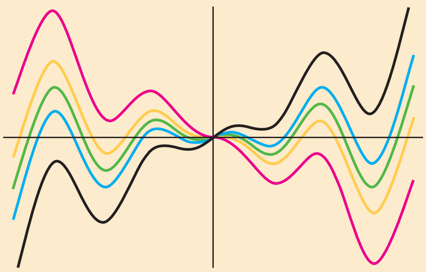
1 INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES



Las palabras *ecuaciones* y *diferenciales* ciertamente sugieren alguna clase de ecuación que contiene derivadas y', y'', . . . Al igual que en un curso de álgebra y trigonometría, en los que se invierte bastante tiempo en la solución de ecuaciones tales como $x^2 + 5x + 4 = 0$ para la incógnita x, en este curso *una* de las tareas será resolver ecuaciones diferenciales del tipo $y'' + 2y' + y = 0$ para la función incógnita $y = \phi(x)$.

Nos dice algo el párrafo anterior, pero no la historia completa acerca del curso que está por iniciar. Conforme el curso se desarrolle verá que hay más en el estudio de las ecuaciones diferenciales, que solamente dominar los métodos que alguien ha inventado para resolverlas.

Pero las cosas en orden. Para leer, estudiar y platicar de un tema especializado, tiene que aprender la terminología de esta disciplina. Esa es la idea de las dos primeras secciones de este capítulo. En la última sección examinaremos brevemente el vínculo entre las ecuaciones diferenciales y el mundo real. Las preguntas prácticas como *¿qué tan rápido se propaga una enfermedad? ¿Qué tan rápido cambia una población*? implican razones de cambio o derivadas. Así, la descripción matemática —o modelo matemático— de experimentos, observaciones o teorías puede ser una ecuación diferencial.

1.1 DEFINICIONES Y TERMINOLOGÍA

REPASO DE MATERIAL

- Definición de derivada
- Reglas de derivación
- Derivada como una razón de cambio
- Primera derivada y crecimiento/decrecimiento
- Segunda derivada y concavidad

INTRODUCCIÓN La derivada dy/dx de una función $y = \phi(x)$ es otra función $\phi'(x)$ que se encuentra con una regla apropiada. La función $y = e^{0.1x^2}$ es derivable en el intervalo $(-\infty, \infty)$, y usando la regla de la cadena, su derivada es $dy/dx = 0.2xe^{0.1x^2}$. Si sustituimos $e^{0.1x^2}$ en el lado derecho de la ultima ecuación por y, la derivada será

$$\frac{dy}{dx} = 0.2xy. \tag{1}$$

Ahora imaginemos que un amigo construyó su ecuación (1); usted no tiene idea de cómo la hizo y se pregunta *¿cuál es la función representada con el símbolo y?* Se está enfrentando a uno de los problemas básicos de este curso:

¿Cómo resolver una ecuación para la función desconocida $y = \phi(x)$?

UNA DEFINICIÓN La ecuación (1) es llamada **ecuación diferencial**. Antes de proseguir, consideremos una definición más exacta de este concepto.

DEFINICIÓN 1.1.1 Ecuación diferencial

Una ecuación que contiene derivadas de una o más variables respecto a una o más variables independientes, se dice que es una **ecuación diferencial (ED)**.

Para hablar acerca de ellas clasificaremos a las ecuaciones diferenciales por **tipo, orden** y **linealidad**.

CLASIFICACIÓN POR TIPO Si una ecuación contiene sólo derivadas de una o más variables dependientes respecto a una sola variable independiente se dice que es una **ecuación diferencial ordinaria (EDO)**. Por ejemplo,

Una ED puede contener
más de una variable dependiente,

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0, \qquad \text{y} \qquad \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y \tag{2}$$

son ecuaciones diferenciales ordinarias. Una ecuación que involucra derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes se llama **ecuación diferencial parcial (EDP).** Por ejemplo,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{3}$$

son ecuaciones diferenciales parciales.*

En todo el libro las derivadas ordinarias se escribirán usando la **notación de Leibniz** dy/dx, d^2y/dx^2, d^3y/dx^3, . . . o la **notación prima** y', y'', y''', ... Usando esta última notación, las primeras dos ecuaciones diferenciales en (2) se pueden escribir en una forma un poco más compacta como $y' + 5y = e^x$ y $y'' - y' + 6y = 0$. Realmente, la notación prima se usa para denotar sólo las primeras tres derivadas: la cuarta derivada se denota $y^{(4)}$ en lugar de y''''. En general, la n-ésima derivada de y se escribe como d^ny/dx^n o $y^{(n)}$. Aunque es menos conveniente para escribir o componer tipográficamente, la notación de Leibniz tiene una ventaja sobre la notación prima en que muestra claramente ambas variables, las dependientes y las independientes. Por ejemplo, en la ecuación

función incógnita
o variable dependiente

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0$$

variable independiente

se ve inmediatamente que ahora el símbolo x representa una variable dependiente, mientras que la variable independiente es t. También se debe considerar que en ingeniería y en ciencias físicas, la **notación de punto** de Newton (nombrada despectivamente notación de "puntito") algunas veces se usa para denotar derivadas respecto al tiempo t. Así la ecuación diferencial $d^2s/dt^2 = -32$ será $\ddot{s} = -32$. Con frecuencia las derivadas parciales se denotan mediante una **notación de subíndice** que indica las variables independientes. Por ejemplo, con la notación de subíndices la segunda ecuación en (3) será $u_{xx} = u_{tt} - 2u_t$.

CLASIFICACIÓN POR ORDEN El **orden de una ecuación diferencial** (ya sea EDO o EDP) es el orden de la mayor derivada en la ecuación. Por ejemplo,

segundo orden primer orden

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$$

es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. Las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden algunas veces son escritas en la forma diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)\,dy = 0$. Por ejemplo, si suponemos que y denota la variable dependiente en $(y - x)\,dx + 4xdy = 0$, entonces $y' = dy/dx$, por lo que al dividir entre la diferencial dx, obtenemos la forma alterna $4xy' + y = x$. Véanse los *Comentarios* al final de esta sección.

Simbólicamente podemos expresar una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden con una variable dependiente por la forma general

$$F(x,\ y,\ y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{4}$$

donde F es una función con valores reales de $n + 2$ variables: $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$. Por razones tanto prácticas como teóricas, de ahora en adelante supondremos que es posible resolver una ecuación diferencial ordinaria en la forma de la ecuación (4) únicamente para la mayor derivada $y^{(n)}$ en términos de las $n + 1$ variables restantes.

*Excepto esta sección de introducción, en *Un primer curso de ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*, novena edición, sólo se consideran ecuaciones diferenciales ordinarias. En ese libro la palabra *ecuación* y la abreviatura ED se refiere sólo a las EDO. Las ecuaciones diferenciales parciales o EDP se consideran en el volumen ampliado *Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera*. séptima edición.

La ecuación diferencial

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{5}$$

donde f es una función continua con valores reales, se conoce como la **forma normal** de la ecuación (4). Así que cuando sea adecuado para nuestros propósitos, usaremos las formas normales

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y')$$

para representar en general las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer y segundo orden. Por ejemplo, la forma normal de la ecuación de primer orden $4xy' + y = x$ es $y' = (x - y)/4x$; la forma normal de la ecuación de segundo orden $y'' - y' + 6y = 0$ es $y'' = y' - 6y$. Véanse los *Comentarios*.

CLASIFICACIÓN POR LINEALIDAD Una ecuación diferencial de n-ésimo orden (4) se dice que es **lineal** si F es lineal en $y, y', \ldots, y^{(n)}$. Esto significa que una EDO de n-ésimo orden es lineal cuando la ecuación (4) es $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y - g(x) = 0$ o

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \tag{6}$$

Dos casos especiales importantes de la ecuación (6) son las ED lineales de primer orden ($n = 1$) y de segundo orden ($n = 2$):

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \qquad \text{y} \qquad a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \tag{7}$$

En la combinación de la suma del lado izquierdo de la ecuación (6) vemos que las dos propiedades características de una EDO son las siguientes:

- La variable dependiente y y todas sus derivadas $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ son de primer grado, es decir, la potencia de cada término que contiene y es igual a 1.
- Los coeficientes de $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de $y, y', \ldots, y^{(n)}$ dependen a lo más de la variable independiente x.

Las ecuaciones

$$(y - x)dx + 4x\,dy = 0, \quad y'' - 2y' + y = 0, \quad \text{y} \quad \frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx} - 5y = e^x$$

son, respectivamente, ecuaciones diferenciales de primer, segundo y tercer orden. Acabamos sólo de mostrar que la primera ecuación es lineal en la variable y cuando se escribe en la forma alternativa $4xy' + y = x$. Una ecuación diferencial ordinaria **no lineal** es simplemente no lineal. Funciones no lineales de la variable dependiente o de sus derivadas, tales como sen y o $e^{y'}$, no se pueden presentar en una ecuación lineal. Por tanto

$$\underbrace{(1 - y)}_{\substack{\text{término no lineal:}\\ \text{coeficiente depende de } y}}y' + 2y = e^x, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \underbrace{\operatorname{sen} y}_{\substack{\text{término no lineal:}\\ \text{función no lineal de } y}} = 0, \qquad \text{y} \qquad \frac{d^4y}{dx^4} + \underbrace{y^2}_{\substack{\text{término no lineal:}\\ \text{el exponente es diferente de 1}}} = 0$$

son ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de primer, segundo y cuarto orden respectivamente.

SOLUCIONES Como ya se ha establecido, uno de los objetivos de este curso es resolver o encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales. En la siguiente definición consideramos el concepto de solución de una ecuación diferencial ordinaria.

DEFINICIÓN 1.1.2 Solución de una EDO

Cualquier función ϕ, definida en un intervalo I y que tiene al menos n derivadas continuas en I, las cuales cuando se sustituyen en una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden reducen la ecuación a una identidad, se dice que es una **solución** de la ecuación en el intervalo.

En otras palabras, una solución de una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden (4) es una función ϕ que posee al menos n derivadas para las que

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)) = 0 \quad \text{para toda } x \text{ en } I.$$

Decimos que ϕ *satisface* la ecuación diferencial en I. Para nuestros propósitos supondremos que una solución ϕ es una función con valores reales. En nuestro análisis de introducción vimos que $y = e^{0.1x^2}$ es una solución de $dy/dx = 0.2xy$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Ocasionalmente será conveniente denotar una solución con el símbolo alternativo $y(x)$.

INTERVALO DE DEFINICIÓN No podemos pensar en la *solución* de una ecuación diferencial ordinaria sin simultáneamente pensar en un *intervalo*. El intervalo I en la definición 1.1.2 también se conoce con otros nombres como son **intervalo de definición**, **intervalo de existencia**, **intervalo de validez**, o **dominio de la solución** y puede ser un intervalo abierto (a, b), un intervalo cerrado $[a, b]$, un intervalo infinito (a, ∞), etcétera.

EJEMPLO 1 Verificación de una solución

Verifique que la función indicada es una solución de la ecuación diferencial dada en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

a) $\dfrac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}; \quad y = \frac{1}{16}x^4$ **b)** $y'' - 2y' + y = 0; \quad y = xe^x$

SOLUCIÓN Una forma de verificar que la función dada es una solución, es ver, una vez que se ha sustituido, si cada lado de la ecuación es el mismo para toda x en el intervalo.

a) De

$$\textit{lado izquierdo:} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{16}(4 \cdot x^3) = \frac{1}{4}x^3,$$

$$\textit{lado derecho:} \quad xy^{1/2} = x \cdot \left(\frac{1}{16}x^4\right)^{1/2} = x \cdot \left(\frac{1}{4}x^2\right) = \frac{1}{4}x^3,$$

vemos que cada lado de la ecuación es el mismo para todo número real x. Observe que $y^{1/2} = \frac{1}{4}x^2$ es, por definición, la raíz cuadrada no negativa de $\frac{1}{16}x^4$.

b) De las derivadas $y' = xe^x + e^x$ y $y'' = xe^x + 2e^x$ tenemos que para todo número real x,

$$\textit{lado izquierdo:} \quad y'' - 2y' + y = (xe^x + 2e^x) - 2(xe^x + e^x) + xe^x = 0,$$

$$\textit{lado derecho:} \quad 0.$$

■

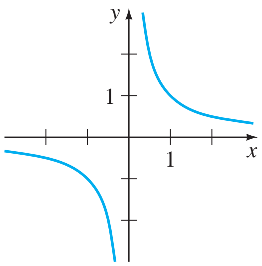
En el ejemplo 1, observe también, que cada ecuación diferencial tiene la solución constante $y = 0$, $-\infty < x < \infty$. Una solución de una ecuación diferencial que es igual a cero en un intervalo I se dice que es la **solución trivial.**

CURVA SOLUCIÓN La gráfica de una solución ϕ de una EDO se llama **curva solución.** Puesto que ϕ es una función derivable, es continua en su intervalo de definición I. Puede haber diferencia entre la gráfica de la *función* ϕ y la gráfica de la *solución* ϕ. Es decir, el dominio de la función ϕ no necesita ser igual al intervalo de definición I (o dominio) de la solución ϕ. El ejemplo 2 muestra la diferencia.

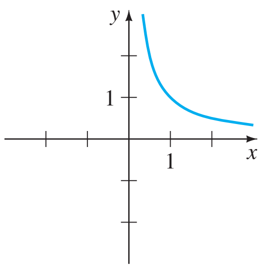
EJEMPLO 2 Función contra solución

El dominio de $y = 1/x$, considerado simplemente como una *función*, es el conjunto de todos los números reales x excepto el 0. Cuando trazamos la gráfica de $y = 1/x$, dibujamos los puntos en el plano xy correspondientes a un juicioso muestreo de números tomados del dominio. La función racional $y = 1/x$ es discontinua en $x = 0$, en la figura 1.1.1a se muestra su gráfica, en una vecindad del origen. La función $y = 1/x$ no es derivable en $x = 0$, ya que el eje y (cuya ecuación es $x = 0$) es una asíntota vertical de la gráfica.

Ahora $y = 1/x$ es también una solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden $xy' + y = 0$ (Compruebe). Pero cuando decimos que $y = 1/x$ es una *solución* de esta ED, significa que es una función definida en un intervalo I en el que es derivable y satisface la ecuación. En otras palabras, $y = 1/x$ es una solución de la ED en *cualquier* intervalo que no contenga 0, tal como $(-3, -1)$, $(\frac{1}{2}, 10)$, $(-\infty, 0)$, o $(0, \infty)$. Porque las curvas solución definidas por $y = 1/x$ para $-3 < x < -1$ y $\frac{1}{2} < x < 10$ son simplemente tramos, o partes, de las curvas solución definidas por $y = 1/x$ para $-\infty < x < 0$ y $0 < x < \infty$, respectivamente, esto hace que tenga sentido tomar el intervalo I tan grande como sea posible. Así tomamos I ya sea como $(-\infty, 0)$ o $(0, \infty)$. La curva solución en $(0, \infty)$ es como se muestra en la figura 1.1.1b. ■



a) función $y = 1/x$, $x \neq 0$



b) solución $y = 1/x$, $(0, \infty)$

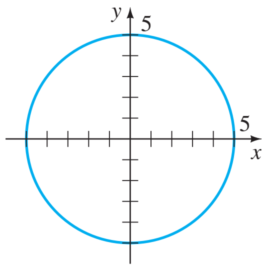
FIGURA 1.1.1 La función $y = 1/x$ no es la misma que la solución $y = 1/x$

SOLUCIONES EXPLÍCITAS E IMPLÍCITAS Usted debe estar familiarizado con los términos *funciones explícitas* y *funciones implícitas* de su curso de cálculo. Una solución en la cual la variable dependiente se expresa sólo en términos de la variable independiente y las constantes se dice que es una **solución explícita**. Para nuestros propósitos, consideremos una solución explícita como una fórmula explícita $y = \phi(x)$ que podamos manejar, evaluar y derivar usando las reglas usuales. Acabamos de ver en los dos últimos ejemplos que $y = \frac{1}{16}x^4$, $y = xe^x$, y $y = 1/x$ son soluciones explícitas, respectivamente, de $dy/dx = xy^{1/2}$, $y'' - 2y' + y = 0$, y $xy' + y = 0$. Además, la solución trivial $y = 0$ es una solución explícita de cada una de estas tres ecuaciones. Cuando lleguemos al punto de realmente resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias veremos que los métodos de solución no siempre conducen directamente a una solución explícita $y = \phi(x)$. Esto es particularmente cierto cuando intentamos resolver ecuaciones diferenciales de primer orden. Con frecuencia tenemos que conformarnos con una relación o expresión $G(x, y) = 0$ que define una solución ϕ.

DEFINICIÓN 1.1.3 Solución implícita de una EDO

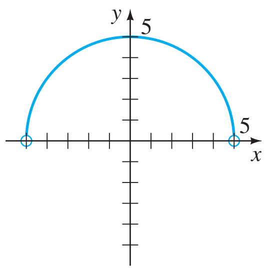
Se dice que una relación $G(x, y) = 0$ es una **solución implícita** de una ecuación diferencial ordinaria (4) en un intervalo I, suponiendo que existe al menos una función ϕ que satisface la relación así como la ecuación diferencial en I.

