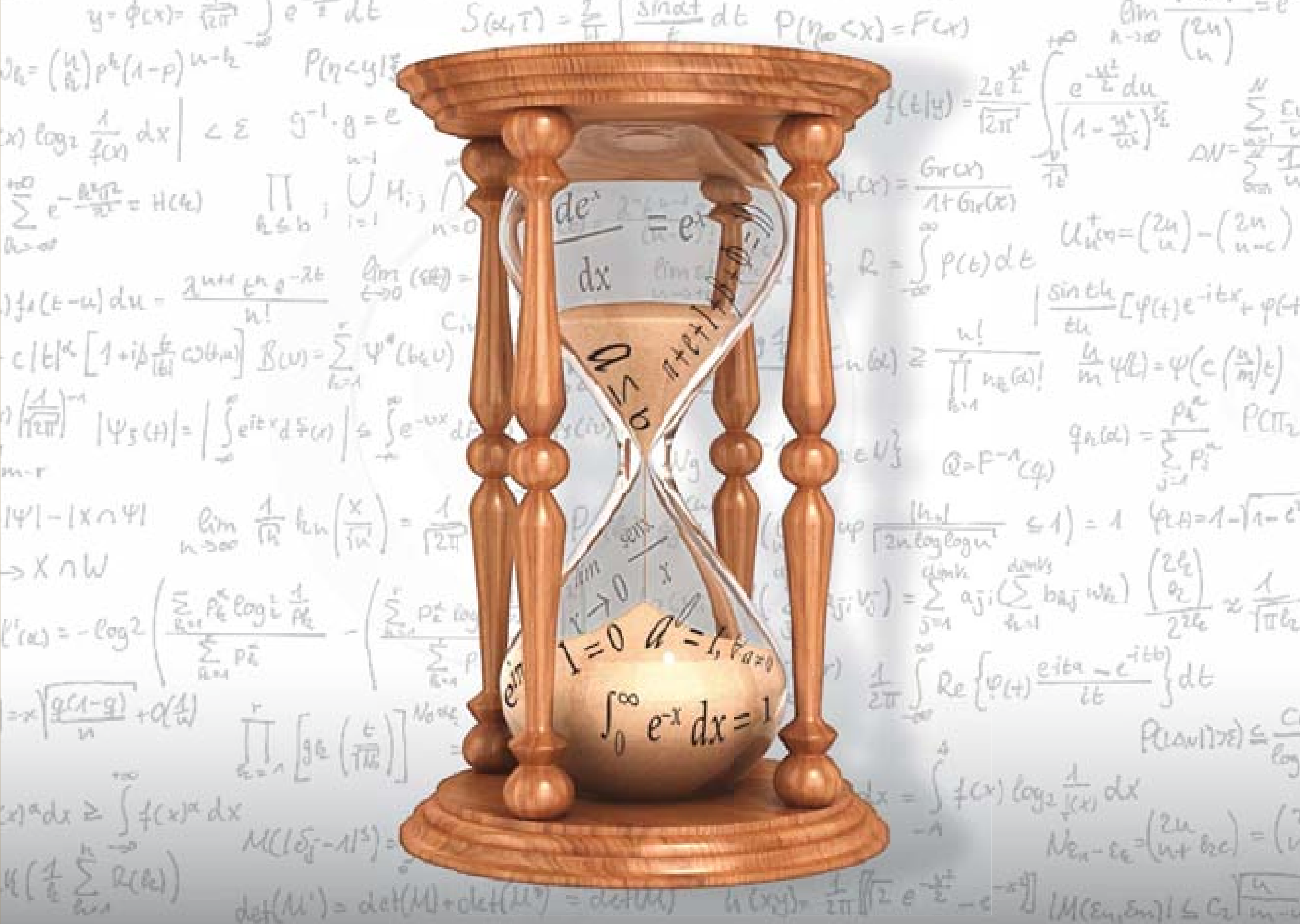
CENGAGE Learning

Tomo I



CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL EN UNA VARIABLE REAL

Alba Gregoret | Miguel Albione | Armando Núñez

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL EN UNA VARIABLE REAL

Tomo I

Alba Gregoret | Miguel Albione | Armando Núñez

CENGAGE Learning®

Cálculo diferencial e integral en una variable real
Alba Gregoret | Miguel Albione | Armando Núñez

Director General
Susana de Luque

Gerente de proyectos especiales
Luciana Rabuffetti

Editora
María Fernanda Crespo

Revisora Técnica
Liliana Milevicich

Diseñadores
Sebastián Escandell
Verónica N. De Luca

Rojas 2128.
(C1416CPX) Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina.
Tel: 54 (11) 4582-0601

Para mayor información, contáctenos en www.cengage.com o vía e-mail a: clientes.conosur@cengage.com

Alba Gregoret, Miguel Albione, Armando Núñez

Cálculo diferencial e integral en una variable real

Buenos Aires,
Cengage Learning Argentina, 2013. 1ª ed.
288 p.; 21x27 cm.

ISBN 978-987-1954-02-5

1. Análisis Matemático. I. Albione, Miguel II. Núñez, Armando III. Gregoret, Alba IV. Título.

CDD 515

Fecha de catalogación: 17/09/2012

Este libro cuenta con un solucionario disponible en la web, ingresando en latinoamerica.cengage.com

Impreso en Argentina.

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL
EN UNA VARIABLE REAL

Tomo I

Alba Gregoret | Miguel Albione | Armando Núñez

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO 2 LÍMITE DE FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL 83

CAPÍTULO 3
CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO 167

CAPÍTULO 4
LA DERIVADA 195

ÍNDICE DE FIGURAS Y TABLAS

FIGURAS

TABLAS

AUTORES

MIGUEL ALBIONE – ALBA GREGORET – ARMANDO NÚÑEZ

Los autores son profesores del departamento de Ciencias Básicas de la Facultad Regional Buenos Aires de la Universidad Tecnológica Nacional.

PRÓLOGO

Los fundamentos del Análisis Matemático suministraron las bases para el desarrollo de las formas actuales de la metodología matemática. Por ello, nuestra idea central desde que surgió la inquietud de escribir el libro fue la presentación del Cálculo como el primer contacto real del estudiante con las Matemáticas, a quienes *además de fomentarles la intuición acerca de los hermosos conceptos del Análisis es, desde luego, igualmente importante convencerlos de que la precisión y el rigor no constituyen ni obstáculos para la intuición ni tampoco fines en si mismos, sino simplemente el medio natural para formular y tratar las cuestiones matemáticas*.[1]

En toda carrera universitaria es importante la consulta de libros. La dificultad asociada a la bibliografía para un primer curso de Análisis Matemático es que no existe "el libro apropiado" a todos los estudiantes, pues éstos llegan a la universidad con muy diferente formación matemática.

Aunque existe una gran variedad de libros que tratan el tema del Cálculo Diferencial e Integral de funciones de una variable real, en este texto los autores pretendemos algo más que la presentación de los tópicos teóricos, sus demostraciones y algunos ejemplos; nuestra idea es facilitar y organizar el estudio de quienes se enfrentan al tema por primera vez, todo ello sobre la base de la experiencia acumulada al frente de numerosos cursos dictados sobre el mismo. Estamos convencidos de que una de las formas posibles de lograrlo es a través de una presentación resumida de la teoría donde se tratan las definiciones, propiedades y teoremas, con algunas demostraciones que consideramos formativas, numerosos problemas resueltos *y una apreciable cantidad de ejercicios propuestos*[2] *con sus respuestas,* que contemplen especialmente las dificultades más frecuentes observadas hasta ahora en la mayoría de los estudiantes. A ello le agregamos, a lo largo de los dos tomos en que se presenta la obra, una serie de sugerencias con el objetivo de que actúen como guía y ayuden a orientar al estudiante para lograr la incorporación de los conocimientos en forma significativa.

Se debe tener presente que de poco sirve intentar resolver ejercicios de aplicación sin haber antes estudiado la teoría y tampoco deja saldo positivo "mirar" los ejercicios resueltos sin haber intentado previamente su resolución*, de la misma*

1 M. Spivak, en el prólogo de su libro Calculus.

2 Se pueden encontrar en la página de la editorial: latinoamerica.cengage.com.

manera en que nadie aprende a andar en bicicleta viendo cómo otros lo hacen. Por ello es importante que el lector tenga claro que en el estudio de una asignatura la realización de la práctica correspondiente nunca debe encararse sin antes haber realizado una lectura comprensiva de la teoría y el análisis de los ejemplos propuestos, de modo de poder distinguir la forma en que se utilizan definiciones y propiedades para la resolución de situaciones problemáticas, pero teniendo siempre presente que todo problema, en general, se puede encarar de más de una forma y la que presentamos en el texto es, a lo mejor, una de varias.

Con todo esto esperamos poder contribuir a una mejor formación de quienes aspiran llegar a ser profesionales, por aquello que alguna vez escribiera Francis Bacon[3] y que nos parece importante tanto para estudiantes como para docentes: *Considero a cada hombre como un deudor a su profesión, y ya que de ella recibe sustento y provecho, así debe procurar mediante el estudio servirle de ayuda y ornato.*

Los autores

3 F. Bacon (1561-1626) filósofo inglés y uno de los creadores del método experimental.

OBJETIVO Y METODOLOGÍA DEL TEXTO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL EN UNA VARIABLE REAL

La dificultad que encuentran en general los profesores al momento de recomendar bibliografía para un primer curso de Análisis Matemático, o bien para fijar un texto básico para guiar el desarrollo de la asignatura, es que no existe *el libro apropiado* para todos los estudiantes, pues éstos llegan a la universidad con diferente formación matemática y, en general, escasa experiencia en la resolución de situaciones problemáticas que le exijan algo más que una simple ejecución de mecanismos de cálculo.

Los autores del presente libro de Cálculo Diferencial e Integral en una variable real pretendemos facilitar y organizar el estudio de los estudiantes de Cálculo Diferencial e Integral en las diferentes carreras de Ingeniería, Ciencias Exactas y Economía habiendo podido recoger en sus páginas la base de toda nuestra gran experiencia acumulada al frente de numerosos cursos de Análisis Matemático I en distintas universidades públicas y privadas nacionales e internacionales.

Para facilitar el estudio estamos convencidos de que una manera posible de lograrlo es a través de una presentación accesible de los tópicos teóricos y numerosa ejercitación, bajo la forma de ejemplos, ejercicios resueltos y problemas de aplicación acompañados de su respuesta. Asimismo, en cada problema propuesto se contempla especialmente las dificultades de aprendizaje y comprensión más relevantes observados hasta ahora en la mayoría de los estudiantes, incluyendo sugerencias y observaciones que facilitan el abordaje de la comprensión matemática y la resolución de problemas. Es por ello, que el texto se constituye un material tendiente a resaltar un modelo pedagógico, además de una propuesta científica rigurosa y responsable de los temas tratados.

En cuanto a la organización del estudio, ésta no es una cuestión menor ya que muchas horas de estudio no garantizan que el aprendizaje sea significativo, en particular cuando no se ha generado durante la escuela media una conducta sistemática y ordenada de estudio, con hábitos de lectura reflexiva y espíritu crítico en el análisis de los resultados obtenidos al resolver situaciones problemáticas. En este sentido se han incorporado a lo largo del texto sugerencias en lo relativo a cómo enfocar el estudio de determinados temas, cuáles conocimientos previos es imprescindible revisar en caso de que estén olvidados, cuál es la diferencia entre un *ejemplo* y un *ejercicio resuelto*, de modo que ambos resulten de utilidad para la comprensión de la teoría correspondiente. Se insiste en que los ejemplos se deben leer cuidadosamente observando en detalle la forma en que se aplica la teoría precedente, mientras que los ejercicios resueltos sólo deben ser leídos una vez intentada su resolución por parte del estudiante.

En los aspectos teóricos se tratan las definiciones, propiedades y teoremas. La mayoría de estos últimos figuran sin sus demostraciones, algunas de las cuales se dan en los apéndices, excepto aquellas que hemos considerado significativas en cuanto a su valor formativo y la conveniencia de que aparezcan en el texto sin que se pierda continuidad en el tema tratado.

Al final de cada tema se propone una serie de preguntas teórico – prácticas que le darían al estudiante una idea del nivel de los conocimientos adquiridos y marcarían los inconvenientes todavía no superados.

Se incorporan modelos de evaluaciones tipo con su resolución, contemplando diferentes grados de dificultad, para ser utilizados como material adicional de repaso una vez completado un tema o grupo de temas.

Estos ejercicios y problemas adicionales no serán necesariamente iguales a los ejercicios y problemas propuestos en el texto, sin embargo podrán ser similares tanto en su contenido como en su complejidad.

A este respecto es importante que el estudiante tenga en cuenta que el estudio de una asignatura y la práctica correspondiente nunca debe encararse a través de la resolución de exámenes, éstos deben quedar para el repaso final antes de las evaluaciones.

Debe tenerse presente también, y se lo señala reiteradamente a lo largo del texto, que de poco sirve intentar resolver los ejercicios sin haber antes estudiado la teoría y tampoco deja saldo positivo *mirar* los ejercicios resueltos sin haber intentado previamente su resolución.

CAPÍTULO 1

NÚMEROS REALES Y FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

1. INTRODUCCIÓN

Un primer curso de Análisis Matemático trata del cálculo diferencial e integral de funciones de una variable real, esto es, de relaciones funcionales entre variables que toman valores del conjunto de los números reales. Por ello resulta de interés recordar propiedades de este conjunto numérico, la mayoría de las cuales venimos utilizando desde la escuela primaria en forma explícita para la realización de cálculos; pero otras, aunque puedan resultar intuitivas, no nos fueron mencionadas. También es interesante tener en cuenta que toda herramienta matemática surge ante la necesidad de resolver alguna situación problemática que el hombre se plantea, y a ello no escapan los conjuntos numéricos.

Al hablar de números conviene distinguir distintas clases de ellos. Los más sencillos o, si queremos, los primeros que inventa el hombre, surgen ante la necesidad de contar; estos son los llamados *números naturales* ($\boldsymbol{N}$). La propiedad fundamental de $\boldsymbol{N}$, entre otras que recordaremos enseguida, es el llamado principio de inducción completa o matemática. Indiquemos con $p(x)$ una determinada propiedad que se cumple para el número natural x; el principio de inducción completa afirma que $p(x)$ es verdad para todos los números naturales x siempre que se verifique que

$p(1)$ es verdad.
Si $p(k)$ es verdad, también lo es $p(k+1)$.

La última condición se limita a afirmar la verdad de $p(k+1)$ bajo el supuesto de que $p(k)$ es verdad. Esto basta para asegurar la verdad de $p(x)$ para todo x si también se cumple la primera condición. En efecto, si $p(1)$ es verdad, se deduce que $p(2)$ también lo es (aplicando la segunda condición al caso particular $k = 1$). Repitiendo este razonamiento para $k = 2$, $k = 3$,... resulta evidente que todo número natural será alcanzado alguna vez, por lo que la propiedad $p(k)$ será verdad para todos los números k. En el texto haremos uso de este principio en varias oportunidades pero, por razones de sencillez, aceptaremos los resultados sin demostración.

La resta o sustracción no tiene solución dentro del conjunto de los números naturales cuando el minuendo es menor o igual que el sustraendo, por lo que para dar respuesta a esta situación es necesario introducir los *números negativos* y el *cero*, que junto con los naturales forman el conjunto de los *números enteros* (***Z***, del alemán *zahl*: número).

La siguiente dificultad aparece al intentar realizar el cociente *p/q* entre números enteros si *p* no es múltiplo de *q* (con $q \neq 0$), ya que $\frac{p}{q} = c$ si $p = q.c$. Surgen entonces los *números fraccionarios* que, junto con los enteros, dan lugar a los llamados *números racionales* (***Q***, del inglés *quotient*: cociente, razón).

Nuevas dificultades se presentan cuando, por ejemplo, se desea determinar la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 (unidades de longitud) o hacer el cociente entre la longitud de una circunferencia de radio *r* y su diámetro. Estos resultados, $\sqrt{2}$ y π respectivamente, no los encontramos en ***Q***. Son números con infinitas cifras decimales *no periódicas* que no pueden ser expresados como cociente o razón de números enteros, a los que se denomina *números irracionales*, que junto con los racionales forman el conjunto de los *números reales* (***R***).

2. Axiomática de los números reales

La presentación de las propiedades de los números reales la haremos en forma axiomática. ¿Qué significa esto? Para responder esta pregunta recordemos el significado de *axioma*. Un axioma es un principio fundamental cuya verdad se admite sin pruebas y que sirve como base para razonamientos sobre los cuales se construye una teoría.

Es así que postulamos la existencia de un conjunto numérico que indicaremos con ***R*** y llamaremos *números reales* en el que se definen dos operaciones, *la suma y el producto*, y una relación de orden $x \leq y$ (que se lee *x es menor o igual que y*, también escrita $y \geq x$ y se lee *y es mayor o igual que x*).

Si *x, y* Î ***R***, indicaremos la suma con $x + y$ y el *producto* con $x \,.\, y$ (estas operaciones son *cerradas*, es decir, el resultado de las mismas pertenece a ***R***).

2.1. AXIOMAS

(I) De campo

1. Asociativa para la suma: *x* + (*y* + *z*) = (*x* + *y*) + *z* , " *x*, *y*, *z* Î ***R***
2. Conmutativa en la suma: *x* + *y* = *y* + *x* , " *x*, *y* Î ***R***
3. Existencia del neutro para la suma: *Existe un elemento 0* Î ***R****, tal que 0 + x = x* , " *x* Î ***R***
4. Existencia del opuesto para la suma: *Para cada elemento x* Î ***R*** *existe un elemento* (−*x*) Î ***R*** *tal que x* + (–*x*) = *0*
5. Asociativa para el producto: *x* . (*y* . *z*) = (*x* . *y*) . *z* , " *x*, *y*, *z* Î ***R***
6. Conmutativa del producto: *x* . *y* = *y* . *x* , " *x*, *y* Î ***R***
7. Existencia del neutro para el producto: *Existe un elemento* $1 \neq 0$ *de* ***R***, *tal que* 1. *x* = *x* , " *x* Î ***R***

8. Existencia del recíproco para el producto: *Para cada elemento* $x \neq 0$ *de* ***R****, existe un elemento* x^{-1} Î ***R*** *tal que* $x \,.\, x^{-1} = 1$
9. Distributiva del producto respecto de la suma: $x \,.\, (y + z) = x \,.\, y + x \,.\, z$, "x, y, z Î ***R***

> **1. Nota:** *Recordemos que*
>
> $\forall$ se lee "para todo"
>
> $\exists$ se lee "existe por lo menos un"
>
> $\wedge$ se lee "y"
>
> $\vee$ es la "o inclusiva"
>
> / se lee "tal que"
>
> $\in$ se lee "pertenece a"
>
> $p \Rightarrow q$ se puede leer "p implica q" o bien "si p entonces q"
>
> $p \Leftrightarrow q$ se lee "p si sólo si q"

(II) De orden

10. $x \leq y$ *e* $y \leq z$ *implica* $x \leq z$*, cualesquiera sean x, y, z* Î ***R***
11. $x \leq y$ *e* $y \leq x$ *equivale a decir* $x = y$*, cualesquiera sean x, y* Î ***R***
12. *Cualesquiera sean x , y* Î ***R****,* $x \leq y$ *ó es* $y \leq x$
13. *Si es* $x \leq y$ *entonces* $x + z \leq y + z$ *,* " *x, y, z* Î ***R***
14. *Si* $x \geq 0$ *e* $y \geq 0$ *entonces* $x \,.\, y \geq 0$*, cualesquiera sean x, y* Î ***R***

(III) Arquimedianidad o Propiedad de Arquímedes

Cualesquiera sean x, y Î ***R****, tales que* $x > 0$*,* $y \geq 0$*, existe un número n* Î ***N*** *tal que* $y \leq n \,.\, x$

Nótese que esta propiedad también puede ser formulada como sigue:

Para cada número x existe un único número entero a, tal que $a \leq x < a + 1$.

(¿Por qué? Piénselo y si no puede dar respuesta ahora seguramente podrá hacerlo luego de incorporar algunos otros conceptos).

> **2. Nota:** *El número entero a de la afirmación precedente se llama la parte entera del número x y se representa por el símbolo* $[x]$ *o simplemente ENT(x). De modo que* $[x] \leq x < [x] + 1$

(IV) Propiedad de densidad

Entre dos números reales existe siempre un racional, lo que se expresa diciendo que ***Q*** *es denso en* ***R****.*

(V) Propiedad del extremo inferior y del extremo superior

Previamente debemos introducir algunas definiciones:

i) Sea A un subconjunto no vacío de $\boldsymbol{R}$ y k un número real que puede o no pertenecer a A. Decimos que k es una ***cota superior*** de A si y sólo si $\forall\, x \in A$ es $x \leq k$. Un conjunto que admite cota superior se dice *acotado superiormente*. Por ejemplo, el conjunto $\boldsymbol{R}^-$ de los reales negativos está acotado superiormente pero el de los $\boldsymbol{R}^+$ no lo está (¿por qué?).
Un conjunto que tiene una cota superior, tiene infinitas de ellas. A la menor de las cotas superiores se la denomina *extremo superior* o ***supremo*** de A; si pertenece al conjunto A recibe el nombre de ***máximo*** del conjunto. Por ejemplo, 0 es el supremo de los $\boldsymbol{R}^-$ y el máximo del conjunto $\boldsymbol{R}^- \cup \{0\}$.

ii) Sea A un subconjunto no vacío de $\boldsymbol{R}$ y h un número real que puede o no pertenecer a A. Decimos que h es una ***cota inferior*** de A si y sólo si $\forall\, x \in A$ es $x \geq h$. Un conjunto que admite cota inferior se dice *acotado inferiormente*. Por ejemplo, el conjunto $\boldsymbol{R}^+$ de los reales positivos está acotado inferiormente pero el de los $\boldsymbol{R}^-$ no lo está (¿por qué?).
Un conjunto que tiene una cota inferior, tiene infinitas de ellas. A la mayor de las cotas inferiores se la denomina *extremo inferior* o ***ínfimo*** de A; si pertenece al conjunto A recibe el nombre de ***mínimo*** del conjunto. Por ejemplo, 0 es el ínfimo de los $\boldsymbol{R}^+$ y el mínimo del conjunto $\boldsymbol{R}^+ \cup \{0\}$.
Ahora sí pasaremos a enunciar la propiedad del extremo superior y del extremo inferior, también denominado ***Axioma de completitud***:
Todo subconjunto A no vacío de $\boldsymbol{R}$*, acotado superiormente, posee extremo superior o supremo.*
Todo subconjunto A no vacío de $\boldsymbol{R}$*, acotado inferiormente, posee extremo inferior o ínfimo.*

Con este axioma se completa la lista de propiedades fundamentales de los números reales.

2.2. Algunas definiciones importantes

Intervalos limitados

La relación $x \leq y$ y $x \neq y$ se indica por $x < y$ ó $y > x$. Para cada dos elementos a, b de $\boldsymbol{R}$, tales que $a < b$, el conjunto de números reales x tales que $a < x < b$ se denomina *intervalo abierto* de extremos a y b, y se indica:

$$(a, b) = \{x \in \boldsymbol{R} \,/\, a < x < b\}.$$

El conjunto de números reales x tales que $a \leq x \leq b$ se denomina *intervalo cerrado* de extremos a y b y se indica:

$$[a, b] = \{x \in \boldsymbol{R} \,/\, a \leq x \leq b\}.$$

Si ponemos en correspondencia los números reales con los puntos de una recta, el intervalo $[a, b]$ estaría representado por el segmento con extremos en $x = a$

y $x = b$. En el caso de (a, b) están excluidos ambos extremos. Naturalmente pueden presentarse los intervalos $(a, b]$ o $[a, b)$ en los que deberemos especificar que son semiabiertos (o semicerrados) a izquierda o a derecha, según sea el caso.

Intervalos no limitados

Sea $a \in \boldsymbol{R}$. El conjunto de todos los números reales tales que $x > a$ se denomina *intervalo no limitado* y lo designaremos

$$(a, +\infty) = \{x \in \boldsymbol{R} \ / \ x > a\}$$

Sea $a \in \boldsymbol{R}$. El conjunto de todos los números reales tales que $x \geq a$ se denomina *intervalo no limitado* y lo designaremos

$$[a, +\infty) = \{x \in \boldsymbol{R} \ / \ x \geq a\}$$

Sea $a \in \boldsymbol{R}$. El conjunto de todos los números reales tales que $x < a$ se denomina *intervalo no limitado* y lo designaremos

$$(-\infty, a) = \{x \in \boldsymbol{R} \ / \ x < a\}$$

Sea $a \in \boldsymbol{R}$. El conjunto de todos los números reales tales que $x \leq a$ se denomina *intervalo no limitado* y lo designaremos

$$(-\infty, a] = \{x \in \boldsymbol{R} \ / \ x \leq a\}$$

Estos conjuntos están en correspondencia con semirrectas, en las que el punto a puede o no pertenecer a ellas, según corresponda en las designaciones realizadas. En este punto es preciso hacer una advertencia: los símbolos $-\infty$ *y* $+\infty$ que habitualmente se leen "infinito negativo" e "infinito positivo" son simplemente sugestivos, NO son números reales.
A menudo hablaremos de intervalo de centro a y radio δ o *entorno de a* para indicar los x que se encuentran a una distancia de a menor que δ, o sea el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ y de *entorno reducido de a* o *vecinal de a* cuando se desee excluir el punto a del intervalo, es decir, cuando se trate de la unión de dos intervalos $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$.
Recordando que el *módulo o valor absoluto* de un número real x es siempre positivo o nulo, posibilidad esta última que sólo se da cuando el número es cero, resulta

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{o bien} \quad |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{o también} \quad |x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

¡Cuidado! De acuerdo con lo que aquí se dice, se puede concluir que

1. Definición
Se llama distancia entre los reales x e y al número real no negativo $d(x, y) = |x - y|$

Podemos entonces expresar el entorno del punto a como $|x-a|<\delta$ y el entorno reducido como $0<|x-a|<\delta$.
En símbolos:

$$E(a,\delta)=\{x\in R/|x-a|<\delta\} \qquad E^*(a,\delta)=V(a,\delta)=\{x\in R/0<|x-a|<\delta\}$$

Nos resultará útil también recordar algunas propiedades del módulo de un número real:

- $|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a \qquad \forall a>0$
- $|x|>a \Leftrightarrow x>a \vee x<-a \qquad \forall a>0$
- $|x+y|\leq|x|+|y|$
- $|x.y|=|x|.|y|$
- $|x-y|\leq|x|+|y|$
- $|x-y|\geq\big||x|-|y|\big|$

Algunas demostraciones podrán encontrarlas en los ejercicios resueltos

2.3. Raíz n-ésima

Se demuestra que dado $x\in \boldsymbol{R}$; $x\geq 0$ y $n\in \boldsymbol{N}$, existe un único número real $\alpha\geq 0$ tal que $\alpha^n=x$; así tal número real α se denomina raíz n-ésima de x y se denota por $\sqrt[n]{x}$.

Si n es par y $x>0$, existen dos números reales $\alpha>0 \vee \beta<0$ tales que elevados a la potencia n dan como resultado x. Sin embargo, nótese que por definición β no es $\sqrt[n]{x}$ sino que β = - $\sqrt[n]{x}$.

Recuerde también que si $x\geq 0$ y p, q y c Î $\boldsymbol{N}$, entonces $\sqrt[q]{x^p}=(\sqrt[q]{x})^p$ y $\sqrt[cq]{x^{cp}}=\sqrt[q]{x^p}$

En particular, $\sqrt{x^2}=x$ si $x\geq 0$, pero, ¿cuánto vale $\sqrt{(-2)^2}$? Cuando n es par $\sqrt[n]{x^n}=|x| \quad \forall x\in \boldsymbol{R}$.

3. EJERCICIOS RESUELTOS

Los ejercicios siguientes están resueltos; algunos de ellos están señalados con la palabra **Ejemplo** y son para que lea atentamente su resolución y analice cuidadosamente la forma en que fueron utilizados los conceptos teóricos presentados previamente. Con los ejercicios restantes es importante que el lector NO mire la resolución sino que trate de encararla por su cuenta, y sólo compare con lo hecho cuando se le presente alguna dificultad o bien, quiera verificar si lo que hizo coincide con lo resuelto en el texto.

(SUGERENCIA: oculte la resolución con un papel para no caer en la tentación de mirar lo que está hecho antes de haberlo intentado usted previamente). Si a pesar de todo le quedaran dudas, revise los conceptos teóricos y los ejemplos. **Recuerde que sólo se aprende haciendo y no mirando lo que hizo otro.**

EJEMPLO

Determine si son verdaderas o falsas la siguientes proposiciones. Si son verdaderas, pruébelo; caso contrario halle un contraejemplo.

a) $a\,x = a$ Þ $x = 1$

FALSO, si $a = 0$ queda $0.x = 0$ que se cumple cualquiera que sea el valor de x

b) $x^2 = y^2$ Þ $x = y$

FALSO, porque por ejemplo, $(-3)^2 = 3^2$ pero $-3 \neq 3$. Esto ocurre porque $\sqrt{x^2} = |x|$

c) $\forall x, y : x^3 - y^3 = (x - y)\,(x^2 + x\,y + y^2)$

VERDADERO, se puede probar aplicando la propiedad distributiva en el segundo miembro, o bien, dividiendo el polinomio del primer miembro por $(x\text{-}y)$

Ejercicio 1. Determine si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones. Si son verdaderas, pruébelo; caso contrario halle un contraejemplo.

a) $x^3 + y^3 = (x + y)\,(x^2 + x\,y + y^2)$

b) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

c) $\forall a > 0$: êx ê< $a \Leftrightarrow -a < x < a$

d) $\forall a \in R^+ : |x| > a \Leftrightarrow -a>x>a$

e) $\forall a, b \in R - \{0\} :\ a < b \Rightarrow \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$

f) $a < b$ Þ $a^2 < b^2$

g) $\left|\dfrac{1}{x}\right| < 1 \wedge x \neq 0 \Rightarrow -1 < \dfrac{1}{x} < 1 \Rightarrow -1 > x > 1$

h) $a < b \wedge c > 1$ Þ $c^{-a} > c^{-b}$

i) $0 < a < b$ Ù $c > 1$ Þ $\log_c a < \log_c b$

j) $0 < a < b$ Ù $0 < c < 1$ Þ $\log_c a < \log_c b$

k) $\forall a : a^0 = 1$

l) $\forall a \neq 0 : a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

m) $\sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2$

n) $a < b \wedge sga \neq sgb \Rightarrow \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$

o) $a < b \wedge sga = sgb \Rightarrow \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$

p) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ac}{bc}$

q) $a < b \wedge |a| < |b| \Rightarrow a^2 < b^2$

r) $a < b \wedge |a| > |b| \Rightarrow a^2 > b^2$

s) $a < b \wedge |a| = |b| \Rightarrow a^2 = b^2$

t) $0 < a < b \Rightarrow a < \sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2} < b$

Solución

a) FALSO, si hacemos $x = y = 1$ nos queda $2 = 2.3$, lo que es absurdo. Otra manera de verificarlo es distribuyendo el producto $(x + y)(x^2 + x\,y + y^2)$.

b) FALSO, si tomamos $a = -4$ y $b = -1$ nos queda $\sqrt{(-4)(-1)} = \sqrt{-4}\sqrt{-1}$, el primer miembro existe en el campo de los reales, no así el segundo.

c) VERDADERO,

$$\text{como } |x| = \begin{cases} x < a & si \quad x \geq 0 \\ \vee & \\ -x < a & si \quad x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < a & si \quad x \geq 0 \\ \vee & \\ x > -a & si \quad x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x < a \\ \vee \\ -a < x < 0 \end{cases}$$

por tanto uniendo (por la "o") ambos intervalos nos queda $-a < x < a$.

d) FALSO, la manera más rápida de advertirlo es dándole a a un valor, por ejemplo, $a = 3$ quedando $-3 > x > 3$ de donde, por carácter transitivo, $-3 > 3$. El error surge al cambiar la "$\vee$" que aparece en la definición de módulo, por la "$\wedge$".

e) FALSO, hagamos $a = -2$ y $b = 1$, se cumple $-2 < 1$ pero no es cierto que $-\frac{1}{2} > 1$

f) FALSO, porque, por ejemplo: $-2 < 1$ y al elevar al cuadrado nos queda $4 > 1$

g) FALSO, como es obvio $-1 > 1$ es un absurdo. Pero si tuviese que resolverlo, ¿cómo hacerlo? Como con $x \neq 0$ se cumple que $\left|\frac{1}{x}\right| < 1 \Rightarrow |x| > 1$, aquí usando la definición nos queda $x > 1 \vee x < -1$

h) VERDADERO, y se puede probar así: $a < b \Rightarrow -a > -b$ como $c > 1$, por propiedades de la potenciación se cumple $c^{-a} > c^{-b}$

i) VERDADERO, por definición de logaritmo, tenemos que $\log_c a = p \Leftrightarrow a = c^p$ y análogamente, $\log_c b = q \Leftrightarrow b = c^q$ y como $0 < a < b$ con $c > 1$ se tiene que $c^p < c^q$ si las bases son iguales debe ocurrir que $p < q$ donde p y q son los logaritmos.

j) FALSO, tomemos $a = 1$, $b = 2$ y $c = \frac{1}{2}$, $1 < 2$ pero $\log_{\frac{1}{2}} 1 > \log_{\frac{1}{2}} 2$ porque $0 > -1$

k) $\forall a : a^0 = 1$ es FALSO. Veamos por qué: $a^0 = a^{n-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1$ siempre que a no sea cero, porque no se puede dividir por cero. Con lo que afirmamos que si $a = 0$ no se cumple.

l) $\forall a \neq 0 : a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ es VERDADERO porque $a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$ dado que $a \neq 0$

m) $\sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2$ es FALSO dado que $\sqrt{x^2}$ existe para cualquier x real, en cambio $(\sqrt{x})^2$ existe sólo si $x > 0$, por lo tanto $\sqrt{(-2)^2} = 2$ y como en el campo de los reales $\sqrt{-2}$ no existe, tampoco se podrá elevar al cuadrado.

n) $a < b \wedge sga \neq sgb \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ es FALSO porque, por ejemplo, $-2 < 3$ y $-\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$

o) $a<b \wedge sga = sgb \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ es VERDADERO. Para probarlo consideremos sólo el caso en que a y b son positivos, dejando el otro caso para que lo resuelva el lector *una vez comprendido el procedimiento*. Como $0<a<b$ si dividimos por b, como es positivo, conserva el sentido de la desigualdad, y obtenemos: $\frac{a}{b}<1$, si ahora dividimos por a que también es positivo nos queda $\frac{1}{b}<\frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

p) $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$ es FALSO porque si c = 0 estaríamos dividiendo por cero, que va contra la definición de división.

q) $a<b \wedge |a|<|b| \Rightarrow a^2<b^2$ es VERDADERO. Sabemos que $\begin{cases} a^2=|a|^2 \\ b^2=|b|^2 \end{cases}$ como $|a|<|b| \Rightarrow |a|.|a|<|b|.|a|<|b|.|b| \Rightarrow |a|^2<|b|^2 \Rightarrow a^2<b^2$

r) $a<b \wedge |a|>|b| \Rightarrow a^2>b^2$ es VERDADERO. Sabemos que $\begin{cases} a^2=|a|^2 \\ b^2=|b|^2 \end{cases}$ como $|a|>|b| \Rightarrow |a||a|>|b||a|>|b||b| \Rightarrow |a|^2>|b|^2 \Rightarrow a^2>b^2$

s) $a<b \wedge |a|=|b| \Rightarrow a^2=b^2$ es VERDADERO porque si $|a|=|b| \wedge a<b \Rightarrow a=-b \quad \Rightarrow a^2=(-b)^2=b^2$ con lo que está demostrado.

t) $0<a<b \Rightarrow a<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<b$ es VERDADERO. Para demostrarlo veamos que

$$(a-b)^2>0 \Rightarrow a^2-2ab+b^2>0 \Rightarrow a^2+b^2>2ab \Rightarrow a^2+2ab+b^2>4ab \Rightarrow$$

$$(a+b)^2>4ab \Rightarrow a+b>\sqrt{4ab}=2\sqrt{ab} \Rightarrow \frac{a+b}{2}>\sqrt{ab} \qquad (1)$$

Por otra parte, tenemos que $0<a<b \Rightarrow a^2<ab \Rightarrow a<\sqrt{ab}$ (2)

Y por último, $a<b \Rightarrow a+b<2b \Rightarrow \frac{a+b}{2}<b$ (3)

De (1), (2) y (3) se cumple que $0<a<b \Rightarrow a<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<b$

EJEMPLO

Si $x < a < 0$, indique cuáles de las siguientes inecuaciones son verdaderas. Sus respuestas deben estar claramente justificadas.

a) $x^2 < a\,x < 0$

FALSO, como a y x son negativas, multiplicadas entre sí el resultado es positivo, luego $a\,x > 0$

b) $x^2 > a\,x > a^2$

VERDADERO, porque, por un lado, $x < a \Rightarrow x.x > a.x$ porque $x < 0$ de donde $x^2 > ax$ por otra parte, al multiplicar por $a < 0$ la desigualdad $x < a$ se obtiene $a.x > a^2$

Ejercicio 2. Si $x < a < 0$, indique, justificando claramente, cuáles de las siguientes inecuaciones son verdaderas:

a) $x^2 < a^2 < 0$

b) $x^2 > a^2 > 0$

c) $x^2 > a\,x \wedge a\,x < 0$

d) $x^2 > a^2 \wedge a^2 < 0$

Solución

a) FALSO, todo número elevado al cuadrado da resultado positivo o cero.

b) VERDADERO, como vimos en un ejemplo anterior, $x^2 > a\,x > a^2$ teniendo en cuenta que tanto el resultado del producto de dos números negativos como el cuadrado de un negativo ambos son positivos, por transitividad queda justificado el resultado.

c) FALSO, porque $a\,x > 0$

d) FALSO, porque $a^2 > 0$

EJEMPLO

Escriba las siguientes expresiones prescindiendo de las barras de módulo.

a) $|a| - |a + b|$

Como $|a|=\begin{cases} a & \text{si} \quad a\geq 0 \\ -a & \text{si} \quad a<0 \end{cases}$ y $|a+b|=\begin{cases} a+b & \text{si} \;\; a+b\geq 0 \Rightarrow a\geq -b \\ -a-b & \text{si} \;\; a+b<0 \Rightarrow a<-b \end{cases}$

debemos analizar dos casos, si $b\geq 0$ ó si $b<0$.

Veamos en primer lugar si $b\geq 0$:

$$|a|-|a+b|=\begin{cases} -a+a+b=b & \text{si} \quad a<-b<0 \\ -a-a-b=-2a-b & \text{si} \quad -b<a<0 \\ a-a-b=-b & \text{si} \quad a\geq 0 \end{cases}$$

Analicemos ahora si $b<0$:

$$|a|-|a+b|=\begin{cases} -a+a+b=b & \text{si} \quad a<0 \\ a+a+b=2a+b & \text{si} \quad 0\leq a<-b \\ a-a-b=-b & \text{si} \quad a\geq -b \end{cases}$$

Ejercicio 3. Escriba las siguientes expresiones prescindiendo de las barras de módulo.

a) $\left|1-|x|\right|$

b) $|4x|-2|x|^2$

c) $\left|x-|x|\right|-x$

Solución

a) $\left|1-|x|\right|=\left.\begin{cases} 1-|x| & \text{si} \quad -1\leq x\leq 1 \\ -1+|x| & \text{si} \quad |x|>1 \end{cases}\right\}=\begin{cases} x-1 & \text{si} \;\; x>1 \\ 1-x & \text{si} \;\; 0\leq x\leq 1 \\ 1+x & \text{si} \;\; -1\leq x<0 \\ -x-1 & \text{si} \;\; x<-1 \end{cases}$

b) $|4x|-2|x|^2=2(2|x|-x^2)=\left.\begin{cases} 2(2x-x^2) & \text{si} \quad x\geq 0 \\ 2(-2x-x^2) & \text{si} \quad x<0 \end{cases}\right\}=\begin{cases} 2x(2-x) & \text{si} \quad x\geq 0 \\ -2x(2+x) & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$

c) $\left|x-|x|\right|-x=\begin{cases} |x-x|-x=-x & \text{si} \quad x\geq 0 \\ |x+x|-x=-3x & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$

EJEMPLO

Determine en cada caso el conjunto solución.

a) $|2x-5|=7$ b) $|x+2|<6$ c) $3<|x-5|\leq 7$

Solución

a) si $|2x-5|=7 \Rightarrow 2x-5=7 \quad \vee \quad 2x-5=-7 \Rightarrow 2x=12 \vee 2x=-2$ de donde se obtiene $x = 6$ o $x = -1 \Rightarrow S = \{6;-1\}$

b) $|x+2|<6 \Rightarrow -6<x+2<6 \Rightarrow -8<x<4 \Rightarrow S=(-8,4)$

c) $3<|x-5|\leq 7$ se deben cumplir simultáneamente las dos desigualdades:

$|x-5|\leq 7 \wedge |x-5|>3 \Rightarrow -7\leq x-5\leq 7 \wedge (x-5>3 \vee x-5<-3)$ de donde

$-2 \leq x \leq 12 \wedge (x>8 \vee x<2)$

De la intersección entre $S_1 = [-2,12]$ y $S_2 = (-\infty,2) \cup (8,+\infty)$ resulta el conjunto solución $S = [-2,2) \cup (8,12]$.

Ejercicio 4. Determine el conjunto solución.

a) $1<|x-5|\leq 7$

b) $0<|x-5|\leq 7$

c) $|x-1|+|x-2|>1$

d) $|x-1|+|x+1|<2$

e) $|3-x|-|5x+10|\leq 12$

EJEMPLO

Resulta interesante que compare los resultados del ítem c del ejemplo anterior y los ejercicios 4 *a) y b) y saque sus conclusiones.*

Solución

a) $1 < |x-5| \leq 7$ se resuelve de igual manera que el c) del ejemplo anterior, obteniéndose S = [–2,4) $\cup$ (6,12]

b) $0 < |x-5| \leq 7$ de idéntica forma, en este caso se obtiene S = [–2, 5) $\cup$ (5, 12]

Comparando el ejemplo c, y los a y b planteados como ejercicios, llegamos a la conclusión siguiente: si la inecuación es $k < |x-5| \leq 7$, con $0 \leq k < 7$ notamos que

$|x-5| \leq 7$ nos da un intervalo centrado en 5 y de radio 7, de extremos –2 y 12.

$k < |x-5|$ nos da dos intervalos no limitados $(5+k, +\infty)$ y $(-\infty, 5-k)$.

Como la solución es la intersección, el resultado obtenido es el intervalo [–2, 12] al que le quitamos el intervalo [$5 - k$, $5 + k$]

c) $|x-1| + |x-2| > 1$

como $|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$ y $|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si} \quad x \geq 2 \\ -(x-2) & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$

Para eliminar las barras de módulo, deberemos analizar entonces:

i) cuando $x < 1$: todo número que es menor que 1 también es menor que 2, por tanto nos queda:

$$|x-1| + |x-2| = -(x-1) - (x-2) = -2x + 3 > 1 \Rightarrow -2x > -3 \Rightarrow x < \frac{3}{2}.$$

Pero de estos valores hallados sólo puedo tomar los que están en la región elegida de antemano que eran los $x < 1$. Nos queda como solución parcial $S_1 = (-\infty, 1)$

ii) cuando $1 \leq x < 2$: tendremos $|x-1| + |x-2| = x - 1 - (x-2) = 1 > 1$

pero esto es absurdo, luego en este caso la solución parcial es $S_2 = \phi$

iii) cuando $x \geq 2$: teniendo en cuenta que si un número es mayor o igual que 2, entonces es mayor que 1, la inecuación se puede escribir así:

$$|x-1| + |x-2| = x - 1 + x - 2 = 2x - 3 > 1 \quad \Rightarrow x > 2$$

Como deben estar en la región elegida realizamos la restricción y se obtiene $S_3 = (2,+\infty)$.

Con las tres posibilidades analizadas cubrimos el total, ya que sólo pueden ocurrir que $x < 1 \vee 1 \leq x < 2 \vee x \geq 2$, luego la solución es la unión de las soluciones parciales, de donde $\mathrm{S} = (-\infty,1) \cup (2,+\infty)$.

d) $|x-1| + |x+1| < 2$

Como $|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{si} \quad x-1 < 0 \Rightarrow x < 1 \end{cases}$ y además

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \\ -(x+1) & \text{si} \quad x+1 < 0 \Rightarrow x < -1 \end{cases}$$

Para eliminar las barras de módulo, deberemos analizar entonces:

i) Para $x < -1$: $|x-1| + |x+1| = -(x-1) - (x+1) = -x+1-x-1 =$
$= -2x < 2 \Rightarrow x > -1$ lo que resulta absurdo ya que admitimos que $x < -1$, por lo que en esta región la solución es $S_1 = \phi$.

ii) Cuando $-1 \leq x < 1$:
$|x-1| + |x+1| = x-1-(x+1) = x-1-x-1 = -2 < 2$, esto es correcto para todo *x* que se encuentre en la región considerada, luego $S_2 = [-1;1)$

iii) Tomemos ahora $x \geq 1$:

$|x-1| + |x+1| = x-1+x+1 = 2x < 2 \Rightarrow x < 1$, con lo que llegamos a un absurdo ya que partimos de $x \geq 1$, luego $S_3 = \phi$

Luego la solución es $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = [-1;1)$

e) $|3-x| - |5x+10| \leq 12$

Analicemos individualmente cada módulo:

$|3-x| = |x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si} \quad x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \\ -(x-3) & \text{si} \quad x-3 < 0 \Rightarrow x < 3 \end{cases}$ y, por otra parte

$|5x+10| = \begin{cases} 5x+10 & \text{si } 5x+10 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \\ -(5x+10) & \text{si } 5x+10 < 0 \Rightarrow x < -2 \end{cases}$, como los módulos, al ser eliminados por definición, cambian al pasar por –2 y 3, deberemos analizar las soluciones en cada intervalo:

i) Si x <-2:

$|3-x|-|5x+10| = -(x-3)+(5x+10) = -x+3+5x+10 = 4x+13 \leq 12 \Rightarrow x \leq -\frac{1}{4}$, pero ¿cuáles de estos valores de x están en el intervalo considerado? Es decir, ¿qué valores de x no superan a $-\frac{1}{4}$ y a su vez son menores que –2? Ellos son la solución parcial buscada $S_1 = (-\infty;-2)$.

ii) Tomemos ahora el caso $-2 \leq x < 3$:

$|3-x|-|5x+10| = -(x-3)-(5x+10) = -x+3-5x-10 = -6x-7 \leq 12 \Rightarrow x \geq -\frac{19}{6}$

de estos, debemos quedarnos sólo con los que están en el intervalo $-2 \leq x < 3$, los que nos determinan $S_2 = [-2;3)$.

iii) Cuando $x \geq 3$:

$|3-x|-|5x+10| = x-3-(5x+10) = x-3-5x-10 = -4x-13 \leq 12 \Rightarrow x \geq -\frac{25}{4}$, los que, por supuesto, están en el intervalo en cuestión, de donde $S_3 = [3;+\infty)$

Así, uniendo las soluciones parciales, tenemos que $S = \boldsymbol{R}$.

Comentario

En el ejemplo que daremos a continuación recurriremos a la demostración por el absurdo[1]. Por ello es necesario que recordemos algo a tal efecto.

PRINCIPIO DE REDUCCIÓN AL ABSURDO Y DEMOSTRACIÓN INDIRECTA

Son métodos distintos, pero vinculados:

El principio de reducción al absurdo prueba la falsedad de una afirmación deduciendo de ella alguna contradicción.
La demostración indirecta establece la verdad de una afirmación demostrando la falsedad de la afirmación contraria.
Es frecuente el uso del método de reducción al absurdo para demostrar teoremas en matemáticas. La metodología lógica es la siguiente:

· Fase de inicio: se sospecha que una cierta proposición p es verdadera y se intenta llevar su negación hasta sus últimas consecuencias lógicas. Para ello se parte de la ley del tercero excluido, es decir, la proposición p es cierta, o bien p es falsa, y no hay una tercera opción.

[1] El lector seguramente recuerda haber visto alguna vez una demostración por el absurdo.

- Fase deductiva: la negación de la proposición p conduce a una contradicción.
- Fase final y conclusión: la proposición p es verdadera, porque su negación no puede serlo, dado que conduce a una contradicción.

Ahora sí pasemos al

EJEMPLO

Demuestre que $\forall \varepsilon > 0 \; : \; 0 \leq x < \varepsilon \Rightarrow x = 0$, siendo ε arbitrario.

Solución

La manera más sencilla de probarlo es por el absurdo: si $x \neq 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \wedge x > 0$ de acuerdo con el enunciado se debe cumplir que $x < \varepsilon$. Si se elige $x = a > 0$ por pequeño que sea a, $\exists \; \varepsilon = \dfrac{a}{2} \; / \; \varepsilon < x$ lo que contradice la hipótesis, entonces $x = 0$

En este ejemplo, la demostración se hizo combinando los dos métodos: demostración indirecta y reducción al absurdo. En efecto, para demostrar se ha refutado su contrario. Y al refutar éste, de él se ha deducido una contradicción.

EJEMPLO

Pruebe que $|a+b| \leq |a| + |b|$ (conocida como *propiedad triangular*)

Solución

Si $a \geq 0, b \geq 0 \Rightarrow |a+b| = a+b = |a| + |b|$ se cumple la igualdad

Si $a < 0,\ b < 0 \Rightarrow |a+b| = -(a+b) = -a + (-b) = |a| + |b|$ verifica la igualdad

Si $a \geq 0$, $b < 0$: como $a = a$ y $b < -b$ sumando miembro a miembro nos queda que

$a + b < a - b$ de donde tenemos dos posibilidades:

1) Si $a+b \geq 0$: $|a+b| = a+b < a-b = a+(-b) = |a| + |b| \Rightarrow |a+b| < |a| + |b|$

2) Si $a+b<0$: $|a+b| = -a-b$ como $a \geq 0$ se tiene que $-a < a$ y $-b = -b$ de donde, sumando $-a-b < a-b \; \therefore \; |a+b| < a-b = a+(-b) = |a| + |b|$

Se procede análogamente para el caso en que $a < 0,\ b \geq 0$

Ejercicio 5. Pruebe que

a) $|a-b| \geq |a|-|b|$

b) $|a-b| \leq |a|+|b|$

Solución

a) debemos probar que $|a-b| \geq |a|-|b|$

- si $a \geq 0, b < 0 : a-b > 0 \Rightarrow |a-b| = a-b$ además $a = |a|, |b| = -b$ de donde $-b > -|b|$ por lo que $a - b >$ $|a|-|b|$ y por tanto, $|a-b| > |a|-|b|$

- si $a < 0, b \geq 0 :$ $a - b < 0$ luego $|a-b| = -a+b$, teniendo en cuenta que $-a = |a| \wedge b > -|b|$ nos queda al sumar $-a + b > |a|-|b|$ por tanto $|a-b| > |a|-|b|$

- si $a \geq 0, b \geq 0 :$ tenemos dos casos a contemplar:

1[er] caso, cuando $a - b \geq 0$: $|a-b| = a-b = |a|-|b|$

2[do] caso, cuando $a - b < 0$: $|a-b| = -a+b$ como $a - b < 0$ se tiene que $a < b$, multiplicando por -1 se obtiene $-a > -b$ y al sumarle $b > a$ nos queda $-a+b > -b+a = a-b = |a|-|b|$ de donde $|a-b| > |a|-|b|$

Proceda de igual manera para el caso $a < 0$, $b < 0$.

b) debemos probar que $|a-b| \leq |a|+|b|$

$|a-b| = |a+(-b)| \leq |a|+|-b| = |a|+|b|$ y así está demostrado propiedad triangular

Ejercicio 6. Demuestre que si $|x-a| < \dfrac{\varepsilon}{2} \wedge |y-b| < \dfrac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |(x+y)-(a+b)| < \varepsilon$

Solución

Partiendo de $|(x+y)-(a+b)| = |(x-a)+(y-b)| \leq |x-a|+|y-b| < \dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ en donde hemos usado una de las propiedades de módulo que probamos en el ejercicio anterior.

EJEMPLO

Acotando adecuadamente, halle algún número natural n_0 tal que para $n \geq n_0$ se cumpla que $\left|\frac{2n+3}{3n+2} - \frac{2}{3}\right| < 0{,}01$

Solución

Como $\left|\frac{2n+3}{3n+2} - \frac{2}{3}\right| < 0{,}01$ trabajando el primer miembro, buscaremos encontrar una cota superior de él y a ésta le exigiremos a su vez que sea <0,01. Veamos cómo hacerlo:

$$\left|\frac{2n+3}{3n+2} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{6n+9-6n-4}{3(3n+2)}\right| = \left|\frac{5}{3(3n+2)}\right| < \left|\frac{9}{3(3n+2)}\right| = \left|\frac{3}{3n+2}\right| < \left|\frac{3}{3n}\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq 0{,}01$$

de donde $n \geq \frac{1}{0{,}01}$ con lo que $n \geq 100$.

¿Cuál es la razón de haber reemplazado en el numerador el 5 por el 9 al pasar del tercer al cuarto paso? ¿Hubiera convenido en lugar de 9 colocar 6 o 7 o 12?

Ejercicio 7. Acotando, halle algún número natural n_0 tal que para $n \geq n_0$ se cumple:

a) $\left|\frac{n-17}{n+5} - 1\right| < 0{,}022$

b) $\left|\frac{|n-8|}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| < 0{,}0005$

Solución

a) $\left|\frac{n-17}{n+5} - 1\right| < 0{,}022$ procedemos de igual manera que en el ejemplo anterior.

$$\left|\frac{n-17}{n+5} - 1\right| = \left|\frac{n-17-n-5}{n+5}\right| = \left|\frac{-22}{n+5}\right| = \left|\frac{22}{n+5}\right| < \left|\frac{22}{n}\right| = \frac{22}{n} \leq 0{,}022 \Rightarrow n \geq \frac{22}{0{,}022} \Rightarrow n \geq 1000$$

b) $\left|\frac{|n-8|}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| < 0{,}0005$ análogamente, si suponemos $n \geq 8$

$$\left|\frac{|n-8|}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n-8}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n-16-2n-3}{2(2n+3)}\right| = \left|\frac{-19}{2(2n+3)}\right| < \left|\frac{20}{2(2n+3)}\right| < \frac{10}{2n+3} < \frac{10}{2n} = \frac{5}{n}$$

entonces $\left| \dfrac{|n-8|}{2n+3} - \dfrac{1}{2} \right| < \dfrac{5}{n} \leq 0{,}0005 \Rightarrow n \geq \dfrac{5}{0{,}0005} = 10000$, de donde exigimos que n debe ser mayor o igual que 8 y también que 10000, por tanto $n \geq 10000$

EJEMPLO

Determine el conjunto de números reales, tal que su cuadrado sea menor que 4.

Solución

$$x^2 < 4 \Rightarrow |x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2 \Rightarrow S = (-2,2)$$

Ejercicio 8. Determine el conjunto de números reales, tal que su distancia a –5 sea menor que 1.

Solución

$$|x-(-5)| < 1 \Rightarrow -1 < x+5 < 1 \Rightarrow -6 < x < -4 \Rightarrow S = (-6,-4)$$

Ejercicio 9. Halle un entorno centrado

a) en el origen de coordenadas y que contenga al intervalo (–2, 1)

b) en ½ y que contenga al intervalo (–1; 3].

Solución

a) Para encontrar un entorno con centro en el origen, debe elegirse de la forma $-\delta < x < \delta$, pero como el intervalo (–2,1) debe quedar incluido en él, se debe elegir $\delta \geq 2$. Nos queda así $E(0,\delta) = \{x \in R \,/\, |x| < \delta,\ \delta \geq 2\}$

b) Si debe estar centrado en $\frac{1}{2}$, debe ser de la forma $\left|x-\frac{1}{2}\right|<\delta$, pero el intervalo (–1, 3] debe quedar incluido, por tanto debemos ver a qué distancia están el 3 y el –1 del $\frac{1}{2}$. Esas distancias son 2,5 y 1,5 (¿por qué?), tomando $\delta > 2{,}5$ tenemos el intervalo incluido en el entorno. ¿Por qué no tomamos $\delta = 2{,}5$? Como el entorno es un intervalo abierto excluiría el 3. Nos queda así que el entorno pedido es: $E(\frac{1}{2},\delta)=\left\{x\in R\,/\left|x-\frac{1}{2}\right|<\delta,\ \delta>2{,}5\right\}$.

EJEMPLO

Determine las cotas superiores (*Cs*) e inferiores (*Ci*), supremo (*sup*) e ínfimo (*inf*), máximo (*M*) y mínimo (*m*), si existen, de los conjuntos numéricos dados.

a) $A = (-2,1]$

$Cs = [1,+\infty)$ $\qquad$ $Ci = (-\infty, -2]$

$supA = 1$ $\qquad$ $infA = -2$ $\qquad$ $M = 1$ $\qquad$ no existe m

b) $B = \{x\in R\,/\,0<|2x-6|<5\}$

Resolviendo la inecuación $0<|2x-6|<5$, tenemos que

de $0<|2x-6|$ se deduce que $2x-6\neq 0 \Rightarrow x\neq 3$

y de $|2x-6|<5 \Rightarrow -5<2x-6<5 \Rightarrow -1<2x<11 \Rightarrow -\frac{1}{2}<x<\frac{11}{2}$

Como se deben cumplir ambas condiciones a la vez, se intersecan las soluciones y resulta que $B = (\frac{1}{2}, 3) \cup (3, \frac{11}{2})$

$Cs = [\frac{11}{2},+\infty)$ $\qquad$ $Ci = (-\infty, \frac{1}{2}]$

$supB = \frac{11}{2}$ $\qquad$ $infB = \frac{1}{2}$ $\qquad$ no existe M $\qquad$ no existe m

Ejercicio 10. Determine las cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo, máximo y mínimo, si existen, de los conjuntos numéricos dados.

$C = \{x \in R / x^2 \leq 9\}$; $D = (1,5] \cup \{8\}$; $E = [-1,1] \cup (2,3)$

$F = \{x \in R / x = \dfrac{(-1)^n}{n}, n \in \boldsymbol{N}\}$; $G = \{x \in R / x = \dfrac{2n+1}{n+1}, n \in \boldsymbol{N}\}$;

$H = \{0.3; 0.3 ; 0.333; \ldots\}$

Solución

<u>Para el conjunto C</u>: como $x^2 \leq 9 \Rightarrow |x| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$, luego C=[–3,3]

$Cs = [3,+\infty)$ $Ci = (-\infty,-3]$

$supC = 3$ $inf\,C = -3$ $M = 3$ $m = -3$

<u>Para el conjunto D</u>: $D = (1,5] \cup \{8\}$

$Cs = [8,+\infty)$ $Ci = (-\infty,1]$

$supD = 8$ $inf\,D = 1$ $M = 8$ no existe m

<u>Para el conjunto E</u>: $E = [-1,1] \cup (2,3)$

$Cs = [3,+\infty)$ $Ci = (-\infty,-1]$

$supE = 3$ $inf\,E = -1$ no existe M $m = -1$

<u>Para el conjunto F</u>: $F = \{x / x = \dfrac{(-1)^n}{n}, n \in \boldsymbol{N}\}=\{-1,\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{5},.....\}$ podemos observar que los elementos de F son puntos aislados contenidos en el intervalo $[-1,\dfrac{1}{2}]$, los extremos del intervalo son los dos primeros elementos y los restantes están dentro del intervalo.

$Cs = [\frac{1}{2}, +\infty)$ $\qquad$ $Ci = (-\infty, -1]$

$supF = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $inf\,F = -1$ $\qquad$ $M = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $m = -1$

<u>Para el conjunto G</u>: $G = \{x \in R \,/\, x = \frac{2n+1}{n+1}, n \in \boldsymbol{N}\} = \{\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, ...\}$ se puede ver que a mayor valor de n, mayor el resultado de $\frac{2n+1}{n+1}$, que el menor de los elementos de G es $\frac{3}{2}$, y que a medida que aumenta n el cociente $\frac{2n+1}{n+1} = \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$ se aproxima a 2 porque el cociente $\frac{1}{n}$ se hace cada vez más pequeño. Pero como nunca se hace cero (¿por qué?), el cociente no llega a tomar el valor 2. Por tanto, el conjunto G queda incluido en el $[\frac{3}{2}, 2)$

$Cs = [2, +\infty)$ $\qquad$ $Ci = (-\infty, \frac{3}{2}]$

$supG = 2$ $\qquad$ $inf\,G = \frac{3}{2}$ $\qquad$ no existe M $\qquad$ $m = \frac{3}{2}$

Ejercicio 11. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos están acotados superiormente? ¿inferiormente? ¿Cuáles son, si los hubiere, los supremos y los ínfimos?

a) $\boldsymbol{N}$ $\qquad$ b) $\boldsymbol{Q}$ $\qquad$ c) $A = \{x \in Z \,/\, -2 \le x < 6\}$

Solución

a) $\boldsymbol{N} = \{1,2,3,4,....\}$ está acotado sólo inferiormente; $inf\,N = 1$

b) No está acotado ni superior ni inferiormente, con lo que no existen ni supremo ni ínfimo.

c) $A = \{-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$, Mayorante de $A = [5, +\infty)$ $\quad$ $supA = 5$

Minorante de $A = (-\infty, -2]$ $\quad$ $infA = -2$

> **3. Nota:** *Al conjunto de todas las cotas superiores se lo suele llamar conjunto mayorante y al de las cotas inferiores, conjunto minorante.*

4. EL CONCEPTO DE FUNCIÓN

El concepto más importante de la matemática es, sin duda, el de *función*. No es el objetivo ahora reiterar definiciones con las que el lector está familiarizado, sino más bien detenernos en ilustrar la noción intuitiva de función. Como ya anticipáramos, nos limitaremos a funciones de una variable real, clase muy especial pero que nos ilustrará para estudios y aplicaciones posteriores como, por ejemplo, el estudio de las funciones de varias variables reales.

En términos poco formales podemos decir que una función es una regla (o conjunto de reglas y/o propiedades u operaciones) que asigna a cada uno de determinados números reales un número real. Por ejemplo, la regla que asigna a todo número real x:

- su cuadrado
- su raíz cúbica
- su raíz cúbica si se toma el subconjunto $-8 < x < 8$
- el número $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$, siempre que $x \neq -1$
- el número 1 si $x \in \boldsymbol{R}^+$ y -1 si $x \in \boldsymbol{R}^-$
- el número 2 $\forall x \in \boldsymbol{R}$

De estos ejemplos surge que no siempre la regla que define una función es aplicable a todo número. El conjunto de los números a los cuales se aplica una función es lo que se denomina el *dominio* de la función.

Resulta conveniente introducir una notación adecuada que facilite la escritura y permita referirnos a las funciones en forma general. Para ello es habitual designar las funciones con una letra (f, g, h, ...) escribiendo $f(\ )$ para simbolizar el conjunto de reglas, propiedades u operaciones a realizar sobre el número x para obtener el número y que f asocia con x y que simbolizamos como $y = f(x)$, que sólo tiene sentido cuando x pertenece al dominio de f; para otros x el símbolo $f(x)$ no está definido. Los ejemplos anteriores quedarían expresados así:

- $f(x) = x^2 \quad \forall x \in \boldsymbol{R}$
- $g(x) = \sqrt[3]{x} \quad \forall x \in \boldsymbol{R}$
- $g(x) = \sqrt[3]{x} \quad \forall x \in (-8, 8)$
- $h(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} \quad \forall x \in \boldsymbol{R} - \{-1\}$

- $u(t) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad t < 0 \\ +1 & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$
- $w(z) = 2 \quad \forall\, z \in \mathbf{R}$ *(función constante)*

Si en el primer ejemplo escribiéramos solamente $f(x) = x^2$ queda sobreentendido que es para todo x, o dominio natural de la función. La misma situación se daría en el segundo ejemplo, mientras que en el tercero la especificación es necesaria. En el ejemplo siguiente podría no indicarse la exclusión del valor –1 al quedar claro que el símbolo carece de sentido para ese valor de x.

En general, si el dominio no se restringe explícitamente, se entiende que está formado por todos los números para los cuales la definición tiene sentido.

En este contexto, a partir de la experiencia matemática adquirida en estudios previos, el lector puede asociar las operaciones básicas aprendidas con números reales con las reglas que le permiten asignar a cada uno de determinados números reales otro número real, como se señalara más arriba. Así nos encontraremos con las *funciones algebraicas*

- racionales enteras, conocidas como polinomios,
- racionales fraccionarias o cociente de polinomios,
- irracionales, caracterizadas por la operación de radicación,

y las denominadas *funciones trascendentes*, trigonométricas, logarítmicas y exponenciales, a las que nos referiremos en detalle más adelante.

Hasta aquí hemos definido informalmente una función como un *conjunto de reglas*. Ahora bien, supongamos $g(x) = \sqrt[3]{x}$ y $r(x) = \sqrt[3]{x} + x^2 + 1 - (x^2 + 1)$. ¿Son g y r la misma función? Las reglas que las definen son diferentes pero los números obtenidos al aplicar cada una de ellas al mismo conjunto de números, son iguales. Esto nos muestra la necesidad de buscar una manera satisfactoria de definir funciones, para lo cual surge naturalmente la pregunta: *¿qué necesitamos conocer de una función para saber absolutamente todo acerca de ella?* La respuesta es inmediata: *para cada número x hace falta saber cuál es el número $f(x)$*.

Esto nos permite formalizar una definición donde quede explicitado lo anterior. Para ello vamos a indicar con (x, y) un par ordenado de números, donde el primer elemento es el número x considerado y el segundo elemento y, el valor que f aplica a x. En estos términos, *una función es un conjunto de pares ordenados de números con la propiedad de que el conjunto no debe contener dos pares ordenados distintos con el mismo primer elemento*.

Si f es una función de A en B, A es el dominio de f, el conjunto de todos los números x para los que existe algún y tal que (x, y) está en f. Si x está en el dominio de f, por la definición de función surge que existe un *único* número y tal que (x, y) está en f. Este valor y único se designa por $f(x)$. El conjunto B se denomina rango o codominio de la función f.

Se denomina *imagen* de la función:

$$\operatorname{Im}(f) = \{ y \in B \ / \ \exists x \in A \text{ tal que } y = f(x) \}$$

En general $\operatorname{Im}(f) \subseteq B$

El lector puede ahora poner en correspondencia la noción intuitiva de función presentada al comienzo y la definición dada más arriba con la definición que ha venido manejando hasta ahora. No obstante, una buena forma de representar una función es mediante *el gráfico* de la misma. La primera mitad de este libro está dedicada, justamente, a diseñar las herramientas matemáticas que permitan aprender a confeccionar el gráfico de una función. *Si sabemos dibujarlo* (no es necesario el acto material de hacer el dibujo, la computadora lo hará mucho mejor que nosotros) *sabremos leerlo y extraer toda la información contenida en él.*[2]

5. EJERCICIOS RESUELTOS

Es importante recordar que los ejercicios resueltos son de mucha utilidad cuando el lector estudia un tema y resuelve problemas sin tener a quien consultar sus dudas. Reiteramos que los **Ejemplos** tienen por objeto permitir seguir atentamente su resolución y analizar con cuidado cómo fueron utilizados los conceptos teóricos presentados previamente. Para resolver los ejercicios restantes es importante que el lector **NO** consulte la resolución propuesta en una primera instancia, sino que trate de encararla por su cuenta, y sólo compare con lo efectuado cuando se le presente alguna dificultad o quiera verificar si lo que hizo coincide con lo resuelto en el texto. Si, a pesar de todo, le quedaran dudas, revea la teoría y los ejemplos. **No olvide que sólo se aprende haciendo y no mirando lo que hizo otro.**

[2] En este contexto resulta de interés que el lector recuerde los elementos para la construcción de gráficas de funciones que le fueron dados en Matemática en la escuela secundaria o en el curso preuniversitario, tales como desplazamientos horizontales y verticales, estiramientos y reflexiones de funciones; por ejemplo dado el gráfico de $y = f(x)$ y $a > 0$ las gráficas de $y = f(x+a)$ e $y = f(x-a)$ provocan un desplazamiento respecto de la original, análogamente $y = f(ax)$ determina un cambio de escala. Como todo esto será un complemento útil a lo que trataremos en los primeros capítulos, en caso de que no lo recuerde la sugerencia es que recurra a la bibliografía que utilizara oportunamente.

EJEMPLO

Halle el dominio de la siguiente función: $y = \dfrac{x-1}{|x|} + \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

Solución

La función es una suma; para que exista, debe existir cada término,

por ello se debe exigir que $\begin{cases} x \neq 0 \\ \wedge \\ 4-x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow |x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2 \end{cases}$

de donde, los x, no nulos, que están entre –2 y 2 determinen el dominio: $D_f = (-2;2) - \{0\}$

Ejercicio 12. Halle el dominio de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{x^3 + 5x^2 - 6x}{x.\sqrt[3]{x^2 - 1}}$

b) $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$

c) $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

d) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{sen\pi x}$

Solución

a) Como no está definida la división por cero, es necesario que $x.\sqrt[3]{x^2-1} \neq 0$, de donde cada factor debe serlo; así tenemos: $\begin{cases} x \neq 0 \\ \wedge \\ \sqrt[3]{x^2-1} \neq 0 \Rightarrow x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow |x| \neq 1 \end{cases}$ de modo que el dominio es

$D_f = \boldsymbol{R} - \{0;1;-1\}$

b) En este caso se trata de una división, con lo que el denominador debe ser no nulo, y como las raíces son de índice par, es preciso que

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ \wedge \\ x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \end{cases}$$ de donde el conjunto de números reales que cumplen ambos requisitos a la vez es $D_f = [1;+\infty)$

c) Nótese que debido a la presencia de una raíz cuadrada, debe cumplirse que $\frac{x-1}{x+1} \geq 0$ para que el cociente sea positivo, dividendo y divisor deben ser de igual signo, y para que sea cero, sólo el dividendo debe serlo, de donde se plantean dos posibilidades:

$$I: \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ \wedge \\ x+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \wedge \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow x \geq 1$$

$$\vee \qquad \text{luego } D_f = (-\infty;-1) \cup [1;+\infty)$$

$$II: \begin{cases} x-1 \leq 0 \\ \wedge \\ x+1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ \wedge \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow x < -1$$

d) $y = \frac{\sqrt{x}}{sen \pi x}$ en este caso debemos exigir que

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \wedge \\ sen \pi x \neq 0 \Rightarrow \pi x \neq k\pi \quad \forall k \in Z \Rightarrow x \neq k \end{cases} \Rightarrow x \neq 0;1;2;3;4;....$$ Luego el dominio es $D_y = R^+ - N$

Dos funciones particulares que resultan de interés en numerosas aplicaciones son la *función parte entera* y la *función signo*.

1. Se llama *parte entera de un número real x* al mayor número entero que es menor o igual que *x*. Se designa la parte entera de un número real *x*: $[x]$ o bien ENT (*x*)

La función parte entera tiene como representación gráfica una función escalonada (una “escalera”), que presenta “saltos” o cambios de “peldaños” cuando el argumento es entero. Su gráfico es:

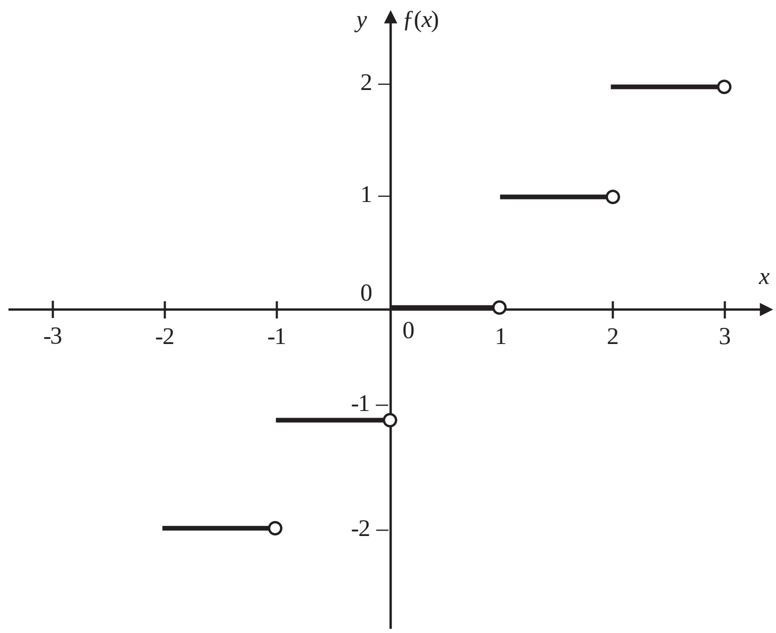


***Figura 1.* Función parte entera de x**

2. La función signo de x, que se indica sgx, se define

$$sgx = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ +1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} = \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x}$$

cuya gráfica dejamos para que la realice el lector, que no debe olvidar que el cero no pertenece al dominio de la función.

EJEMPLO

Determine el conjunto dominio e imagen de la función definida por $y = \left[\dfrac{x}{2}\right]$

Solución

En nuestro caso, $\dfrac{x}{2} \in \boldsymbol{Z}$ si x es par, es decir, si $2k \le x < 2k+2$ entonces $k \le \dfrac{x}{2} < k+1, k \in \boldsymbol{Z} \Rightarrow \left[\dfrac{x}{2}\right] = k$, de este modo, la función escalonada es:

$$y = \left[\frac{x}{2}\right] = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots \\ -2 & \text{si} \quad -4 \le x < -2 \\ -1 & \text{si} \quad -2 \le x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad 0 \le x < 2 \\ 1 & \text{si} \quad 2 \le x < 4 \\ 2 & \text{si} \quad 4 \le x < 6 \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

Sugerencia: *represéntela gráficamente*.

El dominio son todos los reales, dado que de todo real siempre es posible tomar su parte entera. Ésta es, como su nombre lo indica, un entero, con lo que el conjunto imagen es $\boldsymbol{Z}$.

Observación: *Nótese que para determinar el dominio o bien la imagen, no es preciso encontrar la función escalonada.*

Ejercicio 13. Encuentre dominio e imagen de las funciones definidas por:

a) $y = 2x - [2x]$

b) $y = sg\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$

Solución

a) $y = 2x - [2x]$

El lector debe tener presente que la función definida por: $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R} \ / \ f(x) = x - [x]$ se llama ***función mantisa o parte decimal de x***, cuyo gráfico es:

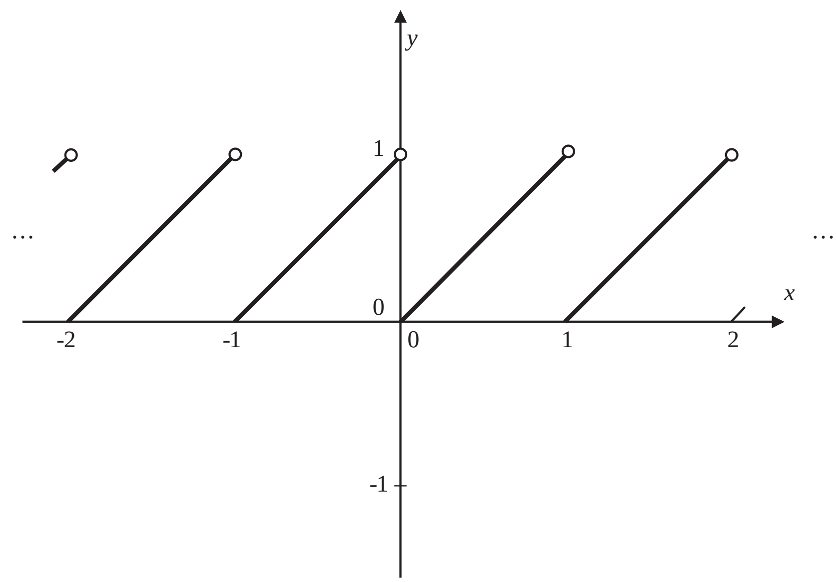


Figura 2. **Función mantisa o parte decimal de** x

En el caso propuesto, se trata de la función *parte decimal de* $2x$, o *mantisa de* $2x$. En Ingeniería se suele llamar *diente de sierra* a su representación gráfica. El lector puede intentar, como ejercicio, obtener la expresión analítica de la función definida por tramos. Para determinar el dominio es necesario tener en cuenta que su fórmula no presenta operaciones restringibles, por lo que el dominio es el conjunto de todos los números reales $\boldsymbol{R}$. Además, la parte decimal de cualquier número real como mínimo es cero (esto para cualquier entero) y nunca llega a ser 1, por lo tanto, el conjunto imagen es [0;1).

b) $y = sg\left(\frac{x-1}{x}\right)$. Sabemos que $y = sg\left(\frac{x-1}{x}\right) = \dfrac{\frac{x-1}{x}}{\left|\frac{x-1}{x}\right|} = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{x-1}{x} > 0 \\ -1 & \text{si } \frac{x-1}{x} < 0 \end{cases}$

Donde $\frac{x-1}{x} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1>0 \wedge x>0 \Rightarrow x>1 \wedge x>0 \Rightarrow x>1 \\ \vee \\ x-1<0 \wedge x<0 \Rightarrow x<1 \wedge x<0 \Rightarrow x<0 \end{cases}$

De igual modo se procede para determinar que si

$\frac{x-1}{x} < 0$, entonces $0 < x < 1$

Resulta ahora que la función propuesta definida por tramos, es

$$y = sg\left(\frac{x-1}{x}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x<0 \vee x>1 \\ -1 & \text{si} \quad 0<x<1 \end{cases}$$

El lector debe tener presente que la expresión analítica anterior no es lo pedido, simplemente fue obtenida para que resulte más sencilla la construcción de su gráfico, si es que desea confeccionarlo.

