tangente es  $m = 6$ . La ecuación punto–pendiente de la recta tangente es entonces

$$y - 9 = 6(x - 3);$$

su forma pendiente–ordenada al origen es  $y = 6x - 9$ .

El caso general  $y = f(x)$  es un poco más complicado que el caso especial  $y = x^2$ . Suponga que  $y = f(x)$  y que deseamos determinar la pendiente de la recta tangente  $L$  a su gráfica en el punto  $(a, f(a))$ . Como se muestra en la figura 2.1.5, sea  $K$  la recta secante que pasa por el punto  $P(a, f(a))$  y un punto cercano  $Q(a + h, f(a + h))$  en la gráfica. La pendiente de esta recta secante  $K$  es el **cociente de diferencias** o **cociente de Fermat**

$$m(h) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad (\text{para } h \neq 0). \quad (4)$$

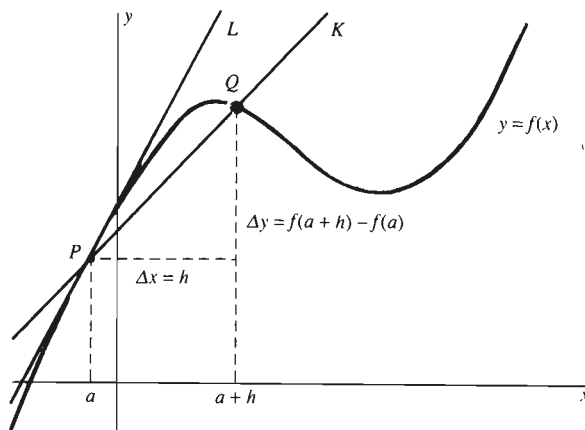
Ahora hacemos que  $Q$  se aproxime a  $P$  a lo largo de la gráfica de  $f$ , haciendo  $h$  tender a cero. Suponga que  $m(h)$  tiende al número  $m$  cuando  $h$  tiende a cero. Entonces la *recta tangente*  $L$  a la curva  $y = f(x)$  en el punto  $P(a, f(a))$  es, *por definición*, la recta que pasa por  $P$  con pendiente  $m$ .

Para describir el hecho de que  $m(h)$  tiende a  $m$  cuando  $h$  tiende a cero, llamamos a  $m$  el **límite de  $m(h)$**  cuando  $h$  tiende a cero, y escribimos

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} m(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}. \quad (5)$$

La pendiente  $m$  de la ecuación (5) depende de la función  $f$  y del número  $a$ . Indicamos esto al escribir

$$m = f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}. \quad (6)$$



**Figura 2.1.5** Cuando  $h \rightarrow 0$ ,  $Q \rightarrow P$ , y la pendiente de  $K$  tiende a la pendiente de la recta tangente  $L$ .

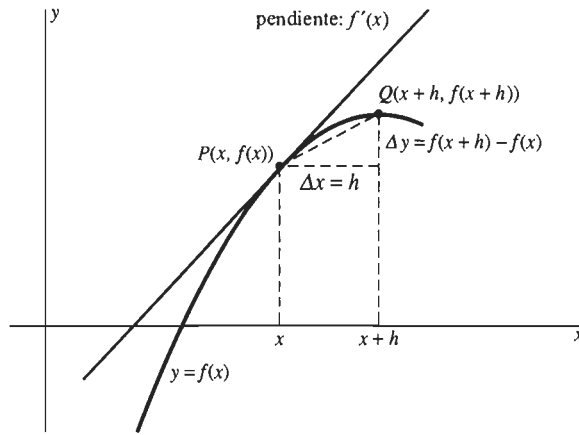


Figura 2.1.6 La pendiente de la recta tangente en  $(x, f(x))$  es  $f'(x)$

En la ecuación (6),  $f'$  (se lee “f prima”) es una *función* con variable independiente  $a$ . Para regresar al símbolo estándar  $x$  para la variable independiente, simplemente reemplazamos  $a$  por  $x$ . (No suponemos nada del valor particular de  $a$ , por lo que no cambiamos nada si escribimos  $x$  en vez de  $a$ .) Así, obtenemos la definición de la nueva función  $f'$ :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (7)$$

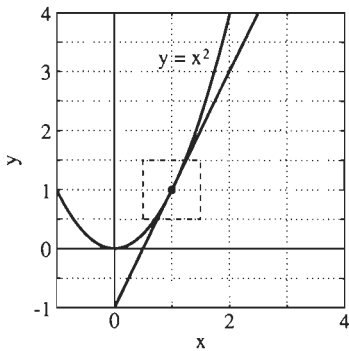


Figura 2.1.7 La parábola  $y = x^2$  y su recta tangente en  $P(1,1)$

Esta nueva función  $f'$  está definida para todos los valores de  $x$  para los cuales existe el límite en la ecuación (7). Como  $f'$  se “deriva” de  $f$ ,  $f'$  se llama la **derivada** de la función original  $f$  y el proceso de calcular la fórmula para  $f'$  se llama **derivación** de  $f$ .

El análisis que nos llevó a la ecuación (7) nos muestra que la derivada de  $f$  tiene la siguiente interpretación geométrica:

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de la curva  $y = f(x)$  en el punto  $(x, f(x))$  es  $f'(x)$ .

Esta interpretación se ilustra en la figura 2.1.6.

La relación entre la curva y su recta tangente es tal que si nos “acercamos” al punto de tangencia, las ampliaciones sucesivas muestran cada vez menos diferencia entre la curva y la recta tangente. Este fenómeno se ilustra en las figuras 2.1.7 a 2.1.10.

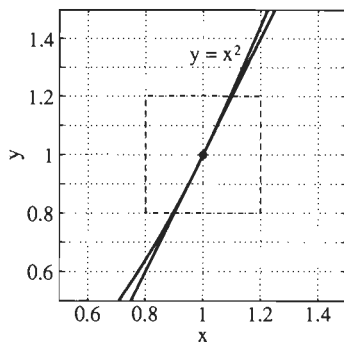


Figura 2.1.8 Primera ampliación

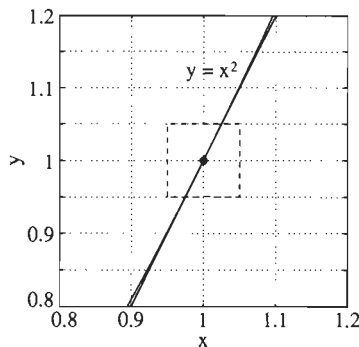


Figura 2.1.9 Segunda ampliación

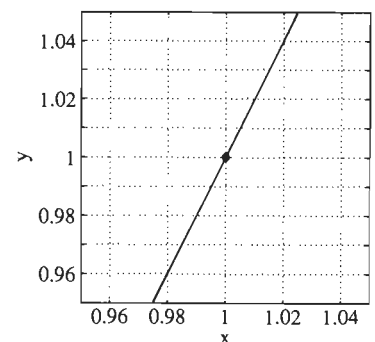


Figura 2.1.10 ¿Puede ver la diferencia?



**EJEMPLO 3** Al reemplazar  $a$  por  $x$  en la ecuación (3), vemos que la pendiente de la recta tangente a la parábola  $y = x^2$  en el punto  $(x, x^2)$  es  $m = 2x$ . En el lenguaje de derivadas,

$$\text{Si } f(x) = x^2, \text{ entonces } f'(x) = 2x. \quad (8)$$

Lo importante es la *idea* de lo que expresa una fórmula como la ecuación (8), no el uso de una notación particular. Así, una consecuencia inmediata de la ecuación (8) es que si  $g(t) = t^2$ , entonces  $g'(t) = 2t$ . En resumen, la derivada de la “función cuadrática” es la “función de duplicación”. En cualquier caso, la ecuación (8) implica que la pendiente de la recta tangente a la parábola  $y = x^2$  en el punto  $(1, 1)$  es

$$f'(1) = 2 \cdot 1 = 2,$$

y la pendiente de la recta tangente en el punto  $(-2, 4)$  es

$$f'(-2) = 2 \cdot (-2) = -4.$$

---

Para determinar la derivada de una función dada  $f$ , la definición

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

en la ecuación (7) nos pide realizar los cuatro pasos siguientes:

1. Escribir la definición de  $f'(x)$ .
2. Sustituir en esta definición la fórmula de la función dada  $f$ .
3. Hacer las sustituciones algebraicas hasta que pueda llevarse a cabo el paso 4.
4. Determinar el valor del límite cuando  $h \rightarrow 0$ .

Recuerde que  $x$  puede pensarse como *constante* en todo este cálculo,  $h$  es la variable de este proceso de cuatro pasos.

**EJEMPLO 4** La derivada de la función

$$f(x) = 3x + 2$$

*debe* ser la función constante  $f'(x) = 3$ , ya que  $y = 3x + 2$  es la ecuación de la línea recta de pendiente  $m = 3$  y la recta *debe* ser su propia recta tangente en cada punto. Para verificar este razonamiento usando el proceso de cuatro pasos que se acaba de dar, encontramos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3(x+h) + 2] - [3x + 2]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 3 = 3. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$f'(x) \equiv 3$$

(una función constante). Concluimos en el paso final que el límite es 3, ya que la constante 3 no cambia cuando  $h \rightarrow 0$ .

El símbolo  $\lim_{h \rightarrow 0}$  indica una operación por realizarse, así que debemos escribirla hasta el paso final, cuando se realiza la operación de tomar el límite.

Con cálculos como los de los ejemplos 1 y 4, es igual de fácil determinar, de una vez por todas, la derivada de una *función cuadrática* arbitraria  $f(x) = ax^2 + bx + c$  (donde  $a, b$  y  $c$  son constantes).

**Principio Derivación de funciones cuadráticas**

Si  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , entonces

$$f'(x) = 2ax + b \tag{9}$$

**Demostración** El proceso de cuatro pasos para aplicar la definición de la derivada implica

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[a(x+h)^2 + b(x+h) + c] - [ax^2 + bx + c]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2axh + bh + ah^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2ax + b + ah). \end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$f'(x) = 2ax + b,$$

ya que el valor de  $ah$  tiende a cero cuando  $h \rightarrow 0$ .  $\square$

En términos geométricos, este teorema nos dice que la fórmula de predicción de la pendiente para las curvas de la forma  $y = ax^2 + bx + c$  es

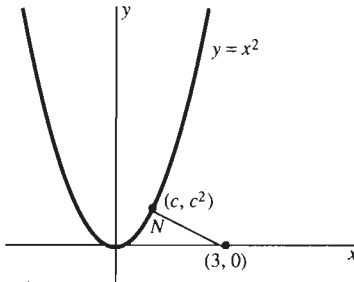
$$m = 2ax + b. \tag{10}$$

**RECTAS NORMALES**

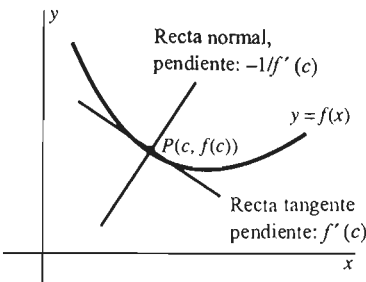
¿Cómo encontraría el punto  $P(c, c^2)$  de la parábola  $y = x^2$  más cercano al punto  $(3, 0)$ ? Intuitivamente, el segmento de recta  $N$  con extremos  $(3, 0)$  y  $(c, c^2)$  debe ser perpendicular, o *normal*, a la gráfica en  $(c, c^2)$  (figura 2.1.11). Esto garantiza una definición precisa: la recta  $N$  que pasa por el punto  $P$  en la curva  $y = f(x)$  es **normal** a la curva en  $P$  si  $N$  es perpendicular a la recta tangente en  $P$ , como en la figura 2.1.12. Por el teorema 2 de la sección 1.2, la pendiente de  $N$  es  $-1/f'(c)$  si  $f'(c) \neq 0$ . Así, con la ayuda de la ecuación (10), usted puede escribir ecuaciones de rectas normales en los puntos de las curvas cuadráticas tan fácilmente como escribe las ecuaciones de las rectas tangentes.

**COMENTARIO** Ahora que tenemos disponible la fórmula de la derivada en la ecuación (9), podemos aplicarla en forma inmediata a funciones cuadráticas específicas, en vez de seguir los pasos en la demostración del teorema. Por ejemplo, si

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 5,$$



**Figura 2.1.11** La recta normal  $N$  desde el punto  $(3, 0)$  al punto  $(c, c^2)$  en la parábola  $y = x^2$



**Figura 2.1.12** La recta tangente y la recta normal a una curva en un punto

entonces se puede escribir en forma inmediata

$$f'(x) = 2 \cdot 2x - 3 = 4x - 3.$$

**EJEMPLO 5** Escriba las ecuaciones de la recta tangente y la recta normal a la parábola  $y = f(x) = 2x^2 - 3x + 5$  en el punto  $P(-1, 10)$ .

**Solución** Usamos la derivada recién calculada. La pendiente de la recta tangente en  $(-1, 10)$  es

$$f'(-1) = 4 \cdot (-1) - 3 = -7.$$

Por lo tanto, la ecuación punto-pendiente de la recta tangente pedida es

$$y - 10 = -7(x + 1).$$

La recta normal tiene pendiente  $m = -1/(-7)$ , por lo que su ecuación punto-pendiente es

$$y - 10 = \frac{1}{7}(x + 1).$$

**EJEMPLO 6** Derive la función

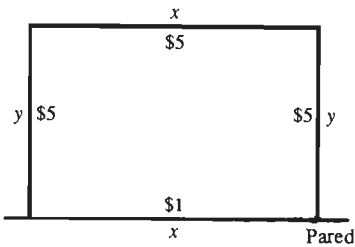
$$f(x) = \frac{1}{x + 1}.$$

**Solución** Debemos establecer una fórmula para la derivada de  $f$ , por lo que debemos llevar a cabo los cuatro pasos de la definición de la derivada. Obtenemos

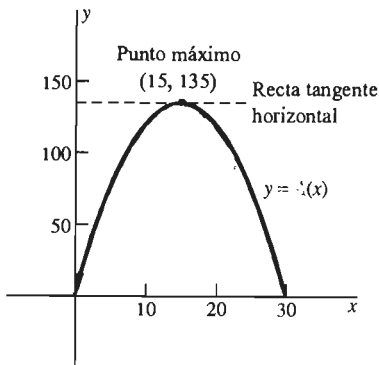
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{1}{x+h+1} - \frac{1}{x+1} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{(x+1) - (x+h+1)}{(x+h+1)(x+1)} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{(x+h+1)(x+1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(x+h+1)(x+1)}. \end{aligned}$$

Es evidente que  $\lim_{h \rightarrow 0} (x+h+1) = x+1$ . Por lo tanto, obtenemos al fin la derivada de  $f(x)$ ,

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}.$$



**Figura 2.1.13** El corral de los animales



**Figura 2.1.14** La gráfica de  $y = A(x)$ ,  $0 \leq x \leq 30$

**EL PROBLEMA DEL CORRAL DE LOS ANIMALES TERMINADO** En conclusión, aplicamos la derivada para seguir desarrollando nuestro análisis del problema del corral de los animales de la sección 1.1. En el ejemplo 6 de dicha sección, vimos que el área del corral (véase la figura 2.1.13) está dada como una función de la longitud de su base  $x$  por

$$A(x) = \frac{3}{5}(30x - x^2) = -\frac{3}{5}x^2 + 18x, \quad 0 \leq x \leq 30. \quad (11)$$

Nuestro problema es determinar el valor máximo de  $A(x)$  para  $x$  en el intervalo cerrado  $[0, 30]$ .

Aceptemos como algo intuitivamente obvio (en el capítulo 3 daremos una demostración rigurosa) el hecho de que el valor máximo de  $A(x)$  aparece en un punto donde la recta tangente a la gráfica de  $y = A(x)$  es horizontal, como se muestra en la figura 2.1.14. Entonces podemos aplicar el resultado de la derivación de funciones cuadráticas [ecuación (9)] para determinar este punto máximo. La pendiente de la recta tangente en cualquier punto arbitrario  $(x, A(x))$  está dada por

$$m = A'(x) = -\frac{3}{5} \cdot 2x + 18 = -\frac{6}{5}x + 18.$$

Nos preguntamos cuando  $m = 0$  y vemos que esto sucede cuando

$$-\frac{6}{5}x + 18 = 0,$$

y entonces  $x = 15$ . De acuerdo con el resultado obtenido por los métodos algebraicos en la sección 1.3, encontramos que el área máxima posible del corral es

$$A(15) = \frac{3}{5}(30 \cdot 15 - 15^2) = 135 \text{ (pies}^2\text{)}.$$

## ESTUDIO NUMÉRICO DE LAS DERIVADAS

Suponga que tiene una función  $f$  y un valor numérico específico de  $x$ . Puede usar una calculadora para estudiar el valor

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (12)$$

de la derivada de  $f$  calculando los valores

$$m(x, h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (13)$$

del “cociente  $h$  en  $x$ ” con valores cada vez más pequeños de  $h$ . La figura 2.1.15 muestra una calculadora TI preparada para calcular la ecuación (13) con  $f(x) = x^2$ , como se indica en la figura 2.1.16. La figura 2.1.17 muestra una calculadora HP preparada para definir el mismo cociente; la evaluación de la expresión  $M(2, 0.001)$  produce el valor  $m(2, 0.001) = 4.001$ . De esta forma, obtenemos la tabla que se muestra en la figura 2.1.18, que corrobora el hecho de que  $f'(2) = 4$ .

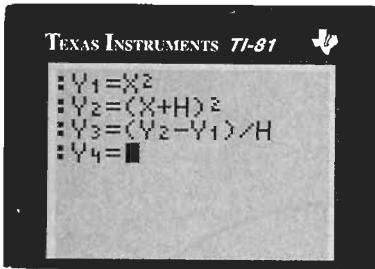


Figura 2.1.15 Una calculadora preparada para calcular  $\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$

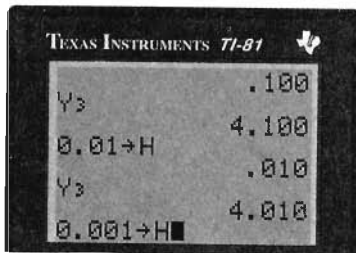


Figura 2.1.16 Aproximación de  $f'(2)$

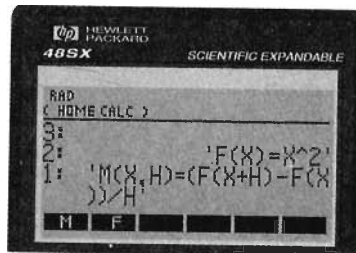


Figura 2.1.17 Una calculadora preparada para calcular  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$h$	$m(2, h)$
0.1	4.1
0.01	4.01
0.001	4.001
⋮	⋮
↓	↓
0	4

Figura 2.1.18 Estudio numérico del límite en la ecuación (12) con  $f(x) = x^2$ ,  $x = 2$

## 2.1 Problemas

En los problemas 1 a 14, aplique la fórmula para la derivación de las funciones cuadráticas [ecuación (9)] para escribir la derivada  $f'(x)$  de la función dada  $f$ .

1.  $f(x) = 5$

2.  $f(x) = x$

3.  $f(x) = x^2$

5.  $f(x) = 4x - 5$

7.  $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$

9.  $f(x) = 2x(x + 3)$

4.  $f(x) = 1 - 2x^2$

6.  $f(x) = 7 - 3x$

8.  $f(x) = 5 - 3x - x^2$

10.  $f(x) = 3x(5 - x)$

11.  $f(x) = 2x - \left(\frac{x}{10}\right)^2$       12.  $f(x) = 4 - (3x + 2)^2$

13.  $f(x) = (2x + 1)^2 - 4x$

14.  $f(x) = (2x + 3)^2 - (2x - 3)^2$

En los problemas 15 a 20, encuentre los puntos de las curvas  $y = f(x)$  donde la recta tangente es horizontal.

15.  $y = 10 - x^2$

16.  $y = 10x - x^2$

17.  $y = x^2 - 2x + 1$

18.  $y = x^2 + x - 2$

19.  $y = x - \left(\frac{x}{10}\right)^2$

20.  $y = x(100 - x)$

Aplique la definición de la derivada, es decir, siga el proceso de los cuatro pasos de esta sección, para determinar  $f'(x)$  para las funciones de los problemas 21 a 32. Después escriba una ecuación para la línea recta tangente a la gráfica de la curva  $y = f(x)$  en el punto  $(2, f(2))$ .

21.  $f(x) = 3x - 1$

22.  $f(x) = x^2 - x - 2$

23.  $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$

24.  $f(x) = 70x - x^2$

25.  $f(x) = (x - 1)^2$

26.  $f(x) = x^3$

27.  $f(x) = \frac{1}{x}$

28.  $f(x) = x^4$

29.  $f(x) = \frac{1}{x^2}$

30.  $f(x) = x^2 + \frac{3}{x}$

31.  $f(x) = \frac{2}{x - 1}$

32.  $f(x) = \frac{x}{x - 1}$

En los problemas 33 a 43, use la ecuación (9) para encontrar la derivada de una función cuadrática si es necesario. En los problemas 33 a 35, escriba las ecuaciones para la recta tangente y para la recta normal a la curva  $y = f(x)$  en el punto  $P$ .

33.  $y = x^2$ ;  $P(-2, 4)$

34.  $y = 5 - x - 2x^2$ ;  $P(-1, 4)$

35.  $y = 2x^2 + 3x - 5$ ;  $P(2, 9)$

36. Demuestre que la recta tangente a la parábola  $y = x^2$  en el punto  $(x_0, y_0)$  interseca el eje  $x$  en el punto  $(x_0/2, 0)$ . Véase la figura 2.1.19.

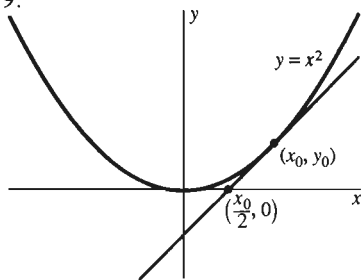


Figura 2.1.19 La parábola y la recta tangente del problema 36

37. Si se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de 96 pies/segundo, entonces su altura  $t$  segundos después es  $y(t) = 96t - 16t^2$  pies. Determine la altura máxima que alcanza la pelota encontrando el tiempo  $t$  cuando  $y'(t) = 0$ .

38. Determine el área máxima posible del rectángulo con perímetro 100 descrito en el problema 50 de la sección 1.1.

39. Determine el valor máximo posible del producto de dos números positivos cuya suma es 50.

40. Suponga que un proyectil es lanzado con un ángulo de  $45^\circ$  desde la horizontal. Su posición inicial es el origen en el plano  $xy$  y su velocidad inicial es  $100\sqrt{2}$  pies/segundo (figura 2.1.20). Entonces su trayectoria será la parte de la parábola  $y = x - (x/25)^2$  para la cual  $y \geq 0$ . (a) ¿Qué tan lejos viaja el proyectil (horizontalmente) antes de golpear en la tierra? (b) ¿Cuál es la altura máxima que el proyectil alcanza por arriba de la tierra?

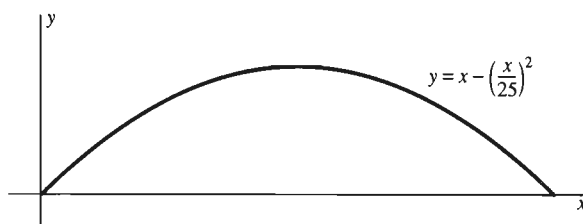


Figura 2.1.20 La trayectoria del proyectil del problema 40

41. Una de las dos rectas que pasan por el punto  $(3, 0)$  tangentes a la parábola  $y = x^2$  es el eje  $x$ . Determine una ecuación para la otra recta. [Sugerencia: Determine primero el valor del número  $a$  que se muestra en la figura 2.1.21.]

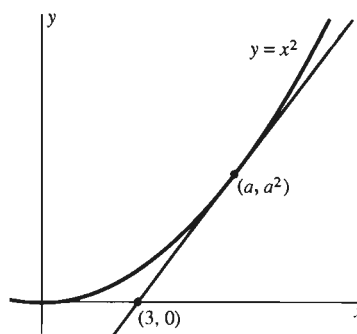


Figura 2.1.21 Las dos rectas tangentes a la parábola del problema 41

42. Escriba las ecuaciones para las dos rectas que pasan por el punto  $(2, 5)$  y son tangentes a la parábola  $y = 4x - x^2$ . [Sugerencia: Trace una figura como la 2.1.21.]

43. Con los ejemplos 4 y 5 tratamos de responder, pero no respondimos, la pregunta de cómo localizar el punto en la gráfica  $y = x^2$  más cercano al punto  $(3, 0)$ . Ahora es tiempo

para que usted encuentre ese punto. [Sugerencia: Trace una figura como la 2.1.21. La ecuación cúbica obtenida tiene una solución aparente por inspección].

En los problemas 44 a 50, use una calculadora (como en el estudio numérico de las derivadas al final de esta sección) para estudiar el valor de  $f'$  en el número  $a$ .

44.  $f(x) = x^2; a = -1$

45.  $f(x) = x^3; a = 2$

46.  $f(x) = x^3; a = -1$

47.  $f(x) = \sqrt{x}; a = 1$

48.  $f(x) = \sqrt{x}; a = 4$

49.  $f(x) = \frac{1}{x}; a = 1$

50.  $f(x) = \frac{1}{x}; a = -\frac{1}{2}$

## 2.1 Proyecto

Los siguientes problemas son motivados por las figuras 2.1.7 a 2.1.10, las cuales ilustran el hecho de que una curva y su recta tangente son virtualmente indistinguibles con un nivel lo bastante alto de acercamiento. Ellos requieren una utilería gráfica (calculadora o computadora) con una *capacidad de trazo* que le permita mover el indicador (cursor) y leer las coordenadas  $xy$  de puntos seleccionados en una gráfica. Por ejemplo, con algunas calculadoras gráficas TI, usted puede presionar simplemente la tecla  $\boxed{\text{TRACE}}$  y después mover el cursor por la gráfica. Con algunos programas de graficación por computadora, las coordenadas  $xy$  de la posición actual del cursor se despliegan automáticamente en la parte inferior de la pantalla.

Cada problema tiene una curva  $y = f(x)$  y un punto  $P(a, f(a))$  en donde aproxime la pendiente  $f'(a)$  de su recta tangente gráficamente. Haga un acercamiento a  $P$  (acercándolo al menos seis veces) hasta que la gráfica  $y = f(x)$  se vea (en la ventana de visión resultante) precisamente como una línea recta. En cada acercamiento, registre las coordenadas  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  de dos puntos localizados a ambos lados de  $P$  (como en la figura 2.1.22). Entonces sea

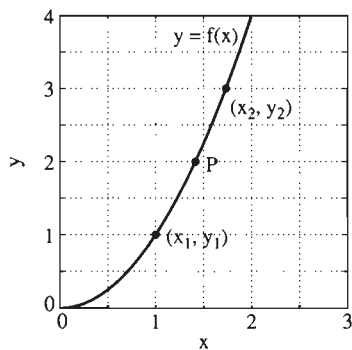


Figura 2.1.22 Puntos a ambos lados de  $P$

$$m_k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

la pendiente aproximada que resulta en el  $k$ -ésimo acercamiento. ¿Es claro a cuál valor tienden las pendientes  $m_1, m_2, m_3, \dots$ ? [En cada caso,  $f'(a)$  debe ser un entero o un múltiplo entero de  $1/2, 1/4$  o  $1/8$ .]

1.  $f(x) = x^2, P = P(-2, 4); f'(-2) = ?$

2.  $f(x) = \sqrt{x}, P = P(1, 1); f'(1) = ?$

3.  $f(x) = \frac{1}{x}, P = P(2, \frac{1}{2}); f'(2) = ?$

4.  $f(x) = \frac{12}{x^2}, P = P(-4, \frac{3}{4}); f'(-4) = ?$

5.  $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}, P = P(5, 4); f'(5) = ?$

## 2.2 El concepto de límite

En la sección 2.1 definimos la derivada  $f'(a)$  de la función  $f$  en el número  $a$  como

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}. \quad (1)$$

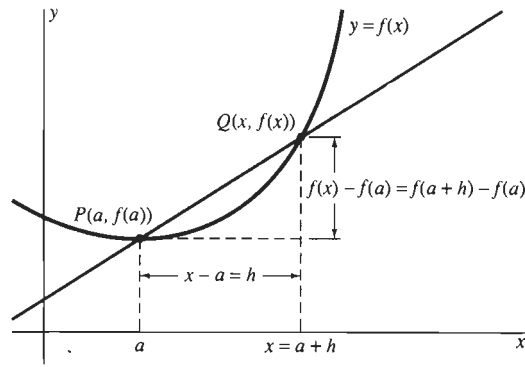


Figura 2.2.1 La derivada puede definirse de esta forma:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

La gráfica que motiva esta definición se repite en la figura 2.2.1, con  $a + h$  reetiquetada como  $x$  (de modo que  $h = x - a$ ). Vemos que  $x$  tiende a  $a$  cuando  $h$  tiende a cero, por lo que podemos reescribir la ecuación (1) como

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \quad (2)$$

Así, el cálculo de  $f'(a)$  equivale a determinar el límite, cuando  $x$  tiende a  $a$ , de la función

$$G(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \quad (3)$$

Como preparación para derivar funciones más complicadas que las que podríamos derivar en la sección 2.1, analizaremos el significado de la proposición

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = L. \quad (4)$$

Esto se lee “el límite de  $F(x)$  cuando  $x$  tiende a  $a$  es  $L$ ”. A veces escribiremos la ecuación (4) en la forma abreviada

$$F(x) \rightarrow L \text{ cuando } x \rightarrow a.$$

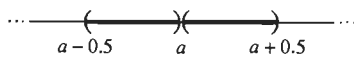


Figura 2.2.2 Una vecindad perforada de  $a$ : en este caso, el intervalo abierto  $(a - 0.5, a + 0.5)$ , con el punto  $a$  eliminado. Así esta vecindad perforada de  $a$  consta de dos intervalos abiertos  $(a - 0.5, a)$  y  $(a, a + 0.5)$ .

La función  $F$  no tiene que estar definida en  $a$  para que podamos analizar el límite de  $F$  en  $a$ . No importa su valor ni la posibilidad de que no tenga un valor asignado en  $a$ . Sólo pedimos que  $F$  esté definida en alguna **vecindad perforada** de  $a$ : un conjunto obtenido al eliminar el punto  $a$  de algún intervalo abierto que contenga a  $a$ . Por ejemplo, sería suficiente que  $F$  esté definida en los intervalos abiertos  $(a - 0.5, a)$  y  $(a, a + 0.5)$  (véase figura 2.2.2), aunque no esté definida en el propio punto  $a$ . Ésta es exactamente la situación para la función de la ecuación (3), que está definida *excepto* en  $a$  (donde el denominador se anula).

La siguiente proposición reformula la ecuación (4) en un lenguaje intuitivo.

**Idea del límite**  
 Decimos que el número  $L$  es el *límite* de  $F(x)$  cuando  $x$  tiende a  $a$  siempre que podamos hacer que el número  $F(x)$  se acerque a  $L$  tanto como queramos, escogiendo simplemente  $x$  suficientemente cerca, aunque no igual al número  $a$ .

Lo que esto significa, intuitivamente, es que  $F(x)$  tiende a estar cada vez más cerca de  $L$  cuando  $x$  se acerca cada vez más a  $a$ . Una vez que decidimos qué tan

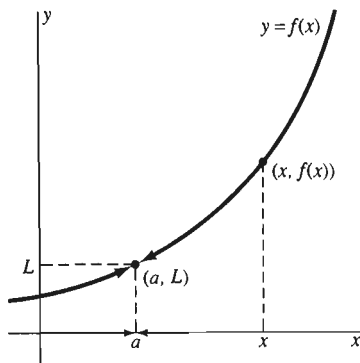


Figura 2.2.3 Interpretación gráfica del concepto de límite

cerca de  $L$  queremos que esté  $F(x)$ , es necesario que  $F(x)$  esté cerca de  $L$  para *toda*  $x$  suficientemente cercana (pero no igual) a  $a$ .

La figura 2.2.3 muestra una interpretación gráfica del concepto de límite. Cuando  $x$  tiende a  $a$  (desde cualquier lado), el punto  $(x, f(x))$  en la gráfica  $y = f(x)$  debe aproximarse al punto  $(a, L)$ .

En esta sección exploraremos la idea del límite, principalmente a través del estudio de ejemplos específicos. Al final de esta sección presentamos una formulación precisa de la definición de límite.

**EJEMPLO 1** Evalúe  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2$ .

**Análisis** Llamamos a esto un análisis y no una solución. La razón es que la técnica que se usa aquí es útil para obtener información preliminar acerca del posible valor de un límite. Esta técnica puede reforzar nuestra estimación intuitiva del posible valor de un límite, pero no constituye una demostración rigurosa.

Formamos una tabla de valores de  $x^2$ , usando valores de  $x$  que tienden a  $a = 2$ . Esta tabla se muestra en la figura 2.2.4. Usamos regularmente valores cambiantes de  $x$ , lo que hace que el comportamiento exhibido en la tabla sea más fácil de comprender. Usamos valores de  $x$  que se pueden expresar fácilmente en el sistema decimal por la misma razón.

$x$	$x^2$	$x$	$x^2$
1.9	3.6100	2.1	4.4100
1.99	3.9601	2.01	4.0401
1.999	3.9960	2.001	4.0040
1.9999	3.9996	2.0001	4.0004
1.99999	4.0000	2.00001	4.0000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
2	4	2	4

Figura 2.2.4 ¿Qué le sucede a  $x^2$  al tender  $x$  a 2 (ejemplo 1)?

Observe que consideramos, en columnas separadas, valores de  $x$  que tienden por la izquierda (con valores de  $x$  menores que 2) así como valores de  $x$  que tienden a 2 por la derecha (con valores de  $x$  mayores que 2).

Ahora examine la tabla, lea las columnas  $x$  hacia abajo, ya que *hacia abajo* es la dirección de la tabla para las “aproximaciones”, y vea lo que sucede con los valores correspondientes de  $x^2$ . Aunque la figura 2.2.4 usa únicamente algunos valores particulares de  $x$ , proporciona una evidencia de que

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4.$$

**IMPORTANTE** Observe que no sustituimos el valor  $x = 2$  en la función  $F(x) = x^2$  para obtener el valor 4 del límite. Aunque esta sustitución produce la respuesta correcta en este caso particular, en muchos límites produce una respuesta incorrecta o ninguna respuesta. (Véanse los ejemplos 4 a 6, y entre otros, los problemas 9, 10 y 51.)

**EJEMPLO 2** Evalúe  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 1}{x + 2}$ .



$x$ (Valores redondeados)	$\frac{x-1}{x+2}$
3.1	0.41176
3.01	0.40120
3.001	0.40012
3.0001	0.40001
3.00001	0.40000
3.000001	0.40000
⋮	⋮
↓	↓
3	0.4

Figura 2.2.5 Investigando el límite del ejemplo 2

**Análisis** Una estimación natural es que el valor del límite sea simplemente  $2/5 = 0.4$ . Los datos de la figura 2.2.5 refuerzan esta suposición. Si experimenta con otros valores de  $x$  que tienden a 3, los resultados reforzarán esta suposición de que el límite es 0.4.

**EJEMPLO 3** Evalúe  $\lim_{x \rightarrow -4} \sqrt{x^2 + 9}$ .

**Análisis** La evidencia de la figura 2.2.6 sugiere ciertamente que

$$\lim_{x \rightarrow -4} \sqrt{x^2 + 9} = 5.$$

**EJEMPLO 4** Evalúe  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+25} - 5}{x}$ .

**Análisis** En este caso, no podemos hacer una estimación preliminar sustituyendo  $x = 0$ , ya que la fracción no tiene sentido si  $x = 0$ . Pero la figura 2.2.7 indica que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+25} - 5}{x} = 0.1.$$

$x$ (Valores redondeados)	$\sqrt{x^2 + 9}$
-4.1	5.080354
-4.01	5.008004
-4.001	5.000800
-4.0001	5.000080
-4.00001	5.000008
-4.000001	5.000001
-4.0000001	5.000000
⋮	⋮
↓	↓
-4	5

$x$ (Valores redondeados)	$\frac{\sqrt{x+25} - 5}{x}$
10	0.09161
1	0.09902
0.1	0.09990
0.01	0.09999
0.001	0.10000
0.0001	0.10000
⋮	⋮
↓	↓
0	0.1

Figura 2.2.6 El comportamiento de  $\sqrt{x^2 + 9}$  como  $x \rightarrow -4$  (Ejemplo 3)

Figura 2.2.7 Datos numéricos para el ejemplo 4

Los análisis numéricos de los ejemplos 2 al 4 están incompletos, ya que cada una de las tablas asociadas muestran valores de la función  $F(x)$  solamente de un lado del punto  $x = a$ . Pero para que  $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = L$ , es necesario que  $F(x)$  se aproxime a  $L$  de ambos lados; es decir, que  $x$  se aproxime a  $a$  por la izquierda y se aproxime a  $a$  por la derecha. Si  $F(x)$  tiende a valores diferentes cuando  $x$  tiende a  $a$  por diferentes lados, entonces  $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$  no existe. En la sección 2.3 analizamos los límites laterales con más detalle.

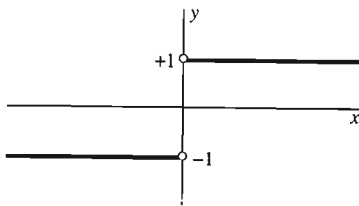


Figura 2.2.8 La gráfica de

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \text{ (ejemplo 5)}$$

**EJEMPLO 5** Analice  $\lim_{x \rightarrow 0} F(x)$ , si

$$F(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0; \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

**Solución** De la gráfica de  $F$  que se muestra en la figura 2.2.8, parece que  $F(x) \rightarrow 1$  cuando  $x \rightarrow 0$  por la derecha y que  $F(x) \rightarrow -1$  cuando  $x \rightarrow 0$  por la izquierda. En particular, existen valores positivos para  $x$  tan cercanos a cero como

queramos tales que  $F(x) = 1$  y valores negativos de  $x$  igualmente cercanos a cero tales que  $F(x) = -1$ . En consecuencia, no podemos lograr que  $F(x)$  se acerque tanto como queramos a un *solo* valor de  $L$  eligiendo *simplesmente*  $x$  lo suficiente cerca de cero. Por lo tanto,

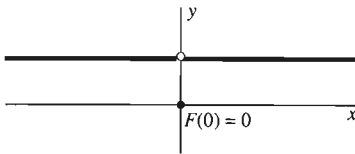
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|} \quad \text{no existe.}$$

En el ejemplo 6, el valor obtenido al sustituir  $x = a$  en  $F(x)$  para determinar  $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$  es incorrecto.

**EJEMPLO 6** Evalúe  $\lim_{x \rightarrow 0} F(x)$  donde

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La gráfica de  $F$  aparece en la figura 2.2.9.



**Figura 2.2.9** La gráfica de la función  $F$  del ejemplo 6

**Solución** El hecho de que  $F(x) = 1$  para *cada* valor de  $x$  en cualquier vecindad perforada de cero implica que

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 1.$$

Pero observe que el valor del límite en  $x = 0$  *no* es igual al valor de la función en ese punto  $F(0) = 0$ .

Los análisis como en los ejemplos 1 a 4 proporcionan un sentimiento intuitivo de los límites y sugieren por lo general el valor correcto de un límite. Pero la mayoría de los cálculos de límite no se basan en sugerentes (e imprecisas) estimaciones numéricas ni en directas (pero difíciles) aplicaciones de la definición de límite. En cambio, estos cálculos se realizan más fácil y naturalmente con la ayuda de las *propiedades de los límites* que daremos a continuación. Estas “propiedades” son en realidad *teoremas*, cuyas demostraciones (basadas en la definición precisa del límite) se incluyen en el apéndice B.

## LAS PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

### Propiedad de la constante

Si  $F(x) \equiv C$ , donde  $C$  es una constante [entonces  $F(x)$  es una **función constante**], entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} C = C. \quad (5)$$

### Propiedad de la suma

Si ambos límites

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} G(x) = M$$

existen, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} [F(x) \pm G(x)] = \lim_{x \rightarrow a} F(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} G(x) = L \pm M. \quad (6)$$

(El límite de una suma es la suma de los límites; el límite de una diferencia es la diferencia de los límites.)

### Propiedad del producto

Si ambos límites

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} G(x) = M$$

existen, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} [F(x) G(x)] = \left[ \lim_{x \rightarrow a} F(x) \right] \left[ \lim_{x \rightarrow a} G(x) \right] = LM. \quad (7)$$

(El límite de un producto es el producto de los límites.)

### Propiedad del cociente

Si ambos límites

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} G(x) = M$$

existen y si  $M \neq 0$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} F(x)}{\lim_{x \rightarrow a} G(x)} = \frac{L}{M}. \quad (8)$$

(El límite de un cociente es el cociente de los límites, siempre y cuando el límite del denominador no se anule.)

### Propiedad de la raíz

Si  $n$  es un entero positivo y si  $a > 0$  para valores pares de  $n$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}. \quad (9)$$

El caso  $n = 1$  de la propiedad de la raíz es obvia:

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a. \quad (10)$$

Los ejemplos 7 y 8 muestran la forma en que las propiedades de los límites pueden usarse para evaluar límites de polinomios y funciones racionales.

#### EJEMPLO 7

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 2x + 4) &= \lim_{x \rightarrow 3} x^2 + \lim_{x \rightarrow 3} 2x + \lim_{x \rightarrow 3} 4 \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow 3} x \right)^2 + 2 \left( \lim_{x \rightarrow 3} x \right) + \lim_{x \rightarrow 3} 4 \\ &= 3^2 + 2 \cdot 3 + 4 = 19. \end{aligned}$$

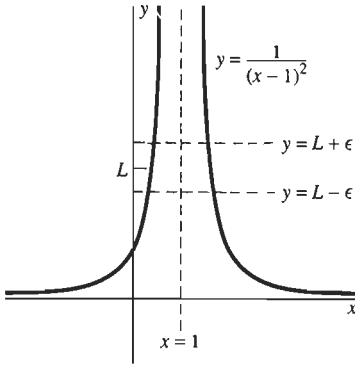
#### EJEMPLO 8

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x + 5}{x^2 + 2x + 4} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (2x + 5)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 2x + 4)} \\ &= \frac{2 \cdot 3 + 5}{3^2 + 2 \cdot 3 + 4} = \frac{11}{19}. \end{aligned}$$

**NOTA** En los ejemplos 7 y 8, aplicamos en forma sistemática las propiedades de los límites hasta que pudimos sustituir simplemente 3 en  $\lim_{x \rightarrow 3} x$  como paso final. Para determinar el límite de un cociente de polinomios, debemos verificar antes del paso final que el límite del denominador no se anule. Si el límite del denominador es cero, *puede* ocurrir que el límite no exista.

**EJEMPLO 9** Analice  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2}$ .

**Solución** Puesto que  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0$ , no podemos aplicar la propiedad del cociente. Incluso podemos hacer  $1/(x-1)^2$  arbitrariamente grande si elegimos  $x$  suficientemente cerca de 1. Por eso,  $1/(x-1)^2$  no puede aproximarse a cualquier número (finito)  $L$  cuando  $x$  tiende a 1. Por tanto, en este ejemplo no existe el límite. Puede ver la razón geométrica si examina la gráfica de  $y = 1/(x-1)^2$  en la figura 2.2.10. Cuando  $x$  tiende a 1, el punto correspondiente en la curva debe salir de la franja indicada entre las dos rectas horizontales  $y = L - \epsilon$  y  $y = L + \epsilon$  que encierran al límite propuesto  $L$ ; por lo tanto, no puede tender al punto  $(1, L)$ .



**Figura 2.2.10** La gráfica de  $y = \frac{1}{(x-1)^2}$  (ejemplo 9)

**EJEMPLO 10** Analice  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$ .

**Solución** No podemos aplicar en forma inmediata la propiedad del cociente (como lo hicimos en el ejemplo 8) ya que el denominador tiende a cero cuando  $x$  tiende a 2. Si el numerador tendiera a algún número *distinto* de cero cuando  $x \rightarrow 2$ , entonces el límite no existiría (como en el ejemplo 9). Pero aquí el numerador *tiende* a cero, por lo que existe la posibilidad de que un factor del numerador se cancele con un factor del denominador, y así se elimine el problema del denominador nulo. De hecho,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x+3} = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Podemos cancelar el factor  $x-2$ , ya que no se anula:  $x \neq 2$  si evaluamos el límite cuando  $x$  tiende a 2.

## SUSTITUCIÓN DE LÍMITES

Reconsideremos el límite del ejemplo 3. Quisiéramos escribir

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -4} \sqrt{x^2 + 9} &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow -4} (x^2 + 9)} \\ &= \sqrt{(-4)^2 + 9} = \sqrt{25} = 5. \end{aligned} \quad (11)$$

¿Pero podemos simplemente “mover el límite dentro del radical” en la ecuación (11)? Para analizar esta pregunta, escribimos

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 + 9.$$

Entonces la función que aparece en la ecuación (11) es una *función de una función*:

$$f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^2 + 9}.$$

(La expresión del lado izquierdo en esta ecuación se lee “ $f$  de  $g$  de  $x$ ”.) Por tanto, nuestra pregunta es si es cierto o no

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right).$$

La siguiente propiedad del límite responde esta pregunta en sentido afirmativo, si la “función exterior”  $f$  cumple cierta condición; si esto sucede, entonces el límite de la combinación  $f(g(x))$  cuando  $x \rightarrow a$  se puede encontrar sustituyendo en la función  $f$  el límite de  $g(x)$  cuando  $x \rightarrow a$ .

**Propiedad de sustitución**

Suponga que

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \quad \text{y que} \quad \lim_{x \rightarrow L} f(x) = f(L).$$

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = f(L). \quad (12)$$

Así, la condición bajo la cual se cumple la ecuación (12) es que el límite de la función exterior  $f$  no solamente exista en  $x = L$ , sino que también sea igual al valor “esperado” de  $f$ , a saber,  $f(L)$ . En particular, como

$$\lim_{x \rightarrow -4} (x^2 + 9) = 25 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 25} \sqrt{x} = \sqrt{25} = 5,$$

esta condición se satisface en la ecuación (11). Por lo tanto, los cálculos son válidos.

En esta sección usaremos únicamente el siguiente caso particular de la propiedad de sustitución. Si  $f(x) = x^{1/n}$ , donde  $n$  es un entero positivo, la ecuación (12) toma la forma

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \quad (13)$$

bajo la hipótesis de que el límite de  $g(x)$  existe cuando  $x \rightarrow a$  (y es positivo si  $n$  es par). Si  $g(x) = x^m$ , donde  $m$  es un entero positivo, la ecuación (13) implica

$$\lim_{x \rightarrow a} x^{m/n} = a^{m/n}, \quad (14)$$

con la condición de que  $a > 0$  si  $n$  es par. Las ecuaciones (13) y (14) se pueden considerar como propiedades de la raíz generalizada. El ejemplo 11 ilustra el uso de estos casos particulares de la propiedad de sustitución.

**EJEMPLO 11**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \left(3x^{3/2} + 20\sqrt{x}\right)^{1/3} &= \left(\lim_{x \rightarrow 4} \left(3x^{3/2} + 20\sqrt{x}\right)\right)^{1/3} && \text{(usando la ecuación (13))} \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 4} 3x^{3/2} + \lim_{x \rightarrow 4} 20\sqrt{x}\right)^{1/3} && \text{[usando la propiedad de la suma]} \\ &= \left[3 \cdot 4^{3/2} + 20\sqrt{4}\right]^{1/3} && \text{[usando la ecuación (14)]} \\ &= (24 + 40)^{1/3} = \sqrt[3]{64} = 4. \end{aligned}$$

Nuestro análisis de los límites comenzó con la derivada. Si escribimos la definición de la derivada como

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

entonces el límite que aparece en ella es similar a los ejemplos anteriores donde  $x$  está cambiando mientras otros números (como  $a$ ) permanecen fijos. Pero si  $h = x - a$  y usamos la definición de  $f'$  en la forma

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

entonces  $x$  juega el papel de una *constante* y  $h$  es la variable que tiende a cero.

El ejemplo 12 ilustra un manejo algebraico que se usa con frecuencia para “preparar” las funciones antes de evaluar los límites. Esto se puede aplicar cuando las raíces están presentes y se asemejan al cálculo simple

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} &= \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

**EJEMPLO 12** Derive  $f(x) = \sqrt{x}$ .

**Solución**

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}. \quad (15)$$

Para preparar la fracción y evaluar el límite, primero multiplicamos el numerador y el denominador por el *conjugado*  $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$  del numerador:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Así,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \quad (16)$$

(En el último paso usamos las propiedades del cociente, de la suma y de la raíz; no sólo la sustitución de 0 en vez de  $h$ .)

Observe que si igualamos los lados derechos de las ecuaciones (15) y (16) y  $x = 25$ , obtenemos el límite del ejemplo 4:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{25+h} - 5}{h} = \frac{1}{10}.$$

## LA DEFINICIÓN DEL LÍMITE

Pocas personas comprenden completamente el concepto de límite de manera rápida o fácil. De hecho, el significado preciso de la proposición “ $F(x)$  tiende a  $L$  cuando  $x$  tiende a  $a$ ” fue debatido vigorosamente (y a veces de forma áspera) por cientos de años, hasta finales del siglo diecinueve. Fue entonces que el matemático alemán Karl Weierstrass (1815–1897) formuló finalmente la definición rigurosa del límite aceptada en la actualidad.

### Definición del límite

El número  $L$  es el *límite* de  $F(x)$  cuando  $x$  tiende a  $a$  siempre que, dado cualquier número  $\varepsilon > 0$ , exista un número  $\delta > 0$  tal que

$$|F(x) - L| < \varepsilon$$

para toda  $x$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta$$

La figura 2.2.11 ilustra esta definición. Los puntos de la gráfica de  $y = F(x)$  que satisfacen la desigualdad  $|F(x) - L| < \varepsilon$  son aquellos puntos que se encuentran entre las dos rectas horizontales  $y = L - \varepsilon$  y  $y = L + \varepsilon$ . Los puntos en esta gráfica que satisfacen la desigualdad  $|x - a| < \delta$  son aquellos puntos que se encuentran entre las dos rectas verticales  $x = a - \delta$  y  $x = a + \delta$ . En consecuencia, la definición implica que  $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = L$  si y sólo si es verdadero lo siguiente:

Suponga que están dadas las dos rectas horizontales  $y = L - \varepsilon$  y  $y = L + \varepsilon$  (con  $\varepsilon > 0$ ). Entonces es posible elegir dos rectas verticales  $x = a - \delta$  y  $x = a + \delta$  (con  $\delta > 0$ ) con la siguiente propiedad: Cada punto de la gráfica de  $y = F(x)$  (con  $x \neq a$ ) que se encuentre entre las dos rectas verticales también debe estar entre las dos rectas horizontales.

La figura 2.2.11 sugiere que si las dos rectas horizontales están más juntas, también lo estarán las dos rectas verticales. Esto es lo que significa para nosotros “hacer que  $F(x)$  esté más cerca de  $L$  al hacer que  $x$  esté más cerca de  $a$ .”

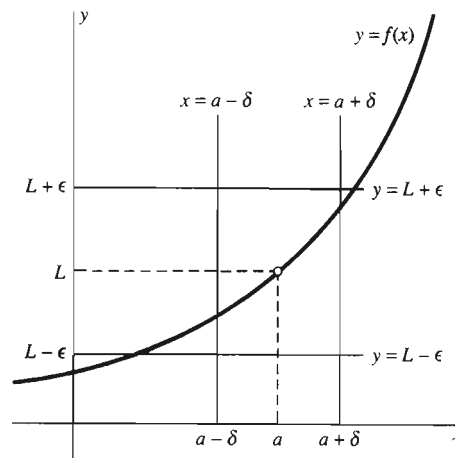


Figura 2.2.11 Ilustración geométrica de la definición del límite

En algunos casos en que  $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = L$ ,  $F(x)$  no se acerca *rápidamente* a  $L$  cuando  $x$  se acerca rápidamente a  $a$ . Esta situación es perfectamente permisible, como puede apreciarse examinando cuidadosamente la definición de límite o estudiando la figura 2.2.11.

## 2.2 Problemas

En los problemas 1 a 30, use las propiedades de los límites de esta sección para evaluar aquellos límites que existan.

- $\lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 + 7x - 12)$
- $\lim_{x \rightarrow 2} (4x^2 - x + 5)$
- $\lim_{x \rightarrow -1} (2x - x^5)$
- $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 2)^5$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)^7}{(2x-5)^4}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2 - x - 2}$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2 - x - 2}$
- $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 + 2t - 5}{t^3 - 2t}$
- $\lim_{t \rightarrow 3} \frac{t^2 - 9}{t - 3}$
- $\lim_{y \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{y} - \frac{1}{3}}{y - 3}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 1)^{3/2}$
- $\lim_{t \rightarrow -4} \sqrt{\frac{t+8}{25-t^2}}$
- $\lim_{z \rightarrow 8} \frac{z^{2/3}}{z - \sqrt{2z}}$
- $\lim_{t \rightarrow 2} \sqrt[3]{3t^3 + 4t - 5}$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{9+h}} - \frac{1}{3}}{h}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{x^4 - 16}$
- $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{(x-2)^2}{x^4 - 16}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} |1 - x|$
- $\lim_{x \rightarrow -5} |3x - 2|$
- $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$
- $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4x + 3}$
- $\lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{4x^2 - 1}{4x^2 + 8x + 3}$
- $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{2 - \sqrt{x}}$
- $\lim_{x \rightarrow 5} \left( \frac{2x^2 + 2x + 4}{6x - 3} \right)^{1/3}$
- $\lim_{x \rightarrow -4} \sqrt[3]{(x+1)^6}$
- $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt[3]{\frac{x+2}{(x-2)^2}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

- $\lim_{x \rightarrow -3} x^2$
- $\lim_{x \rightarrow -2} x^3$
- $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x}$
- $\lim_{x \rightarrow -8} \sqrt[3]{x}$
- $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt[3]{x^3}$
- $\lim_{x \rightarrow 12} \sqrt{x^2 + 25}$
- $\lim_{x \rightarrow -5} \sqrt[3]{x^2 - 33}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x-1}$
- $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-1}{x+2}$

En los problemas 41 a 46, use el método del ejemplo 12, si es adecuado, para determinar la derivada  $f'(x)$  de  $f(x)$ .

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
- $f(x) = \frac{1}{2x+3}$
- $f(x) = \frac{x}{2x+1}$
- $f(x) = \sqrt{3x+1}$
- $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+4}}$

- Aplique la propiedad del producto para demostrar que  $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$  si  $n$  es un entero positivo.
- Suponga que  $p(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$  es un polinomio. Demuestre que  $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$ .
- Sea  $f(x) = [x]$  la función máximo entero. ¿Para cuáles valores de  $a$  existe el límite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ?
- Sea  $r(x) = p(x)/q(x)$ , donde  $p(x)$  y  $q(x)$  son polinomios. Suponga que  $p(a) \neq 0$  y que  $q(a) = 0$ . Demuestre que  $\lim_{x \rightarrow a} r(x)$  no existe. [Sugerencia: Considere  $\lim_{x \rightarrow a} q(x)r(x)$ .]
- Sea  $g(x) = 1 + [x] + [-x]$ . Muestre que el límite de  $g(x)$  cuando  $x \rightarrow 3$  no se puede obtener al sustituir 3 en  $x$  en la fórmula para  $g$ .
- Sea  $h(x) = x - (0.01)[100x]$ . Muestre que  $h(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow 0$  pero que  $h(x)$  no tiende a cero "rápidamente" cuando  $x \rightarrow 0$ . Primero interprete lo que significa la frase "tiende rápidamente".
- Repita el problema 52 con

$$h(x) = \frac{1}{[1/x]} - x.$$

Use una calculadora para analizar numéricamente (como en los ejemplos 1 a 4) los límites en los problemas 31 a 40.



## 2.2 Proyecto

El objetivo de este proyecto es el uso sistemático de una calculadora o computadora para el análisis numérico de los límites. Suponga que queremos analizar el valor del límite (si es que existe)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

de una función dada  $f$  en  $x = a$ . Debemos comenzar con un incremento fijo  $h$  y después calcular (de la manera más eficiente posible) los valores de  $f$  en los puntos

$$a + \frac{h}{5}, a + \frac{h}{5^2}, \dots, a + \frac{h}{5^n}, \dots,$$

que tienden al número  $a$  cuando  $n$  aumenta. La figura 2.2.12 muestra un programa sencillo de la calculadora TI para este propósito.

Pasos del programa	Comentarios
Prgm1: LIMIT	Nombre del programa
:Disp "A"	
:Input A	Valor límite de entrada $a$ de $x$
:1→H	Incremento inicial $h = 1$
:0→N	Valor inicial del contador $n = 0$
:Lbl 1	Etiqueta para iniciar el ciclo
:H/5→H	Se divide $h$ entre 5
:A+H→X	Sea $x = a + h$
:Disp X	Desplegar el nuevo valor de $x$
:Disp Y1	Desplegar el nuevo valor de $f(x)$
:N+1→N	Incrementar el contador
:Pause	Oprimir ENTER para continuar
:If N<8	Sí $n < 8$ se regresa al ciclo
:Goto 1	
:End	En caso contrario, detenerse

Figura 2.2.12 Programa de TI-81 para analizar  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

$x$ (Valores redondeados)	$\frac{\sqrt{x+25}-5}{x}$
0.2	0.09980
0.04	0.09996
0.008	0.09999
0.0016	0.10000
0.00032	0.10000
0.000064	0.10000
⋮	⋮
↓	↓
0	0.1

Figura 2.2.13 Análisis de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+25}-5}{x}$$

Para analizar un límite cuando  $x \rightarrow 0$ , debemos considerar  $a = 0$  y  $h = 1$  y después calcular el valor numérico  $f(x)$  en los puntos

$$0.2, 0.04, 0.008, \dots, (0.2)^n, \dots,$$

que tienden a cero cuando crece  $n$ . Por ejemplo, con la función  $f(x) = (\sqrt{x+25} - 5) / x$  del ejemplo 4, obtenemos los datos que se muestran en la figura 2.2.13. Estos resultados numéricos sugieren que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+25}-5}{x} = \frac{1}{10}.$$

Algunos sistemas de cómputo tienen "directivas en línea" para la tabulación de funciones que se pueden usar para construir tablas como la de la figura 2.2.13. La tabla de la figura 2.2.14 enumera las instrucciones en varios sistemas comunes para tabular valores numéricos de  $f(a + h/5^n)$ .

Analice los valores numéricos (y la existencia) de los límites dados en los problemas 1 a 10. Deberá usar diferentes valores de  $h$  (positivos y negativos) en cada problema.

<b>BASIC</b>	FOR n=1 to 8 : PRINT a+h/5 ^ n, f(a+h/5 ^ n) : NEXT
<i>Derive</i>	[VECTOR(a+h/5 ^ n,n,1,8), VECTOR(f(a+h/5 ^ n),n,1,8)] ´
<i>Maple</i>	for n from 1 to 8 do print (a+h/5 ^ n, f(a+h/5 ^ n)) od
<i>Mathematica</i>	MatrixForm[ Table[ {a+h/5 ^ n, f(a+h/5 ^ n)}, {n,1,8} ]
<i>(X)PLORE</i>	table( f(a+h/5 ^ n), n = 1 to n = 8)

Figura 2.2.14 Instrucciones para la tabulación de valores de  $f(a + h/5^n)$

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2 - 1}{x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x+5} - \frac{1}{5} \right)$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^x - 1}{x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^{3/2} - 8}{x - 4}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^{2/3} - 4}{x - 8}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x$$

## 2.3 Más acerca de los límites

Para analizar los límites de las funciones trigonométricas, comenzaremos con la figura 2.3.1, que muestra un ángulo  $\theta$  con vértice en el origen, su lado inicial a lo largo del eje positivo  $x$  y su lado terminal de modo que interseque al círculo unitario en el punto  $P$ . Por definición de las funciones seno y coseno, las coordenadas de  $P$  son  $P(\cos \theta, \text{sen } \theta)$ . De la geometría vemos que, cuando  $\theta \rightarrow 0$ , el punto  $P(\cos \theta, \text{sen } \theta)$  tiende al punto  $R(1, 0)$ . Por lo tanto,  $\cos \theta \rightarrow 1$  y  $\text{sen } \theta \rightarrow 0$  cuando  $\theta \rightarrow 0^+$ . Una imagen similar da el mismo resultado cuando  $\theta \rightarrow 0^-$ , por lo que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \text{sen } \theta = 0. \quad (1)$$

La ecuación (1) dice simplemente que los límites de las funciones  $\cos \theta$  y  $\text{sen } \theta$  cuando  $\theta \rightarrow 0$  son iguales a sus valores en  $\theta = 0$ :  $\cos 0 = 1$  y  $\text{sen } 0 = 0$ .

El límite del cociente  $(\text{sen } \theta)/\theta$  cuando  $\theta \rightarrow 0$  juega un papel especial en el cálculo de las funciones trigonométricas: Es esencial para el cálculo de las derivadas de las funciones seno y coseno. Observe que los valores del cociente  $(\text{sen } \theta)/\theta$  no están definidos cuando  $\theta = 0$ . (¿Por qué no?) Pero una calculadora

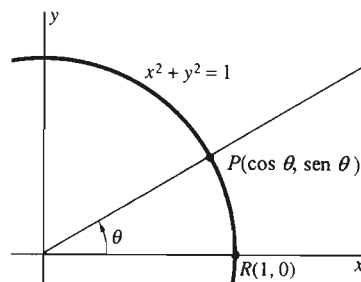


Figura 2.3.1 Un ángulo  $\theta$

$\theta$	$\frac{\text{sen } \theta}{\theta}$
$\pm 1.0$	0.84147
$\pm 0.5$	0.95885
$\pm 0.1$	0.99833
$\pm 0.05$	0.99958
$\pm 0.01$	0.99998
$\pm 0.005$	1.00000
$\pm 0.001$	1.00000
$\vdots$	$\vdots$
$\downarrow$	$\downarrow$
0	1

Figura 2.3.2 Los datos numéricos sugieren que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} = 1.$$

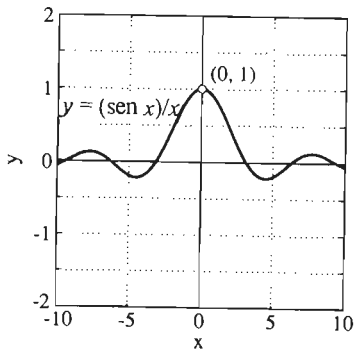


Figura 2.3.3

$$y = \frac{\text{sen } x}{x} \text{ para } x \neq 0$$

configurada en *modo de radianes* nos da la evidencia numérica de la figura 2.3.2. Esta tabla sugiere fuertemente que el límite  $(\text{sen } \theta)/\theta$  es 1 cuando  $\theta \rightarrow 0$ . Esta conclusión es apoyada por la gráfica de  $y = (\text{sen } x)/x$  que se muestra en la figura 2.3.3, donde parece que el punto  $(x, y)$  en la curva está cerca de  $(0, 1)$  cuando  $x$  está cerca de cero. Al final de esta sección daremos una demostración geométrica del siguiente resultado.

**Teorema 1 El límite trigonométrico básico**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1 \quad (2)$$

Como en los ejemplos 1 y 2, podemos reducir muchos otros límites trigonométricos al teorema 1.

**EJEMPLO 1** Muestre que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0. \quad (3)$$

**Solución** Multiplicamos el numerador y el denominador de la ecuación (3) por el *conjugado*  $1 + \cos x$  del numerador  $1 - \cos x$ . Después aplicamos la identidad fundamental  $1 - \cos^2 x = \text{sen}^2 x$ . Esto da

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x(1 + \cos x)} \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} \right) \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{1 + \cos x} \right) = 1 \cdot \frac{0}{1 + 1} = 0. \end{aligned}$$

En el último paso, usamos *todos* los límites de las ecuaciones (1) y (2).

**EJEMPLO 2** Evalúe  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{x}$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{x} &= 3 \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{3x} \right) = 3 \left( \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta}{\theta} \right) \quad (\theta = 3x) \\ &= 3 \left( \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta \cos \theta} \right) \quad \left( \text{pues } \tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta} \right) \\ &= 3 \left( \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} \right) \left( \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\cos \theta} \right) \quad (\text{por la propiedad del producto de los límites}) \\ &= 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1} = 3. \end{aligned}$$

Usamos el hecho  $\tan \theta = (\text{sen } \theta)/(\cos \theta)$ , así como algunos límites de las ecuaciones (1) y (2).

El ejemplo 3 es una *advertencia*: Los resultados de los análisis numéricos pueden conducir a problemas, a menos que se interpreten con cuidado.

$x$	$\text{sen } \frac{\pi}{x}$
1	0
0.5	0
0.1	0
0.05	0
0.01	0
0.005	0
0.001	0

Figura 2.3.4 ¿Cree usted que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen } \frac{\pi}{x} = 0 \text{ (ejemplo 3)?}$$

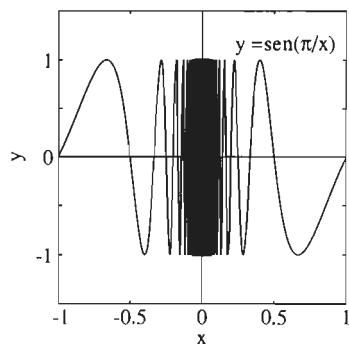


Figura 2.3.5 La gráfica de  $y = \text{sen}(\pi/x)$  muestra una infinidad de oscilaciones cuando  $x \rightarrow 0$  (ejemplo 3)

$sx$	$\text{sen } \frac{\pi}{x}$
$\frac{2}{9}$	+1
$\frac{2}{11}$	-1
$\frac{2}{101}$	+1
$\frac{2}{103}$	-1
$\frac{2}{1001}$	+1
$\frac{2}{1003}$	-1

Figura 2.3.6 Verifique las entradas de la segunda columna (ejemplo 3)

**EJEMPLO 3** Los datos numéricos de la tabla de la figura 2.3.4 sugieren que el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen } \frac{\pi}{x} \quad (4)$$

tiene valor cero. Pero en la gráfica de  $y = \text{sen}(\pi/x)$  (para  $x \neq 0$ ), que aparece en la figura 2.3.5, se muestra que el valor de  $\text{sen}(\pi/x)$  oscila un número infinito de veces entre +1 y -1 cuando  $x$  tiende a cero. De hecho, esto es consecuencia de la periodicidad de la función seno, pues  $\pi/x$  aumenta sin cota cuando  $x \rightarrow 0$ . De aquí que,  $\text{sen}(\pi/x)$  no puede tender a cero (o a cualquier otro número) cuando  $x \rightarrow 0$ . Por tanto, el límite en (4) *no existe*.

Podemos explicar estos resultados (que eventualmente nos llevarían a conclusiones falsas) tabulados en la figura 2.3.4 como sigue: Cada valor de  $x$  que aparece en la tabla es de la forma  $1/n$ , el recíproco de un entero. Por tanto,

$$\text{sen } \frac{\pi}{x} = \text{sen } \frac{\pi}{1/n} = \text{sen } n\pi = 0$$

para todo entero no negativo  $n$ . Pero con una selección diferente de “valores de prueba” de  $x$ , habríamos obtenido los resultados de la figura 3.2.6, que sugieren en forma inmediata la no existencia del límite en (4).

### LA LEY DEL SANDWICH PARA LÍMITES

Una última propiedad necesaria de los límites es la *ley del sandwich*. Ésta se relaciona con el hecho de que la obtención de límites preserva las desigualdades entre las funciones.

#### Ley del sandwich

Suponga que  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  para todo  $x$  en alguna vecindad perforada de  $a$  y que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a} h(x).$$

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L.$$

así como

La figura 2.3.7 muestra la forma y la razón del funcionamiento de la ley del sandwich y el porqué de su nombre. La idea es que  $g(x)$  está atrapado entre  $f(x)$  y  $h(x)$  cerca de  $a$ ;  $f(x)$  y  $h(x)$  tienden al mismo límite  $L$ , por lo que también  $g(x)$  debe tender a  $L$ .

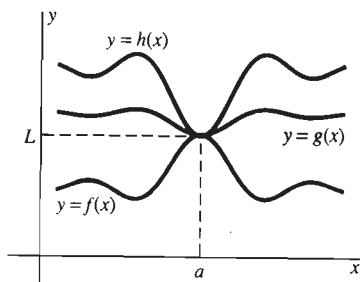


Figura 2.3.7 El funcionamiento de la ley del sandwich

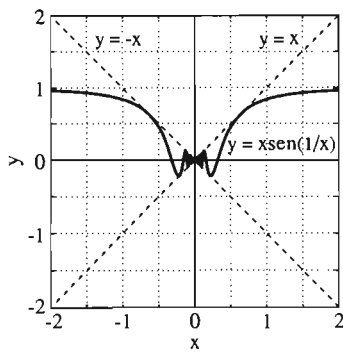


Figura 2.3.8 La gráfica de  $g(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$  para  $x \neq 0$  (ejemplo 4)

**EJEMPLO 4** Las figuras 2.3.8 y 2.3.9 muestran dos vistas de la gráfica de la función  $g$  definida para  $x \neq 0$  como

$$g(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}.$$

Como en el ejemplo 3,  $\operatorname{sen}(1/x)$  oscila una infinidad de veces entre  $+1$  y  $-1$  cuando  $x \rightarrow 0$ . Por tanto,  $g(x)$  oscila una infinidad de veces entre los valores  $+x$  y  $-x$ . Como  $|\operatorname{sen}(1/x)| \leq 1$  para toda  $x \neq 0$ ,

$$-|x| \leq x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq +|x|$$

para toda  $x \neq 0$ . Además,  $\pm|x| \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow 0$ , por lo que si  $f(x) = -|x|$  y  $h(x) = +|x|$ , la ley del sandwich para límites implica que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0. \quad (5)$$

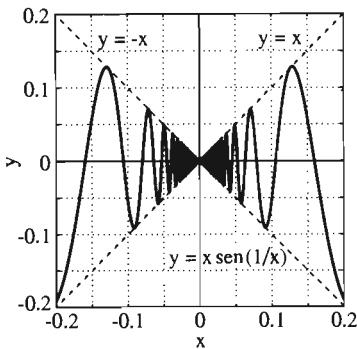


Figura 2.3.9 La gráfica con un acercamiento en el origen (ejemplo 4)

**PREGUNTA** ¿Por qué el límite de la ecuación (5) *no* es consecuencia de la propiedad del producto de los límites, con  $f(x) = x$  y  $g(x) = \operatorname{sen}(1/x)$  (problema 66)?

## LÍMITES LATERALES

En el ejemplo 5 de la sección 2.2 analizamos la función

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0; \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La gráfica de  $y = f(x)$  aparece en la figura 2.3.10. Argumentamos que el límite de  $f(x) = x/|x|$  cuando  $x \rightarrow 0$  no existe, pues  $f(x)$  tiende a  $+1$  cuando  $x$  tiende a cero por la derecha, mientras que  $f(x) \rightarrow -1$  cuando  $x$  tiende a cero por la izquierda. Una forma natural de describir esta situación es decir que, en  $x = 0$ , el *límite por la derecha* de  $f(x)$  es  $+1$  y el *límite por la izquierda* de  $f(x)$  es  $-1$ .

Aquí definiremos y analizaremos estos límites laterales. Estableceremos su definición primero en el lenguaje informal que usamos en la sección 2.2 para describir la “idea del límite”. Para definir el límite por la derecha de  $f(x)$  en  $x = a$ , debemos suponer que  $f$  está definida en un intervalo abierto inmediato posterior a la derecha de  $a$ . Para definir el límite por la izquierda, debemos suponer que  $f$  está definida en un intervalo abierto justo a la izquierda de  $a$ .

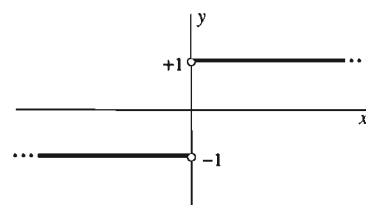


Figura 2.3.10 De nuevo, la gráfica de  $f(x) = \frac{x}{|x|}$

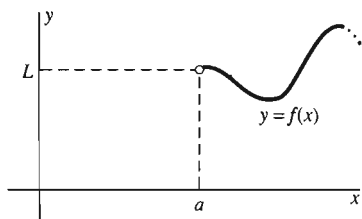
### El límite por la derecha de una función

Supongamos que  $f$  está definida en el intervalo abierto  $(a, c)$  inmediato a la derecha de  $a$ . Entonces decimos que el número  $L$  es el **límite por la derecha** de  $f(x)$ , cuando  $x$  tiende a  $a$ , y escribimos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \quad (6)$$

si podemos hacer que el número  $f(x)$  se acerque a  $L$  tanto como queramos, eligiendo el punto  $x$  en  $(a, c)$  suficientemente cerca de  $a$ .

Podemos describir el límite por la derecha en la ecuación (6) diciendo que  $f(x) \rightarrow L$  cuando  $x \rightarrow a^+$ , o cuando  $x$  tiende a  $a$  por la derecha. (El símbolo  $a^+$  denota el lado derecho, o positivo, de  $a$ .) Más precisamente, la ecuación (6) significa que dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que



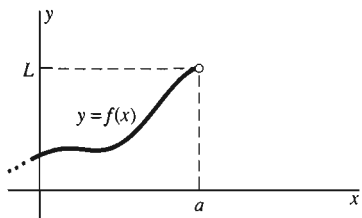
(a)

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad (7)$$

para toda  $x$  tal que

$$a < x < a + \delta. \quad (8)$$

Véase la figura 2.3.11 para una interpretación geométrica de los límites laterales.



(b)

**Figura 2.3.11** (a) El límite por la derecha de  $f(x)$  es  $L$ . (b) El límite por la izquierda de  $f(x)$  es  $L$ .

### El límite por la izquierda de una función

Supongamos que  $f$  está definida en el intervalo abierto  $(c, a)$  inmediato a la izquierda de  $a$ . Entonces decimos que el número  $L$  es el **límite por la izquierda** de  $f(x)$ , cuando  $x$  tiende a  $a$ , y escribimos

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \quad (9)$$

si podemos hacer que el número  $f(x)$  se acerque a  $L$  tanto como queramos, eligiendo el punto  $x$  en  $(c, a)$  suficientemente cerca de  $a$ .

Una consecuencia de estas definiciones es que el valor de  $f(a)$  no es importante para la existencia o el valor de los límites laterales, así como no era importante su existencia o valor para el límite regular (por ambos lados).

Podemos describir el límite por la izquierda en la ecuación (9) diciendo que  $f(x) \rightarrow L$  cuando  $x \rightarrow a^-$ , o cuando  $x$  tiende a  $a$  por la izquierda. (El símbolo  $a^-$  denota el lado izquierdo, o negativo, de  $a$ .) Obtenemos una definición precisa del límite por la izquierda en la ecuación (9) si cambiamos el intervalo abierto en (8) por el intervalo  $a - \delta < x < a$ .

Nuestro análisis preliminar de la función  $f(x) = x/|x|$  equivale a decir que los límites laterales de esta función en  $x = 0$  son

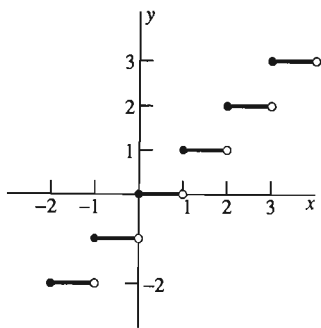
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = -1.$$

Ya hemos argumentado, en el ejemplo 5 de la sección 2.2, que, debido a que estos dos límites no son iguales, no existe el límite por ambos lados de  $x/|x|$  cuando  $x \rightarrow 0$ . El siguiente teorema es intuitivamente obvio y se puede demostrar mediante las definiciones precisas de los límites que ahí aparecen.

### Teorema 2 Límites laterales y límites por ambos lados

Suponga que la función  $f$  está definida en una vecindad perforada del punto  $a$ . Entonces el límite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe y es igual al número  $L$  si y sólo si los límites laterales  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  existen y son iguales a  $L$ .

El teorema 2 es de particular utilidad para mostrar que ciertos límites (por ambos lados) *no* existen, mostrando por lo general que los límites por la derecha y por la izquierda no son iguales entre sí.



**Figura 2.3.12** La gráfica de la función máximo entero  $f(x) = [x]$  (ejemplo 5)

**EJEMPLO 5** La gráfica de la función máximo entero  $f(x) = [x]$  aparece en la figura 2.3.12. Debe ser claro que si  $a$  no es un entero, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a^+} [x] = \lim_{x \rightarrow a^-} [x] = \lim_{x \rightarrow a} [x] = [a].$$

Pero si  $a = n$ , un entero, entonces

$$\lim_{x \rightarrow n^-} [x] = n - 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow n^+} [x] = n.$$

Como los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes, el teorema 2 implica que el límite de  $f(x) = [x]$  no existe, cuando  $x$  tiende a un entero  $n$ .

**EJEMPLO 6** De acuerdo con la propiedad de la raíz en la sección 2.2,

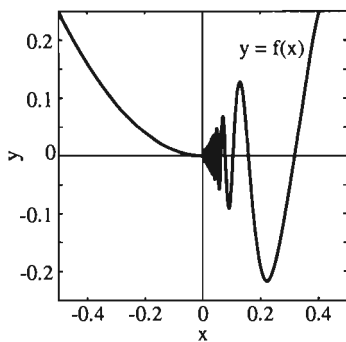
$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a} \quad \text{si } a > 0.$$

Pero el límite de  $f(x) = \sqrt{x}$  cuando  $x \rightarrow 0^-$  no está definido, pues la raíz cuadrada de un número negativo no está definida. Por lo tanto,  $f$  no está definida en una vecindad perforada completa de 0. Lo que podemos decir de  $a = 0$  es que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0,$$

aunque el límite por la izquierda  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x}$  no existe.

A cada una de las propiedades de los límites establecidas en la sección 2.2, le corresponden dos *propiedades de los límites laterales* (una versión derecha y otra izquierda). Puede aplicar estas propiedades para los límites laterales de la misma forma que se aplican las propiedades de los límites por ambos lados en la evaluación de límites.



**Figura 2.3.13**  $y = f(x)$  (ejemplo 7)

**EJEMPLO 7** La figura 2.3.13 muestra la gráfica de la función definida como

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0; \\ x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Es claro que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

por una versión lateral de la ley del sandwich (como en el ejemplo 4). Por tanto, el teorema 2 implica que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

**EJEMPLO 8** Aplicaremos las propiedades adecuadas de los límites laterales para mostrar que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} \left( \frac{x^2}{x^2 + 1} + \sqrt{9 - x^2} \right) &= \frac{\lim_{x \rightarrow 3^-} x^2}{\lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 + 1)} + \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3^-} (9 - x^2)} \\ &= \frac{9}{9 + 1} + \sqrt{0} = \frac{9}{10}. \end{aligned}$$

Observe que el límite por ambos lados cuando  $x \rightarrow 3$  no está definido, pues  $\sqrt{9 - x^2}$  no está definido cuando  $x > 3$ .

Recordemos que la derivada  $f'(x)$  de la función  $f(x)$  se define como

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (10)$$

siempre que este límite (por ambos lados) exista, en cuyo caso decimos que la función  $f$  es **derivable** en el punto  $x$ . El ejemplo 9 muestra que es posible que una función esté definida en todo punto pero que no sea derivable en ciertos puntos de su dominio.

**EJEMPLO 9** Muestre que la función  $f(x) = |x|$  no es derivable en  $x = 0$ .

**Solución** Cuando  $x = 0$ , tenemos

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} -1 & \text{si } h < 0; \\ +1 & \text{si } h > 0. \end{cases}$$

Por tanto, el límite por la izquierda de ese cociente es  $-1$ , mientras que el límite por la derecha es  $+1$ . En consecuencia, no existe el límite *por ambos lados* en (10), de donde  $f(x) = |x|$  no es derivable en  $x = 0$ . Puesto de otra forma,  $f'(0)$  no existe.

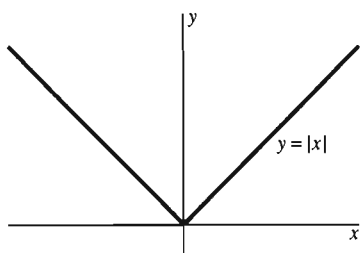


Figura 2.3.14 La gráfica de  $f(x) = |x|$  tiene un pico en  $(0,0)$

La figura 2.3.14 muestra la gráfica de la función  $f(x) = |x|$  del ejemplo 9. La gráfica tiene un pico agudo en el punto  $(0,0)$ , lo cual explica por qué no existe la tangente ahí (ninguna línea recta es una buena aproximación a la forma de la gráfica en  $(0,0)$ ). Pero es claro de la figura que  $f'(x)$  existe si  $x \neq 0$ . De hecho,

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0; \\ +1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

En el problema 64 le pediremos que obtenga este resultado en forma directa, a partir de la definición de la derivada, sin apelar a la figura 2.3.14.

## LÍMITES INFINITOS

En el ejemplo 9 de la sección 2.2 analizamos la función  $f(x) = 1/(x-1)^2$ , cuya gráfica aparece en la figura 2.3.15. El valor de  $f(x)$  *crece sin cota* (es decir, excede en algún momento a cualquier número determinado de antemano) cuando  $x$  tiende a 1, por la derecha o por la izquierda. Esta situación se puede describir así:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)^2}, \quad (11)$$

y decimos que cada uno de estos límites laterales es igual a “más infinito”.

**CUIDADO** La expresión

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty \quad (12)$$

no significa que exista un “número real infinito” denotado con  $+\infty$  (¡no existe!) Tampoco significa que el límite por la izquierda en la ecuación (12) exista (¡No

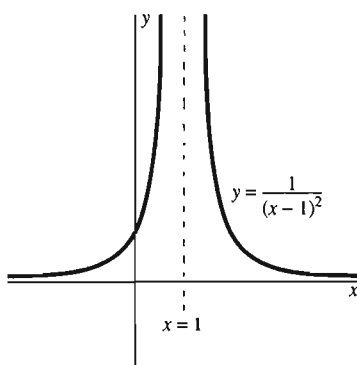


Figura 2.3.15 La gráfica de la función  $f(x) = 1/(x-1)^2$



existe!). Por el contrario, la expresión de la ecuación (12) es simplemente una forma conveniente de decir *por qué* no existe el límite por la derecha en la ecuación (12) ya que la cantidad  $1/(x-1)^2$ , aumenta sin cota cuando  $x \rightarrow 1^+$ .

En forma análoga, podemos escribir

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty \quad (13)$$

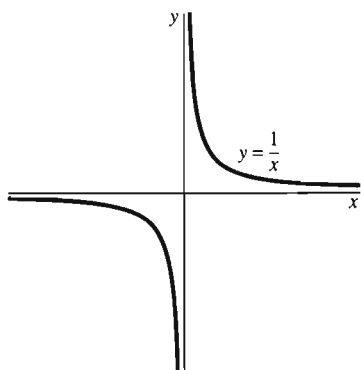
a pesar de que el límite (por ambos lados) de la ecuación (13) no existe. La expresión en la ecuación (13) sólo es una forma conveniente de decir que el límite en la ecuación (13) no existe, pues  $1/(x-1)^2$  aumenta sin cota cuando  $x \rightarrow 1$  por cualquier lado.

Consideremos ahora la función  $f = 1/x$ ; su gráfica aparece en la figura 2.3.16. Esta función aumenta sin cota cuando  $x$  tiende a cero por la derecha, pero decrece sin cota (es menor que cualquier número predeterminado) cuando  $x$  tiende a cero por la izquierda. Por tanto, escribimos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty. \quad (14)$$

En este caso no existe una notación para el límite por ambos lados. Sólo podríamos decir que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \quad (\text{no existe}).$$



**Figura 2.3.16** La gráfica de la función  $f(x) = 1/x$

**EJEMPLO 10** Analice el comportamiento de la función

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

cerca del punto  $x = 1$ , donde no existe el límite.

**Solución** Analizamos primero el comportamiento de  $f(x)$  justo a la derecha del número 1. Si  $x$  es mayor que 1 pero cercano a 1, entonces  $2x+1$  está cerca de 3 y  $x-1$  es un número pequeño *positivo*. En este caso, el cociente  $(2x+1)/(x-1)$  es un número positivo grande; si  $x$  está cada vez más cerca de 1, este cociente positivo será cada vez más grande. Para tales  $x$ ,  $f(x)$  aumenta sin cota cuando  $x$  tiende a 1 por la derecha. Es decir,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+1}{x-1} = +\infty, \quad (15)$$

como sugieren los datos de la figura 2.3.17.

$x$	$\frac{2x+1}{x-1}$	$x$	$\frac{2x+1}{x-1}$
1.1	32	0.9	-28
1.01	302	0.99	-298
1.001	3002	0.999	-2998
1.0001	30002	0.9999	-29998
⋮	⋮	⋮	⋮
↓	↓	↓	↓
1	$+\infty$	1	$-\infty$

**Figura 2.3.17** El comportamiento de  $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$  para  $x$  cerca de 1 (ejemplo 10)

Si ahora  $x$  es menor que 1 pero cercano a 1, entonces  $2x + 1$  seguirá cerca de 3, pero ahora  $x - 1$  es un número *negativo* cercano a cero. En este caso, el cociente  $(2x + 1)/(x - 1)$  es un número negativo grande (numéricamente) y decrece sin cota cuando  $x \rightarrow 1^-$ . De aquí, concluimos que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x + 1}{x - 1} = -\infty. \quad (16)$$

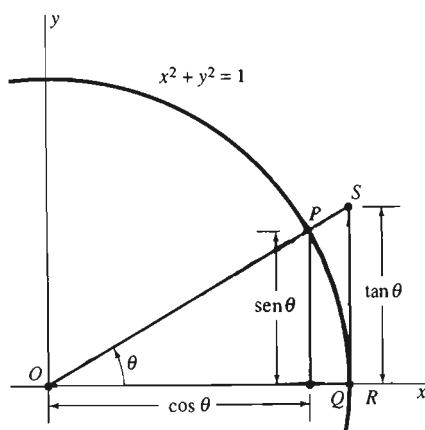
Los resultados de las ecuaciones (15) y (16) proporcionan una descripción concisa del comportamiento de  $f(x) = (2x + 1)/(x - 1)$  cerca del punto  $x = 1$ . Por último, para ser consistentes con el teorema 2 relativo a los límites laterales y los límites por ambos lados, diremos en este caso que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 1}{x - 1} \text{ no existe.}$$

## EL LÍMITE TRIGONOMÉTRICO BÁSICO

Concluimos esta sección con la demostración geométrica de que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} = 1. \quad (17)$$



**Figura 2.3.18** Apoyo a la demostración del límite trigonométrico básico

**Demostración** La figura 2.3.18 muestra el ángulo  $\theta$ , los triángulos  $OPQ$  y  $ORS$ , y el sector circular  $OPR$  que contiene al triángulo  $OPQ$  y está contenido en el triángulo  $ORS$ . Por tanto,

$$\text{área}(\Delta OPQ) < \text{área}(\text{sector } OPR) < \text{área}(\Delta ORS).$$

En términos de  $\theta$ , esto significa que

$$\frac{1}{2} \text{sen } \theta \cos \theta < \frac{1}{2} \theta < \frac{1}{2} \tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{2 \cos \theta}.$$

Aquí utilizamos la fórmula estándar para el área de un triángulo, para obtener el área de  $\Delta OPQ$  y  $\Delta ORS$ . También usamos el hecho de que el área de un sector circular en un círculo de radio  $r$  es  $A = 1/2 r^2 \theta$  si el sector está subtendido por un ángulo de radianes; en este caso,  $r = 1$ . Si  $0 < \theta < \pi/2$ , podemos dividir cada miembro de la última desigualdad entre  $1/2 \text{sen } \theta$  para obtener

$$\cos \theta < \frac{\theta}{\text{sen } \theta} < \frac{1}{\cos \theta}.$$

Obtenemos los recíprocos, lo cual invierte las desigualdades:

$$\cos \theta < \frac{\text{sen } \theta}{\theta} < \frac{1}{\cos \theta}.$$

Aplicamos ahora la ley del sandwich para los límites, con

$$f(\theta) = \cos \theta, \quad g(\theta) = \frac{\text{sen } \theta}{\theta}, \quad \text{y} \quad h(\theta) = \frac{1}{\cos \theta}.$$

Es claro, por la ecuación (1) al principio de esta sección, que  $f(\theta)$  y  $h(\theta)$  tienden a 1 cuando  $\theta \rightarrow 0^+$ , por lo que también cumple esto  $g(\theta) = (\text{sen } \theta)/\theta$ . Este argumento geométrico muestra que  $(\text{sen } \theta)/\theta \rightarrow 1$  para los valores *positivos* de  $\theta$  que tienden a cero. Pero el mismo resultado se cumple para los valores *negativos* de  $\theta$ , pues  $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen } \theta$ . Así, hemos demostrado la ecuación (17).  $\square$

## 2.3 Problemas

Determine los límites trigonométricos en los problemas 1 a 25. Si tiene una calculadora gráfica o una computadora con capacidad para desplegar gráficos, verifique que la evidencia gráfica apoya su respuesta.

1.  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta^2}{\operatorname{sen} \theta}$
2.  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\theta^2}$
3.  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2}$
4.  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta}{\theta}$
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{(\operatorname{sen} x) - x}$
6.  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} (2\theta^2)}{\theta^2}$
7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x}$
8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x \cos 3x}$
9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}$
10.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x}$
11.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{x}{3}$
12.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{sen} 3x)^2}{x^2 \cos x}$
13.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}$
14.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\tan 5x}$
15.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sec x \csc x$
16.  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\theta}$
17.  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta \operatorname{sen} \theta}$
18.  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\theta}$
19.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$
20.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{3x}$
21.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot 3x$
22.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{\operatorname{sen} x}$
23.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{x}{2} \right)$
24.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 5x}$
25.  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \csc 2x \cot 2x$

Use la ley del sandwich para límites y determine los límites en los problemas 26 a 28.

26.  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}$
27.  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$
28.  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

Use las propiedades de los límites laterales para determinar los límites en los problemas 29 a 48 o para determinar que no existen.

29.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (3 - \sqrt{x})$
30.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (4 + 3x^{3/2})$
31.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x-1}$
32.  $\lim_{x \rightarrow 4^-} \sqrt{4-x}$
33.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x^2-4}$
34.  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{9-x^2}$
35.  $\lim_{x \rightarrow 5^-} \sqrt{x(5-x)}$
36.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} x\sqrt{4-x^2}$

37.  $\lim_{x \rightarrow 4^+} \sqrt{\frac{4x}{x-4}}$
38.  $\lim_{x \rightarrow -3^+} \sqrt{6-x-x^2}$
39.  $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x-5}{|x-5|}$
40.  $\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{16-x^2}{\sqrt{16-x^2}}$
41.  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$
42.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x^2-5x+6}$
43.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2-x}{|x-2|}$
44.  $\lim_{x \rightarrow 7^-} \frac{7-x}{|x-7|}$
45.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x^2}{1-x}$
46.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x-|x|}$
47.  $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{\sqrt{(5-x)^2}}{5-x}$
48.  $\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{4+x}{\sqrt{(4+x)^2}}$

Para cada una de las funciones en los problemas 49 a 58, existe exactamente un punto a donde los límites de  $f(x)$  por la derecha y por la izquierda no existen. Describa (cómo en el ejemplo 10) el comportamiento de  $f(x)$  para  $x$  cerca de  $a$ .

49.  $f(x) = \frac{1}{x-1}$
50.  $f(x) = \frac{2}{3-x}$
51.  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$
52.  $f(x) = \frac{2x-5}{5-x}$
53.  $f(x) = \frac{1-x^2}{x+2}$
54.  $f(x) = \frac{1}{(x-5)^2}$
55.  $f(x) = \frac{|1-x|}{(1-x)^2}$
56.  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+6x+9}$
57.  $f(x) = \frac{x-2}{4-x^2}$
58.  $f(x) = \frac{x-1}{x^2-3x+2}$

En los problemas 59 a 63,  $\llbracket x \rrbracket$  denota el máximo entero menor o igual que  $x$ . Determine primero los límites  $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x)$  para cada entero  $n$  (la respuesta será por lo general en términos de  $n$ ); después grafique  $f$ .

$$59. f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \text{ no es un entero;} \\ 2 + (-1)^x & \text{si } x \text{ es un entero} \end{cases}$$

$$60. f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ no es un entero;} \\ 0 & \text{si } x \text{ es un entero} \end{cases}$$

$$61. f(x) = (-1)^{\llbracket x \rrbracket}$$

$$62. f(x) = \left\lfloor \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \right\rfloor$$

$$63. f(x) = 1 + \llbracket x \rrbracket - x$$

64. Dada  $f(x) = |x|$ , use la definición de la derivada para determinar  $f'(x)$  en los dos casos  $x > 0$  y  $x < 0$  por separado.

65. Suponga que existe un número  $M$  tal que  $|f(x)| \leq M$  para toda  $x$ . Aplique la ley del sandwich para mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x f(x) = 0.$$

y conciso. Señale *exactamente* el punto donde aparece el error, y en qué consiste éste.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} &= \left( \lim_{x \rightarrow 0} x \right) \left( \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) \\ &= 0 \cdot \left( \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) = 0. \quad (\text{¡Incorrecto!}) \end{aligned}$$

66. Determine el error en el siguiente argumento; sea preciso

## 2.4 El concepto de continuidad

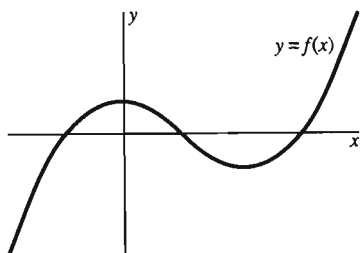


Figura 2.4.1 Una gráfica continua

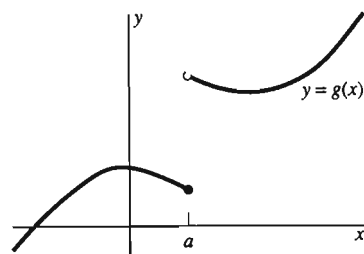


Figura 2.4.2 Una gráfica que no es continua

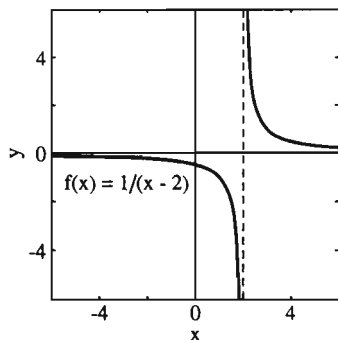


Figura 2.4.3 La función  $f(x) = 1/(x-2)$  tiene una discontinuidad infinita en  $x=2$  (ejemplo 1)

Cualquiera puede ver una drástica diferencia entre las gráficas de las figuras 2.4.1 y 2.4.2. La figura 2.4.1 pretende sugerir que la gráfica  $y=f(x)$  se puede trazar con un movimiento continuo del lápiz (sin saltos), de izquierda a derecha. Pero en la figura 2.4.2, el lápiz debe hacer un salto repentino en  $x=a$ .

El concepto de continuidad aísla la propiedad que la función  $f$  de la figura 2.4.1 tiene, pero de la que carece la función  $g$  de la figura 2.4.2. Primero definimos la *continuidad* de una función en un punto.

### Definición de continuidad en un punto

Suponga que la función  $f$  está definida en una vecindad de  $a$ . Decimos que  $f$  es **continua en  $a$**  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe y, además, que el valor de este límite es  $f(a)$ . En otras palabras,  $f$  es continua en  $a$  si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad (1)$$

Brevemente, la continuidad de  $f$  en  $a$  significa que:

**El límite de  $f$  en  $a$  es igual al valor de  $f$  en el punto.**

Otra forma de decir esto es: El límite de  $f$  en  $a$  es el valor “esperado”, el valor que usted asignaría si conociera los valores de  $f$  en una vecindad perforada de  $a$  y si supiera que  $f$  es “predecible”. Otra alternativa para la continuidad de  $f$  en  $a$  es: Cuando  $x$  esté cerca de  $a$  entonces  $f(x)$  estará cerca de  $f(a)$ .

El análisis de la definición de continuidad nos muestra que para ser continua en el punto  $a$ , una función debe satisfacer las siguientes tres condiciones:

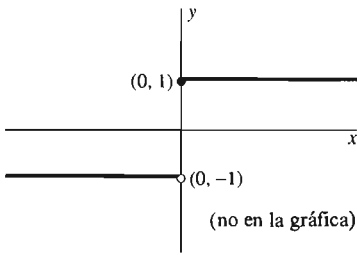
1. La función  $f$  debe estar definida en  $a$  [de modo que  $f(a)$  exista].
2. Debe existir el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tienda a  $a$ .
3. Los números de las condiciones 1 y 2 deben ser iguales:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

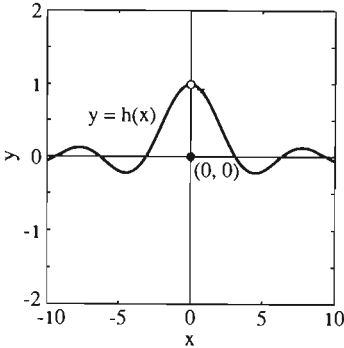
Si cualquiera de estas condiciones no se satisface, entonces  $f$  no es continua en  $a$ . Los ejemplos 1 a 3 ilustran estas tres posibilidades para la *discontinuidad* en un punto. Si la función  $f$  no es continua en  $a$ , decimos que es **discontinua**, o bien que  $a$  es una **discontinuidad** de  $f$ . Intuitivamente, una discontinuidad de  $f$  es un punto donde la gráfica tiene un “hueco” o “salto” de cierto tipo.

**EJEMPLO 1** La figura 2.4.3 muestra la gráfica de la función  $f$  definida como

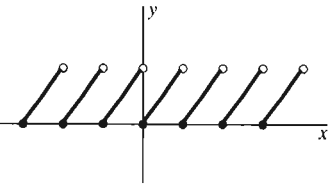
$$f(x) = \frac{1}{x-2} \quad \text{para } x \neq 2.$$



**Figura 2.4.4** La función  $g$  tiene una discontinuidad de salto finito en  $x = 0$  (ejemplo 2)



**Figura 2.4.5** El punto  $(0, 0)$  es parte de la gráfica, mientras que el  $(0, 1)$  no (ejemplo 3)



**Figura 2.4.6** La "función diente de sierra" del ejemplo 4

Como  $f$  no está definida en  $x = 2$ , no es continua en ese punto. Además,  $f$  tiene lo que podemos llamar una *discontinuidad infinita* en  $x = 2$ .

**EJEMPLO 2** La figura 2.4.4 muestra la gráfica de la función  $g$  definida por

$$g(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \geq 0; \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Los límites por la izquierda y por la derecha en  $x = 0$  son diferentes, por lo que  $g(x)$  no tiene límite cuando  $x \rightarrow 0$ . En consecuencia, la función  $g$  no es continua en  $x = 0$ ; tiene lo que llamamos una *discontinuidad de salto finito*.

**EJEMPLO 3** La figura 2.4.5 muestra la gráfica de la función  $h$  definida como

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen } x}{x} & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Como vimos en la sección 2.3 que

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1,$$

y  $h(0) = 0$ , vemos que el límite y el valor de  $h$  en  $x = 0$  no son iguales. Así, la función  $h$  no es continua ahí. Cuando  $x$  pasa de los valores negativos por  $x = 0$  hacia los valores positivos, el valor de  $h(x)$  salta de "cerca de 1" a 0 y viceversa.

**EJEMPLO 4** La figura 2.4.6 muestra la gráfica de la función definida con

$$f(x) = x - \llbracket x \rrbracket.$$

Como antes,  $\llbracket x \rrbracket$  denota al máximo entero no mayor que  $x$ . Si  $x = n$ , un entero, entonces  $\llbracket n \rrbracket = n$ , de modo que  $f(n) = 0$ . En el intervalo abierto  $(n, n + 1)$ , la gráfica de  $f$  es lineal y de pendiente 1. Debe ser claro que  $f$  es

- Continua en  $x$  si  $x$  no es un entero;
- Discontinua en cada entero del eje  $x$ .

## COMBINACIONES DE FUNCIONES CONTINUAS

Con frecuencia, nuestro interés está en las funciones que *son* continuas. Supongamos que la función  $f$  está definida en un intervalo abierto o en una unión de intervalos abiertos. Entonces, simplemente decimos que  $f$  es **continua** si es continua en cada punto de su dominio de definición.

Las propiedades de los límites de la sección 2.2 implican que *cualquier suma o producto de funciones continuas es continua*. Es decir, si las funciones  $f$  y  $g$  son continuas en  $x = a$ , entonces también lo son  $f + g$  y  $f \cdot g$ . Por ejemplo, si  $f$  y  $g$  son continuas en  $x = a$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) + \left( \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right) = f(a) + g(a).$$

**EJEMPLO 5** Como  $f(x) = x$  y las funciones con valores constantes son claramente continuas en todo punto, esto implica que la función polinomial cúbica

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 = x \cdot x \cdot x + (-3) \cdot x \cdot x + 1$$

es continua en todo punto.

Más en general, una consecuencia similar es que *toda función polinomial*

$$p(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

es continua en todo punto de la recta real. En resumen, todo polinomio es continuo en todo punto.

Si  $p(x)$  y  $q(x)$  son polinomios, entonces la propiedad del cociente para límites y la continuidad de los polinomios implican que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} p(x)}{\lim_{x \rightarrow a} q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}$$

siempre que  $q(a) \neq 0$ . Así, toda **función racional**

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \tag{2}$$

es continua en todo punto donde esté definida (es decir, siempre que el polinomio del denominador no se anule). De manera general, el cociente de dos funciones continuas es continuo en todo punto donde el denominador no se anule.

En un punto  $x = a$ , donde el denominador de la ecuación (2) *sí* se anule,  $q(a) = 0$ , existen dos posibilidades:

- Si  $p(a) \neq 0$ , entonces  $f$  tiene una discontinuidad infinita (como muestran las figuras 2.4.3 y 2.4.7) en  $x = a$ .
- En caso contrario,  $f$  podría tener una *discontinuidad removible* en  $x = a$ .

El punto  $x = a$  donde la función  $f$  es discontinua se llama **discontinuidad removible** de  $f$  si existe una función  $F$  tal que

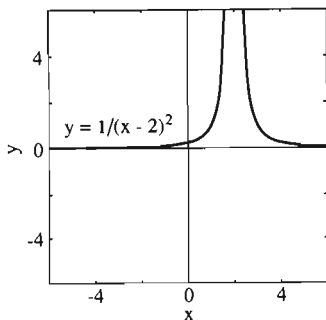
- $F(x) = f(x)$  para todo  $x \neq a$  en el dominio de  $f$ , y
- Esta nueva función  $F$  es continua en  $x = a$ .

Así, al agregar el punto  $(a, F(a))$  a la gráfica de  $f$ , “eliminamos” la discontinuidad, obteniendo así la gráfica de la función  $F$  que es continua en  $x = a$ .

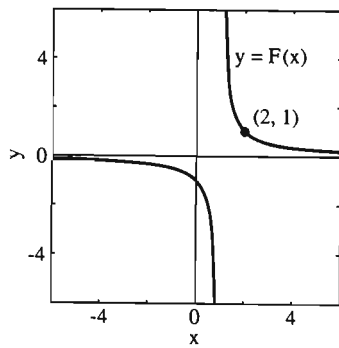
**EJEMPLO 6** Suponga que

$$f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 3x + 2} \tag{3}$$

Factorizamos el denominador:  $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ . Esto muestra que  $f$  no está definida en  $x = 1$  o en  $x = 2$ . Así, la función racional definida en la ecuación (3) es continua, excepto en estos dos puntos. La cancelación implica



**Figura 2.4.7** La función  $f(x) = 1/(x - 2)^2$  tiene una discontinuidad infinita en  $x = 2$



**Figura 2.4.8** En el ejemplo 6 la gráfica de  $y = F(x)$  consta de la de  $y = f(x)$  con el único punto  $(2, 1)$

$$f(x) = \frac{x - 2}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{1}{x - 1}$$

excepto en el único punto  $x = 2$ , la nueva función

$$F(x) = \frac{1}{x - 1} \quad (4)$$

coincide con  $f(x)$  si  $x \neq 2$  pero es continua también en  $x = 2$ , donde  $F(2) = 1$ . Véase la figura 2.4.8.

## CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Al principio de la sección 2.3 observamos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0. \quad (5)$$

Como  $\cos 0 = 1$  y  $\sin 0 = 0$ , las funciones seno y coseno deben ser continuas en  $x = 0$ . Pero este hecho implica que son continuas en todo punto.

### Teorema 1 Continuidad del seno y el coseno

Las funciones  $f(x) = \sin x$  y  $g(x) = \cos x$  son funciones continuas de  $x$  en toda la recta real.

**Demostración** Daremos la demostración sólo para  $\sin x$ ; la demostración para  $\cos x$  es similar (véase el problema 69). Queremos mostrar que  $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$  para todo real  $a$ . Si escribimos  $x = a + h$ , de modo que  $h = x - a$ , entonces  $h \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow a$ . Así, sólo necesitamos mostrar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sin(a + h) = \sin a.$$

Pero la fórmula para la suma de la función seno implica

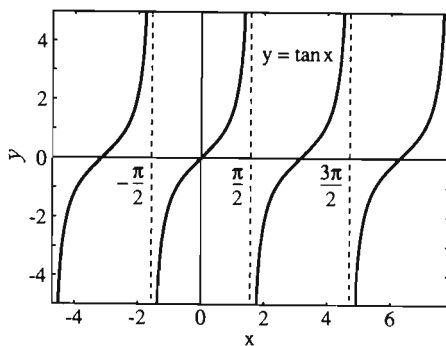
$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \sin(a + h) &= \lim_{h \rightarrow 0} (\sin a \cos h + \cos a \sin h) \\ &= (\sin a) \left( \lim_{h \rightarrow 0} \cos h \right) + (\cos a) \left( \lim_{h \rightarrow 0} \sin h \right) = \sin a \end{aligned}$$

como se quería; en el último paso usamos los límites de la ecuación (5).  $\square$

Una consecuencia de esto es que la función

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

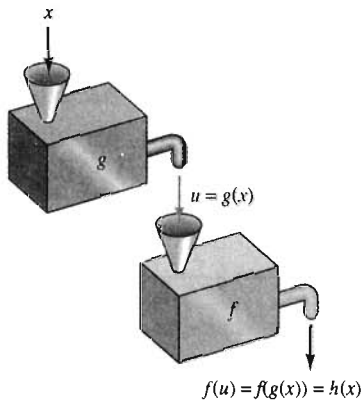
es continua, excepto cuando  $\cos x = 0$ ; es decir, excepto cuando  $x$  es un múltiplo entero *impar* de  $\pi/2$ . Como lo ilustra la figura 2.4.9,  $\tan x$  tiene una infinidad de discontinuidades en cada uno de tales puntos.



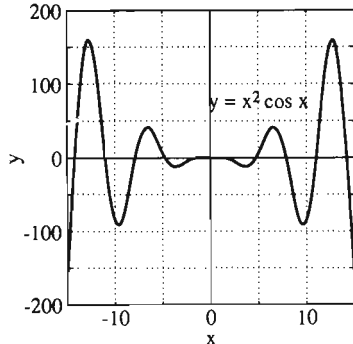
**Figura 2.4.9** La función  $\tan x$  tiene un número infinito de discontinuidades, en  $x = \pm \pi/2, \pm 3\pi/2, \dots$

## COMPOSICIÓN DE FUNCIONES CONTINUAS

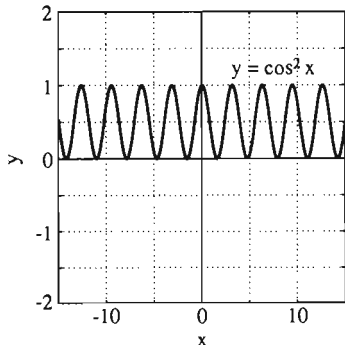
Se pueden formar muchas funciones variadas y complejas, usando funciones "bloques de construcción" relativamente sencillas. Además de sumar, restar,



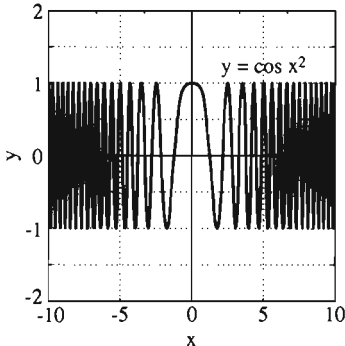
**Figura 2.4.10** La composición de  $f$  y  $g$



**Figura 2.4.11**  $y = x^2 \cos x$  (ejemplo 8)



**Figura 2.4.12**  $y = \cos^2 x$  (ejemplo 8)



**Figura 2.4.13**  $y = \cos x^2$  (ejemplo 8)

multiplicar o dividir dos funciones dadas, también podemos combinar funciones permitiendo que una función actúe sobre la salida de otra.

**Definición Composición de funciones**

La **composición** de las dos funciones  $f$  y  $g$  es la función  $h = f \circ g$  definida por

$$h(x) = f(g(x)) \quad (6)$$

para toda  $x$  en el dominio de  $g$  tal que  $u = g(x)$  esté en el dominio de  $f$ . [El lado derecho de la ecuación (6) se lee “ $f$  de  $g$  de  $x$ ”.]

Así, la salida  $u = g(x)$  de la función  $g$  se usa como la entrada de la función  $f$  (figura 2.4.10). A veces nos referiremos a  $g$  como la *función interior* y a  $f$  como la *función exterior* en la ecuación (6).

**EJEMPLO 7** Si  $f(x) = \sqrt{x}$  y  $g(x) = 1 - x^2$ , entonces

$$f(g(x)) = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{para } |x| \leq 1,$$

mientras que

$$g(f(x)) = 1 - (\sqrt{x})^2 = 1 - x \quad \text{para } x \geq 0.$$

La notación  $f(g(x))$  para las composiciones se utiliza por lo general en cálculos ordinarios, pero la notación  $f \circ g$  enfatiza que la composición se puede considerar como un nuevo tipo de combinación de las funciones  $f$  y  $g$ . Pero el ejemplo 7 muestra que  $f \circ g$  es muy diferente del producto  $fg$  de las dos funciones  $f$  y  $g$ :

$$f \circ g \neq g \circ f,$$

mientras que  $fg = gf$  [pues  $f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x)$  si  $f(x)$  y  $g(x)$  están definidas]. Así, recuerde que la composición tiene un carácter muy diferente de la multiplicación común de las funciones.

**EJEMPLO 8** Si

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = \cos x,$$

entonces las funciones

$$f(x)g(x) = x^2 \cos x,$$

$$f(g(x)) = \cos^2 x = (\cos x)^2, \quad \text{y}$$

$$g(f(x)) = \cos x^2 = \cos(x^2)$$

están definidas para toda  $x$ . Las figuras 2.4.11 a 2.4.13 ilustran vivamente lo distinto que son estas funciones.

**EJEMPLO 9** Dada la función  $h(x) = (x^2 + 4)^{3/2}$ , determine dos funciones  $f$  y  $g$  tales que  $h(x) = f(g(x))$ .

**Solución** Técnicamente, es correcto (pero inútil) hacer  $g(x) = x$  y  $f(u) = (u^2 + 4)^{3/2}$ . Aquí buscamos una respuesta no trivial. Para calcular  $(x^2 + 4)^{3/2}$  calculamos



primero  $x^2 + 4$ . Así, elegimos  $g(x) = x^2 + 4$  como la función interior. El último paso es elevar  $u = g(x)$  a la potencia  $3/2$ , por lo que consideramos  $f(u) = u^{3/2}$  como la función exterior. Así, si

$$f(x) = x^{3/2} \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 + 4,$$

entonces  $f(g(x)) = f(x^2 + 4) = (x^2 + 4)^{3/2} = h(x)$ .

El teorema 2 implica que las funciones construidas mediante la composición de funciones continuas también son continuas.

**Teorema 2 Continuidad de composiciones**

La composición de dos funciones continuas es continua. Más precisamente si  $g$  es continua en  $a$  y  $g$  es continua en  $g(a)$ , entonces  $f(g)$  es continua en  $a$ .

**Demostración** La continuidad de  $g$  en  $a$  significa que  $g(x) \rightarrow g(a)$  cuando  $x \rightarrow a$  y la continuidad de  $f$  en  $g(a)$  implica que  $f(g(x)) \rightarrow f(g(a))$  cuando  $g(x) \rightarrow g(a)$ . Por tanto, la propiedad de sustitución para límites (sección 2.2) implica

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = f(g(a)),$$

como se quería.  $\square$

Recuerde que, por la propiedad de la raíz de la sección 2.2,

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

bajo las condiciones de que  $n$  sea un entero y que  $a > 0$  si  $n$  es par. Así, la función raíz  $n$ -ésima  $f(x) = \sqrt[n]{x}$  es continua en todo punto si  $n$  es impar y continua para  $x > 0$  si  $n$  es par.

Podemos combinar este resultado con el teorema 2. Vemos entonces que la raíz de una función continua es continua en todo punto donde esté definida. Es decir, la composición

$$g(x) = [f(x)]^{1/n}$$

es continua en  $a$  si  $f$  lo es (suponiendo que  $f(a) > 0$  si  $n$  es par, de modo que  $\sqrt[n]{f(a)}$  esté definida).

**EJEMPLO 10** Muestre que la función

$$f(x) = \left(\frac{x - 7}{x^2 + 2x + 2}\right)^{2/3}$$

es continua en toda la recta real.

**Solución** Observe primero que el denominador

$$x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1$$

nunca se anula. Por lo tanto, la función racional

$$r(x) = \frac{x - 7}{x^2 + 2x + 2}$$

está definida y es continua en todo punto. El teorema 2 y la continuidad de la función raíz cúbica implican entonces que

$$f(x) = ([r(x)]^2)^{1/3}$$

es continua en todo punto. Así, por ejemplo,

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{x - 7}{x^2 + 2x + 2} \right)^{2/3} = f(-1) = (-8)^{2/3} = 4.$$

## FUNCIONES CONTINUAS EN INTERVALOS CERRADOS

Un problema de aplicación por lo general utiliza una función cuyo dominio es un *intervalo cerrado*. Por ejemplo, en el problema del corral para animales de la sección 1.1, vemos que el área  $A$  del corral rectangular de la figura 2.4.14 se expresó como una función de la longitud  $x$  de su base como

$$A = f(x) = \frac{3}{5}x(30 - x).$$

Aunque esta fórmula para  $f$  tiene sentido para toda  $x$ , únicamente los valores en el intervalo cerrado  $[0, 30]$  corresponden a rectángulos reales, por lo que tales valores son los pertinentes en el problema del corral.

La función  $f$  definida en el intervalo cerrado  $[a, b]$  es **continua en  $[a, b]$**  si es continua en todo punto del intervalo abierto  $(a, b)$  y si

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$$

Las últimas dos condiciones significan que en cada extremo, el valor de la función es igual a su límite dentro del intervalo. Por ejemplo, todo polinomio es continuo en todo intervalo cerrado. La función raíz cuadrada  $f(x) = \sqrt{x}$  es continua en el intervalo cerrado  $[0, 1]$  aunque  $f$  no esté definida para  $x < 0$ .

Las funciones continuas definidas en los intervalos cerrados tienen propiedades muy especiales. Por ejemplo, toda función de este tipo tiene la *propiedad del valor intermedio* del teorema 3. (La demostración de este teorema aparece en el apéndice C.) Anteriormente sugerimos que la continuidad de una función está relacionada con la posibilidad de trazar su gráfica sin levantar el lápiz del papel. El teorema 3 especifica esta propiedad con precisión.

### **Teorema 3 Propiedad del valor intermedio**

Suponga que la función  $f$  es continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$ . Entonces  $f(x)$  asume todo valor intermedio entre  $f(a)$  y  $f(b)$ . Es decir, si  $K$  es cualquier número entre  $f(a)$  y  $f(b)$ , entonces existe al menos un número  $c$  en  $(a, b)$  tal que  $f(c) = K$ .

La figura 2.4.15 muestra la gráfica de una función continua típica  $f$  cuyo dominio es el intervalo cerrado  $[a, b]$ . El número  $K$  se localiza en el eje  $y$ , en algún punto entre  $f(a)$  y  $f(b)$ . En la figura,  $f(a) < f(b)$ , pero esto no es importante. La recta horizontal que pasa por  $K$  debe cruzar la gráfica de  $f$  en algún punto, y la abscisa del punto donde se intersecan la gráfica y la recta proporciona el valor de  $c$ . El número  $c$  es aquel cuya existencia garantiza la propiedad del valor intermedio de la función continua  $f$ .

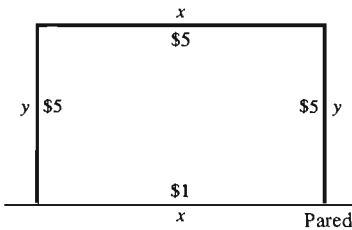
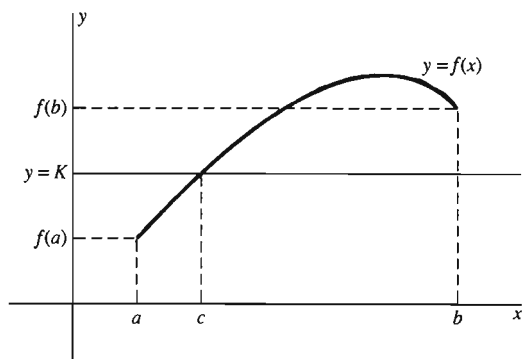


Figura 2.4.14 El corral de los animales

**Figura 2.4.15** La función continua  $f$  alcanza el valor intermedio  $K$  en  $x = c$ .

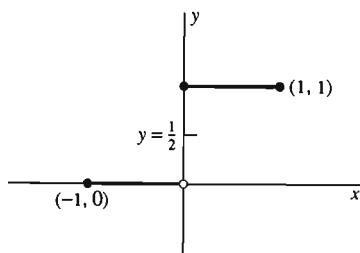


Así, la propiedad del valor intermedio implica que cada recta horizontal que cruce el eje  $y$  entre  $f(a)$  y  $f(b)$  debe **crucar** la gráfica de la función continua en algún punto. Ésta es una forma de decir que la gráfica no tiene huecos o saltos y sugiere que la idea de poder trazar la gráfica sin levantar el lápiz del papel es precisa.

**EJEMPLO 11** La función discontinua definida en  $[-1, 1]$  como

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

no alcanza el valor intermedio 0.5. Véase la figura 2.4.16.



**Figura 2.4.16** Esta función discontinua no tiene la propiedad del valor intermedio (ejemplo 11)

## EXISTENCIA DE SOLUCIONES A ECUACIONES

Una aplicación importante de la propiedad del valor intermedio es la verificación de la existencia de soluciones a ecuaciones escritas en la forma

$$f(x) = 0. \quad (7)$$

**EJEMPLO 12** La parte A del proyecto 1.3 exigió aproximar al número  $\sqrt{2}$  mediante acercamientos a la intersección de la parábola  $y = x^2 - 2$  con el eje  $x$  positivo. (Véase la figura 2.4.17.) La abscisa de la intersección proporciona la solución de la ecuación

$$f(x) = x^2 - 2 = 0. \quad (8)$$

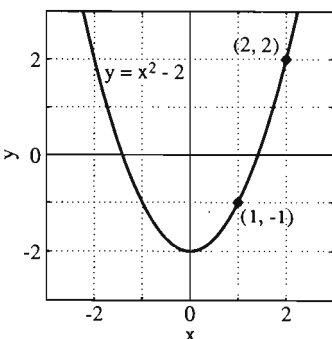
Tal vez no tenga sentido acercarse a este punto, a menos que sepamos que “realmente está ahí”. Pero podemos ver en la ecuación (8) que

$$f(1) = -1 < 0, \quad \text{mientras que} \quad f(2) = 2 > 0.$$

Observamos que la función  $f$  es continua en  $[1, 2]$  (es continua en todo punto) y que  $K = 0$  es un valor intermedio de  $f$  evaluada en el intervalo  $[1, 2]$ . Por tanto, el teorema 3 implica que  $f(c) = 0$  para algún número  $c$  en  $[1, 2]$ ; es decir, que

$$c^2 = 2.$$

El número  $c$  es la raíz cuadrada de 2 que buscábamos. Así, la propiedad del valor intermedio de las funciones continuas nos garantiza la existencia del número  $\sqrt{2}$ . Existe un número real cuyo cuadrado es 2.



**Figura 2.4.17** La gráfica de  $f(x) = x^2 - 2$  (ejemplo 12)

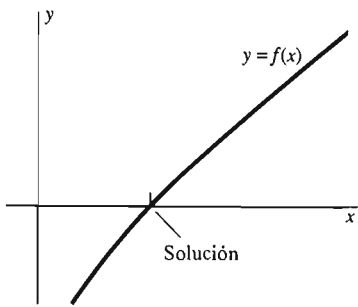


Figura 2.4.18 Una raíz de la ecuación  $f(x) = 0$

Como lo indica la figura 2.4.18, las soluciones de la ecuación (7) son simplemente los puntos donde la gráfica  $y=f(x)$  cruza el eje  $x$ . Supongamos que  $f$  es continua y que podemos determinar un intervalo cerrado  $[a, b]$  (como el intervalo  $[1, 2]$  del ejemplo 12) tales que el valor de  $f$  es positivo en un extremo de  $[a, b]$  y negativo en el otro. Es decir, supongamos que  $f(x)$  *cambia de signo* en el intervalo cerrado  $[a, b]$ . Entonces, la propiedad del valor intermedio garantiza que  $f(x) = 0$  en algún punto de  $[a, b]$ .

**EJEMPLO 13** Muestre que la ecuación

$$x^3 + x - 1 = 0$$

tiene una solución entre  $x = 0$  y  $x = 1$ .

**Solución** La función  $f(x) = x^3 + x - 1$  es continua en  $[0, 1]$ , pues es un polinomio. A continuación,  $f(0) = -1$  y  $f(1) = +1$ . Así, todo número entre  $-1$  y  $+1$  es un valor de  $f$  en  $(0, 1)$ . En particular,

$$f(0) < 0 < f(1),$$

de modo que la propiedad del valor intermedio de  $f$  implica que  $f$  alcanza el valor 0 en algún número  $c$  entre  $x = 0$  y  $x = 1$ . Es decir,  $f(c) = 0$  para algún número  $c$  en  $(0, 1)$ . En otras palabras,  $c^3 + c - 1 = 0$ . Por tanto, la ecuación  $x^3 + x - 1 = 0$  tiene una solución en  $(0, 1)$ .

## CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD

Hemos visto que una gran variedad de funciones son continuas. Aunque existen funciones continuas tan exóticas que no son derivables en todo punto, el teorema 4 nos dice que toda función derivable es continua.

### Teorema 4 *Derivabilidad implica continuidad*

Suponga que la función  $f$  está definida en una vecindad de  $a$ . Si  $f$  es derivable en  $a$ , entonces  $f$  es continua en  $a$ .

**Demostración** Como  $f'(a)$  existe, la propiedad del producto de los límites implica

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \right) \left( \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \\ &= 0 \cdot f'(a) = 0. \end{aligned}$$

Así,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ , de modo que  $f$  es continua en  $a$ .  $\square$

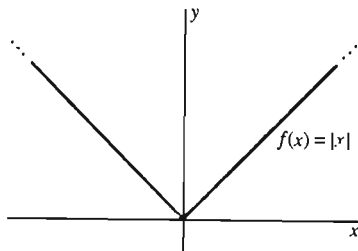


Figura 2.4.19 La gráfica de  $f(x) = |x|$

Aunque es complicado exhibir una función que no es derivable en todo punto pero que si es continua en todo punto, la función valor absoluto  $f(x) = |x|$  nos proporciona un sencillo ejemplo de una función continua en todo punto pero que no es derivable en el punto  $x=0$  (como vimos en el ejemplo 9 de la sección 2.3). El "pico" de la gráfica que se muestra en la figura 2.4.19 indica que  $y = |x|$  no tiene una recta tangente en  $(0, 0)$  y así  $f(x) = |x|$  no puede ser derivable en ese punto.

## 2.4 Problemas

En los problemas 1 a 10, determine  $f(g(x))$  y  $g(f(x))$ .

1.  $f(x) = 1 - x^2$ ,  $g(x) = 2x + 3$
2.  $f(x) = -17$ ,  $g(x) = |x|$
3.  $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$ ,  $g(x) = x^2 + 3$
4.  $f(x) = x^2 + 1$ ,  $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$
5.  $f(x) = x^3 - 4$ ,  $g(x) = \sqrt[3]{x + 4}$
6.  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = \cos x$
7.  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = x^3$
8.  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = \cos x$
9.  $f(x) = 1 + x^2$ ,  $g(x) = \tan x$
10.  $f(x) = 1 - x^2$ ,  $g(x) = \sin x$

En los problemas 11 a 20, determine una función de la forma  $f(x) = x^k$  (usted debe especificar  $k$ ) y una función  $g$  tales que  $f(g(x)) = h(x)$ .

- |                                      |  |
|--------------------------------------|--|
| 11. $h(x) = (2 + 3x)^2$              | 12. $h(x) = (4 - x)^3$                 |
| 13. $h(x) = \sqrt{2x - x^2}$         | 14. $h(x) = (1 + x^4)^{17}$            |
| 15. $h(x) = (5 - x^2)^{3/2}$         | 16. $h(x) = \sqrt[3]{(4x - 6)^4}$      |
| 17. $h(x) = \frac{1}{x + 1}$         | 18. $h(x) = \frac{1}{1 + x^2}$         |
| 19. $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x + 10}}$ | 20. $h(x) = \frac{1}{(1 + x + x^2)^3}$ |

En los problemas 21 a 42, señale los puntos donde la función con la fórmula dada es continua. Recuerde que cuando el dominio de una función no está especificado, es el conjunto de todos los números reales para los que la fórmula de la función tiene sentido.

- |  |   |
|--|---|
| 21. $f(x) = 2x + \sqrt[3]{x}$              | 22. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$              |
| 23. $f(x) = \frac{1}{x + 3}$               | 24. $f(x) = \frac{5}{5 - x}$                |
| 25. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$             | 26. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$              |
| 27. $f(x) = \frac{x - 5}{ x - 5 }$         | 28. $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$    |
| 29. $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x - 2}$         | 30. $f(x) = \sqrt[4]{4 + x^4}$              |
| 31. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x + 1}{x - 1}}$ | 32. $f(x) = \sqrt[3]{3 - x^3}$              |
| 33. $f(x) = \frac{3}{x^2 - x}$             | 34. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$                 |
| 35. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$      | 36. $f(x) = \sqrt{\frac{1 - x^2}{4 - x^2}}$ |

$$37. f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$$

$$38. f(x) = \frac{x}{\cos x}$$

$$39. f(x) = \frac{1}{\sin 2x}$$

$$40. f(x) = \sqrt{\sin x}$$

$$41. f(x) = \sin |x|$$

$$42. f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos x}}$$

En los problemas 43 a 52, indique los puntos donde la función dada no está definida y por tanto no es continua. Para tales puntos  $a$ , indique si la discontinuidad es removible.

$$43. f(x) = \frac{x}{(x + 3)^3}$$

$$44. f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$45. f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 4}$$

$$46. f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - x - 6}$$

$$47. f(x) = \frac{1}{1 - |x|}$$

$$48. f(x) = \frac{|x - 1|}{(x - 1)^3}$$

$$49. f(x) = \frac{x - 17}{|x - 17|}$$

$$50. f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$$

$$51. f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0; \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$52. f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1; \\ 3 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En los problemas 53 a 58, aplique la propiedad del valor intermedio de las funciones continuas para mostrar que la ecuación dada tiene una solución en el intervalo dado.

$$53. x^2 - 5 = 0 \text{ en } [2, 3]$$

$$54. x^3 + x + 1 = 0 \text{ en } [-1, 0]$$

$$55. x^3 - 3x^2 + 1 = 0 \text{ en } [0, 1]$$

$$56. x^3 = 5 \text{ en } [1, 2]$$

$$57. x^4 + 2x - 1 = 0 \text{ en } [0, 1]$$

$$58. x^5 - 5x^3 + 3 = 0 \text{ en } [-3, -2]$$

En los problemas 59 y 60, muestre que la ecuación dada tiene tres raíces distintas, calculando los valores del lado izquierdo en  $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2$  y 3 y aplicando después la propiedad del valor intermedio de las funciones continuas en los intervalos cerrados adecuados.

$$59. x^3 - 4x + 1 = 0$$

$$60. x^3 - 3x^2 + 1 = 0$$

61. Aplique la propiedad del valor intermedio de las funciones continuas para mostrar que todo número positivo  $a$  tiene una raíz cuadrada. Es decir, dado  $a > 0$ , demuestre que existe un número  $r$  tal que  $r^2 = a$ .

62. Aplique la propiedad del valor intermedio para demostrar que todo número real tiene una raíz cúbica.

63. Determine los puntos donde la función  $f(x) = \lfloor x/3 \rfloor$  es continua.

64. Determine los puntos donde la función  $f(x) = x + \llbracket x \rrbracket$  es continua.
65. Suponga que  $f(x) = 0$  si  $x$  es un número racional, mientras que  $f(x) = 1$  si  $x$  es irracional. Demuestre que  $f$  es discontinua en todo número real.
66. Suponga que  $f(x) = 0$  si  $x$  es un número racional, mientras que  $f(x) = x^2$  si  $x$  es irracional. Demuestre que  $f$  es continua solamente en el punto  $x = 0$ .
67. Muestre que la función  $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$  del ejemplo 4 de la sección 2.3 no es derivable en  $x = 0$ . [Sugerencia: Muestre

- que si  $z = 1$  o  $z = -1$ , existen valores arbitrariamente pequeños de  $h$  tales que  $[f(h) - f(0)]/h = z$ .]
68. Sea  $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$  para  $x \neq 0$ ;  $f(0) = 0$ . (La gráfica de  $f$  aparece en las figuras 2.4.20 y 2.4.21.) Aplique la definición de la derivada para mostrar que  $f$  es derivable en  $x = 0$  y que  $f'(0) = 0$ .
69. Muestre que la función coseno es continua en el conjunto de los números reales. [Sugerencia: Altere la demostración en el teorema 1 acerca de la continuidad de la función seno.]

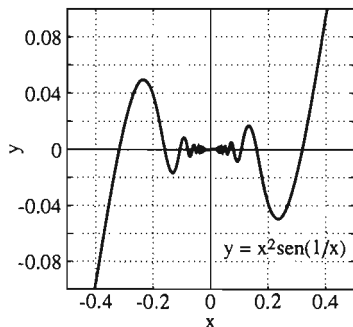


Figura 2.4.20 La gráfica de  $y = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$  (problema 68)

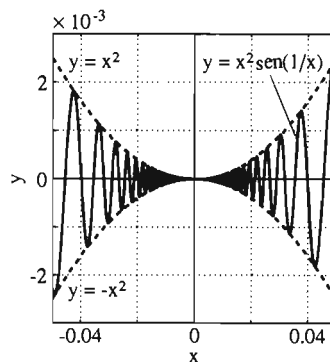


Figura 2.4.21 La gráfica de la figura 2.4.20 ampliada (problema 68)

## 2.4 Proyectos

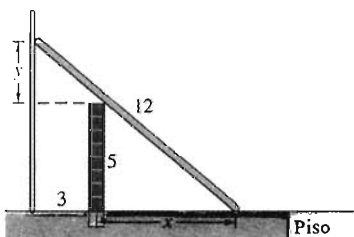


Figura 2.4.22. La escalera inclinada

Estos proyectos requieren una calculadora que tabule funciones o, de preferencia, una calculadora gráfica o computadora con capacidad de acercamiento.

**PROYECTO A** La figura 2.4.22 muestra la escalera inclinada de la parte C del proyecto 1.3. Ahí se le pidió que mostrara que las longitudes indicadas  $x$  y  $y$  satisfacen las ecuaciones

$$(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 144,$$

$$xy = 15.$$

Ahora, eliminamos  $y$  para obtener la ecuación

$$f(x) = x^4 + 6x^3 - 110x^2 + 150x + 225 = 0. \quad (9)$$

La figura 2.4.23 muestra la gráfica de  $f$ . Aplique la propiedad del valor intermedio de las funciones continuas para *demostrar* que la ecuación (9) tiene cuatro soluciones reales y localícelas en los intervalos donde los extremos son enteros consecutivos. Utilice después la tabulación repetida o las aproximaciones sucesivas para aproximar cada una de estas raíces con una precisión de tres cifras decimales. ¿Cuáles son los valores físicamente posibles de la distancia  $x$  desde la parte inferior de la cerca al pie de la escalera?

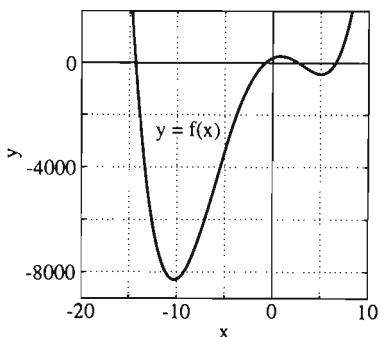


Figura 2.4.23 La gráfica de la ecuación de la escalera inclinada

**PROYECTO B** Un árbol de 100 pies está a 20 pies de una barda de 10 pies. Entonces, el árbol se “rompe” a una altura de  $x$  pies (figura 2.4.24) El árbol cae

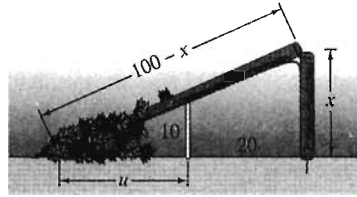


Figura 2.4.24 El árbol caído

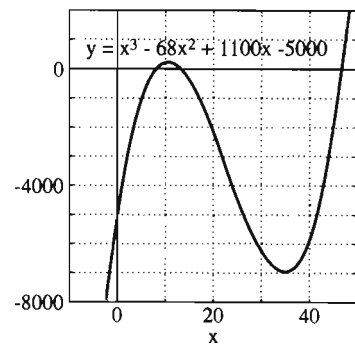


Figura 2.4.25 La gráfica de la ecuación del árbol caído

de modo que su tronco toque apenas la parte superior de la barda cuando la punta del árbol toque el piso del otro lado de la barda. Use triángulos semejantes y el teorema de Pitágoras para mostrar que  $x$  satisface la ecuación

$$f(x) = x^3 - 68x^2 + 1100x - 5000 = 0. \quad (10)$$

La figura 2.4.25 muestra la gráfica de  $f$ . Aplique la propiedad del valor intermedio de las funciones continuas para *demostrar* que la ecuación (10) tiene tres soluciones reales y localícelas en intervalos cuyos extremos sean enteros consecutivos. Utilice después la tabulación repetida o las aproximaciones sucesivas para aproximar cada una de las raíces con una precisión de tres cifras decimales. ¿Cuáles son las posibilidades físicas de la altura  $x$ ?

## Capítulo 2 Repaso: DEFINICIONES, CONCEPTOS, RESULTADOS

Use la siguiente lista como una guía de los conceptos que tal vez necesite repasar.

1. El límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $a$
2. Propiedades de los límites: constante, suma, producto, cociente, raíz, sustitución y sandwich
3. Definición de la derivada de una función
4. El proceso de cuatro pasos para determinar la derivada
5. La derivada de  $f(x) = ax^2 + bx + c$
6. Rectas tangente y normal a la gráfica de una función
7. El límite trigonométrico básico
8. Evaluación de límites de funciones trigonométricas
9. Límites por la derecha y por la izquierda
10. La relación entre los límites laterales y los límites por ambos lados
11. Límites infinitos
12. Composición de funciones
13. Continuidad de una función en un punto
14. Continuidad de polinomios y de funciones racionales
15. Continuidad de funciones trigonométricas
16. Continuidad de composiciones de funciones
17. Continuidad de una función en un intervalo cerrado
18. La propiedad del valor intermedio de funciones continuas
19. Derivabilidad implica continuidad

## Capítulo 2 Problemas diversos

Aplique las propiedades de límite para evaluar los límites en los problemas 1 a 40 o para mostrar que el límite indicado no existe, según el caso.

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 3x + 4)$
2.  $\lim_{x \rightarrow -1} (3 - x + x^3)$
3.  $\lim_{x \rightarrow 2} (4 - x^2)^{10}$
4.  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x - 1)^{17}$

$$5. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{1 - x}$$

$$9. \lim_{t \rightarrow -3} \frac{t^2 + 6t + 9}{9 - t^2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{x^2 - x - 3}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^2 + x - 2}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - x^3}{3x + x^2}$$

11.  $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 1)^{2/3}$
12.  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{2x^2 + 1}{2x}}$
13.  $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{5x + 1}{x^2 - 8}\right)^{3/4}$
14.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 + 2x - 3}$
15.  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x + 2} - 3}{x - 7}$
16.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - \sqrt{x^2 - 1})$
17.  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{1}{\frac{\sqrt{13 + x}}{x + 4} - \frac{1}{3}}$
18.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x}{|1 - x|}$
19.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - x}{\sqrt{4 - 4x + x^2}}$
20.  $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x + 2}{|x + 2|}$
21.  $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x - 4}{|x - 4|}$
22.  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{x^2 - 9}$
23.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{4 - x^2}$
24.  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x}{(x + 3)^2}$
25.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{(x - 2)^2}$
26.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x - 1}$
27.  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{x - 3}$
28.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 2}{x^2 - 3x + 2}$
29.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x + 1}{(x - 1)^3}$
30.  $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{25 - x^2}{x^2 - 10x + 25}$
31.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 3x}{x}$
32.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{x}$
33.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 3x}{\text{sen } 2x}$
34.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\tan 3x}$
35.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\text{sen } \sqrt{x}}$
36.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{2x}$
37.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{2x^2}$
38.  $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \cot x \csc x$
39.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec 2x \tan 2x}{x}$
40.  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cot^2 3x$

Aplique la fórmula para la derivada de  $f(x) = ax^2 + bx + c$  para derivar las funciones en los problemas 41 a 46. Escriba entonces una ecuación para la recta tangente a la curva en el punto  $y = f(x)$  en el punto  $(1, f(1))$ .

41.  $f(x) = 3 + 2x^2$       42.  $f(x) = x - 5x^2$
43.  $f(x) = 3x^2 + 4x - 5$       44.  $f(x) = 1 - 2x - 3x^2$
45.  $f(x) = (x - 1)(2x - 1)$       46.  $f(x) = \frac{x}{3} - \left(\frac{x}{4}\right)^2$

En los problemas 47 a 53, aplique la definición de la derivada para determinar  $f'(x)$ .

47.  $f(x) = 2x^2 + 3x$       48.  $f(x) = x - x^3$
49.  $f(x) = \frac{1}{3 - x}$       50.  $f(x) = \frac{1}{2x + 1}$

51.  $f(x) = x - \frac{1}{x}$       52.  $f(x) = \frac{x}{x + 1}$

53.  $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$

54. Determine la derivada de

$$f(x) = 3x - x^2 + |2x + 3|$$

en los puntos donde es derivable. Determine el punto donde  $f$  no es derivable. Trace la gráfica de  $f$ .

55. Escriba las ecuaciones de las dos rectas que pasan por  $(3, 4)$  que son tangentes a la parábola  $y = x^2$ . [Sugerencia: Sea  $(a, a^2)$  cualquier punto de tangencia; despeje primero  $a$ .]

56. Escriba una ecuación del círculo con centro  $(2, 3)$  tangente a la recta con ecuación  $x + y + 3 = 0$ .

57. Suponga que  $f(x) = 1 + x^2$ . Determine  $g$  tal que

$$f(g(x)) = 1 + x^2 - 2x^3 + x^4.$$

58. Suponga que  $g(x) = 1 + \sqrt{x}$ . Determine  $f$  tal que

$$f(g(x)) = 3 + 2\sqrt{x} + x.$$

En los problemas 59 a 62, determine una función  $g$  tal que  $f(g(x)) = h(x)$ .

59.  $f(x) = 2x + 3$ ,  $h(x) = 2x + 5$

60.  $f(x) = x + 1$ ,  $h(x) = x^3$

61.  $f(x) = x^2$ ,  $h(x) = x^4 + 1$

62.  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $h(x) = x^5$

En los problemas 63 a 66, explique por qué cada función es continua si está definida por la fórmula dada. Para cada punto  $a$  donde  $f$  no esté definida por la fórmula, indique si se puede asignar un valor a  $f(a)$  de modo que  $f$  sea continua en  $a$ .

63.  $f(x) = \frac{1 - x}{1 - x^2}$

64.  $f(x) = \frac{1 - x}{(2 - x)^2}$

65.  $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$

66.  $f(x) = \frac{|x^2 - 1|}{x^2 - 1}$

67. Aplique la propiedad del valor intermedio de las funciones continuas para demostrar que la ecuación  $x^5 + x = 1$  tiene una solución.

68. Aplique la propiedad del valor intermedio de las funciones continuas para demostrar que la ecuación  $x^5 - 3x^2 + 1 = 0$  tiene tres soluciones diferentes.

69. Muestre que existe un número  $x$  entre  $0$  y  $\pi/2$  tal que  $x = \cos x$ .

70. Muestre que existe un número  $x$  entre  $\pi/2$  y  $\pi$  tal que  $\tan x = -x$ . [Sugerencia: Trace primero las gráficas de  $y = \tan x$  y  $y = -x$ .]



# La derivada

□ Isaac Newton nació en una villa rural inglesa, la Navidad de 1642, tres meses después de la muerte de su padre. A la edad de tres años, su madre volvió a casarse y lo dejó con su abuela. No existen indicios en su niñez o en la escuela elemental que sugiriesen que su vida y obra serían un punto crucial en la historia de la humanidad.

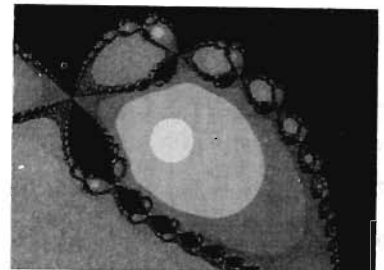
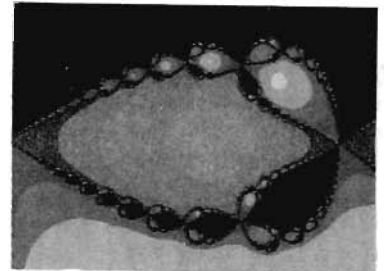
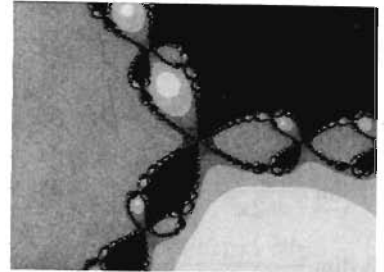
□ Pero debido a la influencia de un tío que intuía un potencial oculto en el joven Isaac, Newton pudo ingresar a la universidad de Cambridge en 1661. Durante los años 1665 y 1666, cuando Cambridge cerró sus puertas debido a la peste bubónica diseminada por Europa, él regresó a su tierra y estableció las bases para los tres grandes logros de su carrera científica: la invención del cálculo, el descubrimiento del espectro de los colores de la luz, y la teoría de la gravitación. De estos dos años, escribió posteriormente que “en aquellos días yo estaba en una etapa de invención y reflexionaba en las matemáticas y la filosofía más que en cualquier otra época anterior”. De hecho, a los 30 años de edad se dedicó más a experimentos químicos humeantes (e incluso de alquimia) que a investigaciones matemáticas serias.

□ A los 40 años, siendo profesor de matemáticas (y aparentemente un maestro con poco éxito) en Cambridge, Newton escribió los *Principia Mathematica* (1687), tal vez el

tratado científico de mayor influencia jamás publicado. En él, aplicó los conceptos del cálculo para explorar el universo, incluyendo los movimientos de la tierra, la luna y los planetas alrededor del sol. Se dice que un estudiante observó “ahí va el hombre que escribió un libro que ni él ni los demás comprenden”. Pero esta obra estableció tal fama para Newton que, después de su muerte en 1727, fue enterrado junto a los grandes de su país en la abadía de Westminster, con tal pompa que el filósofo Voltaire observó: “He visto un profesor de matemáticas... enterrado como un rey que hizo el bien a sus súbditos”.

□ Poco después de su graduación en Cambridge en 1665, Newton descubrió un nuevo método para resolver una ecuación de la forma  $f(x) = 0$ . A diferencia de los métodos particulares, como la fórmula cuadrática que solamente se aplica a ecuaciones de forma particular, el *método de Newton* se puede utilizar para aproximar las soluciones numéricas de casi toda ecuación. En la sección 3.9 presentamos una formulación iterativa del método de Newton que se adapta particularmente a las calculadoras y las computadoras. Ahí describimos la forma en que la combinación del método de Newton con las modernas gráficas por computadora han

ayudado a generar imágenes fractales impresionantes asociadas con la ciencia del *caos*. Las imágenes resultan de la aplicación de una versión del método de Newton para números complejos, a la ecuación sencilla  $x^3 + 1 = 0$ .



### 3.1 La derivada y las razones de cambio

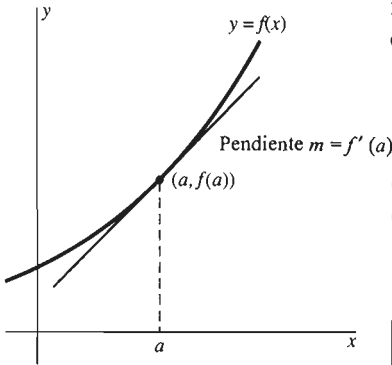


Figura 3.1.1 La motivación geométrica para la definición de la derivada

Nuestro estudio preliminar de las rectas tangentes y las derivadas en la sección 2.1 nos permitió estudiar los límites en el resto del capítulo 2. Con este conocimiento de límites, ahora estamos preparados para estudiar las derivadas de manera más extensa.

En la sección 2.1 presentamos la derivada  $f'(x)$  como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función  $f$  en el punto  $(x, f(x))$ . Más precisamente, nos motivó la geometría para *definir* la recta tangente a la gráfica en el punto  $P(a, f(a))$  como la línea recta que pasa por  $P$  con pendiente

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \tag{1}$$

como se indica en la figura 3.1.1. Si reemplazamos el número arbitrario  $a$  en la ecuación (1) con la variable independiente  $x$ , obtenemos una nueva función  $f'$ , la *derivada* de la función original  $f$ .

#### Definición de la derivada

La **derivada** de la función  $f$  es la función  $f'$  definida por

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2}$$

para todo  $x$  donde exista este límite.

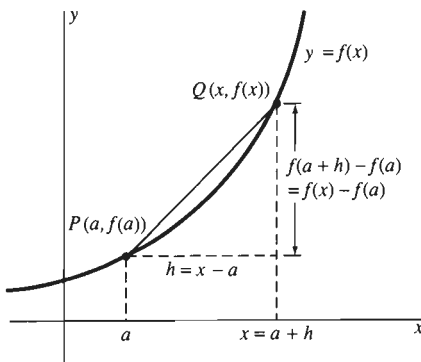


Figura 3.1.2 La notación en la ecuación (3)

La última frase de la definición requiere, en particular, que  $f$  esté definida en una vecindad de  $x$  para que  $f'(x)$  exista.

En la sección 2.1 enfatizamos que en la ecuación (2)  $x$  está *fijo*, mientras que  $h$  tiende a cero. Cuando estamos interesados particularmente en el valor de la derivada  $f'$  en  $x = a$ , a veces reescribimos la ecuación (2) en la forma

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{3}$$

El segundo límite de la ecuación (3) se obtiene del primero escribiendo  $x = a + h$ ,  $h = x - a$  y observando que  $x \rightarrow a$  cuando  $h \rightarrow 0$  (figura 3.1.2). La proposición relativa a la existencia de estos límites equivalentes es " $f'(x)$  existe". En este caso decimos que la función  $f$  es **derivable** (o **diferenciable**) en  $x = a$ . El proceso de encontrar la derivada  $f'$  se llama **derivación de  $f$** .

En la sección 2.1 y 2.2 vimos varios ejemplos que ilustran el proceso de derivación de una función dada  $f$  mediante la evaluación directa del límite en la ecuación (2). Esto implica llevar a cabo los cuatro pasos:

1. Escribir la definición en la ecuación (2) de la derivada.
2. Sustituir la expresión  $f(x+h)$  y  $f(x)$  según la función particular  $f$ .
3. Simplificar el resultado por métodos algebraicos para que el paso 4 sea posible.
4. Evaluar el límite (usualmente, aplicando algunas de las propiedades de los límites).

**EJEMPLO 1** Derive  $f(x) = \frac{x}{x+3}$ .

### Solución

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \left( \frac{x+h}{x+h+3} - \frac{x}{x+3} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)(x+3) - x(x+h+3)}{h(x+h+3)(x+3)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h(x+h+3)(x+3)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{(x+h+3)(x+3)} \\ &= \frac{3}{\left( \lim_{h \rightarrow 0} (x+h+3) \right) \left( \lim_{h \rightarrow 0} (x+3) \right)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$f'(x) = \frac{3}{(x+3)^2}.$$

---

Aun cuando la función  $f$  sea muy sencilla, el proceso de cuatro pasos para calcular  $f'$  directamente de la definición de la derivada puede ser tedioso. Además, el paso 3 puede requerir algo de ingenio. Podría ser demasiado repetitivo continuar basándose en este proceso. Para evitar el tedio, queremos un método más rápido, fácil y breve para calcular  $f'(x)$ .

Ese nuevo método es uno de los puntos centrales de este capítulo: el desarrollo de métodos sistemáticos (“reglas”) para derivar aquellas funciones que se presentan con más frecuencia. Estas funciones incluyen a los polinomios, las funciones racionales, las funciones trigonométricas  $\sin x$  y  $\cos x$  y las combinaciones de estas funciones. Una vez establecidas estas reglas de derivación general, podemos aplicarlas formalmente, casi de manera mecánica, para calcular derivadas. Raras veces tendremos que recurrir de nuevo a la definición de la derivada.

Un ejemplo de “regla de derivación” es el teorema de la sección 2.1 acerca de la derivación de las funciones cuadráticas:

$$\text{Si } f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ entonces } f'(x) = 2ax + b. \quad (4)$$

Una vez que conocemos esta regla, ya no necesitamos aplicar la definición de la derivada para derivar una función cuadrática. Por ejemplo, si  $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ , podemos aplicar la ecuación (4) para escribir lo siguiente, de inmediato, sin tener que realizar el proceso de los cuatro pasos:

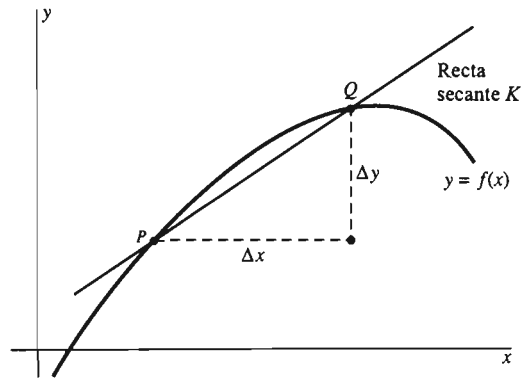
$$f'(x) = 2 \cdot (3x) + (-4) = 6x - 4.$$

En forma análoga, si  $g(t) = 2t - 5t^2$ , entonces

$$g'(t) = (2) + 2 \cdot (-5t) = 2 - 10t.$$

No hay diferencia alguna por el nombre de la función o porque escribamos  $x$  o  $t$  como variable independiente. Esta flexibilidad es valiosa (en general, esta adaptabilidad es lo que hace a las matemáticas aplicables a casi todas las demás ramas del conocimiento humano). En cualquier caso, usted debe aprender todas las reglas de la derivación independientemente de la notación usada para establecerlas.

En las secciones 3.2 a 3.4 desarrollaremos otras reglas de derivación. Sin embargo, primero debemos presentar una nueva notación y una nueva interpretación de la derivada.



**Figura 3.1.3** Origen de la notación  $dy/dx$

## NOTACIÓN DIFERENCIAL

Una notación alternativa importante para la derivada surge de la costumbre inicial de escribir  $\Delta x$  en vez de  $h$  (ya que  $h = \Delta x$  es un incremento en  $x$ ) y

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

para el cambio resultante (o incremento) en  $y$ . La pendiente de la recta secante  $K$  de la figura 3.1.3 es entonces

$$m_{\text{sec}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

y la pendiente de la recta tangente es

$$m = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (5)$$

En consecuencia, si  $y = f(x)$ , escribimos con frecuencia

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f'(x)}. \quad (6)$$

(Analizamos las llamadas *diferenciales*  $dy$  y  $dx$  con cuidado en el capítulo 4.) Los símbolos  $f'(x)$  y  $dy/dx$  para la derivada de la función  $y = f(x)$  se usan de modo casi intercambiable en las matemáticas y sus aplicaciones, por lo que deberá familiarizarse con ambas notaciones. También debe saber que  $dy/dx$  es un único símbolo que representa la derivada, *no* el cociente de dos cantidades separadas  $dy$  y  $dx$ .

**EJEMPLO 2** Si  $y = ax^2 + bx + c$ , entonces la derivada de la ecuación (4) en notación diferencial toma la forma

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b.$$

En consecuencia,

$$\text{si } y = 3x^2 - 4x + 5, \text{ entonces } \frac{dy}{dx} = 6x - 4;$$

$$\text{si } z = 2t - 5t^2, \text{ entonces } \frac{dz}{dt} = 2 - 10t.$$

La letra  $d$  en la notación  $dy/dx$  se refiere a la palabra “diferencial”. Ya sea que escribamos  $dy/dx$  o  $dz/dt$ , la variable dependiente aparece “arriba” y la variable independiente “abajo”.

## RAZÓN DE CAMBIO

En la sección 2.1 presentamos la derivada de una función como la pendiente de la recta tangente a su gráfica. Aquí presentamos la interpretación igualmente importante de la derivada de una función como la razón de cambio de esa función con respecto de la variable independiente.

Comenzamos con la *razón instantánea de cambio* de una función cuya variable independiente es el tiempo  $t$ . Suponga que  $Q$  es una cantidad que varía con respecto del tiempo  $t$ , y que escribimos  $Q=f(t)$  para el valor de  $Q$  en el instante  $t$ . Por ejemplo,  $Q$  podría ser

- El tamaño de una población (de canguros, gente o bacterias);
- La cantidad de dólares en una cuenta bancaria;
- El volumen de un globo que está siendo inflado;
- La cantidad de agua en una reserva con flujo variable;
- La cantidad de un producto químico producido en una reacción; o
- La distancia recorrida  $t$  horas después del comienzo de un viaje.

El cambio en  $Q$  desde el tiempo  $t$  hasta el tiempo  $t + \Delta t$  es el **incremento**

$$\Delta Q = f(t + \Delta t) - f(t).$$

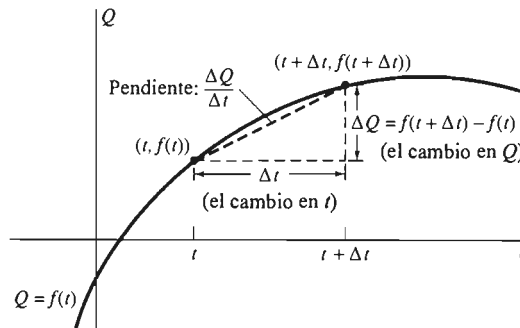
La **razón de cambio promedio** de  $Q$  (por unidad de tiempo) es, por definición, la razón de cambio  $\Delta Q$  en  $Q$  con respecto del cambio  $\Delta t$  en  $t$ , por lo que es el cociente

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \quad (7)$$

ilustrado en la figura 3.1.4.

Definimos la **razón de cambio instantánea** de  $Q$  (por unidad de tiempo) como el límite de esta razón promedio cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ . Es decir, la razón de cambio instantánea de  $Q$  es

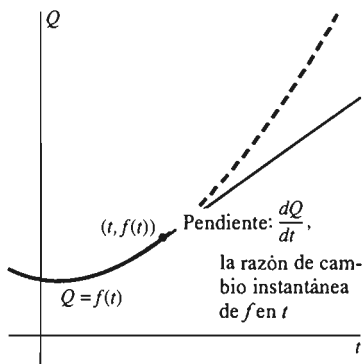
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \quad (8)$$



**Figura 3.1.4** La razón de cambio promedio como una pendiente

Pero el límite del lado derecho en la ecuación (8) es simplemente la derivada  $f'(t)$ . Así, vemos que la razón de cambio instantánea de  $Q = f(t)$  es la derivada

$$\frac{dQ}{dt} = f'(t). \quad (9)$$



**Figura 3.1.5** La relación entre la recta tangente en  $(t, f(t))$  y la razón de cambio instantánea de  $f$  en  $t$

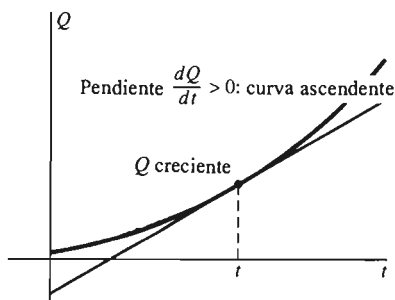
Para interpretar intuitivamente el concepto de razón de cambio instantánea, piense que el punto  $P(t, f(t))$  se mueve a lo largo de la gráfica de la función  $Q = f(t)$ . Cuando  $Q$  cambia con el tiempo  $t$ , el punto  $P$  se mueve a lo largo de la curva. Pero si súbitamente, en el instante  $t$ , el punto  $P$  comienza a seguir una trayectoria recta, entonces la nueva trayectoria de  $P$  aparecería como en la figura 3.1.5. La curva punteada de la figura corresponde al comportamiento “originalmente planeado” de  $Q$  (antes de que  $P$  decidiera continuar por una trayectoria recta). Pero la trayectoria recta de  $P$  (de pendiente constante) corresponde a la cantidad  $Q$  “que cambia a una razón constante”. Como la línea recta es tangente a la gráfica  $Q = f(t)$ , podemos interpretar  $dQ/dt$  como la razón de cambio instantánea de la cantidad  $Q$  en el instante  $t$ :

La razón de cambio instantánea de  $Q = f(t)$  en el instante  $t$  es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva  $Q = f(t)$  en el punto  $(t, f(t))$ .

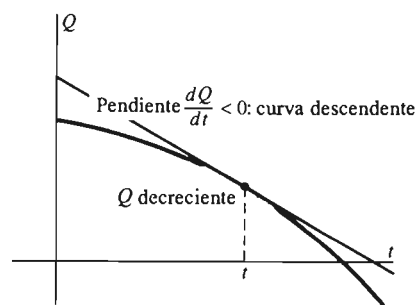
Podemos obtener más conclusiones importantes. Dado que una pendiente positiva corresponde a una recta tangente ascendente y una pendiente negativa corresponde a una recta tangente descendente (como en las figuras 3.1.6 y 3.1.7), decimos que

$$Q \text{ es creciente en el instante } t \text{ si } \frac{dQ}{dt} > 0; \quad (10)$$

$$Q \text{ es decreciente en el instante } t \text{ si } \frac{dQ}{dt} < 0.$$



**Figura 3.1.6** Cantidad creciente, derivada positiva

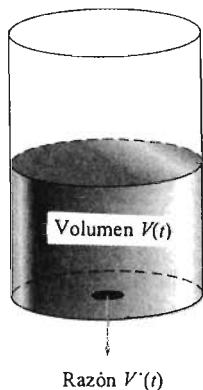


**Figura 3.1.7** Cantidad decreciente, derivada negativa

**NOTA** El significado de la frase “ $Q = f(t)$  es creciente en (o durante) el intervalo de tiempo de  $t = a$  a  $t = b$ ” debe ser intuitivamente claro. Las expresiones en (10) nos proporcionan una forma de precisar lo que significa “ $Q = f(t)$  es creciente en el instante  $t$ ”.

**EJEMPLO 3** El tanque cilíndrico de la figura 3.1.8 tiene un eje vertical y se llena inicialmente con 600 galones de agua. Este tanque tarda 60 minutos en vaciarse después de abrir el desagüe en su parte inferior. Suponga que el desagüe se abre en el instante  $t = 0$ , y que el volumen  $V$  del agua restante en el tanque después de  $t$  minutos es

$$V(t) = \frac{1}{6}(60 - t)^2 = 600 - 20t + \frac{1}{6}t^2$$



**Figura 3.1.8** El tanque de desagüe del ejemplo 3

galones. Determine la razón instantánea con la que el agua fluye fuera del tanque en el instante  $t = 15$  (minutos) y en el instante  $t = 45$  (minutos). Determine también la razón promedio con la que el agua fluye fuera del tanque durante la media hora de  $t = 15$  a  $t = 45$ .

**Solución** La razón de cambio instantánea del volumen  $V(t)$  del agua en el tanque está dada por la derivada

$$\frac{dV}{dt} = -20 + \frac{1}{3}t.$$

Cuando  $t = 15$  y  $t = 45$ , obtenemos

$$V'(15) = -20 + \frac{1}{3} \cdot 15 = -15$$

y

$$V'(45) = -20 + \frac{1}{3} \cdot 45 = -5.$$

Aquí las unidades son galones por minuto (galones/minuto). El hecho de que  $V'(15)$  y  $V'(45)$  sean negativas es consistente con la observación de que  $V$  es una función decreciente de  $t$  (cuando  $t$  crece,  $V$  decrece). Una forma de indicar esto es decir que después de 15 minutos, el agua fluye *hacia fuera* del tanque a 15 galones/minuto; después de 45 minutos, el agua fluye *hacia fuera* a 5 galones/minuto. La razón de cambio instantánea de  $V$  en  $t = 15$  es  $-15$  galones/minuto, y la razón de cambio instantánea de  $V$  en  $t = 45$  es  $-5$  galones/minuto. Podríamos haber predicho las unidades, ya que  $\Delta V/\Delta t$  es una razón de galones sobre minutos y por consiguiente su límite  $V'(t) = dV/dt$  debe expresarse en las mismas unidades.

Durante el intervalo de tiempo de longitud  $\Delta t = 30$  minutos del tiempo  $t = 15$  a  $t = 45$ , la razón de cambio *promedio* en el volumen  $V(t)$  es

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{\Delta t} &= \frac{V(45) - V(15)}{45 - 15} \\ &= \frac{\frac{1}{6}(60 - 45)^2 - \frac{1}{6}(60 - 15)^2}{45 - 15} = \frac{-300}{30}. \end{aligned}$$

Cada numerador en la última ecuación se mide en galones (esto es particularmente aparente si se analiza el segundo numerador); cada denominador se mide en minutos. Por lo tanto, la razón en la última fracción es una razón de galones a minutos, por lo que la razón de cambio promedio del volumen  $V$  de agua en el tanque es  $-10$  galones/minuto. Así la razón promedio de agua *hacia fuera* del tanque durante este intervalo de media hora es 10 galones/minuto.

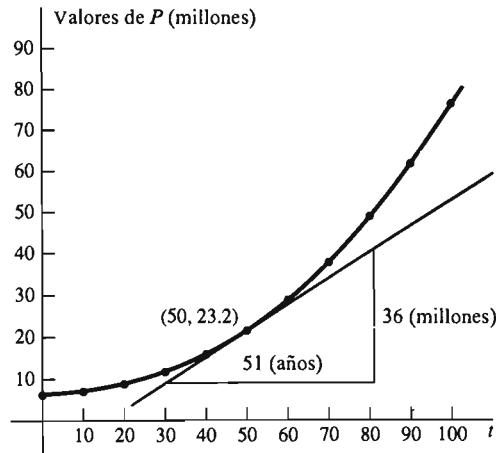
$t$	Año	Población de los Estados Unidos (en millones)
0	1800	5.3
10	1810	7.2
20	1820	9.6
30	1830	12.9
40	1840	17.1
50	1850	23.2
60	1860	31.4
70	1870	38.6
80	1880	50.2
90	1890	62.9
100	1900	76.0

Figura 3.1.9 Datos del ejemplo 4

Hasta este punto nuestros ejemplos de funciones se han restringido a funciones con fórmulas o descripciones verbales. Los científicos e ingenieros trabajan frecuentemente con tablas de valores obtenidas a partir de observaciones o experimentos. El ejemplo 4 muestra cómo tabular las razones de cambio instantáneas de estas funciones.

**EJEMPLO 4** La tabla de la figura 3.1.9 proporciona la población  $P$  en los Estados Unidos (en millones) en el siglo diecinueve, con intervalos de 10 años. Estime la razón instantánea de crecimiento de la población en 1850.

**Solución** Consideremos  $t = 0$  (años) en 1800, por lo que  $t = 50$  corresponde al año 1850. En la figura 3.1.10, tenemos los datos graficados a mano, con una curva suave que se adapta a estos datos.



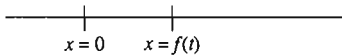
**Figura 3.1.10** Una curva suave que se adapta bien a los datos de la figura 3.1.9 (ejemplo 4)

Sin importar cómo la obtengamos, una curva adaptada a los datos debe ser una buena aproximación de la gráfica real de la función desconocida  $P = f(t)$ . La razón de cambio instantánea  $dP/dt$  en 1850 es la pendiente de la recta tangente en el punto (50, 23.2). Trazamos la tangente lo más aproximada posible, mediante una inspección visual y después medimos la base y la altura del triángulo de la figura 3.1.10. De esta forma aproximamos la pendiente de la tangente en  $t = 50$  como

$$\frac{dP}{dt} \approx \frac{36}{51} \approx 0.71$$

millones de personas por año (en 1850). Aunque no hubo un censo nacional en 1851, podríamos estimar que la población de Estados Unidos era aproximadamente de  $23.2 + 0.7 = 23.9$  millones.

## VELOCIDAD Y ACELERACIÓN



**Figura 3.1.11** La partícula en movimiento está en el punto  $x = f(t)$  en el instante  $t$

Suponga que una partícula se mueve a lo largo de una recta horizontal, de modo que su posición  $x$  en el instante  $t$  está dada por la **función de posición**  $x = f(t)$ . Así, hacemos que la línea de movimiento sea un eje coordenado con un origen y una dirección positiva;  $f(t)$  es solamente la abscisa de la partícula en movimiento en el instante  $t$  (figura 3.1.11).

Pensemos en el intervalo de tiempo de  $t$  a  $t + \Delta t$ . La partícula se mueve de la posición  $f(t)$  a la posición  $f(t + \Delta t)$  durante este intervalo. Su desplazamiento es entonces el incremento

$$\Delta f = f(t + \Delta t) - f(t).$$

Calculamos la **velocidad promedio** de la partícula durante este lapso exactamente como calcularíamos la velocidad promedio en un largo viaje: dividimos la distancia entre el tiempo para obtener una velocidad promedio, en millas por hora. En este caso dividimos el desplazamiento de la partícula entre el tiempo transcurrido para obtener la **velocidad promedio**

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \quad (11)$$

(La barra superior es un símbolo estándar que denota por lo general un promedio de algún tipo.) Definimos la **velocidad instantánea**  $v$  de la partícula en el instante  $t$  como el límite de la velocidad promedio  $\bar{v}$  cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ . Es decir,

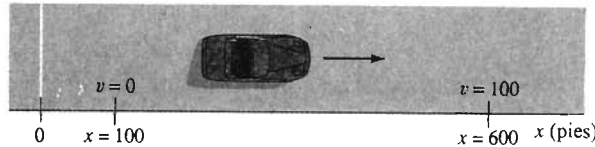


$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \quad (12)$$

Reconocemos el límite de la derecha de la ecuación (12): es la definición de la derivada  $f$  con respecto del tiempo  $t$ . Por lo tanto, la velocidad de la partícula en movimiento en el instante  $t$  es simplemente

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t). \quad (13)$$

Así la **velocidad** es la razón de cambio instantánea de la posición. La velocidad de una partícula en movimiento puede ser positiva o negativa, según si la partícula se mueve en dirección positiva o negativa a lo largo de la línea en movimiento. Definimos la **rapidez** de la partícula como el *valor absoluto* de la velocidad:  $|v|$ .



**Figura 3.1.12** El automóvil del ejemplo 5

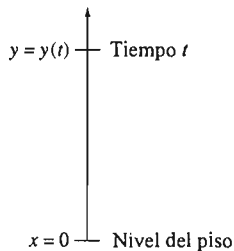
**EJEMPLO 5** La figura 3.1.12 muestra un automóvil en movimiento a lo largo del eje  $x$  (horizontal). Suponga que su posición (en pies) en el instante  $t$  (en segundos) está dada por

$$x(t) = 5t^2 + 100.$$

Entonces su velocidad en el instante  $t$  es

$$v(t) = x'(t) = 10t.$$

Puesto que  $x(0) = 100$  y  $v(0) = 0$ , el automóvil parte del reposo ( $v(0) = 0$ ) en el instante  $t = 0$ , desde el punto  $x = 100$ . Si  $t = 10$ , vemos que  $x(10) = 600$  y  $v(10) = 100$ , por lo que después de 10 segundos el automóvil ha viajado 500 pies (desde el punto inicial  $x = 100$ ) y su rapidez es 100 pies/segundo.



**Figura 3.1.13** Movimiento vertical con función de posición  $y(t)$

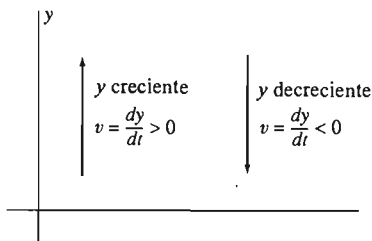
## MOVIMIENTO VERTICAL

En el caso del movimiento vertical (como el de una pelota que se lanza hacia arriba de forma recta) es común denotar la función de posición como  $y(t)$  en vez de  $x(t)$ . Típicamente,  $y(t)$  denota la altura sobre el suelo en el instante  $t$ , como en la figura 3.1.13. Pero la velocidad sigue siendo la derivada de la posición:

$$v(t) = \frac{dy}{dt}.$$

El *movimiento hacia arriba* con  $y$  creciente corresponde a una *velocidad positiva*,  $v > 0$  (figura 3.1.14). El *movimiento hacia abajo* con  $y$  decreciente corresponde a la *velocidad negativa*,  $v < 0$ .

El caso del movimiento vertical bajo la influencia de la constante de gravedad es de especial interés. Si una partícula se lanza hacia arriba en forma recta desde una altura inicial  $y_0$  (pies) sobre el suelo en el instante  $t = 0$  (segundos) y con una velocidad inicial  $v_0$  (pies/segundos) y si la resistencia del aire es despreciable, entonces su altura  $y$  (en pies por arriba del suelo) en el instante  $t$  está dada por una fórmula conocida de la física,



**Figura 3.1.14** Movimiento hacia arriba y hacia abajo

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0. \quad (14)$$

donde  $g$  denota la *aceleración* debida a la fuerza de gravedad. Cerca de la superficie de la tierra,  $g$  es casi constante, por lo que suponemos que es exactamente constante; en la superficie de la tierra,  $g \approx 32$  pies/s<sup>2</sup>, o  $g \approx 9.8$  m/s<sup>2</sup>.

Si derivamos  $y$  con respecto de  $t$ , obtenemos la velocidad de la partícula en el instante  $t$ :

$$v = \frac{dy}{dt} = -gt + v_0. \quad (15)$$

La **aceleración** de la partícula se define como la razón de cambio instantánea (derivada) de su velocidad:

$$a = \frac{dv}{dt} = -g. \quad (16)$$

Su intuición le dirá que un cuerpo proyectado hacia arriba de esta forma alcanzará su máxima altura cuando su velocidad sea cero (cuando  $v(t) = 0$ ; en la sección 3.5 veremos por qué esto es verdadero).

**EJEMPLO 6** Determine la altura máxima que alcanza una pelota lanzada en forma recta hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de  $v_0 = +96$  pies/segundo. Determine también la velocidad con la cual golpea al suelo a su regreso.

**Solución** Para iniciar la solución del problema de un movimiento como éste, realizamos un diagrama similar al de la figura 3.1.15, indicando los datos y las cantidades desconocidas en los instantes en cuestión. Aquí nos centramos en el tiempo  $t = 0$ , cuando la pelota deja el suelo ( $y = 0$ ), el tiempo desconocido cuando alcanza su máxima altura con velocidad  $v = 0$ , y el tiempo desconocido cuando regresa al suelo.

Comenzamos con la ecuación (15), con  $v_0 = 96$  y  $g = 32$ . Vemos que la velocidad de la pelota en el instante  $t$  es

$$v(t) = -32t + 96$$

mientras permanece en el aire. La pelota alcanza su altura máxima cuando  $v(t) = 0$ , es decir, cuando

$$-32t + 96 = 0.$$

Esto sucede en el instante  $t = 3$  (segundos). Al sustituir este valor de  $t$  en la función de altura en la ecuación (14), con  $y_0 = 0$ , encontramos que la altura máxima de la pelota es

$$y_{\text{máx}} = y(3) = (-16)(3^2) + (96)(3) = 144 \quad (\text{pies}).$$

La pelota regresa al suelo cuando  $y(t) = 0$ . La ecuación

$$y(t) = -16t^2 + 96t = -16t(t - 6) = 0$$

tiene dos soluciones  $t = 0$  y  $t = 6$ . Así, la pelota regresa al suelo en el instante  $t = 6$ . La velocidad con la que golpea el suelo es

$$v(6) = (-32)(6) + 96 = -96 \quad (\text{pies/s}).$$

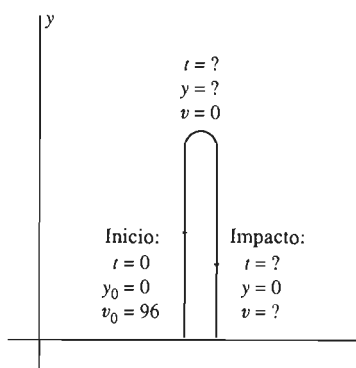


Figura 3.1.15 Datos para la pelota del ejemplo 6

La derivada de cualquier función, no solamente una función del tiempo, puede interpretarse como su razón de cambio instantánea con respecto de la variable independiente. Si  $y = f(x)$ , entonces la **razón de cambio promedio de  $y$**  (por un cambio unitario en  $x$ ) en el intervalo  $[x, x + \Delta x]$  es el cociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

La **razón de cambio instantánea de  $y$  con respecto de  $x$**  es el límite, cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ , de la razón de cambio promedio. Así, la razón de cambio instantánea de  $y$  con respecto de  $x$  es

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x). \quad (17)$$

El ejemplo 7 ilustra el hecho de que una variable dependiente puede expresarse a veces como dos funciones diferentes de dos variables independientes diferentes. Las derivadas de estas funciones son entonces las razones de cambio de la variable dependiente con respecto de dos variables independientes diferentes.

**EJEMPLO 7** El área del cuadrado cuya longitud por lado es de  $x$  centímetros es  $A = x^2$ , por lo que la derivada de  $A$  con respecto de  $x$ ,

$$\frac{dA}{dx} = 2x, \quad (18)$$

es la razón de cambio de su área  $A$  con respecto de  $x$ . (Véanse los cálculos en la figura 3.1.16.) Las unidades de  $dA/dx$  son centímetros cuadrados *por centímetro*. Ahora suponga que la longitud del lado del cuadrado aumenta con el tiempo:  $x = 5t$ , con el tiempo  $t$  en segundos. Entonces, el área del cuadrado en el instante  $t$  es

$$A = (5t)^2 = 25t^2.$$

La derivada de  $A$  con respecto de  $t$  es

$$\frac{dA}{dt} = (2)(25t) = 50t; \quad (19)$$

ésta es la razón de cambio de  $A$  con respecto del tiempo  $t$ , con unidades de centímetros cuadrados *por segundo*. Por ejemplo, si  $t = 10$  (de modo que  $x = 50$ ), los valores de las dos derivadas de  $A$  de las ecuaciones (18) y (19) son

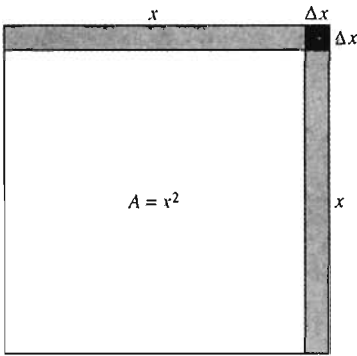
$$\left. \frac{dA}{dx} \right|_{x=50} = (2)(50) = 100 \quad (\text{cm}^2/\text{cm})$$

y

$$\left. \frac{dA}{dt} \right|_{t=10} = (50)(10) = 500 \quad (\text{cm}^2/\text{s}).$$

---

La notación  $dA/dt$  para la derivada tiene un inconveniente menor, ya que no proporciona un “lugar” para sustituir un valor particular de  $t$ , como  $t = 10$ . Las últimas líneas del ejemplo 7 ilustran una forma de sortear esta dificultad.



**Figura 3.1.16** El cuadrado del ejemplo 7:

$$\begin{aligned} A + \Delta A &= (x + \Delta x)^2; \\ \Delta A &= 2x \Delta x + (\Delta x)^2; \\ \frac{\Delta A}{\Delta x} &= 2x + \Delta x; \\ \frac{dA}{dx} &= 2x. \end{aligned}$$

### 3.1 Problemas

En los problemas 1 a 10, determine la derivada indicada usando la regla de derivación en (4):

Si  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , entonces  $f'(x) = 2ax + b$ .

1.  $f(x) = 4x - 5$ ; determine  $f'(x)$ .
2.  $g(t) = 100 - 16t^2$ ; determine  $g'(t)$ .
3.  $h(z) = z(25 - z)$ ; determine  $h'(z)$ .
4.  $f(x) = 16 - 49x$ ; determine  $f'(x)$ .
5.  $y = 2x^2 + 3x - 17$ ; determine  $dy/dx$ .
6.  $x = 16t - 100t^2$ ; determine  $dx/dt$ .
7.  $z = 5u^2 - 3u$ ; determine  $dz/du$ .
8.  $v = 5y(100 - y)$ ; determine  $dv/dy$ .
9.  $x = -5y^2 + 17y + 300$ ; determine  $dx/dy$ .
10.  $u = 7t^2 + 13t$ ; determine  $du/dt$ .

En los problemas 11 a 20, aplique la definición de la derivada (como en el ejemplo 1) para determinar  $f'(x)$ .

- |                               |                                     |
|-------------------------------|-------------------------------------|
| 11. $f(x) = 2x - 1$           | 12. $f(x) = 2 - 3x$                 |
| 13. $f(x) = x^2 + 5$          | 14. $f(x) = 3 - 2x^2$               |
| 15. $f(x) = \frac{1}{2x + 1}$ | 16. $f(x) = \frac{1}{3 - x}$        |
| 17. $f(x) = \sqrt{2x + 1}$    | 18. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x + 1}}$ |
| 19. $f(x) = \frac{x}{1 - 2x}$ | 20. $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$    |

En los problemas 21 a 25, damos la función de posición  $x = f(t)$  de una partícula en movimiento en una recta horizontal. Determine su posición  $x$  cuando su velocidad  $v$  es cero.

21.  $x = 100 - 16t^2$
22.  $x = -16t^2 + 160t + 25$
23.  $x = -16t^2 + 80t - 1$
24.  $x = 100t^2 + 50$
25.  $x = 100 - 20t - 5t^2$

En los problemas 26 al 29, damos la altura  $y(t)$  (en pies en el instante  $t$  segundos) de una pelota lanzada verticalmente hacia arriba. Determine la altura máxima que alcanza la pelota.

26.  $y = -16t^2 + 160t$
27.  $y = -16t^2 + 64t$
28.  $y = -16t^2 + 128t + 25$
29.  $y = -16t^2 + 96t + 50$

30. La temperatura Celsius  $C$  está dada en términos de la temperatura Fahrenheit  $F$  por  $C = 5/9(F - 32)$ . Determine la razón de cambio de  $C$  con respecto de  $F$  y la razón de cambio de  $F$  con respecto de  $C$ .

31. Determine la razón de cambio del área  $A$  de un círculo con respecto de su circunferencia  $C$ .

32. Una piedra lanzada a un estanque en el instante  $t = 0$  segundos causa una onda circular que viaja fuera del punto de impacto a razón de 5 m/s. ¿A qué razón (en metros cuadrados/segundo) crece el área dentro del círculo cuando  $t = 10$ ?

33. Un automóvil viaja a 100 pies/segundo, cuando el conductor aplica los frenos repentinamente ( $x = 0$ ,  $t = 0$ ). La función de posición del automóvil que patina es  $x(t) = 100t - 5t^2$ . ¿Qué distancia recorre y cuánto tiempo tarda el automóvil antes de pararse?

34. Una cubeta con 10 galones de agua comienza a gotear en el instante  $t = 0$ ; el volumen  $V$  de agua en la cubeta  $t$  segundos más tarde está dado por

$$V(t) = 10\left(1 - \frac{t}{100}\right)^2$$

hasta que la cubeta se vacía en el instante  $t = 100$ . (a) ¿A qué razón sale el agua de la cubeta después de un minuto? (b) ¿En qué instante son iguales la razón de cambio instantánea de  $V$  y la razón de cambio promedio de  $V$  de  $t = 0$  a  $t = 100$ ?

35. Una población de chimpancés se desplaza a una región nueva en el instante  $t = 0$ . En el instante  $t$  (en meses), la población es de

$$P(t) = 100[1 + (0.3)t + (0.04)t^2].$$

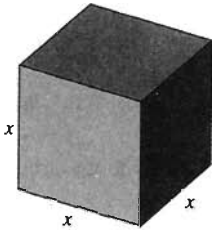
(a) ¿Cuánto tiempo tarda la población en duplicar su tamaño inicial  $P(0)$ ? (b) ¿Cuál es la razón de crecimiento de la población cuando  $P = 200$ ?

36. Los siguientes datos describen el crecimiento de la población  $P$  (en miles) de Ciudad Gótica durante un periodo de 10 años. Use el método gráfico del ejemplo 4 para estimar su razón de crecimiento en 1989.

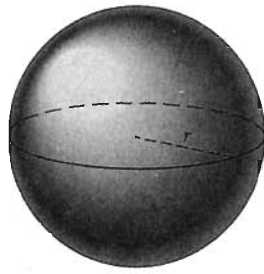
Año	1984	1986	1988	1990	1992	1994
$P$	265	293	324	358	395	437

37. Los siguientes datos proporcionan la distancia  $x$  en pies recorrida por un automóvil en aceleración durante los primeros  $t$  segundos (que parte del reposo en el instante  $t = 0$ ). Use el método gráfico del ejemplo 4 para estimar su velocidad (en millas/hora) cuando  $t = 20$  y también cuando  $t = 40$ .

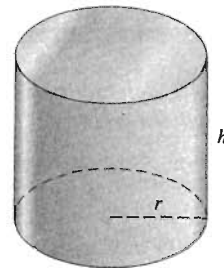
$t$	0	10	20	30	40	50	60
$x$	0	224	810	1655	2686	3850	5109



**Figura 3.1.17** El cubo del problema 38: volumen  $V = x^3$ , área de la superficie  $S = 6x^2$



**Figura 3.1.18** La esfera del problema 39: volumen  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ , área de la superficie  $S = 4\pi r^2$



**Figura 3.1.19** El cilindro del problema 40: volumen  $V = \pi r^2 h$ , área de la superficie  $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

En los problemas 38 a 43, use el hecho (demostrado en la sección 3.2) de que la derivada de  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  es  $dy/dx = 3ax^2 + 2bx + c$ .

38. Muestre que la razón de cambio del volumen  $V$  de un cubo con respecto de la longitud de su lado  $x$  es igual a la mitad del área de la superficie  $A$  del cubo (figura 3.1.17).

39. Muestre que la razón de cambio del volumen  $V$  de una esfera con respecto de su radio  $r$  es igual a su área de superficie  $S$  (figura 3.1.18).

40. La altura  $h$  de un cilindro con altura variable es siempre el doble de su radio  $r$ . Muestre que la razón de cambio de su volumen  $V$  con respecto de  $r$  es igual al área total de su superficie  $S$  (figura 3.1.19).

41. Un globo esférico con un radio inicial  $r = 5$  pulgadas comienza a desinflarse en el instante  $t = 0$  y su radio  $t$  segundos más tarde es  $r = (60 - t)/12$  pulgadas. ¿A qué razón (en pulgadas cúbicas/segundo) sale el aire del globo cuando  $t = 30$ ?

42. El volumen  $V$  (en litros) de 3 gramos de  $\text{CO}_2$  a  $27^\circ\text{C}$  está dado en términos de su presión  $p$  (en atmósferas) por la fórmula  $V = 1.68/p$ . ¿Cuál es la razón de cambio de  $V$  con respecto de  $p$  cuando  $p = 2$  (atmósferas)? Use el hecho de que la derivada de  $f(x) = c/x$  es  $f'(x) = -c/x^2$  si  $c$  es una constante; puede establecer esto usando la definición de la derivada.

43. Al derretirse una bola de nieve con radio inicial de 12 centímetros, su radio decrece a una razón constante. Comienza a derretirse cuando  $t = 0$  (horas) y tarda 12 horas en desaparecer. (a) ¿Cuál es la razón de cambio del volumen cuando  $t = 6$ ? (b) ¿Cuál es la razón de cambio promedio del volumen de  $t = 3$  a  $t = 9$ ?

44. Una pelota que se lanza verticalmente hacia arriba en el instante  $t = 0$  (segundos), con una velocidad inicial 96 pies/segundo y una altura inicial de 112 pies, tiene la función de altura  $y(t) = -16t^2 + 96t + 112$ . (a) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota? (b) ¿En qué instante y con qué velocidad se impacta la bola en el suelo?

45. Una nave espacial que se aproxima al planeta Gzyx se encuentra a una altura de  $y$  (metros) en el instante  $t$  (segundos) dada por  $y = 100 - 100t + 25t^2$ . ¿En qué instante y con qué velocidad se impacta en el suelo?

46. La población (en miles) de Metrópolis está dada por

$$P(t) = 100[1 + (0.04)t + (0.003)t^2],$$

con  $t$  en años y de modo que  $t = 0$  corresponda a 1980. (a) ¿Cuál fue la razón de cambio de  $P$  en 1986? (b) ¿Cuál fue la razón de cambio promedio de  $P$  desde 1983 a 1988?

### 3.1 Proyecto

Este proyecto requiere de un análisis gráfico del crecimiento de la población de una pequeña ciudad durante la década de los años noventa. Necesitará una calculadora gráfica o una computadora con capacidad de graficación.

Para su propia ciudad, elija un entero positivo  $k$  con  $k \leq 9$  (posiblemente, el último dígito distinto de cero en su identificación como estudiante). Suponga entonces que la población  $P$  de la ciudad  $t$  años después de 1990 está dada (en miles) por

$$P(t) = 10 + t - (0.1)t^2 + (0.001)(k + 5)t^3.$$

Analice las siguientes preguntas.

1. ¿Indica la gráfica de  $P(t)$  que la población está creciendo en la década de 1990? Explique su respuesta.

2. ¿Confirma la gráfica de la derivada  $P'(t)$  que  $P(t)$  es creciente en la década de 1990? ¿Cuál propiedad de esta gráfica es importante para esta ecuación?
3. ¿Cuáles puntos de la gráfica de  $P'(t)$  corresponden al instante (o instantes) en los que la razón de cambio instantánea de  $P$  es igual a la razón de cambio promedio entre los años 1990 y 2000? Aplique el método de ampliaciones sucesivas para determinar tal instante (con una precisión de dos cifras decimales).
4. ¿Cuáles puntos de la derivada  $P'(t)$ , corresponden al instante (o instantes) en los que la población,  $P(t)$ , está creciendo de manera más lenta?; ¿y la más rápida? Aplique el método de ampliaciones sucesivas para determinar tal instante (con una precisión de dos decimales).

## 3.2 Reglas básicas de derivación

Iniciamos aquí el desarrollo de reglas formales para determinar la derivada  $f'$  de la función  $f$ :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (1)$$

Será útil una notación alternativa para las derivadas.

Cuando interpretamos la derivada en la sección 3.1 como una razón de cambio, vimos que era útil la notación de variables dependientes e independientes

$$y = f(x), \quad \Delta x = h, \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \quad (2)$$

Esto nos conduce a la “notación diferencial”

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (3)$$

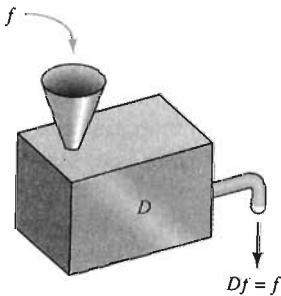


Figura 3.2.1 La “máquina de derivación”  $D$

para la derivada. Cuando use esta notación, recuerde que el símbolo  $dy/dx$  es simplemente otra notación para la derivada  $f'(x)$ ; *no* es el cociente de dos cantidades separadas  $dy$  y  $dx$ .

A veces se usa una tercera notación para la derivada  $f'(x)$ : es  $Df(x)$ . En este caso, pensamos  $D$  como una “máquina” que opera sobre la función  $f$  para producir su derivada  $Df$  (figura 3.2.1). Así, podemos escribir la derivada de  $y = f(x) = x^2$  de cualquiera de las tres formas:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = Dx^2 = 2x.$$

Estas tres notaciones para la derivada (la notación de función  $f'(x)$ , la notación diferencial  $dy/dx$  y la notación de operador  $Df(x)$ ), se usan indistintamente en las obras matemáticas y científicas, así que deberá familiarizarse con ellas.

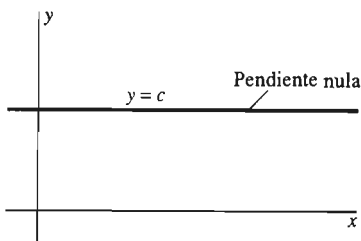


Figura 3.2.2 La derivada de una función constante es cero (Teorema 1)

### DERIVADAS DE POLINOMIOS

Nuestra primera regla de derivación dice que *la derivada de una función constante es idénticamente nula*. Geométricamente, esto es claro, pues la gráfica de una función constante es una recta horizontal, que es su propia recta tangente, con pendiente nula en todo punto (figura 3.2.2).

**Teorema 1 Derivada de una constante**

Si  $f(x) = c$  (una constante) para toda  $x$ , entonces  $f'(x) = 0$  para toda  $x$ . Es decir,

$$\frac{dc}{dx} = Dc = 0. \quad (4)$$

**Demostración** Como  $f(x + h) = f(x) = c$ , vemos que

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0. \quad \square$$

Como motivación de la siguiente regla, consideremos la siguiente lista de derivadas, todas calculadas en el capítulo 2.

$$\begin{aligned} Dx &= 1 && \text{(Problema 2, sección 2.1)} \\ Dx^2 &= 2x && \text{(Ejemplo 3, sección 2.1)} \\ Dx^3 &= 3x^2 && \text{(Problema 26, sección 2.1)} \\ Dx^4 &= 4x^3 && \text{(Problema 28, sección 2.1)} \\ Dx^{-1} &= -x^{-2} && \text{(Problema 27, sección 2.1)} \\ Dx^{-2} &= -2x^{-3} && \text{(Problema 29, sección 2.1)} \\ Dx^{1/2} &= \frac{1}{2}x^{-1/2} && \text{(Ejemplo 12, sección 2.2)} \\ Dx^{-1/2} &= -\frac{1}{2}x^{-3/2} && \text{(Problema 41, sección 2.2)} \end{aligned}$$

Cada una de estas fórmulas se ajusta al patrón

$$Dx^n = nx^{n-1}. \quad (5)$$

La ecuación (5), que se infiere de la lista anterior de derivadas, es hasta ahora solamente una conjetura. Pero muchos descubrimientos en matemáticas se han realizado detectando patrones y demostrando posteriormente que éstos son válidos en general.

Eventualmente veremos que la fórmula de la ecuación (5), llamada la **regla de la potencia**, es válida para todos los números reales  $n$ . En este momento daremos una demostración solamente para el caso en que el exponente  $n$  sea un *entero positivo*. Necesitaremos la *fórmula binomial* del álgebra de bachillerato:

$$\begin{aligned} (a + b)^n &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1}a^{n-2}b^2 + \dots \\ &+ \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k(k-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}a^{n-k}b^k + \dots + nab^{n-1} + b^n \end{aligned} \quad (6)$$

si  $n$  es un entero positivo. Los casos  $n = 2$  y  $n = 3$  son las fórmulas familiares

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

y

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Existen  $n + 1$  términos en el lado derecho de la ecuación (6), pero lo único que necesitamos saber para demostrar la regla de la potencia es la forma exacta de los dos primeros términos y el hecho de que los demás términos contienen a  $b^2$  como factor. Por ejemplo, si  $a = x$ ,  $b = h$  y  $n = 5$  en la ecuación (6), obtenemos

$$\begin{aligned}(x + h)^5 &= x^5 + 5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^4 + h^5 \\ &= x^5 + 5x^4h + h^2(10x^3 + 10x^2h + 5xh^2 + h^3) \\ &= x^5 + 5x^4h + h^2 \cdot P(h).\end{aligned}$$

En este caso,  $P(h)$  es un polinomio de grado 3 en la variable  $h$ , con coeficientes en términos de  $x$ . Si colocamos el exponente general  $n$  en vez de 5, la ecuación (6) proporciona en forma análoga el resultado

$$(x + h)^n = x^n + nx^{n-1}h + h^2P(h), \quad (7)$$

donde  $P(h)$  es un polinomio de grado  $n - 2$  en la variable  $h$ . Estamos listos para el teorema 2.

**Teorema 2 Regla de la potencia para  $n$  entero positivo**

Si  $n$  es un entero positivo y  $f(x) = x^n$ , entonces  $f'(x) = nx^{n-1}$ .

**Demostración**

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}h + h^2P(h)}{h} && \text{[por la ecuación (7)].} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} [nx^{n-1} + h \cdot P(h)] = nx^{n-1} + 0 \cdot P(0) && \text{(por las propiedades de los límites y la continuidad de } P); \\ f'(x) &= nx^{n-1}. \quad \square\end{aligned}$$

No siempre necesitamos usar los mismos símbolos  $x$  y  $n$  para la variable independiente y el exponente constante en la regla de la potencia. Por ejemplo,

$$Dt^m = mt^{m-1} \quad \text{y} \quad Dz^k = kz^{k-1},$$

donde  $D$  denota la derivación con respecto de la variable independiente indicada. Si no es perfectamente claro cuál es la variable independiente, se puede indicar mediante un subíndice agregado al operador  $D$ :

$$D_t t^m = mt^{m-1} \quad \text{y} \quad D_z z^k = kz^{k-1}.$$

**EJEMPLO 1**  $Dx^7 = 7x^6, \quad Dt^{17} = 17t^{16}, \quad Dz^{100} = 100z^{99}.$

Para usar la regla de la potencia y derivar polinomios, necesitamos saber cómo derivar *combinaciones lineales*. Una **combinación lineal** de las funciones  $f$  y  $g$  es una función de la forma  $af + bg$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes. Las propiedades de la suma y producto de límites implican que

$$\lim_{x \rightarrow c} [af(x) + bg(x)] = a \left( \lim_{x \rightarrow c} f(x) \right) + b \left( \lim_{x \rightarrow c} g(x) \right) \quad (8)$$



siempre que los dos límites del lado derecho de la ecuación (8) existan. La fórmula en la ecuación (8) se llama la **propiedad de linealidad** de la operación de límite. Implica una propiedad de linealidad análoga para la derivación.

**Teorema 3 Derivación de una combinación lineal**

Si  $f$  y  $g$  son funciones derivables y  $a$  y  $b$  son números reales fijos, entonces

$$D[af(x) + bg(x)] = aDf(x) + bDg(x). \quad (9)$$

Si  $u = f(x)$  y  $v = g(x)$ , esto toma la forma

$$\frac{d(au + bv)}{dx} = a \frac{du}{dx} + b \frac{dv}{dx}. \quad (9')$$

**Demostración** La propiedad de linealidad de los límites implica en forma inmediata

$$\begin{aligned} D[af(x) + bg(x)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[af(x+h) + bg(x+h)] - [af(x) + bg(x)]}{h} \\ &= a \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) + b \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\ &= aDf(x) + bDg(x). \quad \square \end{aligned}$$

Sean  $a = c$  y  $b = 0$  en la ecuación (9). El resultado es

$$D[cf(x)] = cDf(x); \quad (10)$$

o bien,

$$\frac{d(cu)}{dx} = c \frac{du}{dx}. \quad (10')$$

Así, la derivada de un múltiplo constante de una función es el mismo múltiplo constante de su derivada.

**EJEMPLO 2**  $D(16x^6) = 16 \cdot 6x^5 = 96x^5.$

Ahora, sean  $a = b = 1$  en la ecuación (9). Vemos que

$$D[f(x) + g(x)] = Df(x) + Dg(x). \quad (11)$$

En notación diferencial,

$$\frac{d(u + v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}. \quad (11')$$

Así, la derivada de la suma de dos funciones es la suma de sus derivadas. En forma análoga, para las diferencias tenemos

$$\frac{d(u - v)}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}. \quad (12)$$

Es fácil ver que estas reglas se generalizan a sumas y restas de más de dos funciones. Por ejemplo, la aplicación repetida de la ecuación (11) a la suma de un número finito de funciones derivables implica

$$\frac{d(u_1 + u_2 + \dots + u_n)}{dx} = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \dots + \frac{du_n}{dx}. \quad (13)$$

### EJEMPLO 3

$$\begin{aligned} D(36 + 26x + 7x^5 - 5x^9) &= 0 + 26 \cdot 1 + 7 \cdot 5x^4 - 5 \cdot 9x^8 \\ &= 26 + 35x^4 - 45x^8. \end{aligned}$$

Cuando aplicamos las ecuaciones (10) y (13) y la regla de la potencia al polinomio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

determinamos la derivada *tan pronto como la podamos escribir*:

$$p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 3 a_3 x^2 + 2 a_2 x + a_1. \quad (14)$$

Con este resultado, es rutinario escribir una ecuación de la recta tangente a la gráfica de un polinomio.

**EJEMPLO 4** Escribir una ecuación para la recta que es tangente a la gráfica de  $y = 2x^3 - 7x^2 + 3x + 4$  en el punto  $(1, 2)$ .

**Solución** Calculamos la derivada como en la ecuación (14):

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot 3x^2 - 7 \cdot 2x + 3 = 6x^2 - 14x + 3.$$

Sustituimos  $x = 1$  en la derivada y vemos que la pendiente de la recta tangente en  $(1, 2)$  es  $m = -5$ . Así, la ecuación punto-pendiente de la recta tangente es

$$y - 2 = -5(x - 1).$$

**EJEMPLO 5** El volumen  $V$  (en centímetros cúbicos) de una cantidad de agua varía con el cambio en su temperatura  $T$ . Para  $T$  entre  $0^\circ\text{C}$  y  $30^\circ\text{C}$ , la relación es casi

$$V = V_0(1 + \alpha T + \beta T^2 + \gamma T^3),$$

donde  $V_0$  es el volumen a  $0^\circ\text{C}$  y las tres constantes tienen los valores

$$\alpha = -0.06427 \times 10^{-3}, \quad \beta = 8.5053 \times 10^{-6},$$

$$\text{y } \gamma = -6.7900 \times 10^{-8}.$$

La razón de cambio del volumen con respecto de la temperatura es

$$\frac{dV}{dT} = V_0(\alpha + 2\beta T + 3\gamma T^2).$$

Suponga que  $V_0 = 10^5 \text{ cm}^3$  y que  $T = 20^\circ\text{C}$ . La sustitución de estos datos numéricos en las fórmulas para  $V$  y  $dV/dT$  implica  $V \approx 100,157 \text{ cm}^3$  y  $dV/dT \approx 19.4 \text{ cm}^3/^\circ\text{C}$ . Podemos concluir que, a  $T = 20^\circ\text{C}$ , este volumen de agua debe aumentar aproximadamente  $19.4 \text{ cm}^3$  por cada aumento de  $1^\circ\text{C}$  en la temperatura. Como comparación, la sustitución directa en la fórmula para  $V$  implica

$$V(20.5) - V(19.5) \approx 19.4445 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

## LA REGLA DEL PRODUCTO Y LA REGLA DEL COCIENTE

Podría ser natural pensar que la derivada de un producto  $f(x)g(x)$  es el producto de las derivadas. ¡Esto es *falso*! Por ejemplo, si  $f(x) = g(x) = x$ , entonces

$$D[f(x)g(x)] = Dx^2 = 2x.$$

Pero

$$[Df(x)] \cdot [Dg(x)] = (Dx) \cdot (Dx) = 1 \cdot 1 = 1.$$

En general, la derivada de un producto *no* es simplemente el producto de las derivadas. El teorema 4 nos dice lo que *sí* es.

### **Teorema 4 La regla del producto**

Si  $f$  y  $g$  son derivables en  $x$ , entonces  $fg$  es derivable en  $x$  y

$$D[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \quad (15)$$

Si  $u = f(x)$  y  $v = g(x)$ , esta **regla del producto** toma la forma

$$\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}. \quad (15')$$

Cuando es claro cuál es la variable independiente, podemos abreviar aún más la regla del producto:

$$(uv)' = u'v + uv' \quad (15'')$$

**Demostración** Usamos un método de “suma y resta”.

$$\begin{aligned} D[f(x)g(x)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \left( \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) \right) \\ &\quad + f(x) \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \end{aligned}$$

En esta demostración usamos las propiedades de la suma y producto de los límites, las definiciones de  $f'(x)$  y  $g'(x)$  y el hecho de que

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x).$$

Esta última ecuación es válida, pues  $g$  es derivable y por consiguiente continua en  $x$ , por el teorema 4 de la sección 2.4.  $\square$

En palabras, la regla del producto dice que *la derivada del producto de dos funciones se forma multiplicando la derivada de cada una por la otra, sumando después los resultados.*

**EJEMPLO 6** Determine la derivada de

$$f(x) = (1 - 4x^3)(3x^2 - 5x + 2)$$

sin multiplicar primero los dos factores.

**Solución**

$$\begin{aligned} D[(1 - 4x^3)(3x^2 - 5x + 2)] &= [D(1 - 4x^3)](3x^2 - 5x + 2) + (1 - 4x^3)[D(3x^2 - 5x + 2)] \\ &= (-12x^2)(3x^2 - 5x + 2) + (1 - 4x^3)(6x - 5) \\ &= -60x^4 + 80x^3 - 24x^2 + 6x - 5. \end{aligned}$$

Podemos aplicar la regla del producto varias veces para determinar la derivada del producto de tres o más funciones derivables  $u_1, u_2, \dots, u_n$  de  $x$ . Por ejemplo,

$$\begin{aligned} D[u_1 u_2 u_3] &= [D(u_1 u_2)] \cdot u_3 + (u_1 u_2) \cdot Du_3 \\ &= [(Du_1) \cdot u_2 + u_1 \cdot (Du_2)] \cdot u_3 + (u_1 u_2) \cdot Du_3 \\ &= (Du_1)u_2 u_3 + u_1(Du_2)u_3 + u_1 u_2(Du_3). \end{aligned}$$

Observe que la derivada de cada factor en el producto original se multiplica por los otros dos factores, y después se suman los tres productos resultantes. Es decir, tenemos el siguiente resultado general:

$$\begin{aligned} D(u_1 u_2 \cdots u_n) &= (Du_1)u_2 \cdots u_n + u_1(Du_2)u_3 \cdots u_n \\ &\quad + \cdots + u_1 u_2 \cdots u_{n-1}(Du_n), \end{aligned} \tag{16}$$

donde la suma de la ecuación (16) tiene un término correspondiente a cada uno de los  $n$  factores en el producto  $u_1 u_2 \cdots u_n$ . Es fácil establecer esta **extensión de la regla del producto** (véase el problema 62) paso a paso (después con  $n = 4$ , luego con  $n = 5$ , etcétera).

Nuestro siguiente resultado nos indica cómo determinar la derivada del recíproco de una función si conocemos la derivada de la función.

**La regla del recíproco**

Si  $f$  es derivable en  $x$  y  $f(x) \neq 0$ , entonces

$$D \frac{1}{f(x)} = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}. \tag{17}$$

Si  $u = f(x)$ , la regla del recíproco toma la forma

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{u} \right) = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{dx} \tag{17'}$$

Si no existe duda sobre cuál es la variable independiente, podemos escribir

$$\left( \frac{1}{u} \right)' = -\frac{u'}{u^2}. \tag{17''}$$

**Demostración** Como en la demostración del teorema 4, usamos las propiedades de los límites, la definición de la derivada, y el hecho de que una función es continua si es derivable (por el teorema 4 de la sección 2.4). Además, observe que  $f(x+h) \neq 0$  para  $h$  cercana a cero, pues  $f(x) \neq 0$  y  $f$  es continua en  $x$  (véase el problema 16 del apéndice B). Por tanto,

$$\begin{aligned} D \frac{1}{f(x)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{hf(x+h)f(x)} \\ &= - \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{f(x+h)f(x)} \right) \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) = - \frac{f'(x)}{[f(x)]^2}. \quad \square \end{aligned}$$

**EJEMPLO 7** Con  $f(x) = x^2 + 1$  en la ecuación (17), obtenemos

$$D \frac{1}{x^2 + 1} = - \frac{D(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} = - \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Combinamos ahora la regla del recíproco con la regla de la potencia para exponentes enteros positivos para establecer la regla de la potencia para exponentes enteros negativos.

**Teorema 5 Regla de la potencia para un entero negativo  $n$**   
Si  $n$  es un entero negativo, entonces  $Dx^n = nx^{n-1}$ .

**Demostración** Sea  $m = -n$ , de modo que  $m$  es un entero positivo. Entonces

$$Dx^n = D \frac{1}{x^m} = - \frac{D(x^m)}{(x^m)^2} = - \frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = (-m)x^{(-m)-1} = nx^{n-1}. \quad \square$$

Esta demostración muestra además que la regla del teorema 5 es válida exactamente cuando la función por derivar está definida: cuando  $x \neq 0$ .

**EJEMPLO 8**

$$\begin{aligned} D \frac{5x^4 - 6x + 7}{2x^2} &= D \left( \frac{5}{2}x^2 - 3x^{-1} + \frac{7}{2}x^{-2} \right) \\ &= \frac{5}{2}(2x) - 3(-x^{-2}) + \frac{7}{2}(-2x^{-3}) = 5x + \frac{3}{x^2} - \frac{7}{x^3}. \end{aligned}$$

La clave es “dividir” antes de derivar.

Ahora aplicamos la regla del producto y la regla del recíproco para obtener una regla de derivación para el cociente de dos funciones.

**Teorema 6 La regla del cociente**

Si  $f$  y  $g$  son derivables en  $x$  y  $g(x) \neq 0$ , entonces  $f/g$  es derivable en  $x$  y

$$D \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \quad (18)$$

Si  $u = f(x)$  y  $v = g(x)$ , esta regla toma la forma

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2} \quad (18')$$

Si es claro cuál es la variable independiente, podemos escribir la regla del cociente como

$$\left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - u v'}{v^2}. \quad (18'')$$

**Demostración** Aplicamos la regla del producto a la factorización

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}.$$

Esto implica

$$\begin{aligned} D \frac{f(x)}{g(x)} &= [Df(x)] \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot D \frac{1}{g(x)} \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x) \cdot \left( -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2} \right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}. \quad \square \end{aligned}$$

Observe que el numerador en la ecuación (18) *no* es la derivada del producto de  $f$  y  $g$ . El signo menos significa que el *orden* de los términos en el numerador es importante.

**EJEMPLO 9** Determine  $dz/dt$ , dado que

$$z = \frac{1 - t^3}{1 + t^4}.$$

**Solución** Los apóstrofes denotan las derivadas con respecto de  $t$ . Con  $t$  (en vez de  $x$ ) como la variable independiente, la regla del cociente implica

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{(1 - t^3)'(1 + t^4) - (1 - t^3)(1 + t^4)'}{(1 + t^4)^2} \\ &= \frac{(-3t^2)(1 + t^4) - (1 - t^3)(4t^3)}{(1 + t^4)^2} = \frac{t^6 - 4t^3 - 3t^2}{(1 + t^4)^2}. \end{aligned}$$

## 3.2 Problemas

Aplique las reglas de derivación de esta sección para determinar las derivadas de las funciones en los problemas 1 a 40.

1.  $f(x) = 3x^2 - x + 5$

2.  $g(t) = 1 - 3t^2 - 2t^4$

3.  $f(x) = (2x + 3)(3x - 2)$

4.  $g(x) = (2x^2 - 1)(x^3 + 2)$

5.  $h(x) = (x + 1)^3$

6.  $g(t) = (4t - 7)^2$

8.  $f(x) = 4x^4 - \frac{1}{x^2}$

10.  $f(t) = \frac{1}{4 - t^2}$

12.  $f(x) = \frac{1}{1 - \frac{2}{x}}$

7.  $f(y) = y(2y - 1)(2y + 1)$

9.  $g(x) = \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x - 1}$

11.  $h(x) = \frac{3}{x^2 + x + 1}$

$$13. g(t) = (t^2 + 1)(t^3 + t^2 + 1)$$

$$14. f(x) = (2x^3 - 3)(17x^4 - 6x + 2)$$

$$15. g(z) = \frac{1}{2z} - \frac{1}{3z^2}$$

$$16. f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 4x - 5}{x^2}$$

$$17. g(y) = 2y(3y^2 - 1)(y^2 + 2y + 3)$$

$$18. f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$$

$$19. g(t) = \frac{t - 1}{t^2 + 2t + 1}$$

$$20. u(x) = \frac{1}{(x + 2)^2}$$

$$21. v(t) = \frac{1}{(t - 1)^3}$$

$$22. h(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 3x + 17}{2x - 5}$$

$$23. g(x) = \frac{3x}{x^3 + 7x - 5}$$

$$24. f(t) = \frac{1}{\left(t + \frac{1}{t}\right)^2}$$

$$25. g(x) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}}$$

$$26. f(x) = \frac{x^3 - \frac{1}{x^2 + 1}}{x^4 + \frac{1}{x^2 + 1}}$$

$$27. y = x^3 - 6x^5 + \frac{3}{2}x^{-4} + 12$$

$$28. y = \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2} - 5$$

$$29. y = \frac{5 - 4x^2 + x^5}{x^3}$$

$$30. y = \frac{2x - 3x^2 + 2x^4}{5x^2}$$

$$31. y = 3x - \frac{1}{4x^2}$$

$$32. y = \frac{1}{x(x^2 + 2x + 2)}$$

$$33. y = \frac{x}{x - 1} + \frac{x + 1}{3x}$$

$$34. y = \frac{1}{1 - 4x^{-2}}$$

$$35. y = \frac{x^3 - 4x + 5}{x^2 + 9}$$

$$36. y = x^2 \left( 2x^3 - \frac{3}{4x^4} \right)$$

$$37. y = \frac{2x^2}{3x - \frac{4}{5x^4}}$$

$$38. y = \frac{4}{(x^2 - 3)^2}$$

$$39. y = \frac{x^2}{x + 1}$$

$$40. y = \frac{x + 10}{x^2}$$

$$45. y = x^3 + 3x^2 - 4x - 5; \quad P(1, -5)$$

$$46. y = \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)^{-1}; \quad P(2, 4)$$

$$47. y = \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3}; \quad P(-1, 7)$$

$$48. y = \frac{3x - 2}{3x + 2}; \quad P(2, 0.5)$$

$$49. y = \frac{3x^2}{x^2 + x + 1}; \quad P(-1, 3)$$

$$50. y = \frac{6}{1 - x^2}; \quad P(2, -2)$$

51. Aplique la fórmula del ejemplo 5 para responder las siguientes dos preguntas. (a) Si se calientan 1000 cm<sup>3</sup> de agua que inicialmente están a 0°C, ¿se dilata o contrae inicialmente? (b) ¿Cuál es la razón (en cm<sup>3</sup>/°C) con la que se dilata o contrae inicialmente?

52. El peso de Susana en libras está dado por la fórmula  $W = (2 \times 10^9) / R^2$ , donde  $R$  es su distancia en millas al centro de la Tierra. ¿Cuál es la razón de cambio de  $W$  con respecto de  $R$  cuando  $R = 3960$  millas? Si Susana asciende una montaña, desde el nivel del mar, ¿con qué razón en onzas por milla (vertical) decrece su peso inicialmente?

53. El tanque cónico que se muestra en la figura 3.2.3 tiene un radio de 160 cm y una altura de 800 cm. El agua sale por un pequeño orificio en el fondo del tanque. Cuando la altura  $h$  del agua en el tanque es 600 cm, ¿cuál es la razón de cambio del volumen  $V$  con respecto de  $h$ ?

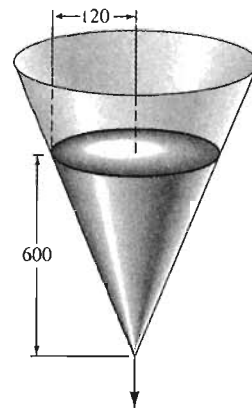


Figura 3.2.3 El tanque que se vacía, problema 53

En los problemas 41 a 50, escriba una ecuación de la recta tangente a la curva  $y = f(x)$  en el punto  $P$  dado sobre la curva. Exprese la respuesta en la forma  $ax + by = c$ .

$$41. y = x^3; \quad P(2, 8)$$

$$42. y = 3x^2 - 4; \quad P(1, -1)$$

$$43. y = \frac{1}{x - 1}; \quad P(2, 1)$$

$$44. y = 2x - \frac{1}{x}; \quad P(0.5, -1)$$

54. Determine las intersecciones con los ejes de la recta tangente a la curva  $y = x^3 + x^2 + x$  en el punto  $(1, 3)$  (figura 3.2.4).

55. Determine una ecuación para la recta que pasa por el punto  $(1, 5)$  y es tangente a la curva  $y = x^3$ . [Sugerencia: Denote  $(a, a^3)$  al punto de tangencia, según se indica en la figura 3.2.5. Determine mediante inspección las soluciones enteras pequeñas de la ecuación cúbica resultante en  $a$ .]

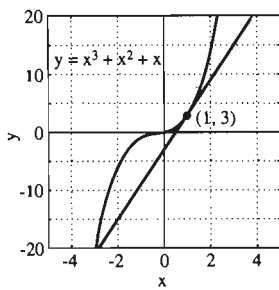


Figura 3.2.4 La recta tangente del problema 54

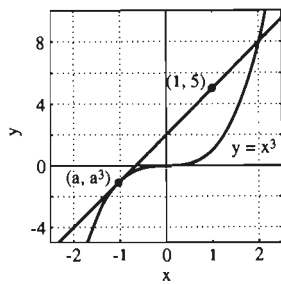


Figura 3.2.5 La recta tangente del problema 55

56. Determine *dos* líneas que pasen por el punto  $(2, 8)$  y sean tangentes a la curva  $y = x^3$ . [Véase la sugerencia para el problema 55.]

57. Demuestre que ninguna línea recta puede ser tangente a la curva  $y = x^2$  en dos puntos distintos.

58. Determine las dos líneas rectas de pendiente  $-2$  que son tangentes a la curva  $y = 1/x$ .

59. Sea  $n \geq 2$  un entero fijo, pero no especificado. Determine la intersección con el eje  $x$  de la recta tangente a la curva  $y = x^n$  en el punto  $P(x_0, y_0)$ .

60. Demuestre que la curva  $y = x^5 + 2x$  no tiene tangentes horizontales. ¿Cuál es la pendiente mínima que puede tener una tangente a esta curva?

61. Aplique la ecuación (16) con  $n = 3$  y  $u_1 = u_2 = u_3 = f(x)$  para mostrar que

$$D([f(x)]^3) = 3[f(x)]^2 f'(x).$$

62. (a) Escriba primero  $u_1 u_2 u_3 u_4 = (u_1 u_2 u_3) u_4$  para verificar la ecuación (16) para  $n = 4$ . (b) Después, escriba  $u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 = (u_1 u_2 u_3 u_4) u_5$  y aplique el resultado de la parte (a) para verificar la ecuación (16) para  $n = 5$ .

63. Aplique la ecuación (16) para mostrar que

$$D([f(x)]^n) = n[f(x)]^{n-1} f'(x)$$

si  $n$  es un entero positivo y  $f'(x)$  existe.

64. Use el resultado del problema 63 para calcular  $D(x^2 + x + 1)^{100}$ .

65. Determine  $g'(x)$ , si  $g(x) = (x^3 - 17x + 35)^{17}$ .

66. Determine constantes  $a, b, c$  y  $d$  tales que la curva  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  tenga rectas tangentes horizontales en los puntos  $(0, 1)$  y  $(1, 0)$ .

En relación con los problemas 67 a 71, las figuras 3.2.6 a 3.2.9 muestran las curvas

$$y = \frac{x^n}{1 + x^2}$$

para  $n = 0, 1, 2, 3$ .

67. Muestre que para  $n = 0$  y  $n = 2$ , la curva sólo tiene un punto donde la recta tangente es horizontal (figuras 3.2.6 y 3.2.8).

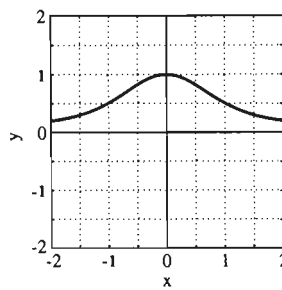


Figura 3.2.6 La gráfica de  $y = \frac{1}{1+x^2}$

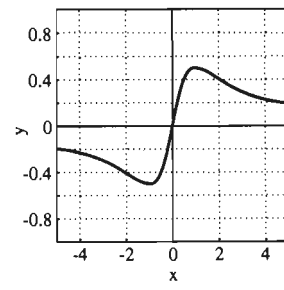


Figura 3.2.7 La gráfica de  $y = \frac{x}{1+x^2}$

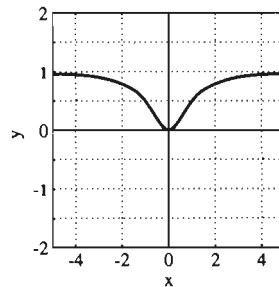


Figura 3.2.8 La gráfica de  $y = \frac{x^2}{1+x^2}$

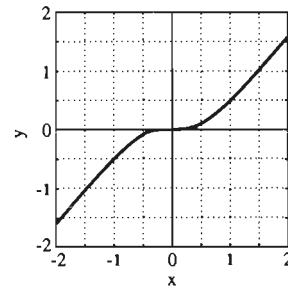


Figura 3.2.9 La gráfica de  $y = \frac{x^3}{1+x^2}$

68. Cuando  $n = 1$ , existen dos puntos sobre la curva, donde la recta tangente es horizontal (figura 3.2.7). Determínelos.

69. Muestre que para  $n \geq 3$ ,  $(0, 0)$  es el único punto de la gráfica de

$$y = \frac{x^n}{1+x^2}$$

en donde la recta tangente es horizontal (figura 3.2.9).

70. La figura 3.2.10 muestra la gráfica de la derivada  $f'(x)$  de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}.$$

Parece que existen dos puntos sobre la gráfica de  $y = f(x)$  donde la recta tangente tiene pendiente 1. Determínelos.

71. En la figura 3.2.10, parece que existen tres puntos en la curva  $y = f'(x)$  tales que la recta tangente es horizontal. Determínelos.

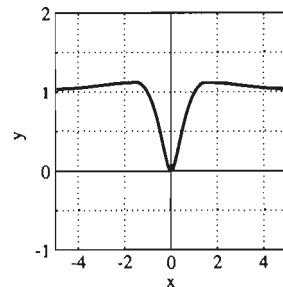


Figura 3.2.10 La gráfica de  $y = D_x\left(\frac{x^3}{1+x^2}\right)$  de los problemas 70 y 71



### 3.3 **La regla de la cadena**

En la sección 3.2 vimos cómo derivar polinomios y funciones racionales. Pero es frecuente que necesitemos derivar *potencias* de tales funciones. Por ejemplo, si

$$y = [f(x)]^3, \quad (1)$$

entonces la extensión de la regla del producto [ecuación (16) en la sección 3.2] implica

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= D[f(x) \cdot f(x) \cdot f(x)] \\ &= f'(x) \cdot f(x) \cdot f(x) + f(x) \cdot f'(x) \cdot f(x) + f(x) \cdot f(x) \cdot f'(x), \end{aligned}$$

por lo que al agrupar términos obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = 3[f(x)]^2 f'(x). \quad (2)$$

¿Es una sorpresa que la derivada de  $[f(x)]^3$  no sea simplemente  $3[f(x)]^2$ , lo que sería de esperarse en analogía con la fórmula (correcta)  $D_x x^3 = 3x^2$ ? Existe un factor adicional  $f'(x)$  cuyo origen puede explicarse si escribimos  $y = [f(x)]^3$  en la forma

$$y = u^3 \quad \text{con} \quad u = f(x).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= D[f(x)]^3, \\ \frac{dy}{du} &= 3u^2 = 3[f(x)]^2, \quad y \\ \frac{du}{dx} &= f'(x), \end{aligned} \quad (3)$$

por lo que la fórmula para la derivada de la ecuación (2) tiene la forma

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}. \quad (4)$$

La ecuación (4), la **regla de la cadena**, es válida para *cualesquiera* dos funciones derivables  $y = g(u)$  y  $u = f(x)$ . La fórmula en la ecuación (2) es simplemente el caso particular de la ecuación (4) en que  $g(u) = u^3$ .

**EJEMPLO 1** Si

$$y = (3x + 5)^{17},$$

no sería práctico escribir el desarrollo binomial de la potencia 17 de  $3x + 5$ : El resultado sería un polinomio con 18 términos y ¡algunos de los coeficientes tendrían 14 dígitos! Pero si escribimos

$$y = u^{17} \quad \text{con} \quad u = 3x + 5,$$

entonces

$$\frac{dy}{du} = 17u^{16} \quad y \quad \frac{du}{dx} = 3.$$

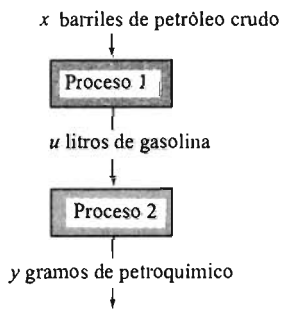
Por tanto, la regla de la cadena implica

$$\begin{aligned} D(3x + 5)^{17} &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (17u^{16})(3) \\ &= 17(3x + 5)^{16} \cdot 3 = 51(3x + 5)^{16}. \end{aligned}$$

La fórmula de la ecuación (4) es una fórmula que, una vez aprendida, es poco probable de olvidar. Aunque  $dy/du$  y  $du/dx$  no son fracciones (sólo son símbolos que representan las derivadas  $g'(u)$  y  $f'(x)$ ) es como si fueran fracciones, en las que el  $du$  del primer factor se “cancela” con el  $du$  del segundo. Por supuesto, tal “cancelación” no demuestra la regla de la cadena tanto como la cancelación de las  $d$  demuestra que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad (\text{un absurdo}).$$

Sin embargo, es una excelente vía para *recordar* la regla de la cadena. Tales manejos de las diferenciales son tan sugerentes (aunque no sean válidos) que jugaron un papel importante en el desarrollo inicial del cálculo, durante los siglos XVII y XVIII. Entonces se demostraron muchas fórmulas que posteriormente se mostró eran válidas (aunque algunas fórmulas eran también incorrectas).



**Figura 3.3.1** La refinación del petróleo con dos procesos (ejemplo 2)

**EJEMPLO 2** Para una interpretación física de la regla de la cadena, imaginemos una refinería que primero fabrica  $u$  litros de gasolina a partir de  $x$  barriles de petróleo crudo. Entonces, en un segundo proceso, la refinería fabrica  $y$  gramos de un petroquímico comercial a partir de los  $u$  litros de gasolina. (Los dos procesos se ilustran en la figura 3.3.1.) Entonces,  $y$  es una función de  $u$  y  $u$  es una función de  $x$ , por lo que la salida final  $y$  es también una función de la entrada  $x$ . Consideremos las *unidades* en las que se miden las *derivadas* de estas funciones.

$$\frac{dy}{du} : \frac{\text{g}}{\text{L}} \quad (\text{gramos de petroquímico por litro de gasolina})$$

$$\frac{du}{dx} : \frac{\text{L}}{\text{barril}} \quad (\text{litros de gasolina por barril de petróleo})$$

$$\frac{dy}{dx} : \frac{\text{g}}{\text{barril}} \quad (\text{gramos de petroquímico por barril de petróleo})$$

Cuando incluimos estas unidades en la ecuación (4), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} \frac{\text{g}}{\text{barril}} &= \left( \frac{dy}{du} \frac{\text{g}}{\text{L}} \right) \cdot \left( \frac{du}{dx} \frac{\text{L}}{\text{barril}} \right) \\ &= \left( \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \right) \frac{\text{g}}{\text{barril}}. \end{aligned}$$

Esta cancelación de las unidades parece confirmar la validez de la regla de la cadena (al menos en esta aplicación). Por ejemplo, si obtenemos 3 gramos de petroquímico por cada litro de gasolina y 75 L de gasolina por barril de petróleo, ¿cómo podríamos equivocarnos al obtener  $225 = 3 \cdot 75$  gramos de petroquímico por barril de petróleo?

Aunque la ecuación (4) es una afirmación memorable de la regla de la cadena en notación diferencial, tiene la desventaja de que no especifica los valores de las variables donde se evalúan las derivadas. Este problema se resuelve mediante el uso de la notación funcional para las derivadas. Escribamos

$$\text{Entonces } y = g(u), \quad u = f(x), \quad y = h(x) = g(f(x)). \quad (5)$$

$$\frac{du}{dx} = f'(x), \quad \frac{dy}{dx} = h'(x),$$

y

$$\frac{dy}{du} = g'(u) = g'(f(x)). \quad (6)$$

La sustitución de estas derivadas en la ecuación (4) plantea la regla de la cadena en la forma

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \quad (7)$$

Esta versión de la regla de la cadena proporciona la derivada de la *composición*  $h = g \circ f$  de dos funciones  $g$  y  $f$  en términos de *sus* derivadas.

**Teorema 1 La regla de la cadena**

Suponga que  $f$  es derivable en  $x$  y que  $g$  es derivable en  $f(x)$ . Entonces la composición  $h = g \circ f$  definida por  $h(x) = g(f(x))$  es derivable en  $x$  y su derivada es

$$h'(x) = D[g(f(x))] = g'(f(x)) \cdot f'(x). \quad (8)$$

**NOTA** Aunque la derivada de  $h = g \circ f$  es un producto de las derivadas de  $f$  y  $g$ , estas dos derivadas se evalúan en puntos *distintos*. La derivada  $g'$  se evalúa en  $f(x)$ , mientras que  $f'$  se evalúa en  $x$ . Para un número particular  $x = a$ , la ecuación (7) nos dice que

$$h'(a) = g'(b) \cdot f'(a), \quad \text{donde } b = f(a). \quad (9)$$

**EJEMPLO 3** Si  $h(x) = g(f(x))$ , donde  $f$  y  $g$  son funciones derivables, y

$$f(2) = 17, \quad f'(2) = -3, \quad \text{y} \quad g'(17) = 5,$$

entonces la regla de la cadena implica

$$h'(2) = g'(f(2)) \cdot f'(2) = g'(17) \cdot f'(2) = (5)(-3) = -15.$$

**ESBOZO DE LA DEMOSTRACIÓN DE LA REGLA DE LA CADENA**

Para dar un *esbozo* de la demostración de la regla de la cadena supongamos que tenemos funciones derivables  $y = g(u)$  y  $u = f(x)$  y queremos calcular la derivada

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(f(x + \Delta x)) - g(f(x))}{\Delta x}. \quad (10)$$

La forma diferencial de la regla de la cadena sugiere la factorización

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta x}. \quad (11)$$

La propiedad del producto para límites implica entonces

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \left( \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \right) \left( \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}. \quad (12)$$

Esto bastará para demostrar la regla de la cadena *siempre que*

$$\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x) \quad (13)$$

es una cantidad *distinta de cero* que tiende a cero cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ . Es cierto que  $\Delta u \rightarrow 0$  cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ , pues  $f$  es derivable y por lo tanto continua. Pero aún es posible que  $\Delta u$  se anule para algunos (incluso todos) valores no nulos de  $\Delta x$ . En tal caso, la factorización de la ecuación (11) incluiría el paso *no válido* de la división entre cero. Así, nuestra demostración está incompleta. Una demostración completa de la regla de la cadena aparece en el apéndice D.

## GENERALIZACIÓN DE LA REGLA DE LA POTENCIA

Si sustituimos  $f(x) = u$  y  $f'(x) = du/dx$  en la ecuación (8), obtenemos la forma híbrida

$$D_x g(u) = g'(u) \frac{du}{dx} \quad (14)$$

de la regla de la cadena, que por lo general es la forma más útil para los fines puramente de cálculo. Recuerde que el subíndice  $x$  en  $D_x$ , especifica que  $g(u)$  se deriva con respecto de  $x$  y no con respecto de  $u$ .

Sea  $g(u) = u^n$  en la ecuación (14), donde  $n$  es un entero. Como  $g'(u) = nu^{n-1}$ , obtenemos

$$D_x u^n = nu^{n-1} \frac{du}{dx}, \quad (15)$$

la *versión de la regla de la cadena* para la regla de la potencia. Si  $u = f(x)$  es una función derivable, entonces la ecuación (15) dice que

$$D_x [f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1} f'(x). \quad (16)$$

[Si  $n - 1 < 0$ , debemos agregar la condición de que  $f(x) \neq 0$  para que el lado derecho de la ecuación (16) tenga sentido.] Nos referiremos a esta versión de la regla de la cadena para la regla de la potencia como la **generalización de la regla de la potencia**.

**EJEMPLO 4** Para derivar

$$y = \frac{1}{(2x^3 - x + 7)^2},$$

escribimos primero

$$y = (2x^3 - x + 7)^{-2}$$

para aplicar la generalización de la regla de la potencia, ecuación (16), con  $n = -2$ . Esto implica

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (-2)(2x^3 - x + 7)^{-3} D(2x^3 - x + 7) \\ &= (-2)(2x^3 - x + 7)^{-3}(6x^2 - 1) = \frac{2(1 - 6x^2)}{(2x^3 - x + 7)^3}.\end{aligned}$$

**EJEMPLO 5** Determinar la derivada de la función

$$h(z) = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5.$$

**Solución** La clave para aplicar la generalización de la regla de la potencia es observar *de quién es potencia* la función dada. En este caso,

$$h(z) = u^5, \text{ donde } u = \frac{z-1}{z+1},$$

y  $z$ , no  $x$ , es la variable independiente. Por lo tanto, aplicamos primero la ecuación (15) y después la regla del cociente para obtener

$$\begin{aligned}h'(z) &= 5u^4 \frac{du}{dz} = 5\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^4 D_z\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \\ &= 5\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^4 \cdot \frac{(1)(z+1) - (z-1)(1)}{(z+1)^2} \\ &= 5\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^4 \cdot \frac{2}{(z+1)^2} = \frac{10(z-1)^4}{(z+1)^6}\end{aligned}$$

La importancia de la regla de la cadena está más allá de la derivación de funciones potencia ilustrada en los ejemplos 1, 4 y 5. En secciones posteriores aprenderemos a derivar funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. Cada vez que aprendamos una nueva fórmula de derivación (para la derivada  $g'(x)$  de una nueva función  $g(x)$ ), la fórmula de la ecuación (14) nos proporciona de inmediato la versión regla de la cadena de esa fórmula,

$$D_x g(u) = g'(u) D_x u.$$

El paso de la regla de la potencia  $Dx^n = nx^{n-1}$  a la generalización de la regla de la potencia  $D_x u^n = nu^{n-1} D_x u$  es nuestra primera instancia de este fenómeno general.

## APLICACIONES DE LA RAZÓN DE CAMBIO

Suponga que la cantidad física o geométrica  $p$  depende de la cantidad  $q$ , que a su vez depende del tiempo  $t$ . Entonces, la variable *dependiente*  $p$  es función de la variable *intermedia* y de la variable *independiente*  $t$ . Por tanto, las derivadas que aparecen en la fórmula de la regla de la cadena

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dq} \frac{dq}{dt}$$

son razones de cambio (como en la sección 3.1) de estas variables con respecto de la otra variable. Por ejemplo, suponga que un globo esférico se infla o desinfla. Entonces su volumen  $V$  y su radio  $r$  están cambiando con el tiempo  $t$ , y

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}.$$

Recuerde que una derivada positiva indica una cantidad creciente y que una derivada negativa indica una cantidad decreciente.

**EJEMPLO 6** Se infla un globo esférico (figura 3.3.2). El radio  $r$  del globo aumenta a razón de 0.2 cm/segundo cuando  $r = 5$  cm. ¿Con qué razón aumenta el volumen  $V$  del globo en ese instante?



**Figura 3.3.2** El globo esférico con volumen  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  (ejemplo 6)

**Solución** Dado que  $dr/dt = 0.2$  cm/segundo cuando  $r = 5$  cm, queremos determinar  $dV/dt$  en ese instante. Como el volumen del globo es

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

vemos que  $dV/dr = 4\pi r^2$ . Así, la regla de la cadena implica

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = 4\pi(5)^2(0.2) \approx 62.83 \quad (\text{cm/s})$$

en el instante en que  $r = 5$  cm.

En el ejemplo 6 no necesitamos conocer  $r$  explícitamente como función de  $t$ . Pero supongamos que sabemos que después de  $t$  segundos el radio (en centímetros) de un globo que se infla es  $r = 3 + (0.2)t$  (hasta que el globo explota). Entonces, el volumen del globo es

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \left(3 + \frac{t}{5}\right)^3,$$

por lo que  $dV/dt$  está dada explícitamente como función de  $t$  por

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi(3) \left(3 + \frac{t}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5}\pi \left(3 + \frac{t}{5}\right)^2.$$

**EJEMPLO 7** Imagine una gota de lluvia, esférica, que cae a través del vapor de agua en el aire. Suponga que el vapor se adhiere a la superficie de la gota de modo que la razón de crecimiento de la masa  $M$  de la gota con respecto del tiempo es proporcional al área  $S$  de la superficie de la gota. Si el radio inicial de la gota es, de hecho, cero, y el radio es  $r = 1$  mm después de 20 segundos, ¿en qué instante es el radio igual a 3 mm?

**Solución** Sabemos que

$$\frac{dM}{dt} = kS,$$

donde  $k$  es una constante que depende de las condiciones atmosféricas. Ahora,

$$M = \frac{4}{3}\pi \rho r^3 \quad \text{y} \quad S = 4\pi r^2,$$

donde  $\rho$  es la densidad del agua. Por tanto, con la regla de la cadena se obtiene:

$$4\pi k r^2 = kS = \frac{dM}{dt} = \frac{dM}{dr} \cdot \frac{dr}{dt};$$

es decir,

$$4\pi kr^2 = 4\pi\rho r^2 \frac{dr}{dt}.$$

Esto implica que

$$\frac{dr}{dt} = \frac{k}{\rho},$$

una constante. Entonces, el radio de la gota crece a razón *constante*. Así, si  $r$  tarda 20 segundos en crecer hasta 1 mm, tardará un minuto para que crezca hasta 3 mm.

### 3.3 Problemas

En los problemas 1 a 12, determine  $dy/dx$ .

1.  $y = (3x + 4)^5$       2.  $y = (2 - 5x)^3$   
 3.  $y = \frac{1}{3x - 2}$       4.  $y = \frac{1}{(2x + 1)^3}$   
 5.  $y = (x^2 + 3x + 4)^3$       6.  $y = (7 - 2x^3)^{-4}$   
 7.  $y = (2 - x)^4(3 + x)^7$       8.  $y = (x + x^2)^5(1 + x^3)^2$   
 9.  $y = \frac{x + 2}{(3x - 4)^3}$       10.  $y = \frac{(1 - x^2)^3}{(4 + 5x + 6x^2)^2}$   
 11.  $y = [1 + (1 + x)^3]^4$       12.  $y = [x + (x + x^2)^{-3}]^{-5}$

En los problemas 13 a 20, exprese la derivada  $dy/dx$  en términos de  $x$ .

13.  $y = (u + 1)^3$      $y$      $u = \frac{1}{x^2}$   
 14.  $y = \frac{1}{2u} - \frac{1}{3u^2}$      $y$      $u = 2x + 1$   
 15.  $y = (1 + u^2)^3$      $y$      $u = (4x - 1)^2$   
 16.  $y = u^5$      $y$      $u = \frac{1}{3x - 2}$   
 17.  $y = u(1 - u)^3$      $y$      $u = \frac{1}{x^4}$   
 18.  $y = \frac{u}{u + 1}$      $y$      $u = \frac{x}{x + 1}$   
 19.  $y = u^2(u - u^4)^3$      $y$      $u = \frac{1}{x^2}$   
 20.  $y = \frac{u}{(2u + 1)^4}$      $y$      $u = x - \frac{2}{x}$

En los problemas 21 a 26, identifique una función  $u$  de  $x$  y un entero  $n \neq 1$  tales que  $f(x) = u^n$ . Calcule después  $f'(x)$ .

21.  $f(x) = (2x - x^2)^3$       22.  $f(x) = \frac{1}{2 + 5x^3}$

23.  $f(x) = \frac{1}{(1 - x^2)^4}$       24.  $f(x) = (x^2 - 4x + 1)^3$   
 25.  $f(x) = \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^7$       26.  $f(x) = \frac{(x^2 + x + 1)^7}{(x + 1)^4}$

Derive las funciones dadas en los problemas 27 a 36.

27.  $g(y) = y + (2y - 3)^5$   
 28.  $h(z) = z^2(z^2 + 4)^3$   
 29.  $F(s) = \left(s - \frac{1}{s^2}\right)^3$   
 30.  $G(t) = \left[t^2 + \left(1 + \frac{1}{t}\right)\right]^2$   
 31.  $f(u) = (1 + u)^3(1 + u^2)^4$   
 32.  $g(w) = (w^2 - 3w + 4)(w + 4)^5$   
 33.  $h(v) = \left[v - \left(1 - \frac{1}{v}\right)^{-1}\right]^{-2}$   
 34.  $p(t) = \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3}\right)^{-4}$   
 35.  $F(z) = \frac{1}{(3 - 4z + 5z^5)^{10}}$   
 36.  $G(x) = \{1 + [x + (x^2 + x^3)^4]^5\}^6$

En los problemas 37 a 44,  $dy/dx$  se puede determinar de dos formas (una mediante la regla de la cadena y la otra sin usarla). Use ambas técnicas para determinar  $dy/dx$  y compare las respuestas. (¡Deben coincidir!)

37.  $y = (x^3)^4 = x^{12}$   
 38.  $y = x = \left(\frac{1}{x}\right)^{-1}$   
 39.  $y = (x^2 - 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$   
 40.  $y = (1 - x)^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3$   
 41.  $y = (x + 1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

$$42. y = (x + 1)^{-2} = \frac{1}{x^2 + 2x + 1}$$

$$43. y = (x^2 + 1)^{-1} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$44. y = (x^2 + 1)^2 = (x^2 + 1)(x^2 + 1)$$

En la sección 3.7 veremos que  $D_x \sin x = \cos x$  (si  $x$  se mide en radianes). Use este hecho y la regla de la cadena para determinar las derivadas de las funciones en los problemas 45 a 48.

$$45. f(x) = \sin(x^3)$$

$$46. g(t) = (\sin t)^3$$

$$47. g(z) = (\sin 2z)^3$$

$$48. k(u) = \sin(1 + \sin u)$$

49. El radio de un círculo aumenta a razón de 2 pulgadas por segundo. ¿Con qué razón aumenta su área cuando el radio es de 10 pulgadas?

50. El área de un círculo decrece a razón de  $2\pi \text{ cm}^2/\text{seg}$ . ¿Con qué razón decrece el radio del círculo cuando su área es  $75\pi \text{ cm}^2$ ?

51. Cada arista  $x$  de un cuadrado aumenta a razón de 2 pulgadas/segundo. ¿Con qué razón aumenta el área  $A$  del cuadrado cuando cada arista mide 10 pulgadas?

52. Cada arista de un triángulo equilátero crece a razón de 2 cm/segundo (figura 3.3.3). ¿Con qué razón aumenta el área del triángulo cuando cada arista mide 10 cm?

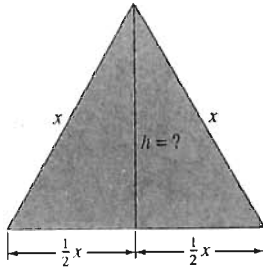


Figura 3.3.3 El triángulo del problema 52, con área  $A = \frac{1}{2}xh$

53. Un bloque cúbico de hielo se funde de modo que su arista decrece 2 pulgadas cada hora. ¿Con qué razón decrece su volumen cuando cada arista mide 10 pulgadas?

## 3.4 Derivadas de funciones algebraicas

En la sección 3.3 vimos que con la regla de la cadena se obtiene la fórmula de derivación

$$D_x u^n = nu^{n-1} \frac{du}{dx} \quad (1)$$

si  $u = f(x)$  es una función diferenciable y el exponente  $n$  es un entero. Veremos en el teorema 1 de esta sección que esta **regla de la potencia generalizada** no sólo es válida cuando el exponente es un entero, sino también cuando es un número racional  $r = p/q$  (donde  $p$  y  $q$  son enteros y  $q \neq 0$ ). Recordemos que las potencias racionales se definen en términos de raíces y potencias enteras como sigue:

$$u^{p/q} = \sqrt[q]{u^p} = \left( \sqrt[q]{u} \right)^p$$

54. Determine  $f'(-1)$ , si  $f(y) = h(g(y))$ ,  $h(2) = 55$ ,  $g(-1) = 2$ ,  $h'(2) = -1$  y  $g'(-1) = 7$ .

55. Dado que  $G(t) = f(h(t))$ ,  $h(1) = 4$ ,  $f'(4) = 3$  y  $h'(1) = -6$ , determine  $G'(1)$ .

56. Suponga que  $f(0) = 0$  y que  $f'(0) = 1$ . Calcule el valor de la derivada de  $f(f(f(x)))$  en  $x = 0$ .

57. Se bombea aire en un globo esférico de modo que su radio  $r$  aumenta a razón de  $dr/dt = 1 \text{ cm/seg}$ . ¿Cuál es la razón de aumento con respecto del tiempo, en centímetros cúbicos por segundo, del volumen del globo, cuando  $r = 10 \text{ cm}$ ?

58. Suponga que el aire se bombea al globo del problema 57 a razón constante de  $200\pi \text{ cm}^3/\text{seg}$ . ¿Cuál es la razón de incremento del radio  $r$  con respecto del tiempo cuando  $r = 5 \text{ cm}$ ?

59. El aire sale de un globo esférico a razón constante de  $300\pi \text{ cm}^3/\text{seg}$ . ¿Cuál es el radio del globo cuando su radio decrece a razón de 3 cm/segundo?

60. Un granizo esférico pierde masa por la fusión uniforme sobre su superficie, durante su caída. En cierto instante, su radio es 2 cm, y su volumen decrece a razón de  $0.1 \text{ cm}^3/\text{seg}$ . ¿Qué tan rápido decrece su radio en ese instante?

61. Una bola de nieve esférica se funde de modo que la razón de decremento de su volumen es proporcional al área de su superficie. A las 10 A.M., su volumen es 500 pulgadas cúbicas y a las 11 A.M. su volumen es 250 pulgadas cúbicas. ¿Cuándo se fundirá toda la bola de nieve? (Véase el ejemplo 7.)

62. Un bloque cúbico de hielo con aristas de longitud 20 pulgadas comienza a fundirse a las 8 A.M. Cada arista decrece de manera uniforme de ahí en adelante y mide 8 pulgadas a las 4 P.M. ¿Cuál fue la razón de cambio del volumen del bloque al mediodía?

63. Suponga que  $u$  es una función de  $v$ , que  $v$  es una función de  $w$ , que  $w$  es una función de  $x$  y que todas estas funciones son derivables. Explique por qué la regla de la cadena implica

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dw} \cdot \frac{dw}{dx}$$



Primero consideremos el caso de una potencia racional de la variable independiente  $x$ :

$$y = x^{p/q}, \quad (2)$$

donde  $p$  y  $q$  son enteros, y  $q$  es positivo. Mostramos independientemente en la sección 7.1 que  $g(x) = x^{p/q}$  es diferenciable si su derivada no involucra la división entre cero o una raíz par de un número negativo. Suponiendo este hecho, elevamos a la potencia  $q$  –ésima de cada lado de la ecuación (2) para obtener

$$y^q = x^p \quad (3)$$

[ya que  $(x^{p/q})^q = x^p$ ]. Observe que la ecuación (3) es una identidad: las funciones  $y^q$  y  $x^p$  de  $x$  son idénticas en su dominio de definición. Por tanto, sus derivadas con respecto de  $x$  deben ser idénticas. Es decir,

$$\begin{aligned} D_x(y^q) &= D_x(x^p); \\ qy^{q-1} \frac{dy}{dx} &= px^{p-1}. \end{aligned}$$

Para derivar el lado izquierdo, usamos la ecuación (1) con  $u = y$  y  $n = q$ . Finalmente, despejamos la derivada:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} = \frac{p}{q} x^{p-1} y^{1-q} = \frac{p}{q} x^{p-1} (x^{p/q})^{1-q} \\ &= \frac{p}{q} x^{p-1} x^{p/q} x^{-p} = \frac{p}{q} x^{(p/q)-1}. \end{aligned}$$

Así, hemos mostrado que

$$D_x x^{p/q} = \frac{p}{q} x^{(p/q)-1},$$

es decir, que la regla de la potencia

$$D_x x^r = r x^{r-1} \quad (4)$$

es válida si el exponente  $r = p/q$  es un número racional (sujeto a las condiciones antes mencionadas).

Mediante la ecuación (4) podemos derivar una función “radical” (o “raíz”) sencilla, si primero la escribimos como una potencia con exponente fraccionario.

### EJEMPLO 1

$$\begin{aligned} D\sqrt{x} &= Dx^{1/2} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \\ D\sqrt{x^3} &= Dx^{3/2} = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}; \\ D\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} &= Dx^{-2/3} = -\frac{2}{3}x^{-5/3} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}. \end{aligned}$$

Para la forma más general de la regla de la potencia, sea

$$y = u^r,$$

donde  $u$  es una función diferenciable de  $x$  y  $r = p/q$  es racional. Entonces

$$\frac{dy}{du} = ru^{r-1}$$

por la ecuación (4), de tal manera que con la regla de la cadena se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = ru^{r-1} \frac{du}{dx}.$$

Así,

$$D_x u^r = ru^{r-1} \frac{du}{dx}, \quad (5)$$

que es la regla de la potencia generalizada para exponentes racionales.