Está fuera del alcance de este curso investigar la condición bajo la cual la relación $G(x, y) = 0$ define una función derivable ϕ. Por lo que supondremos que si implementar formalmente un método de solución nos conduce a una relación $G(x, y) = 0$, entonces existe al menos una función ϕ que satisface tanto la relación (que es $G(x, \phi(x)) = 0$) como la ecuación diferencial en el intervalo I. Si la solución implícita $G(x, y) = 0$ es bastante simple, podemos ser capaces de despejar a y en términos de x y obtener una o más soluciones explícitas. Véanse los *Comentarios*.



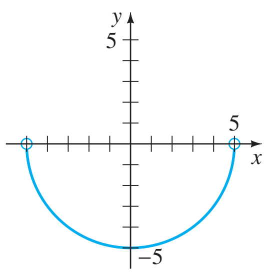
a) solución implícita

$x^2 + y^2 = 25$



b) solución explícita

$y_1 = \sqrt{25 - x^2},\ -5 < x < 5$



c) solución explícita

$y_2 = -\sqrt{25 - x^2},\ -5 < x < 5$

FIGURA 1.1.2 Una solución implícita de dos soluciones explícitas de $y' = -x/y$.

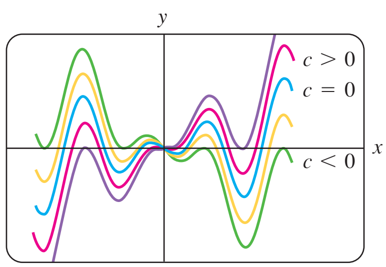


FIGURA 1.1.3 Algunas soluciones de $xy' - y = x^2 \operatorname{sen} x$.

EJEMPLO 3 Comprobación de una solución implícita

La relación $x^2 + y^2 = 25$ es una solución implícita de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{8}$$

en el intervalo abierto $(-5, 5)$. Derivando implícitamente obtenemos

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}25 \qquad \text{o} \qquad 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Resolviendo la última ecuación para dy/dx se obtiene (8). Además, resolviendo $x^2 + y^2 = 25$ para y en términos de x se obtiene $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. Las dos funciones $y = \phi_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$ y $y = \phi_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$ satisfacen la relación (que es, $x^2 + \phi_1^2 = 25$) y $x^2 + \phi_2^2 = 25$) y son las soluciones explícitas definidas en el intervalo $(-5, 5)$. Las curvas solución dadas en las figuras 1.1.2b y 1.1.2c son tramos de la gráfica de la solución implícita de la figura 1.1.2a. ■

Cualquier relación del tipo $x^2 + y^2 - c = 0$ *formalmente* satisface (8) para cualquier constante c. Sin embargo, se sobrentiende que la relación siempre tendrá sentido en el sistema de los números reales; así, por ejemplo, si $c = -25$, no podemos decir que $x^2 + y^2 + 25 = 0$ es una solución implícita de la ecuación. (¿Por qué no?)

Debido a que la diferencia entre una solución explícita y una solución implícita debería ser intuitivamente clara, no discutiremos el tema diciendo siempre: "Aquí está una solución explícita (implícita)".

FAMILIAS DE SOLUCIONES El estudio de ecuaciones diferenciales es similar al del cálculo integral. En algunos libros una solución ϕ es algunas veces llamada **integral** de la ecuación y su gráfica se llama **curva integral**. Cuando obtenemos una antiderivada o una integral indefinida en cálculo, usamos una sola constante c de integración. De modo similar, cuando resolvemos una ecuación diferencial de primer orden $F(x, y, y') = 0$, *normalmente* obtenemos una solución que contiene una sola constante arbitraria o parámetro c. Una solución que contiene una constante arbitraria representa un conjunto $G(x, y, c) = 0$ de soluciones llamado **familia de soluciones uniparamétrica**. Cuando resolvemos una ecuación diferencial de orden n, $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, buscamos una **familia de soluciones n-paramétrica** $G(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$. Esto significa que *una sola ecuación diferencial puede tener un número infinito de soluciones* correspondiendo a un número ilimitado de elecciones de los parámetros. Una solución de una ecuación diferencial que está libre de la elección de parámetros se llama **solución particular**. Por ejemplo, la familia uniparamétrica $y = cx - x\cos x$ es una solución explícita de la ecuación lineal de primer orden $xy' - y = x^2 \operatorname{sen} x$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$ (Compruebe). La figura 1.1.3 que se obtuvo usando un paquete computacional de trazado de gráficas, muestra las gráficas de algunas de las soluciones en esta familia. La solución $y = -x\cos x$, la curva azul en la figura, es una solución particular correspondiente a $c = 0$. En forma similar, en el intervalo $(-\infty, \infty)$, $y = c_1e^x + c_2xe^x$ es una familia de soluciones de dos parámetros de la ecuación lineal de segundo orden $y'' - 2y' + y = 0$ del ejemplo 1 (Compruebe). Algunas soluciones particulares de la ecuación son la solución trivial $y = 0$ ($c_1 = c_2 = 0$), $y = xe^x$ ($c_1 = 0$, $c_2 = 1$), $y = 5e^x - 2xe^x$ ($c_1 = 5$, $c_2 = -2$), etcétera.

Algunas veces una ecuación diferencial tiene una solución que no es miembro de una familia de soluciones de la ecuación, esto es, una solución que no se puede obtener usando un parámetro específico de la familia de soluciones. Esa solución extra se llama **solución singular**. Por ejemplo, vemos que $y = \frac{1}{16}x^4$ y $y = 0$ son soluciones de la ecuación diferencial $dy/dx = xy^{1/2}$ en $(-\infty, \infty)$. En la sección 2.2 demostraremos, al resolverla realmente, que la ecuación diferencial $dy/dx = xy^{1/2}$ tiene la familia de soluciones uniparamétrica $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$. Cuando $c = 0$, la solución particular resultante es $y = \frac{1}{16}x^4$. Pero observe que la solución trivial $y = 0$ es una solución singular, ya que no es un miembro de la familia $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$ ya que no hay manera de asignarle un valor a la constante c para obtener $y = 0$.

En todos los ejemplos anteriores, hemos usado x y y para denotar las variables independiente y dependiente, respectivamente. Pero debería acostumbrarse a ver y trabajar con otros símbolos que denotan estas variables. Por ejemplo, podríamos denotar la variable independiente por t y la variable dependiente por x:

EJEMPLO 4 **Usando diferentes símbolos**

Las funciones $x = c_1 \cos 4t$ y $x = c_2 \operatorname{sen} 4t$, donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias o parámetros, son ambas soluciones de la ecuación diferencial lineal

$$x'' + 16x = 0.$$

Para $x = c_1 \cos 4t$ las dos primeras derivadas respecto a t son $x' = -4c_1 \operatorname{sen} 4t$ y $x'' = -16c_1 \cos 4t$. Sustituyendo entonces a x'' y x se obtiene

$$x'' + 16x = -16c_1 \cos 4t + 16(c_1 \cos 4t) = 0.$$

De manera parecida, para $x = c_2 \operatorname{sen} 4t$ tenemos $x'' = -16c_2 \operatorname{sen} 4t$, y así

$$x'' + 16x = -16c_2 \operatorname{sen} 4t + 16(c_2 \operatorname{sen} 4t) = 0.$$

Finalmente, es sencillo comprobar directamente que la combinación lineal de soluciones, o la familia de dos parámetros $x = c_1 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t$, es también una solución de la ecuación diferencial. ■

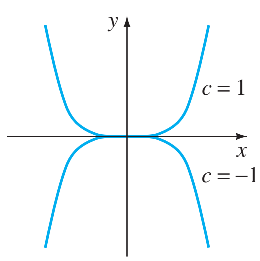
El siguiente ejemplo muestra que una solución de una ecuación diferencial puede ser una función definida por tramos.

EJEMPLO 5 **Una solución definida por tramos**

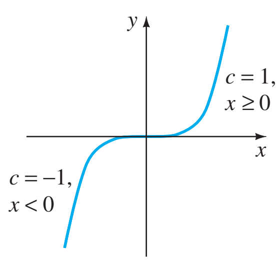
Debe comprobar que la familia uni-paramétrica $y = cx^4$ es una familia de soluciones uni-paramétrica de la ecuación diferencial $xy' - 4y = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Véase la figura 1.1.4a. La función derivable definida por tramos

$$y = \begin{cases} -x^4, & x < 0 \\ x^4, & x \geq 0 \end{cases}$$

es una solución particular de la ecuación pero no se puede obtener de la familia $y = cx^4$ por una sola elección de c; la solución se construye a partir de la familia eligiendo $c = -1$ para $x < 0$ y $c = 1$ para $x \geq 0$. Véase la figura 1.1.4b. ■



a) dos soluciones explícitas



b) solución definida en tramos

FIGURA 1.1.4 Algunas soluciones de $xy' - 4y = 0$.

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES Hasta este momento hemos analizado sólo ecuaciones diferenciales que contienen una función incógnita. Pero con frecuencia en la teoría, así como en muchas aplicaciones, debemos tratar con sistemas de ecuaciones diferenciales. Un **sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias** tiene dos o más ecuaciones que implican derivadas de dos o más funciones incógnitas de una sola variable independiente. Por ejemplo, si x y y denotan a las variables dependientes y t denota a la variable independiente, entonces un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden está dado por

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(t, x, y). \end{aligned} \tag{9}$$

Una **solución** de un sistema tal como el de la ecuación (9) es un par de funciones derivables $x = \phi_1(t)$, $y = \phi_2(t)$, definidas en un intervalo común I, que satisface cada ecuación del sistema en este intervalo.

COMENTARIOS

i) Algunos comentarios finales respecto a las soluciones implícitas de las ecuaciones diferenciales. En el ejemplo 3 pudimos despejar fácilmente a y de la relación $x^2 + y^2 = 25$ en términos de x para obtener las dos soluciones explícitas, $\phi_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$ y $\phi_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$, de la ecuación diferencial (8). Pero no debemos engañarnos con este único ejemplo. A menos que sea fácil o importante o que se le indique, en general no es necesario tratar de despejar y explícitamente en términos de x, de una solución implícita, $G(x, y) = 0$. Tampoco debemos malinterpretar el posterior segundo enunciado en la definición 1.1.3. Una solución implícita $G(x, y) = 0$ puede definir perfectamente bien a una función derivable ϕ que es una solución de una ecuación diferencial; aunque no se pueda despejar a y de $G(x, y) = 0$ con métodos analíticos como los algebraicos. La curva solución de ϕ puede ser un tramo o parte de la gráfica de $G(x, y) = 0$. Véanse los problemas 45 y 46 en los ejercicios 1.1. También lea el análisis siguiente al ejemplo 4 de la sección 2.2.

ii) Aunque se ha enfatizado el concepto de una solución en esta sección, también debería considerar que una ED no necesariamente tiene una solución. Véase el problema 39 del ejercicio 1.1. El tema de si existe una solución se tratará en la siguiente sección.

iii) Podría no ser evidente si una EDO de primer orden escrita en su forma diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es lineal o no lineal porque no hay nada en esta forma que nos muestre qué símbolos denotan a la variable dependiente. Véanse los problemas 9 y 10 del ejercicio 1.1.

iv) Podría parecer poco importante suponer que $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ puede resolver para $y^{(n)}$, pero hay que ser cuidadoso con esto. Existen excepciones y hay realmente algunos problemas conectados con esta suposición. Véanse los problemas 52 y 53 del ejercicio 1.1.

v) Puede encontrar el término *soluciones de forma cerrada* en libros de ED o en clases de ecuaciones diferenciales. La traducción de esta frase normalmente se refiere a las soluciones explícitas que son expresables en términos de *funciones elementales* (o conocidas): combinaciones finitas de potencias enteras de x, raíces, funciones exponenciales y logarítmicas y funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas.

vi) Si *toda* solución de una EDO de n-ésimo orden $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ en un intervalo I se puede obtener a partir de una familia n-parámetros $G(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$ eligiendo apropiadamente los parámetros c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces diremos que la familia es la **solución general** de la ED. Al resolver EDO lineales imponemos algunas restricciones relativamente simples en los coeficientes de la ecuación; con estas restricciones podemos asegurar no sólo que existe una solución en un intervalo sino también que una familia de soluciones produce todas las posibles soluciones. Las EDO no lineales, con excepción de algunas ecuaciones de primer orden, son normalmente difíciles o imposibles de resolver en términos de funciones elementales. Además si obtenemos una familia de soluciones para una ecuación no lineal, no es obvio si la familia contiene todas las soluciones. Entonces a nivel práctico, la designación de "solución general" se aplica sólo a las EDO lineales. No se preocupe por el momento de este concepto, pero recuerde las palabras "solución general" pues retomaremos este concepto en la sección 2.3 y nuevamente en el capítulo 4.

EJERCICIOS 1.1

Las respuestas a los problemas con número impar comienzan en la página RES-1.

En los problemas 1 a 8 establezca el orden de la ecuación diferencial ordinaria dada. Determine si la ecuación es lineal o no lineal, comparando con la ecuación (6).

1. $(1 - x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x$

2. $x\dfrac{d^3y}{dx^3} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$

3. $t^5y^{(4)} - t^3y'' + 6y = 0$

4. $\dfrac{d^2u}{dr^2} + \dfrac{du}{dr} + u = \cos(r + u)$

5. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$

6. $\dfrac{d^2R}{dt^2} = -\dfrac{k}{R^2}$

7. $(\operatorname{sen}\theta)y''' - (\cos\theta)y' = 2$

8. $\ddot{x} - \left(1 - \dfrac{\dot{x}^2}{3}\right)\dot{x} + x = 0$

En los problemas 9 y 10 establezca si la ecuación diferencial de primer orden dada es lineal en la variable dependiente comparándola con la primera ecuación dada en (7).

9. $(y^2 - 1)\,dx + x\,dy = 0$; en y; en x

10. $u\,dv + (v + uv - ue^u)\,du = 0$; en v; en u

En los problemas ll a 14, compruebe que la función indicada es una solución de la ecuación diferencial dada. Suponga un intervalo I de definición adecuado para cada solución.

11. $2y' + y = 0; \quad y = e^{-x/2}$

12. $\dfrac{dy}{dt} + 20y = 24; \quad y = \dfrac{6}{5} - \dfrac{6}{5}e^{-20t}$

13. $y'' - 6y' + 13y = 0; \quad y = e^{3x}\cos 2x$

14. $y'' + y = \tan x; \quad y = -(\cos x)\ln(\sec x + \tan x)$

En los problemas 15 a 18 compruebe que la función indicada $y = \phi(x)$ es una solución explícita de la ecuación diferencial de primer orden dada. Proceda como en el ejemplo 2, considerando a ϕ simplemente como una *función*, dando su dominio. Después considere a ϕ como una solución de la ecuación diferencial, dando al menos un intervalo I de definición.

15. $(y - x)y' = y - x + 8; \quad y = x + 4\sqrt{x + 2}$

16. $y' = 25 + y^2; \quad y = 5\tan 5x$

17. $y' = 2xy^2; \quad y = 1/(4 - x^2)$

18. $2y' = y^3\cos x; \quad y = (1 - \operatorname{sen} x)^{-1/2}$

En los problemas 19 y 20 compruebe que la expresión indicada es una solución implícita de la ecuación diferencial dada. Encuentre al menos una solución explícita $y = \phi(x)$ en cada caso. Use alguna aplicación para trazar gráficas para obtener la gráfica de una solución explícita. Dé un intervalo I de definición de cada solución ϕ.

19. $\dfrac{dX}{dt} = (X - 1)(1 - 2X); \quad \ln\left(\dfrac{2X - 1}{X - 1}\right) = t$

20. $2xy\,dx + (x^2 - y)\,dy = 0; \quad -2x^2y + y^2 = 1$

En los problemas 21 a 24 compruebe que la familia de funciones indicada es una solución de la ecuación diferencial dada. Suponga un intervalo I de definición adecuado para cada solución.

21. $\dfrac{dP}{dt} = P(1 - P); \quad P = \dfrac{c_1e^t}{1 + c_1e^t}$

22. $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 1; \quad y = e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt + c_1e^{-x^2}$

23. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0; \quad y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$

24. $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3} + 2x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + y = 12x^2;$

$y = c_1x^{-1} + c_2x + c_3x\ln x + 4x^2$

25. Compruebe que la función definida en tramos

$$y = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

es una solución de la ecuación diferencial $xy' - 2y = 0$ en $(-\infty, \infty)$.

26. En el ejemplo 3 vimos que $y = \phi_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$ y $y = \phi_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$ son soluciones de $dy/dx = -x/y$ en el intervalo $(-5, 5)$. Explique por qué la función definida en tramos

$$y = \begin{cases} \sqrt{25 - x^2}, & -5 < x < 0 \\ -\sqrt{25 - x^2}, & 0 \leq x < 5 \end{cases}$$

no es una solución de la ecuación diferencial en el intervalo $(-5, 5)$.

En los problemas 27 a 30 determine los valores de m tales que la función $y = e^{mx}$ sea una solución de la ecuación diferencial dada.

27. $y' + 2y = 0$

28. $5y' = 2y$

29. $y'' - 5y' + 6y = 0$

30. $2y'' + 7y' - 4y = 0$

En los problemas 31 y 32 determine los valores de m tales que la función $y = x^m$ sea una solución de la ecuación diferencial dada.

31. $xy'' + 2y' = 0$

32. $x^2y'' - 7xy' + 15y = 0$

En los problemas 33 a 36 use el concepto de que $y = c$, $-\infty < x < \infty$, es una función constante si y solo si $y' = 0$ para determinar si la ecuación diferencial tiene soluciones constantes.

