Tabla de contenido

DERIVADAS
GUÍA DE EJERCICIOS

1 DEFINICIÓN DE DERIVADA

La derivada permite encontrar la recta tangente a una gráfica de cualquier función (círculo, elipse, parábola, etc.) en un cierto punto.

Sea $f(x)$ una función. Se define a su derivada $f'(x)$ como:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

En la expresión anterior $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ es la pendiente de una recta secante que corta a la gráfica de la función en dos puntos cuyas coordenadas son: $[x, f(x)]$ y $[(x + \Delta x), f(x + \Delta x)]$.

Si Δx se hace cada vez más pequeña, es decir cuando tiende a ser cero ($\Delta x \to 0$) la pendiente de la recta secante tiende a la de la tangente en un solo punto, en el punto $[x, f(x)]$ de la gráfica, lo que se expresa diciendo que $\lim_{\Delta x \to 0}$. Esa recta tangente es la derivada de la función y se expresa:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

O bien:

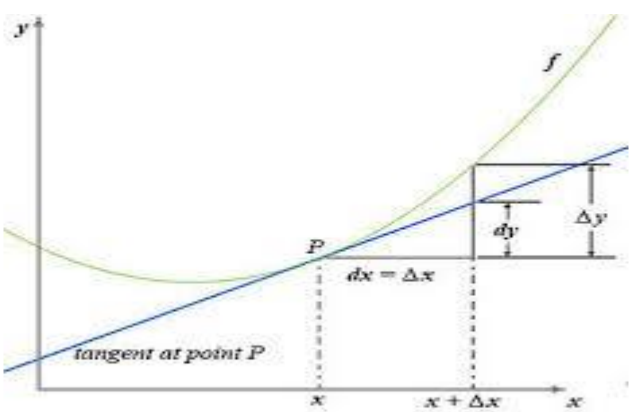
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

La definición anterior se suele escribir reemplazando Δx por la letra h.

$$f'(x) = \lim_{\mathrm{h} \to 0} \frac{f(x + \mathrm{h}) - f(x)}{\mathrm{h}}$$

Distintas notaciones para la derivada:

$\frac{dy}{dx}$; $\frac{d}{dx}$; y'; $D_x y$



Ejemplo: Dada la función $f(x) = x^2 - 2x$ y $x_0 = -1$. Calcular la derivada en el punto -1, es decir, calcular $f'(-1)$.

Se aplica la definición:

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to -1} \frac{(x^2 - 2x) - ((-1)^2 - 2(-1))}{x - (-1)} =$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1)} = \lim_{x \to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x-3)}{\cancel{(x+1)}} = \lim_{x \to -1} (x - 3) =$$

$$= \lim_{x \to -1} (x - 3) = (-1) - 3 = -4$$

Por tanto: $f'(-1) = -4$

Ejemplo: Encontrar la derivada de la función $f(x) = 5x - 6$ usando la definición de derivada

Se tiene que calcular primero $f(x + \Delta x)$ reemplazando la x de la función por derivar por $x + \Delta x$

$f(x) = 5x - 6$
$f(x + \Delta x) = 5(x + \Delta x) - 6$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[5(x + \Delta x) - 6] - (5x - 6)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5x + 5\Delta x - 6 - 5x + 6}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} 5 = 5$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de la función $y = 7x^2 - 5x + 9$ usando la definición de derivada

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Se tiene que calcular primero $f(x + \Delta x)$ reemplazando la x de la función por derivar por $x + \Delta x$

$f(x) = 7x^2 - 5x + 9$
$f(x + \Delta x) = 7(x + \Delta x)^2 - 5(x + \Delta x) + 9$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[7(x + \Delta x)^2 - 5(x + \Delta x) + 9] - (7x^2 - 5x + 9)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[7(x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2 - 5x - 5\Delta x + 9] - 7x^2 + 5x - 9}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[7x^2 + 14x(\Delta x) + 7(\Delta x)^2 - 5x - 5\Delta x + 9] - 7x^2 + 5x - 9}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[\cancel{7x^2} + 14x(\Delta x) + 7(\Delta x)^2 - \cancel{5x} - 5\Delta x + \cancel{9}] - \cancel{7x^2} + \cancel{5x} - \cancel{9}}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[14x(\Delta x) + 7(\Delta x)^2 - 5\Delta x]}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[\Delta x(14x + 7\Delta x - 5]}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} 14x + 7\Delta x - 5$$

Como $\Delta x \longrightarrow 0$

$$\frac{dy}{dx} = 14x - 5$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de la función $\boldsymbol{y = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1}$ usando la definición de derivada

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$
$f(x + \Delta x) = 2(x + \Delta x)^3 - 3(x + \Delta x)^2 + 4(x + \Delta x) - 1$

Hay que recordar que: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$f(x + \Delta x) = 2(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3) - 3(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 4x + 4\Delta x - 1$
$f(x + \Delta x) = 2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 3x^2 - 6x\Delta x - 3(\Delta x)^2 + 4x + 4\Delta x - 1$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 3x^2 - 6x\Delta x - 3(\Delta x)^2 + 4x + 4\Delta x - 1 - (2x^3 - 3x^2 + 4x - 1)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{2x^3} + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - \cancel{3x^2} - 6x\Delta x - 3(\Delta x)^2 + \cancel{4x} + 4\Delta x - \cancel{1} - \cancel{2x^3} + \cancel{3x^2} - \cancel{4x} + \cancel{1})}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 6x\Delta x - 3(\Delta x)^2 + 4\Delta x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 6x - 3\Delta x + 4)}{\cancel{\Delta x}}$$

Reemplazando Δx por 0:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x + 4$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{2x-1}{x+5}}$ usando la definición de derivada

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

La x de la función se reemplaza por $x + \Delta x$ y $f(x)$ por la función dada.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\frac{2(x+\Delta x)-1}{x+\Delta x+5}\right) - \frac{2x-1}{x+5}}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\frac{2x+2\Delta x)-1}{x+\Delta x+5}\right) - \frac{2x-1}{x+5}}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\frac{(2x+2\Delta x-1)(x+5)-(2x-1)((x+\Delta x+5)}{(x+\Delta x+5)(x+5)}\right)}{\Delta x}$$

Simplificando:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{11\,\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}(x+\Delta x+5)(x+5)}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{11}{(x+\Delta x+5)(x+5)}$$

Como $\Delta x \longrightarrow 0$

$$f'(x) = \frac{11}{(x+5)(x+5)} = \frac{11}{(x+5)^2}$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de la función $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x+2}}$ usando la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

La x de la función se reemplaza por $x + \Delta x$ y $f(x)$ por la función dada.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x+2} - \sqrt{x+2}}{\Delta x}$$

racionalizando la expresión anterior:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x+2} - \sqrt{x+2})(\sqrt{x+\Delta x+2} + \sqrt{x+2})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x+2} + \sqrt{x+2}}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x+2})^2 - \sqrt{x+2})^2}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x+2} + \sqrt{x+2}}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{x + \Delta x + 2 - x - 2}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x + 2} + \sqrt{x + 2}}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}(\sqrt{x + \Delta x + 2} + \sqrt{x + 2}} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{x + \Delta x + 2} + \sqrt{x + 2}}$$

Resolviendo el límite, es decir, considerando que $\Delta x \longrightarrow 0$

$$f'(x) = \frac{1}{2(\sqrt{x + 2})}$$

2 REGLAS PARA CALCULAR DERIVADAS

En vez de utilizar la definición de derivada se pueden emplear las siguientes reglas:

2.1 REGLA DE LA FUNCIÓN CONSTANTE (c)

Si $f(x) = c$, donde c es una constante, entonces, para todo número real x:

$$f(x) = c \rightarrow f'(x) = 0$$

Se puede expresar como:

$$(\mathrm{c})' = 0$$

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}(c) = 0}$$

Es decir, la derivada de una constante es cero.

Ejemplo: Derivada de $\boldsymbol{f(x)}$ =8:

$(8)' = 0$

Ejemplo: Derivada de $\boldsymbol{f(x) = (a-1)^2 - 3a}$

Como en la función no hay términos que dependan de x, $(a-1)^2 - 3a$ es una constante. Por tanto:

$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = 0$

2.2 REGLA DE LA FUNCIÓN IDÉNTICA

$f(x) = x$, es una recta que pasa por el origen del plano cartesiano con pendiente 1. Para todo número real x:

$$f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$$

Se puede expresar como:

$$(\mathrm{x})' = 1$$

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}(x) = 1}$$

Es decir, la derivada de una función idéntica es 1.

Ejemplo: Derivada de $\boldsymbol{y = x}$

Aplicando: $f'(x^n) = nx^{n-1}$
$(1)x^{1-1} = 1x^0 = (1)(1) = 1$

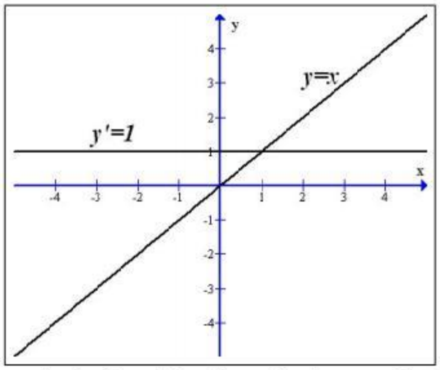


Gráfico de la función identidad y su derivada.

2.3 REGLA DE UNA FUNCIÓN POTENCIA (x^n)

Si $f(x) = x^n$ con *n* como un entero positivo, entonces:

$$f'(x^n) = nx^{n-1}$$

Se puede expresar como:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}}$$

Es decir, se pone el exponente como coeficiente y se resta 1 al exponente.

