CALCULUS

M. SPIVAK

3ª EDICIÓN (4ª EDICIÓN ORIGINAL)

EDITORIAL REVERTÉ

CALCULUS

CALCULUS

M. SPIVAK

3ª EDICIÓN (4ª EDICIÓN ORIGINAL)

EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · Caracas · México

Registro bibliográfico (ISBD)
SPIVAK, MICHAEL
[Calculus. Español]
Calculus / Michael Spivak ; versión española traducida por José María Oller Sala y Luis Serra Camó. – 3ª ed. – Barcelona : Reverté, 2012, 2014.
XIV, 680 p. : il. ; 25 cm.
Traducción de: Calulus, 4ª ed. – Índice.
DL B.19524-2012. - ISBN 978-84-291-5182-4
1. Análisis matemático – Cálculo. I. Oller Sala, José María, trad. II. Serra Camó, Luis, trad. III. Título.
517

Título de la obra original:
Calculus. Fourth Edition

Edición original en lengua inglesa publicada por:
Publish or Perish, Inc.
PMB 377, 1302 Waugh Drive, Houston, Texas 77019. U.S.A.

Tercera edición en español:

ISBN: 978-84-291-5182-4

REIMPRESIÓN 2014

Versión española traducida por:
José María Oller Sala
Catedrático de Estadística de la Universidad de Barcelona
y
Luis Serra Camó
Catedrático de Genética. Profesor Emérito de la Universidad de Barcelona

Corrección de estilo: Ana Fernández Saiz
Maquetación: Mercedes Aicart Martínez
Diseño de la cubierta: David Kimura + Gabriela Varela

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15. Local B
08029 Barcelona. ESPAÑA
Tel: (34) 93 419 33 36
Fax: (34) 93 419 51 89
reverte@reverte.com
www.reverte.com

Impreso en España - *Printed in Spain*

ISBN: 978-84-291-5182-4
Depósito legal: B.19524-2012
Impreso por Liberdúplex, S. L. U.

1386

Dedicado a la Memoria de Y. P.

Prefacio

Considero a cada hombre como un deudor
a su profesión,
y ya que de ella recibe sustento y provecho
así debe procurar
mediante el estudio
servirle de ornamento y ornato.

FRANCIS BACON

Prefacio a la primera edición

Cada aspecto de este libro se ha visto influido por el deseo de presentar el Cálculo no sólo como un preludio sino como el primer encuentro real con las matemáticas. Como los fundamentos del análisis constituyen el marco en el cual se desarrollan las formas modernas del pensamiento matemático, el Cálculo debería ser el lugar donde esperar, más que evitar, el reforzamiento de la percepción matemática mediante la lógica. Además de desarrollar la intuición del estudiante para la comprensión de los hermosos conceptos del análisis, es igualmente importante convencerle de que la precisión y el rigor no son disuasorios para la intuición ni tampoco constituyen un fin en sí mismos, sino que representan la manera natural de formular y pensar sobre las cuestiones matemáticas.

Este objetivo implica una visión de las matemáticas que, en cierto sentido, se intenta defender a lo largo de todo el libro. Independientemente de lo bien desarrollados que puedan estar determinados temas, los objetivos del libro se alcanzarán sólo si éste tiene éxito en su totalidad. Por esta razón, tendría poco valor enumerar simplemente los temas tratados, o mencionar los aspectos pedagógicos u otras innovaciones. Incluso la simple ojeada que se suele dar a un nuevo texto de cálculo será más informativa que esta extensa relación de las cualidades del libro, y los profesores que tengan un especial interés respecto a aspectos particulares del cálculo, sabrán donde buscar para comprobar si el libro satisface sus exigencias.

Algunas características requieren, sin embargo, un comentario explícito. De los veintinueve capítulos del libro, dos (señalados con un asterisco) son opcionales, y los tres que constituyen la Parte V se han incluido únicamente para aquellos estudiantes interesados en la construcción de los números reales. Además, los apéndices de los Capítulos 3 y 11 contienen también material opcional.

Considero que el orden de los restantes capítulos debe mantenerse inflexible, ya que el objetivo del libro es presentar el cálculo como la evolución de una idea, no como una colección de "temas". Como los conceptos más interesantes del cálculo no aparecen hasta la Parte III, las Partes I y II requerirán probablemente menos tiempo de lo que podría indicar su extensión, aunque el libro cubre un curso completo, los capítulos no están pensados para ser tratados a una tasa uniforme. Un punto natural de división se sitúa entre las Partes II y III, lo que permite llegar a la diferenciación e integración todavía más rápidamente, tratando muy brevemente la Parte II y, si es necesario, volver a considerar algunos aspectos, con más detalle, posteriormente. Esta opción correspondería a la organización tradicional de la mayoría de cursos de cálculo, aunque pienso que únicamente disminuiría el valor del libro para aquellos estudiantes con unos conocimientos muy rudimentarios del cálculo, y para los buenos estudiantes que ya tienen una preparación suficiente.

Los problemas se han diseñado teniendo en cuenta a este tipo de estudiantes. Van desde los ejercicios más sencillos, aunque no excesivamente fáciles, que desarrollan las técnicas básicas y contribuyen a la comprensión de los conceptos, hasta los problemas de dificultad considerable y, espero, de un interés comparable al grado de dificultad. En total se incluyen unos 625 problemas. Los que hacen hincapié en los métodos de cálculo contienen generalmente muchos ejemplos, numerados con cifras romanas minúsculas, mientras que las letras minúsculas se utilizan para indicar las partes que están interrelacionadas con otros problemas. Un sistema de notación con asteriscos y dobles asteriscos indica el grado de dificultad de algunos problemas, aunque existen tantos criterios para medir la dificultad, y se dan tantas indicaciones para la resolución de los problemas más difíciles, que esta guía no es del todo fiable. Muchos problemas son tan difíciles, sobre todo si no se siguen las indicaciones, que incluso los mejores estudiantes deberían intentar resolver sólo aquellos que les resulten de especial interés; en cuanto a los menos difíciles, no debería ser ningún problema seleccionar una muestra representativa para mantener ocupada, pero no frustrada, a una clase con buenos estudiantes. En la sección correspondiente se dan las soluciones a la mitad, aproximadamente, de los ejemplos extraídos de una muestra de problemas, lo cual debería constituir un test de habilidad técnica. Se ha editado a parte un libro con las soluciones de las otras partes de estos problemas y también de los restantes problemas del libro. Finalmente, se da una lista de lecturas aconsejadas, a la cual hacen referencia a menudo los problemas, y un glosario de símbolos.

Aprovecho la oportunidad para mencionar a las muchas personas a quienes debo mi agradecimiento. Jane Bjorkgren tuvo que realizar auténticos prodigios para mecanografiar la producción irregular de mi manuscrito. Richard Serkey colaboró en la recopilación del material con las notas históricas incluidas en los problemas, y Richard Weiss elaboró las respuestas incluidas al final del libro. Agradezco especialmente a mis amigos Michael Freeman, Jay Goldman,Anthony Phillips y Robert Wells la atención con la que leyeron una versión preliminar del libro, así como sus críticas implacables. Ni que decir tiene que no son responsables de las deficiencias que todavía puedan haber, sobre todo porque yo mismo rechacé las sugerencias que podrían haber logrado que el libro pudiese parecer más adecuado a una audiencia más amplia de estudiantes. Debo expresar mi admiración a los editores y al equipo de W. A. Benjamin, Inc., que siempre se han mostrado dispuestos a incrementar el atractivo del libro, teniendo en cuenta, al mismo tiempo, la audiencia para la cual estaba destinado.

Las insuficiencias que siempre contienen las ediciones preliminares han sido valerosamente soportadas por un potente grupo de estudiantes universitarios de primer año, matriculados en el "honors mathematics course" de la Universidad de Brandeis, durante el curso académico 1965-1966. Aproximadamente la mitad del curso se dedicó al álgebra y la topología, y la otra mitad al cálculo, utilizando como texto la edición preliminar del libro.En tales circunstancias es casi obligado indicar que la versión preliminar fue un éxito gratificador. De hecho, el éxito está casi asegurado ya que –al fin y al cabo, es poco probable que la clase se subleve y proteste públicamente– pero pienso que los estudiantes tienen el mérito de haber asimilado con rigurosidad una gran cantidad de matemáticas. Me daría por satisfecho si otros estudiantes utilizaran el libro con este fin, y con tanto entusiasmo.

Waltham, Massachusetts MICHAEL SPIVAK
Febrero 1967

Prefacio a la segunda edición

A menudo me han sugerido que el título de este libro debería ser algo parecido a "Una Introducción al Análisis", ya que se utiliza normalmente en cursos en los que los estudiantes ya han aprendido los aspectos mecánicos del cálculo, estos cursos son estándar en Europa y van siendo cada vez más frecuentes en los Estados Unidos. Trece años después, me parece que es demasiado tarde para cambiar el título, aunque si que he considerado necesario introducir algunos cambios, aparte de corregir numerosos errores de imprenta y otras deficiencias. Ahora existen apéndices separados para muchos temas que antes apenas eran mencionados: coordenadas polares, continuidad uniforme, curvas parametrizadas, sumas de Riemann y la utilización de integrales para el cálculo de longitudes, volúmenes y áreas de superficies. Unos pocos temas, como el manejo de series de potencias, se discuten en el texto con mayor profundidad y se incluyen, además, más problemas relativos a los mismos, mientras que otros temas, como el método de Newton y la regla del trapecio y la regla de Simpson se han desarrollado en los problemas. En total hay unos 160 problemas nuevos, muchos de ellos de dificultad intermedia entre la de unos pocos problemas de rutina al comienzo de cada capítulo y la de los más difíciles que aparecen más tarde.

La mayor parte de los problemas nuevos son obra de Ted Shifrin. Frederick Gordon detectó algunos errores importantes en los problemas originales y aportó correcciones no triviales, así como la elegante demostración del Teorema 12-2, que incluye dos Lemas y ocupa dos páginas en la primera edición. Joseph Lipman también hizo algunos comentarios referentes a esta demostración, y propuso la utilización de la misma estrategia para la demostración del último teorema en el Apéndice del Capítulo 11, el cual no se demostraba en la primera edición. Roy O. Davies sugirió la estrategia para la resolución del Problema 11-66, que anteriormente sólo era demostrado en el Problema 20-8 [21-8 en la tercera edición], y Marina Ratner, la cual propuso varios problemas interesantes, en particular los relativos a la continuidad uniforme y las series infinitas. A todos ellos va dirigido mi agradecimiento, con la esperanza de que su contribución quede reflejada adecuadamente después del proceso de elaboración de la nueva edición.

MICHAEL SPIVAK

Prefacio a la tercera edición

El cambio más significativo en esta tercera edición ha sido la inclusión de un nuevo Capítulo 17 (señalado mediante un asterisco) sobre el movimiento planetario, en el cual se utiliza el cálculo para la resolución de un problema físico fundamental.

Con este objetivo, el Apéndice del Capítulo 4 se ha sustituido por tres Apéndices: los dos primeros cubren los temas relativos a vectores y secciones cónicas, mientras que las coordenadas polares no se discuten hasta el tercer Apéndice, en el cual se tratan también las ecuaciones en coordenadas polares de las secciones cónicas. Además, el Apéndice del Capítulo 12 se ha extendido para tratar las operaciones con vectores de las curvas con valores vectoriales.

Otra modificación importante ha consistido en cambiar el orden del material previamente existente: "La universalidad de la integral", que previamente se trataba en un segundo Apéndice del Capítulo 13, se considera ahora en un Apéndice del Capítulo sobre "Integración en términos elementales" (antiguo Capítulo 18 y actual Capítulo 19); además, aquellos problemas del capítulo antiguo que utilizaban el material de este Apéndice, aparecen ahora incluidos en los problemas del Apéndice reubicado.

Las correcciones y la eliminación de problemas incorrectos ha obligado a hacer otros pequeños cambios y a reordenar el apartado correspondiente a los Problemas.

Quedé consternado al observar que, después de un periodo de 13 años transcurridos desde la primera y la segunda edición del libro, habían transcurrido otros 14 años antes de la aparición de esta tercera edición. Durante este tiempo he ido acumulando una lista considerable de correcciones, pero no ha ocurrido lo mismo con las comunicaciones originales y, por tanto, no puedo expresar mi agradecimiento a las personas implicadas (las cuales, a estas alturas, probablemente ya no estén interesadas). Únicamente he podido hacer unos pocos cambios en el apartado correspondiente a las Lecturas aconsejadas, el cual, después de todos estos años, requiera probablemente una revisión completa; ésta tendrá que esperar hasta la próxima edición, que espero realizar en un periodo de tiempo más breve.

MICHAEL SPIVAK

Prefacio a la cuarta edición

¡Promesas, promesas! En el prefacio de la tercera edición comentaba que transcurrieron 13 años entre la primera y la segunda edición, y que habían transcurrido otros 14 años antes de la aparición de la tercera, expresando mi deseo que la siguiente edición no tardaría tanto tiempo en aparecer. Bien, al cabo de otros 14 años he aquí la cuarta, y probablemente la útima edición.

Aunque se han introducido algunos pequeños cambios, especialmente en los Capítulos 5 y 20, esta edición difiere de las anteriores sobre todo por la introducción de problemas adicionales, una puesta al día completa de las Lecturas aconsejadas y la corrección de numerosos errores. Éstos me han sido advertidos, durante todos estos años, por Nils von Barth, Philip Loewen, Fernando Mejias y Lance Miller, entre otros, quienes me facilitaron una larga lista, sobre todo del libro de soluciones; y Michael Maltenfort, quien me facilitó una lista increíblemente larga de erratas, errores y sugerencias.

Sobre todo, sin embargo, estoy en deuda con mi amigo Ted Shifrin, quien ha estado utilizando el libro como texto en la Universidad de Georgia durante todos estos años, y me ha ido insistiendo y me ha ayudado a que, finalmente, hiciera esta necesaria revisión. Debo también agradecer a los estudiantes de su curso, durante este ultimo año académico, quienes han actuado como "conejillos de Indias" para la nueva edición, lo que ha determinado, en particular, la demostración del Lema del Sol Naciente, en el Problema 8-20, mucho más sencilla que la demostración original de Reisz, o incluso que la demostración en [38] de las Lecturas aconsejadas,la cual ha sido actualizada considerablemente, gracias de nuevo a la ayuda facilitada por el mismo Ted.

MICHAEL SPIVAK

Índice

Prólogo

Ser consciente
de la propia ignorancia es un gran paso
hacia el saber.

BENJAMÍN DISRAELI

Propiedades básicas de los números

1

El título de este capítulo expresa en pocas palabras el conocimiento matemático requerido para leer este libro. De hecho, este corto capítulo no es más que una explicación de lo que se entiende por "propiedades básicas de los números", todas ellas –adición y multiplicación, sustracción y división, soluciones de ecuaciones y desigualdades, factorización y otros procesos algebraicos– familiares ya para el lector. Sin embargo, este capítulo no es una clase de repaso. A pesar de la familiaridad del tema, el estudio que vamos a emprender parecerá, probablemente, muy novedoso; no se pretende presentar una revisión amplia de material tradicional, sino condensar este conocimiento en unas pocas propiedades de los números, simples y obvias. Algunas pueden parecer incluso demasiado obvias para ser dignas de mención, pero un número sorprendente de hechos diversos e importantes resultan ser consecuencias de las propiedades que vamos a destacar.

De las doce propiedades que estudiaremos en este capítulo, las nueve primeras están relacionadas con las operaciones fundamentales de "adición" y "multiplicación". Por el momento vamos a considerar solamente la adición; esta operación se efectúa con un par de números: la suma $a+b$ existe para dos números cualesquiera a y b (los cuales, evidentemente, pueden ser el mismo número). Es razonable considerar la adición como una operación que puede realizarse con varios números a la vez, y tomar la suma $a_1+\cdots+a_n$ de n números $a_1,\ldots,a_n$ como un concepto básico. Sin embargo, es más conveniente considerar sólo la adición entre pares de números y en términos de ésta definir las demás sumas. En el caso de las sumas de tres números a, b, y c, esto puede hacerse de dos maneras diferentes. Primero pueden sumarse b y c, obteniendo $b+c$, y luego añadir a a este número, obteniendo $a+(b+c)$; o bien pueden sumarse primero a y b, y luego añadir la suma $a+b$ a c, obteniendo $(a+b)+c$. Evidentemente, las dos sumas compuestas son iguales, y este hecho es precisamente la primera propiedad de nuestra lista:

(P1) Si a, b y c son números cualesquiera, entonces

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

Esta propiedad hace innecesaria una definición por separado de la suma de tres números; convenimos simplemente en que $a+b+c$ representa al número $a+(b+c)=(a+b)+c$. La suma de cuatro números requiere consideraciones similares aunque ligeramente más complicadas. El símbolo $a+b+c+d$ se define como

$$\begin{array}{rll} & (1) & ((a+b)+c)+d, \\ \text{o} & (2) & (a+(b+c))+d, \\ \text{o} & (3) & a+((b+c)+d), \\ \text{o} & (4) & a+(b+(c+d)), \\ \text{o} & (5) & (a+b)+(c+d). \end{array}$$

Esta definición es única ya que todos estos números son iguales. Afortunadamente no es necesario incluir este hecho en la lista ya que se deduce de la propiedad P1. Por ejemplo, sabemos por P1 que

$$(a+b)+c=a+(b+c),$$

deduciéndose inmediatamente que (1) y (2) son iguales. La igualdad de (2) y (3) es una consecuencia directa de P1, aunque esto puede no ser aparente a primera vista (debe considerarse que $b+c$ desempeña el papel de b en P1, y d el papel de c). Las igualdades $(3)=(4)=(5)$ son también sencillas de demostrar.

Parece obvio que recurriendo a P1 sea suficiente para demostrar la igualdad de las 14 maneras posibles de sumar cinco números, pero no está tan claro como se puede plantear una demostración de que esto es así, sin dar la lista de estas 14 sumas. Este método es factible, pero dejaría pronto de serlo si considerásemos colecciones de seis, siete o más números; sería totalmente inadecuado para demostrar la igualdad de todas las sumas posibles de una colección arbitraria de números $a_1,\dots,a_n$. Este hecho puede admitirse como demostrado, pero para aquellos que se interesen por la demostración (y vale la pena interesarse alguna vez), en el Problema 24 se indica un método de demostración razonable. En lo sucesivo utilizaremos tácitamente los resultados de este problema y escribiremos las sumas $a_1+\cdots+a_n$ despreocupándonos de la disposición de los paréntesis.

El número 0 tiene una propiedad tan importante que la enunciamos a continuación:

(P2) Si a es cualquier número, entonces

$$a+0=0+a=a.$$

El 0 también desempeña un papel importante en la tercera propiedad de nuestra lista:

(P3) Para todo número a, existe un número $-a$ tal que

$$a+(-a)=(-a)+a=0.$$

La propiedad P2 debería representar una característica distintiva del número 0, y anima saber que ya estamos en condiciones de demostrarlo. En efecto, si un número x satisface

$$a+x=a$$

para cierto número a, entonces $x=0$ (y por tanto esta ecuación también se cumple para todos los números a). La demostración de este hecho requiere únicamente restar a de ambos lados de la ecuación, en otras palabras, sumar $-a$ a ambos lados; tal y como se describe en la siguiente demostración detallada, deben utilizarse las tres propiedades P1–P3 para justificar esta operación.

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Si} & a+x & = & a, \\
\text{entonces} & (-a)+(a+x) & = & (-a)+a=0; \\
\text{de donde} & ((-a)+a)+x & = & 0; \\
\text{de donde} & 0+x & = & 0; \\
\text{y por tanto} & x & = & 0.
\end{array}$$

Como ya hemos insinuado, es conveniente considerar la "resta" como una operación derivada de la suma: consideramos $a-b$ como una abreviación de $a+(-b)$. Así es posible hallar la solución de ciertas ecuaciones sencillas mediante una serie de pasos (cada uno justificado por P1, P2 o P3) semejantes a los que acabamos de indicar para la ecuación $a+x=a$. Por ejemplo:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Si} & x+3 & = & 5, \\
\text{entonces} & (x+3)+(-3) & = & 5+(-3); \\
\text{de donde} & x+(3+(-3)) & = & 5-3=2; \\
\text{de donde} & x+0 & = & 2; \\
\text{y por tanto} & x & = & 2.
\end{array}$$

Naturalmente, estas soluciones tan elaboradas son de interés sólo hasta que el lector se convence de que siempre pueden utilizarse. En la práctica es una pérdida de tiempo resolver una ecuación indicando de manera tan explícita la relevancia de las propiedades P1, P2 y P3 (o de las restantes propiedades que vamos a añadir a la lista).

Sólo nos queda por añadir a la lista otra propiedad de la adición. Al considerar las sumas de tres números a, b y c, sólo mencionamos dos sumas: $(a+b)+c$ y $a+(b+c)$. En realidad se obtienen otras disposiciones distintas si se cambia el orden de a, b y c. El hecho de que todas estas sumas sean iguales depende de:

(P4) Si a y b son números cualesquiera, entonces

$$a+b=b+a.$$

El enunciado de P4 trata de enfatizar que, aunque la operación de adición de pares de números se podría concebir que depende del orden de los dos números, en realidad esto no es así. Conviene recordar que no todas las operaciones se comportan de esta manera. Por ejemplo, la resta no posee esta propiedad: generalmente $a-b \neq b-a$. Podríamos preguntarnos cuando $a-b$ es distinto de $b-a$, y es interesante descubrir lo poco que podemos hacer si para justificar nuestras manipulaciones nos queremos basar solamente en las propiedades P1–P4. El álgebra más elemental demuestra que $a-b=b-a$ sólo cuando $a=b$. Sin embargo, es imposible deducir este hecho a partir de las propiedades P1–P4; es instructivo examinar el álgebra elemental cuidadosamente y determinar cuáles son el o los pasos que no pueden justificarse mediante P1–P4. De hecho, podremos justificar todos los pasos en detalle cuando añadamos unas pocas propiedades más a nuestra lista. Por raro que parezca, la propiedad crucial se refiere a la multiplicación.

Afortunadamente, las propiedades básicas de la multiplicación son tan similares a las de la adición que pocos comentarios será necesario añadir; tanto el significado como las consecuencias deberían ser claros para el lector. (Al igual que en álgebra elemental, el "producto" de a y b se representará mediante $a \cdot b$, o simplemente mediante ab.)

(P5) Si a, b y c son números cualesquiera, entonces

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

(P6) Si a es cualquier número, entonces

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

Además, $1 \neq 0$.

(Puede parecer extraño que añadamos a la lista la afirmación que $1 \neq 0$, pero debemos hacerlo ya que no puede demostrarse a partir de las otras propiedades de la lista; todas ellas se cumplirían si sólo existiese un número, el 0.)

(P7) Para todo número $a \neq 0$, existe un número a^{-1} tal que

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

(P8) Si a y b son números cualesquiera, entonces

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Un detalle que merece destacarse es la aparición de la condición $a \neq 0$ en P7. Esta condición es absolutamente necesaria; como $0 \cdot b = 0$ para todo número b, no existe *ningún* número 0^{-1} que verifique $0 \cdot 0^{-1} = 1$. Esta restricción tiene una consecuencia importante para la división. Al igual que la resta se definió en términos de la adición, así también la "división" se define en términos de la multiplicación: el símbolo a/b significa $a \cdot b^{-1}$. Como 0^{-1} no tiene sentido, tampoco lo tiene $a/0$; la división por 0 *siempre* es indefinida.

La propiedad P7 tiene dos consecuencias importantes. Si $a \cdot b = a \cdot c$, no se deduce necesariamente que $b = c$; ya que si $a = 0$, entonces ambos $a \cdot b$ y $a \cdot c$ son 0, independientemente de los valores que tengan b y c . Sin embargo, si $a \neq 0$, entonces $b = c$; esto puede deducirse a partir de P7 de la manera siguiente:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Si} & a \cdot b &=& a \cdot c \quad \text{y} \quad a \neq 0, \\
\text{entonces} & a^{-1} \cdot (a \cdot b) &=& a^{-1} \cdot (a \cdot c); \\
\text{de donde} & (a^{-1} \cdot a) \cdot b &=& (a^{-1} \cdot a) \cdot c; \\
\text{por tanto} & 1 \cdot b &=& 1 \cdot c; \\
\text{o sea} & b &=& c.
\end{array}$$

También es una consecuencia de P7 que si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$. De hecho,

$$\begin{array}{lrcl}
\text{si} & a \cdot b &=& 0 \quad \text{y} \quad a \neq 0, \\
\text{entonces} & a^{-1} \cdot (a \cdot b) &=& 0; \\
\text{de donde} & (a^{-1} \cdot a) \cdot b &=& 0; \\
\text{de donde} & 1 \cdot b &=& 0; \\
\text{es decir} & b &=& 0.
\end{array}$$

(Puede ocurrir que se cumpla a la vez que $a = 0$ y $b = 0$; esta posibilidad no se excluye cuando afirmamos que "$a = 0$ ó $b = 0$"; en matemáticas la conjunción "o" se utiliza siempre en sentido no exclusivo de "uno o el otro, o ambos".)

Esta última consecuencia de P7 se utiliza constantemente en la resolución de ecuaciones. Supongamos, por ejemplo, que un número x satisface

$$(x-1)(x-2)=0.$$

Entonces se deduce que $x-1=0$ ó $x-2=0$; por tanto $x=1$ ó $x=2$.

Basándose en las propiedades que hasta ahora hemos incluido en la lista, todavía se pueden demostrar muy pocas cosas. Esta situación, sin embargo, va a cambiar radicalmente con la inclusión de la siguiente propiedad, que combina las operaciones de adición y multiplicación.

(P9) Si a, b y c son números cualesquiera, entonces

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c.$$

(Observemos que la ecuación $(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a$ también se cumple según P8.) Como un ejemplo de la utilidad de P9 vamos ahora a determinar cuando $a-b=b-a$:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Si} & a-b &=& b-a,\\
\text{entonces} & (a-b)+b &=& (b-a)+b=b+(b-a);\\
\text{de donde} & a &=& b+b-a;\\
\text{de donde} & a+a &=& (b+b-a)+a=b+b.\\
\text{Por consiguiente} & a\cdot(1+1) &=& b\cdot(1+1),\\
\text{y por tanto} & a &=& b.
\end{array}$$

Una segunda aplicación de P9 permite justificar la afirmación $a\cdot 0=0$ que ya hemos hecho e incluso utilizado en la demostración de la página 6, (¿puede el lector encontrar dónde?). Este hecho no se ha incluido en la lista como una de las propiedades básicas, a pesar de no haberlo demostrado la primera vez que se mencionó. No era posible hacerlo tan sólo con las propiedades P1–P8 ya que el número 0 aparece solamente en P2 y P3, que se refieren a la adición, mientras que la afirmación en cuestión se refiere a la multiplicación. Con P9 la demostración es sencilla,aunque quizás no obvia: tenemos

$$\begin{aligned}
a\cdot 0+a\cdot 0 &= a\cdot(0+0)\\
&= a\cdot 0;
\end{aligned}$$

como ya hemos observado, esto implica inmediatamente (sumando $-(a\cdot 0)$ a ambos lados) que $a\cdot 0=0$.