**Teorema 1 Regla generalizada de la potencia**

Si  $r$  es un número racional, entonces

$$D_x [f(x)]^r = r[f(x)]^{r-1} f'(x) \quad (6)$$

dondequiera que la función  $f$  sea diferenciable y el lado derecho esté definido.

“El lado derecho de la ecuación (6) está definido” significa que  $f'(x)$  exista, que no haya división entre cero, y que no aparezcan raíces pares de números negativos.

**EJEMPLO 2**

$$\begin{aligned} D\sqrt{4-x^2} &= D(4-x^2)^{1/2} = \frac{1}{2}(4-x^2)^{-1/2} D(4-x^2) \\ &= \frac{1}{2}(4-x^2)^{-1/2}(-2x); \\ D\sqrt{4-x^2} &= -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \end{aligned} \quad (7)$$

excepto si  $x = \pm 2$  (división entre cero) o si  $|x| > 2$  (raíz cuadrada de un número negativo). Así, la ecuación (7) es válida si  $-2 < x < 2$ . Al escribir las derivadas de funciones algebraicas, por lo general omitimos esta limitación, a menos que sean pertinentes para algún propósito específico.

Un modelo para la aplicación de la regla de la potencia generalizada es

$$D_x [***]^n = n[***]^{n-1} D_x [***],$$

donde \*\*\* representa una función de  $x$  y (como sabemos)  $n$  puede ser un entero o una fracción (un cociente de enteros).

Pero para derivar una potencia de una función, debemos reconocer primero de cuál función es dicha potencia. Así, para derivar una función con raíces (o radicales), primero la “preparamos” para una aplicación de la regla de la potencia generalizada al escribirla como una función potencia con exponente fraccionario. Los ejemplos 3 a 6 ilustran esta técnica.

**EJEMPLO 3** Si  $y = 5\sqrt{x^3} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ , entonces

$$y = 5x^{3/2} - 2x^{-1/3}, \text{ de modo que}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 5 \cdot \left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right) - 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}x^{-4/3}\right) \\ &= \frac{15}{2}x^{1/2} + \frac{2}{3}x^{-4/3} = \frac{15}{2}\sqrt{x} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x^4}}. \end{aligned}$$

**EJEMPLO 4** Si  $f(x) = 3 - 5x$  y  $r = 7$ , la regla de la potencia generalizada produce

$$\begin{aligned} D(3 - 5x)^7 &= 7(3 - 5x)^6 D(3 - 5x) \\ &= 7(3 - 5x)^6(-5) = -35(3 - 5x)^6. \end{aligned}$$

**EJEMPLO 5** Si  $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$  y  $r = 1/2$ , la regla de la potencia generalizada produce

$$\begin{aligned} D\sqrt{2x^2 - 3x + 5} &= D(2x^2 - 3x + 5)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}(2x^2 - 3x + 5)^{-1/2} D(2x^2 - 3x + 5) \\ &= \frac{4x - 3}{2\sqrt{2x^2 - 3x + 5}}. \end{aligned}$$

**EJEMPLO 6** Si  $y = [5x + \sqrt[3]{(3x - 1)^4}]^{10}$ , entonces la ecuación (5) con  $u = 5x + (3x - 1)^{4/3}$  se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 10u^9 \frac{du}{dx} = 10[5x + (3x - 1)^{4/3}]^9 D[5x + (3x - 1)^{4/3}] \\ &= 10[5x + (3x - 1)^{4/3}]^9 [D(5x) + D(3x - 1)^{4/3}] \\ &= 10[5x + (3x - 1)^{4/3}]^9 [5 + \frac{4}{3}(3x - 1)^{1/3}(3)] \\ &= 10[5x + (3x - 1)^{4/3}]^9 [5 + 4\sqrt[3]{3x - 1}]. \end{aligned}$$

## RECTAS TANGENTES VERTICALES

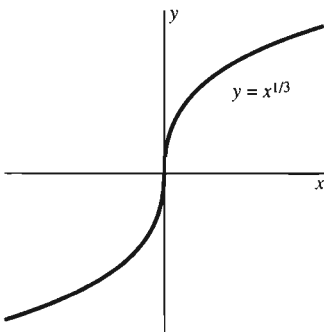
La figura 3.4.1 muestra la gráfica de la función

$$y = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}.$$

Su derivada,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

crece sin límite si  $x \rightarrow 0$ , pero no existe en  $x = 0$ . Por consiguiente, la definición de la recta tangente de la sección 2.1 no se aplica a esta gráfica en  $(0, 0)$ . Sin embargo, la figura sugiere considerar la recta vertical  $x = 0$  como la recta tangente a la curva  $y = x^{1/3}$  en el punto  $(0, 0)$ . Observaciones como ésta motivan la siguiente definición.



**Figura 3.4.1** La gráfica de la función raíz cúbica

**Definición Recta tangente vertical**

La curva  $y = f(x)$  tiene una **recta tangente vertical** en el punto  $(a, f(a))$  siempre que  $f$  sea continua en  $a$  y que

$$|f'(x)| \rightarrow +\infty \text{ cuando } x \rightarrow a. \quad (8)$$

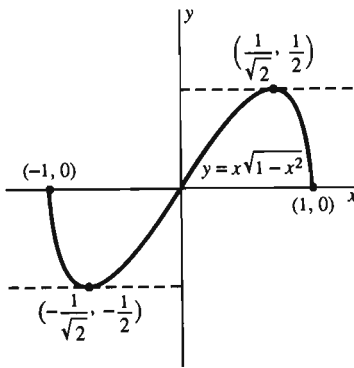
El requerimiento de que  $f$  sea continua en  $x = a$  implica que  $f(a)$  debe estar definida. No tendría sentido preguntarse por una recta tangente (vertical o no) a la curva  $y = 1/x$  donde  $x = 0$ .

Si  $f$  está definida (y es derivable) en un solo lado de  $x = a$ , entenderemos en la ecuación (8) que  $|f'(x)| \rightarrow +\infty$  cuando  $x$  tiende a  $a$  desde ese lado.

**EJEMPLO 7** Determine los puntos en la curva

$$y = f(x) = x\sqrt{1-x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

donde la recta tangente es horizontal o vertical.



**Solución** Derivamos usando primero la regla del producto y después la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1-x^2)^{1/2} + \frac{x}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x) \\ &= (1-x^2)^{-1/2}[(1-x^2) - x^2] = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Así,  $f'(x) = 0$  sólo cuando el numerador  $1-2x^2$  se anula; es decir, cuando  $x = \pm 1/\sqrt{2}$ . Como  $f(\pm 1/\sqrt{2}) = \pm 0.5$ , la curva tiene una recta tangente horizontal en cada uno de los dos puntos  $(1/\sqrt{2}, 0.5)$  y  $(-1/\sqrt{2}, -0.5)$ .

También observamos que el denominador  $\sqrt{1-x^2}$  tiende a cero cuando  $x \rightarrow -1^+$  y cuando  $x \rightarrow 1^-$ . Ya que  $f(\pm 1) = 0$ , vemos que la curva tiene una recta tangente vertical en cada uno de los dos puntos  $(1, 0)$  y  $(-1, 0)$ . La gráfica de  $f$  se muestra en la figura 3.4.2.

**Figura 3.4.2** La gráfica de  $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ ,  $-1 \leq x \leq 1$  (ejemplo 7)

### 3.4 Problemas

Derive las funciones dadas en los problemas 1 a 44.

1.  $f(x) = 4\sqrt{x^5} + \frac{2}{\sqrt{x}}$

2.  $f(x) = 9\sqrt[3]{x^4} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$

3.  $f(x) = \sqrt{2x+1}$

4.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{7-6x}}$

5.  $f(x) = \frac{6-x^2}{\sqrt{x}}$

6.  $f(x) = \frac{7+2x-3x^4}{\sqrt[3]{x^2}}$

7.  $f(x) = (2x+3)^{3/2}$

8.  $f(x) = (3x+4)^{4/3}$

9.  $f(x) = (3-2x^2)^{-3/2}$

10.  $f(x) = (4-3x^3)^{-2/3}$

11.  $f(x) = \sqrt{x^3+1}$

12.  $f(x) = \frac{1}{(x^4+3)^2}$

13.  $f(x) = \sqrt{2x^2+1}$

14.  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}$

15.  $f(t) = \sqrt{2t^3}$

16.  $g(t) = \sqrt{\frac{1}{3t^5}}$

17.  $f(x) = (2x^2-x+7)^{3/2}$

18.  $g(z) = (3z^2-4)^{97}$

19.  $g(x) = \frac{1}{(x-2x^3)^{4/3}}$

20.  $f(t) = [t^2 + (1+t)^4]^5$

21.  $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

22.  $g(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$

23.  $f(t) = \sqrt{\frac{t^2+1}{t^2-1}}$

24.  $h(y) = \left(\frac{y+1}{y-1}\right)^{17}$

25.  $f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3$

26.  $g(z) = \frac{z^2}{\sqrt{1+z^2}}$

27.  $f(v) = \frac{\sqrt{v+1}}{v}$

28.  $h(x) = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^{5/3}$

29.  $f(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$     30.  $g(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$   
 31.  $f(x) = x(3-4x)^{1/2}$     32.  $g(t) = \frac{1}{t^2}[t - (1+t^2)^{1/2}]$   
 33.  $f(x) = (1-x^2)(2x+4)^{4/3}$   
 34.  $f(x) = (1-x)^{1/2}(2-x)^{1/3}$   
 35.  $g(t) = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^2(3t^2+1)^{1/2}$   
 36.  $f(x) = x(1+2x+3x^2)^{10}$   
 37.  $f(x) = \frac{2x-1}{(3x+4)^5}$     38.  $h(z) = (z-1)^4(z+1)^6$   
 39.  $f(x) = \frac{(2x+1)^{1/2}}{(3x+4)^{1/3}}$   
 40.  $f(x) = (1-3x^4)^5(4-x)^{1/3}$   
 41.  $h(y) = \frac{\sqrt{1+y} + \sqrt{1-y}}{\sqrt[3]{y^5}}$   
 42.  $f(x) = \sqrt{1-\sqrt[3]{x}}$     43.  $g(t) = \sqrt{t+\sqrt{t+\sqrt{t}}}$   
 44.  $f(x) = x^3\sqrt{1-\frac{1}{x^2+1}}$

Para cada una de las curvas dadas en los problemas 45 a 50, determine todos los puntos de la gráfica donde la recta tangente es horizontal o vertical.

45.  $y = x^{2/3}$     46.  $y = x\sqrt{4-x^2}$   
 47.  $y = x^{1/2} - x^{3/2}$     48.  $y = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$   
 49.  $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$     50.  $y = \sqrt{(1-x^2)(4-x^2)}$

51. El periodo de oscilación  $P$  (en segundos) de un péndulo simple de longitud  $L$  (en pies) está dado por  $P = 2\pi\sqrt{L/g}$ , donde  $g = 32$  pies/seg<sup>2</sup>. Determine la razón de cambio de  $P$  con respecto de  $L$  cuando  $P = 2$ .

52. Determine la razón de cambio del volumen  $V = 4/3\pi r^3$  de una esfera de radio  $r$  con respecto del área de su superficie  $A = 4\pi r^2$  cuando  $r = 10$ .

53. Determine los dos puntos del círculo  $x^2 + y^2 = 1$  donde la pendiente de la recta tangente es  $-2$  (figura 3.4.3).

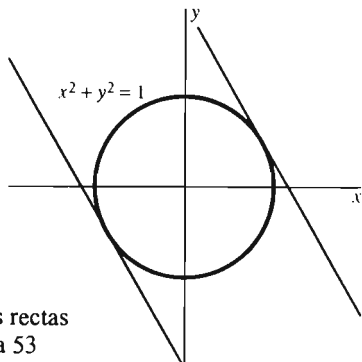


Figura 3.4.3 Las dos rectas tangentes del problema 53

54. Determine los dos puntos del círculo  $x^2 + y^2 = 1$  donde la pendiente de la recta tangente es 3.

55. Determine una recta que pase por el punto  $P(18, 0)$  y sea normal a la recta tangente a la parábola  $y = x^2$  en algún punto  $Q(a, a^2)$  (figura 3.4.4). [Sugerencia: Obtendrá una ecuación cúbica en la variable  $a$ . Determine por inspección una raíz entera pequeña  $r$ . El polinomio cúbico es entonces el producto de  $a-r$  y un polinomio cuadrático; puede encontrar el factor cuadrático dividiendo entre  $a-r$  el polinomio cúbico.]

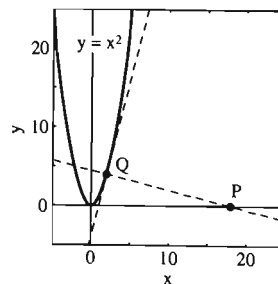


Figura 3.4.4 La tangente y la normal del problema 55

56. Determine tres rectas distintas que pasen por el punto  $P(3, 10)$ , normales a la parábola  $y = x^2$  (figura 3.4.5). [Véase la sugerencia del problema 55. Este problema requiere una buena cantidad de cálculos realizados con una calculadora.]

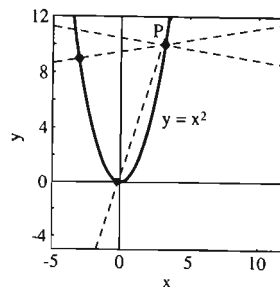


Figura 3.4.5 Las tres rectas normales del problema 56

57. Determine dos rectas distintas que pasen por el punto  $P(0, 2.5)$ , normales a la curva  $y = x^{2/3}$  (figura 3.4.6).

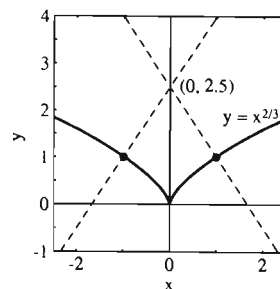


Figura 3.4.6 Las dos rectas normales del problema 57

58. Verifique que la recta tangente en el punto  $P$  de la curva  $x^2 + y^2 = a^2$  es perpendicular al segmento radial  $OP$  (figura 3.4.7).

59. Considere la ecuación cúbica  $x^3 = 3x + 8$ . Si derivamos cada lado con respecto de  $x$ , obtenemos  $3x^2 = 3$ , que tiene las dos soluciones  $x = 1$  y  $x = -1$ . Pero ninguna de éstas es solución de la ecuación original. ¿Qué falló? Después de todo, en varios ejemplos y teoremas de esta sección, *parecía* que derivábamos ambos lados de una ecuación. Explique cuidadosamente por qué la derivación de ambos lados de la ecuación (3) es válida y por qué la derivación en este problema no lo es.

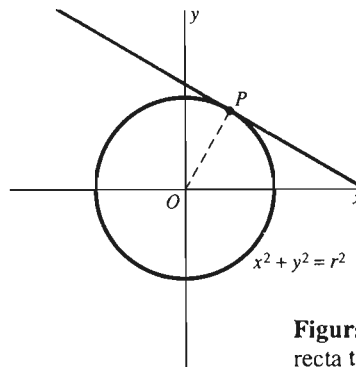


Figura 3.4.7 El círculo, radio y recta tangente del problema 58

### 3.5 Máximos y mínimos de funciones en intervalos cerrados

Con frecuencia, en muchas aplicaciones necesitamos determinar el valor máximo (el más grande) o el mínimo (el más pequeño) que puede alcanzar una cantidad específica. El problema del corral de los animales de la sección 1.1 es un ejemplo típico de un problema de aplicación de máximos y mínimos. Ahí analizamos el corral de los animales que se muestra en la figura 3.5.1, con el costo en dólares por pie para sus cuatro lados. Mostramos que si se cuenta con \$100 en material para construir el corral, entonces el área  $A = f(x)$  está dada como una función de su base  $x$  por

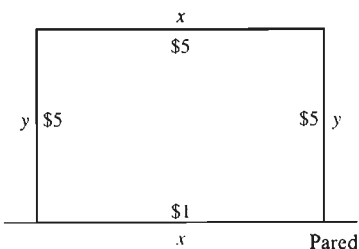


Figura 3.5.1 El corral de los animales

$$f(x) = \frac{3}{5}x(30 - x), \quad 0 \leq x \leq 30. \quad (1)$$

De aquí que la pregunta del área más grande posible del corral de los animales sea equivalente al problema puramente matemático de determinar el valor máximo que puede alcanzar la función  $f(x) = \frac{3}{5}x(30 - x)$  en el intervalo cerrado  $[0, 30]$ .

#### Definición Valores máximos y mínimos

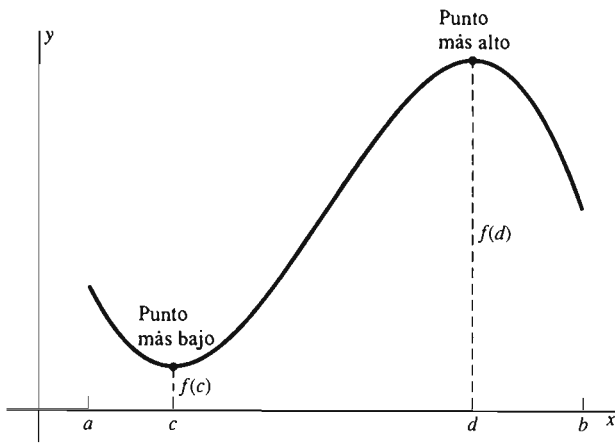
Si  $c$  está en un intervalo cerrado  $[a, b]$ , entonces  $f(c)$  es el **valor mínimo** de  $f(x)$  en  $[a, b]$  si  $f(c) \leq f(x)$  para toda  $x$  en  $[a, b]$ . Similarmente, si  $d$  está en  $[a, b]$ , entonces  $f(d)$  es el **valor máximo** de  $f(x)$  en  $[a, b]$  si  $f(d) \geq f(x)$  para toda  $x$  en  $[a, b]$ .

Por tanto, si  $f(c)$  es el valor mínimo y  $f(d)$  es el valor máximo de  $f(x)$  en  $[a, b]$ , entonces

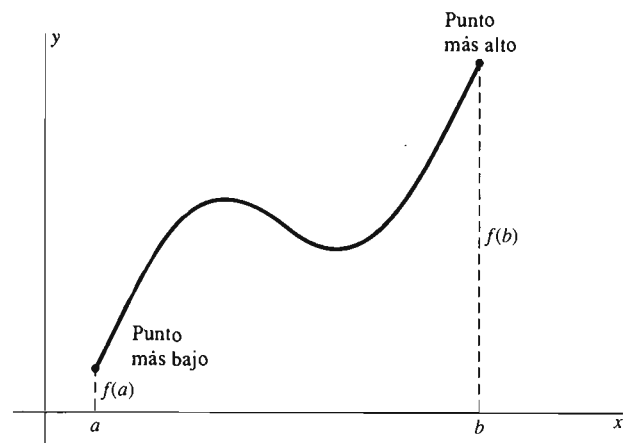
$$f(c) \leq f(x) \leq f(d) \quad (2)$$

para toda  $x$  en  $[a, b]$ , y entonces  $f(x)$  no alcanza un valor más pequeño que  $f(c)$  o más grande que  $f(d)$ . En términos geométricos,  $(c, f(c))$  es un *punto más bajo* y  $(d, f(d))$  es un *punto más alto* en la curva  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , como se ilustra en las figuras 3.5.2 y 3.5.3.

El teorema 1 (demostrado en el apéndice C) dice que una función continua  $f$  en un intervalo cerrado  $[a, b]$  alcanza un valor máximo  $f(c)$  y un valor mínimo  $f(d)$ , de modo que las desigualdades en (2) son válidas: La curva  $y = f(x)$  tiene un punto mínimo y un punto máximo en  $[a, b]$ .



**Figura 3.5.2**  $f(c)$  es el valor mínimo y  $f(d)$  es el valor máximo de  $f(x)$  en  $[a, b]$



**Figura 3.5.3** Los valores máximo y mínimo pueden aparecer en los extremos de un intervalo. Aquí  $f(a)$  es el valor mínimo y  $f(b)$  es el valor máximo de  $f(x)$  en  $[a, b]$

**Teorema 1 Propiedad de los valores máximo y mínimo**

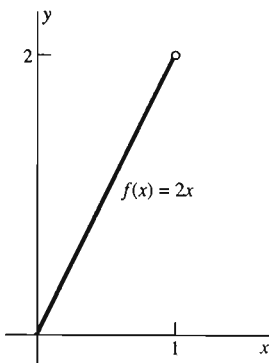
Si la función  $f$  es continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$ , entonces existen números  $c$  y  $d$  en  $[a, b]$  tales que  $f(c)$  es el valor mínimo, y  $f(d)$  es el valor máximo, de  $f$  en  $[a, b]$ .

En resumen, una función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza un valor mínimo y un valor máximo en los puntos del intervalo. De aquí vemos que la *continuidad* de la función

$$f(x) = \frac{3}{5}x(30 - x)$$

en el intervalo *cerrado*  $[0, 30]$  garantiza la existencia del valor máximo de  $f$ , el cual se alcanza en algún punto del intervalo  $[0, 30]$ .

Suponga que la función  $f$  está definida en el intervalo  $I$ . Los ejemplos 1 y 2 muestran *que* si  $f$  no es continua o  $I$  no es cerrado, entonces  $f$  podría no alcanzar sus valores máximo o mínimo en los puntos de  $I$ . Así, ambas hipótesis en el teorema 1 son necesarias.



**Figura 3.5.4** La gráfica de la función del ejemplo 1

**EJEMPLO 1** Sea  $f(x) = 2x$  una función continua definida sólo para  $0 \leq x < 1$ , por lo que su dominio de definición es un intervalo semiabierto en vez de un intervalo cerrado. De la gráfica que se muestra en la figura 3.5.4, es claro que  $f$  alcanza su valor mínimo 0 en  $x = 0$ . Pero  $f(x) = 2x$  no alcanza un valor máximo en ningún punto de  $[0, 1]$ . El único candidato posible como valor máximo podría ser el valor 2 en  $x = 1$ , pero  $f(1)$  no está definido.

**EJEMPLO 2** La función  $f$  definida en el intervalo cerrado  $[0, 1]$  mediante la fórmula

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

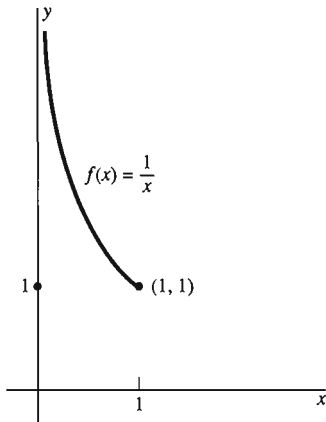


Figura 3.5.5 La gráfica de la función del ejemplo 2

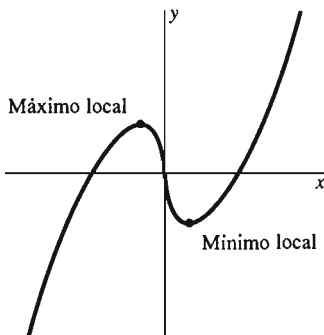


Fig. 3.5.6 Extremos locales

no es continua en  $[0, 1]$ , ya que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1/x)$  no existe (figura 3.5.5). Esta función alcanza su valor mínimo 1 en  $x = 0$  y también en  $x = 1$ . Pero no alcanza su valor máximo en  $[0, 1]$ , ya que  $1/x$  puede ser arbitrariamente grande si elegimos  $x$  positiva muy cercana a cero.

Para una variación del ejemplo 2, la función  $g(x) = 1/x$  con dominio en el intervalo *abierto*  $(0, 1)$  no alcanza ni un valor máximo ni un mínimo.

## MÁXIMOS Y MÍNIMOS LOCALES

Una vez que sabemos que la función continua  $f$  si alcanza sus valores máximo y mínimo en el intervalo cerrado  $[a, b]$ , la pregunta restante es ésta: ¿Exactamente *dónde* se localizan estos valores? Resolvimos el problema del corral de los animales en la sección 2.1 con base en la siguiente hipótesis motivada por la geometría: La función  $f(x) = 3/5x(30 - x)$  alcanza su valor máximo en  $[0, 30]$  en un punto interior de ese intervalo, un punto donde la recta tangente es horizontal. Los teoremas 2 y 3 de esta sección proporcionan una base rigurosa para el método que usamos entonces.

Decimos que el valor  $f(c)$  es un **valor máximo local** de la función  $f$  si  $f(x) \leq f(c)$  para toda  $x$  suficientemente cercana a  $c$ . Más precisamente, si esta desigualdad es cierta para toda  $x$  que se encuentra simultáneamente en el dominio de  $f$  y en algún intervalo abierto que contiene a  $c$ , entonces  $f(c)$  es un máximo local de  $f$ . De igual manera, decimos que el valor  $f(c)$  es un **valor mínimo local** de  $f$  si  $f(x) \geq f(c)$  para toda  $x$  suficientemente cercana a  $c$ .

Como muestra la figura 3.5.6, un máximo local es un punto tal que ninguno de los puntos cercanos de la gráfica es más alto, y un mínimo local es tal que ninguno de los puntos cercanos de la gráfica es más bajo. Un **extremo local** de  $f$  es un valor de  $f$  que es un máximo local o un mínimo local.

### Teorema 2 Máximos y mínimos locales

Si  $f$  es derivable en  $c$ , definida en un intervalo abierto que contiene a  $c$  y si  $f'(c) = 0$ , entonces  $f(c)$  es un valor máximo o mínimo local de  $f$ .

Así, un extremo local de una función *derivable* en un intervalo *abierto* sólo puede aparecer en un punto donde la derivada se anule y, por tanto, donde la recta tangente a la gráfica es horizontal.

**Demostración del teorema 2** Suponga, por ejemplo, que  $f(c)$  es un valor máximo local de  $f$ . La hipótesis de que  $f'(c)$  existe significa que los límites por la derecha y por la izquierda

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \quad \text{y} \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

existen y son iguales a  $f'(c)$ .

Si  $h > 0$ , entonces

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0,$$



ya que  $f(c) \geq f(c+h)$  para todos los valores positivos pequeños de  $h$ . En consecuencia, por la versión lateral de la ley del sandwich para límites (en la sección 2.2), esta desigualdad se preserva si  $h \rightarrow 0$ . Vemos entonces que

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} 0 = 0.$$

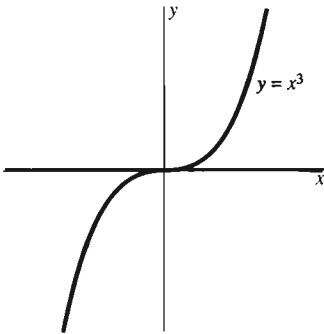
De manera semejante, en el caso  $h < 0$ , tenemos

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0.$$

Por lo tanto,

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq \lim_{h \rightarrow 0^-} 0 = 0.$$

Como  $f'(c) \leq 0$  y  $f'(c) \geq 0$ , concluimos que  $f'(c) = 0$ . Esto establece el teorema 2.  $\square$



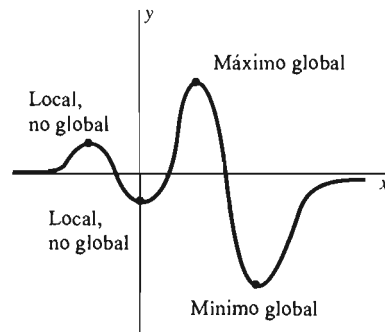
**Figura 3.5.7** No hay un extremo en  $x = 0$  aunque la derivada se anule ahí

**CUIDADO** El recíproco del teorema 3 es falso. Es decir, el hecho de que  $f'(c) = 0$ , *no es suficiente* para asegurar que  $f(c)$  es un extremo local. Por ejemplo, considere la función  $f(x) = x^3$ . Su derivada  $f'(x) = 3x^2$  se anula en  $x = 0$ . Pero un vistazo a su gráfica (figura 3.5.7) nos muestra que  $f(0)$  *no* es un extremo local de  $f$ .

Así, la ecuación  $f'(c) = 0$  es una condición *necesaria* para que  $f(c)$  sea un valor máximo o mínimo local de una función  $f$  diferenciable en un intervalo abierto. No es una condición *suficiente*. La razón:  $f'(x)$  podría anularse en otros puntos además de los máximos y mínimos locales. Daremos condiciones suficientes para los máximos y mínimos locales en el capítulo 4.

## MÁXIMOS Y MÍNIMOS ABSOLUTOS

En muchos tipos de problemas de optimización, estamos menos interesados en el extremo local (como tal) que en los valores máximos o mínimos *absolutos*, o *globales*, de una función continua dada. Si  $f$  es una función con dominio  $D$ ,  $f(c)$  es el **valor máximo absoluto**, o el **valor máximo global**, de  $f$  en  $D$  si  $f(c) \geq f(x)$  para *toda*  $x$  en  $D$ . Brevemente,  $f(c)$  es el valor más grande de  $f$  evaluada en  $D$ . Debe ser claro cómo se define el mínimo global de  $f$ . La figura 3.5.8 ilustra algunos extremos locales y globales. Por un lado, cada extremo global también es, por supuesto, local. Por otro lado, la gráfica muestra extremos locales que no son globales.



**Figura 3.5.8** Algunos extremos son globales; otros son solamente locales

El teorema 3 nos dice que los valores máximo y mínimo absolutos de una función continua  $f$  en el intervalo cerrado  $[a, b]$  aparecen en uno de los extremos  $a$  o  $b$  o en un *punto crítico* de  $f$ . El número  $c$  en el dominio de  $f$  es un **punto crítico** de  $f$  si

□  $f'(c) = 0$ , o si

□  $f'(c)$  no existe.

**Teorema 3 Máximos y mínimos absolutos**

Suponga que  $f(c)$  es el valor máximo absoluto (o mínimo absoluto) de la función continua  $f$  en el intervalo cerrado  $[a, b]$ . Entonces  $c$  es un punto crítico de  $f$  o uno de los extremos  $a$  o  $b$ .

**Demostración** Este resultado se sigue casi inmediatamente del teorema 2. Si  $c$  no es un punto extremo de  $[a, b]$ , entonces  $f(c)$  es un extremo local de  $f$  en el intervalo abierto  $(a, b)$ . En este caso el teorema 2 implica que  $f'(c) = 0$ , a condición de que  $f$  sea derivable en  $c$ . □

Como una consecuencia del teorema 3, podemos determinar los valores máximo y mínimo (absolutos) de la función  $f$  en el intervalo cerrado  $[a, b]$  como sigue:

1. *Localice* los puntos críticos de  $f$ : aquellos puntos donde  $f'(x) = 0$  y aquellos puntos donde  $f'(x)$  no existe.
2. *Enumere* los valores de  $x$  que sean extremos *posibles* de  $f$ : los dos extremos  $a$  y  $b$  y los puntos críticos que se encuentran en  $[a, b]$ .
3. *Evalúe*  $f(x)$  en cada punto de la lista de posibles extremos.
4. *Inspeccione* estos valores de  $f(x)$  para ver cuál es el menor y cuál es el mayor.

El mayor de los valores del paso 4 es el valor máximo absoluto de  $f$ ; el menor, el mínimo absoluto. Llamamos a este procedimiento el **método del máximo y el mínimo en un intervalo cerrado**.

**EJEMPLO 3** Para nuestro análisis final del problema del corral de los animales, apliquemos el método del máximo y el mínimo en un intervalo cerrado para determinar los valores máximos y mínimos de la función diferenciable

$$f(x) = \frac{3}{5}x(30 - x) = \frac{3}{5}(30x - x^2)$$

en el intervalo cerrado  $[0, 30]$ .

**Solución** La derivada de  $f$  es

$$f'(x) = \frac{3}{5}(30 - 2x),$$

que se anula solamente en el punto  $x = 15$  de  $[0, 30]$ . Incluyendo los dos extremos, nuestra lista de valores  $x$  que pueden alcanzar extremos de  $f$  consiste en 0, 15 y 30. Evaluamos la función en cada uno:

$f(0) = 0,$	←	minimo absoluto
$f(15) = 135,$	←	máximo absoluto
$f(30) = 0,$	←	minimo absoluto

Así, el valor máximo de  $f(x)$  en  $[0, 30]$  es 135 (que se alcanza en  $x = 15$ ), y el valor mínimo es 0 (que se alcanza en  $x = 0$  y en  $x = 30$ ).

**EJEMPLO 4** Determine los valores máximo y mínimo de

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 15$$

en el intervalo cerrado  $[0, 3]$ .

**Solución** La derivada de  $f$  es

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x - 2)(x + 1).$$

Por lo que los puntos críticos de  $f$  son las soluciones de la ecuación

$$6(x - 2)(x + 1) = 0$$

y los números  $c$  para los que  $f'(c)$  no existe. De éstos no hay ninguno, por lo que los puntos críticos de  $f$  se encuentran en  $x = -1$  y en  $x = 2$ . El primero no está en el dominio de  $f$ ; así que lo descartamos; por lo tanto, el único punto crítico de  $f$  en  $[0, 3]$  es  $x = 2$ . Incluyendo los dos extremos, nuestra lista de valores  $x$  que darían posiblemente un valor máximo o mínimo de  $f$  son 0, 2 y 3. Evaluamos la función  $f$  en cada uno:

$$f(0) = 15, \quad \leftarrow \quad \text{máximo absoluto}$$

$$f(2) = -5, \quad \leftarrow \quad \text{mínimo absoluto}$$

$$f(3) = 6.$$

Por tanto, el valor máximo de  $f$  en  $[0, 3]$  es  $f(0) = 15$  y el valor mínimo de  $f(2) = -5$ .

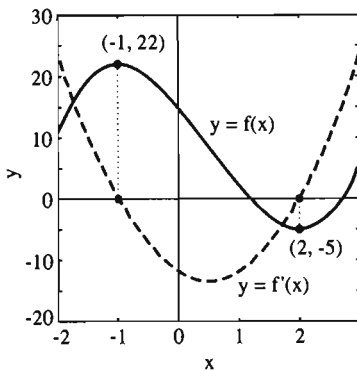
Si en el ejemplo 4, hubiésemos preguntado por los valores máximo y mínimo en el intervalo  $[-2, 3]$  (en lugar del intervalo  $[0, 3]$ ), entonces habríamos incluido *ambos* puntos críticos,  $x = -1$  y  $x = 2$ , en nuestra lista de posibilidades. Los valores resultantes de  $f$  serían:

$$f(-2) = 11,$$

$$f(-1) = 22, \quad \leftarrow \quad \text{máximo absoluto}$$

$$f(2) = -5, \quad \leftarrow \quad \text{mínimo absoluto}$$

$$f(3) = 6.$$



**Figura 3.5.9** Los puntos críticos de  $f(x)$  son las raíces de  $f'(x)$

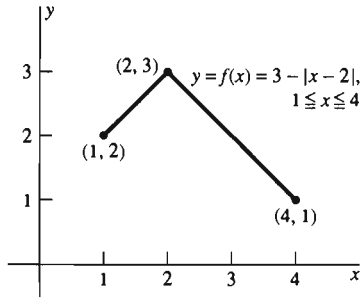
La figura 3.5.9 muestra la curva  $y = f(x)$  y la gráfica de su derivada. Observe el segmento de recta vertical que une los puntos más altos y más bajos en  $y = f(x)$  con las raíces de  $dy/dx = f'(x)$ . Así la figura ilustra el siguiente hecho:

Los puntos críticos de una función diferenciable  $f(x)$  son las raíces de su derivada  $f'(x)$ .

Con base en este principio, podemos aproximar un punto crítico de  $f$  gráficamente al “hacer un acercamiento” a una raíz de  $f'$ .

En el ejemplo 4, la función  $f$  era diferenciable en todo punto. Los ejemplos 5 y 6 ilustran el caso de un extremo en un punto crítico donde la función no es diferenciable.

**EJEMPLO 5** Determine los valores máximos y mínimos de la siguiente función  $f(x) = 3 - |x - 2|$  en el intervalo  $[1, 4]$ .



**Figura 3.5.10** Gráfica de la función del ejemplo 5

**Solución** Si  $x \leq 2$ , entonces  $x - 2 \leq 0$ , por lo que

$$f(x) = 3 - (2 - x) = x + 1.$$

Si  $x \geq 2$ , entonces  $x - 2 \geq 0$ , de modo que

$$f(x) = 3 - (x - 2) = 5 - x.$$

En consecuencia, la gráfica de  $f$  es como se muestra en la figura 3.5.10. El único punto crítico de  $f$  en  $[1, 4]$  es el punto  $x = 2$ , ya que  $f'(x)$  sólo tiene los valores  $+1$  y  $-1$  (y de esta forma nunca se anula) y  $f'(2)$  no existe. (¿Por qué no?) Al evaluar  $f$  en este punto crítico y en los puntos extremos obtenemos

$$\begin{array}{ll} f(1) = 2, & \\ f(2) = 3, & \leftarrow \text{máximo absoluto} \\ f(4) = 1. & \leftarrow \text{mínimo absoluto} \end{array}$$

**EJEMPLO 6** Determine los valores máximo y mínimo de

$$f(x) = 5x^{2/3} - x^{5/3}$$

en el intervalo cerrado  $[-1, 4]$ .

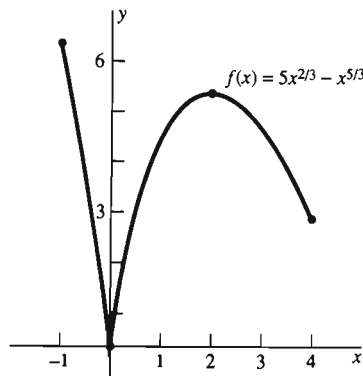
**Solución** Al derivar  $f$  obtenemos

$$f'(x) = \frac{10}{3}x^{-1/3} - \frac{5}{3}x^{2/3} = \frac{5}{3}x^{-1/3}(2 - x) = \frac{5(2 - x)}{3x^{1/3}}.$$

Por tanto,  $f$  tiene dos puntos críticos en el intervalo:  $x = 2$ , donde  $f'(x) = 0$  y  $x = 0$ , donde  $f'$  no existe [la gráfica de  $f$  tiene una recta tangente vertical en  $(0, 0)$ ]. Cuando evaluamos  $f$  en estos dos puntos críticos y en los dos extremos, obtenemos

$$\begin{array}{ll} f(-1) = 6, & \leftarrow \text{máximo absoluto} \\ f(0) = 0, & \leftarrow \text{mínimo absoluto} \\ f(2) = (5)(2^{2/3}) - 2^{5/3} \approx 4.76, & \\ f(4) = (5)(4^{2/3}) - 4^{5/3} \approx 2.52. & \end{array}$$

Así, el valor máximo  $f(-1) = 6$  aparece en un extremo. El valor mínimo  $f(0) = 0$  se presenta en un punto donde  $f$  no es derivable.



**Figura 3.5.11** La gráfica de la función del ejemplo 6

Usando una calculadora gráfica o una computadora con capacidades gráficas, puede verificar que la gráfica de la función  $f$  del ejemplo 6 es como se muestra en la figura 3.5.11. Pero en el caso usual de una función continua que tiene solamente un número finito de puntos críticos en un intervalo cerrado dado, el método del máximo y mínimo en un intervalo cerrado es suficiente para determinar sus valores máximo y mínimo sin necesidad de un conocimiento detallado de la gráfica de la función.

### 3.5 Problemas

En los problemas 1 al 10, establezca si la función dada alcanza un valor máximo o mínimo (o ambos) en el intervalo dado. [Sugerencia: Comience trazando una gráfica de la función.]

1.  $f(x) = 1 - x$ ;  $[-1, 1]$
2.  $f(x) = 2x + 1$ ;  $[-1, 1]$
3.  $f(x) = |x|$ ;  $(-1, 1)$
4.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ;  $(0, 1]$
5.  $f(x) = |x - 2|$ ;  $(1, 4]$
6.  $f(x) = 5 - x^2$ ;  $[-1, 2]$
7.  $f(x) = x^3 + 1$ ;  $[-1, 1]$
8.  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ ;  $(-\infty, \infty)$
9.  $f(x) = \frac{1}{x(1 - x)}$ ;  $[2, 3]$
10.  $f(x) = \frac{1}{x(1 - x)}$ ;  $(0, 1)$

En los problemas 11 a 40, determine los valores máximos y mínimos alcanzados por la función dada en el intervalo cerrado indicado.

11.  $f(x) = 3x - 2$ ;  $[-2, 3]$
12.  $g(x) = 4 - 3x$ ;  $[-1, 5]$
13.  $h(x) = 4 - x^2$ ;  $[1, 3]$
14.  $f(x) = x^2 + 3$ ;  $[0, 5]$
15.  $g(x) = (x - 1)^2$ ;  $[-1, 4]$
16.  $h(x) = x^2 + 4x + 7$ ;  $[-3, 0]$
17.  $f(x) = x^3 - 3x$ ;  $[-2, 4]$
18.  $g(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ ;  $[0, 4]$
19.  $h(x) = x + \frac{4}{x}$ ;  $[1, 4]$
20.  $f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$ ;  $[1, 3]$
21.  $f(x) = 3 - 2x$ ;  $[-1, 1]$
22.  $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ;  $[0, 2]$
23.  $f(x) = 5 - 12x - 9x^2$ ;  $[-1, 1]$
24.  $f(x) = 2x^2 - 4x + 7$ ;  $[0, 2]$
25.  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ ;  $[-2, 4]$
26.  $f(x) = x^3 + x$ ;  $[-1, 2]$
27.  $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ ;  $[-2, 2]$
28.  $f(x) = |2x - 3|$ ;  $[1, 2]$
29.  $f(x) = 5 + |7 - 3x|$ ;  $[1, 5]$
30.  $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$ ;  $[-2, 2]$
31.  $f(x) = 50x^3 - 105x^2 + 72x$ ;  $[0, 1]$
32.  $f(x) = 2x + \frac{1}{2x}$ ;  $[1, 4]$
33.  $f(x) = \frac{x}{x + 1}$ ;  $[0, 3]$
34.  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ ;  $[0, 3]$
35.  $f(x) = \frac{1 - x}{x^2 + 3}$ ;  $[-2, 5]$
36.  $f(x) = 2 - \sqrt[3]{x}$ ;  $[-1, 8]$
37.  $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$ ;  $[-1, 1]$
38.  $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$ ;  $[0, 2]$
39.  $f(x) = x(2 - x)^{1/3}$ ;  $[1, 3]$
40.  $f(x) = x^{1/2} - x^{3/2}$ ;  $[0, 4]$
41. Suponga que  $f(x) = Ax + B$  es una función lineal. Explique por qué los valores máximo y mínimo de  $f$  en un intervalo cerrado  $[a, b]$  deben estar en los extremos del intervalo.
42. Suponga que  $f$  es continua en  $[a, b]$ , derivable en  $(a, b)$  y que  $f'(x)$  nunca se anula en  $(a, b)$ . Explique por qué los valores máximo y mínimo de  $f$  se encuentran en los extremos del intervalo  $[a, b]$ .
43. Explique por qué cada número real es un punto crítico de la función del máximo entero  $f(x) = \llbracket x \rrbracket$ .
44. Demuestre que toda función cuadrática
 
$$f(x) = ax^2 + b + c \quad (a \neq 0)$$
 tiene exactamente un punto crítico en la recta real.
45. Explique por qué la función polinomial cúbica
 
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$
 puede tener dos, uno o ningún punto crítico en la recta real. Dé ejemplos que ilustren cada uno de los tres casos.
46. Defina  $f(x)$  como la distancia de  $x$  al entero más cercano. ¿Cuáles son los puntos críticos de  $f$ ?

En los problemas 47 a 52, relacione la gráfica dada de la función  $f$  con la gráfica de su derivada  $f'$ , para la figura 3.5.12, partes (a) a (f).

47. Fig. 3.5.13
48. Fig. 3.5.14
49. Fig. 3.5.15
50. Fig. 3.5.16
51. Fig. 3.5.17
52. Fig. 3.5.18

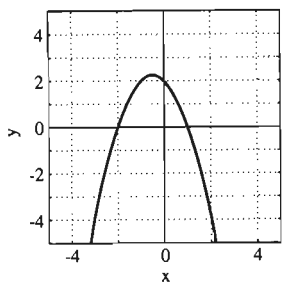


Figura 3.5.12(a)

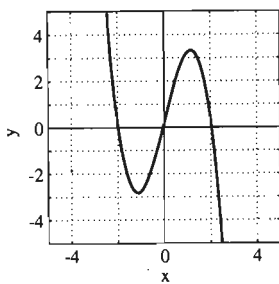


Figura 3.5.12(b)

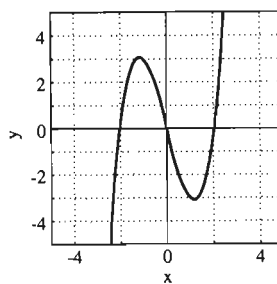


Figura 3.5.13

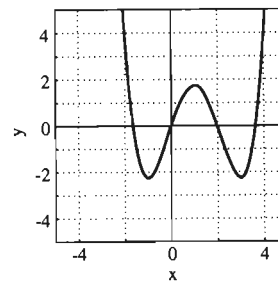


Figura 3.5.14

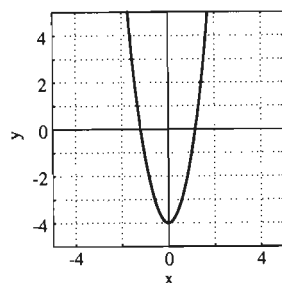


Figura 3.5.12(c)

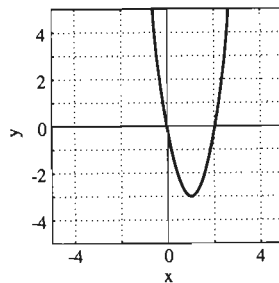


Figura 3.5.12(d)

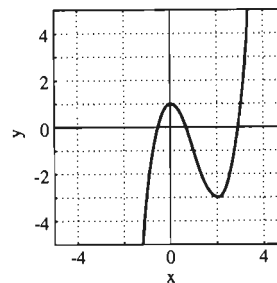


Figura 3.5.15

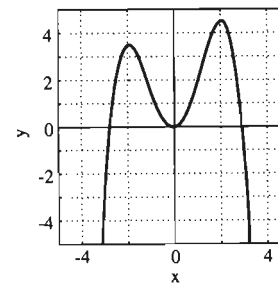


Figura 3.5.16

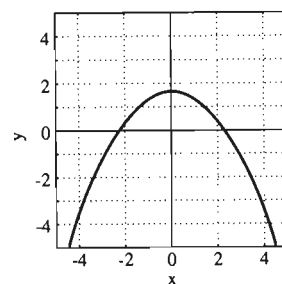


Figura 3.5.12(e)

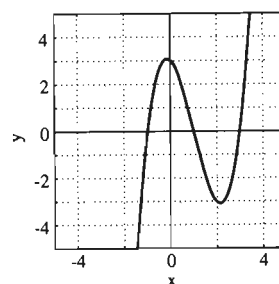


Figura 3.5.12(f)

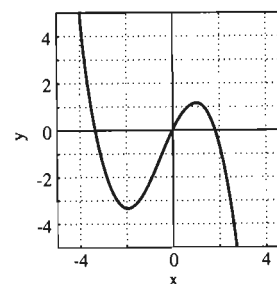


Figura 3.5.17

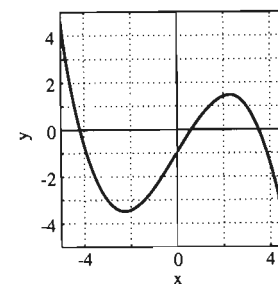


Figura 3.5.18

### 3.5 Proyecto

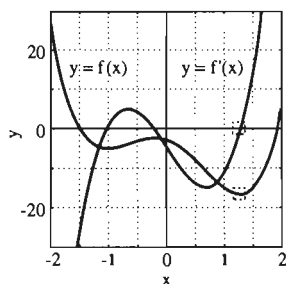


Figura 3.5.19 Las gráficas de  $y=f(x)$  y  $y=f'(x)$

Este proyecto requiere una calculadora gráfica o una computadora con una utilería de graficación.

La figura 3.5.19 muestra la gráfica de la función

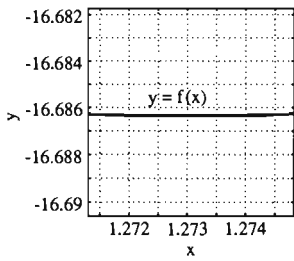
$$f(x) = 4x^4 - 11x^2 - 5x - 3$$

y su derivada

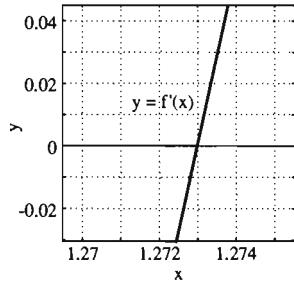
$$f'(x) = 16x^3 - 22x - 5$$

en el intervalo  $[-2, 2]$ . El valor máximo de  $f(x)$  en  $[-2, 2]$  es  $f(-2) = 27$  en el extremo izquierdo. El punto más bajo de la curva  $y=f(x)$  y la raíz correspondiente de la derivada  $dy/dx = f'(x)$  están dentro de las cajas pequeñas.

Si intentamos hacer un acercamiento al punto más bajo, sin cambiar los “factores de rango” o “proporción” de las ventanas de visión, obtenemos la imagen



**Figura 3.5.20** Acercamiento al mínimo de  $f(x)$  de la figura 3.5.19



**Figura 3.5.21** Acercamiento alternativo a la raíz de  $f'(x)$  de la figura 3.5.19

de la figura 3.5.20, donde es difícil localizar el punto más bajo con precisión. La razón es que después de un acercamiento suficiente, la gráfica es indistinguible de su recta tangente, la cual es horizontal en un punto máximo o mínimo local.

En consecuencia, es mejor acercarse a la raíz correspondiente de la derivada  $f'(x)$ . Entonces podemos localizar el punto crítico indicado con mayor precisión (figura 3.5.21). Aquí es claro que el valor mínimo alcanzado por  $f(x)$  en  $[-2, 2]$  es aproximadamente  $f(1.273) \approx -16.686$ .

En los problemas 1 a 8, determine los valores máximo y mínimo de la función dada en el intervalo cerrado dado acercándose a la raíz de la derivada.

1.  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 7x + 10$ ;  $[-2, 2]$
2.  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 7x + 10$ ;  $[-4, 2]$
3.  $f(x) = x^4 - 3x^3 + 7x - 5$ ;  $[-3, 3]$
4.  $f(x) = x^4 - 5x^3 + 17x - 5$ ;  $[-3, 3]$
5.  $f(x) = x^4 - 5x^3 + 17x - 5$ ;  $[0, 2]$
6.  $f(x) = x^5 - 5x^4 - 15x^3 + 17x^2 + 23x$ ;  $[-1, 1]$
7.  $f(x) = x^5 - 5x^4 - 15x^3 + 17x^2 + 23x$ ;  $[-3, 3]$
8.  $f(x) = x^5 - 5x^4 - 15x^3 + 17x^2 + 23x$ ;  $[0, 10]$

## 3.6 Problemas de aplicación de máximos y mínimos

Esta sección está dedicada a problemas de aplicación de máximos y mínimos (como el problema del corral de animales de la sección 1.1) donde podemos usar el método del máximo y mínimo en un intervalo cerrado, de la sección 3.5. Cuando nos enfrentamos a uno de estos problemas, existe un primer paso importante: debemos determinar la cantidad por maximizar o minimizar. Esta cantidad será la variable dependiente en nuestro análisis del problema.

Esta variable dependiente debe expresarse entonces como una función de una variable independiente, una que “controle” los valores de la variable dependiente. Si el dominio de valores de la variable independiente, aquellos pertinentes al problema de aplicación, es un intervalo cerrado, entonces procederemos con el método del máximo y mínimo en un intervalo cerrado. Este plan de ataque puede resumirse en los siguientes pasos:

1. *Determine la cantidad por maximizar o minimizar.* Esta cantidad, que deberá describir mediante una palabra o una frase corta y etiquetar con una letra, será la variable dependiente. Ya que es una variable *dependiente*, depende de algo; ese algo será la variable independiente. Llamaremos  $x$  a la variable independiente.
2. *Expresa la variable dependiente como una función de la variable independiente.* Use la información del problema para escribir la variable dependiente como función de  $x$ . Dibuje siempre una figura y *etiquete las variables*; generalmente, ésta es la mejor forma de determinar la relación entre las variables dependiente e independiente. Use variables auxiliares si eso le ayuda, pero no use muchas, pues deberá eliminarlas eventualmente. Usted *debe* expresar la variable dependiente como función de una *única* variable inde-

pendiente  $x$  y de varias constantes, antes de calcular cualquier derivada. Determine el dominio de esta función y su fórmula. Si es posible, obligue a que el dominio sea un intervalo cerrado y acotado (si el dominio natural es un intervalo abierto, agregue, si puede, los extremos).

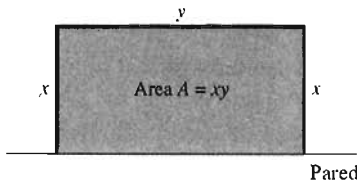
3. *Aplique el cálculo para encontrar los puntos críticos.* Calcule la derivada  $f'$  de la función  $f$  que encontró en el paso 2. Use la derivada para encontrar los puntos críticos (donde  $f'(x) = 0$  y donde no exista  $f'(x)$ ). Si  $f$  es diferenciable en todos sus puntos, entonces sus únicos puntos críticos ocurren donde

$$f'(x) = 0.$$

4. *Identifique los extremos.* Evalúe  $f$  en cada punto crítico de su dominio y en los dos puntos extremos. Los valores que obtenga le dirán cuál es el máximo absoluto y cuál el mínimo absoluto. Es claro que cada uno o ambos pueden aparecer en más de un punto.
5. *Responda la pregunta del problema.* En otras palabras, interprete sus resultados. La respuesta al problema original puede ser algo distinto del valor más grande (o más pequeño) de  $f$ . Dé una respuesta precisa a la pregunta específica original.

Observe cómo seguimos el proceso de estos cinco pasos en el ejemplo 1.

**EJEMPLO 1** Un granjero tiene 200 yardas de barda con las que desea construir tres lados de un corral rectangular; una pared grande ya existente formará el cuarto lado. ¿Qué dimensiones maximizarán el área del corral?



**Figura 3.6.1** El corral rectangular del ejemplo 1

**Solución** Queremos maximizar el área  $A$  del corral que se muestra en la figura 3.6.1. Para obtener la fórmula para la variable *dependiente*  $A$ , observamos que el área de un rectángulo es el producto de su base por su altura. Así, denotamos  $x$  a la longitud de cada uno de los dos lados del corral perpendiculares a la pared. También denotamos con  $y$  la longitud del lado paralelo a la pared. Entonces el área del rectángulo está dada por la *fórmula*

$$A = xy.$$

Ahora necesitamos escribir  $A$  como *función* de  $x$  o  $y$ . Como se usarán 200 yardas de barda,

$$2x + y = 200, \quad \text{de modo que} \quad y = 200 - 2x. \quad (1)$$

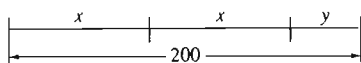
(Optamos por expresar  $y$  en términos de  $x$ , sólo porque el álgebra es un poco más sencilla.) Después, sustituimos este valor de  $y$  en la fórmula  $A = xy$  para obtener

$$A(x) = x(200 - 2x) = 200x - 2x^2. \quad (2)$$

Esta ecuación expresa la variable dependiente  $A$  como función de la variable independiente  $x$ .

Antes de continuar, debemos determinar el dominio de la función  $A$ . La figura 3.6.2 muestra que  $0 < x < 100$ . Pero para aplicar el método del máximo y mínimo en un intervalo cerrado, necesitamos un intervalo cerrado. En este ejemplo, podemos agregar los extremos de  $(0, 100)$  para obtener el intervalo *cerrado*  $[0, 100]$ . Los valores  $x = 0$  y  $x = 100$  corresponden a corrales “degenerados” de área nula. Como cero no puede ser el valor máximo de  $A$  no hay problema en agrandar el dominio de la función  $A$ .

Ahora calculamos la derivada de la función  $A$  en la ecuación (2):



**Figura 3.6.2** La relación en la ecuación (1) entre  $x$  y  $y$  (ejemplo 1)



$$\frac{dA}{dx} = 200 - 4x.$$

Como  $A$  es derivable, sus únicos puntos críticos aparecen cuando

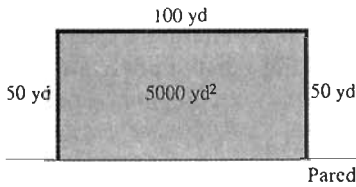
$$\frac{dA}{dx} = 0,$$

es decir, cuando

$$200 - 4x = 0.$$

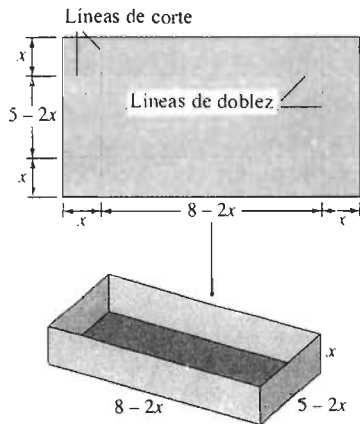
Así,  $x = 50$  es el único punto crítico interior. Incluyendo los extremos, los extremos de  $A$  pueden aparecer solamente cuando  $x = 0, 50$  y  $100$ . Evaluamos  $A$  en cada uno:

$$\begin{aligned} A(0) &= 0, \\ A(50) &= 5000, \quad \leftarrow \text{máximo absoluto} \\ A(100) &= 0. \end{aligned}$$



**Figura 3.6.3** El corral con área máxima del ejemplo 1

Por tanto, el área máxima es  $A(50) = 5000$  yardas cuadradas. De la ecuación (1) obtenemos que  $y = 100$  cuando  $x = 50$ . Por tanto, para que el corral tenga área máxima, cada uno de los dos lados perpendiculares a la pared debe medir 50 yardas y el lado paralelo a la pared debe medir 100 yardas (figura 3.6.3).



**Figura 3.6.4** Construyendo la caja del ejemplo 2

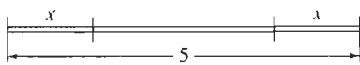
**EJEMPLO 2** Una pieza de una hoja de metal es rectangular y mide 5 pies de ancho por 8 de largo. Se cortan cuadrados congruentes en sus cuatro esquinas. La pieza resultante de metal se dobla y une para formar una caja sin tapa (figura 3.6.4) ¿Cómo debe hacerse esto para obtener una caja con el mayor volumen posible?

**Solución** La cantidad por maximizar, la variable dependiente, es el volumen  $V$  de la caja por construir. La forma, y por tanto, el volumen de la caja, se determina mediante la longitud  $x$  de la orilla de cada esquina cuadrada eliminada. Por tanto,  $x$  es una elección natural de la variable independiente.

Para escribir al volumen  $V$  como función de  $x$ , observe que la caja terminada tendrá altura  $x$  y su base medirá  $8 - 2x$  por  $5 - 2x$  pies. Entonces, su volumen está dado por

$$V(x) = x(5 - 2x)(8 - 2x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x.$$

El procedimiento descrito en este ejemplo producirá una caja real sólo si  $0 < x < 2.5$  (figura 3.6.5). Pero hacemos que el dominio sea el intervalo cerrado  $[0, 2.5]$  para garantizar que existe un máximo de  $V(x)$  y usar el método del máximo y mínimo en un intervalo cerrado. Los valores  $x = 0$  y  $x = 2.5$  corresponden a cajas “degeneradas” con volumen nulo, por lo que al agregar los puntos a  $(0, 2.5)$  no se afecta el valor ni la posición del máximo absoluto.



**Figura 3.6.5** El ancho de 5 pies, de la hoja de metal (ejemplo 2)

Ahora calculamos la derivada de  $V$ :

$$V'(x) = 12x^2 - 52x + 40 = 4(3x - 10)(x - 1).$$

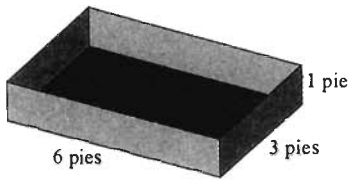
Los únicos puntos críticos de la función diferenciable  $V$  ocurren cuando

$$V'(x) = 0,$$

es decir, si

$$4(3x - 10)(x - 1) = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación son  $x = 1$  y  $x = 10/3$ . Descartamos esta última ya que no está en el dominio  $[0, 2.5]$  de  $V$ . Así, examinamos estos valores de  $V$ :



**Figura 3.6.6** La caja con volumen máximo del ejemplo 2

$$\begin{aligned} V(0) &= 0, \\ V(1) &= 18, \quad \leftarrow \quad \text{máximo absoluto} \\ V(2.5) &= 0. \end{aligned}$$

De esta manera, el valor máximo de  $V(x)$  en  $[0, 2.5]$  es  $V(1) = 18$ . La respuesta a la pregunta planteada es ésta: El corte de los cuadrados de las esquinas debe ser de 1 pie de longitud desde cada orilla. La caja resultante medirá 6 por 3 por 1 pies y su volumen será de 18 pies cúbicos (figura 3.6.6).

Para nuestra siguiente aplicación del método del máximo y mínimo en un intervalo cerrado, consideramos un problema típico en la administración de empresas. Suponga que se fabrican  $x$  unidades de disquetes de computadora con un costo total de  $C(x)$  dólares. Hacemos la hipótesis sencilla (pero no siempre válida) de que la función de costo  $C(x)$  es la suma de dos términos:

- Un término constante  $a$  que representa el costo fijo de la adquisición y mantenimiento de los medios de producción, y
- Un término variable que representa el costo adicional de fabricación de  $x$  unidades  $a$ , por ejemplo,  $b$  dólares cada uno.

Entonces  $C(x)$  está dado por

$$C(x) = a + bx. \quad (3)$$

Suponemos también que el número de unidades que pueden venderse es una función lineal del precio de venta  $p$ , así que  $x = m - np$ , donde  $m$  y  $n$  son constantes positivas. El signo menos indica que un incremento en el precio de venta provoca una disminución en las ventas. Si despejamos  $p$  en esta última ecuación, obtenemos la función de precio

$$p = p(x) = A - Bx \quad (4)$$

( $A$  y  $B$  también son constantes).

La cantidad por maximizar es la ganancia, dada aquí por la función de ganancia  $P(x)$ , que es igual al ingreso por ventas menos los costos de producción. Así

$$P = P(x) = xp(x) - C(x). \quad (5)$$

**EJEMPLO 3** Suponga que el costo de publicación de un libro pequeño es de \$10,000 para desarrollar el tiraje de la edición (anual) más \$8 por cada libro impreso. El editor vendió 7000 copias el año pasado a \$13 cada uno, pero las ventas bajaron a 5000 copias este año, cuando el precio se elevó a \$15 por copia. Suponga que se pueden imprimir hasta 10,000 copias en un solo tiraje. ¿Cuántas copias deben imprimirse, y cuál debe ser el precio de venta de cada copia, para maximizar la ganancia anual en este libro?

**Solución** La variable dependiente por maximizar es la ganancia  $P$ . Como variable independiente elegimos el número de copias  $x$  por imprimir; además,  $0 \leq x \leq 10,000$ . La información del costo dado implica entonces que

$$C(x) = 10,000 + 8x.$$

Ahora sustituimos en la ecuación (4) el dato  $x = 7000$  cuando  $p = 13$ , así como el dato  $x = 5000$  cuando  $p = 15$ . Obtenemos la ecuación

$$A - 7000B = 13, \quad A - 5000B = 15.$$

Cuando resolvemos este sistema de ecuaciones simultáneas, encontramos que  $A = 20$  y  $B = 0.001$ . Por tanto, la función de precio es

$$p = p(x) = 20 - \frac{x}{1000},$$

y entonces la función de ganancia es

$$P(x) = x\left(20 - \frac{x}{1000}\right) - (10,000 + 8x).$$

Desarrollamos y agrupamos términos para obtener

$$P(x) = 12x - \frac{x^2}{1000} - 10,000, \quad 0 \leq x \leq 10,000.$$

Ahora

$$\frac{dP}{dx} = 12 - \frac{x}{500},$$

y los únicos puntos críticos de la función diferenciable  $P$  ocurren cuando

$$\frac{dP}{dx} = 0,$$

es decir, cuando

$$12 - \frac{x}{500} = 0; \quad x = 12 \cdot 500 = 6000.$$

Verificamos  $P$  en este valor de  $x$ , así como los valores de  $P(x)$  en los extremos para determinar la ganancia máxima:

$$P(0) = -10,000$$

$$P(6000) = 26,000, \quad \leftarrow \text{máximo absoluto}$$

$$P(10,000) = 10,000.$$

Por lo tanto, la máxima ganancia anual posible \$26,000 resulta de imprimir 6000 copias del libro. Cada copia debe venderse en \$14, ya que

$$p = 20 - \frac{6000}{1000} = 14.$$

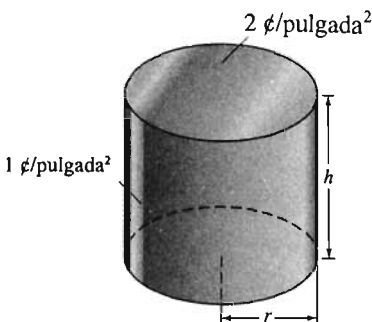
**EJEMPLO 4** Necesitamos diseñar una lata cilíndrica con radio  $r$  y altura  $h$ . La base y la tapa deben hacerse de cobre, con un costo de 2 centavos/pulgada cuadrada. El lado curvo se hace de aluminio, que cuesta 1 centavo/pulgada cuadrada. Buscamos las dimensiones que maximicen el volumen de la lata. La única restricción es que el costo total de la lata sea  $300\pi$  centavos.

**Solución** Necesitamos maximizar el volumen  $V$  de la lata, el cual podemos calcular si conocemos el radio  $r$  y la altura  $h$  (figura 3.6.7). Con estas dimensiones, encontramos que

$$V = \pi r^2 h, \quad (6)$$

pero necesitamos expresar  $V$  como función únicamente de  $r$  (o como función únicamente de  $h$ ).

La tapa y la base de la lata tienen área  $\pi r^2$  pulgadas cuadradas, por lo que el área de cobre por utilizar es  $2\pi r^2$ , y su costo es  $4\pi r^2$  centavos. El área del lado



**Figura 3.6.7** La lata cilíndrica del ejemplo 4

curvo de la lata es  $2\pi rh$  pulgadas cuadradas, así que el área de aluminio utilizada es la misma, y el costo del aluminio es de  $2\pi rh$  centavos.

Obtenemos el costo total de la lata sumando el costo del cobre al del aluminio. Esta suma debe ser  $300\pi$  centavos, y por lo tanto

$$4\pi r^2 + 2\pi rh = 300\pi. \quad (7)$$

Eliminamos  $h$  en la ecuación (6) despejando  $h$  en la ecuación (7):

$$h = \frac{300\pi - 4\pi r^2}{2\pi r} = \frac{1}{r}(150 - 2r^2). \quad (8)$$

Por lo tanto,

$$V = V(r) = (\pi r^2) \frac{1}{r}(150 - 2r^2) = 2\pi(75r - r^3). \quad (9)$$

Para determinar el dominio de definición de  $V$ , observamos de la ecuación (7) que  $4\pi r^2 < 300\pi$ , por lo que  $r < \sqrt{75}$  para la lata deseada; si  $r = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ , obtenemos una lata degenerada con altura  $h = 0$ . Con  $r = 0$ , no obtenemos valores de  $h$  en la ecuación (8) y por consiguiente ninguna lata, pero  $V(r)$  no es continua en  $r = 0$ . En consecuencia, podemos considerar el intervalo cerrado  $[0, 5\sqrt{3}]$ , como el dominio de  $V$ .

Calculando la derivada tenemos

$$V'(r) = 2\pi(75 - 3r^2) = 6\pi(25 - r^2).$$

Puesto que  $V(r)$  es un polinomio,  $V'(r)$  existe para todos los valores de  $r$ , por lo que obtenemos todos los puntos críticos resolviendo la ecuación

$$V'(r) = 0;$$

es decir,

$$6\pi(25 - r^2) = 0.$$

Descartamos la solución  $-5$ , ya que no se encuentra en el dominio de  $V$ , y obtenemos el único punto crítico  $r = 5$  en  $[0, 5\sqrt{3}]$ . Ahora

$$V(0) = 0,$$

$$V(5) = 500\pi, \quad \leftarrow \text{máximo absoluto}$$

$$V(5\sqrt{3}) = 0.$$

Así que, el volumen máximo de la lata tiene radio  $r = 5$  pulgadas y de la ecuación (8) obtenemos que  $h = 20$  pulgadas. La figura 3.6.8 muestra esta lata.

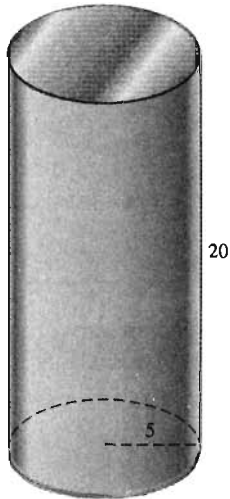


Figura 3.6.8 La lata de volumen máximo del ejemplo 4

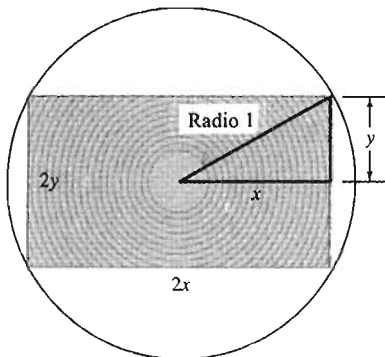


Figura 3.6.9 El problema del aserradero, ejemplo 5

**EJEMPLO 5 (Un problema de aserradero)** Suponga que necesita cortar una viga con una sección transversal rectangular máxima a partir de un tronco circular con radio de un pie. (Este es el problema geométrico de encontrar el rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un círculo de radio 1.) ¿Cuál es la forma y el área de la sección transversal que debe tener tal viga?

**Solución** Sean  $x$  y  $y$  la mitad de la base y la mitad de la altura, respectivamente, del rectángulo inscrito (figura 3.6.9). Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo pequeño de la figura, obtenemos la ecuación

$$x^2 + y^2 = 1, \quad \text{de modo que } y = \sqrt{1 - x^2}.$$

El área del rectángulo inscrito es  $A = (2x)(2y) = 4xy$ . Ahora podemos expresar  $A$  como función únicamente de  $x$ :

$$A(x) = 4x\sqrt{1-x^2}.$$

El dominio práctico de definición de  $A$  es  $(0, 1)$ , y no hay problema (pero sí mucha ventaja) en agregar los extremos, por lo que se considera  $[0, 1]$  como el dominio.

Después,

$$\frac{dA}{dx} = 4 \cdot (1-x^2)^{1/2} + 2x(1-x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{4-8x^2}{(1-x^2)^{1/2}}.$$

Observe que  $A'(1)$  no existe, pero esto no causa problema, ya que la derivabilidad en los puntos extremos no es una hipótesis del teorema 3 de la sección 3.5. Por tanto sólo hay que resolver la ecuación

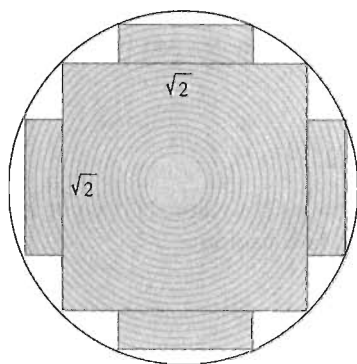
$$A'(x) = 0;$$

es decir,

$$\frac{4-8x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Una fracción puede anularse sólo cuando su numerador se anula y su denominador *no*, así que  $A'(x) = 0$  cuando  $4-8x^2 = 0$ . Así, el único punto crítico de  $A$  en el intervalo abierto  $(0, 1)$  es  $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$  (y  $2x = 2y = \sqrt{2}$ ). Evalúe  $A$  aquí y en los dos extremos para encontrar que

$$\begin{aligned} A(0) &= 0, \\ A\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) &= 2, \quad \leftarrow \text{máximo absoluto} \\ A(1) &= 0. \end{aligned}$$



**Figura 3.6.10** Cortar cuatro vigas más después de cortar una viga grande

Debido a esto, la viga con sección transversal rectangular de área máxima es cuadrada, con lados de  $\sqrt{2}$  pies de largo y con área seccional transversal de 2 pies cuadrados.

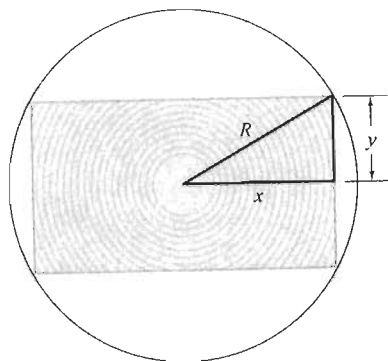
En el problema 43 le pedimos maximizar el área de la sección transversal total de las cuatro tablas que pueden cortarse en las cuatro piezas del tronco que resultan después de cortar la viga cuadrada (figura 3.6.10).

### PLAUSIBILIDAD

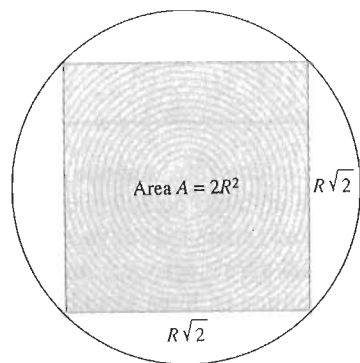
Usted debe verificar siempre la plausibilidad de sus respuestas. En el ejemplo 5, el área de la sección transversal del tronco de donde se corta la viga es  $\pi \approx 3.14$  pies cuadrados. Por tanto, la viga con área seccional transversal máxima 2 pies cuadrados usa un poco menos que el 64% del tronco. Esto *es* plausible. Si la fracción fuera un 3% ineficiente o un optimista 99%, es posible que tenga un error de aritmética, de álgebra, de cálculo o de lógica (lo mismo si obtuviera una fracción  $-15\%$  o  $150\%$ ). Verifique la plausibilidad de los resultados de los ejemplos 1 a 4.

### DIMENSIONES

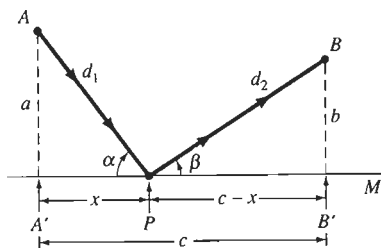
Otra forma de verificar sus respuestas es usar un *análisis dimensional*. Trabaje el problema con constantes no especificadas en lugar de los números verdaderos. En el ejemplo 5, sería una buena práctica encontrar la viga de sección transversal rectangular máxima que pueda cortarse de un tronco circular de radio  $R$  en vez de utilizar un radio de un pie.



**Figura 3.6.11** El tronco de radio  $R$



**Figura 3.6.12** La viga cuadrada inscrita con área de sección transversal máxima



**Figura 3.6.13** Reflexión en  $P$  de un rayo de luz en un espejo  $M$  (ejemplo 6)

Usted puede siempre sustituir el valor dado  $R = 1$  en la conclusión del problema. Una solución breve a este problema sería la siguiente:

Dimensiones de la viga: base  $2x$ , altura  $2y$ .

Área de la viga:  $A = 4xy$ .

Trace un radio del tronco del centro a una de las esquinas de la viga rectangular, como en la figura 3.6.11. Este radio tiene longitud  $R$ , por lo que el teorema de Pitágoras implica

$$x^2 + y^2 = R^2; \quad y = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Área de la viga:

$$A = A(x) = 4x\sqrt{R^2 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq R.$$

$$A'(x) = 4(R^2 - x^2)^{1/2} + 2x(R^2 - x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{4R^2 - 8x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

$A'(x)$  no existe cuando  $x = R$ , pero ése es un extremo; lo verificaremos por separado.

$A'(x) = 0$  cuando  $x = \frac{1}{2}R\sqrt{2}$  (ignore la raíz negativa; no está en el dominio de  $A$ ).

$$A(0) = 0,$$

$$A\left(\frac{1}{2}R\sqrt{2}\right) = 2R^2, \quad \leftarrow \text{máximo absoluto}$$

$$A(R) = 0.$$

La figura 3.6.12 muestra las dimensiones del rectángulo inscrito de área máxima.

Ahora puede verificar la exactitud dimensional de los resultados. El valor de  $x$  que maximiza  $A$  es una longitud ( $R$ ) multiplicada por una constante numérica pura ( $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ ), por lo que  $x$  tiene las dimensiones de longitud (correcto; si fuera otra cosa, habría que buscar el error). Sin embargo, el área de sección transversal máxima de la viga es  $2R^2$ , el producto de un número puro (sin dimensión) y el cuadrado de una longitud, por lo que tiene las dimensiones del área. Esto también es correcto.

**EJEMPLO 6** Consideremos la reflexión de un rayo de luz en un espejo  $M$ , como en la figura 3.6.13, la cual muestra un rayo que va del punto  $A$  al punto  $B$  por medio de una reflexión de  $M$  en el punto  $P$ . Suponemos que la posición del punto de reflexión es tal que la distancia total  $d_1 + d_2$  recorrida por el rayo de luz será minimizada. Esto es una aplicación del *principio de Fermat del tiempo mínimo* para la propagación de luz. El problema es determinar  $P$ .

**Solución** Trazamos perpendiculares desde  $A$  y  $B$  al plano del espejo  $M$ . Denotamos  $A'$  y  $B'$  a los pies de estas perpendiculares (figura 3.6.13). Sean  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $x$  las longitudes de los segmentos  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $A'B'$  y  $A'P$ , respectivamente. Entonces  $c - x$  es la longitud del segmento  $PB'$ . Por el teorema de Pitágoras, la distancia por minimizar es

$$d_1 + d_2 = f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c - x)^2}. \quad (10)$$

Podemos elegir como dominio de  $f$  al intervalo  $[0, c]$ , ya que el mínimo de  $f$  debe estar en algún punto dentro del intervalo. (Para ver por qué, examine la imagen que obtiene si  $x$  no está en el intervalo.)

Entonces

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{(c-x)(-1)}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}. \quad (11)$$

Como

$$f'(x) = \frac{x}{d_1} - \frac{c-x}{d_2}, \quad (12)$$

tenemos que cualquier tangente horizontal a la gráfica de  $f$  debe estar en el punto  $x$  determinado por la ecuación

$$\frac{x}{d_1} = \frac{c-x}{d_2}. \quad (13)$$

En este punto,  $\cos \alpha = \cos \beta$ , donde  $\alpha$  es el ángulo del rayo de luz incidente y  $\beta$  es el ángulo del rayo reflejado (figura 3.6.13).  $\alpha$  y  $\beta$  están entre  $0$  y  $\pi/2$ , y entonces tenemos que  $\alpha = \beta$ . En otras palabras, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión, un principio familiar de la física.

El cálculo del ejemplo 6 tiene otra interpretación interesante, aunque algo curiosa. La figura 3.6.14 muestra un lote de terreno con un largo de 200 pies, un abrevadero a lo largo de una orilla y un comedero localizado en un lado adyacente. Una vaca entra por la puerta en el punto  $A$ , a 90 pies del abrevadero; camina en línea recta hacia el punto  $P$ , toma un poco de agua, y camina en línea recta hacia el comedero en el punto  $B$ , a 60 pies del abrevadero. Si la vaca supiera cálculo, ¿cuál punto  $P$  del abrevadero elegiría para minimizar la distancia total recorrida?

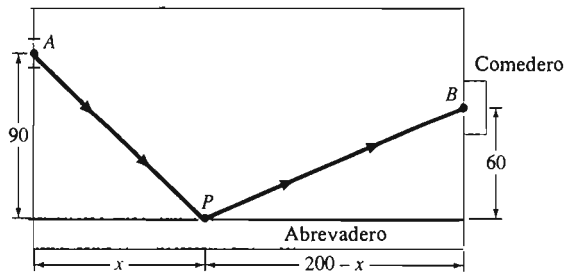


Figura 3.6.14 El lote de terreno

Al comparar las figuras 3.6.13 y 3.6.14, vemos que el problema de la vaca consiste en minimizar la función distancia  $f$  en la ecuación (10) con los valores numéricos  $a = 90$ ,  $b = 60$  y  $c = 200$ . Cuando sustituimos estos valores y

$$d_1 = \sqrt{a^2 + x^2} \quad \text{y} \quad d_2 = \sqrt{b^2 + (c-x)^2}$$

en la ecuación (13), obtenemos

$$\frac{x}{\sqrt{8100 + x^2}} = \frac{200 - x}{\sqrt{3600 + (200 - x)^2}}.$$

Elevamos al cuadrado ambos lados, eliminamos las fracciones de la ecuación y simplificamos. El resultado es

$$\begin{aligned}
 x^2[3600 + (200 - x)^2] &= (200 - x)^2(8100 + x^2); \\
 3600x^2 &= 8100(200 - x)^2; \quad (\text{¿Por qué?}) \\
 60x &= 90(200 - x); \\
 150x &= 18,000; \\
 x &= 120.
 \end{aligned}$$

Así, la vaca debe dirigirse directamente hacia el punto  $P$  localizado a 120 pies a lo largo del abrevadero.

Estos ejemplos indican que el método del máximo y mínimo en un intervalo cerrado es aplicable a una amplia variedad de problemas. De hecho, problemas de aplicación y optimización que parecían tan distintos, como los rayos de luz y las vacas, tienen modelos matemáticos esencialmente idénticos. Esto es tan sólo una ilustración de la fuerza y generalidad que el cálculo explota de manera tan eficiente.

### 3.6 Problemas

1. Determine dos números reales positivos  $x$  y  $y$  tales que su suma sea 50 y su producto sea lo más grande posible.
2. Determine el área máxima posible de un rectángulo de perímetro 200 m.
3. Un rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados tiene un vértice en el origen, uno en el eje  $x$  positivo, uno en el eje  $y$  positivo y su cuarto vértice en el primer cuadrante, sobre la recta con ecuación  $2x + y = 100$  (figura 3.6.15). ¿Cuál es el área máxima posible de dicho rectángulo?

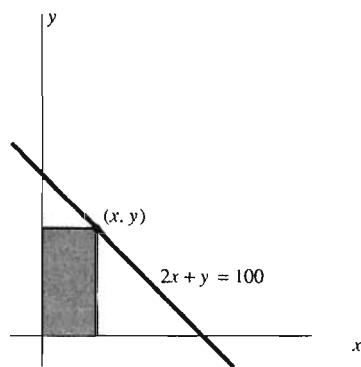


Figura 3.6.15 El rectángulo del problema 3

4. Un granjero tiene 600 m de cerca, con lo que quiere acotar un corral rectangular adyacente a una larga pared ya existente. Usará la pared como un lado del corral y la cerca disponible para los otros tres lados. ¿Cuál es el área máxima que puede encerrar de esta forma?
5. Una caja rectangular tiene una base cuadrada con lados de al menos una pulgada de largo. No tiene tapa, y el área total de sus cinco lados es 300 pulgadas cuadradas (figura 3.6.16). ¿Cuál es el volumen máximo posible de dicha caja?

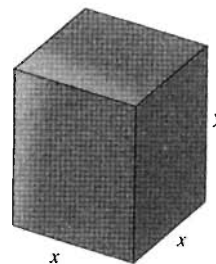


Figura 3.6.16 Una caja con base cuadrada y volumen  $V = x^2y$  (problemas 5, 17 y 20)

6. Si  $x$  está en el intervalo  $[0, 1]$ , entonces  $x - x^2$  no es negativo. ¿Cuál es el máximo valor que  $x - x^2$  puede tener en ese intervalo? En otras palabras, ¿cuál es la máxima cantidad en la que un número real puede exceder a su cuadrado?
7. La suma de dos números positivos es 48. ¿Cuál es el valor mínimo posible de la suma de sus cuadrados?
8. Un rectángulo de perímetro fijo 36 se gira en torno de uno de sus lados, con lo que se barre una figura con la forma de un cilindro circular recto (figura 3.6.17). ¿Cuál es el volumen máximo posible de ese cilindro?

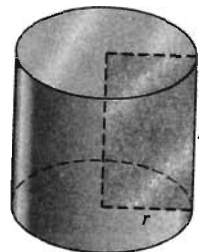


Figura 3.6.17 El rectángulo y el cilindro del problema 8



9. La suma de dos números no negativos es 10. Determine el valor mínimo posible de la suma de sus cubos.
10. Suponga que la resistencia de una viga rectangular es proporcional al producto del ancho y el *cuadrado* de la altura de su sección transversal. ¿Qué forma debe tener una viga cortada de un tronco cilíndrico de radio  $r$  para tener la máxima resistencia?
11. Un granjero tiene 600 yardas de cerca, con lo que quiere construir un corral rectangular. Parte de la cerca se usará para construir dos cercas internas de división, paralelas a los mismos dos lados del corral (figura 3.6.18). ¿Cuál es el área total máxima posible de dicho corral?

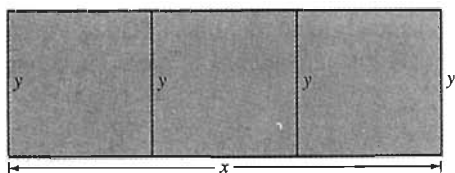


Figura 3.6.18 El corral dividido del problema 11

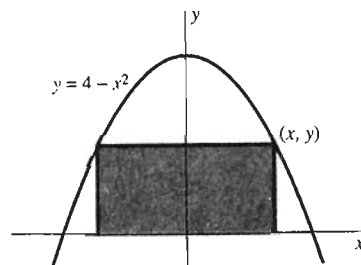


Figura 3.6.20 El rectángulo del problema 16

12. Determine el volumen máximo posible de un cilindro circular recto si el área total de su superficie, incluyendo los dos extremos circulares, es  $150\pi$ .
13. Determine el área máxima posible de un rectángulo con diagonales, cada una, de longitud 16.
14. Un rectángulo tiene una línea de longitud fija  $L$  que va de un vértice al punto medio de uno de los lados que no forman al vértice (figura 3.6.19). ¿Cuál es el área máxima posible de tal rectángulo?

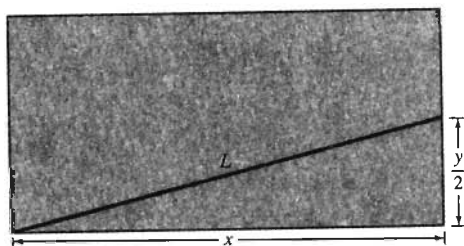


Figura 3.6.19. El rectángulo del problema 14

15. El volumen  $V$  (en centímetros cúbicos) de 1 kg de agua a la temperatura  $T$  entre  $0^\circ\text{C}$  y  $30^\circ\text{C}$  está aproximado por

$$V = 999.87 - (0.06426)T + (0.0085043)T^2 - (0.0000679)T^3.$$

¿A qué temperatura tiene el agua su densidad máxima?

16. ¿Cuál es el área máxima posible de un rectángulo cuya base está en el eje  $x$  y con dos vértices superiores en la gráfica de la ecuación  $y = 4 - x^2$  (figura 3.6.20)?

17. Una caja rectangular tiene una base cuadrada con aristas de al menos un centímetro de largo. Si el área total de su superficie es de  $600\text{ cm}^2$ , ¿cuál es el volumen máximo posible de dicha caja?

18. Usted debe fabricar una lata cilíndrica con fondo pero sin tapa, a partir de  $300\pi$  pulgadas cuadradas de una hoja metálica. No debe desperdiciarse la hoja de metal; se le permite ordenar una pieza circular de cualquier tamaño para la base y cualquier pieza rectangular adecuada para formar su lado curvo, siempre que se cumplan las restricciones. ¿Cuál es el volumen máximo posible de dicha lata?

19. Tres cuadrados grandes de metal, cada uno con lados de 1 m, tienen recortados de sus esquinas cuatro pequeños cuadrados. Los doce cuadrados pequeños resultantes deben ser del mismo tamaño (figura 3.6.21). Las tres piezas grandes en forma de cruz se doblan y soldan para formar cajas sin tapa, y los doce cuadrados pequeños se usan para formar dos cubos pequeños. ¿Cómo hacer esto para maximizar el volumen total de las cinco cajas?

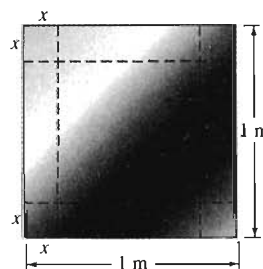


Figura 3.6.21 Uno de los tres cuadrados de metal del problema 19

20. Suponga que va a fabricar una caja rectangular con una base cuadrada, con dos materiales distintos. El material de la tapa y los cuatro lados de la caja cuesta \$1/pie cuadrado; el material de la base cuesta \$2/pie cuadrado. Determine las dimensiones de la caja con el máximo volumen posible, si se le permite gastar \$144 para el material.

21. Una pieza de alambre de 80 pulgadas de largo se corta en, a lo más, dos piezas. Cada pieza se dobla para formar un cuadrado. ¿Cómo hacer esto de modo que se minimice (la suma de) el (las) área(s) del (los) cuadrado(s)? ¿Para maximizarla?

22. Un alambre de 100 cm de longitud se corta en dos partes. Una parte se dobla para formar un círculo y la otra para un cuadrado. ¿Dónde debe hacerse el corte para maximizar la suma de las áreas del cuadrado y del círculo? ¿Para minimizar dicha suma?
23. Una agricultora tiene 600 m de cerca con la que planea encerrar un apacentadero rectangular adyacente a una larga pared ya existente. Ella planea construir una cerca paralela a la pared, dos para formar los extremos del área encerrada, y un cuarto (paralelo a los dos extremos del área encerrada) para dividirla en partes iguales. ¿Cuál es el área máxima que puede encerrar?
24. El administrador de un zoológico necesita agregar un corral exterior rectangular a la casa de un animal con una ranura en una esquina, como se muestra en la figura 3.6.22. Si dispone de 85 m de cerca nueva, ¿cuáles dimensiones del corral maximizarán su área? No se utilizará cerca a lo largo de las paredes de la casa.

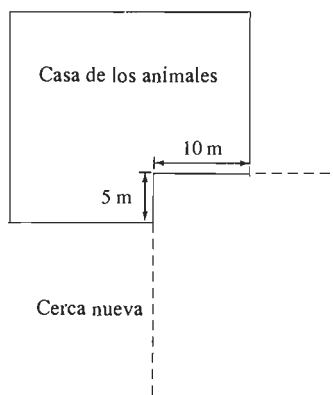


Figura 3.6.22 El corral rectangular del problema 24

25. Suponga que una oficina de correo puede aceptar un paquete para su envío sólo si la suma de su longitud y su cincha (la circunferencia de su sección transversal) es, a lo más, de 100 pulgadas. ¿Cuál es el volumen máximo de una caja rectangular con una sección transversal cuadrada que se puede enviar por correo?
26. Repita el problema 25, utilizando ahora un paquete cilíndrico; su sección transversal es circular.
27. Una compañía de impresión tiene ocho prensas, cada una de las cuales puede imprimir 3600 copias por hora. La preparación de una prensa para la impresión cuesta \$5.00 y cuesta  $10 + 6n$  dólares el uso de  $n$  prensas por hora. ¿Cuántas prensas deben utilizarse para imprimir 50,000 carteles de la manera más rentable?
28. Un granjero desea contratar trabajadores para cosechar 900 bushels de frijol. Cada trabajador puede cosechar 5 bushels por hora y se le paga \$1.00 por bushel. Mientras se desarrolla la cosecha, el granjero debe contratar también un supervisor a \$10 la hora, tiene gastos adicionales de \$8 por trabajador. ¿Cuántos trabajadores debe contratar para minimizar el costo total? ¿Cuál será entonces el costo de cada bushel cosechado?

29. Los costos de calefacción y enfriamiento de una casa aislada son de \$500 por año, pero con  $x \leq 10$  pulgadas de aislante, el costo es de  $1000/(2+x)$  dólares al año. Cuesta \$150 la pulgada de aislante (espesor) instalado. ¿Cuántas pulgadas de aislante deben instalarse para minimizar el costo *total* (inicial más anual) para un periodo de 10 años? ¿A cuánto asciende el ahorro anual resultante de este aislamiento óptimo?
30. Una concesionaria ha vendido 5000 burritos durante cada juego nocturno, a 50 centavos cada uno. Cuando elevó el precio a 70 centavos cada uno, las ventas bajaron a 4000 cada noche. Suponga que existe una relación lineal entre el precio y las ventas. Si ella tiene un gasto fijo de \$1000 por noche y cada burrito le cuesta 25 centavos, ¿qué precio maximiza su ganancia por noche?
31. Un tren de conexión lleva 600 pasajeros cada día de los suburbios a la ciudad. La operación del tren cuesta \$1.50 por persona. Un estudio de mercado revela que 40 personas dejarían de utilizar el tren por cada aumento de 5 centavos en la tarifa, pero 40 personas más lo usarían por cada 5 centavos menos de tarifa. ¿Qué tarifa debe cobrarse para obtener la máxima ganancia posible?
32. Determine la forma del cilindro de volumen máximo que puede inscribirse en una esfera de radio  $R$  (figura 3.6.23). Muestre que la razón entre la altura del cilindro y su radio es  $\sqrt{2}$  y que la razón entre el volumen de la esfera y el volumen del cilindro máximo es  $\sqrt{3}$ .

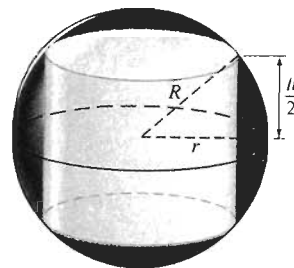


Figura 3.6.23 La esfera y el cilindro del problema 32

33. Determine las dimensiones del cilindro circular recto de máximo volumen que se puede inscribir en un cono circular recto de radio  $R$  y altura  $H$  (figura 3.6.24).

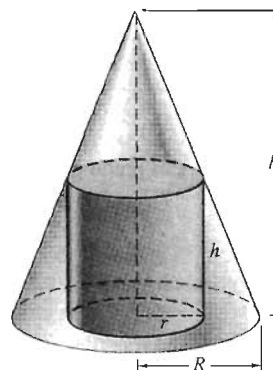


Figura 3.6.24 El cono y el cilindro del problema 33

34. La figura 3.6.25 muestra un círculo de radio 1 en el que está inscrito un trapecio. El mayor de los lados paralelos del trapecio coincide con un diámetro del círculo. ¿Cuál es el área máxima posible de tal trapecio? [Sugerencia: Una cantidad positiva se maximiza cuando su cuadrado se maximiza.]

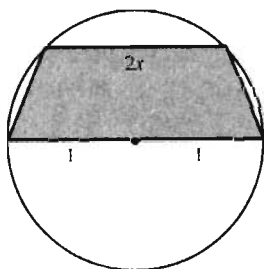


Figura 3.6.25 El círculo y el trapecio del problema 34

35. Muestre que el rectángulo de perímetro máximo que se puede inscribir en un círculo es un cuadrado.

36. Determine las dimensiones del rectángulo (con lados paralelos a los ejes coordenados) de área máxima que se puede inscribir en la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

(figura 3.6.26).

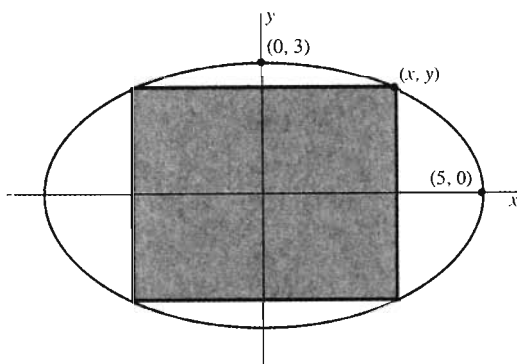


Figura 3.6.26 La elipse y el rectángulo del problema 36

37. Un cono circular recto de radio  $r$  y altura  $h$  tiene una altura diagonal dada por  $L = \sqrt{r^2 + h^2}$ . ¿Cuál es el volumen máximo posible de un cono con altura diagonal 10?

38. Dos postes verticales de altura 10 pies se encuentran a una distancia de 10 pies. Determine la longitud más corta

de una cuerda que vaya de la punta de uno de los postes al suelo y de ahí a la punta del otro poste.

39. La suma de dos números no negativos es 16. Determine los valores máximo y mínimo posibles de la suma de sus raíces cúbicas.

40. Un alambre recto de 60 cm de longitud se dobla para formar una L. ¿Cuál es la distancia más corta posible entre los dos extremos del alambre doblado?

41. ¿Cuál es la distancia más corta posible de un punto de la parábola  $y = x^2$  al punto  $(0, 1)$ ?

42. Dado que: existe exactamente un punto sobre la gráfica de  $y = \sqrt{3x - 4}$  más cercano al origen. Determine este punto. [Sugerencia: Vea la figura 3.6.27 y resuelva la ecuación obtenida mediante inspección.]

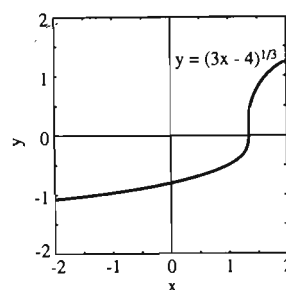


Figura 3.6.27 La curva del problema 42

43. Determine las dimensiones que maximizan el área de la sección transversal de las cuatro vigas que se pueden cortar de las cuatro partes del tronco circular del ejemplo 5 (las partes que sobran después de cortar una viga cuadrada del tronco; figura 3.6.10).

44. Determine el área máxima de un rectángulo inscrito en un triángulo equilátero con lados de longitud 1 (fig. 3.6.28).

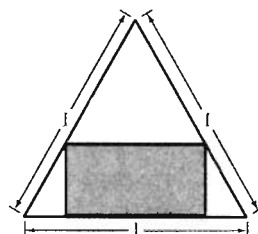


Figura 3.6.28 El rectángulo y el triángulo equilátero del problema 44

45. Una pequeña isla está a 2 km de la tierra firme en un gran lago. Una mujer en la isla puede remar en su bote a 10 km/h y puede correr a 20 km/h. Si ella rema hasta el punto más cercano de la orilla (recta), estará en un punto a 6 km de la villa sobre la misma orilla. ¿A qué parte de la orilla debe llegar para llegar a la villa más rápidamente, mediante una combinación de remo y carrera?

46. Una fábrica se localiza en la ribera de un río recto que tiene un ancho de 2000 m. En la ribera opuesta, pero a 4500 m río abajo se encuentra una planta de electricidad de la que la fábrica obtiene su energía. Suponga que cuesta tres veces más el metro de cable por debajo del agua que el metro de cable sobre el terreno. ¿Qué trayectoria debe tener un cable que une la planta con la fábrica para minimizar el costo del tendido del cable?

47. Una compañía tiene plantas localizadas (en un sistema de coordenadas adecuado) en los puntos  $A(0, 1)$ ,  $B(0, -1)$  y  $C(3, 0)$  (figura 3.6.29). La compañía planea construir un centro de distribución en el punto  $P(x, 0)$ . ¿Qué valor de  $x$  minimizaría la suma de las distancias de  $P$  a  $A$ ,  $B$  y  $C$ ?

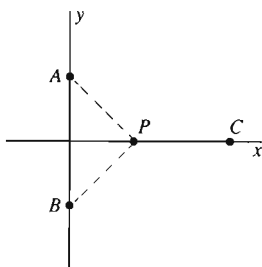


Figura 3.6.29 Las posiciones del problema 47

48. La luz viaja con velocidad  $c$  en el aire y con una velocidad menor  $v$  en el agua. (La constante  $c$  es aproximadamente  $3 \times 10^{10}$  cm/seg; la proporción  $n = c/v$  es el **índice de refracción**, que depende del color de la luz pero para el agua es aproximadamente 1.33.) La figura 3.6.30 muestra la trayectoria de un rayo de luz que viaja del punto  $A$  en el aire al punto  $B$  en el agua, con lo que parece un cambio súbito en la dirección conforme el rayo pasa por la interfaz agua-aire. (a) Escriba el tiempo  $T$  necesario para que el rayo viaje de  $A$  a  $B$  en términos de la variable  $x$  y las constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $s$  y  $v$ , las cuales hemos definido o aparecen en la figura. (b) Muestre que la ecuación  $T'(x) = 0$  para minimizar  $T$  es equivalente a la condición

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{v} = n.$$

Esta es la **ley de Snell**: La razón entre los senos de los ángulos de incidencia y refracción es igual al índice de refracción.

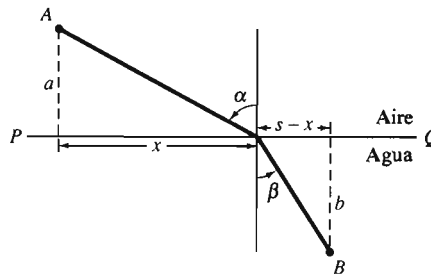


Figura 3.6.30 La ley de Snell da la trayectoria de la luz refractada (problema 48)

49. Las matemáticas de la ley de Snell (problema 48) son aplicables a otras situaciones distintas de la refracción de la luz. La figura 3.6.31 muestra una falla geológica horizontal que separa dos poblaciones en los puntos  $A$  y  $B$ . Suponga que  $A$  está a  $a$  millas al norte de la falla, que  $B$  está a  $b$  millas al sur de la falla, y que  $B$  está a  $L$  millas al este de  $A$ . Queremos construir un camino de  $A$  a  $B$ . Debido a la diferencia de terreno, el costo de la construcción es  $C_1$  (en millones de dólares por milla) al norte de la falla y  $C_2$  al sur de ésta. ¿Dónde debe colocarse el punto  $P$  para minimizar el costo total de construcción del camino? (a) Usando la notación de la figura, muestre que el costo se minimiza cuando  $C_1 \text{ sen } \theta_1 = C_2 \text{ sen } \theta_2$ . (b) Sean  $a = b = C_1 = 1$ ,  $C_2 = 2$  y  $L = 4$ . Muestre que la ecuación de la parte (a) es equivalente a

$$f(x) = 3x^4 - 24x^3 + 51x^2 - 32x + 64 = 0.$$

Para aproximar la solución deseada de esta ecuación, calcule  $f(0)$ ,  $f(1)$ ,  $f(2)$ ,  $f(3)$  y  $f(4)$ . Debe tener  $f(3) > 0 > f(4)$ . Interpolar entre  $f(3)$  y  $f(4)$  para aproximar la raíz deseada de la ecuación.

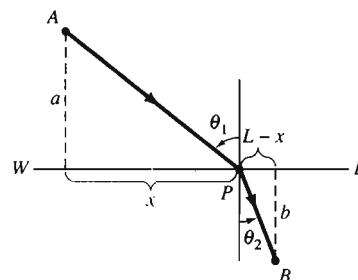


Figura 3.6.31 Construcción de un camino de  $A$  a  $B$  (problema 49)

50. La suma de los volúmenes de dos cubos es 2000 pulgadas cúbicas. ¿Cuál debe ser la longitud de sus lados  $x$  y  $y$  para maximizar la suma de las áreas de su superficie? ¿Para minimizarla?

51. La suma de las áreas de las superficies de un cubo y una esfera es 1000 pulgadas cuadradas. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para minimizar la suma de sus volúmenes? ¿Para maximizarla?

52. Su hermano menor tiene seis piezas de madera con las que fabrica el armazón de una cometa que se muestra en la figura 3.6.32. Las cuatro piezas exteriores, con las longitudes indicadas, ya han sido cortadas. ¿Cuál debe ser la longitud de los palos interiores para maximizar el área de la cometa?

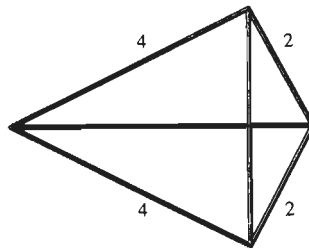


Figura 3.6.32 El armazón de la cometa (problema 52)

### 3.6 Proyectos

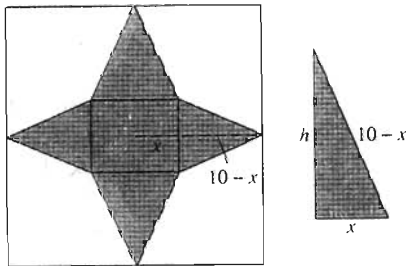


Figura 3.6.33 El cuadrado de lona; primer intento

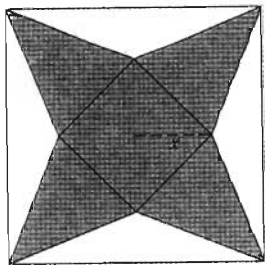


Figura 3.6.34 El cuadrado de lona; segundo intento

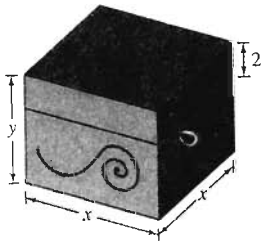


Figura 3.6.35 La caja cuadrada de sombreros con tapa

Estos proyectos requieren el uso de una calculadora gráfica o una computadora con una utilería de graficación.

**PROYECTO A** Los siguientes problemas se relacionan con métodos alternativos para construir una tienda de campaña.

1. La figura 3.6.33 muestra un cuadrado de 20 por 20 pies de material de lona para hacer una tienda de campaña. La tropa A de niñas guía debe cortar partes de las cuatro esquinas, como se indica, de modo que las cuatro partes triangulares restantes se puedan doblar y formar una tienda con la forma de una pirámide con base cuadrada. ¿Cómo debe hacerse esto para maximizar el volumen de la tienda?

Sea  $A$  el área de la base de la tienda y  $h$  su altura. Con  $x$  como en la figura, muestre que el volumen  $V = \frac{1}{3}Ah$  de la tienda está dado por

$$V(x) = \frac{4}{3}x^2\sqrt{100 - 20x}, \quad 0 \leq x \leq 5.$$

Maximice  $V$  graficando  $V(x)$  y  $V'(x)$  y haciendo un acercamiento a la raíz de  $V'(x)$ .

2. La tropa B de las niñas guía debe hacer una tienda con la forma de una pirámide, con una base cuadrada, de otro cuadrado 20 por 20 pies de lona, pero de la forma indicada en la figura 3.6.34. Con  $x$  como en la figura, muestre que el volumen de la tienda es

$$V(x) = \frac{2}{3}x^2\sqrt{200 - 20x}, \quad 0 \leq x \leq 10.$$

Maximice  $V$  gráficamente, como en el problema 1.

3. Resuelva los problemas 1 y 2 analíticamente, para verificar que el volumen maximal en el problema 2 es exactamente  $2\sqrt{2}$  veces el volumen máximo del problema 1. ¡Sí sirve pensar un poco antes de hacer una tienda!

**PROYECTO B**

1. Hattie, la sombrerera, necesita una caja de sombrero con forma de caja rectangular, con una base cuadrada, sin tapa. El volumen de la caja debe ser 1000 pulgadas cúbicas, y el lado  $x$  de su base debe ser al menos de 8 pulgadas (figura 3.6.35). Hattie debe hacer también una tapa cuadrada con un borde de 2 pulgadas.

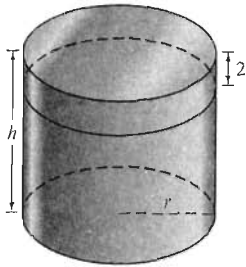


Figura 3.6.36 La caja cilíndrica de sombrero, con tapa

Así, la caja con tapa es, de hecho, dos cajas abiertas sin tapa: la primera caja con altura  $y \geq 2$  pulgadas y la tapa con altura 2 pulgadas. ¿Cuáles deben ser las dimensiones  $x$  y  $y$  que minimicen el *área total*  $A$  de las dos cajas abiertas?

Resuelva el problema de Hattie. Comience expresando el área total como una función  $A$  de  $x$ . No olvide determinar el dominio de  $A$ . Muestre que la ecuación  $A'(x) = 0$  se reduce a la ecuación cúbica

$$x^3 + 2x^2 - 1000 = 0.$$

En vez de intentar resolver esta ecuación con exactitud, grafique  $A(x)$  y  $A'(x)$  en el mismo conjunto de coordenadas y realice un acercamiento a la raíz de  $A'(x)$ .

2. Repita el problema 1 para el caso de una caja cilíndrica, como se muestra en la figura 3.6.36. La base y la tapa tienen cada una un radio  $r \geq 4$  pulgadas, la altura  $h$  de la base debe ser al menos de 2 pulgadas, la orilla de la tapa debe ser exactamente 2 pulgadas y el volumen de la caja debe ser 1000 pulgadas cúbicas.

### 3.7 Derivadas de las funciones trigonométricas

En esta sección iniciamos nuestro estudio del cálculo de las funciones trigonométricas; nos centraremos primero en las funciones seno y coseno. Las definiciones y propiedades elementales de las funciones trigonométricas se repasan en el apéndice A, radianes – grados para algunos ángulos de uso frecuente.

En cálculo cuando escribimos  $\sin \theta$  (o  $\cos \theta$ ), indicamos el seno (o el coseno) de un ángulo de  $\theta$  radianes (rad). Recordemos la relación fundamental entre la medida en radianes y la medida en grados de los ángulos:

$$\text{Existen } \pi \text{ radianes en } 180 \text{ grados.} \quad (1)$$

La figura 3.7.1 muestra las conversiones radianes-grados para algunos ángulos de uso frecuente.

Las derivadas de las funciones seno y coseno dependen de los límites

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1, \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta} = 0 \quad (2)$$

que establecimos en la sección 2.3. Las fórmulas para la suma

$$\begin{aligned} \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \end{aligned} \quad (3)$$

también son necesarias.

Radianes	Grados
0	0
$\pi/6$	30
$\pi/4$	45
$\pi/3$	60
$\pi/2$	90
$2\pi/3$	120
$3\pi/4$	135
$5\pi/6$	150
$\pi$	180
$3\pi/2$	270
$2\pi$	360
$4\pi$	720

Figura 3.7.1 Algunas conversiones grado-radianes

#### Teorema 1 Derivadas de senos y cosenos

Las funciones  $f(x) = \sin x$  y  $g(x) = \cos x$  son derivables para todo  $x$ , y

$$D \sin x = \cos x, \quad (4)$$

$$D \cos x = -\sin x. \quad (5)$$

**Demostración** Para derivar  $f(x) = \sin x$ , comenzamos con la definición de la derivada

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

A continuación aplicamos la fórmula de la suma para el seno y las propiedades de los límites para obtener

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{sen} x \cos h + \operatorname{sen} h \cos x) - \operatorname{sen} x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ (\cos x) \frac{\operatorname{sen} h}{h} - (\operatorname{sen} x) \frac{1 - \cos h}{h} \right] \\ &= (\cos x) \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \right) - (\operatorname{sen} x) \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} \right). \end{aligned}$$

Con los límites en la ecuación (2) se obtiene

$$f'(x) = (\cos x)(1) - (\operatorname{sen} x)(0) = \cos x,$$

que demuestra la ecuación (4). La demostración de la ecuación (5) es similar (véase el problema 62).  $\square$

Los ejemplos 1 a 4 ilustran la aplicación de las ecuaciones (4) y (5) junto con las fórmulas generales de derivación de las secciones 3.2, 3.3 y 3.4 para derivar varias combinaciones de funciones trigonométricas y de otros tipos.

#### EJEMPLO 1

$$\begin{aligned} D_x(x^2 \operatorname{sen} x) &= (D x^2)(\operatorname{sen} x) + (x^2)(D \operatorname{sen} x) \\ &= 2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x. \end{aligned}$$

#### EJEMPLO 2

$$\begin{aligned} D_t(\cos^3 t) &= D[(\cos t)^3] = 3(\cos t)^2 D(\cos t) \\ &= 3(\cos^2 t)(-\operatorname{sen} t) = -3 \cos^2 t \operatorname{sen} t. \end{aligned}$$

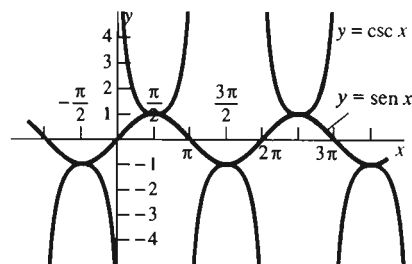
**EJEMPLO 3** Si  $y = \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(D \cos x)(1 - \operatorname{sen} x) - (\cos x)[D(1 - \operatorname{sen} x)]}{(1 - \operatorname{sen} x)^2} \\ &= \frac{(-\operatorname{sen} x)(1 - \operatorname{sen} x) - (\cos x)(-\cos x)}{(1 - \operatorname{sen} x)^2} \\ &= \frac{-\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{(1 - \operatorname{sen} x)^2} = \frac{-\operatorname{sen} x + 1}{(1 - \operatorname{sen} x)^2}; \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x}. \end{aligned}$$

**EJEMPLO 4** Si  $g(t) = (2 - 3 \cos t)^{3/2}$ , entonces

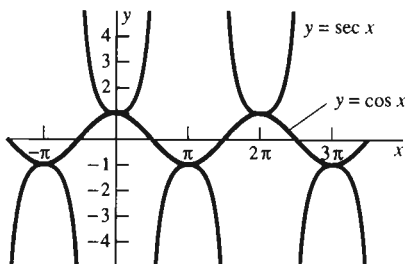
$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{3}{2}(2 - 3 \cos t)^{1/2} D(2 - 3 \cos t) = \frac{3}{2}(2 - 3 \cos t)^{1/2}(3 \operatorname{sen} t) \\ &= \frac{9}{2}(2 - 3 \cos t)^{1/2} \operatorname{sen} t. \end{aligned}$$

## LAS RESTANTES FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS



Es fácil derivar las otras cuatro funciones trigonométricas, pues se pueden expresar en términos de las funciones seno y coseno:

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}, & \cot x &= \frac{\operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x}, \\ \sec x &= \frac{1}{\operatorname{cos} x}, & \operatorname{csc} x &= \frac{1}{\operatorname{sen} x}. \end{aligned} \quad (6)$$



(a)

Cada una de estas fórmulas es válida, excepto cuando el denominador se anula. Así,  $\tan x$  y  $\sec x$  no están definidas cuando  $x$  es un múltiplo entero impar de  $\pi/2$ , mientras que  $\cot x$  y  $\operatorname{csc} x$  no están definidas cuando  $x$  es un múltiplo entero de  $\pi$ . Las gráficas de las seis funciones trigonométricas aparecen en la figura 3.7.2. Ahí se muestran el seno y su recíproco, la cosecante, en el mismo plano de coordenadas; también formamos una pareja del coseno con la secante, pero mostramos la tangente y la cotangente por separado.

Las funciones de la ecuación (6) se pueden derivar mediante la regla del cociente y las derivadas de las funciones seno y coseno. Por ejemplo,

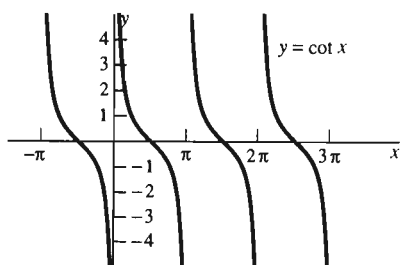
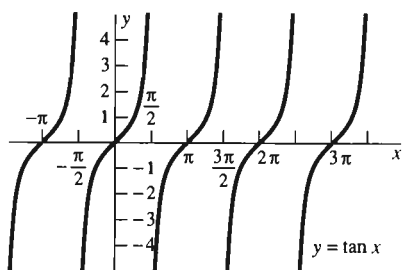
$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x},$$

de modo que

$$\begin{aligned} D \tan x &= \frac{(D \operatorname{sen} x)(\operatorname{cos} x) - (\operatorname{sen} x)(D \operatorname{cos} x)}{(\operatorname{cos} x)^2} \\ &= \frac{(\operatorname{cos} x)(\operatorname{cos} x) - (\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\operatorname{cos}^2 x} = \frac{\operatorname{cos}^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{cos}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 x}; \end{aligned}$$

$$D \tan x = \sec^2 x.$$

Como ejercicio, deberá obtener, de manera similar, las fórmulas de derivación en las ecuaciones (8) a (10) del teorema 2.



(b)

**Figura 3.7.2** Gráficas de las seis funciones trigonométricas

### Teorema 2 Derivadas de las funciones trigonométricas

Las funciones  $f(x) = \tan x$ ,  $g(x) = \cot x$ ,  $p(x) = \sec x$  y  $q(x) = \operatorname{csc} x$  son derivables en todo su dominio de definición, y

$$D \tan x = \sec^2 x, \quad (7)$$

$$D \cot x = -\operatorname{csc}^2 x, \quad (8)$$

$$D \sec x = \sec x \tan x, \quad (9)$$

$$D \operatorname{csc} x = -\operatorname{csc} x \cot x. \quad (10)$$

Los patrones en las fórmulas del teorema (2) y las ecuaciones (4) y (5) nos permiten recordarlas con facilidad. Las fórmulas en las ecuaciones (5), (8) y (10) son los “análogos de las cofunciones” de las ecuaciones (4), (7) y (9), respectivamente. Observe que las fórmulas de las derivadas de estas tres cofunciones son las que contienen signos menos.



## EJEMPLO 5

$$\begin{aligned}D_x(x \tan x) &= (Dx)(\tan x) + (x)(D \tan x) \\ &= (1)(\tan x) + (x)(\sec^2 x) = \tan x + x \sec^2 x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_x(\cot^3 x) &= D(\cot x)^3 = 3(\cot x)^2 D \cot x \\ &= 3(\cot x)^2(-\csc^2 x) = -3 \csc^2 x \cot^2 x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_x\left(\frac{\sec x}{\sqrt{x}}\right) &= \frac{(D \sec x)(\sqrt{x}) - (\sec x)(D\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{(\sec x \tan x)(\sqrt{x}) - (\sec x)\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right)}{x} \\ &= \frac{1}{2}x^{-3/2}(2x \tan x - 1) \sec x.\end{aligned}$$

## FÓRMULAS CON LA REGLA DE LA CADENA

Recuerde la ecuación (14) de la sección 3.3; la regla de la cadena implica

$$D_x g(u) = g'(u) \frac{du}{dx} \quad (11)$$

para la derivada de la composición  $g(u(x))$  de dos funciones derivables  $g$  y  $u$ . Esta fórmula proporciona una *versión de la regla de la cadena* de cada una de las nuevas fórmulas de derivación que hemos aprendido.

Si aplicamos la ecuación (11), primero con  $g(u) = \sen u$ , después con  $g(u) = \cos u$ , y así sucesivamente, obtenemos las versiones de la regla de la cadena de las fórmulas de derivación trigonométrica:

$$D_x \sen u = (\cos u) \frac{du}{dx}, \quad (12)$$

$$D_x \cos u = (-\sen u) \frac{du}{dx}, \quad (13)$$

$$D_x \tan u = (\sec^2 u) \frac{du}{dx}, \quad (14)$$

$$D_x \cot u = (-\csc^2 u) \frac{du}{dx}, \quad (15)$$

$$D_x \sec u = (\sec u \tan u) \frac{du}{dx}, \quad (16)$$

$$D_x \csc u = (-\csc u \cot u) \frac{du}{dx}. \quad (17)$$

Los casos en que  $u = kx$  (donde  $k$  es una constante) son dignos de mención. Por ejemplo,

$$D_x \sen kx = k \cos kx \quad \text{y} \quad D_x \cos kx = -k \sen kx. \quad (18)$$

Las fórmulas de la ecuación (18) proporcionan una explicación de la razón por la que la medida en radianes es más adecuada que la medida en grados. Como la relación dada en (1) implica que un ángulo medido en grados tiene medida en radianes  $\pi x/180$ , el “seno de un ángulo de  $x$  grados” es una función *nueva y diferente*, con la fórmula

$$\text{sen } x^\circ = \text{sen } \frac{\pi x}{180},$$

expresada en el lado derecho en términos de la función seno estándar (medida en radianes). Por lo tanto, la primera fórmula de la ecuación (18) implica

$$D \text{ sen } x^\circ = \frac{\pi}{180} \cos \frac{\pi x}{180},$$

de modo que

$$D \text{ sen } x^\circ \approx (0.01745) \cos x^\circ.$$

La necesidad de usar el valor aproximando 0.01745 en este caso (e incluso su presencia) es una razón por la que se usan radianes en vez de grados en el cálculo de las funciones trigonométricas: Cuando trabajamos con radianes, no necesitamos tal aproximación.

**EJEMPLO 6** Si  $y = 2 \text{ sen } 10t + 3 \text{ cos } \pi t$ , entonces

$$\frac{dy}{dt} = 20 \text{ cos } 10t - 3\pi \text{ sen } \pi t.$$

**EJEMPLO 7**  $D_x(\text{sen}^2 3x \text{ cos}^4 5x)$

$$\begin{aligned} &= [D(\text{sen} 3x)^2](\text{cos}^4 5x) + (\text{sen}^2 3x)[D(\text{cos} 5x)^4] \\ &= 2(\text{sen} 3x)(D \text{ sen } 3x) \cdot (\text{cos}^4 5x) + (\text{sen}^2 3x) \cdot 4(\text{cos} 5x)^3(D \text{ cos } 5x) \\ &= 2(\text{sen} 3x)(3 \text{ cos } 3x)(\text{cos}^4 5x) + (\text{sen}^2 3x)(4 \text{ cos}^3 5x)(-5 \text{ sen } 5x) \\ &= 6 \text{ sen } 3x \text{ cos } 3x \text{ cos}^4 5x - 20 \text{ sen}^2 3x \text{ sen } 5x \text{ cos}^3 5x. \end{aligned}$$

**EJEMPLO 8** Derive  $f(x) = \text{cos } \sqrt{x}$ .

**Solución** Si  $u = \sqrt{x}$ , entonces  $du/dx = 1/(2\sqrt{x})$ , por lo que de la ecuación (13) se obtiene

$$\begin{aligned} D_x \text{ cos } \sqrt{x} &= D_x \text{ cos } u = (-\text{sen } u) \frac{du}{dx} \\ &= -(\text{sen } \sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{\text{sen } \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Otra alternativa es realizar este cálculo sin introducir la variable auxiliar  $u$ :

$$D \text{ cos } \sqrt{x} = (-\text{sen } \sqrt{x})D(\sqrt{x}) = -\frac{\text{sen } \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

**EJEMPLO 9** Derive

$$y = \text{sen}^2(2x - 1)^{3/2} = [\text{sen}(2x - 1)^{3/2}]^2.$$

**Solución** En este caso,  $y = u^2$ , donde  $u = \text{sen}(2x - 1)^{3/2}$ , de modo que

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 2u \frac{du}{dx} = 2[\text{sen}(2x - 1)^{3/2}]D_x[\text{sen}(2x - 1)^{3/2}] \\ &= 2[\text{sen}(2x - 1)^{3/2}][\cos(2x - 1)^{3/2}]D(2x - 1)^{3/2} \\ &= 2[\text{sen}(2x - 1)^{3/2}][\cos(2x - 1)^{3/2}] \frac{3}{2}(2x - 1)^{1/2} \cdot 2 \\ &= 6(2x - 1)^{1/2}[\text{sen}(2x - 1)^{3/2}][\cos(2x - 1)^{3/2}].\end{aligned}$$

### EJEMPLO 10

$$D_x \tan 2x^3 = (\sec^2 2x^3)D(2x^3) = 6x^2 \sec^2 2x^3.$$

$$\begin{aligned}D_x \cot^3 2x &= D(\cot 2x)^3 = 3(\cot 2x)^2 D(\cot 2x) \\ &= (3 \cot^2 2x)(-\csc^2 2x)D(2x) \\ &= -6 \csc^2 2x \cot^2 2x.\end{aligned}$$

$$D_x \sec \sqrt{x} = (\sec \sqrt{x} \tan \sqrt{x})D\sqrt{x} = \frac{\sec \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

$$\begin{aligned}D_x \sqrt{\csc x} &= D(\csc x)^{1/2} = \frac{1}{2}(\csc x)^{-1/2} D(\csc x) \\ &= \frac{1}{2}(\csc x)^{-1/2}(-\csc x \cot x) = -\frac{1}{2}(\cot x)\sqrt{\csc x}.\end{aligned}$$

Los ejemplos 11 y 12 ilustran las aplicaciones de las funciones trigonométricas a los problemas de razón de cambio y de máximos y mínimos.

**EJEMPLO 11** Se lanza un cohete en forma vertical y es rastreado por un radar localizado en el suelo, a 5 millas de la plataforma de lanzamiento. Suponga que el ángulo de elevación  $\theta$  de la línea de visión al cohete aumenta a razón de  $3^\circ$  por segundo, cuando  $\theta = 60^\circ$ . ¿Cuál es la velocidad del cohete en ese instante?

**Solución** Primero convertimos los datos dados en grados a radianes. Como existen  $\pi/180$  radianes en  $1^\circ$ , la razón de crecimiento de  $\theta$  es

$$\frac{3\pi}{180} = \frac{\pi}{60} \quad (\text{rad/s})$$

en el instante en que

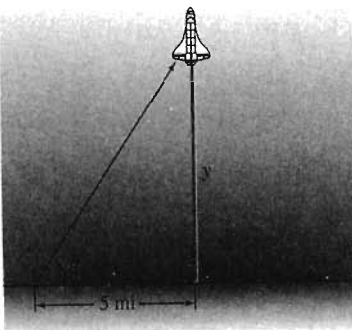
$$\theta = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3} \quad (\text{rad}).$$

En la figura 3.7.3 vemos que la altura  $y$  (en millas) del cohete es

$$y = 5 \tan \theta.$$

Por lo tanto, su velocidad es

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = 5(\sec^2 \theta) \frac{d\theta}{dt}.$$



**Figura 3.7.3** Rastreo de un cohete en ascenso (ejemplo 1)

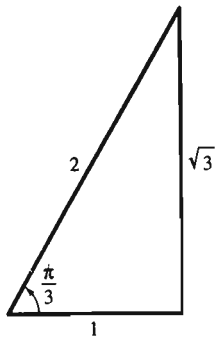


Figura 3.7.4  $\sec \frac{\pi}{3} = 2$   
(ejemplo 11)

Como  $\sec(\pi/3) = 2$  (figura 3.7.4), la velocidad del cohete es

$$\frac{dy}{dt} = 5 \cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{60} = \frac{\pi}{3} \quad (\text{mi/s}),$$

cerca de 3770 millas/hora, en el instante  $\theta = 60^\circ$ .

**EJEMPLO 12** Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de radio  $R$  (figura 3.7.5). ¿Cuál es el área máxima posible de tal rectángulo?

**Solución** Si denotamos la longitud de la *mitad* de la base del rectángulo con  $x$  y su altura con  $y$ , entonces su área es  $A = 2xy$ . En la figura 3.7.5 vemos que el triángulo rectángulo tiene hipotenusa  $R$ , el radio del círculo, por lo que

$$x = R \cos \theta \quad y = R \sin \theta. \quad (19)$$

Cada valor de  $\theta$  entre 0 y  $\pi/2$  corresponde a un rectángulo inscrito posible. Los valores  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi/2$  dan como resultado rectángulos degenerados.

Sustituimos los datos de la ecuación (19) en la fórmula  $A = 2xy$  para obtener el área

$$\begin{aligned} A &= A(\theta) = 2(R \cos \theta)(R \sin \theta) \\ &= 2R^2 \cos \theta \sin \theta \end{aligned} \quad (20)$$

como función de  $\theta$  en el intervalo cerrado  $[0, \pi/2]$ . Para determinar los puntos críticos, derivamos:

$$\frac{dA}{d\theta} = 2R^2(-\sin \theta \sin \theta + \cos \theta \cos \theta) = 2R^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta).$$

Como  $dA/d\theta$  siempre existe, tenemos puntos críticos sólo si

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta &= 0; & \sin^2 \theta &= \cos^2 \theta; \\ \tan^2 \theta &= 1; & \tan \theta &= \pm 1. \end{aligned}$$

El único valor de  $\theta$  en  $[0, \pi/2]$  tal que  $\tan \theta = \pm 1$  es  $\theta = \pi/4$ .

Al evaluar  $A(\theta)$  en cada uno de los valores posibles  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi/4$  y  $\pi/2$  (los extremos y el punto crítico), tenemos que

$$\begin{aligned} A(0) &= 0, \\ A\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 2R^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = R^2, \quad \leftarrow \text{máximo absoluto} \\ A\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Así, el máximo rectángulo inscrito tiene área  $R^2$ , y sus dimensiones son  $2x = R\sqrt{2}$  y  $y = R/\sqrt{2}$ .

### 3.7. Problemas

Derive las funciones dadas en los problemas 1 a 20.

1.  $f(x) = 3 \sin^2 x$

2.  $f(x) = 2 \cos^4 x$

5.  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

6.  $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$

3.  $f(x) = x \cos x$

4.  $f(x) = \sqrt{x} \sin x$

7.  $f(x) = \sin x \cos^2 x$

8.  $f(x) = \cos^3 x \sin^2 x$

9.  $g(t) = (1 + \sin t)^4$

10.  $g(t) = (2 - \cos^2 t)^3$

11.  $g(t) = \frac{1}{\sin t + \cos t}$     12.  $g(t) = \frac{\sin t}{1 + \cos t}$   
 13.  $f(x) = 2x \sin x - 3x^2 \cos x$   
 14.  $f(x) = x^{1/2} \cos x - x^{-1/2} \sin x$   
 15.  $f(x) = \cos 2x \sin 3x$     16.  $f(x) = \cos 5x \sin 7x$   
 17.  $g(t) = t^3 \sin^2 2t$     18.  $g(t) = \sqrt{t} \cos^3 3t$   
 19.  $g(t) = (\cos 3t + \cos 5t)^{5/2}$   
 20.  $g(t) = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 t + \sin^2 3t}}$

Determine  $dy/dx$  en los problemas 21 a 60.

21.  $y = \sin^2 \sqrt{x}$     22.  $y = \frac{\cos 2x}{x}$   
 23.  $y = x^2 \cos(3x^2 - 1)$     24.  $y = \sin^3 x^4$   
 25.  $y = \sin 2x \cos 3x$     26.  $y = \frac{x}{\sin 3x}$   
 27.  $y = \frac{\cos 3x}{\sin 5x}$     28.  $y = \sqrt{\cos \sqrt{x}}$   
 29.  $y = \sin^2 x^2$     30.  $y = \cos^3 x^3$   
 31.  $y = \sin 2\sqrt{x}$     32.  $y = \cos 3\sqrt[3]{x}$   
 33.  $y = x \sin x^2$     34.  $y = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$   
 35.  $y = \sqrt{x} \sin \sqrt{x}$     36.  $y = (\sin x - \cos x)^2$   
 37.  $y = \sqrt{x}(x - \cos x)^3$     38.  $y = \sqrt{x} \sin \sqrt{x + \sqrt{x}}$   
 39.  $y = \cos(\sin x^2)$     40.  $y = \sin(1 + \sqrt{\sin x})$   
 41.  $y = \tan x^7$     42.  $y = \sec x^7$   
 43.  $y = (\tan x)^7$     44.  $y = (\sec 2x)^7$   
 45.  $y = x^7 \tan 5x$     46.  $y = \frac{\sec x^5}{x}$   
 47.  $y = \sqrt{x} \sec \sqrt{x}$     48.  $y = \sec \sqrt{x} \tan \sqrt{x}$   
 49.  $y = \csc\left(\frac{1}{x^2}\right)$     50.  $y = \cot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$   
 51.  $y = \frac{\sec 5x}{\tan 3x}$     52.  $y = \sec^2 x - \tan^2 x$   
 53.  $y = x \sec x \csc x$     54.  $y = x^3 \tan^3 x^3$   
 55.  $y = \sec(\sin x)$     56.  $y = \cot(\sec 7x)$   
 57.  $y = \frac{\sin x}{\sec x}$     58.  $y = \frac{\sec x}{1 + \tan x}$   
 59.  $y = \sqrt{1 + \cot 5x}$     60.  $y = \sqrt{\csc \sqrt{x}}$

61. Deduzca las fórmulas de derivación de las ecuaciones (8) a (10).

62. Use la definición de la derivada para mostrar directamente que si  $g(x) = \cos x$ , entonces  $g'(x) = -\sin x$ .

63. Si se dispara un proyectil desde el nivel del suelo, con una velocidad inicial  $v_0$  y ángulo de inclinación  $\alpha$  y si se puede ignorar la resistencia del aire, entonces su alcance (la distancia horizontal recorrida) es

$$R = \frac{1}{16} v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

(figura 3.7.6). ¿Qué valor de  $\alpha$  maximiza  $R$ ?

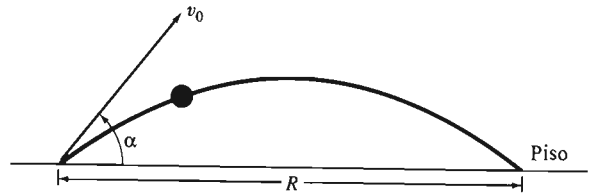


Figura 3.7.6 El proyectil del problema 63

64. Un globo meteorológico que se eleva en forma vertical es observado desde un punto en el piso a 300 pies del punto directamente debajo del balón (figura 3.7.7). ¿Con qué rapidez está elevándose el globo cuando el ángulo entre el piso y la línea de visión del observador es  $45^\circ$  y aumenta a  $1^\circ$  por segundo?

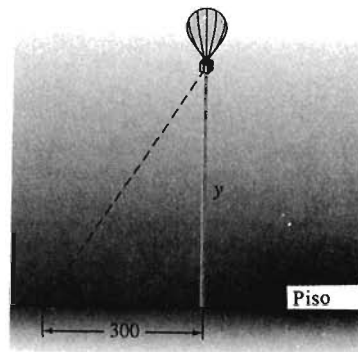


Figura 3.7.7 El globo meteorológico del problema 64

65. Se lanza un cohete en forma vertical, hacia arriba, desde un punto a 2 millas al oeste de un observador sobre el piso. ¿Cuál es la rapidez del cohete cuando el ángulo de elevación (desde la horizontal) de la línea de visión del observador al cohete es  $50^\circ$  y aumenta  $5^\circ$  por segundo?

66. Un avión que vuela a una altura de 25,000 pies tiene una falla en el indicador de la velocidad del aire. Para determinar su velocidad, el piloto ve un punto fijo en el piso. En el momento en que el ángulo de depresión (desde la horizontal) de su línea de visión es  $65^\circ$ , observa que este ángulo aumenta a razón de  $1.5^\circ$  por segundo (figura 3.7.8). ¿Cuál es la rapidez del avión?

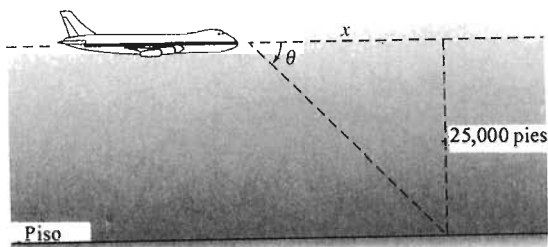


Figura 3.7.8 El avión del problema 66

67. Un observador sobre el piso ve un avión que se aproxima, volando a velocidad constante y a una altura de 20,000 pies. Desde su punto de vista, el ángulo de elevación del avión aumenta a  $0.5^\circ$  por segundo, cuando el ángulo es  $60^\circ$ . ¿Cuál es la velocidad del avión?

68. Determine la máxima área posible  $A$  de un rectángulo inscrito en el círculo unitario  $x^2 + y^2 = 1$ , maximizando  $A$  como una función del ángulo  $\theta$  que se indica en la figura 3.7.9.

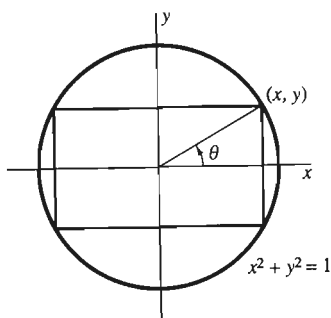


Figura 3.7.9 Un rectángulo inscrito en el círculo unitario (problema 68)

69. Se va a construir un abrevadero mediante una banda larga de metal de 6 pies de ancho, doblando con un ángulo  $\theta$  una tira de 2 pies a cada lado (figura 3.7.10). ¿Cuál ángulo maximiza el área transversal, y con ello el volumen, del abrevadero?

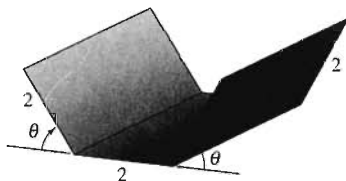


Figura 3.7.10 El abrevadero del problema 69

70. Una parcela circular de pasto con un radio de 20 m está rodeada por un camino, y una luz se coloca en la parte superior de un poste justo sobre el centro del círculo. ¿A qué altura debe colocarse la luz para iluminar mejor el camino? La intensidad de iluminación  $I$  de una superficie está dada por  $I = (k \text{ sen } \theta) / D^2$ , donde  $D$  es la distancia desde la fuente de

luz a la superficie, y  $\theta$  es el ángulo con el que la luz llega a la superficie y  $k$  es una constante positiva.

71. Determine el mínimo volumen posible  $V$  de un cono en el que se inscribe una esfera de radio dado  $R$ . Minimice  $V$  como función del ángulo  $\theta$  indicado en la figura 3.7.11.

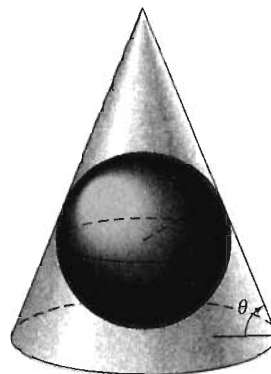


Figura 3.7.11 Determinación del cono más pequeño que contiene una esfera dada (problema 71)

72. Una hoja de papel rectangular muy larga tiene 20 centímetros de ancho. La esquina inferior derecha se dobla a lo largo del pliegue que se indica en la figura 3.7.12, de modo que la esquina toque apenas el lado izquierdo de la página. ¿Cómo hacer esto de modo que el doblez sea lo más corto posible?

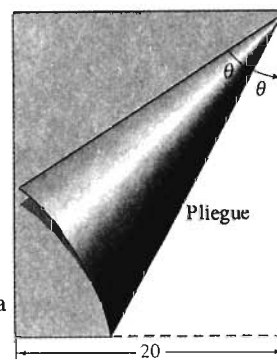


Figura 3.7.12 Doble una hoja de papel; haga que el pliegue sea de la longitud más pequeña posible (problema 72)

73. Determine el área máxima posible de un trapecio inscrito en un círculo de radio 1, como lo muestra la figura 3.7.13.

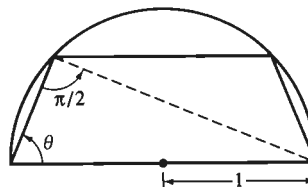


Figura 3.7.13 Un trapecio inscrito en un círculo (problema 73)

Comience expresando  $A$  como una función del ángulo  $\theta$  que aparece ahí.

74. Un leñador debe cortar una viga hexagonal de un tronco circular de 30 cm de diámetro, de modo que su sección transversal sea como se muestra en la figura 3.7.14. La viga es simétrica, con la única diferencia entre los ángulos internos  $\alpha$  y  $\beta$ . Muestre que el área de la sección transversal es máxima cuando la sección transversal es un hexágono regular, con lados y ángulos iguales (correspondiente a  $\alpha = \beta = 2\pi/3$ ). Observe que  $\alpha + 2\beta = 2\pi$ . (¿Por qué?)

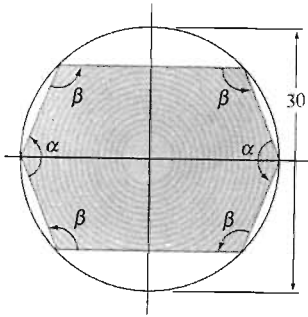


Figura 3.7.14 Una viga hexagonal cortada de un tronco circular (problema 74)

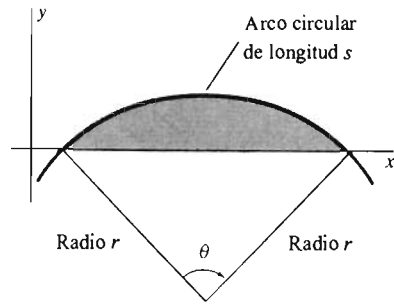


Figura 3.7.15 Determinación del área máxima acotada por un arco circular y su cuerda (problema 75)

75. Consideremos un arco circular de longitud  $s$  con extremos en el eje  $x$  (figura 3.7.15). Muestre que el área  $A$  acotada por este arco y el eje  $x$  es máxima cuando el arco circular tiene la forma de un semicírculo. [Sugerencia: Expresé  $A$  en términos del ángulo  $\theta$  subtendido por el arco en el centro del círculo, como se muestra en la figura 3.7.15. Muestre que  $A$  es máxima cuando  $\theta = \pi$ .]

76. Una montañista comienza a caminar en un punto  $P$  de un camino recto y desea llegar a una cabaña en el bosque, que está a 2 km de un punto  $Q$  a 3 km camino abajo de  $P$  (figura 3.7.16). Ella puede caminar a 8 km/h por el camino, pero sólo a 3 km/h por el bosque, y quiere minimizar el tiempo requerido para llegar a la cabaña. ¿Qué parte del camino debe caminar antes de dirigirse hacia el bosque directamente hacia la cabaña? [Sugerencia: Use el ángulo  $\theta$  entre el camino y la ruta que toma a través del bosque como la variable independiente.]

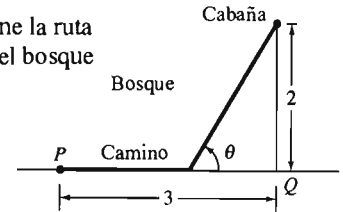


Figura 3.7.16 Determine la ruta más rápida a la cabaña del bosque (problema 76)

### 3.8 Derivación implícita y razones relacionadas

Una ecuación en dos variables  $x$  y  $y$  puede tener una o más soluciones para  $y$  en términos de  $x$  o para  $x$  en términos de  $y$ . Estas soluciones son funciones **definidas en forma implícita** por la ecuación. Aquí analizaremos la derivación de tales funciones y el uso de sus derivadas para resolver problemas específicos de razón de cambio.

Por ejemplo, la ecuación  $y^2 - x = 0$  define de manera implícita dos funciones continuas de  $x$ :

$$y = \sqrt{x} \quad y = -\sqrt{x}.$$

Cada una de las cuales tiene como dominio la semirrecta  $x \geq 0$ . Las gráficas de estas dos funciones son la rama superior e inferior de la parábola que aparece en la figura 3.8.1. La parábola completa no es la gráfica de una función de  $x$ , puesto que ninguna recta vertical debe cruzar la gráfica de una función de este tipo más de una vez.

La ecuación de un círculo unitario,  $x^2 + y^2 = 1$ , define de manera implícita cuatro funciones (entre otras):

$$\begin{aligned} y &= +\sqrt{1-x^2} && \text{para } x \text{ en } [-1, 1], \\ y &= -\sqrt{1-x^2} && \text{para } x \text{ en } [-1, 1], \\ x &= +\sqrt{1-y^2} && \text{para } x \text{ en } [-1, 1], \\ x &= -\sqrt{1-y^2} && \text{para } x \text{ en } [-1, 1]. \end{aligned}$$

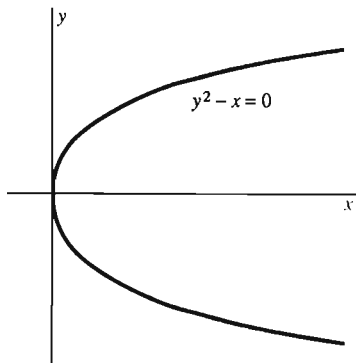


Figura 3.8.1 La parábola  $y^2 - x = 0$

Las cuatro gráficas se resaltan en cuatro copias del círculo unitario que se muestran en la figura 3.8.2.

La ecuación  $2x^2 + 2y^2 + 3 = 0$  *no* define en forma implícita una función, pues esta ecuación no tiene soluciones reales  $(x, y)$ . (Es claro que  $2x^2 + 2y^2 + 3 > 0$  para todo  $x$  y  $y$ .)

En el cálculo avanzado, podemos estudiar condiciones que garanticen cuándo una función definida de manera implícita es derivable. Aquí continuaremos bajo la hipótesis de que nuestras funciones definidas de manera implícita son derivables en caso todos los puntos de sus dominios. (Las funciones con las gráficas que se muestran en la figura 3.8.2 *no* son derivables en los extremos de sus dominios.)

Cuando suponemos la derivabilidad, podemos usar la regla de la cadena para derivar la ecuación dada, pensando  $x$  como la variable independiente. Entonces, podemos despejar la derivada de la función  $f$  definida de manera implícita,  $dy/dx = f'(x)$ , en la ecuación resultante. Este proceso es la **derivación implícita**.

**EJEMPLO 1** Use la derivación implícita para determinar la derivada de una función diferenciable  $y = f(x)$  definida de manera implícita mediante la ecuación

$$x^2 + y^2 = 1.$$

**Solución** La ecuación  $x^2 + y^2 = 1$  se piensa como una *identidad* que define de manera implícita  $y = y(x)$  como una función de  $x$ . Como  $x^2 + [y(x)]^2$  es entonces una función de  $x$ , tiene la misma derivada que la función constante 1 en el otro miembro de la identidad. Así, podemos derivar ambos lados de  $x^2 + y^2 = 1$  con respecto de  $x$  e igualar los resultados. Obtenemos

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0.$$

En este paso, es esencial recordar que  $y$  es una función de  $x$ , por lo que la regla de la cadena implica  $D_x(y^2) = 2y D_x y$ .

Después despejamos para obtener

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \quad (1)$$

Es sorprendente ver una fórmula para  $dy/dx$  que contiene a  $x$  y a  $y$ , pero dicha fórmula puede ser tan útil como alguna que solamente contenga a  $x$ . Por ejemplo, la fórmula de la ecuación (1) dice que la pendiente de la recta tangente al círculo  $x^2 + y^2 = 1$  en el punto  $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$  es

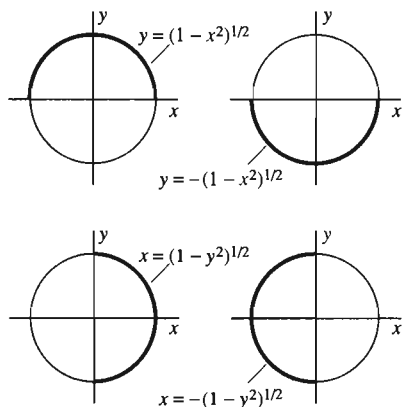
$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})} = -\frac{0.6}{0.8} = -0.75.$$

El círculo y la recta aparecen en la figura 3.8.3.

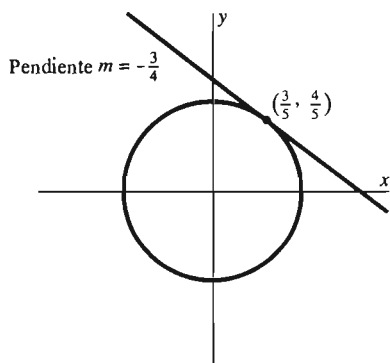
Si despejamos  $y = \pm\sqrt{1-x^2}$  en el ejemplo 1, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\pm\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{y},$$

lo que concuerda con la ecuación (1). Así, la ecuación (1) nos da al mismo tiempo las derivadas de las dos funciones  $y = +\sqrt{1-x^2}$  y  $y = -\sqrt{1-x^2}$  definidas de manera implícita mediante la ecuación  $x^2 + y^2 = 1$ .

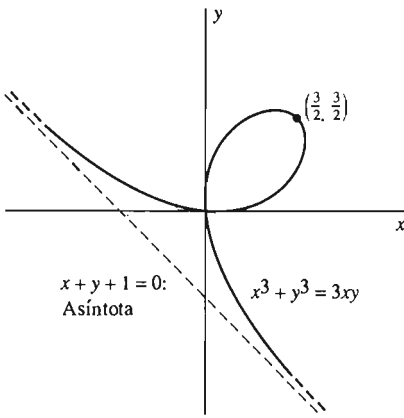


**Figura 3.8.2** Funciones continuas definidas de manera implícita por  $x^2 + y^2 = 1$



**Figura 3.8.3** La recta tangente del ejemplo 1





**Figura 3.8.4** La hoja de Descartes; ejemplo 2

**EJEMPLO 2** La hoja de Descartes es la gráfica de la ecuación

$$x^3 + y^3 = 3xy. \quad (2)$$

Esta curva fue propuesta por René Descartes como reto a Pierre de Fermat (1601 – 1665) para determinar su recta tangente en un punto arbitrario. La gráfica de la hoja aparece en la figura 3.8.4. La gráfica casi coincide con la línea recta  $x + y + 1 = 0$ , cuando  $|x|$  y  $|y|$  son grandes y producen una hoja de laurel (de ahí el nombre) en el primer cuadrante. En el problema 24 de la sección 12.1 indicamos cómo construir esta gráfica. Aquí queremos encontrar la pendiente de su recta tangente.

**Solución** Usamos derivación implícita (en lugar de los métodos ad hoc con los cuales Fermat respondió al reto de Descartes). Derivando ambos lados de la ecuación (2), encontramos que:

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 3y + 3x \frac{dy}{dx}.$$

Después despejamos la derivada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}. \quad (3)$$

Por ejemplo, en el punto  $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ , la pendiente de la recta tangente es

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})} = \frac{\frac{3}{2} - (\frac{3}{2})^2}{(\frac{3}{2})^2 - \frac{3}{2}} = -1,$$

y este resultado coincide con nuestra intuición relativa a la figura. En el punto  $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ , la ecuación (3) implica

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})} = \frac{\frac{4}{3} - (\frac{2}{3})^2}{(\frac{4}{3})^2 - \frac{2}{3}} = \frac{4}{5}.$$

Así, una ecuación para la recta tangente a la hoja en este punto es

$$y - \frac{4}{3} = \frac{4}{5} \left( x - \frac{2}{3} \right);$$

o bien,  $4x - 5y + 4 = 0$ .

## RAZONES RELACIONADAS

Un problema de **razones relacionadas** implica el uso de dos o más cantidades que varían con el tiempo y una ecuación que expresa cierta relación entre estas cantidades. Por lo común, están dados los valores de estas cantidades en cierto instante, junto con todas sus razones de cambio en el tiempo, excepto una. El problema consiste por lo general en determinar la razón de cambio con respecto del tiempo que *no* está dada, en un instante dado en el problema. La derivación implícita, con respecto del tiempo  $t$ , de la ecuación que relaciona las cantidades dadas producirá una ecuación que relaciona las *razones de cambio* de las cantidades dadas. Ésta es la clave para resolver un problema de razones relacionadas.

**EJEMPLO 3** Suponga que  $x(t)$  y  $y(t)$  son las coordenadas  $x$  y  $y$  en el instante  $t$  de un punto que se mueve en torno del círculo con ecuación

$$x^2 + y^2 = 25. \quad (4)$$

Usaremos la regla de la cadena para derivar ambos lados de esta ecuación, *con respecto del tiempo  $t$* . Esto produce la ecuación

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0. \quad (5)$$

Si se conocen los valores de  $x$ ,  $y$  y  $dx/dt$  en cierto instante  $t$ , entonces se puede despejar  $dy/dt$  en la ecuación (5). *No* es necesario conocer  $x$  y  $y$  como funciones de  $t$ . De hecho es común para los problemas relacionados con razones que la información sea incompleta como para expresar a  $x$  y  $y$  como funciones de  $t$ .

Por ejemplo, supongamos que tenemos  $x = 3$ ,  $y = 4$  y  $dx/dt = 12$  en cierto instante. La sustitución de estos valores en la ecuación (5) implica

$$2 \cdot 3 \cdot 12 + 2 \cdot 4 \cdot \frac{dy}{dt} = 0,$$

de modo que  $dy/dt = -9$  en ese mismo instante.

**EJEMPLO 4** Un cohete lanzado de forma vertical es rastreado por una estación de radar localizada en el piso, a 3 millas de la plataforma de lanzamiento. ¿Cuál es la velocidad vertical del cohete en el instante en que su distancia a la estación de radar es 5 millas y la distancia crece con razón de 5000 mi/h?

**Solución** La figura 3.8.5 ilustra esta situación. Sea  $y$  la altura del cohete (en millas) y  $z$  su distancia a la estación de radar. Tenemos que

$$\frac{dz}{dt} = 5000 \text{ cuando } z = 5.$$

Queremos determinar  $dy/dt$  (en millas por hora) en este instante.

Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de la figura y obtenemos

$$y^2 + 9 = z^2$$

como relación entre  $y$  y  $z$ . De esto vemos que  $y = 4$  cuando  $z = 5$ . La derivación implícita daría entonces

$$2y \frac{dy}{dt} = 2z \frac{dz}{dt}.$$

Sustituimos los datos  $y = 4$ ,  $z = 5$  y  $dz/dt = 5000$ , con lo que tenemos

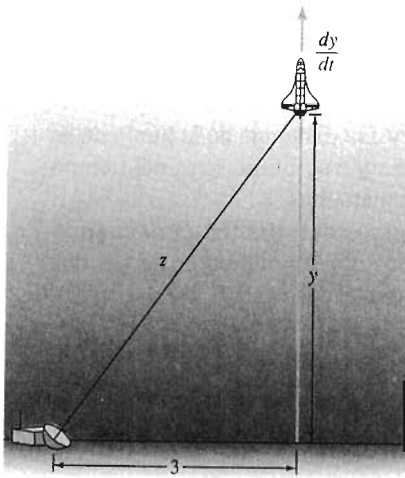
$$\frac{dy}{dt} = 6250 \text{ (mi/h)}$$

como el instante en cuestión.

---

El ejemplo 4 ilustra los pasos siguientes en la solución de un problema típico de razones relacionadas, del tipo que implica una situación geométrica:

1. Se traza un diagrama y se etiquetan como variables las diversas cantidades cambiantes requeridas en el problema.
2. Se registran los valores de las variables y sus razones de cambio, como se da en el problema.



**Figura 3.8.5** El cohete del ejemplo 4

3. Se usa el diagrama para determinar una ecuación que relacione las variables importantes del problema.
4. Se deriva la ecuación de manera implícita con respecto del tiempo  $t$ .
5. Se sustituye el dato numérico dado en la ecuación resultante, y después se despeja la incógnita.

**CUIDADO** El error más común que debe evitarse es la sustitución prematura de los datos dados antes de derivar de manera implícita. Si hubiéramos sustituido  $z = 5$  al principio del ejemplo 4, nuestra ecuación hubiera sido  $y^2 + 9 = 25$ , y la derivación implícita nos daría como resultado el absurdo  $dy/dt = 0$ .

Usaremos triángulos semejantes en vez del teorema de Pitágoras en el ejemplo 5 para descubrir la relación necesaria entre las variables.

**EJEMPLO 5** Un hombre de 6 pies de altura camina con una velocidad de 8 pies/seg, alejándose de un farol de la calle que está en el extremo de un poste de 18 pies. ¿Qué tan rápido se mueve la punta de su sombra a lo largo del piso cuando la persona está a 100 pies del poste de luz?

**Solución** Sea  $x$  la distancia del hombre al poste y  $z$  la distancia de la punta de su sombra a la base del poste (figura 3.8.6). Aunque  $x$  y  $z$  son funciones del tiempo  $t$ , no intentaremos determinar fórmulas explícitas para ellas.

Tenemos que  $dx/dt = 8$  (en pies/seg); queremos determinar  $dz/dt$  cuando  $x = 100$  (pies). Igualamos las razones de los lados correspondientes de los dos triángulos semejantes de la figura 3.8.6 y vemos que

$$\frac{z}{18} = \frac{z - x}{6}.$$

De aquí se sigue que

$$2z = 3x,$$

y la derivación implícita nos da

$$2 \frac{dz}{dt} = 3 \frac{dx}{dt}.$$

Sustituimos  $dx/dt = 8$  y vemos que

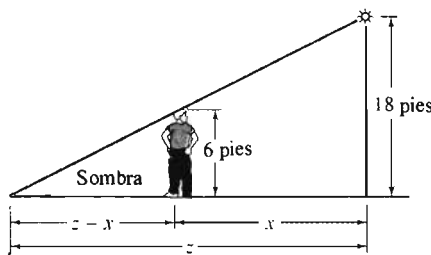
$$\frac{dz}{dt} = \frac{3}{2} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{3}{2} \cdot 8 = 12.$$

De modo que la punta de la sombra del hombre se mueve a 12 pies/seg.

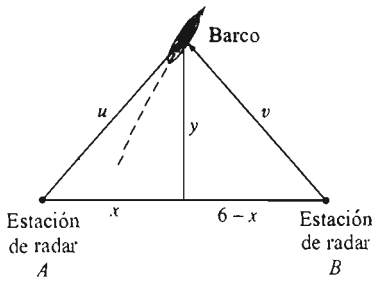
---

El ejemplo 5 es poco usual, en el sentido de que la respuesta no depende de la distancia del hombre al poste de luz (el valor dado  $x = 100$  es superfluo). El ejemplo 6 es un problema de razones relacionadas con dos relaciones entre las variables, que no es tan raro.

**EJEMPLO 6** Dos estaciones de radar en  $A$  y  $B$ , con  $B$  6 km al este de  $A$ , están rastreando un barco. En cierto momento, el barco está a 5 km de  $A$ , y esta distancia aumenta a razón de 28 km/h. En el mismo instante, el barco está también a 5 km de  $B$ , pero esta distancia aumenta a sólo 4 km/h. ¿Dónde está el barco, qué tan rápido se mueve y en qué dirección?



**Figura 3.8.6** La sombra en movimiento del ejemplo 5



**Figura 3.8.7** Estaciones de radar que rastrean un barco (ejemplo 6)

**Solución** Con las distancias indicadas en la figura 3.8.7, tenemos que (con la ayuda del teorema de Pitágoras)

$$x^2 + y^2 = u^2 \quad y \quad (6 - x)^2 + y^2 = v^2. \quad (6)$$

Tenemos los siguientes datos:  $u = v = 5$ ,  $du/dt = 28$  y  $dv/dt = 4$  en el instante en cuestión. Como el barco está a la misma distancia de A y de B, es claro que  $x = 3$ . Así,  $y = 4$ . Por tanto, el barco está a 3 km al este y 4 km al norte de A.

Derivamos de manera implícita las dos ecuaciones en (6) y obtenemos

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 2u \frac{du}{dt}$$

y

$$-2(6 - x) \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 2v \frac{dv}{dt}.$$

Cuando sustituimos los datos numéricos dados y los datos deducidos, obtenemos

$$3 \frac{dx}{dt} + 4 \frac{dy}{dt} = 140 \quad y \quad -3 \frac{dx}{dt} + 4 \frac{dy}{dt} = 20.$$

Estas ecuaciones se resuelven fácilmente:  $dx/dt = dy/dt = 20$ . En consecuencia, el barco navega hacia al noreste, con una velocidad de

$$\sqrt{20^2 + 20^2} = 20\sqrt{2} \quad (\text{km/h})$$

(¡si la figura es correcta!) Un espejo a lo largo de la línea AB refleja otro barco, 3 km al este y 4 km al sur de A, que navega hacia el sureste con una velocidad de  $20\sqrt{2}$  km/h.

¿La moraleja? Las figuras son importantes, útiles y con frecuencia, esenciales, pero pueden provocar errores. Evite las suposiciones sin fundamento cuando trace una figura. En este ejemplo, no habría un problema real, pues cada estación podría determinar si el barco está al norte o al sur de ella.

### 3.8 Problemas

En los problemas 1 a 10, determine  $dy/dx$  mediante derivación implícita.

- |                              |                           |
|------------------------------|---------------------------|
| 1. $x^2 - y^2 = 1$           | 2. $xy = 1$               |
| 3. $16x^2 + 25y^2 = 400$     | 4. $x^3 + y^3 = 1$        |
| 5. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ | 6. $x^2 + xy + y^2 = 9$   |
| 7. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$   | 8. $(x - 1)y^2 = x + 1$   |
| 9. $x^2(x - y) = y^2(x + y)$ | 10. $(x^2 + y^2)^2 = 4xy$ |

En los problemas 11 a 20, determine primero  $dy/dx$  mediante derivación implícita. Escriba después una ecuación para la recta tangente a la gráfica de esta ecuación en el punto dado.

11.  $x^2 + y^2 = 25$ ; (3, -4)
12.  $xy = -8$ ; (4, -2)
13.  $x^2y = x + 2$ ; (2, 1)
14.  $x^{1/4} + y^{1/4} = 4$ ; (16, 16)
15.  $xy^2 + x^2y = 2$ ; (1, -2)
16.  $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} = 1$ ; (1, 1)

17.  $12(x^2 + y^2) = 25xy$ ; (3, 4)

18.  $x^2 + xy + y^2 = 7$ ; (3, -2)

19.  $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = 2$ ; (1, 1)

20.  $(x^2 + y^2)^3 = 8x^2y^2$ ; (1, -1)

21. Determine  $dy/dx$ , dado que  $xy^3 - x^5y^2 = 4$ . Determine después la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la ecuación dada en el punto (1, 2).

22. Muestre que la gráfica de  $xy^5 - x^5y = 1$  no tiene tangentes horizontales.

23. Muestre que no existen puntos sobre la gráfica de la ecuación  $x^3 + y^3 = 3xy - 1$  en donde la recta tangente sea horizontal.

24. Determine todos los puntos sobre la gráfica de la ecuación

$$x^4 + y^4 + 2 = 4xy^3$$

tales que la recta tangente sea horizontal.

25. Determine todos los puntos sobre la gráfica de  $x^2 + y^2 = 4x + 4y$  tales que la recta tangente sea horizontal.

26. Determine los puntos en el primer cuadrante de la hoja del ejemplo 2 en los que la recta tangente es horizontal ( $dy/dx = 0$ ) o vertical (donde  $dx/dy = 1/(dy/dx) = 0$ .)

27. La gráfica de la ecuación  $x^2 - xy + y^2 = 9$  es la elipse rotada de la figura 3.8.8. Determine las rectas tangentes a esta curva en los dos puntos donde interseca al eje  $x$ , y muestre que estas rectas son paralelas.

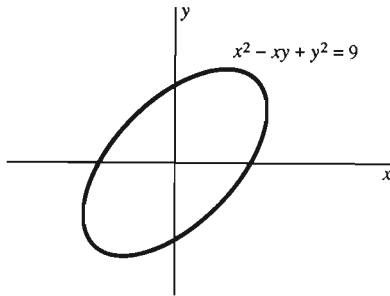


Figura 3.8.8 La elipse rotada del problema 27

28. Determine los puntos sobre la curva del problema 27 donde la recta tangente es horizontal ( $dy/dx = 0$ ) y aquellos donde es vertical ( $dx/dy = 0$ ).

29. La gráfica de la figura 3.8.9 es una *lemniscata* con ecuación  $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ . Determine, mediante derivación implícita, los cuatro puntos de la lemniscata donde la recta tangente es horizontal. Determine después los dos puntos donde la recta tangente es vertical; es decir, donde  $dx/dy = 1/(dy/dx) = 0$ .

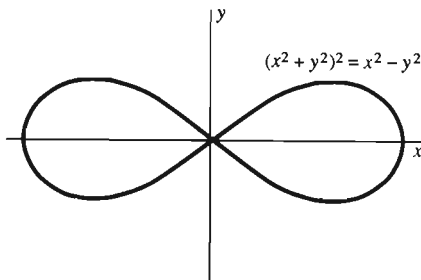


Figura 3.8.9 La lemniscata del problema 29

30. Se colecta agua de un bloque de hielo con base cuadrada (figura 3.8.10). El agua se produce por la fusión del hielo, de modo que cada arista de la base del bloque disminuye 2 pulgadas por hora, mientras que la altura del bloque disminuye 3 pulgadas por hora. ¿Cuál es la razón de flujo del agua en la charola recolectora cuando la arista de la base mide 20 pulgadas y la altura 15? Para simplificar el problema, suponga que el agua y el hielo tienen la misma densidad.

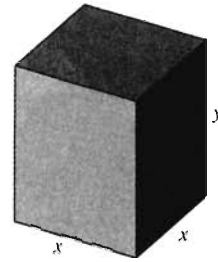


Figura 3.8.10 El bloque de hielo del problema 30

31. La figura 3.8.11 muestra la arena que se vacía de una tolva a razón de 10 pies cúbicos/segundo. La arena forma una pila cónica cuya altura es el doble de su radio. ¿Con qué razón aumenta el radio de la pila cuando su altura es 5 pies?

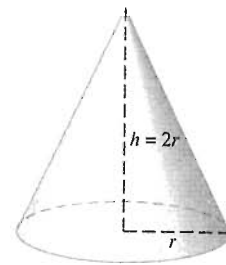


Figura 3.8.11 La pila cónica de arena del problema 31, con volumen  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

32. Suponga que se vacía el agua de un tanque esférico de radio 10 pies (figura 3.8.12). Si la profundidad del agua en el tanque es 5 pies y ésta decrece a razón de 3 pies/seg, ¿con qué razón disminuye el radio  $r$  de la superficie del agua?

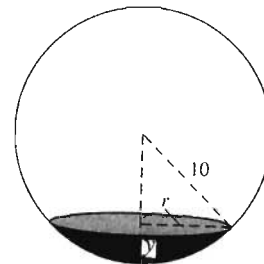


Figura 3.8.12 El tanque esférico del problema 32

33. Una capa circular de aceite es provocada por un derrame de  $1 \text{ m}^3$  de aceite. El espesor de la capa de aceite decrece a razón de  $0.1 \text{ cm/h}$ . ¿Con qué razón aumenta el radio de la capa cuando el radio es 8 m?

34. Suponga que un avestruz de 5 pies de altura camina a 4 pies/seg hacia una lámpara de 10 pies de altura. ¿Con qué rapidez se mueve la sombra del avestruz a lo largo del piso? ¿Con qué razón decrece la longitud de la sombra?

35. El ancho de un rectángulo es la mitad de su largo. ¿Con qué razón decrece su área si su ancho es 10 cm y éste aumenta a 0.5 cm/seg?

36. ¿Con qué razón aumenta el área de un triángulo equilátero si su base mide 10 cm y aumenta a 0.5 cm/seg?

37. Un globo de gas se infla a razón de  $100\pi$  cm<sup>3</sup> de gas por segundo. ¿Con qué razón aumenta el radio del globo cuando el radio mide 10 cm?

38. El volumen  $V$  (en pulgadas cúbicas) y presión  $p$  (en libras por pulgada cuadrada) de cierta muestra de gas satisfacen la ecuación  $pV = 1000$ . ¿Con qué razón cambia el volumen de la muestra si la presión es 100 lb/pulgada<sup>2</sup> y aumenta a razón de 2 lb/pulgada<sup>2</sup> por segundo?

39. La figura 3.8.13 muestra una cometa en el aire, a una altura de 400 pies. La cometa es impulsada de manera horizontal a razón de 10 pies/seg alejándose de la persona que sostiene la cuerda de la cometa al nivel del suelo. ¿Con qué razón aumenta la longitud de la cuerda cuando ya se han tendido 500 pies?

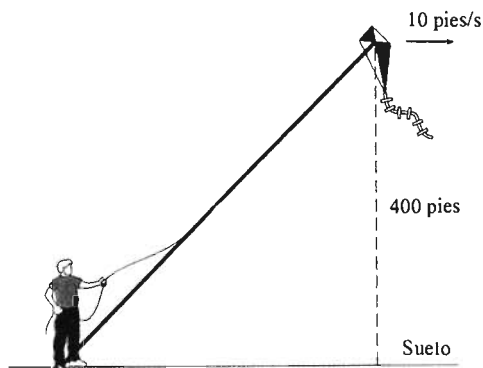


Figura 3.8.13 La cometa del problema 39

40. Un globo meteorológico que se eleva verticalmente es observado desde un punto en el piso a 300 pies del punto directamente debajo del globo. ¿Con qué razón sube el globo cuando el ángulo entre el piso y la línea de visión del observador es  $45^\circ$  y aumenta a  $1^\circ$  por segundo?

41. Un avión que vuela horizontalmente a una altura de 3 millas y a una velocidad de 480 mi/h pasa directamente sobre un observador en el piso. ¿Qué tan rápido aumenta la distancia del observador al avión 30 segundos después?

42. La figura 3.8.14 muestra un tanque esférico de radio  $a$  parcialmente lleno con agua. La profundidad máxima del agua en el tanque es  $y$ . Una fórmula para el volumen  $V$  del agua en el tanque (fórmula que usted podrá deducir después de estudiar el capítulo 5) es  $V = \frac{1}{3}\pi y^2(3a - y)$ . Suponga que el agua se extrae de un tanque esférico de radio 5 pies a razón de 100 galones/minuto. Determine la razón con la que decrece la profundidad  $y$  del agua cuando (a)  $y = 7$  (pies); (b)  $y = 3$  (pies). [Nota: Un galón de agua ocupa un volumen aproximado de 0.1337 pies cúbicos.]

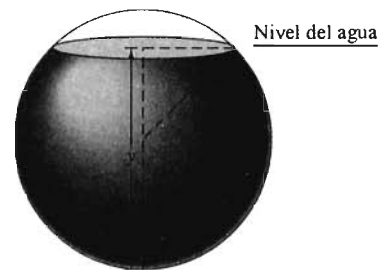


Figura 3.8.14 El tanque esférico de agua del problema 42

43. Repita el problema 42, pero use un tanque semiesférico, con el lado plano en la parte superior y radio 10 pies.

44. Una alberca tiene 50 pies de largo y 20 de ancho. Su profundidad varía de manera uniforme desde 2 pies en la parte menos profunda hasta 12 pies en la parte más profunda (figura 3.8.15). Suponga que la alberca se llena a razón de 1000 galones/minuto. ¿Con qué razón aumenta la profundidad en el extremo más profundo cuando la profundidad es de 6 pies? [Nota: Un galón de agua ocupa un volumen aproximado de 0.1337 pies cúbicos.]

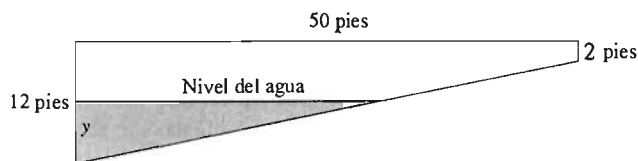


Figura 3.8.15 Sección transversal de la alberca del problema 44

45. Una escalera de 41 pies de largo descansa sobre una pared vertical, cuando comienza a resbalar. Su parte superior se desliza hacia abajo sobre la pared, mientras que su parte inferior se mueve sobre el piso a una velocidad constante de 10 pies/seg. ¿Qué tan rápido se mueve la parte superior de la escalera cuando está a 9 pies del suelo?

46. La base de un rectángulo aumenta a 4 cm/seg mientras que su altura decrece a 3 cm/seg. ¿Con qué razón cambia su área cuando la base mide 20 cm y la altura 12 cm?

47. La altura de un cono decrece 3 cm/seg mientras su radio aumenta a 2 cm/seg. Cuando el radio mide 4 cm y la altura 6 cm, ¿está aumentando o disminuyendo el volumen del cono? ¿Con qué razón?

48. Un cuadrado se está agrandando. Cuando cada lado mide 10 pulgadas, su área aumenta a 120 pulgadas<sup>2</sup>/seg. ¿Con qué razón cambia la longitud de cada lado?

49. Un cohete lanzado en forma vertical, es rastreado por una estación de radar localizada en el suelo a 4 millas de la plataforma de lanzamiento. ¿Cuál es la velocidad vertical del cohete en el instante en que su distancia a la estación de radar es 5 millas y la distancia aumenta a razón de 3600 mi/h?

50. Dos caminos rectos se intersecan en ángulo recto. A las 10 A.M., un automóvil pasa por la intersección con dirección al este, a 30 mi/h. A las 11 A.M. pasa por la intersección un

camión con dirección al norte, a 40 mi/h. Suponga que los dos vehículos mantienen su velocidad y su dirección. ¿Con qué razón se separan a la 1 P.M.?

51. Una escalera de 10 pies descansa sobre una pared. La parte inferior de la escalera comienza a deslizarse alejándose de la pared, con una velocidad de 1 mi/h. Determine la razón con la que se mueve la parte superior de la escalera cuando está a: (a) 4 pies sobre el suelo; (b) una pulgada sobre el suelo.

52. Dos barcos viajan hacia una isla muy pequeña. Un barco, la Pinta, está al este de la isla y navega hacia el oeste a 15 mi/h. El otro, la Niña, está al norte de la isla y navega hacia el sur a 20 mi/h. En cierto momento, la Pinta está a 30 millas de la isla y la Niña a 40 millas. ¿Con qué razón se acercan entre sí los barcos en ese instante?

53. En el instante  $t = 0$ , un jet militar de un motor vuela hacia el este a 12 mi/min. A la misma altura y a 208 millas en la línea de dirección del jet militar, todavía en el instante  $t = 0$ , un jet comercial vuela hacia el norte a 8 mi/min. ¿En qué momento están más cerca los dos aviones? ¿Cuál es la distancia mínima entre ellos?

54. Un barco con una cadena de ancla muy larga, está anclado en 11 brazas de agua. La cadena del ancla se eleva a razón de 10 brazas/minuto, lo que hace que el barco se mueva hacia el punto directamente sobre el ancla, la cual reposa en el lecho marino. El escobén (el punto de contacto entre el barco y la cadena) se localiza a una braza sobre la línea de flotación. ¿Con qué velocidad se mueve el barco cuando aún restan 13 brazas de cadena?

55. Un tanque de agua tiene la forma de un cono con eje vertical y vértice hacia abajo. El tanque tiene 3 pies de radio y 5 pies de altura. El tanque está lleno de agua, pero en el instante  $t = 0$  (en segundos), se abre un pequeño orificio en el vértice y el agua comienza a salir. Cuando la altura del agua en el tanque ha descendido a 3 pies, el agua fluye a 2 pies cúbicos por segundo. ¿Con qué razón, en pies/segundo, decrece el nivel del agua en ese momento?

56. Un tanque esférico de radio 10 pies se llena con agua a razón de 200 galones/minuto. ¿Con qué velocidad aumenta el nivel del agua cuando la profundidad máxima del agua en el tanque es 5 pies? [Sugerencia: Véase el problema 42 para una fórmula y una nota útiles.]

57. Una cubeta de agua tiene la forma de un cono truncado de altura 2 pies, radio inferior 6 pulgadas y radio superior 12 pulgadas. El agua se sale de la cubeta a 10 pulgadas<sup>3</sup>/min. ¿Con qué razón decrece el nivel del agua cuando la profundidad del agua en la cubeta es un pie? [Nota: El volumen  $V$  de un cono truncado con altura  $h$  y radios  $a$  y  $b$  es

$$V = \frac{\pi h}{3}(a^2 + ab + b^2).$$

Dicho cono truncado se muestra en la figura 3.8.16.]

58. Suponga que las estaciones de radar  $A$  y  $B$  del ejemplo 6 están ahora a una distancia de 12.6 km. En cierto instante, un barco está a 10.4 km de  $A$  y su distancia de  $A$  aumenta a

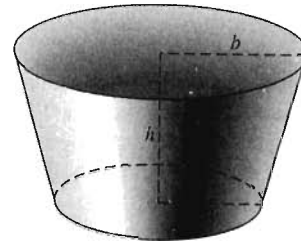


Figura 3.8.16 El cono truncado cuyo volumen está dado en el problema 57

19.2 km/h. En el mismo instante, su distancia a  $B$  es 5 km y decrece a 0.6 km/h. Determine la posición, velocidad y dirección de movimiento del barco.

59. Un avión con un ángulo de inclinación de  $45^\circ$  pasa directamente sobre una estación de radar en tierra a una altura de una milla. Una lectura posterior indica que la distancia del avión a la estación de radar es 5 millas y aumenta a 7 mi/min. ¿Cuál es la velocidad del avión (en millas/hora)? [Sugerencia: Le será útil la ley de los cosenos; véase el apéndice J.]

60. El tanque de agua del problema 56 está completamente lleno cuando se retira el tapón del fondo. De acuerdo con la ley de Torricelli, el agua sale del tanque según la fórmula  $dV/dt = -k\sqrt{y}$ , donde  $V$  es el volumen del agua y  $k$  es una constante empírica positiva. (a) Determine  $dy/dt$  como función de la profundidad  $y$ . (b) Determine la profundidad del agua cuando el nivel de ésta decrece lo más rápido posible. (Necesitará calcular la derivada de  $dy/dt$  con respecto de  $y$ .)

61. Está cayendo arena de un tubo a razón de  $120\pi$  pies<sup>3</sup>/seg. La arena que cae forma una pila cónica sobre el suelo. La altura del cono siempre es la tercera parte del radio de su base. ¿Qué tan rápido aumenta la altura cuando la pila tiene 20 pies de alto?

62. Una persona de 6 pies de alto camina a 5 pies/seg a lo largo de un camino de 30 pies de ancho. Del otro lado del camino hay una luz en el extremo de un poste, a 18 pies de altura. ¿Con qué rapidez aumenta la longitud de la sombra de la persona (sobre el suelo horizontal) cuando la persona está a 40 pies del punto que se encuentra directamente del otro lado del poste?

63. (Reto) Como continuación del problema 23, muestre que la gráfica de la ecuación  $x^3 + y^3 = 3xy - 1$  consta de la línea recta  $x + y + 1 = 0$  y el punto aislado  $(1, 1)$ .

64. La unidad de radar de una policía de caminos se encuentra detrás de una cartelera a 200 pies de un tramo recto largo de cierta carretera. Más adelante, a 200 pies del punto de la carretera más cercano al policía, está un aparato para llamadas de emergencia. El oficial apunta el radar hacia dicho aparato. Una camioneta pasa por el aparato y, en ese momento, la unidad de radar indica que la distancia entre el oficial y la camioneta decrece a razón de 45 mi/h (es decir, 66 pies/seg). El límite de velocidad es 55 mi/h. ¿Tendría razón el oficial en infraccionar al conductor de la camioneta?

### 3.9 Aproximaciones sucesivas y el método de Newton

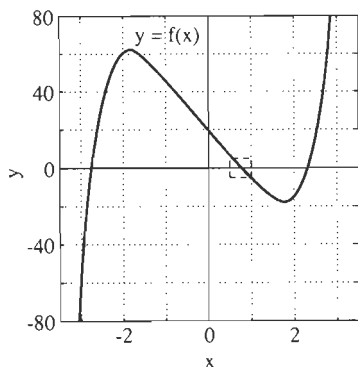


Figura 3.9.1 La gráfica  $y=f(x)$  de la ecuación (1)

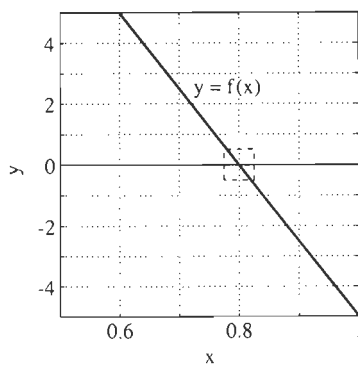


Figura 3.9.2 Ampliación de la figura 3.9.1 cerca de una solución

La solución de ecuaciones siempre ha sido una tarea central de las matemáticas. Hace más de dos milenios, los matemáticos de la antigua Babilonia descubrieron el método de “completar el cuadrado”, que produce la *fórmula cuadrática* para una solución exacta de cualquier ecuación de segundo grado  $ax^2 + bx + c = 0$ . A principios del siglo XVI, varios matemáticos italianos (Cardan, del Ferro, Ferrari y Tartaglia) descubrieron fórmulas para las soluciones exactas de ecuaciones polinomiales de tercer y cuarto grados. (Estas fórmulas se usan rara vez en nuestros días pues son muy complicadas.) En 1824, un joven y brillante matemático noruego, Niels Henrik Abel\* (1802 – 1829) publicó una demostración del hecho de que *no* existe una fórmula general para obtener la solución de una ecuación polinomial arbitraria de grado 5 (o mayor) en términos de una combinación algebraica de sus coeficientes. Así, la solución exacta (todas sus raíces) de una ecuación como

$$f(x) = x^5 - 3x^3 + x^2 - 23x + 19 = 0 \quad (1)$$

puede ser difícil o, en términos prácticos, imposible. En tal caso, podría ser necesario recurrir a *métodos aproximados*.

Por ejemplo, la gráfica de  $y=f(x)$  en la figura 3.9.1 indica que la ecuación (1) tiene tres soluciones reales (y por tanto también dos complejas). El pequeño rectángulo indicado  $0.5 \leq x \leq 1, -5 \leq y \leq 5$  encierra una de estas soluciones. Si usamos este pequeño rectángulo como una nueva “ventana de visión” con una computadora o una calculadora gráfica, entonces vemos que la solución está cerca de 0.8 (figura 3.9.2). Unas cuantas aproximaciones más darían una precisión mayor, mostrando que la solución aproximada es 0.801.

Los métodos gráficos son buenos para aproximaciones de tres o cuatro cifras decimales. En esta sección analizaremos un método analítico desarrollado por Isaac Newton y que puede proporcionar rápidamente aproximaciones mucho más exactas.

#### ITERACIÓN Y EL MÉTODO BABILÓNICO PARA LA RAÍZ CUADRADA

El significado de resolver una ecuación tan sencilla como

$$x^2 - 2 = 0 \quad (2)$$

está abierto. La solución positiva exacta es  $x = \sqrt{2}$ , pero el número  $\sqrt{2}$  es irracional y por tanto no se puede expresar mediante un decimal finito o periódico. Así, por una *solución* entendemos un valor decimal exacto de  $x$ , aunque la ecuación (2) sólo se pueda resolver de manera aproximada.

Los antiguos babilonios desarrollaron una forma eficaz para generar una sucesión de aproximaciones cada vez mejores a  $\sqrt{A}$ , la raíz cuadrada de un número positivo dado  $A$ . He aquí el *método babilónico para la raíz cuadrada*: comenzamos con una primera estimación  $x_0$  para el valor de  $\sqrt{A}$ . Para  $\sqrt{2}$ , podríamos estimar  $x_0 = 1.5$ . Si  $x_0$  es demasiado grande; es decir, si  $x_0 > \sqrt{A}$ , entonces

$$\frac{A}{x_0} < \frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A},$$

\* Para la historia completa de los admirables logros de Abel en su corta vida, revise la biografía de agradable lectura *Niels Henrik Abel* de Oystein Ore (The University of Minnesota y Chelsea Publishing Company, 1974).



de modo que  $A/x_0$  es demasiado pequeño como estimación de  $\sqrt{A}$ . De manera análoga, si  $x_0$  es demasiado pequeño (si  $x_0 < \sqrt{A}$ ), entonces  $A/x_0$  es demasiado grande como estimación de  $\sqrt{A}$ ; es decir,  $A/x_0 > \sqrt{A}$ .

Así, en cada caso, uno de los dos números  $x_0$  y  $A/x_0$  es una estimación por debajo de  $\sqrt{A}$ , y el otro es una estimación por arriba. La idea babilónica era que obtendríamos una mejor aproximación de  $\sqrt{A}$  promediando  $x_0$  y  $A/x_0$ . Esto proporciona una primera aproximación

$$x_1 = \frac{1}{2} \left( x_0 + \frac{A}{x_0} \right) \quad (3)$$

a  $\sqrt{A}$ . Pero, ¿por qué no repetir este proceso? Podemos promediar  $x_1$  y  $A/x_1$  para obtener una segunda aproximación  $x_2$ , promediar  $x_2$  y  $A/x_2$  para obtener  $x_3$ , y así sucesivamente. Al repetir este proceso, generamos una sucesión de números

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$$

y tenemos todo el derecho de esperar que conste de aproximaciones cada vez mejores de  $\sqrt{A}$ .

Específicamente, habiendo calculado la  $n$ -ésima aproximación  $x_n$ , podemos calcular la siguiente por medio de la fórmula iterativa

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{A}{x_n} \right). \quad (4)$$

En otras palabras, reintroducimos cada aproximación a  $\sqrt{A}$  de nuevo en el lado derecho de la ecuación (4) para calcular la siguiente aproximación. Éste es un proceso iterativo (las palabras *iteración* e *iterativo* se derivan del latín *iterare*, "volver a arar".)

Suponga que después de un número suficiente de pasos en esta iteración,  $x_{n+1} \approx x_n$  es exacto, hasta el número de cifras decimales retenidas en nuestro cálculo. Entonces, la ecuación (4) implica

$$x_n \approx x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{A}{x_n} \right) = \frac{1}{2x_n} (x_n^2 + A),$$

de modo que  $2x_n^2 \approx x_n + A$ , por lo que  $x_n^2 \approx A$  con cierto grado de precisión.

**EJEMPLO 1** Con  $A = 2$ , iniciamos con la primera estimación burda  $x_0 = 1$  del valor de  $\sqrt{A}$ . Entonces, la aplicación sucesiva de la fórmula de la ecuación (4) implica

$$x_1 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2}{1} \right) = \frac{3}{2} = 1.5,$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} + \frac{2}{3/2} \right) = \frac{17}{12} \approx 1.416666667,$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{17}{12} + \frac{2}{17/12} \right) = \frac{577}{408} \approx 1.414215686,$$

$$x_4 = \frac{1}{2} \left( \frac{577}{408} + \frac{2}{577/408} \right) = \frac{665,857}{470,832} \approx 1.414213562,$$

con los resultados redondeados hasta nueve cifras decimales. ¡ $x_4$  nos da el valor de  $\sqrt{A}$  con una precisión de nueve cifras decimales!

La iteración babilónica definida en la ecuación (4) es un método para generar una serie de aproximaciones a una raíz  $r = \sqrt{A}$  de la ecuación particular  $x^2 - A = 0$ . Ahora veremos un método que da una sucesión de aproximaciones para ecuaciones más generales.

## MÉTODO DE NEWTON

El método de Newton es un método iterativo para generar una sucesión  $x_1, x_2, x_3, \dots$  de aproximaciones a una solución  $r$  de una ecuación dada escrita en la forma general

$$f(x) = 0. \quad (5)$$

Esperamos que esta sucesión de aproximaciones “converja” a la raíz  $r$  en el sentido de la siguiente definición.

### Definición *Convergencia de aproximaciones*

Decimos que la sucesión de aproximaciones  $x_1, x_2, x_3, \dots$  **converge** al número  $r$  siempre que podamos hacer  $x_n$  tan cercana a  $r$  como queramos, eligiendo  $n$  suficientemente grande. Más precisamente, para cada  $\varepsilon > 0$  dado, existe un entero positivo  $N$  tal que  $|x_n - r| < \varepsilon$  para toda  $n \geq N$ .

En términos prácticos, dicha convergencia significa, como se muestra en el ejemplo 1, que para cualquier entero positivo  $k$ ,  $x_n$  y  $r$  coinciden en  $k$  o más cifras decimales si  $n$  es lo bastante grande.

La idea es que comencemos con una *estimación inicial*  $x_0$  que aproxime a una solución  $r$  de la ecuación  $f(x) = 0$ . Esta estimación inicial se podría obtener, por ejemplo, por la inspección de la gráfica de  $y = f(x)$ , obtenida con una calculadora gráfica o una computadora. Usamos  $x_0$  para calcular una aproximación  $x_1$ , usamos  $x_1$  para calcular una aproximación  $x_2$ , usamos  $x_2$  para calcular una aproximación aún mejor  $x_3$ , y así sucesivamente.

He aquí el paso general en el proceso. Una vez que tenemos la  $n$ -ésima aproximación  $x_n$ , usamos la recta tangente en  $(x_n, f(x_n))$  para construir la siguiente aproximación  $x_{n+1}$  a la solución  $r$  como sigue: comenzamos en el punto  $x_n$  del eje  $x$ . Vamos hacia arriba (o hacia abajo, verticalmente) hasta el punto  $(x_n, f(x_n))$  de la curva  $y = f(x)$ . Entonces, seguimos la recta tangente  $L$  hasta el punto en que  $L$  interseca al eje  $x$  (figura 3.9.3). Ese punto será  $x_{n+1}$ .

He aquí una fórmula para  $x_{n+1}$ . La obtenemos calculando la pendiente de la recta  $L$  de dos formas: con su derivada y mediante la definición de pendiente con dos puntos. Así,

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n) - 0}{x_n - x_{n+1}},$$

y podemos despejar fácilmente

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (6)$$

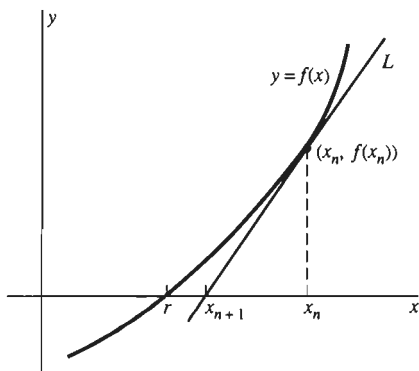


Figura 3.9.3 La geometría de la iteración del método de Newton

Esta ecuación es la **fórmula iterativa** del método de Newton, llamada así porque por el año de 1669, Newton presentó un procedimiento algebraico (en vez de la construcción geométrica de la figura 3.9.3) que es equivalente al uso iterativo de la ecuación (6). El primer ejemplo de Newton fue la ecuación cúbica  $x^3 - 2x - 5 = 0$  para la que determinó la raíz  $r \approx 2.0946$  (como le pediremos que haga en el problema 18).

Suponga que queremos aplicar el método de Newton para resolver la ecuación

$$f(x) = 0 \quad (7)$$

con una precisión de  $k$  cifras decimales ( $k$  dígitos decimales correctos o correctamente redondeados). Recuerde que la ecuación debe escribirse precisamente en la forma de la ecuación (7) para usar la fórmula de la ecuación (6). Si llegamos al punto de la iteración donde  $x_n$  y  $x_{n+1}$  coinciden en  $k$  cifras decimales, entonces se sigue que

$$x_n \approx x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}; \quad 0 \approx -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}; \quad f(x_n) \approx 0.$$

Así, hemos determinado una raíz aproximada  $x_n \approx x_{n+1}$  de la ecuación (7). En la práctica, conservamos las  $k$  cifras decimales en nuestros cálculos y continuamos hasta que  $x_n \approx x_{n+1}$  con este grado de precisión. (No consideraremos aquí la posibilidad de error por redondeo, un tema importante del análisis numérico.)

**EJEMPLO 2** Use el método de Newton para determinar  $\sqrt{2}$  con una precisión de nueve cifras decimales.

**Solución** De manera más general, consideremos la raíz cuadrada del número positivo  $A$  como la raíz positiva de la ecuación

$$f(x) = x^2 - A = 0.$$

Como  $f'(x) = 2x$ , de la ecuación (6) se obtiene la fórmula iterativa

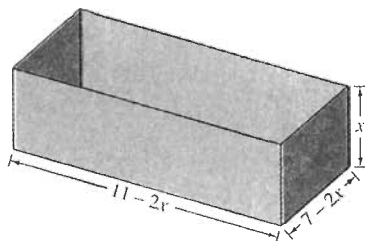
$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - A}{2x_n} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{A}{x_n} \right). \quad (8)$$

Así, hemos obtenido la fórmula iterativa babilónica como un caso particular del método de Newton. El uso de la ecuación (8) con  $A = 2$  proporciona entonces exactamente los valores de  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$  que calculamos en el ejemplo 1; después de efectuar otra iteración, tenemos que

$$x_5 = \frac{1}{2} \left( x_4 + \frac{2}{x_4} \right) \approx 1.414213562,$$

lo que coincide con  $x_4$  hasta nueve cifras decimales. La convergencia muy rápida es una característica importante del método de Newton. Como regla general (con algunas excepciones), cada iteración duplica el número de cifras decimales de precisión.

**EJEMPLO 3** La figura 3.9.4 muestra un recipiente sin tapa construido mediante el método del ejemplo 2 de la sección 3.6. Comenzamos con un rectángulo de metal de 7 por 11 pulgadas. Recortamos un cuadrado con lado  $x$  en cada una de las cuatro esquinas y después doblamos las partes resultantes para obtener un recipiente rectangular con volumen



**Figura 3.9.4** El recipiente del ejemplo 3

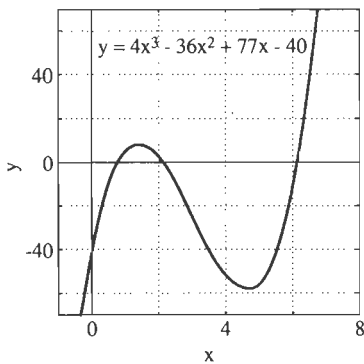


Figura 3.9.5 La gráfica de  $f(x)$  en la ecuación 10 del ejemplo 3

$$V(x) = x(7 - 2x)(11 - 2x) = 4x^3 - 36x^2 + 77x, \quad 0 \leq x \leq 3.5. \quad (9)$$

En la sección 3.6 pedimos determinar el volumen máximo posible de dicho recipiente. En este caso, queremos determinar el (los) valor(es) de  $x$  que produciría un recipiente con volumen 40 pulgadas<sup>3</sup>; encontramos  $x$  resolviendo la ecuación

$$V(x) = 4x^3 - 36x^2 + 77x = 40.$$

Para despejar  $x$  en esta ecuación, primero escribimos una ecuación de la forma de la ecuación (7):

$$f(x) = 4x^3 - 36x^2 + 77x - 40 = 0. \quad (10)$$

La figura 3.9.5 muestra la gráfica de  $f$ . Vemos tres soluciones: una raíz  $r_1$  entre 0 y 1, una raíz  $r_2$  ligeramente mayor que 2, y una raíz  $r_3$  ligeramente mayor que 6. Como

$$f'(x) = 12x^2 - 72x + 77,$$

la fórmula iterativa de Newton en la ecuación (6) toma la forma

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= x_n - \frac{4x_n^3 - 36x_n^2 + 77x_n - 40}{12x_n^2 - 72x_n + 77}. \end{aligned} \quad (11)$$

Partimos de la estimación inicial  $x_0 = 1$  (pues está razonablemente cerca de  $r_1$ ), de la ecuación (11) se obtiene:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - \frac{4 \cdot 1^3 - 36 \cdot 1^2 + 77 \cdot 1 - 40}{12 \cdot 1^2 - 72 \cdot 1 + 77} \approx 0.7059, \\ x_2 &\approx 0.7736, \\ x_3 &\approx 0.7780, \\ x_4 &\approx 0.7780. \end{aligned}$$

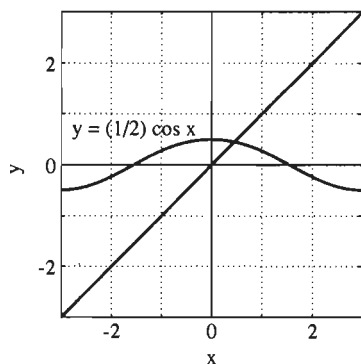
Así, obtenemos la raíz  $r_1 \approx 0.7780$  si sólo conservamos cuatro cifras decimales.

Si hubiéramos comenzado con una estimación diferente, la sucesión de iteraciones de Newton podría converger a otra raíz de la ecuación  $f(x) = 0$ . La solución aproximada obtenida depende entonces de la estimación inicial. Por ejemplo, con  $x_0 = 2$  y después con  $x_0 = 6$ , la iteración de la ecuación (11) produce las dos sucesiones

$x_0 = 2$	$x_0 = 6$
$x_1 \approx 2.1053$	$x_1 \approx 6.1299$
$x_2 \approx 2.0993$	$x_2 \approx 6.1228$
$x_3 \approx 2.0992$	$x_3 \approx 6.1227$
$x_4 \approx 2.0992$	$x_4 \approx 6.1227$

Así, las otras dos raíces de la ecuación (10) son  $r_2 \approx 2.0992$  y  $r_3 \approx 6.1227$ .

Con  $x = r_1 \approx 0.7780$ , el recipiente de la figura 3.9.4 tiene las dimensiones aproximadas 9.4440 pulgadas por 5.4440 pulgadas por 0.7780 pulgadas. Con  $x = r_2 \approx 2.0992$ , sus dimensiones aproximadas son 6.8015 por 2.8015 por 2.0992 pulgadas. Pero la tercera raíz  $r_3 \approx 6.1227$  no conduce a un recipiente físicamente



**Figura 3.9.6** Resolviendo la ecuación  $x = \frac{1}{2} \cos x$  (ejemplo 4)

posible. (¿Por qué no?) Así, los *dos* valores de  $x$  que proporcionan recipientes con volumen 40 pulgadas son  $x \approx 0.7780$  y  $x \approx 2.0992$ .

**EJEMPLO 4** La figura 3.9.6 indica que la ecuación

$$x = \frac{1}{2} \cos x \quad (12)$$

tiene una solución  $r$  cerca de 0.5. Para aplicar el método de Newton y aproximar  $r$ , reescribimos la ecuación (12) en la forma

$$f(x) = 2x - \cos x = 0.$$

Como  $f'(x) = 2 + \sin x$ , la fórmula iterativa del método de Newton es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2x_n - \cos x_n}{2 + \sin x_n}.$$

Comenzamos con  $x_0 = 0.5$  y retenemos cinco cifras decimales; con esta fórmula se obtiene

$$x_1 \approx 0.45063, \quad x_2 \approx 0.45018, \quad x_3 \approx 0.45018.$$

Así, la raíz es 0.45018 con cinco cifras decimales.

El método de Newton es aquel donde “la prueba está en el sabor”. Si funciona, es obvio que lo hace, y todo está bien. Cuando el método de Newton fracasa, puede hacerlo de manera espectacular. Por ejemplo, supongamos que queremos resolver la ecuación

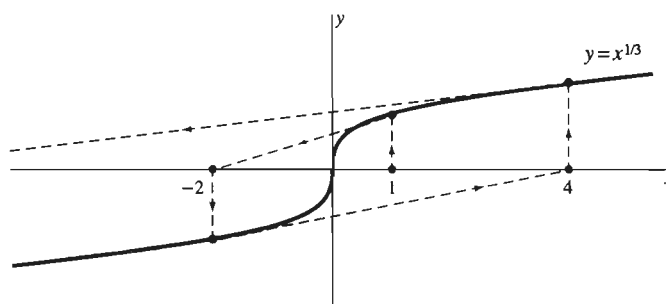
$$f(x) = x^{1/3} = 0.$$

En este caso,  $r = 0$  es la única solución. La fórmula iterativa de la ecuación (6) es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n)^{1/3}}{\frac{1}{3}(x_n)^{-2/3}} = x_n - 3x_n = -2x_n.$$

Si comenzamos con  $x_0 = 1$ , del método de Newton se obtiene que  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = +4$ ,  $x_3 = -8$  y así sucesivamente. La figura 3.9.7 indica por qué nuestras “aproximaciones” no están convergiendo.

Cuando el método de Newton fracasa, por lo general una gráfica indicará la razón de esto. Entonces es adecuado el uso de un método alternativo, como la tabulación repetida o las aproximaciones sucesivas.



**Figura 3.9.7** Una falla del método de Newton

## MÉTODO DE NEWTON Y GRÁFICAS POR COMPUTADORA

El método de Newton y las técnicas iterativas similares se usan con frecuencia para generar “patrones fractales” de colores intensos, donde la misma estructura u otra similar se reproducen en escalas cada vez más pequeñas, en los diversos niveles sucesivos de ampliación. Para describir cómo se hace esto, reemplazamos los números reales en nuestros cálculos del método de Newton con los números *complejos*. Ilustramos esta idea con la ecuación cúbica.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 = 0. \quad (13)$$

En el proyecto A le pedimos que aproxime las tres soluciones

$$r_1 \approx -0.53, \quad r_2 \approx 0.65, \quad r_3 \approx 2.88$$

de esta ecuación.

Primero, recuerde que un *número complejo* es un número de la forma  $a + bi$ , donde  $i = \sqrt{-1}$  es decir  $i^2 = -1$ . Los números reales  $a$  y  $b$  son la *parte real* y la *parte imaginaria*, respectivamente, de  $a + bi$ . Usted suma, multiplica y divide números complejos como si fueran binomios, con las partes real e imaginaria “agrupadas” como en los cálculos

$$\begin{aligned}(3 + 4i) + (5 - 7i) &= (3 + 5) + (4 - 7)i = 8 - 3i, \\(2 + 5i)(3 - 4i) &= 2(3 - 4i) + 5i(3 - 4i) \\ &= 6 - 8i + 15i - 20i^2 = 26 + 7i,\end{aligned}$$

y

$$\frac{2 + 5i}{3 + 4i} = \frac{2 + 5i}{3 + 4i} \cdot \frac{3 - 4i}{3 - 4i} = \frac{26 + 7i}{9 - 16i^2} = \frac{26 + 7i}{25} = 1.04 + 0.28i.$$

El uso del *conjugado*  $3 - 4i$  del denominador  $3 + 4i$  en el último cálculo es una técnica muy común para escribir una fracción compleja en la forma estándar  $a + bi$ . (El **conjugado** de  $x + yi$  es  $x - yi$ ; esto implica que el conjugado de  $x - yi$  es  $x + yi$ .)

Ahora sustituimos el número complejo  $z = x + iy$  en el polinomio cúbico

$$f(z) = z^3 - 3z^2 + 1$$

de la ecuación (13) y en su derivada  $f'(z) = 3z^2 - 6z$ . Encontramos que

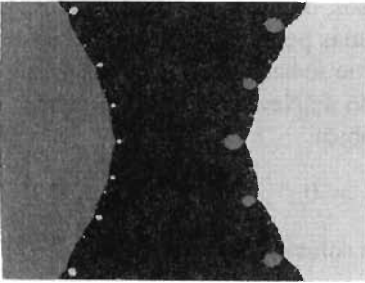
$$\begin{aligned}f(z) &= (x + iy)^3 - 3(x + iy)^2 + 1 \\ &= (x^3 - 3xy^2 - 3x^2 + 3y^2 + 1) + (3x^2y - y^3 + 6xy)i \quad (14)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}f'(z) &= 3(x + iy)^2 - 6(x + iy) \\ &= (3x^2 - 3y^2 - 6x) + (6xy - 6y)i. \quad (15)\end{aligned}$$

En consecuencia, nada nos impide aplicar el método de Newton a la ecuación (13) con números complejos. Comenzamos con una estimación inicial *compleja*  $z_0 = x_0 + iy_0$ , y podemos sustituir las ecuaciones (14) y (15) en la fórmula iterativa de Newton

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \quad (16)$$



**Figura 3.9.8**  $-2 \leq x \leq 4$ ,  
 $-2.25 \leq y \leq 2.25$

para generar la sucesión compleja  $\{z_n\}$ , que converge a una solución (real) de la ecuación (13).

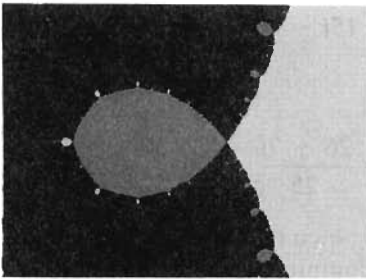
Con esta preparación, podemos explicar cómo generamos la figura 3.9.8: una computadora fue programada para realizar la iteración de Newton repetidamente, comenzando con miles de estimaciones iniciales  $z_0 = x_0 + iy_0$  que “llenan” el rectángulo  $-2 \leq x \leq 4$ ,  $-2.25 \leq y \leq 2.25$  en el plano complejo. El punto inicial  $z_0 = (x_0, y_0)$  fue codificado con un tono según la raíz a la cual la sucesión correspondiente  $\{z_n\}$  converge (en caso de que converja):

$z_0$ , representado por ■, si  $\{z_n\}$  converge a la raíz  $r_1 \approx -0.53$ ;

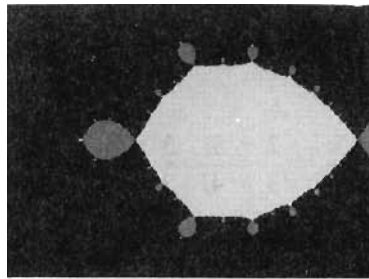
$z_0$ , representado por ■, si  $\{z_n\}$  converge a la raíz  $r_2 \approx 0.65$ ;

$z_0$ , representado por ■, si  $\{z_n\}$  converge a la raíz  $r_3 \approx 2.88$ .

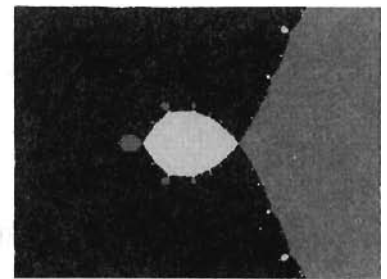
Así, usamos diferentes pantallas para distinguir las “cuencas de atracción de Newton” para la ecuación que estamos analizando. No es de sorprender que una región ■ que contiene a la raíz  $r_2$  aparezca en medio de la figura 3.9.8, separando una región ■ a la izquierda (la cual contiene a  $r_1$ ) y una región ■ a la derecha (que contiene a  $r_3$ ). Pero, ¿por qué surgen lóbulos ■ de la región ■ hacia la región ■ y surgen lóbulos ■ de la región ■ hacia la ■? Para ver qué sucede cerca de estos lóbulos, generamos algunas ampliaciones.



**Figura 3.9.9**  $1.6 \leq x \leq 2.4$ ,  
 $-0.3 \leq y \leq 0.3$



**Figura 3.9.10**  $1.64 \leq x \leq 1.68$ ,  
 $-0.015 \leq y \leq 0.015$



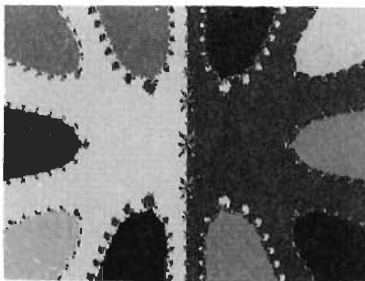
**Figura 3.9.11**  $1.648 \leq x \leq 1.650$ ,  
 $-0.00075 \leq y \leq 0.00075$

La figura 3.9.9 muestra una ampliación del rectángulo  $1.6 \leq x \leq 2.4$ ,  $-0.3 \leq y \leq 0.3$  que contiene al lóbulo ■ indicado en la figura 3.9.8. La figura 3.9.10 ( $1.64 \leq x \leq 1.68$ ,  $-0.015 \leq y \leq 0.015$ ) y la figura 3.9.11 ( $1.648 \leq x \leq 1.650$ ,  $-0.00075 \leq y \leq 0.00075$ ) son ampliaciones adicionales. El rectángulo que se muestra en la figura 3.9.11 corresponde a menos de una millonésima de pulgada cuadrada de la figura 3.9.8.

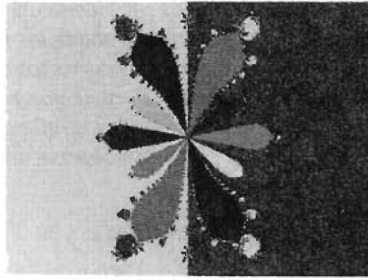
En cada nivel de ampliación, cada lóbulo ■ tiene lóbulos ■ menores resaltados dentro de la región ■ que lo rodea, y cada uno de estos lóbulos ■ tiene lóbulos ■ aún más pequeños resaltados sobre éste, y así sucesivamente hasta el infinito (como las pequeñas pulgas proverbiales que son mordidas por pulgas aún más pequeñas, y así sucesivamente hasta el infinito).

La figura 3.9.12 muestra la imagen de la cuenca de atracción de Newton para la ecuación polinomial de grado doce

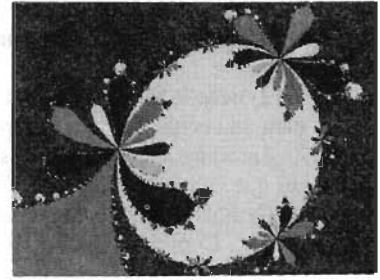
$$f(x) = x^{12} - 14x^{10} + 183x^8 - 612x^6 - 2209x^4 - 35,374x^2 + 38,025 = 0, \quad (17)$$



**Figura 3.9.12** Cuencas de atracción de Newton para el polinomio de grado 12



**Figura 3.9.13** La flor al centro de la figura 3.9.12



**Figura 3.9.14** Un botón de un pétalo de la flor de la figura 3.9.13

que tiene como soluciones los doce números complejos

$$\begin{array}{llll} 1, & 1 \pm 2i, & -1, & -1 \pm 2i, \\ 3, & 3 \pm 2i, & -3, & -3 \pm 2i. \end{array}$$

Si usamos doce tonos diferentes es posible distinguir las cuencas de atracción de Newton de estas doce soluciones de la ecuación (17).

Los puntos donde la frontera común del fractal parece separar cuencas de atracción de diferentes tonos, está salpicada con “flores” como la del centro de la figura 3.9.12, ampliada en la figura 3.9.13. Cada una de estas flores tiene 10 “hojas” (con los diez tonos restantes). Cada una de estas hojas tiene “botones” como el que se muestra en la figura 3.9.14. Cada uno de estos botones están rodeados con flores que tienen hojas con “botones” y así sucesivamente hasta el infinito.

### 3.9 Problemas

En los problemas 1 a 20, use el método de Newton para determinar la solución de la ecuación dada  $f(x) = 0$  en el intervalo indicado  $[a, b]$  con una precisión de cuatro cifras decimales. Puede elegir la estimación inicial  $x_0$  con base en una gráfica de calculadora o mediante interpolación entre los valores  $f(a)$  y  $f(b)$ .

1.  $x^2 - 5 = 0$ ;  $[2, 3]$  (determinar la raíz cuadrada positiva de 5)
2.  $x^3 - 2 = 0$ ;  $[1, 2]$  (determinar la raíz cúbica de 2)
3.  $x^5 - 100 = 0$ ;  $[2, 3]$  (determinar la raíz quinta de 100)
4.  $x^{3/2} - 10 = 0$ ;  $[2, 3]$  (determinar  $10^{2/3}$ )
5.  $x^2 + 3x - 1 = 0$ ;  $[0, 1]$
6.  $x^3 + 4x - 1 = 0$ ;  $[0, 1]$
7.  $x^6 + 7x^2 - 4 = 0$ ;  $[-1, 0]$
8.  $x^3 + 3x^2 + 2x = 10$ ;  $[1, 2]$
9.  $x - \cos x = 0$ ;  $[0, 2]$
10.  $x^2 - \sin x = 0$ ;  $[0.5, 1.0]$
11.  $4x - \sin x = 4$ ;  $[1, 2]$
12.  $5x + \cos x = 5$ ;  $[0, 1]$
13.  $x^5 + x^4 = 100$ ;  $[2, 3]$
14.  $x^5 + 2x^4 + 4x = 5$ ;  $[0, 1]$
15.  $x + \tan x = 0$ ;  $[2, 3]$
16.  $x + \tan x = 0$ ;  $[11, 12]$
17.  $x^3 - 10 = 0$ ;  $[2, 3]$
18.  $x^3 - 2x - 5 = 0$   $[2, 3]$  (El ejemplo de Newton)
19.  $x^5 - 5x - 10 = 0$ ;  $[1, 2]$
20.  $x^5 = 32$ ;  $[0, 5]$
21. (a) Muestre que el método de Newton aplicado a la ecuación  $x^3 - a = 0$  produce la iteración
 
$$x_{n+1} = \frac{1}{3} \left( 2x_n + \frac{a}{x_n^2} \right)$$
 para aproximar la raíz cúbica de  $a$ . (b) Use esta iteración para determinar  $\sqrt[3]{2}$  con una precisión de cinco cifras decimales.
22. (a) Muestre que el método de Newton produce la iteración
 
$$x_{n+1} = \frac{1}{k} \left[ (k-1)x_n + \frac{a}{(x_n)^{k-1}} \right]$$



para aproximar la raíz  $k$ -ésima del número positivo  $a$ . (b) Use esta iteración para determinar  $\sqrt[10]{100}$  con una precisión de cinco cifras decimales.

23. La ecuación (12) tiene la forma especial  $x = G(x)$ , donde  $G(x) = \frac{1}{2} \cos x$ . Para una ecuación de esta forma, la fórmula iterativa  $x_{n+1} = G(x_n)$  produce a veces una sucesión  $x_1, x_2, x_3, \dots$  de aproximaciones que converge a una raíz. En el caso de la ecuación (12), esta fórmula de *sustitución repetida* es simplemente  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \cos x_n$ . Comience con  $x_0 = 0.5$  como en el ejemplo 4 y conserve cinco cifras decimales en su cálculo de la solución de la ecuación (12). [Verifique: Usted verá que  $x_8 = 0.45018$ .]

24. La ecuación  $x^4 = x + 1$  tiene una solución entre  $x = 1$  y  $x = 2$ . Use la estimación inicial  $x_0 = 1.5$  y el método de sustitución repetida (véase el problema 23) para descubrir que una de las soluciones de esta ecuación es aproximadamente 1.220744. Itere utilizando la fórmula

$$x_{n+1} = (x_n + 1)^{1/4}.$$

Después compare el resultado con lo que sucede al iterar usando la fórmula

$$x_{n+1} = (x_n)^4 - 1.$$

25. La ecuación  $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$  tiene una solución entre  $x = 0$  y  $x = 1$ . Para aplicar el método de sustitución repetida (véase el problema 23) a esta ecuación, debe escribirla en la forma

$$x = 3 - \frac{1}{x^2}$$

o en la forma

$$x = (3x^2 - 1)^{1/3}.$$

Si comienza con  $x_0 = 0.5$  y espera determinar la solución más cercana (aproximadamente 0.6527) de la ecuación original, usando cada una de las fórmulas iterativas anteriores, verá algunas de las desventajas del método. Describa qué es lo erróneo.

26. Muestre que el método de Newton aplicado a la ecuación

$$\frac{1}{x} - a = 0$$

produce la fórmula iterativa

$$x_{n+1} = 2x_n - a(x_n)^2$$

lo que proporciona un método para aproximar el recíproco  $1/a$  sin realizar divisiones. Este método es útil ya que, en la mayoría de las computadoras de alta velocidad, las operaciones de división consumen más tiempo que varias sumas y multiplicaciones.

27. Muestre que la ecuación  $x^5 + x = 1$  tiene exactamente una solución real. Use después el método de Newton para determinar ésta con tres cifras correctas a la derecha del punto decimal.

En los problemas 28 a 30, use el método de Newton para determinar todas las raíces reales de la ecuación dada con dos dígitos correctos a la derecha del punto decimal. [Sugerencia: Para determinar el número de raíces y sus posiciones aproximadas, grafique los lados izquierdo y derecho de la ecuación y observe dónde se intersecan las gráficas.]

28.  $x^2 = \cos x$

29.  $x = 2 \sin x$

30.  $\cos x = -\frac{1}{3}$ . (Existen exactamente tres soluciones, como se indica en la figura 3.9.15.)

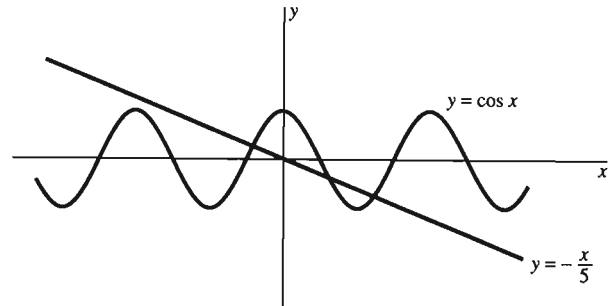


Figura 3.9.15 Resolución de la ecuación del problema 30

31. Muestre que la ecuación  $x^7 - 3x^3 + 1 = 0$  tiene al menos una solución. Use después el método de Newton para determinar una solución.

32. Use el método de Newton para aproximar  $\sqrt[3]{5}$  con una precisión de tres decimales.

33. Use el método de Newton para determinar el valor de  $x$  tal que  $x^3 = \cos x$ .

34. Use el método de Newton para determinar el valor positivo más pequeño  $x$  tal que  $x = \tan x$ .

35. En el problema 49 de la sección 3.6 nos enfrentamos al problema de minimizar el costo de construcción de una carretera entre dos puntos en lados opuestos de una falla geológica. Este problema nos condujo a la ecuación

$$f(x) = 3x^4 - 24x^3 + 51x^2 - 32x + 64 = 0.$$

Use el método de Newton para determinar, con una precisión de cuatro decimales, la raíz de esta ecuación en el intervalo  $[3, 4]$ .

36. La luna del planeta Gzyx tiene una órbita elíptica con excentricidad 0.5 y su período de revolución en torno al planeta es de 100 días. Si la luna está en la posición  $(a, 0)$  cuando  $t = 0$ , entonces (figura 3.9.16) el ángulo central después de  $t$  días está dado por la *ecuación de Kepler*

$$\frac{2\pi t}{100} = \theta - \frac{1}{2} \sin \theta.$$

Use el método de Newton para determinar  $\theta$  si  $t = 17$  (días). Sea  $\theta_0 = 1.5$  (radianes) y calcule las primeras dos aproximaciones  $\theta_1$  y  $\theta_2$ . Expresé  $\theta_2$  en grados.

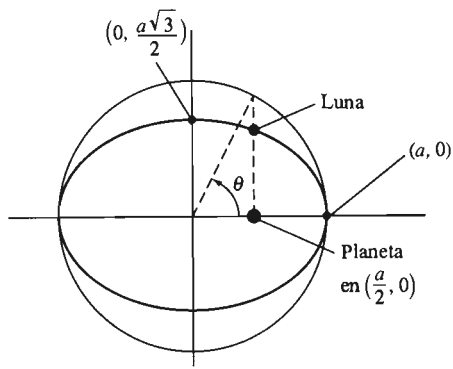


Figura 3.9.16 La órbita elíptica del problema 36

37. Un gran problema de Arquímedes fue el de usar un plano para cortar una esfera en dos segmentos cuyos volúmenes están en una razón dada. Arquímedes mostró que el volumen

de un segmento de altura  $h$  de una esfera de radio  $a$  es  $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3a - h)$ . Si un plano a distancia  $x$  del centro de una esfera de radio 1 corta la esfera en dos segmentos, uno de ellos con el doble del volumen del otro, muestre que  $3x^3 - 9x + 2 = 0$ . Use después el método de Newton para determinar  $x$  con una precisión de cuatro cifras decimales.

38. La ecuación  $f(x) = x^3 - 4x + 1 = 0$  tiene tres raíces reales distintas. Localice las calculando los valores de  $f$  para  $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2$  y  $3$ . Use después el método de Newton para aproximar cada una de las tres raíces con una precisión de cuatro decimales.

39. La ecuación  $x + \tan x = 0$  es importante en una variedad de aplicaciones; por ejemplo, en el estudio de la difusión del calor. Tiene una sucesión  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  de raíces positivas, con la  $n$ -ésima ligeramente mayor que  $(n - 0.5)\pi$ . Use el método de Newton para calcular  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  con una precisión de tres decimales.

### 3.9 Proyectos

Estos proyectos requieren el uso de una calculadora o una computadora donde el método de Newton se pueda implementar de manera eficiente.

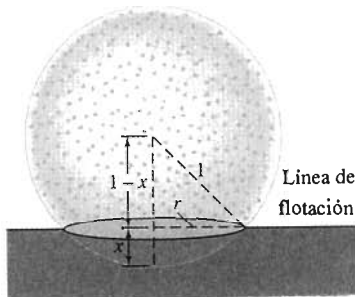


Figura 3.9.17 La pelota de corcho flotante

**PROYECTO A** La figura 3.9.17 muestra una pelota grande de corcho de 1 pie de radio flotando en el agua. Si su densidad es un cuarto de la del agua, entonces la ley de flotación de Arquímedes implica que la pelota flota en el agua con un cuarto de su volumen total sumergido. Ya que el volumen de la pelota de corcho es  $4\pi/3$ , el volumen de la parte de la pelota dentro del agua es  $V = \pi/3$ .

El volumen de un segmento esférico de radio  $r$  y altura  $h = x$  (como en la figura 3.9.17) está dado por la fórmula

$$V = \frac{\pi x}{6}(3r^2 + x^2).$$

Esta fórmula fue obtenida por Arquímedes.

Proceda como sigue para determinar la profundidad  $x$  en que la pelota se sumerge en el agua. Iguale las dos expresiones anteriores para  $V$ , y use entonces el triángulo rectángulo de la figura 3.9.17 para eliminar  $r$ . Deberá determinar que  $x$  debe ser solución de la ecuación cúbica

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 = 0. \quad (1)$$

Como indica la gráfica  $f$  de la figura 3.9.18, esta ecuación tiene tres soluciones reales, una en  $[-1, 0]$ , una en  $[0, 1]$  y otra en  $[2, 3]$ . Las soluciones entre 0 y 1 dan la profundidad  $x$  en la que la pelota se sumerge. Utilice el método de Newton para determinar las tres soluciones con una precisión de cuatro decimales.

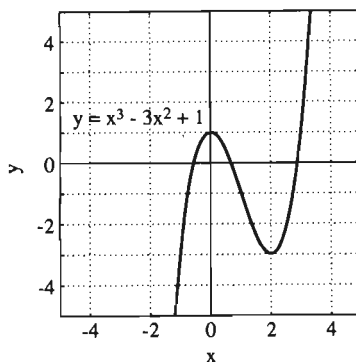
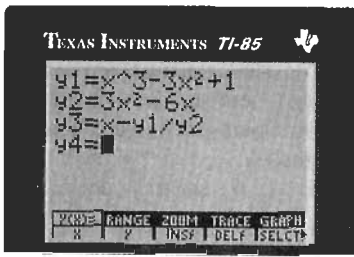
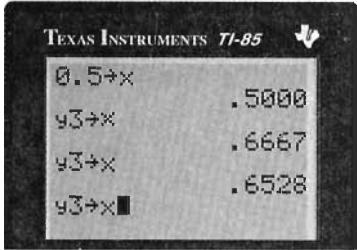


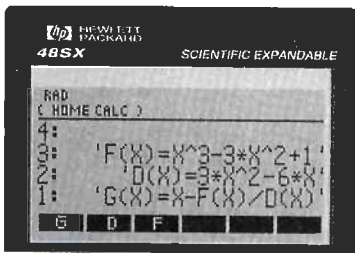
Figura 3.9.18 Gráfica para la ecuación de la pelota de corcho



**Figura 3.9.19** Preparación para resolver la ecuación de la pelota de corcho



**Figura 3.9.20** Resolución de la ecuación de la pelota de corcho



**Figura 3.9.21** Preparación para resolver la ecuación de la pelota de corcho

## MÉTODO DE NEWTON CON CALCULADORAS Y COMPUTADORAS

Con las calculadoras y computadoras que permiten el uso de funciones definidas por el usuario, el método de Newton es muy fácil de establecer y aplicar repetidamente. Es muy útil interpretar la iteración de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (2)$$

como sigue. Habiendo definido primero las funciones  $f$  y  $f'$ , definimos entonces la “función de iteración”

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \quad (3)$$

Entonces el método de Newton es equivalente al siguiente procedimiento. Comenzamos con una estimación inicial  $x_0$  de la solución a la ecuación

$$f(x) = 0.$$

Calculamos las aproximaciones sucesivas  $x_1, x_2, x_3, \dots$  a la solución exacta por medio de la iteración

$$x_{n+1} = g(x_n). \quad (4)$$

Es decir, aplicamos la función  $g$  a cada aproximación para obtener la siguiente.

La figura 3.9.19 muestra una calculadora gráfica TI preparada para resolver la ecuación de la pelota de corcho en la ecuación (1). Sólo necesitamos guardar la estimación inicial,  $0.5 \rightarrow X$ , e introducir varias veces la instrucción  $Y3 \rightarrow X$ , como se indica en la figura 3.9.20.

La figura 3.9.21 muestra una calculadora HP preparada para llevar a cabo la misma iteración. Las funciones  $F(X)$ ,  $D(X)$  (para  $f'(x)$ ) y  $G(X)$  se definen oprimiendo la tecla  $DEF$ . Sólo es necesario introducir (ENTER) la estimación inicial  $x_0$  y oprimir la tecla  $G$  varias veces para generar las aproximaciones sucesivas deseadas.

Con *Maple* o *Mathematica*, puede definir las funciones  $f$  y  $g$  y ejecutar la instrucción  $x = g(x)$ , como se muestra en la figura 3.9.22. La implantación del método de Newton con *Derive* o *X(plore)* es similar.

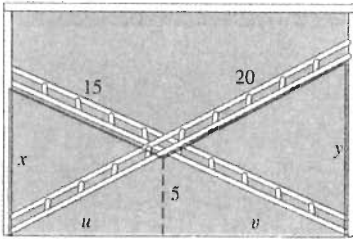
Instrucción de <i>Mathematica</i>	Instrucción de <i>Maple</i>	Resultado
$f[x_] := x^3 - 3x^2 + 1$	$f := x \rightarrow x^3 - 3*x^2 + 1;$	
$g[x_] := x - f[x]/f'[x]$	$g := x \rightarrow x - f(x)/D(f)(x);$	
$x = 0.5$	$x := 0.5;$	0.500000
$x = g[x]$	$x := g(x);$	0.666667
$x = g[x]$	$x := g(x);$	0.652778
$x = g[x]$	$x := g(x);$	0.652704
$x = g[x]$	$x := g(x);$	0.652704

**Figura 3.9.22** La implantación con *Mathematica* y *Maple* del método de Newton

### PROYECTO B Analice la ecuación cúbica

$$4x^3 - 42x^2 - 19x - 28 = 0.$$

Tal vez usted pueda ver gráficamente que sólo existe una solución real. Determine ésta con una precisión de cuatro decimales. Primero intente con la estimación



**Figura 3.9.23** Las escaleras cruzadas del proyecto C

inicial  $x_0 = 0$ ; realice al menos 25 iteraciones. Después intente con las estimaciones iniciales de  $x_0 = 10$  y  $x_0 = 100$ .

**PROYECTO C** Una escalera de 15 pies y otra de 20 pies se apoyan en direcciones opuestas contra las paredes verticales de un recibidor (figura 3.9.23). Las escaleras se cruzan a una altura de 5 pies. Debe determinar el ancho  $w$  del recibidor. Sean  $x$  y  $y$  las alturas de las partes superiores de las escaleras sobre las paredes y  $u$  y  $v$  las longitudes que se muestran en la figura, de modo que  $w = u + v$ . Use triángulos semejantes para mostrar que

$$x = 5\left(1 + \frac{u}{v}\right), \quad y = 5\left(1 + \frac{v}{u}\right)$$

Después aplique el teorema de Pitágoras para mostrar que  $t = u/v$  satisface la ecuación

$$t^4 + 2t^3 - 7t^2 - 2t - 1 = 0.$$

Por último, use el método de Newton para determinar primero los valores posibles de  $t$  y después los de  $w$ , con una precisión de cuatro decimales.

### Capítulo 3 Repaso: FÓRMULAS, CONCEPTOS, DEFINICIONES

#### FÓRMULAS DE DERIVACIÓN

$$D_x(cu) = c \frac{du}{dx}$$

$$D_x(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$D_x(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$D_x \frac{u}{v} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$D_x g(u) = g'(u) \frac{du}{dx}$$

$$D_x(u^r) = ru^{r-1} \frac{du}{dx}$$

$$D_x \sin u = (\cos u) \frac{du}{dx}$$

$$D_x \cos u = (-\sin u) \frac{du}{dx}$$

Use la siguiente lista como guía de los conceptos que necesita revisar.

1. Definición de derivada
2. Razón promedio del cambio de una función
3. Razón instantánea del cambio de una función

4. Función posición; velocidad y aceleración
5. Notación diferencial, funcional y de operador para las derivadas
6. La regla de la potencia
7. La fórmula del binomio
8. Linealidad de la derivación
9. La regla del producto
10. La regla del recíproco
11. La regla del cociente
12. La regla de la cadena
13. La regla de la potencia generalizada
14. Rectas tangentes verticales
15. Máximos y mínimos locales
16.  $f'(c) = 0$  como condición necesaria para un extremo local
17. Extremo absoluto (o global)
18. Puntos críticos
19. El método del máximo y el mínimo en un intervalo cerrado
20. Pasos en la solución de problemas aplicados de máximo y mínimo
21. Derivadas de las funciones seno y coseno
22. Derivadas de las otras cuatro funciones trigonométricas
23. Funciones definidas de manera implícita
24. Derivación implícita
25. Resolución de problemas relacionados con razones
26. El método de Newton

Determine  $dy/dx$  en los problemas 1 a 35.

1.  $y = x^2 + \frac{3}{x^2}$
2.  $y^2 = x^2$
3.  $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$
4.  $y = (x^2 + 4x)^{5/2}$
5.  $y = (x - 1)^7(3x + 2)$
6.  $y = \frac{x^4 + x^2}{x^2 + x + 1}$
7.  $y = \left(3x - \frac{1}{2x^2}\right)^4$
8.  $y = x^{10} \operatorname{sen} 10x$
9.  $xy = 9$
10.  $y = \sqrt{\frac{1}{5x^6}}$
11.  $y = \frac{1}{\sqrt{(x^3 - x)^3}}$
12.  $y = \sqrt[3]{2x + 1} \sqrt[5]{3x - 2}$
13.  $y = \frac{1}{1 + u^2}$ , donde  $u = \frac{1}{1 + x^2}$
14.  $x^3 = \operatorname{sen}^2 y$
15.  $y = \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{2x}\right)^{7/3}$
16.  $y = \sqrt{3x^5 - 4x^2}$
17.  $y = \frac{u + 1}{u - 1}$ , donde  $u = \sqrt{x + 1}$
18.  $y = \operatorname{sen}(2 \cos 3x)$
19.  $x^2 y^2 = x + y$
20.  $y = \sqrt{1 + \operatorname{sen} \sqrt{3}}$
21.  $y = \sqrt{x + \sqrt{2x + \sqrt{3x}}}$
22.  $y = \frac{x + \operatorname{sen} x}{x^2 + \cos x}$
23.  $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4$
24.  $x^3 + y^3 = xy$
25.  $y = (1 + 2u)^3$ , donde  $u = \frac{1}{(1 + x)^3}$
26.  $y = \cos^2(\operatorname{sen}^2 x)$
27.  $y = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + \cos x}}$
28.  $y = \left(1 + \sqrt{x}\right)^3 \left(1 - 2\sqrt[3]{x}\right)^4$

29.  $y = \frac{\cos 2x}{\sqrt{\operatorname{sen} 3x}}$
30.  $x^3 - x^2 y + xy^2 - y^3 = 4$
31.  $y = \operatorname{sen}^3 2x \cos^2 3x$
32.  $y = [1 + (2 + 3x)^{-3/2}]^{2/3}$
33.  $y = \operatorname{sen}^5\left(x + \frac{1}{x}\right)$
34.  $\sqrt{x + y} = \sqrt[3]{x - y}$
35.  $y = \cos^3\left(\sqrt[3]{x^4 + 1}\right)$

En los problemas 36 a 39, determine la recta tangente a la curva dada en el punto indicado.

36.  $y = \frac{x + 1}{x - 1}$ ;  $(0, -1)$
37.  $x = \operatorname{sen} 2y$ ;  $(1, \pi/4)$
38.  $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$ ;  $(2, 1)$
39.  $y^3 = x^2 + x$ ;  $(0, 0)$

40. Si un tazón semiesférico con un radio de un pie se llena con agua a una profundidad de  $x$  pulgadas, el volumen del agua en el tazón es

$$V = \frac{\pi}{3}(36x^2 - x^3) \text{ (pulg}^3\text{)}.$$

Si el agua fluye hacia afuera por un agujero en la parte inferior del tazón a una velocidad de  $36\pi$  pulgadas<sup>3</sup>/segundo, ¿qué tan rápido decrece  $x$  cuando  $x = 6$  pulgadas?

41. La arena que cae forma un montón de arena de forma cónica. Su altura  $h$  siempre es el doble de su radio  $r$  aunque ambos aumentan. Si la arena cae a una razón de  $25\pi$  pies<sup>3</sup>/minuto, ¿qué tan rápido aumenta  $r$  cuando  $r = 5$  pies?

Determine los límites en los problemas 42 a 47.

42.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{\operatorname{sen} x}$
43.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot 3x$
44.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 5x}$
45.  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \csc 2x \cot 2x$
46.  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}$
47.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

En los problemas 48 a 53, identifique dos funciones  $f$  y  $g$  tales que  $h(x) = f(g(x))$ . Aplique entonces la regla de la cadena para determinar  $h'(x)$ .

48.  $h(x) = \sqrt[3]{x + x^4}$
49.  $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 25}}$
50.  $h(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2 + 1}}$
51.  $h(x) = \sqrt[3]{(x - 1)^5}$
52.  $h(x) = \frac{(x + 1)^{10}}{(x - 1)^{10}}$
53.  $h(x) = \cos(x^2 + 1)$

54. El período  $T$  de oscilación (en segundos) de un péndulo simple de longitud  $L$  (en pies) está dado por  $T = 2\pi\sqrt{L/32}$ . ¿Cuál es la razón de cambio de  $T$  con respecto de  $L$  si  $L = 4$  pies?

55. ¿Cuál es la razón de cambio del volumen  $V = 4\pi r^3/3$  de una esfera con respecto del área de su superficie  $S = 4\pi r^2$ ?

56. ¿Cuál es la ecuación para la línea recta que pasa por  $(1, 0)$  y que es tangente a la gráfica de

$$h(x) = x + \frac{1}{x}$$

en un punto del primer cuadrante?

57. Se lanza un cohete verticalmente desde un punto a 2 millas al oeste de un observador en el piso. ¿Cuál es la velocidad del cohete cuando el ángulo de elevación (desde la horizontal) de la línea de visión del observador al cohete es  $50^\circ$ , el cual aumenta  $5^\circ$  por segundo?

58. Un campo de petróleo que contiene 20 pozos ha estado produciendo 4000 barriles diarios de petróleo. Por cada nuevo pozo perforado, la producción diaria de cada pozo decrece en 5 barriles. ¿Cuántos pozos nuevos deben perforarse para maximizar la producción total diaria del campo petrolero?

59. Un triángulo está inscrito en un círculo de radio  $R$ . Un lado del triángulo coincide con un diámetro del círculo. En términos de  $R$ , ¿cuál es el área máxima posible de este triángulo?

60. Cinco piezas rectangulares de una hoja de metal miden 210 cm por 336 cm cada una. Se cortan cuadrados iguales en sus esquinas, y las cinco piezas resultantes en forma de cruz se doblan y unen para formar cinco cajas sin tapas. Los 20 pequeños cuadrados restantes se agrupan de cuatro en cuatro para formar cinco cuadrados grandes, los cuales se unen para formar una caja cúbica sin tapa. ¿Cuál es el volumen total máximo posible de las seis cajas que se construyen de esta forma?

61. Con una masa de barro de volumen  $V$  se forman dos esferas. ¿Qué distribución de barro hace que el área total de la superficie de ambas esferas sea máxima? ¿Mínima?

62. Un triángulo rectángulo tiene sus catetos de longitud 3 m y 4 m. ¿Cuál es la máxima área posible de un rectángulo inscrito en el triángulo con la forma "obvia" (es decir, con una esquina en el ángulo recto del triángulo, dos lados adyacentes del rectángulo sobre los catetos del triángulo y la esquina opuesta en la hipotenusa)?

63. ¿Cuál es el máximo volumen posible de un cono circular recto inscrito en una esfera de radio  $R$ ?

64. Un granjero tiene 400 pies de cerca para construir un corral rectangular. Puede usar parte o toda una pared recta existente de 100 pies de largo como parte del perímetro del corral. ¿Cuál es el área máxima que puede encerrar?

65. En un modelo simple de propagación de una enfermedad contagiosa entre los miembros de una población de  $M$  personas, la incidencia de la enfermedad, medida mediante el

número de casos nuevos al día, está dada en términos del número  $x$  de individuos infectados por

$$R(x) = kx(M - x) = kMx - kx^2,$$

donde  $k$  es alguna constante positiva. ¿Cuántos individuos de la población se infectan si la incidencia  $R$  es máxima?

66. Tres lados de un trapecio tienen longitud  $L$ , constante. ¿Cuál debe ser la longitud del cuarto lado para que el trapecio tenga área máxima?

67. Una caja sin tapa debe tener como largo de su base el doble de su ancho, y el área total de la superficie de la caja debe ser 54 pies<sup>2</sup>. ¿Cuál es el máximo volumen posible de esta caja?

68. Un pequeño cono circular recto está inscrito en un cono más grande (figura 3.PD.1). El cono mayor tiene radio fijo  $R$  y altura fija  $H$ . ¿Cuál es la fracción más grande del volumen del cono mayor que puede ocupar el cono menor?

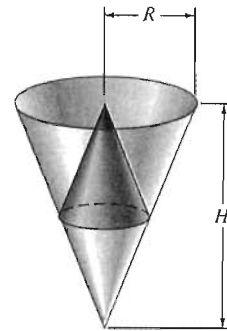


Figura 3.PD.1. Un pequeño cono inscrito en uno mayor (problema 68)

69. Dos vértices de un trapecio están en  $(-2, 0)$  y  $(2, 0)$ , y los otros dos están en el semicírculo  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $y \geq 0$ . ¿Cuál es la máxima área posible del trapecio? [Nota: El área de un trapecio con base  $b_1$  y  $b_2$  y altura  $h$  es  $A = h(b_1 + b_2)/2$ .]

70. Suponga que  $f$  es una función derivable definida en toda la recta numérica real  $R$  y que la gráfica de  $f$  contiene un punto  $Q(x, y)$  más cercano al punto  $P(x_0, y_0)$  que no está en la gráfica. Muestre que

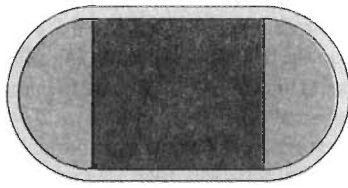
$$f'(x) = -\frac{x - x_0}{y - y_0}$$

en  $Q$ . Concluya que el segmento  $PQ$  es perpendicular a la recta tangente a la curva en  $Q$ . [Sugerencia: Minimice el cuadrado de la distancia  $PQ$ .]

71. Use el resultado del problema 70 para mostrar que la distancia mínima del punto  $(x_0, y_0)$  a un punto de la línea recta  $Ax + By + C = 0$  es

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

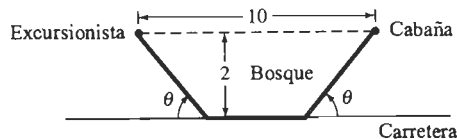
72. Se construirá una pista de carreras en forma de dos caminos rectos paralelos e iguales conectados por semicírculos en cada extremo (figura 3.PD.2). La longitud de la pista, una vuelta, debe ser exactamente 5 km. ¿Cómo deberá diseñarse para maximizar el área rectangular dentro de ella?



**Figura 3.PD.2** Diseño de la pista de carreras para maximizar el área sombreada (problema 71)

73. Dos pueblos se localizan a la orilla de un lago. Sus distancias más cercanas a los puntos de la orilla son 1 milla y 2 millas, respectivamente, y estos puntos de la orilla se encuentran a una distancia en línea recta de 6 millas. ¿Dónde debe localizarse un muelle pesquero para minimizar el costo total del pavimento necesario para construir una carretera recta desde cada pueblo hasta el muelle?

74. Una excursionista se encuentra en un bosque a 2 km de una larga carretera recta. Desea caminar a su cabaña, que se encuentra a 10 km de distancia por el bosque y también a 2 km de la carretera (figura 3.PD.3). Puede caminar a una velocidad de 8 km/h por la carretera pero solamente a 3 km/h por el bosque. Así, decide caminar primero hacia la carretera, después por la carretera, y finalmente por el bosque hacia la cabaña. ¿Qué ángulo  $\theta$  (mostrado en la figura) minimizaría el tiempo total necesario para que la excursionista llegue a su cabaña? ¿Cuánto tiempo se ahorra en comparación con la ruta directa por el bosque?



**Figura 3.PD.3** La ruta más rápida de la excursionista a su cabaña (problema 74)

75. Cuando se dispara una flecha desde el origen con una velocidad inicial  $v$  y un ángulo de inclinación inicial  $\alpha$  (desde el eje horizontal  $x$ , que representa el suelo), entonces su trayectoria es la curva

$$y = mx - \frac{16}{v^2}(1 + m^2)x^2,$$

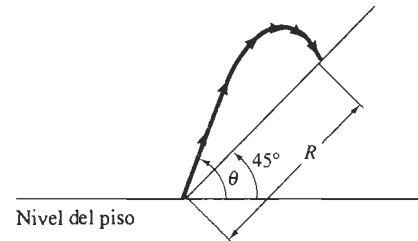
donde  $m = \tan \alpha$ . (a) Determine la altura máxima alcanzada por la flecha en términos de  $m$  y  $v$ . (b) ¿Para qué valor de  $m$  (y por tanto, para cuál  $\alpha$ ) recorre la flecha la máxima distancia horizontal?

76. Un proyectil se lanza con una velocidad inicial  $v$  y un ángulo de elevación  $\theta$  desde la base de un plano inclinado

a  $45^\circ$  con respecto de la horizontal (figura 3.PD.4). El alcance del proyectil, medido mediante su pendiente, está dado por

$$R = \frac{v^2\sqrt{2}}{16}(\cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta).$$

¿Qué valor de  $\theta$  maximiza  $R$ ?



**Figura 3.PD.4** Un proyectil lanzado cuesta arriba (problema 76)

En los problemas 77 a 88, use el método de Newton para determinar la solución de la ecuación dada  $f(x) = 0$  en el intervalo indicado  $[a, b]$  con una precisión de cuatro cifras decimales.

77.  $x^2 - 7 = 0$ ;  $[2, 3]$  (determinar la raíz cuadrada positiva de 7)

78.  $x^3 - 3 = 0$ ;  $[1, 2]$  (determinar la raíz cúbica de 3)

79.  $x^5 - 75 = 0$ ;  $[2, 3]$  (determinar la raíz quinta de 75)

80.  $x^{4/3} - 10 = 0$ ;  $[5, 6]$  (aproximar  $10^{3/4}$ )

81.  $x^3 - 3x - 1 = 0$ ;  $[-1, 0]$

82.  $x^3 - 4x - 1 = 0$ ;  $[-1, 0]$

83.  $x^6 + 7x^2 - 4 = 0$ ;  $[0, 1]$

84.  $x^3 - 3x^2 + 2x + 10 = 0$ ;  $[-2, -1]$

85.  $x + \cos x = 0$ ;  $[-2, 0]$

86.  $x^2 + \sin x = 0$ ;  $[-1.0, -0.5]$

87.  $4x - \sin x + 4 = 0$ ;  $[-2, -1]$

88.  $5x - \cos x + 5 = 0$ ;  $[-1, 0]$

89. Determinar la profundidad a la cual una pelota de madera con un radio de 2 pies se sumerge en el agua si su densidad es un tercio de la del agua. Una fórmula útil aparece en el problema 37 de la sección 3.9.

90. La ecuación  $x^2 + 1 = 0$  no tiene soluciones reales. Trate de determinar una solución usando el método de Newton y reporte lo que sucede. Use la estimación inicial  $x_0 = 2$ .

91. Al inicio de la sección 3.9, mencionamos la ecuación de quinto grado  $x^5 - 3x^2 + x^2 - 23x + 19 = 0$ ; su gráfica aparece en la figura 3.9.1. La gráfica permite ver que esta ecuación tiene exactamente tres soluciones reales. Encuéntrelas mediante el método de Newton, con una precisión de cuatro cifras decimales.

92. La ecuación

$$\tan x = \frac{1}{x}$$

tiene una sucesión  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  de raíces positivas, con  $\alpha_n$  ligeramente mayor que  $(n-1)\pi$ . Use el método de Newton para aproximar  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  con una precisión de tres cifras decimales.

93. Critique la siguiente “demostración” de que  $3 = 2$ . En primer lugar, escriba

$$x^3 = x \cdot x^2 = x^2 + x^2 + \dots + x^2 \quad (x \text{ sumandos}).$$

Derive para obtener

$$3x^2 = 2x + 2x + \dots + 2x \text{ (con } x \text{ sumandos todavía).}$$

Así  $3x^2 = 2x^2$  y “por lo tanto”  $3 = 2$ .

Si sustituimos  $z = x + h$  en la definición de la derivada, el resultado es

$$f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}.$$

Use esta fórmula en los problemas 94 y 95, junto con la fórmula

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

para factorizar la diferencia de dos cubos.

94. Muestre que

$$Dx^{3/2} = \lim_{z \rightarrow x} \frac{z^{3/2} - x^{3/2}}{z - x} = \frac{3}{2}x^{1/2}.$$

[Sugerencia: Factorice el numerador como una diferencia de cubos y el denominador como una diferencia de cuadrados.]

95. Muestre que

$$Dx^{2/3} = \lim_{z \rightarrow x} \frac{z^{2/3} - x^{2/3}}{z - x} = \frac{2}{3}x^{-1/3}.$$

[Sugerencia: Factorice el numerador como una diferencia de cuadrados y el denominador como una diferencia de cubos.]

96. Un bloque rectangular con base cuadrada se comprime de tal forma que su altura  $y$  disminuye a razón de 2 cm/min mientras que su volumen permanece constante. ¿Con qué razón aumenta la orilla  $x$  de su base cuando  $x = 30$  y  $y = 20$  cm?

97. Se infla un globo esférico a una velocidad constante de 10 pulgadas<sup>3</sup>/segundo. ¿Con qué razón aumenta el área de la superficie del globo cuando su radio es de 5 pulgadas?

98. Una escalera de 10 pies de largo está apoyada en una pared. Si la parte inferior de la escalera se desliza alejándose de la pared a una razón constante de 1 milla/hora, ¿a qué velocidad (en millas por hora) se mueve la parte superior de la escalera cuando se encuentra a 0.01 pie sobre el suelo?

99. Un tanque de agua en forma de cono invertido, con el eje vertical y el vértice hacia abajo, tiene una tapa con un radio de 5 pies y una altura de 10 pies. El agua sale del tanque por un agujero en el vértice, a una velocidad de 50 pies<sup>3</sup>/minuto. ¿Cuál es la razón de cambio de la profundidad del agua en el instante en que el agua tiene 6 pies de profundidad?

100. El avión  $A$  vuela hacia el oeste, hacia un aeropuerto y a una altura de 2 millas. El avión  $B$  vuela hacia el sur, hacia el mismo aeropuerto, pero a una altura de 3 millas. Cuando ambos aviones se encuentran a 2 millas (distancia desde el suelo) del aeropuerto, la velocidad del avión  $A$  es de 500 millas/hora y la distancia entre los dos aviones disminuye a 600 millas/hora. ¿Cuál es entonces la velocidad del avión  $B$ ?

101. Un tanque de agua tiene una forma tal que su volumen es  $V = 2y^{3/2}$  pulgadas<sup>3</sup> cuando su profundidad es  $y$  pulgadas. Si el agua sale por un agujero en la parte inferior a razón de  $3\sqrt{y}$  pulgadas<sup>3</sup>/min, ¿con qué rapidez disminuye el nivel del agua en el tanque? ¿Puede pensar una aplicación práctica para este tanque de agua?