Ejemplo: Derivada de x^3

$$f'(x^3) = (x^3)' = \frac{dy}{dx}(x^3) = 3x^{3-1} = 3x^2$$

Ejemplo: Derivada de $3x^4$

$$f'(3x^4) = (4)(3)x^{4-1} = 12x^3$$

Ejemplo: Derivada de $8x$

$$f'(8x) = (1)(8)x^{1-1} = 8x^0 = (8)(1) = 8$$

Ejemplo: Derivada de $y = \frac{1}{x}$

$$y = x^{-1}$$
$$\frac{dy}{dx} = (-1)x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Ejemplo: Derivada de $y = x^{\frac{3}{4}}$

$$\frac{dy}{dx} = (\frac{3}{4})x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-\frac{4}{4}} = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$$

Ejemplo: Derivada de $y = x^{\frac{2}{5}}$

$$\frac{dy}{dx} = (\frac{2}{5})^{\frac{2}{5}-1} = \frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-\frac{5}{5}} = \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}$$

Ejemplo: Derivada de $y = 5x^{\frac{7}{3}}$

$$\frac{dy}{dx} = (5)(\frac{7}{3})^{\frac{7}{3}-1} = \frac{35}{3}x^{\frac{7}{3}-\frac{3}{3}} = \frac{35}{3}x^{\frac{4}{3}}$$

Ejemplo: Derivada de $y = 2x^{\frac{1}{3}} - 5x^{\frac{4}{5}} + 3x^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{dy}{dx} = (\frac{2}{3})x^{-\frac{2}{3}} - 4x^{-\frac{1}{5}} + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

Ejemplo: Derivada de $y = \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$

$$y = \frac{1}{x^{\frac{3}{5}}}$$

$$y = x^{-\frac{3}{5}}$$

$$\frac{dy}{dx} = (-\frac{3}{5})x^{-\frac{-3}{5}-1} = (-\frac{3}{5})x^{-\frac{-3}{5}-\frac{5}{5}} = (-\frac{3}{5})x^{-\frac{-8}{5}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{x^{\frac{8}{5}}} == -\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{x^8}} = -\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{x^5\cdot x^3}} = -\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{x\sqrt[5]{x^3}}$$

2.4 REGLA DEL PRODUCTO DE UNA CONSTANTE POR UNA FUNCIÓN

Si $f(x)$ es derivable y c es una constante:

$$f(x) = c\cdot g(x) \rightarrow f'(\mathrm{x}) = \mathrm{c}\cdot g'(x)$$

Se puede expresar como:

$$(\mathrm{c}\cdot\mathrm{g})' = \mathrm{c}\cdot g'$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{g}) = \mathbf{c}\cdot g'}$$

Es decir, la derivada de una constante por una función es la constante por la derivada de la función.

Ejemplo: Calcular la derivada de $\boldsymbol{2x^5}$:

$f(x) = (2x^5) \rightarrow f'(x) = (2) \cdot (5)x^4 = 10x^4$

Ejemplo: Calcular la derivada de $\boldsymbol{f(x) = 6x}$:

$f(x) = 6x \rightarrow f'(x) = (6) \cdot (1)x^{1-1} = 6x^0 = 6(1) = 6$

Ejemplo: Calcular la derivada de $\boldsymbol{y = -x}$:

$y = -x = y = -1 \cdot x \rightarrow y' = (-1) \cdot x^{1-1} = (-1) \cdot x^0 = (-1) \cdot 1 = -1$

2.5 REGLA DE LA SUMA Y RESTA DE FUNCIONES

Si $g(x)$ y $h(x)$ son funciones derivables, entonces:

$$f(x) = g(x) + h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

$$f(x) = g(x) - h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) - h'(x)$$

Es decir, la derivada de la suma de funciones es la suma de las derivadas de las funciones y la derivada de la resta de funciones es la resta de las derivadas de las funciones.

Habitualmente las funciones se representan por las letras u y v, por lo que la fórmula se expresa como sigue:

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{d}{dx}(u \pm v) = u' \pm v'}}$$

Ejemplo: Calcular la derivada de $\boldsymbol{x^3 + x^2}$

$(x^3 + x^2)' = (x^3)' + (x^2)' = 3x^2 + 2x$

Ejemplo: Calcular la derivada de $\boldsymbol{x^3 - x^2}$

$(x^3 - x^2)' = (x^3)' - (x^2)' = 3x^2 - 2x$

Ejemplo: Calcular la derivada de $\boldsymbol{y = 7x^4 + 3x^2 + x + 1}$

$y' = (7x^4)' + (3x^2)' + x' + 1' = 28x^3 + 6x^1 + 1 + 0 = 28x^3 + 6x + 1$

Ejemplo: Calcular la derivada de $\boldsymbol{y = 2x + 3}$

$y' = (2x)' + (3)' = (1)(2)(x)^{1-1} + 0 = (2)(1) = 2$

Ejemplo: Derivada de $\boldsymbol{y = 5x^3 + 2x^2 - 5x + 10}$

$$\frac{dy}{dx} = (3)(5)x^2 + (2)(2)x - (1)(5)x^0 = 15x^2 + 4x - 5$$

Ejemplo: Derivada de $\boldsymbol{y = \frac{3}{x^2} + x - 1}$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^{-2} + x - 1 = -6x^{-2-1} + 1 - 0 = -6x^{-3} + 1 = -\frac{6}{x^3} + 1$$

2.6 REGLA DE UNA FUNCIÓN RADICAL

La derivada de una raíz es un caso particular de la función potencial cuando el exponente es fraccionario.

La derivada de **la raíz *cuadrada* de x** es la siguiente:

$$y = \sqrt{x}$$

$$\boxed{y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

La derivada de **la raíz *n* de *x*** es la siguiente

$$y = \sqrt[n]{x}$$

$$\boxed{y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}}$$

Ejemplo: Calcular la derivada de la raíz cuadrada de x*:*

$$y = \sqrt{x}$$
$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ejemplo: Calcular la derivada de la raíz cúbica de x*:*

$$y = \sqrt[3]{x}$$
$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^{3-1}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

A este resultado se pudo llegar considerando que la derivada de una raíz es un caso particular de la función potencial cuando el exponente es fraccionario:

$$y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$y' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Ejemplo: Calcular la derivada de la raíz séptima de x*:*

$y = \sqrt[7]{x}$

$y' = \dfrac{1}{7\sqrt[7]{x^{7-1}}} = \dfrac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}$

2.7 REGLA DE LA RAÍZ DE UNA FUNCIÓN

La derivada de una raíz de una función es:

$$y = \sqrt[n]{f(x)}$$

$$y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{[f(x)]^{n-1}}}\left(f'(x)\right) = y' = \frac{v'}{n\sqrt[n]{v^{n-1}}}$$

Ejemplo: Calcular la raíz cuadrada de la función: $\boldsymbol{y = \sqrt{5x^4 + x^2}}$

$y' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{[f(x)]^{n-1}}}\left(f'(x)\right)$

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt[2]{(5x^4 + x^2)^1}}\,(20x^3 + 2x)$

Ejemplo: Calcular la raíz cuadrada de la función: $\boldsymbol{y = 2\sqrt{x+3}}$

Conviene introducir el coeficiente 2 dentro de la raíz:

$y = \sqrt{4(x+3)}$

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{4(x+3)}} \cdot f'(4(x+3))$

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{4(x+3)}} \cdot f'(4x) + f'(3)$

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{4(x+3)}} \cdot 4f'(x) + f'(3)$

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{4(x+3)}} \cdot 4(1) + 0$

$y' = \dfrac{4}{2\sqrt{4(x+3)}} = \dfrac{2}{\sqrt{4(x+3)}} = \dfrac{2}{2\sqrt{(x+3)}} = \dfrac{1}{\sqrt{(x+3)}}$

<u>Nota</u>: Una solución más breve es escribir la raíz como exponente y operar:

$y = 2(x+3)^{\frac{1}{2}}$

$y' = 2(\frac{1}{2})(x+3)^{\frac{1}{2}-1}$

$y' = 1(x+3)^{\frac{1}{2}-1}$

$$y' = (x+3)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(x+3)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$$

2.8 REGLA DE UNA FUNCIÓN POTENCIAL

En lugar de una x se tiene una función elevada a un exponente. En este caso, la derivada se calcula pasando el exponente a multiplicar a la función, al exponente se le resta 1 y, además, todo lo anterior queda multiplicado por la derivada de la función:

$$y = [f(x)]^n$$

$$\frac{d}{dx} = n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$$

Si la función se representa por v:

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx} v^n = n v^{n-1} \cdot v'}$$

Ejemplo: Derivar la siguiente función elevada a un exponente: $\boldsymbol{y = (3x^2 + x)^4}$

El exponente pasa a multiplicar la función y al exponente de la función se le resta 1 y, todo eso, se multiplica por la derivada de la función, que está compuesta por dos términos, y su derivada será la suma de la derivada de cada uno de los términos:

$y' = 4(3x^2 + x)^3 \cdot (6x + 1)$

Ejemplo: Derivar la siguiente función elevada a un exponente: $\boldsymbol{y = (3x^2 - x)^7}$

$y' = 7(3x^2 - x)^6 \cdot (6x - 1)$

Ejemplo: Derivar la siguiente función elevada a un exponente: $\boldsymbol{y = (x^2 + 5x - 3)^3}$

$y' = 3(x^2 + 5x - 3)^2 \cdot (2x + 5)$

$y' = 3 \cdot (2x + 5)(x^2 + 5x - 3)^2$

$y' = (6x + 15)(x^2 + 5x - 3)^2$

2.9 REGLA DE UNA FUNCIÓN POTENCIAL- EXPONENCIAL

Si las funciones son u y v:

$$\frac{d}{dx} u^v = v u^{v-1} \cdot u' + u^v \ln u \cdot v'$$

Ejemplo: Derivar $\boldsymbol{f(x) = x^{7x+9}}$

$u = x$
$v = 7x + 9$

$f'(x) = (7x + 9) \cdot x^{7x+9-1} \cdot (1) + x^{7x+9} \cdot (lnx) \cdot (7)$
$f'(x) = (7x + 9) \cdot x^{7x+8} + 7x^{7x+9} \cdot (lnx)$

Ejemplo: Derivar $\boldsymbol{f(x) = x^x}$

$u = x$
$v = x$

$f'(x) = \boldsymbol{x} \cdot x^{x-1} \cdot (1) + x^x \cdot (lnx) \cdot (1)$

$f'(x) = x^x + x^x \cdot (lnx)$

$f'(x) = x^x(1 + (lnx))$

Ejemplo: Derivar $\boldsymbol{f(x) = x^{\sqrt{x}}}$

$u = x$
$v = \sqrt{x}$

$$f'(x) = \sqrt{\boldsymbol{x}} \cdot x^{\sqrt{x}-1} \cdot (1) + x^{\sqrt{x}} \cdot (lnx) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \sqrt{\boldsymbol{x}} \cdot x^{\sqrt{x}-1} + x^{\sqrt{x}} \cdot \frac{(lnx)}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \sqrt{\boldsymbol{x}} \cdot \frac{x^{\sqrt{x}}}{x^1} + x^{\sqrt{x}} \cdot \frac{(lnx)}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \sqrt{\boldsymbol{x}} \cdot \frac{1}{x} \cdot x^{\sqrt{x}} + x^{\sqrt{x}} \cdot \frac{(lnx)}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{\boldsymbol{x}}}{x} \cdot x^{\sqrt{x}} + x^{\sqrt{x}} \cdot \frac{(lnx)}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \cdot\, x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\sqrt{\boldsymbol{x}}}{x} + \frac{(lnx)}{2\sqrt{x}}\right)$$

Ejemplo: Derivar $\boldsymbol{f(x) = (x^2 - 1)^{\sqrt{x}}}$

$u = x^2 - 1$
$v = \sqrt{x}$

$$f'(x) = \sqrt{x} \cdot (x^2 - 1)^{\sqrt{x}-1} \cdot (2x) + (x^2 - 1)^{\sqrt{x}} \cdot (\ln{(x^2 - 1)}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 2x\sqrt{\boldsymbol{x}} \cdot (\frac{x^2-1)^{\sqrt{x}}}{(x^2-1)^1}) + (x^2-1)^{\sqrt{x}} \cdot (\ln(x^2-1)) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$f'(x) = (x^2-1)^{\sqrt{x}}[(2x\sqrt{\boldsymbol{x}} \cdot (\frac{1}{(x^2-1)^1}) + \frac{(\ln(x^2-1)}{2\sqrt{x}}$$
$$f'(x) = (x^2-1)^{\sqrt{x}}[(\frac{2x\sqrt{\boldsymbol{x}}}{x^2-1}) + \frac{\ln(x^2-1)}{2\sqrt{x}}]$$

2.10 REGLA DEL PRODUCTO DE FUNCIONES

Si u y v son funciones derivables entonces:

$$\frac{d}{dx}uv = uv' + vu'$$

Es decir, la derivada del producto de dos funciones es igual a la primera función por la derivada de la segunda, más la segunda función por la derivada de la primera.