Toda una serie de consecuencias adicionales de P9 puede ayudar a explicar la regla algo misteriosa de que el producto de dos números negativos es un número positivo. Para empezar estableceremos la afirmación más fácilmente aceptable de que $(-a)\cdot b=$ $=-(a\cdot b)$. Para demostrarlo, observemos que

$$\begin{aligned}
(-a)\cdot b+a\cdot b &= [(-a)+a]\cdot b\\
&= 0\cdot b\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Se deduce inmediatamente(sumando $-(a\cdot b)$ a ambos lados) que $(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$. Ahora observemos que

$$\begin{aligned}(-a)\cdot(-b)+[-(a\cdot b)] &= (-a)\cdot(-b)+(-a)\cdot b\\ &= (-a)\cdot[(-b)+b]\\ &= (-a)\cdot 0\\ &= 0.\end{aligned}$$

Por consiguiente, sumando $(a\cdot b)$ a ambos lados, obtenemos

$$(-a)\cdot(-b)=a\cdot b.$$

El hecho de que el producto de dos números negativos sea un número positivo es pues una consecuencia de P1–P9. En otras palabras, *si P1–P9 son ciertas, se verifica la regla del producto de dos números negativos.*

Las consecuencias de P9 que hasta ahora hemos considerado, aunque interesantes e importantes, no indican realmente el significado de P9; de hecho, podríamos haber enunciado cada una de estas propiedades separadamente. En realidad, P9 justifica casi todas las manipulaciones algebraicas. Por ejemplo, aunque ya hemos demostrado cómo resolver la ecuación

$$(x-1)(x-2)=0,$$

difícilmente la tendremos que resolver de esta forma. Es más probable que la tengamos que resolver en la forma

$$x^2-3x+2=0.$$

La "factorización" $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ es realmente un triple uso de P9:

$$\begin{aligned}(x-1)\cdot(x-2) &= x\cdot(x-2)+(-1)\cdot(x-2)\\ &= x\cdot x+x\cdot(-2)+(-1)\cdot x+(-1)\cdot(-2)\\ &= x^2+x[(-2)+(-1)]+2\\ &= x^2-3x+2.\end{aligned}$$

Una ilustración final de la importancia de P9 es el hecho de que la propiedad se utiliza realmente cada vez que se multiplica con numeración arábiga. Por ejemplo, el cálculo

$$\begin{array}{r} 13\\ \times 24\\ \hline 52\\ 26\\ \hline 312 \end{array}$$

es una disposición concisa de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}13\cdot 24 &= 13\cdot(2\cdot 10+4)\\ &= 13\cdot 2\cdot 10+13\cdot 4\\ &= 26\cdot 10+52.\end{aligned}$$

(Observemos que desplazar 26 hacia la izquierda en el cálculo anterior es equivalente a escribir $26\cdot 10$.) La multiplicación $13\cdot 4=52$ también utiliza P9:

$$\begin{aligned}
13\cdot 4 &= (1\cdot 10+3)\cdot 4\\
&= 1\cdot 10\cdot 4+3\cdot 4\\
&= 4\cdot 10+12\\
&= 4\cdot 10+1\cdot 10+2\\
&= (4+1)\cdot 10+2\\
&= 5\cdot 10+2\\
&= 52.
\end{aligned}$$

Las propiedades P1–P9 poseen nombres descriptivos que no es necesario recordar, aunque a menudo son útiles como referencia. Daremos ahora una lista de todas las propiedades P1–P9 junto con los nombres mediante los que se designan normalmente.

(P1)	(Ley asociativa de la adición)	$a+(b+c)=(a+b)+c$.
(P2)	(Existencia de un elemento neutro para la adición)	$a+0=0+a=a$.
(P3)	(Existencia de inversos aditivos)	$a+(-a)=(-a)+a=0$.
(P4)	(Ley conmutativa de la adición)	$a+b=b+a$.
(P5)	(Ley asociativa de la multiplicación)	$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$.
(P6)	(Existencia de un elemento neutro para la multiplicación)	$a\cdot 1=1\cdot a=a;\quad 1\neq 0$.
(P7)	(Existencia de inversos multiplicativos)	$a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1$, para $a\neq 0$.
(P8)	(Ley conmutativa de la multiplicación)	$a\cdot b=b\cdot a$.
(P9)	(Ley distributiva)	$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.

Las tres propiedades básicas de los números que falta todavía añadir a la lista se refieren a las desigualdades. Aunque las desigualdades se presentan raramente en matemática elemental, tienen un papel relevante en el cálculo. Las dos nociones de desigualdad, $a<b$ (a es menor que b) y $a>b$ (a es mayor que b), estan íntimamente relacionadas: $a<b$ significa lo mismo que $b>a$ (así $1<3$ y $3>1$ son, simplemente, dos maneras de escribir la misma afirmación). Los números a que satisfacen $a>0$ se denominan **positivos**, mientras que aquellos números a que satisfacen $a<0$ se denominan **negativos**. De la misma manera que la positividad puede definirse, por tanto, en términos de $<$, es posible también invertir el procedimiento: la desigualdad $a<b$ se puede definir como equivalente a que $b-a$ es positivo. De hecho, es conveniente considerar al conjunto de todos los números positivos, representado mediante P, como un concepto básico, y enunciar todas las propiedades en términos de P:

(P10) (Ley de tricotomía) Para todo número a, se verifica una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

(i) $a=0$,

(ii) a pertenece a P,

(iii) $-a$ pertenece a P.

(P11) (P es cerrado respecto a la suma) Si a y b pertenecen a P, entonces $a+b$ pertenece a P.

(P12) (P es cerrado respecto al producto) Si a y b pertenecen a P, entonces $a \cdot b$ pertenece a P.

Estas tres propiedades deben complementarse con las siguientes definiciones:

$$\begin{array}{lll} a > b & \text{si} & a - b \text{ pertenece a } P; \\ a < b & \text{si} & b > a; \\ a \geq b & \text{si} & a > b \text{ o } a = b; \\ a \leq b & \text{si} & a < b \text{ o } a = b.^{*} \end{array}$$

Observemos, en particular, que $a > 0$ si y sólo si a pertenece a P.

Todas las propiedades de las desigualdades, por elementales que parezcan, son consecuencia de P10–P12. Por ejemplo, si a y b son dos números cualesquiera, entonces se verifica una sola de las siguientes propiedades:

(i) $a - b = 0$,

(ii) $a - b$ pertenece a P,

(iii) $-(a-b) = b - a$ pertenece a P.

Utilizando las definiciones anteriores, se deduce que una sola de las siguientes afirmaciones es cierta:

(i) $a = b$,

(ii) $a > b$,

(iii) $b > a$.

A partir de las siguientes manipulaciones podemos deducir un hecho algo más interesante. Si $a < b$, y por tanto $b - a$ pertenece a P, entonces $(b+c)-(a+c)$ pertenece a P; por tanto, si $a < b$, entonces $a + c < b + c$. Análogamente, supongamos que $a < b$ y $b < c$. Entonces

$$\begin{array}{ll} & b - a \text{ pertenece a } P, \\ \text{y} & c - b \text{ pertenece a } P, \\ \text{por lo tanto} & c - a = (c-b) + (b-a) \text{ pertenece a } P. \end{array}$$

---

*Los símbolos $\geq$ y $\leq$ poseen una característica que encierra alguna dificultad. Las afirmaciones

$$\begin{array}{l} 1+1 \leq 3 \\ 1+1 \leq 2 \end{array}$$

son ambas ciertas, aunque sabemos que $\leq$ podría reemplazarse por $<$ en la primera, y por $=$ en la segunda. Este tipo de dificultad suele aparecer cuando $\leq$ se utiliza con números específicos; la utilidad del símbolo se pone de manifiesto en declaraciones como Teorema 1, en este caso la igualdad se verifica para algunos valores de a y b, mientras que para otros valores se verifica la desigualdad.

Esto demuestra que si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$. (Las dos desigualdades $a < b$ y $b < c$ se escriben generalmente de manera abreviada en la forma $a < b < c$, que contiene en su estructura a la tercera desigualdad $a < c$.)

La siguiente afirmación no es tan obvia: si $a < 0$ y $b < 0$ entonces $ab > 0$. La única dificultad que plantea la demostración de este hecho es la interpretación correcta de las definiciones. El símbolo $a < 0$ significa, por definición, que $0 > a$, lo cual quiere decir que $0 - a = -a$ pertenece a P. Análogamente, $-b$ pertenece a P, y por consiguiente, según P12, $(-a)(-b) = ab$ pertenece a P. Así, $ab > 0$.

El hecho de que $ab > 0$ si $a > 0$, $b > 0$ y también si $a < 0$, $b < 0$, tiene una consecuencia especial: $a^2 > 0$ si $a \neq 0$. O sea, los cuadrados de los números distintos de cero son siempre positivos, y en particular hemos demostrado un resultado que podría haber parecido suficientemente elemental como para incluirlo en nuestra lista de propiedades: $1 > 0$ (ya que $1 = 1^2$).

La propiedad $-a > 0$ si $a < 0$ es la base de un concepto que va a desempeñar un papel muy importante a lo largo del libro. Para cualquier número a, se define su **valor absoluto** $|a|$ de a mediante:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a \leq 0. \end{cases}$$

Observemos que $|a|$ es siempre positivo, excepto cuando $a = 0$. Por ejemplo, tenemos $|-3| = 3$, $|7| = 7$, $|1+\sqrt{2}-\sqrt{3}| = 1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$, y $|1+\sqrt{2}-\sqrt{10}| = \sqrt{10}-\sqrt{2}-1$. En general, la resolución más sencilla de cualquier problema que incluye valores absolutos requiere el tratamiento de diversos casos por separado, ya que los valores absolutos se definen, para empezar, por casos. Este procedimiento puede utilizarse para demostrar el siguiente hecho importante acerca de los valores absolutos.

Teorema 1. *Para todos los números a y b, se verifica*

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Demostración. Consideraremos 4 casos:

$$\begin{array}{llll} (1) & a \geq 0, & b \geq 0; \\ (2) & a \geq 0, & b \leq 0; \\ (3) & a \leq 0, & b \geq 0; \\ (4) & a \leq 0, & b \leq 0. \end{array}$$

En el caso (1) se cumple también que $a+b \geq 0$, y el teorema es obvio; de hecho,

$$|a+b| = a+b = |a| + |b|,$$

de manera que, en este caso, se verifica la igualdad.

En el caso (4) tenemos que $a+b \leq 0$, y nuevamente se verifica la igualdad:

$$|a+b| = -(a+b) = -a+(-b) = |a| + |b|.$$

En el caso (2), cuando $a \geq 0$ y $b \leq 0$, debemos probar que

$$|a+b| \leq a-b.$$

Este caso puede, por tanto, ser dividido en dos subcasos. Si $a+b \geq 0$, entonces debemos demostrar que

$$\begin{aligned} & a+b \leq a-b, \\ \text{es decir,} \quad & b \leq -b, \end{aligned}$$

lo cual es cierto ya que $b \leq 0$ y por tanto $-b \geq 0$. Por el contrario, si $a+b \leq 0$, debemos demostrar que

$$\begin{aligned} & -a-b \leq a-b, \\ \text{es decir,} \quad & -a \leq a, \end{aligned}$$

lo cual es cierto ya que $a \geq 0$ y por tanto $-a \leq 0$.

Finalmente, observemos que (3) puede demostrarse sin ningún esfuerzo adicional, aplicando el caso (2) con a y b intercambiados. ■

Aunque este método de tratar los valores absolutos (considerando separadamente los distintos casos) es algunas veces la única opción posible, a menudo pueden utilizarse métodos más sencillos. De hecho, es posible dar una demostración más corta del Teorema 1; esta demostración se basa en la observación de que

$$|a| = \sqrt{a^2}.$$

(Aquí, y a lo largo de todo el libro, $\sqrt{x}$ indica la raíz cuadrada *positiva* de x; este símbolo está definido sólo cuando $x \geq 0$.) Podemos observar ahora que

$$\begin{aligned} (|a+b|)^2 = (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &\leq a^2 + 2|a| \cdot |b| + b^2 \\ &= |a|^2 + 2|a| \cdot |b| + |b|^2 \\ &= (|a| + |b|)^2. \end{aligned}$$

De aquí deducimos que $|a+b| \leq |a| + |b|$ ya que $x^2 < y^2$ implica que $x < y$, si x e y son ambos no negativos; la demostración de *este* hecho se deja para el lector (Problema 5).

Podemos hacer una observación final relativa al teorema que acabamos de demostrar: un examen más detallado de las demostraciones muestra que

$$|a+b| = |a| + |b|$$

si a y b tienen el mismo signo (es decir, son ambos positivos o ambos negativos), o si uno de ellos es 0, mientras que

$$|a+b| < |a| + |b|$$

si a y b tienen signos opuestos.

Concluiremos este capítulo con un punto sutil, que hasta ahora no hemos considerado, cuya inclusión es necesaria en cualquier análisis en profundidad de las propiedades de los números. Después de enunciar la propiedad P9, demostramos que $a - b = b - a$

implica que $a = b$. La prueba comenzaba estableciendo que

$$a \cdot (1+1) = b \cdot (1+1),$$

de lo cual deducíamos que $a = b$. Este resultado se obtiene a partir de la ecuación $a \cdot (1+1) = b \cdot (1+1)$ dividiendo ambos lados por $1+1$. La división por 0 debe evitarse escrupulosamente, y por tanto hay que admitir que la validez del argumento depende del hecho que $1+1 \neq 0$. ¡El Problema 25 se ha incluido para convencer al lector de que este hecho no puede deducirse sólo a partir de las propiedades P1–P9! Sin embargo, una vez que se dispone de las propiedades P10, P11 y P12, la demostración es muy sencilla: ya hemos visto que $1 > 0$; de lo cual se deduce que $1+1 > 0$, y en particular que $1+1 \neq 0$.

Quizás esta última demostración no haya hecho más que reforzar la sensación de que es absurdo preocuparse por demostrar hechos tan obvios, pero la valoración honesta de nuestra situación actual muestra que vale la pena tomar en serio estos detalles. En este capítulo hemos supuesto que los números son objetos familiares, y que las propiedades P1–P12 son meras declaraciones explícitas de propiedades obvias, bien conocidas de los números. Sin embargo, sería difícil justificar esta suposición. Aunque se aprende a "trabajar" con números en la escuela, lo que realmente *son* los números continua siendo una idea muy vaga. Una gran parte de este libro está dedicada a esclarecer el concepto de número, y hacia el final del mismo ya habremos tenido la ocasión de familiarizarnos suficientemente con dicho concepto. Por tanto, debemos admitir honestamente que todavía no entendemos suficientemente a los números; lo que si podemos afirmar es que, sea cual sea la forma en que se definan finalmente, cumplirán desde luego las propiedades P1–P12.

Gran parte de este capítulo ha consistido en tratar de presentar pruebas convincentes de que P1–P12 son realmente propiedades básicas que hemos de admitir para deducir otras propiedades corrientes de los números. Se han incluido algunos problemas (en los que se deducen otras propiedades de los números a partir de P1–P12) para profundizar en este aspecto. Una cuestión esencial, sin embargo, es si P1–P12 realmente explican *todas* las propiedades de los números. De hecho, pronto veremos que *no*. En el siguiente capítulo se pondrán de manifiesto claramente las insuficiencias de las propiedades P1–P12, aunque no es tan fácil descubrir la manera correcta de corregirlas. La propiedad adicional, esencial y básica de los números que estamos buscando, es profunda y sutil, todo lo contrario de P1–P12. El descubrimiento de esta propiedad esencial va a requerir todo el trabajo de la Parte II de este libro. En el resto de la Parte I comenzaremos a ver por qué es necesaria alguna propiedad adicional; para investigar este aspecto tendremos que considerar con más detalle lo que entendemos por "números".

Problemas

1. Demuestre lo siguiente:
   (i) Si $ax = a$ para algún número $a \neq 0$, entonces $x = 1$.
   (ii) $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$.
   (iii) Si $x^2 = y^2$, entonces $x = y$ o $x = -y$.

(iv) $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$.

(v) $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})$.

(vi) $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$. (Existe una manera particularmente sencilla de hacerlo utilizando (4), que muestra además como encontrar una factorización de $x^n + y^n$ cuando n es impar.)

2. ¿Dónde está el error en la siguiente "demostración"? Sea $x = y$. Entonces

$$\begin{aligned} x^2 &= xy, \\ x^2 - y^2 &= xy - y^2, \\ (x+y)(x-y) &= y(x-y), \\ x+y &= y, \\ 2y &= y, \\ 2 &= 1. \end{aligned}$$

3. Demuestre lo siguiente:

(i) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ac}{bc}$, si $b, c \neq 0$.

(ii) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$, si $b, d \neq 0$.

(iii) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, si $a, b \neq 0$.

(Para resolverlo hay que recordar la propiedad que define a $(ab)^{-1}$.)

(iv) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{db}$, si $b, d \neq 0$.

(v) $\dfrac{a}{b} \Big/ \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bc}$, si $b, c, d \neq 0$.

(vi) Si $b, d \neq 0$, entonces $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ si y sólo si $ad = bc$. Determine también cuando $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{a}$.

4. Halle todos los números x para los que

(i) $4 - x < 3 - 2x$.

(ii) $5 - x^2 < 8$.

(iii) $5 - x^2 < -2$.

(iv) $(x-1)(x-3) > 0$. (¿Cuándo es positivo el producto de dos números?)

(v) $x^2 - 2x + 2 > 0$.

(vi) $x^2 + x + 1 > 2$.

(vii) $x^2 - x + 10 > 16$.

(viii) $x^2 + x + 1 > 0$.

(ix) $(x-\pi)(x+5)(x-3) > 0$.

(x) $(x-\sqrt[3]{2})(x-\sqrt{2}) > 0$.

(xi) $2^x < 8$.

(xii) $x + 3^x < 4$.

(xiii) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x} > 0$.

(xiv) $\dfrac{x-1}{x+1} > 0$.

5. Demuestre lo siguiente:

(i) Si $a<b$ y $c<d$, entonces $a+c<b+d$.
(ii) Si $a<b$, entonces $-b<-a$.
(iii) Si $a<b$ y $c>d$, entonces $a-c<b-d$.
(iv) Si $a<b$ y $c>0$, entonces $ac<bc$.
(v) Si $a<b$ y $c<0$, entonces $ac>bc$.
(vi) Si $a>1$, entonces $a^2>a$.
(vii) Si $0<a<1$, entonces $a^2<a$.
(viii) Si $0\le a<b$ y $0\le c<d$, entonces $ac<bd$.
(ix) Si $0\le a<b$, entonces $a^2<b^2$. (Utilice (8).)
(x) Si $a,b\ge 0$ y $a^2<b^2$, entonces $a<b$. (Utilice (9), hacia atrás.)

6. (a) Demuestre que si $0\le x<y$, entonces $x^n<y^n$, $n=1,2,3,\ldots$
(b) Demuestre que si $x<y$ y n es impar, entonces $x^n<y^n$.
(c) Demuestre que si $x^n=y^n$ y n es impar, entonces $x=y$.
(d) Demuestre que si $x^n=y^n$ y n es par, entonces $x=y$ o $x=-y$.

7. Demuestre que si $0<a<b$, entonces

$$a<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<b.$$

Observe que la desigualdad $\sqrt{ab}\le(a+b)/2$ se verifica para todo a, $b\ge 0$. En el Problema 2-22 se presenta una generalización de este hecho.

***8.** Aunque las propiedades básicas de las desigualdades fueron enunciadas en términos del conjunto P de los números positivos, y $<$ se definió en términos de P, este procedimiento puede invertirse. Suponga que P10–P12 se sustituyen por

(P′10) Para cualquier número a y b se verifica una, y sólo una, de las relaciones siguientes:
(1) $a=b$,
(2) $a<b$,
(3) $b<a$.
(P′11) Para cualesquiera a, b y c, si $a<b$ y $b<c$, entonces $a<c$.
(P′12) Para cualesquiera a, b y c, si $a<b$, entonces $a+c<b+c$.
(P′13) Para cualesquiera a, b y c, si $a<b$ y $0<c$, entonces $ac<bc$.

Demuestre que P10–P12 pueden ahora deducirse como teoremas.

9. Formule de nuevo cada una de las siguientes expresiones, utilizando como mínimo una vez menos el signo de valor absoluto.

(i) $|\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{7}|$.
(ii) $|(|a+b|-|a|-|b|)|$.
(iii) $|(|a+b|+|c|-|a+b+c|)|$.

(iv) $|x^2-2xy+y^2|$.

(v) $|(|\sqrt{2}+\sqrt{3}|-|\sqrt{5}-\sqrt{7}|)|$.

10. Formule cada una de las siguientes expresiones prescindiendo de los signos de valor absoluto, tratando los distintos casos separadamente si es necesario.

(i) $|a+b|-|b|$.

(ii) $|(|x|-1)|$.

(iii) $|x|-|x^2|$.

(iv) $a-|(a-|a|)|$.

11. Halle todos los números x para los cuales

(i) $|x-3|=8$.

(ii) $|x-3|<8$.

(iii) $|x+4|<2$.

(iv) $|x-1|+|x-2|>1$.

(v) $|x-1|+|x+1|<2$.

(vi) $|x-1|+|x+1|<1$.

(vii) $|x-1|\cdot|x+1|=0$.

(viii) $|x-1|\cdot|x+2|=3$.

12. Demuestre lo siguiente:

(i) $|xy|=|x|\cdot|y|$.

(ii) $\left|\dfrac{1}{x}\right|=\dfrac{1}{|x|}$, si $x\neq 0$. (La mejor manera de hacerlo es recordando la definición de $|x|^{-1}$.)

(iii) $\dfrac{|x|}{|y|}=\left|\dfrac{x}{y}\right|$, si $y\neq 0$.

(iv) $|x-y|\leq|x|+|y|$. (Dé una demostración muy corta.)

(v) $|x|-|y|\leq|x-y|$. (Es posible dar una demostración muy corta si se escriben las cosas correctamente.)

(vi) $|(|x|-|y|)|\leq|x-y|$.(¿Por qué esto se deduce inmediatamente de (5)?)

(vii) $|x+y+z|\leq|x|+|y|+|z|$. Indique cuándo se verifica la igualdad, y demuéstrelo.

13. El máximo de dos números x e y se representa mediante $\text{máx}(x,y)$. Así $\text{máx}(-1,3)=\text{máx}(3,3)=3$ y $\text{máx}(-1,-4)=\text{máx}(-4,-1)=-1$. El mínimo de x e y se representa mediante $\text{mín}(x,y)$. Demuestre que

$$\text{máx}(x,y)=\frac{x+y+|y-x|}{2},$$

$$\text{mín}(x,y)=\frac{x+y-|y-x|}{2}.$$

Deduzca una fórmula para $\text{máx}(x,y,z)$ y $\text{mín}(x,y,z)$, utilizando, por ejemplo

$$\text{máx}(x,y,z)=\text{máx}(x,\text{máx}(y,z)).$$

14. (a) Demuestre que $|a| = |-a|$. (El truco consiste en no confundirse con demasiados casos. Demuestre primero la afirmación para $a \geq 0$. ¿Por qué es obvia en el caso que $a \leq 0$?)

(b) Demuestre que $-b \leq a \leq b$ si y sólo si $|a| \leq b$. En particular, se deduce que $-|a| \leq a \leq |a|$.

(c) Utilice este hecho para dar otra demostración de que $|a+b| \leq |a| + |b|$.

***15.** Demuestre que si x e y no son ambos 0, entonces

$$x^2 + xy + y^2 > 0,$$
$$x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 > 0.$$

Indicación: Utilice el Problema 1.

***16.** (a) Demuestre que

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 \quad \text{sólo cuando } x = 0 \text{ ó } y = 0,$$
$$(x+y)^3 = x^3 + y^3 \quad \text{sólo cuando } x = 0 \text{ ó } y = 0 \text{ ó } x = -y.$$

(b) Utilizando el hecho de que

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 \geq 0,$$

demuestre que $4x^2 + 6xy + 4y^2 > 0$ a no ser que x e y sean ambos 0.

(c) Utilice la parte (b) para averiguar cuando $(x+y)^4 = x^4 + y^4$.

(d) Averigüe cuándo $(x+y)^5 = x^5 + y^5$. Indicación: Suponiendo que $(x+y)^5 = x^5 + y^5$ debe deducirse la ecuación $x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3 = 0$, si $xy \neq 0$. Esto implica que $(x+y)^3 = x^2y + xy^2 = xy(x+y)$. Ahora ya se debería poder intuir cuando $(x+y)^n = x^n + y^n$; la demostración se da en el Problema 11-63.

17. (a) Halle el menor valor posible de $2x^2 - 3x + 4$. Indicación: "Complete el cuadrado," es decir, escriba $2x^2 - 3x + 4 = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + ?$

(b) Halle el menor valor posible de $x^2 - 3x + 2y^2 + 4y + 2$.

(c) Halle el menor valor posible de $x^2 + 4xy + 5y^2 - 4x - 6y + 7$.

18. (a) Suponga que $b^2 - 4c \geq 0$. Demuestre que los números

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \qquad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

satisfacen ambos la ecuación $x^2 + bx + c = 0$.

(b) Suponga que $b^2 - 4c < 0$. Demuestre que no existe ningún número x que satisfaga $x^2 + bx + c = 0$; de hecho, $x^2 + bx + c > 0$ para todo x. Indicación: Complete el cuadrado.

(c) Utilice este hecho para dar otra prueba de que si x e y no son ambos 0, entonces $x^2 + xy + y^2 > 0$.

(d) ¿Para qué números α se cumple que $x^2 + \alpha xy + y^2 > 0$ cuando x e y no son ambos 0?

(e) Halle el menor valor posible de $x^2 + bx + c$ y de $ax^2 + bx + c$, para $a > 0$.

19. El hecho de que $a^2 \geq 0$ para todo número a, por elemental que pueda parecer, es sin embargo la idea fundamental en la que se basan, en última instancia, muchas desigualdades. La desigualdad por excelencia es la *desigualdad de Schwarz*:

$$x_1y_1 + x_2y_2 \leq \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2}\,\sqrt{y_1{}^2 + y_2{}^2}.$$

(En el Problema 2-21 se da una expresión más general.) Las tres demostraciones de la desigualdad de Schwarz que se dan a continuación tienen sólo una cosa en común: todas ellas se basan en el hecho que $a^2 \geq 0$ para todo a.

(a) Demuestre que si $x_1 = \lambda y_1$ y $x_2 = \lambda y_2$ para algún número $\lambda \geq 0$, entonces se verifica la igualdad en la desigualdad de Schwarz. Demuestre lo mismo en el caso de que $y_1 = y_2 = 0$. Suponga ahora que y_1 e y_2 no son ambos 0, y que no existe ningún número λ tal que $x_1 = \lambda y_1$ y $x_2 = \lambda y_2$. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &< (\lambda y_1 - x_1)^2 + (\lambda y_2 - x_2)^2 \\ &= \lambda^2({y_1}^2 + {y_2}^2) - 2\lambda(x_1y_1 + x_2y_2) + ({x_1}^2 + {x_2}^2). \end{aligned}$$

Utilizando el Problema 18, complete la demostración de la desigualdad de Schwarz.

(b) Demuestre la desigualdad de Schwarz sabiendo que $2xy \leq x^2 + y^2$ (¿podría deducirlo?) con

$$x = \frac{x_i}{\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}}, \qquad y = \frac{y_i}{\sqrt{{y_1}^2 + {y_2}^2}},$$

primero para $i = 1$ y luego para $i = 2$.

(c) Demuestre la desigualdad de Schwarz probando primero que

$$({x_1}^2 + {x_2}^2)({y_1}^2 + {y_2}^2) = (x_1y_1 + x_2y_2)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2.$$

(d) Deduzca, de cada una de estas tres demostraciones, que la igualdad se verifica sólo cuando $y_1 = y_2 = 0$ ó cuando existe un número $\lambda \geq 0$ tal que $x_1 = \lambda y_1$ y $x_2 = \lambda y_2$.