33. $3xy' + 5y = 10$

34. $y' = y^2 + 2y - 3$

35. $(y - 1)y' = 1$

36. $y'' + 4y' + 6y = 10$

En los problemas 37 y 38 compruebe que el par de funciones indicado es una solución del sistema dado de ecuaciones diferenciales en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

37. $\dfrac{dx}{dt} = x + 3y$

$\dfrac{dy}{dt} = 5x + 3y;$

$x = e^{-2t} + 3e^{6t},$

$y = -e^{-2t} + 5e^{6t}$

38. $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 4y + e^t$

$\dfrac{d^2y}{dt^2} = 4x - e^t;$

$x = \cos 2t + \operatorname{sen} 2t + \frac{1}{5}e^t,$

$y = -\cos 2t - \operatorname{sen} 2t - \frac{1}{5}e^t$

Problemas para analizar

39. Construya una ecuación diferencial que no tenga ninguna solución real.

40. Construya una ecuación diferencial que usted asegure tenga sólo la solución trivial $y = 0$. Explique su razonamiento.

41. ¿Qué función conoce de cálculo tal que su primera derivada sea ella misma? ¿Que su primera derivada sea un múltiplo constante k de ella misma? Escriba cada respuesta en la forma de una ecuación diferencial de primer orden con una solución.

42. ¿Qué función (o funciones) conoce de cálculo tal que su segunda derivada sea ella misma? ¿Que su segunda derivada sea el negativo de ella misma? Escriba cada respuesta en la forma de una ecuación diferencial de segundo orden con una solución.

43. Dado que $y = \operatorname{sen} x$ es una solución explícita de la ecuación diferencial de primer orden $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y^2}$, encuentre un intervalo de definición I. [*Sugerencia: I no* es el intervalo $(-\infty, \infty)$.]

44. Analice por qué intuitivamente se supone que la ecuación diferencial lineal $y'' + 2y' + 4y = 5 \operatorname{sen} t$ tiene una solución de la forma $y = A \operatorname{sen} t + B \cos t$, donde A y B son constantes. Después determine las constantes específicas A y B tales que $y = A \operatorname{sen} t + B \cos t$ es una solución particular de la ED.

En los problemas 45 y 46 la figura dada representa la gráfica de una solución implícita $G(x, y) = 0$ de una ecuación diferencial $dy/dx = f(x, y)$. En cada caso la relación $G(x, y) = 0$ implícitamente define varias soluciones de la ED. Reproduzca cuidadosamente cada figura en una hoja. Use lápices de diferentes colores para señalar los tramos o partes, de cada gráfica que corresponda a las gráficas de las soluciones. Recuerde que una solución ϕ debe ser una función y derivable. Utilice la curva solución para estimar un intervalo de definición I de cada solución ϕ.

45.

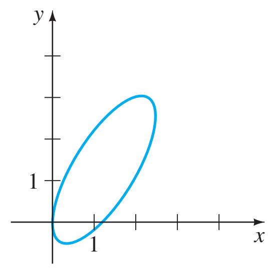


FIGURA 1.1.5 Gráfica del problema 45.

46.

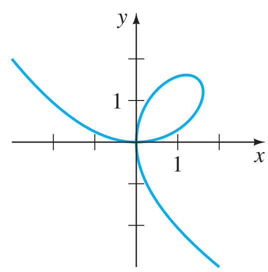


FIGURA 1.1.6 Gráfica del problema 46.

47. Las gráficas de los miembros de una familia uni-paramétrica $x^3 + y^3 = 3cxy$ se llaman ***folium de Descartes***. Compruebe que esta familia es una solución implícita de la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(y^3 - 2x^3)}{x(2y^3 - x^3)}.$$

48. La gráfica de la figura 1.1.6 es el miembro de la familia del *folium* del problema 47 correspondiente a $c = 1$. Analice: ¿cómo puede la ED del problema 47 ayudar a determinar los puntos de la gráfica de $x^3 + y^3 = 3xy$ donde la recta tangente es vertical? ¿Cómo saber dónde una recta tangente que es vertical ayuda a determinar un intervalo I de definición de una solución ϕ de la ED? Lleve a cabo sus ideas y compare con sus estimaciones de los intervalos en el problema 46.

49. En el ejemplo 3, el intervalo I más grande sobre el cual las soluciones explícitas $y = \phi_1(x)$ y $y = \phi_2(x)$ se encuentran definidas en el intervalo abierto $(-5, 5)$. ¿Por qué I no puede ser el intervalo cerrado I definido por $[-5, 5]$?

50. En el problema 21 se da una familia uni-paramétrica de soluciones de la ED $P' = P(1-P)$. ¿Cualquier curva solución pasa por el punto (0, 3)? ¿Y por el punto (0, 1)?

51. Analice y muestre con ejemplos cómo resolver ecuaciones diferenciales de las formas $dy/dx = f(x)$ y $d^2y/dx^2 = f(x)$.

52. La ecuación diferencial $x(y')^2 - 4y' - 12x^3 = 0$ tiene la forma dada en la ecuación (4). Determine si la ecuación se puede poner en su forma normal $dy/dx = f(x, y)$.

53. La forma normal (5) de una ecuación diferencial de n-ésimo orden es equivalente a la ecuación (4) si las dos formas tienen exactamente las mismas soluciones. Forme una ecuación diferencial de primer orden para la que $F(x, y, y') = 0$ no sea equivalente a la forma normal $dy/dx = f(x, y)$.

54. Determine una ecuación diferencial de segundo orden $F(x, y, y', y'') = 0$ para la que $y = c_1x + c_2x^2$ sea una familia de soluciones de dos parámetros. Asegúrese de que su ecuación esté libre de los parámetros arbitrarios c_1 y c_2.

Información cualitativa respecto a una solución $y = \phi(x)$ de una ecuación diferencial con frecuencia puede obtenerse de la misma ecuación. Antes de trabajar con los problemas 55 a 58, recuerde el significado geométrico de las derivadas dy/dx y d^2y/dx^2.

55. Considere la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = e^{-x^2}$.

a) Explique por qué una solución de la ED debe ser una función creciente en cualquier intervalo del eje de las x.

b) ¿A qué son iguales $\lim_{x \to -\infty} dy/dx$ y $\lim_{x \to \infty} dy/dx$. ¿Qué le sugiere esto respecto a una curva solución conforme $x \to \pm\infty$?

c) Determine un intervalo sobre el cual una curva solución sea cóncava hacia abajo y un intervalo sobre el que la curva sea cóncava hacia arriba.

d) Trace la gráfica de una solución $y = \phi(x)$ de la ecuación diferencial cuya forma se sugiere en los incisos a) a c).

56. Considere la ecuación diferencial $dy/dx = 5 - y$.

a) Ya sea por inspección o por el método sugerido en los problemas 33 a 36, encuentre una solución constante de la ED.

b) Utilizando sólo la ecuación diferencial, determine los intervalos en el eje y en los que una solución constante $y = \phi(x)$ sea creciente. Determine los intervalos en el eje y en los cuales $y = \phi(x)$ es decreciente.

57. Considere la ecuación diferencial $dy/dx = y(a - by)$, donde a y b son constantes positivas.

a) Ya sea por inspección o por los métodos sugeridos en los problemas 33 a 36, determine dos soluciones constantes de la ED.

b) Usando sólo la ecuación diferencial, determine los intervalos en el eje y en los que una solución no constante $y = \phi(x)$ es creciente. Determine los intervalos en los que $y = \phi(x)$ es decreciente.

c) Utilizando sólo la ecuación diferencial, explique por qué $y = a/2b$ es la coordenada y de un punto de inflexión de la gráfica de una solución no constante $y = \phi(x)$.

d) En los mismos ejes coordenados, trace las gráficas de las dos soluciones constantes en el inciso *a*). Estas soluciones constantes parten el plano xy en tres regiones. En cada región, trace la gráfica de una solución no constante $y = \phi(x)$ cuya forma se sugiere por los resultados de los incisos b) y c).

58. Considere la ecuación diferencial $y' = y^2 + 4$.

a) Explique por qué no existen soluciones constantes de la ecuación diferencial.

b) Describa la gráfica de una solución $y = \phi(x)$. Por ejemplo, ¿puede una curva solución tener un extremo relativo?

c) Explique por qué $y = 0$ es la coordenada y de un punto de inflexión de una curva solución.

d) Trace la gráfica de una solución $y = \phi(x)$ de la ecuación diferencial cuya forma se sugiere en los incisos a) a c).

Tarea para el laboratorio de computación

En los problemas 59 y 60 use un CAS (por sus siglas en inglés, Sistema Algebraico Computacional) para calcular todas las derivadas y realice las simplificaciones necesarias para comprobar que la función indicada es una solución particular de la ecuación diferencial.

59. $y^{(4)} - 20y''' - + 158y'' - 580y' + 841y = 0;$
$y = xe^{5x} \cos 2x$

60. $x^3y''' + 2x^2y'' + 20xy' - 78y = 0;$
$y = 20\dfrac{\cos(5 \ln x)}{x} - 3\dfrac{\operatorname{sen}(5 \ln x)}{x}$

1.2 PROBLEMAS CON VALORES INICIALES

REPASO DE MATERIAL

- Forma normal de una ED
- Solución de una ED
- Familia de soluciones

INTRODUCCIÓN Con frecuencia nos interesan problemas en los que buscamos una solución $y(x)$ de una ecuación diferencial tal que $y(x)$ satisface condiciones prescritas, es decir, condiciones impuestas sobre una $y(x)$ desconocida o sus derivadas. En algún intervalo I que contiene a x_0 el problema

$$\begin{aligned} &\textit{Resolver:} && \frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \\ &\textit{Sujeto a:} && y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \end{aligned} \tag{1}$$

donde $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ son constantes reales arbitrarias dadas se llama **problema con valores iniciales (PVI)**. Los valores de $y(x)$ y de sus primeras $n - 1$ derivadas en un solo punto x_0, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$, se llaman **condiciones iniciales.**

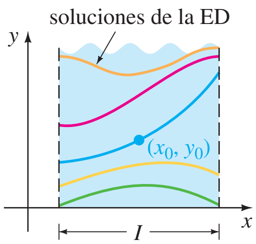


FIGURA 1.2.1 Solución del PVI de primer orden.

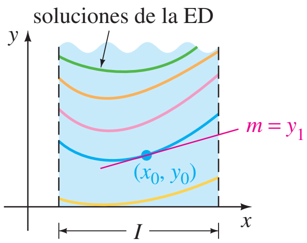


FIGURA 1.2.2 Solución del PVI de segundo orden.

PVI DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN El problema dado en (1) también se llama **problema con valores iniciales de *n*-ésimo orden**. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} &\textit{Resolver:} && \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ &\textit{Sujeto a:} && y(x_0) = y_0 \end{aligned} \tag{2}$$

y

$$\begin{aligned} &\textit{Resolver:} && \frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y') \\ &\textit{Sujeto a:} && y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1 \end{aligned} \tag{3}$$

son problemas con valores iniciales de **primer** y **segundo orden**, respectivamente. Estos dos problemas son fáciles de interpretar en términos geométricos. Para la ecuación (2) estamos buscando una solución de la ecuación diferencial en un intervalo I que contenga a x_0, tal que su gráfica pase por el punto dado (x_0, y_0). En la figura 1.2.1 se muestra en azul una curva solución. Para la ecuación (3) queremos determinar una solución $y(x)$ de la ecuación diferencial $y'' = f(x, y, y')$ en un intervalo I que contenga a x_0 de tal manera que su gráfica no sólo pase por el punto dado (x_0, y_0), sino que también la pendiente a la curva en ese punto sea el número y_1. En la figura 1.2.2 se muestra en azul una curva solución. Las palabras *condiciones iniciales* surgen de los sistemas físicos donde la variable independiente es el tiempo t y donde $y(t_0) = y_0$ y $y'(t_0) = y_1$ representan la posición y la velocidad respectivamente de un objeto al comienzo o al tiempo inicial t_0.

Con frecuencia, resolver un problema con valores iniciales de n-ésimo orden tal como (1) implica determinar primero una familia n-paramétrica de soluciones de la ecuación diferencial dada y después usando las n condiciones iniciales en x_0 determinar los valores numéricos de las n constantes en la familia. La solución particular resultante está definida en algún intervalo I que contiene al punto inicial x_0.

EJEMPLO 1 Dos PVI de primer orden

En el problema 41 de los ejercicios 1.1 se le pidió que dedujera que $y = ce^x$ es una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación de primer orden $y' = y$. Todas las soluciones en esta familia están definidas en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Si imponemos una condición inicial, digamos, $y(0)=3$, entonces al sustituir $x = 0$, $y = 3$ en la familia se

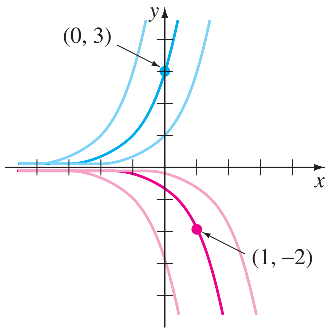
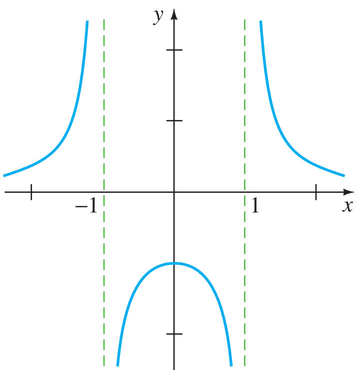
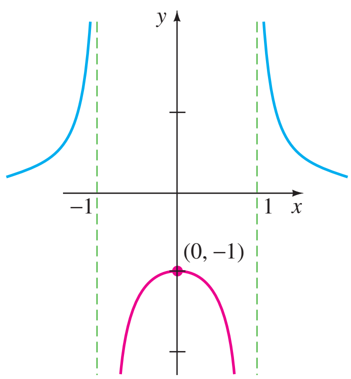


FIGURA 1.2.3 Soluciones de los dos PVI.



a) función definida para toda x excepto en $x = \pm 1$



b) solución definida en el intervalo que contiene $x = 0$

FIGURA 1.2.4 Gráficas de la función y de la solución del PVI del ejemplo 2.

determina la constante $3 = ce^0 = c$ por lo que $y = 3e^x$ es una solución del PVI

$$y' = y, \quad y(0) = 3.$$

Ahora si hacemos que la curva solución pase por el punto $(1, -2)$ en lugar de $(0, 3)$, entonces $y(1) = -2$ se obtendrá $-2 = ce$ o $c = -2e^{-1}$. En este caso $y = -2e^{x-1}$ es una solución del PVI

$$y' = y, \quad y(1) = -2.$$

En la figura 1.2.3 se muestran en azul oscuro y en rojo oscuro las dos curvas solución. ■

El siguiente ejemplo muestra otro problema con valores iniciales de primer orden. En este ejemplo observe cómo el intervalo de definición I de la solución $y(x)$ depende de la condición inicial $y(x_0) = y_0$.

EJEMPLO 2 Intervalo *I* de definición de una solución

En el problema 6 de los ejercicios 2.2 se le pedirá mostrar que una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial de primer orden $y' + 2xy^2 = 0$ es $y = 1/(x^2 + c)$. Si establecemos la condición inicial $y(0) = -1$, entonces al sustituir $x = 0$ y $y = -1$ en la familia de soluciones, se obtiene $-1 = 1/c$ o $c = -1$. Así $y = 1/(x^2 - 1)$. Ahora enfatizamos las siguientes tres diferencias:

- Considerada como una *función*, el dominio de $y = 1/(x^2 - 1)$ es el conjunto de todos los números reales x para los cuales $y(x)$ está definida, excepto en $x = -1$ y en $x = 1$. Véase la figura 1.2.4a.
- Considerada como una *solución de la ecuación diferencial* $y' + 2xy^2 = 0$, el intervalo I de definición de $y = 1/(x^2 - 1)$ podría tomarse como cualquier intervalo en el cual $y(x)$ está definida y es derivable. Como se puede ver en la figura 1.2.4a, los intervalos más largos en los que $y = 1/(x^2 - 1)$ es una solución son $(-\infty, -1)$, $(-1,1)$ y $(1, \infty)$.
- Considerada como *una solución del problema con valores iniciales* $y' + 2xy^2 = 0$, $y(0) = -1$, el intervalo I de definición de $y = 1/(x^2 - 1)$ podría ser cualquier intervalo en el cual $y(x)$ está definida, es derivable y contiene al punto inicial $x = 0$; el intervalo más largo para el cual esto es válido es $(-1, 1)$. Véase la curva roja en la figura 1.2.4b. ■

Véanse los problemas 3 a 6 en los ejercicios 1.2 para continuar con el ejemplo 2.

EJEMPLO 3 PVI de segundo orden

En el ejemplo 4 de la sección 1.1 vimos que $x = c_1 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t$ es una familia de soluciones de dos parámetros de $x'' + 16x = 0$. Determine una solución del problema con valores iniciales

$$x'' + 16x = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2, \quad x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \tag{4}$$

SOLUCIÓN Primero aplicamos $x(\pi/2) = -2$ en la familia de soluciones: $c_1 \cos 2\pi + c_2 \operatorname{sen} 2\pi = -2$. Puesto que $\cos 2\pi = 1$ y $\operatorname{sen} 2\pi = 0$, encontramos que $c_1 = -2$. Después aplicamos $x'(\pi/2) = 1$ en la familia uniparamétrica de soluciones $x(t) = -2 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t$. Derivando y después haciendo $t = \pi/2$ y $x' = 1$ se obtiene $8 \operatorname{sen} 2\pi + 4c_2 \cos 2\pi = 1$, a partir del cual vemos que $c_2 = \frac{1}{4}$. Por tanto $x = -2 \cos 4t + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 4t$ es una solución de (4). ■

EXISTENCIA Y UNICIDAD Al considerar un problema con valores iniciales surgen dos importantes preguntas:

¿Existe la solución del problema?
Si existe la solución, ¿es única?