Para determinar el dominio sólo es necesario observar que en la fórmula de la función aparece la división entre *x*-1 y *x*, y que $x-1 \neq 0$ (la función signo no está definida en $x = 0$), y $x \neq 0$, por tanto, el dominio es pues ***R***-{0;1}. Por otra parte, el conjunto imagen es {1;-1}.

Otra información útil para encarar el estudio de una función, aparte de su dominio e imagen, es lo relativo a sus ceros (o raíces, es decir, donde la función se anula) y los conjuntos de positividad y negatividad, o sea, los valores de la variable independiente *x* para los cuales la función toma valores positivos o negativos, respectivamente.

EJEMPLO

Determine el conjunto imagen, los ceros y los signos de la función definida en cada caso por:

a) $y = x^2 - 4x + 7$

Dado que se trata de un polinomio de segundo grado, sus ceros son las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 - 4x + 7 = 0$, y, por lo tanto, $x_{1-2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-28}}{2} \notin \boldsymbol{R}$. En consecuencia, el gráfico de la función no corta al eje de abscisas. Por otra parte, como el coeficiente principal es positivo, la concavidad está dirigida hacia arriba, de donde $y > 0$

en todo el dominio. Además, la abscisa y la ordenada del vértice son $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2} = 2$; $y_v = 4-8+7=3$, de dónde, como el vértice es un mínimo (debido a la concavidad), $y \geq 3$: $I_f = [3;+\infty)$

Otra manera de hacerlo es completando cuadrados, tal como lo desarrollaremos en el siguiente ejemplo.

b) $y = f(x) = 4x - 3 - x^2$

Si se emplearan las consignas que guiaron el ejemplo precedente, se obtendrían como raíces a $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$, la concavidad de su gráfico está dirigida hacia abajo, y posee un máximo (el vértice) en el punto de coordenadas (2;1).

Pero veamos otro método que brindará nuevas herramientas de trabajo, en casos donde la función no es conocida. Comencemos completando cuadrados:

$y = 4x-3-x^2 = -(x^2-4x+3) = -(x^2-2.x.2+2^2-2^2+3) = -\left[(x-2)^2-1\right] =$
$-(x-2)^2+1$ de donde $y = 1-(x-2)^2 \Rightarrow (x-2)^2 = 1-y \Rightarrow |x-2| = \sqrt{1-y}$
por tanto, los valores que y asume son los que hacen que exista la $\sqrt{1-y}$ con lo que $1-y \geq 0 \Rightarrow y \leq 1$, luego $I_f = (-\infty;1]$

En cuanto a los intervalos de positividad y negatividad de la función, una vez calculadas las raíces, que en este caso son 1 y 3, factorizamos el polinomio y se resuelven las dos inecuaciones $f(x) > 0$ y $f(x) < 0$. Si no recuerda cómo hacerlo, revise el completamiento de cuadrados:

$y = -\left[(x-2)^2-1\right] = -\left[(x-2-1)(x-2+1)\right] = -(x-3)(x-1)$

factorización de la diferencia de cuadrados.

Así, es sencillo analizar los conjuntos de positividad y negatividad de la función:

Si $y = -(x-3)(x-1) > 0$, entonces $(x-3)(x-1) < 0$, para ello ambos factores deben tener distinto signo; luego, se presentan las siguientes alternativas: $\begin{cases} x-3>0 \\ \wedge \\ x-1<0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-3<0 \\ \wedge \\ x-1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>3 \\ \wedge \\ x<1 \end{cases} \vee \begin{cases} x<3 \\ \wedge \\ x>1 \end{cases}$

En el primer caso la solución es ϕ, en tanto que en el segundo caso obtenemos 1 < x < 3, y entonces la función es positiva en la unión de las soluciones. Así afirmamos que el intervalo de positividad de la función es (1,3). En forma similar se procede para hallar los intervalos de negatividad y se obtiene $(-\infty;1) \cup (3;+\infty)$.

Ejercicio 14. Determine el conjunto imagen, los ceros y los signos de la función

a) $y = \dfrac{2x-3}{x+1}$

b) $y = \dfrac{sg\left[(x+2)(x-3)\right]}{x-1}$

Solución

a) $y = \dfrac{2x-3}{x+1}$. En primer lugar veamos qué ocurre con el dominio de esta función. Como la división por cero no está definida, se tiene que $D_f = \boldsymbol{R} - \{-1\}$.

Para hallar los ceros, se resuelve la ecuación $f(x) = 0$, es decir:

$\dfrac{2x-3}{x+1} = 0 \Rightarrow 2x-3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$; ceros de f = $\{\dfrac{3}{2}\}$

Veamos ahora cómo determinar los intervalos de positividad y negatividad:

$$\frac{2x-3}{x+1} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x-3>0 \\ \wedge \\ x+1>0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x-3<0 \\ \wedge \\ x+1<0 \end{cases} \quad \text{y así} \quad \begin{cases} x > \dfrac{3}{2} \\ \wedge \\ x > -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x < \dfrac{3}{2} \\ \wedge \\ x < -1 \end{cases}$$

lo que nos da la unión de las soluciones $x > \dfrac{3}{2}$ con $x < -1$, es decir, en el intervalo $(-\infty;-1) \cup (\dfrac{3}{2};+\infty)$ la función es positiva. Por tanto, en el $(-1;\ \dfrac{3}{2})$ será negativa.

¿Cómo encontrar el conjunto imagen? Se trata de despejar, si fuera posible, la variable *x*, dada la función $y = \dfrac{2x-3}{x+1} \Rightarrow y(x+1) = 2x-3 \Rightarrow$

$xy + y = 2x - 3 \Rightarrow \quad xy - 2x = -y - 3 \Rightarrow \quad xy - 2x = -y - 3 \Rightarrow$

$-x(2-y) = -(y+3) \Rightarrow x = \dfrac{y+3}{2-y}$. Y para dividir por y - 2 debe ser

$y - 2 \neq 0$, de donde $y \neq 2 \Rightarrow I_f = \boldsymbol{R} - \{2\}$

b) $y = \dfrac{sg\left[(x+2)(x-3)\right]}{x-1}$ Recordemos en primer lugar que

$sg\, r = \dfrac{r}{|r|} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad r > 0 \\ -1 & \text{si} \quad r < 0 \end{cases}$ por tanto $D_f = \boldsymbol{R} - \{1;-2;3\}$

De esta forma es posible escribir:

$$y=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad (x+2)(x-3)>0\\ \dfrac{-1}{x-1} & \text{si} \quad (x+2)(x-3)<0\end{cases} \qquad \Rightarrow y=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad x<-2 \vee x>3\\ \dfrac{-1}{x-1} & \text{si} \quad -2<x<3 \wedge x\neq 1\end{cases}$$

porque $(x+2)(x-3)<0$ si $-2<x<3 \wedge x\neq 1$, así nos queda $x-1=\dfrac{\pm 1}{y} \Rightarrow y\neq 0$

Pero como la función está definida por tramos, veamos cómo se comporta la imagen "*y*" en cada uno de ellos. (4)

Si $x<-2 \Rightarrow x-1<-3 \Rightarrow y=\dfrac{1}{x-1}>\dfrac{-1}{3} \wedge y<0 \Rightarrow -\dfrac{1}{3}<y<0$ (5)

Si $x>3 \Rightarrow x-1>2 \Rightarrow y=\dfrac{1}{x-1}<\dfrac{1}{2} \wedge x-1>0 \Rightarrow 0<y<\dfrac{1}{2}$ (6)

Si $-2<x<3 \wedge x\neq 1 \Rightarrow -3<x-1<2 \Rightarrow \dfrac{-1}{3}>\dfrac{1}{x-1} \vee \dfrac{1}{x-1}>\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{3}<-\dfrac{1}{x-1} \vee \dfrac{-1}{x-1}<-\dfrac{1}{2}$ con lo que $y>\dfrac{1}{3}$ o $y<-\dfrac{1}{2}$ (7)

De (1), (2), (3) y (4) se deduce que el conjunto imagen es

$$I_f=(-\infty;-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{3};0)\cup(0;\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{3};+\infty)$$

La función no tiene ceros (¿por qué?). Nos falta determinar los intervalos de positividad y negatividad de $y=f(x)$

Si $y=\dfrac{1}{x-1}>0 \Rightarrow x-1>0 \Rightarrow x>1$ pero la función está definida así cuando $x<-2$, o bien cuando $x>3$, de donde es positiva si $x>3$ y negativa si $x<-2$.

Si $y=-\dfrac{1}{x-1}>0 \Rightarrow x-1<0 \Rightarrow x<1$ pero la función está así definida para todo x tal que $-2<x<3$, luego será positiva en $-2<x<1$ y negativa si $1<x<3$.

Concluyendo, la imagen de la función es positiva $\forall x\in(-2;1)\cup(3;+\infty)$ y negativa $\forall x\in(-\infty;-2)\cup(1;3)$

Ejercicio 15. En el segmento $0 \leq x \leq 1$ del eje x se encuentra distribuida uniformemente una masa de 2 gramos, y en los puntos $x = 2$ y $x = 3$ de dicho eje están ubicadas dos masas puntuales de 1 gramo cada una. Hallar la expresión analítica de $m(x)$ para todo x real, si su valor numérico es igual a la masa que hay desde $-\infty$ hasta x.

Solución

Notemos que si $x<0$, $m(x) = 0$; como a lo largo del segmento $0 \leq x \leq 1$ tiene distribuida uniformemente 2 gramos, en el intervalo $[0,x)$ con $x<1$ concentró un total de $2x$. Al llegar a $x = 1$ acumuló 2 gramos de masa. Además, en el intervalo (1;2), con lo que conserva la anterior que es 2; al llegar al 2 se encuentra con una masa puntual de 1 gramo que se sumará a la anterior obteniendo 2+1=3 en gramos, valor que se mantiene hasta llegar al 3 en que vuelve a sumar 1 a lo anterior y se obtiene 4. Luego, la expresión analítica es:

$$m(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ 2x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ 3 & \text{si} \quad 2 \leq x < 3 \\ 4 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

Ejercicio 16. Conociendo el gráfico de la función dado más abajo, responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuáles son los ceros de la función?

b) Indique los intervalos de positividad y negatividad:

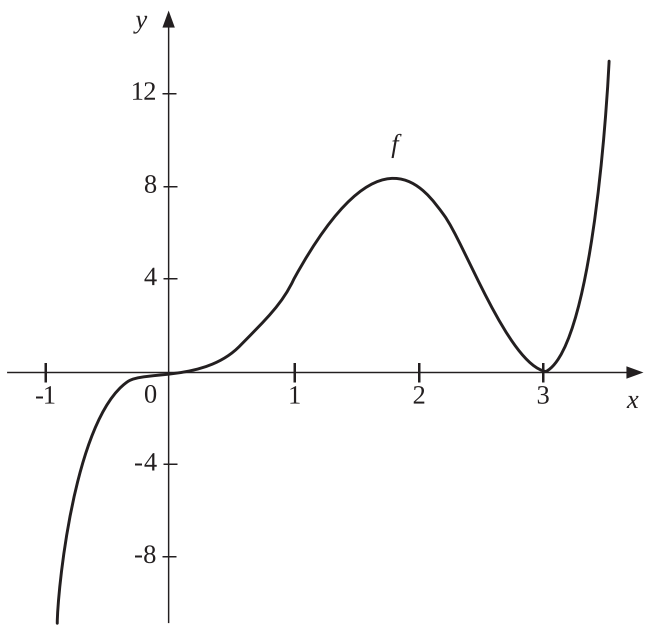


Figura 3. **Figura del ejercicio 16**

Solución

El problema en este caso es muy sencillo ya que, por simple observación, vemos que $f(x) = 0$ si $x = 0$ o $x = 3$. Además, la imagen de la función es positiva si su gráfico aparece por encima del eje x, y esto ocurre en el intervalo (0;3) junto con los x mayores que 3, y resulta negativa si está por debajo del eje x, lo que ocurre para los x negativos. Así tenemos:

a) Ceros de $f = \{0; 3\}$

b) Conjunto de positividad de $f = (0; 3) \cup (3; +\infty)$

Conjunto de negatividad de $f = \boldsymbol{R}^-$

Ejercicio 17. La ley de Coulomb expresa la fuerza de atracción (o repulsión) que existe entre dos cargas eléctricas q_1 y q_2, separadas una distancia r, y nos dice que F es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. Considere que $k > 0$ es la constante de proporcionalidad y que todas las magnitudes se miden en unidades adecuadas.

a) Exprese la ley de Coulomb mediante una igualdad.

b) ¿Qué significa para Ud. que F sea positiva? ¿Y negativa?

c) ¿Qué ocurre con F cuando las cargas están muy alejadas?

d) ¿Y muy próximas?

Solución

a) Como el enunciado dice que F es directamente proporcional al producto de las cargas, tenemos que $F \approx q_1 q_2$ y como F es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa, $F \approx \frac{1}{r^2}$. De todo ello podemos escribir que $F \approx \frac{q_1 q_2}{r^2}$ y como debemos escribirlo como una igualdad, utilizamos la constante de proporcionalidad k y tenemos la ley de Coulomb expresada así: $F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$.

b) Como sabemos que $k > 0$ y el cuadrado de r también, el signo de F lo determina el signo de las cargas. Si q_1 y q_2 tienen signos iguales, es positiva y resulta una fuerza de atracción; si en cambio tienen signos distintos, la fuerza es negativa y es de repulsión.

c) Si r es muy grande, elevado al cuadrado lo será más aún, con lo que $\frac{1}{r^2}$ será muy pequeño; como el producto $kq_1 q_2$ es una constante, al multiplicarlo por $\frac{1}{r^2}$ el resultado será cada vez más pequeño cuanto mayor sea la distancia que separa las cargas, lo que significa que la fuerza de actuante será cada vez más pequeña.

d) Si r es muy pequeño, elevado al cuadrado lo será más aún, con lo que $\frac{1}{r^2}$ será muy grande. Como el producto kq_1q_2 es una constante, al multiplicarlo por $\frac{1}{r^2}$ el resultado será cada vez más grande cuanto mayor sea la distancia que separa las cargas, lo que significa que la fuerza actuante será cada vez más grande.

> ***4. Nota:*** *Intente hacer un gráfico de la función tomando ambas cargas y la constante de proporcionalidad iguales a 1.*

6. OPERACIONES CON FUNCIONES

Dadas dos funciones f y g tales que $Dom\ (f) \cap Dom\ (g) \neq \varnothing$, se definen:

Suma y resta: $(f \pm g)_{(x)} = f(x) \pm g(x) \quad \forall x \in Dom\ f(x) \cap Dom\ g(x)$

Producto: $(f.g)_{(x)} = f(x).g(x) \quad \forall x \in Dom\ f(x) \cap Dom\ g(x)$

Cociente: $\left(\frac{f}{g}\right)_{(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in Dom\ f(x) \cap Dom\ g(x) - \{x / g(x) = 0\}$

Nos preguntamos ahora si además pueden existir otras formas de combinar funciones que permitan obtener una nueva función o si es posible definir una función que, saliendo del conjunto de llegada (codominio) de f nos permita volver a su conjunto de partida (dominio). La respuesta es afirmativa en ambos casos y da lugar a lo que se denomina función compuesta y función inversa, respectivamente.

6.1. Composición de funciones

Existe otra forma de combinar las funciones para obtener otra función. Por ejemplo, si se supone que $y = f(u) = 7u$ y $u = g(x) = 5x - 4$. Dado que y es función de u y u es función de x, se deduce por sustitución que y es función de x, obteniendo $y = 7(5x - 4) = f(g(x))$. Este procedimiento es llamado *composición de funciones*, porque la nueva función está compuesta de las dos funciones f y g.

En general, dadas dos funciones f y g, si se comienza con un elemento x en el dominio de g, para obtener $g(x)$ y este elemento se encuentra en el dominio de f, es posible aplicar f a $g(x)$ y obtener el elemento $f(g(x))$.

2. *Definición*

Dadas dos funciones f y g, la función compuesta $f \circ g$ (también llamada la composición de f y g y se lee g compuesta con f) se define por $(f \circ g)_{(x)} = f(g(x))$ y existe siempre que $\operatorname{Im} g(x) \subseteq \operatorname{Dom} f(x)$.

Es posible visualizar la composición de funciones mediante un diagrama como el siguiente:

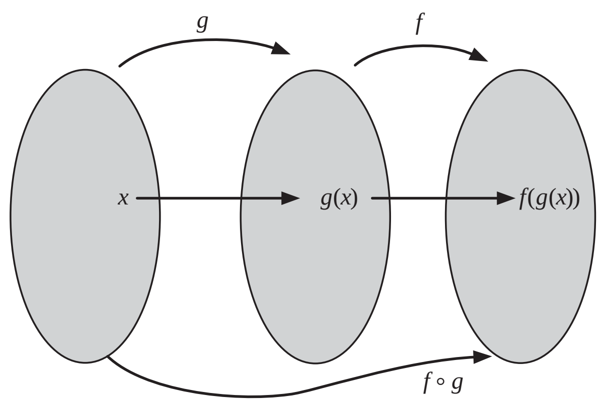


***Figura 4*. Diagrama de composición de funciones**

Imagine una máquina que toma una botella de gaseosa, la llena y luego la tapa. El llenado de la botella sería la primera función que se aplica y taparla sería la segunda función. Y la máquina estaría haciendo una composición de las funciones $f \circ g(x)$. Está claro en este caso (y en general) que no puede invertir el orden de las tareas, de modo que puede no existir $g \circ f$, o bien, aun existiendo, no cumplirse que $f \circ g(x) = g \circ f(x)$.

Ejemplos

1. Se consideran las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 5$. Se sabe que $Dom\ f(x) = \boldsymbol{R}$; $\operatorname{Im} f(x) = \boldsymbol{R}_0^+$

$Dom\ g(x) = \boldsymbol{R}$; $\operatorname{Im} g(x) = \boldsymbol{R}$

Dado que $\operatorname{Im} g(x) = Dom\ f(x)$, entonces existe $f \circ g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}_0^+$ y su fórmula se obtiene $f \circ g_{(x)} = f(g(x)) = f(x+5) = (x+5)^2$.

Por otra parte, como $\operatorname{Im} f(x) \subset Dom\ g(x)$, también existe $g \circ f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ y su fórmula es $g \circ f_{(x)} = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 5$.

Se observa que $(f \circ g)_{(x)} \neq (g \circ f)_{(x)}$, por lo que la ***composición de funciones NO es conmutativa***.

> **5. Nota:** *Obsérvese que cuando se definió $g \circ f$ en el ejemplo precedente, se estableció que el conjunto de llegada (codominio) de dicha función es el conjunto **R**, pero no el conjunto imagen de dicha composición, ya que como*
>
> $$x^2 \geq 0 \qquad \forall x \in \boldsymbol{R}$$
>
> $$(g \circ f)_{(x)} = x^2 + 5 \geq 5 \qquad \forall x \in \boldsymbol{R}$$

Por tanto, $\mathrm{Im}(g \circ f) = [5, +\infty)$. De todas maneras, la función $g \circ f$ está bien definida ya que $\boldsymbol{R} \supset [5, +\infty)$.

2. Supongamos ahora que se dan las funciones *f* y *g* a partir de las siguientes fórmulas $f(x) = \ln(2x+1)$ *y* $g(x) = \sqrt{x}$. Es posible determinar que

$$\text{Dom } f(x) = \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \quad ; \quad \text{Im } f(x) = \boldsymbol{R}$$

$$\text{Dom } g(x) = \boldsymbol{R}_0^+ \quad ; \quad \text{Im } g(x) = \boldsymbol{R}_0^+$$

Resulta pues que como $\mathrm{Im}\, f(x) \not\subset Dom\ g(x)$, no existe $g \circ f$. No obstante, es posible redefinir la función $f(x)$ restringiendo su dominio y su imagen para que pueda componerse con la función *g*. Este hecho, naturalmente, ocasiona la aparición de una nueva función a la que puede designarse como $f^*(x)$ que coincidirá con $f(x)$ sólo en la fórmula. Las restricciones necesarias son

$$\ln(2x+1) \geq 0 \Rightarrow 2x+1 \geq e^0 \Rightarrow x \geq 0$$

En consecuencia, $g \circ f^*: \boldsymbol{R}_0^+ \to \boldsymbol{R}_0^+ \ / \ f^*(x) = \ln(2x+1)$

Así $f^*: \boldsymbol{R}_0^+ \to \boldsymbol{R}_0^+ \ / \ g \circ f^*_{(x)} = g(f^*(x)) = g(\ln(2x+1)) = \sqrt{\ln(2x+1)}$

En este caso, ¿el codominio de $g \circ f^*$ coincide con su conjunto imagen?

¿Existe $f \circ g$? En caso afirmativo, determine su dominio, codominio, imagen y fórmula. Caso contrario, realice las restricciones mínimas para que pueda llevarse a cabo la composición.

3. Consideremos las funciones definidas por $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 5 \\ 4 & \text{si } 5 \leq x < 10 \end{cases}$ y $g(x) = \sqrt{x-2}$.

Para determinar $f \circ g$, veamos si cumple con la condición $\text{Im } g(x) \subseteq \text{Dom} f(x)$.

$\text{Dom } f(x) = (-\infty, 10) \quad ; \quad \text{Im } f(x) = (-\infty, 10)$

$\text{Dom } g(x) = [2, +\infty) \quad ; \quad \text{Im } g(x) = \boldsymbol{R}_0^+$

Se ve que $\text{Im } g(x) \not\subset \text{Dom} f(x)$, por lo tanto no existe $g \circ f$, con sus dominios e imágenes naturales. De todas formas determinemos las restricciones mínimas para que la composición pueda realizarse.

$$0 \le g(x) < 10 \Rightarrow 0 \le \sqrt{x-2} < 10 \Rightarrow 0 \le x-2 < 100 \Rightarrow 2 \le x < 102$$

Por lo tanto, es posible definir una nueva función

$$g^* : [2, 102) \to [0, 10) \;/\; g^*(x) = \sqrt{x-2}$$

Por lo tanto, $f \circ g^*(x) = f(g^*(x)) = f(\sqrt{x-2})$

$$f(\sqrt{x-2}) = \begin{cases} 2\sqrt{x-2} & \text{si } \sqrt{x-2} < 5 \\ 4 & \text{si } 5 \le \sqrt{x-2} < 10 \end{cases}$$

Ahora, $\sqrt{x-2} < 5 \quad si \quad 2 \le x < 27 \quad y \quad 5 \le \sqrt{x-2} < 10 \quad si \quad 25 \le x-2 < 100$, es decir,

$27 \le x < 102$, por lo tanto,

$$f \circ g^*(x) = f(\sqrt{x-2}) = \begin{cases} 2\sqrt{x-2} & \text{si } 2 \le x < 27 \\ 4 & \text{si } 27 \le x < 102 \end{cases}$$

Queda a cargo del lector el análisis correspondiente para la existencia de $g \circ f$.

6.2. Una clasificación de funciones y la función inversa

3. ***Definimos:***

   i $f : A \to B$ es ***inyectiva*** si $x_1, x_2 \in A \quad y \quad x_1 \ne x_2 \Rightarrow f(x_1) \ne f(x_2)$

   ii $f : A \to B$ es ***suryectiva*** (o ***sobreyectiva***) si $\text{Im}(f) = B$

   iii $f : A \to B$ es ***biyectiva*** si es inyectiva y suryectiva

Dada la función $f : A \to B$ es posible definir una relación inversa $f^{-1} : B \to A$, que será ***función inversa*** de la dada sólo en el caso que *f* sea biyectiva (¿por qué?); entonces f^{-1} también es biyectiva.

Dada $f : A \to B$ se define la función inversa de *f*, $f^{-1} : B \to A$ si

$\forall x \in A \wedge \forall y \in B$ se cumple $f^{-1}(f(x)) = x$ y $f(f^{-1}(y)) = y$.

6. Nota muy importante

Observe que el símbolo f^{-1} se utiliza para indicar la función que lleva los valores de *B* a *A* y no significa $\frac{1}{f}$, que es otra función *g* que se define a partir de *f* y que se denomina *recíproca de f*. Por ejemplo, si $f(x) = x^3$, su inversa es $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ y su recíproca es $g(x) = \frac{1}{x^3}$.

Ejemplos

1) Sea *f*: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R} \,/\, f(x) = 6x - x^2$, discutamos si es o no inyectiva. Para ello tomemos dos imágenes iguales y veamos si sólo pueden serlo de dos valores iguales:

$$6x_1 - x_1^2 = 6x_2 - x_2^2 \Rightarrow 6x_1 - x_1^2 - 6x_2 + x_2^2 = 0 \Rightarrow 6(x_1 - x_2) - \underbrace{(x_1^2 - x_2^2)}_{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)} =$$

$$= (x_1 - x_2)(6 - x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ \vee \\ x_1 = 6 - x_2 \end{cases}$$ esto significa que si elegimos $x_2 = 0 \Rightarrow \; x_1 = 0 \vee x_1 = 6$ por lo que hay dos valores distintos que tienen la misma imagen, con lo que la función no es inyectiva. Como es una parábola cuyo vértice tiene como abscisa $x = 3$ se la podría redefinir de modo que lo sea, con sólo restringir el dominio, por ejemplo, podríamos tomar $f^*: [3; +\infty) \to \boldsymbol{R}$

2) Para la función anterior, ¿cómo saber si es suryectiva? Recordemos que para que una función lo sea, estando definida de $A \to B$, tiene que ocurrir que el conjunto imagen de la misma debe coincidir con el codominio *B*. Esto exige encontrar el conjunto imagen, para lo que necesitamos despejar la variable *x*.

$$y = 6x - x^2 = -(x^2 - 6x) = -(\underbrace{x^2 - 2.3x + 9}_{(x-3)^2} - 9) = 9 - (x - 3)^2 \Rightarrow y = 9 - (x - 3)^2$$

despejando $(x - 3)^2 = 9 - y \Rightarrow |x - 3| = \sqrt{9 - y}$ para que esta operación se pueda concretar, tiene que ocurrir que $9 - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 9$ con lo que el conjunto imagen es $(-\infty; 9] \subset \boldsymbol{R}$ de modo que no es suryectiva.

Intente el lector redefinirla de modo que sea suryectiva.

3) La función que venimos analizando restringida de la siguiente manera $f^*: [3, +\infty) \to (-\infty, 9]$ es biyectiva (¿Por qué? Es importante que el lector cuestione las afirmaciones cuando no recibe justificación alguna).

7. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Dada una función *f*, para cada $x \in Domf$ el par ordenado de números reales $(x,f(x))$ puede interpretarse como coordenadas de un punto del plano respecto de un sistema de coordenadas cartesianas, de modo que la gráfica de *f*, es decir, $\{(x, f(x)) : x \in Domf\}$, vendrá representada por un subconjunto del plano, que da la ***representación gráfica*** de la función *f*. Considerar esta representación puede otorgar, a veces, información interesante sobre *f*, por ejemplo, cómo se refleja en su representación gráfica que una función admite inversa. La representación gráfica de una función, denominada en adelante el gráfico de ***f***, podrá ser empleada para visualizar y conjeturar propiedades y características inherentes de la función y predecir resultados, pero, de ninguna manera el gráfico en sí mismo constituye la validación de propiedades de las funciones.

7.1. Tabulación de funciones

Cuando el dominio de una función es un conjunto finito (y con un número no demasiado grande de elementos) frecuentemente es útil describir la función confeccionando una tabla de valores del dominio y a su lado las correspondientes imágenes para cada uno de ellos. Por ejemplo, de esta forma suelen recogerse datos experimentales cuando se analizan dos magnitudes de las cuales una depende de la otra. De hecho, las tablas de correspondencias entre números o magnitudes son históricamente anteriores a la formalización del concepto de función.

También se tabulan funciones cuyos dominios no son finitos, exhibiendo, naturalmente, sólo una parte finita del mismo. Es importante destacar que en la mayoría de las tablas de funciones que se usan en el ámbito científico, las imágenes que aparecen no son, obviamente, valores exactos, sino valores aproximados sujetos a un margen de error controlable para que puedan ser empleados apropiadamente.

4. *Definiciones*

i Una función *f* se dice ***monótona no creciente*** si dados cualesquiera $x, y \in Domf$ con $x < y$, es $f(x) \geq f(y)$.

ii Una función *f* se dice ***monótona no decreciente*** si dados cualesquiera $x, y \in Domf$ con $x < y$, es $f(x) \leq f(y)$.

iii Una función *f* se dice ***monótona estrictamente decreciente*** si dados cualesquiera $x, y \in Domf$ con $x < y$, es $f(x) > f(y)$.

iv Una función *f* se dice ***monótona estrictamente creciente*** si dados cualesquiera $x, y \in Domf$ con $x < y$, es $f(x) < f(y)$.

Observación. La monotonía no es una propiedad *puntual* de la función, sino *global*. Sólo tiene sentido decir que una función es monótona en un conjunto determinado, no tiene sentido decir que una función es monótona en un punto del conjunto.

7.2. Otra clasificación de funciones

En las representaciones gráficas resultan de utilidad ciertas propiedades de simetría que presentan algunas funciones.

Sea f una función con dominio y rango en $\boldsymbol{R}$. Si el dominio de f es simétrico respecto del origen, es decir, $x \in \mathrm{Dom}f$ si y sólo si $-x \in \mathrm{Dom}f$, entonces es posible afirmar que:

a. f es ***par*** si $\forall x$ se verifica que $f(x) = f(-x)$ (la gráfica de f es simétrica respecto del eje de ordenadas. Se trata de una *simetría axial*)

b. f es ***impar*** si $\forall x$ se verifica que $f(x) = -f(-x)$ (la gráfica de f es simétrica respecto del origen de coordenadas. Se trata de una *simetría central*)

EJEMPLO

Sea $\varphi(x) = \dfrac{f(x+k) - f(x)}{k}$ con k real no nulo, nos interesa saber si es posible asegurar una conservación de la simetría, esto es si f no tiene simetría, entonces φ tampoco, o bien, si f es par (o impar), entonces φ también lo es. Veamos un primer caso:

1) $f(x) = 2x + 3 \Rightarrow \varphi(x) = \dfrac{2(x+k) + 3 - (2x+3)}{k} = \dfrac{2x + 2k + 3 - 2x - 3}{k} = 2$.

La f no tiene simetría porque $f(-x) = -2x + 3 \neq \begin{cases} 2x + 3 = f(x) \Rightarrow \text{no es par} \\ -(2x+3) = -f(x) \Rightarrow \text{no es impar} \end{cases}$.

Veamos ahora qué ocurre con la otra función $\varphi(-x) = 2 = \varphi(x) \Rightarrow$ ¡es par! ¿Esto ocurrirá siempre? Tomemos ahora:

2) $f(x) = x^3 \Rightarrow \varphi(x) = \dfrac{(x+k)^3 - x^3}{k} = \dfrac{x^3 + 3kx^2 + 3k^2x + k^3 - x^3}{k} = \dfrac{k(3x^2 + 3kx + k^2)}{k} =$

$= 3x^2 + 3kx + k^2$. Es muy sencillo probar que f es impar ya que $-x^3 = (-x)^3$, veamos ahora la otra función:

$\varphi(x) = 3x^2 + 3kx + k^2 \Rightarrow \varphi(-x) = 3(-x)^2 + 3k(-x) + k^2 = 3x^2 - 3kx + k^2 \neq \begin{cases} \varphi(x) \\ -\varphi(x) \end{cases} \Rightarrow$ no tiene simetría.

Podemos afirmar que no hay relación entre la simetría de ambas funciones.

8. FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

Estas funciones no son algebraicas pero forman parte de otra clase de funciones, las llamadas ***trascendentes***[3]. Las funciones exponenciales y logarítmicas se utilizan en la descripción y solución de una amplia variedad de problemas de la vida cotidiana, como por ejemplo, el crecimiento de poblaciones, animales y bacterias, el decaimiento radiactivo, la absorción de la luz al atravesar el aire, agua o vidrio, las magnitudes del sonido y los terremotos, aumento o disminución de la temperatura de un cuerpo cuando se calienta o enfría, descenso de la presión atmosférica cuando aumenta la altura.

El manejo de los logaritmos permite simplificar expresiones complicadas y es un poderoso instrumento para efectuar operaciones. Por medio de logaritmos es posible convertir las operaciones producto y cociente a sumas, y diferencias que son, naturalmente más fáciles de calcular. En la misma forma la potenciación se reduce a un producto que evidentemente se calcula más fácilmente.

Consideremos un número real *a* positivo y distinto de 1. La igualdad $N = a^x$, siendo *N* un número real y a^x una potencia, plantea dos problemas fundamentales:

a) Dada la base *a* y el exponente *x*, encontrar *N*.
b) Dados *N* y *a*, encontrar *x*.

El primero puede resolverse, en algunos casos, aplicando las leyes de la potenciación. En el segundo, siempre existe un número real *x* tal que $N = a^x$, cuando *N* y *a* son reales positivos y $a \neq 1$. Este caso da lugar a la siguiente:

5. *Definición*

Sea *a* un real positivo fijo, $a \neq 1$ y sea *x* cualquier real positivo, entonces:

$$y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

La función que hace corresponder a cada número real positivo su logaritmo en base $a \neq 1$, denotada por $y = \log_a x$, se llama ***función logarítmica de base a***, y, el número $\log_a x$ se llama ***logaritmo de x en la base a*** y debe cumplirse que $f: \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R} \,/\, f(x) = \log_a x$ con $a > 0 \wedge a \neq 1$.

Frecuentemente la definición anterior se expresa coloquialmente así:
El logaritmo de un número, en una base dada, es el exponente al cual se debe elevar la base para obtener dicho número.

Ejemplos: $\log_2 8 = 3$ porque $2^3 = 8$ $\quad \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{32} = -10$ porque $\left(\sqrt{2}\right)^{-10} = 2^{-5} = \frac{1}{32}$

[3] Denominación que pone de manifiesto el hecho de que "trascienden al álgebra" en el sentido que no pueden ser expresadas como una secuencia finita de las operaciones algebraicas básicas (suma, resta, producto).

> *7.* ***Nota:*** *La base más frecuentemente utilizada para las funciones logarítmicas es el llamado número e (número del matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783)) Los logaritmos de base e son llamados logaritmos naturales o neperianos y se indican habitualmente como ln x. Sin embargo, los que más a menudo se encuentran tabulados y que se utilizan en la práctica son los correspondientes a la base 10, los cuales son llamados logaritmos decimales y se denotan por* $\log_{10} x$ *o, simplemente,* $\log x$.
> Hasta ahora el número π fue, probablemente, el número irracional más importante que Ud. ha encontrado, otro número irracional es $e \approx 2.7182819$ que también es muy importante tanto para la matemática como para sus aplicaciones.

9. PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Para asegurar un manejo fluido en las aplicaciones con funciones logarítmicas, es importante recordar propiedades de los logaritmos.

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, y b es cualquier real positivo, x e y reales positivos, entonces:

1. $\log_a (a^b) = a^{\log_a b} = b$

2. $\log_a a = 1$

3. $\log_a 1 = 0$

4. $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$

5. $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

6. $\log_a (x^n) = n \log_a x \quad n \in \boldsymbol{R}$

7. Cuando $a > 1$, si $0 < x < y$, entonces, $\log_a x < \log_a y$ .Es decir, la función logarítmica de base $a > 1$ es estrictamente creciente en su dominio.

8. Cuando $0 < a < 1$, si $0 < x < y$, entonces, $\log_a x > \log_a y$, lo que significa que la función logarítmica de base positiva y menor que 1 es estrictamente decreciente en su dominio.

9. $\log_a x = \log_a y \iff x = y$ (útil para resolver ecuaciones logarítmicas)

10. Para todo número real y, existe un único número real positivo x tal que $\log_a x = y$, es decir, la función logarítmica es suryectiva. También es inyectiva (¿por qué?)

11. Cambio de base en los logaritmos: resulta útil recordar el origen de la expresión que permite realizar el cambio de base para el cálculo de logaritmos. Si $y = \log_b x$,

entonces $x = b^y$ y resulta $\log_a x = y \log_a b$ y se obtiene $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b} \; b \neq 1$

Todas estas propiedades pueden demostrarse haciendo uso de la definición y propiedades de la potenciación. Se deja a cargo del lector a modo de ejercicio la prueba de las mismas.

Observación. La igualdad $\log_a a^b = b$, dada en una propiedad anterior, es también válida para $b < 0$.

9.1. Gráfico de la función logarítmica

El gráfico de la función $f : \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R} \; / \; f(x) = \log_a x$ con $a > 1$ es:

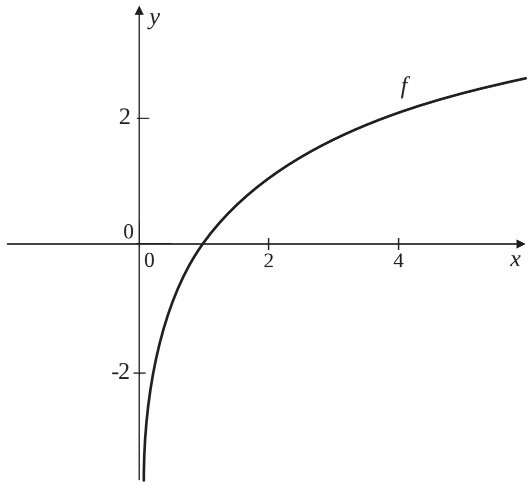


Figura 5. **Función logarítmica** (base >1)

El gráfico de la función $f : \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R} \; / \; f(x) = \log \; x$ con $0 < a < 1$ es:

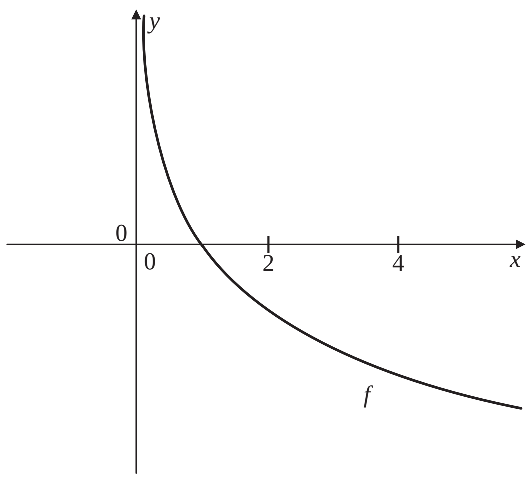


Figura 6. **Función logarítmica** (0<base<1)

Se puede probar que en cualquiera de ambos casos la función logarítmica es biyectiva (¡inténtelo!).

Nos cuestionamos: ¿cuál su inversa? Como sabemos f^{-1}: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^+$, para hallarla tomemos $f(x) = \log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$ luego intercambiamos $y \leftrightarrow x$ y obtenemos la inversa $f^{-1}(x) = y = a^x$ con $a > 0$ y $a \neq 1$, la cual se llama ***función exponencial.***

En las siguientes figuras aparecen las gráficas de las funciones $y = \log_2 x$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, en concordancia con las propiedades establecidas anteriormente.

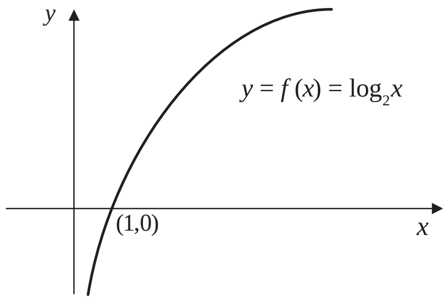


Figura 7. **Función logarítmica** (base = 2)

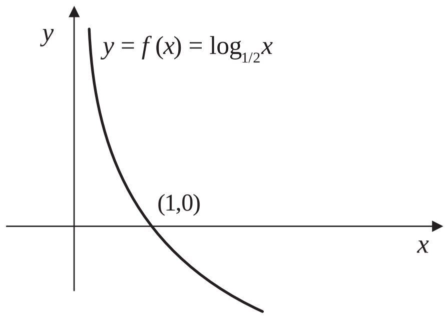


Figura 8. Función logarítmica (base = 1/2)

En la figura que se da a continuación se han trazado conjuntamente las curvas $y = 2^x$, $y = \log_2 x$. Allí puede visualizarse que las curvas son simétricas con respecto a la recta $y = x$, como ocurre con las gráficas de toda función y su inversa.

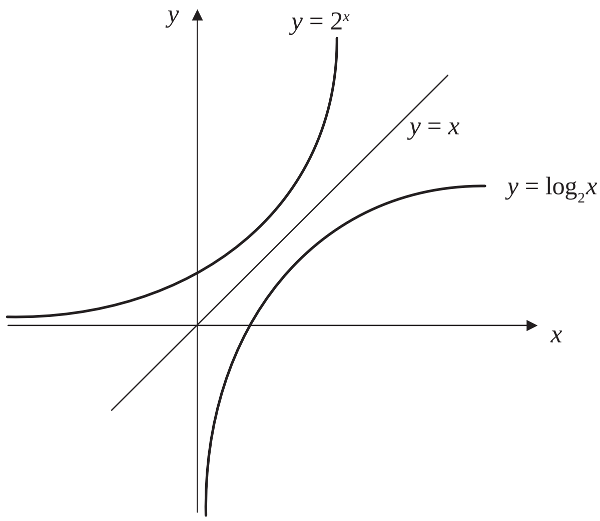


Figura 9. **Funciones exponencial y logarítmica con base 2**

Cuando la base de la exponencial es el número *e*, la ***función exponencial natural***, $f(x) = e^x$, tiene como conjunto dominio al conjunto de los números reales y su imagen el subconjunto de los reales positivos, y tiene muchas aplicaciones en modelos matemáticos de fenómenos del mundo real.

Si $0 < a < 1$, $f(x) = a^x$ es una función estrictamente decreciente, mientras que si $a > 1$ es estrictamente creciente.

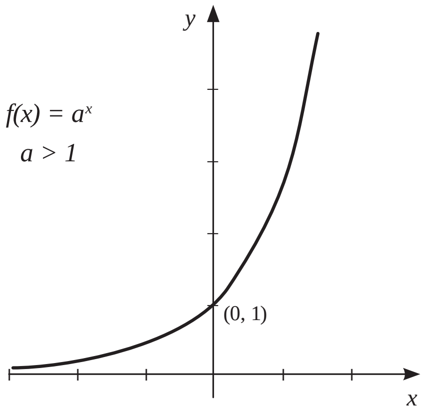


Figura 10. **Función exponencial** (base >1)

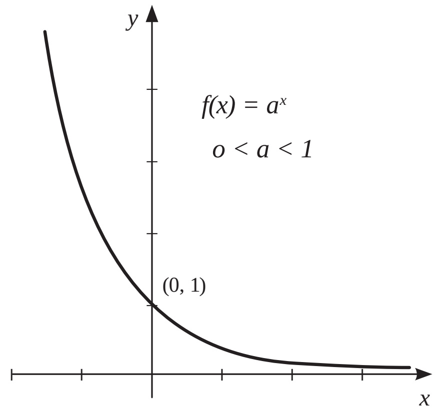


Figura 11. **Función exponencial** (0<base<1)

Veamos algunos gráficos comparativos con bases 2 y *e*, tener en cuenta que $e^{-x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ y que $2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

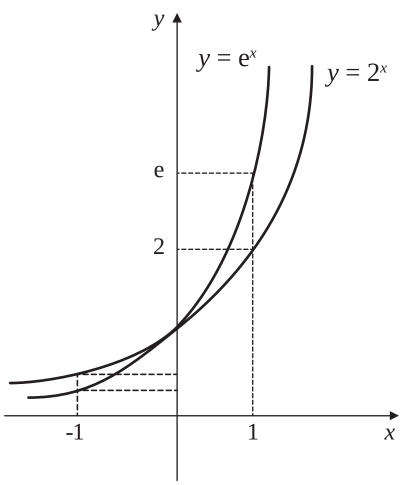


Figura 12. **Función exponencial** (bases e y 2)

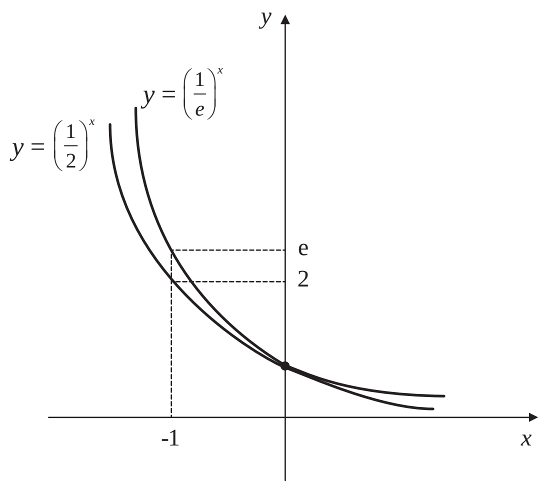


Figura 13. **Función exponencial** (bases e^{-1} y 2^{-1})

Una aplicación interesante de los logaritmos decimales

Las escalas logarítmicas como la de Richter, que mide la intensidad de los terremotos, la de decibelios de sonido o la del pH utilizan intrínsecamente exponenciales. Así, cuando se dice que un terremoto ha tenido una intensidad 4 en la escala Richter, se quiere decir que ha sido 10^4 veces más intenso que uno de magnitud 1 (4 es el logaritmo en base 10 de 10^4).

La magnitud del terremoto R se expresa a través de una igualdad que contiene logaritmos:

$$\boldsymbol{R} = \log_{10}\left(\frac{a}{T}\right) + B$$

a es la amplitud del movimiento telúrico (expresado en micras[4]) en la estación receptora, T es el período de la onda sísmica (en segundos) y B es un factor empírico que indica el debilitamiento al aumentar la distancia al epicentro del terremoto.

Por ejemplo, si se desea conocer la magnitud de un terremoto sabiendo que a 10000 km de la estación receptora, B=*6,8*. El movimiento vertical en el terreno es a = 10 micras[1] y el período es T=1 seg. Empleando la fórmula anterior,

$$\boldsymbol{R} = \log_{10}\left(\frac{10}{1}\right) + 6.8 = 7.8$$

surge que este terremoto ocasionaría enormes destrozos debido a la magnitud cerca del epicentro.

EJEMPLOS

1) Sean las funciones $f(x) = \log_a x$ y $g(x) = \log_{a^n} x$, usando propiedades probemos que la ordenada de f es n veces la ordenada de g.

Haciendo cambio de base se tiene que

$$g(x) = \log_{a^n} x = \frac{\log_a x}{\log_a a^n} = \frac{\log_a x}{n} = \frac{f(x)}{n} \Rightarrow f(x) = ng(x)$$

con lo que queda demostrado.

2) Calculemos el dominio de la función $f(x) = \dfrac{1}{1 - 2^{\frac{x}{3-x}}}$

Por aparecer un cociente en el exponente, el divisor no debe anularse, de allí se tiene que

$$\begin{cases} 1 - 2^{\frac{x}{3-x}} \neq 0 \Rightarrow 2^{\frac{x}{3-x}} \neq 1 \Rightarrow x \neq 0 \\ \wedge \\ 3 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 3 \end{cases} \Rightarrow D_f = \boldsymbol{R} - \{0;3\}$$

[4] También denominada micrón, unidad de medida adoptada en micrografía, equivalente a la milésima parte de un milímetro. Se simboliza con la letra griega μ.

9.2. Un poco de historia de los logaritmos

La invención de los logaritmos (palabra de origen griego: logos (logos (λογος) = tratado, arithmos (αριθμος) = números) , se debe al matemático escocés John Napier, barón de Merchiston (1550-1617), quien se interesó fundamentalmente por el cálculo numérico y la trigonometría. En 1614, y tras veinte años de trabajo, publicó su obra, donde explica cómo se utilizan los logaritmos, pero no relata el proceso que lo llevó a ellos.
Un año después, en 1615, el matemático inglés Henry Briggs (1561-1631) visitó a Napier y le sugirió utilizar como base de los logaritmos el número 10. A Napier le agradó la idea y se comprometieron a elaborar las tablas de los logaritmos decimales. Napier muere al cabo de dos años escasos y Briggs se queda con la tarea, quien publica el primer tratado sobre los logaritmos vulgares o de Briggs, cuya base es el número 10. Briggs hizo el cálculo de las tablas de logaritmos desde 1 a 20 000 y de 90 000 a 100 000.
En 1620, el hijo de Napier publicó la obra de su padre, "Descripción de la maravillosa regla de los logaritmos", donde ya se explica el proceso seguido por Napier, mediante la comparación de progresiones y la utilización de unas varillas cifradas, llamadas varillas o regletas de Napier, para llegar a sus resultados sobre los logaritmos.
Las tablas de los logaritmos decimales de Briggs fueron completadas de 1 a 100 000 en 1628 por el matemático holandés Adriaan Vlacq (1600-1667).
Estos resultados fueron muy bien acogidos por el mundo científico del momento, que no dudó en utilizarlos para la resolución de cálculos numéricos.

9.3. Un poco de historia acerca de la Trigonometría

La Trigonometría, palabra que proviene de dos raíces griegas: *trigon*, que significa triángulo, y *metra*, que significa medida, estudia, en principio, las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos. Hace más de 3000 años los babilonios y los egipcios fueron los primeros en utilizar los ángulos de un triángulo y las razones trigonométricas para uso agrícola, para avanzar en el estudio de la astronomía mediante la predicción de las rutas y posiciones de los cuerpos celestes y para perfeccionar la navegación y el cálculo del tiempo. Los egipcios establecieron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos.
El estudio de la trigonometría pasó después a Grecia, donde se destaca el matemático y astrónomo griego Hiparco de Nicea (190-120 a.C.), por haber sido uno de los principales desarrolladores de la trigonometría. Las tablas de "cuerdas" que construyó fueron las precursoras de las tablas de las funciones trigonométricas, en uso hasta la aparición de las calculadoras científicas de bolsillo, y daban la longitud de la cuerda delimitada por los lados del ángulo central dado que corta una circunferencia de radio r. Trescientos años después Tolomeo (85–165 d.C.) en su libro *Almagesto* también presenta una tabla de cuerdas junto con la explicación de su método para compilarla, dando ejemplos de cómo utilizar la tabla para calcular los elementos desconocidos de un triángulo a partir de los conocidos. Usó sus conocimientos para la construcción de relojes de sol.
Estos conocimientos llegan a la India y Arabia donde se usan en la astronomía. A finales del siglo VIII los astrónomos árabes trabajaron con la función seno y a finales del siglo X ya habían completado la función seno y las otras cinco funciones. Los matemáticos sugirieron el uso del valor $r = 1$, y esto dio lugar a los valores modernos de las funciones trigonométricas.
Y desde allí se difunde por Europa, donde finalmente se separa de la astronomía para convertirse en una rama de la matemática. El primer trabajo importante en esta materia en Europa fue escrito por el matemático y astrónomo alemán Johann Müller, llamado *Regiomontano*.
A principios del siglo XVII, el matemático escocés John Napier inventó los logaritmos y gracias a esto los cálculos trigonométricos recibieron un gran empuje. Y a mediados del siglo XVII Isaac Newton, con su invención del cálculo diferencial e integral, logra la representación de muchas funciones matemáticas utilizando series infinitas de potencias de la variable x, y encuentra la serie para el sen x y series similares para el cos x y la tg x. Con la invención del Cálculo las funciones trigonométricas fueron incorporadas al Análisis, donde todavía hoy desempeñan un importante papel tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas. Por último, en el siglo XVIII, el matemático Leonhard Euler, pese a su pérdida casi total de la vista, desde muy joven demostró (entre otras) que las propiedades de la trigonometría eran producto de la aritmética de los números complejos y además definió las funciones trigonométricas utilizando expresiones con exponenciales de números complejos.
Fue así como la trigonometría avanzó hasta convertirse en una rama independiente que forma parte de la matemática y se emplea en muchos campos del conocimiento, tanto teóricos como prácticos, e interviene en toda clase de investigaciones geométricas y algebraicas en las cuales aparecen las llamadas funciones trigonométricas, de gran aplicación, entre otras disciplinas, en electricidad, mecánica, termodinámica, física atómica y además el hombre las ha empleado para calcular áreas, distancias, trayectorias, con base en la resolución de triángulos.

10. LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Sobre una circunferencia de centro O = (0,0) y radio 1 (denominada *circunferencia trigonométrica*) se considera un arco de longitud x desde el punto I = (1,0) obteniendo el punto P. El *seno* de x y el *coseno* de x son las coordenadas del punto P, es decir, P = (cos x, *sen* x), se traza la tangente a la circunferencia por el punto I y se obtiene el punto T en el que la tangente intersecta a la recta OP. La *tangente* de x, *tg* x (o *tan* x), es la longitud del segmento IT.

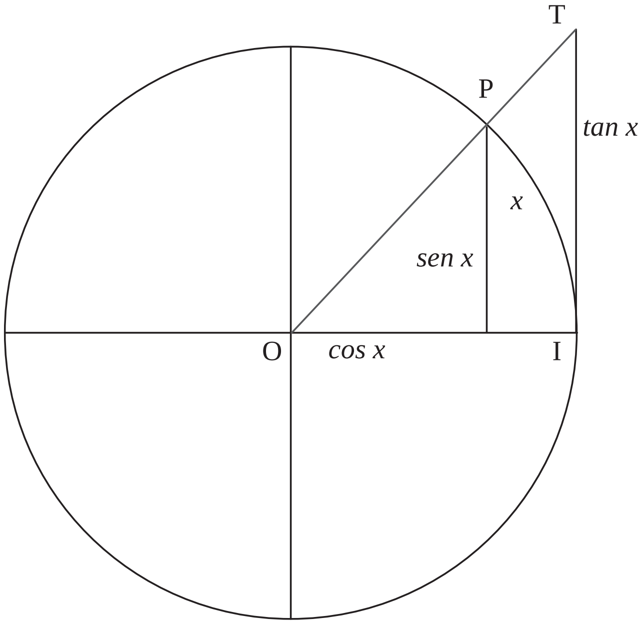


***Figura 14*. Circunferencia trigonométrica**

De la definición se obtienen las siguientes propiedades (a partir de las cuales se podrían probar todas las restantes):

1. $sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos 0 = 1$, $\cos\pi = -1$

2. $\cos(y \quad x) \quad \cos y.\cos x \quad sen\, y.sen\, x$

3. Para $0 < x < \frac{\pi}{2}$ se verifica $0 \quad \cos x \quad \frac{sen\, x}{x} \quad \frac{1}{\cos x}$ y $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1$

Se cumplen también las siguientes propiedades:

4. *sen* x y *cos* x son periódicas de período 2π:

$sen\,(x \quad 2 \quad) \quad sen\, x$ y $\cos(x \quad 2 \quad) \quad \cos x$

5. $sen^2 x + \cos^2 x = 1$

6. $sen\ x$ es estrictamente creciente en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y $cos\ x$ es estrictamente decreciente en $[0, \pi]$

7. *sen x* es impar: *sen* (-*x*) = - *sen x* y *cos x* es par: *cos x* = *cos* (-*x*)

8. $sen\ 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = sen\,\pi = 0$

9. $\cos\ x \quad \frac{\ }{2} \qquad sen\,x$ y $sen\ x \quad \frac{\ }{2} \qquad \cos x$

10. $\cos\,(x \quad y) \quad \cos x.\cos y \quad sen\ x.sen\ y$

11. $sen\ (x \quad y) \quad sen\ x.\cos y \quad \cos x.sen\ y$

12. $sen\ x \quad sen\ y \quad 2.sen\,\frac{x \quad y}{2}.\cos\frac{x \quad y}{2}$

13. $\cos x \quad \cos y \qquad 2.sen\frac{x \quad y}{2}.sen\frac{x \quad y}{2}$

14. $|sen\ x| \quad |x| \qquad x \quad \boldsymbol{R}$

Es posible confeccionar una tabla de algunos valores de estas funciones para algunos argumentos particulares:

Grados	x	sen x	cos x
0	0	0	1
15	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{\frac{2}{2}}$	$\sqrt{\frac{2}{2}}$
60	$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\frac{1}{2}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0

Los gráficos de estas funciones trigonométricas en el intervalo $[0, 2\pi]$ son:

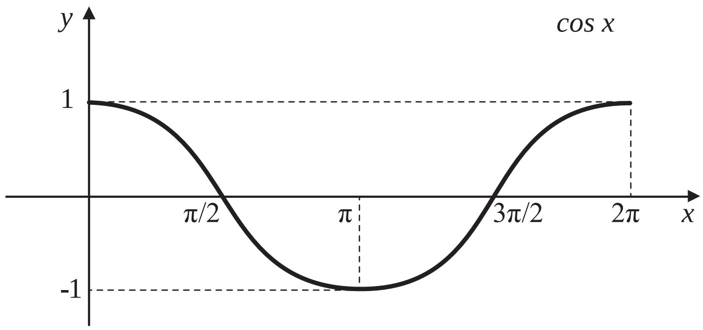


Figura 15. **Función** *cos x*

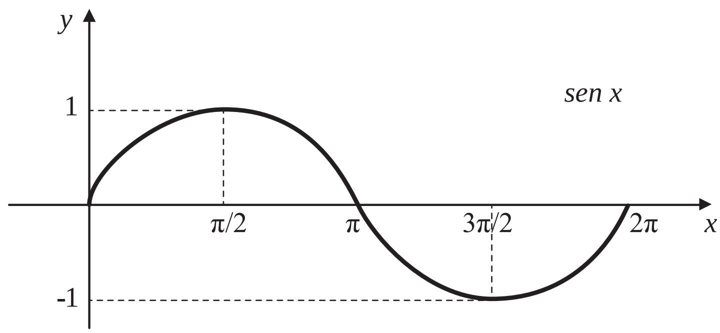


Figura 16. **Función** *sen x*

En las figuras anteriores se presentan los gráficos de la sinusoide y cosinusoide en el intervalo real $[0,2\pi]$, este esquema se repite periódicamente en todo el eje real.

De la definición se desprende que $tgx = \frac{sen\,x}{\cos x}$. La tangente tiene período π, es estrictamente creciente en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y no está definida en $\pm\frac{\pi}{2}$. Cuando nos aproximamos, dentro del intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, a $\frac{\pi}{2}$ se observa que $tgx \to +\infty$, y si nos acercamos a $-\frac{\pi}{2}$, se cumple que $tgx \to -\infty$.

Muchos estudiantes, cómodos al usar grados, no entienden por qué es preciso usar radianes. Los radianes (números reales) ***miden distancias*** sobre la circunferencia unitaria y las distancias son muy importantes en las aplicaciones. Por otra parte, muchas fórmulas del Cálculo son más simples en radianes que en grados.

El gráfico de la tangente es:

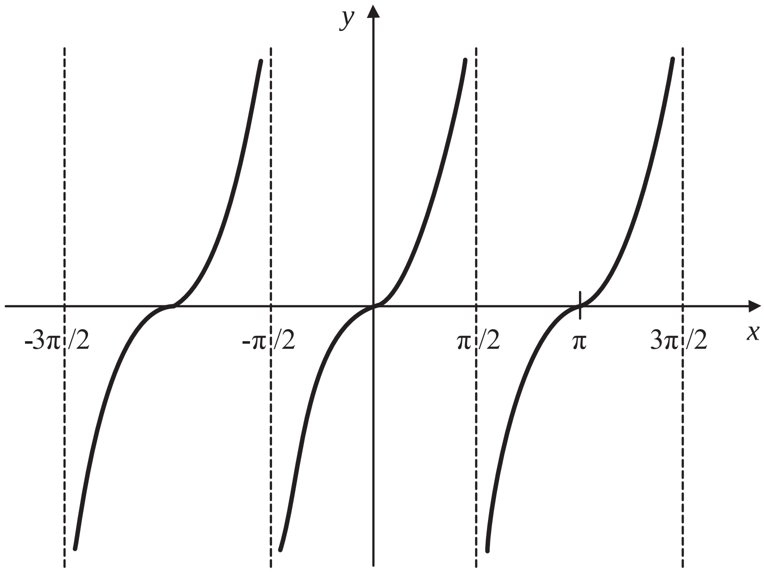


Figura 17. **Función** *tg x*

> ***6. Definición***
>
> El resto de las funciones trigonométricas se definen como sigue:
>
> $\cot x \quad \dfrac{\cos x}{sen\, x}$; $\sec x \quad \dfrac{1}{\cos x}$; $\operatorname{cosec} x \quad \dfrac{1}{sen\, x}$ para todos los valores reales de x para los cuales los denominadores NO se anulen.

Véanse las gráficas de estas funciones en las figuras siguientes:

$f : A \subset \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R} \quad / \quad f(x) = \sec x$

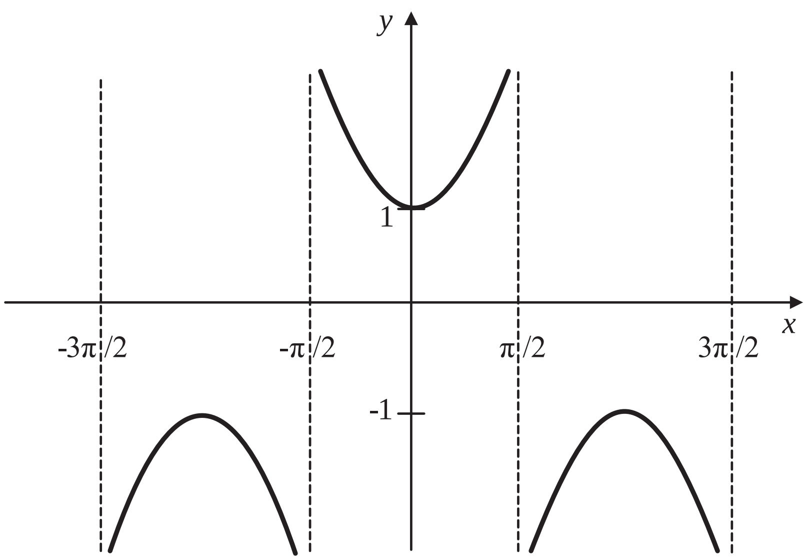


Figura 18. **Función** *sec x*

$f : A \subset \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R} \;/\; f(x) = cot\ x$

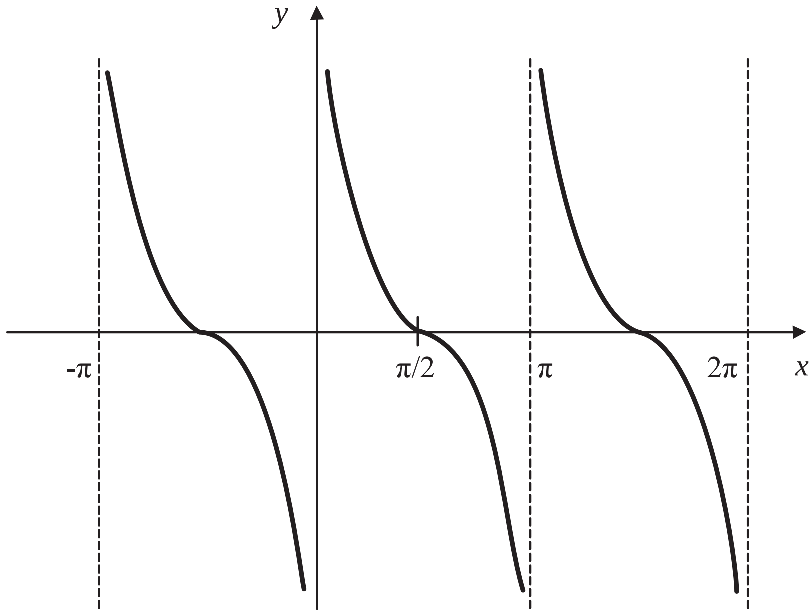


Figura 19. **Función** *cot x*

$f : A \subset \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R} \;/\; f(x) = cosec\ x$

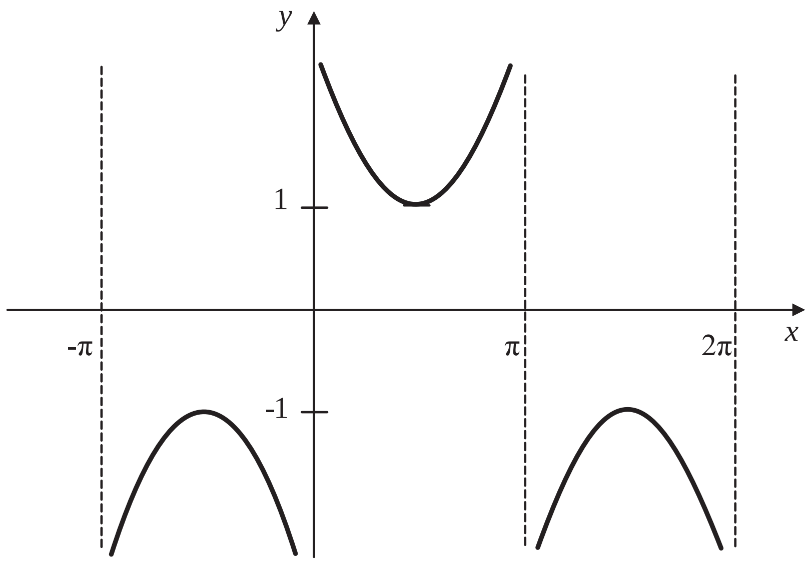


Figura 20. **Función** *cosec x*

Las funciones trigonométricas inversas: son estrictamente monótonas cuando son consideradas en intervalos apropiados, donde son biyectivas:

$sen:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\rightarrow[-1,1]$ es monótona estrictamente creciente;

$\cos:[0,\pi]\rightarrow[-1,1]$ es monótona estrictamente decreciente;

$tg:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\rightarrow\boldsymbol{R}$ monótona estrictamente creciente.

Por lo tanto, sus funciones inversas son:

$arcsen:[-1,1]\rightarrow\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ el arco seno de x es el "arco" en $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ cuyo seno vale x;

arccos: $[-1,1]\rightarrow[0,\pi]$ el arco coseno de x es el "arco" en $[0,\pi]$ cuyo coseno vale x.

$arctg:\boldsymbol{R}\rightarrow\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ el arco tangente de x es el "arco" en $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ cuya tangente vale x. Haciendo las restricciones correspondientes en los dominios

de las funciones cot x; cosec x y sec x para que sean biyectivas, también puede definirse sus respectivas inversas, a saber: *arc* cot$x$, *arc* cosec$x$ y *arc* sec$x$.

Los gráficos de las funciones trigonométricas en esos intervalos y de sus inversas son:

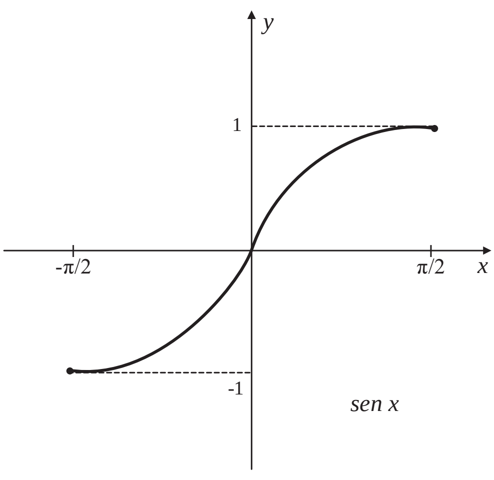


Figura 21. **Función** *sen x*

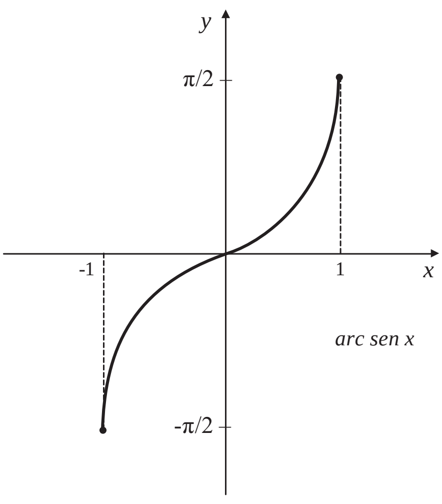


Figura 22. **Función** *arc sen x*

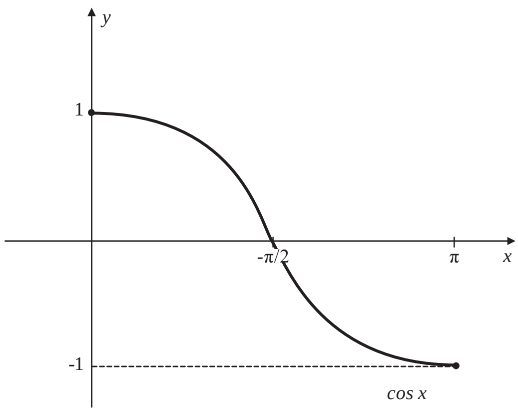


Figura 23. Función *cos x*

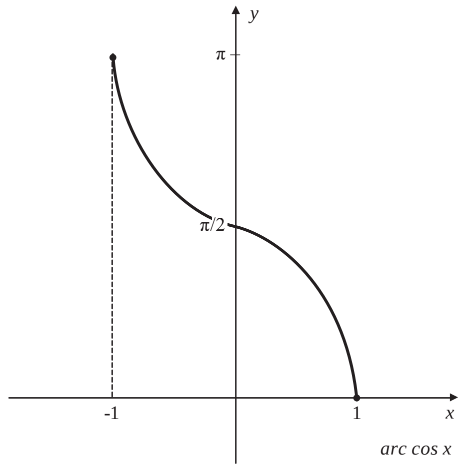


Figura 24. Función *arc cos x*

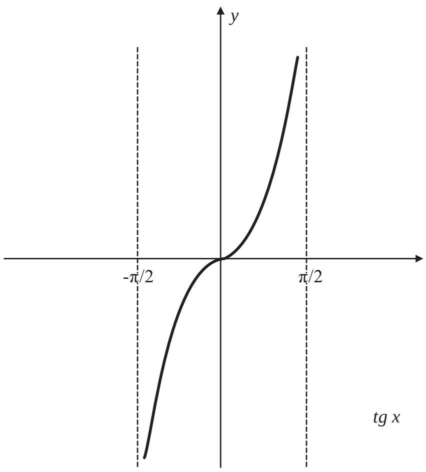


Figura 25. Función *tg x*

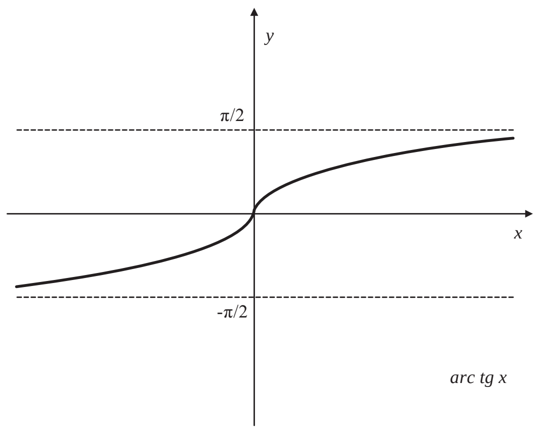


Figura 26. Función *arc tg x*

El lector debe observar la simetría de los gráficos de cada función y el de su inversa con respecto a la recta $y = x$. Queda a cargo del lector la confección de los gráficos de las funciones inversas *arc* cot *x*; *arc* cosec *x* y *arc* sec *x*.

A pesar de que en diversos textos de matemáticas, en calculadoras y computadoras se emplea la notación $sen^{-1}x$, $cos^{-1}x$, $tg^{-1}x$ para designar las funciones *arc sen x*; *arc* cos *x* y *arc tgx* respectivamente, **evitaremos su uso para no confundirlas con las funciones cosecante, secante y cotangente.**

Pregunta curiosa: ¿cuál conjunto tiene más puntos: un segmento o una recta completa?

Es posible responder a esta preciosa pregunta empleando la función tangente.

$tg:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to \boldsymbol{R}$ es una biyección, con lo cual el segmento $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ tiene la misma cantidad de puntos que la recta real $\boldsymbol{R}$, y cualquier otro segmento dado (a,b) tiene la misma cantidad de puntos que el segmento $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, tal como se ve con una proyección. Este hecho fantástico se produce por el hecho que la recta y un segmento cualquiera son continuos.

Ejemplos

1) Busquemos el período (mínimo) de la función $f(x)=3sen2x-5\cos 4x$

Sabemos que una función es periódica si se cumple que $\exists T>0/\ f(x+T)=f(x)$, de donde

$$f(x+T)=3sen2(x+T)-5\cos 4(x+T)=3sen2x-5\cos 4x=f(x)$$

Operamos:

$$3(sen2x\cos 2T+sen2T\cos 2x)-5(\cos 4x\cos 4T-sen4xsen4T)=3sen2x-5\cos 4x$$

$$3sen2x\cos 2T+3sen2T\cos 2x-5\cos 4x\cos 4T+5sen4xsen4T=3sen2x-5\cos 4x\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\cos 2T=1\Rightarrow 2T=0;2\pi;4\pi;......;2k\pi \quad \Rightarrow T=0;\pi;2\pi;......;k\pi \quad \forall k\in N\\ sen2T=0\Rightarrow 2T=k\pi\Rightarrow T=0;\frac{1}{2}\pi;\pi;\frac{3}{2}\pi,2\pi,\frac{5}{2}\pi,......;\frac{1}{2}k\pi \quad \forall k\in N\\ \cos 4T=1\Rightarrow 4T=0;2\pi;4\pi;......;2k\pi \quad \Rightarrow T=0;\frac{1}{2}\pi;\pi;\frac{3}{2}\pi,2\pi,\frac{5}{2}\pi,......;\frac{1}{2}k\pi \quad \forall k\in N\\ sen4T=0\Rightarrow 4T=k\pi\Rightarrow T=0;\frac{1}{4}\pi;\frac{1}{2}\pi;\frac{3}{4}\pi,\pi,\frac{5}{4}\pi,......;\frac{1}{4}k\pi \quad \forall k\in N\end{cases}$$

Recordemos que T debe ser positivo y el menor posible, de modo tal que cumpla los cuatro requisitos, tal valor es $T=\pi$.

2) Determine el dominio de $y=arcsen\frac{2x}{1+x}$

Recordemos que para que una función admita inversa debe ser biyectiva y la función seno no lo es, por lo cual se debe restringir su dominio de modo que sea biyectiva, lo que se consigue definiendo $sen\,x:[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]\to[-1;1]$ entonces su inversa es $arcsen:[-1;1]\to[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$. Por ello, es necesario que $-1\le\frac{2x}{1+x}\le 1$ de modo que se deben cumplir dos desigualdades a la vez, por tal razón, resolveremos cada una y luego intersectaremos las soluciones de las mismas.

A: $\frac{2x}{1+x} \geq -1 \Rightarrow \frac{2x}{1+x}+1 \geq 0 \Rightarrow \frac{2x+1+x}{1+x} = \frac{3x+1}{1+x} \geq 0$ y para que un cociente resulte positivo o nulo existen dos posibilidades:

$$I \begin{cases} 3x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{3} \\ \wedge \\ 1+x > 0 \Rightarrow x > -1 \end{cases} \Rightarrow x \in [-\frac{1}{3};+\infty) \quad \vee \; II \begin{cases} 3x+1 \leq 0 \Rightarrow x \leq -\frac{1}{3} \\ \wedge \\ 1+x < 0 \Rightarrow x < -1 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty;-1)$$

Luego, el conjunto solución de la parte A es la unión de los obtenidos anteriormente, es decir, $S_A = (-\infty;-1) \cup [-\frac{1}{3};+\infty)$.