En nuestro trabajo posterior, serán cruciales tres hechos relativos a las desigualdades. Aunque se darán las demostraciones en los lugares apropiados del texto, una aproximación personal a estos problemas es infinitamente más enriquecedora que la mera comprobación de una demostración completamente desarrollada. Los enunciados de estas proposiciones incluyen algunos números extraños, pero el mensaje básico es muy simple: si x está lo suficientemente próximo a x_0, e y a y_0, entonces $x + y$ está muy próximo a $x_0 + y_0$, xy muy próximo a x_0y_0, y $1/y$ muy próximo a $1/y_0$. El símbolo "ε" que aparece en estas proposiciones es la quinta letra del alfabeto griego ("epsilon"), aunque podría ser sustituida por una letra latina menos intimidante; sin embargo, la tradición ha determinado que el uso de ε sea casi sagrado en los contextos en los que se aplican estos teoremas.

20. Demuestre que si

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2},$$

entonces

$$\begin{aligned} |(x+y) - (x_0 + y_0)| &< \varepsilon, \\ |(x-y) - (x_0 - y_0)| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

***21.** Demuestre que si

$$|x - x_0| < \text{mín}\left(\frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)}, 1\right) \quad \text{y} \quad |y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)},$$

entonces $|xy - x_0y_0| < \varepsilon$. (La notación "mín" se definió en el Problema 13, pero la fórmula deducida en dicho problema es irrelevante en este caso; la primera desigualdad de la hipótesis significa únicamente que

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)} \quad \text{y} \quad |x - x_0| < 1;$$

en un momento de la demostración será necesaria la primera desigualdad, y en otro momento la segunda. Otra advertencia: ya que la hipótesis sólo da información acerca de $x - x_0$ y de $y - y_0$, es casi evidente que la demostración dependerá de escribir $xy - x_0y_0$ de una manera que incluya a $x - x_0$ y a $y - y_0$.)

***22.** Demuestre que si $y_0 \neq 0$ y

$$|y - y_0| < \text{mín}\left(\frac{|y_0|}{2}, \frac{\varepsilon|y_0|^2}{2}\right),$$

entonces $y \neq 0$ y

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| < \varepsilon.$$

***23.** Sustituya los signos de interrogación de la siguiente afirmación por expresiones que incluyan ε, x_0 e y_0 de manera que la conclusión sea cierta:

Si $y_0 \neq 0$ y

$$|y - y_0| < \,? \quad \text{y} \quad |x - x_0| < \,?$$

entonces $y \neq 0$ y

$$\left|\frac{x}{y} - \frac{x_0}{y_0}\right| < \varepsilon.$$

Este problema es trivial en el sentido de que su solución, se obtiene a partir de los resultados de los Problemas 21 y 22 prácticamente sin esfuerzo adicional alguno (observe que $x/y = x \cdot 1/y$). Lo más importante es no confundirse; decida cuál de los dos problemas debe utilizarse en primer lugar y no se asuste si su respuesta parece poco probable.

***24.** Este problema demuestra que la colocación de los paréntesis en una suma es irrelevante. En las demostraciones se utiliza el principio de "inducción matemática"; si desea abordar el problema pero no está familiarizado con tales demostraciones, puede esperar hasta después del Capítulo 2, donde se explican las demostraciones por inducción.

Convengamos, para fijar ideas, que $a_1 + \cdots + a_n$ significa

$$a_1 + (a_2 + (a_3 + \cdots + (a_{n-2} + (a_{n-1} + a_n)))\cdots).$$

Así $a_1 + a_2 + a_3$ significa $a_1 + (a_2 + a_3)$, y $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ significa $a_1 + (a_2 + (a_3 + a_4))$, etc.

(a) Demuestre que

$$(a_1 + \cdots + a_k) + a_{k+1} = a_1 + \cdots + a_{k+1}.$$

Indicación: Utilice la inducción sobre k.

(b) Demuestre que si $n \geq k$, entonces

$$(a_1 + \cdots + a_k) + (a_{k+1} + \cdots + a_n) = a_1 + \cdots + a_n.$$

Indicación: Utilice la parte (a) para dar una demostración por inducción sobre k.

(c) Sea $s(a_1, \ldots, a_k)$ una suma formada a partir de $a_1, \ldots, a_k$. Demuestre que

$$s(a_1, \ldots, a_k) = a_1 + \cdots + a_k.$$

Indicación: Debe haber dos sumas $s'(a_1, \ldots, a_l)$ y $s''(a_{l+1}, \ldots, a_k)$ tales que

$$s(a_1, \ldots, a_k) = s'(a_1, \ldots, a_l) + s''(a_{l+1}, \ldots, a_k).$$

25. Suponga que por "número" se entiende sólo el 0 ó el 1, y que $+$ y $\cdot$ son operaciones definidas mediante las dos tablas siguientes.

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Compruebe que se verifican las propiedades P1–P9, aun cuando $1 + 1 = 0$.

Distintas clases de números

2

En el Capítulo 1 hemos utilizado la palabra "número" en términos muy generales, a pesar de nuestro interés en las propiedades básicas de los números. Ha llegado el momento de que distingamos cuidadosamente distintas clases de números.

Los números más sencillos son lo que se utilizan para "contar"

$$1, 2, 3, \ldots$$

La importancia fundamental de este conjunto de números se hace aparente ya por su símbolo **N** (**números naturales**). Una breve ojeada a P1–P12 muestra que las propiedades básicas de los "números" no se aplican a **N**; por ejemplo, P2 y P3 no tienen sentido en **N**. Desde este punto de vista, el sistema **N** tiene muchas deficiencias. Sin embargo. **N** es lo suficientemente importante como para merecer varios comentarios antes de considerar a otros conjuntos más amplios de números.

La propiedad más básica de **N** es el principio de "inducción matemática". Supongamos que $P(x)$ significa que la propiedad P se verifica para el número x. Entonces el principio de inducción matemática afirma que $P(x)$ es cierta para todos los números naturales x si

(1) $P(1)$ es cierta.

(2) Si $P(k)$ es cierta, $P(k+1)$ es cierta.

Observemos que la condición (2) simplemente afirma que $P(k+1)$ es cierta si se supone que $P(k)$ es cierta; ésto es suficiente para asegurar que $P(x)$ es cierta para todo x, si se satisface también la condición (1). De hecho, si $P(1)$ es cierta, entonces se deduce que $P(2)$ también es cierta (aplicando (2) en el caso particular $k = 1$). Ahora, puesto que $P(2)$ es cierta, se deduce que $P(3)$ también es cierta (aplicando (2) en el caso particular $k = 2$). Es evidente que cualquier número será alcanzado finalmente mediante una serie de pasos de este tipo, de manera que $P(k)$ es cierta para todo k.

Muchas veces se ilustra el tipo de razonamiento empleado en la inducción matemática mediante el siguiente ejemplo: consideremos una fila infinita de personas,

persona número 1, persona número 2, persona número 3, ...

Si cada persona ha recibido instrucciones para contar cualquier secreto que se oiga a la persona que le sigue (la que tiene el número siguiente) y se cuenta un secreto a la persona número 1, es evidente entonces que cada persona se enterará finalmente del secreto. Si $P(x)$ consiste en afirmar que la persona numero x se enterará del secreto, entonces las instrucciones dadas (contar cualquier secreto que se oiga a la persona que le sigue) aseguran que la condición (2) se verifica y, como el secreto se cuenta a la persona número 1, también se verifica la condición (1). A continuación veamos un ejemplo de una aplicación no tan frívola del principio de inducción matemática. Existe una fórmula útil y curiosa que expresa de manera sencilla la suma de los n primeros números:

$$1+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Para demostrarla, observemos en primer lugar que, evidentemente, la fórmula es cierta para $n=1$. *Supongamos* ahora que para cualquier número natural k se verifica

$$1+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
1+\cdots+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2}+k+1 \\
&= \frac{k(k+1)+2k+2}{2} \\
&= \frac{k^2+3k+2}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2},
\end{aligned}$$

por tanto, la fórmula también es cierta para $k+1$. Según el principio de inducción esto demuestra la fórmula para todos los números naturales n. Este ejemplo particular ilustra un fenómeno que se presenta frecuentemente, sobre todo en el caso de fórmulas como la que acabamos de demostrar. Aunque la demostración por inducción no plantea en general serios problemas, el método por el cual se descubrió la fórmula continua siendo un misterio. En los Problemas 5 y 6 se indica cómo fueron deducidas algunas de estas fórmulas.

El principio de inducción matemática puede ser formulado de una manera equivalente, sin hablar de "propiedades" de un número, término suficientemente vago como para ser excluido de una discusión matemática. Una formulación más precisa afirma que si A es cualquier colección (o "conjunto", término matemático sinónimo) de números naturales y

(1) 1 está en A,
(2) $k+1$ está en A si k está en A,

entonces A es el conjunto de todos los números naturales. Debe quedar claro que esta formulación sustituye adecuadamente a la menos formal que hemos dado anteriormente; aquí consideramos sólo el conjunto A de números naturales x que satisfacen $P(x)$. Por ejemplo, supongamos que A es el conjunto de números naturales n para los cuales es cierto que

$$1+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

En nuestra demostración anterior vimos que A contiene 1, y que $k+1$ pertenece a A si k pertenece a A. Se deduce pues que A es el conjunto de todos los números naturales, es decir, que la fórmula se verifica para todos los números naturales n.

Existe todavía otra formulación rigurosa del principio de inducción matemática, aparentemente muy diferente. Si A es cualquier colección de números naturales, parece evidente, intuitivamente, que A debe tener un elemento mínimo. En realidad, esta afirmación puede ser falsa en un caso particular: un conjunto especialmente importante de números naturales es aquella colección A que no contiene ningún número natural, la denominada "colección vacía" o "conjunto vacío",* representado por el símbolo $\emptyset$. El conjunto vacío $\emptyset$ es una colección de números naturales que no tiene elemento mínimo; de hecho, no posee ningún elemento. Sin embargo, esta es la única excepción posible; si A es un conjunto no vacío de números naturales, entonces A tiene un elemento mínimo. Esta propiedad "intuitivamente obvia", conocida como el "principio de buena ordenación", puede demostrarse a partir del principio de inducción de la manera siguiente. Supongamos que el conjunto A no posee elemento mínimo. Sea B el conjunto de números naturales n tales que $1,\ldots,n$ *no* pertenecen a A. Evidentemente 1 pertenece a B (ya que si 1 perteneciese a A, entonces A tendría un elemento mínimo). Además, si $1,\ldots,k$ no pertenecen a A, $k+1$ tampoco pertenece a A (ya que si no $k+1$ sería el elemento mínimo de A), de manera que $1, \ldots, k+1$ no pertenecen a A. Esto demuestra que si k pertenece a B, entonces $k+1$ pertenece a B, de lo cual se deduce que todo número natural n pertenece a B, es decir, los números $1, \ldots, n$ *no* pertenecen a A para cualquier número natural n. Por tanto, $A = \emptyset$, lo que completa la demostración.

También es posible demostrar el principio de inducción a partir del principio de buena ordenación (Problema 10). Ambos pueden considerarse como propiedades básicas de los números naturales.

Existe todavía otra forma de inducción que debemos mencionar. A menudo ocurre que para demostrar $P(k+1)$ debemos suponer no sólo $P(k)$ sino también $P(l)$ para todos los números naturales $l \leq k$. En este caso nos basamos en el "principio de inducción completa": si A es un conjunto de números naturales y

(1) 1 pertenece a A,

(2) $k+1$ pertenece a A si $1, \ldots, k$ pertenecen a A,

entonces A es el conjunto de todos los números naturales.

Aunque el principio de inducción completa puede parecer mucho más fuerte que el principio de inducción ordinario, es realmente una consecuencia de este último. La demostración de este hecho se propone como un ejercicio para el lector, con una indicación, en el Problema 11. En los Problemas 7, 17, 20 y 22 pueden encontrarse aplicaciones de dicho principio.

---

*Aunque puede que no llame mucho la atención, en el sentido ordinario de la palabra, el conjunto vacío se presenta de modo natural en muchos contextos. Frecuentemente se habla del conjunto A, formado por todos aquellos x que satisfacen alguna propiedad P; muchas veces no existe ninguna garantía de que P se verifique para *cualquier* número, de manera que A podría ser $\emptyset$; de hecho, muchas veces se prueba que P es siempre falsa demostrando que $A = \emptyset$.

Las "definiciones recursivas" estan estrechamente relacionadas con las demostraciones por inducción. Por ejemplo, el número $n!$ (que se lee "n factorial") se define como el producto de todos los números naturales menores o iguales que n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Esto puede expresarse con más precisión como sigue:

$$\begin{aligned} &(1) \quad 1! = 1 \\ &(2) \quad n! = n \cdot (n-1)!. \end{aligned}$$

Este último apartado de la definición muestra la relación entre $n!$ y $(n-1)!$ de una manera explícita, muy adecuada para las demostraciones por inducción. En el Problema 23 se revisa una definición, ya conocida del lector, expresada de una manera más concisa como una definición recursiva; como demuestra dicho problema, la definición recursiva es realmente necesaria para demostrar rigurosamente algunas propiedades básicas de la definición.

Otra definición no tan familiar incluye una notación conveniente que utilizaremos constantemente. En lugar de escribir

$$a_1 + \cdots + a_n,$$

emplearemos generalmente la letra griega Σ (sigma mayúscula, de "suma") y escribiremos

$$\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

En otras palabras, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ designa la suma obtenida haciendo $i = 1, 2, \ldots, n$. Así

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Observemos que la letra i realmente no tiene nada que ver con el número representado por $\sum_{i=1}^{n} i$, y puede sustituirse por cualquier otro símbolo conveniente (excepto n, por supuesto):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} j &= \frac{n(n+1)}{2}, \\ \sum_{j=1}^{i} j &= \frac{i(i+1)}{2}, \\ \sum_{n=1}^{j} n &= \frac{j(j+1)}{2}. \end{aligned}$$

Para definir $\sum_{i=1}^{n} a_i$ de una manera precisa es necesario utilizar una definición recursiva:

$$\begin{aligned} &(1) \quad \sum_{i=1}^{1} a_i = a_1, \\ &(2) \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + a_n, \end{aligned}$$

aunque únicamente insistirían en emplear dicha definición los partidarios acérrimos de la austeridad matemática. En la práctica se utilizan todo tipo de modificaciones de este simbolismo y en ningún caso se considera necesario dar ningún tipo de explicación adicional. El símbolo

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq 4}}^{n} a_i,$$

por ejemplo, es una manera obvia de escribir

$$a_1+a_2+a_3+a_5+a_6+\cdots+a_n,$$

o, con mayor precisión,

$$\sum_{i=1}^{3} a_i+\sum_{i=5}^{n} a_i.$$

Las deficiencias de los números naturales, que ya pusimos de manifiesto al comienzo de este capítulo, pueden subsanarse en parte extendiendo este sistema al conjunto de los números **enteros**

$$\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots$$

Este conjunto se representa con la letra **Z** (del alemán "Zahl", número). De las propiedades P1-P12, la única que no posee **Z** es la P7.

Si se toman los cocientes m/n de enteros (con $n\neq 0$), se obtiene un sistema de números todavía más amplio. Estos números se denominan **números racionales**, y el conjunto de todos los números racionales se representa por **Q** (del inglés "quotients"). En este sistema de números se verifican todas las propiedades P1-P12. Podría suponerse que las "propiedades de los números," estudiadas con un cierto detalle en el Capítulo 1, se refieren a las del sistema de los números racionales **Q**. Sin embargo, existe todavía una colección más amplia de números que también posee las propiedades P1-P12; el conjunto de todos los **números reales**, representado por **R**. Los números reales incluyen no sólo a los números racionales, sino también otros números (los **números irracionales**) que pueden ser representados por decimales infinitos; π y $\sqrt{2}$ son ambos ejemplos de números irracionales. La demostración de que π es irracional no es fácil; dedicaremos todo el Capítulo 16 de la Parte III a una demostración de este hecho. La irracionalidad de $\sqrt{2}$, por el contrario, es muy sencilla y era conocida ya por los griegos. (Puesto que el teorema de Pitágoras demuestra que un triángulo rectángulo isósceles con los catetos de longitud 1 tiene una hipotenusa de longitud $\sqrt{2}$, no es sorprendente que los griegos investigaran esta cuestión.) La demostración se basa en algunas observaciones acerca de los números naturales. Todo número natural n puede escribirse ya sea en la forma $2k$ para algún entero k, o en la forma $2k+1$ para algún entero k (este hecho "evidente" puede ser demostrado fácilmente por inducción (Problema 8)). Los números naturales de la forma $2k$ se denominan **pares**; los de la forma $2k+1$ **impares**. Observemos que los números pares tienen cuadrados pares, y los números impares cuadrados impares:

$$\begin{aligned}(2k)^2 &= 4k^2=2\cdot(2k^2),\\ (2k+1)^2 &= 4k^2+4k+1=2\cdot(2k^2+2k)+1.\end{aligned}$$

De esto se deduce que la recíproca tiene que ser cierta: si n^2 es par, entonces n es par; si n^2 es impar, entonces n es impar. La demostración de que $\sqrt{2}$ es irracional es ahora muy sencilla. Supongamos que $\sqrt{2}$ fuese racional, es decir, que existieran números naturales p y q tales que

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2.$$

Podemos suponer que p y q no tienen ningún divisor común (puesto que se podría empezar simplificando para eliminar los divisores comunes). Tenemos pues

$$p^2 = 2q^2.$$

Esto demuestra que p^2 es par y en consecuencia p debe ser par; es decir, $p = 2k$ para algún número natural k. Entonces

$$p^2 = 4k^2 = 2q^2,$$

de modo que

$$2k^2 = q^2.$$

Esto demuestra que q^2 es par y en consecuencia que q es par. Así pues, son pares tanto p como q, en contradicción con el hecho de que p y q no tienen divisores comunes. Esta contradicción completa la demostración.

Es importante conocer exactamente lo que nos indica esta demostración. Hemos demostrado que no existe ningún número racional x tal que $x^2 = 2$. O dicho de otro modo más breve, que $\sqrt{2}$ es irracional. Observemos, sin embargo, que utilizar el símbolo $\sqrt{2}$ implica que existe *algún* número (necesariamente irracional) cuyo cuadrado es igual a 2. No hemos demostrado todavía que tal número exista y podemos afirmar que, de momento, no nos es posible hacerlo. A este nivel, cualquier demostración debería basarse en las propiedades P1-P12 (las únicas propiedades de $\mathbf{R}$ que hemos mencionado); como dichas propiedades P1-P12 también las satisface $\mathbf{Q}$, el mismo argumento demostraría que existe un número racional cuyo cuadrado es igual a 2, lo cual sabemos que es falso. (Observemos también que el argumento inverso no es aplicable; la demostración de que no existe ningún número racional cuyo cuadrado es igual a 2 no puede utilizarse para demostrar que no existe ningún número real cuyo cuadrado es igual a 2, ya que en la demostración hemos utilizado no sólo las propiedades P1-P12 sino también una propiedad especial de $\mathbf{Q}$, el hecho de que todo número de $\mathbf{Q}$ puede escribirse en la forma p/q con p y q enteros.)

Esta deficiencia de nuestra lista de propiedades de los números reales podría corregirse añadiendo una nueva propiedad relativa a la existencia de raíces cuadradas de números positivos, aunque recurrir a esta medida no sería matemáticamente satisfactorio ni estéticamente elegante; todavía no sabríamos que todo número posee una raíz n-ésima si n es impar y que todo número positivo posee una raíz n-ésima si n es par. Incluso aceptando que se cumple esta propiedad, no podríamos demostrar la existencia de un número x tal que $x^5 + x + 1 = 0$ (si bien existe uno), puesto que no sabemos escribir la solución de la ecuación en términos de raíces n-ésimas (de hecho se sabe que la solución no puede escribirse de esta forma). Y, por supuesto, no podemos suponer que todas las ecuaciones tienen soluciones ya que es falso (por ejemplo, ningún número real x es solución de la ecuación $x^2+1=0$). De hecho, esta línea de investigación no conduce a nada. Las indicaciones más útiles acerca de la propiedad que ha de distinguir **R** de **Q**, la evidencia más clara de encontrar esta propiedad, no vienen del estudio exclusivo de los números. Para estudiar los números reales de manera más profunda no debemos estudiar tan sólo a los números reales sino adentrarnos también en los fundamentos del cálculo infinitesimal, en particular en el concepto básico en el cual se basa el cálculo: las funciones.

Problemas

1. Demuestre por inducción las siguientes fórmulas.

(i) $1^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(ii) $1^3+\cdots+n^3=(1+\cdots+n)^2$.

2. Encuentre una fórmula para

(i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=1+3+5+\cdots+(2n-1)$.

(ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2=1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2$.

Indicación: ¿Qué relación tienen estas expresiones con $1+2+3+\cdots+2n$ y $1^2+2^2+3^2+$ $+\cdots+(2n)^2$?

3. Si $0\leq k\leq n$, se define el "coeficiente binomial" $\dbinom{n}{k}$ mediante

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!},\quad \text{si } k\neq 0,\ n$$

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1 \text{ (que es un caso particular de la primera fórmula si se define } 0!=1\text{)},$$

y para $k<0$ o $k>n$ el valor del coeficiente binomial se define como igual a 0.

(a) Demuestre que

$$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}.$$

(La demostración no requiere ningún argumento basado en el principio de inducción matemática.)

Esta relación da lugar a la siguiente configuración conocida como el "triángulo de Pascal": todo número que no esté sobre uno de los lados es la suma de los dos números que tiene encima; el coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ es el número $(k+1)$-ésimo de la fila $(n+1)$-ésima.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
&&&&&1&&&&& \\
&&&&1&&1&&&& \\
&&&1&&2&&1&&& \\
&&1&&3&&3&&1&& \\
&1&&4&&6&&4&&1& \\
1&&5&&10&&10&&5&&1 \\
&&&&&\cdots&&&&&
\end{array}$$

(b) Observe que todos los números del triángulo de Pascal son números naturales. Utilice el apartado (a) para demostrar por inducción que $\binom{n}{k}$ es siempre un numero natural. (En cierto sentido dando una ojeada al triángulo de Pascal puede encontrarse, resumida, toda la demostración por inducción.)

(c) Dé otra demostración de que $\binom{n}{k}$ es un número natural, demostrando que $\binom{n}{k}$ es el número de conjuntos de exactamente k enteros elegidos cada uno entre $1, \ldots, n$.

(d) Demuestre el "teorema del binomio": si a y b son números cualesquiera y n es un número natural, entonces

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n \\ &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n-j}b^j.\end{aligned}$$

(e) Demuestre que

(i) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} = \binom{n}{0} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$

(ii) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots \pm \binom{n}{n} = 0.$

(iii) $\displaystyle\sum_{l \text{ impar}}\binom{n}{l} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots = 2^{n-1}.$

(iv) $\displaystyle\sum_{l \text{ par}}\binom{n}{l} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = 2^{n-1}.$

4. (a) Demuestre que

$$\sum_{k=0}^{l}\binom{n}{k}\binom{m}{l-k} = \binom{n+m}{l}.$$

Indicación: Aplique el teorema del binomio a $(1+x)^n(1+x)^m$.

(b) Demuestre que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

5. (a) Demuestre por inducción sobre n que

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

si $r \neq 1$ (si $r = 1$, ciertamente el cálculo de la suma no presenta ningún problema).

(b) Deduzca este resultado poniendo $S = 1 + r + \cdots + r^n$, multiplicando esta ecuación por r y eliminando S entre las dos ecuaciones.

6. La fórmula para $1^2 + \cdots + n^2$ puede deducirse como sigue. Empecemos con la fórmula

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1.$$

Escribiendo esta fórmula para $k = 1, \ldots, n$ y sumando, obtenemos

$$\begin{aligned} 2^3 - 1^3 &= 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\ 3^3 - 2^3 &= 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\ &\vdots \\ (n+1)^3 - n^3 &= 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1 \\ \hline (n+1)^3 &= 3[1^2 + \cdots + n^2] + 3[1 + \cdots + n] + n. \end{aligned}$$

Así podemos encontrar $\sum_{k=1}^{n} k^2$ si ya conocemos $\sum_{k=1}^{n} k$ (que podría haberse hallado de modo parecido). Utilice este método para hallar

(i) $1^3 + \cdots + n^3$.

(ii) $1^4 + \cdots + n^4$.

(iii) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$.

(iv) $\dfrac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \dfrac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \cdots + \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

***7.** Utilice el método del Problema 6 para demostrar que $\sum_{i=1}^{n} k^p$ puede escribirse siempre en la forma

$$\frac{n^{p+1}}{p+1} + An^p + Bn^{p-1} + Cn^{p-2} + \cdots$$

(Las diez primeras de estas expresiones son

$$\sum_{k=1}^{n} k = \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \tfrac{1}{4}n^4 + \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{1}{4}n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \tfrac{1}{5}n^5 + \tfrac{1}{2}n^4 + \tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{30}n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^5 = \tfrac{1}{6}n^6 + \tfrac{1}{2}n^5 + \tfrac{5}{12}n^4 - \tfrac{1}{12}n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^6 = \tfrac{1}{7}n^7 + \tfrac{1}{2}n^6 + \tfrac{1}{2}n^5 - \tfrac{1}{6}n^3 + \tfrac{1}{42}n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^7 = \tfrac{1}{8}n^8 + \tfrac{1}{2}n^7 + \tfrac{7}{12}n^6 - \tfrac{7}{24}n^4 + \tfrac{1}{12}n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^8 = \tfrac{1}{9}n^9 + \tfrac{1}{2}n^8 + \tfrac{2}{3}n^7 - \tfrac{7}{15}n^5 + \tfrac{2}{9}n^3 - \tfrac{1}{30}n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^9 = \tfrac{1}{10}n^{10} + \tfrac{1}{2}n^9 + \tfrac{3}{4}n^8 - \tfrac{7}{10}n^6 + \tfrac{1}{2}n^4 - \tfrac{3}{20}n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{10} = \tfrac{1}{11}n^{11} + \tfrac{1}{2}n^{10} + \tfrac{5}{6}n^9 - 1n^7 + 1n^5 - \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{5}{66}n.$$

Observe que los coeficientes de la segunda columna son siempre $\frac{1}{2}$, y que después de la tercera columna las potencias de n de coeficiente no nulo van decreciendo de dos en dos hasta llegar a n^2 o a n. Los coeficientes de todas las columnas, salvo las dos primeras, parecen ser bastante erráticos, pero en realidad obedecen a una cierta regla; el encontrarla puede considerarse como una prueba de superperspicacia. Consulte el Problema 27-17 para descifrar todo el asunto.)

8. Demuestre que todo número natural es par o impar.

9. Demuestre que si un conjunto A de números naturales contiene n_0 y contiene $k+1$ siempre que contenga k, entonces A contiene todos los números naturales $\geq n_0$.

10. Demuestre el principio de inducción matemática a partir del principio de buena ordenación.

11. Demuestre el principio de inducción completa a partir del principio de inducción ordinario. Indicación: Si A contiene 1 y A contiene $n+1$ siempre que contenga $1, \ldots, n$, considere el conjunto B de todos los k tales que $1, \ldots, k$ están todos en A.

12. (a) Si a es racional y b es irracional, ¿es $a+b$ necesariamente irracional? ¿Qué ocurre si a y b son ambos irracionales?

(b) Si a es racional y b es irracional, ¿es ab necesariamente irracional? (¡Cuidado!)

(c) Existe un número a tal que a^2 es irracional pero a^4 racional?

(d) ¿Existen dos números irracionales cuya suma y su producto sean ambos racionales?