Para el problema con valores iniciales de la ecuación (2) pedimos:

Existencia $\begin{cases} \text{¿La ecuación diferencial } dy/dx = f(x, y) \text{ tiene soluciones?} \\ \text{¿Alguna de las curvas solución pasa por el punto } (x_0, y_0)\text{?} \end{cases}$

Unicidad $\begin{cases} \text{¿Cuándo podemos estar seguros de que hay precisamente una} \\ \text{curva solución que pasa a través del punto } (x_0, y_0)\text{?} \end{cases}$

Observe que en los ejemplos 1 y 3 se usa la frase "*una* solución" en lugar de "*la* solución" del problema. El artículo indefinido "una" se usa deliberadamente para sugerir la posibilidad de que pueden existir otras soluciones. Hasta el momento no se ha demostrado que existe una única solución de cada problema. El ejemplo siguiente muestra un problema con valores iniciales con dos soluciones.

EJEMPLO 4 Un PVI puede tener varias soluciones

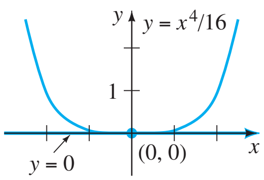


FIGURA 1.2.5 Dos soluciones del mismo PVI.

Cada una de las funciones $y = 0$ y $y = \frac{1}{16}x^4$ satisface la ecuación diferencial $dy/x = xy^{1/2}$ y la condición inicial $y(0) = 0$, por lo que el problema con valores iniciales

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}, \quad y(0) = 0$$

tiene al menos dos soluciones. Como se muestra en la figura 1.2.5, las gráficas de las dos soluciones pasan por el mismo punto (0, 0). ■

Dentro de los límites de seguridad de un curso formal de ecuaciones diferenciales uno puede confiar en que la mayoría de las ecuaciones diferenciales tendrán soluciones y que las soluciones de los problemas con valores iniciales *probablemente* serán únicas. Sin embargo, en la vida real, no es así. Por tanto es deseable conocer antes de tratar de resolver un problema con valores iniciales si existe una solución y cuando así sea, si ésta es la única solución del problema. Puesto que vamos a considerar ecuaciones diferenciales de primer orden en los dos capítulos siguientes, estableceremos aquí sin demostrarlo un teorema directo que da las condiciones suficientes para garantizar la existencia y unicidad de una solución de un problema con valores iniciales de primer orden de la forma dada en la ecuación (2). Esperaremos hasta el capítulo 4 para retomar la pregunta de la existencia y unicidad de un problema con valores iniciales de segundo orden.

TEOREMA 1.2.1 Existencia de una solución única

Sea R una región rectangular en el plano xy definida por $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ que contiene al punto (x_0, y_0) en su interior. Si $f(x, y)$ y $\partial f/\partial y$ son continuas en R, entonces existe algún intervalo I_0: $(x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$, contenido en $[a, b]$, y una función única $y(x)$, definida en I_0, que es una solución del problema con valores iniciales (2).

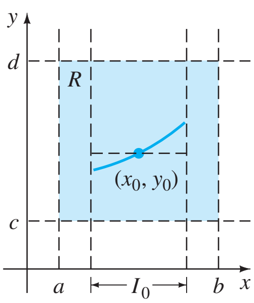


FIGURA 1.2.6 Región rectangular R.

El resultado anterior es uno de los más populares teoremas de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales de primer orden ya que el criterio de continuidad de $f(x, y)$ y de $\partial f/\partial y$ son relativamente fáciles de comprobar. En la figura 1.2.6 se muestra la geometría del teorema 1.2.1.

EJEMPLO 5 Revisión del ejemplo 4

Como vimos en el ejemplo 4 la ecuación diferencial $dy/dx = xy^{1/2}$ tiene al menos dos soluciones cuyas gráficas pasan por el punto (0, 0). Analizando las funciones

$$f(x, y) = xy^{1/2} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2y^{1/2}}$$

vemos que son continuas en la mitad superior del plano definido por $y > 0$. Por tanto el teorema 1.2.1 nos permite concluir que a través de cualquier punto (x_0, y_0), $y_0 > 0$ en la mitad superior del plano existe algún intervalo centrado en x_0 en el cual la ecuación diferencial dada tiene una solución única. Así, por ejemplo, aún sin resolverla, sabemos que existe algún intervalo centrado en 2 en el cual el problema con valores iniciales $dy/dx = xy^{1/2}$, $y(2) = 1$ tiene una solución única. ■

En el ejemplo 1, el teorema 1.2.1 garantiza que no hay otras soluciones de los problemas con valores iniciales $y' = y$, $y(0) = 3$ y $y' = y$, $y(1) = -2$ distintas a $y = 3e^x$ y $y = -2e^{x-1}$, respectivamente. Esto es consecuencia del hecho de que $f(x, y) = y$ y $\partial f/\partial y = 1$ son continuas en todo el plano xy. Además podemos mostrar que el intervalo I en el cual cada solución está definida es $(-\infty, \infty)$.

INTERVALO DE EXISTENCIA Y UNICIDAD Suponga que $y(x)$ representa una solución del problema con valores iniciales (2). Los siguientes tres conjuntos de números reales en el eje x pueden no ser iguales: el dominio de la función $y(x)$, el intervalo I en el cual la solución $y(x)$ está definida o existe, y el intervalo I_0 de existencia y unicidad. El ejemplo 2 de la sección 1.1 muestra la diferencia entre el dominio de una función y el intervalo I de definición. Ahora suponga que (x_0, y_0) es un punto en el interior de la región rectangular R en el teorema 1.2.1. Esto da como resultado que la continuidad de la función $f(x, y)$ en R por sí misma es suficiente para garantizar la existencia de al menos una solución de $dy/dx = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, definida en algún intervalo I. El intervalo I de definición para este problema con valores iniciales normalmente se toma como el intervalo más grande que contiene x_0 en el cual la solución $y(x)$ está definida y es derivable. El intervalo I depende tanto de $f(x, y)$ como de la condición inicial $y(x_0) = y_0$. Véanse los problemas 31 a 34 en los ejercicios 1.2. La condición extra de continuidad de la primera derivada parcial $\partial f/\partial y$ en R nos permite decir que no sólo existe una solución en algún intervalo I_0 que contiene x_0, sino que esta es la *única* solución que satisface $y(x_0) = y_0$. Sin embargo, el teorema 1.2.1 no da ninguna indicación de los tamaños de los intervalos I e I_0; *el intervalo de definición I no necesita ser tan amplio como la región R y el intervalo de existencia y unicidad I_0 puede no ser tan amplio como I.* El número $h > 0$ que define el intervalo I_0: $(x_0 - h, x_0 + h)$ podría ser muy pequeño, por lo que es mejor considerar que la solución $y(x)$ es *única en un sentido local*, esto es, una solución definida cerca del punto (x_0, y_0). Véase el problema 44 en los ejercicios 1.2.

COMENTARIOS

(*i*) Las condiciones del teorema 1.2.1 son suficientes pero no necesarias. Esto significa que cuando $f(x, y)$ y $\partial f/\partial y$ son continuas en una región rectangular R, debe siempre seguir que existe una solución de la ecuación (2) y es única siempre que (x_0, y_0) sea un punto interior a R. Sin embargo si las condiciones establecidas en la hipótesis del teorema 1.2.1 no son válidas, entonces puede ocurrir cualquier cosa: el problema de la ecuación (2) *puede* tener una solución y esta solución *puede* ser única o la ecuación (2) puede tener varias soluciones o puede no tener ninguna solución. Al leer nuevamente el ejemplo 5 vemos que la hipótesis del teorema 1.2.1 no es válida en la recta $y = 0$ para la ecuación diferencial $dy/dx = xy^{1/2}$, pero esto no es sorprendente, ya que como vimos en el ejemplo 4 de esta sección, hay dos soluciones definidas en un intervalo común $-h < x < h$ que satisface $y(0) = 0$. Por otra parte, la hipótesis del teorema 1.2.1 no es válida en la recta $y = 1$ para la ecuación diferencial $dy/dx = |y - 1|$. Sin embargo se puede probar que la solución del problema con valores iniciales $dy/dx = |y - 1|$, $y(0) = 1$ es única ¿Puede intuir la solución?

(*ii*) Es recomendable leer, pensar, trabajar y después recordar el problema 43 en los ejercicios 1.2.

EJERCICIOS 1.2

Las respuestas a los problemas con número impar comienzan en la página RES-1

En los problemas 1 y 2, $y = 1/(1 + c_1e^{-x})$ es una familia uniparamétrica de soluciones de la ED de primer orden $y' = y - y^2$. Encuentre una solución del PVI de primer orden que consiste en esta ecuación diferencial y la condición inicial dada.

1. $y(0) = -\frac{1}{3}$

2. $y(-1) = 2$

En los problemas 3 a 6, $y = 1/(x^2 + c)$ es una familia uniparamétrica de soluciones de la ED de primer orden $y' + 2xy^2 = 0$. Determine una solución del PVI de primer orden que consiste en esta ecuación diferencial y la condición inicial dada. Dé el intervalo I más largo en el cual está definida la solución.

3. $y(2) = \frac{1}{3}$

4. $y(-2) = \frac{1}{2}$

5. $y(0) = 1$

6. $y\left(\frac{1}{2}\right) = -4$

En los problemas 7 a 10, $x = c_1\cos t + c_2 \operatorname{sen} t$ es una familia de soluciones de dos parámetros de la ED de segundo orden $x'' + x = 0$. Determine una solución del PVI de segundo orden que consiste en esta ecuación diferencial y las condiciones iniciales dadas.

7. $x(0) = -1, \quad x'(0) = 8$

8. $x(\pi/2) = 0, \quad x'(\pi/2) = 1$

9. $x(\pi/6) = \frac{1}{2}, \quad x'(\pi/6) = 0$

10. $x(\pi/4) = \sqrt{2}, \quad x'(\pi/4) = 2\sqrt{2}$

En los problemas 11 a 14, $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$ es una familia de soluciones de dos parámetros de la ED de segundo orden $y'' - y = 0$. Determine una solución del PVI de segundo orden que consiste en esta ecuación diferencial y las condiciones iniciales dadas.

11. $y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

12. $y(1) = 0, \quad y'(1) = e$

13. $y(-1) = 5, \quad y'(-1) = -5$

14. $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

En los problemas 15 y 16 determine por inspección al menos dos soluciones del PVI de primer orden dado.

15. $y' = 3y^{2/3}, \quad y(0) = 0$

16. $xy' = 2y, \quad y(0) = 0$

En los problemas 17 a 24 determine una región del plano xy para el que la ecuación diferencial dada tendría una solución única cuyas gráficas pasen por un punto (x_0, y_0) en la región.

17. $\dfrac{dy}{dx} = y^{2/3}$

18. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$

19. $x\dfrac{dy}{dx} = y$

20. $\dfrac{dy}{dx} - y = x$

21. $(4 - y^2)y' = x^2$

22. $(1 + y^3)y' = x^2$

23. $(x^2 + y^2)y' = y^2$

24. $(y - x)y' = y + x$

En los problemas 25 a 28 determine si el teorema 1.2.1 garantiza que la ecuación diferencial $y' = \sqrt{y^2 - 9}$ tiene una solución única que pasa por el punto dado.

25. $(1, 4)$

26. $(5, 3)$

27. $(2, -3)$

28. $(-1, 1)$

29. a) Por inspección determine una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial $xy' = y$. Compruebe que cada miembro de la familia es una solución del problema con valores iniciales $xy' = y$, $y(0) = 0$.

b) Explique el inciso a) determinando una región R en el plano xy para el que la ecuación diferencial $xy' = y$ tendría una solución única que pase por el punto (x_0, y_0) en R.

c) Compruebe que la función definida por tramos

$$y = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

satisface la condición $y(0)=0$. Determine si esta función es también una solución del problema con valores iniciales del inciso a).

30. a) Compruebe que $y = \tan(x + c)$ es una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial $y' = 1 + y^2$.

b) Puesto que $f(x, y) = 1 + y^2$ y $\partial f/\partial y = 2y$ son continuas en donde quiera, la región R en el teorema 1.2.1 se puede considerar como todo el plano xy. Utilice la familia de soluciones del inciso a) para determinar una solución explícita del problema con valores iniciales de primer orden $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$. Aun cuando $x_0 = 0$ esté en el intervalo $(-2, 2)$, explique por qué la solución no está definida en este intervalo.

c) Determine el intervalo I de definición más largo para la solución del problema con valores iniciales del inciso b).

31. a) Verifique que $y = -1/(x + c)$ es una familia de soluciones uniparamétrica de la ecuación diferencial $y' = y^2$.

b) Puesto que $f(x, y) = y^2$ y $\partial f/\partial y = 2y$ son continuas donde sea, la región R del teorema 1.2.1 se puede tomar como todo el plano xy. Determine una solución de la familia del inciso a) que satisfaga que $y(0) = 1$. Después determine una solución de la familia del inciso a) que satisfaga que $y(0) = -1$. Determine el intervalo I de definición más largo para la solución de cada problema con valores iniciales.

c) Determine el intervalo de definición I más largo para la solución del problema con valores iniciales $y' = y^2$, $y(0) = 0$. [*Sugerencia*: La solución no es un miembro de la familia de soluciones del inciso a)].

32. a) Demuestre que una solución de la familia del inciso a) del problema 31 que satisface $y' = y^2$, $y(1) = 1$, es $y = 1/(2 - x)$.

b) Después demuestre que una solución de la familia del inciso a) del problema 31 que satisface $y' = y^2$, $y(3) = -1$, es $y = 1/(2 - x)$.

c) ¿Son iguales las soluciones de los incisos a) y b)?

33. a) Verifique que $3x^2 - y^2 = c$ es una familia de soluciones uniparamétricas de la ecuación diferencial $y\, dy/dx = 3x$.

b) Bosqueje, a mano, la gráfica de la solución implícita $3x^2 - y^2 = 3$. Determine todas las soluciones explícitas $y = \phi(x)$ de la ED del inciso a) definidas por esta relación. Dé un intervalo I de definición de cada una de las soluciones explícitas.

c) El punto $(-2, 3)$ está en la gráfica de $3x^2 - y^2 = 3$ pero ¿cuál de las soluciones explícitas del inciso b) satisface que $y(-2) = 3$?

34. a) Utilice la familia de soluciones del inciso a) del problema 33 para determinar una solución implícita del problema con valores iniciales $y\, dy/dx = 3x$, $y(2) = -4$. Después bosqueje, a mano, la gráfica de la solución explícita de este problema y dé su intervalo I de definición.

b) ¿Existen algunas soluciones explícitas de $y\, dy/dx = 3x$ que pasen por el origen?

En los problemas 35 a 38 se presenta la gráfica de un miembro de la familia de soluciones de una ecuación diferencial de segundo orden $d^2y/dx^2 = f(x, y, y')$. Relacione la curva solución con al menos un par de las siguientes condiciones iniciales.

a) $y(1) = 1, \quad y'(1) = -2$

b) $y(-1) = 0, \quad y'(-1) = -4$

c) $y(1) = 1, \quad y'(1) = 2$

d) $y(0) = -1, \quad y'(0) = 2$

e) $y(0) = -1, \quad y'(0) = 0$

f) $y(0) = -4, \quad y'(0) = -2$

35.

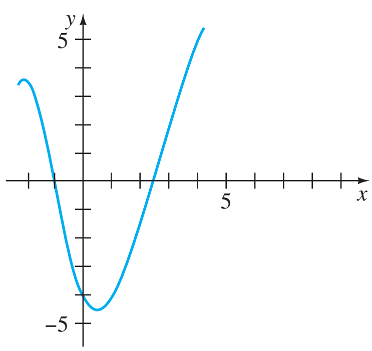


FIGURA 1.2.7 Gráfica del problema 35.

36.

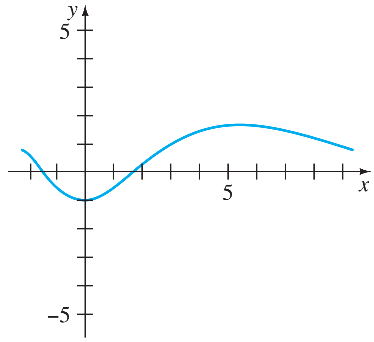


FIGURA 1.2.8 Gráfica del problema 36.

37.

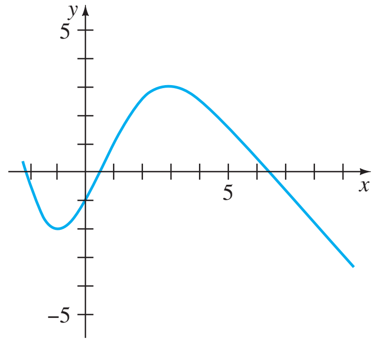


FIGURA 1.2.9 Gráfica del problema 37.