Ejemplo: Calcular la derivada de la función $\boldsymbol{y = x\sqrt{x+1}}$

$u = x$
$u' = 1$

$v = \sqrt{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{2}}$
$v' = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}$

$y' = uv' + vu'$

$$y' = x \cdot \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}} + (x+1)^{\frac{1}{2}} \cdot 1$$

$$y' = \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{x+1}\right)} + \sqrt{x+1}$$

$$y' = \frac{x}{\left(2\sqrt{x+1}\right)} + \sqrt{x+1}$$

$$m.c.m = 2\left(\sqrt{x+1}\right)$$

$$(fg)' = \frac{x + (\sqrt{x+1}) \cdot \left(2\sqrt{x+1}\right)}{2\left(\sqrt{x+1}\right)} = \frac{x + 2(x+1)}{2\left(\sqrt{x+1}\right)} = \frac{3x+2}{2\left(\sqrt{x+1}\right)}$$

Ejemplo: Calcular la derivada de la función $\boldsymbol{y = x^2\sqrt{x-1}}$

$u = x^2$
$u' = 2x$

$v = \sqrt{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{2}}$
$v' = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}$
$y' = uv' + vu'$
$y' = x^2(\frac{1}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}-1}) + (x-1)^{\frac{1}{2}}(2x)$

$y' = x^2(\frac{1}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}-1}) + (x-1)^{\frac{1}{2}}(2x)$

$y' = x^2(\frac{1}{2}(x-1)^{\frac{-1}{2}}) + (x+1)^{\frac{1}{2}}(2x)$

Recordando que: $a^{-1} = \frac{1}{a}$

$y' = x^2(\frac{1}{2}(\frac{1}{(x-1)^{1/2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}}(2x)$

$$y' = \left(\frac{x^2}{2\left(\sqrt{x-1}\right)}\right) + \frac{2x\sqrt{x-1}}{1}$$

$$y' = \left(\frac{x^2 + 2x\sqrt{x-1} \cdot 2\left(\sqrt{x-1}\right)}{2\left(\sqrt{x-1}\right)}\right)$$

$$y' = \left(\frac{x^2 + 4x(\sqrt{x-1})^2}{2\left(\sqrt{x-1}\right)}\right)$$

$$y' = \left(\frac{x^2 + 4x(x-1)}{2\left(\sqrt{x-1}\right)}\right)$$
$$y' = \left(\frac{x^2 + 4x^2 - 4x}{2\left(\sqrt{x-1}\right)}\right)$$

$$y' = \left(\frac{5x^2 - 4x}{2\left(\sqrt{x-1}\right)}\right)$$

Ejemplo: Calcular la derivada de la función $\boldsymbol{y = x(x+7)^{10} \cdot (x+1)^{20}}$

Para usar solo dos variables auxiliares se hace:

$u = x(x+7)^{10}$
Para calcular su derivada se aplica la fórmula del producto:

$u' = x \cdot ((x+7)^{10})' + (x+7)^{10} \cdot x'$
$u' = x \cdot 10(x+7)^9(1) + (x+7)^{10} \cdot (1)$
$u' = 10x(x+7)^9 + (x+7)^{10}$

$v = (x + 1)^{20}$
$v' = 20(x + 1)^{19}(1)$
$v' = 20(x + 1)^{19}$
$y' = uv' + vu'$

$y' = x(x + 7)^{10} \cdot 20(x + 1)^{19} + (x + 1)^{20} \cdot 10x(x + 7)^9 + (x + 7)^{10}$

2.11 REGLA DEL COCIENTE DE FUNCIONES

Si u y v son derivables:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$$

Es decir, la derivada del cociente de dos funciones es igual a la función del denominador por la derivada de la función del numerador menos la función del numerador por la derivada de la función del denominador, entre el cuadrado de la función del denominador.

Ejemplo: Calcular la derivada de la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2-5}{1-3x^2}}$

$u = x^2 - 5$
$u' = 2x$

$v = 1 - 3x^2$
$v' = -6x$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{(1 - 3x^2)2x - (x^2 - 5)(-6x)}{(1 - 3x^2)^2} = \frac{2x - 6x^3 + 6x^3 - 30x}{(1 - 3x^2)^2} = \frac{-28x}{(1 - 3x^2)^2}$$

Ejemplo: Calcular la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{5x^2-7}{x^3+5x}}$

$u = 5x^2 - 7$
$u' = 10x$

$v = x^3 + 5x$
$v' = 3x^2 + 5$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

$$f'^{(x)} = \frac{(x^3 + 5x)10x - (5x^2 - 7)(3x^2 + 5)}{(3x^3 + 5x)^2}$$

$$f'^{(x)} = \frac{10x^4 + 50x^2 - (15x^4 - 21x^2 + 25x^2 - 35)}{(x^3 + 5x)^2} = \frac{-5x^4 + 46x^2 + 35}{(x^3 + 5x)^2}$$

Ejemplo: Calcular la derivada de la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{4x^2 - x + 1}{2x + 1}}$

$u = 4x^2 - x + 1$
$u^{\prime} = 8x - 1$

$v = 2x + 1$
$v^{\prime} = 2$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x + 1)(8x - 1) - (4x^2 - x + 1) \cdot (2)}{(2x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{16x^2 + 8x - 2x - 1 - (8x^2 - 2x + 2)}{4x^2 + 4x + 1}$$

$$f'(x) = \frac{16x^2 + 6x - 1 - 8x^2 + 2x - 2)}{4x^2 + 4x + 1}$$

$$f'(x) = \frac{8x^2 + 8x - 3)}{4x^2 + 4x + 1}$$

Ejemplo: Calcular la derivada de la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{4x^2}{x^2 - x}}$

$u = 4x^2$
$u^{\prime} = 8x$

$v = x^2 - x$
$v^{\prime} = 2x - 1$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 - x)(8x) - (4x^2) \cdot (2x - 1)}{(x^2 - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{8x^3 - 8x^2 - 8x^3 + 4x^2}{(x^2 - x)^2} = \frac{-4x^2}{(x^2 - x)^2} =$$

$$f'(x) = \frac{-4x^2}{x^4 - 2x^3 + x^2} = \frac{-4x^2}{x^2(x^2 - 2x + 1)} = \frac{-4}{(x^2 - 2x + 1)} = \frac{-4}{(x - 1)^2}$$

Ejemplo: Calcular la derivada de la función $f(x) = \frac{350}{x^3}$

$u = 350$
$u' = 0$

$v = x^3$
$v' = 3x^2$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^3(0) - (350) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{-1050x^2}{x^6} = -\frac{1050}{x^4}$$

Ejemplo: Derivar la siguiente función $f(x) = \frac{sen\ x}{x}$

Se aplica: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$:

$u = sen\ x$
$v = x$

$$f'(x) = \frac{x\ sen\ (x)' - sen\ x\ (x)'}{x^2} = \frac{x\cos(x) - sen\ x}{x^2}$$

2.12 REGLA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Si la función se representa por v:

Si el exponente es una función, la derivada es igual a la función que está como exponente por el logaritmo de la base de la potencia y por la derivada de la función que está como exponente:

$f(x) = a^v$

$$\boxed{\frac{d}{dx} a^v = a^v \cdot \ln a \cdot v'}$$

Si la base de la potencia es el número e de Euler: La derivada de una función v es la misma función.

$$f(x) = e^v$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(e^v) = e^v}$$

Si el exponente del número de Euler es, a su vez, una función, la derivada es:

$$y = e^{g(v)}$$

$$\frac{d}{dx}(e^{g(v)}) = e^{g(v)} \cdot v'$$

Ejemplo: Hallar la derivada de: $y = 3^x$

$y' = 3^x \cdot \ln 3$

Ejemplo: Hallar la derivada de: $y = 5^{3x^2+1}$

$y' = 5^{3x^2+1} \cdot \ln 5 \cdot \ 6x$

Ejemplo: Hallar la derivada de: $y = x^2 e^x$

Aplicando la derivada del producto:

$y' = 2x \cdot e^x + x^2 e^x$
$y' = xe^x(2 + x)$

Ejemplo: Hallar la derivada de $f(x) = e^{sen\,x}$.

Tener presente que la derivada de $sen\ x$ es $cos\ x$

$f'(x) = e^{sen\,x} \cdot f'(\operatorname{sen} x)$

$f'(x) = e^{sen\,x} \cdot \cos x$

2.13 REGLA DE UNA FUNCIÓN DE LOGARITMO NATURAL O NEPERIANO

El logaritmo natural tiene como base al número de Euler. $e = 2{,}7182818281 \ldots$

Cuando la función es logaritmo neperiano de una función, su derivada es 1 entre la función, multiplicado por la derivada de la función:

$$y = ln\, f(x)$$

$$y' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

Si la función se representa por v:

$$\frac{d}{dx}\ln v = \frac{1}{v} \cdot v' = \frac{v'}{v}$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de la función: $\boldsymbol{y = \ln(2x^2 + 3x)}$

$$y' = \frac{1}{v} \cdot v'$$

$$y' = \frac{1}{2x^2 + 3x} \cdot (4x + 3) = \frac{4x + 3}{2x^2 + 3x}$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de la función: $\boldsymbol{y = ln \frac{2x+1}{2x+3}}$

$$\frac{d}{dx} \ln v = \frac{1}{v} \cdot v'$$

$$\frac{d}{dx} ln \frac{2x + 1}{2x + 3} = \frac{1}{\frac{2x + 3}{x + 1}} \cdot v'$$

$$\frac{d}{dx} ln \frac{2x + 1}{2x + 3} = \frac{x + 1}{2x + 3} \cdot v'$$

Para derivar v' Se aplica la fórmula de la derivada de un cociente:

$$(\frac{u}{v})' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

$$y' = \frac{x + 1}{2x + 3} \cdot \frac{(x + 1)(2) - (2x + 3)(1)}{(x + 1)^2}$$

$$y' = \frac{\cancel{x + 1}}{2x + 3} \cdot \frac{(x + 1)(2) - (2x + 3)(1)}{(x + 1)\cancel{(x + 1)}} = \frac{2x + 2 - 2x - 3}{(2x + 3)(x + 1)} = \frac{-1}{(2x + 3)(x + 1)}$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de la función: $\boldsymbol{f(x) = y = ln\, x^2}$

$$y' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$y' = \frac{1}{x^2} \cdot f'(x^2)$$

$$y' = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de la función: $\boldsymbol{y = 3ln\, (2x^3)}$