B: $\frac{2x}{1+x} \leq 1 \Rightarrow \frac{2x}{1+x} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{2x-1-x}{1+x} = \frac{x-1}{1+x} \leq 0$ para que esto ocurra, es preciso que:

$$III \begin{cases} x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ \wedge \\ 1+x < 0 \Rightarrow x < -1 \end{cases} \Rightarrow x \in \phi \quad \vee \quad IV \begin{cases} x-1 \leq 0 \Rightarrow x \leq 1 \\ \wedge \\ 1+x > 0 \Rightarrow x > -1 \end{cases} \Rightarrow x \in (-1;1]$$

Y así, el conjunto solución de la parte B es la unión de los obtenidos, es decir, $S_B = (-1;1]$.

El dominio resulta de la intersección de las soluciones obtenidas, es decir, $D_y = [-\frac{1}{3};1]$.

3) ¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = \log_{\cos x} sen\ x$? Recordemos que la base de los logaritmos debe ser positiva y distinta de 1, y que el argumento del logaritmo debe ser positivo, de todo ello exigimos que

$$\begin{cases} \cos x > 0 \wedge \cos x \neq 1 \Rightarrow x \neq 2k\pi \wedge (2k-1)\frac{\pi}{2} < x < (2k+1)\frac{\pi}{2} \\ \wedge \\ sen\ x > 0 \Rightarrow 2k\pi < x < (2k+1)\pi \end{cases} \quad \forall k \in \boldsymbol{Z}$$

haciendo las intersecciones, tenemos que los valores que debe asumir x son:

$$x \in \ldots \cup (-4\pi, -\frac{7}{2}\pi) \cup (-2\pi, -\frac{3}{2}\pi) \cup (0, \frac{1}{2}\pi) \cup (2\pi, \frac{5}{2}\pi) \cup \ldots \Rightarrow$$

$$D_f = \left\{ x \in R / 2k\pi < x < (4k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z \right\}$$

11. EJERCICIOS RESUELTOS

Es importante recordar una vez más que los ejercicios resueltos son muy útiles cuando se estudian las herramientas teóricas y se resuelven problemas, sin tener a quien consultar dudas. Como ya lo comentáramos anteriormente, algunos de ellos están señalados con la palabra **Ejemplo** y es conveniente leer con atención su resolución y analizar cuidadosamente cómo fueron utilizados los conceptos teóricos presentados previamente. Con los ejercicios restantes es importante NO mirar la resolución, sino tratar de encararla por cuenta propia y sólo comparar con lo propuesto cuando se presente alguna dificultad o se quiera verificar si lo que se hizo coincide con lo resuelto en el texto. Sugerimos una vez más que tape la resolución con un papel para no caer en la tentación de mirar lo que está hecho antes de haberlo intentado usted. Si, a pesar de todo, le quedaran dudas revise la teoría y los ejemplos. **Recuerde que sólo se aprende haciendo y no mirando lo que hizo otro.**

EJEMPLOS

1. Para la relación $f(x) = 3|x-1|^2$ definida en $\boldsymbol{R}^2$ analice:

   a) si es función, caso contrario efectuar restricciones para que lo sea.

   b) si es inyectiva en el dominio natural o bien en algún conjunto restringido.

   c) cuál es el conjunto imagen.

   d) cuáles deberían ser los conjuntos de partida y de llegada de modo que resulte biyectiva.

   e) usando lo obtenido en d), determine cuál sería la función inversa y su dominio e imagen.

Solución

a) Para cada valor de x real que se escoja, es posible encontrar imagen y será única por el tipo de operaciones que intervienen, por tanto, es función.

b) Recordemos que para que resulte inyectiva una función debe ocurrir que a elementos distintos del dominio le corresponden imágenes distintas, o lo que es lo mismo (se dice que es el contrarrecíproco): imágenes iguales provienen sólo de pre-imágenes iguales, es decir: $f(a)=f(b)\Rightarrow a=b$. Veamos si esto ocurre en nuestra función:

$$f(a)=f(b)\Rightarrow 3(a-1)^2=3(b-1)^2\Rightarrow |a-1|=|b-1|\Rightarrow a-1=b-1\vee a-1=1-b$$

de donde obtenemos $a=b\vee a=2-b$. Luego no es inyectiva, veámoslo: para x = 0 y x = 2, la imagen es 3.

c) Como la función está definida como el producto de dos factores, uno de ellos, el 3 que es positivo y el otro $(x-1)^2$ que es mayor o igual que cero, surge naturalmente que la imagen es $\boldsymbol{R}_0^+$. Pero veámoslo de otra manera, si en la expresión de la función $f(x)=3|x-1|^2=3(x-1)^2=y$ despejamos la variable independiente, nos queda así:

$$(x-1)^2=\frac{y}{3}\Rightarrow |x-1|=\sqrt{\frac{y}{3}} \qquad (8)$$

de donde, para que sea posible operar debido a la presencia de una raíz cuadrada $\frac{y}{3}\geq 0\Rightarrow y\geq 0$. Con lo que vemos que, de otra manera, arribamos a la misma conclusión: el conjunto imagen de f es $\boldsymbol{R}_0^+$.

d) Para que resulte biyectiva debe ser suryectiva (o sobreyectiva) e inyectiva. Para que la función sea suryectiva, es necesario que el conjunto codominio coincida con el conjunto imagen, el que ya hemos encontrado en c). Para la inyectividad retomemos la expresión (8) y despejemos la variable independiente: $|x-1|=\begin{cases} x-1=\sqrt{\frac{y}{3}} & \text{si } x-1\geq 0 \\ -(x-1)=\sqrt{\frac{y}{3}} & \text{si } x-1<0 \end{cases}$ de donde

$$\begin{cases} x=1+\sqrt{\frac{y}{3}} & \text{si} \quad x\geq 1 \\ x=1-\sqrt{\frac{y}{3}} & \text{si} \quad x<1 \end{cases} \qquad (9)$$

Aquí se ve claramente que la función consta de dos tramos, a partir de x = 1 se le suma en un caso o resta en otro una misma expresión, lo que motiva la no inyectividad, por ello deberemos restringir el dominio a elección nuestra, supongamos que nos quedamos con los valores $x\geq 1\Rightarrow D_f=[1;+\infty)$. De donde f es biyectiva si $f:[1;+\infty)\to\boldsymbol{R}_0^+$

e) Como $f:[1;+\infty)\to\boldsymbol{R}_0^+\,/\,f(x)=3(x-1)^2$ es biyectiva, la función inversa (que es biyectiva, también) tendrá como dominio el conjunto imagen de f y como imagen el dominio de f, con lo que estamos intercambiando los roles, que jugaban de y en f pasan a desempeñar el papel de x en f^{-1} y recíprocamente. De este modo obtendremos la expresión analítica que caracteriza a la inversa de (2) intercambiando *y* con *x*, sin olvidar cuál hemos elegido para que resulte inyectiva, y nos queda

$$f^{-1}: \boldsymbol{R}_0^+ \to [1;+\infty) \,/\, f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{\frac{x}{3}}$$

Ejercicio 18. Para cada una de las siguientes relaciones definidas en $\boldsymbol{R}_0^+$

i) $g(x) = \dfrac{1}{x-2} + 1$

ii) $h(x) = \dfrac{2x-3}{x+5}$

iii) $r(x) = sen\, x$

iv) $t(x) = tg2x$

analice:

a) Si son funciones, caso contrario efectuar restricciones para que lo sean.
b) Si son inyectivas en el dominio dado o en el restringido en el ítem a).
c) Cuál es el conjunto imagen.
d) Cuáles deberían ser los conjuntos de partida y de llegada de modo que resulten biyectivas.
e) Usando lo obtenido en d), cuál sería la función inversa y su dominio e imagen en cada caso.

Solución

i) $g(x) = \dfrac{1}{x-2} + 1$

a) En $\boldsymbol{R}$ no es función ya que no existe imagen para $x = 2$. Por tal razón deberemos restringir el dominio $D_g = \boldsymbol{R} - \{2\}$

b) Para que resulte inyectiva una función debe ocurrir que, como ya dijimos en el ejercicio anterior, imágenes iguales provienen sólo de pre-imágenes iguales, es decir: $g(a) = g(b) \Rightarrow a = b$. Veamos si esto ocurre en nuestra función: $\dfrac{1}{a-2} + 1 = \dfrac{1}{b-2} + 1$ con *a* y *b* distintos de 2, de donde $\dfrac{1}{a-2} = \dfrac{1}{b-2} \Rightarrow a-2 = b-2 \Rightarrow a = b$, luego la función *g* es inyectiva en el dominio elegido.

c) Para hallar la imagen despejemos la variable independiente

en la función dada $g(x)=\dfrac{1}{x-2}+1=y$ y nos queda

$$y-1=\frac{1}{x-2}\Rightarrow x-2=\frac{1}{y-1} \quad si \quad y\neq 1\Rightarrow \ \Rightarrow x=2+\frac{1}{y-1} \qquad (10)$$

luego el conjunto imagen es $I_g=\boldsymbol{R}-\{1\}$

d) Para que la función resulte biyectiva tomamos el dominio en donde es inyectiva (ver b)) y como conjunto de llegada elegimos el conjunto imagen (ver c)) de modo que sea suryectiva y nos queda $g:\boldsymbol{R}-\{2\}\rightarrow \boldsymbol{R}-\{1\}\,/\,g(x)=\dfrac{1}{x-2}+1$ que es biyectiva.

e) Intercambiando las variables en (10) tendremos la expresión que caracteriza a la inversa. Luego $g^{-1}:\boldsymbol{R}-\{1\}\rightarrow \boldsymbol{R}-\{2\}\,/\,g^{-1}(x)=2+\dfrac{1}{x-1}$

ii) $h(x)=\dfrac{2x-3}{x+5}$

a) Como la división con divisor cero no está definida, $x=-5$ no tiene imagen, por tanto, para que sea función debemos tomar $D_h=\boldsymbol{R}-\{-5\}$.

b) Como ya ha sido tratado en ejercicios precedentes, partimos de

$h(a)=h(b)$ con $a,b\in D_h$

$\dfrac{2a-3}{a+5}=\dfrac{2b-3}{b+5}\Rightarrow (2a-3)(b+5)=(2b-3)(a+5)$ distribuyendo

nos queda $2ab+10a-3b-15=2ab+10b-3a-15$ y

$10a-3b-10b+3a=0\Rightarrow 13a-13b=0\Rightarrow 13(a-b)=0\Rightarrow a=b$

de donde es inyectiva en todo el dominio elegido.

c) Para determinar la imagen, despejemos la variable independiente

$y=h(x)=\dfrac{2x-3}{x+5}$ y obtenemos

$y(x+5)=2x-3\Rightarrow xy+5y=2x-3\Rightarrow xy-2x=-3-5y$ factoreando

$$-x(2-y)=-(3+5y) \quad \text{si} \quad y\neq 2:\ x=\frac{3+5y}{2-y} \qquad (11)$$

con lo que la imagen es $I_h=\boldsymbol{R}-\{2\}$.

d) Debemos seleccionar el dominio y el rango (o conjunto de llegada) de modo que resulte inyectiva y suryectiva, por tanto, deberemos definirla de la siguiente manera: $h:\boldsymbol{R}-\{-5\}\rightarrow \boldsymbol{R}-\{2\}\,/\,h(x)=\dfrac{2x-3}{x+5}$

e) Intercambiando las variables en (11), tendremos la expresión que caracteriza a la inversa. Así tenemos $h^{-1}: \boldsymbol{R}-\{2\} \to \boldsymbol{R}-\{-5\} \,/\, h^{-1}(x)=\dfrac{3+5x}{2-x}$.

iii) $r(x)=sen\ x$

a) El dominio es el conjunto de los reales.

b) Por ser una función periódica no es inyectiva, veamos por ejemplo, $r(0)=r(\pi)=r(2\pi)=...=r(k\pi)=0 \quad \forall k \in \boldsymbol{Z}$

c) El conjunto imagen es $I_r=[-1;1]$

d) Para que resulte inyectiva deberemos restringir el dominio, la más clásica de las restricciones (que responde a la efectuada en las subrutinas incorporadas en las calculadoras) es la siguiente: $D_r=\left[-\dfrac{1}{2}\pi;\dfrac{1}{2}\pi\right]$. De modo que para que resulte biyectiva debemos definirla así: $r:\left[-\dfrac{1}{2}\pi;\dfrac{1}{2}\pi\right] \to [-1;1] \,/\, r(x)=sen\ x$

Si encontrara dificultades en la resolución de este ejercicio debe rever los conceptos teóricos referidos a funciones trigonométricas.

e) La inversa será: $r^{-1}:r:[-1;1] \to \left[-\dfrac{1}{2}\pi;\dfrac{1}{2}\pi\right] \,/\, r^{-1}(x)=arcsenx$

iv) $t(x) = tg2x$

a) Recordemos que $tg\,2x=\dfrac{sen2x}{\cos 2x}$ si $\cos 2x \neq 0$; como el divisor no debe ser cero, es preciso buscar para qué valores reales de x se anula el coseno. Así vemos que $\cos 2x=0 \quad si \quad 2x=(2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k \in \boldsymbol{Z}$ $\Rightarrow x=(2k+1)\dfrac{\pi}{4},\ k\in \boldsymbol{Z}$ luego deberemos elegir el dominio eliminando a éstos $D_t=\boldsymbol{R}-\left\{x \,/\, x=(2k+1)\dfrac{\pi}{4},\ k\in \boldsymbol{Z}\right\}$

b) Por ser periódica no es inyectiva, por ejemplo

$t(0)=t(\dfrac{\pi}{2})=t(2\dfrac{\pi}{2})=t(3\dfrac{\pi}{2})=...==t(n\dfrac{\pi}{2})=0, \forall n\in \boldsymbol{Z}$

c) El conjunto imagen es el conjunto de los números reales

d) Restringimos el dominio para que sea inyectiva (a elección)

$D_t=\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$; así es biyectiva si $t:\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right) \to \boldsymbol{R} \,/\, t(x)=tg2x$

e) La inversa será entonces: $t^{-1}:\boldsymbol{R} \to \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right) \,/\, t^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}arctgx$

EJEMPLOS

Determine, analíticamente, si las siguientes funciones son pares, impares o carecen de simetría:

a) $f(x) = x - 3x$

Recordemos que para analizar la simetría de una función debemos comparar *f (-x)* con *f (x)* y con su opuesto, para todo *x* del dominio de la función, de modo que si

f (-*x*) = *f* (*x*) la función resulta ser *par*, lo que significa que es simétrica respecto del eje *y;* si en cambio ocurre que *f* (-*x*) = -*f* (*x*) significa que la función es *impar*, lo que equivale a decir que es simétrica respecto del origen de coordenadas. Veamos entonces cómo resulta ser $f(-x) = (-x) - 3(-x)^3 = -x + 3x^3 = -(x - 3x^3) = -f(x)$, luego la función es impar:

b) $h(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

$h(-x) = \dfrac{1-(-x)}{1+(-x)} = \dfrac{1+x}{1-x} = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{-1}$ de donde *h(-x)* es distinto de *h(x)* y de –*h(x)* por lo que no tiene simetría.

Ejercicio 19. Determine, analíticamente, si las siguientes funciones son pares, impares o carecen de simetría:

a) $g(x) = 2x^4 + 5 - 3x^2$

b) $r(x) = \ln \dfrac{1-x}{1+x}$

c) $m(x) = sgx$

d) $s(x) = \begin{cases} 1+x & -1 < x < 0 \\ 1-x & 0 < x < 1 \end{cases}$

Solución

a) $g(-x) = 2(-x)^4 + 5 - 3(-x)^2 = 2x^4 + 5 - 3x^2 = g(x)$ de donde la función es par.

b) $r(-x) = \ln \dfrac{1-(-x)}{1+(-x)} = \ln \dfrac{1+x}{1-x} = \ln \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{-1} = -\ln \dfrac{1-x}{1+x} = -r(x)$ luego es impar.

c) $m(-x) = sg(-x) = \dfrac{-x}{|-x|} = -\dfrac{x}{|x|} = -sgx = -m(x)$ por tanto, es impar.

d) $s(-x) = \begin{cases} 1+(-x) & -1 < -x < 0 \\ 1-(-x) & 0 < -x < 1 \end{cases} = \begin{cases} 1-x & 1 > x > 0 \\ 1+x & 0 > x > -1 \end{cases}$ si lo reordenamos

nos queda $s(-x) = \begin{cases} 1+x & -1 < x < 0 \\ 1-x & 0 < x < 1 \end{cases} = s(x)$ de donde, es par.

Ejercicio 20. Demuestre que toda función con dominio en reales se puede expresar como la suma de una par y una impar.

Solución

Sea $f(x) = \dfrac{g(x)+g(-x)}{2} + \dfrac{r(x)-r(-x)}{2}$ donde $\alpha(x) = \dfrac{g(x)+g(-x)}{2}$

y $\beta(x) = \dfrac{r(x)-r(-x)}{2}$ probemos que estas funciones gozan de simetría.

Comencemos con $\alpha(-x) = \dfrac{g(-x)+g(x)}{2} = \dfrac{g(x)+g(-x)}{2} = \alpha(x)$

con lo que ésta es par. Veamos ahora la otra:

$\beta(-x) = \dfrac{r(-x)-r(x)}{2} = -\dfrac{r(x)-r(-x)}{2} = -\beta(x)$ como vemos, ésta es impar.

Luego $f(x) = \alpha(x) + \beta(x)$ donde la primera es par y la segunda es impar.

Algunas preguntas que dejamos planteadas para cuestionarse: ¿cómo debe ser el dominio de $\alpha(x)$? ¿Y cómo el de $\beta(x)$? ¿Cuál será entonces el de $f(x)$?

EJEMPLOS

Usando el concepto desarrollado en el ejercicio anterior, determine la parte par y la impar que conforman cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$

En este caso, $\alpha(x) = 3x^2 + 5 = g(x)$ y $\beta(x) = -2x = r(x)$. Pruebe Ud. que son par e impar respectivamente.

> ***8. Nota:*** *El caso anterior es sumamente sencillo y se puede detectar por simple observación; veamos ahora un caso no tan obvio.*

b) $f(x) = e^x$

Como $f(x)=e^x=\dfrac{e^x+e^x}{2}=\dfrac{e^x+e^{-x}-e^{-x}+e^x}{2}=\underbrace{\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}}_{\alpha(x)}+\underbrace{\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}}_{\beta(x)}$ las que son pares e impares, respectivamente.

Ejercicio 21. Usando el concepto desarrollado en el ejemplo anterior, determine la parte par y la impar que conforman cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^3-x}{2}$ b) $f(x)=\cos 2x$

c) $f(x)=\ln(x-1)$ d) $f(x)=e^{-x}+\ln x$

Solución

a) $f(x)=\dfrac{x^3-x}{2}$

En este caso $\alpha(x)=0$ y $\beta(x)=\dfrac{x^3-x}{2}$

b) $f(x)=\cos 2x$

En este caso $\alpha(x)=\cos 2x$ y $\beta(x)=0$

Los casos anteriores son sumamente sencillos y los puede detectar por simple observación; veamos ahora casos no tan obvios.

c) $f(x)=\ln(x-1)$

Usando la misma mecánica que antes:

$$f(x)=\ln(x-1)=\frac{\ln(x-1)+\ln(x-1)}{2}=\frac{\ln(x-1)+\ln(-x-1)-\ln(-x-1)+\ln(x-1)}{2}=$$

$$=\underbrace{\frac{\ln(x-1)+\ln(-x-1)}{2}}_{\alpha(x)}+\underbrace{\frac{\ln(x-1)-\ln(-x-1)}{2}}_{\beta(x)}$$

Veamos ahora si tiene sentido. Veamos cuál es dominio de $\alpha(x)$:

$\begin{cases} x-1>0 \\ \wedge \\ -x-1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ \wedge \\ x<-1 \end{cases}$ lo que nos da como solución ϕ, por lo que no existe dicha función. ¿Qué pasó?

d) $f(x)=e^{-x}+\ln x$

Como el dominio no es $\boldsymbol{R}$, no es posible hacerlo.

12. LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Las denominadas funciones hiperbólicas se definen en forma similar a las funciones trigonométricas, pero tomando las relaciones entre longitudes de arcos de hipérbola en lugar de hacerlo sobre una circunferencia como en las trigonométricas. No obstante, normalmente se las conoce a través de las relaciones que las ligan con las funciones exponenciales.

Las funciones hiperbólicas son el seno hiperbólico: *sh x*, el coseno hiperbólico: *ch x* y la tangente hiperbólica: *th x*. Sus expresiones en término de funciones exponenciales son:

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad ; \quad chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad ; \quad thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Verifican algunas propiedades muy similares a las que conocemos para las trigonométricas, entre ellas:

1. $ch^2 x - sh^2 x = 1$
2. *sh x* es impar y *ch x* es par.
3. $sh\,(x+y) = sh\,x . ch\,y + ch\,x . sh\,y$
4. $ch\,(x+y) = ch\,x . ch\,y + sh\,x . sh\,y$

Sus gráficos son:

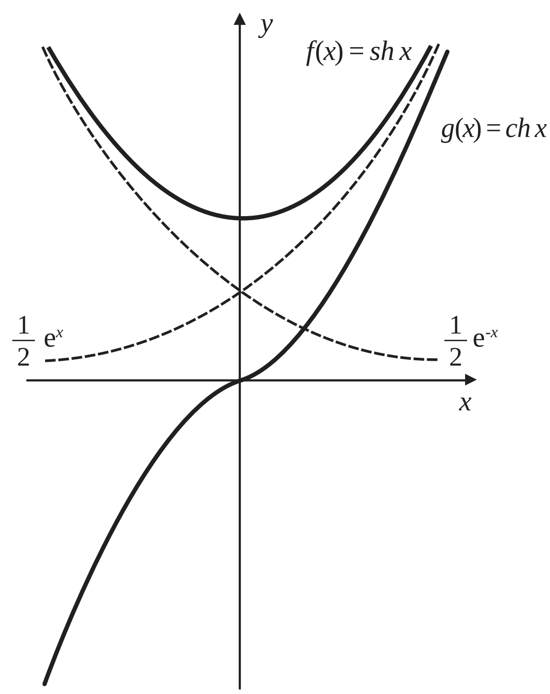


Figura 27. **Función** *sh x* **y** *ch x*

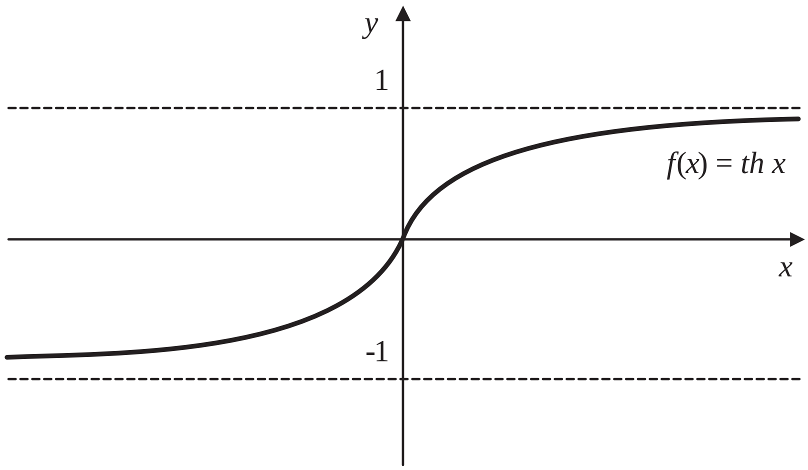


Figura 28. **Función** *th x*

También es posible definir las funciones $sechx = \dfrac{1}{chx}$; $cosechx = \dfrac{1}{shx}$; $cothx = \dfrac{1}{thx}$ para todos los valores de x que no anulen los denominadores.

Las funciones trigonométricas hiperbólicas son estrictamente monótonas en intervalos apropiados en los que resultan biyectivas:

shx: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ estrictamente creciente;

chx: $[0,+\infty] \to [1,+\infty]$ o chx: $(-\infty,0] \to [1,+\infty)$ estrictamente creciente y estrictamente decreciente, respectivamente.

thx: $\boldsymbol{R} \to (-1,1)$ estrictamente creciente.

Por lo tanto, sus funciones inversas son:

$argshx$: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ el argumento seno hiperbólico de x

$argchx$: $[1,+\infty) \to [0,+\infty)$ o $argchx$: $[1,+\infty) \to (-\infty,0]$ el argumento coseno hiperbólico de x.

$argthx$: $(-1,1) \to \boldsymbol{R}$ el argumento tangente hiperbólica de x

Los gráficos de las funciones trigonométricas hiperbólicas inversas en esos intervalos y de sus inversas son:

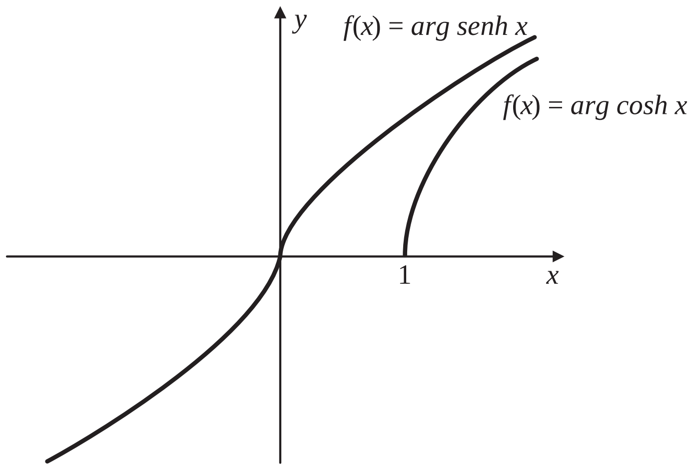


***Figura 29*. Funciones** *arg senhx* **y** *arg cosh x*

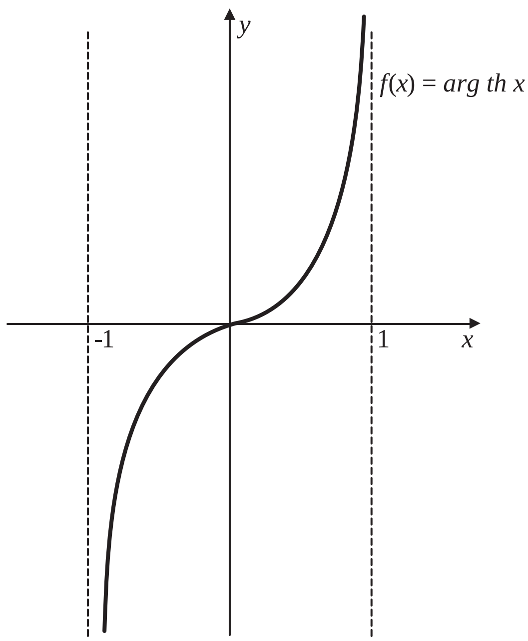


***Figura 30*. Función** *arg th x*

Haciendo las restricciones correspondientes en los dominios de las funciones *coth x*; *cosech x* y *sech x* para que sean biyectivas, también puede definirse sus respectivas funciones inversas, a saber: *arg coth x*; *arg cosech x* y *arg sech x*, cuyos gráficos quedan a cargo del lector.

Dada la estrecha relación que tienen las funciones trigonométricas hiperbólicas con la función exponencial, cabe pensar que sus funciones inversas estén vinculadas con el logaritmo. Esta vinculación se analizará en los ejercicios de aplicación propuestos más adelante.

13. ECUACIONES PARAMÉTRICAS

En algunos casos la fórmula de una función o de una relación no está dada en la forma $y = f(x)$ o $g(x, y) = 0$, como en $y = 4x^2 - x$ o $2x^2 + 6y^2 = 12$, sino que está determinada por un par de ecuaciones en términos de una misma variable llamada *parámetro t*. En Física, al describir el movimiento de un objeto es conveniente adoptar como variable el tiempo. En dos dimensiones, la posición del objeto viene dada por dos funciones $x(t)$ e $y(t)$, denominadas *ecuaciones paramétricas de la trayectoria*.

Por ejemplo, se consideran las ecuaciones $x = t^2 - 2t$, $y = t + 1$ $t \in \boldsymbol{R}$.

Se tiene que a cada valor de t le corresponde un punto (x,y) del plano, el conjunto de los cuales determina una relación $\boldsymbol{R}$.

La siguiente tabla de valores:

t	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x	24	15	8	3	0	-1	0	3	8	15
y	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

Tabla 1. **Valores para ecuaciones paramétricas**

permite hacer la representación gráfica de la relación de la siguiente manera:

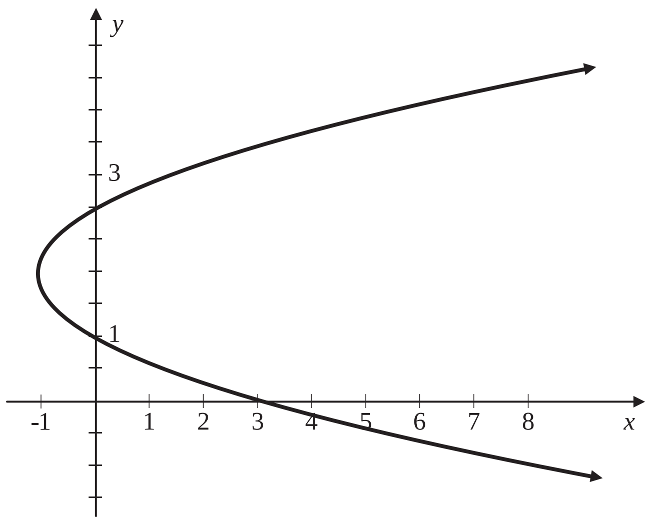


Figura 31. **Gráfica de la relación de la tabla 1**

En general, las ecuaciones $x = g(t)$, $y = h(t)$ con g y h funciones definidas en un intervalo $I \subseteq \boldsymbol{R}$ reciben el nombre de ***ecuaciones paramétricas*** o ***representación paramétrica*** de una curva en el plano XY. La gráfica de las ecuaciones paramétricas está dada por el conjunto de puntos del plano XY, que se obtiene cuando t toma todos sus valores posibles en el dominio I.

La relación que determinan las ecuaciones paramétricas con frecuencia no es una función, como sucede en el ejemplo anterior. Sin embargo, en algunos casos la relación dada sí es una función.

Por ejemplo, $\begin{cases} x = \dfrac{t}{2} \\ y = \dfrac{t^2}{4} - 1 \end{cases}$ $t \in \boldsymbol{R}$. ¡Verifíquelo!!! Para ello alcanza con que elimine el parámetro t entre las dos relaciones.

Otro ejemplo:

$$(1)\begin{cases} x(t) = 4\cos t \\ y(t) = 4 sen t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi) \qquad \text{y} \qquad (2)\begin{cases} x(t) = 4\cos 2t \\ y(t) = 4 sen 2t \end{cases} \quad t \in [0, \pi]$$

son dos representaciones paramétricas de la circunferencia de centro en el origen y radio 2 (verifíquelo). ¿En qué radica la diferencia entre dos móviles que se desplazan uno de acuerdo con (1) y otro con (2)?

13.1. Un bello problema de Física - Perspectiva histórica - Curva del tiempo mínimo

Uno de los problemas más famosos de la historia de las matemáticas es el de la braquistócrona. Suponga dos puntos *A* y *B* en un plano a diferentes alturas. El problema es encontrar el camino que une estos dos puntos de forma que una masa unitaria *M*, bajo la acción de una fuerza gravitatoria constante y sin efectos de fricción, emplee la menor cantidad de tiempo en recorrerlo (del punto más alto al más bajo).

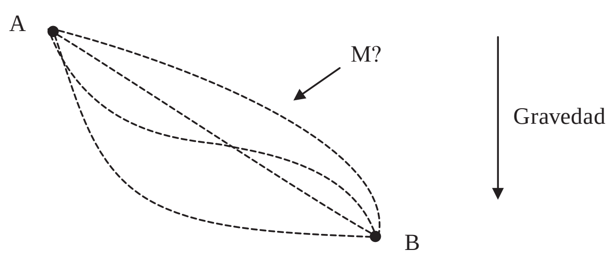


***Figura 32*. Camino del tiempo mínimo**

Galileo creía que una cuentecilla caería en menor tiempo si el alambre se curvaba. Más tarde, en 1696, Johann Bernoulli intentó averiguar (y lo consiguió de manera genial) qué clase de curvatura proporciona el descenso más vertiginoso. Esta curva se conoce como *braquistócrona* (del griego *brachistos*, el más breve, y *cronos*, tiempo.)

Bernoulli descubrió algo que lo movió a escribir, en enero de 1697, una carta a Huygens en la que decía: "Te vas a quedar petrificado cuando te diga que la cicloide es, precisamente, la braquistócrona solicitada". Es decir, que el camino que utiliza un tiempo más corto para un móvil que cae por gravedad tiene forma de cicloide.

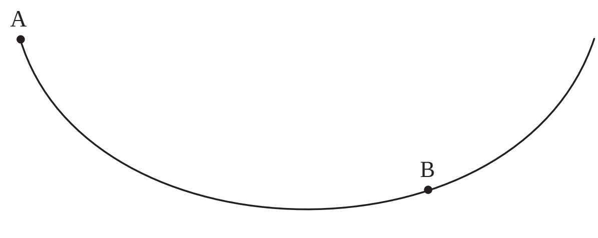


***Figura 33*. Braquistócrona**

Como se ve en el diagrama anterior, el sentido común (que normalmente conduce a error), dice que el camino más rápido para que la bolita pase de A a B es un plano inclinado AB. Sin embargo, el braquistócrono es la cicloide ilustrada. Claro, Newton sabía que la mayor aceleración en la parte más vertical de la curva aceleraría el móvil más que la aceleración constante de un plano inclinado, lo que demostró utilizando el cálculo infinitesimal.

¿Cómo se obtiene la cicloide?
Se deja rodar una circunferencia sobre una superficie plana y se observa la trayectoria que describe un punto cualquiera de la misma.

En otras palabras, si se marca el punto más bajo de una circunferencia que descansa sobre una línea horizontal, y se mueve la circunferencia, haciéndola rodar (sin fricción ni rozamiento), el punto marcado en ella se desplazará hacia arriba, alcanzará una altura máxima –igual al diámetro de dicha circunferencia–, y comenzará a descender hasta tocar de nuevo la línea horizontal, en un lugar situado a una distancia del punto original igual a la circunferencia del círculo.

Así, la curva descripta por el punto en cuestión, que se repite tanto como se deje girar la circunferencia, se llama cicloide.

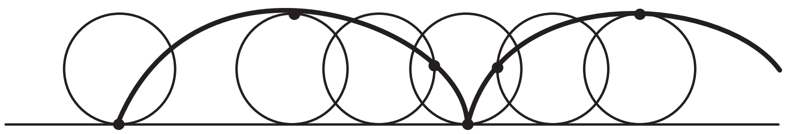


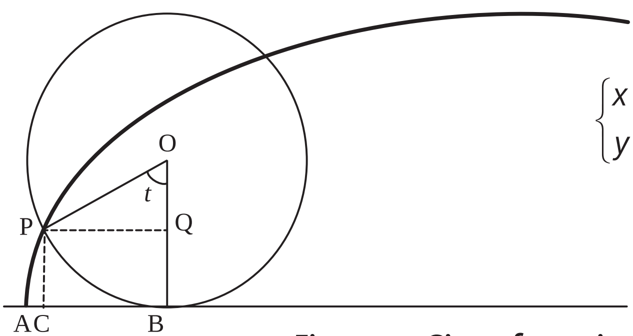
Figura 34. Cicloide

La cicloide tiene varias particularidades, como la de describir una caída libre gravitatoria. Además, es una de las pocas curvas que funcionan de la misma manera tanto en la mecánica newtoniana como en la relatividad general, en términos de su tiempo propio de caída libre.

La cicloide es una curva tan particular, que fue estudiada por todos los matemáticos importantes, en todas las épocas. Provocó tantas querellas, guerras, peleas y reyertas entre ellos, que se la conoce como la "Helena" de los geómetras (haciendo alusión a Helena de Troya, cuyo rapto originó la guerra en que fuera utilizado el famoso caballo).

Si la circunferencia generatriz de la cicloide tiene radio r, Isaac Newton dedujo las ecuaciones paramétricas de la misma. De hecho, su solución a este problema se considera el primer resultado exitoso de su "método de fluxiones", como él llamaba al cálculo diferencial e integral.

Las ecuaciones son:



$$\begin{cases} x = r\ (t - \operatorname{sen} t) \\ y = r\ (1 - \cos t) \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Figura 35. Circunferencia generatriz

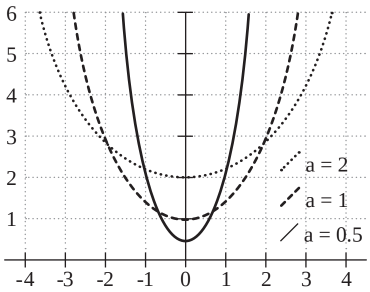


Figura 36. Catenaria

La **catenaria**. Curva formada por una *cadena* (de ahí su nombre) que cuelga libremente sujeta en sus dos extremos, o un cable sostenido por dos postes. Su ecuación es:

$y = \frac{a}{2}.\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ y se la puede relacionar con las funciones hiperbólicas (¿cuál de ellas?).

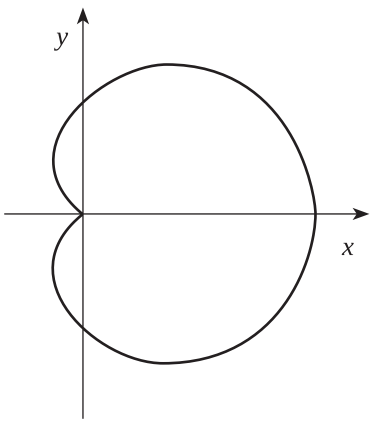


Figura 37. Cardioide

La **cardioide**. Esta curva, de forma similar al contorno de un corazón (de ahí su nombre), es descripta por un punto de una circunferencia rodante que gira exteriormente, sin deslizamiento, sobre otra circunferencia fija.

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = a.\cos t.(1+\cos t) \\ y = a.\operatorname{sen} t.(1+\cos t) \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

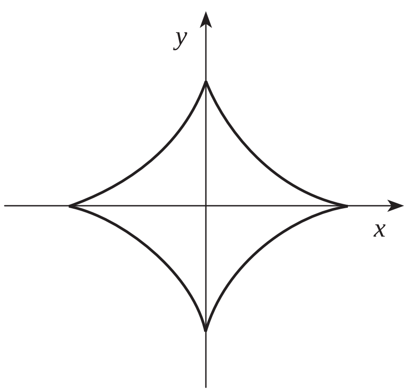


Figura 38. Astroide

La **astroide**. Esta curva es descripta por un punto de una circunferencia rodante que gira interiormente, sin deslizamiento, sobre otra circunferencia fija.

Ecuaciones:

cartesiana $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (a > 0)$

paramétricas:

$$\begin{cases} x = a.\cos^3 t \\ y = a.\operatorname{sen}^3 t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

14. EJERCICIOS RESUELTOS

A esta altura el lector debe estar en condiciones de poder encarar la resolución de estos ejercicios sin ejemplos previos. No obstante, si considera que no es así, la sugerencia es que revise los conceptos teóricos y los ejemplos resueltos previamente.

Ejercicio 22. Dadas las siguientes funciones, determine el dominio y la imagen de las mismas, analice si es factible la obtención de $f \circ g$ y de $g \circ f$. Caso contrario, indique qué restricciones se requieren y luego hállelas con sus respectivos dominios e imágenes.

a) $f(x) = \sqrt{x+3}$ $g(x) = (x-4)^2$

b) $f(x) = \log(x^2 - 1)$ $g(x) = \sqrt{3-x}$

Ejercicio 23. Dadas las funciones hiperbólicas $f(x) = senhx$, $g(x) = cosh\ x$ y $h(x) = tghx$

a) Pruebe que $cosh^2 x - senh^2 x = 1$

b) Escriba las funciones inversas $f^{-1}(x) = arg\ senx;$ $g^{-1}(x) = arg\ cos\ hx;$ $h^{-1}(x) = arg\ tghx$ como funciones logarítmicas.

Ejercicio 24. Obtenga una expresión paramétrica de las siguientes funciones:

a) $y = x^2$ b) $x^2 - y^2 = 4$ c) $9x^2 + 4y^2 = 36$

Ejercicio 25. Halle, si es posible, la expresión cartesiana de las funciones definidas en forma paramétrica:

a) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = bsent \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = asen^3 t \end{cases}$ en todos los casos $a, b \in R^+$

¿En qué intervalo define el parámetro *t*? ¿Y si duplica su longitud, qué cambio observa?

Solución

1. a) $f(x) = \sqrt{x+3}$ $g(x) = (x-4)^2$

Sugerencia: si no recuerda cómo hallar dominio e imagen, repáselo previamente.

Para $f:\ x+3\geq 0 \Rightarrow x\geq -3 \Rightarrow D_f=[-3;+\infty)$. Además por tratarse de una raíz cuadrada $I_f = \boldsymbol{R}_0^+$

Para g: $D_g = \boldsymbol{R}$ ya que no presenta operaciones con dificultades, y como está todo elevado al cuadrado $I_g = \boldsymbol{R}_0^+$.

Para hallar $f\circ g:$ primero se aplica la función g y luego la f, por tanto, veamos la $I_g = \boldsymbol{R}_0^+$ y el $D_f=[-3;+\infty)$; no son iguales, pero la primera está incluida en la segunda. La intersección de las mismas $I_g \cap D_f = \boldsymbol{R}_0^+$ el conjunto de las preimágenes de esta intersección a través de g, será el dominio de la compuesta, por tanto, $D_{f\circ g} = D_g = \boldsymbol{R}$.

Para determinar la imagen de $f\circ g$, deberemos encontrar el conjunto de las imágenes de la citada intersección, a través de f. Trabajemos de la siguiente manera: tomamos $f(x)=\sqrt{x+3}=y$ con $x\in I_g\cap D_f = \boldsymbol{R}_0^+$ de donde, si despejamos x nos queda $x+3=y^2 \Rightarrow x=y^2-3\geq 0 \Rightarrow y^2\geq 3 \Rightarrow |y|\geq\sqrt{3} \Rightarrow y\geq\sqrt{3} \vee y\leq -\sqrt{3}$ pero estos deben pertenecer al conjunto imagen de f, como $I_f = \boldsymbol{R}_0^+$, descartamos los que no están, nos queda por tanto $I_{f\circ g}=\left[\sqrt{3};+\infty\right)$. Una vez hallados dominio e imagen de la compuesta, diremos que $f\circ g(x)=f[g(x)]=\sqrt{g^2(x)+3}=\sqrt{(x-4)^2+3}$

Para hallar $g\circ f:$ primero se aplica la función f y luego la g, por tanto, veamos la $I_f = \boldsymbol{R}_0^+$ y el $D_g = \boldsymbol{R}$ como $\boldsymbol{R}_0^+ \subset \boldsymbol{R}$ la intersección es $I_f\cap D_g = \boldsymbol{R}_0^+$ el conjunto de las preimágenes de esta intersección a través de f será el dominio de la compuesta, por tanto, $D_{g\circ f}=D_f=[-3;+\infty)$. Para determinar la imagen, tomemos la segunda función aplicada $g(x)=(x-4)^2=y$, despejemos x y tendremos:

$$|x-4|=\sqrt{y} \Rightarrow x=\begin{cases}\sqrt{y}+4 & \text{si } x\geq 4\\ -\sqrt{y}+4 & \text{si } x<4\end{cases}$$ y como $x\in I_f\cap D_g = \boldsymbol{R}_0^+$

analicemos cada rama:

$\sqrt{y}+4\geq 4 \wedge \sqrt{y}+4\geq 0 \Rightarrow \sqrt{y}+4\geq 4 \Rightarrow y\geq 0$, para la otra rama tenemos $0 \le -\sqrt{y}+4 \le 4 \Rightarrow -4 \le -\sqrt{y} \le 0 \Rightarrow 0 \le \sqrt{y} \le 4 \Rightarrow 0 \le y \le 16$,

así la imagen de la compuesta será la unión de los conjuntos imagen

obtenidos para cada rama, de modo que tenemos $I_{g\circ f} = \boldsymbol{R}_0^+$ y la

compuesta es $g \circ f(x) = g[f(x)] = (f(x)-4)^2 = (\sqrt{x+3}-4)^2$

b) $f(x) = \log(x^2-1) \qquad g(x) = \sqrt{3-x}$

Para f: $x^2-1>0 \Rightarrow x^2>1 \Rightarrow |x|>1 \Rightarrow x>1 \vee x<-1 \Rightarrow D_f = (-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.
Para el cálculo de la imagen podemos proceder analíticamente despejando la x así $f(x) = \log(x^2-1) = y \Rightarrow x^2-1 = 10^y \Rightarrow x^2 = 1+10^y \Rightarrow |x| = \sqrt{1+10^y}$
y la raíz cuadrada existe para todo valor de y ya que $10^y > 0 \quad \forall y \in \boldsymbol{R}$
$\Rightarrow 1+10^y > 1 \Rightarrow I_f = \boldsymbol{R}$

Para g: $3-x \ge 0 \Rightarrow x \le 3 \Rightarrow D_g = (-\infty;3]$. Como es una raíz cuadrada, la imagen será $I_g = \boldsymbol{R}_0^+$

Para hallar $f \circ g$: primero se aplica la función g y luego la f, por tanto, veamos qué ocurre con $I_g \cap D_f = (1;+\infty)$, el dominio de esta función compuesta será el conjunto de preimágenes de esta intersección, a través de g. De donde $g(x) = \sqrt{3-x} > 1 \Rightarrow 3-x > 1 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow D_{f\circ g} = (-\infty;2)$
(Note que debe estar incluido en el dominio de g).

Para determinar la imagen de esta función compuesta debemos encontrar el conjunto de imágenes de la ya calculada intersección a través de f.
Como $f(x) = \log(x^2-1) = y \Rightarrow x^2-1 = 10^y \Rightarrow x^2 = 1+10^y \Rightarrow |x| = \sqrt{1+10^y}$
como $x > 1$ en dicha intersección nos queda
$\sqrt{1+10^y} > 1 \Rightarrow 1+10^y > 1 \Rightarrow 10^y > 0 \Rightarrow y \in \boldsymbol{R}$, luego $I_{f\circ g} = \boldsymbol{R}$. Tendremos entonces que $f \circ g(x) = f[g(x)] = \log(g^2(x)-1) = \log(3-x-1) = \log(2-x)$

9. Nota: *¿Por qué* $(\sqrt{3-x})^2$ *se escribió como 3 – x y no como* $|3-x|$ *?*

Para hallar $g \circ f$ *:* primero se aplica la función *f* y luego la *g*, por tanto, veamos qué ocurre con $I_f \cap D_g = D_g = \left(-\infty; 3\right]$, el dominio de esta función compuesta será el conjunto de preimágenes de esta intersección, a través de *g*. De donde $f(x) = \log(x^2 - 1) \leq 3 \Rightarrow x^2 - 1 \leq 10^3 \Rightarrow x^2 \leq 1001 \Rightarrow |x| \leq \sqrt{1001}$ pero $x \in D_f \Rightarrow |x| \leq \sqrt{1001} \wedge |x| > 1 \Rightarrow 1 < |x| < \sqrt{1001}$ de donde el dominio buscado es $D_{g \circ f} = \left(-\sqrt{1001}; -1\right) \cup \left(1; \sqrt{1001}\right)$

Para el conjunto imagen de la función compuesta tomamos la función $g(x) = \sqrt{3 - x} = y \Rightarrow 3 - x = y^2 \Rightarrow x = 3 - y^2$ con $x \in \left(-\infty; 3\right] \Rightarrow 3 - y^2 \leq 3 \Rightarrow y^2 \geq 0 \Rightarrow y \in \boldsymbol{R}$ como debe estar incluido en el conjunto imagen de *g* que son todos los no negativos entonces $I_{g \circ f} = \boldsymbol{R}_0^+$.

Ahora sí busquemos la expresión que caracteriza esta composición:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{3 - \log(x^2 - 1)}$$

2. a) Pruebe que $cosh^2 x - senh^2 x = 1$

Como $cosh\, x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ y $sen\text{h}\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ tendremos que

$cosh^2 x - senh^2 x = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \dfrac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{4}$ en el numerador hay una diferencia de cuadrados, si la desarrollamos nos queda

$$cosh^2 x - senh^2 x = \frac{(e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x})}{4} = \frac{2e^x . 2e^{-x}}{4} = 1$$

b) Para el *argsenhx*:

Sea $y = argsenhx \Rightarrow x = senhy = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2} \Rightarrow 2x = e^y - e^{-y} = e^y - \dfrac{1}{e^y} = \dfrac{e^{2y} - 1}{e^y} \Rightarrow$

$2xe^y = e^{2y} - 1 \Rightarrow (e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0$ ésta es una cuadrática, si completamos cuadrados nos queda:

$(e^y)^2 - 2xe^y + x^2 - x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (e^y - x)^2 = 1 + x^2$ que se puede pensar así: $\left|e \;\; - x\right| = \sqrt{x \;\; +}$ de donde obtenemos dos posibilidades; por un lado, tenemos $e^y - x = -\sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow e^y = x - \sqrt{x^2 + 1}$ si $e^y - x < 0$

pero esta opción nos conduce a un absurdo, ya que $e^y > 0$, en tanto que $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} \Rightarrow -\sqrt{x^2+1} < -\sqrt{x^2} \Rightarrow x-\sqrt{x^2+1} < x-\sqrt{x^2} = 0$ con lo que el segundo miembro es negativo. Por ello esta opción es descartada.

La segunda posibilidad es $e^y - x = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow e^y = x+\sqrt{x^2+1}$ si $e^y - x \geq 0$ como debemos despejar *y*, aplicamos logaritmos miembro a miembro y nos queda $y = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) = arg\, senhx = f^{-1}(x)$

Para el *argcoshx*:

Con criterio análogo deberemos proceder para $g^{-1}(x) = argcosh\, x = y$ $\Rightarrow x = cosh\, y$ pero deberemos tener cuidado ya que el *cosh* no es una función inyectiva. Se requerirá definir $g : \boldsymbol{R}_0^+ \to [1;+\infty)$, de donde $g^{-1} : [1;+\infty) \to \boldsymbol{R}_0^+$; luego operamos como lo hicimos en el caso anterior, así:

$$\Rightarrow x = coshy = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \Rightarrow 2x = e^y + e^{-y} = e^y + \frac{1}{e^y} = \frac{e^{2y}+1}{e^y} \Rightarrow$$

$2xe^y = e^{2y}+1 \Rightarrow (e^y)^2 - 2xe^y + 1 = 0$. Ésta es una cuadrática, si completamos cuadrados nos queda: $(e^y)^2 - 2xe^y + x^2 - x^2 + 1 = 0 \Rightarrow (e^y - x)^2 = x^2 - 1$ que se puede pensar así $\left|e^y - x\right| = \sqrt{x^2-1}$ y de aquí, discutiendo las opciones que se presentan, tendremos luego de aplicar logaritmos que $y = \ln(x+\sqrt{x^2-1}) = argcosh\, x = g^{-1}(x)$

Para el *argtghx*:

Partimos de $y = argtgh\, x \Rightarrow x = tghy = \frac{senhy}{\cosh y} = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$, operando nos queda $x = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} = \frac{(e^{2y}+1)-2}{e^{2y}+1} = 1 - \frac{2}{e^{2y}+1}$

Intentemos ahora despejar *y*, de la siguiente manera:

$$\frac{2}{e^{2y}+1} = 1-x \Rightarrow e^{2y}+1 = \frac{2}{1-x} \quad \text{si} \quad x \neq 1$$

$\Rightarrow e^{2y} = -1 + \frac{2}{1-x} = \frac{-1+x+2}{1-x} = \frac{1+x}{1-x}$ pero como el primer miembro (la exponencial) es positivo, este cociente debe serlo. Recordar que para

que un cociente resulte positivo, numerador y denominador deben ser de igual signo, por lo que si hacemos ese análisis obtendremos $-1< x < 1$. Y como debemos despejar *y*, aplicamos logaritmos a la igualdad anterior y nos queda: $2y = \ln\frac{1+x}{1-x} \Rightarrow y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = argtgh\ x = h^{-1}(x)$ si $|x|<1$

3. Obtenga una expresión paramétrica de las siguientes funciones:

a) $y = x^2$ b) $x^2 - y^2 = 4$ c) $9x^2 + 4y^2 = 36$

Solución

a) En este caso es sencillo, podemos elegir *x* como el parámetro, así nos quedaría $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$ $t \in \boldsymbol{R}$

(Cabe destacar que no es la única manera, piense alguna otra expresión simple).

b) ¿Recuerda el lector alguna identidad en la que aparezca la resta de cuadrados de dos números?… Piense, busque en las últimas funciones tratadas… ¿En trigonometría circular? No, allí lo que vimos fue que $sen^2 x + \cos^2 x = 1$, ésta no nos sirve. ¿Y en trigonometría hiperbólica?… ¡Ah! Ahora sí, demostramos en:

2-a) que $cosh^2\ \alpha - senh^2\alpha = 1$. La pregunta es entonces, ¿cómo hacer para

que una resta de cuadrados tenga por resultado 4? Veamos, si elegimos $\begin{cases} x = 2\,cosh\ t \\ y = 2senht \end{cases}$ $t \in \boldsymbol{R}$ al elevar al cuadrado y restar, se podrá sacar factor común el 4, que quedará multiplicando la identidad en cuestión.

c) $9x^2 + 4y^2 = 36$ dividiendo por 36 miembro a miembro, nos queda

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ Ahora debemos buscar una suma de cuadrados en nuestro "archivo" de identidades. Así elegimos $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3sent \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$

Verifique Ud. que cumple la igualdad.

4. Halle, si es posible, la expresión cartesiana de las funciones definidas en forma paramétrica:

a) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = bsent \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = asen^3 t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$

en todos los casos $a, b \in \boldsymbol{R}^+$

Solución

a) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = bsent \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = a^2\cos^2 t \\ y^2 = b^2 sen^2 t \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \; t \in [0, 2\pi]$

b) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = asen^3 t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$

La idea es despejar el seno y el coseno, luego elevarlos al cuadrado y sumarlos para usar la identidad pitagórica.

Nos queda así $\cos^3 t = \dfrac{x}{a} \Rightarrow \cos t = \left(\dfrac{x}{a}\right)^{1/3} \Rightarrow \cos^2 t = \left(\dfrac{x}{a}\right)^{2/3}$ de igual manera procedemos con y, y tendremos $sen^2 t = \left(\dfrac{y}{a}\right)^{2/3}$ de modo que al sumar nos quedará $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

CAPÍTULO 2

LÍMITE DE FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

1. INTRODUCCIÓN

1.1 Un poco de historia (s. XVI – XVII)

Los descubrimientos importantes del pensamiento humano no aparecen por "arte de magia", ni surgen "porque sí". Newton (1642-1727) y su manzana es tan sólo una leyenda. Y el cálculo infinitesimal, inventado por Newton y Leibniz (1646-1716), es heredero de muchos matemáticos y pensadores. Las curvas han sido "hijas predilectas" de la geometría desde los tiempos de la Grecia clásica. Asociadas al movimiento y a los fenómenos físicos, conocer sus propiedades y disponer de métodos que permitieran calcular, por ejemplo, su longitud, fueron problemas que perduraron durante siglos. Eudoxo (408-355 a C.) y Arquímedes (287-212 a C.) son los pioneros en tratar con partes muy pequeñas, de cuya unión surgiría el total, ya se tratara de un área o de una longitud.

Por otro lado, desde mediados del siglo XVII, comenzaron a surgir ideas que enfocarían de otro modo los problemas relativos a las curvas: la manera analítica, a diferencia de la geométrica seguida hasta entonces.

René Descartes (1596-1650) asoció a cada curva una expresión algebraica, una ecuación o fórmula que la representa formalizando de algún modo las curvas. Pierre Fermat (1601-1665), otro de los grandes de la época, encontró un método para averiguar en qué puntos una curva se hace máxima o mínima. Y el inglés John Wallis (1616-1703) consiguió probar que los dos grandes problemas relacionados con las curvas –determinar sus tangentes y calcular el área que encierran– están relacionados. Wallis, brillantemente, probó que para calcular un área basta conocer las tangentes de otra curva.

¿Por qué tanto esfuerzo sobre los mismos conceptos? En esta época, las curvas se interpretan no sólo como entidades geométricas sino como la trayectoria de un móvil, como la expresión del movimiento de un objeto. Y ello choca con conceptos muy profundos, porque el movimiento es continuo, sin saltos, y el tiempo transcurre, también, en forma continua. Y al tratar con cantidades tan pequeñas como se quieran obliga a pensar que no hay un instante posterior a uno dado, ni hay un punto siguiente a otro, todo un desafío para la imaginación.

Aunque se estudien las curvas, lo que realmente se suele utilizar son las rectas. La *tangencialidad* es un concepto que de algún modo todos entendemos. Se asocia a aquello que mantiene un contacto superficial, se refiere a lo que se toca lo menos posible. Y así es en Matemáticas. La tangente a una curva es la recta que más se parece a la curva ***pegándose*** a ella, de tal modo que para conocer la curva basta con estudiar sus tangentes, y de paso se podrá calcular las áreas que encierran.

Cuando una hormiga se traslada a lo largo de la cuerda (ver gráfico) pasa por todos sus puntos. Su movimiento describirá esa curva y, como en cada instante estará en un punto de ella, se dice que su posición es función del tiempo. Si se quisiera averiguar la velocidad que llevaba en un instante determinado, se podría proceder calculando la velocidad media que ha llevado entre dos puntos y hacer que esos dos puntos estén muy cerca. Esto es lo que hicieron de modos diferentes Newton y Leibniz. Encontraron una forma de cálculo casi automático, de modo que, si se conoce la ecuación de una curva, se puede averiguar con reglas que definieron cuál es su tangente en cualquiera de sus puntos –cuál es la velocidad de la hormiga–. Pero esto fue sólo el comienzo.

Si se observa con atención, lo que se conoce de la realidad de un fenómeno son sus cambios y a partir de ellos se intenta conocer el propio fenómeno. Por ello, lo que se conoce de una curva es cómo cambia. El cálculo infinitesimal permite averiguar todo de la curva, o sea, del fenómeno.

El nuevo cálculo infinitesimal permitió resolver problemas afrontados desde hacía mucho tiempo. Para que el lector tenga una idea de lo que preocupaba por entonces a los matemáticos basta un ejemplo: ***encontrar la curva que adopta una cadena al ser colgada por sus extremos***. Nadie sabía cuál era. Se había aventurado que era un arco de círculo. Leibniz demostró que era una ***catenaria***, curva que ya le fue presentada al lector con anterioridad en curvas parametrizadas y que se relaciona con las exponenciales.

La palabra *infinitesimal* se refiere a cantidades infinitamente pequeñas, pero tales que su agregado o unión compone una totalidad. Por ejemplo, Leibniz imaginaba una curva como formada por infinitos trozos rectos infinitamente pequeños e indivisibles. La unión de ellos formaría la curva.

2. ¿QUÉ ES EL CÁLCULO?

El cálculo es una rama de las Matemáticas. En gran parte fue creado por Newton y Leibniz aunque, como se mencionó, algunas de las ideas ya habían sido usadas por Fermat y Arquímedes. El cálculo está dividido en dos partes estrechamente relacionadas. Una parte se denomina **cálculo diferencial** y la otra, **cálculo integral**.

El cálculo integral está vinculado con los problemas de área y de volumen. ¿Cómo determinar el área de un círculo o el volumen de una esfera? Otra forma de plantear estas cuestiones podría ser: ¿cuánta pintura es necesaria para colorear un círculo? ¿Qué cantidad de agua se necesita para llenar un tanque esférico? El cálculo integral explica cómo responder a estas preguntas. Más adelante se desarrollarán las herramientas indispensables a tal efecto.

El cálculo diferencial responde a las siguientes cuestiones: una persona viaja en un automóvil y ella es capaz de conocer su posición en cualquier instante. En otras palabras, a las 10 de la mañana está en el garage, a las 10.05 está fuera del garage, a las 10.10 está en la calle frente a su casa, y así siguiendo… Al final del viaje, el cuentakilómetros mostró la distancia recorrida por el automóvil. Del conocimiento de la posición en cualquier instante del viaje, ¿puede el viajero reconstruir lo que el velocímetro mostró en cada instante? La respuesta es afirmativa, el cálculo diferencial provee un método para hacerlo. Pero para ello se requiere del concepto de límite. En muchas ocasiones algunas frases nos llevan de manera intuitiva a su definición, tales como: "*Se aproxima a un cierto número*", "*x tiende al valor <u>a</u>*" o "*f(x) se hace arbitrariamente grande*". Desde Leibnitz y Newton en el siglo XVII pasando por Bernoulli, Euler y Gauss en el inicio del siglo XVIII, se usaba la misma idea; pero a medida que el tiempo transcurría la definición intuitiva de límite requería librarse de su origen, esos *objetos móviles* y simples gráficas. Fue Weierstrass, de 1841 a 1856, quien desarrolló un método para definir los límites sin referirse a ello. Desde entonces este método ha sido usado por los matemáticos. Vamos a familiarizarnos con dicho concepto:

2.1. Límite finito de una función en un punto

Antes de establecer la definición formal del límite de una función en general, es conveniente observar qué sucede con las imágenes de una función particular cuando la variable independiente *tiende* (se aproxima) a un valor determinado.

EJEMPLO[1]:

Sea la función definida por $f(x) = x^2 - 1$

En la tabla 2 se muestran algunos valores para la variable independiente *x*, en el entorno reducido de 2, y se calculan los valores correspondientes de las imágenes de la función $f(x)$:

x	***f (x)***
1.9	2.61
1.99	2.9601
1.999	2.996001
1.9999	2.99960001
2.0001	3.00040001
2.001	3.004001
2.01	3.0401
2.1	3.41

Tabla 2. **Valores para** $f(x)$ = *x2-1*

[1] Recuerde que todo ejemplo debe ser analizado cuidadosamente aplicando los conceptos teóricos previos.

Cuando x se aproxima a 2, tanto por valores menores como por valores mayores a 2, las imágenes $f(x)$ se aproximan, ***tienden***, cada vez más a 3; y cuanto más cerca está x de 2 o, lo que es lo mismo, cuando la diferencia en valor absoluto entre x y 2 es más pequeña, asimismo la diferencia en valor absoluto entre $f(x)$ y 3 se hace cada vez más pequeña (estas diferencias se muestran en la tabla 3). O sea, las imágenes de la función se acercan a un valor constante, 3, cuando la variable independiente se aproxima también a un valor constante.
La tabla anterior es equivalente a la siguiente:

$\lvert x - 2\rvert$	$\lvert f(x) - 3\rvert$
|1.9-2| = 0.1	|2.61-3| = 0.39
|1.99-2| = 0.01	|2.9601-3| = 0.0399
|1.999-2| = 0.001	|2.996001-3| = 0.003999
|1.9999-2| = 0.0001	|2.99960001-3| = 0.00039999
|2.0001-2| = 0.0001	|3.00040001-3| = 0.00040001
|2.001-2| = 0.001	|3.004001-3| = 0.004001
|2.01-2| = 0.01	|3.0401-3| = 0.0401
|2.1-2| = 0.1	|3.41-3| = 0.41

***Tabla 3*. Noción intuitiva de límite**

De lo que se deduce, intuitivamente, que el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a 2, es 3, que en adelante expresaremos mediante $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$. Podríamos preguntarnos cuál puede ser el interés de este tipo de análisis si aparece como bastante obvio que el valor al que tiende la función es precisamente el de su imagen. Un ejemplo muy simple servirá para poner en evidencia la importancia del concepto de límite para encarar el estudio de una función. Sean las funciones

$$u(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}; \quad \forall x \neq 3; \quad v(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}; & x \neq 3 \\ 4; & x = 3 \end{cases}; \quad w(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}; & x \neq 3 \\ 6; & x = 3 \end{cases}$$

Invitamos al lector a confeccionar una tabla similar a la del ejemplo anterior para cada una de estas funciones. Hecho esto, podrá deducir intuitivamente que cuando la variable independiente toma valores *que tienden* a 3, las funciones tienen como límite 6, independientemente de la existencia o no de las imágenes y sus respectivos valores.

En general, se considera una función $f(x)$ definida en el entorno reducido del punto $x = a$. Se dice que el límite de la función f cuando x tiende al punto a es el valor l y se escribe: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ cuando al acercarse el valor de x al punto a, los valores de las imágenes de la función $f(x)$ se aproximan a l de tal forma que la distancia $\lvert f(x) - l \rvert$ llega a hacerse tan pequeña como se desee.

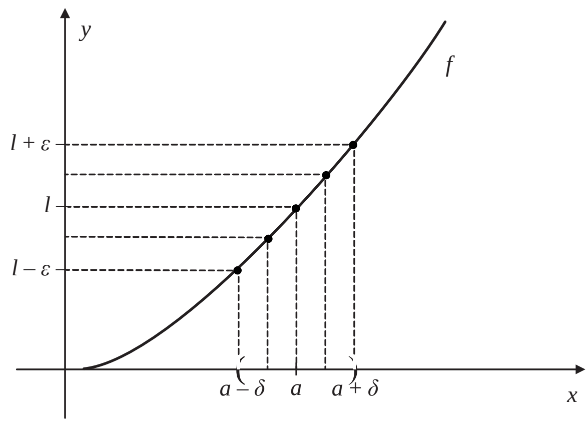


Figura 39. **Límite de una función en un punto con imagen**

Se observa que el concepto de límite no depende del valor de la función en dicho punto, ya que incluso puede que no esté definida. Sin embargo, es necesario que la función esté definida en un entorno reducido del punto.

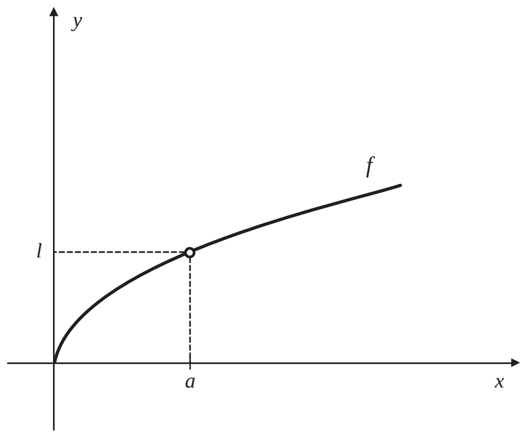


Figura 40. **Límite de una función en un punto sin imagen**

Formalmente, **Weierstrass (1815-1897)** estableció la siguiente:

1. Definición

Se dice que una función f tiene límite l cuando x tiende a a, (estando f definida al menos en un entorno reducido de a); si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x)-l| < \varepsilon$.

En símbolos:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \delta > 0 \quad \text{tal} \quad \text{que} \quad \forall x \in D_f : \left[0 < |x-a| < \delta \quad \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon \right]$$

Es decir, que $\lim_{x\to a} f(x) = l$ si y sólo si cualquiera sea el entorno de l, E(l), que se elija, existe un entorno de a, E*(a), que no contiene a a tal que f (E*(a)) $\subset$ E(l)

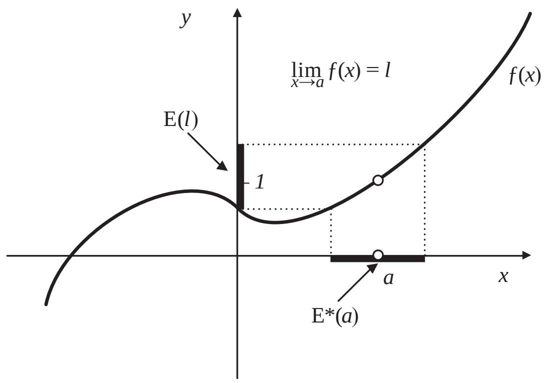


Figura 41. **Definición de límite según Weierstrass**

2.2. Límites laterales

Existen funciones que en los reales no están definidas a la izquierda o a la derecha de un número determinado, por lo que el límite de la función cuando x tiende a dicho número carece de sentido.

EJEMPLO

$f(x) = \sqrt{x}$ no está definida para valores menores a cero, por lo que $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}$ no tiene sentido; no obstante, se pueden tomar valores suficientemente cercanos a cero pero mayores que él. En este caso x se aproxima a cero por la derecha.

2. *Definiciones*

Se dice que l^+ es el ***límite lateral derecho*** de la función $f(x)$ cuando x tiende a a por la derecha, con $x > a$ (se acerca a a desde la derecha hacia la izquierda) $\lim_{x\to a^+} f(x) = l^+$, si al acercarse por la derecha los valores de x hacia a, las imágenes $f(x)$ están próximos a l^+, de forma que, cuando $x–a$ es muy pequeño y positivo resulta que $| f(x)–l^+ |$ también es muy pequeño.

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = l^+ \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \ , \ \exists\delta > 0 \ \text{tal que si} \ a < x < a+\delta \Rightarrow \left| f(x) - l^+ \right| < \varepsilon$$

Análogamente cuando nos acercamos por izquierda

Se dice que l^- es el ***límite lateral izquierdo*** de la función $f(x)$ cuando x se acerca por la izquierda a a es decir, $x < a$, (se acerca a a desde la izquierda hacia la derecha), $\lim_{x\to a^-} f(x) = l^-$ si al acercarse por la izquierda los valores de x hacia a, los valores que toman las imágenes $f(x)$ están próximas a l^-, de forma que, cuando $| x – a |$ es muy pequeño, resulta que $| f(x) – l^- |$ también es muy pequeño.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = l^- \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \ , \ \exists\delta > 0 \ \text{tal que si} \ a-\delta < x < a \Rightarrow \left| f(x) - l^- \right| < \varepsilon$$

2.3. Condición necesaria y suficiente para la existencia del límite de una función en un punto.

Sea $f(x)$ una función definida en un entorno reducido de a. Entonces,

$$\text{Existe } \lim_{x\to a} f(x)=l \iff \begin{cases} \exists \lim\limits_{x\to a^-} f(x) \\ \exists \lim\limits_{x\to a^+} f(x) \end{cases} \text{ y coinciden}$$

3. PROPIEDADES DE LÍMITES

Para facilitar la obtención del límite de una función sin necesidad de tener que recurrir cada vez para su verificación a la definición epsilon-delta de Weierstrass, se establecen las siguientes propiedades:

1. Si f tiene límite en a, entonces dicho límite es único.
2. Si $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ entonces
   $\forall x\in E^*(a):\lim\limits_{x\to a} f(x)=l \iff f(x)=l+\alpha(x)$
3. Si k es una constante y a un número cualquiera, entonces $\lim\limits_{x\to a} k=k$
4. Para cualquier número real dado a, se cumple $\lim\limits_{x\to a} x=a$
5. Si m y b son dos constantes cualesquiera, entonces $\lim\limits_{x\to a}(mx+b)=ma+b$
6. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=M$, L y M reales, entonces
   a. $\lim\limits_{x\to a} k.f(x)=k.L \quad k\in \boldsymbol{R}$
   b. $\lim\limits_{x\to a}\left[\alpha.f(x)\pm\beta.g(x)\right]=\alpha.L\pm\beta.M \quad \alpha,\beta\in\boldsymbol{R}$
   c. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x).g(x)\right]=L.M$
   d. $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{L}{M}$ si $M\neq 0$ y $g(x)\neq 0 \quad \forall x\in E^*(a,\delta)$
   e. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}=L^M\in\boldsymbol{R}$, si L toma valores positivos

7. Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y n es un número entero positivo, entonces

   $\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n = L^n$

8. Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y n es un número entero positivo, entonces

   $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$

   Observe que la propiedad es válida solamente cuando $\sqrt[n]{L}$ es un número real.

9. Si $f(x)$ es una función polinómica, es decir, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ y a es un número real, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\sum_{k=0}^{n} c_k x^k = \sum_{k=0}^{n} c_k a^k = f(a)$

10. Si $h(x)$ es una función racional, es decir, $h(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ siendo P y Q polinomios, entonces $\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$ si $Q(a) \neq 0$

Observación: como se vio con anterioridad, calcular el límite de una función polinómica en un punto a es una tarea sencilla: basta evaluarla en el punto a, ya que el valor que resulta es precisamente el límite buscado. Es evidente que ésta es la forma más simple en que el límite de una función en un punto puede calcularse. Para distinguir cuándo esta propiedad es válida, se considera la siguiente:

3. *Definición*

Una función $f(x)$ se dice que es continua en un punto a si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Obsérvese que esta última condición presupone que la función $f(x)$ está definida en un entorno del punto a y que existen ambos límites laterales y son iguales, pues sólo en este caso tienen sentido ambos miembros de la igualdad anterior. En realidad, el concepto de función continua tiene una trascendencia tal en el Análisis Matemático que se dedicará todo un capítulo a su estudio. Aquí sólo se señalará que *toda función elemental es continua en todo punto que pertenezca a su conjunto natural de definición*. Así, por ejemplo:

$\lim_{x\to a} sen\, x = sen\, a$ $\quad\lim_{x\to a} \cos x = \cos a$ $\quad\lim_{x\to a} e^x = e^a$

$\lim_{x\to a} \ln x = \ln a \quad a > 0$ $\quad\lim_{x\to a} sh\, x = sh\, a$ $\quad\lim_{x\to a} ch\, x = ch\, a$

La información que nos brinda la continuidad de una función en un punto acerca de las características de su gráfica en ese punto tiene mucha importancia en el estudio de funciones. Utilizando la propiedad 2, se invita al lector a mostrar que en el entorno de un punto de continuidad muy pequeñas variaciones en los valores de la variable independiente sólo pueden originar cambios muy pequeños en los valores de la función, es decir, la gráfica no presentará en ese punto saltos bruscos ni interrupciones.
Ahora realice un alto en la lectura e intente mostrar que la **función de Dirichlet (1805-1859)** definida por $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\in \boldsymbol{Q} \\ 1 & \text{si } x\notin \boldsymbol{Q} \end{cases}$ no tiene límite en ningún punto.
Nótese que no es fácil calcular los valores de dicha función porque no siempre se conoce si un número real dado es racional o irracional. Por ejemplo, ¿es $\pi + e$ racional? Pese a ello la función está correctamente definida. Esboce el gráfico de *f*.

11. Si $\lim_{x\to a} f(x)=L$, entonces

 $\lim_{x\to a} \log_c f(x)=\log_c L \quad \text{si} \quad f(x)>0 \ \forall x\in E^*(a) \ \text{ y } \ L>0$

12. Se conoce como *teorema de la conservación del signo.*

 Si $f(x)$ una función definida en un entorno reducido de a y $\lim_{x\to a} f(x)=L\neq 0$,

 entonces $\exists \ E^*(a)$ tal que $sg\, f(x)=sg\, L \qquad \forall x\in E^*(a)$

13. Si $f(x)>0$ en un entorno reducido de a y existe $\lim_{x\to a} f(x)$, entonces

 $\lim_{x\to a} f(x)\geq 0$

 ¿Es verdadera la proposición recíproca? Fundamente la respuesta.