102. Se introduce agua al tanque cónico del problema 99 a una velocidad de 50 pies<sup>3</sup>/minuto y ésta sale por un agujero en la parte inferior, a razón de  $10\sqrt{y}$  pies<sup>3</sup>/min, donde  $y$  es la profundidad del agua en el tanque. (a) ¿Con qué velocidad aumenta el nivel del agua cuando ésta tiene 5 pies de profundidad? (b) Suponga que el tanque se encuentra inicialmente vacío, que se introduce agua a 25 pies<sup>3</sup>/minuto, y que el agua sale a  $10\sqrt{y}$  pies<sup>3</sup>/minuto. ¿Cuál es la profundidad máxima alcanzada por el agua?

103. Sea  $L$  una línea recta que pasa por el punto fijo  $P(x_0, y_0)$  y que es tangente a la parábola  $y = x^2$  en el punto  $Q(a, a^2)$ . (a) Muestre que  $a^2 - 2ax_0 + y_0 = 0$ . (b) Aplique la fórmula cuadrática para mostrar que si  $y_0 < (x_0)^2$  (es decir, si  $P$  se encuentra bajo la parábola), entonces existen dos valores posibles para  $a$  y por lo tanto dos rectas que pasan por  $P$  y son tangentes a la parábola. (c) De manera análoga, muestre que si  $y_0 > (x_0)^2$  ( $P$  se encuentra arriba de la parábola), entonces ninguna recta que pase por  $P$  puede ser tangente a la parábola.



# Aplicaciones adicionales de la derivada

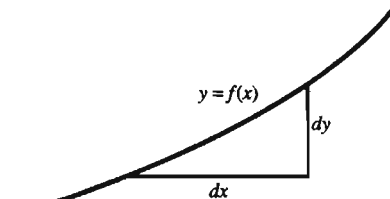
□ Gottfried Wilhelm Leibniz ingresó a la universidad de Leipzig a la edad de 15 años, estudió filosofía y leyes, se graduó a los 17, y recibió su doctorado en filosofía a los 21. Al terminar su trabajo académico, Leibniz ingresó al servicio político y gubernamental del Electorado de Mainz (Alemania). Su estudio serio de las matemáticas comenzó hasta 1672 (a la edad de 26 años) cuando fue enviado a París en una misión diplomática. Durante los siguientes cuatro años concibió las características principales del cálculo. Por su obra, es recordado (junto con Newton) como codescubridor de esta materia. Los descubrimientos de Newton fueron un poco anteriores (a fines de la década de 1660), pero Leibniz fue el primero en publicar, a partir de 1684. A pesar de una desafortunada disputa entre los partidarios de Newton y los de Leibniz que duró más de un siglo, en la actualidad es claro que sus descubrimientos fueron independientes.

□ A lo largo de su vida, Leibniz

buscó un lenguaje universal que incorporara notación y terminología que proporcionase a *todas* las personas con educación la fuerza del razonamiento claro y correcto en todas las materias. Pero solamente en matemáticas logró con amplitud su objetivo. Su notación diferencial para el cálculo es con mucho el mejor ejemplo de un sistema de notación elegido de modo que refleje perfectamente las operaciones y procesos básicos del área. De hecho, se puede decir que la notación de Leibniz para el cálculo llevó al rango de los estudiantes ordinarios los problemas que alguna vez necesitaron del ingenio de Arquímedes o de Newton. Por esta razón, el método de cálculo de Leibniz predominó durante el siglo XVIII, aunque el método un tanto diferente de Newton sería más cercano a nuestra idea moderna sobre la materia.

□ El origen de la notación diferencial fue un triángulo rectángulo infinitesimal con catetos  $dx$  y  $dy$  y como hipotenusa un pequeño seg-

mento de la curva  $y = f(x)$ . Leibniz describió posteriormente el momento en que visualizó por vez primera este “triángulo característico” como una explosión de luz que fue el principio de su cálculo. En realidad, algunas veces se refería a su cálculo como “mi método del triángulo característico”.



El triángulo característico de Leibniz

□ En el primer artículo publicado por Leibniz, *Acta Eruditorum* de 1684), aparece por primera vez la notación diferencial. La regla del producto para la derivación se expresa como

$$d(xv) = x dv + v dx.$$

## 4.1 Introducción

En el capítulo 3 aprendimos a derivar una amplia gama de funciones algebraicas y trigonométricas. Vimos que las derivadas tienen aplicaciones tan diversas como los problemas de máximos y mínimos, problemas relacionados con razones, y la solución de ecuaciones mediante el método de Newton. Otras aplicaciones de la derivación que analizaremos en este capítulo dependen en última instancia de una sola cuestión fundamental. Suponga que  $y = f(x)$  es una función derivable definida en el intervalo  $[a, b]$  de longitud  $\Delta x = b - a$ . Entonces, el *incremento*  $\Delta y$  en el valor de  $f(x)$  cuando  $x$  cambia de  $x = a$  a  $x = b = a + \Delta x$  es

$$\Delta y = f(b) - f(a). \quad (1)$$

La pregunta es ésta: ¿Cómo se relaciona este incremento  $\Delta y$  con la derivada (la razón de cambio) de la función  $f$  en los puntos del intervalo  $[a, b]$ ?

Damos una respuesta *aproximada* en la sección 4.2. Si la función continúa en el intervalo con la misma razón de cambio  $f'(a)$  que tenía cuando  $x = a$ , entonces el cambio en su valor sería  $f'(a)(b - a) = f'(a) \Delta x$ . Esta observación motiva la aproximación tentativa

$$\Delta y \approx f'(a) \Delta x. \quad (2)$$

Una respuesta precisa a la pregunta anterior está dada por el teorema del valor medio de la sección 4.3. Este teorema implica que el incremento exacto está dado por

$$\Delta y = f'(c) \Delta x \quad (3)$$

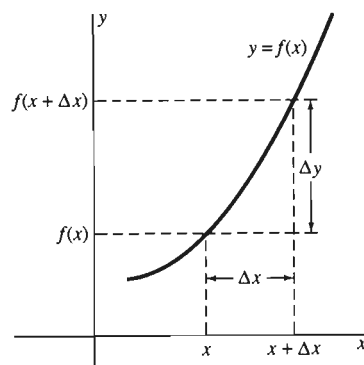
para algún número  $c$  en  $(a, b)$ . El teorema del valor medio es el resultado teórico central del cálculo diferencial y también es la clave para muchas aplicaciones avanzadas de las derivadas.

## 4.2 Incrementos, diferenciales y aproximación lineal

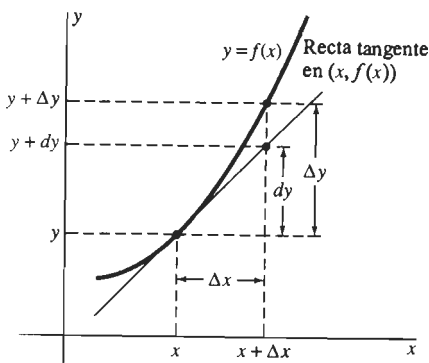
A veces se necesita tener una estimación rápida y sencilla del cambio de  $f(x)$  que resulte de una modificación en  $x$ . Escribiremos  $y$  en vez de  $f(x)$  y supondremos primero que el cambio en la variable independiente es el *incremento*  $\Delta x$ , de modo que  $x$  cambia de su valor original al nuevo valor  $x + \Delta x$ . El cambio en la variable  $y$  es el *incremento*  $\Delta y$ , calculado al restar el valor anterior de  $y$  de su nuevo valor:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \quad (1)$$

Los incrementos  $\Delta x$  y  $\Delta y$  se representan geoméricamente en la figura 4.2.1.



**Figura 4.2.1** Los incrementos  $\Delta x$  y  $\Delta y$



**Figura 4.2.2** La estimación  $dy$  del incremento real  $\Delta y$

Ahora comparamos el incremento real  $\Delta y$  con el cambio que *podría* ocurrir en el valor de  $y$  si continuara cambiando con la razón fija  $f'(x)$ , cuando el valor de la variable independiente cambia de  $x$  a  $x + \Delta x$ . Este cambio hipotético en  $y$  es la **diferencial**

$$dy = f'(x) \Delta x. \quad (2)$$

Como muestra la figura 4.2.2,  $dy$  es el cambio en altura de un punto que se mueve sobre la recta tangente en el punto  $(x, f(x))$  en vez de sobre la curva  $y = f(x)$ .

Pensemos que  $x$  está fijo. Entonces la ecuación (2) muestra que la diferencial  $dy$  es una función *lineal* del incremento  $\Delta x$ . Por esta razón,  $dy$  se llama la **aproximación lineal** del incremento  $\Delta y$ . Podemos aproximar  $f(x + \Delta x)$  si sustituimos  $dy$  en vez de  $\Delta y$ :

$$f(x + \Delta x) = y + \Delta y \approx y + dy.$$

Como  $y = f(x)$  y  $dy = f'(x) \Delta x$ , esto nos da la **fórmula de aproximación lineal**

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x. \quad (3)$$

El punto es que ésta es una “buena” aproximación, al menos cuando  $\Delta x$  es relativamente pequeño. Si combinamos las ecuaciones (1), (2) y (3), tenemos que

$$\Delta y \approx f'(x) \Delta x = dy. \quad (4)$$

Así, la diferencial  $dy = f'(x) \Delta x$ , es una buena aproximación del incremento  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ .

Si reemplazamos  $x$  con  $a$  en la ecuación (3), obtenemos la aproximación

$$f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a) \Delta x. \quad (5)$$

Si ahora escribimos  $\Delta x = x - a$ , de modo que  $x = a + \Delta x$ , el resultado es

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a). \quad (6)$$

Puesto que el lado derecho de la ecuación (6) es una función lineal de  $x$ , decimos que ese lado es la **aproximación lineal a la función  $f$  cerca del punto  $x = a$**  (figura 4.2.3).

**EJEMPLO 1** Determinar la aproximación lineal a la función  $f(x) = \sqrt{1+x}$  cerca del punto  $a = 0$ .

**Solución** Observe que  $f(0) = 1$  y que

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}},$$

de modo que  $f'(0) = \frac{1}{2}$ . Por tanto, la ecuación (6) con  $a = 0$  implica

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)(x - 0) = 1 + \frac{1}{2}x;$$

es decir,

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x. \quad (7)$$

**IMPORTANTE** La aproximación lineal de la ecuación (7) es precisa sólo si  $x$  es cercana a cero. Por ejemplo, las aproximaciones

$$\sqrt{1.1} \approx 1 + \frac{1}{2}(0.1) = 1.05 \quad \text{y} \quad \sqrt{1.03} \approx 1 + \frac{1}{2}(0.03) = 1.015,$$

con  $x = 0.1$  y  $x = 0.03$ , son precisas hasta dos y tres cifras decimales (redondeadas), respectivamente. Pero

$$\sqrt{3} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 2,$$

con  $x = 2$ , es una aproximación pobre de  $\sqrt{3} \approx 1.732$ .

La aproximación  $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$  es un caso particular de la aproximación

$$(1+x)^k \approx 1 + kx \quad (8)$$

( $k$  constante,  $x$  cerca de cero), una aproximación con varias aplicaciones. La obtención de la ecuación (8) es similar al ejemplo 1 (véase problema 39).

**EJEMPLO 2** Usaremos la fórmula de la aproximación lineal para aproximar  $(122)^{2/3}$ . Observemos que

$$(125)^{2/3} = [(125)^{1/3}]^2 = 5^2 = 25.$$

**Solución** Necesitamos aproximar un valor particular de  $x^{2/3}$ , por lo que nuestra estrategia será aplicar la ecuación (6) con  $f(x) = x^{2/3}$ . Observamos primero que  $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$ . Elegimos  $a = 125$ , pues conocemos los valores *exactos*

$$f(125) = (125)^{2/3} = 25 \quad \text{y} \quad f'(125) = \frac{2}{3}(125)^{-1/3} = \frac{2}{15}$$

y 125 está relativamente cerca de 122. Entonces, la aproximación lineal en (6) a  $f(x) = x^{2/3}$  cerca de  $a = 125$  tiene la forma

$$f(x) \approx f(125) + f'(125)(x - 125);$$

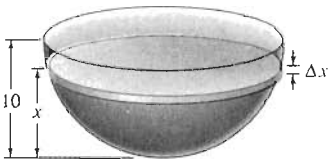
es decir,

$$x^{2/3} \approx 25 + \frac{2}{15}(x - 125).$$

Con  $x = 122$  obtenemos

$$(122)^{2/3} \approx 25 + \frac{2}{15}(-3) = 24.6.$$

Así  $(122)^{2/3}$  es aproximadamente 24.6. El valor real de  $(122)^{2/3}$  es aproximadamente 24.5984, por lo que la fórmula de la ecuación (6) da una aproximación relativamente buena en este caso.



**Figura 4.2.4** El tazón del ejemplo 3

**EJEMPLO 3** Un tazón semiesférico con un radio de 10 pulgadas se llena con agua hasta una profundidad de  $x$  pulgadas. El volumen  $V$  del agua en el tazón (en pulgadas cúbicas) está dado por la fórmula

$$V = \frac{\pi}{3}(30x^2 - x^3) \quad (9)$$

(figura 4.2.4). (Usted podrá obtener esta fórmula después de estudiar el capítulo 6.) Suponga que *mide* la profundidad del agua en el tazón y es de 5 pulgadas, con un error máximo de medición de  $\frac{1}{16}$  de pulgada. Estime el error máximo en el volumen calculado del agua en el tazón.

**Solución** El error en el volumen calculado  $V(5)$  es la diferencia

$$\Delta V = V(x) - V(5)$$

entre el volumen real  $V(x)$  y el volumen calculado. No conocemos la profundidad  $x$  del agua en el tazón. Sólo tenemos que la diferencia

$$\Delta x = x - 5$$

entre las profundidades real y medida es numéricamente menor que  $\frac{1}{16}$  de pulgada,  $|\Delta x| \leq \frac{1}{16}$ . Como la ecuación (9) implica

$$V'(x) = \frac{\pi}{3}(60x - 3x^2) = \pi(20x - x^2),$$

la aproximación lineal

$$\Delta V \approx dV = V'(5) \Delta x$$

en  $x = 5$  es

$$\Delta V \approx \pi(20 \cdot 5 - 5^2) \Delta x = 75\pi \Delta x.$$

Con la práctica común en las ciencias de escribir  $\Delta x = \pm \frac{1}{16}$  para indicar que  $-\frac{1}{16} \leq \Delta x \leq \frac{1}{16}$ , esto da

$$\Delta V \approx (75\pi)(\pm \frac{1}{16}) \approx \pm 14.73 \text{ (pulg}^3\text{)}$$

La fórmula de la ecuación (9) da el volumen calculado  $V(5) \approx 654.50 \text{ pulg}^3$ , pero ahora vemos que esto puede tener un error de casi 15 pulgadas cúbicas en ambas direcciones.

El **error absoluto** en un valor medido o aproximado se define como la diferencia entre el valor aproximado y el valor real. El **error relativo** es la razón entre el error absoluto y el valor real. Así, en el ejemplo 3, un error relativo en la profundidad medida  $x$  de

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\frac{1}{16}}{5} = 0.0125 = 1.25\%$$

conduce a un error relativo en el volumen estimado de

$$\frac{dV}{V} \approx \frac{14.73}{654.50} \approx 0.0225 = 2.25\%$$

La relación entre estos dos errores relativos es de cierto interés. Las fórmulas para  $dV$  y  $V$  en el ejemplo 3 implican

$$\frac{dV}{V} = \frac{\pi(20x - x^2) \Delta x}{\frac{1}{3}\pi(30x^2 - x^3)} = \frac{3(20 - x)}{30 - x} \cdot \frac{\Delta x}{x}.$$

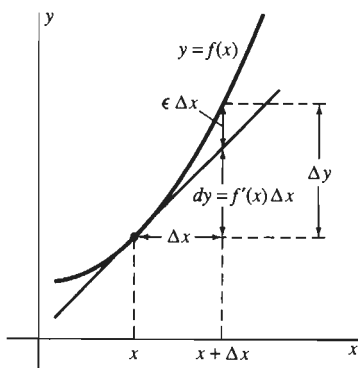
Si  $x = 5$ , esto es

$$\frac{dV}{V} = (1.80) \frac{\Delta x}{x}.$$

Por consiguiente, para aproximar el volumen de agua en el tazón con un error relativo máximo de 0.5%, por ejemplo, necesitaríamos medir la profundidad con un error relativo máximo de  $(0.5\%)/1.8$ , es decir, con un error relativo máximo de 0.3%.

## EL ERROR EN LA APROXIMACIÓN LINEAL

Consideremos ahora brevemente la cuestión de la cercanía con que la diferencial  $dy$  aproxima el incremento  $\Delta y$ . De la figura 4.2.2 podemos ver que conforme  $\Delta x$  es más pequeño, más cerca estarán los puntos correspondientes de la curva  $y = f(x)$  y de la recta tangente. Como la diferencia entre las alturas de ambos puntos es



**Figura 4.2.5** El error  $\epsilon \cdot \Delta x$  en la aproximación lineal  $\Delta y \approx f'(x) \Delta x$

el valor de  $\Delta y - dy$  determinado mediante una elección particular de  $\Delta x$ , concluimos que  $\Delta y - dy$  tiende a cero cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Pero algo más es cierto: cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ , la diferencia  $\Delta y - dy$  es pequeña incluso en comparación con  $\Delta x$ , ya que

$$\frac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x) \Delta x}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x).$$

Es decir,

$$\frac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \epsilon, \quad (10)$$

donde, por la definición de la derivada  $f'(x)$ , vemos que  $\epsilon = \epsilon(\Delta x)$  es una función de  $\Delta x$  que tiende a cero cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ . Si  $\Delta x$  es "muy pequeño", de modo que  $\epsilon$  también sea "muy pequeño", podríamos describir el producto  $\epsilon \cdot \Delta x = \Delta y - dy$  como "muy muy pequeño". Estos conceptos y cantidades se ilustran en la figura 4.2.5.

**EJEMPLO 4** Suponga que  $y = x^3$ . Verifique que  $\epsilon = (\Delta y - dy)/\Delta x$  tiende a cero cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ .

**Solución** Unos cálculos sencillos dan

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

y  $dy = 3x^2 \Delta x$ . Por tanto,

$$\epsilon = \frac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \frac{3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = 3x \Delta x + (\Delta x)^2,$$

que sí tiende a cero cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ .

## DIFERENCIALES

La fórmula de la aproximación lineal en (3) se escribe con frecuencia con  $dx$  en vez de  $\Delta x$ :

$$f(x + dx) \approx f(x) + f'(x) dx. \quad (11)$$

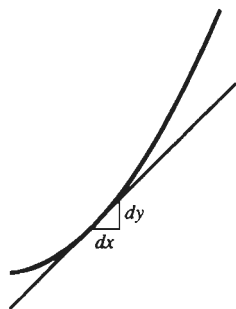
En este caso,  $dx$  es una variable independiente, llamada la **diferencial** de  $x$ , y  $x$  está fijo. Así, las diferenciales de  $x$  y de  $y$  se definen como

$$dx = \Delta x \quad y \quad dy = f'(x) \Delta x = f'(x) dx. \quad (12)$$

De esta definición se sigue de inmediato que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x) dx}{dx} = f'(x),$$

de acuerdo con la notación que hemos venido utilizando. En realidad, Leibniz originó la notación diferencial visualizando incrementos "infinitesimales"  $dx$  y  $dy$  (figura 4.2.6), donde su razón  $dy/dx$  es la pendiente de la recta tangente. La clave para el descubrimiento independiente del cálculo diferencial por parte de Leibniz en la década de 1670 fue ver que si  $dx$  y  $dy$  son suficientemente pequeños, entonces el segmento de la curva  $y = f(x)$  y el segmento de recta que une  $(x, y)$  con  $(x + dx, y + dy)$  son virtualmente indistinguibles. Esta visión se ilustra mediante las



**Figura 4.2.6** La pendiente de la recta tangente como la razón entre los infinitesimales  $dx$  y  $dy$

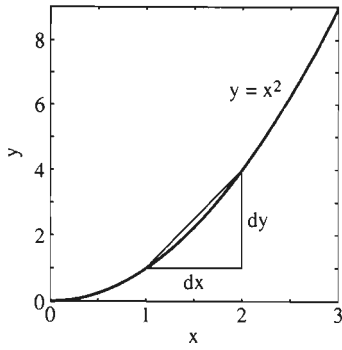


Figura 4.2.7  $dx = 1$

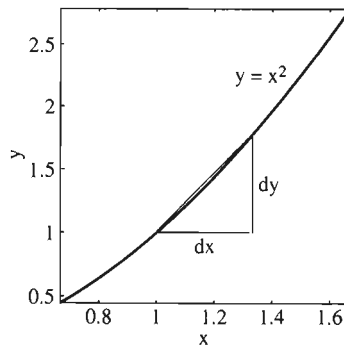


Figura 4.2.8  $dx = \frac{1}{3}$

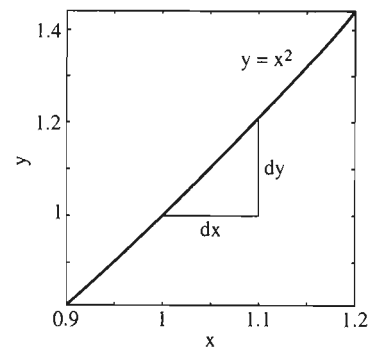


Figura 4.2.9  $dx = \frac{1}{10}$

ampliaciones sucesivas en las figuras 4.2.7 a 4.2.9 de la curva  $y = x^2$  cerca del punto  $(1, 1)$ .

La notación diferencial nos proporciona una forma conveniente para escribir las fórmulas de las derivadas. Suponga que  $z = g(u)$ , de modo que  $dz = g'(u) du$ . Para los siguientes casos particulares de la función  $g$ , obtenemos las fórmulas

$$d(u^n) = nu^{n-1} du, \quad (13)$$

$$d(\text{sen } u) = (\cos u) du, \quad (14)$$

etcétera. Así, podemos escribir las reglas de derivación en forma diferencial sin tener que identificar a la variable independiente. Las reglas de la suma, el producto y el cociente toman la forma

$$d(u + v) = du + dv, \quad (15)$$

$$d(uv) = u dv + v du, \quad y \quad (16)$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}. \quad (17)$$

Si  $u = f(x)$  y  $z = g(u)$ , podemos sustituir  $du = f'(x) dx$  en la fórmula  $dz = g'(u) du$ , para obtener

$$dz = g'(f(x)) \cdot f'(x) dx. \quad (18)$$

Ésta es la forma diferencial de la regla de la cadena

$$D_x g(f(x)) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Así, la regla de la cadena aparece aquí como si fuera el resultado del manejo mecánico de la notación diferencial. Esta compatibilidad con la regla de la cadena es una razón de la extraordinaria utilidad de la notación diferencial en el cálculo.

## 4.2 Problemas

En los problemas 1 a 16, escriba  $dy$  en términos de  $x$  y  $dx$ .

1.  $y = 3x^2 - \frac{4}{x^2}$

2.  $y = 2\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$

3.  $y = x - \sqrt{4 - x^3}$

4.  $y = \frac{1}{x - \sqrt{x}}$

5.  $y = 3x^2(x - 3)^{3/2}$

6.  $y = \frac{x}{x^2 - 4}$

7.  $y = x(x^2 + 25)^{1/4}$       8.  $y = \frac{1}{(x^2 - 1)^{4/3}}$   
 9.  $y = \cos \sqrt{x}$       10.  $y = x^2 \operatorname{sen} x$   
 11.  $y = \operatorname{sen} 2x \cos 2x$       12.  $y = \cos^3 3x$   
 13.  $y = \frac{\operatorname{sen} 2x}{3x}$       14.  $y = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$   
 15.  $y = \frac{1}{1 - x \operatorname{sen} x}$       16.  $y = (1 + \cos 2x)^{3/2}$

En los problemas 17 a 24, determine, como en el ejemplo 1, la aproximación lineal a la función dada cerca del punto  $a = 0$ .

17.  $f(x) = \frac{1}{1 - x}$       18.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x}}$   
 19.  $f(x) = (1 + x)^2$       20.  $f(x) = (1 - x)^3$   
 21.  $f(x) = (1 - 2x)^{3/2}$       22.  $f(x) = \frac{1}{(1 + 3x)^{2/3}}$   
 23.  $f(x) = \operatorname{sen} x$       24.  $f(x) = \cos x$

En los problemas 25 a 34, use, como en el ejemplo 2, una aproximación lineal a una función adecuada, con un valor adecuado de  $a$ , para estimar el número dado.

25.  $\sqrt[3]{25}$       26.  $\sqrt{102}$       27.  $\sqrt[4]{15}$   
 28.  $\sqrt{80}$       29.  $65^{-2/3}$       30.  $80^{3/4}$   
 31.  $\cos 43^\circ$       32.  $\operatorname{sen} 32^\circ$       33.  $\operatorname{sen} 88^\circ$   
 34.  $\cos 62^\circ$

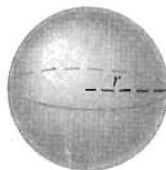
En los problemas 35 a 38, calcule la diferencial de cada lado de la ecuación dada, considerando a  $x$  y a  $y$  como variables dependientes (como si ambas fueran funciones de una tercera variable no especificada). Despeje después  $dy/dx$ .

35.  $x^2 + y^2 = 1$       36.  $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$   
 37.  $x^3 + y^3 = 3xy$       38.  $x \operatorname{sen} y = 1$

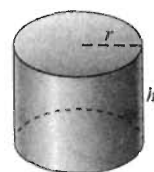
39. Suponga que  $D_x x^k = kx^{k-1}$  para cualquier constante real  $k$  (hecho que estableceremos en el capítulo 7) y obtenga la fórmula de la aproximación lineal  $(1 + x)^k \approx 1 + kx$  para  $x$  cercano a cero.

En los problemas 40 a 47, use las aproximaciones lineales para estimar el cambio en la cantidad dada.

40. La circunferencia de un círculo, si su radio aumenta de 10 a 10.5 pulgadas.  
 41. El área de un cuadrado, si la longitud de su lado disminuye de 10 a 9.8 pulgadas.  
 42. El área de la superficie de una esfera, si su radio aumenta de 5 a 5.2 pulgadas (figura 4.2.10).  
 43. El volumen de un cilindro, si su altura y su radio decrecen de 15 a 14.7 centímetros (figura 4.2.11).

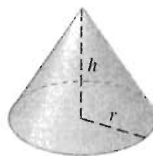


**Figura 4.2.10** La esfera del problema 42: Área  $A = 4\pi r^2$ , volumen  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$



**Figura 4.2.11** El cilindro del problema 43: Volumen  $V = \pi r^2 h$

44. El volumen de la pila de arena cónica de la figura 4.2.12, si su radio es de 14 pulgadas y su altura aumenta de 7 a 7.1 pulgadas.  
 45. El alcance  $R = \frac{1}{16} v^2 \operatorname{sen} 2\theta$  de un obús disparado con un ángulo de inclinación  $\theta = 45^\circ$ , si su velocidad inicial  $v$  aumenta de 80 a 81 pies/seg.  
 46. El alcance  $R = \frac{1}{16} v^2 \operatorname{sen} 2\theta$  de un proyectil disparado con velocidad inicial  $v = 80$  pies/seg, si su ángulo  $\theta$  de inclinación inicial aumenta de  $45^\circ$  a  $46^\circ$ .  
 47. El voltaje  $W = RI^2$  de un foco con resistencia  $R$  igual a 10 ohms, cuando la corriente  $I$  aumenta de 3 a 3.1 amperios.  
 48. El radio ecuatorial de la Tierra es aproximadamente de 3960 millas. Suponga que se enrolla de manera justa un cable alrededor de la Tierra, por el ecuador. ¿Aproximadamente cuánto aumenta la longitud del cable si se levanta en todos los puntos sobre postes a 10 pies de altura? ¡Use la fórmula de aproximación lineal!  
 49. El radio de una bola esférica se mide en 10 pulgadas, con un error máximo de  $\frac{1}{16}$  de pulgada. ¿Cuál es el error máximo resultante en el volumen calculado?  
 50. ¿Con qué precisión debemos medir el radio de la bola del problema 49 para garantizar un error máximo de 1 pulgada cúbica en el volumen calculado?



**Figura 4.2.12** La pila cónica de arena del problema 44: volumen  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$



**Figura 4.2.13** La semi-esfera del problema 51: el área de la superficie curva es  $A = 2\pi r^2$

51. El radio de un domo semiesférico se mide en 100 m, con un error máximo de 1 cm (figura 4.2.13). ¿Cuál es el máximo error resultante en el área calculada de su superficie?  
 52. ¿Con qué precisión debemos medir el radio de un domo semiesférico para garantizar un error máximo de 0.01% en el área calculada de su superficie?



## 4.3 Funciones crecientes y decrecientes y el teorema del valor medio

El significado del *signo* de la derivada de una función es simple pero crucial:

$f(x)$  es creciente en un intervalo donde  $f'(x) > 0$ ;

$f(x)$  es decreciente en un intervalo donde  $f'(x) < 0$ .

Geoméricamente, esto significa que donde  $f'(x) > 0$ , la gráfica de  $y=f(x)$  asciende cuando la recorremos de izquierda a derecha, mientras que si  $f'(x) < 0$ , la gráfica desciende. Podemos aclarar los términos *creciente* y *decreciente* como sigue.

### Definición Funciones crecientes y decrecientes

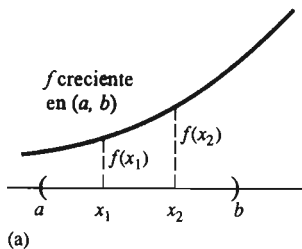
La función  $f$  es **creciente** en el intervalo  $I = (a, b)$  si

$$f(x_1) < f(x_2)$$

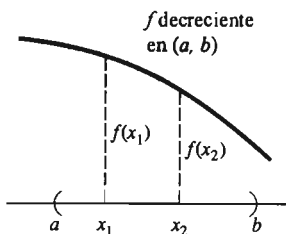
para todo par de números  $x_1$  y  $x_2$  en  $I$  tales que  $x_1 < x_2$ . La función  $f$  es **decreciente** en  $I$  si

$$f(x_1) > f(x_2)$$

para todo par de números  $x_1$  y  $x_2$  en  $I$  tales que  $x_1 < x_2$ .

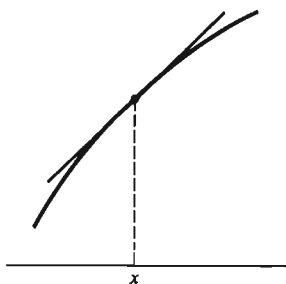


(a)

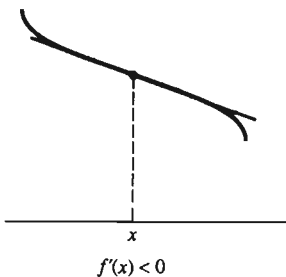


(b)

**Figura 4.3.1** (a) Una función creciente y (b) una función decreciente



(a) Gráfica ascendente en  $x$



(b) Gráfica descendente en  $x$

**Figura 4.3.2** Una gráfica ascendente en  $x$  y (b) una gráfica descendente en  $x$

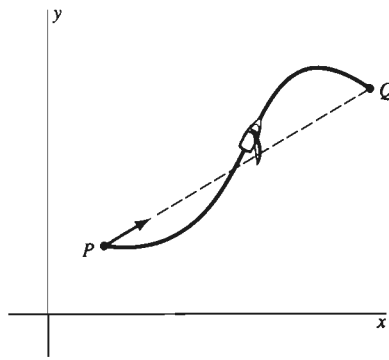
La figura 4.3.1 ilustra esta definición. En resumen, la función  $f$  es creciente en  $I = (a, b)$  si los valores de  $f(x)$  aumentan cuando  $x$  aumenta [figura 4.3.1 (a)];  $f$  es decreciente en  $I$  si los valores de  $f(x)$  disminuyen cuando  $x$  aumenta [figura 4.3.1 (b)].

Decimos que una función es creciente o decreciente *en un intervalo*, no en un punto. Sin embargo, si consideramos el signo de  $f'$ , la *derivada* de  $f$ , en un solo punto, obtenemos una útil imagen intuitiva del significado del signo de la derivada. Esto se debe a que la derivada  $f'(x)$  es la pendiente de la recta tangente en el punto  $(x, f(x))$  de la gráfica de  $f$ . Si  $f'(x) > 0$ , entonces la recta tangente tiene pendiente positiva. Por tanto, asciende cuando se le recorre de izquierda a derecha. Intuitivamente, una tangente ascendente parecería corresponder a una gráfica ascendente y por tanto a una función creciente. De manera análoga, esperaríamos ver una gráfica descendente cuando  $f'(x)$  fuera negativa (figura 4.3.2). Cuidado: para determinar si una función  $f$  es creciente o decreciente, debemos analizar el signo de  $f'$  en todo un intervalo, no sólo en un punto (véase el problema 55).

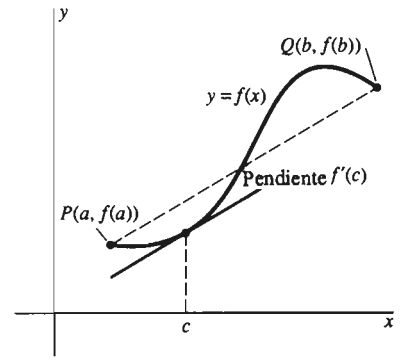
## EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Aunque las imágenes de las gráficas ascendentes y descendentes son sugerentes, no proporcionan una *demonstración* real del significado del signo de la derivada. Para establecer rigurosamente la conexión entre el ascenso y descenso de una gráfica y el signo de la derivada de la función graficada, necesitamos el *teorema del valor medio*, que enunciaremos posteriormente en esta sección. Este teorema es la principal herramienta teórica del cálculo diferencial, y veremos que tiene muchas aplicaciones importantes.

Como introducción al teorema del valor medio, plantearemos la siguiente cuestión. Suponga que  $P$  y  $Q$  son dos puntos sobre la superficie del mar, con  $Q$  ligeramente al este de  $P$  (figura 4.3.3). ¿Es posible llevar un bote de  $P$  a  $Q$ , navegando casi hacia el este, *sin nunca* (ni siquiera por un instante) navegar en la dirección exacta de  $P$  a  $Q$ ? Es decir, ¿podemos navegar de  $P$  a  $Q$  sin que nuestra línea de movimiento instantáneo sea paralela a la recta  $PQ$ ?



**Figura 4.3.3** ¿Podemos navegar de  $P$  a  $Q$  sin que jamás (ni siquiera por un instante) navegemos en la dirección  $PQ$  (la dirección de la flecha)?



**Figura 4.3.4** El problema del bote en terminología matemática

El teorema del valor medio responde esta pregunta: no. Siempre existe al menos un instante en el que navegamos de manera paralela a la recta  $PQ$ , sin importar la trayectoria que elijamos.

Parafraseamos esto como sigue: consideremos que la trayectoria del bote es la gráfica de una función diferenciable  $y = f(x)$  con extremos  $P(a, f(a))$  y  $Q(b, f(b))$ . Entonces decimos que debe existir un punto en esta gráfica tal que su recta tangente (correspondiente a la línea de movimiento instantáneo del bote) a la curva es paralela a la recta  $PQ$  que une los extremos de la curva. Ésta es una *interpretación geométrica* del teorema del valor medio.

Pero la pendiente de la recta tangente en el punto  $(c, f(c))$  (figura 4.3.4) es  $f'(c)$ , mientras que la pendiente de la recta  $PQ$  es

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

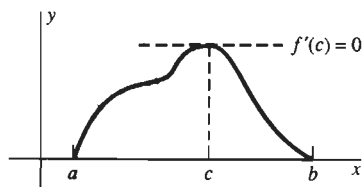
Podemos pensar este último cociente como el valor promedio (o *medio*) de la pendiente de la curva  $y = f(x)$  en el intervalo  $[a, b]$ . El teorema del valor medio garantiza que existe un punto  $c$  en  $(a, b)$  para el que la recta tangente en  $(c, f(c))$  es paralela a la recta  $PQ$ . En el lenguaje del álgebra, existe un número  $c$  en  $(a, b)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (1)$$

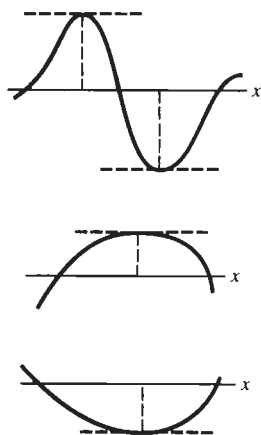
Primero daremos un resultado preliminar, un lema para facilitar la demostración del teorema del valor medio. Este teorema se llama el *teorema de Rolle*, en honor de Michel Rolle (1652–1719), quien lo descubrió en 1690. En su juventud, Rolle estudió el tema emergente del cálculo, pero posteriormente renunció a él. Argumentaba que el tema se basaba en falacias lógicas; es recordado solamente por el único teorema que lleva su nombre. Es irónico que su teorema juegue un papel importante en la demostración rigurosa de varios teoremas del cálculo.

#### **Teorema de Rolle**

Suponga que la función  $f$  es continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$  y es derivable en su interior  $(a, b)$ . Si  $f(a) = 0 = f(b)$ , entonces existe un número  $c$  en  $(a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .



**Figura 4.3.5** La idea de la demostración del teorema de Rolle



**Figura 4.3.6** La existencia de la recta tangente horizontal es una consecuencia del teorema de Rolle

La figura 4.3.5 ilustra el primer caso en la siguiente demostración del teorema de Rolle. La idea de la demostración es ésta: suponga que la gráfica suave  $y = f(x)$  comienza en  $(x = a)$  la altura cero y termina en  $(x = b)$  la altura cero. Entonces, si sube, tiene que bajar. Pero cuando se detiene y comienza a bajar, su recta tangente debe ser horizontal. Por tanto, la derivada se anula en ese punto.

**Demostración del teorema de Rolle** Como  $f$  es continua en  $[a, b]$ , debe alcanzar sus valores máximo y mínimo en  $[a, b]$  (por la propiedad del valor máximo de la sección 3.5). Si  $f$  tiene valores positivos, consideremos su valor máximo,  $f(c)$ . Ahora,  $c$  no es un extremo de  $[a, b]$ , pues  $f(a) = 0$  y  $f(b) = 0$ . Por tanto,  $c$  es un punto de  $(a, b)$ . Pero sabemos que  $f$  es diferenciable en  $c$ . Por el teorema 2 de la sección 3.5,  $f'(c) = 0$ .

De manera análoga, si  $f$  tiene valores negativos, podemos considerar su valor mínimo  $f(c)$  y concluir que  $f'(c) = 0$ .

Si  $f$  no tiene valores positivos ni negativos, entonces  $f$  se anula idénticamente en  $[a, b]$ , por lo que  $f'(c) = 0$  para *todo*  $c$  en  $(a, b)$ .

Así, vemos que la conclusión del teorema de Rolle se justifica en todos los casos.  $\square$

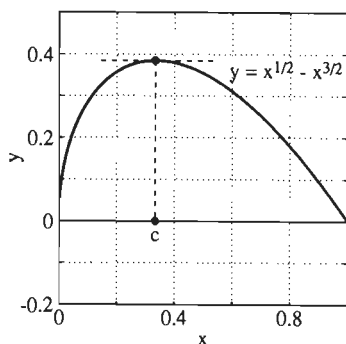
Una consecuencia importante del teorema de Rolle es que entre cada pareja de raíces de una función diferenciable existe *al menos un* punto donde la recta tangente es horizontal. Algunas imágenes posibles de esta situación aparecen en la figura 4.3.6.

**EJEMPLO 1** Suponga que  $f(x) = x^{1/2} - x^{3/2}$  en  $[0, 1]$ . Determine un número  $c$  que satisfaga la conclusión del teorema de Rolle.

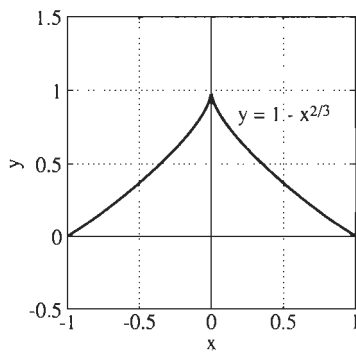
**Solución** Observe que  $f$  es continua en  $[0, 1]$  y derivable en  $(0, 1)$ . Como está presente el término  $x^{1/2}$ ,  $f$  no es derivable en  $x = 0$ , pero esto no importa. Además,  $f(0) = 0 = f(1)$ , de modo que se satisfacen todas las hipótesis del teorema de Rolle. Por último,

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} - \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{1}{2}x^{-1/2}(1 - 3x),$$

de modo que  $f'(c) = 0$  para  $c = \frac{1}{3}$ . En la figura 4.3.7 aparece una gráfica precisa de  $f$  en  $[0, 1]$ , incluyendo  $c$  y la recta tangente horizontal.



**Figura 4.3.7** El número  $c$  del ejemplo 1



**Figura 4.3.8** La función  $f(x) = 1 - x^{2/3}$  del ejemplo 2

**EJEMPLO 2** Suponga que  $f(x) = 1 - x^{2/3}$  en  $[-1, 1]$ . Entonces  $f$  satisface las hipótesis del teorema de Rolle *excepto* por el hecho de que  $f'(0)$  no existe. La gráfica de  $f$  muestra claramente que *no* existe un punto donde la recta tangente sea horizontal (véase figura 4.3.8). De hecho,

$$f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-1/3} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}},$$

de modo que  $f'(x) \neq 0$  para  $x \neq 0$  y vemos que  $|f'(x)| \rightarrow \infty$  cuando  $x \rightarrow 0$ . Por tanto, la gráfica de  $f$  tiene una recta tangente vertical (en vez de una horizontal) en el punto  $(0, 1)$ .

Ahora estamos listos para establecer formalmente y demostrar el teorema del valor medio.

### El teorema del valor medio

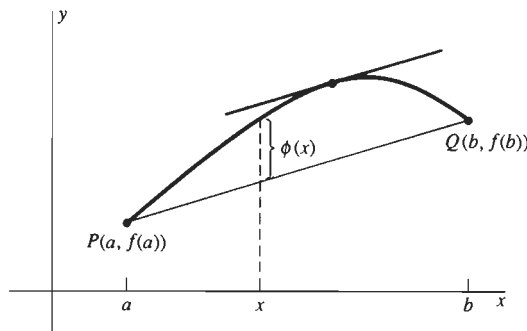
Suponga que la función  $f$  es continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$  y derivable en el intervalo abierto  $(a, b)$ . Entonces

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \quad (2)$$

para algún número  $c$  en  $(a, b)$ .

**COMENTARIO** Como la ecuación (2) es equivalente a la ecuación (1), la conclusión del teorema del valor medio es que debe existir al menos un punto sobre la curva  $y = f(x)$  en el que la recta tangente sea paralela a la recta que une sus extremos  $P(a, f(a))$  y  $Q(b, f(b))$ .

**Motivación de la demostración del teorema del valor medio** Consideremos la función auxiliar  $\phi$  sugerida por la figura 4.3.9. El valor de  $\phi(x)$  es, por definición, la diferencia de altura sobre  $x$  del punto  $(x, f(x))$  sobre la curva y el punto correspondiente de la recta  $PQ$ . Parece que un punto sobre la curva  $y = f(x)$  donde la recta tangente es paralela a  $PQ$  corresponde a un máximo o un mínimo de  $\phi$ . También es claro que  $\phi(a) = 0 = \phi(b)$ , por lo que podemos aplicar el teorema de Rolle a la función  $\phi$  en  $[a, b]$ . Así, nuestro plan para demostrar el teorema del valor medio es éste: en primer lugar, obtenemos una fórmula para la función  $\phi$ . En segundo lugar, localizamos el punto  $c$  tal que  $\phi'(c) = 0$ . Por último, mostramos que este número  $c$  es exactamente el número necesario para satisfacer la conclusión del teorema en la ecuación (2).



**Figura 4.3.9** La construcción de la función auxiliar  $\phi$

**Demostración del teorema del valor medio** Como la recta  $PQ$  pasa por  $P(a, f(a))$  y tiene pendiente

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

la fórmula punto-pendiente para la ecuación de una línea recta nos da la siguiente ecuación para  $PQ$ :

$$y = y_{\text{recta}} = f(a) + m(x - a).$$

Así,

$$\phi(x) = y_{\text{curva}} - y_{\text{recta}} = f(x) - f(a) - m(x - a).$$

Usted debe verificar mediante una sustitución directa que  $\phi(a) = 0 = \phi(b)$ . Como es continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ , podemos aplicarle el teorema de Rolle. Así, existe un punto  $c$  en alguna parte del intervalo abierto  $(a, b)$  en el que  $\phi'(c) = 0$ . Pero

$$\phi'(x) = f'(x) - m = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Como  $\phi'(c) = 0$ , concluimos que

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Es decir,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad \square$$

La demostración del teorema del valor medio es una aplicación del teorema de Rolle, mientras que el teorema de Rolle es un caso particular del teorema del valor medio, en el que  $f(a) = 0 = f(b)$ .

**EJEMPLO 3** Suponga que manejamos un automóvil desde Kristiansand, Noruega, hasta Oslo (una distancia casi exacta de 350 km) en un tiempo exacto de 4 horas, desde el instante  $t = 0$  hasta el instante  $t = 4$ . Sea  $f(t)$  la distancia recorrida al tiempo  $t$ , y supongamos que  $f$  es una función derivable. Entonces, el teorema del valor medio implica que

$$350 = f(4) - f(0) = f'(c)(4 - 0) = 4f'(c)$$

y entonces

$$f'(c) = \frac{350}{4} = 87.5$$

en algún instante  $c$  en  $(0, 4)$ . Pero  $f'(c)$  es nuestra velocidad *instantánea* en el instante  $t = c$  y 87.5 km/h es nuestra velocidad *promedio* en el viaje. Así, el teorema del valor medio implica que debemos tener una velocidad instantánea exactamente de 87.5 km/h al menos una vez durante el viaje.

El argumento del ejemplo 3 es mas bien general; durante un viaje, la velocidad instantánea debe ser igual, en *algún* instante, a la velocidad promedio de todo el viaje. Por ejemplo, esto implica que si dos casetas de cuota se encuentran a una distancia de 60 millas entre sí y usted recorre la distancia entre ambas en exactamente una hora, en algún instante tuvo que rebasar el límite de velocidad de 55 mi/h. (Así, el teorema del valor medio evita que ciertos casos sean defendibles en un juzgado.)

## CONSECUENCIAS DEL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

La primera de estas consecuencias es el recíproco *no* trivial del hecho trivial de que la derivada de una función constante es idénticamente nula. Es decir, demostraremos que *no* puede existir una función exótica no constante pero con derivada nula en todo punto. En los corolarios 1 a 3 supondremos que  $f$  y  $g$  son continuas en el intervalo cerrado  $[a, b]$  y derivables en  $(a, b)$ .

### Corolario 1 *Funciones con derivada nula*

Si  $f'(x) \equiv 0$  en  $(a, b)$  [es decir,  $f'(x) = 0$  para toda  $x$  en  $(a, b)$ ], entonces  $f$  es una función constante en  $[a, b]$ . En otras palabras, existe una constante  $C$  tal que  $f(x) \equiv C$ .

*Demostración* Apliquemos el teorema del valor medio a la función  $f$  en el intervalo  $[a, x]$ , donde  $x$  es un punto arbitrario pero fijo del intervalo  $(a, b)$ . Tenemos que

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$$

para algún número  $c$  entre  $a$  y  $x$ . Pero  $f'(x)$  se anula en todo el intervalo  $(a, b)$ , por lo que  $f'(c) = 0$ . Así,  $f(x) - f(a) = 0$ , por lo que  $f(x) = f(a)$ .

Pero esta última ecuación es válida para *toda*  $x$  en  $(a, b)$ . Por consiguiente,  $f(x) = f(a)$  para toda  $x$  en  $(a, b)$ , y de hecho, para toda  $x$  en  $[a, b]$ . Es decir,  $f(x)$  tiene el valor fijo  $C = f(a)$ . Esto establece el corolario 1.  $\square$

El corolario 1 se aplica por lo general en una forma diferente pero equivalente, que establecemos y demostramos a continuación.

### Corolario 2 *Funciones con derivadas iguales*

Suponga que  $f'(x) = g'(x)$  para toda  $x$  en el intervalo  $(a, b)$ . Entonces  $f$  y  $g$  difieren en una constante en  $[a, b]$ . Es decir, existe una constante  $K$  tal que

$$f(x) = g(x) + K$$

para toda  $x$  en  $[a, b]$ .

*Demostración* Dadas las hipótesis, sea  $h(x) = f(x) - g(x)$ . Entonces

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

para toda  $x$  en  $(a, b)$ . Entonces, por el corolario 1,  $h(x)$  es una constante  $K$  en  $[a, b]$ . Es decir,  $f(x) - g(x) = K$  para toda  $x$  en  $[a, b]$ ; por tanto,

$$f(x) = g(x) + K$$

para toda  $x$  en  $[a, b]$ . Esto demuestra el corolario 2.  $\square$

**EJEMPLO 4** Si  $f'(x) = 2 \cos x$  y  $f(0) = 5$ , ¿cuál es la función  $f(x)$ ?

*Solución* Por nuestro conocimiento de las derivadas de las funciones trigonométricas, sabemos que una función explícita con derivada  $2 \cos x$  es

$$g(x) = 2 \operatorname{sen} x.$$

Debido a eso, el corolario 2 implica que existe una constante  $K$  tal que

$$f(x) = g(x) + K = 2 \operatorname{sen} x + K$$

en cualquier intervalo dado  $[a, b]$  que contenga al cero. Pero podemos determinar el valor de  $K$  si sustituimos  $x = 0$ :

$$f(0) = 2 \operatorname{sen} 0 + K;$$

$$5 = 2 \cdot 0 + K;$$

de modo que  $K = 5$ . Así, la función  $f$  es

$$f(x) = 2 \operatorname{sen} x + 5.$$

La siguiente consecuencia del teorema del valor medio verifica las observaciones acerca de las funciones crecientes y decrecientes con que iniciamos esta sección.

**Corolario 3 Funciones crecientes y decrecientes**

Si  $f'(x) > 0$  para toda  $x$  en  $(a, b)$ , entonces  $f$  es una función creciente en  $[a, b]$ .

Si  $f'(x) < 0$  para toda  $x$  en  $(a, b)$ , entonces  $f$  es una función decreciente en  $[a, b]$ .

**Demostración** Supongamos, por ejemplo, que  $f'(x) > 0$  para toda  $x$  en  $(a, b)$ . Necesitamos mostrar lo siguiente: si  $u$  y  $v$  son puntos de  $[a, b]$  tales que  $u < v$ , entonces  $f(u) < f(v)$ . Aplicamos el teorema del valor medio a  $f$ , pero en el intervalo cerrado  $[u, v]$ . Esto es válido, pues  $[u, v]$  está contenido en  $[a, b]$ , de modo que  $f$  satisface las hipótesis del teorema del valor medio en  $[u, v]$  al igual que en  $[a, b]$ . El resultado es que

$$f(v) - f(u) = f'(c)(v - u)$$

para algún número  $c$  en  $(u, v)$ . Como  $v > u$  y, por hipótesis,  $f'(c) > 0$ , tenemos que

$$f(v) - f(u) > 0; \text{ es decir } f(u) < f(v),$$

como queríamos demostrar. La demostración es análoga en el caso en que  $f'(x)$  es negativa en  $(a, b)$ .  $\square$

El significado del corolario 3 se resume en la figura 4.3.10. La figura 4.3.11 muestra una gráfica  $y = f(x)$  con etiquetas de acuerdo con esta correspondencia

$f'(x)$	$f(x)$
Negativa	Decreciente
Positiva	Creciente

Figura 4.3.10 Corolario 3

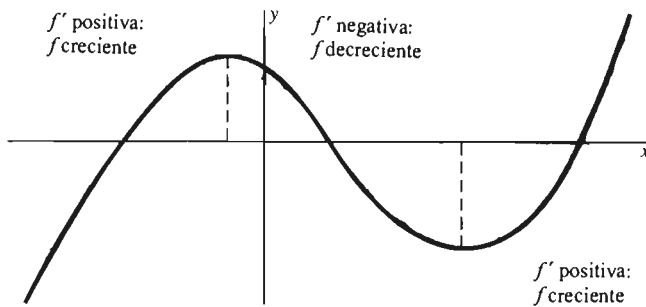


Figura 4.3.11 El significado del signo de  $f'(x)$

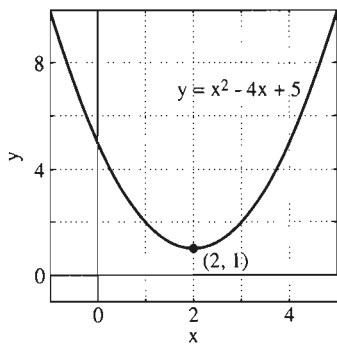


Figura 4.3.12 La parábola del ejemplo 5

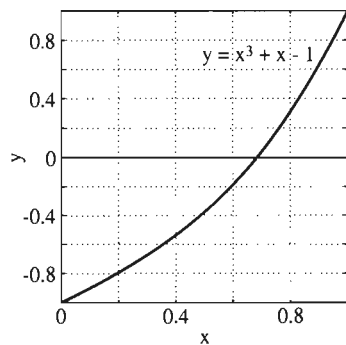


Figura 4.3.13 La función creciente del ejemplo 6

entre el signo de la derivada  $f'(x)$  y el comportamiento creciente y decreciente de la función  $f(x)$ .

**EJEMPLO 5** ¿Dónde es creciente la función  $f(x) = x^2 - 4x + 5$ , y dónde es decreciente?

**Solución** La derivada de  $f$  es  $f'(x) = 2x - 4$ . Es claro que  $f'(x) > 0$  si  $x > 2$ , mientras que  $f'(x) < 0$  si  $x < 2$ . Por tanto,  $f$  es decreciente en  $(-\infty, 2)$  y creciente en  $(2, +\infty)$ , como vemos en la figura 4.3.12.

**EJEMPLO 6** Muestre que la ecuación  $x^3 + x - 1 = 0$  tiene exactamente una solución (real).

**Solución** Necesitamos una *función* para aplicar las herramientas de esta sección, por lo que hacemos  $f(x) = x^3 + x - 1$ . Como  $f(0) = -1 < 0$ ,  $f(1) = +1 > 0$  y  $f$  es continua (en todo punto), la propiedad del valor intermedio garantiza que  $f(x)$  tiene *al menos* una raíz real en  $[0, 1]$  (figura 4.3.13). Pero podría tener más; como no podemos graficar  $y = f(x)$  en todo su dominio  $(-\infty, \infty)$ , no *sabemos* si la ecuación  $f(x) = 0$  tiene más soluciones reales. Necesitamos una evidencia concluyente de que esto es cierto.

Pero

$$f'(x) = 3x^2 + 1,$$

y es evidente que  $f'(x) > 0$  para toda  $x$ . Así, el corolario 3 implica que la gráfica de  $y = f(x)$  es creciente en toda la recta real. Por tanto, la ecuación  $f(x) = 0$  sólo puede tener a lo más una solución. (¿Por qué?)

En resumen, la ecuación  $f(x) = 0$  tiene *al menos* una solución y *a lo más* una solución. Por tanto, debe tener exactamente una solución (real).

**EJEMPLO 7** Determine los intervalos abiertos del eje  $x$  donde la función

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$$

es creciente y aquellos donde es decreciente.

**Solución** La derivada de  $f$  es

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^3 - 12x^2 - 24x \\ &= 12x(x^2 - x - 2) = 12x(x + 1)(x - 2). \end{aligned} \quad (3)$$

Los puntos críticos  $x = -1, 0, 2$  separan el eje  $x$  en los cuatro intervalos abiertos  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, 2)$  y  $(2, +\infty)$  (figura 4.3.14). La derivada  $f'(x)$  no cambia de signo dentro de estos intervalos, pues

- El factor  $x + 1$  de la ecuación (3) sólo cambia de signo en  $x = -1$ ,
- El factor  $12x$  sólo cambia de signo en  $x = 0$  y
- El factor  $x - 2$  sólo cambia de signo en  $x = 2$ .

Ilustraremos dos métodos para determinar el signo de  $f'(x)$  en cada uno de los cuatro intervalos (figura 4.3.14).

**MÉTODO 1** La segunda, tercera y cuarta columnas de la siguiente tabla registran los signos de los factores de la ecuación (3) en cada uno de los cuatro intervalos

$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 2$	$x > 2$
$x + 1 < 0$	$x + 1 > 0$	$x + 1 > 0$	$x + 1 > 0$
$x - 2 < 0$	$x - 2 < 0$	$x - 2 < 0$	$x - 2 > 0$

Figura 4.3.14 Los signos de  $x + 1$  y  $x - 2$  (ejemplo 7)



enumerados en la primera columna. Los signos de  $f'(x)$  que aparecen en la quinta columna se obtienen entonces mediante su producto. La sexta columna enumera el comportamiento resultante (creciente o decreciente) de  $f$  en los cuatro intervalos.

Intervalo	$x + 1$	$12x$	$x - 2$	$f'(x)$	$f$
$(-\infty, -1)$	Neg.	Neg.	Neg.	Neg.	Decreciente
$(-1, 0)$	Pos.	Neg.	Neg.	Pos.	Creciente
$(0, 2)$	Pos.	Pos.	Neg.	Neg.	Decreciente
$(2, +\infty)$	Pos.	Pos.	Pos.	Pos.	Creciente

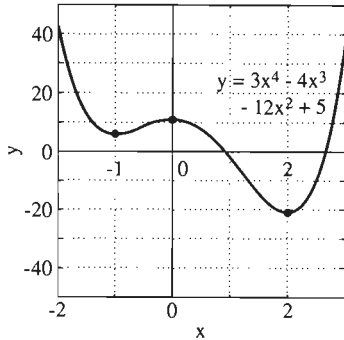


Figura 4.3.15 Los puntos críticos del polinomio del ejemplo 7

**MÉTODO 2** Como la derivada  $f'(x)$  no cambia de signo dentro de cualquiera de los cuatro intervalos, necesitamos calcular su valor únicamente en un punto de cada intervalo. El signo que tenga la derivada en ese punto será el signo de  $f'(x)$  en todo ese intervalo.

$$\begin{aligned} \text{En } (-\infty, -1): & \quad f'(-2) = -96 < 0; \quad f \text{ es decreciente.} \\ \text{En } (-1, 0): & \quad f'(-0.5) = 7.5 > 0; \quad f \text{ es creciente.} \\ \text{En } (0, 2): & \quad f'(1) = -24 < 0; \quad f \text{ es decreciente.} \\ \text{En } (2, +\infty): & \quad f'(3) = 144 > 0; \quad f \text{ es creciente.} \end{aligned}$$

El segundo método es particularmente conveniente si la derivada es complicada, pero se dispone de una calculadora adecuada para el cálculo de sus valores.

Por último, observemos que los resultados obtenidos en cada método son consistentes con la gráfica de  $y = f(x)$  que aparece en la figura 4.3.15.

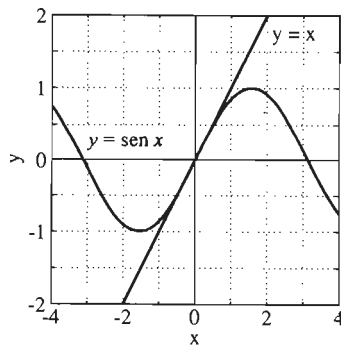


Figura 4.3.16  $x$  y  $\sin x$  (ejemplo 8)

**EJEMPLO 8** Las gráficas de la figura 4.3.16 sugieren que  $\sin x < x$  para  $x > 0$ . Para mostrar que esto es cierto, consideremos la función

$$f(x) = x - \sin x.$$

Como  $|\sin x| \leq 1$  para toda  $x$ ,  $\sin x < x$  si  $x > 1$ , por lo que sólo debemos mostrar que  $\sin x < x$  para  $x$  en el intervalo  $(0, 1]$ . Pero,

$$f'(x) = 1 - \cos x > 0$$

para tales  $x$ , pues  $\cos x < 1$  si  $0 < x < 2\pi$  y entonces  $\cos x < 1$  para  $0 < x \leq 1$ . Por tanto,  $f(x)$  es una función creciente en  $(0, 1]$ . Pero  $f(0) = 0$ , de lo que se sigue

$$f(x) = x - \sin x > 0$$

para toda  $x$  en  $(0, 1]$ . En consecuencia,  $\sin x < x$  para  $x$  en  $(0, 1]$ . Por nuestras observaciones anteriores, esto implica que  $\sin x < x$  para toda  $x > 0$ .

### 4.3 Problemas

Para las funciones de los problemas 1 a 6, determine primero (como en el ejemplo 7) los intervalos abiertos en el eje  $x$  en los que cada función es creciente y aquellos donde es decreciente. Utilice entonces esta información para relacionar la función con su gráfica, una de las seis que aparecen en la figura 4.3.17.

- $f(x) = 4 - x^2$
- $f(x) = x^2 - 2x - 1$
- $f(x) = x^2 + 4x + 1$
- $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$
- $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$
- $f(x) = 2x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x^3$

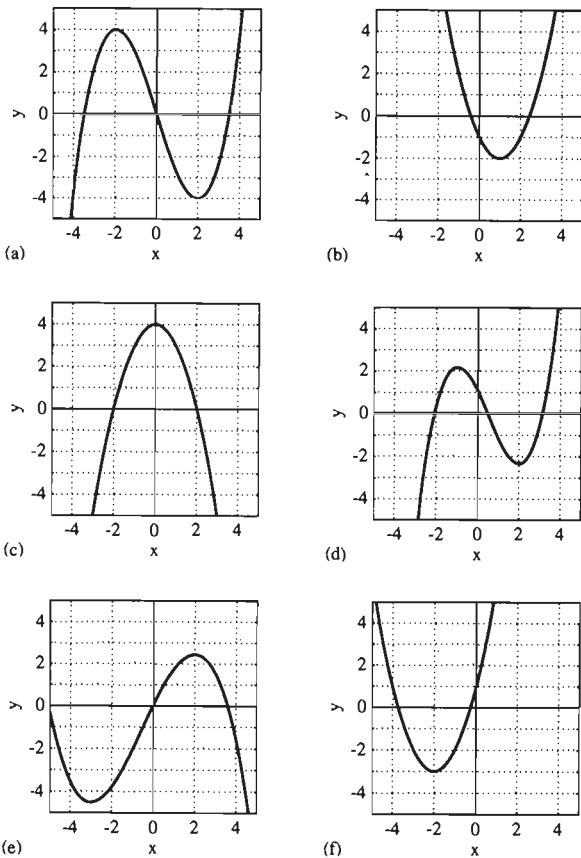


Figura 4.3.17 Problemas 1 al 6

En los problemas 7 a 10, se da la derivada  $f'(x)$  y el valor  $f(0)$ . Use el método del ejemplo 4 para determinar la función  $f(x)$ .

7.  $f'(x) = 4x$ ;  $f(0) = 5$

8.  $f'(x) = 3\sqrt{x}$ ;  $f(0) = 4$

9.  $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ ;  $f(1) = 1$

10.  $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$ ;  $f(0) = 3$

En los problemas 11 a 24, determine (como en el ejemplo 7) los intervalos abiertos en el eje  $x$  para los que la función es creciente, así como aquellos donde la función es decreciente. Si tiene una calculadora gráfica o una computadora, trace la gráfica de  $y = f(x)$  para ver si coincide con sus resultados.

11.  $f(x) = 3x + 2$

12.  $f(x) = 4 - 5x$

13.  $f(x) = 8 - 2x^2$

14.  $f(x) = 4x^2 + 8x + 13$

15.  $f(x) = 6x - 2x^2$

16.  $f(x) = x^3 - 12x + 17$

17.  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

18.  $f(x) = \frac{x}{x+1}$  [Nota:  $f'(x)$  puede cambiar de signo en  $x = -1$ . ¿Por qué?]

19.  $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$

20.  $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$

21.  $f(x) = 8x^{1/3} - x^{4/3}$

22.  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$

23.  $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2-3}$  (Véase la nota del problema 18.)

24.  $f(x) = x^2 + \frac{16}{x^2}$  (Véase la nota del problema 18.)

En los problemas 25 a 28, muestre que la función dada satisface las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo indicado  $[a, b]$  y determine todos los números  $c$  en  $(a, b)$  que satisfacen la conclusión del teorema.

25.  $f(x) = x^2 - 2x$ ;  $[0, 2]$

26.  $f(x) = 9x^2 - x^4$ ;  $[-3, 3]$

27.  $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ ;  $[-1, 1]$

28.  $f(x) = 5x^{2/3} - x^{5/3}$ ;  $[0, 5]$

En los problemas 29 a 31, muestre que la función dada  $f$  no satisface la conclusión del teorema de Rolle en el intervalo indicado. ¿Cuáles hipótesis dejan de cumplirse?

29.  $f(x) = 1 - |x|$ ;  $[-1, 1]$

30.  $f(x) = 1 - (2-x)^{2/3}$ ;  $[1, 3]$

31.  $f(x) = x^4 + x^2$ ;  $[0, 1]$

En los problemas 32 a 36, muestre que la función dada  $f$  satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo indicado, y determine todos los números  $c$  en  $(a, b)$  que satisfacen la conclusión de dicho teorema.

32.  $f(x) = x^3$ ;  $[-1, 1]$

33.  $f(x) = 3x^2 + 6x - 5$ ;  $[-2, 1]$

34.  $f(x) = \sqrt{x-1}$ ;  $[2, 5]$

35.  $f(x) = (x-1)^{2/3}$ ;  $[1, 2]$

36.  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ;  $[1, 2]$

En los problemas 37 a 40, muestre que la función dada  $f$  no satisface las hipótesis ni la conclusión del teorema del valor medio en el intervalo indicado.

37.  $f(x) = |x-2|$ ;  $[1, 4]$

38.  $f(x) = 1 + |x-1|$ ;  $[0, 3]$

39.  $f(x) = [x]$  (la función máximo entero);  $[-1, 1]$

40.  $f(x) = 3x^{2/3}$ ;  $[-1, 1]$

En los problemas 41 a 43, muestre que la ecuación dada tiene exactamente una solución en el intervalo indicado.

41.  $x^5 + 2x - 3 = 0$ ;  $[0, 1]$

42.  $x^{10} = 1000$ ;  $[1, 2]$

43.  $x^4 - 3x = 20$ ;  $[2, 3]$

44. Muestre que la función  $f(x) = x^{2/3}$  no satisface las hipótesis del teorema del valor medio en  $[-1, 27]$  pero aun así existe un número  $c$  en  $(-1, 27)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(27) - f(-1)}{27 - (-1)}.$$

45. Demuestre que la función

$$f(x) = (1 + x)^{3/2} - \frac{3}{2}x - 1$$

es creciente en  $(0, +\infty)$ . Explique con cuidado cómo podría concluir que

$$(1 + x)^{3/2} > 1 + \frac{3}{2}x$$

para toda  $x > 0$ .

46. Suponga que  $f'$  es una función constante en el intervalo  $[a, b]$ . Demuestre que  $f$  debe ser una función lineal (una función cuya gráfica es una línea recta).

47. Suponga que  $f'(x)$  es un polinomio de grado  $n - 1$  en el intervalo  $[a, b]$ . Demuestre que  $f(x)$  debe ser un polinomio de grado  $n$  en  $[a, b]$ .

48. Suponga que existen  $k$  puntos diferentes en  $[a, b]$  en los que la función diferenciable  $f$  se anula. Demuestre que  $f'$  debe anularse en al menos  $k - 1$  puntos de  $[a, b]$ .

49. (a) Aplique el teorema del valor medio a  $f(x) = \sqrt{x}$  en  $[100, 101]$  para mostrar que

$$\sqrt{101} = 10 + \frac{1}{2\sqrt{c}}$$

para algún número  $c$  en  $(100, 101)$ . (b) Muestre que si  $100 < c < 101$ , entonces  $10 < \sqrt{c} < 10.5$  y use este hecho para concluir de la parte (a) que  $10.0475 < \sqrt{101} < 10.0500$ .

50. Demuestre que la ecuación  $x^7 + x^5 + x^3 + 1 = 0$  tiene exactamente una solución real.

51. (a) Muestre que  $D \tan^2 x = D \sec^2 x$  en el intervalo abierto  $(-\pi/2, \pi/2)$ . (b) Concluya que existe una constante  $C$  tal que  $\tan^2 x = \sec^2 x + C$  para toda  $x$  en  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Evalúe  $C$  a continuación.

52. Explique por qué el teorema del valor medio no se aplica a la función  $f(x) = |x|$  en el intervalo  $[-1, 2]$ .

53. Suponga que la función  $f$  es derivable en el intervalo  $[-1, 2]$ , con  $f(-1) = -1$  y  $f(2) = 5$ . Demuestre que existe un punto sobre la gráfica de  $f$  en el que la recta tangente es paralela a la recta con ecuación  $y = 2x$ .

54. Sea  $f(x) = x^4 - x^3 + 7x^2 + 3x - 11$ . Demuestre que la gráfica de  $f$  tiene al menos una recta tangente horizontal.

55. Sea  $g$  la función definida como sigue:

$$g(x) = \frac{x}{2} + x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

para  $x \neq 0$ ;  $g(0) = 0$ . (a) Muestre que  $g'(0) = \frac{1}{2} > 0$ . (b) Trace la gráfica de  $g$  cerca de  $x = 0$ . ¿Es  $g$  creciente en algún intervalo abierto que contenga a  $x = 0$ ? [Respuesta: No.]

56. Suponga que  $f$  es creciente en cada intervalo cerrado  $[a, b]$  siempre que  $2 \leq a < b$ . Demuestre que  $f$  es creciente en el intervalo abierto no acotado  $(2, +\infty)$ . Observe que el principio descubierto se usó de manera implícita en el ejemplo 5 de esta sección.

### Aproximaciones

Los problemas 57 a 59 ilustran el uso del teorema del valor medio para aproximar los valores numéricos de las funciones.

57. Use el método del ejemplo 8, con  $f(x) = \cos x$  y  $g(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$  para mostrar que

$$\cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2$$

para toda  $x > 0$  (figura 4.3.18).

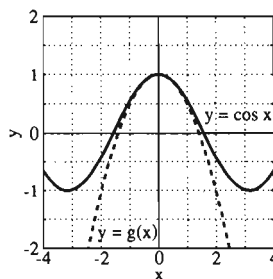


Figura 4.3.18  $\cos x$  y  $g(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$  (problema 57)

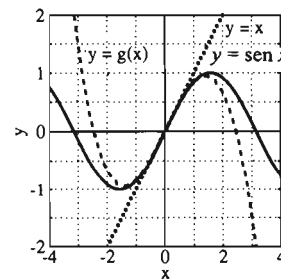


Figura 4.3.19  $\operatorname{sen} x$  y  $g(x) = x - \frac{1}{8}x^3$  (problema 58)

58. (a) Use el método del ejemplo 8 y el resultado del problema 57 para mostrar que

$$\operatorname{sen} x > x - \frac{1}{6}x^3$$

para toda  $x > 0$  (figura 4.3.19). (b) Use los resultados del ejemplo 8 y la parte (a) para calcular el seno de un ángulo de  $5^\circ$  con una precisión de tres cifras decimales.

59. (a) Use el resultado del problema 58(a) para mostrar que

$$\cos x < 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$$

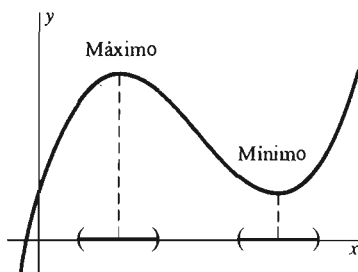
para toda  $x > 0$ . (b) Use los resultados del problema 57 y la parte (a) para calcular el coseno de un ángulo de  $10^\circ$  con una precisión de tres cifras decimales.

## 4.4 El criterio de la primera derivada

En la sección 3.5 analizamos los valores máximos y mínimos absolutos de una función definida en un intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$ . Consideremos ahora los valores extremos de las funciones definidas en dominios más generales, incluyendo intervalos abiertos o no acotados, así como intervalos cerrados y acotados.

Recuerde que si  $c$  es un punto del dominio  $D$  de la función  $f$  tal que  $f(c) \geq f(x)$  para toda  $x$  en  $D$ , entonces  $f(c)$  es el **valor máximo absoluto** de  $f(x)$  en  $D$ . Si  $f(c) \leq f(x)$  para toda  $x$  en  $D$ , entonces  $f(c)$  es el **valor mínimo absoluto** de  $f(x)$  en  $D$ . Si el dominio de definición de  $f$  es claro (como cuando  $f$  está definida en toda la recta real) podemos decir simplemente que  $f(c)$  es el valor máximo (o mínimo) absoluto de  $f(x)$ .

En este contexto, la palabra *global* se usa con frecuencia en vez de la palabra *absoluto*. La distinción entre los valores extremos globales y locales es importante. Recuerde de la sección 3.5 que  $f(c)$  es un **valor máximo local** de  $f(x)$  si  $f(c)$  es el valor máximo global de  $f(x)$  en algún intervalo abierto que contenga a  $c$ ; de manera análoga, un **valor mínimo local**  $f(c)$  es un valor mínimo global de  $f(x)$  en algún intervalo abierto que contenga a  $c$ . La figura 4.4.1 muestra un ejemplo típico de una función que no tiene un máximo ni un mínimo globales. Pero cada uno de los dos extremos locales que se muestran ahí es un valor extremo global en un intervalo abierto suficientemente pequeño.

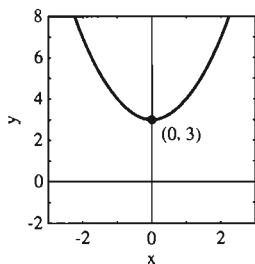


**Figura 4.4.1** Los extremos locales son extremos absolutos en intervalos suficientemente pequeños

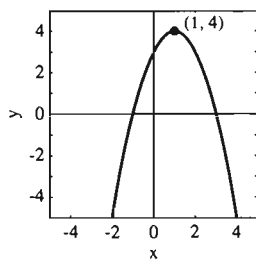
El teorema 2 de la sección 3.5 nos dice que cualquier extremo de la función derivable  $f$  en un intervalo abierto  $I$  debe aparecer en un punto crítico, donde la derivada se anule:

$$f'(x) = 0.$$

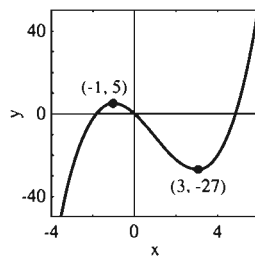
Pero el simple hecho de que  $f'(c) = 0$  no implica, por sí solo, que el valor crítico  $f(c)$  sea un valor extremo de  $f$ . Las figuras 4.4.2 a 4.4.5 ilustran las diversas



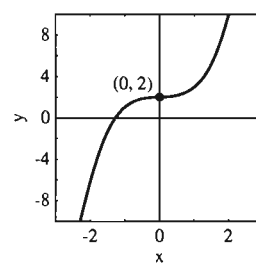
**Figura 4.4.2** La gráfica de  $f(x) = x^2 + 3$ . El valor mínimo local  $f(0) = 3$  es también el valor mínimo global de  $f(x)$



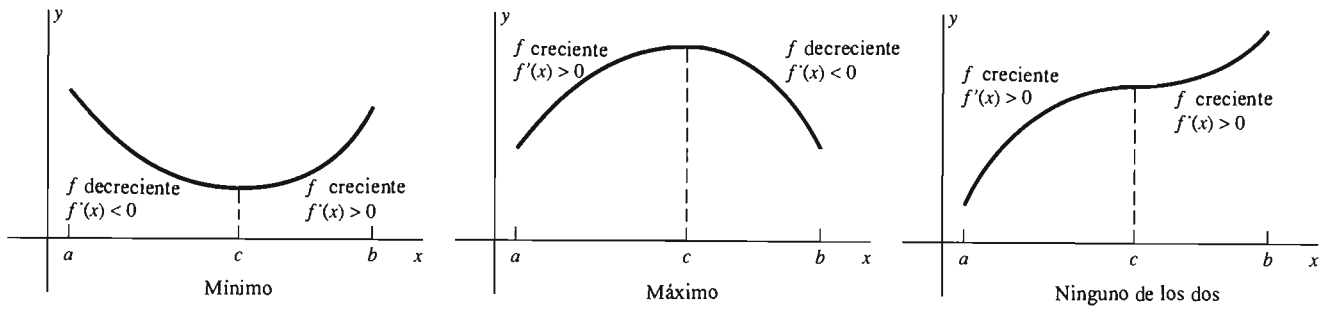
**Figura 4.4.3** La gráfica de  $f(x) = 4 - (x - 1)^2$ . El valor máximo local  $f(1) = 4$  es también el valor máximo global de  $f(x)$ .



**Figura 4.4.4** La gráfica de  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ . Es claro que el valor mínimo local  $f(3) = -27$  no es el valor mínimo global. De manera análoga, el valor máximo local  $f(-1) = 5$  no es el valor máximo global



**Figura 4.4.5** La gráfica de  $f(x) = x^3 + 2$ . El valor crítico  $f(0) = 2$  no es un valor extremo global ni local de  $f(x)$



**Figura 4.4.6** El criterio de la primera derivada

posibilidades para  $f(c)$ ; si es un valor máximo o mínimo local o global, o ninguno de estos casos.

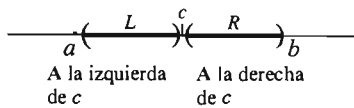
Lo que necesitamos es un criterio para decidir si, en el punto crítico  $x = c$ , el valor  $f(c)$  es realmente un valor máximo o mínimo de  $f(x)$ , ya sea local o global. La figura 4.4.6 muestra cómo desarrollar este criterio. Suponga que la función  $f$  es continua en  $c$  y que  $c$  es un **punto interior** del dominio de  $f$ ; es decir,  $f$  está definida en cierto intervalo abierto que contiene a  $c$ . Si  $f$  es decreciente inmediatamente a la izquierda de  $c$  y creciente inmediatamente a la derecha de  $c$ , entonces  $f(c)$  debe ser un valor mínimo local de  $f(x)$ . Pero si  $f$  es creciente inmediatamente a la izquierda de  $c$  y decreciente inmediatamente a su derecha, entonces  $f(c)$  debe ser un máximo local. Si  $f$  es creciente a ambos lados o decreciente a ambos lados, entonces  $f(c)$  no es un valor máximo ni un valor mínimo de  $f(x)$ .

Además, sabemos por el corolario 3 de la sección 4.3 que el signo de la derivada  $f'(x)$  determina los puntos donde  $f(x)$  es decreciente y los puntos donde es creciente:

- $f(x)$  es decreciente si  $f'(x) < 0$ ;
- $f(x)$  es creciente si  $f'(x) > 0$ .

En el siguiente criterio para extremos locales, decimos que

- $f'(x) < 0$  a la izquierda de  $c$  si  $f'(x) < 0$  en algún intervalo  $(a, c)$  de números inmediatamente a la izquierda de  $c$  y que
- $f'(x) > 0$  a la derecha de  $c$  si  $f'(x) > 0$  en algún intervalo  $(c, b)$  de números inmediatamente a la derecha de  $c$ ,



**Figura 4.4.7** Los intervalos abiertos a la izquierda y a la derecha del punto  $c$

etcétera (véase la figura 4.4.7). El teorema 1 nos dice cómo usar los *signos* de  $f'(x)$  a la izquierda y a la derecha del punto  $c$  para determinar si  $f(x)$  tiene un valor máximo local o un mínimo local en  $x = c$ .

**Teorema 1** *El criterio de la primera derivada para extremos locales*

Suponga que la función  $f$  es continua en el intervalo  $I$  y que también es derivable ahí, excepto posiblemente en el punto interior  $c$  de  $I$ .

1. Si  $f'(x) < 0$  a la izquierda de  $c$  y  $f'(x) > 0$  a la derecha de  $c$ , entonces  $f(c)$  es un *valor mínimo local* de  $f(x)$  en  $I$ .
2. Si  $f'(x) > 0$  a la izquierda de  $c$  y  $f'(x) < 0$  a la derecha de  $c$ , entonces  $f(c)$  es un *valor máximo local* de  $f(x)$  en  $I$ .

3. Si  $f'(x) > 0$  a la izquierda y a la derecha de  $c$ ; o bien si  $f'(x) < 0$  a la izquierda y a la derecha de  $c$ , entonces  $f(c)$  no es un valor mínimo ni máximo de  $f(x)$ .

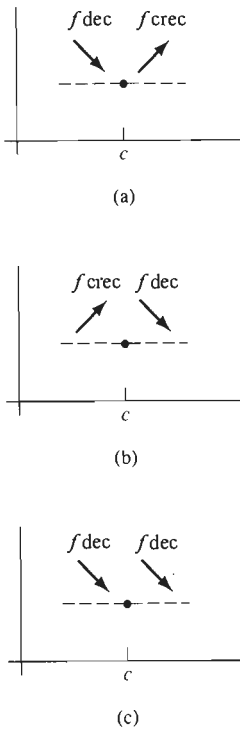


Figura 4.4.8 Los tres casos en el criterio de la primera derivada

COMENTARIO Entonces  $f(c)$  es un extremo local si la primera derivada  $f'(x)$  cambia de signo cuando  $x$  pasa por  $c$  y la dirección del cambio de signo determina si  $f(c)$  es un máximo o un mínimo local. Una buena forma de recordar el criterio de la primera derivada es visualizar la figura 4.4.6.

**Demostración del teorema 1** Sólo demostraremos la parte 1; las otras dos partes tienen demostraciones similares. Suponga que las hipótesis del teorema 1 son válidas; que  $f$  es continua en el intervalo  $I$ , que  $c$  es un punto interior de  $I$  y que  $f$  es derivable en  $I$ , excepto posiblemente en  $x = c$ . Suponga también que  $f'(x) < 0$  a la izquierda de  $c$  y  $f'(x) > 0$  a la derecha de  $c$ . Entonces existen dos intervalos  $(a, c)$  y  $(c, b)$ , cada uno totalmente contenido en  $I$ , tales que  $f'(x) < 0$  en  $(a, c)$  y  $f'(x) > 0$  en  $(c, b)$ .

Suponga que  $x$  está en  $(a, b)$ . Entonces debemos considerar tres casos. El primero, si  $x < c$ , entonces  $x$  está en  $(a, c)$  y  $f$  es decreciente en  $(a, c]$ , de modo que  $f(x) > f(c)$ . El segundo, si  $x > c$ , entonces  $x$  está en  $(c, b)$  y  $f$  es creciente en  $[c, b)$ , por lo que nuevamente  $f(x) > f(c)$ . Por último, si  $x = c$ , entonces  $f(x) \cong f(c)$ . Así, para cada  $x$  en  $(a, b)$ ,  $f(x) \cong f(c)$ . En consecuencia, por definición,  $f(c)$  es un valor mínimo local de  $f(x)$ .  $\square$

La idea de esta demostración se ilustra en la figura 4.4.8. La parte (a) muestra a  $f$  decreciente a la izquierda de  $c$  y creciente a la derecha, por lo que debe existir un mínimo local en  $x = c$ . La parte (b) muestra a  $f$  creciente a la izquierda de  $c$  y decreciente a la derecha, por lo que  $f(c)$  es un valor máximo local de  $f(x)$ . En la parte (c), la derivada tiene el mismo signo a ambos lados de  $c$ , por lo que no existe un extremo de cualquier tipo en  $x = c$ .

OBSERVACIÓN Las figuras 4.4.9 a 4.4.13 ilustra los casos en que se aplica el teorema 1, donde el intervalo  $I$  es la recta real completa  $\mathbf{R}$ . En las figuras 4.4.9 a 4.4.11, el origen  $c = 0$  es un punto crítico pues  $f'(0) = 0$ . En las figuras 4.4.12 a 4.4.13,  $c = 0$  es un punto crítico pues  $f'(0)$  no existe.

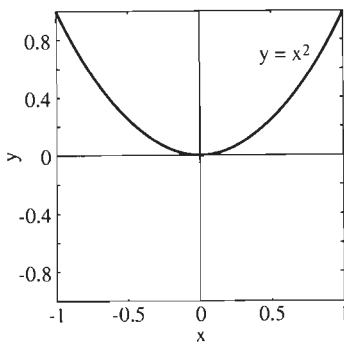


Figura 4.4.9  $f(x) = x^2$ ,  $f'(x) = 2x$ : un mínimo local en  $x = 0$

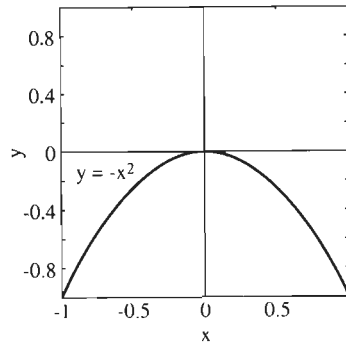


Figura 4.4.10  $f(x) = -x^2$ ,  $f'(x) = -2x$ : un máximo local en  $x = 0$

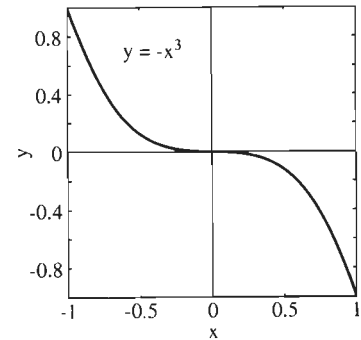
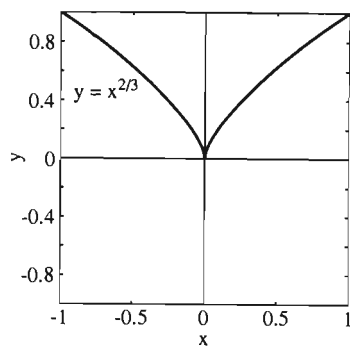
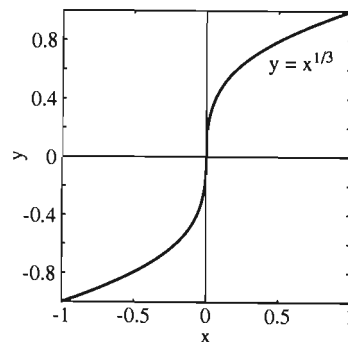


Figura 4.4.11  $f(x) = -x^3$ ,  $f'(x) = -3x^2$ : no existe un extremo en  $x = 0$



**Figura 4.4.12**  $f(x) = x^{2/3}, f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$ : un mínimo local en  $x = 0$



**Figura 4.4.13**  $f(x) = x^{1/3}, f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$ : no existe un extremo en  $x = 0$

## CLASIFICACIÓN DE PUNTOS CRÍTICOS

Suponga que hemos encontrado los puntos críticos de una función. Entonces, podemos intentar clasificarlos (como máximos locales, mínimos locales, o ninguno de estos casos) aplicando el criterio de la primera derivada a cada punto. El ejemplo 1 ilustra un procedimiento que puede ser útil.

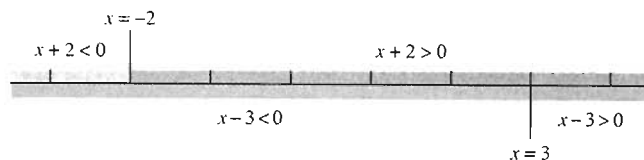
**EJEMPLO 1** Determine y clasifique los puntos críticos de la función

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7.$$

**Solución** La derivada es

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x + 2)(x - 3), \quad (1)$$

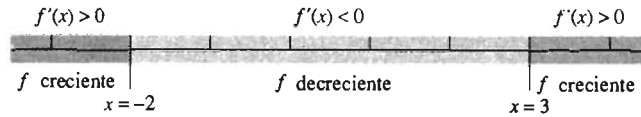
de modo que los puntos críticos [donde  $f'(x) = 0$ ] son  $x = -2$  y  $x = 3$ . Estos dos puntos separan el eje  $x$  en los tres intervalos abiertos  $(-\infty, -2)$ ,  $(-2, 3)$  y  $(3, +\infty)$ . La derivada  $f'(x)$  no puede cambiar de signo dentro de cualquiera de estos intervalos. Una razón para esto es que el factor  $x + 2$  de la ecuación (1) cambia de signo sólo en  $-2$ , mientras que el factor  $x - 3$  cambia de signo sólo en  $3$  (figura 4.4.14). Como en el ejemplo 7 de la sección 4.3, ilustramos dos métodos para determinar los signos de  $f'(x)$  en los intervalos  $(-\infty, -2)$ ,  $(-2, 3)$  y  $(3, +\infty)$ .



**Figura 4.4.14** Los signos de  $x + 2$  y  $x - 3$  (ejemplo 1)

**MÉTODO 1** La segunda y tercer columnas de la siguiente tabla registran (de la figura 4.4.14) los signos de los factores  $x + 2$  y  $x - 3$  de la ecuación (1) en los tres intervalos enumerados en la primera columna. Los signos de  $f'(x)$  en la cuarta columna se obtienen entonces por multiplicación.

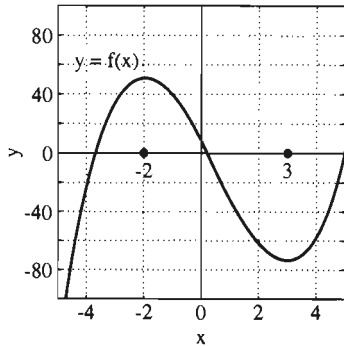
Intervalo	$x + 2$	$x - 3$	$f'(x)$
$(-\infty, -2)$	Neg.	Neg.	Pos.
$(-2, 3)$	Pos.	Neg.	Neg.
$(3, +\infty)$	Pos.	Pos.	Pos.



**Figura 4.4.15** Los tres intervalos del ejemplo 1

**MÉTODO 2** Como la derivada  $f'(x)$  no cambia signo dentro de cualquiera de los tres intervalos, sólo necesitamos calcular su valor en un punto de cada intervalo:

$$\begin{aligned} \text{En } (-\infty, -2): \quad f'(-3) &= 36 > 0; && \text{positivo;} \\ \text{En } (-2, 3): \quad f'(0) &= -36 < 0; && \text{negativo;} \\ \text{En } (3, +\infty): \quad f'(4) &= 36 > 0; && \text{positivo.} \end{aligned}$$



**Figura 4.4.16**  $y = f(x)$  (ejemplo 1)

La figura 4.4.15 resume nuestra información acerca de los signos de  $f'(x)$ . Como  $f'(x)$  es positiva a la izquierda y negativa a la derecha del punto crítico  $x = -2$ , el criterio de la primera derivada implica que  $f(-2) = 51$  es un valor máximo local. Como  $f'(x)$  es negativa a la izquierda y positiva a la derecha de  $x = 3$ , se sigue que  $f(3) = -74$  es un valor mínimo local. La gráfica de  $y = f(x)$  de la figura 4.4.16 confirma esta clasificación de los puntos críticos  $-2$  y  $3$ .

## PROBLEMAS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS EN INTERVALOS ABIERTOS

En la sección 3.6 analizamos problemas de aplicación de máximos y mínimos donde los valores de la variable dependiente están dados mediante una función definida en un intervalo cerrado y acotado. Sin embargo, a veces la función  $f$  que describe a la variable por maximizar está definida en un intervalo *abierto*  $(a, b)$ , posiblemente *no acotado*, como  $(1, +\infty)$  o  $(-\infty, +\infty)$  y no podemos “cerrar” el intervalo agregándole los extremos. Por lo general, la razón es que  $|f(x)| \rightarrow \infty$  cuando  $x$  tiende a  $a$  o a  $b$ . Pero si  $f$  tiene un único punto crítico en  $(a, b)$ , entonces el criterio de la primera derivada nos dice que  $f(c)$  es el extremo deseado e incluso puede determinar si es un valor máximo o mínimo de  $f(x)$ .

**EJEMPLO 2** Determinar el valor mínimo (absoluto) de

$$f(x) = x + \frac{4}{x} \quad \text{para } 0 < x < +\infty.$$

**Solución** La derivada es

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}. \quad (2)$$

Las raíces de la ecuación

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2} = 0$$

son  $x = -2$  y  $x = 2$ . Pero  $x = -2$  no está en el intervalo abierto  $(0, +\infty)$ , por lo que sólo debemos considerar al punto crítico  $x = 2$ .



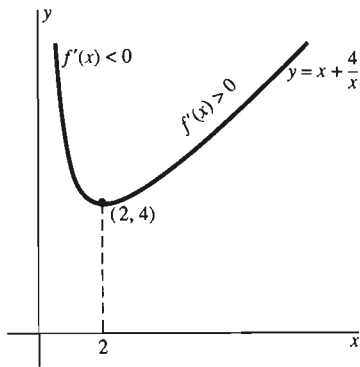


Figura 4.4.17 La gráfica de la función del ejemplo 2

De la ecuación (2) vemos inmediatamente que

- $f'(x) < 0$  a la izquierda de  $x = 2$  (pues  $x^2 < 4$  ahí), mientras que
- $f'(x) > 0$  a la derecha de  $x = 2$  (pues  $x^2 > 4$  ahí).

Por tanto, el criterio de la primera derivada implica que  $f(2) = 4$  es un valor mínimo local. También observamos que  $f(x) \rightarrow +\infty$  cuando  $x \rightarrow 0^+$  o  $x \rightarrow +\infty$ . En consecuencia, la gráfica de  $f$  se parece a la figura 4.4.17, y vemos que  $f(2) = 4$  es el valor mínimo absoluto de  $f(x)$  en todo el intervalo  $(0, +\infty)$ .

**EJEMPLO 3** Debemos fabricar una lata cilíndrica con un volumen de 125 pulgadas cúbicas (cerca de dos litros) cortando la tapa y el fondo de piezas cuadradas de metal y formando su lado curvo al doblar una hoja rectangular de metal que coincida con los extremos. ¿Qué radio  $r$  y altura  $h$  de la lata minimizarán el costo total del material necesario para el rectángulo y los dos cuadrados?

**Solución** Suponemos que las esquinas que se cortan de los dos cuadrados, que se muestran en la figura 4.4.18, se desperdician pero que no hay otro desperdicio. Como muestra la figura, el área de la cantidad total de hoja metálica necesaria es

$$A = 8r^2 + 2\pi rh.$$

El volumen de la lata resultante es

$$V = \pi r^2 h = 125,$$

de modo que  $h = 125/(\pi r^2)$ . Por tanto,  $A$  está dada como función de  $r$  por

$$A(r) = 8r^2 + 2\pi r \cdot \frac{125}{\pi r^2} = 8r^2 + \frac{250}{r}, \quad 0 < r < +\infty.$$

El dominio de  $A$  es el intervalo abierto no acotado  $(0, +\infty)$ , pues  $r$  puede tener cualquier valor positivo, de modo que  $A(r)$  está definida para cada número  $r$  en  $(0, +\infty)$ . Pero  $A(r) \rightarrow +\infty$  cuando  $r \rightarrow 0^+$  y cuando  $r \rightarrow +\infty$ . Así, no podemos usar el método del máximo y el mínimo en un intervalo cerrado. Pero *si podemos* usar el criterio de la primera derivada.

La derivada de  $A(r)$  es

$$\frac{dA}{dr} = 16r - \frac{250}{r^2} = \frac{16}{r^2} \left( r^3 - \frac{125}{8} \right). \quad (3)$$

Así, el único punto crítico en  $(0, +\infty)$  está donde  $r^3 = \frac{125}{8}$ ; es decir,

$$r = \sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{5}{2} = 2.5.$$

De la ecuación (3) vemos inmediatamente que

- $dA/dr < 0$  a la izquierda de  $r = \frac{5}{2}$ , pues  $r^3 < \frac{125}{8}$  ahí, mientras que
- $dA/dr > 0$  a la derecha, donde  $r^3 > \frac{125}{8}$ .

Por tanto, el criterio de la primera derivada implica que un valor mínimo local de  $A(r)$  en  $(0, +\infty)$  es

$$A(2.5) = 8 \cdot (2.5)^2 + \frac{250}{2.5} = 150.$$

Considerando que  $A(r) \rightarrow +\infty$  cuando  $x \rightarrow 0^+$  y cuando  $x \rightarrow +\infty$ , vemos que la gráfica de  $A(r)$  en  $(0, +\infty)$  se ve como la figura 4.4.19. Esto reafirma el hecho de

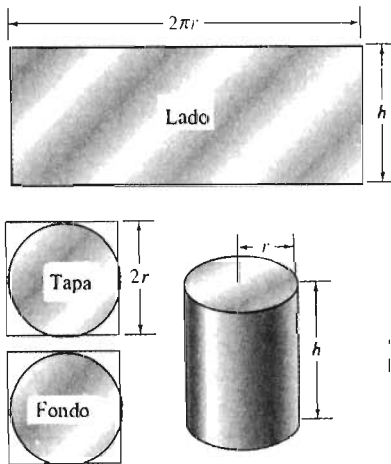


Figura 4.4.18 Las partes para formar la lata cilíndrica del ejemplo 3

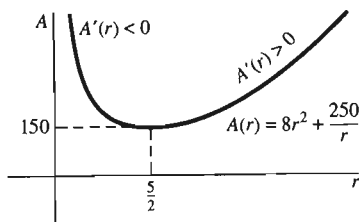


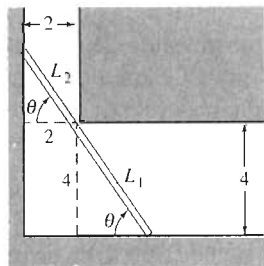
Figura 4.4.19 La gráfica de la función del ejemplo 3

que  $A(2.5) = 150$  es el valor mínimo absoluto de  $A(r)$ . Por tanto, minimizamos la cantidad de material necesario para fabricar una lata con radio  $r = 2.5$  pulgadas y altura

$$h = \frac{125}{\pi(2.5)^2} = \frac{20}{\pi} \approx 6.37 \text{ (pulg.)}$$

La cantidad total de material utilizado es 150 pulgadas cuadradas.

**EJEMPLO 4** Determine la longitud de la varilla más larga que se puede cargar horizontalmente dando la vuelta a la esquina de un pasillo de 2 metros de ancho hacia otro con un ancho de 4 metros.



**Figura 4.4.20** Cargando una varilla al doblar una esquina (ejemplo 4)

**Solución** La longitud deseada es la longitud mínima  $L = L_1 + L_2$  de la varilla cargada al doblar la esquina de la figura 4.4.20. Los triángulos semejantes de la figura implican que

$$\frac{4}{L_1} = \text{sen } \theta \quad \text{y} \quad \frac{2}{L_2} = \text{cos } \theta,$$

de modo que

$$L_1 = 4 \csc \theta \quad \text{y} \quad L_2 = 2 \sec \theta.$$

Por consiguiente, la longitud  $L = L_1 + L_2$  de la varilla está dada como una función de  $\theta$  por

$$L(\theta) = 4 \csc \theta + 2 \sec \theta$$

en el intervalo abierto  $(0, \pi/2)$ . Observe que  $L \rightarrow +\infty$  cuando  $\theta \rightarrow 0^+$  o  $\theta \rightarrow (\pi/2)^-$ . (¿Por qué?)

La derivada de  $L(\theta)$  es

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\theta} &= -4 \csc \theta \cot \theta + 2 \sec \theta \tan \theta \\ &= -\frac{4 \cos \theta}{\text{sen}^2 \theta} + \frac{2 \text{sen } \theta}{\text{cos}^2 \theta} = \frac{2 \text{sen}^3 \theta - 4 \text{cos}^3 \theta}{\text{sen}^2 \theta \text{cos}^2 \theta} \\ &= \frac{(2 \text{cos } \theta)(\tan^3 \theta - 2)}{\text{sen}^2 \theta}. \end{aligned} \quad (4)$$

Por tanto,  $dL/d\theta = 0$  exactamente cuando

$$\tan \theta = \sqrt[3]{2}, \text{ de modo que } \theta \approx 0.90 \text{ (rad).}$$

Ahora, vemos de la ecuación (4) y de la gráfica de la función tangente (figura 4.4.21) que

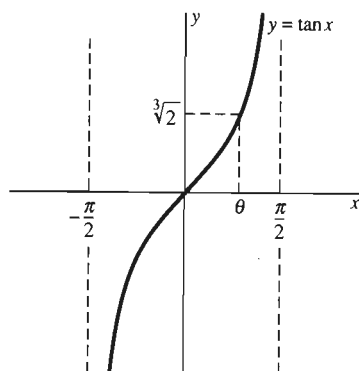
$dL/d\theta < 0$  a la izquierda de  $\theta = 0.90$ , donde  $\tan \theta < \sqrt[3]{2}$ , de modo que  $\tan^3 \theta < 2$ , y

$dL/d\theta > 0$  a la derecha, donde  $\tan^3 \theta > 2$ .

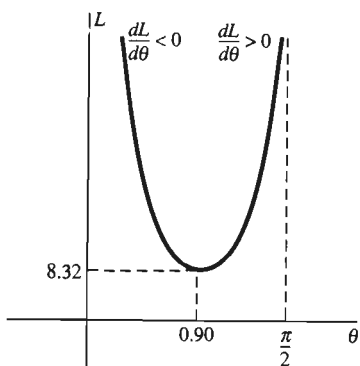
En consecuencia, la gráfica de  $L$  se parece a la figura 4.4.22. Esto significa que el valor mínimo absoluto de  $L$  (y por tanto, la longitud máxima de la varilla en cuestión) es

$$L(0.90) = 4 \csc(0.90) + 2 \sec(0.90),$$

o aproximadamente 8.32 metros.



**Figura 4.4.21**  $y = \tan x$  (ejemplo 4)



**Figura 4.4.22** La gráfica de  $L(\theta)$  (ejemplo 4)

El método que usamos en los ejemplos 2 a 4 para establecer los extremos absolutos ilustra la siguiente versión global del criterio de la primera derivada.

**Teorema 2** *El criterio de la primera derivada para extremos globales*

Suponga que  $f$  está definida en un intervalo abierto  $I$ , acotado o no, y que  $f$  es derivable en todo punto de  $I$ , excepto posiblemente en el punto crítico  $c$  donde  $f$  es continua.

1. Si  $f'(x) < 0$  para toda  $x$  en  $I$  tal que  $x < c$  y  $f'(x) > 0$  para toda  $x$  en  $I$ , tal que  $x > c$ , entonces  $f(c)$  es el valor mínimo absoluto de  $f(x)$  en  $I$ .
2. Si  $f'(x) > 0$  para toda  $x$  en  $I$  tal que  $x < c$  y  $f'(x) < 0$  para toda  $x$  en  $I$ , tal que  $x > c$ , entonces  $f(c)$  es el valor máximo absoluto de  $f(x)$  en  $I$ .

La demostración de este teorema es esencialmente la misma que la del teorema 1.

**OBSERVACIÓN** Cuando la función  $f(x)$  sólo tiene un punto crítico  $c$  en un intervalo abierto, podemos aplicar el teorema 2 para saber si  $f(c)$  es el mínimo absoluto o si es el máximo absoluto de  $f(x)$  en  $I$ . Pero siempre es una buena práctica verificar sus conclusiones trazando la gráfica, como lo hicimos en los ejemplos 2 a 4.

#### 4.4 Problemas

Aplique el criterio de la primera derivada para clasificar cada uno de los puntos críticos de las funciones en los problemas 1 a 16 (local o global, máximo o mínimo, o que no sea extremo). Si tiene una calculadora gráfica o una computadora, trace  $y = f(x)$  para ver si la apariencia de la gráfica coincide con su clasificación de los puntos críticos.

- |                                    |                                |
|------------------------------------|--------------------------------|
| 1. $f(x) = x^2 - 4x + 5$           | 2. $f(x) = 6x - x^2$           |
| 3. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$         | 4. $f(x) = x^3 - 3x + 5$       |
| 5. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$    |                                |
| 6. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 17$ |                                |
| 7. $f(x) = 10 + 60x + 9x^2 - 2x^3$ |                                |
| 8. $f(x) = 27 - x^3$               | 9. $f(x) = x^4 - 2x^2$         |
| 10. $f(x) = 3x^5 - 5x^3$           | 11. $f(x) = x + \frac{1}{x}$   |
| 12. $f(x) = x + \frac{9}{x}$       | 13. $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ |
| 14. $f(x) = x^2 + \frac{8}{x}$     | 15. $f(x) = 3 - x^{2/3}$       |
| 16. $f(x) = 4 + x^{1/3}$           |                                |

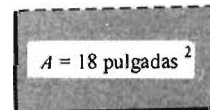
17.  $f(x) = \sin^2 x$ ; (0, 3)
18.  $f(x) = \cos^2 x$ ; (-1, 3)
19.  $f(x) = \sin^3 x$ ; (-3, 3)
20.  $f(x) = \cos^4 x$ ; (0, 4)
21.  $f(x) = \tan^2 x$ ; (-1, 1)
22.  $f(x) = \tan^3 x$ ; (-1, 1)
23.  $f(x) = \sin x - x \cos x$ ; (-5, 5)
24.  $f(x) = \cos x + x \sin x$ ; (-3, 3)
25.  $f(x) = 2 \tan x - \tan^2 x$ ; (0, 1)
26.  $f(x) = (1 - 2 \sin x)^2$ ; (0, 2)

En los problemas 27 a 50, los cuales son problemas de aplicación de máximos y mínimos, use el criterio de la primera derivada para verificar sus respuestas.

27. Determine dos números reales cuya diferencia sea 20 y su producto el mínimo posible.
28. Una larga hoja rectangular de metal servirá para hacer un canal para desagüe del agua de lluvia, doblando dos extremos en ángulos rectos hacia la banda central restante (figura 4.4.23). La sección transversal rectangular del canal debe tener un área de 18 pulgadas cuadradas. Determine el mínimo ancho posible de la banda.

En los problemas 17 a 26, determine y clasifique los puntos críticos de las funciones dadas en el intervalo abierto indicado. Tal vez le sea útil construir una tabla de signos, como en el ejemplo 1.

**Figura 4.4.23** La sección transversal rectangular del problema 28



29. Determine el punto  $(x, y)$  de la recta  $2x + y = 3$  más cercano al punto  $(3, 2)$ .
30. Usted debe construir una caja rectangular cerrada con volumen 576 pulgadas cúbicas y cuyo fondo sea el doble de largo que de ancho (figura 4.4.24). Determine las dimensiones de la caja que minimizarán el área total de su superficie.

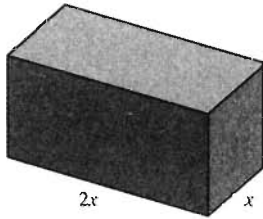


Figura 4.4.24 La caja del problema 30

31. Repita el problema 30, pero use una caja sin tapa con un volumen de 972 pulgadas cúbicas.
32. Un recipiente cilíndrico sin tapa debe tener un volumen de 125 pulgadas cúbicas. ¿Qué dimensiones minimizarán la cantidad total de material utilizado al hacer el recipiente (figura 4.4.25)? Desprecie el espesor del material y el posible desperdicio.

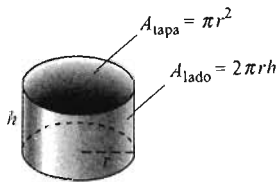


Figura 4.4.25 El cilindro de los problemas 32, 33, 38 y 39

33. Un recipiente cilíndrico sin tapa debe tener un volumen de  $250 \text{ cm}^3$  (figura 4.4.25). El material del fondo del recipiente cuesta 4 centavos el centímetro cuadrado; el del lado curvo cuesta 2 centavos el centímetro cuadrado. ¿Qué dimensiones minimizarán el costo total del recipiente?
34. Determine el punto  $(x, y)$  de la parábola  $y = 4 - x^2$  que esté más cerca del punto  $(3, 4)$ . [Sugerencia: La ecuación cúbica que obtendrá tiene un entero pequeño como una de sus raíces. Sugerencia: Minimice el cuadrado de la distancia.]
35. Muestre que el rectángulo con área 100 y perímetro mínimo es un cuadrado.
36. Muestre que el sólido rectangular con base cuadrada, volumen 1000 y que minimiza el área total de la superficie es un cubo.
37. Una caja con base cuadrada y sin tapa debe tener un volumen de 6.25 pulgadas cúbicas. Desprecie el espesor del material utilizado para crear la caja, y determine las dimensiones que minimizarán la cantidad de material utilizado.
38. Usted necesita una lata de aluminio con la forma de un cilindro circular recto de volumen  $16\pi \text{ cm}^3$  (figura 4.4.25).

¿Qué radio  $r$  y altura  $h$  minimizarían el área total de su superficie (incluyendo el fondo y la tapa)?

39. El metal utilizado para formar la tapa y el fondo de una lata cilíndrica (figura 4.4.25) cuesta 4 centavos por pulgada cuadrada; el metal utilizado para el lado cuesta 2 centavos la pulgada cuadrada. El volumen de la lata debe ser exactamente 100 pulgadas cúbicas. ¿Qué dimensiones de la lata minimizan su costo total?

40. Cada página de un libro contiene 30 pulgadas cuadradas de impresión, y cada página debe tener un margen de dos pulgadas en la parte superior e inferior y márgenes de una pulgada a cada lado. ¿Cuál es el área mínima posible en dicha página?

41. ¿Cuál(es) punto(s) de la curva  $y = x^2$  están más cerca del punto  $(0, 2)$ ? [Sugerencia: El cuadrado de una distancia se minimiza exactamente cuando la misma distancia se minimiza.]

42. ¿Cuál es la longitud del segmento de recta más corto completamente contenido en el primer cuadrante, con extremos en los ejes de coordenadas y tangente a la gráfica de  $y = 1/x$ ?

43. Un rectángulo tiene área  $64 \text{ cm}^2$ . Se desea trazar una línea recta de una esquina del rectángulo al punto medio de uno de los dos lados más distantes. ¿Cuál es la longitud mínima posible de dicha recta?

44. Una lata de aceite debe tener un volumen de 1000 pulgadas cúbicas y la forma de un cilindro con fondo plano pero cubierto por una semiesfera (figura 4.4.26). Desprecie el espesor del material de la lata y determine las dimensiones que minimizarán la cantidad de material necesario para fabricarla.

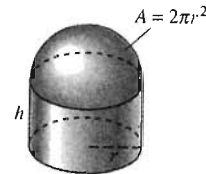


Figura 4.4.26 La lata de aceite del problema 44

45. Determine la longitud  $L$  de la varilla más larga que puede pasar horizontalmente una esquina en un corredor de 2 metros de ancho, hacia otro de 4 metros de ancho. Hágalo *minimizando* la longitud de la varilla de la figura 4.4.27, minimizando el cuadrado de esa longitud como función de  $x$ .

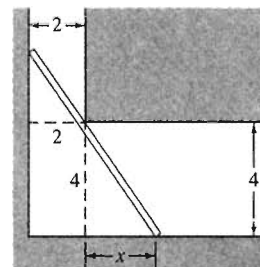


Figura 4.4.27 Cargando una varilla al doblar la esquina (problema 45)

46. Determine la longitud de la escalera más corta que llega desde el piso, sobre un muro de 8 pies de altura, hasta una pared de un edificio, a un pie de distancia del muro. Es decir, minimice la longitud  $L = L_1 + L_2$  que aparece en la figura 4.4.28.

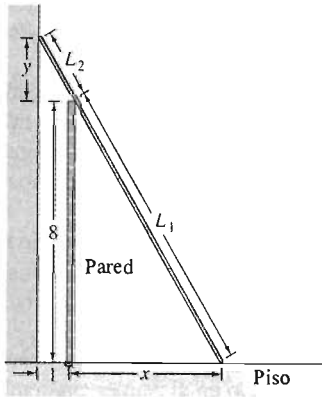


Figura 4.4.28 La escalera del problema 46

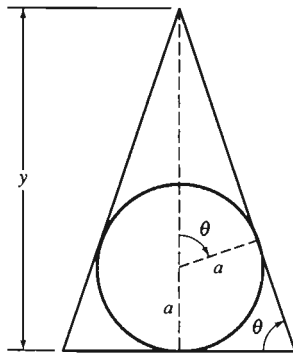


Figura 4.4.29 La sección transversal por el centro de la esfera y la pirámide del problema 47

47. Una esfera con radio fijo  $a$  está inscrita en una pirámide con base cuadrada, de modo que la esfera toca la base de la pirámide y a cada uno de sus cuatro lados. Muestre que el volumen mínimo posible de la pirámide es  $8/\pi$  veces

el volumen de la esfera. [Sugerencia: Use los dos triángulos rectángulos en la figura 4.4.29 para mostrar que el volumen de la pirámide es

$$V = V(y) = \frac{4a^2y^2}{3(y - 2a)}.$$

Esto se puede hacer fácilmente con la ayuda del ángulo  $\theta$  y *sin* la fórmula para  $\tan(\theta/2)$ .] No olvide determinar el dominio de  $V(y)$ .

48. Dos ruidosas discotecas, una de ellas cuatro veces más ruidosa que la otra, están situadas en lados opuestos de una calle de 1000 pies de largo. ¿Cuál es el punto más tranquilo de la calle entre las dos discotecas? La intensidad del ruido en un punto a cierta distancia de la fuente es proporcional al ruido e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente.

49. Suponga que desea fabricar una tienda de campaña con un volumen fijo  $V$  con la forma de una pirámide con base cuadrada y lados congruentes (figura 4.4.30). ¿Cuál altura  $y$  y lado  $2x$  minimizarían el área total de su superficie (incluyendo el piso)?

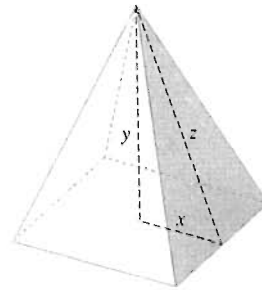


Figura 4.4.30 La tienda del problema 49

50. Suponga que la distancia del edificio a la pared del problema 46 es  $a$  y que la altura de la pared es  $b$ . Muestre que la longitud mínima de la escalera es

$$L_{\min} = (a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}.$$

## 4.4 Proyecto

Los problemas en este proyecto requieren el uso de una calculadora gráfica o una computadora con una utilidad de graficación.

La figura 4.4.31 muestra una caja rectangular con base cuadrada. Suponga que su volumen  $V = x^2y$  debe ser 1000 pulgadas cúbicas. Queremos fabricar esta caja con un costo mínimo. Cada una de las seis caras cuesta  $a$  centavos por pulgada cuadrada y el pegado de cada una de las 12 aristas cuesta  $b$  centavos por pulgada.

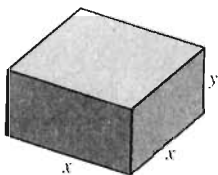


Figura 4.4.31 Una caja con base cuadrada

1. Muestre primero que el costo total  $C$  está dado como una función de  $x$  mediante

$$C(x) = 2ax^2 + 8bx + \frac{4000a}{x} + \frac{4000b}{x^2}. \quad (5)$$

- Suponga que  $a = b = 1$ . Determine las dimensiones de la caja de costo mínimo haciendo una aproximación a la solución adecuada de  $C'(x) = 0$ .
- Repita el problema 2, con  $a$  y  $b$  como los últimos dos dígitos distintos de cero en su clave de alumno.
- Después de hacer los problemas 2 y 3, le parecerá que algo huele mal. ¿Es posible que la forma de la caja óptima no dependa de los valores de  $a$  y  $b$ ? Muestre que la ecuación  $C'(x) = 0$  conduce a la ecuación de cuarto grado

$$ax^4 + 2bx^3 - 1000ax - 2000b = 0. \quad (6)$$

Despeje  $x$  de esta ecuación usando un sistema de álgebra simbólica, como *Derive*, *Maple* o *Mathematica*, si puede utilizar alguno de éstos. En caso contrario, podrá resolver la ecuación (6) a mano; si comienza factorizando  $x^3$  de los dos primeros términos y 1000 de los últimos dos.

5. Suponga que el fondo y la tapa de la caja de la figura 4.4.31 cuestan  $p$  centavos por pulgada cuadrada y que los cuatro lados cuestan  $q$  centavos por pulgada cuadrada (las 12 aristas siguen costando  $b$  centavos por pulgada). Por ejemplo, sean  $p$ ,  $q$  y  $b$  los últimos tres dígitos distintos de cero en su clave de alumno. Determine entonces gráficamente las dimensiones de la caja con volumen 1000 pulgadas cúbicas y costo mínimo.

## 4.5 Graficación sencilla de curvas

Podemos construir una gráfica con una precisión razonable de la función polinomial

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (1)$$

reuniendo la siguiente información.

- Los puntos críticos de  $f$** ; es decir, los puntos de la gráfica donde la recta tangente es horizontal, de modo que  $f'(x) = 0$ .
- El comportamiento creciente/decreciente de  $f$** ; es decir, los intervalos en donde  $f$  es creciente y aquellos donde  $f$  es decreciente.
- El comportamiento de  $f$  "en" infinito** (es decir, el comportamiento de  $f(x)$  cuando  $x \rightarrow +\infty$  y cuando  $x \rightarrow -\infty$ ).

La misma información es con frecuencia la clave para comprender la estructura de una gráfica que ha sido graficada mediante una calculadora o una computadora.

Para realizar la tarea del punto 3, escribimos  $f(x)$  en la forma

$$f(x) = x^n \left( a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right).$$

Así, concluimos que el comportamiento de  $f(x)$  cuando  $x \rightarrow \pm\infty$  es casi el mismo que el de su *término principal*  $a_n x^n$ , pues todos los términos que tienen potencias de  $x$  en el denominador tienden a cero cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ . En particular, si  $a_n > 0$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty, \quad (2)$$

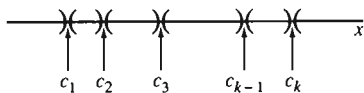
lo que significa que  $f(x)$  aumenta sin límite cuando  $x \rightarrow +\infty$ . Además,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ es par;} \\ -\infty & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \quad (3)$$

Si  $a_n < 0$ , sólo invierta los signos de los lados derechos en las ecuaciones (2) y (3).

Todo polinomio, como  $f(x)$  en la ecuación (1), es derivable en todo punto. Así, los puntos críticos de  $f(x)$  son las raíces de la ecuación polinomial  $f'(x) = 0$ ; es decir, soluciones de

$$na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2a_2 x + a_1 = 0. \quad (4)$$



**Figura 4.5.1** Las raíces de  $f'(x)$  separan el eje  $x$  en intervalos donde  $f'(x)$  no cambia de signo

A veces podemos determinar todas las soluciones (reales) de tal ecuación mediante factorización, pero otras veces debemos recurrir a métodos numéricos con el apoyo de una calculadora o una computadora.

Pero supongamos que hemos determinado de alguna forma *todas* las soluciones (reales)  $c_1, c_2, \dots, c_k$  de la ecuación (4). Entonces, estas soluciones son los puntos críticos de  $f$ . Si los ordenamos en forma creciente, como en la figura 4.5.1, éstos dividen el eje  $x$  en el número finito de intervalos abiertos

$$(-\infty, c_1), (c_1, c_2), (c_2, c_3), \dots, (c_{k-1}, c_k), (c_k, +\infty)$$

que también aparecen en la figura. La propiedad del valor intermedio aplicada a  $f'(x)$  nos dice que  $f'(x)$  sólo puede cambiar de signo en los puntos críticos de  $f$ , por lo que  $f'(x)$  sólo tiene un signo en cada uno de estos intervalos abiertos. Es típico que  $f'(x)$  sea negativa en algunos intervalos y positiva en otros. Además, es más fácil determinar el signo de  $f'(x)$  en cualquiera de estos intervalos  $I$ : sólo necesitamos sustituir cualquier número conveniente de  $I$  en  $f'(x)$ .

Una vez que conocemos el signo de  $f'(x)$  en cada uno de estos intervalos, sabemos dónde es creciente  $f$  y dónde es decreciente. Aplicamos entonces el criterio de la primera derivada para determinar cuáles de los valores críticos son máximos locales, cuáles son mínimos locales y cuáles no son ni unos ni otros (puntos donde la recta tangente es horizontal). Con esta información, el conocimiento del comportamiento de  $f$  cuando  $x \rightarrow \pm\infty$  y el hecho de que  $f$  sea continua, podemos trazar su gráfica. Localizamos los puntos críticos  $(c_i, f(c_i))$  y los unimos mediante una curva suave que sea consistente con nuestros demás datos.

También puede ser útil localizar la intersección con el eje  $y$  ( $0, f(0)$ ) y las intersecciones con el eje  $x$  que sean fáciles de determinar. Pero le recomendamos (hasta ver los puntos de inflexión que presentamos en la sección 4.6) que *sólo* localice estos puntos (puntos críticos e intersecciones con los ejes) y se base en el comportamiento creciente y decreciente de  $f$ .

**EJEMPLO 1** Trace la gráfica de  $f(x) = x^3 - 27x$ .

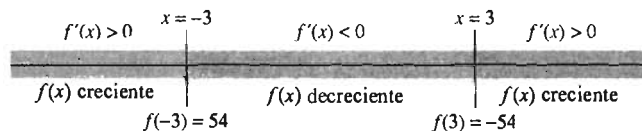
**Solución** Como el término principal es  $x^3$ , vemos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Además, como

$$f'(x) = 3x^2 - 27 = 3(x+3)(x-3), \quad (5)$$

vemos que los puntos críticos donde  $f'(x) = 0$  son  $x = -3$  y  $x = 3$ . Los puntos correspondientes sobre la gráfica de  $f$  son  $(-3, 54)$  y  $(3, -54)$ . Los puntos críticos separan al eje  $x$  en los tres intervalos abiertos  $(-\infty, -3)$ ,  $(-3, 3)$  y  $(3, +\infty)$  (figura



**Figura 4.5.2** Los tres intervalos abiertos del ejemplo 1

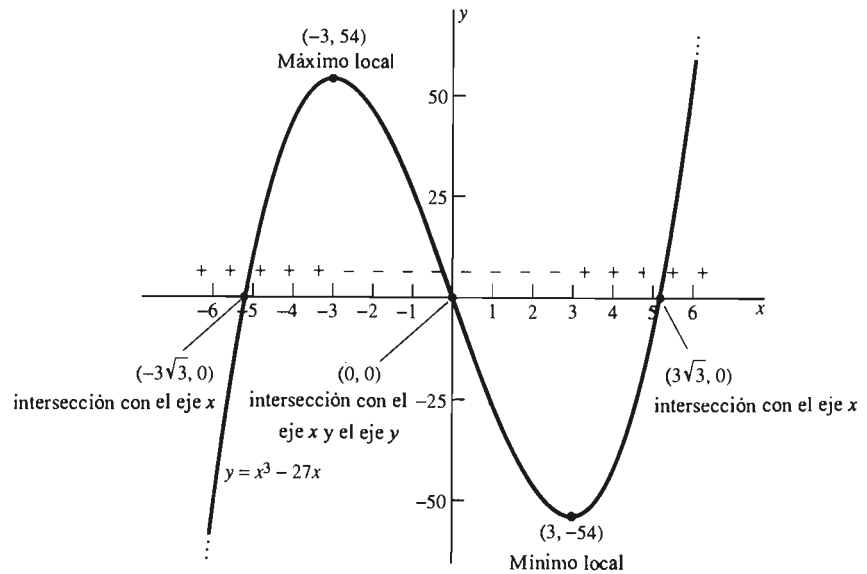


Figura 4.5.3 Gráfica de la función del ejemplo 1

4.5.2). Para determinar el comportamiento creciente o decreciente de  $f$  en estos intervalos, sustituimos un número de cada intervalo en la derivada de la ecuación (5):

En  $(-\infty, -3)$ :  $f'(-4) = (3)(-1)(-7) = 21 > 0$ ;  $f$  es creciente;

En  $(-3, 3)$ :  $f'(0) = (3)(3)(-3) = -27 < 0$ ;  $f$  es decreciente;

En  $(3, +\infty)$ :  $f'(4) = (3)(7)(1) = +21 > 0$ ;  $f$  es creciente.

Localizamos los puntos críticos y las intersecciones con los ejes  $(0, 0)$ ,  $(3\sqrt{3}, 0)$  y  $(-3\sqrt{3}, 0)$ . Utilizamos después la información del comportamiento creciente o decreciente de  $f$  para unirlos mediante una curva suave. Recordemos que existen tangentes horizontales en los dos puntos críticos para obtener la gráfica que se muestra en la figura 4.5.3.

En la figura usamos los signos más y menos para indicar el signo de  $f'(x)$  en cada intervalo. Esto permite ver claramente que  $(-3, 54)$  es un máximo local y que  $(3, -54)$  es un mínimo local. Los límites que determinamos al principio muestran que ninguno de ellos es global.

**EJEMPLO 2** Trace la gráfica de  $f(x) = 8x^5 - 5x^4 - 20x^3$ .

**Solución** Como

$$f'(x) = 40x^4 - 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x + 1)(2x - 3), \quad (6)$$

los puntos críticos donde  $f'(x) = 0$  son  $x = -1$ ,  $x = 0$  y  $x = \frac{3}{2}$ . Estos tres puntos críticos separan el eje  $x$  en los cuatro intervalos abiertos que se muestran en la figura 4.5.4. Esta vez, vamos a determinar el comportamiento creciente o decreciente de  $f$

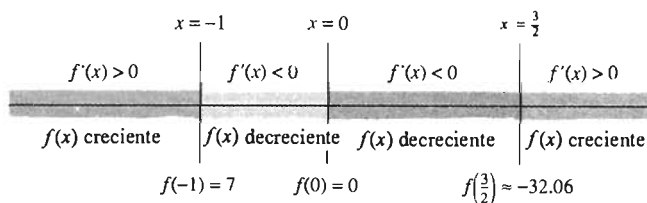


Figura 4.5.4 Los cuatro intervalos abiertos del ejemplo 2



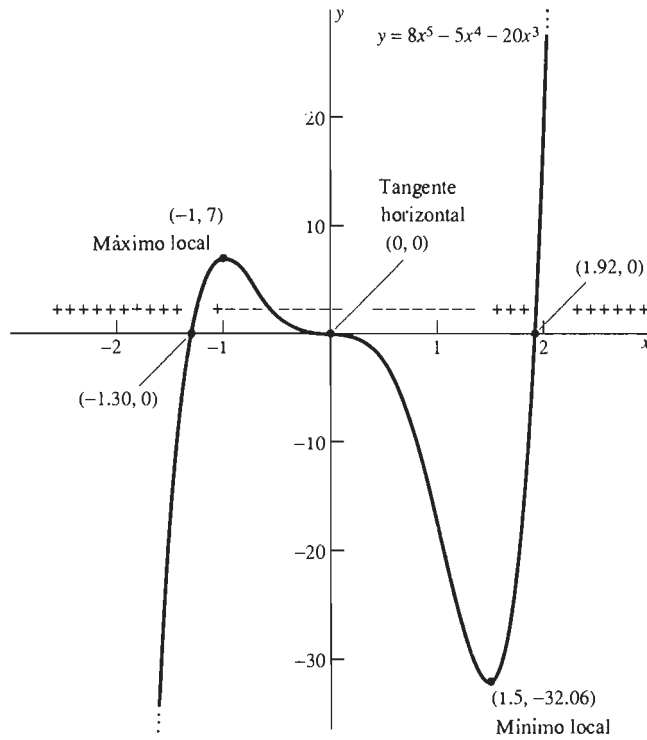


Figura 4.5.5 La gráfica de la función del ejemplo 2

registrando los signos de los factores en la ecuación (6) en cada uno de los subintervalos que se muestran en la figura 4.5.4. De esta forma, obtenemos la siguiente tabla:

Intervalo	$x + 1$	$20x^2$	$2x - 3$	$f'(x)$	$f$
$(-\infty, -1)$	Neg.	Pos.	Neg.	Pos.	Creciente
$(-1, 0)$	Pos.	Pos.	Neg.	Neg.	Decreciente
$(0, \frac{3}{2})$	Pos.	Pos.	Neg.	Neg.	Decreciente
$(\frac{3}{2}, +\infty)$	Pos.	Pos.	Pos.	Pos.	Creciente

Los puntos de la gráfica que corresponden a los puntos críticos son  $(-1, 7)$ ,  $(0, 0)$  y  $(1.5, -32.0625)$ .

Escribimos  $f(x)$  en la forma

$$f(x) = x^3(8x^2 - 5x - 20)$$

para usar la fórmula cuadrática y determinar las intersecciones con el eje  $x$ ; éstas son  $(-1.30, 0)$ ,  $(1.92, 0)$  (las abscisas sólo son aproximaciones) y el origen  $(0, 0)$ . Este último es también la intersección con el eje  $y$ . Aplicamos el criterio de la primera derivada para el comportamiento creciente o decreciente que se muestra en la tabla. Se sigue que  $(-1, 7)$  es un máximo local  $(1.5, -32.0625)$  es un mínimo local y  $(0, 0)$  no es máximo ni mínimo. La gráfica se parece a la que se muestra en la figura 4.5.5.

En el ejemplo 3, la función no es un polinomio. Sin embargo, los métodos de esta sección son suficientes para obtener la gráfica.

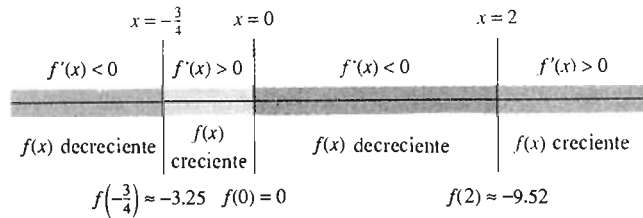
**EJEMPLO 3** Trace la gráfica de

$$f(x) = x^{2/3}(x^2 - 2x - 6) = x^{8/3} - 2x^{5/3} - 6x^{2/3}.$$

**Solución** La derivada de  $f$  es

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{8}{3}x^{5/3} - \frac{10}{3}x^{2/3} - \frac{12}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3}x^{-1/3}(4x^2 - 5x - 6) \\ &= \frac{2(4x + 3)(x - 2)}{3x^{1/3}} \end{aligned} \quad (7)$$

La recta tangente es horizontal en los dos puntos críticos  $x = -\frac{3}{4}$  y  $x = 2$ , donde el numerador de la última fracción de la ecuación (7) se anula (y el denominador no). Además, debido a la presencia del término  $x^{1/3}$  en el denominador,  $|f'(x)| \rightarrow +\infty$  cuando  $x \rightarrow 0$ . Así,  $x = 0$  (un punto crítico pues  $f$  no es derivable en él) es un punto donde la recta tangente es vertical. Estos tres puntos críticos separan al eje  $x$  en los cuatro intervalos abiertos que se muestran en la figura 4.5.6. Determinamos el comportamiento creciente o decreciente de  $f$  sustituyendo un número de cada intervalo en la ecuación (7).



**Figura 4.5.6** Los cuatro intervalos abiertos del ejemplo 3

$$\text{En } (-\infty, -\frac{3}{4}): f'(-1) = \frac{2 \cdot (-1)(-3)}{3 \cdot (-1)} < 0; \quad f \text{ es decreciente};$$

$$\text{En } (-\frac{3}{4}, 0): f'(-\frac{1}{2}) = \frac{2 \cdot (+1)(-\frac{5}{2})}{3 \cdot (-\frac{1}{2})^{1/3}} > 0; \quad f \text{ es creciente};$$

$$\text{En } (0, 2): f'(1) = \frac{2 \cdot (+7)(-1)}{3 \cdot (+1)} < 0; \quad f \text{ es decreciente};$$

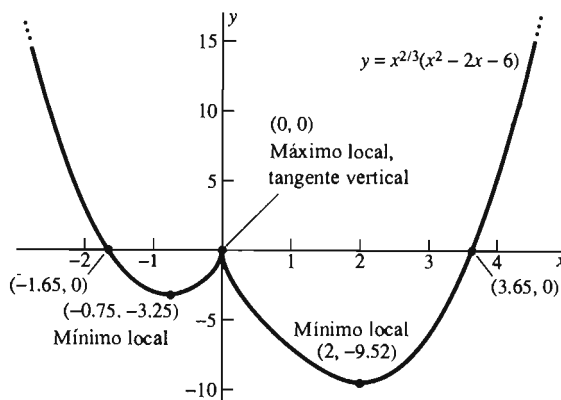
$$\text{En } (2, +\infty): f'(3) = \frac{2 \cdot (+15)(+1)}{3 \cdot (+3)^{1/3}} > 0; \quad f \text{ es creciente}.$$

Los tres puntos críticos  $x = -\frac{3}{4}$ ,  $x = 0$ , y  $x = 2$  dan los puntos  $(-0.75, -3.25)$ ,  $(0, 0)$  y  $(2, -9.52)$  sobre la gráfica (usando aproximaciones en los casos adecuados).

El criterio de la primera derivada nos muestra ahora mínimos locales en  $(-0.75, -3.25)$  y  $(2, -9.52)$ , así como un máximo local en  $(0, 0)$ . Aunque  $f'(0)$  no existe,  $f$  es continua en  $x = 0$ , por lo que es continua en todo punto.

Usamos la fórmula cuadrática para determinar las intersecciones con el eje  $x$ . Además del origen, éstos aparecen cuando  $x^2 - 2x - 6 = 0$ , por lo que están localizados en  $(1 - \sqrt{7}, 0)$  y en  $(1 + \sqrt{7}, 0)$ . Después localizamos las aproximaciones  $(-1.65, 0)$  y  $(3.65, 0)$ . Por último, observamos que  $f(x) \rightarrow +\infty$  cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ . Así, la gráfica tiene la forma que se muestra en la figura 4.5.7.

**Figura 4.5.7** La técnica es eficaz para las funciones no polinomiales, como en el ejemplo 3



## TRAZO DE CURVAS Y SOLUCIÓN DE ECUACIONES

Una aplicación importante de las técnicas para el trazo de curvas es la solución de una ecuación de la forma

$$f(x) = 0. \quad (8)$$

Las soluciones reales (en contraposición a las soluciones complejas) de esta ecuación son simplemente las intersecciones de la gráfica de  $y = f(x)$  con el eje  $x$ . Por tanto, al trazar esta gráfica con una precisión razonable (ya sea “a mano” o con una calculadora o una computadora) podemos extraer la información acerca del número de soluciones reales de la ecuación (8) así como de su posición aproximada.

Por ejemplo, las figuras 4.5.8 a 4.5.10 que aparecen en el lado izquierdo muestran las gráficas de los polinomios cúbicos de las ecuaciones

$$x^3 - 3x + 1 = 0, \quad (9)$$

$$x^3 - 3x + 2 = 0, \quad (10)$$

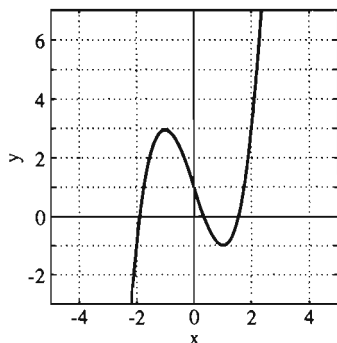
$$x^3 - 3x + 3 = 0. \quad (11)$$

Observe que los polinomios sólo difieren en sus términos constantes.

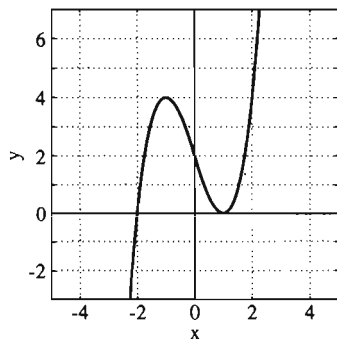
Es evidente en la figura 4.5.8 que la ecuación (9) tiene tres soluciones reales, una en cada uno de los intervalos  $[-2, -1]$ ,  $[0, 1]$  y  $[1, 2]$ . Estas soluciones se podrían aproximar gráficamente mediante una aproximación sucesiva o de manera analítica mediante el método de Newton. (Incluso existen fórmulas, las *fórmulas de Cardan*, para obtener la solución exacta de una ecuación cúbica arbitraria, pero son muy complicadas y rara vez se utilizan.)

En la figura 4.5.9 se aprecia que la ecuación (10) tiene dos soluciones reales,  $x = 1$  y  $x = -2$ . Una vez que verificamos que  $x = 1$  es una solución, el *teorema del factor* de álgebra implica que  $x - 1$  es un factor de  $x^3 - 3x + 2$ . El otro factor se puede determinar mediante una división:

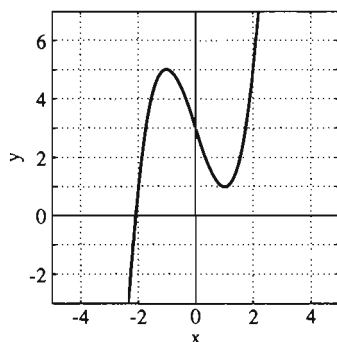
$$\begin{array}{r} x^2 + x - 2 \\ x - 1 \overline{) x^3 - 3x + 2} \\ \underline{x^3 - x^2} \phantom{+ 2} \\ x^2 - 3x \phantom{+ 2} \\ \underline{x^2 - x} \phantom{+ 2} \\ -2x + 2 \\ \underline{-2x + 2} \\ 0 \end{array}$$



**Figura 4.5.8**  
 $y = x^3 - 3x + 1$



**Figura 4.5.9**  
 $y = x^3 - 3x + 2$



**Figura 4.5.10**  
 $y = x^3 - 3x + 3$

Así, vemos que

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2) = (x - 1)^2(x + 2).$$

En consecuencia,  $x = 1$  es una "raíz doble" y  $x = -2$  es una "raíz simple" de la ecuación (10), obteniendo entonces las tres soluciones que una ecuación cúbica "debería tener".

En la figura 4.5.10 vemos que la ecuación (11) sólo tiene una solución real, dada aproximadamente por  $x \approx -2.1038$ . En el problema 45 le pedimos que divida  $x^3 - 3x + 3$  entre  $x + 2.1038$  para obtener una factorización de la forma

$$x^3 - 3x + 3 \approx (x + 2.1038)(x^2 + bx + c). \quad (12)$$

La ecuación cuadrática  $x^2 + bx + c = 0$  tiene dos soluciones complejas conjugadas, que son las otras dos soluciones de la ecuación (11).

## 4.5 Problemas

En los problemas 1 a 4, use el comportamiento "al infinito" para relacionar la función dada con su gráfica en la figura 4.5.11.

1.  $f(x) = x^3 - 5x + 2$
2.  $f(x) = x^4 - 3x^2 + x - 2$
3.  $f(x) = -\frac{1}{3}x^5 - 3x^2 + 3x + 2$
4.  $f(x) = -\frac{1}{3}x^6 + 2x^5 - 3x^4 + \frac{1}{2}x + 5$

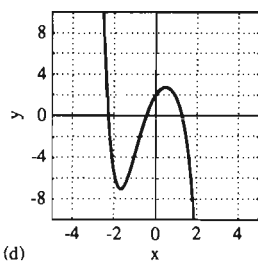
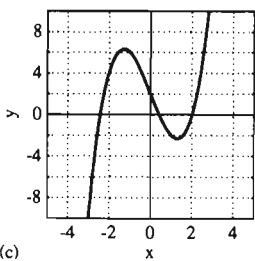
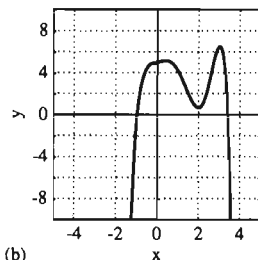
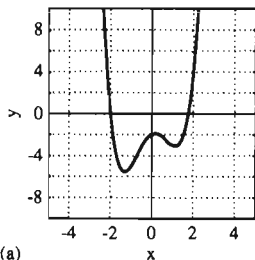


Figura 4.5.11 Problemas 1 a 4

En los problemas 5 a 38, determine los intervalos en donde la función  $f$  es creciente y aquellos donde es decreciente. Trace la gráfica de  $y = f(x)$  y etiquete los máximos y mínimos locales.

5.  $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$
6.  $f(x) = 5 - 8x - 2x^2$
7.  $f(x) = x^3 - 12x$

8.  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$
9.  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$
10.  $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$
11.  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 9x$
12.  $f(x) = x^3 - 27x$
13.  $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)^2$
14.  $f(x) = (x - 2)^2(2x + 3)^2$
15.  $f(x) = 3\sqrt{x} - x\sqrt{x}$
16.  $f(x) = x^{2/3}(5 - x)$
17.  $f(x) = 3x^5 - 5x^3$
18.  $f(x) = x^4 + 4x^3$
19.  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$
20.  $f(x) = \frac{1}{x}$
21.  $f(x) = 2x^2 - 3x - 9$
22.  $f(x) = 6 - 5x - 6x^2$
23.  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$
24.  $f(x) = x^3 + 4x$
25.  $f(x) = 50x^3 - 105x^2 + 72x$
26.  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
27.  $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 8$
28.  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$
29.  $f(x) = 3x^5 - 20x^3$
30.  $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x$
31.  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x$
32.  $f(x) = x^4 - 4x^3$
33.  $f(x) = 8x^4 - x^8$
34.  $f(x) = 1 - x^{1/3}$
35.  $f(x) = x^{1/3}(4 - x)$

36.  $f(x) = x^{2/3}(x^2 - 16)$

37.  $f(x) = x(x - 1)^{2/3}$

38.  $f(x) = x^{1/3}(2 - x)^{2/3}$

En los problemas 39 a 44, se dan los valores de la función  $f(x)$  en sus puntos críticos, junto con la gráfica  $y = f'(x)$  de su derivada. Use esta información para construir la gráfica  $y = f(x)$  de la función.

39.  $f(-3) = 78, f(2) = -47$ ; Fig. 4.5.12

40.  $f(-2) = 106, f(4) = -110$ ; Fig. 4.5.13

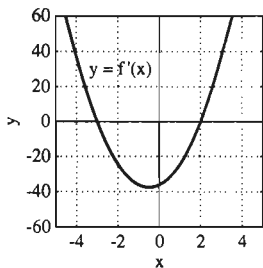


Figura 4.5.12  $y = f'(x)$  del problema 39

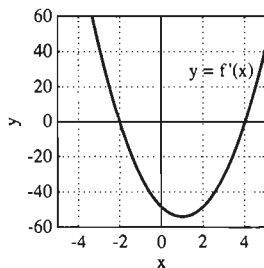


Figura 4.5.13  $y = f'(x)$  del problema 40

41.  $f(-3) = -66, f(2) = 59$ ; Fig. 4.5.14

42.  $f(-3) = -130, f(0) = 5, f(1) = -2$ ; Fig. 4.5.15

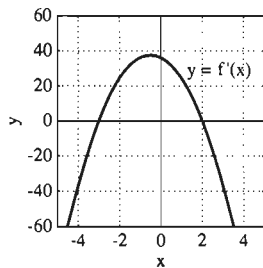


Figura 4.5.14  $y = f'(x)$  del problema 41

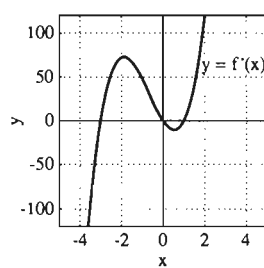


Figura 4.5.15  $y = f'(x)$  del problema 42

43.  $f(-2) = -107, f(1) = 82, f(3) = 18$ ; Fig. 4.5.16

44.  $f(-3) = 5336, f(0) = 17, f(2) = 961, f(4) = -495$ ; Fig. 4.5.17

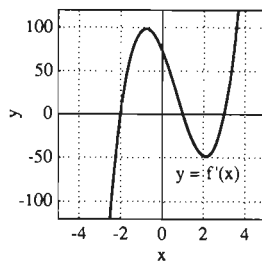


Figura 4.5.16  $y = f'(x)$  del problema 43

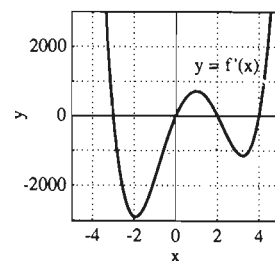


Figura 4.5.17  $y = f'(x)$  del problema 44

45. (a) Verifique la solución aproximada  $x \approx -2.1038$  de la ecuación (11). (b) Divida  $x^3 - 3x + 3$  entre  $x + 2.1038$  para obtener la factorización de la ecuación (12). (c) Use el cociente de la parte (b) para determinar (aproximadamente) la pareja de complejos conjugados de soluciones de la ecuación (11).

46. Explique por qué las figuras 4.5.8 y 4.5.9 implican que la ecuación cúbica  $x^3 - 3x + q = 0$  tiene exactamente una solución real si  $|q| > 2$  pero tiene tres soluciones reales distintas si  $|q| < 2$ . ¿Qué ocurre si  $q = -2$ ?

47. La gráfica generada por computadora de la figura 4.5.18 muestra la apariencia de la curva  $y = [x(x-1)(2x-1)]^2$  en alguna escala "razonable" con unidades enteras de medida en el eje  $y$ . Use los métodos de esta sección para mostrar que, en realidad, la gráfica tiene la apariencia de la figura 4.5.19 (los valores en el eje  $y$  están en milésimos), con puntos críticos en  $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}(3 \pm \sqrt{3})$  y 1.

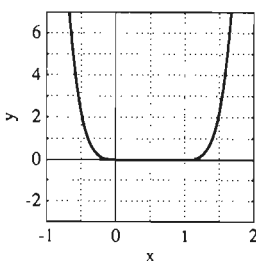


Figura 4.5.18 La gráfica  $y = [x(x-1)(2x-1)]^2$  en una escala "razonable" (problema 47)

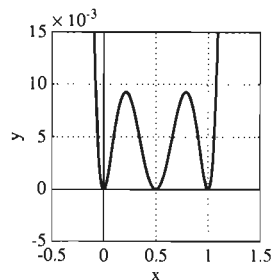


Figura 4.5.19 La gráfica  $y = [x(x-1)(2x-1)]^2$  en una escala más fina:  $-0.005 \leq y \leq 0.015$  (problema 47)

## 4.5 Proyectos

Estos proyectos requieren el uso de una calculadora gráfica o una computadora con una utilidad de graficación.

**PROYECTO A** Muestre primero que, en una escala "razonable" con unidades enteras de medida en el eje  $y$ , la gráfica del polinomio

$$f(x) = \left[\frac{1}{8}x(9x - 5)(x - 1)\right]^4$$

se parece mucho a la figura 4.5.18, con una sección aparentemente plana. Obtenga después una imagen que revele la verdadera estructura de la gráfica, como en la figura 4.5.19. Por último, determine (de manera gráfica u otra) las coordenadas aproximadas de los puntos máximos y mínimos locales de la gráfica  $y = f(x)$ .

**PROYECTO B** Las ecuaciones cuárticas (de cuarto grado)

$$f(x) = x^4 - 55x^3 + 500x^2 + 11,000x - 110,000 = 0 \quad (13)$$

y

$$g(x) = x^4 - 55x^3 + 550x^2 + 11,000x - 110,000 = 0 \quad (14)$$

sólo difieren en un dígito en el coeficiente de  $x^2$ . Sin embargo, por más pequeña que parezca esta diferencia, muestre de manera gráfica que la ecuación (13) tiene cuatro soluciones reales distintas, pero que la ecuación (14) sólo tiene dos. Determine (de manera aproximada) los puntos máximos y mínimos locales de cada gráfica.

## 4.6 Derivadas de orden superior y concavidad

En la sección 4.3 vimos que el signo de la primera derivada  $f'$  indica si la gráfica de la función  $f$  asciende o desciende. Aquí veremos que el signo de la *segunda* derivada de  $f$ , la derivada de  $f'$ , indica de qué forma se *dobra* la curva  $y = f(x)$ , hacia arriba o hacia abajo.

### DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

La **segunda derivada** de  $f$  se denota con  $f''$  y su valor en  $x$  es

$$f''(x) = D(f'(x)) = D(Df(x)) = D^2f(x).$$

(El superíndice 2 no es un exponente, sino sólo una indicación de que la derivada es la segunda.) La derivada de  $f''$  es la **tercera derivada**  $f'''$  de  $f$ , con

$$f'''(x) = D(f''(x)) = D(D^2f(x)) = D^3f(x).$$

La tercera derivada también se denota con  $f^{(3)}$ . De manera general, el resultado de comenzar con la función  $f$  y derivar  $n$  veces sucesivas es la  **$n$ -ésima derivada**  $f^{(n)}$  de  $f$ , con  $f^{(n)}(x) = D^n f(x)$ .

Si  $y = f(x)$ , entonces las primeras  $n$  derivadas se escriben en notación de operadores como

$$D_x y, D_x^2 y, D_x^3 y, \dots, D_x^n y,$$

en notación de variables dependientes e independientes como

$$y'(x), y''(x), y'''(x), \dots, y^{(n)}(x),$$

o en notación diferencial como

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}.$$

La historia del curioso uso de los superíndices en la notación diferencial para las derivadas de orden superior está relacionada con la metamorfosis

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) \rightarrow \frac{d}{dx} \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{(d)^2y}{(dx)^2} \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}.$$

**EJEMPLO 1** Determinar las primeras cuatro derivadas de

$$f(x) = 2x^3 + \frac{1}{x^2} + 16x^{7/2}.$$

**Solución** Escribimos

$$f(x) = 2x^3 + x^{-2} + 16x^{7/2}. \quad \text{Entonces}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 2x^{-3} + 56x^{5/2} = 6x^2 - \frac{2}{x^3} + 56x^{5/2},$$

$$f''(x) = 12x + 6x^{-4} + 140x^{3/2} = 12x + \frac{6}{x^4} + 140x^{3/2},$$

$$f'''(x) = 12 - 24x^{-5} + 210x^{1/2} = 12 - \frac{24}{x^5} + 210\sqrt{x} \quad \text{y}$$

$$f^{(4)}(x) = 120x^{-6} + 105x^{-1/2} = \frac{120}{x^6} + \frac{105}{\sqrt{x}}.$$

El ejemplo 2 muestra la forma de determinar las derivadas de orden superior de las funciones definidas de manera implícita.

**EJEMPLO 2** Determinar la segunda derivada  $y''(x)$  de la función  $y = y(x)$  definida de manera implícita por la ecuación

$$x^2 - xy + y^2 = 9.$$

**Solución** Una primera derivación implícita de la ecuación dada *con respecto de x* da como resultado

$$2x - y - x \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} = 0,$$

de modo que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x}{2y - x}.$$

Obtenemos  $d^2y/dx^2$  derivando de manera implícita, de nuevo con respecto de  $x$ , usando la regla del cociente. Después de esto, sustituimos la expresión recién determinada para  $dy/dx$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= D_x \left( \frac{y - 2x}{2y - x} \right) = \frac{\left( \frac{dy}{dx} - 2 \right) (2y - x) - (y - 2x) \left( 2 \frac{dy}{dx} - 1 \right)}{(2y - x)^2} \\ &= \frac{3x \frac{dy}{dx} - 3y}{(2y - x)^2} = \frac{3x \frac{y - 2x}{2y - x} - 3y}{(2y - x)^2}. \end{aligned}$$

Así

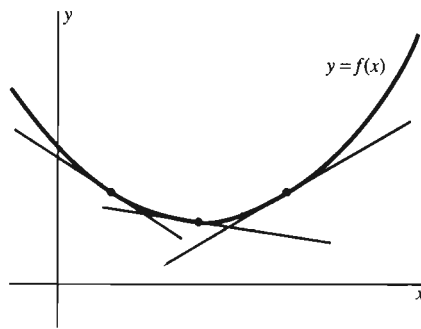
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{6(x^2 - xy + y^2)}{(2y - x)^3}.$$

Ahora sustituimos la ecuación original,  $x^2 - xy + y^2 = 9$ , para muestra simplificación final:

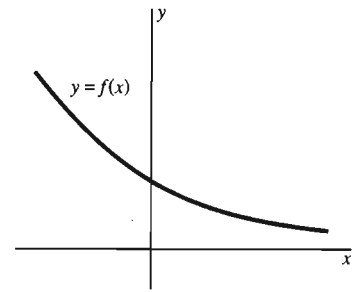
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{54}{(2y - x)^3}.$$

### EL CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

Ahora estudiaremos el significado del *signo* de la segunda derivada. Si  $f''(x) > 0$  en el intervalo  $I$ , entonces la primera derivada  $f'$  es una función creciente en  $I$ , porque su derivada  $f''(x)$  es positiva. Así, al recorrer la gráfica  $y=f(x)$  de izquierda a derecha, vemos que la recta tangente gira en sentido contrario a las manecillas del reloj (figura 4.6.1). Describimos esta situación diciendo que la curva  $y=f(x)$  se **dobra hacia arriba**. Observe que una curva se puede doblar hacia arriba sin ascender, como en la figura 4.6.2.

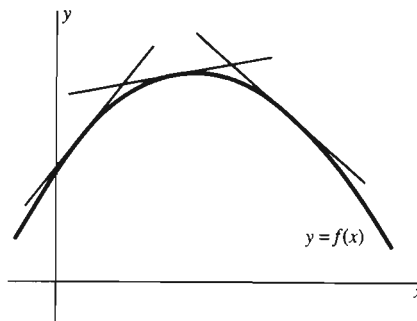


**Figura 4.6.1** La gráfica se dobla hacia arriba (cóncava hacia arriba)

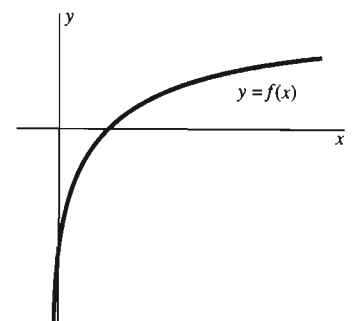


**Figura 4.6.2** Otra gráfica que se dobla hacia arriba (cóncava hacia arriba)

Si  $f''(x) < 0$  en el intervalo  $I$ , entonces la primera derivada  $f'$  es decreciente en  $I$ , entonces la recta tangente gira en el sentido de las manecillas del reloj conforme  $x$  crece. En este caso, decimos que la curva  $y=f(x)$  se **dobra hacia abajo**. Las figuras 4.6.3 y 4.6.4 muestran dos formas en que esto ocurre.



**Figura 4.6.3** Una gráfica que se dobla hacia abajo (cóncava hacia abajo)



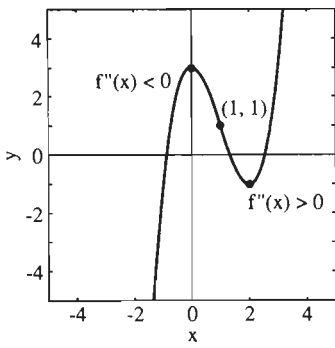
**Figura 4.6.4** Otra gráfica que se dobla hacia abajo (cóncava hacia abajo)

$f''(x)$	$y = f(x)$
Negativo	Se dobla hacia abajo
Positivo	Se dobla hacia arriba

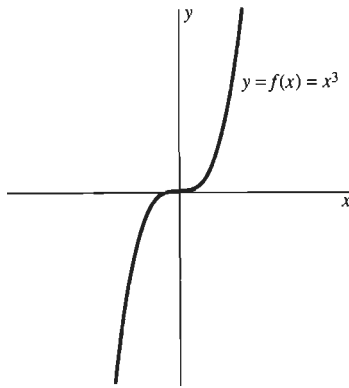
**Figura 4.6.5** Significado del signo de  $f''(x)$  en un intervalo

Los dos casos se resumen en la tabla de la figura 4.6.5.





**Figura 4.6.6** La gráfica de  $y = x^3 - 3x^2 + 3$  (ejemplo 3)



**Figura 4.6.7** Aunque  $f'(0) = 0$ ,  $f(0)$  no es un extremo

**EJEMPLO 3** La figura 4.6.6 muestra la gráfica de la función

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3.$$

Como

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \quad y \quad f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1),$$

vemos que

$$f''(x) < 0 \quad \text{para } x < 1,$$

$$f''(x) > 0 \quad \text{para } x > 1.$$

Observe en la figura que la curva se dobla hacia abajo en  $(-\infty, 1)$  pero se dobla hacia arriba en  $(1, \infty)$ , lo que es consistente con las correspondencias en la figura 4.6.5.

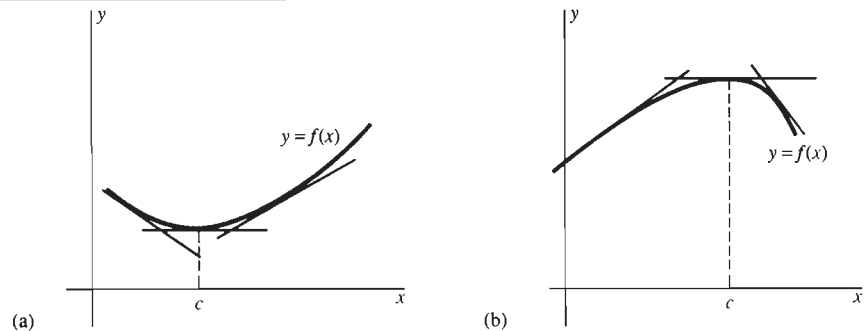
Por la sección 3.5, sabemos que un extremo local de una función diferenciable  $f$  puede aparecer solamente en un punto crítico  $c$ , donde  $f'(c) = 0$ , de modo que la recta tangente en el punto  $(c, f(c))$  sobre la curva  $y = f(x)$  es horizontal. Pero el ejemplo  $f(x) = x^3$ , para el que  $x = 0$  es un punto crítico pero no un extremo (figura 4.6.7), muestra que la *condición necesaria*  $f'(c) = 0$  no es una condición suficiente para concluir que  $f(c)$  es un valor extremo de la función  $f$ .

Supongamos ahora que no sólo  $f'(c) = 0$ , sino que también la curva  $y = f(x)$  se dobla hacia arriba en algún intervalo abierto que contiene al punto crítico  $x = c$ . La figura 4.6.8 (a) sugiere que  $f(c)$  es un valor mínimo local. De manera análoga,  $f(c)$  es un valor máximo local si  $f'(c) = 0$  y  $y = f(x)$  se dobla hacia abajo en algún intervalo abierto en torno de  $c$  [Figura 4.6.8 (b)]. Pero el *signo* de la segunda derivada  $f''(x)$  nos dice si  $y = f(x)$  se dobla hacia arriba o hacia abajo y por tanto nos proporciona una condición *suficiente* para un extremo local.

**Teorema 1 Criterio de la segunda derivada**

Suponga que la función  $f$  es dos veces derivable en el intervalo abierto  $I$  que contiene al punto crítico  $c$  en el cual  $f'(c) = 0$ . Entonces

1. Si  $f''(x) > 0$  en  $I$ , entonces  $f(c)$  es el valor mínimo de  $f(x)$  en  $I$ .
2. Si  $f''(x) < 0$  en  $I$ , entonces  $f(c)$  es el valor máximo de  $f(x)$  en  $I$ .



**Figura 4.6.8** El criterio de la segunda derivada (teorema 1). (a)  $f''(x) > 0$ ; la tangente gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj; la gráfica es cóncava hacia arriba; un mínimo local en  $c$ . (b)  $f''(x) < 0$ ; la tangente gira en el sentido de las manecillas del reloj; la gráfica es cóncava hacia abajo; un máximo local en  $c$

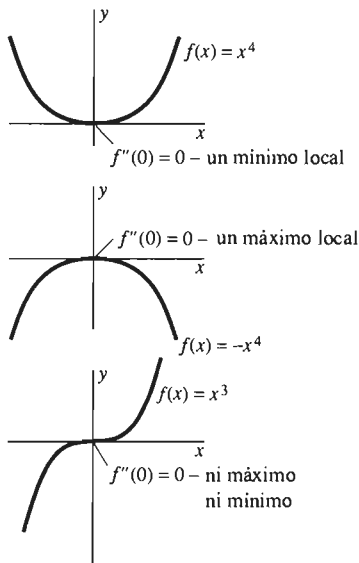
**Demostación** Sólo demostraremos la parte 1. Si  $f''(x) > 0$  en  $I$ , esto implica que la primera derivada  $f'$  es una función creciente en  $I$ . Como  $f'(c) = 0$ , concluimos que  $f'(x) < 0$  para  $x < c$  en  $I$  y que  $f'(x) > 0$  para  $x > c$  en  $I$ . En consecuencia, el criterio de la primera derivada de la sección 4.4 implica que  $f(c)$  es el valor mínimo de  $f(x)$  en  $I$ .  $\square$

$f''(x)$	$f(c)$
Positivo Negativo	Mínimo Máximo

**Figura 4.6.9** Significado del signo de  $f''(x)$  en un intervalo que contiene al punto crítico  $c$

**OBSERVACIÓN 1** En vez de memorizar textualmente las condiciones en las partes 1 y 2 del teorema 1 (resumidas en la figura 4.6.9), es más fácil y confiable recordar el criterio de la segunda derivada visualizando las rectas tangentes que giran de manera continua (figura 4.6.8).

**OBSERVACIÓN 2** El teorema 1 implica que la función  $f$  tiene un mínimo local en el punto crítico  $c$  si  $f''(x) > 0$  en algún intervalo abierto en torno de  $c$  y un máximo local si  $f''(x) < 0$  cerca de  $c$ . Pero la hipótesis sobre  $f''(x)$  en el teorema 1 es *global*, en el sentido de que se supone que  $f''(x)$  tiene el mismo signo en *todo* punto del intervalo abierto  $I$  que contiene al punto crítico  $c$ . Existe una versión estrictamente *local* del criterio de la segunda derivada que utiliza solamente el signo de  $f''(c)$  en el punto crítico  $c$  (en vez de todo el intervalo abierto). Según el problema 80, si  $f'(c) = 0$ , entonces  $f(c)$  es un valor mínimo local de  $f$  si  $f''(c) > 0$ , y un máximo local si  $f''(c) < 0$ .



**Figura 4.6.10** No existe una conclusión si  $f'(c) = 0 = f''(c)$

**OBSERVACIÓN 3** El criterio de la segunda derivada *no dice nada* de lo que ocurre si  $f''(c) = 0$  en el punto crítico  $c$ . Consideremos las tres funciones  $f(x) = x^4$ ,  $f(x) = -x^4$  y  $f(x) = x^3$ . Para cada una,  $f'(0) = 0$  y  $f''(0) = 0$ . Pero sus gráficas, que se muestran en la figura 4.6.10, demuestran que puede ocurrir *cualquier cosa* en tal punto.

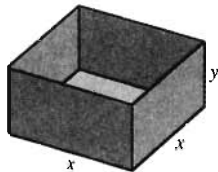
**OBSERVACIÓN 4** Supongamos que queremos maximizar o minimizar la función  $f$  en el intervalo abierto  $I$  y que  $f$  sólo tiene un punto crítico en  $I$ , un número  $c$  en el que  $f'(c) = 0$ . Si  $f''(x)$  tiene el mismo signo en todos los puntos de  $I$ , entonces el teorema 1 implica que  $f(c)$  es un extremo *absoluto* de  $f$  en  $I$ : un mínimo si  $f''(x) > 0$  y un máximo si  $f''(x) < 0$ . Esta interpretación absoluta del criterio de la segunda derivada es útil en los problemas de aplicación de máximos y mínimos en un intervalo abierto.

**EJEMPLO 3 continuación** Consideremos de nuevo la función  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$  para la cual

$$f'(x) = 3x(x - 2) \quad \text{y} \quad f''(x) = 6(x - 1).$$

Entonces  $f$  tiene dos puntos críticos,  $x = 0$  y  $x = 2$ , como se indica en la figura 4.6.6. Dado que  $f''(x) < 0$  para  $x$  cercano a 0, el criterio de la segunda derivada implica que  $f(0) = 3$  es un valor máximo local de  $f$  y como  $f''(x) > 0$  para  $x$  cercano a 2, esto implica que  $f(2) = -1$  es un valor mínimo local.

**EJEMPLO 4** Una caja rectangular sin tapa con base cuadrada tiene un volumen de  $500 \text{ cm}^3$ . Determine las dimensiones que minimizan el área total  $A$  de su base y sus cuatro lados.



**Figura 4.6.11** La caja sin tapa del ejemplo 4

**Solución** Sea  $x$  la longitud del lado de la base cuadrada y  $y$  la altura de la caja (figura 4.6.11). El volumen de la caja es

$$V = x^2y = 500, \quad (1)$$

y el área total de su base y sus cuatro lados es

$$A = x^2 + 4xy. \quad (2)$$

Cuando despejamos en la ecuación (1)  $y = 500/x^2$  y sustituimos esto en la ecuación (2), obtenemos la función área

$$A(x) = x^2 + \frac{2000}{x}, \quad 0 < x < +\infty.$$

El dominio de  $A$  es el intervalo abierto no acotado  $(0, +\infty)$  pues  $x$  puede asumir cualquier valor positivo; para que la caja tenga volumen 500, simplemente elegimos  $y = 500/x^2$ . Pero  $x$  no puede ser negativo o 0.

La primera derivada de  $A(x)$  es

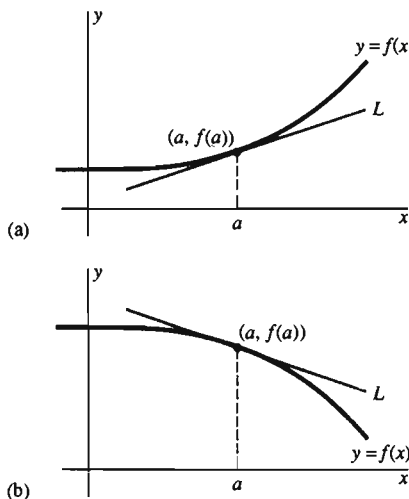
$$A'(x) = 2x - \frac{2000}{x^2} = \frac{2(x^3 - 1000)}{x^2}. \quad (3)$$

La ecuación  $A'(x) = 0$  implica que  $x^3 = 1000$ , por lo que el único punto crítico de  $A$  en  $(0, +\infty)$  es  $x = 10$ . Para estudiar este punto crítico, calculamos la segunda derivada,

$$A''(x) = 2 + \frac{4000}{x^3}. \quad (4)$$

Como es claro que  $A''(x) > 0$  en  $(0, +\infty)$ , el criterio de la segunda derivada y la observación 4 implican que  $A(10) = 300$  es el valor mínimo absoluto de  $A(x)$  en  $(0, +\infty)$ . Por último, como  $y = 500/x^2$ ,  $y = 5$  cuando  $x = 10$ . Por tanto, este mínimo absoluto corresponde a una caja con una base de 10 por 10 cm y una altura de 5 cm.

## CONCAVIDAD Y TRAZO DE CURVAS



**Figura 4.6.12** (a) En  $x = a$ ,  $f$  es cóncava hacia arriba. (b) En  $x = a$ ,  $f$  es cóncava hacia abajo

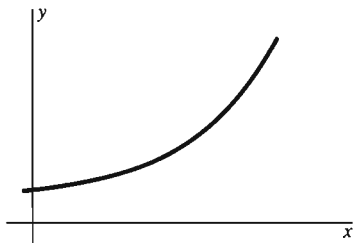
Una comparación de la figura 4.6.1 con la figura 4.6.3 sugiere que la cuestión de si la curva  $y = f(x)$  se dobla hacia arriba o hacia abajo está estrechamente relacionada con la cuestión de si está arriba o abajo de su recta tangente. Esta última cuestión se refiere a la importante propiedad de *concauidad*.

### Definición Concauidad

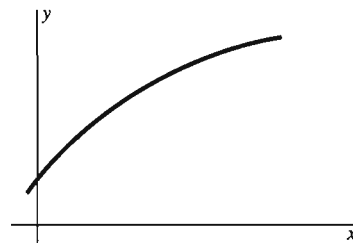
Suponga que la función  $f$  es derivable en el punto  $a$  y que  $L$  es la recta tangente a la gráfica  $y = f(x)$  en el punto  $(a, f(a))$ . Entonces la función  $f$  (o su gráfica) es

1. **Cóncava hacia arriba** en  $a$  si, en algún intervalo abierto que contiene a  $a$ , la gráfica de  $f$  está *arriba de*  $L$ ;
2. **Cóncava hacia abajo** en  $a$  si, en algún intervalo abierto que contiene a  $a$ , la gráfica de  $f$  está *abajo de*  $L$ .

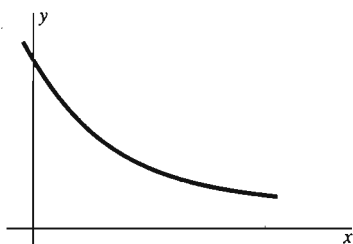
La figura 4.6.12 (a) muestra una gráfica que es cóncava hacia arriba en  $(a, f(a))$ . La figura 4.6.12 (b) muestra una gráfica que es cóncava hacia abajo en  $(a, f(a))$ .



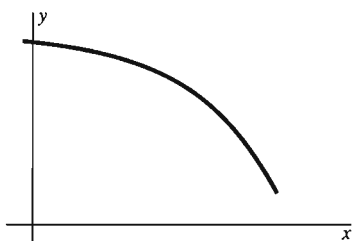
**Figura 4.6.13**  $f'(x) > 0$ ,  $f$  creciente;  $f''(x) > 0$ ,  $f$  cóncava hacia arriba



**Figura 4.6.14**  $f'(x) > 0$ ,  $f$  creciente;  $f''(x) < 0$ ,  $f$  cóncava hacia abajo



**Figura 4.6.15**  $f'(x) < 0$ ,  $f$  decreciente;  $f''(x) > 0$ ,  $f$  cóncava hacia arriba



**Figura 4.6.16**  $f'(x) < 0$ ,  $f$  decreciente;  $f''(x) < 0$ ,  $f$  cóncava hacia abajo

El teorema 2 establece la conexión entre la concavidad y el signo de la segunda derivada. Esa conexión es la sugerida por nuestro análisis del doblamiento.

**Teorema 2 Criterio de concavidad**

Supóngase que la función  $f$  es dos veces derivable en el intervalo abierto  $I$ .

1. Si  $f''(x) > 0$  en  $I$ , entonces  $f$  es cóncava hacia arriba en cada punto de  $I$ .
2. Si  $f''(x) < 0$  en  $I$ , entonces  $f$  es cóncava hacia abajo en cada punto de  $I$ .

Al final de esta sección daremos una demostración del teorema 2 con base en el criterio de la segunda derivada.

NOTA: El significado del signo de la *primera* derivada no debe confundirse con el significado del signo de la *segunda* derivada. Las posibilidades que se ilustran en las figuras 4.6.13 a 4.6.16 muestran que los signos de  $f'$  y  $f''$  son independientes entre sí.

**EJEMPLO 3 continuación nuevamente** Para la función  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ , la segunda derivada

$$f''(x) = 6(x - 1)$$

cambia de signo, de positiva a negativa, en el punto  $x = 1$ . Observe en la figura 4.6.6 que el punto correspondiente  $(1, 1)$  sobre la gráfica de  $f$  es donde la curva cambia de doblarse hacia abajo a doblarse hacia arriba.

Observe que el criterio de concavidad en el teorema 2 no dice nada del caso  $f''(x) = 0$ . Un punto donde la segunda derivada se anula *puede o no ser* un punto donde la función cambia, de cóncava hacia arriba, en un lado, a cóncava hacia abajo en el otro. Pero un punto como  $(1, 1)$  en la figura 4.6.6, donde la concavidad *sí* cambia de esta forma, es un **punto de inflexión** de la gráfica de  $f$ . Más precisamente, el punto  $x = a$  donde  $f$  es continua, es un **punto de inflexión** de la función  $f$ , si  $f$  es cóncava hacia arriba en un lado de  $x = a$  y cóncava hacia abajo en el otro lado. También decimos que  $(a, f(a))$  es un punto de inflexión sobre la gráfica de  $f$ .

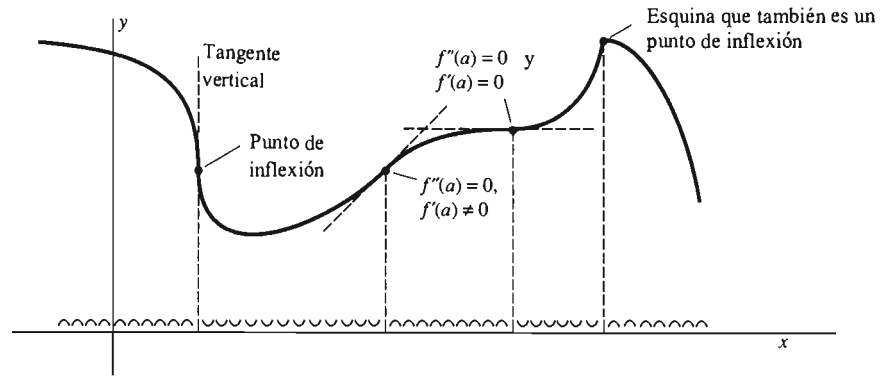
**Teorema 3 Criterio del punto de inflexión**

Suponga que la función  $f$  es continua en un intervalo abierto que contiene al punto  $a$ . Entonces,  $a$  es un punto de inflexión de  $f$  si  $f''(x) < 0$  en un lado de  $a$  y  $f''(x) > 0$  del otro lado.

El hecho de que un punto donde la segunda derivada cambia de signo sea un punto de inflexión es consecuencia del teorema 2 y de la definición de un punto de inflexión.

**OBSERVACIÓN** En el propio punto de inflexión,

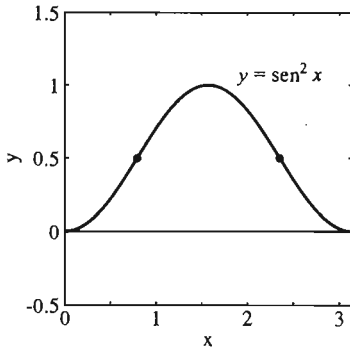
- $f''(a) = 0$ , o
- $f''(a)$  no existe



**Figura 4.6.17** Algunos puntos de inflexión

Así, determinamos los *puntos de inflexión de  $f$*  analizando los *puntos críticos de  $f'$* . Algunas de las posibilidades aparecen en la figura 4.6.17. Marcamos los intervalos de concavidad hacia arriba y concavidad hacia abajo mediante pequeñas figuras que se abren hacia arriba y hacia abajo, respectivamente.

**EJEMPLO 5** La figura 4.6.18 muestra la gráfica de  $f(x) = \text{sen}^2 x$  en  $[0, \pi]$ . Señalamos dos puntos de inflexión evidentes. Determine sus coordenadas.



**Figura 4.6.18**  $y = \text{sen}^2(x)$  (ejemplo 5)

**Solución** Calculamos

$$f'(x) = 2 \text{sen} x \cos x$$

y

$$f''(x) = 2 \cos^2 x - 2 \text{sen}^2 x = 2 \cos 2x.$$

Entonces

$$f''(x) = 2 \cos 2x = 0$$

en  $x = \pi/4$  y en  $x = 3\pi/4$  en el intervalo  $[0, \pi]$ . Ahora,

$$f''(x) = 2 \cos 2x > 0 \quad \text{si} \quad 0 < x < \frac{\pi}{4}, \quad \text{así} \quad 0 < 2x < \frac{\pi}{2};$$

$$f''(x) = 2 \cos 2x < 0 \quad \text{si} \quad \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}, \quad \text{así} \quad \frac{\pi}{2} < 2x < \frac{3\pi}{2};$$

$$f''(x) = 2 \cos 2x > 0 \quad \text{si} \quad \frac{3\pi}{4} < x < \pi, \quad \text{así} \quad \frac{3\pi}{2} < 2x < 2\pi.$$

Esto implica que  $f(x) = \text{sen}^2(x)$  tiene puntos de inflexión en  $x = \pi/4$  y  $x = 3\pi/4$ . Los puntos correspondientes marcados en la gráfica de la figura 4.6.18 son  $(\pi/4, \frac{1}{2})$  y  $(3\pi/4, \frac{1}{2})$ .

Sea  $f$  una función dos veces derivable para toda  $x$ . Así como los puntos críticos donde  $f'(x) = 0$  separan el eje  $x$  en intervalos abiertos donde  $f'(x)$  no cambia de signo, los *posibles* puntos de inflexión donde  $f''(x) = 0$  separan el eje  $x$  en intervalos abiertos donde  $f''(x)$  no cambia de signo. En cada uno de estos intervalos, la curva  $y = f(x)$  se dobla hacia abajo [ $f''(x) < 0$ ] o se dobla hacia arriba [ $f''(x) > 0$ ]. Podemos determinar el signo de  $f''(x)$  en cualquiera de estos intervalos de dos formas:

1. Evaluamos  $f''(x)$  en un punto típico de cada intervalo. El signo de  $f''(x)$  en ese punto particular es el signo de  $f''(x)$  en todo ese intervalo.
2. Construimos una tabla de signos de los factores de  $f''(x)$ . Entonces el signo de  $f''(x)$  en cada intervalo se puede deducir de la tabla.

Éstos son los mismos dos métodos que usamos en las secciones 4.4. y 4.5 para determinar el signo de  $f'(x)$ . Usamos el primer método en el ejemplo 6 y el segundo en el ejemplo 7.

**EJEMPLO 6** Trazar la gráfica de  $f(x) = 8x^5 - 5x^4 - 20x^3$ , indicando los extremos locales, los puntos de inflexión y la concavidad.

**Solución** Trazamos esta curva en el ejemplo 2 de la sección 4.5; véase la figura 4.5.5. En ese ejemplo, determinamos que la primera derivada era

$$f'(x) = 40x^4 - 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x + 1)(2x - 3),$$

de modo que los puntos críticos son  $x = -1$ ,  $x = 0$  y  $x = \frac{3}{2}$ . La segunda derivada es

$$f''(x) = 160x^3 - 60x^2 - 120x = 20x(8x^2 - 3x - 6).$$

Cuando calculamos  $f''(x)$  en cada punto crítico, tenemos que

$$f''(-1) = -100 < 0, \quad f''(0) = 0 \quad \text{y} \quad f''\left(\frac{3}{2}\right) = 225 > 0.$$

La continuidad de  $f''$  garantiza que  $f''(x) < 0$  cerca del punto crítico  $x = -1$  y que  $f''(x) > 0$  cerca del punto crítico  $x = \frac{3}{2}$ . Por tanto, el criterio de la segunda derivada nos dice que  $f$  tiene un máximo local en  $x = -1$  y un mínimo local en  $x = \frac{3}{2}$ . El criterio de la segunda derivada no nos permite determinar el comportamiento de  $f$  en  $x = 0$ .

Como  $f''(x)$  existe para todo punto, los posibles puntos de inflexión son las soluciones de la ecuación

$$f''(x) = 0; \text{ es decir, } 20x(8x^2 - 3x - 6) = 0.$$

Es claro que una solución es  $x = 0$ . Para determinar las otras dos, usamos la fórmula cuadrática para resolver la ecuación

$$8x^2 - 3x - 6 = 0.$$

Esto implica

$$x = \frac{1}{16}(3 \pm \sqrt{201}),$$

de modo que  $x \approx 1.07$  y  $x \approx -0.70$  son los posibles puntos de inflexión, junto con  $x = 0$ .

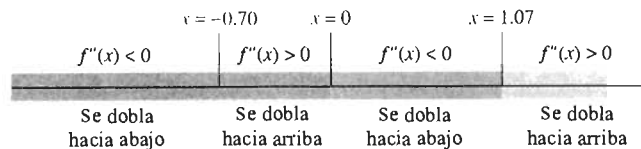
Estos tres posibles puntos de inflexión separan el eje  $x$  en los intervalos indicados en la figura 4.6.19. Verificamos el signo de  $f''(x)$  en cada uno.

En  $(-\infty, -0.70)$ :  $f''(-1) = -100 < 0$ ;  $f$  es cóncava hacia abajo;

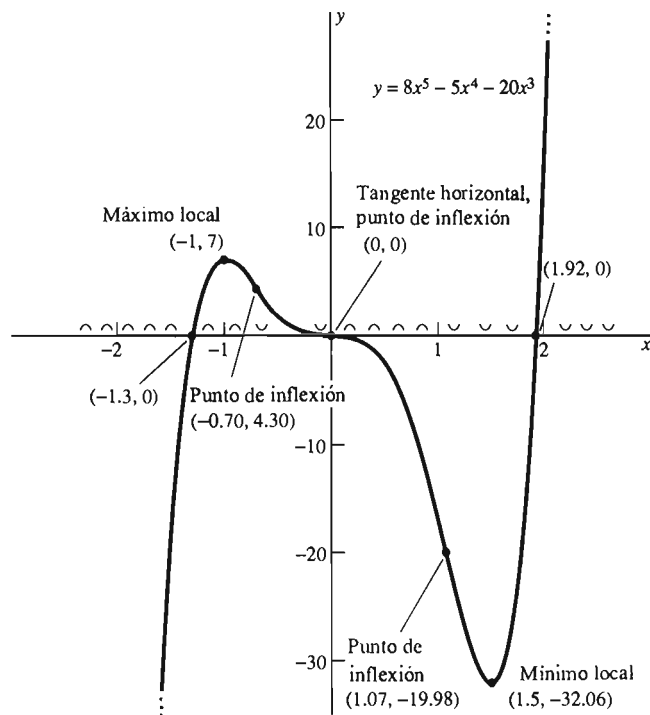
En  $(-0.70, 0)$ :  $f''(-\frac{1}{2}) = 25 > 0$ ;  $f$  es cóncava hacia arriba;

En  $(0, 1.07)$ :  $f''(1) = -20 < 0$ ;  $f$  es cóncava hacia abajo;

En  $(1.07, +\infty)$ :  $f''(2) = 800 > 0$ ;  $f$  es cóncava hacia arriba.



**Figura 4.6.19** Intervalos de concavidad del ejemplo 6



**Figura 4.6.20** La gráfica de la función del ejemplo 6

Así, vemos que la dirección de concavidad de  $f$  cambia en cada uno de los puntos  $x \approx -0.70$ ,  $x = 0$  y  $x \approx 1.07$ . Estos tres puntos son, en realidad, puntos de inflexión. Esta información aparece en la gráfica de  $f$  de la figura 4.6.20.

**EJEMPLO 7** Trazar la gráfica de  $f(x) = 4x^{1/3} + x^{4/3}$ . Indique los extremos locales, los puntos de inflexión y la concavidad.

**Solución** En primer lugar,

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{-2/3} + \frac{4}{3}x^{1/3} = \frac{4(x+1)}{3x^{2/3}},$$

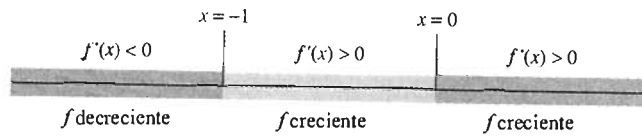
de modo que los puntos críticos son  $x = -1$  (donde la recta tangente es horizontal) y  $x = 0$  (donde es vertical). A continuación,

$$f''(x) = -\frac{8}{9}x^{-5/3} + \frac{4}{9}x^{-2/3} = \frac{4(x-2)}{9x^{5/3}},$$

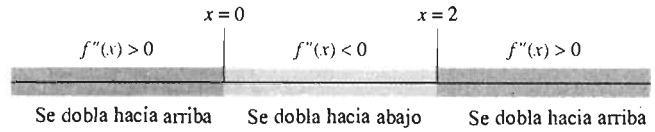
de modo que los posibles puntos de inflexión son  $x = 2$  (donde  $f''(x) = 0$ ) y  $x = 0$  (donde  $f''(x)$  no existe).

Para determinar donde es creciente  $f$  y donde es decreciente, construimos la siguiente tabla.

Intervalo	$x + 1$	$x^{2/3}$	$f'(x)$	$f$
$(-\infty, -1)$	Neg.	Pos.	Neg.	Decreciente
$(-1, 0)$	Pos.	Pos.	Pos.	Creciente
$(0, +\infty)$	Pos.	Pos.	Pos.	Creciente



**Figura 4.6.21** Intervalos donde la función del ejemplo 7 es creciente y decreciente



**Figura 4.6.22** Intervalos de concavidad del ejemplo 7

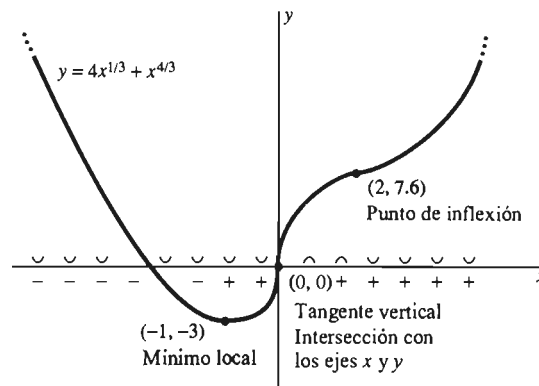
Así,  $f$  es decreciente cuando  $x < -1$  y creciente cuando  $x > -1$  (figura 4.6.21).

Para determinar la concavidad de  $f$ , construimos una tabla para determinar el signo de  $f''(x)$  en cada uno de los intervalos, separados por sus raíces.

Intervalo	$x^{5/3}$	$x - 2$	$f'(x)$	$f$
$(-\infty, 0)$	Neg.	Neg.	Pos.	Cóncava hacia arriba
$(0, 2)$	Pos.	Neg.	Neg.	Cóncava hacia abajo
$(2, +\infty)$	Pos.	Pos.	Pos.	Cóncava hacia arriba

La tabla muestra que  $f$  es cóncava hacia abajo en  $(0, 2)$  y cóncava hacia arriba para  $x < 0$  y  $x > 2$  (figura 4.6.22).

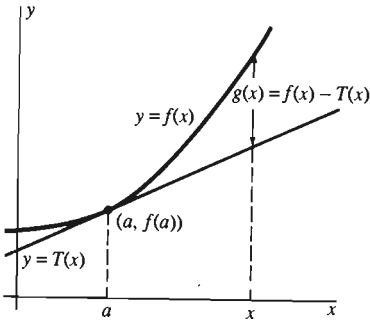
Observamos que  $f(x) \rightarrow +\infty$  como  $x \rightarrow \pm\infty$  y marcamos con signos más los intervalos sobre el eje  $x$  donde  $f$  es creciente, con signos menos donde es decreciente, con copas que se abren hacia arriba donde  $f$  es cóncava hacia arriba y con copas que se abren hacia abajo donde  $f$  es cóncava hacia abajo. Localizamos (aproximadamente) los puntos de la gráfica de  $f$  correspondientes a las raíces y las discontinuidades de  $f'$  y  $f''$ ; éstas son  $(-1, -3)$ ,  $(0, 0)$  y  $(2, 6\sqrt[3]{2})$ . Por último, usamos toda esta información para trazar la curva suave que se muestra en la figura 4.6.23.



**Figura 4.6.23** La gráfica de la función del ejemplo 7

**Demostración del teorema 2** Solamente demostraremos la parte 1; la demostración de la parte 2 es similar. Dado un punto fijo  $a$  del intervalo abierto  $I$





**Figura 4.6.24** Ilustración de la demostración del teorema 2

donde  $f''(x) > 0$ , queremos mostrar que la gráfica  $y = f(x)$  está por arriba de la recta tangente en  $(a, f(a))$ . La recta tangente en cuestión tiene la ecuación

$$y = T(x) = f(a) + f'(a)(x - a). \quad (5)$$

Consideremos la función auxiliar

$$g(x) = f(x) - T(x) \quad (6)$$

que se ilustra en la figura 4.6.24. Observe primero que  $g(a) = g'(a) = 0$ , de modo que  $x = a$  es un punto crítico de  $g$ . Además, la ecuación (5) implica que  $T'(x) \equiv f'(a)$  y que  $T''(x) \equiv 0$ , de modo que

$$g''(x) = f''(x) - T''(x) = f''(x) > 0$$

en cada punto de  $I$ . Por tanto, el criterio de la segunda derivada implica que  $g(a) = 0$  es el valor mínimo de  $g(x) = f(x) - T(x)$  en  $I$ . Esto implica que la curva  $y = f(x)$  está por arriba de la recta tangente  $y = T(x)$ .  $\square$

## 4.6 Problemas

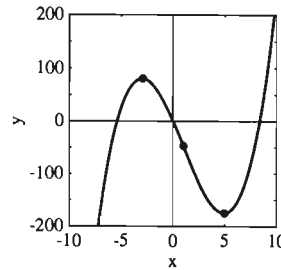
Calcule las primeras tres derivadas de las funciones dadas en los problemas 1 a 15.

1.  $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 6x - 17$
2.  $f(x) = 2x^5 + x^{3/2} - \frac{1}{2x}$
3.  $f(x) = \frac{2}{(2x-1)^2}$
4.  $g(t) = t^2 + \sqrt{t+1}$
5.  $g(t) = (3t-2)^{4/3}$
6.  $f(x) = x\sqrt{x+1}$
7.  $h(y) = \frac{y}{y+1}$
8.  $f(x) = (1 + \sqrt{x})^3$
9.  $g(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{3}{\sqrt[3]{1-t}}$
10.  $h(z) = \frac{z^2}{z^2+4}$
11.  $f(x) = \text{sen } 3x$
12.  $f(x) = \text{cos}^2 2x$
13.  $f(x) = \text{sen } x \text{ cos } x$
14.  $f(x) = x^2 \text{ cos } x$
15.  $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$

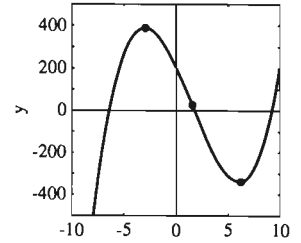
En los problemas 16 a 22, calcule  $dy/dx$  y  $d^2y/dx^2$ , suponiendo que  $y$  se define de manera implícita como una función de  $x$  mediante la ecuación dada.

16.  $x^2 + y^2 = 4$
17.  $x^2 + xy + y^2 = 3$
18.  $x^{1/3} + y^{1/3} = 1$
19.  $y^3 + x^2 + x = 5$
20.  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$
21.  $\text{sen } y = xy$
22.  $\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 y = 1$

En los problemas 23 a 30, determine las coordenadas exactas de los puntos de inflexión y los puntos críticos señalados en la gráfica dada.

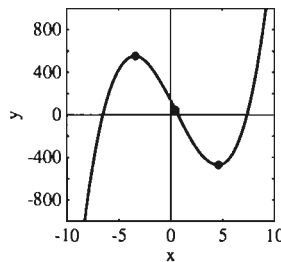


**Figura 4.6.25** La gráfica de  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x$  (problema 23)

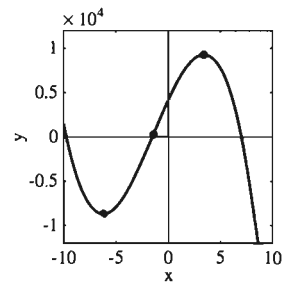


**Figura 4.6.26** La gráfica de  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 108x + 200$  (problema 24)

23. La gráfica de  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x$  (Fig. 4.6.25)
24. La gráfica de  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 108x + 200$  (Fig. 4.6.26)
25. La gráfica de  $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 189x + 137$  (Fig. 4.6.27)
26. La gráfica de  $f(x) = -40x^3 - 171x^2 + 2550x + 4150$  (Fig. 4.6.28)

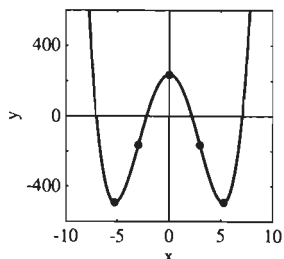


**Figura 4.6.27** La gráfica de  $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 189x + 137$  (problema 25)

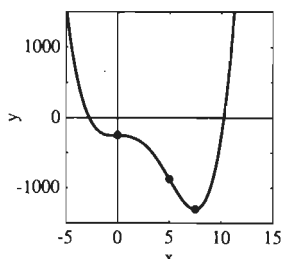


**Figura 4.6.28** La gráfica de  $f(x) = -40x^3 - 171x^2 + 2550x + 4150$  (problema 26)

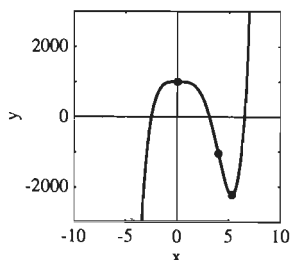
27. La gráfica de  $f(x) = x^4 - 54x^2 + 237$   
(Fig. 4.6.29)  
28. La gráfica de  $f(x) = x^4 - 10x^3 - 250$   
(Fig. 4.6.30)  
29. La gráfica de  $f(x) = 3x^5 - 20x^4 + 1000$   
(Fig. 4.6.31)  
30. La gráfica de  $f(x) = 3x^5 - 160x^3$  (Fig. 4.6.32)



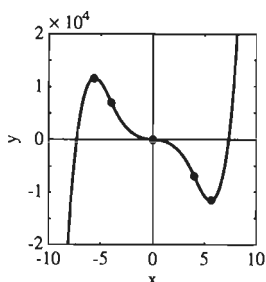
**Figura 4.6.29** La gráfica de  $f(x) = x^4 - 54x^2 + 237$  (problema 27)



**Figura 4.6.30** La gráfica de  $f(x) = x^4 - 10x^3 - 250$  (problema 28)



**Figura 4.6.31** La gráfica de  $f(x) = 3x^5 - 20x^4 + 1000$  (problema 29)



**Figura 4.6.32** La gráfica de  $f(x) = 3x^5 - 160x^3$  (problema 30)

Aplique el criterio de la segunda derivada para determinar los máximos y mínimos locales de las funciones dadas en los problemas 31 a 50 y aplique el criterio del punto de inflexión para determinar todos los puntos de inflexión.

31.  $f(x) = x^2 - 4x + 3$       32.  $f(x) = 5 - 6x - x^2$   
33.  $f(x) = x^3 - 3x + 1$       34.  $f(x) = x^3 - 3x^2$   
35.  $f(x) = x^3$                   36.  $f(x) = x^4$   
37.  $f(x) = x^5 + 2x$             38.  $f(x) = x^4 - 8x^2$   
39.  $f(x) = x^2(x - 1)^2$       40.  $f(x) = x^3(x + 2)^2$   
41.  $f(x) = \text{sen } x$  en  $(0, 2\pi)$   
42.  $f(x) = \text{cos } x$  en  $(-\pi/2, 3\pi/2)$   
43.  $f(x) = \text{tan } x$  en  $(-\pi/2, \pi/2)$   
44.  $f(x) = \text{sec } x$  en  $(-\pi/2, \pi/2)$   
45.  $f(x) = \text{cos}^2 x$  en  $(-\pi/2, 3\pi/2)$   
46.  $f(x) = \text{sen}^3 x$  en  $(-\pi, \pi)$   
47.  $f(x) = \text{sen } x + \text{cos } x$  en  $(0, 2\pi)$

48.  $f(x) = \text{cos } x - \text{sen } x$  en  $(0, 2\pi)$   
49.  $f(x) = \text{sen } x + 2 \text{cos } x$  en  $(0, 2\pi)$   
50.  $f(x) = 3 \text{sen } x - 4 \text{cos } x$  en  $(0, 2\pi)$

En los problemas 51 a 62, vuelva a resolver el problema indicado de la sección 4.4, utilizando ahora el criterio de la segunda derivada para verificar que ha encontrado el valor máximo o mínimo absoluto deseado.

51. Problema 27                  52. Problema 28  
53. Problema 29                  54. Problema 30  
55. Problema 31                  56. Problema 32  
57. Problema 33                  58. Problema 36  
59. Problema 37                  60. Problema 38  
61. Problema 39                  62. Problema 40

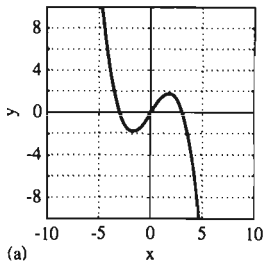
Trace las gráficas de las funciones en los problemas 63 a 76, indicando todos los puntos críticos y los puntos de inflexión. Aplique el criterio de la segunda derivada en cada punto crítico. Muestre la concavidad correcta en sus gráficas e indique el comportamiento de  $f(x)$  cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ .

63.  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3$   
64.  $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 5$   
65.  $f(x) = 6 + 8x^2 - x^4$   
66.  $f(x) = 3x^5 - 5x^3$   
67.  $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 - 1$   
68.  $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x$   
69.  $f(x) = x^3(1 - x)^4$   
70.  $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)^3$   
71.  $f(x) = 1 + x^{1/3}$   
72.  $f(x) = 2 - (x - 3)^{1/3}$   
73.  $f(x) = (x + 3)\sqrt{x}$       74.  $f(x) = x^{2/3}(5 - 2x)$   
75.  $f(x) = (4 - x)\sqrt[3]{x}$       76.  $f(x) = x^{1/3}(6 - x)^{2/3}$

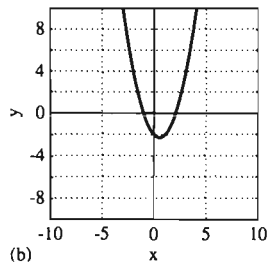
En los problemas 77 a 82, se muestra la gráfica de una función  $f(x)$ . Relacione ésta con la gráfica de su segunda derivada  $f''(x)$  en la figura 4.6.33.

77. Véase la figura 4.6.34  
78. Véase la figura 4.6.35  
79. Véase la figura 4.6.36  
80. Véase la figura 4.6.37  
81. Véase la figura 4.6.38  
82. Véase la figura 4.6.39

83. (a) Primero, muestre que la  $n$ -ésima derivada de  $f(x) = x^n$  es  $f^{(n)}(x) \equiv n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ . (b) Concluya que si  $f(x)$  es un polinomio de grado  $n$ , entonces  $f^{(k)}(x) \equiv 0$  si  $k > n$ .



(a)



(b)

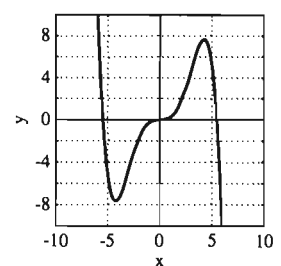
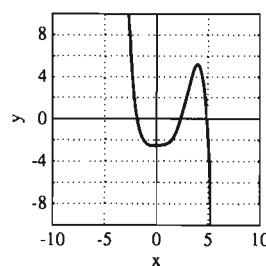
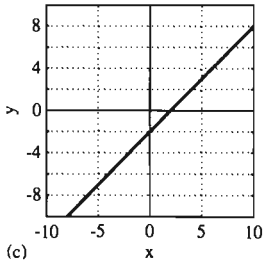
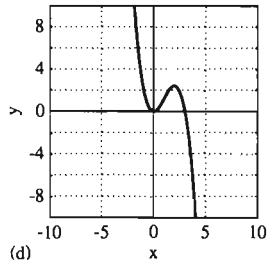


Figura 4.6.38

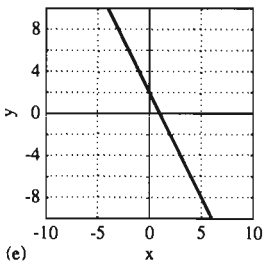
Figura 4.6.39



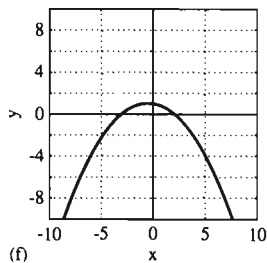
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 4.6.33

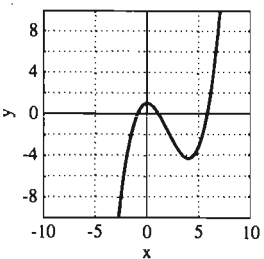


Figura 4.6.34

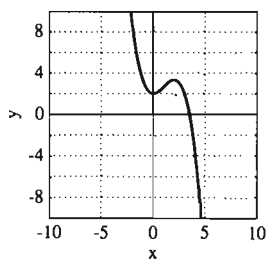


Figura 4.6.35

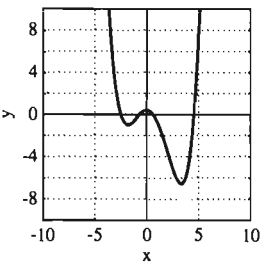


Figura 4.6.36

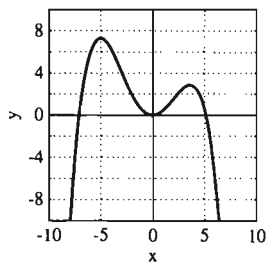


Figura 4.6.37

84. (a) Calcule las primeras cuatro derivadas de  $f(x) = \sin(x)$ .  
 (b) Si  $n$  es un entero positivo, concluya que  $D^{n+4} \sin x = D^n \sin x$ .

85. Suponga que  $z = g(y)$  y que  $y = f(x)$ . Muestre que

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2z}{dy^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$$

86. Demuestre que la gráfica de un polinomio cuadrático no tiene puntos de inflexión.

87. Demuestre que la gráfica de un polinomio cúbico tiene exactamente un punto de inflexión.

88. Demuestre que la gráfica de una función polinomial de grado 4 no tiene puntos de inflexión o tiene exactamente dos puntos de inflexión.

89. Suponga que la presión  $p$  (en atmósferas), el volumen  $V$  (en centímetros cúbicos) y la temperatura  $T$  (en grados Kelvin) de  $n$  moles de bióxido de carbono ( $\text{CO}_2$ ) satisfacen la ecuación de van der Waals

$$\left(p + \frac{n^2a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT,$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $R$  son constantes empíricas. Realizamos el siguiente experimento para determinar los valores de estas constantes.

Comprimos una mole de  $\text{CO}_2$  a la temperatura constante  $T = 304$  K. Los datos medidos de presión y volumen ( $pV$ ) se localizaron en el plano, como en la figura 4.6.40, donde la curva  $pV$  muestra un punto de inflexión horizontal en  $V = 128.1$ ,  $p = 72.8$ . Use esta información para calcular  $a$ ,  $b$  y  $R$ . [Sugerencia: Despeje  $p$  en la ecuación de van der Waals y calcule entonces  $dp/dV$  y  $d^2p/dV^2$ .]

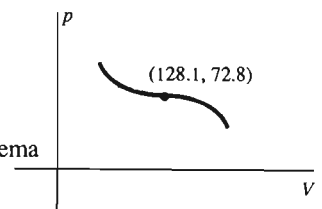


Figura 4.6.40 Un problema relacionado con la ecuación de van der Waals

90. Suponga que la función  $f$  es diferenciable en un intervalo abierto que contiene al punto  $c$  para el que  $f'(c) = 0$  y que la segunda derivada

$$f''(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(c+h) - f'(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(c+h)}{h}$$

existe. (a) Suponga primero que  $f''(c) > 0$ . Argumente que si  $h \neq 0$  es suficientemente pequeña,  $f'(c+h)$  y  $h$  tienen el mismo signo. Aplique el criterio de la primera derivada para mostrar en este caso que  $f(c)$  es un valor mínimo local de  $f$ . (b) De manera análoga, muestre que si  $f''(c) < 0$ ,  $f(c)$  es un valor máximo local de  $f$ .

## 4.6 Proyectos

Los proyectos A y B requieren el uso de una calculadora gráfica o una computadora con una utilidad de graficación. Para cada proyecto, elija de antemano un entero  $n$  entre 0 y 9. Por ejemplo,  $n$  podría ser el último número de su clave de estudiante. El proyecto C requiere también una computadora con un sistema de álgebra simbólica.

**PROYECTO A** Si los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  se definen como

$$a = 30,011 + 2n,$$

$$b = 30,022 + 4n \quad \text{y}$$

$$c = 10,010 + 2n,$$

entonces la curva

$$y = 10,000x^3 - ax^2 + bx + c$$

tiene dos bonitas “ondulaciones”, como cualquier cúbica debería tener. Determine las. En particular, determine los puntos máximo y mínimo locales y el (los) punto(s) de inflexión en esta curva. Dé las coordenadas de cada uno de estos puntos con una precisión de cinco cifras decimales. Puede usar la tecla **SOLVE**

$$N[\text{Solve}[f[x] == 0, x]]$$

para la solución numérica de una ecuación. Produzca una gráfica que exhiba estos puntos (puede marcar los puntos a mano). Al ampliar la figura, necesitará controlar con cuidado las sucesivas ventanas de visión.

**PROYECTO B** Su tarea es analizar la estructura de la curva

$$y = x^7 + 5x^6 - 11x^5 - 21x^4 + 31x^3 - 57x^2$$

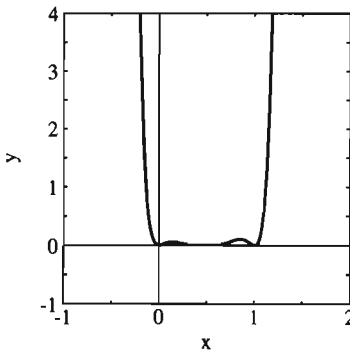
$$- (101 + 2n)x + (89 - 3n).$$

Proporcione la misma información dada en el proyecto A. Es probable que necesite producir gráficas separadas con diferentes escalas, mostrando diferentes partes de la curva. Al final, use toda la información acumulada para producir una gráfica cuidadosamente hecha a mano (no a escala), exhibiendo todos los puntos máximos, mínimos y de inflexión sobre la curva, con sus coordenadas (aproximadas).

**PROYECTO C** Sea

$$f(x) = [x(1-x)(2x-1)(4-9x)]^2.$$

La gráfica de  $f$  se muestra en la figura 4.6.41. Aseguramos que  $f$  tiene al menos cuatro mínimos locales, tres máximos locales y seis puntos de inflexión en  $[0, 1]$ . Determine las coordenadas aproximadas de los 13 puntos, y muestre la gráfica de  $f$  a una escala que muestre todos esos puntos.



**Figura 4.6.41** La gráfica de  $y = f(x)$  del proyecto C

## 4.7 Trazo de curvas y asíntotas

Ahora queremos extender el concepto de límite para incluir los límites infinitos y los límites en infinito. Esta extensión añadirá un arma poderosa a nuestro arsenal de técnicas para el trazo de curvas, el concepto de *asíntota* a una curva, una línea recta a la que la curva tiende a acercarse, en un sentido que precisaremos más adelante.

Recuerde de la sección 2.3 que  $f(x)$  **crece sin límite**, o **se hace infinita**, cuando  $x$  tiende a  $a$ , y lo escribimos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \quad (1)$$

si  $f(x)$  se puede hacer arbitrariamente grande eligiendo  $x$  suficientemente cerca (pero no igual) a  $a$ . La afirmación de que  $f(x)$  **decrece sin cota**, o **se hace infinitamente negativa**, cuando  $x \rightarrow a$ , lo que escribimos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty, \quad (2)$$

tiene una definición análoga.

**EJEMPLO 1** Es evidente que

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(x+2)^2} = +\infty$$

puesto que, cuando  $x \rightarrow -2$ ,  $(x+2)^2$  es positivo y tiende a cero. En contraste,

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{(x+2)^2} = -\infty$$

ya que, cuando  $x \rightarrow -2$ , el denominador  $(x+2)^2$  sigue siendo positivo y tiende a cero, pero el numerador  $x$  es negativo. Así, cuando  $x$  está muy cerca de  $-2$ , tenemos en  $x/(x+2)^2$  un número negativo cercano a  $-2$  dividido entre un número positivo muy pequeño. Por tanto, el cociente se convierte en un número negativo de magnitud grande.

Las versiones laterales de las ecuaciones (1) y (2) también son válidas. Por ejemplo, si  $n$  es un entero positivo *impar*, entonces se ve que

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{(x-2)^n} = -\infty \quad \text{y que} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{(x-2)^n} = +\infty,$$

pues  $(x-2)^n$  es negativo cuando  $x$  está a la izquierda de 2 y positivo cuando está a la derecha de 2.

### ASÍNTOTAS VERTICALES

La recta  $x = a$  es una **asíntota vertical** de la curva  $y = f(x)$  si

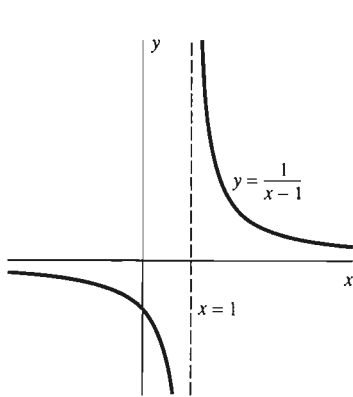
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \quad (3a)$$

o

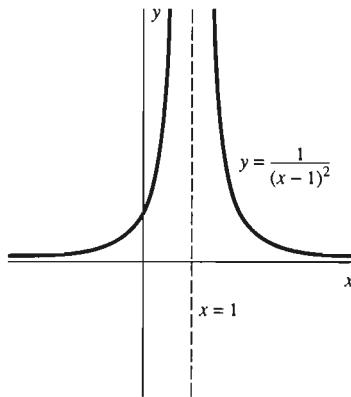
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty \quad (3b)$$

o ambos. Por lo general, ambos límites laterales, no solamente uno, son infinitos. En tal caso, escribimos

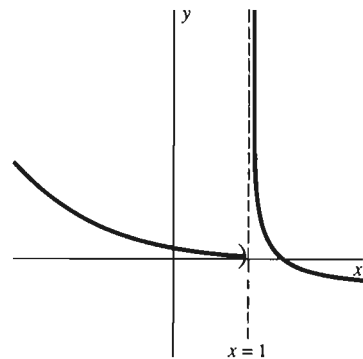
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty. \quad (3c)$$



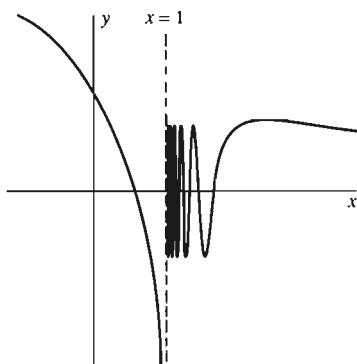
**Figura 4.7.1** La gráfica de  $y = 1/(x-1)$



**Figura 4.7.2** La gráfica de  $y = 1/(x-1)^2$



**Figura 4.7.3** Una asíntota vertical de un solo lado, el derecho



**Figura 4.7.4** El comportamiento de la gráfica a su izquierda produce la asíntota vertical

La geometría de una asíntota vertical se ilustra mediante las gráficas de  $y = 1/(x-1)$  y  $y = 1/(x-1)^2$  (figuras 4.7.1 y 4.7.2). En ambos casos, cuando  $x \rightarrow 1$  y  $f(x) \rightarrow \pm\infty$ , el punto  $(x, f(x))$  sobre la curva tiende a la asíntota vertical  $x = 1$  y la forma y la dirección de la curva son cada vez mejor aproximadas por la asíntota.

La figura 4.7.3 muestra la gráfica de una función cuyo límite por la izquierda se anula en  $x = 1$ . Pero el límite por la derecha es  $+\infty$ , lo que explica por qué la línea  $x = 1$  es también una asíntota vertical para esta gráfica. El límite por la derecha en la figura 4.7.4 ni siquiera existe, pero debido a que el límite por la izquierda en  $x = 1$  es  $-\infty$ , la recta vertical en  $x = 1$  es de nuevo una asíntota vertical.

Por lo general, una asíntota vertical aparece en el caso de una función racional  $f(x) = p(x)/q(x)$  en un punto  $x = a$  donde  $q(a) = 0$  pero  $p(a) \neq 0$ . (Véanse los ejemplos 4, 5 y 6.)

## LÍMITES EN INFINITO

En la sección 4.5 mencionamos los límites infinitos en infinito en conexión con el comportamiento de un polinomio cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ . También existe algo como un límite *finito* en infinito. Decimos que  $f(x)$  **tiende al número  $L$  cuando  $x$  aumenta sin límite** y escribimos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad (4)$$

si  $|f(x) - L|$  se puede hacer arbitrariamente pequeño (cercano a cero) simplemente eligiendo  $x$  suficientemente grande; es decir, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $M > 0$  tal que

$$x > M \text{ implica que } |f(x) - L| < \varepsilon \quad (5)$$

La afirmación

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

tiene una definición de forma similar; sólo hay que reemplazar la condición  $x > M$  por la condición  $x < -M$ .

Todos los análogos de las propiedades de los límites de la sección 2.2 para el caso de los límites en infinito son válidos, incluyendo en particular las propiedades de la suma, producto y cociente. Además, no es difícil mostrar que si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \pm\infty,$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

De este resultado se sigue que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \quad (6)$$

para cualquier elección del número racional positivo  $k$ .

Podemos usar la ecuación (6) y las propiedades de los límites para evaluar con facilidad límites en infinito de las funciones racionales. El método general es éste: primero dividimos cada término en el numerador y el denominador entre la máxima potencia de  $x$  que aparezca en cualquiera de los términos. Después aplicamos las propiedades de los límites.

**EJEMPLO 2** Determine  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  si  $f(x) = \frac{3x^3 - x}{2x^3 + 7x^2 - 4}$ .

**Solución** Comenzamos dividiendo cada término en el numerador y el denominador entre  $x^3$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - x}{2x^3 + 7x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{7}{x} - \frac{4}{x^3}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{1}{x^2}\right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{7}{x} - \frac{4}{x^3}\right)} = \frac{3 - 0}{2 + 0 - 0} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

El mismo cálculo, pero con  $x \rightarrow -\infty$ , también da el resultado

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{3}{2}.$$

**EJEMPLO 3** Determine  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x})$ .

**Solución** Usamos la técnica familiar de “multiplicar y dividir”:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x}) \cdot \frac{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}} = 0. \end{aligned}$$

## ASÍNTOTAS HORIZONTALES

En términos geométricos, la afirmación

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

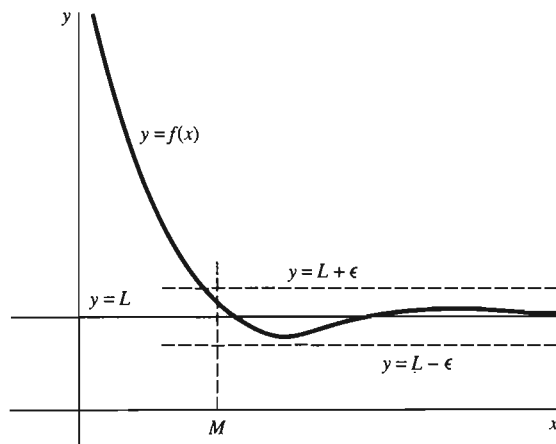


Figura 4.7.5 Geometría de la definición de asíntota horizontal

significa que el punto  $(x, f(x))$  sobre la curva  $y = f(x)$  tiende a la recta horizontal  $y = L$  cuando  $x \rightarrow +\infty$ . En particular, con los números  $M$  y  $\epsilon$  de la condición de la ecuación (5), la parte de la curva para la que  $x > M$  está entre las rectas horizontales  $y = L - \epsilon$  y  $y = L + \epsilon$  (figura 4.7.5). Por tanto, decimos que la recta  $y = L$  es una **asíntota horizontal** de la curva  $y = f(x)$  si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L.$$

**EJEMPLO 4** Trace la gráfica de  $f(x) = x/(x - 2)$ . Indique cualquier asíntota horizontal o vertical.

**Solución** Observemos primero que  $x = 2$  es una asíntota vertical pues  $|f(x)| \rightarrow +\infty$  cuando  $x \rightarrow 2$ . Además,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{1}{1 - 0} = 1.$$

Así, la recta  $y = 1$  es una asíntota horizontal. Las primeras dos derivadas de  $f$  son

$$f'(x) = -\frac{2}{(x - 2)^2} \quad \text{y} \quad f''(x) = \frac{4}{(x - 2)^3}.$$

$f'(x)$  y  $f''(x)$  no se anulan, de modo que la función  $f$  no tiene puntos críticos ni puntos de inflexión. Como  $f'(x) < 0$  para  $x \neq 2$ , vemos que  $f(x)$  es decreciente en los intervalos abiertos  $(-\infty, 2)$  y  $(2, +\infty)$ . Y como  $f''(x) < 0$  para  $x < 2$ , mientras que  $f''(x) > 0$  para  $x > 2$ , la gráfica de  $f$  es cóncava hacia abajo en  $(-\infty, 2)$  y cóncava hacia arriba en  $(2, +\infty)$ . La gráfica de  $f$  aparece en la figura 4.7.6.

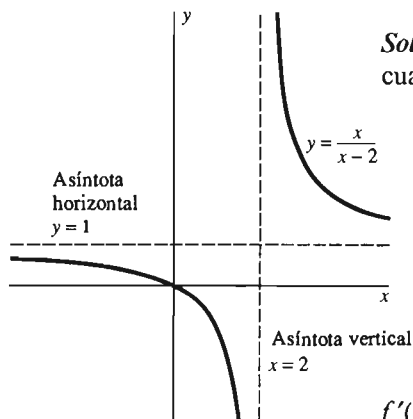


Figura 4.7.6 La gráfica del ejemplo 4

Las técnicas para el trazo de curvas de las secciones 4.5 y 4.6, junto con las de esta sección, se pueden resumir mediante una serie de pasos. Si sigue estas instrucciones de manera relajada, no rígida, obtendrá un esquema cualitativamente preciso de la gráfica de una función  $f$ .



1. Resuelva la ecuación  $f'(x) = 0$  y determine también los puntos donde  $f'(x)$  no exista. Esto nos da los puntos críticos de  $f$ . Observe si la recta tangente es vertical, horizontal, o no existe en cada punto crítico.
2. Determine los intervalos en los que  $f$  es creciente y aquellos donde es decreciente.
3. Resuelva la ecuación  $f''(x) = 0$  y determine también los puntos donde  $f''(x)$  no existe. Éstos son los *posibles* puntos de inflexión de la gráfica.
4. Determine los intervalos en los que la gráfica de  $f$  es cóncava hacia arriba y aquellos en donde es cóncava hacia abajo.
5. Determine (si existen) las intersecciones de la gráfica con los ejes.
6. Localice y etiquete los puntos críticos, los posibles puntos de inflexión y las intersecciones con los ejes.
7. Determine las asíntotas (si existen), las discontinuidades (si existen) y *particularmente* el comportamiento de  $f(x)$  y  $f'(x)$  cerca de las discontinuidades de  $f$ . Determine también el comportamiento de  $f(x)$  cuando  $x \rightarrow +\infty$  y  $x \rightarrow -\infty$ .
8. Por último, una los puntos localizados, mediante una curva que sea consistente con la información recolectada. Recuerde que las esquinas son raras y que las secciones rectas de una gráfica son aún más raras.

Puede seguir estos pasos con un orden conveniente y omitir todos los que presenten dificultades de cálculo. Muchos problemas requieren menos de los ocho pasos; véase el ejemplo 4. Pero el ejemplo 5 requiere de todos los pasos.

**EJEMPLO 5** Trace la gráfica de

$$f(x) = \frac{2 + x - x^2}{(x - 1)^2}.$$

**Solución** Observamos de inmediato que

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty,$$

pues el numerador tiende a 2 cuando  $x \rightarrow 1$ , mientras que el denominador tiende a cero con valores *positivos*. Así, la recta  $x = 1$  es una asíntota vertical. Además,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 + x - x^2}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} - 1}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} = -1,$$

de modo que la recta  $y = -1$  es una asíntota horizontal.

A continuación, aplicamos la regla del cociente y simplificamos para determinar que

$$f'(x) = \frac{x - 5}{(x - 1)^3}.$$

Así, el único punto crítico en el dominio de  $f$  es  $x = 5$ , y localizamos el punto  $(5, f(5)) = (5, -1.125)$  en un plano de coordenadas adecuado y señalamos ahí la tangente horizontal. Para determinar el comportamiento creciente o decreciente de  $f$ , usamos el punto crítico  $x = 5$  y el punto  $x = 1$  (donde  $f'$  no está definida) para separar el eje  $x$  en intervalos abiertos. He aquí los resultados.

Intervalo	$(x - 1)^3$	$x - 5$	$f'(x)$	$f$
$(-\infty, 1)$	Neg.	Neg.	Pos.	Creciente
$(1, 5)$	Pos.	Neg.	Neg.	Decreciente
$(5, +\infty)$	Pos.	Pos.	Pos.	Creciente

Después de algunas simplificaciones, determinamos la segunda derivada

$$f''(x) = \frac{2(7 - x)}{(x - 1)^4}.$$

El único punto de inflexión posible está en  $x = 7$ , correspondiente al punto  $(7, -\frac{10}{9})$  en la gráfica. Usamos  $x = 7$  y  $x = 1$  (donde  $f''$  no está definida) para separar el eje  $x$  en intervalos abiertos. La estructura de concavidad de la gráfica se puede deducir con la ayuda de la siguiente tabla.

Intervalo	$(x - 1)^4$	$7 - x$	$f''(x)$	$f$
$(-\infty, 1)$	Pos.	Pos.	Pos.	Cóncava hacia arriba
$(1, 7)$	Pos.	Pos.	Pos.	Cóncava hacia arriba
$(7, \infty)$	Pos.	Neg.	Neg.	Cóncava hacia abajo

La intersección de  $f$  con el eje  $y$  es  $(0, 2)$  y la ecuación  $2 + x - x^2 = 0$  proporciona las intersecciones con el eje  $x$   $(-1, 0)$  y  $(2, 0)$ . Localizamos estas intersecciones, trazamos las asíntotas y por último graficamos con la ayuda de ambas tablas; su información aparece ahora en el eje  $x$  de la figura 4.7.7.

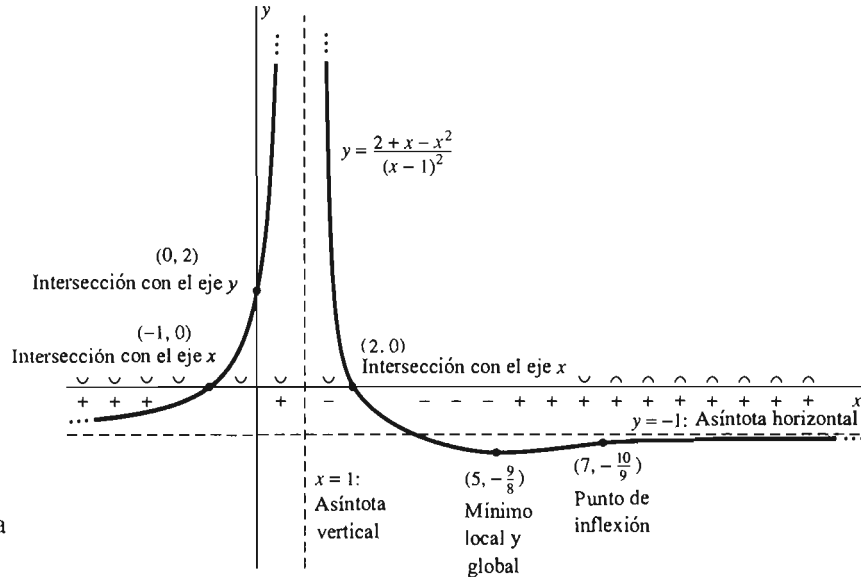


Figura 4.7.7 Graficación de la función del ejemplo 5

Algunas asíntotas están inclinadas: no todas las asíntotas son horizontales o verticales. La recta no vertical  $y = mx + b$  es una **asíntota** para la curva  $y = f(x)$  si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0 \quad (7a)$$

o

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0 \quad (7b)$$

(o ambos). Estas condiciones significan que cuando  $x \rightarrow +\infty$  o  $x \rightarrow -\infty$  (o ambos), la distancia vertical entre el punto  $(x, f(x))$  sobre la curva y el punto  $(x, mx + b)$  sobre la recta tiende a cero.

Supongamos que  $f(x) = p(x)/q(x)$  es una función racional para la que el grado de  $p$  es mayor en una unidad que el grado de  $q$ . Entonces, al dividir  $p(x)$  entre  $q(x)$ , obtenemos que  $f(x)$  tiene la forma

$$f(x) = mx + b + g(x),$$

donde

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0.$$

Así, la recta no vertical  $y = mx + b$  es una asíntota de la gráfica de  $y = f(x)$ . Tal asíntota es una asíntota **oblicua**.

**EJEMPLO 6** Trace la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}.$$

**Solución** La división sugerida antes toma la forma

$$\begin{array}{r} x + 2 \\ x - 1 \overline{) x^2 + x - 1} \\ \underline{x^2 - x} \phantom{- 1} \\ 2x - 1 \\ \underline{2x - 2} \\ 1 \end{array}$$

Así,

$$f(x) = x + 2 + \frac{1}{x - 1}.$$

Por tanto,  $y = x + 2$  es una asíntota de la curva. Además,

$$\lim_{x \rightarrow 1} |f(x)| = +\infty,$$

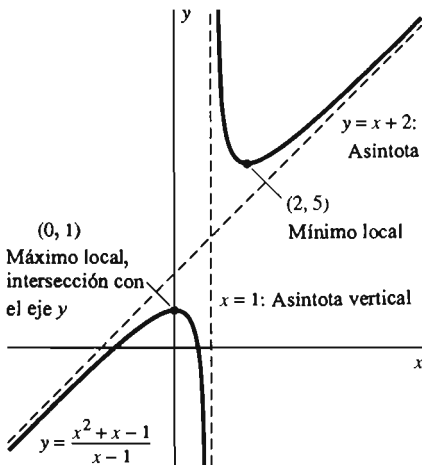
de modo que  $x = 1$  es una asíntota vertical. Las dos primeras derivadas de  $f$  son

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x - 1)^2} = \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2}$$

y

$$f''(x) = \frac{2}{(x - 1)^3}.$$

Esto implica que  $f$  tiene puntos críticos en  $x = 0$  y en  $x = 2$  pero no tiene puntos de inflexión. El signo de  $f'$  nos indica que  $f$  es creciente en  $(-\infty, 0)$  y en  $(2, +\infty)$ , es decreciente en  $(0, 1)$  y en  $(1, 2)$ . El análisis de  $f''(x)$  revela que  $f$  es cóncava hacia abajo en  $(-\infty, 1)$  y cóncava hacia arriba en  $(1, +\infty)$ . En particular,  $f(0) = 1$  es un valor máximo local, y  $f(2) = 5$  es un valor mínimo local. La gráfica de  $f$  se parece a la de la figura 4.7.8.



**Figura 4.7.8** Una función con asíntota  $y = x + 2$  (ejemplo 6)

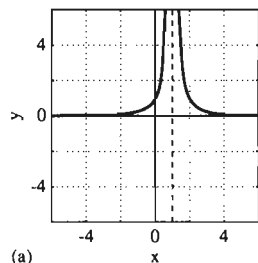
## 4.7 Problemas

Analice los límites de los problemas 1 a 16.

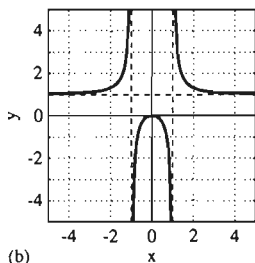
1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1}$
2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1}$
3.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x-1}$
4.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x-2}{x-1}$
5.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2-1}{x^2-3x}$
6.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+3x}{x^3-5}$
7.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+2x+1}{(x+1)^2}$
8.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3-2x+1}{7x^3+4x^2-2}$
9.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$
10.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-x\sqrt{x}}$
11.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8-\sqrt[3]{x}}{2+x}$
12.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2-17}{x^3-2x+27}$
13.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x^2-x}{x^2+9}}$
14.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3-8x+1}}{3x-4}$
15.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+2x}-x)$
16.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x-\sqrt{4x^2-5x})$

Aplique sus conocimientos de límites y asíntotas para relacionar cada función en los problemas 17 a 28 con su gráfica con asíntotas en algunos de los doce incisos de la figura 4.7.9.

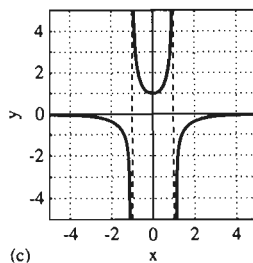
17.  $f(x) = \frac{1}{x-1}$
18.  $f(x) = \frac{1}{1-x}$
19.  $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$
20.  $f(x) = -\frac{1}{(1-x)^2}$
21.  $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$
22.  $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$
23.  $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$
24.  $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$
25.  $f(x) = \frac{x}{x-1}$
26.  $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$
27.  $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$
28.  $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$



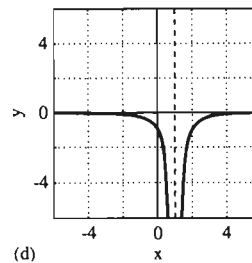
(a)



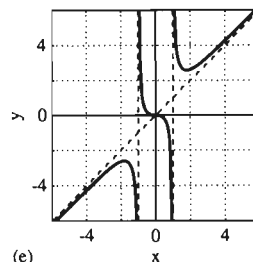
(b)



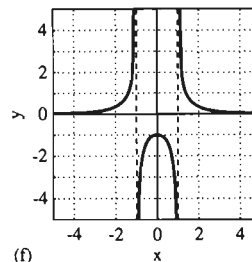
(c)



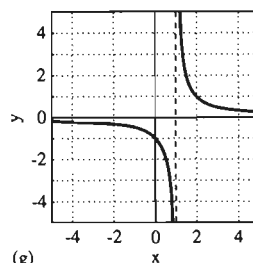
(d)



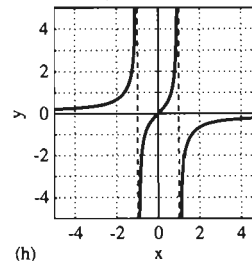
(e)



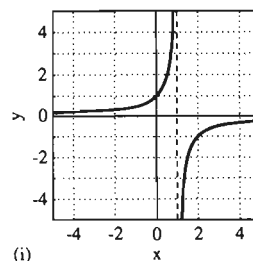
(f)



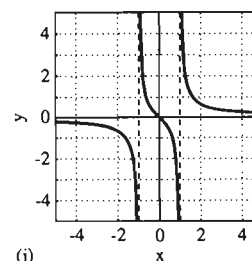
(g)



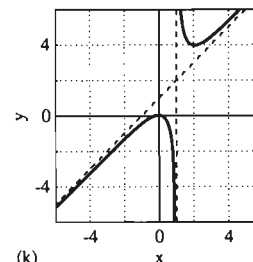
(h)



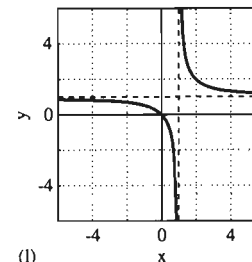
(i)



(j)



(k)



(l)

Figura 4.7.9 Problemas del 17 al 28

Trace la gráfica de cada una de las funciones en los problemas 29 a 54. Identifique y etiquete todos los extremos, puntos de inflexión, intersecciones con los ejes y asíntotas. Muestre la estructura de concavidad con claridad, así como el comportamiento de la gráfica para  $|x|$  grande y para  $x$  cerca de las discontinuidades de la función.

$$29. f(x) = \frac{2}{x-3}$$

$$30. f(x) = \frac{4}{5-x}$$

$$31. f(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$$

$$32. f(x) = -\frac{4}{(3-x)^2}$$

$$33. f(x) = \frac{1}{(2x-3)^3}$$

$$34. f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$35. f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$$

$$36. f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$37. f(x) = \frac{1}{x^2-9}$$

$$38. f(x) = \frac{x}{4-x^2}$$

$$39. f(x) = \frac{1}{x^2+x-6}$$

$$40. f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2-2x}$$

$$41. f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$42. f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$$

$$43. f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

$$44. f(x) = \frac{2x^3 - 5x^2 + 4x}{x^2 - 2x + 1}$$

$$45. f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$46. f(x) = \frac{1}{x^2-4}$$

$$47. f(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$48. f(x) = \frac{1}{(x+1)^3}$$

$$49. f(x) = \frac{1}{x^2-x-2}$$

$$50. f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$51. f(x) = \frac{x^2-4}{x}$$

$$52. f(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

$$53. f(x) = \frac{x^3-4}{x^2}$$

$$54. f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$$

55. Suponga que

$$f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$$

Observe que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x^2] = 0,$$

de modo que la curva  $y=f(x)$  tiende a la parábola  $y=x^2$  cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ . Use esta observación para realizar un trazo preciso de la gráfica de  $f$ .

56. Use el método del problema 55 para obtener un trazo preciso de la gráfica de

$$f(x) = x^3 - \frac{12}{x-1}$$

## Capítulo 4 Repaso: DEFINICIONES, CONCEPTOS, RESULTADOS

Use la siguiente lista como una guía para los conceptos que tal vez necesite repasar.

1. Incremento  $\Delta y$
2. Diferencial  $dy$
3. La fórmula de la aproximación lineal
4. Reglas de derivación en forma diferencial
5. Funciones crecientes y funciones decrecientes
6. Significado del signo de la primera derivada
7. El teorema de Rolle
8. El teorema del valor medio
9. Consecuencias del teorema del valor medio
10. Criterio de la primera derivada
11. Problemas de máximos y mínimos en intervalos abiertos

12. Gráficas de polinomios
13. Cálculo de derivadas de orden superior
14. Funciones cóncavas hacia arriba y cóncavas hacia abajo
15. Criterio de concavidad
16. Criterio de la segunda derivada
17. Puntos de inflexión
18. Criterio del punto de inflexión
19. Límites infinitos
20. Asíntotas verticales
21. Límites cuando  $x \rightarrow \pm\infty$
22. Asíntotas horizontales
23. Asíntotas oblicuas
24. Técnicas para el trazo de curvas

## Capítulo 4 Problemas diversos

En los problemas 1 a 6, escriba  $dy$  en términos de  $x$  y  $dx$ .

$$1. y = (4x - x^2)^{3/2}$$

$$2. y = 8x^3\sqrt{x^2+9}$$

$$3. y = \frac{x+1}{x-1}$$

$$4. y = \sin x^2$$

$$5. y = x^2 \cos \sqrt{x} \quad 6. y = \frac{x}{\sin 2x}$$

En los problemas 7 a 16, estime el número dado mediante una aproximación lineal.

$$7. \sqrt{6401} \quad (\text{Note que } 80^2 = 6400.)$$

$$8. \frac{1}{1.000007}$$

$$9. (2.0003)^{10} \quad (\text{Observe que } 2^{10} = 1024.)$$

$$10. \sqrt[3]{999} \quad (\text{Observe que } 10^3 = 1000.)$$

$$11. \sqrt[3]{1005} \quad 12. \sqrt[3]{62} \quad 13. 26^{3/2}$$

$$14. \sqrt[5]{30} \quad 15. \sqrt[4]{17} \quad 16. \sqrt[10]{1000}$$

En los problemas 17 a 22, estime el cambio en la cantidad indicada mediante una aproximación lineal.

17. El volumen  $V = s^3$  de un cubo, si la longitud de su arista  $s$  aumenta de 5 a 5.1 pulgadas.

18. El área  $A = \pi r^2$  de un círculo, si su radio  $r$  disminuye de 10 a 9.8 cm.

19. El volumen  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  de una esfera, si su radio  $r$  aumenta de 5 a 5.1 cm.

20. El volumen  $V = 1000/p$  pulgadas cúbicas de un gas, si la presión desciende de 100 a 99 libras/pulgada cuadrada.

21. El periodo de oscilación  $T = 2\pi\sqrt{L/32}$  de un péndulo, si su longitud  $L$  aumenta de 2 pies a 25 pulgadas. (El tiempo  $T$  está en segundos.)

22. El tiempo de vida  $L = 10^{30}/E^{13}$  horas de una lámpara con un voltaje aplicado de  $E$  voltios (V), si el voltaje aumenta de 110 V a 111 V. Compare su resultado con el descenso real del tiempo de vida.

Si el teorema del valor medio se aplica a la función  $f$  en el intervalo  $[a, b]$ , esto garantiza la existencia de una solución  $c$  en el intervalo  $(a, b)$  de la ecuación

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

En los problemas 23 a 28, se dan una función  $f$  y un intervalo  $[a, b]$ . Verifique que  $f$  satisface las hipótesis del teorema del valor medio en  $[a, b]$ . Use entonces la ecuación dada para determinar el valor del número  $c$ .

$$23. f(x) = x - \frac{1}{x}; \quad [1, 3]$$

$$24. f(x) = x^3 + x - 4; \quad [-2, 3]$$

$$25. f(x) = x^3; \quad [-1, 2]$$

$$26. f(x) = x^3; \quad [-2, 1]$$

$$27. f(x) = \frac{11}{3}x^5; \quad [-1, 2]$$

$$28. f(x) = \sqrt{x}; \quad [0, 4]$$

Trace las gráficas de las funciones en los problemas 29 a 33. Indique el máximo y el mínimo local de cada función y los

intervalos en donde es creciente o decreciente. Muestre la estructura de concavidad de la gráfica e identifique todos los puntos de inflexión.

$$29. f(x) = x^2 - 6x + 4$$

$$30. f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$$

$$31. f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 60x$$

$$32. f(x) = (3 - x)\sqrt{x}$$

$$33. f(x) = (1 - x)\sqrt[3]{x}$$

34. Muestre que la ecuación  $x^5 + x = 5$  tiene exactamente una solución real.

Calcule las primeras tres derivadas de las funciones en los problemas 35 a 44.

$$35. f(x) = x^3 - 2x \quad 36. f(x) = (x + 1)^{100}$$

$$37. g(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{2t + 1} \quad 38. h(y) = \sqrt{3y - 1}$$

$$39. f(t) = 2t^{3/2} - 3t^{4/3} \quad 40. g(x) = \frac{1}{x^2 + 9}$$

$$41. h(t) = \frac{t + 2}{t - 2} \quad 42. f(z) = \sqrt[3]{z} + \frac{3}{\sqrt[3]{z}}$$

$$43. g(x) = \sqrt[3]{5 - 4x} \quad 44. g(t) = \frac{8}{(3 - t)^{3/2}}$$

En los problemas 45 a 52, calcule  $dy/dx$  y  $d^2y/dx^2$  bajo la hipótesis de que  $y$  está definida de manera implícita como una función de  $x$  mediante la ecuación dada.

$$45. x^{1/3} + y^{1/3} = 1 \quad 46. 2x^2 - 3xy + 5y^2 = 25$$

$$47. y^5 - 4y + 1 = \sqrt{x} \quad 48. \sin xy = xy$$

$$49. x^2 + y^2 = 5xy + 5 \quad 50. x^5 + xy^4 = 1$$

$$51. y^3 - y = x^2y \quad 52. (x^2 - y^2)^2 = 4xy$$

Trace las gráficas de las funciones en los problemas 53 a 72, indicando todos los puntos críticos, puntos de inflexión y asíntotas. Muestre claramente la estructura de concavidad.

$$53. f(x) = x^4 - 32x \quad 54. f(x) = 18x^2 - x^4$$

$$55. f(x) = x^6 - 2x^4 \quad 56. f(x) = x\sqrt{x - 3}$$

$$57. f(x) = x\sqrt[3]{4 - x} \quad 58. f(x) = \frac{x - 1}{x + 2}$$

$$59. f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} \quad 60. f(x) = \frac{x}{x^2 - x - 2}$$

$$61. f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - x - 2} \quad 62. f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

$$63. f(x) = 3x^4 - 4x^3 \quad 64. f(x) = x^4 - 2x^2$$

$$65. f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} \quad 66. f(x) = x^3 - 12x$$

$$67. f(x) = -10 + 6x^2 - x^3$$

68.  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ ; observe que

$$f'(x) = -\frac{(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$$

y que

$$f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

69.  $f(x) = x^3 - 3x$       70.  $f(x) = x^4 - 12x^2$

71.  $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$

72.  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

73. La función

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$$

tiene un valor máximo, y sólo uno. Determinelo.

74. Usted necesita un recipiente cilíndrico, sin tapa, con un volumen de un pie cúbico. La parte cilíndrica del recipiente se fabrica con aluminio y el fondo de cobre. El cobre es cinco veces más caro que el aluminio. ¿Qué dimensiones minimizarían el costo total del recipiente?

75. Una caja rectangular sin tapa debe tener un volumen de 4500 cm<sup>3</sup>. Si su fondo es un rectángulo cuyo largo es el doble de su ancho, ¿qué dimensiones minimizarían el área total del fondo y los cuatro lados de la caja?

76. Una pequeña caja rectangular debe tener un volumen de 324 pulgadas cúbicas. Su fondo es cuadrado y cuesta el doble (por pulgada cuadrada) que la tapa y los cuatro lados. ¿Qué dimensiones minimizarían el costo total del material necesario para hacer la caja?

77. Usted debe fabricar una pequeña caja rectangular con un volumen de 400 pulgadas cúbicas. El fondo es un rectángulo cuyo largo es el doble del ancho. El fondo cuesta 7 centavos la pulgada cuadrada; la tapa y los cuatro lados de la caja cuestan 5 centavos la pulgada cuadrada. ¿Qué dimensiones minimizarían el costo de la caja?

78. Suponga que  $f(x)$  es un polinomio cúbico con exactamente tres raíces reales distintas. Demuestre que las dos raíces de  $f'(x)$  son reales y distintas.

79. Suponga que cuesta  $1 + (0.0003)v^{3/2}$  dólares por milla operar un camión a  $v$  millas por hora. Si existe un costo adicional (como el salario del conductor) de \$10/hora, ¿qué velocidad minimizaría el costo total de un viaje de 1000 millas?

80. Los números  $a_1, a_2, \dots, a_n$  están fijos. Determine una fórmula sencilla para el número  $x$  tal que la suma de los cuadrados de las distancias de  $x$  a los  $n$  números dados sea lo más pequeña posible.

81. Trace la curva  $y^2 = x(x-1)(x-2)$ , indicando que consta de dos partes, una acotada y la otra no acotada, y que tiene dos rectas tangentes horizontales, tres rectas tangentes verticales y dos puntos de inflexión. [Sugerencia: Observe que la curva es simétrica con respecto del eje  $x$  y comience determinando los intervalos donde el producto  $x(x-1)(x-2)$  es

positivo. Calcule  $dy/dx$  y  $d^2y/dx^2$  mediante derivación implícita.]

82. Una granjera quiere cercar un terreno rectangular con un área de 2400 pies cuadrados. También quiere utilizar algo de cerca para construir una división interna paralela a dos de las secciones del borde (figura 4.PD.1). ¿Cuál es la longitud mínima total de cerca que requiere este proyecto? Verifique que su respuesta es el mínimo global.

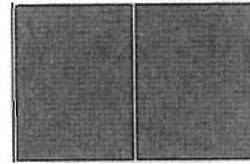


Figura 4.PD.1 La cerca del problema 82

83. Otro granjero desea cercar un terreno rectangular con un área de 1800 pies cuadrados. También desea utilizar algo de cerca para construir dos cercas internas de división, ambas paralelas a las mismas secciones exteriores del borde (figura 4.PD.2). ¿Cuál es la longitud mínima total de cerca que requiere este proyecto? Verifique que su respuesta es el mínimo global.

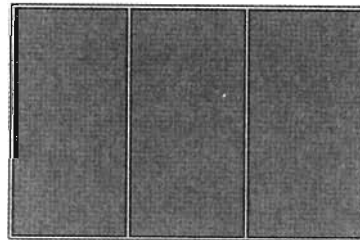


Figura 4.PD.2 La cerca del problema 83

84. Una tercera granjera desea cercar un terreno rectangular de área 2250 m<sup>2</sup>. Ella también desea usar una cerca adicional para construir tres cercas internas de división, todas ellas paralelas a las mismas secciones exteriores del borde. ¿Cuál es la longitud mínima total que requiere este proyecto? Verifique que su respuesta es el mínimo global.

85. Un último granjero desea cercar un terreno rectangular de área  $A$  pies cuadrados. También desea usar una cerca adicional para construir  $n$  (un entero fijo positivo no especificado) cercas internas de división, todas ellas paralelas a las mismas secciones exteriores del borde. ¿Cuál es la longitud mínima total que requiere este proyecto? Verifique que su respuesta es el mínimo global.

86. ¿Cuál es la longitud del segmento de recta más corto que está contenido en el primer cuadrante, con sus extremos en los ejes y que es tangente a la gráfica de  $y = 1/x^2$ ? Verifique que su respuesta es el mínimo global.

87. Un triángulo rectángulo se forma en el primer cuadrante mediante un segmento de recta que es tangente a la gráfica de

$y = 1/x^2$  y cuyos extremos están en los ejes. ¿Existe un área máxima posible para tales triángulos? ¿Existe un mínimo? Explique sus respuestas.

88. Se forma un triángulo rectángulo en el primer cuadrante, con un segmento de recta tangente a la gráfica de  $y = 1/x$  y cuyos extremos están sobre los ejes. ¿Existe un área máxima posible para dicho triángulo? ¿Existe un mínimo? Explique sus respuestas.

89. Una caja rectangular (con tapa) debe tener un volumen de 288 pulgadas cúbicas y el largo de su base debe medir exactamente el triple de su ancho. ¿Cuál es el área superficial mínima posible de dicha caja? Verifique que su respuesta es el mínimo global.

90. Una caja rectangular (con tapa) debe tener un volumen de 800 pulgadas cúbicas y el largo de su base debe medir exactamente cuatro veces su ancho. ¿Cuál es el área superficial mínima posible de dicha caja? Verifique que su respuesta es el mínimo global.

91. Una caja rectangular (con tapa) debe tener un volumen de 225 pulgadas cúbicas y el largo de su base debe medir exactamente cinco veces su ancho. ¿Cuál es el área superficial mínima posible de dicha caja? Verifique que su respuesta es el mínimo global.

92. Una caja rectangular (con tapa) debe tener un volumen  $V$  y el largo de su base debe medir exactamente  $n$  veces su ancho ( $n$  es un entero positivo fijo). ¿Cuál es el área superficial mínima posible de dicha caja? Verifique que su respuesta es el mínimo global.

93. La gráfica de  $f(x) = x^{1/3}(1-x)^{2/3}$  se muestra en la figura 4.PD.3. Recuerde (sección 4.7) que esta gráfica tiene una

asintota oblicua con la ecuación  $y = mx + b$  si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0 \quad \text{o bien}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0.$$

(Los valores de  $m$  y  $b$  pueden ser distintos en los dos casos  $x \rightarrow +\infty$  y  $x \rightarrow -\infty$ .) La gráfica parece tener dicha asymptota cuando  $x \rightarrow +\infty$ . Determine  $m$  evaluando

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Determine a continuación  $b$  evaluando

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx].$$

Por último, determine  $m$  y  $b$  para el caso  $x \rightarrow -\infty$ .

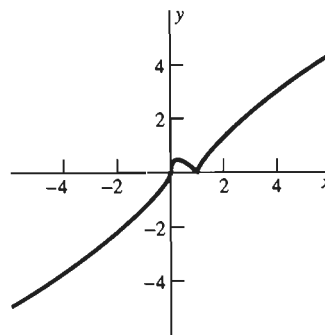


Figura 4.PD.3 La gráfica de  $y = f(x)$  del problema 93



# La integral

□ Arquímedes de Siracusa fue el más grande matemático de la era antigua desde el siglo V a.C. hasta el siglo II d.C., cuando se sembró la semilla de las matemáticas modernas, en las comunidades griegas ubicadas principalmente a orillas del mar Mediterráneo. Fue famoso en su tiempo por sus inventos mecánicos: el llamado tornillo arquimediano, para bombear agua, dispositivos de palanca y polea (“dadme un punto de apoyo y moveré al mundo”), un planetario que duplicó los movimientos de los cuerpos celestes de manera tan precisa que mostraba los eclipses del sol y de la luna, y las máquinas de guerra que aterraron a los soldados romanos en la batalla de Siracusa, durante la cual fue muerto Arquímedes. Pero se decía que para el mismo Arquímedes, estos inventos eran simplemente una “distracción de la geometría en juego”; sus obras se dedicaban a las investigaciones matemáticas.