Se tiene la derivada de una constante por una función: Es igual a la constante por la derivada de la función:

$$y' = 3 \cdot (2x^3)'$$

$$y' = 3 \cdot \frac{1}{2x^3} \cdot 6x^2 = 3 \cdot \frac{6x^2}{2x^3} = \frac{9}{x}$$

Ejemplo: Encontrar la derivada de la función: $\boldsymbol{y = ln\,(3x^2 - 2x)}$

$$y' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

$y' = \dfrac{1}{3x^2 - 2x} \cdot (6x - 2) = \dfrac{6x - 2}{3x^2 - 2x}$

Ejemplo: Encontrar la derivada de la función: $\boldsymbol{y = \ln x}$

$$y' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

$y' = \dfrac{1}{x} \cdot (1) = \dfrac{1}{x}$

Ejemplo: Encontrar la derivada de la función: $\boldsymbol{y = x^3 \ln x}$

Primero corresponde aplicar la regla del producto:

$$(uv)' = y' = uv' + vu'$$

$u = x^3$
$v = \ln x$

$y' = x^3 \cdot \dfrac{1}{x} + \ln x \cdot 3x^2$
$y' = x^2 + 3x^2 \cdot \ln x$

Ejemplo: Encontrar la derivada de la función: $\boldsymbol{y = ln^2(\,x^2 - x)}$

Hay que recordar que: $\boldsymbol{log_a^n = (log_a A)^n}$

La función debe expresarse como: $[ln(x^2 - x)]^2$

$y' = 2ln(x^2 - x) \cdot [ln(x^2 - x)]'$

Aplicando: $y' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$

$y' = 2ln(x^2 - x) \cdot \dfrac{1}{x^2 - x}(2x - 1)$

$y' = \dfrac{2ln(x^2 - x)(2x - 1)}{x^2 - x}$

$y' = \dfrac{(4x - 2)}{x^2 - x} \cdot ln(x^2 - x)$

2.14 REGLA DE UNA FUNCIÓN DE LOGARITMO COMÚN

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\ log_a u = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{u} \cdot u'}$$

Ejemplo: Calcular la derivada de la función: $\boldsymbol{f(x) = log(3x^2 - 2x + 5)}$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{3x^2 - 2x + 5} \cdot (3x^2 - 2x + 5)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{3x^2 - 2x + 2} \cdot (6x - 2)$$

$$f'(x) = \frac{6x - 2}{\ln 10\ (\ 3x^2 - 2x + 2)}$$

Ejemplo: Calcular la derivada de la función: $\boldsymbol{y = log_5(3x^2 - 8)^4}$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 5} \cdot \frac{1}{(3x^2 - 8)^4} \cdot [(3x^2 - 8)^4]'$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 5} \cdot \frac{1}{(3x^2 - 8)^4} \cdot 4(3x^2 - 8)^3 \cdot (6x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 5} \cdot \frac{1}{(3x^2 - 8)^4} \cdot 24x(3x^2 - 8)^3$$

$$f'(x) = \frac{24x(3x^2 - 8)^3}{\ln 5\,(3x^2 - 8)^4}$$

$$f'(x) = \frac{24x}{\ln 5\ (3x^2 - 8)}$$

2.15 REGLA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

$$f(x) = sen\,[g(x)] \rightarrow\ f'(x) = \cos\ [g(x)] \cdot g'(x) = \boldsymbol{f'(x) = \cos v \cdot v'}$$

$$f(x) = \cos[\ g(x)] \rightarrow f'(x) = -sen\,[g(x)] \cdot g'(x) = \boldsymbol{f'(x) = -\ \mathbf{sen}\, v \cdot v'}$$

$$f(x) = tg[g(x)] \rightarrow\ f'(x) = \frac{g'(x)}{cos^2[g(x)]} = f'(x) = g'(x)sec^2[g(x)] = \boldsymbol{f'(x) = sec^2 v \cdot v'}$$

$$f(x) = \text{ctg}\ [g(x)] \rightarrow f'(x) = \frac{-g'(x)}{sen^2[g(x)]} = -g'(x) \cdot csc^2[g(x)] = \boldsymbol{f'(x) = -csc^2 v \cdot v'}$$

$$f(x) = \sec\ [g(x)] \rightarrow f'(x) = \frac{g'(x) \cdot sen\,[g(x)]}{cos^2[g(x)]} = g'(x) \cdot \sec[g(x)] \cdot tg[g(x)] = \boldsymbol{f'(x) = \sec v \cdot tg\, v \cdot v'}$$

$$f(x) = \csc\ [g(x)] \rightarrow f'(x) = \frac{-g'(x) \cdot cos\,[g(x)]}{sen^2[g(x)]} = -g'(x) \cdot \csc[g(x)] \cdot ctg[g(x)] = \boldsymbol{f'(x) = -\csc\ v \cdot ctg\, v \cdot v'}$$

Ejemplo: Derivar la siguiente función $\boldsymbol{f(x) = sen\ (x^2 - 3)}$:
Se aplica: $f(x) = \cos v \cdot v'$

$v = x^2 - 3$
$v' = 2x$
$f'(x) = 2x \cdot \cos\ (x^2 - 3) \cdot 2x = 2x \cdot \cos\ (x^2 - 3)$

Ejemplo: Derivar la siguiente función $\boldsymbol{f(x) = cos\ (3x^3)}$:
Se aplica: $f(x) = \cos[\ g(x)] \rightarrow f'(x) = -g'(x) \cdot sen\ [g(x)]$

$f'(x) = -9x^2 \cdot \text{se}\ (3x^3)$

Ejemplo: Derivar la siguiente función $\boldsymbol{f(x) = sen\frac{x}{2}}$
Se aplica: $f(x) = \cos v \cdot v'$

$v = \frac{x}{2} = \frac{1}{2}x$

$v' = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$

$f(x) = cos\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot cos\frac{x}{2}$

Ejemplo: Derivada de $y = sen\ 2x$

Se aplica: $f(x) = \cos v \cdot v'$

$v = 2x$
$v' = 2$
$y' = \cos 2x \cdot (2)$
$y' = 2\cos 2x$

Ejemplo: Derivar la siguiente función $f(x) = tg(x^2 + 3)$

Se aplica: $f'(x) = g'(x)sec^2[g(x)]$ o bien: $f'(x) = sec^2 v \cdot v'$

$v = x^2 + 3$
$v' = 2x$

$f'(x) = 2x \cdot sec^2(x^2 + 3)$

Ejemplo: Derivar la siguiente función $f(x) = ctg(2x^2 + x - 4)$

Se aplica:$f'(x) = -g'(x) \cdot csc^2[g(x)]$, o bien: $f'(x) = -csc^2 v \cdot v'$

$v = 2x^2 + x - 4$
$v' = 4x + 1$

$f'(x) = -csc^2(x^2 + x - 4) \cdot (4x + 1) = -(4x + 1) \cdot csc^2(x^2 + x - 4)$

Ejemplo: Derivar la siguiente función $f(x) = ctg(1 - 2x^2)$

Se aplica: $f'(x) = -csc^2 v \cdot v'$

$v = 1 - 2x^2$
$v' = -4x$

$f'(x) = -\csc(1 - 2x^2) - (4x) = 4x \cdot \csc(1 - 2x^2)$

Ejemplo: Derivar la siguiente función $f(x) = sec(5x^3 + 2x - 4)$

Se aplica: $f'(x) = \sec v \cdot tgv \cdot v'$

$v = 5x^3 + 2x - 4$
$v' = 15x^2 + 2$
$f'(x) = \sec\,(5x^3 + 2x - 4) \cdot tg(5x^3 + 2x - 4) \cdot (15x^2 + 2)$
$f'(x) = (15x^2 + 2) \cdot \sec\,(5x^3 + 2x - 4) \cdot tg(5x^3 + 2x - 4)$

Ejemplo: Derivar la siguiente función $f(x) = sec(6x^2 - 4)$

Se aplica: $f'(x) = secv \cdot tgv \cdot v'$

$v = 6x^2 - 4$
$v' = 12x$

$f'(x) = \sec(5x^3 + 2x - 4) \cdot tg(5x^3 + 2x - 4) \cdot (15x^2 + 2)$
$f'(x) = \sec(6x^2 - 4) \cdot tg(6x^2 - 4) \cdot 12x$

$f'(x) = 12x \cdot \sec(6x^2 - 4) \cdot tg(6x^2 - 4)$

Ejemplo: Derivar la siguiente función $f(x) = sec(\sqrt{3x - 2})$

Se aplica: $f'(x) = secv \cdot tgv \cdot v'$

$v = \sqrt{3x - 2}$
Para derivar la función anterior se usa: $\frac{d}{dx}\sqrt{v} = \frac{v'}{2\sqrt{v}}$

$$v' = \frac{3}{2\sqrt{3x - 2}}$$

$$f'(x) = \sec\sqrt{3x - 2} \cdot tg(\sqrt{3x - 2} \cdot \frac{3}{2\sqrt{3x - 2}}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x - 2}} \cdot \sec\sqrt{3x - 2} \cdot tg(\sqrt{3x - 2}$$

Ejemplo: Derivar la siguiente función $f(x) = sec(e^{3x})$

Se aplica: $f'(x) = secv \cdot tgv \cdot v'$

$v = e^{3x}$
Para derivar la función anterior se usa: $\frac{d}{dx}e^v = e^v \cdot v'$
$v' = e^{3x} \cdot 3 = 3e^{3x}$
$f'(x) = \sec(e^{3x}) \cdot tg(e^{3x}) \cdot 3e^{3x}$

$f'(x) = 3\sec(e^{3x}) \cdot tg(e^{3x}) \cdot e^{3x}$

Ejemplo: Derivar la siguiente función $f(x) = csc\frac{3x+1}{x^2-1}$

Se aplica la fórmula para derivar un cociente de funciones: $(\frac{u}{v})' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$ y luego la siguiente:
$f'(x) = -g'(x) \cdot \csc[g(x)] \cdot ctg[g(x)]$ o bien: $f'(x) = -\csc v \cdot ctg\, v \cdot v'$

$$v = \frac{3x + 1}{x^2 - 1}$$

Para derivar la función anterior se usa: $(\frac{u}{v})' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

$$v' = \frac{(x^2-1)\cdot 3 - (3x+1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^2 - 3 - 6x^2 - 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-3x^2 - 2x - 3}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = -\csc\frac{3x+1}{x^2-1}\cdot ctg\,\frac{3x+1}{x^2-1}\cdot\frac{-3x^2-2x-3}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2+2x+3}{(x^2-1)^2}\cdot\csc\frac{3x+1}{x^2-1}\cdot ctg\,\frac{3x+1}{x^2-1}$$

