Tabla de contenido

INTEGRALES

GUÍA DE EJERCICIOS

1 INTEGRALES INDEFINIDAS

1.1 DEFINICIÓN DE INTEGRAL INDEFINIDA

Si $f(x)$ es una función, por ejemplo, $f(x) = 3x^2$, con derivada $f'(x) = 6x$, entonces $f(x)$ se llama *integral indefinida, primitiva o antiderivada* de $f'(x)$.

De la definición anterior se deduce que *Integrar* es una operación inversa a la de *Derivar*, de ahí el nombre de Antiderivada, ya que **se trata de encontrar una función a partir de su derivada**; Otras operaciones conocidas como inversas son: la adición y sustracción, la multiplicación y la división y la potencia y la extracción de raíz.

Ejemplo:

Si la función es $F(x) = 3x^2$, su derivada es: $f'(x) = 2(3)x^{2-1} = 6x$,
Si se pregunta ¿cuál es la función cuya derivada es $6x$?, se está preguntando por la integral de $6x$ y se responde que la función buscada es $3x^2$. Es decir, la integral de $6x$ es $3x^2$ y se escribe:

$\int 6x\, dx = 3x^2$

Al resultado anterior se le agrega $+c$, y queda como sigue:

$\int 6x\, dx = 3x^2 + c$

dx (diferencial de x) significa que la función se derivó con respecto a x. La c es una constante que se agrega, porque la integral no es única, como se ve en el siguiente ejemplo:

Ejemplo: Si se derivan las funciones $f(x) = 3x^2 + 10$, $f(x) = 3x^2 - 5$, $f(x) = 3x^2$, todas tienen igual resultado: $6x$; es decir la derivada $6x$ puede ser la derivada de cualquier función de la forma $f(x) = 3x^2 + c$, en donde *c* se llama *constante de integración* y s independiente de la variable de integración.

En general, la integral indefinida de $f'(x)$ se denota por:

$$\int f'(x)dx = f(x) + c$$

Representa la familia de funciones de $f(x)$, donde c, recibe el nombre de constante de integración. Como esa constante *c* es arbitraria e indefinida, la expresión $f(x) + c$ se denomina *integral indefinida.*

Ejemplo: Si, $f'(x) = 4x^2$

$f(x) = \int (4x^2)\, dx = \frac{4}{3}x^3 + c$

Al valor anterior de $f(x)$ se llega según el siguiente desarrollo, donde se aplica la integral inmediata de una potencia que se explicará más adelante.

$$f(x) = \int (4x^2)\, dx = \frac{4(x^{2+1})}{(2+1)} + c = \frac{4}{3}x^3 + c$$

Ejemplo: Si, $y' = \sqrt{2x+1}$

$$y = \int \sqrt{2x+1}\, dx = \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + c$$

Al valor anterior de y se llega según el siguiente desarrollo, donde debe aplicarse un cambio de variable que se explicará más adelante.

Sea:

$$u = 2x + 1$$

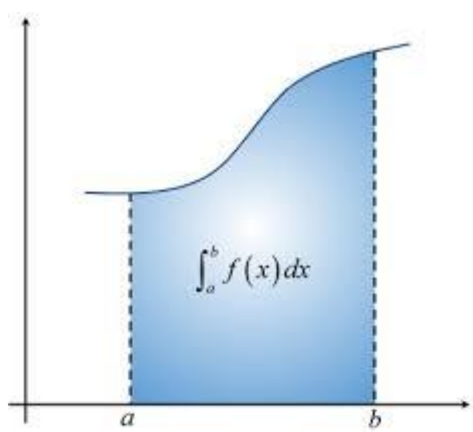
$$\frac{du}{dx} = 2$$

$$dx = \frac{du}{2}$$

$$y = \int \sqrt{2x+1}\, dx = \int \sqrt{u}\, \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\, du = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{2}\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3}$$

$$= \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + c$$

Además de las integrales indefinidas están las *integrales definidas* en un intervalo $[a, b]$, donde $a = límite\ inferior\ y\ b = limite\ superior\ de\ la\ integración$



1.2 REGLAS DE INTEGRALES INDEFINIDAS INMEDIATAS

1.2.1 Integral de cero:

$$\boxed{\int \mathbf{0}\, \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{c}}$$

porque 0 es la derivada de una constante: $\frac{dy}{dx}(c) = 0$

1.2.2 Integral de la diferencial de x:

$$\boxed{\int \boldsymbol{dx} = \int \mathbf{1}\, \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}}$$

porque la derivada de *x* con respecto a *x* es igual a 1.

1.2.3 Integral de una constante k por la diferencial de x.

Se saca la k como factor del símbolo de integración:

$$\boxed{\int \boldsymbol{kdx} = \boldsymbol{k}\int \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{kx} + \boldsymbol{c}}$$

Ejemplo: $\int 10dx = 10\int dx = 10x + c$

Ejemplo: $\int \frac{dx}{4} = \int \frac{1}{4}dx = \frac{1}{4}\int dx = \frac{1}{4}x + c$

1.2.4 Integral potencial simple:

$$\int \boldsymbol{x^n dx} = \frac{\boldsymbol{x^{n+1}}}{\boldsymbol{n+1}} + \boldsymbol{c}$$

Si la función se representa por v:

$$\int \boldsymbol{v^n dv} = \frac{\boldsymbol{v^{n+1}}}{\boldsymbol{n+1}} + \boldsymbol{c}$$

Con $n \in Q\ y\ n \neq -1$

Ejemplo: Calcular $\int x^3dx$

$$\int x^3dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} = \frac{x^4}{4} + c$$

Ejemplo: $\int x^4dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{x^5}{5} + c$

Ejemplo: Calcular $\int x^{-3}dx$

$$\int x^{-3}dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} = \frac{x^{-2}}{-2} = \frac{\frac{1}{x^2}}{-2} = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2x^2} + c$$

Ejemplo: Obtener: $\int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3}dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1}dx = \frac{\frac{1}{x^2}}{-2}dx = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2x^2} + c$

Ejemplo: Obtener: $\int \frac{5}{x^5}dx = \int 5 \cdot \frac{1}{x^5} \cdot dx = 5\int x^{-5}dx = 5 \cdot \frac{x^{-5+1}}{-5+1} = 5 \cdot \frac{x^{-4}}{-4} = \frac{5x^{-4}}{-4} = -\frac{5}{4x^4}$

Ejemplo: Obtener: $\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + c$

Ejemplo: Obtener: $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

Fuente: Matemáticas simplificadas, p. 1323.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x} + c$$

Ejemplo: Obtener: $\int \sqrt{5x}\, dx = \int \sqrt{5} \cdot \sqrt{x}\, dx = \sqrt{5}\int x^{\frac{1}{2}}\, dx = \sqrt{5} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \sqrt{5} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \sqrt{5} \cdot \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} =\cdot$
$\frac{2\sqrt{5}\sqrt{x^3}}{3} = \frac{2\sqrt{5x^3}}{3}$

Ejemplo: Obtener: $\int \frac{3}{\sqrt{x}}dx$

$$\int \frac{3}{x^{\frac{1}{2}}}dx = \int 3x^{-\frac{1}{2}}dx = 3\int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{3x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{3x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{3x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{6x^{\frac{1}{2}}}{1} = 6\sqrt{x} + c$$

Ejemplo: Calcular: $\int -\frac{3dx}{x^3}$

Fuente: Matemáticas simplificadas, p. 1323

$\int -\frac{3dx}{x^3} = -3\int \frac{dx}{x^3} = -3\int \frac{1}{x^3}dx = -3\int x^{-3}dx = -3 \cdot \frac{x^{-3+1}}{-3+1} = \frac{-3x^{-2}}{-2} = \frac{3}{2x^2} + c$

Ejemplo: Calcular$\int \frac{\sqrt[5]{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx$

Debe usarse la notación potencial, luego realizar la división algebraica y, enseguida, aplicar la integral inmediata correspondiente.

$\int \frac{\sqrt[5]{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{x^{\frac{1}{5}}+x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}dx = \int \left(\frac{x^{\frac{1}{5}}}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}\right)dx = \int \left(x^{-\frac{3}{10}} + x^{-\frac{1}{6}}\right)dx = \int x^{-\frac{3}{10}}\, dx + \int x^{-\frac{1}{6}}\, dx =$
$\frac{x^{\frac{7}{10}}}{\frac{7}{10}} + \frac{x^{\frac{5}{6}}}{\frac{5}{6}} = \frac{10}{7}\sqrt[10]{x^7} + \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + c$

Ejemplo: Obtener: $\int 3\sqrt[5]{2x^3}\,dx = \int 3\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[5]{x^3}\,dx = 3\sqrt[5]{2}\int \sqrt[5]{x^3}\,dx = 3\sqrt[5]{2}\int x^{\frac{3}{5}}\,dx = 3\sqrt[5]{2}\cdot \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} = 3\sqrt[5]{2}\cdot\frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} = 3\sqrt[5]{2}\cdot\frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} = 3\sqrt[5]{2}\cdot\frac{5x^{\frac{8}{5}}}{8} = 3\sqrt[5]{2}\cdot\frac{5\sqrt[5]{x^8}}{8} = \frac{3\sqrt[5]{2}\cdot 5\sqrt[5]{x^8}}{8} = \frac{15\sqrt[5]{2x^8}}{8} + c$

Ejemplo: Obtener: $\int (3x-5)^5\,dx$

$v = 3x - 5$

$\frac{dv}{dx} = 3x - 5 = 3$

$dv = 3x - 5 = 3\,dx$

Para que este valor aparezca en el integrando, se lo multiplica por 3 y se saca 1/3 fuera de la integral:

: $\int (3x-5)^5\,dx = \frac{1}{3}\int (3x-5)^5\,3dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-5)^{5+1}}{5+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-5)^6}{6} = \frac{(3x-5)^6}{18} + c$

Ejemplo: Obtener: $\int \sqrt[3]{4x+5}\,dx$

$\int \sqrt[3]{4x+5}\,dx = \int (x+5)^{\frac{1}{3}}dx$

$v = 4x + 5$

$\frac{dv}{dx} = 4$

$dv = 4dx$

Para que este valor aparezca en el integrando, se lo multiplica por 4 y se saca 1/4 fuera de la in integral:

$$\int (x+5)^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{1}{4}\int (x+5)^{\frac{1}{3}}\,4dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{(x+5)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{(x+5)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{16}(x+5)^{\frac{4}{3}}$$
$$= \frac{3}{12}\sqrt[3]{(x+5)^4} + c$$

1.2.5 Integral de una potencial compuesta

Se aplica cuando una función u^n es distinta de la función identidad, por ejemplo: x^2+1
Se suele denominar: Regla generalizada de potencias (cuando el integrando lo componen una función y su derivada):

$$\int [\boldsymbol{g(x)}]^{\boldsymbol{n}}\cdot \boldsymbol{g'(x)dx} = \frac{[\boldsymbol{g(x)}]^{\boldsymbol{n+1}}}{\boldsymbol{n+1}}$$

Si la función se representa por v:

$$\int \boldsymbol{v^n\cdot dv} = \frac{\boldsymbol{v^{n+1}}}{\boldsymbol{n+1}}$$

Con $n \in Q$ y $n \neq -1$

Ejemplo: Calcular $\int 3(3x+4)^5 dx$

$\int 3(3x+4)^5 dx = \int (3x+4)^5 3dx$

$g(x) = (3x+4)$

$g'(x) = 3$ entonces: $g'(x)\ dx = 3\ dx$

Como el valor de esta derivada está en el integrando se puede aplicar la integral inmediata igual a: $\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$.

$$\int 3(3x+4)^5 dx = \int (3x+4)^5 3dx = \frac{(3x+4)^{5+1}}{5+1} = \frac{(3x+4)^6}{6} + c$$

Ejemplo: Calcular $\int [x^4+3x]^{30}\,(4x^3+3)\ dx$
Fuente: Cálculo diferencial e integral de Purcell y Varberg.

$g(x) = x^4 + 3x$

$g'(x) = 4x^3 + 3$ entonces $g'(x)dx = (4x^3+3)dx$

Ambos elementos forman parte del integrando. Por tanto:

$$\int [x^4+3x]^{30}\,(4x^3+3)\ dx = \frac{[x^4+3x]^{30+1}}{30+1} = \frac{[x^4+3x]^{31}}{31} + c$$

Ejemplo: Calcular $\int [x^3+6x]^5\,(6x^2+12)dx$
Fuente: Cálculo diferencial e integral de Purcell y Varberg.

Factorizando previamente:

$$\int [x^3+6x]^5\,(6x^2+12)dx = \int [x^3+6x]^5\,2(3x^2+6)dx = 2\int [x^3+6x]^5\,(3x^2+6)dx$$

$g(x) = x^3 + 6x$

$g'(x) = 3x^2 + 6$

Ambos elementos forman parte del integrando. Por tanto:

$$2\int [x^3+6x]^5\,(3x^2+6)dx = (2)\frac{(x^3+6x)^6}{6} = \frac{(x^3+6x)^6}{3} + c$$

Ejemplo: Calcular: $\int \frac{x^{n+1}dx}{(ax^n+b)^m}$
$v = ax^n + b$

$$\frac{dv}{dx} = ax^n + b = anx^{n-1}$$
$$dv = ax^n + b = anx^{n-1}dx$$

Para que esta expresión esté en el integrando falta an por lo que se agrega al integrando y se saca $\frac{1}{an}$ fuera de la integral:

$$\int \frac{x^{n+1}dx}{(ax^n+b)^m} = \int (ax^n+b)^{-m} \cdot x^{n+1}dx = \frac{1}{an}\int (ax^n+b)^{-m} \cdot anx^{n+1}dx$$
$$= \frac{1}{an} \cdot \frac{(ax^n+b)^{-m+1}}{-m+1} = \frac{1}{an(-m+1)(ax^n+b)^{m-1}} + c$$

Ejemplo: $\int e^{3x}\,(1-e^{3x})\,^2dx$

$v = 1 - ex^{3x}$

$$\frac{dv}{dx} = -e^{3x} \cdot 3$$

$dv = -e^{3x} \cdot 3\;dx$

$$\int e^{3x}\,(1-e^{3x})\,^2dx = -\frac{1}{3}\int (1-e^{3x})\,^2\,(-e^{3x}\;\cdot 3)dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(1-e^{3x})^{2+1}}{2+1} = \frac{(1-e^{3x})^3}{9} + c$$

Ejemplo: $\int \frac{(\sqrt{x}+6)^4}{\sqrt{x}}\;dx$

$v = \sqrt{x} + 6$

Para derivar una raíz cuadrada:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$dv = \frac{1}{2\sqrt{x}}\;dx$$

$$\int \frac{\left(\sqrt{x}+6\right)^4}{\sqrt{x}}\;dx = \int \left(\sqrt{x}+6\right)^4 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\int \left(\sqrt{x}+6\right)^4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = 2 \cdot \frac{\left(\sqrt{x}+6\right)^{4+1}}{4+1}$$
$$= \frac{2\left(\sqrt{x}+6\right)^5}{5} + c$$

1.2.6 Integral de una constante por una función:

$$\int \boldsymbol{kf(x)dx = k\int f'(x)dx}$$

Si la función se representa por v:

$$\int \boldsymbol{kv = k\int dv}$$

Ejemplo: Calcular$\int 150\ dx = 150 \int\ dx = 150\ x + c$

Ejemplo: Calcular $\int \frac{dx}{100} = \int \frac{1}{100}\ dx = \frac{1}{100}\int\ dx = \frac{1}{100}\ x + c$

Ejemplo: Calcular $\int \sqrt{3} = \sqrt{3} \int\ dx = \sqrt{3}\ x + c$

Ejemplo: Calcular $\int \pi^3 = \pi^3 \int\ dx = \pi^3\ x + c$

Ejemplo: Calcular $\int 3ab^2x^4dx = 3ab^2\int x^4dx = 3ab^2 \cdot \frac{x^{4+1}}{4+1} = \frac{3ab^2x^5}{5} + c$
Fuente: matemáticas simplificadas, p. 1323.

1.2.7 Integral de una suma o diferencia de funciones:

$$\int \boldsymbol{f[(x)dx + g(x)dx - h(x)dx] = \int f(x)dx + \int g(x)dx - \int h(x)dx}$$

Si las funciones se representan como u y v:

$$\int \boldsymbol{[u + v - w]dx = \int udx + \int vdx - \int wdx}$$

Ejemplo: Calcular $\int (3x^2 - 2x + 4)dx$

$$\int (3x^2 - 2x + 4)dx = \int 3(x^2)dx - \int (2x)dx + \int 4dx = 3\int (x^2)dx - 2\int (x)dx + 4\int dx$$
$$= \frac{3x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 4x = x^3 - x^2 + 4x + c$$

Ejemplo: Calcular $\int (3x^2 + 4x)dx$

$$\int (3x^2 + 4x)dx = \int 3(x^2)dx + \int 4x\ dx = 3\int (x^2)dx + 4\int x\ dx = 3\left(\frac{x^3}{3} + c_1\right) + 4\left(\frac{x^2}{2} + c_2\right)$$
$$= x^3 + 2x^2 + (3c_1 + 4c_2) = x^3 + 2x^2 + c$$

Nota: Las dos constantes arbitrarias $c_1\ y\ c_2$ se combinan en una sola constante, c.

Ejemplo: Calcular $\int \left(\frac{1}{x^5}+\frac{3}{2x^4}-\frac{6}{x^3}\right)dx$

$$\int \left(\frac{1}{x^5}+\frac{3}{2x^4}-\frac{6}{x^3}\right)dx = \int \frac{dx}{x^5} \pm \frac{3dx}{x^4}-\frac{6dx}{x^3} = \int x^{-5}dx + \int \frac{3}{2}x^{-4}dx - \int 6x^{-3}dx =$$
$$= \int x^{-5}dx + \frac{3}{2}\int x^{-4}dx - 6\int x^{-3}dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1}+\frac{3}{2}\cdot\frac{x^{-4+1}}{-4+1}-6\cdot\frac{x^{-3+1}}{-3+1}$$
$$= \frac{x^{-4}}{-4}+\frac{3}{2}\cdot\frac{x^{-3}}{-3}-6\cdot\frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{4x^4}-\frac{1}{2x^3}+\frac{3}{x^2}+c$$

Ejemplo: Calcular $\int (x^3-2)^2dx$

$$\int (x^3-2)^2dx = \int (x^6-4x^3+4)dx = \int x^6dx - 4\int x^3dx + 4\int dx = \frac{x^{6+1}}{6+1}-4\cdot\frac{x^{3+1}}{3+1}+4x$$
$$= \frac{x^7}{7}-4\cdot\frac{x^4}{4}+4x = \frac{x^7}{7}-x^4+4x+c$$

Ejemplo: Calcular $\int \frac{x^4-6x^3-7x}{x}dx$

$$\int \frac{x^4-6x^3-7x}{x}dx = \int \frac{x^4}{x}dx - \int \frac{6x^3}{x}dx - \int \frac{7x}{x}dx = \int x^3dx - 6\int x^2dx - \int 7dx$$
$$= \frac{x^4}{4}-\frac{6x^3}{3}-7x = \frac{x^4}{4}-2x^3-7x+c$$

Ejemplo: Calcular $\int \frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}}dx$

$$\int \frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{\left(\sqrt{5}\right)^2-2\sqrt{5}\sqrt{x}+\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{\left(\sqrt{5}\right)^2}{\sqrt{x}}dx - \int \frac{2\sqrt{5}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx + \int \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}}dx$$
$$= \left(\sqrt{5}\right)^2\int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx - 2\sqrt{5}\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}dx + \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = 5\int x^{-\frac{1}{2}}dx - 2\sqrt{5}\int dx + \int x^{\frac{1}{2}}\,dx$$
$$= \frac{5x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}-2\sqrt{5}x+\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{5x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-2\sqrt{5}x+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = 10\sqrt{x}-2\sqrt{5}x+\frac{2\sqrt{x^3}}{3}+c$$

1.2.8 Integral logarítmica simple:

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{dx}{x}\,dx = \ln x + c}$$

Ejemplo: Calcular $\int \frac{5}{x}\,dx = 5\int \frac{1}{x}\,dx = 5ln|x| + c$

Ejemplo: Calcular $\int \frac{9}{2x}\,dx = \frac{9}{2}\int \frac{1}{x}\,dx = \frac{9}{2}\ln x + c$

Este resultado se puede expresar como:

$= \ln x^{\frac{9}{2}} + c = \ln \sqrt{x^9} + c$

$$\int \frac{x^3 + 3x^2 - 2x + 7}{4x} dx = \int \frac{x^3}{4x} dx + \int \frac{3x^2}{4x} dx - \int \frac{2x}{4x} dx + \int \frac{7}{4x} dx =$$
$$= \frac{1}{4} \int x^2 dx + \frac{3}{4} \int x\, dx - \frac{1}{2} \int dx + \frac{7}{4} \int \frac{1}{x} dx$$
$$= \frac{1}{4} \frac{x^3}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} x + \frac{7}{4} \ln x + c = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{8} - \frac{x}{2} + \frac{7}{4} \ln x + c$$

1.2.9 Integral logarítmica compuesta de v:

$$\boldsymbol{\int \frac{v'}{v}\, dv = ln\, |v| + c}$$

O bien:

$$\boldsymbol{\int \frac{dv}{v} = ln\, |v| + c}$$

Si la expresión que se encuentra bajo el signo de integral es una fracción cuyo numerador es la derivada del denominador, entonces la integral es el logaritmo natural del denominador.