□ Arquímedes llevó a cabo muchos de los cálculos de área y volumen que ahora usan cálculo integral: desde áreas de círculos, esferas y segmentos de secciones cónicas hasta volúmenes de conos, esferas, elipsoides y paraboloides. Se había demostrado con anterioridad, en los *Elementos* de Euclides, que el área

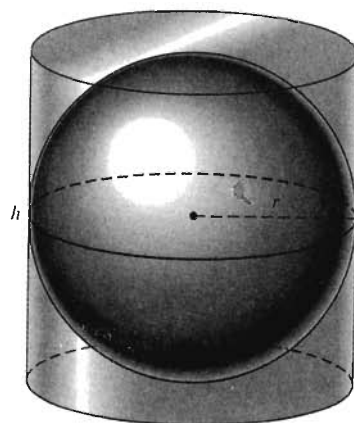
$A$  de un círculo es proporcional al cuadrado de su radio  $r$ , de modo que  $A = \pi r^2$  para alguna constante de proporcionalidad  $\pi$ . Pero fue Arquímedes quien aproximó con precisión el valor numérico de  $\pi$ , mostrando que su valor está entre el  $3\frac{1}{7}$  memorizado por los niños de las escuelas de educación elemental y la cota inferior  $3\frac{10}{71}$ . Euclides también demostró que el volumen  $V$  de una esfera de radio  $r$  está dado por  $V = \mu r^3$  ( $\mu$  constante), pero fue Arquímedes quien descubrió (y demostró) que  $\mu = \frac{4\pi r}{3}$ . También descubrió las fórmulas de volumen ahora tan familiares  $V = \pi r^2 h$  y  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$  para un cilindro y un cono, respectivamente, con base de radio  $r$  y altura  $h$ .

□ Se sospechó por mucho tiempo que Arquímedes no había descubierto originalmente sus fórmulas de áreas y volúmenes por medio de los argumentos basados en límites que empleó para establecerlos rigurosamente. En 1906 fue redescubierto, virtualmente por accidente, un tratado arquimediano titulado *El Método*, perdido desde la antigüedad. En él, Arquímedes describía un “método de descubrimiento” basado en un empleo de los infinitesimales muy parecido al utilizado durante la invención y exploración del cálculo en los siglos XVII y XVIII.

□ Como conmemoración de sus fórmulas de la esfera y el cilindro, Arquímedes pidió que en su lápida se grabara una esfera inscrita en un cilindro circular. Si la altura del cilindro es  $h = 2r$ , ¿puede verificar que las áreas totales de la superficie  $A_C$  y  $A_E$  del cilindro y la esfera y sus volúmenes  $V_C$  y  $V_E$ , se relacionan mediante las fórmulas de Arquímedes

$$A_E = \frac{2}{3} A_C \quad \text{y} \quad V_E = \frac{2}{3} V_C ?$$

Así, los volúmenes y áreas de las superficies de la esfera y el cilindro tienen la misma razón 2:3.



## 5.1 Introducción

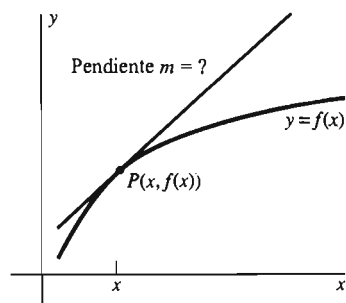


Figura 5.1.1 El problema de la recta tangente motiva el cálculo diferencial

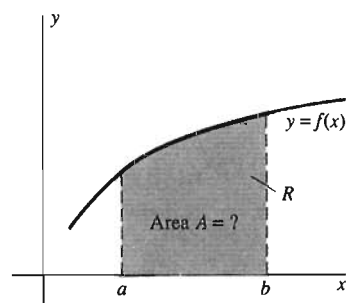


Figura 5.1.2 El problema del área motiva el cálculo integral

## 5.2 Antiderivadas o primitivas y problemas con condiciones iniciales

Los capítulos 1 a 4 tratan el **cálculo diferencial**, una de las dos partes estrechamente relacionadas del cálculo. El cálculo diferencial se centra en el concepto de *derivada*. Recordemos que la motivación original para la derivada fue el problema de definir las rectas tangentes a las gráficas de las funciones y el cálculo de las pendientes de dichas rectas (figura 5.1.1). Sin embargo, la importancia de la derivada se basa en su aplicación a diversos problemas que parecen tener poca conexión con las rectas tangentes a las gráficas en una primera inspección.

El **cálculo integral** se basa en el concepto de la *integral*. La definición de la integral es motivada por el problema de definir y calcular el área de la región que se encuentra entre la gráfica de una función de valores positivos  $f$  y el eje  $x$  en un intervalo cerrado  $[a, b]$ . El área de la región  $R$  de la figura 5.1.2 está dada por la *integral* de  $f$  de  $a$  a  $b$ , denotada por el símbolo

$$\int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

Pero la integral, así como la derivada, es importante debido a su aplicación a muchos problemas que aparentan tener poca relación con dicha motivación original: problemas que implican movimiento, velocidad, crecimiento de poblaciones, volumen, longitud de arco, área de una superficie y centro de gravedad, entre otros.

El teorema principal de este capítulo es el *teorema fundamental del cálculo* de la sección 5.6, el cual proporciona una conexión vital entre las operaciones de derivación e integración, la que proporciona un método eficaz para calcular el valor de las integrales. Veremos que en vez de encontrar la derivada de la función  $f(x)$  de la ecuación (1), necesitamos determinar una nueva función  $F(x)$  cuya derivada sea  $f(x)$ :

$$F'(x) = f(x). \quad (2)$$

Así, necesitamos “derivar en orden inverso”. Por consiguiente, comenzamos en la sección 5.2 con el estudio de la *antiderivación*.

El lenguaje del cambio es el lenguaje natural para establecer las leyes y principios científicos. Por ejemplo, la ley de enfriamiento de Newton dice que la *razón de cambio* de la temperatura  $T$  de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre  $T$  y la temperatura del medio ambiente (figura 5.2.1). Es decir,

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - A), \quad (1)$$

donde  $k$  es una constante positiva y  $A$ , que normalmente se considera constante, es la temperatura ambiente. De manera análoga, la *razón de cambio* de una población  $P$  con tasas constantes de natalidad y mortalidad es proporcional al tamaño de la población:

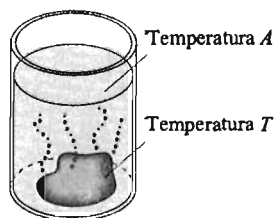
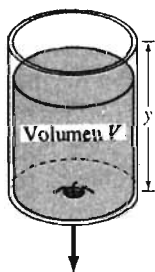


Figura 5.2.1 La ley de enfriamiento de Newton, ecuación (1), describe el enfriamiento de una roca caliente en agua fría



**Figura 5.2.2** La ley de Torricelli, ecuación (3), describe el desagüe de un tanque de agua

$$\frac{dP}{dt} = kP \quad (k \text{ constante}) \quad (2)$$

La ley de Torricelli (figura 5.2.2) dice que la *razón de cambio* del volumen  $V$  de agua en un tanque que se vacía es proporcional a la raíz cuadrada de la profundidad y del agua; es decir,

$$\frac{dV}{dt} = -k\sqrt{y} \quad (k \text{ constante}) \quad (3)$$

Los modelos matemáticos de las situaciones del mundo real implican con frecuencia ecuaciones con *derivadas* de las funciones desconocidas. Estas ecuaciones, incluyendo las ecuaciones (1) a (3), son **ecuaciones diferenciales**.

El tipo más sencillo de una ecuación diferencial tiene la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad (4)$$

donde  $f$  es una función dada (conocida) y la función  $y(x)$  es desconocida. El proceso de determinar una función a partir de su derivada es opuesto a la derivación y por ello se llama **antiderivación**. Si podemos determinar una función  $y(x)$  cuya derivada sea  $f(x)$ ,

$$y'(x) = f(x),$$

entonces decimos que  $y(x)$  es una *primitiva* (o antiderivada) de  $f(x)$ .

Función $f(x)$	Primitiva $F(x)$
1	$x$
$2x$	$x^2$
$x^3$	$\frac{1}{4}x^4$
$\cos x$	$\text{sen } x$
$\text{sen } 2x$	$-\frac{1}{2} \cos 2x$

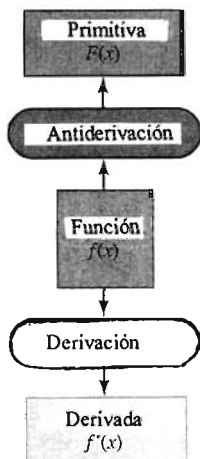
**Figura 5.2.3** Algunas primitivas

**Definición Antiderivada o primitiva**

Una **antiderivada o primitiva** de la función  $f$  es una función  $F$  tal que

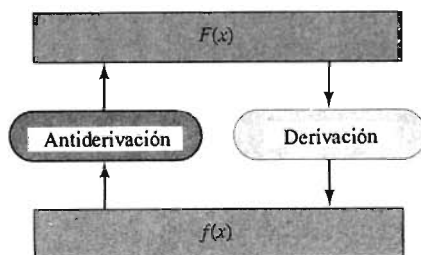
$$F'(x) = f(x)$$

siempre y cuando  $f(x)$  esté definida.



**Figura 5.2.4** La derivación y la antiderivación son opuestas

La tabla de la figura 5.2.3 muestra algunos ejemplos de funciones, cada uno con sus primitivas. La figura 5.2.4 ilustra las operaciones de derivación y antiderivación, comenzando con la misma función  $f(x)$  y siguiendo en direcciones opuestas. La figura 5.2.5 ilustra que la derivación “anula” el resultado de la antiderivación, la derivada de la primitiva de  $f(x)$  es la función original  $f(x)$ .



**Figura 5.2.5** La derivación anula el resultado de la antiderivación

**EJEMPLO 1** Dada la función  $f(x) = 3x^2$ , entonces  $F(x) = x^3$  es una primitiva de  $f(x) = 3x^2$ , como también lo son las funciones

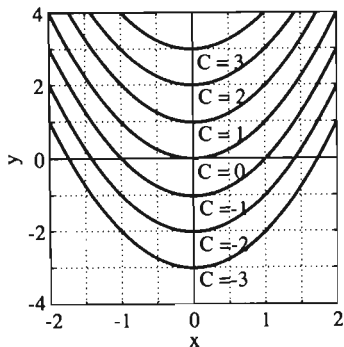


Figura 5.2.6 Gráfica de  $y = x^2 + C$  para distintos valores de  $C$

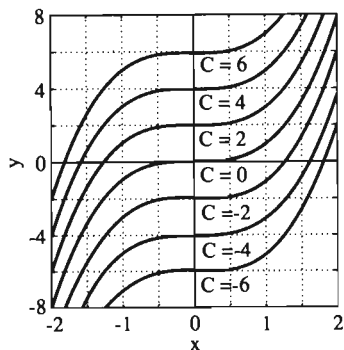


Figura 5.2.7 Gráfica de  $y = x^3 + C$  para distintos valores de  $C$

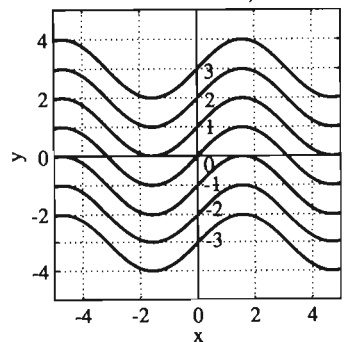


Figura 5.2.8 Gráfica de  $y = \text{sen } x + C$  para distintos valores de  $C$

$$G(x) = x^3 + 17, \quad H(x) = x^3 + \pi \quad \text{y} \quad K(x) = x^3 - \sqrt{2}.$$

En realidad,  $J(x) = x^3 + C$  es una primitiva de  $f(x) = 3x^2$  para cualquier elección de la constante  $C$ .

Así, una sola función tiene *muchas* primitivas, mientras que una función *sólo* puede tener *una* derivada. Si  $F(x)$  es una primitiva de  $f(x)$ , también lo es  $F(x) + C$  para cualquier elección de la constante  $C$ . El recíproco de esta proposición es más sutil: si  $F(x)$  es una primitiva de  $f(x)$  en el intervalo  $I$ , entonces *toda* primitiva de  $f(x)$  en  $I$  es de la forma  $F(x) + C$ . Esto es una consecuencia directa del corolario 2 del teorema del valor medio de la sección 4.3, según el cual dos funciones con la misma derivada en un intervalo difieren solamente por una constante en ese intervalo.

Así las gráficas de dos primitivas  $F(x) + C_1$  y  $F(x) + C_2$  de la misma función  $f(x)$  en el mismo intervalo  $I$  son “paralelas”, en el sentido ilustrado en las figuras 5.2.6 a 5.2.8. Aquí vemos que la constante  $C$  es la distancia vertical entre las curvas  $y = F(x)$  y  $y = F(x) + C$  para cada  $x$  en  $I$ . Ésta es la interpretación geométrica del teorema 1.

### Teorema 1 La primitiva más general

Si  $F'(x) = f(x)$  en cada punto del intervalo abierto  $I$ , entonces cada primitiva  $G$  de  $f$  en  $I$  tiene la forma

$$G(x) = F(x) + C, \tag{5}$$

donde  $C$  es una constante.

Así, si  $F$  es cualquier primitiva de  $f$  en el intervalo  $I$ , entonces la primitiva *más general* de  $f$  en  $I$  tiene la forma  $F(x) + C$ , como en la ecuación (5). La colección de *todas* las primitivas de la función  $f(x)$  es conocida como la **integral indefinida** de  $f$  con respecto de  $x$  y se denota

$$\int f(x) dx.$$

Con base en el teorema 1, escribimos

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \tag{6}$$

donde  $F(x)$  es una primitiva particular de  $f(x)$ . Por tanto,

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \text{si y sólo si} \quad F'(x) = f(x).$$

El símbolo de la integral  $\int$  es como una  $S$  mayúscula alargada. En realidad, es una  $S$  medieval, utilizada por Leibniz como una abreviación de la palabra latina *summa* (“suma”). Pensamos la combinación  $\int \cdots dx$  como un solo símbolo; colocamos en el “espacio” la fórmula de la función cuya primitiva estamos buscando. Podemos considerar la diferencial  $dx$  como algo que especifica la variable independiente  $x$  tanto en la función  $f(x)$  como en sus primitivas.

**EJEMPLO 2** Las entradas en la figura 5.2.3 nos llevan a las integrales indefinidas

$$\int 1 \, dx = x + C,$$

$$\int 2x \, dx = x^2 + C,$$

$$\int x^3 \, dx = \frac{1}{4}x^4 + C,$$

$$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C \quad y$$

$$\int \operatorname{sen} 2x \, dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C.$$

Puede verificar cada una de las fórmulas derivando el lado derecho. Ciertamente, ésta es la manera *segura* de verificar cualquier antiderivación: para verificar que  $F(x)$  es una primitiva de  $f(x)$ , calculamos  $F'(x)$  para ver si obtenemos  $f(x)$ . Por ejemplo, la derivación

$$D_x(-\frac{1}{2} \cos 2x + C) = -\frac{1}{2}(-2 \operatorname{sen} 2x) + 0 = \operatorname{sen} 2x$$

es suficiente para verificar la quinta fórmula de este ejemplo.

La diferencial  $dx$  de la ecuación (6) especifica que la variable independiente es  $x$ . Pero podemos describir una antiderivación específica en términos de *cualquier* variable independiente conveniente. Por ejemplo, las integrales indefinidas

$$\int 3t^2 \, dt = t^3 + C, \quad \int 3y^2 \, dy = y^3 + C \quad y \quad \int 3u^2 \, du = u^3 + C$$

significan exactamente lo mismo que

$$\int 3x^2 \, dx = x^3 + C.$$

Cada fórmula de derivación produce inmediatamente, por “inversión” de la derivación, una fórmula integral indefinida correspondiente. Las, ahora familiares, derivadas de las funciones potencia y las funciones trigonométricas conducen a las fórmulas integrales establecidas en el teorema 2.

**Teorema 2** *Algunas fórmulas integrales*

$$\int x^k \, dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C \quad (\text{si } k \neq -1), \quad (7)$$

$$\int \cos kx \, dx = \frac{1}{k} \operatorname{sen} kx + C, \quad (8)$$

$$\int \operatorname{sen} kx \, dx = -\frac{1}{k} \cos kx + C, \quad (9)$$

$$\int \sec^2 kx \, dx = \frac{1}{k} \tan kx + C, \quad (10)$$

$$\int \csc^2 kx \, dx = -\frac{1}{k} \cot kx + C, \quad (11)$$

$$\int \sec kx \tan kx \, dx = \frac{1}{k} \sec kx + C \quad y \quad (12)$$

$$\int \csc kx \cot kx \, dx = -\frac{1}{k} \csc kx + C. \quad (13)$$

**OBSERVACIÓN** ¡Asegúrese de verificar por qué aparece un signo menos en la ecuación (9) pero no en la ecuación (8)!

Recuerde que la operación de derivación es *lineal*, lo que significa

$$D_x[cF(x)] = cF'(x) \quad (\text{donde } c \text{ es una constante})$$

y

$$D_x[F(x) \pm G(x)] = F'(x) \pm G'(x).$$

En la notación de antiderivación, esto implica que

$$\int cf(x) \, dx = c \int f(x) \, dx \quad (c \text{ es una constante}) \quad (14)$$

y

$$\int [f(x) \pm g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx. \quad (15)$$

Podemos resumir estas dos ecuaciones diciendo que la antiderivación es **lineal**. En esencia, entonces, antiderivamos una suma de funciones antiderivando cada función individualmente. Esto es una antiderivación *término a término*. Además, un coeficiente constante en cualquiera de los términos es simplemente “acarreado por” la antiderivación.

**EJEMPLO 3** Determinar

$$\int \left( x^3 + 3\sqrt{x} - \frac{4}{x^2} \right) dx.$$

**Solución** Como en la derivación, preparamos la antiderivación escribiendo las raíces y los recíprocos como potencias con exponentes fraccionarios o negativos. Así,

$$\begin{aligned} \int \left( x^3 + 3\sqrt{x} - \frac{4}{x^2} \right) dx &= \int (x^3 + 3x^{1/2} - 4x^{-2}) dx \\ &= \int x^3 dx + 3 \int x^{1/2} dx - 4 \int x^{-2} dx \quad [\text{usando las ecuaciones (14) y (15)}] \\ &= \frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - 4 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C \quad [\text{usando la ecuación (7)}] \\ &= \frac{1}{4}x^4 + 2x\sqrt{x} + \frac{4}{x} + C. \end{aligned}$$

Existe sólo una “+C” ya que la vía segura de verificación implica que  $\frac{1}{4}x^4 + 2x^{2/3} + 4x^{-1}$  es una primitiva particular. Por tanto, cualquier otra primitiva difiere de ésta solamente por una (única) constante C.

#### EJEMPLO 4

$$\begin{aligned} \int (2 \cos 3t + 5 \operatorname{sen} 4t) dt & \\ &= 2 \int \cos 3t dt + 5 \int \operatorname{sen} 4t dt \quad [\text{usando las ecuaciones (14) y (15)}] \\ &= 2\left(\frac{1}{3} \operatorname{sen} 3t\right) + 5\left(-\frac{1}{4} \cos 4t\right) + C \quad [\text{usando las ecuaciones (8) y (9)}] \\ &= \frac{2}{3} \operatorname{sen} 3t - \frac{5}{4} \cos 4t + C. \end{aligned}$$

La ecuación (7) es la regla de la potencia “en sentido inverso”. La regla de la potencia generalizada en sentido inverso es

$$\int u^k du = \frac{u^{k+1}}{k+1} + C \quad (\text{si } k \neq -1), \quad (16)$$

donde

$$u = g(x) \text{ y } du = g'(x) dx.$$

**EJEMPLO 5** Si  $u = x + 5$  (de modo que  $du = dx$ ), la ecuación (16) implica

$$\int (x + 5)^{10} dx = \frac{1}{11}(x + 5)^{11} + C.$$

**EJEMPLO 6** Queremos determinar

$$\int \frac{20}{(4 - 5x)^3} dx.$$

Planeamos usar la ecuación (16) con  $u = 4 - 5x$ . Pero antes debemos obtener la derivada  $du = -5 dx$ . La “regla de multiplicación por una constante” de la ecuación (14) nos permite hacer esto:

$$\begin{aligned} \int \frac{20}{(4 - 5x)^3} dx &= 20 \int (4 - 5x)^{-3} dx \\ &= \frac{20}{-5} \int (4 - 5x)^{-3} (-5 dx) & (17) \\ &= -4 \int u^{-3} du \quad (u = 4 - 5x, du = -5 dx) \\ &= -4 \cdot \frac{u^{-2}}{-2} + C \quad [\text{Ecuación (7) con } k = -3]. \end{aligned}$$

Así,

$$\int \frac{20}{(4 - 5x)^3} dx = \frac{2}{(4 - 5x)^2} + C.$$

El paso clave está en la ecuación (17). Ahí multiplicamos por la *constante*  $-5$  dentro de la integral y compensamos eso al dividir entre  $-5$  fuera de la integral.

Esto era necesario para reemplazar  $u$  por  $4 - 5x$  y expresar la primitiva en términos de la variable independiente original  $x$ .

## ECUACIONES DIFERENCIALES MUY SENCILLAS

La técnica de antiderivación se puede usar con frecuencia para resolver una ecuación diferencial de la forma particular

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad (18)$$

donde la variable dependiente  $y$  no aparece en el lado derecho. *Resolver* la ecuación diferencial en la ecuación (18) consiste simplemente en encontrar una función  $y(x)$  que satisfaga la ecuación (18); es decir, una función cuya derivada sea la función dada  $f(x)$ . Por tanto, la **solución general** de la ecuación (18) es la integral indefinida

$$y(x) = \int f(x) dx + C \quad (19)$$

de la función  $f(x)$ .

**EJEMPLO 7** La solución general de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

está dada por

$$y(x) = \int 3x^2 dx = x^3 + C.$$

---

Una ecuación diferencial de la forma de la ecuación (18) puede aparecer junto con una **condición inicial** de la forma

$$y(x_0) = y_0. \quad (20)$$

Esta condición especifica el valor  $y = y_0$  que la función solución  $y(x)$  debe tener en  $x = x_0$ . Una vez que hemos determinado la solución general de la ecuación (19), podemos encontrar el valor de la constante  $C$  sustituyendo  $y = y_0$  cuando  $x = x_0$ . Con este valor específico de  $C$ , la ecuación (19) da la **solución particular** de la ecuación diferencial en la ecuación (18) que satisface la condición inicial en la ecuación (20). La combinación

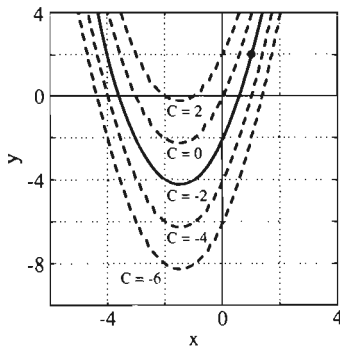
$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad y(x_0) = y_0 \quad (21)$$

de una ecuación diferencial con una condición inicial es llamada un **problema con condición(es) inicial(es)**.

**EJEMPLO 8** Resuelva el problema con condición inicial

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 3, \quad y(1) = 2. \quad (22)$$





**Figura 5.2.9** Solución general  $y = x^2 + 3x + C$  de la ecuación diferencial en la ecuación (22) (ejemplo 8)

**Solución** Por la ecuación (19), la *solución general* de la ecuación diferencial  $dy/dx = 2x + 3$  está dada por

$$y(x) = \int (2x + 3) dx = x^2 + 3x + C.$$

La figura 5.2.9 muestra la gráfica  $y = x^2 + 3x + C$  para distintos valores de  $C$ . La solución particular que buscamos corresponde a la curva de la figura 5.2.9 que pasa por el punto  $(1, 2)$ , que satisface la condición inicial

$$y(1) = (1)^2 + 3 \cdot (1) + C = 2.$$

Esto implica que  $4 + C = 2$ , por lo que  $C = -2$ . Así, la *solución particular* deseada es

$$y(x) = x^2 + 3x - 2.$$

**OBSERVACIÓN** El método del ejemplo 8 puede describirse como “integrar ambos lados de una ecuación diferencial” con respecto de  $x$ :

$$\int \left( \frac{dy}{dx} \right) dx = \int (2x + 3) dx;$$

$$y(x) = x^2 + 3x + C.$$

## MOVIMIENTO RECTILÍNEO

La antiderivación nos permite, en muchos casos importantes, analizar el movimiento de una partícula (o “masa puntual”) en términos de las fuerzas que actúan sobre ésta. Si la partícula se mueve con *movimiento rectilíneo*, a lo largo de una línea recta (el eje  $x$ , por ejemplo), bajo la influencia de una fuerza dada (posiblemente variable), entonces (como en la sección 3.1) el movimiento de la partícula queda descrito por su **función de posición**

$$x = x(t), \tag{23}$$

que da su coordenada  $x$  en el tiempo  $t$  (figura 5.2.10). La **velocidad** de la partícula  $v(t)$  es la derivada, con respecto al tiempo, de su función de posición,

$$v(t) = \frac{dx}{dt}, \tag{24}$$

y su **aceleración**  $a(t)$  es la derivada de su velocidad con respecto del tiempo:

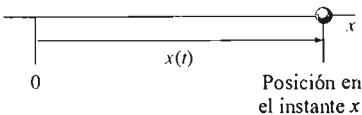
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{25}$$

En una situación típica, se tiene la siguiente información (figura 5.2.11):

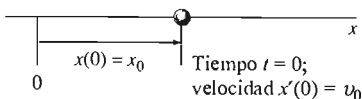
$$\begin{aligned} a(t) & \text{ la aceleración de la partícula;} \\ x(0) = x_0 & \text{ su posición inicial;} \\ v(0) = v_0 & \text{ su velocidad inicial.} \end{aligned} \tag{26}$$

En principio, podemos proceder como sigue para determinar la función de posición de la partícula  $x(t)$ . Primero resolvemos el problema con condición inicial

$$\frac{dv}{dt} = a(t), \quad v(0) = v_0 \tag{27}$$



**Figura 5.2.10** La función de posición  $x(t)$  de una partícula que se mueve a lo largo del eje  $x$



**Figura 5.2.11** Datos iniciales para el movimiento rectilíneo

correspondiente a la función velocidad  $v(t)$ . Conociendo  $v(t)$ , entonces podemos resolver el problema con condición inicial

$$\frac{dx}{dt} = v(t), \quad x(0) = x_0 \quad (28)$$

para la función de posición  $x(t)$  de la partícula. Así, determinamos  $x(t)$  a partir de los datos iniciales y de la aceleración, dados en la ecuación (26), resolviendo dos problemas sucesivos con condiciones iniciales.

## ACELERACIÓN CONSTANTE

La solución de los problemas con condiciones iniciales en las ecuaciones (27) y (28) es más sencilla cuando la aceleración  $a$  es *constante*. Partimos de

$$\frac{dv}{dt} = a \quad (a \text{ es una constante}) \quad (29)$$

y antiderivamos:

$$v(t) = \int a \, dt. \quad (30)$$

De modo que

$$v(t) = at + C_1. \quad (31)$$

Para evaluar la constante  $C_1$ , sustituimos el dato inicial  $v(0) = v_0$ , lo que implica

$$v_0 = a \cdot 0 + C_1 = C_1.$$

En consecuencia, la ecuación (31) se convierte en

$$v(t) = at + v_0. \quad (32)$$

Como  $x'(t) = v(t)$ , una segunda antiderivación implica

$$\begin{aligned} x(t) &= \int v(t) \, dt \\ &= \int (at + v_0) \, dt; \\ x(t) &= \frac{1}{2}at^2 + v_0t + C_2. \end{aligned} \quad (33)$$

Al sustituir el dato inicial  $x(0) = x_0$  obtenemos

$$x_0 = \frac{1}{2}a \cdot (0)^2 + v_0 \cdot (0) + C_2 = C_2.$$

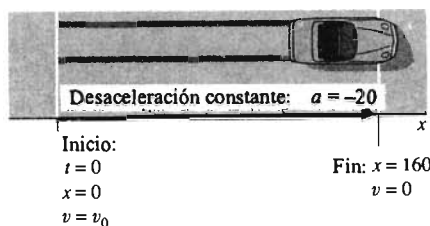
Así, la función de posición de la partícula es

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0. \quad (34)$$

**ADVERTENCIA** Las ecuaciones (32) y (34) solamente son válidas en el caso de aceleración *a constante*. No se aplican cuando la aceleración varía.

**EJEMPLO 9** Las marcas de derrape de unos neumáticos indican que se han aplicado los frenos durante una distancia de 160 pies antes de detenerse el

automóvil. Supongamos que el automóvil en cuestión tiene una desaceleración constante de 20 pies/seg<sup>2</sup> bajo las condiciones del derrape. ¿A qué velocidad viajaba el auto cuando se comenzó a frenar?



**Figura 5.2.12** Las marcas del derrape tienen una longitud de 160 pies (ejemplo 9)

**Solución** Con frecuencia, la introducción de un sistema de coordenadas conveniente es crucial para resolver con éxito un problema físico. En este caso, consideramos el eje  $x$  orientado positivamente en la dirección de movimiento del auto. Elegimos el orden de modo que  $x_0 = 0$  cuando  $t = 0$  (figura 5.2.12). En este sistema de coordenadas, la velocidad del auto  $v(t)$  es una función decreciente del tiempo  $t$  (en segundos), de modo que su aceleración es  $a = -20$  (pies/seg<sup>2</sup>) y no  $a = +20$ . Por tanto, comenzamos con la ecuación de aceleración constante

$$\frac{dv}{dt} = -20.$$

Antiderivamos, como en la ecuación (30), para obtener

$$v(t) = \int (-20) dt = -20t + C_1.$$

Aunque la velocidad inicial no se conoce, los datos iniciales  $t = 0$ ,  $v = v_0$  implican que  $C_1 = v_0$ . Así, la función de velocidad del automóvil es

$$v(t) = -20t + v_0. \quad (35)$$

Una segunda antiderivación, como en la ecuación (33), implica

$$x(t) = \int (-20t + v_0) dt = -10t^2 + v_0t + C_2.$$

Al sustituir los datos iniciales  $t = 0$ ,  $x = 0$  obtenemos  $C_2 = 0$ , por lo que la función de posición del automóvil es

$$x(t) = -10t^2 + v_0t. \quad (36)$$

El hecho de que las marcas de derrape tengan una longitud de 160 pies nos dice que  $x = 160$  cuando el auto se detiene; es decir,

$$x = 160 \quad \text{si} \quad v = 0.$$

Al sustituir estos valores en las ecuaciones de velocidad y posición [ecuaciones (35) y (36)], obtenemos las dos ecuaciones simultáneas

$$-20t + v_0 = 0, \quad -10t^2 + v_0t = 160.$$

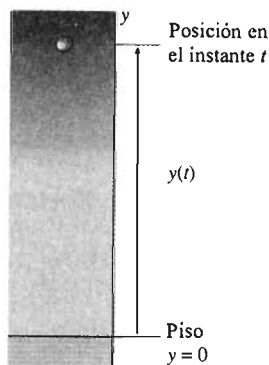
Despejamos  $v_0$  y  $t$  para determinar la velocidad inicial  $v_0$  y la duración  $t$  del derrape. Si multiplicamos la primera ecuación por  $-t$  y sumamos el resultado a la segunda ecuación, tenemos que  $10t^2 = 160$ , por lo que  $t = 4$  cuando el auto se detiene. Esto implica que la velocidad del auto era

$$v_0 = 20t = 20 \cdot 4 = 80 \quad (\text{pies/seg}),$$

o cerca de 55 millas/hora, cuando se aplicaron los frenos por primera vez.

## MOVIMIENTO VERTICAL CON ACELERACIÓN GRAVITACIONAL CONSTANTE

Una aplicación común de las ecuaciones (32) y (34) está relacionada con el movimiento vertical cerca de la superficie de la Tierra. Una partícula con este movimiento está sujeta a una aceleración  $a$  hacia abajo, que casi es constante si sólo



**Figura 5.2.13** La función de posición  $y(t)$  de una partícula que se mueve en forma vertical

se utilizan distancias verticales pequeñas. La magnitud de esta constante se denota con  $g$ , aproximadamente igual a 32 pies/seg<sup>2</sup> o 9.8 m/seg<sup>2</sup>. (Si necesita un valor más preciso de  $g$ , puede usar 32.174 pies/seg<sup>2</sup> en el sistema inglés o 9.80665 m/seg<sup>2</sup> en el sistema mks.)

Si despreciamos la resistencia del aire, podemos suponer que esta aceleración debida a la gravedad es la única influencia externa sobre la partícula en movimiento. Como aquí trabajamos con el movimiento vertical, es natural elegir el eje  $y$  como el sistema de coordenadas para la posición de la partícula (figura 5.2.13). Si elegimos la dirección hacia arriba como la dirección positiva, entonces el efecto de la gravedad sobre la partícula consiste en *disminuir* su altura, y también *disminuir* su velocidad  $v = dy/dt$ . Entonces, la aceleración de la partícula es

$$a = \frac{dv}{dt} = -g = -32 \text{ pies/seg}^2.$$

Las ecuaciones (32) y (34) son, en este caso,

$$v(t) = -32t + v_0 \quad (37)$$

y

$$y(t) = -16t^2 + v_0t + y_0. \quad (38)$$

Aquí,  $y_0$  es la altura inicial de la partícula, en pies,  $v_0$  es su velocidad inicial en pies/segundo, y  $t$  el tiempo en segundos.

**EJEMPLO 10** Suponga que se dispara una flecha en sentido vertical mediante una poderosa ballesta, desde el piso, y que vuelve a tocar el suelo 48 segundos después. Si podemos despreciar la resistencia del aire, determinar la velocidad inicial de la flecha y la altura máxima que alcanza.

**Solución** Establecemos el sistema de coordenadas que se ilustra en la figura 5.2.14, donde el nivel del suelo corresponde a  $y = 0$ , la flecha se lanza en el instante  $t = 0$  (en segundos) y con la dirección positiva hacia arriba. Las unidades en el eje  $y$  están en pies.

Tenemos que  $y = 0$  cuando  $t = 48$  y carecemos de información acerca de la velocidad inicial  $v_0$ . Pero podemos utilizar las ecuaciones (37) y (38) pues establecimos un sistema de coordenadas en donde la aceleración debida a la gravedad actúa en dirección negativa. Así,

$$y(t) = -16t^2 + v_0t + y_0 = -16t^2 + v_0t$$

y

$$v(t) = -32t + v_0.$$

Utilizamos la información que  $y = 0$  cuando  $t = 48$  en la primera ecuación:

$$0 = -16 \cdot 48^2 + 48v_0, \quad \text{y así} \quad v_0 = 16 \cdot 48 = 768 \text{ pies/seg.}$$

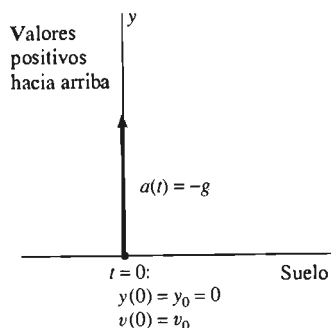
Para determinar la altura máxima de la flecha, maximizamos  $y(t)$  encontrando el valor de  $t$  para el cual la derivada se anula. En otras palabras, la flecha alcanza su altura máxima cuando su velocidad se anula:

$$-32t + v_0 = 0,$$

de modo que en una altura máxima,  $t = v_0/32 = 24$ . En ese instante, la flecha ha alcanzado su altura máxima de

$$y_{\max} = y(24) = -16 \cdot 24^2 + 768 \cdot 24 = 9216 \text{ pies,}$$

casi dos millas.



**Figura 5.2.14** Una flecha disparada hacia arriba con una ballesta (ejemplo 10)

El resultado parece contradecir la experiencia. Debemos concluir que la resistencia del aire no siempre se puede despreciar, particularmente en los problemas de trayectos largos con alta velocidad.

## 5.2 Problemas

Evalúe las integrales indefinidas en los problemas 1 a 30.

$$1. \int (3x^2 + 2x + 1) dx \quad 2. \int (3t^4 + 5t - 6) dt$$

$$3. \int (1 - 2x^2 + 3x^3) dx \quad 4. \int \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt$$

$$5. \int \left(\frac{3}{x^3} + 2x^{3/2} - 1\right) dx$$

$$6. \int \left(x^{5/2} - \frac{5}{x^4} - \sqrt{x}\right) dx$$

$$7. \int \left(\frac{3}{2}t^{1/2} + 7\right) dt \quad 8. \int \left(\frac{2}{x^{3/4}} - \frac{3}{x^{2/3}}\right) dx$$

$$9. \int \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{\sqrt[4]{x^5}}\right) dx$$

$$10. \int \left(2x\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$$

$$11. \int (4x^3 - 4x + 6) dx \quad 12. \int \left(\frac{1}{4}t^5 - \frac{6}{t^2}\right) dt$$

$$13. \int 7 dx \quad 14. \int \left(4\sqrt[3]{x^2} - \frac{5}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$$

$$15. \int (x + 1)^4 dx \quad 16. \int (t + 1)^{10} dt$$

$$17. \int \frac{1}{(x - 10)^7} dx \quad 18. \int \sqrt{z + 1} dz$$

$$19. \int \sqrt{x}(1 - x)^2 dx \quad 20. \int \sqrt[3]{x}(x + 1)^3 dx$$

$$21. \int \frac{2x^4 - 3x^3 + 5}{7x^2} dx \quad 22. \int \frac{(3x + 4)^2}{\sqrt{x}} dx$$

$$23. \int (9t + 11)^5 dt \quad 24. \int \frac{1}{(3z + 10)^7} dz$$

$$25. \int \frac{7}{(x + 77)^2} dx \quad 26. \int \frac{3}{\sqrt{(x - 1)^3}} dx$$

$$27. \int (5 \cos 10x - 10 \sin 5x) dx$$

$$28. \int (2 \cos \pi x + 3 \sin \pi x) dx$$

$$29. \int (3 \cos \pi t + \cos 3\pi t) dt$$

$$30. \int (4 \sin 2\pi t - 2 \sin 4\pi t) dt$$

31. Verifique mediante una derivación que las fórmulas integrales  $\int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C_1$  y  $\int \sin x \cos x dx = -\frac{1}{2} \cos^2 x + C_2$  son válidas. Reconcilie estos resultados aparentemente diferentes. ¿Cuál es la relación entre las constantes  $C_1$  y  $C_2$ ?

32. Muestre que las funciones claramente distintas

$$F_1(x) = \frac{1}{1 - x} \quad \text{y} \quad F_2(x) = \frac{x}{1 - x}$$

son ambas primitivas de  $f(x) = 1/(1 - x)^2$ . ¿Cuál es la relación entre  $F_1(x)$  y  $F_2(x)$ ?

33. Use las identidades

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{y} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

para determinar las primitivas  $\int \sin^2 x dx$  y  $\int \cos^2 x dx$ .

34. (a) Explique por qué  $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$ .

(b) Use entonces la identidad  $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$  para determinar la primitiva  $\int \tan^2 x dx$ .

Resuelva los problemas con condiciones iniciales de 35 a 46.

$$35. \frac{dy}{dx} = 2x + 1; \quad y(0) = 3$$

$$36. \frac{dy}{dx} = (x - 2)^3; \quad y(2) = 1$$

$$37. \frac{dy}{dx} = \sqrt{x}; \quad y(4) = 0$$

$$38. \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}; \quad y(1) = 5$$

$$39. \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x + 2}}; \quad y(2) = -1$$

$$40. \frac{dy}{dx} = \sqrt{x + 9}; \quad y(-4) = 0$$

$$41. \frac{dy}{dx} = 3x^3 + \frac{2}{x^2}; \quad y(1) = 1$$

$$42. \frac{dy}{dx} = x^4 - 3x + \frac{3}{x^3}; \quad y(1) = -1$$

$$43. \frac{dy}{dx} = (x - 1)^3; \quad y(0) = 2$$

44.  $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x+5}$ ;  $y(4) = -3$
45.  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x-13}}$ ;  $y(17) = 2$
46.  $\frac{dy}{dx} = (2x+3)^{3/2}$ ;  $y(3) = 100$

Los problemas 47 a 63 tratan del movimiento vertical cerca de la superficie de la Tierra (despreciando la resistencia del aire). Use  $g = 32$  pies/seg<sup>2</sup> como la magnitud de la aceleración gravitacional.

47. Usted arroja una pelota hacia arriba, desde el suelo, con una velocidad inicial de 97 pies/segundo. ¿A qué altura sube la pelota, y por cuánto tiempo permanece en el aire?
48. Cuando Alejandro arroja una piedra hacia arriba, desde el suelo, con su resorte, la piedra alcanza una altura máxima de 400 pies. ¿Cuál era la velocidad inicial de la piedra?
49. Lanra suelta una piedra a un pozo; ésta llega al fondo 3 segundos después. ¿Cuál es la profundidad del pozo?
50. Francisco arroja una piedra hacia arriba, al lado de un árbol (figura 5.2.15). La roca sube hasta alcanzar la altura del árbol y después cae al suelo; permanece en el aire durante cuatro segundos. ¿Cuál es la altura del árbol?

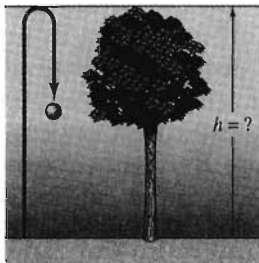


Figura 5.2.15 El árbol del problema 50

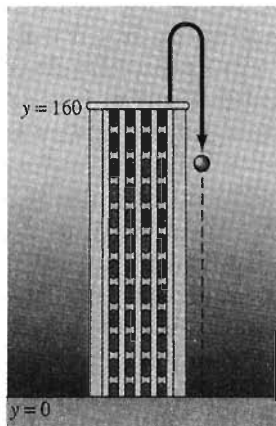
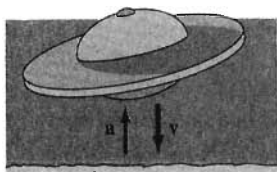


Figura 5.2.16 El edificio del problema 51

51. Miguel arroja una pelota hacia arriba, con una velocidad inicial de 48 pies/segundo, desde la parte superior de un edificio de altura 160 pies. La pelota cae al suelo en la base del edificio (figura 5.2.16). ¿Cuánto tiempo permanece la pelota en el aire, y con qué velocidad golpea al suelo?
52. Una pelota se arroja desde la parte superior de un edificio con 576 pies de altura. ¿Con qué velocidad debe arrojarse una segunda pelota hacia abajo tres segundos después para que ambas toquen el suelo al mismo tiempo?

53. Se suelta una pelota desde lo más alto del Empire State Building, a 960 pies de altura sobre la calle 34. ¿Cuánto tiempo tarda la pelota en llegar a la calle, y con qué velocidad la golpea?
54. Linda dispara una flecha hacia arriba, desde el suelo, con una velocidad inicial de 320 pies/segundo. (a) ¿A qué altura se encuentra la flecha después de tres segundos? (b) ¿En qué momento se encuentra la flecha a 1200 pies sobre el suelo? (c) ¿Cuántos segundos transcurren desde su lanzamiento hasta tocar de nuevo el suelo?
55. Guillermo arroja una piedra hacia arriba, desde el suelo. La piedra alcanza una altura máxima de 225 pies. ¿Cuál era su velocidad inicial?
56. Santiago suelta una roca a un pozo, donde la superficie del agua está a 98 metros debajo del nivel del suelo. ¿Cuánto tarda la roca en tocar la superficie del agua? ¿A qué velocidad se mueve la roca cuando toca la superficie del agua?
57. Gloria arroja una pelota de tenis hacia arriba, desde la parte superior de un edificio de 400 pies de altura. ¿Cuánto tiempo tarda la pelota en llegar al suelo? ¿Con qué velocidad golpea al suelo?
58. Sebastián arroja una pelota de béisbol hacia arriba, desde la parte superior de un edificio alto. La velocidad inicial de la pelota es 25 pies/segundo y golpea el suelo con una velocidad de 153 pies/segundo. ¿Qué altura tiene el edificio?
59. Se arroja una pelota hacia arriba, desde el suelo, con una velocidad inicial de 160 pies/segundo. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota?
60. Carolina suelta un saco de arena desde lo alto de un edificio de  $h$  pies de altura. Al mismo tiempo, Juan arroja una pelota hacia arriba, desde el suelo, de un punto directamente debajo del saco de arena. ¿Cuál debe ser la velocidad de la pelota de modo que choque con el saco a la mitad del camino, donde ambos tengan una altura  $h/2$ ?
61. Cecilia arroja una pelota de béisbol hacia abajo, con una velocidad inicial de 40 pies/segundo, desde lo alto del monumento a Washington, de 555 pies de altura. ¿Cuánto tarda la pelota en llegar al suelo, y con qué velocidad lo golpea?
62. Se suelta una roca desde una altura inicial de  $h$  pies sobre la superficie de la Tierra. Muestre que la velocidad con que la roca golpea la Tierra es  $\sqrt{2gh}$ .
63. Se suelta una bomba desde un globo a una altura de 800 pies. Directamente debajo del globo, se lanza un proyectil hacia arriba, hacia la bomba, exactamente dos segundos después del lanzamiento de la bomba. ¿Con qué velocidad inicial debe dispararse el proyectil para que choque con la bomba a una altura exacta de 400 pies?
64. Los frenos de un automóvil se accionan cuando éste se mueve a 60 millas/hora (exactamente 88 pies/segundo). Los frenos proporcionan una desaceleración constante de 40 pies/segundo<sup>2</sup>. ¿Qué distancia recorre el auto antes de detenerse?
65. Un auto que viaja a 60 millas/hora (exactamente 88 pies/segundo) se desplaza 176 pies después de aplicar sus frenos. La desaceleración que proporcionan los frenos es constante. ¿Cuál es el valor de ésta?



Superficie de la luna

**Figura 5.2.17** La nave espacial del problema 66

66. Una nave espacial está en caída libre hacia la superficie de la Luna, con una velocidad de 1000 millas/hora. Sus cohetes de retropropulsión, al accionarse, proporcionan una desaceleración de 20,000 millas/hora<sup>2</sup>. ¿A qué altura sobre la superficie deben accionar los astronautas los cohetes de retropropulsión para garantizar un “aterrizaje suave” ( $v = 0$  en el momento del impacto)? (Véase la figura 5.2.17.) Ignore el efecto del campo gravitacional de la Luna.

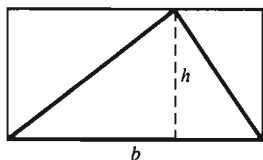
67. (a) ¿Qué velocidad inicial hacia arriba  $v_0$  debe emplear para arrojar una pelota hasta una altura máxima de 144 pies?

(b) Suponga ahora que arroja una pelota hacia arriba con la misma velocidad inicial  $v_0$ , en la Luna, donde la aceleración gravitacional en la superficie es solamente de 5.2 pies/segundo<sup>2</sup>. ¿A qué altura subirá, y por cuánto tiempo permanecerá suspendida?

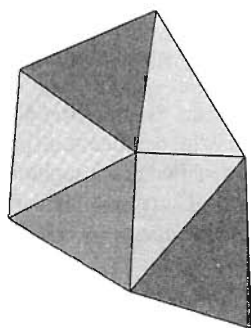
68. La obra *The Wind from the Sun* (1963) de Arthur C. Clarke describe a *Diana*, una nave espacial impulsada por un llamado viento solar. Sus velas de aluminio de dos millas cuadradas le proporcionan una aceleración de  $(0.001)g = 0.032$  pies/segundo<sup>2</sup>. Si *Diana* parte del reposo y viaja en línea recta, calcule su distancia recorrida  $x$  (en millas) y su velocidad  $v$  (en millas/hora) después de un minuto, una hora y un día.

69. Un conductor implicado en un accidente afirma que circulaba solamente a 25 millas/hora. Cuando la policía revisa su auto, determina que si los frenos se aplicaban a 25 millas/hora, el auto recorrería solamente 45 pies antes de detenerse. Las marcas de derrape del auto en la escena del accidente miden 210 pies. Suponga que la desaceleración es constante y calcule la velocidad con la que viajaba antes del accidente.

### 5.3 Cálculo de áreas elementales



**Figura 5.3.1** La fórmula para el área del triángulo,  $A = \frac{1}{2}bh$ , se obtiene como consecuencia de esta figura



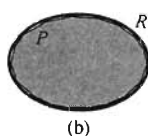
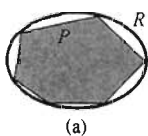
**Figura 5.3.2** Cada polígono puede representarse como la unión de triángulos que no se traslapan

Las integrales indefinidas de la sección 5.2 surgen del concepto de antiderivación. El tipo más fundamental de integral es el mencionado en la sección 5.1, asociado con el concepto de área. Se llama la *integral definida*, o simplemente *la integral*. Sorpresivamente, los conceptos un tanto diferentes de área y antiderivación tiene una relación cercana y profunda. Este hecho, descubierto y explotado por Newton y Leibniz a fines del siglo XVII, es la razón del uso de la misma palabra, *integral*, en ambos contextos.

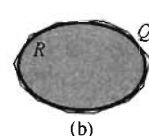
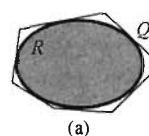
Tal vez el primer contacto que se tiene con el concepto de área es la fórmula  $A = bh$ , que proporciona el área  $A$  del rectángulo como el producto de su base  $b$  y su altura  $h$ . Después aprendemos que el área de un triángulo es la mitad del producto de su base y su altura. Esto es consecuencia del hecho de que cualquier triángulo puede dividirse en dos triángulos *rectángulos*, y cada triángulo rectángulo es exactamente la mitad de un rectángulo (figura 5.3.1).

Dada la fórmula  $A = \frac{1}{2}bh$  para el área de un triángulo, podemos, en principio, determinar el área de cualquier figura poligonal (un conjunto plano acotado por una “curva” cerrada que consta de un número finito de segmentos de líneas rectas). La razón de esto es que cualquier figura poligonal se puede dividir en triángulos que no se traslapan (figura 5.3.2), y el área de la figura poligonal es entonces la suma de las áreas de estos triángulos. Este método para calcular el área data de hace varios miles de años, de las civilizaciones antiguas de Egipto y Babilonia.

Los antiguos griegos iniciaron el estudio de áreas de figuras *con líneas curvas* en los siglos IV y V a.C. Dada una región plana  $R$  cuya área querían determinar, trabajaban con un polígono  $P$  *inscrito* en  $R$  (figura 5.3.3) y con un polígono  $Q$  *circunscrito* fuera de  $R$  (figura 5.3.4). Si los polígonos  $P$  y  $Q$  tenían un número



**Figura 5.3.3** (a) Un polígono  $P$  de seis lados inscrito en  $R$ ; (b) un polígono inscrito  $P$  de muchos lados, aproxima bastante bien el área de  $R$



**Figura 5.3.4** (a) Un polígono de seis lados  $Q$  circunscrito alrededor de  $R$ ; (b) un polígono  $Q$  de muchos lados circunscrito, aproxima bastante bien el área de  $R$

suficientemente grande de lados, de longitud pequeña, entonces parecería que sus áreas,  $a(P)$  y  $a(Q)$ , se aproximan al área de la región  $R$ . Además, es posible controlar el error: vemos que

$$a(P) < a(R) < a(Q) \quad (1)$$

ya que  $R$  contiene al polígono  $P$  pero está contenido en el polígono  $Q$ .

Las desigualdades en (1) encierran al área deseada  $a(R)$ . Por ejemplo, supongamos que los cálculos basados en divisiones triangulares (como en la figura 5.3.2) implican que  $a(P) = 7.341$  y  $a(Q) = 7.343$ . Entonces la desigualdad resultante

$$7.341 < a(R) < 7.343$$

implica que  $a(R) \approx 7.34$ , con una precisión de dos cifras decimales.

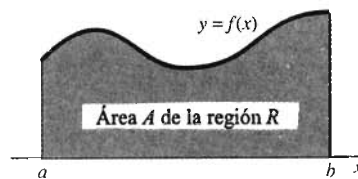
Nuestro objetivo principal es describir una técnica sistemática para aproximar el área de una región curvilínea adecuada utilizando áreas poligonales fáciles de calcular.

## ÁREAS BAJO GRÁFICAS

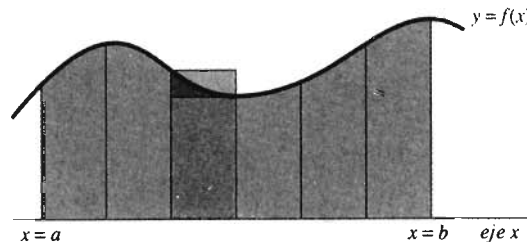
Consideremos el tipo de región determinado por una función continua positiva  $f$  definida en un intervalo cerrado  $[a, b]$ . Supongamos que deseamos calcular el área  $A$  de la región  $R$  que se encuentra *bajo* la curva  $y = f(x)$  y *por arriba* del intervalo  $[a, b]$  en el eje  $x$  (figura 5.3.5). La región  $R$  está acotada a la izquierda por una recta vertical  $x = a$  y a la derecha por una recta vertical  $x = b$ .

Dividimos el intervalo base  $[a, b]$  en subintervalos, todos con la misma longitud. Arriba de cada subintervalo está una franja vertical (figura 5.3.6) y el área  $A$  es la suma de las áreas de estas franjas.

En cada uno de estos subintervalos base, construimos un rectángulo que aproxime a la franja vertical correspondiente. Podemos elegir un rectángulo “inscrito” o uno “circunscrito” (ambas posibilidades se ilustran en la figura 5.3.6) o incluso un rectángulo intermedio entre los dos. Estos rectángulos forman entonces un polígono que aproxima la región  $R$ , y por tanto la suma del área de estos rectángulos *aproxima* al área deseada  $A$ .



**Figura 5.3.5** El área debajo de la gráfica de  $y = f(x)$  de  $x = a$  a  $x = b$

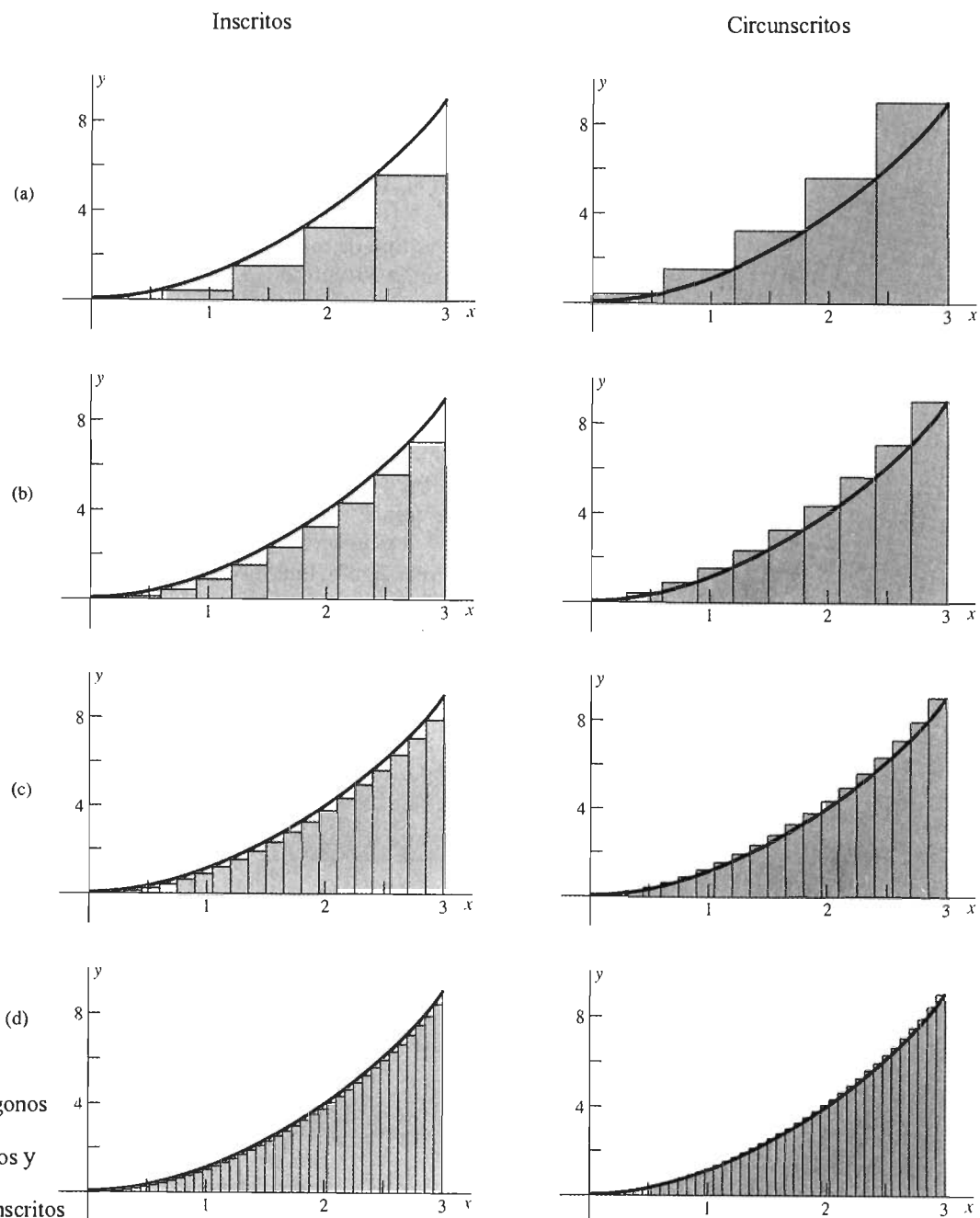


**Figura 5.3.6** Franjas verticales determinadas por una división  $[a, b]$  en subintervalos de igual longitud



Por ejemplo, supongamos que queremos aproximar el área  $A$  de la región  $R$  que se encuentra bajo la parábola  $y = x^2$  y por arriba del intervalo  $[0, 3]$ . La gráfica por computadora de la figura 5.3.7 muestra sucesivamente

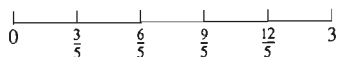
- 5 rectángulos inscritos y 5 circunscritos;
- 10 rectángulos inscritos y 10 circunscritos;
- 20 rectángulos inscritos y 20 circunscritos;
- 40 rectángulos inscritos y 40 circunscritos.



**Figura 5.3.7** (a) Cinco polígonos inscritos y circunscritos; (b) diez polígonos inscritos y circunscritos; (c) veinte polígonos inscritos y circunscritos; (d) cuarenta polígonos inscritos y circunscritos

Cada conjunto de rectángulos inscritos da una *subestimación* de  $A$ , mientras que cada conjunto de rectángulos circunscritos da una *sobreestimación* de  $A$ . Los “triángulos curvilíneos” (que forman la parte de la región  $R$  no cubierta por los polígonos rectangulares de la figura 5.3.7) constituyen los *errores* de estas estimaciones. Entre más rectángulos utilicemos, más precisa será la aproximación. Así, para aproximar con precisión el área de la región  $R$ , necesitamos una forma eficaz de calcular y sumar las áreas del conjunto de rectángulos como los de la figura 5.3.7.

**EJEMPLO 1** Como en la figura 5.3.7, sea  $R$  la región debajo de la gráfica de  $f(x) = x^2$  y por arriba del intervalo  $[0, 3]$ . Calculemos la subestimación y la sobreestimación del área  $A$  de  $R$  obtenida usando 5 rectángulos, cada uno de ancho  $\frac{3}{5}$ . Después repetimos los cálculos con 10 rectángulos, cada uno de ancho  $\frac{3}{10}$ .



**Figura 5.3.8** Cinco subintervalos, cada uno de longitud  $\frac{3}{5}$  (ejemplo 1)

**Solución** Primero supondremos que se utilizan  $n = 5$  rectángulos. Sean  $\underline{A}_5$  la subestimación y  $\bar{A}_5$  la sobreestimación obtenida usando 5 rectángulos con base en 5 subintervalos de longitud  $\frac{3}{5}$  cada uno (figura 5.3.8). De la figura 5.3.7(a), vemos que las alturas de los 5 rectángulos inscritos (el primero de los cuales es degenerado, con altura nula) son los valores de la función  $f(x) = x^2$  en los 5 extremos del *lado izquierdo*  $0, \frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \frac{9}{5}$  y  $\frac{12}{5}$ . Como la base de cada rectángulo tiene longitud  $\frac{3}{5}$ , también vemos que

$$\begin{aligned}\underline{A}_5 &= \frac{3}{5} \cdot [(0)^2 + (\frac{3}{5})^2 + (\frac{6}{5})^2 + (\frac{9}{5})^2 + (\frac{12}{5})^2] \\ &= \frac{3}{5} \cdot (0 + \frac{9}{25} + \frac{36}{25} + \frac{81}{25} + \frac{144}{25}) = \frac{810}{125} = 6.48.\end{aligned}$$

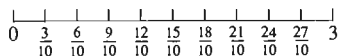
Las alturas de los 5 rectángulos circunscritos son los valores de  $f(x) = x^2$  en los 5 extremos del *lado derecho*  $\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \frac{9}{5}, \frac{12}{5}$  y 3, de modo que la sobreestimación correspondiente es

$$\begin{aligned}\bar{A}_5 &= \frac{3}{5} \cdot [(\frac{3}{5})^2 + (\frac{6}{5})^2 + (\frac{9}{5})^2 + (\frac{12}{5})^2 + (\frac{15}{5})^2] \\ &= \frac{3}{5} \cdot (\frac{9}{25} + \frac{36}{25} + \frac{81}{25} + \frac{144}{25} + \frac{225}{25}) = \frac{1485}{125} = 11.88.\end{aligned}$$

Éstas son aproximaciones burdas al área real de  $A$ . Sólo con base en esta sola información, nuestra mejor estimación de  $A$  podría ser el promedio de la subestimación y la sobreestimación:

$$\frac{\underline{A}_5 + \bar{A}_5}{2} = \frac{6.48 + 11.88}{2} = 9.18.$$

Veamos si duplicando el número de subintervalos a  $n = 10$  se incrementa la precisión de manera significativa. En la figura 5.3.7(b), vemos que las alturas de los 10 rectángulos inscritos son los valores de  $f(x) = x^2$  en los 10 puntos extremos del *lado izquierdo*  $0, \frac{3}{10}, \frac{6}{10}, \frac{9}{10}, \frac{12}{10}, \frac{15}{10}, \frac{18}{10}, \frac{21}{10}, \frac{24}{10}$  y  $\frac{27}{10}$  de los subintervalos de la figura 5.3.9. La base de cada rectángulo tiene longitud  $\frac{3}{10}$ , de modo que la subestimación resultante es



**Figura 5.3.9** Diez subintervalos, cada uno de longitud  $\frac{3}{10}$  (ejemplo 1)

$$\begin{aligned}\underline{A}_{10} &= \frac{3}{10} \cdot [(0)^2 + (\frac{3}{10})^2 + (\frac{6}{10})^2 + (\frac{9}{10})^2 + (\frac{12}{10})^2 \\ &\quad + (\frac{15}{10})^2 + (\frac{18}{10})^2 + (\frac{21}{10})^2 + (\frac{24}{10})^2 + (\frac{27}{10})^2] \\ &= \frac{3}{10} \cdot (0 + \frac{9}{100} + \frac{36}{100} + \frac{81}{100} + \frac{144}{100} + \frac{225}{100} + \frac{324}{100} + \frac{441}{100} + \frac{576}{100} + \frac{729}{100}) \\ &= \frac{7695}{1000} = 7.695.\end{aligned}$$

De manera análoga, la suma de las áreas de los 10 rectángulos circunscritos en la figura 5.3.7(b) es la sobreestimación

$$\begin{aligned}\bar{A}_{10} &= \frac{3}{10} \cdot \left[ \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{6}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{12}{10}\right)^2 + \left(\frac{15}{10}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{18}{10}\right)^2 + \left(\frac{21}{10}\right)^2 + \left(\frac{24}{10}\right)^2 + \left(\frac{27}{10}\right)^2 + \left(\frac{30}{10}\right)^2 \right] \\ &= \frac{10,395}{1000} = 10.395.\end{aligned}$$

En este momento, nuestra mejor estimación del área real  $A$  sería el promedio

$$\frac{A_{10} + \bar{A}_{10}}{2} = \frac{7.695 + 10.395}{2} = 9.045.$$

Utilizamos una computadora para calcular subestimaciones y sobreestimaciones más refinadas del área  $A$  bajo la gráfica  $y = x^2$  en  $[0, 3]$ , con 20, 40, 80, 160 y finalmente 320 rectángulos. Los resultados (redondeados con cuatro cifras decimales) aparecen en la figura 5.3.10. Los valores promedio en la columna final de la tabla sugieren que  $A \approx 9$ .

Número de rectángulos	Subestimación	Sobreestimación	Promedio
5	6.4800	11.8800	9.1800
10	7.6950	10.3950	9.0450
20	8.3363	9.6863	9.0113
40	8.6653	9.3403	9.0028
80	8.8320	9.1695	9.0007
160	8.9158	9.0846	9.0002
320	8.9579	9.0422	9.0000

**Figura 5.3.10** Estimación del área bajo  $y = x^2$  en  $[0, 3]$

## NOTACIÓN PARA LA SUMA

Para un cálculo más conveniente de las estimaciones de áreas, como en el ejemplo 1, necesitamos una notación más concisa para la suma de varios números. El símbolo  $\sum_{i=1}^n a_i$  se utiliza para abreviar la suma de los  $n$  números  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ :

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n. \quad (2)$$

El símbolo  $\sum$  (la letra griega sigma mayúscula) indica la suma de los términos  $a_i$  cuando el **índice  $i$  de la suma** asume valores *enteros* sucesivos de 1 a  $n$ . Por ejemplo, la suma de los cuadrados de los primeros 10 enteros positivos es

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{10} i^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 \\ &= 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 = 385.\end{aligned}$$

El símbolo particular para el índice de una suma no es importante:

$$\sum_{i=1}^{10} i^2 = \sum_{k=1}^{10} k^2 = \sum_{r=1}^{10} r^2 = 385.$$

## EJEMPLO 2

$$\sum_{k=1}^7 (k+1) = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 35,$$

$$\sum_{n=1}^6 2^n = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 126 \quad y$$

$$\sum_{j=1}^5 \frac{(-1)^{j+1}}{j^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} = \frac{3019}{3600} \approx 0.8386.$$


---

Es fácil verificar las sencillas reglas para las sumas

$$\sum_{i=1}^n ca_i = c \sum_{i=1}^n a_i \quad (3)$$

y

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) + \left( \sum_{i=1}^n b_i \right) \quad (4)$$

desarrollando cada suma.

Observe que si  $a_i = a$  (una constante) para  $i = 1, 2, \dots, n$ , entonces la ecuación (4) implica

$$\sum_{i=1}^n (a + b_i) = \sum_{i=1}^n a + \sum_{i=1}^n b_i = \underbrace{(a + a + \dots + a)}_{n \text{ términos}} + \sum_{i=1}^n b_i,$$

y por tanto

$$\sum_{i=1}^n (a + b_i) = na + \sum_{i=1}^n b_i. \quad (5)$$

En particular,

$$\sum_{i=1}^n 1 = n. \quad (6)$$

La suma de las  $k$ -ésimas potencias de los primeros  $n$  enteros positivos,

$$\sum_{i=1}^n i^k = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k,$$

se utiliza de manera común en el cálculo de áreas. Los valores de esta suma para  $k = 1, 2, 3$  están dados por las fórmulas siguientes (véanse los problemas 33 y 34):

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n. \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n. \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2. \quad (9)$$

### EJEMPLO 3

$$\sum_{i=1}^{10} (2i^2 - 3i) = 2 \sum_{i=1}^{10} i^2 - 3 \sum_{i=1}^{10} i = 2 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - 3 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 605.$$

**EJEMPLO 4** Podemos utilizar la ecuación (8) para simplificar la evaluación de la suma para  $A_{10}$  del ejemplo 2, como sigue:

$$\begin{aligned} \underline{A}_{10} &= \frac{3}{10} \cdot \left[ \left(\frac{0}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{6}{10}\right)^2 + \dots + \left(\frac{27}{10}\right)^2 \right] \\ &= \frac{3}{10} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^2 \cdot [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 9^2] \\ &= \frac{27}{1000} \cdot \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} = \frac{7695}{1000} = 7.695. \end{aligned}$$

**EJEMPLO 5** Evalúe el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2}.$$

**Solución** Utilizamos la ecuación (7) para obtener

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

ya que el término  $1/(2n)$  tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ .

## SUMA DE ÁREAS

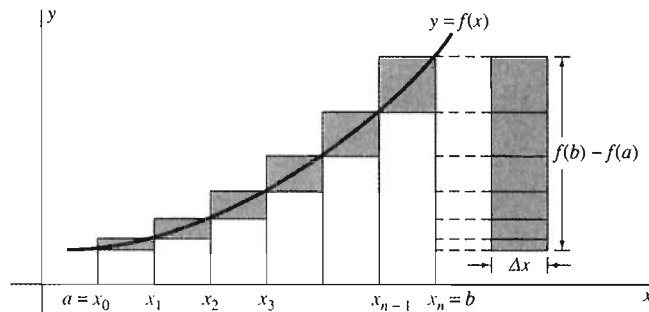
La figura 5.3.11 muestra la región  $R$  que está bajo la gráfica de la función *creciente*  $f$ , con valores positivos, y por arriba del intervalo  $[a, b]$ . Para aproximar el área  $A$  de  $R$ , elegimos un entero fijo  $n$  y dividimos el intervalo  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n],$$

todos con la misma longitud

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}. \quad (10)$$

En cada uno de estos subintervalos, levantamos un rectángulo inscrito y un rectángulo circunscrito.

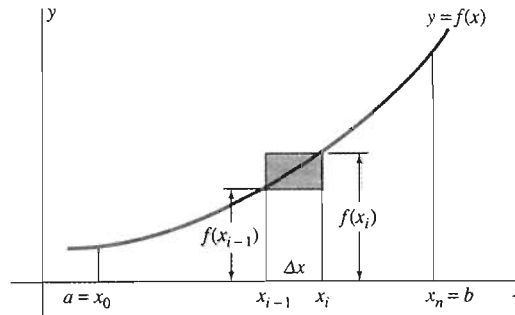


**Figura 5.3.11** El área bajo  $y=f(x)$  en el intervalo  $[a, b]$

Como se indica en la figura 5.3.12, el rectángulo inscrito sobre el  $i$ -ésimo subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  tiene altura  $f(x_{i-1})$ , mientras que el  $i$ -ésimo rectángulo circunscrito tiene altura  $f(x_i)$ . Como la base de cada rectángulo tiene longitud  $\Delta x$ , las áreas de estos rectángulos son

$$f(x_{i-1}) \Delta x \quad \text{y} \quad f(x_i) \Delta x, \quad (11)$$

**Figura 5.3.12** Rectángulos inscritos y circunscritos en el  $i$ -ésimo subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$



respectivamente. Al sumar las áreas de los rectángulos inscritos para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , obtenemos la subestimación

$$\underline{A}_n = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x \quad (12)$$

del área real  $A$ . De manera análoga, la suma de las áreas de los rectángulos circunscritos es la sobreestimación

$$\bar{A}_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x. \quad (13)$$

La desigualdad  $\underline{A}_n \leq A \leq \bar{A}_n$  implica que

$$\sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x \leq A \leq \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x. \quad (14)$$

Las desigualdades en (14) se invierten si  $f(x)$  fuera decreciente (en vez de creciente) en  $[a, b]$ . (¿Por qué?)

Una ilustración como la de la figura 5.3.7 sugiere que si el número  $n$  de subintervalos es muy grande, de modo que  $\Delta x$  sea muy pequeño, entonces la diferencia entre las áreas  $\underline{A}_n$  y  $\bar{A}_n$  de los polígonos inscritos y circunscritos será muy pequeña. Por tanto, ambos valores serán cercanos al área real  $A$  de la región  $R$ . En realidad, si  $f$  es creciente o decreciente en todo el intervalo  $[a, b]$ , entonces los pequeños rectángulos de la figura 5.3.11 (que representan la diferencia entre  $\underline{A}_n$  y  $\bar{A}_n$ ) se puede ordenar en una “pila”, como se indica a la derecha de la figura. Esto implica que

$$|\bar{A}_n - \underline{A}_n| = |f(b) - f(a)| \Delta x. \quad (15)$$

Pero  $\Delta x = (b-a)/n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Así, la diferencia entre las sumas del lado izquierdo y el derecho de (14) tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ , mientras que  $A$  no cambia cuando  $n \rightarrow \infty$ . Esto implica que el área de la región  $R$  está dada por

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x. \quad (16)$$

El significado de estos límites es simple: podemos determinar  $A$  con el grado de precisión deseado si calculamos cualquiera de las sumas en la ecuación (16) con un número  $n$  suficientemente grande de intervalos. Al aplicar la ecuación (16), recordemos que

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}. \quad (17)$$

Observe también que

$$x_i = a + i \Delta x \quad (18)$$

para  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , pues  $x_i$  está a  $i$  "pasos" de longitud  $\Delta x$  a la derecha de  $x_0 = a$ .

**EJEMPLO 6** Ahora podemos calcular con exactitud el área que aproximamos en el ejemplo 1, el área de la región bajo la gráfica de  $f(x) = x^2$  en el intervalo  $[0, 3]$ . Si dividimos  $[0, 3]$  en  $n$  subintervalos, todos de la misma longitud, entonces las ecuaciones (17) y (18) implican

$$\Delta x = \frac{3}{n} \quad \text{y} \quad x_i = 0 + i \cdot \frac{3}{n} = \frac{3i}{n}$$

para  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ . Por tanto,

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \sum_{i=1}^n (x_i)^2 \Delta x = \sum_{i=1}^n \left(\frac{3i}{n}\right)^2 \left(\frac{3}{n}\right) = \frac{27}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2.$$

Entonces, la ecuación (8) para  $\sum i^2$  implica

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \frac{27}{n^3} \left( \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n \right) = 27 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right).$$

Cuando calculamos el límite cuando  $n \rightarrow \infty$ , con la ecuación (16) obtenemos

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} 27 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) = 9,$$

pues los términos  $1/(2n)$  y  $1/(6n^2)$  tienden a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ . Así, nuestra inferencia anterior a partir de los datos en la figura 5.3.10 fue correcta:  $A = 9$  exactamente.

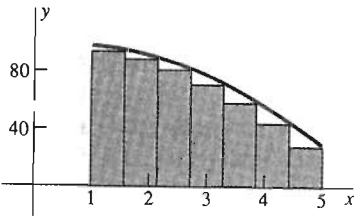
**EJEMPLO 7** Determine el área bajo la gráfica de  $f(x) = 100 - 3x^2$  de  $x = 1$  a  $x = 5$ .

**Solución** Como se muestra en la figura 5.3.13, la suma  $\sum f(x_i) \Delta x$  da el área del polígono rectangular inscrito. Con  $a = 1$  y  $b = 5$ , las ecuaciones (17) y (18) implican

$$\Delta x = \frac{4}{n} \quad \text{y} \quad x_i = 1 + i \cdot \frac{4}{n} = 1 + \frac{4i}{n}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x &= \sum_{i=1}^n \left[ 100 - 3 \cdot \left( 1 + \frac{4i}{n} \right)^2 \right] \left( \frac{4}{n} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ 97 - \frac{24i}{n} - \frac{48i^2}{n^2} \right] \left( \frac{4}{n} \right) \\ &= \frac{388}{n} \sum_{i=1}^n 1 - \frac{96}{n^2} \sum_{i=1}^n i - \frac{192}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= \frac{388}{n} \cdot n - \frac{96}{n^2} \left( \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n \right) - \frac{192}{n^3} \left( \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n \right) \\ &= 276 - \frac{144}{n} - \frac{32}{n^2}. \end{aligned}$$



**Figura 5.3.13** La región del ejemplo 7

[Hemos aplicado las ecuaciones (6) a (8)]. En consecuencia, el segundo límite de la ecuación (16) es

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 276 - \frac{144}{n} - \frac{32}{n^2} \right) = 276$$

que es el área buscada.

### NOTA HISTÓRICA: EL NÚMERO $\pi$

Los matemáticos de la antigüedad tendían a emplear triángulos inscritos y circunscritos en vez de rectángulos para aproximar áreas. En el siglo III a.C., Arquímedes, el más grande matemático de la antigüedad, utilizó ese método para obtener la famosa estimación

$$\frac{223}{71} = 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}.$$

Puesto que el área de un círculo de radio  $r$  es  $\pi r^2$ , el número  $\pi$  se puede *definir* como el área del círculo unitario de radio  $r = 1$ . Así, aproximaremos  $\pi$  si aproximamos el área del círculo unitario.

Sean  $P_n$  y  $Q_n$  polígonos regulares de  $n$  lados, donde  $P_n$  está inscrito en el círculo unitario y  $Q_n$  está circunscrito fuera de él (figura 5.3.14). Puesto que ambos polígonos son regulares, todos sus lados y ángulos son iguales, de modo que sólo necesitamos determinar el área de *uno* de los triángulos que, como hemos mostrado, forman a  $P_n$  y de *uno* de los que forman a  $Q_n$ .

Sea  $\alpha_n$  el ángulo central subtendido por la *mitad* de uno de los lados. El ángulo  $\alpha_n$  es el mismo si trabajamos con  $P_n$  o con  $Q_n$ . En grados,

$$\alpha_n = \frac{360^\circ}{2n} = \frac{180^\circ}{n}.$$

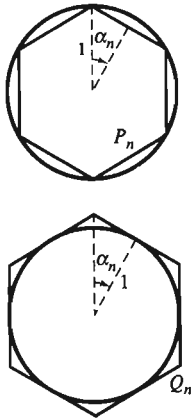
Podemos leer varias dimensiones y proporciones en la figura 5.3.14. Por ejemplo, vemos que el área  $a(P_n) = \underline{A}_n$  de  $P_n$  está dada por

$$\underline{A}_n = a(P_n) = n \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \sin \alpha_n \cos \alpha_n = \frac{n}{2} \sin 2\alpha_n = \frac{n}{2} \sin \left( \frac{360^\circ}{n} \right) \quad (19)$$

y que el área de  $Q_n$  es

$$\bar{A}_n = a(Q_n) = n \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \tan \alpha_n = n \tan \left( \frac{180^\circ}{n} \right). \quad (20)$$

Sustituimos algunos valores de  $n$  en las ecuaciones (19) y (20) para obtener los datos de la tabla de la figura 5.3.15. Como  $\underline{A}_n \leq \pi \leq \bar{A}_n$  para toda  $n$ , vemos que  $\pi \approx 3.14159$  hasta cinco cifras decimales. El razonamiento de Arquímedes *no* era circular (empleó un método directo para el cálculo de senos y cosenos en las ecuaciones (19) y (20) que no dependía del conocimiento *a priori* del valor de  $\pi$ .\*



**Figura 5.3.14** Estimación de  $\pi$  mediante polígonos regulares inscritos y circunscritos y el círculo unitario

$n$	$a(P_n)$	$a(Q_n)$
6	2.598076	3.464102
12	3.000000	3.215390
24	3.105829	3.159660
48	3.132629	3.146086
96	3.139350	3.142715
180	3.140955	3.141912
360	3.141433	3.141672
720	3.141553	3.141613
1440	3.141583	3.141598
2880	3.141590	3.141594
5760	3.141592	3.141593

**Figura 5.3.15** Datos para la estimación de  $\pi$  (redondeados con una precisión de seis cifras decimales)

\* Véase el capítulo 2 de C.H. Edwards, Jr., *The Historical Development of the Calculus* (Nueva York: Springer-Verlag, 1979).



### 5.3. Problemas

Escriba las sumas de los problemas 1 a 8 en la notación para sumas.

1.  $1 + 4 + 9 + 16 + 25$

2.  $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6$

3.  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$

4.  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25}$

5.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$

6.  $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$

7.  $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \frac{32}{243}$

8.  $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7} + 2\sqrt{2} + 3$

Use las ecuaciones (6) a (9) para determinar las sumas de los problemas 9 a 18.

9.  $\sum_{i=1}^{10} (4i - 3)$

10.  $\sum_{j=1}^8 (5 - 2j)$

11.  $\sum_{i=1}^{10} (3i^2 + 1)$

12.  $\sum_{k=1}^6 (2k - 3k^2)$

13.  $\sum_{r=1}^8 (r - 1)(r + 2)$

14.  $\sum_{i=1}^5 (i^3 - 3i + 2)$

15.  $\sum_{i=1}^6 (i^3 - i^2)$

16.  $\sum_{k=1}^{10} (2k - 1)^2$

17.  $\sum_{i=1}^{100} i^2$

18.  $\sum_{i=1}^{100} i^3$

Use el método del ejemplo 5 para evaluar los límites en los problemas 19 y 20.

19.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}$

20.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}{n^4}$

Use las ecuaciones (6) a (9) para obtener fórmulas concisas en términos de  $n$  para las sumas de los problemas 21 y 22.

21.  $\sum_{i=1}^n (2i - 1)$

22.  $\sum_{i=1}^n (2i - 1)^2$

En los problemas 23 a 32, sea  $R$  la región que está bajo la gráfica de  $y = f(x)$  en el intervalo  $[a, b]$  sobre el eje  $x$ . Use el método del ejemplo 1 para calcular una subestimación  $\underline{A}_n$  y una sobreestimación  $\overline{A}_n$  para el área  $A$  de  $R$ , con base en una división de  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos, todos con la misma longitud  $\Delta x = (b - a)/n$ .

23.  $f(x) = x$  en  $[0, 1]$ ;  $n = 5$

24.  $f(x) = x$  en  $[1, 3]$ ;  $n = 5$

25.  $f(x) = 2x + 3$  en  $[0, 3]$ ;  $n = 6$

26.  $f(x) = 13 - 3x$  en  $[0, 3]$ ;  $n = 6$  (figura 5.3.16)

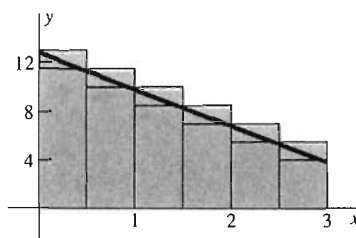


Figura 5.3.16 Problema 26

27.  $f(x) = x^2$  en  $[0, 1]$ ;  $n = 5$

28.  $f(x) = x^2$  en  $[1, 3]$ ;  $n = 5$

29.  $f(x) = 9 - x^2$  en  $[0, 3]$ ;  $n = 5$  (figura 5.3.17)

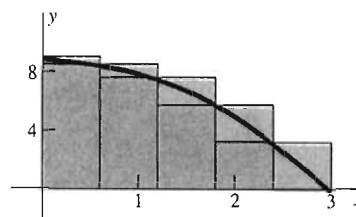


Figura 5.3.17 Problema 29

30.  $f(x) = 9 - x^2$  en  $[1, 3]$ ;  $n = 8$

31.  $f(x) = x^3$  en  $[0, 1]$ ;  $n = 10$

32.  $f(x) = \sqrt{x}$  en  $[0, 1]$ ;  $n = 10$  (figura 5.3.18)

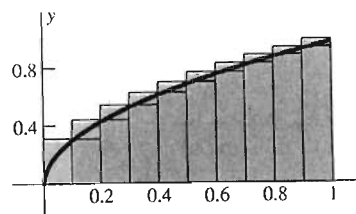


Figura 5.3.18 Problema 32

33. Obtenga la ecuación (7) sumando las ecuaciones

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

y

$$\sum_{i=1}^n i = n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1.$$

34. Escriba las  $n$  ecuaciones obtenidas al sustituir los valores  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  en la identidad

$$(k + 1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1.$$

Sume estas  $n$  ecuaciones y utilice esta suma para deducir la ecuación (8) a partir de la ecuación (7).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \frac{1}{2}bh,$$

En los problemas 35 a 40, calcule primero (en términos de  $n$ ) la suma

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

para aproximar el área  $A$  de la región bajo  $y = f(x)$  sobre el intervalo  $[a, b]$ . Determine después  $A$  exactamente (como en los ejemplos 6 y 7) mediante el límite cuando  $n \rightarrow \infty$ .

35.  $f(x) = x$  en  $[0, 1]$

36.  $f(x) = x^2$  en  $[0, 2]$

37.  $f(x) = x^3$  en  $[0, 3]$

38.  $f(x) = x + 2$  en  $[0, 2]$

39.  $f(x) = 5 - 3x$  en  $[0, 1]$

40.  $f(x) = 9 - x^2$  en  $[0, 3]$

41. Como en la figura 5.3.19, la región bajo la gráfica de  $f(x) = hx/b$  es un triángulo con base  $b$  y altura  $h$ . Utilice la ecuación (7) para verificar, con la notación de la ecuación (16), que

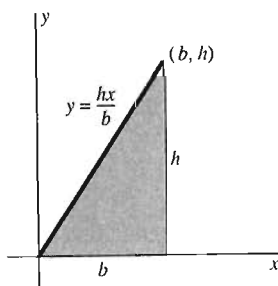


Figura 5.3.19 Problema 41

lo que coincide con la fórmula familiar para el área de un triángulo.

En los problemas 42 y 43, sea  $A$  el área y  $C$  la circunferencia de un círculo de radio  $r$  y sean  $A_n$  y  $C_n$  el área y el perímetro, respectivamente, de un polígono regular de  $n$  lados, inscrito en este círculo.

42. La figura 5.3.20 muestra un lado del polígono de  $n$  lados que subtende un ángulo  $2\pi/n$  en el centro  $O$  del círculo. Muestre que

$$A_n = nr^2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad \text{y que} \quad C_n = 2nr \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

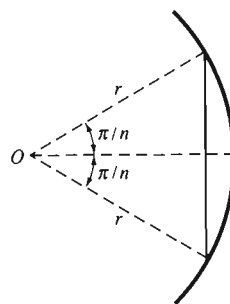


Figura 5.3.20 Problema 42

43. Deduzca que  $A = \frac{1}{2}rC$ , obteniendo el límite de  $A_n/C_n$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Entonces, bajo la hipótesis  $A = \pi r^2$ , deduzca que  $C = 2\pi r$ . Así, la fórmula familiar para la circunferencia de un círculo es consecuencia de la fórmula familiar para el área de un círculo.

## 5.4 Sumas de Riemann y la integral

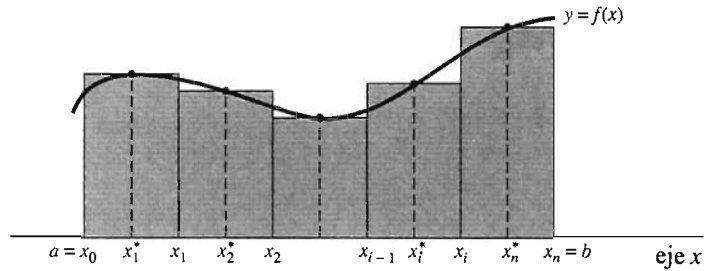
Suponga que  $f$  es una función positiva creciente definida en un conjunto de números reales que incluye al intervalo  $[a, b]$ . En la sección 5.3 utilizamos rectángulos inscritos y circunscritos para establecer las sumas

$$\sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \quad (1)$$

que aproximan el área  $A$  bajo la gráfica de  $y = f(x)$  de  $x = a$  a  $x = b$ . Recordemos que la notación de la ecuación (1) se basa en una división del intervalo  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos, cada uno con la misma longitud  $\Delta x = (b - a)/n$ , y que  $[x_{i-1}, x_i]$  denota el  $i$ -ésimo subintervalo.

Las sumas de aproximación en la ecuación (1) son ambas de la forma

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x, \quad (2)$$



**Figura 5.4.1** La suma de Riemann en la ecuación (2) como una suma de áreas de rectángulos

donde  $x_i^*$  es algún punto seleccionado en el  $i$ -ésimo subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  (figura 5.4.1). Las sumas de la forma (2) aparecen como aproximaciones en una amplia variedad de aplicaciones y forman la base para la definición de la integral. Motivados por nuestro análisis del área, en la sección 5.3, queremos definir la integral de  $f$  de  $a$  a  $b$  mediante algún límite, cuando  $\Delta x \rightarrow 0$  de sumas como las que aparecen en (2). Nuestro objetivo es partir de una función bastante general  $f$  y definir un número real  $I$  (la integral de  $f$ ) que —en el caso especial  $f$  es continua y con valor positivo sobre  $[a, b]$ — será igual al área bajo la gráfica de  $y = f(x)$ .

Comenzamos con una función  $f$  definida en  $[a, b]$ , que *no* necesariamente es continua o positiva. Una **partición**  $P$  de  $[a, b]$  es una colección de subintervalos

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

de  $[a, b]$  de modo que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

La **norma** de la partición  $P$  es el máximo de las longitudes

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

de los subintervalos en  $P$  y se denota  $|P|$ . Para obtener una suma como la de (2), necesitamos un punto  $x_i^*$  en el  $i$ -ésimo subintervalo para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Una colección de puntos

$$S = \{x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_n^*\}$$

donde  $x_i^*$  en  $[x_{i-1}, x_i]$  (para cada  $i$ ) es una **selección** para la partición  $P$ .

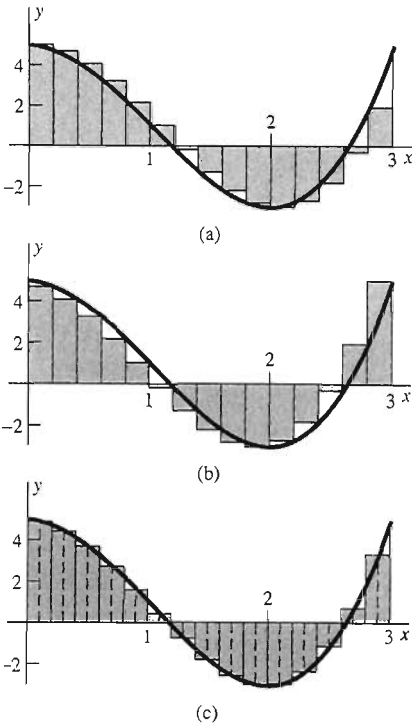
**Definición Suma de Riemann**

Sea  $f$  una función definida en el intervalo  $[a, b]$ . Si  $P$  es una partición de  $[a, b]$  y  $S$  una selección para  $P$ , entonces la **suma de Riemann** para  $f$  determinada por  $P$  y  $S$  es

$$R = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i. \quad (3)$$

También decimos que esta suma de Riemann está **asociada con** la partición  $P$ .

El matemático alemán G.F.B. Riemann (1826–1866) proporcionó una definición rigurosa de la integral. Desde los tiempos de Arquímedes, han aparecido



**Figura 5.4.2** Sumas de Riemann para  $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5$  en  $[0, 3]$ .  
 (a) Suma según los extremos izquierdos  
 (b) Suma según los extremos derechos  
 (c) Suma según los puntos medios

varios tipos particulares de “sumas de Riemann” en el cálculo de áreas y volúmenes, pero fue Riemann quien estableció la definición anterior con toda generalidad.

El punto  $x_i^*$  en la ecuación (3) es simplemente un punto elegido del  $i$ -ésimo subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ . Es decir, puede ser *cualquier* punto de este subintervalo. Pero cuando calculamos las sumas de Riemann, por lo general elegimos los puntos de la selección  $S$  de alguna forma sistemática, como se ilustra en la figura 5.4.2. Ahí mostramos diferentes sumas de Riemann para la función  $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5$  en el intervalo  $[0, 3]$ . La figura 5.4.2(a) muestra los rectángulos asociados con la *suma según los extremos izquierdos*

$$R_{\text{izq}} = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x, \quad (4)$$

en donde cada  $x_i^*$  se elige como  $x_{i-1}$ , el *extremo izquierdo* del  $i$ -ésimo subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  de longitud  $\Delta x = (b - a)/n$ . La figura 5.4.2(b) muestra los rectángulos asociados con la *suma según los extremos derechos*

$$R_{\text{der}} = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x, \quad (5)$$

en donde cada  $x_i^*$  se elige como  $x_i$ , el *extremo derecho* de  $[x_{i-1}, x_i]$ . En cada figura, algunos de los rectángulos están inscritos y otros están circunscritos.

La figura 5.4.2(c) muestra los rectángulos asociados con la *suma según los puntos medios*

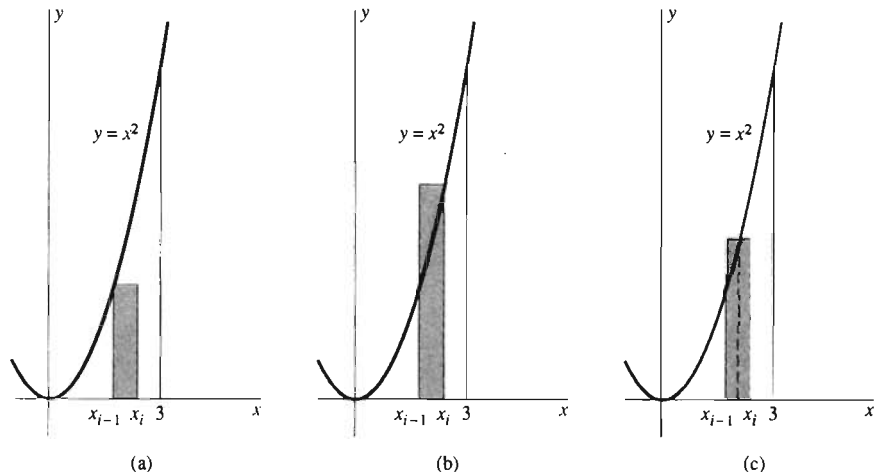
$$R_{\text{med}} = \sum_{i=1}^n f(m_i) \Delta x, \quad (6)$$

donde

$$x_i^* = m_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2},$$

es el *punto medio* del  $i$ -ésimo subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ . Las líneas punteadas de la figura 5.4.2(c) representan la ordenada de  $f$  en tales puntos medios.

**EJEMPLO 1** En el ejemplo 1 de la sección 5.3 calculamos las sumas según los extremos izquierdos y derechos para  $f(x) = x^2$  en  $[0, 3]$  con  $n = 10$  subintervalos. Ahora lo haremos de manera más concisa mediante la notación para la suma, además de calcular la suma análoga utilizando los puntos medios. La figura 5.4.3



**Figura 5.4.3** Ejemplo 1  
 (a) El caso  $x_i^* = x_{i-1}$   
 (b) El caso  $x_i^* = x_i$   
 (c) El caso  $x_i^* = m_i$

muestra un rectángulo de aproximación típico para cada una de estas sumas. Con  $a = 0$ ,  $b = 3$  y  $\Delta x = (b - a)/n = \frac{3}{10}$ , vemos que el  $i$ -ésimo punto de subdivisión es

$$x_i = a + i \cdot \Delta x = \frac{3}{10}i.$$

El  $i$ -ésimo subintervalo, así como su punto medio

$$m_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) = \frac{1}{2}\left(\frac{3i-3}{10} + \frac{3}{10}i\right) = \frac{3}{20}(2i - 1),$$

aparecen en la figura 5.4.4. Con  $x_i^* = x_{i-1} = \frac{3}{10}(i - 1)$ , obtenemos la suma según los extremos izquierdos en la ecuación (4),

$$\begin{aligned} R_{\text{izq}} &= \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x = \sum_{i=1}^{10} \left[\frac{3}{10}(i - 1)\right]^2 \left(\frac{3}{10}\right) \\ &= \frac{27}{1000} \cdot (0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + 9^2) \\ &= \frac{7695}{1000} = 7.695 \quad [\text{usando la ecuación (8) de la sección 5.3}]. \end{aligned}$$

Con  $x_i^* = x_i = \frac{3}{10}i$ , obtenemos la suma según los extremos derechos en la ecuación (5),

$$\begin{aligned} R_{\text{der}} &= \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \sum_{i=1}^{10} \left[\frac{3}{10}i\right]^2 \left(\frac{3}{10}\right) \\ &= \frac{27}{1000} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2) \\ &= \frac{10,395}{1000} = 10.395 \quad [\text{usando la ecuación (8) de la sección 5.3}]. \end{aligned}$$

Por último, con  $x_i^* = m_i = \frac{3}{20}(2i - 1)$ , obtenemos la suma según los puntos medios en la ecuación (6),

$$\begin{aligned} R_{\text{med}} &= \sum_{i=1}^n f(m_i) \Delta x = \sum_{i=1}^{10} \left[\frac{3}{20}(2i - 1)\right]^2 \left(\frac{3}{10}\right) \\ &= \frac{27}{4000} \cdot (1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 17^2 + 19^2) = \frac{35,910}{4000} = 8.9775. \end{aligned}$$

La suma según los puntos medios es mucho más cercana, al valor real 9, que cualquier suma según los extremos (para el área bajo la gráfica de  $y = x^2$  en  $[0, 3]$ ) que calculamos en el ejemplo 6 de la sección 5.3.

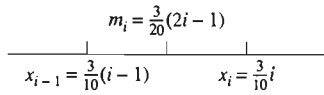
**EJEMPLO 2** La figura 5.4.5 ilustra las sumas de Riemann para  $f(x) = \sin x$  en  $[0, \pi]$  con base en  $n = 3$  subintervalos:  $[0, \pi/3]$ ,  $[\pi/3, 2\pi/3]$  y  $[2\pi/3, \pi]$  de longitud  $\Delta x = \pi/3$  con puntos medios  $\pi/6$ ,  $\pi/2$  y  $5\pi/6$ . La suma según los extremos izquierdos es

$$\begin{aligned} R_{\text{izq}} &= (\Delta x) \cdot \left(\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\sin 0 + \sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \frac{\pi}{3} \cdot \left(0 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} \approx 1.81. \end{aligned}$$

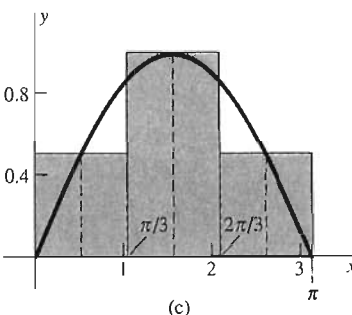
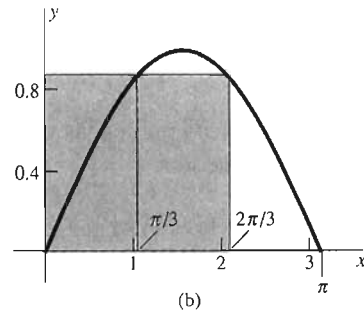
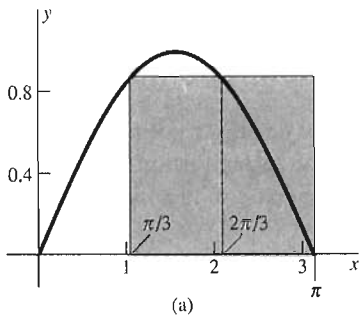
Es claro de la figura, que la suma según los extremos derechos tiene el mismo valor. La suma correspondiente según los puntos medios es

$$R_{\text{med}} = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} \approx 2.09.$$

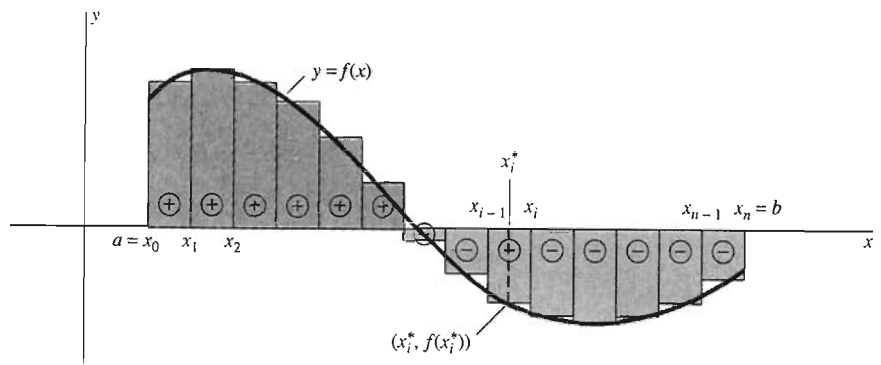
(El área exacta bajo un arco de la curva es 2.)



**Figura 5.4.4** El  $i$ -ésimo subintervalo del ejemplo 1



**Figura 5.4.5** Aproximación del área bajo  $y = \sin x$  en  $[0, \pi]$  (ejemplo 2) (a) Suma según los extremos izquierdos (b) Suma según los extremos derechos (c) Suma según los puntos medios



**Figura 5.4.6** Una interpretación geométrica de la suma de Riemann de la ecuación (3)

En el caso de una función  $f$  que tenga valores positivos y negativos en  $[a, b]$ , es necesario considerar los *signos* indicados en la figura 5.4.6 cuando interpretemos geoméricamente la suma de Riemann de la ecuación (3). En cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ , tenemos un rectángulo con ancho  $\Delta x_i$  y “altura”  $f(x_i^*)$ . Si  $f(x_i^*) > 0$ , entonces este rectángulo está *arriba* del eje  $x$ ; si  $f(x_i^*) < 0$ , está *bajo* el eje  $x$ . La suma de Riemann  $R$  es entonces la suma de las áreas **con signo** de estos rectángulos; es decir, la suma de las áreas de aquellos rectángulos que están arriba del eje  $x$  *menos* la suma de las áreas de aquellos debajo del eje  $x$ .

Si los anchos  $\Delta x_i$  de estos rectángulos son todos muy pequeños (es decir, si la norma  $|P|$  es pequeña), entonces parece que la suma de Riemann  $R$  aproximará el área de  $a$  a  $b$  bajo  $y=f(x)$  sobre el eje  $x$ , menos el área bajo el eje  $x$ . Esto sugiere que la integral de  $f$  de  $a$  a  $b$  deba definirse al obtener el límite de las sumas de Riemann cuando la norma  $|P|$  tiende a cero:

$$I = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i. \quad (7)$$

La definición formal de la integral se obtiene al decir con precisión lo que significa que este límite exista. En resumen, significa que si  $|P|$  es suficientemente pequeña, entonces *todas* las sumas de Riemann asociadas con  $P$  están muy cerca del número  $I$ .

**Definición La integral definida**

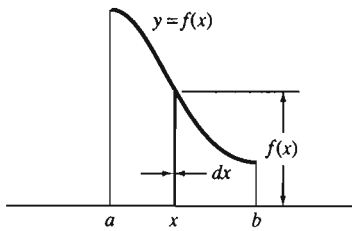
La integral definida de la función  $f$  de  $a$  a  $b$  es el número

$$I = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i, \quad (8)$$

siempre que el límite exista, en cuyo caso decimos que  $f$  es **integrable** en  $[a, b]$ . La ecuación (8) significa que, para cada número  $\varepsilon > 0$ , existe un número  $\delta > 0$  tal que

$$\left| I - \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i \right| < \varepsilon$$

para cada suma de Riemann asociada con una partición arbitraria  $P$  de  $[a, b]$  para la que  $|P| < \delta$ .



**Figura 5.4.7** Origen de la notación de Leibniz para la integral

La notación usual para la integral de  $f$  de  $a$  a  $b$ , debida al filósofo y matemático alemán G. W. Leibniz, es

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i. \quad (9)$$

Si consideramos  $I$  como el área bajo  $y=f(x)$  de  $a$  a  $b$ , Leibniz pensó primero en una delgada banda con altura  $f(x)$  y ancho “infinitesimalmente pequeño”  $dx$  (como en la figura 5.4.7), de modo que su área era el producto  $f(x) dx$ . Consideró la integral como una suma de áreas de tales bandas y denotó esta suma mediante la letra alargada  $S$  (de *summa*) que aparece como el signo de integral en la ecuación (9).

Veremos que esta notación integral no sólo es altamente sugerente, sino que también es útil en extremo para el manejo de las integrales. Los números  $a$  y  $b$  son el **límite inferior** y el **límite superior** de la integral, respectivamente; son los extremos del intervalo de integración. La función  $f(x)$  que aparece entre el signo de integral y  $dx$  es el **integrando**. El símbolo  $dx$  que va después del integrando de la ecuación (9) debe pensarse, por el momento, simplemente como una indicación de lo que es la variable independiente. Como el índice de la suma, la variable independiente  $x$  es una “variable muda”; se puede reemplazar por cualquier otra variable sin afectar el significado de la ecuación (9). Así, si  $f$  es integrable en  $[a, b]$ , podemos escribir

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du.$$

La definición dada, de la integral definida, se aplica solamente cuando  $a < b$ , pero es conveniente incluir también los casos  $a = b$  y  $a > b$ . La integral se *define* en estos casos como:

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad (10)$$

y

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx, \quad (11)$$

siempre que exista la integral del lado derecho. Así, *el intercambio de los límites de integración invierte el signo de la integral*.

Así como no todas las funciones son derivables, no toda función es integrable. Supongamos que  $c$  es un punto en  $[a, b]$  tal que  $f(x) \rightarrow +\infty$  cuando  $x \rightarrow c$ . Si  $[x_{k-1}, x_k]$  es el subintervalo de la partición  $P$  que contiene a  $c$ , entonces la suma de Riemann en la ecuación (3) se puede hacer arbitrariamente grande si elegimos  $x_k^*$  suficientemente cercano a  $c$ . Sin embargo, para nuestros propósitos, sólo necesitamos saber que toda función continua es integrable. El siguiente teorema se demuestra en el apéndice E.

**Teorema 1 Existencia de la integral**

Si la función  $f$  es continua en  $[a, b]$ , entonces  $f$  es integrable en  $[a, b]$ .

Aunque omitimos los detalles, no es difícil mostrar que la definición de la integral se puede reformular en términos de sucesiones de sumas de Riemann, como sigue.

**Teorema 2** *La integral como límite de una sucesión*

La función  $f$  es integrable en  $[a, b]$ , con integral  $I$  si y sólo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = I \quad (12)$$

para cada sucesión entra  $\{R_n\}_1^\infty$  de sumas de Riemann asociadas con una sucesión de particiones  $\{P_n\}_1^\infty$  de  $[a, b]$  tales que  $|P_n| \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ .

Esta reformulación de la definición de la integral tiene la ventaja de que es más sencillo visualizar una sucesión específica de sumas de Riemann que visualizar la totalidad de sumas de Riemann posibles. En el caso de una función continua  $f$  (que por el teorema 1 se sabe es integrable), la situación se puede simplificar aún más, empleando únicamente sumas de Riemann asociadas con particiones que constan de subintervalos con la misma longitud

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_n = \frac{b - a}{n} = \Delta x.$$

Tal partición de  $[a, b]$  en subintervalos de la misma longitud es una **partición regular** de  $[a, b]$ .

Cualquier suma de Riemann asociada con una partición regular se puede escribir en la forma

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x, \quad (13)$$

donde la ausencia de un subíndice en  $\Delta x$  significa que la suma está asociada a una partición regular. En tal caso, las condiciones  $|P| \rightarrow 0$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$  y  $n \rightarrow +\infty$  son equivalentes, de modo que la integral de una función *continua* se puede definir de manera un tanto sencilla:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x. \quad (14)$$

Por tanto, como nuestro interés se centrará principalmente en las integrales de funciones *continuas*, en nuestro análisis posterior sólo utilizaremos particiones regulares.

**EJEMPLO 3** Utilice sumas de Riemann para calcular

$$\int_a^b x dx,$$

donde  $a < b$ .

**Solución** Consideramos  $f(x) = x$  y  $x_i^* = x_i$ , donde

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} \quad \text{y} \quad x_i = a + i \cdot \Delta x.$$

La suma de Riemann de la ecuación (13) es entonces



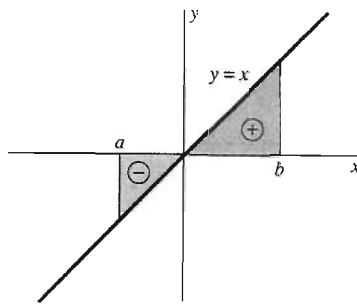


Figura 5.4.8 Ejemplo 3 con  $a < 0 < b$

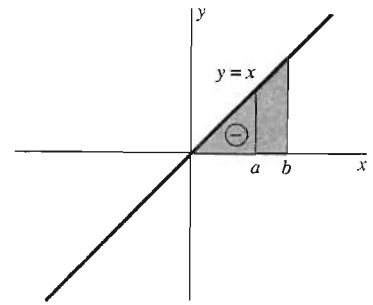


Figura 5.4.9 Ejemplo 3 con  $0 < a < b$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x &= \sum_{i=1}^n (a + i \cdot \Delta x) \Delta x = (a \Delta x) \sum_{i=1}^n 1 + (\Delta x)^2 \sum_{i=1}^n i \\ &= a \cdot \frac{b-a}{n} \cdot n + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \cdot \frac{n}{2} \cdot (n+1) \quad [\text{utilizando las ecuaciones} \\ &\quad (6) \text{ y } (7) \text{ de la sección 5.3}] \\ &= a \cdot (b-a) + (b-a)^2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right). \end{aligned}$$

Como  $1/(2n) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ , se sigue que

$$\begin{aligned} \int_a^b x \, dx &= a \cdot (b-a) + \frac{1}{2} \cdot (b-a)^2 \\ &= (b-a) \cdot \left(a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a\right) = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Las figuras 5.4.8 y 5.4.9 ilustran dos de los casos del ejemplo 3. En cada caso, la ecuación (15) coincide con la suma de las áreas *con signo* indicadas. El signo menos de la figura 5.4.8 representa el hecho de que el área debajo del eje  $x$  se mide con un número negativo.

## 5.4 Problemas

En los problemas 1 a 10, exprese el límite dado como una integral definida en el intervalo indicado  $[a, b]$ . Suponga que  $[x_{i-1}, x_i]$  denota el  $i$ -ésimo subintervalo de una subdivisión de  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos de igual longitud  $\Delta x = (b-a)/n$ , y que  $m_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$  es el punto medio del  $i$ -ésimo subintervalo.

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (2x_i - 1) \Delta x$  en  $[1, 3]$

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (2 - 3x_{i-1}) \Delta x$  en  $[-3, 2]$

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i^2 + 4) \Delta x$  en  $[0, 10]$

4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i^3 - 3x_i^2 + 1) \Delta x$  en  $[0, 3]$

5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{m_i} \Delta x$  en  $[4, 9]$

6.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{25 - x_i^2} \Delta x$  en  $[0, 5]$

7.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + m_i}} \Delta x$  en  $[3, 8]$

8.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (\cos 2x_{i-1}) \Delta x$  en  $[0, \pi/2]$

9.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (\sin 2\pi m_i) \Delta x$  en  $[0, 1/2]$

10.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (\tan x_i) \Delta x$  en  $[0, \pi/4]$

En los problemas 11 a 20, calcule la suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

para la función indicada y una partición regular del intervalo

dado en  $n$  subintervalos. Utilice  $x_i^* = x_i$ , el extremo derecho del  $i$ -ésimo subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ .

11.  $f(x) = x^2$  en  $[0, 1]$ ;  $n = 5$
12.  $f(x) = x^3$  en  $[0, 1]$ ;  $n = 5$
13.  $f(x) = \frac{1}{x}$  en  $[1, 6]$ ;  $n = 5$
14.  $f(x) = \sqrt{x}$  en  $[0, 5]$ ;  $n = 5$
15.  $f(x) = 2x + 1$  en  $[1, 4]$ ;  $n = 6$
16.  $f(x) = x^2 + 2x$  en  $[1, 4]$ ;  $n = 6$
17.  $f(x) = x^3 - 3x$  en  $[1, 4]$ ;  $n = 5$
18.  $f(x) = 1 + 2\sqrt{x}$  en  $[2, 3]$ ;  $n = 5$
19.  $f(x) = \cos x$  en  $[0, \pi]$ ;  $n = 6$
20.  $f(x) = \sin \pi x$  en  $[0, 1]$ ;  $n = 6$

21 a 30. Repita los problemas 11 a 20, excepto que  $x_i^* = x_{i-1}$ , es el extremo izquierdo.

31 a 40. Repita los problemas 11 a 20, excepto que  $x_i^* = (x_{i-1} + x_i) / 2$ , es el punto medio del  $i$ -ésimo subintervalo.

41. Trabaje el problema 13 con  $x_i^* = (3x_{i-1} + 2x_i) / 5$ .
42. Trabaje el problema 14 con  $x_i^* = (x_{i-1} + 2x_i) / 3$ .

En los problemas 43 a 48, evalúe la integral dada al calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

para una partición regular del intervalo de integración.

43.  $\int_0^2 x^2 dx$
44.  $\int_0^4 x^3 dx$
45.  $\int_0^3 (2x + 1) dx$
46.  $\int_1^5 (4 - 3x) dx$

## 5.4

### Proyectos

Estos proyectos requieren el uso de una calculadora programable o una computadora. En caso contrario, no es práctico calcular las sumas de Riemann con un número grande de subintervalos.

Los programas para la calculadora TI o en BASIC de la figura 5.4.10 se pueden emplear para aproximar la integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

por medio de una suma de Riemann correspondiente a una subdivisión del intervalo  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos, cada uno con la misma longitud  $h = \Delta x$ .

Para el programa de la calculadora TI, usted debe definir la función deseada  $f(x)$  (como Y1) en el menú "Y=" antes de ejecutar el programa. Para la versión BASIC, usted define la función en la primera línea del programa. Usted introduce

$$47. \int_0^3 (3x^2 + 1) dx \quad 48. \int_0^4 (x^3 - x) dx$$

49. Muestre mediante el método del ejemplo 3 que

$$\int_0^b x dx = \frac{1}{2} b^2$$

si  $b > 0$ .

50. Muestre mediante el método del ejemplo 3 que

$$\int_0^b x^3 dx = \frac{1}{4} b^4$$

si  $b > 0$ .

51. Sean  $f(x) = x$  y  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  una partición arbitraria del intervalo cerrado  $[a, b]$ . Para cada  $i$ , ( $1 \leq i \leq n$ ), sea  $x_i^* = (x_{i-1} + x_i) / 2$ . Muestre entonces que

$$\sum_{i=1}^n x_i^* \Delta x_i = \frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} a^2.$$

Explique por qué este cálculo demuestra que

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

52. Suponga que  $f$  es una función continua en  $[a, b]$  y que  $k$  es una constante. Utilice sumas de Riemann para demostrar que

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

53. Suponga que  $f(x) \equiv c$ , una constante. Utilice sumas de Riemann para demostrar que

$$\int_a^b c dx = c(b - a).$$

[Sugerencia: Considere primero el caso  $a < b$ .]

TI-81/85	BASIC	Comentarios
PRGM1:RIEMANN	DEF FN F (X) = X*X	Definición de $Y1 = f(x)$
:Disp "A"		
:Input A	Input "A"; A	Extremo izquierdo
:Disp "B"		
:Input B	Input "B"; B	Extremo derecho
:Disp "N"		
:Input N	Input "N"; N	Número de subintervalos
:(B-A)/N→H	H = (B - A)/N	Longitud del subintervalo
:0→I		Inicialización del contador I
:0→S	S = 0	Inicialización de la suma S
:A+H→X	X = A + H	Punto inicial
:Lbl 1	FOR I = 1 TO N	Inicio del ciclo
:S+H*Y1→S	S = S + H*FNF (X)	Suma del siguiente término
:X+H→X	X = X + H	Actualización de X
:I+1→I	NEXT	Siguiente I
:If I<N		Fin del ciclo
:Goto 1		
:Disp "N="	PRINT "N = ";N	Desplegar N
:Disp N		
:Disp "SUM="	PRINT "Sum = ";S	Desplegar la suma
:Disp S		
:End	END	

**Figura 5.4.10** Programas para TI-81/85 y BASIC para el cálculo de sumas de Riemann

los límites inferior y superior  $a$  y  $b$  de la integral y el número deseado de subintervalos  $n$  durante la ejecución del programa.

La línea "punto inicial" del programa determina el tipo de suma de Riemann calculada:

$A \rightarrow X$	suma según los extremos izquierdos
$A+H \rightarrow X$	suma según los extremos derechos (como arriba)
$A+H/2 \rightarrow X$	suma según los puntos medios

La mayor parte de los sistemas de álgebra computacional incluyen una función SUM que se puede emplear para calcular sumas de Riemann directamente. Supongamos que la función integrando  $f(x)$  ya se ha definido de manera adecuada. Entonces, las instrucciones de una línea de la figura 5.4.11 calculan (en distintos sistemas) la suma según los extremos derechos, con  $n$  subintervalos. Los cambios que producen las sumas con los extremos izquierdos o los puntos medios son evidentes.

Sin importar el tipo de calculadora o computadora que utilice, la lectura y comparación de los distintos programas e instrucciones en las figuras 5.4.10 y 5.4.11 pueden darle una mejor idea de los algoritmos computacionales para la aproximación de integrales.

Sistema	Instrucción
<i>Derive</i>	SUM( f ( a + ( b - a ) * i / n ) , i , 1 , n ) * ( b - a ) / n
<i>Maple</i>	sum( f ( a + ( b - a ) * i / n ) , i = 1 .. n ) * ( b - a ) / n
<i>Mathematica</i>	Sum[ f [ x ] , { x , a + ( b - a ) / n , b , ( b - a ) / n } ] * ( b - a ) / n
<i>(X)PLORE</i>	SUM( f ( x ) , x = a + ( b - a ) / n to b step ( b - a ) / n ) * ( b - a ) / n

**Figura 5.4.11** Instrucciones de sistemas de álgebra computacional para la aproximación de la integral de  $f$  desde  $x = a$  hasta  $x = b$  con  $n$  subintervalos

**PROYECTO A** Verifique las aproximaciones a la integral

$$\int_0^3 x^2 dx$$

que se enumeran en la figura 5.3.10. Incluya además una columna de aproximaciones según los puntos medios. ¿Cuál parece ser una aproximación más precisa a esta integral, para un número dado de subintervalos: el promedio de las sumas según los extremos izquierdos y derechos o la suma según los puntos medios?

**PROYECTO B** Use el promedio de las sumas según los extremos izquierdos y derechos y la suma según los puntos medios para corroborar la afirmación

$$\int_0^\pi \text{sen } x dx = 2.$$

**PROYECTO C** Explique primero por qué la figura 5.4.12 y la fórmula para el área del círculo  $A = \pi r^2$  implican que

$$\int_0^1 4\sqrt{1-x^2} dx = \pi.$$

Después utilice las aproximaciones a esta suma mediante la suma según los puntos medios, para aproximar el número  $\pi$ . Comience con  $n = 25$  subintervalos, y continúe duplicando  $n$ . ¿Cuál debe ser el valor de  $n$  para obtener la aproximación familiar  $\pi \approx 3.1416$ ?

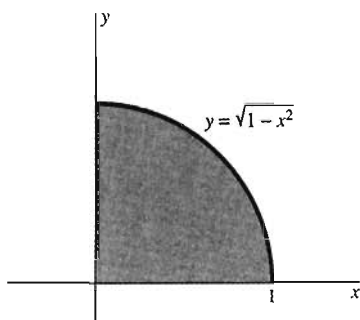


Figura 5.4.12 Proyecto C

## 5.5 Evaluación de integrales

La evaluación de integrales mediante sumas de Riemann, como en la sección 5.4, es tediosa y ocupa mucho tiempo. Por fortuna, pocas veces será necesario evaluar una integral de esta manera. En 1666, Isaac Newton, siendo aún estudiante en la universidad de Cambridge, descubrió una forma más eficiente de evaluar una integral. Unos cuantos años después, Gottfried Wilhelm Leibniz, trabajando con un método distinto, descubrió este método en forma independiente.

La idea fundamental de Newton fue que para evaluar el número

$$\int_a^b f(x) dx,$$

primero debemos introducir la función  $A(x)$  definida como sigue:

$$A(x) = \int_a^x f(t) dt. \quad (1)$$

La variable independiente  $x$  aparece en el límite superior de la integral de la ecuación (1); la variable muda  $t$  se utiliza en el integrando sólo para evitar confusiones. Si  $f$  es positiva, continua y  $x > a$ , entonces  $A(x)$  es el área bajo la curva  $y = f(x)$  en el intervalo  $[a, x]$  (figura 5.5.1).

Es claro de la figura 5.5.1 que  $A(x)$  aumenta conforme  $x$  crece. Cuando  $x$  crece en  $\Delta x$ ,  $A$  aumenta por el área  $\Delta A$  de la estrecha banda de la figura 5.5.1 con base  $[x, x + \Delta x]$ . Si  $\Delta x$  es muy pequeño, el área de la banda es muy cercana al área  $f(x) \Delta x$  del rectángulo con base  $[x, x + \Delta x]$  y altura  $f(x)$ . Así,

$$\Delta A \approx f(x) \Delta x; \quad \frac{\Delta A}{\Delta x} \approx f(x). \quad (2)$$

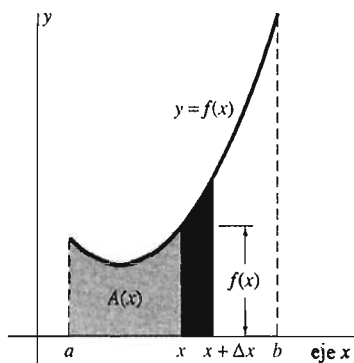


Figura 5.5.1 La función área  $A(x)$

Además, la figura hace plausible que obtengamos la igualdad en el límite cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$\frac{dA}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} = f(x).$$

Es decir,

$$\boxed{A'(x) = f(x)}, \quad (3)$$

de modo que *la derivada de la función área  $A(x)$  es la función altura de la curva  $f(x)$* . En otras palabras, la ecuación (3) implica que  $A(x)$  es una *primitiva* de  $f(x)$ .

La figura 5.5.2 muestra una interpretación física de la ecuación (3). Un rodillo aplica una capa de pintura de 1 mm de espesor para cubrir la región bajo la curva  $y = f(t)$ . El rodillo tiene una longitud ajustable; conforme rueda con una velocidad de 1 mm/seg de izquierda a derecha, un extremo traza el eje  $x$  y el otro extremo traza la curva  $y = f(t)$ . En un instante  $t$ , el volumen  $V$  de pintura que ha aplicado el rodillo es igual al área de la región pintada:

$$V = A(t) \quad (\text{mm}^3).$$

Entonces, la ecuación (3) implica

$$\frac{dV}{dt} = A'(t) = f(t).$$

Así, la razón instantánea con la que el rodillo aplica la pintura es igual a la longitud actual del rodillo.

## EL TEOREMA DE EVALUACIÓN

La ecuación (3) dice que la función área  $A(x)$  ilustrada en la figura 5.5.1 es *una* primitiva de la función dada  $f(x)$ . Supongamos ahora que  $G(x)$  es cualquier otra primitiva de  $f(x)$  (tal vez determinada mediante los métodos de la sección 5.2). Entonces

$$A(x) = G(x) + C, \quad (4)$$

pues (por el segundo corolario del teorema del valor medio) dos primitivas de la misma función (en un intervalo) sólo pueden diferir en una constante. Además,

$$A(a) = \int_a^a f(t) dt = 0 \quad (5)$$

y

$$A(b) = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx \quad (6)$$

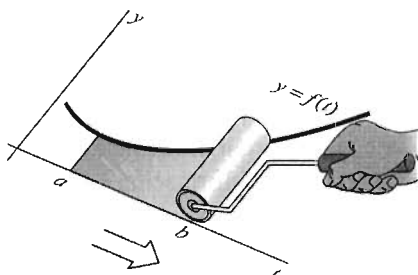
por la ecuación (1). Así, esto implica que

$$\int_a^b f(x) dx = A(b) - A(a) = [G(b) + C] - [G(a) + C],$$

y así

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)}. \quad (7)$$

Nuestro análisis intuitivo nos ha llevado al enunciado del teorema 1.



**Figura 5.5.2** El rodillo de longitud ajustable

**Teorema 1 Evaluación de integrales**

Si  $G$  es una primitiva de la función continua  $f$  en el intervalo  $[a, b]$ , entonces

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a). \quad (7)$$

En la sección 5.6 llenaremos los detalles del análisis anterior, dando una demostración rigurosa del teorema 1 (que es parte del teorema fundamental del cálculo). Aquí nos centraremos en las aplicaciones computacionales de este teorema. La diferencia  $G(b) - G(a)$  se abrevia generalmente  $[G(x)]_a^b$ , por lo que el teorema 1 implica

$$\int_a^b f(x) dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a). \quad (8)$$

si  $G$  es cualquier primitiva de la función continua  $f$  en el intervalo  $[a, b]$ . Así, si podemos determinar una primitiva  $G$  de  $f$ , podemos evaluar rápidamente la integral sin tener que recurrir a la parafernalia de los límites de sumas de Riemann.

Si  $G'(x) = f(x)$ , entonces escribimos (como en la sección 5.2)

$$\int f(x) dx = G(x) + C \quad (9)$$

para la integral indefinida de  $f$ . Con la integral indefinida  $\int f(x) dx$  en vez de la primitiva  $G(x)$ , la ecuación (8) adquiere la forma

$$\int_a^b f(x) dx = \left[ \int f(x) dx \right]_a^b \quad (10)$$

Ésta es la relación entre la integral indefinida y la integral definida a la que aludimos en las primeras secciones del capítulo 5.

**EJEMPLO 1** Como

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (\text{si } n \neq -1),$$

se sigue que

$$\int_a^b x^n dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

Por ejemplo,

$$\int_0^3 x^2 dx = \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_0^3 = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = 9.$$

Compare lo inmediato de este resultado con la complejidad de los cálculos del ejemplo 6 en la sección 5.3.

**EJEMPLO 2** Como

$$\int \cos x dx = \text{sen } x + C,$$

esto implica que

$$\int_a^b \cos x \, dx = \left[ \operatorname{sen} x \right]_a^b = \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a.$$

De manera análoga,

$$\int_a^b \operatorname{sen} x \, dx = \left[ -\cos x \right]_a^b = \cos a - \cos b.$$

Por ejemplo, como mencionamos en el ejemplo 2 de la sección 5.4,

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x \, dx = \left[ -\cos x \right]_0^\pi = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = (+1) - (-1) = 2.$$

**EJEMPLO 3**

$$\int_0^2 x^5 \, dx = \left[ \frac{1}{6} x^6 \right]_0^2 = \frac{64}{6} - 0 = \frac{32}{3}.$$

$$\int_1^9 (2x - x^{-1/2} - 3) \, dx = \left[ x^2 - 2x^{1/2} - 3x \right]_1^9 = 52.$$

$$\int_0^1 (2x + 1)^3 \, dx = \left[ \frac{1}{8} (2x + 1)^4 \right]_0^1 = \frac{1}{8} \cdot (81 - 1) = 10.$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2x \, dx = \left[ -\frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{2} (\cos \pi - \cos 0) = 1.$$

---

No hemos mostrado los detalles para determinar las primitivas, pero usted puede (y debe) verificar cada uno de estos resultados mostrando que la derivada de la función dentro de los corchetes de la derecha es igual al integrando de la izquierda. En el ejemplo 4 mostramos los detalles.

**EJEMPLO 4** Evalúe  $\int_1^5 \sqrt{3x+1} \, dx$ .

**Solución** Aplicamos la forma de la primitiva de la generalización de la regla de la potencia,

$$\int u^k \, du = \frac{u^{k+1}}{k+1} + C,$$

con

$$u = 3x + 1, \quad du = 3 \, dx.$$

Esto implica

$$\begin{aligned} \int (3x + 1)^{1/2} \, dx &= \frac{1}{3} \int (3x + 1)^{1/2} (3 \, dx) = \frac{1}{3} \int u^{1/2} \, du \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9} (3x + 1)^{3/2} + C \end{aligned}$$

para la integral indefinida, por lo que la ecuación (10) implica que

$$\begin{aligned} \int_1^5 \sqrt{3x+1} \, dx &= \left[ \frac{2}{9} (3x+1)^{3/2} \right]_1^5 \\ &= \frac{2}{9} (16^{3/2} - 4^{3/2}) = \frac{2}{9} (4^3 - 2^3) = \frac{112}{9}. \end{aligned}$$

Si la derivada  $F'(x)$  de la función  $F(x)$  es continua, entonces el teorema de evaluación, con  $F'(x)$  en vez de  $f(x)$  y  $F(x)$  en vez de  $G(x)$  implica

$$\int_a^b F'(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a). \quad (11)$$

He aquí una aplicación inmediata.

**EJEMPLO 5** Suponga que una población animal  $P(t)$  es inicialmente  $P(0) = 100$  y que su tasa de crecimiento después de  $t$  meses está dada por

$$P'(t) = 10 + t + (0.06)t^2.$$

¿Cuál es la población después de 10 meses?

**Solución** Por la ecuación (11), sabemos que

$$\begin{aligned} P(10) - P(0) &= \int_0^{10} P'(t) dt = \int_0^{10} [10 + t + (0.06)t^2] dt \\ &= \left[ 10t + \frac{1}{2}t^2 + (0.02)t^3 \right]_0^{10} = 170. \end{aligned}$$

Así,  $P(10) = 100 + 170 = 270$  individuos.

**EJEMPLO 6** Evalúe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{2i}{n^2}$$

reconociendo este límite como el valor de una integral.

**Solución** Si escribimos

$$\sum_{i=1}^n \frac{2i}{n^2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{2i}{n} \right) \left( \frac{1}{n} \right),$$

reconocemos que esto es una suma de Riemann para la función  $f(x) = 2x$  asociada a una partición del intervalo  $[0, 1]$ , en  $n$  subintervalos de igual longitud. El  $i$ -ésimo punto de subdivisión es  $x_i = i/n$  y  $\Delta x = 1/n$ . Así, la definición de integral y el teorema de evaluación implican que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{2i}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2x_i \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \\ &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 2x dx. \end{aligned}$$

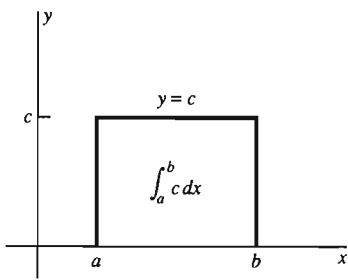
Por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{2i}{n^2} = \left[ x^2 \right]_0^1 = 1.$$

## PROPIEDADES BÁSICAS DE LAS INTEGRALES

Los problemas 44 a 46 dan el esquema de demostración de las propiedades que enunciaremos a continuación. Suponemos en todo esto que  $f$  es integrable en  $[a, b]$ .





**Figura 5.5.3** La integral de una constante es el área de un rectángulo

### Integral de una constante

$$\int_a^b c \, dx = c(b-a).$$

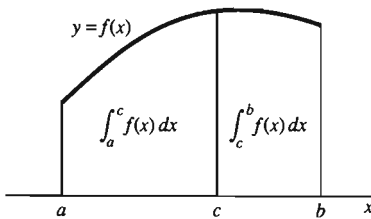
Esta propiedad es intuitivamente obvia, pues el área representada por la integral es tan sólo un rectángulo de base  $b-a$  y altura  $c$  (figura 5.5.3).

### Propiedad del múltiplo constante

$$\int_a^b cf(x) \, dx = c \int_a^b f(x) \, dx.$$

Así, una constante se puede “sacar” del signo de integral. Por ejemplo,

$$\int_0^{\pi/2} 2 \operatorname{sen} x \, dx = 2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx = 2 \left[ -\cos x \right]_0^{\pi/2} = 2.$$



**Figura 5.5.4** La forma en que funciona la propiedad de la unión de intervalos

### Propiedad de la unión de intervalos

Si  $a < c < b$ , entonces

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

La figura 5.5.4 indica la plausibilidad de la propiedad de la unión de intervalos.

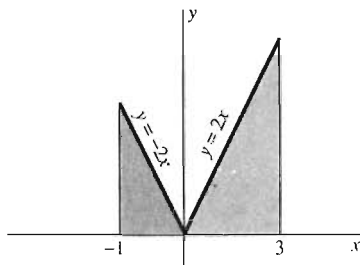
**EJEMPLO 7** Si  $f(x) = 2|x|$ , entonces

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq 0, \\ 2x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

La gráfica de  $f$  aparece en la figura 5.5.5. No es evidente cuál sea una primitiva de  $f(x)$ , pero la propiedad de la unión de intervalos nos permite separar la integral en dos integrales de fácil cálculo:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 2|x| \, dx &= \int_{-1}^0 (-2x) \, dx + \int_0^3 (2x) \, dx \\ &= \left[ -x^2 \right]_{-1}^0 + \left[ x^2 \right]_0^3 = [0 - (-1)] + [9 - 0] = 10. \end{aligned}$$

¿Coincide el resultado con la figura 5.5.5?



**Figura 5.5.5** El área bajo la gráfica de  $y = 2|x|$

### Propiedad de comparación

Si  $m \leq f(x) \leq M$  para toda  $x$  en  $[a, b]$ , entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a).$$

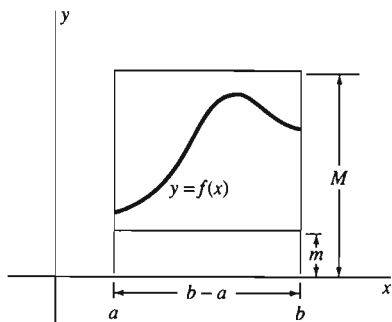


Figura 5.5.6 Plausibilidad de la propiedad de comparación

La plausibilidad de esta propiedad se indica en la figura 5.5.6. Observe que  $m$  y  $M$  no tienen que ser los valores mínimo y máximo de  $f(x)$  en  $[a, b]$ .

**EJEMPLO 8** Si  $2 \leq x \leq 3$ , entonces

$$5 \leq x^2 + 1 \leq 10,$$

de modo que

$$m = \frac{1}{10} \leq \frac{1}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{5} = M.$$

Por tanto, la propiedad de comparación implica

$$\frac{1}{10} \leq \int_2^3 \frac{1}{x^2 + 1} dx \leq \frac{1}{5},$$

como se ilustra en la figura 5.5.7.

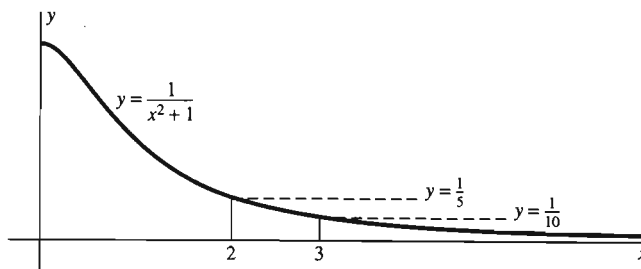


Figura 5.5.7 El área bajo  $y = \frac{1}{x^2 + 1}$  (ejemplo 8)

Las propiedades de las integrales aquí enunciadas se utilizan con frecuencia en el cálculo de las mismas; también lo aplicaremos en la demostración del teorema fundamental del cálculo en la sección 5.6.

## 5.5 Problemas

Aplique el teorema de evaluación para evaluar las integrales de los problemas 1 a 36.

1.  $\int_0^1 (3x^2 + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x}) dx$

2.  $\int_1^3 \frac{6}{x^2} dx$

3.  $\int_0^1 x^3(1+x)^2 dx$

4.  $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^4} dx$

5.  $\int_0^1 (x^4 - x^3) dx$

6.  $\int_1^2 (x^4 - x^3) dx$

7.  $\int_{-1}^0 (x+1)^3 dx$

8.  $\int_1^3 \frac{x^4 + 1}{x^2} dx$

9.  $\int_0^4 \sqrt{x} dx$

10.  $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

11.  $\int_{-1}^2 (3x^2 + 2x + 4) dx$

12.  $\int_0^1 x^{99} dx$

13.  $\int_{-1}^1 x^{99} dx$

15.  $\int_1^3 (x-1)^5 dx$

17.  $\int_{-1}^0 (2x+1)^3 dx$

19.  $\int_1^8 x^{2/3} dx$

21.  $\int_0^1 (x^2 - 3x + 4) dx$

23.  $\int_1^9 \left( \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx$

24.  $\int_2^3 \frac{du}{u^2}$  (Observe la abreviatura de  $\frac{1}{u^2} du$ .)

14.  $\int_0^4 (7x^{5/2} - 5x^{3/2}) dx$

16.  $\int_1^2 (x^2 + 1)^3 dx$

18.  $\int_1^3 \frac{10}{(2x+3)^2} dx$

20.  $\int_1^9 (1 + \sqrt{x})^2 dx$

22.  $\int_0^4 \sqrt{3t} dt$

$$25. \int_1^4 \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x}} dx$$

$$26. \int_1^4 (t^2 - 2)\sqrt{t} dt$$

$$27. \int_4^7 \sqrt{3x + 4} dx$$

$$28. \int_0^{\pi/2} \cos 2x dx$$

$$29. \int_0^{\pi/4} \sin x \cos x dx$$

$$30. \int_0^{\pi} \sin^2 x \cos x dx$$

$$31. \int_0^{\pi} \sin 5x dx$$

$$32. \int_0^2 \cos \pi t dt$$

$$33. \int_0^{\pi/2} \cos 3x dx$$

$$34. \int_0^5 \sin \frac{\pi x}{10} dx$$

$$35. \int_0^2 \cos \frac{\pi x}{4} dx$$

$$36. \int_0^{\pi/8} \sec^2 2t dt$$

En los problemas 37 a 42, evalúe el límite dado reconociendo primero la suma indicada como una suma de Riemann asociada a una partición regular de  $[0, 1]$  y evaluando a continuación la integral correspondiente.

$$37. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left( \frac{2i}{n} - 1 \right) \frac{1}{n}$$

$$38. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^3}$$

$$39. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2}$$

$$40. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}{n^4}$$

$$41. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

$$42. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sin \frac{\pi i}{n}$$

## 5.6 Valores promedio y el teorema fundamental del cálculo

Newton y Leibniz reciben generalmente el crédito por la invención del cálculo a fines del siglo XVII. En realidad, se sabe que anteriormente otras personas habían calculado áreas esencialmente equivalentes a integrales y pendientes de rectas tangentes esencialmente equivalente a derivadas. El gran logro de Newton y Leibniz fue descubrir y aprovechar computacionalmente la relación inversa entre la derivación y la integración. Esta relación se resume en el **teorema fundamental del cálculo**. Una parte de este teorema es el teorema de evaluación de la sección 5.5: Para evaluar

$$\int_a^b f(x) dx,$$

basta determinar una primitiva de  $f$  en  $[a, b]$ . La otra parte del teorema fundamental nos dice que hacer esto es posible por lo general, al menos en teoría: Toda función continua tiene una primitiva.

$$43. \text{ Evalúe la integral } \int_0^5 \sqrt{25 - x^2} dx$$

interpretándola como el área bajo la gráfica de cierta función.

44. Use sucesiones de sumas de Riemann para establecer la propiedad del múltiplo constante.

45. Use sucesiones de sumas de Riemann para establecer la propiedad de la unión de intervalos de la integral. Observe que si  $R_n^1$  y  $R_n^2$  son sumas de Riemann para  $f$  en los intervalos  $[a, c]$  y  $[c, b]$ , respectivamente, entonces  $R_n = R_n^1$  y  $R_n^2$  es una suma de Riemann para  $f$  en  $[a, b]$ .

46. Utilice sumas de Riemann para establecer la propiedad de comparación para integrales. Muestre primero que si  $m \leq f(x) \leq M$  para toda  $x$  en  $[a, b]$ , entonces  $m(b-a) \leq R \leq M(b-a)$  para toda suma de Riemann  $R$  de  $f$  en  $[a, b]$ .

47. Suponga que un tanque contiene inicialmente 1000 galones de agua y que la razón de cambio de su volumen después de vaciar el tanque durante  $t$  minutos es  $V'(t) = (0.8)t - 40$  (en galones/minuto). ¿Cuánta agua contiene el tanque después de vaciarse durante media hora?

48. Suponga que la población de Juneau en 1970 era 125 (en miles) y que su tasa de crecimiento  $t$  años después era  $P'(t) = 8 + (0.5)t + (0.03)t^2$  (en miles por año). ¿Cuál era su población en 1990?

49. Determine una cota inferior y superior para

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

utilizando la propiedad de comparación y una subdivisión de  $[1, 2]$  en cinco subintervalos de igual longitud.

50. Determine una cota inferior y superior para

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

utilizando la propiedad de comparación y una subdivisión de  $[0, 1]$  en cinco subintervalos de igual longitud.

## EL VALOR PROMEDIO DE UNA FUNCIÓN

El concepto del *valor promedio* de una función es útil para la demostración del teorema fundamental y tiene numerosas aplicaciones importantes por derecho propio. El **promedio** ordinario (aritmético) de  $n$  números  $a_1, a_2, \dots, a_n$  se define como

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i. \quad (1)$$

Pero una función  $f$  definida en un intervalo, generalmente tiene “una infinidad” de valores  $f(x)$ , por lo que no podemos simplemente dividir la suma de todos estos valores entre su número para determinar el valor promedio de  $f(x)$ . Presentaremos el concepto adecuado por medio de un análisis de las temperaturas promedio.

**EJEMPLO 1** Sea  $T$  la temperatura medida durante un día particular (24 horas) en cierto lugar, dada por la función

$$T = f(t), \quad 0 \leq t \leq 24$$

(donde el reloj de 24 horas recorre de  $t=0$  a medianoche hasta  $t=24$  a la siguiente medianoche). Así, las temperaturas  $f(1), f(2), \dots, f(24)$  se registran a intervalos de 1 hora durante el día. Podríamos definir la temperatura promedio  $\bar{T}$  para el día como el promedio (aritmético ordinario) de las temperaturas en cada hora:

$$\bar{T} = \frac{1}{24} \sum_{i=1}^{24} f(i) = \frac{1}{24} \sum_{i=1}^{24} f(t_i),$$

donde  $t_i = i$ . Si separamos el día en  $n$  subintervalos iguales en vez de 24 intervalos de 1 hora, obtendríamos un promedio más general

$$\bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(t_i).$$

Si  $n$  es cada vez más grande, esperamos que  $\bar{T}$  se acerque al “verdadero” promedio de las temperaturas de todo el día. Por ello, es plausible definir la temperatura promedio verdadera permitiendo que  $n$  aumente sin límite. Esto implica

$$\bar{T} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(t_i).$$

El lado derecho se parece a una suma de Riemann; hacemos de esto una suma de Riemann mediante el factor

$$\Delta t = \frac{b-a}{n},$$

donde  $a=0$  y  $b=24$ . Entonces

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{b-a} \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \frac{b-a}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{1}{b-a} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta t = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt. \end{aligned}$$

Así,

$$\bar{T} = \frac{1}{24} \int_0^{24} f(t) dt \quad (2)$$

bajo la hipótesis de que  $f$  es continua, de modo que las sumas de Riemann convergen a la integral cuando  $n \rightarrow \infty$ .

El resultado final de la ecuación (2) es la *integral de la función dividida entre la longitud del intervalo*. El ejemplo 1 motiva la siguiente definición.

**Definición Valor promedio de una función**

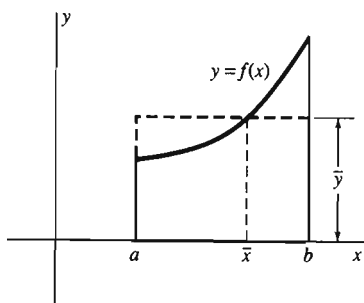
Suponga que la función  $f$  es integrable en  $[a, b]$ . Entonces el **valor promedio**  $\bar{y}$  de  $y = f(x)$  en  $[a, b]$  es

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (3)$$

Podemos reescribir la ecuación (3) como

$$\int_a^b f(x) dx = \bar{y} \cdot (b - a). \quad (4)$$

Si  $f$  es positiva en  $[a, b]$ , entonces la ecuación (4) implica que el área bajo la curva  $y = f(x)$  en  $[a, b]$  es igual al área de un rectángulo de base  $b - a$  y altura  $\bar{y}$  (figura 5.6.1).



**Figura 5.6.1** Rectángulo que ilustra el valor promedio de una función

**EJEMPLO 2** El valor promedio de  $f(x) = x^2$  en  $[0, 2]$  es

$$\bar{y} = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$

**EJEMPLO 3** La temperatura diaria promedio en grados Fahrenheit en Athens, Georgia,  $t$  meses después del 15 de julio es aproximada por

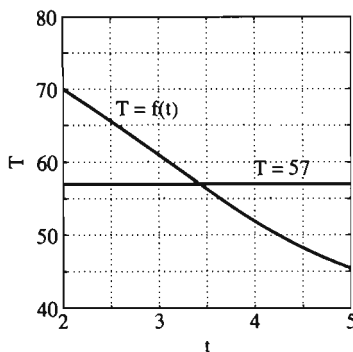
$$T = 61 + 18 \cos \frac{\pi t}{6} = f(t). \quad (5)$$

Determine la temperatura promedio entre el 15 de septiembre ( $t = 2$ ) y el 15 de diciembre ( $t = 5$ ).

**Solución** La ecuación (3) da

$$\bar{T} = \frac{1}{5-2} \int_2^5 \left( 61 + 18 \cos \frac{\pi t}{6} \right) dt = \frac{1}{3} \left[ 61t + \frac{6 \cdot 18}{\pi} \sin \frac{\pi t}{6} \right]_2^5 \approx 57^\circ\text{F}.$$

La figura 5.6.2 muestra las gráficas de  $T = f(t)$  y  $T = 57$ . ¿Puede ver que la ecuación (4) implica que las dos regiones casi triangulares de la figura tienen áreas iguales?



**Figura 5.6.2** La función temperatura  $T = f(t)$  del ejemplo 3

El teorema 1 dice que toda función continua en un intervalo cerrado *alcanza* su valor promedio en algún punto del intervalo.

### Teorema 1 Teorema del valor promedio

Si  $f$  es continua en  $[a, b]$ , entonces

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (6)$$

para algún número  $\bar{x}$  en  $[a, b]$ .

**Demostración** Sean  $m = f(c)$  el valor mínimo y  $M = f(d)$  el valor máximo de  $f(x)$  en  $[a, b]$ . Entonces, por la propiedad de comparación de la sección 5.5,

$$m = f(c) \leq \bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq f(d) = M.$$

Como  $f$  es continua, podemos aplicar ahora la propiedad del valor intermedio. El número  $\bar{y}$  está entre los dos valores  $m$  y  $M$  de  $f$ , y en consecuencia,  $\bar{y}$  misma debe ser un valor de  $f$ . Específicamente,  $\bar{y} = f(\bar{x})$  para algún número  $\bar{x}$  entre  $a$  y  $b$ . Esto produce la ecuación (6).  $\square$

**EJEMPLO 4** Si  $v(t)$  denota la función velocidad de un automóvil de carreras que acelera durante el intervalo de tiempo  $a \leq t \leq b$ , entonces la velocidad promedio del automóvil está dada por

$$\bar{v} = \frac{1}{b-a} \int_a^b v(t) dt.$$

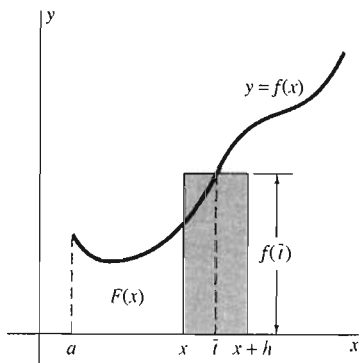
El teorema del valor promedio implica que  $\bar{v} = v(\bar{t})$  para algún número  $\bar{t}$  en  $[a, b]$ . Así  $\bar{t}$  es un instante en que la velocidad instantánea del automóvil es igual a su velocidad promedio en todo el intervalo de tiempo.

## EL TEOREMA FUNDAMENTAL

Establecemos el teorema fundamental del cálculo en dos partes. La primera parte establece que toda función  $f$  continua en un intervalo  $I$  tiene una primitiva en  $I$ . En particular, podemos obtener una primitiva de  $f$  al integrar  $f$  en cierta forma. Intuitivamente, en el caso  $f(x) > 0$ , denotamos con  $F(x)$  al área bajo la gráfica de  $f$  de un punto fijo  $a$  de  $I$  a  $x$ , un punto de  $I$  tal que  $x > a$ . Demostraremos que  $F'(x) = f(x)$ . Mostramos la construcción de la función  $F$  en la figura 5.6.3. Más precisamente, definiremos la función  $F$  como sigue:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

donde utilizamos la variable muda  $t$  en el integrando para evitar una confusión con el límite superior  $x$ . La demostración de que  $F'(x) = f(x)$  será independiente de la hipótesis  $x > a$ .



**Figura 5.6.3** La función área  $F$  es una primitiva de  $f$

### El teorema fundamental del cálculo

Supongamos que la función  $f$  es continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$ .

**Parte 1** Si la función  $F$  está definida en  $[a, b]$  como

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad (7)$$

entonces  $F$  es una primitiva de  $f$ . Es decir,  $F'(x) = f(x)$  para  $x$  en  $(a, b)$ .

**Parte 2** Si  $G$  es cualquier primitiva de  $f$  en  $[a, b]$ , entonces

$$\int_a^b f(x) dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a). \quad (8)$$

**Demostración de la parte 1** Por la definición de la derivada,

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right).$$

Pero

$$\int_a^{x+h} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt$$

por la propiedad de la unión de intervalos de la sección 5.5. Así

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

El teorema del valor promedio nos dice que

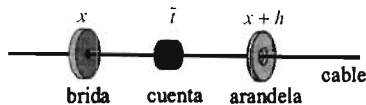
$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(\bar{t})$$

para algún número  $\bar{t}$  en  $[x, x+h]$ . Por último, observamos que  $\bar{t} \rightarrow x$  cuando  $h \rightarrow 0$ . Así, como  $f$  es continua, vemos que

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0} f(\bar{t}) = \lim_{\bar{t} \rightarrow x} f(\bar{t}) = f(x).$$

Por tanto la función  $F$  de la ecuación (7) es, en realidad, una primitiva de  $f$ .  $\square$

**OBSERVACIÓN** La figura 5.6.4 indica por qué  $\bar{t}$  debe tender a  $x$  cuando  $h \rightarrow 0$ . Cuando la arandela móvil en  $x+h$  tiende a la brida fija en  $x$ , la cuenta  $\bar{t}$  entre ellos no puede escapar.



**Figura 5.6.4** La cuenta en  $\bar{t}$  atrapada entre la arandela en  $x+h$  y la brida en  $x$

**Demostración de la parte 2** Aquí aplicamos la parte 1 para proporcionar una demostración del teorema de evaluación en la sección 5.5. Si  $G$  es *cualquier* primitiva de  $f$ , entonces (como ésta y la función  $F$  de la parte 1 son ambas primitivas de  $f$  en el intervalo  $[a, b]$ ) sabemos que

$$G(x) = F(x) + C$$

en  $[a, b]$  para cierta constante  $C$ . Para evaluar  $C$ , sustituimos  $x = a$  y obtenemos

$$C = G(a) - F(a) = G(a),$$

pues

$$F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0.$$

Por tanto,  $G(x) = F(x) + G(a)$ . En otras palabras

$$F(x) = G(x) - G(a)$$

para toda  $x$  en  $[a, b]$ . Con  $x = b$  obtenemos

$$G(b) - G(a) = F(b) = \int_a^b f(x) dx,$$

lo que establece la ecuación (8).  $\square$

A veces, el teorema fundamental del cálculo se interpreta diciendo que la derivación y la integración son *procesos inversos*. La parte 1 se puede escribir en la forma

$$\frac{d}{dx} \left( \int_a^x f(t) dt \right) = f(x) \quad (9)$$

si  $f$  es continua en un intervalo abierto que contiene a  $a$  y a  $x$ . Es decir, si primero integramos la función  $f$  (con el límite superior de integración  $x$  variable) y después derivamos con respecto de  $x$ , el resultado es de nuevo la función  $f$ . Así, la derivación “cancela” el efecto de integración de las funciones continuas.

Además, la parte 2 del teorema fundamental se puede escribir como

$$\int_a^x G'(t) dt = G(x) - G(a) \quad (10)$$

si suponemos que  $G'$  es continua. En ese caso, esta ecuación significa que si primero derivamos la función  $G$  y después integramos el resultado de  $a$  a  $x$ , el resultado puede diferir de la función original  $G$ , en el peor de los casos en la constante  $G(a)$ . Si elegimos  $a$  de modo que  $G(a) = 0$ , esto significa que la integración “cancela” el efecto de la derivación.

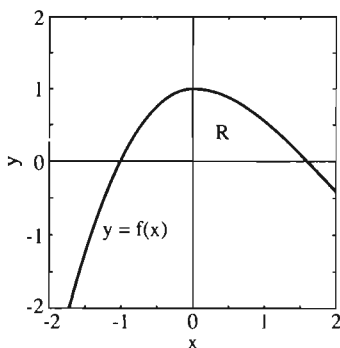
## APLICACIONES COMPUTACIONALES

Los ejemplos 1 a 4 de la sección 5.5 ilustran el uso de la parte 2 del teorema fundamental para evaluar integrales. Proporcionaremos más ejemplos en los problemas al final de la sección, en esta sección y en la sección 5.7. El ejemplo 5 ilustra la necesidad de separar una integral, como una suma de integrales, cuando su integrando tiene primitivas diferentes en intervalos diferentes.

**EJEMPLO 5** La figura 5.6.5 muestra la gráfica de la función  $f$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \geq 0, \\ 1 - x^2 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Determinaremos el área  $A$  de la región  $R$  acotada por arriba por la gráfica de  $y = f(x)$  y por debajo por el eje  $x$ .



**Figura 5.6.5** La región del ejemplo 5



**Solución** Las intersecciones con el eje  $x$  que aparecen en la figura son  $x = -1$  (donde  $1 - x^2 = 0$  y  $x < 0$ ) y  $x = \pi/2$  (donde  $\cos x = 0$  y  $x > 0$ ). Por tanto,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{\pi/2} f(x) dx = \int_{-1}^0 (1 - x^2) dx + \int_0^{\pi/2} \cos x dx \\ &= \left[ x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 + \left[ \operatorname{sen} x \right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

**EJEMPLO 6** La figura 5.6.6 muestra la gráfica de

$$f(x) = x^3 - x^2 - 6x.$$

determinaremos el área  $A$  de la región  $R$  acotada por la gráfica de  $y = f(x)$  y por el eje  $x$ .

**Solución** La región  $R$  consta de las dos regiones  $R_1$  y  $R_2$  y se extiende de  $x = -2$  a  $x = 3$ . El área de  $R_1$  es

$$A_1 = \int_{-2}^0 (x^3 - x^2 - 6x) dx = \left[ \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 \right]_{-2}^0 = \frac{16}{3}.$$

Pero en el intervalo  $(0, 3)$ , la función  $f(x)$  es negativa, de modo que para obtener el área (positiva)  $A_2$  de  $R_2$ , debemos integrar el *negativo* de  $f$ :

$$A_2 = \int_0^3 (-x^3 + x^2 + 6x) dx = \left[ -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^3 = \frac{63}{4}.$$

En consecuencia, el área de la región completa  $R$  es

$$A = A_1 + A_2 = \frac{16}{3} + \frac{63}{4} = \frac{253}{12} \approx 21.08.$$

En realidad, hemos integrado el *valor absoluto* de  $f(x)$ :

$$A = \int_{-2}^3 |f(x)| dx = \int_{-2}^0 (x^3 - x^2 - 6x) dx + \int_0^3 (-x^3 + x^2 + 6x) dx = \frac{253}{12}.$$

Compare la gráfica de  $y = |f(x)|$  en la figura 5.6.7 con la de  $y = f(x)$  en la figura 5.6.6.

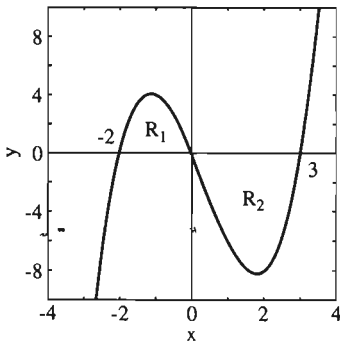
**EJEMPLO 7** Evalúe

$$\int_{-1}^2 |x^3 - x| dx.$$

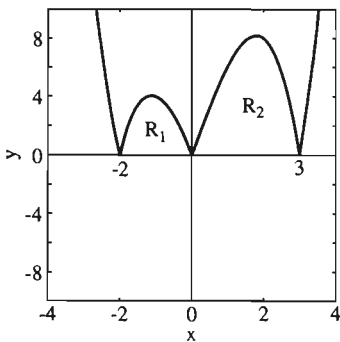
**Solución** Observamos que  $x^3 - x \geq 0$  en  $[-1, 0]$ , que  $x^3 - x \leq 0$  en  $[0, 1]$  y que  $x^3 - x \geq 0$  en  $[1, 2]$ . Así, escribimos

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 |x^3 - x| dx &= \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (x - x^3) dx + \int_1^2 (x^3 - x) dx \\ &= \left[ \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^0 + \left[ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 + \left[ \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \left[ 2 - \left(-\frac{1}{4}\right) \right] = \frac{11}{4} = 2.75. \end{aligned}$$

La parte 1 del teorema fundamental del cálculo dice que la derivada de una integral con respecto de su límite superior es igual al valor del integrando en el límite superior. Por ejemplo, si



**Figura 5.6.6** La gráfica  $y = x^3 - x^2 - 6x$  del ejemplo 6



**Figura 5.6.7** La gráfica  $y = |x^3 - x^2 - 6x|$  del ejemplo 6

$$y(x) = \int_0^x t^3 \operatorname{sen} t \, dt,$$

entonces

$$\frac{dy}{dx} = x^3 \operatorname{sen} x.$$

El ejemplo 8 es un poco más complicado, por el hecho de que el límite superior de la integral es una función no trivial de la variable independiente.

**EJEMPLO 8** Determine  $h'(x)$  dado que

$$h(x) = \int_0^{x^2} t^3 \operatorname{sen} t \, dt.$$

**Solución** Sean  $y = h(x)$  y  $u = x^2$ . Entonces

$$y = \int_0^u t^3 \operatorname{sen} t \, dt,$$

de modo que

$$\frac{dy}{du} = u^3 \operatorname{sen} u$$

por el teorema fundamental del cálculo. Entonces, con la regla de la cadena se obtiene

$$h'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (u^3 \operatorname{sen} u)(2x) = 2x^7 \operatorname{sen} x^2.$$

## PROBLEMAS CON CONDICIONES INICIALES

Observe que si

$$y(x) = \int_a^x f(t) \, dt, \quad (11)$$

entonces  $y(a) = 0$ . Por tanto,  $y(x)$  es una solución del problema con condición inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad y(a) = 0. \quad (12)$$

Para obtener una solución al problema con condición inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad y(a) = b, \quad (13)$$

sólo necesitamos sumar la condición inicial dada:

$$y(x) = b + \int_a^x f(t) \, dt. \quad (14)$$

**EJEMPLO 9** Exprese como una integral la solución al problema con condición inicial

$$\frac{dy}{dx} = \sec x, \quad y(2) = 3. \quad (15)$$

**Solución** Con  $a = 2$  y  $b = 3$ , la ecuación (14) implica

$$y(x) = 3 + \int_2^x \sec t \, dt. \quad (16)$$

Con nuestro conocimiento actual, no podemos calcular la primitiva  $\sec t$ , pero para un valor particular de  $x$ , podemos aproximar la integral de la ecuación (16) mediante sumas de Riemann. Por ejemplo, con  $x = 4$  y una calculadora con una tecla **INTEGRATE** obtenemos

$$\int_2^4 \sec t \, dt \approx -2.5121.$$

Por tanto, el valor de la solución en la ecuación (16) en  $x = 4$  es

$$y(4) \approx 3 - 2.5121 = 0.4879.$$

## 5.6 Problemas

En los problemas 1 a 12, determine el valor promedio de la función dada en el intervalo especificado.

1.  $f(x) = x^4$ ;  $[0, 2]$
2.  $g(x) = \sqrt{x}$ ;  $[1, 4]$
3.  $h(x) = 3x^2\sqrt{x^3 + 1}$ ;  $[0, 2]$
4.  $f(x) = 8x$ ;  $[0, 4]$
5.  $g(x) = 8x$ ;  $[-4, 4]$
6.  $h(x) = x^2$ ;  $[-4, 4]$
7.  $f(x) = x^3$ ;  $[0, 5]$
8.  $g(x) = x^{-1/2}$ ;  $[1, 4]$
9.  $f(x) = \sqrt{x+1}$ ;  $[0, 3]$
10.  $g(x) = \sin 2x$ ;  $[0, \pi/2]$
11.  $f(x) = \sin 2x$ ;  $[0, \pi]$
12.  $g(t) = \cos 2\pi t$ ;  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

Evalúe las integrales en los problemas 13 a 28.

13.  $\int_{-1}^3 dx$  (En este caso,  $dx$  representa 1  $dx$ .)
14.  $\int_1^2 (y^5 - 1) dy$
15.  $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{9x^3}}$
16.  $\int_{-1}^1 (x^3 + 2)^2 dx$
17.  $\int_1^3 \frac{3t - 5}{t^4} dt$
18.  $\int_{-2}^{-1} \frac{x^2 - x + 3}{\sqrt[3]{x}} dx$
19.  $\int_0^{\pi} \sin x \cos x dx$
20.  $\int_{-1}^2 |x| dx$
21.  $\int_1^2 \left(t - \frac{1}{2t}\right)^2 dt$
22.  $\int_{-1}^1 \frac{x^2 - 4}{x + 2} dx$
23.  $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos x^2 dx$
24.  $\int_0^2 |x - \sqrt{x}| dx$
25.  $\int_{-2}^2 |x^2 - 1| dx$
26.  $\int_0^{\pi/3} \sin 3x dx$
27.  $\int_2^7 \sqrt{x+2} dx$

$$28. \int_5^{10} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

En los problemas 29 a 32, la gráfica de  $f$  y el eje  $x$  separan al plano  $xy$  en varias regiones, algunas de las cuales están acotadas. Determine el área total de las regiones acotadas en cada problema.

29.  $f(x) = 1 - x^4$  si  $x \leq 0$ ;  $f(x) = 1 - x^3$  si  $x \geq 0$  (Fig. 5.6.8)

30.  $f(x) = (\pi/2)^2 \sin x$  en  $[0, \pi/2]$ ;  $f(x) = x(\pi - x)$  en  $[\pi/2, \pi]$  (Fig. 5.6.9)

31.  $f(x) = x^3 - 9x$  (Fig. 5.6.10)

32.  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 15x$  (Fig. 5.6.11)

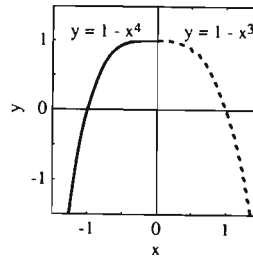


Figura 5.6.8 Problema 29

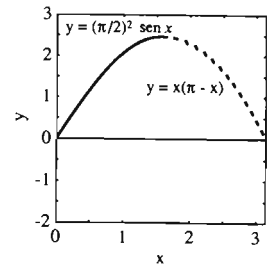


Figura 5.6.9 Problema 30

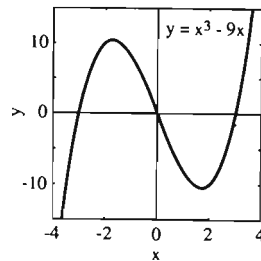


Figura 5.6.10 Problema 31

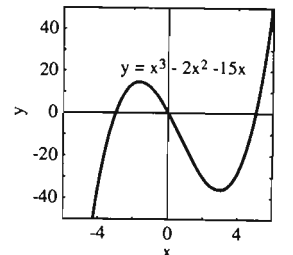


Figura 5.6.11 Problema 32

33. Roxana arroja una pelota desde una altura de 400 pies. Determine la altura promedio y la velocidad promedio de la pelota entre el instante en que se arroja y el instante en que golpea el suelo.

34. Determine el valor promedio de la población animal  $P(t) = 100 + 10t + (0.02)t^2$  en el intervalo de tiempo  $[0, 10]$ .

35. Suponga que un tanque de agua de 5000 litros tarda 10 minutos en vaciarse y que después de  $t$  minutos, la cantidad de agua que queda en el tanque es  $V(t) = 50(10 - t)^2$  litros. ¿Cuál es la cantidad promedio de agua en el tanque durante el tiempo en que se vacía?

36. Cierta día, la temperatura  $t$  horas después de la medianoche era

$$T(t) = 80 + 10 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}(t - 10)\right).$$

¿Cuál era la temperatura promedio entre el mediodía y las 6 de la tarde?

37. Suponga que una varilla caliente está a lo largo del intervalo  $0 \leq x \leq 10$ . Si la temperatura en los puntos de la varilla está dada por  $T(x) = 4x(10 - x)$ , ¿cuál es la temperatura promedio de la varilla?

38. La figura 5.6.12 muestra una sección transversal a una distancia  $x$  del centro de una esfera de radio 1. Determine el área promedio de esta sección transversal para  $0 \leq x \leq 1$ .

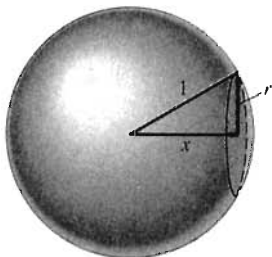


Figura 5.6.12 La esfera del problema 38

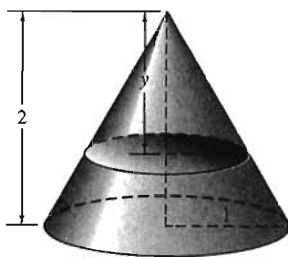


Figura 5.6.13 El cono del problema 39

39. La figura 5.6.13 muestra una sección transversal a una distancia  $y$  del vértice de un cono con radio de la base 1 y altura 2. Determine al área promedio de esta sección transversal para  $0 \leq y \leq 2$ .

40. Un automóvil de carreras parte del reposo ( $x = 0, t = 0$ ) y experimenta una aceleración constante  $x''(t) = a$  durante  $T$  segundos. Determine, en términos de  $a$  y  $T$ , (a) su velocidad

final y su velocidad promedio y (b) su posición final y su posición promedio.

En los problemas 41 a 45, aplique el teorema fundamental del cálculo para determinar la derivada de la función dada.

41.  $f(x) = \int_{-1}^x (t^2 + 1)^{17} dt$

42.  $g(t) = \int_0^t \sqrt{x^2 + 25} dx$

43.  $h(z) = \int_2^z \sqrt[3]{u-1} du$

44.  $A(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$

45.  $f(x) = \int_x^{10} \left(t + \frac{1}{t}\right) dt$

En los problemas 46 a 49,  $G(x)$  es la integral de la función dada  $f(t)$  en el intervalo específico de la forma  $[a, x]$ ,  $x > a$ . Aplique la parte 1 del teorema fundamental del cálculo para determinar  $G'(x)$ .

46.  $f(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$ ;  $[2, x]$

47.  $f(t) = \sqrt{t + 4}$ ;  $[0, x]$

48.  $f(t) = \operatorname{sen}^3 t$ ;  $[0, x]$

49.  $f(t) = \sqrt{t^3 + 1}$ ;  $[1, x]$

En los problemas 50 a 56, derive la función, escribiendo primero  $f(x)$  en la forma  $g(u)$ , donde  $u$  denota el límite superior de integración.

50.  $f(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{1 + t^3} dt$

51.  $f(x) = \int_2^{3x} \operatorname{sen} t^2 dt$

52.  $f(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \sqrt{1 - t^2} dt$

53.  $f(x) = \int_0^{x^2} \operatorname{sen} t dt$

54.  $f(x) = \int_1^{\operatorname{sen} x} (t^2 + 1)^3 dt$

55.  $f(x) = \int_1^{x^2+1} \frac{dt}{t}$

56.  $f(x) = \int_1^{x^5} \sqrt{1 + t^2} dt$

Use integrales (como en el ejemplo 9) para resolver los problemas con condiciones iniciales 57 a 60.

57.  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}, \quad y(1) = 0$

58.  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}, \quad y(1) = \frac{\pi}{4}$

$$59. \frac{dy}{dx} = \sqrt{1+x^2}, \quad y(5) = 10$$

$$60. \frac{dy}{dx} = \tan x, \quad y(1) = 2$$

61. El teorema fundamental del cálculo parece decir que

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \left[ -\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -2,$$

en aparente contradicción con el hecho de que  $1/x^2$  siempre es positiva. ¿Qué es lo incorrecto?

62. Demuestre que la razón de cambio promedio

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

de la función derivable  $f$  en  $[a, b]$  es igual al valor promedio de su derivada en  $[a, b]$ .

## 5.7

### Integración por sustitución

El teorema fundamental del cálculo en la forma

$$\int_a^b f(x) dx = \left[ \int f(x) dx \right]_a^b \quad (1)$$

implica que podemos evaluar fácilmente la integral definida de la izquierda si podemos determinar la integral indefinida (es decir, la primitiva) de la derecha. Analizaremos ahora un método poderoso para calcular la primitiva que equivale a “la regla de la cadena en orden inverso”. Este método es una generalización de la “regla de la potencia generalizada en orden inverso”,

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1), \quad (2)$$

que presentamos en la sección 5.2.

La ecuación (2) es una abreviatura para la fórmula

$$\int [g(x)]^n g'(x) dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C \quad (3)$$

que resulta de escribir

$$u = g(x), \quad du = g'(x) dx.$$

Así, para aplicar la ecuación (2) a una integral dada, debemos ver al integrando como el *producto* de una potencia de una función diferenciable  $g(x)$  y su derivada  $g'(x)$ .

**EJEMPLO 1** Con

$$u = 2x + 1, \quad du = 2 dx,$$

vemos que

$$\int (2x + 1)^5 \cdot 2 dx = \int u^5 du = \frac{u^6}{6} + C = \frac{1}{6}(2x + 1)^6 + C.$$

**EJEMPLO 2**

$$\begin{aligned} \int 2x \sqrt{1+x^2} dx &= \int (1+x^2)^{1/2} \cdot 2x dx \\ &= \int u^{1/2} du \quad [u = 1+x^2, du = 2x dx] \\ &= \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} + C. \end{aligned}$$

La ecuación (3) es el caso particular  $f(u) = u'$  de la fórmula integral general

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du. \quad (4)$$

El lado derecho de la ecuación (4) resulta de hacer la sustitución formal

$$u = g(x), \quad du = g'(x) dx$$

en el lado izquierdo.

Algo bello de la notación diferencial es que la ecuación (4) no solamente es plausible, sino que de hecho es verdadera, en el entendido de que  $u$  se reemplaza por  $g(x)$  después de realizar la integración indefinida del lado derecho de la ecuación (4). En realidad, la ecuación (4) es solamente una versión de la integral indefinida de la regla de la cadena, ya que si  $F'(x) = f(x)$ , entonces

$$D_x F(g(x)) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

por la regla de la cadena, de modo que

$$\begin{aligned} \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx &= \int F'(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C \\ &= F(u) + C \quad [u = g(x)] \\ &= \int f(u) du. \end{aligned}$$

La ecuación (4) es la base de la poderosa técnica de la **integración** (indefinida) **por sustitución**. Se puede usar cuando la función integrando se reconozca como de la forma  $f'(g(x)) \cdot g'(x)$ .

**EJEMPLO 3** Determine

$$\int x^2 \sqrt{x^3 + 9} dx.$$

**Solución** Observe que  $x^2$  es, salvo un factor *constante*, la derivada de  $x^3 + 9$ . Por tanto, podemos sustituir

$$u = x^3 + 9, \quad du = 3x^2 dx. \quad (5)$$

Podemos proporcionar el factor constante 3 si compensamos multiplicando la integral por  $\frac{1}{3}$ , con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{x^3 + 9} dx &= \frac{1}{3} \int (x^3 + 9)^{1/2} \cdot 3x^2 dx = \frac{1}{3} \int u^{1/2} du \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9} u^{3/2} + C = \frac{2}{9} (x^3 + 9)^{3/2} + C. \end{aligned}$$

Una forma alternativa de llevar a cabo la sustitución en (5) es resolver

$$du = 3x^2 dx \quad \text{para} \quad x^2 dx = \frac{1}{3} du,$$

y entonces escribimos

$$\int (x^3 + 9)^{1/2} dx = \int u^{1/2} \cdot \frac{1}{3} du = \frac{1}{3} \int u^{1/2} du,$$

concluyendo el cálculo como antes.

Los siguientes tres pasos en la solución del ejemplo 3 son dignos de mención especial:

- La diferencial  $dx$ , junto con el resto del integrando, se “transforma” o reemplaza, en términos de  $u$  y  $du$ .
- Una vez realizada la integración, se añade la constante  $C$  de integración.
- Es necesaria una sustitución final para escribir la respuesta en términos de la variable original  $x$ .

## SUSTITUCIÓN EN INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

Por ahora sabemos que toda fórmula de derivación produce, al “invertir”, una fórmula de antiderivación. Las fórmulas familiares para las derivadas de las seis funciones trigonométricas proporcionan las siguientes fórmulas de integrales indefinidas:

$$\int \cos u \, du = \operatorname{sen} u + C \quad (6)$$

$$\int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + C \quad (7)$$

$$\int \sec^2 u \, du = \tan u + C \quad (8)$$

$$\int \csc^2 u \, du = -\cot u + C \quad (9)$$

$$\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C \quad (10)$$

$$\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C \quad (11)$$

Cualquiera de estas integrales puede aparecer como la integral  $\int f(u) \, du$  que resulta de una *sustitución de  $u$*  apropiada en una integral dada.

### EJEMPLO 4

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}(3x + 4) \, dx &= \int (\operatorname{sen} u) \cdot \frac{1}{3} \, du \quad (u = 3x + 4, \, du = 3 \, dx) \\ &= \frac{1}{3} \int \operatorname{sen} u \, du = -\frac{1}{3} \cos u \, du + C \\ &= -\frac{1}{3} \cos(3x + 4) + C. \end{aligned}$$

### EJEMPLO 5

$$\int 3x \cos(x^2) \, dx = 3 \int (\cos x^2) \cdot x \, dx$$

$$\begin{aligned}
&= 3 \int (\cos u) \cdot \frac{1}{2} du \quad (u = x^2, du = 2x dx) \\
&= \frac{3}{2} \int \cos u du = \frac{3}{2} \operatorname{sen} u + C = \frac{3}{2} \operatorname{sen}(x^2) + C.
\end{aligned}$$

### EJEMPLO 6

$$\begin{aligned}
\int \sec^2 3x dx &= \int (\sec^2 u) \cdot \frac{1}{3} du \quad (u = 3x, du = 3 dx) \\
&= \frac{1}{3} \tan u + C = \frac{1}{3} \tan 3x + C.
\end{aligned}$$

### EJEMPLO 7 Evalúe

$$\int 2 \operatorname{sen}^3 x \cos x dx.$$

**Solución** Ninguna de las integrales de las ecuaciones (6) a (11) parece “adecuada”, pero la sustitución

$$u = \operatorname{sen} x, \quad du = \cos x dx$$

produce

$$\int 2 \operatorname{sen}^3 x \cos x dx = 2 \int u^3 \cdot du = 2 \cdot \frac{u^4}{4} + C = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^4 x + C.$$

## SUSTITUCIÓN EN INTEGRALES DEFINIDAS

El método de integración por sustitución se puede usar con integrales definidas al igual que con integrales indefinidas. Sólo se requiere un paso adicional: la evaluación de la primitiva final en los límites originales de integración.

### EJEMPLO 8 La sustitución del ejemplo 3 da

$$\begin{aligned}
\int_0^3 x^2 \sqrt{x^3 + 9} dx &= \int_{*}^{**} u^{1/2} \cdot \frac{1}{3} du \quad (u = x^3 + 9, du = 3x^2 dx) \\
&= \frac{1}{3} \left[ \frac{2}{3} u^{3/2} \right]_{*}^{**} = \frac{2}{9} \left[ (x^3 + 9)^{3/2} \right]_0^3 \quad (\text{volviendo a sustituir}) \\
&= \frac{2}{9} (216 - 27) = 42.
\end{aligned}$$

Dejamos los límites en  $u$  sin especificar (usamos asteriscos) ya que no fueron calculados (no hay necesidad de conocerlos, ya que planeamos volver a sustituir  $u$  en términos de la variable original  $x$  antes de usar los límites originales de integración).

Pero en ciertas ocasiones es más conveniente determinar los límites de integración con respecto de la nueva variable  $u$ . Con la sustitución  $u = x^3 + 9$ , vemos que

- $u = 9$  cuando  $x = 0$  (límite inferior);
- $u = 36$  cuando  $x = 3$  (límite superior).



El uso de estos nuevos límites en  $u$  (en vez de volver a sustituir en términos de  $x$ ) implica

$$\int_0^3 x^2 \sqrt{x^3 + 9} \, dx = \frac{1}{3} \int_9^{36} u^{1/2} \, du = \frac{1}{3} \left[ \frac{2}{3} u^{3/2} \right]_9^{36} = 42.$$

El teorema 1 dice que la forma “natural” de transformar los límites de una integral bajo una sustitución de  $u$ , como arriba, es correcta.

**Teorema 1 Integral definida por sustitución**

Suponga que la función  $g$  tiene una derivada continua en  $[a, b]$  y que  $f$  es continua en el conjunto  $g([a, b])$ . Sea  $u = g(x)$ . Entonces

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \, du. \quad (12)$$

**OBSERVACIÓN** Así, obtenemos los nuevos límites en  $u$  aplicando la función de sustitución  $u = g(x)$  a los límites anteriores de  $x$ :

- El nuevo límite inferior es  $g(a)$  y
- El nuevo límite superior es  $g(b)$ ,

sin importar si  $g(b)$  es mayor que  $g(a)$ .

**Demostración del teorema 1** Elegimos una primitiva  $F$  de  $f$ , de modo que  $F' = f$ . Entonces, por la regla de la cadena,

$$D_x[F(g(x))] = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx &= \left[ F(g(x)) \right]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= \left[ F(u) \right]_{u=g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \, du. \end{aligned}$$

Utilizamos el teorema fundamental para obtener la primera y última desigualdades en este argumento.  $\square$

El hecho de que sea más simple aplicar el teorema 1 y obtener los nuevos límites en  $u$  o volver a sustituir  $u = g(x)$  y utilizar los límites anteriores en  $x$  depende del problema específico. Los ejemplos 9 y 10 ilustran la técnica de transformación a los nuevos límites.

**EJEMPLO 9** Evalúe

$$\int_3^5 \frac{x \, dx}{(30 - x^2)^2}.$$

**Solución** Observe que  $30 - x^2$  no se anula en  $[3, 5]$ , por lo que el integrando es continuo. Sustituimos

$$u = 30 - x^2, \quad du = -2x \, dx,$$

y observamos que

Si  $x = 3$ , entonces  $u = 21$  (límite inferior);

Si  $x = 5$ , entonces  $u = 5$  (límite superior).

Por tanto, con nuestra sustitución obtenemos

$$\int_3^5 \frac{x \, dx}{(30 - x^2)^2} = \int_{21}^5 \frac{-\frac{1}{2} \, du}{u^2} = -\frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{u} \right]_{21}^5 = -\frac{1}{2} \left( -\frac{1}{5} + \frac{1}{21} \right) = \frac{8}{105}.$$

**EJEMPLO 10** Evalúe

$$\int_0^{\pi/4} \text{sen}^3 2t \cos 2t \, dt.$$

**Solución** Sustituimos

$$u = \text{sen } 2t, \text{ de modo que } du = 2 \cos 2t \, dt.$$

Entonces  $u = 0$  cuando  $t = 0$  y  $u = 1$  cuando  $t = \pi/4$ . Por tanto,

$$\int_0^{\pi/4} \text{sen}^3 2t \cos 2t \, dt = \frac{1}{2} \int_0^1 u^3 \, du = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4} u^4 \right]_0^1 = \frac{1}{8}.$$

## 5.7 Problemas

Evalúe las integrales indefinidas de los problemas 1 a 30.

1.  $\int (x + 1)^6 \, dx$

2.  $\int (2 - x)^5 \, dx$

3.  $\int (4 - 3x)^7 \, dx$

4.  $\int \sqrt{2x + 1} \, dx$

5.  $\int \frac{dx}{\sqrt{7x + 5}}$

6.  $\int \frac{dx}{(3 - 5x)^2}$

7.  $\int \text{sen}(\pi x + 1) \, dx$

8.  $\int \cos \frac{\pi t}{3} \, dt$

9.  $\int \sec 2\theta \tan 2\theta \, d\theta$

10.  $\int \csc^2 5x \, dx$

11.  $\int x \sqrt{x^2 - 1} \, dx$

12.  $\int 3t(1 - 2t^2)^{10} \, dt$

13.  $\int x \sqrt{2 - 3x^2} \, dx$

14.  $\int \frac{t \, dt}{\sqrt{2t^2 + 1}}$

15.  $\int x^3 \sqrt{x^4 + 1} \, dx$

16.  $\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt[3]{x^3 + 1}}$

17.  $\int x^2 \cos(2x^3) \, dx$

18.  $\int t \sec^2(t^2) \, dt$

19.  $\int \frac{x^2 \, dx}{(x^3 + 5)^4}$

20.  $\int y^2 \sqrt[3]{2 - 4y^3} \, dy$

21.  $\int \cos^3 x \text{sen } x \, dx$

22.  $\int \text{sen}^5 3z \cos 3z \, dz$

23.  $\int \tan^3 \theta \sec^2 \theta \, d\theta$

24.  $\int \sec^3 \theta \tan \theta \, d\theta$

25.  $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$  [Sugerencia:  $u = \sqrt{x}$ .]

26.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^2}$

27.  $\int (x^2 + 2x + 1)^4 (x + 1) \, dx$

28.  $\int \frac{(x + 2) \, dx}{(x^2 + 4x + 3)^3}$

29.  $\int (2 + t^2) \sqrt[3]{6t + t^3} \, dt$

30.  $\int \frac{2 - x^2}{(x^3 - 6x + 1)^5} \, dx$

Evalúe las integrales definidas de los problemas 31 a 44.

31.  $\int_1^2 \frac{dt}{(t + 1)^3}$

32.  $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x + 1}}$

33.  $\int_0^4 x \sqrt{x^2 + 9} \, dx$

34.  $\int_1^4 \frac{(1 + \sqrt{x})^4}{\sqrt{x}} \, dx$  [Sugerencia:  $u = 1 + \sqrt{x}$ .]

35.  $\int_0^8 t \sqrt{t + 1} \, dt$  [Sugerencia:  $u = t + 1$ .]

36.  $\int_0^{\pi/2} \text{sen } x \cos x \, dx$

37.  $\int_0^{\pi/6} \text{sen } 2x \cos^3 2x \, dx$

38.  $\int_0^{\sqrt{\pi}} t \text{sen} \frac{t^2}{2} \, dt$

39.  $\int_0^{\pi/2} (1 + 3 \operatorname{sen} \theta)^{3/2} \cos \theta \, d\theta$  [Sugerencia:

$u = 1 + 3 \operatorname{sen} \theta.$ ]

40.  $\int_0^{\pi/2} \sec^2 \frac{x}{2} \, dx$

41.  $\int_0^4 x \sqrt{4-x} \, dx$  [Sugerencia:  $u = 4-x.$ ]

42.  $\int_0^{\pi/2} (\cos x) \sqrt{\operatorname{sen} x} \, dx$  [Sugerencia:

$u = \operatorname{sen} x.$ ]

43.  $\int_0^1 t^3 \operatorname{sen} \pi t^4 \, dt$       44.  $\int_{\pi^2/4}^{\pi^2} \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x} \cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

Utilice las identidades de la mitad de un ángulo

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

para evaluar las integrales de los problemas 45 a 48.

45.  $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$

46.  $\int \cos^2 x \, dx$

47.  $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 3t \, dt$

48.  $\int_0^1 \cos^2 \pi t \, dt$

Utilice la identidad  $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$  para evaluar las integrales de los problemas 49 y 50.

49.  $\int \tan^2 x \, dx$

50.  $\int_0^{\pi/12} \tan^2 3t \, dt$

51. Sustituya  $\operatorname{sen}^3 x = (\operatorname{sen} x)(1 - \cos^2 x)$  para mostrar que

$$\int \operatorname{sen}^3 x \, dx = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C.$$

52. Evalúe

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \, dx$$

mediante el método del problema 51.

53. Primero sustituya  $u = \operatorname{sen} \theta$  y después  $u = \cos \theta$  para obtener

$$\int \operatorname{sen} \theta \cos \theta \, d\theta = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \theta + C_1 = -\frac{1}{2} \cos^2 \theta + C_2.$$

Concilie estos resultados. ¿Cuál es la relación entre las constantes  $C_1$  y  $C_2$ ?

54. Primero sustituya  $u = \tan \theta$  y después  $u = \sec \theta$  para obtener

$$\int \sec^2 \theta \tan \theta \, d\theta = \frac{1}{2} \tan^2 \theta + C_1 = \frac{1}{2} \sec^2 \theta + C_2.$$

Concilie estos resultados. ¿Cuál es la relación entre las constantes  $C_1$  y  $C_2$ ?

55. (a) Verifique mediante una derivación que

$$\int \frac{dx}{(1-x)^2} = \frac{x}{1-x} + C_1.$$

(b) Sustituya  $u = 1-x$  para mostrar que

$$\int \frac{dx}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} + C_2.$$

(c) Concilie los resultados de las partes (a) y (b).

56. (a) Sustituya  $u = x^2$  y aplique la parte (a) del problema 55 para mostrar que

$$\int \frac{x \, dx}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2}{2(1-x^2)} + C_1.$$

(b) Sustituya  $u = 1-x^2$  para mostrar que

$$\int \frac{x \, dx}{(1-x^2)^2} = \frac{1}{2(1-x^2)} + C_2.$$

(c) Concilie los resultados de las partes (a) y (b).

Los problemas 57 a 60 tratan las funciones pares e impares. Una función **par**  $f$  es una función tal que

$$f(-x) = f(x)$$

para toda  $x$ . Esto significa que la gráfica de  $y = f(x)$  es simétrica bajo la reflexión con respecto del eje  $y$  (figura 5.7.1). Algunos ejemplos de funciones pares son  $f(x) = \cos x$ ,  $1$ ,  $x^2$ ,  $x^4$  y  $x^6$ . Una función **impar**  $f$  es una función tal que

$$f(-x) = -f(x)$$

para toda  $x$ . Esto significa que la gráfica de  $y = f(x)$  es simétrica bajo las reflexiones primero con respecto del eje  $y$  y después con respecto del eje  $x$  (figura 5.7.2). Algunos ejemplos de funciones impares son  $f(x) = \operatorname{sen} x$ ,  $x$ ,  $x^3$  y  $x^5$ . Piense las reflexiones indicadas con la función coseno (par; figura 5.7.3) y la función seno (impar; figura 5.7.4).

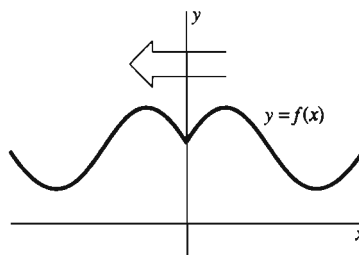
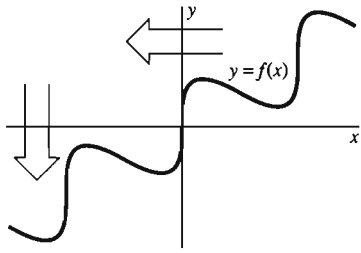
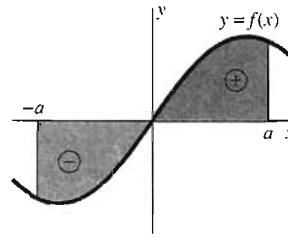


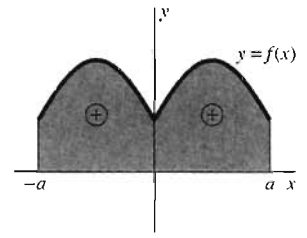
Figura 5.7.1 La gráfica de la función par  $y = f(x)$  es invariante bajo la reflexión con respecto del eje  $y$



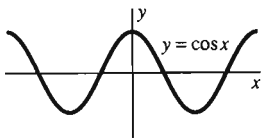
**Figura 5.7.2** La gráfica de la función impar  $y = f(x)$  es invariante bajo reflexiones sucesivas con respecto de ambos ejes



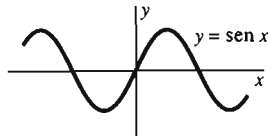
**Figura 5.7.5**  $f$  impar: las áreas se cancelan (problema 57)



**Figura 5.7.6**  $f$  par: las áreas se suman (problema 58)



**Figura 5.7.3** La función coseno es par



**Figura 5.7.4** La función seno es impar

57. Observe la figura 5.7.5. Si la función continua  $f$  es impar, sustituya  $u = -x$  en la integral

$$\int_{-a}^0 f(x) dx \text{ para mostrar que } \int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

58. Observe la figura 5.7.6. Si la función continua  $f$  es par, utilice el método del problema 57 para mostrar que

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

59. Explique sin demasiados cálculos por qué es evidente que

$$\int_{-1}^1 \left[ \tan x + \frac{\sqrt[3]{x}}{(1+x^2)^7} - x^{17} \cos x \right] dx = 0.$$

60. Explique sin demasiados cálculos por qué es evidente que

$$\int_{-5}^5 (3x^2 - x^{10} \sin x + x^5 \sqrt{1+x^4}) dx = 2 \left[ x^3 \right]_0^5 = 250.$$

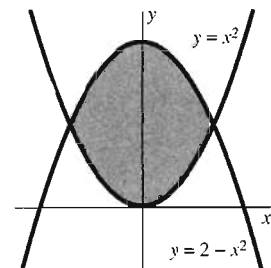
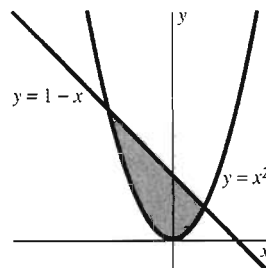
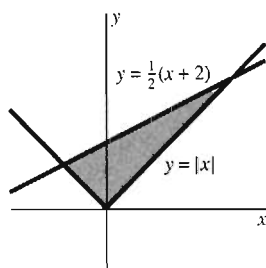
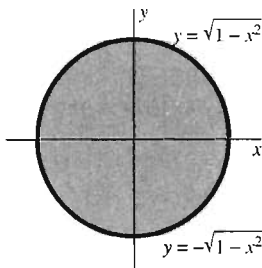
## 5.8 Áreas de regiones planas

En la sección 5.3 analizamos el área  $A$  bajo la gráfica de una función continua positiva  $f$  en el intervalo  $[a, b]$ . Este análisis motivó nuestra definición (sección 5.4) de la integral de  $f$  de  $a$  a  $b$  como el límite de sumas de Riemann. Un resultado importante fue que

$$A = \int_a^b f(x) dx, \quad (1)$$

por definición.

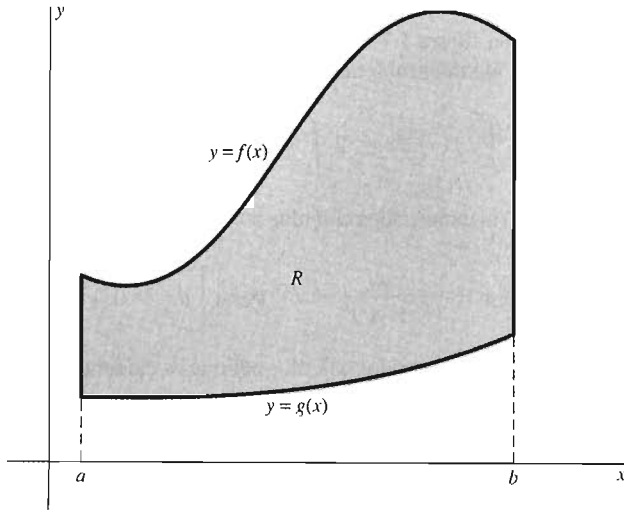
Aquí consideraremos el problema de determinar el área de regiones más generales del plano. Las regiones como las que se ilustran en la figura 5.8.1 se pueden acotar mediante las gráficas de *dos* (o más) funciones diferentes.



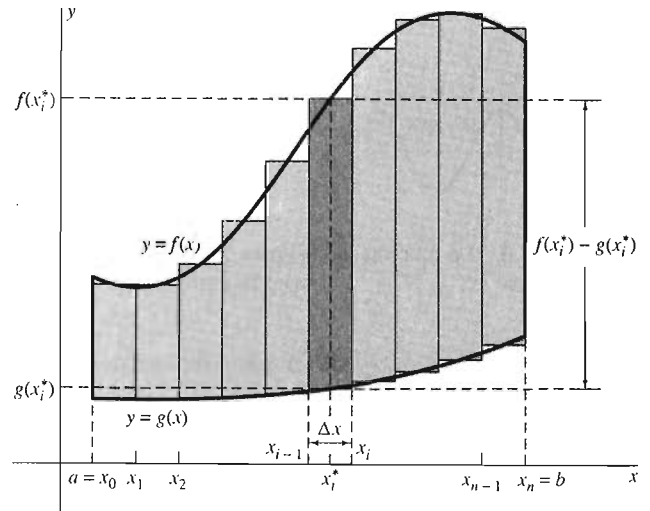
**Figura 5.8.1** Regiones planas acotadas por pares de curvas

Sean  $f$  y  $g$  funciones continuas tales que  $f(x) \geq g(x)$  para toda  $x$  en el intervalo  $[a, b]$ . Estamos interesados en el área  $A$  de la región  $R$  de la figura 5.8.2, que se encuentra *entre* las gráficas de  $y = f(x)$  y  $y = g(x)$  para  $x$  en  $[a, b]$ . De este modo  $R$  está acotada

- Por la curva  $y = f(x)$ , la frontera superior de  $R$ ,
  - Por la curva  $y = g(x)$ , la frontera inferior de  $R$ ,
- y por las rectas verticales  $x = a$  y  $x = b$  (en caso necesario).



**Figura 5.8.2** Una región entre dos gráficas



**Figura 5.8.3** Una partición de  $[a, b]$  divide a  $R$  en bandas verticales que aproximamos mediante bandas rectangulares.

Para aproximar  $A$ , consideramos una partición de  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos, todos con la misma longitud  $\Delta x = (b - a)/n$ . Si  $\Delta A_i$  denota el área de la región entre las gráficas de  $f$  y  $g$  en el  $i$ -ésimo subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  y  $x_i^*$  es un número elegido en ese subintervalo (todo esto para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ), entonces  $\Delta A_i$  es aproximadamente igual al área de un rectángulo con altura  $f(x_i^*) - g(x_i^*)$  y ancho  $\Delta x$  (figura 5.8.3). Por tanto,

$$\Delta A_i \approx [f(x_i^*) - g(x_i^*)] \Delta x;$$

de modo que

$$A = \sum_{i=1}^n \Delta A_i \approx \sum_{i=1}^n [f(x_i^*) - g(x_i^*)] \Delta x.$$

Introducimos la función *altura*  $h(x) = f(x) - g(x)$  y observamos que podemos aproximar a  $A$  mediante una suma de Riemann para  $h(x)$  asociada a nuestra partición de  $[a, b]$ :

$$A \approx \sum_{i=1}^n h(x_i^*) \Delta x.$$

La intuición y la razón nos sugieren que esta aproximación se puede hacer arbitrariamente precisa, eligiendo  $n$  suficientemente grande (y por tanto  $\Delta x = (b - a)/n$  suficientemente pequeño). Por tanto, concluimos que

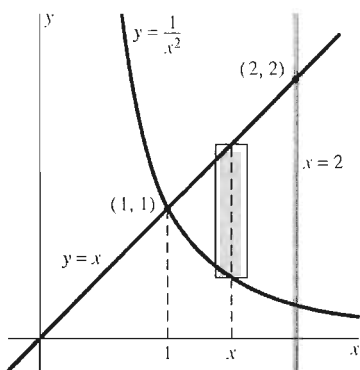
$$A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n h(x_i^*) \Delta x = \int_a^b h(x) dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

Como nuestro análisis se basa en un concepto intuitivo en vez de una definición lógica precisa de área, esto *no* constituye una demostración de esta fórmula para el área. Sin embargo, proporciona una justificación para la siguiente *definición* del área en cuestión.

**Definición** *El área entre dos curvas*

Sean  $f$  y  $g$  continuas tales que  $f(x) \geq g(x)$  para  $x$  en  $[a, b]$ . Entonces el **área**  $A$  de la región acotada por las curvas  $y = f(x)$  y  $y = g(x)$  y por las rectas verticales  $x = a$  y  $x = b$  es

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx. \quad (2)$$



**Figura 5.8.4** La región del ejemplo 1

**EJEMPLO 1** Determine el área de la región acotada por las rectas  $y = x$  y  $x = 2$  y por la curva  $y = 1/x^2$  (figura 5.8.4).

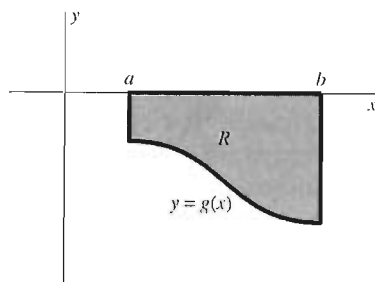
**Solución** Aquí la curva superior es  $y = f(x) = x$ , la curva inferior es  $y = g(x) = 1/x^2$ ,  $a = 1$  y  $b = 2$ . La recta vertical  $x = 2$  es “necesaria” (para proporcionar la frontera derecha de la región), pero  $x = 1$  no lo es. La ecuación (2) implica

$$A = \int_1^2 \left( x - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left[ \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{x} \right]_1^2 = \left( 2 + \frac{1}{2} \right) - \left( \frac{1}{2} + 1 \right) = 1.$$

La ecuación (1) es el caso particular de la ecuación (2) donde  $g(x)$  es idénticamente nula en  $[a, b]$ . Pero si  $f(x) \equiv 0$  y  $g(x) \leq 0$  en  $[a, b]$ , entonces la ecuación (2) se reduce a

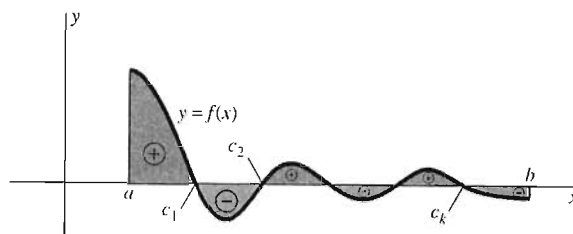
$$A = - \int_a^b g(x) dx; \text{ es decir } \int_a^b g(x) dx = -A.$$

En este caso, la región  $R$  se encuentra bajo el eje  $x$  (figura 5.8.5). De este modo, la integral de  $a$  a  $b$  de una función negativa es el *negativo* del área de la región acotada por su gráfica, el eje  $x$  y las rectas verticales  $x = a$  y  $x = b$ .



**Figura 5.8.5** La integral proporciona el negativo del área geométrica para una región que se encuentra bajo el eje  $x$ .

**Figura 5.8.6** La integral calcula el área por arriba del eje  $x$  menos el área bajo el eje  $x$



De manera más general, consideremos una función continua  $f$  con una gráfica que cruza el eje  $x$  en un número finito de puntos  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k$  entre  $a$  y  $b$  (figura 5.8.6). Escribimos

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \dots + \int_{c_k}^b f(x) dx.$$

Así vemos que

$$\int_a^b f(x) dx$$

es igual al área bajo  $y = f(x)$  y arriba del eje  $x$  menos el área por arriba  $y = f(x)$  y bajo el eje  $x$ .

La siguiente forma *heurística* (sugerente, aunque no rigurosa) de establecer fórmulas de integrales como la de la ecuación (2) puede ser útil. Considere la banda vertical del área que se encuentra por arriba del intervalo  $[x, x + dx]$ , que se muestra sombreada en la figura 5.8.7, donde hemos escrito

$$y_{\text{sup}} = f(x) \quad y \quad y_{\text{inf}} = g(x)$$

para las curvas de las fronteras superior e inferior. Pensamos en la longitud  $dx$  del intervalo  $[x, x + dx]$  como algo muy pequeño, de modo que podamos considerar esta banda como un rectángulo con ancho  $dx$  y altura  $y_{\text{sup}} - y_{\text{inf}}$ . Entonces el área es

$$dA = (y_{\text{sup}} - y_{\text{inf}}) dx.$$

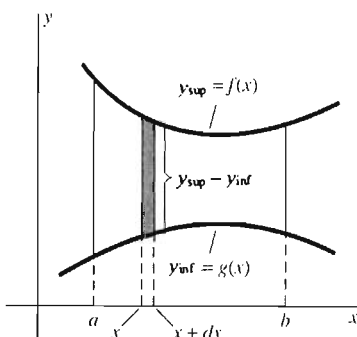
Pensemos ahora en la región sobre  $[a, b]$  que se encuentra entre  $y_{\text{sup}} = f(x)$  y  $y_{\text{inf}} = g(x)$  como formada por muchas bandas verticales. Podemos considerar su área como una suma de áreas de tales bandas rectangulares. Si escribimos  $\int$  para *suma*, obtenemos la fórmula

$$A = \int dA = \int_a^b (y_{\text{sup}} - y_{\text{inf}}) dx.$$

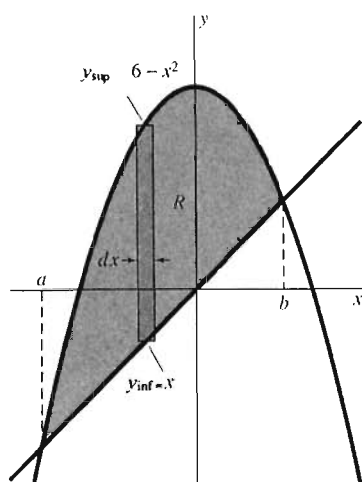
Este punto de vista heurístico evita la notación con subíndices asociada con las sumas de Riemann. Sin embargo, *no es ni debe considerarse como una deducción completa* de la última fórmula. Se utiliza más como un medio conveniente para memorización. Por ejemplo, en las figuras que acompañan a los ejemplos, frecuentemente mostramos una banda de ancho  $dx$  como ayuda visual para establecer la integral correcta de manera adecuada.

**EJEMPLO 2** Determine el área  $A$  de la región  $R$  acotada por la recta  $y = x$  y por la parábola  $y = 6 - x^2$ .

**Solución** La región  $R$  se muestra en la figura 5.8.8. Podemos utilizar la ecuación (2) y considerar  $f(x) = 6 - x^2$  y  $g(x) = x$ . Los límites  $a$  y  $b$  serán las coordenadas  $x$



**Figura 5.8.7** Un punto de vista heurístico (sugerente pero no riguroso) para establecer las integrales de área



**Figura 5.8.8** La región  $R$  del ejemplo 2

de los dos puntos de intersección de la recta y la parábola; lo primero que debemos hacer es determinar  $a$  y  $b$ . Para esto, igualamos  $f(x)$  y  $g(x)$  y determinamos  $x$  en la ecuación resultante:

$$x = 6 - x^2; \quad x^2 + x - 6 = 0; \quad (x - 2)(x + 3) = 0; \quad x = -3, 2.$$

Por tanto  $a = -3$  y  $b = 2$ , de modo que la ecuación (2) es

$$\begin{aligned} A &= \int_{-3}^2 (6 - x^2 - x) dx = \left[ 6x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-3}^2 \\ &= \left[ 6 \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 \right] - \left[ 6 \cdot (-3) - \frac{1}{3} \cdot (-3)^3 - \frac{1}{2} \cdot (-3)^2 \right] = \frac{125}{6}. \end{aligned}$$

### SUBDIVISIÓN DE REGIONES ANTES DE INTEGRAR

El ejemplo 3 muestra que a veces es necesario subdividir una región antes de aplicar la ecuación (2); por lo general debido a que la fórmula de la curva de la frontera superior o inferior (o ambas) cambia en algún punto entre  $x = a$  y  $x = b$ .

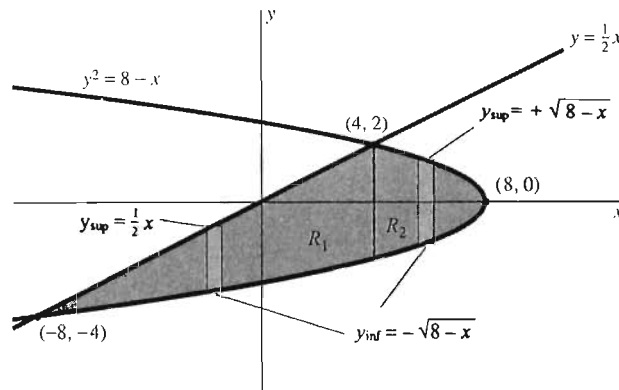
**EJEMPLO 3** Determine el área  $A$  de la región  $R$  acotada por la recta  $y = \frac{1}{2}x$  y por la parábola  $y^2 = 8 - x$ .

**Solución** La región  $R$  se muestra en la figura 5.8.9. Los puntos de intersección  $(-8, -4)$  y  $(4, 2)$  se encuentran al igualar  $y = \frac{1}{2}x$  y  $y = \pm\sqrt{8-x}$  y resolver para  $x$ . La frontera inferior de  $R$  está dada por  $y_{\text{inf}} = -\sqrt{8-x}$  en  $[-8, 8]$ . Pero la frontera superior de  $R$  está dada por

$$y_{\text{sup}} = \frac{1}{2}x \text{ en } [-8, 4], \quad y_{\text{sup}} = +\sqrt{8-x} \text{ en } [4, 8].$$

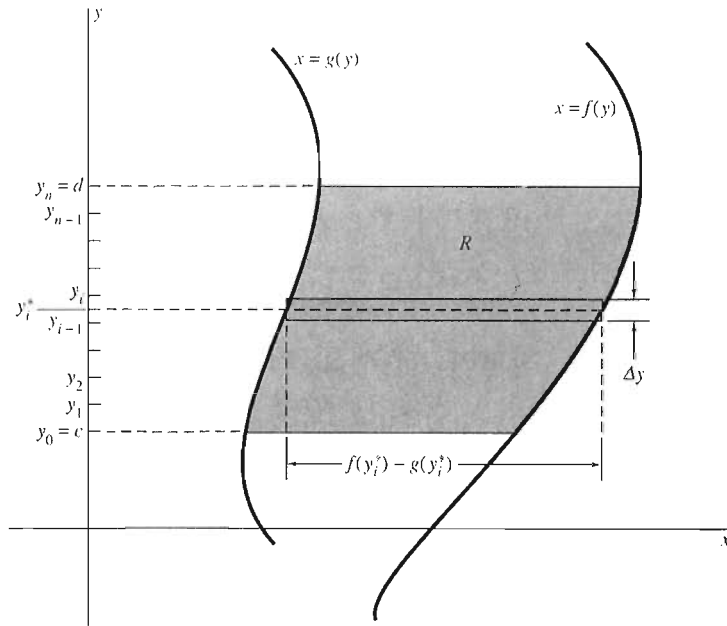
Por consiguiente, debemos dividir  $R$  en dos regiones  $R_1$  y  $R_2$ , como se indica en la figura 5.8.9. Entonces la ecuación (2) implica

$$\begin{aligned} A &= \int_{-8}^4 \left( \frac{1}{2}x + \sqrt{8-x} \right) dx + \int_4^8 2\sqrt{8-x} dx \\ &= \left[ \frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{3}(8-x)^{3/2} \right]_{-8}^4 + \left[ -\frac{4}{3}(8-x)^{3/2} \right]_4^8 \\ &= \left[ \left( \frac{16}{4} - \frac{16}{3} \right) - \left( \frac{64}{4} - \frac{128}{3} \right) \right] + \left[ 0 + \frac{32}{3} \right] = 36. \end{aligned}$$



**Figura 5.8.9** En el ejemplo 3, dividimos la región  $R$  en las regiones  $R_1$  y  $R_2$





**Figura 5.8.10** Determinación de áreas utilizando una integral con respecto de  $y$

### DETERMINACIÓN DE ÁREA INTEGRANDO CON RESPECTO DE $y$

La región del ejemplo 3 parece ser más simple si la consideramos acotada por las gráficas de funciones de  $y$  en vez de utilizar funciones de  $x$ . La figura 5.8.10 muestra una región  $R$  acotada por las curvas  $x = f(y)$  y  $x = g(y)$ , con  $f(y) \geq g(y)$  para  $y$  en  $[c, d]$  y por las rectas horizontales  $y = c$  y  $y = d$ . Para aproximar el área  $A$  de  $R$ , comenzamos con una partición de  $[c, d]$  en  $n$  subintervalos, todos con la misma longitud  $\Delta y = (d - c)/n$ . Escogemos un punto  $y_i^*$  en el  $i$ -ésimo subintervalo  $[y_{i-1}, y_i]$  para cada  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Aproximamos la banda horizontal de  $R$  frente a  $[y_{i-1}, y_i]$  mediante un rectángulo con ancho  $\Delta y$  (medido de manera vertical) y altura  $f(y_i^*) - g(y_i^*)$  (medido de manera horizontal). Por tanto

$$A \approx \sum_{i=1}^n [f(y_i^*) - g(y_i^*)] \Delta y.$$

Reconocemos esta suma como una suma de Riemann para la integral

$$\int_c^d [f(y) - g(y)] dy$$

lo cual motiva la siguiente definición.

**Definición** *El área entre dos curvas*

Sean  $f$  y  $g$  funciones continuas de  $y$  con  $f(y) \geq g(y)$  para  $y$  en  $[c, d]$ . Entonces el área  $A$  de la región acotada por las curvas  $x = f(y)$  y  $x = g(y)$  y por las rectas horizontales  $y = c$  y  $y = d$  es

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)] dy. \quad (3)$$

En un curso más avanzado, demostraríamos que las ecuaciones (2) y (3) producen la misma área  $A$  para una región que puede ser descrita como en la figura 5.8.2 o bien como en la figura 5.8.10.

Escribimos

$$y_{\text{der}} = f(y) \quad \text{y} \quad x_{\text{izq}} = g(y)$$

para las curvas de la frontera derecha e izquierda, respectivamente, de la región de la figura 5.8.10. Entonces la ecuación (3) toma la forma

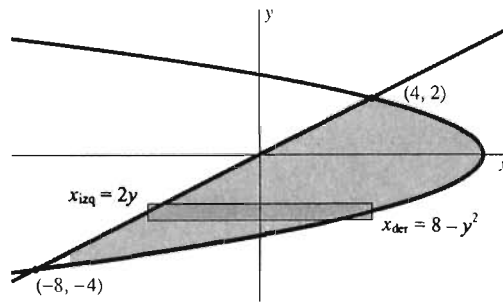
$$A = \int_c^d [x_{\text{der}} - x_{\text{izq}}] dy.$$

La comparación del ejemplo 3 con el ejemplo 4 ilustra la ventaja de elegir la variable de integración “correcta”: aquella que simplifique los cálculos.

**EJEMPLO 4** Integre con respecto de  $y$  para determinar el área de la región  $R$  del ejemplo 3.

**Solución** En la figura 5.8.11 vemos que podemos aplicar la ecuación (3) con  $x_{\text{der}} = f(y) = 8 - y^2$  y  $x_{\text{izq}} = g(y) = 2y$  para  $y$  en  $[-4, 2]$ . Esto implica

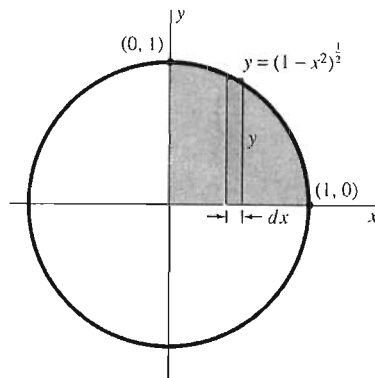
$$A = \int_{-4}^2 [(8 - y^2) - 2y] dy = \left[ 8y - \frac{1}{3}y^3 - y^2 \right]_{-4}^2 = 36.$$



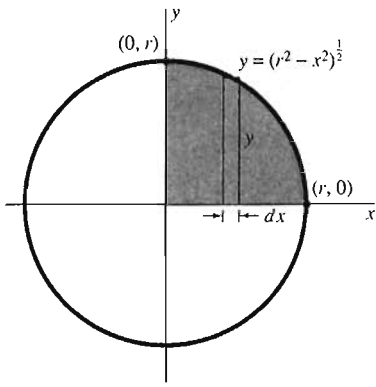
**Figura 5.8.11** Nuevo cálculo del área del ejemplo 3 (ejemplo 4)

**EJEMPLO 5** Utilice el cálculo para obtener la fórmula  $A = \pi r^2$  para el área de un círculo de radio  $r$ .

**Solución** Comenzamos con la *definición* (en la sección 5.3) del número  $\pi$  como el área del círculo unitario  $x^2 + y^2 = 1$ . Entonces, con la ayuda de la figura 5.8.12, escribimos



**Figura 5.8.12** El número  $\pi$  es cuatro veces el área sombreada



$$\pi = 4 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx, \quad (4)$$

ya que la integral de la ecuación (4) es, por la ecuación (1), el área del primer cuadrante del círculo. Aplicamos la ecuación (1) al primer cuadrante del círculo de radio  $r$  en la figura 5.8.13 y determinamos el área total  $A$  de ese círculo como

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 4r \int_0^r \sqrt{1 - (x/r)^2} dx \\ &= 4r \int_0^1 \sqrt{1 - u^2} r du \quad (\text{Sustitución: } u = \frac{x}{r}, dx = r du.) \\ &= 4r^2 \int_0^1 \sqrt{1 - u^2} du. \end{aligned}$$

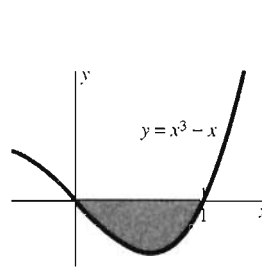
**Figura 5.8.13** Podemos escribir el área sombreada como una integral

Por tanto, por la ecuación (4),  $A = \pi r^2$ .

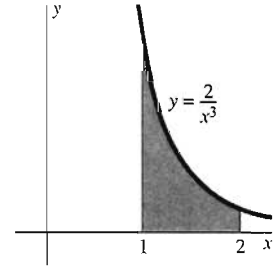
## 5.8 Problemas

Determine las áreas de las regiones mostradas en los problemas 1 a 10.

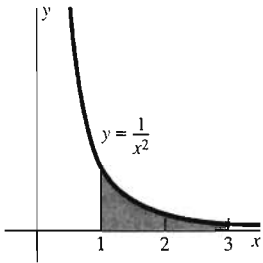
1. (Véase figura 5.8.14.)
2. (Véase figura 5.8.15.)
3. (Véase figura 5.8.16.)
4. (Véase figura 5.8.17.)
5. (Véase figura 5.8.18.)
6. (Véase figura 5.8.19.)
7. (Véase figura 5.8.20.)
8. (Véase figura 5.8.21.)
9. (Véase figura 5.8.22.)
10. (Véase figura 5.8.23.)



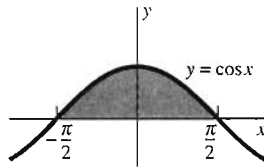
**Figura 5.8.18** Problema 5



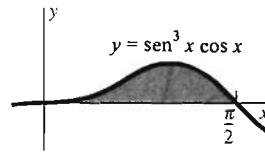
**Figura 5.8.19** Problema 6



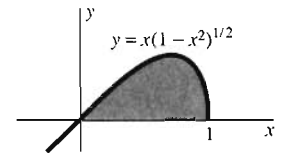
**Figura 5.8.14** Problema 1



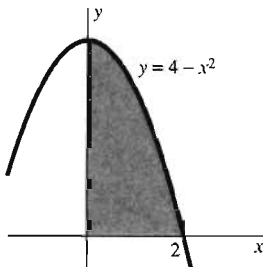
**Figura 5.8.15** Problema 2



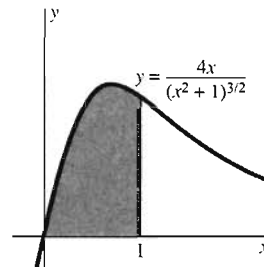
**Figura 5.8.20** Problema 7



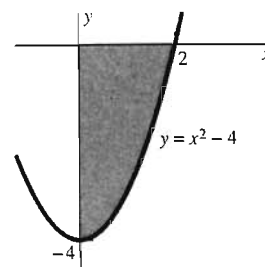
**Figura 5.8.21** Problema 8



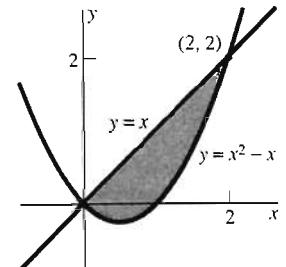
**Figura 5.8.16** Problema 3



**Figura 5.8.17** Problema 4



**Figura 5.8.22** Problema 9



**Figura 5.8.23** Problema 10

Determine el área de las regiones descritas en los problemas 11 a 20.

11. La región  $R$  acotada por debajo por la gráfica  $y = x^3$  y por arriba por la gráfica  $y = x$  en el intervalo  $[0, 1]$
12. La región  $R$  entre la gráfica  $y = 1/(x + 1)^2$  y el eje  $x$  en el intervalo  $[1, 3]$
13. La región  $R$  acotada por arriba por la gráfica  $y = x^3$  y por abajo por la gráfica  $y = x^4$  en el intervalo  $[0, 1]$
14. La región  $R$  acotada por arriba por la gráfica  $y = x^2$  y por abajo por la recta horizontal  $y = -1$  en el intervalo  $[-1, 2]$
15. La región  $R$  acotada por arriba por la gráfica  $y = 1/(x + 1)^3$  y por abajo por el eje  $x$  en el intervalo  $[0, 2]$
16. La región  $R$  acotada por arriba por la gráfica de  $y = 4x - x^2$  y por abajo por el eje  $x$
17. La región  $R$  acotada por la izquierda por la gráfica de  $x = y^2$  y por la derecha por la recta vertical  $x = 4$
18. La región  $R$  entre las gráficas de  $y = x^4 - 4$  y  $y = 3x^2$
19. La región  $R$  entre las gráficas de  $x = 8 - y^2$  y  $x = y^2 - 8$
20. La región  $R$  entre las gráficas de  $y = x^{1/3}$  y  $y = x^3$

En los problemas 21 a 42, esquematice las regiones acotadas por las curvas dadas; determine después su área.

21.  $y = 0$ ,  $y = 25 - x^2$
22.  $y = x^2$ ,  $y = 4$
23.  $y = x^2$ ,  $y = 8 - x^2$
24.  $x = 0$ ,  $x = 16 - y^2$
25.  $x = y^2$ ,  $x = 25$
26.  $x = y^2$ ,  $x = 32 - y^2$
27.  $y = x^2$ ,  $y = 2x$
28.  $y = x^2$ ,  $x = y^2$
29.  $y = x^2$ ,  $y = x^3$
30.  $y = 2x^2$ ,  $y = 5x - 3$
31.  $x = 4y^2$ ,  $x + 12y + 5 = 0$
32.  $y = x^2$ ,  $y = 3 + 5x - x^2$
33.  $x = 3y^2$ ,  $x = 12y - y^2 - 5$
34.  $y = x^2$ ,  $y = 4(x - 1)^2$
35.  $x = y^2 - 2y - 2$ ,  $x = 4 + y - 2y^2$
36.  $y = x^4$ ,  $y = 32 - x^4$
37.  $y = x^3$ ,  $y = 32\sqrt{x}$
38.  $y = x^3$ ,  $y = 2x - x^2$
39.  $y = x^2$ ,  $y = \sqrt[3]{x^2}$
40.  $y^2 = x$ ,  $y^2 = 2(x - 3)$
41.  $y = x^3$ ,  $y = 2x^3 + x^2 - 2x$
42.  $y = x^3$ ,  $x + y = 0$ ,  $y = x + 6$

43. La elipse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  aparece en la figura 5.8.24. Utilice el método del ejemplo 4 para mostrar que el área de la región que acota es  $A = \pi ab$ , una agradable generalización de la fórmula del área del círculo.

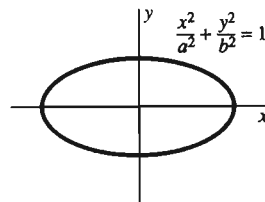


Figura 5.8.24 La elipse del problema 43

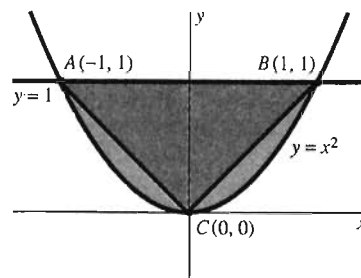


Figura 5.8.25 El segmento parabólico del problema 44

44. La figura 5.8.25 muestra un segmento parabólico acotado por la parábola  $y = x^2$  y por la recta  $y = 1$ . En el siglo III a.C., Arquímedes mostró que el área de un segmento parabólico es cuatro tercios del área del triángulo  $ABC$ , donde  $AB$  es la "base" del segmento parabólico y  $C$  es su vértice (como en la figura 5.8.25). Verifique esto para el segmento parabólico indicado.

45. Sean  $A$  y  $B$  los puntos de intersección de la parábola  $y = x^2$  y la recta  $y = x + 2$  y sea  $C$  el punto de la parábola donde la recta tangente es paralela a la gráfica de  $y = x + 2$ . Muestre que el área del segmento parabólico obtenido del corte de la parábola mediante la recta (figura 5.8.26) es cuatro tercios del área del triángulo  $ABC$ .

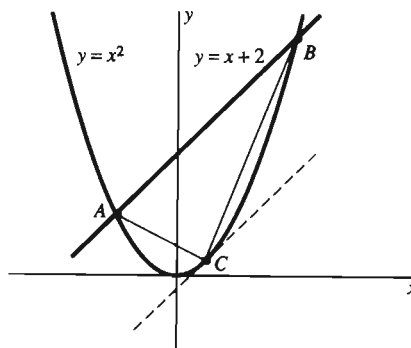


Figura 5.8.26 El segmento parabólico del problema 45

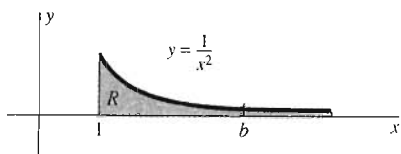


Figura 5.8.27 La región no acotada del problema 46

46. Determine el área de la región no acotada  $R$  sombreada en la figura 5.8.27, considerada como el límite cuando  $b \rightarrow +\infty$  de la región acotada por  $y = 1/x^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$  y  $x = b > 1$ .

47. Determine el área total de las regiones acotadas por el eje  $x$  y por la curva  $y = 2x^3 - 2x^2 - 12x$ .

48. Suponga que la función cuadrática

$$f(x) = px^2 + qx + r$$

nunca es negativa en  $[a, b]$ . Muestre que el área bajo la gráfica de  $f$  de  $a$  a  $b$  es  $A = \frac{1}{3}h[f(a) + 4f(m) + f(b)]$ , donde  $h = (b - a)/2$  y  $m = (a + b)/2$ . [Sugerencia: Mediante una traslación horizontal de esta región, puede suponer que  $a = -h$ ,  $m = 0$  y  $b = h$ .]

En los problemas 49 a 51, se dan el área  $A(u)$  entre la gráfica de la función continua positiva  $f$  y el eje  $x$  en el intervalo  $0 \leq x \leq u$ . Determine  $f(x)$ .

49.  $A(u) = u^5$

50.  $A(u) = \frac{2}{3}u^{3/2}$

51.  $A(u) = [f(u)]^2$

## 5.8 Proyectos

Estos problemas requieren el uso de una calculadora o una computadora con la capacidad de aproximación numérica de una integral

$$\int_a^b f(x) dx,$$

donde la función integrando  $f(x)$  y  $a$  y  $b$  están dados. La tabla de la figura 5.8.28 enumera las instrucciones adecuadas para una calculadora y sistemas de cómputo comunes.

Calculadora/Computadora	Instrucción para la integración numérica
<i>Derive</i>	Author $f(x)$ , Calculus, Integrate, Enter Limits, Simplify
HP-48	' $\int(a, b, f(x), x)$ '
<i>Mathematica</i>	NIntegrate[ $f[x]$ , { $x$ , $a$ , $b$ }]
<i>Maple</i>	evalf(Int( $f(x)$ , $x = a..b$ ))
TI-85	fnInt( $a, b, f(x), x$ )
<i>X(PLORE)</i>	IN( $f(x)$ , $x = a$ to $b$ )

Figura 5.8.28 Instrucciones para la integración numérica en una calculadora y una computadora

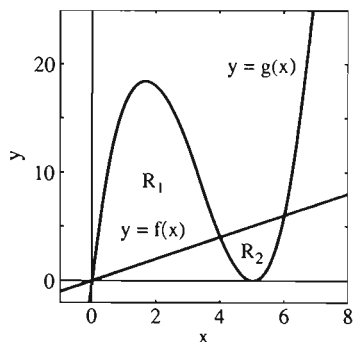


Figura 5.8.29 Las regiones del proyecto A

Para sus propias versiones de los proyectos A, B y C, elija un entero fijo  $n$  de 1 a 9 y úselo en lo sucesivo. Por ejemplo,  $n$  podría ser el último dígito distinto de cero de su clave como estudiante.

**PROYECTO A** Sean  $f$  y  $g$  las dos funciones definidas como sigue:

$$f(x) = x, \quad (5)$$

$$g(x) = x(x - n - 1)^2. \quad (6)$$

Como se muestra en la figura 5.8.29 (para el caso  $n = 4$ ), las gráficas  $y = f(x)$  y  $y = g(x)$  acotan dos regiones  $R_1$  y  $R_2$ . Debe determinar la suma  $A$  de las áreas  $A_1$  y  $A_2$  de estas dos regiones.

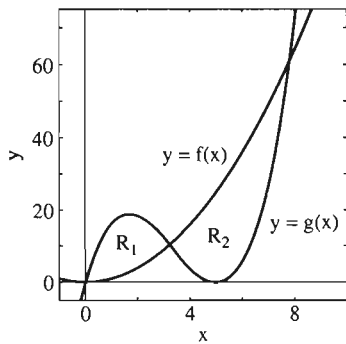


Figura 5.8.30 Las regiones del proyecto B

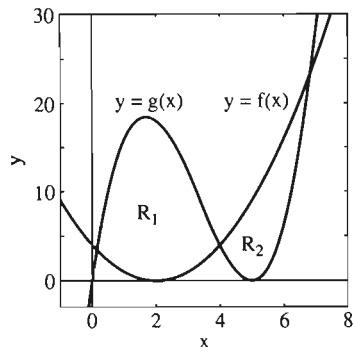


Figura 5.8.31 Las regiones del proyecto C

Primero determine manualmente (es decir, mediante cálculos con papel y lápiz) las abscisas de los tres puntos de intersección de  $y=f(x)$  y  $y=g(x)$ . Después emplee su calculadora o computadora para evaluar numéricamente las dos integrales necesarias para determinar  $A$ . Además, calcule  $A_1$  y  $A_2$  exactamente (utilizando el teorema fundamental del cálculo) y vea si sus resultados concuerdan.

**PROYECTO B** Repita el proyecto A, pero reemplace la función  $f(x)$  en la ecuación (5) por

$$f(x) = x^2. \quad (7)$$

Como antes, puede determinar manualmente los tres puntos de intersección de  $y=f(x)$  y  $y=g(x)$  (que aparecen en la figura 5.8.30 para el paso  $n=4$ ), pero seguramente no querrá calcular las áreas  $A_1$  y  $A_2$  de manera manual. En vez de esto, utilice su calculadora o computadora para evaluar las integrales necesarias numéricamente.

**PROYECTO C** Repita el proyecto A, pero reemplace la función  $f(x)$  en la ecuación (5) con

$$f(x) = \left(x - \frac{n}{2}\right)^2. \quad (8)$$

Una vez más, la gráfica (la figura 5.8.31 ilustra el caso  $n=4$ ) muestra dos regiones  $R_1$  y  $R_2$  acotadas por  $y=f(x)$  y  $y=g(x)$ . Pero ahora, usted *no* deberá determinar de manera manual los tres puntos de intersección que proporcionan los límites necesarios para las integrales de área. En vez de esto, utilice una solución gráfica, el método de Newton o la instrucción **SOLVE** de su calculadora o computadora. Por último, determine los valores numéricos de las áreas  $A_1$  y  $A_2$  y su suma  $A$ .

Podemos utilizar el teorema fundamental del cálculo

$$\int_a^b f(x) dx = \left[ G(x) \right]_a^b,$$

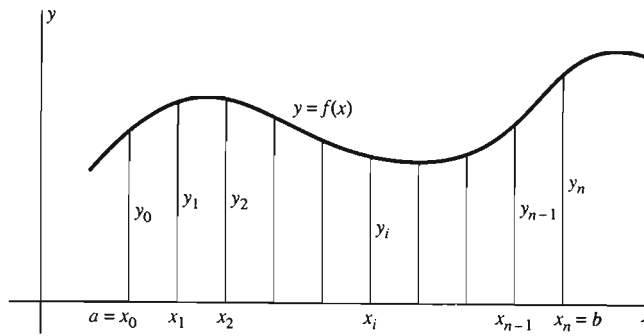
para evaluar una integral solamente si encontramos una fórmula conveniente para la primitiva  $G$  de  $f$ . Pero existen funciones sencillas con primitivas que no son funciones elementales. Una **función elemental** es aquella que se puede expresar en términos de polinomios, funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas, mediante combinaciones de sumas, restas, productos, cocientes y composición de estas funciones.

El problema es que las funciones elementales pueden tener derivadas no elementales. Por ejemplo, se sabe que la función elemental  $f(x) = (1+x^2)^{1/3}$  no tiene una primitiva elemental. En consecuencia, no podemos utilizar el teorema fundamental del cálculo para evaluar una integral como

$$\int_0^1 (1+x^2)^{1/3} dx.$$

Aquí analizamos el uso de las sumas de Riemann para aproximar numéricamente las integrales que no se pueden evaluar con exactitud de manera adecuada, sin importar que se empleen o no funciones no elementales. Dada una función continua  $f$  en  $[a, b]$ , con una integral por aproximar, consideremos una partición

## 5.9 Integración numérica



**Figura 5.9.1**  $y_i = f(x_i)$

$P$  de  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos, cada uno con la misma longitud  $\Delta x = (b - a)/n$ . Entonces, el valor de cualquier suma de Riemann de la forma

$$S = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x \quad (1)$$

se puede considerar como una aproximación al valor de la integral  $\int_a^b f(x) dx$ .

Con  $x_i^* = x_{i-1}$  y con  $x_i^* = x_i$  en la ecuación (1), obtenemos la *aproximación mediante los extremos izquierdos*  $L_n$  y la *aproximación mediante los extremos derechos*  $R_n$  a la integral definida  $\int_a^b f(x) dx$  asociada con la partición de  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos de igual longitud. Así,

$$L_n = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x \quad (2)$$

y

$$R_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x. \quad (3)$$

Podemos simplificar la notación de  $L_n$  y  $R_n$ , escribiendo  $y_i$  en vez de  $f(x_i)$  (figura 5.9.1).

**Definición Aproximaciones mediante los extremos**

La **aproximación mediante los extremos izquierdos**  $L_n$  y la **aproximación mediante los extremos derechos**  $R_n$  a  $\int_a^b f(x) dx$  con  $\Delta x = (b - a)/n$  son

$$L_n = (\Delta x)(y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) \quad (2')$$

y

$$R_n = (\Delta x)(y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1}) \quad (3')$$

En el ejemplo 1 de la sección 5.3 calculamos las aproximaciones mediante los extremos izquierdos y derechos a la integral

$$\int_0^3 x^2 dx = 9 \quad (4)$$

con  $n = 5$  y  $n = 10$ . La tabla de la figura 5.9.2 muestra los valores de  $L_n$  y  $R_n$  con valores mayores de  $n$ .

La última columna de esta tabla proporciona el *promedio* de las sumas mediante los extremos  $L_n$  y  $R_n$ . Se puede ver que (para un valor dado de  $n$ ), este promedio es una aproximación mucho más precisa que cualquiera de las aproximaciones mediante los extremos.

**Figura 5.9.2** Aproximaciones mediante los extremos izquierdos y derechos a la integral de la ecuación (4)

$n$	$L_n$	$R_n$	$\frac{1}{2}(L_n + R_n)$
5	6.4800	11.8800	9.1800
10	7.6950	10.3950	9.0450
20	8.3363	9.6863	9.0113
40	8.6653	9.3403	9.0028
80	8.8320	9.1695	9.0007
160	8.9258	9.0846	9.0002
320	8.9579	9.0422	9.0000

### LAS APROXIMACIONES DEL TRAPECIO Y LOS PUNTOS MEDIOS

El promedio  $T_n = (L_n + R_n) / 2$  de las aproximaciones mediante los extremos izquierdos y derechos es la *aproximación del trapecio* a  $\int_a^b f(x) dx$  asociada con la partición de  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos de igual longitud. Escrito en forma desarrollada,

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{2}(L_n + R_n) & (5) \\ &= \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^n [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \\ &= \frac{\Delta x}{2} \{ [f(x_0) + f(x_1)] + [f(x_1) + f(x_2)] + [f(x_2) + f(x_3)] + \dots \\ &\quad + [f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})] + [f(x_{n-1}) + f(x_n)] \}; \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{\Delta x}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots \\ &\quad + 2f(x_{n-2}) + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]. \end{aligned}$$

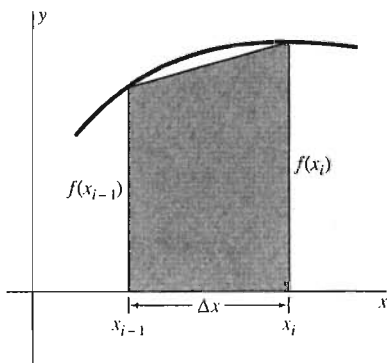
Observe el patrón 1-2-2-...-2-2-1 de los coeficientes.

**Definición** *La aproximación del trapecio*  
La aproximación del trapecio a

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{con} \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

es

$$T_n = \frac{\Delta x}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-2} + 2y_{n-1} + y_n). \quad (6)$$



**Figura 5.9.3** El área del trapecio es

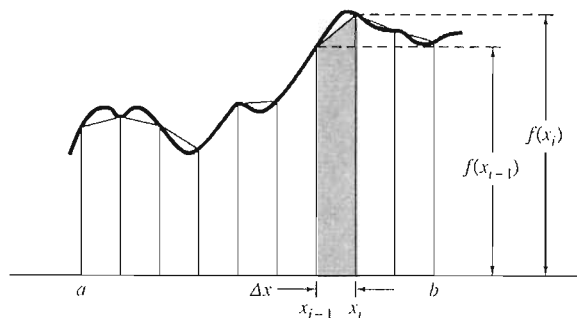
$$\frac{1}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \Delta x$$

La figura 5.9.3 muestra por qué el nombre de aproximación del trapecio  $T_n$ . Los puntos de la partición  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  se usan para construir trapecios desde el eje  $x$  hasta la gráfica de la función  $f$ . El trapecio sobre el  $i$ -ésimo subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  tiene altura  $\Delta x$ , y sus bases paralelas tienen un ancho de  $f(x_{i-1})$  y  $f(x_i)$ . Así, su área es

$$\frac{\Delta x}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{\Delta x}{2} (y_{i-1} + y_i).$$



**Figura 5.9.4** Geometría de la aproximación del trapecio



La comparación de esto con la ecuación (6) muestra que  $T_n$  es simplemente la suma de las áreas de los trapecios que se muestran en la figura 5.9.4.

**EJEMPLO 1** Calcule la aproximación del trapecio a la integral en la ecuación (4) con  $n = 6$  y  $\Delta x = 0.5$ .

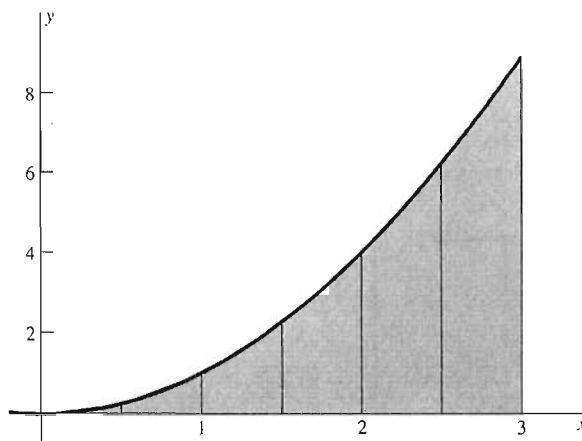
**Solución** Los trapecios de la figura 5.9.5 indican por qué  $T_6$  debe ser una mejor aproximación que cualquiera de las aproximaciones mediante los extremos  $L_6$  y  $R_6$ . La tabla de la figura 5.9.6 muestra los valores de  $f(x) = x^2$  necesarios para calcular  $L_6$  y  $R_6$ . Los coeficientes  $1 - 2 - 2 - \dots - 2 - 2 - 1$  aparecen en la última columna. Utilizamos la ecuación (6) para obtener

$$\begin{aligned} T_6 &= \frac{0.5}{2} [1 \cdot (0) + 2 \cdot (0.25) + 2 \cdot (1) \\ &\quad + 2 \cdot (2.25) + 2 \cdot (4) + 2 \cdot (6.25) + 1 \cdot (9)] \\ &= 9.125 \end{aligned}$$

(compare con el valor real 9).

$n$	$x_n$	$f(x_n) = x_n^2$	Coefficientes
0	0	0	1
1	0.5	0.25	2
2	1	1	2
3	1.5	2.25	2
4	2	4	2
5	2.5	6.25	2
6	3	9	1

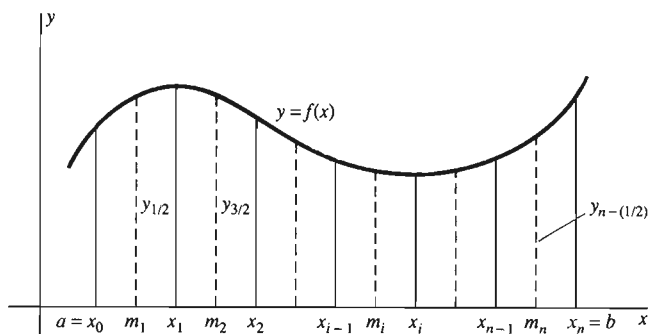
**Figura 5.9.6** Datos del ejemplo 1



**Figura 5.9.5** El área bajo  $y = x^2$  (ejemplo 1)

Otra aproximación útil a  $\int_a^b f(x) dx$  es la *aproximación mediante los puntos medios*  $M_n$ . Es la suma de Riemann que se obtiene al elegir el punto  $x_i^*$  en  $[x_{i-1}, x_i]$  como el punto medio  $m_i = (x_{i-1} + x_i)/2$ . Así,

$$M_n = \sum_{i=1}^n f(m_i) \Delta x = (\Delta x)[f(m_1) + f(m_2) + \dots + f(m_n)]. \quad (7)$$



**Figura 5.9.7** Las ordenadas empleadas en la aproximación mediante los puntos medios

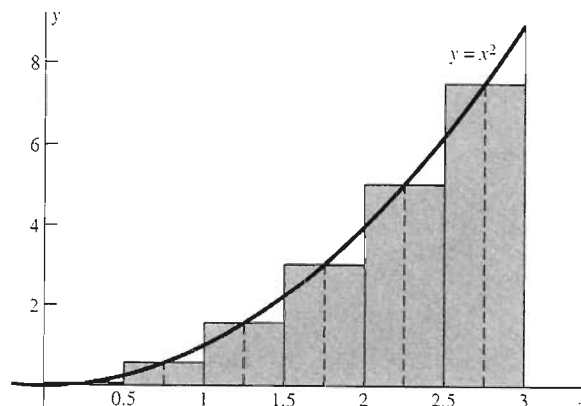
Como  $m_1$  es el punto medio de  $[x_0, x_1]$ , a veces es conveniente escribir  $y_{1/2}$  en vez de  $f(m_1)$ ,  $y_{3/2}$  en vez de  $f(m_2)$ , y así sucesivamente (figura 5.9.7).

**Definición** *La aproximación mediante los puntos medios*  
 La aproximación mediante los puntos medios a

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{con} \quad \Delta x = \frac{(b-a)}{n}$$

es

$$M_n = (\Delta x)(y_{1/2} + y_{3/2} + y_{5/2} + \dots + y_{n-(1/2)}). \quad (7')$$



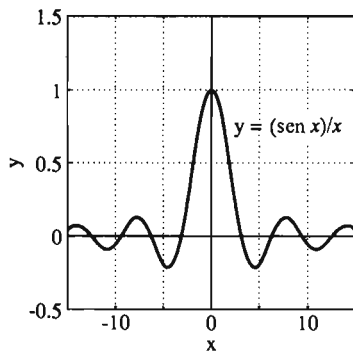
**Figura 5.9.8** Rectángulos basados en los puntos medios para aproximar el área bajo  $y = x^2$  (ejemplo 2)

$n$	$m_n$	$f(m_i)$	Coefficientes
1	0.25	0.0625	1
2	0.75	0.5625	1
3	1.25	1.5625	1
4	1.75	3.0625	1
5	2.25	5.0625	1
6	2.75	7.5625	1

**Figura 5.9.9** Datos para el ejemplo 2

**EJEMPLO 2** La figura 5.9.8 ilustra la aproximación mediante los puntos medios a la integral  $\int_0^3 x^2 dx = 9$  del ejemplo 1, con  $n = 6$  y  $\Delta x = 0.5$ , y la tabla de la figura 5.9.9 muestra los valores de  $f(x) = x^2$  necesarios para calcular  $M_6$ . Utilizamos la ecuación (7) para obtener

$$\begin{aligned} M_6 &= (0.5)[1 \cdot (0.0625) + 1 \cdot (0.5625) + 1 \cdot (1.5625) \\ &\quad + 1 \cdot (3.0625) + 1 \cdot (5.0625) + 1 \cdot (7.5625)] \\ &= 8.9375. \end{aligned}$$



**Figura 5.9.10** La gráfica de  $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$  (ejemplo 3)

**EJEMPLO 3** La figura 5.9.10 muestra la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}. \quad (8)$$

Recuerde de la sección 2.5 que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1.$$

Por tanto, definimos  $f(0) = 1$ ; entonces no existe dificultad en  $x = 0$ , donde el numerador y el denominador en la ecuación (8) se anulan. La función  $f(x)$  *no* tiene una primitiva elemental, de modo que el teorema fundamental del cálculo no puede emplearse para calcular el valor de la integral

$$I = \int_0^1 \frac{\text{sen } x}{x} dx. \quad (9)$$

Pero tales integrales son importantes en el diseño de lentes fotográficos de precisión, de modo que esto nos motiva a aproximar su valor numéricamente.

Con  $n = 10$  y  $\Delta x = 0.1$ , la aproximación del trapecio es

$$T_{10} = \frac{0.1}{2} \left[ 1 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{\text{sen } 0.1}{0.1} + 2 \cdot \frac{\text{sen } 0.2}{0.2} + 2 \cdot \frac{\text{sen } 0.3}{0.3} + \dots + 2 \cdot \frac{\text{sen } 0.9}{0.9} + 1 \cdot \frac{\text{sen } 1.0}{1.0} \right];$$

$$T_{10} \approx 0.94583.$$

La aproximación mediante los puntos medios correspondientes es

$$M_{10} = (0.1) \left[ 1 \cdot \frac{\text{sen } 0.05}{0.05} + 1 \cdot \frac{\text{sen } 0.15}{0.15} + 1 \cdot \frac{\text{sen } 0.25}{0.25} + \dots + 1 \cdot \frac{\text{sen } 0.85}{0.85} + 1 \cdot \frac{\text{sen } 0.95}{0.95} \right];$$

$$M_{10} \approx 0.94621.$$

El valor real de la integral en la ecuación (9) es  $I \approx 0.94608$  (con una precisión de cinco cifras decimales). Así,  $T_{10}$  y  $M_{10}$  dan el valor correcto 0.946 si redondeamos a tres cifras decimales. Pero

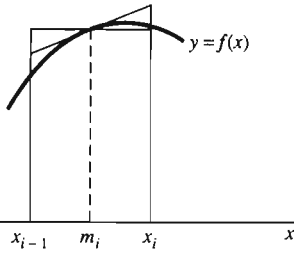
□  $T_{10}$  subestima  $I$  en cerca de 0.00025, mientras que

□  $M_{10}$  sobreestima  $I$  en cerca de 0.00013.

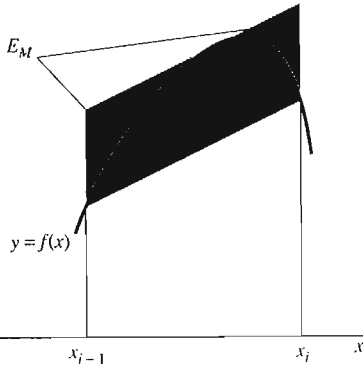
Así, en este ejemplo, la aproximación mediante los puntos medios es un poco más precisa que la aproximación del trapecio.

### APROXIMACIÓN DE SIMPSON

La aproximación mediante los puntos medios de la ecuación (7) se llama a veces **aproximación mediante la recta tangente**, pues el área del rectángulo con base



**Figura 5.9.11** La aproximación del punto medio, o tangente



**Figura 5.9.12** Comparación del error  $E_M$  de la aproximación del punto medio con el error  $E_T$  de la aproximación del trapecio

$[x_{i-1}, x_i]$  y altura  $f(m_i)$  es también el área de otra figura de aproximación. Como se muestra en la figura 5.9.11, trazamos un segmento tangente a la gráfica de  $f$ , tangente en el punto  $(m_i, f(m_i))$  y utilizamos ese segmento como un lado de un trapecio (algo parecido a la aproximación del trapecio). El trapecio y el rectángulo ya mencionado tienen la misma área, de modo que el valor de  $M_n$  es la suma de las áreas de los trapecios como el de la figura 5.9.11.

El área del trapecio asociado con la aproximación del punto medio está por lo general más cerca del verdadero valor de

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx$$

que el área del trapecio asociado con la aproximación del trapecio, como en el caso del ejemplo 3. La figura 5.9.12 también muestra esto, en el sentido de que el error del punto medio  $E_M$  (sobre la curva de la figura) es por lo general menor que el error del trapecio  $E_T$  (bajo la curva de la figura). La figura 5.9.12 indica también que si  $y=f(x)$  es cóncava hacia abajo, entonces  $M_n$  será una sobreestimación y  $T_n$  una subestimación de  $\int_a^b f(x) dx$ . Si la gráfica es cóncava hacia arriba, esta situación se invierte.