38.

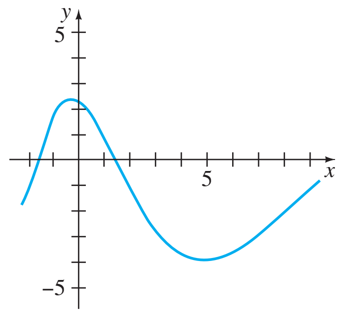


FIGURA 1.2.10 Gráfica del problema 38.

Problemas de análisis

En los problemas 39 y 40 utilice el problema 51 de los ejercicios 1.1 y (2) y (3) de esta sección.

39. Encuentre una función $y = f(x)$ cuya gráfica en cada punto (x, y) tiene una pendiente dada por $8e^{2x} + 6x$ y la intersección con el eje y en (0,9).

40. Determine una función $y = f(x)$ cuya segunda derivada es $y'' = 12x - 2$ en cada punto (x, y) de su gráfica y $y = -x + 5$ es tangente a la gráfica en el punto correspondiente a $x = 1$.

41. Considere el problema con valores iniciales $y' = x - 2y$, $y(0) = \frac{1}{2}$. Determine cuál de las dos curvas que se muestran en la figura 1.2.11 es la única curva solución posible. Explique su razonamiento.

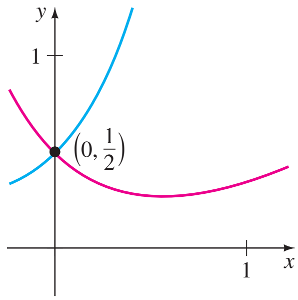


FIGURA 1.2.11 Gráficas del problema 41.

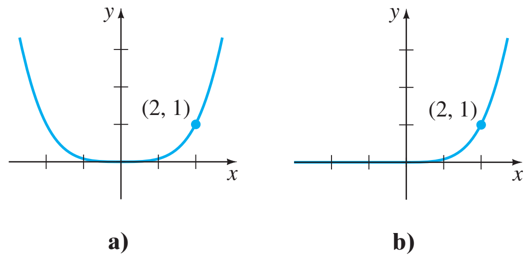


FIGURA 1.2.12 Dos soluciones del PVI del problema 44.

42. Determine un valor posible para x_0 para el que la gráfica de la solución del problema con valores iniciales $y' + 2y = 3x - 6$, $y(x_0) = 0$ es tangente al eje x en $(x_0, 0)$. Explique su razonamiento.

43. Suponga que la ecuación diferencial de primer orden $dy/dx = f(x, y)$ tiene una familia uniparamétrica de soluciones y que $f(x, y)$ satisface la hipótesis del teorema 1.2.1 en alguna región rectangular R del plano xy. Explique por qué dos curvas solución diferentes no se pueden interceptar o ser tangentes entre sí en un punto (x_0, y_0) en R.

44. Las funciones $y(x) = \frac{1}{16}x^4, \quad -\infty < x < \infty$ y

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{16}x^4, & x \geq 0 \end{cases}$$

tienen el mismo dominio pero son obviamente diferentes. Véanse las figuras 1.2.12a y 1.2.12b, respectivamente. Demuestre que ambas funciones son soluciones del problema con valores iniciales $dy/dx = xy^{1/2}$, $y(2) = 1$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Resuelva la aparente contradicción entre este hecho y el último enunciado del ejemplo 5.

Modelo matemático

45. Crecimiento de la población Al inicio de la siguiente sección veremos que las ecuaciones diferenciales se pueden usar para describir o *modelar* diversos sistemas físicos. En este problema suponemos que un modelo de crecimiento de la población de una pequeña comunidad está dado por el problema con valores iniciales

$$\frac{dP}{dt} = 0.15P(t) + 20, \quad P(0) = 100,$$

donde P es el número de personas en la comunidad y el tiempo t se mide en años. ¿Qué tan rápido, es decir, con qué *razón* está aumentando la población en $t = 0$? ¿Qué tan rápido está creciendo la población cuando la población es de 500?

1.3 ECUACIONES DIFERENCIALES COMO MODELOS MATEMÁTICOS

REPASO DE MATERIAL

- Unidades de medida para el peso, masa y densidad
- Segunda ley de Newton
- Ley de Hooke
- Leyes de Kirchhoff
- Principio de Arquímedes

INTRODUCCIÓN En esta sección introduciremos la idea de una ecuación diferencial como un modelo matemático y analizaremos algunos modelos específicos en biología, química y física. Ya que hayamos estudiado algunos de los métodos de solución de las ED en los capítulos 2 y 4, retomaremos y resolveremos algunos de estos modelos en los capítulos 3 y 5.

MODELOS MATEMÁTICOS Con frecuencia es deseable describir en términos matemáticos el comportamiento de algunos sistemas o fenómenos de la vida real, sean físicos, sociológicos o hasta económicos. La descripción matemática de un sistema de fenómenos se llama **modelo matemático** y se construye con ciertos objetivos. Por ejemplo, podemos desear entender los mecanismos de cierto ecosistema al estudiar el crecimiento de la población animal en ese sistema, o podemos desear datar fósiles y analizar el decaimiento de una sustancia radiactiva ya sea en el fósil o en el estrato en que éste fue descubierto.

La formulación de un modelo matemático de un sistema se inicia con

i) identificación de las variables que ocasionan el cambio del sistema. Podremos elegir no incorporar todas estas variables en el modelo desde el comienzo. En este paso especificamos el **nivel de resolución** del modelo.

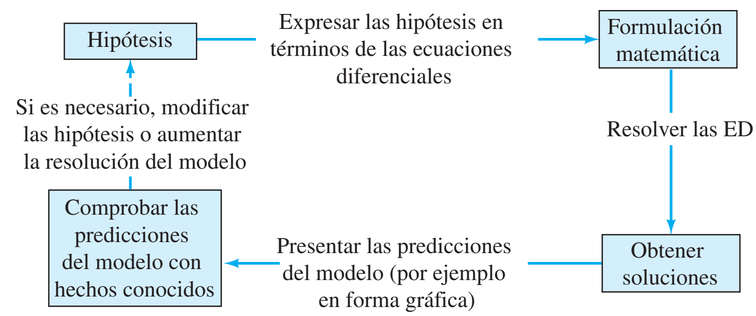
Después,

ii) se establece un conjunto de suposiciones razonables o hipótesis, acerca del sistema que estamos tratando de describir. Esas hipótesis también incluyen todas las leyes empíricas que se pueden aplicar al sistema.

Para algunos objetivos quizá baste con conformarse con modelos de baja resolución. Por ejemplo, usted ya es consciente de que en los cursos básicos de física algunas veces se desprecia la fuerza retardadora de la fricción del aire al modelar el movimiento de un cuerpo que cae cerca de la superficie de la Tierra. Pero si usted es un científico cuyo trabajo es predecir con exactitud la trayectoria de vuelo de un proyectil de largo alcance, deberá considerar la resistencia del aire y otros factores, tales como la curvatura de la Tierra.

Puesto que con frecuencia las hipótesis acerca de un sistema implican una *razón de cambio* de una o más de las variables, el enunciado matemático de todas esas hipótesis puede ser una o más ecuaciones que contengan *derivadas*. En otras palabras, el modelo matemático puede ser una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales.

Una vez que se ha formulado un modelo matemático, ya sea una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales, nos enfrentamos al problema no fácil de tratar de resolverlo. *Si* podemos resolverlo, entonces consideramos que el modelo es razonable si su solución es consistente con los datos experimentales o con los hechos conocidos acerca del comportamiento del sistema. Si las predicciones que se obtienen son deficientes, podemos aumentar el nivel de resolución del modelo o hacer hipótesis alternativas acerca de los mecanismos de cambio del sistema. Entonces se repiten los pasos del proceso de modelado, como se muestra en el diagrama siguiente:



Por supuesto, al aumentar la resolución, aumentamos la complejidad del modelo matemático y la probabilidad de que no podamos obtener una solución explícita.

Con frecuencia, el modelo matemático de un sistema físico inducirá la variable tiempo t. Una solución del modelo expresa el **estado del sistema;** en otras palabras, los valores de la variable dependiente (o variables) para los valores adecuados de t que describen el sistema en el pasado, presente y futuro.

DINÁMICA POBLACIONAL Uno de los primeros intentos para modelar el **crecimiento de la población** humana por medio de las matemáticas fue realizado en 1798 por el economista inglés Thomas Malthus. Básicamente la idea detrás del modelo de Malthus es la suposición de que la razón con la que la población de un país en un cierto tiempo es proporcional* a la población total del país en ese tiempo. En otras palabras, entre más personas estén presentes al tiempo t, habrá más en el fu-

*Si dos cantidades u y v son proporcionales, se escribe $u \propto v$. Esto significa que una cantidad es un múltiplo constante de otra: $u = kv$.

turo. En términos matemáticos, si $P(t)$ denota la población al tiempo t, entonces esta suposición se puede expresar como

$$\frac{dP}{dt} \propto P \qquad \text{o} \qquad \frac{dP}{dt} = kP, \tag{1}$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Este modelo simple, falla si se consideran muchos otros factores que pueden influir en el crecimiento o decrecimiento (por ejemplo, inmigración y emigración), resultó, sin embargo, bastante exacto en predecir la población de los Estados Unidos, durante 1790-1860. Las poblaciones que crecen con una razón descrita por la ecuación (1) son raras; sin embargo, (1) aún se usa para modelar el *crecimiento de pequeñas poblaciones en intervalos de tiempo cortos* (por ejemplo, crecimiento de bacterias en una caja de Petri).

DECAIMIENTO RADIACTIVO El núcleo de un átomo está formado por combinaciones de protones y neutrones. Muchas de esas combinaciones son inestables, esto es, los átomos se desintegran o se convierten en átomos de otras sustancias. Se dice que estos núcleos son radiactivos. Por ejemplo, con el tiempo, el radio Ra 226, intensamente radiactivo, se transforma en el radiactivo gas radón, Rn-222. Para modelar el fenómeno del **decaimiento radiactivo**, se supone que la razón dA/dt con la que los núcleos de una sustancia se desintegran es proporcional a la cantidad (más precisamente, el número de núcleos), $A(t)$ de la sustancia que queda al tiempo t:

$$\frac{dA}{dt} \propto A \qquad \text{o} \qquad \frac{dA}{dt} = kA. \tag{2}$$

Por supuesto que las ecuaciones (1) y (2) son exactamente iguales; la diferencia radica sólo en la interpretación de los símbolos y de las constantes de proporcionalidad. En el caso del crecimiento, como esperamos en la ecuación (l), $k > 0$, y para la desintegración como en la ecuación (2), $k < 0$.

El modelo de la ecuación (1) para crecimiento también se puede ver como la ecuación $dS/dt = rS$, que describe el crecimiento del capital S cuando está a una tasa anual de interés r compuesto continuamente. El modelo de desintegración de la ecuación (2) también se aplica a sistemas biológicos tales como la determinación de la "vida media" de un medicamento, es decir, el tiempo que le toma a 50% del medicamento ser eliminado del cuerpo por excreción o metabolización. En química el modelo del decaimiento, ecuación (2), se presenta en la descripción matemática de una reacción química de primer orden. Lo importante aquí es:

Una sola ecuación diferencial puede servir como modelo matemático de muchos fenómenos distintos.

Con frecuencia, los modelos matemáticos se acompañan de condiciones que los definen. Por ejemplo, en las ecuaciones (l) y (2) esperaríamos conocer una población inicial P_0 y por otra parte la cantidad inicial de sustancia radioactiva A_0. Si el tiempo inicial se toma en $t = 0$, sabemos que $P(0) = P_0$ y que $A(0) = A_0$. En otras palabras, un modelo matemático puede consistir en un problema con valores iniciales o, como veremos más adelante en la sección 5.2, en un problema con valores en la frontera.

LEY DE ENFRIAMIENTO/CALENTAMIENTO DE NEWTON De acuerdo con la ley empírica de Newton de enfriamiento/calentamiento, la rapidez con la que cambia la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la del medio que lo rodea, que se llama temperatura ambiente. Si $T(t)$ representa la temperatura del cuerpo al tiempo t, T_m es la temperatura del medio que lo rodea y dT/dt es la rapidez con que cambia la temperatura del cuerpo, entonces la ley de Newton de enfriamiento/calentamiento traducida en una expresión matemática es

$$\frac{dT}{dt} \propto T - T_m \qquad \text{o} \qquad \frac{dT}{dt} = k(T - T_m), \tag{3}$$

donde k es una constante de proporcionalidad. En ambos casos, enfriamiento o calentamiento, si T_m es una constante, se establece que $k < 0$.

PROPAGACIÓN DE UNA ENFERMEDAD Una enfermedad contagiosa, por ejemplo un virus de gripe, se propaga a través de una comunidad por personas que han estado en contacto con otras personas enfermas. Sea que $x(t)$ denote el número de personas que han contraído la enfermedad y sea que $y(t)$ denote el número de personas que aún no han sido expuestas al contagio. Es lógico suponer que la razón dx/dt con la que se propaga la enfermedad es proporcional al número de encuentros, o *interacciones*, entre estos dos grupos de personas. Si suponemos que el número de interacciones es conjuntamente proporcional a $x(t)$ y $y(t)$, esto es, proporcional al producto xy, entonces

$$\frac{dx}{dt} = kxy, \tag{4}$$

donde k es la constante usual de proporcionalidad. Suponga que una pequeña comunidad tiene una población fija de n personas. Si se introduce una persona infectada dentro de esta comunidad, entonces se podría argumentar que $x(t)$ y $y(t)$ están relacionadas por $x + y = n + 1$. Utilizando esta última ecuación para eliminar y en la ecuación (4) se obtiene el modelo

$$\frac{dx}{dt} = kx(n + 1 - x). \tag{5}$$

Una condición inicial obvia que acompaña a la ecuación (5) es $x(0) = 1$.

REACCIONES QUÍMICAS La desintegración de una sustancia radiactiva, caracterizada por la ecuación diferencial (l), se dice que es una **reacción de primer orden.** En química hay algunas reacciones que siguen esta misma ley empírica: si las moléculas de la sustancia A se descomponen y forman moléculas más pequeñas, es natural suponer que la rapidez con que se lleva a cabo esa descomposición es proporcional a la cantidad de la primera sustancia que no ha experimentado la conversión; esto es, si $X(t)$ es la cantidad de la sustancia A que permanece en cualquier momento, entonces $dX/dt = kX$, donde k es una constante negativa ya que X es decreciente. Un ejemplo de una reacción química de primer orden es la conversión del cloruro de terbutilo, $(CH_3)_3CCl$ en alcohol t-butílico $(CH_3)_3COH$:

$$(CH_3)_3CCl + NaOH \rightarrow (CH_3)_3COH + NaCl.$$

Sólo la concentración del cloruro de terbutilo controla la rapidez de la reacción. Pero en la reacción

$$CH_3Cl + NaOH \rightarrow CH_3OH + NaCl$$

se consume una molécula de hidróxido de sodio, NaOH, por cada molécula de cloruro de metilo, CH_3Cl, por lo que se forma una molécula de alcohol metílico, CH_3OH y una molécula de cloruro de sodio, NaCl. En este caso, la razón con que avanza la reacción es proporcional al producto de las concentraciones de CH_3Cl y NaOH que quedan. Para describir en general esta segunda reacción, supongamos *una* molécula de una sustancia A que se combina con *una* molécula de una sustancia B para formar *una* molécula de una sustancia C. Si X denota la cantidad de un químico C formado al tiempo t y si α y β son, respectivamente, las cantidades de los dos químicos A y B en $t = 0$ (cantidades iniciales), entonces las cantidades instantáneas no convertidas de A y B al químico C son $\alpha - X$ y $\beta - X$, respectivamente. Por lo que la razón de formación de C está dada por

$$\frac{dX}{dt} = k(\alpha - X)(\beta - X), \tag{6}$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Una reacción cuyo modelo es la ecuación (6) se dice que es una **reacción de segundo orden**.