2.16 REGLAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

$$f(x) = arc\ sen\ [g(x)] \rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-[g(x)]^2}} = \boldsymbol{f'(x) = \frac{v'}{\sqrt{1-v^2}}}$$

Nota: la función inversa se puede representar como: $f(x) = sen^{-1}\,[g(x)]$

$$f(x) = arc\ cos\ [g(x)] \rightarrow f'(x) = -\frac{g'(x)}{\sqrt{1-[g(x)]^2}} = \boldsymbol{f'(x) = -\frac{v'}{\sqrt{1-v^2}}}$$

$$f(x) = arc\ tg\ [g(x)] \rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{1+[g(x)]^2} = \boldsymbol{f'(x) = \frac{v'}{1+v^2}}$$

$$f(x) = arc\ ctg\ (x) \rightarrow \boldsymbol{f'(x) = \frac{-v'}{1+v^2}}$$

Para todo x

$$f(x) = arc\ sec\ (x) \rightarrow \boldsymbol{f'(x) = \frac{v'}{v\cdot\sqrt{v^2-1}}}$$

Para $|x| > 1$

$$f(x) = arc\ csc\ (x) \rightarrow \boldsymbol{f'(x) = \frac{-v'}{v\cdot\sqrt{x^2-1}}}$$

Para $|x| > 1$

Ejemplo: Calcular la derivada de: $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{arc\ sen\ (5x)}$

Se aplica:

$$f'(x) = \frac{v'}{\sqrt{1-v^2}}$$

$v = 5x$

$v' = 5$

$$f'(x) = \frac{5}{\sqrt{1-(5x)^2}} = \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$$

Ejemplo: Calcular la derivada de: $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{arc\ sen}\ (\boldsymbol{x^{-3}})$

Se aplica:

$$f'(x) = \frac{v'}{\sqrt{1-v^2}}$$

$v = x^{-3}$

$v' = -3x^{-3-1} == -3x^{-4}$

$$f'(x) = \frac{-3x^{-4}}{\sqrt{1-(x^{-3})^2}} = \frac{-3x^{-4}}{\sqrt{1-x^{-6}}}$$

Ejemplo: Calcular la derivada de: $\boldsymbol{f(x) = arc\ sen(\frac{x^2-1}{x^2})}$

Se aplica:

$$f'(x) = \frac{v'}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$v = \frac{x^2-1}{x^2}$$

$$v' = \frac{x^2 \cdot 2x - (x^2-1)\cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{2x^3 - 2x^3 + 2x}{x^4} = \frac{2x}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{x^4}}{\sqrt{1-(\frac{x^2-1}{x^2})^2}} = \frac{\frac{2x}{x^4}}{\sqrt{1-\frac{(x^2-1)^2}{x^4}}} = \frac{\frac{2x}{x^4}}{\sqrt{\frac{x^4-(x^2-1)^2}{x^4}}}$$

$$= \frac{\frac{2x}{x^4}}{\sqrt{\frac{x^4-(x^4-2x^2+1)}{x^4}}} = \frac{\frac{2x}{x^4}}{\sqrt{\frac{x^4-x^4+2x^2-1)}{x^4}}} = \frac{\frac{2x}{x^4}}{\sqrt{\frac{2x^2-1)}{x^4}}} = \frac{\frac{2x}{x^4}}{\frac{\sqrt{2x^2-1}}{\sqrt{x^4}}} =$$

$$\frac{\frac{2x}{x^4}}{\frac{\sqrt{2x^2-1}}{\sqrt{x^4}}} = \frac{\frac{2x}{x^4}}{\sqrt{\frac{2x^2-1}{x^4}}} = \frac{\frac{2}{x^3}}{\sqrt{\frac{2x^2-1}{x^4}}} = \frac{2}{x^3\sqrt{\frac{2x^2-1}{x^4}}}$$

Ejemplo: Calcular la derivada de: $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{arc\ cos\ 2x}$

Se aplica:

$$f'(x) = \frac{-v'}{\sqrt{1-v^2}}$$

$v = 2x$

$v' = 2$

$$f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}}$$

Ejemplo: Calcular la derivada de: $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{arc\ cos\frac{1-x}{1+x}}$
Se aplica:

$$f'(x) = \frac{-v'}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$v = \frac{1-x}{1+x}$$

$$v' = \frac{(1+x)\cdot(-1)-(1-x)\cdot(1)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{-2}{(1+x)^2}}{\sqrt{1-(\frac{1-x}{1+x})^2}} = \frac{\frac{-2}{(1+x)^2}}{\sqrt{1-\frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}}} = \frac{\frac{2}{(1+x)^2}}{\sqrt{\frac{(1+x)^2-(1-x)^2}{(1+x)^2}}} =$$

$$= \frac{\frac{2}{(1+x)^2}}{\sqrt{\frac{1+2x+x^2-1+2x-x^2}{(1+x)^2}}} = \frac{\frac{2}{(1+x)^2}}{\sqrt{\frac{4x}{(1+x)^2}}} = \frac{\frac{2}{(1+x)^2}}{\frac{\sqrt{4x}}{\sqrt{(1+x)^2}}} = \frac{\frac{2}{(1+x)^2}}{\frac{\sqrt{4x}}{1+x}} =$$

$$= \frac{2(1+x)}{\sqrt{4x}\cdot(1+x)^2} = \frac{2}{2\sqrt{x}\cdot(1+x)} = \frac{1}{\sqrt{x}\cdot(1+x)}$$

Ejemplo: Calcular la derivada de: $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{arc\ tg\ (x^2-1)}$
Se aplica:

$$f'(x) = \frac{v'}{1+v^2}$$

$v = x^2 - 1$
$v' = 2x$

$$f'(x) = -\frac{2x}{1+(x^2-1)^2}$$

Ejemplo: Calcular la derivada de: $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{arc\ tg\ 8x^3}$
Se aplica:

$$f'(x) = \frac{v'}{1+v^2}$$

$v = 8x^3$
$v' = 24x^2$

$$f'(x) = \frac{24x^2}{1+(8x^3)^2} = \frac{24x^2}{1+64x^6}$$

Ejemplo: Calcular la derivada de: $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{arc\ ctg\frac{1+x}{1-x}}$
Se aplica:

$$f'(x) = \frac{-v'}{1+v^2}$$

$v = \dfrac{1+x}{1-x}$

Para derivar esta función se aplica la regla del cociente:

$$v' = \frac{(1-x)\cdot(1)-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x-(-1-x)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{-2}{(1-x)^2}}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} = \frac{\frac{-2}{(1-x)^2}}{1+\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}} = \frac{\frac{-2}{(1-x)^2}}{\frac{(1-x)^2+(1+x)^2}{(1-x)^2}}$$

$$= \frac{-2(1-x)^2}{(1-x)^2\cdot((1-x)^2+(1+x)^2)} = \frac{-2}{((1-x)^2+(1+x)^2)}$$

$$= \frac{-2}{1-2x+x^2+1+2x+x^2} = \frac{-2}{2+2x^2} = \frac{-2}{2(1+x^2)} = \frac{-1}{(1+x^2)}$$

Ejemplo: Calcular la derivada de: $\boldsymbol{f(x) = arc\ sec\ (lnx)}$

Se aplica:

$$f'(x) = \frac{v'}{v\sqrt{v^2-1}}$$

$v = \ln x$

$v' = \dfrac{1}{x}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{lnx\sqrt{(lnx)^2-1}} = \frac{1}{xlnx\sqrt{ln^2x-1}}$$

Ejemplo: Calcular la derivada de: $\boldsymbol{f(x) = arc\ sec\ \sqrt{x^2-1}}$

Se aplica:

$$f'(x) = \frac{v'}{v\sqrt{v^2-1}}$$

$v = \sqrt{x^2-1}$

Para calcular la derivada de v**:** $y' = \frac{v'}{n\sqrt[n]{v^{n-1}}}$

$$v' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{(\sqrt{x^2-1})^2-1}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2-1-1}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2-2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2-2}} = \frac{x}{\sqrt{(x^2-1)^2}\sqrt{x^2-2}} = \frac{x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-2}}$$

Ejemplo: Calcular la derivada de: $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{arc\ csc\ (\pi x)}$

Se aplica:

$$f'(x) = \frac{-v'}{v\sqrt{v^2 - 1}}$$

$v = \pi x$

Como π $es\ una\ constante$

$v' = \pi x' = \pi(1) = \pi$

$f'(x) = \dfrac{-\pi}{\pi x\sqrt{(\pi x)^2 - 1}} = -\dfrac{1}{x\sqrt{\pi^2 x^2 - 1}}$

2.17 REGLA DE LA CADENA

Se refiere a la derivada de una composición de dos funciones. Se aplica a funciones potenciales.

Sea:

$$y = g(u)$$
$$u = f(x)$$

La derivada de y con respecto a x es:

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}}$$

Ejemplo: Hallar la derivada $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}}$ **por la regla de la cadena, si:**

$u = x^2 + 1$

$y = u^2 - 9$

$\dfrac{du}{dx} = 2x + 0 = 2x$

$\dfrac{dy}{du} = 2u - 0 = 2u$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = (2u)(2x)$

$\dfrac{dy}{dx} = 2(x^2 + 1)(2x)$

$\dfrac{dy}{dx} = 4x(x^2 + 1)$

Ejemplo: Hallar la derivada $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}}$ **por la regla de la cadena, si:**

$u = \dfrac{1}{x}$

$$y = u^2 - u$$

$$\frac{dy}{du} = 2u - 1$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{(1')(x) - (1)(x')}{x^2} = \frac{0-1}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (2u-1)(\frac{-1}{x^2})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-2u}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-2(\frac{1}{x})}{x^2} = \frac{\frac{x-2}{x}}{x^2} = \frac{x-2}{x^3}$$

Ejemplo: Hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$ **por la regla de la cadena, si:**

$$u = x^3 - 6x^2 - 8x$$

$$y = \frac{u}{u^2 - 1}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{u'(u^2-1) - u(u^2-1)'}{(u^2-1)^2} = \frac{(1)(u^2-1) - u(2u)}{(u^2-1)^2} = \frac{u^2 - 1 - 2u^2}{(u^2-1)^2} = \frac{-u^2-1}{(u^2-1)^2}$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 - 12x - 8$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{(-u^2-1)(3x^2-12x-8)}{(u^2-1)^2}$$