Estas observaciones motivan la consideración de un *promedio ponderado* de  $M_n$  y  $T_n$ , de modo que  $M_n$  tenga mayor peso que  $T_n$ , para mejorar nuestras estimaciones numéricas de la integral definida. El promedio con pesos particular

$$S_{2n} = \frac{1}{3}(2M_n + T_n) = \frac{2}{3}M_n + \frac{1}{3}T_n \quad (10)$$

es la *aproximación de Simpson* a  $\int_a^b f(x) dx$ . La razón del subíndice  $2n$  es que asociamos  $S_{2n}$  con una partición de  $[a, b]$  con un número *par*,  $2n$ , de subintervalos con la misma longitud, con los extremos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2n-2} < x_{2n-1} < x_{2n} = b.$$

Las aproximaciones del punto medio y del trapecio asociadas con los  $n$  subintervalos

$$[x_0, x_2], [x_2, x_4], [x_4, x_6], \dots, [x_{2n-4}, x_{2n-2}], [x_{2n-2}, x_{2n}],$$

todos con la misma longitud  $2 \Delta x$ , se pueden escribir como sigue

$$M_n = (2 \Delta x)(y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{2n-1})$$

y

$$T_n = \frac{2 \Delta x}{2}(y_0 + 2y_2 + 2y_4 + \dots + 2y_{2n-2} + y_{2n}).$$

Sustituimos estas fórmulas para  $M_n$  y  $T_n$  en la ecuación (10) y vemos, después de un poco de álgebra, que

$$S_{2n} = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}). \quad (11)$$

Para ser consistentes con nuestras demás fórmulas de aproximación, volvemos a escribir la ecuación (11) con  $n$  en vez de  $2n$  para denotar el número de subintervalos utilizados.

**Definición Aproximación de Simpson**

La **aproximación de Simpson** a  $\int_a^b f(x) dx$  con  $\Delta x = (b - a)/n$ , asociada a una partición de  $[a, b]$  en un número **par**  $n$  de subintervalos de la misma longitud, es la suma  $S_n$  definida como

$$S_n = \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n). \quad (12)$$

**OBSERVACIÓN** Observe el patrón 1-4-2-4-2-...-2-4-2-4-1 de los coeficientes en la aproximación de Simpson. Este patrón es simétrico (termina en -2 -4 -1), como se muestra, si y sólo si  $n$  es *par*.

**EJEMPLO 4** La aproximación de Simpson (con  $n = 6$  y  $\Delta x = 0.5$ ) a la integral

$$\int_0^3 x^2 dx = 9$$

de los ejemplos 1 y 2 es

$$S_6 = \frac{0.5}{3} [1 \cdot (0)^2 + 4 \cdot (0.5)^2 + 2 \cdot (1)^2 + 4 \cdot (1.5)^2 + 2 \cdot (2)^2 + 4 \cdot (2.5)^2 + 1 \cdot (3)^2];$$

$$S_6 = 9 \quad (\text{exactamente}).$$

El problema 29 explica por qué la aproximación de Simpson a esta integral particular es *exacta* en vez de ser sólo una buena aproximación.

**EJEMPLO 5** La aproximación de Simpson (con  $n = 10$  y  $\Delta x = 0.1$ ) a la integral

$$\int_0^1 \frac{\text{sen } x}{x} dx$$

del ejemplo 3 es

$$S_{10} = \frac{0.1}{3} \left[ 1 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{\text{sen } 0.1}{0.1} + 2 \cdot \frac{\text{sen } 0.2}{0.2} + 4 \cdot \frac{\text{sen } 0.3}{0.3} + \dots + 2 \cdot \frac{\text{sen } 0.8}{0.8} + 4 \cdot \frac{\text{sen } 0.9}{0.9} + 1 \cdot \frac{\text{sen } 1.0}{1.0} \right];$$

$$S_{10} \approx 0.94608,$$

que tiene la precisión de las *cinco* cifras decimales mostradas.

Los ejemplos 4 y 5 ilustran la mayor precisión de la aproximación de Simpson en comparación con las aproximaciones del punto medio y del trapecio.

Aunque hemos definido la aproximación de Simpson  $S_{2n}$  como un promedio con pesos de las aproximaciones del punto medio y del trapecio, la aproximación de Simpson tiene una interpretación importante en términos de las **aproximaciones parabólicas** a la curva  $y = f(x)$ . Comenzamos con la partición de  $[a, b]$  en  $2n$  subintervalos de igual longitud, y definimos la función parabólica

$$p_i(x) = A_i + B_i x + C_i x^2$$

en  $[x_{2i-2}, x_{2i}]$  como sigue: elegimos los coeficientes  $A_i$ ,  $B_i$  y  $C_i$  de modo que  $p_i(x)$  coincida con  $f(x)$  en los tres puntos  $x_{2i-2}$ ,  $x_{2i-1}$  y  $x_{2i}$  (figura 5.9.13). Podemos hacer esto al resolver las tres ecuaciones

$$A_i + B_i x_{2i-2} + C_i (x_{2i-2})^2 = f(x_{2i-2}),$$

$$A_i + B_i x_{2i-1} + C_i (x_{2i-1})^2 = f(x_{2i-1}),$$

$$A_i + B_i x_{2i} + C_i (x_{2i})^2 = f(x_{2i})$$

para las tres incógnitas  $A_i$ ,  $B_i$  y  $C_i$ . Un cálculo algebraico rutinario (aunque tedioso) (véase el problema 48 de la sección 5.8) muestra que

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} p_i(x) dx = \frac{\Delta x}{3} (y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}).$$

Ahora aproximamos  $\int_a^b f(x) dx$  reemplazando  $f(x)$  con  $p_i(x)$  en el intervalo  $[x_{2i-1}, x_{2i}]$  para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Esto implica

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} p_i(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\Delta x}{3} (y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}) \\ &= \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 4y_{2n-3} \\ &\quad + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}). \end{aligned}$$

Así, la aproximación parabólica descrita aquí produce la aproximación de Simpson  $S_{2n}$  a  $\int_a^b f(x) dx$ .

Los métodos numéricos de esta sección son de particular utilidad para aproximar integrales de funciones que sólo están disponibles en forma gráfica o de tabla. Con frecuencia, éste es el caso con funciones obtenidas mediante datos empíricos o mediciones experimentales.

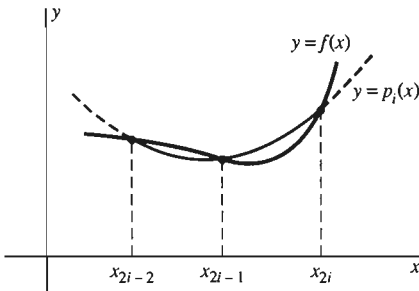
**EJEMPLO 6** Supongamos que la gráfica de la figura 5.9.14 muestra la velocidad  $v(t)$  registrada por los instrumentos a bordo de un submarino que viaja bajo la capa de hielo polar directamente hacia el Polo Norte. Utilice la aproximación del trapecio y la aproximación de Simpson para estimar la distancia  $s = \int_0^{10} v(t) dt$  recorrida por el submarino durante el periodo de 10 horas, de  $t = 0$  a  $t = 10$ .

**Solución** Leemos los siguientes datos de la gráfica.

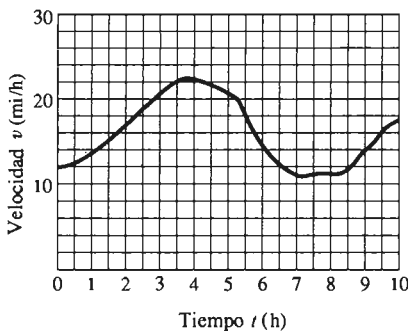
$t$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	h
$u$	12	14	17	21	22	21	15	11	11	14	17	mi/h

Utilizamos la aproximación del trapecio con  $n = 10$  y  $\Delta x = 1$  para obtener

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{10} v(t) dt \\ &\approx \frac{1}{2} [12 + 2 \cdot (14 + 17 + 22 + 23 + 21 + 15 \\ &\quad + 11 + 11 + 14) + 17] \\ &= 162.5 \text{ (mi)}. \end{aligned}$$



**Figura 5.9.13** La aproximación parabólica  $y = p_i(x)$  a  $y = f(x)$  en  $[x_{2i-2}, x_{2i}]$



**Figura 5.9.14** Gráfica de velocidad para el submarino del ejemplo 6

Utilizamos la aproximación de Simpson con  $2n = 10$  y  $\Delta x = 1$  para obtener

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{10} v(t) dt \\ &\approx \frac{1}{3}[12 + 4 \cdot 14 + 2 \cdot 17 + 4 \cdot 22 + 2 \cdot 23 + 4 \cdot 21 \\ &\quad + 2 \cdot 15 + 4 \cdot 11 + 2 \cdot 11 + 4 \cdot 14 + 17] \\ &= 163 \quad (\text{mi}) \end{aligned}$$

como estimación de la distancia recorrida por el submarino durante 10 horas.

## ESTIMACIÓN DEL ERROR

La aproximación del trapecio y la aproximación de Simpson tienen amplio uso en la integración numérica, y existen *estimaciones del error* que se pueden emplear para predecir el error máximo posible en una aproximación particular. El error del trapecio  $ET_n$  y el error de Simpson  $ES_n$  se definen mediante las ecuaciones

$$\int_a^b f(x) dx = T_n + ET_n \quad (13)$$

y

$$\int_a^b f(x) dx = S_n + ES_n \quad (n \text{ par}) \quad (14)$$

respectivamente. Así,  $|ET_n|$  es la diferencia numérica entre el valor del intervalo y la aproximación del trapecio con  $n$  subintervalos, mientras que  $|ES_n|$  es la diferencia numérica entre la integral y la aproximación de Simpson.

Los teoremas 1 y 2 se demuestran en los textos de análisis numérico.

### Teorema 1 *Estimación del error del trapecio*

Supongamos que la segunda derivada  $f''$  es continua en  $[a, b]$  y que  $|f''(x)| \leq M_2$  para toda  $x$  en  $[a, b]$ . Entonces

$$|ET_n| \leq \frac{M_2 (b-a)^3}{12n^2}. \quad (15)$$

### Teorema 2 *Estimación del error de Simpson*

Supongamos que la cuarta derivada  $f^{(4)}$  es continua en  $[a, b]$  y que  $|f^{(4)}(x)| \leq M_4$  para toda  $x$  en  $[a, b]$ . Si  $n$  es par, entonces

$$|ES_n| \leq \frac{M_4 (b-a)^5}{180n^4}. \quad (16)$$

**OBSERVACIÓN** El factor  $n^4$  de la ecuación (16), comparado con  $n^2$  en la ecuación (15) explica la mayor precisión de la aproximación de Simpson. Por ejemplo,

si  $n = 10$ , entonces  $n^2 = 100$  pero  $n^4 = 10,000$ , de modo que el denominador en la fórmula para el error de la aproximación de Simpson es mucho mayor.

**EJEMPLO 7** En el capítulo 7 veremos que el logaritmo natural del número 2 es el valor de la integral

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}.$$

Estime los errores en las aproximaciones del trapecio y de Simpson a esta integral utilizando  $n = 10$  subintervalos. (El valor real de  $\ln 2$  es aproximadamente 0.693147.)

**Solución** Con  $f(x) = 1/x$ , calculamos

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{x^3},$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{x^4}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}.$$

Los valores máximos de todas estas derivadas en  $[1, 2]$  aparecen en  $x = 1$ , por lo que podemos considerar  $M_2 = 2$  y  $M_4 = 24$  en las ecuaciones (15) y (16). De la ecuación (15) vemos que

$$|ET_{10}| \leq \frac{2 \cdot 1^3}{12 \cdot 10^2} \approx 0.0016667, \quad (17)$$

de modo que debemos esperar que la aproximación del trapecio  $T_{10}$  tenga una precisión de al menos dos cifras decimales. De la ecuación (16) vemos que

$$|ES_{10}| \leq \frac{24 \cdot 1^5}{180 \cdot 10^4} \approx 0.000013, \quad (18)$$

por lo que esperamos que la aproximación de Simpson tenga una precisión de al menos cuatro cifras decimales.

Tenemos entonces que  $T_{10} \approx 0.693771$  y que  $S_{10} \approx 0.693150$ , de modo que los errores en estas aproximaciones (en comparación con el valor real de la integral, cercano a 0.693147) son  $ET_{10} \approx 0.000624$  y  $ES_{10} \approx 0.000003$ . Observe que los errores verdaderos son algo menores que sus estimaciones calculadas en las ecuaciones (17) y (18). Es típico de la integración numérica que las aproximaciones del trapecio y de Simpson calculadas en la práctica sean un poco más precisas que las estimaciones del “peor caso” proporcionadas por los teoremas 1 y 2.

## 5.9 Problemas

En los problemas 1 a 6, calcule la aproximación  $T_n$  del trapecio a la integral dada y compare  $T_n$  con el valor exacto de la integral. Utilice el número indicado  $n$  de subintervalos, y redondee las respuestas con dos cifras decimales.

1.  $\int_0^4 x \, dx, \quad n = 4$

2.  $\int_1^2 x^2 \, dx, \quad n = 5$

3.  $\int_0^1 \sqrt{x} \, dx, \quad n = 5$

4.  $\int_1^3 \frac{1}{x^2} \, dx, \quad n = 4$

5.  $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx, \quad n = 3$

6.  $\int_0^{\pi} \sin x \, dx, \quad n = 4$

7 a 12. Calcule las aproximaciones del punto medio a las integrales de los problemas 1 a 6, empleando el número dado de subintervalos. En cada caso, compare  $M_n$  con el valor exacto de la integral.



En los problemas 13 a 20, calcule la aproximación del trapecio  $T_n$  y la aproximación de Simpson  $S_n$  a la integral dada. Utilice el número indicado de subintervalos y redondee las respuestas hasta cuatro cifras decimales. En los problemas 13 a 16, compare también estas aproximaciones con el valor exacto de la integral.

13.  $\int_1^3 x^2 dx, n = 4$

14.  $\int_1^4 x^3 dx, n = 4$

15.  $\int_2^4 \frac{1}{x^3} dx, n = 4$

16.  $\int_0^1 \sqrt{1+x} dx, n = 4$

17.  $\int_0^2 \sqrt{1+x^3} dx, n = 6$

18.  $\int_0^3 \frac{1}{1+x^4} dx, n = 6$

19.  $\int_1^5 \sqrt[3]{1+x^2} dx, n = 8$

20.  $\int_0^1 \frac{\tan x}{x} dx, n = 10$

[Nota: Haga que el integrando del problema 20 sea continuo, suponiendo que su valor en  $x = 0$  es igual a su límite en el mismo punto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1.]$$

En los problemas 21 y 22, calcule (a) la aproximación del trapecio y (b) la aproximación de Simpson a

$$\int_a^b f(x) dx,$$

donde  $f$  es la función tabulada dada.

21.	(x)	a = 1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50 = b
	f(x)	3.43	2.17	0.38	1.87	2.65	2.31	1.97

22.	x	a = 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 = b
	f(x)	23	8	-4	12	35	47	53	50	39	29	5

23. La figura 5.9.15 muestra la tasa medida de flujo de agua (en litros/minuto) en un tanque durante un periodo de 10 minutos. Utilice 10 subintervalos en cada caso y estime la cantidad total de agua que fluye en el tanque durante este periodo empleando (a) la aproximación del trapecio y (b) la aproximación de Simpson.

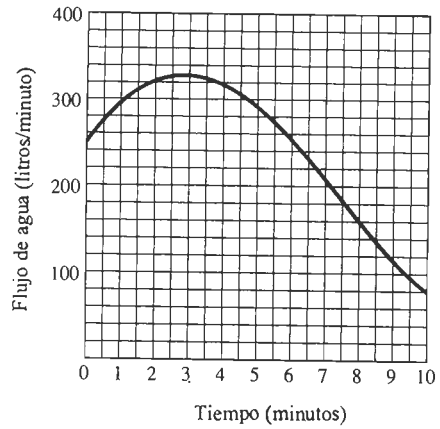


Figura 5.9.15 Gráfica del flujo de agua del problema 23

24. La figura 5.9.16 muestra la temperatura diaria media registrada durante el mes de diciembre en Big Frog, California. Utilice 10 subintervalos en cada caso y estime la temperatura promedio durante ese mes, utilizando (a) la aproximación del trapecio y (b) la aproximación de Simpson.

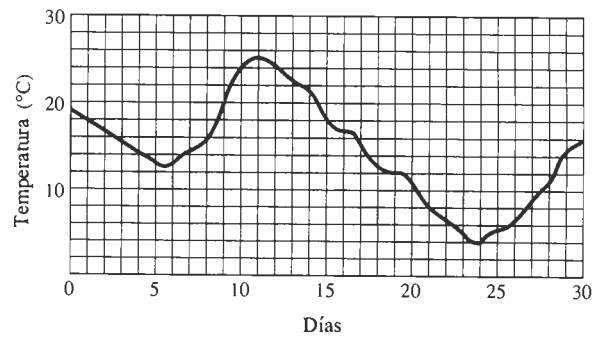


Figura 5.9.16 Gráfica de la temperatura del problema 24

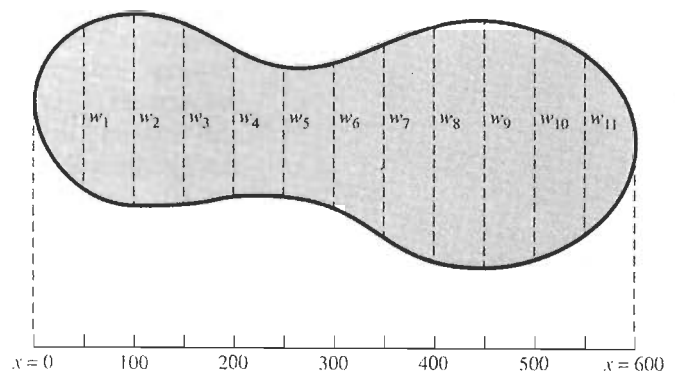


Figura 5.9.17 El terreno del problema 25

25. La figura 5.9.17 muestra un terreno con las medidas en pies. Un topógrafo mide su ancho  $w$  a intervalos de 50 pies (los valores de  $x$  que se muestran en la figura), con los siguientes resultados.

$x$	0	50	100	150	200	250	300
$w$	0	165	192	146	63	42	84

$x$	350	400	450	500	550	600
$w$	155	224	270	267	215	0

Utilice (a) la aproximación del trapecio y (b) la aproximación de Simpson para estimar el área de este terreno en acres. [Nota: Un acre equivale a 4840 yardas cuadradas.]

26. La base para los logaritmos naturales es el número  $e$ . En el capítulo 7 veremos que

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = 1.$$

Aproxime las integrales

$$\int_1^{2.7} \frac{1}{x} dx \quad \text{y} \quad \int_1^{2.8} \frac{1}{x} dx$$

con la precisión suficiente para mostrar que  $2.7 < e < 2.8$ .

Los problemas 27 y 28 se refieren a la integral

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

del ejemplo 7.

27. Use la estimación del error del trapecio para determinar el valor de  $n$  de modo que se garantice que  $T_n$  diste de  $\ln 2$  en a lo más 0.0005.

## 5.9 Proyectos

Estos proyectos requieren el uso de una calculadora programable o una computadora. En los proyectos de la sección 5.4 (véanse las figuras 5.4.10 y 5.4.11) analizamos los programas y las instrucciones de los sistemas de álgebra computacional que se podían emplear para calcular las sumas de Riemann

- $L_n$  la aproximación mediante los extremos izquierdos,
- $R_n$  la aproximación mediante los extremos derechos y
- $M_n$  la aproximación mediante los puntos medios,

con base en una división de  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos de la misma longitud, para aproximar la integral

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Las sumas de Riemann  $L_n$ ,  $R_n$  y  $M_n$  bastan, a su vez, para calcular las aproximaciones del trapecio y de Simpson de esta sección. En particular, la aproximación del trapecio está dada en la ecuación (5) como

$$T_n = \frac{1}{2}(L_n + R_n).$$

28. Use la estimación del error de Simpson para determinar el valor de  $n$  de modo que se garantice que  $S_n$  diste de  $\ln 2$  en a lo más 0.000005.

29. Deduzca lo siguiente de la estimación del error en la aproximación de Simpson: Si  $p(x)$  es un polinomio de grado menor o igual que 3, entonces la aproximación de Simpson con  $n = 2$  subintervalos, da el valor exacto de la integral

$$\int_a^b p(x) dx.$$

30. Utilice el resultado del problema 29 para calcular (sin integrar de manera explícita) el área de la región que se muestra en la figura 5.9.18. [Respuesta: 1331/216.]

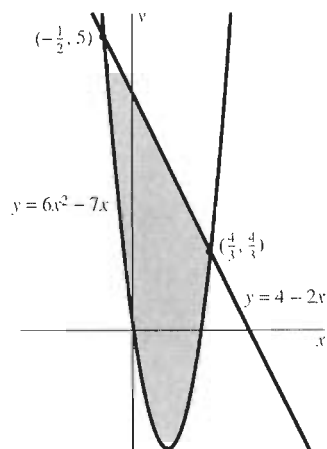


Figura 5.9.18 La región del problema 30

Si  $n$  es un entero *par*, entonces la ecuación (10) implica que la aproximación de Simpson con  $n$  subintervalos de igual longitud está dada por

$$S_n = \frac{1}{3}(2M_{n/2} + T_{n/2}) = \frac{1}{6}(L_{n/2} + 4M_{n/2} + R_{n/2}).$$

Usted puede emplear estas fórmulas para  $T_n$  y  $S_n$  en los siguientes proyectos.

**PROYECTO A** De acuerdo con el ejemplo 7, el logaritmo natural (correspondiente a la tecla  $\boxed{\text{LN}}$  o, en ocasiones, a la tecla  $\boxed{\text{LOG}}$  de la calculadora) del número 2 es el valor de la integral

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}.$$

El valor de  $\ln 2$  con una precisión de 15 cifras decimales es

$$\ln 2 \approx 0.693147180559945.$$

Vea cuántas cifras decimales correctas podemos obtener en un periodo razonable, si empleamos un procedimiento de aproximación de Simpson.

**PROYECTO B** En el capítulo 8 estudiaremos la función inversa de la tangente  $y = \arctan x$  ( $y$  es el ángulo entre  $-\pi/2$  y  $\pi/2$  tal que  $\tan y = x$ ). Ahí veremos que la derivada de  $y = \arctan x$  es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Esto implica que

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \left[ \arctan x \right]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Entonces, el número  $\pi$  es el valor de la integral

$$\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx.$$

El valor de  $\pi$  con una precisión de 15 cifras decimales es

$$\pi \approx 3.141592653589793.$$

Vea cuántas cifras decimales correctas podemos obtener en un periodo razonable, si empleamos un procedimiento de aproximación de Simpson.

## Capítulo 5 Repaso: DEFINICIONES, CONCEPTOS, RESULTADOS

Utilice la siguiente lista como una guía para los conceptos que tal vez necesite revisar.

1. Antiderivación y primitivas
2. La primitiva más general de una función
3. Fórmulas para integrales
4. Problemas con condición inicial
5. Velocidad y aceleración
6. Solución de problemas relacionados con la aceleración constante
7. Propiedades del área
8. Notación para la suma
9. El área bajo la gráfica de  $f$  de  $a$  a  $b$
10. Polígonos regulares inscritos y circunscritos
11. Una partición de  $[a, b]$
12. La norma de una partición
13. Una suma de Riemann asociada con una partición
14. La integral definida de  $f$  de  $a$  a  $b$

15. Existencia de la integral de una función continua  
 16. La integral como un límite de una sucesión de sumas de Riemann  
 17. Particiones regulares y

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

18. Sumas de Riemann  
 19. Las propiedades del múltiplo constante, unión de intervalos y de comparación de las integrales  
 20. Evaluación de integrales definidas mediante las primitivas  
 21. El valor promedio de  $f(x)$  en el intervalo  $[a, b]$   
 22. El teorema del valor promedio

23. El teorema fundamental del cálculo  
 24. Integrales indefinidas  
 25. El método de integración por sustitución  
 26. Transformación de los límites en la integración por sustitución  
 27. El área entre  $y=f(x)$  y  $y=g(x)$  mediante una integración con respecto de  $x$   
 28. El área entre  $x=f(y)$  y  $x=g(y)$  mediante una integración con respecto de  $y$   
 29. Las aproximaciones mediante los extremos izquierdos y derechos  
 30. La aproximación del trapecio  
 31. La aproximación del punto medio  
 32. La aproximación de Simpson  
 33. Estimación del error para la aproximación del trapecio y la aproximación de Simpson

## Capítulo 5 Problemas diversos

Determine las integrales indefinidas de los problemas 1 a 24. En los problemas 13 a 24, utilice la sustitución indicada.

1.  $\int \frac{x^5 - 2x + 5}{x^3} dx$       2.  $\int \sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^3 dx$   
 3.  $\int (1 - 3x)^9 dx$       4.  $\int \frac{7}{(2x + 3)^3} dx$   
 5.  $\int \sqrt[3]{9 + 4x} dx$       6.  $\int \frac{24}{\sqrt{6x + 7}} dx$   
 7.  $\int x^3(1 + x^4)^5 dx$       8.  $\int 3x^2 \sqrt{4 + x^3} dx$   
 9.  $\int x \sqrt[3]{1 - x^2} dx$       10.  $\int \frac{3x}{\sqrt{1 + 3x^2}} dx$   
 11.  $\int (7 \cos 5x - 5 \sin 7x) dx$   
 12.  $\int (5 \sin^3 4x \cos 4x) dx$   
 13.  $\int x^3 \sqrt{1 + x^4} dx; u = x^4$   
 14.  $\int \sin^2 x \cos x dx; u = \sin x$   
 15.  $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^2} dx; u = 1 + \sqrt{x}$   
 16.  $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^2} dx; u = \sqrt{x}$   
 17.  $\int x^2 \cos 4x^3 dx; u = 4x^3$   
 18.  $\int x(x + 1)^{14} dx; u = x + 1$

19.  $\int x(x^2 + 1)^{14} dx; u = x^2 + 1$   
 20.  $\int x^3 \cos x^4 dx; u = x^4$   
 21.  $\int x \sqrt{4 - x} dx; u = 4 - x$   
 22.  $\int \frac{x + 2x^3}{(x^4 + x^2)^3} dx; u = x^4 + x^2$   
 23.  $\int \frac{2x^3}{\sqrt{1 + x^4}} dx; u = x^4$   
 24.  $\int \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + x}} dx; u = x^2 + x$

Resuelva los problemas con condiciones iniciales de los problemas 25 a 30.

25.  $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2x; y(0) = 5$   
 26.  $\frac{dy}{dx} = 3\sqrt{x}; y(4) = 20$   
 27.  $\frac{dy}{dx} = (2x + 1)^5; y(0) = 2$   
 28.  $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{x + 5}}; y(4) = 3$   
 29.  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}; y(1) = 1$   
 30.  $\frac{dy}{dx} = 1 - \cos x; y(0) = 0$

31. Al aplicar completamente sus frenos, cierto automóvil tiene una desaceleración constante de 22 pies/seg<sup>2</sup>. Si su velocidad inicial es de 90 millas/hora, ¿cuánto tarda en detenerse?, ¿cuántos pies recorre durante ese tiempo?

32. En la novela *Mission of Gravity* de Hal Clement, gran parte de la acción se realiza en las regiones polares del planeta Mesklin, donde la aceleración de la gravedad es 22,500 pies/seg<sup>2</sup>. Una piedra se suelta cerca del polo norte de Mesklin desde una altura de 450 pies. ¿Cuánto tiempo permanece en el aire?, ¿con qué velocidad llega al suelo?

33. Un automóvil viaja a lo largo del eje  $x$  en la dirección positiva. En el instante  $t = 0$  se aplican los frenos completamente, y el auto experimenta una desaceleración constante de 40 pies/seg<sup>2</sup> mientras se derrapa. El auto derrapa 180 pies antes de detenerse. ¿Cuál era su velocidad inicial?

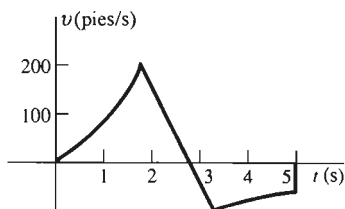
34. Si un auto parte del reposo con una aceleración de 8 pies/seg<sup>2</sup>, ¿qué distancia habrá recorrido cuando alcance una velocidad de 60 millas/hora?

35. En el planeta Zorg, una pelota es soltada desde una altura de 20 pies y llega al suelo en 2 segundos. Si la pelota se suelta desde lo alto de un edificio de 200 pies en ese planeta, ¿cuánto tarda en llegar al suelo?, ¿con qué velocidad llega?

36. Suponga que puede arrojar una pelota desde la superficie de la Tierra directamente hacia arriba, hasta una altura máxima de 144 pies. (a) ¿Qué tan alto podría arrojar la pelota en el planeta del problema 35? (b) ¿Qué tan alto podría arrojarla en las regiones polares de Mesklin (problema 32)?

37. Suponga que un automóvil derrapa 44 pies si su velocidad era 30 millas/hora al aplicar los frenos por completo. Suponga la misma desaceleración constante, ¿qué distancia recorre al derrapar si su velocidad es 60 millas/hora al aplicar los frenos por completo?

38. La gráfica de la velocidad de un cohete prototipo lanzado en el instante  $t = 0$  se muestra en la figura 5.PD.1. (a) ¿En qué momento se terminó el combustible? (b) ¿En qué momento se abrió el paracaídas? (c) ¿En qué momento alcanzó el cohete su máxima altura? (d) ¿En qué momento aterrizó? (e) ¿Hasta qué altura llegó? (f) ¿A qué altura estaba el lugar donde aterrizó el cohete?



**Figura 5.PD.1** La gráfica de la velocidad del cohete del problema 38

Determine las sumas en los problemas 39 a 42.

39.  $\sum_{i=1}^{100} 17$

40.  $\sum_{k=1}^{100} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$

41.  $\sum_{n=1}^{10} (3n - 2)^2$

42.  $\sum_{n=1}^{16} \sin \frac{n\pi}{2}$

En los problemas 43 a 45, determine el límite de la suma de Riemann dada asociada con una partición regular del intervalo dado  $[a, b]$ . Expresé éste primero como una integral de  $a$  a  $b$  y después evalúe dicha integral.

43.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta x}{\sqrt{x_i^*}}; [1, 2]$

44.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [(x_i^*)^2 - 3x_i^*] \Delta x; [0, 3]$

45.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2\pi x_i^* \sqrt{1 + (x_i^*)^2} \Delta x; [0, 1]$

46. Evalúe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \dots + n^{10}}{n^{11}}$$

expresando este límite como una integral en  $[0, 1]$ .

47. Utilice sumas de Riemann para demostrar que si  $f(x) \equiv c$  (una constante), entonces

$$\int_a^b f(x) dx = c(b - a).$$

48. Utilice sumas de Riemann para demostrar que si  $f$  es continua en  $[a, b]$  y  $f(x) \geq 0$  para toda  $x$  en  $[a, b]$ , entonces

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

49. Utilice la propiedad de comparación de integrales (sección 5.5) para demostrar que

$$\int_a^b f(x) dx > 0$$

si  $f$  es una función continua tal que  $f(x) > 0$  en  $[a, b]$ .

Evalúe las integrales de los problemas 50 a 63.

50.  $\int_0^1 (1 - x^2)^3 dx$

51.  $\int \left( \sqrt{2x} - \frac{1}{\sqrt{3x^3}} \right) dx$

52.  $\int \frac{(1 - \sqrt[3]{x})^2}{\sqrt{x}} dx$

53.  $\int \frac{4 - x^3}{2x^2} dx$

54.  $\int_0^1 \frac{dt}{(3 - 2t)^2}$

55.  $\int \sqrt{x} \cos x \sqrt{x} dx$

56.  $\int_0^2 x^2 \sqrt{9 - x^3} dx$

57.  $\int \frac{1}{t^2} \sin \frac{1}{t} dt$

58.  $\int_1^2 \frac{2t + 1}{\sqrt{t^2 + t}} dt$

59.  $\int \frac{\sqrt[3]{u}}{(1 + u^{4/3})^3} du$

60.  $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin t}{\sqrt{\cos t}} dt$

61.  $\int_1^4 \frac{(1 + \sqrt{t})^2}{\sqrt{t}} dt$

$$62. \int \frac{1}{u^2} \sqrt[3]{1 - \frac{1}{u}} du \quad 63. \int \frac{\sqrt{4x^2 - 1}}{x^4} dx$$

Determine las áreas de las regiones acotadas por las curvas dadas en los problemas 64 a 70.

$$64. y = x^3, \quad x = -1, \quad y = 1$$

$$65. y = x^4, \quad y = x^5$$

$$66. y^2 = x, \quad 3y^2 = x + 6$$

$$67. y = x^4, \quad y = 2 - x^2$$

$$68. y = x^4, \quad y = 2x^2 - 1$$

$$69. y = (x - 2)^2, \quad y = 10 - 5x$$

$$70. y = x^{2/3}, \quad y = 2 - x^2$$

71. Evalúe la integral

$$\int_0^2 \sqrt{2x - x^2} dx$$

interpretándola como el área de una región.

72. Evalúe la integral

$$\int_1^5 \sqrt{6x - 5 - x^2} dx$$

interpretándola como el área de una región.

73. Determine una función  $f$  tal que

$$x^2 = 1 + \int_1^x \sqrt{1 + [f(t)]^2} dt$$

para toda  $x > 1$ . [Sugerencia: Derive ambos lados de la ecuación con la ayuda del teorema fundamental del cálculo.]

74. Muestre que  $G'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x)$  si

$$G(x) = \int_a^{h(x)} \phi(t) dt.$$

75. Utilice las aproximaciones mediante los extremos izquierdos y derechos para estimar

$$\int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx$$

con un error no mayor de 0.05.

76. Calcule la aproximación del trapecio y la aproximación de Simpson de

$$\int_0^\pi \sqrt{1 - \cos x} dx$$

con seis subintervalos. Como comparación, emplee una identidad adecuada con un ángulo mitad para calcular el valor exacto de esta integral.

77. Calcule la aproximación de los puntos medios y la aproximación del trapecio de

$$\int_1^2 \frac{dx}{x + x^2}$$

con  $n = 5$  subintervalos. Después explique por qué el valor exacto de la integral está entre estas dos aproximaciones.

En los problemas 78 a 80, sea  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  una partición de  $[a, b]$ , donde  $a < b$ .

78. Para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , dada por  $x_i^*$

$$(x_i^*)^2 = \frac{1}{3}[(x_{i-1})^2 + x_{i-1}x_i + (x_i)^2].$$

Muestre primero que  $x_{i-1} < x_i^* < x_i$ . Utilice entonces la identidad algebraica

$$(c - d)(c^2 + cd + d^2) = c^3 - d^3$$

para mostrar que

$$\sum_{i=1}^n (x_i^*)^2 \Delta x_i = \frac{1}{3}(b^3 - a^3).$$

Explique por qué este cálculo demuestra que

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3).$$

79. Sea  $x_i^* = \sqrt{x_{i-1}x_i}$  para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  y suponga que  $0 < a < b$ . Muestre que

$$\sum_{i=1}^n \frac{\Delta x_i}{(x_i^*)^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Después explique por qué este cálculo demuestra que

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

80. Suponga que  $0 < a < b$ . Defina  $x_i^*$  por medio de la ecuación  $(x_i^*)^{1/2}(x_i - x_{i-1}) = 2/3[(x_i)^{3/2} - (x_{i-1})^{3/2}]$ . Muestre que  $x_{i-1} < x_i^* < x_i$ . Utilice esta selección para la partición dada y demuestre que

$$\int_a^b \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}(b^{3/2} - a^{3/2}).$$

81. Obtuvimos la ecuación (12) para la aproximación de Simpson en la sección 5.9 dando a la aproximación del punto medio el "peso"  $2/3$  y a la aproximación del trapecio el peso  $1/3$ . ¿Por qué no utilizar otros pesos? Revise el análisis de la sección 5.9 acerca de las aproximaciones parabólicas y después resuelva el problema 48 de la sección 5.8. Esto le dará la mayor parte de la respuesta.

# Aplicaciones de la integral

O El concepto general de integración se remonta al cálculo de áreas y volúmenes en la antigüedad, pero las integrales utilizadas por Newton y Leibniz no se definieron con la suficiente precisión para comprenderlas cabalmente. Al matemático alemán G. F. Bernhard Riemann debemos la definición moderna que emplea "sumas de Riemann". Hijo de un ministro protestante, Riemann estudió teología y filología en la Universidad de Göttingen (Alemania) hasta que obtuvo el permiso de su padre para estudiar matemáticas. Fue transferido a la Universidad de Berlín, donde obtuvo su doctorado en 1851. Su trabajo en la década posterior le aseguró un lugar en la breve lista de los matemáticos más profundos y creativos de todos los tiempos. Pero en 1862 enfermó gravemente. Nunca se recuperó del todo y en 1866 murió de manera prematura a la edad de 39 años.

O Las investigaciones matemáticas de Riemann fueron tan variadas como profundas, desde los conceptos básicos de funciones e integrales hasta áreas tales como la geometría (diferencial) no euclidiana y la distribución de los números primos. Recordemos que un entero  $p > 1$  es *primo* si no se

puede factorizar mediante enteros positivos menores que él. En un famoso artículo de 1859, Riemann analizó la aproximación

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} = \text{li}(x)$$

al número  $\pi(x)$  de aquellos primos menores o iguales que  $x$  (donde  $\ln x$  denota el logaritmo natural de  $x$ ). Existe una correspondencia admirable entre los valores de  $\pi(x)$  y la aproximación  $\text{li}(x)$  de la "integral logarítmica":

$x$	1,000,000	10,000,000
$\text{li}(x)$	78,628	664,918
$\pi(x)$	78,498	664,579
error	0.165%	0.051%

$x$	100,000,000	1,000,000,000
$\text{li}(x)$	5,762,209	50,849,235
$\pi(x)$	5,761,455	50,847,534
error	0.013%	0.003%

Treinta años después de la muerte de Riemann, sus ideas condujeron en última instancia a una demostración de que el porcentaje de error en la aproximación  $E(x)$  a  $\pi(x)$  tiende a cero cuando  $x \rightarrow \infty$ .

O En su tesis de 1851, Riemann presentó una forma geométrica de

visualizar las funciones "multivaluadas", como la función raíz cuadrada, con dos valores  $\pm \sqrt{x}$ . La siguiente gráfica ilustra la función raíz cúbica. Para cada número complejo  $z = x + yi$  en el disco unitario  $x^2 + y^2 \leq 1$ , las tres raíces cúbicas (complejas) de  $z$  se trazan directamente arriba de  $z$ . Cada raíz se grafica a una altura igual a su parte real, de modo que el color queda determinado por su parte imaginaria. El resultado es la "superficie de Riemann" de la función raíz cúbica.

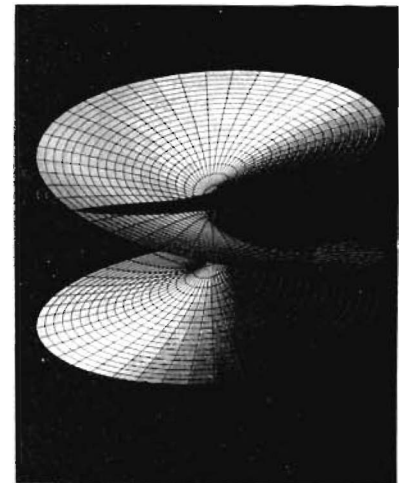


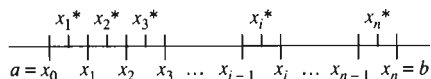
Imagen creada en MATLAB, cortesía de The MathWorks, Inc., Natick, MA.

# 6.1 Construcción de fórmulas integrales

En la sección 5.4 definimos la integral de una función  $f$  en el intervalo  $[a, b]$  como el límite de sumas de Riemann. Específicamente, dividimos el intervalo  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos, todos con la misma longitud  $\Delta x = (b-a)/n$  (figura 6.1.1). Después una selección de números  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$  en estos subintervalos (donde  $x_i^*$  es un punto del  $i$ -ésimo subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ ) produce una suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x \tag{1}$$

cuyos valores aproximan la integral de  $f$  en  $[a, b]$ . El valor de la integral, es el valor límite (si existe) de tales sumas cuando la longitud  $\Delta x$  del subintervalo tiende a cero. Es decir,



$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x. \tag{2}$$

**Figura 6.1.1** Una división (o partición) de  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos de igual longitud

La amplia variedad de aplicaciones de la integral definida surge del hecho de que muchas cantidades geométricas y físicas se pueden aproximar arbitrariamente mediante sumas de Riemann. Estas aproximaciones conducen a las fórmulas integrales para el cálculo de estas cantidades.

Por ejemplo, supongamos que  $f(x)$  es positiva en  $[a, b]$  y que nuestro objetivo, como en la sección 5.3, es calcular el área  $A$  de la región que se encuentra bajo la gráfica de  $y = f(x)$  en el intervalo  $[a, b]$ . Comenzamos con la subdivisión (o partición) de  $[a, b]$  que se indica en la figura 6.1.1; sea  $\Delta A_i$  el área de la “banda” vertical que se encuentra bajo  $y = f(x)$  sobre el  $i$ -ésimo subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ . Entonces, como se ilustra en la figura 6.1.2, la suma del “área de las bandas”

$$\Delta A_1, \Delta A_2, \dots, \Delta A_n$$

produce el área total  $A$ :

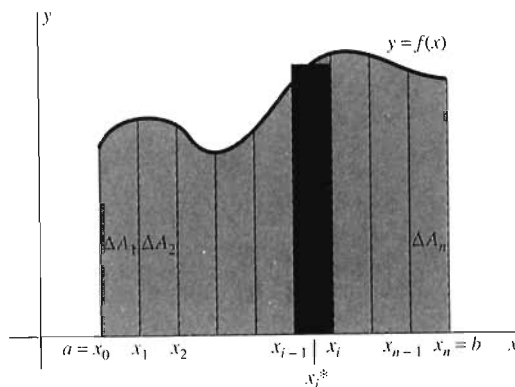
$$A = \sum_{i=1}^n \Delta A_i. \tag{3}$$

Pero la  $i$ -ésima banda se aproxima mediante un rectángulo con base  $[x_{i-1}, x_i]$  y altura  $f(x_i^*)$ , por lo que su área es aproximada por

$$\Delta A_i \approx f(x_i^*) \Delta x. \tag{4}$$

Después de sustituir la ecuación (4) en la ecuación (3), se puede ver que el área total  $A$  bajo la gráfica de  $f$  es aproximada por

$$A \approx \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x. \tag{5}$$



**Figura 6.1.2** Aproximación de un área mediante una suma de Riemann



Observe que la suma de aproximación en el lado derecho es una suma de Riemann para  $f$  en  $[a, b]$ . Además,

1. Es intuitivamente evidente que la suma de Riemann en (5) tiende al área real cuando  $n \rightarrow +\infty$  (que fuerza a  $\Delta x \rightarrow 0$ );
2. Por la definición de la integral, esta suma de Riemann tiende a

$$\int_a^b f(x) dx \text{ cuando } n \rightarrow +\infty.$$

Estas observaciones justifican la *definición* del área  $A$  mediante la fórmula

$$A = \int_a^b f(x) dx. \tag{6}$$

### OTRAS CANTIDADES COMO INTEGRALES

Nuestra justificación de la fórmula del área de la ecuación (6) ilustra un método general importante para establecer fórmulas integrales. Suponga que queremos calcular cierta cantidad  $Q$  asociada con un intervalo  $[a, b]$  de tal forma que los subintervalos de  $[a, b]$  corresponden a porciones específicas de  $Q$  (como la porción de área que se encuentra por arriba de un subintervalo particular). Entonces una subdivisión de  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos produce porciones

$$\Delta Q_1, \Delta Q_2, \dots, \Delta Q_n,$$

cuya suma es la cantidad

$$Q = \sum_{i=1}^n \Delta Q_i. \tag{7}$$

Ahora suponga que podemos determinar una función  $f$  tal que la  $i$ -ésima porción  $\Delta Q_i$  es aproximada por

$$\Delta Q_i \approx f(x_i^*) \Delta x \tag{8}$$

(para toda  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ) para un punto seleccionado  $x_i^*$  del  $i$ -ésimo subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  de  $[a, b]$ . Entonces la sustitución de la ecuación (8) en la ecuación (7) produce la suma de Riemann de aproximación

$$Q \approx \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x \tag{9}$$

análoga a la aproximación en la ecuación (5). La suma del lado derecho de la ecuación (9) es una suma de Riemann que tiende a la integral

$$\int_a^b f(x) dx \text{ cuando } n \rightarrow +\infty.$$

También es evidente (por razones geométricas o físicas, por ejemplo) que esta suma de Riemann debe tender a la cantidad  $Q$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ ; así, la ecuación (9) justifica establecer la fórmula integral

$$Q = \int_a^b f(x) dx. \tag{10}$$

Como el lado derecho de la ecuación (10) generalmente es fácil de calcular (por el teorema fundamental del cálculo), esto nos da una forma práctica de determinar el valor numérico exacto de la cantidad  $Q$ .

Además del área, las siguientes son algunas de las cantidades que pueden calcularse utilizando las fórmulas integrales como en la ecuación (10). (La variable  $x$  se reemplaza por  $t$  donde sea apropiado.)

- La *masa* de un varilla delgada que se encuentra en el intervalo  $a \leq x \leq b$ ;
- La *ganancia* obtenida por una compañía entre el instante  $t = a$  y el instante  $t = b$ ;
- El *número* de personas en una ciudad que contraen una cierta enfermedad entre el instante  $t = a$  y el instante  $t = b$ ;
- La *distancia* recorrida por una partícula durante el intervalo de tiempo  $a \leq t \leq b$ ;
- El *volumen* de agua que fluye a un tanque durante el intervalo de tiempo  $y a \leq t \leq b$ ; y
- El *trabajo* realizado por una fuerza que mueve una partícula desde el punto  $x = a$  hasta el punto  $x = b$ .

En cada caso, es evidente que un *subintervalo* de  $[a, b]$  determina una *porción* específica  $\Delta Q$  de la cantidad total  $Q$  correspondiente a todo el intervalo  $[a, b]$ . La pregunta es: ¿Cuál función  $f$  debemos integrar de  $a$  a  $b$ ? Los ejemplos 1 a 3 ilustran el proceso para determinar la función necesaria  $f$  aproximando la porción  $\Delta Q_i$  de la cantidad  $Q$  que corresponde al subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ . Una aproximación de la forma

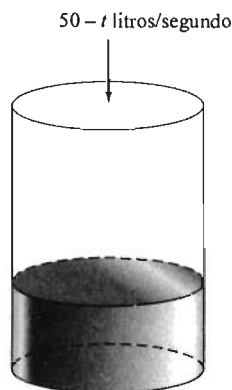
$$\Delta Q_i \approx f(x_i^*) \Delta x \quad (8)$$

conduce a la fórmula integral deseada

$$Q = \int_a^b f(x) dx. \quad (10)$$

La integral de la ecuación (10) resulta de la suma de la ecuación (9) cuando reemplazamos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n & \text{ se convierte en } \int_a^b, \\ x_i^* & \text{ se convierte en } x \text{ y} \\ \Delta x & \text{ se convierte en } dx. \end{aligned}$$



**Figura 6.1.3** El tanque del ejemplo 1

**EJEMPLO 1** Suponga que se bombea agua hacia el tanque inicialmente vacío de la figura 6.1.3. La velocidad con que fluye el agua al tanque en el instante  $t$  (en segundos) es  $50 - t$  litros (L) por segundo. ¿Cuánta agua fluye al tanque durante los primeros 30 segundos?

**Solución** Queremos calcular la cantidad  $Q$  de agua que fluye al tanque durante el intervalo  $[0, 30]$ . Piense en una subdivisión de  $[0, 30]$  de  $n$  subintervalos, todos con la misma longitud  $\Delta t = 30/n$ .

Después elija un punto  $t_i^*$  en el subintervalo  $[t_{i-1}, t_i]$ . Si este subintervalo es muy pequeño, entonces la velocidad con que fluye el agua entre el instante  $t_{i-1}$  y el instante  $t_i$  es aproximadamente  $50 - t_i^*$  litros/segundo. Así, obtenemos una aproximación de la cantidad  $\Delta Q_i$  de agua *en litros* que fluye al tanque durante este

subintervalo de tiempo multiplicando la *velocidad del flujo en litros por segundo* por la *duración del flujo en segundos*:

$$\left[ (50 - t_i^*) \frac{\text{litros}}{\text{segundo}} \right] \cdot [\Delta t \text{ segundos}].$$

y por tanto

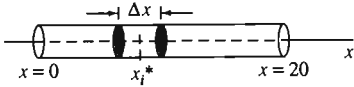
$$\Delta Q_i \approx (50 - t_i^*) \Delta t \quad (\text{litros}).$$

En consecuencia, la cantidad total  $Q$  que buscamos es aproximada por

$$Q = \sum_{i=1}^n \Delta Q_i \approx \sum_{i=1}^n (50 - t_i^*) \Delta t \quad (\text{litros}).$$

Reconocemos que la suma de la derecha es una suma de Riemann y (lo que es más importante) vemos que es una suma de Riemann para la función  $f(t) = 50 - t$ . Por tanto, concluimos que

$$\begin{aligned} Q &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (50 - t_i^*) \Delta t = \int_0^{30} (50 - t) dt \\ &= \left[ 50t - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^{30} = 1050 \quad (\text{litros}). \end{aligned}$$



**Figura 6.1.4** La varilla de 20 cm del ejemplo 2

**EJEMPLO 2** La figura 6.1.4 muestra una varilla delgada de 20 cm de largo. Su *densidad* (lineal) en el punto  $x$  es  $15 + 2x$  gramos de masa por centímetro de longitud de la varilla (g/cm). Entonces, la densidad de la varilla varía de 15 g/cm en el extremo izquierdo  $x = 0$  a 55 g/cm en el extremo derecho  $x = 20$ . Determine la masa total  $M$  de esta varilla.

**Solución** Piense en una subdivisión de  $[0, 20]$  con  $n$  subintervalos, cada uno de longitud  $\Delta x = 20/n$ . La figura 6.1.4 muestra el pedazo de varilla correspondiente al  $i$ -ésimo subintervalo típico  $[x_{i-1}, x_i]$ . Si  $x_i^*$  es, por ejemplo, el punto medio de  $[x_{i-1}, x_i]$ , entonces la densidad de este pedazo es cercana a  $15 + 2x_i^*$  en todo punto, de modo que obtenemos una aproximación de la *masa en gramos* de este fragmento multiplicando su *densidad en gramos por centímetro* por su *longitud en centímetros*:

$$\left[ (15 + 2x_i^*) \frac{\text{gramos}}{\text{centímetro}} \right] \cdot [\Delta x \text{ centímetros}].$$

Es decir,

$$\Delta M_i \approx (15 + 2x_i^*) \Delta x \quad (\text{gramos}).$$

Por consiguiente, la masa total  $M$  de toda la varilla es aproximada por

$$M = \sum_{i=1}^n \Delta M_i \approx \sum_{i=1}^n (15 + 2x_i^*) \Delta x.$$

Reconocemos una suma de Riemann en el lado derecho, como en el ejemplo 1, aunque esta vez corresponde a la función  $f(x) = 15 + 2x$  en el intervalo  $[0, 20]$ . Por tanto, concluimos que

$$\begin{aligned} M &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (15 + 2x_i^*) \Delta x = \int_0^{20} (15 + 2x) dx \\ &= \left[ 15x + x^2 \right]_0^{20} = 700 \quad (\text{g}). \end{aligned}$$

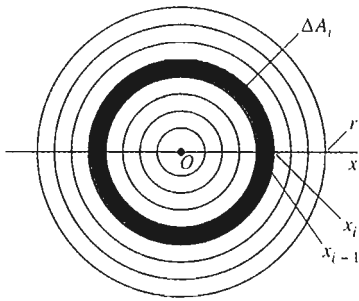


Figura 6.1.5 El círculo dividido en anillos (ejemplo 3)

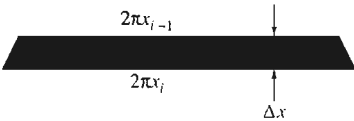


Figura 6.1.6 Un anillo "rectificado" (ejemplo 3)

**EJEMPLO 3** En el ejemplo 5 de la sección 5.8 obtuvimos la fórmula para el área de un círculo,  $A = \pi r^2$ , a partir de la definición del número  $\pi$  como el área de un círculo de radio 1. Consideraremos ahora un punto de vista diferente y comenzaremos con la fórmula

$$C = 2\pi r \quad (11)$$

para la *circunferencia* de un círculo de radio  $r$ .

La figura 6.1.5 muestra un disco circular de radio  $r$  dividido en anillos (arandelas) mediante círculos concéntricos cuyos radios son los puntos  $x_1, x_2, \dots, x_n = r$  de una subdivisión del intervalo  $[0, r]$  del eje  $x$ , en subintervalos de igual longitud  $n$ . El  $i$ -ésimo anillo correspondiente al  $i$ -ésimo subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  está acotado por los círculos de radio  $x_{i-1}$  y  $x_i$ . Para aproximar su área  $\Delta A_i$ , pensamos que cortamos este anillo rectangular fuera del disco circular y lo desdoblamos como una banda larga de ancho  $\Delta x$  (figura 6.1.6). Las longitudes de los extremos superior e inferior de esta banda son simplemente las circunferencias  $2\pi x_{i-1}$  y  $2\pi x_i$  de los dos círculos que acotan la banda. Esto implica que

$$2\pi x_{i-1} \Delta x \leq \Delta A_i \leq 2\pi x_i \Delta x,$$

de modo que

$$\Delta A_i \approx 2\pi x_i^* \Delta x$$

para cualquier  $x_i^*$  en  $[x_{i-1}, x_i]$ . Al sumar el área de todos los anillos de este tipo que conforman el disco circular, obtenemos la aproximación

$$A = \sum_{i=1}^n \Delta A_i \approx \sum_{i=1}^n 2\pi x_i^* \Delta x.$$

Reconocemos en el lado derecho una suma de Riemann para  $f(x) = 2\pi x$  y concluimos que el área de un círculo de radio  $r$  está dada por

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2\pi x_i^* \Delta x = \int_0^r 2\pi x \, dx = \left[ \pi x^2 \right]_0^r = \pi r^2.$$

Al establecer las fórmulas integrales en los ejemplos 1 a 3, la clave fue reconocer una suma de Riemann cuando ésta se presente.

**EJEMPLO 4** Calcule  $Q$  si

$$Q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m_i \sqrt{25 - (m_i)^2} \Delta x,$$

donde (para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ )  $m_i$  denota el punto medio del  $i$ -ésimo subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  de una partición del intervalo  $[3, 4]$  en  $n$  subintervalos, todos con la misma longitud  $\Delta x = 1/n$ .

**Solución** Reconocemos las sumas dadas como una suma de Riemann (con  $x_i^* = m_i$ ) para la función  $f(x) = x \sqrt{25 - x^2}$ . Por tanto,

$$Q = \int_3^4 x \sqrt{25 - x^2} \, dx = \left[ -\frac{1}{3} (25 - x^2)^{3/2} \right]_3^4 = \frac{1}{3} (16^{3/2} - 9^{3/2}) = \frac{37}{3}.$$

## DISTANCIA Y VELOCIDAD

Considere una partícula que viaja en línea recta (dirigida) con velocidad  $v = f(t)$  en el instante  $t$ . Queremos calcular la **distancia neta**  $s$  que recorre entre  $t = a$  y  $t = b$ ; es decir, la distancia entre su posición inicial en el instante  $t = a$  y su posición final en el instante  $t = b$ .

Comenzamos con una división de  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos, todos con la misma longitud  $\Delta t = (b - a)/n$ . Si  $t_i^*$  es un punto arbitrario del  $i$ -ésimo subintervalo  $[t_{i-1}, t_i]$ , entonces, durante este subintervalo de tiempo, la velocidad de la partícula es aproximadamente  $f(t_i^*)$ . Por tanto, la distancia  $\Delta s_i$  recorrida por la partícula entre  $t = t_{i-1}$  y  $t = t_i$  es aproximada por

$$\Delta s_i \approx f(t_i^*) \Delta t.$$

En consecuencia, la distancia neta  $s$  es aproximada por

$$s = \sum_{i=1}^n \Delta s_i \approx \sum_{i=1}^n f(t_i^*) \Delta t \quad (12)$$

Reconocemos la aproximación del lado derecho como una suma de Riemann para la función  $f(t)$  en el intervalo  $[a, b]$  y podemos inducir que esta aproximación debe tender a la distancia neta real  $s$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ . Así, concluimos que

$$s = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b v dt. \quad (13)$$

Observe que la *distancia neta es la integral definida de la velocidad*.

Si la función velocidad  $v = f(t)$  tiene valores positivos y negativos para  $t$  en  $[a, b]$ , entonces se cancelan las distancias hacia adelante y hacia atrás cuando calculamos la distancia neta  $s$  dada por la fórmula integral de la ecuación (13). Podemos determinar la **distancia total** recorrida, sin importar la dirección, si evaluamos la integral del *valor absoluto* de la velocidad. Así, la distancia total está dada por

$$\int_a^b |f(t)| dt = \int_a^b |v| dt. \quad (14)$$

Podemos calcular esta integral haciendo la integración por separado en los subintervalos donde  $v$  es positiva y aquellos donde  $v$  es negativa para después sumar los valores absolutos de los resultados. Éste es exactamente el mismo procedimiento que utilizamos para determinar el área entre la gráfica de una función y el eje  $x$  cuando la función tiene valores positivos y negativos.

**EJEMPLO 5** Suponga que la velocidad de una partícula en movimiento es  $v = 30 - 2t$  pies/segundo. Determine la distancia neta y la distancia total recorrida entre  $t = 0$  y  $t = 20$  segundos.

**Solución** Para la distancia neta, utilizamos la ecuación (10) y determinamos que

$$s = \int_0^{20} (30 - 2t) dt = \left[ 30t - t^2 \right]_0^{20} = 200 \text{ (pies).}$$

Para determinar la distancia total recorrida, observamos que  $v$  es positiva si  $t < 15$  y negativa si  $t > 15$ . Como

$$\int_0^{15} (30 - 2t) dt = \left[ 30t - t^2 \right]_0^{15} = 225 \text{ (pies).}$$

y

$$\int_{15}^{20} (30 - 2t) dt = \left[ 30t - t^2 \right]_{15}^{20} = -25 \quad (\text{pies}),$$

vemos que la partícula recorre 225 pies hacia adelante y después 25 pies hacia atrás, para una distancia total recorrida de 250 pies.

## 6.1 Problemas

En los problemas 1 a 10,  $x_i^*$  denota un punto arbitrario, y  $m_i$  el punto medio, del  $i$ -ésimo subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  de una partición del intervalo indicado  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos, cada uno de longitud  $\Delta x$ . Evalúe el límite dado calculando el valor de la integral relacionada adecuada.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2x_i^* \Delta x; \quad a = 0, b = 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta x}{(x_i^*)^2}; \quad a = 1, b = 2$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (\sin \pi x_i^*) \Delta x; \quad a = 0, b = 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [3(x_i^*)^2 - 1] \Delta x; \quad a = -1, b = 3$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i^* \sqrt{(x_i^*)^2 + 9} \Delta x; \quad a = 0, b = 4$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i)^2 \Delta x; \quad a = 2, b = 4$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (2m_i - 1) \Delta x; \quad a = -1, b = 3$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{2m_i + 1} \Delta x; \quad a = 0, b = 4$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\sqrt{(m_i)^2 + 16}} \Delta x; \quad a = -3, b = 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m_i \cos(m_i)^2 \Delta x; \quad a = 0, b = \sqrt{\pi}$

La notación en los problemas 11 a 14 es la misma que en los problemas 1 a 10. Expresé el límite dado como una integral con la función  $f$ .

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2\pi x_i^* f(x_i^*) \Delta x; \quad a = 1, b = 4$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(x_i^*)]^2 \Delta x; \quad a = -1, b = 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f(x_i^*)]^2} \Delta x; \quad a = 0, b = 10$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2\pi m_i \sqrt{1 + [f(m_i)]^2} \Delta x; \quad a = -2, b = 3$

En los problemas 15 a 18, una varilla que coincide con el intervalo  $[a, b]$  en el eje  $x$  (las unidades están en centímetros) tiene la función de densidad  $\rho(x)$  que da su densidad (en gramos por centímetro) en el punto  $x$ . Determine la masa  $M$  de la varilla.

- $a = 0, b = 100; \quad \rho(x) = \frac{1}{5}x$
- $a = 0, b = 25; \quad \rho(x) = 60 - 2x$
- $a = 0, b = 10; \quad \rho(x) = x(10 - x)$
- $a = 0, b = 10; \quad \rho(x) = 10 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{10}$

En los problemas 19 a 28, calcule la distancia neta y la distancia total recorrida, entre los tiempos  $t = a$  y  $t = b$ , por una partícula en movimiento con la función de velocidad dada  $v = f(t)$  a lo largo de una recta.

- $v = -32; \quad a = 0, b = 10$
- $v = 2t + 10; \quad a = 1, b = 5$
- $v = 4t - 25; \quad a = 0, b = 10$
- $v = |2t - 5|; \quad a = 0, b = 5$
- $v = 4t^3; \quad a = -2, b = 3$
- $v = t - \frac{1}{t^2}; \quad a = 0.1, b = 1$
- $v = \operatorname{sen} 2t; \quad a = 0, b = \frac{\pi}{2}$
- $v = \cos 2t; \quad a = 0, b = \frac{\pi}{2}$
- $v = \cos \pi t; \quad a = -1, b = 1$
- $v = \operatorname{sen} t + \cos t; \quad a = 0, b = \pi$

29. Suponga que el disco circular del ejemplo 3 tiene una densidad de masa  $\rho(x)$  (en gramos por centímetro cuadrado) a una distancia  $x$  del origen. Entonces el anillo de las figuras 6.1.5 y 6.1.6 tiene una densidad aproximada  $\rho(x_i^*)$  en cada punto. Concluya que la masa  $M$  de este disco de radio  $r$  está dada por

$$M = \int_0^r 2\pi x \rho(x) dx.$$

En los problemas 30 a 31, utilice el resultado del problema 29 para determinar la masa de un disco circular con el radio  $r$  y la función de densidad  $\rho$  dados.

- $r = 10; \quad \rho(x) = x$
- $r = 5; \quad \rho(x) = 25 - x^2$

32. Si una partícula se arroja hacia arriba en línea recta desde el piso con una velocidad inicial de 160 pies/segundo, entonces su velocidad después de  $t$  segundos es  $v = -32t + 160$  pies/segundos, y alcanza su altura máxima cuando  $t = 5$  segundos (y  $v = 0$ ). Utilice la ecuación (13) para calcular su altura máxima. Verifique su respuesta mediante los métodos de la sección 5.2.

33. Suponga que la velocidad de flujo del agua a un tanque inicialmente vacío es  $100 - 3t$  galones/minuto en el instante  $t$  (en minutos). ¿Cuánta agua fluye al tanque durante el intervalo de  $t = 10$  a  $t = 20$  minutos?

34. Suponga que la tasa de natalidad en Calgary  $t$  años después de 1970 fue  $13 + t$  miles de nacimientos por año. Establezca y evalúe una integral adecuada para calcular el número total de nacimientos que ocurrieron entre 1970 y 1990.

35. Suponga que la ciudad del problema 34 tiene una tasa anual de mortalidad de  $5 + (t/2)$  miles  $t$  años después de 1970. Si la población de la ciudad fue de 125,000 en 1970, ¿cuál fue su población en 1990? Considere los nacimientos y las muertes.

36. El promedio diario de lluvia en Sioux City es  $r(t)$  pulgadas/día en el día  $t$ ,  $0 \leq t \leq 365$ . Comience con una partición del intervalo  $[0, 365]$  y obtenga la fórmula

$$R = \int_0^{365} r(t) dt$$

para el promedio total anual de lluvia  $R$ .

37. Considere el promedio diario de lluvia del problema 36 como

$$r(t) = a - b \cos \frac{2\pi t}{365},$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes por determinar. Si el valor de  $r(t)$  el primero de enero ( $t = 0$ ) es 0.1 pulgadas y su valor de  $r(t)$  el primero de julio ( $t = 182.5$ ) es 0.5 pulgadas, ¿cuál es el promedio total anual de lluvia en esta localidad?

38. Suponga que la velocidad de flujo del agua a un tanque es  $r(t)$  litros/minuto en el instante  $t$  (en minutos). Utilice el método del ejemplo 1 para obtener la fórmula

$$Q = \int_a^b r(t) dt$$

para la cantidad de agua que fluye al tanque entre  $t = a$  y  $t = b$ .

## 6.2 Volúmenes por medio del método de secciones transversales

Utilizaremos integrales para calcular los volúmenes de ciertos sólidos o regiones en el espacio. Comenzamos con la idea intuitiva de volumen como una medida de los sólidos, análoga al área como medida de las regiones planas. En particular, suponemos que toda región sólida acotada  $R$  que se puede expresar de manera sencilla tiene un volumen dado por un número no negativo  $v(R)$  tal que

- Si  $R$  consta de dos piezas que no se traslapan, entonces  $v(R)$  es la suma de sus volúmenes;
- Dos sólidos diferentes tienen el mismo volumen si tienen el mismo tamaño y forma.

39. Evalúe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[3]{n}}{n^{4/3}}$$

determinando primero una función  $f$  tal que el límite sea igual a

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

40. En este problema, usted obtendrá la fórmula del volumen  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$  de una esfera de radio  $r$ , suponiendo conocida la fórmula  $S = 4\pi r^2$  para el área de la superficie de una esfera de radio  $r$ . Suponga que esto implica que el volumen de una capa esférica delgada de grosor  $t$  (figura 6.1.7) es aproximado por  $\Delta V \approx S \cdot t = 4\pi r^2 t$ . Entonces, divida la esfera en capas esféricas concéntricas, análogas a los anillos concéntricos del ejemplo 3. Por último, interprete la suma de los volúmenes de estas capas esféricas como una suma de Riemann.

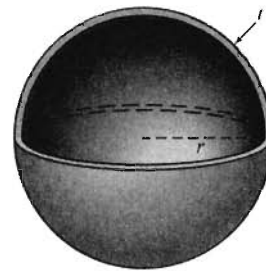
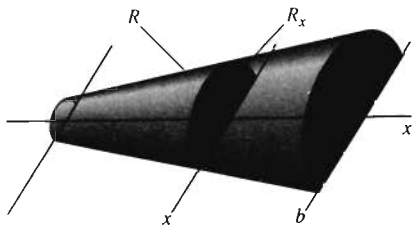


Figura 6.1.7 Una capa esférica delgada de grosor  $t$  y radio interior  $r$  (problema 40)

41. Una esfera tiene radio de 1 pie y, a una distancia  $x$  de su centro, su densidad es  $100(1 + x)$  libras/pies<sup>3</sup>. Utilice las sumas de Riemann para determinar una función  $f(x)$  tal que el peso de la esfera sea

$$W = \int_0^1 f(x) dx$$

(en libras). Después, calcule  $W$  evaluando esta integral. [Sugerencia: Dada una partición  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$  de  $[0, 1]$ , estime el peso  $\Delta W_i$  de la capa esférica  $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ .]



**Figura 6.2.1**  $R_x$  es la sección transversal de  $R$  en el plano perpendicular al eje  $x$ , en el punto  $x$

El **método de las secciones transversales** es una forma de calcular el volumen de un sólido descrito en términos de sus secciones transversales (o “rebanadas”) en planos perpendiculares a una *línea de referencia* fija (como el eje  $x$  o el eje  $y$ ). Por ejemplo, la figura 6.2.1 muestra un sólido  $R$  con volumen  $V = v(R)$  situado a lo largo del intervalo  $[a, b]$  en el eje  $x$ . Es decir, un plano perpendicular al eje  $x$  interseca al sólido si y sólo si este plano corta al eje  $x$  en un punto de  $[a, b]$ . Sea  $R_x$  la intersección de  $R$  con el plano perpendicular que corta al eje  $x$  en el punto  $x$  de  $[a, b]$ .  $R_x$  es la **sección transversal** (plana) del sólido  $R$  en  $x$ .

Esta situación es particularmente simple si todas las secciones transversales de  $R$  son congruentes entre sí y son traslaciones paralelas de las demás. En este caso, el sólido  $R$  es un **cilindro** con **bases**  $R_a$  y  $R_b$  y **altura**  $h = b - a$ . Si  $R_a$  y  $R_b$  son discos circulares, entonces  $R$  es el conocido **cilindro circular**. Recuerde que la fórmula para el volumen de un cilindro circular de altura  $h$  y base circular de radio  $r$  y área  $A = \pi r^2$  es

$$V = \pi r^2 h = Ah.$$

La figura 6.2.2 muestra varios cilindros (generales) con bases de varias formas. El método de secciones transversales se basa en el hecho de que el volumen  $V$  de cualquier cilindro, circular o no, es igual al producto de la altura del cilindro por el área de su base:

$$V = Ah \text{ (volumen de un cilindro)}. \tag{1}$$

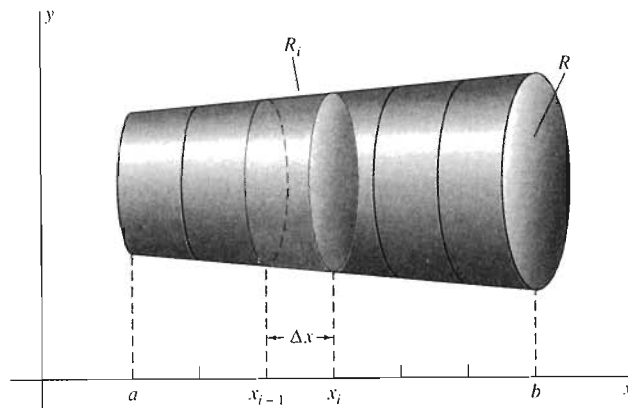
Podemos aproximar el volumen de un sólido más general, como la figura 6.2.1, utilizando cilindros. Para cada  $x$  en  $[a, b]$ , sea  $A(x)$  el área de la sección transversal  $R_x$  del sólido  $R$ :

$$A(x) = a(R_x). \tag{2}$$

Supondremos que la forma de  $R$  es lo bastante sencilla como para que esta **función área de una sección transversal**  $A$  sea continua (y por tanto integrable).

Para establecer una fórmula integral para  $V = v(R)$ , comenzamos con una división de  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos, todos con la misma longitud  $\Delta x = (b - a)/n$ . Sea  $R_i$  la rodaja o rebanada del sólido  $R$  colocada a lo largo del  $i$ -ésimo subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  (figura 6.2.3). Denotamos el volumen de esta  $i$ -ésima rebanada de  $R$  por  $\Delta V_i = v(R_i)$ , de modo que

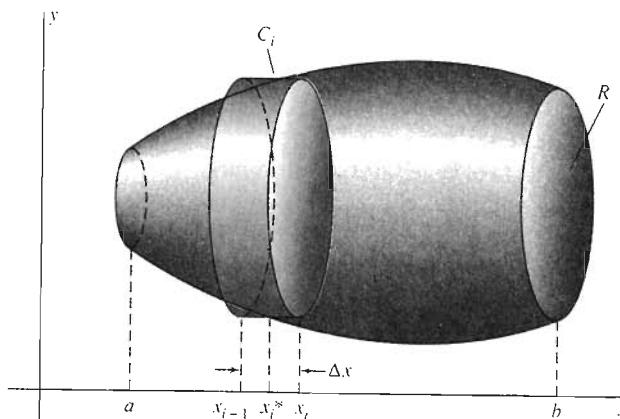
$$V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i.$$



**Figura 6.2.3** Los planos que pasan por los puntos de partición  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ , dividen al sólido  $R$  en rebanadas  $R_1, R_2, \dots, R_n$



**Figura 6.2.4** La rebanada  $R_i$  es aproximada por el cilindro  $C_i$  de volumen  $A(x_i^*) \Delta x$



Para aproximar  $\Delta V_i$ , elegimos un punto típico  $x_i^*$  en  $[x_{i-1}, x_i]$  y consideramos el cilindro  $C_i$  cuya altura es  $\Delta x$  y cuya base es la sección transversal  $R_{x_i}$  de  $R$  en  $x_i^*$ . La figura 6.2.4 sugiere que si  $\Delta x$  es pequeña, entonces  $v(C_i)$  es una buena aproximación a  $\Delta V_i = v(R_i)$ :

$$\Delta V_i \approx v(C_i) = a(R_{x_i^*}) \cdot \Delta x = A(x_i^*) \Delta x,$$

que es consecuencia de la ecuación (1) con  $A = A(x_i^*)$  y  $h = \Delta x$ .

Entonces sumamos los volúmenes de estos cilindros de aproximación para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Tenemos que

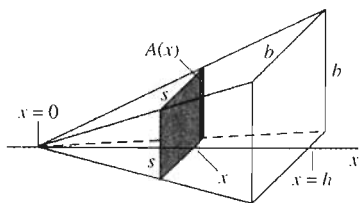
$$V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^n A(x_i^*) \Delta x.$$

Reconocemos la suma de aproximación de la derecha como una suma de Riemann que tiende a  $\int_a^b A(x) dx$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ . Esto justifica la siguiente *definición* del volumen de un sólido  $R$  en términos de su función de área de las secciones transversales  $A(x)$ .

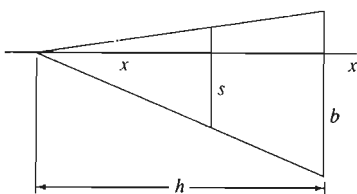
**Definición Volumen por secciones transversales**

Si el sólido  $R$  se encuentra a lo largo del intervalo  $[a, b]$  en el eje  $x$  y tiene una función de área de las secciones transversales  $A(x)$ , entonces su volumen  $V = v(R)$  es

$$V = \int_a^b A(x) dx. \quad (3)$$



(a)



(b)

**Figura 6.2.5** La pirámide de base cuadrada del ejemplo 1

La ecuación (3) se conoce como el **principio de Cavalieri**, en honor del matemático italiano Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647), quien utilizó de manera sistemática el hecho de que el volumen de un sólido queda determinado por las áreas de sus secciones transversales perpendiculares a una línea de referencia dada.

**EJEMPLO 1** La figura 6.2.5(a) muestra una pirámide de base cuadrada orientada de forma que su altura  $h$  corresponde al intervalo  $[0, h]$  en el eje  $x$ . Su base es un cuadrado de lado  $b$  y cada sección transversal perpendicular al eje  $x$ , también es un cuadrado. Para determinar el área  $A(x)$  de la sección transversal  $s$  en  $x$ , igualamos las razones altura/longitud en los triángulos semejantes de la figura 6.2.5(b):

$$\frac{s}{x} = \frac{b}{h}, \text{ de modo que } s = \frac{b}{h}x.$$

Por tanto,

$$A(x) = s^2 = \frac{b^2}{h^2}x^2,$$

y la ecuación (3), con  $[0, h]$  como el intervalo de integración, implica

$$V = \int_0^h A(x) dx = \int_0^h \frac{b^2}{h^2}x^2 dx = \left[ \frac{b^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=h} = \frac{1}{3}b^2h.$$

Si  $A = b^2$  es el área de la base, nuestro resultado toma la forma

$$V = \frac{1}{3}Ah$$

para el volumen de una pirámide.

## SECCIONES TRANSVERSALES PERPENDICULARES AL EJE $y$

En el caso de un sólido  $R$  que se encuentra a lo largo del intervalo  $[c, d]$  en el eje  $y$ , denotamos  $A(y)$  al área de la sección transversal del sólido  $R_y$  en el plano perpendicular al eje  $y$  en el punto  $y$  de  $[c, d]$  (figura 6.2.6). Un análisis similar al anterior, con una partición de  $[c, d]$ , produce la fórmula

$$V = \int_c^d A(y) dy. \quad (4)$$

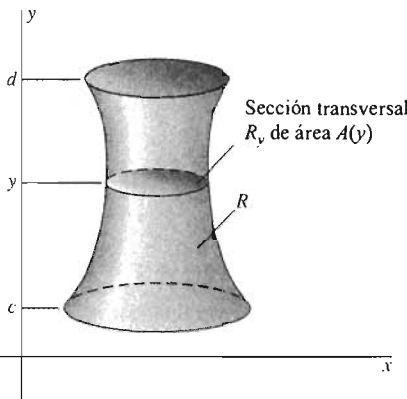
## SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN, DISCOS Y ARANDELAS

Un caso particular importante de la ecuación (3) proporciona el volumen de un **sólido de revolución**. Por ejemplo, consideremos el sólido  $R$  obtenido al girar en torno del eje  $x$ , la región bajo la gráfica de  $y = f(x)$  sobre el intervalo  $[a, b]$ , donde  $f(x) \geq 0$ . Esta región y el sólido resultante se muestran en la figura 6.2.7.

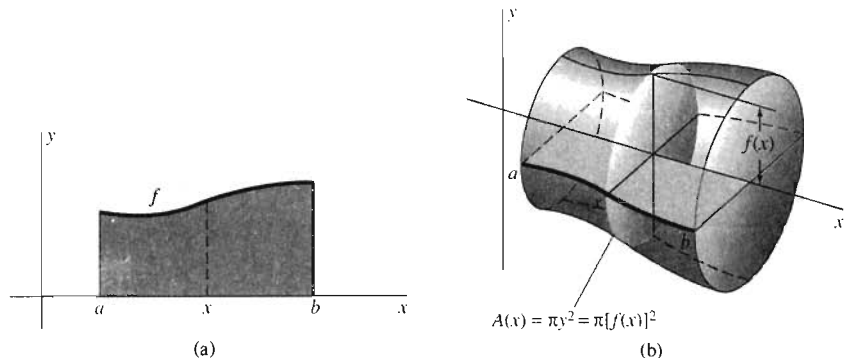
Como el sólido  $R$  se obtiene por revolución, cada sección transversal de  $R$  en  $x$  es un *disco* circular de radio  $f(x)$ . La función área de la sección transversal es entonces  $A(x) = \pi[f(x)]^2$ , de modo que con la ecuación (3) se obtiene

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx \quad (5)$$

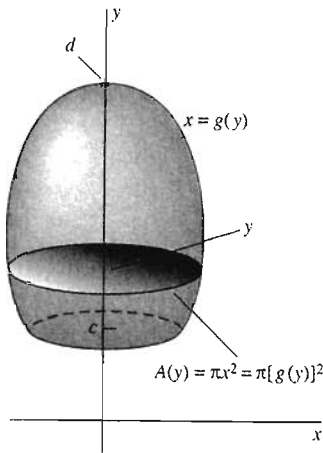
para el **volumen de un sólido de revolución en torno del eje  $x$** .



**Figura 6.2.6**  $A(y)$  es el área de la sección transversal  $R_y$  en el plano perpendicular al eje  $y$  en el punto  $y$



**Figura 6.2.7** (a) Una región a partir de la cual podemos determinar el volumen de un (b) sólido de revolución en torno del eje  $x$



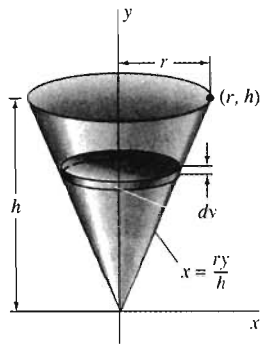
**Figura 6.2.8** Sólido de revolución en torno del eje  $y$

**NOTA** En la expresión  $\pi y^2 dx$ , la diferencial  $dx$  indica que la variable independiente es  $x$ . *Debemos* expresar  $y$  (y cualquier otra variable dependiente) en términos de  $x$  para realizar la integración indicada.

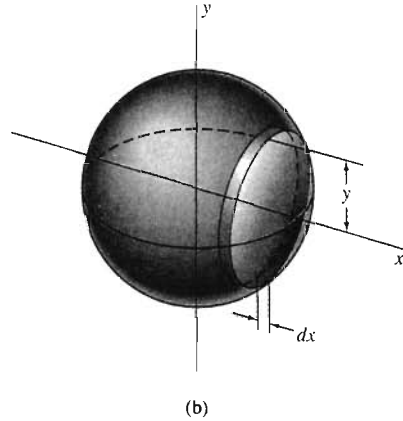
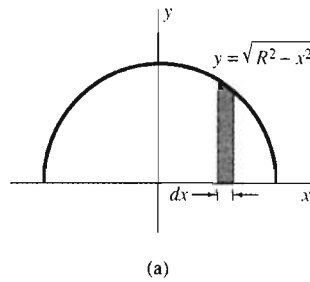
Por un argumento similar, si la región acotada por la curva  $x = g(y)$ , el eje  $y$ , y las rectas horizontales  $y = c$  y  $y = d$  se gira en torno del eje  $y$ , entonces el volumen del sólido de revolución resultante (figura 6.2.8) es

$$V = \int_c^d \pi x^2 dy = \int_c^d \pi [g(y)]^2 dy. \quad (6)$$

*Debemos* expresar  $x$  (y cualquier otra variable dependiente) en términos de la variable independiente  $y$  antes de realizar el cálculo en la ecuación (6).



**Figura 6.2.10** Generación de un cono por rotación (ejemplo 3)



**Figura 6.2.9** (a) Una región semicircular que giramos (b) para generar una esfera (ejemplo 2)

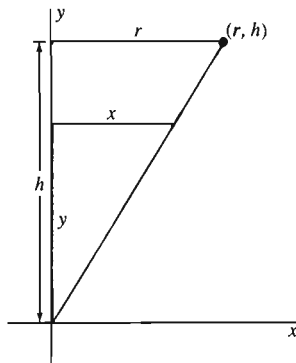
**EJEMPLO 2** Utilice el método de secciones transversales para verificar la conocida fórmula  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$  para el volumen de una esfera de radio  $R$ .

**Solución** Pensemos la esfera como el sólido de revolución obtenido al girar la región plana semicircular de la figura 6.2.9 en torno del eje  $x$ . Ésta es la región acotada por arriba por el semicírculo  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$  ( $-R \leq x \leq R$ ) y por debajo por el intervalo  $[-R, R]$  en el eje  $x$ . Para emplear la ecuación (5), consideramos  $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ ,  $a = -R$  y  $b = R$ . Esto implica

$$\begin{aligned} V &= \int_{-R}^R \pi (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx \\ &= \pi \left[ R^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-R}^R = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

**EJEMPLO 3** Utilice el método de secciones transversales para verificar la conocida fórmula  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$  para el volumen de un cono circular recto con radio de la base  $r$  y altura  $h$ .

**Solución** La figura 6.2.10 representa al cono como el sólido de revolución que se obtiene al girar en torno del eje  $y$  el triángulo con vértices  $(0, 0)$ ,  $(0, h)$  y  $(r, h)$ . Los triángulos semejantes de la figura 6.2.11 implican la ecuación  $x/y = r/h$ , de modo que el radio de la sección transversal circular perpendicular al eje  $y$  en el punto  $y$  es  $x = ry/h$ . Entonces, de la ecuación (6), con  $g(y) = ry/h$ , se obtiene

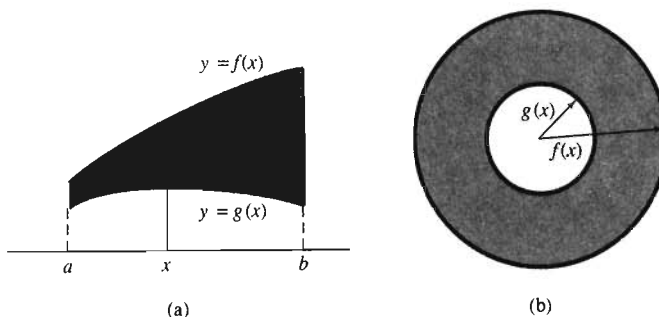


**Figura 6.2.11** Determinación del radio  $x$  de la sección transversal circular del ejemplo 3

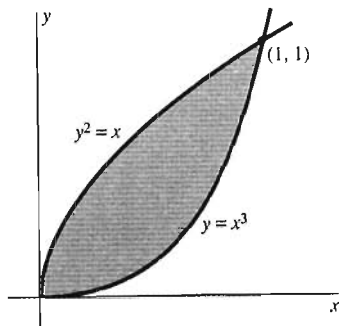
$$V = \int_a^b A(y) dy = \int_a^b \pi x^2 dy = \int_0^h \pi \left(\frac{ry}{h}\right)^2 dy$$

$$= \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h y^2 dy = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} Ah,$$

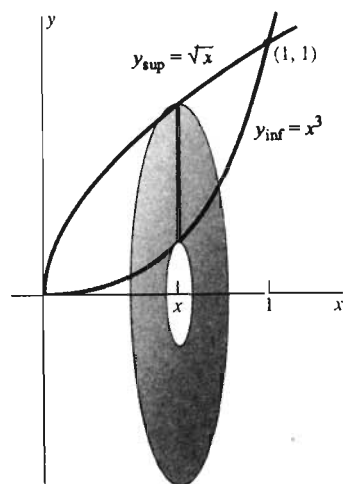
donde  $A = \pi r^2$  es el área de la base del cono.



**Figura 6.2.12** (a) La región entre dos gráficas positivas (b) se gira en torno del eje  $x$ . Las secciones transversales son anillos.



**Figura 6.2.13** La región plana del ejemplo 4



**Figura 6.2.14** Giro en torno del eje  $x$  (ejemplo 4)

## GIRO DE UNA REGIÓN ENTRE DOS CURVAS

A veces necesitamos calcular el volumen de un sólido generado al girar una región plana acotada entre dos curvas dadas. Suponga que  $f(x) > g(x) \geq 0$  para  $x$  en el intervalo  $[a, b]$  y que generamos el sólido  $R$  al girar la región entre  $y = f(x)$  y  $y = g(x)$  en torno del eje  $x$ . Entonces la sección transversal en  $x$  es un **anillo** (o **arandela**) acotada por dos círculos (figura 6.2.12). El anillo tiene un radio interior  $r_{\text{int}} = g(x)$  y un radio exterior  $r_{\text{ext}} = f(x)$ , por lo que la fórmula del área de la sección transversal de  $R$  en  $x$  es

$$A(x) = \pi (r_{\text{ext}})^2 - \pi (r_{\text{int}})^2 = \pi [(y_{\text{sup}})^2 - (y_{\text{inf}})^2] = \pi \{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \},$$

donde escribimos  $y_{\text{sup}} = f(x)$  y  $y_{\text{inf}} = g(x)$  para las curvas superior e inferior de la región plana. Por tanto, la ecuación (3) implica

$$V = \int_a^b \pi [(y_{\text{sup}})^2 - (y_{\text{inf}})^2] dx = \int_a^b \pi \{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \} dx \quad (7)$$

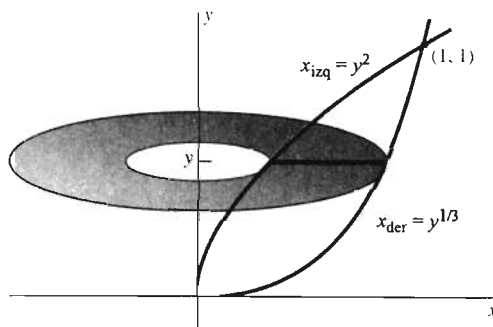
como el volumen  $V$  del sólido.

De manera análoga, si  $f(y) \geq g(y) > 0$ , para  $c \leq y \leq d$ , entonces el volumen del sólido obtenido al girar en torno del eje  $y$ , la región entre  $x_{\text{der}} = f(y)$  y  $x_{\text{izq}} = g(y)$  es

$$V = \int_c^d \pi [(x_{\text{der}})^2 - (x_{\text{izq}})^2] dy = \int_c^d \pi \{ [f(y)]^2 - [g(y)]^2 \} dy. \quad (8)$$

**EJEMPLO 4** Considere la región plana que se muestra en la figura 6.2.13, acotada por las curvas  $y^2 = x$  y  $y = x^3$  que se intersecan en los puntos  $(0, 0)$  y  $(1, 1)$ . Si esta región se gira en torno del eje  $x$  (figura 6.2.14), entonces la ecuación (7), con

$$y_{\text{sup}} = \sqrt{x}, \quad y_{\text{inf}} = x^3$$



**Figura 6.2.15** Giro en torno del eje  $y$  (ejemplo 4)

implica

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi[(\sqrt{x})^2 - (x^3)^2] dx = \int_0^1 \pi(x - x^6) dx \\ &= \pi \left[ \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{7} x^7 \right]_0^1 = \frac{5}{14} \pi \end{aligned}$$

como el volumen de revolución.

Si la misma región se gira en torno del eje  $y$  (figura 6.2.15), entonces cada sección transversal perpendicular al eje  $y$  es un anillo con radio exterior  $x_{\text{der}} = y^{1/3}$  y radio interior  $x_{\text{izq}} = y^2$ . Por tanto, la ecuación (8) proporciona el volumen de revolución generado por esta región como

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi[(y^{1/3})^2 - (y^2)^2] dy = \int_0^1 \pi(y^{2/3} - y^4) dy \\ &= \pi \left[ \frac{3}{5} y^{5/3} - \frac{1}{5} y^5 \right]_0^1 = \frac{2}{5} \pi. \end{aligned}$$

**EJEMPLO 5** Suponga que la región plana del ejemplo 4 (figura 6.2.13) se gira en torno de la recta vertical  $x = -1$  (figura 6.2.16). Entonces cada sección transversal del sólido resultante es un anillo con radio exterior

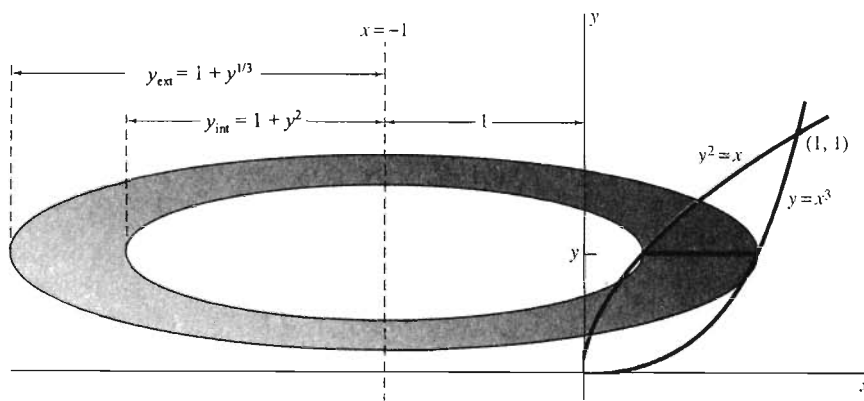
$$r_{\text{ext}} = 1 + x_{\text{der}} = 1 + y^{1/3}$$

y radio interior

$$r_{\text{int}} = 1 + x_{\text{izq}} = 1 + y^2.$$

El área de esta sección transversal es

$$A(y) = \pi(1 + y^{1/3})^2 - \pi(1 + y^2)^2 = \pi(2y^{1/3} + y^{2/3} - 2y^2 - y^4),$$



**Figura 6.2.16** El anillo del ejemplo 5

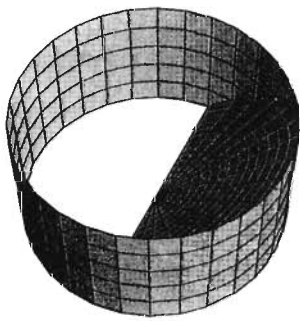


Figura 6.2.17 La cuña y el cilindro del ejemplo 6

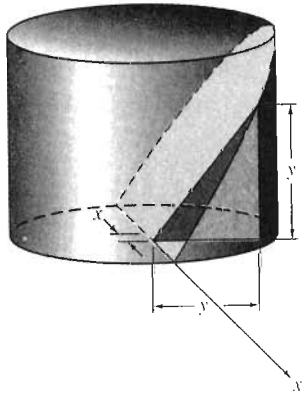


Figura 6.2.18 Una sección transversal de la cuña: un triángulo isósceles (ejemplo 6)

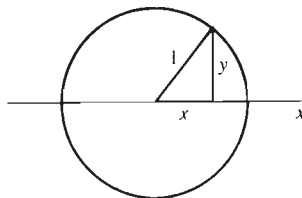


Figura 6.2.19 La base del cilindro del ejemplo 6

de modo que el volumen del sólido de revolución resultante es

$$V = \int_0^1 \pi(2y^{1/3} + y^{2/3} - 2y^2 - y^4) dy$$

$$= \pi \left[ \frac{3}{2} y^{4/3} + \frac{3}{5} y^{5/3} - \frac{2}{3} y^3 - \frac{1}{5} y^5 \right]_0^1 = \frac{37}{30} \pi.$$

**EJEMPLO 6** Determine el volumen de la cuña que se corta a partir de un cilindro circular de radio 1 y altura 1 con un plano que pasa por un diámetro de la base del cilindro y por un punto de la circunferencia de su tapa.

**Solución** El cilindro y la cuña se muestran en la figura 6.2.17. Para formar esta cuña, llene un vaso cilíndrico con jugo de fruta y después beba lentamente hasta exponer la mitad del fondo del vaso; el jugo restante forma la cuña.

Elegimos como la recta de referencia y eje  $x$  la línea que pasa por la “orilla de la cuña”, el diámetro original de la base del cilindro. Podemos verificar mediante triángulos semejantes que cada sección transversal de la cuña perpendicular al diámetro es un triángulo rectángulo isósceles. Uno de estos triángulos se muestra en la figura 6.2.18. Denotamos como  $y$  a la base y la altura iguales de este triángulo.

Para determinar la función área de la sección transversal  $A(x)$ , debemos expresar  $y$  en términos de  $x$ . La figura 6.2.19 muestra la base circular unitaria del cilindro original. Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo en esta figura y determinamos que  $y = \sqrt{1 - x^2}$ . Por tanto,

$$A(x) = \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} (1 - x^2),$$

por lo que la ecuación (3) implica

$$V = \int_{-1}^1 A(x) dx = 2 \int_0^1 A(x) dx \quad (\text{por simetría})$$

$$= 2 \int_0^1 \frac{1}{2} (1 - x^2) dx = \left[ x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

para el volumen de la cuña.

Es muy útil habituarse a verificar que las respuestas sean plausibles cuando sea conveniente. Por ejemplo, podemos comparar un sólido dado con uno cuyo volumen sea conocido. Como el volumen del cilindro original en el ejemplo 6 es  $\pi$ , hemos determinado que la cuña ocupa la fracción

$$\frac{V_{\text{cuña}}}{V_{\text{cilindro}}} = \frac{\frac{2}{3}}{\pi} \approx 21\%$$

del volumen del cilindro. Un vistazo a la figura 6.2.17 indica que esto es plausible. Un error en nuestros cálculos podría proporcionar una respuesta increíble.

La cuña del ejemplo 6 tiene una historia antigua. Su volumen fue calculado por vez primera en el siglo III a.C. por Arquímedes, quien también obtuvo la fórmula  $V = 4/3 \pi r^3$  para el volumen de una esfera de radio  $r$ . Su trabajo sobre la cuña se encuentra en un manuscrito descubierto en 1906, después de estar perdido durante siglos. Arquímedes utilizó un método exhaustivo para volúmenes, similar al analizado para las áreas en la sección 5.3.

## 6.2 Problemas

En los problemas 1 a 24, determine el volumen del sólido generado, al girar en torno del eje indicado la región plana acotada por las curvas dadas.

- $y = x^2, y = 0, x = 1$ ; el eje  $x$
- $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 4$ ; el eje  $x$
- $y = x^2, y = 4, x = 0$  (sólo el primer cuadrante); el eje  $y$  (figura 6.2.20)

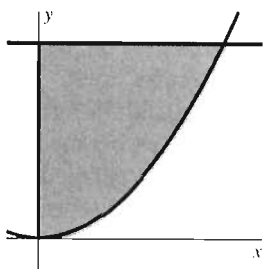


Figura 6.2.20 Problema 3

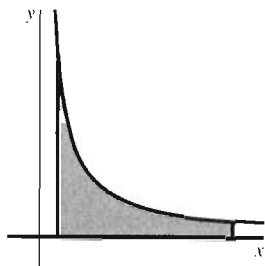


Figura 6.2.21 Problema 4

- $y = 1/x, y = 0, x = 0.1, x = 1$ ; el eje  $x$  (figura 6.2.21)
- $y = \sin x$  en  $[0, \pi], y = 0$ ; el eje  $x$
- $y = 9 - x^2, y = 0$ ; el eje  $x$
- $y = x^2, x = y^2$ ; el eje  $x$  (figura 6.2.22)

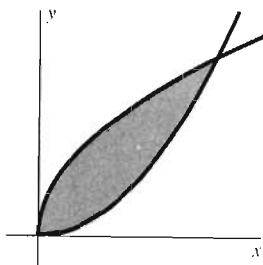


Figura 6.2.22 Problema 7

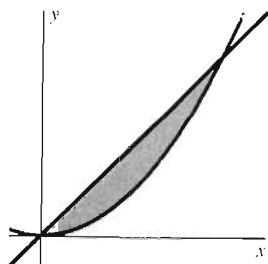


Figura 6.2.23 Problema 8

- $y = x^2, y = 4x$ ; la recta  $x = 5$  (figura 6.2.23)
- $y = x^2, y = 8 - x^2$ ; el eje  $x$
- $x = y^2, x = y + 6$ ; el eje  $y$
- $y = 1 - x^2, y = 0$ ; el eje  $x$  (figura 6.2.24)

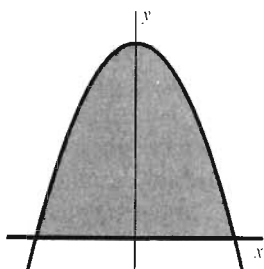


Figura 6.2.24 Problema 11

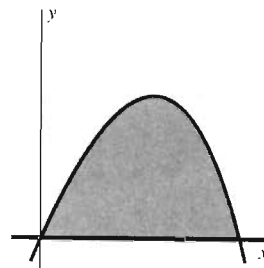


Figura 6.2.25 Problema 12

- $y = x - x^3, y = 0$  ( $0 \leq x \leq 1$ ); el eje  $x$  (figura 6.2.25)
- $y = 1 - x^2, y = 0$ ; el eje  $y$
- $y = 6 - x^2, y = 2$ ; el eje  $x$
- $y = 6 - x^2, y = 2$ ; el eje  $y$  (figura 6.2.26)

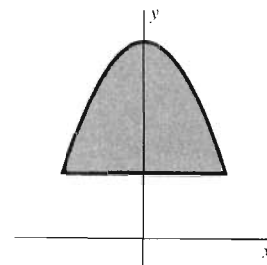


Figura 6.2.26 Problema 15

- $y = 1 - x^2, y = 0$ ; la recta vertical  $x = 2$
- $y = x - x^3, y = 0$  ( $0 \leq x \leq 1$ ); la recta horizontal  $y = -1$
- $y = 4, x = 0, y = x^2$ ; el eje  $x$
- $y = 4, x = 0, y = x^2$ ; el eje  $y$
- $x = 16 - y^2, x = 0, y = 0$ ; el eje  $x$  (figura 6.2.27)

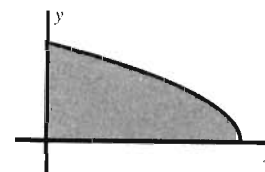


Figura 6.2.27 Problema 20

- $y = x^2, x = y^2$ ; la recta  $y = -2$
- $y = x^2, y = 8 - x^2$ ; la recta  $y = -1$
- $y = x^2, x = y^2$ ; la recta  $x = 3$
- $y = x^2, y = 8 - x^2$ ; la recta  $x = 4$
- La región  $R$  que se muestra en la figura 6.2.28, está acotada por las parábolas  $y^2 = x$  y  $y^2 = 2(x - 3)$ . Determine el volumen del sólido generado al girar  $R$  en torno del eje  $x$ .

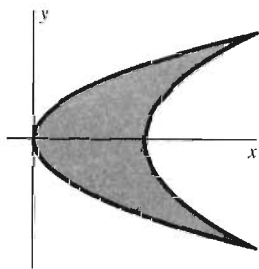


Figura 6.2.28 La región del problema 25

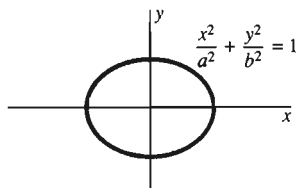


Figura 6.2.29 La elipse de los problemas 26 y 27

26. Determine el volumen del elipsoide generado al girar en torno del eje  $x$  la región acotada por la elipse con ecuación

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

(figura 6.2.29).

27. Repita el problema 26, pero gire la región elíptica en torno del eje  $y$ .

28. Determine el volumen del sólido no acotado generado al girar la región no acotada de la figura 6.2.30 en torno del eje  $x$ . Ésta es la región entre la gráfica de  $y = 1/x^2$  y el eje  $x$  para  $x \geq 1$ . [Método: Calcule el volumen de  $x = 1$  a  $x = b$ , donde  $b > 1$ . Después, determine el límite de este volumen cuando  $b \rightarrow +\infty$ .]

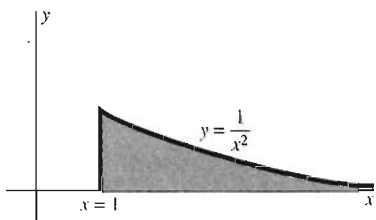


Figura 6.2.30 La región plana no acotada del problema 28

29. Un observatorio (figura 6.2.31) tiene la forma de un sólido cuya base es un disco circular con diámetro  $AB$  de longitud  $2a$  (figura 6.2.32). Determine el volumen de este sólido si cada sección transversal perpendicular a  $AB$  es un cuadrado.

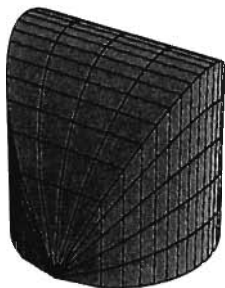


Figura 6.2.31 El observatorio del problema 29

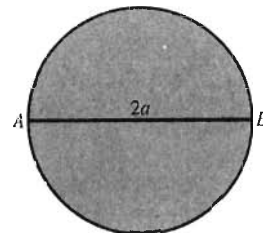


Figura 6.2.32 La base circular del observatorio (problema 29)

30. La base de cierto sólido es un disco circular con diámetro  $AB$  de longitud  $2a$ . Determine el volumen del sólido si cada sección transversal perpendicular a  $AB$  es un semicírculo.

31. La base de cierto sólido es un disco circular con diámetro  $AB$  de longitud  $2a$ . Determine el volumen del sólido si cada sección transversal perpendicular a  $AB$  es un triángulo equilátero.

32. La base de un sólido es la región en el plano  $xy$  acotada por las parábolas  $y = x^2$  y  $x = y^2$ . Determine el volumen de este sólido si cada sección transversal perpendicular al eje  $x$  es un cuadrado cuya base está en el plano  $xy$ .

33. El paraboloides generado al girar en torno del eje  $x$  la región bajo la parábola  $y^2 = 2px$ ,  $0 \leq x \leq h$  se muestra en la figura 6.2.33. Muestre que el volumen del paraboloides es la mitad del volumen del cilindro circunscrito que también aparece en la figura.

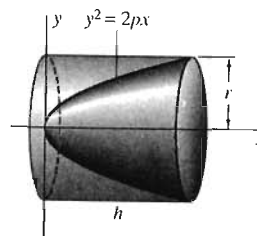


Figura 6.2.33 El paraboloides y el cilindro del problema 33

34. Una pirámide tiene altura  $h$  y base rectangular con área  $A$ . Muestre que su volumen es  $V = \frac{1}{3}Ah$ . [Sugerencia: Observe que cada sección transversal paralela a la base es un rectángulo.]

35. Repita el problema 34, excepto que la base es ahora un triángulo con área  $A$ .

36. Determine el volumen que queda después de perforar un agujero de radio 3, por el centro de una esfera sólida de radio 5 (figura 6.2.34).

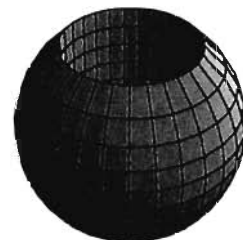
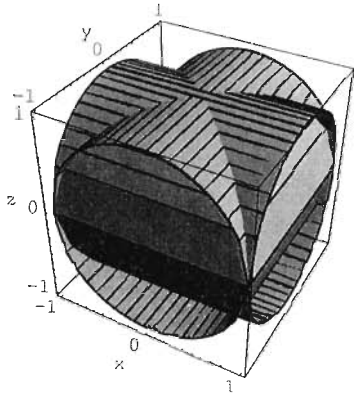
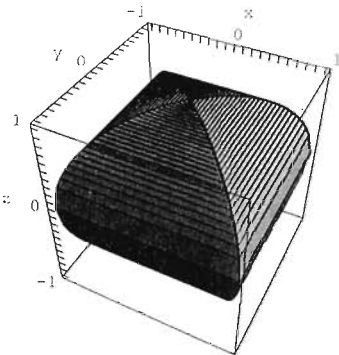


Figura 6.2.34 La esfera con agujero del problema 36





**Figura 6.2.35** Los cilindros que se intersecan del problema 37

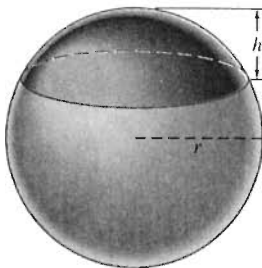


**Figura 6.2.36** El sólido de intersección (problema 37)

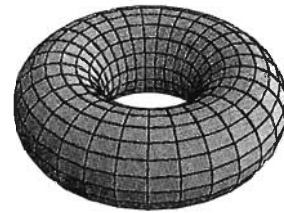
37. Dos cilindros circulares rectos tienen radio  $a$  y sus ejes se intersecan en ángulo recto. Determine el volumen de su sólido de intersección (figuras 6.2.35 y 6.2.36, donde  $a = 1$ ). ¿Le parece claro que cada sección transversal horizontal del sólido es un cuadrado?

38. La figura 6.2.37 muestra un “segmento esférico” de altura  $h$  que se corta de una esfera de radio  $r$ , mediante un plano horizontal. Muestre que su volumen es

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h).$$



**Figura 6.2.37** Un segmento esférico (problema 38)



**Figura 6.2.38** El toro del problema 39

39. Un sólido en forma de dona, llamado *toro* (figura 6.2.38) se genera al girar en torno del eje  $y$  el disco circular  $(x - b)^2 + y^2 \leq a^2$  con centro en el punto  $(b, 0)$ , donde  $0 < a < b$ . Muestre que el volumen de este toro es  $V = 2\pi^2 a^2 b$ . [Sugerencia: Muestre que cada sección transversal perpendicular al eje  $y$  es un anillo, y recuerde que

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - y^2} dy = \frac{1}{4}\pi a^2$$

pues la integral representa el área de un cuarto de círculo de radio  $a$ .]

40. La cima de una colina está a 100 pies de altura con respecto del terreno circundante, y cada sección transversal horizontal de la colina es circular. La siguiente tabla da el radio  $r$  (en pies) para algunos valores de la altura  $h$  (en pies) sobre el terreno circundante. Utilice una aproximación de Simpson para estimar el volumen de la colina.

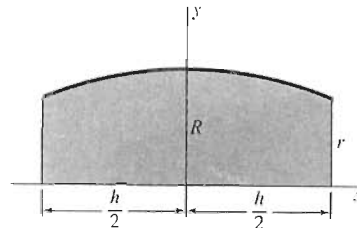
$h$	0	25	50	75	100
$r$	60	55	50	35	0

41. *El tonel de vino de Newton*. Considere un tonel con la forma del sólido generado al girar en torno del eje  $x$  la región bajo la parábola

$$y = R - kx^2, \quad -\frac{1}{2}h \leq x \leq \frac{1}{2}h$$

(figura 6.2.39). (a) Muestre que el radio de cada extremo del tonel es  $r = R - \delta$ , donde  $4\delta = kh^2$ . (b) Muestre a continuación que el volumen del tonel es

$$V = \frac{1}{3}\pi h(2R^2 + r^2 - \frac{2}{3}\delta^2).$$



**Figura 6.2.39** La región del problema 41

42. *La clepsidra, o reloj de agua*. Considere un tanque de agua cuya superficie lateral es generada al girar la curva  $y = kx^4$  en torno del eje  $y$  ( $k$  es una constante positiva). (a) Calcule  $V(y)$ , el volumen de agua en el tanque, como una función de la profundidad  $y$ . (b) Suponga que el agua sale

del tanque a través de un pequeño agujero en el fondo. Utilice la regla de la cadena y la ley de Torricelli [ecuación (3) de la sección 5.2] para mostrar que el nivel del agua en este tanque desciende a razón *constante*. ¿Cómo se podría utilizar este tanque como reloj?

43. Un contratista desea participar en la tarea de nivelar una colina de 60 pies. El costo por eliminar el material de la colina será de \$3.30 la yarda cúbica. La siguiente tabla, basada en medidas topográficas, muestra el área de las secciones transversales horizontales de la colina, a intervalos de 10 pies de altura. Utilice (a) la aproximación del trapecio y (b) la aproximación de Simpson para estimar el costo del proyecto. Redondee cada respuesta a cientos de dólares.

Altura $x$ (pies)	0	10	20	30	40	50	60
Área (pies <sup>2</sup> )	1513	882	381	265	151	50	0

44. El agua se evapora de un tazón abierto a razón proporcional al área de la superficie del agua. Muestre que inde-

pendientemente de la forma del tazón, el nivel del agua desciende a razón constante.



Figura 6.2.40 El cono truncado (problema 45)

45. Un cono circular recto truncado tiene altura  $h$  y volumen  $V$ . Su base es un disco circular de radio  $R$ , y su parte superior es un disco circular de radio  $r$  (figura 6.2.40). Aplique el método de secciones transversales para mostrar que

$$V = \frac{1}{3} \pi h (r^2 + rR + R^2).$$

46. La base de un sólido es la región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de  $y = x$  y  $y = x^2$ . Cada sección transversal perpendicular a la recta  $y = x$  es un cuadrado. Determine el volumen del sólido.

## 6.2 Proyecto

Podemos obtener la fórmula del volumen

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx \tag{5}$$

de esta sección mediante cilindros circulares, para aproximar el volumen del sólido generado al girar en torno del eje  $x$  la región que está bajo la curva  $y = f(x)$  en el intervalo  $[a, b]$ . Por ejemplo, en la aproximación mediante los extremos derechos

$$R_n = \sum_{i=1}^n \pi [f(x_i)]^2 \Delta x,$$

donde  $\Delta x = (b - a)/n$ , el  $i$ -ésimo término  $\pi [f(x_i)]^2$  es el volumen del cilindro de radio  $r = f(x_i)$  y altura  $h = \Delta x$  que aproxima la rebanada del sólido correspondiente al subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  (figura 6.2.41).

En el siglo III a.C., Arquímedes consideró la esfera de radio  $r$  como un sólido de revolución al obtener su famosa fórmula de volumen  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ . Una de las principales diferencias entre su método y el nuestro es que él utilizó conos truncados en vez de cilindros. La figura 6.2.42 muestra el sólido de aproximación, obtenido al girar en torno del eje  $x$  el arco poligonal  $P_0 P_1 P_2 \cdots P_n$ , donde  $P_i$  denota el punto  $(x_i, f(x_i))$  de la curva  $y = f(x)$ . La rebanada de aproximación correspondiente al  $i$ -ésimo subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  es el *cono truncado* resaltado en la figura 6.2.42. Tiene como radios de las bases  $R = f(x_{i-1})$  y  $r = f(x_i)$  y altura  $h = \Delta x$ . Empleamos la fórmula de volumen del problema 45 para obtener la “aproximación mediante conos truncados”

$$F_n = \sum_{i=1}^n \frac{\pi}{3} \{ [f(x_{i-1})]^2 + f(x_{i-1}) f(x_i) + [f(x_i)]^2 \} \Delta x$$

a la integral de volumen de la ecuación (5).

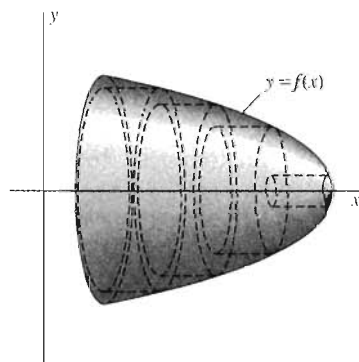


Figura 6.2.41 Uso de cilindros para aproximar un sólido de revolución

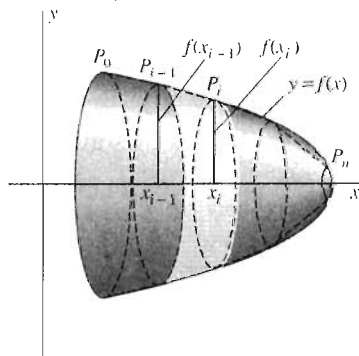


Figura 6.2.42 Uso de conos truncados para aproximar un sólido de revolución

En los problemas 1 a 4, utilice una calculadora programable, una computadora o un sistema de álgebra computacional (como en los proyectos de las secciones 5.4 y 5.9) para calcular las aproximaciones mediante los extremos izquierdos y derechos  $R_n$  y  $L_n$ , la aproximación del trapecio  $T_n = \frac{1}{2}(R_n + L_n)$  y la aproximación mediante conos truncados  $F_n$  al volumen dado por la integral de la ecuación (5). En cada caso, compare la precisión de estas aproximaciones para  $n = 10, 20, \dots$  subintervalos.

1. Sea  $f(x) = x$  en  $[0, 1]$ , de modo que  $V = \pi/3$ . (¿Por qué?)
2. Sea  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$  en  $[0, 1]$ . Explique por qué  $V$  es entonces el volumen  $2\pi/3$  del hemisferio de radio 1.
3. Sea  $f(x) = \sin x$  en  $[0, \pi]$ . Utilice la identidad  $\sin^2 x = 1/2(1 - \cos 2x)$  para mostrar que  $V = 1/2\pi^2$ .
4. Sea  $f(x) = \sec x$  en  $[0, \pi/4]$ , de modo que  $V = \pi$ . (¿Por qué?)

## 6.3 Volúmenes por el método de capas cilíndricas

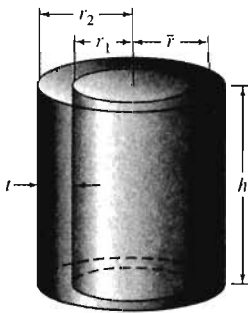


Figura 6.3.1 Una capa cilíndrica

El método de secciones transversales de la sección 6.2 es una técnica de aproximación de un sólido mediante una pila de delgadas rodajas o rebanadas. En el caso de un sólido de revolución, estas rebanadas son discos circulares o anillos. Una segunda forma para calcular volúmenes de sólidos de revolución es el **método de capas cilíndricas**. Es una técnica de aproximación de un sólido mediante una colección de delgadas capas cilíndricas, y que con frecuencia conduce a cálculos más sencillos que el método de secciones transversales.

Una **capa cilíndrica** es una región acotada por dos cilindros circulares concéntricos de igual altura  $h$ . Si, como en la figura 6.3.1, el cilindro interior tiene radio  $r_1$  y el exterior tiene radio  $r_2$ , entonces  $\bar{r} = (r_1 + r_2)/2$  es el **radio promedio** de la capa cilíndrica y  $t = r_2 - r_1$  es su **espesor**. Entonces, obtenemos el volumen de la capa cilíndrica al restar el volumen del cilindro interior del volumen del cilindro exterior:

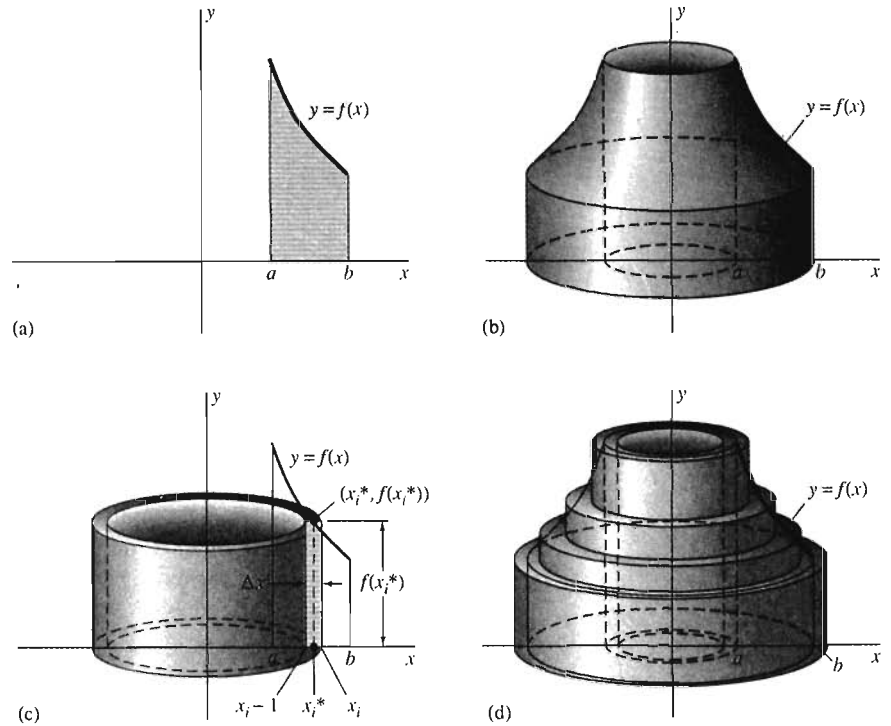
$$V = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = 2\pi \frac{r_1 + r_2}{2} (r_2 - r_1) h = 2\pi \bar{r} t h. \quad (1)$$

En palabras, el volumen de la capa es el producto de  $2\pi$ , su radio promedio, su espesor y su altura: el volumen de la capa es aproximado por el producto del área de su superficie y su espesor.

Supongamos ahora que queremos determinar el volumen  $V$  de revolución generado al girar en torno del eje  $y$  la región bajo  $y = f(x)$  de  $x = a$  a  $x = b$ . Suponemos, como se indica en la figura 6.3.2(a), que  $0 \leq a < b$  y que  $f(x)$  es continua y no negativa en  $[a, b]$ . El sólido se parece entonces al que se muestra en la figura 6.3.2(b).

Para determinar  $V$ , primero dividimos  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos, todos con la misma longitud  $\Delta x = (b - a)/n$ . Sea  $x_i^*$  el punto medio del  $i$ -ésimo subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ . Consideremos el rectángulo del plano  $xy$  con base  $[x_{i-1}, x_i]$  y altura  $f(x_i^*)$ . Cuando el rectángulo se gira en torno del eje  $y$ , éste describe una capa cilíndrica como la de la figura 6.3.2(c), con radio promedio  $x_i^*$ , espesor  $\Delta x$  y altura  $f(x_i^*)$ . Esta capa cilíndrica aproxima el sólido de volumen  $\Delta V_i$  que se obtiene al girar la región bajo  $y = f(x)$  en  $[x_{i-1}, x_i]$ , con lo que la ecuación (1) implica

$$\Delta V_i \approx 2\pi x_i^* f(x_i^*) \Delta x.$$



**Figura 6.3.2** Un sólido de revolución (note el agujero en su centro) y una forma de aproximarlos mediante capas cilíndricas anidadas

Sumamos los volúmenes de las  $n$  capas cilíndricas determinadas por la subdivisión de  $[a, b]$ . Esta suma debe aproximar a  $V$ , pues, como lo sugiere la figura 6.3.2(d), la unión de estas capas aproxima físicamente el sólido de revolución. Así, obtenemos la aproximación

$$V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^n 2\pi x_i^* f(x_i^*) \Delta x.$$

Esta aproximación del volumen  $V$  es una suma de Riemann que tiende a la integral

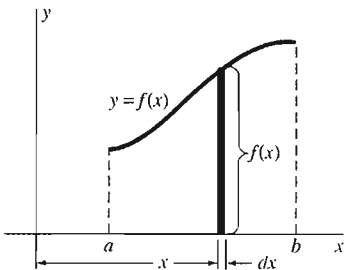
$$\int_a^b 2\pi x f(x) dx \quad \text{cuando } \Delta x \rightarrow 0,$$

de modo que el volumen del sólido de revolución está dado por

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx. \tag{2}$$

Un análisis completo requiere una demostración de que esta fórmula da el mismo volumen que el *definido* por el método de secciones transversales de la sección 6.2 (véase el apéndice F).

Es más confiable aprender a plantear fórmulas integrales que simplemente memorizarlas. Una útil vía heurística (sugere pero no rigurosa) para establecer la ecuación (2) es dibujar la delgada banda rectangular de área que se muestra en la figura 6.3.3. Cuando esta banda se gira en torno del eje  $y$ , produce una delgada capa cilíndrica de radio  $x$ , altura  $y = f(x)$  y espesor  $dx$  (figura 6.3.4). Así, su volumen se denota con  $dV$ , y podemos escribir



**Figura 6.3.3** Argumento heurístico para establecer la ecuación (2)



**Figura 6.3.4** Capa cilíndrica de espesor infinitesimal

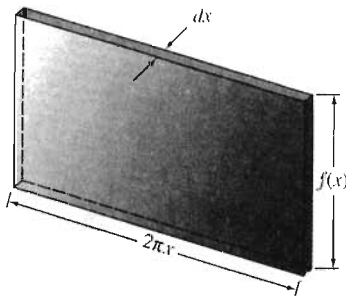


Figura 6.3.5 Capa cilíndrica infinitesimal, aplanada

$$dV = 2\pi x \cdot f(x) \cdot dx = 2\pi x f(x) dx.$$

Esto es fácil de recordar si visualiza la figura 6.3.5.

Pensamos  $V$  como una suma de muchos de estos volúmenes, anidados en forma concéntrica en torno del eje de revolución, formando al propio sólido. Entonces, podemos escribir

$$V = \int_a^b dV = \int_a^b 2\pi xy dx = \int_a^b 2\pi x f(x) dx.$$

No olvide expresar  $y$  (y cualquier otra variable dependiente) en términos de la variable independiente  $x$  (identificada aquí por la diferencial  $dx$ ) antes de integrar.

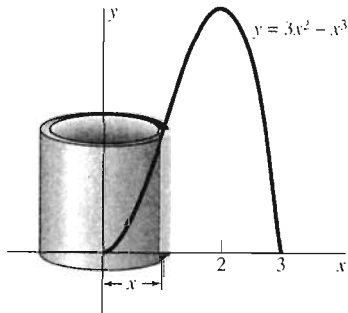


Figura 6.3.6 La región del ejemplo 1; se gira en torno del eje  $y$

**EJEMPLO 1** Determine el volumen del sólido generado al girar en torno del eje  $y$  la región bajo  $y = 3x^2 - x^3$  de  $x = 0$  a  $x = 3$  (figura 6.3.6).

**Solución** En este caso, no sería práctico utilizar el método de secciones transversales, pues una sección transversal perpendicular al eje  $y$  es un anillo y determinar sus radios exterior e interior implica despejar  $x$  en términos de  $y$  en la ecuación  $y = 3x^2 - x^3$ . Preferimos evitar esta tarea problemática, y la ecuación (2) nos proporciona una alternativa: consideramos  $f(x) = 3x^2 - x^3$ ,  $a = 0$  y  $b = 3$ . Esto implica de inmediato que

$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 2\pi x(3x^2 - x^3) dx = 2\pi \int_0^3 (3x^3 - x^4) dx \\ &= 2\pi \left[ \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^3 = \frac{243}{10} \pi. \end{aligned}$$

**EJEMPLO 2** Determine el volumen del sólido que queda después de perforar un agujero circular de radio  $a$  por el centro de una esfera sólida de radio  $b > a$  (figura 6.3.7).

**Solución** Pensamos la esfera de radio  $b$  como generada al girar la mitad derecha del disco circular  $x^2 + y^2 = b^2$  en torno del eje  $y$ , y pensamos el agujero como vertical, con su línea central en el eje  $y$ . Entonces, la *mitad* superior del sólido en cuestión es generada al girar en torno del eje  $y$  la región sombreada en la figura 6.3.8. Ésta

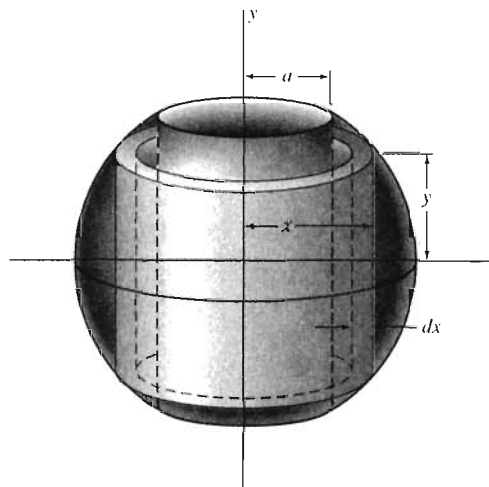
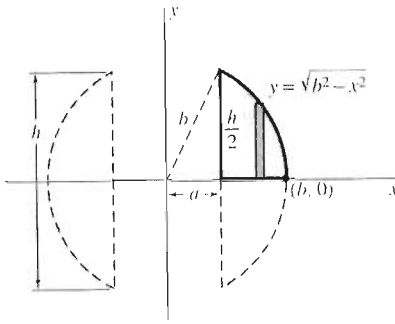


Figura 6.3.7 La esfera con agujero del ejemplo 2



**Figura 6.3.8** La mitad de sección transversal de la esfera con agujero (ejemplo 2)

es la región bajo la gráfica de  $y = \sqrt{b^2 - x^2}$  (y sobre el eje  $x$ ) de  $x = a$  a  $x = b$ . El volumen total de la esfera con agujero es entonces el doble de la mitad superior y la ecuación (2) implica

$$V = 2 \int_a^b 2\pi x(b^2 - x^2)^{1/2} dx = 4\pi \left[ -\frac{1}{3}(b^2 - x^2)^{3/2} \right]_a^b,$$

de modo que

$$V = \frac{4}{3}\pi(b^2 - a^2)^{3/2}.$$

Una forma de verificar una respuesta como ésta es probar con algunos casos extremos. Si  $a = 0$  y  $b = r$ , que corresponde a no taladrar un agujero a través de la esfera de radio  $r$ , entonces nuestro resultado se reduce al volumen  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  de la esfera completa. Si  $a = b$ , lo que corresponde a emplear una broca de taladro tan grande como la esfera, entonces  $V = 0$ ; esto también es correcto.

### GIRO DE UNA REGIÓN ENTRE DOS CURVAS

Ahora, sea  $A$  la región entre las curvas  $y = f(x)$  y  $y = g(x)$  en el intervalo  $[a, b]$ , donde  $0 \leq a < b$  y  $f(x) \geq g(x)$  para  $x$  en  $[a, b]$ . Dicha región aparece en la figura 6.3.9. Cuando se gira  $A$  en torno del eje  $y$ , genera un sólido de revolución. Suponga que queremos determinar el volumen  $V$  de este sólido. Un desarrollo análogo al de la ecuación (2) conduce a la aproximación

$$V \approx \sum_{i=1}^n 2\pi x_i^* [f(x_i^*) - g(x_i^*)] \Delta x,$$

a partir de lo cual podemos concluir que

$$V = \int_a^b 2\pi x [f(x) - g(x)] dx. \quad (3)$$

Así,

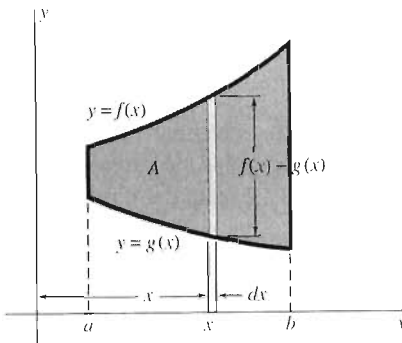
$$V = \int_a^b 2\pi x [y_{\text{sup}} - y_{\text{inf}}] dx, \quad (3')$$

donde  $y_{\text{sup}} = f(x)$  y  $y_{\text{inf}} = g(x)$ .

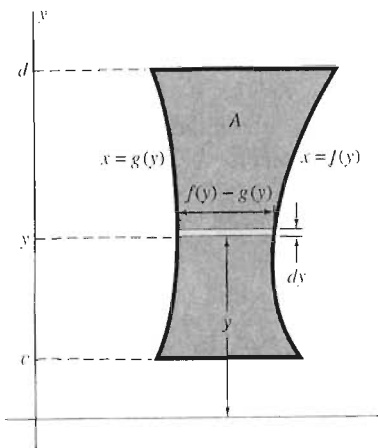
El método de capas cilíndricas es también una vía efectiva para calcular volúmenes de sólidos de revolución en torno del eje  $x$ . La figura 6.3.10 muestra la región  $A$ , acotada por las curvas  $x = f(y)$  y  $x = g(y)$  para  $c \leq y \leq d$  y por las rectas horizontales  $y = c$  y  $y = d$ . Sea  $V$  el volumen obtenido al girar la región  $A$  en torno del eje  $x$ . Para calcular  $V$ , comenzamos con una subdivisión de  $[c, d]$  en  $n$  subintervalos, todos con la misma longitud  $\Delta y = (d - c)/n$ . Sea  $y_i^*$  el punto medio del  $i$ -ésimo subintervalo  $[y_{i-1}, y_i]$  de la subdivisión. Entonces, el volumen de la capa cilíndrica con radio promedio  $y_i^*$ , altura  $f(y_i^*) - g(y_i^*)$  y espesor  $\Delta y$  es

$$\Delta V_i = 2\pi y_i^* [f(y_i^*) - g(y_i^*)] \Delta y.$$

Sumamos el volumen de estas capas cilíndricas y así obtenemos la aproximación



**Figura 6.3.9** La región  $A$  entre las gráficas de  $f$  y  $g$  en  $[a, b]$  se va a girar en torno del eje  $y$



**Figura 6.3.10** La región  $A$  se va a girar en torno del eje  $x$

$$V \approx \sum_{i=1}^n 2\pi y_i^* [f(y_i^*) - g(y_i^*)] \Delta y.$$

Reconocemos el lado derecho como una suma de Riemann para una integral con respecto de  $y$  de  $c$  a  $d$  y así concluimos que el volumen del sólido de revolución es

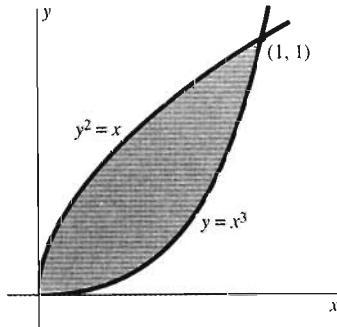
$$V = \int_c^d 2\pi y [f(y) - g(y)] dy. \quad (4)$$

Así,

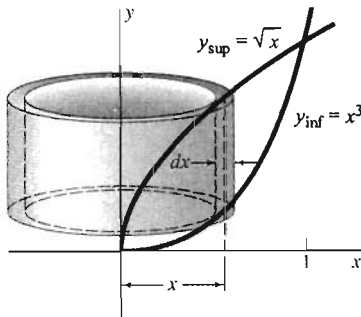
$$V = \int_c^d 2\pi y [x_{\text{der}} - x_{\text{izq}}] dy, \quad (4')$$

donde  $x_{\text{der}} = f(y)$  y  $x_{\text{izq}} = g(y)$ .

**NOTA** Para emplear las ecuaciones (3') y (4'), el integrando debe expresarse en términos de la variable de integración especificada por la diferencial.



**Figura 6.3.11** La región del ejemplo 3



**Figura 6.3.12** Giro en torno del eje  $y$  (ejemplo 3)

**EJEMPLO 3** Consideremos la región en el primer cuadrante acotada por las curvas  $y^2 = x$  y  $y = x^3$  (figura 6.3.11). Utilice el método de capas cilíndricas para calcular el volumen de los sólidos obtenidos al girar esta región primero en torno del eje  $y$  y después en torno del eje  $x$ .

**Solución** Para establecer las integrales adecuadas, es mejor utilizar las capas cilíndricas, como en las figuras 6.3.12 y 6.3.13, en lugar de fórmulas memorizadas. Así, el volumen de revolución en torno del eje  $y$  (figura 6.3.12) está dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 2\pi x (y_{\text{sup}} - y_{\text{inf}}) dx = \int_0^1 2\pi x (\sqrt{x} - x^3) dx \\ &= \int_0^1 2\pi (x^{3/2} - x^4) dx = 2\pi \left[ \frac{2}{5} x^{5/2} - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 = \frac{2}{5} \pi. \end{aligned}$$

El volumen de revolución en torno del eje  $x$  (figura 6.3.13) es

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 2\pi y (x_{\text{der}} - x_{\text{izq}}) dy = \int_0^1 2\pi y (y^{1/3} - y^2) dy \\ &= \int_0^1 2\pi (y^{4/3} - y^3) dy = 2\pi \left[ \frac{3}{7} y^{7/3} - \frac{1}{4} y^4 \right]_0^1 = \frac{5}{14} \pi. \end{aligned}$$

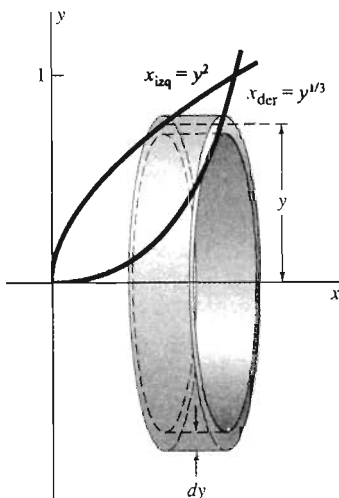
Por supuesto, estas respuestas son las mismas que las obtenidas mediante el método de secciones transversales en el ejemplo 4 de la sección 6.2.

**EJEMPLO 4** Suponga que la región del ejemplo 3 se gira en torno de la recta vertical  $x = -1$  (figura 6.3.14). Entonces el elemento de área

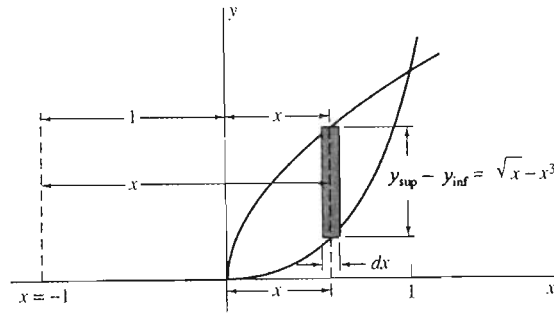
$$dA = (y_{\text{sup}} - y_{\text{inf}}) dx = (\sqrt{x} - x^3) dx$$

se gira en torno de un círculo de radio  $r = 1 + x$ . Por tanto, el volumen de la capa cilíndrica resultante es

$$\begin{aligned} dV &= 2\pi r dA = 2\pi(1+x)(x^{1/2} - x^3) dx \\ &= 2\pi(x^{1/2} + x^{3/2} - x^3 - x^4) dx. \end{aligned}$$



**Figura 6.3.13** Giro en torno del eje  $x$  (ejemplo 3)



**Figura 6.3.14** Giro en torno de la recta  $x = -1$  (ejemplo 4)

El volumen del sólido de revolución resultante es entonces

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^1 2\pi(x^{1/2} + x^{3/2} - x^3 - x^4) dx \\
 &= 2\pi \left[ \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 = \frac{37}{30}\pi,
 \end{aligned}$$

como vimos utilizando el método de secciones transversales en el ejemplo 5 de la sección 6.2.

Por último, observemos que el método de capas cilíndricas se resume en la fórmula heurística

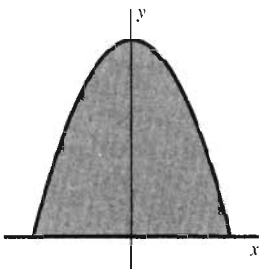
$$V = \int_{*}^{**} 2\pi r dA,$$

donde  $dA$  denota el área de una banda infinitesimal que se gira en torno de un círculo de radio  $r$  para generar una delgada capa cilíndrica. Los asteriscos indican los límites de integración que usted deberá determinar en cada caso.

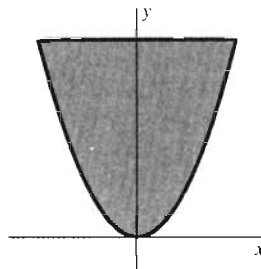
### 6.3 Problemas

En los problemas 1 a 28, utilice el método de capas cilíndricas para determinar el volumen del sólido generado al girar en torno del eje indicado la región acotada por las curvas dadas.

1.  $y = x^2, y = 0, x = 2$ ; el eje  $y$
2.  $x = y^2, x = 4$ ; el eje  $y$
3.  $y = 25 - x^2, y = 0$ ; el eje  $y$  (figura 6.3.15)

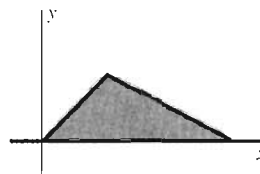


**Figura 6.3.15** Problema 3

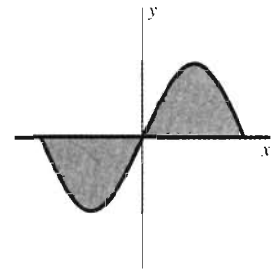


**Figura 6.3.16** Problema 4

4.  $y = 2x^2, y = 8$ ; el eje  $y$  (figura 6.3.16)
5.  $y = x^2, y = 8 - x^2$ ; el eje  $y$
6.  $x = 9 - y^2, x = 0$ ; el eje  $x$
7.  $x = y, x + 2y = 3, y = 0$ ; el eje  $x$  (figura 6.3.17)



**Figura 6.3.17** Problema 7



**Figura 6.3.18** Problema 11



8.  $y = x^2, y = 2x$ ; la recta  $y = 5$
9.  $y = 2x^2, y^2 = 4x$ ; el eje  $x$
10.  $y = 3x - x^2, y = 0$ ; el eje  $y$
11.  $y = 4x - x^3, y = 0$ ; el eje  $y$  (figura 6.3.18)

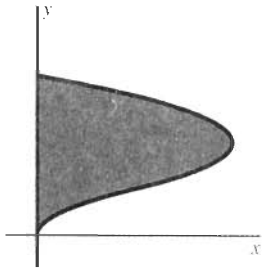


Figura 6.3.19 Problema 12

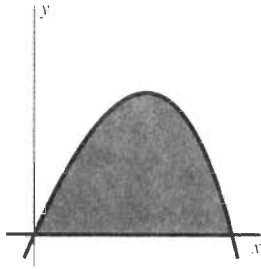


Figura 6.3.20 Problema 15

12.  $x = y^3 - y^4, x = 0$ ; la recta  $y = -2$  (figura 6.3.19)
13.  $y = x - x^3, y = 0$  ( $0 \leq x \leq 1$ ); el eje  $y$
14.  $x = 16 - y^2, x = 0, y = 0$  ( $0 \leq y \leq 4$ ); el eje  $x$
15.  $y = x - x^3, y = 0$  ( $0 \leq x \leq 1$ ); la recta  $x = 2$  (figura 6.3.20)
16.  $y = x^3, y = 0, x = 2$ ; el eje  $y$  (figura 6.3.21)

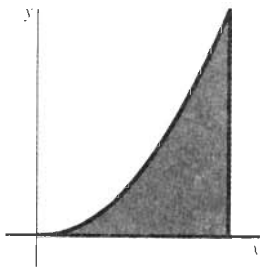


Figura 6.3.21 Problema 16

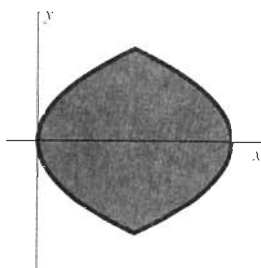


Figura 6.3.22 Problema 24

17.  $y = x^3, y = 0, x = 2$ ; la recta  $x = 3$
18.  $y = x^3, y = 0, x = 2$ ; el eje  $x$
19.  $y = x^2, y = 0, x = -1, x = 1$ ; la recta  $x = 2$
20.  $y = x^2, y = x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ); el eje  $y$
21.  $y = x^2, y = x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ); el eje  $x$
22.  $y = x^2, y = x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ); la recta  $y = 2$
23.  $y = x^2, y = x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ); la recta  $x = -1$
24.  $x = y^2, x = 2 - y^2$ ; el eje  $x$  (figura 6.3.22)
25.  $x = y^2, x = 2 - y^2$ ; la recta  $y = 1$
26.  $y = 4x - x^2, y = 0$ ; el eje  $y$
27.  $y = 4x - x^2, y = 0$ ; la recta  $x = -1$
28.  $y = x^2, x = y^2$ ; la recta  $y = -1$
29. Verifique la fórmula para el volumen de un cilindro circular recto, utilizando el método de capas cilíndricas.

Aplice el método a la figura generada al girar la región triangular con vértices  $(0, 0)$ ,  $(r, 0)$  y  $(0, h)$  en torno del eje  $y$ .

30. Utilice el método de capas cilíndricas para calcular el volumen del paraboloides del problema 33 en la sección 6.2.

31. Utilice el método de capas cilíndricas para determinar el volumen del elipsoide obtenido al girar la región elíptica acotada por la gráfica de la ecuación

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

en torno del eje  $y$ .

32. Utilice el método de capas cilíndricas para deducir la fórmula dada en el problema 38 de la sección 6.2 para el volumen de un segmento esférico.

33. Utilice el método de capas cilíndricas para calcular el volumen del toro del problema 39 de la sección 6.2. [Sugerencia: Sustituya  $u$  en vez de  $x - b$  en la integral dada en la fórmula de la ecuación (2).]

34. (a) Determine el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las curvas  $y = x^2$  y  $y = x + 2$  en torno de la recta  $x = -2$ . (b) Repita la parte (a), pero gire la región en torno de la recta  $x = 3$ .

35. Determine el volumen del sólido generado al girar el disco circular  $x^2 + y^2 \leq a^2$  en torno de la recta vertical  $x = -a$ .

36. (a) Verifique mediante una derivación que

$$\int x \sin x \, dx = \sin x - x \cos x + C.$$

(b) Determine el volumen del sólido obtenido al girar en torno del eje  $y$  el área bajo  $y = \sin x$  de  $x = 0$  a  $x = \pi$ .

37. En el ejemplo 2 vimos que el volumen que queda después de perforar un agujero de radio  $a$  por el centro de una esfera de radio  $b > a$  es

$$V = \frac{4}{3} \pi (b^2 - a^2)^{3/2}.$$

(a) Expresar el volumen  $V$  de esta fórmula *sin* emplear el radio  $a$  del agujero; en su lugar, utilice la altura  $h$  del agujero. [Sugerencia: Utilice el triángulo rectángulo de la figura 6.3.8.] (b) ¿Qué es lo importante de la respuesta a la parte (a)?

38. La región plana  $R$  está acotada por arriba y a la derecha por la gráfica de  $y = 25 - x^2$ , a la izquierda por el eje  $y$  y debajo por el eje  $x$ . Se genera un paraboloides al girar  $R$  en torno del eje  $y$ . Después se perfora a través del paraboloides un agujero vertical de radio 3 centrado a lo largo del eje  $y$ . Determine el volumen del sólido que resta utilizando (a) el método de secciones transversales y (b) el método de capas cilíndricas.



Figura 6.3.23 Anillo de compromiso

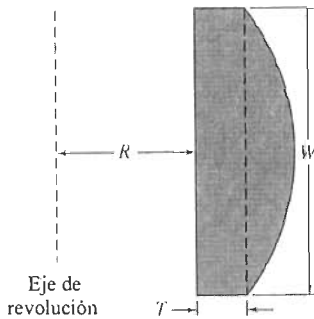


Figura 6.3.24 Sección transversal del anillo de compromiso

Este proyecto trata del anillo de compromiso que se muestra en la figura 6.3.23. Su forma se obtiene al girar la región  $A$  de la figura 6.3.24, en torno del eje vertical que también se muestra. El anillo tiene entonces

- Radio interior  $R$ ,
- Espesor mínimo  $T$  y
- Ancho  $W$ .

La frontera curva de la región  $A$ , es un arco de círculo cuyo centro está sobre el eje de revolución. En un anillo de compromiso típico,  $R$  podría medir de 6 a 12 mm,  $T$  de 0.5 a 1.5 mm y  $W$  de 4 a 10 mm.

Si un cliente pregunta el precio de un anillo de compromiso con las dimensiones dadas  $R$ ,  $T$  y  $W$ , el joyero debe calcular primero el volumen del anillo deseado para determinar la cantidad de oro necesario para hacerlo. Utilice los métodos de esta sección para mostrar que el volumen  $V$  está dado por la fórmula

$$V = \frac{\pi W}{6}(W^2 + 12RT + 6T^2). \quad (5)$$

Si estas dimensiones se miden en milímetros, entonces  $V$  está dado en milímetros cúbicos. (Existen  $1000 \text{ mm}^3$  en  $1 \text{ cm}^3$ .)

Suponga que el joyero planea hacer un cargo al cliente de \$1000 por onza troy de aleación (90% oro, 10% plata) utilizada para fabricar el anillo. (La ganancia en la venta, que cubre el tiempo y gastos del joyero durante la fabricación del anillo, es bastante, pues el precio del oro está por lo general abajo de \$400 la onza y el de la plata debajo de \$5 la onza.) El radio interior  $R$  del anillo de compromiso se determina mediante una medición del dedo del cliente (en milímetros; hay exactamente 25.4 milímetros por pulgada). Supongamos que el joyero fabrica todos los anillos de compromiso con  $T = 1$  (mm). Entonces, por un costo aceptable  $C$  (en dólares), el cliente desea saber el ancho máximo  $W$  del anillo de compromiso que puede pagar.

**PROBLEMA** Mida su dedo para determinar  $R$  (puede medir su circunferencia  $C$  con un hilo y después dividir entre  $2\pi$ ). Elija después un costo  $C$ , en el rango de precios de \$100 a \$150. Utilice la ecuación (5) con  $T = 1$  para determinar el ancho  $W$  de una banda que cueste  $C$  dólares (a \$1000 la onza). Necesitará saber que la densidad de la aleación oro – plata es  $18.4 \text{ g/cm}^3$  y que una libra contiene 12 onzas troy y 453.59 gramos. Utilice una calculadora gráfica o una calculadora con una tecla **SOLVE** para resolver la ecuación cúbica resultante en términos de  $W$ .

## 6.4 Longitud de arco y área de superficies de revolución

Si planea recorrer la ruta de las montañas hacia el mar en Carolina del Norte, necesitará conocer la longitud de este camino curvo para saber la cantidad de comida y el equipo que debe llevar consigo. En esta sección analizamos cómo determinar la longitud de una trayectoria curva y la idea intimamente relacionada con ésta de determinar el área de una superficie curva.

Un **arco suave** es la gráfica de una función suave definida en un intervalo cerrado; una **función suave**  $f$  en  $[a, b]$  es una función cuya derivada  $f'$  es continua en  $[a, b]$ . La continuidad de  $f'$  elimina la posibilidad de existencia de puntos

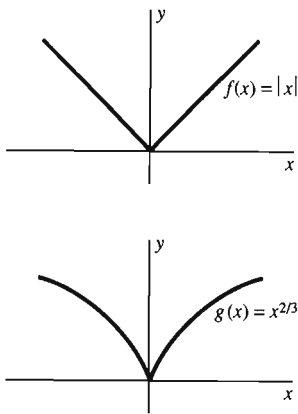


Figura 6.4.1 Gráficas con puntos esquina

esquina en la gráfica de  $f$ , puntos donde la dirección de la recta tangente cambia drásticamente. Las gráficas de  $f(x) = |x|$  y  $g(x) = x^{2/3}$  aparecen en la figura 6.4.1; ninguna es suave debido a que cada una tiene un punto esquina en el origen.

Para analizar la longitud de un arco suave, comenzaremos con la longitud de un segmento de recta, que simplemente es la distancia entre sus extremos. Entonces, dado un arco suave  $C$ , planteamos la siguiente cuestión. Si  $C$  fuera un cable delgado y lo rectificáramos sin estirarlo, ¿qué tan largo sería el cable? La respuesta es lo que llamamos la *longitud* de  $C$ .

Para aproximar la longitud  $s$  del arco suave  $C$ , podemos inscribir en  $C$  un arco poligonal (un arco formado por segmentos de recta) y calcular después la longitud de este arco poligonal. Procederemos de la manera siguiente, bajo la hipótesis de que  $C$  es la gráfica de una función suave  $f$  definida en el intervalo cerrado  $[a, b]$ . Consideremos una división de  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos, todos ellos con la misma longitud  $\Delta x$ . Sea  $P_i$  el punto  $(x_i, f(x_i))$  sobre el arco correspondiente al  $i$ -ésimo punto de subdivisión  $x_i$ . Nuestro arco poligonal "inscrito en  $C$ " es entonces la unión de los segmentos de recta  $P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{n-1}P_n$ . Así, una aproximación a la longitud  $s$  de  $C$  es

$$s \approx \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i|, \quad (1)$$

la suma de las longitudes de estos segmentos de recta (figura 6.4.2).

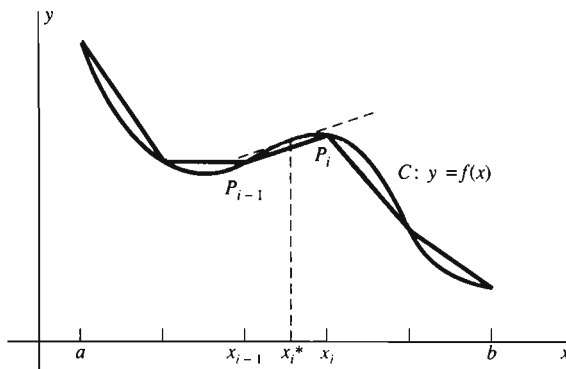


Figura 6.4.2 Un arco poligonal inscrito en la curva suave  $C$

La longitud del segmento de recta típico  $P_{i-1}P_i$  es

$$|P_{i-1}P_i| = [(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2]^{1/2}.$$

Aplicamos el teorema del valor medio a la función  $f$  en el intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  y con ello concluimos la existencia de un punto  $x_i^*$  en este intervalo tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} |P_{i-1}P_i| &= \left[ 1 + \left( \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \right)^2 \right]^{1/2} \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x, \end{aligned}$$

donde  $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ .

A continuación, sustituimos esta expresión para  $|P_{i-1}P_i|$  en la ecuación (1) y obtenemos la aproximación

$$s \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x.$$

Esta suma es una suma de Riemann para la función  $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$  en  $[a, b]$  y en consecuencia (como  $f'$  es continua), tales sumas tienden a la integral

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ . Pero nuestra aproximación también debería tender a la longitud real  $s$  cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ . Con esta base, *definimos la longitud  $s$*  del arco suave  $C$  como

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (2)$$

En el caso de un arco suave, dado como la gráfica de  $x = g(y)$  para  $y$  en  $[c, d]$ , un análisis similar parte de una subdivisión de  $[c, d]$  para obtener la fórmula

$$s = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \quad (3)$$

para su longitud. Podemos calcular la longitud de una curva más general, como un círculo, dividiendo en un número finito de arcos suaves y después aplicando a cada uno de estos arcos la ecuación (2) o (3) según el caso.

Hay una manera simbólica conveniente de recordar la ecuación (2) y la (3) simultáneamente. Pensemos en dos puntos cercanos  $P(x, y)$  y  $Q(x + dx, x + dy)$  en el arco suave  $C$  y denotemos  $ds$  la longitud del arco que une  $P$  y  $Q$ . Imaginemos que  $P$  y  $Q$  se encuentran tan cerca que  $ds$  es, para todos los propósitos prácticos, igual a la longitud del segmento de recta  $PQ$ . Entonces el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo rectángulo pequeño de la figura 6.4.3 implica

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \quad (4)$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (4')$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy. \quad (4'')$$

Pensamos la longitud total  $s$  de  $C$  como la suma de piezas pequeñas tal como  $ds$  y escribimos

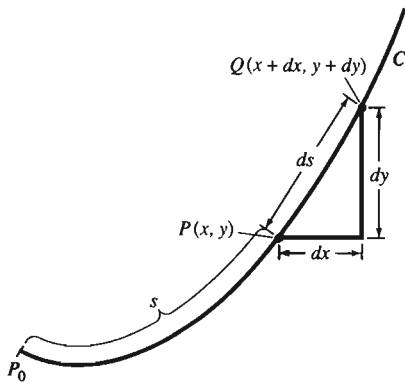
$$s = \int_a^b ds. \quad (5)$$

Entonces la sustitución formal (simbólica) de las expresiones en las ecuaciones (4') y (4'') para  $ds$  en la ecuación (5) implican las ecuaciones (2) y (3); sólo falta determinar los límites de integración.

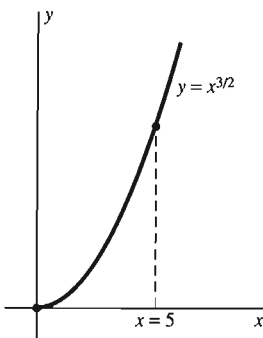
**EJEMPLO 1** Determine la longitud de la llamada parábola semicúbica (no es realmente una parábola)  $y = x^{3/2}$  en  $[0, 5]$  (figura 6.4.4).

**Solución** Calculamos primero el integrando de la ecuación (2):

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} = \frac{1}{2}(4 + 9x)^{1/2}.$$



**Figura 6.4.3** Desarrollo heurístico de la fórmula para la longitud de arco



**Figura 6.4.4** La parábola semicúbica del ejemplo 1

Por tanto, la longitud del arco  $y = x^{3/2}$  en el intervalo  $[0, 5]$  es

$$s = \int_0^5 \frac{1}{2}(4 + 9x)^{1/2} dx = \left[ \frac{1}{27}(4 + 9x)^{3/2} \right]_0^5 = \frac{335}{27} \approx 12.41.$$

Como verificación de la plausibilidad de esto, los extremos del arco son  $(0, 0)$  y  $(5, 5\sqrt{5})$ , de modo que el segmento de recta que une estos puntos tiene longitud  $5\sqrt{6} \approx 12.25$ . Esto es, como debe ser, algo menor que la longitud del arco calculada.

**EJEMPLO 2** Determine la longitud  $s$  de la curva

$$x = \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2y}, \quad 1 \leq y \leq 2.$$

**Solución** En este caso,  $y$  es la variable independiente natural, por lo que utilizamos la fórmula de longitud del arco de la ecuación (3). Primero calculamos

$$\begin{aligned} 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 &= 1 + \left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2y^2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4y^4} \\ &= \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4y^4} = \left(\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2y^2}\right)^2. \end{aligned}$$

Podemos “sacar del radical” en la ecuación (3):

$$\begin{aligned} s &= \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2y^2}\right) dy \\ &= \left[\frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{2y}\right]_1^2 = \frac{17}{12}. \end{aligned}$$

**EJEMPLO 3** Un fabricante necesita hacer hojas de metal corrugado de 36 pulgadas de ancho con secciones transversales con la forma de la curva

$$y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \pi x, \quad 0 \leq x \leq 36$$

(figura 6.4.5). ¿Qué ancho deben tener las hojas originales extendidas para que el fabricante produzca estas hojas corrugadas?



**Figura 6.4.5** La hoja corrugada con la forma de  $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$  (ejemplo 3)

**Solución** Si

$$f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \pi x, \text{ entonces } f'(x) = \frac{1}{2} \pi \cos \pi x.$$

Por consiguiente, la ecuación (2) produce la longitud de arco de la gráfica de  $f$  sobre  $[0, 36]$ :

$$s = \int_0^{36} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\pi\right)^2 \cos^2 \pi x} dx = 36 \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\pi\right)^2 \cos^2 \pi x} dx.$$

Estas integrales no pueden ser evaluadas en términos de funciones elementales. Por ello, no podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo. Estimamos entonces sus valores con la ayuda de la aproximación de Simpson (sección 5.9). Con  $n = 6$  y  $n = 12$  subintervalos determinamos que

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (\frac{1}{2}\pi)^2 \cos^2 \pi x} dx \approx 1.46$$

pulgadas. Por tanto, el fabricante debe utilizar hojas extendidas de aproximadamente  $36 \cdot 1.46 \approx 52.6$  pulgadas de ancho.

## ÁREAS DE SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

Una **superficie de revolución** es aquella superficie que se obtiene al girar un arco de curva en torno de un eje, que se encuentra en el mismo plano del arco. La superficie de un cilindro o de una esfera y la superficie curva de un cono son importantes ejemplos de superficies de revolución.

Nuestro método básico para determinar el área de esta superficie es el siguiente: primero inscribimos un arco poligonal en la curva por girar. Después consideramos el área de la superficie generada al girar el arco poligonal como una aproximación de la superficie generada al girar la curva original. Como la superficie generada al girar un arco poligonal en torno de un eje consta de conos truncados (secciones), podemos calcular su área en una forma razonablemente sencilla.

Este método para el cálculo del área de la superficie proviene de Arquímedes. Por ejemplo, él utilizó este método para establecer la fórmula  $A = 4\pi r^2$  para el área de la superficie de una esfera de radio  $r$ .

Necesitaremos la fórmula

$$A = 2\pi \bar{r} L \quad (6)$$

para el área de la superficie curva de un cono con un radio promedio de  $\bar{r} = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$  y *altura inclinada*  $L$  (figura 6.4.6). La ecuación (6) es consecuencia de la fórmula

$$A = \pi r L \quad (7)$$

para el área de una superficie cónica con radio de la base  $r$  y una *altura inclinada*  $L$  (figura 6.4.7). Es fácil obtener la ecuación (7) “desarrollando” la superficie cónica como un sector de un círculo de radio  $L$ , ya que el área de este sector es

$$A = \frac{2\pi r}{2\pi L} \cdot \pi L^2 = \pi r L.$$

Para obtener la ecuación (6) de la ecuación (7), pensamos el cono truncado como la sección inferior de un cono con altura inclinada  $L_2 = L + L_1$  (figura 6.4.8). Después de restar el área de la sección cónica superior del cono completo obtenemos

$$A = \pi r_2 L_2 - \pi r_1 L_1 = \pi r_2 (L + L_1) - \pi r_1 L_1 = \pi (r_2 - r_1) L_1 + \pi r_2 L$$

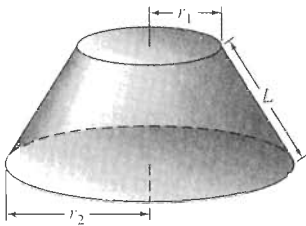
para el área del cono truncado. Pero los triángulos rectángulos semejantes de la figura 6.4.8 implican la proporción

$$\frac{r_1}{L_1} = \frac{r_2}{L_2} = \frac{r_2}{L + L_1},$$

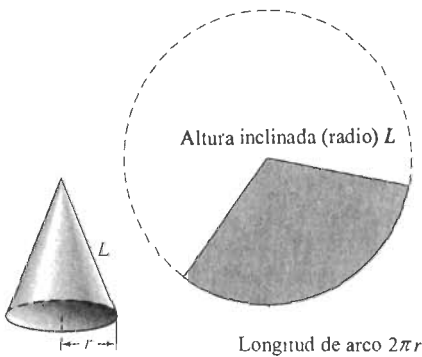
de donde determinamos que  $(r_2 - r_1)L_1 = r_1 L$ . Por tanto el área del cono truncado es

$$A = \pi r_1 L + \pi r_2 L = 2\pi \bar{r} L,$$

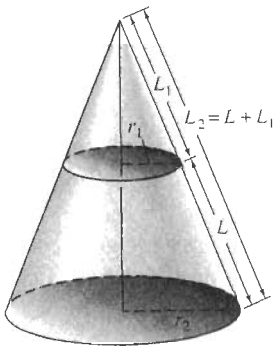
donde  $\bar{r} = 1/2 (r_1 + r_2)$ . Así, hemos verificado la ecuación (6).



**Figura 6.4.6** Un cono truncado. La altura inclinada es  $L$



**Figura 6.4.7** El área de la superficie de un cono. Cortamos por  $L$  y después desarrollamos el cono como un sector circular



**Figura 6.4.8** Dedución de la ecuación (6)

Supongamos ahora que la superficie  $S$  tiene área  $A$  y que se genera al girar en torno del eje  $x$  el arco suave  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ ; suponga también que  $f(x)$  nunca es negativa en  $[a, b]$ . Para aproximar  $A$ , comenzamos con una división de  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos, cada uno de longitud  $\Delta x$ . Como en nuestro análisis de la longitud del arco que nos condujo a la ecuación (2), sea  $P_i$  el punto  $(x_i, f(x_i))$  en el arco. Entonces, como antes, el segmento de recta  $P_{i-1}P_i$  tiene longitud

$$L_i = |P_{i-1}P_i| = \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x$$

para algún punto  $x_i^*$  en el  $i$ -ésimo subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ .

El cono truncado obtenido al girar el segmento  $P_{i-1}P_i$  en torno del eje  $x$  tiene una altura inclinada  $L_i$ , y, como se muestra en la figura 6.4.9, el radio promedio

$$\bar{r}_i = \frac{1}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)].$$

Como  $\bar{r}_i$  se encuentra entre los valores de  $f(x_{i-1})$  y  $f(x_i)$ , la propiedad del valor intermedio para funciones continuas (sección 2.4) proporciona un punto  $x_i^{**}$  en  $[x_{i-1}, x_i]$  tal que  $\bar{r}_i = f(x_i^{**})$ . Por la ecuación (6), el área del cono truncado es

$$2\pi\bar{r}_i L_i = 2\pi f(x_i^{**}) \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x.$$

Sumamos las áreas de estos conos truncados para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Esto produce la aproximación

$$A \approx \sum_{i=1}^n 2\pi f(x_i^{**}) \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x.$$

Si  $x_i^*$  y  $x_i^{**}$  fueran el mismo punto del  $i$ -ésimo subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ , entonces esta aproximación podría ser una suma de Riemann para la integral

$$\int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Aunque los números  $x_i^*$  y  $x_i^{**}$  sean distintos por lo general, aun así tenemos (por un resultado enunciado en el apéndice F) que nuestra aproximación tiende a la integral anterior cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ . Intuitivamente, esto es fácil de creer: después de todo, cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ , la diferencia entre  $x_i^*$  y  $x_i^{**}$  también tiende a cero.

Por tanto, *definimos* el área  $A$  de la superficie generada al girar la curva suave  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  en torno del eje  $x$ , mediante la fórmula

$$A = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (8)$$

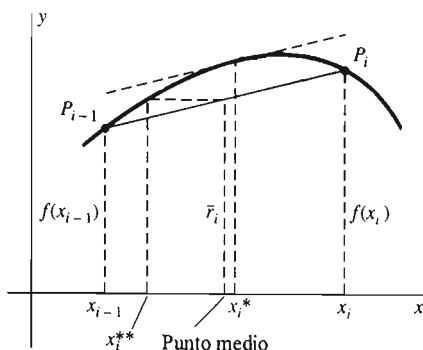
Si escribimos  $y$  en vez de  $f(x)$  y  $ds$  en vez de  $\sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx$ , como en la ecuación (4'), entonces podemos abreviar la ecuación (8) como

$$A = \int_a^b 2\pi y ds \quad (\text{eje } x). \quad (9)$$

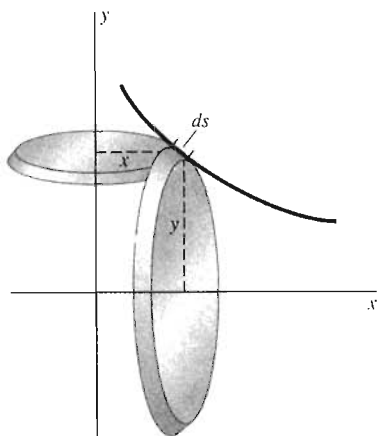
Podemos recordar esta fórmula si pensamos en  $dA = 2\pi y ds$  como el área del cono truncado angosto obtenido al girar el pequeño arco  $ds$  en torno del eje  $x$  en un círculo de radio  $y$  (figura 6.4.10).

Si el arco suave que se gira en torno del eje  $x$  está dado por  $x = g(y)$ ,  $c \leq y \leq d$ , entonces una aproximación basada en una subdivisión de  $[c, d]$  conduce a la fórmula

$$A = \int_c^d 2\pi y \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy. \quad (10)$$



**Figura 6.4.9** Aproximación del área de una superficie de revolución mediante la superficie de un cono truncado



**Figura 6.4.10** El arco  $ds$  puede girarse en torno del eje  $x$  o del eje  $y$

Podemos obtener la ecuación (10) si hacemos la siguiente sustitución formal  $ds = \sqrt{1 + (dx/dy)^2} dy$  de la ecuación (4'') en la fórmula abreviada de la ecuación (9) para el área de una superficie de revolución y después reemplazamos  $a$  y  $b$  por los límites correctos de integración.

Ahora, consideremos la superficie generada al girar un arco suave en torno del eje  $y$  en vez del eje  $x$ . En la figura 6.4.10 vemos que el radio promedio del cono truncado angosto obtenido al girar el arco pequeño  $ds$  es  $x$  en vez de  $y$ . Esto sugiere la fórmula abreviada

$$A = \int_a^b 2\pi x ds \quad (\text{eje } y) \quad (11)$$

para el área de una superficie de revolución en torno del eje  $y$ . Si el arco suave está dado por  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  entonces la sustitución simbólica implica  $ds = \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx$

$$A = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (12)$$

Pero si el arco suave tiene la forma  $x = g(y)$ ,  $c \leq y \leq d$  entonces la sustitución simbólica  $ds = \sqrt{1 + (dx/dy)^2} dy$  en la ecuación (11) implica

$$A = \int_c^d 2\pi g(y) \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy. \quad (13)$$

Podemos verificar las ecuaciones (12) y (13) utilizando aproximaciones similares a la que condujo a la ecuación (8).

Así, tenemos *cuatro* fórmulas para el área de superficies de revolución, resumidas en la tabla de la figura 6.4.11. Decidir cuál de estas fórmulas es la adecuada para calcular el área de una superficie dada, depende de dos factores.

1. Si el arco suave que genera la superficie tiene la forma  $y = f(x)$  o la forma  $x = g(y)$ , y
2. Si este arco se gira en torno del eje  $x$  o del eje  $y$ .

No es necesario memorizar las cuatro fórmulas de la tabla. En vez de esto, le sugerimos recordar las fórmulas abreviadas de las ecuaciones (9) y (11) junto con la figura 6.4.10 y hacer la sustitución

$$y = f(x), \quad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

		Eje de revolución	
		Eje $x$	Eje $y$
Descripción de la curva $C$	$y = f(x),$ $a \leq x \leq b$	$\int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (8)$	$\int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (10)$
	$x = g(y),$ $c \leq y \leq d$	$\int_c^d 2\pi y \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy \quad (10)$	$\int_c^d 2\pi g(y) \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy \quad (13)$

**Figura 6.4.11** Fórmulas para el área de superficies de revolución



o la sustitución

$$x = g(y), \quad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy,$$

según si el arco suave se presenta como función de  $x$  o como función de  $y$ . También puede ser útil observar que cada una de estas cuatro fórmulas para el área de una superficie es de la forma

$$A = \int_a^b 2\pi r ds, \quad (14)$$

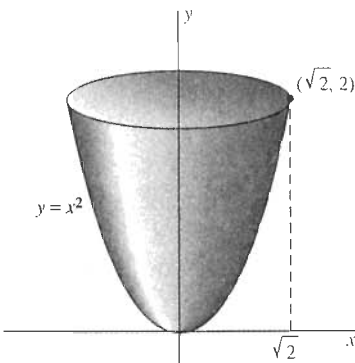
donde  $r$  denota el radio del círculo en torno del cual se gira el elemento de longitud de arco  $ds$ .

Como en las secciones anteriores, de nuevo le advertimos que identifique la variable independiente examinando la diferencial que exprese cada variable dependiente en términos de la variable independiente antes de obtener la primitiva. Es decir, exprese todo, incluyendo  $ds$ , en términos de  $x$  (y  $dx$ ) o todo en términos de  $y$  (y  $dy$ ).

**EJEMPLO 4** Determine el área del paraboloides que se muestra en la figura 6.4.12, que se obtiene al girar el arco parabólico  $y = x^2$ ,  $0 \leq x \leq \sqrt{2}$  en torno del eje  $y$ .

**Solución** Seguimos la sugerencia que precede a este ejemplo y obtenemos

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b 2\pi x ds = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} 2\pi x \sqrt{1 + (2x)^2} dx \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\pi}{4} (1 + 4x^2)^{1/2} \cdot 8x dx = \left[ \frac{\pi}{6} (1 + 4x^2)^{3/2} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{13}{3} \pi. \end{aligned}$$



**Figura 6.4.12** El paraboloides del ejemplo 4

La decisión de la fórmula abreviada por utilizar (ecuación (9) u (11)) queda determinada por el eje de revolución. En contraste, la decisión de que la variable de integración deba ser  $x$  o  $y$  se toma con base en el arco suave dado: como una función de  $x$  o como función de  $y$ . En algunos problemas,  $x$  o  $y$  se pueden emplear como la variable de integración, pero por lo general, la integral es mucho más simple y fácil de evaluar si se hace la elección correcta. La experiencia es muy útil en este contexto. En este momento, intente resolver el ejemplo 4 con la variable independiente  $y$ .

## 6.4 Problemas

En los problemas 1 a 10, establezca y simplifique la integral que proporciona la longitud del arco suave dado. No evalúe la integral.

1.  $y = x^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$
2.  $y = x^{3/2}$ ,  $1 \leq x \leq 3$
3.  $y = 2x^3 - 3x^2$ ,  $0 \leq x \leq 2$
4.  $y = x^{4/3}$ ,  $-1 \leq x \leq 1$

5.  $y = 1 - x^2$ ,  $0 \leq x \leq 100$
6.  $x = 4y - y^2$ ,  $0 \leq y \leq 1$
7.  $x = y^4$ ,  $-1 \leq y \leq 2$
8.  $x^2 = y$ ,  $1 \leq y \leq 4$
9.  $xy = 1$ ,  $1 \leq x \leq 2$
10.  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $0 \leq x \leq 2$

En los problemas 11 a 20, establezca y simplifique la integral que da el área de la superficie de revolución, generada al girar el arco suave dado en torno del eje especificado. No evalúe la integral.

11.  $y = x^2$ ,  $0 \leq x \leq 4$ ; el eje  $x$
12.  $y = x^2$ ,  $0 \leq x \leq 4$ ; el eje  $y$
13.  $y = x - x^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ; el eje  $x$
14.  $y = x^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ; la recta  $y = 4$
15.  $y = x^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ; la recta  $x = 2$
16.  $y = x - x^3$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ; el eje  $x$
17.  $y = \sqrt{x}$ ,  $1 \leq x \leq 4$ ; el eje  $x$
18.  $y = \sqrt{x}$ ,  $1 \leq x \leq 4$ ; el eje  $y$
19.  $y = x^{3/2}$ ,  $1 \leq x \leq 4$ ; la recta  $x = -1$
20.  $y = x^{5/2}$ ,  $1 \leq x \leq 4$ ; la recta  $y = -2$

Determine la longitud de los arcos suaves en los problemas 21 a 28.

21.  $y = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2}$  de  $x = 0$  a  $x = 2$
22.  $x = \frac{2}{3}(y - 1)^{3/2}$  de  $y = 1$  a  $y = 5$
23.  $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$  de  $x = 1$  a  $x = 3$
24.  $x = \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{4y^2}$  de  $y = 1$  a  $y = 2$
25.  $8x^2y - 2x^6 = 1$  de  $(1, \frac{1}{8})$  a  $(2, \frac{129}{32})$
26.  $12xy - 4y^4 = 3$  de  $(\frac{7}{12}, 1)$  a  $(\frac{67}{24}, 2)$
27.  $y^3 = 8x^2$  de  $(1, 2)$  a  $(8, 8)$
28.  $(y - 3)^2 = 4(x + 2)^3$  de  $(-1, 5)$  a  $(2, 19)$

En los problemas 29 a 35, determine el área de la superficie de revolución generada al girar la curva dada en torno del eje indicado.

29.  $y = \sqrt{x}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ; el eje  $x$
30.  $y = x^3$ ,  $1 \leq x \leq 2$ ; el eje  $x$
31.  $y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{12x^3}$ ,  $1 \leq x \leq 2$ ; el eje  $y$
32.  $x = \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{4y^2}$ ,  $1 \leq y \leq 2$ ; el eje  $x$
33.  $y^3 = 3x$ ,  $0 \leq x \leq 9$ ; el eje  $y$

34.  $y = 2/3x^{3/2}$ ,  $1 \leq x \leq 2$ ; el eje  $y$ . [Sugerencia: Haga la sustitución  $u = 1 + x$ .]

35.  $y = (2x - x^2)^{1/2}$ ,  $0 \leq x \leq 2$ ; el eje  $x$ .

36. Demuestre que la longitud de un arco de la curva sinusoidal  $y = \sin x$  es igual a la mitad de la circunferencia de la elipse  $2x^2 + y^2 = 2$ . [Sugerencia: Sustituya  $x = \cos \theta$  en la integral de longitud de arco para la elipse.]

37. Use la aproximación de Simpson con  $n = 6$  subintervalos para estimar la longitud del arco del seno del problema 36.

38. Use la aproximación de Simpson con  $n = 10$  subintervalos para estimar la longitud de la parábola  $y = x^2$  de  $x = 0$  a  $x = 1$ .

39. Verifique la ecuación (6) para el área de un tronco cónico. Piense el cono como generado al girar en torno del eje  $y$  el segmento de recta de  $(r_1, 0)$  a  $(r_2, h)$ .

40. Considere una esfera de radio  $r$  como una superficie de revolución, para obtener la fórmula  $A = 4\pi r^2$  para el área de su superficie.

41. Determine la longitud total de la *astroide* que se muestra en la figura 6.4.13. La ecuación de su gráfica es  $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ .

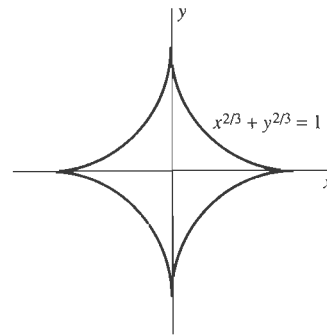


Figura 6.4.13 La astroide del problema 41

42. Determine el área de la superficie generada al girar la astroide del problema 41 en torno del eje  $y$  (figura 6.4.14).

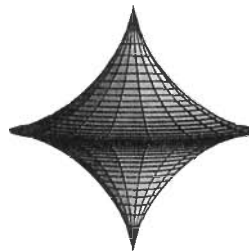


Figura 6.4.14 La superficie del problema 42

## 6.4 Proyecto

En pocas ocasiones, las integrales de longitud de arco que aparecen en las aplicaciones son fáciles de evaluar con exactitud. Este proyecto utiliza técnicas de integración numérica (como se describió en los proyectos para las secciones 5.4 y 5.9) para aproximar tales integrales.

En los problemas 1 a 10, calcule las aproximaciones mediante los puntos derechos e izquierdos  $R_n$  y  $L_n$ , la aproximación por trapecios  $T_n = (R_n + L_n)/2$  o la aproximación de Simpson  $S_n$ . En cada caso, utilice  $n = 10, 20, 40, \dots$  subintervalos, duplicando el número de subintervalos hasta que esté satisfecho con la precisión obtenida.

1 a 5. Determine las longitudes de arco de las gráficas descritas en los problemas 1 a 5 de esta sección.

6 a 10. Determine las áreas de las superficies descritas en los problemas 11 a 15 de esta sección.

11. La figura 6.4.15 muestra un cable de un puente colgante, que tiene la forma de una parábola con ecuación  $y = kx^2$ . El puente colgante tiene una longitud total  $2S$  y la altura del cable (con respecto de su punto más bajo) es  $H$  en cada extremo. Muestre que la longitud total de este cable es

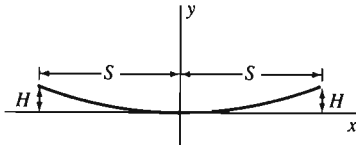


Figura 6.4.15 El cable parabólico de soporte de un puente colgante

$$L = 2 \int_0^S \left( 1 + \frac{4H^2}{S^4} x^2 \right)^{1/2} dx.$$

12. Los ingenieros italianos han propuesto un puente de suspensión entre el estrecho de Messina (con un ancho de 8 km) entre Italia y Sicilia. Los planos incluyen torres de suspensión a 380 m de altura en cada extremo. Utilice la integral del problema 11 para aproximar la longitud  $L$  del cable parabólico de suspensión para el puente propuesto. Suponga que las dimensiones dadas son exactas y aproxime la integral con la precisión suficiente para determinar  $L$  redondeada a metros.

## 6.5 Ecuaciones diferenciales separables

Observamos en la sección 5.2 que los modelos matemáticos de los fenómenos cambiantes del mundo real implican con frecuencia ecuaciones diferenciales (es decir, ecuaciones que contienen *derivadas* de funciones desconocidas). Una **ecuación diferencial de primer orden** es una ecuación diferencial que se puede escribir de la forma

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y), \quad (1)$$

donde  $x$  denota la variable independiente y  $y$  es la función desconocida. Una **solución** de la ecuación (1) es una función  $y = y(x)$  tal que  $y'(x) = F(x, y(x))$  para toda  $x$  en algún intervalo adecuado  $I$ .

**EJEMPLO 1** Si  $y = x^{3/2}$ , entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} x^{1/2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{x^{3/2}}{x} = \frac{3y}{2x}$$

si  $x > 0$ . Por tanto, la función  $y(x) = x^{3/2}$  es una solución (en el intervalo  $x > 0$ ) de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{2x}.$$

Así, para verificar que  $y = y(x)$  es una solución de la ecuación (1), primero calculamos  $dy/dx$  y después mostramos que es igual a  $F(x, y)$ .

La ecuación diferencial en (1) es **separable** si su lado derecho es el producto de una función de  $x$  y una función de  $y$ . En tal caso, la ecuación toma la forma particular

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\phi(y). \quad (2)$$

En este caso, las variables  $x$  y  $y$  se pueden “separar” (aislar en lados opuestos de la ecuación) escribiendo de manera informal la ecuación diferencial

$$f(y) dy = g(x) dx. \quad (3)$$

Entendemos la ecuación (3) como una notación concisa para la ecuación

$$f(y) \frac{dy}{dx} = g(x), \quad (4)$$

a la que llegamos multiplicando cada lado de la ecuación (2) por  $f(y) = 1/\phi(y)$ .

## MÉTODO DE SOLUCIÓN

Una de las aplicaciones más importantes de la integración es la solución de ecuaciones diferenciales. Ahora mostraremos que la solución de la ecuación diferencial en (4) se reduce a la evaluación de dos integrales. Cuando integramos ambos lados de la ecuación (4) con respecto de  $x$ , obtenemos

$$\int f(y(x)) \frac{dy}{dx} dx = \int g(x) dx + C, \quad (5)$$

pues dos primitivas de la misma función sólo pueden diferir por una constante. Si sustituimos

$$y = y(x), \quad dy = \frac{dy}{dx} dx$$

en el lado izquierdo de la ecuación (5), obtenemos

$$\int f(y) dy = \int g(x) dx + C, \quad (6)$$

como si integrásemos cada lado de  $f(y)dy = g(x)dx$  con respecto de su propia variable. Si podemos evaluar las integrales indefinidas

$$F(y) = \int f(y) dy \quad y \quad G(x) = \int g(x) dx \quad (7)$$

entonces la ecuación (6) toma la forma

$$F(y) = G(x) + C. \quad (8)$$

Por último, podemos tratar de resolver la ecuación (8) para obtener una solución *explícita*  $y = y(x)$  de la ecuación diferencial original. En caso contrario, podríamos tratar de resolver la ecuación (8) para  $x = x(y)$ . Si también esto es imposible, por lo general nos conformaremos con la solución en la forma de la ecuación (8). Llamamos a esta forma una *solución implícita* de la ecuación diferencial original, pues la ecuación (8) presenta la solución en una forma definida de manera implícita.

Observe que  $y(x)$  involucra la constante arbitraria  $C$ . Cuando una solución de una ecuación diferencial contiene una constante arbitraria, la llamamos una

**solución general** de la ecuación diferencial. Una solución general describe en realidad una colección infinita de soluciones diferentes de una ecuación diferencial dada, pues los distintos valores de la constante  $C$  proporcionan diferentes soluciones *particulares* (soluciones que no contienen constantes arbitrarias).

**EJEMPLO 2** Determine una solución general de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy} \quad (x, y > 0). \quad (9)$$

**Solución** Cuando separamos las variables e integramos, como en la ecuación (6), obtenemos

$$\int y^{-1/2} dy = \int x^{1/2} dx + C, \quad 2y^{1/2} = \frac{2}{3}x^{3/2} + C. \quad (10)$$

Ahora, podemos despejar  $y$  para obtener la solución general

$$y(x) = \left(\frac{1}{3}x^{3/2} + \frac{1}{2}C\right)^2 \quad (11)$$

en forma explícita.

## CAMPOS DE PENDIENTES Y CURVAS SOLUCIÓN

Para analizar el posible comportamiento de las soluciones de una ecuación diferencial de la forma  $dy/dx = f(x, y)$ , podemos pensar la ecuación diferencial de una manera muy geométrica: en varios puntos  $(x, y)$  del plano  $xy$ , el valor de  $f(x, y)$  determina una pendiente  $dy/dx$ . Una *solución* de esta ecuación diferencial es una función diferenciable cuya gráfica tiene pendiente  $dy/dx = f(x, y)$  en cada punto  $(x, y)$ . En ocasiones, la *gráfica* de una solución de una ecuación diferencial se llama **curva solución** de la ecuación. En términos geométricos, una curva solución de la ecuación diferencial  $dy/dx = f(x, y)$  es una curva en el plano cuya recta tangente en cada punto  $(x, y)$  tiene pendiente  $m = f(x, y)$ .

Suponga que trazamos un pequeño segmento de recta con pendiente  $m = f(x, y)$  por cada punto de una colección representativa de puntos  $(x, y)$  en el plano  $xy$ . (Existen programas de computadora para hacer esto sin demasiado esfuerzo.) El conjunto de todos estos segmentos de recta es un **campo de pendientes** o **campo de direcciones**, para la ecuación  $dy/dx = f(x, y)$ . Podemos intentar bosquejar (o visualizar) una curva solución que se desplace por el campo de pendientes de modo que la curva sea tangente a cada uno de los pequeños segmentos de recta que interseca.

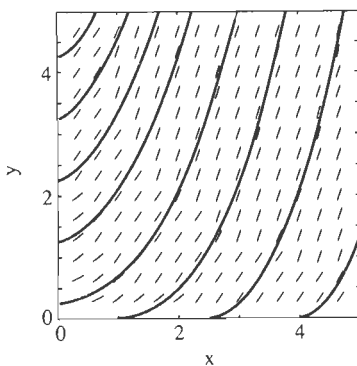
La figura 6.5.1 muestra un campo de pendientes y las curvas solución típicas para la ecuación diferencial  $dy/dx = \sqrt{xy}$  del ejemplo 2. Como sugiere la figura, estas curvas solución llenan el primer cuadrante del plano  $xy$ . A través de cualquier punto  $(x_0, y_0)$  del primer cuadrante pasa exactamente una curva solución, la correspondiente al valor de la constante

$$C = 2(y_0)^{1/2} - \frac{2}{3}(x_0)^{3/2}$$

obtenida al sustituir  $x = x_0$  y  $y = y_0$  en la segunda ecuación en (10).

Una solución específica de una ecuación diferencial, como la que se obtiene cuando se especifica el valor de la constante  $C$  en una solución general, es una **solución particular** de la ecuación diferencial. Con frecuencia, buscamos una solución particular que satisfaga una **condición inicial** de la forma

$$y(x_0) = y_0. \quad (12)$$



**Figura 6.5.1** Campo de pendientes y curvas solución para

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$$

En este caso, queremos resolver el **problema con condición inicial**

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (13)$$

que consta de una ecuación diferencial y una condición inicial.

En los textos de ecuaciones diferenciales se demuestra que si  $F(x, y)$  es una función de  $x$  y  $y$  “bien comportada”, entonces el problema con condición inicial (13) tiene exactamente una solución  $y = y(x)$  para  $x$  cercano a  $x_0$ . Si una ecuación diferencial es separable, entonces podemos intentar determinar esta solución como sigue:

- En primer lugar, separamos las variables e integramos para obtener una solución general.
- Después imponemos la condición inicial  $y(x_0) = y_0$  para evaluar la constante  $C$  y con ello determinar la solución particular deseada.

**EJEMPLO 3** Resuelva el problema con condición inicial

(a)  $\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}, \quad y(0) = 1;$

(b)  $\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}, \quad y(2) = 2.$

**Solución** En el ejemplo 2 determinamos la solución implícita

$$2y^{1/2} = \frac{2}{3}x^{3/2} + C \quad (10)$$

que produce la solución general

$$y(x) = \left(\frac{1}{3}x^{3/2} + \frac{1}{2}C\right)^2$$

de la ecuación diferencial  $dy/dx = \sqrt{xy}$ .

Para resolver el problema con condición inicial de la parte (a), sustituimos  $x=0$  y  $y=1$  en la ecuación (10), para obtener  $C=2$ . Por tanto, la solución particular deseada está dada por

$$y(x) = \left(\frac{1}{3}x^{3/2} + 1\right)^2 = \frac{1}{9}(x^{3/2} + 3)^2.$$

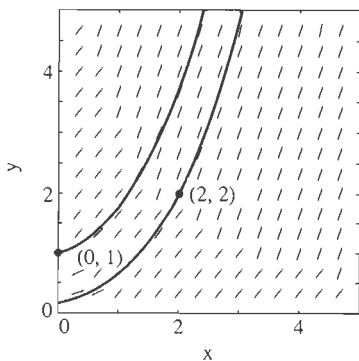
Para resolver el problema con condición inicial en la parte (b), sustituimos  $x=2$  y  $y=2$  en la ecuación (10):

$$2 \cdot 2^{1/2} = \frac{2}{3} \cdot 2^{3/2} + C = \frac{4}{3} \cdot 2^{1/2} + C.$$

Esto implica que  $C = 2/3 \sqrt{2}$ , por lo que la solución particular deseada es

$$y(x) = \left(\frac{1}{3}x^{3/2} + \frac{1}{3}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{9}(x^{3/2} + \sqrt{2})^2.$$

Las curvas solución de las partes (a) y (b) se muestran en la figura 6.5.2.



**Figura 6.5.2** Las curvas solución del ejemplo 2

## CRECIMIENTO DE POBLACIONES

Una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dP}{dt} = kP^\alpha \quad (14)$$

se utiliza con frecuencia para modelar el crecimiento de una población con  $P(t)$  individuos en el instante  $t$ , si podemos considerar la función continua  $P(t)$  como

una aproximación suficientemente precisa de la población real discreta. La constante de proporcionalidad  $k$  debe determinarse por lo general mediante experimentación, mientras que el valor del exponente  $\alpha$  depende de las hipótesis acerca de la forma en que cambia la población. Por ejemplo, el caso de tasas de natalidad y mortalidad *constantes* corresponde al valor  $\alpha = 1$  e implica la ecuación de crecimiento *natural* de poblaciones  $dP/dt = kP$ . En el ejemplo 4, consideramos  $\alpha = 0.5$  (principalmente para simplificar los cálculos).

**EJEMPLO 4** Suponga que inicialmente en un lago existen  $P(0) = 100$  peces y que la población de tales peces  $P(t)$  satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k\sqrt{P} \quad (k \text{ constante}). \quad (15)$$

Si después de  $t = 6$  meses hay 169 peces en el lago, ¿cuántos habrá después de un año (es decir, cuando  $t = 12$ )?

**Solución** Utilizamos el dato  $P(6) = 169$  para determinar el valor de  $k$ . Pero primero debemos resolver la ecuación diferencial. Separamos las variables de la ecuación (15) e integramos:

$$\begin{aligned} \int P^{-1/2} dP &= \int k dt + C; \\ 2\sqrt{P} &= kt + C. \end{aligned} \quad (16)$$

Sabemos que  $P = 100$  cuando  $t = 0$ . La sustitución simultánea de estos valores en la ecuación (16) implica  $C = 2\sqrt{100} = 20$ , de modo que

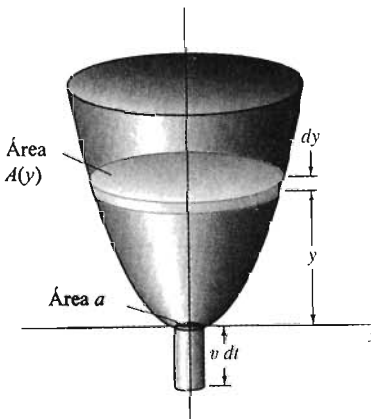
$$2\sqrt{P} = kt + 20.$$

A continuación, sustituimos  $t = 6$  y  $P = 169$  para obtener el valor  $k = 1$ , por lo que  $2\sqrt{P} = t + 20$ . En consecuencia, la población de peces después de  $t$  meses está dada por

$$P(t) = \frac{1}{4}(t + 20)^2.$$

Por último, el número de peces en el lago después de un año es

$$P(12) = \frac{1}{4} \cdot 32^2 = 256.$$



**Figura 6.5.3** Deducción de la ley de Torricelli

## LEY DE TORRICELLI

Supongamos que un tanque de agua tiene un agujero de área  $a$  en el fondo y que el agua sale por el agujero. Denotamos  $y(t)$  la profundidad (en pies) del agua en el tanque en el instante  $t$  (en segundos) y  $V(t)$  el volumen de agua (en pies cúbicos) en el tanque en el mismo instante. Es plausible (y cierto bajo condiciones ideales) que la velocidad del flujo de agua que sale por el agujero es

$$v = \sqrt{2gy} \quad (g \approx 32 \text{ pies/s}^2), \quad (17)$$

que es la velocidad adquirida por una gota de agua en caída libre desde la superficie del agua hasta el agujero. Ésta es la *ley de Torricelli*.

Como lo indica la figura 6.5.3, la cantidad de agua que sale por el agujero del fondo durante un pequeño lapso  $dt$  equivale a un cilindro con área de la base  $a$  y altura  $v dt$ . Por tanto, el cambio resultante  $dV$  en el volumen de agua en el tanque está dado por

$$dV = -av \, dt = -a\sqrt{2gy} \, dt. \quad (18)$$

Pero si  $A(y)$  denota el área de la sección transversal del tanque a una altura  $y$  sobre el agujero, entonces

$$dV = A(y) \, dy, \quad (19)$$

como es usual. Si comparamos las ecuaciones (18) y (19), vemos que  $y(t)$  satisface la ecuación diferencial

$$A(y) \frac{dy}{dt} = -a\sqrt{2gy}. \quad (20)$$

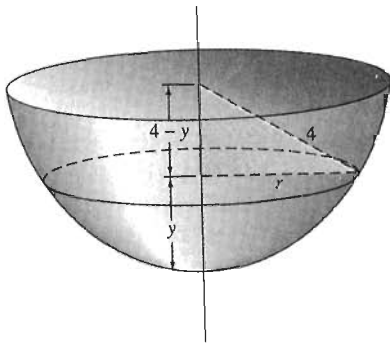
En algunas aplicaciones, ésta es una forma muy conveniente de la ley de Torricelli (véase la sección 5.2). En otras situaciones, será preferible trabajar con la ecuación diferencial en (18) de la forma

$$\frac{dV}{dt} = -a\sqrt{2gy}$$

o bien, si se desconoce el área del agujero del fondo, la forma

$$\frac{dV}{dt} = -c\sqrt{y},$$

donde  $c = a\sqrt{2g}$  es una constante positiva.



**Figura 6.5.4** Vaciado de un tanque semiesférico

**EJEMPLO 5** Un tanque semiesférico tiene un radio superior de 4 pies  $y$ , en el instante  $t = 0$ , está lleno de agua. En ese momento, se abre un agujero circular de diámetro de 1 pulgada en el fondo del tanque. ¿Cuánto tiempo tarda en vaciarse el tanque?

**Solución** A partir del triángulo rectángulo de la figura 6.5.4, vemos que

$$A(y) = \pi r^2 = \pi[16 - (4 - y)^2] = \pi(8y - y^2).$$

Si  $g = 32$  pies/s<sup>2</sup>, la ecuación (20) toma la forma

$$\begin{aligned} \pi(8y - y^2) \frac{dy}{dt} &= -\pi \left(\frac{1}{24}\right)^2 \sqrt{64y}; \\ \int (8y^{1/2} - y^{3/2}) \, dy &= - \int \frac{1}{72} \, dt + C; \\ \frac{16}{3} y^{3/2} - \frac{2}{5} y^{5/2} &= -\frac{1}{72} t + C. \end{aligned}$$

Sabemos que  $y(0) = 4$ , por lo que

$$C = \frac{16}{3} \cdot 4^{3/2} - \frac{2}{5} \cdot 4^{5/2} = \frac{448}{15}.$$

El tanque está vacío cuando  $y = 0$ ; es decir, cuando

$$t = 72 \cdot \frac{448}{15} \approx 2150 \text{ (s)},$$

cerca de 35 minutos y 50 segundos. Así, el tanque se vacía en poco menos de 36 minutos.



## 6.5 Problemas

Determine soluciones generales (implícitas en caso necesario, explícitas cuando esto sea posible) de las ecuaciones diferenciales de los problemas 1 a 10.

1.  $\frac{dy}{dx} = 2x\sqrt{y}$
2.  $\frac{dy}{dx} = 2xy^2$
3.  $\frac{dy}{dx} = x^2y^3$
4.  $\frac{dy}{dx} = (xy)^{3/2}$
5.  $\frac{dy}{dx} = 2x\sqrt{y-1}$
6.  $\frac{dy}{dx} = 4x^3(y-4)^2$
7.  $\frac{dy}{dx} = \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{y}}$
8.  $\frac{dy}{dx} = \frac{x+x^3}{y+y^3}$
9.  $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+1}{x^2(3y^2+1)}$
10.  $\frac{dy}{dx} = \frac{(x^3-1)y^3}{x^2(2y^3-3)}$

Resuelva los problemas con condiciones iniciales de los problemas 11 a 20.

11.  $\frac{dy}{dx} = y^2, \quad y(0) = 1$
12.  $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}, \quad y(0) = 4$
13.  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4y^3}, \quad y(0) = 1$
14.  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2y}, \quad y(1) = 2$
15.  $\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy^3}, \quad y(0) = 4$
16.  $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}, \quad y(3) = 5$
17.  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad y(12) = -5$
18.  $y^2 \frac{dy}{dx} = x^2 + 2x + 1, \quad y(1) = 2$
19.  $\frac{dy}{dx} = 3x^2y^2 - y^2, \quad y(0) = 1$
20.  $\frac{dy}{dx} = 2xy^3(2x^2 + 1), \quad y(1) = 1$

21. Suponga que la población  $P(t)$  de peces en un lago es atacada por una enfermedad en el instante  $t = 0$ , con el resultado

$$\frac{dP}{dt} = -k\sqrt{P} \quad (k > 0)$$

Si inicialmente había 900 peces en el lago y quedan 441 después de seis semanas, ¿cuánto tiempo tardan en morir todos los peces del lago?

22. Demuestre que la solución al problema con condición inicial

$$\frac{dP}{dt} = k\sqrt{P}, \quad P(0) = P_0,$$

está dada por

$$P(t) = \left(\frac{1}{2}kt + \sqrt{P_0}\right)^2.$$

23. Suponga que la población de Beaverton satisface la ecuación diferencial del problema 22. (a) Si  $P = 100,000$  en 1970 y  $P = 121,000$  en 1980, ¿cuál será la población en el año 2000? (b) ¿Cuándo llegará la población a 200,000?

24. Considere una raza de conejos cuya población  $P(t)$  satisfice el problema con condición inicial

$$\frac{dP}{dt} = kP^2, \quad P(0) = P_0,$$

donde  $k$  es una constante positiva. Obtenga la solución

$$P(t) = \frac{P_0}{1 - kP_0t}.$$

25. En el problema 24, suponga que  $P_0 = 2$  y que existen 4 conejos después de 3 meses. ¿Qué ocurre en los 3 meses siguientes?

26. Suponga que una lancha de motor viaja a  $v = 40$  pies/seg cuando su motor se apaga en el instante  $t = 0$ . A partir de ese momento, su desaceleración debida a la resistencia del agua está dada por  $dv/dt = -kv^2$ , donde  $k$  es una constante positiva. (a) Resuelva esta ecuación diferencial para mostrar que la velocidad de la lancha después de  $t$  segundos es  $v = 40/(1 + 40kt)$  pies/segundo. (b) Si la velocidad de la lancha después de 10 segundos es 20 pies/segundo, ¿cuánto tiempo tarda en reducirla a 5 pies/segundo?

27. Un tanque con forma de cilindro vertical contiene inicialmente agua con una profundidad de 9 pies (figura 6.5.5). El tapón del fondo se retira en el instante  $t = 0$  ( $t$  en horas). Después de una hora, la profundidad ha descendido a 4 pies. ¿Cuánto tiempo tarda en vaciarse el tanque?

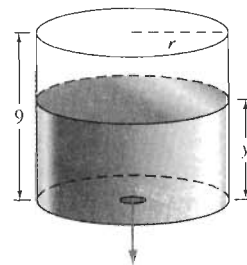


Figura 6.5.5 El tanque cilíndrico del problema 27

28. Suponga que el tanque del problema 27 tiene un radio de 3 pies y que el agujero del fondo es circular con radio 1 pulgada.

¿Qué tanto tiempo le tomará al agua, inicialmente de 9 pies de profundidad, drenarse completamente?

29. Un tanque de agua tiene la forma de un cono circular recto con eje vertical y vértice en el fondo. El tanque tiene una altura de 16 pies, y el radio de la parte superior es de 5 pies. En el instante  $t = 0$ , se retira un tapón en el vértice y el tanque, inicialmente lleno, comienza a vaciarse. Después de una hora, el agua en el tanque tiene una profundidad de 9 pies. ¿En qué momento se vacía el tanque (figura 6.5.6)?

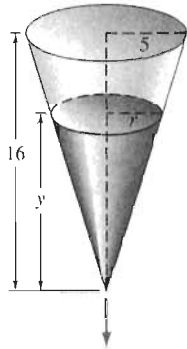


Figura 6.5.6 El tanque cónico del problema 29

30. Suponga que un tanque cilíndrico (con eje vertical) contiene inicialmente  $V_0$  litros de agua y que se vacía por un agujero en el fondo en  $T$  minutos. Utilice la ley de Torricelli para mostrar que el volumen de agua en el tanque después de  $t \leq T$  minutos es  $V(t) = V_0[1 - (t/T)]^2$ .

31. La forma de un tanque de agua se obtiene al girar la curva  $y = x^{4/3}$  en torno del eje  $y$  (las unidades sobre el eje de coordenadas están en pies). Se retira un tapón del fondo a las doce del día, cuando la profundidad del tanque es de 12 pies. A la una de la tarde, la profundidad del agua es de 6 pies. ¿En qué momento se vacía el tanque?

32. La forma de un tanque de agua se obtiene al girar la parábola  $y = x^2$  en torno del eje  $y$  (las unidades sobre el eje de coordenadas están en pies; véase la figura 6.5.7). La profundidad del agua es de 4 pies a las doce del día; en ese momento, se retira el tapón del agujero circular del fondo. A la una de la tarde, la profundidad del agua es de 1 pie. (a) Determina la profundidad del agua  $y(t)$  después de  $t$  horas. (b) ¿En qué momento se vacía completamente el tanque? (c) ¿Cuál es el radio del agujero circular del fondo?

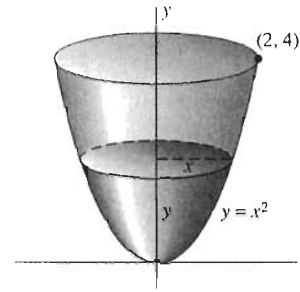


Figura 6.5.7 El tanque del problema 32

33. Un tanque cilíndrico de longitud 5 pies y radio 3 pies está situado con su eje horizontal. Si se abre un agujero circular de radio de 1 pulgada en el fondo y el tanque está lleno inicialmente con xileno, ¿cuánto tiempo tarda en vaciarse el tanque por completo?

34. Un tanque esférico de radio 4 pies está lleno de mercurio cuando se abre un agujero circular con un radio de 1 pulgada en el fondo. ¿Cuánto tiempo tarda en salir todo el mercurio del tanque?

35. La clepsidra o reloj de agua. Un reloj de agua de 12 horas se va a diseñar con las dimensiones que se muestran en la figura 6.5.8, con la forma de la superficie obtenida al girar la curva  $y = f(x)$  en torno del eje  $y$ . ¿Qué ecuación debe tener esta curva  $y$  y qué radio debe tener el agujero circular del fondo, de modo que el nivel del agua descienda a razón constante de 4 pulgadas/hora?

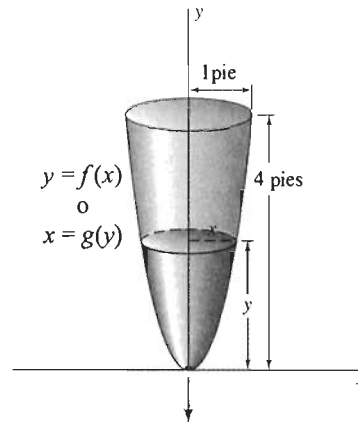
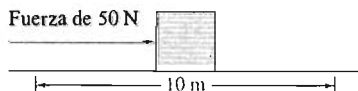


Figura 6.5.8 La clepsidra del problema 35

## 6.6 Fuerza y trabajo

El concepto de *trabajo* se introduce para medir el efecto acumulado de una fuerza al mover un cuerpo de una posición a otra. En el caso más sencillo, una partícula se mueve a lo largo de una línea recta por la acción de una fuerza *constante*. El trabajo realizado por tal fuerza se define como el producto de la fuerza por la distancia durante la cual actúa. Así, si la fuerza constante tiene magnitud  $F$  y la partícula se mueve a lo largo de la distancia  $d$ , entonces el trabajo realizado por la fuerza está dado por

$$W = F \cdot d. \quad (1)$$



**Figura 6.6.1** Una fuerza de 50-N realiza un trabajo de 500 N·m al empujar una caja 10 m

Por ejemplo, si una fuerza constante horizontal de 50 Newtons (N) se aplica a una pesada caja para empujarla una distancia de 10 m a lo largo de un piso rugoso (figura 6.6.1), entonces el trabajo realizado por la fuerza es

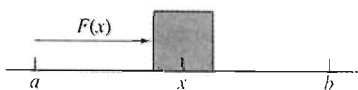
$$W = 50 \cdot 10 = 500$$

newton-metro (N·m). Observe las unidades; debido a la definición de trabajo, las unidades de trabajo siempre son producto de unidades de fuerza por unidades de distancia. Otro ejemplo: para levantar un peso de 75 libras una distancia vertical de 5 pies, debe aplicarse una fuerza constante de 75 libras. El trabajo realizado por esta fuerza es

$$W = 75 \cdot 5 = 375$$

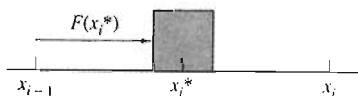
pies-libra.

Aquí utilizamos la integral para generalizar la definición de trabajo al caso en que una partícula se mueve a lo largo de una línea recta por la acción de una fuerza *variable*. Dada una **función de fuerza**  $F(x)$  definida en cada punto  $x$  del segmento de recta  $[a, b]$ , queremos definir el trabajo  $W$  realizado por esta fuerza variable al empujar la partícula desde el punto  $x = a$  hasta el punto  $x = b$  (figura 6.6.2).



**Figura 6.6.2** Una fuerza variable que empuja una partícula de  $a$  a  $b$

Comenzamos con la división usual del intervalo  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos, cada uno con la misma longitud  $\Delta x = (b - a)/n$ . Para cada  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , sea  $x_i^*$  un punto arbitrario del  $i$ -ésimo subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ . La idea fundamental es aproximar el trabajo real  $\Delta W_i$  realizado por la fuerza **variable**  $F(x)$  al mover la partícula de  $x_{i-1}$  a  $x_i$ , por el trabajo  $F(x_i^*) \Delta x$  (fuerza  $\times$  distancia) realizado al mover una partícula una distancia  $\Delta x$  de  $x_{i-1}$  a  $x_i$  (figura 6.6.3). Así,



**Figura 6.6.3** La fuerza constante  $F(x_i^*)$  que actúa en el  $i$ -ésimo subintervalo

$$\Delta W_i \approx F(x_i^*) \Delta x. \quad (2)$$

Aproximamos el trabajo total  $W$  sumando de  $i = 1$  a  $i = n$ :

$$W = \sum_{i=1}^n \Delta W_i \approx \sum_{i=1}^n F(x_i^*) \Delta x. \quad (3)$$

Pero la suma final en (3) es una suma de Riemann para  $F(x)$  en el intervalo  $[a, b]$ , y cuando  $n \rightarrow +\infty$  (y  $\Delta x \rightarrow 0$ ), tales sumas tienden a la *integral* de  $F(x)$  de  $x = a$  a  $x = b$ . Por tanto, esto nos motiva a *definir* el **trabajo**  $W$  realizado por la fuerza  $F(x)$  al mover la partícula de  $x = a$  a  $x = b$  como

$$W = \int_a^b F(x) dx. \quad (4)$$

La siguiente forma heurística de establecer la ecuación (4) es útil para establecer las integrales para problemas de trabajo. Imaginemos que  $dx$  es un número tan pequeño que el valor de  $F(x)$  no cambia de manera apreciable en el pequeño intervalo de  $x$  a  $x + dx$ . Entonces, el trabajo realizado por la fuerza al mover la partícula de  $x$  a  $x + dx$  debe ser muy cercano a

$$dW = F(x) dx.$$

La propiedad aditiva natural del trabajo implica entonces que podríamos obtener el trabajo total  $W$  sumando estos pequeños elementos de trabajo:

$$W = \int_a^b dW = \int_a^b F(x) dx.$$

## RESORTES ELÁSTICOS

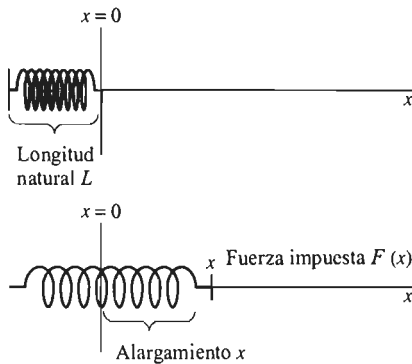
Consideremos un resorte cuyo extremo izquierdo está fijo y cuyo extremo derecho es libre de moverse a lo largo del eje  $x$ . Suponemos que el extremo derecho está en el origen  $x = 0$  cuando el resorte tiene su **longitud natural**; es decir, cuando el resorte está en su posición de reposo, sin estar comprimido ni estirado por la acción de fuerzas externas.

De acuerdo con la **ley de Hooke** para resortes elásticos, la fuerza  $F(x)$  que se debe ejercer sobre el resorte para mantener su extremo derecho en el punto  $x$  es proporcional al desplazamiento  $x$  del extremo derecho con respecto de su posición de reposo. Es decir,

$$F(x) = kx, \quad (5)$$

donde  $k$  es una constante positiva. La constante  $k$ , llamada **constante del resorte** (o **constante de elasticidad**), es una característica particular del resorte en cuestión.

La figura 6.6.4 muestra la disposición de tal resorte a lo largo del eje  $x$ . El extremo derecho del resorte se mantiene en la posición  $x$  sobre el eje  $x$  debido a una fuerza  $F(x)$ . La figura muestra la situación para  $x > 0$ , de modo que el resorte está estirado. La fuerza que ejerce el resorte sobre su extremo derecho está dirigida hacia la izquierda, de modo que, como muestra la figura, la fuerza externa  $F(x)$  debe actuar hacia la derecha. La derecha es la posición positiva en este caso, de modo que  $F(x)$  debe ser un número positivo. Como  $x$  y  $F(x)$  tienen el mismo signo,  $k$  también debe ser positiva. Puede verificar que  $k$  es positiva también en el caso  $x < 0$ .



**Figura 6.6.4** El alargamiento  $x$  es proporcional a la fuerza impuesta  $F$ .

**EJEMPLO 1** Suponga que un resorte tiene una longitud natural de 1 pie y que se necesita una fuerza de 10 libras para tenerlo comprimido a una longitud de 6 pulgadas. ¿Cuánto trabajo se realiza al estirar el resorte desde su longitud natural hasta una longitud total de 2 pies?

**Solución** Para mover el extremo libre de  $x = 0$  (la posición de la longitud natural) a  $x = 1$  (estirado 1 pie), debemos ejercer una fuerza variable  $F(x)$  determinada por la ley de Hooke. Tenemos que  $F = -10$  (libras) cuando  $x = -0.5$  (pies), de modo que la ecuación (5),  $F = kx$ , implica que la constante de elasticidad para este resorte es  $k = 20$  (libras/pie). Así,  $F(x) = 20x$ , y entonces (utilizando la ecuación (4)) tenemos que el trabajo realizado al estirar este resorte de la manera indicada es

$$W = \int_0^1 20x \, dx = \left[ 10x^2 \right]_0^1 = 10 \text{ (pies} \cdot \text{libra)}.$$

### \*TRABAJO REALIZADO CONTRA LA GRAVEDAD

De acuerdo con la ley de la gravitación de Newton, la fuerza que se debe ejercer en un cuerpo para mantenerlo a una distancia  $r$  del centro de la Tierra es inversamente proporcional a  $r^2$  (si  $r \geq R$ , el radio de la Tierra). En otras palabras, si  $F(r)$  denota la fuerza que lo mantiene, entonces

$$F(r) = \frac{k}{r^2} \quad (6)$$

para cierta constante positiva  $k$ . El valor de esta fuerza en la superficie de la Tierra, donde  $r = R \approx 4000$  mi ( $\approx 6370$  km), es el **peso** del cuerpo.

Dado el peso  $F(R)$  de un cuerpo particular, podemos determinar el valor correspondiente de  $k$  utilizando la ecuación (6):



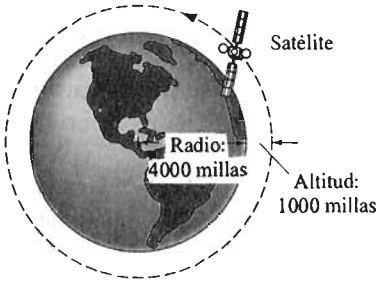
El trabajo en el sentido de la física es diferente del trabajo en el sentido de la fisiología. En este momento, el levantador de pesas no realiza trabajo en el sentido de la física, pues mantiene la pesa en una posición.

$$k = R^2 \cdot F(R).$$

El trabajo que debe realizarse para levantar el cuerpo en forma vertical desde la superficie hasta una distancia  $R_1 > R$ , desde el centro de la Tierra, es entonces

$$W = \int_R^{R_1} \frac{k}{r^2} dr. \quad (7)$$

Si la distancia se mide en millas y la fuerza en libras, entonces esta integral da el trabajo en millas-libra. Ésta no es una unidad convencional de trabajo. Multiplicamos por 5280 (pies/milla) para convertir este resultado en pies-libra.



**Figura 6.6.5** Un satélite en órbita a 1000 millas sobre la superficie de la Tierra (ejemplo 2)

**EJEMPLO 2 (Lanzamiento de un satélite)** ¿Cuánto trabajo debe realizarse para levantar un satélite de 1000 libras de manera vertical con respecto de la superficie de la Tierra hasta una órbita 1000 millas sobre la superficie? Véase la figura 6.6.5, y considere  $R = 4000$  millas como el radio de la Tierra.

**Solución** Como  $F = 1000$  (libras) cuando  $r = R = 4000$  (millas), tenemos de la ecuación (6) que

$$k = (4000)^2(1000) = 16 \times 10^9 \text{ (millas}^2 \cdot \text{libras)}.$$

Entonces, por la ecuación (7), el trabajo realizado es

$$\begin{aligned} W &= \int_{4000}^{5000} \frac{k}{r^2} dr = \left[ -\frac{k}{r} \right]_{4000}^{5000} \\ &= (16 \times 10^9) \left( \frac{1}{4000} - \frac{1}{5000} \right) = 8 \times 10^5 \text{ (millas} \cdot \text{libras)}. \end{aligned}$$

Multiplicamos por 5280 (pies/milla) y escribimos la respuesta como

$$4.224 \times 10^9 = 4,224,000,000 \text{ (pies} \cdot \text{libras)}.$$

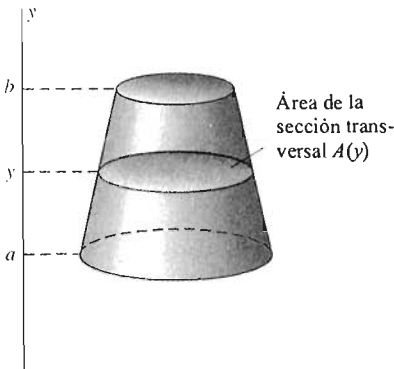
También podemos expresar la respuesta del ejemplo 2 en términos de la potencia que debe proporcionar el cohete de lanzamiento. La **potencia** es la razón con la que se realiza el trabajo. Por ejemplo, un **caballo de potencia** (hp) se define como 33,000 pies-libra/minuto. Si el ascenso hasta la órbita tarda 15 minutos y si sólo 2% de la potencia generada por el cohete es efectiva para elevar el satélite (el resto se utiliza para elevar al cohete y su combustible), podemos convertir la respuesta del ejemplo 2 a caballos de potencia. La potencia *promedio* que debe producir el motor del cohete durante el ascenso de 15 minutos es

$$P = \frac{(50)(4.224 \times 10^9)}{(15)(33,000)} \approx 426,667 \text{ (caballos de potencia)}.$$

El factor 50 en el numerador proviene de la eficiencia del 2% del cohete: la potencia total debe multiplicarse por  $1/(0.02) = 50$ .

## TRABAJO REALIZADO AL LLENAR UN TANQUE

Los ejemplos 1 y 2 son aplicaciones de la ecuación (4) para calcular el trabajo realizado por una fuerza variable al mover una partícula una cierta distancia. Otro tipo común de problema de fuerza-trabajo implica la suma de trabajo realizado por fuerzas constantes que actúan en diversas distancias. Por ejemplo, consideremos el problema de bombear un fluido desde el nivel del suelo hacia arriba a un tanque por arriba del suelo (figura 6.6.6).



**Figura 6.6.6** Un tanque sobre el suelo

Es conveniente pensar que el tanque se llena por capas delgadas y horizontales del fluido, cada una de las cuales se levanta desde el suelo hasta su posición final en el tanque. No importa cómo se comporte el fluido mientras se llena el tanque; esta sencilla forma de pensar el proceso nos da una forma para calcular el trabajo realizado en el proceso de llenado. Pero cuando pensamos que el tanque se llena de esta forma, debemos permitir que las diferentes capas de fluido se levanten a distancias diferentes para alcanzar su posición final en el tanque.

Supongamos que el fondo del tanque está a una altura  $y = a$  y que su parte superior está a una altura  $y = b > a$ . Sea  $A(y)$  el área de la sección transversal del tanque en la altura  $y$ . Consideremos una subdivisión de  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos, todos con la misma longitud  $\Delta y$ . Entonces, el volumen de la rebanada horizontal del tanque correspondiente al  $i$ -ésimo subintervalo  $[y_{i-1}, y_i]$  es

$$\Delta V_i = \int_{y_{i-1}}^{y_i} A(y) dy = A(y_i^*) \Delta y$$

para algún número  $y_i^*$  en  $[y_{i-1}, y_i]$ ; esto es consecuencia del teorema del valor promedio para integrales (sección 5.6). Si  $\rho$  es la densidad del fluido (en libras por pie cúbico, por ejemplo), entonces la fuerza necesaria para levantar esta rebanada desde el suelo hasta su posición final en el tanque es simplemente el peso (constante) de la rebanada:

$$F_i = \rho \Delta V_i = \rho A(y_i^*) \Delta y.$$

¿Qué hay de la distancia a través de la cual debe actuar esta fuerza? El fluido en cuestión se levanta desde el nivel del suelo hasta el nivel del subintervalo  $[y_{i-1}, y_i]$ , de modo que cada partícula del fluido se levanta al menos la distancia  $y_{i-1}$  y a lo más la distancia  $y_i$ . Por tanto, el trabajo  $\Delta W_i$  necesario para levantar esta  $i$ -ésima rebanada de fluido satisface las desigualdades

$$F_i y_{i-1} \leq \Delta W_i \leq F_i y_i;$$

es decir,

$$\rho y_{i-1} A(y_i^*) \Delta y \leq \Delta W_i \leq \rho y_i A(y_i^*) \Delta y.$$

Sumamos ahora estas desigualdades para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  y vemos entonces que el trabajo total  $W = \sum W_i$  satisface las desigualdades

$$\sum_{i=1}^n \rho y_{i-1} A(y_i^*) \Delta y \leq W \leq \sum_{i=1}^n \rho y_i A(y_i^*) \Delta y.$$

Si los tres puntos  $y_{i-1}$ ,  $y_i$  y  $y_i^*$  de  $[y_{i-1}, y_i]$  fueran el mismo, entonces las dos últimas sumas serían sumas de Riemann para la función  $f(y) = \rho y A(y)$  en  $[a, b]$ . Aunque los tres puntos no son iguales, sí se tiene (por un resultado establecido en el apéndice F) que ambas sumas tienden a

$$\int_a^b \rho y A(y) dy \quad \text{cuando} \quad \Delta y \rightarrow 0.$$

La ley del sandwich para límites implica la fórmula

$$W = \int_a^b \rho y A(y) dy. \quad (8)$$

*Éste es el trabajo  $W$  realizado al bombear un fluido de densidad  $\rho$  desde el suelo hasta un tanque que tiene un área de sección transversal  $A(y)$  y que se localiza entre las alturas  $y = a$  y  $y = b$  sobre el suelo.*

Una rápida forma heurística de establecer la ecuación (8) y muchas variantes de ella, es pensar en una delgada rebanada horizontal de fluido con volumen  $dV = A(y)dy$  y peso  $\rho dV = \rho A(y)dy$ . El trabajo necesario para levantar esta rebanada una distancia  $y$  es

$$dW = y \cdot \rho \, dV = \rho y A(y) \, dy,$$

de modo que el trabajo total necesario para llenar el tanque es

$$W = \int_a^b dW = \int_a^b \rho y A(y) \, dy,$$

pues las rebanadas horizontales están entre  $y = a$  y  $y = b$ .



La gran pirámide de Khufu

**EJEMPLO 3** Supongamos que la construcción de la gran pirámide de Khufu en Gizeh, Egipto, tardó 20 años. Esta pirámide tiene 500 pies de altura y una base cuadrada cuyo lado mide 750 pies. Supongamos también que la pirámide está hecha de roca con densidad  $\rho = 120$  libras/pie cúbico. Por último, supongamos que cada trabajador realiza un trabajo de 160 pies · libra/hora al levantar las rocas desde el nivel del suelo hasta su posición final en la pirámide y trabajó 12 horas diarias durante 330 días/año. ¿Cuántos trabajadores se necesitaron para construir la pirámide?

**Solución** Suponemos una fuerza de trabajo constante a lo largo del periodo de 20 años de construcción. Pensamos la pirámide formada por delgadas láminas horizontales de roca, cada una de las cuales se levantó (como una rebanada de líquido) desde el nivel del suelo hasta su altura final. Por tanto, podemos utilizar la ecuación (8) para calcular el trabajo  $W$  necesario.

La figura 6.6.7 muestra una sección transversal vertical de la pirámide. La sección transversal horizontal a una altura  $y$  es un cuadrado de lado  $s$ . Por los triángulos semejantes de la figura 6.6.7, tenemos que

$$\frac{s}{750} = \frac{500 - y}{500}, \text{ de modo que } s = \frac{3}{2}(500 - y).$$

En consecuencia, el área de la sección transversal a la altura  $y$  es

$$A(y) = \frac{9}{4}(500 - y)^2.$$

Por tanto, la ecuación (8) implica

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{500} 120 \cdot y \cdot \frac{9}{4}(500 - y)^2 \, dy \\ &= 270 \int_0^{500} (250,000y - 1000y^2 + y^3) \, dy \\ &= 270 \left[ 125,000y^2 - \frac{1000}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 \right]_0^{500} \end{aligned}$$

de modo que  $W \approx 1.406 \times 10^{12}$  pies · libra.

Como cada trabajador realiza

$$160 \cdot 12 \cdot 330 \cdot 20 \approx 1.267 \times 10^7 \text{ pies} \cdot \text{libra}$$

de trabajo, la construcción de la pirámide (bajo nuestras hipótesis) habría necesitado

$$\frac{1.406 \times 10^{12}}{1.267 \times 10^7},$$

o cerca de 111,000 trabajadores.

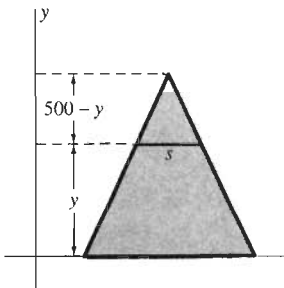


Figura 6.6.7 Sección transversal vertical de la pirámide de Khufu

## VACIADO DE UN TANQUE

Supongamos ahora que el tanque que se muestra en la figura 6.6.8 está completamente lleno con un líquido de densidad  $\rho$  libras/pie cúbico y que queremos bombear todo ese líquido desde el tanque hacia arriba, al nivel  $y = h$  sobre la parte superior del tanque. Imaginamos una delgada rebanada horizontal de líquido a una altura  $y$ . Si su espesor es  $dy$ , entonces su volumen es  $dV = A(y) dy$ , de modo que su peso es  $\rho dV = \rho A(y) dy$ . Esta rebanada debe levantarse una altura  $h - y$ , de modo que el trabajo realizado para levantar la rebanada es

$$dW = (h - y) \rho dV = \rho(h - y)A(y) dy.$$

Por tanto, la cantidad total de trabajo realizado en todo el líquido que originalmente estaba en el tanque es

$$W = \int_a^b \rho(h - y)A(y) dy. \quad (9)$$

El problema 14 le pide que utilice sumas de Riemann para establecer esta integral.

**EJEMPLO 4** Un tanque cilíndrico de radio 3 pies y longitud 10 pies reposa sobre su lado en el suelo. Si este tanque está inicialmente lleno de gasolina con un peso de 40 libras/pie cúbico, ¿cuánto trabajo se realiza al bombear toda esa gasolina hasta un punto a 5 pies sobre la parte superior del tanque?

**Solución** La figura 6.6.9 muestra una vista del tanque. Para aprovechar la simetría circular, elegimos  $y = 0$  en el centro de la sección vertical circular, de modo que el tanque está entre  $y = -3$  y  $y = 3$ . Una sección transversal horizontal del tanque que corta al eje  $y$  en  $y$  es un rectángulo con un largo de 10 pies y ancho  $w$ . Por el triángulo rectángulo de la figura 6.6.9, tenemos que

$$\frac{1}{2}w = (9 - y^2)^{1/2},$$

de modo que el área de esta sección transversal es

$$A(y) = 10w = 20(9 - y^2)^{1/2}.$$

Esta sección transversal debe levantarse desde su posición inicial  $y$  hasta su posición final  $5 + 3 = 8$ , de modo que debe levantarse la distancia  $8 - y$ . Así, la ecuación (9) con  $\rho = 40$ ,  $a = -3$  y  $b = 3$  implica

$$\begin{aligned} W &= \int_{-3}^3 40 \cdot (8 - y) \cdot 20 \cdot (9 - y^2)^{1/2} dy \\ &= 6400 \int_{-3}^3 (9 - y^2)^{1/2} dy - 800 \int_{-3}^3 y(9 - y^2)^{1/2} dy. \end{aligned}$$

Resolvemos las dos integrales por separado. En primer lugar,

$$\int_{-3}^3 y(9 - y^2)^{1/2} dy = \left[ -\frac{1}{3}(9 - y^2)^{3/2} \right]_{-3}^3 = 0.$$

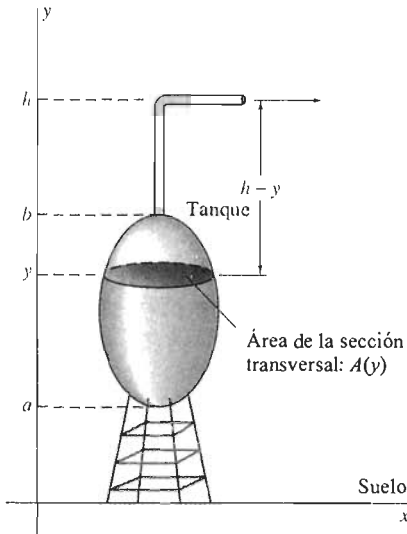
En segundo,

$$\int_{-3}^3 (9 - y^2)^{1/2} dy = \frac{1}{2}\pi \cdot 3^2 = \frac{9}{2}\pi,$$

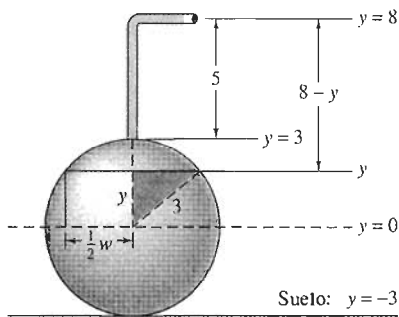
pues la integral no es más que el área de un semicírculo de radio 3. Por tanto,

$$W = 6400 \cdot \frac{9}{2}\pi = 28,800\pi,$$

aproximadamente 90,478 pies · libra.



**Figura 6.6.8** Bombeo de un líquido de un tanque a un nivel superior



**Figura 6.6.9** Vista del tanque cilíndrico del ejemplo 4



Como en el ejemplo 4, en los problemas puede utilizar la siguiente integral en caso necesario:

$$\int_0^a (a^2 - x^2)^{1/2} dx = \frac{1}{4}\pi a^2, \quad (10)$$

que corresponde al área de un cuarto de círculo de radio  $a$ .

## FUERZA EJERCIDA POR UN LÍQUIDO

La **presión**  $p$  a profundidad  $h$  en un líquido es la fuerza por unidad de área ejercida por el líquido a esa profundidad. La presión está dada por

$$p = \rho h, \quad (11)$$

donde  $\rho$  es la densidad (peso) del líquido. Por ejemplo, a una profundidad de 10 pies en el agua, para la cual  $\rho = 62.4$  libras/pie cúbico, la presión es  $62.4 \cdot 10 = 624$  libras/pie cuadrado. Por tanto, si se suspende una delgada placa de área 5 pies cuadrados en posición horizontal a una profundidad de 10 pies en el agua, entonces el agua ejerce una fuerza hacia abajo de  $624 \cdot 5 = 3120$  libras en la cara superior de la placa y una fuerza idéntica hacia arriba en la cara inferior.

Es un hecho importante que a una profundidad dada en un líquido, la presión es la misma en todas las direcciones. Pero si una delgada placa se sumerge en posición vertical en el líquido, entonces la presión sobre la cara de la placa *no* es constante, pues, por la ecuación (11), la presión aumenta con la profundidad. En consecuencia, la fuerza total ejercida sobre una placa vertical debe determinarse mediante una integración.

Consideremos una delgada placa vertical sumergida en un líquido de densidad  $\rho$  (figura 6.6.10). La superficie del líquido está en la recta  $y = c$ , y la placa está a lo largo del intervalo  $a \leq y \leq b$ . El ancho de la placa en la profundidad  $c - y$  es alguna función de  $y$ , que denotamos por  $w(y)$ .

Para calcular la fuerza total  $F$  ejercida por el líquido en cualquiera de las caras de esta placa, comenzamos con una división de  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos, todos con la misma longitud  $\Delta y$  y denotamos  $y_i^*$  al punto medio del subintervalo  $[y_{i-1}, y_i]$ . La banda horizontal de la placa frente a este  $i$ -ésimo subintervalo está aproximada por un rectángulo de ancho  $w(y_i^*)$  y altura  $\Delta y$ , y su profundidad promedio en el líquido es  $c - y_i^*$ . Por tanto, la fuerza  $\Delta F_i$  ejercida por el líquido a esta banda horizontal está aproximada por

$$\Delta F_i \approx \rho(c - y_i^*)w(y_i^*) \Delta y. \quad (12)$$

La fuerza total sobre la placa completa está aproximada por

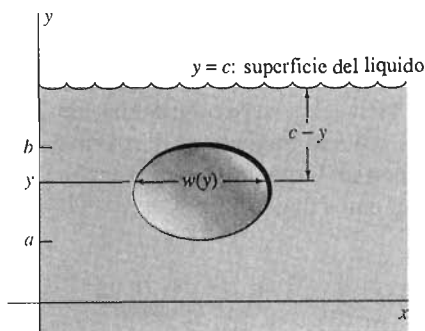
$$F \approx \sum_{i=1}^n \Delta F_i \approx \sum_{i=1}^n \rho(c - y_i^*)w(y_i^*) \Delta y.$$

Obtenemos el valor exacto de  $F$  mediante el límite de tales sumas de Riemann cuando  $\Delta y \rightarrow 0$ :

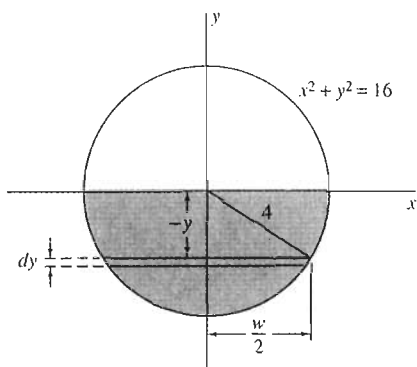
$$F = \int_a^b \rho(c - y)w(y) dy. \quad (13)$$

**EJEMPLO 5** Un tanque cilíndrico con 8 pies de diámetro reposa sobre su lado y está lleno hasta la mitad con petróleo de densidad  $\rho = 75$  libras/pie cúbico. Determine la fuerza total  $F$  ejercida por el petróleo en un extremo del tanque.

**Solución** Colocamos el eje  $y$  como se indica en la figura 6.6.11 de modo que la superficie del petróleo esté en el nivel  $y = 0$ . El petróleo está a lo largo del intervalo



**Figura 6.6.10** Una placa delgada suspendida de manera vertical en un líquido



**Figura 6.6.11** Vista de un extremo del tanque del ejemplo 5

$-4 \leq y \leq 0$ . Por el triángulo rectángulo de la figura, vemos que el ancho del petróleo en la profundidad  $-y$  (y por tanto, en la posición  $y$ ) es

$$w(y) = 2(16 - y^2)^{1/2}.$$

Por tanto, la ecuación (13) implica

$$F = \int_{-4}^0 75(-y)[2(16 - y^2)^{1/2}] dy = 75 \left[ \frac{2}{3}(16 - y^2)^{3/2} \right]_{-4}^0 = 3200 \text{ (libras)}.$$

## 6.6 Problemas

En los problemas 1 a 5, determine el trabajo realizado por la fuerza dada  $F(x)$  al mover una partícula a lo largo del eje  $x$  de  $x = a$  a  $x = b$ .

- $F(x) = 10$ ;  $a = -2$ ,  $b = 1$
- $F(x) = 3x - 1$ ;  $a = 1$ ,  $b = 5$
- $F(x) = \frac{10}{x^2}$ ;  $a = 1$ ,  $b = 10$
- $F(x) = -3\sqrt{x}$ ;  $a = 0$ ,  $b = 4$
- $F(x) = \sin \pi x$ ;  $a = -1$ ,  $b = 1$

6. Un resorte tiene una longitud natural de 1 metro y se necesita una fuerza de 10 N para estirarlo hasta una longitud total de 2 metros. ¿Cuánto trabajo se realiza para comprimir este resorte desde su longitud natural hasta una longitud de 60 cm?

7. Un resorte tiene una longitud natural de 2 pies y se necesita una fuerza de 15 libras para comprimirlo hasta una longitud de 18 pulgadas. ¿Cuánto trabajo se realiza para estirar este resorte desde su longitud natural hasta una longitud de 3 pies?

8. Aplique la ecuación (4) para calcular la cantidad de trabajo realizado al levantar un peso de 100 libras a una altura de 10 pies, suponiendo que este trabajo se realiza contra la fuerza constante de gravedad.

9. Calcule la cantidad de trabajo (en pies-libras) realizado al llevar un peso de 1000 libras, desde una órbita a 1000 millas sobre la superficie de la Tierra a otra órbita a 2000 millas sobre la superficie. Utilice el valor de  $k$  dado en el ejemplo 2.

10. Un tanque cilíndrico con un radio de 5 pies y altura 10 pies reposa sobre el suelo con su eje vertical. Utilice la ecuación (8) para calcular la cantidad de trabajo realizada al llenar este tanque con agua bombeada desde el nivel del suelo. (Utilice  $\rho = 62.4$  libras/pie cúbico como la densidad del agua.)

11. Un tanque cónico reposa sobre su base, que está al nivel del suelo, y su eje es vertical. El tanque tiene un radio de 5 pies y una altura de 10 pies (figura 6.6.12). Calcule el trabajo realizado al llenar este tanque con agua ( $\rho = 62.4$  libras/pie cúbico) bombeada desde el nivel del suelo.

12. Repita el problema 11, excepto que ahora el tanque está boca arriba: su vértice está en el nivel del suelo y su base está a 10 pies sobre el suelo (pero su eje sigue siendo vertical).

13. Un tanque cuyo punto mínimo está a 10 pies sobre el suelo tiene una forma de un tazón, obtenida al girar la parábola

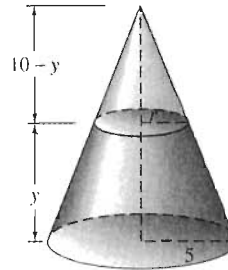


Figura 6.6.12 El tanque cónico del problema 11

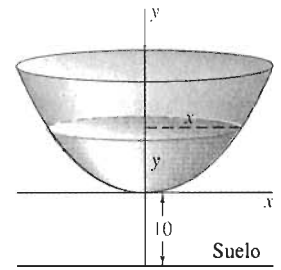


Figura 6.6.13 El tanque con forma de tazón del problema 13

$x^2 = 5y$ ,  $-5 \leq x \leq 5$ , en torno del eje  $x$  (figura 6.6.13).

Las unidades en los ejes de coordenadas están en pies. ¿Cuánto trabajo se realiza al llenar este tanque con petróleo de densidad 50 libras/pie cúbico, si el petróleo se bombea desde el nivel del suelo?

14. Suponga que el tanque de la figura 6.6.8 se llena con un fluido de densidad  $\rho$  y que todo este fluido debe bombearse del tanque hasta el nivel  $y = h$  sobre la parte superior del tanque. Utilice sumas de Riemann, como en la deducción de la ecuación (8), para obtener la fórmula  $W = \int_b^a \rho(h - y)A(y) dy$  como el trabajo necesario para hacer esto.

15. Utilice la fórmula del problema 14 para determinar la cantidad de trabajo realizado al bombear el agua en el tanque del problema 10 hasta una altura de 5 pies sobre la parte superior del tanque.

16. La gasolina de una estación de servicio se guarda en un tanque cilíndrico enterrado a un lado de la estación, de modo que la parte más alta del tanque está a 5 pies debajo de la

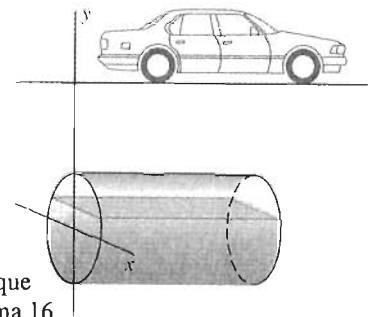


Figura 6.6.14 El tanque de gasolina del problema 16

superficie. El tanque tiene 6 pies de diámetro y 10 pies de largo. La densidad de la gasolina es 45 libras/pie cúbico. Suponga que la entrada del depósito de gasolina de cada automóvil está a 2 pies sobre el suelo (figura 6.6.14). (a) ¿Cuánto trabajo se realiza al vaciar toda la gasolina de este tanque, inicialmente lleno, a todos los automóviles? (b) Recuerde que 1 hp (caballo de fuerza) es equivalente a 33,000 pies · libra/minuto. Para las conversiones eléctricas, 1 kW (1000 W) es lo mismo que 1.341 hp. El costo del uso de electricidad generada por una compañía es por lo general de 7.2 centavos/kWh. Suponga que el motor eléctrico en la bomba de gasolina de la estación tiene una eficiencia de 30%. ¿Cuánto cuesta bombear la gasolina de este tanque en los automóviles?

17. Considere un tanque esférico para agua cuyo radio es 10 pies y cuyo centro está a 50 pies sobre el suelo. ¿Cuánto trabajo se necesita para llenar este tanque bombeando agua desde el nivel del suelo? [Sugerencia: puede simplificar los cálculos si hace  $y = 0$  en el centro del tanque y piensa en la distancia que debe levantarse cada rebanada de agua.]

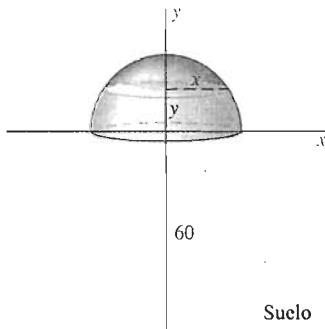


Figura 6.6.15 El tanque semiesférico del problema 18

18. Un tanque semiesférico de radio 10 pies está colocado de modo que su lado plano reposa sobre una torre de 60 pies de altura (figura 6.6.15). ¿Cuánto trabajo se necesita para llenar este tanque con petróleo de densidad 50 libras/pie cúbico si el petróleo debe bombearse al tanque desde el nivel del suelo?

19. Se extrae agua de un pozo de 100 pies de profundidad, utilizando un cubo que extrae 100 libras de agua. El cubo se sube a razón de 2 pies/segundo, pero tiene un agujero en fondo, por el que se derrama el agua a razón de 0.5 libras/segundo. ¿Cuánto trabajo se realiza al jalar el cubo hasta la parte superior del pozo? Desprecie el peso del cubo, el peso de la cuerda y el trabajo realizado por la fricción. [Sugerencia: considere que  $y = 0$  en el nivel de agua del pozo, de modo que  $y = 100$  al nivel del suelo. Sea  $\{y_0, y_1, y_2, \dots, y_n\}$  una subdivisión de  $[0, 100]$  en  $n$  subintervalos de igual longitud. Estime la cantidad de trabajo  $\Delta W_i$  necesaria para elevar el cubo de  $y_{i-1}$  a  $y_i$ . A continuación establezca la suma  $W = \sum \Delta W_i$  y proceda a la integral adecuada haciendo  $n \rightarrow +\infty$ .]

20. Una cuerda de 100 pies de largo y que pesa 0.25 libras por pie lineal cuelga de la orilla de un edificio muy alto. ¿Cuánto trabajo se necesita para jalar la cuerda hasta la parte superior del edificio?

21. Supongamos que tapamos el agujero del cubo que se derrama, en el problema 19. ¿Cuánto trabajo realizamos al levantar dicho cubo, lleno de agua, hasta la superficie, utilizando la cuerda del problema 20? Ignore la fricción y el peso del cubo, pero considere el peso de la cuerda.

22. Considere el volumen  $V$  de un gas en un cilindro cerrado con un pistón en un extremo, donde la presión  $p$  del gas es una función  $p(V)$  de su volumen (figura 6.6.16). Sea  $A$  el área de la cara del pistón. Entonces, la fuerza ejercida sobre el pistón por el gas en el cilindro es  $F = pA$ . Suponga que el gas se expande del volumen  $V_1$  al volumen  $V_2$ . Muestre que el trabajo realizado por la fuerza  $F$  es entonces

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV.$$

[Sugerencia: si  $x$  es la longitud del cilindro (desde su extremo fijo hasta la cara del pistón), entonces  $F = A \cdot p(Ax)$ . Aplique la ecuación (4) y sustituya  $V = Ax$  en la integral resultante.]

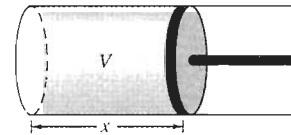


Figura 6.6.16 Un cilindro cerrado con un pistón (problema 22)

23. La presión  $p$  y volumen  $V$  del vapor en una pequeña máquina de vapor satisface la condición  $pV^{1.4} = c$  (donde  $c$  es una constante). En un ciclo, el vapor se expande de un volumen  $V_1 = 50$  pulgadas cúbicas hasta  $V_2 = 500$  pulgadas cúbicas, con una presión inicial de 200 libras/pulgada cuadrada. Utilice la fórmula del problema 22 para calcular el trabajo, en pies-libra, realizado por la máquina en cada ciclo.

24. Un tanque con la forma de un hemisferio de radio 60 pies reposa sobre su base plana, con la parte curva hacia arriba. Se llena con alcohol de densidad 40 libras/pie cúbico. ¿Cuánto trabajo se realiza al bombear todo el alcohol hasta la parte superior del tanque?

25. Un tanque tiene la forma de la superficie generada al girar en torno del eje  $y$  la gráfica de  $y = x^4$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . El tanque está inicialmente lleno con petróleo de densidad 60 libras/pie cúbico. Las unidades de los ejes de coordenadas están en pies. ¿Cuánto trabajo se realiza para bombear todo el petróleo hasta la parte superior del tanque?

26. Un tanque cilíndrico con un radio de 3 pies y longitud de 20 pies reposa sobre su lado en el suelo. Cierta gasolina que pesa 40 libras/pie cúbico está en el nivel del suelo y debe bombearse hacia el tanque. Determine el trabajo necesario para llenar el tanque.

27. La base de un tanque de almacenamiento esférico de radio 12 pies está en el nivel del suelo. Determine la cantidad de trabajo necesaria para llenar el tanque con petróleo de densidad 50 libras/pie cúbico si todo el petróleo se encuentra inicialmente a nivel del suelo.

28. Un mono de 20 libras se ata a una cadena de 50 pies que pesa 0.5 libras por pie (lineal). El otro extremo de la cadena

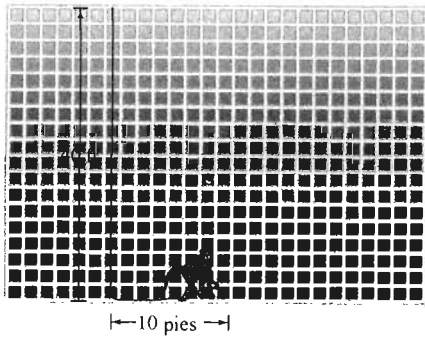


Figura 6.6.17 El mono del problema 28

se une al techo de la jaula del mono, a 40 pies de altura (figura 6.6.17). Determine la cantidad de trabajo que realiza el mono al utilizar la cadena para subir hasta el techo.

29. Tomás está volando una cometa a una altura de 500 pies sobre el suelo. Suponga que la cuerda de la cometa pesa 1/16 onzas por pie (lineal) y que su cuerda está estirada en línea recta, con un ángulo de  $45^\circ$  respecto de la horizontal. ¿Cuánto trabajo realiza el viento al levantar la cuerda desde el nivel del suelo hasta la posición descrita?

30. El centro de un tanque esférico de radio  $R$  está a una distancia  $H > R$  sobre el suelo. Un líquido de densidad (peso)  $\rho$  está al nivel del suelo. Muestre que el trabajo necesario para bombear y llenar el tanque con este líquido es igual al trabajo necesario para levantar el tanque lleno una distancia  $H$ .

31. Un canal de agua de 10 pies de largo tiene una sección transversal cuadrada con un ancho de 2 pies. Si el canal está lleno ( $\rho = 62.4$  libras/pie cúbico), determine la fuerza ejercida por el agua en un extremo del canal.

32. Repita el problema 31, para un canal con una sección transversal dada por un triángulo equilátero con lados de longitud igual a 3 pies.

33. Repita el problema 31, para un canal cuya sección transversal es un trapecio con una altura de 3 pies, un ancho de 2 pies en la parte inferior y un ancho de 4 pies en la parte superior.

34. Determine la fuerza en un extremo del tanque cilíndrico del ejemplo 5 si el tanque está lleno de petróleo con densidad 50 libras/pie cúbico. Recuerde que

$$\int_0^a (a^2 - y^2)^{1/2} dy = \frac{1}{4} \pi a^2,$$

pues la integral representa el área de un cuarto de círculo de radio  $a$ .

En los problemas 35 a 38, se describe una compuerta en la cara vertical de una presa. Determine la fuerza total del agua sobre esta compuerta, si la parte superior está a 10 pies debajo de la superficie del agua.

35. Un cuadrado de lado igual a 5 pies, cuya parte superior es paralela a la superficie del agua.

36. Un círculo de radio 3 pies.

37. Un triángulo isósceles de 5 pies de altura y 8 pies de ancho en la base.

38. Un semicírculo de radio 4 pies cuya orilla superior es su diámetro (paralelo a la superficie del agua).

39. Suponga que la presa de la figura 6.6.18 tiene  $L = 200$  pies de largo y  $T = 30$  pies de ancho en su base. Determine la fuerza del agua sobre la presa si el agua tiene una profundidad de 100 pies y el extremo *inclinado* de la presa da la cara al agua.

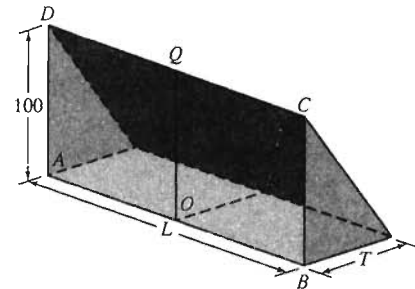


Figura 6.6.18 Vista de un modelo de una presa (problema 39)

## Capítulo 6 Repaso: DEFINICIONES, CONCEPTOS, RESULTADOS

Utilice la siguiente lista como una guía de los conceptos que tal vez deba revisar.

1. El método general para establecer una fórmula integral para una cantidad, aproximándola y reconociendo después la aproximación como una suma de Riemann correspondiente a la integral deseada: si el intervalo  $[a, b]$  se divide en  $n$  subintervalos de igual longitud  $\Delta x = (b - a)/n$  y si  $x_i^*$  denota un punto en el  $i$ -ésimo subintervalo, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x = \int_a^b f(x) dx.$$

2. La distancia neta recorrida como la integral de la velocidad:

$$s = \int_a^b v(t) dt.$$

3. El método de secciones transversales para el cálculo de volúmenes:

$$V = \int_a^b A(x) dx,$$

donde  $A(x)$  denota el área de una rebanada con un espesor infinitesimal  $dx$ .

4. Determinar el volumen de un sólido de revolución mediante el método de secciones transversales, donde las secciones transversales son discos o anillos.

5. Determinar el volumen de un sólido de revolución mediante el método de las capas cilíndricas:

$$V = \int_a^b 2\pi r \, dA,$$

donde  $r$  denota el radio del círculo en torno del cual se gira el elemento de área  $dA$ .