13. (a) Demuestre que $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ y $\sqrt{6}$ son irracionales. Indicación: En el caso de $\sqrt{3}$, por ejemplo, utilice el hecho de que cada entero es de la forma $3n$ ó $3n+1$ ó $3n+2$. ¿Por qué esta demostración no sirve en el caso de $\sqrt{4}$?

(b) Demuestre que $\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt[3]{3}$ son irracionales.

14. Demuestre que
(a) $\sqrt{2}+\sqrt{6}$ es irracional.
(b) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ es irracional.

15. (a) Demuestre que si $x = p+\sqrt{q}$ donde p y q son racionales, y m es un número natural, entonces $x^m = a+b\sqrt{q}$ siendo a y b números racionales.
(b) Demuestre también que $(p-\sqrt{q})^m = a-b\sqrt{q}$.

16. (a) Demuestre que si m y n son números naturales y $m^2/n^2 < 2$, entonces $(m+2n)^2/(m+n)^2 > 2$; demuestre, además, que

$$\frac{(m+2n)^2}{(m+n)^2} - 2 < 2 - \frac{m^2}{n^2}.$$

(b) Demuestre los mismos resultados con los signos de desigualdad invertidos.
(c) Demuestre que si $m/n < \sqrt{2}$, entonces existe otro número racional m'/n' con $m/n < m'/n' < \sqrt{2}$.

***17.** Parece probable que $\sqrt{n}$ tenga que ser irracional cuando el número natural n no es el cuadrado de otro número natural. Aunque puede utilizarse el método del Problema 13 para resolver cualquier caso particular, no está claro a priori que siempre funcionará; para resolver el caso general se requiere, pues, disponer de más información. Un número natural p se dice que es un **número primo** si no puede escribirse como $p = ab$ para números naturales a y b a no ser que uno de ellos sea p y el otro 1; por conveniencia se considera, además, que 1 *no* es un número primo. Los primeros números primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Si $n > 1$ no es primo, entonces $n = ab$, siendo a y b ambos $< n$; si uno de los dos a o b no es primo, puede ser factorizado de manera parecida; continuando de esta manera puede demostrarse que n puede escribirse como un producto de primos. Por ejemplo, $28 = 4 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 7$.

(a) Convierta el argumento anterior en una demostración rigurosa por inducción completa. (De hecho, cualquier matemático razonable aceptaría esta argumentación informal, debido en parte a que para él o ella sería obvio como realizar la demostración rigurosa.)

Un teorema fundamental de la teoría de números enteros (teorema fundamental de la aritmética), que no demostraremos aquí, afirma que esta factorización es única, salvo en lo que respecta al orden de los factores. Así, por ejemplo, 28 no puede escribirse nunca como producto de número primos uno de los cuales sea 3, ni tampoco de manera que 2 aparezca una sola vez (el lector debería ahora ver clara la razón de no admitir a 1 como número primo).

(b) Utilizando este hecho, demuestre que $\sqrt{n}$ es irracional a no ser que $n = m^2$ para algún número natural m.
(c) Más en general, demuestre que $\sqrt[k]{n}$ es irracional a no ser que $n = m^k$.
(d) Ninguna discusión sobre números primos debería excluir la hermosa demostración de Euclides de que existe un número infinito de ellos. Demuestre que no puede haber sólo un número finito de números primos $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ considerando $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$.

***18.** (a) Demuestre que si x satisface

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0,$$

para algunos enteros $a_{n-1}, \ldots, a_0$, entonces x es irracional a no ser que x sea un entero. (¿Por qué esta propiedad es una generalización del resultado del Problema 17?)

(b) Demuestre que $\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ es irracional.

(c) Demuestre que $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ es irracional. Indicación: Comience desarrollando las 6 primeras potencias de este número.

19. Demuestre la desigualdad de Bernoulli: si $h > -1$, entonces

$$(1+h)^n \geq 1+nh$$

para cualquier número natural n. ¿Por qué dicha desigualdad es trivial si $h > 0$?

20. La sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, a_3, \ldots$ se define como sigue:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= 1, \\ a_n &= a_{n-1}+a_{n-2} \qquad \text{para } n \geq 3. \end{aligned}$$

Esta sucesión, cuyos primeros términos son $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$, fue descubierta por Fibonacci (1175-1250, aprox.), en relación con un problema de conejos. Fibonacci supuso que una pareja de conejos criaba una nueva pareja cada mes y que después de dos meses cada nueva pareja se comportaba del mismo modo. El número a_n de parejas nacidas en el n-ésimo mes es $a_{n-1}+a_{n-2}$, puesto que nace una pareja por cada pareja nacida el mes anterior, y además, cada pareja nacida hace dos meses produce ahora una nueva pareja. Es verdaderamente asombroso el número de resultados interesantes relacionados con esta sucesión, existe incluso una Asociación Fibonacci que publica una revista, *The Fibonacci Quarterly*. Demuestre que

$$a_n = \frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Una manera de deducir esta sorprendente fórmula se presenta en el Problema 24-16.

21. La desigualdad de Schwarz (Problema 1-19) tiene en realidad una expresión más general:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Dé tres demostraciones de esta expresión, análogas a las tres demostraciones del Problema 1-19.

22. El resultado del Problema 1-7 tiene una generalización importante: si $a_1, \ldots, a_n \geq 0$, entonces la "media aritmética"

$$A_n = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$$

y la "media geométrica"

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$$

satisfacen

$$G_n \leq A_n.$$

(a) Suponga que $a_1 < A_n$. Entonces algún a_i satisface $a_i > A_n$; por conveniencia suponga que $a_2 > A_n$. Sea $\bar{a}_1 = A_n$ y sea $\bar{a}_2 = a_1 + a_2 - \bar{a}_1$. Demuestre que

$$\bar{a}_1 \bar{a}_2 \geq a_1 a_2.$$

¿Por qué la iteración de dicho proceso un número suficiente de veces acaba demostrando que $G_n \leq A_n$? (Este es otro caso en el que es un buen ejercicio dar una demostración formal por inducción, así como también una deducción informal.) ¿Cuando se verifica la igualdad en la fórmula $G_n \leq A_n$?

El argumento empleado en esta demostración está relacionado con el de otra demostración interesante.

(b) Utilizando el hecho de que $G_n \leq A_n$ cuando $n = 2$, demuestre por inducción sobre k que $G_n \leq A_n$ para $n = 2^k$.

(c) En el caso de un número n cualquiera, sea $2^m > n$. Aplique el apartado (b) a los 2^m números

$$a_1, \ldots, a_n, \underbrace{A_n, \ldots, A_n}_{2^m - n \text{ veces}}$$

para demostrar que $G_n \leq A_n$.

23. La siguiente es una definición recursiva de a^n:

$$\begin{aligned} a^1 &= a, \\ a^{n+1} &= a^n \cdot a. \end{aligned}$$

Demuestre por inducción que

$$\begin{aligned} a^{n+m} &= a^n \cdot a^m, \\ (a^n)^m &= a^{nm}. \end{aligned}$$

(No se deje llevar por la fantasía: utilice o bien la inducción sobre n o la inducción sobre m, pero no las dos a la vez.)

24. Suponga que se conocen las propiedades P1 y P4 de los números naturales, pero que no se ha hablado de multiplicación. Entonces se puede dar la siguiente definición recursiva de multiplicación:

$$\begin{aligned} 1 \cdot b &= b, \\ (a+1) \cdot b &= a \cdot b + b. \end{aligned}$$

Demuestre lo siguiente (¡en el orden indicado!):

$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ (utilice la inducción sobre a),
$a \cdot 1 = a$,

$a \cdot b = b \cdot a$ (lo anterior era el caso $b = 1$).

25. En este capítulo hemos empezado con los números naturales y gradualmente hemos ido ampliando este conjunto hasta llegar al de los números reales. Una discusión totalmente rigurosa de este proceso requeriría por si sola un pequeño libro (vea la Parte V). Nadie ha encontrado la manera de llegar a los números reales sin pasar por todo este proceso, pero si admitimos la existencia de los números reales entonces los números naturales pueden ser *definidos* como números naturales de la forma 1, $1+1$, $1+1+1$, etc. El objetivo de este problema consiste en hacer ver que existe una manera matemática rigurosa de decir "etc."

(a) Se dice que un conjunto A de números reales es **inductivo** si

(1) 1 está en A,
(2) $k+1$ está en A siempre que k está en A.

Demuestre que

(i) **R** es inductivo.
(ii) El conjunto de los números reales positivos es inductivo.
(iii) El conjunto de los números reales positivos distintos de $\frac{1}{2}$ es inductivo.
(iv) El conjunto de los números reales positivos distintos de 5 no es inductivo.
(v) Si A y B son inductivos, entonces el conjunto C de los números reales que están a la vez en A y en B es también inductivo.

(b) Un número real n será llamado un **número natural** si n está en *todo* conjunto inductivo.

(i) Demuestre que 1 es un número natural.
(ii) Demuestre que $k+1$ es un número natural si k es un número natural.

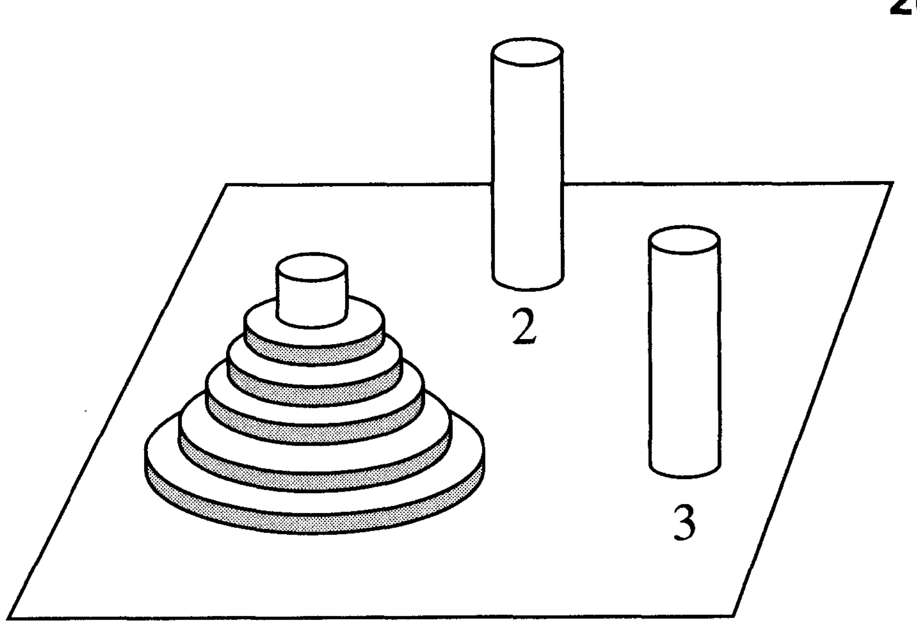


Figura 1

26. Un rompecabezas consiste en tres ejes con n anillos concéntricos de diámetro decreciente, todos ellos colocados en el primer eje (Figura 1). Un anillo situado encima de la pila de anillos de un eje puede colocarse en otro eje siempre y cuando no se sitúe sobre un anillo de diámetro inferior. Por ejemplo, si el anillo más pequeño se coloca en el eje 2 y el siguiente anillo más pequeño en el eje 3, entonces el anillo más pequeño puede colocarse también en el eje 3, encima del siguiente anillo más pequeño. Demuestre que toda la pila de n anillos puede colocarse en el eje 3 mediante $2^n - 1$ desplazamientos, y que esto no puede hacerse en menos de $2^n - 1$ desplazamientos.

***27.** La Universidad B se jactaba de poseer 17 profesores numerarios de matemáticas. La tradición prescribía que en su reunión semanal durante el almuerzo, a la que asistían puntualmente los 17 profesores, cualquiera de ellos que hubiese detectado algún error en sus trabajos publicados debería comunicarlo a los demás y dimitir inmediatamente. Pero esto nunca había ocurrido ya que ningún profesor era consciente de que existiesen errores en sus trabajos, lo cual no quiere decir, sin embargo, que dichos errores no existieran. De hecho, a lo largo de los años, cada miembro del departamento había cometido al menos un error en sus publicaciones, error que había sido observado por otro miembro del departamento, el cual lo había comunicado a los restantes miembros excepto al profesor que había cometido el error para evitar que tuviese que dimitir.

Llegó un año fatídico en el que la lista de profesores del departamento se vio aumentada por la incorporación de un profesor visitante, un tal Prof. X, quien tenía la pretensión de que le ofreciesen una plaza permanente al final del curso académico. Naturalmente, fue informado por los restantes miembros del departamento de los errores que habían sido descubiertos en los trabajos publicados. Cuando fracasó su intento de conseguir una plaza permanente, el Prof. X consiguió vengarse durante la última reunión semanal de aquél curso. "He disfrutado mucho durante mi visita", comentó, "pero debo comunicarles algo. Al menos uno de ustedes ha publicado un resultado incorrecto que ha sido descubierto por otros miembros del departamento". ¿Qué ocurrió al año siguiente?

****28.** Después de deducir o consultar la solución del Problema 27, considere lo siguiente: cada miembro del departamento ya sabía lo que había comentado el Prof. X, por tanto ¿cómo pudo cambiar la situación el comentario de dicho profesor?

Parte II

Fundamentos

Se afirma con frecuencia
que el cálculo diferencial
trata de la magnitud continua
y sin embargo no se da nunca
una explicación de esta continuidad;
ni siquiera las explicaciones más rigurosas
del cálculo diferencial
basan sus demostraciones sobre la continuidad,
sino que, más o menos conscientemente,
o bien apelan a nociones geométricas
o sugeridas por la geometría
o se basan en teoremas que nunca han sido establecidos
de manera puramente aritmética.
Entre estos está, por ejemplo,
el que hemos mencionado antes,
y una investigación más cuidadosa
me ha convencido de que este teorema
o cualquier otro equivalente, puede ser considerado
en cierto modo como una base suficiente
para el análisis infinitesimal.
Faltaba sólo por descubrir su verdadero origen
en los elementos de la aritmética
y obtener así al mismo tiempo
una verdadera definición
de la esencia de la continuidad.
Lo conseguí el 24 de noviembre de 1858
y pocos días después comuniqué
el resultado de mis meditaciones
a mi querido amigo Durège,
con quien sostuve una larga
y animada conversación.

RICHARD DEDEKIND

Funciones

3

Indudablemente el concepto más importante de todas las matemáticas es el de función: en casi todas las ramas de la matemática moderna la investigación se centra en el estudio de funciones. No es sorprendente, por tanto, que el concepto de función sea de una gran generalidad. Es un alivio saber que, de momento, podremos centrar nuestra atención en funciones de un tipo muy particular; incluso esta pequeña clase de funciones presenta suficiente variación para mantener nuestra atención durante bastante tiempo. No daremos al principio una definición rigurosa de función, sino que trabajaremos con una definición provisional que nos permitirá describir a las funciones en profundidad y nos permitirá ilustrar la noción intuitiva de función, tal como la entienden los matemáticos. Más tarde consideraremos y discutiremos las ventajas de la moderna definición matemática. Comencemos pues con la siguiente:

Definición provisional

Una función es una regla que asigna a cada elemento de un cierto conjunto de números reales otro número real.

Con los siguientes ejemplos de funciones se pretende ilustrar y ampliar esta definición, la cual, hay que admitirlo, requiere una clarificación.

Ejemplo 1 La regla que asigna a cada número el cuadrado de dicho número.

Ejemplo 2 La regla que asigna a cada número y el número

$$\frac{y^3+3y+5}{y^2+1}.$$

Ejemplo 3 La regla que asigna a cada número $c \neq 1, -1$ el número

$$\frac{c^3+3c+5}{c^2-1}.$$

Ejemplo 4 La regla que asigna a cada número x que satisface $-17 \leq x \leq \pi/3$ el número x^2.

Ejemplo 5 La regla que asigna a cada número a el número 0 si a es irracional, y el número 1 si a es racional.

Ejemplo 6 La regla que asigna

$$\begin{aligned} &\text{a } 2 \text{ el número } 5,\\ &\text{a } 17 \text{ el número } \frac{36}{\pi},\\ &\text{a } \frac{\pi^2}{17} \text{ el número } 28,\\ &\text{a } \frac{36}{\pi} \text{ el número } 28, \end{aligned}$$

y a cualquier $y \neq 2,\ 17,\ \pi^2/17$, o $36/\pi$, el número 16 si y es de la forma $a+b\sqrt{2}$ con a, b en $\mathbf{Q}$.

Ejemplo 7 La regla que asigna a cada número t el número t^3+x. (Esta regla depende, por supuesto, de cuál sea el número x, de manera que en realidad estamos describiendo muchas funciones diferentes, una para cada valor de x.)

Ejemplo 8 La regla que asigna a cada número z el número de veces en el que figura el 7 en el desarrollo decimal de z, si este número es finito, y $-\pi$ si hay un número infinito de sietes en el desarrollo decimal de z.

Estos ejemplos ilustran el hecho de que una función es *cualquier* regla que asigna números a ciertos otros números, no sólo una regla que puede expresarse mediante una fórmula algebraica, o incluso mediante una condición uniforme que se aplica a cada número; tampoco es, necesariamente, una regla que usted o cualquier otra persona pueda aplicar en la práctica (nadie sabe, por ejemplo, qué regla permite asociar a 8 con π). Además, la regla puede prescindir de algunos números e incluso puede no estar claro a qué números se aplica la función (intente determinar, por ejemplo, si la función del Ejemplo 6 se aplica a π). El conjunto de números a los cuales se *aplica* la función se denomina el *dominio* de la función.

Antes de continuar es necesario disponer de una notación adecuada. Como a lo largo del libro hablaremos muy a menudo de funciones (en realidad, casi no hablaremos de nada más) necesitamos una manera conveniente de denominarlas y de referirnos a ellas en general. La práctica estándar consiste en representar una función mediante una letra. Por razones obvias, la letra "f" es la favorita, lo que hace que también sean candidatos obvios las letras "g" y "h", pero cualquier letra (o cualquier símbolo razonable) es igualmente válido, sin excluir la "x" y la "y", aunque estas letras normalmente se utilizan para designar números. Si f es una función, entonces el número que f hace corresponder al número x se representa por $f(x)$; este símbolo se lee "f de x" y a menudo se denomina el **valor de f en x**. Naturalmente, si a una función la representamos por x, debemos elegir cualquier otra letra para representar al número (una elección perfectamente legítima pero perversa podría ser "f", lo que nos conduciría al símbolo $x(f)$). Observemos que el símbolo $f(x)$ tiene sentido sólo si x pertenece al dominio de f; para cualquier otro x el símbolo $f(x)$ no está definido.

Si las funciones definidas en los ejemplos 1–8 se representan mediante f, g, h, r, s, θ, α_x, e y, entonces las podríamos volver a definir mediante:

(1) $f(x) = x^2$ para todo x.

(2) $g(y) = \dfrac{y^3+3y+5}{y^2+1}$ para todo y.

(3) $h(c) = \dfrac{c^3+3c+5}{c^2-1}$ para todo $c \neq 1, -1$.

(4) $r(x) = x^2$ para todo x tal que $-17 \leq x \leq \pi/3$.

(5) $s(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ 1, & x \text{ racional.} \end{cases}$

(6) $\theta(x) = \begin{cases} 5, & x = 2 \\ \dfrac{36}{\pi}, & x = 17 \\ 28, & x = \dfrac{\pi^2}{17} \\ 28, & x = \dfrac{36}{\pi} \\ 16, & x \neq 2,\ 17,\ \dfrac{\pi^2}{17} \text{ ó } \dfrac{36}{\pi}, \text{ y } \ x = a + b\sqrt{2} \text{ para } a,\ b \text{ en } \mathbf{Q}. \end{cases}$

(7) $\alpha_x(t) = t^3 + x$ para todos los números t.

(8) $y(x) = \begin{cases} n, & \text{si aparecen exactamente } n \text{ sietes en el desarrollo decimal de } x \\ -\pi, & \text{si aparecen infinitos sietes en el desarrollo decimal de } x. \end{cases}$

Estas definiciones ilustran el procedimiento habitual utilizado para definir una función f, esto es, indicando el valor de $f(x)$ para todo número x del dominio de f. (Observemos que esto es exactamente lo mismo que indicar $f(a)$ para todo número a, o $f(b)$ para todo número b, etc.) En la práctica se admiten ciertas abreviaciones. La definición (1) podría escribirse simplemente como

$$(1) \quad f(x) = x^2,$$

sobreentendiéndose la frase calificativa “para todo x”. En el caso de la definición (4) la única abreviación posible es

$$(4) \quad r(x) = x^2, \qquad -17 \leq x \leq \pi/3.$$

En general, se sobreentiende que una definición como

$$k(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}, \quad x \neq 0, 1$$

puede abreviarse de la siguiente manera

$$k(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1};$$

en otras palabras, *a no ser que el dominio se restrinja todavía más, se entiende que está formado por todos los números para los cuales la definición tiene sentido.*

El lector no debe tener ninguna dificultad en comprobar la veracidad de las siguientes afirmaciones relativas a las funciones definidas anteriormente:

$$\begin{aligned}
f(x+1) &= f(x)+2x+1;\\
g(x) &= h(x) \text{ si } x^3+3x+5=0;\\
r(x+1) &= r(x)+2x+1 \text{ si } -17 \le x \le \tfrac{\pi}{3}-1;\\
s(x+y) &= s(x) \text{ si } y \text{ es racional};\\
\theta\left(\frac{\pi^2}{17}\right) &= \theta\left(\frac{36}{\pi}\right);\\
\alpha_x(x) &= x\cdot[f(x)+1];\\
y\left(\frac{1}{3}\right) &= 0,\ y\left(\frac{7}{9}\right) = -\pi.
\end{aligned}$$

Si la expresión $f(s(a))$ le parece poco razonable, es que está olvidando que $s(a)$ es un número igual que otro cualquiera, por tanto $f(s(a))$ tiene sentido. De hecho, $f(s(a)) = s(a)$ para todo a. ¿Por qué? Incluso expresiones más complicadas que $f(s(a))$ no son más difíciles de descifrar cuando se tiene un poco de práctica. La expresión

$$f(r(s(\theta(\alpha_3(y(\tfrac{1}{3})))))),$$

por temible que parezca, puede ser evaluada muy fácilmente con un poco de paciencia:

$$\begin{aligned}
&f(r(s(\theta(\alpha_3(y(\tfrac{1}{3}))))))\\
&= f(r(s(\theta(\alpha_3(0)))))\\
&= f(r(s(\theta(3))))\\
&= f(r(s(16)))\\
&= f(r(1))\\
&= f(1)\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Los primeros problemas del final de este capítulo permiten adquirir más práctica en el manejo de este simbolismo.

La función definida en (1) es un caso particular de una clase muy importante de funciones, las funciones polinómicas. Una función f es una **función polinómica** si existen números reales $a_0, \ldots, a_n$ tales que

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \qquad \text{para todo } x$$

(cuando $f(x)$ se escribe de esta forma, en general se asume tácitamente que $a_n \neq 0$). La potencia más alta de x con un coeficiente no nulo se denomina el **grado** de f; por ejemplo, la función polinómica f definida mediante $f(x) = 5x^6 + 137x^4 - \pi$ es de grado 6.

Las funciones definidas en (2) y (3) pertenecen a una clase algo más amplia de funciones, las **funciones racionales**; éstas son funciones de la forma p/q donde p y q son funciones polinómicas (y q no es la función que toma siempre el valor 0). Las funciones racionales son, a su vez, ejemplos muy especiales de una clase todavía más amplia de funciones, muy estudiada en el cálculo, que son más sencillas que muchas de las funciones mencionadas al principio de este capítulo. Los siguientes son ejemplos de esta clase de funciones:

(9) $f(x) = \dfrac{x + x^2 + x \operatorname{sen}^2 x}{x \operatorname{sen} x + x \operatorname{sen}^2 x}$.

(10) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$.

(11) $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x^2))$.

(12) $f(x) = \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^2(x \operatorname{sen}^2 x^2))) \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{x + \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} x)}{x + \operatorname{sen} x}\right)$.

El lector puede sentirse impulsado a preguntar cuál es el criterio para considerar que dichas funciones son simples, especialmente la monstruosidad (12). La respuesta es que todas ellas pueden obtenerse a partir de unas pocas funciones más simples, utilizando unos pocos métodos de combinar funciones. Para construir las funciones (9)–(12) necesitamos comenzar con la "función identidad" I, definida mediante $I(x) = x$, y la "función seno" sen, cuyo valor $\operatorname{sen}(x)$ en x a menudo se representa simplemente mediante $\operatorname{sen} x$. A continuación se dan algunos métodos importantes para combinar funciones y obtener nuevas funciones.

Si f y g son dos funciones cualesquiera, podemos definir una nueva función $f+g$, denominada la **suma** de f y g, mediante la ecuación

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

Observemos que según los convenios que hemos adoptado, el dominio de $f+g$ consiste en todos aquellos x para los cuales "$f(x) + g(x)$" tiene sentido, es decir, el conjunto de todos los x pertenecientes al dominio de f y al dominio de g. Si A y B son conjuntos cualesquiera, entonces $A \cap B$ (se lee "A intersección B" o "la intersección de A y B") representa el conjunto de aquellos x que pertenecen a A y a B; esta notación nos permite escribir dominio $(f+g) =$ dominio $f \cap$ dominio g.

Análogamente, podemos definir el **producto** $f \cdot g$ y el **cociente** $\dfrac{f}{g}$ (o f/g) de f y g mediante

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

y

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Además, si g es una función y c un número, definimos una nueva función $c \cdot g$ mediante

$$(c \cdot g)(x) = c \cdot g(x).$$

Éste es un caso particular de la notación $f \cdot g$ si convenimos en que el símbolo c representa en este caso a la función f definida por $f(x) = c$; dicha función, que tiene el mismo valor para todos los números x, se denomina una **función constante**.

El dominio de $f \cdot g$ es dominio $f \cap$ dominio g, y el dominio de $c \cdot g$ es simplemente el dominio de g. Sin embargo, el dominio de f/g es más complicado; puede escribirse mediante dominio $f \cap$ dominio $g \cap \{x : g(x) \neq 0\}$, el símbolo $\{x : g(x) \neq 0\}$ representa el conjunto de números x tales que $g(x) \neq 0$. En general, $\{x : \dots\}$ representa al conjunto de todos los x tales que "..." es cierto. Así, $\{x : x^3 + 3 < 11\}$ representa el conjunto de todos los números x tales que $x^3 < 8$, y por tanto $\{x : x^3 + 3 < 11\} = \{x : x < 2\}$. Cualquiera de estos símbolos podría haberse escrito utilizando el símbolo y en lugar de x. Las variaciones de esta notación son muy frecuentes, pero en general no requieren ninguna aclaración. Cualquiera puede entender que $\{x > 0 : x^3 < 8\}$ representa al conjunto de números positivos cuyo cubo es menor que 8; podría expresarse más formalmente mediante $\{x : x > 0 \text{ y } x^3 < 8\}$. A propósito, este conjunto es igual al conjunto $\{x : 0 < x < 2\}$. Hay una variante menos evidente pero muy utilizada. El conjunto $\{1, 3, 2, 4\}$, por ejemplo, contiene a los números $1, 2, 3$ y 4; puede representarse también mediante $\{x : x = 1 \text{ ó } x = 3 \text{ ó } x = 2 \text{ ó } x = 4\}$.