Ejemplo: Hallar la derivada, por la regla de la cadena de la función: $\boldsymbol{y = (2x^5 - 3x + 4)^4}$

$$u = 2x^5 - 3x + 4$$
$$y = u^4$$

$$\frac{du}{dx} = 10x^4 - 3$$

$$\frac{dy}{du} = 4u^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = 4u^3 \cdot (10x^4 - 3)$$
$$\frac{dy}{dx} = 4(2x^5 - 3x + 4)^3 \cdot (10x^4 - 3)$$

$$\frac{dy}{dx} = (2x^5 - 3x + 4)^3 \cdot (40x^4 - 12)$$

Alternativamente:

$$y = x^n$$
$$y' = nx^{n-1} \cdot \boldsymbol{x'}$$

$$y = (2x^5 - 3x + 4)^4$$

$$y' = 4(2x^5 - 3x + 4)^3(10x^4 - 3)$$

$$y' = (2x^5 - 3x + 4)^3(40x^4 - 12)$$

Ejemplo: Hallar la derivada, por la regla de la cadena de la función: $\boldsymbol{y = (x + 4)^4}$

$u = x + 4$
$y = u^4$

$$\frac{du}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{du} = 4u^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 4u^3 \cdot 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 4(x + 4)^3$$

Alternativamente:

$$\frac{dy}{dx} = y' = nx^{n-1} \cdot x'$$

En este ejemplo, x' $(la\ derivada\ de\ x)$ es 1, ya que al derivar el argumento se tiene la derivada de x con respecto a x que es 1, más la derivada de una constante que es cero. Como es 1, **da la impresión de que al resolver este ejercicio no se está usando la regla de la cadena, pero sí se está usando.**

$$y' = 4(x + 4)^{4-1} \cdot \mathbf{1}$$
$$y' = 4(x + 4)^3$$

Ejemplo: Hallar la derivada, por la regla de la cadena de la función: $\boldsymbol{y = (3x - 2x^2)^3}$

$u = 3x - 2x^2$
$y = u^3$

$$\frac{du}{dx} = 3 - 4x$$

$$\frac{dy}{du} = 3u$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = 3u \cdot (3 - 4x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 3(3x - 2x^2) \cdot (3 - 4x)$$

$$\frac{dy}{dx} = (3x - 2x^2) \cdot (9 - 12x)$$

Alternativamente usando: $y^{\acute{}} = nx^{n-1} \cdot x^{\acute{}}$

$$y' = 3(3x - 2x^2)^2(3(1) - 4x)$$

$$y' = 3(3x - 2x^2)^2(3 - 4x)$$

$$y' = (3x - 2x^2) \cdot (9 - 12x)$$

Ejemplo: Hallar la derivada, por la regla de la cadena de la función: $\boldsymbol{f(x) = (8x^2 - 4x + 1)^4}$

$u = 8x^2 - 4x + 1$
$y = u^4$

$$\frac{du}{dx} = 16x - 4$$

$$\frac{dy}{du} = 4u^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 4u^3 \cdot (16x - 4)$$

$$\frac{dy}{dx} = 4(8x^2 - 4x + 1)^3 \cdot (16 - 4)$$

$$\frac{dy}{dx} = (8x^2 - 4x + 1)^3 \cdot (64 - 16)$$

Alternativamente utilizando: $y^{\acute{}} = nx^{n-1} \cdot x'$

$y' = 4(8x^2 - 4x + 1)^3(16x - 4)$

$y' = (8x^2 - 4x + 1)^3(64x - 16)$

Ejemplo: Hallar la derivada, por la regla de la cadena de la función: $\boldsymbol{y = \sqrt{5x^3 - 2x}}$

$u = 5x^3 - 2x$
$y = \sqrt{u}$

$$\frac{du}{dx} = 15x^2 - 2$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (15x^2 - 2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{5x^3 - 2x}} \cdot (15x^2 - 2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{15x^2 - 2}{2\sqrt{5x^3 - 2x}}$$

Alternativamente utilizando: $y^{\prime} = nx^{n-1} \cdot x'$

$f'(x) = (5x^3 - 2x)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (15x^2 - 2)$$
$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(5x^3 - 2x)}} \cdot (15x^2 - 2) = \frac{(15x^2 - 2)}{2\sqrt{(5x^3 - 2x)}}$$

Ejemplo: Hallar la derivada, por la regla de la cadena de: $f(x) = (x^5 - 2x^2)^3(\boldsymbol{4x^3 - 5})^{\boldsymbol{4}}$

$u = (x^5 - 2x^2)^3$
$v = (4x^3 - 5)^4$

Hay que recordar la derivada de un producto:
La derivada es: $uv' + vu'$

$u' = 3(x^5 - 2x^2)^2(5x^4 - 4x)$

$v' = 4(4x^3 - 5)^3(12x^2)$

$f'(x) = (x^5 - 2x^2)^3 \cdot 4(4x^3 - 5)^3(12x^2) + (4x^3 - 5)^4 \cdot 3(x^5 - 2x^2)^2(5x^4 - 4x)$

Factorizando:

$f'(x) = (x^5 - 2x^2)^2(4x^3 - 5)^3[(x^5 - 2x^2) \cdot 4(12x^2) + (4x^3 - 5) \cdot 3(5x^4 - 4x)]$

$f'(x) = (x^5 - 2x^2)^2(4x^3 - 5)^3[(48x^7 - 96x^4) + (12x^3 - 15)(5x^4 - 4x)]$

$f'(x) = (x^5 - 2x^2)^2(4x^3 - 5)^3[(48x^7 - 96x^4) + (60x^7 - 48x^4 - 75x^4 + 60x)]$
$f'(x) = (x^5 - 2x^2)^2(4x^3 - 5)^3\ [108x^7 - 219x^4 + 60x)]$

Ejemplo: Hallar la derivada, por la regla de la cadena de la función: $\boldsymbol{y = (5x^2 + 3x)^2}$

$u = 5x^2 + 3x$
$y = u^2$

$$\frac{du}{dx} = 10x + 3$$

$$\frac{dy}{du} = 2u$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2u \cdot (10x + 3)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2u \cdot (10x + 3)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2(5x^2 + 3x) \cdot (10x + 3)$$
$$\frac{dy}{dx} = (5x^2 + 3x)(20x + 6)$$

Ejemplo: Hallar la derivada, por la regla de la cadena de la función: $\boldsymbol{y = \sqrt{x^2 + 1}}$

$u = x^2 + 1$
$y = \sqrt{u}$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cancel{x}}{\sqrt{x^2+1}}$$

Alternativamente utilizando: $y' = nx^{n-1} \cdot x'$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (x^2+1)'$$

$$y' = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}} \cdot \cancel{2}x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Ejemplo: Hallar la derivada, por la regla de la cadena de la función: $y = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 8}$

$u = x^3 - 2x^2 + 8$

$y = \sqrt[3]{u}$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 - 4x$$

$$\frac{dy}{du} = ?$$

Como $\sqrt[3]{u}$ no es raíz cuadrada, la fórmula es:

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{3\sqrt[3]{u}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3\sqrt[3]{u}} \cdot (3x^2 - 4x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 8}} \cdot (3x^2 - 4x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 4x}{3\sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 8}}$$

Ejemplo: Hallar la derivada, por la regla de la cadena de la función: $\boldsymbol{y = \frac{1}{(2x^5-6)^3}}$

$$u = 2x^5 - 6$$
$$y = \frac{1}{u^3} = u^{-3}$$

$$\frac{du}{dx} = 10x^4$$

$$\frac{dy}{du} = -3u^{-4}$$

Se aplica:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -3u^{-4} \cdot 10x^4 = \frac{-3}{u^4} \cdot 10x^4 = \frac{-30x}{u^4} = \frac{-30x^4}{(2x^5 - 6)^4}$$

3 DERIVADAS DE FUNCIONES IMPLÍCITAS

Una función implícita es una relación que se expresa en términos de x e y (no está la y despejada en un miembro). Por ejemplo: $3x^3 - y + 5x = x^2$. Otro ejemplo: $e^{x+y} = x$.

En cambio, en una función explícita, una de las variables está despejada: $y = 3x^2 - 5$.

En una función implícita se derivan término a término los elementos de la igualdad con respecto a la variable que se indica y al final se despeja la derivada.

Ejemplo: ¿Cuál es la derivada $\frac{dy}{dx}$ de la función implícita: $x^3 - y^5 + 3x^2 - 6y = 1$?
Se está derivando **con respecto a x**:

$$3x^2\frac{dx}{dx} - 5y^4 \cdot \frac{dy}{dx} + 6x\frac{dx}{dx} - 6\frac{dy}{dx} = 0$$

$$3x^2(1) - 5y^4y' + 6x\,(1) - 6y' = 0$$

Se agrupan los términos que contienen y' y se despeja:

$$-5y^4y' - 6y' = -3x^2 - 6x$$

$$5y^4y' + 6y' = 3x^2 + 6x$$

$$y'(5y^4 + 6) = 3x^2 + 6x$$

$$y' = \frac{3x^2 + 6x}{5y^4 + 6}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 6x}{5y^4 + 6}$$

Ejemplo: Hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$ de la función implícita: $3x^2 - 6xy + y^2 = 2x - y$.

$$6x - 6(xy)' + 2y \cdot y' = 2 - 1y'$$

$$6x - 6(xy' + yx') + 2y \cdot y' = 2 - y'$$
$$6x - 6x(y') - 6y(1) + 2y(y') = 2 - y'$$

$$y' - 6x(y') + 2y(y') = -6x + 6y + 2$$

$$y'(1 - 6x + 2y) = -6x + 6y + 2$$

$$y' = \frac{2 - 6x + 6y}{(1 - 6x + 2y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - 6x + 6y}{(1 - 6x + 2y)}$$

Ejemplo: Hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$ de la función implícita: $y = e^{x+y}$.

Se aplica: $(e^v)' = e^v(v)'$

$y' = e^{x+y} \cdot (\mathrm{x} + \mathrm{y})'$

$y' = e^{x+y} \cdot (\mathrm{x}' + y')$

$y' = e^{x+y} \cdot (1 + y')$

$y' = e^{x+y} + e^{x+y} \cdot y'$

$y' - e^{x+y} \cdot y' = e^{x+y}$

$y'(1 - e^{x+y}) = e^{x+y}$

$$y' = \frac{(e^{x+y})}{(1 - e^{x+y})}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^{x+y})}{(1 - e^{x+y})} \; o \; bien \frac{y}{1 - y}$$

Ejemplo: Hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$ de la función implícita: $x^y = y^x$

Como en ambos términos de la igualdad hay potencias con exponentes que son a su vez variables, se aplica logaritmos.