14. La identificamos como *cambio de variables.*

 Sea $f(x)$ una función definida en un entorno reducido de a, tal que exista $\lim_{x\to a} f(x)$, y sea $g(t)$ una función definida en un entorno de t_0, tal que $\lim_{t\to t_0} g(t)=a$ y $g(t)\neq a$ para todo t de dicho entorno reducido. Entonces, la función compuesta $f\circ g$ está definida en un entorno reducido de t_0, y

 $\lim_{t\to t_0} (f\circ g)_{(t)} = \lim_{t\to t_0} f[g(t)] = \lim_{x\to a} f(x)$

15. Si $f(x)\leq g(x)$ en un entorno reducido de a, y existen $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$, entonces $\lim_{x\to a} f(x)\leq \lim_{x\to a} g(x)$

16. Se conoce como *teorema de intercalación* o propiedad del *sandwich*

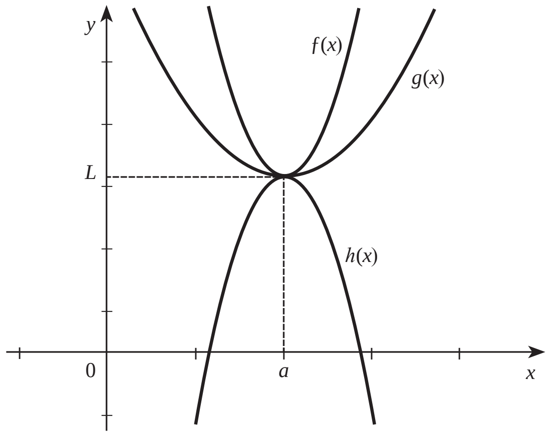


Figura 42. **Teorema de intercalación**

Se supone que las funciones *f, g* y *h* están definidas en algún entorno de $x = a$, excepto quizás en el propio punto $x = a$, y tales que $h(x) \leq g(x) \leq f(x) \quad \forall x \in E^*(a)$

Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, entonces $\lim_{x\to a} g(x) = L$

Desde el punto de vista geométrico, la propiedad es intuitivamente válida. En el gráfico se observa que si

$$h(x) \leq g(x) \leq f(x) \quad \forall x \in E^*(a)$$

entonces el gráfico de *g* está interpuesto entre los gráficos de *f* y *h* en ese entorno. Si *f* y *h* tienen el mismo límite *L* cuando *x* tiende a *a*, evidentemente *g* también tiene límite *L*.

17. Si existe $\lim_{x\to a} f(x)$, entonces la función $f(x)$ es acotada en un entorno reducido de *a*.

18. Límite fundamental trigonométrico

Si $k \in \boldsymbol{R}$; $k \neq 0$, $\lim_{x\to 0} \frac{senkx}{kx} = 1$ (¡Puede intentar probarlo usando trigonometría y el teorema del sandwich!)
El límite fundamental trigonométrico admite una sencilla generalización:
Si $f(x) \neq 0$ en un entorno reducido de *a* y $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to a} \frac{senf(x)}{f(x)} = 1$. Esto se obtiene como una aplicación directa de la propiedad 13 con el cambio de variables $t = f(x)$. A continuación, se muestra la aplicación de esta generalización.

EJEMPLOS

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}3\dfrac{sen3x}{3x}=3.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen3x}{3x}=3\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{sen\,t}{t}=3$ en este último paso se aplicó la propiedad 14 que fundamenta el cambio de variable. Si $t=3x$ cuando $x\to 0\quad t\to 0$

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{x^2}.\frac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{sen^2x}{x^2(1+\cos x)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{senx}{x}\right)^2.\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=1^2.\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

3. Analice la existencia de $\lim\limits_{x\to 0}x^2.\,sen\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Cuando *x* es cercano a cero, la función $g(x)=sen\left(\dfrac{1}{x}\right)$ no tiene límite. A partir del comportamiento del gráfico de *g*, es posible conjeturar que oscila indefinidamente alrededor de *a* = 0 en la siguiente figura:

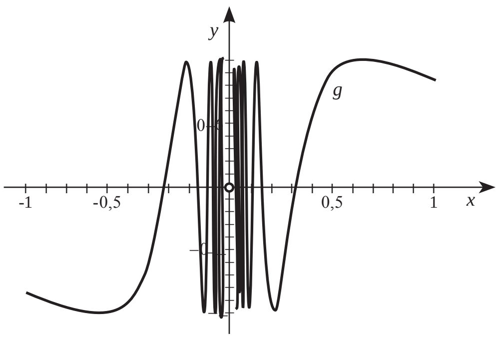


Figura 43. **Función** $sen\left(\frac{1}{x}\right)$ **en** $[-1\ ,1]$

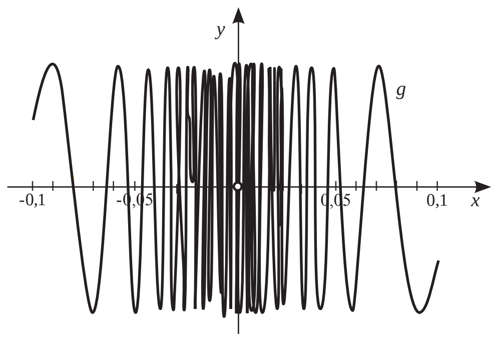


Figura 44. **Función** $sen\left(\frac{1}{x}\right)$ **en** $[-0{,}1\ ,\ 0{,}1]$

Gráficas de la función $sen\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en [-1,1] (Fig. 43) y en $\left[-\dfrac{1}{10},\dfrac{1}{10}\right]$ (Fig. 44).

Esta función carece de límite *l* en *a* = 0, es decir, no es verdad que para todo número $\varepsilon>0$ se pueda hacer $|g(x)-l|<\varepsilon$ eligiendo *x* suficientemente pequeño y $x\neq 0$. Para probar este hecho, bastará encontrar un $\varepsilon>0$ para el cual no pueda garantizarse la validez de la desigualdad $|g(x)-l|<\varepsilon$ (cualquiera sea el *l* propuesto, por ejemplo *l* = 0) por pequeña que se haga $|x|$. En efecto, si se escoge $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$ se verifica lo dicho: es imposible asegurar que resulta $|g(x)|<\dfrac{1}{2}$ por pequeña que sea $|x|$, ya que si B es un intervalo que contenga al cero, existe algún número real de la forma $x=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ que pertenece a dicho intervalo y

$g(x)=1$. Idéntico razonamiento se emplea para probar que g no se aproxima a *ningún* número real l cerca del cero.
Por lo tanto, no es posible aplicar las propiedades básicas enunciadas precedentemente (en especial el límite del producto de funciones). De dicha función sólo se sabe que es acotada entre –1 y 1, es decir,

$$-1 \leq sen\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \qquad \forall x \neq 0$$

Además, $x^2 \geq 0 \qquad \forall x \in \boldsymbol{R}$, por tanto, $-x^2 \leq x^2 . sen\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2 \qquad \forall x \neq 0$

Así, como $\lim\limits_{x\to 0}(-x^2) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, se verifica que $\lim\limits_{x\to 0} x^2 . sen\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ (propiedad del sandwich).

3.1. Límites infinitos

Consideremos la función $f(x) = 1 + \frac{4}{x}$ y analicemos cómo se comportan las imágenes de la misma, cuando $x \to 0$. Construyamos una tabla de valores tomando x en las proximidades de dicho valor.

x	$f(x)$	$\lvert f(x)\rvert$
-0,1	-39	39
-0,01	-399	399
-0.002	-1999	1999
-0,0004	-9999	9999
…..	…..	….
0	$\nexists$	$\nexists$
….	…..	….
0,0002	20001	20001
0,004	1001	1001
0,1	41	41

***Tabla 4*. Límite infinito**

Es posible observar que, independientemente de la existencia de imagen en $x = 0$, a medida que los valores de x tienden a 0, las imágenes, *en módulo*, se hacen cada vez más grandes. Esta idea es simbolizada, en matemática, por el símbolo de ∞. En otras palabras, si x está en el entorno reducido de centro 0 y determinado radio (que se deberá encontrar), las imágenes, en módulo, se hacen tan grandes como uno desee, de modo que si elige que las mismas superen un cierto número A, deberemos encontrar el radio adecuado del entorno para que se cumpla lo pedido. Cuando esto se cumpla, en símbolos se escribe:

$$\lim_{x\to 0}(1+\frac{4}{x}) = \infty$$

Veamos cómo formalizar este nuevo concepto:

4. *Definición*

Sea la función $f(x)$ definida en un entorno reducido de a. Se dice que

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \quad \Leftrightarrow \forall A>0, \exists \delta>0 / \forall x:\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)|>A$$

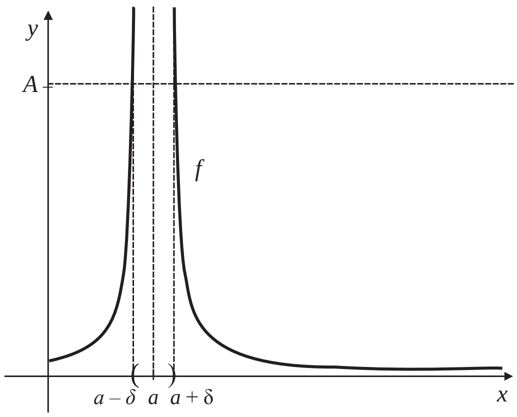


***Figura 45*. Límite infinito**

Pero puede ocurrir que al aproximarse x al punto, las imágenes de la función adopten siempre el mismo signo; en ese caso la definición sufriría una pequeña modificación, la que se justifica a partir de la definición de módulo, ya que $|f(x)|>A \Rightarrow f(x)>A \vee f(x)<-A$. Nos quedarían así:

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty \quad \Leftrightarrow \forall A>0, \exists \delta>0 / \forall x:\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)>A$$

o bien

$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty \quad \Leftrightarrow \forall A>0, \exists \delta>0 / \forall x:\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)<-A$$

Ejemplos: $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty \qquad \lim_{x\to 1}\frac{-x-2}{x(x-1)^2}=-\infty$

3.2. Infinitésimos

5. *Definición*

Se dice que la función f es un infinitésimo en $x=a$, si se verifica $\lim_{x\to a} f(x)=0$

Es decir, un infinitésimo es una función cuyo límite es cero cuando la variable independiente x se aproxima hacia el valor $x = a$. O dicho de otra forma, una

función cuyos valores se aproximan tanto más al cero cuanto más se aproxima x hacia el valor a.
Por tanto, en el concepto de infinitésimo hay que tener presente no sólo la función f, sino también la abscisa a. Que la función f sea infinitésimo en $x = a$, significa que *en las proximidades del punto a* sus imágenes tienden a cero.

EJEMPLOS

1. $f(x) = \cos x$ en $x = \frac{\pi}{2}$ es un infinitésimo ya que $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$
2. $f(x) = \ln x$ en $x = 1$ es un infinitésimo ya que $\lim\limits_{x \to 1} \ln x = 0$

3.3. Propiedades de los infinitésimos

Las siguientes propiedades se enuncian sin demostraciones. Es conveniente que el lector intente hacerlas, algunas las encontrará demostradas en los ejercicios resueltos.

1. La suma de un número finito de infinitésimos es un infinitésimo.
2. El producto de un infinitésimo por una función acotada es un infinitésimo.
3. El producto de un número finito de infinitésimos es un infinitésimo.
4. El producto de un escalar por un infinitésimo es un infinitésimo.
5. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, si y sólo si $f(x) - L$ es un infinitésimo cuando x tiende a a, es decir $\lim\limits_{x \to a} (f(x) - L) = 0$

En esta última proposición es interesante detectar qué propiedades de límite aplica. ¡Inténtelo!

La propiedad 2 es muy útil para calcular ciertos tipos de límites. Por ejemplo, el límite ya analizado con anterioridad $\lim\limits_{x \to 0} x \,.\, sen\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, ya que x es un infinitésimo en $x = 0$ y la función $sen\left(\frac{1}{x}\right)$ está acotada en un entorno reducido de $x = 0$ $\left(\left|sen\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le 1 \quad \forall x \ne 0\right)$. Un par de gráficos aproximados de $f(x) = x \,.\, sen\left(\frac{1}{x}\right)$ en escalas distintas permiten apreciar el comportamiento de esta función en un entorno del origen de coordenadas:

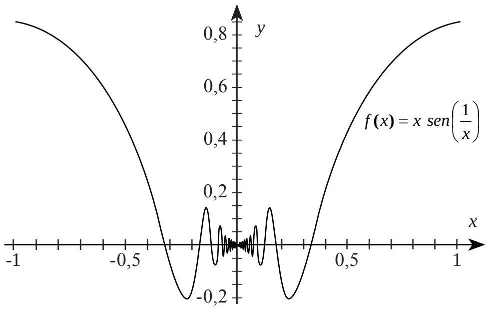


Figura 46. Función $x.sen\left(\frac{1}{x}\right)$

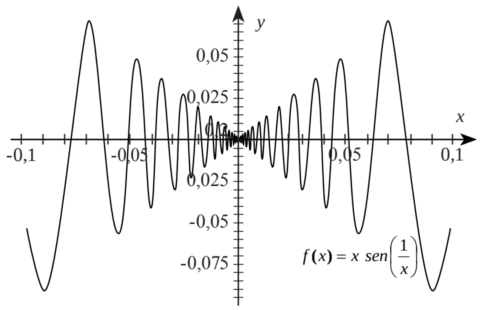


Figura 47. Función $x.sen\left(\frac{1}{x}\right)$ en otra escala

Una de las cuestiones fundamentales en relación con los infinitésimos es la relacionada con la ***velocidad*** con que éstos se acercan a cero. **No** todos los infinitésimos se acercan a cero con la misma rapidez. Por ejemplo, la velocidad con la que el infinitésimo x^n se acerca a cero cuando x tiende a cero, es mayor a medida que aumenta n (verifíquelo con x^2 y x^3).
Para comparar las velocidades con que dos infinitésimos se acercan a cero, se evalúa el límite del cociente entre ellos.

3.4. Comparación de infinitésimos

Observe que no es posible predecir el valor, si existe, del límite del cociente de infinitésimos, ya que se trata de un límite de los denominados *indeterminados* de la forma $\frac{\to 0}{\to 0}$.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos infinitésimos en $x = a$.

i. Se dice que $f\ (x)$ y $g\ (x)$ son **infinitésimos del mismo orden** si $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$ y significa que ambos infinitésimos tienden a cero, aproximadamente con la misma rapidez, cuando x se aproxima a a.

   Si $k = 1$, se dice que f y g son infinitésimos *equivalentes* y se escribe $f(x) \sim g(x)$ cuando x tiende a a y significa que ambos infinitésimos tienden a cero, exactamente con la misma rapidez. Por tal razón, uno es sustituible por el otro en el entorno de a. Imagine Ud. una función que sea un infinitésimo en a pero de difícil manejo, y que conoce otra función mucho más sencilla que sea equivalente a la anterior. La maravilla de la equivalencia consiste en que podrá sustituir una por la otra en las proximidades de a.

ii. Se dice que **$f(x)$ es un infinitésimo de orden superior que $g(x)$** si $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, y se escribe $f(x)=o(g(x))$ cuando x tiende a a, y se lee "*o pequeña*" u "*o chica*" de Landau[2] donde la o es la letra griega minúscula omicrón y usada así $f(x)=o(g(x))$ se interpreta que $f(x)$ tiende a cero con mayor velocidad de lo que lo hace $g(x)$ cuando x se aproxima a a.

iii. Se dice que **$f(x)$ es un infinitésimo de orden inferior que $g(x)$** si $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$ y significa que $g(x)$ tiende a cero con mayor velocidad de lo que lo hace $f(x)$ cuando x se aproxima a a; en este caso, $g(x)=o(f(x))$

Resultará interesante que el lector intente realizar la comparación de infinitos en forma similar a lo hecho aquí con los infinitésimos.

Cuando no existe $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, se dice que los infinitésimos no son comparables.

EJEMPLOS

1. La función x^2 es un infinitésimo de orden superior que x, en $x = 0$, es decir, $x^2=o(x)$, porque $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0$

2. La función $x^{\frac{3}{2}}$ es un infinitésimo de orden inferior que x^3, en $x = 0$, o sea, $x^3=o(x^{\frac{3}{2}})$, debido a que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^3}=\infty$

3. La función $2x$ es un infinitésimo del mismo orden que $6x$ ya que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x}{2x}=3$

4. Los infinitésimos $x^2 sen\frac{1}{x}$ y x^2 para $x\to 0$ no son comparables ya que si calculamos $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2 sen\frac{1}{x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0} sen\frac{1}{x}$ y éste no existe (si no lo recuerda, vea la explicación en la pág. 93 y las Fig. 43 y 44).

5. Los infinitésimos $senx^2$ y x^2 para $x\to 0$ son infinitésimos equivalentes ya que $\underset{x\to 0}{lím}\frac{senx^2}{x^2}=1 \Rightarrow senx^2 \sim x^2\ \forall x\in E^*(0)$

Es importante que usted se cuestione la validez de cada una de las afirmaciones.

Utilizando la notación de Landau para identificar los infinitésimos de mayor orden, tenemos que en las proximidades de $x = 0$ se verifica:

[2] Lev Landau (1908 – 1968), prominente físico ruso.

$sen\, x = x + o(x)$ $\quad$ $arc\, sen\, x = x + o(x)$ $\quad$ $1 - \cos x = \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$

$tg\ x = x + o(x)$ $\quad$ $arc\, tg\ \ x = x + o(x)$ $\quad$ $e^x - 1 = x + o(x)$

$\ln(1+x) = x + o(x)$, cuya demostración queda a cargo del lector.

4. EJERCICIOS RESUELTOS

En este ejercicio le aconsejamos que tome la parte a) como ejemplo y lea cuidadosamente la resolución. Luego intente resolver la parte b) sin mirar lo resuelto hasta que haya concluido su resolución.

1. Pruebe utilizando la definición de límite que:

a) $\lim\limits_{x \to 2}(8-3x) = 2$ $\quad$ b) $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{6-5x+x^2}{2-x} = 1$ $\quad$ c) $\lim\limits_{x \to 3}\dfrac{2}{x-3} = \infty$

Solución

Recuerde la definición en cuestión:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 / \forall x \in D_f : \left[0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \right] \qquad (1)$$

Es decir, bajo la suposición de la existencia de $\delta > 0$, el corchete significa que si se elige cualquier x del entorno reducido de centro a y radio δ, la imagen de dicho x debe estar entre $l - \varepsilon$ y $l + \varepsilon$.
En síntesis, *para cualquier* $\varepsilon > 0$ debemos encontrar *por lo menos un* $\delta > 0$ de modo que la implicación resulte verdadera. Por ello es preciso, en primer lugar, hallar el δ y, en segundo lugar, verificar que para el δ seleccionado se cumple la implicación.
La dificultad que se plantea es que la definición de límite no informa cómo encontrar este número δ. Se trata, pues, de diseñar alguna estrategia que permita determinarlo.

a) $\lim\limits_{x \to 2}(8-3x) = 2$

En primer lugar se busca δ; para ello es posible emplear lo establecido en la definición: se sabe que debe ocurrir que $|f(x) - l| < \varepsilon$ y, a partir de allí, se debe obtener $0 < |x-a| < \delta$. De este modo nos queda $|(8-3x)-2| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |8-3x-2| = |6-3x| = |-3(x-2)| = |-3|.|x-2| = 3|x-2| < \varepsilon$

$\Rightarrow |x-2| < \dfrac{\varepsilon}{3} \ \wedge \ \ x \neq 2 \Rightarrow 0 < |x-2| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ si comparamos con $0 < |x-a| < \delta$

es posible arriesgar la afirmación, sin tener ningún derecho a hacerlo

(¿por qué?), que si $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ se cumplirá $|(8-3x)-2| < \varepsilon$, pero si tomamos un intervalo que esté incluido en aquél, también se cumplirá por tanto, $0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Resta ahora verificar el límite con el valor de δ hallado. Para ello es necesario elegir algún valor de δ, entre los obtenidos. Por ejemplo, si se considera $\delta = \frac{\varepsilon}{10}$, se debe probar entonces que para dicho valor se cumple la expresión encerrada entre corchetes en (1):

$$0 < |x-2| < \frac{\varepsilon}{10} < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow 0 < |x-2| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow 3|x-2| < \varepsilon \Rightarrow |-3|.|x-2| < \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow |-3(x-2)| = |-3x+6| = |8-3x-2| < \varepsilon$ y está probado.

¿Qué ocurriría si el valor de l no fuese correcto? Por pequeño que eligiese el δ no sería posible que $|f(x)-l| < \varepsilon$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{6-5x+x^2}{2-x} = 1$

Justamente el desafío consiste en que intente resolver este ejercicio sin mirar previamente la resolución, la que es orientativa, ya que en general no existe una única manera de resolver un ejercicio.

Buscamos en primer lugar δ. Se sabe que debe ocurrir que $|f(x)-l| < \varepsilon$ y a partir de allí es preciso obtener $0 < |x-a| < \delta$

Así resulta: $\left|\frac{6-5x+x^2}{2-x} - 1\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{(x-3)(x-2)}{2-x} - 1\right| < \varepsilon$ recordando que $x \neq 2 \Rightarrow x-2 \neq 0$ y que, por otra parte, la división de números de signos opuestos es igual a -1; con lo que si se simplifica se tiene que

$$\left|\frac{(x-3)(x-2)}{2-x} - 1\right| = |-(x-3)-1| = |-x+2| = |x-2| < \varepsilon \wedge x \neq 2 \Rightarrow 0 < |x-2| < \varepsilon$$

Luego, comparando con $0 < |x-a| < \delta$ es posible afirmar que $0 < \delta \leq \varepsilon$

Para verificar, si se elige $\delta = \varepsilon$, partiendo de $0 < |x-2| < \varepsilon \Rightarrow$

$$\Rightarrow |x-2| = |2-x| = |-(x-3)-1| = \left|-\frac{(x-3)(x-2)}{x-2} - 1\right|$$

$= \left|\frac{(x-3)(x-2)}{2-x} - 1\right| < \varepsilon$ y así quedó demostrado.

c) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2}{x-3} = \infty$ Como la definición de límite infinito con variable finita dice $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall K > 0 \exists \delta(K) > 0 / x \in D_f : [0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > K]$

en nuestro caso tendremos:

$$\lim_{x\to 3} \frac{2}{x-3} = \infty \Leftrightarrow \forall K > 0 \exists \delta(K) > 0 / x \in D_f : \left[0 < |x-3| < \delta \Rightarrow \left|\frac{2}{x-3}\right| > K\right]$$

de donde si $\left|\dfrac{2}{x-3}\right| > K$ con $x \neq 3 \Rightarrow \left|\dfrac{x-3}{2}\right| < \dfrac{1}{K} \Rightarrow \dfrac{|x-3|}{2} < \dfrac{1}{K} \Rightarrow 0 < |x-3| < \dfrac{2}{K}$ y como $0 < |x-3| < \delta$. Para que se cumplan simultáneamente ambas desigualdades, podremos elegir $0 < |x-3| < \delta \leq \dfrac{2}{K} \Rightarrow 0 < \delta \leq \dfrac{2}{K}$

Para verificar, si se elige $\delta = \dfrac{2}{K}$, partiendo de

$$0 < |x-3| < \frac{2}{K} \Rightarrow \frac{|x-3|}{2} < \frac{1}{K} \Rightarrow \left|\frac{2}{x-3}\right| > K$$

2. Determine los valores posibles de δ en el siguiente $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-3x+7)=5$

Solución

A partir de $|f(x)-l| < \varepsilon$ se busca obtener $0 < |x-a| < \delta$. En este caso partiendo de $|(x^2-3x+7)-5| < \varepsilon$ se busca obtener $0 < |x-1| < \delta$ (2)

$$|(x^2-3x+7)-5| < \varepsilon \Rightarrow |x^2-3x+2| = |(x-2)(x-1)| = |x-2|.|x-1| < \varepsilon \qquad (3)$$

Observe que surge el factor $|x-1|$, podríamos creer que se tiene solucionado el problema si se divide miembro a miembro la desigualdad por $|x-2|$. En este caso δ dependería de ε y de x, con lo que cada vez que se deba determinar un δ, habría que elegir previamente un x. De esta manera, con dicho x y el ε dado, tendríamos el entorno reducido de centro a y radio δ, y al intentar elegir un x de dicho entorno, nuevamente se modificaría el δ, resultando así que en ningún caso se logra el proceso: hallar un valor de δ, luego elegir un x del entorno reducido y por último verificar que la imagen de dicho x está comprendida entre $l-\varepsilon$ y $l+\varepsilon$. Por ello, se intenta sustituir $|x-2|$ por alguna cota superior, que resulte válida en el entorno reducido de centro 1 y de radio δ_1 que elegiremos como deseemos. Podría pensarse así:

Tomemos $x \in E^*(1;\delta_1)$ y elijamos algún valor para δ_1, por ejemplo $\delta_1 = 1$ (o el valor que Ud. desee); de esta forma resulta $0 < |x-1| < 1 = \delta_1$ (4)

De donde $-1 < x-1 < 1 \wedge x \neq 1 \Rightarrow 0 < x < 2 \wedge x \neq 1 \Rightarrow -2 < x-2 < 0$
de modo que x-2 está acotado y, si lo está entre –2 y 0, es posible también asegurar que $-2 < x-2 < 0 < 2$, y, por carácter transitivo, se cumple entonces que $-2 < x-2 < 2 \Rightarrow |x-2| < 2$
Como interesa que aparezca una expresión del tipo (3), se multiplica miembro a miembro por $|x-1|$ y se obtiene:

$$|x-2| < 2 \Rightarrow |x-2|.|x-1| < 2.|x-1| \qquad (5)$$

De (3) y (4) tenemos que $\begin{cases} |x-2|.|x-1| < 2.|x-1| \\ \wedge \\ |x-2|.|x-1| < \varepsilon \end{cases}$ Si además se cumple que

$|x-2|.|x-1| < 2.|x-1| < \varepsilon \Rightarrow |x-1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ y como $x \neq 1$, tendremos que

$$0 < |x-1| < \frac{\varepsilon}{2} = \delta_2 \qquad (6)$$

De esta manera han sido determinados dos valores de δ, como se indican en (4) y (6). Dichos valores permiten establecer dos entornos reducidos concéntricos en 1 y de radios $\delta_1 = 1 \ \wedge \ \delta_2 = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Se debe elegir δ de modo que sean válidas las desigualdades indicadas en (4) y (5), razón por la que se considera el más pequeño de ambos, o cualquiera más chico aún, y esto se simboliza así: $0 < \delta \le \min(\delta_1, \delta_2)$.
En este caso es $0 < \delta \le \min(1, \dfrac{\varepsilon}{2})$, lo que significa que cada vez que se seleccione un valor de ε, se dispondrá de un conjunto de valores posibles de , para los cuales se realizará la verificación correspondiente.

3. Dada $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si} \quad x<1 \\ 2x-0,99 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$

   a) Partiendo de $|f(x)-1| < \varepsilon$ halle, si es posible, δ tal que $0 < |x-1| < \delta$ para los distintos valores de ε: a-1) $0,5$ a-2) $\varepsilon = 0,1$ a-3) $\varepsilon = 0,0001$

   b) Usando a), ¿qué se puede decir del $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$?

   c) Calcule $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \quad \wedge \quad \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

Solución

Sugerencia: efectúe el gráfico de la función, en una vista ampliada de las proximidades de x = 1.

a) Como $|f(x)-1| < \varepsilon \Rightarrow 1-\varepsilon < f(x) < 1+\varepsilon$

a.1) $\varepsilon = 0,5 \Rightarrow 1-0,5 < f(x) < 1+0,5 \Rightarrow 0,5 < f(x) < 1,5$

Se busca la preimagen de 0,5: $2x-1 = 0,5 \Rightarrow x = 0,75$

Si se busca ahora la preimagen de 1,5: $2x-0,99=1,5 \Rightarrow x=\dfrac{1,5+0,99}{2}=1,245$

Luego es posible asegurar que si

$0,5< f(x)<1,5 \Rightarrow 0,75<x<1,245 \wedge x\neq 1 \Rightarrow -0,25<x-1<0,245 \wedge x\neq 1$ y

considerando el menor de los radios (¿por qué?) resulta:

$-0,25>-0,245<x-1<0,245 \wedge x\neq 1 \Rightarrow 0<|x-1|<0,245 \Rightarrow 0<\delta \leq 0,245$

a.2) $\varepsilon=0,1 \Rightarrow 1-0,1< f(x)<1+0,1 \Rightarrow 0,9< f(x)<1,1$

Se busca la preimagen de 0,9: $2x-1=0,9 \Rightarrow x=0,95$

Y luego la preimagen de 1,1: $2x-0,99=1,1 \Rightarrow x=\dfrac{1,1+0,99}{2}=1,045$

Así, cuando

$0,9< f(x)<1,1 \Rightarrow 0,95<x<1,045 \wedge x\neq 1 \Rightarrow -0,05<x-1<0,045 \wedge x\neq 1$

entonces eligiendo el menor de los radios

$-0,05<-0,045<x-1<0,045 \wedge x\neq 1 \Rightarrow 0<|x-1|<0,045 \Rightarrow 0<\delta \leq 0,045$

a.3) Procediendo de la misma manera con

$\varepsilon=0,0001 \Rightarrow 0,9999< f(x)<1,0001$

Si buscamos la preimagen de 0,9999: $2x-1=0,9999 \Rightarrow x=0,99995$

Ahora veamos qué ocurre con la otra preimagen:

$2x-0,99=1,0001 \Rightarrow x=\dfrac{1,0001+0,99}{2}=0,99505<1$ y esto es un absurdo ya que *f(x)*=2*x*-0,99 si $x\geq 1$; en otras palabras, la función dada no tiene preimagen de 1,0001 (si el lector hizo el gráfico tal como se sugirió, individualice en el mismo el valor *y* = 1,0001 y compruebe gráficamente lo que se afirma)

b) Por lo que, analizado en el ítem anterior, se concluye que no es cierto que **para todo** $\varepsilon>0 \quad \exists \ \delta>0$, en consecuencia no existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 1^+}(2x-0,99)=1,01 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to 1^-}(2x-1)=1$ por tanto, los límites laterales dan distintos con lo que, nuevamente, se concluye que no existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

4. a) Verifique, usando la definición que $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{x-1}=\infty$

b) Determine el conjunto $A=\left\{x\in E^{*}(1;\delta)/\left|f(x)\right|>10^{6}\right\}$ ¿Para qué valores de δ se cumple?

Solución

Recordando la definición de límite infinito con variable finita:

$$\underset{x\to a}{\text{lím}}\, f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall K>0\,\exists\delta(K)>0\,/\,x\in D_f:\left[0<\left|x-a\right|<\delta\Rightarrow\left|f(x)\right|>K\right] \quad (7)$$

lo que coloquialmente significa que cuánto más próximo esté x de a, las imágenes de la función, en módulo, serán cada vez más grandes superando a K, por grande que sea el K elegido.

En la práctica, *para cualquier* $K>0$ se debe encontrar *por lo menos un* $\delta>0$ de modo que se verifique la implicación indicada en el corchete. Por ello, en primer lugar, se halla el δ y, en segundo lugar, se verifica que para el δ seleccionado se cumple la implicación.

a) Partiendo de $\left|f(x)\right|>K$ y bajo la suposición de existencia de $\delta>0$, se debe obtener $0<\left|x-a\right|<\delta$. En este caso particular se tiene:

$\left|\dfrac{2}{x-1}\right|>K\wedge x\in D_f\Rightarrow x\neq 1$ como se debe llegar a $0<\left|x-1\right|<\delta$, y operando:

$$\left|\frac{x-1}{2}\right|<K^{-1}\Rightarrow\frac{\left|x-1\right|}{2}<K^{-1}\Rightarrow\left|x-1\right|<\frac{2}{K}\wedge x\neq 1\Rightarrow 0<\left|x-1\right|<\frac{2}{K}$$ de

donde se ve que es posible elegir $0<\delta\leq\dfrac{2}{K}$

b) El conjunto $A=\left\{x\in E^{*}(1;\delta)/\left|f(x)\right|>10^{6}\right\}$ es el entorno reducido centrado en 1 y de radio δ donde $K=10^{6}$. Como se vio en el ítem a)

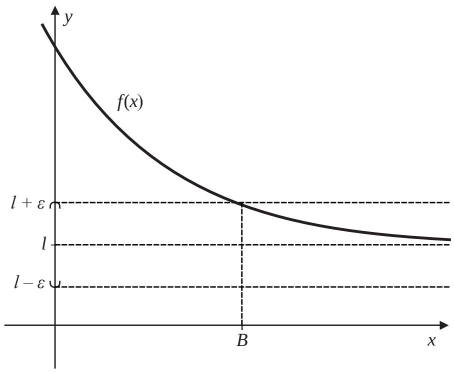
$$0<\delta\leq\frac{2}{10^{6}}=2.10^{-6}$$

4.1. Límites en el infinito

Sea una función $f(x)$ definida en reales y se supone que puede lograrse que $f(x)$ esté tan próximo a l como se desee con tal de que x se tome lo suficientemente grande. Esto significa que para cada $\varepsilon>0$ debe existir un valor $B>0$ tal que la porción del gráfico correspondiente al intervalo **(**B**,**$+\infty$**)** debe estar comprendida en la franja horizontal determinada por las rectas $y = l - \varepsilon$ y $y = l + \varepsilon$ Formalmente, resulta:

6. Definición

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists B > 0 \text{ tal que si } |x| > B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$



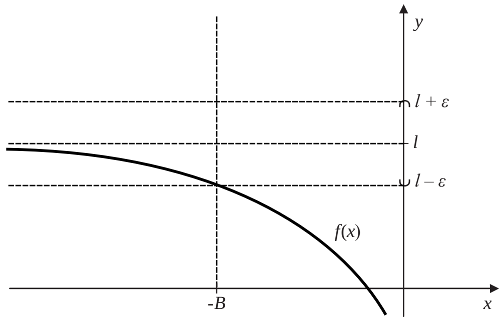


***Figura 48*. Límite en más infinito** ***Figura 49*. Límite en menos infinito**

En el caso que $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$ en la definición anterior se considerarán los casos $x > B$ y $x < -B$ respectivamente.

Ejemplos: a) $\lim_{x\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) = 1$ b) $\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$ c) $\lim_{x\to\infty}\left(2 - \frac{8}{x^2}\right) = 2$

$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\cos x = 0$ ¿Por qué? Para poder responder, el lector debe recordar las propiedades vistas en límites.

$$\lim_{x\to\infty} x sen\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{sen\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1 \qquad t = \frac{1}{x} \quad t \to 0 \text{ cuando } x \to \infty$$

Proponemos al lector que analice los resultados de los límites siguientes, para lo cual es imprescindible que recuerde las características de la función exponencial:

$$\text{Si } a > 1: \lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad x \to +\infty \\ 0 & \text{si} \quad x \to -\infty \end{cases} \text{ y si } 0 < a < 1: \lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \to +\infty \\ +\infty & \text{si} \quad x \to -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3.2^x + 3^{x+1} - 2.5^x}{4.5^x - 2^{x+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3.2^x + 3.3^x - 2.5^x}{4.5^x - 2.2^x}$$

Nos encontramos en este ejemplo con $a > 1$, tendremos dos resultados. Veamos el primero, que es un caso $\dfrac{\to \infty}{\to \infty}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3.2^x+3.3^x-2.5^x}{4.5^x-2.2^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5^x(3\dfrac{2^x}{5^x}+3\dfrac{3^x}{5^x}-2)}{5^x(4-2\dfrac{2^x}{5^x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\left(\dfrac{2}{5}\right)^x+3\left(\dfrac{3}{5}\right)^x-2}{4-2\left(\dfrac{2}{5}\right)^x}=$$

las exponenciales que aparecen tienen la base entre 0 y 1, por tanto, en este caso, tienden a 0, quedándonos:

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\left(\dfrac{2}{5}\right)^x+3\left(\dfrac{3}{5}\right)^x-2}{4-2\left(\dfrac{2}{5}\right)^x}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

El segundo responde a una indeterminación del tipo $\dfrac{\to 0}{\to 0}$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3.2^x+3.3^x-2.5^x}{4.5^x-2.2^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x(3+3\dfrac{3^x}{2^x}-2\dfrac{5^x}{2^x})}{2^x(4\dfrac{5^x}{2^x}-2)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3+3\left(\dfrac{3}{2}\right)^x-2\left(\dfrac{5}{2}\right)^x}{4\left(\dfrac{5}{2}\right)^x-2}=$$

las exponenciales que aparecen tienen la base mayor que 1, por tanto, en este caso, tienden a 0, quedándonos:

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3+3\left(\dfrac{3}{2}\right)^x-2\left(\dfrac{5}{2}\right)^x}{4\left(\dfrac{5}{2}\right)^x-2}=\frac{3}{-2}=-\frac{3}{2}$$

Sugerencia

Represente en un mismo gráfico las funciones exponenciales $y=2^x$, $y=3^x$ e $y=5^x$ y observe cómo se comportan para los x positivos y cómo para los x negativos; deberá notar que $2<3<5 \Rightarrow \begin{cases} 2^x<3^x<5^x & \text{si} \quad x>0 \\ 2^x>3^x>5^x & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$ por ello la diferencia en la técnica de resolución.

Observación importante: Si una función verifica que sus imágenes tienden a $+\infty$ ó $-\infty$, en realidad *la función* ***no*** *tiene límite en el punto analizado* (o en $+\infty$ ó $-\infty$) y decir que una función *tiene límite* $+\infty$ ó $-\infty$ constituye un flagrante abuso de vocabulario. No obstante, como está bastante generalizado su uso, en muchas ocasiones, si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ ó $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=l$ y $l\in \boldsymbol{R}$, (para insistir en esta cuestión) se dice que $f(x)$ tiene ***límite finito*** en a o bien en ∞.

Es posible combinar los límites infinitos y límites en el infinito. Naturalmente, pueden combinarse ambas definiciones (de límite infinito y de límite en el infinito).

7. Definición

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall A>0 \;\; \exists B>0 \;\text{ tal que si }\; |x|>B \;\Rightarrow |f(x)|>A$$

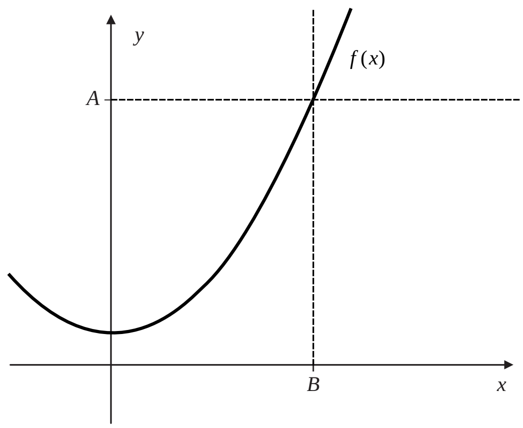


***Figura 50.* Límite infinito y en el infinito**

En la definición anterior se sugiere al lector que considere todas las combinaciones posibles, adaptándola de acuerdo con la definición de valor absoluto.
Observación: Sea *f* una función tal que $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, también en este caso se dice que *f* en un *infinitésimo*, y valen las propiedades ya enunciadas anteriormente.

Si se admiten los *límites infinitos*, sin más, en la familia de los límites, sucederán lamentables pérdidas. Deja de ser cierto, en general, que el límite de la suma (producto) sea la suma (el producto) de los límites. Algunas propiedades se conservan, por ejemplo:

a. $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x)=l \quad l\in R$, entonces $\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=+\infty$

b. $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x)=+\infty$, entonces $\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=+\infty$

c. $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x)=-\infty$, entonces $\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=-\infty$

Frecuentemente es necesario estudiar el límite de una suma o producto de dos funciones precisamente cuando las propiedades que fueron enunciadas no pueden aplicarse. Se trata de aquellos casos en que el comportamiento de las funciones *f* + *g*, *f* . *g* no está determinado por el de *f* y *g*. Por ejemplo, $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x)=-\infty$. No puede predecirse el $\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]$, puede que no exista, que sea un número real, o bien, infinito. Aquí se requiere de un análisis particular. Se dice que éste es un ***límite indeterminado*** de la forma $(\to +\infty)-(\to +\infty)$ o bien $(\to -\infty)-(\to -\infty)$ puesto que no puede determinarse a priori el valor del límite, en caso de que exista.

5. OTROS LÍMITES INDETERMINADOS

Además del caso de indeterminación que acabamos de mencionar $(\to \infty)-(\to \infty)$, es posible encontrar las siguientes situaciones:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, entonces $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\,g(x)\right]$ es indeterminado.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, entonces $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$ es indeterminado.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, entonces $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}$ es indeterminado.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, entonces $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}$ es indeterminado.

Y también los siguientes casos:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, entonces $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ son indeterminados.

Observe que son siete tipos de indeterminaciones.
Para analizar los límites indeterminados de tipo exponencial $f(x)^{g(x)}$ donde f es una función que alcanza valores positivos y g cualquier función, es conveniente considerar

$$f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$$

Así, $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ estará dado por $\lim\limits_{x\to a} g(x).\ln f(x)$ que es un límite indeterminado de la forma $(\to 0).(\to \infty)$

No existen técnicas generales que permitan calcular límites indeterminados. ¡No serían indeterminados si tales técnicas existieran! Es por ello que dichos límites requieren un análisis particular en cada caso. La mayoría de los límites que tienen algún interés matemático son límites indeterminados.

6. EJERCICIOS RESUELTOS

Los ejercicios siguientes están resueltos; algunos de ellos están señalados con la palabra **EJEMPLO** y son para que lea atentamente su resolución y analice cuidadosamente la forma en que fueron utilizados los conceptos teóricos presentados previamente. Con los ejercicios restantes es importante que el lector NO mire la resolución sino que trate de encararla por su cuenta, y sólo compare con lo hecho cuando se le presente alguna dificultad, o bien, quiera verificar si lo que hizo coincide con lo resuelto en el texto.

(SUGERENCIA: oculte la resolución con un papel para no caer en la tentación de mirar lo que está hecho antes de haberlo intentado usted previamente). Si, a pesar de todo, le quedaran dudas, revise los conceptos teóricos y los ejemplos. **Recuerde que sólo se aprende haciendo y no mirando lo que hizo otro.**

EJEMPLO

Recuerde que todo ejemplo debe ser analizado cuidadosamente aplicando los conceptos teóricos previos.

Si $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = x^n.\left(a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \dots + \dfrac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \dfrac{a_n}{x^n}\right)$, entonces

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_0 > 0 \\ -\infty & \text{si } a_0 < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_0 > 0 \text{ y } n \text{ es par} \\ -\infty & \text{si } a_0 > 0 \text{ y } n \text{ es impar} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } a_0 < 0 \text{ y } n \text{ es par} \\ +\infty & \text{si } a_0 < 0 \text{ y } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Observe que si n es impar, $\operatorname{Im} f(x) = \boldsymbol{R}$

2. Si $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es una función racional con

$P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m$ con $a_0 \neq 0$ y

$Q(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n$ con $b_0 \neq 0$ entonces:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } m < n \\ \infty & \text{si } m > n \\ \dfrac{a_0}{b_0} & \text{si } m = n \end{cases}$$

3. Calcule los siguientes límites con variable finita:

a) ***Ejemplo*** $\lim_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{7x+6-3x^2}$

b) $\lim_{x\to 1}\dfrac{2-3x+x^4}{3+x^5-4x}$

c) $\lim_{x\to 2}\dfrac{8-4x+x^3-2x^2}{16+x^4-8x^2}$

d) ***Ejemplo*** $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{1-x^m}\quad m,n\in\boldsymbol{R}$

e) ***Ejemplo*** $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$

f) $\lim_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{2-\sqrt{x}}$

g) $\lim_{x\to 16}\dfrac{4-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}-2}$

h) $\lim_{x\to 8}\dfrac{2-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{9+2x}-5}$

i) $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$

j) ***Ejemplo*** $\lim_{x\to 0}\dfrac{sen5x}{tg2x}$

k) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

l) $\lim_{x\to 0}\dfrac{tgx-senx}{sen^3x}$

m) ***Ejemplo*** $\lim_{x\to 2}(2-x)tg\dfrac{\pi x}{4}$

n) $\lim_{x\to a}\dfrac{senx-sena}{x-a}$

ñ) $\lim_{x\to 0}\dfrac{arcsen\alpha x}{\alpha x}\quad \alpha\in\boldsymbol{R}-\{0\}$

o) $\lim_{x\to 0}\dfrac{arcsen5x-tg3x+x}{senx+7x+arctg2x}$

p) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$

q) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$

Solución

Para calcular un límite con variable finita de un cociente de polinomios, si se diera la situación de que numerador y denominador se anulan para el valor de a, se está en presencia de una indeterminación del tipo $\dfrac{\to 0}{\to 0}$; la forma práctica para poder realizar el cálculo es factorizarlos, como se verá en los ejemplos a), b), c) y d).

a) $\lim_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{7x+6-3x^2}$

El lector debe recordar que la expresión cuadrática de la forma ax^2+bx+c se factoriza así: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, siendo x_1, x_2 las raíces. En este caso, para hallar las raíces del numerador, se calculan

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4.2.(-3)}}{2.2}=\begin{cases}3\\-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$ luego factorizando queda

$$2x^2-5x-3=2(x-3)(x+\frac{1}{2}) \qquad (8)$$

y para el denominador, se tiene $\dfrac{-7\pm\sqrt{7^2-4.(-3).6}}{2.(-3)}=\begin{cases}-\dfrac{2}{3}\\3\end{cases}$, lo que al factorizar resulta $7x+6-3x^2=-3(x-3)(x+\frac{2}{3})$ (9)

Reemplazando (8) y (9) en el límite dado, se obtiene:

$$\lim_{x\to3}\frac{2x^2-5x-3}{7x+6-3x^2}=\lim_{x\to3}\frac{2(x-3)(x+\frac{1}{2})}{-3(x-3)(x+\frac{2}{3})}=\lim_{x\to3}\frac{2(x+\frac{1}{2})}{-3(x+\frac{2}{3})}=\frac{7}{-11}=\frac{-7}{11}$$

b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2-3x+x^4}{3+x^5-4x}$ en este caso la factorización no es sencilla, pero se sabe que el límite es indeterminado de la forma $\dfrac{\to0}{\to0}$, de donde tanto numerador como denominador tienen como raíz a 1, por lo que es posible afirmar que ambos son divisibles por (x – 1). Se efectúa la división de polinomios usando el método clásico de división entre ellos, o bien, la regla de Ruffini. Por simplicidad, se utilizará esta última:

Numerador ↓

	1	0	0	-3	2
1		1	1	1	-2
	1	1	1	-2	0

↓

$$2-3x+x^4=(x-1)(x^3+x^2+x-2)$$

Denominador ↓

	1	0	0	0	-4	3
1		1	1	1	1	-3
	1	1	1	1	-3	0

↓

$$3+x^5-4x=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x-3)$$

sustituyendo estas factorizaciones en el límite dado, se obtiene

$$\lim_{x\to1}\frac{2-3x+x^4}{3+x^5-4x}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^3+x^2+x-2)}{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x-3)}=\lim_{x\to1}\frac{x^3+x^2+x-2}{x^4+x^3+x^2+x-3}=1$$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{8-4x+x^3-2x^2}{16+x^4-8x^2}$ para factorizar el numerador podría extraerse factor común en grupos, en tanto que, en el denominador, una opción es analizar si es el cuadrado de un binomio:

$$\lim_{x\to 2}\frac{8-4x+x^3-2x^2}{16+x^4-8x^2}=\lim_{x\to 2}\frac{4(2-x)-x^2(2-x)}{4^2+(x^2)^2-2.4.x^2}=\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(4-x^2)}{(4-x^2)^2}=\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{4-x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{(2+x)(2-x)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{4}$$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{1-x^m}$ $m,n\in \boldsymbol{N}$. En este caso es conveniente factorizar, recordando

que $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+a^{n-4}b^3+...+b^{n-1})$ (10)

válido para todo n, lo que se puede deducir usando Ruffini, y es sencillo de recordar ya que el último paréntesis tiene varios detalles que nos pueden ayudar, por ejemplo: i) las potencias de a comienzan con n-1 y decrecen de uno en uno hasta llegar a cero; ii) las potencias de b comienzan desde 0 y aumentan de uno en uno hasta llegar a n-1; iii) dicho paréntesis consta de n términos.

Así el límite queda

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{1-x^m}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+...+1)}{(1-x)(1+x+x^2+x^3+...+x^{n-1})}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+...+1)}{(1+x+x^2+x^3+...+x^{n-1})}=-\frac{n}{m}$$

Recuerde que la división de números opuestos, no nulos, es –1

1. Nota: *en el ejemplo que sigue se presenta otra situación de las llamadas indeterminaciones y que mencionáramos anteriormente, en este caso del tipo* $(\to+\infty)-(\to+\infty)$ o bien $(\to-\infty)-(\to-\infty)$*; cuando esto ocurre, para poder realizar el cálculo del límite en forma sencilla, siempre es conveniente transformar la expresión en cociente. Esto es, realizar la operación indicada sacando común denominador (siempre que fuera posible).*

e) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}-\dfrac{2}{(1-x)(1+x)}\right)=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3(1+x)-2(1+x+x^2)}{(1-x)(1+x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to 1}\frac{1+x-2x^2}{(1-x)(1+x)(1+x+x^2)}=$$

común denominador

factorizando el numerador

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-2(x-1)(x+\frac{1}{2})}{(1-x)(1+x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x+\frac{1}{2})}{(1+x)(1+x+x^2)}=\frac{3}{2.3}=\frac{1}{2}$$

la división de dos opuestos no nulos es –1

2. Nota

Cuando se presentan las indeterminaciones del tipo $\frac{\to 0}{\to 0}$ *con funciones irracionales, es decir,” aparecen raíces”, en general es conveniente racionalizar, como se verá a continuación.*

f) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{2-\sqrt{x}}$

En este caso, como las raíces son de índice par, es posible usar la diferencia de cuadrados expresada como producto entre una suma y la diferencia, es decir: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, el primer miembro se suele llamar coloquialmente *producto de conjugados* (cabe aclarar que no nos referimos al producto de conjugados en complejos).

En este ejemplo se racionaliza el numerador y el denominador, recordando que si se multiplica por una expresión no nula, se debe dividir por la misma para preservar la igualdad, como se ve a continuación:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{2-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}.\frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{1+2x}+3}=$$

factor común

simplificando

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(1+2x)-3^2}{2^2-x}.\frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{1+2x}+3}=\lim_{x\to 4}\frac{2x-8}{4-x}.\frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{1+2x}+3}=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)}{4-x}.\frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{1+2x}+3}=$$

$$=\lim_{x\to 4}(-2).\frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{1+2x}+3}=-2.\frac{4}{6}=-\frac{4}{3}$$

3. Nota

En algunos casos se puede transformar un ejercicio de aspecto complicado en otro que no "intimide tanto", usando lo que comúnmente se denomina ***cambio de variables*** *o* ***sustitución***[3]. *Ello no eliminará la indeterminación, sólo adoptará una apariencia más sencilla.*

Veámoslo en el siguiente ejemplo:

g) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{4-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}-2}$

En este caso, una de las tantas formas de pensarlo sería ver si es posible eliminar las raíces. Para ello se debería sustituir la *x* por una nueva variable, que deberá estar elevada a un exponente tal que sea múltiplo de ambos índices, de modo que se puedan simplificar. En nuestro ejemplo, podemos proponer

$$x=\omega^4 \quad \text{como} \quad x\to 16 \Rightarrow \omega^4\to 16 \Rightarrow \omega\to 2$$

$$\lim_{x\to 16}\frac{4-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}-2}=\lim_{\omega\to 2}\frac{4-\sqrt{\omega^4}}{\sqrt[4]{\omega^4}-2}=\lim_{\omega\to 2}\frac{4-\omega^2}{\omega-2}=\lim_{\omega\to 2}\frac{(2-\omega)(2+\omega)}{\omega-2}=\lim_{\omega\to 2}[-(2+\omega)]=-4$$

simplificando   diferencia de cuadrados   cociente de opuestos

4. Nota

Cuestiónese la posibilidad de sustituir x por z^8 o t^{12}, *¿sería factible? ¿Por qué?*

h) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{2-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{9+2x}-5}$

Este ejemplo es similar al f) salvo que en el numerador aparece una raíz de índice impar. Por ello no sirve la diferencia de cuadrados, ya que el hecho de que surja $\left(\sqrt[3]{x}\right)^2$ no soluciona nada. Interesa que exponente e índice se simplifiquen. Revisando la igualdad (10), ¿qué ocurriría si se reemplazan la *a* por 2, la *b* por $\sqrt[3]{x}$ y el exponente fuese 3? Resultaría:

$$2^3-(\sqrt[3]{x})^3=(2-\sqrt[3]{x})[2^2+2\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2]\Rightarrow 8-x=(2-\sqrt[3]{x})(4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})$$

[3] Recuerde la propiedad 14 de límite.

Veamos cómo usarlo en el ejercicio:

$$\lim_{x\to 8}\frac{2-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{9+2x}-5}=\lim_{x\to 8}\frac{(2-\sqrt[3]{x})[2^2+2\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2]}{(\sqrt{9+2x}-5)(\sqrt{9+2x}+5)}.\frac{(\sqrt{9+2x}+5)}{(4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}=$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{8-x}{9+2x-25}.\frac{(\sqrt{9+2x}+5)}{(4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}=\lim_{x\to 8}\frac{8-x}{2x-16}.\frac{(\sqrt{9+2x}+5)}{(4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}=$$

factor común

$$=\lim_{x\to 8}\frac{8-x}{2(x-8)}.\frac{(\sqrt{9+2x}+5)}{(4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}=\lim_{x\to 8}\frac{-1}{2}.\frac{(\sqrt{9+2x}+5)}{(4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}=\frac{-10}{2.12}=\frac{-5}{12}$$

simplificación de opuestos no nulos

i) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-\sqrt{x}}-\frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$ Nuevamente se presenta la forma indeterminada $(\to+\infty)-(\to+\infty)$ o bien $(\to-\infty)-(\to-\infty)$ y, además, es posible intentar un cambio de variables, de modo que se eliminen las raíces. Sustituyendo $x=r^6$, como $x\to 1\Rightarrow r^6\to 1\Rightarrow r\to 1$, el límite se transforma así:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-\sqrt{x}}-\frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)=\lim_{r\to 1}\left(\frac{3}{1-\sqrt{r^6}}-\frac{2}{1-\sqrt[3]{r^6}}\right)=\lim_{r\to 1}\left(\frac{3}{1-r^3}-\frac{2}{1-r^2}\right)$$

Si se revisa con detenimiento el ejercicio e), se verá que es exactamente el mismo, por lo que ya se conoce su técnica de cálculo.

5. *Nota*

En muchos ejercicios donde intervienen funciones trigonométricas podemos intentar utilizar un límite cuya demostración quedó propuesta para el lector, que es $\lim_{\theta\to 0}\frac{sen\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{sen\theta}=1$. *Para ello se requiere del conocimiento de varias identidades trigonométricas básicas, que figuran habitualmente en las Tablas de Derivadas e Integrales.*

A continuación se indican las más usadas:

<table>
<tr><td>$sen^2 w+\cos^2 w=1$</td><td colspan="2">$tg^2 w+1=\sec^2 w$</td><td>$\cot^2 w+1=\mathrm{cosec}^2 w$</td></tr>
<tr><td>$tg\ w=\dfrac{senw}{\cos w}$</td><td>$\cot w=\dfrac{\cos w}{senw}$</td><td>$\sec w=\dfrac{1}{\cos w}$</td><td>$\mathrm{cosec} w=\dfrac{1}{senw}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$sen(\upsilon \pm w)=sen\,v\cos w\pm senw\cos v$</td><td colspan="2">$\cos(v+w)=\cos v\cos w\mp senwsen\,v$</td></tr>
<tr><td>$sen2w=2senw\cos w$</td><td colspan="3">$\cos 2w=\cos^2 w-sen^2 w=1-2sen^2 w=2\cos^2 w-1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$sen^2 w=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2w)$</td><td colspan="2">$\cos^2 w=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2w)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$senv-senw=2sen\dfrac{v-w}{2}\cos\dfrac{v+w}{2}$</td><td colspan="2">$\cos v-\cos w=-2sen\dfrac{v-w}{2}sen\dfrac{v+w}{2}$</td></tr>
</table>

***Tabla 5*. Identidades trigonométricas**

j) $$\lim_{x\to 0}\frac{sen5x}{tg2x}=\lim_{x\to 0}\frac{sen5x}{\dfrac{sen2x}{\cos 2x}}=\lim_{x\to 0}sen5x.\cos 2x.\frac{1}{sen2x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cancel{x}sen5x}{5x}.\frac{2x}{2\cancel{x}sen2x}.\cos 2x=$$

usando identidades operando por propiedad de límites

$$=5\lim_{x\to 0}\frac{sen5x}{5x}.\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{sen2x}.\lim_{x\to 0}\cos 2x=5.\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

El lector debe tener en cuenta que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen5x}{5x}=\lim\limits_{5x\to 0}\dfrac{sen5x}{5x}=1$, análogamente en el otro caso.

k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ para calcular este límite es posible proceder de diversas formas.
Una de ellas se utilizó como ejemplo anteriormente; otra manera muy interesante de hacerse es la siguiente:

recordando que $\cos 2x=\cos^2 x-sen^2 x=1-sen^2 x-sen^2 x=1-2sen^2 x\Rightarrow$

$$sen^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

En el límite propuesto se tiene que $1-\cos x=2sen^2\dfrac{1}{2}x$, reemplazando resulta:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2sen^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2sen^2\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x^2}{4}.4}=\frac{2}{4}\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$$

> ***6. Nota***
> *Esta manera de resolver este límite nos brinda una alternativa distinta de gran aplicación.*

l) $$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-senx}{sen^3x}=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{senx}{\cos x}-senx}{sen^3x}}_{\text{factor común}}=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{senx(\frac{1}{\cos x}-1)}{sen^3x}}_{\text{sacando común denominador}}=\lim_{x\to 0}\frac{senx\frac{1-\cos x}{\cos x}}{sen^3x}\underbrace{=}_{\text{simplificando}}$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos x}{\cos x}}{sen^2x}}_{\text{identidad pitagórica}}=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x(1-\cos^2 x)}}_{\text{diferencia de cuadrados}}=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x(1-\cos x)(1+\cos x)}}_{\text{simplificando}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}=\frac{1}{2}$$

m) $\lim_{x\to 2}(2-x)tg\,\frac{\pi x}{4}$

Es importante siempre detectar si el límite propuesto presenta alguna forma indeterminada, en este caso es del tipo $(\to 0).(\to\infty)$. Se comienza haciendo un cambio de variable para buscar que esa nueva variable tienda a cero; como $x\to 2$, la forma más sencilla es definir la nueva variable como la resta entre x y 2 (sin importar en qué orden se haga). Se elige entonces $t=2-x\Rightarrow t\to 0$ si $x\to 2$, en este caso queda $x=2-t$.

$$\lim_{x\to 2}(2-x)tg\,\frac{\pi x}{4}\underbrace{=}_{\text{sustituyendo}}\lim_{t\to 0}t.tg\,\frac{\pi(2-t)}{4}\underbrace{=}_{\text{identidad}}\lim_{t\to 0}t.\frac{sen\,\frac{\pi(2-t)}{4}}{\cos\frac{\pi(2-t)}{4}}\underbrace{=}_{\text{distribuyendo}}\lim_{t\to 0}t.\frac{sen(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi t}{4})}{\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi t}{4})}=$$

Si luego se emplean las identidades de seno y coseno de la diferencia de dos ángulos, o bien, propiedad de ángulos complementarios, resulta:

$$=\underbrace{\lim_{t\to 0}t.\frac{sen\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{4}-\cos\frac{\pi}{2}sen\frac{\pi t}{4}}{\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{4}+sen\frac{\pi}{2}sen\frac{\pi t}{4}}}_{\text{recordando que } sen\frac{\pi}{2}=1 \text{ y } \cos\frac{\pi}{2}=0}=\underbrace{\lim_{t\to 0}t.\frac{\cos\frac{\pi t}{4}}{sen\frac{\pi t}{4}}}_{\text{multiplicando y dividiendo por } \frac{\pi}{4}}=\lim_{t\to 0}\cos\frac{\pi t}{4}.\frac{\frac{\pi t}{4}}{\frac{\pi}{4}sen\frac{\pi t}{4}}=$$

y reordenando, se aplican propiedades de límites, obteniendo así:

$$=\lim_{t\to 0}\cos\frac{\pi t}{4}.\frac{4}{\pi}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi t}{4}}{sen\frac{\pi t}{4}}=\frac{4}{\pi}$$

n) $\lim\limits_{x\to a}\frac{senx-sena}{x-a}$

Nuevamente se busca una sustitución de modo que la nueva variable tienda a cero. Por ejemplo, $z = x - a$, de donde despejando queda $x = a + z$ y como $x\to a\Rightarrow z\to 0$ reemplazando en el límite:

$$\lim_{x\to a}\frac{senx-sena}{x-a}=\lim_{z\to 0}\frac{sen(a+z)-sena}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{2\cos\frac{a+z+a}{2}.sen\frac{a+z-a}{2}}{z}=$$

sustituyendo por identidades por propiedad de límites

$$=\lim_{z\to 0}2\cos\frac{2a+z}{2}.\lim_{z\to 0}\frac{sen\frac{z}{2}}{2.\frac{z}{2}}=2\cos a.\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{sen\frac{z}{2}}{\frac{z}{2}}=\cos a$$

ñ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsen\alpha x}{\alpha x}$ $\quad \alpha\in \boldsymbol{R}-\{0\}$. En general, resulta complicado trabajar con las funciones inversas trigonométricas; por tal razón, se intentará "eliminarlas". Se propone una sustitución:

$$y=arcsen\alpha x,\ \alpha\neq 0\Rightarrow x=\frac{1}{\alpha}seny \ \text{ con } y\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \ \text{ y } \ x\in\left[\frac{-1}{|\alpha|};\frac{1}{|\alpha|}\right]$$

luego cuando $x\to 0\Rightarrow y\to 0$, reemplazando en el límite queda

$$\lim_{x\to 0}\frac{arcsen\alpha x}{\alpha x}=\lim_{x\to 0}\frac{y}{\alpha.\frac{1}{\alpha}seny}=\lim_{x\to 0}\frac{y}{seny}=1$$

De la misma manera se podría proceder y probar que

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg\alpha x}{\alpha x}=1 \quad \alpha\in \boldsymbol{R}-\{0\}$$

7. Nota

Los resultados del ejercicio anterior podrían hacer recordar una de las propiedades de infinitésimos. Motivemos la memoria: si se presentan dos infinitésimos simultáneos para $x \to a$ y el límite del cociente entre ambos da 1, se dice que son infinitésimos ***equivalentes****, lo que significa que uno es sustituible por el otro en el entorno reducido de a.*

o) $\lim\limits_{\to} \dfrac{arcsen5x - tg3x + x}{senx + 7x + arctg2x}$ En este ejercicio usaremos el concepto de infinitésimos equivalentes. Deberemos probar previamente que

$$\lim_{x\to 0}\frac{arcsen\alpha x}{\alpha x}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{arctg\alpha x}{\alpha x}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{sen\alpha x}{\alpha x}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{tg\alpha x}{\alpha x}=1 \quad \text{con } \alpha \in \boldsymbol{R}-\{0\}$$

Pero, como ya lo probamos anteriormente, podemos afirmar que $arcsen\alpha x; arctg\alpha x; sen\alpha x; tg\alpha x$ son equivalentes a αx. El ejercicio nos queda así:

$$\lim_{x\to 0}\frac{arcsen5x - tg3x + x}{senx + 7x + arctg2x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x-3x+x}{x+7x+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{10x}=\frac{3}{10}$$

8. Nota

Esta técnica de sustituir por un infinitésimo equivalente no será adecuada en algunos casos; por ejemplo, si al hacerlo, el denominador se ***iguala*** *a cero (****ATENCIÓN****: se* ***iguala*** *a cero, que* ***no*** *es lo mismo que decir* ***tiende*** *a cero).*

p) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$ Cuando se resolvió el ejercicio k), se empleó una identidad que ahora resultará de mucha utilidad: $sen^2\alpha = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$

o bien $sen^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}(1-\cos\alpha)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2sen^2\frac{x^2}{2}}}{2sen^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}.\left|sen\frac{x^2}{2}\right|}{2sen^2\frac{x}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}.\left|sen\frac{x^2}{2}\right|}{\frac{x^2}{2}}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 sen^2\frac{x}{2}}=$$

por identidad distribuyendo la raíz multiplicando y dividiendo operando

$$=\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\lim_{x\to 0}\frac{\left|sen\frac{x^2}{2}\right|}{\frac{x^2}{2}}\frac{x^2}{\cancel{2}}\frac{\frac{x}{2}.\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{\cancel{4}}sen^2\frac{x}{2}}=\sqrt{2}\lim_{x\to 0}\left|\frac{sen\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\frac{x^2}{2}}\right|\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}}{sen\frac{x}{2}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}}{sen\frac{x}{2}}=\sqrt{2}$$

q) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$

En primer lugar se multiplica y divide por el conjugado del numerador, obteniendo:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1-\sqrt{\cos x})(1+\sqrt{\cos x})}{(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2sen^2\frac{x}{2}}{2sen^2\frac{\sqrt{x}}{2}(1+\sqrt{\cos x})}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{sen\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}.\frac{sen\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}.\frac{x}{2}.\frac{x}{2}}{\frac{sen\frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{\sqrt{x}}{2}}.\frac{sen\frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{\sqrt{x}}{2}}.\frac{\sqrt{x}}{2}.\frac{\sqrt{x}}{2}(1+\sqrt{\cos x})}=0$$

4. Pruebe que si $f(x)$ es un infinitésimo en el entorno reducido de a y $g(x)$ es una función acotada en dicho entorno, se cumple que $f(x).g(x)$ es un infinitésimo en cierto entorno reducido de a.

Solución

Que $f(x)$ sea un infinitésimo en el entorno reducido de a es equivalente a afirmar que

$$\lim_{x\to a} f(x)=0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\,\exists\delta(\varepsilon)>0\,/\,x\in D_f:[0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)|<\varepsilon] \qquad (11)$$

Si una función $g(x)$ está acotada en ese entorno, verifica que

$$\forall x \in E^*(a;\delta) \quad \exists K \in \boldsymbol{R}^+ \,/\, |g(x)| < K \tag{12}$$

Esto significa que si elegimos cualquier x del entorno ya citado, se cumplen (11) y (12) a la vez, lo que simbolizamos así:

$$\forall x \in E^*(a;\delta): \left|f(x)\right| < \varepsilon \wedge \left|g(x)\right| < K \Rightarrow \left|f(x)\right| . \left|g(x)\right| < \underbrace{\varepsilon K}_{\varepsilon_1} \Rightarrow \left|f(x)g(x)\right| < \varepsilon_1$$

y ésta es la definición de $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$, con lo que $f(x)\, g(x)$ es infinitésimo en a

5. Demostrar que si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = l$ y en un entorno reducido de a existe una función $h(x)$ tal que $f(x) \le h(x) \le g(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to a} h(x) = l$

Solución

Como f y g tienden a l cuando x tiende a a, utilizando la definición se puede escribir así:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists \delta_1(\varepsilon_1) > 0 \,/\, x \in D_f : [0 < \left|x-a\right| < \delta_1 \Rightarrow \left|f(x) - l\right| < \varepsilon_1] \tag{13}$$

$$\lim_{x\to a} g(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon_2 > 0 \quad \exists \delta_2(\varepsilon_2) > 0 \,/\, x \in D_g : [0 < \left|x-a\right| < \delta_2 \Rightarrow \left|g(x) - l\right| < \varepsilon_2] \tag{14}$$

Además la función h, según el enunciado, cumple:

$$\forall x \in E^*(a;\delta_3):\ f(x) \le h(x) \le g(x) \tag{15}$$

Es deseable que se cumplan las tres desigualdades que simultáneamente afectan a las funciones. Para ello se requiere que, de los tres entornos concéntricos se tome la región común a ellos, será pues el entorno reducido centrado en a y de radio menor o igual que el menor de los tres dados. Es decir, elegimos $0 < \delta \le \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, y se cumple que

$$\forall x \in E^*(a;\delta): \begin{cases} \left|f(x) - l\right| < \varepsilon_1 \Rightarrow l - \varepsilon_1 < f(x) < l + \varepsilon_1 \\ \left|g(x) - l\right| < \varepsilon_2 \Rightarrow l - \varepsilon_2 < g(x) < l + \varepsilon_2 \\ f(x) \le h(x) \le g(x) \end{cases} \tag{16}$$

estas tres desigualdades pueden reescribirse así:

$$l - \varepsilon_1 < f(x) \le h(x) \le g(x) < l + \varepsilon_2$$

de donde resulta:

$$l-\varepsilon_1 < h(x) < l+\varepsilon_2 \Rightarrow -\varepsilon_1 < h(x)-l < \varepsilon_2$$

Para poder escribir esta desigualdad como un módulo, es necesario que el centro se encuentre entre dos números opuestos; esto se consigue llamando $\varepsilon = \max(\varepsilon_1;\varepsilon_2)$

$$-\varepsilon \le -\varepsilon_1 < h(x)-l < \varepsilon_2 \le \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < h(x)-l < \varepsilon \Rightarrow |h(x)-l| < \varepsilon$$

y esto es la definición del $\lim_{x\to a} h(x) = l$

6. Si $\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \exists \phi(x) = f(x) - l \,/\, \lim_{x\to a} \phi(x) = 0$

Solución

A partir de la definición de límite

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 / x \in D_f : [0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon]$$

Llamando $\phi(x) = f(x) - l$, la expresión encerrada entre corchetes queda así: $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |\phi(x)| < \varepsilon$ y ésta es la definición del $\lim_{x\to a}\phi(x) = 0$.

7. Pruebe que si $\exists \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} \wedge \lim_{x\to a} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = 0$

Solución

Como por hipótesis existe el $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$ (¡lo que significa que l es finito!), usando la propiedad anterior se tendrá que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = l + \phi(x) / \lim_{x\to a} \phi(x) = 0 \Rightarrow f(x) = g(x).[l+\phi(x)]$

Si se aplica límite a esta última igualdad, resulta:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\{g(x).[l+\phi(x)]\} = \lim_{x\to a} g(x) \lim_{x\to a}[l+\phi(x)] = 0$$

porque $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ por hipótesis y $\lim_{x\to a}\phi(x) = 0$ por la propiedad, luego $\lim_{x\to a}[l+\phi(x)] = l$, el resultado es el producto $0.l = 0$ ya que l es finito.

8. a) Si $\forall x \in E^*(2;\delta):\left|f(x)-5\right| \leq 4(x-2)^3$, calcule $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

b) Si $\forall x \in \boldsymbol{R}$: $f^4(x) < 256$, calcule $\lim\limits_{x\to 2\pi}\left|f(x)tgx\right|$

Solución

a) Como $\forall x \in E^*(2;\delta):\left|f(x)-5\right| \leq 4(x-2)^3 \Rightarrow 5-4(x-2)^3 \leq f(x) \leq 5+4(x-2)^3$

Usando el teorema de intercalación (o del *sandwich*) que se probó en el ejemplo 5, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2}[5-4(x-2)^3]=5\\ \lim\limits_{x\to 2}[5+4(x-2)^3]=5\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=5$$

b) Como $\forall x \in \boldsymbol{R}$: $f^4(x) < 256 \Rightarrow \left|f(x)\right| < 4$ con lo que es posible asegurar que la función *f* está acotada, entonces:

$\lim\limits_{x\to 2\pi}\left|f(x)tgx\right| = \lim\limits_{x\to 2\pi}\left|f(x)\right|\left|tgx\right| = 0$ ya que es el producto de una función acotada por un infinitésimo, dado que $\lim\limits_{x\to 2\pi} tgx = 0$ (esta propiedad fue probada en el ejemplo 6).

9. Dada $f(x) = 2+\dfrac{1}{x}$

a) Calcule $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$

b) ***Ejemplo.*** Halle los conjuntos

$$A=\left\{x \in \boldsymbol{R}^+ / \left|f(x)-2\right| < 0,0001\right\} \text{ y } B=\left\{x \in \boldsymbol{R}^- / \left|f(x)-2\right| < 0,0001\right\}$$

Solución

Es preciso recordar las definiciones que surgen cuando $x \to \infty$. La primera que se menciona se refiere al caso en que el resultado es finito:

$$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists k(\varepsilon) >> 0 / x \in D_f :[\left|x\right| > k \Rightarrow \left|f(x)-l\right| < \varepsilon]$$

9. Nota

El símbolo >> se lee "mucho mayor".

La segunda es aquélla correspondiente al caso de límite infinito:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall K>>0\ \exists k(K)>>0 / x\in D_f :[|x|>k \Rightarrow |f(x)|>K]$$

Observe que en ambas definiciones aparece la expresión $|x|>k$ que equivale a $x > k$ o $x < -k$, la primera de ellas considera el caso en que x se hace tan grande (y positivo) como se quiera (ello equivale a $x\to+\infty$); la segunda, $x < -k$, por ende corresponde al caso $x\to-\infty$.

Otra observación importante, en relación a la segunda definición, es que el resultado del límite sea ∞ no alude al signo; se refiere a que las imágenes de la función, **en módulo**, se hacen cada vez más grandes.

El ejercicio propuesto es:

a) Como $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ los tres límites tienen el mismo resultado: $\lim_{x\to\infty}(2+\frac{1}{x})=2$

b) Para hallar los conjuntos es necesario resolver la inecuación:

$$|f(x)-2|<0,0001\Rightarrow\left|2+\frac{1}{x}-2\right|=\left|\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{|x|}<0,0001\Rightarrow|x|>10^4\Rightarrow x>10^4\vee x<-10^4$$

En la última expresión se tiene que $x>10^4$ corresponde al conjunto A, en tanto que el otro es el conjunto B.

$A = (10^4;+\infty\ )$ $\qquad B = (-\infty\,;\text{-}10^4)$

10. Calcule los siguientes límites:

a) ***Ejemplo*** $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5+2x}{4x-2x^2+1}$

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x^4+2x}{4x-2x^2+1}$

c) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5+2x}{4x^3-2x^2+1}$

d) $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$

e) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1+\sqrt[3]{5+x^3}}{4x-1}$

f) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1+\sqrt[3]{5+x^6}}{4x-1}$

g) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1+\sqrt[3]{5+x^3}}{4x-1}$

h) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2-\sqrt{16x^2+7x}}{\sqrt{9x^2-4}+4x+5}$

i) ***Ejemplo*** $\lim\limits_{x\to\infty}[\sqrt{6-5x+4x^2}-2x+3]$

Solución

a) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5+2x}{\underbrace{4x-2x^2+1}_{\text{factor común } x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(3-\frac{5}{x^2}+\frac{2}{x})}{\underbrace{x^2(\frac{4}{x}-2+\frac{1}{x^2})}_{\text{simplificando}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{5}{x^2}+\frac{2}{x}}{\frac{4}{x}-2+\frac{1}{x^2}}=-\frac{3}{2}$$

Téngase en cuenta que $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{k}{x^n}=0 \quad \forall k\neq 0, \forall n\in \boldsymbol{N}$

Pero, ¿por qué sacamos factor común x^2? En toda indeterminación del tipo $\frac{\to\infty}{\to\infty}$ se debe buscar qué términos se "agrandan más" cuando $x\to\infty$. Observe que las únicas expresiones afectadas por $x\to\infty$ son x y x^2, y, de ambas, es x^2 quien crece más rápido; luego, al extraerlo factor común en numerador y denominador, se cancelan y así se elimina la indeterminación.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x^4+2x}{4x-2x^2+1}$ Las expresiones afectadas por $x\to\infty$ son x, x^2 y x^4, de ellas, quien crece más rápidamente es x^4; por esa razón se la extrae como factor común en numerador y denominador:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x^4+2x}{4x-2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4(\frac{3}{x^2}-5+\frac{2}{x^3})}{x^4(\frac{4}{x^3}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4})}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x^2}-5+\frac{2}{x^3}}{\frac{4}{x^3}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}=-\infty$$

ya que el numerador tiende a –5 y el denominador a cero.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-5+2x}{4x^3-2x^2+1}$ En este caso es x^3 el que crece más rápidamente, se lo extrae factor común, como se procedió anteriormente:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5+2x}{4x^3-2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(\frac{3}{x}-\frac{5}{x^3}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^3\left(4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{5}{x^3}+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}=0$$

dado que el numerador tiende a cero y el denominador a 4.