Algunos hechos relativos a la suma, el producto y el cociente de funciones son consecuencias obvias de hechos relativos a las sumas, productos y cocientes de números. Por ejemplo, es muy fácil comprobar que

$$(f + g) + h = f + (g + h).$$

La prueba de esta afirmación es característica de casi todas las pruebas que demuestran que dos funciones son iguales; debe demostrarse que ambas tienen el mismo dominio, y el mismo valor en cada uno de los números del dominio. Por ejemplo, para probar que $(f + g) + h = f + (g + h)$, observemos que aplicando la definición a ambos lados de la igualdad, se obtiene

$$\begin{aligned}[(f+g)+h](x) &= (f+g)(x) + h(x) \\ &= [f(x) + g(x)] + h(x)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}[f+(g+h)](x) &= f(x) + (g+h)(x) \\ &= f(x) + [g(x) + h(x)],\end{aligned}$$

y la igualdad de $[f(x) + g(x)] + h(x)$ y $f(x) + [g(x) + h(x)]$ se deduce de las propiedades de los números. En esta demostración no se ha explicitado la igualdad de los dos dominios ya que es un hecho que se deduce obviamente, tan pronto como se empiezan a escribir estas ecuaciones; el dominio de $(f + g) + h$ y de $f + (g + h)$ es claramente dominio $f \cap$ dominio $g \cap$ dominio h. Naturalmente escribimos $f + g + h$ para $(f + g) + h = f + (g + h)$, tal como lo hacíamos con los números.

Es igualmente fácil demostrar que $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$, y esta función se representa mediante $f \cdot g \cdot h$. Las ecuaciones $f+g = g+f$ y $f \cdot g = g \cdot f$ tampoco deberían presentar ninguna dificultad.

Utilizando las operaciones $+$, $\cdot$, $/$ podemos expresar ahora a la función f definida en (9) mediante

$$f = \frac{I + I \cdot I + I \cdot \text{sen} \cdot \text{sen}}{I \cdot \text{sen} + I \cdot \text{sen} \cdot \text{sen}}.$$

Debe quedar claro, sin embargo, que no podemos expresar a la función (10) de esta manera. Para poder hacerlo, necesitamos otro método para combinar funciones. La combinación denominada composición de dos funciones es con mucho la más importante.

Si f y g son dos funciones cualesquiera, definimos una nueva función $f \circ g$, la **composición** de f y g, mediante

$$(f \circ g)(x) = f(g(x));$$

el dominio de $f \circ g$ es $\{x : x \text{ está en el dominio de } g \text{ y } g(x) \text{ está en el dominio de } f\}$. El símbolo "$f \circ g$" se lee a menudo "$f$ círculo g".

Comparado con la frase "la composición de f y g" tiene la ventaja de la brevedad, desde luego, pero además, representado de esta manera es mucho menos probable confundir $f \circ g$ con $g \circ f$, que, en general, *no* son iguales; de hecho, casi cualquier f y g elegidas al azar ilustran este hecho (el lector puede comprobarlo con $f = I \cdot I$ y $g = \text{sen}$, por ejemplo). Para evitar que nos volvamos demasiado aprensivos con la operación de composición, apresurémonos a decir que la composición *es* asociativa:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

(la demostración es trivial); esta función se representa mediante $f \circ g \circ h$. Ahora podemos expresar las funciones (10), (11) y (12) mediante

(10) $f = \text{sen} \circ (I \cdot I)$,

(11) $f = \text{sen} \circ \text{sen} \circ (I \cdot I)$,

(12) $f = (\text{sen} \cdot \text{sen}) \circ \text{sen} \circ (\text{sen} \cdot \text{sen}) \circ (I \cdot [(\text{sen} \cdot \text{sen}) \circ (I \cdot I)]) \cdot \text{sen} \circ \left(\dfrac{I + \text{sen} \circ (I \cdot \text{sen})}{I + \text{sen}}\right).$

El lector ya habrá observado que, aunque este método de escribir funciones revela su "estructura" muy claramente, no es ni breve ni conveniente. Desafortunadamente, el nombre más breve para la función f tal que $f(x) = \text{sen}\,(x^2)$ para todo x parece ser "la función f tal que $f(x) = \text{sen}\,(x^2)$ para todo x". Desde hace doscientos años se ha reconocido la necesidad de abreviar esta descripción tan farragosa, pero ninguna abreviación razonable ha tenido una aceptación universal. Por el momento, la abreviatura más aceptada es algo así como

$$x \to \text{sen}\,(x^2)$$

(que se lee "a x le corresponde $\text{sen}\,(x^2)$" o simplemente "x flecha $\text{sen}\,(x^2)$"), pero no es popular entre los escritores de libros de cálculo. En este libro toleraremos expresiones como "la función $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$". Más popular incluso es la expresión totalmente drástica: "la función $\operatorname{sen}(x^2)$". Para evitar imprecisiones, nunca utilizaremos dicha expresión, ya que, estrictamente hablando, confunde un número con una función, aunque es tan conveniente que es probable que el lector acabe adoptándola para su uso personal. Como ocurre con cualquier convenio, la utilidad es el factor motivador, y este criterio es razonable siempre que las ligeras deficiencias lógicas no puedan causar confusión. De vez en cuando la confusión *surgirá* a no ser que se utilice una descripción más precisa. Por ejemplo, "la función $x+t^3$" es una frase ambigua; podría significar tanto

$$x \to x+t^3, \text{ es decir, la función } f \text{ tal que } f(x) = x+t^3 \text{ para todo } x$$

o

$$t \to x+t^3, \text{ es decir, la función } f \text{ tal que } f(t) = x+t^3 \text{ para todo } t.$$

Como veremos, sin embargo, para muchos conceptos importantes asociados con funciones, el cálculo infinitesimal tiene una notación que incorpora el símbolo "$x \to$".

Por ahora hemos investigado ya suficientemente a las funciones para estar en condiciones de reconsiderar nuestra definición. Hemos definido a una función como una "regla", pero no está claro qué significa esta expresión. Si preguntamos "¿Qué ocurre si nos saltamos la regla?" no es fácil decidir si se trata de una broma o la cuestión tiene implicaciones realmente importantes. Otra objeción más seria a la utilización de la palabra "regla" es que

$$f(x) = x^2$$

y

$$f(x) = x^2 + 3x + 3 - 3(x+1)$$

son ciertamente reglas *distintas*, si por regla entendemos las instrucciones que se dan para determinar $f(x)$; sin embargo, queremos que

$$f(x) = x^2$$

y

$$f(x) = x^2 + 3x + 3 - 3(x+1)$$

definan la misma función. Por esta razón, una función se define a veces como una "asociación" entre números; por desgracia, la palabra "asociación" se salva de las objeciones planteadas contra la palabra "regla" sólo por el hecho de ser todavía más vaga.

Existe, por supuesto, una manera satisfactoria de definir funciones, ya que de lo contrario no nos habríamos tomado las molestias de criticar a nuestra definición original. Pero una definición satisfactoria nunca puede encontrarse buscando sinónimos de las palabras que presentan alguna dificultad. La definición de "función" que ha sido aceptada finalmente por los matemáticos, es un ejemplo ilustrativo de cómo se incorporan las ideas intuitivas en la matemática. La cuestión correcta que hay que preguntarse respecto a una función no es "¿qué es una regla?" o "¿qué es una asociación?" sino "¿qué hay que conocer de una función para saberlo todo acerca de ella?". La respuesta a esta última pregunta es fácil: para cada número x es necesario conocer el número $f(x)$; podemos imaginar una tabla en la que se incluye toda la información acerca de la función $f(x) = x^2$:

x	$f(x)$
1	1
-1	1
2	4
-2	4
$\sqrt{2}$	2
$-\sqrt{2}$	2
π	π^2
$-\pi$	π^2

Incluso no es necesario disponer los números en una tabla (lo que resultaría imposible si quisiéramos ponerlos todos). En lugar de una tabla con dos columnas, podríamos considerar distintos pares de números

$$(1,1),\ (-1,1),\ (2,4),\ (-2,4),\ (\pi,\pi^2),\ (\sqrt{2},2),\ldots$$

reunidos simplemente formando un conjunto.* Para hallar $f(1)$ tomamos simplemente el segundo elemento del par cuyo primer elemento es 1; para hallar $f(\pi)$ tomamos el segundo elemento del par cuyo primer elemento es π. Parece que estamos diciendo que una función podría definirse mediante una colección de pares de números. Por ejemplo, si tuviésemos la siguiente colección (que contiene sólo 5 pares):

$$f = \{(1,7),\ (3,7),\ (5,3),\ (4,8),\ (8,4)\},$$

entonces $f(1) = 7$, $f(3) = 7$, $f(5) = 3$, $f(4) = 8$, $f(8) = 4$ y 1, 3, 4, 5, 8 son los únicos números del dominio de f. Si consideramos la colección

$$f = \{(1,7),\ (3,7),\ (2,5),\ (1,8),\ (8,4)\},$$

entonces $f(3) = 7$, $f(2) = 5$, $f(8) = 4$; pero es imposible decidir si $f(1) = 7$ o $f(1) = 8$. En otras palabras, una función no puede definirse como una colección cualquiera de pares de números; hemos de eliminar la posibilidad de que existan ambigüedades como la que ha surgido en este caso. Esto nos lleva, por tanto, a la siguiente definición.

Definición

Una **función** es una colección de pares de números con la siguiente propiedad: si (a,b) y (a,c) pertenecen a la colección, entonces $b = c$; en otras palabras, la colección no puede contener dos pares distintos con el mismo primer elemento.

*Los pares que aquí se presentan se denominan a menudo "pares ordenados", para destacar que, por ejemplo, $(2,4)$ no es el mismo par que $(4,2)$. Hay que advertir que vamos a definir las funciones en términos de pares ordenados, otro término que tampoco hemos definido. Sin embargo, los pares ordenados se *pueden* definir, tal como se ha hecho en un apéndice a este capítulo, para los escépticos.

Esta es nuestra primera definición completamente desarrollada e ilustra el formato que siempre utilizaremos para definir a los conceptos nuevos realmente significativos. Estas definiciones son tan importantes (al menos tan importantes como los teoremas) que es esencial saber cuando se puede disponer de una de ellas, y distinguirlas de los comentarios, observaciones y explicaciones informales. Van precedidas de la palabra **Definición**, contienen el término que es definido en negrita y se enmarcan en un párrafo individualizado.

Hay otra definición (en realidad define dos cosas a la vez) que ahora podemos formular de manera rigurosa:

Definición

Si f es una función, el **dominio** de f es el conjunto de todos los a para los que existe algún b tal que (a,b) está en f. Si a pertenece al dominio de f, se deduce a partir de la definición de función que existe, en efecto, un *único* número b tal que (a,b) pertenece a f. Este único b se designa por $\boldsymbol{f(a)}$.

Con esta definición hemos logrado nuestro objetivo: lo importante de una función f es que se pueda determinar el número $f(x)$ para cada número x de su dominio. El lector puede tener la impresión que hemos llegado a un punto en el que se ha sustituido una definición intuitiva por una abstracción dificil de comprender. Quizás puede servirle de consuelo saber que, aunque hemos definido una función como una colección de pares ordenados, nada puede impedirle *pensar* en una función como una regla. Además, ni la definición intuitiva ni la formal indican cuál es la mejor manera de pensar acerca de las funciones. Lo mejor es hacer dibujos; pero esto exige por sí solo todo un capítulo.

Problemas

1. Sea $f(x) = 1/(1+x)$. ¿Qué es?

   (i) $f(f(x))$ (¿Para qué x tiene sentido?)

   (ii) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

   (iii) $f(cx)$.

   (iv) $f(x+y)$.

   (v) $f(x)+f(y)$.

   (vi) ¿Para qué números c existe un número x tal que $f(cx) = f(x)$? Indicación: Hay muchos más de los que podría parecer a primera vista.

   (vii) ¿Para qué números c se cumple que $f(cx) = f(x)$ para dos números x distintos?

2. Sea $g(x) = x^2$, y sea

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ racional} \\ 1, & x \text{ irracional.} \end{cases}$$

(i) ¿Para cuáles y es $h(y) \leq y$?
(ii) ¿Para cuáles y es $h(y) \leq g(y)$?
(iii) ¿Qué es $g(h(z)) - h(z)$?
(iv) ¿Para cuáles w es $g(w) \leq w$?
(v) ¿Para cuáles ε es $g(g(\varepsilon)) = g(\varepsilon)$?

3. Halle el dominio de las funciones definidas por las siguientes fórmulas:

(i) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
(ii) $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$.
(iii) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$.
(iv) $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1}$.
(v) $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-2}$.

4. Sea $S(x) = x^2$, $P(x) = 2^x$, y $s(x) = \operatorname{sen} x$. Halle cada una de las siguientes expresiones. En cada caso la respuesta ha de ser un *número*.

(i) $(S \circ P)(y)$.
(ii) $(S \circ s)(y)$.
(iii) $(S \circ P \circ s)(t) + (s \circ P)(t)$.
(iv) $s(t^3)$.

5. Exprese cada una de las siguientes funciones en términos de S, P, s, utilizando únicamente $+$, $\cdot$, y $\circ$ (por ejemplo, la respuesta a (1) es $P \circ s$). En cada caso la respuesta debe ser una *función*.

(i) $f(x) = 2^{\operatorname{sen} x}$.
(ii) $f(x) = \operatorname{sen} 2^x$.
(iii) $f(x) = \operatorname{sen} x^2$.
(iv) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ (recuerde que $\operatorname{sen}^2 x$ es una abreviación para $(\operatorname{sen} x)^2$).
(v) $f(t) = 2^{2^t}$. (Nota: a^{b^c} *siempre* significa $a^{(b^c)}$; este convenio se adopta porque $(a^b)^c$ se puede escribir simplemente como a^{bc}.)
(vi) $f(u) = \operatorname{sen}(2^u + 2^{u^2})$.
(vii) $f(y) = \operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}\left(2^{2^{2^{\operatorname{sen} y}}}\right)\right)\right)$.
(viii) $f(a) = 2^{\operatorname{sen}^2 a} + \operatorname{sen}(a^2) + 2^{\operatorname{sen}(a^2 + \operatorname{sen} a)}$.

Las funciones polinómicas, al ser simples aunque también flexibles, ocupan un lugar destacado en muchas investigaciones dedicadas al estudio de funciones. Los dos problemas siguientes ilustran su flexibilidad, y permiten deducir sus propiedades elementales más importantes.

6. (a) Si $x_1, \ldots, x_n$ son números distintos, encuentre una función polinómica f_i de grado $n-1$ que tome el valor 1 en x_i y 0 en x_j para $j \neq i$. Indicación: El producto de todos los $(x - x_j)$ para $j \neq i$, es 0 en x_j si $j \neq i$. (Este producto se representa normalmente mediante

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j),$$

el símbolo Π (pi mayúscula) desempeña el mismo papel para los productos que el símbolo Σ para las sumas.)

(b) Encuentre ahora una función polinómica f de grado $n-1$ tal que $f(x_i) = a_i$, donde $a_1, \ldots, a_n$ son números dados. (Utilice las funciones f_i del apartado (a). La fórmula que se obtendrá es la denominada "fórmula de interpolación de Lagrange".)

7. (a) Demuestre que para cualquier función polinómica f, y cualquier número a, existe una función polinómica g, y un número b, tal que $f(x) = (x-a)g(x) + b$ para todo x. (La idea consiste simplemente en dividir $f(x)$ por $(x-a)$ mediante la división larga hasta encontrar un resto constante. Por ejemplo, el cálculo

$$\begin{array}{r|llll}
 & x^2 & +x & -2 & \\
\hline
x-1 & x^3 & & -3x & +1 \\
 & x^3 & -x^2 & & \\
\cline{2-4}
 & & x^2 & -3x & \\
 & & x^2 & -x & \\
\cline{3-4}
 & & & -2x & +1 \\
 & & & -2x & +2 \\
\cline{4-5}
 & & & & -1
\end{array}$$

demuestra que $x^3 - 3x + 1 = (x-1)(x^2+x-2) - 1$. Es posible dar una demostración formal por inducción sobre el grado de f.)

(b) Demuestre que si $f(a) = 0$, entonces $f(x) = (x-a)g(x)$ para alguna función polinómica g. (La recíproca es evidente.)

(c) Demuestre que si f es una función polinómica de grado n, entonces f posee como máximo n raíces, es decir, existen como máximo n números a con $f(a) = 0$.

(d) Demuestre que para cada n existe una función polinómica de grado n con n raíces. Si n es par, encuentre una función polinómica de grado n que no posea raíces, y si n es impar, encuentre una con sólo una raíz.

8. ¿Para qué números a, b, c y d la función

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

satisface $f(f(x)) = x$ para todo x? (¿Para qué números dicha ecuación tiene sentido?)

9. (a) Si A es un conjunto cualquiera de números reales, defina una función C_A de la manera siguiente:

$$C_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ pertenece a } A \\ 0, & \text{si } x \text{ no pertenece a } A. \end{cases}$$

Encuentre expresiones para $C_{A\cap B}$, $C_{A\cup B}$ y $C_{\mathbf{R}-A}$, en términos de C_A y C_B. (El símbolo $A \cap B$ se ha definido en este capítulo, pero los otros dos pueden ser nuevos para el lector. Pueden definirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x : x \text{ pertenece a } A \text{ o } x \text{ pertenece a } B\}, \\ \mathbf{R} - A &= \{x : x \text{ pertenece a } \mathbf{R} \text{ pero } x \text{ no pertenece a } A\}.) \end{aligned}$$

(c) Suponga que f es una función tal que $f(x) = 0$ o 1 para todo x. Demuestre que existe un conjunto A tal que $f = C_A$.

(d) Demuestre que $f = f^2$ si y sólo si $f = C_A$ para algún conjunto A.

10. (a) ¿Para qué funciones f existe una función g tal que $f = g^2$? Indicación: Es posible responder a la pregunta si "función" se sustituye por "número".

(b) ¿Para qué funciones f existe una función g tal que $f = 1/g$?

*(c) ¿Para qué funciones b y c se puede encontrar una función x tal que

$$(x(t))^2 + b(t)x(t) + c(t) = 0$$

para todos los números t?

*(d) ¿Qué condiciones deben satisfacer las funciones a y b si ha de existir una función x tal que

$$a(t)x(t) + b(t) = 0$$

para todos los números t? ¿Cuántas de estas funciones x existirán?

11. (a) Suponga que H es una función y que y es un número tal que $H(H(y)) = y$. ¿Cuál es el valor de

$$\underbrace{H(H(H(\cdots(H(y)\cdots)}_{80 \text{ veces}}\,?$$

(b) La misma cuestión, sustituyendo 80 por 81.

(c) La misma cuestión si $H(H(y)) = H(y)$.

*(d) Encuentre una función H tal que $H(H(x)) = H(x)$ para todos los números x, y tal que $H(1) = 36$, $H(2) = \pi/3$, $H(13) = 47$, $H(36) = 36$, $H(\pi/3) = \pi/3$, $H(47) = 47$. (No intente "despejar" $H(x)$; existen muchas funciones H que verifican $H(H(x)) = H(x)$. Las demás condiciones impuestas a H se han dado para ayudar al lector a encontrar una función H adecuada.)

*(e) Encuentre una función H tal que $H(H(x)) = H(x)$ para todo x, y tal que $H(1) = 7$, $H(17) = 18$.

12. Una función f es **par** si $f(x) = f(-x)$ e **impar** si $f(x) = -f(-x)$. Por ejemplo, f es par si $f(x) = x^2$ o $f(x) = |x|$ o $f(x) = \cos x$, mientras que f es impar si $f(x) = x$ o $f(x) = \operatorname{sen} x$.

(a) Determine si $f + g$ es par, impar o ninguna de las dos, en los cuatro casos obtenidos eligiendo f par o impar, y g par o impar. (Las respuestas se pueden disponer de manera conveniente en una tabla 2×2.)

(b) La misma cuestión para $f \cdot g$.

(c) La misma cuestión para $f \circ g$.

(d) Demuestre que cada función f puede escribirse como $f(x) = g(|x|)$, para infinitas funciones g.

***13.** (a) Demuestre que cualquier función f con dominio $\mathbf{R}$ se puede escribir como $f = E + O$, siendo E una función par y O una función impar.

(b) Demuestre que esta manera de escribir f es única. (Si el lector intenta resolver primero el apartado (b) "despejando" E y O, probablemente encuentre la solución del apartado(a).)

14. Si f es una función cualquiera, defina una nueva función $|f|$ mediante $|f|(x) = |f(x)|$. Si f y g son funciones, defina dos nuevas funciones, máx (f, g) y mín (f, g), mediante

$$\begin{aligned} \text{máx}\,(f, g)(x) &= \text{máx}\,(f(x), g(x)), \\ \text{mín}\,(f, g)(x) &= \text{mín}\,(f(x), g(x)). \end{aligned}$$

Halle una expresión para máx (f, g) y mín (f, g) en términos de $|\ \ |$.

15. (a) Demuestre que $f = \text{máx}\,(f,0) + \text{mín}\,(f,0)$. Esta manera particular de escribir f se utiliza con frecuencia; las funciones máx $(f,0)$ y mín $(f,0)$ se denominan **parte positiva** y **parte negativa**, respectivamente, de f.

(a) Una función f se denomina **no negativa** si $f(x) \geq 0$ para todo x. Demuestre que cualquier función f puede escribirse de infinitas maneras como $f = g - h$, donde g y h son no negativas. (La manera "estándar" es $g = \text{máx}\,(f,0)$ y $h = -\text{mín}\,(f,0)$.) Indicación: Cualquier *número* puede escribirse de infinitas maneras como la diferencia de dos *números* no negativos.

***16.** Suponga que f satisface $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo x e y.

(a) Demuestre que $f(x_1 + \cdots + x_n) = f(x_1) + \cdots + f(x_n)$.

(b) Demuestre que existe un número c tal que $f(x) = cx$ para todo número *racional* x (en este punto no intentamos decir nada acerca de $f(x)$ para x irracional). Indicación: Intente primero imaginar cuál debe ser el número c. Luego demuestre que $f(x) = cx$, primero cuando x es un número natural, luego cuando x es un entero, después cuando x es el recíproco de un entero y, finalmente, para todo número racional x.

***17.** Si $f(x) = 0$ para todo x, entonces f satisface $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo x e y, y también $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ para todo x e y. Suponga ahora que f satisface estas dos propiedades, pero que $f(x)$ no es siempre 0. Demuestre que $f(x) = x$ para todo x, de la manera siguiente:

(a) Demuestre que $f(1) = 1$.

(b) Demuestre que $f(x) = x$ si x es racional.

(c) Demuestre que $f(x) > 0$ si $x > 0$. (Esta parte es más complicada pero si el lector ha prestado atención a las observaciones filosóficas que acompañan a los problemas de los dos últimos capítulos, sabrá cómo resolverlo.)

(d) Demuestre que $f(x) > f(y)$ si $x > y$.

(e) Demuestre que $f(x) = x$ para todo x. Indicación: Utilice el hecho de que entre dos números reales cualesquiera existe un número racional.

***18.** ¿Qué condiciones han de verificar f, g, h, y k para que $f(x)g(y) = h(x)k(y)$ para todo x e y?

***19.** (a) Demuestre que *no* existen funciones f y g con alguna de las siguientes propiedades:

(1) $f(x) + g(y) = xy$ para todo x e y.

(2) $f(x) \cdot g(y) = x + y$ para todo x e y.

Indicación: Intente obtener información acerca de f o g eligiendo valores particulares de x e y.

(b) Halle funciones f y g tales que $f(x+y) = g(xy)$ para todo x e y.

***20.** (a) Halle una función f, distinta de la función constante, tal que $|f(y) - f(x)| \leq |y - x|$.

(b) Suponga que $f(y) - f(x) \leq (y-x)^2$ para todo x e y. (¿Por qué implica esto que $|f(y) - f(x)| \leq (y-x)^2$?) Demuestre que f es una función constante. Indicación: Divida el intervalo de x a y en n subintervalos iguales.

21. Demuestre o dé un contraejemplo para cada una de las siguientes afirmaciones:

(a) $f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$.

(b) $(g+h) \circ f = g \circ f + h \circ f$.

(c) $\dfrac{1}{f \circ g} = \dfrac{1}{f} \circ g$.

(d) $\dfrac{1}{f \circ g} = f \circ \left(\dfrac{1}{g}\right)$.

22. (a) Suponga que $g = h \circ f$. Demuestre que si $f(x) = f(y)$, entonces $g(x) = g(y)$.

(b) Recíprocamente, suponga que f y g son dos funciones tales que $g(x) = g(y)$ si $f(x) = f(y)$. Demuestre que $g = h \circ f$ para alguna función h. Indicación: Intente definir $h(z)$ cuando z es de la forma $z = f(x)$ (estos son los únicos z que importan) y utilice la hipótesis para demostrar que su definición es consistente.

23. Suponga que $f \circ g = I$, donde $I(x) = x$. Demuestre que

(a) si $x \neq y$, entonces $g(x) \neq g(y)$;

(b) cada número b puede escribirse como $b = f(a)$ para algún número a.

***24.** (a) Suponga que g es una función con la propiedad de que $g(x) \neq g(y)$ si $x \neq y$. Demuestre que existe una función f tal que $f \circ g = I$.

(b) Suponga que f es una función tal que cada número b puede escribirse como $b = f(a)$ para algún número a. Demuestre que existe una función g tal que $f \circ g = I$.

***25.** Halle una función f tal que $g \circ f = I$ para alguna función g, pero tal que no exista ninguna función h con $f \circ h = I$.

***26.** Suponga que $f \circ g = I$ y $h \circ f = I$. Demuestre que $g = h$. Indicación: Utilice el hecho de que la composición de aplicaciones es asociativa.

27. (a) Suponga que $f(x) = x + 1$. ¿Existe alguna función g tal que $f \circ g = g \circ f$?

(b) Suponga que f es una función constante. ¿Para qué funciones g se verifica que $f \circ g = g \circ f$?

(c) Suponga que $f \circ g = g \circ f$ para *cualquier* función g. Demuestre que f es la función identidad, $f(x) = x$.

28. (a) Sea F el conjunto de todas las funciones cuyo dominio es $\mathbf{R}$. Utilizando $+$ y $\cdot$ tal como se han definido en este capítulo, demuestre que se verifican todas las propiedades P1–P9, excepto la P7, si se interpretan 0 y 1 como funciones constantes.

(b) Demuestre que P7 no se verifica.

*(c) Demuestre que P10–P12 no pueden verificarse. En otras palabras, demuestre que no existe ninguna colección de funciones P en F, tal que P10–P12 se verifiquen para P. (Es suficiente, y simplifica las cosas, considerar únicamente funciones que valen 0 excepto en dos puntos x_0 y x_1.)

(d) Suponga que se define $f < g$ mediante $f(x) < g(x)$ para todo x. ¿Cuáles de las propiedades P$'$10–P$'$13 (del Problema 1-8) se verifican ahora?

(e) Si $f < g$, ¿se verifica que $h \circ f < h \circ g$? ¿Es $f \circ h < g \circ h$?

Apéndice
Pares ordenados

La noción de par ordenado no sólo es necesaria para la definición de función, sino que también se utilizará en otras partes del libro. Todavía no hemos dado ninguna definición ni tampoco hemos enunciado explícitamente qué propiedades tiene un par ordenado. La única propiedad que vamos a exigir es que un par ordenado (a,b) está determinado por a y b, y por el orden en que a y b vienen dados:

$$\text{si } (a,b)=(c,d), \text{ entonces } a=c \text{ y } b=d.$$

Una manera conveniente de considerar a los pares ordenados es introduciendo simplemente (a,b) como un término no definido y adoptando la propiedad básica como un axioma; ya que esta propiedad es el único hecho significativo relativo a los pares ordenados, no tiene sentido preocuparse preguntándose qué es "realmente" un par ordenado–. Los que encuentren este procedimiento satisfactorio no hace falta que continuen leyendo.