<u>Ejemplo</u>: Calcular $\int \frac{\boldsymbol{(2x+3)\, dx}}{\boldsymbol{x^2+3x+1}}$

Hay que comprobar que $2x + 3$ es la derivada de $v = (x^2 + 3x + 1)$.

$$\frac{dv}{dx}(x^2 + 3x + 1) = 2x + 3 + 0 = 2x + 3 \rightarrow dv = (2x + 3)\, dx$$

Como se comprobó el requisito, entonces se puede aplicar la fórmula inmediata:

$$\int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 1} dx = ln|x^2 + 3x + 1| + c$$

<u>Ejemplo</u>: Obtener $\int \frac{3x^2 dx}{x^3+1}$

Hay que comprobar que $3x^2$ es la derivada de $v = (x^3 + 1)$.

$$\frac{dv}{dx}(x^3 + 1) = 3x^2 \rightarrow dv = 3x^2 dx$$

Como se comprobó el requisito, entonces:

$$\int \frac{3x^2 dx}{x^3 + 1} = ln|x^3 + 1| + c$$

Ejemplo: Calcular: $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$

$$v = (x^2+1)$$
$$\frac{dv}{dx}(x^2+1) = 2x \rightarrow dv = 2x\,dx$$

Pero no es el valor del numerador de la fracción, por lo que se divide ambos miembros entre 2:

$$\frac{dv}{2} = \frac{2xdx}{2} = x\,dx$$
$$\frac{dv}{2} = x\,dx$$
$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \int \frac{\frac{dv}{2}}{v} = \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v} = \frac{1}{2}ln|v| + c = \frac{1}{2}ln|x^2+1| + c$$

Nota: El procedimiento anterior es equivalente a haber dividido el numerador y el denominador del integrando entre 2 y luego sacar ½ fuera del signo de integración, así:

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \int \frac{\frac{xdx}{2}}{\frac{(x^2+1)}{2}} = \int \frac{2x\,dx}{2(x^2+1)} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)}$$

Ejemplo: Calcular: $\int \frac{3x\,dx}{4x^2+1}$

$$\int \frac{3x\,dx}{4x^2+1} = 3\int \frac{x\,dx}{4x^2+1}$$

$$v = (4x^2+1)$$
$$\frac{dv}{dx}(4x^2+1) = 8x \rightarrow dv = 8x\,dx$$

Pero no es el valor del numerador de la fracción, por lo que se divide ambos miembros entre 8:

$$\frac{dv}{8} = \frac{8xdx}{8} = x\,dx$$

$$\frac{dv}{8} = x\,dx$$
$$\int \frac{3x\,dx}{4x^2+1} = 3\int \frac{x\,dx}{4x^2+1} = 3\int \frac{\frac{dv}{8}}{v} = \frac{3}{8}\int \frac{dv}{v} = \frac{3}{8}ln|v| + c = \frac{3}{8}ln|4x^2+1| + c$$

Ejemplo: Calcular $\int ctg\,(x)dx = \cos \int \frac{\cos x}{sen\,x}dx$

$$v = sen\,(x)$$

$$\frac{dv}{dx}sen\,x = \cos\,x$$

Como $cos\ (x)$ es la derivada de $sen\ (x)$:

$\int ctg\ (x)\ dx = \ln|sen\ x| + c$

Ejemplo: Calcular $\int \frac{e^x}{e^x+9}\ dx$

$v = e^x + 9$

$$\frac{dv}{dx} = e^x \rightarrow dv = e^x dx$$

$$\int \frac{e^x}{e^x+9}\ dx = \ln|e^x + 9| + c$$

Ejemplo: Obtener $\int \frac{1}{(x+5)\ln(x+5)}\ dx$

$v = \ln(x+5)$

$$\frac{dv}{dx}\ln(x+5)\ \ es\ la\ derivada\ de\ (x+3) dividida\ entre\ (x+3)$$

$$\frac{dv}{dx}\ln(x+5) = \frac{1}{x+5}$$

$dv\ln(x+5) = \frac{1}{x+5}\ dx$ que forma parte del integrando, por tanto:

$$\int \frac{1}{(x+5)\ln(x+5)}\ dx = \ln|\ln\ (x+5)| + c$$

Ejemplo: Calcular $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\ dx$

Comprobar que el numerador del integrando es la derivada del denominador:

$v = (e^x + e^{-x})$

Para calcular la derivada de e^x se calcula la derivada del exponente que es 1 y se pone como coeficiente de e^x. La derivada de e^{-x} será, entonces -1e^x.

$$\frac{dv}{dx}(e^x + e^{-x}) = 1e^x - 1e^{-x} = e^x - e^{-x}$$

Como efectivamente es la derivada del denominador se aplica: $\int \frac{dv}{v}\ = ln\ |v| + c$

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\ dx = ln|e^x + e^{-x}| + c$$

Ejemplo: Calcular $\int \frac{27x^2+30x+3}{3x^3+5x^2+x-1}\ dx$

$$\int \frac{27x^2+30x+3}{3x^3+5x^2+x-1}\ dx$$

$v = (3x^3+5x^2+x-1)$

$$\frac{dv}{dx}(3x^3+5x^2+x-1 = 9x^2+10x+1$$
$$dv = (9x^2+10x+1)dx$$

Se observa que si ambos miembros de la derivada se multiplican por 3 se obtiene el numerador de la fracción y se puede aplicar directamente la regla:

$$\int \frac{dv}{v} = ln\ |v| + c$$

$3dv = (27x^2+30x+3)dx$

$$\int \frac{(27x^2+30x+3)}{(3x^3+5x^2+x-1}\ dx = \int \frac{3dv}{v} = 3\int \frac{3dv}{v} = 3ln\ |v| + c = 3ln\ |3x^3+5x^2+x-1| + c$$

Ejemplo: Calcular $\int \frac{x^2+2}{x+1}\ dx$

Como el numerador del integrando es de grado superior al del denominador, corresponde efectuar la división entre ambos términos, teniendo presente que en el dividendo deben estar todas las potencias en orden descendente. En el numerador falta la potencia x, por lo que a x^2+2 se le agrega $0x$ y queda x^2+0x+2.

$$(x^2+0x+2):(x+1) = x-1+\frac{3}{x+1}$$

$\underline{x^2+\quad x}$
$\quad -x+\ 2$
$\quad \underline{-x-\ 1}$
$\quad\quad 3$

$$\int \frac{x^2+2}{x+1}\ dx = \int x-1+\frac{1}{x+1}\ dx = \int xdx - \int dx + 3\int \frac{1}{x+1}dx = \frac{x^2}{2} - x + 3ln|x+1| + c$$

Ejemplo: Obtener $\int \frac{x^3}{x+1}\ dx$

Como el numerador del integrando es de grado superior al del denominador, corresponde efectuar la división entre ambos términos, teniendo presente que en el dividendo deben estar todas las potencias en orden descendente. En el numerador falta la potencia $x^2\ y\ x$, por lo que a x^3 se le agrega $0x^2$ y $0x$ y queda x^3+0x^2+0x+0.

$$(x^3+0x^2+0x+0):(x+1)=x^2-x+1-\frac{1}{x+1}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{x^3+\quad x^2} \\
\qquad -x^2+0x \\
\qquad \underline{-x^2-\ x} \\
\qquad\qquad\quad x+0 \\
\qquad\qquad\quad \underline{x+1} \\
\qquad\qquad\quad\ -1
\end{array}$$

$$\int \frac{x^3}{x+1}\,dx=\int x^2-x+1-\frac{1}{x+1}\,dx$$

$$=\int x^2dx-\int x\,dx+\int dx-\int \frac{1}{x+1}dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+ln|x+1|+c$$

1.2.10 Integral exponencial simple con el número e^x:

$$\int \boldsymbol{e^x\ dx=e^x+c}$$ Si la función se representa por v: $$\int \boldsymbol{e^v\ dv=e^v+c}$$

Ejemplo: $\int 2e^x\ dx=2\int e^x\ dx=2e^x+c$

Ejemplo: $\int e^{7x}\ dx$

$$v=7x$$
$$\frac{dv}{dx}=7$$
$$dv=7\,dx$$

$$\int e^{7x}\ dx=\frac{1}{7}\int e^{7x}\,7\,dx=\frac{1}{7}\ e^{7x}+c$$

Ejemplo: $\int \frac{1}{e^{2x}}dx$

$$\int \frac{1}{e^{2x}}dx=\int e^{-2x}\,dx$$

$$v=-2x$$
$$\frac{dv}{dx}=-2$$

$$dv=2dx$$
$$dx=\frac{dv}{-2}$$

$$\int \frac{1}{e^{2x}}dx=\int e^{-2x}\,dx=\int e^v\cdot\frac{dv}{-2}=-\frac{1}{2}\int e^v\cdot dv=-\frac{1}{2}\int e^{-2x}+c=\frac{1}{2e^{2x}}+c$$

Ejemplo: $\int e^{\frac{x}{2}}\ dx$

$$v = \frac{x}{2} = \frac{1}{2}x$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$dv = \frac{1}{2}dx$$

$$\int e^{\frac{x}{2}}\ dx = 2\int e^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}dx = 2e^{\frac{x}{2}} + c$$

Ejemplo: $\int \frac{5\ dx}{e^{7x}}\ dx$

$$\int \frac{5\ dx}{e^{7x}}\ dx = 5\int e^{-7x}\ dx$$

$$v = -7x$$
$$\frac{dv}{dx} = -7$$
$$dv = -7\ dx$$

$$\int \frac{5\ dx}{e^{7x}}\ dx = 5\ \int e^{-7x}\, dx = \frac{5}{-7}\ \int e^{-7x}\,(-7)dx = -\frac{5}{7}\ e^{-7x} + c = -\frac{5}{7e^{7x}} + c$$

Ejemplo: $\int e^{2-3x}\ dx$

$$v = 2 - 3x$$
$$\frac{dv}{dx} = -3$$
$$dv = -3\ dx$$

$$\int e^{2-3x}\ dx = -\frac{1}{3}\int e^{2-3x}\,(-3)dx = -\frac{1}{3}\ e^{2-3x} + c$$

Ejemplo: $\int x^2 e^{x^3-5}\ dx$

$$v = x^3 - 5$$
$$\frac{dv}{dx} = 3x^2$$
$$dv = 3\ x^2 dx$$

$$\int x^2 e^{x^3-5}\ dx = \int e^{x^3-5}\, x^2\ dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3-5}\,(3)x^2 dx = \frac{1}{3}\ e^{x^3-5} + c$$

1.2.11 Integral exponencial compuesta con la función e^u:

$$\int \boldsymbol{u'}\ \boldsymbol{e^u}\ \boldsymbol{du} = \boldsymbol{e^u} + \boldsymbol{c}$$

pero siempre que u' sea la derivada de e^u.

Ejemplo: $\int \boldsymbol{2xe^{x^2}}\ \boldsymbol{dx}$

En este ejemplo, $u = x^2$ y $u' = 2x$, es decir, se cumple que $2x$ es la derivada de x^2, por lo que se puede aplicar la fórmula inmediata: $e^u + c$.

$$\int 2xe^{x^2}\ dx = e^{x^2} + c$$

Ejemplo: $\int 2x^2e^{x^3}\ dx$

$$\int 2x^2e^{x^3}\ dx = 2\int e^{x^3}x^2\ dx$$

$u = x^3$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2$$

$$du = 3x^2dx$$

$$\frac{du}{3} = x^2dx$$

$$\int \boldsymbol{2x^2e^{x^3}}\ \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{2}\int \boldsymbol{e^{x^3}x^2}\ \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{2}\int \boldsymbol{e^u}.\frac{du}{3} = \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{3}}\int \boldsymbol{e^u}.du = \frac{2\boldsymbol{e^{x^3}}}{3} + c$$

1.2.12 Integral exponencial simple con cualquier número a:

$$\int \boldsymbol{a^x}\ \boldsymbol{dx} = \frac{\boldsymbol{a^x}}{\ln \boldsymbol{a}} + \boldsymbol{c}$$

Si la función se representa por v, entonces:

$$\int \boldsymbol{a^v}\ \boldsymbol{dv} = \frac{\boldsymbol{a^v}}{\ln \boldsymbol{a}} + \boldsymbol{c}$$

Con $a > 0$

Ejemplo: $\int \boldsymbol{2^x}\ \boldsymbol{dx}$

Aquí $a = 2$

$v = x$

$$\frac{dv}{dx} = 1$$

$$dv = dx$$

Aplicando:
$$\int a^v \ dv = \frac{a^v}{\ln a} + c$$

$$\int 2^x \, dx = \frac{2^x}{\ln 2} + c$$

Ejemplo: Calcular $\int 2^{7x} \, dx$

Aquí $a = 2$
$v = 7x$
$\frac{dv}{dx} = 7$

$dv = \ 7dx$

Pero en el integrando está solo dx, o sea falta multiplicar este diferencial por 7:

$$\int 2^{7x} \, dx = \frac{1}{7} \int 2^{7x} \cdot 7 \, dx$$

Aplicando:
$$\int a^v \ dv = \frac{a^v}{\ln a} + c$$

$$\int 2^{7x} \, dx = \frac{1}{7} \int 2^{7x} \cdot 7 \, dx = \frac{1}{7} \frac{2^{7x}}{\ln a} + c = \frac{2^{7x}}{7 \ln a} + c$$

Ejemplo: Calcular $\int x^2 5^{x^3} \, dx$

Reacomodando los factores del integrando:

$$\int 5^{x^3} \, x^2 dx$$

Aquí $a = 5$
$v = x^3$
$\frac{dv}{dx} = 3x^2$

$dv = \ 3x^2 dx$

Pero en el integrando está solo $x^2 dx$, o sea, falta multiplicar por 3:
$$\int 5^{x^3} x^2 \, dx = \frac{1}{3} \int 5^{x^3} 3x^2 \, dx$$

Aplicando: $\int a^v \ dv = \frac{a^v}{\ln a} + c$

$$\int 5^{x^3} x^2\, dx = \frac{1}{3}\int 5^{x^3} 3x^2\, dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{5^{x^3}}{\ln a} + c = \frac{5^{x^3}}{3\ln a} + c$$

Ejemplo: Calcular: $\int 3^x\, e^x dx$

Aquí surge la duda si utilizar $\int a^v\ dv$ o $\int e^v\ dv$, pero por la propiedad de las potencias que dice que: $(ab)^2 = a^2 b^2$:

$3^x e^x = (3e)^x$

Por lo que se usa: $\int a^v\ dv = \frac{a^v}{\ln a} + c$

Donde:
$a = 3e$
$v = x$
$\frac{dv}{dx} = 1x^2$

$dv = \ dx$

Aplicando: $\int a^v\ dv = \frac{a^v}{\ln a} + c$

$$\int 3^x e^x\, dx = \int (3e)^x\, dx = \frac{(3e)^x}{\ln 3e} + c$$

Este resultado se puede expresar como:

$$\frac{(3e)^x}{\ln 3e} + c = \frac{3^x e^x}{\ln 3 + lne} + c = \frac{3^x e^x}{\ln 3 + 1} + c$$

Ejemplo: Calcular: $\int 9^x\, e^{2x} dx$

Aquí surge la duda si utilizar $\int a^v\ dv$ o $\int e^v\ dv$, pero por la propiedad de las potencias que dice que: $(ab)^2 = a^2 b^2$:

$9^x e^{2x} = (3^{2x})(x)^{2x} = (3x)^{2x}$

$$\int 9^x\, e^{2x} dx = \int (3e)^{2x}\, dx =$$

Donde:
$a = 3e$
$v = 2x$
$\frac{dv}{dx} = 2$

$dv = \ 2dx$

$$\int (3e)^{2x}\, dx = \frac{1}{2}\int (3e)^{2x}\, 2dx =$$

Aplicando: $\int a^v\ dv = \frac{a^v}{\ln a} + c$

$$\int (3e)^{2x}\, dx = \frac{1}{2}\frac{(3e)^{2x}}{\ln 3e} + c = \frac{(3e)^{2x}}{2\ln 3e} + c = \frac{(3e)^{2x}}{2\,(\ln 3 + lne)} + c = \frac{(3e)^{2x}}{2\,(\ln 3 + 1)} + c$$
$$= \frac{(3e)^{2x}}{2\ln 3 + 2)} + c = \frac{(3e)^{2x}}{\ln 3^2 + 2)} + c = \frac{(3e)^{2x}}{\ln 9 + 2} + c$$

Ejemplo: Calcular $\int \frac{2^x}{3^x}\ dx$

$$\int \frac{2^x}{3^x}\ dx = \int (\frac{2}{3})^x\ dx$$

Donde:

$a = \frac{2}{3}$

$v = x$

$\frac{dv}{dx} = 1$

$dv = \ dx$

Aplicando: $\int a^v\ dv = \frac{a^v}{\ln a} + c$

$$\int (\frac{2}{3})^x\, dx = \frac{(\frac{2}{3})^x}{\ln \frac{2}{3}} + c = \frac{\frac{2^x}{3^x}}{ln2 - ln3} + c = \frac{2^x}{3^x ln2 - ln3} + c$$

1.2.13 Integral exponencial compuesta con cualquier número a^u:

$$\boxed{\int \boldsymbol{u'\ a^u\ du = \frac{a^u}{\ln a} + c}}$$

pero siempre que u' sea la derivada de a^u.

Ejemplo: $\int \mathbf{2 \cdot 5^{2x+1}}\, \boldsymbol{dx}$

Como 2 es la derivada de $u = 2x + 1, y\ a = 5$, se puede aplicar la fórmula inmediata: $\frac{a^u}{lna} + c$

$$\int 2 \cdot 5^{2x+1}\, dx = \frac{5^{2x+1}}{\ln 5} + c$$

Ejemplo: $\int a^{nx}\, dx$

$v = nx$

$\frac{dv}{dx} = n$

$dv = ndx$
$dx = \frac{dv}{n}$

$\int a^{nx}\, dx = \int a^v \frac{dv}{n} = \frac{1}{\mathrm{n}} \int a^v\, dv = \frac{1}{n} \cdot \frac{a^v}{\ln a} + \mathrm{c} = \frac{a^{nx}}{\mathrm{n}\ln a} + \mathrm{c}$

1.2.14 Integral de la suma algebraica de funciones:

$$\boxed{\int (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\mathbf{dx} + \int \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\mathbf{dx} - \int \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}}$$

Ejemplo: $\int (2x^3 + 5x^2 - 2x + 1)\, dx$

$$\begin{aligned}\int (2x^3 + 5x^2 - 2x + 1)\, dx &= \int (2x^3)dx + \int (5x^2)dx - \int 2x\, dx + \int 1\, dx \\ &= 2\int (x^3)dx + 5\int (x^2)dx - 2\int x\, dx + 1\int dx \\ &= 2 \cdot \frac{x^4}{4} + 5 \cdot \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + x + c = \frac{x^4}{2} + \frac{5x^3}{3} - x^2 + x + c\end{aligned}$$

1.2.15 Integral *seno* simple:

$\int sen\, x\, dx = -\cos x + c$

Ejemplo: $\int 6\, sen\, x\ \ dx$

$$\int 6\, sen\, x\, dx = 6\int sen\ \ x\, dx = 6\,(-\cos x) = -6\cos x + c$$

1.2.16 Integral *seno* compuesta:

$\int u' sen\, u\, dx = -\cos u + c$, pero siempre que u' sea la derivada de $sen\, u$.

Ejemplo: $\int 6\, sen\, 6x\, dx$

$u = 6x;\ u' = 6$. Se cumple que 6 es la derivada de $u = 6x$, por lo que se puede aplicar la fórmula inmediata.

$$\int 6\, sen\, 6x\, dx = -\cos 6x + c$$

1.2.17 Integral *coseno* simple:

$\int cosx\ \ dx = sen\, x + c$

Ejemplo: $\int \frac{2}{3} \cos x\ \ dx$

$$\int \frac{2}{3} \cos x\ \ dx = \frac{2}{3} \int \cos x\ \ dx = \frac{2}{3} sen\, x + c$$

1.2.18 Integral $\boldsymbol{coseno}$ compuesta:

$\int u' cos\, u\, du = sen\, u + c$ pero siempre que u' sea la derivada de $cos\, u$.