MEZCLAS Al mezclar dos soluciones salinas de distintas concentraciones surge una ecuación diferencial de primer orden, que define la cantidad de sal contenida en la mezcla. Supongamos que un tanque mezclador grande inicialmente contiene 300 galones de salmuera (es decir, agua en la que se ha disuelto una cantidad de sal). Otra solución de salmuera entra al tanque con una razón de 3 galones por minuto; la con-

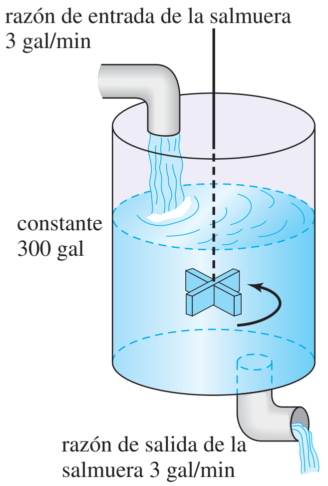


FIGURA 1.3.1 Tanque de mezclado.

centración de sal que entra es 2 libras/galón. Cuando la solución en el tanque está bien mezclada, sale con la misma rapidez con que entra. Véase la figura 1.3.1. Si $A(t)$ denota la cantidad de sal (medida en libras) en el tanque al tiempo t, entonces la razón con la que $A(t)$ cambia es una razón neta:

$$\frac{dA}{dt} = \begin{pmatrix} \text{razón de} \\ \text{entrada} \\ \text{de la sal} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{razón de} \\ \text{salida} \\ \text{de la sal} \end{pmatrix} = R_{entra} - R_{sale}. \tag{7}$$

La razón de entrada R_{entra} con la que entra la sal en el tanque es el producto de la concentración de entrada de sal por la razón de entrada del fluido. Observe que R_{entra} está medida en libras por minuto:

$$R_{entra} = \overset{\substack{\text{concentración}\\ \text{de sal en}\\ \text{el fluido,}\\ \downarrow}}{(2 \text{ lb/gal})} \cdot \overset{\substack{\text{razón de entrada}\\ \text{de la salmuera,}\\ \downarrow}}{(3 \text{ gal/min})} = \overset{\substack{\text{razón de}\\ \text{entrada de la sal}\\ \downarrow}}{(6 \text{ lb/min})}.$$

Ahora, puesto que la solución sale del tanque con la misma razón con la que entra, el número de galones de la salmuera en el tanque al tiempo t es una constante de 300 galones. Por lo que la concentración de la sal en el tanque así como en el flujo de salida es $c(t) = A(t)/300$ lb/gal, por lo que la razón de salida R_{sale} de sal es

$$R_{sale} = \overset{\substack{\text{concentración de}\\ \text{sal en el flujo}\\ \text{de salida}\\ \downarrow}}{\left(\frac{A(t)}{300} \text{ lb/gal}\right)} \cdot \overset{\substack{\text{razón de salida}\\ \text{de la salmuera}\\ \downarrow}}{(3 \text{ gal/min})} = \overset{\substack{\text{razón de}\\ \text{salida}\\ \text{de la sal}\\ \downarrow}}{\frac{A(t)}{100} \text{ lb/min}}.$$

La razón neta, ecuación (7) entonces será

$$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{A}{100} \quad \text{o} \quad \frac{dA}{dt} + \frac{1}{100}A = 6. \tag{8}$$

Si r_{entra} y r_{sale} denotan las razones generales de entrada y salida de las soluciones de salmuera,* entonces existen tres posibilidades $r_{entra} = r_{sale}$, $r_{entra} > r_{sale}$ y $r_{entra} < r_{sale}$. En el análisis que conduce a la ecuación (8) suponemos que $r_{entra} = r_{sale}$. En los dos últimos casos el número de galones de salmuera está ya sea aumentando ($r_{entra} > r_{sale}$) o disminuyendo ($r_{entra} < r_{sale}$) a la razón neta $r_{entra} - r_{sale}$. Véanse los problemas 10 a 12 en los ejercicios 1.3.

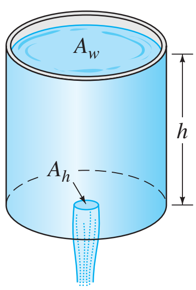
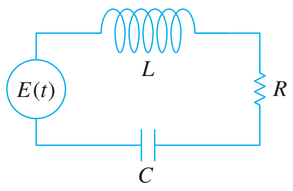


FIGURA 1.3.2 Drenado de un tanque.

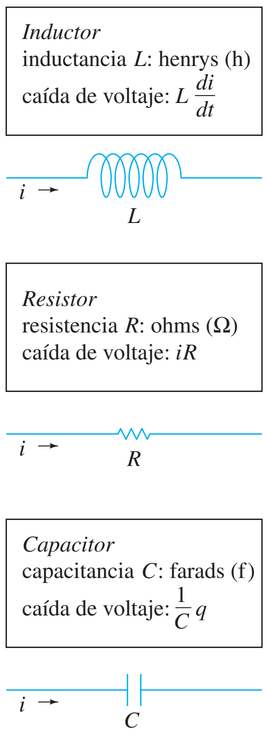
DRENADO DE UN TANQUE En hidrodinámica, la **ley de Torricelli** establece que la rapidez v de salida del agua a través de un agujero de bordes afilados en el fondo de un tanque lleno con agua hasta una profundidad h es igual a la velocidad de un cuerpo (en este caso una gota de agua), que está cayendo libremente desde una altura h − esto es, $v = \sqrt{2gh}$, donde g es la aceleración de la gravedad. Esta última expresión surge al igualar la energía cinética, $\frac{1}{2}mv^2$ con la energía potencial, mgh, y despejar v. Suponga que un tanque lleno de agua se vacía a través de un agujero, bajo la influencia de la gravedad. Queremos encontrar la profundidad, h, del agua que queda en el tanque al tiempo t. Considere el tanque que se muestra en la figura 1.3.2. Si el área del agujero es A_h, (en pies^2) y la rapidez del agua que sale del tanque es $v = \sqrt{2gh}$ (en pies/s), entonces el volumen de agua que sale del tanque, por segundo, es $A_h\sqrt{2gh}$ (en pies^3/s). Así, si $V(t)$ denota al volumen de agua en el tanque al tiempo t, entonces

$$\frac{dV}{dt} = -A_h\sqrt{2gh}, \tag{9}$$

*No confunda estos símbolos con R_{entra} y R_{sale}, que son las razones de entrada y salida de *sal.*



a) Circuito en serie- *LRC*



b)

FIGURA 1.3.3 Símbolos, unidades y voltajes. Corriente $i(t)$ y carga $q(t)$ están medidas en amperes (A) y en coulombs (C), respectivamente.

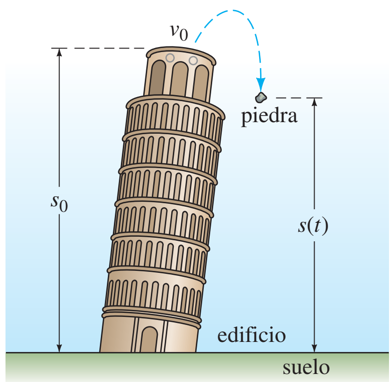


FIGURA 1.3.4 Posición de la piedra medida desde el nivel del suelo.

donde el signo menos indica que V está disminuyendo. Observe que aquí estamos despreciando la posibilidad de fricción en el agujero, que podría causar una reducción de la razón de flujo. Si ahora el tanque es tal que el volumen del agua al tiempo t se expresa como $V(t) = A_w h$, donde A_w (en pies^2) es el área *constante* de la superficie superior del agua (véase la figura 1.3.2), entonces $dV/dt = A_w\, dh/dt$. Sustituyendo esta última expresión en la ecuación (9) obtenemos la ecuación diferencial que deseábamos para expresar la altura del agua al tiempo t:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_h}{A_w}\sqrt{2gh}. \tag{10}$$

Es interesante observar que la ecuación (10) es válida aun cuando A_w, no sea constante. En este caso, debemos expresar el área de la superficie superior del agua en función de h, esto es, $A_w = A(h)$. Véase el problema 14 de los ejercicios 1.3.

CIRCUITOS EN SERIE Considere el circuito en serie simple que tiene un inductor, un resistor y un capacitor que se muestra en la figura 1.3.3a. En un circuito con el interruptor cerrado, la corriente se denota por $i(t)$ y la carga en el capacitor al tiempo t se denota por $q(t)$. Las letras L, R y C son conocidas como inductancia, resistencia y capacitancia, respectivamente y en general son constantes. Ahora de acuerdo con la segunda ley de Kirchhoff, el voltaje aplicado $E(t)$ a un circuito cerrado debe ser igual a la suma de las caídas de voltaje en el circuito. La figura 1.3.3b muestra los símbolos y fórmulas de las caídas respectivas de voltaje a través de un inductor, un capacitor y un resistor. Como la corriente $i(t)$ está relacionada con la carga $q(t)$ en el capacitor mediante $i = dq/dt$, sumamos los tres voltajes

$$\overbrace{L\frac{di}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2}}^{\text{inductor}}, \qquad \overbrace{iR = R\frac{dq}{dt}}^{\text{resistor}}, \qquad \text{y} \qquad \overbrace{\frac{1}{C}q}^{\text{capacitor}}$$

e igualando la suma de los voltajes con el voltaje aplicado se obtiene la ecuación diferencial de segundo orden

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t). \tag{11}$$

En la sección 5.1 examinaremos con detalle una ecuación diferencial análoga a (11).

CUERPOS EN CAÍDA Para establecer un modelo matemático del movimiento de un cuerpo que se mueve en un campo de fuerzas, con frecuencia se comienza con la segunda ley de Newton. Recordemos de la física elemental, la **primera ley del movimiento** de Newton establece que un cuerpo permanecerá en reposo o continuará moviéndose con una velocidad constante, a menos que sea sometido a una fuerza externa. En los dos casos, esto equivale a decir que cuando la suma de las fuerzas $F = \sum F_k$, esto es, la fuerza *neta* o fuerza resultante, que actúa sobre el cuerpo es cero, la aceleración a del cuerpo es cero. La **segunda ley del movimiento** de Newton indica que cuando la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo no es cero, entonces la fuerza neta es proporcional a su aceleración a o, más exactamente, $F = ma$, donde m es la masa del cuerpo.

Supongamos ahora que se arroja una piedra hacia arriba desde el techo de un edificio como se muestra en la figura 1.3.4. ¿Cuál es la posición $s(t)$ de la piedra respecto al suelo al tiempo t? La aceleración de la piedra es la segunda derivada d^2s/dt^2. Si suponemos que la dirección hacia arriba es positiva y que no hay otra fuerza, además de la fuerza de la gravedad, que actúe sobre la piedra, entonces utilizando la segunda ley de Newton se tiene que

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = -g. \tag{12}$$

En otras palabras, la fuerza neta es simplemente el peso $F = F_1 = -W$ de la piedra cerca de la superficie de la Tierra. Recuerde que la magnitud del peso es $W = mg$, donde m es la masa del cuerpo y g es la aceleración debida a la gravedad. El signo menos en la ecuación (12) se usa porque el peso de la piedra es una fuerza dirigida hacia abajo, que es opuesta a la dirección positiva. Si la altura del edificio es s_0 y la velocidad inicial de la roca es v_0, entonces s se determina a partir del problema con valores iniciales de segundo orden

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g, \quad s(0) = s_0, \quad s'(0) = v_0. \tag{13}$$

Aunque no hemos indicado soluciones de las ecuaciones que se han formulado, observe que la ecuación 13 se puede resolver integrando dos veces respecto a t la constante $-g$. Las condiciones iniciales determinan las dos constantes de integración. De la física elemental podría reconocer la solución de la ecuación (13) como la fórmula $s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$.

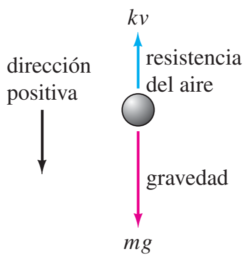


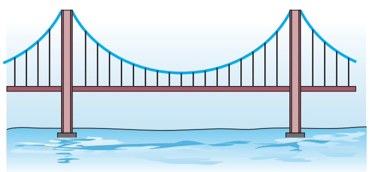
FIGURA 1.3.5 Cuerpo de masa m cayendo.

CUERPOS EN CAÍDA Y RESISTENCIA DEL AIRE Antes del famoso experimento de la torre inclinada de Pisa de Galileo generalmente se creía que los objetos más pesados en caída libre, como una bala de cañón, caían con una aceleración mayor que los objetos ligeros como una pluma. Obviamente, una bala de cañón y una pluma cuando se dejan caer simultáneamente desde la misma altura realmente *caen* en tiempos diferentes, pero esto no es porque una bala de cañón sea más pesada. La diferencia en los tiempos es debida a la resistencia del aire. En el modelo que se presentó en la ecuación (13) se despreció la fuerza de la resistencia del aire. Bajo ciertas circunstancias, un cuerpo que cae de masa m, tal como una pluma con densidad pequeña y forma irregular, encuentra una resistencia del aire que es proporcional a su velocidad instantánea v. Si en este caso, tomamos la dirección positiva dirigida hacia abajo, entonces la fuerza neta que está actuando sobre la masa está dada por $F = F_1 + F_2 = mg - kv$, donde el peso $F_1 = mg$ del cuerpo es una fuerza que actúa en la dirección positiva y la resistencia del aire $F_2 = -kv$ es una fuerza, que se llama de **amortiguamiento viscoso,** que actúa en la dirección contraria o hacia arriba. Véase la figura 1.3.5. Ahora puesto que v está relacionada con la aceleración a mediante $a = dv/dt$, la segunda ley de Newton será $F = ma = m\, dv/dt$. Al igualar la fuerza neta con esta forma de la segunda ley, obtenemos una ecuación diferencial para la velocidad $v(t)$ del cuerpo al tiempo t,

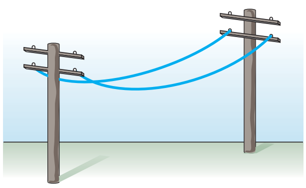
$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv. \tag{14}$$

Aquí k es una constante positiva de proporcionalidad. Si $s(t)$ es la distancia que el cuerpo ha caído al tiempo t desde su punto inicial o de liberación, entonces $v = ds/dt$ y $a = dv/dt = d^2s/dt^2$. En términos de s, la ecuación (14) es una ecuación diferencial de segundo orden.

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg - k\frac{ds}{dt} \qquad \text{o} \qquad m\frac{d^2s}{dt^2} + k\frac{ds}{dt} = mg. \tag{15}$$



a) cable de suspensión de un puente



b) alambres de teléfonos

FIGURA 1.3.6 Cables suspendidos entre soportes verticales.

CABLES SUSPENDIDOS Suponga un cable flexible, alambre o cuerda pesada que está suspendida entre dos soportes verticales. Ejemplos físicos de esto podría ser uno de los dos cables que soportan el firme de un puente de suspensión como el que se muestra en la figura 1.3.6a o un cable telefónico largo entre dos postes como el que se muestra en la figura 1.3.6b. Nuestro objetivo es construir un modelo matemático que describa la forma que tiene el cable.

Comenzaremos por acordar en examinar sólo una parte o elemento del cable entre su punto más bajo P_1 y cualquier punto arbitrario P_2. Señalado en color azul en la figura 1.3.7, este elemento de cable es la curva en un sistema de coordenada rectangular eligiendo al eje y para que pase a través del punto más bajo P_1 de la curva y eligiendo al eje x para que pase a a unidades debajo de P_1. Sobre el cable actúan tres fuerzas: las tensiones $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ en el cable que son tangentes al cable en P_1 y P_2, respectivamente, y la parte $\mathbf{W}$ de la carga total vertical entre los puntos P_1 y P_2. Sea que $T_1 = |\mathbf{T}_1|$, $T_2 = |\mathbf{T}_2|$, y $W = |\mathbf{W}|$ denoten las magnitudes de estos vectores. Ahora la tensión $\mathbf{T}_2$ se

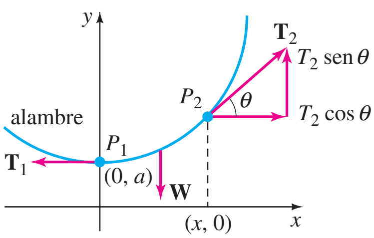


FIGURA 1.3.7 Elemento del cable.

descompone en sus componentes horizontal y vertical (cantidades escalares) $T_2 \cos \theta$ y T_2 sen θ. Debido al equilibrio estático podemos escribir

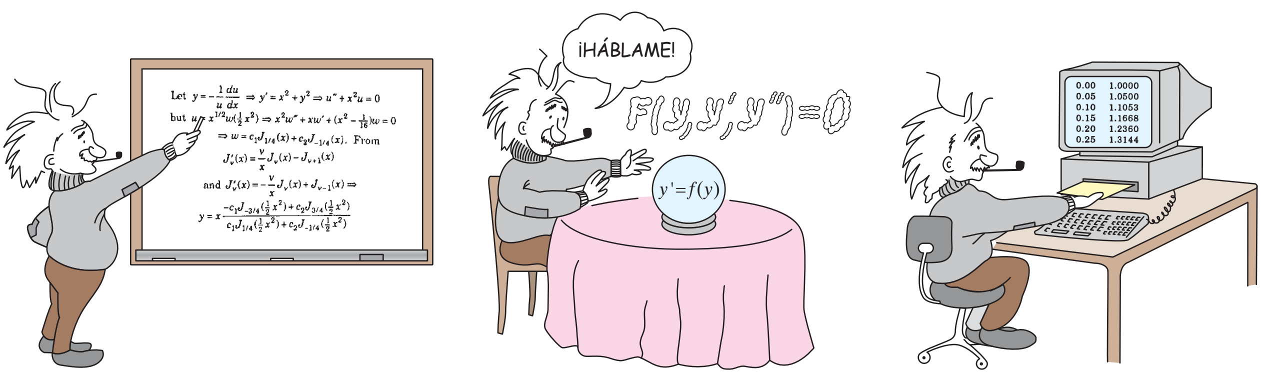
$$T_1 = T_2 \cos \theta \qquad \text{y} \qquad W = T_2 \operatorname{sen} \theta.$$

Al dividir la ultima ecuación entre la primera, eliminamos T_2 y obtenemos tan $\theta = W/T_1$. Pero puesto que $dy/dx = \tan \theta$, llegamos a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{W}{T_1}. \tag{16}$$

Esta sencilla ecuación diferencial de primer orden sirve como modelo tanto para modelar la forma de un alambre flexible como el cable telefónico colgado bajo su propio peso, como para modelar la forma de los cables que soportan el firme de un puente suspendido. Regresaremos a la ecuación (16) en los ejercicios 2.2 y la sección 5.3.