El resto de este pequeño apéndice va dirigido a aquellos lectores que no se sientan satisfechos si no se definen de algún modo los pares ordenados, de manera que esta propiedad básica pase a ser un teorema. No es necesario limitarse a los pares ordenados de números; es conveniente e importante extender la noción de par ordenado a cualquier par de objetos matemáticos. Esto significa que la definición debería incluir sólo conceptos comunes a todas las ramas de la matemática. El único concepto común presente en todas las áreas de la matemática es el de conjunto, y los pares ordenados (al igual que cualquier otra cosa en matemáticas) pueden definirse en este contexto; un par ordenado resultará ser un conjunto de un tipo especial.

Una primera elección obvia podría ser el conjunto $\{a,b\}$, que contiene a los dos elementos a y b, pero no valdría como una definición de (a,b), ya que no es posible determinar a partir de $\{a,b\}$ cuál de los elementos a o b es el primer elemento del par. Un mejor candidato es el sorprendente conjunto:

$$\{\{a\},\{a,b\}\}.$$

Este conjunto posee dos elementos, los cuales son *a su vez* conjuntos; un elemento es el conjunto $\{a\}$, el cual contiene a a como único elemento, el otro elemento es el conjunto $\{a,b\}$. Aunque parezca extraño, vamos a tomar este conjunto como definición de (a,b) . El siguiente teorema justifica esta elección; se verá que esta definición cumple su cometido y realmente no quedará nada importante que decir.

Definición

$$\boldsymbol{(a,b)}=\{\{a\},\{a,b\}\}.$$

Teorema 1. *Si* $(a,b) = (c,d)$, *entonces* $a = c$ *y* $b = d$.

Demostración. Por hipótesis se verifica que

$$\{\{a\},\ \{a,b\}\} = \{\{c\},\ \{c,d\}\}.$$

Ahora bien $\{\{a\},\ \{a,b\}\}$ contiene justamente dos elementos, $\{a\}$ y $\{a,b\}$; y a es el único elemento común a estos dos elementos de $\{\{a\},\ \{a,b\}\}$. Análogamente, c es el único elemento común a los dos elementos de $\{\{c\},\ \{c,d\}\}$. Por tanto $a = c$. Así pues, tenemos

$$\{\{a\},\ \{a,b\}\} = \{\{a\},\ \{a,d\}\},$$

y solamente queda por demostrar que $b = d$. Es conveniente distinguir dos casos.

Caso 1. $b = a$. En este caso, $\{a,b\} = \{a\}$, de modo que el conjunto $\{\{a\},\ \{a,b\}\}$ tiene en realidad un solo elemento que es $\{a\}$. Lo mismo debe verificarse para $\{\{a\},\ \{a,d\}\}$, de modo que $\{a,d\} = \{a\}$, lo cual implica que $d = a = b$.

Caso 2. $b \neq a$. En este caso, b pertenece a uno de los elementos de $\{\{a\},\ \{a,b\}\}$ pero no al otro. Debe verificarse por tanto que b pertenece a uno de los elementos de $\{\{a\},\ \{a,d\}\}$ pero no al otro. Esto puede ocurrir sólo si b pertenece a $\{a,d\}$, pero no a $\{a\}$; así, pues, $b = a$ o $b = d$, pero $b \neq a$, con lo que $b = d$. ■

Gráficas

4

Si se mencionan a un matemático los números reales, probablemente se imaginará, sin él quererlo, a una recta. Y casi con toda seguridad, ni rechazará ni aceptará con demasiado entusiasmo esta representación mental de los números reales. La "intuición geométrica" le permitirá interpretar cuestiones relativas a los números en términos de esta imagen, e incluso puede sugerirle métodos para demostrarlas. Aunque la imagen geométrica no ha sido de gran ayuda en el estudio de las propiedades de los números reales realizado en la Parte I, esta interpretación será muy útil en la Parte II.

El lector probablemente estará familiarizado con el método convencional de considerar la línea recta como una imagen de los números reales, es decir, de asociar a cada número real con un punto de la recta. Para ello (Figura 1) se elige arbitrariamente un punto, que se denomina 0, y un punto a su derecha, que se denomina 1. El punto situado a una distancia doble hacia la derecha respecto del 0, se le denomina 2, el punto situado a una misma distancia del 0 que el 1, pero hacia la izquierda, se le denomina -1, etc. Dada esta distribución, si $a < b$, entonces el punto asociado con a se encuentra a la izquierda del punto asociado con b. También se pueden representar números racionales, como $\frac{1}{2}$, de la manera usual. Normalmente se admite que los números irracionales también encajan en este esquema, de manera que cada número real puede representarse como un punto de la recta. No vamos a detenernos en justificar esta suposición, ya que este método de "dibujar" números va a ser utilizado únicamente para dar una imagen geométrica que ayude a entender ciertas ideas abstractas; las demostraciones nunca se basarán en estas imágenes (aunque se utilizarán para facilitar o sugerir alguna demostración). Como esta imagen geométrica desempeña un papel tan prominente, aunque no esencial, a menudo se utiliza la terminología geométrica cuando se habla de números; así, un número se denomina un *punto*, y $\mathbf{R}$ se denomina la *recta real*.

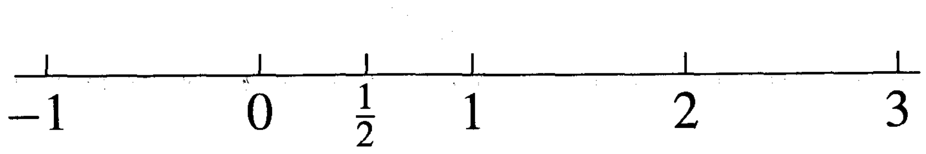


Figura 1

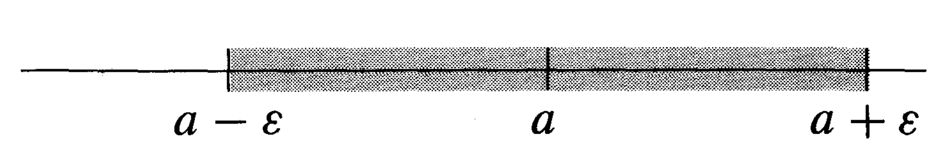


Figura 2

El número $|a-b|$ tiene una representación sencilla en términos de esta imagen geométrica: es la distancia entre a y b, la longitud del segmento rectilíneo que posee el punto a en un extremo y el punto b en el otro. Esto significa, eligiendo como ejemplo un caso que merece una mención especial ya que aparecerá muy a menudo, que el conjunto de números x que satisfacen $|x-a| < \varepsilon$ puede representarse como la colección de puntos cuya distancia a a es menor que ε. Este conjunto de puntos constituve el "intervalo" desde $a-\varepsilon$ hasta $a+\varepsilon$, que también puede ser descrito como los puntos correspondientes a los números x que verifican $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$ (Figura 2).

Los conjuntos de números correspondientes a intervalos aparecen con tanta frecuencia que es conveniente designarlos con nombres específicos. El conjunto $\{x : a < x < b\}$ se representa mediante (a, b) y se denomina el **intervalo abierto** de a a b. Esta notación genera una cierta ambigüedad, ya que (a, b) se utiliza también para representar a un par de números, aunque el contexto siempre permite aclarar (o es fácil aclarar) si se habla de un par o de un intervalo. Observemos que si $a \geq b$, entonces $(a, b) = \emptyset$, un conjunto sin elementos; en la práctica, sin embargo, casi siempre se supone (explícitamente, si se ha sido suficientemente cuidadoso, o implícitamente), que cuando se menciona un intervalo (a, b), el número a es menor que b.

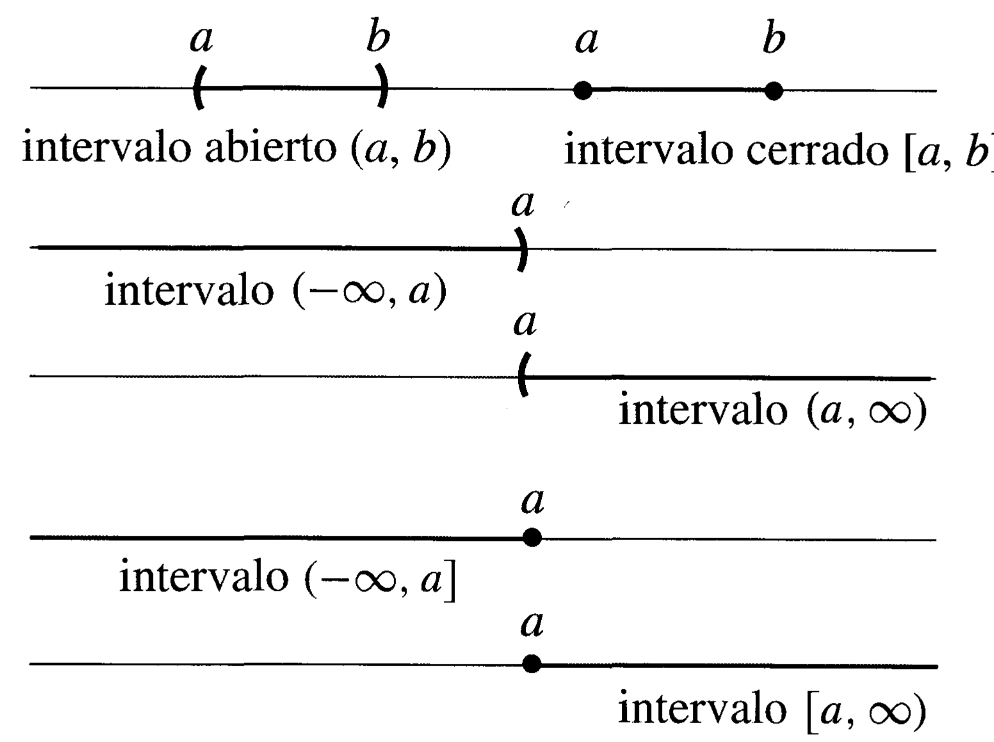


Figura 3

El conjunto $\{x : a \leq x \leq b\}$ se representa mediante $[a, b]$ y se denomina el **intervalo cerrado** de a a b. Este símbolo se reserva, en general, para el caso $a < b$, pero también se utiliza a veces cuando $a = b$. En la Figura 3 se muestran las representaciones geométricas usuales utilizadas para los intervalos (a, b) y $[a, b]$; como ninguna imagen puede indicar exactamente la diferencia entre estos dos intervalos, se han adoptado distintos convenios. En la Figura 3 también se muestran ciertos intervalos "infinitos". El conjunto $\{x : x > a\}$ se representa mediante (a, ∞), mientras que el conjunto $\{x : x \geq a\}$ se representa mediante $[a, \infty)$; los conjuntos $(-\infty, a)$ y $(-\infty, a]$ se definen de manera análoga.

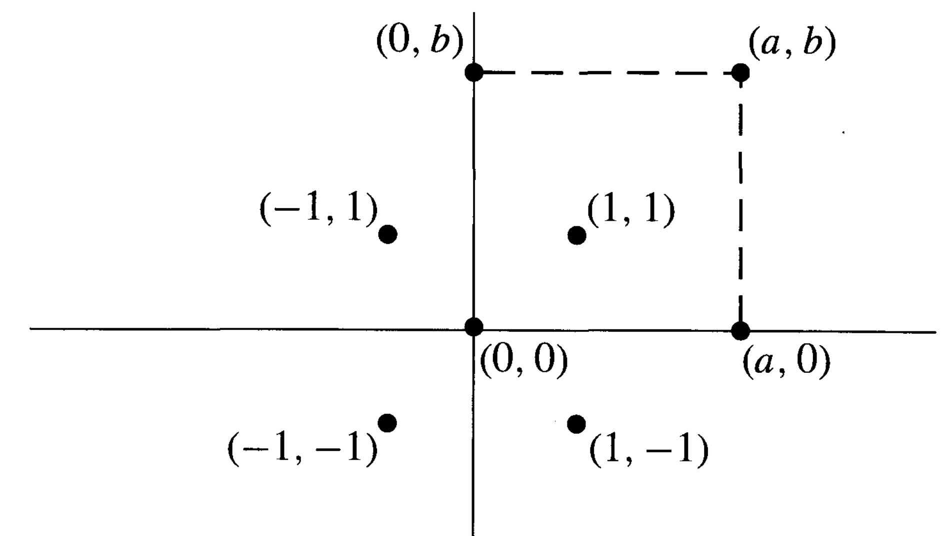


Figura 4

Llegados a este punto, debe advertirse que los símbolos ∞ y $-\infty$, aunque denominados "infinito" y "menos infinito", son *puramente* sugestivos; no existe ningún número "∞" que verifique $\infty \geq a$ para todos los números a. A pesar de que los símbolos ∞ y $-\infty$ aparecerán en muchos contextos, siempre es necesario definir su utilización de manera que se refieran sólo a números. El conjunto $\mathbf{R}$ de todos los números reales también se considera un "intervalo", y se representa a menudo mediante $(-\infty, \infty)$.

Todavía más interesante para nuestros objetivos es el método utilizado para representar pares de números. Este método, con el que el lector estará probablemente familiarizado, requiere un "sistema de coordenadas", dos líneas rectas que se cortan en ángulo recto. Para distinguirlas, a una de ellas se le denomina *eje horizontal*, y a la otra *eje vertical*. (Desde un punto de vista lógico, probablemente sería preferible utilizar una terminología más prosaica, como "primer" y "segundo" eje, aunque como la mayoría de personas sostienen los libros, o colocan sus pizarras, de la misma manera, los términos "horizontal" y "vertical" son más descriptivos.) Los puntos de cada uno de ambos ejes podrían ser representados por números reales, pero también puede utilizarse la notación $(a, 0)$ para representar a los puntos del eje horizontal, y la notación $(0, b)$ para representar a los del eje vertical, de manera que la intersección de ambos ejes, el "origen" de coordenadas, se representa mediante $(0, 0)$. Cualquier par (a, b) se puede representar tal como se indica en la Figura 4, situado en el vértice del rectángulo cuyos otros tres vértices son $(0, 0)$, $(a, 0)$ y $(0, b)$. Los números a y b se denominan la *primera* y *segunda coordenadas*, respectivamente, del punto determinado de esta manera.

Hay que recordar que lo que nos interesa realmente es disponer de un método para representar funciones. Ya que una función no es más que una colección de pares de números, podemos representar a una función dibujando cada uno de los pares de números que la forman. El dibujo obtenido de esta manera se denomina la **gráfica** de la función. En otras palabras, la gráfica de f contiene todos los puntos correspondientes a los pares $(x, f(x))$. Ya que la mayoría de funciones contienen infinitos pares, dibujar la gráfica mediante este procedimiento puede parecer una tarea imposible, pero de hecho, muchas funciones tienen gráficas que son muy fáciles de dibujar.

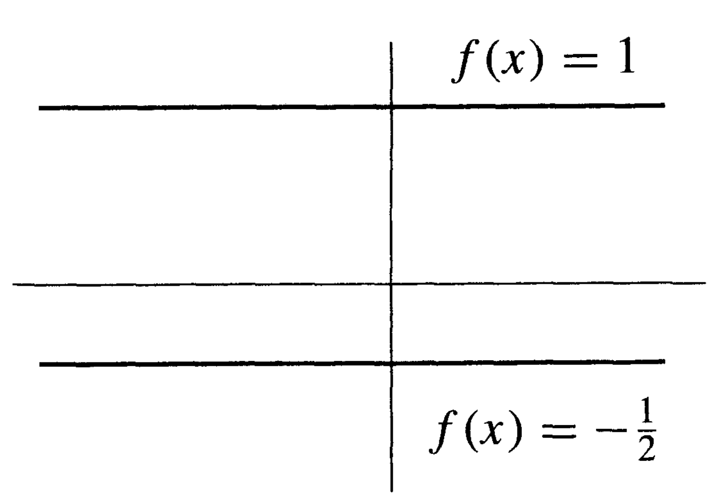


Figura 5

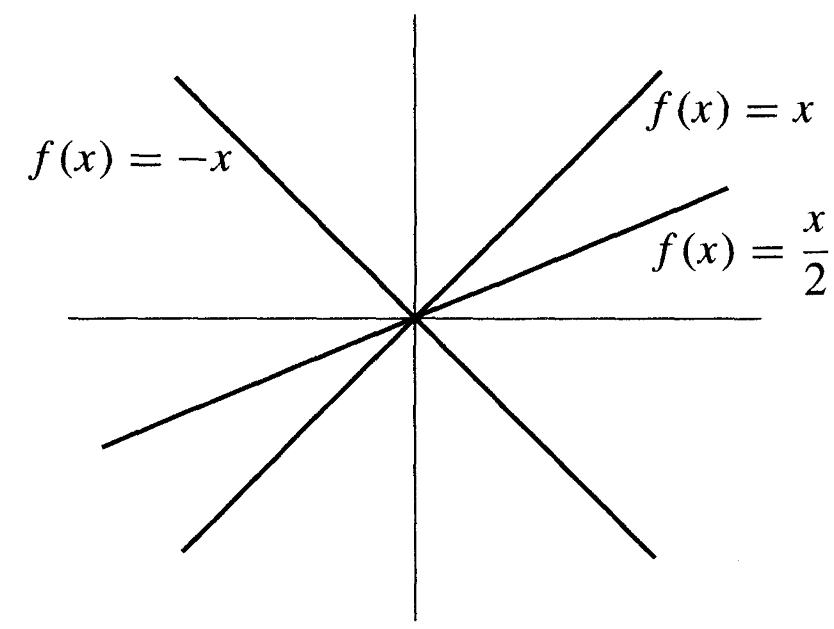


Figura 6

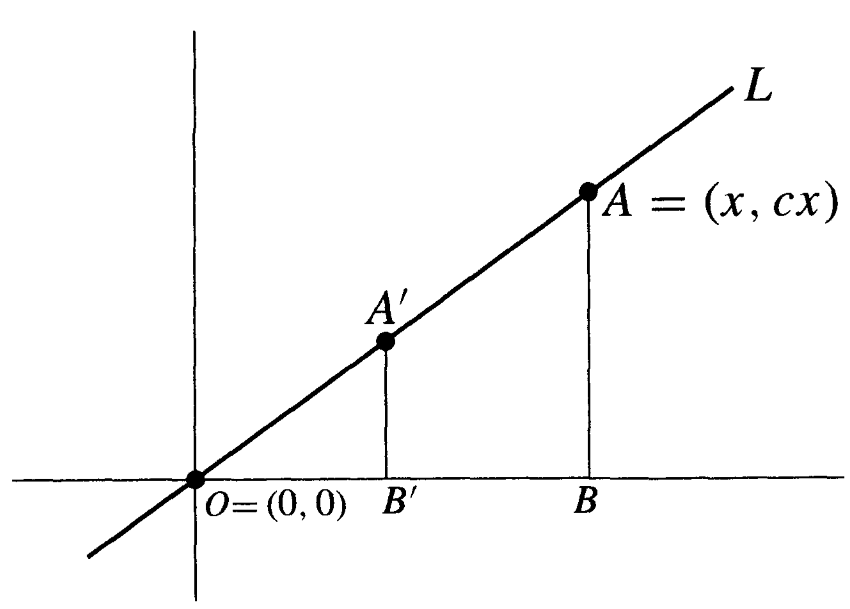


Figura 7

No es de extrañar que las funciones más sencillas, las funciones constantes $f(x) = c$, tengan también las gráficas más simples. Es fácil ver que la gráfica de la función $f(x) = c$ es una línea recta paralela al eje horizontal, situada a una distancia c de dicho eje (Figura 5).

Las funciones $f(x) = cx$ poseen también gráficas particularmente sencillas; líneas rectas que pasan por el origen $(0, 0)$, como se muestra en la Figura 6. En la Figura 7 se indica una demostración de este hecho: sea x cualquier número distinto de 0, y sea L la recta que pasa por el origen O, que corresponde a $(0, 0)$, y por el punto A, correspondiente a (x, cx). Un punto A', cuya primera coordenada es y, se situará sobre la recta L si el triángulo $A'B'O$ es semejante al triángulo ABO, es decir cuando

$$\frac{A'B'}{OB'} = \frac{AB}{OB} = c;$$

lo que demuestra que A' debe corresponder al punto (y, cy), es decir, que A' es un punto de la gráfica de f. El argumento ha supuesto, implícitamente, que $c > 0$, pero los casos restantes son igualmente fáciles de demostrar. El número c, que mide la razón entre los lados de los triángulos que aparecen en la demostración, se denomina la *pendiente* de la recta, y toda recta paralela a ésta se dice también que tiene pendiente c.

Esta demostración no ha sido numerada ni tampoco tratada como una demostración formal. De hecho, una demostración rigurosa exigiría una digresión para la cual no estamos preparados. La demostración rigurosa de *cualquier* proposición que relacione conceptos algebraicos y geométricos requeriría en primer lugar una verdadera demostración (o una aceptación explícita) de que los puntos de una línea recta se corresponden exactamente con los números reales. Aparte de esto sería necesario desarrollar la geometría plana con la misma precisión con que pretendemos desarrollar las propiedades de los números reales. El desarrollo de la geometría plana, a pesar de ser un tema fascinante, no es en ningún modo un requisito previo para el estudio del cálculo. Utilizaremos imágenes geométricas solamente como ayuda para la intuición; para nuestros fines (y para la mayor parte de las matemáticas) es perfectamente satisfactorio *definir* el plano como el conjunto de todos los pares de números reales, y *definir* las rectas como ciertas colecciones de pares, incluyendo, entre otras, las colecciones $\{(x, cx) : x \text{ un número real}\}$. Para dotar a esta geometría, artificialmente construida, de toda la estructura de la geometría que se estudia en el bachillerato, hace falta una definición más. Si (a, b) y (c, d) son dos puntos del plano, es decir, pares de números reales, *definimos* la **distancia** entre (a, b) y (c, d) como

$$\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}.$$

Si no está claro lo que motiva esta definición, la Figura 8 puede servir como explicación adecuada; con esta definición el teorema de Pitágoras ha sido incorporado a nuestra geometría.*

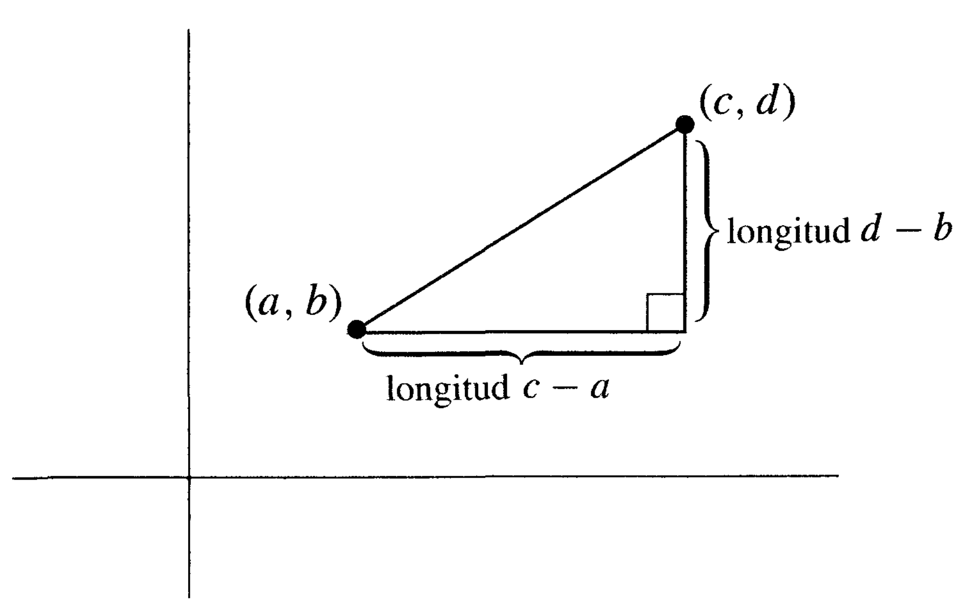


Figura 8

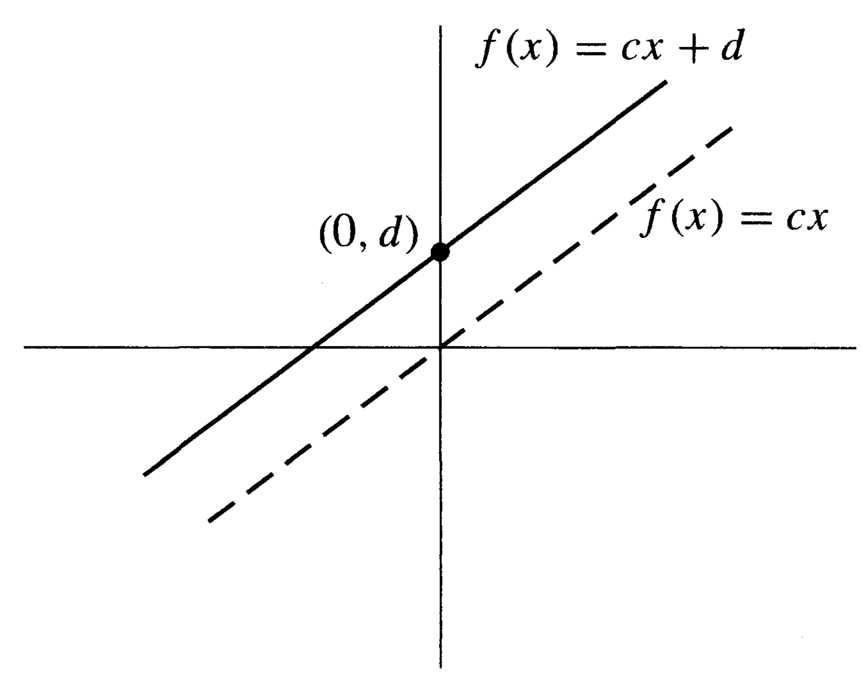


Figura 9

Volviendo una vez más a nuestra imagen geométrica informal, no es difícil ver (Figura 9) que la gráfica de la función $f(x) = cx + d$ es una recta de pendiente c que pasa por el punto $(0, d)$. Por esta razón, las funciones $f(x) = cx + d$ se denominan **funciones lineales**. Aunque sencillas, las funciones lineales se presentan con frecuencia y el lector debería sentirse cómodo trabajando con ellas. El siguiente es un ejemplo típico cuya solución no debe presentar dificultad. Dados dos puntos distintos (a, b) y (c, d), hallar la

*El lector escrupuloso podría objetar a esta definición diciendo que no se sabe todavía que los números no negativos posean raíces cuadradas. Por el momento no podemos dar una respuesta a esta objeción; la definición tendrá que ser aceptada con reservas hasta que sea dilucidado este punto.