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$ Nótese que el numerador es un polinomio de grado 50, al igual que el denominador, x^{50} será la expresión que más rápido tiende a ∞, se calcula así:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{50}\,\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{x^{50}}}{x^{50}\,\frac{(2x+1)^{50}}{x^{50}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{(2x-3)^{20}}{x^{20}}\,\frac{(3x+2)^{30}}{x^{30}}}{\frac{(2x+1)^{50}}{x^{50}}}=$$

teniendo en cuenta que $x^{50}=x^{20}.x^{30}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2x-3}{x}\right)^{20}\left(\frac{3x+2}{x}\right)^{30}}{\left(\frac{2x+1}{x}\right)^{50}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2-\frac{3}{x}\right)^{20}\left(3+\frac{2}{x}\right)^{30}}{\left(2+\frac{1}{x}\right)^{50}}=\frac{2^{20}.3^{30}}{2^{50}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$$

distribuyendo

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1+\sqrt[3]{5+x^3}}{4x-1}$ Si se extrae factor común x^3 dentro de la raíz, se tiene:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1+\sqrt[3]{5+x^3}}{4x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1+\sqrt[3]{x^3\left(\frac{5}{x^3}+1\right)}}{4x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1+x.\sqrt[3]{\frac{5}{x^3}+1}}{4x-1}=$$

si ahora se extrae factor común x, quedará así:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(2-\frac{1}{x}+\sqrt[3]{\frac{5}{x^3}+1}\right)}{x\left(4-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}+\sqrt[3]{\frac{5}{x^3}+1}}{4-\frac{1}{x}}=\frac{2+1}{4}=\frac{3}{4}$$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-1+\sqrt[3]{5+x^6}}{4x-1}$ Extrayendo factor común dentro de la raíz, resulta:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1+\sqrt[3]{5+x^6}}{4x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-1+\sqrt[3]{x^6\left(\dfrac{5}{x^6}+1\right)}}{4x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-1+x^2.\sqrt[3]{\dfrac{5}{x^6}+1}}{4x-1} =$$

Si se extrae factor común x^2 en numerador y denominador, resulta:

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\sqrt[3]{\dfrac{5}{x^6}+1}\right)}{x^2\left(\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\sqrt[3]{\dfrac{5}{x^6}+1}}{\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}} = +\infty$$

porque el numerador tiende a 1 y el denominador a 0.

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-1+\sqrt[3]{5+x^3}}{4x-1}$ Si se extrae factor común x^2 en numerador y denominador:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-1+\sqrt[3]{5+x^3}}{4x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(2-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\sqrt[3]{5+x^3}}{x^2}\right)}{x^2\left(\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\dfrac{1}{x^2}+\sqrt[3]{\dfrac{5+x^3}{x^6}}}{\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2-\dfrac{1}{x^2}+\sqrt[3]{\dfrac{5}{x^6}+\dfrac{1}{x^3}}}{\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}} = +\infty$$ porque el numerador tiende a 2 y el denominador a 0.

h) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+2-\sqrt{16x^2+7x}}{\sqrt{9x^2-4}+4x+5}$ Se extrae factor común x^2 dentro de las raíces:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+2-\sqrt{16x^2+7x}}{\sqrt{9x^2-4}+4x+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x+2-\sqrt{x^2\left(16+\dfrac{7}{x}\right)}}{\sqrt{x^2\left(9-\dfrac{4}{x^2}\right)}+4x+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x+2-|x|\sqrt{16+\dfrac{7}{x}}}{|x|\sqrt{9-\dfrac{4}{x^2}}+4x+5} =$$

y nuevamente extraemos factor común, en este caso $|x|$, se tiene [4]:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|\left(3\frac{x}{|x|}+\frac{2}{|x|}-\sqrt{16+\frac{7}{x}}\right)}{|x|\left(\sqrt{9-\frac{4}{x^2}}+4\frac{x}{|x|}+\frac{5}{|x|}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3\frac{x}{|x|}+\frac{2}{|x|}-\sqrt{16+\frac{7}{x}}}{\sqrt{9-\frac{4}{x^2}}+4\frac{x}{|x|}+\frac{5}{|x|}}=$$

Recordando que la función signo es:

$sgx=\frac{x}{|x|}=\begin{cases}1 & \text{si} \quad x>0\\ -1 & \text{si} \quad x<0\end{cases}$ por tal razón es necesario calcular dos límites; por un lado cuando $x\to+\infty$ y por el otro, cuando $x\to-\infty$, así queda:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3\frac{x}{|x|}+\frac{2}{|x|}-\sqrt{16+\frac{7}{x}}}{\sqrt{9-\frac{4}{x^2}}+4\frac{x}{|x|}+\frac{5}{|x|}}=\begin{cases}\frac{3-4}{3+4}=-\frac{1}{7} & \text{si} \quad x\to+\infty\\ \frac{-3-4}{3-4}=7 & \text{si} \quad x\to-\infty\end{cases}$$

i) $\lim\limits_{x\to\infty}[\sqrt{6-5x+4x^2}-2x+3]=\lim\limits_{x\to\infty}[\sqrt{6-5x+4x^2}-(2x-3)]$

Observe que el primer término tiende siempre a $+\infty$, pero el paréntesis dependerá de $x\to+\infty$ o bien $x\to-\infty$, es decir: $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3)=+\infty \wedge \lim\limits_{x\to-\infty}(2x-3)=-\infty$ de donde, el límite de la resta **no es indeterminado** cuando $x\to-\infty$, pero si $x\to+\infty$ tendremos una indeterminación del tipo $(\to\infty)-(\to\infty)$, que no es la primera vez que se nos presenta. En este caso, para transformarlo en un cociente **conviene** multiplicar y dividir por el conjugado.

El ejemplo nos queda así:

$$\lim_{x\to\infty}[\sqrt{6-5x+4x^2}-(2x-3)]=\begin{cases}+\infty-(-\infty)=+\infty & \text{si} \quad x\to-\infty\\ A \quad \text{si} \quad x\to+\infty\end{cases}$$

donde calcularemos A de la siguiente manera:

$$A=\lim_{x\to+\infty}[\sqrt{6-5x+4x^2}-(2x-3)]=\lim_{x\to+\infty}\frac{[\sqrt{6-5x+4x^2}-(2x-3)][\sqrt{6-5x+4x^2}+(2x-3)]}{[\sqrt{6-5x+4x^2}+(2x-3)]}=$$

[4] ¿Recuerda por qué se debe tomar x en módulo?

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{6-5x+4x^2-(2x-3)^2}{\sqrt{6-5x+4x^2}+(2x-3)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6-5x+4x^2-(4x^2-12x+9)}{\sqrt{6-5x+4x^2}+2x-3} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{7x-3}{\sqrt{6-5x+4x^2}+2x-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{7x-3}{\sqrt{x^2\left(\frac{6}{x^2}-\frac{5}{x}+4\right)}+2x-3} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{7x-3}{|x|\sqrt{\frac{6}{x^2}-\frac{5}{x}+4}+2x-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|(7\frac{x}{|x|}-\frac{3}{|x|})}{|x|\left(\sqrt{\frac{6}{x^2}-\frac{5}{x}+4}+2\frac{x}{|x|}-\frac{3}{|x|}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{7\frac{x}{|x|}-\frac{3}{|x|}}{\sqrt{\frac{6}{x^2}-\frac{5}{x}+4}+2\frac{x}{|x|}-\frac{3}{|x|}} = \frac{7}{2+2} = \frac{7}{4}$$

En síntesis: $\lim\limits_{x\to\infty}[\sqrt{6-5x+4x^2}-2x+3] = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad x\to-\infty \\ \frac{7}{4} & \text{si} \quad x\to+\infty \end{cases}$

11. Determine los coeficientes a, b, c…, si es posible, de modo que

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+x^2-2x}{x-1}+ax+b\right)=0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2-5x+6}+2ax-3b)=0$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2+7x-5}+3ax+5b)=0$

d) $f(x)=\begin{cases} bx & x\le-2 \\ x^2+ax & -2<x<1 \\ a-bx & x\ge1 \end{cases}$ si $\exists \lim\limits_{x\to-2} f(x) \;\wedge\; \exists \lim\limits_{x\to1} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^3+x^2-6x}{6+x^3-7x}$ resulte ser un cociente de infinitésimos

f) siendo $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{2x+d}$ si se sabe que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=3 \;\wedge\; \lim\limits_{x\to2}|f(x)|=\infty$

Solución

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x^2-2x}{x-1}+ax+b\right)=0$ si sacamos común denominador nos quedará una indeterminación del tipo $\dfrac{\to\infty}{\to\infty}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x^2-2x}{x-1}+ax+b\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3+x^2-2x+ax^2-ax+bx-b}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+a)x^2+(b-2-a)x+(3-b)}{x-1}=0$$

Si fuese x^2 la expresión que crece más rápidamente, el límite daría infinito; luego, como esto no ocurre, el término en x^2 no puede aparecer, razón por la cual afirmamos que su coeficiente es 0. Además, si numerador y denominador fuesen de igual grado, el resultado sería una constante no nula, lo que no puede ocurrir, con lo que su coeficiente es 0. Pero si el numerador fuese una constante, como el denominador tiende a infinito, el resultado sería el pedido.

Por tanto tenemos que:

$$\begin{cases} 1+a=0\Rightarrow a=-1 \\ \qquad\qquad\quad\Downarrow \\ b-2-a=0\Rightarrow b=2+a=2+(-1)=1 \end{cases}$$

b) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2-5x+6}+2ax-3b)=0$

Si $a>0$ el límite daría $+\infty$, ya que la raíz tiende a $+\infty$ y la expresión lineal, con pendiente positiva, tiende a $+\infty$ cuando x tiende a $+\infty$. Por tanto, esta opción debe ser descartada. Con ello aseguramos que $a<0$, quedando una indeterminación del tipo $(\to\infty)-(\to\infty)$.

Multiplicamos y dividimos por el conjugado:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{[\sqrt{4x^2-5x+6}+(2ax-3b)][\sqrt{4x^2-5x+6}-(2ax-3b)]}{\sqrt{4x^2-5x+6}-(2ax-3b)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-5x+6-(2ax-3b)^2}{\sqrt{4x^2-5x+6}-2ax+3b}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-5x+6-4a^2x^2+12abx-9b^2}{\sqrt{4x^2-5x+6}-2ax+3b}==\lim_{x\to+\infty}\frac{4(1-a^2)x^2+(12ab-5)x+6-9b^2}{\sqrt{4x^2-5x+6}-2ax+3b}=0$$

Para que esto ocurra, el denominador debe tender a infinito con mayor velocidad que el numerador, por ello tiene que cumplirse:

$$\begin{cases} a<0 \\ 1-a^2=0 \Rightarrow |a|=1 \wedge a<0 \Rightarrow a=-1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Downarrow \\ 12ab-5=0 \Rightarrow 12ab=5 \Rightarrow b=\dfrac{5}{12a}=-\dfrac{5}{12} \end{cases}$$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2+7x-5}+3ax+5b)=0$

Con idéntico razonamiento al ejercicio anterior, descartamos $a<0$ ya que en este caso el resultado sería infinito. Luego $a>0$ y tendremos:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{[\sqrt{9x^2+7x-5}+(3ax+5b)][\sqrt{9x^2+7x-5}-(3ax+5b)]}{\sqrt{9x^2+7x-5}-(3ax+5b)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{9x^2+7x-5-(3ax+5b)^2}{\sqrt{9x^2+7x-5}-(3ax+5b)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{9x^2+7x-5-9a^2x^2-30abx-25b^2}{\sqrt{9x^2+7x-5}-3ax-5b}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{9(1-a^2)x^2+(7-30ab)x-5-25b^2}{\sqrt{9x^2+7x-5}-3ax-5b}=0$$

Para que esto ocurra, el denominador debe tender a infinito con mayor velocidad que el numerador; por ello tiene que cumplirse:

$$\begin{cases} a>0 \\ 1-a^2=0 \Rightarrow |a|=1 \wedge a>0 \Rightarrow a=1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Downarrow \\ 7-30ab=0 \Rightarrow 30ab=7 \Rightarrow b=\dfrac{7}{30a}=\dfrac{7}{30} \end{cases}$$

d) $f(x)=\begin{cases} bx & x\le -2 \\ x^2+ax & -2<x<1 \\ a-bx & x\ge 1 \end{cases}$ si $\exists\lim\limits_{x\to-2}f(x) \;\wedge\; \exists\lim\limits_{x\to1}f(x)$

Para que $\exists\lim\limits_{x\to-2}f(x)$ debe ocurrir que los límites laterales sean iguales, análogamente para $x\to1$. De esa manera obtendremos:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} bx = \lim\limits_{x \to -2^+} (x^2 + ax) \Rightarrow -2b = 4 - 2a \Rightarrow a = 2 + b = 2 + (-1) = 1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Uparrow \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (a - bx) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 + ax) \Rightarrow a - b = 1 + a \Rightarrow b = -1 \end{cases}$$

e) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^3 + x^2 - 6x}{6 + x^3 - 7x}$ resulte ser un cociente de infinitésimos.

Para que esto ocurra a debe ser raíz del numerador y denominador, de modo que si los factorizamos tendremos:

$$x^3 + x^2 - 6x = x(x^2 + x - 6) = x(x - 2)(x + 3)$$

$$6 + x^3 - 7x = (x - 1)(x^2 + x - 6) = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$$

Luego, las raíces comunes son 2 y –3, estos son los valores que puede asumir a.

f) Siendo $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{2x + d}$ se sabe que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 3 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x \to 2} |f(x)| = \infty$

Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 3$ significa que numerador y denominador deben ser de igual grado, de donde $a = 0$, nos queda entonces

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{2x + d} = \lim_{x \to \infty} \frac{bx + c}{2x + d} = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x}\left(b + \frac{c}{x}\right)}{\cancel{x}\left(2 + \frac{d}{x}\right)} = \frac{b}{2} = 3 \Rightarrow b = 6$$

luego

$$f(x) = \frac{6x + c}{2x + d} \Rightarrow \lim_{x \to 2} \left| \frac{6x + c}{2x + d} \right| = \left| \lim_{x \to 2} \frac{6x + c}{2x + d} \right| = \infty \Rightarrow \begin{cases} 12 + c \neq 0 \Rightarrow c \neq -12 \\ 4 + d = 0 \Rightarrow d = -4 \end{cases}$$

Con lo que $f(x) = \dfrac{6x + c}{2x - 4} = \dfrac{6x + c}{2(x - 2)} \wedge c \neq -12$

7. UN CASO PARTICULAR DE FUNCIONES: LAS SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

8. Definición

Una ***sucesión*** es una función $f\colon \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{R}$, donde N puede ser el conjunto de los naturales o los naturales con el cero, o bien, cualquier conjunto infinito incluido en los naturales, tal que $a_n = f(n)$, $n \in \boldsymbol{N}$, a_n recibe el nombre de ***término general de la sucesión*** y es habitual indicarlo con letras minúsculas acompañadas de un subíndice, por ejemplo: $f\colon \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{R} \,/\, a_n = f(n)$, de esta manera $a_1 = f(1), a_2 = f(2), a_3 = f(3)$...

El conjunto de todas las imágenes es la sucesión y la simbolizamos así:

$$\underbrace{(a_n)_{n\in N}}_{\in R} = (a_1, a_2, a_3, a_4, ...)$$

Se lee: la sucesión de término general $a_n \in R$ con dominio en los naturales. Debe tenerse en cuenta que $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$ es un conjunto ordenado.

EJEMPLOS

1) Sea la sucesión $\left(\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; \frac{3}{4}; -\frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \ldots\right)$, cuyo término general puede escribirse de distintas formas; veamos dos de ellas:

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}, \quad n \in N \qquad \vee \qquad b_n = (-1)^n \frac{n+1}{n+2}, \quad n \in N_0$$

2) La sucesión de término general $c_n = \cos n\pi$, $n \in N_0$, estará representada por $(1, -1, 1, -1, \ldots)$. Nótese que $c_0 = 1 \wedge c_2 = 1$ no son los mismos, ya que el c_0 ocupa el primer lugar y el c_2 el tercer lugar.

En el primer ejemplo fueron presentados los primeros términos de la sucesión, mientras que en el segundo se da el término general. Existe otra manera de plantear la forma de la sucesión: definiendo el término general como función del anterior o de los anteriores, denominadas ***sucesiones definidas por recurrencia***. Veamos el siguiente caso:

3) $(d_n)_{n\in N} \,/\, d_n = \begin{cases} 1 & si \quad n = 1 \vee n = 2 \\ d_{n-1} + d_{n-2} & si \quad n > 2 \end{cases}$ Esta sucesión se conoce con el nombre de **sucesión de Fibonacci**[5]. Los dos primeros números valen 1 y los siguientes se obtienen sumando los dos anteriores:

$$(1, 1, \underbrace{2}_{1+1}, \underbrace{3}_{1+2}, \underbrace{5}_{2+3}, \underbrace{8}_{3+5}, \underbrace{13}_{5+8}, \underbrace{21}_{8+13}, ...)$$

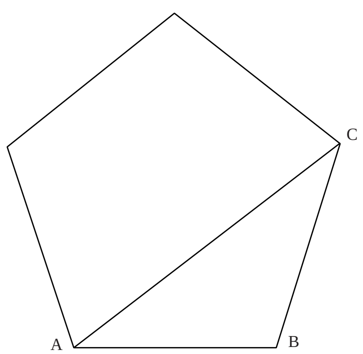
[5] Puede ser que Ud. haya leído la novela *El Código da Vinci*, de Dan Brown y allí la haya descubierto.

7.1. Un poco de historia

Abramos un pequeño paréntesis para hacer un poco de historia. El famoso matemático italiano Leonardo de Pisa (1170-1240?), más conocido por su apodo de *Fibonacci* (abreviatura de *filius Bonacci*, o sea, hijo de Bonacci) escribe en 1202 la obra *Liber Abacci* (Libro del Ábaco) que llega a nosotros en una segunda versión que data del año 1228. Es un voluminoso tratado que contiene casi todos los conocimientos algebraicos y aritméticos de ese tiempo y desempeñó un papel notable en el desarrollo de la Matemática en Europa occidental durante varios siglos. En particular, es precisamente a través de este libro que los europeos, que usaban los números romanos, conocieron las cifras arábigas usadas actualmente por todos nosotros. El material de *Liber Abacci* es presentado a partir de numerosos problemas que forman una parte considerable de la obra; en particular vale la pena mencionar uno, que aparece en las páginas 123 y 124 del manuscrito de 1228:

¿Cuántas parejas de conejos nacen, en el transcurso de un año, de una pareja inicial? Si se coloca una pareja de conejos en un lugar totalmente cercado por muros para conocer cuántas parejas de conejos nacerían en el curso de un año, teniendo en cuenta que la naturaleza de los conejos es tal que cada pareja produce otra pareja al cabo de un mes y las conejas pueden parir a los dos meses de haber nacido, se tiene entonces que la primera pareja da descendencia en el primer mes, multiplíquese por dos y resultan ya dos parejas; de ellas, la primera pareja tiene cría también al mes siguiente de modo que en el segundo mes resultan tres parejas; de ellas, al mes siguiente dos parejas darán descendencia de modo que en el tercer mes... y así sucesivamente.

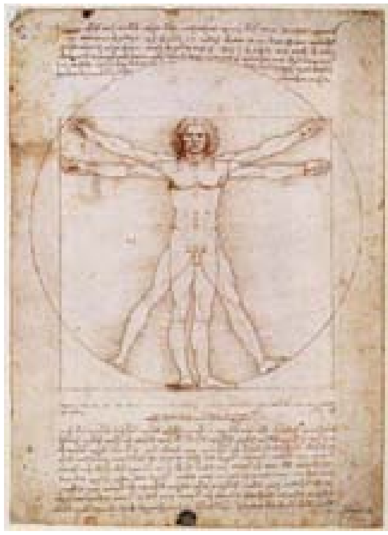
Pasando de los conejos a los números es que Fibonacci presenta en su tratado de la sucesión que lleva su nombre.



Es interesante mencionar otras particularidades:

Los cocientes entre dos números consecutivos de la sucesión de la forma $\frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \ldots$, se aproximan más y más al *número áureo* (1,61803...). A éste se le conoce también con el nombre *número de oro*[1] y su valor exacto es un número irracional $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803\ldots$, obtenido por los griegos al hallar la relación entre una diagonal de un pentágono (como la AC, por ejemplo) y uno de sus lados (como el AB).

En *el hombre ideal* de Leonardo da Vinci (1452-1519), el cociente entre el lado del cuadrado y el radio de la circunferencia que tiene por centro el ombligo es el número de oro.



Los egipcios ya conocían esta proporción y la usaron en la arquitectura de la pirámide de Keops (2600 años antes de Cristo). Aparece además en cuadros del pintor español Salvador Dalí (1904-1989) y en la pintura *El nacimiento de Venus* del italiano Sandro Botticelli (1444-1510). Esta razón también la usaron en sus producciones otros artistas del Renacimiento (siglos XV-XVI). En arquitectura no sólo tenemos el ejemplo de los egipcios, también los hay en España, en la construcción de la Alhambra de Granada, llevada a cabo entre los años 1230 y 1354, durante el reinado de los moros, y en edificios renacentistas como El Escorial, cerca de Madrid, construido en el lapso 1563-1584, por sólo nombrar los ejemplos más conocidos.

Esta sucesión de números aparece en la naturaleza en formas curiosas. Las placas o escamas de un ananá aparecen en espiral alrededor del vértice. Si contamos el número de espirales de un ananá, encontraremos que siempre es igual a uno de los números de la sucesión de Fibonacci. También aparece en el estudio de las leyes mendelianas de la herencia, en la formación de la concha de algunos moluscos...

1 El nombre de **número de oro** se debe a Fibonacci.

7.2. Representación gráfica de sucesiones de números reales

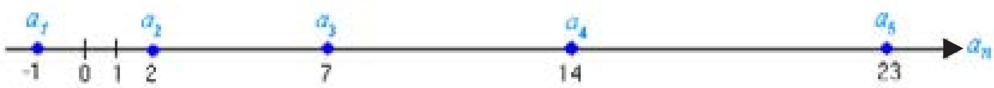
Al tratarse de funciones, las sucesiones pueden representarse en un sistema de ejes cartesianos; en el eje de abscisas están ubicados los números naturales (dominio) y en el de ordenadas se hallan los términos de la sucesión. Nótese que de acuerdo con esta forma de representación, el gráfico de la sucesión es una *nube de puntos* (¿por qué?)
Otra forma de representar una sucesión es a través de la determinación de los términos de la misma sobre el eje real, tal como lo muestran los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS

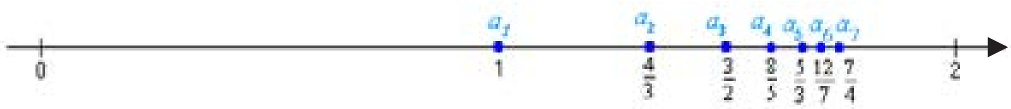
Representa gráficamente las siguientes sucesiones de término general dado en cada caso:

1. $a_n = n^2 - 2$, con $n \geq 1$ señalando los primeros cinco términos.

Los primeros términos son: $a_1 = -1$ **;** $a_2 = 2$ **;** $a_3 = 7$ **;** $a_4 = 14$ **;** $a_5 = 23$
En la recta real se representan los puntos correspondientes de cada término de la sucesión:

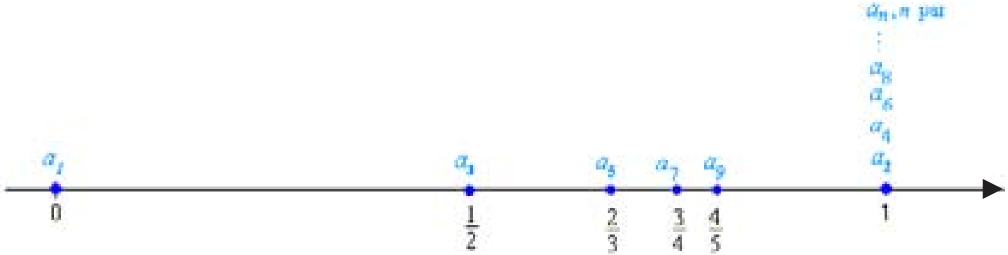


2. ——, los primeros siete términos son: 1 **;** $\frac{4}{3}$ **;** $\frac{3}{2}$ **;** $\frac{8}{5}$ **;** $\frac{5}{3}$ **;** $\frac{12}{7}$ **;** $\frac{7}{4}$ **; ...**

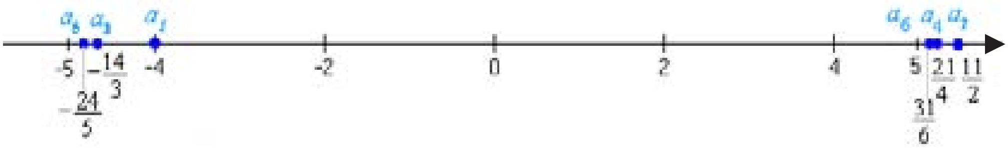


3. $a_n = \dfrac{2^{n+1}}{3^n}$, los primeros seis términos son: $\frac{4}{3}$ **;** $\frac{8}{9}$ **;** $\frac{16}{27}$ **;** $\frac{32}{81}$ **;** $\frac{64}{243}$ **;** $\frac{128}{729}$ **; ...**

4. $a_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n+1}$ $\quad 0\,;1\,;\dfrac{1}{2}\,;1\,;\dfrac{2}{3}\,;1\,;\dfrac{3}{4}\,;1\,;\dfrac{4}{5}\,;\ldots$



5. $a_n = \begin{cases} \dfrac{1-5n}{n} & \text{si } n \text{ es par} \\ \dfrac{1+5n}{n} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$ $\quad -4\,;\dfrac{11}{2}\,;-\dfrac{14}{3}\,;\dfrac{21}{4}\,;-\dfrac{24}{5}\,;\dfrac{31}{6}\,;\ldots$



Destaquemos ciertas sucesiones que resultan especiales por sus características[6]:

9. *Definiciones*

i - La sucesión (a_n) está **acotada superiormente** $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbf{R} / a_n \leq M \quad \forall n$

ii - La sucesión $(\quad)$ está **acotada inferiormente** $\Leftrightarrow \exists L \in \mathbf{R} / a_n \geq L \quad \forall n$

iii - La sucesión (a_n) está **acotada** $\Leftrightarrow \exists K \in \mathbf{R}^+ / |a_n| \leq K \quad \forall n$

Por ejemplo, la sucesión de Fibonacci está acotada inferiormente ya que todos sus términos son no negativos; en el segundo ejemplo, anterior a Fibonacci, la sucesión de término general $c_n = \cos n\pi,\ n \in \mathbf{N}_0$, determina una sucesión acotada ya que $|c_n| \leq 5$ (ó 3, ó 19, ó …)

iv - La sucesión (a_n) es **monótona creciente** $\Leftrightarrow \forall n : a_n \leq a_{n+1}$

v - La sucesión (a_n) es **monótona decreciente** $\Leftrightarrow \forall n : a_n \geq a_{n+1}$

vi - La sucesión (a_n) es **estrictamente creciente** $\Leftrightarrow \forall n : a_n < a_{n+1}$

vii - La sucesión (a_n) es **estrictamente decreciente** $\Leftrightarrow \forall n : a_n > a_{n+1}$

---

6 Compare las definiciones con las dadas oportunamente para las funciones de $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

Obsérvese que si una sucesión es estrictamente creciente (o decreciente), también es monótona creciente (o decreciente).
Por ejemplo, la sucesión de Fibonacci es monótona creciente.

Cuando se inició el estudio de las funciones reales de variable real interesó averiguar qué ocurría con las imágenes de la función cuando $x \to a$, siendo a cualquier número real o, eventualmente, infinito. Cuando la función de la que hablamos es una sucesión, la variable n toma valores naturales, no tiende a ellos; en este caso interesa saber qué ocurre para n "suficientemente grande", esto es, qué le ocurre a la sucesión si $n \to \infty$ (recordar que al ser n natural sólo puede ser positivo).

10. *Definición*

$(a_n)_{n\in N}$ es **convergente** $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \boldsymbol{N} / n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

se abrevia CV ¡límite finito!

Si esto no ocurre, la sucesión **no converge**, y entonces puede darse que tenga límite infinito o que el límite no sea único (oscile entre dos más valores).

7.3. Aspecto práctico de la definición

1. Dado arbitrariamente un entorno de a de radio ε se verifica que "fuera" de dicho entorno existen, a lo sumo, un número finito de términos de la sucesión $(a_n)_{n\in N}$
2. Una sucesión no tiene límite $a \in \boldsymbol{R}$, si existe un entorno de a tal que "fuera" de dicho entorno existen infinitos términos de la sucesión, o lo que es equivalente, existe un $\varepsilon_0 > 0$ tal que $|a_n - a| \geq \varepsilon_0$ para infinitos valores de $n \in \boldsymbol{N}$.

EJEMPLOS

$$(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right), \quad (b_n) = (2n-1), \quad (c_n) = \left((-1)^{n+1}\right), \quad \forall \quad n \in \boldsymbol{N}$$

Para la primera: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{n}\right)$ es CV

Para la segunda: $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-1) = \infty \Rightarrow (2n-1)$ no CV, se dice que **diverge** (se abrevia DV), nótese que el límite es infinito.

Para la tercera:

$$c_n = (-1)^{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \ \text{impar} \\ -1 & \text{si} \quad n \ \text{par} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_{2k-1} = 1 \\ c_{2k} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} c_{2k-1} = 1 \\ \lim\limits_{k\to\infty} c_{2k} = -1 \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} c_n \Rightarrow \text{no CV}$$

En este caso, la sucesión no converge, o bien, la sucesión **oscila**.

Intuitivamente se puede advertir que si una sucesión es monótona no puede ser oscilante, dado que crece o decrece permanentemente (CV o DV).

Sugerencia: Cuestiónese si una sucesión que no esté acotada puede ser oscilante.

11. *Definición*

(a_n) es **divergente** $\Leftrightarrow \underset{n\to\infty}{\text{lím}}\, a_n = \infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbf{R}_0^+ \ \exists n_0 \in \mathbf{N} / n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| > K$

10. Nota

Para el cálculo de límites de sucesiones se puede utilizar el álgebra de límites cuando la variable tiende a infinito.

Propiedades

1. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = l \wedge \exists n_0 / \forall n \geq n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$ (teorema de intercalación).

2. Si $\exists n_0 / \forall n \geq n_0 : 0 \leq a_n \leq c_n \wedge (a_n)_{n\in N}$ DV $\Rightarrow (c_n)_{n\in N}$ DV

Si la sucesión $(s_n)_{n\in N}$ es monótona creciente (o decreciente) y está acotada superiormente (o inferiormente), entonces es convergente y su límite es el supremo (o el ínfimo). Este enunciado se conoce con el nombre de

3. *Teorema de Weierstrass*

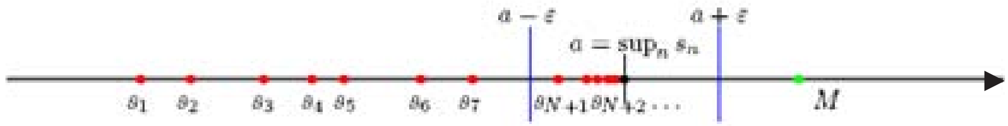
a. Sea $(s_n)_{n\in N}$ una sucesión real monótona creciente. Entonces $(s_n)_{n\in N}$ es convergente si y sólo si está acotada superiormente, en cuyo caso

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{s_n : n \in N\}$$

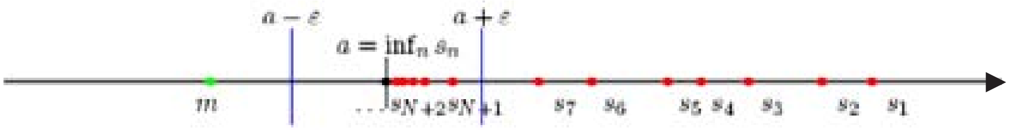
b. Sea $(s_n)_{n\in N}$ una sucesión real monótona decreciente. Entonces $(s_n)_{n\in N}$ es convergente si y sólo si está acotada inferiormente, en cuyo caso

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{s_n : n \in N\}$$

Gráficamente, para las sucesiones monótonas crecientes,



Y para sucesiones monótonas decrecientes



4. Álgebra de sucesiones convergentes.

Sean $(a_n)_{n\in N}$ y $(b_n)_{n\in N}$ convergentes a *a* y *b*, respectivamente:

i. La sucesión $(a_n \pm b_n)_{n\in N}$ converge a $a \pm b$

ii. La sucesión $(ka_n)_{n\in N}$ $\forall k \in \boldsymbol{R}$ converge a ka

iii. La sucesión $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\in N}$ si $b_n \neq 0$ $\forall n$ con $b \neq 0$ converge a $\dfrac{a}{b}$

5. Toda sucesión convergente está acotada.

6. Si $(a_n)_{n\in N}$ no está acotada y es monótona creciente $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

7. Si $(a_n)_{n\in N}$ no está acotada y es monótona decreciente $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

8. Si $(b_n)_{n\in N}$ es divergente:

a. y $k \in \boldsymbol{R} - \{0\} \Rightarrow (kb_n)_{n\in N}$ es divergente

b. y $(a_n)_{n\in N}$ es convergente $\Rightarrow (a_n \pm b_n)_{n\in N}$ es divergente

c. y $(a_n)_{n\in N}$ está acotada $\Rightarrow (a_n \pm b_n)_{n\in N}$ es divergente

d. y $(a_n)_{n\in N}$ está acotada $\Rightarrow (a_n / b_n)_{n\in N}$ converge a 0

En los ejemplos y ejercicios resueltos se van a encontrar las demostraciones de muchas de estas propiedades. No obstante, le sugerimos al lector que realice el esfuerzo e intente demostrarlas.

Teorema:
Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene c, excepto, tal vez el c mismo, y $\lim\limits_{x\to c} f(x)=l$. Sea, además, la sucesión $(a_n)_{n\in N}$ que cumple:

i. cada a_n pertenece al dominio de f

ii. $a_n \neq c \quad \forall n$

iii. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$

Entonces la sucesión $\left(f(a_n)\right)$, que puede escribirse como $\left(f \circ a_n\right)$, verifica que $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=l$

Investigue la validez de la proposición recíproca.

Este teorema nos provee de importantes ejemplos de sucesiones convergentes, como vemos a continuación en los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS

Sean las sucesiones $\left(\ln\left(e+\dfrac{3}{n^2}\right)\right)_{n\in N}$ y $\left(sen\left(\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^3}\right)\right)\right)_{n\in N}$
Ambas son sucesiones que convergen a 1 y 0 respectivamente.

7.4. Sucesión de Cauchy

12. *Definición*
Una sucesión (a_n) es una **sucesión de Cauchy** $\Leftrightarrow \lim\limits_{m,n\to\infty} |a_n - a_m| = 0$

La sucesión de Cauchy nos aporta garantías de la convergencia de la sucesión, ya que es condición suficiente (intente demostrarlo, es sencillo).

Otra gran ventaja que nos brinda una sucesión de Cauchy es la siguiente:

Teorema: Una sucesión (a_n) es convergente si y sólo si es una sucesión de Cauchy.

8. EJERCICIOS RESUELTOS

1. Dados los siguientes límites, donde el término general es a_n, y $\varepsilon = 10^{-3}$, obtener $n_0(\varepsilon) > 0 / n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+7n-12}{n^2+3n+2} = 2$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|n-7|}{2n+3} = \dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+n+20}{n^2-n+4} = 3$

Solución

a) Partiendo de $|a_n - a| < \varepsilon$ debemos obtener $n_0(\varepsilon) > 0 / n \geq n_0$. En nuestro ejemplo tenemos:

$$\underbrace{\left|\frac{2n^2+7n-12}{n^2+3n+2} - 2\right| =}_{\text{sacamos común denominador}} \underbrace{\left|\frac{2n^2+7n-12-2(n^2+3n+2)}{n^2+3n+2}\right| =}_{\text{distribuimos}} \underbrace{\left|\frac{2n^2+7n-12-2n^2-6n-4}{n^2+3n+2}\right| =}_{\text{agrupamos}}$$

$$= \underbrace{\left|\frac{n-16}{n^2+3n+2}\right| <}_{\text{porque } n\text{-}16 < n} \underbrace{\left|\frac{n}{n^2+3n+2}\right| <}_{\text{porque } n^2+3n+2 > n^2} \left|\frac{\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon = 10^{-3} \Rightarrow n > 10^3 \therefore n_0 \geq 10^3 \text{ (¿por qué?)}$$

Una vez más le reiteramos que recuerde la diferencia entre ejemplo (leerlo cuidadosamente e interpretar los conceptos aplicados) y ejercicio resuelto (trate de resolverlo sin mirar lo hecho en el texto, salvo que tropiece con alguna dificultad).

11. Nota

Tener en cuenta que si se pidiese verificar el límite, estaría faltando partir de $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|n-7|}{2n+3} = \dfrac{1}{2}$ Con idéntico procedimiento encaramos este ejercicio:

$$\left|\frac{|n-7|}{2n+3}-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n-7}{2n+3}-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2(n-7)-(2n+3)}{2(2n+3)}\right| = \left|\frac{2n-14-2n-3)}{2(2n+3)}\right| = \left|\frac{-17}{2(2n+3)}\right| <$$

si $n \geq 7 = n_1$ común denominador distribuyendo

porque $|-17| < |18|$

$$< \left|\frac{18}{2(2n+3)}\right| = \left|\frac{9}{2n+3}\right| < \left|\frac{9}{2n}\right| = \frac{9}{2n} < \frac{10}{2n} = \frac{5}{n} < 10^{-3} \Rightarrow n > 5.10^{3} = 5000 = n_2$$

$2(2n+3) > 2n+3$ 9<10 despejando

$2n+3 > 2n$

de donde $n_0 \geq \max(n_1, n_2) \Rightarrow n_0 \geq \max(7, 5000) \Rightarrow n_0 \geq 5000$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+n+20}{n^2-n+4} = 3$

Utilizando igual procedimiento, iniciamos el cálculo:

$$\left|\frac{3n^2+n+20}{n^2-n+4}-3\right| = \left|\frac{3n^2+n+20-3(n^2-n+4)}{n^2-n+4}\right| = \left|\frac{3n^2+n+20-3n^2+3n-12}{n^2-n+4}\right| =$$

común denominador distributiva agrupando

$$= \left|\frac{4n+8}{n^2-n+4}\right| = \left|\frac{4(n+2)}{n^2-n+4}\right| < \left|\frac{4(n+2)}{n^2-n}\right| = 4\left|\frac{n+2}{n^2-n}\right| = 4\left|\frac{\cancel{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\cancel{n}(n-1)}\right| \leq 4\left|\frac{1+1}{n-1}\right| =$$

factor común $n^2-n+4 > n^2-n$ factor común si $n \geq 2 = n_1 \Rightarrow \dfrac{2}{n} \leq 1$

$$= \frac{8}{n-1} < \varepsilon = 10^{-3} \Rightarrow n-1 > 8/10^{-3} = 8000 \Rightarrow n > 8001 = n_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_0 \geq \max(n_2; n_1) = \max(8001; 2) = 8001$$

2. Sabiendo que $(a_n)_{n\geq 1} = (\,2,35;\ 2,355;\ 2,3555;\ 2,35555;\ldots)$:

   a) Hallar $a_n = f(n)$

   b) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Solución

a) Como es obvio $a_n = 2,3\underbrace{555...5}_{n\ veces}$ pero así expresado no resulta de utilidad ya que debe ser función de n. Tratemos de obtener alguna secuencia entre los tres primeros:

$$a_1 = 2,35 = 2,3 + 0,05 = 2,3 + \frac{5}{100}.1 \tag{17}$$

$$a_2 = 2,355 = 2,3 + 0,055 = 2,3 + \frac{55}{1000} = 2,3 + \frac{5}{100}.\overbrace{\frac{11}{10}}^{=10+1} = 2,3 + \frac{5}{100}.\left(1 + \frac{1}{10}\right) \tag{18}$$

$$a_3 = 2,3555 = 2,3 + 0,0555 = 2,3 + \frac{555}{1000} = 2,3 + \frac{5}{100}.\overbrace{\frac{111}{10}}^{=100+10+1} =$$

$$= 2,3 + \frac{5}{100}.\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100}\right) = 2,3 + \frac{5}{100}.\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2}\right) \tag{19}$$

Note que en todos lo términos hay una parte común que es $2,3 + \frac{5}{100}.\,(\ldots)$ lo que cambia es la expresión que multiplica a $\frac{5}{100}$. Veamos si responde a alguna secuencia:

en el a_1 es 1

en el a_2 es $1 + \frac{1}{10}$

en el a_3 es $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2}$

de modo que, como se observa, el factor que multiplica a $\frac{5}{100}$ tiene tantos términos como el subíndice de a, y cada término es una potencia de $\frac{1}{10}$, comenzando con exponente cero y llegando hasta un exponente que sea el subíndice de a disminuido en 1. Luego:

$$a_n = 2,3 + \frac{5}{100}.\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^{n-1}}\right) \tag{20}$$

Recordemos una factorización que hemos utilizado mucho en el cálculo de límites en los que intervienen polinomios:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + a^{n-4}b^3 + ... + b^{n-1})$$

en ella hagamos a =1 y $b = \dfrac{1}{10}$ y nos quedará:

$$1 - \frac{1}{10^n} = \left(1 - \frac{1}{10}\right)\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + ... + \frac{1}{10^{n-1}}\right)$$

Como vemos, el último factor del segundo miembro aparece en (20); si lo despejamos, encontraremos una manera de transformarlo en un cociente:

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + ... + \frac{1}{10^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) \tag{21}$$

Reemplazando (21) en (20), nos queda:

$$a_n = 2,3 + \frac{5}{10\cancel{0}} . \frac{1\cancel{0}}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{23}{10} + \frac{5}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) \tag{22}$$

b) $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{23}{10} + \frac{5}{90}\left(1 - \underbrace{\frac{1}{10^n}}_{\to 0}\right)\right) = \frac{23}{10} + \frac{5}{90} = \frac{9.23+5}{90} = \frac{212}{90} = \frac{106}{45}$$

3. Probar que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + ... + \frac{1}{(2n)^2}\right) = 0$

Solución

Llamemos $c_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{(n+2)^2} + ... + \dfrac{1}{(2n)^2}$, observe que tiene ($n$ + 1) términos. Trataremos de probar este límite usando el teorema de intercalación, para lo cual debemos encontrar dos sucesiones a_n, b_n, de modo que cumplan:

$$a_n \le c_n \le b_n$$

Como c_n es una suma de términos positivos, resulta ser mayor o igual que cualquiera de dichos términos; eligiendo uno de ellos tendremos $c_n \ge \dfrac{1}{n^2} = a_n$

Busquemos ahora b_n:

$$\left.\begin{cases} n^2 = n^2 \Rightarrow \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{n^2} \\ n^2 \le (n+1)^2 \Rightarrow \dfrac{1}{n^2} \ge \dfrac{1}{(n+1)^2} \\ n^2 \le (n+2)^2 \Rightarrow \dfrac{1}{n^2} \ge \dfrac{1}{(n+2)^2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ n^2 \le (n+n)^2 = (2n)^2 \Rightarrow \dfrac{1}{n^2} \ge \dfrac{1}{(2n)^2} \end{cases}\right\} \text{sumando miembro a miembro, obtenemos}$$

$$(n+1)\frac{1}{n^2} \ge c_n \Rightarrow b_n = (n+1)\frac{1}{n^2}$$

Entonces $\dfrac{1}{n^2} \le c_n \le (n+1)\dfrac{1}{n^2} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} (n+1)\dfrac{1}{n^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$

4. ***Ejemplo.*** Demuestre, usando la propiedad del sandwich, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

> ***12. Nota***
> *En este ejercicio necesitaremos utilizar el factorial de un número natural, el número combinatorio y el binomio de Newton.*

Recordemos:

$$\forall n \in \mathbf{N}_0 : n! = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 0 \vee n = 1 \\ \underbrace{n.(n-1).(n-2)....3.2.1}_{n \text{ factores}} = n(n-1)! & \text{si} \quad n \ge 2 \end{cases},$$

es la definición de *factorial*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)....(n-k+1)}{k!} \quad \text{con} \quad n \ge k,$$

es la definición de *número combinatorio*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \,, \quad n \in \mathbf{N}, \text{ expresión del } \textit{binomio de Newton}.$$

Solución

Como $n \geq 1 \Rightarrow \sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n]{1} = 1 = a_n$ con $c_n = \sqrt[n]{n}$

Ahora busquemos b_n :

$$c_n = \sqrt[n]{n} = 1 + h \quad \text{con} \quad h \geq 0 \Rightarrow n = (1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2!}h^2 + \ldots.. + h^n$$

sustituyendo

usando el binomio de Newton con $a = 1$ y $b = h$ y desarrollando los números combinatorios.

Escribimos la potencia como una suma de (n + 1) términos no negativos, por ello podemos garantizar que

$$n = (1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2!}h^2 + \ldots.. + h^n \geq \frac{n(n-1)}{2!}h^2 \Rightarrow n = (1+h)^n \geq \frac{n(n-1)}{2!}h^2 \Rightarrow$$

acotando

$$\Rightarrow n \geq \frac{n(n-1)}{2!}h^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{2!\cancel{n}}{\cancel{n}(n-1)}} \geq h \Rightarrow 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}} \geq 1 + h = c_n \Rightarrow b_n = 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

por carácter transitivo sumamos 1 para que aparezca c_n

Por tanto $1 \leq c_n \leq 1 + \sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$ y como $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \sqrt{\dfrac{2}{n-1}}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$

5. ***Ejemplo.*** Sea la sucesión de término general $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

Pruebe que cumple las hipótesis del teorema de Weierstrass.

Solución

Deberemos probar que es monótona creciente (o decreciente) y además que está acotada superiormente (o inferiormente).

i) Si $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es monótona creciente, debe cumplir que $a_{n+1} \geq a_n$ y como $a_n > 0 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, esto es lo que intentaremos probar, partiendo del cociente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right).\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right).\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n =$$

$$= \left(\frac{n+2}{n+1}\right).\left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^n = \frac{n+2}{n+1}\left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^n = \frac{n+2}{n+1}\left[\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}\right]^n = \frac{n+2}{n+1}\left[\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right]^n =$$

$= \frac{n+2}{n+1}\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n$ el segundo factor tiene la estructura, usada en el ejemplo anterior, del tipo $(1+h)^n = 1+nh+\frac{n(n-1)}{2!}h^2+.....+h^n \geq 1+nh \qquad \forall h \geq -1$

Se puede demostrar, por inducción completa, que cumple con esta desigualdad conocida como **desigualdad de Bernoulli**, donde $h = -\frac{1}{(n+1)^2}$

La usaremos en nuestro cociente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{n+1}\left[1+\underbrace{\frac{-1}{(n+1)^2}}_{h}\right]^n \geq \frac{n+2}{n+1}\left[1+n\frac{-1}{(n+1)^2}\right] = \frac{n+2}{n+1}\left[\frac{(n+1)^2-n}{(n+1)^2}\right] =$$

por la desigualdad de Bernoulli

común denominador

$$= \frac{n+2}{n+1}.\frac{n^2+2n+1-n}{(n+1)^2} = \frac{n+2}{n+1}.\frac{n^2+n+1}{(n+1)^2} = \frac{n^3+n^2+n+2n^2+2n+2}{(n+1)^3} =$$

cuadrado del binomio

distributiva en el numerador

$$= \frac{(n^3+3n^2+3n+1)+1}{(n+1)^3} = \frac{(n+1)^3+1}{(n+1)^3} = 1+\underbrace{\frac{1}{(n+1)^3}}_{>0} \geq 1$$

agrupando

cubo del binomio

Con lo que quedó probado que es monótona creciente.

ii) Para que esté acotada superiormente debe cumplirse: $\exists M \in \boldsymbol{R} \,/\, a_n \leq M, \forall n$
En realidad, sabemos que está acotada inferiormente ya que $a_1 = 2$ y, por ser monótona creciente, éste es el ínfimo y además el mínimo, pero a los efectos prácticos no nos interesa. Para hallar alguna cota superior usaremos el binomio de Newton, como vimos en el ejemplo 4, con $a = 1, b = \dfrac{1}{n}$ tendremos $(n + 1)$ términos que son (admitamos n grande):

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \cancel{n}.\frac{1}{\cancel{n}} + \frac{\cancel{n}(n-1)}{2!}\frac{1}{n^{\cancel{2}}} + \frac{\cancel{n}(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^{\cancel{3}2}} + \frac{\cancel{n}(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\frac{1}{n^{\cancel{4}3}} +$$

aplicamos binomio de Newton con los números combinatorios desarrollados y simplificamos

$$+ \ldots + \frac{\cancel{n}(n-1)\ldots(n-(n-1))}{n!}\frac{1}{n^{\cancel{n}\,n-1}} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n} + \frac{1}{4!}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\frac{n-3}{n} +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{n!}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\ldots\frac{n-(n-1)}{n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right) +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leq$$

porque $1 - \dfrac{r}{n} \leq 1$ si $0 < r < n$

$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} =$$

porque
$$\begin{cases} 2! = 2^1 \Rightarrow \dfrac{1}{2!} = \dfrac{1}{2} \\ 3! > 2^2 \Rightarrow \dfrac{1}{3!} < \dfrac{1}{2^2} \\ 4! > 2^3 \Rightarrow \dfrac{1}{4!} < \dfrac{1}{2^3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n! > 2^{n-1} \Rightarrow \dfrac{1}{n!} < \dfrac{1}{2^{n-1}} \end{cases}$$

Además $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+....+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}$ como podemos recordar del factoreo que mencionamos en el ejercicio 2. Por ello, si reemplazamos en nuestro desarrollo nos queda:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+....+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=1+2\underbrace{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}_{\geq 1}\geq 1+2=3$$

con lo que hemos probado que $2\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$

Como se cumplen las hipótesis de Weierstrass, la sucesión tiene límite y es el supremo, que por definición, es el número *e*: $\exists\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

6. Sea la sucesión, cuyo término general está definido por recurrencia, de la siguiente manera:

$$a_n=\begin{cases}1 & \text{si} \quad n=1\\ \sqrt{2+a_{n-1}} & \text{si} \quad n>1\end{cases}$$

Se pide:

a) Probar que cumple el teorema de Weierstrass.

b) Hallar su límite.

Solución

Como se puede ver, a partir de la definición por recurrencia, la sucesión tiene conformación $\left(\sqrt{2};\sqrt{2+\sqrt{2}};\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}};...\right)$

a) En este caso debemos probar que está acotada superiormente (o inferiormente) y que es monótona creciente (o decreciente).

i) Comencemos viendo que, en realidad, está acotada. Claramente podemos afirmar que $a_n>0$, para todo *n* natural, porque las raíces pares afectando a reales positivos tienen resultado no negativo, con lo que está acotada inferiormente. Además: $\sqrt{2}<2\Rightarrow a_1<2$

$$\sqrt{2+\sqrt{2}} < \sqrt{2+2} = 2 \Rightarrow a_2 < 2$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} < \sqrt{2+\sqrt{2+2}} = \sqrt{2+2} = 2 \Rightarrow a_3 < 2$$

aceptando que (como se puede ver por lo anterior)[7], $a_n < 2 \Rightarrow$

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} < \sqrt{2+2} = 2 \Rightarrow a_{n+1} < 2$$

De esta manera demostramos que también está acotada superiormente, con lo que $0 < a_n < 2$ de donde está acotada.

ii) Para probar que es monótona creciente debe ocurrir que $a_n \leq a_{n+1}$. Intentemos atacar el problema por el absurdo, esto es, supongamos que para algún n natural se cumple que

$$a_n > a_{n+1} \Rightarrow a_n > \sqrt{2+a_n} \Rightarrow a_n^2 > 2 + a_n \Rightarrow a_n^2 - 2 - a_n > 0$$

completando cuadrados nos queda así:

$$\left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} > 0 \Rightarrow \left|a_n - \frac{1}{2}\right| > \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} a_n - \dfrac{1}{2} > \dfrac{3}{2} \Rightarrow a_n > 2 \\ \vee \\ a_n - \dfrac{1}{2} < -\dfrac{3}{2} \Rightarrow a_n < -1 \end{cases}$$

y ambas son absurdas ya que en i) demostramos que $0 < a_n < 2$. De este modo probamos que no es correcto suponer que $a_n > a_{n+1}$ para algún n, con lo que la sucesión es monótona creciente.
De i) y ii) concluimos que la sucesión verifica las hipótesis de Weierstrass, por lo tanto tiene límite.

b) Como $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = l \Rightarrow \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}_{l} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2+a_n}}_{\sqrt{2+l}} \Rightarrow l = \sqrt{2+l} \Rightarrow l^2 = 2 + l \Rightarrow$

$$l^2 - 2 - l = 0 \Rightarrow \begin{cases} l = -1 \quad \text{absurdo} \\ \vee \\ l = 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 2$$

13. Nota

La afirmación de que es absurdo que $l = -1$, se basa en que $a_n > 0$. Si no comprende la razón, es conveniente que repase las propiedades de límite.

[7] Esta demostración está basada en el principio de inducción completa.

9. LÍMITE FUNDAMENTAL ALGEBRAICO

Recibe este nombre el $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$ (23)

Con él pueden determinarse muchos límites de la forma indeterminada $(\to 1)^{\to\infty}$ Antes de pasar a demostrar la validez de la (1) $\forall x\in \boldsymbol{R}-\{0\}$, se propone al lector que intente determinar el dominio de la función $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$, confeccionar su gráfico y verificar que $\lim\limits_{x\to -1^{-}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=+\infty$ y que $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=1$

Asimismo, observe que si realiza el cambio de variable

$t=\dfrac{1}{x}$, $t\to 0$ cuando $x\to\infty$, resulta que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$

9.1. Más Ejemplos y Ejercicios Resueltos

1. **Ejemplo.** Pruebe que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e,\quad \forall x\in \boldsymbol{R}-\{0\}$

Solución

Trataremos, en primer lugar, de probarlo para $x>0$, y como deberá ser muy grande (y positivo) podemos tomarnos la licencia de aceptar que $x\geq 1$. Sabemos que bajo estas condiciones:

$$x\in \boldsymbol{R}^{+}\wedge x\geq 1:[x]\leq x<[x]+1\wedge[x]=n,n\in N\Rightarrow n\leq x\leq n+1\Rightarrow \frac{1}{n}\geq\frac{1}{x}>\frac{1}{n+1}\Rightarrow$$

$\boldsymbol{N}$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{n}\geq 1+\frac{1}{x}>1+\frac{1}{n+1}\Rightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}\geq\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{x}\Rightarrow$$

recordemos que $n\leq x<n+1$, de modo que podemos escribir:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}\geq\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{x}\geq\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}$$

Sugerencia: leerla desde el centro hacia afuera de donde, por carácter transitivo, obtenemos la siguiente expresión que nos permitirá usar la propiedad del sandwich (teorema de intercalación):

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{n}{n+1}} = e \\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = e \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

Pero como $x \geq n \Rightarrow \text{si } n \to \infty \Rightarrow x \to +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$

Ya lo probamos para los positivos, falta hacerlo para los negativos.
Para resolverlo, a fin de aprovechar la demostración anterior, plantearemos un cambio de variables.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \quad \text{proponemos } x = -(r+1) \Rightarrow r = -(x+1) \Rightarrow \begin{cases} x \to -\infty \\ \Downarrow \\ r \to +\infty \end{cases}$$

$$= \lim_{r\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-(r+1)}\right)^{-(r+1)} = \lim_{r\to+\infty}\left(\frac{r+\cancel{1}-\cancel{1}}{r+1}\right)^{-(r+1)} = \lim_{r\to+\infty}\left(\frac{r+1}{r}\right)^{r+1} =$$

$$= \lim_{r\to+\infty}\left(1+\frac{1}{r}\right)^{r}\left(1+\frac{1}{r}\right) = e$$

Con lo que quedó demostrado.

2. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{n}}{n}$

Solución

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n}}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\frac{e^{n}}{n}}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{e}{\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to e>1}}\right)^{n} = +\infty$$ donde se usó un resultado ya probado anteriormente que es $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$

3. Calcule los siguientes límites, usando, si fuera preciso $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x-1}{3x^2+2}\right)^{2+\frac{1}{x}}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x-3}{2x+5}\right)^{3x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos\left[x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]$

d) **Ejemplo** $\lim\limits_{y\to\infty}\left(\dfrac{3y^2+5y-2}{3y^2+4}\right)^{2y-3}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3}{5}+\dfrac{2x-5}{5x-4}\right)^{3x-1}$

f) **Ejemplo** $\lim\limits_{z\to0}(1+senz)^{1/z}$

g) $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{\ln t-\ln a}{t-a}, a>0$

h) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}, a\in R^+-\{1\}$

i) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{5x}-e^{-2x}}{x}$

j) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{1/x}$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{5\ln\frac{1}{x}}\right)^{\ln x^3}$

l) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{senhx}{x}$

Solución

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x-1}{3x^2+2}\right)^{2+\frac{1}{x}}$ Como $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{3x^2+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2})}{x^2(3+\frac{2}{x^2})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}}=0$

Sugerencia: Cuestiónese si siempre es válida la propiedad usada en este ejercicio.

y el exponente $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)=2\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x-1}{3x^2+2}\right)^{2+\frac{1}{x}}=0^2=0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x-3}{2x+5}\right)^{3x}$ En este caso $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x-3}{2x+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(4-\frac{3}{x})}{x(2+\frac{5}{x})}=2$, el exponente

tiende a $+\infty$, de donde $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x-3}{2x+5}\right)^{3x}=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]$ Por un lado tenemos que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\Rightarrow$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\infty\Rightarrow\ \nexists\lim\limits_{x\to\infty}\cos\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]$

d) $\lim\limits_{y\to\infty}\left(\frac{3y^2+5y-2}{3y^2+4}\right)^{2y-3}$ Note que $\lim\limits_{y\to\infty}\frac{3y^2+5y-2}{3y^2+4}=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{y^2\left(3+\frac{5}{y}-\frac{2}{y^2}\right)}{y^2\left(3+\frac{4}{y^2}\right)}=$

$=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{3+\frac{5}{y}-\frac{2}{y^2}}{3+\frac{4}{y^2}}=1$ y el exponente tiende a ∞, de donde estamos en presencia de una indeterminación del tipo $(\to 1)^{\to\infty}$, al igual que el límite que nos da el número e; por tanto, intentaremos trabajar con la base para que resulte semejante a la expresión que conduce al número e:

$$\lim_{y\to\infty}\left(\frac{3y^2+5y-2}{3y^2+4}\right)^{2y-3}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{3y^2+5y-2}{3y^2+4}-1\right)^{2y-3}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{3y^2+5y-2-3y^2-4}{3y^2+4}\right)^{2y-3}=$$

sumamos y restamos uno   común denominador

$$=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{5y-6}{3y^2+4}\right)^{2y-3}=\lim_{y\to\infty}\left[\left(1+\frac{5y-6}{3y^2+4}\right)^{\frac{3y^2+4}{5y-6}}\right]^{(2y-3)\frac{5y-6}{3y^2+4}}$$

si $\frac{1}{x}=\frac{5y-6}{3y^2+4}$ necesitamos como exponente a $x=\frac{3y^2+4}{5y-6}$, entonces multiplicamos y dividimos convenientemente el exponente original.

De esta manera tenemos:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5y-6}{3y^2+4}\right)^{\frac{3y^2+4}{5y-6}}=e\wedge\lim_{x\to\infty}(2y-3)\frac{5y-6}{3y^2+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{y^2(2-\frac{3}{y})(5-\frac{6}{y})}{y^2(3+\frac{4}{y^2})}=\frac{2.5}{3}=\frac{10}{3}$$

Por lo tanto $\lim\limits_{y\to\infty}\left(\frac{3y^2+5y-2}{3y^2+4}\right)^{2y-3}=e^{\frac{10}{3}}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{5}+\frac{2x-5}{5x-4}\right)^{3x-1}$ Como $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-5}{5x-4}=\frac{2}{5}\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{5}+\frac{2x-5}{5x-4}\right)=1$, nuevamente estamos en una indeterminación del tipo $(\to 1)^{\to\infty}$. Si sumamos y restamos $\frac{2}{5}$ dentro del paréntesis:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{5}+\frac{2x-5}{5x-4}\right)^{3x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{2x-5}{5x-4}-\frac{2}{5}\right)^{3x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5(2x-5)-2(5x-4)}{5(5x-4)}\right)^{3x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{10x-25-10x+8}{5(5x-4)}\right)^{3x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-25+8}{5(5x-4)}\right)^{3x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-17}{5(5x-4)}\right)^{3x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-17}{5(5x-4)}\right)^{\frac{-5(5x-4)}{17}}\right]^{-\frac{17(3x-1)}{5(5x-4)}}$$ veamos a cuánto tiende la expresión dentro del corchete y luego su exponente:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-17}{5(5x-4)}\right)^{\frac{-5(5x-4)}{17}}=e \quad\wedge\quad \lim_{x\to\infty}\frac{-17(3x-1)}{5(5x-4)}=\frac{-17.3}{5.5}=-\frac{51}{25}$$

resuelto con las técnicas ya vistas

De esta manera nos queda entonces $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{5}+\frac{2x-5}{5x-4}\right)^{3x-1}=e^{\frac{-51}{25}}$

f) $\lim\limits_{z\to 0}(1+tgz)^{\frac{1}{z}}$ nuevamente estamos en $(\to 1)^{\to\infty}$:

$$\lim_{z\to 0}(1+tgz)^{\frac{1}{z}}=\lim_{z\to\infty}\left[(1+tgz)^{\frac{1}{tgz}}\right]^{\frac{tgz}{z}}=e$$

porque $\lim\limits_{z\to 0}(1+tgz)^{\frac{1}{tgz}}=e \quad\wedge\quad \lim\limits_{z\to 0}\frac{tgz}{z}=1$

g) $\lim\limits_{t\to a}\frac{\ln t-\ln a}{t-a}, a>0$ Note que es una indeterminación del tipo $\frac{\to 0}{\to 0}$. Intentaremos resolverlo efectuando, en primer lugar, un cambio de variables: $w = t\text{-}a$ tendremos que $t = a + w$ de modo que cuando t tiende a a, w tiende a 0. Así el ejemplo queda:

$$\lim_{t\to a}\frac{\ln t-\ln a}{t-a}=\lim_{w\to 0}\frac{\ln(a+w)-\ln a}{w}=\lim_{w\to 0}\frac{1}{w}\ln\frac{a+w}{a}=\lim_{w\to 0}\ln\left(1+\frac{w}{a}\right)^{\frac{1}{w}}=$$

por propiedades de los logaritmos

$$=\lim_{w\to 0}\ln\left[\left(1+\frac{w}{a}\right)^{\frac{a}{w}}\right]^{\frac{1}{a}}=\ln e^{\frac{1}{a}}=\frac{1}{a}$$, donde se utilizó la propiedad 11 de límite.

h) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}, a\in \boldsymbol{R}^+-\{1\}$ Observe que es una indeterminación del tipo $\frac{\to 0}{\to 0}$.

Intentaremos resolverlo efectuando, en primer lugar, un cambio de variables: $r=a^x-1$ si $x\to 0\Rightarrow r\to 0$, además deberemos despejar la *x*; veamos como queda:

$a^x=1+r\Rightarrow x\ln a=\ln(1+r)\Rightarrow x=\frac{\ln(1+r)}{\ln a}$ y con esto reemplazamos en el ejercicio:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{r\to 0}\frac{r}{\frac{\ln(1+r)}{\ln a}}=\lim_{r\to 0}\frac{\ln a}{\frac{\ln(1+r)}{r}}=\lim_{r\to 0}\frac{\ln a}{\ln(1+r)^{\frac{1}{r}}}=\ln a$$

i) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-e^{-2x}}{x}$ En este ejercicio (del tipo $\frac{\to 0}{\to 0}$) intentaremos que se parezca al anterior, pero para ello necesitamos conseguir un 1 en el lugar de la función exponencial de exponente negativo, por esa razón sacamos factor común:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-e^{-2x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x}\left(\frac{e^{5x}}{e^{-2x}}-1\right)}{x}=\lim_{x\to 0}e^{-2x}\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-1}{x}=$$

el primer límite da 1 y en el segundo procedemos como en ejercicio anterior, haciendo una sustitución:

$v=e^{7x}-1\Rightarrow e^{7x}=1+v\Rightarrow 7x=\ln(1+v)\Rightarrow x=\frac{1}{7}\ln(1+v)$ de modo que si $\left\{\begin{array}{c}x\to 0\\ \Downarrow\\ v\to 0\end{array}\right.$

de donde el ejercicio queda:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-1}{x}=\lim_{v\to 0}\frac{v}{\frac{1}{7}\ln(1+v)}=\lim_{v\to 0}\frac{7}{\frac{1}{v}\ln(1+v)}=\lim_{v\to 0}\frac{7}{\ln(1+v)^{\frac{1}{v}}}=7$$

j) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ Estamos en presencia de una indeterminación del tipo $(\to 1)^{\to\infty}$, intentaremos llevarlo a la forma de $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$. Para ello procedemos así:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\left(1+\cos\sqrt{x}-1\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\left(1-(1-\cos\sqrt{x})\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\left(1-2sen^2\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[\left(1-2sen^2\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{-\frac{1}{2}sen^2\frac{\sqrt{x}}{2}}\right]^{-\frac{2sen^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{x}}$$

debemos calcular el límite de la expresión dentro del corchete y el de su exponente:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1-2sen^2\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{-\frac{1}{2}sen^2\frac{\sqrt{x}}{2}}=e \quad \text{si} \quad t=-2sen^2\frac{\sqrt{x}}{2} \text{ y para el exponente}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2sen^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{x}=2\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}sen\frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{x}}\cdot\frac{\frac{1}{2}sen\frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{x}}=\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{sen\frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{x}}\cdot\frac{sen\frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$$

dado que $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{sen\frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{x}}=1$, reemplazando tendremos:

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[\left(1-2sen^2\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{-\frac{1}{2}sen^2\frac{\sqrt{x}}{2}}\right]^{-\frac{2sen^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{x}}=e^{\frac{1}{2}}$$

k) $$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{5\ln\frac{1}{x}}\right)^{\ln x^3}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-5\ln x}\right)^{3\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{5\ln x}\right)^{-5\ln x}\right]^{-\frac{3}{5}}=e^{-\frac{3}{5}}$$

l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senhx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}}{x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{x}$ y a partir de aquí el ejercicio presenta el mismo nivel de dificultad que planteamos en esta misma tanda de resueltos, si no lo recuerda repase el 3-i); inténtelo Ud. siguiendo las indicaciones dadas, debe probar que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senhx}{x}=1.$

10. ASÍNTOTAS DE UNA FUNCIÓN

El estudio de las funciones representa un argumento muy importante en los fenómenos físicos aplicados a la ingeniería.

Se considera la función $f(x)=2ch(x)=e^{x}+e^{-x}$. Se sabe que: $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$

El denominado *comportamiento asintótico* por la derecha es e^{x}, respectivamente por la izquierda e^{-x}

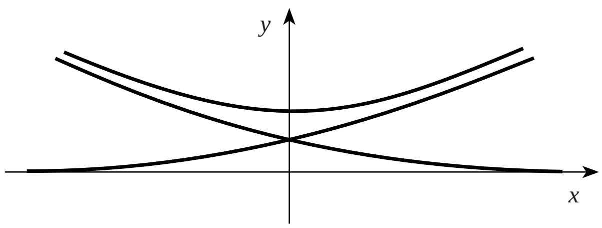


Figura 51. **Asíntotas**

La función $f(x)=2\cosh(x)$, tiene dos *asíntotas funcionales* no lineales.

13. Definición

Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo $\left[a,+\infty\right)$ o respectivamente $\left(-\infty,a\right]$, tal que:

i. $f(x)=g(x)+h(x)$, que satisface:

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$, o respectivamente:

iii. $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=0$.

Entonces se dice que, para $x\to+\infty$ (respectivamente: $x\to-\infty$), la curva $y=g(x)$ es una ***curva asintótica***, o simplemente una ***asíntota*** para la curva $y=f(x)$.

Por ejemplo, la función $f(x)=\dfrac{2x^4+3}{x^2+3}$, definida en todo el eje real, se puede expresar como: $f(x)=\dfrac{2x^4+3}{x^2+3}=2x^2-6+\dfrac{21}{x^2+3}$ (verifíquelo dividiendo los polinomios) con:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{21}{x^2+3}=0 \qquad , \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{21}{x^2+3}=0\,.$$

La curva de ecuación: $y=2x^2-6$, es una asíntota parabólica para la función racional $f(x)=\dfrac{2x^4+3}{x^2+3}$.

De particular importancia es el caso en el que la curva $y=f(x)$ presenta ***asíntotas lineales***. En tal caso se tiene:

$$f(x)=(mx+b)+h(x) \text{ con } \lim_{x\to\pm\infty}h(x)=0,$$

La recta $y=mx+b$ es una asíntota para $x\to+\infty$ (asíntota lineal derecha) si $h(x)\to 0$ para $x\to+\infty$ o es una asíntota para $x\to-\infty$ (asíntota lineal izquierda) si $h(x)\to 0$ para $x\to-\infty$.

Teorema: Toda función racional $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ tiene asíntota.
Intente hacer una demostración.

Cuando $y=f(x)$ no es una función racional, la situación se complica al tratar de hacer la descomposición $f(x)=g(x)+h(x)$ con las condiciones dadas en la definición inicial, pero existe un criterio para la búsqueda de asíntotas lineales para la función $y=f(x)$.

10.1. Asíntota horizontal

Sea $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$, (respectivamente $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$) con $L\in\boldsymbol{R}$

La curva $y=f(x)$ admite una ***asíntota horizontal derecha*** (o ***izquierda***) de ecuación $y=L$, porque $f(x)=L+\big(f(x)-L\big)$ con $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-L\big)=0$ (o $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)-L\big)=0$).

EJEMPLOS

a. La función $y=\sqrt{x^2+2x+6}-\sqrt{x^2+3x+8}$, tiene asíntota horizontal derecha: $y=-\frac{1}{2}$ y asíntota horizontal izquierda: $y=\frac{1}{2}$. ¡Verifíquelo!

b. $y=th(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} th(x)=1 \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} th(x)=-1$

La recta $y=1$ es una asíntota horizontal derecha.
La recta $y=-1$ es una asíntota horizontal izquierda.

10.2. Asíntota oblicua

Sea $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=m$ con $m\in\boldsymbol{R}$ (o para $x\to-\infty$).
La curva $y=f(x)$ tiene una ***asíntota oblicua derecha*** y dicha asíntota tiene por ecuación: $y=mx+b$, donde $b=\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)-mx\big)$.
En efecto, si la curva $y=f(x)$ admite asíntota derecha, ésta tiene por ecuación: $y=mx+b$ y se tiene $f(x)=(mx+b)+h(x)$ con $\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=0$.
Por lo tanto, resulta $\dfrac{f(x)}{x}=m+\dfrac{b}{x}+\dfrac{h(x)}{x}$ y calculando el límite: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x}=0$

Es, por tanto: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=m}$

Por otra parte, $b=f(x)-mx-h(x)$ y como $\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=0$, se tiene:
$\boxed{b=\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)-mx\big)}$
Procedimiento análogo para $x\to-\infty$, y se obtiene una ***asíntota oblicua izquierda***.

10.3. Asíntota vertical

Para determinar si una función admite asíntotas verticales, es preciso rescatar aquellos valores de la variable independiente para los cuales la función no está acotada. Es usual que para determinar las asíntotas de una función cuya fórmula está dada por un cociente, es decir $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$, se busquen los ceros de *h*. En ellos existe posibilidad de que *f* presente un comportamiento asintótico con respecto a la recta vertical $x=x_0$, siendo x_0 un cero de *h*. (¿Por qué no siempre?)

14. Definición

Si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$, se dice que la recta $x = x_0$ es una *asíntota vertical derecha*.

Si $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$, la recta $x = x_0$ es una *asíntota vertical izquierda*.

Si $x = x_0$ es una asíntota vertical derecha e izquierda simultáneamente, se dice que es una *asíntota vertical*.

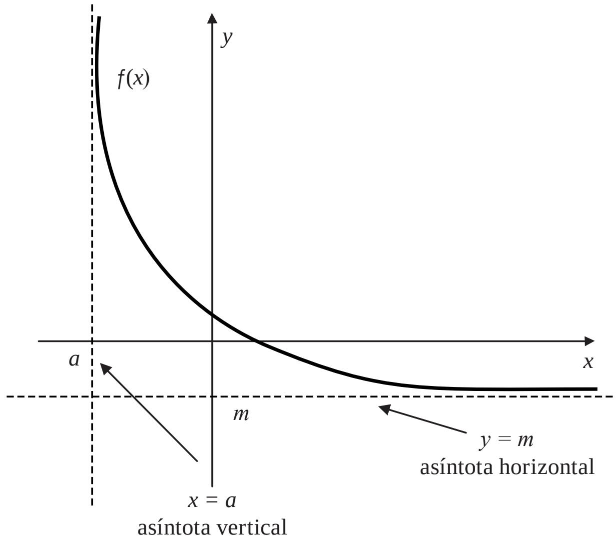


Figura 52. **Asíntotas vertical y horizontal**

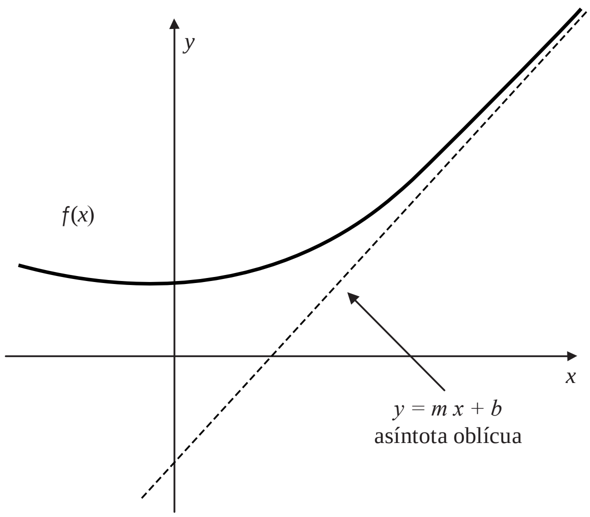


Figura 53. **Asíntota oblicua**

Una función puede admitir infinitas asíntotas verticales. Por ejemplo, $f(x) = \operatorname{tg} x$

$$\lim_{x \to \frac{(2n+1)\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to \frac{(2n+1)\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty \quad \forall n \in \boldsymbol{Z}$$

Las rectas: $x = \left(\dfrac{\pi}{2}\right) + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$ son asíntotas verticales de $y = \operatorname{tg} x$.

14. Nota

Existen casos en los que la función no se puede escribir como un cociente; ello no significa que no existan asíntotas verticales, como ocurre para la función $f(x) = \ln x$ *cuyo dominio son los reales positivos, pero al calcular* $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$*, de modo que presenta asíntota vertical en* $x = 0^+$*. En estos casos es adecuado buscar el dominio de la función, en los "bordes" y en los "puntos excluidos" hay posibilidades de encontrar asíntotas verticales y, si está definida a tramos, en los puntos donde cambia su definición.*

Veamos el siguiente caso:

$$f(x) = \begin{cases} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x & \text{si} \quad x < -1 \\ \ln|x| & \text{si} \quad x \geq -1 \wedge x \neq 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \text{Dom}f = \boldsymbol{R} - \{0\}$$

La función cumple que $\lim_{x \to -1^-} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = +\infty$ y además $\lim_{x \to 0} \ln|x| = -\infty$, de modo que presenta dos asíntotas verticales.

Consideremos otro caso:

$$g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si} \quad -1 \leq x < 5 \\ \dfrac{1}{(x-5)(x-7)} & \text{si} \quad 5 < x < 7 \\ 0 & \text{si} \quad x = 7 \end{cases} \qquad \Rightarrow \text{Dom}f = [-1; 7] - \{0, 5\}$$

Verifique que presenta 3 asíntotas verticales, una lateral en 0, y otras dos en 5 y 7.

EJEMPLO

$y = \sqrt{x^2 - 1}$. Las rectas $y = x$ y $y = -x$ son las asíntotas oblicuas derecha e izquierda respectivamente.

11. EJERCICIOS RESUELTOS

1. Halle las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{(x-2)(x+1)}$ b) $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ c) $f(x) = 2^{-\frac{1}{x}}$

Solución

Recordemos que

i. Existe asíntota vertical en $x = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$

ii. Existe asíntota horizontal en $y = k \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = k$

Note que, si existen, como máximo puede haber dos asíntotas horizontales. (¿Por qué?)

iii. Existe asíntota oblicua en $y = mx+n \Leftrightarrow \begin{cases} m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases} \\ n = \lim\limits_{x\to\infty} \left[f(x) - mx \right] \neq \infty \end{cases}$

Es importante destacar que no pueden coexistir una asíntota horizontal y una oblicua "del mismo lado". ¿Por qué? (¡recuerde que debe ser función!)