CUÁLES SON LOS MÉTODOS En este libro veremos tres diferentes tipos de métodos para el análisis de las ecuaciones diferenciales. Por siglos las ecuaciones diferenciales han ocupado los esfuerzos de científicos o ingenieros para describir algún fenómeno físico o para traducir una ley empírica o experimental en términos matemáticos. En consecuencia el científico, ingeniero o matemático con frecuencia pasaría muchos años de su vida tratando de encontrar las soluciones de una ED. Con una solución en la mano, se prosigue con el estudio de sus propiedades. A esta búsqueda de soluciones se le llama *método analítico* para las ecuaciones diferenciales. Una vez que comprendieron que las soluciones explícitas eran muy difíciles de obtener y en el peor de los casos imposibles de obtener, los matemáticos aprendieron que las ecuaciones diferenciales en sí mismas podrían ser una fuente de información valiosa. Es posible, en algunos casos, contestar directamente de las ecuaciones diferenciales preguntas como *¿en realidad la ED tiene soluciones? Si una solución de la ED existe y satisface una condición inicial, ¿es única esa solución? ¿Cuáles son algunas propiedades de las soluciones desconocidas? ¿Qué podemos decir acerca de la geometría de las curvas de solución?* Este método es *análisis cualitativo*. Por último, si una ecuación diferencial no se puede resolver por métodos analíticos, aún así podemos demostrar que una solución existe; la siguiente pregunta lógica es *¿de qué modo podemos aproximarnos a los valores de una solución desconocida?* Aquí entra al reino del *análisis numérico*. Una respuesta afirmativa a la última pregunta se basa en el hecho de que una ecuación diferencial se puede usar como un principio básico para la construcción de algoritmos de aproximación muy exactos. En el capítulo 2 comenzaremos con consideraciones cualitativas de las EDO de primer orden, después analizaremos los artificios analíticos para resolver algunas ecuaciones especiales de primer orden y concluiremos con una introducción a un método numérico elemental. Véase la figura 1.3.8.



a) analítico **b)** cualitativo **c)** numérico

FIGURA 1.3.8 Métodos diferentes para el estudio de ecuaciones diferenciales.

COMENTARIOS

Cada ejemplo de esta sección ha descrito un sistema dinámico, un sistema que cambia o evoluciona con el paso del tiempo t. Puesto que el estudio de los sistemas dinámicos es una rama de las matemáticas de moda en la actualidad, a veces utilizaremos la terminología de esa rama en nuestros análisis.

En términos más precisos, un **sistema dinámico** consiste en un conjunto de variables dependientes del tiempo, que se llaman **variables de estado,** junto con una regla que permita determinar (sin ambigüedades) el estado del sistema (que puede ser pasado, presente o futuro) en términos de un estado prescrito al tiempo t_0. Los sistemas dinámicos se clasifican ya sea como sistemas discretos o continuos en el tiempo, o de tiempos discretos o continuos. En este curso sólo nos ocuparemos de los sistemas dinámicos continuos en el tiempo, sistemas en los que *todas* las variables están definidas dentro de un intervalo continuo de tiempo. La regla o modelo matemático en un sistema dinámico continuo en el tiempo es una ecuación diferencial o sistema de ecuaciones diferenciales. El **estado del sistema** al tiempo t es el valor de las variables de estado en ese instante; el estado especificado del sistema al tiempo t_0 son simplemente las condiciones iniciales que acompañan al modelo matemático. La solución de un problema con valores iniciales se llama **respuesta del sistema**. Por ejemplo, en el caso del decaimiento radiactivo, la regla es $dA/dt = kA$. Ahora, si se conoce la cantidad de sustancia radiactiva al tiempo t_0, digamos $A(t_0) = A_0$, entonces, al resolver la regla se encuentra que la respuesta del sistema para $t \geq t_0$ es $A(t) = A_0 e^{(t - t_0)}$ (véase la sección 3.1). La respuesta $A(t)$ es la única variable de estado para este sistema. En el caso de la piedra arrojada desde el techo de un edificio, la respuesta del sistema, es decir, la solución a la ecuación diferencial $d^2s/dt^2 = -g$, sujeta al estado inicial $s(0) = s_0$, $s'(0) = v_0$, es la función $s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0;\ 0 \leq t \leq T$, donde T representa el valor del tiempo en que la piedra golpea en el suelo. Las variables de estado son $s(t)$ y $s'(t)$, la posición y la velocidad verticales de la piedra, respectivamente. La aceleración, $s''(t)$, *no* es una variable de estado ya que sólo se conocen la posición y la velocidad iniciales al tiempo t_0 para determinar, en forma única, la posición $s(t)$ y la velocidad $s'(t) = v(t)$ de la piedra en cualquier momento del intervalo $t_0 \leq t \leq T$. La aceleración, $s''(t) = a(t)$ está, por supuesto, dada por la ecuación diferencial $s''(t) = -g$, $0 < t < T$.

Un último punto: No todos los sistemas que se estudian en este libro son sistemas dinámicos. Examinaremos algunos sistemas estáticos en que el modelo es una ecuación diferencial.

EJERCICIOS 1.3

Las respuestas a los problemas con número impar comienzan en la página RES-1.

Dinámica poblacional

1. Con base en las mismas hipótesis detrás del modelo de la ecuación (1), determine una ecuación diferencial para la población $P(t)$ de un país cuando se les permite a las personas inmigrar a un país con una razón constante $r > 0$. ¿Cuál es la ecuación diferencial para la población $P(t)$ del país cuando se les permite a las personas emigrar del país con una razón constante $r > 0$?

2. El modelo de población dado en la ecuación (1) falla al no considerar la tasa de mortalidad; la razón de crecimiento es igual a la tasa de natalidad. En otro modelo del cambio de población de una comunidad se supone que la razón de cambio de la población es una razón *neta,* esto es, la diferencia entre la tasa de natalidad y la de mortalidad en la comunidad. Determine un modelo para la población $P(t)$ si tanto la tasa de natalidad y la mortalidad son proporcionales a la población presente al tiempo t.

3. Utilice el concepto de razón neta introducido en el problema 2 para determinar un modelo para una población $P(t)$ si la tasa de natalidad es proporcional a la población presente al tiempo t, pero la tasa de mortalidad es proporcional al cuadrado de la población presente al tiempo t.

4. Modifique el problema 3 para la razón neta con la que la población $P(t)$ de una cierta clase de pez cambia al suponer que el pez está siendo pescado con una razón constante $h > 0$.

Ley de enfriamiento/calentamiento de Newton

5. Una taza de café se enfría de acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton, ecuación (3). Utilice los datos de la gráfica de la temperatura $T(t)$ en la figura 1.3.9 para estimar las constantes T_m, T_0 y k en un modelo de la forma de un problema con valores iniciales de primer orden: $dT/dt = k(T - T_m)$, $T(0) = T_0$.

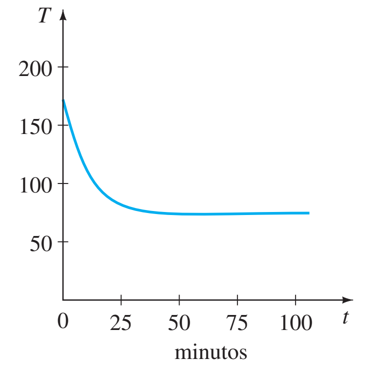


FIGURA 1.3.9 Curva de enfriamiento del problema 5.

6. La temperatura ambiente T_m en la ecuación (3) podría ser una función del tiempo t. Suponga que en un medio ambiente controlado, $T_m(t)$ es periódica con un periodo de 24 horas, como se muestra en la figura 1.3.10. Diseñe un modelo matemático para la temperatura $T(t)$ de un cuerpo dentro de este medio ambiente.

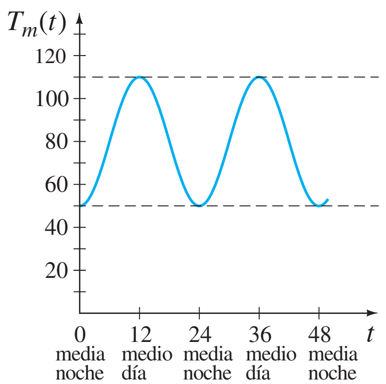


FIGURA 1.3.10 Temperatura ambiente del problema 6.

Propagación de una enfermedad/tecnología

7. Suponga que un alumno es portador del virus de la gripe y regresa al apartado campus de su universidad de 1000 estudiantes. Determine una ecuación diferencial para el número de personas $x(t)$ que contraerán la gripe si la razón con la que la enfermedad se propaga es proporcional al número de interacciones entre el número de estudiantes que tiene gripe y el número de estudiantes que aún no se han expuesto a ella.

8. Al tiempo denotado por $t = 0$, se introduce una innovación tecnológica en una comunidad que tiene una cantidad fija de n personas. Determine una ecuación diferencial para el número de personas $x(t)$ que hayan adoptado la innovación al tiempo t si se supone que la razón con la que se propaga la innovación es conjuntamente proporcional al número de personas que ya la han adoptado y al número de personas que no la han adoptado.

Mezclas

9. Suponga que un tanque grande de mezclado contiene inicialmente 300 galones de agua en los que se disolvieron 50 libras de sal. Entra agua pura a una razón de 3 gal/min y cuando la solución está bien revuelta, sale a la misma razón. Determine una ecuación diferencial que exprese la cantidad $A(t)$ de sal que hay en el tanque al tiempo t. ¿Cuánto vale $A(0)$?

10. Suponga que un tanque grande de mezclado contiene inicialmente 300 galones de agua, en los que se han disuelto 50 libras de sal. Otra salmuera introducida al tanque a una razón de 3 gal/min y cuando la solución está bien mezclada sale a una razón *lenta* de 2 gal/min. Si la concentración de la solución que entra es 2 lb/gal, determine una ecuación diferencial que exprese la cantidad de sal $A(t)$ que hay en el tanque al tiempo t.

11. ¿Cuál es la ecuación diferencial del problema 10, si la solución bien mezclada sale a una razón *más rápida* de 3.5 gal/min?

12. Generalice el modelo dado en la ecuación (8) de la página 23, suponiendo que el gran tanque contiene inicialmente N_0 número de galones de salmuera, r_{entra} y r_{sale} son las razones de entrada y salida de la salmuera, respectivamente (medidas en galones por minuto), c_{entra} es la concentración de sal en el flujo que entra, $c(t)$ es la concentración de sal en el tanque así como en el flujo que sale al tiempo t (medida en libras de sal por galón), y $A(t)$ es la cantidad de sal en el tanque al tiempo t.

Drenado de un tanque

13. Suponga que está saliendo agua de un tanque a través de un agujero circular de área A_h que está en el fondo. Cuando el agua sale a través del agujero, la fricción y la contracción de la corriente cerca del agujero reducen el volumen de agua que sale del tanque por segundo a $cA_h\sqrt{2gh}$, donde c $(0 < c < 1)$ es una constante empírica. Determine una ecuación diferencial para la altura h del agua al tiempo t para el tanque cúbico que se muestra en la figura 1.3.11. El radio del agujero es de 2 pulg, y $g = 32$ pies/s^2.

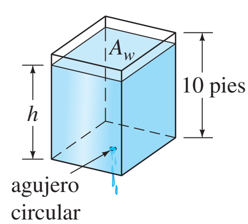


FIGURA 1.3.11 Tanque cúbico del problema 13.

14. Del tanque cónico rectangular recto que se muestra en la figura 1.3.12 sale agua por un agujero circular que está en el fondo. Determine una ecuación diferencial para la altura h del agua al tiempo t. El radio del agujero es 2 pulg, $g = 32$ pies/s^2, y el factor de fricción/contracción es $c = 0.6$.

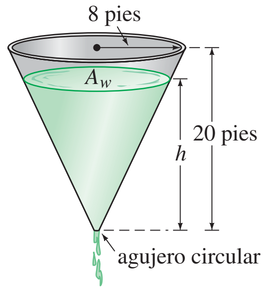


FIGURA 1.3.12 Tanque cónico del problema 14.

Circuitos en serie

15. Un circuito en serie tiene un resistor y un inductor como se muestra en la figura 1.3.13. Determine una ecuación diferencial para la corriente $i(t)$ si la resistencia es R, la inductancia es L y el voltaje aplicado es $E(t)$.

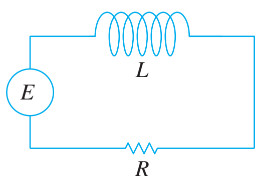


FIGURA 1.3.13 Circuito en serie *LR* del problema 15.

16. Un circuito en serie contiene un resistor y un capacitor como se muestra en la figura 1.3.14. Determine una ecuación diferencial que exprese la carga $q(t)$ en el capacitor, si la resistencia es R, la capacitancia es C y el voltaje aplicado es $E(t)$.

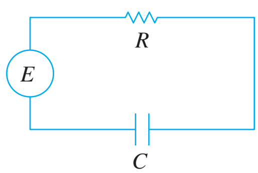


FIGURA 1.3.14 Circuito *RC* en serie del problema 16.

Caida libre y resistencia del aire

17. Para movimientos de gran rapidez en el aire, como el del paracaidista que se muestra en la figura 1.3.15, que está cayendo antes de que se abra el paracaídas la resistencia del aire es cercana a una potencia de la velocidad instantánea $v(t)$. Determine una ecuación diferencial para la velocidad $v(t)$ de un cuerpo de masa m que cae, si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea.

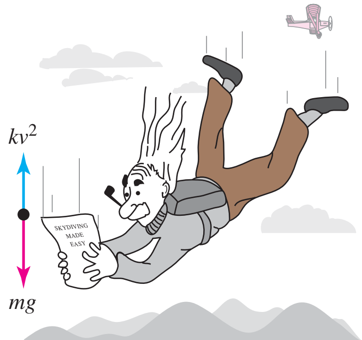


FIGURA 1.3.15 Resistencia del aire proporcional al cuadrado de la velocidad del problema 17.

Segunda ley de Newton y Principio de Arquímedes

18. Un barril cilíndrico de s pies de diámetro y w lb de peso, está flotando en agua como se muestra en la figura 1.3.16a. Después de un hundimiento inicial el barril presenta un movimiento oscilatorio, hacia arriba y hacia abajo, a lo largo de la vertical. Utilizando la figura 1.3.16b, defina una ecuación diferencial para establecer el desplazamiento vertical $y(t)$, si se supone que el origen está en el eje vertical y en la superficie del agua cuando el barril está en reposo. Use el **Principio de Arquímedes**: la fuerza de flotación o hacia arriba que ejerce el agua sobre el barril es igual al peso del agua desplazada. Suponga que la dirección hacia abajo es positiva, que la densidad de masa del agua es 62.4 lb/pies^3 y que no hay resistencia entre el barril y el agua.

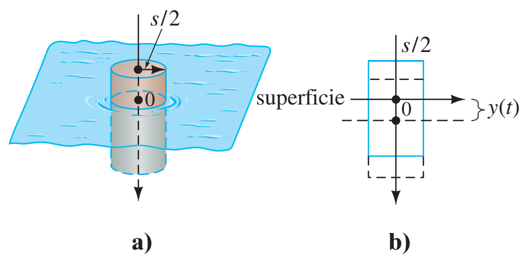


FIGURA 1.3.16 Movimiento oscilatorio del barril flotando del problema 18.

Segunda ley de Newton y ley de Hooke

19. Después de que se fija una masa m a un resorte, éste se estira s unidades y cuelga en reposo en la posición de equilibrio como se muestra en la figura 1.3.17b. Después el sistema

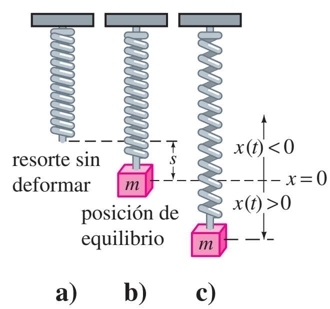


FIGURA 1.3.17 Sistema resorte/masa del problema 19.

resorte/masa se pone en movimiento, sea que $x(t)$ denote la distancia dirigida del punto de equilibrio a la masa. Como se indica en la figura 1.3.17c, suponga que la dirección hacia abajo es positiva y que el movimiento se efectúa en una recta vertical que pasa por el centro de gravedad de la masa y que las únicas fuerzas que actúan sobre el sistema son el peso de la masa y la fuerza de restauración del resorte estirado. Utilice la **ley de Hooke**: la fuerza de restauración de un resorte es proporcional a su elongación total. Determine una ecuación diferencial del desplazamiento $x(t)$ al tiempo t.

20. En el problema 19, ¿cuál es la ecuación diferencial para el desplazamiento $x(t)$ si el movimiento tiene lugar en un medio que ejerce una fuerza de amortiguamiento sobre el sistema resorte/masa que es proporcional a la velocidad instantánea de la masa y actúa en dirección contraria al movimiento?

Segunda ley de Newton y la ley de la gravitación universal

21. De acuerdo con la ley de la gravitación universal de Newton, la aceleración de caída libre a de un cuerpo, tal como el satélite que se muestra en la figura 1.3.18, que está cayendo desde una gran distancia hacia la superficie no es la constante g. Más bien, la aceleración a es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde el centro de la Tierra $a = k/r^2$ donde k es la constante de proporcionalidad. Utilice el hecho de que en la superficie de la Tierra, $r = R$ y $a = g$, para determinar k. Si la dirección positiva se considera hacia arriba, utilice la segunda ley de Newton y la ley de la gravitación universal para encontrar una ecuación diferencial para la distancia r.