Ejemplo: $6\int x^2 \cos 2x^3\, dx$

$$6\int x^2 \cos 2x^3\, dx = \int 6x^2 \cos 2x^3\, dx$$

Como $6x^2$ es la derivada de $u = 2x^3$, se puede aplicar la fórmula inmediata: $sen\, u + c$

$$6\int x^2 \cos 2x^3\, dx = \int 6x^2 \cos 2x^3\, dx = \ sen\ 2x^3 + c$$

1.2.19 Integral secante al cuadrado de x:

$$\int sec^2 x\, dx = tg\ x + c$$

1.2.20 Integral cosecante al cuadrado de x:

$$\int csc^2 x\, dx = -ctg\ x + c$$

1.2.21 Integral tangente de x por secante de x:

$$\int tg\ x \sec x\, dx = sec\ x + c$$

1.2.22 Integral cotangente de x por cosecante de x:

$$\int ctg\ x \csc x\, dx = -csc\ x + c$$

1.2.23 Integral tangente:

$$\int tg\ x\ dx = -ln \cos x + c = \ln \sec x + c$$

Nota: Se verá su demostración como ejercicio de cambio de variable.

1.2.24 Integral cotangente:

$$\int ctg\ xdx = \ln sen\ \ x + c$$

Nota: Se verá su demostración como ejercicio de cambio de variable.

1.2.25 Integral $\boldsymbol{tangente}$ simple:

$\int (1 + tg^2 x)\, dx = tg\ x + c$

A este mismo valor se llega si se integra:

$\int \frac{1}{cos^2x}\ dx = tg\ x + c$

<u>Ejemplo</u>: $\int (2 + 2tg^2x)\, dx$

$$\int (2 + 2tg^2x)\, dx = \int 2(1 + tg^2x)\, dx = 2\int (1 + tg^2x)\, dx = 2tg\ x + c$$

1.2.26 Integral $\boldsymbol{tangente}$ compuesta:

$\int u'(1 + tg^2u)\ \ dx = tg\ u + c$ pero siempre que u' sea la derivada de $1 + tg^2u$.
A este mismo valor se llega si se integra:
$\int \frac{u'}{cos^2u}\ du = tg\ u + c$

Ejemplo: $\int \frac{3}{cos^2 3x}\ dx$

Como se cumple que 3 es la derivada de $u = 3x$, se puede aplicar la integral inmediata.

$\int \frac{3}{cos^2 3x}\ dx = tg\ (3x) + c$

Ejemplo: $\int 2x(1 + tg^2x^2)\ \ dx$

$u = x^2;\ u' = 2x$

$$\int 2x(1 + tg^2x^2)\ \ dx = tg\ x^2 + c$$

1.2.27 Integral $\boldsymbol{cotangente}$ simple:

$\int \frac{1}{sen^2x} dx = -ctg\ x + c$. También:

$$\int csc^2\, dx = -ctg\ x + c$$

$\int (1 + ctg^2x)\, dx = -ctg\ x + c$

1.2.28 Integral $\boldsymbol{cotangente}$ compuesta:

$\int \frac{u'}{sen^2x} dx = -ctg\ u + c.$.

$\int u'(1 + ctg^2u)\ \ du = ctg\ u + c$ pero siempre que u' sea la derivada de $1 + ctg^2u$.

1.2.29 Integral $\boldsymbol{arcoseno}$ simple:

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arc\,\mathrm{sen}\, x + c$

1.2.30 Integral $\boldsymbol{arcoseno}$ compuesta:

$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} du + c$, pero$=$ $arc \operatorname{sen} u$ siempre que u' sea la derivada de u^2.

1.2.31 Integral $\boldsymbol{arcotangente}$ simple:

$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arc \operatorname{tg} x + c$

1.2.32 Integral $\boldsymbol{arcotangente}$ compuesta:

$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}} du = arc\ tgu + c$, pero siempre que u' sea la derivada de u^2.

1.2.33 Integral de secante de x:

$\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + tg\ x| + c$

1.2.34 Integral de cosecante de x:

$\int csc\, dx = \ln|\csc x - ctg\ x| + c$

1.2.35 Integral de secante de x:

$\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + tg\ x| + c$

1.2.36 Patrón general de integración

Integral original → Reescribir → Integrar → Simplificar

Ejemplos:

$$\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3}\, dx = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2} + c$$

$$\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int 2senx\, dx = 2\int senx\, dx = 2(-cosx) = -2cosx + c$$

1.3 INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE O POR SUSTITUCIÓN

Algunas integrales no se pueden o son más difíciles de resolver por fórmulas de integración inmediata. En estos casos, se debe transformar la integral a una de las siguientes expresiones:

1.3.1 Integral logarítmica simple:

$$\boxed{\int \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\, \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{ln}|\boldsymbol{x}| + \boldsymbol{c}}$$

O bien:

1.3.2 Integral de una potencial simple:

$$\boxed{\int \boldsymbol{x^n dx} = \frac{\boldsymbol{x^{n+1}}}{\boldsymbol{n+1}} + \boldsymbol{c}}$$

Los pasos son los siguientes:

- Se elige una de las expresiones del integrando como una nueva variable *u.* Si el integrando es una fracción, se elige la variable *u* como la expresión del denominador.
- Se obtiene la diferencial de *u*, es decir, se calcula *du*, y se la despeja.
- Se sustituye todo por *u*.
- Calcular la integral.
- Se reemplaza la variable *u* por la expresión original.

Ejemplo: $\int 3(3x+4)^5 dx$

Solución:

Como 3 es la derivada de (3x+4), se pudo aplicar la integral inmediata correspondiente para hallar la integral. Pero se va a suponer que 3 no es la derivada para aplicar el método de cambio de variable.

Sea u la nueva variable que se va a integrar.

$u = 3x + 4$

$\frac{du}{dx} = 3 + 0 = 3$

$du = 3\ dx$. Como esta expresión está en el integrando, no es necesario despejar dx.

Reacomodando los términos y sustituyendo:

$$\int 3(3x+4)^5 dx = \int (3x+4)^5 3\ dx = \int (u)^5 du = \frac{u^{5+1}}{5+1} + c = \frac{u^6}{6} + c = \frac{(3x+4)^6}{6} + c$$

Ejemplo: $\int 2(2+x^2)^{\frac{3}{2}}\, x\, dx$
Fuente: Matemáticas simplificadas, p. 1324.

Solución:
Sea $u = 2 + x^2$

$$\frac{du}{dx} = 0 + 2x$$

$du = 2x\, dx$. Como esta expresión está en el integrando, no es necesario despejar dx.

Reacomodando los términos y sustituyendo:

$$\int 2(2+x^2)^{\frac{3}{2}}\, x\, dx = \int (2+x^2)^{\frac{3}{2}}\, 2x\, dx = \int (u)^{\frac{3}{2}} du = \frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + c = \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c = \frac{2u^{\frac{5}{2}}}{5} + c$$

Reemplazando $u = 2 + x^2$

$$\int 2(2+x^2)^{\frac{3}{2}}\, x\, dx = \frac{2(2+x^2)^{\frac{5}{2}}}{5} + c = \frac{2\sqrt{(2+x^2)^5}}{5} + c$$

Ejemplo: $\int \sqrt{m+nx}\;\, dx$
Fuente: Matemáticas simplificadas, p. 1324.

Solución **método 1**:

Sea $u = m + nx$

$$\frac{du}{dx} = 0 + n = n$$

$du = n\, dx$

Pero como esta expresión no está en el integrando, la función se multiplica y divide entre n:

$$\int \frac{n\sqrt{m+nx}}{n}\;\, dx = \frac{1}{n}\int n\sqrt{m+nx}\, dx = \frac{1}{n}\int \sqrt{m+nx}\, ndx = \frac{1}{n}\int u^{\frac{1}{2}}\;\, du = \frac{1}{n}\frac{(u)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{n}\frac{(u)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2(u)^{\frac{3}{2}}}{3n} = \frac{2\sqrt{u^3}}{3n} = \frac{2\sqrt{(m+nx)^3}}{3n}$$

Solución **método 2**:

Sea $u = m + nx$

$$\frac{du}{dx} = 0 + n = n$$

$du = n\, dx$

Pero como esta expresión no está en el integrando, se despeja *dx*:

$$dx = \frac{du}{n}$$

Sustituyendo:

$$\int \sqrt{m+nx}\ dx = \int \sqrt{u}\ \frac{du}{n} = \int \frac{1}{n}\sqrt{u}\ du = \frac{1}{n}\int u^{\frac{1}{2}}\ du = \frac{1}{n}\frac{(u)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{n}\frac{(u)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2(u)^{\frac{3}{2}}}{3n}$$

Reemplazando $u = m + nx$

$$\int \sqrt{m+nx}\ dx = \frac{2(m+nx)^{\frac{3}{2}}}{3n} = \frac{2\sqrt{(m+nx)^3}}{3n} + c$$

Ejemplo: $\int x^3\sqrt{x^2-1}\ dx$

Solución **método 2**:

Sea $u = x^2 - 1$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$du = 2xdx$$

Pero como esta expresión no está en el integrando, se despeja xdx:

$$xdx = \frac{du}{2}$$

Sustituyendo:

$$\int x^2 \cdot x(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\, dx = \int x^2(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\, xdx$$

$u = x^2 - 1$
$x^2 = u - 1$

$$\int (u-1)\cdot(u)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{du}{2}$$
$$\frac{1}{2}\int (u\cdot u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{1}{2}})\cdot du$$
$$\frac{1}{2}\int \left(u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right)\cdot du$$
$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)$$
$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2\cdot u^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2\cdot u^{\frac{3}{2}}}{3}\right) + c$$

$$\left(\frac{2 \cdot u^{\frac{5}{2}}}{10} - \frac{2 \cdot u^{\frac{3}{2}}}{6}\right) + c$$
$$\left(\frac{u^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3}\right) + c$$
$$\left(\frac{\sqrt{u^5}}{5} - \frac{\sqrt{u^3}}{3}\right) + c$$
$$\left(\frac{\sqrt{(x^2-1)^5}}{5} - \frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3}\right) + c$$

Ejemplo: $\int x^5(x^3+7)^7 \; dx$
Fuente: Guía alumna C. G.

Solución**:**
$\int x^5(x^3+7)^7 \; dx$
Sea $u = x^3 + 7$

$$\frac{du}{dx} = 2x^2$$

$$du = 2x^2 dx$$

Pero como esta expresión no está en el integrando, se despeja $x^2 dx$:

$$x^2 dx = \frac{du}{2}$$

Sustituyendo y colocando $x^5 = x^3 x^2$:

$$\int x^5 \cdot (x^3+7)^7 \, dx = \int x^3(x^3+7)^7 \, x^2 dx$$

$u = x^3 + 7$
$x^2 = u - 7$

$$\int (u) \cdot (u)^7 \; \cdot \frac{du}{2}$$

$$\frac{1}{2}\int (u \cdot u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{1}{2}}) \cdot du$$
$$\frac{1}{2}\int \left(u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right) \cdot du$$
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2\cdot u^{\frac{5}{2}}}{5}-\frac{2\cdot u^{\frac{3}{2}}}{3}\right)+c$$
$$\left(\frac{2\cdot u^{\frac{5}{2}}}{10}-\frac{2\cdot u^{\frac{3}{2}}}{6}\right)+c$$
$$\left(\frac{u^{\frac{5}{2}}}{5}-\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3}\right)+c$$
$$\left(\frac{\sqrt{u^5}}{5}-\frac{\sqrt{u^3}}{3}\right)+c$$
$$\left(\frac{\sqrt{(x^2-1)^5}}{5}-\frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3}\right)+c$$

Ejemplo: Hallar $\int \sqrt{2x+1}\ \ dx$

Sea:

$u=2x+1$

$\frac{du}{dx}=2$

$dx=\frac{du}{2}$

$$y=\int \sqrt{2x+1}\,dx=\int \sqrt{u}\ \frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du=\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,du=\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{2}\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3}=\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3}$$
$$=\frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{3}+c=\frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{3}+c$$

Ejemplo: $\int x\sqrt{2x-1}\ \ dx$
Fuente: Larson, Cálculo 2

Sea:

$u=2x-1$

$\frac{du}{dx}=2$

$dx=\frac{du}{2}$
Pero como en el integrando hay dos variables:

$u=2x-1$

$$x = \frac{u+1}{2}$$

$$\int x\sqrt{2x-1}\ dx = \int \frac{u+1}{2} \cdot u^{\frac{1}{2}}\ \frac{du}{2} = \int \frac{1}{4}(u+1) \cdot u^{\frac{1}{2}}\ du = \frac{1}{4}\int (u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}})\ du$$
$$= \frac{1}{4}(\frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{5}{2}} + \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{3}{2}}) + c = \frac{1}{4}(\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}) + c = \frac{1}{10}(u^{\frac{5}{2}}) + \frac{1}{6}(u^{\frac{3}{2}}) + c$$
$$= \frac{1}{10}(2x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{6}(2x-1)^{\frac{3}{2}} + c$$

Ejemplo $\int x(2+x^3)^2\ dx$
Fuente: Matemáticas simplificadas, p. 1324.

En este ejemplo, el cambio de variable no se puede efectuar debido a que la nueva integral tendrá dos variables, no solo *u*, como se verá a continuación, por lo que se deberá proceder de una manera distinta.

Sea $u = 2 + x^3$

$$\frac{du}{dx} = 0 + 3x^2 = 3x^2$$

$$du = 3x^2 dx$$

Pero como esta expresión no está en el integrando, se despeja *dx*:

$$dx = \frac{du}{3x^2}$$

Sustituyendo:
$$\int x(2+x^3)^2\ dx = \int x(u)^2\ \frac{du}{3x^2} = \int (u)^2\ \frac{du}{3x}$$

Como se ve, hay dos variables *u* y *x* por lo que no se continua con este procedimiento. Lo que debe hacerse es desarrollar el cuadrado del binomio del integrando de la integral, como sigue:

$$\int x(2+x^3)^2\ dx = \int (4 + 4x^3 + x^6)\ xdx = \int (4x + 4x^4 + x^7)\ dx = \frac{4x^{1+1}}{1+1} + \frac{4x^{4+1}}{4+1} + \frac{x^{7+1}}{7+1}$$
$$= \frac{4x^2}{2} + \frac{4x^5}{5} + \frac{4x^8}{8} = 2x^2 + \frac{4x^5}{5} + \frac{x^8}{8} + c$$

Ejemplo: Calcular $\int \frac{20}{(4-5x)^3}\ dx$

Sea $u = 4 - 5x$

$$\frac{du}{dx} = -5$$

$$du = -5dx$$

$$dx = \frac{du}{-5}$$

$$\int \frac{20}{(4-5x)^3}\ dx = \int \frac{20}{u^3} \cdot \frac{du}{-5} = -4\int \frac{1}{u^3} \cdot du = -4\int u^{-3} \cdot du = -4 \cdot \frac{u^{-3+1}}{-3+1} = -4 \cdot \frac{u^{-2}}{-2} = \frac{2}{u^2}$$
$$= \frac{2}{(4-5x)^2} + c$$

Ejemplo: Calcular $\int \frac{1}{2+3x}\ dx$
Fuente: matemáticas simplificadas p. 1325
Sea $u = 2 + 3x$

$$\frac{du}{dx} = 3$$

$$du = 3dx$$

$$dx = \frac{du}{3}$$

$$\int \frac{1}{2+3x}\ dx = \int \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u} \cdot du = ln|u| + c = ln|2+3x| + c$$

Ejemplo: $\int tgx\ dx$

$$\int tgx\ dx = \int \frac{sen\ x}{\cos x} dx$$

Sea $u = \cos x$

$$\frac{du}{dx} = -sen\ x$$

$$dx = -\frac{du}{sen\ x}$$
$$-du = sen\ x\ d$$

$$\int tgx\ dx = \int \frac{sen\ x}{\cos x} dx = -\int \frac{\cancel{sen\ x}}{u} \frac{du}{\cancel{sen\ x}} = -\int \frac{du}{u} = -\int \frac{1}{u} du = -\ln u + c = -\ln \cos x + c$$

Ejemplo: $\int ctg\ x\ dx$

$$\int ctg\ x\ dx = \int \frac{cos\ x}{\operatorname{sen} x} dx$$

Sea $u = \operatorname{sen} x$

$$\frac{du}{dx} = cos\ x$$

$$dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\int ctgx\ dx = \int \frac{cos\ x}{\operatorname{sen} x} dx = \int \frac{\cancel{\cos x}}{\operatorname{sen} x} \frac{du}{\cancel{\cos x}} = \int \frac{du}{u} = \int \frac{1}{u} du = \ln u + c = \ln \operatorname{sen} x + c$$

Ejemplo: $\int x\ ctg\ x^2\ dx$
Fuente: matemáticas simplificadas, p. 1331.

Sea $u = x^2$

$$\frac{du}{dx} = 2\ x$$

$$du = 2x\ dx$$

Conviene despejar $x\ dx$, ya que esta expresión está en el integrando:

$$x\ dx = \frac{du}{2}$$

$$\int x\ ctg\ x^2 = \int ctg\ u \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int ctg\ u \cdot du = \frac{1}{2} \ln(sen\ u) + c = \frac{1}{2} \ln(sen\ x^2) + c$$

Ejemplo: $\int \frac{tg\ \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

Fuente: Matemáticas simplificadas, p. 1331.

Sea $u = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

$$2du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

Conviene despejar 2 du, ya que su valor $\frac{dx}{\sqrt{x}}$ está en el integrando:

$$\int \frac{tg\ \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int tg\ u \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int tg\ u \cdot 2du = 2 \int tg\ u \cdot du = 2 \ln \sec u + c = 2 \ln \sec \sqrt{x} + c$$

Ejemplo: $\int ctg\ (-\frac{9}{2}r)\ dr$

Sea $u = -\frac{9}{2}r$

$$\frac{du}{dr} = -\frac{9}{2}$$

$$2du = -9\ dr$$

$$dr = -\frac{2}{9}\ du$$

$$\int ctg(-\frac{9}{2}r)\ dr$$
$$= \int ctg\ u\ dr = \int ctg\ u\ \left(-\frac{2}{9}du\right) = -\frac{2}{9}\int ctg\ u = -\frac{2}{9}\ln \operatorname{sen} u + c$$
$$= -\frac{2}{9}\ [\ln \operatorname{sen}(-\frac{9}{2}r)] + c$$

Ejemplo: $\int sen(\ 7x + 1)\ dx$

Sea $u = 7x + 1$

$$\frac{du}{dx} = 7$$

$$7\ dx = du$$
$$dx = \frac{du}{7}$$

$$\int sen\ (7x + 1)\ dx = \int sen\ u\ dx = \int sen\ u\ (\frac{du}{7}) = \frac{1}{7}\int sen\ u\ du = \frac{1}{7}[-\cos u) + c$$
$$= -\frac{1}{7}[\cos(7x + 1)] + c$$

Ejemplo: $\int -\frac{8}{7}\ sen(\frac{9}{5}x - \frac{1}{7})\ dx$

Sea $u = \frac{9}{5}x - \frac{1}{7}$

$$\frac{du}{dx} = \frac{9}{5}$$

$$9dx = 5du$$

$$dx = \frac{5du}{9}$$

$$\int -\frac{8}{7}\, sen(\frac{9}{5}x-\frac{1}{7})\, dx$$
$$= -\frac{8}{7}\int sen\, u\, dx = -\frac{8}{7}\cdot\frac{5}{9}\int sen\, u\,(du) = -\frac{40}{63}\int sen\, u\, du = -\frac{40}{63}[-\cos u)$$
$$+ c = -\frac{40}{63}\left[-\cos\left(\frac{9}{5}x-\frac{1}{7}\right)\right] + c = \frac{40}{63}\left[\cos\left(\frac{9}{5}x-\frac{1}{7}\right)\right] + c$$

Ejemplo: $\int x^3\, cos(x^4+2)\, dx$

Sea $u = x^4 + 2$

$$\frac{du}{dx} = 4x^3$$

$du = 4x^3 dx$ Conviene despejar $x^3 dx$ ya que está en el integrando:

$$x^3 dx = \frac{1}{4} du$$

$$\int x^3\, cos(x^4+2)\, dx = \int \frac{1}{4}\cos u\, du = \frac{1}{4}\int \cos u\, du = \frac{1}{4} sen\, u + c = \frac{1}{4} sen\,(x^4+2) + c$$

Ejemplo: $\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\, dx$
Fuente: Apuntes-y-Problemas-de-Cálculo-I-Víctor Chungara Castro

Primero se debe racionalizar el denominador y luego ver si se puede utilizar alguna integral inmediata o aplicar el método de sustitución.

$$\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\, dx = \int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\,\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}\, dx$$
$$= \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int (\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}})\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

La primera de las integrales es la integral inmediata $arc\ sen\ x$
La segunda integral se debe resolver por el método de sustitución:

Sea:
$u = 1 - x^2$
$$\frac{du}{dx} = -2x$$

Pero como esta expresión no está en el integrando, se despeja *dx*:

$$dx = \frac{du}{-2x}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}}\frac{du}{-2x}$$
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du$$
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}du = -\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du = -\frac{1}{2}\left[\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right] + c = -\frac{1}{2}\left[\frac{(1-x^2)^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right] =$$
$$-\sqrt{1-x^2} + c$$

Por tanto:

$$\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}dx = arc\ sen\ x - \sqrt{1+x^2} + c$$

Ejemplo: $\int \frac{x}{x^4+1}dx$

Si en vez de x^4 fuera x^2, el integrando recuerda a la integral inmediata: $\int \frac{1}{1+x^2}dx = arc\ \mathrm{tg}\, x + c$. Por ello, es conveniente un cambio de variable y ver si se puede aplicar esa integral inmediata.