$ln\,(x^y) = \ln\,(y^x)$
$y\;ln\,(x) = x\log\,(y)$

Se deriva con respecto a x, no con respecto a y ambos miembros:

$$\frac{d}{dx}[y\;ln\,(x)] = \frac{d}{dx}[x\log\,(y)]$$

Primero, aplicar la regla de la derivada de un producto:

$$\frac{d}{dx}uv = uv' + vu'$$

En primer miembro:

$u = y$
$v = \ln(x)$

En segundo miembro:

$u = x$
$v = \ln(y)$

$$\frac{d}{dx}[y\, ln\,(x)] = \frac{d}{dx}[x \log\,(y)]$$

$$y \cdot [\ln(x)]' + \ln(x) \cdot\ y' = x \cdot [\ln(y)]' + \ln(y) \cdot x'$$

Teniendo presente que se está derivando con respecto a x, no a y:

$$y \cdot [\ln(x)]' + \ln(x) \cdot\ y' = x \cdot [\ln(y)]' + \ln(y) \cdot (1)$$

Usando: $\frac{d}{dx}(\,ln\,v) = \frac{v'}{v}$

$$y \cdot \frac{x'}{x} + \ln(x) \cdot\ y' = x \cdot \frac{y'}{y} + \ln(y)$$

Despejando y'

$$\ln(x) \cdot\ y' - \frac{xy'}{y} = \ln(y) - \frac{y}{x}$$

$$y'(\ln(x) - \frac{x}{y}) = \ln(y) - \frac{y}{x}$$

$$y' = \frac{\ln(y) - \frac{y}{x}}{(\ln(x) - \frac{x}{y})} = \frac{\frac{x\ln(y) - y}{x}}{\frac{y\ln(x) - x}{y}} = \frac{y(x\ln(y) - y)}{x(y\ln(x) - x)}$$

Ejemplo: Hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dx}{dy}$de la función implícita: $3y^4 - 5x^3y^4 = 2xy - x^4$.
Primero calcular $\frac{dy}{dx}$:
Se aplica: $\frac{d}{dx}\,(v^n) = nv^{n-1} \cdot v'$

Se aplica: $\frac{d}{dx}\,uv = u'v + uv'$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$x' = \frac{dx}{dx} = 1$$

$$12y^3y' - 5(x^3)'(y^4) - 5(x^3)(y^4)' = 2(x)'(y) + 2(x)(y)' - 4(x^3)(x)'$$
$$12y^3y' - 5(3x^2)(y^4) - 5(x^3)4(y^3 \cdot y') = 2y + 2(x)y' - 4(x^3)$$

$$12y^3y' - 15x^2y^4 - 20x^3y^3 \cdot y' = 2y + 2xy' - 4x^3$$

$$12y^3y' - 2xy' - 20x^3y^3 \cdot y' = 2y + 15x^2y^4 - 4x^3$$

$$y'(12y^3 - 2x - 20x^3y^3) = 2y + 15x^2y^4 - 4x^3$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2y + 15x^2y^4 - 4x^3}{12y^3 - 2x - 20x^3y^3}$$

Primero calcular $\frac{dx}{dy}$: Se invierten los términos de la fracción anterior:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{12y^3 - 2x - 20x^3y^3}{2y + 15x^2y^4 - 4x^3}$$

4 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Cuando se deriva una función f se produce una nueva función $f'(primera\ derrivada)$. Si se vuelve a derivar f'se obtiene otra función que se designa como f'' $(segunda\ derivada)$. Si esta última función se vuelve a derivar se obtiene f''' $(tercera\ derivada)$, etc.

Ejemplo: Si $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x - 9$

$f'(x) = 6x^2 - 10x + 6$

$f''(x) = 12x - 10$

$f'''(x) = 12$

$f''''(x)$ =0

Notaciones:

Primera derivada: $f'(x); y'; D_x y;\ \frac{dy}{dx}$. Esta última se llama notación de Leibniz.

Segunda derivada: $f''(x); y''; D_x^2 y;\ \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right); \frac{d^2y}{dx^2}$

Tercera derivada: $f'''(x); y'''; D_x^3 y;\ \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right); \frac{d^3y}{dx^3}$

nésima derivada: $f^{(n)}(x); y^{(n)}; D_x^n y;\ \frac{d^ny}{dx^n}$

Ejemplo: Derivar $\frac{d^5y}{d5}$
Si $f(x) = 3x^4$

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 36x^2$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = 72x$$
$$\frac{d^4y}{dx^4} = 72(1) = 72$$
$$\frac{d^5y}{dx^5} = 0$$

Ejemplo:
Primera derivada de $y = 5x^2 - 2x + 10$

$y' = (2)(5)x^1 - (2)(1) - 0 = 10x - 2$
$y'' = (10)(1) - 0 = 10$

Ejemplo:

Derivada de $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$ y verifique que: $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a^4}{b^2y^3}$

Se usan las siguientes fórmulas:

$\frac{d}{dx}uv = uv' + vu'$ o bien: $u'v + uv'$

$$\frac{d}{dx}v^n = nv^{n-1} \cdot v'$$

$$2a^2x + 2b^2y \cdot y' = 0$$

Se vuelve a derivar con respecto a x:

$$2a^2 +\cdot (y'y' + yy'') = 0$$

$$2a^2 + 2b^2(y')^2 + 2b^2yy'' = 0$$

$y'\ se\ puede\ obtener\ de$: $2a^2x + 2b^2y \cdot y' = 0$

$$2b^2y \cdot y' = -2a^2x$$

$$y' = -\frac{2a^2x}{2b^2y} == -\frac{a^2x}{b^2y}$$

Por tanto, se reemplaza este valor para que en la expresión quede solo la segunda derivada y''

$$2a^2 + 2b^2(-\frac{a^2x}{b^2y})^2 + 2b^2yy'' = 0$$

$$2a^2 + 2b^2(\frac{a^4x^2}{b^4y^2}) + 2b^2yy'' = 0$$

$$2a^2 + (\frac{2a^4x^2}{b^2y^2}) + 2b^2yy'' = 0$$

$$\frac{2a^2b^2y^2 + 2a^4x^2}{b^2y^2} + 2b^2yy'' = 0$$

$$\frac{2a^2(b^2y^2 + a^2x^2)}{b^2y^2} + 2b^2yy'' = 0$$

Pero el paréntesis anterior es la expresión original: $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$

Por tanto,

$$\frac{2a^2(a^2b^2)}{b^2y^2} + 2b^2yy'' = 0$$

$$\frac{2a^4b^2}{b^2y^2}+2b^2yy'' = 0$$

$$2b^2yy'' = -\frac{2a^4b^2}{b^2y^2}$$

$$2b^2yy'' = -\frac{2a^4}{y^2}$$

$$y'' = -\frac{2a^4}{y^2 2b^2 y}$$

$$y'' = -\frac{a^4}{y^3b^2}$$

Que es lo que se pedía demostrar:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a^4}{b^2y^3}$$

4.1 APLICACIÓN DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA OBTENER LOS MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS DE UNA FUNCIÓN

Ejemplo: Obtener los máximos y mínimos de la función: $\boldsymbol{f(x) = x^3 + 3x^2 - 2}$

Hay que seguir tres pasos:

1. Hallar la primera y la segunda derivada de la función:

   $f'(x) = 3x^2 + 6x$
   $f''(x) = 6x + 6$

2. Encontrar los valores críticos de x que anulan a la primera derivada:

$3x^2 + 6x = 0$
$x(3x + 6) = 0$
$x(3x + 6) = \frac{0}{3x + 6} = 0$

$3x + 6 = 0$
$3x = -6$
$x = -\frac{6}{3} = -2$

Es decir, $f'(x) = 0\ si$ los valores críticos son: $x_1 = 0\ y\ x_2 = -2$

3. Calcular los valores de la segunda derivada para cada uno de los valores críticos de x obtenidos en el paso anterior:

Para $x_1 = 0$

$$f''(x) = 6(0) + 6 = 6$$

Lo que interesa es el signo. Como es positivo, se trata de un mínimo relativo.
$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$
$f(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 2 = -2$

Es decir, se tiene un mínimo relativo en el punto $A(0, -2)$.

Para $x_2 = -2$

$$f''(x) = 6(-2) + 6 = -12 + 6 = -6$$

Lo que interesa es el signo. Como es negativo, se trata de un máximo relativo.

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$
$f(-2) = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 2 = -8 + 12 - 2 = 2$
Es decir, se tiene un máximo relativo en el punto $B(-2, 2\ )$.

5 RAZÓN DE CAMBIO

Se usa para medir cómo cambia una variable con respecto a otra, por ejemplo:

- Cómo cambia el consumo de bencina de un automóvil con respecto a la velocidad cuando cambia la velocidad.
- Cómo varía el costo unitario de un bien con respecto a la cantidad de bienes elaborados cuando aumenta o disminuye la cantidad de bienes elaborados.

Aplicación a la Economía:

Costo marginal:

La función Costo total de una empresa por producir x unidades de un artículo, se suele representar por un polinomio como el siguiente:

$$C(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

Donde:
$a = Costos\ fijos$: Aquellos costos que no dependen del nivel de actividad de la empresa, es decir, aquellos que no varían en proporción directa con su nivel de producción o ventas.

$b, c, d = Costos\ variables$: Representan a rubros de costos que varían, en alguna relación establecida, con el nivel de actividad de la empresa, es decir, con su nivel de producción o ventas.

Si la empresa incrementa el número de unidades producidas de $x_0\ a\ x_1$ $(x_0 < x_1)$, el costo se incrementa $C(x_1) - (Cx_0)$ y la Razón de cambio, es:

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_1) - (Cx_0)}{x_1 - x_0} = \frac{C(x_0 + \Delta x) - (Cx_0)}{\Delta x}$$

La derivada de la función de costo total se llama Costo marginal $C'(x)$ y representa el incremento del costo al aumentar la producción. La derivada, es:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_0 + \Delta x) - (Cx_0)}{\Delta x}$$

Cuando $\Delta x = 1$, es decir, cuando la producción aumenta en 1 unidad y x_0 suficientemente grande, se tiene que:

$$C'(x_0) \approx C(x_0 + 1) - C(x_0)$$

Es decir, el costo de producir $x_0 + 1$ unidades es aproximadamente el mismo que producir x_0 unidades.

Ejemplo 1: Supóngase que la función de costo total de una empresa, para un nivel de producción de 500 artículos, es:

$$C(x) = 10.000 + 5x + 0{,}01x^2$$

La función del Costo marginal es su derivada:

$$C' = 5 + 0{,}02x$$

Por consiguiente, si el nivel de producción de la empresa es de 500 artículos, su función de costo marginal es:

$$C'(500) = 5 + 0{,}02(500) = \$15\ por\ artículo$$

Es decir, dada esa función de costo y cuando la empresa produce 500 artículos, producir una unidad adicional cuesta aproximadamente $15. Se comprueba como sigue:

El costo de producir el artículo 501, es:

$$C(501) = [10.000 + 5(501) + 0{,}01(501)^2 = 10.000 + 2505 + 2.510{,}01 = 15.015{,}01$$
$$C(500) = [10.000 + 5(500) + 0{,}01(500)^2 = 10.000 + 2500 + 2.500 = 15.000$$

$$C(501) - C(500) = 15.015{,}01 - 15.000 = \$15{,}01$$

Se ve que:

$$C'(500) \approx C(501) - C(500)$$

$$\$15 \approx \$15{,}01$$

Ejemplo 2: El costo en dólares de producir x yardas de un determinado tejido es:

$$C(x) = 1.200 + 12x + 0{,}1x^2 + 0{,}0005x^3$$

a) Encuentre la función de costo marginal
b) Obtenga $C'(200)$ y explique su significado. ¿Qué predice?
c) Compare $C'(200)$ con el costo de fabricar la yarda 201

Fuente: Libro de Cálculo de J. Stewart (propuesto)

Solución a):

$$C'(x) = 12 + 0{,}2x + 0{,}0015x^2$$

Solución b):

$$C'(200) = 12 + 0{,}2(200) + 0{,}0015(200)^2 = 12 + 40 + 60 = \$112\ por\ yarda$$

Indica el costo adicional de producir una yarda adicional cuando el nivel de producción de la empresa es de $x = 200\ yardas$.