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{(x-2)(x+1)}$

El dominio de la función es $D_f = \boldsymbol{R} - \{-1; 2\}$ y el numerador tiene como raíces 2 y $-\dfrac{2}{2}$, veamos qué ocurre con las asíntotas verticales:

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x-2)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x+1} = \dfrac{5}{3} \Rightarrow$ en $x = 2$ la función no presenta asíntota vertical.

Analicemos ahora en $x = -1$:

$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x-2)(x+1)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x+1} = \infty \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x+1} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x+1} = +\infty \end{cases} \Rightarrow$ la función tiene asíntota vertical en $x = -1$.

Otro detalle importante es que si $m = 0$ no se puede inferir, con ese único requisito, que es una asíntota horizontal, como oportunamente se verá con funciones como $y = \dfrac{x}{\ln x}$

Veamos qué ocurre con las horizontales:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-2}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-2}{x^2-x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=2\Rightarrow$$

la función presenta una única asíntota horizontal en $y = 2$.

No existe asíntota oblicua, ya que como

$$f(x)\to 2\Rightarrow\frac{f(x)}{x}\to 0\ \wedge\quad f(x)-mx\to\infty\quad \text{si}\quad x\to\infty$$

Luego, la función dada tiene una asíntota vertical en $x = -1$ y una horizontal en $y = 2$.

b) $f(x)=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ El dominio de la función es $D_f = \boldsymbol{R} - \{-1\}$. Veamos las asíntotas:

$$\lim_{x\to-1}\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}=\infty\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}=-\infty\\[2ex] \lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}=-\infty\end{cases}\Rightarrow\ \text{existe asíntota vertical en } x=-1.$$

Para la horizontal:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[x\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]^3}{x^2\,\frac{(x+1)^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)^3}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)^3}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}=\infty$$

Luego, no existen asíntotas horizontales.

Veamos si hay oblicuas:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3+2x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2+3x-1-(x^3+2x^2+x)}{x^2+2x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2+3x-1-x^3-2x^2-x}{x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x^2+2x-1}{x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(-5+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-5+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=-5\Rightarrow \text{ existe asíntota oblicua } y=x-5.$$

Luego, la función dada tiene una asíntota vertical en $x = -1$ y una oblicua en $y = x - 5$.

2. Analice la validez de las siguientes proposiciones:

a) Si $x=a$ es asíntota de $f \Rightarrow \nexists f(a)$
b) Si $y=b$ es asíntota de $f \Rightarrow \nexists\ c\in \mathrm{D}_f\ / f(c)=b$

Solución

a) **Falsa**. Tomemos $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 5 & x=0\end{cases}$ y calculemos la asíntota vertical:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\infty \wedge \begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty\end{cases}\Rightarrow x=0 \text{ es asíntota vertical y existe } f(0)=5.$$

b) **Falsa**. Tomemos $g(x)=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2$, calculemos las horizontales:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x}+1\right)^2}{x^2\left(\frac{1}{x}-1\right)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}+1\right)^2}{\left(\frac{1}{x}-1\right)^2}=1 \text{ Debemos ver si existe } c/g(c)=1.$$

$$\left(\frac{1+c}{1-c}\right)^2=1\Rightarrow\frac{1+c}{1-c}=1\vee\frac{1+c}{1-c}=-1\Rightarrow 1+c=1-c\vee\underbrace{1+c=-1+c}_{absurdo}\Rightarrow 2c=0\Rightarrow c=0$$

3. Determine *a, b* y el dominio de $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{ax + b}$ con asíntota $x - 2y = 8$

Solución

Nos están indicando que la función tiene asíntota oblicua $y = \dfrac{1}{2}x - 4$, de donde debemos calcular *m* y *n* e igualarlas a $\dfrac{1}{2}$ y –4 respectivamente.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-2}{ax+b}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2}{x(ax+b)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(a+\frac{b}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{2}{x^2}}{a+\frac{b}{x}} = \frac{1}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2$$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2}{ax+b} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 4 - ax^2 - bx}{2(ax+b)} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2-a)x^2 - 4 - bx}{2(ax+b)} =$$

pero $a = 2$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-4-bx}{2(2x+b)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(-\frac{4}{x} - b\right)}{2x\left(2+\frac{b}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{4}{x} - b}{2\left(2+\frac{b}{x}\right)} = -\frac{b}{4} = -4 \Rightarrow b = 16$$

Luego, para que $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{ax + b}$ con asíntota $x - 2y = 8$ tiene que ocurrir que $a = 2$ y $b = 16$.

CAPÍTULO 3

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

La continuidad de una función en un punto surge de la unión de los conceptos fundamentales de función y de límite tratados en los capítulos precedentes y es el paso siguiente para el desarrollo de las herramientas matemáticas básicas del cálculo diferencial e integral.

Consideremos una ley física de la forma $P = f(V)$, que relaciona los valores de una *variable independiente V* (por ejemplo, el volumen de un gas) con una *variable dependiente P* (por ejemplo, la presión). Al emplear dicha ley para medir un valor V_0, inevitablemente se comete un error que incide en el valor de *P* correspondiente, que desde ya no es $P_0 = f(V_0)$ en forma exacta. ¿De qué manera el valor medido de *P* se ve afectado por la medida de *V*? Si para valores de V *muy próximos* a V_0 se obtienen valores muy diferentes de P, de esta forma la ley *f* que relaciona V con P no tiene utilidad práctica alguna.

Dado que los errores de medición son inevitables y afectan completamente el valor real de P_0, es posible establecer una cota de error para P (dependerá de cada situación en particular) a la que se la puede designar con ε $(\varepsilon > 0)$ y con la que podrá obtenerse una cota de error δ $(\delta > 0)$. Así, siempre que se mida V_0 con un error menor que δ, el valor obtenido de P distará del valor real P_0 en menos que ε, es decir:

$\left| f(V) - f(V_0) \right| < \varepsilon$ siempre que $\left| V - V_0 \right| < \delta$. Cuando esta situación puede efectivizarse para cualquier cota de error $\varepsilon > 0$, se dice que la ley "*f*" es continua en V_0. Naturalmente la cota de error δ dependerá del $\varepsilon > 0$ prefijado en cada caso, y también de V_0.

Este fenómeno conduce a una definición matemática de la continuidad de una función en un punto.

Se considera una función definida así $f : A \subseteq \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ $(A \neq \emptyset)$

A no tiene por qué coincidir con el dominio natural de la función *f*, ya que, usualmente, se estudian las propiedades de la misma en un subconjunto de su dominio natural. Por otra parte, la continuidad de una función no depende sólo de *la ley que la define* sino también del conjunto de valores de la variable independiente que se considera.

1. Definición

Se dice que una función $f : A \subseteq \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ ***es continua en un punto*** $a \in A$ si y sólo si para cada número $\varepsilon > 0$ es posible encontrar un número $\delta > 0$ (que, en general, depende de ε y de a) tal que para todo $x \in A$ con $|x - a| < \delta$ se verifica que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. En forma equivalente, *la función f es continua en* $x = a \in Domf$ si y sólo si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Cabe destacar el enorme protagonismo que tiene el conjunto *A* en esta definición. Sólo serán considerados los valores de *x* que están en *A*, no interesa lo que sucede con la "ley" fuera de *A*.

También es relevante resaltar la similitud entre la definición de límite de una función en un punto analizada con anterioridad y la definición recientemente expuesta. La única diferencia consiste en que para que una función *f* tenga posibilidades de ser continua en *a*, es necesario que esté definida en *a*.

De la definición de continuidad y de las propiedades conocidas de límite surge lo siguiente:

Si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \Rightarrow f(x) = f(a) + \alpha(x)$, con $\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0$. Por lo tanto, $f(x) - f(a) = \alpha(x)$. Si tenemos en cuenta que $\Delta f = f(x) - f(a) = \alpha(x)$ y $\Delta x = x - a$, podemos reescribir la definición diciendo que *f* es continua en $x = a \in Domf$ si y sólo si $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$, esto es, si una función es continua en un punto, incrementos infinitésimos en la variable independiente producen incrementos infinitésimos en la función. Es decir, en ese punto la gráfica de la función no presentará saltos, interrupciones ni cambios bruscos.

Que una función sea continua en un punto implica la existencia de la imagen de la función en $x = a$, la existencia del límite de la función cuando *x* tiende a *a* y la igualdad de ambos valores. Si al menos una de estas tres condiciones no se cumpliera, la función no sería continua en el punto y se introduce la siguiente definición:

2. Definición

Si una función no es continua en un punto *a* se dice que es ***discontinua*** en dicho punto.

Las discontinuidades pueden originarse por diferentes causas, las que permiten establecer una clasificación de discontinuidades que proporciona información valiosa sobre las características de la relación funcional en estudio.

1. CLASIFICACIÓN DE DISCONTINUIDADES

Existen dos tipos fundamentales de discontinuidad:

1. **Discontinuidad evitable** o removible

Esta discontinuidad tiene lugar si existe el límite $\lim_{x \to a} f(x) = L$ pero la función no está definida en $x = a$ ($\nexists\ f(a)$), o bien estando definida en $x = a$, su imagen no coincide con el límite L ($f(a) \neq L$)

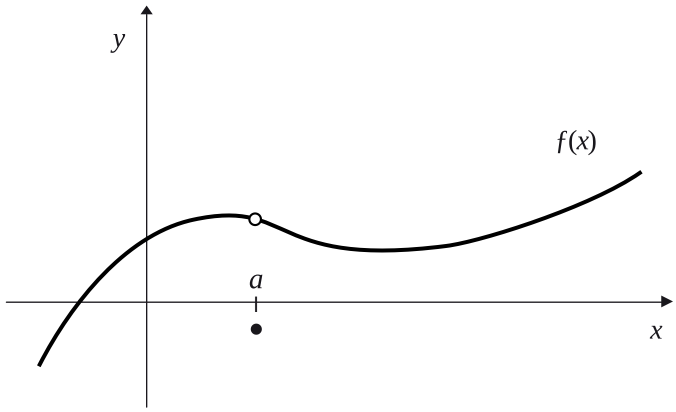


***Figura 54*. Función con discontinuidad evitable en** $x = a$

Se llama evitable o removible porque es posible redefinir la función f de forma tal que $f(a) = L$. ¿Cómo hacerlo? **Construyendo una nueva función f^*, denominada *prolongación o extensión continua de f***, como sigue:

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \neq a \\ L & si \quad x = a \end{cases}$$

1. Nota

Es importante recalcar que si $\nexists\ f(a)$, la función es automáticamente discontinua. Por otra parte, se ha dicho que no interesa saber qué ocurre con la función fuera de su dominio natural, y en ese caso $a \notin Domf$. Pero sucede que el estudio del límite de f en $a \notin Domf$ ayuda a recolectar más información valiosa sobre la gráfica de la función. Por ejemplo, si $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} + \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si} \quad x > 0 \\ 2 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ la función tiene dominio $\boldsymbol{R}_0^+ - \{1\}$ ¿para qué valores de a será adecuado analizar continuidad y discontinuidad? Carece de sentido pensar en $x = -1$, porque no hay imágenes de f alrededor de él, con lo que no tendrá sentido hablar del límite. ¿Y en $x = 0$? Éste está en el dominio, con lo que es importante analizarlo. ¿Y en $x = 1$? No pertenece al dominio, pero a su alrededor es posible encontrar imágenes de la función, de modo que nos aportará información importante sobre la misma.

2. **Discontinuidad no evitable**

Esta discontinuidad surge a partir de la **no** existencia del límite de la función en el punto *a*, es decir, $\nexists \lim_{x \to a} f(x)$, tenga o no imagen en ese punto. Ahora bien, la no existencia del límite puede estar ocasionada por diferentes causas, las que permiten a su vez establecer una subclasificación dentro de este grupo de discontinuidades.

a. **Discontinuidad no evitable con salto finito**

Esta discontinuidad tiene lugar si los límites laterales $\lim_{x \to a^+} f(x) = L^+$ y $\lim_{x \to a^-} f(x) = L^-$ existen pero son diferentes. Por tanto, no existe el límite de f en $x = a$

En este caso es imposible redefinir la función f de tal forma que $L^+ = L^-$

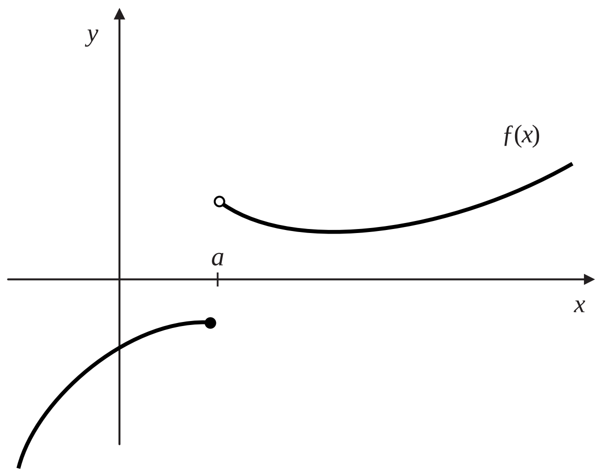


Figura 55. **Función con discontinuidad no evitable con salto finito en** $x = a$

b. **Discontinuidad no evitable con salto infinito**

Esta discontinuidad tiene lugar si alguno de los límites laterales es $\pm\infty$, o sea, si $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ tenga o no imagen en ese punto. Por tanto, no existe el límite finito de f en $x = a$

En este caso también *es imposible redefinir* la función *f*.

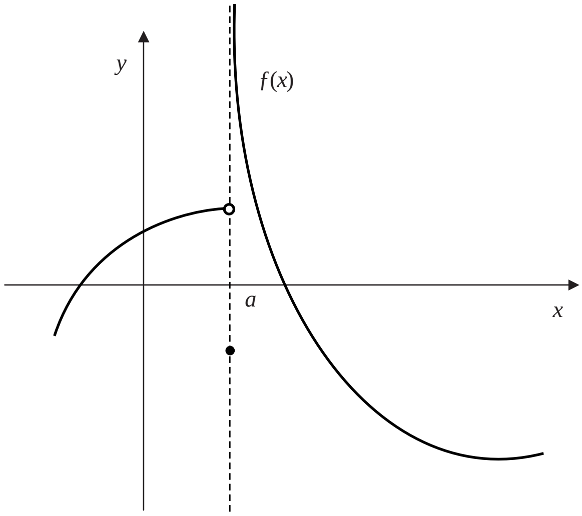


Figura 56. **Función con discontinuidad no evitable con salto infinito en** $x = a$

c. **Discontinuidad no evitable esencial**

Este caso corresponde cuando la función está definida en todo el entorno reducido de a pero no existen los límites laterales. Por ejemplo, la función $f(x) = sen\left(\frac{1}{x}\right)$ en $a = 0$ presenta una discontinuidad esencial. Recuerde su gráfico:

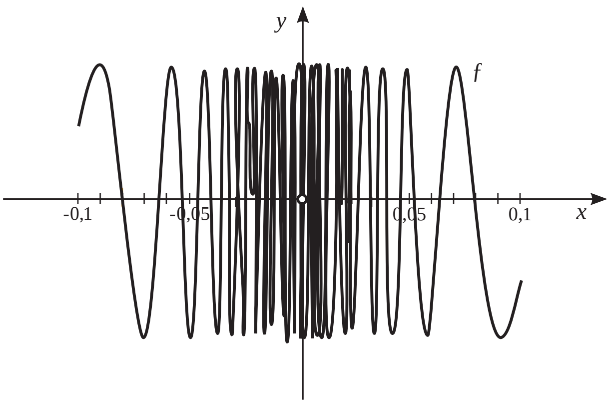


Figura 57. **Función con discontinuidad no evitable esencial**

1.1. Continuidad lateral en un punto

Puede ocurrir que una función esté definida en un intervalo cerrado, por ejemplo en el $[c, a]$ y nos interese analizar qué ocurre en a. En este caso, es posible hablar de continuidad lateral.

En efecto, $f(x)$ se dice ***continua por izquierda*** en a si y sólo si $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$; análogamente, si la función estuviese definida en el $[a, b]$, $f(x)$ se dice ***continua por derecha*** en a si y sólo si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

EJEMPLO

La función $f(x)=\sqrt{x}$ está definida para $x \geq 0$. De esta forma no es posible mencionar la continuidad de $f(x)$ por izquierda en $a = 0$, pero como $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$, se concluye que $f(x)$ es ***continua por derecha*** en 0.

2. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS EN UN PUNTO

1- Suma, producto y cociente

Sean f y g dos funciones continuas en a, y α y β dos números reales arbitrarios. Entonces:

La función $(\alpha f + \beta g)(x)$ es continua en a.

La función $(f.g)(x)$ es continua en a.

Si $g(a) \neq 0$ entonces la función $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ es continua en a.

2- **Continuidad de la función compuesta**

Si $f(x)$ es continua en a, y $g(x)$ es continua en $f(a)$, entonces $(g \circ f)(x)$ es continua en a.

3. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS EN INTERVALOS CERRADOS

Por su utilidad resulta muy interesante el estudio de algunas propiedades de carácter *global* de las funciones continuas, es decir, propiedades que dependen de la continuidad de una función en un intervalo. La característica fundamental de éstas es su sencilla interpretación geométrica, lo que hace que parezcan evidentes, aunque el lector podrá comprobar que sus demostraciones no son triviales. Algunas demostraciones las podrá encontrar entre los ejercicios resueltos. Previo al inicio del estudio de las propiedades es necesario dar las siguientes definiciones:

3. Definición.

Se dice que una función $f(x)$ es continua en un intervalo abierto (a, b), si $f(x)$ es continua en cada uno de los puntos de este intervalo.

4. Definición.

Se dice que una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, si $f(x)$ es continua en (a, b), y además $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

De las propiedades enunciadas hasta aquí se concluye que las funciones polinómicas, las exponenciales y las trigonométricas $sen\, x$ y $\cos x$ son continuas en todo el eje real. Las funciones racionales son continuas en sus dominios naturales.

EJEMPLOS

1. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} x^3+2 & \text{si} \quad x<2 \\ 5 & \text{si} \quad x=2 \\ x^2+6 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

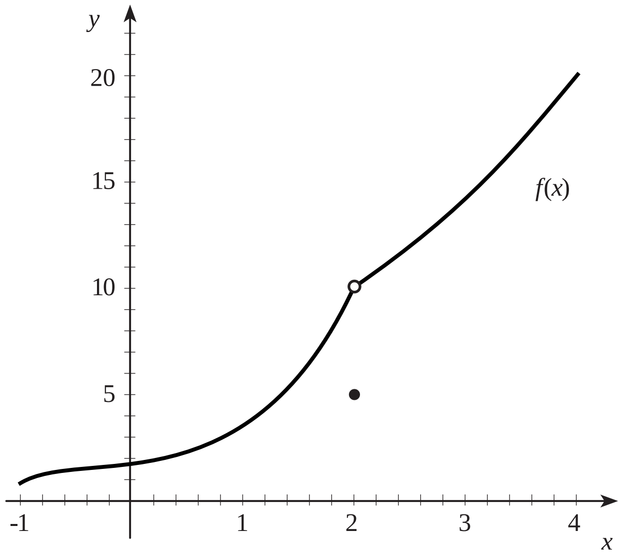


Figura 58. **Función con discontinuidad evitable en** $x = 2$

Como cada tramo de la función corresponde a una función polinómica que es continua en todo número real a, sólo es necesario analizar la continuidad de f en $x = 2$, en el que se produce el cambio de "fórmula" de la función.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-}(x^3+2)=10 \\ \lim\limits_{x\to 2^+}(x^2+6)=10 \end{array}\right\} \Rightarrow \ \exists \lim_{x\to 2} f(x)=10 \neq f(2)=5,$$

por lo tanto, f es discontinua evitable en $a = 2$

2. Encontrar el valor de A para el cual la función $f(x)=\begin{cases} x^2-2 & \text{si} \quad x<1 \\ Ax-4 & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$ es continua en todo su dominio.

Del mismo modo que en el ejemplo precedente, sólo se analizará la continuidad en $a = 1$ y por los mismos motivos fundamentados.
Para que f admita límite en $a = 1$, es preciso que existan los límites laterales y que coincidan.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-2)=-1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+}(Ax-4)=A-4=f(1) \end{array}\right\} \text{para que exista el límite en 1 debe ser } A-4=-1, \quad A=3$$

Propiedades

1. **Conservación del signo**

Sea $f : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ una función continua en (a,b) y $x_0 \in (a,b)$. Si $f(x_0) \neq 0$, existe $\delta > 0$ tal que en el entorno $E(x_0,\delta)$ las imágenes de la función f tienen el mismo signo que $f(x_0)$

2. **Acotación**

Sea $f : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ una función continua en $[a, b]$ y $x_0 \in (a,b)$, entonces existe $\delta > 0$ tal que f está acotada en el entorno $E(x_0,\delta)$

Un momento más para pensar

Si una persona mide 168 cm y hace 13 años medía 135 cm, seguramente que en algún momento intermedio medía con exactitud 147 cm.

Ahora bien, si una entrada en un boliche cuesta \$ 20 y hace 6 años costaba \$ 15, ¿Es seguro que en algún momento ir al boliche costaba exactamente \$ 17,99? **No**, a ningún empresario le viene bien cobrar \$ 17,99 por la entrada. La diferencia está centrada en que la altura de una persona es una función continua del tiempo y para pasar de 135 cm a 168 cm tiene que pasar por todos los valores intermedios, pero el precio de las entradas a los boliches no varía de forma continua con el tiempo y puede aumentar "de golpe" de \$ 15 a \$ 20. ¿Le parece extraño este hecho?

El gráfico de una función continua en un intervalo $f : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ puede ser imaginado como una curva continua, es decir, sin cortes, sin interrupciones ni saltos; además, si el signo de $f(a)$ es distinto del signo de $f(b)$, el gráfico de f debe atravesar el eje x para pasar de un punto situado debajo de él a otro que se encuentra por encima y, por tanto, f debe anularse en algún punto entre a y b. Esto es precisamente lo que afirma el conocido teorema que sigue.

3.1. Enunciado intuitivo del teorema de los ceros de Bolzano (1781-1848)

Toda función continua en un intervalo que toma valores positivos y negativos se anula en algún punto del intervalo.

Lo primero que llama la atención en este teorema es su *evidencia*. No está de más, con referencia a este tema, recordar que, como decía Bertrand Russell[1], "*en matemáticas la evidencia es enemiga de la corrección*". Así, el mérito de Bolzano es haber llamado la atención sobre la necesidad de demostrar muchas proposiciones, *aparentemente evidentes*, que se refieren a las funciones continuas.

[1] 1872-1970, Filósofo, matemático, pacifista y reformista social inglés. Premio Nóbel de Literatura en 1950.

Suele ser particularmente difícil demostrar matemáticamente lo que la intuición presenta como evidente.
Existen consecuencias de este teorema que están lejos de ser evidentes. Por ejemplo: es posible probar, con la ayuda del teorema de Bolzano, que si se tienen tres sólidos en el espacio (puede imaginarse tres cuerpos de diferentes tamaños), es siempre posible encontrar un plano que los divida simultáneamente en partes iguales (puede cortar los tres cuerpos exactamente por la mitad de un solo tajo).

Teorema de Bolzano
Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(a).f(b) < 0$, entonces existe algún $x_0 \in (a,b)$ / $f(x_0) = 0$

Este teorema otorga condiciones suficientes para la existencia de soluciones de la ecuación $f(x) = 0$. De hecho, si se elimina alguna de las hipótesis, no se puede predecir la existencia de soluciones de la ecuación anterior, tal como se muestra a continuación:

EJEMPLOS

1. La función $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x > 0 \\ x-1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ no es continua en cero, aunque $f(-1) = -2 < 0$ y $f(1) = 2 > 0$, no existe x en el intervalo $(-1, 1)$ en que $f(x) = 0$.

2. La función $f(x) = x^2 - 2$ **no** verifica $f(-2).f(2) < 0$ y sin embargo existen dos raíces $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$ pertenecientes al intervalo $(-2, 2)$.

El teorema de Bolzano es la base de distintos métodos del cálculo numérico para la resolución aproximada de ecuaciones no lineales, de los que el más simple es el conocido como *Método de Dicotomía o Bisección*, que se describe a continuación:

3.2. Método de la bisección

El teorema de Bolzano tiene una interesante aplicación en la localización de las raíces de una ecuación o ceros de una función continua. Consiste en lo siguiente: mediante un barrido de intervalos se busca dos valores "a" y "b" para los que las imágenes de la función tengan signos opuestos. Si se consigue encontrar dos valores que cumplan la condición anterior, por ejemplo $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, y, además, la función es continua en $I = [a, b]$, queda garantizada, por el teorema de Bolzano, la existencia en el intervalo (a, b) de al menos una raíz.

Si ahora se considera el punto medio del intervalo $x = \dfrac{a+b}{2}$ la función en ese punto puede tomar el valor 0, en cuyo caso ya tendríamos localizada una raíz, o bien en $\dfrac{(a+b)}{2}$ toma un valor positivo o negativo. Si $f\left(\dfrac{(a+b)}{2}\right) < 0$, se observa ahora en el intervalo $I_1 = \left[\dfrac{(a+b)}{2}, b\right]$ en el que la función es continua y en cuyos extremos toma valores de signos opuestos. El teorema de Bolzano garantiza así la existencia de al menos una raíz en ese intervalo I_1 de longitud la mitad de la longitud del intervalo inicial.

Si hubiese sido $f\left(\dfrac{(a+b)}{2}\right) > 0$ se hubiese considerado el intervalo $I_1 = \left[a, \dfrac{(a+b)}{2}\right]$

Se repite el mismo proceso con el intervalo I_1, con lo que se van obteniendo intervalos cada vez más pequeños, dentro de los cuales se sabe que existe una raíz. Es posible así hallar el valor de esa raíz con la aproximación deseada.

Se puede demostrar que si α es la raíz real de $f(x) = 0$ y x_n es un valor aproximado de la raíz mediante el método de la bisección en la iteración enésima, entonces

$$\left|\alpha - x_n\right| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

El segundo miembro de esta desigualdad constituye una cota del error de truncamiento local del algoritmo; por lo tanto, si se desea lograr una aproximación de la raíz con error menor que $\varepsilon > 0$, bastará identificar cuál es el mínimo n que verifica $\dfrac{b-a}{2^n} < \varepsilon$ y de esta forma conocer el número de iteraciones necesarias para lograr la precisión solicitada.

3.3. Teorema de los valores intermedios de Darboux (1842-1917)

Sea f continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y $f(a) \neq f(b)$. Si λ es un valor comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe algún $x_0 \in (a,b)$ / $f(x_0) = \lambda$.

¡Recuerde la reflexión sobre la medida de su estatura!

Tenga en cuenta que también este teorema otorga condiciones suficientes pero no necesarias; de hecho existen funciones discontinuas que satisfacen la propiedad. Por ejemplo, la función $f(x) = sen\left(\dfrac{1}{x}\right)$, en todo intervalo que contenga al origen, toma todos los valores entre -1 y 1 aunque no es continua en cero.

Del teorema de los valores intermedios de Darboux se deduce el siguiente resultado:

3.4. Propiedades interesantes

a) Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo I, la imagen $f(I)$ es también un intervalo.

Esta propiedad engloba los teoremas de Bolzano y de Darboux como casos particulares. (¿Por qué?) Los tres son equivalentes entre sí.

Como consecuencia de estos tres, surge el teorema de la continuidad de la función inversa.

b) Si $f(x)$ es una función continua y biyectiva en un intervalo, la función inversa $f^{-1}(x)$ es también continua.

Se sabe que la imagen, $f(I)$, de un intervalo I por una función continua es un intervalo. Cabe preguntarse ahora, ¿es $f(I)$ un intervalo del *mismo tipo* que I? La respuesta está en estos ejemplos:

1. $f(x) = x^2$; $f\big((-1,1]\big) = f\big([-1,1)\big) = [0,1]$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $f\big((0,1]\big) = [1,+\infty)$; $f\big([1,+\infty)\big) = (0,1]$
3. $f(x) = sen\, x$; $f\big((-\pi,\pi)\big) = [-1;1]$

Por lo tanto, la imagen por una función continua de un intervalo abierto, o semiabierto, o de una semirrecta, puede ser un intervalo de distinto tipo. Faltaría considerar qué sucede con los intervalos cerrados (y acotados), es decir, de la forma $[a,b]$. Observe que si $f:[a,b] \to \boldsymbol{R}$ es continua, para probar que $f([a,b])$ es un intervalo cerrado y acotado bastará probar que el conjunto $f([a,b])$ tiene mínimo y máximo, es decir que existirán x_1 y $x_2 \in [a, b]$ tales que para todo $x \in [a,b]$ es $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, y entonces será $f([a,b]) = [f(x_1), f(x_2)]$

3.5. Máximo y mínimo absolutos o globales

Sea $f: A \subseteq \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$

5. *Definiciones*

a. Se dice que f alcanza en x_0 un **máximo *global o absoluto*** si $\forall x \in \mathrm{Dom}f$ se cumple que $f(x_0) \geq f(x)$

b. Se dice que f alcanza en x_0 un **mínimo *global o absoluto*** si $\forall x \in \mathrm{Dom}f$ se cumple que $f(x_0) \leq f(x)$

Si recordamos las definiciones de extremos superior e inferior de un conjunto de números reales dadas en el capítulo 1, vemos que con estas dos nuevas definiciones estamos haciendo referencia, respectivamente, a los extremos superior e inferior del conjunto imagen de f en un cierto intervalo.

3.6. Teorema del máximo y del mínimo absolutos de Weierstrass (1815-1897)

Si $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$, entonces existen dos puntos x_1 y $x_2 \in [a,b]$ tales que para todo $x \in [a,b]$ es $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$. Los valores $f(x_1)$ y $f(x_2)$ son denominados, respectivamente, el ***mínimo y el máximo absolutos o globales*** de la función f en el intervalo $[a,b]$.

4. EJERCICIOS RESUELTOS[2]

1. Si $f(x)$ es tal que $\exists \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ y $\exists \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ ¿Es continua en $x = a$?

   Justifique y ejemplifique.

Solución

No, veamos un ejemplo:

$$y = \frac{x}{|x|} \quad \text{en} \quad x = 0: \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{|x|} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{|x|} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{-x} = -1 \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|} \Rightarrow \quad f \text{ no es continua}$$

en $x = 0$

2. Determine los puntos de continuidad de las siguientes funciones y clasifique las discontinuidades.

a) $y = e^x$ b) $y = [x]$ c) $y = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{x}$ d) $y = x\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{x}$

e) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ f) $y = \begin{cases} \dfrac{x^3-27}{3-x} & \text{si } x \neq 3 \\ 0 & \text{si } x = 3 \end{cases}$ g) $y = \begin{cases} 1+2x & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 7-5x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

Solución

a) $y = e^x$ el dominio es el conjunto de los reales, por tanto $\forall a \in R$ analicemos si cumple que

$$\left.\begin{array}{l} \exists \lim\limits_{x\to a} e^x = e^a \\ \exists f(a) = e^a \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \Rightarrow f \text{ es continua para todo } a \text{ real.}$$

[2] Recuerde que es importante que usted intente resolver el problema acudiendo a los conceptos teóricos todas las veces que lo considere necesario y sólo mire la resolución una vez finalizado su razonamiento.

Si nos pidiesen probarlo por definición para $\varepsilon = \dfrac{e^a}{2}$, tendríamos que considerar que

$\left|e^x - e^a\right| < \dfrac{e^a}{2}$ si $0 < \left|x-a\right| < \delta$ de donde $-\dfrac{e^a}{2} < e^x - e^a < \dfrac{e^a}{2} \Rightarrow \dfrac{e^a}{2} < e^x < \dfrac{3e^a}{2} \Rightarrow$

Aplicando logaritmos $a - \ln 2 < x < a + \ln 3 - \ln 2 \Rightarrow -\ln 2 < x - a < \ln 3 - \ln 2 \Rightarrow$

$$-\ln 3 - \ln 2 < -\ln 2 < x - a < \ln 3 - \ln 2 < \ln 3 + \ln 2 \Rightarrow \left|x-a\right| < \ln 3 + \ln 2 = \ln 6$$

de donde tomando $0 < \delta \leq \ln 6$, restaría verificar sólo el límite.

b) $y = [x]$ el dominio es el conjunto de los reales, pero presenta discontinuidades en todos los enteros. Recordemos que la definición de parte entera nos dice que $\forall a \in \boldsymbol{R}$ se cumple $n \leq a < n+1, n \in \boldsymbol{N} \Rightarrow [a] = n$,

por tanto, la función se podría expresar así: $y = [x] = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ -2 & -2 \leq x < -1 \\ -1 & -1 \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{cases}$

de donde, si elegimos $a \in \boldsymbol{R} - \boldsymbol{Z}$, fácilmente podemos probar que cumple la definición de continuidad, hagámoslo para $a \in (0;1)$, y con idéntico criterio lo extendemos para los restantes valores de a:

$$\lim_{x \to a^-} [x] = 0 \wedge \lim_{x \to a^+} [x] = 0 \Rightarrow \exists \lim_{x \to a} [x] = 0 \wedge [a] = 0 \;\forall\; a \in (0;1) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to a} [x] = [a] = 0$$

de donde la función resulta continua en $a \in \boldsymbol{R} - \boldsymbol{Z}$. Veamos ahora qué ocurre para los $b \in \boldsymbol{Z}$; probaremos, por ejemplo, que para $b = 1$ es discontinua no evitable con salto finito:

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} [x] = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} [x] = 1 \end{array}\right\}$ como los límites laterales son finitos y distintos, tenemos una discontinuidad no evitable con salto finito en $b = 1$; de la misma manera ocurre en los restantes enteros.

c) $y = sen\dfrac{\pi}{x}$ El dominio es $\boldsymbol{R} - \{0\}$. Elijamos un valor cualquiera $a \in \boldsymbol{R} - \{0\}$ y veamos que cumple con la definición de continuidad:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} sen\dfrac{\pi}{x} = sen\dfrac{\pi}{a} \quad \text{si} \quad a \neq 0 \\ f(a) = sen\dfrac{\pi}{a}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{es continua } \forall a \neq 0$$

Analicemos qué ocurre en el origen:

$$\left.\begin{array}{l}\nexists \lim\limits_{x\to 0^+} sen\dfrac{\pi}{x} \wedge \nexists \lim\limits_{x\to 0^-} sen\dfrac{\pi}{x} \\ \nexists f(0)\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ es discontinua no evitable}$$

esencial en $x = 0$

d) $y = xsen\dfrac{\pi}{x}$ El dominio es $R-\{0\}$, de la misma manera que hicimos en los ejemplos anteriores, pruebe Ud. que es continua $\forall a \neq 0$.

Pero, ¿qué ocurre en el origen?

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} \underbrace{x}_{\to 0} . \underbrace{sen\dfrac{\pi}{x}}_{\text{acotada}} = 0 \\ \nexists f(0)\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ la función presenta una discontinuidad}$$

evitable en $x = 0$

e) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$

Las raíces del denominador son

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4.2}}{2} = \begin{cases}2 \\ 1\end{cases} \Rightarrow D_f = R-\{1;2\}$$

Analicemos en primer lugar en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-2} = -2 \\ \nexists f(1)\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ la función es}$$

discontinua evitable en $x = 1$

Veamos, en segundo lugar, qué ocurre en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+1}{x-2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+1}{x-2}=-\infty\\ \nexists f(2)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

la función presenta una discontinuidad no evitable con salto infinito en $x = 2$

En los restantes puntos la función es continua por ser un cociente de funciones lineales, con el denominador no nulo (revise los conceptos del álgebra de funciones continuas).

f) $y=\begin{cases}\dfrac{x^3-27}{3-x} & \text{si } x\neq 3\\ 0 & \text{si } x=3\end{cases}$

En este caso el dominio son los reales. Como la función está definida a tramos, en los puntos donde cambia la definición existen posibilidades de que se presenten discontinuidades; por tal razón, veamos qué pasa en $x = 3$:

Por un lado $\exists f(3)=0$, veamos si existe el límite

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{3-x}=\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3^3}{3-x}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{3-x}=-\lim_{x\to 3}(x^2+3x+9)=-27$$

Como vemos, existen el límite y la imagen en $x = 3$, pero son distintos, con lo que afirmamos que la función presenta una discontinuidad evitable en $x = 3$.

Para cualquier otro número real, la función es un cociente de polinomios con denominador no nulo. Sabemos que los polinomios son funciones continuas en los reales y que el cociente de funciones continuas también lo es, en tanto el denominador no se anule. Esto garantiza que es continua si $x\neq 3$

g) $f(x)=\begin{cases}1+2x & \text{si } x\leq 1\\ 7-5x & \text{si } x>1\end{cases}$

El dominio es el conjunto R. La función está definida a tramos y en cada tramo es una función lineal y, por ende, continua, de modo que podemos confirmar su continuidad $\forall x\neq 1$

Pero, ¿qué pasa en $x = 1$?

Sugerencia: compare, por ejemplo, los ejercicios f) y g) y cuestiónese en qué casos nos vemos ***obligados*** a calcular los límites laterales y en cuáles no es imprescindible, para las funciones definidas a tramos.

Tiene imagen ya que $f(1) = 1 + 2.1 = 3$, analicemos la existencia del límite:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}(1+2x)=3\\ \lim\limits_{x\to 1^+}(7-5x)=2\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f(x)$$, como los laterales son finitos y distintos,

la función tiene una discontinuidad no evitable con salto finito en $x = 1$

3. ¿Para cuáles de las siguientes funciones $f(x)$ existe una función continua $g(x)$ con dominio en reales, tales que $g(x) = f(x) \ \ \forall x \in D_f$?

a) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ b) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x}$

c) $f(x)=\begin{cases}2-x & \text{si } x<1\\ x^2 & \text{si } x>1\end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{si } x<1\\ 2x & \text{si } x>1\end{cases}$

Solución

a) El dominio de la función es $\boldsymbol{R}-\{2\}$, por lo que f presenta una discontinuidad en $x = 2$. Calculemos el límite:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

Es decir que f tiene una discontinuidad evitable en $x = 2$. Si $g(x) = f(x) \ \ \forall x \in D_f$, pero tiene que ser continua en $x = 2$, entonces $g(2) = 4$, con lo que

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x\neq 2\\ 4 & \text{si } x=2\end{cases}$$

b) El dominio de la función es $R-\{0\}$, por lo que f presenta una discontinuidad en $x = 0$. Calculemos el límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2sen^2\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2sen\frac{x}{2}}{x}.sen\frac{x}{2}=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{sen\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}_{\to 1}.\underbrace{\lim_{x\to 0}sen\frac{x}{2}}_{\to 0}=0$$

De modo que f tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$. Si $g(x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$, pero tiene que ser continua en $x = 0$, entonces $g(0) = 0$, con lo que

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

c) $f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ El dominio de la función es $R - \{1\}$, por lo que f presenta una discontinuidad en $x = 1$. Calculemos el límite:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-}(2-x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

De modo que $g(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

El dominio de la función es $\boldsymbol{R} - \{1\}$, por lo que f presenta una discontinuidad en $x = 1$. Calculemos el límite:

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^+}(2x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$, por lo que no es posible definir $g(x)$ continua en todos los reales con el requisito exigido.

4. Sea $|f(x)| \leq 2|x| \quad \forall x \in \boldsymbol{R}$. Pruebe que f es continua en el origen.

Solución

Como $\left|f(x)\right| \le 2\left|x\right| \Rightarrow -2\left|x\right| \le f(x) \le 2\left|x\right|$

Usando la propiedad del sandwich: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0}(-2\left|x\right|) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0}(2\left|x\right|) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

Además $\left|f(0)\right| \le 2\left|0\right| = 0 \Rightarrow f(0) = 0$, con lo que se cumplen las condiciones de continuidad en el origen.

5. Halle una función $f(x)$ que sea discontinua en todos sus puntos pero $\left|f(x)\right|$ sea continua $\forall x \in \boldsymbol{R}$

Solución

Tomemos $f(x) = \begin{cases} 5 \text{ si } & x \in Q \\ -5 \text{ si } & x \in R - Q \end{cases} \Rightarrow \left|f(x)\right| = 5 \quad \forall x \in \boldsymbol{R}$

Como el conjunto de los racionales es denso y el de los irracionales también, la función, cuyo dominio son los reales, es discontinua en todos sus puntos y al ser las imágenes números opuestos, al aplicarle módulo nos queda una función constante en su dominio que son los reales; por tanto, es continua en $\boldsymbol{R}$.

6. Sea $f(x) = 2^{-\frac{1}{x}}$

   Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

   ¿Es posible redefinir $f(0)$ tal que f sea continua?

Solución

a) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}(-\frac{1}{x}) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to \pm\infty} 2^{-\frac{1}{x}} = 1$

Como $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-}\left(-1/x\right) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} 2^{-\frac{1}{x}} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left(-1/x\right) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} 2^{-\frac{1}{x}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0} 2^{-\frac{1}{x}}$

b) La función presenta en $x = 0$ una discontinuidad no evitable con salto infinito, de modo que no se puede redefinir $f(0)$ para que resulte continua.

7. Para cuestionarse:

a) ¿$\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a) \Rightarrow |f(x)|$ es discontinua en $x = a$?

b) ¿Si f y g son discontinuas en $x = a \Rightarrow f + g$ es discontinua en a?

c) ¿Si f es continua en $x = a$, g está acotada en el entorno de a y $\nexists \lim_{x\to a} g(x) \Rightarrow f.g$ es discontinua en $x = a$?

Solución

a) No necesariamente. Por ejemplo, si definimos $f(x)$ de modo que el límite sea un número y la imagen su opuesto, tendremos una función discontinua evitable en a, pero al tomarla en módulo, resulta ser continua. Por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 2 \\ -1 & \text{si } x = 2 \end{cases} \Rightarrow |f(x)| = 1 \quad \forall x \in \boldsymbol{R}$$

b) Falso. Consideremos las funciones $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \wedge\ g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, ambas son discontinuas en $x = 0$, sin embargo $f(x) + g(x) = 0 \quad \forall x$ que es continua.

c) Falso. Consideremos por ejemplo:

$$f(x) = x \wedge g(x) = sen\frac{\pi}{x} \wedge \nexists \lim_{x\to 0} g(x) \wedge |g(x)| \leq 1 \text{ sin embargo,}$$

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{x}_{\to 0} . \underbrace{sen\frac{\pi}{x}}_{\text{acotada}} = 0$$

8. Sean $f(x) = \dfrac{x + |x|}{2}$ y $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Estudie la continuidad de $f \circ g$ y $g \circ f$

Solución

Es posible fundamentar la continuidad a partir de las propiedades del álgebra de funciones continuas, pero creemos que, en este caso, sería constructivo hallar dichas funciones compuestas y luego analizar la continuidad:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x}{2}=0 & \text{si } x<0\\[2mm] \dfrac{x+x}{2}=x & \text{si } x\geq 0\end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x)=\begin{cases}x & \text{si } x\leq 0\\ x^2 & \text{si } x>0\end{cases}$$

$$f\circ g(x)=f\left[g(x)\right]=\begin{cases}0 & \text{si } g(x)<0\\ g(x) & \text{si } g(x)\geq 0\end{cases}\Rightarrow f\circ g(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 0^2=0 & \text{si } x=0\\ x^2 & \text{si } x>0\end{cases}$$

Para los negativos es constante, por tanto es continua; para los positivos es polinómica, de modo que también lo es; resta por analizar en $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} 0=0 \wedge \lim_{x\to 0^+} x^2=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}(f\circ g)_{(x)}=0=(f\circ g)_{(0)}$$

Por tanto, es continua en los reales.

$$g\circ f(x)=g\left[f(x)\right]=\begin{cases}f(x) & \text{si } f(x)\leq 0\\ f^2(x) & \text{si } f(x)>0\end{cases}$$

Pero $f(x)$ nunca es negativa, vale 0 para los negativos y el cero, y vale x para los positivos, de modo que resulta:

$$g\circ f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\leq 0\\ x^2 & \text{si } x>0\end{cases}$$

La continuidad debe fundamentarse como lo hicimos en la función compuesta anterior.

9. Analice la continuidad de $f(x)=g\circ h(x)$ si

a) $g(x)=\ln x$, $h(x)=\operatorname{sen} x$ en $x=\dfrac{\pi}{2}$ b) $g(x)=\dfrac{1}{x}$, $h(x)=x-3$ en $x=3$

Solución

a) Si $h(x)$ es continua en $\frac{\pi}{2}$ y $g(x)$ lo es en $h(\frac{\pi}{2})$, entonces $g \circ h(x)$ será continua en $\frac{\pi}{2}$. De modo que veamos si podemos aplicar esta propiedad:

Para la $h(x)$: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} senx = 1 = h(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow$ es continua en $\frac{\pi}{2}$

Para la función $g(x)$: $h(\frac{\pi}{2}) = sen\frac{\pi}{2} = 1 \wedge \lim_{x\to 1} \ln x = 0 = h(1) \Rightarrow$ h es continua en $x = 1$

Por todo lo expuesto, la función $g \circ h(x)$ es continua en $x = \frac{\pi}{2}$

b) $g(x) = \frac{1}{x}$, $h(x) = x - 3$ en $x = 3$

Veamos si podemos emplear la propiedad. La función h es continua en $x = 3$ por ser un polinomio, su imagen es $h(3) = 0$, pero la función g no existe en $x = 0$, de modo que no puede resultar continua. Por no cumplirse las hipótesis de la propiedad, nada podemos afirmar de la compuesta, razón por la que deberemos buscar otros fundamentos. Para ello nos preguntamos ¿$\exists g \circ h(x)$ en $x = 3$? Y la respuesta es **no**, basándonos en lo ya dicho, por lo que la función compuesta no es continua en $x = 3$.

10. a) Dada $f(x) = \frac{x^2 + x^3}{x^2 + 1}$ en $[1,5]$ ¿tiene máximo y mínimo absolutos (o globales)?

b) Determine si $f(x) = x^3$ tiene máximo y mínimo absolutos en los siguientes intervalos: b-1) [0, 3] b-2) [–2, 1) b-3) (2, 5)

Solución

Uno de los teoremas de Weierstrass, acerca de la continuidad dice: Si $y = f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ entonces tiene máximo y mínimo absolutos en ese intervalo.
Es importante destacar que no <u>nos dice dónde ni cómo obtenerlos</u>, sólo afirma que <u>existen</u>.

a) $f(x) = \frac{x^2 + x^3}{x^2 + 1}$ en $[1,5]$

La función es un cociente de polinomios (función racional), y recordemos que éstos son continuos en los reales, además el denominador es distinto de cero, para todo x real, por tanto el cociente es una función continua en R, de donde es continua en cualquier subconjunto de los reales, en particular en [1, 5]. Al cumplir las hipótesis de Weierstrass, confirmamos que tiene máximo y mínimo absolutos.

Sugerencia: si no la recuerda, grafíquela. Observe que es una función creciente.

b) La función $f(x) = x^3$ es continua, por ser polinómica.

b-1) el intervalo es cerrado, por tanto tiene máximo y mínimo absolutos en [0,3], de hecho, observando su gráfico detectamos que el mínimo absoluto lo tiene en $x = 0$ y el máximo absoluto en $x = 3$, por ser una función creciente, pero es atinado recordar que esto no se pide.

b-2) En este caso el intervalo **no** es cerrado, de modo que no es posible afirmarlo a través de Weierstrass. Nosotros sabemos, por añadidura, que al ser creciente, el máximo absoluto estaría en $x = 1$ que no pertenece al intervalo. Además, siendo f creciente su conjunto imagen es [-8,1); note que si bien tiene mínimo, no tiene máximo, ya que 1 es supremo pues no pertenece al conjunto imagen.

b-3) Con idéntico criterio fundamentamos que no se cumple Weierstrass por ser el intervalo abierto.

11. Para las siguientes funciones, definidas en el intervalo indicado y para el valor k que se especifica, verifique el teorema del valor intermedio y halle los puntos en cada caso:

a) $f(x) = 3x + 5, \quad x \in [1, 2] \wedge k = 10$ b) $f(x) = x - x^3, \, x \in [-2, 2] \wedge k = 0$

Solución

El teorema del valor intermedio dice: *Si* $y = f(x)$ *es continua en el intervalo* $[a, b]$ *y* $f(a) < f(b)$ (o $f(a) > f(b)$), *y* k *un número que cumple* $f(a) < k < f(b)$ (o $f(a) > k > f(b)$) *entonces* $\exists c \in (a,b) \,/\, f(c) = k$

a) $f(x) = 3x + 5 \quad x \in [1, 2] \quad k = 10$

Como f es una función lineal es continua en el intervalo [1, 5], $f(1) = 8$ y $f(2) = 11$, de donde $8 < k < 11$, luego se cumplen las hipótesis del teorema, por tal razón sabemos que c existe y debemos buscarlo: $3c + 5 = 10 \Rightarrow 3c = 5 \Rightarrow c = \frac{5}{3}$ y así $1 < c < 5$

2. Nota

En ocasiones se pide demostrar que la función es continua en el intervalo cerrado.

Para ello recuerde que deberá probar que $\begin{cases} \text{i)}\forall c \in (a,b): \lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c) \\ \text{ii)} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a) \\ \text{iii)} \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b) \end{cases}$

Hagámoslo con el ejemplo anterior, $f(x) = 3x+5, \quad x \in [1, 2]$

Veamos que $\forall c \in (a,b)$: $\lim\limits_{x\to c}(3x+5) = 3c+5$ esto se debe probar por definición (si no lo recuerda, debe revisar el tema).
$\lim\limits_{x\to 1^+}(3x+5) = 8 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to 2^-}(3x+5) = 11$ ambos también probados por definición.

b) $f(x) = x - x^3 \quad x \in [-2, 2] \quad k = 0$

Nuevamente podemos fundamentar la continuidad, aludiendo a que es un polinomio, por otra parte $f(-2) = -2-(-2)^3 = 6,\ f(2) = 2-2^3 = -6 \Rightarrow f(2) < 0 < f(-2)$ con lo que vemos que cumple las hipótesis, por ende, cumple la tesis. Busquemos entonces para qué valores la cumple:

$$\exists c \in (-2;2) / f(c) = c - c^3 = 0 \Rightarrow c(1+c)(1-c) = 0 \Rightarrow c_1 = 0, c_2 = -1, c_3 = 1$$

12. Sabiendo que la siguiente función cumple con el teorema de Bolzano en [2, 4], halle la relación que existe entre los coeficientes *a* y *b*:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \le 3 \\ x^2 + ax + b & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

Solución

El teorema de Bolzano dice: *Si y* = *f* (*x*) *es una función continua en el intervalo cerrado* [*a*, *b*] *y f* (*a*) *f* (*b*) < *0 entonces* $\exists c \in (a, b)/ f(c) = 0$.
En nuestro caso, la función está definida a tramos y cada uno de ellos es polinomio de modo que la función es continua para $x > 3$ y para $x < 3$; nos falta exigir la continuidad en $x = 3$,

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-}(x+1) = 4 \\ \lim\limits_{x\to 3^+}(x^2+ax+b) = 9+3a+b \end{cases}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = 4 = 9+3a+b \Rightarrow 3a+b = -5$$

De esta manera garantizamos la continuidad. Además veamos los signos de las imágenes de la función en 2 y 4: $f(2) = 3$ y $f(4) = 16 + 4a + b$ y como $f(2)\,f(4) < 0$ entonces, al ser $f(2) > 0$ tiene que ocurrir que $16 + 4a + b < 0$. Y como $3a + b = -5$ tendremos que $b = -5 - 3a$, reemplazando en la inecuación: $16 + 4a - 5 - 3a < 0$ de donde $11 + a < 0$, por lo tanto $a < -11$. Nos falta saber cómo varía b, para ello procedemos de la siguiente manera, a partir de cómo varía a y su relación con b:

$$a < -11 \Rightarrow -3a > 33 \Rightarrow \underbrace{-5 - 3a}_{=b} > 28 \Rightarrow b > 28$$

Por tanto, la relación que deben cumplir es $3a + b = -5$ con $a < -11$ y $b > 28$

13. Determine si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes y justifique:

a) Si f es estrictamente creciente y continua en $[a, b]$, entonces es biyectiva en $[a, b]$.

b) Si f es estrictamente creciente y continua en $[a, b]$ y $f(a).f(b) < 0 \Rightarrow$ existe un único $x_0 \in (a,b)$ que cumple $f(x_0) = 0$

Solución

a) Falsa. Podemos garantizar que es inyectiva pero no suryectiva (o sobreyectiva), Por ejemplo $g:[0;5] \to \boldsymbol{R}$ / $g(x) = 2x$ es continua, estrictamente creciente, es inyectiva pero no suryectiva ya que el conjunto imagen es $[0, 10]$, por tanto no es biyectiva.

b) Verdadera. Como es continua en $[a, b]$ y $f(a).f(b) < 0$, cumple las hipótesis del teorema de Bolzano y, por tanto, existe al menos un $x_0 \in (a,b) / f(x_0) = 0$ y como f es estrictamente creciente y por tanto inyectiva en $[a,b]$, entonces la raíz x_0 es única.

14. Determine $a, b \in R$ / f sea continua en a y b.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2 + x^2} & \text{si} \quad x < a \\ x^2 & \text{si} \quad a \le x < b \\ a^2 x & \text{si} \quad x \ge b \end{cases}$$

Solución

Para que f sea continua en a, debe ser: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$, calculemos los límites laterales en a.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to a^+}\sqrt{2+x^2} = \sqrt{2+a^2}\\ \lim_{x\to a^-} x^2 = a^2\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \sqrt{2+a^2} = a^2 = f(a) \Rightarrow a^4 = 2 + a^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow a^4 - 2 - a^2 = 0$ si $a^2 = u \Rightarrow u^2 - 2 - u = 0$ cuyas raíces son $a^2 = u = -1$, lo que es absurdo (¿por qué?) y $a^2 = u = 2 \Rightarrow a_1 = \sqrt{2} \quad \wedge \quad a_2 = -\sqrt{2}$

Efectuamos el mismo análisis en $x = b$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to b^-} x^2 = b^2\\ \lim_{x\to b^+} a^2 x = a^2 b\end{array}\right\} \Rightarrow f(b) = \lim_{x\to b} f(x) = b^2 = a^2 b \Rightarrow b^2 - a^2 b = 0 \Rightarrow b(b-a^2) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{cases} b_1 = 0 \\ b_2 = a^2 \end{cases}$ para los a hallados. Por tanto, tendremos cuatro soluciones posibles, a saber: $\underbrace{a = \sqrt{2} \wedge b = 0}_{\text{absurdo, ¡}a<b\text{!!!}}$ o $a = -\sqrt{2}$ y $b = 0$ o $a = \sqrt{2}$ y $b = 2$ o $a = -\sqrt{2}$ y $b = 2$

15. Dada $f(x) = \dfrac{x^2 + a}{x^2 + bx + c}$

a) Calcule $a, b, c \in \boldsymbol{R}$ de modo que tenga una discontinuidad evitable en $x = 1$ y una no evitable en $x = 2$

b) Halle el dominio de f

Solución

$f(x) = \dfrac{x^2 + a}{x^2 + bx + c}$ la función es un cociente de polinomios de modo que puede presentar una discontinuidad evitable o no evitable con salto infinito. Para que la discontinuidad sea evitable en $x = 1$, al calcular el límite se debe presentar una indeterminación del tipo $\dfrac{\to 0}{\to 0}$, y al factorear numerador y denominador detectar

que la multiplicidad de dicha raíz ($x = 1$, en este caso) para ambos debe ser la misma, o bien, el numerador debe tenerla con multiplicidad de mayor grado que el denominador. En cambio, para que presente un salto infinito en $x = 2$ puede ocurrir que el numerador tienda a una constante no nula y el denominador a cero, o bien el numerador debe tener la raíz con multiplicidad de menor grado que el denominador.
Luego de este análisis, resolvamos el problema.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+a}{x^2+bx+c} \text{ será un } \frac{\to 0}{\to 0} \text{ si } \begin{cases} 1+a=0 \Rightarrow a=-1 \\ 1+b+c=0 \Rightarrow b+c=-1 \end{cases} \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+a}{x^2+bx+c} = \infty \text{ si } \begin{cases} 4+a\neq 0 \Rightarrow a\neq -4 \\ 4+2b+c=0 \Rightarrow 2b+c=-4 \end{cases} \qquad (2)$$

De (1) y (2) tenemos $\begin{cases} b+c=-1 \\ 2b+c=-4 \end{cases}$ restando miembro a miembro: $b = -3$, de donde $c = 2$ con $a = -1$

16. Pruebe que siendo f:$[a, b] \to \boldsymbol{R}$ una función continua y $x_0 \in (a,b)$ con $f(x_0) > 0$ entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo x en el $E(x_0,\delta)$ se cumple $\operatorname{sg} f(x_0) = \operatorname{sg} f(x)$

Solución

Observe que el texto del ejercicio se corresponde con uno de los teoremas o propiedades enunciadas (¿cuál?).
Como f es continua en el punto x_0 se cumple la definición:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \exists\delta(\varepsilon)>0 \,/\, |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

de donde podemos escribir que

$-\varepsilon < f(x)-f(x_0) < \varepsilon \Rightarrow f(x_0)-\varepsilon < f(x) < f(x_0)+\varepsilon$, siendo $f(x_0)>0$, si elegimos $\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2}$, obtendremos un cierto valor de $\delta > 0$, para el cual se cumplirá que si elegimos x en dicho entorno nos quedará que

$$f(x_0)-\frac{f(x_0)}{2} < f(x) < f(x_0)+\frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow 0 < \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < 3\frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow 0 < f(x)$$

Y es lo que queríamos demostrar.

17. Demuestre que si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(a)\,f(b) < 0$, entonces $\exists c \in (a,b) \,/\, f(c) = 0$

Solución

Analicemos el caso en que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. Definamos al conjunto:

$$A = \{x \in [a,b] / \ f(x) \leq 0\}$$

Éste es un conjunto no vacío, ya que al menos tiene un elemento, el a. Además está acotado superiormente, ya que $f(b) > 0$, con lo que es cota superior. Y si tiene cotas superiores tiene supremo, llamemos c al supremo de A. De aquí $\forall x \in A : x \leq c \wedge c \leq b$. Queremos discutir los distintos posibles valores de c.

Existen sólo tres posibilidades respecto de cualquier real: es positivo, es negativo o es cero (conocida como *propiedad de tricotomía*). Discutamos las mismas:

Si $f(c) > 0$, por ser f continua y usando el teorema de conservación del signo, tenemos dos opciones: en $(c-\delta; c+\delta)$ la función es positiva, lo que es absurdo ya que $c-\delta$ sería cota superior, lo que es imposible siendo c el supremo, o bien cuando $c = b$, en $(c-\delta; c)$ la función es positiva, lo que sigue siendo absurdo, con el mismo argumento que antes. De donde $f(c)$ ¡no puede ser positiva!

Si $f(c) < 0$, por ser f continua y usando el teorema de conservación del signo, tenemos que $c \in A$ y que en $(c-\delta; c+\delta)$ la función es negativa, de donde $c+\delta$ está en A, en cuyo caso no sería c cota superior. De donde $f(c)$ ¡no puede ser negativa!

Y si $f(c)$ no puede ser positiva ni negativa, entonces, por la propiedad de tricotomía, $f(c) = 0$

18. Demuestre que si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y k es un real que cumple $f(a) < k < f(b)$, entonces $\exists c \in (a,b) / \ f(c) = k$

Solución

Definamos una función $g(x) = f(x) - k \quad \forall x \in [a,b]$, por ser una resta de dos funciones continuas en el intervalo (no olvide justificar por qué) y

$$\left.\begin{array}{l} g(a) = f(a) - k < 0 \\ g(b) = f(b) - k > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow g(a)g(b) < 0$$

Sugerencia: piense, ¿con qué teorema está relacionado este enunciado?

De donde la función g cumple Bolzano, de modo que

$$\exists c \in (a,b) \,/\, g(c) = f(c) - k = 0 \Rightarrow f(c) = k$$

Y está probado.

CAPÍTULO 4

LA DERIVADA

1. INTRODUCCIÓN HISTÓRICA A LA DERIVADA

Los problemas típicos que dieron origen al cálculo infinitesimal comenzaron a plantearse en la época clásica de Grecia (siglo III a.C.), pero no se encontraron métodos sistemáticos de resolución hasta 20 siglos después, en el siglo XVII por obra de Newton (1642–1727) y Leibniz (1646–1716).

En lo que se refiere a las derivadas, existen dos conceptos de tipo geométrico: el problema de la tangente a una curva y el problema de los extremos relativos, también llamados *máximos* y *mínimos,* que en su conjunto dieron origen a lo que en la actualidad se conoce como cálculo diferencial.

El problema de la tangente a una curva fue analizado y resuelto primeramente por Apolonio (200 a.C.), quien investigó este tema, particularmente interesado en las cónicas (parábolas, hipérbolas, elipses).

En cuanto al problema de los extremos relativos de una función, fue Pierre de Fermat (1601–1665) quien en el año 1629 expuso un método muy ingenioso para hallar los puntos en los cuales una función polinómica de la forma $y = f(x)$ toma un valor máximo o mínimo, comparando el valor de $f(x)$ en un cierto punto, con el valor de $f(x + E)$ en un punto próximo. En general, estos dos valores son distintos, pero, en una "cumbre" o en el fondo de un "valle" de una curva lisa o suave la diferencia es casi imperceptible. Por lo tanto, para hallar los puntos que corresponden a valores máximos o mínimos de una función, Fermat calculó la diferencia entre $f(x + E)$ y $f(x)$, que será tanto más pequeña cuanto más cerca esté $f(x + E)$ de $f(x)$. A esta diferencia, que mide el cambio que se produce en f cuando la variable x cambia al valor $x + E$, la dividió por esta cantidad E, y obtuvo de esta forma una medida del cambio en f *relativo* a E. Finalmente hizo $E = 0$ y este resultado le permitió calcular las abscisas de los máximos y mínimos de la polinómica.

Aquí ya se puede ver, en esencia, un proceso que, con algunos ajustes posteriores, será llamado *derivación.* No obstante haber sido Fermat pionero en este tipo de cálculos tan ligados al cálculo diferencial, la historia consagra a Newton y a Leibniz como los inventores de la derivada y la integral.

Newton tardó mucho en dar a conocer sus resultados los que, por otro lado, presentaba en forma poco clara tanto por la notación como por el vocabulario empleado, refiriéndose a la función como *cantidades fluentes* y a lo que hoy llamamos *derivada* como *fluxión*, palabra que proviene del latín y que significa derramar, fluir, pero que también es usada en medicina donde tiene varias acepciones, ninguna de ellas, por supuesto, ligadas al cálculo diferencial. Todo esto hacía que sus resultados aparecieran plagados de frases confusas, bastante incomprensibles para otro que no fuera el inventor del método.

En el año de 1669, Isaac Barrow (1630–1677) recibió de su alumno Isaac Newton un folleto que contenía el esbozo casi completo de lo que es hoy el cálculo diferencial e integral. Aquel mismo año, Barrow decidió que su alumno sabía mucho más que él, y que tenía, por lo tanto, mucho más derecho a la cátedra de matemáticas con más merecimientos que el propio Barrow: su titular. Con una generosidad y un desinterés difíciles de igualar, Barrow

cedió su cátedra a Newton[1]. A los 40 años, siendo profesor de matemáticas de Cambridge, Newton escribió ***Principia Mathematica***, tal vez el tratado científico de mayor influencia jamás publicado. En él aplicó los conceptos del cálculo para explorar el universo, incluyendo los movimientos de la Tierra, la Luna y los planetas alrededor del Sol. Se dice que un estudiante que lo observó pasar expresó: "ahí va el hombre que escribió un libro que ni él ni los demás comprenden".
Leibniz, comparte con Isaac Newton el crédito del descubrimiento del cálculo. Fue el primero en publicar los mismos resultados que Newton descubriera diez años antes. La historia ha dictaminado que Newton fue el primero en concebir las principales ideas (1665–1666), pero que Leibniz las descubrió independientemente durante los años de 1673–1676.
Leibniz fue quizá el mayor creador de símbolos matemáticos. A él se deben los nombres del cálculo diferencial y el cálculo integral, así como los símbolos $\dfrac{dy}{dx}$ y $\int$ para la derivada y la integral. Fue el primero en utilizar el término **"función"** y el uso del símbolo " = " para la igualdad. Por esta razón, debido a la superioridad del simbolismo, el cálculo se desarrolló con mucha mayor rapidez en el continente europeo que en Inglaterra, de donde era oriundo Newton.

1 Este debería ser el sueño de todo docente: al retirarse poder dejarle la cátedra a sus alumnos, para lo cual no es necesario que los alumnos posean el genio de Newton (ya que los profesores tampoco nos equiparamos a Barrow), sino en relación a ser perseverante y estudiar en forma sistemática, ordenada y permanente.

2. INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE DERIVADA

Es posible aproximarse a la definición de derivada mediante dos caminos diferentes. Uno de ellos es geométrico (como pendiente de una curva) y el otro es físico (como **razón o tasa de cambio**, del inglés ***rate of change***). Históricamente ha existido una discusión entre matemáticos sobre cuál de las dos formas ilustra mejor el concepto de derivada y cuál de ellas es la más útil. En este libro daremos ambos enfoques. Nuestro énfasis estará en el uso de la derivada como herramienta.

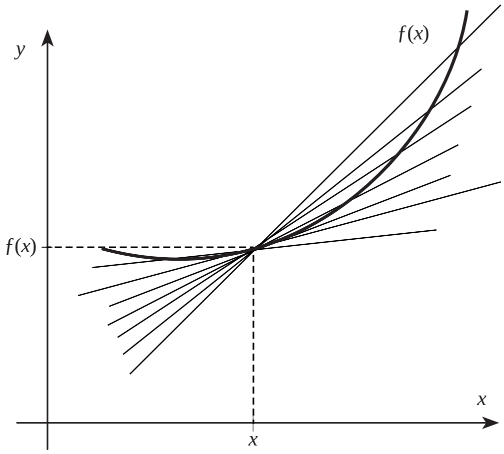


***Figura 59*. Razón de cambio**

Las tangentes se obtienen en cálculo, trazando secantes y aproximando el punto al de tangencia.

La *tangencialidad* es un concepto que de algún modo todas las personas comprenden. Se la asocia a la recta que mantiene un contacto superficial, se refiere a lo que "se toca lo menos posible". Y así es en matemáticas. La tangente a una curva es la recta que *más se parece* a la curva *pegándose* a ella, de tal forma que para conocer la curva bastará con estudiar sus tangentes. Y, cosa notable, ¡de paso se podrán calcular las áreas que encierran…!

2.1. El concepto físico de la derivada

Esta forma de abordaje del concepto de derivada fue empleado por Newton en el desarrollo de su Mecánica Clásica. La idea principal es el concepto de velocidad y aceleración. Si una partícula se está moviendo a lo largo de una recta desde un punto A a otro B, ¿cuál es la velocidad media durante el viaje? Está dada por:

$$\text{Velocidad media} = \frac{\text{distancia desde } A \text{ hasta } B}{\text{tiempo transcurrido desde } A \text{ hasta } B}$$

Si se asume que A y B son muy cercanos, es decir, la distancia entre ellos es muy pequeña, el cociente anterior se denomina rapidez o módulo[1] de la velocidad instantánea o velocidad numérica. Naturalmente, si la distancia entre A y B es muy pequeña, entonces el tiempo que insume el viaje desde A hasta B también es muy pequeño. Si el tiempo transcurrido para llegar desde A hasta B lo designamos como Δt, entonces si la partícula parte de A en el instante $t = a$, llega a B en el instante $t = a + \Delta t$

Si designamos con Δs la distancia entre A y B, entonces la velocidad media es:

$$\text{Velocidad media} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

La velocidad instantánea en A se obtiene a medida que Δt sea cada vez más pequeño. Aquí, naturalmente, es necesario recurrir al concepto de límite. En efecto,

$$\text{Velocidad instantánea (en } A) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Si $f(t)$ describe la posición en el tiempo t, entonces $\Delta s = f(a + \Delta t) - f(a)$
En este caso, resulta:

$$\text{Velocidad instantánea (en } A) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(a + \Delta t) - f(a)}{\Delta t}$$

EJEMPLO

Consideremos un movimiento rectilíneo cuya ecuación[2] que describe la relación espacio-tiempo sea $f(t) = t^2$. La velocidad instantánea en $t = a$ está dada por:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(a + \Delta t) - f(a)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(a + \Delta t)^2 - a^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2a\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (2a + \Delta t) = 2a$$

Así se concluye que la velocidad instantánea en $t = a$ es $2a$

[1] Debe tenerse presente que la velocidad es una magnitud vectorial, por ello toda vez que hagamos referencia a la *velocidad* se tratará del *módulo del vector velocidad* (velocidad numérica o rapidez), aunque no lo establezcamos explícitamente, lo que, por otro lado, no es necesario si se trata de movimientos rectilíneos, a menos que se desee explicitar el sentido en que se desplaza el móvil en su trayectoria rectilínea.

[2] En Física se la denomina *ecuación horaria*.

Parece intuitivo que, en cada instante, la partícula se mueve con una determinada *velocidad instantánea*. Pero, en el lenguaje corriente, cuando se habla de velocidad se trata en realidad de una velocidad media; la única definición razonable de velocidad instantánea es vinculada a la razón de cambio puntual. Es importante advertir que la velocidad instantánea es un concepto teórico, y una abstracción, que no corresponde exactamente a ninguna cantidad observable. No obstante, en situaciones prácticas reales, concretas, la velocidad instantánea es la que nos informa el velocímetro del móvil.

Este concepto de velocidad instantánea puede ser extendido a situaciones que requieran la determinación de la ***razón de cambio*** (***rate of change***) de alguna variable con respecto a otra. Por ejemplo, el volumen de un gas depende de la temperatura del mismo. Así, en ese caso, las variables son V (para volumen) como función de T (para temperatura).

En general, si se tiene que $y = f(x)$, entonces la razón de cambio promedio de y con respecto a x desde $x = a$ hasta $x = a + \Delta x$, donde $\Delta x \neq 0$, es:

$$\text{Razón o velocidad media} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

y, como antes, la razón de cambio instantánea de y con respecto a x en $x = a$, es

$$\text{Velocidad instantánea (en } x{=}a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

1. *Nota*

Con el objeto de abreviar la escritura de "velocidad instantánea" mientras se realizan los cálculos, es preciso asumir una nomenclatura. Si se escribe dx para Δx pequeño, entonces se utilizará la notación

$$\text{Velocidad instantánea (en } x{=}a) = \frac{dy}{dx}(a)$$

Ésta es la notación introducida por Leibniz y Newton, considerados, como dijéramos anteriormente, los creadores del cálculo diferencial.

3. EL CONCEPTO GEOMÉTRICO DE LA DERIVADA ¿CÓMO DEFINIR LA RECTA TANGENTE?

En general, si se pregunta a varios individuos qué es la recta tangente a una circunferencia, se obtendrían respuestas cargadas de ideas bastante claras al respecto. La geometría elemental define la recta tangente en un punto de una circunferencia como la recta perpendicular al radio que pasa por dicho punto. Definir la recta tangente a una curva arbitraria es más difícil y es preciso un enfoque diferente. Si se intenta generalizar esa idea a otras curvas, aparecerían ciertas cuestiones que dichas ideas no pueden resolver. Por ejemplo:

¿Es posible que una recta tangente corte a la curva más de una vez?
¿Puede la recta tangente atravesar a la curva por el punto de tangencia?

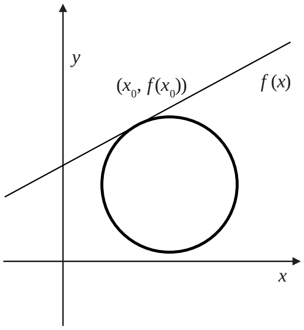


Figura 60. **Recta tangente que no corta a la curva**

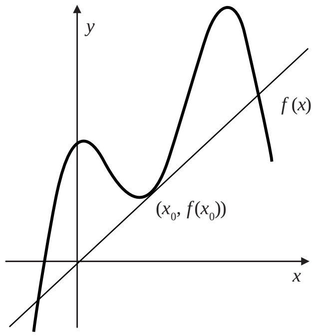


Figura 61. **Recta tangente que corta a la curva**

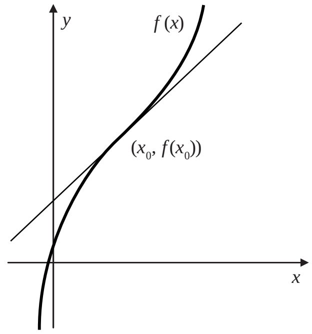


Figura 62. **Recta tangente que atraviesa a la curva**

Se considera una función dada por $y = f(x)$ y su gráfico. Se fija un punto sobre el gráfico, por ejemplo $(x_0, f(x_0))$. Es natural analizar si dicho gráfico admite en dicho punto una recta que lo "roce". Tal recta es usualmente denominada **recta tangente** en el punto en cuestión.

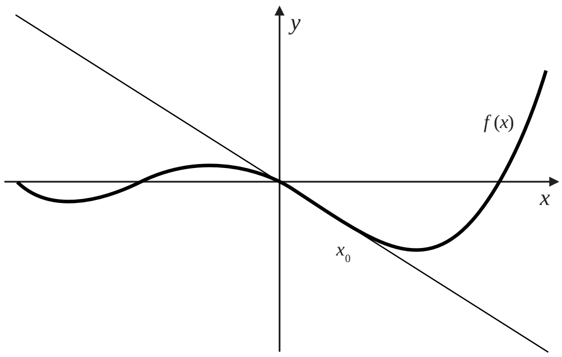


Figura 63. **Recta que "roza" a una curva en un punto**

Es fácil advertir que la recta tangente puede no existir, tema del que nos ocuparemos más adelante. Una forma de encontrar la recta tangente en $x = x_0$ consiste en considerar puntos $(x, f(x))$ sobre el gráfico, donde x es muy cercano a x_0. Entonces trazando la recta que une ambos puntos de abscisas x y x_0, llamada **recta secante,** resulta (Fig. 64):

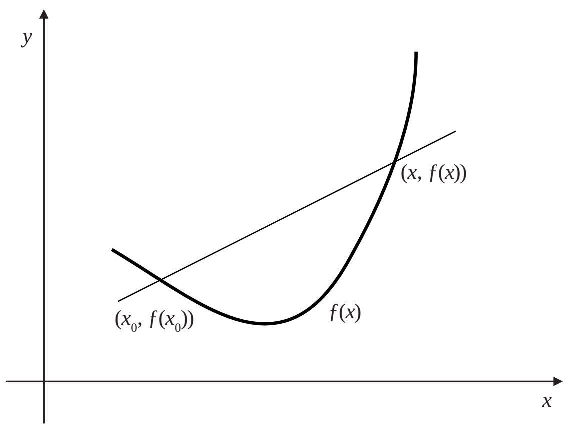


Figura 64. **Recta secante**

Tal como puede verse (Fig. 65), cuando x se acerca cada vez más a x_0, el límite de las rectas secantes es la recta tangente al gráfico de f en x_0, donde la idea de *límite* de rectas, se refiere al límite de sus pendientes (es decir, la sucesión de las pendientes de las rectas secantes tiende a la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en $x = x_0$). Todas estas rectas pasan por el punto $(x_0, f(x_0))$, por tanto, sus ecuaciones serán determinadas una vez halladas sus pendientes. Las pendientes de las rectas secantes por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x, f(x))$ (con $x \neq x_0$) está dada por $m(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ denominado **cociente incremental** por tratarse del cociente entre dos cantidades que denotan, respectivamente, el cambio (o *incremento*, con su signo positivo o negativo que denota aumento o disminución) que sufre la función, generado por el cambio en los valores de la variable independiente.