6. La longitud de arco de un arco suave descrito en la forma  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , o en la forma  $x = g(y)$ ,  $c \leq y \leq d$ :

$$s = \int_a^b ds \quad (ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2},)$$

donde

$$ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx \quad \text{para } y = f(x);$$

$$ds = \sqrt{1 + [g'(y)]^2} \, dy \quad \text{para } x = g(y).$$

7. Determinar el área de la superficie de revolución generada al girar un arco suave, dado en la forma  $y = f(x)$  o en la forma  $x = g(y)$ , ya sea en torno del eje  $x$  o del eje  $y$ :

$$A = \int_a^b 2\pi r \, ds,$$

donde  $r$  denota el radio del círculo en torno del cual se gira el elemento de longitud de arco  $ds$ .

8. El trabajo realizado por una función fuerza al mover una partícula a lo largo de un segmento de recta:

$$W = \int_a^b F(x) \, dx$$

si la fuerza  $F(x)$  actúa de  $x = a$  a  $x = b$ .

9. La ley de Hooke y el trabajo realizado al estirar o comprimir un resorte elástico.

10. El trabajo realizado contra la fuerza variable de la gravedad.

11. El trabajo realizado al llenar un tanque o bombear el líquido en el tanque a otro nivel:

$$W = \int_a^b \rho h(y) A(y) \, dy,$$

donde  $h(y)$  denota la distancia vertical a la que debe levantarse una rebanada horizontal de fluido  $dV = A(y)dy$ , a la altura  $y$ .

12. La fuerza ejercida por un líquido sobre una cara de una placa vertical sumergida:

$$F = \int_a^b \rho h \, dA,$$

donde  $h$  denota la profundidad del elemento de área horizontal  $dA$  debajo de la superficie del fluido con densidad (peso)  $\rho$ .

13. Solución de la ecuación diferencial separable

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\phi(y)$$

mediante integración:

$$\int f(y) \, dy = \int g(x) \, dx + C,$$

donde  $f(y) = 1/\phi(y)$ .

## Capítulo 6 Problemas diversos

En los problemas 1 a 3, determine la distancia neta y la distancia total recorrida entre  $t = a$  y  $t = b$  por una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta con la función de velocidad dada  $v = v(t)$ .

1.  $v = t^2 - t - 2$ ;  $a = 0, b = 3$

2.  $v = |t^2 - 4|$ ;  $a = 1, b = 4$

3.  $v = \pi \sin \frac{1}{2}\pi(2t - 1)$ ;  $a = 0, b = 1.5$

En los problemas 4 a 8, un sólido se extiende a lo largo del eje  $x$  de  $x = a$  a  $x = b$  y el área de su sección transversal en  $x$  es  $A(x)$ . Determine su volumen.

4.  $A(x) = x^3$ ;  $a = 0, b = 1$

5.  $A(x) = \sqrt{x}$ ;  $a = 1, b = 4$

6.  $A(x) = x^3$ ;  $a = 1, b = 2$

7.  $A(x) = \pi(x^2 - x^4)$ ;  $a = 0, b = 1$

8.  $A(x) = x^{100}$ ;  $a = -1, b = 1$

9. Suponga que la lluvia comienza en el instante  $t = 0$  y que la razón después de  $t$  horas es  $(t + 6)/12$  pulgadas/hora. ¿Cuántas pulgadas de lluvia caen durante las primeras 12 horas?

10. La base de cierto sólido es la región del primer cuadrante acotada por las curvas  $y = x^3$  y  $y = 2x - x^2$ . Determine el volumen del sólido, si cada sección transversal perpendicular al eje  $x$  es un cuadrado con un lado en la base del sólido.

11. Determine el volumen del sólido generado al girar en torno del eje  $x$  la región del primer cuadrante del problema 10.

12. Determine el volumen del sólido generado al girar la región acotada por  $y = 2x^4$  y  $y = x^2 + 1$  en torno de (a) el eje  $x$ ; (b) el eje  $y$ .

13. Un cable hecho de cobre (de densidad 8.5 gramos/cm<sup>3</sup>) tiene la forma de una hélice que forma una espiral en torno del eje  $x$  de  $x = 0$  a  $x = 20$ . Cada sección transversal de este cable perpendicular al eje  $x$  es un disco circular de radio 0.25 cm. ¿Cuál es la masa total del cable?

14. Obtenga la fórmula  $V = 1/3\pi h(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2)$  para el volumen de un cono truncado de altura  $h$  y radios de las bases  $r_1$  y  $r_2$ .

15. Suponga que el punto  $P$  está en una recta perpendicular al plano  $xy$  en el origen  $O$ , con  $|OP| = h$ . Considere el "cono elíptico" que consta de todos los puntos en los segmentos de recta de  $P$  a los puntos sobre y dentro de la elipse con ecuación

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Muestre que el volumen de este cono elíptico es  $V = \frac{1}{3}\pi abh$ .

16. La figura 6.PD.1 muestra la región  $R$  acotada por la elipse  $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$  y por la recta  $x = a - h$ , donde  $0 < h < a$ . El giro de  $R$  en torno del eje  $x$  genera un "segmento de elipsoide" de radio  $r$ , altura  $h$  y volumen  $V$ . Muestre que

$$r^2 = \frac{b^2(2ah - h^2)}{a^2} \quad \text{y que} \quad V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \frac{3a - h}{2a - h}.$$

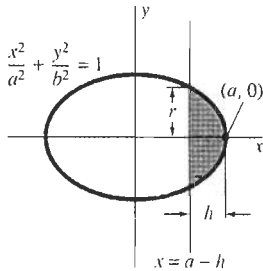


Figura 6.PD.1 Un segmento de una elipse (problema 16)

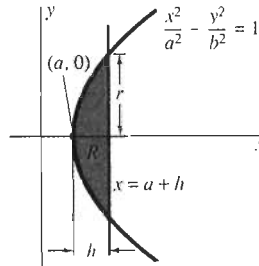


Figura 6.PD.2 La región  $R$  del problema 17

17. La figura 6.PD.2 muestra la región  $R$  acotada por la hipérbola  $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$  y la recta  $x = a + h$ , donde  $h > 0$ . El giro de  $R$  en torno del eje  $x$  genera un "segmento de hiperboloide" de radio  $r$ , altura  $h$  y volumen  $V$ . Muestre que

$$r^2 = \frac{b^2(2ah + h^2)}{a^2} \quad \text{y que} \quad V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \frac{3a + h}{2a + h}.$$

En los problemas 18 a 20, la función  $f(x)$  es no negativa y continua para  $x \geq 1$ . Cuando la región bajo  $y = f(x)$  de  $x = 1$  a  $x = t$  se gira en torno del eje indicado, el volumen del sólido resultante es  $V(t)$ . Determine la función  $f(x)$ .

18.  $V(t) = \pi\left(1 - \frac{1}{t}\right)$ ; el eje  $x$

19.  $V(t) = \frac{1}{6}\pi[(1 + 3t)^2 - 16]$ ; el eje  $x$

20.  $V(t) = \frac{2}{3}\pi[(1 + 3t^2)^{3/2} - 8]$ ; el eje  $y$

21. Utilice la fórmula integral en el problema 36 de la sección 6.3 para determinar el volumen del sólido generado al girar en torno del eje  $y$  la región del primer cuadrante acotada por  $y = x$  y  $y = \sin(\pi x/2)$ .

22. Utilice el método de capas cilíndricas para determinar el volumen del sólido generado al girar en torno de la recta  $x = -2$  la región acotada por  $y = x^2$  y  $y = x + 2$ .

23. Determine la longitud de la curva  $y = \frac{1}{3}x^{3/2} - x^{1/2}$  de  $x = 1$  a  $x = 4$ .

24. Determine el área de la superficie generada al girar la curva del problema 23 en torno de (a) el eje  $x$ ; (b) el eje  $y$ .

25. Determine la longitud de la curva  $y = \frac{3}{8}(y^{4/3} - 2y^{2/3})$  de  $y = 1$  a  $y = 8$ .

26. Determine el área de la superficie generada al girar la curva del problema 25 en torno de (a) el eje  $x$ ; (b) el eje  $y$ .

27. Determine el área de la superficie generada al girar la curva del problema 23 en torno de la recta  $x = 1$ .

28. Si  $-r < a < b < r$ , entonces una "zona esférica" de "altura"  $h = b - a$  se genera al girar en torno del eje  $x$  el arco circular  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ,  $a \leq x \leq b$ . Muestre que el área de esta zona esférica es  $A = 2\pi r h$ , lo mismo que la de un cilindro de radio  $r$  y altura  $h$ .

29. Aplique el resultado del problema 28 para mostrar que el área de la superficie de una esfera de radio  $r$  es  $A = 4\pi r^2$ .

30. Sea  $R$  la región acotada por las curvas  $y = 2x^3$  y  $y^2 = 4x$ . Determine los volúmenes de los sólidos generados al girar la región  $R$  en torno de (a) el eje  $x$ ; (b) el eje  $y$ ; (c) la recta  $y = -1$ ; (d) la recta  $x = 2$ . En cada caso, use el método de secciones transversales y el método de capas cilíndricas.

En los problemas 31 a 42, determine la solución general de la ecuación diferencial dada. Si se da una condición inicial, determine la solución particular correspondiente.

31.  $\frac{dy}{dx} = 2x + \cos x$ ;  $y(0) = 0$

32.  $\frac{dy}{dx} = 3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ ;  $y(1) = 10$

33.  $\frac{dy}{dx} = (y + 1)^2$       34.  $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y + 1}$

35.  $\frac{dy}{dx} = 3x^2y^2$ ;  $y(0) = 1$

36.  $\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{xy}$ ;  $y(1) = 1$

37.  $x^2y^2 \frac{dy}{dx} = 1$       38.  $\sqrt{xy} \frac{dy}{dx} = 1$

39.  $\frac{dy}{dx} = y^2 \cos x$ ;  $y(0) = 1$

40.  $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y} \sin x$ ;  $y(0) = 4$

$$41. \frac{dy}{dx} = \frac{y^2(1 - \sqrt{x})}{x^2(1 - \sqrt{y})} \quad 42. \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}(x + 1)^3}{\sqrt{x}(y + 1)^3}$$

43. Determine la longitud natural  $L$  de un resorte si se necesita cinco veces más trabajo para estirarlo de una longitud de 2 pies a 5 pies que el trabajo necesario para estirarlo de una longitud de 2 a 3 pies.

44. Una viga de acero que pesa 1000 libras cuelga de un cable de 50 pies que pesa 5 libras por pie lineal. ¿Cuánto trabajo se realiza al izar 25 pies del cable con un torno?

45. Un tanque esférico de radio  $R$  (en pies) está inicialmente lleno de petróleo con densidad  $\rho$  libras/pie cúbico. Determine el trabajo total realizado al bombear todo el petróleo de la esfera a una altura de  $2R$  sobre la parte superior del tanque.

46. ¿Cuánto trabajo realiza una colonia de hormigas para construir un hormiguero cónico de altura y diámetro iguales a 1 pulgada, utilizando arena que inicialmente está al nivel del suelo y con una densidad de 150 libras/pie cúbico?

47. La atracción gravitacional debajo de la superficie de la Tierra es directamente proporcional a la distancia al centro de la Tierra. Suponga que se cava un agujero cilíndrico recto de radio 1 pie desde la superficie de la Tierra hasta el centro.

Suponga que la Tierra tiene un radio de 3960 millas y una densidad uniforme de 350 libras/pie cúbico. ¿Cuánto trabajo, en pies-libra, se realiza al levantar un peso de 1 libra desde el fondo de este agujero hasta su salida?

48. ¿Cuánto trabajo se realiza al cavar el agujero del problema 47; es decir, en levantar el material que contenía inicialmente hasta la superficie de la Tierra?

49. Suponga que una presa tiene la forma de un trapecio con una altura de 100 pies, 300 pies de largo en la parte superior y 200 pies de largo en el fondo. ¿Cuál es la fuerza total que ejerce el agua sobre la presa, cuando el nivel del agua, detrás de la presa, llega hasta su parte superior?

50. Suponga que una presa tiene las mismas longitudes en la parte superior e inferior que la presa del problema 49 y la misma altura de 100 pies, pero que su cara hacia el agua está inclinada  $30^\circ$  con respecto de la vertical. ¿Cuál es la fuerza total de presión del agua en esta presa?

51. Para  $c > 0$ , las gráficas de  $y = c^2x^2$  y  $y = c$  acotan una región plana. Gire esta región en torno de la recta horizontal  $y = -1/c$  para formar un sólido. ¿Para qué valor de  $c$  es el volumen de este sólido máximo?, ¿mínimo?

# Funciones exponenciales y logarítmicas

□ John Napier fue el octavo barón de Merchiston, localidad cercana a Edinburgo, Escocia. Como terrateniente, participó vigorosamente en los asuntos locales y controló de manera activa las cosechas y el ganado en su tierra, en torno del castillo de Merchiston. Se dice que consideraba como su contribución más importante y duradera la obra *A Plaine Discovery of the Whole Revelation of Saint John* (1593), donde (entre otras cosas), predecía que el fin del mundo sería en 1786. Pero el mundo, que sigue aquí después de dos siglos, recuerda a Napier como el inventor de los logaritmos. El final del siglo XVI fue una era de cálculo numérico, cuando los desarrollos en astronomía y navegación pedían una mayor precisión y grandes cálculos trigonométricos. Con su obra teológica detrás, Napier comenzó en 1594 una labor de 20 años para revolucionar el arte práctico del cálculo numérico. El resultado de este proyecto fenomenal fue su obra de 1614 *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Descripción del

maravilloso canon de los logaritmos), que contenía sus tablas logarítmicas junto con una breve introducción y guía para su uso.

□ Los estudiantes actuales aprenden primero que el logaritmo “común” de base 10,  $\log_{10} x$ , es el exponente al que deben elevar 10 para obtener el número  $x$ . Como

$$\log_{10} xy = \log_{10} x + \log_{10} y$$

la multiplicación de dos números  $x$  y  $y$  se reduce a la operación más sencilla de sumar sus logaritmos. El “logaritmo”  $N\log(x)$  que utilizó Napier era un tanto diferente. Mientras que  $\log_{10} 1 = 0$ , la definición de Napier implicaba que  $N\log(10^7) = 0$ , donde reemplazamos la regla anterior por una regla de la forma  $N\log(xy) = N\log(x) + N\log(y) - C$ . Por tanto, el uso de la tabla de logaritmos original de Napier implicaría la suma o resta continua de la constante particular  $C = 10^7 \times \ln 10^7$  (donde  $\ln$  denota el logaritmo “natural” moderno).

□ En 1615, el profesor inglés de matemáticas Henry Briggs visitó a Napier en Escocia. Sus discusiones produjeron la construcción por parte de Briggs de una tabla de logaritmos “mejorados”, aquellos para los cuales el logaritmo de 1 es 0, y el logaritmo de 10 es 1. A una década de la muerte de Napier, se terminaron las tablas con 10 cifras de estos logaritmos comunes. Estas tablas jugaron un papel central en los cálculos científicos durante los tres siglos siguientes.

□ En una regla de cálculo del tipo utilizado de manera universal por los estudiantes de cálculo antes del advenimiento de las calculadoras electrónicas de bolsillo en la década de 1970, los números están inscritos en las reglas a distancias proporcionales a sus logaritmos. En consecuencia, los logaritmos de  $x$  en una escala fija y de  $y$  en una regla deslizante se suman fácilmente para determinar el producto  $xy$ .



# 7.1

## Exponenciales, logaritmos y funciones inversas

Hasta ahora, nuestro estudio del cálculo se ha concentrado principalmente en las funciones potencia y trigonométricas, así como las funciones algebraicas obtenidas a partir de las funciones potencia mediante combinaciones finitas y composiciones. Dedicamos este capítulo al cálculo de las funciones exponenciales y logarítmicas. Esta sección de introducción da un panorama breve y un tanto informal de estas funciones no algebraicas, en parte desde la perspectiva de la matemática anterior al cálculo. Además de revisar las leyes de los exponentes y de los logaritmos, nuestro propósito aquí es proporcionar cierto fundamento intuitivo para el tratamiento sistemático de las funciones exponenciales y logarítmicas que se inicia en la sección 7.2.

### FUNCIONES EXPONENCIALES

Una *función exponencial* es una función de la forma

$$f(x) = a^x \quad (1)$$

donde  $a > 0$ . Observe que  $x$  es la variable; el número  $a$ , llamado la *base*, es una constante. Así,

- Una función exponencial  $f(x) = a^x$  es una constante elevada a una potencia variable, mientras que
- La función potencia  $p(x) = x^k$  es una variable elevada a una potencia constante.

En el álgebra elemental, una potencia *racional* del número real positivo  $a$  se define en términos de raíces y potencias enteras. Ahí aprendimos que si  $p$  y  $q$  son enteros (con  $q > 0$ ), entonces

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p.$$

Tenemos entonces las siguientes **leyes de los exponentes** para todos los exponentes *racionales*  $r$  y  $s$ :

$$\begin{aligned} a^{r+s} &= a^r \cdot a^s, & (a^r)^s &= a^{r \cdot s}, \\ a^{-r} &= \frac{1}{a^r}, & (ab)^r &= a^r \cdot b^r. \end{aligned} \quad (2)$$

Además, recordemos que

$$a^0 = 1 \quad (3)$$

para todo número real positivo  $a$ .

**EJEMPLO 1** Un cálculo típico mediante las leyes de los exponentes es

$$\frac{(2^2)^3(3)^{-4}}{(2)^{-2}} = \frac{2^6 \cdot 2^2}{3^4} = \frac{2^8}{3^4} = \frac{256}{81}.$$

Algunas potencias fraccionarias de 2 son

$$2^{3/2} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}, \quad 2^{5/3} = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{32},$$

y

$$2^{0.7} = 2^{7/10} = \sqrt[10]{2^7} = \sqrt[10]{128} \approx 1.6245.$$

**EJEMPLO 2** A veces, las aplicaciones requieren exponentes irracionales y racionales. Consideremos una población de bacterias  $P(t)$  que comienza (en el instante  $t = 0$ ) con una población inicial

$$P(0) = 1 \text{ (millón)}$$

y se duplica cada hora subsecuente, incrementándose en el mismo factor durante dos intervalos de tiempo de la misma longitud. En 3 horas,  $P$  se incrementará mediante un factor de  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ , de modo que

$$P(3) = 2^3 = 8 \text{ (millones)}$$

Si  $k$  es el factor con el que  $P$  se incrementa en  $1/3$  hora, entonces en una hora  $P$  se incrementa por un factor  $k \cdot k \cdot k = k^3 = 2$ , de modo que

$$k = 2^{1/3} \text{ y } P\left(\frac{1}{3}\right) = 2^{1/3} \text{ (millones).}$$

De manera más general, si  $p$  y  $q$  son enteros positivos, entonces  $P(1/q) = 2^{1/q}$ . En  $p/q$  horas,  $P$  se incrementará mediante un factor de  $2^{1/q}$  cada  $p$  veces, de modo que

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = (2^{1/q})^p = 2^{p/q}.$$

Así, la población de bacterias (en millones) después de  $t$  horas está dada por

$$P(t) = 2^t \tag{4}$$

si  $t$  es un número racional. Pero como el tiempo no se restringe solamente a valores racionales, podemos concluir que  $P(t) = 2^t$  para *toda*  $t > 0$ .

Pero, ¿qué significa una expresión con un exponente irracional, como  $2^{\sqrt{2}}$  o  $2^\pi$ ? Para determinar el valor de  $2^\pi$ , debemos trabajar con aproximaciones decimales finitas (racionales) del número irracional  $\pi = 3.1415926 \dots$ . Por ejemplo, una calculadora daría

$$2^{3.1} = 2^{31/10} = (\sqrt[10]{2})^{31} \approx 8.5742.$$

Los valores aproximados que se muestran en la tabla de la figura 7.1.1 indican que la población de bacterias después de  $\pi$  horas es

$$P(\pi) = 2^\pi \approx 8.8250 \text{ (millones).}$$

$t$	$2^t$
3.1	8.5742
3.14	8.8152
3.141	8.8214
3.1415	8.8244
3.14159	8.8250
3.141592	8.8250
3.1415926	8.8250
↓	↓
$\pi$	$2^\pi$

**Figura 7.1.1** Estudio de  $2^\pi$  (ejemplo 2)

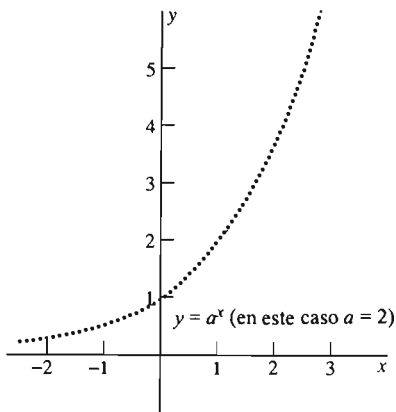
El ejemplo 2 sugiere la importancia práctica de las funciones exponenciales  $2^x$  de base 2. En este capítulo veremos que, para cualquier base fija  $a > 0$ , se puede definir para *toda*  $x$  la función exponencial  $f(x) = a^x$ , de modo que

- Las leyes de los exponentes de la ecuación (2) sean válidas para exponentes irracionales y racionales;
- La función  $f(x) = a^x$  sea continua, de hecho derivable.

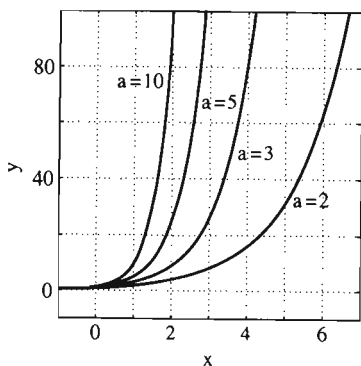
Comenzaremos estudiando la función  $f(x) = a^x$  en el caso  $a > 1$ . Primero observamos que  $a^r > 1$  si  $r$  es un número racional positivo. Si  $r < s$ , otro número racional, entonces las leyes de los exponentes implican

$$a^r < a^r \cdot a^{s-r} = a^s,$$

de modo que  $f(r) < f(s)$  siempre que  $r < s$ . Es decir,  $f(x) = a^x$  es una función *creciente* del exponente racional  $x$ . Si graficamos puntos sobre la gráfica de  $y = a^x$  para valores racionales de  $x$  utilizando un valor fijo típico de  $a$  como  $a = 2$ ,



**Figura 7.1.2** La gráfica de  $y = a^x$  tiene “agujeros” si sólo se utilizan los valores racionales de  $x$ .



**Figura 7.1.3**  $y = a^x$  para  $a = 2, 3, 5, 10$

obtenemos una gráfica como la de la figura 7.1.2. Esta gráfica aparece como una curva punteada para sugerir que está densamente poblada con “agujeros” correspondientes a los puntos faltantes  $(x, y)$  cuando  $x$  es irracional. En la sección 7.4 mostraremos que los agujeros de esta gráfica se pueden rellenar para obtener la gráfica de una función creciente y continua  $f$  definida para todo real  $x$  y para la cual  $f(r) = a^r$  para todo número racional  $r$ . Por tanto, escribimos  $f(x) = a^x$  para toda  $x$  y llamamos a  $f$  la **función exponencial con base  $a$** .

Como se ilustra en la figura 7.1.3, la función  $f(x) = a^x$  crece rápidamente si  $x > 0$  crece, y las gráficas de  $y = a^x$  tienen una apariencia cualitativa similar para diferentes valores de  $a > 1$  como base.

## DERIVADAS DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES

Para calcular la derivada de la función exponencial  $f(x) = a^x$ , comenzamos con la definición de la derivada y después utilizamos la primera ley de los exponentes en la ecuación (2) para simplificar la expresión, con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= D_x a^x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} && \text{(por las leyes de los exponentes)} \\ &= a^x \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} \right) && \text{(pues } a^x \text{ es constante con respecto de } h\text{).} \end{aligned}$$

Bajo la hipótesis de que  $f(x) = a^x$  es derivable, esto implica que el límite

$$m(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} \tag{5}$$

existe. Aunque su valor  $m(a)$  depende de  $a$ , el límite es una constante en lo que respecta a  $x$ . Así, tenemos que la derivada de  $a^x$  es un *múltiplo constante* de la misma  $a^x$ :

$$D_x a^x = m(a) \cdot a^x. \tag{6}$$

Como  $a^0 = 1$ , por la ecuación (6) tenemos que la constante  $m(a)$  es la pendiente de la recta tangente a la curva  $y = a^x$  en el punto  $(0, 1)$ , donde  $x = 0$ .

Los datos numéricos de la figura 7.1.4 sugieren que  $m(2) \approx 0.693$  y que  $m(3) \approx 1.099$ . Las rectas tangentes con estas pendientes aparecen en la figura 7.1.5. Así, parece que

$$D_x 2^x \approx (0.693) \cdot 2^x \quad \text{y} \quad D_x 3^x \approx (1.099) \cdot 3^x. \tag{7}$$

En la medida de lo posible, quisiéramos evitar factores numéricos complicados como los de la ecuación (7). Parece plausible que el valor  $m(a)$  definido en la ecuación (5) es una función continua de  $a$ . En tal caso, entonces, como  $m(2) < 1$  y  $m(3) > 1$ , la propiedad del valor intermedio implica que  $m(e) = 1$  (exactamente) para algún número  $e$  entre 2 y 3. Si utilizamos este número particular  $e$  como base, entonces la ecuación (6) implica que la derivada de la función exponencial resultante  $f(x) = e^x$  es

$$D_x e^x = e^x. \tag{8}$$

$h$	$\frac{2^h - 1}{h}$	$\frac{3^h - 1}{h}$
0.1	0.718	1.161
0.01	0.696	1.105
0.001	0.693	1.099
0.0001	0.693	1.099

**Figura 7.1.4** Estudio de los valores de  $m(2)$  y  $m(3)$

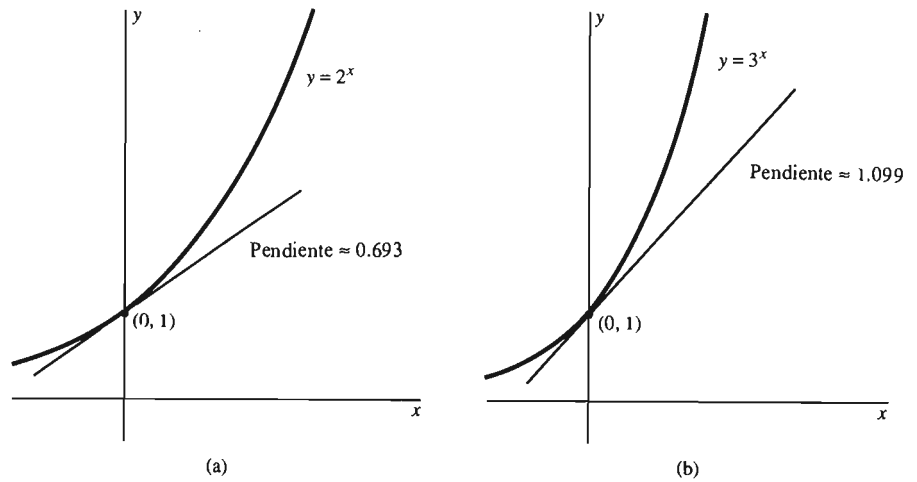


Figura 7.1.5 Las gráficas (a)  $y = 2^x$  y (b)  $y = 3^x$

Así, la función  $e^x$  es su propia derivada. Llamamos a  $f(x) = e^x$  la **función exponencial natural**. Su gráfica aparece en la figura 7.1.6.

En la sección 7.3 veremos que el número  $e$  está dado por el límite

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n. \quad (9)$$

Analizaremos este límite de manera numérica. Con una calculadora obtenemos los valores de la tabla en la figura 7.1.7. La evidencia sugiere (pero no demuestra) que  $e \approx 2.718$  hasta tres cifras decimales. El número  $e$  es uno de los más importantes números particulares en matemáticas. Se sabe que es irracional; su valor hasta 20 cifras decimales es

$$e \approx 2.71828\ 18284\ 59045\ 23536.$$

### EJEMPLO 3

(a) Si  $y = x^2 e^x$ , entonces el hecho de que  $D_x e^x = e^x$  y la regla del producto implican

$$\frac{dy}{dx} = (D_x x^2)e^x + x^2(D_x e^x) = (2x)(e^x) + (x^2)(e^x) = (2x + x^2)e^x.$$

(b) Si

$$y = \frac{e^x}{x + 1},$$

entonces con la regla del cociente se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(D_x e^x)(x + 1) - (e^x)D_x(x + 1)}{(x + 1)^2} = \frac{(e^x)(x + 1) - (e^x)(1)}{(x + 1)^2} \\ &= \frac{xe^x}{(x + 1)^2}. \end{aligned}$$

## FUNCIONES INVERSAS

En cursos anteriores al cálculo, se presenta la **función logaritmo de base  $a$**   $\log_a x$  como “opuesta” a la función exponencial  $f(x) = a^x$  en base  $a > 1$ . Es decir,  $\log_a x$  es el exponente al que debemos elevar  $a$  para obtener  $x$ . Así,

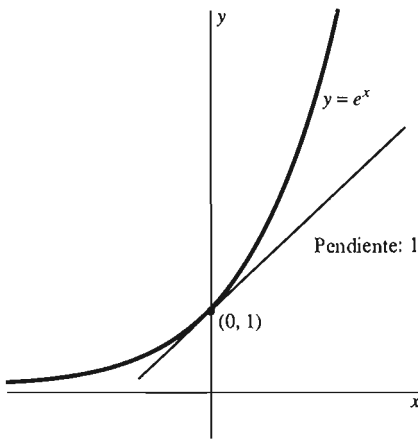


Figura 7.1.6 La gráfica  $y = e^x$

$n$	$\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$
10	2.594
100	2.705
1,000	2.717
10,000	2.718
100,000	2.718

Figura 7.1.7 Estimación numérica del número  $e$

$$y = \log_a x \text{ si y sólo si } a^y = x \quad (10)$$

Con  $a = 10$ , éste es el *logaritmo común* de base 10  $\log_{10} x$ .

**EJEMPLO 4**

$$\begin{aligned} \log_{10} 1000 &= 3 & \text{pues} & & 1000 &= 10^3; \\ \log_{10} (0.1) &= -1 & \text{pues} & & 0.1 &= 10^{-1}; \\ \log_2 16 &= 4 & \text{pues} & & 16 &= 2^4; \\ \log_3 9 &= 2 & \text{pues} & & 9 &= 3^2. \end{aligned}$$

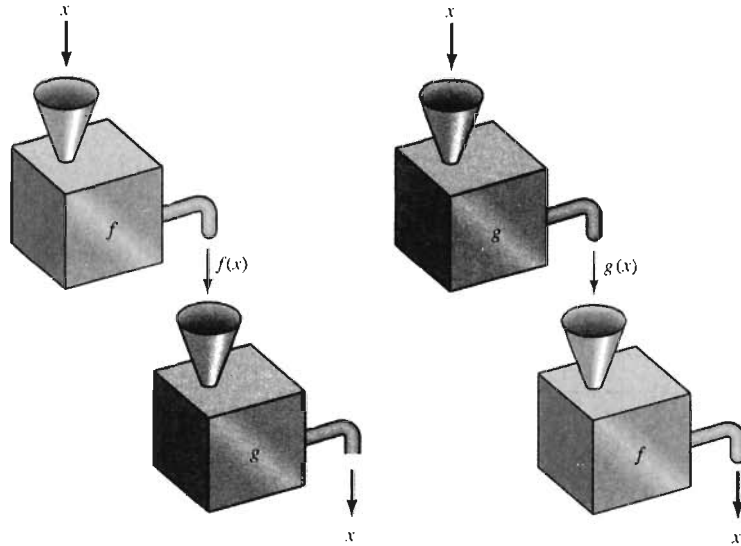
Si  $y = \log_a x$ , entonces  $a^y = x > 0$ . De aquí, se sigue que

$$a^{\log_a x} = x \quad (11a)$$

y

$$\log_a (a^y) = y. \quad (11b)$$

Así, las funciones exponencial y logarítmica de base  $a$  son opuestas naturales, en el sentido de que cada una revierte el resultado de la aplicación de la otra. Si aplicamos ambas de manera sucesiva (en cualquier orden), regresamos al inicio (figura 7.1.8). El ejemplo 5 muestra otras parejas familiares de funciones que son *inversas* entre sí.



**Figura 7.1.8** Funciones inversas  $f$  y  $g$ . Cada una revierte el resultado de la otra.

**EJEMPLO 5** Las siguientes son un par de *funciones inversas*:

$$f(x) = x + 1 \quad \text{y} \quad g(x) = x - 1.$$

Sumar 1 y restar 1 son operaciones inversas; cualquiera de ellas revierte la otra. También, duplicar y dividir a la mitad son operaciones inversas:

$$f(x) = 2x \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{x}{2}.$$

Una función puede ser su propia inversa:

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

Elevar al cuadrado y extraer la raíz cuadrada son operaciones inversas si solamente se utilizan números positivos:

$$\left\{ \begin{array}{l} f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty) \\ \text{por } f(x) = x^2 \end{array} \right. \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{l} g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty) \\ \text{por } g(x) = \sqrt{x}. \end{array} \right.$$

Como  $f(x) = a^x$  y  $g(x) = \log_a x$ , cada par  $f$  y  $g$  de funciones dadas en el ejemplo 5 tiene la propiedad de que

$$f(g(x)) = x \quad \text{y} \quad g(f(x)) = x \quad (12)$$

para todo valor  $x$  en los dominios de  $g$  y  $f$ , respectivamente.

**Definición Funciones inversas**

Las dos funciones  $f$  y  $g$  son **funciones inversas**, o **inversa** una de otra, si

- El rango de valores de cada función es el dominio de definición de la otra, y
- Las relaciones (12) son válidas para toda  $x$  en los dominios de  $g$  y  $f$ , respectivamente.

Debemos tener cuidado al especificar los dominios de  $f$  y  $g$  para garantizar que se cumple la condición en (12). Por ejemplo, la regla  $f(x) = x^2$  tiene sentido para todo número real  $x$ , pero no es lo mismo que la función

$$f(x) = x^2, \quad x > 0,$$

que es la inversa de  $g(x) = \sqrt{x}$ ,  $x > 0$ . Pero las funciones

$$f(x) = x^3 \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt[3]{x}$$

son inversas entre sí, sin restricción alguna sobre sus dominios naturales.

Como  $a^x > 0$  para toda  $x$  (como se muestra en la figura 7.1.3), esto implica que  $\log_a x$  está definida *solamente* para  $x > 0$ . Puesto que el intercambio de  $x$  y  $y$  en  $a^y = x$  conduce a  $y = a^x$ , se sigue de la ecuación (10) que la gráfica de  $y = \log_a x$  es la reflexión sobre la recta  $y = x$  de la gráfica de  $y = a^x$  y por tanto tiene la forma que se muestra en la figura 7.1.9. Puesto que  $a^0 = 1$ , también tenemos que

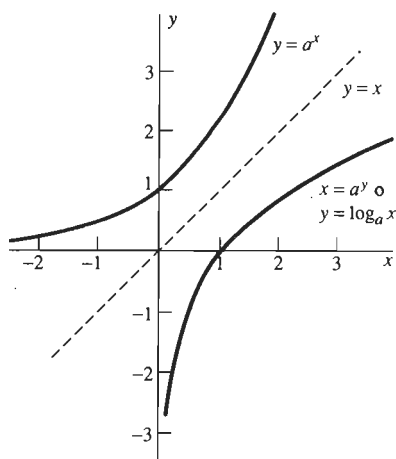
$$\log_a 1 = 0,$$

de modo que las intersecciones con los ejes en la figura son independientes de la elección de  $a$ .

Podemos utilizar la relación de función inversa entre  $\log_a x$  y  $a^x$  para deducir, a partir de las leyes de los exponentes de la ecuación (2), las siguientes **leyes de los logaritmos**:

$$\begin{aligned} \log_a xy &= \log_a x + \log_a y, & \log_a \frac{1}{x} &= -\log_a x, \\ \log_a \frac{x}{y} &= \log_a x - \log_a y, & \log_a x^y &= y \log_a x. \end{aligned} \quad (13)$$

Verificaremos estas leyes de los logaritmos, en la sección 7.2.



**Figura 7.1.9** La gráfica de  $x = a^y$  es la gráfica de la función inversa  $y = \log_a x$  de la función exponencial  $a^x$ . Aquí mostramos el caso  $a > 1$ .

**EJEMPLO 6** Un cálculo típico mediante las leyes de los logaritmos es

$$\begin{aligned}\log_{10}\left(\frac{3000}{17}\right) &= \log_{10} 3000 - \log_{10} 17 = \log_{10}(3 \cdot 10^3) - \log_{10} 17 \\ &= \log_{10} 3 + 3 \log_{10} 10 - \log_{10} 17 \approx 0.47712 + 3 \cdot 1 - 1.23045; \\ \log_{10}\left(\frac{3000}{17}\right) &\approx 2.24667.\end{aligned}$$

Utilizamos una calculadora para determinar la aproximación  $\log_{10} 3 \approx 0.47712$  y  $\log_{10} 17 \approx 1.23045$ .

## DERIVADAS DE LAS FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Nuestro interés en las parejas de funciones inversas en este momento surge del siguiente principio general. Cuando conocemos la derivada de cualquiera de dos funciones inversas entre sí, entonces podemos utilizar la relación de función inversa para *descubrir* la derivada de la otra función. El teorema 1 se demuestra por lo general en un curso de cálculo avanzado.

### **Teorema 1** *Derivación de una función inversa*

Supongamos que la función  $f$  está definida en el intervalo abierto  $I$  y que  $f'(x) > 0$  para toda  $x$  en  $I$ . Entonces  $f$  tiene una función inversa  $g$ , la función  $g$  es derivable y

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \quad (14)$$

para toda  $x$  en el dominio de  $g$ .

**COMENTARIO 1** El teorema es cierto también cuando reemplazamos la condición  $f'(x) > 0$  por la condición  $f'(x) < 0$ . Suponiendo que  $g$  es derivable, la fórmula de la derivada en la ecuación (14) se puede obtener derivando ambos lados de la relación función inversa

$$f(g(x)) = x.$$

Cuando derivamos cada lado, utilizando el hecho de que esta ecuación sigue siendo una identidad en cierto intervalo y empleando la regla de la cadena en el lado izquierdo, el resultado es

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1.$$

Cuando despejamos en esta ecuación  $g'(x)$ , el resultado es la ecuación (14).

**COMENTARIO 2** La ecuación (14) es fácil de recordar en notación diferencial. Escribamos  $x = f(y)$  y  $y = g(x)$ . Entonces  $dy/dx = g'(x)$  y  $dx/dy = f'(y)$ . Así, la ecuación (14) se convierte en la casi inevitable fórmula

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad (15)$$

Al utilizar la ecuación (15), es importante recordar que  $dy/dx$  se evalúa en  $x$ , mientras que  $dx/dy$  se evalúa en el valor correspondiente de  $y$ , a saber,  $y = g(x)$ .

La función logarítmica  $g(x) = \log_e x$  de base  $e$  es la **función logaritmo natural**. Se denota comúnmente (por ejemplo, en las teclas de muchas calculadoras) mediante el símbolo especial  $\ln$ :

$$\boxed{\ln x = \log_e x.} \quad (16)$$

La función logaritmo natural es la inversa de la función exponencial natural  $e^x$ , de modo que

$$e^{\ln x} = x \quad \text{para toda } x > 0 \quad (17a)$$

y

$$\ln(e^x) = x \quad \text{para toda } x. \quad (17b)$$

Puesto que  $D_x e^x = e^x > 0$  para toda  $x$ , esto implica que la función  $\ln x$  es derivable. Para determinar la derivada de la función

$$u = \ln x,$$

seguiremos la prescripción del comentario 1 (después del teorema 1) y comenzaremos con la ecuación (17a) en la forma

$$e^u = x, \quad \text{donde } u = \ln x.$$

Puesto que esta última ecuación en realidad es una identidad (para  $x > 0$ ), la derivada del lado izquierdo con respecto de  $x$  es también idéntica (para  $x > 0$ ) a la derivada del lado derecho con respecto de  $x$ :

$$D_x(e^u) = D_x x.$$

Derivamos con la ayuda de la regla de la cadena y vemos que

$$(D_u e^u) \frac{du}{dx} = 1.$$

Pero la ecuación (8) implica que  $D_u e^u = e^u$ , de modo que

$$e^u \frac{du}{dx} = 1,$$

y por último,

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{e^u} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

Por tanto, la derivada  $du/dx$  de la función logaritmo natural  $u = \ln x$  está dada por

$$\boxed{D_x \ln x = \frac{1}{x}.} \quad (18)$$

Así,  $\ln x$  es la función hasta ahora faltante cuya derivada es  $1/x$ .

Al igual que con las exponenciales, la derivada de una función logarítmica en una base distinta de  $e$  implica un factor numérico inconveniente. Por ejemplo, en la sección 7.4 veremos que



$$D_x \log_{10} x \approx \frac{0.4343}{x}. \quad (19)$$

El contraste entre las ecuaciones (18) y (19) ilustra una forma en que los logaritmos en base  $e$  son “naturales”.

**EJEMPLO 7** Determine la derivada de

$$y = \frac{\ln x}{x}.$$

**Solución** La ecuación (12) y la regla del cociente implican

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(D_x \ln x)(x) - (\ln x)(D_x x)}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (\ln x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

**EJEMPLO 8** Para determinar la derivada de  $h(x) = \ln x^2$ , podemos aplicar una ley de los logaritmos para simplificar antes de derivar; es decir,

$$h(x) = \ln x^2 = 2 \ln x,$$

y por tanto

$$h'(x) = 2 \cdot D_x(\ln x) = \frac{2}{x}.$$

En nuestro análisis preliminar de esta sección presentamos de manera informal

- El número  $e \approx 2.71828$ ,
- La función exponencial natural  $e^x$ , y
- La función logaritmo natural  $\ln x$ .

Nuestro estudio de las derivadas de  $e^x$  y  $\ln x$ , dadas en las ecuaciones (8) y (18), deben considerarse como provisionales hasta tener un análisis más completo de estas nuevas funciones en las secciones 7.2 y 7.3. En todo caso, esta breve introducción a la relación entre las funciones exponenciales y las funciones logarítmicas deberá ayudarle a comprender mejor el desarrollo sistemático de estas dos secciones.

En las siguientes secciones de este capítulo veremos que las funciones  $e^x$  y  $\ln x$  juegan un papel vital en el análisis cuantitativo de una amplia gama de fenómenos naturales, que incluyen el crecimiento de poblaciones, el decaimiento radiactivo, la difusión de epidemias, el crecimiento de inversiones, difusión de contaminantes y movimiento tomando en cuenta la resistencia.

## 7.1 Problemas

Utilice las leyes de los exponentes para simplificar las expresiones de los problemas 1 a 10. Escriba después la respuesta como un entero.

1.  $2^3 \cdot 2^4$
2.  $3^2 \cdot 3^3$
3.  $(2^2)^3$
4.  $2^{(2^3)}$
5.  $3^5 \cdot 3^{-5}$
6.  $10^{10} \cdot 10^{-10}$

7.  $(2^{12})^{1/3}$
8.  $(3^6)^{1/2}$
9.  $4^5 \cdot 2^{-6}$
10.  $6^5 \cdot 3^{-5}$

Observe que  $\log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2 \log_{10} 10 = 2$ . Utilice una técnica similar para simplificar y evaluar (sin emplear una calculadora) las expresiones de los problemas 11 a 16.

11.  $\log_2 16$     12.  $\log_3 27$     13.  $\log_5 125$   
 14.  $\log_7 49$     15.  $\log_{10} 1000$     16.  $\log_{12} 144$

Utilice las leyes de los logaritmos para expresar los logaritmos naturales de los problemas 17 a 26 en términos de los tres números  $\ln 2$ ,  $\ln 3$  y  $\ln 5$ .

17.  $\ln 8$     18.  $\ln 9$     19.  $\ln 6$     20.  $\ln 15$   
 21.  $\ln 72$     22.  $\ln 200$     23.  $\ln \frac{8}{27}$     24.  $\ln \frac{12}{25}$   
 25.  $\ln \frac{27}{40}$     26.  $\ln \frac{1}{90}$

27. ¿Cuál es mayor,  $2^{(3^1)}$  o  $(2^3)^4$ ?  
 28. Evalúe  $\log_{0.5} 16$ .  
 29. Por inspección, determine dos valores de  $x$  tales que  $x^2 = 2^x$ .  
 30. Muestre que el número  $\log_2 3$  es irracional. [Sugerencia: Suponga lo contrario, que  $\log_2 3 = p/q$ , donde  $p$  y  $q$  son enteros positivos, y exprese entonces la consecuencia de esta suposición en forma exponencial. ¿Bajo qué condiciones puede una potencia entera de 2 ser igual a una potencia entera de 3?]

En los problemas 31 a 40, determine  $x$  sin emplear una calculadora.

31.  $2^x = 64$     32.  $10^{-x} = 0.001$   
 33.  $10^{-x} = 100$     34.  $(3^x)^2 = 81$   
 35.  $x^x = x^2$  (Determine todas las soluciones.)  
 36.  $\log_x 16 = 2$     37.  $\log_x x = 4$   
 38.  $e^{5x} = 7$     39.  $3e^x = 3$   
 40.  $2e^{-7x} = 5$

En los problemas 41 a 54, determine  $dy/dx$ .

41.  $y = xe^x$     42.  $y = x^3e^x$   
 43.  $y = \sqrt{x} e^x$     44.  $y = \frac{1}{x} e^x$   
 45.  $y = \frac{e^x}{x^2}$     46.  $y = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$

## 7.1 Proyecto

Usted puede analizar desde el punto de vista numérico el límite

$$m(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

en la ecuación (5) utilizando una calculadora o computadora con la que se pueda definir y calcular rápidamente la función

$$\phi(h) = \frac{a^h - 1}{h}$$

(con  $a$  fijo) para valores cada vez más pequeños de  $h$ .

47.  $y = x \ln x$     48.  $y = x^2 \ln x$   
 49.  $y = \sqrt{x} \ln x$     50.  $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$   
 51.  $y = \frac{x}{e^x}$     52.  $y = e^x \ln x$

53.  $y = \ln x^3$  [Esto significa  $\ln(x^3)$ .]

54.  $y = \ln \sqrt{x}$

55. Utilice la regla de la cadena para deducir de  $D_x e^x = e^x$  que  $D_x(e^{kx}) = ke^{kx}$ , si  $k$  es una constante.

Aplique la fórmula del problema 55 para determinar las derivadas de las funciones en los problemas 56 a 58.

56.  $f(x) = e^{3x}$

57.  $f(x) = e^{x/10}$

58.  $f(x) = e^{-10x}$

59. Sustituya  $2 = e^{\ln 2}$  en  $P(t) = 2^t$ ; aplique entonces la regla de la cadena para mostrar que  $P'(t) = 2^t \ln 2$ .

Utilice el método del problema 59 para determinar las derivadas de las funciones en los problemas 60 a 63.

60.  $P(t) = 10^t$

61.  $P(t) = 3^t$

62.  $P(t) = 2^{3t}$

63.  $P(t) = 2^{-t}$

64. Una población  $P(t)$  de bacterias (en millones) en el instante  $t$  (en horas) es inicialmente (en el instante  $t = 0$ ) de 1 (millón). Si la población se duplica cada hora, entonces la población en el instante  $t \geq 0$  está dada por  $P(t) = 2^t$ . Utilice el resultado del problema 59 para determinar la razón instantánea de crecimiento (en millones de bacterias por hora) de esta población (a) en el instante  $t = 0$ ; (b) después de 4 horas (es decir, en el instante  $t = 4$ ). [Nota: El logaritmo natural de 2 es  $\ln 2 \approx 0.69315$ .]

65. Repita el problema 64 bajo la hipótesis de que la población de bacterias  $P(t)$  se triplica cada hora, de modo que  $P(t) = 3^t$  (millones) en el instante  $t \geq 0$ . [Nota: El logaritmo natural de 3 es  $\ln 3 \approx 1.09861$ .]

Por ejemplo, calculamos  $\phi(h)$  con  $a = 2$  y con  $a = 3$  para  $h = 0.1, 0.01, 0.001, \dots$ , y concluimos que

$$m(2) \approx 0.6931 < 1,$$

mientras que

$$m(3) \approx 1.0986 > 1.$$

Esto implica que el misterioso número  $e$  para el que

$$m(e) = 1$$

está en algún punto entre 2 y 3.

De hecho, la interpolación entre los valores  $m(2) \approx 0.6931$  y  $m(3) \approx 1.0986$  sugiere que  $e \approx 2.7$  o  $e \approx 2.8$ . Analice los valores  $m(2.7)$  y  $m(2.8)$  para verificar los datos que se muestran en la figura 7.1.10.

Continúe de esta manera para acercarse al número  $e$ . No concluya hasta convencerse de que  $e \approx 2.718$  con una precisión de tres cifras decimales.

$a$	$m(a)$
2	0.6931
2.7	0.9933
↓	↓
$e$	1.0000
↑	↑
2.8	1.0296
3	1.0986

**Figura 7.1.10** Acercamiento al número  $e$

## 7.2 El logaritmo natural

La sección 7.1 fue un panorama informal de las funciones exponenciales y logarítmicas. Ahora presentamos un desarrollo más sistemático de las propiedades de estas funciones.

Es más sencillo hacer que la definición del logaritmo natural sea nuestro punto de partida. Guiados por los resultados de la sección 7.1, queremos definir  $\ln x$  para  $x > 0$  de modo que

$$\ln 1 = 0 \quad \text{y} \quad D_x \ln x = \frac{1}{x}. \quad (1)$$

Para esto, recordemos la parte 1 del teorema fundamental del cálculo (sección 5.5), de acuerdo con la cual

$$D_x \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

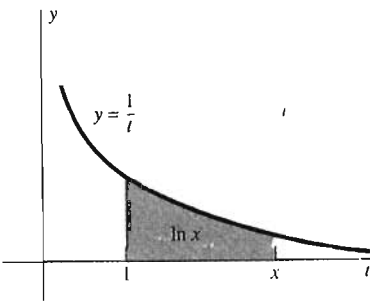
si  $f$  es continua en un intervalo que contiene a  $a$  y  $x$ . Para que  $\ln x$  satisfaga las ecuaciones en (1), consideramos  $a = 1$  y  $f(t) = 1/t$ .

### Definición El logaritmo natural

El **logaritmo natural**  $\ln x$  del número positivo  $x$  se define como

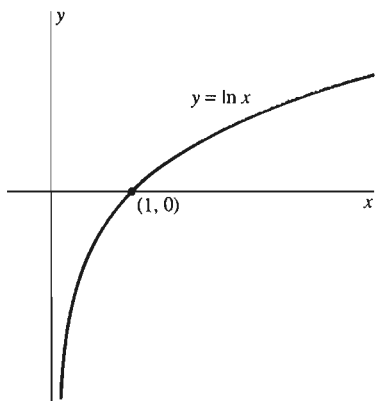
$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt. \quad (2)$$

Observe que  $\ln x$  *no* está definida para  $x \leq 0$ . Geométricamente,  $\ln x$  es el área bajo la gráfica de  $y = 1/t$  de  $t = 1$  a  $t = x$  si  $x > 1$  (figura 7.2.1), el negativo de esta área si  $0 < x < 1$  y 0 si  $x = 1$ . El hecho de que  $D_x \ln x = 1/x$  es una consecuencia inmediata del teorema fundamental del cálculo. Por el teorema 3 de la sección 2.4, el hecho de que la función  $\ln x$  sea derivable para  $x > 0$  implica que es continua para  $x > 0$ .



**Figura 7.2.1** La función logaritmo natural definida por medio de una integral

## LA GRÁFICA $y = \ln x$



**Figura 7.2.2** La gráfica de la función logaritmo natural

Puesto que  $D_x \ln x = 1/x > 0$  para  $x > 0$ , vemos que  $\ln x$  debe ser una función creciente. Además, puesto que la segunda derivada

$$D_x^2 \ln x = D_x \left( \frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2},$$

es negativa para  $x > 0$ , el teorema 2 de la sección 4.6 implica que la gráfica de  $y = \ln x$  es cóncava hacia abajo en todo punto. Más adelante, en esta sección utilizaremos las leyes de los logaritmos para mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad (3)$$

y que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty. \quad (4)$$

Al reunir todos estos hechos, vemos que la gráfica de la ecuación  $y = \ln x$  tiene la forma que se muestra en la figura 7.2.2.

## DERIVADAS E INTEGRALES QUE INVOLUCRAN LOGARITMOS

Cuando combinamos la fórmula  $D_x \ln x = 1/x$  con la regla de la cadena, obtenemos la fórmula de derivación

$$D_x \ln u = \frac{D_x u}{u} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}. \quad (5)$$

En este caso,  $u = u(x)$  denota una función derivable positiva de  $x$ .

**EJEMPLO 1** Si  $y = \ln(x^2 + 1)$ , entonces la ecuación (5), con  $u = x^2 + 1$  implica

$$\frac{dy}{dx} = \frac{D_x(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

Si  $y = \ln \sqrt{x^2 + 1}$ , entonces, con  $u = \sqrt{x^2 + 1}$ , obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{D_x \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Estas dos derivadas son congruentes con el hecho de que

$$\ln \sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1).$$

**EJEMPLO 2** Para derivar  $f(x) = (\ln x)^2$ , podemos utilizar la regla de la cadena con  $u = \ln x$ . Esto implica

$$f'(x) = D_x(\ln x)^2 = D_x(u^2) = 2u \frac{du}{dx} = 2(\ln x) D_x \ln x = \frac{2}{x} \ln x.$$

La función  $f(x) = \ln |x|$  está definida para toda  $x \neq 0$ . Si  $x > 0$ , entonces  $|x| = x$  y, en este caso,

$$f'(x) = D_x \ln x = \frac{1}{x}.$$

Pero si  $x < 0$ , entonces  $|x| = -x$ , de modo que

$$f'(x) = D_x \ln(-x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

[En el segundo cálculo, utilizamos la ecuación (5) con  $u = -x$ .] Así, hemos mostrado que

$$\boxed{D_x \ln|x| = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)} \quad (6)$$

sin importar que  $x$  sea positivo o negativo.

Cuando combinamos la ecuación (6) con la regla de la cadena, obtenemos la fórmula

$$D_x \ln|u| = \frac{D_x u}{u} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}, \quad (7)$$

que es válida siempre que la función  $u = u(x)$  sea derivable y distinta de cero.

La ecuación (7) es equivalente a la fórmula integral

o simplemente

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln|g(x)| + C,$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C. \quad (8)$$

**EJEMPLO 3** Si  $x > 0$ , entonces la ecuación (8), con  $u = 4x + 3$ ,  $du = 4 dx$  implica

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4x + 3} &= \frac{1}{4} \int \frac{4 dx}{4x + 3} = \frac{1}{4} \int \frac{du}{u} \\ &= \frac{1}{4} \ln|u| + C = \frac{1}{4} \ln|4x + 3| + C = \frac{1}{4} \ln(4x + 3) + C. \end{aligned}$$

**EJEMPLO 4** Con  $u = \cos x$ , la ecuación (7) implica

$$D_x \ln|\cos x| = \frac{D_x \cos x}{\cos x} = \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\tan x.$$

**EJEMPLO 5** Con  $u = x^2 - 1$ , la ecuación (8) implica

$$\int \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \ln|x^2 - 1| + C = \begin{cases} \ln(x^2 - 1) + C & \text{si } |x| > 1; \\ \ln(1 - x^2) + C & \text{si } |x| < 1. \end{cases}$$

Observe la dependencia de la fórmula de los casos  $|x| > 1$  o  $|x| < 1$ . Por ejemplo,

$$\int_2^4 \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \left[ \ln(x^2 - 1) \right]_2^4 = \ln 15 - \ln 3 = \ln 5,$$

mientras que

$$\int_{1/3}^{3/4} \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \left[ \ln(1 - x^2) \right]_{1/3}^{3/4} = \ln \frac{7}{16} - \ln \frac{8}{9} = \ln \frac{63}{128}.$$

Ahora empleamos nuestra capacidad de derivación de los logaritmos para establecer de manera rigurosa las leyes de los logaritmos.

**Teorema 1 Leyes de los logaritmos**

Si  $x$  y  $y$  son números positivos y  $r$  es un número racional, entonces

$$\ln xy = \ln x + \ln y; \quad (9)$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x; \quad (10)$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y; \quad (11)$$

$$\ln(x^r) = r \ln x. \quad (12)$$

En la sección 7.4 eliminaremos la restricción de que  $r$  sea racional.

**Demostración de la ecuación (9)** Por el momento fijamos  $y$ , de modo que, en lo sucesivo, podemos considerar  $x$  como la variable independiente y  $y$  como una constante. Entonces

$$D_x \ln xy = \frac{D_x(xy)}{xy} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x} = D_x \ln x.$$

Por tanto,  $\ln xy$  y  $\ln x$  tienen la misma derivada con respecto de  $x$ . Integramos ambos lados y concluimos que

$$\ln xy = \ln x + C$$

para alguna constante  $C$ . Para evaluar  $C$ , sustituimos  $x = 1$  en ambos lados de la última ecuación. El hecho de que  $\ln 1 = 0$  implica entonces que  $C = \ln y$ , lo cual establece la ecuación (9).  $\square$

**Demostración de la ecuación (10)** Derivamos  $\ln(1/x)$ :

$$D_x \left( \ln \frac{1}{x} \right) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x} = D_x(-\ln x).$$

Así,  $\ln(1/x)$  y  $-\ln x$  tienen la misma derivada. Por tanto, una integración implica

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x + C,$$

donde  $C$  es una constante. Sustituimos  $x = 1$  en la última ecuación. Como  $\ln 1 = 0$ , esto implica que  $C = 0$ , lo que demuestra la ecuación (10).  $\square$

**Demostración de la ecuación (11)** Como  $x/y = x \cdot (1/y)$ , la ecuación (11) es una consecuencia inmediata de las ecuaciones (9) y (10).  $\square$

**Demostración de la ecuación (12)** Sabemos que  $D_x x^r = r x^{r-1}$  si  $r$  es racional, por lo que

$$D_x(\ln x^r) = \frac{r x^{r-1}}{x^r} = \frac{r}{x} = D_x(r \ln x).$$

Una integración implica entonces

$$\ln(x^r) = r \ln x + C$$

para cierta constante  $C$ . Como antes la sustitución de  $x = 1$  muestra que  $C = 0$ , lo que demuestra la ecuación (12). En la sección 7.4 mostraremos que la ecuación (12) es válida sin importar que  $r$  sea racional o no.  $\square$

Las demostraciones de las ecuaciones (9), (10) y (12) son muy similares: derivamos el lado izquierdo, aplicamos el hecho de que dos funciones con la misma derivada (en un intervalo) difieren en una constante  $C$  (en ese intervalo) y evaluamos  $C$  utilizando el hecho de que  $\ln 1 = 0$ .

Las leyes de los logaritmos se pueden utilizar con frecuencia para simplificar una expresión antes de derivarla, como en los ejemplos 6 y 7.

**EJEMPLO 6** Si  $f(x) = \ln(3x + 1)^{17}$ , entonces

$$f'(x) = D_x \ln(3x + 1)^{17} = D_x[17 \ln(3x + 1)] = 17 \cdot \frac{3}{3x + 1} = \frac{51}{3x + 1}.$$

**EJEMPLO 7** Determine  $dy/dx$ , dado

$$y = \ln \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt[3]{x^3 + 1}}.$$

**Solución** La derivación inmediata requiere el uso de la regla del cociente y la regla de la cadena (*varias* veces), trabajando todo el tiempo con una fracción complicada. Nuestro trabajo se facilita si utilizamos primero las leyes de los logaritmos para simplificar la fórmula de  $y$ :

$$y = \ln[(x^2 + 1)^{1/2}] - \ln[(x^3 + 1)^{1/3}] = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \frac{1}{3} \ln(x^3 + 1).$$

Ahora, no es problema determinar  $dy/dx$ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left( \frac{2x}{x^2 + 1} \right) - \frac{1}{3} \left( \frac{3x^2}{x^3 + 1} \right) = \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{x^2}{x^3 + 1}.$$

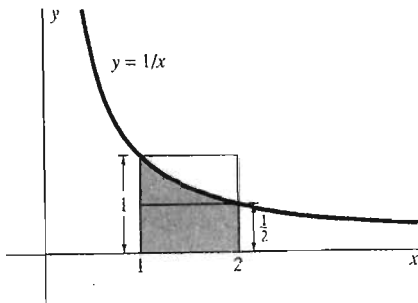
## LÍMITES QUE IMPLICAN $\ln x$

Ahora estableceremos los límites de  $\ln x$  cuando  $x \rightarrow 0^+$  y cuando  $x \rightarrow +\infty$ , como lo establecen las ecuaciones (3) y (4). Puesto que  $\ln 2$  es el área bajo  $y = 1/x$  de  $x = 1$  a  $x = 2$ , podemos inscribir y circunscribir un par de rectángulos (figura 7.2.3) y concluir que

$$\frac{1}{2} < \ln 2 < 1.$$

Dado un número positivo grande  $x$ , sea  $n$  el máximo entero tal que  $x > 2^n$ . Entonces, debido a que  $\ln x$  es una función creciente, la ley de los logaritmos en la ecuación (12) implica

$$\ln x > \ln(2^n) = n \ln 2 > \frac{n}{2}.$$



**Figura 7.2.3** Uso de rectángulos para estimar  $\ln 2$

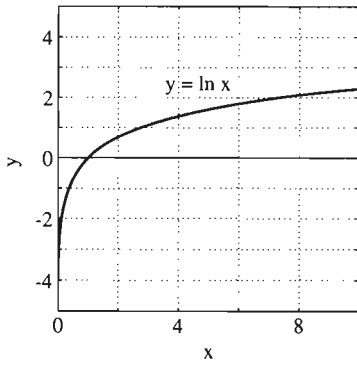


Figura 7.2.4  $y = \ln x$  para  $x \leq 10$

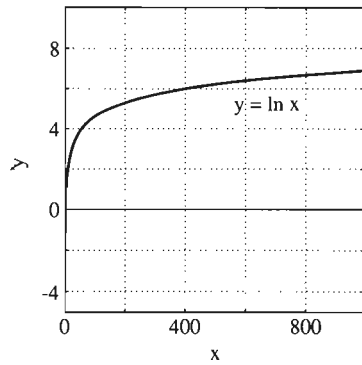


Figura 7.2.5  $y = \ln x$  para  $x \leq 1000$

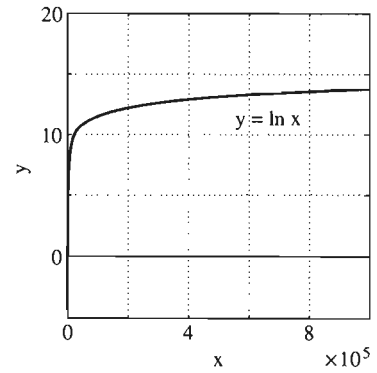


Figura 7.2.6  $y = \ln x$  para  $x \leq 1,000,000$

Puesto que  $n \rightarrow \infty$  cuando  $x \rightarrow \infty$ , se sigue que podemos hacer  $\ln x$  tan grande como queramos, si simplemente elegimos  $x$  suficientemente grande. Esto demuestra la ecuación (4):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

Para demostrar la ecuación (3), utilizamos la ley de los logaritmos en la ecuación (10) para escribir

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left( \frac{1}{x} \right) = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln y = -\infty$$

haciendo  $y = 1/x$  y aplicando el resultado de la ecuación (4).

Las gráficas de la función logaritmo natural que aparecen en las figuras 7.2.4 a 7.2.6 indican que, aunque  $\ln x \rightarrow +\infty$  cuando  $x \rightarrow +\infty$ , el logaritmo de  $x$  aumenta *muy* lentamente. Por ejemplo,

$$\ln(1000) \approx 6.908,$$

$$\ln(1,000,000) \approx 13.812 \quad \text{y} \quad \ln(1,000,000,000) \approx 20.723.$$

De hecho, la función  $\ln x$  crece más lento que cualquier potencia entera de  $x$ . Pero esto significa que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \tag{13}$$

si  $n$  es un entero positivo fijo. Para demostrar esto, observemos primero que

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \leq \int_1^x \frac{dt}{t^{1/2}} = 2(x^{1/2} - 1),$$

pues  $1/t \leq 1/t^{1/2}$  si  $t \geq 1$ . Por tanto, si  $x > 1$ , entonces

$$0 < \frac{\ln x}{x^n} \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2}{x^{1/2}} - \frac{2}{x}.$$

La última expresión de la derecha tiende a cero cuando  $x \rightarrow +\infty$ . La ecuación (13) es una consecuencia de la ley del sandwich para límites. Además, este argumento muestra que el entero positivo  $n$  de la ecuación (13) se puede reemplazar por cualquier número racional  $k \geq 1$ .

Como  $\ln x$  es una función creciente, la propiedad del valor intermedio implica que la curva  $y = \ln x$  corta la recta horizontal  $y = 1$  precisamente una vez. La abscisa del punto de intersección es el importante número  $e \approx 2.71828$  mencionado en la sección 7.1 (véase figura 7.2.7).

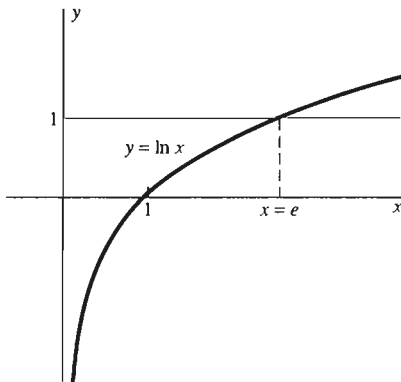


Figura 7.2.7 Aquí se expresa gráficamente el hecho de que  $\ln e = 1$



**Definición de  $e$** 

El número  $e$  es el único número real tal que

$$\ln e = 1. \quad (14)$$

La letra  $e$  ha sido utilizada para denotar el número cuyo logaritmo es 1, desde la primera vez que se empleó dicho número, por parte del matemático suizo Leonhard Euler (1707 – 1783), quien utilizó  $e$  de “exponencial”.

**EJEMPLO 8** Bosqueje la gráfica de

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x > 0.$$

**Solución** Primero calculamos la derivada

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (\ln x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Así, el único punto crítico aparece cuando  $\ln x = 1$ ; es decir, cuando  $x = e$ . Como  $f'(x) > 0$  si  $x < e$  (cuando  $\ln x < 1$ ) y  $f'(x) < 0$  si  $x > e$  (cuando  $\ln x > 1$ ), vemos que  $f$  es creciente si  $x < e$  y decreciente si  $x > e$ . Por tanto,  $f$  tiene un máximo local en  $x = e$ .

La segunda derivada de  $f$  es

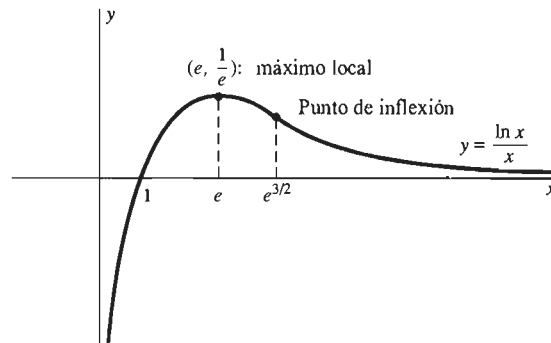
$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2 \ln x - 3}{x^3},$$

de modo que el único punto de inflexión de la gráfica es donde  $\ln x = \frac{3}{2}$ ; es decir, en  $x = e^{3/2} \approx 4.48$ .

Como

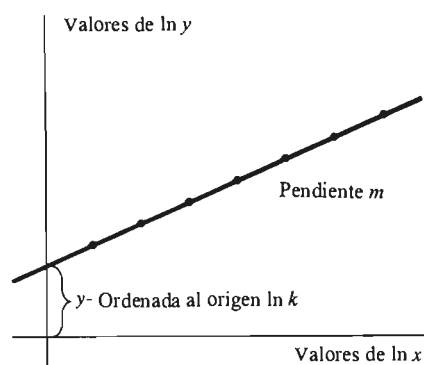
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

(consecuencias de las ecuaciones (3) y (13), respectivamente), concluimos que la gráfica de  $f$  tiene la apariencia de la figura 7.2.8.



**Figura 7.2.8** La gráfica del ejemplo 8

## LOGARITMOS Y DATOS EXPERIMENTALES



**Figura 7.2.9** La localización de los logaritmos de los datos puede revelar una relación oculta

Ciertos datos empíricos se pueden explicar suponiendo que la variable dependiente observada es una función **potencia** de la variable independiente  $x$ . En otras palabras,  $y$  queda descrita mediante un modelo matemático de la forma

$$y = kx^m,$$

donde  $k$  y  $m$  son constantes. En tal caso, las leyes de los logaritmos implican que

$$\ln y = \ln k + m \ln x.$$

Entonces, un experimentador puede graficar los valores de  $\ln y$  contra los valores de  $\ln x$ . Si es válido el modelo de la función potencia, los puntos resultantes de los datos estarán en una línea recta de pendiente  $m$  y ordenada al origen  $\ln k$  (figura 7.2.9). Esta técnica facilita ver si los datos están sobre una línea recta o no. En caso afirmativo, esta técnica también facilita leer la pendiente y la ordenada al origen y con ello determinar los valores de  $k$  y  $m$ .

**EJEMPLO 9** (*Movimiento de los planetas*) La tabla de la figura 7.2.10 da el periodo de revolución  $T$  y el semieje mayor  $a$  de la órbita elíptica de cada uno de los primeros seis planetas en torno del Sol, junto con los logaritmos de estos números. Si graficamos  $T$  contra  $\ln a$ , se puede ver de inmediato que los puntos resultantes están en una línea recta de pendiente  $m = \frac{3}{2}$ . Por tanto,  $T$  y  $a$  satisfacen una ecuación de la forma  $T = ka^{3/2}$ , de modo que

$$T^2 = Ca^3.$$

Esto significa que el cuadrado del periodo  $T$  es proporcional al cubo del semieje mayor  $a$ . Ésta es la tercera ley de Kepler para el movimiento de los planetas, la cual fue descubierta de manera empírica por Johannes Kepler (1571–1630) en 1619.

Planeta	$T$ (en días)	$a$ (en $10^6$ km)	$\ln T$	$\ln a$
Mercurio	87.97	58	4.48	4.06
Venus	224.70	108	5.41	4.68
Tierra	365.26	149	5.90	5.00
Marte	686.98	228	6.53	5.43
Júpiter	4332.59	778	8.37	6.66
Saturno	10,759.20	1426	9.28	7.26

**Figura 7.2.10** Datos del ejemplo 9

## 7.2 Problemas

Derive las funciones dadas en los problemas 1 a 18.

1.  $f(x) = \ln(3x - 1)$
2.  $f(x) = \ln(4 - x^2)$
3.  $f(x) = \ln\sqrt{1 + 2x}$
4.  $f(x) = \ln[(1 + x)^3]$
5.  $f(x) = \ln\sqrt[3]{x^3 - x}$
6.  $f(x) = \ln(\sec^2 x)$
7.  $f(x) = \cos(\ln x)$
8.  $f(x) = (\ln x)^3$
9.  $f(x) = \frac{1}{\ln x}$
10.  $f(x) = \ln(\ln x)$
11.  $f(x) = \ln(x\sqrt{x^2 + 1})$
12.  $g(t) = t^{3/2} \ln(t + 1)$

13.  $f(x) = \ln(\cos x)$
14.  $f(x) = \ln(2 \sin x)$
15.  $f(t) = t^2 \ln(\cos t)$
16.  $f(x) = \sin(\ln 2x)$
17.  $g(t) = t(\ln t)^2$
18.  $g(t) = \sqrt{t} [\cos(\ln t)]^2$

En los problemas 19 a 28, aplique las leyes de los logaritmos para simplificar las funciones dadas; escriba a continuación su derivada.

19.  $f(x) = \ln[(2x + 1)^3(x^2 - 4)^4]$
20.  $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
21.  $f(x) = \ln \sqrt{\frac{4-x^2}{9+x^2}}$

22.  $f(x) = \ln \frac{\sqrt{4x-7}}{(3x-2)^3}$       23.  $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$   
 24.  $f(x) = x^2 \ln \frac{1}{2x+1}$       25.  $g(t) = \ln \frac{t^2}{t^2+1}$   
 26.  $f(x) = \ln \frac{\sqrt{x+1}}{(x-1)^3}$       27.  $f(x) = \ln \frac{\operatorname{sen} x}{x}$   
 28.  $f(x) = \ln \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

En los problemas 29 a 32, determine  $dy/dx$  mediante derivación implícita.

29.  $y = x \ln y$       30.  $y = (\ln x)(\ln y)$   
 31.  $xy = \ln(\operatorname{sen} y)$       32.  $xy + x^2(\ln y)^2 = 4$

Evalúe las integrales indefinidas en los problemas 33 a 50.

33.  $\int \frac{dx}{2x-1}$       34.  $\int \frac{dx}{3x+5}$   
 35.  $\int \frac{x}{1+3x^2} dx$       36.  $\int \frac{x^2}{4-x^3} dx$   
 37.  $\int \frac{x+1}{2x^2+4x+1} dx$       38.  $\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} dx$   
 39.  $\int \frac{1}{x} (\ln x)^2 dx$       40.  $\int \frac{1}{x \ln x} dx$   
 41.  $\int \frac{1}{x+1} dx$       42.  $\int \frac{x}{1-x^2} dx$   
 43.  $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$       44.  $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx$   
 45.  $\int \frac{\ln x}{x} dx$       46.  $\int \frac{\ln(x^3)}{x} dx$   
 47.  $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1-\cos 2x} dx$       48.  $\int \frac{dx}{x(\ln x)^2}$   
 49.  $\int \frac{x^2-2x}{x^3-3x^2+1} dx$   
 50.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$  [Sugerencia: Sea  $u = 1 + \sqrt{x}$ .]

Aplique la ecuación (13) para evaluar los límites de los problemas 51 a 56.

51.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{x}$       52.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^3)}{x^2}$   
 53.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$  [Sugerencia: Sustituya  $x = u^2$ .]  
 54.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$  [Sugerencia: Sustituya  $x = 1/u$ .]  
 55.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x$       56.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$

57. Demuestre que si  $x \geq 1$ , entonces

$$\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) = -\ln(x - \sqrt{x^2 - 1}).$$

58. Determine una fórmula para  $f^{(n)}(x)$ , dada  $f(x) = \ln x$ .

59. Se miden el ritmo cardiaco  $R$  (en latidos por minuto) y el peso  $W$  (en libras) de varios mamíferos, con los resultados que se muestran en la figura 7.2.11. Utilice el método del ejemplo 9 para determinar una relación entre ambas cantidades, de la forma  $R = kW^m$ .

$W$	25	67	127	175	240	975
$R$	131	103	88	81	75	53

Figura 7.2.11 Datos del problema 59

60. Durante la expansión adiabática de cierto gas diatómico, su volumen  $V$  (en litros) y presión  $p$  (en atmósferas) se miden, con los resultados que aparecen en la figura 7.2.12. Utilice el método del ejemplo 9 para determinar una relación entre  $V$  y  $p$  de la forma  $p = kV^m$ .

$V$	1.46	2.50	3.51	5.73	7.26
$p$	28.3	13.3	8.3	4.2	3.0

Figura 7.2.12 Los datos del problema 60

61. Sustituya  $y = x^p$  y después aplique la ecuación (13) para demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0 \quad \text{si } 0 < p < 1.$$

62. Deduzca del resultado del problema 61 que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^k}{x} = 0 \quad \text{si } k > 0.$$

63. Sustituya  $y = 1/x$  y después aplique la ecuación (13) para mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^k \ln x = 0 \quad \text{si } k > 0.$$

Utilice los límites de los problemas 61 a 63 como ayuda para bosquejar las gráficas, para  $x > 0$ , de las funciones dadas en los problemas 64 a 67.

64.  $y = x \ln x$       65.  $y = x^2 \ln x$

66.  $y = \sqrt{x} \ln x$       67.  $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

68. El problema 26 de la sección 5.9 le pide que muestre mediante integración numérica que

$$\int_1^{2.7} \frac{dx}{x} < 1 < \int_1^{2.8} \frac{dx}{x}.$$

Explique con cuidado por qué este resultado muestra que  $2.7 < e < 2.8$ .

69. Si  $n$  moles de un gas ideal se expande a temperatura constante  $T$ , entonces la presión y el volumen satisfacen la ecuación del gas ideal  $pV = nRT$  ( $n$  y  $R$  son constantes). Con la ayuda del problema 22 de la sección 6.6, muestre que el trabajo  $W$  realizado por el gas al expandirse del volumen  $V_1$  al volumen  $V_2$  es

$$W = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

70. El “cuerno de Gabriel” se obtiene al girar en torno del eje  $x$  la curva  $y = 1/x$ ,  $x \geq 1$  (figura 7.2.13). Sea  $A_b$  el área de su

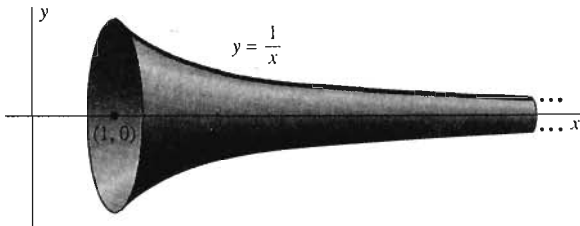


Figura 7.2.13 El cuerno de Gabriel (problema 70)

superficie, de  $x = 1$  a  $x = b > 1$ . Muestre que  $A_b \geq 2\pi \ln b$ , de modo que, en consecuencia,  $A_b \rightarrow +\infty$  cuando  $b \rightarrow +\infty$ . Así, el área de la superficie del cuerno de Gabriel es infinita. ¿Es su volumen finito o infinito?

71. De acuerdo con el teorema de los números primos, conjeturado por vez primera por el gran matemático alemán Carl Friedrich Gauss en 1792 (a la edad de 15 años) pero demostrado hasta 1896 (de manera independiente por Jacques Hadamard y C. J. de la Vallée Poussin), la cantidad de números primos entre los enteros positivos grandes  $a$  y  $b$  ( $a < b$ ) es aproximada de forma muy cercana por la integral

$$\int_a^b \frac{1}{\ln x} dx.$$

Las aproximaciones mediante los puntos medios y el trapecio con  $n = 1$  subintervalo proporcionan una subestimación y una sobreestimación del valor de esta integral (¿Por qué?) Calcule estas estimaciones, con  $a = 90,000$  y  $b = 100,000$ . La verdadera cantidad de números primos en este rango es 879.

## 7.2 Proyecto

El hecho de que el número  $e$  satisfaga (por definición) la ecuación

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = 1 \quad (15)$$

sugiere la posibilidad de utilizar la integración numérica para estudiar el valor de  $e$ . Puede verificar que

$$e \approx 2.71828.$$

El objetivo de este proyecto es encerrar al número  $e$  entre aproximaciones numéricas cada vez más cercanas, intentando determinar el límite superior  $b$  de modo que el valor de la integral

$$\int_1^b \frac{dx}{x} \quad (16)$$

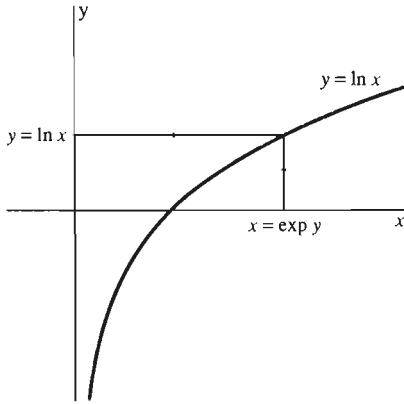
sea lo más cercano posible al valor deseado 1.

Puede utilizar toda la tecnología de cómputo a su alcance. Por ejemplo, con  $b = 2$  y  $n = 50$ , un programa de aproximación de Simpson daría la suma 0.6931; con  $b = 3$  y  $n = 50$ , se obtiene la suma 1.0986. Estos resultados muestran que  $b = 2$  es demasiado pequeño y que  $b = 3$  es demasiado grande, para obtener el valor 1 de la integral en la ecuación (16). Así,  $2 < e < 3$ .

La interpolación entre 0.6931 y 1.0986 sugiere que intente con los límites superiores  $b = 2.6$ ,  $b = 2.7$  y posiblemente  $b = 2.8$ . De hecho, debe obtener las sumas 0.9933 y 1.0296, respectivamente, al emplear  $b = 2.7$  y  $b = 2.8$  ( $y n = 100$ ). Así, esto implica que  $2.7 < e < 2.8$ .

Al encerrar cada vez más a  $e$ , necesitará aumentar el número de cifras decimales desplegadas y el número de subintervalos utilizados en la aproximación de Simpson para mantener la precisión, que cada vez es mayor. Continúe hasta encerrar  $e$  entre dos aproximaciones de siete cifras decimales, de modo que ambas se redondeen a 2.71828.

## 7.3 La función exponencial



**Figura 7.3.1** Para obtener  $x = \exp y$ , se traza una recta horizontal desde el eje  $y$  a la gráfica  $y = \ln x$ ; entonces se traza una recta vertical hacia abajo (o hacia arriba) al eje  $x$

En la sección 7.2 vimos que la función logaritmo natural  $\ln x$  es continua y creciente para  $x > 0$  y que alcanza números positivos y números negativos arbitrariamente grandes [debido a los límites de las ecuaciones (3) y (4) de la sección 7.2]. Esto implica que  $\ln x$  tiene una función inversa definida para toda  $x$ . Para ver esto, sea  $y$  un número real (fijo) cualquiera. Si  $a$  y  $b$  son números positivos tales que  $\ln a < y < \ln b$ , entonces, por la propiedad del valor intermedio existe un número  $x > 0$  con  $x$  entre  $a$  y  $b$ , tal que  $\ln x = y$ . Como  $\ln x$  es una función creciente, existe solamente *un* número  $x$  tal que  $\ln x = y$  (figura 7.3.1). Como  $y$  determina precisamente un valor  $x$ , vemos que  $x$  es una *función* de  $y$ .

Esta función  $x$  de  $y$  es la función inversa de la función logaritmo natural, y se le llama la *función exponencial natural*. Se denota comúnmente por  $\exp$  (de exponencial), de modo que

$$x = \exp y \text{ siempre que } y = \ln x.$$

Intercambiamos  $x$  y  $y$  para obtener la siguiente definición.

### Definición La función exponencial natural

La **función exponencial natural**  $\exp$  está definida para toda  $x$  como sigue:

$$\exp x = y \text{ si y sólo si } \ln y = x. \quad (1)$$

Así,  $\exp x$  es simplemente aquel número (positivo) cuyo logaritmo natural es  $x$ . Una consecuencia inmediata de la ecuación (1) es que

$$\ln(\exp x) = x \text{ para toda } x \quad (2)$$

y que

$$\exp(\ln y) = y \text{ para toda } y > 0. \quad (3)$$

Como en el caso de las gráficas de  $y = a^x$  y  $y = \log_a x$  analizadas de manera informal en la sección 7.1, el hecho de que  $\exp x$  y  $\ln x$  sean funciones inversas implica que las gráficas de  $y = \exp x$  y  $y = \ln x$  sean reflexiones una de otra con respecto de la recta  $y = x$  (figura 7.3.2). Por tanto, la gráfica de la función exponencial es como la que se muestra en la figura 7.3.3. En particular,  $\exp x$  es positiva para toda  $x$ , y

$$\exp 0 = 1, \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp x = +\infty, \quad y \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0. \quad (6)$$

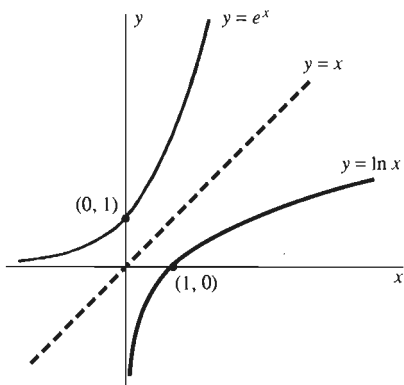
Estos hechos son consecuencia de la ecuación  $\ln 1 = 0$  y de los límites de las ecuaciones (3) y (4) de la sección 7.2.

Recordemos de la sección 7.2 que definimos al número  $e \approx 2.71828$  como el número cuyo logaritmo natural es 1. Si  $r$  es cualquier número racional, esto implica que

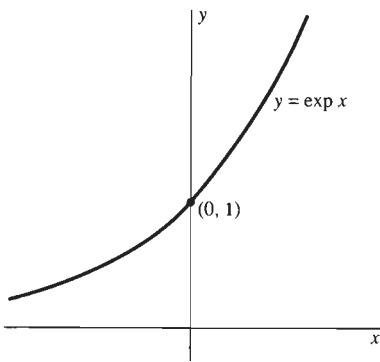
$$\ln(e^r) = r \ln e = r.$$

Pero la ecuación (1) implica que  $\ln(e^r) = r$  si y sólo si

$$\exp r = e^r.$$



**Figura 7.3.2** Las gráficas  $y = e^x$  y  $y = \ln x$  son reflexiones una de otra con respecto de la recta de  $45^\circ$   $y = x$



**Figura 7.3.3** La gráfica de la función exponencial,  $\exp$

Por tanto,  $\exp x$  es igual a  $e^x$  ( $e$  elevado a la potencia  $x$ ) si  $x$  es un número racional. Por tanto, *definimos*  $e^x$  para valores irracionales y valores racionales de  $x$  como

$$e^x = \exp x. \quad (7)$$

Este es nuestro primer ejemplo de potencias con exponentes irracionales.

La ecuación (7) es la razón por la que se le llama  $\exp$  a la función exponencial natural. Con esta notación, las ecuaciones (1) a (3) son

$$e^x = y \quad \text{si y sólo si} \quad \ln y = x, \quad (8)$$

$$\ln(e^x) = x \quad \text{para toda } x, \quad y \quad (9)$$

$$e^{\ln x} = x \quad \text{para toda } x > 0. \quad (10)$$

Para justificar la ecuación (7), debemos mostrar rigurosamente que las potencias de  $e$  satisfacen las leyes de los exponentes. Podemos hacer esto inmediatamente.

**Teorema 1** *Leyes de los exponentes*

Si  $x$  y  $y$  son números reales y  $r$  es racional, entonces

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad (11)$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \quad y \quad (12)$$

$$(e^x)^r = e^{rx}. \quad (13)$$

**Demostración** Las leyes de los logaritmos y la ecuación (9) implican

$$\ln(e^x e^y) = \ln(e^x) + \ln(e^y) = x + y = \ln(e^{x+y}).$$

Así, la ecuación (11) es consecuencia del hecho de que  $\ln$  es una función creciente y por tanto es inyectiva (si  $x_1 \neq x_2$ , entonces  $\ln x_1 \neq \ln x_2$ ). De manera análoga,

$$\ln([e^x]^r) = r \ln(e^x) = rx = \ln(e^{rx}).$$

De modo que la ecuación (13) se obtiene de la misma forma. La demostración de la ecuación (12) es casi idéntica. En la sección 7.4 veremos que la restricción de que  $r$  sea racional en la ecuación (13) es innecesaria; es decir,

$$(e^x)^y = e^{xy}$$

para *todos* los números reales  $x$  y  $y$ .  $\square$

## DERIVADAS E INTEGRALES DE EXPONENCIALES

Como  $e^x$  es la inversa de la función derivable y creciente  $\ln x$ , el teorema 1 de la sección 7.1 implica que  $e^x$  es derivable, y por tanto, también es continua. Así, podemos derivar ambos lados de la ecuación (en realidad, la *identidad*)

$$\ln(e^x) = x$$

con respecto de  $x$ . Sea  $u = e^x$ . Entonces esta ecuación se convierte en

$$\ln u = x,$$

y las derivadas también deben ser iguales:

$$\frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} = 1 \quad (\text{porque } u > 0).$$

Así,

$$\frac{du}{dx} = u = e^x;$$

es decir,

$$D_x e^x = e^x, \quad (14)$$

como indicamos en la sección 7.1.

Si  $u$  denota una función derivable de  $x$ , entonces la ecuación (14) y la regla de la cadena implican

$$D_x e^u = e^u \frac{du}{dx}. \quad (15)$$

La fórmula correspondiente de integración es

$$\int e^u du = e^u + C. \quad (16)$$

El caso especial de la ecuación (15) con  $u = kx$  ( $k$  constante) es importante:

$$D_x e^{kx} = ke^{kx}.$$

Por ejemplo,  $D_x e^{5x} = 5e^{5x}$ .

**EJEMPLO 1** Determine  $dy/dx$ , dado  $y = e^{\sqrt{x}}$ .

**Solución** Con  $u = \sqrt{x}$ , la ecuación (15) implica

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sqrt{x}} D_x(\sqrt{x}) = e^{\sqrt{x}} \left( \frac{1}{2} x^{-1/2} \right) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}.$$

**EJEMPLO 2** Si  $y = x^2 e^{-2x^3}$ , entonces la ecuación (15) y la regla del producto implican

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (D_x x^2) e^{-2x^3} + x^2 D_x(e^{-2x^3}) = 2x e^{-2x^3} + x^2 e^{-2x^3} D_x(-2x^3) \\ &= 2x e^{-2x^3} + x^2 e^{-2x^3} (-6x^2). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = (2x - 6x^4) e^{-2x^3}.$$

**EJEMPLO 3** Determine  $\int x e^{-3x^2} dx$ .

**Solución** Sustituimos  $u = -3x^2$ , de modo que  $du = -6x dx$ . Entonces tenemos  $x dx = -\frac{1}{6} du$ , y en consecuencia obtenemos

$$\int x e^{-3x^2} dx = -\frac{1}{6} \int e^u du = -\frac{1}{6} e^u + C = -\frac{1}{6} e^{-3x^2} + C.$$

## ORDEN DE MAGNITUD

La función exponencial es importante por su rapidez de crecimiento al aumentar  $x$ . De hecho, cuando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $e^x$  crece más rápidamente que *cualquier* potencia fija de  $x$ . En el lenguaje de límites,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^x} = 0 \quad \text{para cualquier } k > 0 \text{ fijo.} \quad (17)$$

De manera alternativa,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty \quad \text{para cualquier } k > 0 \text{ fijo.} \quad (17')$$

Puesto que aún no hemos definido  $x^k$  para valores irracionales de  $k$ , demostramos la ecuación (17) para el caso en que  $k$  es racional. Una vez que sepamos que (para  $x > 1$ ) la función potencia  $x^k$  es una función creciente de  $k$  para toda  $k$ , entonces podremos obtener el caso general.

Comenzamos obteniendo los logaritmos. Tenemos que

$$\ln\left(\frac{e^x}{x^k}\right) = x - k \ln x = \left(\frac{x}{\ln x} - k\right) \ln x.$$

Como deducimos [de la ecuación (13) de la sección 7.2] que  $x/(\ln x) \rightarrow +\infty$  cuando  $x \rightarrow +\infty$ , esto permite ver que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{e^x}{x^k}\right) = +\infty.$$

Por tanto,  $e^x/x^k \rightarrow +\infty$  cuando  $x \rightarrow +\infty$ , de modo que hemos demostrado la ecuación (17) y la (17'). La tabla de la figura 7.3.4 ilustra el límite en la ecuación (17) para el caso  $k = 5$ .

$x$	$x^5$	$e^x$	$x^5/e^x$
10	$1.00 \times 10^5$	$2.20 \times 10^4$	$4.54 \times 10^0$
20	$3.20 \times 10^6$	$4.85 \times 10^8$	$6.60 \times 10^{-3}$
30	$2.43 \times 10^7$	$1.07 \times 10^{13}$	$2.27 \times 10^{-6}$
40	$1.02 \times 10^8$	$2.35 \times 10^{17}$	$4.35 \times 10^{-10}$
50	$3.13 \times 10^8$	$5.18 \times 10^{21}$	$6.03 \times 10^{-14}$
	↓	↓	↓
	$\infty$	$\infty$	0

Figura 7.3.4 Órdenes de magnitud de  $x^5$  y  $e^x$

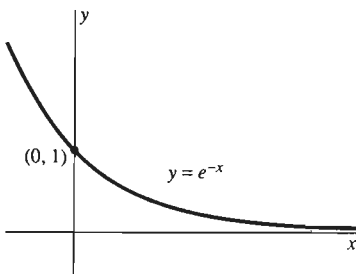


Figura 7.3.5 La gráfica de  $y = e^{-x}$  tiene el eje positivo  $x$  como una asíntota

Aunque  $x^5 \rightarrow +\infty$  y  $e^x \rightarrow +\infty$  cuando  $x \rightarrow +\infty$ , vemos que  $e^x$  (la liebre) crece más rápido que  $x^5$  (la tortuga), de modo que  $x^5/e^x \rightarrow 0$ .

Si escribimos la ecuación (17) en la forma

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{1/x^k} = 0,$$

vemos que no sólo  $e^{-x}$  tiende a cero cuando  $x \rightarrow +\infty$  (figura 7.3.5), sino que lo hace más rápido que cualquier potencia recíproca  $1/x^k$ .

Podemos usar las ecuaciones (17) y (17') para evaluar ciertos límites con las propiedades de éstos. Por ejemplo,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^x - 3x}{3e^x + x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 3xe^{-x}}{3 + x^3e^{-x}} = \frac{2 - 0}{3 + 0} = \frac{2}{3}.$$



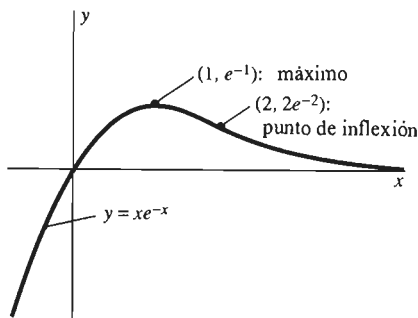


Figura 7.3.6 Gráfica de la función del ejemplo 4

**EJEMPLO 4** Trace la gráfica de  $f(x) = xe^{-x}$ .

**Solución** La ecuación (17) implica que  $f(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow +\infty$ , mientras que  $f(x) \rightarrow -\infty$  cuando  $x \rightarrow -\infty$ . Como

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x),$$

el único punto crítico de  $f$  es  $x = 1$ , donde  $y = e^{-1} \approx 0.37$ . Además,

$$f''(x) = -e^{-x}(1 - x) + e^{-x}(-1) = e^{-x}(x - 2),$$

por lo que el único punto de inflexión aparece en  $x = 2$ , donde  $y = 2e^{-2} \approx 0.27$ . Por tanto, la gráfica de  $f$  se asemeja a la figura 7.3.6.

## EL NÚMERO $e$ COMO UN LÍMITE

Podemos establecer ahora la siguiente expresión límite para la función exponencial.

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n. \quad (18)$$

Comenzamos derivando  $\ln t$ , utilizando la definición de la derivada junto con el hecho de que ya sabemos que la derivada es  $1/t$ . Así,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} = D_t \ln t &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(t+h) - \ln t}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{t+h}{t}\right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left[\left(1 + \frac{h}{t}\right)^{1/h}\right] \quad (\text{por las leyes de los logaritmos}) \\ &= \ln\left[\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{t}\right)^{1/h}\right] \quad (\text{por la continuidad de la función}) \end{aligned}$$

La sustitución  $n = 1/h$  nos permite escribir

$$\frac{1}{t} = \ln\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{nt}\right)^n\right].$$

Entonces con la sustitución  $x = 1/t$  obtenemos

$$x = \ln\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right].$$

Con esto obtenemos la ecuación (18), pues  $x = \ln y$  implica que  $e^x = y$ . Si  $x = 1$ , obtenemos también la siguiente expresión importante de  $e$  como un límite:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (19)$$

## 7.3 Problemas

Derive las funciones de los problemas 1 a 30.

1.  $f(x) = e^{2x}$

2.  $f(x) = e^{3x-1}$

3.  $f(x) = e^{x^2} = \exp(x^2)$

4.  $f(x) = e^{4-x^3}$

5.  $f(x) = e^{1/x^2}$

6.  $f(x) = x^2 e^{x^3}$

7.  $g(t) = te^{\sqrt{t}}$

8.  $g(t) = (e^{2t} + e^{3t})^7$

9.  $g(t) = (t^2 - 1)e^{-t}$

10.  $g(t) = \sqrt{e^t - e^{-t}}$

11.  $g(t) = e^{\cos t}$       12.  $f(x) = xe^{\sin x}$   
 13.  $f(x) = \cos(1 - e^{-x})$       14.  $f(x) = \sin^2(e^{-x})$   
 15.  $f(x) = \ln(x + e^{-x})$       16.  $f(x) = e^x \cos 2x$   
 17.  $f(x) = e^{-2x} \sin 3x$       18.  $g(t) = \ln(te^{t^2})$   
 19.  $g(t) = 3(e^t - \ln t)^5$       20.  $g(t) = \sin(e^t) \cos(e^{-t})$   
 21.  $f(x) = \frac{2 + 3x}{e^{4x}}$       22.  $g(t) = \frac{1 + e^t}{1 - e^t}$   
 23.  $g(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t}$       24.  $f(x) = e^{-1/x}$   
 25.  $f(x) = \frac{1 - x}{e^x}$       26.  $f(x) = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$   
 27.  $f(x) = e^{(e^x)}$       28.  $f(x) = \sqrt{e^{2x} + e^{-2x}}$   
 29.  $f(x) = \sin(2e^x)$       30.  $f(x) = \cos(e^x + e^{-x})$

En los problemas 31 a 35, determine  $dy/dx$  mediante derivación implícita.

31.  $xe^y = y$       32.  $\sin(e^{xy}) = x$   
 33.  $e^x + e^y = e^{xy}$       34.  $x = ye^y$   
 35.  $e^{x-y} = xy$

Determine las primitivas que se indican en los problemas 36 a 53.

36.  $\int e^{3x} dx$       37.  $\int e^{1-2x} dx$   
 38.  $\int xe^{x^2} dx$       39.  $\int x^2 e^{3x^3-1} dx$   
 40.  $\int \sqrt{x} e^{2x\sqrt{x}} dx$       41.  $\int \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} dx$   
 42.  $\int (\cos x) e^{\sin x} dx$       43.  $\int (\sin 2x) e^{1-\cos 2x} dx$   
 44.  $\int (e^x + e^{-x})^2 dx$       45.  $\int \frac{x + e^{2x}}{x^2 + e^{2x}} dx$   
 46.  $\int e^{2x+3} dx$       47.  $\int te^{-t^2/2} dt$   
 48.  $\int x^2 e^{1-x^3} dx$       49.  $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$   
 50.  $\int \frac{e^{1/t}}{t^2} dt$       51.  $\int \frac{e^x}{1 + e^x} dx$   
 52.  $\int \exp(x + e^x) dx$       53.  $\int \sqrt{x} \exp(-\sqrt{x^3}) dx$

Aplique la ecuación (18) para evaluar (en términos de la función exponencial) los límites en los problemas 54 a 58.

54.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$       55.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$   
 56.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^n$       57.  $\lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{1/h}$

58.  $\lim_{h \rightarrow 0} (1 + 2h)^{1/h}$  [Sugerencia: sustituya  $k = 2h$ .]

Evalúe los límites en los problemas 59 a 62 aplicando el hecho  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k e^{-x} = 0$ .

59.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x}$       60.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}}$   
 61.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x}$       62.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x}$

En los problemas 63 a 65, trace la gráfica de la ecuación dada. Muestre y etiquete todos los puntos extremos, los puntos de inflexión y las asíntotas; muestre claramente los tipos de concavidad.

63.  $y = x^2 e^{-x}$       64.  $y = x^3 e^{-x}$   
 65.  $y = \exp(-x^2)$

66. Determine el área bajo la gráfica de  $y = e^x$  de  $x = 0$  a  $x = 1$ .  
 67. Determine el volumen generado al girar la región del problema 66 en torno del eje  $x$ .  
 68. Sea  $R$  la figura plana acotada por abajo por el eje  $x$ , por arriba por la gráfica de  $y = \exp(-x^2)$  y a sus lados por las líneas verticales  $x = 0$  y  $x = 1$  (figura 7.3.7). Determine el volumen generado al girar  $R$  en torno del eje  $y$ .

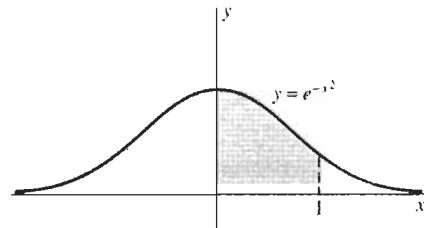


Figura 7.3.7 La región del problema 68

69. Determine la longitud de la curva  $y = (e^x + e^{-x})/2$  de  $x = 0$  a  $x = 1$ .  
 70. Determine el área de la superficie generada al girar en torno del eje  $x$  la curva del problema 69 (figura 7.3.8).

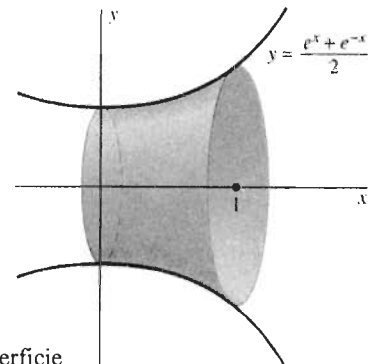
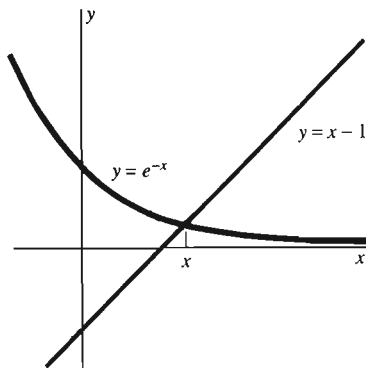


Figura 7.3.8 La superficie del problema 70

71. Demuestre que la ecuación  $e^{-x} = x - 1$  tiene una única solución. (La figura 7.3.9 puede ser útil.) Después utilice el método de Newton para determinar la solución con una precisión de tres cifras decimales.



**Figura 7.3.9** La solución de la ecuación  $e^{-x} = x - 1$  (problema 71)

72. Si una planta química despiden una cantidad  $A$  de contaminantes en un canal en el instante  $t = 0$ , entonces la concentración resultante de contaminante en el agua del canal de un pueblo a una distancia  $x_0$  río abajo de la planta en el instante  $t$  es

$$C(t) = \frac{A}{\sqrt{k\pi t}} \exp\left(-\frac{x_0^2}{4kt}\right),$$

donde  $k$  es una constante. Muestre que la concentración máxima en el pueblo es

$$C_{\max} = \frac{A}{x_0} \sqrt{\frac{2}{\pi e}}.$$

### 7.3 Proyecto

En este breve proyecto de calculadora, usted utilizará el límite

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (20)$$

para estudiar numéricamente el número  $e$ . Suponiendo que el límite existe, puede “acelerar” la convergencia al límite calculando la cantidad  $(1 + 1/n)^n$  únicamente para cada potencia  $n = 2^k$  de 2 en vez de calcularla para cada entero positivo  $n$ . Es decir, consideremos la sucesión  $n = 1, 2, 4, 8, \dots, 2^k, \dots$  en vez de la sucesión  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$  de todos los enteros positivos:

$$e = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)^{2^k}. \quad (21)$$

Este método tiene la ventaja de que los términos

$$s_k = \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)^{2^k} \quad (22)$$

que tienden a  $e$  pueden calcularse “elevando al cuadrado de manera sucesiva”, ya que

$$(x^2)^2 = x^4, \quad (x^4)^2 = x^8, \quad (x^8)^2 = x^{16},$$

73. Trace la gráfica de  $f(x) = x^n e^{-x}$  para  $x \geq 0$  ( $n$  es un entero positivo fijo, pero arbitrario). En particular, muestre que el valor máximo de  $f(x)$  es  $f(n) = n^n e^{-n}$ .

74. Aproxime el número  $e$  como sigue. Primero aplique la aproximación de Simpson con  $n = 2$  subintervalos a la integral

$$\int_0^1 e^x dx = e - 1$$

para obtener la aproximación  $5e - 4\sqrt{e} - 7 \approx 0$ . Despeje  $e$  de esta ecuación.

75. Suponga que  $f(x) = x^n e^{-x}$ , donde  $n$  es un entero positivo fijo, pero arbitrario. Concluya del problema 73 que los números  $f(n-1)$  y  $f(n+1)$  son menores que  $f(n) = n^n e^{-n}$ . Deduzca de esto que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Sustituya  $n = 1024$  para mostrar que  $2.716 < e < 2.720$ . Observe que  $1024 = 2^{10}$ , de modo que  $a^{1024}$  se puede calcular fácilmente con casi cualquier calculadora introduciendo  $a$  y después elevando al cuadrado diez veces en sucesión.

76. Suponga que la ecuación cuadrática  $am^2 + bm + c = 0$  tiene dos raíces reales  $m_1$  y  $m_2$  y suponga que  $C_1$  y  $C_2$  son constantes arbitrarias. Muestre que la función

$$y = y(x) = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

satisface la ecuación diferencial  $ay'' + by' + c = 0$ .

77. Utilice el resultado del problema 76 para determinar una solución  $y = y(x)$  de la ecuación diferencial  $y'' + y' - 2y = 0$  tal que  $y(0) = 5$  y  $y'(0) = 2$ .

y así sucesivamente. Así, para calcular la  $(2^k)$  –ésima potencia  $x^{(2^k)}$  del número  $x$ , sólo necesitamos introducir  $x$  y presionar la tecla  $\boxed{x^2}$   $k$  veces sucesivamente. (En algunas calculadoras, como la TI-81, primero se debe de oprimir  $\boxed{x^2}$  y  $\boxed{\text{ENTER}}$  cada vez.)

En consecuencia, usted puede calcular el número

$$s_k = \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)^{2^k} \quad (22)$$

mediante los siguientes pasos elementales:

1. Calcular  $2^k$  (sin calcular aquí el cuadrado).
2. Calcular el recíproco de  $1/2^k$ .
3. Sumar 1 para obtener la suma  $1 + (1/2^k)$ .
4. Elevar el cuadrado del resultado  $k$  veces sucesivamente.

Utilice la calculadora para hacer esto con  $k = 2, 4, 6, 8, \dots, 18, 20$ . Construya una tabla que muestre cada resultado  $s_k$  con cinco cifras decimales de precisión. Cuando termine, habrá verificado que  $e \approx 2.71828$ . ¡Felicidades!

## 7.4 **Funciones exponenciales y logarítmicas generales**

La función exponencial natural  $e^x$  y la función logaritmo natural  $\ln x$  se llaman generalmente la exponencial y el logaritmo de *base e*. Definimos ahora las funciones exponencial y logaritmo generales,  $a^x$  y  $\log_a x$ , cuya base es un número positivo  $a \neq 1$ . Pero ahora es conveniente invertir el orden de la exposición con respecto al de las secciones 7.2 y 7.3, por lo que primero consideramos la función exponencial general.

Si  $r$  es un número racional, entonces una de las leyes de exponentes [ecuación (13) de la sección 7.3] proporciona

$$a^r = (e^{\ln a})^r = e^{r \ln a}$$

Por tanto, *definimos* las potencias arbitrarias (rationales e irracionales) del número positivo  $a$  de esta forma:

$$\boxed{a^x = e^{x \ln a}} \quad (1)$$

para toda  $x$ . Entonces  $f(x) = a^x$  es la **función exponencial en base  $a$** . Observe que  $a^x > 0$  para toda  $x$  y que  $a^0 = e^0 = 1$  para toda  $a > 0$ .

Las *leyes de los exponentes* para las exponenciales generales son consecuencia casi inmediata de la definición de la ecuación (1) y de las leyes de los exponentes para la función exponencial natural:

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad (2)$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad \text{y} \quad (3)$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \quad (4)$$

para toda  $x$  y  $y$ . Para demostrar la ecuación (2), escribimos

$$a^x a^y = e^{x \ln a} e^{y \ln a} = e^{(x \ln a) + (y \ln a)} = e^{(x+y) \ln a} = a^{x+y}.$$

Para obtener la ecuación (4), observe en la (1) que  $\ln a^x = x \ln a$ . Entonces

$$(a^x)^y = e^{y \ln(a^x)} = e^{xy \ln a} = a^{xy}.$$

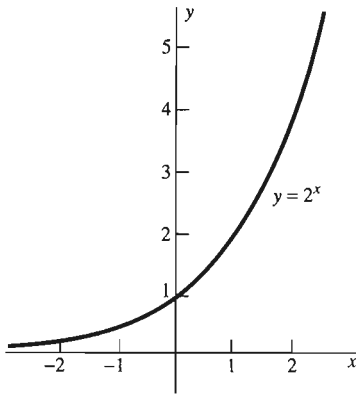


Figura 7.4.1 La gráfica de  $y = 2^x$

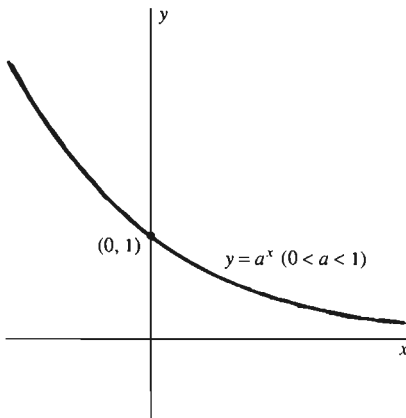


Figura 7.4.2 La gráfica de  $y = a^x$  es decreciente y cóncava hacia arriba si  $0 < a < 1$ .

Esto se cumple para todos los números reales  $x$  y  $y$ , de modo que hemos eliminado la restricción de que  $r$  sea racional en la fórmula  $(e^r)^x = e^{rx}$  [vea la ecuación (13) de la sección 7.3].

Si  $a > 1$ , de modo que  $\ln a > 0$ , entonces las ecuaciones (5) y (6) de la sección 7.3 nos proporcionan inmediatamente los resultados

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0. \quad (5)$$

Los valores de estos dos límites se intercambian si  $0 < a < 1$ , ya que entonces  $\ln a < 0$ .

Como

$$D_x a^x = D_x e^{x \ln a} = a^x \ln a \quad (6)$$

es positivo para toda  $x$  si  $a > 1$ , vemos que, en este caso,  $a^x$  es una función creciente de  $x$ . Si  $a > 1$ , entonces la gráfica de  $y = a^x$  se asemeja a la de  $f(x) = e^x$ . Por ejemplo, examinemos la gráfica de  $y = 2^x$  que se muestra en la figura 7.4.1. Pero si  $0 < a < 1$ , entonces  $\ln a < 0$ , y la ecuación (6) implica que  $a^x$  es una función decreciente. En este caso, la gráfica de  $y = a^x$  es como la de la figura 7.4.2.

Si  $u = u(x)$  es una función derivable de  $x$ , entonces la ecuación (6) combinada con la regla de la cadena implica

$$D_x a^u = (a^u \ln a) \frac{du}{dx}. \quad (7)$$

La fórmula integral correspondiente es

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C. \quad (8)$$

Pero en vez de usar estas fórmulas generales, por lo común es más simple basarse solamente en la definición de la ecuación (1), como en los ejemplos 1 y 2.

**EJEMPLO 1** Para derivar  $f(x) = 3^{x^2}$  primero debemos escribir

$$3^{x^2} = (e^{\ln 3})^{x^2} = e^{x^2 \ln 3}.$$

Entonces

$$D_x 3^{x^2} = D_x e^{x^2 \ln 3} = e^{x^2 \ln 3} D_x (x^2 \ln 3) = 3^{x^2} (\ln 3) (2x).$$

**EJEMPLO 2** Determine  $\int \frac{10^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ .

**Solución** Primero escribimos  $10^{\sqrt{x}} = (e^{\ln 10})^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x} \ln 10}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \int \frac{10^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{e^{\sqrt{x} \ln 10}}{\sqrt{x}} dx \\ &= \int \frac{2e^u}{\ln 10} du \quad \left( u = \sqrt{x} \ln 10, du = \frac{\ln 10}{2\sqrt{x}} dx \right) \\ &= \frac{2e^u}{\ln 10} + C = \frac{2}{\ln 10} 10^{\sqrt{x}} + C. \end{aligned}$$

Sin importar que el exponente  $r$  sea racional o no, definimos la **función potencia general**  $f(x) = x^r$  para  $x > 0$  como

$$x^r = e^{r \ln x}.$$

Ahora podemos demostrar la regla de derivación de una potencia para un exponente (constante) *arbitrario*, como sigue:

$$D_x x^r = D_x(e^{r \ln x}) = e^{r \ln x} D_x(r \ln x) = x^r \cdot \frac{r}{x} = r x^{r-1}.$$

Por ejemplo, sabemos ahora que

$$D_x x^\pi = \pi x^{\pi-1} \approx (3.14159) x^{2.14159}.$$

Si  $a > 1$ , entonces la función exponencial general  $a^x$  es continua y creciente para toda  $x$  y asume todos los valores positivos [mediante un argumento similar al del primer párrafo de la sección 7.3, utilizando la ecuación (6) y los límites en la ecuación (5)]. Por tanto, tiene una función inversa definida para toda  $x > 0$ . Esta función inversa de  $a^x$  es la **función logaritmo en base  $a$**  y se denota  $\log_a x$ . Así,

$$y = \log_a x \quad \text{si y sólo si } x = a^y. \quad (9)$$

La función logaritmo en base  $e$  es la función logaritmo natural:  $\log_e x = \ln x$ .

Las siguientes *leyes de los logaritmos* son fáciles de obtener a partir de las leyes de exponentes en las ecuaciones (2) a (4).

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y, \quad (10)$$

$$\log_a \left( \frac{1}{x} \right) = -\log_a x, \quad (11)$$

$$\log_a x^y = y \log_a x. \quad (12)$$

Estas fórmulas son válidas para cualquier base positiva  $a \neq 1$  y para todos los valores positivos de  $x$  y  $y$ ; en la ecuación (12), el valor de  $y$  puede ser negativo o cero.

Los logaritmos en una base están relacionados con los logaritmos con otra base, y las relaciones entre ellos se expresan fácilmente mediante la fórmula

$$(\log_a b)(\log_b c) = \log_a c. \quad (13)$$

Esta fórmula es válida para todos los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  para los que tenga sentido (las bases  $a$  y  $b$  son números positivos distintos de 1 y  $c$  es positivo). La demostración de esta fórmula se esquematiza en el problema 53. La ecuación (13) debe ser fácil de recordar; es como si se aplicara alguna ley de cancelación secreta.

Si consideramos  $c = a$  en la ecuación (13), obtenemos

$$(\log_a b)(\log_b a) = 1, \quad (14)$$

lo que a su vez, con  $b = e$ , implica

$$\ln a = \frac{1}{\log_a e}. \quad (15)$$

Si reemplazamos  $a$  con  $e$ ,  $b$  con  $a$  y  $c$  con  $x$  en la ecuación (13), tenemos

$$(\log_e a)(\log_a x) = \log_e x,$$

de modo que

$$\log_a x = \frac{\log_e x}{\log_e a} = \frac{\ln x}{\ln a}. \quad (16)$$

En la mayoría de las calculadoras, la tecla  $\boxed{\log}$  denota los logaritmos comunes (base 10):  $\log x = \log_{10} x$ . Por el contrario, en muchos lenguajes de programación, como BASIC y algunos programas de álgebra simbólica, como *Mathematica*, sólo aparecen explícitamente los logaritmos naturales, como LOG [X] (en BASIC) y como Log [x] (en *Mathematica*). Para obtener  $\log_{10} x$ , escribimos LOG (X) / LOG (10) y Log [10, x], respectivamente.

Al derivar ambos lados de la ecuación (16) tenemos

$$D_x \log_a x = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x}. \quad (17)$$

Por ejemplo,

$$D_x \log_{10} x = \frac{\log_{10} e}{x} \approx \frac{0.4343}{x}.$$

Si razonamos ahora como lo hicimos para obtener la ecuación (6) de la sección 7.2, obtenemos de la regla de la cadena la fórmula general

$$D_x \log_a |u| = \frac{1}{u \ln a} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{\log_a e}{u} \cdot \frac{du}{dx} \quad (u \neq 0) \quad (18)$$

si  $u$  es una función derivable de  $x$ . Por ejemplo,

$$D_x \log_2 \sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{2} D_x \log_2 (x^2 + 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_2 e}{x^2 + 1} \cdot 2x \approx \frac{(1.4427)x}{x^2 + 1}.$$

Aquí utilizamos el hecho de que  $\log_2 e = 1/(\ln 2)$  por la ecuación (15).

## DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

Las derivadas de ciertas funciones se determinan de manera más conveniente derivando primero sus logaritmos. Este proceso, llamado **derivación logarítmica**, tiene los pasos siguientes para determinar  $f'(x)$ :

1. Dado:  $y = f(x)$ .
2. Obtener los logaritmos *naturales*; simplificar después, utilizando las leyes de los logaritmos:  $\ln y = \ln f(x)$ .
3. Derivar con respecto de  $x$ :  $\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = D_x [\ln f(x)]$ .
4. Multiplicar ambos lados por  $y = f(x)$ :  $\frac{dy}{dx} = f(x) D_x [\ln f(x)]$ .

**OBSERVACIÓN** Si  $f(x)$  no es positiva en todo punto, los pasos 1 y 2 se deben reemplazar por  $y = |f(x)|$  y  $\ln y = \ln |f(x)|$ , respectivamente. La derivación del paso 3 conduce entonces al resultado  $dy/dx = f(x) D_x [\ln |f(x)|]$  en el paso 4. En la práctica, no debemos preocuparnos de antemano por el signo de  $f(x)$ , pues la aparición de lo que parecería el logaritmo de una cantidad negativa indicará el hecho de que deban utilizarse valores absolutos.

**EJEMPLO 3** Determine  $dy/dx$ , dado que

$$y = \frac{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}{\sqrt[3]{(x^3 + 1)^4}}.$$

**Solución** Las leyes de los logaritmos implican

$$\ln y = \ln \frac{(x^2 + 1)^{3/2}}{(x^3 + 1)^{4/3}} = \frac{3}{2} \ln(x^2 + 1) - \frac{4}{3} \ln(x^3 + 1).$$

Así, la derivación con respecto de  $x$  implica

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{4}{3} \cdot \frac{3x^2}{x^3 + 1} = \frac{3x}{x^2 + 1} - \frac{4x^2}{x^3 + 1}.$$

Por último, para despejar  $dy/dx$ , multiplicamos ambos lados por

$$y = \frac{(x^2 + 1)^{3/2}}{(x^3 + 1)^{4/3}},$$

y obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \left( \frac{3x}{x^2 + 1} - \frac{4x^2}{x^3 + 1} \right) \frac{(x^2 + 1)^{3/2}}{(x^3 + 1)^{4/3}}.$$

**EJEMPLO 4** Determine  $dy/dx$ , dado  $y = x^{x+1}$ .

**Solución** Si  $y = x^{x+1}$ , entonces

$$\ln y = \ln(x^{x+1}) = (x + 1)\ln x,$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = (1)(\ln x) + (x + 1)\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{x} + \ln x.$$

Al multiplicar por  $y = x^{x+1}$  obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \left( 1 + \frac{1}{x} + \ln x \right) x^{x+1}.$$

## 7.4 Problemas

En los problemas 1 a 24, determine la derivada de la función dada  $f(x)$ .

1.  $f(x) = 10^x$
2.  $f(x) = 2^{1/x^2}$
3.  $f(x) = \frac{3^x}{4^x}$
4.  $f(x) = \log_{10} \cos x$
5.  $f(x) = 7^{\cos x}$
6.  $f(x) = 2^x 3^{x^2}$
7.  $f(x) = 2^{x\sqrt{x}}$
8.  $f(x) = \log_{100}(10^x)$
9.  $f(x) = 2^{\ln x}$
10.  $f(x) = 7^{8^x}$
11.  $f(x) = 17^x$
12.  $f(x) = 2^{\sqrt{x}}$
13.  $f(x) = 10^{1/x}$
14.  $f(x) = 3^{\sqrt{1-x^2}}$
15.  $f(x) = 2^{2^x}$
16.  $f(x) = \log_2 x$
17.  $f(x) = \log_3 \sqrt{x^2 + 4}$
18.  $f(x) = \log_{10}(e^x)$
19.  $f(x) = \log_3(2^x)$
20.  $f(x) = \log_{10}(\log_{10} x)$
21.  $f(x) = \log_2(\log_3 x)$
22.  $f(x) = \pi^x + x^\pi + \pi^\pi$
23.  $f(x) = \exp(\log_{10} x)$
24.  $f(x) = \pi^{x^3}$

Evalúe las integrales de los problemas 25 a 32.

25.  $\int 3^{2x} dx$
26.  $\int x \cdot 10^{-x^2} dx$
27.  $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$
28.  $\int \frac{10^{1/x}}{x^2} dx$
29.  $\int x^{27x^3+1} dx$
30.  $\int \frac{dx}{x \log_{10} x}$
31.  $\int \frac{\log_2 x}{x} dx$
32.  $\int (2^x)3^{(2^x)} dx$

En los problemas 33 a 52, determine  $dy/dx$  mediante una derivación logarítmica.

33.  $y = \sqrt{(x^2 - 4)\sqrt{2x + 1}}$
34.  $y = \frac{(3 - x^2)^{1/2}}{(x^4 + 1)^{1/4}}$
35.  $y = 2^x$
36.  $y = x^x$



37.  $y = x^{\ln x}$       38.  $y = (1 + x)^{1/x}$

39.  $y = \left[ \frac{(x+1)(x+2)}{(x^2+1)(x^2+2)} \right]^{1/3}$

40.  $y = \sqrt{x+1} \sqrt[3]{x+2} \sqrt[4]{x+3}$

41.  $y = (\ln x)^{\sqrt{x}}$       42.  $y = (3 + 2^x)^x$

43.  $y = \frac{(1+x^2)^{3/2}}{(1+x^3)^{4/3}}$       44.  $y = (x+1)^x$

45.  $y = (x^2 + 1)^{x^2}$       46.  $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

47.  $y = (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$       48.  $y = x^{\sin x}$

49.  $y = e^x$       50.  $y = (\ln x)^{\ln x}$

51.  $y = x^{(e^x)}$       52.  $y = (\cos x)^x$

53. Demuestre la ecuación (13). [Sugerencia: sean  $x = \log_a b$ ,  $y = \log_b c$  y  $z = \log_a c$ . Después muestre que  $a^z = a^{xy}$ , y concluya que  $z = xy$ .]

54. Suponga que  $u$  y  $v$  son funciones derivables de  $x$ . Muestre mediante una derivación logarítmica que

$$D_x(u^v) = v(u^{v-1}) \frac{du}{dx} + (u^v \ln u) \frac{dv}{dx}.$$

Interprete los dos términos de la derecha en relación con los casos particulares (a)  $u$  constante; (b)  $v$  constante.

55. Suponga que  $a > 0$ . Analice  $\ln(a^{1/x})$  y muestre que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^{1/x} = 1.$$

Esto implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = 1.$$

(La inferencia es que  $n$  es un entero positivo.) Verifique esta conclusión introduciendo algún número positivo en su calculadora y oprimiendo a continuación la tecla de raíz cuadrada varias veces. Haga una tabla de los resultados de ambos experimentos.

56. Muestre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$  mostrando que  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} = 1$ . (La inferencia es que  $x$  es un número real arbitrario positivo, mientras que  $n$  es un entero positivo.) Utilice el método del problema 55.

57. Analice  $\ln(x^x/e^x)$  y muestre que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^x}{e^x} = +\infty.$$

Así,  $x^x$  aumenta aún más rápido que la función exponencial  $e^x$  cuando  $x \rightarrow +\infty$ .

58. Considere la función

$$f(x) = \frac{1}{1+2^{1/x}} \quad \text{para } x \neq 0.$$

Muestre que los límites por la izquierda y por la derecha de  $f(x)$  en  $x = 0$  existen pero son distintos.

59. Determine  $dy/dx$  si  $y = \log_x 2$ .

60. Suponga que  $y = uvw/pqr$ , donde  $u, v, w, p, q$  y  $r$  son funciones derivables de  $x$ , distintas de cero. Muestre mediante una derivación logarítmica que

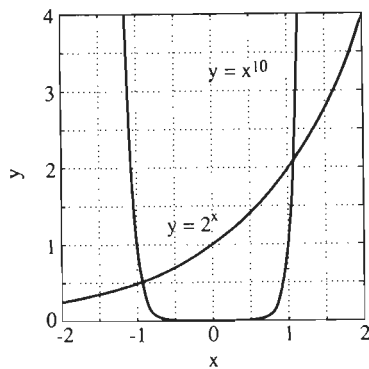
$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \left( \frac{1}{u} \frac{du}{dx} + \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} + \frac{1}{w} \frac{dw}{dx} - \frac{1}{p} \frac{dp}{dx} - \frac{1}{q} \frac{dq}{dx} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \right).$$

¿Es obvia la generación de esto, para un número finito arbitrario de factores en el numerador y el denominador?

## 7.4 Proyecto

Este proyecto estudia la ecuación

$$2^x = x^{10}. \tag{19}$$



**Figura 7.4.3**  $y = 2^x$  y  $y = x^{10}$  para  $-2 \leq x \leq 2$

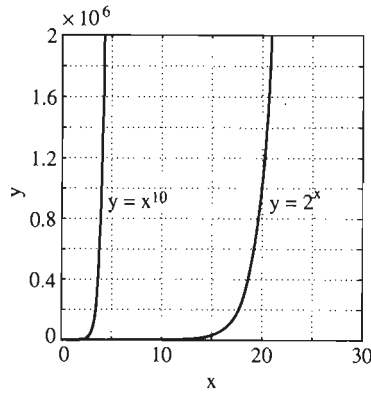
1. Las gráficas de  $y = 2^x$  y  $y = x^{10}$  (figura 7.4.3) sugieren que la ecuación (19) tiene dos soluciones: una positiva y la otra negativa. Si dispone de una calculadora gráfica o una computadora, determine estas dos soluciones (con una precisión de tres o cuatro cifras decimales) mediante aproximaciones sucesivas (el método del “acercamiento”).

2. La figura 7.4.4 parece indicar que  $x^{10}$  deja atrás a  $2^x$  cuando  $x \rightarrow +\infty$ . Sin embargo, la ecuación (19) tiene las mismas soluciones positivas que la ecuación

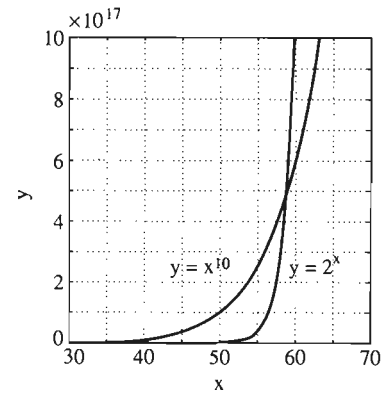
$$\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{10}.$$

Por tanto, con base en la gráfica de  $y = (\ln x)/x$  (ejemplo 8 de la sección 7.2) concluya que la ecuación (19) tiene precisamente dos soluciones positivas.

3. Haga una tabla de valores de  $2^x$  y  $x^{10}$  para  $x = 10, 20, 30, 40, 50$  y  $60$  para verificar que la solución positiva faltante está en algún punto entre  $x = 50$  y  $x = 60$



**Figura 7.4.4**  $y = 2^x$  y  $y = x^{10}$  para  $0 \leq x \leq 30$



**Figura 7.4.5**  $y = 2^x$  y  $y = x^{10}$  para  $30 \leq x \leq 70$

(figura 7.4.5). Si intenta localizar esta solución mediante aproximaciones sucesivas, ¡tal vez llegue adonde nadie ha llegado antes!

4. Utilice el método de Newton para aproximar (con una precisión de cuatro cifras) las tres soluciones de la ecuación (19).

## 7.5 **Crecimiento y decaimiento naturales**

En esta sección, utilizaremos la función exponencial natural para modelar el “crecimiento natural” de las poblaciones. Consideremos una población con una cantidad de  $P(t)$  personas u otros animales, bacterias, dólares o moléculas (o cualquier entidad) en el instante  $t$ . Suponemos que esta población tiene una *tasa de natalidad*  $\beta$  constante y una *tasa de mortalidad*  $\delta$  constante. De manera vaga, esto significa que durante el periodo de un año, ocurren  $\beta P$  nacimientos y  $\delta P$  muertes.

Puesto que  $P$  se modifica durante el curso de un año, debemos tomar en consideración los cambios en el número de nacimientos y muertes. Pensemos en un pequeño intervalo de tiempo de  $t$  a  $t + \Delta t$ . Para valores muy pequeños de  $\Delta t$ , el valor de  $P = P(t)$  cambia en una razón tan pequeña durante el intervalo de tiempo  $[t, t + \Delta t]$  que podemos considerar  $P(t)$  casi como constante. Requerimos que el número de nacimientos y muertes durante este intervalo de tiempo esté dado con la precisión suficiente por las aproximaciones

$$\text{Número de nacimientos: aproximadamente } \beta P(t) \Delta t; \quad (1)$$

$$\text{Número de muertes: aproximadamente } \delta P(t) \Delta t.$$

Más precisamente, suponemos que la razón del error para  $\Delta t$  en cada una de estas aproximaciones tiende a cero cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Con esta base, queremos deducir la forma de la función  $P(t)$  que describe la población en cuestión. Nuestra estrategia comienza al determinar la **razón de cambio con respecto del tiempo** de  $P(t)$ . Por tanto, consideramos el incremento

$$\Delta P = P(t + \Delta t) - P(t)$$

de  $P$  durante el intervalo de tiempo  $[t, t + \Delta t]$ . Como  $\Delta P$  es simplemente el número de nacimientos menos el número de muertes, tenemos de la ecuación (1) que

$$\begin{aligned} \Delta P &= P(t + \Delta t) - P(t) \\ &\approx \beta P(t) \Delta t - \delta P(t) \Delta t \end{aligned} \quad \text{(el número de nacimientos} \\ \text{menos el número de muertes).}$$

Por consiguiente,

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} \approx (\beta - \delta)P(t).$$

El cociente del lado izquierdo tiende a la derivada  $P'(t)$  cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  y, por la hipótesis después de (1), tiende también al lado derecho,  $(\beta - \delta)P(t)$ . Por tanto, cuando consideramos el límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , obtenemos la ecuación diferencial

es decir,

$$P'(t) = (\beta - \delta)P(t);$$

$$\frac{dP}{dt} = kP, \quad \text{donde } k = \beta - \delta. \quad (2)$$

Esta ecuación diferencial se puede considerar como un *modelo matemático* de la población cambiante.

## LA ECUACIÓN DE CRECIMIENTO NATURAL

Con  $x(t)$  en vez de  $P(t)$  en la ecuación (2), tenemos la ecuación diferencial

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = kx}, \quad (3)$$

que sirve como el modelo matemático de una gama extraordinariamente amplia de fenómenos naturales. Se puede resolver con facilidad si primero “separamos las variables” y después integramos:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x} &= k dt; \\ \int \frac{dx}{x} &= \int k dt; \\ \ln x &= kt + C. \end{aligned}$$

Aplicamos la función exponencial a ambos lados de la última ecuación para despejar  $x$ :

$$x = e^{\ln x} = e^{kt+C} = e^{kt}e^C = Ae^{kt}.$$

En este caso,  $A = e^C$  es una constante que falta determinar. Pero vemos que  $A$  es tan sólo el valor  $x_0 = x(0)$  de  $x(t)$  cuando  $t = 0$ , con lo que  $A = x_0$ .

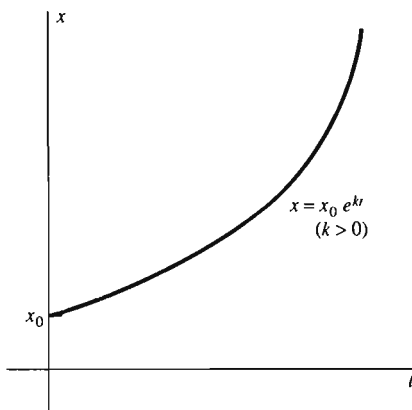
### **Teorema 1** *La ecuación de crecimiento natural*

La solución al problema con condición inicial

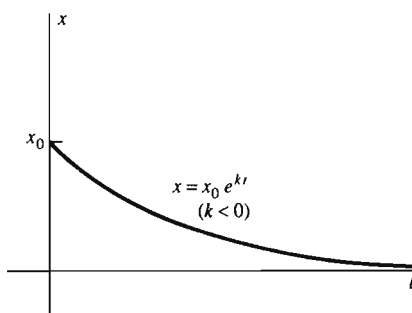
$$\frac{dx}{dt} = kx, \quad x(0) = x_0 \quad (4)$$

es

$$x(t) = x_0 e^{kt}. \quad (5)$$



**Figura 7.5.1** Solución de la ecuación de crecimiento exponencial para  $k > 0$



**Figura 7.5.2** Solución de la ecuación de crecimiento exponencial (en realidad, una ecuación de decaimiento) para  $k < 0$

Como consecuencia, la ecuación (3) recibe el nombre general de **ecuación de crecimiento exponencial**, o **ecuación de crecimiento natural**. Por la ecuación (5) vemos que, con  $x_0 > 0$ , la solución  $x(t)$  es una función creciente si  $k > 0$  y una función decreciente si  $k < 0$ . (La situación  $k < 0$  a veces se denomina *decaimiento* exponencial.) Estos dos casos aparecen en las figuras 7.5.1 y 7.5.2, respectivamente. El resto de esta sección se ocupa de ejemplos de fenómenos naturales para los que esta ecuación diferencial sirve como modelo matemático.

## CRECIMIENTO DE POBLACIONES

Al comparar las ecuaciones (2), (3) y (5) vemos que una población  $P(t)$  con tasa de natalidad  $\beta$  y tasa de mortalidad  $\delta$  está dada por

$$P(t) = P_0 e^{kt}, \quad (6)$$

donde  $P_0 = P(0)$  y  $k = \beta - \delta$ . Si  $t$  se mide en años, entonces  $k$  es la **tasa de crecimiento anual**, que puede ser positiva, negativa o cero. Su valor se da con frecuencia como un porcentaje (su valor decimal multiplicado por 100). Si  $k$  es cercana a cero, su valor es muy cercano al incremento (o decremento) porcentual de la población cada año.

**EJEMPLO 1** De acuerdo con los datos de la agencia Prensa Asociada de marzo de 1987, la población mundial había llegado a 5 mil millones de personas y aumentaba a razón de 380,000 personas cada día. Supongamos que las tasas de natalidad y mortandad son constantes. Queremos responder estas preguntas:

1. ¿Cuál es la tasa anual de crecimiento  $k$ ?
2. ¿Cuál será la población mundial en el año 2000?
3. ¿Cuánto tiempo tardará en duplicarse la población mundial?
4. ¿Cuándo será la población mundial de 50 mil millones (cantidad que los demógrafos piensan es la máxima para la que el planeta puede proporcionar alimento)?

**Solución** Medimos la población mundial  $P(t)$  en miles de millones y el tiempo  $t$  en años. Consideremos  $t = 0$  en 1987, de modo que  $P_0 = 5$ . El hecho de que  $P$  aumente en 380,000, o 0.00038 miles de millones, de personas al día en el instante  $t = 0$  significa que

$$P'(0) = (0.00038)(365.25) \approx 0.1388$$

miles de millones de personas por año. A partir de la ecuación (2), obtenemos

$$k = \left[ \frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dt} \right]_{t=0} = \frac{P'(0)}{P(0)} = \frac{0.1388}{5} \approx 0.0278.$$

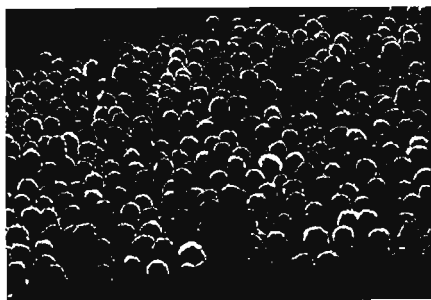
Así, en 1987, la población mundial crecía a razón de 2.78% anual, aproximadamente.

Utilizaremos este valor de  $k$  para concluir que la población del mundo en el instante  $t$  debe ser

$$P(t) = 5e^{(0.0278)t}.$$

Por ejemplo, con  $t = 13$  se obtiene que la población en el año 2000 sería

$$P(13) = 5e^{(0.0278)(13)} \approx 7.17 \quad (\text{miles de millones}).$$



La población del mundo crece rápidamente, pero, ¿qué tan rápidamente?

Para determinar cuándo la población se duplicará a 10 mil millones, resolvemos la ecuación

$$10 = 5e^{(0.0278)t}.$$

Primero debemos obtener el logaritmo natural de cada lado y después despejar

$$t = \frac{\ln 2}{0.0278} \approx 25 \quad (\text{año}),$$

lo que corresponde al año 2012. Por último, bajo las hipótesis consideradas, la población mundial alcanzará los 50 mil millones cuando

$$50 = 5e^{(0.0278)t}; \quad t = \frac{\ln 10}{0.0278} \approx 83$$

es decir, en el año 2070.

## DECAIMIENTO RADIATIVO

Consideremos una muestra de material que contiene  $N(t)$  átomos de cierto isótopo radiactivo en el instante  $t$ . Muchos experimentos han confirmado que una fracción constante de estos átomos radiactivos decaen de manera espontánea (se convierten en átomos de otro elemento o de otro isótopo del mismo elemento) en cada intervalo de tiempo. En consecuencia, la muestra se comporta igual que una población con una tasa de mortandad constante, sin que ocurran nacimientos. Para escribir un modelo de  $N(t)$ , utilizamos la ecuación (2) con  $N$  en vez de  $P$ ,  $k > 0$  en vez de  $\delta$  y  $\beta = 0$ . Así, obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{dN}{dt} = -kN. \quad (7)$$

Por la solución (ecuación (5) de la ecuación (3) con  $k$  en vez de  $-k$ , concluimos que

$$N(t) = N_0 e^{-kt}, \quad (8)$$

donde  $N_0 = N(0)$ , el número de átomos radiactivos del isótopo original presentes en la muestra en el instante  $t = 0$ .

El valor de la *constante de decaimiento*  $k$  depende del isótopo particular en cuestión. Si  $k$  es grande, entonces el isótopo decae rápidamente. Si  $k$  es cercano a cero, el isótopo decae muy lentamente y por tanto puede ser un factor relativamente persistente en su ambiente. La constante de decaimiento  $k$  se especifica con frecuencia en términos de otro parámetro empírico más conveniente, la *vida media* del isótopo. La **vida media**  $\tau$  de una muestra de un isótopo radiactivo es el tiempo necesario para que la *mitad* de esa muestra decaiga. Para determinar la relación entre  $k$  y  $\tau$ , hacemos

$$t = \tau \quad \text{y} \quad N = \frac{1}{2} N_0$$

en la ecuación (8), de modo que

$$\frac{1}{2} N_0 = N_0 e^{-k\tau}. \quad (9)$$

Cuando despejamos  $\tau$ , tenemos que

$$\tau = \frac{\ln 2}{k}. \quad (10)$$

Observe que el concepto de vida media es significativo: el valor de  $\tau$  sólo depende de  $k$  y por tanto sólo depende del isótopo radiactivo en cuestión. No depende de la cantidad de isótopo presente.

El método de *fechado con radiocarbono* se basa en el hecho de que el isótopo radiactivo del carbono  $^{14}\text{C}$  tiene una vida media conocida de cerca de 5700 años. La materia orgánica viva mantiene un nivel constante de  $^{14}\text{C}$  al “respirar” aire (o consumir materia orgánica que “respira”). Pero el aire contiene  $^{14}\text{C}$  junto con el isótopo estable  $^{12}\text{C}$ , más común, la mayor parte en el gas  $\text{CO}_2$ . Así, todos los organismos vivos mantienen el mismo porcentaje de  $^{14}\text{C}$  que el existente en el aire, puesto que los procesos orgánicos parecen no hacer distinción alguna entre los dos isótopos. Pero al morir un organismo, éste deja de metabolizar carbono, y el proceso de decaimiento radiactivo comienza a agotar su contenido de  $^{14}\text{C}$ . La fracción de  $^{14}\text{C}$  en el aire sigue siendo casi constante, debido a que se generan nuevas cantidades del mismo por el bombardeo de átomos de nitrógeno en la parte superior de la atmósfera por los rayos cósmicos, y esta generación está en un equilibrio estacionario con la pérdida de  $^{14}\text{C}$  a través del decaimiento radiactivo.

**EJEMPLO 2** Un espécimen de carbón de leña encontrado en Stonehenge contiene el 63% de  $^{14}\text{C}$  con respecto de una muestra de carbón actual. ¿Cuál es la edad de la muestra?

**Solución** Consideremos  $t = 0$  (en años) como el instante de la muerte del árbol de donde se hizo el carbón. Por la ecuación (9) sabemos que

$$\frac{1}{2} N_0 = N_0 e^{-5700k},$$

de modo que

$$k = \frac{\ln 2}{\tau} = \frac{\ln 2}{5700} \approx 0.0001216.$$

Tenemos que  $N = (0.63)N_0$  en el momento actual, por lo que resolvemos la ecuación

$$(0.63)N_0 = N_0 e^{-kt}$$

con este valor de  $k$ . Tenemos entonces que

$$t = -\frac{\ln(0.63)}{0.0001216} \approx 3800 \text{ (años)}.$$

En consecuencia, la muestra tiene una antigüedad aproximada de 3800 años. Si está relacionada de alguna manera con los constructores de Stonehenge, nuestros cálculos sugieren que este observatorio, monumento o templo data aproximadamente del año 1800 a.C.

**EJEMPLO 3** De acuerdo con una teoría cosmológica, había igual cantidad de los isótopos de uranio  $^{235}\text{U}$  y  $^{238}\text{U}$  en el momento de la creación del universo, la “gran explosión” (o “big bang”). En la actualidad existen 137.7 átomos de  $^{238}\text{U}$  por cada átomo de  $^{235}\text{U}$ . Si las vidas medias de estos isótopos son

4.51 miles de millones de años para  $^{238}\text{U}$ ,

0.71 miles de millones de años para  $^{235}\text{U}$ ,

calcule la edad del universo.

**Solución** Sean  $N_6(t)$  y  $N_5(t)$  el número de átomos de  $^{238}\text{U}$  y  $^{235}\text{U}$ , respectivamente, en el instante  $t$ , en miles de millones de años desde la creación del universo. Entonces

$$N_8(t) = N_0 e^{-kt} \quad \text{y} \quad N_5(t) = N_0 e^{-ct},$$

donde  $N_0$  es el número inicial de átomos de cada isótopo. Además,

$$k = \frac{\ln 2}{4.51} \quad \text{y} \quad c = \frac{\ln 2}{0.71},$$

que es consecuencia de la ecuación (10). Dividimos la ecuación para  $N_8$  entre la ecuación para  $N_5$  y vemos que cuando  $t$  tiene el valor correspondiente a “la actualidad”,

$$137.7 = \frac{N_8}{N_5} = e^{(c-k)t}.$$

Por último, despejamos  $t$  en esta ecuación:

$$t = \frac{\ln(137.7)}{\left(\frac{1}{0.71} - \frac{1}{4.51}\right) \ln 2} \approx 5.99.$$

Así, estimamos la edad del universo como 6 mil millones de años, que es casi el mismo orden de magnitud para las estimaciones más recientes de 15 mil millones de años.

## INTERÉS COMPUESTO CONTINUO

Consideremos una cuenta de ahorro que se abre con un depósito inicial de  $A_0$  dólares y que percibe un interés con una tasa anual  $r$ . Si existen  $A(t)$  dólares en la cuenta en el instante  $t$  y el interés es compuesto en el instante  $t + \Delta t$ , esto significa que se suman  $rA(t)\Delta t$  dólares de interés a la cuenta en ese instante. Así,

$$A(t + \Delta t) = A(t) + rA(t) \Delta t,$$

por lo que

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t} = rA(t).$$

El interés compuesto *continuo* surge de considerar el límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , de modo que

$$\frac{dA}{dt} = rA. \quad (11)$$

Ésta es una ecuación de crecimiento exponencial que tiene la solución

$$A(t) = A_0 e^{rt}. \quad (12)$$

**EJEMPLO 4** Si se invierten  $A_0 = \$1000$  con una tasa de interés anual de 6% compuesto continuo, entonces  $r = 0.06$ , y la ecuación (12) implica que

$$A(1) = 1000e^{(0.06)(1)} = \$1061.84$$

es el valor de la inversión después de un año. Así, la *tasa de interés anual efectiva* es 6.184%. Si el interés se compone con mayor frecuencia, más rápido aumentan los ahorros, pero los anuncios bancarios tienden a exagerar esta ventaja. Por ejemplo, un interés compuesto *mensualmente* de 6% multiplica su inversión por

$$1 + \frac{0.06}{12} = 1.005$$

al final de cada mes, por lo que una inversión inicial de \$1000 aumentará en un año a

$$(1000)(1.005)^{12} = \$1061.68,$$

sólo \$0.16 menos que lo que daría un interés compuesto continuamente.

### \*ELIMINACIÓN DE SUSTANCIAS

La cantidad  $A(t)$  de una cierta sustancia en el torrente sanguíneo del cuerpo humano, medida como el exceso sobre el nivel natural de la sustancia en la sangre, disminuye generalmente de manera proporcional a dicho exceso. Es decir,

$$\frac{dA}{dt} = -\lambda A, \text{ de modo que } A(t) = A_0 e^{-\lambda t}. \quad (13)$$

El parámetro  $\lambda$  es la *constante de eliminación* de la sustancia y  $T = 1/\lambda$  es el *tiempo de eliminación*.

**EJEMPLO 5** El tiempo de eliminación del alcohol, varía de una persona a otra. Si el tiempo de recuperación de una persona  $T = 1/\lambda$  es 2.5 horas, ¿cuánto tiempo tardará en reducirse la concentración del exceso de alcohol en la sangre de 0.10% a 0.02%?

**Solución** Suponemos que la concentración normal de alcohol en la sangre es 0, por lo que cualquier cantidad es una cantidad en exceso. En este problema, tenemos  $\lambda = 1/2.5 = 0.4$ , por lo que la ecuación (13) implica

$$0.02 = (0.10)e^{-(0.4)t}.$$

Así,

$$t = -\frac{\ln(0.2)}{0.4} \approx 4.02 \text{ (h)}.$$

### \*DISMINUCIÓN DE VENTAS

De acuerdo con estudios de mercado, si se deja de anunciar un producto particular y se mantienen sin modificación otras condiciones del mercado (como el número y la promoción de la competencia, sus precios, etcétera), entonces las ventas del producto no anunciado disminuye proporcionalmente a las ventas actuales  $S$  en cualquier instante  $t$ . Es decir,

$$\frac{dS}{dt} = -\lambda S, \text{ de modo que } S(t) = S_0 e^{-\lambda t}. \quad (14)$$

Aquí  $S_0$  denota el valor inicial de las ventas, considerando las ventas en el último mes de promoción. Si las unidades de  $t$  son los meses, entonces  $S(t)$  nos da el número de ventas  $t$  meses después de haberse suspendido la promoción y  $\lambda$  podría llamarse la *constante de disminución de ventas*.



## \*LINGÜÍSTICA

Consideremos una lista básica de  $N_0$  palabras en uso en un lenguaje en el instante  $t = 0$ . Sea  $N(t)$  el número de estas palabras que se encuentran aún en el instante  $t$ , aquellas que no han desaparecido del lenguaje ni han sido reemplazadas. De acuerdo a una teoría de lingüística, la tasa de disminución de  $N$  es proporcional a  $N$ . Es decir,

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N, \text{ de modo que } N(t) = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (15)$$

Si  $t$  se mide en milenios (estándar en lingüística), entonces  $k = e^{-\lambda}$  es la fracción de palabras en la lista original que sobreviven durante 1000 años.

### 7.5 Problemas

1. *Interés compuesto continuo* Supongamos que se depositan \$1000 en una cuenta de ahorros que paga un interés compuesto continuo anual de 8%. ¿Con qué tasa (en \$/año) gana interés después de 5 años? ¿Después de 20 años?

2. *Crecimiento de poblaciones* Coopersville tenía una población de 25,000 en 1970 y una población de 30,000 en 1980. Suponga que su población continúa creciendo de manera exponencial a razón constante. ¿Qué población esperan los planificadores de la ciudad de Coopersville en el año 2010?

3. *Crecimiento de poblaciones* En cierto cultivo de bacterias, el número de bacterias aumenta 6 veces en 10 horas. Suponiendo un crecimiento natural, ¿cuánto tiempo tardó en duplicarse?

4. *Fecha con radiocarbono* El carbono extraído de un antiguo cráneo recién desenterrado contiene solamente una sexta parte del carbono radiactivo  $^{14}\text{C}$  del carbono extraído de un hueso actual. ¿Qué antigüedad tiene el cráneo?

5. *Fecha con radiocarbono* El carbono tomado de una reliquia con una fecha propuesta de 30 d.C. contiene  $4.6 \times 10^{10}$  átomos de  $^{14}\text{C}$  por gramo. El carbono extraído de un espécimen actual de la misma sustancia contenía  $5.0 \times 10^{10}$  átomos de  $^{14}\text{C}$  por gramo. Calcule la edad aproximada de la reliquia. ¿Cuál es su opinión acerca de su autenticidad?

6. *Interés compuesto continuo* Se invierte una cantidad  $A$  de dinero durante  $t$  años con una tasa de interés anual  $r$  compuesta  $n$  veces durante estos años a intervalos iguales.  
(a) Explique por qué la cantidad acumulada después de  $t$  años es

$$A_{r,n} = A \cdot \left(1 + \frac{rt}{n}\right)^n.$$

(b) Concluya del límite de la ecuación (18) de la sección 7.3 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_{r,n} = Ae^{rt},$$

de acuerdo con la ecuación (12) de esta sección.

7. *Interés compuesto continuo* Si una inversión de  $A_0$  dólares regresa  $A_1$  dólares después de un año, la **tasa de interés anual efectiva**  $r$  se define mediante la ecuación

$$A_1 = (1 + r)A_0.$$

Los bancos anuncian con frecuencia que aumentan las tasas efectivas para las cuentas de ahorro de sus clientes aumentando la frecuencia de composición. Calcule la tasa de interés anual efectiva si una tasa de interés anual del 9% se compone (a) trimestralmente; (b) mensualmente; (c) semanalmente; (d) diariamente; (e) continuamente.

8. *Interés compuesto continuo* Al nacer su primer hijo, una pareja deposita \$5,000 en una cuenta de ahorros que paga un interés anual compuesto continuo del 6%, con acumulación de intereses. ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta cuando el hijo vaya a la universidad a los 18 años?

9. *Interés compuesto continuo* Usted descubre en su ático un libro vencido de una biblioteca por el que su tatarabuelo debe una multa de 30 centavos exactamente hace 100 años. Si una multa vencida crece de manera exponencial a una tasa de interés compuesta continua anual del 5%. ¿Cuánto tendría que pagar si regresara el libro el día de hoy?

10. *Eliminación de sustancias* Suponga que el pentobarbital de sodio anestesiara a un perro cuando su sangre contenga al menos 45 miligramos de pentobarbital de sodio por cada kilogramo de peso. Suponga también que el pentobarbital de sodio se elimina de manera exponencial de la sangre de un perro, con una vida media de 5 horas. ¿Qué dosis debe administrarse para anestesiara a un perro de 50 kilos durante una hora?

11. *Disminución de ventas* Moonbeam Motors ha dejado de anunciar su camioneta. La compañía planea volver a anunciarla cuando las ventas hayan disminuido al 75% de su tasa inicial. Si después de una semana sin promoción, las ventas han disminuido a 95% de su tasa original, ¿cuándo esperaría la compañía volver a anunciarla?

12. *Lingüística* El idioma inglés evoluciona de tal forma que 77% de todas las palabras desaparecen (o son reemplazadas) cada 1000 años. De una lista básica de palabras utilizadas por Chaucer en 1400 d.C., ¿qué porcentaje esperaríamos utilizar todavía en la actualidad?

13. *Decaimiento radiactivo* La vida media del cobalto radiactivo es 5.27 años. Suponga que un accidente nuclear deja el nivel de radiación de cobalto en cierta región en 100 veces el nivel aceptable para la habitación humana. ¿Dentro de cuánto tiempo volverá a ser habitable la región? (Ignore la probable presencia de otras sustancias radiactivas.)

14. *Decaimiento radiactivo* Suponga que un depósito de cierto mineral raro formado en un antiguo cataclismo (como la colisión de un meteorito con la Tierra) contenía originalmente al isótopo de uranio  $^{238}\text{U}$  (que tiene una vida media de  $4.51 \times 10^9$  años) pero no el isótopo de plomo  $^{207}\text{Pb}$ , que es el producto final del decaimiento radiactivo de  $^{238}\text{U}$ . Si la proporción actual entre los átomos de  $^{238}\text{U}$  y  $^{207}\text{Pb}$  es 0.9, ¿cuándo ocurrió el cataclismo?

15. *Decaimiento radiactivo* Cierta roca lunar contiene el mismo número de átomos de potasio y átomos de argón. Suponga que todo el argón está presente debido al decaimiento radiactivo del potasio (su vida media es aproximadamente  $1.28 \times 10^9$  años) y que uno de cada nueve desintegraciones de un átomo de potasio produce un átomo de argón. ¿Cuál es la edad de la roca, medida desde el instante en que sólo contenía potasio?

16. Si un cuerpo se enfría en un medio con temperatura constante  $A$ , entonces (de acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton, sección 7.6) la razón de cambio de la temperatura del cuerpo  $T$  es proporcional a  $T - A$ . Queremos enfriar un frasco con mantequilla que inicialmente está a  $25^\circ\text{C}$  colocándolo en el exterior, donde la temperatura es  $0^\circ\text{C}$ . Si la temperatura de la mantequilla desciende a  $15^\circ\text{C}$  después de 20 minutos, ¿a qué hora estará a  $5^\circ\text{C}$ ?

17. Cuando se disuelve azúcar en agua, la cantidad  $A$  de azúcar sin disolver después de  $t$  minutos satisface la ecuación diferencial  $dA/dt = -kA$  ( $k > 0$ ). Si 25% del azúcar se disuelve en un minuto, ¿cuánto tiempo tarda en disolverse la mitad del azúcar?

18. La intensidad  $I$  de la luz a una profundidad de  $x$  metros bajo la superficie de un lago satisface la ecuación diferencial  $dI/dx = -(1.4)I$ . (a) ¿A qué profundidad es la intensidad igual a la mitad de la intensidad  $I_0$  en la superficie (donde  $x = 0$ )? (b) ¿Cuál es la intensidad a una profundidad de 10 metros (como fracción de  $I_0$ )? (c) ¿A qué profundidad será la intensidad 1% de su valor en la superficie?

19. La presión barométrica  $p$  (en pulgadas de mercurio) a una altitud de  $x$  millas sobre el nivel del mar satisface la ecuación diferencial  $dp/dx = -(0.2)p$ ;  $p(0) = 29.92$ . (a) Calcule la presión barométrica a 10,000 pies y de nuevo a 30,000 pies. (b) Sin un acondicionamiento previo, pocas personas pueden sobrevivir cuando la presión disminuye a menos de 15 pulgadas de mercurio. ¿Qué tan alto es esto?

20. Un accidente en una planta nuclear ha contaminado el área circundante con un elemento radiactivo que decae de manera proporcional a su cantidad actual  $A(t)$ . El nivel inicial de radiación es 10 veces la cantidad máxima  $S$  que es segura y 100 días después sigue siendo 7 veces esa cantidad. (a) Establezca y resuelva una ecuación diferencial para determinar  $A(t)$ . (b) ¿Cuánto tiempo (redondeado a días después del accidente original) pasará, antes de que sea seguro para las personas el regreso al área?

## \*7.6 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden y aplicaciones

Una **ecuación diferencial de primer orden** es aquella en la que sólo aparece la primera derivada de la variable dependiente (y no las derivadas de orden superior). Es una ecuación diferencial de primer orden **lineal**, si se puede escribir en la forma

$$\frac{dx}{dt} = ax + b, \quad (1)$$

donde  $a$  y  $b$  denotan funciones de la variable independiente  $t$ . En este caso, analizamos aplicaciones en el caso particular en que los coeficientes  $a$  y  $b$  son *constantes*.

La ecuación (1) es separable, de modo que podemos separar las variables como en la sección 6.5 e integrar de inmediato. Si  $ax + b > 0$ , obtenemos

$$\int \frac{a \, dx}{ax + b} = \int a \, dt; \quad \ln(ax + b) = at + C.$$

Entonces, la aplicación de la función exponencial natural a ambos lados implica

$$ax + b = Ke^{at},$$

donde  $K = e^C$ . Cuando sustituimos  $t = 0$  y denotamos el valor resultante de  $x$  como  $x_0$ , tenemos que  $K = ax_0 + b$ , por lo que

$$ax + b = (ax_0 + b)e^{at}.$$

Por último, resolvemos esta ecuación para determinar la solución  $x = x(t)$  de la ecuación (1):

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{b}{a}\right)e^{at} - \frac{b}{a} \quad (2)$$

Aquí hemos supuesto que  $ax + b > 0$ , pero la ecuación (2) también proporciona la solución correcta en el caso  $ax + b < 0$  (véase el problema 17). En el problema 21 bosquejamos un método para resolver la ecuación (1) cuando los coeficientes  $a$  y  $b$  son funciones de  $t$  en vez de constantes. Sin embargo, la solución en la ecuación (2) para el caso de coeficientes constantes, será suficiente en las siguientes aplicaciones.

## CRECIMIENTO DE POBLACIONES CON INMIGRACIÓN

Consideremos una población  $P(t)$  con tasas de natalidad y mortandad constantes ( $\beta$  y  $\delta$  respectivamente), como en la sección 7.5, pero además con una tasa de inmigración constante de  $I$  personas por año que entran al país. Para tomar en cuenta la inmigración, debemos corregir nuestra deducción de la ecuación (2) en la sección 7.5 como sigue:

$$\begin{aligned} P(t + \Delta t) - P(t) &= \{\text{nacimientos}\} - \{\text{muertes}\} + \{\text{inmigrantes}\} \\ &\approx \beta P(t) \Delta t - \delta P(t) \Delta t + I \Delta t, \end{aligned}$$

de modo que

$$\frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} \approx (\beta - \delta)P(t) + I.$$

calculamos los límites cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  para así obtener la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$\frac{dP}{dt} = kP + I \quad (3)$$

con coeficientes constantes  $k = \beta - \delta$  e  $I$ . De acuerdo con la ecuación (2), la solución de la ecuación (3) es

$$P(t) = P_0 e^{kt} + \frac{I}{k}(e^{kt} - 1). \quad (4)$$

El primer término del lado derecho es el efecto de crecimiento natural de la población y el segundo término es el efecto de la inmigración.

**EJEMPLO 1** Consideremos la población de Estados Unidos, con  $P_0 = 249$  millones en 1990 ( $t = 0$ ). Queremos determinar el efecto de permitir la inmigración a razón de  $I = 0.5$  millones de personas por año durante los próximos 20 años, suponiendo una tasa anual de crecimiento de 1% anual, de modo que  $k = 0.01$ . Entonces

$$P_0 e^{kt} = 249 e^{(0.01)(20)} \approx 304.1 \quad (\text{millones})$$

y

$$\frac{I}{k}(e^{kt} - 1) = \frac{0.5}{0.01}(e^{(0.01)(20)} - 1) \approx 11.1 \quad (\text{millones}).$$

Así, el efecto de la inmigración será el incrementar la población de Estados Unidos en el año 2010 de 304.1 millones a 315.2 millones.

## CUENTAS DE AHORROS CON DEPÓSITOS CONTINUOS

Consideremos la cuenta de ahorros de la sección 7.5 que contiene  $A_0$  dólares inicialmente y que percibe intereses a una tasa anual  $r$  compuesta de manera continua. Supongamos ahora que los depósitos se suman a esta cuenta a razón de  $Q$  dólares por año. Para simplificar el modelo matemático, suponemos que estos depósitos se realizan de manera continua, en vez de (por ejemplo) mensualmente. Entonces, podemos considerar la cantidad  $A(t)$  en la cuenta en el instante  $t$  como una “población” de dólares, con una tasa de crecimiento natural (anual)  $r$  y con una “inmigración” (depósitos) a razón de  $Q$  dólares anualmente. Entonces, si simplemente cambiamos la notación de las ecuaciones (3) y (4), obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{dA}{dt} = rA + Q, \quad (5)$$

que tiene la solución

$$A(t) = A_0 e^{rt} + \frac{Q}{r}(e^{rt} - 1). \quad (6)$$

**EJEMPLO 2** Suponga que al nacer su hija, usted pretende que ella disponga de \$80,000 para sus gastos en la universidad cuando ella tenga 18 años. Planea lograrlo al hacer depósitos frecuentes y pequeños (esencialmente continuos) en un fondo, a razón de  $Q$  dólares por año. Este fondo acumulará un interés anual de 9% compuesto de manera continua. ¿Cuál debe ser el valor de  $Q$  para lograr su objetivo?

**Solución** Con  $A_0 = 0$  y  $r = 0.09$ , queremos que el valor de  $Q$  sea tal que con la ecuación (6) se obtenga

$$A(18) = 80,000.$$

Es decir, debemos determinar  $Q$  de modo que

$$80,000 = \frac{Q}{0.09}(e^{(0.09)(18)} - 1).$$

Cuando resolvemos esta ecuación, tenemos que  $Q \approx 1776.42$ . Así, usted deberá depositar \$1776.42 por año, o cerca de \$148.04 por mes, para tener \$80,000 en el fondo después de 18 años. Usted puede verificar que el total de depósitos será \$31,975.60 y que el interés total acumulado será \$48,024.40.

## ENFRIAMIENTO Y CALENTAMIENTO

De acuerdo con la **ley de enfriamiento de Newton** (o de calentamiento), la razón de cambio de la temperatura  $T$  de un cuerpo con respecto del tiempo es proporcional a la diferencia entre  $T$  y la temperatura  $A$  de su entorno. Supondremos que  $A$  es constante. Podemos traducir esta ley al lenguaje de las ecuaciones diferenciales si escribimos

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - A). \quad (7)$$

En este caso,  $k$  es una constante positiva; necesitamos el signo menos para que  $T'(t)$  sea negativa cuando  $T$  sea mayor que  $A$  y para que  $T'(t)$  sea positiva si  $A$  excede a  $T$ .

A partir de la ecuación (2), obtenemos la solución de la ecuación (7):

$$T(t) = A + (T_0 - A)e^{-kt}, \quad (8)$$

donde  $T_0 = T(0)$ .

**EJEMPLO 3** Un asado de 5 libras que inicialmente está a 50°F se coloca en un horno a 375°F cuando  $t = 0$ . La temperatura  $T(t)$  del asado es de 125°F cuando  $t = 75$  (minutos). ¿En qué momento estará el asado a término medio, a una temperatura de 150°F?

**Solución** Aunque bastaba sustituir  $A = 375$  y  $T_0 = 50$  en la ecuación (8), resolveremos explícitamente la ecuación diferencial

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 375) = k(375 - T)$$

que obtuvimos de la ecuación (7). Separamos las variables e integramos para obtener

$$\int \frac{dT}{375 - T} = \int k dt; \quad -\ln(375 - T) = kt + C.$$

Cuando  $t = 0$ ,  $T = T_0 = 50$ . La sustitución de esta información produce el valor  $C = -\ln 325$ , de modo que

$$-\ln(375 - T) = kt - \ln 325; \quad 375 - T = 325e^{-kt},$$

y por tanto

$$T = T(t) = 375 - 325e^{-kt}.$$

También sabemos que  $T = 125$  cuando  $t = 75$ . Esto implica que

$$k = \frac{1}{75} \ln \frac{325}{250} \approx 0.0035.$$

Así, lo único que debemos hacer es resolver la ecuación

$$150 = 375 - 325e^{-kt}.$$

Tenemos que  $t$  es aproximadamente 105, de modo que el asado debe permanecer en el horno durante 30 minutos aproximadamente.

## DIFUSIÓN DE INFORMACIÓN Y PROPAGACIÓN DE UNA ENFERMEDAD

Sea  $N(t)$  el número de personas (en una población fija  $P$ ) quienes en el instante  $t$  han escuchado cierta noticia difundida por los medios masivos. Bajo ciertas condiciones comunes, la razón de incremento de  $N$  con respecto del tiempo será proporcional al número de personas que aún no han escuchado las noticias. Así,

$$\frac{dN}{dt} = k(P - N). \quad (9)$$

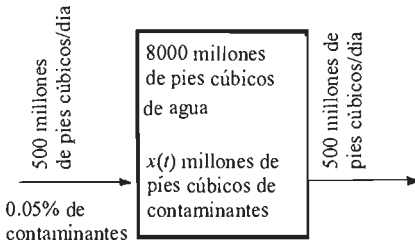
Si  $N(0) = 0$ , la solución de la ecuación (9) es

$$N(t) = P \cdot (1 - e^{-kt}). \quad (10)$$

Si conocemos  $P$  y algún valor posterior  $N(t_1)$ , podemos despejar  $k$  y por tanto determinar  $N(t)$  para toda  $t$ . El problema 15 ilustra esta situación.

Las diferentes enfermedades infecciosas se propagan de manera distinta. Podemos construir un modelo sencillo suponiendo que varias enfermedades infecciosas se propagan como la información: en una población fija  $P$ , la razón de incremento del número  $N(t)$  de las personas infectadas con la enfermedad es proporcional al número  $P - N$  de personas no infectadas aún. Entonces,  $N$  satisface la ecuación diferencial en (9). Véanse los problemas 24 y 25 para más aplicaciones.

## ELIMINACIÓN DE CONTAMINANTES



**Figura 7.6.1** El lago contaminado del ejemplo 4; los volúmenes están dados en millones de pies cúbicos

En el ejemplo 4 vimos un lago contaminado, probablemente por fábricas que operan en su orilla. Supongamos que la contaminación ha sido detenida, tal vez por una orden legal o una mejor tecnología. Nos preguntamos en cuánto tiempo los procesos naturales pueden reducir la concentración de contaminantes en el lago hasta un nivel aceptable.

**EJEMPLO 4** Consideremos un lago con un volumen de 8,000 millones de pies cúbicos y una concentración inicial de contaminantes de 0.25%. Un río que desemboca en el lago deposita 500 millones de pies cúbicos de agua con una concentración (baja) de contaminantes de 0.05% y un río que sale del lago elimina 500 millones de pies cúbicos de agua del lago diariamente (figura 7.6.1). Establecemos la hipótesis de simplificación de que el agua en el lago, incluyendo la eliminada por el segundo río, está perfectamente mezclada en todo instante. En tal caso, ¿en cuánto tiempo se reduce la concentración de contaminantes en el lago a 0.10%?

**Solución** Sea  $x(t)$  la cantidad de contaminantes en el lago después de  $t$  días, medida en millones de pies cúbicos. El volumen del lago es 8,000 millones de pies cúbicos y la cantidad inicial  $x(0)$  de contaminantes es

$$x_0 = (0.25\%)(8000) = (0.0025)(8000) = 20 \text{ (millones de pies cúbicos).}$$

Queremos saber cuando

$$x(t) = (0.10\%)(8000) = (0.0010)(8000) = 8 \text{ (millones de pies cúbicos).}$$

Construimos un modelo matemático de esta situación estimando el incremento  $\Delta x$  en  $x$  durante un breve intervalo de tiempo de duración  $\Delta t$  días. En ese intervalo, 5,000  $\Delta t$  millones de pies cúbicos fluyen hacia afuera del lago. Así,

$$\begin{aligned} \Delta x &= \{\text{contaminantes que entran}\} - \{\text{contaminantes que salen}\} \\ &\approx (0.0005)(500) \Delta t - \frac{x(t)}{8000} \cdot 500 \Delta t = \frac{1}{4} \Delta t - \frac{x}{16} \Delta t. \end{aligned}$$

Así,

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \approx \frac{1}{4} - \frac{x}{16}.$$

Esto implica que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{4} - \frac{x}{16}.$$

Con  $x_0 = 20$  y la ecuación (2) se obtiene la solución

$$x(t) = 4 + 16e^{-t/16}.$$

Podemos determinar el valor de  $t$  para el que  $x(t) = 8$  resolviendo la ecuación  $8 = 4 + 16e^{-t/16}$ . Esto implica

$$t = 16 \ln 4 \approx 22.2 \text{ (días).}$$

## 7.6 Problemas

En los problemas 1 a 10, utilice el método de derivación de la ecuación (2), en vez de la misma ecuación, para determinar la solución del problema con condiciones iniciales dadas.

1.  $\frac{dy}{dx} = y + 1; \quad y(0) = 1$

2.  $\frac{dy}{dx} = 2 - y; \quad y(0) = 3$

3.  $\frac{dy}{dx} = 2y - 3; \quad y(0) = 2$

4.  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4} - \frac{y}{16}; \quad y(0) = 20$

5.  $\frac{dx}{dt} = 2(x - 1); \quad x(0) = 0$

6.  $\frac{dx}{dt} = 2 - 3x; \quad x(0) = 4$

7.  $\frac{dx}{dt} = 5(x + 2); \quad x(0) = 25$

8.  $\frac{dx}{dt} = -3 - 4x; \quad x(0) = -5$

9.  $\frac{dv}{dt} = 10(10 - v); \quad v(0) = 0$

10.  $\frac{dv}{dt} = -5(10 - v); \quad v(0) = -10$

11. Zembla tenía una población de 1.5 millones en 1990. Suponga que la población de este país crece continuamente a una tasa anual del 4% y que Zembla recibe 50,000 inmigrantes por año. ¿Cuál será su población en el año 2010?

12. Cuando se saca un pastel del horno, la temperatura del pastel es de 210°F. Se deja enfriar a temperatura del cuarto, que es de 70°F. Después de 30 minutos la temperatura del pastel es de 140°F. ¿Cuándo estará a 100°F?

13. Se hacen pagos continuamente sobre una hipoteca (préstamo original) de  $P_0$  dólares a una tasa constante de  $c$  dólares por mes. Sea  $P(t)$  el balance (lo que aún se debe) después de  $t$  meses y sea  $r$  la tasa de interés mensual que paga el usuario de la hipoteca. (Por ejemplo, si la tasa de interés anual es 6%,  $r = 0.06/12 = 0.005$ .) Deduzca la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = rP - c, \quad P(0) = P_0.$$

14. Su primo debe pagar un préstamo para automóvil de \$3,600 de manera continua, durante un periodo de 36 meses. Aplique el resultado del problema 13 para determinar el pago mensual requerido si la tasa de interés anual es de (a) 12%; (b) 18%.

15. Un rumor acerca de la existencia de tiotimolina en el agua potable comienza a difundirse un día en una ciudad con una población de 100,000 personas. Después de una semana,

10,000 han oído el rumor. Suponiendo que la tasa de incremento del número de personas que han oído el rumor es proporcional al número de personas que no lo han escuchado todavía, ¿cuánto tiempo pasará hasta que la mitad de la población de la ciudad haya escuchado el rumor?

16. Un tanque contiene 1,000 L de una solución que consta de 50 kg de sal disuelta en agua. Se bombea agua pura hacia el tanque, a razón de 5 litros/segundo y la mezcla (que se mantiene uniforme al revolverla) se bombea hacia afuera con la misma razón. ¿Después de cuántos segundos quedarán solamente 10 kg de sal en el tanque?

17. Deduzca la solución de la ecuación (2) a partir de la ecuación (1), suponiendo que  $ax + b < 0$ .

18. Suponga que un cuerpo se mueve a través de un medio resistente con resistencia proporcional a su velocidad  $v$ , de modo que  $dv/dt = -kv$ . (a) Muestre que su velocidad  $v(t)$  y posición  $x(t)$  en el instante  $t$  están dadas

$$v(t) = v_0 e^{-kt} \quad \text{y} \quad x(t) = x_0 + \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt}).$$

(b) Concluya que el cuerpo recorre solamente una distancia finita  $v_0/k$ .

19. Una lancha de motor se mueve a 40 pies/segundo, cuando su motor se detiene súbitamente; 10 segundos después, la lancha ha reducido su velocidad a 20 pies/segundo. Como en el problema 18, suponga que la resistencia que encuentra es proporcional a su velocidad. ¿Qué distancia recorrerá la lancha?

20. La aceleración de un Lamborghini es proporcional a la diferencia entre 250 km/h y la velocidad de este auto deportivo. Si este auto puede acelerar desde el reposo hasta 100 km/h en 10 segundos, ¿cuánto tiempo tardará el automóvil en acelerar del reposo a 200 km/h?

21. Considere la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x(t) = q(t)$$

con coeficientes variables. Sea  $P(t)$  una primitiva de  $p(t)$ . Multiplique ambos lados de la ecuación dada por  $e^{P(t)}$ , y observe que el lado izquierdo de la ecuación resultante es  $D_t[e^{P(t)}x(t)]$ . Concluya mediante una integración que

$$x(t) = e^{-P(t)} \left[ \int e^{P(t)} q(t) dt + C \right].$$

22. Utilice el método del problema 21 para deducir la solución

$$x(t) = x_0 e^{-at} + b \frac{e^{ct} - e^{-at}}{a + c}$$

de la ecuación diferencial  $dx/dt + ax = be^{ct}$  (bajo la hipótesis  $a + c \neq 0$ ).

23. Una ingeniero de 30 años de edad acepta un puesto con un salario inicial de \$30,000/año. Su salario  $S$  se incrementa de manera exponencial, con

$$S(t) = 30e^{(0.05)t}$$

miles de dólares después de  $t$  años. Mientras tanto, el 12% de su salario se deposita de manera continua en una cuenta de retiro, que acumula un interés a una tasa anual de 6% compuesta de manera continua. (a) Estime  $\Delta A$  en términos de  $\Delta t$  para deducir esta ecuación para la cantidad  $A(t)$  de su cuenta de retiro en el instante  $t$ :

$$\frac{dA}{dt} - (0.06)A = (3.6)e^{(0.05)t}.$$

(b) Aplique el resultado del problema 22 para calcular  $A(40)$ , la cantidad disponible para su retiro a la edad de 70 años.

24. Pottstown tiene una población fija de 10,000 personas. El primero de enero, 1000 personas enferman de gripe; el primero de abril, 2000 personas están enfermas. Suponga que la tasa de incremento del número  $N(t)$  de personas enfermas de gripe es proporcional al número de personas que no lo están. ¿Cuántas personas están enfermas el primero de octubre?

25. Sea  $x(t)$  el número de personas en Athens, Georgia (con una población de 100,000) que tienen la gripe de Tokio. La razón de cambio de  $x(t)$  es proporcional al número de personas en Athens que no tienen aún la enfermedad. Suponga que 20,000 tienen gripe el primero de marzo y que 60,000 están enfermos el 16 de marzo. (a) Establezca y resuelva una ecuación diferencial para determinar  $x(t)$ . (b) ¿En qué fecha serán 80,000 las personas infectadas con la enfermedad? (c) ¿Qué ocurre a largo plazo?

## Capítulo 7 Repaso: DEFINICIONES, CONCEPTOS, RESULTADOS

Utilice esta lista como una guía de los conceptos que tal vez necesite revisar.

- Las leyes de los exponentes
- Las leyes de los logaritmos
- La definición de la función logaritmo natural
- La gráfica de  $y = \ln x$
- La definición del número  $e$
- La definición de la función exponencial natural
- La relación de la función inversa entre  $\ln x$  y  $e^x$
- Las gráficas de  $y = e^x$  y  $y = e^{-x}$
- Derivación de  $\ln u$  y  $e^u$ , donde  $u$  es una función diferenciable de  $x$
- La orden de magnitud de  $(\ln x)/x^k$  y  $x^k/e^x$  cuando  $x \rightarrow +\infty$

- El número  $e$  como un límite
- La definición de las funciones exponenciales y logarítmicas generales
- Derivada de  $a^u$  y  $\log_a u$
- Derivada logarítmica
- Solución de la ecuación diferencial  $dx/dt = kx$
- La ecuación de crecimiento natural
- Decaimiento radiactivo y fechado con radiocarbono
- Solución de una ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficientes constantes
- Solución de ecuaciones diferenciales separables de primer orden
- Evaluación de la constante de integración en un problema con condiciones iniciales

## Capítulo 7 Problemas diversos

Derive las funciones dadas en los problemas 1 a 24.

- |   |  |  |                                  |
|---|--|--|----------------------------------|
| 1. $f(x) = \ln 2\sqrt{x}$                             | 2. $f(x) = e^{-2\sqrt{x}}$                                     | 17. $f(x) = \exp(\sqrt{1 + \sin^2 x})$ | 18. $f(x) = \frac{x}{(\ln x)^2}$ |
| 3. $f(x) = \ln(x - e^x)$                              | 4. $f(x) = 10^{\sqrt{x}}$                                      | 19. $f(x) = \ln(3^x \sin x)$           | 20. $f(x) = (\ln x)^x$           |
| 5. $f(x) = \ln(2^x)$                                  | 6. $f(x) = \log_{10}(\sin x)$                                  | 21. $f(x) = x^{1/x}$                   | 22. $f(x) = x^{\sin x}$          |
| 7. $f(x) = x^3 e^{-1/x^2}$                            | 8. $f(x) = x(\ln x)^2$   | 23. $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$           | 24. $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$   |
| 9. $f(x) = (\ln x)[\ln(\ln x)]$                       | 10. $f(x) = \exp(10^x)$  |  |                                  |
| 11. $f(x) = 2^{\ln x}$                                | 12. $f(x) = \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right)$ |  |                                  |
| 13. $f(x) = e^{(x+1)/(x-1)}$                          |  |  |                                  |
| 14. $f(x) = \ln(\sqrt{1+x}\sqrt[3]{2+x^2})$           |  |  |                                  |
| 15. $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{3-4x^2}\right)^{3/2}$ | 16. $f(x) = \sin(\ln x)$                                       |  |                                  |

Evalúe las integrales indefinidas en los problemas 25 a 36.

- |   |   |
|---|---|
| 25. $\int \frac{dx}{1-2x}$              | 26. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x^{3/2}} dx$        |
| 27. $\int \frac{3-x}{1+6x-x^2} dx$      | 28. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$ |
| 29. $\int \frac{\sin x}{2 + \cos x} dx$ | 30. $\int \frac{e^{-1/x^2}}{x^3} dx$            |



$$31. \int \frac{10^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \quad 32. \int \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$$

$$33. \int e^x \sqrt{1 + e^x} dx \quad 34. \int \frac{1}{x} \sqrt{1 + \ln x} dx$$

$$35. \int 2^x 3^x dx \quad 36. \int \frac{dx}{x^{1/3}(1 + x^{2/3})}$$

Resuelva los problemas con condiciones iniciales en los problemas 37 a 44.

$$37. \frac{dx}{dt} = 2t; \quad x(0) = 17$$

$$38. \frac{dx}{dt} = 2x; \quad x(0) = 17$$

$$39. \frac{dx}{dt} = e^t; \quad x(0) = 2$$

$$40. \frac{dx}{dt} = e^x; \quad x(0) = 2$$

$$41. \frac{dx}{dt} = 3x - 2; \quad x(0) = 3$$

$$42. \frac{dx}{dt} = x^2 t^2; \quad x(0) = -1$$

$$43. \frac{dx}{dt} = x \cos t; \quad x(0) = \sqrt{2}$$

$$44. \frac{dx}{dt} = \sqrt{x}; \quad x(1) = 0$$

Grafique las ecuaciones dadas en los problemas 45 a 49.

$$45. y = e^{-x} \sqrt{x} \quad 46. y = x - \ln x$$

$$47. y = \sqrt{x} - \ln x \quad 48. y = x(\ln x)^2$$

$$49. y = e^{-1/x}$$

50. Determine la longitud de la curva  $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\ln x$  de  $x = 1$  a  $x = e$ .

51. Un almacén de granos tiene  $B$  bushels de grano, que se deteriora de tal forma que solamente se podrán vender  $B \cdot 2^{-t/12}$  bushels después de  $t$  meses. Mientras tanto, el precio del grano en el mercado se incrementa linealmente: Después de  $t$  meses será de  $2 + (t/12)$  dólares por bushel. ¿Después de cuántos meses debe venderse el grano para maximizar los ingresos obtenidos?

52. Usted ha pedido un préstamo de \$1000 a 10% de interés compuesto continuo anual, para plantar madera en una extensión de tierra. Su acuerdo es reponer el préstamo, más los intereses, cuando la madera se haya cortado y vendido. Si la madera cortada puede venderse después de  $t$  años por  $800 \exp(\frac{1}{2}\sqrt{t})$  dólares, ¿cuándo debe cortarlo y venderlo para maximizar la ganancia?

53. Se estudian muestras de sangre de 1000 estudiantes para verificar si tienen cierta enfermedad que se presenta en el 1%

de la población. Cada prueba cuesta \$5, por lo que costaría \$5000 verificar todas las muestras individuales. Sin embargo, suponga que se forman "lotes" con  $x$  muestras cada una al combinar la mitad de las muestras individuales y que primero se verifican estos lotes (a \$5 cada uno). Sólo en el caso de que el lote sea positivo (la probabilidad de que suceda esto es  $1 - (0.99)^x$ ) las  $x$  muestras de este lote se verifican individualmente.

(a) Demuestre que el número total esperado de pruebas es

$$f(x) = \frac{1000}{x} [(1)(0.99)^x + (x+1)(1 - (0.99)^x)]$$

$$= 1000 + \frac{1000}{x} - 1000 \cdot (0.99)^x \quad \text{si } x \geq 2.$$

(b) Muestre que el valor de  $x$  que minimiza  $f(x)$  es una raíz de la ecuación

$$x = \frac{(0.99)^{-x/2}}{[\ln(100/99)]^{1/2}}.$$

Como el denominador es aproximadamente 0.1, sería más conveniente resolver la ecuación más sencilla  $x = 10 \cdot (0.99)^{-x/2}$ .

(c) Con los resultados de las partes (a) y (b), calcule el costo del uso de este método por lotes para verificar las 1000 muestras originales.

54. Deduzca del problema 63 en la sección 7.2 que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1.$$

55. Muestre que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

considerando el valor de  $D_x \ln x$  para  $x = 1$ . Por tanto, muestre que  $\ln(1+x) \approx x$  si  $x$  es muy cercana a cero.

56. (a) Demuestre que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a$$

considerando la definición de la derivada de  $a^x$  en  $x = 0$ . (b) Sustituya  $h = 1/n$  para obtener

$$\ln a = \lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{1/n} - 1).$$

(c) Aproxime  $\ln 2$  considerando  $n = 1024 = 2^{10}$  y utilizando solamente la tecla de raíz cuadrada (10 veces) en una calculadora de bolsillo.

57. Suponga que la población de peces  $P(t)$  en un lago, es atacada por una enfermedad en el instante  $t = 0$ , con el resultado de que

$$\frac{dP}{dt} = -3\sqrt{P}$$

de allí en adelante. El tiempo  $t$  se mide en semanas. Inicialmente, hay  $P_0 = 900$  peces en el lago. ¿Cuánto tiempo tardarán en morir todos los peces?

58. Un auto de carreras que se desliza por una superficie es desacelerado por fuerzas de fricción proporcionales a su velocidad. Suponga que la desaceleración inicial es 2 metros/seg<sup>2</sup> y que el auto recorre una distancia total de 1800 m. ¿Cuál era su velocidad inicial? Véase el problema 18 de la sección 7.6.

59. Un préstamo hipotecario de \$120,000 se paga continuamente en un periodo de 25 años. Aplique el resultado del problema 13 en la sección 7.6 para determinar el monto del pago mensual si la tasa de interés compuesto continuo anual es de (a) 8%; (b) 12%.

60. Una lancha de motor pesa 32,000 libras y su motor proporciona un empuje de 5000 libras. Suponga que la resistencia del agua es de 100 libras por cada pie por segundo de la velocidad del bote. Entonces la velocidad  $v(t)$  (en pies/segundo) del bote en el instante  $t$  (en segundos) satisface la ecuación diferencial

$$1000 \frac{dv}{dt} = 5000 - 100v.$$

Determine la velocidad máxima que puede alcanzar el bote si parte del reposo.

61. La temperatura dentro de mi congelador es  $-16^\circ\text{C}$  y la temperatura del cuarto es constante e igual a  $20^\circ\text{C}$ . A las 11 P.M. se interrumpe la corriente eléctrica durante una tormenta de nieve. A las 6 A.M. de la mañana siguiente veo que la temperatura del congelador se elevó a  $-10^\circ\text{C}$ . ¿A qué hora alcanzará la temperatura en el congelador el valor crítico  $0^\circ\text{C}$  si aún no hay corriente eléctrica?

62. Suponga que la acción de los fluorocarbonos disminuye la capa de ozono en la atmósfera en 0.25% anualmente, de modo que la cantidad  $A$  de ozono en la atmósfera satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{1}{400}A \quad (t \text{ en años}).$$

(a) ¿Qué porcentaje de la cantidad original  $A_0$  de ozono atmosférico permanecerá dentro de 25 años? (b) ¿Cuánto tiempo tardará en reducirse a la mitad de su cantidad original el ozono en la atmósfera?

63. Un automóvil parte del reposo y viaja por una carretera recta. Su motor proporciona una aceleración constante de  $a$  pies por segundo por segundo. La resistencia del aire y la fricción de la carretera causan una desaceleración de  $\rho$  pies por segundo por segundo por cada pie por segundo de la

velocidad del automóvil. (a) Muestre que la velocidad del automóvil después de  $t$  segundos es

$$v(t) = \frac{a}{\rho}(1 - e^{-\rho t}).$$

(b) Si  $a = 17.6$  pies/seg<sup>2</sup> y  $\rho = 0.1$ , determine  $v$  cuando  $t = 10$  segundos y determine también la velocidad límite cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Dé cada respuesta en millas por hora y en pies por segundo.

64. Inmediatamente después de un accidente en una planta nuclear, el nivel de radiación fue de 10 veces el límite de seguridad. Después de 6 meses baja a 9 veces el límite de seguridad. Suponiendo un decaimiento exponencial, ¿cuánto tardará la radiación (en años después del accidente) en regresar al límite de seguridad?

65. La figura 7.PD.1 muestra las gráficas de  $f(x) = x^{1/2}$ ,  $g(x) = \ln x$  y  $h(x) = x^{1/3}$  en el intervalo  $[0.2, 10]$ . Puede ver que la gráfica de  $f$  permanece por arriba de la gráfica de  $\ln x$ , mientras que la gráfica de  $h$  está debajo de la gráfica de  $\ln x$ .

Pero como  $\ln x$  crece *menos* rápido que cualquier potencia positiva de  $x$ , la gráfica de  $h$  debe cruzar la gráfica de  $\ln x$  y elevarse por arriba de ésta. Finalmente, usted puede creer fácilmente que, para una elección adecuada de  $p$  entre 2 y 3, la gráfica de  $j(x) = x^{1/p}$  no estará por debajo de la gráfica de  $\ln x$  pero será tangente a la gráfica de  $\ln x$  en cierto punto.

(a) Muestre que  $f(x) > \ln x$  para toda  $x > 0$  determinando el valor mínimo global de  $f(x) - \ln x$  en el intervalo  $(0, \infty)$ . (b) Utilice el método de Newton para determinar el valor de  $x$  donde  $h(x)$  cruza la gráfica de  $\ln x$  y se eleva por arriba de ésta (el valor de  $x$  no dado en la figura 7.PD.1). (c) Determine el valor de  $p$  donde la gráfica de  $j(x)$  es tangente a la gráfica de  $\ln x$  en el punto  $(q, \ln q)$ .

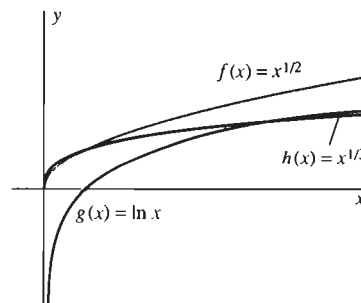


Figura 7.PD.1 Las tres funciones del problema 65

# Más acerca del cálculo de las funciones trascendentes

□ En el siglo XVIII, la notable familia suiza Bernoulli fue para las matemáticas lo que la familia Bach fue para la música. Ocho distintos Bernoulli fueron lo bastante importantes para que dos siglos más tarde fueran considerados en el *Dictionary of Scientific Biography*. Los hermanos James (1654–1705) y John Bernoulli jugaron un papel crucial en los primeros desarrollos de la versión de Leibniz del cálculo, basada en diferenciales infinitamente pequeñas; esta versión predominó en la ciencia del continente europeo sobre la versión de Newton, basada más explícitamente en límites de razones. Fue James Bernoulli quien introdujo la palabra “integral” al sugerir el nombre de *cálculo integral* (en vez del *calculus summatorius* original de Leibniz) para el tema inverso al *calculus differentialis*.

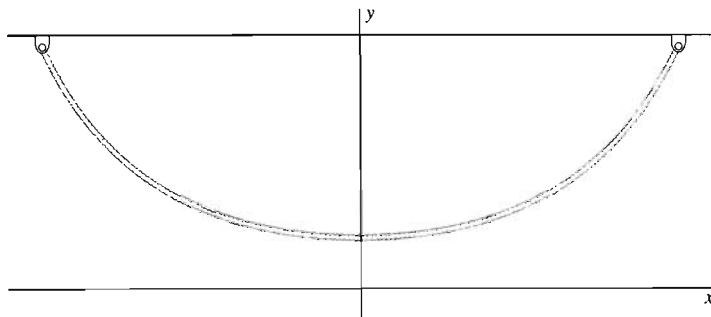
□ John Bernoulli estudió por primera vez las matemáticas con su hermano mayor James en la universidad de Basilea, Suiza, pero pronto la comprensión de las matemáticas de ambos se equiparó. En 1691, John Bernoulli visitó París y conoció al joven marqués de l'Hôpital (1661 – 1704), quien estaba ansioso por aprender los secretos del nuevo cálculo infinitesimal. En respuesta a

un generoso apoyo mensual, Bernoulli estuvo de acuerdo en trabajar como tutor del poderoso marqués y continuó las lecciones (al igual que el arreglo financiero) por correo después de regresar a Basel. El resultado de esta correspondencia fue el primer libro de texto del cálculo diferencial, publicado por l'Hôpital en 1696. Este texto se recuerda principalmente por incluir un resultado de Bernoulli conocido como la “regla de l'Hôpital”. Este resultado se refiere al límite cuando  $x \rightarrow a$  de un cociente  $f(x)/g(x)$  cuyo numerador y denominador tienden a 0 cuando  $x \rightarrow a$ , por lo que la simple sustitución del valor  $x = a$  daría la “forma indeterminada”  $0/0$ . La definición

de la derivada implica tal límite, de modo que las formas indeterminadas invaden todo el cálculo.

□ James y John Bernoulli trabajaron en (y resolvieron) el *problema de la catenaria*, que consiste en determinar la forma de un cable colgante suspendido entre dos puntos fijos, suponiendo que no es elástico (no se puede estirar) pero es perfectamente flexible. Los Bernoulli mostraron que, en términos de funciones hiperbólicas, dicho cable colgante asume la forma de una curva del tipo

$$y = a \cosh(x/a).$$



¿Cuál es la forma de un cable colgante?

## 8.1 Introducción

La función  $f$  es una **función algebraica** si  $y = f(x)$  satisface una ecuación de la forma

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_1(x)y + a_0(x) = 0,$$

donde los coeficientes  $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$  son polinomios en  $x$ . Por ejemplo, como la ecuación  $y^2 - p(x) = 0$  tiene la forma anterior, la raíz cuadrada del polinomio  $p(x)$  (es decir,  $f(x) = \sqrt{p(x)}$ ) es una función algebraica. La ecuación  $q(x)y - p(x) = 0$  también tiene la forma necesaria, de modo que una función racional [un cociente de polinomios; en este caso,  $y = p(x)/q(x)$ ] también es una función algebraica.

Una función que *no* es algebraica es **trascendente**. La función logaritmo natural  $\ln x$  y la función exponencial natural  $e^x$  son funciones trascendentes, al igual que las seis funciones trigonométricas familiares. En este capítulo estudiaremos las restantes funciones trascendentes de carácter elemental: las funciones trigonométricas inversas y las funciones hiperbólicas. Estas funciones tienen amplias aplicaciones científicas y proporcionan la base para ciertos métodos de integración importantes (como se analiza en el capítulo 9). En las secciones 8.3 y 8.4 también estudiaremos ciertas expresiones de límite (“formas indeterminadas”) relacionadas por lo general con funciones trascendentes.

## 8.2 Funciones trigonométricas inversas

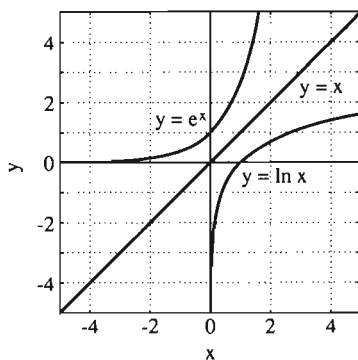
Si la función  $f$  es inyectiva en su dominio de definición, entonces tiene una función inversa  $f^{-1}$ . Esta función inversa se define por el hecho de que

$$f^{-1}(x) = y \quad \text{si y sólo si} \quad f(y) = x. \quad (1)$$

Por ejemplo, desde el capítulo 7 nos familiarizamos con el par de funciones inversas

$$f(x) = e^x \quad \text{y} \quad f^{-1}(x) = \ln x.$$

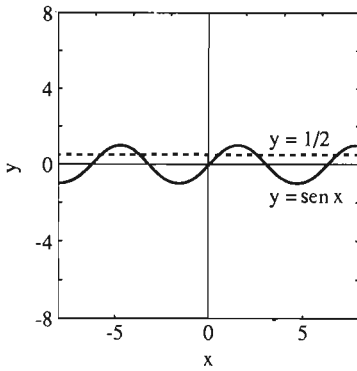
Desde un punto de vista geométrico, la ecuación (1) implica que las gráficas  $y = f(x)$  y  $y = f^{-1}(x)$  son reflexiones a lo largo de la recta de  $45^\circ$ ,  $y = x$ , al igual que las conocidas gráficas de  $y = e^x$  y  $y = \ln x$  de la figura 8.2.1.



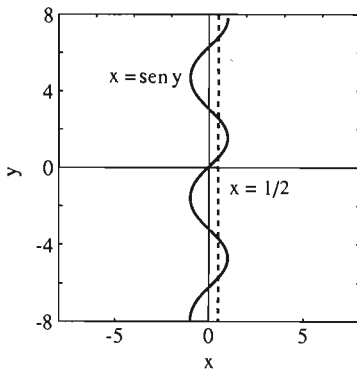
**Figura 8.2.1** Las gráficas de  $y = e^x$  y  $y = \ln x$  son reflexiones a lo largo de la recta  $y = x$

### LA FUNCIÓN SEÑO INVERSO

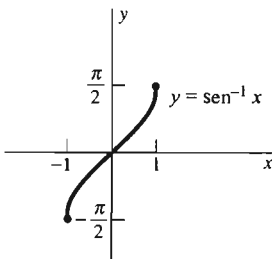
Aquí queremos definir las inversas de las funciones trigonométricas; comenzaremos con la función seno inverso. Sin embargo, debemos enfrentar el hecho de que las funciones trigonométricas no son inyectivas, pues el periodo de cada una de



**Figura 8.2.2** Múltiples valores de  $x$  tales que  $\text{sen } x = \frac{1}{2}$



**Figura 8.2.3** Existen muchas opciones posibles para  $y = \text{sen}^{-1}(\frac{1}{2})$



**Figura 8.2.4** La gráfica de  $y = \text{sen}^{-1} x = \arcsen x$

ellas es  $\pi$  o  $2\pi$ . Por ejemplo,  $\text{sen } x = 1/2$  si  $x$  es  $\pi/6$  más cualquier múltiplo de  $2\pi$  o  $5\pi/6$  más cualquier múltiplo de  $2\pi$ . Todos estos valores de  $x$ , todos con el seno igual a  $1/2$ , corresponden a los múltiples puntos de intersección de la gráfica  $y = \text{sen } x$  y la recta horizontal  $y = 1/2$  en la figura 8.2.2.

La figura 8.2.3 es la reflexión de la figura 8.2.2 con respecto de la recta de  $45^\circ$ ,  $y = x$ . Las múltiples intersecciones de  $x = \text{sen } y$  y la recta vertical  $x = \frac{1}{2}$  indican que debemos hacer una elección para definir  $\text{sen}^{-1}(\frac{1}{2})$ . Es decir, *no podemos* definir  $y = \text{sen}^{-1}x$ , la inversa de la función seno, diciendo simplemente que  $y$  es el número tal que  $\text{sen } y = x$ .<sup>§</sup> Existen *muchos* valores de  $y$ , y debemos especificar cuál valor particular de éstos vamos a utilizar.

Hacemos esto restringiendo de manera adecuada el dominio de la función seno. Puesto que la función  $\text{sen } x$  es creciente en  $[-\pi/2, \pi/2]$  y su rango de valores es  $[-1, 1]$ , para cada  $x$  en  $[-1, 1]$  existe *un* número  $y$  en  $[-\pi/2, \pi/2]$  tal que  $\text{sen } y = x$ . Esta observación conduce a la siguiente definición de la función *seno inverso* (o *arco seno*), que se denota  $\text{sen}^{-1}x$  o  $\arcsen x$ .

**Definición** La función *seno inverso*

La función *seno inverso* (o *arco seno*) se define como sigue:

$$y = \text{sen}^{-1}x \quad \text{si y sólo si} \quad \text{sen } y = x, \quad (2)$$

donde  $-1 \leq x \leq 1$  y  $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ .

Así, si  $x$  está entre  $-1$  y  $1$  (inclusive), entonces  $\text{sen}^{-1}x$  es ese número  $y$  entre  $-\pi/2$  y  $\pi/2$  tal que  $\text{sen } y = x$ . De manera aún más breve,  $\arcsen x$  es el ángulo (en radianes) más cercano a cero cuyo seno es  $x$ . Por ejemplo,

$$\text{sen}^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}, \quad \text{sen}^{-1} 0 = 0, \quad \text{sen}^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2},$$

y  $\text{sen}^{-1} 2$  no existe.

Si intercambiamos  $x$  y  $y$  en la ecuación  $\text{sen } y = x$  obtenemos  $y = \text{sen } x$ , por lo que la ecuación (2) implica que la gráfica de  $y = \text{sen}^{-1}x$  es la reflexión de la gráfica de  $y = \text{sen } x$ ,  $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ , con respecto de la recta  $y = x$  (figura 8.2.4).

La ecuación (2) también implica que

$$\text{sen}(\text{sen}^{-1}x) = x \quad \text{si } -1 \leq x \leq 1 \quad \text{y} \quad (3a)$$

$$\text{sen}^{-1}(\text{sen } x) = x \quad \text{si } -\pi/2 \leq x \leq \pi/2. \quad (3b)$$

Puesto que la derivada de  $\text{sen } x$  es positiva para  $-\pi/2 < x < \pi/2$ , el teorema 1 de la sección 7.1 implica que  $\text{sen}^{-1}x$  es derivable en  $(-1, 1)$ . Por tanto, podemos derivar ambos lados de la identidad en (3a), pero comenzaremos escribiéndola de la forma

$$\text{sen } y = x,$$

donde  $y = \text{sen}^{-1}x$ . Después, al derivar con respecto de  $x$ , obtenemos

$$(\cos y) \frac{dy}{dx} = 1,$$

<sup>§</sup> El símbolo  $-1$  en la notación  $\text{sen}^{-1}x$  no es un exponente, *no* significa  $(\text{sen } x)^{-1}$ .

de modo que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Es correcto considerar la raíz cuadrada positiva en este cálculo, pues  $\cos y > 0$  para  $-\pi/2 < y < \pi/2$ . Así,

$$D_x \operatorname{sen}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (4)$$

si  $-1 < x < 1$ . Cuando combinamos este resultado con la regla de la cadena, obtenemos

$$D_x \operatorname{sen}^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot \frac{du}{dx} \quad (5)$$

si  $u$  es una función derivable con valores en el intervalo  $(-1, 1)$ .

**EJEMPLO 1** Si  $y = \operatorname{sen}^{-1} x^2$ , de la ecuación (5), con  $u = x^2$ , se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2)^2}} \cdot 2x = \frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}.$$

La definición de la función coseno inverso es similar a la de la función seno inverso, excepto que ahora restringimos la función coseno al intervalo  $[0, \pi]$ , donde es una función decreciente (figura 8.2.5). Así, la **función coseno inverso** (o **arco coseno**) se define por medio de la regla

$$y = \operatorname{cos}^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad \cos y = x, \quad (6)$$

donde  $-1 \leq x \leq 1$  y  $0 \leq y \leq \pi$ . Así,  $\operatorname{cos}^{-1} x$  es el ángulo en  $[0, \pi]$  cuyo coseno es  $x$ . Por ejemplo,

$$\operatorname{cos}^{-1} 1 = 0, \quad \operatorname{cos}^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{cos}^{-1}(-1) = \pi.$$

Podemos calcular la derivada de  $\operatorname{cos}^{-1} x$ , que también se escribe como  $\operatorname{arc} \operatorname{cos} x$ , derivando ambos lados de la identidad

$$\cos(\operatorname{cos}^{-1} x) = x \quad (-1 < x < 1).$$

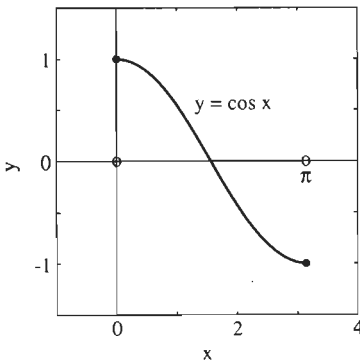
Los cálculos son similares a los de  $D_x \operatorname{sen}^{-1} x$  y conducen al resultado

$$D_x \operatorname{cos}^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

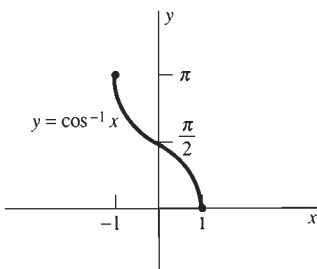
Y si  $u$  denota una función derivable con valores en  $(-1, 1)$ , la regla de la cadena implica entonces

$$D_x \operatorname{cos}^{-1} u = -\frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot \frac{du}{dx}. \quad (7)$$

La figura 8.2.6 muestra la gráfica de  $y = \operatorname{cos}^{-1} x$  como la reflexión de la gráfica de  $y = \cos x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ , con respecto de la recta  $y = x$ .



**Figura 8.2.5** La función  $\cos x$  es decreciente en  $[0, \pi]$ .



**Figura 8.2.6** La gráfica de  $y = \operatorname{cos}^{-1} x = \operatorname{arc} \operatorname{cos} x$

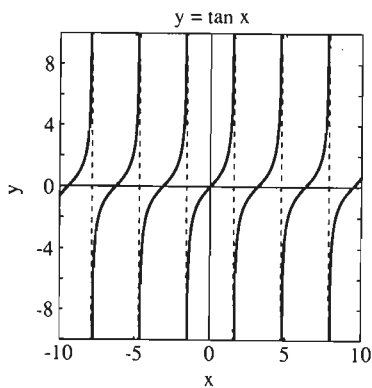


Figura 8.2.7 Ramas de  $y = \tan x$

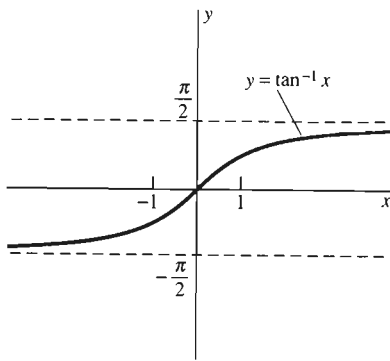


Figura 8.2.8 La función tangente inversa tiene como dominio a todos los números reales  $x$

## LA FUNCIÓN TANGENTE INVERSA

Observemos en la figura 8.2.7 que la función tangente es creciente en el intervalo abierto  $(-\pi/2, \pi/2)$  y que su rango de valores es toda la recta real. Por tanto, podemos definir la función *tangente inversa* (o *arco tangente*), que se denota por  $\tan^{-1}x$  o por  $\arctan x$ , como la inversa de  $y = \tan x$ ,  $-\pi/2 < x < \pi/2$ .

### Definición La función tangente inversa

La función *tangente inversa* (o *arco tangente*) se define como sigue:

$$y = \tan^{-1}x \quad \text{si y sólo si} \quad \tan y = x, \quad (8)$$

donde  $x$  es cualquier número real y  $-\pi/2 < y < \pi/2$ .

Como la función tangente toma todos los valores reales,  $\tan^{-1}x$  está definida para todo número real  $x$ ;  $\tan^{-1}x$  es ese número  $y$ , entre  $-\pi/2$  y  $\pi/2$ , cuya tangente es  $x$ . La gráfica de  $y = \tan^{-1}x$  es la reflexión de la gráfica de  $y = \tan x$ ,  $-\pi/2 < x < \pi/2$ , con respecto de la recta  $y = x$  (figura 8.2.8).

La ecuación (8) implica que

$$\tan(\tan^{-1}x) = x \quad \text{para toda } x \quad y \quad (9a)$$

$$\tan^{-1}(\tan x) = x \quad \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2. \quad (9b)$$

Como la derivada de  $\tan x$  es positiva para toda  $x$  en el intervalo  $(-\pi/2, \pi/2)$ , el teorema 1 de la sección 7.1 implica que  $\tan^{-1}x$  es derivable para toda  $x$ . Por tanto, podemos derivar ambos lados de la identidad en la ecuación (9a), pero primero la escribimos de la forma

$$\tan y = x$$

donde  $y = \tan^{-1}x$ . Entonces

$$(\sec^2 y) \frac{dy}{dx} = 1;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Así,

$$D_x \tan^{-1}x = \frac{1}{1 + x^2}, \quad (10)$$

y si  $u$  es una función diferenciable de  $x$ , entonces

$$D_x \tan^{-1}u = \frac{1}{1 + u^2} \cdot \frac{du}{dx}. \quad (11)$$

La definición de la función cotangente inversa es similar a la de la función tangente inversa, excepto que ahora restringimos la función cotangente al intervalo  $(0, \pi)$ , donde es una función decreciente que asume todos los valores reales. Así, la **función cotangente inversa** (o **arco cotangente**) se define como

$$y = \cot^{-1}x \quad \text{si y sólo si} \quad \cot y = x, \quad (12)$$

donde  $x$  es cualquier número real y  $0 < y < \pi$ . Entonces, al derivar ambos lados de la identidad  $\cot(\cot^{-1}x) = x$  obtenemos, como en la deducción de la ecuación (10),

$$D_x \cot^{-1} x = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Si  $u$  es una función diferenciable de  $x$ , entonces la regla de la cadena implica

$$D_x \cot^{-1} u = -\frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}. \quad (13)$$

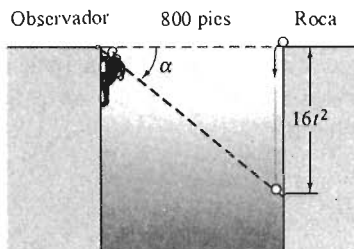


Figura 8.2.9 La roca que cae del ejemplo 2

**EJEMPLO 2** Un montañista a la orilla de un profundo cañón de 800 pies de ancho ve que una gran roca cae desde la orilla opuesta en el instante  $t = 0$ . Cuando él observa a la roca caer hacia abajo, sus ojos se mueven primero lentamente, después más rápido y después lentamente de nuevo. Sea  $\alpha$  el ángulo de depresión de su línea de visión debajo de la horizontal. ¿Con qué ángulo  $\alpha$  parece que la roca se mueve más rápido? Es decir, ¿cuándo es máxima  $d\alpha/dt$ ?

**Solución** Por nuestro estudio de la aceleración constante de la sección 5.2, sabemos que la roca caerá  $16t^2$  pies en los primeros  $t$  segundos. Nos referimos a la figura 8.2.9 y vemos que el valor de  $\alpha$  en el instante  $t$  será

$$\alpha = \alpha(t) = \tan^{-1}\left(\frac{16t^2}{800}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{t^2}{50}\right).$$

Por tanto,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{1 + \left(\frac{t^2}{50}\right)^2} \cdot \frac{2t}{50} = \frac{100t}{t^4 + 2500}.$$

Para determinar cuándo  $d\alpha/dt$  es máxima, determinamos cuándo su derivada se anula:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right) = \frac{100(t^4 + 2500) - 100t(4t^3)}{(t^4 + 2500)^2} = \frac{100(2500 - 3t^4)}{(t^4 + 2500)^2}.$$

De modo que  $d^2\alpha/dt^2$  se anula cuando  $3t^4 = 2500$ ; es decir, cuando

$$t = \sqrt[4]{\frac{2500}{3}} \approx 5.37 \quad (\text{seg}).$$

Éste es el valor de  $t$  para el que  $d\alpha/dt$  es máxima, y en ese instante tenemos  $t^2 = 50/\sqrt{3}$ . Así, el ángulo en ese instante es

$$\alpha = \arctan\left(\frac{1}{50} \cdot \frac{50}{\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

La velocidad *aparente* de la roca es mayor cuando la línea de visión del montañista está  $30^\circ$  debajo de la horizontal. La velocidad real de la roca es entonces  $32t$ , con  $t \approx 5.37$  segundos, por lo que aproximadamente es 172 pies/segundo.

## LA FUNCIÓN SECANTE INVERSA

La figura 8.2.10 muestra que la función secante es creciente en cada uno de los intervalos  $[0, \pi/2)$  y  $(\pi/2, \pi]$ . En la unión de estos dos intervalos, la función secante toma todos los valores  $y$  tales que  $|y| \geq 1$ . Por tanto, podemos definir la función

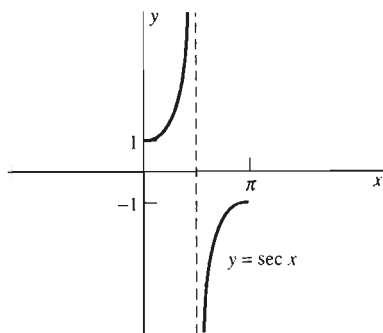


Figura 8.2.10 Restricción de la función secante a la unión de los dos intervalos  $[0, \pi/2)$  y  $(\pi/2, \pi]$



secante inversa, denotada por  $\sec^{-1}x$  o por  $\text{arc sec } x$ , restringiendo la función secante a la unión de los dos intervalos  $[0, \pi/2)$  y  $(\pi/2, \pi]$ .

**Definición** *La función secante inversa*

La **función secante inversa** (o **arco secante**) se define como sigue:

$$y = \sec^{-1}x \quad \text{si y sólo si} \quad \sec y = x, \quad (14)$$

donde  $|x| \geq 1$  y  $0 \leq y \leq \pi$ .

**OBSERVACIÓN** Los libros de texto antiguos ofrecen definiciones alternativas de la secante inversa con base en diferentes intervalos de definición de  $\sec x$ . Sin embargo, la definición dada aquí satisface la condición

$$\sec^{-1}x = \cos^{-1} \frac{1}{x} \quad (\text{si } x \geq 1),$$

que es conveniente para cálculos con calculadora o computadora (véase el problema 57).

La gráfica de  $\sec^{-1}x$  es la reflexión de la gráfica de  $y = \sec x$ , restringida de manera adecuada a los intervalos  $0 \leq x < \pi/2$  y  $\pi/2 < x \leq \pi$ , con respecto de la recta  $y = x$  (figura 8.2.11). De la definición de la secante inversa se sigue que

$$\sec(\sec^{-1}x) = x \quad \text{si } |x| \geq 1, \quad (15a)$$

$$\sec^{-1}(\sec x) = x \quad \text{para } x \text{ en } [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]. \quad (15b)$$

Seguimos el mismo patrón, y determinamos  $D_x \sec^{-1}x$  derivando ambos lados de la ecuación (15a) de la forma

$$\sec y = x,$$

donde  $y = \sec^{-1}x$ . Esto conduce a

$$(\sec y \tan y) \frac{dy}{dx} = 1,$$

de modo que

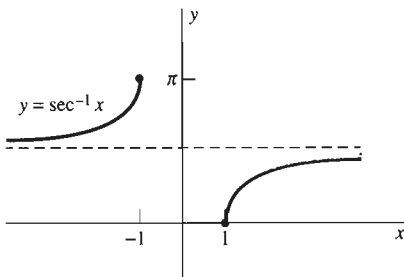
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \tan y} = \frac{1}{\pm x \sqrt{x^2 - 1}},$$

pues  $\tan y = \pm \sqrt{\sec^2 y - 1} = \pm \sqrt{x^2 - 1}$ .

Para obtener la elección correcta de signo, observemos lo que ocurre en los casos  $x > 1$  y  $x < -1$ . En el primer caso,  $0 < y < \pi/2$  y  $\tan y > 0$ , por lo que elegimos el signo más. Si  $x < -1$ , entonces  $\pi/2 < y < \pi$  y  $\tan y < 0$ , por lo que consideramos el signo menos. Así,

$$D_x \sec^{-1}x = \frac{1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}} \quad (|x| > 1). \quad (16)$$

Si  $u$  es una función diferenciable de  $x$ , con valores de magnitud mayor que 1, entonces, por la regla de la cadena



**Figura 8.2.11** La gráfica de  $y = \sec^{-1}x = \text{arcsec } x$

$$D_x \sec^{-1} u = \frac{1}{|u| \sqrt{u^2 - 1}} \cdot \frac{du}{dx}. \quad (17)$$

**EJEMPLO 3** La función  $\sec^{-1} e^x$  está definida si  $x > 0$ , pues entonces  $e^x > 1$ . Entonces, por la ecuación (17),

$$D_x \sec^{-1} e^x = \frac{e^x}{|e^x| \sqrt{e^{2x} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}}$$

pues  $|e^x| = e^x$  para toda  $x$ .

La función **cosecante inversa** (o **arco cosecante**) es la inversa de la función  $y = \csc x$ , donde  $x$  está restringida a la unión de los intervalos  $[-\pi/2, 0)$  y  $(0, \pi/2]$ . Así,

$$y = \csc^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad \csc y = x \quad (18)$$

donde  $|x| \geq 1$  y  $-\pi/2 < y < \pi/2$ . La fórmula de su derivada, que se deduce de manera similar a la derivada de la función secante inversa, es

$$D_x \csc^{-1} u = -\frac{1}{|u| \sqrt{u^2 - 1}} \cdot \frac{du}{dx}. \quad (19)$$

## RESUMEN

La siguiente tabla resume los dominios, rangos y derivadas de las seis funciones trigonométricas inversas.

Función	Dominio de definición	Rango de valores	Derivada
$\sin^{-1} x$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos^{-1} x$	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq \pi$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan^{-1} x$	$-\infty < x < +\infty$	$-\pi/2 < y < \pi/2$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cot^{-1} x$	$-\infty < x < +\infty$	$0 < y < \pi$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sec^{-1} x$	$ x  \geq 1$	$0 \leq y \leq \pi$	$\frac{1}{ x  \sqrt{x^2 - 1}}$
$\csc^{-1} x$	$ x  \geq 1$	$-\pi/2 < y < \pi/2$	$-\frac{1}{ x  \sqrt{x^2 - 1}}$

Es importante observar que

- $\sin^{-1} x$  y  $\tan^{-1} x$  comparten el rango  $-\pi/2$  a  $\pi/2$ , mientras que
- $\cos^{-1} x$  y  $\sec^{-1} x$  comparten el rango 0 a  $\pi$ .

Observe también la “diferencia únicamente en el signo” de las derivadas de los pares función/cofunción de funciones inversas.

## INTEGRALES RELACIONADAS CON LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Las derivadas de las seis funciones trigonométricas inversas son todas funciones *algebraicas* simples. Como consecuencia, las funciones trigonométricas inversas aparecen por lo general cuando integramos funciones algebraicas. Además, como ya hemos mencionado, las derivadas de  $\cos^{-1}x$ ,  $\cot^{-1}x$  y  $\csc^{-1}x$  sólo difieren en signo de las derivadas de sus respectivas cofunciones. Por esta razón, sólo necesitamos las funciones arco seno, arco tangente y arco secante para la integración y sólo estas tres son de uso común. Es decir, usted sólo necesita aprender de memoria las fórmulas integrales de estas últimas tres funciones, las cuales son consecuencia inmediata de las ecuaciones (5), (11) y (17) y que podemos escribir de las formas siguientes:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1}u + C, \quad (20)$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1}u + C, \quad (21)$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \sec^{-1}|u| + C. \quad (22)$$

Es fácil verificar que el valor absoluto en el lado derecho de la ecuación (22) es consecuencia del valor absoluto en la ecuación (17). Recuerde que, como  $\sec^{-1}|u|$  no está definida a menos que  $|u| \geq 1$ , la integral definida

$$\int_a^b \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}$$

sólo tiene sentido cuando los límites  $a$  y  $b$  son ambos al menos 1 o ambos a lo más  $-1$ .

**EJEMPLO 4** Una consecuencia inmediata de la ecuación (21) es

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \left[ \tan^{-1}x \right]_0^1 = \tan^{-1}1 - \tan^{-1}0 = \frac{\pi}{4}.$$

**EJEMPLO 5** La sustitución  $u = 3x$ ,  $du = 3 dx$  implica

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+9x^2} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{3}{1+(3x)^2} dx \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{3} \tan^{-1}u + C = \frac{1}{3} \tan^{-1}3x + C. \end{aligned}$$

**EJEMPLO 6** La sustitución  $u = 1/2 x$ ,  $du = 1/2 dx$  implica

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \int \frac{1}{2\sqrt{1-(x/2)^2}} dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \arcsen u + C = \arcsen\left(\frac{x}{2}\right) + C. \end{aligned}$$

**EJEMPLO 7** La sustitución  $u = x\sqrt{2}$ ,  $du = \sqrt{2} dx$  implica

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{2x^2-1}} dx &= \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} du \\ &= \left[ \sec^{-1}|u| \right]_{\sqrt{2}}^2 = \sec^{-1} 2 - \sec^{-1} \sqrt{2} \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

## 8.2 Problemas

Determine los valores indicados en los problemas 1 a 4.

- |                                       |                                       |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 1. (a) $\sin^{-1}(\frac{1}{2})$       | 2. (a) $\cos^{-1}(\frac{1}{2})$       |
| (b) $\sin^{-1}(-\frac{1}{2})$         | (b) $\cos^{-1}(-\frac{1}{2})$         |
| (c) $\sin^{-1}(\frac{1}{2}\sqrt{2})$  | (c) $\cos^{-1}(\frac{1}{2}\sqrt{2})$  |
| (d) $\sin^{-1}(-\frac{1}{2}\sqrt{3})$ | (d) $\cos^{-1}(-\frac{1}{2}\sqrt{3})$ |
| 3. (a) $\tan^{-1} 0$                  | 4. (a) $\sec^{-1} 1$                  |
| (b) $\tan^{-1} 1$                     | (b) $\sec^{-1}(-1)$                   |
| (c) $\tan^{-1}(-1)$                   | (c) $\sec^{-1} 2$                     |
| (d) $\tan^{-1}\sqrt{3}$               | (d) $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$            |

Derive las funciones en los problemas 5 a 26.

- |   |  |
|---|--|
| 5. $f(x) = \sin^{-1}(x^{100})$                    | 6. $f(x) = \arctan(e^x)$                 |
| 7. $f(x) = \sec^{-1}(\ln x)$                      | 8. $f(x) = \ln(\tan^{-1} x)$             |
| 9. $f(x) = \arcsen(\tan x)$                       | 10. $f(x) = x \arctan x$                 |
| 11. $f(x) = \sin^{-1} e^x$                        | 12. $f(x) = \arctan \sqrt{x}$            |
| 13. $f(x) = \cos^{-1} x + \sec^{-1}(\frac{1}{x})$ |  |
| 14. $f(x) = \cot^{-1}(\frac{1}{x^2})$             | 15. $f(x) = \csc^{-1} x^2$               |
| 16. $f(x) = \arccos(\frac{1}{\sqrt{x}})$          | 17. $f(x) = \frac{1}{\arctan x}$         |
| 18. $f(x) = (\arcsen x)^2$                        | 19. $f(x) = \tan^{-1}(\ln x)$            |
| 20. $f(x) = \operatorname{arcsec} \sqrt{x^2+1}$   |  |
| 21. $f(x) = \tan^{-1} e^x + \cot^{-1} e^{-x}$     |  |
| 22. $f(x) = \exp(\arcsen x)$                      | 23. $f(x) = \sin(\arctan x)$             |
| 24. $f(x) = \sec(\sec^{-1} e^x)$                  | 25. $f(x) = \frac{\arctan x}{(1+x^2)^2}$ |
| 26. $f(x) = \sin^{-1} 2x^2 - 2$                   |  |

En los problemas 27 a 30, determine  $dy/dx$  mediante derivación implícita. Determine a continuación la recta tangente a la gráfica de la ecuación en el punto indicado  $P$ .

27.  $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \frac{\pi}{2}$ ;  $P(1, 1)$

28.  $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \frac{\pi}{2}$ ;  $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$

29.  $(\sin^{-1} x)(\sin^{-1} y) = \frac{\pi^2}{16}$ ;  $P(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$

30.  $(\sin^{-1} x)^2 + (\sin^{-1} y)^2 = \frac{5\pi^2}{36}$ ;  $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$

Evalúe o integre, según el caso, en los problemas 31 a 55.

31.  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

33.  $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

35.  $\int_0^3 \frac{dx}{9+x^2}$

37.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

39.  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-25}}$

41.  $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$

43.  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^6-25}}$

45.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

47.  $\int \frac{x^{49}}{1+x^{100}} dx$

49.  $\int \frac{1}{x[1+(\ln x)^2]} dx$

51.  $\int_0^1 \frac{1}{1+(2x-1)^2} dx$

53.  $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$

32.  $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

34.  $\int_{-2}^{-2/\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

36.  $\int_0^{\sqrt{12}} \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$

38.  $\int \frac{dx}{9x^2+4}$

40.  $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}}$

42.  $\int \frac{x^2}{x^6+25} dx$

44.  $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x^3} dx$

46.  $\int \frac{\sec x \tan x}{1+\sec^2 x} dx$

48.  $\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^{10}}} dx$

50.  $\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$

52.  $\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^4} dx$

54.  $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

55.  $\int_1^3 \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)}$  [Sugerencia: sea  $u = x^{1/2}$ .]

56. Concluya de la fórmula  $D_x \cos^{-1} x = -D_x \sin^{-1} x$  que  $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2$  si  $0 \leq x \leq 1$ .

57. Muestre que  $D_x \sec^{-1} x = D_x \cos^{-1}(1/x)$  si  $x \geq 1$  y concluya que  $\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x)$  si  $x \geq 1$ . Este hecho se puede utilizar para determinar arcos secantes en una calculadora que tenga una tecla para la función arco coseno, que generalmente se escribe  $\boxed{\text{inv}}$   $\boxed{\text{cos}}$  o  $\boxed{\text{cos}^{-1}}$ .

58. (a) Deduzca de la fórmula de la suma para tangentes (problema 28 del apéndice A) que

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$$

si  $xy < 1$ . (b) Aplique la parte (a) para mostrar que cada uno de los siguientes números es igual a  $\pi/4$ : (i)  $\arctan(1/2) + \arctan(1/3)$ ; (ii)  $2 \arctan(1/3) + \arctan(1/7)$ ; (iii)  $\arctan(120/119) - \arctan(1/239)$ ; (iv)  $\arctan(1/5) - \arctan(1/239)$ .

59. Se desea construir una cartelera *paralela* a una vía rápida, con una altura de 12 metros y tal que su parte inferior quede a 4 metros por arriba de los ojos del automovilista promedio. ¿A qué distancia de la vía rápida debe colocarse la cartelera para maximizar el ángulo vertical que subtende desde los ojos del conductor?

60. Utilice funciones trigonométricas inversas para demostrar que el ángulo subtendido por una pintura rectangular en un muro es mayor cuando la pintura se cuelga con el centro al nivel de los ojos del observador.

61. Muestre que la circunferencia de un círculo de radio  $a$  es  $2\pi a$ , determinando la longitud del arco circular

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

de  $x = 0$  a  $x = a/\sqrt{2}$  y multiplicando después por 8.

62. Determine el volumen generado al girar en torno del eje  $x$  el área bajo  $y = 1/(1+x^4)$  de  $x = 0$  a  $x = 1$ .

63. La región  $R$  no acotada, está acotada a la izquierda por el eje  $y$ , por debajo por el eje  $x$ , y por arriba por la gráfica de  $y = 1/(1+x^2)$ . Muestre que el área de  $R$  es finita, evaluando

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{dx}{1+x^2}$$

64. Un edificio de 250 pies de altura está equipado con un elevador externo. En el instante  $t = 0$ , el elevador comienza a funcionar desde la parte superior y desciende con velocidad constante de 25 pies/segundo. Usted observa el elevador desde una ventana a 100 pies sobre el suelo, en un edificio a 50 pies del elevador. ¿A qué altura parece moverse más rápido el elevador?

65. Suponga que la función  $f$  está definida para todo real  $x$  tal que  $|x| > 1$  y tiene la propiedad de que

$$f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

para tales  $x$ . (a) Explique por qué existen dos constantes  $A$  y  $B$  tales que

$$f(x) = \text{arcsec } x + A \quad \text{si } x > 1;$$

$$f(x) = -\text{arcsec } x + B \quad \text{si } x < -1$$

(b) Determine los valores de  $A$  y  $B$  de modo que  $f(2) = 1 = f(-2)$ . Después grafique  $y = f(x)$ .

66. El arco tangente es la única función trigonométrica inversa que se incluye en algunas versiones de BASIC y FORTRAN, por lo que es necesario para programación expresar  $\sin^{-1} x$  y  $\sec^{-1} x$  en términos del arco tangente. Muestre lo siguiente: (a) Si  $|x| < 1$ , entonces

$$\sin^{-1} x = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

(b) Si  $x > 1$ , entonces  $\sec^{-1} x = \arctan(\sqrt{x^2-1})$ . (c) Si  $x < -1$ , entonces  $\sec^{-1} x = \pi - \arctan(\sqrt{x^2-1})$ .

### 8.3 Formas indeterminadas y regla de l'Hôpital

Una *forma indeterminada* es un cierto tipo de expresión con un límite que no es evidente por inspección. Existen varios tipos de formas indeterminadas. Si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

entonces decimos que el cociente  $f(x)/g(x)$  tiene la **forma indeterminada 0/0** en  $x = a$ . Por ejemplo, para derivar las funciones trigonométricas (sección 3.7) necesitábamos saber que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{1}$$

En este caso,  $f(x) = \sin x$  y  $g(x) = x$ . Como  $\sin x$  y  $x$  tienden ambas a cero cuando  $x \rightarrow 0$ , el cociente  $(\sin x)/x$  tiene la forma indeterminada 0/0 en  $x = 0$ . En consecuencia, tuvimos que utilizar un argumento geométrico particular para

determinar el límite de la ecuación (1); véase la sección 2.3. En realidad, algo de este tipo ocurre siempre que calculamos una derivada, pues el cociente

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

cuyo límite cuando  $x \rightarrow a$  es la derivada  $f'(a)$ , tiene la forma indeterminada  $0/0$  en  $x = a$ .

A veces podemos determinar el límite de una forma indeterminada realizando un manejo o construcción algebraica particular, como en nuestros cálculos anteriores de derivadas. Sin embargo, con frecuencia es más conveniente aplicar una regla que apareció en el primer texto de cálculo de la historia, realizado por el marqués de l'Hôpital en 1696. L'Hôpital era un noble francés que contrató al matemático suizo John Bernoulli como su tutor de cálculo, y la "regla de l'Hôpital" es en realidad un trabajo de Bernoulli.

**Teorema 1 Regla de l'Hôpital**

Suponga que las funciones  $f$  y  $g$  son diferenciables en una vecindad perforada del punto  $a$  y que  $g'(x)$  es distinta de cero en esa vecindad. Suponga también que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad (2)$$

siempre que el límite del lado derecho exista (como número real finito) o sea  $+\infty$  o  $-\infty$ .

En esencia, la regla de l'Hôpital dice que si  $f(x)/g(x)$  tiene la forma indeterminada  $0/0$  en  $x = a$ , entonces (con unas cuantas restricciones) este cociente tiene el mismo límite en  $x = a$  que el cociente de las *derivadas*  $f'(x)/g'(x)$ . La demostración de la regla de l'Hôpital se analiza al final de esta sección.

**EJEMPLO 1** Determine  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}$ .

**Solución** La fracción cuyo límite queremos determinar tiene la forma indeterminada  $0/0$  en  $x = 0$ . El numerador y el denominador son claramente diferenciables en alguna vecindad perforada de  $x = 0$ , y la derivada del denominador ciertamente es distinta de cero si la vecindad es suficientemente pequeña (específicamente, si  $0 < |x| < \pi/4$ ). Así, podemos aplicar la regla de l'Hôpital, y

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2 \cos 2x} = \frac{1}{2}.$$

Si el cociente  $f'(x)/g'(x)$  también es indeterminado, entonces podemos aplicar la regla de l'Hôpital por segunda vez (o tercera, . . .), como en el ejemplo 2. Sin embargo, cuando la regla se aplica varias veces, debemos verificar las condiciones para aplicarla en cada paso.

**EJEMPLO 2** Determine  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x + \ln x}{1 + \cos \pi x}$ .

**Solución**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x + \ln x}{1 + \cos \pi x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1 + \frac{1}{x}}{-\pi \sin \pi x} \quad (\text{aún es la forma } 0/0) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\pi x \sin \pi x} \quad (\text{simplificación algebraica}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\pi \sin \pi x + \pi^2 x \cos \pi x} \quad (\text{de nuevo la regla de l'Hôpital}) \\ &= -\frac{1}{\pi^2} \quad (\text{por inspección})\end{aligned}$$

Puesto que el límite final existe, también todos los anteriores; la existencia del límite final en la ecuación (2) implica la existencia del primero.

---

Cuando necesite aplicar la regla de l'Hôpital varias veces de esta manera, sólo debe derivar una y otra vez el numerador y el denominador por separado hasta que alguno de ellos tenga un límite finito distinto de cero. En ese momento, usted podrá reconocer el límite del cociente por inspección, como en el paso final del ejemplo 2.

**EJEMPLO 3** Determine  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x + x^2}$ .

**Solución** Si simplemente aplicamos la regla de l'Hôpital dos veces, el resultado es el cálculo *incorrecto*

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x + x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1 + 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\text{sen } x}{2} = 0. \quad (\text{¡Incorrecto!})\end{aligned}$$

Esta respuesta es incorrecta pues  $(\cos x)/(1 + 2x)$  no es una forma indeterminada. Así, la regla de l'Hôpital no puede aplicársele. El cálculo *correcto* es

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1 + 2x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \cos x}{\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)} = \frac{1}{1} = 1.$$

---

El ejemplo 3 sirve para hacer la siguiente advertencia: verifique las hipótesis de la regla de l'Hôpital *antes* de aplicarla. Es muy simplista pensar que la regla de l'Hôpital funciona cuando uno la necesita y no funciona en caso contrario, aunque sí hay algo de cierto en esta afirmación.

## FORMAS INDETERMINADAS RELACIONADAS CON $\infty$

La regla de l'Hôpital tiene muchas variantes. Además del hecho de que el límite en la ecuación (2) puede ser infinito, el número real  $a$  en la regla de l'Hôpital también se puede reemplazar por  $+\infty$  o por  $-\infty$ . Por ejemplo,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (3)$$

siempre que se satisfagan las demás condiciones. [Una vecindad perforada de  $+\infty$  es un intervalo de la forma  $(c, +\infty)$ .] En particular, para utilizar la ecuación (3), primero debemos verificar que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$$

y que el límite del lado derecho de la ecuación (3) existe. La demostración de esta versión de la regla de l'Hôpital se bosqueja en el problema 50.

La regla de l'Hôpital también se puede utilizar cuando  $f(x)/g(x)$  tiene la **forma indeterminada**  $\infty/\infty$ . Esto significa que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ es } +\infty \text{ o } -\infty$$

y

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \text{ es } +\infty \text{ o } -\infty.$$

La demostración de esta extensión de la regla es difícil y la omitiremos.\*

**EJEMPLO 4** Determine  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2 + x}$ .

**Solución** Ambos cocientes  $e^x/(x^2 + x)$  y  $e^x/(2x + 1)$  tienen la forma indeterminada  $\infty/\infty$ , de modo que con dos aplicaciones de la regla de l'Hôpital se obtiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$$

Recuerde que la regla de l'Hôpital también "permite" que el resultado final sea un límite infinito.

**EJEMPLO 5**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^{-1/2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$$

## DEMOSTRACIÓN DE LA REGLA DE L'HÔPITAL

Supongamos que las funciones  $f$  y  $g$  del teorema 1 no solamente son diferenciables sino que tienen derivadas continuas cerca de  $x = a$  y que  $g'(a) \neq 0$ . Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f'(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \quad (4)$$

por la ley del límite de cocientes. En este caso, la regla de l'Hôpital en la ecuación (2) se reduce al límite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}, \quad (5)$$

que es una forma débil de la regla. En realidad, esta forma débil es la que se aplica por lo general en las aplicaciones con un solo paso de la regla de l'Hôpital.

\* Para la demostración, véase (por ejemplo) A. E. Taylor y W. R. Mann, *Advanced Calculus*, 3a. edición (Nueva York: John Wiley, 1983), pág. 107.



**EJEMPLO 6** En el ejemplo 1 teníamos

$$f(x) = e^x - 1, \quad g(x) = \operatorname{sen} 2x,$$

de modo que

$$f'(x) = e^x, \quad g'(x) = 2 \cos 2x,$$

y  $g'(0) = 2 \neq 0$ . Con  $a = 0$ , la ecuación (5) implica entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{sen} 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{e^0}{2 \cos 0} = \frac{1}{2}.$$

**Teorema 2 Regla de l'Hôpital (forma débil)**

Suponga que las funciones  $f$  y  $g$  son diferenciables en  $x = a$ , que

$$f(a) = 0 = g(a)$$

y que  $g'(a) \neq 0$ . Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \quad (4)$$

**Demostración** Comenzamos con el lado derecho de la ecuación (4) y trabajamos hacia el lado izquierdo:

$$\begin{aligned} \frac{f'(a)}{g'(a)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} && \text{(la definición de la derivada)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} && \text{(la ley del cociente para límites)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} && \text{(simplificación algebraica)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} && \text{[pues } f(a) = 0 = g(a)\text{]}. \quad \square \end{aligned}$$

El apéndice G contiene una demostración de la versión fuerte de la regla de l'Hôpital enunciada en el teorema 1.

### 8.3 Problemas

Determine los límites de los problemas 1 a 48.

1.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1}$

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 4}{2x - 5}$

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{5x^2 + 3x}$

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x}$

6.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x}$

7.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\operatorname{sen} x}$

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^3}$

9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$

10.  $\lim_{z \rightarrow \pi/2} \frac{1 + \cos 2z}{1 - \operatorname{sen} 2z}$

11.  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{u \arctan u}{1 - \cos u}$
12.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3}$
13.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[10]{x}}$
14.  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{e^r}{(r+1)^4}$
15.  $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\ln(x-9)}{x-10}$
16.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 + 1}{t \ln t}$
17.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x \sin x}$
18.  $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\tan x}{\ln(\cos x)}$
19.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$
20.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$
21.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$
22.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^4 - 16}$
23.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{3x + \cos x}$
24.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x}$
25.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{3^x - 1}$
26.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{3^x}$
27.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{4x^2 - x}}$
28.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3 + x}}{\sqrt{2x^3 - 4}}$
29.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$
30.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x}$
31.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{x^3}$
32.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$
33.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - e^x - e^{-x}}{2x^2}$
34.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{2x}$
35.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{2x - \pi}{\tan 2x}$
36.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sec x}{\tan x}$
37.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2 \cos \pi x}{x^2 - 4}$

38.  $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2x - \sin \pi x}{4x^2 - 1}$
39.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan 2x}{\arctan 3x}$
40.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan 2x}{\arctan 3x}$
41.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1}{x - \sin x}$
42.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - 1}{x}$
43.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+4x} - 1}{x}$
44.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+2x} - \sqrt{3+x}}{x}$
45.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$
46.  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \tan x}{4x - \pi}$
47.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{e^x - \cos x}$
48.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 5x^2 - 12}{x^{10} - 500x - 24}$

49. Suponga que  $f$  es una función dos veces diferenciable. Utilice la regla de l'Hôpital para demostrar estos dos resultados:

$$(a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x);$$

$$(b) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x).$$

50. Establezca la versión 0/0 de la regla de l'Hôpital para el caso  $a = \infty$ . [Sugerencia: sean  $F(t) = f(1/t)$  y  $G(t) = g(1/t)$ . Muestre entonces que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

utilizando la regla de l'Hôpital para el caso  $a = 0$ .]

### 8.3 Proyecto

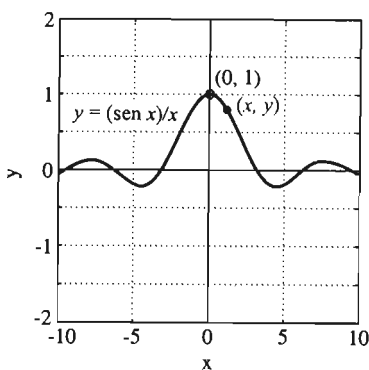


Figura 8.3.1 ¿  $\frac{\sin x}{x}$  tiende a 1 cuando  $x \rightarrow 0$ ?

Este proyecto implica el uso de una calculadora gráfica o un programa de graficación por computadora para analizar límites de formas indeterminadas.

Consideremos el límite trigonométrico básico  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)/x$ . Parece claro, de la gráfica de  $y = (\sin x)/x$ , (figura 8.3.1) que si el número  $x$  es cercano a cero, entonces el punto  $(x, y)$  sobre la curva está cerca del punto  $(0, 1)$ . Esta observación confirma el hecho de que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (5)$$

Queremos explorar gráficamente el significado de que un número o punto esté "cerca" de otro número o punto. Recordemos de la sección 2.2 la definición formal de límite. Decimos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad (6)$$

si dado  $\epsilon > 0$ , existe un número  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{implica que} \quad |f(x) - L| < \epsilon. \quad (7)$$

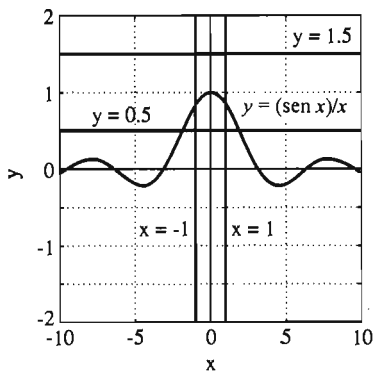


Figura 8.3.2 El valor  $\delta = 1$  "funciona" si  $\epsilon = \frac{1}{2}$

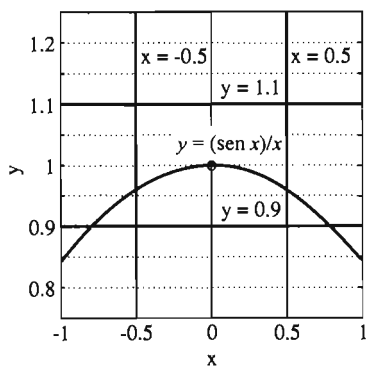


Figura 8.3.3 El valor  $\delta = \frac{1}{2}$  "funciona" si  $\epsilon = \frac{1}{10}$

El significado geométrico de la implicación en (7) es el siguiente:

Suponga que trazamos las dos rectas horizontales  $y = L - \epsilon$  y  $y = L + \epsilon$  arriba y abajo del punto  $(a, L)$ . Entonces es posible trazar dos rectas verticales  $x = a - \delta$  y  $x = a + \delta$  a cada lado de  $(a, L)$  de modo que la parte de la gráfica  $y = f(x)$  (con  $x \neq a$ ) que está entre las dos rectas verticales está también entre las dos rectas horizontales.

La cuestión es la siguiente. Dado un valor específico de  $\epsilon > 0$ , ¿qué valor de  $\delta > 0$  produce lo anterior? Con una calculadora gráfica o un programa de graficación por computadora, podemos trazar primero las rectas horizontales  $y = L - \epsilon$  y  $y = L + \epsilon$  y después experimentar con diferentes posiciones de las rectas verticales  $x = a - \delta$  y  $x = a + \delta$  para determinar un valor de  $\delta$  que "funcione" con el valor dado de  $\epsilon$ .

Así, en la figura 8.3.2 vemos que todo punto de  $y = (\text{sen } x)/x$  entre las rectas verticales  $x = -1$  y  $x = +1$  también está entre las dos rectas horizontales  $y = 0.5$  y  $y = 1.5$ . Así, para el límite en la ecuación (5) [para el cual  $a = 0$  y  $L = 1$  en (7)], si  $\epsilon = 1/2$ , entonces podemos elegir  $\delta = 1$ .

Mientras más pequeño sea el valor de  $\epsilon > 0$ , es de esperar que el valor  $\delta > 0$  sea más pequeño. En la figura 8.3.3 vemos que si  $\epsilon = 1/10$ , entonces podemos elegir  $\delta = 1/2$ .

En los problemas 1 a 6, se da un límite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ . Inspeccione primero la gráfica  $y = f(x)$  cerca de  $x = a$  para determinar el valor aparente  $L$  del límite. Después experimente con rectas horizontales y verticales para determinar valores de  $\delta > 0$  que satisfagan la definición del límite para los valores indicados de  $\epsilon > 0$ . Por último, aplique la regla de l'Hôpital para verificar que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ ;  $\epsilon = 1, 0.5, 0.1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ ;  $\epsilon = 0.25, 0.1, 0.05$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ ;  $\epsilon = 0.25, 0.1, 0.05$
- $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ ;  $\epsilon = 0.1, 0.05, 0.01$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \text{sen } x}{x^3}$ ;  $\epsilon = 0.25, 0.1, 0.05$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^{-1} x - \tan^{-1} x}{x^3}$ ;  $\epsilon = 0.25, 0.1, 0.05$

## 8.4 Formas indeterminadas adicionales

En la sección 8.3 vimos que la regla de l'Hôpital se puede aplicar a las formas indeterminadas  $0/0$  y  $\infty/\infty$ . Existen otras formas indeterminadas; aunque la regla de l'Hôpital no se puede aplicar directamente a ellas, es posible convertirlas a la forma  $0/0$  o a la forma  $\infty/\infty$ . En tal caso, se puede aplicar la regla de l'Hôpital.

Supongamos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty.$$

Entonces decimos que el producto  $f(x) \cdot g(x)$  tiene la **forma indeterminada**  $0 \cdot \infty$  en  $x = a$ . Para determinar el límite de  $f(x) \cdot g(x)$  en  $x = a$ , podemos cambiar el problema a una de las formas  $0/0$  o  $\infty/\infty$  de esta forma:

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{g(x)}{1/f(x)}.$$

Ahora podemos aplicar la regla de l'Hôpital si se satisfacen las demás condiciones, como se muestra en el ejemplo 1.

**EJEMPLO 1** Determine  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ .

**Solución** Estamos trabajando con la forma indeterminada  $0 \cdot \infty$ , por lo que escribimos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}{\frac{1}{x}}.$$

El límite del lado derecho tiene la forma  $0/0$ , por lo que podemos aplicar la regla de l'Hôpital. Primero observamos que

$$D_x \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{2}{x^2-1}.$$

Así,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x^2-1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{1-\frac{1}{x^2}} = -2.$$

Si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

entonces decimos que  $f(x) - g(x)$  tiene la **forma indeterminada**  $\infty - \infty$ . Para evaluar

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)],$$

intentamos una manipulación algebraica para convertir  $f(x) - g(x)$  en una forma de tipo  $0/0$  o  $\infty/\infty$  de modo que se pueda aplicar la regla de l'Hôpital. Si  $f(x)$  o  $g(x)$  se expresa como una fracción, a veces podemos hacer esto determinando un común denominador. Sin embargo, en la mayoría de los casos, se necesitan métodos más sutiles. El ejemplo 2 ilustra la técnica de determinar un común denominador, mientras que el ejemplo 3 demuestra una técnica de factorización que puede ser efectiva.

**EJEMPLO 2**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x) - x}{x \sin x} && \text{(forma } 0/0\text{)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x) - 1}{\sin x + x \cos x} && \text{(todavía } 0/0\text{)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = 0. \end{aligned}$$

### EJEMPLO 3

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \sqrt{1 + \frac{3}{x}} - 1 \right) && \text{forma } (\infty \cdot 0) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} && \text{(ahora forma } 0/0) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{-1/2} \left(-\frac{3}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}}} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

### LAS FORMAS INDETERMINADAS $0^0$ , $\infty^0$ Y $1^\infty$

Supongamos que necesitamos determinar el límite de una cantidad

$$y = [f(x)]^{g(x)},$$

donde los límites de  $f$  y  $g$  cuando  $x \rightarrow a$  son tales que se obtiene una de las **formas indeterminadas**  $0^0$ ,  $\infty^0$  o  $1^\infty$ . Primero calculamos el logaritmo natural

$$\ln y = \ln([f(x)]^{g(x)}) = g(x) \ln f(x).$$

Para cada uno de los tres casos indeterminados mencionados,  $g(x) \ln f(x)$  tiene la forma  $0 \cdot \infty$ , de modo que podemos utilizar nuestros métodos anteriores para determinar  $L = \lim_{x \rightarrow a} \ln y$ . Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} y = \lim_{x \rightarrow a} \exp(\ln y) = \exp\left(\lim_{x \rightarrow a} \ln y\right) = e^L,$$

pues la función exponencial es continua. Así, tenemos los siguientes cuatro pasos para determinar el límite de  $[f(x)]^{g(x)}$  cuando  $x \rightarrow a$ :

1. Sea  $y = [f(x)]^{g(x)}$ .
2. Simplifique  $\ln y = g(x) \ln f(x)$ .
3. Evalúe  $L = \lim_{x \rightarrow a} \ln y$ .
4. Concluya que  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = e^L$ .

**EJEMPLO 4** Determine  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$ .

**Solución** En este caso tenemos la forma indeterminada  $1^\infty$ . Si hacemos  $y = (\cos x)^{1/x^2}$ , entonces

$$\ln y = \ln [(\cos x)^{1/x^2}] = \frac{\ln \cos x}{x^2}.$$

Cuando  $x \rightarrow 0$ ,  $\cos x \rightarrow 1$  y  $\ln \cos x \rightarrow 0$ ; ahora tenemos la forma indeterminada  $0/0$ . Por tanto, con dos aplicaciones de la regla de l'Hôpital se obtiene

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\tan x}{2x} \quad (\text{forma } 0/0) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sec^2 x}{2} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

**EJEMPLO 5** Determine  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\tan x}$ .

**Solución** Esto tiene la forma indeterminada  $0^0$ . Si  $y = x^{\tan x}$ , entonces

$$\ln y = (\tan x)(\ln x) = \frac{\ln x}{\cot x}.$$

Ahora tenemos la forma indeterminada  $\infty/\infty$  y la regla de l'Hôpital implica

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cot x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2 x} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}^2 x}{x} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\text{sen } x}{x} \right) (\text{sen } x) = (-1) \cdot (0) = 0.\end{aligned}$$

Por tanto,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\tan x} = e^0 = 1$ .