Sea:

$$u = x^2$$
$$u^2 = x^4$$
$$\frac{du}{dx} = 2x$$
$$dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int \frac{x}{x^4+1}dx = \int \frac{x}{u^2+1}dx$$
$$= \int \frac{x}{u^2+1}\left(\frac{du}{2x}\right) = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}du = \frac{1}{2}\ arctg\ u + c = \frac{1}{2}arctgx^2 + c$$

Ejemplo: $\int \frac{1}{x^2+4x+5}dx$

Fuente: Apuntes-y-Problemas-de-Cálculo-I-Víctor Chungara Castro

Primero hay que ver si se puede factorizar el denominador. No se puede, pero sí se puede expresar como:

$x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1$

$$\int \frac{1}{x^2+4x+5}dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+1}dx$$

Esta expresión es similar a la integral inmediata de arco tangente, es decir, en su denominador hay un cuadrado más 1. Por tanto, la integral en vez de ser arco tangente de x será arco tangente de x+2.

$$\int \frac{1}{x^2+4x+5}dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+1}dx = arc\ tg\ (x+2)+c$$

Ejemplo: Hallar $\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}$
Fuente: Apuntes-y-Problemas-de-Cálculo-I-Víctor Chungara Castro

Sea:

$u^2 = \sqrt{x}+1$
Se deriva separadamente ambos miembros:

$$\frac{du^2}{du} = 2u \rightarrow du^2 = 2u\ du$$

$$\frac{d\ (\sqrt{x}+1)}{dx} = \frac{d(x^{\frac{1}{2}}+1)}{dx} = \frac{1}{2}\ x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$d\left(\sqrt{x}+1\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

Por tanto:

$$2u\ du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

$$dx = 4u\ \sqrt{x}\ du$$

Pero $u^2 = \sqrt{x}+1 \rightarrow \sqrt{x} = u^2-1$
$dx = 4u\ (u^2-1)\ du$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}} = \int \frac{4u\ (u^2-1)\ du}{\sqrt{u^2}}$$
$$= \int \frac{4u\ (u^2-1)du}{u}$$
$$= 4\int (u^2-1)du = 4(\int u^2du - \int 1du) = 4\left(\frac{u^3}{3}-u\right)+c = \frac{4}{3}u^3-4u+c$$
Como $u = \sqrt{\sqrt{x}+1)}$,
$$\frac{4}{3}u^3-4u+c = \frac{4}{3}(\sqrt{\sqrt{x}+1)}^3 - 4\sqrt{\sqrt{x}+1}+c$$

1.4 INTEGRALES DE FUNCIONES EXPONENCIALES

Se emplean las siguientes fórmulas para integrar funciones exponenciales:

$\int a^v \, dv = \frac{a^v}{\ln a} + c$

$\int e^v \, dv = e^v + c$

Ejemplo: Hallar $\int e^{2x} \, dx$

Sea:
$v = 2x$

$$\frac{dv}{dx} = 2$$

$$dx = \frac{dv}{2}$$

$$\int e^{2x} \, dx = \int e^v \frac{dv}{2} = \frac{1}{2}\int e^v dv = \frac{1}{2}e^v + c = \frac{1}{2}e^{2x} + c$$

Ejemplo: Hallar $\int e^{\frac{x}{3}} \, dx$

Sea:
$$v = \frac{x}{3} = \frac{1}{3}x$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{3}$$

$$dx = 3dv$$

$$\int e^{\frac{x}{3}} \, dx = \int e^v 3dv = 3\int e^v dv = 3e^v + c = 3e^{\frac{x}{3}} + c$$

Ejemplo: Hallar $\int \frac{dx}{e^{2x}}$
Fuente: matemáticas simplificadas, p. 1329

$$\int \frac{dx}{e^{2x}} = \int \frac{1}{e^{2x}} dx = \int e^{-2x} dx$$

Sea:

$u = -2x$

$$\frac{du}{dx} = -2$$

$$dx = -\frac{du}{2}$$

$$\int \frac{dx}{e^{2x}} = \int e^{-2x} dx = -\int e^{u}\frac{du}{2} = -\frac{1}{2}\int e^{u} du = -\frac{1}{2}e^{u} + c = -\frac{1}{2}e^{-2x} + c = -\frac{1}{2e^{2x}} + c$$

Ejemplo: Hallar $\int a^{nx}\ dx$

Sea:
$v = nx$

$$\frac{dv}{dx} = n$$

$$dx = \frac{dv}{n}$$

$$\int a^{nx}\ dx = \int a^{v}\frac{dv}{n} = \frac{1}{n}\int a^{v} dv = \frac{1}{n}\frac{a^{v}}{\ln a} + c = \frac{a^{nx}}{n\ln a} + c$$

Ejemplo: Hallar $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\ dx$
Fuente: Apuntes y Problemas de Cálculo. I-Víctor-Chungara-Castro

Sea:
$u = \sqrt{x}$
$u = x^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$dx = 2\sqrt{x}\, du$$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\ dx = \int \frac{e^{u}}{u}2\sqrt{x}\, du = \int \frac{e^{u}}{u}2u\, du = \int 2\, e^{u}\ du = 2\int e^{u}\ du = 2e^{u} * c = 2e^{\sqrt{x}} * c$$

1.5 INTEGRALES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Fuente: Matemáticas simplificadas, p. 1330.

Se integran con las siguientes fórmulas y, en algunos casos, auxiliándose de un cambio de variable:

$$\int sen\,v\ \ dv = -\cos v + c$$
$$\int cos\,v\ \ dv = \operatorname{sen} v + c$$
$$\int sec^2 v\ dv = \operatorname{tg} v + c$$
$$\int csc^2 v\ dv = -c\operatorname{tg} v + c$$
$$\int sec\,v\,tg\,v\ dv = \sec v + c$$
$$\int csc\,v\,ctg\,v\ dv = -\csc v + c$$
$$\int tg\,v\ dv = -\ln|\cos v| + c = \ln|\sec v| + c$$
$$\int ctg\,v\ dv = \ln|\operatorname{sen} v| + c$$
$$\int sec\,v\ dv = \ln|\sec v + tg\ v| + c$$
$$\int csc\,v\ dv = \ln|\csc v - ctg\ v| + c$$

Ejemplo Hallar: $\int cos\,my\ \ dy$
Fuente: Matemáticas simplificadas, p. 1331.

Se hace un cambio de variable y se hace su diferencial:

Sea:
$v = my$
$\frac{dv}{dy} = m$
$dy = \frac{dv}{m}$

$$\int cos\,my\ \ dy = \int cos\,v\ \frac{dv}{m} = \frac{1}{m}\int cos\,v\ \ dv = \frac{1}{m} sen\,v + c = \frac{1}{m} sen\,my + c$$

Ejemplo: Hallar: $\int sec\,7x\ \ dx$
Fuente: Matemáticas simplificadas, p. 1331.

Se hace un cambio de variable y se hace su diferencial:

Sea:
$v = 7x$

$$\frac{dv}{dx} = 7$$
$$dx = \frac{dv}{7}$$

$$\int sec\ 7x\ \ dx = \int sec\ v\ \frac{dv}{7} = \frac{1}{7}\int sec\ v\ \ dv = \frac{1}{7}\ln|\sec v + tg\ v| + c = \frac{1}{7}\ln|\sec 7x + tg\ 7x| + c$$

Ejemplo: Hallar: $\int x\ ctg\ x^2\ \ dx$
Fuente: Matemáticas simplificadas, p. 1331.

Se hace un cambio de variable y se hace su diferencial:

Sea:
$v = x^2$
$$\frac{dv}{dx} = 2x$$

$dv = 2x\ dx$

Como en el integrando está $x\ dx$:

$$x\ dx = \frac{dv}{2}$$

$$\int x\ ctg\ x^2\ \ dx = \int ctg\ v\ \frac{dv}{2} = \frac{1}{2}\int ctg\ v\ \ dv = \frac{1}{2}\ln|\operatorname{sen} v| + c = \frac{1}{2}\ln|\operatorname{sen} x^2| + c$$

Ejemplo: Hallar: $\int \frac{tg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ dx$
Fuente: Matemáticas simplificadas, p. 1331.

Se hace un cambio de variable y se hace su diferencial:
Sea:
$v = \sqrt{x}$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$dv\ = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$
$$2dv\ = \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\int \frac{tg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ dx = \int tg\sqrt{x}\ \ \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int tgv\ \ 2\ dv = 2\int tgv\ \ dv = 2\ \ln|\sec v| + c = 2\ \ln\left|\sec\sqrt{x}\right| + c$$

Ejemplo: Hallar: $\int \frac{2\,tgx}{1-tg^2x}\,dx$

Fuente: Matemáticas simplificadas, p. 1332.

Se deben utilizar identidades trigonométricas:

$$\frac{2\,tgx}{1-tg^2x} = \frac{2\,\frac{sen\,x}{\cos x}}{1-\frac{sen^2\,x}{\cos^2 x}} = \frac{2\,\frac{sen\,x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x - sen^2\,x}{\cos^2 x}} = \frac{2\,sen\,x\,\cdot\cos x}{(\cos^2 x - sen^2\,x)} = \frac{2\,sen\,x\,\cdot\cos^2 x}{\cos x\,(\cos^2 x - sen^2\,x)}$$
$$= \frac{sen\,2x}{\cos 2x} = tg\,2x$$

Al sustituir la identidad encontrada:

$$\int \frac{2\,tgx}{1-tg^2x}\,dx = \int tg\,2x\,dx$$

Se hace un cambio de variable y se hace su diferencial:

Sea:
$v = 2x$

$\frac{dv}{dx} = 2$

$dv = 2\,dx$

$dx = \frac{dv}{2}$

$$\int \frac{2\,tgx}{1-tg^2x}\,dx = \int tg\,2x\,dx = \int tg\,v\,\frac{dv}{2} = \frac{1}{2}\int tg\,v\,dv = -\frac{1}{2}\ln|\cos v| + c$$
$$= -\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + c$$

1.6 INTEGRALES CON EXPRESIONES DE LA FORMA

$$v^2 \pm a^2$$
$$a^2 - v^2$$
$$\sqrt{a^2 - v^2}$$
$$\sqrt{v^2 \pm a^2}$$

Fuente: Matemáticas simplificadas, p. 1333

Fórmulas:

$$\int \frac{dv}{v^2 + a^2} = \frac{1}{a}\ arc\ tg \frac{v}{a} + c$$

$$\int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ + \ln\left|\frac{v - a}{v + a}\right| + c$$

$$\int \frac{dv}{a^2 - v^2} = \frac{1}{2a}\ + \ln\left|\frac{a + v}{a - v}\right| + c$$

$$\int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = arc\ sen \frac{v}{a} + c$$

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \ln\left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}\right) + c$$

$$\int \frac{dv}{v\sqrt{v^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\ arc\ sec \frac{v}{a} + c$$

$$\int \sqrt{a^2 - v^2}dv = \frac{v}{2}\ \sqrt{a^2 - v^2} + \frac{a^2}{2} arc\ sen \frac{v}{a} + c$$

$$\int \sqrt{v^2 \pm a^2}dv = \frac{v}{2}\ \sqrt{v^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln\left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}\right) + c$$

Ejemplo: Hallar $\int \frac{dx}{x^2+36}$
Fuente: Matemáticas simplificadas, p. 1334

Se usa:

$$\int \frac{dv}{v^2 + a^2} = \frac{1}{a}\ arc\ tg \frac{v}{a} + c$$

Equivalencias:

$v^2 = x^2$
$v = x$
$dv = dx$

$a^2 = 36 \rightarrow a = 6$

$$\int \frac{dx}{x^2+36} = \frac{1}{6}\ arc\ tg \frac{x}{6} + c$$

Ejemplo: Hallar $\int \frac{dx}{x^2+81}$
Fuente: Matemáticas simplificadas, p. 1335

Se usa:

$$\int \frac{dv}{v^2+a^2} = \frac{1}{a}\ arc\ tg \frac{v}{a} + c$$

Equivalencias:

$v^2 = x^2$
$v = x$
$dv = dx$
$a^2 = 81 \rightarrow a = 9$

$$\int \frac{dx}{x^2+81} = \frac{1}{9}\ arc\ tg \frac{x}{9} + c$$

Ejemplo: Hallar $\int \frac{dx}{16x^2-9}$
Fuente: Matemáticas simplificadas, p. 1334

Se usa:

$$\int \frac{dv}{v^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ + \ln\left|\frac{v-a}{v+a}\right| + c$$

Equivalencias:

$v^2 = 16x^2$
$v = 4x$
$\frac{dv}{dx} = 4$

$dv = 4\ dx$

$dx = \frac{dv}{4}$

$a^2 = 9 \rightarrow a = 3$

$$\int \frac{dx}{16x^2-9} = \frac{1}{4)}\frac{1}{2(3)}\ + \ln\left|\frac{4x-3}{4x+3}\right| + c = \frac{1}{24}\ + \ln\left|\frac{4x-3}{4x+3}\right| + c$$

Ejemplo: Hallar $\int \frac{m}{n^2x^2-p^2}$
Fuente: Matemáticas simplificadas, p. 1334

Se usa:

$$\int \frac{dv}{v^2-a^2} = \frac{1}{2a} + \ln\left|\frac{v-a}{v+a}\right| + c$$

Equivalencias:

$v^2 = n^2x^2$
$v = nx$

$$\frac{dv}{dx} = n$$

$dv = n\,dx$

$$dx = \frac{dv}{n}$$

$a^2 = p^2 \rightarrow a = p$

$$\int \frac{m}{n^2x^2-p^2}dx$$
$$= \int \frac{m}{v^2-a^2}\frac{dv}{n} = \frac{m}{n}\int \frac{dv}{v^2-a^2} = \frac{m}{n}\frac{1}{2p}\ \ln\left|\frac{nx-p}{nx+p}\right| + c = \frac{m}{2np}\ \ln\left|\frac{nx-p}{nx+p}\right| + c$$

Ejemplo: Hallar $\int \frac{dx}{9-25x^2}$
Fuente: Matemáticas simplificadas, p. 1335

Se usa:

$$\int \frac{dv}{v^2-a^2} = \frac{1}{2a} + \ln\left|\frac{v-a}{v+a}\right| + c$$

Equivalencias:

$v^2 = n^2x^2$
$v = nx$

$$\frac{dv}{dx} = n$$
$dv = n\,dx$

$$dx = \frac{dv}{n}$$

$a^2 = p^2 \rightarrow a = p$

$$\int \frac{m}{n^2x^2 - p^2} dx$$
$$= \int \frac{m}{v^2 - a^2} \frac{dv}{n} = \frac{m}{n} \int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{m}{n} \frac{1}{2p} \ln \left| \frac{nx - p}{nx + p} \right| + c = \frac{m}{2np} \ln \left| \frac{nx - p}{nx + p} \right| + c$$

Ejemplo: Precisa el resultado de: $\int \frac{dx}{\sqrt{9-25x^2}}$
Fuente: Matemáticas simplificadas, p. 1335

Se utiliza la fórmula:
$\int \frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}} = arc\ sen \frac{v}{a} + c$Equivalencias:

$a^2 = 9 \rightarrow a = 3$
$v^2 = 25x^2 \rightarrow v = 5x$

$$\frac{dv}{dx} = 5$$

$dv = 5\ dx$

$$dx = \frac{dv}{5}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 25x^2}} = \int \frac{\frac{dv}{5}}{\sqrt{a^2 - v^2}} = \frac{1}{5} \int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = \frac{1}{5} arc\ sen \frac{v}{a} + c = \frac{1}{5} arc\ sen \frac{5x}{3} + c$$

Ejemplo: Obtener el resultado de: $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+5}}$
Fuente: Matemáticas simplificadas, p. 1335

Se utiliza la fórmula:

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \ln\left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}\right) + c$$

Equivalencias:

$v^2 = 9x^2 \rightarrow v = 3x$
$a^2 = 5 \rightarrow a = \sqrt{5}$

$$\frac{dv}{dx} = 3$$

$dv = 3\ dx$
$$dx = \frac{dv}{3}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+5}} = \int \frac{\frac{dv}{3}}{\sqrt{v^2+a^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+a^2}} = \frac{1}{3}\ln\left(3x+\sqrt{9x^2+5}\right)+c$$

1.7 INTEGRALES EN LAS QUE SE COMPLETA UN TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Fuente: Matemáticas simplificadas, p. 1336

En aquellas integrales con un denominador de la forma $ax^2 + bx + c$, se utiliza el método de completar un trinomio cuadrado perfecto para llegar a las formas:

$$\sqrt{v^2 \pm a^2}$$
$$\sqrt{a^2 - v^2}$$
$$v^2 \pm a^2$$
$$a^2 - v^2$$

Ejemplo: encontrar el resultado de: $\int \frac{1}{x^2+4x+3} dx$
Fuente: matemáticas simplificadas. P. 1337

Se completa el trinomio cuadrado completo como sigue:

$$x^2 + 4x + 3 = (x^2 + 4x + 4) - 4 + 3 = (x + 2)^2 - 1$$

Se corresponde con la forma: $v^2 \pm a^2$, donde:

$v^2 = (x + 2)^2$

$v = x + 2$

$a^2 = 1$

$a = 1$

$dv = dx$

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 3} dx = \int \frac{1}{(x + 2)^2 - 1} dx$$

Se usa la forma: $\int \frac{dv}{v^2-a^2} = \frac{1}{2a} + \ln\left|\frac{v-a}{v+a}\right| + c$

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 3} dx = \int \frac{1}{(x + 2)^2 - 1} dx = \frac{1}{2(1)} + \ln\left|\frac{x + 2 - 1}{x + 2 + 1}\right| + c = \frac{1}{2} + \ln\left|\frac{x + 1}{x + 3}\right| + c$$

<u>Ejemplo</u>: encontrar el resultado de: $\int \frac{3\,dx}{x^2-8x+25}$
Fuente: Matemáticas simplificadas. P. 1337

Se completa el trinomio cuadrado completo como sigue:

$$x^2 - 8x + 25 = (x^2 - 8x + 16) - 16 + 25 = (x - 4)^2 + 9$$

Se corresponde con la forma: $v^2 \pm a^2$, donde:
$v^2 = (x - 4)^2$

$v = x - 4$

$a^2 = 9$

$a = 3$

$dv = dx$

$$\int \frac{3\, dx}{x^2 - 8x + 25} = 3\int \frac{dx}{(x-4)^2 + 9}$$

Se usa la forma: $\int \frac{dv}{v^2+a^2} = \frac{1}{a} + arc\ tg \frac{v}{a} + c$

$$\int \frac{3}{x^2 - 8x + 25} dx = 3\int \frac{dx}{(x+2)^2 - 1} = 3 \cdot \frac{1}{3} + arc\ tg \frac{x-4}{3} + c = arc\ tg\ \frac{x-4}{3} + c$$

Ejemplo: Encontrar el resultado de: $\int \frac{2x+5}{x^2+2x+5} dx$

Si $v = x^2 + 2x + 5$

$$\frac{dv}{dx} = 2x + 2$$

$dv = (2x + 2)dx$

Conviene, entonces, desglosar el integrando de modo que en uno de sus sumandos aparezca $(2x + 2)$

$$\frac{2x+5}{x^2+2x+5} = \frac{2x+2}{x^2+2x+5} + \frac{3}{x^2+2x+5}$$

$$\int \frac{2x+5}{x^2+2x+5} dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5} dx + 3\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