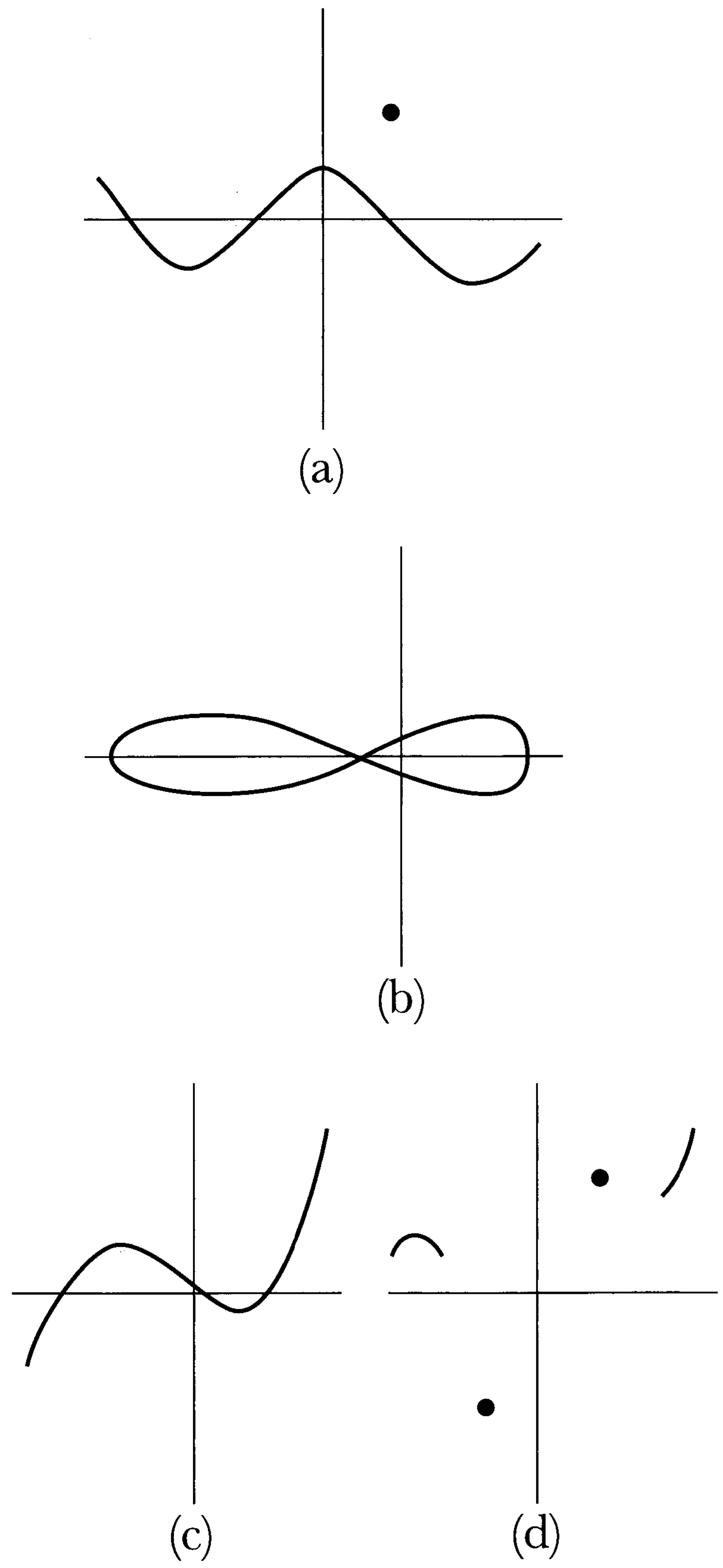


Figura 10

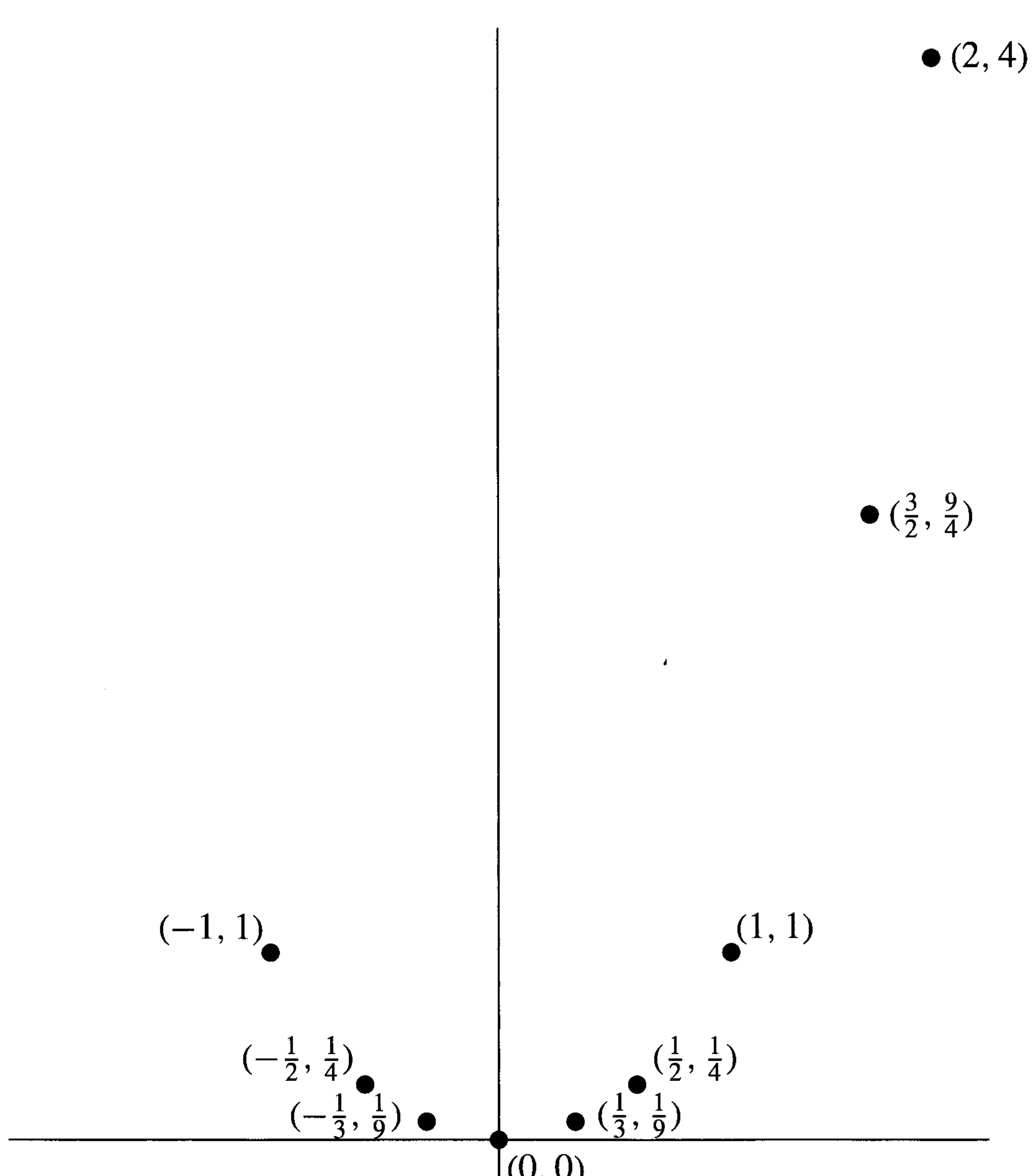


Figura 11

función lineal f cuya gráfica pasa por (a, b) y (c, d). Esto equivale a decir que $f(a) = b$ y $f(c) = d$. Si f ha de ser de la forma $f(x) = \alpha x + \beta$, entonces se debe verificar que

$$\begin{aligned} \alpha a + \beta &= b, \\ \alpha c + \beta &= d; \end{aligned}$$

por lo tanto $\alpha = (d-b)/(c-a)$ y $\beta = b - [(d-b)/(c-a)]a$, de manera que

$$f(x) = \frac{d-b}{c-a}x + b - \frac{d-b}{c-a}a = \frac{d-b}{c-a}(x-a) + b,$$

fórmula fácil de recordar usando la "forma punto-pendiente" (ver el Problema 6).

Por supuesto, esta solución tiene sentido sólo si $a \neq c$; las gráficas de las funciones lineales corresponden solamente a rectas no paralelas al eje vertical. Las rectas verticales no son gráficas de *ninguna* función; de hecho la gráfica de una función no puede contener ni siquiera dos puntos situados sobre la misma vertical. Esta conclusión se desprende inmediatamente de la definición de función; dos puntos sobre la misma vertical corresponden a pares de la forma (a, b) y (a, c) y, por definición, una función no puede contener (a, b) y (a, c) si $b \neq c$. Viceversa, si un conjunto de puntos del plano tiene la propiedad de que no hay dos puntos situados sobre la misma vertical, entonces dicho conjunto es la gráfica de una función. Así, los dos primeros conjuntos de la Figura 10 no son gráficas de funciones y los dos últimos sí lo son; observemos que el cuarto es la gráfica de una función cuyo dominio no es todo $\mathbf{R}$, pues algunas líneas verticales no poseen ningún punto.

Después de las funciones lineales, quizás la función más simple sea $f(x) = x^2$. Si trazamos algunos de los pares de f, es decir, algunos de los pares de la forma (x, x^2), obtenemos una imagen como la de la Figura 11.

No es difícil convencerse de que todos los pares (x, x^2) están sobre una curva como la que se ve en la Figura 12; esta curva es conocida por el nombre de **parábola**.

Puesto que una gráfica no es sino un dibujo sobre papel, hecho (en este caso) con tinta de imprenta, la pregunta "¿Es éste el aspecto que tiene realmente la gráfica?" es difícil de responder. Un dibujo no es nunca *realmente* correcto puesto que toda línea tiene un grosor. Sin embargo, hay algunas preguntas que sí *pueden* formularse: por ejemplo, ¿de qué forma se puede estar seguro que la gráfica no tiene el aspecto de uno de los dibujos de la Figura 13? Es fácil ver e incluso demostrar que la gráfica no puede tener el mismo aspecto que (a); pues si $0 < x < y$, entonces $x^2 < y^2$, de manera que la gráfica debería ser más alta en y que en x, lo cual no es el caso en (a). Es también fácil ver, dibujando sencillamente una gráfica muy exacta, trazando en primer lugar muchos pares (x, x^2), que la gráfica no puede tener un gran "salto" como en (b) o un "ángulo" como en (c). Para demostrar estas afirmaciones debemos, sin embargo, definir en términos matemáticos qué significa que una función tenga un "salto" o un "ángulo"; estas ideas encierran ya algunos de los conceptos fundamentales del cálculo. Eventualmente podremos definirlas con rigor, pero mientras tanto el lector puede entretenerse intentando definir estos conceptos y examinando después críticamente sus definiciones. Estas definiciones pueden ser comparadas luego con las establecidas por los matemáticos. Aquellos para quienes la comparación resulte favorable merecen ciertamente la enhorabuena.

Las funciones $f(x) = x^n$, siendo n un número natural, se denominan generalmente **funciones potenciales**. Resulta fácil comparar sus gráficas como en la Figura 14, dibujando varias a la vez.

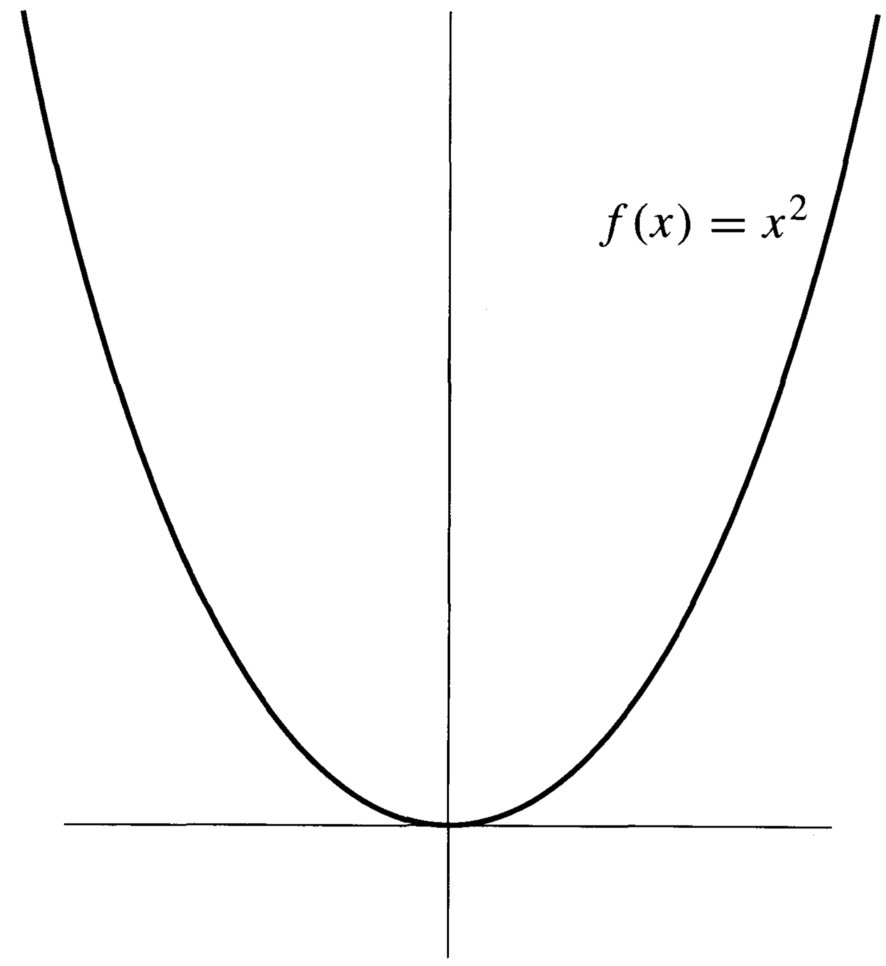


Figura 12

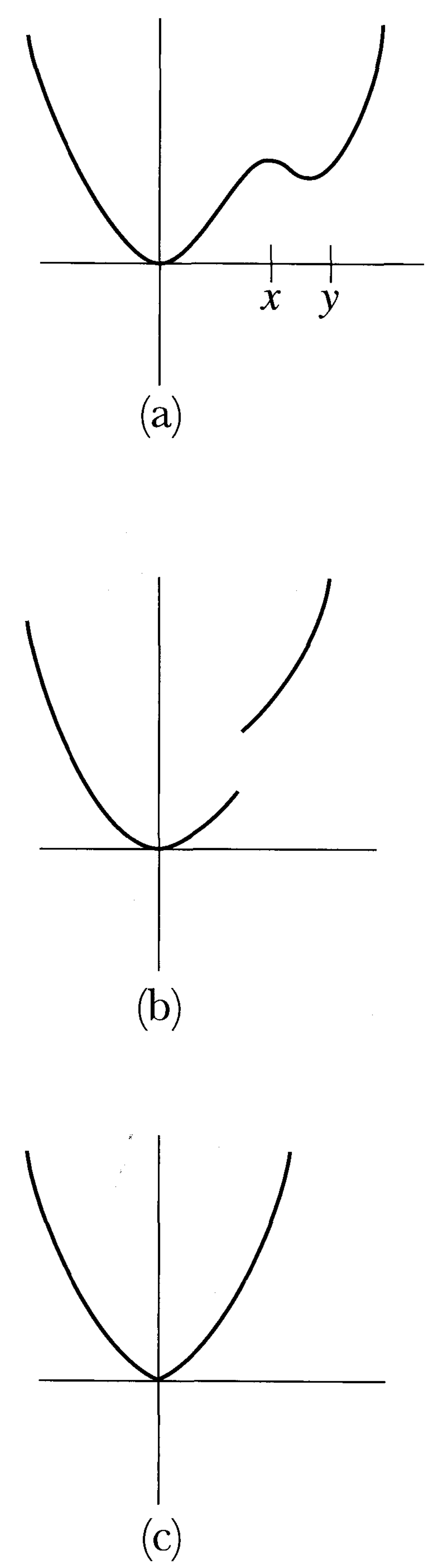


Figura 13

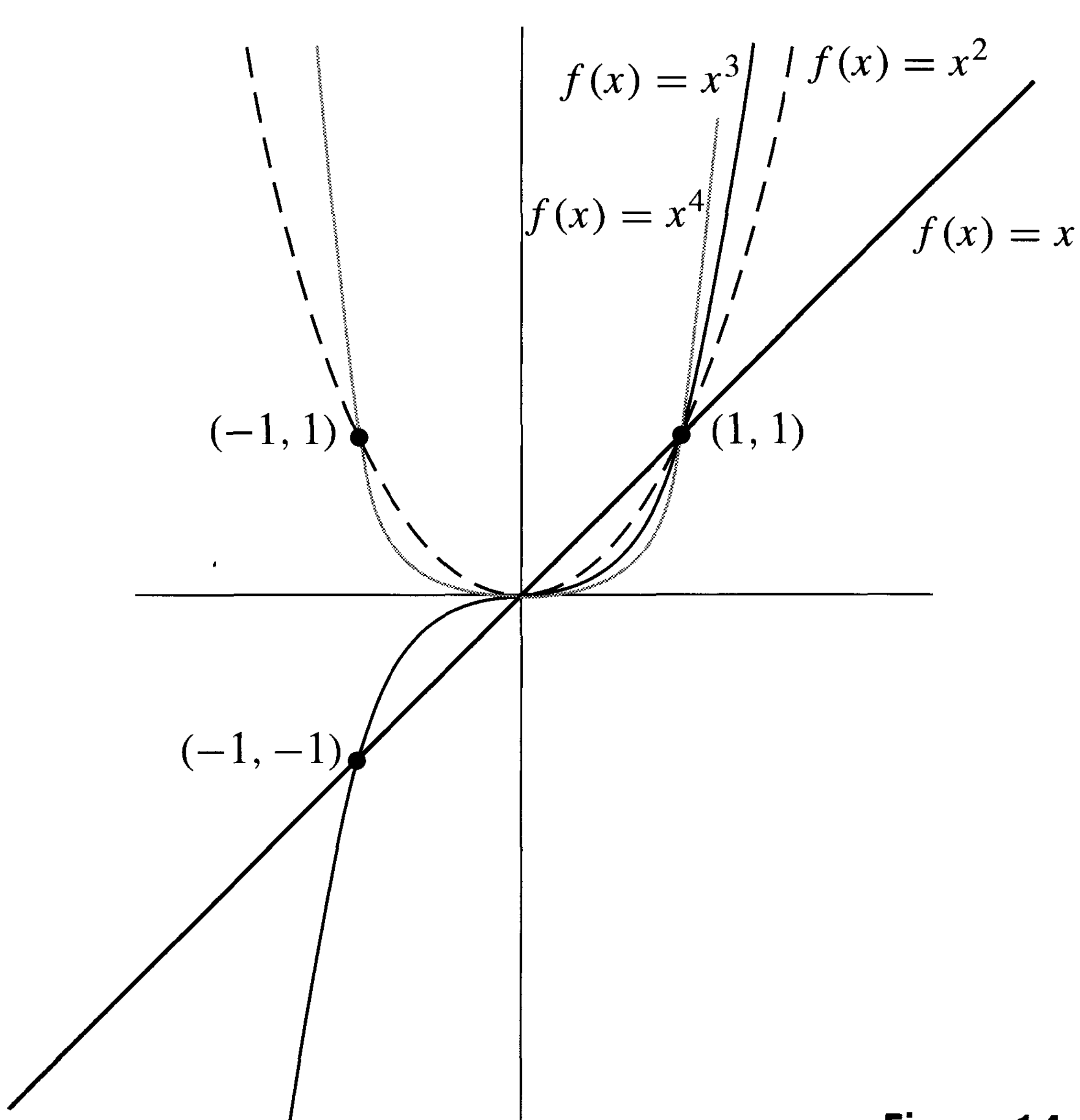


Figura 14

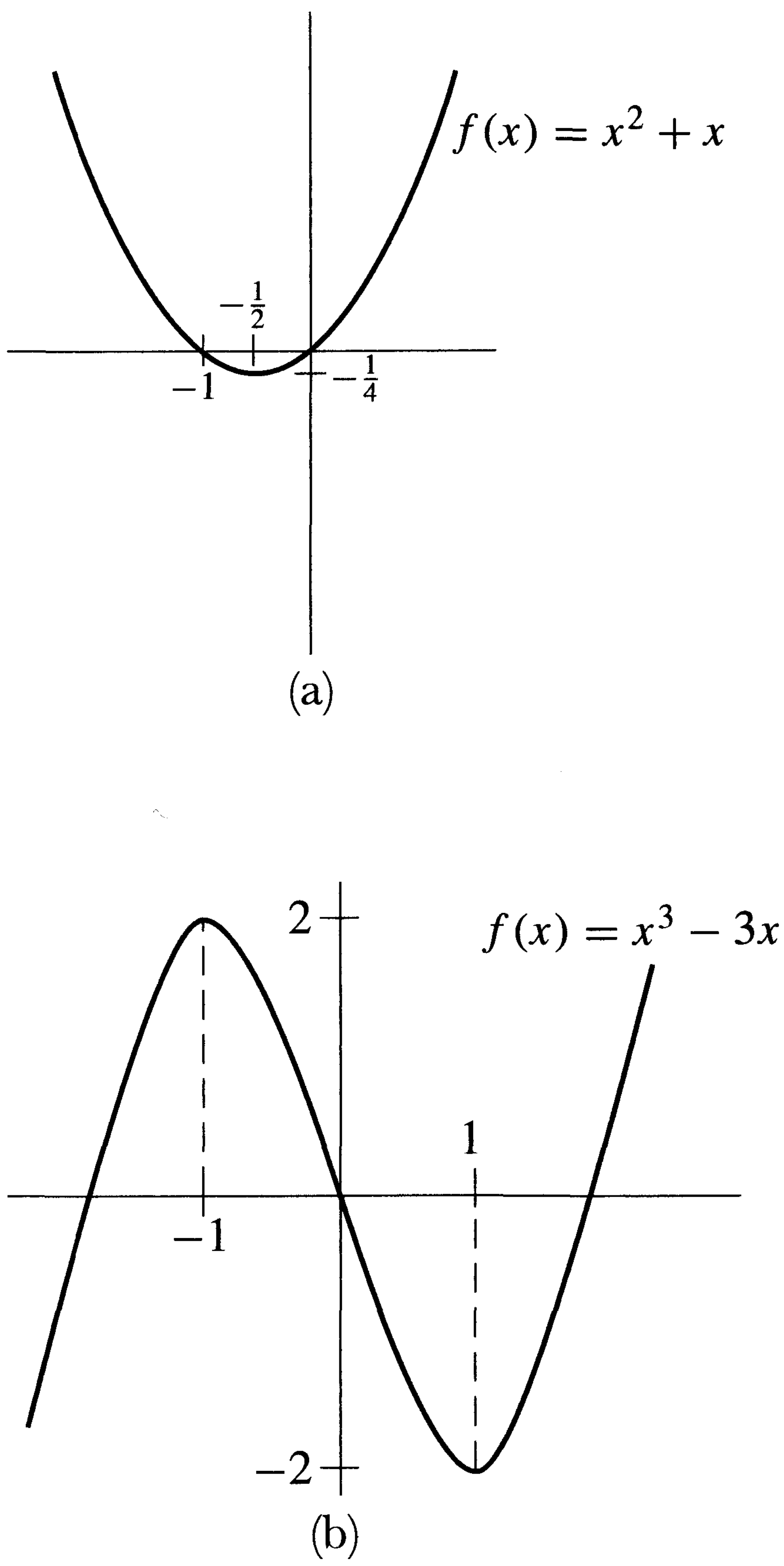


Figura 15

Las funciones potenciales son solamente casos especiales de las funciones polinómicas introducidas en el capítulo anterior. En la Figura 15 se representa la gráfica de dos funciones polinómicas particulares, y en la Figura 16 se pretende dar una idea general de la gráfica de la función polinómica

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

en el caso $a_n > 0$.

En general, la gráfica de f tendrá a lo sumo $n-1$ "picos" o "valles" (un "pico" es un punto como el $(x, f(x))$ de la Figura 16, mientras que un "valle" es un punto como el $(y, f(y))$. El número de picos y valles puede, en realidad, ser mucho más pequeño (las funciones potenciales, por ejemplo, tienen a lo sumo un valle). Aunque estas proposiciones se formulan fácilmente, no las demostraremos hasta la Parte III (una vez que se disponga de los potentes métodos de la Parte III, las demostraciones serán muy fáciles).

La Figura 17 muestra la gráfica de varias funciones racionales. Las funciones racionales exhiben todavía mayor variedad que las funciones polinómicas, pero su comportamiento será también fácil de analizar una vez que se pueda hacer uso de la derivada, el instrumento básico de la Parte III.