Solución c):

$$C(201) = [1.200 + 12(201) + 0{,}1(201)^2 + 0{,}0005\ (201)^3$$
$$= 1.200 + 2.412 + 4040{,}01 + 4060{,}30 = 11.712{,}3$$

$$C(200) = [1.200 + 12(200) + 0{,}1(200)^2 + 0{,}0005\ (200)^3 = 1.200 + 2.400 + 4000 + 4000$$
$$= 11.600$$

$$C(201) - C(200) = 11.712{,}31 - 11.600 = \$112{,}3$$

Se ve que:

$$C'(200) \approx C(201) - C(200)$$
$$\$112 \approx \$112{,}3$$

Utilidad marginal:

El fabricante de un producto considera que puede venderlo a:

$$p(x) = 4 - 0{,}001x$$

Y el costo de producción de x productos es de:

$$C(x) = 2 + 1{,}2x + 10\sqrt{x}$$

El ingreso I es: $I(x) = p(x) \cdot x = (4 - 0{,}001x) \cdot x$

El ingreso C es: $C(x) = 2 + 1{,}2x + 10\sqrt{x}$

La utilidad obtenida por la elaboración y venta de x unidades es la diferencia entre el ingreso y el costo:

$U(x) = (4 - 0{,}001x) \cdot x - (2 + 1{,}2x + 10\sqrt{x})$
$U(x) = 4x - 0{,}001x^2 - 2 - 1{,}2x - 10\sqrt{x})$
$U(x) = -0{,}001x^2 + 2{,}8x - 2 - 10\sqrt{x}$

La función ingreso marginal: Es la derivada de $I(x) = (4 - 0{,}001x) \cdot x$

$I(x) = 4x - 0{,}001x^2$
$I'(x) = 4 - 0{,}002\text{x}$

La función costo marginal: Es la derivada de $C(x) = 2 + 1{,}2x + 10\sqrt{x}$
$C'(x) = 1{,}2 + 10 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 1{,}2 + \dfrac{5}{\sqrt{x}}$

La función utilidad marginal: Es la derivada de $C(x) = -0{,}001x^2 + 2{,}8x - 2 - 10\sqrt{x}$
$U'(x) = -0{,}002x + 2{,}8 - 10 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -0{,}002x + 2{,}8 - \frac{5}{\sqrt{x}} =$

6 ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE

La ecuación de la recta tangente a una curva en el punto $P(x_1, y_1)$ con pendiente y' está dada por:

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

$$\boxed{y - y_1 = y' \cdot (x - x_1)}$$

Donde y' es la pendiente m.

Ejemplo: ¿Cuál es la pendiente de la recta a la curva $x^2 + xy + y = x - 4$ en el punto $(1, -2)$?

Se derivan ambos miembros de la igualdad:

$(x^2 + xy + y)' = (x - 4)'$
$2x + (xy' + yx') + y' = 1 - 0$
$2x + (xy' + y) + y' = 1$

$y'(x + 1) = 1 - 2x - y$

$$y' = \frac{1 - 2x - y}{(x + 1)} = m\ la\ pendiente$$

Al sustituir las coordenadas del punto de tangencia:

$$m = \frac{1 - 2(1) - (-2)}{(1 + 1)} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo: Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$, en el punto $(x = -2)$.

Se evalúa la función en $x = -2$
$f(x) = x^2$
$f(-2) = (-2)^2 = 4$

Se calcula la derivada de $f(x) = x^2$:
$f'(x) = 2x$

Se evalúa en $x = -2$:
$m = f'(x) = 2(-2) = -4$

Ecuación recta tangente:
Teniendo presente que el punto de tangencia es: $(-2,4)$.
$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$
$y - 4 = -4 \cdot (x - (-2))$
$y - 4 = -4x - 8$
$y = -x - 8 + 4$

$y = -x - 4$

Ejemplo: Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x-2}$, en el punto $(4, \frac{1}{2})$.

$f(x) = (x-2)^{-1}$

$f'(x) = -1(x-2)^{-2} \cdot (1)$

$f'(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^2}$

y' es la pendiente de la recta tangente que hay que evaluar con el valor $x = 4$

$m = \dfrac{-1}{(4-2)^2} = -\dfrac{1}{4}$

Ecuación recta tangente:

Teniendo presente que el punto de tangencia es: $(4, \frac{1}{2})$.

$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$

$y - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4} \cdot (x-4)$

$4y - 2 = -1 \cdot (x-4)$

$4y = -x + 4 + 2$

$4y = -x + 6$

$y = -\dfrac{x}{4} + \dfrac{6}{4}$

$y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{2}$

Alternativamente: la recta tangente es:

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

Donde a es el valor de la abscisa del punto $(4, \frac{1}{2})$, es decir, 4

$f(a) = \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{1}{4-2} = \dfrac{1}{2}$

$f'(a) = \dfrac{-1}{(4-2)^2} = -\dfrac{1}{4}$

que es la pendiente de la recta tangente: $f'(a) = m = -\frac{1}{4}$

$y - f(a) = f'(a)(x-a)$

$y - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}(x-4)$

Desarrollando, se llega también a:

$y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{2}$

Ejemplo: Hallar la ecuación de la recta tangente a la función $\boldsymbol{y = \sqrt[3]{x+2} + 1}$, en $\boldsymbol{x = 6}$.

Como falta la ordenada del punto de tangencia, se obtiene reemplazando la x de la función por 6:

$y = \sqrt[3]{x+2} + 1 = \sqrt[3]{6+2} + 1 = 3$

Por tanto, el punto de tangencia es: (6,3)
Derivada de la función:

$$f(x) = (x+2)^{\frac{1}{3}} + 1$$
$$f'(x) = \frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}}(1) + 0$$
$$f'(x) = \frac{1}{3}(x+2)^{-\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x+2)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^2}} = pendiente\ de\ la\ recta = m$$

Reemplazando la x por 6:

$$m = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(6+2)^2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{12}$$

Teniendo presente que el punto de tangencia es: (6,3).

$$y - y_1 = m \cdot (x-6)$$
$$y - 3 = \frac{1}{12} \cdot (x-6)$$

Desarrollando esta expresión, la ecuación de la recta tangente es:

$$y = \frac{1}{12}x + \frac{5}{2}$$

Ejemplo: Encuentre los puntos sobre la curva $x^4 - 6x^2 + 4$ donde la recta tangente es horizontal.

Solución: Se tienen tangentes horizontales donde la derivada es cero.

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 4$$
$$\frac{d}{dx}(x) = 4x^3 - 12x$$

$$4x^3 - 12x = 0$$
$$4x(x^2 - 3) = 0$$
$$4x = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Por tanto, la curva dada tiene rectas tangentes horizontales cuando $x = 0$; $x = \sqrt{3}$; $x = -\sqrt{3}$

Cuando $x = 0 \Rightarrow y(0) = 0^4 - 6(0)^2 + 4 = 4$. Entonces, el punto de tangencia es:(0,4)

Cuando $x = \sqrt{3} \Rightarrow y(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^4 - 6(\sqrt{3})^2 + 4 = 3^2 - 18 + 4 = -5$. Entonces, el punto de tangencia es:$(\sqrt{3}, -5)$

Cuando $x = -\sqrt{3} \Rightarrow y\left(-\sqrt{3}\right) = \left(-\sqrt{3}\right)^4 - 6\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 4 = 9 - 18 + 4 = -5$. Entonces, el punto de tangencia es:$(-\sqrt{3}, -5)$

7 ECUACIÓN DE LA RECTA NORMAL

La ecuación de la recta normal a una curva en el punto $P(x_1, y_1)$ con pendiente $m = -\frac{1}{y'}$ está determinada por:

$$\boldsymbol{y - y_1 = -\frac{1}{y'} \cdot (x - x_1)}$$

Ejemplo: Hallar la ecuación de la recta tangente y normal a la curva $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ en el punto $x = 2$.
Fuente: https://www.youtube.com/watch?v=VUg4NWE1Ims

Como falta la ordenada del punto de tangencia, se obtiene reemplazando la x de la función por 2:
$y = \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{2-1} = 1$

Por tanto, el punto de tangencia es: (2,1)
Derivada de la función:

$$f(x) = (x-1)^{\frac{1}{3}}$$
$$f'(x) = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}(1) + 0$$
$$f'(x) = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}$$
$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = pendiente\ de\ la\ recta = m$$

Reemplazando la x por 2:

$$m = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(2-1)^2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1}} = \frac{1}{3}$$

Teniendo presente que el punto de tangencia es: (2,1).

$$y - y_1 = m \cdot (x-2)$$
$$y - 1 = \frac{1}{3} \cdot (x-2)$$

Desarrollando esta expresión, la ecuación de la recta tangente es:

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

Determinación de la recta normal. Hay que tener presente que:

$$m_{perpendicular} = \frac{-1}{m}$$
$$m_{perpendicular} = \frac{-1}{\frac{1}{3}} = -3$$
$$y - y_1 = m \cdot (x-2)$$
$$y - 1 = -3 \cdot (x-2)$$
$$y = -3x + 6 + 1$$
$$y = -3x + 7$$

Es la ecuación de la recta normal a la curva $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ en el punto $x = 2$.

Ejemplo: Hallar la ecuación de la recta tangente y la recta normal a la función $y = x\sqrt{x}$ en el punto (1, 1).

$$y = x\sqrt{x}$$

$y = xx^{\frac{1}{2}} = x^{1+\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$
$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

La pendiente de la recta tangente en (1,1), es:
$y'(1) = \frac{3}{2}$

$y - y_1 = y' \cdot (x - x_1)$

$y - 1 = \frac{3}{2} \cdot (x - 1)$

$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

La recta normal es perpendicular a la recta tangente de tal manera que su pendiente es el recíproco negativo de $\frac{3}{2}$, es decir, $-\frac{2}{3}$

$y - 1 = -\frac{2}{3} \cdot (x - 1)$
$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

JSA_derivadas.docx