Para la integral $\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5} dx$ se hace el siguiente cambio de variable:

$v = x^2 + 2x + 5$

$$\frac{dv}{dx} = 2x + 2$$

$dv = (2x + 2)dx$

$$dx = \frac{dv}{(2x+2)}$$

Recordando que Integral logarítmica compuesta de u:

$\int \frac{u'}{u}\, du = ln|u| + c$, pero siempre que u' sea la derivada de u.
Como $(2x + 2)$ es la derivada de $x^2 + 2x + 5$:

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\, dx = \ ln|x^2+2x+5| + c$$

Para la integral $\int \frac{3}{x^2+2x+5} dx$ se cambia el denominador por un trinomio cuadrado perfecto:

$$x^2 + 2x + 5 = (x^2 + 2x + 1) + 4 = (x + 1)^2 + 4$$

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+45} = \frac{1}{2} arc\ tg \frac{x+1}{2} + c$$

Finalmente, al sustituir:

$$\int \frac{2x+5}{x^2+2x+5}\, dx == \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\, dx + 3\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$$
$$= ln|x^2+2x+5| + c + \frac{3}{2}\frac{1}{2} arc\ tg \frac{x+1}{2} + c$$

1.8 INTEGRALES DE LA FORMA $\int sen^m x\, dx$, $\int cos^n x\, dx$, con m y n impar

Si estas funciones son una potencia impar, se realiza la separación en potencias pares y siempre sobra una lineal, la cual funciona como diferencial, el resto se transforma mediante las siguientes identidades:

$sen^2 x = 1 - cos^2 x$

$cos^2 x = 1 - sen^2 x$

Que se deducen de:
$sen^2 x + cos^2 x = 1$

<u>Ejemplo</u>: Calcular $\int sen\,^3 x\, dx$

$\int sen\,^3 x\, dx \ = \int sen\,^2 x\, sen\, x\ \ dx$
Se sustituye:
$sen^2 x = 1 - cos^2 x$

$$\int sen\,^3 x\, dx \ = \int (1 - cos^2 x) sen\, x\ \ dx = \int (sen\, x - cos^2 x\, senx)\, dx$$
$$= \int sen\, x\, dx - \int cos^2 x\, senx\, dx$$

La primera integral es una integral inmediata: $\int sen\, x\, dx = -\cos x$
La segunda integral requiere de un cambio de variable:

$u = \cos x$
$\frac{du}{dx} = \operatorname{sen} x$
$du = \operatorname{sen} x\, dx$

$$\int cos^2 x\, senx\, dx = \int u^2\, du = \frac{u^3}{3} + c = \frac{cos^3 x}{3} + c$$
Sumando las dos integrales:

$$\int sen\,^3 x\, dx = -\cos x + \frac{cos^3 x}{3} + c$$

<u>Ejemplo</u>: Calcular $\int cos\,^3 x\, dx$

$\int cos\,^3 x\, dx \ = \int cos\,^2 x\, cos\, x\ \ dx$
Se sustituye:
$cos^2 x = 1 - sen^2 x$

$$\int cos\,^3 x\, dx \ = \int (1 - sen^2 x) cos\, x\ \ dx = \int (cos\, x - sen^2 x\, cosx)\, dx$$
$$= \int cos\, x\, dx - \int sen^2 x\, cosx\, dx$$
La primera integral es una integral inmediata: $\int cos\, x\, dx = sen\, x$
La segunda integral requiere de un cambio de variable:

$u = \operatorname{sen} x$

$$\frac{du}{dx} = -\cos x$$
$$du = -\cos x\ dx$$

$$\int sen^2 x\ cosx\ dx = -\int u^2\ du = -\frac{u^3}{3} + c = -\frac{sen^3 x}{3} + c$$

Sumando las dos integrales:

$$\int cos^3 x\ dx = sen\ x - \frac{sen^3 x}{3} + c$$

<u>Ejemplo</u>: Calcular $\int \frac{cos^3 x\ dx}{sen^4 x}$

$$\int \frac{cos^3 x\ dx}{sen^4 x} = \int \frac{cos^2 x \cos x\ dx}{sen^4 x} = \int \frac{(1 - sen^2 x) \cos x\ dx}{sen^4 x}$$

Sea:

$$u = \operatorname{sen} x$$
$$\frac{du}{dx} = -\cos x$$
$$du = -\cos x\ dx$$

$$\int \frac{(1-u^2)du}{u^4} = \int \frac{du - u^2 du}{u^4} = \int \frac{du}{u^4} - \int \frac{u^2}{u^4} du = \int u^{-4} du - \int u^{-2} du = \frac{u^{-3}}{-3} - \frac{u^{-1}}{-1}$$
$$= -\frac{1}{3u^3} + \frac{1}{u} + c = -\frac{1}{3senx} + \frac{1}{senx} + c = -\frac{1}{3} csc^3 x + \csc x + c$$

1.9 INTEGRALES DE LA FORMA $\int tg^m x\, dx, \int ctg^n x\, dx$, con n par o impar

Se separan potencias pares y se sustituye por la identidad trigonométrica respectiva:

$$tg^2x = sec^2x - 1$$
$$ctg^2x = csc^2x - 1$$

Ejemplo: Encontrar: $\int tg^3x\, dx$

$\int tg^3x\, dx = \int tag\ x\ tg^2x\, dx$

Se sustituye por la identidad: $tg^2x = sec^2x - 1$

$\int tg^3x\, dx = \int tag\ x\ tg^2x\, dx = \int tag\ x\ (sec^2x - 1)dx = \int tag\ x\ sec^2xdx - \int tag\ x\, dx$

Sea:
$u = \operatorname{tg} x$
$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$
$du = \sec^2 x\ \ dx$

$$\int tg^3x\, dx = \int tag\ x\ tg^2x\, dx = \int tag\ x\ (sec^2x - 1)dx = \int tag\ x\ sec^2xdx - \int tag\ x\, dx$$
$$= \int u\, du - \int tag\ x\, dx = \frac{u^2}{2} - (-\ln(\cos x) + c = \frac{tg^2x}{2} + \ln(\cos x) + c$$

Ejemplo: Encontrar: $\int ctg^5ax\, dx$

$\int ctg^5ax\, dx = \int ctg^3ax\ ctg^2ax\, dx$

Se hace el cambio: $ctg^2x = csc^2x - 1$

$\int ctg^3ax\ (csc^2ax - 1)dx = \int ctg^3ax\ csc^2ax\, dx + \int ctg^3ax\, dx$

De nuevo se tiene una potencia impar ($+\int ctg^3ax\, dx$) por lo que se vuelve a separar y a sustituir la identidad.

$$\int ctg^3ax\ (csc^2ax - 1)dx = \int ctg^3ax\ csc^2ax\, dx + \int ctg\ ax\ ctg^2ax\, dx$$
$$= \int ctg^3ax\ csc^2ax\, dx - \int ctg\ ax\ (csc^2ax - 1)dx$$
$$= \int ctg^3ax\ csc^2ax\, dx - \int ctg\ ax\ csc^2ax\, dx + \int ctg\ ax$$

Sea:
$v = ctg\ ax$
$\frac{dv}{dx} = -a\ csc^2\ ax$

$dv = -a\ csc^2\ ax\, dx$

1.10 INTEGRACIÓN POR PARTES

Fuente: De Oteyza (2006). Conocimientos fundamentales de matemáticas. Cálculo diferencial e integral.

Se utiliza cuando el integrando es el producto de dos funciones, o de una división de funciones que se puede expresar como un producto. Su fórmula se deduce como sigue:

Sean *u* y *v* dos funciones. La diferencial del producto de funciones es:

$$d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$$

Se despeja $u\ dv$:

$$u\ dv = d(uv) - vdu$$

Integrando la expresión anterior:

$$\boldsymbol{\int u\ dv = uv - \int v\ du}$$

Donde:

u es una función fácil de derivar

dv es una función fácil de integrar

$\int v\ du$ es más sencilla que la integral inicial

$$u = f(x) \rightarrow \frac{du}{dx} = f^{'}(x)$$

$$v = g(x) \rightarrow \frac{dv}{dx} = g^{'}(x)$$

La integral por partes se aplica en los casos del producto de las siguientes funciones:

- Inversas (por ejemplo, sen^{-1})
- Logarítmicas (por ejemplo, $Ln\ x$)
- Algebraicas (por ejemplo, x^2)
- Trigonométricas (por ejemplo, $\cos x$
- Exponenciales (por ejemplo, e^x, a^x)

Lo más probable es que si en el integrando aparece una de las funciones (inversa, logarítmica, trigonométrica o exponencial), se use la integración por partes.

Se recuerdan por la sigla ILATE, la que sirve para identificar qué función se identifica como *u* y cual cómo *dv: Para ello se va leyendo el integrando de izquierda a derecha y se identifica el tipo de función de cada uno de sus términos. Si la primera identificada es logarítmica, entonces corresponde a la variable u. La siguiente será dv.*

Ejemplo: **Calcular** $\int \boldsymbol{x^2 \ln x \ dx}$

En la sigla ILATE, la primera que aparece es la logarítmica, por lo que $\ln x$ es la variable u. La otra función es dv

$u = Ln\ x$

$dv\ = x^2 dx$

Se procede a derivar u y a integrar dv:

Derivada de u:

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$du = \frac{1}{x} dx$

Integral de $dv\ = x^2 dx$

Se integra ambos miembros de la igualdad:

$\int dv = v$

$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$

$v = \frac{x^3}{3}$

Se aplica la fórmula: $\int \boldsymbol{u\ dv = uv - \int v\ du}$

$$\int x^2 \ln x\ \ dx = Ln\ x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = Ln\ x \cdot \frac{x^3}{3} \cdot \int \frac{x^2}{3} = Ln\ x \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \int x^2$$
$$= Ln\ x \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} = \frac{x^3 Ln\ x}{3} - \frac{x^3}{9} + c$$

Ejemplo: Calcular $\int \boldsymbol{\ln x\ \ dx}$

En la sigla ILATE, la primera (y única) que aparece es la logarítmica, por lo que $\ln x$ es la variable u. La otra, que es 1, es la función es dv

$u = ln\ x$

$dv\ = 1dx = dx$

Se procede a derivar u y a integrar dv:

Derivada de u:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$du = \frac{1}{x} dx$$

Integral de $dv \ = dx$

Se integra ambos miembros de la igualdad:

$$\int dv = v$$

$$\int dx = x$$

$$v = x$$

Se aplica la fórmula: $\int \boldsymbol{u\,dv} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{v\,du}$

$$\int \ln x \ dx = ln\,x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = ln\,x \cdot x \cdot \int 1 = x ln\,x - x = x(ln\,x - 1) + c$$

Ejemplo: **Calcular** $\int \boldsymbol{x^2 \ln x \ dx}$

Usando la sigla ILATE, correspondería considerar $u = x^2$ y así reducir su exponente al derivar. Pero entonces habría que integrar $dv = \ln(x)\,dx$, algo más complicado. Por tanto:

$$u = ln\,x$$

$$dv \ = x^2 dx$$

Se procede a derivar u y a integrar dv:

Derivada de u:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$du = \frac{1}{x} dx$$

Integral de $dv = x^2 dx$:

Se integra ambos miembros de la igualdad:

$$\int dv = v$$

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

$$v = \frac{x^3}{3}$$

Se aplica la fórmula: $\int \boldsymbol{u\,dv} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{v\,du}$

$$\int x^2 \ln x\ \ dx = ln\, x \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = ln\ \frac{x^3}{3} \cdot x \cdot \frac{1}{3}\int x^2 = ln\ \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{3}(\ln(x) - \frac{1}{3}) + c$$

Ejemplo: Calcular $\int \sqrt{\boldsymbol{x}} \cdot \mathbf{ln}(\boldsymbol{x})\ \ \boldsymbol{dx}$

Usando la sigla ILATE, correspondería considerar $u = \sqrt{x}$ y así reducir el exponente al derivar, una vez transformada la raíz a una potencia. Pero entonces habría que integrar $dv = \ln(x)\,dx$, algo más complicado. Por tanto:

$u = ln\ x$

$dv\ = \sqrt{x}dx$

Se procede a derivar u y a integrar dv:

Derivada de u:

$$\frac{du}{dx}(ln\ x) = \frac{1}{x}$$

$$du = \frac{1}{x}dx$$

Integral de $dv = \sqrt{x}dx = x^{\frac{1}{2}}\,dx$:

Se integra ambos miembros de la igualdad:

$$\int dv = v$$

$$\int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}$$

$$v = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}$$

Se aplica la fórmula: $\int \boldsymbol{u\,dv} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{v\,du}$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x}\ln x\ \ dx &= ln\, x \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x}dx = ln\, x \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\int\ \cdot x^{\frac{1}{2}}\,dx \\ &= ln\, x \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot \mathbf{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}(\ln(x) - \frac{2}{3}) + c\end{aligned}$$

Ejemplo: Calcular $\int xe^x\,dx$

En la sigla ILATE, la primera que aparece es la algebraica, por lo que x es la variable u. La otra, que es e^x, es la función dv

$u = x$

$dv = e^x \, dx$

Se procede a derivar u y a integrar dv:

Derivada de u:

$\frac{du}{dx}(x) = 1$

$du = dx$

Integral de $dv = e^x dx$

Se integra ambos miembros de la igualdad:

$\int dv = v$

$\int e^x dx = e^x$

$v = e^x$

Se aplica la fórmula: $\int \boldsymbol{u \, dv} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{v \, du}$

$\int xe^x = x \cdot e^x - \int e^x \, dx = xe^x - e^x = e^x(x-1) + c$

Ejemplo: **Calcular** $\int \boldsymbol{xe^{3x} \, dx}$

En la sigla ILATE, la primera que aparece es la algebraica, por lo que x es la variable u. La otra, que es e^{3x}, es la función dv

$u = x$

$dv = e^{3x} \, dx$

Se procede a derivar u y a integrar dv:

Derivada de u:

$\frac{du}{dx}(x) = 1$

$du = dx$

Integral de $dv = e^{3x} dx$

Se integra ambos miembros de la igualdad:

$\int dv = v$

$\int e^{3x} dx = ?$

Para integrar la función anterior hay que recordar que: $\int e^{mx}\, dx = \frac{1}{m} e^{x} + c$

$\int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{x}$

$v = \frac{1}{3} e^{x}$

Se aplica la fórmula: $\int \boldsymbol{u\, dv} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{v\, du}$

$$\int xe^{3x} = x \cdot \frac{1}{3} e^{x} - \int \frac{1}{3} e^{x}\, dx = \frac{1}{3} xe^{x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} e^{x} = \frac{1}{3} xe^{x} - \frac{1}{9} e^{x} + c$$

Ejemplo: Calcular $\int xe^{-2x}\, dx$

Fuente: Guía Camila G.

En la sigla ILATE, la primera que aparece es la algebraica, por lo que x es la variable u. La otra, que es e^{-2x}, es la función dv

$u = x$

$dv\ = e^{-2x}\, dx$

Se procede a derivar u y a integrar dv:

Derivada de u:

$$\frac{du}{dx}(x) = 1$$

$du = dx$

Integral de $dv\ = e^{-2x} dx$

Se integra ambos miembros de la igualdad anterior:

$\int dv = v$

$\int e^{-2x} dx = ?$

Para integrar la función anterior hay que recordar que: $\int e^{mx}\, dx = \frac{1}{m} e^{x} + c$

$\int e^{-2x} dx = \frac{1}{-2} e^{-2x}$

$v = -\frac{1}{2} e^{-2x}$

Se aplica la fórmula: $\int u\, dv = uv - \int v\, du$

$$\int xe^{-2x} = -x\cdot\frac{1}{2}e^{-2x} - \int -\frac{1}{2}e^{-2x}\,dx = -\frac{xe^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) = -\frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{1}{4}e^{-2x}$$
$$= -\frac{e^{-2x}}{2}\left(\frac{1}{2}+x\right) = \frac{e^{-2x}}{2}\cdot\frac{1+2x}{2} = \frac{e^{-2x}}{4}\cdot(1+2x)$$

Ejemplo: Calcular $\int x^5 e^x\, dx$

En la sigla ILATE, la primera que aparece es la algebraica, por lo que x es la variable u. La otra, que es e^x, es la función dv

$u = x^5$

$dv\ = e^x\, dx$

Se procede a derivar u y a integrar dv:

Derivada de u:

$\frac{du}{dx}(x) = 5x^4$

$du = 5x^4 dx$

Integral de $dv\ = e^x dx$

Se integra ambos miembros de la igualdad anterior:

$\int dv = v$

$\int e^x dx = e^x$

$v = e^x$

Se aplica la fórmula: $\int u\, dv = uv - \int v\, du$

$\int x^5 e^x = x^5\cdot e^x - 5\int x^4 e^x\, dx$

Se debería integrar por partes otras 4 veces, pero mejor es tener en cuenta que:

$$\int x^m e^x dx = x^m e^x - \int x^{m-1} e^x\, dx$$

$\int x^5 e^x dx = x^5 e^x - 5\int x^4 e^x\, dx = x^5 e^x - 5\left(x^4 e^x - 4\int x^3 e^x dx\right) =$

$= x^5 e^x - 5(x^4 e^x - 4\left(x^3 e^x - 3\int x^2 e^x dx\right)) =$

$= x^5 e^x - 5(x^4 e^x - 4\left(x^3 e^x - 3(x^2 e^x - 2\int x^1 e^x dx\right))) =$

$= x^5 e^x - 5(x^4 e^x - 4\left(x^3 e^x - 3(x^2 e^x - 2(x^1 e^x - \int e^x dx\right)))) =$

$= x^5e^x + (-5(x^4e^x + 204(x^3e^x + (-60x^2e^x + 120(xe^x - 120e^x)))) =$

$= e^x(x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120) + c$

Ejemplo: Calcular $\int e^x(x^2 - 2x - 1)\,dx$

$\int e^x(x^2 - 2x - 1)dx = \int e^x x^2 dx - 2\int e^x x dx - \int e^x dx$

Derivando cada una de las integrales parciales:

- La tercera de las integrales es directa:

  $\int e^x dx = e^x$

- La integral de $\int e^x x dx$:

$u = x$

$dv \ = e^x\,dx$

Se procede a derivar u y a integrar dv:

Derivada de u:

$\frac{du}{dx}(x) = 1$

$du = dx$

Integral de $dv \ = e^x dx$

$\int dv = v$

Integral de $dv \ = e^x dx$

$\int e^x dx = e^x$

$v = e^x$

Aplicando la fórmula de la integración por partes:

$\int e^x x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = e^x(x - 1)$

- La integral de $\int e^x x^2 dx$:
  $u = x^2$
  $dv = x^2 dx$

Derivada de u:

$$\frac{du}{dx}(x) = 2x$$

$du = 2xdx$

Integral de $dv \; = e^x dx$

$\int dv = v$

Integral de $dv \; = e^x dx$

$\int e^x dx = e^x$

$v = e^x$

Aplicando la fórmula de la integración por partes:

$\int e^x x^2 dx = x^2 e^x - \int e^x 2x dx = x^2 e^x - 2\int e^x x dx$

Hay que calcular $\int e^x x dx$ que se resolvió en un ejercicio anterior = $e^x(x-1)$

$\int e^x x^2 dx = x^2 e^x - \int e^x 2x dx = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x)$

Por tanto, la integral original:

$$\int e^x(x^2 - 2x - 1)dx = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) - 2(xe^x - e^x) - e^x =$$

$$= x^2 e^x - 4(xe^x - e^x) - e^x = x^2 e^x - 4(xe^x) + 3(e^x) = e^x(x^2 - 4x + 3)$$

Ejemplo: Calcular $\frac{\int \boldsymbol{ln(lnx)}}{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{dx}$

$$u = ln(lnx)$$
$$dv = \frac{1}{x}dx$$

Derivada de u:

$$\frac{du}{dx}(x) = \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x}$$

$$du = \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x}\, dx$$

Integral de $dv \; = \frac{1}{x}dx$

$\int dv = v$

Integral de $dv \; = \frac{1}{x}dx$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$

Aplicando la fórmula de la integración por partes:

$$\frac{\int ln(lnx)}{x} = \ln(\ln(x)) \cdot \ln(x) - \int \ln(x) \cdot \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} \, dx$$
$$= \ln(\ln(x)) \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{x} \, dx$$
$$= \ln(\ln(x)) \cdot \ln(x) - \ln(x) =$$

$$= (\ln(x) \cdot (\ln(\ln(x)) - 1) + c$$

Ejemplo: Calcular $\int \mathbf{5^x} \cdot \boldsymbol{x^2 dx}$

$u = x^2$
$dv = 5^x \, dx$

Derivada de u:

$$\frac{du}{dx}(x) = 2x$$

$du = 2x \, dx$

Integral de $dv = 5^x dx$

$\int dv = v$

Integral de $5^x dx$
Se recuerda que: $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$, entonces:

$$\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5}$$
$$v = \frac{5^x}{\ln 5}$$