Aunque  $a^0 = 1$  para cualquier constante  $a$  distinta de cero, la forma  $0^0$  es indeterminada: el limite no necesariamente es 1 (véase problema 37). Pero la forma  $0^\infty$  no es indeterminada; su limite es cero. Por ejemplo,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/x} = 0.$$

## 8.4 Problemas

Determine los limites de los problemas 1 a 34.

- |   |  |  |  |
|---|--|--|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x$  | 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \cot x \right)$  | 13. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\text{sen } x} \right)$ | 14. $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$    |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left( \frac{7x + 8}{4x + 8} \right)$  | 4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\text{sen } x)(\ln \text{sen } x)$ | 15. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{x}{x^2 + x - 2} - \frac{1}{x - 1} \right)$      |  |
| 5. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \csc^2 2x$   | 6. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \ln x$                    | 16. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x})$                                | 17. $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1 + x)} \right)$ |
| 7. $\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{1/x} - 1)$                                   |  | 18. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x})$                        |  |
| 8. $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{\ln(x - 1)} \right)$ |  | 19. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + 2x + 5} - x)$                             |  |
| 9. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$   | 10. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\tan x)(\cos 3x)$               | 20. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$   | 21. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\text{sen } x}$                               |
| 11. $\lim_{x \rightarrow \pi} (x - \pi) \csc x$                                   | 12. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2}(x - \text{sen } x)$    | 22. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x$                         | 23. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{1/x}$                                |

24.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^x$       25.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$
26.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + 2x)^{1/(3x)}$       27.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{x^2}\right)^{x^4}$
28.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\sec x}$       29.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \sin x)^x$
30.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\tan x - \sec x)$       31.  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(1-x)}$
32.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1)^{\ln x}$
33.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} - \frac{1}{x - 2}\right)$
34.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[5]{x^5 - 3x^4 + 17} - x)$

35. Utilice la regla de l'Hôpital para establecer estos dos límites:

(a)  $\lim_{h \rightarrow 0} (1 + hx)^{1/h} = e^x$ ; (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ .

36. Grafique  $y = x^{1/x}$ ,  $x > 0$ .

37. Sean  $f(x) = \exp(-1/x^2)$  y  $g(x) = \cos x - 1$ , de modo que  $[f(x)]^{g(x)}$  es de la forma indeterminada  $0^0$  cuando  $x \rightarrow 0$ . Muestre que  $[f(x)]^{g(x)} \rightarrow \sqrt{e}$  cuando  $x \rightarrow 0$ .

38. Sea  $n$  un entero positivo fijo y sea  $p(x)$  el polinomio

$$p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n;$$

donde los números  $a_1, a_2, \dots, a_n$  son reales fijos. Demuestre que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} ([p(x)]^{1/n} - x) = \frac{a_1}{n}.$$

39. Como veremos en el problema 50 de la sección 9.6, el área de la superficie del elipsoide obtenido al girar la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

en torno del eje  $x$  es

$$A = 2\pi ab \left[ \frac{b}{a} + \frac{a}{c} \sin^{-1} \left( \frac{c}{a} \right) \right],$$

donde  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ . Utilice la regla de l'Hôpital para mostrar que

$$\lim_{b \rightarrow a} A = 4\pi a^2,$$

el área de la superficie de una esfera de radio  $a$ .

40. Considere una varilla larga y delgada que tiene una difusividad del calor  $k$  y que se encuentra sobre el eje  $x$ . Suponga que en el instante  $t = 0$ , la temperatura en  $x$  es  $A/2\varepsilon$  si  $-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$  y que se anula si  $|x| > \varepsilon$ . Entonces la temperatura  $T(x, t)$  de la varilla en el punto  $x$  en el instante  $t > 0$  está dada por

$$T(x, t) = \frac{A}{\varepsilon \sqrt{4\pi kt}} \int_0^t \exp\left(-\frac{(x-u)^2}{4kt}\right) du.$$

Utilice la regla de l'Hôpital para mostrar que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T(x, t) = \frac{A}{\sqrt{4\pi kt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right).$$

Ésta es la temperatura resultante de un "punto de calentamiento" inicial en el origen.

41. Explique por qué  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)^{1/x} \neq 0$ .

42. Sea  $\alpha$  un número real fijo. (a) Evalúe (en términos de  $\alpha$ ) la forma indeterminada  $0^0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \right]^{\alpha x^2}.$$

(Observe que no es necesaria la regla de l'Hôpital.) Así, la forma indeterminada  $0^0$  podría tener como límite cualquier número real positivo. Explique por qué. (b) ¿Puede este límite ser cero, negativo o infinito? Explique.

## 8.5

### Funciones

### hiperbólicas y

### funciones hiperbólicas

### inversas

El **coseno hiperbólico** y el **seno hiperbólico** del número real  $x$  se denotan con  $\cosh x$  y  $\sinh x$  y se definen como

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \quad (1)$$

Estas combinaciones particulares de exponenciales familiares son útiles en ciertas aplicaciones del cálculo y también son eficaces para evaluar ciertas integrales. Las otras cuatro funciones hiperbólicas: la tangente, cotangente, secante y cosecante hiperbólicas, se definen en términos de  $\cosh x$  y  $\sinh x$  en analogía con la trigonometría.

$$\begin{aligned} \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \\ \coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad (x \neq 0); \\ \operatorname{sech} x &= \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \\ \operatorname{csch} x &= \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \quad (x \neq 0). \end{aligned} \quad (2)$$

$$(3)$$

La terminología y notación trigonométrica para estas funciones hiperbólicas surge del hecho de que estas funciones satisfacen una lista de identidades, que fuera de una diferencia ocasional en el signo, recuerdan las conocidas identidades trigonométricas:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1; \quad (4)$$

$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x; \quad (5)$$

$$\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x; \quad (6)$$

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y; \quad (7)$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y; \quad (8)$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x; \quad (9)$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x; \quad (10)$$

$$\cosh^2 x = 1/2(\cosh 2x + 1); \quad (11)$$

$$\sinh^2 x = 1/2(\cosh 2x - 1). \quad (12)$$

Las identidades en las ecuaciones (4), (7) y (8) son consecuencia directa de las definiciones de  $\cosh x$  y  $\sinh x$ . Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 \\ &= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x}) = 1. \end{aligned}$$

Las demás identidades enumeradas aquí se pueden deducir de las ecuaciones (4), (7) y (8) de manera análoga a las deducciones de las identidades trigonométricas correspondientes.

Las funciones trigonométricas reciben con frecuencia el nombre de funciones *circulares*, debido a que el punto  $(\cos \theta, \sin \theta)$  está en el círculo  $x^2 + y^2 = 1$  para toda  $\theta$ . De manera análoga, la identidad de la ecuación (4) nos dice que el punto  $(\cosh \theta, \sinh \theta)$  está en la hipérbola  $x^2 - y^2 = 1$ ; de ahí surge el nombre de función *hiperbólica* (figura 8.5.1).

Las gráficas de  $y = \cosh x$  y  $y = \sinh x$  son fáciles de construir. Sumamos (para  $\cosh$ ) o restamos (para  $\sinh$ ) las ordenadas de las gráficas de  $y = \frac{1}{2}e^x$  y  $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ . Las gráficas de las demás funciones hiperbólicas se pueden construir al dividir las ordenadas. Las gráficas de las seis funciones aparecen en la figura 8.5.2.

Estas gráficas muestran una diferencia importante entre las funciones hiperbólicas y las funciones trigonométricas ordinarias: Ninguna de las funciones

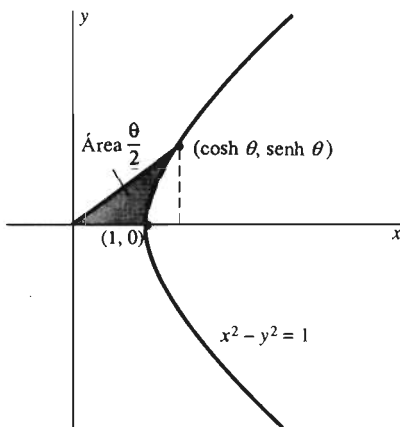
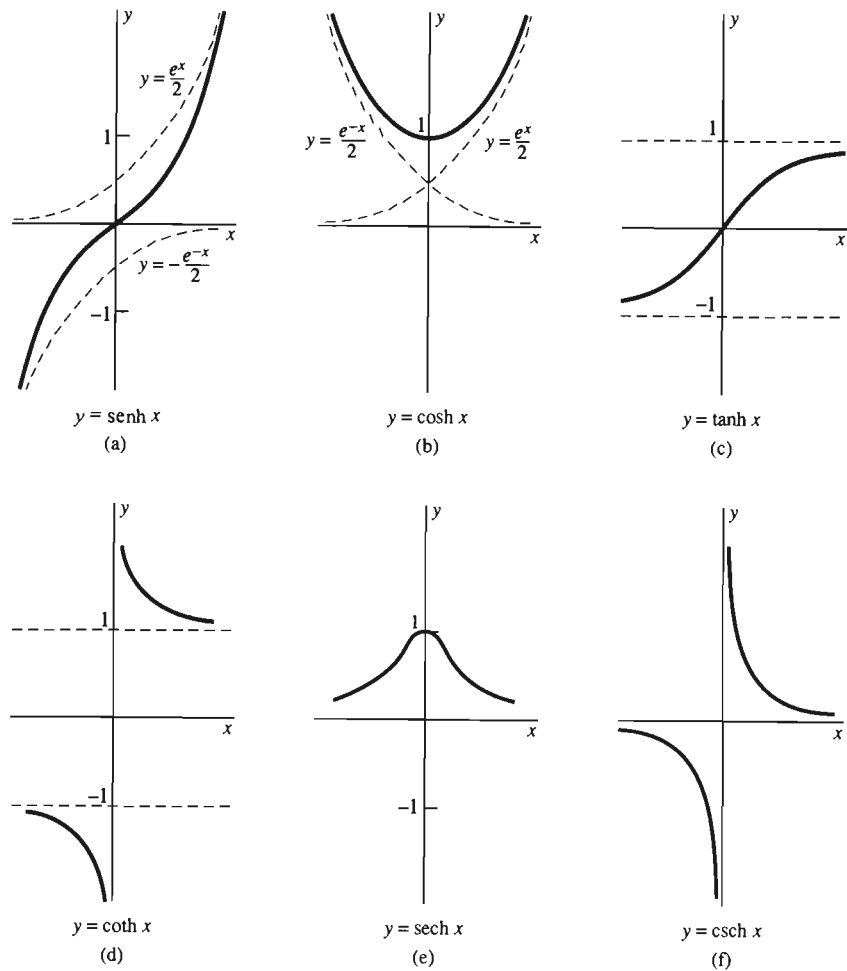


Figura 8.5.1 Relación del seno y el coseno hiperbólicos con la hipérbola  $x^2 - y^2 = 1$





**Figura 8.5.2** Gráficas de las seis funciones hiperbólicas

hiperbólicas es periódica. Sin embargo, tienen la propiedad de ser pares o impares, como las funciones circulares. Las dos funciones  $\cosh$  y  $\operatorname{sech}$  son pares, pues

$$\cosh(-x) = \cosh x \quad \text{y} \quad \operatorname{sech}(-x) = \operatorname{sech} x$$

para toda  $x$ . Las demás funciones hiperbólicas son impares:

$$\sinh(-x) = -\sinh x, \quad \tanh(-x) = -\tanh x,$$

etcétera.

### DERIVADAS E INTEGRALES DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Las fórmulas para las derivadas de las funciones hiperbólicas se asemejan a las fórmulas para las funciones trigonométricas, con algunas diferencias de signos. Por ejemplo,

$$D_x \cosh x = D_x \left( \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} e^{-x} \right) = \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} e^{-x} = \sinh x.$$

La regla de la cadena implica entonces

$$D_x \cosh u = (\sinh u) \frac{du}{dx} \quad (13)$$

si  $u$  es una función diferenciable de  $x$ . Las otras cinco fórmulas de derivación son

$$D_x \sinh u = (\cosh u) \frac{du}{dx}, \quad (14)$$

$$D_x \tanh u = (\operatorname{sech}^2 u) \frac{du}{dx}, \quad (15)$$

$$D_x \coth u = (-\operatorname{csch}^2 u) \frac{du}{dx}, \quad (16)$$

$$D_x \operatorname{sech} u = (-\operatorname{sech} u \tanh u) \frac{du}{dx}, \quad (17)$$

$$D_x \operatorname{csch} u = (-\operatorname{csch} u \coth u) \frac{du}{dx}. \quad (18)$$

La ecuación (14) se obtiene de la misma forma que la ecuación (13). Entonces, las ecuaciones (15) a (18) son consecuencia de las ecuaciones (13) y (14) con la ayuda de la regla del cociente y las identidades de las ecuaciones (5) y (6).

Como indicamos en el ejemplo 1, la derivación de las funciones hiperbólicas utilizando las ecuaciones (13) a (18) es muy similar a la derivación de las funciones trigonométricas.

- EJEMPLO 1**
- (a)  $D_x \cosh 2x = 2 \sinh 2x$ .
  - (b)  $D_x \sinh^2 x = 2 \sinh x \cosh x$ .
  - (c)  $D_x (x \tanh x) = \tanh x + x \operatorname{sech}^2 x$ .
  - (d)  $D_x \operatorname{sech}(x^2) = -2x \operatorname{sech}(x^2) \tanh(x^2)$

Las versiones para primitivas de las fórmulas de derivación en las ecuaciones (13) a (18) son las siguientes fórmulas integrales:

$$\int \sinh u \, du = \cosh u + C, \quad (19)$$

$$\int \cosh u \, du = \sinh u + C, \quad (20)$$

$$\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \tanh u + C, \quad (21)$$

$$\int \operatorname{csch}^2 u \, du = -\coth u + C, \quad (22)$$

$$\int \operatorname{sech} u \tanh u \, du = -\operatorname{sech} u + C, \quad (23)$$

$$\int \operatorname{csch} u \coth u \, du = -\operatorname{csch} u + C. \quad (24)$$

Las integrales en el ejemplo 2 ilustran el hecho de que las integrales hiperbólicas sencillas se pueden analizar de la misma forma que las integrales trigonométricas sencillas.

- EJEMPLO 2** (a) Con  $u = 3x$ , tenemos que

$$\int \cosh 3x \, dx = \int (\cosh u) \left(\frac{1}{3} du\right) = \frac{1}{3} \sinh u + C = \frac{1}{3} \sinh 3x + C.$$

(b) Con  $u = \sinh x$ , tenemos

$$\int \sinh x \cosh x \, dx = \int u \, du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2} \sinh^2 x + C.$$

(c) Utilizamos la ecuación (12) para obtener

$$\int \sinh^2 x \, dx = \int \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1) \, dx = \frac{1}{4} \sinh 2x - \frac{1}{2}x + C.$$

(d) Por último, utilizamos la ecuación (5) para tener

$$\begin{aligned} \int_0^1 \tanh^2 x \, dx &= \int_0^1 (1 - \operatorname{sech}^2 x) \, dx = \left[ x - \tanh x \right]_0^1 = 1 - \tanh 1 \\ &= 1 - \frac{e - e^{-1}}{e + e^{-1}} = \frac{2}{e^2 + 1} \approx 0.238406. \end{aligned}$$

## FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

La figura 8.5.2 muestra que

- Las funciones  $\sinh x$  y  $\tanh x$  son crecientes para toda  $x$ ;
- Las funciones  $\operatorname{coth} x$  y  $\operatorname{csch} x$  son decrecientes y están definidas para toda  $x \neq 0$ ;
- La función  $\cosh x$  es creciente en la semirrecta  $x \geq 0$ ; y
- La función  $\operatorname{sech} x$  es decreciente en la semirrecta  $x \geq 0$ .

Esto implica que cada una de las seis funciones hiperbólicas se puede “invertir” en el dominio indicado donde sea creciente o decreciente. Las funciones hiperbólicas inversas resultantes y sus dominios de definición se enumeran en la tabla siguiente y aparecen en la figura 8.5.3.

Función hiperbólica inversa:	Definida para:
$\sinh^{-1} x$	para toda $x$
$\cosh^{-1} x$	$x \geq 1$
$\tanh^{-1} x$	$ x  < 1$
$\operatorname{coth}^{-1} x$	$ x  > 1$
$\operatorname{sech}^{-1} x$	$0 < x \leq 1$
$\operatorname{csch}^{-1} x$	$x \neq 0$

**EJEMPLO 3** Determine el valor numérico de  $\tanh^{-1}(\frac{1}{2})$ .

**Solución** Si  $y = \tanh^{-1}(\frac{1}{2})$ , entonces

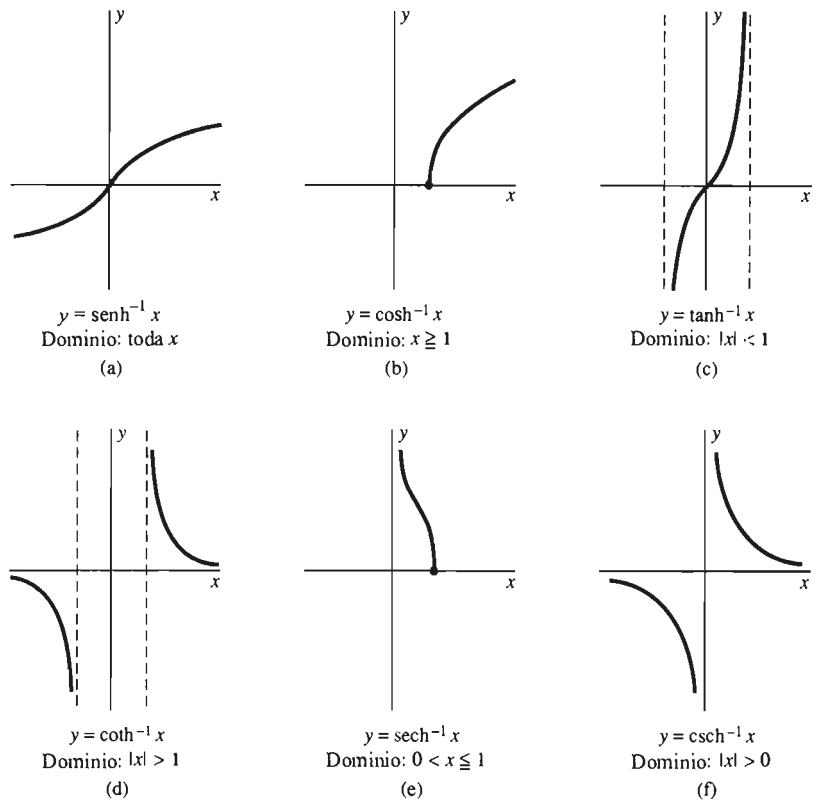
$$\tanh y = \frac{1}{2};$$

$$\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{1}{2} \quad [\text{por la ecuación (2)}];$$

$$2e^y - 2e^{-y} = e^y + e^{-y};$$

$$e^y = 3e^{-y}; \quad e^{2y} = 3;$$

$$y = \frac{1}{2} \ln 3 \approx 0.5493.$$



**Figura 8.5.3** Las funciones hiperbólicas inversas

Las calculadoras científicas se utilizan generalmente para determinar los valores de las funciones hiperbólicas e hiperbólicas inversas. Muchas calculadoras sólo dan los valores de  $\sinh^{-1}$ ,  $\cosh^{-1}$  y  $\tanh^{-1}$ . Los valores de las otras tres funciones hiperbólicas se pueden determinar mediante las identidades

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right), \quad (25)$$

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \quad y \quad (26)$$

$$\coth^{-1} x = \tanh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right). \quad (27)$$

Por ejemplo,

$$\coth^{-1} 2 = \tanh^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0.5493.$$

## DERIVADAS DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

Aquí damos las derivadas de las seis funciones hiperbólicas inversas:

$$D_x \sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad (28)$$

$$D_x \cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad (29)$$

$$D_x \tanh^{-1} x = \frac{1}{1 - x^2}, \quad (30)$$

$$D_x \coth^{-1} x = \frac{1}{1 - x^2}, \quad (31)$$

$$D_x \operatorname{sech}^{-1} x = -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}, \quad (32)$$

$$D_x \operatorname{csch}^{-1} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{1 - x^2}}. \quad (33)$$

Podemos deducir estas fórmulas por el método estándar de determinar la derivada de una función inversa, dada la derivada de la propia función. El único requisito es que se sepa de antemano que la función inversa es derivable. Por ejemplo, para derivar  $\tanh^{-1}x$ , comenzamos con la relación para la función inversa

$$\tanh(\tanh^{-1} x) = x$$

y sustituimos  $u = \tanh^{-1}x$ . Entonces, como la ecuación es en realidad una identidad,

$$D_x \tanh u = D_x x = 1,$$

de modo que

$$(\operatorname{sech}^2 u) \frac{du}{dx} = 1.$$

Así,

$$\begin{aligned} D_x \tanh^{-1} x &= \frac{du}{dx} = \frac{1}{\operatorname{sech}^2 u} = \frac{1}{1 - \tanh^2 u} \\ &= \frac{1}{1 - \tanh^2(\tanh^{-1} x)} = \frac{1}{1 - x^2}. \end{aligned}$$

Esto establece la ecuación (30). Podemos utilizar métodos similares para verificar las fórmulas para las derivadas de las otras funciones hiperbólicas inversas.

Las funciones hiperbólicas se definen en términos de la función exponencial natural  $e^x$ , por lo que no debe sorprendernos que sus inversas se puedan expresar en términos de  $\ln x$ . De hecho,

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \text{para toda } x; \quad (34)$$

$$\operatorname{cosh}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \text{para toda } x \geq 1; \quad (35)$$

$$\operatorname{tanh}^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \text{para } |x| < 1; \quad (36)$$

$$\operatorname{coth}^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad \text{para } |x| > 1; \quad (37)$$

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right) \quad \text{si } 0 < x \leq 1; \quad (38)$$

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|}\right) \quad \text{si } x \neq 0. \quad (39)$$

Cada una de estas identidades se puede establecer mostrando que ambos lados tienen la misma derivada y además que ambos lados coinciden para al menos un valor de  $x$  en cada intervalo de su dominio respectivo. Por ejemplo,

$$D_x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = D_x \sinh^{-1} x.$$

Así,

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C.$$

Pero  $\sinh^{-1}(0) = 0 = \ln(0 + \sqrt{0 + 1})$ . Esto implica que  $C = 0$  y esto establece la ecuación (34). No es tan fácil demostrar que  $C = 0$  en las demostraciones de las ecuaciones (37) y (39); véanse los problemas 64 y 65.

Las ecuaciones (34) a (39) se pueden utilizar para calcular los valores de las funciones hiperbólicas inversas. Esto es conveniente si usted dispone de una calculadora cuyo repertorio no incluye las funciones hiperbólicas inversas o si está programando en un lenguaje como BASIC, donde la mayor parte de sus formas no incluyen estas funciones.

## INTEGRALES RELACIONADAS CON LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

Las principales aplicaciones de las funciones hiperbólicas inversas son para la evaluación de integrales algebraicas. Las fórmulas de derivación en las ecuaciones (28) a (33) pueden escribirse, como es usual, como las siguientes fórmulas integrales:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = \sinh^{-1} u + C, \quad (40)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \cosh^{-1} u + C, \quad (41)$$

$$\int \frac{du}{1 - u^2} = \begin{cases} \tanh^{-1} u + C & \text{si } |u| < 1; \\ \coth^{-1} u + C & \text{si } |u| > 1; \end{cases} \quad (42a)$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + u}{1 - u} \right| + C, \quad (42c)$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{1 - u^2}} = -\operatorname{sech}^{-1} |u| + C, \quad (43)$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{1 + u^2}} = -\operatorname{csch}^{-1} |u| + C. \quad (44)$$

La distinción entre los dos casos  $|u| < 1$  y  $|u| > 1$  en la ecuación (42) surge del hecho de que la tangente hiperbólica inversa está definida para  $|x| < 1$ , mientras que la cotangente hiperbólica está definida para  $|x| > 1$ .

**EJEMPLO 4** La sustitución  $u = 2x$ ,  $dx = 1/2 du$  implica

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = \frac{1}{2} \sinh^{-1} 2x + C.$$

### EJEMPLO 5

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1-x^2} = \left[ \tanh^{-1} x \right]_0^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right]_0^{1/2} = \frac{1}{2} \ln 3 \approx 0.5493.$$

### EJEMPLO 6

$$\int_2^5 \frac{dx}{1-x^2} = \left[ \coth^{-1} x \right]_2^5 = \frac{1}{2} \left[ \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right]_2^5$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \ln \left( \frac{6}{4} \right) - \ln 3 \right] = -\frac{1}{2} \ln 2 \approx -0.3466.$$

## 8.5 Problemas

Determine las derivadas de las funciones en los problemas 1 a 14.

1.  $f(x) = \cosh(3x - 2)$
2.  $f(x) = \sinh \sqrt{x}$
3.  $f(x) = x^2 \tanh\left(\frac{1}{x}\right)$
4.  $f(x) = \operatorname{sech} e^{2x}$
5.  $f(x) = \coth^3 4x$
6.  $f(x) = \ln \sinh 3x$
7.  $f(x) = e^{\operatorname{csch} x}$
8.  $f(x) = \cosh \ln x$
9.  $f(x) = \operatorname{sen}(\sinh x)$
10.  $f(x) = \tan^{-1}(\tanh x)$
11.  $f(x) = \sinh x^4$
12.  $f(x) = \sinh^4 x$
13.  $f(x) = \frac{1}{x + \tanh x}$
14.  $f(x) = \cosh^2 x - \sinh^2 x$

Evalúe las integrales de los problemas 15 a 28.

15.  $\int x \sinh x^2 dx$
16.  $\int \cosh^2 3u du$
17.  $\int \tanh^2 3x dx$
18.  $\int \frac{\operatorname{sech} \sqrt{x} \tanh \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$
19.  $\int \sinh^2 2x \cosh 2x dx$
20.  $\int \tanh 3x dx$
21.  $\int \frac{\sinh x}{\cosh^3 x} dx$
22.  $\int \sinh^4 x dx$
23.  $\int \coth x \operatorname{csch}^2 x dx$
24.  $\int \operatorname{sech} x dx$
25.  $\int \frac{\sinh x}{1 + \cosh x} dx$
26.  $\int \frac{\sinh \ln x}{x} dx$
27.  $\int \frac{1}{(e^x + e^{-x})^2} dx$
28.  $\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx$

Determine las derivadas de las funciones en los problemas 29 a 38.

29.  $f(x) = \sinh^{-1} 2x$
30.  $f(x) = \cosh^{-1}(x^2 + 1)$
31.  $f(x) = \tanh^{-1} \sqrt{x}$
32.  $f(x) = \coth^{-1} \sqrt{x^2 + 1}$
33.  $f(x) = \operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$
34.  $f(x) = \operatorname{csch}^{-1} e^x$
35.  $f(x) = (\sinh^{-1} x)^{3/2}$
36.  $f(x) = \sinh^{-1}(\ln x)$
37.  $f(x) = \ln(\tanh^{-1} x)$
38.  $f(x) = \frac{1}{\tanh^{-1} 3x}$

Utilice las funciones hiperbólicas inversas para evaluar las integrales de los problemas 39 a 48.

39.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 9}}$
40.  $\int \frac{dy}{\sqrt{4y^2 - 9}}$
41.  $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{4 - x^2}$
42.  $\int_5^{10} \frac{dx}{4 - x^2}$
43.  $\int \frac{dx}{x\sqrt{4 - 9x^2}}$
44.  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 25}}$
45.  $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} + 1}} dx$
46.  $\int \frac{x}{\sqrt{x^4 - 1}} dx$
47.  $\int \frac{1}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx$
48.  $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} dx$

49. Aplique las definiciones de la ecuación (1) para demostrar la identidad de la ecuación (7).

50. Deduzca las identidades de las ecuaciones (5) y (6) a partir de la identidad en la ecuación (4).

51. Deduzca las identidades de las ecuaciones (10) y (11) a partir de la identidad en la ecuación (8).

52. Suponga que  $A$  y  $B$  son constantes. Muestre que la función  $x(t) = A \cosh kt + B \sinh kt$  es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} = k^2x(t).$$

53. Determine la longitud de la curva  $y = \cosh x$  en el intervalo  $[0, a]$ .

54. Determine el volumen del sólido que se obtiene al girar en torno del eje  $x$  el área bajo  $y = \sinh x$  de  $x = 0$  a  $x = \pi$ .

55. Muestre que el área  $A(\theta)$  del sector sombreado en la figura 8.5.1 es  $\theta/2$ . Esto corresponde al hecho de que el área del sector del círculo unitario entre el eje  $x$  positivo y el radio al punto  $(\cos \theta, \sin \theta)$  es  $\theta/2$ . [Sugerencia: observe primero que

$$A(\theta) = \frac{1}{2} \cosh \theta \sinh \theta - \int_1^{\cosh \theta} \sqrt{x^2 - 1} dx.$$

Después utilice el teorema fundamental del cálculo para mostrar que  $A'(\theta) = \frac{1}{2}$  para toda  $\theta$ ]

56. Evalúe los siguientes límites: (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x}$ ;

(b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x$ ; (c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh x}{e^x}$ .

57. Utilice el método del ejemplo 3 para determinar el valor numérico de  $\sinh^{-1} 1$ .

58. Aplique las ecuaciones (34) y (39) para verificar la identidad

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \sinh^{-1} \left( \frac{1}{x} \right) \quad \text{si } x \neq 0.$$

59. Establezca la fórmula para  $D_x \sinh^{-1} x$  en la ecuación (28).

60. Establezca la fórmula para  $D_x \operatorname{sech}^{-1} x$  en la ecuación (32).

61. Demuestre la ecuación (36) derivando ambos lados de la ecuación.

62. Establezca la ecuación (34) despejando  $y$  en términos de  $x$  en la ecuación

$$x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

63. Establezca la ecuación (37) despejando  $y$  en términos de  $x$  en la ecuación

$$x = \coth y = \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}}.$$

64. (a) Derive ambos lados de la ecuación (37) para mostrar que difieren por una constante  $C$ . (b) Después demuestre que  $C = 0$  utilizando la definición de  $\coth x$  para mostrar que  $\coth^{-1} 2 = \frac{1}{2} \ln 3$ .

65. (a) Derive ambos lados de la ecuación (39) para mostrar que difieren por una constante  $C$ . (b) Después demuestre que  $C = 0$  utilizando la definición de  $\operatorname{csch} x$  para mostrar que  $\operatorname{csch}^{-1} 1 = \ln(1 + \sqrt{2})$ .

## 8.5 Proyecto

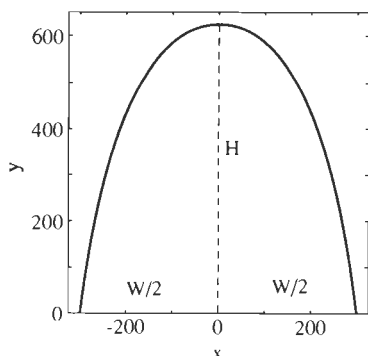


Figura 8.5.4 La curva centroide del arco de San Luis, Missouri.

La construcción del arco de San Luis, Missouri, concluyó en octubre de 1965. Con un diseño de acero inoxidable hueco, su *curva centroide* (o curva central) queda descrita, con una muy buena aproximación, por la ecuación

$$y = 693.86 - (68.767) \cosh \frac{3x}{299}. \quad (1)$$

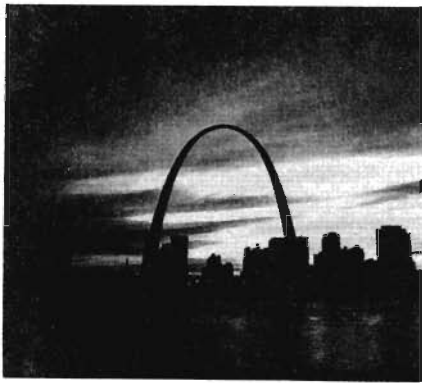
En este caso,  $y$  denota la altura sobre el suelo (en pies) y  $x$  denota la distancia horizontal (en pies) desde el eje vertical de simetría del arco. Comience graficando la ecuación (1) para verificar que la curva centroide tiene la apariencia de la figura 8.5.4. Los problemas 1 a 5 están relacionados con aspectos matemáticos del arco y de su curva centroide.

1. Deduzca de la ecuación (1) que la altura  $H$  del punto más alto de la curva centroide está aproximadamente a 625 pies y que el ancho  $W$  de la base del arco es ligeramente menor que 600 pies.

2. Determine la longitud de arco de la curva centroide del arco. Puede realizar una integración numérica, como en los proyectos de las secciones 5.4 y 5.9.

El arco es hueco con secciones transversales variables. Cada sección transversal normal a la curva centroide es un triángulo equilátero. El área (en pies<sup>2</sup>) de





El arco de San Luis, Missouri.

la sección transversal que interseca la curva centroide en el punto  $(x, y)$  es

$$A = 1262.67 - (1.8198)y. \quad (2)$$

3. Muestre que la longitud del lado  $l$  de la sección transversal triangular del arco varía desde casi 54 pies en la base hasta cerca de 17 pies en la parte superior.
4. El perímetro de una sección transversal triangular de longitud  $l$  es  $P = 3l$ . Explique (de manera no rigurosa) la fórmula

$$S = \int_a^{**} P \, ds$$

que da el área de la superficie  $S$  de un tubo en términos del perímetro de su sección transversal  $P$  y la longitud de arco  $s$  a lo largo de su curva centroide. Entonces, aplique esta fórmula de manera adecuada para aproximar numéricamente el área (exterior) de la superficie del arco. Puede comenzar expresando el perímetro como una función  $P(x)$  y escribiendo

$$ds = \frac{ds}{dx} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

5. Explique (de manera no rigurosa) la fórmula

$$V = \int_a^{**} A \, ds$$

para el volumen  $V$  de un tubo en términos del área  $A$  de su sección transversal y la longitud de arco  $s$  a lo largo de su curva centroide. Aplique entonces de manera adecuada la fórmula para determinar el volumen total comprendido dentro de la superficie exterior del arco de San Luis.

*Nota:* La mayor parte de este proyecto se tomó de "The Mathematics and Architecture of the Saint Louis Arch", por William V. Thayer, St. Louis Community College at Meramec, 1988, y de otros materiales de un curso de matemáticas relativos al arco.

## Capítulo 8 Repaso: DEFINICIONES Y FÓRMULAS

Use la siguiente lista como una guía de los conceptos que tal vez necesite revisar.

1. Las definiciones de las seis funciones trigonométricas inversas.
2. Las derivadas de las funciones trigonométricas inversas.
3. Las fórmulas integrales correspondientes a las derivadas de las funciones seno inverso, tangente inversa y secante inversa.

4. La regla de l'Hôpital y las formas indeterminadas  $0/0$ ,  $\infty/\infty$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $0^0$ ,  $\infty^0$  y  $1^0$ .

5. Las definiciones y derivadas de las funciones hiperbólicas.
6. Las definiciones y derivadas de las funciones hiperbólicas inversas.
7. El uso de las funciones hiperbólicas inversas para evaluar ciertas integrales algebraicas.

## Capítulo 8 Problemas diversos

Derive las funciones de los problemas 1 a 20.

1.  $f(x) = \sin^{-1} 3x$

2.  $f(x) = \tan^{-1} 7x$

3.  $g(t) = \sec^{-1} t^2$

4.  $g(t) = \tan^{-1} e^t$

5.  $f(x) = \sin^{-1}(\cos x)$

6.  $f(x) = \sinh^{-1} 2x$

7.  $g(t) = \cosh^{-1} 10t$

8.  $h(u) = \tanh^{-1}\left(\frac{1}{u}\right)$

9.  $f(x) = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

10.  $f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

11.  $f(x) = \arcsen \sqrt{x}$

12.  $f(x) = x \sec^{-1} x^2$

13.  $f(x) = \tan^{-1}(1 + x^2)$

14.  $f(x) = \sin^{-1} \sqrt{1 - x^2}$

15.  $f(x) = e^x \sinh e^x$

16.  $f(x) = \ln \cosh x$

17.  $f(x) = \tanh^2 3x + \operatorname{sech}^2 3x$   
 18.  $f(x) = \sinh^{-1} \sqrt{x^2 - 1}$   
 19.  $f(x) = \cosh^{-1} \sqrt{x^2 + 1}$   
 20.  $f(x) = \tanh^{-1}(1 - x^2)$

Evalúe las integrales de los problemas 21 a 40.

- |   |   |
|---|---|
| 21. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$           | 22. $\int \frac{dx}{1+4x^2}$              |
| 23. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$            | 24. $\int \frac{dx}{4+x^2}$               |
| 25. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$     | 26. $\int \frac{x}{1+x^4} dx$             |
| 27. $\int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}} dx$         | 28. $\int \frac{1}{9+4x^2} dx$            |
| 29. $\int \frac{x^2}{1+x^6} dx$               | 30. $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx$   |
| 31. $\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}} dx$        | 32. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}} dx$     |
| 33. $\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx$       | 34. $\int x^2 \cosh x^3 dx$               |
| 35. $\int \frac{\sinh \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ | 36. $\int \operatorname{sech}^2(3x-2) dx$ |
| 37. $\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$         | 38. $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-1}} dx$     |
| 39. $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+9}} dx$         | 40. $\int \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx$      |

Determine los límites de los problemas 41 a 55.

- |   |  |
|---|--|
| 41. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}$              | 42. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$                                 |
| 43. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}$   | 44. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$                              |
| 45. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctan t - \sin t}{t^3}$ |  |
| 46. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$  | 47. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x) \ln(1+x)$                                 |
| 48. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{1/x} - 1) \tan x$         | 49. $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1-\cos x} \right)$ |

50.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x+2} - \frac{x^3}{x^2+3} \right)$   
 51.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-x+1} - \sqrt{x})$   
 52.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$   
 53.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{2x} - 2x)^{1/x}$   
 54.  $\lim_{x \rightarrow \infty} [1 - \exp(-x^2)]^{1/x^2}$   
 55.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[ \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x - e \right]$  [Sugerencia: sea  $u = 1/x$  y considere el límite cuando  $u \rightarrow 0^+$ .]

56. De acuerdo con el problema 51 de la sección 9.6, el área de la superficie del elipsoide obtenido al girar en torno del eje  $x$  la elipse con ecuación

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad (0 < a < b)$$

es

$$A = 2\pi ab \left[ \frac{b}{a} + \frac{a}{c} \ln \left( \frac{b+c}{a} \right) \right],$$

donde  $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ . Utilice la regla de l'Hôpital para mostrar que

$$\lim_{b \rightarrow a} A = 4\pi a^2,$$

el área de la superficie de una esfera de radio  $a$ .

57. Determine el volumen generado al girar en torno del eje  $y$  la región bajo  $y = \sqrt{1-x^4}$ , de  $x = 0$  a  $x = 1/\sqrt{2}$ .

58. Determine el volumen generado al girar en torno del eje  $y$  la región bajo  $y = \sqrt{x^4+1}$ , de  $x = 0$  a  $x = 1$ .

59. Utilice las ecuaciones (35) a (38) de la sección 8.5 para mostrar que

$$(a) \coth^{-1} x = \tanh^{-1} \left( \frac{1}{x} \right); \quad (b) \operatorname{sech}^{-1} x = \cosh^{-1} \left( \frac{1}{x} \right).$$

60. Muestre que  $x''(t) = k^2 x(t)$  si

$$x(t) = A \cosh kt + B \sinh kt,$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes. Determine  $A$  y  $B$  si (a)  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 0$ ; (b)  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 1$ .

61. Utilice el método de Newton para determinar la mínima solución positiva de la ecuación  $\cos x \cosh x = 1$ . Comience trazando las gráficas de  $y = \cos x$  y  $y = \operatorname{sech} x$ .

62. (a) Verifique mediante una derivación que

$$\int \sec x dx = \sinh^{-1}(\tan x) + C.$$

(b) De manera análoga, muestre que

$$\int \operatorname{sech} x dx = \tan^{-1}(\sinh x) + C.$$

# Técnicas de integración

□ El matemático más prolífico de toda la historia fue Leonhard Euler (se pronuncia “oiler”), quien nació el año de 1707 en Basel, Suiza, casa de la familia de matemáticos Bernoulli. Su padre prefería una carrera teológica para su hijo, pero el joven Euler aprendió matemáticas de John Bernoulli y con ello encontró su verdadera vocación. Durante su vida, Euler publicó más de 500 libros y artículos. Su obra continuó incluso después de perder la vista en 1766. Al momento de su muerte en 1783, dejó más de 300 manuscritos adicionales cuya publicación se realizó de manera continua durante otro medio siglo. Sus obras completas ocupan aproximadamente 75 grandes volúmenes.

□ Ningún matemático del pasado ha influido de manera tan directa a los estudiantes de matemáticas de la actualidad, pues en gran medida fue

Euler quien dio forma a la notación y terminología que se utiliza actualmente para la enseñanza de álgebra de bachillerato, trigonometría y cálculo. Su *Introductio in Analysin Infinitorum* (Introducción al análisis infinitesimal) es uno de los primeros libros de texto de matemáticas cuya exposición sería (en una traducción del original en latín) accesible a un estudiante moderno. He aquí algunas de las ahora familiares notaciones cuyo uso fue popularizado y estandarizado por Euler:

$e$	para la base de los logaritmos naturales;
$a, b, c$	para los lados de un triángulo $ABC$ ;
$i$	para la raíz cuadrada de $-1$ ;
$\Sigma$	como símbolo de suma;
$f(x)$	para la notación funcional;
$\pi$	para el área del círculo unitario;

y las abreviaturas trigonométricas  $\text{sen}$ ,  $\text{cos}$ ,  $\text{tang}$ ,  $\text{cot}$ ,  $\text{sec}$  y  $\text{cosec}$ , que son bastante parecidas a sus formas actuales. La *Introductio* de Euler fue la causa de que el cálculo se basara desde entonces y para siempre en el concepto de función. Sus tratados de cálculo de 1755 y 1768 proporcionan la fuente original para gran parte del contenido y métodos de los cursos y textos modernos de cálculo.

□ Euler descubrió originalmente tantas de las fórmulas e identidades estándar de las matemáticas, que se acostumbra atribuir una fórmula al primer matemático que la redescubrió después de Euler. Pero la identidad  $e^{ix} = \cos x + i \text{sen } x$  que relaciona las funciones exponencial y trigonométricas sí se conoce como la fórmula de Euler. La sustitución de  $x = \pi$  produce la relación  $e^{i\pi} + 1 = 0$ , que relaciona cinco de las constantes más importantes de matemáticas.

## 9.1 Introducción

En los últimos tres capítulos hemos visto que muchas magnitudes geométricas y físicas se pueden expresar como integrales definidas. El teorema fundamental del cálculo reduce el problema de calcular la integral definida

$$\int_a^b f(x) dx$$

al de encontrar la primitiva  $G(x)$  de  $f(x)$ ; cuando esto se ha logrado, entonces

$$\int_a^b f(x) dx \left[ G(x) \right]_a^b = G(b) - G(a).$$

Pero hasta ahora hemos confiado, en gran parte, en métodos de ensayo y error para encontrar la primitiva requerida  $G(x)$ . A veces, el conocimiento de las fórmulas elementales de derivación, quizá combinadas con la sustitución simple, han permitido integrar una función dada. Sin embargo, este método puede ser ineficaz y consumir tiempo, en especial por la circunstancia del siguiente hecho sorprendente: existen integrales de apariencia simple, tales como

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \quad \text{y} \quad \int \sqrt{1+x^4} dx,$$

que no pueden ser evaluadas en términos de combinaciones finitas de las funciones algebraicas y de las funciones trascendentes elementales familiares. Por ejemplo, la primitiva

$$H(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

de  $e^{-x^2}$  no tiene una expresión finita en términos de funciones elementales. Cualquier intento de encontrar dicha expresión estará condenado al fracaso en forma inevitable.

La presencia de tales ejemplos indica que no puede esperarse que la integración se reduzca a un proceso rutinario, como lo es la derivación. En realidad, encontrar primitivas es un arte que depende de la experiencia y de la práctica. No obstante, existen ciertas técnicas cuyo uso sistemático puede reducir sustancialmente nuestra dependencia en la casualidad y en la sola intuición. Este capítulo se refiere a algunas de esas técnicas sistemáticas de integración.

## 9.2 Tablas de integrales y sustituciones simples

La integración sería una cuestión por completo simple si contáramos con una lista de fórmulas de integración, una *tabla de integrales* en la que pudiésemos localizar cualquier integral que necesitésemos calcular. Pero la diversidad de integrales que encontramos en la práctica es demasiado grande para que esté contenida en una tabla de integrales. Es más razonable imprimir o memorizar, una corta tabla de integración del tipo que aparece con mayor frecuencia y aprender técnicas mediante las cuales se puede ampliar el rango de aplicación de esta tabla corta. Podemos empezar con la lista de integrales de la figura 9.2.1, que son familiares por los capítulos anteriores; cada una es equivalente a alguna de las fórmulas básicas de derivación.

En los forros de este libro aparece una tabla de 113 fórmulas integrales. Es fácil disponer de tablas de integrales aún más extensas. Por ejemplo, el volumen de *Standard Mathematical Tables and Formulas*, editado por William H. Beyer y publicado por CRC Press, Inc. (Boca Raton, Florida), contiene más de 700 fórmulas integrales. Pero aun una tabla tan grande sólo puede incluir una pequeña fracción de las integrales que pueda ser necesario evaluar. Así, es necesario

$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad [n \neq -1]$	(1)
$\int \frac{du}{u} = \ln  u  + C$	(2)
$\int e^u du = e^u + C$	(3)
$\int \cos u du = \text{sen } u + C$	(4)
$\int \text{sen } u du = -\cos u + C$	(5)
$\int \sec^2 u du = \tan u + C$	(6)
$\int \csc^2 u du = -\cot u + C$	(7)
$\int \sec u \tan u du = \sec u + C$	(8)
$\int \csc u \cot u du = -\csc u + C$	(9)
$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \text{sen}^{-1} u + C$	(10)
$\int \frac{du}{1+u^2} = \text{tan}^{-1} u + C$	(11)
$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \text{sec}^{-1}  u  + C$	(12)

**Figura 9.2.1** Una pequeña tabla de integrales

aprender técnicas para deducir nuevas fórmulas y para transformar una integral dada en una ya conocida o que aparezca en una tabla accesible.

La principal técnica de este tipo es el *método de sustitución*, que ya consideramos en la sección 5.7. Recuérdese que si

$$\int f(u) du = F(u) + C,$$

entonces,

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C.$$

Así, la sustitución

$$u = g(x), du = g'(x) dx$$

transforma la integral  $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$  en la integral más sencilla  $\int f(u) du$ . La clave para hacer esta simplificación descansa en descubrir la composición  $f(g(x))$  en el integrando dado. Para convertir este integrando en una función de  $u$  únicamente, el factor restante debe ser un múltiplo constante de la derivada  $g'(x)$  de la función interior  $g(x)$ . En este caso, reemplazamos  $f(g(x))$  por  $f(u)$  y  $g'(x) dx$  por  $du$ . Los capítulos 6 al 8 contienen numerosas ilustraciones de este método de sustitución, y los problemas al final de esta sección proporcionan la oportunidad de repararlo.

**EJEMPLO 1** Determine  $\int \frac{1}{x}(1 + \ln x)^5 dx$ .

**Solución** Se necesita distinguir *tanto* la función interior  $g(x)$  como su derivada  $g'(x)$ . Si se escoge  $g(x) = 1 + \ln x$ , entonces  $g'(x) = 1/x$ . Por tanto, la integral dada es de la forma analizada anteriormente, con  $f(u) = u^5$ ,  $u = 1 + \ln x$  y  $du = dx/x$ . En consecuencia,

$$\int \frac{1}{x}(1 + \ln x)^5 dx = \int u^5 du = \frac{1}{6}u^6 + C = \frac{1}{6}(1 + \ln x)^6 + C.$$

**EJEMPLO 2** Determine  $\int \frac{x}{1+x^4} dx$ .

**Solución** Aquí no es claro cuál es la función interior. Pero si revisamos la fórmula integral en la ecuación (11) (figura 9.2.1), intentaremos con la sustitución  $u = x^2$ ,  $du = 2x dx$ . Aprovechamos el factor  $x dx = \frac{1}{2} du$  disponible en el integrando y calculamos:

$$\int \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2} \text{tan}^{-1} u + C = \frac{1}{2} \text{tan}^{-1} x^2 + C.$$

Observe que la sustitución  $u = x^2$  hubiese sido de poco provecho si el integrando fuese  $1/(1+x^4)$  o bien  $x^2/(1+x^4)$ .

---

El ejemplo 2 ilustra la forma de hacer una sustitución para convertir una integral dada en una conocida. Con frecuencia se puede transformar una integral que no aparezca en alguna tabla de integrales en otra que sí esté, usando las técnicas

de este capítulo. En el ejemplo 3 se emplea una sustitución apropiada para “reconciliar” la integral dada con la fórmula integral estándar

$$\int \frac{u^2}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) - \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + C, \quad (13)$$

que es la fórmula (56) (forros).

**EJEMPLO 3** Determine  $\int \frac{x^2}{\sqrt{25 - 16x^2}} dx$ .

**Solución** Para que  $25 - 16x^2$  sea igual a  $a^2 - u^2$  en la ecuación (13), sean  $a = 5$  y  $u = 4x$ . Entonces  $du = 4 dx$ , de modo que  $dx = \frac{1}{4} du$ . Esto implica

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{25 - 16x^2}} dx &= \int \frac{(\frac{1}{4}u)^2}{\sqrt{25 - u^2}} \cdot \frac{1}{4} du = \frac{1}{64} \int \frac{u^2}{\sqrt{25 - u^2}} du \\ &= \frac{1}{64} \left[ \frac{25}{2} \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{5}\right) - \frac{u}{2} \sqrt{25 - u^2} \right] + C \\ &= \frac{25}{128} \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{4x}{5}\right) - \frac{x}{32} \sqrt{25 - 16x^2} + C. \end{aligned}$$

En la sección 9.6 veremos cómo deducir las fórmulas integrales, como la de la ecuación (13).

## 9.2 Problemas

Evalúe las integrales de los problemas 1 a 30.

- |   |   |  |   |
|---|---|--|---|
| 1. $\int (2 - 3x)^4 dx$   | 2. $\int \frac{1}{(1 + 2x)^2} dx$                       | 19. $\int \frac{3x}{\sqrt{1 - x^4}} dx$  | 20. $\int \operatorname{sen}^3 2x \cos 2x dx$             |
| 3. $\int x^2 \sqrt{2x^3 - 4} dx$                                | 4. $\int \frac{5t}{5 + 2t^2} dt$                        | 21. $\int \tan^4 3x \sec^2 3x dx$  | 22. $\int \frac{1}{1 + 4t^2} dt$                          |
| 5. $\int \frac{3x}{\sqrt{2x^2 + 3}} dx$                         | 6. $\int x \sec^2 x^2 dx$                               | 23. $\int \frac{\cos \theta}{1 + \operatorname{sen}^2 \theta} d\theta$                       | 24. $\int \frac{\sec^2 \theta}{1 + \tan \theta} d\theta$  |
| 7. $\int \frac{\cot \sqrt{y} \csc \sqrt{y}}{\sqrt{y}} dy$       | 8. $\int \operatorname{sen} \pi(2x + 1) dx$             | 25. $\int \frac{(1 + \sqrt{x})^4}{\sqrt{x}} dx$  | 26. $\int t^{-1/3} \sqrt{t^{2/3} - 1} dt$                 |
| 9. $\int (1 + \operatorname{sen} \theta)^5 \cos \theta d\theta$ | 10. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{4 + \cos 2x} dx$ | 27. $\int \frac{1}{(1 + t^2) \arctan t} dt$  | 28. $\int \frac{\sec 2x \tan 2x}{(1 + \sec 2x)^{3/2}} dx$ |
| 11. $\int e^{-\cot x} \csc^2 x dx$                              | 12. $\int \frac{e^{\sqrt{x+4}}}{\sqrt{x+4}} dx$         | 29. $\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}} dx$  | 30. $\int \frac{x}{\sqrt{\exp(2x^2) - 1}} dx$             |
| 13. $\int \frac{(\ln t)^{10}}{t} dt$                            | 14. $\int \frac{t}{\sqrt{1 - 9t^2}} dt$                 | <i>En los problemas 31 a 35, haga la sustitución indicada para evaluar la integral dada.</i> |   |
| 15. $\int \frac{1}{\sqrt{1 - 9t^2}} dt$                         | 16. $\int \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} dx$                 | 31. $\int x^2 \sqrt{x - 2} dx; \quad u = x - 2$  |   |
| 17. $\int \frac{e^{2x}}{1 + e^{4x}} dx$                         | 18. $\int \frac{e^{\arctan x}}{1 + x^2} dx$             | 32. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x + 3}} dx; \quad u = x + 3$                                      |   |

$$33. \int \frac{x}{\sqrt{2x+3}} dx; \quad u = 2x + 3$$

$$34. \int x\sqrt[3]{x-1} dx; \quad u = x - 1$$

$$35. \int \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}} dx; \quad u = x + 1$$

En los problemas 36 a 50, evalúe la integral dada. Realice primero una sustitución que la transforme a una forma estándar. Las formas estándar con el número de fórmula dada aparecen en los forros de este libro.

$$36. \int \frac{1}{100 + 9x^2} dx; \quad \text{Fórmula (17)}$$

$$37. \int \frac{1}{100 - 9x^2} dx; \quad \text{Fórmula (18)}$$

$$38. \int \sqrt{9 - 4x^2} dx; \quad \text{Fórmula (54)}$$

$$39. \int \sqrt{4 + 9x^2} dx; \quad \text{Fórmula (44)}$$

$$40. \int \frac{1}{\sqrt{16x^2 + 9}} dx; \quad \text{Fórmula (45)}$$

$$41. \int \frac{x^2}{\sqrt{16x^2 + 9}} dx; \quad \text{Fórmula (49)}$$

$$42. \int \frac{x^2}{\sqrt{25 + 16x^2}} dx; \quad \text{Fórmula (49)}$$

$$43. \int x^2\sqrt{25 - 16x^2} dx; \quad \text{Fórmula (57)}$$

$$44. \int x\sqrt{4 - x^4} dx; \quad \text{Fórmula (54)}$$

$$45. \int e^x \sqrt{9 + e^{2x}} dx; \quad \text{Fórmula (44)}$$

$$46. \int \frac{\cos x}{\sin^2 x \sqrt{1 + \sin^2 x}} dx; \quad \text{Fórmula (50)}$$

$$47. \int \frac{\sqrt{x^4 - 1}}{x} dx; \quad \text{Fórmula (47)}$$

$$48. \int \frac{e^{3x}}{\sqrt{25 + 16e^{2x}}} dx; \quad \text{Fórmula (49)}$$

$$49. \int \frac{(\ln x)^2}{x} \sqrt{1 + (\ln x)^2} dx; \quad \text{Fórmula (48)}$$

$$50. \int x^8 \sqrt{4x^6 - 1} dx; \quad \text{Fórmula (48)}$$

51. La sustitución  $u = x^2$ ,  $x = \sqrt{u}$ ,  $dx = du/(2\sqrt{u})$  parece conducir a este resultado:

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{1}{2} \int_1^1 \sqrt{u} du = 0.$$

¿Cree usted que éste sea el resultado? O si no, ¿por qué no?

52. Use el hecho de que  $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1$  para evaluar

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx.$$

53. Use el hecho de que  $1 - (x-1)^2 = 2x - x^2$  para evaluar

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} dx.$$

## 9.2 Proyecto

De acuerdo con la fórmula (44) de los forros de este libro,

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx = G(x) + C, \quad (14)$$

donde

$$G(x) = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}). \quad (15)$$

De acuerdo con el libro *First Course in Calculus* de Serge Lang (5a. edición, Nueva York: Springer-Verlag, 1991, pág 376), esta misma integral indefinida está dada por

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx = H(x) + C, \quad (16)$$

donde

$$H(x) = \frac{1}{8} [(x + \sqrt{x^2 + 1})^2 + 4 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - (x + \sqrt{x^2 + 1})^{-2}]. \quad (17)$$

En este proyecto, su misión es determinar si las funciones  $G(x)$  y  $H(x)$  de las ecuaciones (15) y (17) son, en realidad, primitivas de  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ . Enumeramos algunas de las posibles formas de analizar la relación entre las funciones  $f(x)$ ,  $G(x)$  y  $H(x)$ . Usted deberá analizar varios métodos diferentes.

1. Si tiene una calculadora gráfica o una computadora con una utilería de graficación, grafique  $y = G(x)$  y  $y = H(x)$ . Si las funciones  $G(x)$  y  $H(x)$  son primitivas de  $f(x)$ , ¿cómo deben relacionarse sus gráficas?
2. Si su calculadora o computadora pueden graficar la *derivada* de una función definida por el usuario, trace las gráficas de  $f(x)$  y las derivadas  $G'(x)$  y  $H'(x)$ . ¿La evidencia visual lo convence de que  $G'(x) = H'(x) = f(x)$ ?
3. Aunque su calculadora o computadora no pueda graficar las derivadas de manera directa, puede graficar  $f(x)$  y los cocientes

$$\frac{G(x+h) - G(x-h)}{2h} \quad \text{y} \quad \frac{H(x+h) - H(x-h)}{2h},$$

los cuales (con  $h = 0.001$ ) deben ser aproximaciones cercanas a las derivadas  $G'(x)$  y  $H'(x)$ , respectivamente. (¿Por qué?)

4. Con una calculadora o computadora que pueda aproximar integrales de manera numérica (con una tecla de función adecuada o con programas como los de los proyectos de la sección 5.9) usted puede determinar si

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) = H(b) - H(a), \quad (18)$$

como implicaría el teorema fundamental del cálculo si  $G' = H' = f$ . Será bastante convincente si puede verificar la ecuación (18) de manera numérica con varios pares diferentes de límites, como  $a = 1, b = 5$  y  $a = 7, b = 11$ .

5. Incluso sin una calculadora gráfica, usted puede calcular los valores numéricos de  $G(x)$ ,  $H(x)$ ,  $G'(x)$ ,  $H'(x)$  y  $f(x)$  para varios valores de  $x$ . ¿Estos resultados numéricos implican que  $G(x) = H(x)$  o que  $G'(x) = H'(x) = f(x)$ ?

6. Con un sistema de álgebra computacional, como *Derive*, *Maple* o *Mathematica*, usted puede calcular las derivadas  $G'(x)$  y  $H'(x)$  de manera simbólica para determinar si son iguales o no a  $f(x)$ . Tal vez, incluso pueda hacerlo a la antigua (usando papel y lápiz). De la misma manera podría analizar si  $G(x) = H(x)$ .

## 9.3 Integrales trigonométricas

En esta sección se analizan y evalúan integrales en las que el integrando es una potencia de una función trigonométrica o el producto de dos potencias.

Para evaluar las integrales

$$\int \sen^2 u \, du \quad \text{y} \quad \int \cos^2 u \, du$$

que se aplican mucho, utilizamos las **identidades del semiángulo**

$$\sen^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta), \quad (1)$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta), \quad (2)$$

de las ecuaciones (10) y (11) del apéndice A.



**EJEMPLO 1** Determine  $\int \operatorname{sen}^2 3x \, dx$ .

**Solución** La identidad de la ecuación (1) (con  $3x$  en vez de  $x$ ) implica

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 3x \, dx &= \int \frac{1}{2}(1 - \cos 6x) \, dx \\ &= \frac{1}{2}(x - \frac{1}{6} \operatorname{sen} 6x) + C = \frac{1}{2}(6x - \operatorname{sen} 6x) + C.\end{aligned}$$

---

Para integrar  $\tan^2 x$  y  $\cot^2 x$ , utilizamos las identidades

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x, \quad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x. \quad (3)$$

La primera de ellas es consecuencia de la identidad fundamental  $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$  al dividir ambos lados entre  $\cos^2 x$ . Para obtener la segunda fórmula en (3), dividimos ambos lados de la identidad fundamental entre  $\operatorname{sen}^2 x$ .

**EJEMPLO 2** Calcule la primitiva  $\int \cot^2 3x \, dx$ .

**Solución** Utilizamos la segunda identidad en (3), para obtener

$$\begin{aligned}\int \cot^2 3x \, dx &= \int (\csc^2 3x - 1) \, dx \\ &= \int (\csc^2 u - 1) \left(\frac{1}{3} du\right) \quad (u = 3x) \\ &= \frac{1}{3}(-\cot u - u) + C = -\frac{1}{3} \cot 3x - x + C.\end{aligned}$$

## INTEGRALES DE PRODUCTOS DE SENOS Y COSENOS

La sustitución  $u = \operatorname{sen} x$ ,  $du = \cos x \, dx$  implica

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos x \, dx = \int u^3 \, du = \frac{1}{4} u^4 + C = \frac{1}{4} \operatorname{sen}^4 x + C.$$

Esta sustitución, o la sustitución similar  $u = \cos x$ ,  $du = -\operatorname{sen} x \, dx$ , se pueden utilizar para evaluar una integral de la forma

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx \quad (4)$$

en el primero de los dos casos siguientes:

- Caso 1: Por lo menos uno de los números  $m$  y  $n$  es un *entero positivo impar*. De ser así, el otro puede ser cualquier número real.
- Caso 2: Tanto  $m$  como  $n$  son *enteros pares no negativos*.

Por ejemplo, supongamos que  $m = 2k + 1$  es un entero positivo impar. Entonces, separamos un factor  $\operatorname{sen} x$  y utilizamos la identidad  $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$  para expresar el factor restante  $\operatorname{sen}^{m-1} x$  en términos de  $\cos x$ , como en el siguiente ejemplo:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx &= \int \operatorname{sen}^{m-1} x \cos^n x \operatorname{sen} x \, dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x \, dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x \, dx.\end{aligned}$$

Ahora, la sustitución  $u = \cos x$ ,  $du = -\operatorname{sen} x \, dx$  implica

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx = -\int (1 - u^2)^k u^n \, du.$$

El exponente  $k = (m-1)/2$  es un entero no negativo, pues  $m$  es un entero positivo impar. Por tanto, el factor  $(1 - u^2)^k$  del integrando es un polinomio en la variable  $u$ , por lo que su producto con  $u^n$  es fácil de integrar.

En esencia, este método consiste en desprender una copia de  $\operatorname{sen} x$  (si  $m$  es impar) y después convertir los senos restantes en cosenos. Si  $n$  es impar, se puede separar una copia de  $\cos x$  y convertir en senos los cosenos restantes.

### EJEMPLO 3

$$\begin{aligned}\text{(a)} \quad \int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \, dx &= \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx \\ &= \int (u^4 - u^2) \, du \quad (u = \cos x) \\ &= \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(b)} \quad \int \cos^5 x \, dx &= \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x \, dx \\ &= \int (1 - u^2)^2 \, du \quad (u = \operatorname{sen} x) \\ &= \int (1 - 2u^2 + u^4) \, du = u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C \\ &= \operatorname{sen} x - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C.\end{aligned}$$

En el caso 2 de la integral de senos y cosenos en la ecuación (4), en el que tanto  $m$  como  $n$  son enteros pares no negativos, utilizamos las fórmulas de semiángulo en las ecuaciones (1) y (2) para calcular la mitad de los exponentes pares de  $\operatorname{sen} x$  y  $\cos x$ . De ser necesario, la repetición de este proceso con los exponentes resultantes de  $\cos 2x$  conducirá a integrales que contengan potencias impares, y ya hemos visto cómo manejar esto en el caso 1.

**EJEMPLO 4** El uso de las ecuaciones (1) y (2) implica

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - \cos^2 2x) \, dx = \frac{1}{4} \int [1 - \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)] \, dx \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) \, dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C.\end{aligned}$$

En el tercer paso utilizamos la ecuación (2) con  $\theta = 2x$ .

**EJEMPLO 5** Aquí aplicamos la ecuación (2), primero con  $\theta = 3x$ , y después con  $\theta = 6x$ .

$$\begin{aligned}\int \cos^4 3x \, dx &= \int \frac{1}{4}(1 + \cos 6x)^2 \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 6x + \cos^2 6x) \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{3}{2} + 2 \cos 6x + \frac{1}{2} \cos 12x\right) \, dx \\ &= \frac{3}{8}x + \frac{1}{12} \sin 6x + \frac{1}{96} \sin 12x + C.\end{aligned}$$

## INTEGRALES DE PRODUCTOS DE TANGENTES Y SECANTES

Para integrar  $\tan x$ , la sustitución

$$u = \cos x, \quad du = -\operatorname{sen} x \, dx$$

implica

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx = -\int \frac{1}{u} \, du = -\ln|u| + C,$$

y entonces

$$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C. \quad (5)$$

En la ecuación (5) utilizamos el hecho  $|\sec x| = 1/|\cos x|$ .

De manera análoga,

$$\int \cot x \, dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C = -\ln|\csc x| + C. \quad (6)$$

La primera persona que integró  $\sec x$  pudo haber invertido mucho tiempo. Aquí tenemos varios métodos. Primero, “preparamos” la función para integrarla:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen}^2 x}.$$

Ahora

$$\frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z} = \frac{2}{1-z^2}.$$

De manera análoga, trabajando hacia atrás, tenemos

$$\frac{2 \cos x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} + \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\int \sec x \, dx &= \frac{1}{2} \int \left( \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} (\ln |1 + \sin x| - \ln |1 - \sin x|) + C.\end{aligned}$$

Se acostumbra realizar ciertas simplificaciones algebraicas de este último resultado:

$$\begin{aligned}\int \sec x \, dx &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(1 + \sin x)^2}{1 - \sin^2 x} \right| + C \\ &= \ln \left| \frac{(1 + \sin x)^2}{\cos^2 x} \right|^{1/2} + C = \ln \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| + C \\ &= \ln |\sec x + \tan x| + C.\end{aligned}$$

Después de verificar mediante una derivación que

$$\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C, \quad (7)$$

siempre podemos “deducir” este resultado mediante un truco:

$$\begin{aligned}\int \sec x \, dx &= \int (\sec x) \frac{\tan x + \sec x}{\sec x + \tan x} dx \\ &= \int \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} dx = \ln |\sec x + \tan x| + C.\end{aligned}$$

Con una técnica similar se obtiene

$$\int \csc x \, dx = -\ln |\csc x + \cot x| + C. \quad (8)$$

**EJEMPLO 6** La sustitución  $u = \frac{1}{2}x$ ,  $du = \frac{1}{2}dx$  implica

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sec \frac{x}{2} \, dx &= 2 \int_0^{\pi/4} \sec u \, du \\ &= 2 \left[ \ln |\sec u + \tan u| \right]_0^{\pi/4} = 2 \ln(1 + \sqrt{2}) \approx 1.76275.\end{aligned}$$

Una integral de la forma

$$\int \tan^m x \sec^n x \, dx \quad (9)$$

se evalúa en forma rutinaria en cualquiera de los dos casos siguientes.

- Caso 1:  $m$  es un entero positivo impar.
- Caso 2:  $n$  es un entero positivo par.

En el caso 1, separamos el factor  $\sec x \tan x$  para formar, junto con  $dx$ , la diferencial  $\sec x \tan x \, dx$  de  $\sec x$ . Utilizamos entonces la identidad  $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$  para convertir la potencia par restante de  $\tan x$  en potencias de  $\sec x$ . Esto prepara al integrando para la sustitución  $u = \sec x$ .

### EJEMPLO 7

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x \sec^3 x \, dx &= \int (\sec^2 x - 1) \sec^2 x \sec x \tan x \, dx \\ &= \int (u^4 - u^2) \, du \quad (u = \sec x) \\ &= \frac{1}{5} u^5 - \frac{1}{3} u^3 + C = \frac{1}{5} \sec^5 x - \frac{1}{3} \sec^3 x + C.\end{aligned}$$

---

Para evaluar la integral en la ecuación (9) para el caso 2, separamos  $\sec^2 x$  para formar, junto con  $dx$ , la diferencial de  $\tan x$ . Utilizamos entonces la identidad  $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$  para convertir la potencia restante de  $\sec x$  en potencias de  $\tan x$ . Esto prepara al integrando para la sustitución  $u = \tan x$ .

### EJEMPLO 8

$$\begin{aligned}\int \sec^6 2x \, dx &= \int (1 + \tan^2 2x)^2 \sec^2 2x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int (1 + \tan^2 2x)^2 (2 \sec^2 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int (1 + u^2)^2 \, du \quad (u = \tan 2x) \\ &= \frac{1}{2} \int (1 + 2u^2 + u^4) \, du = \frac{1}{2} u + \frac{1}{3} u^3 + \frac{1}{10} u^5 + C \\ &= \frac{1}{2} \tan 2x + \frac{1}{3} \tan^3 2x + \frac{1}{10} \tan^5 2x + C.\end{aligned}$$

---

Métodos similares son efectivos con integrales de la forma

$$\int \csc^m x \cot^n x \, dx.$$

El método del caso 1 tiene éxito con la integral  $\int \tan^n x \, dx$  sólo cuando  $n$  es un entero positivo impar, pero hay otro método que funciona igualmente bien cuando  $n$  es par o impar. Se separa el factor  $\tan^2 x$  y se reemplaza por  $\sec^2 x - 1$ :

$$\begin{aligned}\int \tan^n x \, dx &= \int (\tan^{n-2} x)(\sec^2 x - 1) \, dx \\ &= \int \tan^{n-2} x \sec^2 x \, dx - \int \tan^{n-2} x \, dx.\end{aligned}$$

Integramos lo que se pueda para encontrar que

$$\int \tan^n x \, dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x \, dx. \quad (10)$$

La ecuación (10) es nuestro primer ejemplo de **fórmula de reducción**. Su uso reduce el exponente original  $n$  a  $n-2$ . Si aplicamos la ecuación (10) varias veces, obtenemos en algún momento

$$\int \tan^2 x \, dx = \int (\sec^2 x - 1) \, dx = \tan x - x + C$$

o

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx = -\ln |\cos x| + C = \ln |\sec x| + C.$$

**EJEMPLO 9** Dos aplicaciones de la ecuación (10) dan

$$\begin{aligned} \int \tan^6 x \, dx &= \frac{1}{5} \tan^5 x - \int \tan^4 x \, dx \\ &= \frac{1}{5} \tan^5 x - \left( \frac{1}{3} \tan^3 x - \int \tan^2 x \, dx \right) \\ &= \frac{1}{5} \tan^5 x - \frac{1}{3} \tan^3 x + \tan x - x + C. \end{aligned}$$

Por último, en el caso de una integral con una mezcla poco usual de funciones trigonométrica (tangentes y cosecantes, por ejemplo), un procedimiento eficaz consiste en expresar el integrando en términos de senos y cosenos. La simplificación pudiera producir entonces una expresión fácil de integrar.

### 9.3 Problemas

Evalúe las integrales de los problemas 1 a 45.

1.  $\int \operatorname{sen}^2 2x \, dx$

2.  $\int \cos^2 5x \, dx$

3.  $\int \sec^2 \frac{x}{2} \, dx$

4.  $\int \tan^2 \frac{x}{2} \, dx$

5.  $\int \tan 3x \, dx$

6.  $\int \cot 4x \, dx$

7.  $\int \sec 3x \, dx$

8.  $\int \csc 2x \, dx$

9.  $\int \frac{dx}{\csc^2 x}$

10.  $\int \operatorname{sen}^2 x \cot^2 x \, dx$

11.  $\int \operatorname{sen}^3 x \, dx$

12.  $\int \operatorname{sen}^4 x \, dx$

13.  $\int \operatorname{sen}^2 \theta \cos^3 \theta \, d\theta$

14.  $\int \operatorname{sen}^3 t \cos^3 t \, dt$

15.  $\int \cos^5 x \, dx$

16.  $\int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^3 t} \, dt$

17.  $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}} \, dx$

18.  $\int \operatorname{sen}^3 3\phi \cos^4 3\phi \, d\phi$

19.  $\int \operatorname{sen}^5 2z \cos^2 2z \, dz$

20.  $\int \operatorname{sen}^{3/2} x \cos^3 x \, dx$

21.  $\int \frac{\operatorname{sen}^3 4x}{\cos^2 4x} \, dx$

22.  $\int \cos^6 4\theta \, d\theta$

23.  $\int \sec^4 t \, dt$

25.  $\int \cot^3 2x \, dx$

27.  $\int \tan^5 2x \sec^2 2x \, dx$

29.  $\int \csc^6 2t \, dt$

31.  $\int \frac{\tan^3 \theta}{\sec^4 \theta} \, d\theta$

33.  $\int \frac{\tan^3 t}{\sqrt{\sec t}} \, dt$

35.  $\int \frac{\cot \theta}{\csc^3 \theta} \, d\theta$

37.  $\int \cos^3 5t \, dt$

39.  $\int \cot^4 3t \, dt$

41.  $\int \operatorname{sen}^5 2t \cos^{3/2} 2t \, dt$

43.  $\int \frac{\tan x + \operatorname{sen} x}{\sec x} \, dx$

45.  $\int \frac{\cot x + \csc^2 x}{1 - \cos^2 x} \, dx$

24.  $\int \tan^3 x \, dx$

26.  $\int \tan \theta \sec^4 \theta \, d\theta$

28.  $\int \cot^3 x \csc^2 x \, dx$

30.  $\int \frac{\sec^4 t}{\tan^2 t} \, dt$

32.  $\int \frac{\cot^3 x}{\csc^2 x} \, dx$

34.  $\int \frac{1}{\cos^4 2x} \, dx$

36.  $\int \operatorname{sen}^2 3\alpha \cos^2 3\alpha \, d\alpha$

38.  $\int \tan^4 x \, dx$

40.  $\int \tan^2 2t \sec^4 2t \, dt$

42.  $\int \cot^3 \xi \csc^{3/2} \xi \, d\xi$

44.  $\int \frac{\cot x + \csc x}{\operatorname{sen} x} \, dx$

46. Deduzca una fórmula de reducción análoga a la de la ecuación (10), para  $\int \cot^n x \, dx$ .

47. Determine  $\int \tan x \sec^4 x \, dx$  de dos formas diferentes. Después demuestre que sus dos resultados son equivalentes.

48. Determine  $\int \cot^3 x \, dx$  de dos maneras diferentes. Después demuestre que sus dos resultados son equivalentes.

Los problemas 49 a 52 son aplicaciones de las identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)],$$

$$\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(A - B) + \operatorname{sen}(A + B)],$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)].$$

49. Determine  $\int \operatorname{sen} 3x \cos 5x \, dx$ .

50. Determine  $\int \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 4x \, dx$ .

51. Determine  $\int \cos x \cos 4x \, dx$ .

52. Suponga que  $m$  y  $n$  son enteros positivos, con  $m \neq n$ . Muestre que

$$(a) \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx = 0;$$

$$(b) \int_0^{2\pi} \cos mx \operatorname{sen} nx \, dx = 0;$$

$$(c) \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0.$$

53. Sustituya  $\sec x \csc x = (\sec^2 x) / (\tan x)$  para deducir la fórmula  $\int \sec x \csc x \, dx = \ln |\tan x| + C$ .

54. Muestre que

$$\csc x = \frac{1}{2 \operatorname{sen}(x/2) \cos(x/2)},$$

y después aplique el resultado del problema 53 para deducir la fórmula  $\int \csc x \, dx = \ln |\tan(x/2)| + C$ .

55. Sustituya  $x = (\pi/2) - u$  en la fórmula integral del problema 54 para demostrar que

$$\int \sec x \, dx = \ln \left| \cot \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right| + C.$$

56. Utilice las identidades trigonométricas adecuadas para deducir a partir del resultado del problema 55 que

$$\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C.$$

57. La región entre las curvas  $y = \tan^2 x$  y  $y = \sec^2 x$  de  $x = 0$  a  $x = \pi/4$  aparece en la figura 9.3.1. Determine su área.

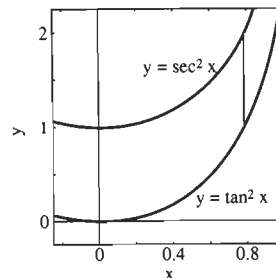


Figura 9.3.1 La región del problema 57

58. Sea  $R$  la región entre la gráfica de  $y = \sec x$  y el eje  $x$ , en el intervalo  $[0, \pi/4]$ . Determine el volumen generado mediante la rotación de  $R$  en torno del eje  $x$ .

59. La región  $S$  entre la gráfica de  $y = \tan(\pi x^2/4)$  y el eje  $x$  en el intervalo  $[0, 1]$  aparece en la figura 9.3.2. Determine el volumen generado mediante la rotación de  $S$  en torno del eje  $y$ .

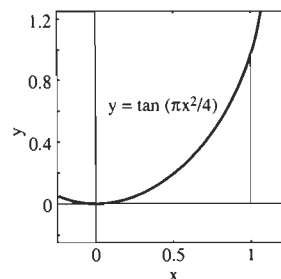


Figura 9.3.2 La región del problema 59

60. Determine la longitud de la gráfica de  $y = \ln(\cos x)$  de  $x = 0$  a  $x = \pi/4$ .

## 9.4 Integración por partes

Una razón para transformar una integral en otra es la de producir una integral que sea más fácil de evaluar. Hay dos formas generales de lograr dicha transformación; la primera es la integración por sustitución y la segunda es la *integración por partes*.

La fórmula de la integración por partes es una consecuencia sencilla de la regla del producto para derivadas:

$$D_x(uv) = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}.$$

Si escribimos esta fórmula en la forma

$$u(x)v'(x) = D_x[u(x)v(x)] - v(x)u'(x), \quad (1)$$

entonces al integrar obtenemos

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx. \quad (2)$$

Ésta es la fórmula de la **integración por partes**. Con  $du = u'(x) dx$  y  $dx = v'(x)dx$ , la ecuación (2) se transforma en

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du.} \quad (3)$$

Para aplicar la integración por partes a una integral dada, primero factorizamos su integrando en dos “partes”,  $u$  y  $dv$ , tales que la última incluya la diferencial  $dx$ . Intentamos elegir esas partes de acuerdo con dos principios:

1. La primitiva  $v = \int dv$  debe ser fácil de determinar.
2. La nueva integral  $\int v du$  debe ser más fácil de calcular que la integral original  $\int u dv$ .

Una estrategia eficaz consiste en elegir  $dv$  como el factor más complicado que se pueda integrar fácilmente. Entonces derivamos la otra parte,  $u$ , para encontrar  $du$ .

Comenzamos con dos ejemplos en los que tenemos poca flexibilidad de elección de escoger las partes  $u$  y  $dv$ .

**EJEMPLO 1** Determine  $\int \ln x dx$ .

**Solución** Aquí hay pocas alternativas a la elección natural  $u = \ln x$  y  $dv = dx$ . Es útil sistematizar el procedimiento de integración por partes, escribiendo  $u$ ,  $dv$ ,  $du$  y  $v$  en un arreglo rectangular como el siguiente:

$$\text{Sean} \quad u = \ln x \quad y \quad dv = dx.$$

$$\text{Entonces} \quad du = \frac{1}{x} dx \quad y \quad v = x.$$

La primera línea del arreglo especifica una elección de  $u$  y  $dv$ ; la segunda se calcula a partir de la primera. Entonces, la ecuación (3) implica

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

**COMENTARIO 1** La constante de integración aparece sólo en el último paso. Sabemos que una vez que se ha encontrado una primitiva, cualquier otra se puede obtener sumando una constante  $C$  a la que se encontró.

**COMENTARIO 2** Al calcular  $v = \int dv$ , por lo general consideramos la constante de integración como 0. De haber escrito  $v = x + C_1$  en el ejemplo 1, el resultado habría sido



$$\int \ln x \, dx = (x + C_1) \ln x - \int \left(1 + \frac{C_1}{x}\right) dx$$

$$= x \ln x + C_1 \ln x - (x + C_1 \ln x) + C = x \ln x - x + C$$

como antes, por lo que no hay diferencia al introducir la constante adicional  $C_1$ .

**EJEMPLO 2** Determine  $\int \arcsen x \, dx$ .

**Solución** De nuevo, sólo existe una elección real de  $u$  y  $dv$ :

$$\text{Sean} \quad u = \arcsen x, \quad dv = dx$$

$$\text{Entonces} \quad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v = x.$$

Entonces, la ecuación (3) implica

$$\begin{aligned} \int \arcsen x \, dx &= x \arcsen x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x \arcsen x + \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

**EJEMPLO 3** Determine  $\int xe^{-x} \, dx$ .

**Solución** Aquí hay alguna flexibilidad. Supongamos que

$$\text{por tanto} \quad u = e^{-x}, \quad dv = x \, dx$$

$$du = -e^{-x} \, dx, \quad v = \frac{1}{2}x^2.$$

Entonces, la integración por partes implica

$$\int xe^{-x} \, dx = \frac{1}{2}x^2e^{-x} + \frac{1}{2} \int x^2e^{-x} \, dx.$$

¡La nueva integral de la derecha se ve más difícil que aquella con la que comenzamos! Empecemos de nuevo con:

$$\text{Sean} \quad u = x, \quad dv = e^{-x} \, dx.$$

$$\text{Entonces} \quad du = dx, \quad v = -e^{-x}.$$

La integración por partes ahora da

$$\int xe^{-x} \, dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} \, dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$$

La integración por partes también se puede aplicar a las integrales definidas. Integramos la ecuación (1) de  $x = a$  a  $x = b$  y aplicamos el teorema fundamental del cálculo. Esto implica

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x)v'(x) \, dx &= \int_a^b D_x[u(x)v(x)] \, dx - \int_a^b v(x)u'(x) \, dx \\ &= \left[ u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x) \, dx. \end{aligned}$$

En la notación de la ecuación (3), esta ecuación se escribiría

$$\int_{x=a}^{x=b} u \, dv = \left[ uv \right]_{x=a}^{x=b} - \int_{x=a}^{x=b} v \, du, \quad (4)$$

aunque no debemos olvidar que  $u$  y  $v$  son funciones de  $x$ . Por ejemplo, con  $u = x$  y  $dv = e^{-x} dx$ , como en el ejemplo 3, se obtiene

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = \left[ -x e^{-x} \right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} + \left[ -e^{-x} \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

**EJEMPLO 4** Determine  $\int x^2 e^{-x} dx$ .

**Solución** Si elegimos  $u = x^2$ , entonces  $du = 2x dx$ , así es que reducimos el exponente de  $x$  con esta elección:

$$\text{Sean} \quad u = x^2, \quad dv = e^{-x} dx.$$

$$\text{Entonces} \quad du = 2x dx, \quad v = -e^{-x}.$$

La integración por partes da

$$\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx.$$

Aplicamos la integración por partes una segunda vez a la integral del lado derecho y obtenemos el resultado

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x}$$

del ejemplo 3. Con una sustitución se obtiene entonces

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{-x} dx &= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C \\ &= -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C. \end{aligned}$$

En efecto, hemos anulado el factor original  $x^2$  al integrar por partes dos veces.

**EJEMPLO 5** Determine  $\int e^{2x} \sin 3x dx$ .

**Solución** Éste es otro ejemplo en el que tiene éxito la integración por partes repetida, pero con un giro diferente:

$$\text{Sean} \quad u = \sin 3x, \quad dv = e^{2x} dx$$

$$\text{Entonces} \quad du = 3 \cos 3x dx, \quad v = \frac{1}{2} e^{2x}.$$

Por consiguiente,

$$\int e^{2x} \sin 3x dx = \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{2} \int e^{2x} \cos 3x dx.$$

En principio, parecería que se ha logrado poco progreso, ya que la integral de la derecha parece igual de difícil de integrar que la de la izquierda. Ignoremos esta objeción y continuemos, aplicando la integración por partes a la nueva integral:

$$\text{Sean} \quad u = \cos 3x, \quad dv = e^{2x} dx.$$

$$\text{Entonces} \quad du = -3 \operatorname{sen} 3x dx, \quad v = \frac{1}{2} e^{2x}.$$

Ahora vemos que

$$\int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{2} \int e^{2x} \operatorname{sen} 3x dx.$$

Cuando sustituimos esta información en la ecuación anterior, vemos que

$$\int e^{2x} \operatorname{sen} 3x dx = \frac{1}{2} e^{2x} \operatorname{sen} 3x - \frac{3}{4} e^{2x} \cos 3x - \frac{9}{4} \int e^{2x} \operatorname{sen} 3x dx.$$

Así, hemos llegado a donde comenzamos. ¿O no es así? En realidad, *no* es así, ya que podemos *despejar* la integral deseada en la última ecuación. Sumamos la integral del segundo miembro a ambos lados de la última ecuación; esto implica

$$\frac{13}{4} \int e^{2x} \operatorname{sen} 3x dx = \frac{1}{4} e^{2x} (2 \operatorname{sen} 3x - 3 \cos 3x) + C_1,$$

y entonces

$$\int e^{2x} \operatorname{sen} 3x dx = \frac{1}{13} e^{2x} (2 \operatorname{sen} 3x - 3 \cos 3x) + C.$$

**EJEMPLO 6** Determine una fórmula de reducción para  $\int \sec^n x dx$ .

**Solución** La idea es que  $n$  es un entero positivo (grande) y que queremos expresar la integral dada en términos de la integral de una potencia menor de  $\sec x$ . La potencia de  $\sec x$  más fácil de integrar es  $\sec^2 x$ , así es que procedemos como sigue:

$$\text{Sean} \quad u = \sec^{n-2} x, \quad dv = \sec^2 x dx.$$

$$\text{Entonces} \quad du = (n-2) \sec^{n-2} x \tan x dx, \quad v = \tan x.$$

Esto implica

$$\begin{aligned} \int \sec^n x dx &= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \sec^{n-2} x \tan^2 x dx \\ &= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int (\sec^{n-2} x)(\sec^2 x - 1) dx. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int \sec^n x dx = \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \sec^n x dx + (n-2) \int \sec^{n-2} x dx.$$

Despejamos en la última ecuación la integral deseada y vemos que

$$\int \sec^n x dx = \frac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x dx. \quad (5)$$

Ésta es la fórmula de reducción buscada. Por ejemplo, si  $n = 3$  en esta fórmula, se tiene que

$$\begin{aligned} \int \sec^3 x dx &= \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \int \sec x dx \\ &= \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C. \end{aligned} \quad (6)$$

En el último paso utilizamos la ecuación (7) de la sección 9.3:

$$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C.$$

La razón para usar la fórmula de reducción ec. (5) consiste en que su aplicación repetida debe conducir a una de las dos integrales elementales  $\int \sec x \, dx$  y  $\int \sec^2 x \, dx$ . Por ejemplo, con  $n = 4$  se obtiene

$$\begin{aligned} \int \sec^4 x \, dx &= \frac{1}{3} \sec^2 x \tan x + \frac{2}{3} \int \sec^2 x \, dx \\ &= \frac{1}{3} \sec^2 x \tan x + \frac{2}{3} \tan x + C, \end{aligned} \quad (7)$$

y con  $n = 5$  se obtiene

$$\begin{aligned} \int \sec^5 x \, dx &= \frac{1}{4} \sec^3 x \tan x + \frac{3}{4} \int \sec^3 x \, dx \\ &= \frac{1}{4} \sec^3 x \tan x + \frac{3}{8} \sec x \tan x + \frac{3}{8} \ln|\sec x + \tan x| + C, \end{aligned} \quad (8)$$

en el último paso usando la ecuación (6).

## 9.4 Problemas

Utilice la integración por partes para calcular las integrales de los problemas 1 a 35.

- |   |   |
|---|---|
| 1. $\int x e^{2x} \, dx$                          | 2. $\int x^2 e^{2x} \, dx$                        |
| 3. $\int t \operatorname{sen} t \, dt$            | 4. $\int t^2 \operatorname{sen} t \, dt$          |
| 5. $\int x \cos 3x \, dx$                         | 6. $\int x \ln x \, dx$                           |
| 7. $\int x^3 \ln x \, dx$                         | 8. $\int e^{3z} \cos 3z \, dz$                    |
| 9. $\int \arctan x \, dx$                         | 10. $\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx$                |
| 11. $\int \sqrt{y} \ln y \, dy$                   | 12. $\int x \sec^2 x \, dx$                       |
| 13. $\int (\ln t)^2 \, dt$                        | 14. $\int t(\ln t)^2 \, dt$                       |
| 15. $\int x \sqrt{x+3} \, dx$                     | 16. $\int x^3 \sqrt{1-x^2} \, dx$                 |
| 17. $\int x^5 \sqrt{x^3+1} \, dx$                 | 18. $\int \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta$ |
| 19. $\int \operatorname{csc}^3 \theta \, d\theta$ | 20. $\int \operatorname{sen}(\ln t) \, dt$        |
| 21. $\int x^2 \arctan x \, dx$                    | 22. $\int \ln(1+x^2) \, dx$                       |

- |  |  |
|--|--|
| 23. $\int \sec^{-1} \sqrt{x} \, dx$        | 24. $\int x \tan^{-1} \sqrt{x} \, dx$          |
| 25. $\int \tan^{-1} \sqrt{x} \, dx$        | 26. $\int x^2 \cos 4x \, dx$                   |
| 27. $\int x \operatorname{csc}^2 x \, dx$  | 28. $\int x \arctan x \, dx$                   |
| 29. $\int x^3 \cos x^2 \, dx$              | 30. $\int e^{-3x} \operatorname{sen} 4x \, dx$ |
| 31. $\int \frac{\ln x}{x \sqrt{x}} \, dx$  | 32. $\int \frac{x^7}{(1+x^4)^{3/2}} \, dx$     |
| 33. $\int x \cosh x \, dx$                 | 34. $\int e^x \cosh x \, dx$                   |
| 35. $\int x^2 \operatorname{senh} x \, dx$ |  |

36. Utilice el método de las capas cilíndricas para determinar el volumen generado por la rotación del área bajo la curva  $y = \cos x$ , donde  $0 \leq x \leq \pi/2$ , alrededor del eje de las  $y$ .

37. Determine el volumen del sólido generado por la rotación del área limitada por la gráfica de  $y = \ln x$ , el eje  $x$  y la recta vertical  $x = e$ , alrededor del eje de las  $x$ .

38. Utilice la integración por partes para evaluar

$$\int 2x \arctan x \, dx,$$

con  $dv = 2x \, dx$ , pero sea  $v = x^2 + 1$  en vez de  $v = x^2$ . ¿Existe alguna razón por la que no debamos elegir  $v$  de esta manera?

39. Utilice la integración por partes para evaluar  $\int xe^x \cos x \, dx$ .  
 40. Utilice la integración por partes para evaluar  $\int \sin 3x \cos x \, dx$ .

Deduzca las fórmulas de reducción dadas en los problemas 41 a 46.

41.  $\int x^n e^x \, dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx$   
 42.  $\int x^n e^{-x^2} \, dx = -\frac{1}{2} x^{n-1} e^{-x^2} + \frac{n-1}{2} \int x^{n-2} e^{-x^2} \, dx$   
 43.  $\int (\ln x)^n \, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} \, dx$   
 44.  $\int x^n \cos x \, dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x \, dx$   
 45.  $\int \sin^n x \, dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx$   
 46.  $\int \cos^n x \, dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$

Utilice las fórmulas de reducción adecuadas de la lista precedente para evaluar las integrales de los problemas 47 a 49.

47.  $\int_0^1 x^3 e^x \, dx$     48.  $\int_0^1 x^5 e^{-x^2} \, dx$     49.  $\int_1^e (\ln x)^3 \, dx$

50. Aplique la fórmula de reducción del problema 45 para mostrar que, para todo entero positivo  $n$ ,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}$$

y

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots \frac{2n}{2n+1}$$

51. Deduzca la fórmula

$$\int \ln(x+10) \, dx = (x+10) \ln(x+10) - x + C$$

de tres maneras diferentes: (a) sustituyendo  $u = x + 10$  y aplicando el resultado del ejemplo 1; (b) integrando por partes con  $u = \ln(x + 10)$  y  $dv = dx$ , observando que

$$\frac{x}{x+10} = 1 - \frac{10}{x+10};$$

y (c) integrando por partes con  $u = \ln(x + 10)$  y  $dv = dx$ , pero con  $v = x + 10$ .

52. Deduzca la fórmula

$$\int x^3 \tan^{-1} x \, dx = \frac{1}{4} (x^4 - 1) \tan^{-1} x - \frac{1}{12} x^3 + \frac{1}{4} x + C$$

integrando por partes con  $u = \tan^{-1} x$  y  $v = \frac{1}{4} (x^4 - 1)$ .

53. Sea  $J_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx$  para cada entero  $n \geq 0$ . (a) Muestre que

$$J_0 = 1 - \frac{1}{e} \quad \text{y que} \quad J_n = n J_{n-1} - \frac{1}{e}$$

para  $n \geq 1$ . (b) Deduzca mediante inducción matemática que

$$J_n = n! - \frac{n!}{e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

para cada entero  $n \geq 0$ . (c) Explique por qué  $J_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ . (d) Concluya que

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

54. Sean  $m$  y  $n$  enteros positivos. Deduzca la fórmula de reducción

$$\int x^m (\ln x)^n \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} (\ln x)^n - \frac{n}{m+1} \int x^m (\ln x)^{n-1} \, dx.$$

55. De acuerdo con un anuncio reciente de un programa de álgebra simbólica, un ingeniero había trabajado por más de tres semanas con la integral

$$\int (k \ln x - 2x^3 + 3x^2 + b)^4 \, dx,$$

la que trata de la turbulencia en una aplicación aeroespacial. El anuncio decía que el ingeniero nunca obtuvo la misma respuesta dos veces durante las tres semanas. Explique cómo podría utilizar la fórmula de reducción del problema 54 para determinar la integral del ingeniero (pero no la determine). ¿Puede encontrar alguna razón para que tome tres semanas?  
 56. La figura 9.4.1 muestra la región acotada por el eje  $x$  y por la gráfica de  $y = \frac{1}{2} x^2 \sin x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ . Utilice las fórmulas (42) y (43) de los forros (que se obtienen mediante integración por partes) para determinar (a) el área de esta región; (b) el volumen que se obtiene al girar esta región en torno del eje  $y$ .

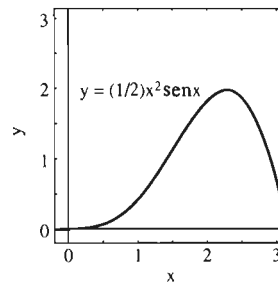


Figura 9.4.1 La región del problema 56



Figura 9.4.2 El trompo del problema 57

57. El trompo que se muestra en la figura 9.4.2 tiene la forma del sólido obtenido al girar la región del problema 56 en torno del eje  $x$ . Determine el volumen de este trompo.

## 9.5 Funciones racionales y fracciones parciales

En esta sección mostraremos que toda función racional se puede integrar en términos de funciones elementales. Recuerde que una función racional  $R(x)$  es aquella que se expresa como cociente de dos polinomios. Es decir,

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad (1)$$

donde  $P(x)$  y  $Q(x)$  son polinomios. El **método de fracciones parciales** es una técnica *algebraica* que descompone  $R(x)$  en una suma de términos:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = p(x) + F_1(x) + F_2(x) + \cdots + F_k(x), \quad (2)$$

donde  $p(x)$  es un polinomio y cada expresión  $F_i(x)$  es una fracción que puede integrarse con poca dificultad.

Por ejemplo, se puede verificar (encontrando un común denominador en el lado derecho) que

$$\frac{x^3 - 1}{x^3 + x} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{x - 1}{x^2 + 1}. \quad (3)$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 1}{x^3 + x} dx &= \int \left( 1 - \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx \\ &= x - \ln|x| + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \tan^{-1}x + C. \end{aligned}$$

La clave de esta sencilla integración está en encontrar la descomposición dada en la ecuación (3). La existencia de dicha descomposición y la técnica para encontrarla conciernen al método de fracciones parciales.

De acuerdo con un teorema que se demuestra en álgebra avanzada, toda función racional se puede escribir en la forma de la ecuación (2), donde cada  $F_i(x)$  es una fracción de la forma

$$\frac{A}{(ax + b)^n} \quad (4)$$

o de la forma

$$\frac{Bx + C}{(ax^2 + bx + c)^n}. \quad (5)$$

En este caso, el polinomio cuadrático  $ax^2 + bx + c$  es **irreducible**: no es un producto de factores lineales con coeficientes reales. Esto equivale a decir que la ecuación  $ax^2 + bx + c = 0$  no tiene raíces reales, y la fórmula cuadrática nos dice que éste es el caso cuando el discriminante es negativo:  $b^2 - 4ac < 0$ .

Las fracciones de las formas en las ecuaciones (4) y (5) son **fracciones parciales** y la suma en la ecuación (2) se llama **descomposición en fracciones parciales** de  $R(x)$ . Así, la ecuación (3) es la descomposición en fracciones parciales de  $(x^3 - 1)/(x^3 + x)$ . Una fracción parcial de la forma dada en la ecuación (4) se puede integrar de inmediato y en la sección 9.7 veremos cómo integrar una de la forma dada en la ecuación (5).

El primer paso para encontrar la descomposición en fracciones parciales de  $R(x)$  consiste en determinar el polinomio  $p(x)$  en la ecuación (2). Se ve entonces que  $p(x) \equiv 0$  con la condición de que el grado del numerador  $P(x)$  sea *menor que* el grado del denominador  $Q(x)$ ; en este caso, se dice que la fracción racional  $R(x) = P(x)/Q(x)$  es **propia**. Si  $R(x)$  no es propia, puede encontrarse  $p(x)$  mediante una división de  $P(x)$  entre  $Q(x)$ , como en el ejemplo 1.

**EJEMPLO 1** Determine  $\int \frac{x^3 + x^2 + x - 1}{x^2 + 2x + 2} dx$ .

**Solución** La división del numerador entre el denominador se realiza como sigue:

$$\begin{array}{r}
 x - 1 \longleftarrow p(x) \quad (\text{cociente}) \\
 x^2 + 2x + 2 \overline{) x^3 + x^2 + x - 1} \\
 \underline{x^3 + 2x^2 + 2x} \phantom{- 1} \\
 -x^2 - x - 1 \\
 \underline{-x^2 - 2x - 2} \\
 x + 1 \longleftarrow r(x) \quad (\text{residuo})
 \end{array}$$

Como en aritmética,

$$\text{“fracción} = \text{cociente} + (\text{residuo}/\text{divisor})\text{”}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{x^3 + x^2 + x - 1}{x^2 + 2x + 2} = (x - 1) + \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 2},$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^3 + x^2 + x - 1}{x^2 + 2x + 2} dx &= \int \left( x - 1 + \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 2} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 2) + C.
 \end{aligned}$$

Si se usa la división como en el ejemplo 1, puede escribirse cualquier función racional  $R(x)$  como una suma de un polinomio  $p(x)$  y una fracción racional *propia*

$$R(x) = p(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}.$$

En consecuencia, para ver cómo se integra una función racional arbitraria sólo se necesita determinar la descomposición en fracciones parciales de una función racional *propia*.

Para obtener dicha descomposición, primero se debe factorizar el denominador  $Q(x)$  como un producto de factores lineales (de la forma  $ax + b$ ) y factores cuadráticos irreducibles (de la forma  $ax^2 + bx + c$ , con  $b^2 - 4ac < 0$ ). Esto siempre es posible en principio, pero quizá difícil en la práctica. Una vez que se ha encontrado esta factorización de  $Q(x)$ , podemos obtener la descomposición en fracciones parciales mediante métodos algebraicos rutinarios (descritos a continuación). Cada factor lineal o cuadrático irreducible de  $Q(x)$  conduce a una o más fracciones parciales de las formas dadas en las ecuaciones (4) y (5).

## FACTORES LINEALES

Sea  $R(x) = P(x)/Q(x)$  una fracción racional *propia* y supóngase que el factor lineal  $ax + b$  se presenta  $n$  veces en la factorización de  $Q(x)$ . Es decir,  $(ax + b)^n$  es la máxima potencia de  $ax + b$  que divide a  $Q(x)$  sin dejar residuo. En este caso,  $n$  es la **multiplicidad** del factor  $ax + b$ .

**Regla 1 Fracciones parciales con factores lineales**

La parte de la descomposición en fracciones parciales de  $R(x)$  correspondiente al factor lineal  $ax + b$  de multiplicidad  $n$  es una suma de  $n$  fracciones parciales de la forma

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ax + b)^n}, \quad (6)$$

donde  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son constantes.

Si *todos* los factores de  $Q(x)$  son lineales, la descomposición en fracciones parciales de  $R(x)$  es la suma de expresiones como la de la ecuación (6). La situación es particularmente sencilla si ninguno de esos factores *se repite* (es decir, si cada uno tiene multiplicidad  $n = 1$ ). En este caso, la expresión en la ecuación (6) se reduce a su primer término y la descomposición en fracciones parciales de  $R(x)$  es la suma de tales términos. Las soluciones de los ejemplos 2 y 3 indican cómo determinar los numeradores constantes.

**EJEMPLO 2** Determine  $\int \frac{5}{(2x + 1)(x - 2)} dx$ .

**Solución** Los factores lineales del denominador son distintos, por lo que buscaremos una descomposición en fracciones parciales de la forma

$$\frac{5}{(2x + 1)(x - 2)} = \frac{A}{2x + 1} + \frac{B}{x - 2}.$$

Para determinar las constantes  $A$  y  $B$ , multiplicamos ambos miembros de esta *identidad* por el denominador (común) del lado izquierdo  $(2x + 1)(x - 2)$ . El resultado es

$$5 = A(x - 2) + B(2x + 1) = (A + 2B)x + (-2A + B).$$

A continuación, igualamos los coeficientes de  $x$  y de 1 en ambos miembros de esta ecuación. Esto produce las ecuaciones simultáneas

$$\begin{aligned} A + 2B &= 0, \\ -2A + B &= 5, \end{aligned}$$

de donde obtenemos con facilidad  $A = -2$ ,  $B = 1$ . Entonces

$$\frac{5}{(2x + 1)(x - 2)} = \frac{-2}{2x + 1} + \frac{1}{x - 2},$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \int \frac{5}{(2x + 1)(x - 2)} dx &= -\ln|2x + 1| + \ln|x - 2| + C \\ &= \ln \left| \frac{x - 2}{2x + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

**EJEMPLO 3** Determine  $\int \frac{4x^2 - 3x - 4}{x^3 + x^2 - 2x} dx$ .



**Solución** La función racional por integrar es propia, por lo que procedemos de inmediato a factorizar el denominador.

$$x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2) = x(x - 1)(x + 2).$$

Tenemos tres factores lineales no repetidos, por lo que la descomposición en fracciones parciales es de la forma

$$\frac{4x^2 - 3x - 4}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 2}.$$

Para determinar las constantes  $A$ ,  $B$  y  $C$ , multiplicamos ambos miembros de esta ecuación por el denominador común  $x(x - 1)(x + 2)$  y tenemos que

$$4x^2 - 3x - 4 = A(x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(x - 1). \quad (7)$$

Entonces, agrupamos los coeficientes de las potencias iguales de  $x$  en el lado derecho:

$$4x^2 - 3x - 4 = (A + B + C)x^2 + (A + 2B - C)x + (-2A).$$

Como dos polinomios son (idénticamente) iguales sólo si los coeficientes de las potencias correspondientes de  $x$  son iguales, concluimos que

$$\begin{aligned} A + B + C &= 4, \\ A + 2B - C &= -3, \\ -2A &= -4. \end{aligned}$$

Resolvemos estas ecuaciones simultáneas y determinamos que  $A = 2$ ,  $B = -1$  y  $C = 3$ .

Existe una alternativa para encontrar  $A$ ,  $B$  y  $C$  que es especialmente eficaz en el caso de factores lineales no repetidos. Sustituimos los valores  $x = 0$ ,  $x = 1$  y  $x = -2$  (las raíces de los factores lineales del denominador) en la ecuación (7). La sustitución de  $x = 0$  en la ecuación (7) implica de inmediato  $-4 = -2A$ , por lo que  $A = 2$ . La sustitución de  $x = 1$  en la ecuación (7) implica  $-3 = 3B$ , por lo que  $B = -1$ . Y la sustitución  $x = -2$  implica  $18 = 6C$ , de modo que  $C = 3$ .

Con los valores  $A = 2$ ,  $B = -1$ ,  $C = 3$ , como quiera que se hayan obtenido, tenemos que

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^2 - 3x - 4}{x^3 + x^2 - 2x} dx &= \int \left( \frac{2}{x} - \frac{1}{x - 1} + \frac{3}{x + 2} \right) dx \\ &= 2 \ln|x| - \ln|x - 1| + 3 \ln|x + 2| + C. \end{aligned}$$

Las leyes de los logaritmos nos permiten escribir esta primitiva en la forma más compacta

$$\int \frac{4x^2 - 3x - 4}{x^3 + x^2 - 2x} dx = \ln \left| \frac{x^2(x + 2)^3}{x - 1} \right| + C.$$

**EJEMPLO 4** Determine  $\int \frac{x^3 - 4x - 1}{x(x - 1)^3} dx$ .

**Solución** Aquí tenemos un factor lineal de multiplicidad  $n = 3$ . De acuerdo con la regla 1, la descomposición del integrando en fracciones parciales tiene la forma

$$\frac{x^3 - 4x - 1}{x(x - 1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2} + \frac{D}{(x - 1)^3}.$$

Para encontrar las constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  multiplicamos ambos miembros de esta ecuación por  $x(x-1)^3$  y obtenemos

$$x^3 - 4x - 1 = A(x-1)^3 + Bx(x-1)^2 + Cx(x-1) + Dx.$$

Desarrollamos y después agrupamos coeficientes de las potencias iguales de  $x$  en el lado derecho. Esto implica

$$\begin{aligned} x^3 - 4x - 1 &= (A + B)x^3 + (-3A - 2B + C)x^2 \\ &\quad + (3A + B - C + D)x - A. \end{aligned}$$

Después igualamos los coeficientes de las potencias iguales de  $x$  en ambos lados de esta ecuación. Obtenemos las cuatro ecuaciones simultáneas

$$\begin{aligned} A + B &= 1, \\ -3A - 2B + C &= 0, \\ 3A + B - C + D &= -4, \\ -A &= -1. \end{aligned}$$

La última ecuación implica  $A = 1$  y después la primera ecuación implica  $B = 0$ . A continuación, la segunda ecuación implica  $C = 3$ . Cuando sustituimos estos valores en la tercera ecuación, obtenemos  $D = -4$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 4x - 1}{x(x-1)^3} dx &= \int \left( \frac{1}{x} + \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{4}{(x-1)^3} \right) dx \\ &= \ln|x| - \frac{3}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + C. \end{aligned}$$

## FACTORES CUADRÁTICOS

Supóngase que  $R(x) = P(x)/Q(x)$  es una fracción racional propia y que el factor cuadrático irreducible  $ax^2 + bx + c$  aparece  $n$  veces en la factorización de  $Q(x)$ . Es decir,  $(ax^2 + bx + c)^n$  es la máxima potencia de  $ax^2 + bx + c$  que divide sin residuo a  $Q(x)$ . Como antes, decimos que  $n$  es la *multiplicidad* del factor cuadrático  $ax^2 + bx + c$ .

### **Regla 2** *Fracciones parciales con factores cuadráticos*

La parte de la descomposición en fracciones parciales de  $R(x)$  correspondiente al factor cuadrático irreducible  $ax^2 + bx + c$  de multiplicidad  $n$  es una suma de  $n$  fracciones parciales de la forma

$$\frac{B_1x + C_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{B_2x + C_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{B_nx + C_n}{(ax^2 + bx + c)^n}, \quad (8)$$

donde  $B_1, B_2, \dots, B_n$  y  $C_1, C_2, \dots, C_n$  son constantes.

Si  $Q(x)$  tiene factores lineales y factores cuadráticos irreducibles, la descomposición en fracciones parciales de  $R(x)$  es simplemente la suma de las expresiones de la forma dada en la ecuación (6) correspondientes a los factores lineales más la suma de las expresiones de la forma dada en la ecuación (8) correspondientes

a los factores cuadráticos. En el caso de un factor cuadrático irreducible de multiplicidad  $n = 1$ , la expresión en la ecuación (8) se reduce a su primer término.

El caso más importante es el de un factor cuadrático no repetido de la forma suma de cuadrados  $x^2 + k^2$  (donde  $k$  es una constante positiva). La fracción parcial correspondiente  $(Bx + C)/(x^2 + k^2)$  se integra rápidamente mediante las integrales conocidas

$$\int \frac{x}{x^2 + k^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + k^2) + C,$$

$$\int \frac{1}{x^2 + k^2} dx = \frac{1}{k} \arctan \frac{x}{k} + C.$$

En la sección 9.7 analizaremos la integración de fracciones parciales más general relacionadas con factores cuadráticos irreducibles.

**EJEMPLO 5** Determine  $\int \frac{5x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x^4 + x^2} dx$ .

**Solución** El denominador  $x^4 + x^2 = x^2(x^2 + 1)$  tiene un factor cuadrático y un factor lineal repetido. La descomposición en factores lineales toma la forma

$$\frac{5x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x^4 + x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}.$$

Al multiplicar ambos miembros por  $x^4 + x^2$  se obtiene

$$\begin{aligned} 5x^3 - 3x^2 + 2x - 1 &= Ax(x^2 + 1) + B(x^2 + 1) + (Cx + D)x^2 \\ &= (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + Ax + B. \end{aligned}$$

Como antes, igualamos los coeficientes de potencias iguales de  $x$  para obtener las cuatro ecuaciones simultáneas

$$\begin{aligned} A + C &= 5, \\ B + D &= -3, \\ A &= 2, \\ B &= -1. \end{aligned}$$

Resolvemos fácilmente estas ecuaciones, obteniendo  $A = 2$ ,  $B = -1$ ,  $C = 3$  y  $D = -2$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x^4 + x^2} dx &= \int \left( \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3x - 2}{x^2 + 1} \right) dx \\ &= 2 \ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{3}{2} \int \frac{2x dx}{x^2 + 1} - 2 \int \frac{dx}{x^2 + 1} \\ &= 2 \ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{3}{2} \ln(x^2 + 1) - 2 \tan^{-1} x + C. \end{aligned}$$

### \*APLICACIONES A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

El ejemplo 6 ilustra el uso de las fracciones parciales para resolver ciertos tipos de ecuaciones diferenciales separables.

**EJEMPLO 6** Supongamos que en el instante  $t = 0$ , la mitad de una población de 100,000 personas ha escuchado un rumor y que el número  $P(t)$  de personas que lo han escuchado crece a razón de 1000 personas por día. Si  $P(t)$  satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP(100 - P) \quad (9)$$

(con  $P$  en miles de personas y  $t$  en días), determine el número de personas que han escuchado el rumor después de  $t = 30$  días.

**Solución** La ecuación diferencial de (9) es el modelo para una hipótesis sencilla pero bastante utilizada: la razón de difusión del rumor es proporcional al número de contactos entre aquellas personas que ya escucharon el rumor y aquellas personas que no lo han escuchado, es decir,  $dP/dt$  es proporcional tanto a  $P$  como a  $100 - P$ ; así  $dP/dt$  es proporcional al producto de  $P$  y  $100 - P$ .

Para determinar la constante de proporcionalidad  $k$ , sustituimos los valores dados  $P(0) = 50$  y  $P'(0) = 1$  en la ecuación (9). Esto produce la ecuación

$$1 = k \cdot 50 \cdot (100 - 50).$$

Esto implica que  $k = 0.0004$ , de modo que la ecuación diferencial en (9) adquiere la forma

$$\frac{dP}{dt} = (0.0004) \cdot P \cdot (100 - P). \quad (10)$$

La separación de variables conduce a

$$\int \frac{dP}{P(100 - P)} = \int 0.0004 \, dt.$$

Después, la descomposición en fracciones parciales

$$\frac{100}{P(100 - P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{100 - P}$$

implica

$$\int \left( \frac{1}{P} + \frac{1}{100 - P} \right) dP = \int 0.04 \, dt;$$

$$\ln P - \ln(100 - P) = (0.04)t + C. \quad (11)$$

La sustitución de los datos iniciales  $P = 50$  cuando  $t = 0$  implica entonces  $C = 0$ , de modo que la ecuación (11) adquiere la forma

$$\ln \frac{P}{100 - P} = (0.04)t, \text{ de modo que } \frac{P}{100 - P} = e^{(0.04)t}.$$

Resolvemos esta última ecuación para obtener la solución

$$P(t) = \frac{100e^{(0.04)t}}{1 + e^{(0.04)t}}. \quad (12)$$

Por tanto, el número de personas que han escuchado el rumor después de 30 días es  $P(30) \approx 76.85$  miles de personas.

Podemos utilizar el método del ejemplo 6 para resolver cualquier ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dx}{dt} = k(x - a)(x - b), \quad (13)$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $k$  son constantes. Como indican los problemas 49 a 54, esta ecuación diferencial sirve como un modelo matemático de una amplia variedad de problemas.

## 9.5 Problemas

Determine las integrales de los problemas 1 a 35.

- |   |   |
|---|---|
| 1. $\int \frac{x^2}{x+1} dx$                  | 2. $\int \frac{x^3}{2x-1} dx$                 |
| 3. $\int \frac{1}{x^2-3x} dx$                 | 4. $\int \frac{x}{x^2+4x} dx$                 |
| 5. $\int \frac{1}{x^2+x-6} dx$                | 6. $\int \frac{x^3}{x^2+x-6} dx$              |
| 7. $\int \frac{1}{x^3+4x} dx$                 | 8. $\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} dx$           |
| 9. $\int \frac{x^4}{x^2+4} dx$                | 10. $\int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$        |
| 11. $\int \frac{x-1}{x+1} dx$                 | 12. $\int \frac{2x^3-1}{x^2+1} dx$            |
| 13. $\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} dx$          | 14. $\int \frac{2x-4}{x^2-x} dx$              |
| 15. $\int \frac{1}{x^2-4} dx$                 | 16. $\int \frac{x^4}{x^2+4x+4} dx$            |
| 17. $\int \frac{x+10}{2x^2+5x-3} dx$          | 18. $\int \frac{x+1}{x^3-x^2} dx$             |
| 19. $\int \frac{x^2+1}{x^3+2x^2+x} dx$        | 20. $\int \frac{x^2+x}{x^3-x^2-2x} dx$        |
| 21. $\int \frac{4x^3-7x}{x^4-5x^2+4} dx$      | 22. $\int \frac{2x^2+3}{x^4-2x^2+1} dx$       |
| 23. $\int \frac{x^2}{(x+2)^3} dx$             | 24. $\int \frac{x^2+x}{(x^2-4)(x+4)} dx$      |
| 25. $\int \frac{1}{x^3+x} dx$                 | 26. $\int \frac{6x^3-18x}{(x^2-1)(x^2-4)} dx$ |
| 27. $\int \frac{x+4}{x^3+4x} dx$              | 28. $\int \frac{4x^4+x+1}{x^5+x^4} dx$        |
| 29. $\int \frac{x}{(x+1)(x^2+1)} dx$          | 30. $\int \frac{x^2+2}{(x^2+1)^2} dx$         |
| 31. $\int \frac{x^2-10}{2x^4+9x^2+4} dx$      | 32. $\int \frac{x^2}{x^4-1} dx$               |
| 33. $\int \frac{x^3+x^2+2x+3}{x^4+5x^2+6} dx$ |   |
| 34. $\int \frac{x^2+4}{(x^2+1)^2(x^2+2)} dx$  |   |

$$35. \int \frac{x^4 + 3x^2 - 4x + 5}{(x-1)^2(x^2+1)} dx$$

En los problemas 36 a 39, haga una sustitución preliminar antes de usar el método de fracciones parciales.

$$36. \int \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta - \sin \theta - 6} d\theta \quad 37. \int \frac{e^{4t}}{(e^{2t} - 1)^3} dt$$

$$38. \int \frac{\sec^2 t}{\tan^3 t + \tan^2 t} dt \quad 39. \int \frac{1 + \ln t}{t(3 + 2 \ln t)^2} dt$$

40. La región plana  $R$  que se muestra en la figura 9.5.1 está acotada por la curva

$$y^2 = \frac{1-x}{1+x} x^2, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Determine el volumen generado al girar  $R$  en torno del eje  $x$ .

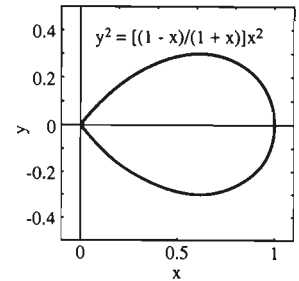


Figura 9.5.1 La región del problema 40

41. La figura 9.5.2 muestra la región acotada por la curva

$$y^2 = \frac{(1-x)^2}{(1+x)^2} x^4, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Determine el volumen generado al girar  $R$  en torno del eje  $x$ .

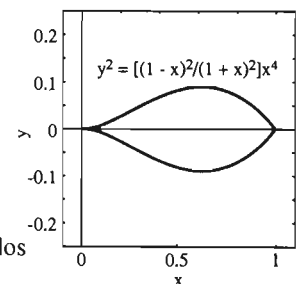


Figura 9.5.2 La región de los problemas 41 y 42

42. Determine el volumen generado al girar la región del problema 41 en torno del eje  $y$ .

Resuelva los problemas con condiciones iniciales en 43 a 48.

43.  $\frac{dx}{dt} = x - x^2; \quad x(0) = 2$

44.  $\frac{dx}{dt} = 10x - x^2; \quad x(0) = 1$

45.  $\frac{dx}{dt} = 1 - x^2; \quad x(0) = 3$

46.  $\frac{dx}{dt} = 9 - 4x^2; \quad x(0) = 0$

47.  $\frac{dx}{dt} = x^2 + 5x + 6; \quad x(0) = 5$

48.  $\frac{dx}{dt} = 2x^2 + x - 15; \quad x(0) = 10$

49. Suponga que la población  $P(t)$  (en millones) de Ruritania satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k \cdot P \cdot (200 - P) \quad (k \text{ constante}).$$

Su población en 1940 era de 100 millones y entonces aumentaba a razón de 1 millón por año. Pronostique la población de este país para el año 2000.

50. Suponga que una comunidad tiene 15,000 personas susceptibles al síndrome de Michaud, una enfermedad contagiosa. En el instante  $t = 0$ , el número  $N(t)$  de personas que han contraído el síndrome de Michaud es 5000 y aumenta en ese momento a razón de 500 por día. Suponga que  $N'(t)$  es proporcional al producto del número de personas que no han contraído la enfermedad por el número de personas que sí han enfermado. ¿Cuánto tiempo tardan otras 5000 en contraer el síndrome de Michaud?

51. Cuando la sal  $\text{KNO}_3$  se disuelve en metanol, el número  $x(t)$  de gramos de sal en la solución después de  $t$  segundos satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = (0.8)x - (0.004)x^2.$$

(a) Si  $x = 50$  cuando  $t = 0$ , ¿cuánto tiempo tardarán otros 50 gramos de sal en disolverse? (b) ¿Cuál es la cantidad máxima de sal que se podrá disolver en el metanol?

52. Una población  $P(t)$  ( $t$  en meses) de ardillas satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = (0.001)P^2 - kP \quad (k \text{ constante}).$$

Si  $P(0) = 100$  y  $P'(0) = 8$ , ¿cuánto tiempo tardará la población en duplicarse (200 ardillas)?

53. Considere una población animal  $P(t)$  ( $t$  en años) que satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP^2 - (0.01)P \quad (k \text{ constante}).$$

Suponga también que  $P(0) = 200$  y que  $P'(0) = 2$ . (a) ¿En qué momento  $P = 1000$ ? (b) ¿Cuándo llegará el día del juicio para esta población?

54. Suponga que el número  $x(t)$  ( $t$  en meses) de lagartos en un pantano satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = (0.0001)x^2 - (0.01)x.$$

(a) Si en un principio hay 25 lagartos, resuelva esta ecuación para determinar lo que ocurre a esta población de lagartos a largo plazo. (b) Repita la parte (a), pero utilice 150 lagartos en un principio.

## 9.5 Proyecto

La ecuación diferencial en (9) del ejemplo 6 es una **ecuación logística**, una ecuación de la forma

$$\frac{dP}{dt} = kP(M - P) \quad (k, M \text{ constantes}). \quad (14)$$

La ecuación logística modela muchas poblaciones animales (incluyendo las humanas) con más precisión que la ecuación de crecimiento natural  $dP/dt = kP$  que estudiamos en la sección 7.5. Por ejemplo, pensemos en un ambiente que puede soportar a lo más una población de  $M$  individuos. Podríamos pensar entonces a  $M - P$  como el potencial de mayor desarrollo cuando la población es  $P$ . La hipótesis de que la tasa de cambio  $dP/dt$  es proporcional a  $M - P$  y a  $P$  mismo implica la ecuación (14) con la constante de proporcionalidad  $k$ . El ejemplo clásico de tal situación de ambiente limitado es una población de la mosca de la fruta en un recipiente cerrado.

El objetivo de este proyecto es analizar el comportamiento de las poblaciones que se pueden modelar mediante la ecuación logística.

1. Separe primero las variables de la ecuación (14) y después utilice las fracciones parciales, como en el ejemplo 6, para deducir la solución

$$P(t) = \frac{MP_0}{P_0 + (M - P_0)e^{-kMt}} \quad (15)$$

que satisface la condición inicial  $P(0) = P_0$ . Si  $k$  y  $M$  son constantes positivas, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = M. \quad (16)$$

Por tanto,  $M$  es la *población límite*.

2. Durante el periodo de 1790 a 1930, la población de Estados Unidos  $P(t)$  ( $t$  en años) aumentó de 3.9 millones a 123.2 millones. En este periodo,  $P(t)$  era cercana a la solución del problema con condición inicial

$$\frac{dP}{dt} = (0.03135)P - (0.0001589)P^2, \quad P(0) = 3.9.$$

¿Sigue modelando esta ecuación diferencial la población de Estados Unidos con precisión después de 1930? En tal caso, ¿cuál es la población límite de los Estados Unidos?\*

3. Para su propia ecuación logística, elija enteros distintos de cero  $r$  y  $s$  (por ejemplo, los últimos dos dígitos distintos de cero en su número de matrícula estudiantil) y considere entonces

$$M = 10r, \quad k = \frac{s}{100M}$$

en la ecuación (14). Grafique entonces la solución correspondiente en la ecuación (15) con varios valores diferentes de la población inicial  $P_0$ . ¿Qué determina que la gráfica de  $P = P(t)$  se vea como la curva superior o la curva inferior de la figura 9.5.3?

4. Ahora, con el mismo valor fijo de la población límite  $M$  como en el problema 3, grafique las curvas solución con valores cada vez mayores y cada vez menores de  $k$ . ¿Cuál parece ser la relación entre el tamaño de  $k$  y la razón con la que la curva solución tiende a su asíntota horizontal  $P = M$ ?

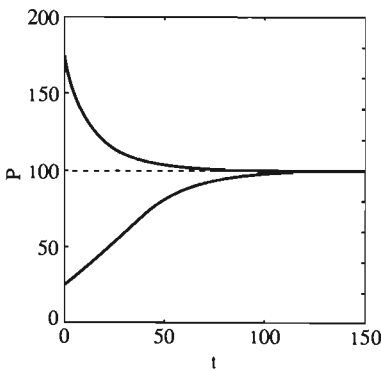


Figura 9.5.3 Soluciones típicas de la ecuación logística

## 9.6 Sustitución trigonométrica

A menudo es efectivo el método de *sustitución trigonométrica* al trabajar con integrales que contienen en sus integrandos ciertas expresiones algebraicas tales como  $(a^2 - u^2)^{1/2}$ ,  $(u^2 - a^2)^{3/2}$  y  $1/(a^2 + u^2)^2$ . Hay tres sustituciones trigonométricas básicas:

Si la integral contiene	Entonces se sustituye	Y se utiliza la identidad
$a^2 - u^2$	$u = a \operatorname{sen} \theta$	$1 - \operatorname{sen}^2 \theta = \operatorname{cos}^2 \theta$
$a^2 + u^2$	$u = a \operatorname{tan} \theta$	$1 + \operatorname{tan}^2 \theta = \operatorname{sec}^2 \theta$
$u^2 - a^2$	$u = a \operatorname{sec} \theta$	$\operatorname{sec}^2 \theta - 1 = \operatorname{tan}^2 \theta$

\* Este problema se basa en un cálculo del demógrafo belga Verhulst, quien en 1845 utilizó los datos de población de Estados Unidos de 1790 a 1840 para predecir con precisión la población de Estados Unidos hasta el año de 1930.

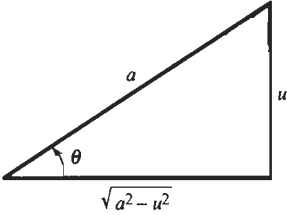
La sustitución  $u = a \operatorname{sen} \theta$  significa, en términos más precisos, la sustitución trigonométrica *inversa*

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

donde  $|u| \leq a$ . Por ejemplo, supóngase que una integral contiene la expresión  $(a^2 - u^2)^{1/2}$ . Entonces, la sustitución implica

$$(a^2 - u^2)^{1/2} = (a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)^{1/2} = (a^2 \cos^2 \theta)^{1/2} = a \cos \theta.$$

Elegimos la raíz cuadrada no negativa en el último paso, pues  $\cos \theta \geq 0$  para  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ . Así, el factor problemático  $(a^2 - u^2)^{1/2}$  se convierte en  $a \cos \theta$  mientras que  $du = a \cos \theta d\theta$ . Si la integral trigonométrica que resulta de esta sustitución puede ser evaluada con los métodos de la sección 9.3, el resultado, por lo general, contendrá  $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(u/a)$  y funciones trigonométricas de  $\theta$ . El paso final consiste en expresar la respuesta en términos de la variable original. Para esto, los valores de las diversas funciones trigonométricas se pueden leer en el triángulo rectángulo de la figura 9.6.1 que contiene un ángulo  $\theta$  tal que  $\operatorname{sen} \theta = u/a$  (si  $u$  es negativo, entonces  $\theta$  será negativo).



**Figura 9.6.1** El triángulo de referencia para la sustitución  $u = a \operatorname{sen} \theta$

**EJEMPLO 1** Evalúe  $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$ , donde  $|x| < 1$ .

**Solución** En este caso,  $a = 1$  y  $u = x$ , por lo que sustituimos

$$x = \operatorname{sen} \theta, \quad dx = \cos \theta d\theta.$$

Esto implica

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{\operatorname{sen}^3 \theta \cos \theta}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 \theta}} d\theta \\ &= \int \operatorname{sen}^3 \theta d\theta = \int (\operatorname{sen} \theta)(1 - \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{3} \cos^3 \theta - \cos \theta + C. \end{aligned}$$

Y como  $\cos \theta = (1 - \operatorname{sen}^2 \theta)^{1/2} = \sqrt{1-x^2}$ , nuestra respuesta final es

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} - \sqrt{1-x^2} + C.$$

El ejemplo 2 ilustra el uso de la sustitución trigonométrica para determinar integrales como las de las fórmulas (44) a (62) en los forros de este libro.

**EJEMPLO 2** Determine  $\int \sqrt{a^2 - u^2} du$ ,  $|u| < a$ .

**Solución** La sustitución  $u = a \operatorname{sen} \theta$ ,  $du = a \cos \theta d\theta$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - u^2} du &= \int \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} (a \cos \theta) d\theta \\ &= \int a^2 \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} a^2 \int (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} a^2 (\theta + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta) + C = \frac{1}{2} a^2 (\theta + \operatorname{sen} \theta \cos \theta) + C. \end{aligned}$$



(En el último paso utilizamos la identidad  $\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta$ .) Ahora, por la figura 9.6.1, tenemos que

$$\sin \theta = \frac{u}{a} \quad \text{y} \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - u^2} \, du &= \frac{1}{2} a^2 \left( \sin^{-1} \frac{u}{a} + \frac{u}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a} \right) + C \\ &= \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C. \end{aligned}$$

Así, hemos obtenido la fórmula (54) del forro de este libro.

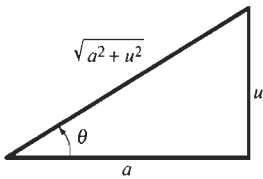
La sustitución  $u = a \tan \theta$  en una integral que contiene a  $a^2 + u^2$  significa la sustitución

$$\theta = \tan^{-1} \frac{u}{a}, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

En este caso,

$$\sqrt{a^2 + u^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 \theta} = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta} = a \sec \theta,$$

bajo la hipótesis  $a > 0$ . Consideramos la raíz cuadrada positiva en el último paso, pues  $\sec \theta > 0$  para  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ . Los valores de las diversas funciones trigonométricas de  $\theta$  bajo esta sustitución se pueden leer en el triángulo rectángulo de la figura 9.6.2, el cual muestra un ángulo agudo [positivo o negativo]  $\theta$  tal que  $\tan \theta = u/a$ .



**Figura 9.6.2** El triángulo de referencia para la sustitución  $u = a \tan \theta$

**EJEMPLO 3** Determine  $\int \frac{1}{(4x^2 + 9)^2} dx$ .

**Solución** El factor  $4x^2 + 9$  corresponde a  $u^2 + a^2$ , con  $u = 2x$  y  $a = 3$ . Por tanto, la sustitución  $u = a \tan \theta$  equivale a

$$2x = 3 \tan \theta, \quad x = \frac{3}{2} \tan \theta, \quad dx = \frac{3}{2} \sec^2 \theta \, d\theta.$$

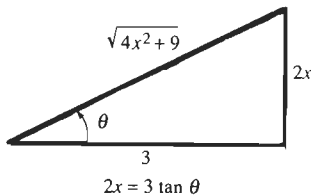
Esto implica

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(4x^2 + 9)^2} dx &= \int \frac{\frac{3}{2} \sec^2 \theta}{(9 \tan^2 \theta + 9)^2} d\theta \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{\sec^2 \theta}{(9 \sec^2 \theta)^2} d\theta = \frac{1}{54} \int \frac{1}{\sec^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{54} \int \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{108} (\theta + \sin \theta \cos \theta) + C. \end{aligned}$$

(La integración del último paso es la misma que la del ejemplo 2.) Ahora bien,  $\theta = \tan^{-1}(2x/3)$ , y el triángulo de la figura 9.6.3 implica

$$\sin \theta = \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 9}}, \quad \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{4x^2 + 9}}.$$

Por tanto,



**Figura 9.6.3** El triángulo de referencia para el ejemplo 3

$$\int \frac{1}{(4x^2 + 9)^2} dx = \frac{1}{108} \left[ \tan^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right) + \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 9}} \cdot \frac{3}{\sqrt{4x^2 + 9}} \right] + C$$

$$= \frac{1}{108} \tan^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right) + \frac{x}{18(4x^2 + 9)} + C.$$

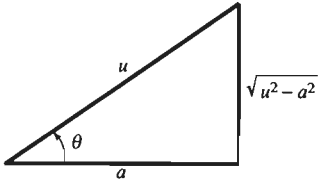
La sustitución  $u = a \sec \theta$  en una integral que contenga  $u^2 - a^2$  significa la sustitución

$$\theta = \sec^{-1} \frac{u}{a}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

donde  $|u| \geq a > 0$  (debido al dominio y contradominio de la función secante inversa). Entonces,

$$\sqrt{u^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta - a^2} = \sqrt{a^2 \tan^2 \theta} = \pm a \tan \theta.$$

Aquí debemos considerar el signo positivo si  $u > a$ , de modo que  $0 < \theta < \pi/2$  y  $\tan \theta > 0$ . Si  $u < -a$ , entonces  $\pi/2 < \theta < \pi$  y  $\tan \theta < 0$ , consideramos el signo negativo. En cualquier caso, los valores de las diversas funciones trigonométricas de  $\theta$  se pueden leer en el triángulo rectángulo de la figura 9.6.4.



**Figura 9.6.4** El triángulo de referencia para la sustitución  $u = a \sec \theta$

**EJEMPLO 4** Determine  $\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x} dx, x > 5$ .

**Solución** Sustituimos  $x = 5 \sec \theta, dx = 5 \sec \theta \tan \theta d\theta$ . Por consiguiente,

$$\sqrt{x^2 - 25} = \sqrt{25(\sec^2 \theta - 1)} = 5 \tan \theta,$$

pues  $x > 5$  implica  $0 < \theta < \pi/2$ , de modo que  $\tan \theta > 0$ . En consecuencia, esta sustitución implica

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x} dx &= \int \frac{5 \tan \theta}{5 \sec \theta} (5 \sec \theta \tan \theta) d\theta \\ &= 5 \int \tan^2 \theta d\theta = 5 \int (\sec^2 \theta - 1) d\theta \\ &= 5 \tan \theta - 5\theta + C = \sqrt{x^2 - 25} - 5 \sec^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) + C. \end{aligned}$$

Las sustituciones hiperbólicas se usan de manera semejante (y con el mismo efecto) que las trigonométricas. Las tres sustituciones hiperbólicas básicas (que no se acostumbra memorizar) se enumeran aquí como referencia.

Si la integral contiene	Entonces se sustituye	Y se utiliza la identidad
$a^2 - u^2$	$u = a \tanh \theta$	$1 - \tanh^2 \theta = \operatorname{sech}^2 \theta$
$a^2 + u^2$	$u = a \sinh \theta$	$1 + \sinh^2 \theta = \cosh^2 \theta$
$u^2 - a^2$	$u = a \cosh \theta$	$\cosh^2 \theta - 1 = \sinh^2 \theta$

**EJEMPLO 5** Determine  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx, x > 1$ .

**Solución** Con el objeto de que se comparen, se evalúa esta integral mediante una sustitución trigonométrica y una hiperbólica. La sustitución trigonométrica

$$x = \sec \theta, \quad dx = \sec \theta \tan \theta \, d\theta, \quad \tan \theta = \sqrt{x^2 - 1}$$

da

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \, dx &= \int \frac{\sec \theta \tan \theta}{\tan \theta} \, d\theta = \int \sec \theta \, d\theta \\ &= \ln|\sec \theta + \tan \theta| + C \quad [\text{ecuación (7),} \\ &= \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + C. \quad \text{sección 9.3}] \end{aligned}$$

Si ahora utilizamos la sustitución hiperbólica  $x = \cosh \theta$ ,  $dx = \sinh \theta \, d\theta$ , obtenemos

$$\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\cosh^2 \theta - 1} = \sinh \theta.$$

Aquí consideramos la raíz cuadrada positiva, pues  $x > 1$  implica que  $\theta = \cosh^{-1} x > 0$  y por tanto,  $\sinh \theta > 0$ . En consecuencia,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \, dx = \int \frac{\sinh \theta}{\sinh \theta} \, d\theta = \int 1 \, d\theta = \theta + C = \cosh^{-1} x + C.$$

Nuestros resultados parecen diferentes, pero la ecuación (35) de la sección 8.5 muestra que son equivalentes.

## 9.6 Problemas

Utilice sustituciones trigonométricas para evaluar las integrales de los problemas 1 a 36.

- |  |  |  |   |
|--|--|--|---|
| 1. $\int \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}} \, dx$    | 2. $\int \frac{1}{\sqrt{4 - 9x^2}} \, dx$    | 19. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}} \, dx$  | 20. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^2}} \, dx$   |
| 3. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4 - x^2}} \, dx$  | 4. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 - 25}} \, dx$ | 21. $\int \frac{x^2}{\sqrt{4 + 9x^2}} \, dx$ | 22. $\int (1 - x^2)^{3/2} \, dx$              |
| 5. $\int \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^2}} \, dx$  | 6. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9 - 4x^2}} \, dx$  | 23. $\int \frac{1}{(1 + x^2)^{3/2}} \, dx$   | 24. $\int \frac{1}{(4 - x^2)^2} \, dx$        |
| 7. $\int \frac{1}{(9 - 16x^2)^{3/2}} \, dx$  | 8. $\int \frac{1}{(25 + 16x^2)^{3/2}} \, dx$ | 25. $\int \frac{1}{(4 - x^2)^3} \, dx$       | 26. $\int \frac{1}{(4x^2 + 9)^3} \, dx$       |
| 9. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2} \, dx$   | 10. $\int x^3\sqrt{4 - x^2} \, dx$           | 27. $\int \sqrt{9 + 16x^2} \, dx$            | 28. $\int (9 + 16x^2)^{3/2} \, dx$            |
| 11. $\int x^3\sqrt{9 + 4x^2} \, dx$          | 12. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 25}} \, dx$ | 29. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x} \, dx$   | 30. $\int \frac{\sqrt{9x^2 - 16}}{x} \, dx$   |
| 13. $\int \frac{\sqrt{1 - 4x^2}}{x} \, dx$   | 14. $\int \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \, dx$    | 31. $\int x^2\sqrt{x^2 - 1} \, dx$           | 32. $\int \frac{x^2}{\sqrt{4x^2 - 9}} \, dx$  |
| 15. $\int \frac{1}{\sqrt{9 + 4x^2}} \, dx$   | 16. $\int \sqrt{1 + 4x^2} \, dx$             | 33. $\int \frac{1}{(4x^2 - 1)^{3/2}} \, dx$  | 34. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4x^2 - 9}} \, dx$ |
| 17. $\int \frac{x^2}{\sqrt{25 - x^2}} \, dx$ | 18. $\int \frac{x^3}{\sqrt{25 - x^2}} \, dx$ | 35. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 5}}{x^2} \, dx$  | 36. $\int (4x^2 - 5)^{3/2} \, dx$             |

Utilice sustituciones hiperbólicas para evaluar las integrales en los problemas 37 a 41.

$$37. \int \frac{1}{\sqrt{25+x^2}} dx \quad 38. \int \sqrt{1+x^2} dx$$

$$39. \int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2} dx \quad 40. \int \frac{1}{\sqrt{1+9x^2}} dx$$

$$41. \int x^2 \sqrt{1+x^2} dx$$

42. Calcule la longitud de arco de la parábola  $y = x^2$  en el intervalo  $[0, 1]$ .

43. Calcule el área de la superficie obtenida al girar el arco parabólico del problema 42 en torno del eje  $x$ .

44. Demuestre que la longitud de un arco de la curva  $y = \sin x$  es igual a la mitad del perímetro de la elipse  $x^2 + (y^2/2) = 1$ . [Sugerencia: sustituya  $x = \cos \theta$  en la integral de la longitud de arco para la elipse.] Véase la figura 9.6.5.

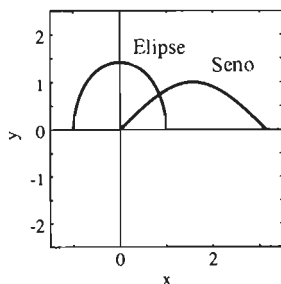


Figura 9.6.5 Dos arcos con la misma longitud (problema 44)

45. Calcule la longitud de arco de la curva  $y = \ln x$  en el intervalo  $[1, 2]$ .

46. Calcule el área de la superficie obtenida al girar la curva del problema 45 en torno del eje  $y$ .

47. Un toro (véase la figura 9.6.6) se obtiene al girar en torno del eje  $y$ , el círculo

$$(x - b)^2 + y^2 = a^2 \quad (0 < a \leq b).$$

Muestre que el área de su superficie es  $4\pi^2 ab$ .



Figura 9.6.6 El toro del problema 47

48. Determine el área bajo la curva  $y = \sqrt{9+x^2}$  en el intervalo  $[0, 4]$ .

49. Determine el área de la superficie obtenida al girar la curva  $y = \sin x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$  en torno del eje  $x$  (véase la figura 9.6.7).

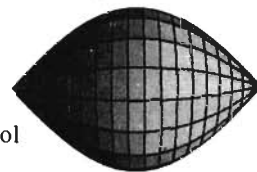


Figura 9.6.7 La pelota de fútbol puntiaguda del problema 49

50. Se obtiene un elipsoide de revolución al girar la elipse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  en torno del eje  $x$ . Suponga que  $a > b$ . Muestre que el área de la superficie de ese elipsoide es

$$A = 2\pi ab \left[ \frac{b}{a} + \frac{a}{c} \operatorname{sen}^{-1} \left( \frac{c}{a} \right) \right],$$

donde  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ . Suponga que  $a \approx b$ , de modo que  $c \approx 0$  y  $\operatorname{sen}^{-1}(c/a) \approx c/a$ . Concluya que  $A \approx 4\pi a^2$ .

51. Suponga que  $b > a$  en el elipsoide de revolución del problema 50. Demuestre que el área de su superficie es entonces

$$A = 2\pi ab \left[ \frac{b}{a} + \frac{a}{c} \ln \left( \frac{b+c}{a} \right) \right],$$

donde  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ . Utilice el hecho de que  $\ln(1+x) \approx x$  si  $x \approx 0$  y concluya de ello que  $A \approx 4\pi a^2$  si  $a \approx b$ .

52. Se va a construir una carretera del punto  $(2, 1)$  al punto  $(5, 3)$ , siguiendo la trayectoria de la parábola

$$y = -1 + 2\sqrt{x-1}.$$

Calcule la longitud de la carretera (las unidades en el eje de coordenadas son millas). [Sugerencia: sustituya  $x = \sec^2 \theta$  en la integral de longitud de arco.]

53. Suponga que el costo de la carretera del problema anterior es de  $\sqrt{x}$  millones de dólares por milla. Calcule su costo total.

54. Un cometa vuela a una altura de 500 pies y una distancia horizontal de 100 pies de la persona que lo sostiene desde el suelo. La cuerda del papalote pesa  $1/16$  onzas/pie y cuelga en forma de la parábola  $y = x^2/20$  que une a la persona en  $(0, 0)$  con el cometa, en  $(100, 500)$  (figura 9.6.8). Calcule el trabajo realizado (en pie-libras) al elevar la cuerda desde el suelo hasta su posición actual.

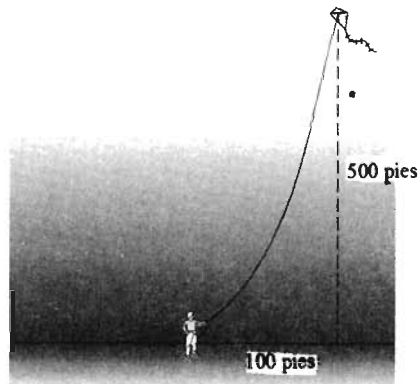


Figura 9.6.8 La cuerda del cometa del problema 54

## 9.7

### Integrales que contienen polinomios cuadráticos

Muchas integrales que contienen una raíz cuadrada o una potencia negativa de un polinomio cuadrático  $ax^2 + bx + c$  se pueden simplificar mediante el proceso de *completar el cuadrado*. Por ejemplo,

$$x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1,$$

y por tanto, con la sustitución  $u = x + 1$ ,  $du = dx$ , se obtiene

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \int \frac{1}{u^2 + 1} du = \tan^{-1} u + C = \tan^{-1}(x + 1) + C.$$

En general, el objetivo es convertir  $ax^2 + bx + c$  en una suma o en una diferencia de cuadrados ( $u^2 \pm a^2$  o  $a^2 - u^2$ ) para que se pueda usar el método de sustitución trigonométrica. Para ver cómo funciona esto en la práctica, supóngase primero que  $a = 1$ , de modo que la función cuadrática en cuestión es de la forma  $x^2 + bx + c$ . La suma  $x^2 + bx$  de los dos primeros términos se puede completar como un cuadrado perfecto sumando  $b^2/4$ , el cuadrado de la mitad del coeficiente de  $x$  y restando a su vez  $b^2/4$  al término constante  $c$ . Esto implica

$$\begin{aligned} x^2 + bx + c &= \left(x^2 + bx + \frac{b^2}{4}\right) + \left(c - \frac{b^2}{4}\right) \\ &= \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right). \end{aligned}$$

Con  $u = x + \frac{1}{2}b$ , este resultado es de la forma  $u^2 + A^2$  o  $u^2 - A^2$  (según el signo de  $c - \frac{1}{4}b^2$ ). Si el coeficiente  $a$  de  $x^2$  no es 1, primero lo factorizamos y procedemos como antes:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

**EJEMPLO 1** Determine  $\int \frac{1}{9x^2 + 6x + 5} dx$ .

**Solución** El primer paso es completar el cuadrado:

$$\begin{aligned} 9x^2 + 6x + 5 &= 9\left(x^2 + \frac{2}{3}x\right) + 5 = 9\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) - 1 + 5 \\ &= 9\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + 4 = (3x + 1)^2 + 2^2. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{9x^2 + 6x + 5} dx &= \int \frac{1}{(3x + 1)^2 + 4} dx \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{u^2 + 4} du \quad (u = 3x + 1) \\ &= \frac{1}{6} \int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}u\right)^2 + 1} du \\ &= \frac{1}{6} \int \frac{1}{v^2 + 1} dv \quad \left(v = \frac{1}{2}u\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6} \tan^{-1} v + C = \frac{1}{6} \tan^{-1} \left( \frac{u}{2} \right) + C \\
&= \frac{1}{6} \tan^{-1} \left( \frac{3x+1}{2} \right) + C.
\end{aligned}$$

**EJEMPLO 2** Determine  $\int \frac{1}{\sqrt{9+16x-4x^2}} dx$ .

**Solución** Primero se completa el cuadrado:

$$\begin{aligned}
9 + 16x - 4x^2 &= 9 - 4(x^2 - 4x) = 9 - 4(x^2 - 4x + 4) + 16 \\
&= 25 - 4(x-2)^2.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{9+16x-4x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{25-4(x-2)^2}} dx \\
&= \frac{1}{5} \int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{25}(x-2)^2}} dx \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du \quad \left( u = \frac{2(x-2)}{5} \right) \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{sen}^{-1} u + C = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{2(x-2)}{5} + C.
\end{aligned}$$

Un método alternativo consiste en hacer la sustitución trigonométrica

$$2(x-2) = 5 \operatorname{sen} \theta, \quad 2 dx = 5 \cos \theta d\theta$$

después de completar el cuadrado. Esto implica

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{9+16x-4x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{25-4(x-2)^2}} dx \\
&= \int \frac{\frac{5}{2} \cos \theta}{\sqrt{25-25 \operatorname{sen}^2 \theta}} d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int 1 d\theta = \frac{1}{2} \theta + C \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} \frac{2(x-2)}{5} + C.
\end{aligned}$$

Algunas integrales que contienen una expresión cuadrática se pueden separar en dos integrales más sencillas. Los ejemplos 3 y 4 ilustran esta técnica.

**EJEMPLO 3** Determine  $\int \frac{2x+3}{9x^2+6x+5} dx$ .

**Solución** Dado que  $D_x(9x^2+6x+5) = 18x+6$ , ésta sería una integral más sencilla si el numerador  $2x+3$  fuese un múltiplo constante de  $18x+6$ . Nuestra estrategia será escribir

$$2x + 3 = A(18x + 6) + B$$

para poder separar la integral dada en una suma de dos integrales, una de las cuales tendrá como numerador  $18x + 6$  en su integrando. Al igualar los coeficientes en

$$2x + 3 = 18Ax + (6A + B),$$

tenemos que  $A = \frac{1}{9}$  y  $B = \frac{7}{3}$ . Por tanto,

$$\int \frac{2x + 3}{9x^2 + 6x + 5} dx = \frac{1}{9} \int \frac{18x + 6}{9x^2 + 6x + 5} dx + \frac{7}{3} \int \frac{1}{9x^2 + 6x + 5} dx.$$

La primera integral de la derecha es un logaritmo y la segunda está dada por el ejemplo 1. Así,

$$\int \frac{2x + 3}{9x^2 + 6x + 5} dx = \frac{1}{9} \ln(9x^2 + 6x + 5) + \frac{7}{18} \tan^{-1}\left(\frac{3x + 1}{2}\right) + C.$$

Como alternativa, se puede completar primero el cuadrado del denominador. La sustitución  $u = 3x + 1$ ,  $x = \frac{1}{3}(u - 1)$ ,  $dx = \frac{1}{3} du$  implica entonces

$$\begin{aligned} \int \frac{2x + 3}{(3x + 1)^2 + 4} dx &= \int \frac{\frac{2}{3}(u - 1) + 3}{u^2 + 4} \cdot \frac{1}{3} du \\ &= \frac{1}{9} \int \frac{2u}{u^2 + 4} du + \frac{7}{9} \int \frac{1}{u^2 + 4} du \\ &= \frac{1}{9} \ln(u^2 + 4) + \frac{7}{18} \tan^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C \\ &= \frac{1}{9} \ln(9x^2 + 6x + 5) + \frac{7}{18} \tan^{-1}\left(\frac{3x + 1}{2}\right) + C. \end{aligned}$$

**EJEMPLO 4** Determine  $\int \frac{2 + 6x}{(3 + 2x - x^2)^2} dx$  dado que  $|x - 1| < 2$ .

**Solución** Como  $D_x(3 + 2x - x^2) = 2 - 2x$ , primero escribimos

$$\begin{aligned} \int \frac{2 + 6x}{(3 + 2x - x^2)^2} dx \\ = -3 \int \frac{2 - 2x}{(3 + 2x - x^2)^2} dx + 8 \int \frac{1}{(3 + 2x - x^2)^2} dx. \end{aligned}$$

Entonces, sea  $u = 3 + 2x - x^2$ ,  $du = (2 - 2x) dx$  en la primera integral para obtener

$$-3 \int \frac{2 - 2x}{(3 + 2x - x^2)^2} dx = -3 \int \frac{du}{u^2} = \frac{3}{u} + C_1 = \frac{3}{3 + 2x - x^2} + C_1.$$

Por tanto,

$$\int \frac{2 + 6x}{(3 + 2x - x^2)^2} dx = \frac{3}{3 + 2x - x^2} + 8 \int \frac{1}{(3 + 2x - x^2)^2} dx. \quad (1)$$

(Podemos eliminar la constante  $C_1$  pues puede ser absorbida por la constante  $C$  que obtendremos al evaluar la otra integral.) Para determinar la integral restante, completamos el cuadrado:

$$3 + 2x - x^2 = 4 - (x^2 - 2x + 1) = 4 - (x - 1)^2.$$

Como  $|x - 1| < 2$ , esto sugiere la sustitución

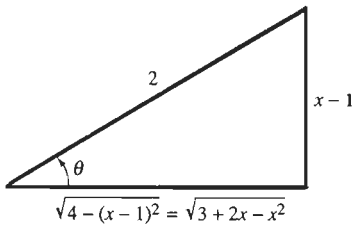
$$x - 1 = 2 \operatorname{sen} \theta, \quad dx = 2 \cos \theta \, d\theta,$$

por lo que

$$3 + 2x - x^2 = 4 - 4 \operatorname{sen}^2 \theta = 4 \cos^2 \theta.$$

Esta sustitución implica

$$\begin{aligned} 8 \int \frac{1}{(3 + 2x - x^2)^2} dx &= 8 \int \frac{2 \cos \theta}{(4 \cos^2 \theta)^2} d\theta = \int \sec^3 \theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \sec \theta \tan \theta + \frac{1}{2} \int \sec \theta \, d\theta \quad \text{[por la ecuación (6) de la sección 9.4]} \\ &= \frac{1}{2} \sec \theta \tan \theta + \frac{1}{2} \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C \\ &= \frac{x - 1}{3 + 2x - x^2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x + 1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}} \right| + C. \quad (2) \end{aligned}$$



**Figura 9.7.1** El triángulo de referencia del ejemplo 4

En el último paso, hemos leído los valores de  $\sec \theta$  y de  $\tan \theta$  en términos de  $x$ , en el triángulo rectángulo de la figura 9.7.1. Cuando sustituimos la ecuación (2) en la ecuación (1), obtenemos finalmente el resultado

$$\int \frac{2 + 6x}{(3 + 2x - x^2)^2} dx = \frac{x + 2}{3 + 2x - x^2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x + 1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}} \right| + C.$$

Podemos utilizar el método del ejemplo 4 para evaluar una integral general de la forma

$$\int \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n} dx, \quad (3)$$

donde  $n$  es un entero positivo. Al separar dicha integral en dos integrales más sencillas y completar el cuadrado en la expresión cuadrática del denominador, el problema de evaluar la integral en la ecuación (3) se reduce al de calcular

$$\int \frac{1}{(a^2 \pm u^2)^n} du. \quad (4)$$

Si el signo del denominador en la ecuación (4) es positivo, entonces la sustitución  $u = a \tan \theta$  transforma la integral en la forma

$$\int \cos^m \theta \, d\theta$$

(véase el Problema 35). Esta integral se puede manejar mediante los métodos de la sección 9.3 o con la fórmula de reducción

$$\int \cos^k \theta \, d\theta = \frac{1}{k} \cos^{k-1} \theta \operatorname{sen} \theta + \frac{k-1}{k} \int \cos^{k-2} \theta \, d\theta$$

del problema 46 de la sección 9.4.

Si el signo en el denominador de la ecuación (4) es negativo, entonces la sustitución  $u = a \operatorname{sen} \theta$  convierte la integral en la forma



$$\int \sec^m \theta \, d\theta$$

(véase el problema 36). Esta integral se evalúa con la ayuda de la fórmula de reducción

$$\int \sec^k \theta \, d\theta = \frac{1}{k-1} \sec^{k-2} \theta \tan \theta + \frac{k-2}{k-1} \int \sec^{k-2} \theta \, d\theta$$

[Ecuación (5) de la Sección 9.4.]

## 9.7 Problemas

Evalúe las primitivas de los problemas 1 a 34.

$$1. \int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} \, dx$$

$$2. \int \frac{2x + 5}{x^2 + 4x + 5} \, dx$$

$$3. \int \frac{5 - 3x}{x^2 + 4x + 5} \, dx$$

$$4. \int \frac{x + 1}{(x^2 + 4x + 5)^2} \, dx$$

$$5. \int \frac{1}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} \, dx$$

$$6. \int \frac{x + 3}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} \, dx$$

$$7. \int x\sqrt{3 - 2x - x^2} \, dx$$

$$8. \int \frac{1}{4x^2 + 4x - 3} \, dx$$

$$9. \int \frac{3x + 2}{4x^2 + 4x - 3} \, dx$$

$$10. \int \sqrt{4x^2 + 4x - 3} \, dx$$

$$11. \int \frac{1}{x^2 + 4x + 13} \, dx$$

$$12. \int \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} \, dx$$

$$13. \int \frac{1}{3 + 2x - x^2} \, dx$$

$$14. \int x\sqrt{8 + 2x - x^2} \, dx$$

$$15. \int \frac{2x - 5}{x^2 + 2x + 2} \, dx$$

$$16. \int \frac{2x - 1}{4x^2 + 4x - 15} \, dx$$

$$17. \int \frac{x}{\sqrt{5 + 12x - 9x^2}} \, dx$$

$$18. \int (3x - 2)\sqrt{9x^2 + 12x + 8} \, dx$$

$$19. \int (7 - 2x)\sqrt{9 + 16x - 4x^2} \, dx$$

$$20. \int \frac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} \, dx$$

$$21. \int \frac{x + 4}{(6x - x^2)^{3/2}} \, dx$$

$$22. \int \frac{x - 1}{(x^2 + 1)^2} \, dx$$

$$23. \int \frac{2x + 3}{(4x^2 + 12x + 13)^2} \, dx$$

$$24. \int \frac{x^3}{(1 - x^2)^4} \, dx$$

$$25. \int \frac{3x - 1}{x^2 + x + 1} \, dx$$

$$26. \int \frac{3x - 1}{(x^2 + x + 1)^2} \, dx$$

$$27. \int \frac{1}{(x^2 - 4)^2} \, dx$$

$$28. \int (x - x^2)^{3/2} \, dx$$

$$29. \int \frac{x^2 + 1}{x^3 + x^2 + x} \, dx$$

$$30. \int \frac{x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} \, dx$$

$$31. \int \frac{2x^2 + 3}{x^4 - 2x^2 + 1} \, dx$$

$$32. \int \frac{x^2 + 4}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 2)} \, dx$$

$$33. \int \frac{3x + 1}{(x^2 + 2x + 5)^2} \, dx$$

$$34. \int \frac{x^3 - 2x}{x^2 + 2x + 2} \, dx$$

35. Demuestre que la sustitución  $u = a \tan \theta$  implica

$$\int \frac{1}{(a^2 + u^2)^n} \, du = \frac{1}{a^{2n-1}} \int \cos^{2n-2} \theta \, d\theta.$$

36. Demuestre que la sustitución  $u = a \operatorname{sen} \theta$  implica

$$\int \frac{1}{(a^2 - u^2)^n} \, du = \frac{1}{a^{2n-1}} \int \sec^{2n-2} \theta \, d\theta.$$

37. Se va a construir una carretera que una los puntos  $(0, 0)$  y  $(3, 2)$  siguiendo la trayectoria de la circunferencia con ecuación  $(4x + 4)^2 + (4y - 19)^2 = 377$ . Determine la longitud de esta carretera. (Las unidades en los ejes de coordenadas se miden en millas.)

38. Suponga que la carretera del problema 37 cuesta  $10/(1+x)$  millones de dólares por milla. (a) Calcule su costo total. (b) Con el mismo costo por milla, calcule el costo total de una carretera recta de  $(0, 0)$  a  $(3, 2)$ . ¿Debe determinar que es más cara que la carretera circular, más larga!

En los problemas 39 a 41, factorice el denominador, buscando primero mediante inspección una raíz  $r$  del denominador y utilizando después la división entre  $x - r$ . Por último, utilice el método de fracciones parciales para determinar la primitiva indicada.

$$39. \int \frac{3x + 2}{x^3 + x^2 - 2} \, dx$$

$$40. \int \frac{1}{x^3 + 8} \, dx$$

$$41. \int \frac{x^4 + 2x^2}{x^3 - 1} dx$$

42. (a) Determine constantes  $a$  y  $b$  tales que

$$x^4 + 1 = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 1).$$

(b) Demuestre que

$$\int_0^1 \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

[Sugerencia: Si  $u$  y  $v$  son números positivos y  $uv = 1$ , entonces

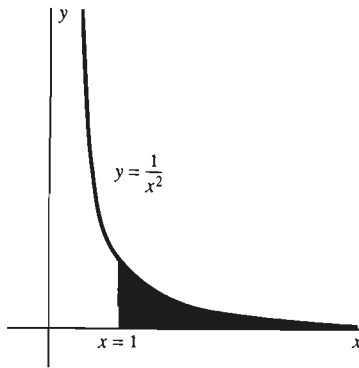
$$\arctan u + \arctan v = \frac{\pi}{2}.]$$

43. Factorice  $x^4 + x^2 + 1$  con la ayuda de las ideas sugeridas en el problema 42. Después evalúe

$$\int \frac{2x^3 + 3x}{x^4 + x^2 + 1} dx.$$

## 9.8 Integrales impropias

Para mostrar la existencia de la integral definida, nos hemos basado hasta el momento en el teorema de existencia enunciado en la sección 5.4. Éste es el teorema que garantiza la existencia de la integral definida  $\int_a^b f(x) dx$  si la función  $f$  es *continua* en el intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$ . Sin embargo, ciertas aplicaciones del cálculo conducen de manera natural a la formulación de integrales en las que



**Figura 9.8.1** El área sombreada no se puede medir con nuestras técnicas anteriores

1. El intervalo de integración no es acotado; tiene alguna de las formas

$$[a, +\infty), (-\infty, a] \quad \text{o} \quad (-\infty, +\infty), \quad \text{o bien}$$

2. El integrando tiene una discontinuidad infinita en algún punto  $c$ :

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty.$$

Un ejemplo del caso 1 es la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx.$$

Una interpretación geométrica de esta integral es el área de la región no acotada (sombreada en la figura 9.8.1) que está entre la curva  $y = 1/x^2$  y el eje  $x$  y a la derecha de la recta vertical  $x = 1$ . Un ejemplo del caso 2 es la integral

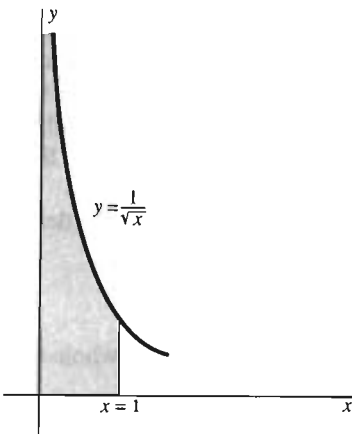
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

La integral se puede interpretar como el área de la región no acotada (sombreada en la figura 9.8.2) que está bajo la curva  $y = 1/\sqrt{x}$  de  $x = 0$  a  $x = 1$ .

Tales integrales son **integrales impropias**. La interpretación natural de una integral impropia es la del área de una región no acotada. Tal vez le sorprenda que tal área realmente puede ser finita, y aquí mostraremos cómo determinar tales áreas; es decir, cómo evaluar integrales impropias.

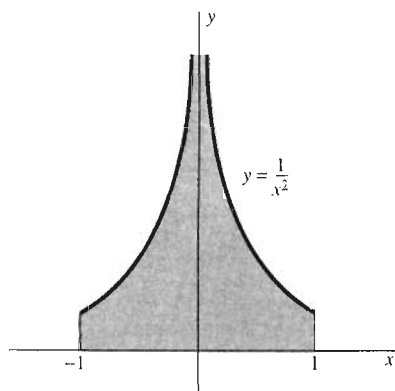
Para ver por qué las integrales impropias necesitan de un cuidado particular, consideremos la integral

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx.$$



**Figura 9.8.2** Otra área que debe medirse mediante una integral impropia

Esta integral es impropia, pues su integrando  $f(x) = 1/x^2$  no es acotado cuando  $x \rightarrow 0$ , por lo cual  $f$  no es continua en  $x = 0$ . Si aplicamos sin reflexión el teorema fundamental del cálculo, obtendríamos



**Figura 9.8.3** El área bajo  $y = 1/x^2, -1 \leq x \leq 1$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[ -\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = (-1) - (+1) = -2. \quad (\text{¡Incorrecto!})$$

Es claro que la respuesta negativa es incorrecta, pues el área que se muestra en la figura 9.8.3 está por arriba del eje  $x$  y por tanto no puede ser negativa. Este sencillo ejemplo enfatiza el hecho de que no podemos ignorar las hipótesis del teorema fundamental del cálculo: función *continua* e intervalo *cerrado y acotado*.

## LÍMITES INFINITOS DE INTEGRACIÓN

Supongamos que la función  $f$  es continua y no negativa en el intervalo no acotado  $[a, +\infty)$ . Entonces, para cada  $t > a$  fijo, el área  $A(t)$  de la región bajo  $y = f(x)$  de  $x = a$  a  $x = t$  (sombreada en la figura 9.8.4) está dada por la integral definida (ordinaria)

$$A(t) = \int_a^t f(x) dx.$$

Supongamos ahora que hacemos  $t \rightarrow +\infty$  y que determinamos que existe el límite de  $A(t)$ . Entonces podríamos considerar este límite como el área de la región no acotada que está bajo  $y = f(x)$  y sobre  $[a, +\infty)$ . Por tanto, para  $f$  continua en  $[a, +\infty)$  *definimos*

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx \quad (1)$$

si este límite existe (como un número finito). Si este límite existe, decimos que la integral impropia del lado izquierdo **converge**; si el límite no existe, decimos que la integral impropia **diverge**. Si  $f(x)$  es no negativa en  $[a, +\infty)$ , entonces el límite en la ecuación (1) existe o es infinito; en este último caso escribimos

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = +\infty$$

y decimos que la integral impropia **diverge a infinito**.

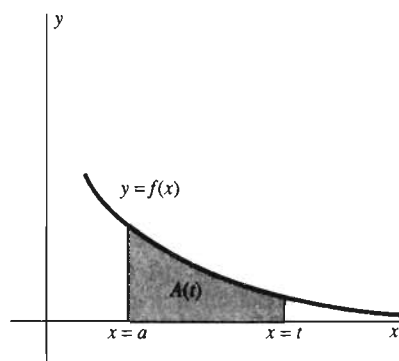
Si la función  $f$  tiene valores positivos y negativos en  $[a, +\infty)$ , entonces la integral impropia puede ser divergente *por oscilación*; es decir, sin que sea divergente a infinito. Esto ocurre con  $\int_0^{\infty} \sin x dx$ , pues es fácil verificar que  $\int_0^t \sin x dx$  se anula si  $t$  es un múltiplo par de  $\pi$  pero es 2 si  $t$  es un múltiplo impar de  $\pi$ . Así,  $\int_0^t \sin x dx$  oscila entre 0 y 2 cuando  $t \rightarrow +\infty$ , de modo que el límite de la ecuación (1) no existe.

Consideraremos el caso de un límite inferior infinito de manera análoga: definimos

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx \quad (2)$$

si el límite existe. Si la función  $f$  es continua en toda la recta real, definimos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx \quad (3)$$



**Figura 9.8.4** El área sombreada  $A(t)$  existe si  $f$  es continua

para cualquier elección conveniente de  $c$ , si las dos integrales impropias del lado derecho convergen. Observe que  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  no necesariamente es igual a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t f(x) dx$$

(véase problema 28).

No hay diferencia alguna al elegir el valor de  $c$ , en la ecuación (3), pues si  $c < d$ , entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx + \int_d^{\infty} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^d f(x) dx + \int_d^{\infty} f(x) dx, \end{aligned}$$

bajo la hipótesis de que todos los límites implicados existen.

**EJEMPLO 1** Analice las integrales impropias (a)  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$  y

(b)  $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$ .

**Solución**

(a)  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{t} + 1 \right) = 1.$

Así, esta integral impropia converge, y es el área de la región sombreada en la figura 9.8.1.

(b)  $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[ -2\sqrt{1-x} \right]_t^0$   
 $= \lim_{t \rightarrow -\infty} (2\sqrt{1-t} - 2) = +\infty.$

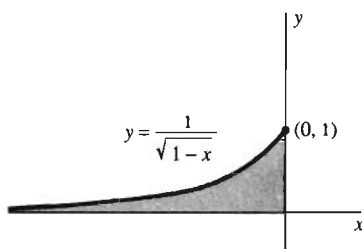
Así, la segunda integral impropia del ejemplo diverge a  $+\infty$  (figura 9.8.5).

**EJEMPLO 2** Analice la integral impropia  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ .

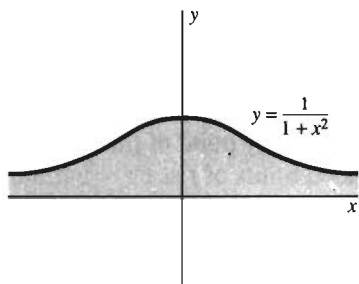
**Solución** La elección  $c = 0$  en la ecuación (3) da

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{s \rightarrow -\infty} \left[ \tan^{-1} x \right]_s^0 + \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \tan^{-1} x \right]_0^t \\ &= \lim_{s \rightarrow -\infty} (-\tan^{-1} s) + \lim_{t \rightarrow \infty} (\tan^{-1} t) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$

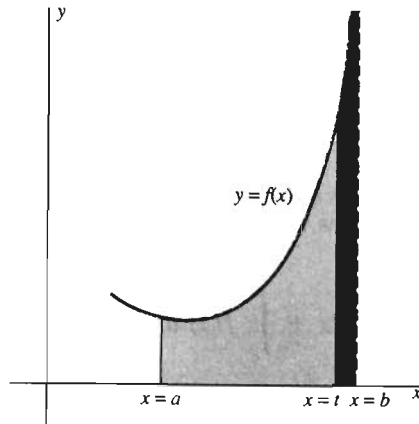
La región sombreada en la figura 9.8.6 es una interpretación geométrica de la integral del ejemplo 2.



**Figura 9.8.5** La región no acotada representada por la integral impropia del ejemplo 1(b)



**Figura 9.8.6** El área medida por la integral del ejemplo 2



**Figura 9.8.7** Una integral impropia del segundo tipo:  $f(x) \rightarrow \infty$  cuando  $x \rightarrow b^-$

## INTEGRANDOS INFINITOS

Supongamos que la función  $f$  es continua y no negativa en  $[a, b]$ , pero que  $f(x) \rightarrow +\infty$  cuando  $x \rightarrow b^-$ . La gráfica de tal función aparece en la figura 9.8.7. El área  $A(t)$  de la región, que está bajo  $y=f(x)$  de  $x=a$  a  $x=t < b$ , es el valor de la integral definida (ordinaria)

$$A(t) = \int_a^t f(x) dx.$$

Si el límite de  $A(t)$  existe cuando  $t \rightarrow b^-$ , entonces este límite se puede considerar como el área de la región (no acotada) bajo  $y=f(x)$  de  $x=a$  a  $x=b$ . Para  $f$  continua en  $[a, b)$ , *definimos* entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx, \quad (4)$$

si este límite existe (como un número finito), en cuyo caso decimos que la integral impropia de la izquierda **converge**; si el límite no existe, decimos que **diverge**. Si

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx = \infty,$$

entonces decimos que la integral impropia **diverge a infinito**.

Si  $f$  es continua en  $(a, b]$  pero el límite de  $f(x)$  cuando  $x \rightarrow a^+$  es infinito, entonces *definimos*

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx, \quad (5)$$

si el límite existe. Si  $f$  es continua en cada punto de  $[a, b]$  excepto el punto  $c$  en  $(a, b)$  y uno o ambos límites laterales de  $f$  en  $c$  son infinitos, entonces *definimos*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (6)$$

si convergen las dos integrales impropias del lado derecho.

**EJEMPLO 3** Analice las integrales impropias

(a)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  y (b)  $\int_1^2 \frac{1}{(x-2)^2} dx$ .

**Solución**

(a) El integrando  $1/\sqrt{x}$  tiende a infinito cuando  $x \rightarrow 0^+$ , de modo que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[ 2\sqrt{x} \right]_t^1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} 2(1 - \sqrt{t}) = 2. \end{aligned}$$

Así, el área de la región no acotada que se muestra en la figura 9.8.2 es 2.

(b) En este caso, el integrando tiende a infinito cuando  $x$  tiende al extremo derecho, de modo que

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{(x-2)^2} dx &= \lim_{t \rightarrow 2^-} \int_1^t \frac{1}{(x-2)^2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 2^-} \left[ -\frac{1}{x-2} \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow 2^-} \left( -1 - \frac{1}{t-2} \right) = +\infty. \end{aligned}$$

Por tanto, esta integral impropia diverge a infinito (figura 9.8.8). Esto implica que la integral impropia

$$\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^2} dx = \int_1^2 \frac{1}{(x-2)^2} dx + \int_2^3 \frac{1}{(x-2)^2} dx$$

también diverge, pues ninguna de las integrales impropias del lado derecho converge. (Usted puede verificar que la segunda integral también diverge a  $+\infty$ .)

**EJEMPLO 4** Analice la integral impropia

$$\int_0^2 \frac{1}{(2x-1)^{2/3}} dx.$$

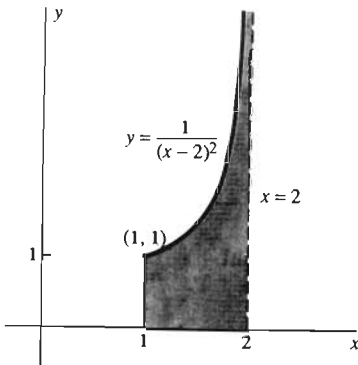
**Solución** Esta integral impropia corresponde a la región sombreada en la figura 9.8.9. El integrando tiene una discontinuidad infinita en el punto  $c = \frac{1}{2}$  dentro del intervalo de integración, por lo que escribimos

$$\int_0^2 \frac{1}{(2x-1)^{2/3}} dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{(2x-1)^{2/3}} dx + \int_{1/2}^2 \frac{1}{(2x-1)^{2/3}} dx$$

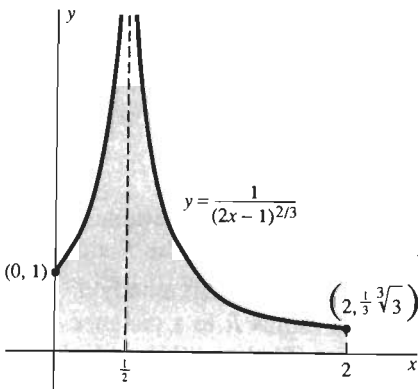
y analizamos por separado las dos integrales impropias de la derecha. Vemos entonces que

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \frac{1}{(2x-1)^{2/3}} dx &= \lim_{t \rightarrow (1/2)^-} \int_0^t \frac{1}{(2x-1)^{2/3}} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow (1/2)^-} \left[ \frac{3}{2}(2x-1)^{1/3} \right]_0^t \\ &= \lim_{t \rightarrow (1/2)^-} \frac{3}{2} \left[ (2t-1)^{1/3} - (-1)^{1/3} \right] = \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

y



**Figura 9.8.8** La región no acotada representada por la integral impropia del ejemplo 3(b)



**Figura 9.8.9** La región del ejemplo 4

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^2 \frac{1}{(2x-1)^{2/3}} dx &= \lim_{t \rightarrow (1/2)^+} \int_t^2 \frac{1}{(2x-1)^{2/3}} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow (1/2)^+} \left[ \frac{3}{2} (2x-1)^{1/3} \right]_t^2 \\ &= \lim_{t \rightarrow (1/2)^+} \frac{3}{2} [3^{1/3} - (2t-1)^{1/3}] = \frac{3}{2} \sqrt[3]{3}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int_0^2 \frac{1}{(2x-1)^{2/3}} dx = \frac{3}{2} (1 + \sqrt[3]{3}).$$

Con frecuencia, las funciones especiales en matemáticas avanzadas se definen mediante integrales impropias. Un ejemplo importante es la **función gama**  $\Gamma(t)$  que introdujo el prolífico matemático suizo Leonhard Euler (1707–1783) para “interpolar” la función factorial  $n!$ . La función gama está definida para todo número real  $t > 0$  como sigue:

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx. \quad (7)$$

Esta definición produce una función continua de  $t$  tal que

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (8)$$

si  $n$  es un entero no negativo (véanse los problemas 29 y 30).

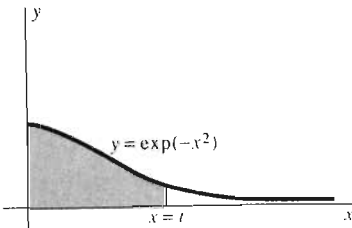
**EJEMPLO 5** Determine el volumen  $V$  del sólido no acotado que se obtiene al girar en torno del eje  $y$  la región bajo la curva  $y = \exp(-x^2)$ ,  $x \geq 0$ .

**Solución** La región en cuestión aparece en la figura 9.8.10. Sea  $V_t$  el volumen generado al girar la parte sombreada de esta región entre  $x=0$  y  $x=t > 0$ . Entonces, con el método de las capas cilíndricas se obtiene

$$V_t = \int_0^t 2\pi x \exp(-x^2) dx.$$

Obtenemos el volumen completo  $V$  haciendo  $t \rightarrow +\infty$ :

$$V = \lim_{t \rightarrow \infty} V_t = \int_0^{\infty} 2\pi x \exp(-x^2) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ -\pi \exp(-x^2) \right]_0^t = \pi.$$



**Figura 9.8.10** Toda la región bajo la gráfica se gira en torno del eje  $y$ ; esto produce un sólido no acotado (ejemplo 5)

### \*VELOCIDAD DE ESCAPE

En la sección 6.6 vimos cómo calcular el trabajo  $W_r$  necesario para levantar un cuerpo de masa  $m$  desde la superficie de un planeta de masa  $M$  y radio  $R$  a una distancia  $r > R$  del centro del planeta. De acuerdo con la ecuación (7) en esa sección, la respuesta es

$$W_r = \int_R^r \frac{GMm}{x^2} dx.$$

Así, el trabajo necesario para mover la masa  $m$  “infinitamente lejos” del planeta es

$$W = \lim_{r \rightarrow \infty} W_r = \int_R^{\infty} \frac{GMm}{x^2} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[ -\frac{GMm}{x} \right]_R^r = \frac{GMm}{R}.$$

Supongamos que la masa se lanza con velocidad inicial  $v$  directamente hacia arriba de la superficie del planeta, como en la novela de Julio Verne *De la Tierra a la Luna* (1865), en la que una nave espacial fue disparada mediante un enorme cañón. Entonces, se dispone de la energía cinética inicial  $\frac{1}{2}mv^2$  para proporcionar este trabajo, al convertirse en energía potencial. Por la ecuación

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{R},$$

tenemos que

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

La sustitución de los valores numéricos adecuados para las constantes  $G$ ,  $M$  y  $R$  produce el valor  $v \approx 11,175$  metros/segundo  $\approx 25,000$  millas/hora para la *velocidad de escape* de la Tierra.

### \*VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD PERPETUA

Consideremos una anualidad perpetua, con la que usted y sus herederos (y los herederos de éstos, *ad infinitum*) recibirán  $A$  dólares anualmente. La pregunta es: ¿Cuál es el valor de mercado justo para tal anualidad? ¿Cuánto debe pagarse por adquirirla?

Si la tasa de interés anual  $r$  se compone de manera continua, entonces un dólar depositado en una cuenta de ahorros aumentaría a  $e^{rt}$  dólares en  $t$  años. Por tanto,  $e^{-rt}$  dólares depositados ahora producirían 1 dólar después de  $t$  años. En consecuencia, el **valor presente** de la cantidad que usted (y sus herederos) recibirán entre el tiempo  $t = 0$  (el presente) y el tiempo  $t = T > 0$  se define como

$$P_r = \int_0^T Ae^{-rt} dt.$$

Por tanto, el valor presente total de la anualidad perpetua es

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} P_r = \int_0^{\infty} Ae^{-rt} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ -\frac{A}{r} e^{-rt} \right]_0^T = \frac{A}{r}.$$

Así,  $A = rP$ . Por ejemplo, con una tasa de interés anual de 8% ( $r = 0.08$ ), usted podría adquirir por  $P = (\$50,000)/(0.08) = \$625,000$  una perpetuidad que le pague a usted y sus herederos una suma anual de \$50,000.

## 9.8 Problemas

Determine si las integrales impropias de los problemas 1 a 24 convergen o divergen. Evalúe las que convergen.

1.  $\int_4^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$

2.  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{2/3}} dx$

3.  $\int_0^4 \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$

4.  $\int_0^8 \frac{1}{x^{2/3}} dx$

5.  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x+1} dx$

6.  $\int_3^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$

7.  $\int_5^{\infty} \frac{1}{(x-1)^{3/2}} dx$

8.  $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4-x}} dx$

9.  $\int_0^9 \frac{1}{(9-x)^{3/2}} dx$

10.  $\int_0^3 \frac{1}{(x-3)^2} dx$

11.  $\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{(x+1)^3} dx$

12.  $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{4-x}} dx$

13.  $\int_{-1}^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$

14.  $\int_{-4}^4 \frac{1}{(x+4)^{2/3}} dx$



$$15. \int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx \quad 16. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4)^{3/2}} dx$$

$$17. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+4} dx \quad 18. \int_0^{\infty} e^{-(x+1)} dx$$

$$19. \int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \quad 20. \int_0^2 \frac{x}{x^2-1} dx$$

$$21. \int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx \quad 22. \int_0^{\infty} \sin^2 x dx$$

$$23. \int_0^{\infty} x e^{-2x} dx \quad 24. \int_0^{\infty} e^{-x} \sin x dx$$

Los problemas 25 a 27 se refieren al cuerno de Gabriel, la superficie obtenida al girar la curva  $y = 1/x$ ,  $x \geq 1$ , en torno del eje  $x$  (figura 9.8.11).



Figura 9.8.11 Cuerno de Gabriel (problemas 25 a 27)

25. Muestre que el área bajo la curva  $y = 1/x$ ,  $x \geq 1$  es infinita.  
 26. Muestre que el volumen de revolución encerrado por el cuerno de Gabriel es finito, y calcúlelo.  
 27. Muestre que el área de la superficie del cuerno de Gabriel es infinita. [Sugerencia: sea  $A_t$  el área de la superficie de  $x = 1$  a  $x = t > 1$ . Demuestre que  $A_t > 2\pi \ln t$ .] En todo caso, la implicación es que podríamos llenar el cuerno de Gabriel con una cantidad finita de pintura (problema 26), pero ninguna cantidad finita alcanza para pintar la superficie.  
 28. Muestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx$$

diverge, pero que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t \frac{1+x}{1+x^2} dx = \pi.$$

29. Sea  $x$  un número positivo fijo. Comience con la integral de la ecuación (7), aquella donde se define la función gamma e integre por partes para demostrar que  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ .  
 30. (a) Demuestre que  $\Gamma(1) = 1$ . (b) Utilice los resultados de la parte (a) del problema 29 para demostrar mediante inducción matemática que  $\Gamma(n+1) = n!$  si  $n$  es un entero positivo.

31. Utilice la sustitución  $x = e^{-u}$  y el hecho de que  $\Gamma(n+1) = n!$  para demostrar que si  $m$  y  $n$  son enteros positivos fijos pero arbitrarios, entonces

$$\int_0^1 x^m (\ln x)^n dx = \frac{n! (-1)^n}{(m+1)^{n+1}}.$$

32. Considere una anualidad perpetua con la que usted y sus herederos recibirán un pago a razón de  $10 + t$  miles de dólares por año  $t$  años después. Así, usted recibirá \$20,000 después de 10 años, sus herederos recibirán \$110,000 dentro de 100 años, etcétera. Suponga que la tasa de interés anual es constante e igual a 10%; muestre que el valor presente de esta perpetuidad es

$$P = \int_0^{\infty} (10 + t)e^{-t/10} dt,$$

y evalúe entonces esta integral impropia.

33. Una varilla uniforme “semi-infinita” ocupa el eje  $x$  no negativo ( $x \geq 0$ ) y tiene una densidad lineal  $\rho$ ; es decir, un segmento de longitud  $dx$  tiene densidad  $\rho dx$ . Muestre que la fuerza de atracción gravitacional que la varilla ejerce sobre una masa puntual  $m$  en  $(-a, 0)$  es

$$F = \int_0^{\infty} \frac{Gm\rho}{(a+x)^2} dx = \frac{Gm\rho}{a}.$$

34. Una varilla de densidad lineal  $\rho$  ocupa todo el eje  $y$ . Una masa  $m$  puntual se localiza en  $(a, 0)$  sobre el eje  $x$ , como se indica en la figura 9.8.12. Muestre que la atracción gravitacional (horizontal) total que ejerce la varilla sobre  $m$  es

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Gm\rho \cos \theta}{r^2} dy = \frac{2Gm\rho}{a},$$

donde  $r^2 = a^2 + y^2$  y  $\cos \theta = a/r$ .

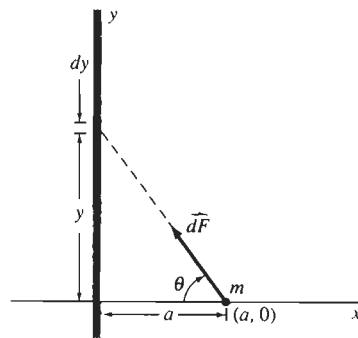


Figura 9.8.12 Atracción gravitacional ejercida sobre una masa puntual por una varilla infinita (problema 34)

35. Dado que

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

deduzca que  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ .

36. Recuerde que  $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$  si  $x > 0$ . Suponga que  $n$  es un entero positivo. Utilice el problema 35 para establecer que

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}.$$

37. (a) Suponga que  $k > 1$ . Utilice la integración por partes para mostrar que

$$\int_0^{\infty} x^k \exp(-x^2) dx = \frac{k-1}{2} \int_0^{\infty} x^{k-2} \exp(-x^2) dx.$$

## 9.8 Proyecto

La integral impropia  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$  es importante en aplicaciones que van de la probabilidad y la estadística (sondeos políticos, por ejemplo), hasta el flujo del tráfico y la teoría del calor. Puesto que la función  $f(x) = e^{-x^2}$  no tiene una primitiva elemental dada en términos de una combinación lineal de funciones familiares, no es posible evaluar de manera sencilla y directa el límite

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x^2} dx \quad (9)$$

mediante el teorema fundamental del cálculo. Pero el hecho de que  $e^{-x^2} \leq e^{-x}$  para  $x \geq 1$  implica que la integral impropia en la ecuación (9) converge (y no diverge a infinito) (¿Podría explicar por qué?)

En la sección 15.4 veremos que el valor exacto de la integral en la ecuación (9) está dado por

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0.88622693. \quad (10)$$

Para verificar numéricamente este valor, utilizamos la tecla `integrate` en una calculadora HP-48SX para calcular los valores de la integral  $\int_0^b e^{-x^2} dx$  con valores cada vez mayores para el límite superior  $b$ . Los resultados aparecen en la figura 9.8.13.

Como una alternativa a la tecla `integrate` en una calculadora científica, podría utilizar los métodos de integración numérica descritos en el proyecto de la sección 5.4. Si utiliza un método como la aproximación de Simpson, es una buena idea el aumentar la precisión duplicando, por decir algo, el número de subintervalos con cada incremento en el valor  $b$  del límite superior.

Utilice alguna de las técnicas ya indicadas para verificar numéricamente los valores dados en los problemas 1 a 5.

$b$	$\int_0^b e^{-x^2} dx$
1	0.74682413
2	0.88208139
3	0.88620735
4	0.88622691
5	0.88622693
10	0.88622693
100	0.88622693

Figura 9.8.13 Verificación del valor numérico en la ecuación (10)

$$1. \int_0^{\infty} x^5 e^{-x} dx = 120$$

$$2. \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$3. \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$4. \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2x dx = \frac{\pi}{2e}$$

$$5. \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-3x}}{x} dx = \frac{\ln 10}{2}$$

(b) Suponga que  $n$  es un entero positivo. Demuestre que

$$\int_0^{\infty} x^{n-1} \exp(-x^2) dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

38. Suponga que gana la lotería en Florida y decide utilizar parte de sus ganancias para adquirir una anualidad perpetua que le pagará a usted y sus herederos \$10,000 al año (por siempre). Suponiendo que la tasa de interés anual es de 6%, ¿cuál será un precio justo que deberá cobrar una compañía de seguros por tal anualidad?

Al enfrentar el problema de evaluar una integral particular, primero debe decidir cuál de los diversos métodos de este capítulo debe utilizar. Sólo existen dos métodos *generales* de integración:

- Integración por sustitución (sección 9.2) e
- Integración por partes (sección 9.4).

Éstos son los análogos para la integración de la regla de la cadena y la regla del producto de la derivación, respectivamente.

Observe primero la integral para ver si puede realizar una sustitución que la transforme en una integral elemental o conocida o una que tal vez se encuentre en una tabla de integrales. En el caso de una integral  $\int f(x)q(x) dx$ , cuyo integrando sea un producto poco familiar de dos funciones, una de las cuales se pueda derivar con facilidad y la otra integrar con facilidad, entonces es adecuado intentar una integración por partes.

Más allá de estos dos métodos generales, el capítulo se refiere a varios métodos *especiales*. En el caso de una integral que obviamente sea trigonométrica,  $\int \text{trig}(x) dx$ , los sencillos métodos de separación de la sección 9.3 pueden tener éxito. Recuerde que dispone de las fórmulas de reducción [como la ecuación (5) y los problemas 45 y 46 de la sección 9.4] para integrar una potencia entera de una sola función trigonométrica.

Cualquier integral de una función racional (es decir, una integral de la forma  $\int (p(x)/q(x)) dx$ , donde el integrando es un cociente de polinomios) se puede evaluar mediante el método de fracciones parciales (sección 9.5). Si el grado del numerador no es menor que el del denominador (es decir, si la función racional no es propia), utilice primero la división para expresarlo como la suma de un polinomio (que se puede integrar fácilmente) y una fracción racional adecuada. Después, descomponga esta última en fracciones parciales. Las fracciones parciales correspondientes a factores lineales se integran fácilmente, mientras que las correspondientes a factores cuadráticos irreducibles se pueden integrar al completar el cuadrado y hacer una sustitución trigonométrica en caso necesario. Como explicamos en la sección 9.7, las integrales trigonométricas resultantes siempre se pueden evaluar.

En el caso de una integral con la expresión  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ , complete primero el cuadrado (sección 9.7) y después racionalice la integral haciendo una sustitución trigonométrica adecuada (sección 9.6). Esto le dará una integral trigonométrica.

En los problemas diversos siguientes presentamos algunas sustituciones especiales adicionales. De ellas destaca la sustitución

$$u = \tan \frac{\theta}{2},$$

que transforma la integral  $\int R(\text{sen } \theta, \text{cos } \theta) d\theta$  de una función racional de  $\text{sen } \theta$  y  $\text{cos } \theta$  en una integral de una función racional de  $u$ . La última integral se puede evaluar entonces mediante el método de fracciones parciales.

Un último comentario: los sistemas de álgebra computacional se utilizan cada vez más para evaluar integrales como las estudiadas en este capítulo. Sin embargo, el hecho de disponer de dichos sistemas no es una panacea. Por ejemplo, es probable que tales sistemas de cómputo tengan problemas con la integral

$$\int (1 + \ln x) \sqrt{1 + (x \ln x)^2} dx.$$

Pero también es probable que usted observe que la sustitución

$$u = x \ln x, \quad du = (1 + \ln x) dx$$

transforma esta integral en la integral  $\int \sqrt{1 + u^2} du$ , que se puede resolver como una integral trigonométrica (y se encuentra en cualquier tabla de integrales). Así, el factor humano sigue siendo (afortunadamente) esencial.

## Capítulo 9 Problemas diversos

Evalúe las integrales de los problemas 1 a 100.

1.  $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$  [Sugerencia: sea  $x = u^2$ .]

2.  $\int \frac{\sec^2 t}{1 + \tan t} dt$

4.  $\int \frac{\csc x \cot x}{1 + \csc^2 x} dx$

6.  $\int \csc^4 x dx$

8.  $\int x^2 \cos^2 x dx$

10.  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$

12.  $\int (\cos x) \sqrt{4 - \sin^2 x} dx$

14.  $\int \sqrt{x^2 + x + 1} dx$

16.  $\int \frac{x^4 + 1}{x^2 + 2} dx$

18.  $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$  [Sugerencia: sea  $x = u^2$ .]

19.  $\int \frac{\cos x}{\sqrt{4 - \sin^2 x}} dx$

21.  $\int \frac{\tan x}{\ln(\cos x)} dx$

23.  $\int \ln(1+x) dx$

25.  $\int \sqrt{x^2 + 9} dx$

27.  $\int \sqrt{2x - x^2} dx$

29.  $\int \frac{x^4}{x^2 - 2} dx$

3.  $\int \sin x \sec x dx$

5.  $\int \frac{\tan \theta}{\cos^2 \theta} d\theta$

7.  $\int x \tan^2 x dx$

9.  $\int x^5 \sqrt{2 - x^3} dx$

11.  $\int \frac{x^2}{\sqrt{25 + x^2}} dx$

13.  $\int \frac{1}{x^2 - x + 1} dx$

15.  $\int \frac{5x + 31}{3x^2 - 4x + 11} dx$

17.  $\int \sqrt{x^4 + x^7} dx$

20.  $\int \frac{\cos 2x}{\cos x} dx$

22.  $\int \frac{x^7}{\sqrt{1 - x^4}} dx$

24.  $\int x \sec^{-1} x dx$

26.  $\int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} dx$

28.  $\int \frac{4x - 2}{x^3 - x} dx$

30.  $\int \frac{\sec x \tan x}{\sec x + \sec^2 x} dx$

31.  $\int \frac{x}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx$

32.  $\int \frac{x^{1/3}}{x^{1/2} + x^{1/4}} dx$  [Sugerencia: sea  $x = u^{12}$ .]

33.  $\int \frac{1}{1 + \cos 2\theta} d\theta$

35.  $\int \sec^3 x \tan^3 x dx$

37.  $\int x(\ln x)^3 dx$

39.  $\int e^x \sqrt{1 + e^{2x}} dx$

41.  $\int \frac{1}{x^3 \sqrt{x^2 - 9}} dx$

43.  $\int \frac{4x^2 + x + 1}{4x^3 + x} dx$

45.  $\int \tan^2 x \sec x dx$

47.  $\int \frac{x^4 + 2x + 2}{x^5 + x^4} dx$

49.  $\int \frac{3x^5 - x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 2x + 1}{(x^3 - 1)^2} dx$

50.  $\int \frac{x}{x^4 + 4x^2 + 8} dx$

52.  $\int \frac{(1 + x^{2/3})^{3/2}}{x^{1/3}} dx$  [Sugerencia: sea  $x = u^3$ .]

53.  $\int \frac{(\arcsen x)^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

54.  $\int \frac{1}{x^{3/2}(1 + x^{1/3})} dx$  [Sugerencia: sea  $x = u^6$ .]

55.  $\int \tan^3 z dz$

57.  $\int \frac{xe^{x^2}}{1 + e^{2x^2}} dx$

34.  $\int \frac{\sec x}{\tan x} dx$

36.  $\int x^2 \tan^{-1} x dx$

38.  $\int \frac{1}{x\sqrt{1 + x^2}} dx$

40.  $\int \frac{x}{\sqrt{4x - x^2}} dx$

42.  $\int \frac{x}{(7x + 1)^{17}} dx$

44.  $\int \frac{4x^3 - x + 1}{x^3 + 1} dx$

46.  $\int \frac{x^2 + 2x + 2}{(x + 1)^3} dx$

48.  $\int \frac{8x^2 - 4x + 7}{(x^2 + 1)(4x + 1)} dx$

51.  $\int (\ln x)^6 dx$

56.  $\int \sin^2 \omega \cos^4 \omega d\omega$

58.  $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx$

$$59. \int x^3 e^{-x^2} dx$$

$$60. \int \operatorname{sen} \sqrt{x} dx$$

$$61. \int \frac{\operatorname{arcsen} x}{x^2} dx$$

$$62. \int \sqrt{x^2 - 9} dx$$

$$63. \int x^2 \sqrt{1 - x^2} dx$$

$$64. \int x \sqrt{2x - x^2} dx$$

$$65. \int \frac{x - 2}{4x^2 + 4x + 1} dx$$

$$66. \int \frac{2x^2 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} dx$$

$$67. \int \frac{e^{2x}}{e^{2x} - 1} dx$$

$$68. \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 2} dx$$

$$69. \int \frac{2x^3 + 3x^2 + 4}{(x + 1)^4} dx$$

$$70. \int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 2 \tan x + 2} dx$$

$$71. \int \frac{x^3 + x^2 + 2x + 1}{x^4 + 2x^2 + 1} dx$$

$$72. \int \operatorname{sen} x \cos 3x dx$$

$$73. \int x^5 \sqrt{x^3 - 1} dx$$

$$74. \int \ln(x^2 + 2x) dx$$

$$75. \int \frac{\sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}{\sec x} dx$$

$$76. \int \frac{1}{x^{2/3} (1 + x^{2/3})} dx$$

$$77. \int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 2x} dx$$

$$78. \int \sqrt{1 + \cos t} dt$$

$$79. \int \sqrt{1 + \operatorname{sen} t} dt$$

$$80. \int \frac{\sec^2 t}{1 - \tan^2 t} dt$$

$$81. \int \ln(x^2 + x + 1) dx$$

$$82. \int e^x \operatorname{sen}^{-1}(e^x) dx$$

$$83. \int \frac{\arctan x}{x^2} dx$$

$$84. \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 25}} dx$$

$$85. \int \frac{x^3}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$86. \int \frac{1}{x \sqrt{6x - x^2}} dx$$

$$87. \int \frac{3x + 2}{(x^2 + 4)^{3/2}} dx$$

$$88. \int x^{3/2} \ln x dx$$

$$89. \int \frac{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}}{\sec x \csc x} dx$$

$$90. \int \frac{e^{\sqrt{\operatorname{sen} x}}}{(\sec x) \sqrt{\operatorname{sen} x}} dx$$

$$91. \int x e^x \operatorname{sen} x dx$$

$$92. \int x^2 e^{x^{3/2}} dx$$

$$93. \int \frac{\arctan x}{(x - 1)^3} dx$$

$$94. \int \ln(1 + \sqrt{x}) dx$$

$$95. \int \frac{2x + 3}{\sqrt{3 + 6x - 9x^2}} dx$$

$$96. \int \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}} dx$$

$$97. \int \frac{x^4}{(x - 1)^2} dx \quad [\text{Sugerencia: sea } u = x - 1.]$$

$$98. \int x^{3/2} \tan^{-1} \sqrt{x} dx$$

$$99. \int \operatorname{arcsec} \sqrt{x} dx$$

$$100. \int x \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 + x^2}} dx$$

101. Determine el área de la superficie generada al girar la curva  $y = \cosh x$ ,  $0 \leq x \leq 1$  en torno del eje  $x$ .

102. Determine la longitud de la curva  $y = e^{-x}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .

103. (a) Determine el área  $A_t$  de la superficie generada al girar la curva  $y = e^{-x}$ ,  $0 \leq x \leq t$ , en torno del eje  $x$ . (b) Determine  $\lim_{t \rightarrow \infty} A_t$ .

104. (a) Determine el área  $A_t$  de la superficie generada al girar la curva  $y = 1/x$ ,  $1 \leq x \leq t$  en torno del eje  $x$ . (b) Determine  $\lim_{t \rightarrow \infty} A_t$ .

105. Determine el área de la superficie generada al girar la curva  $y = \sqrt{x^2 - 1}$ ,  $1 \leq x \leq 2$  en torno del eje  $x$ .

106. (a) Deduzca la fórmula de reducción

$$\int x^m (\ln x)^n dx$$

$$= \frac{1}{m+1} x^{m+1} (\ln x)^n - \frac{n}{m+1} \int x^m (\ln x)^{n-1} dx.$$

(b) Evalúe  $\int_1^e x^3 (\ln x)^3 dx$ .

107. Deduzca la fórmula de reducción

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx = -\frac{1}{m+n} \operatorname{sen}^{m-1} x \cos^{n+1} x$$

$$+ \frac{m-1}{m+n} \int \operatorname{sen}^{m-2} x \cos^n x dx.$$

108. Utilice las fórmulas de reducción del problema 107 y del problema 46 de la sección 9.4 para evaluar

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6 x \cos^5 x dx.$$

109. Determine el área acotada por la curva  $y^2 = x^5(2-x)$ ,  $0 \leq x \leq 2$ . [Sugerencia: sustituya  $x = 2 \operatorname{sen}^2 \theta$ ; utilice entonces el resultado del problema 50 de la sección 9.4.]

110. Muestre que

$$0 < \int_0^1 \frac{t^4(1-t)^4}{1+t^2} dt$$

y que

$$\int_0^1 \frac{t^4(1-t)^4}{1+t^2} dt = \frac{22}{7} - \pi.$$

111. Evalúe  $\int_0^1 t^4(1-t)^4 dt$ ; aplique después los resultados del problema 110 para concluir que

$$\frac{22}{7} - \frac{1}{630} < \pi < \frac{22}{7} - \frac{1}{1260}.$$

Así,  $3.1412 < \pi < 3.1421$ .

112. Determine la longitud de la curva  $y = \frac{4}{3}x^{5/4}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .

113. Determine la longitud de la curva  $y = \frac{4}{3}x^{3/4}$ ,  $1 \leq x \leq 4$ .

114. Un tanque de agua, inicialmente vacío, tiene la forma de un cono con eje vertical. Su vértice está en la parte inferior; el cono tiene una profundidad de 9 pies y tiene un radio superior de 4.5 pies. A partir del instante  $t = 0$ , se vierte agua al tanque a razón de 50 pies cúbicos por minuto. Mientras tanto, el agua sale por un agujero en la parte inferior a razón de  $10\sqrt{y}$  pies cúbicos por minuto, donde  $y$  es la profundidad del agua en el tanque. (Esto es consistente con la ley de Torricelli.) ¿Cuánto tiempo tarda en llenarse el tanque?

115. (a) Evalúe  $\int \frac{1}{1 + e^x + e^{-x}} dx$ .

(b) Explique por qué su sustitución en la parte (a) basta para integrar cualquier función racional de  $e^x$ .

116. (a) La ecuación  $x^3 + x + 1 = 0$  tiene una raíz real  $r$ . Utilice el método de Newton para determinarla, con una precisión mínima de dos cifras decimales. (b) Utilice la división de polinomios para determinar (de manera aproximada) el factor cuadrático irreducible de  $x^3 + x + 1$ . (c) Utilice la factorización obtenida en la parte (b) para evaluar (de manera aproximada)

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3 + x + 1} dx.$$

117. Evalúe  $\int \frac{1}{1 + e^x} dx$ .

118. La integral

$$\int \frac{1 + 2x^2}{x^5(1 + x^2)^3} dx = \int \frac{x + 2x^3}{(x^4 + x^2)^3} dx$$

necesitaría que usted resolviese 11 ecuaciones con 11 incógnitas si utilizara el método de fracciones parciales para evaluarla. Utilice la sustitución  $u = x^4 + x^2$  para evaluarla de manera más sencilla.

119. Evalúe  $\int \sqrt{\tan \theta} d\theta$ . [Sugerencia: sustituya primero

$u = \tan \theta$ . Después sustituya  $u = x^2$ . Por último, utilice el método de fracciones parciales; véase el problema 42 de la sección 9.7.]

120. Demuestre que si  $p(x)$  es un polinomio, entonces la sustitución  $u^n = (ax + b)/(cx + d)$  transforma la integral

$$\int p(x) \left( \frac{ax + b}{cx + d} \right)^{1/n} dx$$

en la integral de una función racional de  $u$ . (La sustitución indicada es una *sustitución de racionalización*; su nombre proviene del hecho de que convierte el integrando en una función racional de  $u$ .)

En los problemas 121 a 129, utilice la sustitución de racionalización indicada en el problema 120.

121.  $\int x^3 \sqrt{3x - 2} dx$

122.  $\int x^3 \sqrt[3]{x^2 + 1} dx$

123.  $\int \frac{x^3}{(x^2 - 1)^{4/3}} dx$

124.  $\int x^2(x - 1)^{3/2} dx$

125.  $\int \frac{x^5}{\sqrt{x^3 + 1}} dx$

126.  $\int x^7 \sqrt[3]{x^4 + 1} dx$

127.  $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$

128.  $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

129.  $\int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x} dx$

130. Sustituya  $x = u^2$  para determinar  $\int \sqrt{1 + \sqrt{x}} dx$ .

131. Sustituya  $u^2 = 1 + e^{2x}$  para determinar  $\int \sqrt{1 + e^{2x}} dx$ .

132. Determine el área  $A$  de la superficie obtenida al girar la curva  $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ ,  $3 \leq x \leq 8$ , en torno del eje  $x$ . [Sugerencia: sustituya  $x = u^2$  en la integral del área de la superficie. Nota:  $A \approx 732.39$ .]

133. Determine el área acotada por un ciclo de la curva  $y^2 = x^2(1 - x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .

134. Determine el área acotada por un ciclo de la curva

$$y^2 = x^2 \left( \frac{1-x}{1+x} \right), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

## INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS MÁS GENERALES

Como último recurso, cualquier integral trigonométrica se puede transformar en una integral

$$\int R(\sin \theta, \cos \theta) d\theta \quad (1)$$

de senos y cosenos. Si el integrando de la ecuación (1) es un cociente de polinomios en las variables  $\sin \theta$  y  $\cos \theta$ , entonces la sustitución especial

$$u = \tan \frac{\theta}{2} \quad (2)$$

basta para su evaluación.

Para efectuar la sustitución indicada en la ecuación (2), debemos expresar  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$  y  $d\theta$  en términos de  $u$  y  $du$ . Observe primero que

$$\theta = 2 \tan^{-1} u, \quad \text{de modo que} \quad d\theta = \frac{2 du}{1 + u^2}. \quad (3)$$

Vemos del triángulo de la figura 9.PD.1 que

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}}, \quad \cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}.$$

Por tanto,

$$\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{2u}{1 + u^2}, \quad (4)$$

$$\cos \theta = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}. \quad (5)$$

Estas sustituciones convertirán la integral de la ecuación (1) en una integral de una función racional de  $u$ , la cual se puede evaluar mediante los métodos de la sección 9.5.

### EJEMPLO 1

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{5 + 3 \cos \theta} d\theta &= \int \frac{1}{5 + 3 \cdot \frac{1 - u^2}{1 + u^2}} \cdot \frac{2 du}{1 + u^2} \\ &= \int \frac{2}{8 + 2u^2} du = \int \frac{1}{4 + u^2} du \\ &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{u}{2} + C = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{1}{2} \tan \frac{\theta}{2} \right) + C. \end{aligned}$$

En los problemas 135 a 142, utilice la sustitución de racionalización dada en las ecuaciones (2) a (5).

$$135. \int \frac{1}{1 + \cos \theta} d\theta$$

$$136. \int \frac{1}{5 + 4 \cos \theta} d\theta$$

$$137. \int \frac{1}{1 + \sin \theta} d\theta$$

$$138. \int \frac{1}{(1 - \cos \theta)^2} d\theta$$

$$139. \int \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta} d\theta$$

$$140. \int \frac{1}{2 + \sin \phi + \cos \phi} d\phi$$

$$141. \int \frac{\sin \theta}{2 + \cos \theta} d\theta$$

$$142. \int \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} d\theta$$

143. (a) Sustituya  $u = \tan(\theta/2)$  para mostrar que

$$\int \sec \theta d\theta = \ln \left| \frac{1 + \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan \frac{\theta}{2}} \right| + C.$$

(b) Utilice la identidad trigonométrica

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$$

para deducir nuestra fórmula anterior

$$\int \sec \theta d\theta = \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C$$

de la solución de la parte (a).

144. (a) Utilice el método del problema 143 para mostrar que

$$\int \csc \theta d\theta = \ln \left| \tan \frac{\theta}{2} \right| + C.$$

(b) Emplee identidades trigonométricas para obtener la fórmula

$$\int \csc \theta d\theta = \ln |\csc \theta - \cot \theta| + C$$

de la parte (a).

# Apéndices

## Apéndice A Repaso de trigonometría

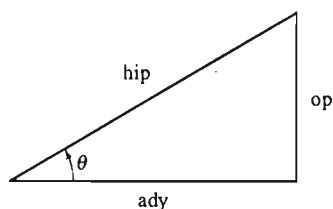


Figura A.1 Los lados y ángulo de un triángulo rectángulo

En trigonometría elemental, las seis funciones trigonométricas básicas de un ángulo agudo  $\theta$ , en un triángulo rectángulo se definen como razones entre pares de lados del triángulo. Como en la figura A.1 donde “ady” representa “adyacente”, “op” “opuesto” e “hip” “hipotenusa”.

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\text{ady}}{\text{hip}} & \text{sen } \theta &= \frac{\text{op}}{\text{hip}} & \tan \theta &= \frac{\text{op}}{\text{ady}} \\ \sec \theta &= \frac{\text{hip}}{\text{ady}} & \text{csc } \theta &= \frac{\text{hip}}{\text{op}} & \cot \theta &= \frac{\text{ady}}{\text{op}} \end{aligned} \quad (1)$$

Generalizamos estas definiciones para ángulos *dirigidos* de tamaño arbitrario de la siguiente forma. Supongamos que el lado inicial del ángulo  $\theta$  es el eje  $x$  positivo, de modo que su vértice esté en el origen. El ángulo es **dirigido** si se especifica una dirección de rotación de su lado inicial a su lado terminal.  $\theta$  es un **ángulo positivo** si esta rotación es en sentido contrario al de las manecillas del reloj y un **ángulo negativo** si es en el sentido de las manecillas del reloj.

Sea  $P(x, y)$  el punto donde el lado terminal de  $\theta$  interseca al círculo *unitario*  $x^2 + y^2 = 1$ . Entonces definimos

$$\begin{aligned} \cos \theta &= x, & \text{sen } \theta &= y, & \tan \theta &= \frac{y}{x}, \\ \sec \theta &= \frac{1}{x}, & \text{csc } \theta &= \frac{1}{y}, & \cot \theta &= \frac{x}{y}. \end{aligned} \quad (2)$$

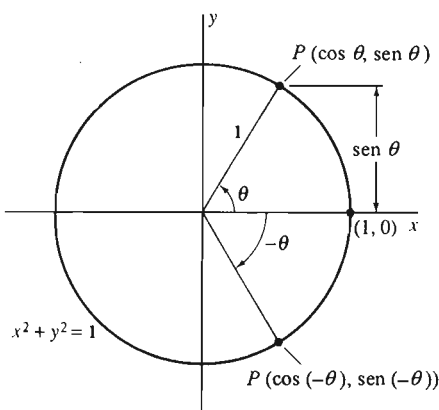


Figura A.2 Uso del círculo unitario para definir las funciones trigonométricas

Suponemos que  $x \neq 0$  en el caso de  $\tan \theta$  y  $\sec \theta$  y que  $y \neq 0$  en el caso de  $\cot \theta$  y  $\csc \theta$ . Si el ángulo  $\theta$  es positivo y agudo, entonces la figura A.2 muestra que las definiciones de las ecuaciones (2) coinciden con las definiciones del triángulo rectángulo de las ecuaciones (1) en términos de las coordenadas de  $P$ . Un vistazo a la figura muestra también cuáles de estas funciones son positivas para ángulos en cada uno de los cuatro cuadrantes. La figura A.3 resume esta información.

Trabajaremos ahora principalmente con las dos funciones trigonométricas más importantes, el seno y el coseno. De las ecuaciones (2) vemos inmediatamente que las otras cuatro funciones trigonométricas se definen en términos de  $\text{sen } \theta$  y  $\text{cos } \theta$  por

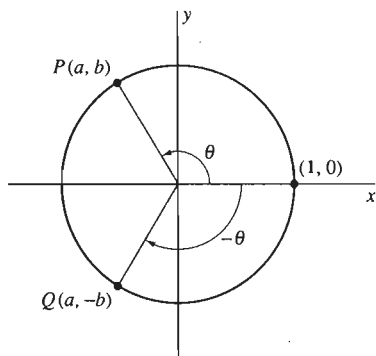
$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta}, & \sec \theta &= \frac{1}{\text{cos } \theta}, \\ \cot \theta &= \frac{\text{cos } \theta}{\text{sen } \theta}, & \csc \theta &= \frac{1}{\text{sen } \theta}. \end{aligned} \quad (3)$$



Seno	Todas
Cosecante	
Tangente	Coseno
Cotangente	Secante

Positivas en los cuadrantes indicados

**Figura A.3** Los signos de las funciones trigonométricas



**Figura A.4** El efecto de reemplazar  $\theta$  por  $-\theta$  en las funciones seno y coseno

Ahora, comparemos los ángulos  $\theta$  y  $-\theta$  de la figura A.4. Vemos que

$$\cos(-\theta) = \cos \theta \quad \text{y} \quad \sin(-\theta) = -\sin \theta. \quad (4)$$

Como  $x = \cos \theta$  y  $y = \sin \theta$  en las ecuaciones (2), la ecuación  $x^2 + y^2 = 1$  del círculo unitario se traduce inmediatamente en la **identidad fundamental de la trigonometría**,

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1. \quad (5)$$

Al dividir cada término de esta identidad fundamental entre  $\cos^2 \theta$  obtenemos la identidad

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta. \quad (5')$$

De manera análoga, al dividir cada término en la ecuación (5) entre  $\sin^2 \theta$  obtenemos la identidad

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta. \quad (5'')$$

(Véase el problema 9 de este apéndice.)

En los problemas 15 y 16 mostramos la forma de obtener las fórmulas para la suma

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \quad (6)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \quad (7)$$

Con  $\alpha = \theta = \beta$  en las ecuaciones (6) y (7), obtenemos las **fórmulas del ángulo doble**

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta, \quad (8)$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad (9)$$

$$= 2 \cos^2 \theta - 1 \quad (9a)$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \theta, \quad (9b)$$

donde las ecuaciones (9a) y (9b) se obtienen de la ecuación (9) mediante la identidad fundamental de la ecuación (5).

Si despejamos  $\cos^2 \theta$  en la ecuación (9a) y  $\sin^2 \theta$  en la ecuación (9b), obtenemos las fórmulas del ángulo mitad

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta), \quad (10)$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta). \quad (11)$$

Las ecuaciones (10) y (11) son especialmente importantes en el cálculo integral.

## MEDIDA EN RADIANES

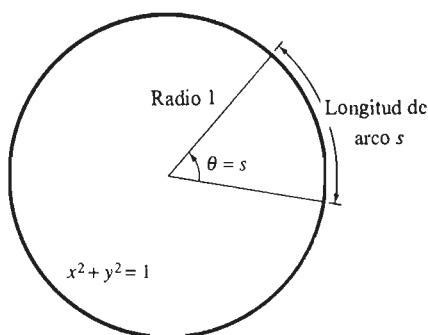
En las matemáticas elementales, los ángulos se miden con frecuencia en *grados*, donde  $360^\circ$  corresponden a una vuelta completa. En cálculo es más conveniente (y a menudo esencial) medir ángulos en *radianes*. La **medida en radianes** de un ángulo es la longitud del arco que subtiende en (es decir, el arco que forma en) el círculo unitario cuando el vértice del ángulo está en el centro del círculo (figura A.5).

Recordemos que el área  $A$  y la circunferencia  $C$  de un círculo de radio  $r$  están dadas por las fórmulas

$$A = \pi r^2 \quad \text{y} \quad C = 2\pi r,$$

donde el número irracional  $\pi$  es aproximadamente 3.14159. Como la circunferencia del círculo unitario es  $2\pi$  y su ángulo central es  $360^\circ$ , esto implica que

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ; \quad 180^\circ = \pi \text{ rad} \approx 3.14159 \text{ rad}. \quad (12)$$



**Figura A.5** La medida de un ángulo en radianes

Radianes	Grados
0	0
$\pi/6$	30
$\pi/4$	45
$\pi/3$	60
$\pi/2$	90
$2\pi/3$	120
$3\pi/4$	135
$5\pi/6$	150
$\pi$	180
$3\pi/2$	270
$2\pi$	360
$4\pi$	720

Figura A.6 Algunas conversiones entre radianes y grados

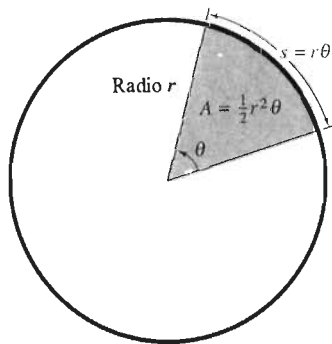


Figura A.7 El área de un sector y la longitud de arco de un círculo

Mediante la ecuación (12), podemos realizar fácilmente las conversiones entre radianes y grados, en ambos sentidos:

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 44.8'', \quad (12a)$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0.01745 \text{ rad}. \quad (12b)$$

La figura A.6 muestra las conversiones entre radianes y grados para algunos ángulos comunes.

Ahora consideremos un ángulo de  $\theta$  radianes en el centro de un círculo de radio  $r$  (figura A.7). Sean  $s$  la longitud del arco subtendido por  $\theta$  y  $A$  el área del sector del círculo acotado por este ángulo. Entonces con las proporciones

$$\frac{s}{2\pi r} = \frac{A}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi}$$

se obtienen las fórmulas

$$s = r\theta \quad (\theta \text{ en radianes}) \quad (13)$$

$$y \quad A = \frac{1}{2} r^2 \theta \quad (\theta \text{ en radianes}) \quad (14)$$

Las definiciones en las ecuaciones (2) se refieren a las funciones trigonométricas de *ángulos* en vez de funciones trigonométricas de *números*. Supongamos que  $t$  es un número real. Entonces el número  $\text{sen } t$  es, *por definición*, el seno de un ángulo de  $t$  radianes, recordando que un ángulo positivo está dirigido en el sentido contrario al de las manecillas del reloj a partir del eje  $x$  positivo, mientras que un ángulo negativo está dirigido en el sentido de las manecillas del reloj. Brevemente,  $\text{sen } t$  es el seno de un ángulo de  $t$  radianes. Las otras funciones trigonométricas del número  $t$  tienen definiciones similares. Por tanto, cuando escribamos  $\text{sen } t$ ,  $\text{cos } t$ , etcétera, con  $t$  un número real, *siempre* será en referencia a un ángulo de  $t$  radianes.

Cuando necesitemos hacer referencia al seno de un ángulo de  $t$  grados, en lo sucesivo escribiremos  $\text{sen } t^\circ$ . El punto es que  $\text{sen } t$  y  $\text{sen } t^\circ$  son funciones, un poco diferentes, de la variable  $t$ . Por ejemplo, obtendríamos

$$\text{sen } 1^\circ \approx 0.0175 \text{ y } \text{sen } 30^\circ = 0.5000$$

en una calculadora en modo de grados. Pero en modo de radianes, una calculadora daría

$$\text{sen } 1 \approx 0.8415 \text{ y } \text{sen } 30 \approx -0.9880.$$

Las relaciones entre las funciones  $\text{sen } t$  y  $\text{sen } t^\circ$  es

$$\text{sen } t^\circ = \text{sen} \left( \frac{\pi t}{180} \right) \quad (15)$$

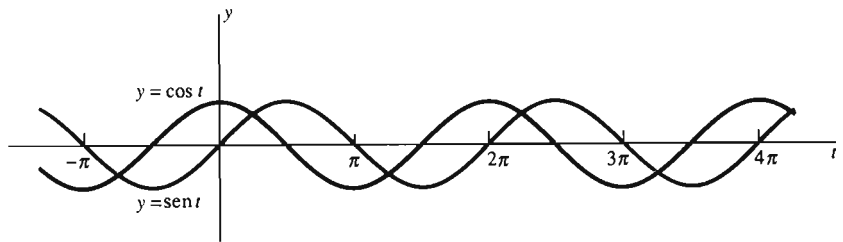
Esta distinción se extiende también a los lenguajes de programación. En FORTRAN, la función SIN es la función seno en radianes, y deberemos escribir  $\text{sen } t^\circ$  en la forma  $\text{SIND}(T)$ . En BASIC se debe escribir  $\text{SIN}(\text{PI} * T / 180)$  para obtener el valor correcto del seno de un ángulo de  $t$  grados.

Un ángulo de  $2\pi$  radianes corresponde a una vuelta alrededor del círculo unitario. Esto implica que las funciones seno y coseno tienen **período**  $2\pi$ , lo que significa que

$$\begin{aligned} \text{sen}(t + 2\pi) &= \text{sen } t, \\ \text{cos}(t + 2\pi) &= \text{cos } t. \end{aligned} \quad (16)$$

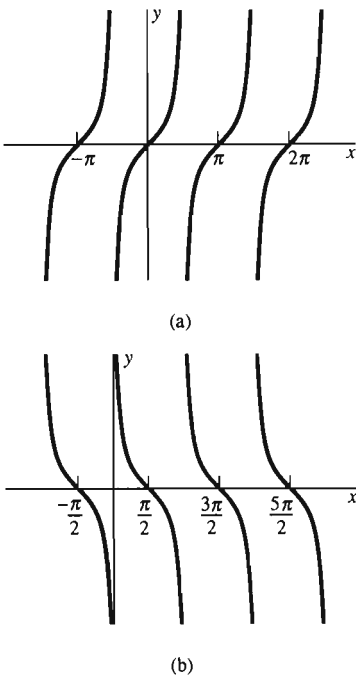
Las ecuaciones (16) implican que

**Figura A.8** Periodicidad de las funciones seno y coseno

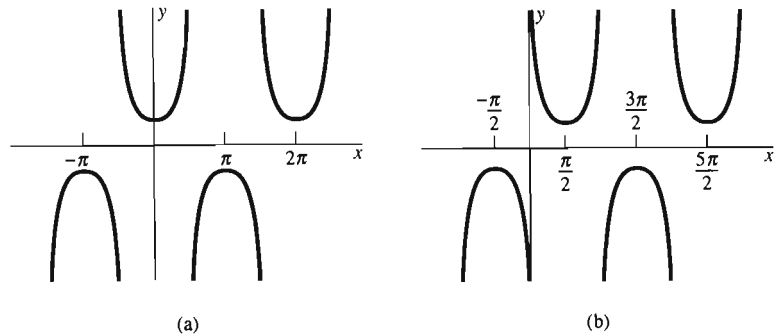


$$\text{sen}(t + 2n\pi) = \text{sen } t \quad \text{y} \quad \text{cos}(t + 2n\pi) = \text{cos } t \quad (17)$$

para cualquier entero  $n$ . Esta periodicidad de las funciones seno y coseno es evidente en sus gráficas (figura A.8). De las ecuaciones (3), las otras cuatro funciones trigonométricas también deben ser periódicas, como muestran sus gráficas en las figuras A.9 y A.10.



**Figura A.9** Las gráficas de (a) la función tangente y (b) la función cotangente



**Figura A.10** Las gráficas de (a) la función secante y (b) la función cosecante

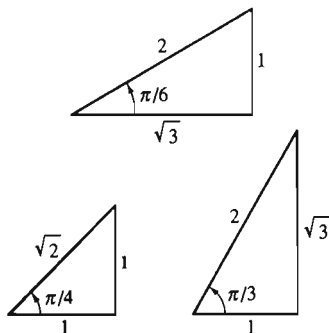
Vemos de las ecuaciones (2) que

$$\text{sen } 0 = 0, \quad \text{sen } \frac{\pi}{2} = 1, \quad \text{sen } \pi = 0, \quad (18)$$

$$\text{cos } 0 = 1, \quad \text{cos } \frac{\pi}{2} = 0, \quad \text{cos } \pi = -1.$$

Las funciones trigonométricas de  $\pi/6$ ,  $\pi/4$  y  $\pi/3$  (los equivalentes en radianes de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $60^\circ$ , respectivamente) son fáciles de leer a partir de los triángulos bien conocidos de la figura A.11. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \text{sen } \frac{\pi}{6} &= \text{cos } \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{1}}{2}, \\ \text{sen } \frac{\pi}{4} &= \text{cos } \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{y} \\ \text{sen } \frac{\pi}{3} &= \text{cos } \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned} \quad (19)$$



**Figura A.11** Triángulos rectángulos familiares

Para determinar los valores de las funciones trigonométricas para ángulos mayores que  $\pi/2$ , podemos utilizar su periodicidad y las identidades

$$\begin{aligned} \text{sen}(\pi \pm \theta) &= \mp \text{sen } \theta, \\ \text{cos}(\pi \pm \theta) &= -\text{cos } \theta \quad \text{y} \\ \text{tan}(\pi \pm \theta) &= \pm \text{tan } \theta \end{aligned} \quad (20)$$

(Problema 14) así como identidades similares para las funciones cosecante, secante y cotangente.

### EJEMPLO 1

$$\operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} = \operatorname{sen} \left( \pi + \frac{\pi}{4} \right) = -\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{cos} \frac{2\pi}{3} = \operatorname{cos} \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\operatorname{cos} \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tan} \frac{3\pi}{4} = \operatorname{tan} \left( \pi - \frac{\pi}{4} \right) = -\operatorname{tan} \frac{\pi}{4} = -1;$$

$$\operatorname{sen} \frac{7\pi}{6} = \operatorname{sen} \left( \pi + \frac{\pi}{6} \right) = -\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{cos} \frac{5\pi}{3} = \operatorname{cos} \left( 2\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \operatorname{cos} \left( -\frac{\pi}{3} \right) = \operatorname{cos} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2};$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \frac{17\pi}{6} &= \operatorname{sen} \left( 2\pi + \frac{5\pi}{6} \right) = \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} \\ &= \operatorname{sen} \left( \pi - \frac{\pi}{6} \right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**EJEMPLO 2** Determine las soluciones (si existen) de la ecuación

$$\operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{cos}^2 x + 2 = 0$$

en el intervalo  $[0, \pi]$ .

**Solución** Utilizamos la identidad fundamental de la ecuación (5) y sustituimos  $\operatorname{cos}^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$  en las ecuaciones dadas para obtener

$$\operatorname{sen}^2 x - 3(1 - \operatorname{sen}^2 x) + 2 = 0;$$

$$4 \operatorname{sen}^2 x - 1 = 0;$$

$$\operatorname{sen} x = \pm \frac{1}{2}.$$

Como  $x \geq 0$  para  $x$  en  $[0, \pi]$ ,  $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$  es imposible. Pero  $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$  para  $x = \pi/6$  y para  $x = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$ . Éstas son las soluciones de la ecuación dada en  $[0, \pi]$ .

## Apéndice A Problemas

LAS RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DEL APÉNDICE APARECEN AL FINAL DE LAS RESPUESTAS PARA LOS PROBLEMAS CON NUMERACIÓN IMPAR.

Expresar en radianes los ángulos en los problemas 1 a 5.

1.  $40^\circ$    2.  $-270^\circ$    3.  $315^\circ$    4.  $210^\circ$    5.  $-150^\circ$

En los problemas 6 a 10, expresar en grados los ángulos dados en radianes.

6.  $\frac{\pi}{10}$    7.  $\frac{2\pi}{5}$    8.  $3\pi$    9.  $\frac{15\pi}{4}$    10.  $\frac{23\pi}{60}$

En los problemas 11 a 14, evaluar las seis funciones trigonométricas de  $x$  en los valores dados.

11.  $x = -\frac{\pi}{3}$    12.  $x = \frac{3\pi}{4}$

13.  $x = \frac{7\pi}{6}$    14.  $x = \frac{5\pi}{3}$

Determine todas las soluciones,  $x$ , de cada ecuación en los problemas 15 a 23.

15.  $\text{sen } x = 0$       16.  $\text{sen } x = 1$       17.  $\text{sen } x = -1$

18.  $\text{cos } x = 0$       19.  $\text{cos } x = 1$       20.  $\text{cos } x = -1$

21.  $\text{tan } x = 0$       22.  $\text{tan } x = 1$       23.  $\text{tan } x = -1$

24. Suponga que  $\text{tan } x = \frac{3}{4}$  y que  $\text{sen } x < 0$ . Determine los valores de las otras cinco funciones trigonométricas de  $x$ .

25. Suponga que  $\text{csc } x = -\frac{5}{3}$  y que  $\text{cos } x > 0$ . Determine los valores de las otras cinco funciones trigonométricas de  $x$ .

Deduzca las identidades en los problemas 26 y 27 a partir de la identidad fundamental

$$\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta = 1$$

y de las definiciones de las otras cuatro funciones trigonométricas.

26.  $1 + \text{tan}^2 \theta = \text{sec}^2 \theta$       27.  $1 + \text{cot}^2 \theta = \text{csc}^2 \theta$

28. Deduzca de las fórmulas para el seno y el coseno de una suma la fórmula para la tangente de una suma:

$$\text{tan}(x + y) = \frac{\text{tan } x + \text{tan } y}{1 - \text{tan } x \text{tan } y}$$

En los problemas 29 a 36, utilice el método del ejemplo 1 para determinar los valores indicados.

29.  $\text{sen } \frac{5\pi}{6}$       30.  $\text{cos } \frac{7\pi}{6}$       31.  $\text{sen } \frac{11\pi}{6}$

32.  $\text{cos } \frac{19\pi}{6}$       33.  $\text{sen } \frac{2\pi}{3}$       34.  $\text{cos } \frac{4\pi}{3}$

35.  $\text{sen } \frac{5\pi}{3}$       36.  $\text{cos } \frac{10\pi}{3}$

37. Aplique las fórmulas para las funciones seno, coseno y tangente de una suma (la última aparece en el problema 28) para mostrar que si  $0 < \theta < \pi/2$ , entonces

(a)  $\text{cos}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{sen } \theta$ ;

(b)  $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{cos } \theta$ ;

(c)  $\text{cot}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{tan } \theta$ .

El prefijo *co-* es una abreviatura para el adjetivo *complementario*, que describe a dos ángulos cuya suma es  $\pi/2$ . Por ejemplo,  $\pi/6$  y  $\pi/3$  son ángulos complementarios, de modo que por el inciso (a) se tiene que  $\text{cos } \pi/6 = \text{sen } \pi/3$ .

Suponga que  $0 < \theta < \pi/2$ . Deduzca las identidades en los problemas 38 a 40.

38.  $\text{sen}(\pi \pm \theta) = \mp \text{sen } \theta$

39.  $\text{cos}(\pi \pm \theta) = -\text{cos } \theta$

40.  $\text{tan}(\pi \pm \theta) = \pm \text{tan } \theta$

41. Los puntos  $A(\text{cos } \theta, -\text{sen } \theta)$ ,  $B(1, 0)$ ,  $C(\text{cos } \phi, \text{sen } \phi)$  y  $D(\text{cos}(\theta + \phi), \text{sen}(\theta + \phi))$  se muestran en la figura A.12; todos son puntos en el círculo unitario. Deduzca del hecho de que los segmentos de recta  $AC$  y  $BD$  tienen la misma longitud (ya que subtenden el mismo ángulo  $\theta + \phi$ ) que

$$\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \text{sen } \theta \text{sen } \phi.$$

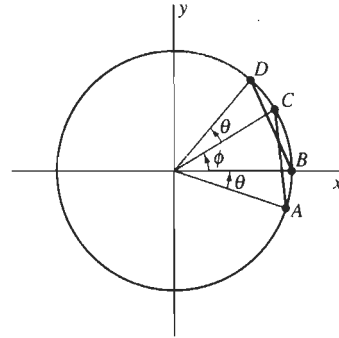


Figura A.12 Deducción de la fórmula para el coseno de una suma (problema 41)

42. (a) Utilice los triángulos de la figura A.13 para deducir que

$$\text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \text{cos } \theta \quad \text{y} \quad \text{cos}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\text{sen } \theta.$$

(b) Utilice los resultados del problema 41 y la parte (a) para deducir la fórmula para el seno de una suma.

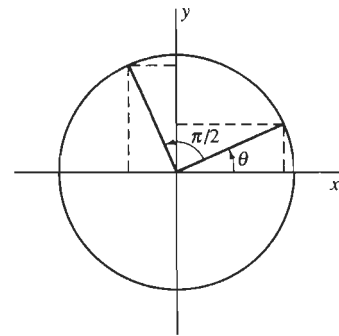


Figura A.13 Deducción para el problema 42

En los problemas 43 a 48, determine todas las soluciones de las ecuaciones dadas que estén en el intervalo  $[0, \pi]$ .

43.  $3\text{sen}^2 x - \text{cos}^2 x = 2$       44.  $\text{sen}^2 x = \text{cos}^2 x$

45.  $2\text{cos}^2 x + 3\text{sen}^2 x = 3$

46.  $2\text{sen}^2 x + \text{cos } x = 2$

47.  $8\text{sen}^2 x \text{cos}^2 x = 1$

48.  $\text{cos } 2\theta - 3\text{cos } \theta = -2$

## Apéndice B

### Demostraciones de las propiedades del límite

Recordemos la definición de límite:

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = L$$

si dado  $\epsilon > 0$  existe un número  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{implica que} \quad |F(x) - L| < \epsilon. \quad (1)$$

Observe que el número  $\epsilon$  se da *primero* y *después* debe determinarse un valor  $\delta > 0$  para establecer la implicación en (1). Para demostrar que  $F(x) \rightarrow L$  cuando  $x \rightarrow a$ , usted debe poder detener a la primera persona que vea y pedirle que elija un número positivo  $\epsilon$  al azar. Después, usted *siempre* debe estar listo para responder con un número positivo  $\delta$ . Este número  $\delta$  debe tener la propiedad de que la implicación (1) sea válida para su número  $\delta$  y el número dado  $\epsilon$ . La *única* restricción en  $x$  es que

$$0 < |x - a| < \delta,$$

como en (1).

Para hacer todo esto, por lo general necesitará dar un método explícito (una receta o fórmula) para producir un valor de  $\delta$  que funcione para cada valor de  $\epsilon$ . Como muestran los ejemplos 1 a 3, el método dependerá de la función particular  $F$  en cuestión, así como de los valores  $a$  y  $L$ .

**EJEMPLO 1** Demuestre que  $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 5$ .

**Solución** Dado  $\epsilon > 0$ , debemos determinar  $\delta > 0$  tal que

$$|(2x - 1) - 5| < \epsilon \quad \text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta.$$

Ahora,

$$|(2x - 1) - 5| = |2x - 6| = 2|x - 3|,$$

de modo que

$$0 < |x - 3| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{implica que} \quad |(2x - 1) - 5| < 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Por tanto, dado  $\epsilon > 0$ , es suficiente elegir  $\delta = \epsilon/2$ . Esto ilustra la observación de que el número pedido  $\delta$  es generalmente una función del número dado  $\epsilon$ .

**EJEMPLO 2** Demuestre que  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 5) = 17$ .

**Solución** Dado  $\epsilon > 0$ , debemos determinar  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - 2| < \delta \quad \text{implica que} \quad |(3x^2 + 5) - 17| < \epsilon.$$

Ahora,

$$|(3x^2 + 5) - 17| = |3x^2 - 12| = 3 \cdot |x + 2| \cdot |x - 2|.$$

Por tanto, nuestro problema es mostrar que  $|x + 2| \cdot |x - 2|$  puede hacerse tan pequeño como queramos haciendo  $x - 2$  suficientemente pequeño. La idea es que  $|x + 2|$  no puede ser demasiado grande si  $|x - 2|$  es bastante pequeño. Por ejemplo, si  $|x - 2| < 1$ , entonces

$$|x + 2| = |(x - 2) + 4| \leq |x - 2| + 4 < 5.$$

Por tanto,

$$0 < |x - 2| < 1 \quad \text{implica que} \quad |(3x^2 + 5) - 17| < 15 \cdot |x - 2|.$$

En consecuencia, elegimos  $\delta$  como el mínimo de los dos números 1 y  $\epsilon/15$ .  
Entonces

$$0 < |x - 2| < \delta \text{ implica que } |(3x^2 + 5) - 17| < 15 \cdot \frac{\epsilon}{15} = \epsilon,$$

como se quería.

**EJEMPLO 3** Demuestre que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a} \quad \text{si } a \neq 0.$$

**Solución** Para simplificar nuestra exposición, consideraremos únicamente el caso  $a > 0$  (el caso  $a < 0$  es similar).

Supongamos que  $\epsilon > 0$  está dado. Debemos determinar un número  $\delta$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \text{ implica que } \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| < \epsilon.$$

Ahora,

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{a - x}{ax} \right| = \frac{|x - a|}{a|x|}.$$

La idea es que  $1/|x|$  no puede ser muy grande si  $|x - a|$  es bastante pequeño. Por ejemplo, si  $|x - a| < a/2$ , entonces  $a/2 < x < 3a/2$ . Por tanto,

$$|x| > \frac{a}{2}, \text{ de modo que } \frac{1}{|x|} < \frac{2}{a}.$$

En este caso, obtendríamos que

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| < \frac{2}{a^2} \cdot |x - a|$$

si  $|x - a| < a/2$ . Así, si elegimos  $\delta$  como el mínimo de los dos números  $a/2$  y  $a^2\epsilon/2$ , entonces

$$0 < |x - a| < \delta \text{ implica que } \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| < \frac{2}{a^2} \cdot \frac{a^2\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Por tanto,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a} \quad \text{si } a \neq 0,$$

como se quería.

Estamos listos para dar las demostraciones de las propiedades del límite establecidas en la sección 2.2.

**Propiedad de la constante**

Si  $f(x) \equiv C$ , una constante, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} C = C.$$

**Demostración** Como  $|C - C| = 0$ , simplemente elegimos  $\delta = 1$ , sin importar el valor de  $\varepsilon > 0$  dado previamente. Entonces, si  $0 < |x - a| < \delta$ , es automático que  $|C - C| < \varepsilon$ .  $\square$

**Propiedad de la suma**

Si  $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = L$  y  $\lim_{x \rightarrow a} G(x) = M$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} [F(x) + G(x)] = L + M.$$

**Demostración** Sea  $\varepsilon > 0$ . Como  $L$  es el límite de  $F(x)$  cuando  $x \rightarrow a$ , existe un número  $\delta_1 > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \text{ implica que } |F(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como  $M$  es el límite de  $G(x)$  cuando  $x \rightarrow a$ , existe un número  $\delta_2 > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_2 \text{ implica que } |G(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Entonces

$$\begin{aligned} 0 < |x - a| < \delta \text{ implica que } |(F(x) + G(x)) - (L + M)| \\ \cong |F(x) - L| + |G(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\lim_{x \rightarrow a} [F(x) + G(x)] = L + M,$$

como se quería.  $\square$

**Propiedad del producto**

Si  $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = L$  y  $\lim_{x \rightarrow a} G(x) = M$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} [F(x) \cdot G(x)] = L \cdot M.$$

**Demostración** Dado  $\varepsilon > 0$ , debemos determinar un número  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \text{ implique } |F(x) \cdot G(x) - L \cdot M| < \varepsilon.$$

Pero en primer lugar, la desigualdad del triángulo implica

$$\begin{aligned} |F(x) \cdot G(x) - L \cdot M| &= |F(x) \cdot G(x) - L \cdot G(x) + L \cdot G(x) - L \cdot M| \\ &\cong |G(x)| \cdot |F(x) - L| + |L| \cdot |G(x) - M|. \end{aligned} \quad (2)$$

Como  $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = L$ , existe  $\delta_1 > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \text{ implica que } |F(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2(|M| + 1)}. \quad (3)$$



Y como  $\lim_{x \rightarrow a} G(x) = M$ , existe  $\delta_2 > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_2 \text{ implica que } |G(x) - M| < \frac{\epsilon}{2(|L| + 1)}. \quad (4)$$

Además, existe un *tercer* número  $\delta_3 > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_3 \text{ implica que } |G(x) - M| < 1,$$

lo que a su vez implica que

$$|G(x)| < |M| + 1. \quad (5)$$

Elegimos  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ . Entonces sustituimos (3), (4) y (5) en (2) y, finalmente, vemos que  $0 < |x - a| < \delta$  implica

$$\begin{aligned} |F(x) \cdot G(x) - L \cdot M| &< (|M| + 1) \cdot \frac{\epsilon}{2(|M| + 1)} + |L| \cdot \frac{\epsilon}{2(|L| + 1)} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

como se quería. El uso de  $|M| + 1$  y  $|L| + 1$  en los denominadores evita la dificultad técnica que surge si  $L$  o  $M$  se anulan.  $\square$

#### Propiedad de sustitución

Si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$  y  $\lim_{x \rightarrow L} f(x) = f(L)$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(L).$$

**Demostración** Sea  $\epsilon > 0$ . Debemos determinar un número  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \text{ implica que } |f(g(x)) - f(L)| < \epsilon.$$

Como  $\lim_{y \rightarrow L} f(y) = f(L)$ , existe  $\delta_1 > 0$  tal que

$$0 < |y - L| < \delta_1 \text{ implica que } |f(y) - f(L)| < \epsilon. \quad (6)$$

También, como  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ , podemos determinar  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \text{ implica que } |g(x) - L| < \delta_1,$$

es decir, tal que

$$|y - L| < \delta_1,$$

donde  $y = g(x)$ . De (6), vemos que

$$0 < |x - a| < \delta \text{ implica que } |f(g(x)) - f(L)| = |f(y) - f(L)| < \epsilon,$$

como se quería.  $\square$

#### Propiedad del recíproco

Si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$  y  $L \neq 0$ , entonces,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L}.$$

**Demostración** Sea  $f(x) = 1/x$ . Entonces, como vimos en el ejemplo 3,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{1}{L} = f(L).$$

Por tanto, la propiedad de sustitución implica el resultado

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(L) = \frac{1}{L},$$

como se quería.  $\square$

#### Propiedad del cociente

Si  $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = L$  y  $\lim_{x \rightarrow a} G(x) = M \neq 0$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{L}{M}.$$

**Demostración** Una consecuencia inmediata de las propiedades del producto y recíproco es que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \rightarrow a} F(x) \cdot \frac{1}{G(x)} = \left( \lim_{x \rightarrow a} F(x) \right) \left( \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{G(x)} \right) = L \cdot \frac{1}{M} = \frac{L}{M},$$

como se quería.  $\square$

#### Ley del sandwich

Suponga que  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  en alguna vecindad perforada de  $a$  y que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$$

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L.$$

**Demostración** Dado  $\epsilon > 0$ , elegimos  $\delta_1 > 0$  y  $\delta_2 > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \text{ implica que } |f(x) - L| < \epsilon$$

y

$$0 < |x - a| < \delta_2 \text{ implica que } |h(x) - L| < \epsilon.$$

Sea  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Entonces  $\delta > 0$ . Además, si  $0 < |x - a| < \delta$ , entonces  $f(x)$  y  $h(x)$  son puntos del intervalo abierto  $(L - \epsilon, L + \epsilon)$ . Así,

$$L - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \epsilon.$$

Entonces

$$0 < |x - a| < \delta \text{ implica que } |g(x) - L| < \epsilon,$$

como se quería.  $\square$

## Apéndice B Problemas

En los problemas 1 a 10, aplique la definición del límite para establecer la igualdad dada.

1.  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$
2.  $\lim_{x \rightarrow 2} 3x = 6$
3.  $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 3) = 5$
4.  $\lim_{x \rightarrow -3} (2x + 1) = -5$
5.  $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$
6.  $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$
7.  $\lim_{x \rightarrow -1} (2x^2 - 1) = 1$
8.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2}$  si  $a \neq 0$
9.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{a^2 + 1}$
10.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$  si  $a > 0$

11. Suponga que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  y que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = M$ . Aplique la definición del límite para mostrar que  $L = M$ . Así, el límite de una función es único, si existe.

12. Suponga que  $C$  es constante y que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ . Aplique la definición de límite para mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow a} C \cdot f(x) = C \cdot L.$$

13. Suponga que  $L \neq 0$  y que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ . Utilice el método del ejemplo 3 y la definición del límite para mostrar directamente que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}.$$

14. Utilice la identidad algebraica

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

para mostrar directamente de la definición del límite que  $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$  si  $n$  es un entero positivo.

15. Aplique la identidad

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

para mostrar directamente de la definición de límite que  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$  si  $a > 0$ .

16. Suponga que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) > 0$ . Demuestre que existe una vecindad de  $a$  donde  $f(x) > 0$ ; es decir, demuestre que existe  $\delta > 0$  tal que

$$|x - a| < \delta \text{ implica que } f(x) > 0.$$

## Apéndice C La completitud del sistema de números reales

Aquí, presentamos un tratamiento autocontenido de aquellas consecuencias de la completitud del sistema de números reales que son importantes en este texto. Nuestro objetivo principal es demostrar el teorema del valor intermedio y el teorema del valor máximo. Comenzamos con la propiedad de la mínima cota superior de los números reales, que consideramos como un axioma.

### Definición Cota superior y cota inferior

El conjunto  $S$  de números reales está **acotado superiormente** si existe un número  $b$  tal que  $x \leq b$  para cada número  $x$  en  $S$ , y el número  $b$  es una **cota superior** de  $S$ . De manera análoga, si existe un número  $a$  tal que  $x \geq a$  para cada número  $x$  en  $S$ , entonces se dice que  $S$  está **acotado inferiormente** y  $a$  es una **cota inferior** de  $S$ .

### Definición Mínima cota superior y máxima cota inferior

El número  $\lambda$  es una **mínima cota superior** para el conjunto  $S$  de números reales si

1.  $\lambda$  es una cota superior de  $S$ , y
2. Si  $b$  es una cota superior de  $S$ , entonces  $\lambda \leq b$ .

De manera análoga, el número  $\gamma$  es una **máxima cota inferior** para  $S$  si  $\gamma$  es una cota inferior para  $S$  y  $\gamma \geq a$  para toda cota inferior  $a$  de  $S$ .

**EJERCICIO** Demuestre que si el conjunto  $S$  tiene una mínima cota superior  $\lambda$ , entonces ésta es única. Es decir, demuestre que si  $\lambda$  y  $\mu$  son mínimas cotas superiores de  $S$ , entonces  $\lambda = \mu$ .

Es fácil mostrar también que si existe la máxima cota inferior  $\gamma$  de un conjunto  $S$ , ésta es única. En este punto, usted deberá construir ejemplos que muestren que un conjunto con una mínima cota superior  $\lambda$  puede o no contener a  $\lambda$  y que una afirmación similar es verdadera para la máxima cota inferior de un conjunto.

Establecemos ahora el *axioma de completitud* del sistema de números reales.

**Axioma de la mínima cota superior**

Si un conjunto no vacío,  $S$ , de números reales tiene una cota superior, entonces tiene una mínima cota superior.

Trabajando con el conjunto  $T$  que consta de los números  $-x$ , donde  $x$  está en  $S$ , no es difícil mostrar la siguiente consecuencia del axioma de la mínima cota superior: si el conjunto no vacío  $S$  de números reales está acotado inferiormente, entonces  $S$  tiene una máxima cota inferior. Debido a esta simetría, sólo necesitamos un axioma y no dos; los resultados para las mínimas cotas superiores también son válidos para las máximas cotas inferiores, siempre que se preste cierta atención al sentido de las desigualdades.

La restricción de que  $S$  sea no vacío, es molesta pero necesaria. Si  $S$  es el conjunto “vacío” de números reales, entonces 15 es una cota superior de  $S$ , pero  $S$  no tiene una mínima cota superior, pues 14, 13, 12, ..., 0, -1, -2, ... también son cotas superiores de  $S$ .

**Definición Sucesiones monótonas, crecientes y decrecientes**

La sucesión infinita  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, \dots$  es **no decreciente** si  $x_n \leq x_{n+1}$  para toda  $n \geq 1$ . Esta sucesión es **no creciente** si  $x_n \geq x_{n+1}$  para toda  $n \geq 1$ . Si la sucesión  $\{x_n\}$  es no creciente o no decreciente, entonces es **monótona**.

El teorema 1 da la **propiedad de la sucesión monótona acotada** del conjunto de números reales. (Recuerde que un conjunto  $S$  de números reales es **acotado** si está contenido en un intervalo de la forma  $[a, b]$ .)

**Teorema 1 Sucesiones monótonas acotadas**

Toda sucesión monótona acotada de números reales converge.