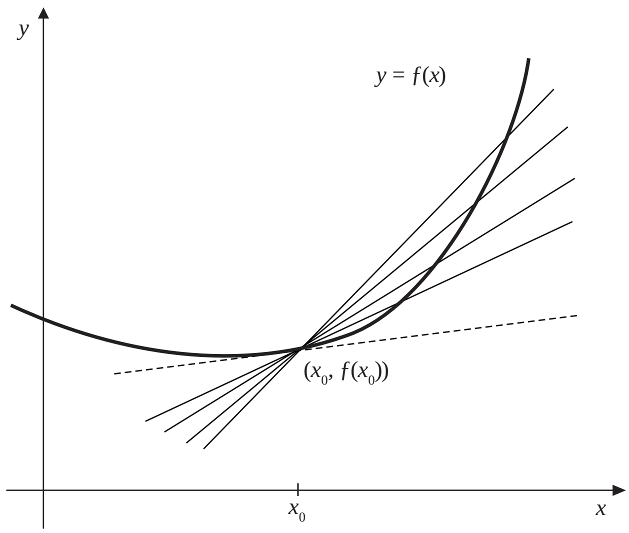


***Figura 65*. Pendiente de la recta tangente**

La recta tangente tendrá pendiente m, la que será tanto más próxima a $m(x)$ cuanto más próximo esté x de x_0. En términos de límites, resulta:

$$tg\,\alpha = m = \lim_{x \to x_0} m(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Así, la ecuación de la recta tangente es $y - f(x_0) = m(x - x_0)$

2. *Nota*

Escribiendo sólo "m" para la pendiente de la recta tangente no muestra información suficiente. Es preciso exhibir datos de la función $f(x)$ y del punto x_0 en la notación. La más empleada es $m = f'(x_0)$.

En este caso, la ecuación de la recta tangente es $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ donde $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

En ciertas ocasiones es más conveniente utilizar este límite cuando la variable tiende a cero. Una forma de hacerlo es realizar una traslación sobre el eje *x*. Así, si se establece que $\Delta x = h = x - x_0$, entonces

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

4. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

1. *Definición*

Sea $f : D \to \boldsymbol{R}$; D un conjunto abierto de números reales y sea $x_0 \in D$. Se llama derivada de la función $y = f(x)$ en el punto $x = x_0$, y se representa por $f'(x_0)$, al valor real del siguiente límite, si existe:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Se define la **recta tangente** a la gráfica de *f* en $(x_0, f(x_0))$ como la recta que pasa por $(x_0, f(x_0))$ y tiene por pendiente $f'(x_0)$. Esto quiere decir que la tangente en $(x_0, f(x_0))$ sólo existe si *f* es derivable en x_0.

Observaciones

1. La derivada de una función en un punto es un número que geométricamente representa la pendiente de la recta tangente al gráfico de *f* en dicho punto.

2. Se utilizan también otras notaciones para la derivada de una función en un punto, tales como $Df(x_0)$; $f'(x_0)$; $\frac{d}{dx} f(x_0)$; $\frac{df(x_0)}{dx}$; $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$; $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$

   La segunda notación fue introducida por Lagrange (1736-1813). Es preciso tener cuidado de no confundir las cuatro últimas notaciones con un cociente. No hace falta decir que las distintas partes de estas expresiones carecen de todo significado cuando se consideran separadamente; las *d* **no** son números, *no pueden* simplificarse, y la expresión completa *no* es el cociente de otros dos números "*df* (*x*)" y "*dx*", es posible y hasta cómodo pensar que $\frac{d}{dx}$ juega como una *máquina que deriva*, se suele decir que es un *operador*. Esta notación, como ya ha sido comentado, se debe a Leibniz y es llamada *afectivamente* notación de Leibniz.

3. Para que la derivada exista, la función debe estar definida en un entorno del punto x_0. Más aún, debe ser continua en x_0.

4. Cuando el límite del cociente incremental es infinito se dice que la función no es derivable o, abusando del lenguaje, que tiene derivada infinita. Gráficamente significa que la recta tangente en ese punto es vertical.

5. No es sorprendente la cantidad de aplicaciones que encuentra el concepto de derivada, si se tiene en cuenta la formación histórica de este concepto. Por ejemplo:

   - El cálculo del ángulo bajo el que se cortan dos curvas (Descartes)
   - La construcción de telescopios (Galileo) y de relojes (Huygens, 1673)
   - La búsqueda de máximos y mínimos de una función (Fermat, 1683)
   - El estudio de la velocidad y la aceleración de un movimiento (Galileo, 1638, y Newton, 1686)
   - En astronomía, la verificación de la Ley de Gravitación (Kepler, Newton)

6. No debe olvidarse que **la derivada es un límite**, aunque más adelante buscaremos reglas para calcular derivadas sin necesidad de calcular dicho límite.

Piense en la función derivada como una "máquina de buscar pendientes" ¿de quiénes?, de las rectas tangentes al gráfico de *f*.

2. *Definición*

Sea $f : D \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función derivable en algún punto, y sea S el subconjunto de puntos de D en los que f es derivable (naturalmente, puede ser $S \neq D$**)** La **función derivada** de f se define haciendo corresponder a cada $x \in S$ el valor de la derivada de f en el punto x.

Esta función se suele anotar $f' : x \in S \to f'(x) = \lim_{w \to x} \dfrac{f(w) - f(x)}{w - x} \in \mathbf{R}$

5. SIGNIFICADO DE LA DERIVADA

Si la función definida por $y = f(x)$ es derivable en x_0, la derivada de f en x_0 es un número. Este número puede interpretarse de dos formas diferentes como:

1. La ***pendiente*** de la recta tangente al gráfico de f en x_0.
2. La ***razón de cambio instantánea*** o ***velocidad de cambio*** de y respecto de x.

La derivada como razón de cambio instantánea de la variable dependiente permite interpretar muchos conceptos empleados en otros ámbitos de la ciencia.

En Mecánica, la **velocidad instantánea** de un móvil es la derivada del espacio recorrido con respecto del tiempo. En electromagnetismo se define la **intensidad de corriente** como la derivada de la carga eléctrica con respecto del tiempo. En termodinámica se define el **flujo calorífico** como la derivada de la temperatura respecto de la posición. En Economía se define el **costo marginal** como la derivada del costo total de la producción respecto del número de unidades producidas y, en forma similar, el adjetivo *marginal* acompañando a otras funciones económicas (ingreso marginal, demanda marginal, etc.) se refiere a la derivada de las funciones correspondientes.

Derivadas laterales

Si el límite del cociente incremental que define la derivada solamente se lo considera por la derecha o por la izquierda, se obtienen ***derivadas laterales***.

3. Definición

Se llaman ***derivada por la derecha y derivada por la izquierda***, respectivamente, a los siguientes límites, si existen (números reales):

$$f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

No es posible derivar en los extremos del intervalo donde está definida la función (¿por qué?). Pero si se dice que una función es derivable en los extremos de un intervalo, la derivada a la que se hace referencia en estos casos es la derivada por la derecha o por la izquierda según se trate del extremo izquierdo o derecho respectivamente.

De acuerdo con la relación existente entre el límite y los límites laterales es posible asegurar:

Teorema

Una función definida por $y = f(x)$ es derivable en x_0 sí y sólo si existen las derivadas laterales y éstas coinciden entre sí.

5.1. Continuidad de las funciones derivables

No todas las funciones son derivables. Para que una función sea derivable en un punto es ***necesario*** que sea continua en dicho punto.

Condición necesaria para la derivabilidad de una función en un punto

> ***Teorema***
> Si una función definida por $y = f(x)$ es derivable en x_0, entonces es continua en x_0.

Demostración: en efecto, si *f* es derivable en x_0 se verifica

$$\lim_{h\to 0}\left[f(x_0+h)-f(x_0)\right]=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.h=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.\lim_{h\to 0}h=$$

$= f'(x_0).0=0$ y, en consecuencia, $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)$, lo que muestra que *f* es continua en x_0.

Por tanto, según el resultado anterior, las funciones discontinuas en x_0 no son derivables en dicho punto. Sólo las funciones continuas tienen posibilidad de ser derivables.
Ahora bien, la proposición recíproca del teorema anterior es falsa ya que no todas las funciones continuas son derivables.
Analicemos tres casos clásicos que presentan la no derivabilidad de una función continua.

EJEMPLOS

1. Sea f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ / $f(x)=|x-1|$. Es fácil comprobar que esta función es continua en $x_0=1$

   Si se emplea la definición de derivada para investigar si existe $f'(1)$, resulta que el cociente incremental $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{|x-1|-0}{x-1}=\dfrac{|x-1|}{x-1}$ debe analizarse según x esté cercano a $x_0=1$ por izquierda o por derecha. En efecto,

   $$f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)}{x-1}=-1$$

$$f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

En este caso, la función admite derivadas laterales $f'(1^+) = 1$ y $f'(1^-) = -1$, pero no coinciden, por lo cual f no es derivable en $x_0 = 1$

El gráfico de la función $f(x) = |x-1|$ presenta un "pico" o una "esquina" (gráfica continua pero "quebrada") en $x_0 = 1$. Dicho punto se denomina **punto anguloso**.

2. La función $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ / $f(x) = \sqrt[3]{x}$ es continua pero no es derivable en $x_0 = 0$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

El límite es infinito, por lo que la derivada no existe.

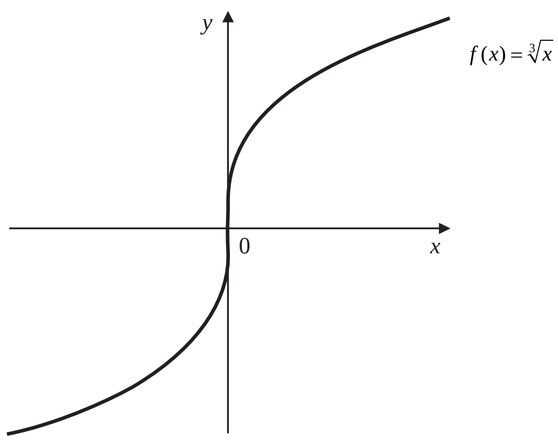


***Figura 66.* Recta tangente vertical**

En este caso el gráfico presenta una **recta tangente vertical** en $x_0 = 0$

3. La $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ / $f(x) = \sqrt{|x|}$ es continua pero no es derivable en $x_0 = 0$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{\sqrt{-x}}{-x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{\sqrt{-x}} = -\infty$$

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

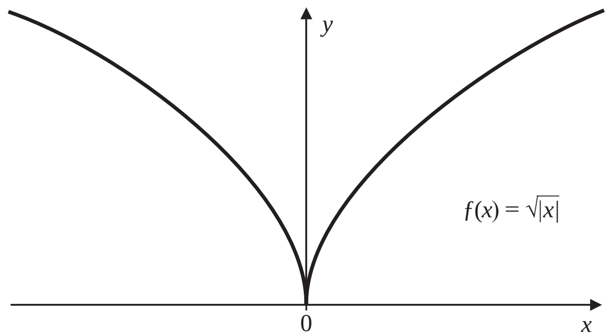


Figura 67. **Punto cuspidal**

Naturalmente, la función no es derivable en $x_0 = 0$. Por la derecha la pendiente tiende a $+\infty$ y por la izquierda a $-\infty$.

La gráfica presenta en $x_0 = 0$ un **punto cuspidal o de retroceso**.

4. La función $g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ / $g(x) = \begin{cases} (x-1).sen\left(\dfrac{1}{x-1}\right) & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$

¡Recuerde su gráfico! Es continua en todo su dominio, pero en $x_0 = 1$ no es derivable y ni siquiera admite derivadas laterales, pues:

$$g'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1).sen\left(\dfrac{1}{x-1}\right)-0}{x-1} = \lim_{x\to 1} sen\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

no existe
(recuerde también el gráfico de la función $y = sen\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$ con $x \neq 1$).

6. SIGNIFICADO GRÁFICO DE LA DERIVADA: SUAVIDAD

Visualmente es posible decir que

- Una función es continua en un punto si su gráfico puede construirse pasando por el punto sin levantar el lápiz del papel.
- Una función es derivable en un punto si su gráfico pasa *suavemente* por él.

- ¿Pero qué se entiende por una curva *suave*? Más adelante veremos una definición, ahora intentemos encontrar una noción intuitiva del concepto de *suavidad*. Imagine la gráfica de la curva, trace mentalmente la recta tangente en un punto y deslícela alrededor del punto, si esto se puede hacer, la curva es *suave*.

El siguiente diagrama ayudará a conceptualizar las características geométricas de los gráficos de las funciones derivables y no derivables en un punto.

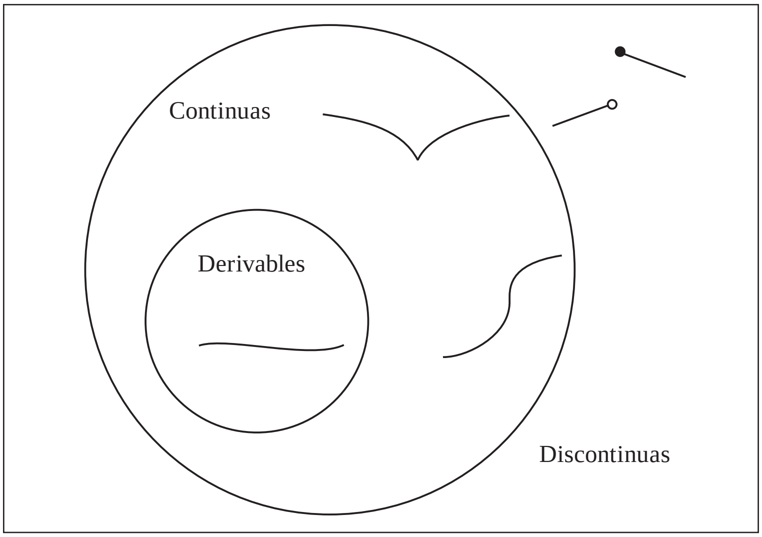


Figura 68. **Funciones derivables y no derivables**

Una función no es derivable en:

- puntos angulosos
- puntos de tangente vertical
- puntos cuspidales o de retroceso
- puntos de discontinuidad

7. LA ECUACIÓN DE LA RECTA NORMAL

Recordemos que dos rectas perpendiculares tienen pendientes recíprocas y cambiadas de signo. De modo que si conocemos la recta tangente en x_0 podremos hallar una recta perpendicular a ella:

4. Definición

Se llama recta normal a una curva en un punto $P = (x_0, f(x_0))$ a la perpendicular a la recta tangente en dicho punto.

La pendiente de la recta tangente coincide con la derivada de la función, y la de la recta normal con su recíproca con signo contrario, es decir, si la recta tangente está dada por:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

entonces la recta normal será $y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ si $f'(x_0) \neq 0$

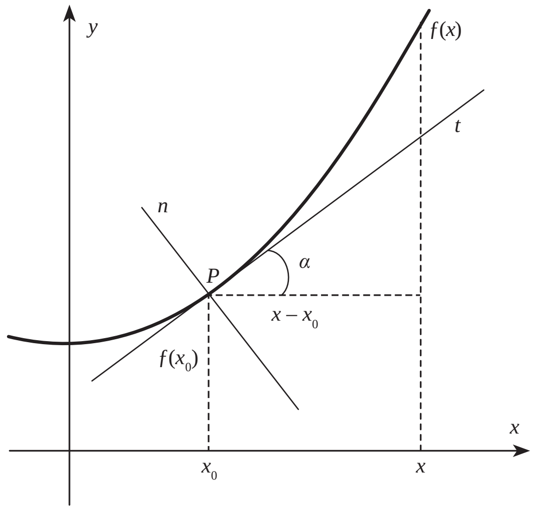


***Figura 69*. Recta normal**

Pero piense cuál es la ecuación de la recta normal si $f'(x_0) = 0$ o bien $f'(x_0) \to \infty$

8. FUNCIÓN DERIVADA. REGLAS DE DERIVACIÓN

El proceso por el cual se obtiene la derivada de una función en un punto se denomina ***derivación***. Si se aplica este proceso a todos los puntos de continuidad del dominio de la función, se obtiene una nueva función tal que a cada *x* asocia la derivada de *f* en *x*, y se la denomina **función derivada de *f***, o simplemente $f'(x)$ y su dominio está formado por todos aquellos puntos en los que *f* es derivable, los cuales deben estar incluidos en el dominio de *f*, ya que si *f* es derivable en un conjunto de puntos es porque seguro es continua en ellos.

Para obtener la fórmula de la función derivada es suficiente emplear la definición de derivada en un punto genérico, tal como sigue:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Por ejemplo, para obtener la función derivada de $f(x) = x^2$, se aplica la definición de derivada, es decir:

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2xh+h^2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}(2x+h)=2x$$

Inicialmente se puede obtener la derivada de una función determinando el límite del cociente incremental correspondiente. Así, es posible calcular la derivada de algunas funciones elementales simples. A partir de esas derivadas y junto con ciertas reglas de derivación, se puede también calcular derivadas de funciones más complejas.

EJEMPLO

Dada f: $\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ / $f(x)=x.\left|x-2\right|$, se desea obtener la función derivada de f.

Ante todo es necesario eliminar el valor absoluto empleando la definición y expresando la fórmula por tramos. En efecto,

$f(x)=x.\left|x-2\right|=\begin{cases}x^2-2x & \text{si } x\geq 2\\ -x^2+2x & \text{si } x<2\end{cases}$ con lo cual es posible calcular las derivadas de x^2-2x si $x>2$ y la de $-x^2+2x$ si $x<2$ usando la definición como hicimos anteriormente y obtendremos:

$$f'(x)=\begin{cases}2x-2 & \text{si } x>2\\ -2x+2 & \text{si } x<2\end{cases}$$

Pero, ¿qué ocurre en $x = 2$? La función f es continua en $x = 2$ (¡Compruébelo!) Ahora se analiza la derivabilidad en el punto $x = 2$, para ello se emplea la definición de derivada, es decir, $f'(2)=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$. Para analizar este límite es preciso calcular los límites laterales ya que la función en $x = 2$ cambia de fórmula. Por consiguiente:

$$f'(2^+)=\lim_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{x^2-2x-0}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{x(x-2)}{x-2}=2$$

$$f'(2^-)=\lim_{x\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{-x^2+2x-0}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{-x(x-2)}{x-2}=-2$$

Como $f'(2^+)\neq f'(2^-)$, la función f no es derivable en $x = 2$, admite un punto anguloso.

9. CÁLCULO DE DERIVADAS

Operaciones algebraicas con funciones derivables

Sean $D \subseteq \boldsymbol{R}$, D abierto, $x \in D$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$ y $f, g : D \to \boldsymbol{R}$ funciones derivables en x. Entonces,

a. $f+g$ es derivable en x, con derivada $(f+g)'_{(x)} = f'(x)+g'(x)$

b. $\alpha . f$ es derivable en x, con derivada $(\alpha . f)'_{(x)} = \alpha . f'(x)$

c. $f . g$ es derivable en x, con derivada $(f.g)'_{(x)} = f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$

d. Si $g(x) \neq 0$, entonces $\dfrac{1}{g}$ es derivable en x, con derivada $\left(\dfrac{1}{g}\right)'_{(x)} = -\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}$

e. Si $g(x) \neq 0$, entonces $\dfrac{f}{g}$ es derivable en x, con derivada

$$\left(\frac{f}{g}\right)'_{(x)} = \frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{g^2(x)}$$

Se sugiere al lector realizar las demostraciones de estas reglas de cálculo empleando la definición de derivada.

La regla de derivación de la suma y la del producto de una función por una constante pueden combinarse en una sola y extenderse a un número finito cualquiera de funciones y constante de la siguiente forma:

Si $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ son derivables y $k_1, k_2, \ldots, k_n$ son constantes reales, entonces

$$\left[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)+\ldots+k_n f_n(x)\right]' = k_1 f_1'(x)+k_2 f_2'(x)+\ldots+k_n f_n'(x),$$

conocida como la **propiedad de linealidad**.

9.1. Derivación de funciones compuestas

Teorema de derivación de funciones compuestas. Regla de la cadena.

Sean las funciones $f : D \to \boldsymbol{R}$ y $g : E \to \boldsymbol{R}$ tales que $f(D) \subseteq E$ y se supone que f es derivable en un punto x_0 y que g es derivable en $f(x_0)$. Entonces la función compuesta $g \circ f$ es derivable en x_0 y su derivada en dicho punto está dada por la **regla de la cadena**: $(g \circ f)'_{(x_0)} = g'\left[f(x_0)\right].f'(x_0)$

9.2. Derivabilidad de la función inversa

Teorema

Si f es una función continua e inyectiva en un intervalo A y sea $B = f(A)$, si f es derivable en un punto $x_0 \in A$ y $f'(x_0) \neq 0$, entonces su función inversa f^{-1} es derivable en $y_0 = f(x_0)$ y su derivada es $(f^{-1})'_{(y_0)} = \dfrac{1}{f'(x_0)}$, con y_0 perteneciente a B.

9.3. Cálculo de algunas derivadas

Usando la definición de derivada, obtenemos derivadas de otras funciones como por ejemplo:

- $f(x) = senx \Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen(x+\Delta x) - senx}{\Delta x}$ usando la identidad trigonométrica $sent - senv = 2\cos\frac{t+v}{2} sen\frac{t-v}{2}$ y reemplazando en el numerador tendremos que

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\frac{x+\Delta x+x}{2} sen\frac{x+\Delta x - x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\frac{2x+\Delta x}{2} sen\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \underbrace{\cos\frac{2x+\Delta x}{2}}_{\to \cos x} . \underbrace{\frac{sen\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}}_{\to 1} = \cos x$$

- $f(x) = \ln x$ con $x > 0 \Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln(1+\frac{\Delta x}{x}) =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left[\underbrace{(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}}_{\to e}\right]^{\frac{1}{x}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

Usando la regla de la cadena, podemos expresar los resultados anteriores de la siguiente forma (donde $u = u(x)$ es derivable):

- $f(u) = \ln u, u > 0 \Rightarrow f'(u) = \frac{u'}{u}$
- $f(x) = senu \Rightarrow f'(x) = \cos u.u'$
- $f(x) = \cos u = sen(\frac{\pi}{2} - u) \Rightarrow f'(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - u)(-u') = -senu.u'$
- $f(x) = tgu = \frac{senu}{\cos u} \Rightarrow f'(x) = \sec^2 u.u'$ derivando como cociente

Además:

- $f(x) = \ln|u| = \begin{cases} \ln u & \text{si } u > 0 \\ \ln(-u) & \text{si } u < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{u'}{u} & \text{si } u > 0 \\ \frac{-u'}{-u} = \frac{u'}{u} & \text{si } u < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{u}$ si $u \neq 0$

Usando este resultado y teniendo en cuenta las propiedades de los logaritmos, es posible deducir otras reglas de derivación. Veámoslo:

Sea $y = f(x) = u^k$ con $k \in R$ y $u \neq 0$, tomemos módulo miembro a miembro, así nos aseguramos de que la función resultante es positiva; aplicando logaritmos nos queda:

$$\ln|y| = \ln|u|^k = k\ln|u| \quad \text{derivemos} \quad \frac{y'}{y} = k\frac{u'}{u} \Rightarrow y' = k\frac{u'}{u}.u^k = k.u^{k-1}.u'$$

Así demostramos que

- $f(x) = u^k \Rightarrow f'(x) = k.u^{k-1}.u'$

De igual manera, se procede para las siguientes:

- $f(x) = a^u \Rightarrow f'(x) = a^u \ln a.u'$
- $f(x) = e^u \Rightarrow f'(x) = e^u.u'$

Usando la derivada de la función inversa y la regla de la cadena, vistas anteriormente, se deducen:

- $f(x) = arcsenu \Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
- $f(x) = arctgu \Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'}{1+u^2}$

9.4. Funciones de clase C^1

5. *Definición*

Una función *f* se dice que es de clase C^1 en $x = x_0$ (derivable con continuidad) si y sólo si su función derivada f' es continua en x_0.

EJEMPLO

La función $g(x) = x.\ln x$ es de clase C^1 en $x = 1$, pues resulta que

$$f'(x) = \ln x + 1 \qquad \forall x > 0.$$

Por otro lado

$$f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{x\ln x - 0}{x-1} = \lim_{r\to 0}\frac{(1+r)\ln(1+r)}{r} = \lim_{r\to 0}(1+r)\ln\underbrace{(1+r)^{\frac{1}{r}}}_{\to e} = 1$$

que se obtuvo haciendo el cambio de variables $r = x-1$, y

$\lim\limits_{x\to 1} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1}(\ln x + 1) = 1 = f'(1)$ en consecuencia, f' es continua en $x = 1$, resultado válido para $x \to 1^-$ y $x \to 1^+$. En realidad, la función dada es de clase C^1 en todo su dominio.

EJEMPLO

Para la función $f(x)=\begin{cases} x^2.\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ analicemos si es de clase C^1 en $x = 0$. Para ello, $\forall x\neq 0 \quad f'(x)=2x.\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)+\pi.sen\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$ empleando reglas de derivación, $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[2x.\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)+\pi.sen\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\right]$ no existe ya que el segundo término carece de límite en $x = 0$. Por lo tanto, f' es discontinua en dicho punto. ¿Significa este hecho que la función f no es derivable en $x = 0$? **¡Absolutamente no!**

Usando la definición de derivada, resulta:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2.\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0} x.\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)=0$$

por lo tanto, f es derivable en $x = 0$ y $f'(0)=0$.

A partir de este ejemplo puede afirmarse que una función puede ser derivable en un punto, pero **no** ser de clase C^1 en dicho punto.

> Si f es de clase C^1 en x_0, entonces f es derivable en x_0.

Por lo visto en el ejemplo anterior, la proposición recíproca es **FALSA.**

El lector puede hacer una comprobación similar con la función

g: $\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ / $g(x)=\begin{cases} (x-1)^2.sen\left(\dfrac{1}{x-1}\right) & \text{si } x\neq 1 \\ 0 & \text{si } x=1 \end{cases}$ que es derivable en $x = 1$

pero la recta tangente en dicho punto no varía con continuidad.

Propiedad

1. Si una función f es de clase C^1 en $x=x_0$, entonces es derivable en x_0, y se dice que es una ***curva suave*** en x_0.

EJEMPLO

Sea una función definida como $f(x)=\begin{cases} g(x) & \text{si } x\neq x_0 \\ k & \text{si } x=x_0 \end{cases}$ con "un punto apartado". ¿Cuál será el valor de $f'(x_0)$? Es decir: $f'(x)=\begin{cases} g'(x) & \text{si } x\neq x_0 \\ ? & \text{si } x=x_0 \end{cases}$

Si la función tiene en la fórmula un "punto apartado" y es continua en dicho punto, **la derivada en ese punto no tiene por qué ser cero**, ya que la derivada, tal como hemos visto, depende de los valores que asumen las imágenes de la función en el entorno del punto. Por otra parte, a toda función se le puede "separar un punto" de su fórmula, y no por ello su derivada vale cero. Veamos el siguiente ejemplo:

$f(x)=\begin{cases} 3x^2-1 & \text{si } x\neq 2 \\ 11 & \text{si } x=2 \end{cases}$ Compruebe que $f'(x)=\begin{cases} 6x & \text{si } x\neq 2 \\ 12 & \text{si } x=2 \end{cases}$

Si la función *f* tiene un "punto apartado", son posibles dos caminos para hallar su derivada:

1. Analizar si es continua en ese punto, si no lo es, $\nexists f'(x_0)$, si lo es, usar la definición para calcular $f'(x_0)$
2. Si se sabe que $f'(x)$ es continua en el punto, se podrá asegurar que $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} g'(x)$.

Entonces, $f(x)=\begin{cases} g(x) & \text{si } x\neq x_0 \\ k & \text{si } x=x_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\begin{cases} g'(x) & \text{si } x\neq x_0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} g'(x) & \text{si } x=x_0 \end{cases}$

Debe quedar claro que si $\lim\limits_{x\to x_0} g'(x)$ no existe, no puede afirmarse que la función *f* no es derivable en x_0, sino que es preciso recurrir a la definición de derivada en dicho punto, ya que se está exigiendo a la función el cumplimiento de un requisito mucho más exigente que la derivabilidad.
Formalizando lo dicho con anterioridad, resulta:

Teorema

Sea *A* un intervalo abierto, $x_0\in A$, y *f* una función definida en *A*. Se supone que

- *f* es continua en x_0.
- Para algún $r>0$, *f* es derivable en $\{x\in A / 0<|x-x_0|<r\}$,
- Existe $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=k$

Entonces *f* es también derivable en x_0 y $f'(x_0)=k$

9.5. Derivadas sucesivas

La derivada de una función en un punto, como ya ha sido visto, es una medida de la inclinación de la recta tangente en el punto considerado. Supóngase ahora que se desea saber cuán **“separado”** está el gráfico de la función de su recta tangente. En el caso de las parábolas pares e impares, $y = x^2$, $y = x^3$ o $y = x^4$ las tangencias en el origen con la recta $y = 0$ son diferentes. Para comprender mejor el concepto que presentaremos a continuación, el lector debe pensar que lo que se desea obtener es una noción de “**cómo se curva”** el gráfico de f en un entorno del punto de tangencia.

6. Definición

Se dice que una función f es dos veces derivable en un punto x_0 si f' tiene derivada en x_0. A ese número se lo denomina derivada segunda de f en x_0 y se escribe:

$f''(x_0)$ y, además, $f''(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$

Para una función cualquiera f, al tomar la derivada, se obtiene una nueva función f' (cuyo dominio puede ser igual o considerablemente más pequeño que el de f). La noción de derivabilidad puede aplicarse a la función f', por supuesto, dando lugar a otra función $(f')'$, cuyo dominio consiste en todos los puntos en los que f' sea derivable.

Con el mismo análisis realizado para la existencia de la derivada segunda, es posible definir $f''' = (f'')'$, etc. Esta notación se torna difícil de manejar, por lo que se adopta la siguiente (se trata en realidad de una definición recursiva):

$f^{(1)} = f'$

$f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$

Las distintas funciones $f^{(k)}$, para $k \geq 2$, son a veces llamadas *derivadas de orden superior* de f. De hecho, se asume que $f^{(0)} = f$

La notación de Leibniz, ya introducida con anterioridad, para las derivadas de órdenes superiores, es: $\dfrac{d\left(\dfrac{df(x)}{dx}\right)}{dx} = \dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}, \dots, \dfrac{d\left(\dfrac{d^{n-1} f(x)}{dx}\right)}{dx} = \dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$

y se lee “derivada enésima de f respecto de x, n veces”.

7. Definición

Sea $f:(a,b) \to \boldsymbol{R}$. Si f es continua se dice que es de clase C^0 en (a, b); si f' es continua se dice que f es de clase C^1 en (a, b); en general se dice que f es **de clase $\mathbf{C}^{\mathbf{n}}$** en (a, b) si $f^{(n)}:(a,b) \to \boldsymbol{R}$ es continua.

EJEMPLO

$$\text{Si } f(x)=\begin{cases} x^r.sen\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

a. Si $r = 0$, f es discontinua en $x = 0$
b. Si $r = 1$, f es de clase C^0, pero no es derivable en $x = 0$
c. Si $r = 2$, f es derivable, pero no de clase C^1 en $x = 0$

9.6. Aplicaciones físicas de las derivadas sucesivas

Anteriormente se abordó el concepto físico de **velocidad instantánea** de una partícula como el límite de la velocidad media para valores pequeños del incremento de tiempo, es decir:

Razón de cambio instantánea de y con respecto a x en $x = t$, es

$$\text{Velocidad instantánea (en } t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta t}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=\frac{df}{dt}=f'(t)=v$$

Se denomina ***rapidez de la partícula*** al valor absoluto de la velocidad, es decir:

$$\text{Rapidez} = \left|\frac{df}{dt}\right|=|v|$$

Con frecuencia, los términos *rapidez* y *velocidad* se confunden. La diferencia consiste en que la velocidad es ***una magnitud vectorial*** (es un vector que tiene dirección y sentido) como mencionáramos anteriormente; en cambio, la rapidez es el módulo de la velocidad (módulo del vector) y por tanto es siempre un escalar no negativo.

8. *Definición*

Se llama ***aceleración de una partícula*** a la variación instantánea de la velocidad. Si esta magnitud se anota con $a = a(t)$, se tiene:

$$\text{Aceleración instantánea (en } t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}=$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dt}\right)=\frac{d^2f}{dt^2}=f''(t)=a$$

Coloquialmente, la aceleración de una partícula que se mueve sobre una línea recta es la derivada segunda con respecto al tiempo de la función que da la posición de dicha partícula y no la medida de la razón de cambio de la velocidad instantánea en el tiempo.

9.7. Razones de cambio afines

La posición de una partícula no es la única cantidad que puede depender del tiempo. Cualquier magnitud física F que está cambiando define una función $F(t)$ y la derivada $F'(t)$ proporciona la "variación instantánea", o razón de cambio o *rate of change* de F con respecto a t. Mencionemos algunos ejemplos: F puede ser el volumen de un globo al cual se le introduce aire, o F puede ser la concentración de un ácido en un tubo donde se lleva a cabo una reacción química, o F puede ser la cantidad de carga eléctrica en un condensador o F puede ser la resistencia que posee una viga de acero colocada en un puente cuando pasa un camión. En diversos casos puede ser muy difícil, o imposible, determinar $F(t)$ y por lo tanto $F'(t)$, pero en muchos casos se intenta encontrar una ecuación que relacione F con otras magnitudes de la que se conoce su variación con respecto a la variable t, que generalmente es el tiempo. Esto da lugar a lo que se denomina el *modelo matemático* del fenómeno en cuestión, cuya expresión matemática es, en general, una ecuación en la que aparece relacionada F con sus derivadas. La ecuación obtenida se denomina *ecuación diferencial*, tema al que nos referiremos más adelante.

EJEMPLO

Una persona parada sobre un acantilado (situado entre Mar del Plata y Miramar, ciudades de la costa atlántica argentina) observa un bote de motor con anteojos de larga vista, cuando el bote se acerca a la playa que está directamente debajo de ella. Si los anteojos de larga vista están a 250 metros arriba del nivel del agua y si el bote se acerca a 20 m/s, ¿con qué rapidez cambia el ángulo que forma la vertical coincidente con el acantilado y la recta que une el binocular con el bote, supuestos puntuales?[3]

3 Al resolver problemas en Física, en general se acostumbra a homogeneizar en un mismo sistema de medida las unidades de todas las magnitudes intervinientes de modo de no tener que arrastrarlas durante la resolución, si es que usted así lo prefiere. Por ello, puede optar entre dos formas posibles de trabajo en la resolución de un problema: en cada paso de la resolución colocar todas las unidades en cada una de las magnitudes o bien, al estar todas las unidades en un mismo sistema, colocar al final del cálculo el resultado en la unidad correspondiente; por ejemplo, si el tiempo se mide en segundos (*s*) y la longitud en metros (*m*), al finalizar el cálculo de la velocidad, se acompaña el resultado por la unidad correspondiente "*m/s*". A lo largo del texto encontrará cualquiera de las dos formas de trabajo mencionadas.

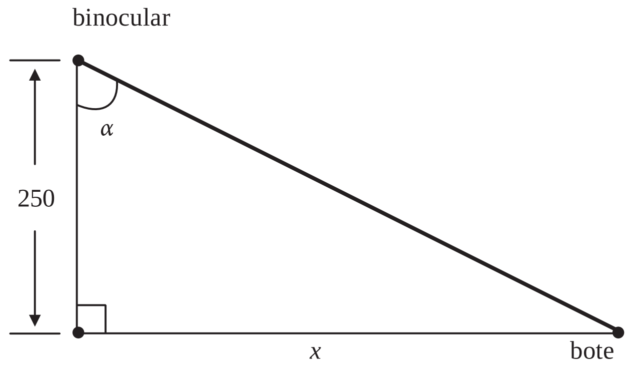


Figura 70. **Razones de cambio afines**

La figura muestra la situación del problema donde α y x son las variables que dependen del tiempo. En efecto, $\frac{dx}{dt} = -20$. El signo menos se debe a que la distancia x disminuye con el tiempo. Necesitamos determinar la $\frac{d\alpha}{dt}$ cuando $x = 20$. Además $tg\,\alpha = \frac{x}{250}$, derivando resulta $\sec^2\alpha.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right) = \frac{1}{250}.\frac{dx}{dt}$ (no olvide que α y x dependen del tiempo, así al derivar ambos miembros debe usarse la *regla de la cadena* para derivar funciones compuestas). En el instante en que $x = 250$; $\alpha = \frac{\pi}{4}$ y $\sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$, resulta: $\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{20}{250}.\frac{1}{2} = -\frac{1}{25} = -0.04$
Este resultado significa que el ángulo α cambia a razón de -0.04 radianes por segundo. El signo negativo se debe a que α disminuye con el tiempo.

9.8. Derivación de funciones definidas implícitamente por una ecuación

Se supone que las variables x e y están relacionadas por alguna ecuación de la forma:

$$F(x, y) = 0 \qquad (1)$$

Así, son ecuaciones de esta forma las siguientes: $x^2 + y^2 - 36 = 0$ (2)

$$x^3 + xy^2 + y^6 = 0 \qquad (3)$$

$$y^3 + 7y = x^3 \qquad (4)$$

$$x^2 + y^2 + 36 = 0 \qquad (5)$$

9. *Definición*

Si una función f definida en un intervalo I es tal que la ecuación (1) se transforma en una identidad cuando la variable y se reemplaza por $f(x)$, se dice que f está definida **implícitamente** por medio de la ecuación (1).

Por ejemplo, la ecuación (2) define implícitamente las siguientes funciones: $y=\sqrt{36-x^2}$ e $y=-\sqrt{36-x^2}$ en el intervalo [-6, 6].
La sustitución de cada una de estas funciones en (2) da lugar a la siguiente identidad: $x^2+(36-x^2)-36\equiv 0$

Observación

No toda ecuación de la forma $F(x,y)=0$ define de manera implícita una función, como sucede, por ejemplo, con la ecuación (5), para la cual no existe ningún par (x, y) que la satisfaga dado que x^2+y^2+36 es siempre un número positivo.
Se desea calcular $\frac{dy}{dx}$ en una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$ y en la cual y es una función implícita de x, como por ejemplo en la ecuación: $x^2+y^2-36=0$
Al despejar y, se generan dos funciones (cuyas gráficas son *arcos de semicircunferencia*) en el intervalo [–6, 6]:

$$y= f(x)=\sqrt{36-x^2}=\left(36-x^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (6)$$

$$y=g(x)=-\sqrt{36-x^2}=-\left(36-x^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (7)$$

De (6) se deduce que

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}.(-2x)\left(36-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{x}{(36-x^2)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{x}{y} \qquad (8)$$

De (7) se tiene:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}.(-2x)\left(36-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{x}{(36-x^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{-x}{-(36-x^2)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{x}{y} \qquad (9)$$

De (8) y (9) se deduce que independientemente de la elección de la función y, el resultado de la derivada es el mismo.
Ahora bien, si se considera la ecuación: $x^3-y^3-7y=0$ (10)
que define a y como una función implícita de x y cuya gráfica aparece en la siguiente figura.

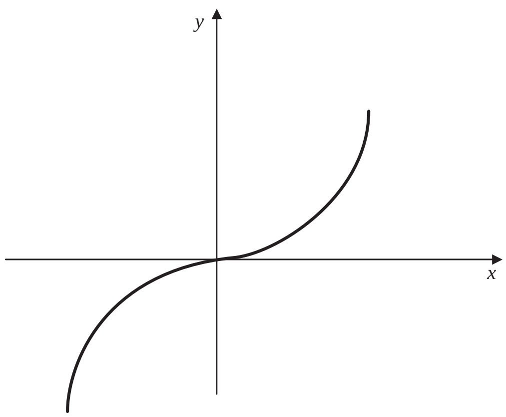


Figura 71. **Gráfica de la ecuación** $x^3 - y^3 - 7 = 0$

Si se quiere calcular $\frac{dy}{dx}$, primero se debe "despejar" y como una función de x y luego aplicar las reglas de derivación mencionadas anteriormente. Pero aquí surge una dificultad, ya que no es posible despejar y en forma explícita. Sin embargo, esto no es inconveniente para calcular $\frac{dy}{dx}$.

En general, si se quiere hallar $\frac{dy}{dx}$ suponiendo que $F(x, y) = 0$ define a y como **función implícita** de x, y que dicha función es derivable, existe un procedimiento llamado **derivación implícita,** que consiste en derivar respecto a x ambos miembros de la ecuación dada, teniendo en cuenta que al derivar los términos que contengan la variable y, debe utilizarse la regla de la cadena.

Finalmente, de la expresión obtenida se despeja $\frac{dy}{dx}$. En el caso particular considerado, se tiene de la ecuación (10): $x^3 - y^3 - 7y = 0$

$$\frac{d}{dx}\left[x^3 - y^3 - 7y\right] = \frac{d}{dx}[0]$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^3\right) - \frac{d}{dx}\left(y^3\right) - \frac{d}{dx}(7y) = 0$$

$$3x^2 - 3y^2\frac{dy}{dx} - 7\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}\left(3y^2 + 7\right) = 3x^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{3y^2 + 7}$$

De manera similar, en el caso de la ecuación (2) se tiene:

$$x^2 + y^2 - 36 = 0 \qquad\qquad \frac{d}{dx}\left(x^2 + y^2 - 36\right) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(y^2\right) - \frac{d}{dx}(36) = 0 \;\Rightarrow\; \qquad 2x + 2y.\frac{dy}{dx} - 0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Cabe destacar que la ecuación $F(x, y) = 0$ puede definir implícitamente a y como función de x en el entorno de algún punto x_0 aunque el proceso algebraico de despeje no pueda efectivizarse. De hecho, existe un teorema sobre la existencia de las funciones implícitas definidas por una ecuación, que será tratado en un curso posterior de Análisis Matemático en el que se estudian las funciones de dos o más variables independientes.

En adelante, se asumirá que la ecuación $g(x, y) = 0$ define a $y = f(x)$, o bien $x = h(y)$ en el entorno de algún punto según el caso que se trate.

También es posible indagar si la función $y = f(x)$ es derivable y cómo obtener su derivada directamente de la ecuación $g(x, y) = 0$ **sin necesidad de despejar** a *y* en términos de *x* (esto podría ser una tarea engorrosa, o bien imposible desde el punto de vista algebraico).
A tal efecto, el método de derivación implícita consiste en suponer que $y = f(x)$ es derivable y así derivando miembro a miembro la ecuación $g(x, y) = 0$ sabiendo que $y = f(x)$, es decir, empleando la derivación de funciones compuesta (regla de la cadena) y luego despejar y', tal como se ha hecho en los ejemplos anteriores.

EJEMPLO

La ecuación $x^2 + y^2 = 1$ (similar a otro ejemplo anterior) define en el entorno del punto $x_0 = \dfrac{1}{2}$ con $y > 0$ a la función $y = f(x)$. Se sabe que dicha ecuación corresponde a una circunferencia de radio 1 y centro en el origen de coordenadas. Como se ha dado la restricción $y > 0$, la gráfica corresponde a la semicircunferencia superior sobre el intervalo [-1, 1] (sin esta restricción la ecuación no definiría una función ya que no verifica la condición de unicidad de la imagen). Claro está que, en este caso, es factible y sencillo el despeje de la *y* en función de *x*, y por tanto, derivar aplicando las reglas de derivación. No obstante, se calculará y' aplicando el método de derivación implícita.
Derivando miembro a miembro la ecuación dada, resulta: $2x + 2y.y' = 0$
Cabe destacar que para derivar $y^2 = [f(x)]^2$ se ha empleado la regla de la cadena debido a que su derivada es $2.f(x).f'(x) = 2.y.y'$
De esta forma, $2y.y' = -2x \;\Rightarrow\; y' = -\dfrac{x}{y}$ con $y \neq 0$
Realizando la comprobación, resulta:

Si $x^2 + y^2 = 1 \;\Rightarrow\; y^2 = 1 - x^2 \;\Rightarrow\; |y| = \sqrt{1-x^2} \;\Rightarrow\; y = \sqrt{1-x^2}$ pues $y \geq 0$

luego se deriva *y* mediante las reglas de derivación y se obtiene: $y' = \dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{x}{y}$ resultado coincidente con el método de derivación implícita.

Nota: se debe evitar derivar funciones que no están definidas. Tal es el ejemplo de la ecuación $\cos^2 x + y^4 = -5$ que no representa ningún punto del plano y, por lo tanto, no tiene significado analítico (¿derivar una función que no existe?). No obstante, al ser una expresión algebraica podría derivarse en forma implícita y se obtiene:

$2.\cos x.(-senx) + 4y^3.y' = 0 \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{senx.\cos x}{2y^3}$, sin embargo, estas operaciones carecen de sentido.

9.9. Derivación logarítmica

Como aplicación de la regla de la cadena y de la derivación implícita se tiene, si $y = \ln f(x)$, $f(x) > 0$, entonces $y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ y en este resultado se basa el método de derivación logarítmica.

Dada una función $y = f(x)$, la derivación logarítmica consiste en tomar logaritmos en ambos miembros de la igualdad y derivar. Este método es interesante para:

- Derivar funciones de la forma $f(x)^{g(x)}$ con base y exponente variable, con $f(x) > 0$.
- Simplificar la derivación de productos y cocientes de funciones.

Sea $y = f(x)^{g(x)}$, f y g funciones derivables y f positiva.

1º) Se aplica logaritmos neperianos en ambos miembros de la igualdad, siempre que $f(x) > 0$, es decir:

$\ln y = \ln f(x)^{g(x)} \Rightarrow \ln y = g(x).\ln f(x)$ aplicando propiedades de los logaritmos

2º) Se deriva miembro a miembro

$$\frac{y'}{y} = g'(x).\ln f(x) + \frac{f'(x)}{f(x)}.g(x)$$

3º) Se despeja y'

$$y' = y.\left[g'(x).\ln f(x) + \frac{f'(x)}{f(x)}.g(x)\right] \Rightarrow y' = f(x)^{g(x)}.\left[g'(x).\ln f(x) + \frac{f'(x)}{f(x)}.g(x)\right]$$

Observación. Como esta última fórmula es muy "compleja" de recordar para ser aplicada, es usual y práctico aplicar el método en cada problema planteado, en cuyo caso lo único que se debe recordar es la aplicación de logaritmos en ambos miembros de la expresión que define la función, para luego derivar en forma implícita.

EJEMPLO

Considérese la función $y = x^x$, $x > 0$, si se aplica logaritmos en ambos miembros resulta: $\ln y = \ln x^x = x.\ln x$, y derivando los dos miembros de la igualdad:

$$\frac{y'}{y} = \ln x + \frac{1}{x}.x = \ln x + 1 \quad \Rightarrow \quad y' = x^x.(\ln x + 1).$$

EJEMPLO

Sea $y = x^k, k \in R, x \neq 0$. Si deseamos calcular su derivada con el método anterior, deberemos aplicar módulo previamente, dado que desconocemos el signo de la misma; veamos:

$$y = x^k \Rightarrow |y| = |x|^k \Rightarrow \ln|y| = k\ln|x| \quad \text{derivando} \quad \frac{y'}{y} = k.\frac{1}{x} \Rightarrow y' = kx^k\frac{1}{x} = kx^{k-1}$$

10. DERIVADA DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

A continuación se enumerarán algunas de las derivadas de las funciones más empleadas en un curso de Análisis Matemático. El lector podrá deducir la derivada de cualquier otra función que no figure en el siguiente listado con sólo aplicar las propiedades vistas[4]. Por otro lado, las deducciones de estas derivadas no figurarán en este libro; no obstante, es ***conveniente e interesante*** que el lector realice esta tarea para afianzar la definición de derivada (límite del cociente incremental) empleando las propiedades vistas, tales como: álgebra de derivadas, regla de la cadena, derivada de la función inversa, derivación logarítmica e implícita.

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x	1
$x^r \quad r \in R$	$r.x^{r-1}$
$\log_a x$; $a > 0; a \neq 1$; $x > 0$	$\frac{1}{x}.\log_a e = \frac{1}{x \ln e}$
$\ln\lvert x\rvert, x \neq 0$	$\frac{1}{x}$
$a^{\varphi(x)} \quad a > 0$	$a^{\varphi(x)}.\ln a.\varphi'(x)$
a^x	$a^x.\ln a$
e^x	e^x
$sen\, x$	$\cos x$
$\cos x$	$-sen\, x$
$tg\, x$	$\sec^2 x$
$\sec x$	$\sec x.tg\, x$
$\operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{cosec} x.\cot x$

$f(x)$	$f'(x)$
$\cot x$	$-cosec^2 x$
$arc\, sen\, x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arc \cos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arc\, tg\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$arc \sec x$	$\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$
$arc\ cosec\ x$	$\frac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$
$arc \cot x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
$sh\, x$	$ch\, x$
$ch\, x$	$sh\, x$
$th\, x$	$sech^2 x$

***Tabla 6.* Derivadas de las funciones elementales**

En los ejercicios resueltos, podrá encontrar modelos acerca de cómo obtener las derivadas de algunas inversas (ejercicio 21 y 22).

[4] Las denominadas Tablas de derivadas traen mucha mayor información, por lo que su uso en las aplicaciones reduce considerablemente el trabajo de cálculo. No obstante, se insiste en la conveniencia de que el lector realice la tarea de cálculo de algunas derivadas para afianzar la definición (límite del cociente incremental) empleando las propiedades vistas.

10.1. Derivada de funciones definidas en forma paramétrica

En Física es habitual la descripción de una trayectoria en términos del tiempo empleado; por ejemplo, la curva que describe una pelota al ser pateada[5], si se mueve en un plano, queda perfectamente caracterizada por $\begin{cases} x = v_{0x}t \\ y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$

siendo v_0 la velocidad con que es pateada, α el ángulo. Resulta de gran utilidad conocer el valor de $\frac{dy}{dx}$, sin necesitar encontrar cuál es la curva definida paramétricamente. Veamos el caso en forma genérica, sean:
$\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases}$ si de la primera función, determinamos su función inversa tendremos $t = g^{-1}(x)$, si además reemplazamos en la segunda obtendremos $y = f\left[g^{-1}(x)\right]$, ésta es la que queremos derivar, para ello usaremos la derivada de la compuesta y la de la función inversa:

$$\frac{dy}{dx} = f'\left[g^{-1}(x)\right].\left[g^{-1}(x)\right]' = f'[t]\frac{1}{g'(t)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad \text{con} \quad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

EJEMPLO

La rueda de una bicicleta tiene adherida una calcomanía. Mientras la rueda gira avanzando, la calcomanía describe una curva llamada ***cicloide*** (si no la recuerda, repase el capítulo correspondiente a funciones), definida así:
$\begin{cases} x = a(t - sent) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $t \in \boldsymbol{R}$ siendo a el radio de la rueda.

Queremos hallar el ángulo de la pendiente del arco de cicloide cuando corta el eje x en el origen. Para ello se requiere hallar la pendiente de la recta tangente, en el supuesto de que esta exista:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{asent}{a(1-\cos t)} = \frac{sent}{1-\cos t}$$

como vemos $\frac{dx}{dt} = 0$ si $t = 2n\pi,\ n \in \boldsymbol{Z}$. Deseamos saber qué ocurre en $t = 0$:

[5] En Física este problema se denomina tiro oblicuo, y se estudia como la composición de dos movimientos rectilíneos conocidos, el uniforme en la dirección horizontal y el uniformemente variado en la vertical, según se muestra en el ejercicio 34 de página 267.

$$\lim_{t\to 0}\frac{sent}{1-\cos t}=\lim_{t\to 0}\frac{sent(1+\cos t)}{1-\cos^2 t}=\lim_{t\to 0}\frac{sent(1+\cos t)}{sen^2 t}=\lim_{t\to 0}\frac{1+\cos t}{sent}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1+\cos t}{sent}=+\infty\\ \lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{1+\cos t}{sent}=-\infty\end{cases}$$

de donde la función no es derivable en $t = 0$

11. DIFERENCIABILIDAD

11.1. Aproximación lineal. Linealización

En las proximidades de un determinado punto las funciones derivables se comportan gráfica y localmente como una recta; tal es así que si se magnifica su gráfico en las proximidades del punto, éste se asimila cada vez más a la recta. Más concretamente, en el entorno de un punto, el gráfico de la función derivable tiende a superponerse con la recta tangente en ese punto. De esta forma, la recta tangente es una buena aproximación de la función en las proximidades del punto de tangencia.
Si una función es derivable en x_0, la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en x_0 es $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. Esta recta es el gráfico de una función lineal denominada *linealización* de *f*.

10. Definición
Dada $y = f(x)$ una función derivable en x_0, se denomina linealización o aproximación lineal de f en x_0 a la función lineal L dada por la expresión
$L(x) = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

Analicemos la validez de la aproximación $f(x)\approx L(x)$ en el entorno de x_0, que nos permitirá estimar las variaciones de f mediante variaciones de L, para lo cual se evalúa la diferencia entre $f(x)$ y $L(x)$. Consideremos que f está definida en un intervalo $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ y sea:

$$r(h) = f(x_0+h)-L(x_0+h) = f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0).h \qquad (11)$$

Para $|h|<|\delta|$. La función $r(h)$ representa el error que se comete al reemplazar $f(x)$ por $L(x)$ en un punto del entorno de x_0, es decir $x = x_0+h$. Cabe observar que $h = \Delta x$.

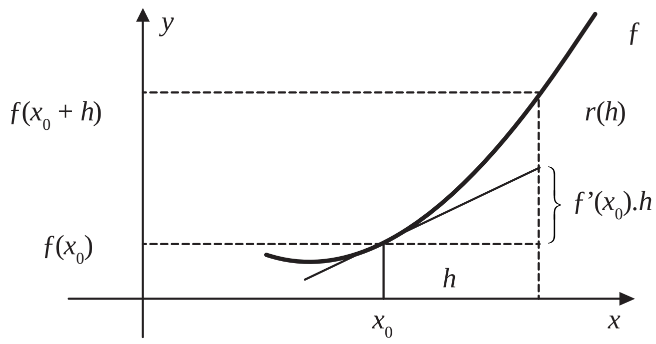


Figura 72. **Aproximación lineal de una función en un punto**

De (11) resulta que $\frac{r(h)}{h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)$, y por tanto:

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right] = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \lim_{h\to 0} f'(x_0) =$$

$$= f'(x_0) - f'(x_0) = 0 \text{, es decir:}$$

$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h} = 0$ de lo que se desprende que la aproximación lineal mejora cuanto más cercano se halle el punto x del punto x_0 (ya que $r(h)$ y h son infinitésimos, y r es de orden superior a h)

Teorema

Sea f una función real cuyo dominio contiene un entorno $(x_0-\delta, x_0+\delta)$.
Si f es derivable en x_0, se verifica

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)\,h}{h}\right] = 0$$

Este límite muestra que el error $r(h)$ tiende a cero cuando h tiende a cero más rápidamente que el mismo h. Este hecho fundamenta la aproximación $f(x) \approx L(x)$ en el entorno de x_0.

Si se designa como $\varepsilon(h) = \frac{r(h)}{h}$, es posible afirmar que

Si f es derivable en x_0, existe una función $\varepsilon(h)$ tal que $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$ y además:

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \left[f'(x_0) + \varepsilon(h)\right].h$$

Por otra parte, como se dijo anteriormente, la derivabilidad de una función en un punto permite estimar las variaciones de f a través de las variaciones de L. En efecto,

$\Delta f = f(x_0+h) - f(x_0)$

y el incremento de L está dado por

$$\Delta L = L(x_0+h) - L(x_0) = \left[f(x_0) + f'(x_0)(x_0+h-x_0)\right] - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x_0-x_0)\right] = \\ = f'(x_0).h$$

Para incrementos pequeños de la variable x se verificará $\Delta f \approx \Delta L$, es decir:

$$\Delta f = f(x_0+h) - f(x_0) \approx f'(x_0).h \tag{12}$$

11. Definición

Dada $y = f(x)$ una función derivable en x_0, diremos que es **diferenciable** en x_0

$\Leftrightarrow f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \phi(\Delta x)\Delta x \quad \text{con} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \phi(\Delta x) = 0$

Obsérvese que el incremento $\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ queda expresado como suma de dos términos, uno *lineal* en Δx, llamado *parte principal del incremento o diferencial de la función* y otro *no lineal* en Δx; este último término es infinitésimo de orden superior al primero con $\Delta x \to 0$.

De la definición tenemos que, llamando $x = x_0 + \Delta x$:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{L(x)} + \underbrace{\phi(x-x_0)(x-x_0)}_{r(x)}$$

Como vimos cuando planteamos la aproximación lineal.

12. Definición

Dada $y = f(x)$ una función diferenciable en x, se denomina ***diferencial*** de la variable dependiente y, y se escribe $dy = df(x)$, al producto $dy = f'(x)\Delta x$, o bien, para un punto en particular x_0, $df(x_0) = dy_0 = f'(x_0)dx = f'(x_0)(x-x_0)$

Por otra parte, si $y = f(x) = x \quad \Rightarrow \quad dy = dx = f'(x).\Delta x = 1.\Delta x \quad \Rightarrow \Delta x = dx$, entonces

$$dy = f'(x).dx$$

La igualdad $\Delta x = dx$ define el incremento de la variable independiente cualquiera sea la función $f(x)$ derivable.
En estos términos, de la expresión $dy = f'(x)dx$, dividiendo ambos miembros por dx resulta

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad \text{si} \quad dx \neq 0$$

Esta relación expresa que la derivada de una función en un punto se puede calcular a partir del cociente entre dos diferenciales. Recordemos que al comienzo de este capítulo cuando se introdujo $\dfrac{dy}{dx}$ como una forma de notación para la derivada, se remarcó que tanto dx como dy carecían de sentido si se los consideraba en forma independiente; ahora, con los conceptos introducidos, ya no es así. De esta forma, podemos calcular la derivada de una función en un punto como cociente de dos diferenciales en lugar del cociente entre cantidades infinitesimales.
Es interesante observar que dy es fácil de calcular, no así Δy. Por ello, en la práctica, la sustitución de incrementos por diferenciales suele ser muy beneficioso para las siguientes tareas:

1. Estimación del incremento de y **(**Δy**)**: es el ***error absoluto*** y se calcula mediante la diferencia entre el valor exacto y el valor aproximado de una magnitud escalar, se trata de un error cuantitativo y se mide en las mismas unidades en las que se expresa “y”, lo que es poco favorable dado que depende del sistema de medición.

   $\Delta y \approx f'(x)dx = dy$

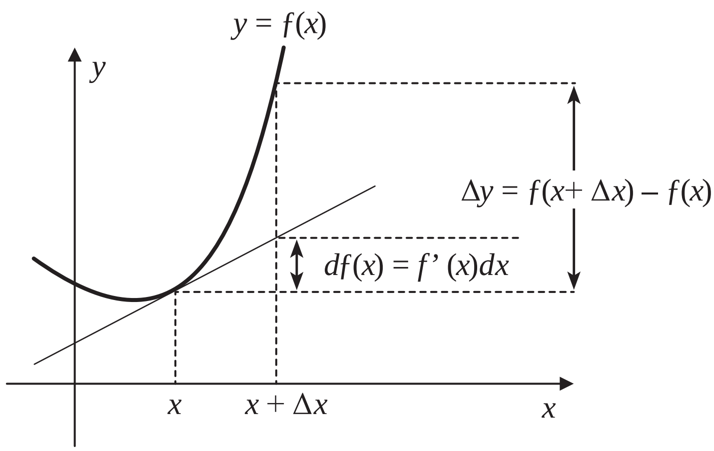


Figura 73**. Incremento y diferencial de una función**

2. Estimación del incremento relativo de y $\left(\dfrac{\Delta y}{y}\right)$: es el ***error relativo*** que se evalúa como la razón entre el error absoluto y el valor exacto de una magnitud escalar; se trata de un error cualitativo y es adimensional.

$$\frac{\Delta y}{y}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{f(x_0)}\approx\frac{f'(x_0).dx}{f(x_0)}=\frac{dy}{y}$$

Por lo general este incremento relativo suele utilizarse en porcentajes (**error porcentual**) $\dfrac{\Delta y}{y}\times 100\approx\dfrac{dy}{y}\times 100$

12. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN

A partir de las deducciones anteriores y del gráfico anterior, se puede observar que la diferencial de una función en un punto $dy = f'(x).dh$, representa el incremento sobre la recta tangente al gráfico de f al incrementar x en Δx. También puede visualizarse en ese mismo gráfico que la diferencia entre Δy y dy se hace más pequeña en tanto y en cuanto Δx sea cada vez más pequeño.

De acuerdo con lo dicho más arriba, la diferencial también puede interpretarse como una función lineal de ***R*** en ***R***. En efecto, dy: $\boldsymbol{R}\rightarrow\boldsymbol{R}$ / $dy(h) = f'(x).h$.
De esta forma, la correspondencia $x\rightarrow dy$ es una función cuyo dominio es el dominio de derivabilidad de f y su imagen está en el espacio de las funciones lineales de ***R*** en ***R***, interpretación que sintetiza lo expresado anteriormente y le será de utilidad en el estudio de funciones de varias variables.

EJEMPLO

Dada la función $f(x)=6x^4-7x^3$, entonces $df=dy=(24x^3-21x^2)dx$
Cabe destacar que para obtener la definición de función diferenciable en un punto se consideró, como parte inicial, que esa función es derivable en dicho punto (admite recta tangente en él). Cada paso de la deducción analítica de la aproximación lineal es equivalente a la anterior, por lo que es posible afirmar que ***para funciones reales de una variable independiente real, la derivabilidad en un punto es equivalente a la diferenciabilidad en dicho punto***. De hecho, muchos autores se refieren a funciones diferenciables para mencionar aquellas funciones que admiten recta tangente. Debe tenerse presente que esta equivalencia conceptual **no** es válida para funciones de varias variables independientes.

13. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DIFERENCIABLES

Dadas las funciones f y g diferenciables:

1. $d(f \pm g) = df \pm dg = \dfrac{df}{dx}.dx \pm \dfrac{dg}{dx}.dx$
2. $d(f.g) = g.df + f.dg = g\dfrac{df}{dx}.dx + f\dfrac{dg}{dx}.dx$
3. $d\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g.df - f.dg}{g^2} = \dfrac{g\dfrac{df}{dx}.dx - f\dfrac{dg}{dx}.dx}{g^2}$

   $g(x) \neq 0.$

Las reglas para diferenciar son básicamente equivalentes a las reglas para derivar.

Las diferenciales que han sido introducidas se denominan ***diferenciales de primer orden***, cuya utilidad podrá ser valorada más adelante en el cálculo de primitivas. También se definen las diferenciales de orden superior al primero, que requieren de derivadas de orden superior al primero de la función. Por ejemplo, si $dy = f'(x).dx$, entonces, $d^2y = f''(x).(dx)^2, \ \ldots; \quad d^ny = f^{(n)}(x).(dx)^n$. Esto será válido siempre que la función sea derivable hasta el orden correspondiente. Estas diferenciales de orden superior se utilizarán para realizar aproximaciones de la función en el entorno de un punto mediante polinomios osculadores (sus gráficos se "pegan" cada vez más al gráfico de la función dada en las proximidades de un punto) denominados Polinomios de Taylor, que más adelante presentaremos.

EJEMPLOS

1. Halle un valor aproximado de sen (29º), mediante una aproximación lineal.

   Es necesario determinar cuál será el punto "base" es decir, x_0. A tal fin deben tenerse en cuenta los siguientes requisitos:

   - Cercanía del punto x_0 al valor al que se quiere acceder, $x = x_0 + \Delta x$, o sea, Δx lo más pequeño posible para que el error de aproximación lineal $r(h)$ sea también lo más pequeño posible.
   - Facilidad de evaluación de $f(x_0)$ y $f'(x_0)$

Por lo tanto, será $f(x) = sen\,x$; $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$ (30º expresados en radianes, **no** olvide trabajar siempre en radianes) $\Delta x = h = -\dfrac{\pi}{180}$ (1º en radianes) y $f'(x) = \cos x$.

Por otra parte, $f(x_0) = \frac{1}{2}$ y $f'(x_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Como $f(x) = sen\,x$ es una función derivable en todo el eje real, es diferenciable en dicho conjunto y, por lo tanto, verifica:

$$\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0) \approx f'(x_0).h$$

Es decir:

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0).h$$

$$sen\left(\frac{29\pi}{180}\right) \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\left(-\frac{\pi}{180}\right)$$

Queda a cargo del lector calcular este valor aproximado y resultaría conveniente que mediante una calculadora observe el valor que otorga el sen 29º. Compare los resultados y saque conclusiones basándose en los conceptos analizados con anterioridad.

Es necesario destacar que el valor que proporcione la calculadora **no es el valor exacto** sino sólo otra aproximación del valor deseado, ya que los cálculos realizados por ella están sujetos a errores aritméticos de redondeo y de uso de algoritmos numéricos. Sólo se toma como referente para realizar una comparación con otra aproximación y poder comprender más fácilmente el concepto de error de linealización expuesto en forma teórica.

Si usted se preguntara cuál es el sentido o la importancia de lo expuesto sobre linealización teniendo a mano una calculadora que nos permite rápidamente conocer el valor del sen 29º, no se apresure a pensar que este tema sólo tiene carácter anecdótico o histórico; sin estos conceptos y la generalización a las aproximaciones polinómicas de funciones que veremos más adelante, la calculadora no existiría, por lo menos no como la conocemos.

2. Un tanque cilíndrico tiene un radio de 5*m* y una altura de 10*m*. Se desea pintar la superficie exterior con una capa de pintura de 0.001*m* de espesor. Determine:

   a. La cantidad aproximada dV de pintura que se necesita.

   b. La cantidad exacta ΔV de pintura que se necesita.

   c. El error $\Delta V - dV$

Sea x el radio del cilindro en cualquier instante

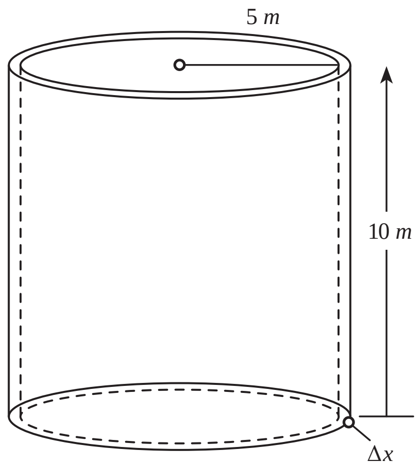


***Figura 74*. Gráfico del ejemplo 2**

El volumen viene dado por la función: $V(x) = 10\pi x^2$ (¿cómo se obtuvo este valor?). El diferencial de V en $x = 5$, será el valor aproximado:

$$dV = V'(5).\Delta x = 20.\pi.5.\frac{1}{1000} = \frac{\pi}{10} \quad \text{(expresado en } m^3\text{)}$$

ΔV es el valor exacto, es decir,

$$\Delta V = V(x+\Delta x) - V(x) = 10\pi.(x+\Delta x)^2 - 10\pi x^2 = 10\pi.\left[2x.\Delta x + (\Delta x)^2\right]$$

$$\Delta V = 10\pi\left[(2).5.(0.001) + (0.001)^2\right] = 10\pi(0.01 + 0.000001)$$

$$\Delta V = (0.10001)\pi$$

$$\Delta V - dV = (0.10001 - 0.1)\pi = 0.00001\pi = 10^{-5}\pi$$

14. EJERCICIOS RESUELTOS

Creemos importante recordarle una vez más que no se aprende a resolver problemas mirando lo que hizo otro. Considerando que el ser humano cae fácilmente en la tentación (cualquiera que ésta sea, aunque en este caso específico se trataría de leer el enunciado y bajar la vista rápidamente para tratar de ver "algo" de lo que está hecho), le sugerimos que tape con un papel la resolución, comience a resolver el ejercicio y vaya dejando a la vista lo resuelto solamente si se traba en algún paso o al finalizar su resolución, de modo de poder comparar procedimientos y resultados.

1. Halle el incremento de la función $f(x) = x^2$ cuando x pasa de:

a) $x_1 = 1 \quad a \quad x_2 = 2$

b) $x_1 = 1 \quad a \quad x_2 = 1,2$

c) $x_1 = 1 \quad a \quad x_2 = 1 + \Delta x$

Solución

a) $f(x_2) = 2^2 \quad f(x_1) = 1^2 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$

b) $f(x_2) = 1,2^2 \quad f(x_1) = 1^2 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = 1,2^2 - 1^2 = 1,44 - 1 = 0,44$

c) $f(x_2) = (1+\Delta x)^2 \quad f(x_1) = 1^2 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = (1+\Delta x)^2 - 1^2 =$

$= 1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 - 1 = 2\Delta x + (\Delta x)^2$

2. Determine Δy si $y = \sqrt[3]{x}$, si:

a) $x = 8, \Delta x = -1$

b) $x = 0, \Delta x = -0,001$

c) $x = a, \Delta x = h$

Solución

a) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f(8-1) - f(8) = \sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{7} - 2$

b) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f(0-0,001) - f(0) = \sqrt[3]{-0,001} - \sqrt[3]{0} = -0,1$

c) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f(a+h) - f(a) = \sqrt[3]{a+h} - \sqrt[3]{a}$

3. Calcule el incremento Δy y el cociente incremental $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ en los siguientes casos:

a) $y = f(x) = \dfrac{1}{(2-x^2)^2}$ cuando $x = 1 \quad y \quad \Delta x = 0,2$

b) $y = g(x) = \log x$ cuando $x = 100 \quad y \quad \Delta x = -90$

Solución

a) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f(1+0,2) - f(1) = \dfrac{1}{(2-1,2^2)^2} - \dfrac{1}{(2-1^2)^2} = \dfrac{1}{0,56^2} - 1 =$

$$= \left(\frac{25}{14}\right)^2 - 1 = \frac{25^2 - 14^2}{14^2} = \frac{429}{196}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{429}{196}}{0,2} = \frac{2145}{196}$$

b) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f(100-90) - f(100) = \log 10 - \log 100 = 1 - 2 = -1$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{-90} = \frac{1}{90}$$

4. ¿Cuál es la velocidad media de un móvil cuya ley de movimiento es $y = t^3$ con y en kilómetros, t en horas, si $1 \le t \le 4$?

Solución

La velocidad media está dada por el cociente incremental $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, como $y = t^3$ en $1 \le t \le 4$, tendremos $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{4^3 - 1^3}{4-1} = \dfrac{63}{3} = 21$ medida en *km/h*.

5. Calcule el cociente incremental $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ para la función $y = h(x) = \dfrac{1}{x}$ en $x = 2$ si:

a) $\Delta \ = 0,2$ b) $\Delta x = 0,01$ c) $\Delta x = 0,0005$

¿Cuánto vale *h'*(2)?

Solución

a) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{h(2+\Delta x) - h(2)}{\Delta x} = \frac{\dfrac{1}{2+0,2} - \dfrac{1}{2}}{0,2} = \frac{\dfrac{10}{22} - \dfrac{1}{2}}{\dfrac{2}{10}} = \frac{-\dfrac{1}{22}}{\dfrac{2}{10}} = -\frac{5}{22} \cong -0,2273$$

b) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{h(2+\Delta x) - h(2)}{\Delta x} = \frac{\dfrac{1}{2+0,01} - \dfrac{1}{2}}{0,01} = \frac{\dfrac{100}{201} - \dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{100}} = \frac{-\dfrac{1}{2.201}}{\dfrac{1}{100}} = -\frac{50}{201} \cong -0,2488$$

c) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} == \dfrac{\dfrac{1}{2+0{,}0005}-\dfrac{1}{2}}{0{,}0005} = \dfrac{\dfrac{10000}{20005}-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{5}{10000}} = \dfrac{\dfrac{-5}{2.20005}}{\dfrac{5}{10000}} = \dfrac{-10000}{2.20005} = -\dfrac{1000}{4001} \cong -0{,}2499$

Para determinar $h'(2)$ debemos calcular el límite del cociente incremental, como indicamos a continuación:

$$h'(2) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(2+\Delta x)-h(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2+\Delta x}-\dfrac{1}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{2-(2+\Delta x)}{2(2+\Delta x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{2\Delta x(2+\Delta x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{2(2+\Delta x)} = -\frac{1}{4} = -0{,}25$$

6. Si $g(x) = 2x^3(x+1)^2(x-2)$, halle el valor $g'(0); g'(-1); g'(2)$ por definición.

Solución

Para calcular la derivada en un punto podemos usar indistintamente cualquiera de las siguientes expresiones $g'(0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{g(0+\Delta x)-g(0)}{\Delta x}$, o bien, $g'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}$. Usaremos esta última:

$$g'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{2x^3(x+1)^2(x-2)-0}{x} = \lim_{x\to 0}2x^2(x+1)^2(x-2) = 0$$

$$g'(-1) = \lim_{x\to -1}\frac{2x^3(x+1)^2(x-2)-0}{x+1} = \lim_{x\to -1}2x^3(x+1)(x-2) = 0$$

$$g'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{2x^3(x+1)^2(x-2)-0}{x-2} = \lim_{x\to 2}2x^3(x+1)^2 = 144$$

7. Demuestre la no existencia de la derivada de las siguientes funciones, en los puntos donde se indica:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ en $x = 0$

b) $g(x) = \sqrt[5]{x-2}$ en $x = 2$

c) $r(x) = |senx|$ en $x = n\pi, \forall n \in \boldsymbol{Z}$

Solución

Calculemos, utilizando la definición de derivada en un punto. No olvide analizar previamente la continuidad de la función en el punto que se indica:

a) $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\overbrace{f(0)}^{=0}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{1/3}}=\infty$ de donde $\nexists f'(0)$

b) $g'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)-\overbrace{g(2)}^{=0}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[5]{x-2}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^{4/5}}=\infty$

c) Tener en cuenta que $sen(n\pi)=0 \quad \forall n\in \mathbf{Z}$, además la función $senx$ es una función periódica de período 2π, y $x=n\pi \quad \forall n\in\mathbf{Z}$ son las raíces de la función. Debido a la periodicidad, lo que ocurra en una de sus raíces se reitera en cada una; por tal razón analizaremos sólo un caso con n = 0:

$$r'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{r(x)-\overbrace{r(0)}^{=0}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|senx|}{x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{senx}{x}=1=r'(0^+)\\[2mm] \lim\limits_{x\to 0^-}(-\dfrac{senx}{x})=-1=r'(0^-)\end{cases}\Rightarrow \nexists r'(0)$$

8. Usando la definición de función derivada, verifique los siguientes resultados:

a) $f(x)=\dfrac{1}{x} \;\Rightarrow\; f'(x)=\dfrac{-1}{x^2},\; x\neq 0$

b) $g(x)=\dfrac{1}{x^2} \;\Rightarrow\; g'(x)=\dfrac{-2}{x^3},\; x\neq 0$

c) $h(x)=\sqrt{x} \;\Rightarrow\; h'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}},\; x > 0$

Solución

a) $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\cancel{x}-\cancel{x}-h}{x(x+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\cancel{x}-\cancel{x}-h}{x(x+h)}}{h}==\lim_{h\to 0}\frac{-\cancel{h}}{x\cancel{h}(x+h)}=-\frac{1}{x^2}=x+h\neq 0$$

b) $$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{(x+h)^2}-\dfrac{1}{x^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{x^2-(x+h)^2}{x^2(x+h)^2}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{x^2-(x^2+2xh+h^2)}{x^2(x+h)^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2-x^2-2xh-h^2}{hx^2(x+h)^2}=\lim_{h\to 0}\frac{-\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}x^2(x+h)^2}=\frac{-2x}{x^4}=\frac{-2}{x^3}=x+h\neq 0$$

c) Debido a que la función es $h(x)$, para evitar confusiones no llamaremos h al incremento de la variable independiente:

$$h'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{x}+\Delta x-\cancel{x}}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

9. a) Para las funciones $f(x)=\dfrac{1}{x}$ y $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$ halle las ecuaciones de las rectas tangente y normal en $(a, f(a))$ con a no nulo.

b) Pruebe que la recta tangente no corta a f, salvo en $(a, f(a))$.

c) Demuestre que la tangente a g en $(a, g(a))$ corta la gráfica de g en otro punto.