Aplicando la fórmula de la integración por partes: $\int u \, dv = uv - \int v \, du$

$$\int 5^x \cdot x^2 dx = x^2 \cdot \frac{5^x}{\ln 5} - \int \frac{5^x}{\ln 5} \cdot 2x \, dx = x^2 \cdot \frac{5^x}{\ln 5} - \frac{2}{\ln(5)} \int 5^x x \, dx$$

Aplicando de nuevo la integración por partes a la integral: $\int 5^x x \, dx$

$u = x$
$dv = 5^x \, dx$

Derivada de u:

$$\frac{du}{dx}(x) = 1$$

$$du = dx$$

Integral de $dv\ = 5^x dx$

$$\int dv = v$$

Integral de $5^x dx$
Se recuerda que: $\int a^x\ dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$, entonces:

$$\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5}$$
$$v = \frac{5^x}{\ln 5}$$

$$\int 5^x\ \cdot x^2 dx = x \cdot \frac{5^x}{\ln 5} - \int \frac{5^x}{\ln 5} \cdot\ dx = \mathrm{x} \cdot \frac{5^x}{\ln 5} - \frac{1}{\ln(5)} \int 5^x\ dx =$$

$$= \mathrm{x} \cdot \frac{5^x}{\ln 5} - \frac{1}{\ln(5)} \cdot \frac{5^x}{\ln 5} = \frac{5^x}{\ln 5}(x - \frac{1}{\ln(5)})$$

Por tanto, la integral inicial es:

$$\int 5^x\ \cdot x^2 dx = x^2 \cdot \frac{5^x}{\ln 5} - \frac{2}{\ln(5)} \cdot \frac{5^x}{\ln 5}(x - \frac{1}{\ln(5)} =$$

$$= \frac{5^x}{\ln 5}(x^2 - \frac{2}{\ln(5)} \cdot (x - \frac{1}{\ln(5)} =$$

$$= \frac{5^x}{\ln 5}(x^2 \ln(5) - \frac{2}{\ln(5)} \cdot (xln(5) - 1)) =$$

$$= \frac{5^x}{\ln 5}(x^2\ ln^2(5) -\cdot 2(xln(5) - 1)) =$$

$$= \frac{5^x}{\ln(\ 5)}(x^2\ ln^2(5) - 2x\ ln(5) + 2) + c$$

<u>Ejemplo</u>: Calcular $\int \boldsymbol{x\ cos\ (x)\ dx}$

$u = x$
$dv =\ cos\ (x)\ dx$

Derivada de u:
$$\frac{du}{dx} = 1 \rightarrow du =\ dx$$

Integral de $dv = \ cos\ (x)\ dx$

$\int dv = v$

Integral de $cos\ (x)\ dx$

$\int cos\ (x)\ dx = sen\ (x)$

$v = sen\ (x)$

Aplicando la fórmula de la integración por partes:

$x\ sen\ (x) - \int sen(x)dx =$

$= x\ sen\ (x) - (-\cos(x)) =$

$= x\ sen\ (x) + \cos(x) + c$

<u>Ejemplo</u>: Calcular $\int \boldsymbol{x\ sen\ (x)\ dx}$

$u = x$

$dv = sen\ (x)dx$

Derivando u:

$$\frac{du}{dx} = 1 \to du = \ dx$$

Integrando $dv = sen\ x\ dx$

$\int dv = v$

$\int sen\ x\ dx = -\cos x$

$v = -\cos x$

Aplicando la fórmula de integración por partes: $\int u\ dv = uv - \int v\ du$

$$\int x\ sen\ x\ dx = x(-\cos x) - \int (-\ cosx)\ \ dx$$
$$\int x\ sen\ x\ dx = -x\cos x + \int (\ cosx)\ \ dx$$
$$\int x\ sen\ x\ dx = -x\cos x + sen\ x\ + c$$

<u>Ejemplo</u>: Calcular $\int \boldsymbol{sec^3 x\ dx}$

$$u = \sec x \to \frac{du}{dx} = secx\ tg\ x \to du = secx\ tg\ x\ dx$$

$dv = sec^{\,2}x\, dx \rightarrow v = \int sec^{\,2}x\, dx = tg\, x$

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$\int u\, dv = \int sec^3 x\, dx = \sec x\, tg\, x - \int tg\, x \sec x\; tg\, x\, dx$

$\int sec^3 x\, dx = \sec x\, tg\, x - \int tg^2\, x \sec x\; dx$

Usando la identidad trigonométrica pitagórica: $1 + tg^2\; x = sec^2 x$

$\int sec^3 x\, dx = \sec x\, tg\, x - \int (sec^2 x - 1) \sec x\; dx$

$\int sec^3 x\, dx = \sec x\, tg\, x - \int (sec^3 x - \sec x)\; dx$

$\int sec^3 x\, dx = \sec x\, tg\, x - \int sec^3 x\, dx + \int \sec x\; dx$

Agrupando términos semejantes:

$2\int sec^3 x\, dx = \sec x\, tg\, x + \int \sec x\; dx$

Pero la integral inmediata de $\int \sec x\; dx$ es: $\ln(\sec x + tg\, x)$

$$\int sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}(\sec x\, tg\, x + \ln(\sec x + tg\, x)) + c$$

Ejemplo: Calcular $\int arc\; tg\; x\, dx$ (ejemplo de función algebraica por trigonométrica)

$u = arc\; tg\; x \rightarrow \dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2} \rightarrow du = \dfrac{dx}{1+x^2}$

$dv = dx \rightarrow v = \int dx = x$

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$\int u\, dv = \int arc\; tg\; x\, dx \;\; = x\; arc\; tg\; x - \int \dfrac{dx}{1+x^2}$

$\int \frac{dx}{1+x^2}$ requiere cambio de variable.
Sea:
$w = 1 + x^2$
$\dfrac{dw}{dx} = 2x$

$dw = 2x\, dx$
$\int arc\; tg\; x\, dx \;\; = x\; arc\; tg\; x - \int \dfrac{dx}{1+x^2} = x\; arc\; tg\; x - \dfrac{1}{2}\int \dfrac{dw}{w} = x\; arc\; tg\; x - \dfrac{1}{2}\ln w + c$
$\int arc\; tg\; x\, dx \;\; = x\; arc\; tg\; x - \dfrac{1}{2}\ln(1 + x^2) + c$

1.11 MÉTODO ALTERNATIVO A LA INTEGRACIÓN POR PARTES: MÉTODO TABULAR O RÁPIDO

Se aplica especialmente cuando se tiene un polinomio multiplicado por una exponencial o un polinomio multiplicado por una función seno o coseno. El método consiste en derivar el polinomio hasta que su valor sea cero e integrar la función exponencial. Luego, multiplicar en diagonal las funciones que están unidas por las flechas como se ve en la tabla siguiente considerando que el primer producto se multiplica por +1, el segundo por -1, el tercero por +1 y así sucesivamente alternando los signos:

Ejemplo: Calcular $\int x^5 e^x \, dx$

Derivar	x^5	$5x^4$	$20x^3$	$60x^2$	$120x$	120	0
		+	-	+	-	+	-
Integrar	e^x	e^x	e^x	e^x	e^x	e^x	e^x

$$\int x^5 e^x \, dx = x^5 e^x - 5x^4 e^x + 20x^3 e^x - 60x^2 e^x + 120x e^x - 120e^x$$

$$\int x^5 e^x \, dx = e^x(x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120) + C$$

Nota: Ver este mismo ejercicio resuelto por el método de integración por partes.

Ejemplo: Calcular $\int e^x (x^2 - 2x + 2) dx$

Derivar	$x^2 - 2x + 2$	$2x - 2$	2	0
		+	-	+
Integrar	e^x	e^x	e^x	e^x

$$\int e^x (x^2 - 2x + 2) dx = e^x(x^2 - 2x + 2) - (2x - 2)e^x + 2e^x$$

$$\int e^x (x^2 - 2x + 2) dx = e^x(x^2 - 2x + 2 - 2x + 2 + 2)$$

$$\int e^x (x^2 - 2x + 2) dx = e^x(x^2 - 4x + 4) + c$$

Ejemplo: $\int x^3 sen\, x \, dx$

Derivar	x^3	$3x^2$	$6x$	6	0
		+	-	+	-
Integrar	$sen\, x$	$-\, cosx$	$-sen\, x$	$cosx$	$sen\, x$

$$\int x^3 sen\, x \, dx = x^3(-\, cosx) - 3x^2(-sen\, x) + 6x(cosx) - 6senx$$

$$\int x^3 sen\, x \, dx = -x^3 \cos x + 3x^2 sen\, x + 6x\, cosx - 6\, senx + c$$

Ejemplo: Calcular $\int (3x^2 - 4x + 2)cosx\,dx$

Derivar	$3x^2 - 4x + 2$	$6x - 4$	6	0
		+	-	+
Integrar	$\cos x$	$sen\,x$	$-\cos x$	$-sen\,x$

$$\int (3x^2 - 4x + 2)cosx\,dx = (3x^2 - 4x + 2)sen\,x - (6x - 4)(-\cos x) + 6(-sen\,x)$$

$$\int (3x^2 - 4x + 2)cosx\,dx = (3x^2 - 4x + 2)sen\,x + (6x - 4)(\cos x) - 6(sen\,x)$$

$$\int (3x^2 - 4x + 2)cosx\,dx = (3x^2 - 4x + 2 - 6)sen\,x + (6x - 4)(\cos x)$$

$$\int (3x^2 - 4x + 2)cosx\,dx = (3x^2 - 4x + 2 - 6)sen\,x + (6x - 4)(\cos x) + c$$

1.12 INTEGRACIÓN POR FRACCIONES PARCIALES

Fuente: Apuntes y problemas de Cálculo I de Víctor Chungara Castro.

Este método consiste en la integración de una fracción algebraica racional propia, descompuesta como una suma de fracciones simples.

Se aplica sobre fracciones algebraicas racionales propias de la forma:

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}dx$$

Donde $N(x)$ es un polinomio de menor grado que $D(x)$. Si el grado del polinomio $N(x)$ es mayor que el de $D(x)$, hay que realizar primero la división entre ambos, como en los ejemplos siguientes. Luego se verán los cuatro casos de integración por fracciones parciales.

<u>Ejemplo donde el grado de $N(x) > D(x)$:</u> Hallar la integral de $\int \frac{x^4}{x+1}dx$

Dado que el polinomio del numerador es de grado 4, mayor al grado 1, la división de los polinomios es posible y debe efectuarse antes de integrar. Luego se integra término a término.

División entre los polinomios:

$$(x^4):(x+1) = x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

Por tanto, el integrando se puede reemplazar por las siguientes fracciones parciales, que son más fáciles de integrar:

$$\int \frac{x^4}{x+1}dx = \int (x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{x+1})dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + c$$

Como la expresión entre barras es positiva (no puede haber logaritmo de una cantidad negativa), la expresión $|x+1|$ se puede poner entre paréntesis:

$$\int \frac{x^4}{x+1}dx = \int (x^3 - x^2 + x + \frac{1}{x+1})dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \ln(x+1) + c$$

<u>Ejemplo donde el grado de $N(x) > D(x)$</u>: Hallar la integral de $\int \frac{6x^4+23x^2+4x+15}{x^2+3}dx$

Dado que el polinomio del numerador es de grado 4, mayor al grado 2 del denominador, la división de los polinomios es posible y debe efectuarse antes de integrar. Luego se integra término a término.

División entre los polinomios:

$(6x^4 + 23x^2 + 4x + 15) : (x^2 + 3) = 6x^2 + 5$

$\underline{-6x^4 - 18x^2}$

$\underline{5x^2 + 4x + 15}$

-$\underline{5x^2 \quad\quad - 15}$

$4x$

Cociente=$6x^2 + 5$

Residuo =$4x$

Por tanto, el integrando se puede reemplazar por las siguientes fracciones parciales, que son más fáciles de integrar:

$$(6x^2 + 5) + \frac{4x}{x^2 + 3}$$

$$\int \frac{6x^4 + 23x^2 + 4x + 15}{x^2 + 3}dx = \int \left((6x^2 + 5) + \frac{4x}{x^2 + 3}\right)dx = \int (6x^2 + 5)dx + \int \frac{4x}{x^2 + 3}dx$$

El primer sumando se puede resolver por integral inmediata, no así el segundo, que requiere un cambio de variable debido a que el numerador (4x) no es la derivada del denominador ($x^2 + 3$):

$$\int (6x^2 + 5)dx = \int (6x^2)dx + \int (5)dx = \frac{6x^3}{3} + 5x = 2x^3 + 5x$$

Para resolver $\int \frac{4x}{x^2+3}dx$ se requiere, entonces, de un cambio de variable.

Sea:

$u = x^2 + 3$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int \frac{4x}{x^2 + 3}dx = \int \frac{4x}{u}\frac{du}{2x} = \int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{1}{u}du = 2ln|u| + c = 2ln|x^2 + 3| + c$$

Ahora, se suman las dos integrales parciales:

$(2x^3 + 5x) + 2ln|x^2 + 3| + c$

Como la expresión entre barras es positiva (no puede haber logaritmo de una cantidad negativa), la expresión $|x^2 + 3|$ se puede poner entre paréntesis:

$(2x^3 + 5x) + 2\ln(x^2 + 3) + c$

$(2x^3 + 5x) + \ln(x^2 + 3)^2 + c$, esta es la antiderivada de la función racional del integrando de la integral.

<u>Casos en integración por fracciones parciales</u>

El método de integración de fracciones parciales consiste en la integración de una fracción algebraica racional propia, descompuesta como una suma de fracciones simples. Que sea racional significa que la incógnita está en el denominador y, que sea propia, significa que el grado del polinomio del numerador es menor que el grado del polinomio del denominador.

<u>Caso 1</u>: <u>Factores lineales</u>: El denominador de la fracción racional propia es un producto de factores de primer grado que no se repiten.

En términos generales, el caso es el siguiente:

Sea N_x el polinomio del numerador de la fracción.

Sea D_x el polinomio del denominador de la fracción.

$$\frac{N_x}{D_x} = \frac{N_x}{(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)} = \frac{A}{x - a_1} + \frac{B}{x - a_2} + \cdots + \frac{N}{x - a_n}$$

En este caso, el polinomio del denominador se descompone en factores todos lineales que no se repiten, por lo que en cada numerador se emplea una sola constante, A, B, …N.

<u>Métodos de cálculo de las constantes, A, B, …, N:</u>

- <u>Por sustitución directa</u>: Consiste en asignar valores arbitrarios a la variable de manera tal que se obtenga directamente el valor de las constantes. Método adecuado para el caso 1.

- <u>Por sistema de ecuaciones</u>: Consiste en igualar los coeficientes de las mismas potencias, conformando así un sistema de ecuaciones, cuya solución determinará el valor de las constantes; es un método adecuado para todos los casos.

Ejemplo: Hallar la integral de $\int \frac{1}{x(x-3)} dx$

Los factores x y $(x - 3)$ son de primer grado y distintos entre sí.

El integrando se reescribe como suma de fracciones donde los numeradores deben ser de un grado inferior al del denominador.

$$\frac{1}{x(x - 3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 3}$$

Como en este ejercicio, los denominadores son de grado 1, los numeradores deben ser, por así decirlo, de grado cero, y como las potencias de grado cero son iguales a 1, quedan solo A, B, como valores constantes: $Ax^0 = A(1) = A$, $Bx^0 = B(1) = B$.

Multiplicando ambos miembros por $x(x-3)$

$$1 = A(x-3) + Bx$$
$$1 = Ax - 3A + Bx$$
$$1 = (A+B)x - 3A$$

Se forma un sistema de ecuaciones igualando los coeficientes de la variable y de los términos solo numéricos.

$$\left.\begin{array}{l} 0 = A + B \\ 1 = -3A \end{array}\right|$$

$$A = -\frac{1}{3}$$
$$B = \frac{1}{3}$$

Así:

$$\frac{1}{x(x-3)} = \frac{-\frac{1}{3}}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{x-3} = -\frac{1}{3x} + \frac{1}{3(x-3)}$$

$$\int \frac{1}{x(x-3)} dx = \int -\frac{1}{3x} dx + \int \frac{1}{3(x-3)} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-3} dx$$

Como los numeradores de las fracciones son las derivadas de los denominadores, se utilizan las integrales inmediatas logarítmicas (si no hubiera sido así, se tendría que recurrir a un cambio de variable).

$$\int \frac{1}{x(x-3)} dx = -\frac{1}{3} \ln x + \frac{1}{3} \ln(x-3) + c$$

Ejemplo: Hallar la integral de $\int \frac{3x^2 - 5x + 1}{x(x+1)(x-2)}$

Los factores x; $(x+1)$, $(x-2)$ son de primer grado y distintos entre sí.

El integrando se reescribe como sigue, donde A, B, son constantes:

$$\frac{3x^2 - 5x + 1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$

Multiplicando ambos miembros por el MCM: $x(x+1)(x-2)$

$$3x^2 - 5x + 1 = A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1)$$

Para encontrar los valores de A, B y C, se podrían desarrollar las multiplicaciones y luego igualar los coeficientes de las variables y formar un sistema de ecuaciones como en el ejercicio anterior. Pero también hay otro procedimiento que consiste en encontrar las raíces del denominador, haciéndolo igual a cero, y luego sustituirlas en la expresión anterior, como sigue:

$x(x+1)(x-2)=0$

$x=0$
$x+1=0 \rightarrow x=-1$
$x-2=0 \rightarrow x=2$

Si
$x=0$

$3(0)^2-5(0)+1=A(0+1)(0-2)+B(0)(0-2)+C(0)(0+1)$

$1=-2A \rightarrow A=-\frac{1}{2}$
Si
$x=-1$

$3(-1)^2-5(-1)+1=A(-1+1)(-1-2)+B(-1)(-1-2)+C(-1)(-1+1)$

$9=3B \rightarrow B=3$
Si
$x=2$

$3(2)^2-5(2)+1=A(2+1)(2-2)+B(2)(2-2)+C(2)(2+1)$

$3=6C \rightarrow C=\frac{1}{2}$
Así:

$$\frac{3x^2-5x+1}{x(x+1)(x-2)}=\frac{-\frac{1}{2}}{x}+\frac{3}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x-2}=-\frac{1}{2x}+\frac{3}{x+1}+\frac{1}{2(x-2)}$$

$$\int \frac{3x^2-5x+1}{x(x+1)(x-2)}dx=\int -\frac{1}{2x}dx+\int \frac{3}{x+1}dx+\int \frac{1}{2(x-2)}dx$$

$$\int \frac{3x^2-5x+1}{x(x+1)(x-2)}dx=-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx+3\int \frac{1}{x+1}dx+\frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-2)}dx$$

Como los numeradores de las fracciones son las derivadas de los denominadores, se utilizan las integrales inmediatas logarítmicas.

$$\int \frac{3x^2-5x+1}{x(x+1)(x-2)}dx=-\frac{1}{2}\ln x+3\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln \int (x-2)+c$$

Ejemplo: Hallar la integral de $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x} dx$

Observando el denominador de este ejercicio, podría pensarse que no es un ejemplo del caso 1 que se está viendo, ya que su expresión no es de grado 1. Sin embargo, factorizando adecuadamente, se verá que sí son factores de primer grado.