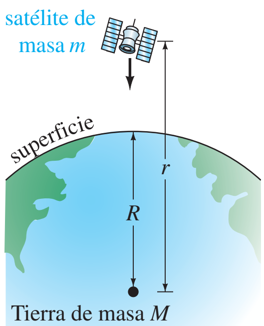


FIGURA 1.3.18 Satélite del problema 21.

22. Suponga que se hace un agujero que pasa por el centro de la Tierra y que por él se deja caer una bola de masa m como se muestra en la figura 1.3.19. Construya un modelo matemático que describa el posible movimiento de la bola. Al tiempo t sea que r denote la distancia desde el centro de la Tierra a la masa m, que M denote la masa de la Tierra, que M_r denote la masa de la parte de la Tierra que está dentro de una esfera de radio r, y que δ denote la densidad constante de la Tierra.

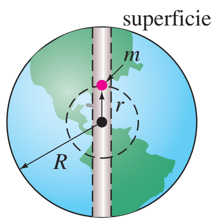


FIGURA 1.3.19 Agujero que pasa a través de la Tierra del problema 22.

Modelos matemáticos adicionales

23. Teoría del aprendizaje En la teoría del aprendizaje, se supone que la rapidez con que se memoriza algo es proporcional a la cantidad que queda por memorizar. Suponga que M denota la cantidad total de un tema que se debe memorizar y que $A(t)$ es la cantidad memorizada al tiempo t. Determine una ecuación diferencial para determinar la cantidad $A(t)$.

24. Falta de memoria Con los datos del problema anterior suponga que la razón con la cual el material es *olvidado* es proporcional a la cantidad memorizada al tiempo t. Determine una ecuación diferencial para $A(t)$, cuando se considera la falta de memoria.

25. Suministro de un medicamento Se inyecta un medicamento en el torrente sanguíneo de un paciente a una razón constante de r gramos por segundo. Simultáneamente, se elimina el medicamento a una razón proporcional a la cantidad $x(t)$ presente al tiempo t. Determine una ecuación diferencial que describa la cantidad $x(t)$.

26. Tractriz Una persona P que parte del origen se mueve en la dirección positiva del eje x, jalando un peso a lo largo de la curva C, llamada **tractriz**, como se muestra en la figura 1.3.20. Inicialmente el peso se encontraba en el eje y, en $(0, s)$ y es jalado con una cuerda de longitud constante s, que se mantiene tensa durante el movimiento. Determine una ecuación diferencial para la trayectoria C de movimiento. Suponga que la cuerda siempre es tangente a C.

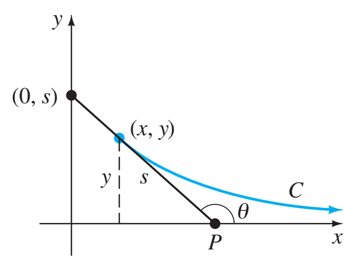


FIGURA 1.3.20 Curva tractriz del problema 26.

27. Superficie reflectora Suponga que cuando la curva plana C que se muestra en la figura 1.3.21 se gira respecto al eje x genera una superficie de revolución, con la propiedad de que todos los rayos de luz paralelos al eje x que inciden en la superficie son reflejados a un solo punto O (el origen). Utilice el hecho de que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión para determinar una ecua-

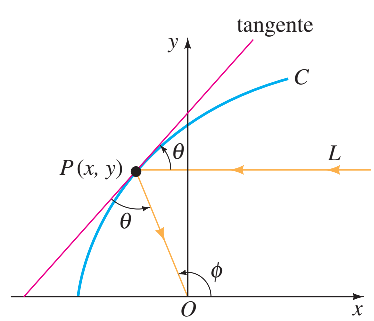


FIGURA 1.3.21 Superficie reflectora del problema 27.

ción diferencial que describa la forma de la curva C. Esta curva C es importante en aplicaciones como construcción de telescopios o antenas de satélites, faros delanteros de automóviles y colectores solares. [*Sugerencia*: La inspección de la figura muestra que podemos escribir $\phi = 2\theta$. ¿Por qué? Ahora utilice una identidad trigonométrica adecuada.]

Problemas de análisis

28. Repita el problema 41 de los ejercicios 1.1 y después proporcione una solución explicíta $P(t)$ para la ecuación (1). Determine una familia uniparamétrica de soluciones de (1).

29. Lea nuevamente la oración que se encuentra a continuación de la ecuación (3) y suponga que T_m es una constante positiva. Analice por qué se podría esperar que $k < 0$ en ambos casos de enfriamiento y de calentamiento. Podría empezar por interpretar, digamos, $T(t) > T_m$ en una forma gráfica.

30. Lea nuevamente el análisis que condujo a la ecuación (8). Si suponemos que inicialmente el tanque conserva, digamos 50 libras de sal, es porque se le está agregando sal continuamente al tanque para $t > 0$, $A(t)$ será una función creciente. Analice cómo podría determinar a partir de la ED, sin realmente resolverla, el número de libras de sal en el tanque después de un periodo largo.

31. Modelo de población La ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = (k \cos t)P$, donde k es una constante positiva, modela la población humana, $P(t)$, de cierta comunidad. Analice e interprete la solución de esta ecuación. En otras palabras, ¿qué tipo de población piensa que describe esta ecuación diferencial?

32. Fluido girando Como se muestra en la figura 1.3.22 un cilindro circular recto parcialmente lleno con un fluido está girando con una velocidad angular constante ω respecto al eje vertical que pasa por su centro. El fluido girando forma una superficie de revolución S. Para identificar S, primero establecemos un sistema coordenado que consiste en un plano vertical determinado por el eje y y el eje x dibujado en forma perpendicular al eje y de tal forma que el punto de intersección de los ejes (el origen) está localizado en el punto inferior de la superficie S. Entonces buscamos una función $y = f(x)$ que represente la curva C de intersección de la superficie S y del plano coordenado vertical. Sea que el punto $P(x, y)$ denote la posición de una partícula del fluido girando, de masa m, en el plano coordenado. Véase la figura 1.3.22b.

a) En P hay una fuerza de reacción de magnitud F debida a las otras partículas del fluido que es perpendicular a la superficie S. Usando la segunda ley de Newton la magnitud de la fuerza neta que actúa sobre la partícula es $m\omega^2 x$. ¿Cuál es esta fuerza? Utilice la figura 1.3.22b para analizar la naturaleza y el origen de las ecuaciones

$$F \cos \theta = mg, \qquad F \text{ sen } \theta = m\omega^2 x$$

b) Use el inciso a) para encontrar una ecuación diferencial que defina la función $y = f(x)$.

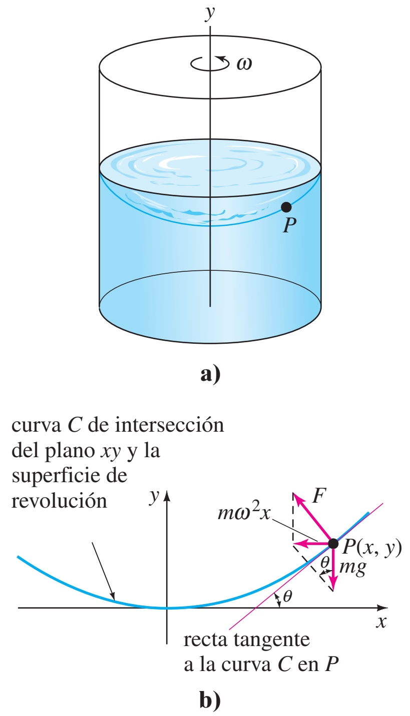


FIGURA 1.3.22 Fluido girando del problema 32.

33. Cuerpo en caída En el problema 21 suponga que $r = R + s$ donde s es la distancia desde la superficie de la Tierra al cuerpo que cae. ¿Cómo es la ecuación diferencial que se obtuvo en el problema 21 cuando s es muy pequeña en comparación con R? [*Sugerencia*: Considere la serie binomial para

$$(R + s)^{-2} = R^{-2}(1 + s/R)^{-2}.]$$

34. Gotas de lluvia cayendo En meteorología el término *virga* se refiere a las gotas de lluvia que caen o a partículas de hielo que se evaporan antes de llegar al suelo. Suponga que en algún tiempo, que se puede denotar por $t = 0$, las gotas de lluvia de radio r_0 caen desde el reposo de una nube y se comienzan a evaporar.

a) Si se supone que una gota se evapora de tal manera que su forma permanece esférica, entonces también tiene sentido suponer que la razón a la cual se evapora la gota de lluvia, esto es, la razón con la cual ésta pierde masa, es proporcional a su área superficial. Muestre que esta última suposición implica que la razón con la que el radio r de la gota de lluvia disminuye es una constante. Encuentre $r(t)$. [*Sugerencia*: Véase el problema 51 en los ejercicios 1.1.]

b) Si la dirección positiva es hacia abajo, construya un modelo matemático para la velocidad v de la gota de lluvia que cae al tiempo t. Desprecie la resistencia del aire. [*Sugerencia*: Cuando la masa m de un cuerpo está cambiando con el tiempo, la segunda ley de Newton es $F = \frac{d}{dt}(mv)$, donde F es la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo y mv es su cantidad de movimiento.]

35. Deja que nieve El "problema del quitanieves" es un clásico que aparece en muchos libros de ecuaciones diferenciales y que fue probablemente inventado por Ralph Palmer Agnew.

"Un día comenzó a nevar en forma intensa y constante. Un quitanieve comenzó a medio día, y avanzó 2 millas la primera hora y una milla la segunda. ¿A qué hora comenzó a nevar?"

Se encuentra en el libro *Differential Equations*, de Ralph Palmer Agnew, McGraw-Hill Book Co., búsquelo y después analice la construcción y solución del modelo matemático.

36. Lea nuevamente esta sección y clasifique cada modelo matemático como lineal o no lineal.

REPASO DEL CAPÍTULO 1

Las respuestas a los problemas con número impar comienzan en la página RES-1.

En los problemas 1 y 2 llene el espacio en blanco y después escriba este resultado como una ecuación diferencial de primer orden que no contiene al símbolo c_1 y que tiene la forma $dy/dx = f(x, y)$. El símbolo c_1 representa una constante.

1. $\dfrac{d}{dx}c_1e^{10x} =$ __________

2. $\dfrac{d}{dx}(5 + c_1e^{-2x}) =$ __________

En los problemas 3 y 4 llene el espacio en blanco y después escriba este resultado como una ecuación diferencial lineal de segundo orden que no contiene a las constantes c_1 y c_2 y que tiene la forma $F(y, y'') = 0$. Los símbolos c_1, c_2 y k representan las constantes.

3. $\dfrac{d^2}{dx^2}(c_1 \cos kx + c_2 \operatorname{sen} kx) =$ __________

4. $\dfrac{d^2}{dx^2}(c_1 \cosh kx + c_2 \operatorname{senh} kx) =$ __________

En los problemas 5 y 6 calcule y' y y'' y después combine estas derivadas con y como una ecuación diferencial lineal de segundo orden que no contiene los símbolos c_1 y c_2 y que tiene la forma $F(y, y', y'') = 0$. Estos símbolos c_1 y c_2 representan constantes.

5. $y = c_1e^x + c_2xe^x$ **6.** $y = c_1e^x \cos x + c_2e^x \operatorname{sen} x$

En los problemas 7 a 12 relacione cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales con una o más de estas soluciones.

a) $y = 0$, **b)** $y = 2$, **c)** $y = 2x$, **d)** $y = 2x^2$.

7. $xy' = 2y$ **8.** $y' = 2$

9. $y' = 2y - 4$ **10.** $xy' = y$

11. $y'' + 9y = 18$ **12.** $xy'' - y' = 0$

En los problemas 13 y 14 determine por inspección al menos una solución de la ecuación diferencial dada.

13. $y'' = y'$ **14.** $y' = y(y - 3)$

En los problemas 15 y 16 interprete cada enunciado como una ecuación diferencial.

15. En la gráfica de $y = \phi(x)$ la pendiente de la recta tangente en el punto $P(x, y)$ es el cuadrado de la distancia de $P(x, y)$ al origen.

16. En la gráfica de $y = \phi(x)$ la razón con la que la pendiente cambia respecto a x en un punto $P(x, y)$ es el negativo de la pendiente de la recta tangente en $P(x, y)$.

17. a) Dé el dominio de la función $y = x^{2/3}$.

b) Dé el intervalo I de definición más largo en el cual $y = x^{2/3}$ es solución de la ecuación diferencial $3xy' - 2y = 0$.

18. a) Compruebe que la familia uniparamétrica $y^2 - 2y = x^2 - x + c$ es una solución implícita de la ecuación diferencial $(2y - 2)y' = 2x - 1$.

b) Encuentre un miembro de la familia uniparamétrica en el inciso a) que satisfaga la condición inicial $y(0) = 1$.

c) Utilice su resultado del inciso b) para determinar una *función* explícita $y = \phi(x)$ que satisfaga $y(0) = 1$. Dé el dominio de la función ϕ. ¿Es $y = \phi(x)$ una *solución* del problema con valores iniciales? Si es así, dé su intervalo I de definición; si no, explique por qué.

19. Dado que $y = x - 2/x$ es una solución de la ED $xy' + y = 2x$. Determine x_0 y el intervalo I más largo para el cual $y(x)$ es una solución del PVI de primer orden $xy' + y = 2x$, $y(x_0) = 1$.

20. Suponga que $y(x)$ denota una solución del PVI de primer orden $y' = x^2 + y^2$, $y(1) = -1$ y que $y(x)$ tiene al menos una segunda derivada en $x = 1$. En alguna vecindad de $x = 1$ utilice la ED para determinar si $y(x)$ está creciendo o decreciendo y si la gráfica $y(x)$ es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

21. Una ecuación diferencial puede tener más de una familia de soluciones.

a) Dibuje diferentes miembros de las familias $y = \phi_1(x) = x^2 + c_1$ y $y = \phi_2(x) = -x^2 + c_2$.

b) Compruebe que $y = \phi_1(x)$ y $y = \phi_2(x)$ son dos soluciones de la ecuación diferencial no lineal de primer orden $(y')^2 = 4x^2$.

c) Construya una función definida en tramos que sea una solución de la ED no lineal del inciso b) pero que no es miembro de la familia de soluciones del inciso a).

22. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una solución de $y' = 6\sqrt{y} + 5x^3$ que pasa por $(-1, 4)$?

En los problemas 23 a 26 verifique que la función indicada es una solución particular de la ecuación diferencial dada. Dé un intervalo I de definición para cada solución.

23. $y'' + y = 2\cos x - 2\operatorname{sen} x;\quad y = x\operatorname{sen} x + x\cos x$

24. $y'' + y = \sec x;\quad y = x\operatorname{sen} x + (\cos x)\ln(\cos x)$

25. $x^2y'' + xy' + y = 0;\quad y = \operatorname{sen}(\ln x)$

26. $x^2y'' + xy' + y = \sec(\ln x);$
$y = \cos(\ln x)\ln(\cos(\ln x)) + (\ln x)\operatorname{sen}(\ln x)$

En los problemas 27 a 30, $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-x} - 2x$ es una familia de soluciones de dos parámetros de la ED de segundo orden $y'' - 2y' - 3y = 6x + 4$. Determine una solución del PVI de segundo orden que consiste en esta ecuación diferencial y en las condiciones iniciales dadas.

27. $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ **28.** $y(0) = 1,\ y'(0) = -3$

29. $y(1) = 4,\ y'(1) = -2$ **30.** $y(-1) = 0,\ y'(-1) = 1$

31. En la figura 1.R.1, se presenta la gráfica de una solución de un problema con valores iniciales de segundo orden $d^2y/dx^2 = f(x, y, y'),\ y(2) = y_0;\ y'(2) = y_1$. Utilice la gráfica para estimar los valores de y_0 y y_1.

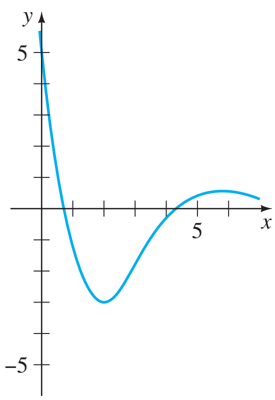


FIGURA 1.R.1 Gráfica para el problema 31.

32. Un tanque que tiene la forma de cilindro circular recto, de 2 pies de radio y 10 pies de altura, está parado sobre su base. Inicialmente, el tanque está lleno de agua y ésta sale por un agujero circular de $\frac{1}{2}$ pulg de radio en el fondo. Determine una ecuación diferencial para la altura h del agua al tiempo t. Desprecie la fricción y contracción del agua en el agujero.

33. El número de ratones de campo en una pastura está dado por la función $200 - 10t$, donde el tiempo t se mide en años. Determine una ecuación diferencial que gobierne una población de búhos que se alimentan de ratones si la razón a la que la población de búhos crece es proporcional a la diferencia entre el número de búhos al tiempo t y el número de ratones al mismo tiempo t.

34. Suponga que $dA/dt = -0.0004332\ A(t)$ representa un modelo matemático para el decaimiento radiactivo del radio-226, donde $A(t)$ es la cantidad de radio (medida en gramos) que queda al tiempo t (medido en años). ¿Cuánto de la muestra de radio queda al tiempo t cuando la muestra está decayendo con una razón de 0.002 gramos por año?