Solución

a) Para $f(x)=\dfrac{1}{x}$:

Sabemos que la ecuación de la recta tangente en $(a, f(a))$ está dada por $t: y = f(a)+f'(a)(x-a)$

como $f'(a)=\dfrac{-1}{a^2},\ a\neq 0$ (ver ejemplo resuelto 8.a), la recta tangente para esta función será:

$$y=\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}(x-a)=\frac{a-(x-a)}{a^2}=\frac{2a-x}{a^2},\ a\neq 0 \tag{13}$$

Por otra parte, la recta normal es

$$n: y=f(a)-\frac{1}{f'(a)}(x-a) \quad \text{si} \quad f'(a)\neq 0$$

En nuestro caso tendremos

$$n: y=\frac{1}{a}+a^2(x-a)=\frac{1-a^4+a^3x}{a}$$

Para la función $g(x)=\frac{1}{x^2}$:

Del ejercicio 8.b) tenemos $g'(x)=-\frac{2}{x^3}$, luego la recta tangente será

$$t:\ y=\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a^3}(x-a)=\frac{a-2(x-a)}{a^3}=\frac{3a-2x}{a^3} \tag{14}$$

y la normal será n: $y=\frac{1}{a^2}+\frac{a^3}{2}(x-a)=\frac{2-a^6+a^5x}{2a^2}$

b) Debemos resolver un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{x} \\ y=\dfrac{2a-x}{a^2},\ a\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{2a-x}{a^2}\Rightarrow a^2=2ax-x^2\Rightarrow a^2-2ax+x^2=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow (a-x)^2=0$ de donde $x=a$ es raíz doble con lo que ambas se intersecan sólo en $(a, f(a))$

c) Procedemos a resolver el sistema

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{x^2} \\ y=\dfrac{3a-2x}{a^3} \end{cases} \Rightarrow \frac{3a-2x}{a^3}=\frac{1}{x^2}\Rightarrow 3ax^2-2x^3=a^3\Rightarrow 3ax^2-2x^3-a^3=0$$

Como se puede verificar fácilmente, $x = a$ es raíz de la ecuación, para encontrar las restantes raíces dividimos el polinomio $(3ax^2 - 2x^3 - a^3):(x-a)$ usando Ruffini:

	-2	3a	0	$-a^3$
a		-2a	a^2	a^3
	-2	a	a^2	0

Luego la ecuación dada se puede factorizar así:

$$3ax^2 - 2x^3 - a^3 = (x-a)(-2x^2 + ax + a^2) = -2(x-a)^2(x + \frac{1}{2}a)$$

factorizando la cuadrática.

Por tanto, las gráficas de ambas funciones se intersecan en $(a; f(a))$

y en $(-\frac{1}{2}a; \frac{4}{a^2})$

10. a) Un astronauta viaja de izquierda a derecha a lo largo de $f(x) = x^2$. Al desconectarse el cohete en $x = a$, se desplazará a lo largo de la tangente a la curva en $(a, f(a))$. ¿En qué punto debe desconectar el cohete para alcanzar el punto: a-1) (4, 9) a-2) (4, -9).

b) Si el astronauta viaja a lo largo de $f(x) = x^3 - x$, ¿dónde debe desconectar el cohete para pasar por (2, 2)?

Solución

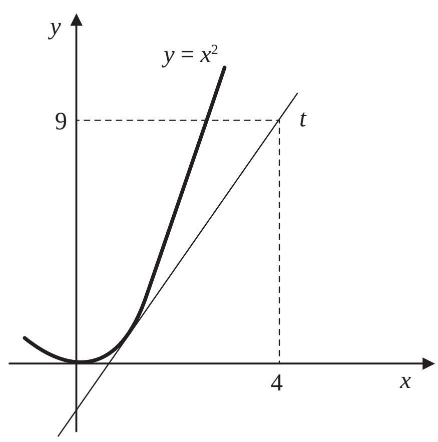


Figura 75. Gráfica del ejercicio resuelto 10

a-1) Cuando el astronauta se desconecte del cohete, se desplazará a lo largo de la recta tangente, como debe pasar por un punto ubicado en el primer cuadrante; la recta tangente deberá tener pendiente positiva $f'(a)=2a>0 \Rightarrow a>0$. Tendremos por tanto $y=f(a)+f'(a)(x-a)=a^2+2a(x-a) \Rightarrow y=2ax-a^2$ y como debe pasar por el punto (4, 9), nos queda $9 = 8a-a^2 \Rightarrow a^2-8a+9=0$ cuyas raíces son $4+\sqrt{7}$ y $4-\sqrt{7}$. La primera es un número mayor que 4, y por tal razón lo descartamos (¡observe el gráfico, Fig. 75, y convénzase de ello!), con lo que la abscisa del punto de tangencia es $4-\sqrt{7}$ y su ordenada $(4-\sqrt{7})^2$.

De manera análoga se resuelve a-2)

b) La función es $f(x) = x^3 - x$, su derivada es $f'(x)=3x^2-1$. La recta tangente en $(a; f(a))$ es

$$y=\underbrace{a^3-a}_{f(a)}+\underbrace{(3a^2-1)}_{f'(a)}(x-a)=(3a^2-1)x+a^3-a-3a^3+a \Rightarrow$$

$y=(3a^2-1)x-2a^3$ y pasa por (2; 2) de donde tendremos:

$$2=(3a^2-1)2-2a^3 \Rightarrow 4-6a^2+2a^3=0 \Rightarrow 2-3a^2+a^3=0$$

ecuación que admite como raíz a $a = 1$. Para hallar si tiene otras raíces reales usamos Ruffini:

	1	-3	0	2
1		1	-2	2
	1	-2	-2	0

Con lo que

$$2-3a^2+a^3=(a-1)(a^2-2a-2)=(a-1)(a-1-\sqrt{3})(a-1+\sqrt{3}).$$

Verifique Ud. que las otras dos raíces deben descartarse y justifique por qué.

¿Cuál de estas raíces tiene sentido para nuestro problema? Esboce un gráfico de la función y localice en él, el punto (2; 2). Si $a = 1$ la tangente es $y=2x-2$ y pasa por (2; 2), el punto de tangencia es (1; 0).

11. La función f es derivable, ¿qué característica tiene su función derivada si:

a) f es periódica de período T? b) f es par? c) f es impar?

Solución

a) Sabemos que una función es periódica de período $T > 0$ si $f(x) = f(x+T) \Rightarrow f'(x) = f'(x+T).(x+T)' = f'(x+T)$ de donde f' también es periódica de período T.

b) Sabemos que si una función es par $f(x) = f(-x)\ \forall x \in D_f \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = -f'(-x)$ de modo que la f' es impar

c) Si la función es impar $f(x) = -f(-x) \Rightarrow f'(x) = f'(-x)$ de modo que la f' es par.

12. Sea $|f(x)| \le x^4\ \forall x$. Analice continuidad y derivabilidad de f en el origen.

Solución

Como $|f(x)| \le x^4 \quad \forall x \Rightarrow |f(0)| \le 0$ pero un módulo nunca puede ser negativo, con lo que $|f(0)| = 0 \Rightarrow f(0) = 0$ (15)

Además $|f(x)| \le x^4 \Rightarrow -x^4 \le f(x) \le x^4$ por la propiedad del sandwich:

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} x^4 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0}(-x^4) = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0 \qquad (16)$$

De (15) y (16) tenemos que la función f es continua en $x = 0$.

Para analizar la derivabilidad debemos calcular $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - \overbrace{f(0)}^{=0}}{x-0}$ (17)

como tenemos información sobre la función en módulo, consideremos:

$$|f'(0)| = \left| \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \overbrace{f(0)}^{=0}}{x} \right| = \lim_{x\to 0} \left| \frac{f(x)}{x} \right| \text{ y como}$$

$$|f(x)| \le x^4 \Rightarrow \frac{|f(x)|}{|x|} \le |x|^3 \Rightarrow -|x|^3 \le \frac{f(x)}{x} \le |x|^3 \text{ de donde}$$

$$\left.\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0}|x|^3 = 0\\ \lim\limits_{x\to 0}(-|x|^3) = 0\end{cases}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0 \text{ por (5) esto es } f'(0)=0$$

13. Usando reglas de derivación calcule las derivadas de las siguientes funciones (considere las primeras letras del abecedario como constantes):

a) $y = \dfrac{ax+b}{a+b}$

b) $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

c) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$

d) $y = \dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$

e) $y = \dfrac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$

f) $y = \dfrac{(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^2}$

g) $y = x\sqrt{1+x^4}$

h) $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

i) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$

j) $y = \cos 2x - 2senx$

k) $y = (2-x^2)\cos x + 2xsenx$

l) $y = \dfrac{\cos x}{2sen^2 x}$

m) $y = \dfrac{senx - x\cos x}{\cos x + xsenx}$

n) $y = 4\sqrt[3]{tg^2 x} + \sqrt[3]{tg^8 x}$

ñ) $y = e^{-x^3}$

o) $y = 2^{tg\frac{1}{x}}$

p) $y = e^{ax}\dfrac{asenbx - b\cos bx}{\sqrt{a^2+b^2}}$

q) $y = \ln^3 x^2$

r) $y = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

s) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

t) $y = \dfrac{1}{2}\cot^2 x + \ln senx$

u) $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \dfrac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{a^2+x^2})$

v) $y = arctg\dfrac{x^2}{a}$

w) $y = xarcsen\sqrt{\dfrac{x}{1+x}} + arctg\sqrt{x} - \sqrt{x}$

x) $y = \ln\dfrac{x \quad a}{\sqrt{x^2 \quad b^2}} + \dfrac{a}{b}arctg\dfrac{x}{b}$

Solución

a) $y = \dfrac{ax+b}{a+b}$

Como a y b son constantes

$$y' = \frac{1}{a+b}(ax+b)' = \frac{1}{a+b}((ax)' + b') = \frac{a}{a+b}$$

b) $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

Debemos usar la derivada del cociente de $y = \dfrac{u}{v} \Rightarrow \ y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, nos queda:

$$y' = \frac{(ax+b)'(cx+d) - (ax+b)(cx+d)'}{(cx+d)^2} = \frac{a(cx+d) - (ax+b)c}{(cx+d)^2} =$$

$$= \frac{acx + ad - acx - bc}{(cx+d)^2} = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2}$$

c) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} = x^{-1} + x^{-2} + x^{-3}$

Usamos la derivada de la potencia, si $y = u^n \Rightarrow y' = nu^{n-1} \cdot u'$ y como $u = x \Rightarrow u' = 1$

$$y' = -x^{-2} - 2x^{-3} - 3x^{-4} = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4} = -\frac{x^2 + 2x + 3}{x^4}$$

d) $y = \dfrac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2}$ Nuevamente la derivada del cociente:

$$y' = \frac{(1+x-x^2)'(1-x+x^2) - (1+x-x^2)(1-x+x^2)'}{(1-x+x^2)^2} =$$

$$= \frac{(1-2x)(1-x+x^2) - (1+x-x^2)(-1+2x)}{(1-x+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1 - \cancel{x} + x^2 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + 1 + \cancel{x} - x^2 - 2x - 2x^2 + 2x^3}{(1-x+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2 - 4x}{(1-x+x^2)^2} = \frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$$

e) $y=\dfrac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$

$$y'=\frac{x'(1-x)^2(1+x)^3-x[(1-x)^2(1+x)^3]'}{[(1-x)^2(1+x)^3]^2}=$$

$$=\frac{(1-x)^2(1+x)^3-x[2(1-x)(-1)(1+x)^3+(1-x)^2 3(1+x)^2]}{[(1-x)^2(1+x)^3]^2}=$$

$$=\frac{(1-x)^2(1+x)^3-x(1-x)(1+x)^2[-2(1+x)+(1-x)3]}{[(1-x)^2(1+x)^3]^2}=$$

$$=(1-x)(1+x)^2\,\frac{(1-x)(1+x)-x(-2-2x+3-3x)}{(1-x)^4(1+x)^6}=$$

$$=\frac{1-x^2-x(1-5x)}{(1-x)^3(1+x)^4}=\frac{1-x^2-x+5x^2}{(1-x)^3(1+x)^4}=\frac{1+4x^2-x}{(1-x)^3(1+x)^4}$$

f) $y=\dfrac{(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^2}$

$$y'=\frac{[(2-x^2)(3-x^3)]'(1-x)^2-(2-x^2)(3-x^3)[(1-x)^2]'}{(1-x)^4}=$$

$$=\frac{[(2-x^2)'(3-x^3)+(2-x^2)(3-x^3)'](1-x)^2-(2-x^2)(3-x^3)2(1-x)(-1)}{(1-x)^4}=$$

$$=\frac{[-2x(3-x^3)+(2-x^2)(-3x^2)](1-x)^2-(2-x^2)(3-x^3)2(1-x)(-1)}{(1-x)^4}=$$

$$=(1-x)\,\frac{(-6x+2x^4-6x^2+3x^4)(1-x)+(6-2x^3-3x^2+x^5)2}{(1-x)^4}=$$

$$=\frac{-6x+2x^4-6x^2+3x^4+6x^2-2x^5+6x^3-3x^5+12-4x^3-6x^2+2x^5}{(1-x)^3}=$$

$$=\frac{12-6x-6x^2+2x^3+5x^4-3x^5}{(1-x)^3}$$

g) $y = x\sqrt{1+x^4} = x(1+x^4)^{\frac{1}{2}}$

$$y' = x'(1+x^4)^{\frac{1}{2}} + x[(1+x^4)^{\frac{1}{2}}]' = (1+x^4)^{\frac{1}{2}} + x[\frac{1}{2}(1+x^4)^{-\frac{1}{2}}4x^3] =$$

$$= \sqrt{1+x^4} + \frac{4x^4}{2\sqrt{1+x^4}} = \frac{1+x^4+2x^4}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1+3x^4}{\sqrt{1+x^4}}$$

h) $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$$y' = \frac{x'\sqrt{a^2-x^2} - x(\sqrt{a^2-x^2})'}{(\sqrt{a^2-x^2})^2} = \frac{\sqrt{a^2-x^2} - x\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{(\sqrt{a^2-x^2})^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}}{(\sqrt{a^2-x^2})^2} = \frac{a^2-x^2+x^2}{\sqrt{a^2-x^2}(\sqrt{a^2-x^2})^2} = \frac{a^2}{(\sqrt{a^2-x^2})^3}$$

i) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}} = \left(\dfrac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$y' = \frac{1}{3}\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)' = \frac{1}{3}\left(\frac{1-x^3}{1+x^3}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{(1+x^3)'(1-x^3)-(1+x^3)(1-x^3)'}{(1-x^3)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1-x^3}{1+x^3}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{3x^2(1-x^3)-(1+x^3)(-3x^2)}{(1-x^3)^2} = \frac{1}{\cancel{3}}\frac{(1-x^3)^{2/3}}{(1+x^3)^{2/3}}.\cancel{3}x^2\frac{1-x^3+1+x^3}{(1-x^3)^2} =$$

$$= \frac{2x^2(1-x^3)^{-4/3}}{(1+x^3)^{2/3}} = \frac{2x^2}{\sqrt[3]{(1+x^3)^2(1-x^3)^4}}$$

j) $y = \cos 2x - 2senx$

$$y' = -sen2x.(2x)' - 2\cos x = -2\underbrace{sen2x}_{=2senx\cos x} - 2\cos x = -2\cos x(2senx+1)$$

k) $y = (2 - x^2)\cos x + 2xsenx$

$$y' = (2 - x^2)'\cos x + (2 - x^2)(-senx) + 2(x'senx + x\cos x) =$$

$$= -2x\cos x - 2senx + x^2 senx + 2senx + 2x\cos x = x^2 senx$$

l) $y = \dfrac{\cos x}{2sen^2 x}$

$$y' = \frac{(\cos x)'2sen^2 x - \cos x(2sen^2 x)'}{(2sen^2 x)^2} = \frac{-senx.2sen^2 x - \cos x.4senx\cos x}{(2sen^2 x)^2} =$$

$$= \frac{-2senx.(sen^2 x + 2\cos^2 x)}{4sen^4 x} = -\frac{\overbrace{sen^2 x}^{=1-\cos^2 x} + 2\cos^2 x}{2sen^3 x} = -\frac{1 + \cos^2 x}{2sen^3 x}$$

m) $y = \dfrac{senx - x\cos x}{\cos x + xsenx}$

$$y' = \frac{(senx - x\cos x)'(\cos x + xsenx) - (senx - x\cos x)(\cos x + xsenx)'}{(\cos x + xsenx)^2} =$$

$$= \frac{[\cos x - (\cos x - xsenx)](\cos x + xsenx) - (senx - x\cos x)(-senx + senx + x\cos x)}{(\cos x + xsenx)^2} =$$

$$= \frac{xsenx(\cos x + xsenx) - (senx - x\cos x)x\cos x}{(\cos x + xsenx)^2} =$$

$$= x\frac{senx\cos x + xsen^2 x - \cos xsenx + x\cos^2 x}{(\cos x + xsenx)^2} =$$

$$= x\frac{x\overbrace{(sen^2 x + \cos^2 x)}^{=1}}{(\cos x + xsenx)^2} = \frac{x^2}{(\cos x + xsenx)^2}$$

n) $y = 4\sqrt[3]{tg^2 x} + \sqrt[3]{tg^8 x} = 4(tgx)^{2/3} + (tgx)^{8/3}$

$$y' = [4\frac{2}{3}(tgx)^{-1/3} + \frac{8}{3}(tgx)^{5/3}]\sec^2 x = \frac{8\sec^2 x}{3}\left[\frac{1}{\sqrt[3]{tgx}} + \sqrt[3]{tg^5 x}\right] =$$

$$= \frac{8\sec^2 x}{3}.\frac{1 + tg^2 x}{\sqrt[3]{tgx}} = \frac{8\sec^4 x}{3\sqrt[3]{tgx}}$$

ñ) $y = e^{-x^3} \Rightarrow y' = e^{-x^3}(-x^3)' = -3x^2 e^{-x^3}$

o) $y = 2^{tg\frac{1}{x}} \Rightarrow y' = 2^{tg\frac{1}{x}}(tg\,\frac{1}{x})'\ln 2 = 2^{tg\frac{1}{x}}\sec^2\frac{1}{x}.(\frac{1}{x})'\ln 2 = 2^{tg\frac{1}{x}}\sec^2\frac{1}{x}.\frac{-1}{x^2}\ln 2 =$

$$= \frac{-2^{tg\frac{1}{x}}\ln 2}{x^2\cos^2\frac{1}{x}}$$

p) $y = e^{ax}\dfrac{asenbx - b\cos bx}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$y' = (e^{ax})'.\frac{asenbx - b\cos bx}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}e^{ax}(asenbx - b\cos bx)' =$$

$$= ae^{ax}\frac{asenbx - b\cos bx}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}e^{ax}(ab\cos bx + b^2 senbx) =$$

$$= \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[a^2 senbx - ab\cos bx + ab\cos bx + b^2 senbx\right] =$$

$$= \frac{(a^2+b^2)e^{ax}senbx}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{a^2+b^2}.e^{ax}senbx$$

q) $y = \ln^3 x^2$

$$y' = 3\ln^2 x^2.\frac{1}{x^2}(x^2)' = \frac{6x}{x^2}\ln^2 x^2 = \frac{6\ln^2 x^2}{x}$$

r) $y = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

$$y' = \frac{1}{4}\frac{\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)'}{\frac{x^2-1}{x^2+1}} = \frac{1}{4}.\frac{x^2+1}{x^2-1}.\frac{(x^2-1)'(x^2+1)-(x^2-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{x^2-1}\frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{x^2+1} = \frac{1}{4}\frac{2x}{x^2-1}\frac{x^2+1-x^2+1}{x^2+1} =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{2x}{x^2-1}\frac{2}{x^2+1} = \frac{x}{x^4-1}$$

s) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

$$y' = \frac{1 + \frac{1}{\cancel{2}}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cancel{2}x}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

t) $y = \frac{1}{2}\cot^2 x + \ln senx$

$$y' = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\cot x(\cot x)' + \frac{\cos x}{senx} = \cot x(-\text{cosec}^2 x) + \frac{\cos x}{senx} =$$

$$= \frac{\cos x}{senx}(-\text{cosec}^2 x) + \frac{\cos x}{senx} = \frac{\cos x}{senx}\left(-\frac{1}{sen^2 x} + 1\right) = \frac{\cos x}{senx} . \frac{-1 + sen^2 x}{sen^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x}{senx} . \frac{-\cos^2 x}{sen^2 x} = -\frac{-\cos^3 x}{sen^3 x} = -\cot^3 x$$

u) $y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{a^2+x^2})$

$$y' = \left(\frac{x}{2}\right)'\sqrt{x^2+a^2} + \frac{x}{2}(\sqrt{x^2+a^2})' + \frac{a^2}{2}\frac{1 + \frac{1}{\cancel{2}}(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}\cancel{2}x}{x + \sqrt{a^2+x^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{x}{2}\frac{1}{\cancel{2}}(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}\cancel{2}x + \frac{a^2}{2}\frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{x + \sqrt{a^2+x^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{a^2}{2}\frac{\frac{\sqrt{a^2+x^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{a^2+x^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{a^2}{2\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{x^2+a^2}{2\sqrt{x^2+a^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{x^2+a^2}$$

v) $y = arctg\,\dfrac{x^2}{a}$

$$y' = \frac{\left(\dfrac{x^2}{a}\right)'}{1+\left(\dfrac{x^2}{a}\right)^2} = \frac{\dfrac{2x}{a}}{1+\dfrac{x^4}{a^2}} = \frac{\dfrac{2x}{a}}{\dfrac{a^2+x^4}{a^2}} = \frac{2ax}{a^2+x^4}$$

w) $y = xarcsen\sqrt{\dfrac{x}{1+x}} + arctg\sqrt{x} - \sqrt{x}$

$$y' = arcsen\sqrt{\frac{x}{1+x}} + x\left(arcsen\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right)' + \frac{(\sqrt{x})'}{1+(\sqrt{x})^2} - (\sqrt{x})' \qquad (18)$$

donde nos hace falta calcular: $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ como así también

$$\left(arcsen\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right)' = \frac{\left(\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}\right)'}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}\right)^2}} = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)'}{\sqrt{1-\dfrac{x}{1+x}}} = \frac{\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}\,\dfrac{x'(1+x)-x(1+x)'}{(1+x)^2}}{\sqrt{\dfrac{1+x-x}{1+x}}} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}\,\dfrac{1+x-x}{(1+x)^2}}{\sqrt{\dfrac{1}{1+x}}} = \frac{\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}\,\dfrac{1}{(1+x)^2}}{\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1+x}\sqrt{1+x}}{(1+x)^2\sqrt{x}} = \frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$$

reemplazándolas en (18) tendremos:

$$y' = arcsen\sqrt{\frac{x}{1+x}} + x\frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}} + \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= arcsen\sqrt{\frac{x}{1+x}} + \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)} + \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} - \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= arcsen\sqrt{\frac{x}{1+x}} + \frac{x+1-1-x}{2\sqrt{x}(1+x)} = arcsen\sqrt{\frac{x}{1+x}}$$

x) $y = \ln \dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}} + \dfrac{a}{b} arctg \dfrac{x}{b}$

$$y' = \frac{\left(\dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}}\right)'}{\dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}}} + \frac{a}{b}\frac{\left(\dfrac{x}{b}\right)'}{1+\left(\dfrac{x}{b}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+b^2}}{x+a}\,\frac{(x+a)'\sqrt{x^2+b^2} - (x+a)(\sqrt{x^2+b^2})'}{(\sqrt{x^2+b^2})^2} + \frac{a}{b}\frac{\dfrac{1}{b}}{1+\dfrac{x^2}{b^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+b^2}}{x+a}\,\frac{\sqrt{x^2+b^2} - (x+a)\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+b^2}}}{(\sqrt{x^2+b^2})^2} + \frac{a}{b}\frac{\dfrac{1}{b}}{\dfrac{b^2+x^2}{b^2}} =$$

$$= \frac{\dfrac{x^2+b^2-x^2-ax}{\sqrt{x^2+b^2}}}{(x+a)\sqrt{x^2+b^2}} + \frac{a}{b^2+x^2} = \frac{b^2-ax}{(x+a)(x^2+b^2)} + \frac{a}{b^2+x^2} =$$

$$= \frac{b^2-ax+ax+a^2}{(x+a)(x^2+b^2)} = \frac{b^2+a^2}{(x+a)(x^2+b^2)}$$

14. Obtenga la derivada de las siguientes funciones usando derivación logarítmica:

a) $y = \dfrac{1}{1-x^x}$ b) $y = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

Solución

a) $$y' = \left(\frac{1}{1-x^x}\right)' = \left[\left(1-x^x\right)^{-1}\right]' = -\left(1-x^x\right)^{-2}(-x^x)' = \frac{(x^x)'}{(1-x^x)^2} \qquad (19)$$

donde para calcular la derivada del numerador usaremos derivación logarítmica (observe que $x > 0$). Llamamos:

$$u = x^x \Rightarrow \ln u = x\ln x \Rightarrow \frac{u'}{u} = \ln x + \cancel{x}.\frac{1}{\cancel{x}} \Rightarrow u' = u(\ln x+1) = x^x(\ln x+1)$$

reemplazando en (19) nos queda: $y' = \dfrac{x^x(\ln x + 1)}{(1-x^x)^2}$

b) $y = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, si aplicamos logaritmos tendremos que tener en cuenta que el cociente $\dfrac{1-x}{1+x} \geq 0 \Rightarrow -1 < x \leq 1$, con lo que el dominio es el intervalo (–1, 1], pero el análisis de derivabilidad deberá hacerse en el (–1, 1) (¿por qué?), por tanto, al haber valores de *x* para los que la función es negativa, deberemos considerar la aplicación de módulos previamente:

$$|y| = |x|\sqrt{\frac{|1-x|}{|1+x|}} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + \frac{1}{2}\left[\ln|1-x| - \ln|1+x|\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right] = \frac{2(1-x)(1+x) - x(1+x) - x(1-x)}{2x(1-x)(1+x)} =$$

$$= \frac{2-2x^2-x-x^2-x+x^2}{2x(1-x)(1+x)} = \frac{2-2x^2-2x}{2x(1-x)(1+x)} = \frac{1-x^2-x}{x(1-x)(1+x)}$$

de donde, despejando:

$$y' = y\frac{1-x^2-x}{x(1-x)(1+x)} = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{1-x^2-x}{x(1-x)(1+x)} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1-x^2-x}{\sqrt{(1-x)\,(1+x)^3}}$$

15. Si se sabe que *f* es derivable, encuentre *y*’:

a) $y = f(e^x)e^{f(x)}$ b) $y = f(sen^2 x) + f(\cos^2 x)$

Solución

Aquí es fundamental el uso de la regla de la cadena:

a) $y' = \left[f(e^x)\right]'e^{f(x)} + f(e^x)\left[e^{f(x)}\right]' = f'(e^x)e^x e^{f(x)} + f(e^x)e^{f(x)}f'(x) =$

$= e^{f(x)}[f'(e^x)e^x + f(e^x)f'(x)]$

b) $y' = f'(sen^2 x)2senx\cos x + f'(\cos^2 x)2\cos x(-senx) =$

$= 2senx\cos x[f'(sen^2 x) - f'(\cos^2 x)] = sen2x[f'(sen^2 x) - f'(\cos^2 x)]$

16. Si $f(x)=\begin{cases} x^n \cos\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

¿Cuál es la condición que debe cumplir n para que la función: a) sea continua en x = 0; b) sea derivable en x = 0; c) tenga derivada continua en x = 0.

Solución

Para que la función resulte continua en el origen $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$. Sabemos que $f(0)=0$, calculemos entonces $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x^n.\underbrace{\cos\dfrac{1}{x}}_{\text{función acotada}}=f(0)=0$ sólo si $\lim\limits_{x\to 0} x^n=0$ porque nos quedaría el producto de un infinitésimo por una función acotada, para ello necesitamos que $n>0$. En síntesis, f es continua en x = 0 si $n>0$.

a) Para que sea derivable en x = 0, se requiere que sea continua, con lo que $n>0$ y además que

$$\exists f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^n\cos\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0} x^{n-1}\underbrace{\cos\frac{1}{x}}_{\text{acotada}}\Rightarrow \exists f'(0)$$

si el $\lim\limits_{x\to 0} x^{n-1}=0\Rightarrow n-1>0\Rightarrow n>1$. En síntesis, f es derivable en x = 0 si $n>1$, en cuyo caso $f'(0)=0$.

b) Para que la función tenga derivada continua en x = 0 tiene que ocurrir que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=f'(0)$. Para ello calculemos $f'(x)\ si\ x\neq 0$:

$$f'(x)=(x^n)'.\cos\frac{1}{x}+x^n.\left(\cos\frac{1}{x}\right)'=nx^{n-1}\cos\frac{1}{x}-x^n sen\frac{1}{x}.\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

de esta manera nos queda, y teniendo en cuenta que en b) calculamos $f'(0)=0$ con $n>1$:

$$f'(x)=\begin{cases} nx^{n-1}\cos\dfrac{1}{x}+x^{n-2}sen\dfrac{1}{x} & \text{si}\quad x\neq 0 \\ 0 & \text{si}\quad x=0 \end{cases}$$ de donde

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(n\underbrace{x^{n-1}}_{\to 0}\underbrace{\cos\frac{1}{x}}_{\text{acotada}} + x^{n-2}\underbrace{sen\frac{1}{x}}_{\text{acotada}} \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} x^{n-2} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow n-2>0 \Rightarrow n>2$. En síntesis, la función tiene derivada continua en

$x=0$ si $n>2$.

17. Si $g(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x\le c \\ ax+b & \text{si} \quad x>c \end{cases}$

¿Cómo deben elegirse los coeficientes a y b para que la función admita derivada en $x = c$?

Solución

Por condición necesaria, la función debe ser continua en $x = c$, de modo que se debe cumplir: $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c^+} g(x) = \lim_{x\to c^-} g(x) = g(c)$.

En nuestro caso $g(c)=c^2$.

Además $\lim_{x\to c^-} g(x) = \lim_{x\to c^-} x^2 = c^2 \quad \wedge \quad \lim_{x\to c^+} g(x) = \lim_{x\to c^+}(ax+b) = ac+b$ luego, igualando: $c^2 = ac+b$ (20)

Por otra parte, para que $\exists g'(c) = g'(c^+) = g'(c^-)$. Calculemos las derivadas laterales:

$$\lim_{x\to c^-}\frac{g(x)-g(c)}{x-c} = \lim_{x\to c^-}\frac{x^2-c^2}{x-c} = \lim_{x\to c^-}\frac{(x-c)(x+c)}{x-c} = \lim_{x\to c^-}(x+c) = 2c = g'(c^-)$$

usando la igualdad (20)

$$\lim_{x\to c^+}\frac{g(x)-g(c)}{x-c} = \lim_{x\to c^-}\frac{ax+b-\overbrace{c^2}^{=ac+b}}{x-c} = \lim_{x\to c^+}\frac{ax+b-ac-b}{x-c} = \lim_{x\to c^+}\frac{a(x-c)}{x-c} = a = g'(c^+)$$

Por tanto $a=2c$, y como (por (20)) $c^2 = ac+b$ reemplazando nos queda que $c^2 = 2c^2 + b \Rightarrow b = -c^2$.

En consecuencia, para que la función sea derivable en $x = c$, tiene que ocurrir $a=2c$ y $b=-c^2$.

18. Para cuestionarse:

a) Si existe $f'(c)$ pero no existe $g'(c)$, ¿qué puede decirse de derivada de la función $h(x) = f(x) + g(x)$ en $x = c$?

b) Si no existen $f'(c)$ ni $g'(c)$, ¿qué puede decirse de la derivada de la función $h(x) = f(x) + g(x)$ en $x = c$?

c) Si existe $f'(c)$ pero no existe $g'(c)$, ¿qué puede decirse de derivada de la función $h(x) = f(x).g(x)$ en $x = c$?

d) Si no existen $f'(c)$ ni $g'(c)$, ¿qué puede decirse de $h'(c)$ si $h(x) = f(x).g(x)$?

e) Si la función $f(x)$ es derivable en el intervalo $(a;+\infty) \wedge \exists \lim_{x\to+\infty} f(x)$ ¿Se deduce de ello que $\exists \lim_{x\to+\infty} f'(x)$?

f) ¿Se puede derivar término a término una desigualdad entre funciones de modo que se conserve la misma?

Solución

a) Podemos afirmar que no existe $h'(c)$ ya que, supuesta la continuidad de g, la derivada estaría dada por:

$$h'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)+g(x)-f(c)-g(c)}{x-c} = \lim_{x\to c}\left[\underbrace{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}_{\to f'(c)} + \frac{g(x)-g(c)}{x-c}\right]$$

luego el límite existirá sólo si $\exists \lim_{x\to c}\left[\frac{g(x)-g(c)}{x-c}\right]$ que es $g'(c)$.

b) No se puede generalizar, dependerá de cuáles sean dichas funciones. Por ejemplo, si $f(x) = |x| \quad \wedge \quad g(x) = -|x|$ en $x = 0$. Ambas son continuas y no derivables en $x = 0$, sin embargo $h(x) = 0$, función constante, que sí es derivable. En cambio, si $f(x) = |x| = g(x)$ en $x = 0$, la función será $h(x) = 2|x|$ que no es derivable en el origen.

c) Podríamos tentarnos en decir que no existe $h'(c)$, pero ello depende de quienes son las funciones. Por ejemplo, si $f(x) = x^2 \wedge g(x) = |x|$, f es derivable en $x = 0$ pero g no; la función $h(x) = x^2|x|$ es derivable en 0 ya que $h'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2|x|}{x} = \lim_{x\to 0} x|x| = 0$.

En cambio, con sólo sustituir la f por $f(x)=x^2+1$ nos queda

$$h'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+1)|x|}{x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x^2+1)x}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(x^2+1)(-x)}{x}=-1\end{cases}\Rightarrow \nexists h'(0).$$ De modo

que **nada se puede afirmar bajo esas hipótesis**.

d) No podemos generalizar. Consideremos el caso $f(x)=g(x)=|x|$ $\Rightarrow h(x)=|x|^2=x^2$, ni f ni g son derivables en 0, pero sí lo es la función h en x = 0. Verifique Ud. ver que si se eligiesen $f(x)=|x|$ y $g(x)=|x|^2$, la función h no sería derivable en el origen.

e) No se deduce. Analicemos el siguiente ejemplo: $f(x)=\dfrac{\cos(x^2)}{x}$ con x > 0. Es derivable por ser un cociente, con denominador no nulo, de funciones derivables, el denominador es polinómico y por tanto derivable, y el numerador es una composición entre la función coseno, que es derivable para todo x, y la potencia x^2 que también lo es. Además $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos(x^2)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{\dfrac{1}{x}}_{\to 0}.\underbrace{\cos(x^2)}_{\text{acotada}}=0$. Calculemos la derivada:

$$f'(x)=\frac{-sen(x^2).2x.x-\cos(x^2)}{x^2}=-2sen(x^2)-\frac{1}{x^2}\cos(x^2),$$

y ahora veamos

$$\lim_{x\to+\infty}\left[-2sen(x^2)-\frac{1}{x^2}\cos(x^2)\right]=-2\underbrace{\lim_{x\to+\infty}sen(x^2)}_{\nexists}-\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}.\underbrace{\cos(x^2)}_{\text{acotada}}$$

de donde $\nexists\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$

f) No. Sean las funciones

$f(x)=e^x \wedge g(x)=1 \quad \forall x<0: f(x)<g(x)\Rightarrow e^x<1$, si derivamos, obtendremos $e^x<0$, lo que es absurdo para $x<0$.

19. ¿Con qué velocidad varían el área y la longitud de la diagonal de un rectángulo en el momento en que la base vale 20*m* y la altura 15*m*, si la base se contrae con una velocidad de 1*m*/*s* y la altura se dilata con velocidad igual a 2*m*/*s*?

Solución

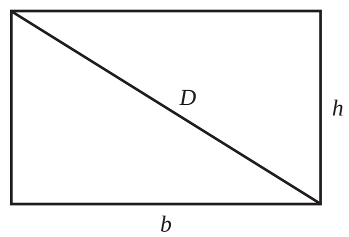


Figura 76. **Gráfica del ejercicio resuelto 19**

El área es $A = b.h$ donde A, b y h son funciones del tiempo. La derivada de A respecto del tiempo nos dará la velocidad con que varía el área, así tenemos:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{db}{dt}h + b\frac{dh}{dt} = -1\frac{m}{s}15m + 20m\,2\frac{m}{s} = 25\frac{m^2}{s}$$

donde las velocidades de contracción y de dilatación tienen distinto signo (¿por qué?).

En cuanto a la diagonal D, se puede pensar como la hipotenusa de un triángulo rectángulo; usando el teorema de Pitágoras, tenemos que $D = \sqrt{h^2 + b^2}$, derivando respecto del tiempo nos queda:

$$\frac{dD}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{h^2+b^2}}\left[2h\frac{dh}{dt} + 2b\frac{db}{dt}\right] = \frac{h\frac{dh}{dt} + b\frac{db}{dt}}{\sqrt{h^2+b^2}} = \frac{15m\,2\frac{m}{s} + 20m(-1\frac{m}{s})}{\sqrt{(15m)^2 + (20m)^2}}$$

de donde $\frac{dD}{dt} = 0{,}4m/s.$

20. Desde el puerto de Buenos Aires salen simultáneamente dos barcos, uno de bandera liberiana y el otro de bandera canadiense, en direcciones Norte y Este, respectivamente. ¿Con qué velocidad aumenta la distancia entre ellos si el que se dirige al Norte lleva una velocidad de $30km/h$ en tanto que el canadiense se desplaza a $40km/h$?

Solución

Llamando l a distancia recorrida por el barco liberiano, $l = 30\frac{km}{h}.t$. Si c es la distancia recorrida por el barco canadiense, $c = 40\frac{km}{h}.t$. Se alejan uno del otro en direcciones perpendiculares. La distancia entre ambos será la hipotenusa D del triángulo rectángulo, de catetos l y c, con lo que, por Pitágoras

$$D=\sqrt{l^2+c^2} \Rightarrow D=\sqrt{(30\frac{km}{h}t)^2+(40\frac{km}{h}t)^2}=\sqrt{2500\left(\frac{km}{h}\right)^2 t^2}=50\frac{km}{h}t$$

de donde $\dfrac{dD}{dt}=50\dfrac{km}{h}$

21. Halle la derivada de las siguientes funciones, utilizando el concepto de derivada de la inversa:

a) $f: \boldsymbol{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) \,/\, f(x)=arctgx$ b) $g: \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R} \,/\, g(x)=\arg shx$

Solución

Recordemos que dada $y=f^{-1}(x)$ de modo que $x=f(y)$ entonces $\dfrac{dy}{dx}(x)=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$ ambas igualdades dependiendo de la variable x.

a) Si $y=arctgx \Rightarrow x=tgy \Rightarrow \dfrac{dx}{dy}=\sec^2 y=1+tg^2 y=1+x^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}=\frac{df^{-1}(x)}{dx}$$

b) $g^{-1}: R \rightarrow R \,/\, y=g^{-1}(x)=\arg senhx \Rightarrow x=senhy \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy}=\cosh y=\sqrt{1+senh^2 y}=\sqrt{1+x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{df^{-1}(x)}{dx}$$

22. Si $f: R \rightarrow R \,/\, f(x)=x+3+x^3$, calcule $\dfrac{df^{-1}}{dx}(3)$

Solución

Debemos averiguar el valor de $a \,/\, a+3+a^3=3 \Rightarrow a=0$. De esta manera sabemos que $f(0)=3$. Además $f'(x)=1+3x^2$. Luego $\dfrac{df^{-1}}{dx}(3)=\dfrac{1}{f'(0)}=1$

23. Determine $\dfrac{dy}{dx}$ si: a) $\begin{cases} x=\sqrt[3]{1-\sqrt{t}} \\ y=\sqrt{1-\sqrt[3]{t}} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=asen^3 t \end{cases}$

Solución

Deberemos tener en cuenta que $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ (si no lo recuerda, el tema teórico correspondiente a derivación paramétrica).

a) $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{3}(1-\sqrt{t})^{-2/3}(-\dfrac{1}{2\sqrt{t}})=\dfrac{-1}{6\sqrt{t}\sqrt[3]{(1-\sqrt{t})^2}}$

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{2\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}}(-\dfrac{1}{3}t^{-2/3})=\dfrac{-1}{6\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}\sqrt[3]{t^2}}$

luego $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{-1}{6\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}\sqrt[3]{t^2}}}{\dfrac{-1}{6\sqrt{t}\sqrt[3]{(1-\sqrt{t})^2}}}=\dfrac{\sqrt{t}\sqrt[3]{(1-\sqrt{t})^2}}{\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}\sqrt[3]{t^2}}=\dfrac{\sqrt[3]{(1-\sqrt{t})^2}}{\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}\sqrt[6]{t}}=\sqrt[6]{\dfrac{(1-\sqrt{t})^4}{t(1-\sqrt[3]{t})^3}}$

b) Como $x=a\cos^3 t\Rightarrow\dfrac{dx}{dt}=-3a\cos^2 t.sent$, además

$y=asen^3t\Rightarrow\dfrac{dy}{dt}=3asen^2t.\cos t\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3asen^2t.\cos t}{-3a\cos^2 t.sent}=-tgt$

24. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva definida en forma paramétrica, en donde se indica:

a) $\begin{cases} x=\dfrac{2t+t^2}{1+t^3} \\ y=\dfrac{2t-t^2}{1+t^3}\end{cases}$ en $t=0$ b) $\begin{cases} x=2t+3t^2 \\ y=t^2+2t^3\end{cases}$ en $(5;3)$

Solución

Recordemos que las ecuaciones pedidas para $y=f(x)$ son:

$t: y=f(a)+f'(a)(x-a)$ $n: y=f(a)-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$ si $f'(a)\neq 0$

a) Cuando t = 0, x = a = 0 e y = f(a) = 0. Por otra parte, debemos calcular la derivada:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{(2+2t)(1+t^3)-(2t+t^2)3t^2}{(1+t^3)^2}=\frac{2+2t^3+2t+2t^4-6t^3-3t^4}{(1+t^3)^2}=\frac{2-4t^3+2t-t^4}{(1+t^3)^2}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{(2-2t)(1+t^3)-(2t-t^2)3t^2}{(1+t^3)^2}=\frac{2+2t^3-2t-2t^4-6t^3+3t^4}{(1+t^3)^2}=\frac{2-4t^3-2t+t^4}{(1+t^3)^2}$$

de donde:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{2-4t^3-2t+t^4}{(1+t^3)^2}}{\dfrac{2-4t^3+2t-t^4}{(1+t^3)^2}}=\frac{2-4t^3-2t+t^4}{2-4t^3+2t-t^4}\Rightarrow\frac{dy}{dx}(0)=1$$

Luego, las rectas tangente y normal en $x = 0$ e $y = 0$ son

$t: y=x \qquad n: y=-x$

b) $\begin{cases} x=2t+3t^2 \\ y=t^2+2t^3 \end{cases}$ en $(5;3)$

Debemos hallar el valor de t tal que $\begin{cases} 5=2t+3t^2 \\ 3=t^2+2t^3 \end{cases}$ y obtenemos $t=1$. Además:

$\frac{dx}{dt}=2+6t\Rightarrow\frac{dx}{dt}(1)=8 \quad \wedge \quad \frac{dy}{dt}=2t+6t^2\Rightarrow\frac{dy}{dt}(1)=8$, con lo que $\frac{dy}{dx}(1)=1$

Luego, las rectas tangente y normal en (5,3) son

$t: y=3+(x-5)=x-2 \qquad n: y=3-(x-5)=8-x$

25. Las siguientes expresiones de la forma $F(x;y)=0$ definen implícitamente una función del tipo $y = f(x)$, calcule $y'(x, y)$:

a) $x^2+2xy-y^2-2x=0$ ¿cuánto vale $y'(2, 4)$? ¿e $y'(2, 0)$?

b) $arctg\,\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$

Solución

a) Dada la ecuación $x^2+2xy-y^2-2x=0$, con $y = f(x)$ su derivada será $2x+2(y+xy')-2yy'-2=0\Rightarrow 2y'(x-y)=2(1-x-y)\Rightarrow \quad y'=\frac{1-x-y}{x-y}$ con $y\neq x$. Luego $y'(2, 4) = \frac{5}{2}$ y $y'(2, 0)= -\frac{1}{2}$.

b) Derivando miembro a miembro la ecuación $arctg\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ tenemos:

$$\frac{\left(\dfrac{y}{x}\right)'}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} = \frac{1}{2}\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\dfrac{xy'-y}{x^2}}{\dfrac{x^2+y^2}{x^2}} = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}(x+yy')}{x^2+y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xy'-y = x+yy' \Rightarrow (x-y)y' = x+y \Rightarrow y' = \frac{x+y}{x-y}$$

26. ¿Qué condiciones se deben imponer a los coeficientes:

a) para que la parábola $y = ax^2+bx+c$ sea tangente al eje de abscisas?

b) para que la función $y = x^3+bx+c$ sea tangente al eje de abscisas?

c) para que la parábola $y = ax^2$ sea tangente a la curva $y = \ln x$?

Solución

a) Para que la parábola $y = ax^2+bx+c$ sea tangente al eje x, debe tener su vértice en el punto de tangencia y en él su derivada es cero. Con ello nos quedará un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y' = 2ax_v + b = 0 \Rightarrow x_v = -\dfrac{b}{2a} \\ y_v = ax_v^2 + bx_v + c = 0 \Rightarrow a(-\dfrac{b}{2a})^2 + b(-\dfrac{b}{2a}) + c = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0 \Rightarrow \frac{b^2-2b^2+4ac}{4a} = 0 \Rightarrow -b^2+4ac = 0 \quad \forall a \neq 0$$

Nótese que el punto de tangencia será el mayor valor de la imagen si $a < 0$, o el menor si $a > 0$.

b) Para que la parábola cúbica $y = x^3+bx+c$ resulte tangente al eje de abscisas en algún punto de abscisa x_0, tiene que ocurrir que la derivada en dicho punto sea cero y la imagen en él sea cero.

$$\begin{cases} y'(x_0) = 3x_0^2 + b = 0 \Rightarrow |x_0| = \sqrt{\dfrac{-b}{3}} \quad \text{con} \quad b \leq 0 \\ y_0 = x_0^3 + bx_0 + c = 0 \end{cases}$$

$$\text{Si } x_0=\sqrt{\frac{-b}{3}}\Rightarrow\left(\sqrt{\frac{-b}{3}}\right)^3+b\sqrt{\frac{-b}{3}}+c=0\Rightarrow\sqrt{\left(\frac{-b}{3}\right)^2\frac{-b}{3}}+b\sqrt{\frac{-b}{3}}+c=0\Rightarrow$$

$$\left|\frac{b}{3}\right|\sqrt{\frac{-b}{3}}+b\sqrt{\frac{-b}{3}}+c=0,\text{ como } b\le 0\Rightarrow\left|\frac{b}{3}\right|=-\frac{b}{3}\Rightarrow\underbrace{-\frac{b}{3}\sqrt{\frac{-b}{3}}+b\sqrt{\frac{-b}{3}}}_{=\frac{2}{3}b\sqrt{\frac{-b}{3}}}+c=0$$

$$\Rightarrow-\frac{2}{3\sqrt{3}}(-b)^{3/2}=-c\Rightarrow c=\frac{2}{3\sqrt{3}}(-b)^{3/2},b\le 0$$

$$\text{Si } x_0=-\sqrt{\frac{-b}{3}}\Rightarrow\left(-\sqrt{\frac{-b}{3}}\right)^3+b(-\sqrt{\frac{-b}{3}})+c=0\Rightarrow-\sqrt{\left(\frac{-b}{3}\right)^2\frac{-b}{3}}-b\sqrt{\frac{-b}{3}}+c=0\Rightarrow$$

$$-\left|\frac{b}{3}\right|\sqrt{\frac{-b}{3}}-b\sqrt{\frac{-b}{3}}+c=0,\text{ como } b\le 0:\left|\frac{b}{3}\right|=-\frac{b}{3}\Rightarrow\underbrace{\frac{b}{3}\sqrt{\frac{-b}{3}}-b\sqrt{\frac{-b}{3}}}_{=-\frac{2}{3}b\sqrt{\frac{-b}{3}}}+c=0$$

$$\Rightarrow\frac{2}{3\sqrt{3}}(-b)^{3/2}=-c\Rightarrow c=-\frac{2}{3\sqrt{3}}(-b)^{3/2},b\le 0$$

c) Para que la parábola $y=ax^2$ sea tangente a la curva $y=\ln x$ tienen que tener la misma pendiente en el punto de tangencia $x_0>0$, de donde tenemos:

$$\begin{cases}ax_0^2=\ln x_0\\ 2ax_0=\dfrac{1}{x_0}\Rightarrow x_0^2=\dfrac{1}{2a}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cancel{a}.\dfrac{1}{2\cancel{a}}=\ln x_0\Rightarrow x_0=e^{\frac{1}{2}}\Rightarrow y_0=\dfrac{1}{2}\\ x_0^2=e=\dfrac{1}{2a}\Rightarrow a=\dfrac{1}{2e}\end{cases}$$

27. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva definida implícitamente, en el punto que se indica:

a) $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1$ en $P(6;\dfrac{32}{5})$ b) $xy+\ln y=1$ en $Q(1;1)$

Solución

a) Derivamos: $\dfrac{x}{50}+\dfrac{yy'}{32}=0\Rightarrow y'=-\dfrac{32x}{50y}=-\dfrac{16x}{25y}\Rightarrow y'(6;\dfrac{32}{5})=-\dfrac{16.6}{25.\dfrac{32}{5}}=-\dfrac{3}{5}$

De donde la recta tangente es: $y = \frac{32}{5} - \frac{3}{5}(x-6) = \frac{50-3x}{5}$

En tanto que la recta normal es: $y = \frac{32}{5} + \frac{5}{3}(x-6) = \frac{5x-54}{15}$

b) $xy + \ln y = 1$ en Q (1; 1)

Derivemos

$$y + xy' + \frac{y'}{y} = 0 \Rightarrow \frac{xy+1}{y}y' = -y \Rightarrow y' = \frac{-y^2}{xy+1} \Rightarrow y'(1;1) = -\frac{1}{2}$$

De donde la recta tangente es: $y = 1 - \frac{1}{2}(x-1) = \frac{3-x}{2}$

En tanto que la recta normal es: $y = 1 + 2(x-1) = 2x-1$

28. Para la función $f(x) = 1 + x^2 - 3x$ calcule Δf y df en a = 1 con:
a) $\Delta x = 0,5$ b) $\Delta x = 0,1$ c) $\Delta x = 0,01$. Compárelos.

Solución

Recordemos que $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$, y $df = f'(x)\Delta x$, en nuestro caso $f'(x) = 2x-3$

a) $\Delta f = f(1+0,5) - f(1) = \left(1+1,5^2 - 3.1,5\right) - (1+1^2-3.1) = -1,25+1 = -0,25$

$df = (2.1-3).0,5 = -0,5$

Notar que, en este caso $|\Delta f - df| = |-0,25+0,5| = 0,25$

b) $\Delta f = f(1+0,1) - f(1) = \left(1+1,1^2 - 3.1,1\right) - (1+1^2-3.1) = -1,09+1 = -0,09$

$df = (2.1-3).0,1 = -0,1$

Notar que, en este caso $|\Delta f - df| = |-0,09+0,1| = 0,01$

c) $\Delta f = f(1+0,01) - f(1) = \left(1+1,01^2 - 3.1,01\right) - (1+1^2-3.1) = -1,0099+1 = -0,0099$

$df = (2.1-3).0,01 = -0,01$

Notar que $|\Delta f - df| = |-0,0099+0,01| = 0,0001$

Si comparamos los módulos $|\Delta f - df|$, podemos observar que dichas diferencias se reducen considerablemente cuanto más pequeño sea el Δx.

29. Calcule dy en los siguientes casos:

a) $y = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a}$ b) $y = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$ c) $y = senx - x\cos x$

Solución

Recuerde que se usa indistintamente Δx o dx.

a) $dy = \left(\frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} \right)' dx = \frac{1}{a} \frac{\frac{1}{a}}{1 + \left(\frac{x}{a} \right)^2} dx = \frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{a^2 + x^2}{a^2}} dx = \frac{dx}{a^2 + x^2}$

b) Como $y = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| = \frac{1}{2a} \left[\ln|x-a| - \ln|x+a| \right] \Rightarrow y' = \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right] \Rightarrow$

$y' = \frac{1}{2a} \frac{\cancel{x} + a - \cancel{x} + a}{x^2 - a^2} = \frac{1}{x^2 - a^2} \Rightarrow dy = \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{dx}{x^2 - a^2}$

c) $y = senx - x\cos x \Rightarrow y' = \cos x - (\cos x - xsenx) = xsenx \Rightarrow dy = xsenxdx$

30. El período de oscilación de un péndulo, medido en segundos, se determina a través de la expresión $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ donde l es la longitud del péndulo, en centímetros, y $g = 981 cm/s^2$ es la aceleración de la gravedad. ¿Cuánto se debe alterar la longitud $l = 20cm$ para que el período T aumente 0,05s?

Solución

Sabemos que $\Delta T \cong dT \Rightarrow dT = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} (l^{\frac{1}{2}})' dl = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \frac{1}{2\sqrt{l}} dl \Rightarrow dT = \frac{\pi dl}{\sqrt{gl}}$

Luego $\Delta T = 0,05s \cong dT = \frac{\pi dl}{\sqrt{gl}} = \frac{\pi dl}{\sqrt{981 \frac{cm}{s^2} 20cm}} \Rightarrow dl \cong \frac{0,05s}{\pi} \sqrt{981 \frac{cm}{s^2} 20cm}$

Por tanto, $dl \cong 2,2293cm \cong 2,23cm$, de donde la longitud l deberá aumentarse aproximadamente 2,23 cm.

31. Usando diferenciales, obtenga un valor aproximado en los siguientes casos:

a) *log*11 b) *cos*121° c) *arctg*1,1

Solución

Como ya vimos

$$\Delta f \cong df \Rightarrow f(a+\Delta x) - f(a) \cong f'(a)\Delta x \Rightarrow f(a+\Delta x) \cong f(a) + f'(a)\Delta x$$

Si cambiamos la notación $f(x) \cong f(a) + f'(a)(x-a)$ donde llamamos $x = a + \Delta x$, recordemos que el segundo miembro es la ecuación de la recta tangente y lo que hacemos entonces es una **aproximación lineal**.

a) Como deseamos hallar un valor aproximado para *log*11, elegiremos como función $f(x) = \log x$, como valor de *a* tomaremos uno próximo a 11 y cuyo logaritmo decimal conozcamos; en este caso conviene tomar *a* = 10, de donde $\Delta x = 1$.

Además $f(x) = \dfrac{\ln x}{\ln 10} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x \ln 10}$. Con todo esto, reemplacemos en

$$f(a+\Delta x) \cong f(a) + f'(a)\Delta x \Rightarrow \log 11 \cong \log 10 + \frac{1}{10 \ln 10} 1 = 1 + \frac{1}{10 \ln 10} \cong 1,043$$

b) Para hallar el valor aproximado del *cos*121°, tomaremos como función $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -senx$, como valor de *a* uno muy próximo a 121° y cuyo coseno conozcamos, en este caso conviene tomar *a* = 120°, de donde $\Delta x = 1° = \dfrac{\pi}{180}$ (en radianes).

Ahora reemplacemos en la fórmula de aproximación lineal:

$$f(a+\Delta x) \cong f(a) + f'(a)\Delta x \Rightarrow \cos 121° \cong \cos 120° - sen120°.\frac{\pi}{180} \cong -0,51511$$

c) Debemos aproximar el *arctg*1,1. Tomemos

$$f(x) = arctgx \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

y tomemos *a* = 1 y $\Delta x = 0,1$. Reemplazando nos queda:

$$arctg1,1 \cong arctg1 + \frac{1}{1+1^2}.0,1 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{20} \cong 0,8354$$

2. Demuestre la fórmula de aproximación $\sqrt[n]{a^n+h} \cong a+\frac{h}{na^{n-1}}$ con $a>0, |h| << a$. Aplicando la misma calcule aproximadamente $\sqrt[7]{120}$.

Nota:
Si escribimos *arc tg*1 = 45° está mal, ¿por qué?

Solución

Recordar que $|h| << a$ significa que h en módulo es mucho menor que a.

Tomemos como función $f(x)=\sqrt[n]{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}=\frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}$, $\Delta x = h$ es el incremento ya que la información nos indica que es pequeño. Llamamos $x_0=a^n$ y reemplazamos en la expresión $f(x_0+\Delta x) \cong f(x_0)+f'(x_0)\Delta x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{a^n+h} \cong \sqrt[n]{a^n}+\frac{1}{n}(a^n)^{\frac{1-n}{n}}.h = a+\frac{h}{n}a^{1-n}=a+\frac{h}{na^{n-1}}$$

Para el caso particular en que deseamos aproximar $\sqrt[7]{120}$, n = 7, a = 2, h = -8, sustituyendo nos queda: $\sqrt[7]{120}=\sqrt[7]{2^7-8} \cong 2-\frac{8}{7.2^6}=2-\frac{1}{7.2^3}=\frac{111}{56} \cong 1.9821$

33. Calcule las derivadas hasta el orden que se indica:

a) $y = x\ln x$ halle y'' b) $y=a^x$ halle $y^{(n)}$ c) $y = senx$ halle $y^{(n)}$

d) $y=\ln(1+x)$ halle $y^{(n)}$ e) $x^2+y^2=4$ halle y''

f) $y^2+2\ln y = x^4$ halle y'' g) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = bsent \end{cases}$ halle y''

Solución

a) $y = x\ln x \Rightarrow y' = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1 \Rightarrow y'' = \frac{1}{x}$

b) $y=a^x \Rightarrow y'=a^x \ln a \Rightarrow y''=a^x\ln^2 a \Rightarrow y'''=a^x \ln^3 a \Rightarrow ... \Rightarrow y^{(n)}=a^x \ln^n a$

c) $y = senx, y'=\cos x, y''=-senx, y'''=-\cos x, y^{(4)}=senx$, como se puede observar, salvo los signos, los resultados son siempre senos o cosenos. Si recordamos que $sen(x+\alpha)=senx\cos\alpha+sen\alpha\cos x$, con una adecuada elección de α, podremos generalizar la derivada pedida. Admitamos α en un giro, y veamos:

Para n=1, en $y'=sen(x+\alpha)=senx\cos\alpha+sen\alpha\cos x$ si elegimos $\alpha=\frac{\pi}{2}$ nos queda que y'= *cosx*.

Para $n = 2$, en $y' = sen(x+\alpha) = senx\cos\alpha + sen\alpha\cos x$ si elegimos $\alpha = \pi = 2.\dfrac{\pi}{2}$ nos queda que $y'' = -senx$.

Para $n = 3$, en $y''' = sen(x+\alpha) = senx\cos\alpha + sen\alpha\cos x$ si elegimos $\alpha = 3.\dfrac{\pi}{2}$ nos queda que $y''' = -cosx$.

Para $n = 4$, en $y^{(4)} = sen(x+\alpha) = senx\cos\alpha + sen\alpha\cos x$ si elegimos $\alpha = 4.\dfrac{\pi}{2}$ nos queda que $y^{(4)} = senx$.

Comparando los distintos valores de α, vemos que $\alpha = n\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow y^{(n)} = sen(x + n\dfrac{\pi}{2})$

d) $y = \ln(1+x);\ y' = \dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1};\ y'' = -(1+x)^{-2};$

$$y''' = 2.(1+x)^{-3};\ y^{(4)} = -3.2(1+x)^{-4}, \ldots, y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$$

Ya que si observamos con precaución la secuencia:

n	signo	coeficiente	Pot. de 1+x
1	+	1	–1
2	–	1	–2
3	+	2.1	–3
4	–	3.2.1	–4
⋮	⋮	⋮	⋮
n	$(-1)^{n-1}$	(n-1) !	–n

Tabla 7. **Signo de las derivadas sucesivas de** $y = ln\ (1+x)$

e) $x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow 2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\dfrac{x}{y} \Rightarrow y'' = -\dfrac{y - xy'}{y^2} = -\dfrac{y - x\dfrac{-x}{y}}{y^2} =$

$$= -\frac{\dfrac{y^2+x^2}{y}}{y^2} = -\frac{y^2+x^2}{y^3} = -\frac{4}{y^3}$$

f) $y^2 + 2\ln y = x^4 \Rightarrow 2yy' + 2\dfrac{y'}{y} = 4x^3 \Rightarrow 2y'\dfrac{y^2+1}{y} = 4x^3 \Rightarrow y' = \dfrac{2x^3y}{y^2+1}$

$$y'' = \frac{2(3x^2y + x^3y')(y^2+1) - 2x^3y.2yy'}{(y^2+1)^2} =$$

$$=\frac{2(3x^2y+x^3\dfrac{2x^3y}{y^2+1})(y^2+1)-2x^3y.2y\dfrac{2x^3y}{y^2+1}}{(y^2+1)^2}=$$

$$=2x^2\frac{(3y+\dfrac{2x^4y}{y^2+1})(y^2+1)-\dfrac{4x^4y^3}{y^2+1}}{(y^2+1)^2}=2x^2\frac{\dfrac{3y(y^2+1)+2x^4y}{y^2+1}(y^2+1)-\dfrac{4x^4y^3}{y^2+1}}{(y^2+1)^2}=$$

$$=2x^2y\frac{(3y^2+3+2x^4)(y^2+1)-4x^4y^2}{(y^2+1)^3}=$$

$$=2x^2y\frac{3y^4+3y^2+2x^4y^2+3y^2+3+2x^4-4x^4y^2}{(y^2+1)^3}=$$

$$=2x^2y\frac{3y^4+6y^2-2x^4y^2+3+2x^4}{(y^2+1)^3}$$

g) $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=bsent \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-asent \\ \dfrac{dy}{dt}=b\cos t \end{cases} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{b\cos t}{-asent}=-\dfrac{b}{a}\cot t \Rightarrow$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b}{a}\frac{d}{dx}(\cot\ t)=-\frac{b}{a}\frac{d}{dt}(\cot\ t)\frac{dt}{dx}=-\frac{b}{a}(-\text{cosec}^2t)\frac{1}{\dfrac{dx}{dt}}=$$

por regla de la cadena   por derivada de la inversa

$$=\frac{b}{a}\text{cosec}^2t\,\frac{1}{-asent}=-\frac{b}{a^2sen^3t}$$

34. Una pelota que se patea con una velocidad inicial de $2m/s$, bajo un ángulo de 30º, desplazándose en el plano de acuerdo con las siguientes ecuaciones del movimiento: $\begin{cases} x=v_{0x}t \\ y=v_{0y}t-\dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$ siendo v_{0x} y v_{0y} las proyecciones de la velocidad inicial sobre los ejes coordenados y g la aceleración de la gravedad, que por comodidad la aproximaremos a $10m/s^2$. Halle la ecuación de la trayectoria. Determine la velocidad y aceleración en cualquier instante t. ¿Cuál es la altura máxima que logra? ¿Y el máximo desplazamiento horizontal?

Solución

Descomponiendo el vector velocidad inicial en la suma vectorial del v_{0x} y el v_{0y} (perpendiculares entre sí), tendremos que

$$v_{0x} = v_0 \cos 30^o$$

$$v_{0y} = v_0 sen 30^o$$

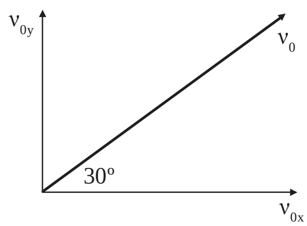


Figura 77. **Gráfica del ejercicio resuelto 34**

De la primera ecuación, despejando t tendremos: $t = \frac{x}{v_{0x}}$. Reemplazando en la segunda nos queda:

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_{0y}\frac{x}{v_{0x}} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2 = v_0 sen30^o \frac{x}{v_0\cos 30^o} - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{(v_0\cos 30^o)^2} =$$

$$= xtg30^o - \frac{1}{2}10\frac{m}{s^2}\frac{x^2}{(2\frac{m}{s}\cos 30^o)^2} = x\frac{1}{\sqrt{3}} - 5\frac{m}{s^2}\frac{x^2}{4\frac{m^2}{s^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{5x^2}{3m}$$

resultado que se expresará en unidades de longitud (que omitiremos en los pasos siguientes): $y = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{5x^2}{3}$ es la ecuación de la trayectoria que, como era previsible, nos da una parábola con concavidad hacia abajo.

Se pide, además, que hallemos la velocidad y aceleración. Como el movimiento es una composición entre el desplazamiento horizontal (que es rectilíneo uniforme: velocidad constante y aceleración nula) y el vertical (que se ve "frenado" por la aceleración de la gravedad), tendremos que la aceleración (que es una magnitud vectorial), será la suma $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = \vec{0}\breve{i} + g\breve{j} = g\breve{j} \Rightarrow |\vec{a}| = g$. En cuanto a la velocidad, deberemos calcular la velocidad en la dirección horizontal y en la vertical y luego hacer la suma vectorial:

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} = v_0\cos 30^o \text{(constante)} \\ v_y = v_{0y} - gt = v_0 sen30^o - gt \end{cases} \Rightarrow v = v_0\cos 30^o\,\breve{i} + (v_0 sen30^o - gt)\,\breve{j}$$

de donde, su módulo o norma, será

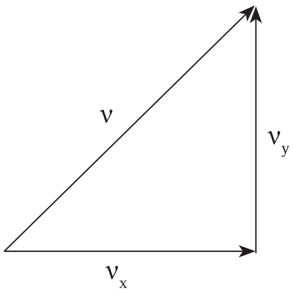


Figura 78. Vector velocidad

$$|v| = \sqrt{(v_0 \cos 30^o)^2 + (v_0 sen 30^o - gt)^2}$$

$$|v| = \sqrt{(v_0 \cos 30^o)^2 + (v_0 sen 30^o - gt)^2} =$$

$$= \sqrt{v_0^2 \cos^2 30^o + v_0^2 sen^2 30^o - 2v_0 g sen 30^o t + g^2 t^2} = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 g sen 30^o t + g^2 t^2} =$$

$$= \sqrt{4\frac{m^2}{s^2} - 2.\cancel{2}\frac{m}{s} 10\frac{m}{s^2}\frac{1}{\cancel{2}} t + 100\frac{m^2}{s^4} t^2} = \sqrt{4 - 20t + 100t^2}\,(en\,\frac{m}{s})$$

Para hallar la altura máxima debemos determinar, en primer lugar, en qué instante la velocidad, según y se anula: $v_y = v_0 sen 30^o - gt = 0 \Rightarrow t = \dfrac{v_0 sen 30^o}{g} = \dfrac{2\frac{m}{s}\frac{1}{2}}{10\frac{m}{s^2}} = 0{,}1s$

Luego reemplazamos este valor en la ecuación de y, obteniendo así:

$$y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 sen 30^o t - \frac{1}{2} g t^2 = 2\frac{m}{s}\frac{1}{2} 0{,}1 s - \frac{1}{2} 10\frac{m}{s^2}(0{,}1s)^2 =$$

$$= 0{,}1m - 0{,}05m = 0{,}05m = h_{max}$$

El máximo desplazamiento horizontal, también llamado *alcance horizontal*, lo obtendrá empleando el doble de tiempo del que usó para llegar a la altura máxima (¿por qué?), con lo que $t = 0{,}2s$, reemplazamos este valor en la ecuación para x

y nos queda: $x = v_{0x} t = v_0 \cos 30^o t = 2\dfrac{m}{s}\dfrac{\sqrt{3}}{2} 0{,}2 s \cong 0{,}36m$

35. Sea $f(x) = \begin{cases} sen x + x \cos x & x \le \pi \\ a + b(x-\pi) + c(x-\pi)^2 & x > \pi \end{cases}$.

¿Cómo deben elegirse los coeficientes a, b y c tal que exista $f''(\pi)$.

Solución

Para que exista $f''(\pi)$ debe ocurrir que $f(x)$ sea continua y derivable, además la $f'(x)$ a su vez debe ser continua y derivable en $x=\pi$.

Para la continuidad de f en $x=\pi$: $\lim\limits_{x\to\pi} f(x) = f(\pi) = \lim\limits_{x\to\pi^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)$, de donde

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi^-}(senx + x\cos x) = -\pi \\ \lim\limits_{x\to\pi^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi^+}(a + b(x-\pi) + c(x-\pi)^2) = a\end{array}\right\} \Rightarrow a = -\pi = f(\pi) \qquad (21)$$

Veamos qué ocurre con la derivada. Calcularemos la derivada en $x=\pi$, por definición, ya que la función cambia su forma analítica en él, de modo que deberemos hacer las derivadas laterales. En los restantes puntos podemos derivar usando reglas de derivación.

Si $x<\pi$: $f'(x) = \cos x + \cos x - xsenx = 2\cos x - xsenx$

Si $x>\pi$: $f'(x) = b + 2c(x-\pi)$

$$f'(\pi^-) = \lim_{x\to\pi^-}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi^-}\frac{senx + x\cos x + \pi}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi^-}\frac{senx - \overbrace{sen\pi}^{=0} + x\cos x + \pi}{x-\pi} =$$

$$= \lim_{x\to\pi^-}\left[\frac{senx - sen\pi}{x-\pi} + \frac{x\cos x + \pi}{x-\pi}\right] = \lim_{x\to\pi^-}\underbrace{\frac{senx - sen\pi}{x-\pi}}_{(senx)'|_{x=\pi}} + \lim_{x\to\pi^-}\frac{x\cos x + \pi}{x-\pi} =$$

$$= \cos\pi + \lim_{r\to0^-}\frac{(\pi+r)\cos(\pi+r)+\pi}{r} = -1 + \lim_{r\to0^-}\frac{(\pi+r)(\cos\pi\cos r - sen\pi senr)+\pi}{r} =$$

cambiando variables $r = x-\pi \Rightarrow x = \pi + r \therefore si\ x\to\pi^- \Rightarrow r\to0^-$

$$= -1 + \lim_{r\to0^-}\frac{(\pi+r)(-\cos r)+\pi}{r} = -1 + \lim_{r\to0^-}\frac{-\pi\cos r - r\cos r + \pi}{r} =$$

$$= -1 + \lim_{r\to0^-}\frac{-r\cos r + \pi\overbrace{(1-\cos r)}^{2sen^2\frac{r}{2}}}{r} = -1 + \lim_{r\to0^-}\frac{-r\cos r}{r} + \lim_{r\to0^-} 2\pi\underbrace{sen\frac{r}{2}}_{\to0}\underbrace{\frac{sen\frac{r}{2}}{\frac{r}{2}}}_{=1}.\frac{1}{2} =$$

$$= -1-1 = -2 = f'(\pi^-).$$

$$f'(\pi^+) = \lim_{x\to\pi^+}\frac{f(x) - \overbrace{f(\pi)}^{=-\pi=a\ de\ (21)}}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi^+}\frac{\cancel{a} + b(x-\pi) + c(x-\pi)^2 - \cancel{a}}{x-\pi} =$$

$$= \lim_{x\to\pi^+}(x-\pi)\frac{b + c(x-\pi)}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi^+}\left[b + c(x-\pi)\right] = b = f'(\pi^+)$$

Como debe ser derivable, las derivadas laterales son iguales, de donde nos queda:

$$f'(x)=\begin{cases} 2\cos x - x\,sen x & x<\pi \\ b=-2 & x=\pi \\ bx+2c(x-\pi) & x>\pi \end{cases}$$

Ahora debemos exigir que esta función sea continua en $x=\pi$, luego

$$\lim_{x\to\pi^+} f'(x)=\lim_{x\to\pi^-} f'(x)=\lim_{x\to\pi} f'(x)=f'(\pi) \quad \text{por lo tanto:}$$

$$\lim_{x\to\pi^+} f'(x)=\lim_{x\to\pi^+}(b+2c(x-\pi))=b \wedge \lim_{x\to\pi^-} f'(x)=\lim_{x\to\pi^-}(2\cos x - x\,sen x)=-2$$

de donde b = -2 con lo que es continua en dicho punto.

Calculemos ahora la derivada segunda: como debe existir, las laterales deben ser iguales:

$$f''(\pi^-)=\lim_{x\to\pi^-}\frac{f'(x)-f'(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{2\cos x - x\,sen x+2}{x-\pi}=$$

cambiando variables $r=x-\pi \Rightarrow x=\pi+r \therefore si\ x\to\pi^- \Rightarrow r\to 0^-$

$$=\lim_{r\to 0^-}\frac{2\cos(\pi+r)-(\pi+r)sen(\pi+r)+2}{r}=$$

$$=\lim_{r\to 0^-}\frac{2(\cos\pi\cos r - sen\pi\, sen r)-(\pi+r)(sen\pi\cos r+sen r\cos\pi)+2}{r}=$$

$$=\lim_{r\to 0^-}\frac{-2\cos r-(\pi+r)(-sen r)+2}{r}=\lim_{r\to 0^-}\frac{(\pi+r)sen r+2\overbrace{(1-\cos r)}^{=2sen^2\frac{r}{2}}}{r}=$$

$$=\lim_{r\to 0^-}(\pi+r)\overbrace{\frac{sen r}{r}}^{\to 1}+\lim_{r\to 0^-}2\,\overbrace{sen\frac{r}{2}}^{\to 0}\,\overbrace{\frac{sen\frac{r}{2}}{\frac{r}{2}}}^{\to 1}.\frac{1}{2}=\pi=f''(\pi^-)$$

$$f''(\pi^+)=\lim_{x\to\pi^+}\frac{f'(x)-f'(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{\cancel{b}+2c(x-\pi)-\cancel{b}}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{2c(x-\pi)}{x-\pi}=2c$$

Luego $2c=\pi \Rightarrow c=\dfrac{\pi}{2}$

En consecuencia, los valores de los coeficientes que nos permiten asegurar la existencia de $f''(\pi)$ son $c=\dfrac{\pi}{2}$, b = -2 y $a=-\pi$.

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL EN UNA VARIABLE REAL

Tomo I

Alba Gregoret | Miguel Albione | Armando Núñez

La dificultad que encuentran en general los profesores al momento de recomendar bibliografía para un primer curso de Análisis Matemático, o bien para fijar un texto básico para guiar el desarrollo de la asignatura, es que no existe *el libro apropiado* para todos los estudiantes, pues éstos llegan a la universidad con diferente formación matemática y, en general, escasa experiencia en la resolución de situaciones problemáticas que le exijan algo más que una simple ejecución de mecanismos de cálculo.

Los autores del presente libro de Cálculo Diferencial e Integral en una variable real pretendemos facilitar y organizar el estudio de los estudiantes de Cálculo Diferencial e Integral en las diferentes carreras de Ingeniería, Ciencias Exactas y Economía, habiendo podido recoger en sus páginas la base de toda nuestra gran experiencia acumulada al frente de numerosos cursos de Análisis Matemático I en distintas universidades públicas y privadas nacionales e internacionales.

Para facilitar el estudio estamos convencidos de que una manera posible de lograrlo es a través de una presentación accesible de los tópicos teóricos y numerosa ejercitación, bajo la forma de ejemplos, ejercicios resueltos y problemas de aplicación acompañados de su respuesta. Asimismo, en cada problema propuesto se contempla especialmente las dificultades de aprendizaje y comprensión más relevantes observados hasta ahora en la mayoría de los estudiantes, incluyendo sugerencias y observaciones que facilitan el abordaje de la comprensión matemática y la resolución de problemas. Es por ello, que el texto se constituye un material tendiente a resaltar un modelo pedagógico, además de una propuesta científica rigurosa y responsable de los temas tratados.

En cuanto a la organización del estudio, se han incorporado a lo largo del texto sugerencias en lo relativo a cómo enfocar el estudio de determinados temas, cuáles conocimientos previos es imprescindible revisar en caso de que estén olvidados, cuál es la diferencia entre un *ejemplo* y un *ejercicio resuelto*, de modo que ambos resulten de utilidad para la comprensión de la teoría correspondiente.

En los aspectos teóricos se tratan las definiciones, propiedades y teoremas. Al final de cada tema se propone una serie de preguntas teórico-prácticas que le darían al estudiante una idea del nivel de los conocimientos adquiridos y marcarían los inconvenientes todavía no superados.

Se incorporan modelos de evaluaciones tipo con su resolución, contemplando diferentes grados de dificultad, para ser utilizados como material adicional de repaso una vez completado un tema o grupo de temas.

A este respecto es importante que el estudiante tenga en cuenta que el estudio de una asignatura y la práctica correspondiente nunca debe encararse a través de la resolución de exámenes, éstos deben quedar para el repaso final antes de las evaluaciones.

Debe tenerse presente también, y se lo señala reiteradamente a lo largo del texto, que de poco sirve intentar resolver los ejercicios sin haber antes estudiado la teoría y tampoco deja saldo positivo *mirar* los ejercicios resueltos sin haber intentado previamente su resolución.

Este libro cuenta con un solucionario disponible en la web, ingresando en latinoamerica.cengage.com

CENGAGE Learning®
www.cengage.com

ISBN-13: 978-987-1954-02-5
ISBN-10: 987-1954-02-6
9 789871 954025