Factorizar el denominador:

$$\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x} = \frac{x^2+2x-1}{x(2x^2+3x-2)} = \frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)}$$

Reescribir la expresión anterior como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(2x-1)} + \frac{C}{(x+2)}$$

Se resuelve la ecuación anterior, multiplicando, por ejemplo, ambos miembros de la igualdad por el MCM del denominador:

$$\begin{aligned}\frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)}\big(x(2x-1)(x+2)\big) \\ = \frac{A}{x}\big(x(2x-1)(x+2)\big) + \frac{B}{(2x-1)}\big(x(2x-1)(x+2)\big) \\ + \frac{C}{(x+2)}\big(x(2x-1)(x+2)\big)\end{aligned}$$

$$x^2+2x-1 = A\big((2x-1)(x+2)\big) + B\big(x(x+2)\big) + C\big(x(2x-1)\big)$$

Se obtienen las raíces del denominador original, haciéndolo igual a cero.

$$x(2x-1)(x+2) = 0$$
$$x = 0$$
$$(2x-1) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$
$$x+2 = 0 \rightarrow x = -2$$

Estas raíces se sustituyen en la expresión desarrollada anteriormente para obtener los valores de A, B, C:

Sustituyendo $x = 0$

$$0^2 + 2(0) - 1 = A(2(0)-1)(2) + B(0)(0+2) + C(0)(0+2)$$
$$-1 = -2A \rightarrow A = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo $x = \frac{1}{2}$

$$(\frac{1}{2})^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = A(1-1)\left(\frac{1}{2}+2\right) + B\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+2\right) + C(\frac{1}{2})(1-1)$$
$$\frac{1}{4} = \frac{5}{4}B \rightarrow B = \frac{1}{5}$$

Sustituyendo $x = -2$

$$(-2)^2 + 2(-2) - 1 = A(0) + B(-2)(0) + C(-2)((2)(-2) - 1)$$
$$-1 = 10C \rightarrow C = -\frac{1}{10}$$

Por tanto,

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x(2x-1)(x+2)} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{5(2x-1)} - \frac{1}{10(x+2)}$$

Se procede a la integración:

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx = \int \frac{1}{2x} dx + \int \frac{1}{5(2x-1)} dx - \int \frac{1}{10(x+2)} dx$$

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x} d\,x + \frac{1}{5}\int \frac{1}{2x-1} dx - \frac{1}{10}\int \frac{1}{x+2} dx$$

Se resuelven las integrales parciales:

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{x} d\,x = \frac{1}{2}\ln x$$

$$\frac{1}{10}\int \frac{1}{x+2} dx = \frac{1}{10}\ln(x+2)$$

Pero la integral $\frac{1}{5}\int \frac{1}{2x-1} dx$ no se puede resolver con integrales inmediatas, ya que el numerados no es la derivada del denominador, por lo que hay que emplear el método de sustitución o cambio de variable, como sigue:

Sea:

$$u = 2x - 1$$

$$\frac{du}{dx} = 2$$

$$\frac{du}{2} = dx$$

$$\frac{1}{5}\int \frac{1}{2x-1} dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{u}\frac{du}{2} = \frac{1}{10}\int \frac{1}{u} du = \frac{1}{10}\ln(u) = \frac{1}{10}\ln(2x-1)$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx = \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{10}\ln(2x-1) - \frac{1}{10}\ln(x+2)$$

$$\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx = \frac{1}{10}(5\ln x + \ln(2x-1) - \ln(x+2) + c$$

Ejemplo: Hallar la integral de $\int \frac{3x^2+8x-10}{x^2-2x-8}dx$

Como el denominador, siendo de segundo grado, se puede factorizar en dos factores de primer grado, es también un ejemplo del caso 1 que se está viendo. Pero, como el grado del numerador y del denominador es el mismo, primero se tiene que hacer la división de ambos polinomios.

$$\begin{array}{l} (3x^2+8x-10):(\,x^2-2x-8) = 3 \\ \underline{-3x^2+6x+24} \\ \quad\quad +14x+14 \end{array}$$

$$Cociente = 3$$
$$Residuo\ = 14x+14$$

As, el integrando se transforma de dos fracciones parciales:

$$\frac{3x^2+8x-10}{x^2-2x-8} = 3 + \frac{14x+14}{x^2-2x-8}$$

$$\int \frac{3x^2+8x-10}{x^2-2x-8}dx = \int 3dx + \int \frac{14x+14}{x^2-2x-8}dx$$

Para resolver la segunda integral, hay que factorizar el denominador, como sigue:

$$x^2-2x-8 = (x+2)(x-4)$$

$$\int \frac{14x+14}{x^2-2x-8}dx = \int \frac{14x+14}{(x+2)(x-4)} = dx$$

$$\frac{14x+14}{(x+2)(x-4)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-4)}$$

Multiplicando ambos miembros por $(x+2)(x-4)$:

$$14x+14 = A(x-4) + B(x+2)$$

Las raíces del denominador son:

$$(x+2)(x-4) = 0$$
$$(x-4) = 0 \rightarrow x = 4$$
$$(x+2) = 0 \rightarrow x = -2$$

Si: $x = 4$

$$14(4) + 14 = A(4 - 4) + B(4 + 2)$$
$$70 = 6B \to B = \frac{35}{3}$$

Si: $x = -2$
$$14(-2) + 14 = A(-2 - 4) + B(-2 + 2)$$

$$-14 = -6A \to A = \frac{7}{3}$$
$$\frac{14x + 14}{(x + 2)(x - 4)} = \frac{\frac{7}{3}}{(x + 2)} + \frac{\frac{35}{3}}{(x - 4)} = \frac{7}{3\,(x + 2)} + \frac{35}{3(x - 4)}$$

$$\int \frac{3x^2 + 8x - 10}{x^2 - 2x - 8} dx = \int 3dx + \int \frac{14x + 14}{x^2 - 2x - 8} dx$$

$$\int \frac{3x^2 + 8x - 10}{x^2 - 2x - 8} dx = \int 3dx + \int \frac{7}{3\,(x + 2)} dx + \int \frac{35}{3\,(x - 4)} dx$$

$$\int \frac{3x^2 + 8x - 10}{x^2 - 2x - 8} dx = 3\int dx + \frac{7}{3}\int \frac{1}{(x + 2)} dx + \frac{35}{3}\int \frac{1}{(x - 4)} dx$$

$$\int \frac{3x^2 + 8x - 10}{x^2 - 2x - 8} dx = 3x + \frac{7}{3}\ln(x + 2) + \frac{35}{3}\ln(x - 4) + c$$

Ejemplo: Hallar la integral de $\int \frac{5x-14}{x^2-5x+4} dx$

Fuente: Apuntes y problemas de cálculo I, de Víctor Chungara Castro.

$$x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$$

$$\int \frac{5x - 14}{x^2 - 5x + 4} dx = \int \frac{5x - 14}{(x - 1)(x - 4)} = dx$$

$$\frac{5x - 14}{(x - 1)(x - 4)} = \frac{A}{(x - 1)} + \frac{B}{(x - 4)}$$

Multiplicando ambos miembros por $(x - 1)(x - 4)$:

$$5x - 14 = A(x - 4) + B(x - 1)$$

Las raíces del denominador son:

$$(x - 1)(x - 4) = 0$$
$$(x - 1) = 0 \to x = 1$$
$$(x - 4) = 0 \to x = 4$$

Si: $x = 1$

$5(1) - 14 = A(1 - 4) + B(1 - 1)$
$-9 = A - 4A \to A = 3$

Si: $x = 4$

$5(4) - 14 = A(4 - 4) + B(4 - 1)$
$6 = 4B - B \to B = 2$

$$\frac{5x - 14}{(x - 1)(x - 4)} = \frac{3}{(x - 1)} + \frac{2}{(x - 4)}$$

$$\int \frac{5x - 14}{x^2 - 5x + 4} dx = \int \frac{3}{(x - 1)} dx + \int \frac{2}{(x - 4)} dx$$

$$\int \frac{5x - 14}{x^2 - 5x + 4} dx = 3\int \frac{1}{(x - 1)} dx + 2\int \frac{1}{(x - 4)} dx$$

$$\int \frac{5x - 14}{x^2 - 5x + 4} dx = 3 \ln(x - 1) + 2 \ln(x - 4) + c$$

Ejemplo por resolver: Hallar la integral de $\int \frac{48}{x^4 - 10x^2 + 9} dx$
Fuente: Apuntes y problemas de cálculo I, de Víctor Chungara Castro.

Dato: la factorización del denominador es: $x^4 - 10x^2 + 9 = (x^2 - 1)(x^2 - 9) = (x + 1)(x - 1)(x + 3)(x - 3)$.

Caso2: Factores lineales reiterados: El denominador de la fracción racional es el producto de factores de primer grado y algunos se repiten.

En términos generales, el caso es el siguiente:

Sea N_x el polinomio del numerador de la fracción.

Sea D_x el polinomio del denominador de la fracción

Si se tiene un factor de la forma$(x + a_1)^n$, se desarrolla una suma como la siguiente, donde A, B, C, … N, son constantes por determinar:

$$\frac{N_x}{D_x} = \frac{A}{(x + a_1)^n} + \frac{B}{(x + a_1)^{n-1}} + \frac{C}{(x + a_1)^{n-2}} + \cdots + \frac{N}{(x - a_1)}$$

Ejemplo: $\int \frac{8x - 7}{(x - 1)^2} dx$

En este ejemplo, el factor que se repite es: $(x - 1)$ y es de primer grado $(x - 1)^2 = (x - 1)(x - 1)$.

El integrando se transforma en la suma de las siguientes fracciones parciales:

$$\frac{8x-7}{(x-1)^2}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}$$

El denominador para A es: $(x+a_1)^n=(x-1)^2$
El denominador para B es: $(x+a_1)^{n-1}=(x-1)^{2-1}=x-1$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por el MCM: $(x-1)^2$:

$8x-7=A+B(x-1)$

Las raíces del denominador son:

$(x-1)(x-1)=0$
$(x-1)=0\rightarrow x=1$

Si: $x=B$

$8(1)-7=A+B(1-1)$
$1=A$

Para calcular B, se suele hacer $x=0$ y se sustituye el valor de A en: $8(0)-7=1+B(0-1)$

$-7-1=-B$
$B=8$

$$\frac{8x-7}{(x-1)^2}=\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{8}{x-1}$$

$$\int\frac{8x-7}{(x-1)^2}dx=\int\frac{1}{(x-1)^2}dx+\int\frac{8}{x-1}dx$$

$$\int\frac{8x-7}{(x-1)^2}dx=\int(x-1)^{-2}dx+8\int\frac{1}{x-1}dx$$

$$\int\frac{8x-7}{(x-1)^2}dx=\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}+8\ln(x-1)+c$$

$$\int\frac{8x-7}{(x-1)^2}dx=\frac{(x-1)^{-1}}{-1}+8\ln(x-1)+c$$

$$\int\frac{8x-7}{(x-1)^2}dx=-\frac{1}{x-1}+8\ln(x-1)+c$$

Ejemplo: Hallar la integral $\int\frac{5x^2-x+12}{x(x+2)^2}dx$

En este ejemplo, el factor x es de primer grado y el que se repite es: $(x+2)$, también de primer grado: $(x+2)^2=(x+2)(x+2)$.

El integrando se transforma en la suma de las siguientes fracciones parciales:

$$\frac{5x^2 - x + 12}{x(x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

Nota: la conformación de las fracciones parciales se hizo con una definición anterior consignada en el apunte, pero no invalida el desarrollo siguiente. Según la nueva definición se debió escribir $\frac{A}{(x+2)^2}$; $\frac{B}{x+2}$; $\frac{C}{x}$

Multiplicando ambos miembros por $x(x+2)^2$:

$$5x^2 - x + 12 = A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx$$

Las raíces del denominador son:

$$x(x+2)(x+2) = 0$$
$$x = 0$$
$$x + 2 = 0 \to x = -2$$

Si: $x = 0$

$$5(0)^2 - 0 + 12 = A(0+2)^2 + B(0)(0+2) + C(0)$$
$$12 = 4A \to A = 3$$

Si: $x = -2$

$$5(-2)^2 + 2 + 12 = A(-2+2)^2 + B(-2)(-2+2) + C(-2)$$
$$34 = -2C \to C = -17$$

Sustituyendo A y C en la ecuación anterior y haciendo $x = 1$ para que no se elimine B, se obtiene precisamente el valor de B faltante:

$$5x^2 - x + 12 = A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx$$
$$5(1)^2 - 1 + 12 = 3(1+2)^2 + B(1)(1+2) - 17(1)$$
$$16 = 27 + 3B - 17$$
$$3B = 16 - 27 + 17 = 6$$

$$B = 2$$

$$\frac{5x^2 - x + 12}{x(x+2)^2} = \frac{3}{x} + \frac{2}{x+2} + \frac{-17}{(x+2)^2}$$

$$\int \frac{5x^2 - x + 12}{x(x+2)^2} dx = \int \frac{3}{x} dx + \int \frac{2}{x+2} dx + \int \frac{-17}{(x+2)^2} dx$$

$$\int \frac{5x^2 - x + 12}{x(x+2)^2} dx = 3\int \frac{1}{x} dx + 2\int \frac{1}{x+2} dx - 17\int \frac{1}{(x+2)^2} dx$$

$$\int \frac{5x^2 - x + 12}{x(x+2)^2} dx = 3\ln x + \ 2\ln(x+2) - 17\int (x+2)^{-2} dx$$

$$\int \frac{5x^2 - x + 12}{x(x+2)^2} dx = 3\ln x + 2\ln(x+2) - 17\frac{((x+2)^{-1})}{-1} + c$$

$$\int \frac{5x^2 - x + 12}{x(x+2)^2} dx = 3\ln x + 2\ln(x+2) + \frac{17}{x+2} + c$$

Ejemplo: Calcular $\int \frac{6x^3+x+8}{x^3(x+8)} dx$

En este ejemplo, los factores del denominador también son de primer grado ya que $x^3(x+8)$ se puede descomponer como: $(x)(x)(x)(x+8)$.

$$\frac{6x^3 + x + 8}{x^3(x+8)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+8}$$

Nota: la conformación de las fracciones parciales se hizo con una definición anterior consignada en el apunte, pero no invalida el desarrollo siguiente. Según la nueva definición se debió escribir $\frac{A}{x^3}; \frac{B}{x^2}; \frac{C}{x}; \frac{D}{x+8}$

Multiplicando ambos miembros por $x^3(x+8)$

$$6x^3 + x + 8 = Ax^2(x+8) + Bx(x+8) + C(x+8) + Dx^3$$
$$6x^3 + x + 8 = A(x^3 + 8x^2) + B(x^2 + 8x) + C(x+8) + Dx^3$$
$$6x^3 + x + 8 = (A+D)(x^3) + (8A+B)x^2 + (8B+C)x + 8C$$

Se resuelve el sistema igualando los coeficientes de la variable:

$$\left.\begin{array}{l} A + D = 6 \\ 8A + B = 0 \\ 8B + C = 1 \\ 8C = 8 \end{array}\right|$$

Resolviendo, se tiene que: $A = 0; B = 0; C = 1; D = 6$

$$\frac{6x^3 + x + 8}{x^3(x+8)} = \frac{0}{x} + \frac{0}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{6}{x+8}$$

Así:

$$\int \frac{6x^3 + x + 8}{x^3(x+8)} dx = \int \frac{0}{x} dx + \int \frac{0}{x^2} dx + \int \frac{1}{x^3} dx + \int \frac{6}{x+8} dx$$

$$\int \frac{6x^3 + x + 8}{x^3(x+8)} dx = \int 0dx + \int 0dx + \int x^{-3} dx + 6\int \frac{1}{x+8} dx$$

Se recuerda que $\int 0dx = c$ que equivale a la constante de integración que se agrega al final de la integración.

$$\int \frac{6x^3 + x + 8}{x^3(x+8)}dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + 6\ln(x+8) + c$$

$$\int \frac{6x^3 + x + 8}{x^3(x+8)}dx = \frac{x^{-2}}{-2} + 6\ln(x+8) + c$$

$$\int \frac{6x^3 + x + 8}{x^3(x+8)}dx = -\frac{1}{2x^2} + 6\ln(x+8) + c$$

Ejemplo por resolver: $\int \frac{4}{x^3-5x^2+7x-3}dx$

Fuente: Apuntes y problemas de cálculo de Víctor Chungara Castro.

Dato: la factorización de $x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ es $(x-1)^2(x-3)$

Caso3: Factores cuadráticos: El denominador de la fracción racional es el producto de uno o más factores de segundo grado y ninguno de ellos se repite.

A todo factor de la forma a$x^2 + bx + c$, le corresponde una fracción de la forma:

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

Donde A y B son constantes por determinar.

En términos generales, el caso es el siguiente:

Sea N_x el polinomio del numerador de la fracción.

Sea D_x el polinomio del denominador de la fracción

$$\frac{N_x}{D_x} = \frac{N_x}{(x^2 + b_1x + c_1)(x^2 + b_2x + c_2)} = \frac{Ax + B}{x^2 + b_1x + c_1} + \frac{Cx + D}{x^2 + b_2x + c_2} + \cdots$$

En este caso, el polinomio del denominador se descompone en factores cuadráticos, los cuales no se reiteran. Por tanto, se emplean dos constantes en cada fracción parcial, donde A, B, C, D son las constantes por determinar. Se asume que los factores cuadráticos del denominador son irreducibles, ya que no pueden factorizarse como producto de polinomios de grado 1.

Ejemplo: Hallar la integral de $\int \frac{5x^2+3x-1}{x^3-2x^2+x-2}dx$

Factorización del denominador: (se verá que no es el producto de polinomios de grado uno).

$$x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x^3 - 2x^2) + (x - 2) = x^2(x-2) + (x-2) = (x-2)(x^2+1)$$

$$\frac{5x^2 + 3x - 1}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{Bx + C}{(x^2+1)}$$

Se ve que, en la segunda fracción, por ser su denominador de grado 2, en el numerador debe haber una variable de grado 1, representada por $Bx + C$.

$$\frac{5x^2 + 3x - 1}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{Bx + C}{(x^2+1)} = \frac{[A(x^2+1) + (Bx + C)(x-2)]}{(x-2)(x^2+1)}$$

$$5x^2 + 3x - 1 = A(x^2+1) + (Bx + C)(x-2)$$
$$5x^2 + 3x - 1 = Ax^2 + A + Bx^2 - 2Bx + Cx - 2C$$

Agrupando según el grado de la variable:

$$5x^2 + 3x - 1 = (Ax^2 + Bx^2) + (Cx - 2Bx) + (A - 2C)$$
$$5x^2 + 3x - 1 = (A + B)x^2 + (C - 2B)x + (A - 2C)$$

Se igualan los coeficientes de las variables de igual grado para formar un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas:

$$A + B = 5$$
$$C - 2B = 3$$
$$A - 2C = -1$$

Despejando:

$$A = 5 - B$$
$$C = 3 + 2B$$

Reemplazando en la tercera ecuación:

$$-1 = 5 - B - (3 + 2B) \rightarrow B = 0$$
$$A = 5 - B = 5 - 0 = 5$$
$$C = 3 + 2(0) = 3$$

Reemplazando estos valores:

$$\frac{5x^2 + 3x - 1}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{5}{(x-2)} + \frac{3}{(x^2+1)}$$

$$\int \frac{5x^2 + 3x - 1}{x^3 - 2x^2 + x - 2} dx = \int \frac{5}{(x-2)} dx + \int \frac{3}{(x^2+1)} dx$$
$$\int \frac{5x^2 + 3x - 1}{x^3 - 2x^2 + x - 2} dx = 5\int \frac{1}{(x-2)} dx + 3\int \frac{1}{(x^2+1)} dx$$

Como $\int \frac{1}{(x^2+1)} dx$ es una integral inmediata de valor $arctg\ x + c$

$$\int \frac{5x^2+3x-1}{x^3-2x^2+x-2}dx = 5\int \ln{(x-2)} + 3\int arctg\ x + c$$

Ejemplo: Calcular de $\int \frac{x^3}{(x^2+3)(x^2+4)}dx$

$(x^2+3)(x^2+4)$ son irreductibles.

$$\frac{x^3}{(x^2+3)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+3} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

Como los denominadores de las fracciones parciales son de grado dos, su numerador debe ser de un grado menos, es decir, de grado uno, lo que se representa por $Ax+B$ en la primera fracción y por $Cx+D$ en la segunda.