**Demostración** Suponga que la sucesión

$$S = \{x_n\} = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, \dots\}$$

está acotada y es no decreciente. Por el axioma de la mínima cota superior,  $S$  tiene una mínima cota superior  $\lambda$ . Afirmamos que  $\lambda$  es el límite de la sucesión  $\{x_n\}$ . Consideremos un intervalo abierto con centro en  $\lambda$ ; es decir, un intervalo de la forma  $I = (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$ , donde  $\varepsilon > 0$ . Algunos términos de la sucesión deben encontrarse dentro de  $I$ , o de otro modo,  $\lambda - \varepsilon$  sería una cota superior de  $S$  menor que su mínima cota superior  $\lambda$ . Pero si  $x_N$  está dentro de  $I$ , entonces, por tratarse

de una sucesión no decreciente,  $x_k$  también debe encontrarse en  $I$  para toda  $k \geq N$ . Como  $\varepsilon$  es un número positivo arbitrario,  $\lambda$  es por definición (problema 39 de la sección 11.2) el límite de la sucesión  $\{x_n\}$ . Es decir, una sucesión no decreciente acotada converge. Se puede construir una demostración similar para sucesiones no crecientes pero trabajando con la máxima cota inferior.  $\square$

Por tanto, el axioma de la mínima cota superior implica la propiedad de la sucesión monótona acotada de los números reales. Con un poco de esfuerzo, usted puede demostrar que las dos son lógicamente equivalentes: si considera la propiedad de la sucesión monótona acotada como un axioma, entonces la propiedad de la mínima cota superior es un teorema. La **propiedad de los intervalos anidados** del teorema 2 también es equivalente a la propiedad de la mínima cota superior, pero sólo demostraremos que es una consecuencia de la propiedad de la mínima cota superior, ya que hemos elegido esta última como el axioma fundamental para la completitud del sistema de números reales.

**Teorema 2 Propiedad de los intervalos anidados de los números reales**

Suponga que  $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n, \dots$  es una sucesión de intervalos cerrados (de modo que  $I_n$  es de la forma  $[a_n, b_n]$  para todo entero positivo  $n$ ) tal que

1.  $I_n$  contiene a  $I_{n+1}$  para toda  $n \geq 1$  y
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ .

Entonces existe exactamente un número real  $c$  tal que  $c$  pertenece a  $I_n$  para toda  $n$ . Así,

$$\{c\} = I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap \dots$$

**Demostración** Es claro de la hipótesis (2) del teorema 2 que a lo más existe un número  $c$  de este tipo. La sucesión  $\{a_n\}$  de los extremos izquierdos de los intervalos es una sucesión no decreciente acotada (por  $b_1$ ) y por tanto tiene un límite  $a$  por la propiedad de la sucesión monótona acotada. De manera análoga, la sucesión  $\{b_n\}$  tiene un límite  $b$ . Como  $a_n \leq b_n$  para toda  $n$ , esto implica fácilmente que  $a \leq b$ . Es claro que  $a_n \leq a \leq b_n$  para toda  $n \geq 1$ , de modo que  $a$  pertenece a todo intervalo  $I_n$ ; lo mismo ocurre con  $b$ , por un argumento similar. Pero entonces la propiedad (2) del teorema 2 implica que  $a = b$ , y este valor común (llámelo  $c$ ) es el número que satisface la conclusión del teorema 2.  $\square$

Ahora podemos utilizar estos resultados para demostrar varios teoremas importantes utilizados en el texto.

**Teorema 3 Propiedad del valor intermedio de las funciones continuas**

Si la función  $f$  es continua en el intervalo  $[a, b]$  y  $f(a) < K < f(b)$ , entonces  $K = f(c)$  para algún número  $c$  en  $(a, b)$ .

**Demostración** Sea  $I_1 = [a, b]$ . Suponga que hemos definido  $I_n$  para  $n \geq 1$ . Describiremos (inductivamente) la manera de definir  $I_{n+1}$ , lo cual mostrará en particular la forma de definir  $I_2, I_3$ , etcétera. Sea  $a_n$  el extremo izquierdo de  $I_n, b_n$

su extremo derecho y  $m_n$  es su punto medio. Si  $f(m_n) > K$ , entonces  $f(a_n) < K < f(m_n)$ ; en este caso, sea  $a_{n+1} = a_n$ ,  $b_{n+1} = m_n$  e  $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$ . Si  $f(m_n) < K$ , entonces sea  $a_{n+1} = m_n$  y  $b_{n+1} = b_n$ . Así, en cada etapa bisecamos  $I_n$  e  $I_{n+1}$  es la mitad de  $I_n$  donde  $f$  asume los valores por arriba y por abajo de  $K$ . Observe que si  $f(m_n)$  es igual a  $K$  en algún momento, simplemente decimos que  $c = m_n$  y paramos.

Es fácil mostrar que la sucesión  $\{I_n\}$  de intervalos satisface las hipótesis del teorema 2. Sea  $c$  el (único) número real común a todos los intervalos  $I_n$ . Mostraremos que  $f(c) = K$  y esto concluirá la demostración.

La sucesión  $\{b_n\}$  tiene límite  $c$ , de modo que por la continuidad de  $f$ , la sucesión  $\{f(b_n)\}$  tiene límite  $f(c)$ . Pero  $f(b_n) > K$  para toda  $n$ , por lo que el límite de  $\{f(b_n)\}$  no puede ser menor que  $K$ ; es decir,  $f(c) \geq K$ . Considerando la sucesión  $\{a_n\}$ , se tiene que  $f(c) \leq K$ . Por tanto,  $f(c) = K$ .  $\square$

### Lema 1

Si  $f$  es continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$ , entonces  $f$  es acotada ahí.

**Demostración** Supongamos a manera de contradicción que  $f$  no está acotada en  $I_1 = [a, b]$ . Bisecamos  $I_1$  y sea  $I_2$  cualquier mitad donde  $f$  no es acotada; si  $f$  no es acotada en ambas mitades,  $I_2$  será la mitad izquierda de  $I_1$ . En general, sea  $I_{n+1}$  la mitad de  $I_n$  donde  $f$  no es acotada.

De nuevo, es fácil mostrar que la sucesión  $\{I_n\}$  de intervalos cerrados satisface las hipótesis del teorema 2. Sea  $c$  el número común a todos ellos. Como  $f$  es continua, existe un número  $\varepsilon > 0$  tal que  $f$  es acotada en el intervalo  $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ . Pero para valores suficientemente grandes de  $n$ ,  $I_n$  es un subconjunto de  $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ . Esta contradicción muestra que  $f$  debe ser acotada en  $[a, b]$ .  $\square$

### Teorema 4 Propiedad del valor máximo de las funciones continuas

Si la función  $f$  es continua en el intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$ , entonces existe un número  $c$  en  $[a, b]$  tal que  $f(x) \leq f(c)$  para toda  $x$  en  $[a, b]$ .

**Demostración** Considere el conjunto  $S = \{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$ . Por el lema 1, este conjunto es acotado; sea  $\lambda$  su mínima cota superior. Nuestro objetivo es mostrar que  $\lambda$  es un valor  $f(c)$  de  $f$ .

Con  $I_1 = [a, b]$ , bisecamos  $I_1$  como antes. Observe que  $\lambda$  es la mínima cota superior de los valores de  $f$  en al menos una de las dos mitades de  $I_1$ ; sea  $I_2$  esa mitad. Una vez definido  $I_n$ , sea  $I_{n+1}$  la mitad de  $I_n$  donde  $\lambda$  es la mínima cota superior de los valores de  $f$ . Sea  $c$  el número común de todos estos intervalos. Entonces, la continuidad de  $f$  implica, como en la demostración del teorema 3, que  $f(c) = \lambda$ . Y es claro que  $f(x) \leq \lambda$  para toda  $x$  en  $[a, b]$ .  $\square$

La técnica que utilizamos en estas demostraciones es el *método de bisección*. Ahora la utilizaremos una vez más para establecer la *propiedad de Bolzano-Weierstrass* del sistema de números reales.

**Definición Punto límite**

Sea  $S$  un conjunto de números reales. El número  $p$  es un **punto límite** de  $S$  si cada intervalo abierto que contiene a  $p$  también contiene puntos de  $S$  distintos de  $p$ .

**Teorema 5 Teorema de Bolzano-Weierstrass**

Todo conjunto infinito acotado de números reales tiene un punto límite.

**Demostración** Sea  $I_0$  un intervalo cerrado que contiene al conjunto infinito acotado  $S$  de números reales. Sea  $I_1$  uno de los dos intervalos cerrados que forman a  $I_0$  y que contiene una infinidad de puntos de  $S$ . Si  $I_n$  ha sido determinado, sea  $I_{n+1}$  uno de los dos intervalos cerrados de  $I_n$  que contiene una infinidad de puntos de  $S$ . Una aplicación del teorema 2 proporciona un número  $p$  común a todos los intervalos  $I_n$ . Si  $J$  es un intervalo abierto que contiene a  $p$ , entonces  $J$  contiene a  $I_n$  para algún valor suficientemente grande de  $n$  y entonces contiene una infinidad de puntos de  $S$ . Por tanto,  $p$  es un punto límite de  $S$ .  $\square$

Nuestro objetivo final está a la vista: ahora podemos demostrar que una sucesión de números reales converge si y sólo si es una sucesión de Cauchy.

**Definición Sucesión de Cauchy**

La sucesión  $\{a_n\}_1^\infty$  es una **sucesión de Cauchy** si, para toda  $\varepsilon > 0$ , existe un entero  $N$  tal que

$$|a_m - a_n| < \varepsilon$$

para toda  $n \geq N$ .

**Lema 2 Sucesiones convergentes**

Toda sucesión acotada de números reales tiene una subsucesión convergente.

**Demostración** Si  $\{a_n\}$  tiene solamente un número finito de valores, entonces se obtiene fácilmente la conclusión del lema 2. Por tanto, enfocaremos nuestra atención en el caso donde  $\{a_n\}$  es un conjunto infinito. Es fácil mostrar que este conjunto también es acotado, y en consecuencia podemos aplicar el teorema de Bolzano-Weierstrass para obtener un punto límite  $p$  de  $\{a_n\}$ . Para todo entero  $k \geq 1$  sea  $a_{n(k)}$  un término de la sucesión  $\{a_n\}$  tal que

1.  $n(k+1) > n(k)$  para toda  $k \geq 1$ , y
2.  $|a_{n(k)} - p| < \frac{1}{k}$ .

Es fácil mostrar que  $\{a_{n(k)}\}$  es una sucesión convergente (a  $p$ ) de  $\{a_n\}$ .  $\square$

**Teorema 6 Convergencia de las sucesiones de Cauchy**

Una sucesión de números reales converge si y sólo si es una sucesión de Cauchy.

**Demostración** La desigualdad del triángulo implica inmediatamente que toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy. Así, supongamos que la sucesión  $\{a_n\}$  es una sucesión de Cauchy.

Sea  $N$  tal que

$$|a_m - a_n| < 1$$

si  $m, n \geq N$ . Esto implica que si  $n \geq N$ , entonces  $a_n$  está en el intervalo cerrado  $[a_N - 1, a_N + 1]$ . Esto implica que la sucesión  $\{a_n\}$  está acotada, y entonces, por el lema 2, tiene una subsucesión convergente  $\{a_{n(k)}\}$ . Sea  $p$  el límite de esta subsucesión.

Afirmamos que la propia  $\{a_n\}$  converge a  $p$ . Dado  $\epsilon > 0$ , sea  $M$  tal que

$$|a_m - a_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

si  $m, n \geq N$ . Después elegimos  $K$  tal que  $n(K) \geq M$  y

$$|a_{n(K)} - p| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Entonces si  $n \geq M$ ,

$$|a_n - p| \leq |a_n - a_{n(K)}| + |a_{n(K)} - p| < \epsilon.$$

Por tanto,  $\{a_n\}$  converge a  $p$  por definición.  $\square$

## Apéndice D

### Demostración de la regla de la cadena

Para demostrar la regla de la cadena, necesitamos mostrar que si  $f$  es derivable en  $a$  y  $g$  es derivable en  $f(a)$ , entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h} = g'(f(a)) \cdot f'(a). \quad (1)$$

Si las cantidades  $h$  y

$$k(h) = f(a+h) - f(a) \quad (2)$$

son distintas de cero, entonces podemos escribir el cociente de diferencias del lado izquierdo de la ecuación (1) como

$$\frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h} = \frac{g(f(a) + k(h)) - g(f(a))}{k(h)} \cdot \frac{k(h)}{h}. \quad (3)$$

Para investigar el primer factor del lado derecho de la ecuación (3), definimos una nueva función  $\phi$  como sigue:

$$\phi(k) = \begin{cases} \frac{g(f(a) + k) - g(f(a))}{k} & \text{si } k \neq 0; \\ g'(f(a)) & \text{si } k = 0. \end{cases} \quad (4)$$



Por definición de la derivada de  $g$ , vemos de la ecuación (4) que  $\phi$  es continua en  $k = 0$ ; es decir,

$$\lim_{k \rightarrow 0} \phi(k) = g'(f(a)). \quad (5)$$

A continuación,

$$\lim_{h \rightarrow 0} k(h) = \lim_{h \rightarrow 0} [f(a + h) - f(a)] = 0 \quad (6)$$

ya que  $f$  es continua en  $x = a$  y  $\phi(0) = g'(f(a))$ . Por tanto, la ecuación (5) implica que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \phi(k(h)) = g'(f(a)). \quad (7)$$

Ahora estamos listos para conjuntar toda esta información. Por la ecuación (3), si  $h \neq 0$ , entonces

$$\frac{g(f(a + h)) - g(f(a))}{h} = \phi(k(h)) \cdot \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad (8)$$

aún cuando  $k(h) = 0$ , ya que en este caso ambos lados de la ecuación (8) se anulan. Por esto, la regla del producto para límites implica que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(a + h)) - g(f(a))}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \phi(k(h)) \cdot \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \\ &= g'(f(a)) \cdot f'(a), \end{aligned}$$

una consecuencia de la ecuación (7) y la definición de la derivada de la función  $f$ . Por tanto, hemos establecido la regla de la cadena en la forma de la ecuación (1).  $\square$

## Apéndice E

### Existencia de la integral

Cuando Newton y Leibniz descubrieron los algoritmos básicos del cálculo en la segunda mitad del siglo XVII, el rigor lógico característico del método griego de exhaustión fue abandonado por mucho tiempo. Por ejemplo, para calcular el área bajo la curva  $y = f(x)$ , Newton consideró obvio desde el punto de vista intuitivo que existía la función área y procedió a calcularla como la primitiva de la función altura  $f(x)$ . Leibniz consideró  $A$  como una suma infinita de elementos de área infinitesimales, cada uno de la forma  $dA = f(x)dx$ , pero en la práctica calculó el área

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

mediante una integración, como lo hizo Newton; es decir, calculando

$$A = \left[ D^{-1} f(x) \right]_a^b.$$

A primera vista, la cuestión de la *existencia* de la función área (una de las condiciones que debe satisfacer la función  $f$  para que exista su integral) no parece ser muy importante. Los matemáticos del siglo XVIII se ocuparon principalmente de (y quedaron satisfechos con) las impresionantes aplicaciones del cálculo para resolver problemas del mundo real y no se concentraron en los principios lógicos del tema.

El primer intento para tener una definición precisa de la integral y una demostración de su existencia para las funciones continuas fue el del matemático

francés Augustin Louis Cauchy (1789–1857). Curiosamente, Cauchy fue preparado como ingeniero, y realizó gran parte de su investigación matemática en campos que ahora consideramos como orientados hacia las aplicaciones: hidrodinámica, ondas en medios elásticos, vibraciones de membranas elásticas, polarización de la luz y otras semejantes. Pero fue un investigador prolífico, y sus obras abarcan todo el espectro de las matemáticas, con ensayos ocasionales en campos casi sin relación entre sí.

Por 1824, Cauchy definió la integral de una función continua de una forma familiar para nosotros, como un límite de aproximaciones mediante extremos izquierdos:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x.$$

Éste es un tipo de límite más complicado que el que analizamos en el capítulo 2. Cauchy no tenía completamente clara la naturaleza del proceso de límite implicado en esta ecuación, ni el papel preciso que jugaba la hipótesis de continuidad de  $f$  para demostrar la existencia del límite.

Una definición completa de la integral, como la dada en la sección 5.4, fue finalmente producida en 1850 por el matemático alemán Georg Bernhard Riemann. Riemann fue un estudiante de Gauss; él conoció a Gauss a su llegada a Göttingen, Alemania, con el fin de estudiar teología, cuando tenía aproximadamente 20 años de edad y Gauss aproximadamente 70 años. Riemann pronto decidió estudiar matemáticas y llegó a ser considerado como uno de los matemáticos realmente grandes del siglo XIX. Como Cauchy, él estaba interesado particularmente en las aplicaciones de las matemáticas al mundo real; su investigación enfatizó particularmente la electricidad, el calor, la luz, la acústica, la dinámica de fluidos y el magnetismo. Esto último se puede inferir del hecho de que Wilhelm Weber (de quien toma el nombre la unidad de flujo magnético, el weber) fue una gran influencia en la educación de Riemann. Riemann también hizo contribuciones significativas a las propias matemáticas, particularmente en el campo del análisis complejo. Una conjetura importante de Riemann se refiere a la función zeta

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad (1)$$

que permanece sin solución actualmente y que tiene consecuencias importantes en la teoría de la distribución de los números primos, ya que

$$\zeta(k) = \prod \left( 1 - \frac{1}{p^k} \right)^{-1},$$

donde el producto  $\Pi$  se realiza sobre todos los primos  $p$ . [La función zeta está definida en la ecuación (1) para los números complejos  $s$  a la derecha de la recta vertical  $x = 1$  y se extiende a los demás números complejos pidiendo que sea derivable.] Riemann murió de tuberculosis poco antes de cumplir cuarenta años.

Aquí daremos una demostración de la existencia de la integral de una función continua. Seguiremos el método de Riemann. Específicamente, supongamos que la función  $f$  es continua en el intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$ . Demostraremos que la integral definida

$$\int_a^b f(x) dx$$

existe; es decir, demostraremos la existencia de un número  $I$  que satisfaga la

siguiente condición: para toda  $\epsilon > 0$  existe  $\lambda > 0$  tal que, para *toda* suma de Riemann  $R$  asociada con *cualquier* partición  $P$  con  $|P| < \lambda$ ,

$$|I - R| < \epsilon.$$

(Recuerde que la norma  $|P|$  de la partición  $P$  es la longitud del máximo subintervalo de la partición.) En otras palabras, toda suma de Riemann asociada con cada partición suficientemente “fina” se acerca al número  $I$ . Si esto sucede, entonces la integral definida

$$\int_a^b f(x) dx$$

existe e  $I$  es su valor.

Comencemos la demostración. Supondremos siempre que  $f$  es una función continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$ . Dado  $\epsilon > 0$ , necesitamos mostrar la existencia de un número  $\lambda > 0$  tal que

$$\left| I - \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i \right| < \epsilon \quad (2)$$

para toda suma de Riemann asociada con una partición arbitraria  $P$  de  $[a, b]$  tal que  $|P| < \lambda$ .

Dada una partición  $P$  de  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos que *no necesariamente tienen la misma longitud*, sea  $p_i$  un punto en el subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  tal que  $f$  alcanza su valor mínimo  $f(p_i)$ . De manera análoga, sea  $q_i$  su valor máximo ahí. Estos números existen para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  por la propiedad del valor máximo para las funciones continuas (teorema 4 del apéndice C).

En lo subsecuente, denotaremos a las sumas de Riemann inferiores y superiores asociadas con  $P$  como

$$L(P) = \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta x_i \quad (3a)$$

y

$$U(P) = \sum_{i=1}^n f(q_i) \Delta x_i, \quad (3b)$$

respectivamente. Entonces el lema 1 es obvio.

**Lema 1**

Para cualquier partición  $P$  de  $[a, b]$ ,  $L(P) \leq U(P)$ .

Necesitamos ahora una definición. La partición  $P'$  es un *refinamiento* de la partición  $P$  si cada subintervalo de  $P'$  está contenido en algún subintervalo de  $P$ . Es decir,  $P'$  se obtiene de  $P$  añadiendo más puntos de subdivisión a  $P$ .

**Lema 2**

Suponga que  $P'$  es un refinamiento de  $P$ . Entonces

$$L(P) \leq U(P') \leq L(P') \leq U(P). \quad (4)$$

**Demostración** La desigualdad  $L(P') \leq U(P')$  es una consecuencia del lema 1. Mostraremos que  $L(P) \leq L(P')$ ; la demostración de que  $U(P') \leq U(P)$  es similar.

El refinamiento  $P'$  se obtiene de  $P$  añadiendo uno o más puntos de subdivisión a  $P$ . Así, todo lo que necesitamos mostrar es que la suma de Riemann  $L(P)$  no puede decrecer si añadimos un solo punto de subdivisión; así, supondremos que la partición  $P'$  se obtiene de  $P$  al dividir el  $k$ -ésimo intervalo  $[x_{k-1}, x_k]$  de  $P$  en dos subintervalos  $[x_{k-1}, z]$  y  $[z, x_k]$  mediante el nuevo punto  $z$ .

El único efecto resultante en la suma de Riemann correspondiente es el reemplazo del término

$$f(p_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

en  $L(P)$  mediante la suma de dos términos

$$f(u) \cdot (z - x_{k-1}) + f(v) \cdot (x_k - z),$$

donde  $f(u)$  es el mínimo de  $f$  en  $[x_{k-1}, z]$  y  $f(v)$  es el mínimo de  $f$  en  $[z, x_k]$ . Pero

$$f(p_k) \leq f(u) \quad \text{y} \quad f(p_k) \leq f(v).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} f(u) \cdot (z - x_{k-1}) + f(v) \cdot (x_k - z) &\geq f(p_k) \cdot (z - x_{k-1}) + f(p_k) \cdot (x_k - z) \\ &= f(p_k) \cdot (z - x_{k-1} + x_k - z) \\ &= f(p_k) \cdot (x_k - x_{k-1}). \end{aligned}$$

Así, el reemplazo de  $f(p_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$  no puede disminuir la suma  $L(P)$  en cuestión, y por tanto  $L(P) \leq L(P')$ . Como esto es todo lo que necesitábamos mostrar, hemos terminado la demostración del lema 2.  $\square$

Para demostrar que todas las sumas de Riemann para particiones suficientemente finas se acercan a algún número  $I$ , debemos dar primero una construcción de  $I$ . Hacemos esto en el lema 3.

**Lema 3**

Sea  $P_n$  la partición regular de  $[a, b]$  en  $2^n$  subintervalos de igual longitud. Entonces el límite (secuencial)

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} L(P_n) \tag{5}$$

existe.

**Demostración** Comenzamos con la observación de que cada partición  $P_{n+1}$  es un refinamiento de  $P_n$ , de modo que (por el lema 2)

$$L(P_1) \leq L(P_2) \leq \dots \leq L(P_n) \leq \dots$$

Por tanto,  $\{L(P_n)\}$  es una sucesión no decreciente de números reales. Además,

$$L(P_n) = \sum_{i=1}^{2^n} f(p_i) \Delta x_i \leq M \sum_{i=1}^{2^n} \Delta x_i = M(b - a),$$

donde  $M$  es el valor máximo de  $f$  en  $[a, b]$ .

El teorema 1 del apéndice C garantiza que una sucesión monótona de números reales debe converger. Así, el número

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} L(P_n)$$

existe. Esto establece la ecuación (5) y termina la demostración del lema 3.  $\square$

En cálculo avanzado se demuestra que si  $f$  es continua en  $[a, b]$ , entonces, para cada número  $\epsilon > 0$ , existe un número  $\lambda > 0$  tal que

$$|f(u) - f(v)| < \epsilon$$

para cada dos puntos  $u$  y  $v$  de  $[a, b]$  tales que

$$|u - v| < \lambda.$$

Esta propiedad de una función es la **continuidad uniforme** de  $f$  en el intervalo  $[a, b]$ . Así, el teorema de cálculo avanzado que necesitamos utilizar afirma que toda función continua en un intervalo cerrado acotado es uniformemente continua ahí.

**NOTA** El hecho de que  $f$  sea continua en  $[a, b]$  significa que para cada número  $u$  en el intervalo y cada  $\epsilon > 0$ , existe  $\lambda > 0$  tal que si  $v$  es un número en el intervalo con  $|u - v| < \lambda$ , entonces  $|f(u) - f(v)| < \epsilon$ . Pero la continuidad *uniforme* es una condición más estricta. Significa que dada  $\epsilon > 0$ , no sólo podemos determinar un valor  $\lambda_1$  que “funcione” para  $u_1$ , un valor de  $\lambda_2$  que funcione para  $u_2$ , etcétera, sino que aún más: podemos determinar un valor universal de  $\lambda$  que sirva para *todos* los valores de  $u$  en el intervalo. Esto no debe ser obvio, si consideramos la posibilidad de que  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ ,  $\lambda_3 = \frac{1}{3}$ , y así sucesivamente. En todo caso, es claro que la continuidad uniforme de  $f$  en un intervalo implica su continuidad en el mismo.

Recuerde que siempre estamos considerando una función continua  $f$  definida en el intervalo cerrado  $[a, b]$ .

#### Lema 4

Suponga que  $\epsilon > 0$  está dada. Entonces existe un número  $\lambda > 0$  tal que si  $P$  es una partición de  $[a, b]$  con  $|P| < \lambda$  y  $P'$  es un refinamiento de  $P$ , entonces

$$|R(P) - R(P')| < \frac{\epsilon}{3} \quad (6)$$

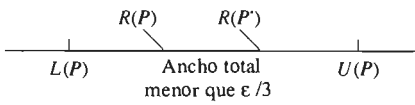
para cualesquiera dos sumas de Riemann,  $R(P)$  asociada con  $P$  y  $R(P')$  asociada con  $P'$ .

**Demostración** Como  $f$  debe ser uniformemente continua en  $[a, b]$ , existe un número  $\lambda > 0$  tal que si

$$|u - v| < \lambda, \text{ entonces } |f(u) - f(v)| < \frac{\epsilon}{3(b-a)}.$$

Supongamos ahora que  $P$  es una partición de  $[a, b]$  con  $|P| < \lambda$ . Entonces

$$|U(P) - L(P)| = \sum_{i=1}^n |f(q_i) - f(p_i)| \Delta x_i < \frac{\epsilon}{3(b-a)} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \frac{\epsilon}{3}.$$



**Figura E.1** Parte de la demostración del lema 4

Esto es válido ya que  $|p_i - q_i| < \lambda$ , para  $p_i$  y  $q_i$  pertenecientes al mismo subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  de  $P$ , y  $|P| < \lambda$ .

Ahora, como se muestra en la figura E.1, sabemos que  $L(P)$  y  $U(P)$  difieren en menos de  $\varepsilon/3$ . También sabemos que

$$L(P) \leq R(P) \leq U(P)$$

para toda suma de Riemann  $R(P)$  asociada con  $P$ . Pero

$$L(P) \leq L(P') \leq U(P') \leq U(P)$$

por el lema 2, ya que  $P'$  es un refinamiento de  $P$ ; además,

$$L(P') \leq R(P') \leq U(P')$$

para toda suma de Riemann  $R(P')$  asociada con  $P'$ .

Como muestra la figura E.1, los números  $R(P)$  y  $R(P')$  pertenecen al intervalo  $[L(P), U(P)]$  de longitud menor que  $\varepsilon/3$ , lo que implica la ecuación (6), como se quería. Esto concluye la demostración del lema 4.  $\square$

**Teorema 1 Existencia de la integral**

Si  $f$  es continua en el intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$ , entonces la integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

existe.

**Demostración** Suponga que  $\varepsilon > 0$  está dada. Debemos mostrar la existencia de un número  $\lambda > 0$  tal que, para cada partición  $P$  de  $[a, b]$  con  $|P| < \lambda$ , tenemos

$$|I - R(P)| < \varepsilon,$$

donde  $I$  es el número dado en el lema 3 y  $R(P)$  es una suma de Riemann arbitraria para  $f$  asociada con  $P$ .

Elegimos el número  $\lambda$  dado por el lema 4 tal que

$$|R(P) - R(P')| < \frac{\varepsilon}{3}$$

si  $|P| < \lambda$  y  $P'$  es un refinamiento de  $P$ .

Por el lema 3, podemos elegir un entero  $N$  de modo que

$$|P_N| < \lambda \quad \text{y} \quad |L(P_N) - I| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (7)$$

Dado una partición arbitraria  $P$  tal que  $|P| < \lambda$ , sea  $P'$  un refinamiento común de  $P$  y  $P_N$ . Por ejemplo, usted puede obtener esta partición  $P'$  utilizando todos los puntos de subdivisión de  $P$  y de  $P_N$  para formar los subintervalos de  $[a, b]$  que forman a  $P'$ .

Como  $P'$  es un refinamiento de  $P$  y de  $P_N$ , y como esta última partición tiene norma menor que  $\lambda$ , el lema 4 implica que

$$|R(P) - R(P')| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad |L(P_N) - R(P')| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (8)$$

Aquí,  $R(P)$  y  $R(P')$  son las sumas de Riemann (arbitrarias) asociadas con  $P$  y  $P'$ , respectivamente.

Dada una suma de Riemann arbitraria  $R(P)$ , asociada con la partición  $P$  de norma menor que  $\lambda$ , vemos que

$$\begin{aligned} |I - R(P)| &= |I - L(P_N) + L(P_N) - R(P') + R(P') - R(P)| \\ &\leq |I - L(P_N)| + |L(P_N) - R(P')| + |R(P') - R(P)|. \end{aligned}$$

En la última suma, los dos últimos términos son menores que  $\varepsilon/3$ , por las desigualdades en (8). También sabemos, por (7), que el primer término es menor que  $\varepsilon/3$ . En consecuencia,

$$|I - R(P)| < \varepsilon.$$

Esto establece el teorema 1.  $\square$

Concluimos con un ejemplo que muestra que la integrabilidad necesita cierta hipótesis de continuidad.

**EJEMPLO 1** Suponga que  $f$  está definida para  $0 \leq x \leq 1$  como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es irracional;} \\ 0 & \text{si } x \text{ es racional.} \end{cases}$$

Entonces en todo punto  $f$  no es continua. (¿Por qué?) Dada una partición  $P$  de  $[0, 1]$ , sea  $p_i$  un punto racional y  $q_i$  un punto irracional del  $i$ -ésimo subintervalo de  $P$  para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Como antes,  $f$  alcanza su valor mínimo 0 en cada punto  $p_i$  y su valor máximo 1 en cada  $q_i$ . Además,

$$L(P) = \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta x_i = 0, \text{ mientras que } U(P) = \sum_{i=1}^n f(q_i) \Delta x_i = 1.$$

Así, si elegimos  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , entonces *no* existe un número  $I$  que esté a una distancia menor que  $\varepsilon$  de  $L(P)$  y de  $U(P)$ , sin importar qué tan pequeña sea la norma de  $P$ . Esto implica que  $f$  *no* es Riemann integrable en  $[0, 1]$ .

## Apéndice F

### Aproximaciones y sumas de Riemann

En varias partes del capítulo 6, nuestro intento por calcular cierta cantidad  $Q$  nos llevó a la siguiente situación. Iniciando con una partición regular de un intervalo apropiado  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos, cada uno de longitud  $\Delta x$ , encontramos una aproximación  $A_n$  a  $Q$  de la forma

$$A_n = \sum_{i=1}^n g(u_i)h(v_i) \Delta x, \quad (1)$$

donde  $u_i$  y  $v_i$  son dos puntos (generalmente diferentes) del  $i$ -ésimo subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ . Por ejemplo, en nuestro análisis del área de la superficie de revolución anterior a la ecuación (8) de la sección 6.4, encontramos la aproximación

$$\sum_{i=1}^n 2\pi f(u_i) \sqrt{1 + [f'(v_i)]^2} \Delta x \quad (2)$$

del área de la superficie generada al girar la curva  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  alrededor del eje  $x$ . (En la sección 6.4 escribimos  $x_i^*$  para  $u_i$  y  $x_i^*$  para  $v_i$ .) Observe que la

expresión en (2) es la misma que la del lado derecho de la ecuación (1); tomando  $g(x) = 2\pi f(x)$  y  $h(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ .

En tal situación, observamos que si  $u_i$  y  $v_i$  fueran el mismo punto  $x_i^*$  de  $[x_{i-1}, x_i]$  para cada  $i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ), entonces la aproximación en la ecuación (1) sería una suma de Riemann para la función  $g(x)h(x)$  en  $[a, b]$ . Esto nos lleva a sospechar que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(u_i)h(v_i) \Delta x = \int_a^b g(x)h(x) dx. \quad (3)$$

En la sección 6.4, supusimos que la ecuación (3) era válida y concluimos de la aproximación en (2) que el área de una superficie de revolución debía definirse como

$$A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi f(u_i) \sqrt{1 + [f'(v_i)]^2} \Delta x = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

El teorema 1 garantiza que la ecuación (3) es cierta bajo restricciones poco rigurosas sobre las funciones  $g$  y  $h$ .

**Teorema 1 Una generalización de las sumas de Riemann**

Suponga que  $h$  y  $g'$  son continuas en  $[a, b]$ . Entonces

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(u_i)h(v_i) \Delta x = \int_a^b g(x)h(x) dx, \quad (3)$$

donde  $u_i$  y  $v_i$  son puntos arbitrarios en el  $i$ -ésimo subintervalo de una partición regular de  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos, cada uno de longitud  $\Delta x$ .

**Demostración** Sean  $M_1$  y  $M_2$  los valores máximos de  $|g'(x)|$  y  $|h(x)|$  en  $[a, b]$ , respectivamente. Observe que

$$\sum_{i=1}^n g(u_i)h(v_i) \Delta x = R_n + S_n, \quad \text{donde} \quad R_n = \sum_{i=1}^n g(v_i)h(v_i) \Delta x$$

es una suma de Riemann que tiende a  $\int_a^b g(x)h(x) dx$  cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ , y

$$S_n = \sum_{i=1}^n [g(u_i) - g(v_i)] h(v_i) \Delta x.$$

Para demostrar la ecuación (3) basta mostrar que  $S_n \rightarrow 0$  cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ . El teorema del valor medio implica que

$$\begin{aligned} |g(u_i) - g(v_i)| &= |g'(\bar{x}_i)| \cdot |u_i - v_i| && [\bar{x}_i \text{ en } (u_i, v_i)] \\ &\leq M_1 \Delta x, \end{aligned}$$

ya que tanto  $u_i$  como  $v_i$  son puntos en el intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  de longitud  $\Delta x$ . Entonces

$$\begin{aligned} |S_n| &\leq \sum_{i=1}^n |g(u_i) - g(v_i)| \cdot |h(v_i)| \Delta x \leq \sum_{i=1}^n (M_1 \Delta x) \cdot (M_2 \Delta x) \\ &= (M_1 M_2 \Delta x) \sum_{i=1}^n \Delta x = M_1 M_2 (b - a) \Delta x, \end{aligned}$$

de lo que se sigue que  $S_n \rightarrow 0$  cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ , como se quería.  $\square$

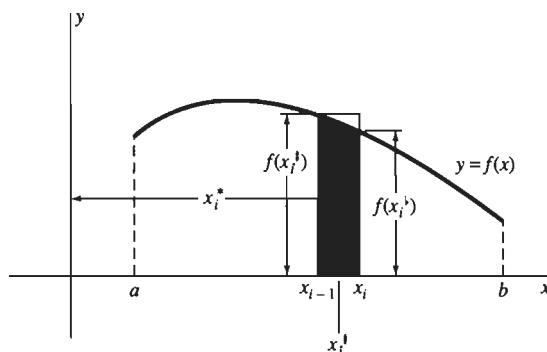


Como una aplicación del teorema 1, daremos una deducción rigurosa de la ecuación (2) de la sección 6.3,

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx, \quad (4)$$

para el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje  $y$  la región bajo  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ . Comenzando con la partición regular usual de  $[a, b]$ , sean  $f(x_{i-1}^*)$  y  $f(x_i^*)$  los valores mínimo y máximo de  $f$  en el  $i$ -ésimo subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ . Denotemos con  $x_i^*$  el punto medio de este subintervalo. De la figura F.1, vemos que la parte del sólido generado al girar la región bajo  $y = f(x)$ ,  $x_{i-1} \leq x \leq x_i$  contiene una capa cilíndrica con radio promedio  $x_i^*$ , espesor  $\Delta x$  y altura  $f(x_i^*)$  y está contenida en otra capa cilíndrica con el mismo radio promedio y espesor, pero con altura  $f(x_{i-1}^*)$ . Por tanto, el volumen  $\Delta V_i$  de esta parte del sólido satisface las desigualdades

$$2\pi x_i^* f(x_{i-1}^*) \Delta x \leq \Delta V_i \leq 2\pi x_i^* f(x_i^*) \Delta x.$$



**Figura F.1** Una estimación cuidadosa del volumen de un sólido de revolución alrededor del eje  $y$

Sumamos estas desigualdades para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  y encontramos que

$$\sum_{i=1}^n 2\pi x_i^* f(x_{i-1}^*) \Delta x \leq V \leq \sum_{i=1}^n 2\pi x_i^* f(x_i^*) \Delta x.$$

Como el teorema 1 implica que las dos últimas sumas tienden a  $\int_a^b f(x) dx$ , la ley del sandwich para límites implica entonces la ecuación (4).

Ocasionalmente necesitaremos una generalización del teorema 1, que requiera la noción de una función continua  $F(x, y)$  de dos variables. Decimos que  $F$  es *continua* en el punto  $(x_0, y_0)$  si el valor  $F(x, y)$  puede ser arbitrariamente cercano a  $F(x_0, y_0)$  al elegir el punto  $(x, y)$  suficientemente cercano a  $(x_0, y_0)$ . Analizamos la continuidad de las funciones de dos variables en el capítulo 14. Aquí nos bastará aceptar los siguientes hechos: si  $g(x)$  y  $h(y)$  son funciones continuas de una sola variable  $x$  y  $y$ , respectivamente, entonces las combinaciones simples como

$$g(x) \pm h(y), \quad g(x)h(y) \quad \text{y} \quad \sqrt{[g(x)]^2 + [h(y)]^2}$$

son funciones continuas de las dos variables  $x$  y  $y$ .

Consideremos ahora una partición regular de  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos, cada uno de longitud  $\Delta x$ , y sean  $u_i$  y  $v_i$  puntos arbitrarios del  $i$ -ésimo subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ . El teorema 2 (omitimos la demostración) nos dice cómo determinar el límite cuando  $\Delta x \rightarrow 0$  de una suma tal como

$$\sum_{i=1}^n F(u_i, v_i) \Delta x.$$

**Teorema 2 Una generalización adicional**

Sea  $F(x, y)$  continua para  $x$  y  $y$  ambas en el intervalo  $[a, b]$ . Entonces, con la notación del párrafo anterior,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(u_i, v_i) \Delta x = \int_a^b F(x, x) dx. \quad (5)$$

El teorema 1 es el caso particular  $F(x, y) = g(x)h(y)$  del teorema 2. Además, el integrando  $F(x, x)$  del lado derecho de la ecuación (5) es simplemente una función ordinaria de la única variable  $x$ . De una manera formal, la integral correspondiente a la suma en la ecuación (5) se obtiene al reemplazar el símbolo de suma con un signo de integral, cambiando  $u_i$  y  $v_i$  por  $x$ , reemplazando  $\Delta x$  por  $dx$  e insertando los límites correctos de integración. Por ejemplo, si el intervalo  $[a, b]$  es  $[0, 4]$ , entonces

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{9u_i^2 + v_i^4} \Delta x &= \int_0^4 \sqrt{9x^2 + x^4} dx \\ &= \int_0^4 x(9 + x^2)^{1/2} dx = \left[ \frac{1}{3}(9 + x^2)^{3/2} \right]_0^4 \\ &= \frac{1}{3}[(25)^{3/2} - (9)^{3/2}] = \frac{98}{3}. \end{aligned}$$

## Apéndice F Problemas

En los problemas 1 a 7,  $u_i$  y  $v_i$  son puntos arbitrarios del  $i$ -ésimo subintervalo de una partición regular de  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos, cada uno de longitud  $\Delta x$ . Expresé los límites dados como una integral de  $a$  a  $b$  y calcule después el valor de esta integral.

1.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n u_i v_i \Delta x; \quad a = 0, b = 1$

2.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n (3u_j + 5v_j) \Delta x; \quad a = -1, b = 3$

3.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n u_i \sqrt{4 - v_i^2} \Delta x; \quad a = 0, b = 2$

4.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{u_i \Delta x}{\sqrt{16 + v_i^2}}; \quad a = 0, b = 3$

5.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \text{sen } u_i \cos v_i \Delta x; \quad a = 0, b = \frac{\pi}{2}$

6.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{\text{sen}^2 u_i + \cos^2 v_i} \Delta x; \quad a = 0, b = \pi$

7.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{u_k^4 + v_k^4} \Delta x; \quad a = 0, b = 2$

8. Explique cómo se aplica el teorema 1 para mostrar que la ecuación (8) de la sección 6.4 es una consecuencia del análisis que la precede en esta sección.

9. Utilice el teorema 1 para deducir la ecuación (10) de la sección 6.4.

# Apéndice G

## Regla de l'Hôpital y teorema del valor medio de Cauchy

Aquí daremos una demostración de la regla de l'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad (1)$$

bajo las hipótesis del teorema 1 en la sección 8.3. La demostración se basa en una generalización del teorema del valor medio debida al matemático francés Augustin Louis Cauchy. Cauchy utilizó esta generalización a principios del siglo XIX para dar las demostraciones rigurosas de varios resultados de cálculo no establecidos firmemente con anterioridad.

### El teorema del valor medio de Cauchy

Suponga que las funciones  $f$  y  $g$  son continuas en el intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$  y derivables en  $(a, b)$ . Entonces existe un número  $c$  en  $(a, b)$  tal que

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c). \quad (2)$$

**OBSERVACIÓN 1** Para ver que este teorema es de hecho una generalización del teorema del valor medio (ordinario), sea  $g(x) = x$ . Entonces  $g'(x) \equiv 1$ , y la conclusión en la ecuación (2) se reduce al hecho

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

para algún número  $c$  en  $(a, b)$ .

**OBSERVACIÓN 2** La ecuación (2) tiene una interpretación geométrica parecida a la del teorema del valor medio ordinario. Pensemos que las ecuaciones  $x = g(t)$ ,  $y = f(t)$  describen el movimiento de un punto  $P(x, y)$  a lo largo de una curva  $C$  en el plano  $xy$  conforme  $t$  aumenta de  $a$  a  $b$  (figura G.1.). Es decir,  $P(x, y) = P(g(t), f(t))$  es el lugar del punto  $P$  en el instante  $t$ . Bajo la hipótesis  $g(b) \neq g(a)$ , la pendiente de la recta  $L$  que une a los extremos de la curva  $C$  es

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \quad (3)$$

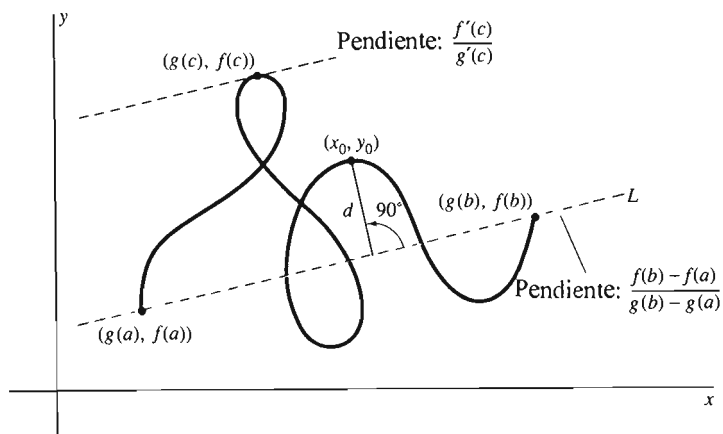


Figura G.1 La idea del teorema del valor medio de Cauchy

Pero si  $g'(c) \neq 0$ , entonces la regla de la cadena implica que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (4)$$

es la pendiente de la recta tangente a la curva  $C$  en el punto  $(g(c), f(c))$ . Pero si  $g(b) \neq g(a)$  y  $g'(c) \neq 0$ , entonces podemos escribir la ecuación (2) como

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad (5)$$

de modo que las dos pendientes en las ecuaciones (3) y (4) son iguales. Así, el teorema del valor medio de Cauchy implica que (bajo nuestras hipótesis) existe un punto en la curva  $C$  donde la recta tangente es *paralela* a la recta que une los extremos de  $C$ . Esto es exactamente lo que dice el teorema del valor medio (ordinario) para una curva  $y=f(x)$  definida de manera explícita. Esta interpretación geométrica motiva la siguiente demostración del teorema del valor medio de Cauchy.

**Demostración** La recta  $L$  que pasa por los extremos en la figura G.1 tiene una ecuación punto-pendiente

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} [x - g(a)],$$

que podemos reescribir en la forma  $Ax + By + C = 0$ , con

$$\begin{aligned} A &= f(b) - f(a), & B &= -[g(b) - g(a)] & \text{y} \\ C &= f(a)[g(b) - g(a)] - g(a)[f(b) - f(a)]. \end{aligned} \quad (6)$$

De acuerdo con el problema 71 al final del capítulo 3, la distancia (perpendicular) del punto  $(x_0, y_0)$  a la recta  $L$  es

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

La figura G.1 sugiere que el punto  $(g(c), f(c))$  maximizará esta distancia  $d$  para los puntos de la curva  $C$ .

Por tanto, esto nos motiva a definir la función auxiliar

$$\phi(t) = Ag(t) + Bf(t) + C, \quad (7)$$

con las constantes  $A$ ,  $B$  y  $C$  definidas en la ecuación (6). Así,  $\phi(t)$  es esencialmente un múltiplo constante de la distancia de  $(g(t), f(t))$  a la recta  $L$  en la figura G.1.

Ahora,  $\phi(a) = 0 = \phi(b)$  (¿por qué?), de modo que el teorema de Rolle (sección 4.3) implica la existencia de un número  $c$  en  $(a, b)$  tal que

$$\phi'(c) = Ag'(c) + Bf'(c) = 0. \quad (8)$$

Sustituimos los valores de  $A$  y  $B$  de la ecuación (6) en (8) y obtenemos la ecuación

$$[f(b) - f(a)]g'(c) - [g(b) - g(a)]f'(c) = 0.$$

Ésta es la misma que la ecuación (2) en la conclusión del teorema del valor medio de Cauchy, con lo que concluimos la demostración.  $\square$

**NOTA** Aunque necesitamos las hipótesis  $g(b) \neq g(a)$  y  $g'(c) \neq 0$  para nuestra interpretación geométrica del teorema, no las utilizamos en la demostración; sólo en la motivación para el método de demostración.

## DEMOSTRACIÓN DE LA REGLA DE L'HÔPITAL

Supongamos que  $f(x)/g(x)$  tiene la forma indeterminada  $0/0$  en  $x = a$ . Podemos apelar a la continuidad de  $f$  y  $g$  para suponer que  $f(a) = 0 = g(a)$ . Es decir, podemos definir simplemente  $f(a)$  y  $g(a) = 0$  en caso de que sus valores en  $x = a$  no estén dados en un principio.

Ahora restringiremos nuestra atención a valores de  $x$  en una vecindad perforada fija de  $a$  donde  $f$  y  $g$  son derivables. Elegimos uno de estos valores de  $x$  y lo consideramos por el momento constante. Después, aplicamos el teorema del valor medio de Cauchy en el intervalo  $[a, x]$ . (Si  $x < a$ , utilizamos el intervalo  $[x, a]$ .) Vemos que existe un número  $z$  entre  $a$  y  $x$  que se comporta como  $c$  en la ecuación (2). Por tanto, en virtud de la ecuación (2), obtenemos la ecuación

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Ahora,  $z$  depende de  $x$ , pero  $z$  está atrapada entre  $x$  y  $a$ , de modo que  $z$  debe tender a  $a$  cuando  $x \rightarrow a$ . Concluimos que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

bajo la hipótesis de que el límite del lado derecho existe. Así, hemos verificado la regla de L'Hôpital en la forma de la ecuación (1).  $\square$

## Apéndice H Demostración de la fórmula de Taylor

Se conocen varias demostraciones diferentes de la fórmula de Taylor (teorema 2 de la sección 11.4), pero ninguna de ellas parece estar bien motivada; cada una requiere cierto "truco" para iniciar la demostración. El truco que utilizaremos aquí, sugerido por C. R. MacCluer, consiste en iniciar introduciendo una función auxiliar  $F(x)$ , definida como sigue:

$$\begin{aligned} F(x) = & f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 \\ & - \dots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n - K(b-x)^{n+1}, \end{aligned} \quad (1)$$

donde la *constante*  $K$  se elige de modo que  $F(a) = 0$ . Para ver que en realidad *existe* tal valor de  $K$ , podríamos sustituir  $x = a$  del lado derecho y  $F(x) = F(a) = 0$  del lado izquierdo en la ecuación (1) y después despejar  $K$  de manera rutinaria, pero no necesitamos hacer esto de manera explícita.

La ecuación (1) permite ver que también  $F(b) = 0$ . Por tanto, el teorema de Rolle (sección 4.3) implica que

$$F'(z) = 0 \quad (2)$$

para algún punto  $z$  del intervalo abierto  $(a, b)$  (bajo la hipótesis de que  $a < b$ ).

Para ver lo que significa la ecuación (2), derivamos ambos lados de la ecuación (1) y encontramos que

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= -f'(x) + [f'(x) - f''(x)(b-x)] \\
 &+ \left[ f''(x)(b-x) - \frac{1}{2!} f^{(3)}(x)(b-x)^2 \right] \\
 &+ \left[ \frac{1}{2!} f^{(3)}(x)(b-x)^2 - \frac{1}{3!} f^{(4)}(x)(b-x)^3 \right] \\
 &+ \dots + \left[ \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1} - \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(x)(b-x)^n \right] \\
 &+ (n+1)K(b-x)^n.
 \end{aligned}$$

Con una inspección cuidadosa de este resultado, vemos que todos los términos, excepto los dos últimos se cancelan en pares. Así, con la suma “telescópica” anterior se obtiene

$$F'(x) = (n+1)K(b-x)^n - \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} (b-x)^n. \quad (3)$$

Por tanto, la ecuación (2) significa que

$$(n+1)K(b-z)^n - \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!} (b-z)^n = 0.$$

En consecuencia, podemos cancelar  $(b-z)^n$  y despejamos para obtener

$$K = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}. \quad (4)$$

Por último, regresamos a la ecuación (1) y sustituimos  $x = a$ ,  $F(x) = 0$  y el valor de  $K$  dado en la ecuación (4). El resultado es la ecuación

$$\begin{aligned}
 0 &= f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - \frac{f''(a)}{2!} (b-a)^2 \\
 &- \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (b-a)^n - \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1},
 \end{aligned}$$

que es equivalente a la fórmula de Taylor requerida, la ecuación (11) de la sección 11.4.  $\square$

## Apéndice I

### Unidades de medida y factores de conversión

#### UNIDADES CIENTÍFICAS MKS

- Longitud* en metros (m), *masa* en kilogramos (kg), *tiempo* en segundos (s)
- Fuerza* en newtons (N); una fuerza de 1 N imparte una aceleración de  $1 \text{ m/s}^2$  a una masa de 1 kg
- Trabajo* en joules (J); 1 J es el trabajo realizado por una fuerza de 1 N actuando a través de una distancia de 1 m
- Potencia* en watts o vatios (W); 1 W es 1 J/s

#### UNIDADES BRITÁNICAS DE INGENIERÍA (fps)

- Longitud* en pies, *fuerza* en libras (lb), *tiempo* en segundos (s)
- Masa* en slugs; 1 lb de fuerza imparte una aceleración de  $1 \text{ pie/s}^2$  a una masa

- de un slug. Una masa de  $m$  slugs en la superficie de la tierra tiene un *peso* de  $w = mg$  libras (lb), donde  $g \approx 32.17$  pies/s<sup>2</sup>
- *Trabajo* en pies · libra, *potencia* en pies · libra/s

## FACTORES DE CONVERSIÓN

1 pulgada = 2.54 cm = 0.0254 m, 1 m  $\approx$  3.2808 pies  
 1 milla = 5280 pies; 60 mi/h = 88 pies/s  
 1 lb  $\approx$  4.4482 N; 1 slug  $\approx$  14.594 kg  
 1 caballo de fuerza (hp) = 550 pies · libra/s  $\approx$  745.7 W

- *Aceleración gravitacional*:  $g \approx 32.17$  pies/s<sup>2</sup>  $\approx$  9.807 m/s<sup>2</sup>  
 □ *Presión atmosférica*: 1 atm es la presión ejercida por una columna de mercurio con 76 cm de alto; 1 atm  $\approx$  14.70 lb/pulgada cuadrada  $\approx 1.013 \times 10^5$  N/m<sup>2</sup>  
 □ *Energía calorífica*: 1 Btu  $\approx$  778 pies · lb  $\approx$  252 cal, 1 cal  $\approx$  4.184 J

## Apéndice J

### Fórmulas de álgebra, geometría y trigonometría

#### PROPIEDADES DE LOS EXPONENTES

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^n = a^n b^n, \quad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m};$$

en particular,

$$a^{1/2} = \sqrt{a}.$$

Si  $a \neq 0$ , entonces

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{y} \quad a^0 = 1.$$

#### FÓRMULA CUADRÁTICA

La ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

tiene las soluciones

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

#### FACTORIZACIÓN

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

$$= (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$$

$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

(El patrón continúa.)

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

(El patrón continúa para exponentes impares.)

### FÓRMULA DEL BINOMIO

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{n-3}b^3 + \dots + nab^{n-1} + b^n$$

si  $n$  es un entero positivo.

### ÁREA Y VOLUMEN

En la figura J.1, los símbolos tienen los siguientes significados:

$A$ : área

$B$ : área de la base

$h$ : altura

$b$ : longitud de la base

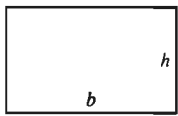
$C$ : circunferencia

$l$ : longitud

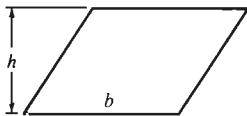
$r$ : radio

$V$ : volumen

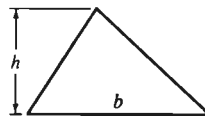
$w$ : ancho



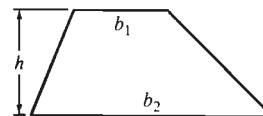
Rectángulo:  $A = bh$



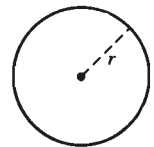
Paralelogramo:  $A = bh$



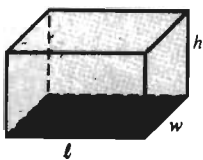
Triángulo:  $A = \frac{1}{2}bh$



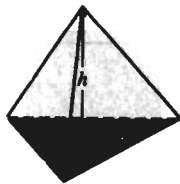
Trapecio:  $A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$



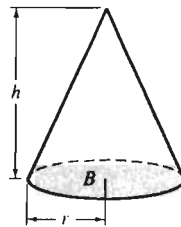
Círculo:  $C = 2\pi r$  y  $A = \pi r^2$



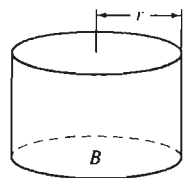
Paralelepípedo rectangular:  
 $V = lwh$



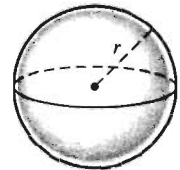
Pirámide:  
 $V = \frac{1}{3}Bh$



Cono circular recto:  
 $V = \frac{1}{3}\pi r^2h = \frac{1}{3}Bh$



Cilindro circular recto:  
 $V = \pi r^2h = Bh$



Esfera:  
 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  y  $A = 4\pi r^2$

Figura J.1 Las formas geométricas básicas

### TEOREMA DE PITÁGORAS

En un triángulo rectángulo con catetos  $a$  y  $b$  e hipotenusa  $c$ ,

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



## FÓRMULAS DE TRIGONOMETRÍA

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen} \theta, \quad \operatorname{cos}(-\theta) = \operatorname{cos} \theta$$

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cos}^2 \theta = 1$$

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta$$

$$\operatorname{cos} 2\theta = \operatorname{cos}^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \beta + \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{cos}(\alpha + \beta) = \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{tan}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tan} \alpha + \operatorname{tan} \beta}{1 - \operatorname{tan} \alpha \operatorname{tan} \beta}$$

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{cos} \theta)$$

$$\operatorname{cos}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{cos} \theta)$$

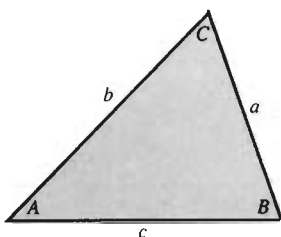


Figura J.2 Un triángulo arbitrario

Para un triángulo arbitrario (figura J.2):

Ley de los cosenos:  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \operatorname{cos} C.$

Ley de los senos:  $\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}.$

## Apéndice K

### El alfabeto griego

A	$\alpha$	alfa	I	$\iota$	iota	P	$\rho$	ro
B	$\beta$	beta	K	$\kappa$	kappa	$\Sigma$	$\sigma$	sigma
$\Gamma$	$\gamma$	gamma	$\Lambda$	$\lambda$	lambda	T	$\tau$	tau
$\Delta$	$\delta$	delta	M	$\mu$	my	Y	$\nu$	ipsilon
E	$\epsilon$	épsilon	N	$\nu$	ny	$\Phi$	$\phi$	fi
Z	$\zeta$	zeta	$\Xi$	$\xi$	xi	X	$\chi$	ji
H	$\eta$	eta	O	$o$	ómicron	$\Psi$	$\psi$	psi
$\Theta$	$\theta$	teta	$\Pi$	$\pi$	pi	$\Omega$	$\omega$	omega

# Respuestas a los problemas impares

## Sección 1.1 (página 11)

1. 14      3. 0.5      5. 25      7. 27      9.  $\frac{22}{7} - \pi$
11. (a)  $-\frac{1}{a}$ ; (b)  $a$ ; (c)  $\frac{1}{\sqrt{a}}$ ; (d)  $\frac{1}{a^2}$
13. (a)  $\frac{1}{a^2 + 5}$ ; (b)  $\frac{a^2}{1 + 5a^2}$ ; (c)  $\frac{1}{a + 5}$ ; (d)  $\frac{1}{a^4 + 5}$
15.  $\frac{1}{3}$       17.  $\pm 3$       19. 100      21.  $3h$
23.  $2ah + h^2$       25.  $-\frac{h}{a(a+h)}$       27.  $\{-1, 0, 1\}$
29.  $\{-1, 1\}$       31.  $R$       33.  $R$       35.  $[\frac{5}{3}, \infty)$
37.  $t \leq \frac{1}{2}$       39. Todos los números reales distintos de 3
41.  $R$       43.  $[0, 16]$
45. Todos los números reales distintos de 0
47.  $C(A) = 2\sqrt{\pi A}$ ,  $A \geq 0$  (o  $A > 0$ )
49.  $C(F) = \frac{5}{9}(F - 32)$ ,  $F > -459.67$
51.  $A(x) = x\sqrt{16 - x^2}$ ,  $0 \leq x \leq 4$  (o  $0 < x < 4$ )
53.  $C(x) = 3x^2 + \frac{1296}{x}$ ,  $x > 0$
55.  $A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$ ,  $r > 0$
57.  $V(x) = x(50 - 2x)^2$ ,  $0 \leq x \leq 25$  (o  $0 < x < 25$ )
59. Perforar 10 pozos nuevos.      61. 0.38,      63. 1.24
65. 0.72      67. 3.21      69. 1.62

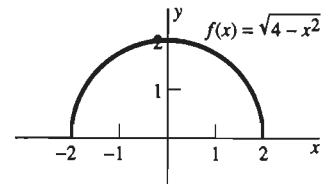
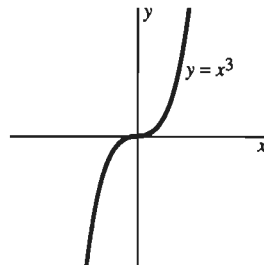
## Sección 1.2 (página 22)

1.  $AB$  y  $BC$  tienen pendiente 1.
3.  $AB$  tiene pendiente  $-2$ , pero  $BC$  tiene pendiente  $-\frac{4}{3}$ .
5.  $AB$  y  $CD$  tienen pendiente  $-\frac{1}{2}$ ;  $BC$  y  $DA$  tienen pendiente 2.
7.  $AB$  tiene pendiente 2 y  $AC$  tiene pendiente  $-\frac{1}{2}$ .
9.  $m = \frac{2}{3}$ ,  $b = 0$       11.  $m = 2$ ,  $b = 3$
13.  $m = -\frac{2}{5}$ ,  $b = \frac{3}{5}$       15.  $y = -5$

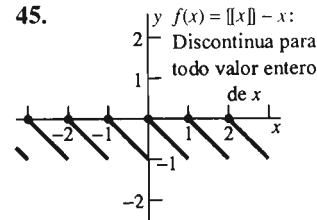
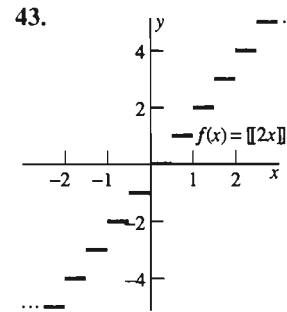
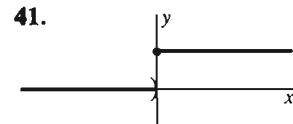
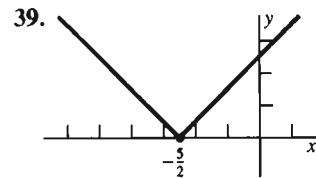
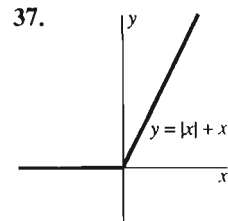
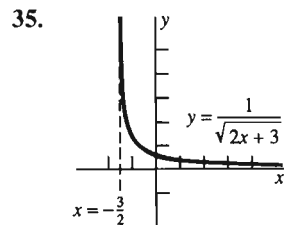
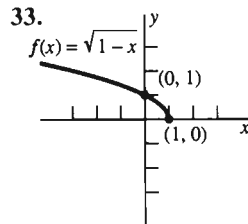
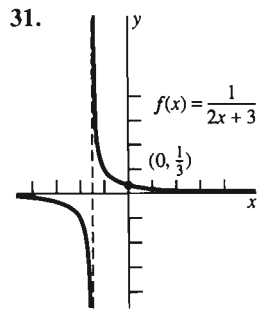
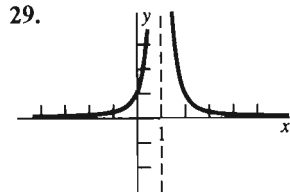
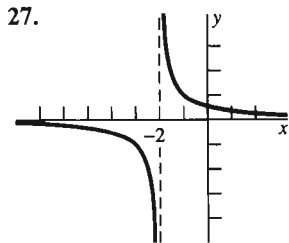
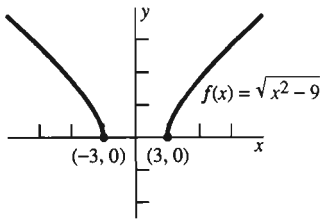
17.  $y - 3 = 2(x - 5)$       19.  $y - 2 = 4 - x$
21.  $y - 5 = -2(x - 1)$       23.  $x + 2y = 13$
25.  $\frac{4}{13}\sqrt{26} \approx 1.568929$
33.  $K = \frac{125F + 57,461}{225}$ ;  $F = -459.688$  cuando  $K = 0$ .
35. 1136 galones/semana      37.  $x = -2.75$ ,  $y = 3.5$
39.  $x = \frac{37}{6}$ ,  $y = -\frac{1}{2}$       41.  $x = \frac{22}{5}$ ,  $y = -\frac{1}{5}$
43.  $x = -\frac{7}{4}$ ,  $y = \frac{33}{8}$       45.  $x = \frac{119}{12}$ ,  $y = -\frac{19}{4}$

## Sección 1.3 (página 30)

1. Centro (2, 0), radio 2
3. Centro (-1, -1), radio 2
5. Centro  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , radio 1
7. Se abre hacia arriba, vértice en (3, 0)
9. Se abre hacia arriba, vértice en (-1, 3)
11. Se abre hacia arriba, vértice en (-2, 3)
13. Círculo, centro (3, -4), radio 5
15. No existen puntos en esta gráfica.
17. La gráfica es el segmento de recta que une e incluye a los puntos (-1, 7) y (1, -3).
19. Parábola, se abre hacia abajo, vértice en (0, 10)
21.      23.



25. El dominio de  $f$  consta de aquellos números  $x$  tales que  $|x| \geq 3$ .



47. (1.5, 2.5)    49. (2.25, 1.75)    51. (2.25, 8.5)  
 53.  $(-\frac{4}{3}, \frac{25}{3})$     55. 144 pies    57. 625

**Sección 1.4 (página 33)**

1.  $(f + g)(x) = x^2 + 3x - 2$ , dominio  $\mathbf{R}$ ;  
 $(f \cdot g)(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ , dominio  $\mathbf{R}$ ; y

$(f/g)(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 2x - 3}$ , dominio  $x \neq 1, -3$

3.  $(f + g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x - 2}$ , dominio  $x \geq 2$ ;  
 $(f \cdot g)(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ , dominio  $x \geq 2$ ;

$(f/g)(x) = \sqrt{\frac{x}{x - 2}}$ , dominio  $x > 2$

5.  $(f + g)(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$ ,

$(f \cdot g)(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{4 - x^2}}$ ,  $(f/g)(x) = \sqrt{4 + 3x^2 - x^4}$ ,

cada una con dominio  $-2 < x < 2$

7.  $(f + g)(x) = x + \text{sen } x$ , dominio  $\mathbf{R}$ ;

$(f \cdot g)(x) = x \text{ sen } x$ , dominio  $\mathbf{R}$ ;  $(f/g)(x) = \frac{x}{\text{sen } x}$ ,

dominio todos los números reales que no son múltiplos enteros de  $\pi$

9.  $(f + g)(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \tan x$ ,  $(f \cdot g)(x) = (x^2 + 1)^{1/2} \tan x$ , ambas con dominio igual a todos los números reales  $x$  tales que  $x$  no es un múltiplo entero impar de  $\pi/2$ ;

$(f/g)(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\tan x}$ , dominio todos los números reales  $x$  tales que  $x$  no es un múltiplo entero de  $\pi/2$

11. Fig. 1.4.20    13. Fig. 1.4.21    15. Fig. 1.4.24

17. Fig. 1.4.23    19. Fig. 1.4.28    21. Fig. 1.4.29

23. Fig. 1.4.30    25. 3    27. 1    29. 0

31. 1    33. 5    35. 3

**Capítulo 1 Problemas diversos (página 47)**

1.  $x \geq 4$     3.  $x \neq \pm 3$     5.  $x \geq 0$     7.  $x \leq \frac{2}{3}$

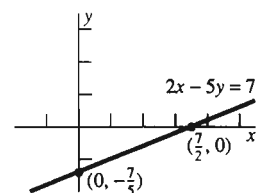
9.  $\mathbf{R}$     11.  $4 \leq p \leq 8$     13.  $2 < l < 4$

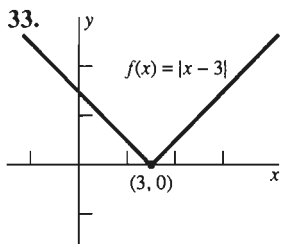
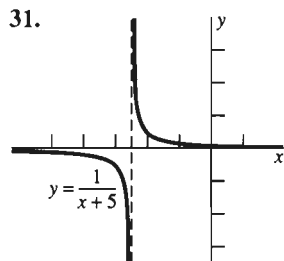
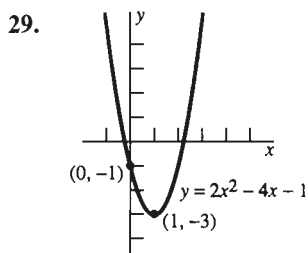
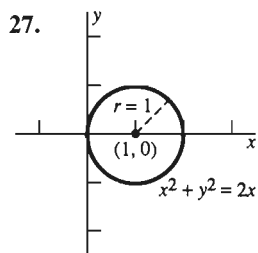
15.  $V(S) = (S/6)^{3/2}$ ,  $0 < S < \infty$

17.  $A = A(P) = \frac{\sqrt{3}}{36} P^2$ ,  $0 < P < \infty$

19.  $y - 5 = 2(x + 3)$     21.  $2y = x - 10$

23.  $x + 2y = 11$     25.





37.  $(-\infty, -2) \cup (3, \infty)$   
 41. -1.140, 6.140  
 45. -5.021, 0.896  
 49.  $(\frac{7}{4}, -\frac{5}{4})$   
 53.  $x \approx 0.4505$   
 57. 3

39.  $(-\infty, -2) \cup (4, \infty)$   
 43. 1.191, 2.309  
 47.  $(\frac{5}{2}, \frac{3}{4})$   
 51.  $(-\frac{33}{16}, \frac{31}{32})$   
 55. 3  
 59. 3

**Sección 2.1 (página 57)**

1. 0    3.  $2x$     5. 4    7.  $4x - 3$     9.  $4x + 6$   
 11.  $2 - \frac{x}{50}$     13.  $8x$     15. (0, 10)    17. (1, 0)  
 19. (50, 25)    21.  $f'(x) = 3$ ;  $y - 5 = 3(x - 2)$   
 23.  $f'(x) = 4x - 3$ ;  $y - 7 = 5(x - 2)$   
 25.  $f'(x) = 2x - 2$ ;  $y - 1 = 2(x - 2)$   
 27.  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ ;  $x + 4y = 4$   
 29.  $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$ ;  $x + 4y = 3$   
 31.  $f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}$ ;  $y - 2 = -2(x - 2)$   
 33.  $\frac{dy}{dx} = 2x$ ;  $y - 4 = -4(x + 2)$ ,  $y - 4 = \frac{1}{4}(x + 2)$   
 35.  $\frac{dy}{dx} = 4x + 3$ ;  $y - 9 = 11(x - 2)$ ,  
 $y - 9 = -\frac{1}{11}(x - 2)$   
 37.  $y(3) = 144$  (pies)    39. 625    41.  $y = 12(x - 3)$   
 43. (1, 1)    45. 12    47. 0.5    49. -1

**Sección 2.2 (página 69)**

1. -12    3. -1    5. 128    7.  $-\frac{1}{3}$     9. 6  
 11.  $16\sqrt{2}$     13. 1    15.  $\frac{1}{4}$     17.  $-\frac{1}{54}$     19. 2  
 21. 4    23.  $-\frac{3}{2}$     25. -32    27. 1    29. 0  
 31. 9    33. 2    35. 2    37. 13

39. No existe    41.  $-\frac{1}{2}x^{-3/2}$   
 43.  $\frac{1}{(2x+1)^2}$     45.  $\frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$   
 49. El límite existe exactamente cuando el número real  $a$  no es un entero.  
 51.  $g(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow 3$ , pero  $g(3) = 1$ .  
 53.  $h(1/2) = 0$ , pero  $h(1/\pi) < 0$ .

**Sección 2.3 (página 80)**

1. 0    3.  $\frac{1}{2}$     5.  $-\infty$  (o "no existe")  
 7. 5    9. No existe    11.  $\frac{1}{3}$     13. 0  
 15. 1    17.  $\frac{1}{2}$     19. 1    21.  $\frac{1}{3}$   
 23.  $\frac{1}{4}$     25.  $\frac{1}{4}$     27. 0    29. 3  
 31. No existe    33. 0    35. 0  
 37.  $+\infty$  (o "no existe")    39. -1    41. 1  
 43. -1    45. 2    47. -1  
 49.  $f(x) \rightarrow +\infty$  cuando  $x \rightarrow 1^+$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$  cuando  $x \rightarrow 1^-$ .  
 51.  $f(x) \rightarrow +\infty$  cuando  $x \rightarrow -1^-$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$  cuando  $x \rightarrow -1^+$ .  
 53.  $f(x) \rightarrow +\infty$  cuando  $x \rightarrow 2^-$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$  cuando  $x \rightarrow -2^+$ .  
 55.  $f(x) \rightarrow +\infty$  cuando  $x \rightarrow 1$ .  
 57.  $f(x) \rightarrow -\infty$  cuando  $x \rightarrow -2^+$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$  cuando  $x \rightarrow -2^-$ .  
 $y f(x) \rightarrow -\frac{1}{4}$  cuando  $x \rightarrow 2$ .  
 59. Si  $n$  es un entero, entonces  $f(x) \rightarrow 2$  cuando  $x \rightarrow n$ .  
 61. Si  $n$  es un entero par, entonces el límite del lado derecho en  $n$  es 1 y el límite del lado izquierdo en  $n$  es -1. Si  $n$  es un entero impar, entonces el límite del lado derecho en  $n$  es -1 y el límite del lado izquierdo en  $n$  es 1.  
 63. El límite del lado derecho en el entero  $n$  es 1; el límite del lado izquierdo en  $n$  es 0.

**Sección 2.4 (página 90)**

1.  $f(g(x)) = -4x^2 - 12x - 8$ ;  $g(f(x)) = -2x^2 + 5$   
 3.  $f(g(x)) = \sqrt{x^4 + 6x^2 + 6}$ ,  $g(f(x)) = x^2$   
 5.  $f(g(x)) = g(f(x)) = x$   
 7.  $f(g(x)) = \sin x^3$ ;  $g(f(x)) = \sin^3 x$   
 9.  $f(g(x)) = 1 + \tan^2 x$ ;  $g(f(x)) = \tan(1 + x^2)$

Los problemas 11 a 19 tienen muchas respuestas correctas. Daremos solamente la más natural.

11.  $k = 2$ ,  $g(x) = 2 + 3x$     13.  $k = \frac{1}{2}$ ,  $g(x) = 2x - x^2$   
 15.  $k = \frac{3}{2}$ ,  $g(x) = 5 - x^2$     17.  $k = -1$ ,  $g(x) = x + 1$   
 19.  $k = -\frac{1}{2}$ ,  $g(x) = x + 10$   
 21.  $\mathbb{R}$     23.  $(-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$   
 25.  $\mathbb{R}$     27.  $(-\infty, 5) \cup (5, +\infty)$   
 29.  $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$     31.  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$   
 33.  $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$     35. (-2, 2)  
 37.  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$   
 39. En todo número real distinto de los múltiplos enteros de  $\pi/2$

41. R  
 43. Discontinuidad no removible en  $x = -3$   
 45. Discontinuidad removible en  $x = 2$ ; sea  $f(2) = \frac{1}{4}$ . Discontinuidad no removible en  $x = -2$ .  
 47. Discontinuidades no removibles en  $x = \pm 1$   
 49. Discontinuidad no removible en  $x = 17$   
 51. Discontinuidad removible en  $x = 0$ ; sea  $f(0) = 0$   
 59. Dado:  $f(x) = x^3 - 4x + 1$ . Valores de  $f(x)$ :

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-14	1	4	1	-2	1	16

63. Discontinuidad en  $x = 3n$  para todo entero  $n$

### Capítulo 2 Problemas diversos (página 92)

1. 4      3. 0      5.  $-\frac{5}{3}$       7. -2      9. 0  
 11. 4      13. 8      15.  $\frac{1}{6}$       17.  $-\frac{1}{54}$       19. -1  
 21. 1      23. No existe      25.  $+\infty$  (o "no existe")  
 27.  $+\infty$       29.  $-\infty$       31. 3      33.  $\frac{3}{2}$   
 35. 0      37.  $\frac{3}{4}$       39. 2  
 41.  $f'(x) = 4x$ ;  $y - 5 = 4(x - 1)$   
 43.  $f'(x) = 6x + 4$ ;  $y - 2 = 10(x - 1)$   
 45.  $f'(x) = 4x - 3$ ;  $y = x - 1$   
 47.  $4x + 3$       49.  $\frac{1}{(3-x)^2}$       51.  $1 + \frac{1}{x^2}$   
 53.  $-\frac{2}{(x-1)^2}$       55.  $a = 3 \pm \sqrt{5}$   
 57.  $g(x) = x - x^2$  o  $g(x) = x^2 - x$   
 59.  $g(x) = x + 1$       61.  $g(x) = \sqrt{x^4 + 1}$   
 63. Discontinuidad no removible en  $x = -1$ ; discontinuidad removible en  $x = 1$ ; sea  $f(1) = \frac{1}{7}$ .  
 65. Discontinuidad no removible en  $x = -3$ ; discontinuidad removible en  $x = 1$ ; sea  $f(1) = \frac{3}{4}$ .

### Sección 3.1 (página 105)

1.  $f'(x) = 4$       3.  $h'(z) = 25 - 2z$   
 5.  $\frac{dy}{dx} = 4x + 3$       7.  $\frac{dz}{du} = 10u - 3$   
 9.  $\frac{dx}{dy} = -10y + 17$       11.  $f'(x) = 2$   
 13.  $f'(x) = 2x$       15.  $f'(x) = \frac{-2}{(2x+1)^2}$   
 17.  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$       19.  $f'(x) = \frac{1}{(1-2x)^2}$   
 21.  $x(0) = 100$   
 23.  $x(2.5) = 99$       25.  $x(-2) = 120$   
 27.  $y(2) = 64$  (pies)      29.  $y(3) = 194$  (pies)

31.  $\frac{dA}{dC} = \frac{C}{2\pi}$       33. 500 pies; 10s  
 35. (a) 2.5 meses; (b) 50 ardillas por mes  
 37. Muy aproximadamente:  $u(20) = 50$  millas/hora;  $u(40) = 62$  millas/hora.  
 41.  $V'(30) = -25\pi/12$  pulgadas cúbicas/segundo; es decir, el aire sale a razón de 6.545 pulgadas cúbicas/segundo.  
 43. (a)  $V'(6) = -144\pi$  cm<sup>3</sup>/h; (b)  $-156\pi$  cm<sup>3</sup>/h  
 45. Cuando  $t = 2$  s,  $v = 0$  m/s

### Sección 3.2 (página 115)

1.  $f'(x) = 6x - 1$   
 3.  $f'(x) = 2(3x - 2) + 3(2x + 3)$   
 5.  $h'(x) = 3x^2 + 6x + 3$       7.  $f'(y) = 12y^2 - 1$   
 9.  $g'(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$   
 11.  $h'(x) = -\frac{3(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$   
 13.  $g'(t) = (t^2+1)(3t^2+2t) + (t^3+t^2+1)(2t)$   
 15.  $g'(z) = -\frac{1}{2z^2} + \frac{2}{3z^3}$   
 17.  $g'(y) = 30y^4 + 48y^3 + 48y^2 - 8y - 6$   
 19.  $g'(t) = \frac{3-t}{(t+1)^3}$       21.  $v'(t) = -\frac{3}{(t-1)^4}$   
 23.  $g'(x) = -\frac{6x^3+15}{(x^3+7x-5)^2}$   
 25.  $g'(x) = \frac{4x^3-13x^2+12x}{(2x-3)^2}$   
 27.  $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 30x^4 - 6x^{-5}$   
 29.  $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^5+4x^2-15}{x^4}$   
 31.  $\frac{dy}{dx} = 3 + \frac{1}{2x^3}$       33.  $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-1-4x^2}{3x^2(x-1)^2}$   
 35.  $\frac{dy}{dx} = \frac{x^4+31x^2-10x-36}{(x^2+9)^2}$   
 37.  $\frac{dy}{dx} = \frac{30x^5(5x^5-8)}{(15x^5-4)^2}$       39.  $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$   
 41.  $12x - y = 16$       43.  $x + y = 3$   
 45.  $5x - y = 10$       47.  $18x - y = -25$   
 49.  $3x + y = 0$   
 51. (a) Se contrae; (b)  $-0.06427$  cm<sup>3</sup>/°C  
 53.  $14,400\pi \approx 45,239$  cm<sup>3</sup>/cm  
 55.  $y = 3x + 2$   
 57. Suponga que alguna recta es tangente a  $(a, a^2)$  y a  $(b, b^2)$ . Utilice la derivada para mostrar que  $a = b$ .

$$59. x = \frac{n-1}{n}x_0$$

$$65. g'(x) = 17(x^3 - 17x + 35)^{16}(3x^2 - 17)$$

$$71. 0, \pm\sqrt{3}$$

### Sección 3.3 (página 124)

$$1. \frac{dy}{dx} = 15(3x+4)^4 \quad 3. \frac{dy}{dx} = -3(3x-2)^{-2}$$

$$5. \frac{dy}{dx} = 3(x^2 + 3x + 4)^2(2x + 3)$$

$$7. \frac{dy}{dx} = -4(2-x)^3(3+x)^7 + 7(2-x)^4(3+x)^6$$

$$9. \frac{dy}{dx} = -\frac{6x+22}{(3x-4)^4}$$

$$11. \frac{dy}{dx} = 12[1 + (1+x)^3]^3(1+x)^2$$

$$13. \frac{dy}{dx} = -\frac{6}{x^3}\left(\frac{1}{x^2} + 1\right)^2$$

$$15. \frac{dy}{dx} = 48[1 + (4x-1)^4]^2(4x-1)^3$$

$$17. \frac{dy}{dx} = \frac{12(1-x^{-4})^2}{x^9} - \frac{4(1-x^{-4})^3}{x^5}$$

$$= -\frac{4(x^{12} - 6x^8 + 9x^4 - 4)}{x^{17}}$$

$$19. \frac{dy}{dx} = -4x^{-5}(x^{-2} - x^{-8})^3$$

$$+ 3x^{-4}(8x^{-9} - 2x^{-3})(x^{-2} - x^{-8})^2$$

$$= -\frac{2(x^3 - 1)^2(x^3 + 1)^2(5x^6 - 14)}{x^{29}}$$

$$21. u(x) = 2x - x^2, n = 3;$$

$$f'(x) = 3(2x - x^2)^2(2 - 2x)$$

$$23. u(x) = 1 - x^2, n = -4; f'(x) = 8x(1 - x^2)^{-5}$$

$$25. u(x) = \frac{x+1}{x-1}, n = 7; f'(x) = -\frac{14(x+1)^6}{(x-1)^8}$$

$$27. g'(y) = 1 + 10(2y - 3)^4$$

$$29. F'(s) = 3(s - s^{-2})^2(1 + 2s^{-3})$$

$$31. f'(u) = 8u(u+1)^3(u^2+1)^3 + 3(u+1)^2(u^2+1)^4$$

$$33. h'(v) = 2(v-1)(v^2-2v+2)(v^{-3})(2-v)^{-3}$$

$$35. F'(z) = 10(4 - 25z^4)(3 - 4z + 5z^5)^{-11}$$

$$37. \frac{dy}{dx} = 4(x^3)^3 \cdot 3x^2 = 12x^{11}$$

$$39. \frac{dy}{dx} = 2(x^2 - 1)(2x) = 4x^3 - 4x$$

$$41. \frac{dy}{dx} = 4(x+1)^3 = 4x^3 + 12x^2 + 12x + 4$$

$$43. \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} \quad 45. f'(x) = 3x^2 \cos x^3$$

$$47. g'(z) = 6(\sin 2z)^2 \cos 2z \quad 49. 40 \pi \text{ pulgadas cuadradas/segundo}$$

$$51. 40 \text{ pulgadas cuadradas/segundo}$$

$$53. 600 \text{ pulgadas cúbicas/hora} \quad 55. -18$$

$$57. 400\pi \approx 1256.64 \text{ cm}^3/\text{s} \quad 59. 5 \text{ cm}$$

$$61. \text{Tiempo total de fusión: } 2/(2-4^{1/3}) \approx 4.85 \text{ h; se funde completamente cerca de las 2:50:50 P.M. de ese día.}$$

### Sección 3.4 (página 129)

$$1. f'(x) = 10x^{3/2} - x^{-3/2} \quad 3. f'(x) = (2x+1)^{-1/2}$$

$$5. f'(x) = -3x^{-3/2} - \frac{3}{2}x^{1/2} \quad 7. f'(x) = 3(2x+3)^{1/2}$$

$$9. f'(x) = 6x(3-2x^2)^{-5/2} \quad 11. f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$$

$$13. f'(x) = 2x(2x^2+1)^{-1/2}$$

$$15. f'(t) = 3t^2(2t^3)^{-1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{2t}$$

$$17. f'(x) = \frac{3}{2}(2x^2 - x + 7)^{1/2}(4x - 1)$$

$$19. g'(x) = -\frac{4}{3}(x-2x^3)^{-7/3}(1-6x^2)$$

$$21. f'(x) = (1-x^2)^{1/2} - x^2(1-x^2)^{-1/2}$$

$$= (1-2x^2)(1-x^2)^{-1/2}$$

$$23. f'(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right)^{-1/2} \cdot \frac{(t^2-1)(2t) - (2t)(t^2+1)}{(t^2-1)^2}$$

$$= -2t(t^2+1)^{-1/2}(t^2-1)^{-3/2}$$

$$25. f'(x) = 3\left(x - \frac{1}{x}\right)^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$27. f'(v) = -\frac{v+2}{2v^2\sqrt{v+1}}$$

$$29. f'(x) = \frac{1}{3}(1-x^2)^{-2/3}(-2x)$$

$$31. f'(x) = (3-4x)^{1/2} - 2x(3-4x)^{-1/2}$$

$$33. f'(x) = (-2x)(2x+4)^{4/3} + \frac{8}{3}(1-x^2)(2x+4)^{1/3}$$

$$35. g'(t) = -2t^{-2}(1+t^{-1})(3t^2+1)^{1/2}$$

$$+ 3t(1+t^{-1})^2(3t^2+1)^{-1/2} = \frac{3t^4 - 3t^2 - 2t - 2}{t^3\sqrt{3t^2+1}}$$

$$37. f'(x) = \frac{2(3x+4)^5 - 15(3x+4)^4(2x-1)}{(3x+4)^{10}}$$

$$= \frac{23-24x}{(3x+4)^6}$$

$$39. f'(x) = \frac{(3x+4)^{1/3}(2x+1)^{-1/2} - (3x+4)^{-2/3}(2x+1)^{1/2}}{(3x+4)^{2/3}}$$

$$= \frac{x+3}{(3x+4)^{4/3}(2x+1)^{1/2}}$$

$$41. h'(y) = \frac{(1+y)^{-1/2} - (1-y)^{-1/2}}{2y^{5/3}} - \frac{5[(1+y)^{1/2} + (1-y)^{1/2}]}{3y^{8/3}}$$

$$= \frac{(7y-10)\sqrt{1+y} - (7y+10)\sqrt{1-y}}{6y^{8/3}\sqrt{1-y^2}}$$

$$43. g'(t) = \frac{1}{2}[t + (t + t^{1/2})^{1/2}]^{-1/2} \times [1 + \frac{1}{2}(t + t^{1/2})^{-1/2}(1 + \frac{1}{2}t^{-1/2})]$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{t}}}{2\sqrt{t + \sqrt{t + \sqrt{t}}}}$$

45. No tiene tangentes horizontales; tangente vertical en (0, 0)  
 47. Tangente horizontal si  $x = \frac{1}{3}$  y  $y = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ ; tangente vertical en (0, 0)  
 49. No tiene tangentes horizontales ni verticales  
 51.  $\pi^2/32 \approx 0.3084$  (s/pie)  
 53.  $(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$  y  $(-2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$   
 55.  $x + 4y = 18$   
 57.  $3x + 2y = 5$  y  $3x - 2y = -5$   
 59. La ecuación (3) es una *identidad*, y si dos funciones tienen gráficas idénticas en un intervalo, entonces sus derivadas también son idénticas en ese intervalo.

### Sección 3.5 (página 138)

1. Máx.: 2; no hay mín.      3. No hay máx.; mín.: 0  
 5. Máx.: 2; mín.: 0      7. Máx.: 2; mín.: 0  
 9. Máx.: -1/6; mín.: -1/2      11. Máx.: 7; mín.: -8  
 13. Máx.: 3; mín.: -5      15. Máx.: 9; mín.: 0  
 17. Máx.: 52; mín.: -2      19. Máx.: 5; mín.: 4  
 21. Máx.: 5; mín.: 1      23. Máx.: 9; mín.: -16  
 25. Máx.: 10; mín.: -22      27. Máx.: 56; mín.: -56  
 29. Máx.: 13; mín.: 5      31. Máx.: 17; mín.: 0  
 33. Máx.: 3/4; mín.: 0  
 35. Máx.: 1/2 (en  $x = -1$ ); mín.: -1/6 (en  $x = 3$ )  
 37. Máx.:  $f(1/\sqrt{2}) = 1/2$ ; mín.:  $f(-1/\sqrt{2}) = -1/2$   
 39. Máx.:  $f(3/2) = 3 \cdot 2 - 4/3$ ; mín.:  $f(3) = -3$   
 41. Considere los casos  $A = 0$  y  $A \neq 0$ .  
 47. (c)    49. (d)    51. (a)

### Sección 3.6 (página 149)

1. 25 y 25      3. 1250      5. 500 pulgadas cúbicas  
 7. 1152    9. 250    11. 11, 250 yardas cuadradas    13. 128

15. Aproximadamente 3.9665 °C      17. 1000 cm<sup>3</sup>  
 19. 0.25 m<sup>3</sup> (todos cubos, sin cajas que no tengan tapa)  
 21. 2 piezas iguales proporcionan un área total mínima de 200 pulgadas cuadradas; ningún corte proporciona un cuadrado de área máxima 400 pulgadas cuadradas.  
 23. 30, 000 m<sup>2</sup>  
 25. Aproximadamente 9259.26 pulgadas cúbicas  
 27. Cinco prensas  
 29. El valor de  $x$  que minimiza es  $-2 + 10/3\sqrt{6}$  pulgadas. Si redondeamos a enteros, utilizamos  $x = 6$  pulgadas de aislamiento para un ahorro anual de \$285.  
 31. \$1.10 o \$1.15      33. Radio  $2/3R$ , altura  $1/3H$   
 35. Sea  $R$  el radio del círculo y recuerde que  $R$  es constante.  
 37.  $\frac{2000\pi\sqrt{3}}{27}$       39. Max.: 4, mín.:  $\sqrt[3]{16}$       41.  $\frac{1}{2}\sqrt{3}$   
 43. Cada tabla tiene ancho  $\frac{-3\sqrt{2} + \sqrt{34}}{8} \approx 0.19853$ , altura  $\frac{\sqrt{7 - \sqrt{17}}}{2} \approx 0.848071$ , y área  $\frac{\sqrt{7 - \sqrt{17}}(-3\sqrt{2} + \sqrt{34})}{4} \approx 0.673500$ .  
 45.  $2/3\sqrt{3} \approx 1.1547$  km desde el punto más cercano a la isla.  
 47.  $1/3\sqrt{3}$       49.  $x$  real  $\approx 3.45246$   
 51. Para minimizar la suma, elija el radio de la esfera como  $5[10/\pi + 6]^{1/2}$  y la longitud de la arista del cubo como  $10[10/\pi + 6]^{1/2}$ . Para maximizar la suma, elija la longitud de la arista del cubo como cero.

### Sección 3.7 (página 161)

1.  $f'(x) = 6 \sin x \cos x$       3.  $f'(x) = \cos x - x \sin x$   
 5.  $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$   
 7.  $f'(x) = \cos^3 x - 2 \sin^2 x \cos x$   
 9.  $g'(t) = 4(1 + \sin t)^3 \cos t$   
 11.  $g'(t) = \frac{\sin t - \cos t}{(\sin t + \cos t)^2}$   
 13.  $f'(x) = 2 \sin x + 2x \cos x - 6x \cos x + 3x^2 \sin x$   
 15.  $f'(x) = 3 \cos 2x \cos 3x - 2 \sin 2x \sin 3x$   
 17.  $g'(t) = 3t^2 \sin^2 2t + 4t^3 \sin 2t \cos 2t$   
 19.  $g'(t) = -\frac{5}{2}(\cos 3t + \cos 5t)^{3/2}(3 \sin 3t + 5 \sin 5t)$   
 21.  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \sqrt{x} \cos \sqrt{x}$   
 23.  $\frac{dy}{dx} = 2x \cos(3x^2 - 1) - 6x^3 \sin(3x^2 - 1)$   
 25.  $\frac{dy}{dx} = 2 \cos 2x \cos 3x - 3 \sin 2x \sin 3x$   
 27.  $\frac{dy}{dx} = -\frac{3 \sin 5x \sin 3x + 5 \cos 5x \cos 3x}{\sin^2 5x}$

$$29. \frac{dy}{dx} = 4x \operatorname{sen} x^2 \cos x^2 \quad 31. \frac{dy}{dx} = \frac{\cos 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$33. \frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x^2 + 2x^2 \cos x^2$$

$$35. \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} x^{-1/2} \operatorname{sen} x^{1/2} + \frac{1}{2} \cos x^{1/2}$$

$$37. \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} x^{-1/2} (x - \cos x)^3 + 3x^{1/2} (x - \cos x)^2 (1 + \operatorname{sen} x)$$

$$39. \frac{dy}{dx} = -2x [\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x^2)] \cos x^2$$

$$41. \frac{dy}{dx} = 7x^6 \sec^2 x^7 \quad 43. \frac{dy}{dx} = 7 \sec^2 x \tan^6 x$$

$$45. \frac{dy}{dx} = 5x^7 \sec^2 5x + 7x^6 \tan 5x$$

$$47. \frac{dy}{dx} = \frac{\sec \sqrt{x} + \sqrt{x} \sec \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$49. \frac{dy}{dx} = \frac{2 \cot \frac{1}{x^2} \csc \frac{1}{x^2}}{x^3}$$

$$51. \frac{dy}{dx} = \frac{5 \tan 3x \sec 5x \tan 5x - 3 \sec 5x \sec^2 3x}{\tan^2 3x} = 5 \cot 3x \sec 5x \tan 5x - 3 \csc^2 3x \sec 5x$$

$$53. \frac{dy}{dx} = \sec x \csc x + x \sec x \tan x \csc x - x \sec x \csc x \cot x = x \sec^2 x + \sec x \csc x - x \csc^2 x$$

$$55. \frac{dy}{dx} = [\sec(\operatorname{sen} x) \tan(\operatorname{sen} x)] \cos x$$

$$57. \frac{dy}{dx} = \frac{\sec x \cos x - \operatorname{sen} x \sec x \tan x}{\sec^2 x} = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

$$59. \frac{dy}{dx} = -\frac{5 \csc^2 5x}{2\sqrt{1 + \cot 5x}} \quad 63. \pi/4$$

$$65. \pi/18 \sec^2 5\pi/18 \approx 0.4224 \text{ mi/s (casi de 1521 mi/h)}$$

$$67. \frac{2000\pi}{27} \text{ pies/segundo (casi de 158.67 mi/h)}$$

$$69. \pi/3$$

$$71. \frac{8}{3} \pi R^3, \text{ ¡el doble del volumen de la esfera!}$$

$$73. \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$75. \text{Sugerencia: } A(\theta) = \frac{s^2(\theta - \operatorname{sen} \theta)}{2\theta^2}$$

### Sección 3.8 (página 169)

$$1. \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \quad 3. \frac{dy}{dx} = -\frac{16x}{25y} \quad 5. \frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{y}{x}}$$

Respuestas a los problemas impares

$$7. \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3} \quad 9. \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2xy - y^2}{3y^2 + 2xy + x^2}$$

$$11. \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}; 3x - 4y = 25$$

$$13. \frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2xy}{x^2}; 3x + 4y = 10$$

$$15. \frac{dy}{dx} = -\frac{2xy + y^2}{2xy + x^2}; y = -2$$

$$17. \frac{dy}{dx} = \frac{25y - 24x}{24y - 25x}; 4x = 3y$$

$$19. \frac{dy}{dx} = -\frac{y^4}{x^4}; x + y = 2$$

$$21. \frac{dy}{dx} = \frac{5x^4 y^2 - y^3}{3xy^2 - 2x^3 y}, \text{ de modo que si } y \neq 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5x^4 y - y^2}{3xy - 2x^5}; \text{ la pendiente en } (1, 2) \text{ es } \frac{3}{2}.$$

$$23. \frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2}{y^2 - 2}, \text{ pero no existen tangentes horizontales (véase el problema 63).}$$

$$25. (2, 2 \pm 2\sqrt{2}) \quad 27. y = 2(x - 3), y = 2(x + 3)$$

29. Tangentes horizontales en los cuatro puntos en que  $|x| = 1/4\sqrt{6}$  y  $|y| = 1/4\sqrt{2}$ ; tangentes verticales en los dos puntos  $(-1, 0)$  y  $(1, 0)$

$$31. \frac{4}{5\pi} \approx 0.25645 \text{ pies/s} \quad 33. \frac{32\pi}{125} \approx 0.80425 \text{ m/h}$$

$$35. 20 \text{ cm}^2/\text{s} \quad 37. 0.25 \text{ cm/s} \quad 39. 6 \text{ pies/s}$$

$$41. 384 \text{ mi/h}$$

43. (a) Cerca de 0.047 pies/minuto; (b) cerca de 0.083 pies/minuto

$$45. \frac{400}{9} \approx 44.44 \text{ pies/segundo}$$

47. Creciente en  $16\pi \text{ cm}^3/\text{segundo}$

49. 6000 millas/hora

51. (a)  $\frac{11}{15} \sqrt{21} \approx 3.36$  pies/segundo hacia abajo; (b)  $\frac{242}{15} \sqrt{119}$  pies/segundo hacia abajo

53. Cuando  $t = 12$  minutos;  $32\sqrt{13} \approx 115.38 \text{ mi}$ .

$$55. -\frac{50}{81\pi} \approx -0.1965 \text{ pies/s}$$

$$57. -\frac{10}{81\pi} \approx -0.0393 \text{ pulgadas/min}$$

$$59. 300\sqrt{2} \approx 424.26 \text{ mi/h} \quad 61. \frac{1}{30} \text{ pies/s}$$

$$63. x^3 + y^3 - 3xy + 1 = \frac{1}{2}(x + y + 1)[(x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2].$$

### Sección 3.9 (página 181)

*Nota:* En esta sección, sus resultados pueden diferir de estas respuestas en la última o las dos últimas cifras decimales, debido a diferencias en las calculadoras o en los métodos para resolver las ecuaciones.

$$1. 2.2361 \quad 3. 2.5119 \quad 5. 0.3028 \quad 7. -0.7402$$



9. 0.7391    11. 1.2361    13. 2.3393    15. 2.0288

17. 2.1544    19. 1.8022    21. (b) 1.25992

23. 0.45018    27. 0.755 (0.75487766624669276)

29. -1.8955, 0 y 1.8955

31. -1.3578, 0.7147 y 1.2570 son las tres soluciones reales.

33. 0.8655    35. 3.4525    37. 0.2261

39.  $\alpha_1 \approx 2.029 \approx 1.29 \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha_2 \approx 4.913 \approx 3.13 \frac{\pi}{2}$  (además

$\alpha_3 \approx 5.08 \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha_4 \approx 7.06 \frac{\pi}{2}$ )

**Capítulo 3 Problemas diversos (página 186)**

1.  $\frac{dy}{dx} = 2x - \frac{6}{x^3}$     3.  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3x^{4/3}}$

5.  $\frac{dy}{dx} = 7(x-1)^6(3x+2)^9 + 27(x-1)^7(3x+2)^8$

7.  $\frac{dy}{dx} = 4(3x - \frac{1}{2}x^{-2})^3(3 + x^{-3})$

9.  $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} = -\frac{9}{x^2}$

11.  $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2}(x^3 - x)^{-5/2}(3x^2 - 1)$

13.  $\frac{dy}{dx} = \frac{-2(1+x^2)^3}{(x^4+2x^2+2)^2} \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$   
 $= \frac{4x(1+x^2)}{(x^4+2x^2+2)^2}$

15.  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}[x^{1/2} + (2x)^{1/3}]^{4/3}[\frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{2}{3}(2x)^{-2/3}]$

17.  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{(u-1) - (u+1)}{(u-1)^2} \cdot \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}$   
 $= -\frac{1}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}-1)^2}$

19.  $\frac{dy}{dx} = \frac{1-2xy^2}{2x^2y-1}$

21.  $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x + \sqrt{\sqrt{3x+2x}}}}$

23.  $\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{2/3}$

25.  $\frac{dy}{dx} = -\frac{18(x^3 + 3x^2 + 3x + 3)^2}{(x+1)^{10}}$

27.  $\frac{dy}{dx} = \frac{(2 \cos x + \cos^2 x + 1) \sin x}{2(1 + \cos x)^2 \sqrt{\frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}}}$

29.  $\frac{dy}{dx} = \frac{3 \cos 2x \cos 3x + 4 \sin 2x \sin 3x}{2(\sin 3x)^{3/2}}$

31.  $\frac{dy}{dx} = (\sin^3 2x)(2)(\cos 3x)(-\sin 3x)(3)$   
 $+ (\cos^2 3x)(3 \sin^2 2x)(2 \cos 2x)$   
 $= 6 \cos 3x \cos 5x \sin^2 2x$

33.  $\frac{dy}{dx} = 5 \left[ \sin^4 \left( x + \frac{1}{x} \right) \right] \left[ \cos \left( x + \frac{1}{x} \right) \right] \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right)$

35.  $\frac{dy}{dx} = [\cos^2(x^4 + 1)^{1/3}] [-\sin(x^4 + 1)^{1/3}](x^4 + 1)^{-2/3}(4x^3)$

37.  $x = 1$     39.  $x = 0$     41. 0.5 pies/minuto

43.  $\frac{1}{3}$     45.  $\frac{1}{4}$     47. 0

49.  $h'(x) = -x(x^2 + 25)^{-3/2}$     51.  $h'(x) = \frac{5}{3}(x-1)^{2/3}$

53.  $h'(x) = -2x \sin(x^2 + 1)$

55.  $\frac{dV}{dS} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{S}{\pi}}$

57.  $\frac{2}{\cos^2 50^\circ} \cdot \frac{\pi}{36} \approx 0.4224$  millas/segundo, cerca de 1521

millas/hora

59.  $R^2$

61. Área mínima:  $(36\pi V^2)^{1/3}$ , obtenida al fabricar una esfera de radio  $(3V/4\pi)^{1/3}$ ; área máxima:  $(72\pi V^2)^{1/3}$ , obtenida al fabricar dos esferas iguales de radio  $\frac{1}{2}(3V/\pi)^{1/3}$

63.  $32\pi R^3/81$     65.  $M/2$     67.  $36 \text{ pies}^3$     69.  $3\sqrt{3}$

73. 2 millas desde el punto de la orilla más cercano al primer pueblo

75. (a)  $\frac{m^2 v^2}{64(m^2 + 1)}$ ; (b) cuando  $m = 1$ , por tanto cuando

$\alpha = \pi/4$

77. 2.6458    79. 2.3714    81. -0.3473

83. 0.7402    85. -0.7391    87. -1.2361

89. Aproximadamente 1.54785 pies

91. -2.7225, 0.8013, 2.3100

97. 4 pulgadas cuadradas/segundo

99.  $-50/(9\pi) \approx -1.7684$  pies/minuto    101. 1 pulgada/minuto

**Sección 4.2 (página 196)**

1.  $(6x + 8x^{-3}) dx$     3.  $[1 + \frac{3}{2}x^2(4 - x^3)^{-1/2}] dx$

5.  $[6x(x-3)^{3/2} + \frac{9}{2}x^2(x-3)^{1/2}] dx$

7.  $[(x^2 + 25)^{1/4} + \frac{1}{2}x^2(x^2 + 25)^{-3/4}] dx$

9.  $-\frac{1}{2}x^{-1/2} \sin x^{1/2} dx$

11.  $(2 \cos^2 2x - 2 \sin^2 2x) dx$

13.  $(\frac{2}{3}x^{-1} \cos 2x - \frac{1}{3}x^{-2} \sin 2x) dx$

15.  $(\sin x + x \cos x)(1 - x \sin x)^{-2} dx$

17.  $f(x) \approx 1 + x$     19.  $f(x) \approx 1 + 2x$

21.  $f(x) \approx 1 - 3x$     23.  $f(x) \approx x$

25.  $3 - \frac{2}{27} \approx 2.926$       27.  $2 - \frac{1}{32} \approx 1.969$   
 29.  $\frac{95}{1336} \approx 0.06185$   
 $1 + \frac{\pi}{90}$   
 31.  $\frac{1 + \frac{\pi}{90}}{\sqrt{2}} \approx 0.7318$       33.  $\sin \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{90} \cos \frac{\pi}{2} = 1.000$   
 35.  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$       37.  $\frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$   
 41.  $-4$  pulgadas<sup>2</sup>      43.  $-405\pi/2$  cm<sup>3</sup>  
 45. 10 pies      47. 6 W  
 49.  $25\pi \approx 78.54$  pulgadas<sup>3</sup>      51.  $4\pi \approx 12.57$  m<sup>2</sup> cúbicas

### Sección 4.3 (página 206)

- Creciente para  $x < 0$ , decreciente para  $x > 0$ ; (c)
- Decreciente para  $x < -2$ , creciente para  $x > -2$ ; (f)
- Creciente para  $x < -1$  y para  $x > 2$ , decreciente en  $(-1, 2)$ ; (d)
- $f(x) = 2x^2 + 5$
- $f(x) = 2 - 1/x$
- Creciente en  $\mathbf{R}$
- Creciente para  $x < 0$ , decreciente para  $x > 0$
- Creciente para  $x < \frac{3}{2}$ , decreciente para  $x > \frac{3}{2}$
- Creciente en  $(-1, 0)$  y para  $x > 1$ , decreciente para  $x < -1$  y en  $(0, 1)$
- Creciente en  $(-2, 0)$  y para  $x > 1$ , decreciente para  $x < -2$  y en  $(0, 1)$
- Creciente para  $x < 2$ , decreciente para  $x > 2$
- Creciente para  $x < -\sqrt{3}$ , para  $-\sqrt{3} < x < 1$  y para  $x > 3$ ; decreciente para  $1 < x < \sqrt{3}$  y para  $\sqrt{3} < x < 3$ .
- $f(0) = 0 = f(2)$ ,  $f'(x) = 2x - 2$ ;  $c = 1$
- $f(-1) = 0 = f(1)$ ,  $f'(x) = -\frac{4x}{(1+x^2)^2}$ ;  $c = 0$
- $f'(0)$  no existe
- $f(0) \neq f(1)$       33.  $c = -\frac{1}{2}$       35.  $c = \frac{35}{27}$
- La pendiente promedio es  $\frac{1}{3}$ , pero  $|f'(x)| = 1$  donde  $f'(x)$  existe.
- La pendiente promedio es 1, pero  $f'(x) = 0$  cuando existe.
- Si  $g(x) = x^5 + 2x - 3$ , entonces  $g'(x) > 0$  para toda  $x$  en  $[0, 1]$  y  $g(1) = 0$ . Así,  $x = 1$  es la única raíz de la ecuación en el intervalo dado.
- Si  $g(x) = x^4 - 3x - 20$ , entonces  $g(2) = -10$  y  $g(3) = 52$ . Si  $x$  está en  $[2, 3]$ , entonces  

$$g'(x) = 4x^3 - 3 \geq 4 \cdot 2^3 - 3 = 29 > 0,$$
 así,  $g$  es una función creciente en  $[2, 3]$ . Por tanto,  $g(x)$  puede tener a lo más una raíz en  $[2, 3]$ . Tiene al menos una solución, pues  $g(2) < 0 < g(3)$  y  $g$  es continua.
- Observe que  $f'(x) = \frac{3}{2}(-1 + \sqrt{x+1})$ .

47. Suponga que  $f'(x)$  tiene la forma

$$a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}.$$

Construya un polinomio tal que  $p'(x) = f'(x)$ . Concluya que  $f(x) = p(x) + C$  en  $[a, b]$ .

### Sección 4.4 (página 216)

- Mínimo global en  $x = 2$
- Máximo local en  $x = 0$ , mínimo local en  $x = 2$
- No tiene un valor extremo en  $x = 1$
- Mínimo local en  $x = -2$ , máximo local en  $x = 5$
- Mínimo global en  $x = \pm 1$ , máximo local en  $x = 0$
- Máximo local en  $x = -1$ , mínimo local en  $x = 1$
- Mínimo local en  $x = 1$
- Máximo local en  $x = 0$
- Máximo global en  $(\pi/2, 1)$
- Máximo global en  $(\pi/2, 1)$ , mínimo global en  $(-\pi/2, -1)$
- Mínimo global en  $(0, 0)$
- Máximo global en  $(\pi, \pi)$ , mínimo global en  $(-\pi, -\pi)$
- Máximo global en  $(\pi/4, 1)$       27.  $-10$  y  $10$
- $(1, 1)$
- 9 pulgadas de ancho, 18 pulgadas de largo, 6 pulgadas de alto
- Radio  $5\pi^{1/3}$  cm, altura  $10\pi^{1/3}$  cm
- Base 5 pulgadas por 5 pulgadas, altura 2.5 pulgadas
- Radio  $(25/\pi)^{1/3} \approx 1.9965$  pulgadas, altura 4 veces el radio
- $(1/2\sqrt{6}, 3/2)$  y  $(-1/2\sqrt{6}, 3/2)$ ;  $(0, 0)$  no es el punto más cercano.      43. 8 cm
- $L = \sqrt{20 + 12\sqrt[3]{4} + 24\sqrt[3]{2}} \approx 8.324$  m
- Altura  $(6V)^{1/3}$ , arista de la base  $(9/2 V^2)^{1/6}$

### Sección 4.5 (página 225)

- (c)      3. (d)
- Parábola que se abre hacia arriba; mínimo global en  $(1, 2)$
- Creciente  $|x| > 2$ , decreciente en  $(-2, 2)$ ; máximo local en  $(-2, 16)$ , mínimo local en  $(2, -16)$
- Creciente para  $x < 1$  y para  $x > 3$ , decreciente en  $(1, 3)$ ; máximo local en  $(1, 4)$ , mínimo local en  $(3, 0)$
- Creciente para toda  $x$ , sin extremos
- Decreciente para  $x < -2$  y en  $(-0.5, 1)$ , creciente en  $(-2, -0.5)$  y para  $x > 1$ ; mínimo global en  $(-2, 0)$  y  $(1, 0)$ , máximo local en  $(-0.5, 5.0625)$
- Creciente para  $0 < x < 1$ , decreciente para  $x > 1$ ; máximo global en  $(1, 2)$ , no tiene gráfica para  $x < 0$
- Creciente para  $|x| > 1$ , decreciente para  $|x| < 1$ , pero con una tangente horizontal en  $(0, 0)$ ; máximo local en  $(-1, 2)$ , mínimo local en  $(1, -2)$

19. Decreciente para  $x < -2$  y en  $(0, 2)$ , creciente para  $x > 2$  y en  $(-2, 0)$ ; mínimo global en  $(-2, -9)$  y en  $(2, -9)$ , máximo local en  $(0, 7)$

21. Decreciente para  $x < \frac{3}{4}$ , creciente para  $x > \frac{3}{4}$

23. Decreciente en  $(-2, 1)$ , creciente para  $x < -2$  y para  $x > 1$ , máximo local en  $(-2, 20)$ , mínimo local en  $(1, -7)$

25. Creciente para  $x < 0.6$  y para  $x > 0.8$ , decreciente en  $(0.6, 0.8)$ ; máximo local en  $(0.6, 16.2)$ , mínimo local en  $(0.8, 16.0)$

27. Creciente para  $x > 2$  y en  $(-1, 0)$ , decreciente para  $x < -1$  y en  $(0, 2)$ ; máximo local en  $(0, 8)$ , mínimo local en  $(-1, 3)$ , mínimo global en  $(2, -24)$

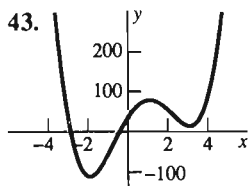
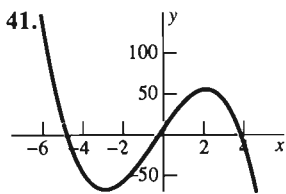
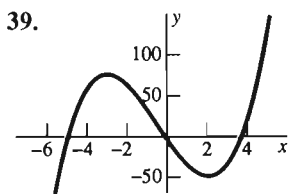
29. Creciente para  $|x| > 2$ , decreciente para  $|x| < 2$ ; máximo local en  $(-2, 64)$ , mínimo local en  $(2, -64)$

31. Creciente en todo punto, sin extremos; la gráfica pasa por el origen; la pendiente mínima  $\frac{9}{7}$  aparece en  $x = -\frac{1}{7}$

33. Creciente para  $x < -\sqrt{2}$  y en  $(0, \sqrt{2})$ , decreciente para  $x > \sqrt{2}$  y en  $(-\sqrt{2}, 0)$ ; el máximo global 16 aparece cuando  $x = \pm\sqrt{2}$ , mínimo local en  $(0, 0)$

35. Creciente para  $x < 1$ , decreciente para  $x > 1$ ; máximo global en  $(1, 3)$ , tangente vertical en  $(0, 0)$

37. Decreciente en  $(0.6, 1)$ , creciente para  $x < 0.6$  y para  $x > 1$ ; mínimo local y un vértice en  $(1, 0)$ , máximo local en  $(0.6, 0.3527)$  (ordenadas aproximadas)



45. (b)  $x^3 - 3x + 3 \approx (x + 2.1038)(x^2 - 2.1038x + 1.42599)$ ; (c)  $x \approx 1.0519 \pm 0.5652i$

#### Sección 4.6 (página 238)

1.  $8x^3 - 9x^2 + 6, 24x^2 - 18x, 48x - 18$
3.  $-8(2x - 1)^{-3}, 48(2x - 1)^{-4}, -384(2x - 1)^{-5}$
5.  $4(3t - 2)^{1/3}, 4(3t - 2)^{-2/3}, -8(3t - 2)^{-5/3}$
7.  $(y + 1)^{-2}, -2(y + 1)^{-3}, 6(y + 1)^{-4}$
9.  $-\frac{1}{4}t^{-3/2} - (1 - t)^{-4/3}, \frac{3}{8}t^{-5/2} - \frac{4}{3}(1 - t)^{-7/3}, -\frac{15}{16}t^{-7/2} - \frac{28}{9}(1 - t)^{-10/3}$
11.  $3 \cos 3x, -9 \sin 3x, -27 \cos 3x$
13.  $\cos^2 x - \sin^2 x, -4 \sin x \cos x, 4 \sin^2 x - 4 \cos^2 x$

15.  $\frac{x \cos x - \sin x}{x^2}, \frac{2 \sin x - 2x \cos x - x^2 \sin x}{x^3}, \frac{3x^2 \sin x - x^3 \cos x + 6x \cos x - 6 \sin x}{x^4}$

17.  $-\frac{2x + y}{x + 2y}, -\frac{18}{(x + 2y)^3}$     19.  $-\frac{1 + 2x}{3y^2}, \frac{2y^3 - 42}{9y^5}$

21.  $\frac{y}{\cos y - x}, \frac{2y \cos y - 2xy + y^2 \sin y}{(\cos y - x)^3}$

23.  $(-3, 81), (5, -175), (1, -47)$

25.  $(\frac{9}{2}, -\frac{941}{2}), (-\frac{7}{2}, \frac{1107}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{83}{2})$

27.  $(3\sqrt{3}, -492), (-3\sqrt{3}, -492), (0, 237), (3, -168), (-3, -168)$

29.  $(\frac{16}{3}, -\frac{181,144}{81}), (0, 1000), (4, -1048)$

31. Mínimo local en  $(2, -1)$ ; sin puntos de inflexión

33. Máximo local en  $(-1, 3)$ , mínimo local en  $(1, -1)$ ; punto de inflexión en  $(0, 1)$

35. Sin extremos locales; punto de inflexión en  $(0, 0)$

37. Sin extremos locales; punto de inflexión en  $(0, 0)$

39. Máximo local en  $(1/2, 1/16)$ , mínimo local en  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$ ; las abscisas de los puntos de inflexión son las raíces de  $6x^2 - 6x + 1 = 0$  y los puntos de inflexión están (aproximadamente) en  $(0.79, 0.03)$  y  $(1.21, 0.03)$ .

41. Máximo global en  $(\pi/2, 1)$ , mínimo global en  $(3\pi/2, -1)$ ; punto de inflexión en  $(\pi, 0)$

43. Punto de inflexión en  $(0, 0)$

45. Máximo global en  $(0, 1)$  y  $(\pi, 1)$ , mínimo global en  $(\pi/2, 0)$ ; puntos de inflexión en  $(-\pi/4, 1/2), (\pi/4, 1/2), (3\pi/4, 1/2)$  y  $(5\pi/4, 1/2)$

47. Máximo global en  $(\pi/4, \sqrt{4})$ , mínimo global en  $(5\pi/4, -\sqrt{2})$ ; puntos de inflexión en  $(3\pi/4, 0)$  y  $(7\pi/4, 0)$

49. Máximo global en  $(\arctan(0.5), \sqrt{5}) \approx (0.4636, 2.2361)$ , mínimo global en  $(\pi + \arctan(0.5), -\sqrt{5}) \approx (3.6052, -2.2361)$ ; puntos de inflexión en  $(\pi - \arctan(2), 0)$  y en  $(2\pi - \arctan(2), 0)$

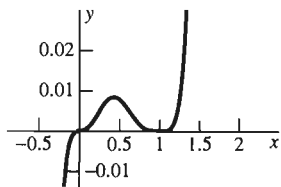
63. Creciente para  $x < -1$  y para  $x > 2$ , decreciente en  $(-1, 2)$ , máximo local en  $(-1, 10)$ , mínimo local en  $(2, -17)$ , punto de inflexión en  $(\frac{1}{2}, -\frac{7}{2})$

65. Creciente para  $x < -2$  y en  $(0, 2)$ , decreciente para  $x > 2$  y en  $(-2, 0)$ , máximos globales en  $(\pm 2, 22)$ , mínimo local en  $(0, 6)$ , puntos de inflexión donde  $x^2 = 4/3$  ( $y = 134/9$ )

67. Decreciente para  $x < -1$  y en  $(0, 2)$ , creciente para  $x > 2$  y en  $(-1, 0)$ , mínimo local en  $(-1, -6)$ , máximo local en  $(0, -1)$ , mínimo global en  $(2, -33)$ , puntos de inflexión con coordenadas aproximadas  $(1.22, -19.36)$  y  $(-0.55, -3.68)$

69. Máximo local en  $(\frac{3}{7}, \frac{6,912}{823,347}) \approx (0.43, 0.0084)$ , mínimo local en  $(1, 0)$ , puntos de inflexión en  $(0, 0)$  y en las dos soluciones de  $7x^2 - 6x + 1 = 0$ : aproximadamente  $(0.22, 0.0042)$  y  $(0.63, 0.0047)$ . Véase la gráfica.

69. continuación



71. La gráfica es creciente en todo punto, con una tangente vertical y punto de inflexión en  $(0, 1)$ ; la otra intersección con el eje es  $(-1, 0)$  y no hay extremos

73. Mínimo global en  $(0, 0)$ , creciente para toda  $x > 0$ , punto de inflexión en  $(1, 4)$ , cóncava hacia arriba para  $x > 1$ , tangente vertical en el origen

75. Creciente para  $x < 1$ , decreciente para  $x > 1$ , tangente vertical y punto de inflexión en  $(0, 0)$ , otro punto de inflexión en  $(-2, -7.56)$  (ordenada aproximada), máximo global en  $(1, 3)$

77. (c)                      79. (b)                      81. (d)

89.  $a = 3\rho V^2 \approx 3,583,858.8$ ,  $b = \frac{V}{3} = 42.7$ ,

$$R = \frac{8\rho V}{3T} \approx 81.80421$$

Sección 4.7 (página 249)

1. 1                      3. 3                      5. 2                      7. 1  
 9. 4                      11. 0                      13. 2  
 15.  $+\infty$  (o "no existe")                      17. (g)  
 19. (a)                      21. (f)                      23. (j)                      25. (l)                      27. (k)

29. Sin puntos críticos ni puntos de inflexión, asíntota vertical  $x = 3$ , asíntota horizontal  $y = 0$ , única intersección en  $(0, -\frac{2}{3})$

31. Sin puntos críticos ni puntos de inflexión, asíntota vertical  $x = -2$ , asíntota horizontal  $y = 0$ , única intersección con el eje en  $(0, \frac{3}{4})$

33. Sin puntos críticos ni puntos de inflexión, asíntota vertical  $x = \frac{3}{2}$ , asíntota horizontal  $y = 0$

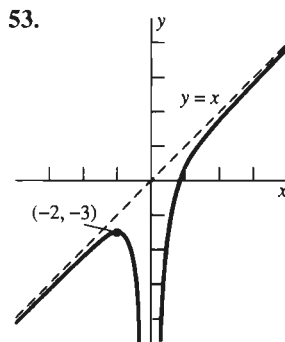
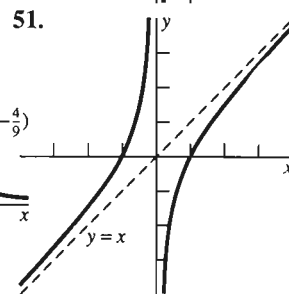
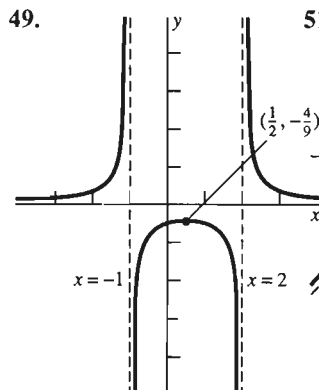
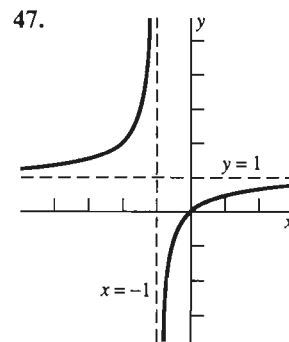
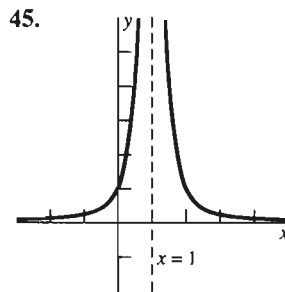
35. Mínimo global en  $(0, 0)$ , puntos de inflexión donde  $3x^2 = 1$  ( $y = \frac{1}{4}$ ), asíntota horizontal  $y = 1$

37. Máximo local en  $(0, -\frac{1}{3})$ , sin puntos de inflexión, asíntotas verticales  $x = \pm 3$ , asíntota horizontal  $y = 0$

39. Máximo local en  $(-\frac{1}{2}, -\frac{4}{25})$ , asíntota horizontal  $y = 0$ , asíntota vertical  $x = -3$  y  $x = 2$ , sin puntos de inflexión

41. Mínimo local en  $(1, 2)$  máximo local en  $(-1, -2)$ , sin puntos de inflexión, asíntota vertical  $x = 0$ ; la recta  $y = x$  es también una asíntota

43. Mínimo local en  $(2, 4)$ , máximo local en  $(0, 0)$ , sin puntos de inflexión, asíntotas  $x = 1$  y  $y = x + 1$



55. Mínimo local en  $(1, 3)$ , punto de inflexión en  $(\sqrt[3]{-2}, 0)$ , asíntota vertical  $x = 0$

Capítulo 4 Problemas diversos (página 250)

1.  $dy = 3(4x - x^2)^{1/2}(2 - x) dx$
2.  $dy = -2(x - 1)^{-2} dx$
3.  $dy = (2x \cos x^{1/2} - \frac{1}{2} x^{3/2} \sin x^{1/2}) dx$
7.  $\frac{12,801}{160} = 80.00625$  (valor real: 80.00624975588 aproximadamente)
9.  $\frac{128,192}{125} = 1025.536$  (valor real: 1025.537037 aproximadamente)
11.  $\frac{601}{60} \approx 10.016667$  (valor real: 10.016639 aproximadamente)
13. 132.5 (valor real: 132.574507 aproximadamente)
15. 2.03125 (valor real: 2.030543185 aproximadamente)
17. 7.5 (pulgadas cúbicas)                      19.  $10\pi \approx 31.416$  (cm<sup>3</sup>)

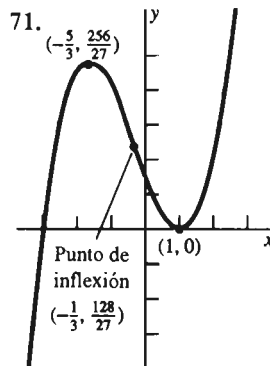
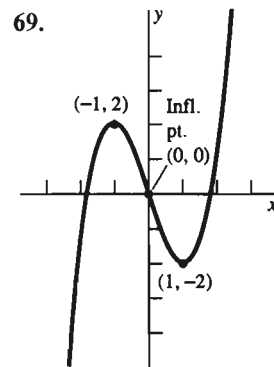
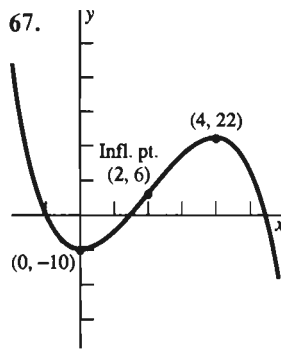
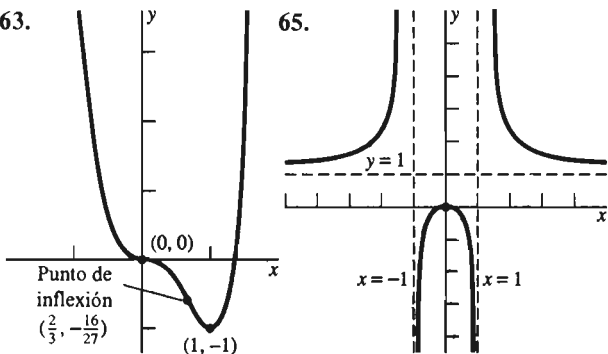
21.  $\pi/96 \approx 0.0327$  s    23.  $c = \sqrt{3}$     25.  $c = 1$   
 27.  $c = \sqrt[4]{2.2}$   
 29. Decreciente para  $x < 3$ , creciente para  $x > 3$ , mínimo global en  $(3, -5)$ ; cóncava hacia arriba en todo punto  
 31. Creciente en todo punto, sin extremos  
 33. Creciente para  $x < \frac{1}{4}$ , decreciente para  $x > \frac{1}{4}$ , tangente vertical en  $(0, 0)$ , máximo global en  $x = \frac{1}{4}$

35.  $3x^2 - 2, 6x, 6$   
 37.  $-(t^{-2}) + 2(2t + 1)^{-2}, 2t^{-3} - 8(2t + 1)^{-3}, -6t^{-4} + 48(2t + 1)^{-4}$   
 39.  $3t^{1/2} - 4t^{1/3}, \frac{3}{2}t^{-1/2} - \frac{4}{3}t^{-2/3}, -\frac{3}{4}t^{-3/2} + \frac{8}{9}t^{-5/3}$   
 41.  $-4(t - 2)^{-2}, 8(t - 2)^{-3}, -24(t - 2)^{-4}$   
 43.  $-\frac{4}{3}(5 - 4x)^{-2/3}, -\frac{32}{9}(5 - 4x)^{-5/3}, -\frac{640}{27}(5 - 4x)^{-8/3}$

45.  $\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{2/3}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2y^{1/3}}{3x^{5/3}}$   
 47.  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}(5y^4 - 4)}, \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{20y^3\sqrt{x} + (5y^4 - 4)^2}{4x\sqrt{x}(5y^4 - 4)^3}$

49.  $\frac{dy}{dx} = \frac{5y - 2x}{2y - 5x}$   
 51.  $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{3y^2 - x^2 - 1}$

53. Mínimo global en  $(2, -48)$ , intersecciones con el eje  $x$  en 0 y (aproximadamente) 3.1748, sin puntos de inflexión ni asíntotas; cóncava hacia arriba en todas partes  
 55. Máximo local en  $(0, 0)$ , mínimo global cuando  $x^2 = \frac{4}{3}$  ( $y = -\frac{32}{27}$ ), puntos de inflexión cuando  $x^2 = \frac{4}{3}$  ( $y = -\frac{96}{123}$ ), sin asíntotas  
 57. Máximo global en  $(3, 3)$ , puntos de inflexión cuando  $x = 6$  y  $(4, 0)$  (y una tangente vertical en el último punto), sin asíntotas  
 59. Máximo local en  $(0, -\frac{1}{4})$ , sin puntos de inflexión, asíntota horizontal  $y = 1$ , asíntotas verticales  $x = \pm 2$   
 61. El punto de inflexión tiene como abscisa la única solución real de  $x^3 + 6x^2 + 4 = 0$ , aproximadamente  $-6.10724$ .



73. Valor máximo 1 en  $x = -1$   
 75. Base  $15 \times 30$ , altura 10  
 77. Base  $5 \times 10$ , altura 8  
 79.  $100 \cdot (2/9)^{2/5} \approx 54.79$  mi/h  
 81. Dos tangentes horizontales, cuando  $x \approx 0.42, y \approx \pm 0.62$ ; intersecciones con los ejes en  $(0, 0), (1, 0)$  y  $(2, 0)$ ; tangente vertical en cada intersección con los ejes; puntos de inflexión correspondientes a la única solución positiva de  $3x^2(x - 2)^2 = 4$ ; es decir,  $x \approx 2.46789, y \approx \pm 1.30191$ ; sin asíntotas  
 83. 240 pies    85.  $2\sqrt{2A(n + 2)}$  pies  
 87. No hay máximo ni mínimo  
 89. 288 pulgadas cuadradas  
 91.  $270 \text{ cm}^2$   
 93. En ambos casos,  $m = 1$  y  $b = -\frac{2}{3}$ .

Sección 5.2 (página 266)

1.  $x^3 + x^2 + x + C$     3.  $x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^4 + C$   
 5.  $-\frac{3}{2}x^{-2} + \frac{4}{3}x^{5/2} - x + C$     7.  $t^{3/2} + 7t + C$   
 9.  $\frac{3}{5}x^{5/3} - 16x^{-1/4} + C$     11.  $x^4 - 2x^2 + 6x + C$   
 13.  $7x + C$     15.  $\frac{1}{5}(x + 1)^5 + C$   
 17.  $-\frac{1}{8}(x - 10)^{-6} + C$   
 19.  $\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{5}x^{5/2} + \frac{2}{7}x^{7/2} + C$   
 21.  $\frac{2}{21}x^3 - \frac{3}{14}x^2 - \frac{5}{7}x^{-1} + C$     23.  $\frac{1}{54}(9t + 11)^6 + C$   
 25.  $-7(x + 77)^{-1} + C$   
 27.  $\frac{1}{2} \sin 10x + 2 \cos 5x + C$

29.  $\frac{3 \operatorname{sen} \pi t}{\pi} + \frac{\operatorname{sen} 3\pi t}{3\pi} + C$   
 33.  $\frac{1}{2}(x - \operatorname{sen} x \cos x) + C$ ;  $\frac{1}{2}(x + \operatorname{sen} x \cos x) + C$   
 35.  $y = f(x) = x^2 + x + 3$   
 37.  $y = f(x) = \frac{2}{3}(x^{3/2} - 8)$   
 39.  $y = f(x) = 2\sqrt{x+2} - 5$   
 41.  $y = f(x) = \frac{3}{4}x^4 - 2x^{-1} + \frac{2}{3}$   
 43.  $y = f(x) = \frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{7}{4}$   
 45.  $y = f(x) = 2\sqrt{x-13} - 2$

47. 144 pies; 6 segundos      49. 144 pies  
 51. 5 segundos; 112 pies/segundo  
 53.  $\sqrt{60} \approx 7.75$  s;  $32\sqrt{60} \approx 247.87$  pies/segundo  
 55. 120 pies/segundo  
 57. 5 segundos; -160 pies/segundo  
 59. 400 pies  
 61.  $1/4(-5 + 2\sqrt{145}) \approx 4.77$  s;  $16\sqrt{145} \approx 192.6655$  pies/segundo  
 63.  $\frac{544}{3}$  pies/segundo      65. 22 pies/s<sup>2</sup>  
 67. Aproximadamente 886.154 pies  
 69.  $5\sqrt{210} \approx 72.5$  mi/h

### Sección 5.3 (página 278)

1.  $\sum_{i=1}^5 i^2$       3.  $\sum_{n=1}^5 \frac{1}{n}$       5.  $\sum_{j=1}^6 \frac{1}{2^j}$       7.  $\sum_{k=1}^5 \left(\frac{2}{3}\right)^k$   
 9. 190      11. 1165      13. 224      15. 350  
 17. 338,350      19.  $\frac{1}{3}$       21.  $n^2$       23.  $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}$   
 25.  $\frac{33}{2}, \frac{39}{2}$       27.  $\frac{6}{25}, \frac{11}{25}$       29.  $\frac{378}{25}, \frac{513}{25}$       31.  $\frac{81}{400}, \frac{121}{400}$   
 35.  $\frac{n(n+1)}{2n^2} \rightarrow \frac{1}{2}$  cuando  $n \rightarrow \infty$   
 37.  $\frac{81n^2(n+1)^2}{4n^4} \rightarrow \frac{81}{4}$  cuando  $n \rightarrow \infty$   
 39.  $5n \cdot \frac{1}{n} - \frac{3n(n+1)}{2n^2} \rightarrow \frac{7}{2}$  cuando  $n \rightarrow \infty$

### Sección 5.4 (página 286)

1.  $\int_1^3 (2x-1) dx$       3.  $\int_0^{10} (x^2+4) dx$   
 5.  $\int_4^9 \sqrt{x} dx$       7.  $\int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx$   
 9.  $\int_0^{1/2} \operatorname{sen} 2\pi x dx$       11. 0.44      13. 1.45  
 15. 19.5      17. 58.8      19.  $-\pi/6$       21. 0.24  
 23.  $\frac{137}{60} \approx 2.28333$       25. 16.5      27. 26.4      29.  $\pi/6$   
 31. 0.33      33.  $\frac{6086}{3465} \approx 1.75462$       35. 18      37. 40.575  
 39. 0      41. 1.83753      43.  $\frac{8}{3}$       45. 12      47. 30

### Sección 5.5 (página 295)

1.  $\frac{55}{12}$       3.  $\frac{49}{60}$       5.  $-\frac{1}{20}$       7.  $\frac{1}{4}$       9.  $\frac{16}{3}$       11. 24

13. 0      15.  $\frac{32}{3}$       17. 0      19.  $\frac{93}{5}$       21.  $\frac{17}{6}$   
 23.  $\frac{28}{3}$       25.  $\frac{52}{5}$       27.  $\frac{122}{9}$       29.  $\frac{1}{4}$       31.  $\frac{2}{5}$   
 33.  $-\frac{1}{3}$       35.  $4/\pi$       37. 0      39.  $\frac{1}{2}$       41.  $\frac{2}{3}$   
 43.  $25\pi/4 \approx 19.635$

47.  $1000 + \int_0^{30} V'(t) dt = 160$  (gal)

49. Sea  $Q = \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.4} + \frac{1}{1.6} + \frac{1}{1.8}\right)(0.2) \approx 0.5456$

e  $I = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$ . Entonces  $Q + 0.1 \leq I \leq Q + 0.2$ .

Por tanto,  $0.64 < I < 0.75$ .

### Sección 5.6 (página 304)

1.  $\frac{16}{5}$       3.  $\frac{26}{3}$       5. 0      7.  $\frac{125}{4}$       9.  $\frac{14}{9}$       11. 0  
 13. 4      15.  $\frac{1}{3}$       17.  $-\frac{22}{81} \approx -0.271605$       19. 0  
 21.  $\frac{35}{24} \approx 1.458333$       23. 0      25. 4      27.  $\frac{38}{3}$   
 29.  $\frac{31}{20}$       31.  $\frac{81}{4} + \frac{81}{4} = \frac{81}{2}$   
 33. Altura promedio:  $\frac{800}{3} \approx 266.67$  pies; velocidad promedio: -80 pies/segundo  
 35.  $\frac{5000}{3} \approx 1666.67$  (L)      37.  $\frac{200}{3}$       39.  $\pi/3$   
 41.  $f'(x) = (x^2+1)^{17}$       43.  $h'(z) = (z-1)^{1/3}$   
 45.  $f'(x) = -x - x^{-1}$       47.  $G'(x) = (x+4)^{1/2}$   
 49.  $G'(x) = (x^3+1)^{1/2}$       51.  $f'(x) = 3 \operatorname{sen} 9x^2$   
 53.  $f'(x) = 2x \operatorname{sen} x^2$       55.  $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$   
 57.  $y(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$       59.  $y(x) = 10 + \int_5^x \sqrt{1+t^2} dt$

61. La integral no existe.

### Sección 5.7 (página 311)

1.  $\frac{1}{7}(x+1)^7 + C$       3.  $-\frac{1}{24}(4-3x)^8 + C$   
 5.  $\frac{2}{7}\sqrt{7x+5} + C$       7.  $-\frac{1}{\pi} \cos(\pi x + 1) + C$   
 9.  $\frac{1}{2} \sec 2\theta + C$       11.  $\frac{1}{3}(x^2-1)^{3/2} + C$   
 13.  $-\frac{1}{9}(2-3x^2)^{3/2} + C$       15.  $\frac{1}{6}(x^4+1)^{3/2} + C$   
 17.  $\frac{1}{6} \operatorname{sen} 2x^3 + C$       19.  $-\frac{1}{5}(x^3+5)^{-3} + C$   
 21.  $-\frac{1}{4} \cos^4 x + C$       23.  $\frac{1}{4} \tan^4 \theta + C$   
 25.  $2 \operatorname{sen} \sqrt{x} + C$   
 27.  $\frac{1}{10}(x+1)^{10} + C = \frac{1}{10}(x^2+2x+1)^5 + C$   
 29.  $\frac{1}{4}(6t+t^3)^{4/3} + C$       31.  $\frac{5}{72}$       33.  $\frac{98}{3}$       35.  $\frac{1192}{15}$   
 37.  $\frac{15}{128}$       39.  $\frac{62}{15}$       41.  $\frac{128}{15}$       43.  $\frac{1}{2\pi}$   
 45.  $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + C$       47.  $\frac{\pi}{2}$   
 49.  $-x + \tan x + C$

**Sección 5.8 (página 320)**

1.  $\frac{2}{3}$     3.  $\frac{16}{3}$     5.  $+\frac{1}{4}$     7.  $\frac{1}{4}$     9.  $+\frac{16}{3}$     11.  $\frac{1}{4}$   
 13.  $\frac{1}{20}$     15.  $\frac{4}{9}$     17.  $\frac{32}{3}$     19.  $\frac{128}{3}\sqrt{2}$     21.  $\frac{500}{3}$   
 23.  $\frac{64}{3}$     25.  $\frac{500}{3}$     27.  $\frac{4}{3}$     29.  $\frac{1}{12}$     31.  $\frac{16}{3}$   
 33.  $\frac{16}{3}$     35.  $\frac{27}{2}$     37.  $\frac{320}{3}$     39.  $\frac{8}{15}$     41.  $\frac{37}{12}$   
 47.  $\frac{253}{6}$     49.  $f(x) = 5x^4$     51.  $f(x) = \frac{1}{2}x$

**Sección 5.9 (página 333)**

1.  $T_4 = 8$ ; valor real: 8    3.  $T_5 \approx 0.65$ ; valor real:  $\frac{2}{3}$   
 5.  $T_3 = 0.98$ ; valor real: 1    7.  $M_4 = 8$ ; valor real: 8  
 9.  $M_5 \approx 0.67$ ; valor real:  $\frac{2}{3}$   
 11.  $M_3 \approx 1.01$ ; valor real: 1  
 13.  $T_4 = 8.75$ ;  $S_4 \approx 8.6667$ ; valor real:  $\frac{26}{3}$   
 15.  $T_4 \approx 0.0973$ ;  $S_4 \approx 0.0940$ ; valor real: 0.09375  
 17.  $T_6 \approx 3.2599$ ;  $S_6 \approx 3.2411$ ; valor real: aproximadamente 3.2413  
 19.  $T_8 \approx 8.5499$ ;  $S_8 \approx 8.5509$ ; valor real: aproximadamente 8.5507  
 21. (a) 3.0200; (b) 3.0717    23. (a) 2519; (b) 2521  
 25. (a) 2.09; (b) 2.15    27. 19

**Capítulo 5 Problemas diversos (página 337)**

1.  $\frac{1}{3}x^3 + 2x^{-1} - \frac{5}{2}x^{-2} + C$   
 3.  $-\frac{1}{30}(1 - 3x)^{10} + C$     5.  $\frac{3}{16}(4x + 9)^{4/3} + C$   
 7.  $\frac{1}{24}(x^4 + 1)^6 + C$     9.  $-\frac{3}{8}(1 - x^2)^{4/3} + C$   
 11.  $\frac{7}{5}\sin 5x + \frac{5}{7}\cos 7x + C$   
 13.  $\frac{1}{6}(1 + x^4)^{3/2} + C$     15.  $C - \frac{2}{1 + \sqrt{x}}$   
 17.  $\frac{1}{12}\sin 4x^3 + C$     19.  $\frac{1}{30}(x^2 + 1)^{15} + C$   
 21.  $\frac{2}{5}(4 - x)^{5/2} - \frac{8}{3}(4 - x)^{3/2} + C$   
 23.  $\sqrt{1 + x^4} + C$     25.  $y(x) = x^3 + x^2 + 5$   
 27.  $y(x) = \frac{1}{12}(2x + 1)^6 + \frac{23}{12}$     29.  $y(x) = \frac{3}{2}x^{2/3} - \frac{1}{2}$   
 31. 6 segundos; 396 pies    33. 120 pies/segundo  
 35. Instante del impacto:  $t = 2\sqrt{10} \approx 6.32$  segundos; rapidez de impacto:  $20\sqrt{10} \approx 63.25$  pics/segundo  
 37. 176 pies    39. 1700    41. 2845  
 43.  $2(\sqrt{2} - 1) \approx 0.82843$   
 45.  $\frac{2}{3}\pi(2\sqrt{2} - 1) \approx 3.82945$   
 47. Muestre que toda suma de Riemann es igual a  $c(b - a)$ .  
 51.  $\frac{2x\sqrt{2x}}{3} + \frac{2}{\sqrt{3x}} + C$     53.  $-2x^{-1} - \frac{1}{4}x^2 + C$   
 55.  $\frac{2}{3}\sin x^{3/2} + C$     57.  $\cos(t^{-1}) + C$   
 59.  $-\frac{3}{8}(1 + u^{4/3})^{-2} + C$     61.  $\frac{38}{3}$   
 63.  $\frac{1}{3}x^{-3}(4x^2 - 1)^{3/2} + C$  (utilice  $u = 1/x$ )  
 65.  $\frac{1}{30}$     67.  $\frac{44}{15}$     69.  $\frac{125}{6}$

71. Semicírculo, centro (1, 0), radio 1: área  $\pi/2$

73.  $f(x) = \sqrt{4x^2 - 1}$

75. Utilice  $n \geq 9$ .  $L_{10} \approx 1.12767$ ,  $R_{10} \approx 1.16909$ . El integrando es creciente en  $[0, 1]$ , por lo que el promedio de estas aproximaciones es  $1.1483 \pm 0.05$ .

77.  $M_5 \approx 0.28667$ ,  $T_5 \approx 0.28971$ . Acotan al valor real de la integral, ya que la segunda derivada del integrando es positivo en  $[1, 2]$ .

**Sección 6.1 (página 347)**

1. 1    3.  $2/\pi$     5.  $\frac{98}{3}$     7. 4    9. -1  
 11.  $\int_1^4 2\pi x f(x) dx$     13.  $\int_0^{10} \sqrt{1 + [f(x)]^2} dx$   
 15. 1000    17.  $\frac{500}{3}$     19. -320; 320  
 21. -50; 106.25    23. 65; 97    25. 1; 1  
 27. 0;  $4/\pi$     31.  $625\pi/2$     33. 550 galones  
 35. 385, 000    37. 109.5 pulgadas  
 39.  $\frac{3}{4}$     41.  $f(x) = 400\pi x^2(1 + x)$ ; 700  $\pi/3$  libras

**Sección 6.2 (página 356)**

1.  $\pi/5$     3.  $8\pi$     5.  $\pi^2/2$     7.  $3\pi/10$   
 9.  $512\pi/3$     11.  $16\pi/15$     13.  $\pi/2$     15.  $8\pi$   
 17.  $121\pi/210$     19.  $8\pi$     21.  $49\pi/30$   
 23.  $17\pi/10$     25.  $9\pi$     27.  $\frac{4}{3}\pi a^2 b$     29.  $\frac{16}{3}a^3$   
 31.  $\frac{4}{3}a^3\sqrt{3}$     37.  $\frac{16}{3}a^3$     43. (a) \$3000; (b) \$3000

**Sección 6.3 (página 365)**

1.  $8\pi$     3.  $625\pi/2$     5.  $16\pi$     7.  $\pi$     9.  $6\pi/5$   
 11.  $256\pi/15$     13.  $4\pi/15$     15.  $11\pi/15$   
 17.  $56\pi/5$     19.  $8\pi/3$     21.  $2\pi/15$     23.  $\pi/2$   
 25.  $16\pi/3$     27.  $64\pi$     31.  $\frac{4}{3}\pi a^2 b$   
 33.  $V = 2\pi^2 a^2 b$     35.  $V = 2\pi^2 a^3$     37. (a)  $V = \frac{1}{6}\pi h^3$

**Sección 6.4 (página 374)**

*Nota:* En 1 a 19, se da el integrando, seguido por el intervalo de integración.

1.  $\sqrt{1 + 4x^2}$ ;  $[0, 1]$   
 3.  $\sqrt{1 + 36(x^4 - 2x^3 + x^2)}$ ;  $[0, 2]$   
 5.  $\sqrt{1 + 4x^2}$ ;  $[0, 100]$     7.  $\sqrt{1 + 16y^6}$ ;  $[-1, 2]$   
 9.  $\frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^2}$ ;  $[1, 2]$     11.  $2\pi x^2 \sqrt{1 + 4x^2}$ ;  $[0, 4]$   
 13.  $2\pi(x - x^2)\sqrt{2 - 4x + 4x^2}$ ;  $[0, 1]$   
 15.  $2\pi(2 - x)\sqrt{1 + 4x^2}$ ;  $[0, 1]$   
 17.  $\pi\sqrt{4x + 1}$ ;  $[1, 4]$   
 19.  $\pi(x + 1)\sqrt{4 + 9x}$ ;  $[1, 4]$     21.  $\frac{22}{3}$     23.  $\frac{14}{3}$   
 25.  $\frac{123}{32} = 3.84375$

27.  $\frac{1}{27}(104\sqrt{13} - 125) \approx 9.25842$   
 29.  $\frac{1}{6}\pi(5\sqrt{5} - 1) \approx 5.3304$       31.  $\frac{339}{16}\pi \approx 66.5625$   
 33.  $\frac{1}{9}\pi(82\sqrt{82} - 1) \approx 258.8468$       35.  $4\pi$   
 37. 3.8194 (valor real: aproximadamente 3.820197789)  
 41. Evite el problema cuando  $x = 0$  como sigue:

$$L = 8 \int_{1/(2\sqrt{2})}^1 x^{-1/3} dx = 6.$$

**Sección 6.5 (página 382)**

1.  $y(x) = (\frac{1}{2}x^2 + C)^2$       3.  $3y^{-2} + 2x^3 = C$   
 5.  $y(x) = 1 + (\frac{1}{2}x^2 + C)^2$   
 7.  $3y + 2y^{3/2} = 3x + 2x^{3/2} + C$   
 9.  $y^3 + y = x - x^{-1} + C$       11.  $y(x) = (1 - x)^{-1}$   
 13.  $y(x) = (x + 1)^{1/4}$       15.  $y(x) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x^{3/2})^{-2}$   
 17.  $x^2 + y^2 = 169$       19.  $y(x) = (1 + x - x^3)^{-1}$   
 21. 20 semanas  
 23. (a) 169, 000; (b) a principios de 2011  
 25.  $P(t) \rightarrow +\infty$  cuando  $t \rightarrow 6^-$ .      27. 3 horas  
 29. 1 hora, 18 minutos y 40 segundos después de retirar el tapón  
 31. 1:20 P.M.      33. Aproximadamente 6 minutos y 2.9 segundos  
 35.  $f(x) = (\pi/86, 400)^2 x^4$ ; el radio del agujero debe ser  $\frac{1}{240\sqrt{3}}$  pies, aproximadamente 0.02887 pulgadas.

**Sección 6.6 (página 391)**

1. 30      3. 9      5. 0      7. 15 pies · libra  
 9.  $2.816 \times 10^9$  pies · libra (con  $R = 4000$  mi,  $g = 32$  pies/s<sup>2</sup>)  
 11.  $13,000\pi \approx 40,841$  pies · libra  
 13.  $125,000\pi/3 \approx 130,900$  pies · libra  
 15.  $156,000\pi \approx 490,088$  pies · libra  
 17.  $4,160,000\pi \approx 13,069,025$  pies · libra  
 19. 8750 pies · libra      21. 11,250 pies · libra  
 23.  $25,000 \cdot [1 - (0.1)^{0.4}]$  pulgadas · libra  $\approx 1254$  pies · libra  
 25.  $16\pi$  pies · libra  
 27. 1,382,400 $\pi$  pies · libra  
 29. Aproximadamente 690.53 pies · libra  
 31. 249.6 libras      33. 748.8 libras  
 35. 19,500 libras      37.  $700\rho/3 \approx 14,560$  libras  
 39. Aproximadamente 32,574 toneladas

**Capítulo 6 Problemas diversos (página 394)**

1.  $-\frac{1}{2}, \frac{11}{6}$       3. 1; 3      5.  $14/3$       7.  $2\pi/15$   
 9. 12 pulgadas      11.  $41\pi/105$       13.  $10.625\pi \approx 33.379$  g  
 19.  $f(x) = \sqrt{1 + 3x}$       21.  $\frac{24 - 2\pi^2}{3\pi} \approx 0.4521$   
 23.  $\frac{10}{3}$       25.  $\frac{63}{8}$       27.  $52\pi/5$   
 31.  $y(x) = x^2 + \sin x$       33.  $y(x) = (C - x)^{-1} - 1$

35.  $y(x) = (1 - x^3)^{-1}$       37.  $y(x) = (4 - 3x^{-1})^{1/3}$   
 39.  $y(x) = (1 - \sin x)^{-1}$   
 41.  $(2y^{1/2} - 1)x = (Cx + 2x^{1/2} - 1)y$       43. 1 pie  
 45.  $W = 4\pi R^4 \rho$       47. 10,454,400 pies · libra  
 49. 36,400 toneladas  
 51. No existe un volumen máximo;  $c = 1/3 \sqrt{5}$  minimiza el volumen  $V$ .

**Sección 7.1 (página 406)**

1. 128      3. 64      5. 1      7. 16  
 9. 16      11. 4      13. 3      15. 3  
 17.  $3 \ln 2$       19.  $\ln 2 + \ln 3$   
 21.  $3 \ln 2 + 2 \ln 3$       23.  $3 \ln 2 - 3 \ln 3$   
 25.  $3 \ln 3 - 3 \ln 2 - \ln 5$       27.  $2^{81} > 2^{12}$   
 29. Existen tres soluciones de la ecuación. La que *no* es obvia por inspección es aproximadamente  $-0.7666647$ .  
 31. 6      33.  $-2$       35. 1, 2      37.  $81 = 3^4$   
 39. 0      41.  $(x + 1)e^x$       43.  $(x^{1/2} + \frac{1}{2}x^{-1/2})e^x$   
 45.  $x^{-3}(x - 2)e^x$       47.  $1 + \ln x$   
 49.  $x^{-1/2}(1 + \frac{1}{2} \ln x)$       51.  $(1 - x)e^{-x}$   
 53.  $3/x$       57.  $f'(x) = \frac{1}{10}e^{x/10}$   
 61.  $P'(t) = 3^t \ln 3$       63.  $P'(t) = -(2^{-t} \ln 2)$   
 65. (a)  $P'(0) = \ln 3 \approx 1.09861$  (millones por hora); (b)  $P'(4) = 3^4 \cdot \ln 3 \approx 88.9876$  (millones por hora)

**Sección 7.2 (página 415)**

1.  $f'(x) = \frac{3}{3x - 1}$       3.  $f'(x) = \frac{1}{1 + 2x}$   
 5.  $f'(x) = \frac{3x^2 - 1}{3x^3 - 3x}$       7.  $f'(x) = -\frac{1}{x} \sin(\ln x)$   
 9.  $f'(x) = -\frac{1}{x(\ln x)^2}$       11.  $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1}$   
 13.  $f'(x) = -\tan x$   
 15.  $f'(t) = 2t \ln(\cos t) - t^2 \tan t$   
 17.  $g'(t) = (\ln t)^2 + 2 \ln t$   
 19.  $f'(x) = 6(2x + 1)^{-1} + 8x(x^2 - 4)^{-1}$   
 21.  $f'(x) = -x(4 - x^2)^{-1} - x(9 + x^2)^{-1}$   
 23.  $f'(x) = \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x - 1}$   
 25.  $g'(t) = 2t^{-1} - 2t(t^2 + 1)^{-1}$   
 27.  $f'(x) = -x^{-1} + \cot x$   
 29.  $\frac{y \ln y}{y - x}$       31.  $\frac{y}{-x + \cot y}$   
 33.  $\frac{1}{2} \ln|2x - 1| + C$       35.  $\frac{1}{6} \ln(1 + 3x^2) + C$   
 37.  $\frac{1}{4} \ln|2x^2 + 4x + 1| + C$



39.  $\frac{1}{3}(\ln x)^3 + C$       41.  $\ln|x + 1| + C$   
 43.  $\ln(x^2 + x + 1) + C$   
 45.  $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$       47.  $\frac{1}{2}\ln(1 - \cos 2x) + C$   
 49.  $\frac{1}{3}\ln|x^3 - 3x^2 + 1| + C$   
 51. 0      53. 0      55. 0  
 59.  $m \approx -0.2479, k \approx 291.7616$

65.  $y \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow 0^+$ ;  $dy/dx \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow 0^+$ . El punto  $(0, 0)$  no está en la gráfica. Intersección con el eje en  $(1, 0)$ ; mínimo global cuando  $x = e^{-1/2}$  (las coordenadas son aproximadamente  $(0.61, -0.18)$ ); punto de inflexión cuando  $x = e^{-3/2}$  (las coordenadas son aproximadamente  $(0.22, -0.07)$ ).

67.  $y \rightarrow -\infty$  cuando  $x \rightarrow 0^+$ ;  $y \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow +\infty$ . Máximo global en  $(e^2, 2/e)$ ; única intersección con el eje en  $(1, 0)$ ; punto de inflexión cuando  $x = e^{8/3}$ . El eje  $x$  es una asíntota horizontal y el eje  $y$  es una asíntota vertical.

71. Estimación mediante puntos medios: aproximadamente 872.47; estimación mediante trapecios: aproximadamente 872.60; valor real de la integral: aproximadamente 872.5174.

### Sección 7.3 (página 422)

1.  $f'(x) = 2e^{2x}$   
 3.  $f'(x) = 2xe^{(x^2)} = 2xe^{x^2} = 2x \exp(x^2)$   
 5.  $f(x) = -2x^{-3} \exp(x^{-2})$   
 7.  $g'(t) = \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{t}\right)e^{\sqrt{t}}$   
 9.  $g'(t) = (1 + 2t - t^2)e^{-t}$   
 11.  $g'(t) = -e^{\cos t} \sin t$   
 13.  $f'(x) = -e^{-x} \sin(1 - e^{-x})$   
 15.  $f'(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$   
 17.  $f'(x) = e^{-2x}(3 \cos 3x - 2 \sin 3x)$   
 19.  $g'(t) = 15(e^t - t^{-1})(e^t - \ln t)^4$   
 21.  $f'(x) = -(5 + 12x)e^{-4x}$   
 23.  $g'(t) = (e^{-t} + te^{-t} - 1)t^{-2}$   
 25.  $f'(x) = (x - 2)e^{-x}$   
 27.  $f'(x) = e^x \exp(e^x) = e^x e^{e^x}$   
 29.  $f'(x) = 2e^x \cos 2e^x$   
 31.  $\frac{e^y}{1 - xe^y} = \frac{e^y}{1 - y}$       33.  $\frac{e^x - ye^{xy}}{xe^{xy} - e^y}$   
 35.  $\frac{e^{x-y} - y}{e^{x-y} + x} = \frac{xy - y}{xy + x}$       37.  $-\frac{1}{2}e^{-2x} + C$   
 39.  $\frac{1}{9} \exp(3x^3 - 1) + C$       41.  $\frac{1}{2} \ln(1 + e^{2x}) + C$   
 43.  $\frac{1}{2} \exp(1 - \cos 2x) + C$       45.  $\frac{1}{2} \ln(x^2 + e^{2x}) + C$   
 47.  $-\exp(-\frac{1}{2}t^2) + C$       49.  $2e^{\sqrt{x}} + C$   
 51.  $\ln(1 + e^x) + C$       53.  $-\frac{2}{3} \exp(-x^{3/2}) + C$

55.  $e^2$       57.  $e$       59.  $+\infty$       61.  $+\infty$

63. Mínimo global e intersección con el eje en  $(0, 0)$ , máximo local en  $(2, 4e^{-2})$ ; puntos de inflexión cuando  $x = 2 \pm \sqrt{6}$ . El eje  $x$  es una asíntota.

65. Máximo global en  $(0, 1)$ , la única intersección con el eje; punto de inflexión cuando  $x = \pm \sqrt{2}$ . El eje  $x$  es la única asíntota.

67.  $\frac{1}{2}\pi(e^2 - 1) \approx 10.0359$

69.  $\frac{1}{2}(e - e^{-1}) \approx 1.1752$

71. La solución es aproximadamente 1.278. Observe que si  $f(x) = e^{-x} - x + 1$ , entonces  $f'(x) < 0$  para toda  $x$ .

73.  $f'(x) = 0$  cuando  $x = 0$  y cuando  $x = n$ ;  $f$  es creciente en  $(0, n)$  y decreciente para  $x > n$ . Así,  $x = n$  proporciona el valor máximo absoluto de  $f(x)$  para  $x \geq 0$ . El eje  $x$  es una asíntota horizontal y existen puntos de inflexión cuando  $x = n \pm \sqrt{n}$ .

77.  $y(x) = e^{-2x} + 4e^x$

### Sección 7.4 (página 429)

1.  $f'(x) = 10^x \ln 10$   
 3.  $f'(x) = 3^x 4^{-x} \ln 3 - 3^x 4^{-x} \ln 4 = \left(\frac{3}{4}\right)^x \ln \left(\frac{3}{4}\right)$   
 5.  $f'(x) = -(7^{\cos x})(\ln 7)(\sin x)$   
 7.  $f'(x) = 2^x \sqrt{x} \left(\frac{3}{2} \ln 2\right) \sqrt{x}$   
 9.  $f'(x) = x^{-1} 2^{\ln x} \ln 2$   
 11.  $f'(x) = 17^x \ln 17$   
 13.  $f'(x) = -x^{-2} 10^{1/x} \ln 10$   
 15.  $f'(x) = (2^{2x} \ln 2)(2^x \ln 2)$   
 17.  $f'(x) = \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{x}{x^2 + 4}$       19.  $f'(x) = \frac{\ln 2}{\ln 3} = \log_3 2$   
 21.  $f'(x) = \frac{1}{x(\ln 2)(\ln x)}$       23.  $f'(x) = \frac{\exp(\log_{10} x)}{x \ln 10}$   
 25.  $\frac{3^{2x}}{2 \ln 3} + C$       27.  $\frac{2 \cdot 2^{\sqrt{x}}}{\ln 2} + C$   
 29.  $\frac{7^{x^3+1}}{3 \ln 7} + C$       31.  $\frac{(\ln x)^2}{2 \ln 2} + C$   
 33.  $[x(x^2 - 4)^{-1} + (4x + 2)^{-1}](x^2 - 4)^{1/2}(2x + 1)^{1/4}$   
 35.  $2^x \ln 2$       37.  $\frac{(x^{\ln x})(2 \ln x)}{x}$   
 39.  $\frac{y}{3} \left( \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2+2} \right)$   
 41.  $(\ln x)^{\sqrt{x}} \left[ \frac{1}{2} x^{-1/2} \ln(\ln x) + x^{-1/2} (\ln x)^{-1} \right]$   
 43.  $\left( \frac{3x}{1+x^2} - \frac{4x^2}{1+x^3} \right) (1+x^2)^{3/2} (1+x^3)^{-4/3}$   
 45.  $\left[ \frac{2x^3}{x^2+1} + 2x \ln(x^2+1) \right] (x^2+1)^{(x^2)}$   
 47.  $\frac{1}{4} x^{-1/2} (2 + \ln x) (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$       49.  $e^x$   
 51.  $x^{\exp(x)} e^x (x^{-1} + \ln x)$

57. Observe que  $\ln \frac{x^x}{e^x} = x \ln \frac{x}{e}$

59.  $\frac{dy}{dx} = -\frac{\ln 2}{x(\ln x)^3}$

**Sección 7.5 (página 438)**

1. \$119.35; \$396.24      3. Aproximadamente 3.8685 h  
 5. Aproximadamente 686 años de edad  
 7. (a) 9.308%; (b) 9.381%; (c) 9.409%; (d) 9.416%; (e) 9.417%  
 9. \$44.52      11. Después de 32.26 días más  
 13. Aproximadamente 35 años  
 15. Aproximadamente  $4.2521 \times 10^9$  años de edad  
 17. 2.40942 minutos  
 19. (a) 20.486 pulgadas; 9.604 pulgadas; (b) 3.4524 millas, cerca de 18, 230 pies

**Sección 7.6 (página 444)**

1.  $y(x) = -1 + 2e^x$       3.  $y(x) = \frac{1}{2}(e^{2x} + 3)$   
 5.  $x(t) = 1 - e^{2t}$       7.  $x(t) = 27e^{5t} - 2$   
 9.  $v(t) = 10(1 - e^{-10t})$       11. 4,870,238  
 15. Aproximadamente 46 días después de que comienza el rumor  
 19.  $\frac{400}{\ln 2} \approx 577$  pies      23. (b) \$1,308, 283  
 25. (a)  $x(t) = 100,000 - 80,000 e^{-kt}$ , cuando  $k = \frac{1}{14} \ln 2$ ; (b) en marzo 29; (c) todos se contagian de gripe.

**Capítulo 7 Problemas diversos (página 445)**

1.  $f'(x) = \frac{1}{2x}$       3.  $f'(x) = \frac{1 - e^x}{x - e^x}$   
 5.  $f'(x) \equiv \ln 2$       7.  $f'(x) = (2 + 3x^2)e^{-1/x^2}$   
 9.  $f'(x) = \frac{1 + \ln \ln x}{x}$       11.  $f'(x) = x^{-1} 2^{\ln x} \ln 2$   
 13.  $f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2} \exp\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$   
 15.  $f'(x) = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{x-1} + \frac{8x}{3-4x^2} \right)$   
 17.  $f'(x) = \frac{(\sin x \cos x) \exp(\sqrt{1 + \sin^2 x})}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$   
 19.  $f'(x) = \cot x + \ln 3$       21.  $f'(x) = \frac{x^{1/x}(1 - \ln x)}{x^2}$   
 23.  $f'(x) = \left( \frac{1 + \ln \ln x}{x} \right) (\ln x)^{\ln x}$   
 25.  $-\frac{1}{2} \ln |1 - 2x| + C$   
 27.  $\frac{1}{2} \ln |1 + 6x - x^2| + C$   
 29.  $-\ln(2 + \cos x) + C$       31.  $\frac{2 \cdot 10^{\sqrt{x}}}{\ln 10} + C$

33.  $\frac{2}{3}(1 + e^x)^{3/2} + C$       35.  $\frac{6^x}{\ln 6} + C$

37.  $x(t) = t^2 + 17$       39.  $x(t) = 1 + e^t$

41.  $x(t) = \frac{1}{3}(2 + 7e^{3t})$       43.  $x(t) = \sqrt{2} e^{\sin t}$

45. Asíntota horizontal: el eje  $x$ ; máximo global cuando  $x = \frac{1}{2}$ ; punto de inflexión en  $x = (1 + \sqrt{2})/2$  (aproximadamente (1.21, 0.33)); mínimo global e intersección con el eje en (0, 0), con una tangente vertical en ese mismo punto

47. Mínimo global en (4,  $2 - \ln 4$ ), punto de inflexión en (16, 1.23) (ordenada aproximada). El eje  $y$  es una asíntota vertical; no existe una asíntota horizontal. (La gráfica continúa subiendo al aumentar  $x$ .)

49. Punto de inflexión en (0.5,  $e^{-2}$ ). La recta horizontal  $y = 1$  y el eje  $x$  son asíntotas. El punto (0, 0) **no** está en la gráfica. Cuando  $x \rightarrow 0^+$ ,  $y \rightarrow 0$ ; cuando  $x \rightarrow 0^-$ ,  $y \rightarrow +\infty$ . Cuando  $|x| \rightarrow +\infty$ ,  $y \rightarrow 1$ .

51. ¡Venda inmediatamente!

53. (b) El valor que minimiza es 10.516, aproximadamente. Pero como el tamaño del lote debe ser un entero, 11 (y no 10) minimiza  $f(x)$ . (c) \$977.85

57. 20 semanas

59. (a) \$925.20; (b) \$1262.88

61. Aproximadamente 22.567 horas después de la interrupción eléctrica; es decir, aproximadamente a las 9:34 p.m. de la tarde siguiente

63. (b)  $u(10) = 176(1 - e^{-1}) \approx 111.2532$  pies/segundo, aproximadamente 75.85 millas/hora. La velocidad límite es  $a/\rho = 176$  pies/segundo, exactamente 120 millas/hora

65. (a) El mínimo de  $f(x) - g(x)$  ocurre cuando  $x = 4$  y es  $2(1 - \ln 2) > 0$ . Por tanto,  $f(x) > g(x)$  para toda  $x > 0$ . (b) La solución (mayor) de  $g(x) = h(x)$  es (por el método de Newton) aproximadamente 93.354460835. (c)  $p = e$

**Sección 8.2 (página 457)**

1. (a)  $\pi/6$ , (b)  $-\pi/6$ , (c)  $\pi/4$ , (d)  $-\pi/3$   
 3. (a) 0, (b)  $\pi/4$ , (c)  $-\pi/4$ , (d)  $\pi/3$   
 5.  $f'(x) = 100x^{99}(1 - x^{-200})^{-1/2}$   
 7.  $f'(x) = \frac{1}{x|\ln x|\sqrt{(\ln x)^2 - 1}}$   
 9.  $f'(x) = \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1 - \tan^2 x}}$   
 11.  $f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$   
 13.  $f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$   
 15.  $f'(x) = -\frac{2}{x\sqrt{x^4 - 1}}$   
 17.  $f'(x) = -\frac{1}{(1 + x^2)(\arctan x)^2}$

$$19. f'(x) = \frac{1}{x[1 + (\ln x)^2]}$$

$$21. f'(x) = \frac{2e^x}{1 + e^{2x}}$$

$$23. f'(x) = \frac{\cos(\arctan x)}{1 + x^2}$$

$$25. f'(x) = \frac{1 - 4x \arctan x}{(1 + x^2)^3}$$

$$27. \frac{dy}{dx} = -\frac{1 + y^2}{1 + x^2}; x + y = 2$$

$$29. \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{1 - y^2} \arcsen y}{\sqrt{1 - x^2} \arcsen x}; x + y = \sqrt{2}$$

$$31. \pi/4 \quad 33. \pi/12 \quad 35. \pi/12$$

$$37. \frac{1}{2} \arcsen 2x + C \quad 39. \frac{1}{5} \operatorname{arcsec} |x/5| + C$$

$$41. \arctan(e^x) + C \quad 43. \frac{1}{15} \operatorname{arcsec} |x^3/5| + C$$

45.  $\arcsen(2x - 1) + C$  y  $2 \arcsen x^{1/2} + C$  son correctas.

$$47. \frac{1}{50} \arctan(x^{50}) + C \quad 49. \arctan(\ln x) + C$$

$$51. \pi/4 \quad 53. \pi/2 \quad 55. \pi/12 \quad 59. 8 \text{ m}$$

$$63. \pi/2 \quad 65. (b) A = 1 - \frac{1}{3}\pi, B = 1 + \frac{2}{3}\pi$$

### Sección 8.3 (página 462)

$$1. \frac{1}{2} \quad 3. \frac{2}{5} \quad 5. 0 \quad 7. 0 \quad 9. \frac{1}{2}$$

$$11. 2 \quad 13. 0 \quad 15. 1 \quad 17. 1 \quad 19. \frac{3}{5}$$

$$21. \frac{3}{2} \quad 23. \frac{1}{3} \quad 25. \frac{\ln 2}{\ln 3} \quad 27. \frac{1}{2} \quad 29. 1$$

$$31. \frac{1}{3} \quad 33. -\frac{1}{2} \quad 35. 1 \quad 37. \frac{1}{4} \quad 39. \frac{2}{3}$$

$$41. 6 \quad 43. \frac{4}{3} \quad 45. \frac{2}{3} \quad 47. 0$$

### Sección 8.4 (página 467)

$$1. 1 \quad 3. \frac{3}{8} \quad 5. \frac{1}{4} \quad 7. 1 \quad 9. 0$$

$$11. -1 \quad 13. -\infty \quad 15. -\infty \quad 17. -\frac{1}{2} \quad 19. 0$$

$$21. 1 \quad 23. 1 \quad 25. e^{-1/6} \quad 27. e^{-1/2} \quad 29. 1$$

$$31. e^{-1} \quad 33. -\infty$$

### Sección 8.5 (página 476)

$$1. f'(x) = 3 \operatorname{senh}(3x - 2)$$

$$3. f'(x) = 2x \tanh(1/x) - \operatorname{sech}^2(1/x)$$

$$5. f'(x) = -12 \operatorname{coth}^2 4x \operatorname{csch}^2 4x$$

$$7. f'(x) = -e^{\operatorname{csch} x} \operatorname{csch} x \operatorname{coth} x$$

$$9. f'(x) = (\cosh x) \cos(\operatorname{senh} x)$$

$$11. f'(x) = 4x^3 \cosh x^4 \quad 13. f'(x) = -\frac{1 + \operatorname{sech}^2 x}{(x + \tanh x)^2}$$

$$15. \frac{1}{2} \cosh x^2 + C \quad 17. x - \frac{1}{3} \tanh 3x + C$$

$$19. \frac{1}{6} \operatorname{senh}^3 2x + C \quad 21. -\frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 x + C$$

$$23. -\frac{1}{2} \operatorname{csch}^2 x + C \quad 25. \ln(1 + \cosh x) + C$$

$$27. \frac{1}{4} \tanh x + C \quad 29. f'(x) = 2(4x^2 + 1)^{-1/2}$$

$$31. f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} (1 - x)^{-1}$$

$$33. f'(x) = (x^2 - 1)^{-1/2}$$

$$35. f'(x) = \frac{3}{2} (\operatorname{senh}^{-1} x)^{1/2} (x^2 + 1)^{-1/2}$$

$$37. f'(x) = (1 - x^2)^{-1} (\tanh^{-1} x)^{-1}$$

$$39. \operatorname{arcsenh}(x/3) + C$$

$$41. \frac{1}{4} \ln \frac{9}{5} \approx 0.14695$$

$$43. -\frac{1}{2} \operatorname{sech}^{-1} |3x/2| + C \quad 45. \operatorname{senh}^{-1}(e^x) + C$$

$$47. -\operatorname{sech}^{-1}(e^x) + C$$

$$53. \operatorname{senh} a$$

$$57. \ln(1 + \sqrt{2}) \approx 0.881373587$$

### Capítulo 8 Problemas diversos (página 478)

$$1. f'(x) = 3(1 - 9x^2)^{-1/2}$$

$$3. g'(t) = 2t^{-1}(t^4 - 1)^{-1/2}$$

$$5. f'(x) = -(\operatorname{sen} x)(1 - \cos^2 x)^{-1/2} = -\frac{\operatorname{sen} x}{|\operatorname{sen} x|}$$

$$7. g'(t) = 10(100t^2 - 1)^{-1/2}$$

$$9. f'(x) = -2x^{-1}(x^4 - 1)^{-1/2}$$

$$11. f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} (1 - x)^{-1/2}$$

$$13. f'(x) = \frac{2x}{x^4 + 2x^2 + 2}$$

$$15. f'(x) = e^x \operatorname{senh} e^x + e^{2x} \operatorname{cosh} e^x$$

$$17. f'(x) \equiv 0$$

$$19. f'(x) = \frac{x}{|x| \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$21. \frac{1}{2} \arcsen 2x + C$$

$$23. \arcsen(x/2) + C$$

$$25. \operatorname{sen}^{-1}(e^x) + C$$

$$27. \frac{1}{2} \arcsen(2x/3) + C$$

$$29. \frac{1}{3} \arctan(x^3) + C$$

$$31. \operatorname{sec}^{-1} |2x| + C$$

$$33. \operatorname{arcsec}(e^x) + C$$

$$35. 2 \operatorname{cosh} \sqrt{x} + C$$

$$37. \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + C$$

$$39. \frac{1}{2} \operatorname{senh}^{-1}(2x/3) + C$$

$$41. \frac{1}{4} \quad 43. \frac{1}{2} \quad 45. -\frac{1}{6} \quad 47. 1 \quad 49. -\infty$$

$$51. +\infty \quad 53. e^2 \quad 55. -\frac{e}{2} \quad 57. \frac{\pi^2}{6}$$

$$61. x \approx 4.730041$$

### Sección 9.2 (página 483)

$$1. -\frac{1}{15} (2 - 3x)^5 + C \quad 3. \frac{1}{9} (2x^3 - 4)^{3/2} + C$$

$$5. \frac{9}{8} (2x^2 + 3)^{2/3} + C \quad 7. -2 \operatorname{csc} \sqrt{y} + C$$

$$9. \frac{1}{6} (1 + \operatorname{sen} \theta)^6 + C \quad 11. e^{-\operatorname{cot} x} + C$$

$$13. \frac{1}{11} (\ln t)^{11} + C \quad 15. \frac{1}{3} \arcsen 3t + C$$

17.  $\frac{1}{2} \arctan(e^{2x}) + C$       19.  $\frac{3}{2} \arcsen(x^2) + C$   
 21.  $\frac{1}{15} \tan^5 3x + C$       23.  $\tan^{-1}(\sen \theta) + C$   
 25.  $\frac{2}{5}(1 + \sqrt{x})^5 + C$       27.  $\ln|\arctan t| + C$   
 29.  $\sec^{-1} e^x + C$   
 31.  $\frac{2}{7}(x-2)^{7/2} + \frac{8}{9}(x-2)^{5/2} + \frac{8}{9}(x-2)^{3/2} + C$   
 33.  $\frac{1}{3}(2x+3)^{1/2}(x-3) + C$   
 35.  $\frac{3}{10}(x+1)^{2/3}(2x-3) + C$   
 37.  $\frac{1}{60} \ln \left| \frac{3x+10}{3x-10} \right| + C$   
 39.  $\frac{1}{2} x(4+9x^2)^{1/2} + \frac{2}{3} \ln|3x+(4+9x^2)^{1/2}| + C$   
 41.  $\frac{1}{32} x(16x^2+9)^{1/2} - \frac{9}{128} \ln|4x+(16x^2+9)^{1/2}| + C$   
 43.  $\frac{1}{128} x(32x^2-25)(25-16x^2)^{1/2} + \frac{625}{512} \arcsen \frac{4}{5} x + C$   
 45. La sustitución  $u = e^x$  conduce a una integral de la forma de la fórmula (44) de la tabla de integrales que aparece en los forros del libro. La respuesta es

$$\frac{1}{2} e^x(9 + e^{2x})^{1/2} + \frac{9}{2} \ln[e^x + (9 + e^{2x})^{1/2}] + C.$$

47. Con  $u = x^2$  y (47) en la tabla de integrales,  $\frac{1}{2}((x^4-1)^{1/2} - \arcsen x^2) + C$   
 49. Con  $u = \ln x$  y (48) en la tabla de integrales,

$$\frac{1}{8} \{ (\ln x)[2(\ln x)^2 + 1][(\ln x)^2 + 1]^{1/2} - \ln|(\ln x) + [(\ln x)^2 + 1]^{1/2}| \} + C$$

53.  $\sen^{-1}(x-1) + C$

### Sección 9.3 (página 491)

1.  $\frac{1}{4}(2x - \sen 2x \cos 2x) + C$   
 3.  $2 \tan \frac{x}{2} + C$   
 5.  $\frac{1}{3} \ln|\sec 3x| + C$   
 7.  $\frac{1}{3} \ln|\sec 3x + \tan 3x| + C$   
 9.  $\frac{1}{2}(x - \sen x \cos x) + C$   
 11.  $\frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C$   
 13.  $\frac{1}{3} \sen^3 \theta - \frac{1}{5} \sen^5 \theta + C$   
 15.  $\frac{1}{5} \sen^5 x - \frac{2}{3} \sen^3 x + \sen x + C$   
 17.  $\frac{2}{5} (\cos x)^{5/2} - 2(\cos x)^{1/2} + C$   
 19.  $-\frac{1}{14} \cos^7 2z + \frac{1}{5} \cos^5 2z - \frac{1}{6} \cos^3 2z + C$   
 21.  $\frac{1}{4} (\sec 4x + \cos 4x) + C$   
 23.  $\frac{1}{3} \tan^3 t + \tan t + C$   
 25.  $-\frac{1}{4} \csc^2 2x - \frac{1}{2} \ln|\sen 2x| + C$   
 27.  $\frac{1}{12} \tan^6 2x + C$   
 29.  $-\frac{1}{10} \cot^5 2t - \frac{1}{3} \cot^3 2t - \frac{1}{2} \cot 2t + C$   
 31.  $\frac{1}{4} \cos^4 \theta - \frac{1}{2} \cos^2 \theta + C_1 = \frac{1}{4} \sen^4 \theta + C_2$   
 33.  $\frac{2}{3} (\sec t)^{3/2} + 2(\sec t)^{-1/2} + C$   
 35.  $\frac{1}{3} \sen^3 \theta + C$   
 37.  $\frac{1}{5} \sen 5t - \frac{1}{15} \sen^3 5t + C$   
 39.  $t + \frac{1}{3} \cot 3t - \frac{1}{9} \cot^3 3t + C$

41.  $-\frac{1}{5} \cos^{5/2} 2t + \frac{2}{9} \cos^{9/2} 2t - \frac{1}{13} \cos^{13/2} 2t + C$   
 43.  $\frac{1}{2} \sen^2 x - \cos x + C$   
 45.  $-\cot x - \frac{1}{3} \cot^3 x - \frac{1}{2} \csc^2 x + C$   
 49.  $\frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 8x + C$   
 51.  $\frac{1}{6} \sen 3x + \frac{1}{10} \sen 5x + C$   
 57.  $\pi/4$   
 59.  $2 \ln 2 \approx 1.38629436112$

### Sección 9.4 (página 497)

1.  $\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$   
 3.  $-t \cos t + \sen t + C$   
 5.  $\frac{1}{3} x \sen 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + C$   
 7.  $\frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 + C$   
 9.  $x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$   
 11.  $\frac{2}{3} y^{3/2} \ln y - \frac{4}{9} y^{3/2} + C$   
 13.  $t(\ln t)^2 - 2t \ln t + 2t + C$   
 15.  $\frac{2}{3} x(x+3)^{3/2} - \frac{4}{15} (x+3)^{5/2} + C$   
 17.  $\frac{2}{9} x^3(x^3+1)^{3/2} - \frac{4}{45} (x^3+1)^{5/2} + C$   
 19.  $-\frac{1}{2} (\csc \theta \cot \theta + \ln|\csc \theta + \cot \theta|) + C$   
 21.  $\frac{1}{3} x^3 \arctan x - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \ln(1+x^2) + C$   
 23.  $x \operatorname{arcsec} x^{1/2} - (x-1)^{1/2} + C$   
 25.  $(x+1) \arctan x^{1/2} - x^{1/2} + C$   
 27.  $-x \cot x + \ln|\sen x| + C$   
 29.  $\frac{1}{2} x^2 \sen x^2 + \frac{1}{2} \cos x^2 + C$   
 31.  $-2x^{-1/2}(2 + \ln x) + C$   
 33.  $x \sinh x - \cosh x + C$   
 35.  $x^2 \cosh x - 2x \senh x + 2 \cosh x + C$   
 37.  $\pi(e-2) \approx 2.25655$   
 39.  $\frac{1}{2}(x-1)e^x \sen x + \frac{1}{2} x e^x \cos x + C$   
 47.  $6 - 2e \approx 0.563436$   
 49.  $6 - 2e$   
 57.  $\frac{1}{80}(2\pi^6 - 10\pi^4 + 15\pi^2) \approx 13.709144$

### Sección 9.5 (página 506)

1.  $\frac{1}{2} x^2 - x + \ln|x+1| + C$   
 3.  $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-3}{x} \right| + C$   
 5.  $\frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-2}{x+3} \right| + C$   
 7.  $\frac{1}{4} \ln|x| - \frac{1}{8} \ln(x^2+4) + C$   
 9.  $\frac{1}{3} x^3 - 4x + 8 \arctan \frac{1}{2} x + C$   
 11.  $x - 2 \ln|x+1| + C$   
 13.  $x + (x+1)^{-1} + C$   
 15.  $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$

17.  $\frac{3}{2} \ln|2x - 1| - \ln|x + 3| + C$   
 19.  $\ln|x| + 2(x + 1)^{-1} + C$   
 21.  $\frac{3}{2} \ln|x^2 - 4| + \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| + C$   
 23.  $\ln|x + 2| + 4(x + 2)^{-1} - 2(x + 2)^{-2} + C$   
 25.  $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{x^2}{x^2 + 1}\right) + C$   
 27.  $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{x^2}{x^2 + 4}\right) + \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C$   
 29.  $-\frac{1}{2} \ln|x + 1| + \frac{1}{4} \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2} \arctan x + C$   
 31.  $\arctan \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \sqrt{2} \arctan x \sqrt{2} + C$   
 33.  $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 3) + C$   
 35.  $x + \frac{1}{2} \ln|x - 1| - 5(2x - 2)^{-1} + \frac{3}{4} \ln(x^2 + 1) + 2 \arctan x + C$   
 37.  $\frac{1}{4}(1 - 2e^{2t})(e^{2t} - 1)^{-2} + C$   
 39.  $\frac{1}{4} \ln|3 + 2 \ln t| + \frac{1}{4}(3 + 2 \ln t)^{-1} + C$   
 41.  $\frac{4}{15} \pi(52 - 75 \ln 2) \approx 0.011696324$   
 43.  $x(t) = \frac{2e^t}{2e^t - 1}$   
 45.  $x(t) = \frac{2e^{2t} + 1}{2e^{2t} - 1}$   
 47.  $x(t) = \frac{21e^t - 16}{8 - 7e^t}$

49. Aproximadamente 153, 700, 000

51. (a) 1.37 s; (b) 200 g

53.  $P(t) = \frac{200}{2 - e^{t/100}}$ ;

(a)  $t = 100 \ln 1.8 \approx 58.8$  (días)

(b)  $t = 100 \ln 2 \approx 69.3$  (días)

### Sección 9.6 (página 512)

1.  $\arcsen \frac{1}{4}x + C$   
 3.  $-\frac{\sqrt{4 - x^2}}{4x} + C$   
 5.  $8 \arcsen \frac{x}{4} - \frac{x\sqrt{16 - x^2}}{2} + C$   
 7.  $\frac{x}{9\sqrt{9 - 16x^2}} + C$   
 9.  $\ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + C$   
 11.  $\frac{1}{80}[(9 + 4x^2)^{5/2} - 15(9 + 4x^2)^{3/2}] + C$   
 13.  $\sqrt{1 - 4x^2} - \ln\left|\frac{1 + \sqrt{1 - 4x^2}}{2x}\right| + C$   
 15.  $\frac{1}{2} \ln|2x + \sqrt{9 + 4x^2}| + C$   
 17.  $\frac{25}{2} \arcsen \frac{1}{5}x - \frac{1}{2}x\sqrt{25 - x^2} + C$

19.  $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{2} \ln|x + \sqrt{1 + x^2}| + C$   
 21.  $\frac{1}{18}x\sqrt{4 + 9x^2} - \frac{2}{27} \ln|3x + \sqrt{4 + 9x^2}| + C$   
 23.  $x(1 + x^2)^{-1/2} + C$   
 25.  $\frac{1}{512} \left[ 3 \ln\left|\frac{x + 2}{x - 2}\right| - \frac{12x}{x^2 - 4} + \frac{32x}{(x^2 - 4)^2} \right] + C$   
 27.  $\frac{1}{2}x\sqrt{9 + 16x^2} + \frac{9}{8} \ln|4x + \sqrt{9 + 16x^2}| + C$   
 29.  $\sqrt{x^2 - 25} - 5 \operatorname{arcsen} \frac{1}{5}x + C$   
 31.  $\frac{1}{8}x(2x^2 - 1)(x^2 - 1)^{1/2} - \frac{1}{8} \ln|x + (x^2 - 1)^{1/2}| + C$   
 33.  $-x(4x^2 - 1)^{-1/2} + C$   
 35.  $-x^{-1}(x^2 - 5)^{1/2} + \ln|x + (x^2 - 5)^{1/2}| + C$   
 37.  $\operatorname{arcsenh} \frac{1}{3}x + C$   
 39.  $\operatorname{arccosh} \frac{1}{2}x - x^{-1}(x^2 - 4)^{1/2} + C$   
 41.  $\frac{1}{8}x(1 + 2x^2)(1 + x^2)^{1/2} - \frac{1}{8} \operatorname{arcsenh} x + C$   
 43.  $\frac{1}{32} \pi[18\sqrt{5} - \ln(2 + \sqrt{5})] \approx 3.8097$   
 45.  $\sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln\left(\frac{2 + 2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{5}}\right) \approx 1.222016$   
 49.  $2\pi[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})] \approx 14.4236$   
 53.  $\$6\frac{2}{3}$  millones

### Sección 9.7 (página 518)

1.  $\arctan(x + 2) + C$   
 3.  $11 \arctan(x + 2) - \frac{3}{2} \ln(x^2 + 4x + 5) + C$   
 5.  $\arcsen \frac{1}{2}(x + 1) + C$   
 7.  $-2 \arcsen \frac{1}{2}(x + 1) - \frac{1}{2}(x + 1)(3 - 2x - x^2)^{1/2} - \frac{1}{3}(3 - 2x - x^2)^{3/2} + C$   
 9.  $\frac{5}{16} \ln|2x + 3| + \frac{7}{16} \ln|2x - 1| + C$   
 11.  $\frac{1}{3} \arctan \frac{1}{3}(x + 2) + C$   
 13.  $\frac{1}{4} \ln\left|\frac{1 + x}{3 - x}\right| + C$   
 15.  $\ln(x^2 + 2x + 2) - 7 \arctan(x + 1) + C$   
 17.  $\frac{2}{9} \arcsen(x - \frac{2}{3}) - \frac{1}{9}(5 + 12x - 9x^2)^{1/2} + C$   
 19.  $\frac{25}{4} \arcsen \frac{2}{5}(x - 2) + \frac{3}{2}(x - 2)(9 + 16x - 4x^2)^{1/2} + \frac{1}{6}(9 + 16x - 4x^2)^{3/2} + C$   
 21.  $\frac{1}{9}(7x - 12)(6x - x^2)^{-1/2} + C$   
 23.  $-(16x^2 + 48x + 52)^{-1} + C$   
 25.  $\frac{3}{2} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{5}{3} \sqrt{3} \arctan(\frac{1}{3} \sqrt{3}[2x + 1]) + C$   
 27.  $\frac{1}{32} \ln\left|\frac{x + 2}{x - 2}\right| - \frac{x}{8(x^2 - 4)} + C$   
 29.  $\ln|x| - \frac{2}{3} \sqrt{3} \arctan(\frac{1}{3} \sqrt{3}[2x + 1]) + C$   
 31.  $-\frac{5}{4}(x - 1)^{-1} - \frac{1}{4} \ln|x - 1| - \frac{5}{4}(x + 1)^{-1} + \frac{1}{4} \ln|x + 1| + C$   
 33.  $-\frac{1}{4}(x + 7)(x^2 + 2x + 5)^{-1} - \frac{1}{8} \arctan(\frac{1}{2}(x + 1)) + C$   
 37. Aproximadamente 3.69 millas  
 39.  $\ln|x - 1| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 2) + \arctan(x + 1) + C$

$$41. \frac{1}{2}x^2 + \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{3}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}[2x+1]\right) + C$$

$$43. \frac{1}{2}\ln(x^4+x^2+1) - \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2x^2+1}\right) + C$$

### Sección 9.8 (página 528)

1. 1      3.  $+\infty$       5.  $+\infty$       7. 1  
 9.  $+\infty$       11.  $-\frac{1}{2}$       13.  $\frac{9}{2}$       15.  $+\infty$   
 17. No existe      19.  $2(e-1)$   
 21.  $+\infty$       23.  $\frac{1}{4}$

### Capítulo 9 Problemas diversos (página 529)

*Nota: Las diversas técnicas de integración pueden producir respuestas que parezcan diferentes a éstas. Si ambas son correctas, entonces deben diferir por una constante.*

1.  $2\arctan\sqrt{x} + C$   
 3.  $\ln|\sec x| + C$   
 5.  $\frac{1}{2}\sec^2\theta + C$   
 7.  $x \tan x - \frac{1}{2}x^2 + \ln|\cos x| + C$   
 9.  $\frac{2}{15}(2-x^3)^{5/2} - \frac{4}{9}(2-x^3)^{3/2} + C$   
 11.  $\frac{1}{2}x(25+x^2)^{1/2} - \frac{25}{2}\ln|x+(25+x^2)^{1/2}| + C$   
 13.  $\frac{2}{3}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}[2x-1]\right) + C$   
 15.  $\frac{103}{87}\sqrt{29}\arctan\left(\frac{1}{29}\sqrt{29}[3x-2]\right) + \frac{5}{6}\ln(9x^2-12x+33) + C$   
 17.  $\frac{2}{9}(1+x^3)^{3/2} + C$   
 19.  $\arcsen\left(\frac{1}{2}\sen x\right) + C$   
 21.  $-\ln|\ln \cos x| + C$   
 23.  $(x+1)\ln(x+1) - x + C$   
 25.  $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+9} + \frac{9}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+9}| + C$   
 27.  $\frac{1}{2}(x-1)(2x-x^2)^{1/2} + \frac{1}{2}\arcsen(x-1) + C$   
 29.  $\frac{1}{3}x^3 + 2x - \sqrt{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}\right| + C$   
 31.  $\frac{1}{2}(x^2+x)(x^2+2x+2)^{-1} - \frac{1}{2}\arctan(x+1) + C$   
 33.  $\frac{\sen 2\theta}{2(1+\cos 2\theta)} + C$   
 35.  $\frac{1}{5}\sec^5 x - \frac{1}{3}\sec^3 x + C$   
 37.  $\frac{1}{8}x^2[4(\ln x)^3 - 6(\ln x)^2 + 6(\ln x) - 3] + C$   
 39.  $\frac{1}{2}e^x(1+e^{2x})^{1/2} + \frac{1}{2}\ln[e^x + (1+e^{2x})^{1/2}] + C$   
 41.  $\frac{1}{34}\operatorname{arcsec}\left|\frac{1}{3}x\right| + \frac{1}{18}x^{-2}(x^2-9)^{1/2} + C$   
 43.  $\ln|x| + \frac{1}{2}\arctan 2x + C$   
 45.  $\frac{1}{2}(\sec x \tan x - \ln|\sec x + \tan x|) + C$   
 47.  $\ln|x+1| - \frac{2}{3}x^{-3} + C$   
 49.  $\ln|x-1| + \ln(x^2+x+1) + (x-1)^{-1} - 2(x^2+x+1)^{-1} + C$   
 51.  $x[(\ln x)^6 - 6(\ln x)^5 + 30(\ln x)^4 - 120(\ln x)^3 + 360(\ln x)^2 - 720\ln x + 720] + C$

53.  $\frac{1}{3}(\arcsen x)^3 + C$       55.  $\frac{1}{2}\sec^2 z + \ln|\cos z| + C$   
 57.  $\frac{1}{2}\arctan(\exp(x^2)) + C$   
 59.  $-\frac{1}{2}(x^2+1)\exp(-x^2) + C$   
 61.  $-\frac{1}{x}\arcsen x - \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C$   
 63.  $\frac{1}{8}\arcsen x + \frac{1}{8}x(2x^2-1)(1-x^2)^{1/2} + C$   
 65.  $\frac{1}{4}\ln|2x+1| + \frac{5}{4}(2x+1)^{-1} + C$   
 67.  $\frac{1}{2}\ln|e^{2x}-1| + C$   
 69.  $2\ln|x+1| + 3(x+1)^{-1} - \frac{5}{3}(x+1)^{-3} + C$   
 71.  $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x - \frac{1}{2}(x^2+1)^{-1} + C$   
 73.  $\frac{1}{45}(x^3+1)^{3/2}(6x^3+4) + C$   
 75.  $\frac{2}{3}(1+\sen x)^{3/2} + C$   
 77.  $\frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C$   
 79.  $-2(1-\sen t)^{1/2} + C$   
 81.  $-2x + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}[2x+1]\right) + \frac{1}{2}(2x+1)\ln(x^2+x+1) + C$   
 83.  $-x^{-1}\arctan x + \ln|x(1+x^2)^{-1/2}| + C$   
 85.  $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}(x^2+1)^{-1} + C$   
 87.  $\frac{1}{2}(x-6)(x^2+4)^{-1/2} + C$   
 89.  $\frac{1}{3}(1+\sen^2 x)^{3/2} + C$   
 91.  $\frac{1}{2}e^x(x \sen x - x \cos x + \cos x) + C$   
 93.  $-\frac{1}{2}(x-1)^{-2}\arctan x + \frac{1}{8}\ln(x^2+1) - \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}(x-1)^{-1} + C$   
 95.  $\frac{11}{6}\arcsen\frac{1}{2}(3x-1) - \frac{2}{9}(3+6x-9x^2)^{1/2} + C$   
 97.  $\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x + 4\ln|x-1| - (x-1)^{-1} + C$   
 99.  $x \operatorname{arcsec} x^{1/2} - (x-1)^{1/2} + C$   
 101.  $\frac{1}{4}\pi(e^2 - e^{-2} + 4)$   
 103. (a)  $A_t = \pi\left(\sqrt{2} - e^{-t}(1+e^{-2t})^{1/2} + \ln\left[\frac{1+\sqrt{2}}{e^{-t} + (1+e^{-2t})^{1/2}}\right]\right)$ ;  
 (b)  $\pi[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})] \approx 7.2118$   
 105.  $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}\left[2\sqrt{14} - \sqrt{2} + \ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+\sqrt{7}}\right)\right] \approx 11.66353$   
 109.  $\frac{5}{4}\pi \approx 3.92699$   
 111. El valor de la integral es  $\frac{1}{630}$ .  
 113.  $\frac{5\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right) \approx 3.869983$   
 115. La sustitución es  $u = e^x$ .  
 (a)  $\frac{2}{3}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}[1+2e^x]\right) + C$   
 119.  $\frac{1}{4}\sqrt{2}\ln\left|\frac{1+\tan\theta-\sqrt{2}\tan\theta}{1+\tan\theta+\sqrt{2}\tan\theta}\right| - \frac{1}{2}\sqrt{2}\arctan\sqrt{2}\cot\theta + C$

$$121. \frac{2}{25 \cdot 5^{1/5}} (3x - 2)^{3/2} (945x^3 + 540x^2 + 288x + 128) + C$$

$$123. \frac{3}{4} (x^2 - 1)^{-1/3} (x^2 - 3) + C$$

$$125. \frac{2}{9} (x^3 + 1)^{1/2} (x^3 - 2) + C$$

$$127. 2 \arctan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - (1-x) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$$

$$129. 3(x+1)^{1/3} - \sqrt{3} \arctan \frac{1+2(x+1)^{1/3}}{\sqrt{3}} + \ln |(x+1)^{1/3} - 1| - \frac{1}{2} \ln |(x+1)^{2/3} + (x+1)^{1/3} + 1| + C$$

$$131. \sqrt{1+e^{2x}} + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\sqrt{1+e^{2x}} - 1}{\sqrt{1+e^{2x}} + 1} \right) + C$$

$$133. \frac{8}{15}$$

$$135. \tan \frac{\theta}{2} + C = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} + C = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + C$$

$$137. -\frac{2 \sin \theta}{1 + \sin \theta - \cos \theta} + C$$

$$139. \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \frac{1 - \cos \theta + (\sqrt{2} - 1) \sin \theta}{1 - \cos \theta - (\sqrt{2} + 1) \sin \theta} \right| + C$$

$$141. \ln \frac{1 - \cos \theta}{1 - \cos \theta + \sin^2 \theta} + C$$

#### Apéndice A

$$1. 2\pi/9 \quad 3. 7\pi/4 \quad 5. -5\pi/6 \quad 7. 72^\circ$$

$$9. 675^\circ$$

$$11. \sin x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, \cos x = \frac{1}{2}, \tan x = -\sqrt{3}, \csc x = -2/\sqrt{3}, \sec x = 2, \cot x = -1/\sqrt{3}$$

$$13. \sin x = -\frac{1}{2}, \cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, \cot x = \sqrt{3}, \csc x = -2, \sec x = -2/\sqrt{3}, \tan x = 1/\sqrt{3}$$

$$15. x = n\pi (n \text{ cualquier entero})$$

$$17. x = 3/2 \pi + 2n\pi (n \text{ cualquier entero})$$

$$19. x = 2n\pi (n \text{ cualquier entero})$$

$$21. x = n\pi (n \text{ cualquier entero})$$

$$23. x = 3/4 \pi + n\pi (n \text{ cualquier entero})$$

$$25. \sin x = -\frac{3}{5}, \cos x = \frac{4}{5}, \tan x = -\frac{3}{4}, \sec x = \frac{5}{4}, \cot x = -\frac{4}{3} \quad 29. \frac{1}{2} \quad 31. -\frac{1}{2} \quad 33. \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$35. -\frac{1}{2}\sqrt{3} \quad 43. \pi/3, 2\pi/3 \quad 45. \pi/2$$

$$47. \pi/8, 3\pi/8, 5\pi/8, 7\pi/8$$

#### Apéndice F

$$1. \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$3. \int_0^2 x \sqrt{4-x^2} dx = \frac{8}{3}$$

$$5. \int_0^{\pi/2} \sin x \cos x dx = \frac{1}{2}$$

$$7. \int_0^2 \sqrt{x^4 + x^7} dx = \frac{52}{9}$$

# Bibliografía para estudio posterior

Las referencias 2, 3, 7 y 10 pueden servir para consultar temas históricos relativos al cálculo. La referencia 14 proporciona un tratamiento más teórico que el de nuestro libro acerca de los temas de cálculo de una sola variable. Las referencias 4, 5, 8 y 15 incluyen temas avanzados del cálculo de varias variables. La referencia 11 es una obra estándar relativa a las series infinitas. Las referencias 1, 9 y 13 son libros de texto de ecuaciones diferenciales. La referencia 6 analiza temas del cálculo junto con la computación y la programación en BASIC. Aquellos que quieran ahondar en el tema de los fractales deberán leer la referencia 12.

1. BOYCE, WILLIAM E. y RICHARD C. DIPRIMA, *Elementary Differential Equations* (5a. edición). Nueva York: John Wiley, 1991.
2. BOYER, CARL B., *A History of Mathematics* (2a. edición). Nueva York: John Wiley, 1991.
3. BOYER, CARL B., *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*. Nueva York: Dover Publications, 1959.
4. BUCK, R. CREIGHTON, *Advanced Calculus* (3a. edición). Nueva York: McGraw-Hill, 1977.
5. COURANT, RICHARD y FRITZ JOHN, *Introduction to Calculus and Analysis*. Volúmenes I y II. Nueva York: Springer-Verlag, 1989.
6. EDWARDS, C.H., JR., *Calculus and the Personal Computer*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1986.
7. EDWARDS, C.H., JR., *The Historical Development of the Calculus*. Nueva York: Springer-Verlag, 1982.
8. EDWARDS, C.H., JR., *Advanced Calculus of Several Variables*. Nueva York: Academic Press, 1973.
9. EDWARDS, C.H., JR. y DAVID E. PENNEY, *Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems* (3a. edición). Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1993.
10. KLINE, MORRIS, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Volúmenes I, II y III. Nueva York: Oxford University Press, 1990.
11. KNOPP, KONRAD, *Theory and Application of Infinite Series* (2a. edición). Nueva York: Hafner Press, 1990.
12. PEITGEN, H.O. y P.H. RICHTER, *The Beauty of Fractals*. Nueva York: Springer-Verlag, 1986.
13. SIMMONS, GEORGE F., *Differential Equations with Applications and Historical Notes*. Nueva York: McGraw-Hill, 1972.
14. SPIVAK, MICHAEL E., *Calculus* (2a. edición). Berkeley: Publish or Perish, 1980.
15. TAYLOR, ANGUS E. y W. ROBERT MANN, *Advanced Calculus* (3a. edición). Nueva York: John Wiley, 1983.





# Índice

El tipo en negritas indica la página donde se define un término.

- 
- A**  
Abel, Niels Henrik, 173  
Abscisa, 15  
Aceleración, **103, 262**  
*Acta Eruditorum*, 190  
Ada, 49  
*Advanced Calculus*, 461  
Agua:  
  problema de evaporación, 359  
  volumen en función de la temperatura, 111, 150  
Alfabeto griego, A-34  
Análisis dimensional, 146  
Ángulo:  
  de inclinación, 19  
  grados, A-2  
  negativo, A-1  
  positivo, A-1  
  radianes, A-2  
Antiderivación, 256  
Anualidad, 525  
Aproximación con la recta tangente, 328  
Aproximación con puntos medios, 327  
Aproximación de Simpson, 330  
  estimación del error, 332  
Aproximación en el extremo derecho, 324  
Aproximación en el extremo izquierdo, 324  
Aproximación lineal, 192,  
Aproximación mediante trapecios, 325  
  estimación del error, 332  
Aproximación parabólica, 330  
Aproximaciones en los extremos, 324  
Arandela, 353  
Arco suave, 367  
  longitud, 369  
Arcocoseno, 451  
Arcosecante, 454, 455  
Arcoseno, 450  
Arcotangente, 452  
  fórmula para la suma, 458  
Área, 342, A-33  
  cilindro, 47, 106  
  circulo, 319, 345, A-2  
  con signo, 283  
  cono truncado, 371  
  cuadrado, 11  
  de una zona esférica, 395  
  elipse, 321  
  elipsoide, 468, 479  
  entre dos curvas, 315, 318  
  esfera, 106, 371, 395  
  rectángulo, 11, 12  
  sector circular, A-3  
  superficie de revolución, 372  
  superficie de una caja, 12, 106  
  toro, 513  
  triángulo equilátero, 47  
Área de la superficie del elipsoide, 468, 479, 513  
Arquimedes, 2, 183, 254, 277, 280, 321, 355, 359, 371  
  ley de flotación, 183  
Asintota, 35, 242, 245, 247  
Asintota horizontal, 245  
Asintota oblicua, 248, 253  
Asintota vertical, 242  
Astroide:  
  área de la superficie de revolución, 375  
  longitud, 375
- 
- B**  
Babbage, Charles, 49  
Barra, 101  
Barril de vino de Newton, 358  
Base, 398  
  de la función exponencial, 38  
BASIC, 287, 428, 458, A-3  
Bernoulli, James, 448  
Bernoulli, John, 448, 459, 480  
Beyer, William H., 481  
Briggs, Henry, 397  
Byron, Ada, 49
- 
- C**  
Caballo de fuerza, 386  
Cable colgante, 448  
Cable para un puente de suspensión, 376  
Cálculo:  
  panorama, 42  
  teorema fundamental, 296, 300  
Cálculo de la raíz cuadrada, 13  
Cálculo diferencial, 43  
Cálculo integral, 44, 448  
Campo de dirección, 378  
Campo de pendientes, 378  
Cantidad creciente, 99  
Cantidad decreciente, 99  
Caos, 94  
Capa cilíndrica, 360  
Capacidad gráfica, 59  
Carbono 14, 435  
Cardan, 173  
  fórmulas, 224  
Carrera, 16  
Cauchy, Augustin-Louis, A-19, A-28  
Cavalieri, Bonaventura, 350  
Cilindro, 349  
Círculo:  
  área, 254, 319, A-2  
  circunferencia, A-2  
  ecuación, 24  
  trasladado, 30  
Circunferencia de un círculo, 11, A-2  
Clasificación de puntos críticos, 212  
Clepsidra, 189, 358, 383  
COBOL, 49  
Cociente de diferencias, 52  
Combinación lineal, 109  
Completar el cuadrado, 24, 28, 31, 514  
Composición, 85  
  de funciones continuas, 84  
Concavidad, 232  
  criterio, 233  
  y trazo de curvas, 232  
Condición inicial, 261, 378  
Conjugado, 67  
  de un número complejo, 179  
Conjunto, 4  
Constante de eliminación, 437  
Continuidad, 81  
  de funciones racionales, 83  
  de funciones trigonométricas, 84  
  de la composición de funciones, 84  
  de polinomios, 83  
  uniforme, A-22  
  y derivabilidad, 89  
Convergencia de aproximaciones, 175  
Coordenada  $x$ , 15  
Coordenada  $y$ , 15  
Coordenadas, 15  
Coordenadas cartesianas, 15  
Cosecante hiperbólica, 469  
Cosecante inversa, 455  
Coseno hiperbólico, 468  
Coseno inverso, 451  
Cota inferior, A-12  
Cota superior, A-12  
Cotangente hiperbólica, 469  
Cotangente inversa, 452  
Crecimiento de la población mundial, 433  
Crecimiento de poblaciones, 100, 379, 431  
  análisis gráfico, 106  
  con inmigración, 440  
  del mundo, 433  
  problemas, 438  
Crecimiento natural, 431  
Criterio de la primera derivada para extremos globales, 216  
Criterio de la primera derivada para extremos locales, 210  
Criterio para la concavidad, 232  
Cuentas de ahorro con depósitos continuos, 441  
Cuerno de Gabriel, 417  
Cuña, 355

Curva:  
 exótica, 23  
 que se dobla hacia abajo, 229  
 que se dobla hacia arriba, 229  
 Curva solución, 378

---

**D**  
 Dato experimental, 415  
 Datos de población, 100  
 de la Vallée Poussin, C. J., 417  
 Decaimiento radiactivo, 434  
 Decimal finito, 2  
 Decimal infinito, 2  
 Decimal periódico, 2  
 del Ferro, 173  
 Derivación, 53, 95  
 de funciones cuadráticas, 55, 96  
 de una función inversa, 404  
 implícita, 165  
 logarítmica, 428  
 notación de operador, 107  
 proceso de cuatro pasos, 95  
 Derivada, 43, 50, 53, 59, 95  
 de la función exponencial, 400  
 de la función hiperbólica inversa, 473  
 de la función hiperbólica, 470  
 de las funciones trigonométricas, 157  
 de senos y cosenos, 155  
 de un cociente, 114  
 de un múltiplo constante, 110  
 de un polinomio, 111  
 de un producto, 112, 113  
 de un recíproco, 113  
 de una combinación lineal, 110  
 de una composición de funciones, 118, 120  
 de una función constante, 107, 108  
 de una potencia de  $f(x)$ , 121  
 de una potencia de  $x$ , 109, 114  
 de una suma, 110  
 estudio numérico, 57  
 $n$ -ésima, 227  
 notación, 107  
 segunda, 227, 463  
 tercera, 227  
 Derive, 485  
 Desarrollo decimal, 2  
 Descartes, René, 1, 15, 166  
 hoja de, 166  
 Descomposición en fracciones parciales, 499  
 Desigualdad del triángulo, 3, 47  
 Desigualdades, 3  
 Discontinuidad de salto finito, 82  
*Dictionary of Scientific Biography*, 448  
 Diferencial, 97, 192, 195  
 Difusión de la información, 442  
 Difusión de una enfermedad, 442  
 Difusión:  
 de información, 442  
 del calor, 183  
 Dilatación adiabática de un gas, 416  
 Directivas en línea, 70  
 Discontinuidad, 26, 38, 81  
 infinita, 26, 82, 83  
 removible, 83  
 salto finito, 82  
 Discontinuidad de salto, 82  
 Discurso del método, 1

Disminución de ventas, 437  
*Distancia*, 3, 15, 346  
 Distribución de números primos, 340, 417, A-19  
 Doble hacia abajo o hacia arriba, 227  
 Dominio de una función, 5

---

**E**  
 $e$ , 39, 400, 401, 407, 414, 416, 417, 424, 480  
 como un límite, 422, 424, 498  
 Ecuación:  
 círculo, 24  
 de van der Waals, 240  
 existencia de solución, 88  
 gráfica, 23  
 lineal, 18, 23  
 logística  
 trascendente, 39  
 Ecuación cuadrática, 12  
 Ecuación de crecimiento exponencial, 433  
 Ecuación de crecimiento natural, 432  
 Ecuación de Kepler, 182  
 Ecuación del crecimiento natural, 432  
 Ecuación diferencial, 256, 261  
 de primer orden, 376, 439  
 lineal, 439  
 separable, 377  
 solución, 376  
 Ecuación lineal, 18, 23  
 Ecuación pendiente-ordenada al origen, 18  
 Ecuación punto-pendiente, 18  
 Ecuaciones simultáneas, 20  
 solución gráfica, 21  
 Eje  $x$ , 14  
 Eje  $y$ , 14  
 Ejes coordenados, 15  
 Elevación, 16  
 Eliminación de contaminantes, 443  
 Eliminación de sustancias, 437  
 Elipse  
 área, 321  
 circunferencia, 375, 513  
 Error, 194  
 Error absoluto, 194  
 Error relativo, 194  
 Estudios numéricos, 9, 57, 70  
 Euclides, 254  
 Euler, Leonhard, 414, 480, 524  
 Evaluación de integrales, 291  
 Existencia:  
 de  $\sqrt{2}$ , 88  
 de la integral, 284, A-18  
 de la solución a una ecuación, 88  
 Exponencial con base  $a$ , 425  
 Extensión de la regla del producto, 113  
 Extremo, 209  
 de una función lineal, 138  
 global, 134  
 local, 133  
 Extremo global, 134  
 criterio de la primera derivada, 216  
 Extremo local, 133, 209  
 criterio de la primera derivada, 210  
 Extremos absolutos, 134, 209  
 teorema, 135  
 tipos, 75

**F**  
 Factores de conversión, A-32  
 Factorización, A-32  
 Fechado con radiocarbono, 435  
 Fermat, Pierre de, 1, 166  
 principio del tiempo mínimo, 147  
 Ferrari, 173  
*First Course in Calculus*, 484  
 floor, 26  
 Formas indeterminadas:  
 0/0, 458  
 0°, 466, 468  
 0 · ∞, 464  
 1<sup>∞</sup>, 466  
 ∞<sup>0</sup>, 466  
 ∞/∞, 461  
 ∞ - ∞, 465  
 Fórmula(s):  
 área, A-33  
 binomial, 108, A-33  
 cuadrática, 172, A-32  
 trigonométrica, A-34  
 volumen, A-33  
 Fórmula de cambio de base para logaritmos, 427  
 Fórmula de Euler, 480  
 demostración, A-30  
 Fórmula para la suma de tangentes, A-6  
 Fórmulas de la regla de la cadena, 158  
 Fórmulas de reducción, 498, 527, 530  
 potencias de cosenos, 517  
 potencias de secantes, 496, 518  
 potencias de tangentes, 490  
 Fórmulas para el ángulo doble, A-2  
 Fórmulas para la suma:  
 arcotangente, 458  
 seno y coseno, 155, A-2, A-6  
 tangente, A-6  
 FORTRAN, A-3  
 Fracción racional, 499  
 propia, 499, 500  
 Fracciones parciales, 499  
 aplicaciones a las ecuaciones diferenciales, 504  
 factores cuadráticos, 503  
 factores lineales, 501  
 Fuerza:  
 ejercida por un líquido, 390  
 Función, 5, 7  
 algebraica, 449  
 arcocosecante, 455  
 arcocoseno, 451  
 arcocotangente, 452  
 arcosecante, 454  
 arcoseno, 450  
 arcotangente, 452  
 cociente, 33  
 combinación lineal, 109  
 composición, 85  
 con derivada idéntica, 203  
 con la misma derivada, 203  
 constante, 63  
 continua, 82  
 cosecante, A-1  
 coseno, 155, A-1  
 cotangente, A-1  
 creciente no acotada, 242  
 creciente, 198, 203  
 cuadrática, 27, 29, 34

de función, 65  
 decreciente, 198, 203  
 definida en forma implícita, 164  
 derivable o diferenciable, 77, 95  
 diente de sierra, 26  
 diferencia, 33  
 dominio, 5  
 elemental, 323  
 exponencial con base  $a$ , 425  
 exponencial natural, 401, 418  
 exponencial, 38, 398, 400  
 fuerza, 384  
 gamma, 524, 526, 527  
 gráfica, 25  
 hipérbólica, 468  
 hipérbólica inversa, 472  
 impar, 312  
 integrable, 283  
 inversa, 402, 403, 449  
 lineal, 34  
 logaritmo (base  $a$ ), 39, 401  
 logaritmo con base  $a$ , 427  
 logaritmo natural, 405, 408  
 máximo entero, 6, 11, 69, 76, 80, 82, 90, 91, 138, 207  
 múltiplo escalar, 33  
 nula, 34  
 par, 312  
 polinomial, 34  
 posición, 101, 262  
 potencia, 34, 415, 426  
 potencia general, 426  
 producto, 33  
 racional, 35, 499  
 rango, 5  
 secante, A-1  
 seno, 155, A-1  
 suave, 367  
 suma, 33  
 tangente, A-1  
 trascendente, 39, 449  
 trigonométrica, 36, 157  
 trigonométrica inversa, 449  
 uniformemente continua, A-22  
 valor absoluto, 77, 89

Función algebraica, 449  
 Función área de una sección transversal, 349  
 Función constante, 63  
 Función continua, 82  
 en un intervalo cerrado, 87  
 producto de, 82  
 suma de, 82

Función creciente, 198, 204  
 no acotada, 242

Función cuadrática, 27, 29, 34  
 Función decreciente, 198, 204  
 Función definida en forma implícita, 164  
 Función derivable o diferenciable, 77  
 y continuidad, 89

Función diente de sierra, 26  
 Función elemental, 323  
 Función exponencial, 38, 398, 400, 418  
 base 2, 399  
 base  $a$ , 425  
 base, 38, 398  
 como límite, 422  
 derivada, 400, 420  
 límites, 418, 421  
 orden de magnitud, 421

Función exponencial natural, 401, 418  
 como un límite, 422  
 derivada, 400, 420  
 límites, 418

Función zeta, A-19

Funciones trigonométricas, 36, A-1  
 continuidad, 84  
 derivadas, 155, 157  
 periodicidad, 36  
 y la regla de la cadena, 158

## G

$g$ , 103, 265  
 Gauss, Carl Friedrich, 417, A-19  
 Grado de un polinomio, 34  
 Gráfica:  
 ecuación, 23  
 función diente de sierra, 26  
 función máximo entero, 26, 76  
 función recíproca, 25  
 función valor absoluto, 25  
 función, 25

## H

Hadamard, Jacques, 417  
*Historical Development of the Calculus*, 277  
 Hoja de Descartes, 166  
 Hopper, Grace Murray, 49  
 HP-48, 6, 13, 57, 184, 322

## I

Identidad fundamental de la trigonometría, A-2  
 Identidades hipérbólicas, 469  
 Identidades para el ángulo mitad, 485, A-2  
 Identidades trigonométricas, 485, 492  
 Incremento, 16, 51, 97, 191  
 Índice de refracción, 153  
 INT, 26  
 Integrable, 283  
 Integral, 257, 283  
 como límite de una sucesión, 285  
 de constante, 294  
 impropia, 519  
 propiedad de comparación, 294  
 propiedad de la unión de intervalos, 294  
 propiedad del múltiplo constante, 294  
 teorema de evaluación, 291  
 teorema de existencia, 284, A-18

Integral convergente, 520, 522  
 Integral definida, 283  
 por sustitución, 310

Integral divergente, 520, 522

Integral impropia, 519  
 convergente, 520, 522  
 divergente, 520, 522

Integral indefinida, 257

Integrando, 284

Interés compuesto continuo, 436

Intervalo, 4  
 Intervalo abierto, 4  
 problemas de máximos y mínimos, 213

Intervalo cerrado, 4  
 Intervalo no acotado, 4  
 Intervalo semiabierto, 4

*Introductio in Analysis Infinitorum*, 480

*Iteración*, 173, 174, 176

## K

Kepler, Johannes, 415

## L

l'Hôpital, Marqués de, 448, 459  
 Lamborghini, 444  
 Lang, Serge, 484  
 Lanzamiento de un satélite, 386  
 Leibniz, G. W., 2, 45, 190, 257, 268, 284, 289, 296, 340, A-18

Lemniscata, 170

Ley de Boyle, 47

Ley de enfriamiento de Newton, 255, 439, 441

Ley de gravitación de Newton, 385

Ley de la constante para los límites, 63, A-8

Ley de la raíz para límites, 64

Ley de la suma para límites, 63

Ley de los cosenos, A-34

Ley de los senos, A-34

Ley de Snell, 153

Ley de sustitución, 66, A-9

Ley de Torricelli, 172, 256, 359, 380, 531

Ley del cociente para los límites, 64, A-11

Ley del producto para límites, 53, A-8

Ley del recíproco para límites, A-10

Ley del sandwich, 73, A-11

Leyes de Kepler, 415

Leyes de los exponentes, 298, 398, 419, 425, A-32

Leyes de los logaritmos, 403, 411, 427

$\ln(x)$ , 340

Límite, 50, 51, 52, 60, 68, 72, 243, 463, A-7  
 de integración, 284, 520  
 de un polinomio, 64  
 de una función racional, 64  
 de una función trigonométrica, 71  
 en infinito, 243  
 idea de, 60  
 infinito, 77  
 lateral, 62, 74  
 no existencia, 78  
 por la derecha, 74  
 por la izquierda, 75  
 propiedad de linealidad, 110  
 trigonométrico básico, 72, 79

Límite inferior (de integración), 284

Límite lateral, 62, 74, 75  
 propiedades, 76  
 y límites por ambos lados, 75

Límite por la derecha, 74

Límite por la izquierda, 75

Límite superior de integración, 284

Límite trigonométrico básico, 72, 79

Límites infinitos, 77

Límites relacionados con  $\exp x$ , 421

Límites relacionados con  $\ln x$ , 412

LN, 39, 405, 408

LOG, 39, 428

Logaritmo en base  $a$ , 39, 401, 427

Logaritmo(s), 397  
 común, 402  
 leyes, 403, 411, 427  
 y datos experimentales, 415

Longitud, 369  
 de un arco circular, A-3

Longitud de arco, 369  
Longitud natural, 385, 396

## M

MacCluer, C. R., A-30  
Mann, W. R., 461  
*Maple*, 485  
Máquina analítica, 49  
Máquina de derivación, 107  
Máquina de diferencias, 49  
*Mathematica*, 428, 485  
*Máxima cota inferior*, A-12  
*Mediana*, 22  
Método babilónico para la raíz cuadrada, 173  
Método de aproximaciones sucesivas, 32, 48  
Método de fracciones parciales, 499  
Método de la sustitución repetida, 182  
Método de las capas cilíndricas, 360  
Método de las secciones transversales, 349  
Método de Newton, 94, 175  
Método de suma y resta, 112  
Método de sustitución, 482  
Método de tabulación repetida, 10, 13, 48  
Método del máximo y mínimo en un intervalo cerrado, 135  
Minima cota superior, A-12  
*Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, 397  
Movimiento de los planetas, 415  
Movimiento hacia abajo, 102  
Movimiento hacia arriba, 102  
Movimiento rectilíneo, 262  
Movimiento vertical, 102, 264

## N

*n*-ésima derivada, 227  
*Napier, John*, 397  
Newton, Isaac, 2, 45, 94, 173, 176, 190, 268, 287, 296, 340, A-18  
Norma, 280  
Notación diferencial, 97  
Notación para derivadas, 107  
Notación para la suma, 272  
Número irracional, 2, 407  
  como exponente, 425  
Número racional, 2  
Número real, 2  
Números complejos, 179

## O

Orden de magnitud:  
  de la función exponencial, 421, 430  
  del logaritmo natural, 447  
Ordenada, 15, 539  
Ordenada al origen, 18  
Ore, Oystein, 173  
Origen, 15

## P

Parábola, 27, 29  
  longitud de arco, 513  
  trasladada, 28, 30  
  vértice, 27  
Parte imaginaria de un número complejo, 179  
Parte real de un número complejo, 179

Partición, 280  
  norma, 280  
  regular, 285  
Patrones fractales, 94, 179  
Pelota de fútbol americano, 513  
Pendiente, 16  
  positiva y negativa, 20  
Pendientes:  
  de rectas paralelas, 19  
  de rectas perpendiculares, 19  
Péndulo:  
  periodo, 47, 130, 187  
Periodicidad, 36  
Periodo:  
  de revolución de los planetas, 415  
  de un péndulo, 47, 130, 187  
  del seno y el coseno, A-3  
Perpetuidad, 515  
Peso, 385  
Plano:  
  euclideo, 14  
  cartesiano, 1, 15  
  coordenado, 14  
Plausibilidad de la solución, 146, 355  
Polinomio, 34  
  continuidad, 83  
  derivada, 111  
Potencia, 386  
Potencia racional, 125  
Pozos de atracción de Newton, 180  
Presión, 390  
Presión barométrica, 439  
Primitiva, 256  
Primitiva más general, 257  
  de una función hiperbólica, 471  
*Principia Mathematica*, 94  
Principio de Cavalieri, 350  
Principio de traslación, 24, 28  
Principio del tiempo mínimo, 147  
Problema con condiciones iniciales, 261, 303, 379  
Problema de la catenaria, 448  
Problema de la tangente, 43  
Problema del área, 44  
Problemas relacionados con tasas, 166  
Promedio, 297  
Propiedad de comparación, 294  
Propiedad de la mínima cota superior, A-13  
Propiedad de la suma para los límites, A-9  
Propiedad de la unión de intervalos, 284  
Propiedad de linealidad:  
  de la antiderivación, 259  
  de la derivación, 110  
  de los límites, 110  
Propiedad de los intervalos anidados, A-14  
Propiedad del múltiplo constante, 294  
Propiedad del valor intermedio, 87, A-14  
Propiedades de los límites, 63, 64, 73, A-8 a A-11  
  laterales, 76  
Punto crítico, 135, 219  
  clasificación, 212  
  de un polinomio cúbico, 138  
  de una función cuadrática, 138  
Punto de inflexión, 233  
Punto interior, 210  
Punto límite, A-16

Punto máximo, 131  
Punto medio, 16  
Punto mínimo, 131  
Puntos de discontinuidad, 26

## R

Radianes, 155, 159, A-2  
Raíz, 34  
Rango:  
  de una función, 5  
Razón de cambio instantánea, 98, 104,  
  de una función tabulada, 100  
Razón de cambio promedio, 98, 104  
Razón de cambio, 98, 122  
  instantánea, 98  
  promedio, 98  
Recta normal, 55  
Recta numérica, 2  
Recta real, 2  
Recta secante, 50  
Recta tangente, 30, 43, 50, 53, 99  
  vertical, 129  
Recta tangente ascendente, 99  
Recta tangente descendente, 99  
Rectas:  
  ángulo de inclinación, 19  
  ecuación pendiente-ordenada al origen, 18  
  ecuación punto-pendiente, 18  
  ecuación, 18  
  normal, 55  
  paralela, 19  
  pendiente, 17  
  perpendicular, 19  
Rectas horizontales, 17, 19  
Rectas paralelas, 19  
Rectas perpendiculares, 19  
Rectas verticales, 17, 19  
  y la gráfica de una función, 25  
Refracción de la luz, 153  
Regla de l'Hôpital, 448, 459  
  demostración, 461, A-30  
Regla de la cadena, 118, 120  
  demostración, A-17  
  esquema de la demostración, 120  
  forma diferencial, 196  
Regla de la potencia, 108, 109, 114  
  en orden inverso, 260  
  generalizada, 121, 125, 127  
  para un exponente arbitrario, 427  
Regla del cociente, 114  
Regla del producto, 112  
  extensión, 113  
Regla del recíproco, 113  
Reloj de agua, 358, 383  
Resorte elástico, 385  
Riemann, G. F. B., 280, 340, A-19  
Rolle, Michel, 199  
Rombo, 22

---

S  
Secante hiperbólica, 469  
Secante inversa, 454  
Sección anular, 353  
Sección transversal, 349  
Segmento parabólico, 321  
Segunda derivada, 227  
  criterio, 230  
Selección, 280

Seno hiperbólico, **468**  
 Seno inverso, **450**  
 Sigma, **272**  
 Sólido de revolución, **351**  
 Solución de una ecuación diferencial, **376**  
   explícita, **377**  
   general, **377**  
   implícita, **377**  
   particular, **378**  
 Solución general, **261**  
 Solución particular, **261**  
*Standard Mathematical Tables and Formulas*, **481**  
 Sucesión acotada, **A-13**  
 Sucesión de Cauchy, **A-16**  
   acotada, **A-13**  
   creciente, **A-13**  
   de Cauchy, **A-16**, **A-17**  
   decreciente, **A-13**  
   monótona, **A-13**  
 Suma con puntos medios, **281**  
 Suma de Riemann, **280**, **341**  
   aproximaciones mediante, **287**  
 Suma en el extremo derecho, **281**  
 Suma en el extremo izquierdo, **280**  
 Superficie de revolución, **371**  
   área, **372**  
 Superficie de Riemann, **340**  
 Sustitución de límites, **65**  
 Sustitución en integrales definidas, **309**  
 Sustituciones hiperbólicas, **511**

---

**T**

Tablas de integrales, **481**, **482**, forros  
 Tabulación de funciones, **9**  
 Tabulación repetida, **9**, **178**  
 Tangente hiperbólica, **469**  
 Tangente inversa, **452**  
 Tartaglia, **173**  
 Tasa de interés anual efectiva, **436**, **438**  
 Tasa de interés anual, **436**  
 Taylor, A. E., **461**  
 Técnicas de integración (*véase también*)  
   fórmulas de reducción)  
   combinaciones poco usuales de  
   funciones trigonométricas, **491**  
   completar el cuadrado, **514**  
   fórmulas de reducción, **490**  
   fracciones parciales, **499**  
   función racional de  $e^x$ , **531**  
   función racional de senos y cosenos,  
   **531**  
   por partes, **492**  
   productos de secantes y tangentes, **488**  
   productos de senos y cosenos, **486**  
   resumen, **528**  
   sustitución, **307**, **482**  
   sustitución de racionalización, **531**  
   sustitución hiperbólica, **511**  
   sustitución trigonométrica, **508**  
 Técnicas de integración, *véase* Técnicas  
 de integración  
 Temperatura:  
   Celsius, **11**, **47**, **105**  
   Fahrenheit, **11**, **22**, **47**, **105**  
 Temperatura absoluta, **22**  
 Teorema:  
   Bolzano-Weierstrass, **A-16**  
   continuidad de composiciones, **86**

convergencia de una sucesión  
   de Cauchy, **A-17**  
 criterio de concavidad, **233**  
 criterio de la primera derivada para  
   extremos globales, **216**  
 criterio de la primera derivada para  
   extremos locales, **210**  
 criterio de la segunda derivada, **230**  
 criterio para un punto de inflexión, **233**  
 de Rolle, **199**  
 derivabilidad implica continuidad, **89**  
 derivación de una función inversa, **404**  
 derivada de una combinación lineal,  
   **110**  
 derivada de una constante, **108**  
 derivada de una función trigonométrica,  
   **157**  
 derivada del seno y el coseno, **155**  
 ecuación de crecimiento natural, **432**  
 estimación del error de Simpson, **332**  
 estimación del error en el trapecio, **332**  
 evaluación de integrales, **291**  
 existencia de la integral, **284**, **A-23**  
 extremos locales, **133**  
 forma débil de la regla de l'Hôpital, **462**  
 fórmula de Taylor, **A-30**  
 fórmulas para integrales, **258**  
 funciones con derivada nula, **203**  
 funciones con derivadas iguales, **203**  
 funciones crecientes y decrecientes, **204**  
 integral como límite de una sucesión,  
   **285**  
 integral definida por sustitución, **310**  
 leyes de los exponentes, **419**  
 leyes de los logaritmos, **411**  
 límite trigonométrico básico, **72**, **79**  
 límites laterales y por ambos lados, **75**  
 máximos y mínimos absolutos, **135**  
 primitiva más general, **256**  
 propiedad de los intervalos anidados,  
   **A-14**  
 propiedad del valor intermedio, **87**,  
   **A-14**  
 regla de l'Hôpital, **459**, **A-30**  
 regla de la potencia generalizada, **127**  
 regla de la potencia para un entero  
   negativo, **114**  
 regla de la potencia para un entero  
   positivo, **109**  
 regla del cociente, **114**  
 regla del producto, **112**  
 regla del recíproco, **113**  
 subsucesión convergente, **A-16**  
 sucesión monótona acotada, **A-13**  
 sumas de Riemann generalizadas,  
   **A-25**, **A-27**  
 teorema fundamental del cálculo, **300**  
 una función continua es acotada, **A-15**  
 valor máximo y mínimo, **132**, **A-15**  
 valor medio de Cauchy, **A-28**  
 valor medio, **198**, **201**  
 valor promedio, **299**  
 Teorema de Pitágoras, **15**, **A-33**  
 Teorema del factor, **224**  
 Teorema fundamental del álgebra, **34**  
 Teorema fundamental del cálculo, **45**,  
   **296**, **300**  
 Tercera derivada, **227**  
*The Method*, **254**

TI-81, **9**, **57**, **59**, **70**, **287**, **425**  
 TI-85, **6**, **184**, **321**  
 Tiempo de eliminación, **437**  
 Toro, **358**, **513**  
 Trabajo, **384**  
   contra la gravedad, **385**  
   para llenar un tanque, **386**  
   para vaciar un tanque, **389**  
 Trazo de curvas:  
   resumen de técnicas, **246**  
   y solución de ecuaciones, **224**  
 Triángulo característico, **190**

---

**U**

Unidades británicas de ingeniería, **A-31**  
 Unidades científicas MKS, **A-31**  
 Unidades de medida, **A-31**

---

**V**

Valor absoluto, **3**  
 Valor de una función, **5**  
   máximo y mínimo, **131**  
 Valor máximo, **131**  
   de una función cuadrática, **29**  
   global, **134**  
   local, **133**  
   teorema, **132**, **135**, **A-15**  
 Valor mínimo, **131**  
   global, **134**  
   local, **133**  
   teorema, **132**, **135**  
 Valor promedio de una función, **298**  
 Variable:  
   dependiente, **6**, **7**, **122**  
   independiente, **6**, **7**, **122**  
   intermedia, **122**  
 Vecindad perforada, **60**  
 Velocidad, **101**, **102**, **262**  
 Velocidad de escape, **524**  
 Velocidad instantánea, **101**  
 Velocidad promedio, **101**  
 Verhulst, Pierre-François, **46**, **508**  
 Vértice:  
   de una parábola, **27**  
 Vida media, **434**  
 Volumen, **A-33**  
   cilindro, **12**, **106**, **254**, **349**  
   cono, **254**, **352**, **366**  
   cubo, **47**, **106**  
   de un segmento de elipsoide, **395**  
   de un segmento de esfera, **171**, **183**, **186**,  
   **358**, **366**  
   de un segmento de hiperboloide, **395**  
   de un sólido de revolución, **351**, **361**  
   de un toro, **358**, **366**  
   de una cuña, **355**  
   de una esfera, **11**, **106**, **254**, **348**, **352**,  
   del agua en función de la temperatura,  
   **111**, **150**  
   del cono truncado, **359**  
   elipsoide, **366**  
   mediante secciones transversales, **350**

---

**W**

Weber, Wilhelm, **A-19**  
 Weierstrass, Karl, **68**

---

**Z**

zoom, **31**, **59**, **88**, **91**, **430**



001

---

PROGRAMAS EDUCATIVOS, S.A. DE C.V.  
CALZ. CHABACANO NO. 65,  
COL. ASTURIAS, DELG. CUAUHTEMOC,  
C.P. 06450, MÉXICO, D.F.

EMPRESA CERTIFICADA POR EL  
INSTITUTO MEXICANO DE NORMALIZACIÓN  
Y CERTIFICACIÓN A.C. BAJO LAS NORMAS  
ISO-9002:1994/MX-CC-004:1995  
CON EL NO. DE REGISTRO RSC-048  
E ISO-14001:1996/MX-SAA-001:1998 IMNC/  
CON EL NO. DE REGISTRO RSA-003

---

2003



# TABLA DE INTEGRALES

## FORMAS ELEMENTALES

$$1 \int u dv = uv - \int v du$$

$$2 \int u^n du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C \text{ si } n \neq -1$$

$$3 \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$4 \int e^u du = e^u + C$$

$$5 \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$6 \int \operatorname{sen} u du = -\cos u + C$$

$$7 \int \cos u du = \operatorname{sen} u + C$$

$$8 \int \sec^2 u du = \tan u + C$$

$$9 \int \csc^2 u du = -\cot u + C$$

$$10 \int \sec u \tan u du = \sec u + C$$

$$11 \int \csc u \cot u du = -\csc u + C$$

$$12 \int \tan u du = \ln|\sec u| + C$$

$$13 \int \cot u du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$$

$$14 \int \sec u du = \ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$15 \int \csc u du = \ln|\csc u - \cot u| + C$$

$$16 \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$17 \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$18 \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C$$

$$19 \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{sec}^{-1} \left| \frac{u}{a} \right| + C$$

## FORMAS TRIGONOMÉTRICAS

$$20 \int \operatorname{sen}^2 u du = \frac{1}{2} u - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2u + C$$

$$21 \int \cos^2 u du = \frac{1}{2} u + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2u + C$$

$$22 \int \tan^2 u du = \tan u - u + C$$

$$23 \int \cot^2 u du = -\cot u - u + C$$

$$24 \int \operatorname{sen}^3 u du = -\frac{1}{3} (2 + \operatorname{sen}^2 u) \cos u + C$$

$$25 \int \cos^3 u du = \frac{1}{3} (2 + \cos^2 u) \operatorname{sen} u + C$$

$$26 \int \tan^3 u du = \frac{1}{2} \tan^2 u + \ln|\cos u| + C$$

$$27 \int \cot^3 u du = -\frac{1}{2} \cot^2 u - \ln|\operatorname{sen} u| + C$$

$$28 \int \sec^3 u du = \frac{1}{2} \sec u \tan u + \frac{1}{2} \ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$29 \int \csc^3 u du = -\frac{1}{2} \csc u \cot u + \frac{1}{2} \ln|\csc u - \cot u| + C$$

$$30 \int \operatorname{sen} au \operatorname{sen} bu du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C \text{ si } a^2 \neq b^2$$

$$31 \int \cos au \cos bu du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C \text{ si } a^2 \neq b^2$$

$$32 \int \operatorname{sen} au \cos bu du = -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C \text{ si } a^2 \neq b^2$$

$$33 \int \operatorname{sen}^n u du = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} u du$$

$$34 \int \cos^n u du = \frac{1}{n} \cos^{n-1} u \operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u du$$

$$35 \int \tan^n u du = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u du \text{ si } n \neq 1$$

$$36 \int \cot^n u du = -\frac{1}{n-1} \cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u du \text{ si } n \neq 1$$

$$37 \int \sec^n u du = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} u \tan u + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u du \text{ si } n \neq 1$$

$$38 \int \csc^n u du = -\frac{1}{n-1} \csc^{n-2} u \cot u + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} u du \text{ si } n \neq 1$$

$$39a \int \operatorname{sen}^n u \cos^m u du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u \cos^{m+1} u}{n+m} + \frac{n-1}{n+m} \int \operatorname{sen}^{n-2} u \cos^m u du \text{ si } n \neq -m$$

$$39b \int \operatorname{sen}^n u \cos^m u du = -\frac{\operatorname{sen}^{n+1} u \cos^{m-1} u}{n+m} + \frac{m-1}{n+m} \int \operatorname{sen}^n u \cos^{m-2} u du \text{ si } m \neq -n$$

$$40 \int u \operatorname{sen} u du = \operatorname{sen} u - u \cos u + C$$

$$41 \int u \cos u du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$$

$$42 \int u^n \operatorname{sen} u du = -u^n \cos u + n \int u^{n-1} \cos u du$$

$$43 \int u^n \cos u du = u^n \operatorname{sen} u - n \int u^{n-1} \operatorname{sen} u du$$



(La tabla de integrales continúa de la página anterior)

**FORMAS QUE CONTIENEN  $\sqrt{u^2 \pm a^2}$**

$$45 \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

$$47 \int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} du = \sqrt{u^2 - a^2} - a \sec^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$49 \int \frac{u^2 du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 \pm a^2} \mp \frac{a^2}{2} \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

$$51 \int \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} + \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

$$53 \int (u^2 \pm a^2)^{3/2} du = \frac{u}{8} (2u^2 \pm 5a^2) \sqrt{u^2 \pm a^2} + \frac{3a^4}{8} \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

$$44 \int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

$$46 \int \frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{u} du = \sqrt{u^2 + a^2} - a \ln \left( \frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} \right) + C$$

$$48 \int u^2 \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{8} (2u^2 \pm a^2) \sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8} \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

$$50 \int \frac{du}{u^2 \sqrt{u^2 \pm a^2}} = \mp \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{a^2 u} + C$$

$$52 \int \frac{du}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} = \pm \frac{u}{a^2 \sqrt{u^2 \pm a^2}} + C$$

**FORMAS QUE CONTIENEN  $\sqrt{a^2 - u^2}$**

$$55 \int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} du = \sqrt{a^2 - u^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$$

$$57 \int u^2 \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{8} (2u^2 - a^2) \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^4}{8} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$59 \int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} - \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$61 \int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2 \sqrt{a^2 - u^2}} + C$$

$$54 \int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$56 \int \frac{u^2 du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$58 \int \frac{du}{u^2 \sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a^2 u} + C$$

$$60 \int \frac{du}{u \sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$$

$$62 \int (a^2 - u^2)^{3/2} du = \frac{u}{8} (5a^2 - 2u^2) \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{3a^4}{8} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$$

**FORMAS EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS**

$$64 \int u^n e^u du = u^n e^u - n \int u^{n-1} e^u du$$

$$66 \int u^n \ln u du = \frac{u^{n+1}}{n+1} \ln u - \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2} + C$$

$$68 \int e^{au} \cos bu du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2} (a \cos bu + b \sin bu) + C$$

$$63 \int u e^u du = (u - 1) e^u + C$$

$$65 \int \ln u du = u \ln u - u + C$$

$$67 \int e^{au} \sin bu du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2} (a \sin bu - b \cos bu) + C$$

**FORMAS TRIGONÓMICAS INVERSAS**

$$70 \int \tan^{-1} u du = u \tan^{-1} u - \frac{1}{2} \ln(1 + u^2) + C$$

$$72 \int u \sin^{-1} u du = \frac{1}{4} (2u^2 - 1) \sin^{-1} u + \frac{u}{4} \sqrt{1 - u^2} + C$$

$$74 \int u \sec^{-1} u du = \frac{u^2}{2} \sec^{-1} u - \frac{1}{2} \sqrt{u^2 - 1} + C$$

$$76 \int u^n \tan^{-1} u du = \frac{u^{n+1}}{n+1} \tan^{-1} u - \frac{1}{n+1} \int \frac{u^{n+1}}{1+u^2} du \text{ si } n \neq -1$$

$$69 \int \sin^{-1} u du = u \sin^{-1} u + \sqrt{1 - u^2} + C$$

$$71 \int \sec^{-1} u du = u \sec^{-1} u - \ln|u + \sqrt{u^2 - 1}| + C$$

$$73 \int u \tan^{-1} u du = \frac{1}{2} (u^2 + 1) \tan^{-1} u - \frac{u}{2} + C$$

$$75 \int u^n \sin^{-1} u du = \frac{u^{n+1}}{n+1} \sin^{-1} u - \frac{1}{n+1} \int \frac{u^{n+1}}{\sqrt{1-u^2}} du \text{ si } n \neq -1$$

$$77 \int u^n \sec^{-1} u du = \frac{u^{n+1}}{n+1} \sec^{-1} u - \frac{1}{n+1} \int \frac{u^n}{\sqrt{u^2-1}} du \text{ si } n \neq -1$$

(LA TABLA DE INTEGRALES CONTINÚA DE LA PÁGINA ANTERIOR)

<b>FORMAS HIPERBÓLICAS</b>	<b>78</b> $\int \operatorname{senh} u \, du = \cosh u + C$	<b>79</b> $\int \cosh u \, du = \operatorname{senh} u + C$
<b>80</b> $\int \tanh u \, du = \ln (\cosh u) + C$	<b>81</b> $\int \coth u \, du = \ln  \operatorname{senh} u  + C$	<b>82</b> $\int \operatorname{sech} u \, du = \tan^{-1}  \operatorname{senh} u  + C$
<b>83</b> $\int \operatorname{csch} u \, du = \ln \left  \tanh \frac{u}{2} \right  + C$	<b>84</b> $\int \operatorname{senh}^2 u \, du = \frac{1}{4} \operatorname{senh} 2u - \frac{u}{2} + C$	<b>85</b> $\int \cosh^2 u \, du = \frac{1}{4} \operatorname{senh} 2u + \frac{u}{2} + C$
<b>86</b> $\int \tanh^2 u \, du = u - \operatorname{senh} u + C$	<b>87</b> $\int \coth^2 u \, du = u - \coth u + C$	<b>88</b> $\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \operatorname{senh} u + C$
<b>89</b> $\int \operatorname{csch}^2 u \, du = -\coth u + C$	<b>90</b> $\int \operatorname{sech} u \tanh u \, du = -\operatorname{sech} u + C$	<b>91</b> $\int \operatorname{csch} u \coth u \, du = -\operatorname{csch} u + C$

<b>FORMAS ALGEBRAICAS VARIAS</b>	<b>92</b> $\int u(au + b)^{-1} \, du = \frac{u}{a} - \frac{b}{a^2} \ln  au + b  + C$
<b>93</b> $\int u(au + b)^{-2} \, du = \frac{1}{a^2} \left( \ln  au + b  + \frac{b}{au + b} \right) + C$	<b>94</b> $\int u(au + b)^n \, du = \frac{(au + b)^{n+1}}{a^2} \left( \frac{au + b}{n+2} - \frac{b}{n+1} \right) + C$ si $n \neq -1, -2$
<b>95</b> $\int \frac{du}{(a^2 \pm u^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n-1)} \left( \frac{u}{(a^2 \pm u^2)^{n-1}} + (2n-3) \int \frac{du}{(a^2 \pm u^2)^{n-1}} \right)$ si $n \neq 1$	
<b>96</b> $\int u \sqrt{au + b} \, du = \frac{2}{15a^2} (3au - 2b)(au + b)^{3/2} + C$	<b>97</b> $\int u^n \sqrt{au + b} \, du = \frac{2}{a(2n+3)} \left( u^n(au + b)^{3/2} - nb \int u^{n-1} \sqrt{au + b} \, du \right)$
<b>98</b> $\int \frac{u \, du}{\sqrt{au + b}} = \frac{2}{3a^2} (au - 2b) \sqrt{au + b} + C$	<b>99</b> $\int \frac{u^n \, du}{\sqrt{au + b}} = \frac{2}{a(2n+1)} \left( u^n \sqrt{au + b} - nb \int \frac{u^{n-1} \, du}{\sqrt{au + b}} \right)$
<b>100a</b> $\int \frac{du}{u \sqrt{au + b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \left  \frac{\sqrt{au + b} - \sqrt{b}}{\sqrt{au + b} + \sqrt{b}} \right  + C$ si $b > 0$	<b>100b</b> $\int \frac{du}{u \sqrt{au + b}} = \frac{2}{\sqrt{-b}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{au + b}{-b}} + C$ si $b < 0$
<b>101</b> $\int \frac{du}{u^n \sqrt{au + b}} = -\frac{\sqrt{au + b}}{b(n-1)u^{n-1}} - \frac{(2n-3)a}{(2n-2)b} \int \frac{du}{u^{n-1} \sqrt{au + b}}$ si $n \neq 1$	
<b>102</b> $\int \sqrt{2au - u^2} \, du = \frac{u-a}{2} \sqrt{2au - u^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{u-a}{a} + C$	<b>103</b> $\int \frac{du}{\sqrt{2au - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{u-a}{a} + C$
<b>104</b> $\int u^n \sqrt{2au - u^2} \, du = -\frac{u^{n-1}(2au - u^2)^{3/2}}{n+2} + \frac{(2n+1)a}{n+2} \int u^{n-1} \sqrt{2au - u^2} \, du$	
<b>105</b> $\int \frac{u^n \, du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{u^{n-1}}{n} \sqrt{2au - u^2} + \frac{(2n-1)a}{n} \int \frac{u^{n-1} \, du}{\sqrt{2au - u^2}}$	<b>106</b> $\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u} \, du = \sqrt{2au - u^2} + a \operatorname{sen}^{-1} \frac{u-a}{a} + C$
<b>107</b> $\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u^n} \, du = \frac{(2au - u^2)^{3/2}}{(3-2n)au^n} + \frac{n-3}{(2n-3)a} \int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u^{n-1}} \, du$	<b>108</b> $\int \frac{du}{u^n \sqrt{2au - u^2}} = \frac{\sqrt{2au - u^2}}{a(1-2n)u^n} + \frac{n-1}{(2n-1)a} \int \frac{du}{u^{n-1} \sqrt{2au - u^2}}$
<b>109</b> $\int (\sqrt{2au - u^2})^n \, du = \frac{u-a}{n+1} (2au - u^2)^{n/2} + \frac{na^2}{n+1} \int (\sqrt{2au - u^2})^{n-2} \, du$	
<b>110</b> $\int \frac{du}{(\sqrt{2au - u^2})^n} = \frac{u-a}{(n-2)a^2} + (\sqrt{2au - u^2})^{2-n} + \frac{n-3}{(n-2)a^2} \int \frac{du}{(\sqrt{2au - u^2})^{n-2}}$	

<b>INTEGRALES DEFINIDAS</b>	<b>111</b> $\int_0^\infty u^n e^{-u} \, du = \Gamma(n+1) = n! \quad (n \geq 0)$	<b>112</b> $\int_0^\infty e^{-au^2} \, du = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0)$
<b>113</b> $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n u \, du = \int_0^{\pi/2} \cos^n u \, du = \begin{cases} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots n} \frac{\pi}{2} & \text{si } n \text{ es un entero par y } n \geq 2 \\ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (n-1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots n} & \text{si } n \text{ es un entero impar y } n \geq 3 \end{cases}$		



Visítenos en:  
[www.pearsoneducacion.net](http://www.pearsoneducacion.net)

ISBN 970-17-0056-2