Multiplicando ambos miembros por $(x^2+3)(x^2+4)$:

$$x^3 = (Ax+B)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2+3)$$
$$x^3 = Ax^3 + 4Ax + Bx^2 + 4B + Cx^3 + 3Cx + Dx^2 + 3D$$
$$x^3 = (A+C)x^3 + (4A+3C)x + (B+D)x^2 + 4B + 3D$$

Se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} A+C=1 \\ B+D=0 \\ 4A+3C=0 \\ 4B+3D=0 \end{array}\right|$$

Resolviendo se tiene que: $A=-3; B=0; C=4; D=0;$

$$\frac{x^3}{(x^2+3)(x^2+4)} = \frac{-3x}{x^2+3} + \frac{4x}{x^2+4}$$

$$\int \frac{x^3}{(x^2+3)(x^2+4)}dx = \int \frac{-3x}{x^2+3}dx + \int \frac{4x}{x^2+4}dx$$

$$\int \frac{x^3}{(x^2+3)(x^2+4)}dx = -3\int \frac{x}{x^2+3}dx + 4\int \frac{x}{x^2+4}dx$$

Como en los dos sumandos los numeradores no son las derivadas de los denominadores, hay que hacer un cambio de variable:

$$-3\int \frac{x}{x^2+3}dx$$

Sea: $u = x^2+3$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$du = 2xdx$$

$$dx = \frac{du}{2x}$$

$$-3\int \frac{x}{x^2+3}dx = -3\int \frac{x}{u}\frac{du}{2x} = -3\left(\frac{1}{2}\right)\int \frac{2xdx}{x^2+3} = -\frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}dx$$

En el otro sumando:

$$3\int \frac{x}{x^2+4}dx$$

Sea: $u = x^2 + 4$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$du = 2xdx$$

$$dx = \frac{du}{2x}$$

$$4\int \frac{x}{x^2+4}dx = 4\int \frac{x}{u}\frac{du}{2x} = 4\left(\frac{1}{2}\right)\int \frac{2xdx}{x^2+4} = 2\int \frac{2x}{x^2+4}dx$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^3}{(x^2+3)(x^2+4)}dx = -\frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}dx + 2\int \frac{2x}{x^2+4}dx$$

Ahora, como los numeradores son las derivadas de los denominadores, se usan las integrales inmediatas logarítmicas:

$$\int \frac{x^3}{(x^2+3)(x^2+4)}dx = -\frac{3}{2}\ln\left((x^2+3) + 2\ln((x^2+4) + c\right.$$

Ejemplo: Calcular de $\int \frac{3x^2+2x+3}{x(x^2+x+3)}dx$

$x(x^2 + x + 3)$ son irreductibles.

$$\frac{3x^2+2x+3}{x(x^2+x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+3}$$

Como el denominador de la primera fracción parcial es de grado uno, en su numerador se pone solo A; en cambio, en la segunda fracción, como su denominador es de grado dos, su numerador debe ser de un grado menos, es decir, de grado uno, lo que se representa por $Bx + C$.

Multiplicando ambos miembros por $x(x^2 + x + 3)$:

$$3x^2 + 2x + 3 = A(x^2 + x + 3) + (Bx + C)(x)$$
$$3x^2 + 2x + 3 = Ax^2 + Ax + 3A + Bx^2 + 4B + Cx$$
$$3x^2 + 2x + 3 = (A + B)x^2 + (A + C)x + 3A$$

Se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} A + B = 3 \\ A + C = 2 \\ 3A = 3 \end{array}\right|$$

Resolviendo se tiene que: $A = 1; B = 2; C = 1$

$$\frac{3x^2 + 2x + 3}{x(x^2 + x + 3)} = \frac{1}{x} + \frac{2x + 1}{x^2 + x + 3}$$

$$\int \frac{3x^2 + 2x + 3}{x(x^2 + x + 3)} dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 3} dx$$

Como los numeradores son las derivadas de los denominadores, se usan las integrales inmediatas logarítmicas:

$$\int \frac{3x^2 + 2x + 3}{x(x^2 + x + 3)} dx = \ln\ x + \ln((x^2 + x + 3) + c$$

Ejemplo por resolver: Calcular $\int \frac{x^2+x}{(x-3)(x^2+1)} dx$

Fuente: matemáticas simplificadas, p. 1372

$$\frac{x^2 + x}{(x - 3)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = \frac{A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x - 3)}{(x - 3)(x^2 + 1)}$$
$$= \frac{A(x^2 + 1) + Bx^2 - 3Bx + Cx - 3C}{(x - 3)(x^2 + 1)} = \frac{x^2(A + B) + x(-3B + C) + A - 3C}{(x - 3)(x^2 + 1)}$$

Se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} A + B = 1 \\ -3B + C = 1 \\ A - 3C = 0 \end{array}\right|$$

Resolviendo se tiene que: $A = \frac{6}{5}; B = -\frac{1}{5}; C = \frac{2}{5}$

Sustituyendo en la integral:

$$\int \frac{x^2+x}{(x-3)(x^2+1)}dx = \frac{6}{5}\int \frac{dx}{(x-3)} + \int \frac{\left(-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}\right)dx}{(x^2+1)}$$
$$= \frac{6}{5}ln|x-3| - \frac{1}{5}\int \frac{xdx}{(x^2+1)} + \frac{2}{5}\int \frac{dx}{(x^2+1)}$$
$$= \frac{6}{5}ln|x-3| - \frac{1}{10}ln|x^2+1| + \frac{2}{5}arc\ tgx + c$$
$$= ln\left|\frac{(x-3)^{\frac{6}{5}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{10}}}\right| + \frac{2}{5}arc\ tgx + c$$

Ejemplo por resolver: Calcular de $\int \frac{4x^2+6}{x^3+3x}dx$

Fuente: matemáticas simplificadas, p. 1371

$$\frac{4x^2+6}{x^3+3x} = \frac{4x^2+6}{x(x^2+3)}$$
$$\frac{4x^2+6}{x(x^2+3)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+3}$$

$$\frac{4x^2+6}{x(x^2+3)} = \frac{A(x^2+3)+(Bx+C)x}{x(x^2+3)}$$

$$\frac{4x^2+6}{x(x^2+3)} = \frac{x^2(A+B)+Cx+3A}{x(x^2+3)}$$

Se resuelve el sistema:

$$\begin{array}{l|} A+B=4 \\ C=0 \\ 3A=6 \\ \hline \end{array}$$

Resolviendo se tiene que: $A=2; B=2; C=0$

$$\int \frac{4x^2+6}{x^3+3x}dx = \int \frac{2dx}{x} + \int \frac{(2x+0)dx}{x^3+3} = 2\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{xdx}{x^3+3} = 2ln|x| + ln|x^2+3| + c$$
$$= \ln x^2 x + ln|x^2+3| + c = \ln x^2(x^2+3) + c$$

Caso 4: Factores cuadráticos reiterados: En el denominador de la fracción racional todos los factores son de segundo grado y algunos se repiten.

En términos generales, el caso es el siguiente:

Sea N_x el polinomio del numerador de la fracción.

Sea D_x el polinomio del denominador de la fracción

$$\frac{N_x}{D_x} = \frac{N_x}{(x^2 + b_1x + c_1)^m (x^2 + b_2x + c_2)^n}$$
$$= \frac{Ax + B}{x^2 + b_1x + c_1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + b_1x + c_1)^2} + \cdots + \frac{Gx + H}{x^2 + b_2x + c_2} + (\frac{Ix + J}{(x^2 + b_2x + c_2)^2} + \cdots$$

En este caso, el polinomio del denominador se descompone en factores todos cuadráticos, los cuales se reiteran m o n veces, donde A, B, C, D, … , G, H, I, J, … son las constantes. Los factores cuadráticos del denominador son irreducibles.

<u>Ejemplo</u>: calcular $\int \frac{3x^4+6x^2+1}{x(x^2+1)^2} dx$

Fuente: Conocimientos fundamentales de matemáticas de Oteyza, p. 355

En el denominador hay factores cuadráticos irreductibles y el que se repite es: $x^2 + 1$ ya que está elevado al cuadrado.

$$\frac{3x^4 + 6x^2 + 1}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{(x^2 + 1)} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}$$

Multiplicando ambos miembros por $x(x^2 + 1)^2$:

$$3x^4 + 6x^2 + 1 = A((x^2 + 1)^2 + (Bx + C)x(x^2 + 1) + (Dx + E)x$$
$$3x^4 + 6x^2 + 1 = Ax^4 + 2Ax^2 + A + Bx^4 + Bx^2 + Cx^3 + Cx + Dx^2 + Ex$$
$$3x^4 + 6x^2 + 1 = (A + B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)x^2 + (C + E)x + A$$

Se resuelve el sistema:

$$\begin{array}{l} A + B = 3 \\ C = 0 \\ 2A + B + D = 6 \\ C + E = 0 \\ A = 1 \end{array}$$

Despejando, se tiene que: $A = 1; B = 2; C = 0; D = 2; E = 0$

$$\frac{3x^4 + 6x^2 + 1}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{2x}{(x^2 + 1)} + \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\int \frac{3x^4 + 6x^2 + 1}{x(x^2 + 1)^2} dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} dx + \int \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

Como en los dos primeros sumandos, los numeradores son la derivada de los denominadores, se usan las integrales inmediatas logarítmicas, en el tercer sumando, el numerador no es la derivada del denominador, por lo que hay que usar la integral inmediata potencial.

$$\int \frac{3x^4+6x^2+1}{x(x^2+1)^2}dx = \ln x + \ln\,(x^2+1) + \frac{(x^2+1)^{-1}}{-1} + c$$

$$\int \frac{3x^4+6x^2+1}{x(x^2+1)^2}dx = lnx + \ln(x^2+1) - \frac{1}{x^2+1} + c$$

<u>Ejemplo por resolver</u>: calcular $\int \frac{x^5}{(x^2+4)^2}dx$

Como el numerador es de grado superior al denominador, corresponde efectuar primero la división entre ambos. En ejercicios anteriores se recuerda cómo proceder. El resultado es el siguiente:

$$\frac{x^5}{(x^2+4)^2}dx = x - \frac{8x^3+16x}{(x^2+4)^2}$$

$$\int \frac{x^5}{(x^2+4)^2}dx = \int x\,dx - \int \frac{8x^3+16x}{(x^2+4)^2}\,dx$$

La integral:

$\int \frac{8x^3+16x}{(x^2+4)^2}\,dx$ se realiza por fracciones parciales:

$$\frac{8x^3+16x}{(x^2+4)^2} = \frac{(Ax+B)((x^2+4)+Cx+D}{(x^2+4)^2} = \frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{(x^2+4)^2}$$
$$= \frac{Ax^3+Bx^2+x(4A+c)+4B+D}{(x^2+4)^2} =$$

Se resuelve el sistema:

$$\begin{array}{l|} A=8 \\ B=0 \\ 4A+C=16 \\ 4B+D=0 \\ \hline \end{array}$$

Despejando, se tiene que: $A = 8; B = 0; C = -16; D = 0$

$$\int \frac{8x^3+16x}{(x^2+4)^2}\,dx = 8\int \frac{x}{x^2+4}\,dx - 16\int \frac{x}{(x^2+4)^2}dx = 4ln|x^2+4| + \frac{8}{x^2+4}$$

Se sustituye este resultados en la integral:

$$\int \frac{x^5}{(x^2+4)^2}dx = \int x\,dx - \int \frac{(8x^3+16x)dx}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2}{2} - (4ln|x^2+4| + \frac{8}{x^2+4} + c$$
$$= \frac{x^2}{2} - 4ln|x^2+4| - \frac{8}{x^2+4} + c$$

1.13 INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN DE UNA NUEVA VARIABLE

Fuente: Matemáticas simplificadas, p. 1375.

Método para integrales que contienen exponentes fraccionarios o radicales.

Caso: Diferenciales que contienen potencias fraccionarias de x:

Se hace la siguiente sustitución: $x = w^n$

Donde $n =$
$\textit{Mínimo común múltiplo de los denominadores de los exponentes fraccionarios}.$

Ejemplo: Demostrar que: $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}} = 2x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{1}{4}} + 4\ln\left(x^{\frac{1}{4}} - 1\right) + c$

Fuente: matemáticas simplificadas, p. 1376

$MCM = 4$

$x = w^4$

$\sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{w^4} \rightarrow x^{\frac{1}{4}} = w$
$\sqrt{x} = \sqrt{w^4} \rightarrow x^{\frac{1}{2}} = w^2$

$$\frac{dx}{dw} = 4w^3 \rightarrow dx = 4w^3 dw$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}} = \int \frac{4w^3}{w^2 - w} dw = 4\int \frac{4w^3}{w^2 - w} dw = ?$$

$$w^3 : w^2 - w = w + 1 + \frac{w}{w^2 - w}$$

$\underline{w^3 - w^2}$
$\underline{\quad w^2}$
$\underline{\quad -w^2 + w}$
w

$$4\int \frac{4w^3}{w^2 - w} dw = 4\int \left(w + 1 + \frac{w}{w^2 - w}\right) dw = 4\int w dw + \int dw + \int \frac{w}{w^2 - w} dw$$
$$= \frac{4w^2}{2} + 4w + 4\int \frac{dw}{w(w-1)} + c = 2w^2 + 4w + ln|w - 1| + c$$

Pero, $w = x^{\frac{1}{4}}$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}} = 2x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{1}{4}} + 4\ln\left(x^{\frac{1}{4}} - 1\right) + c$$

Queda demostrado.

<u>Caso</u>: Diferenciales que contienen potencias fraccionarias de $a + bx$:

Se hace la siguiente sustitución: $a + bx = w^n$

Donde $n =$
$Mínimo\ común\ múltiplo\ de\ los\ denominadores\ de\ los\ exponentes\ fraccionarios.$

<u>Ejemplo</u>: Demostrar que: $\int \frac{(x+1)^{\frac{2}{3}}}{1+(x+1)^{\frac{2}{3}}} dx = (x + 1) - 3(x + 1)^{\frac{1}{3}} + 3\ arc\ tg\ \sqrt[3]{x + 1} + c$

Fuente: matemáticas simplificadas, p. 1376

$MCM = 3$

$x + 1 = w^3$

$$\frac{dx}{dw} = 3w^2$$

$dx = 3w^2\ dw$

Se eleva al cuadrado para luego sacar raíz cúbica y llegar a la forma del denominador del integrando:

$(x + 1)^2 = (w^3)^2 = (w^6)$

$\sqrt[3]{(x + 1)^2} = \sqrt[3]{w^6}$

$(x + 1)^{\frac{2}{3}} = w^2$

$$\int \frac{(x + 1)^{\frac{2}{3}}}{1 + (x + 1)^{\frac{2}{3}}} dx = \int \frac{w^2}{1 + w^2} \cdot 3w^2\ dw = 3\int \frac{w^4}{1 + w^2} \cdot dw$$

Se resuelve la división y se integra:

$$w^4 : w^2 + 1 = w^2 - 1 + \frac{1}{w^2 + 1}$$

$$\begin{array}{r} \underline{-w^4 - w^2} \\ \underline{-w^2} \\ \underline{w^2 + 1} \\ 1 \end{array}$$

$$3\int \frac{w^4}{1 + w^2} \cdot dw = 3\int w^2 dw - 3\int w\ dw + 3\int \frac{1}{w^2 + 1} dw = w^3 - 3w + 3\ arc\ tg\ w + c$$

$x + 1 = w^3$

$w^3 = x + 1$

$\sqrt[3]{w^3} = \sqrt[3]{(x + 1)}$

$w = \sqrt[3]{(x + 1)} = (x + 1)^{\frac{1}{3}}$

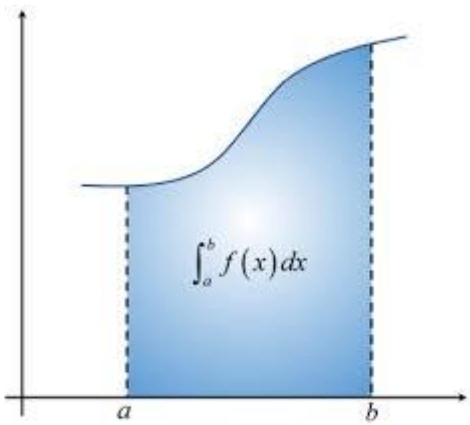
$$\int \frac{(x+1)^{\frac{2}{3}}}{1 + (x+1)^{\frac{2}{3}}} dx = w^3 - 3w + 3\, arc\ tg\ w + c$$
$$= (x + 1) - 3(x + 1)^{\frac{1}{3}} + 3\, arc\ tg\ \sqrt[3]{(x + 1)} + c$$

2 INTEGRALES DEFINIDAS

La integral definida de una función no negativa es el área de la región que está entre su gráfica y el eje X.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Donde *a* el límite inferior y *b* el límite superior.



Procedimiento:

1. Se integra la diferencial de la función
2. Se sustituye la variable de la integral que se obtuvo, por los límites superior e inferior, y los resultados se restan para obtener el valor de la integral definida.

Propiedades de la integral definida:

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
2. $\int_a^b cf(x)dx = c[F(b) - F(a)]$ donde c es una constante
3. $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) = \int_a^b \left(f(x)dx \pm \int_a^b g(x)\right) dx$
4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ con $c \in [a, b]$

Ejemplo: $\int_3^5 2x\, dx$

Se calcula la integral sin límites de integración:

$$2 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_3^5$$

$$x^2\Big|_3^5$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$x^2\Big|_3^5 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$$

Nota: en las integrales definidas no se agrega la constante de integración.

Ejemplo: $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt{3x-2}}$

Se calcula la integral sin límites de integración:

$$u = 3x - 2$$
$$\frac{du}{dx} = 3$$

$$du = 3dx$$

$$dx = \frac{du}{3}$$

$$\int \frac{\frac{du}{3}}{\sqrt{u}} = \int \frac{\frac{du}{3}}{\sqrt{u}} = \int \frac{1}{3\sqrt{u}} du = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{u}}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{2}}$$
$$\frac{1}{3}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}2\sqrt{u}$$

$$= \frac{1}{3}2\sqrt{3x-2}\ \Big|_2^6 = \frac{1}{3}2\sqrt{3(6)-2} - \frac{1}{3}2\sqrt{3(2)-2} = \frac{1}{3}2\sqrt{16} - \frac{1}{3}2\sqrt{4} = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

Ejemplo: $\int_1^4 5\, dx$

Se calcula la integral sin límites de integración:

$$5 \cdot x\Big|_1^4$$

$f_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

$5 \cdot x \Big|_1^4 = 5 \cdot (4) - 5(1) = 20 - 5 = 15$

Ejemplo: $f_1^3 (2x^2 - 3x + 5)\, dx$

Se calcula la integral sin límites de integración:

$$(\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x) \Big|_1^3$$

$$\frac{2(3)^3}{3} - \frac{3(3)^2}{2} + 5(3) - [\frac{2}{3} - \frac{3(1)^2}{2} + 5(1)] =$$

$$\frac{2(3)^3}{3} - \frac{3(3)^2}{2} + 5(3) - [\frac{2(1)^3}{3} - \frac{3(1)^2}{2} + 5(1)] =$$

$$18 - \frac{27}{2} + 15 - \frac{2}{3} + \frac{3}{2} - 5 =$$

$$18 - \frac{27}{2} + 15 - \frac{2}{3} + \frac{3}{2} - 5 =$$

$m.c.m. = 6$

$$\frac{108 - 81 + 90 - 4 + 9 - 30}{6} = \frac{92}{6} = \frac{46}{3}$$

Ejemplo: $f_{-3}^2 (3x^2 - 5x)\, dx$

Se calcula la integral sin límites de integración:

$$\frac{3x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} \Big|_{-3}^{2}$$

$f_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

$$\frac{3(2)^3}{3} - \frac{5(2)^2}{2} - \left(\frac{3(-3)^3}{3} - \frac{5(3)^2}{2}\right) =$$

$$8 - 10 + 27 + \frac{45}{2} =$$

$$25 + \frac{45}{2} = \frac{50 + 45}{2} = \frac{95}{2}$$

Ejemplo: $\int_0^2 (7x-6)(7x^2-12x)^5\, dx$

Se calcula la integral sin límites de integración:

Cambio de variable: Como se verá es necesario utilizar solo una variable:

$$u = 7x^2 - 12x$$
$$\frac{du}{dx} = 14x - 12$$

$$du = (14x-12)dx$$

Dividiendo entre 2:

$$\frac{du}{2} = \frac{1}{2}du = (7x-6)dx$$

Sustituyendo:

$$\int (7x-6)(7x^2-12x)^5 = \int \frac{1}{2}du \cdot u^5 = \frac{1}{2}\int u^5 \cdot du =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^6}{6} = \frac{u^6}{12} = \frac{(7x^2-12x)^6}{12}$$

$$\int_0^2 (7x-6)(7x^2-12x)^5\, dx = \frac{(7x^2-12x)^6}{12} \Big|_0^2 =$$

$$= \frac{(7(2)^2-12(2)^6}{12} - \frac{(7(0)^2-12(0)^6}{12} = \frac{4^6}{12} = \frac{4^6}{4 \cdot 3} = \frac{4^5}{3}$$

Ejemplo: En cada caso determine el valor del parámetro *m* tal que la integral definida tenga el valor solicitado.

$$\int_0^1 (3mx^2 + 1)dx = 4$$

Solución:

$$\int_0^1 (3mx^2 dx) + \int_0^1 1\, dx) = 4$$
$$3m\int \left(x^2 dx\right) + \int\ 1\, dx\right) = 4$$

$$3m \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + x\Big|_0^1 = 4$$

$$m \cdot x^3 \Big|_0^1 + x\Big|_0^1 = 4$$

$$[m(1)^3 - m(0)^3] + [1-0] = 4$$

$$[m-0] + [1-0] = 4$$

$m + 1 = 4$

$m = 3$ Es el valor del parámetro buscado.