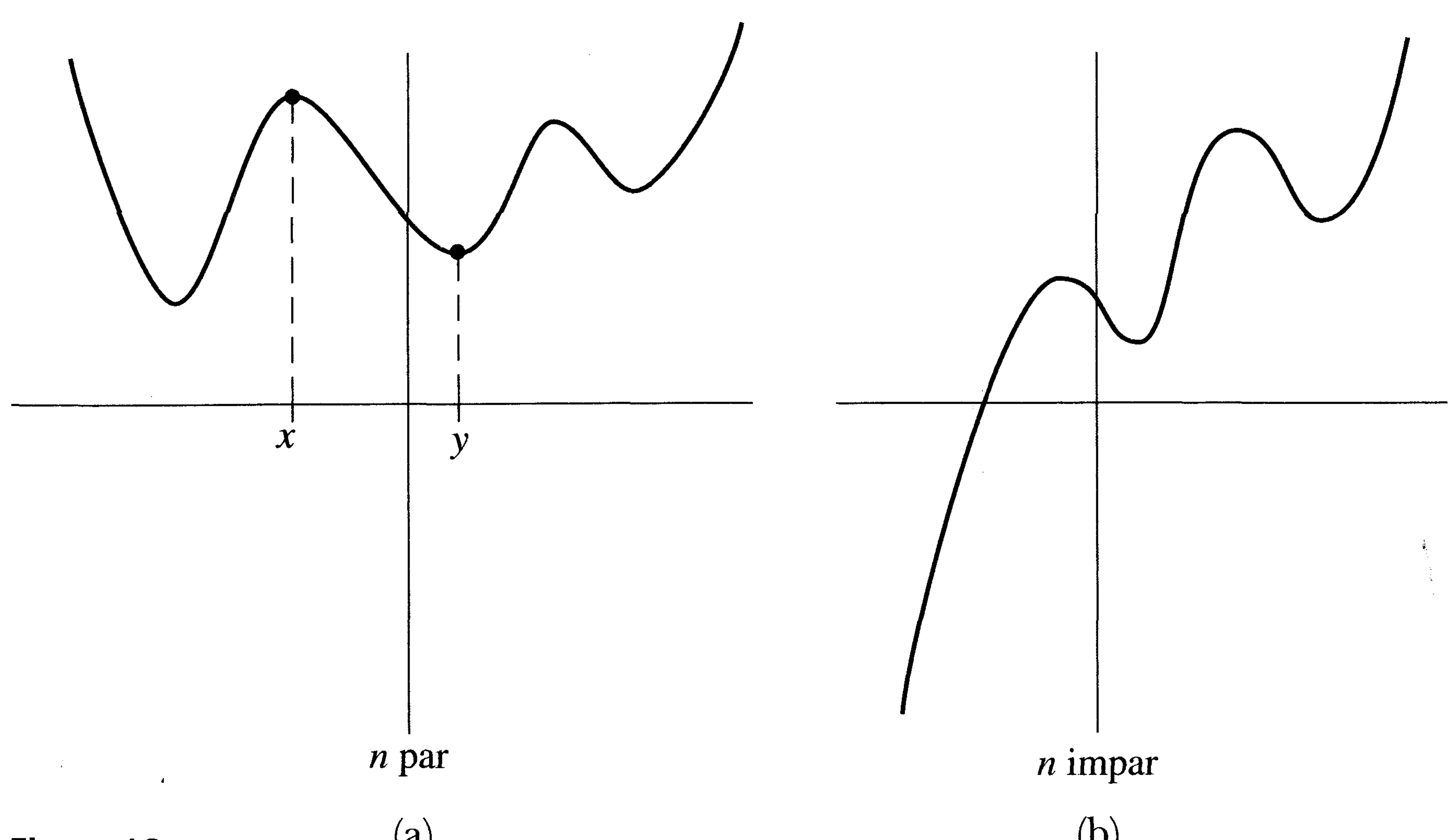


Figura 16

Muchas gráficas interesantes pueden construirse "juntando" las gráficas de funciones ya estudiadas. La gráfica de la Figura 18 está compuesta totalmente por rectas. La función f con esta gráfica satisface

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^{n+1},$$

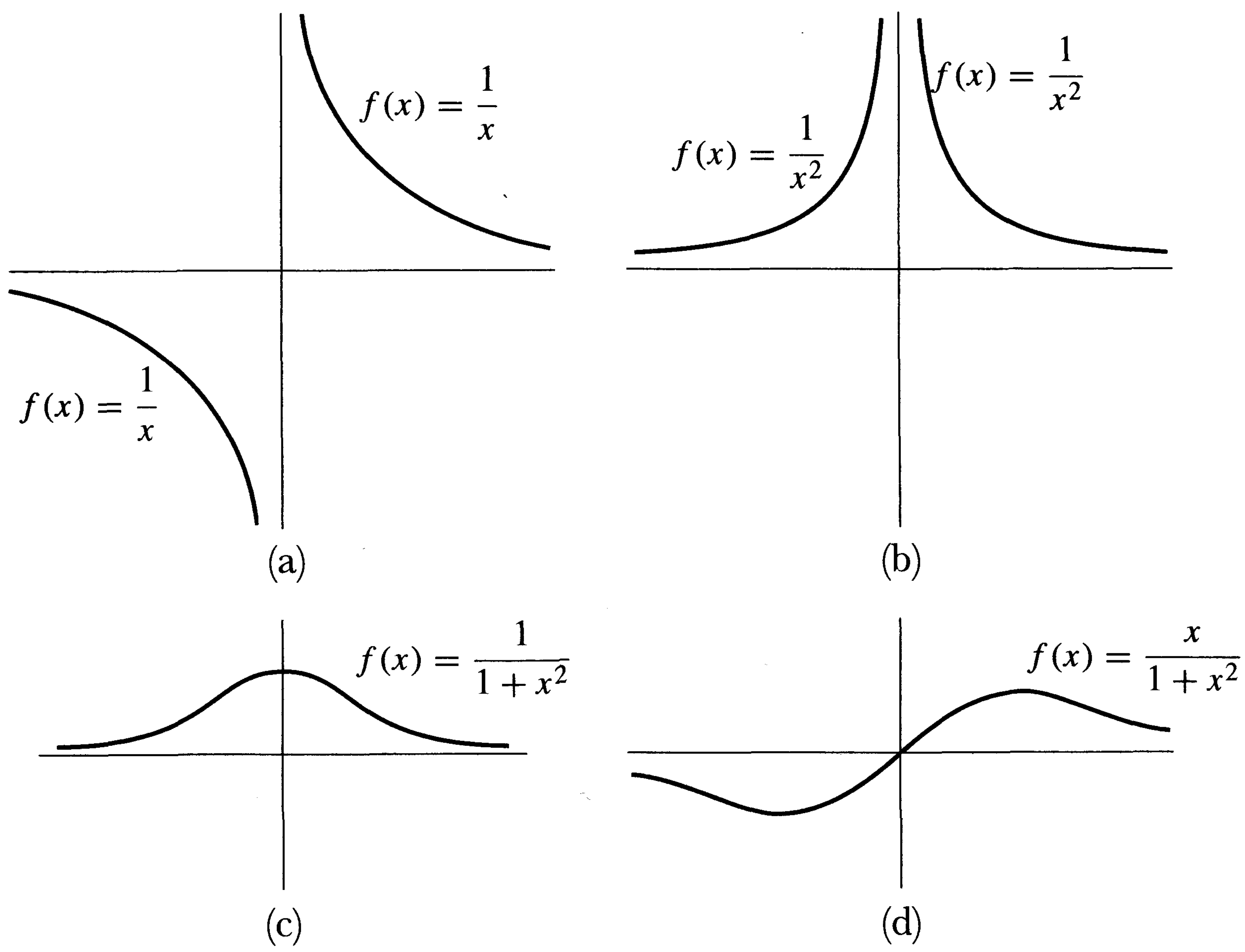


Figura 17

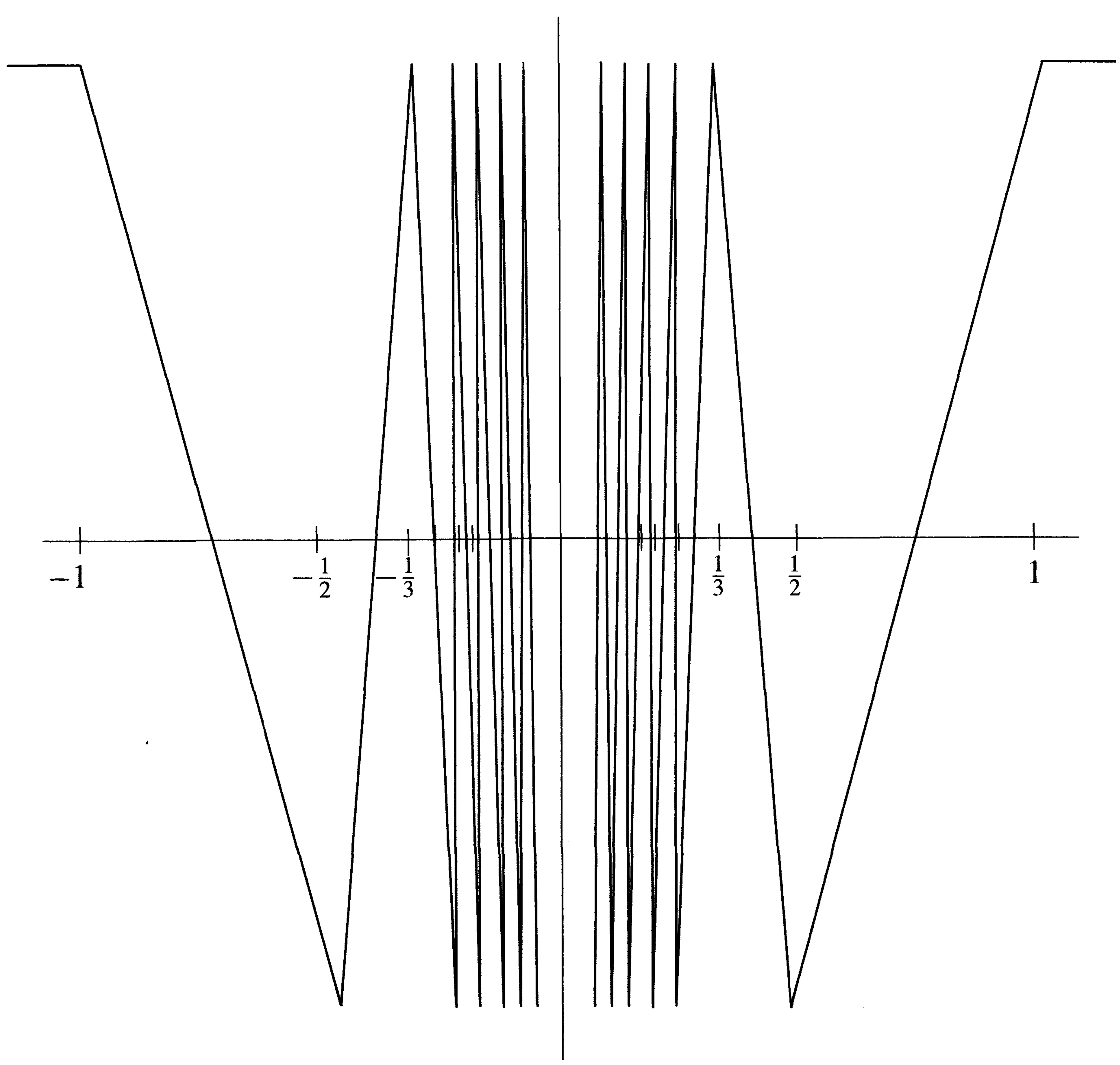


Figura 18

$$f\left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{n+1},$$

$$f(x) = 1, \qquad |x| \geq 1,$$

y es una función lineal en cada intervalo $[1/(n+1), 1/n]$ y $[-1/n, -1/(n+1)]$. (El número 0 no pertenece al dominio de f). Por supuesto se puede escribir una fórmula explícita para $f(x)$, cuando x está en $[1/(n+1), 1/n]$; éste es un buen ejercicio en el uso de funciones lineales y con él se convencerá el lector que una buena imagen vale más que mil palabras.

En realidad, existe una manera mucho más sencilla de definir una función que tiene esta misma propiedad de oscilar infinidad de veces en la proximidad de 0; consiste en utilizar la función seno, que estudiaremos con detalle en el Capítulo 15. Como de costumbre, utilizaremos la medida en radianes, de manera que un ángulo de 2π radianes corresponde a una "vuelta completa", un ángulo de π radianes a un ángulo llano (o de 180°, usando la terminología usual), un ángulo de $\pi/2$ radianes a uno recto, etc.

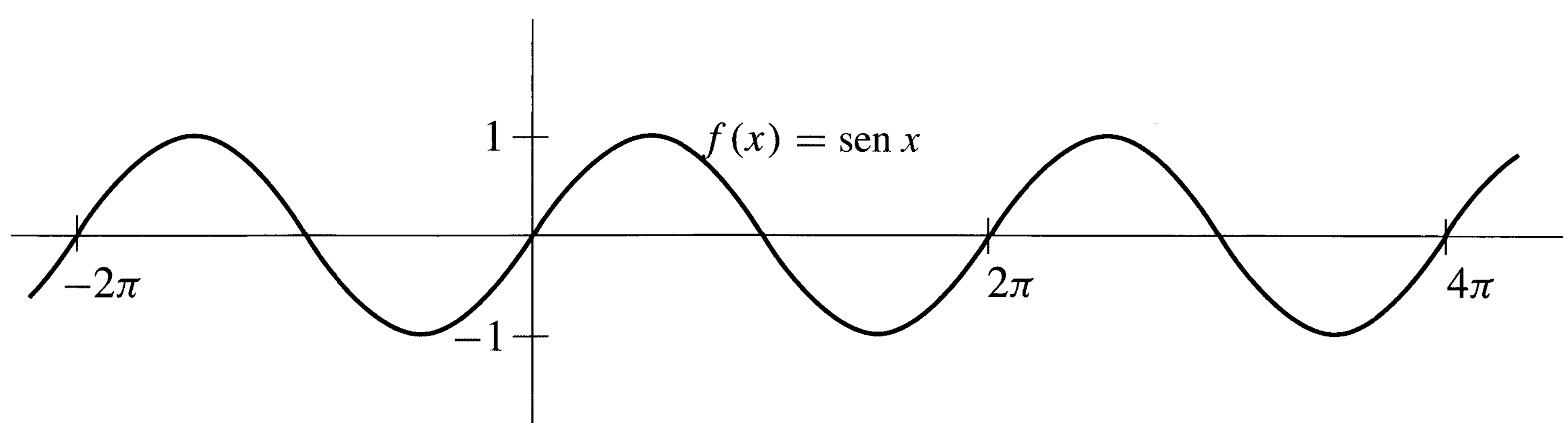


Figura 19

La gráfica de la función seno se muestra en la Figura 19.

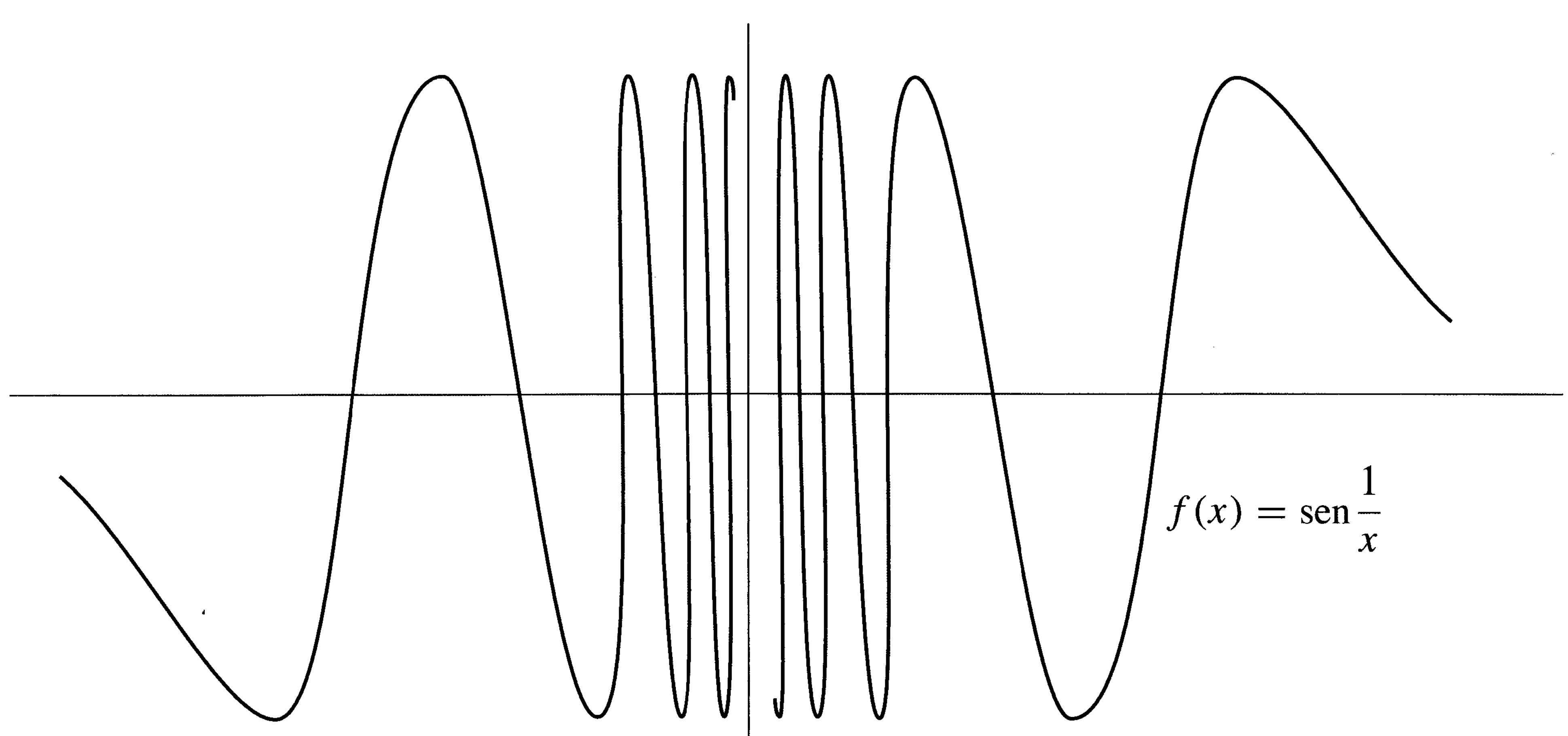


Figura 20

Consideremos ahora la función $f(x) = \operatorname{sen} 1/x$. La gráfica de f se muestra en la Figura 20. Para dibujar esta gráfica conviene observar primero que

$$f(x) = 0 \qquad \text{para } x = \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \ldots,$$

$$f(x) = 1 \qquad \text{para } x = \frac{1}{\frac{1}{2}\pi}, \frac{1}{\frac{1}{2}\pi + 2\pi}, \frac{1}{\frac{1}{2}\pi + 4\pi}, \ldots,$$

$$f(x) = -1 \qquad \text{para } x = \frac{1}{\frac{3}{2}\pi}, \frac{1}{\frac{3}{2}\pi + 2\pi}, \frac{1}{\frac{3}{2}\pi + 4\pi}, \ldots$$

Observemos que cuando x es grande, de modo que $1/x$ es pequeño, $f(x)$ es también pequeño; cuando x es "grande negativo", es decir, cuando $|x|$ es grande con x negativo, de nuevo $f(x)$ se aproxima a 0, aunque $f(x) < 0$.

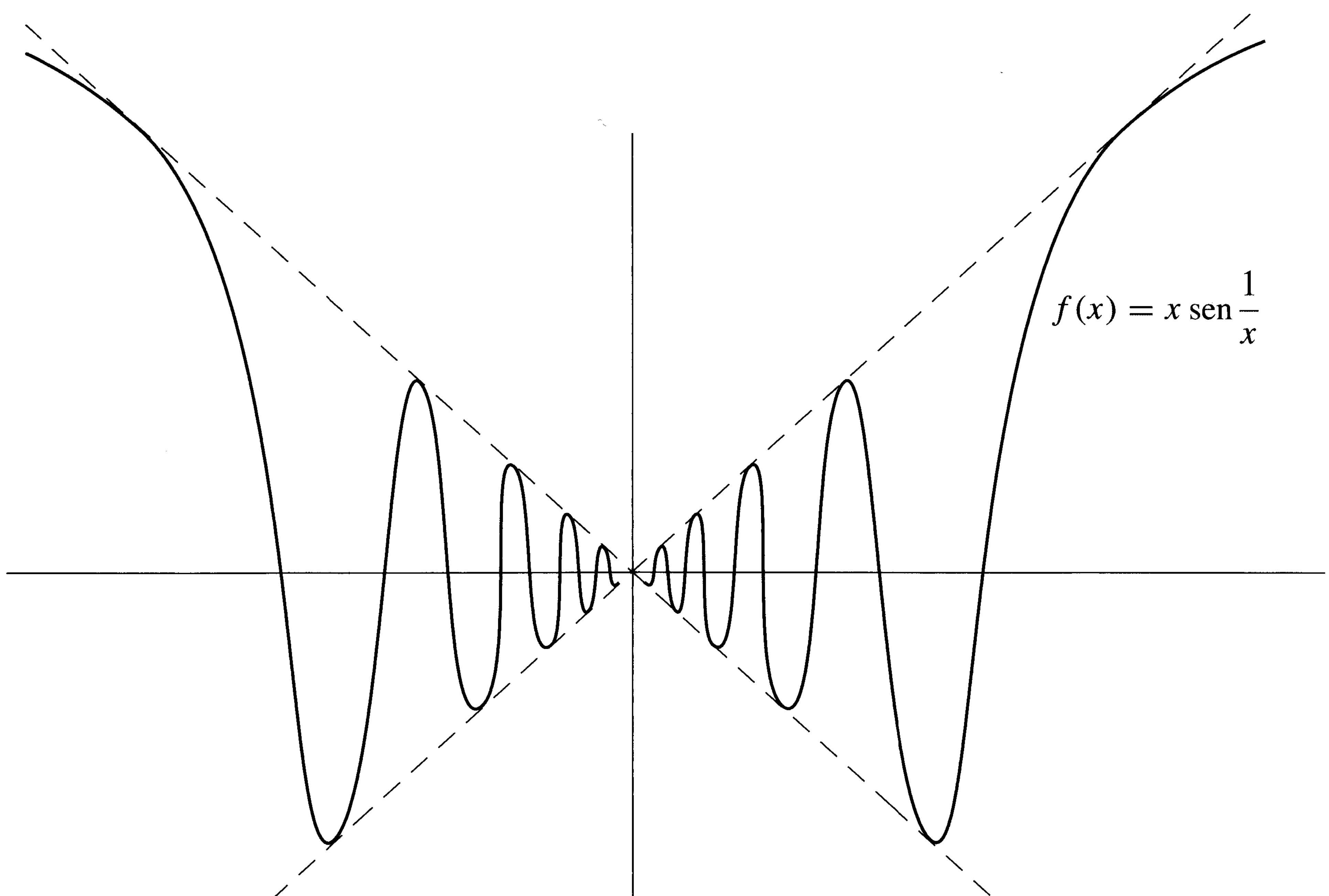


Figura 21

Una modificación interesante de esta función es $f(x) = x \text{ sen } 1/x$. La gráfica de esta función se esboza en la Figura 21. Puesto que sen $1/x$ oscila infinidad de veces en la proximidad de 0 entre 1 y -1, la función $f(x) = x \text{ sen } 1/x$ oscila infinidad de veces entre x y $-x$. El comportamiento de la gráfica cuando x es grande o grande negativo es más difícil de analizar. Puesto que sen $1/x$ se va aproximando a 0, mientras que x se va haciendo cada vez más grande, parece que no pueda haber manera de poder decir cómo va a ser el producto. Este producto *se podrá* hallar, aunque esta cuestión será mejor posponerla hasta la Parte III. Se ha representado también la gráfica de $f(x) = x^2 \text{ sen } 1/x$ (Figura 22).

Para estas funciones infinitamente oscilantes no se puede esperar que la gráfica sea realmente "exacta". Lo más que se puede hacer es mostrar una parte de ella, eliminando la parte próxima a 0 (que es la más interesante). En realidad, es fácil encontrar funciones mucho más sencillas cuya gráfica no puede ser trazada con "exactitud". Las gráficas de

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 2, & x \geq 1 \end{cases} \qquad\qquad g(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$$

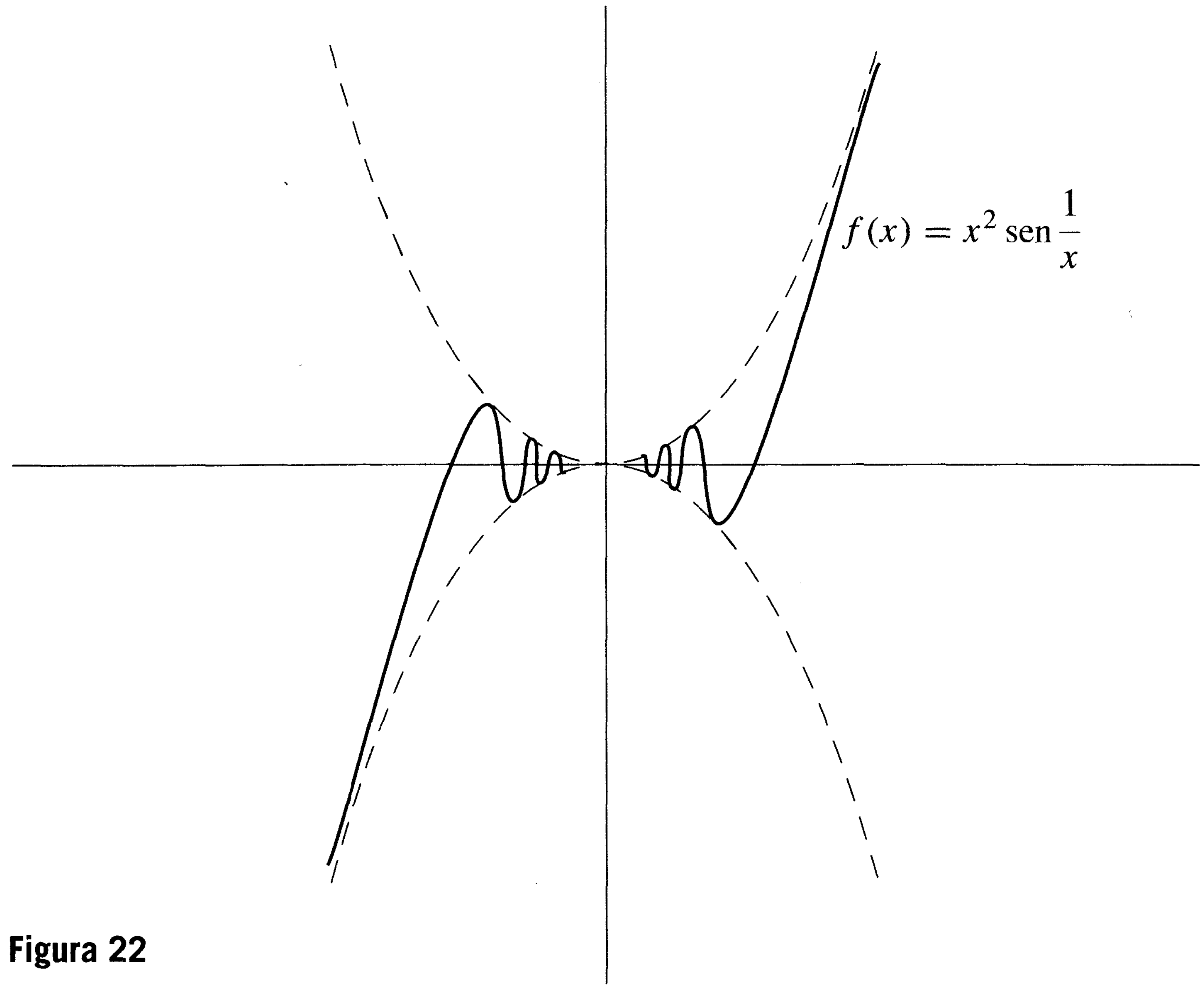


Figura 22

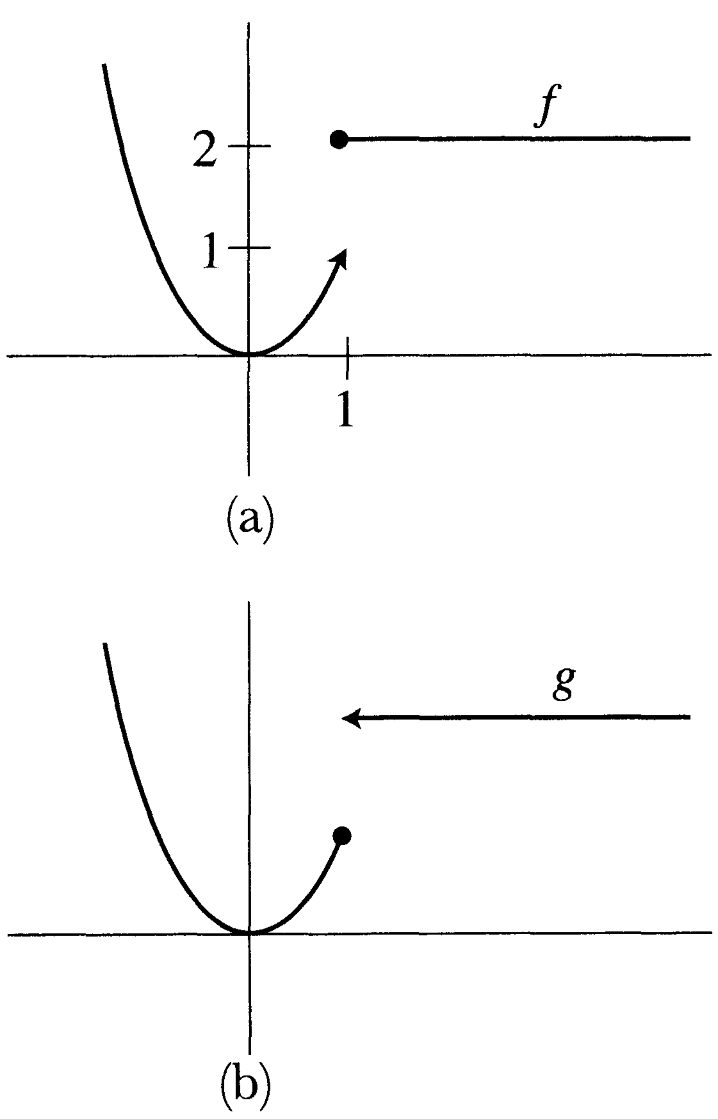


Figura 23

solamente se pueden distinguir mediante un convenio parecido al usado para intervalos abiertos y cerrados (Figura 23).

Nuestro último ejemplo es una función cuya gráfica claramente no se puede dibujar:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ 1, & x \text{ racional.} \end{cases}$$

La gráfica de f debe contener infinitos puntos sobre el eje horizontal y también infinitos puntos sobre una recta paralela al eje horizontal, pero no debe contener totalmente ninguna de estas rectas. La Figura 24 muestra la imagen usual de esta gráfica en los libros de texto. Para distinguir bien sus dos partes, los puntos situados en la línea correspondiente a x irracional se han dibujado más juntos. (En realidad existe una razón matemática que justifica este convenio, pero depende de algunas ideas sofisticadas que se introducen en los Problemas 21-5 y 21-6.)

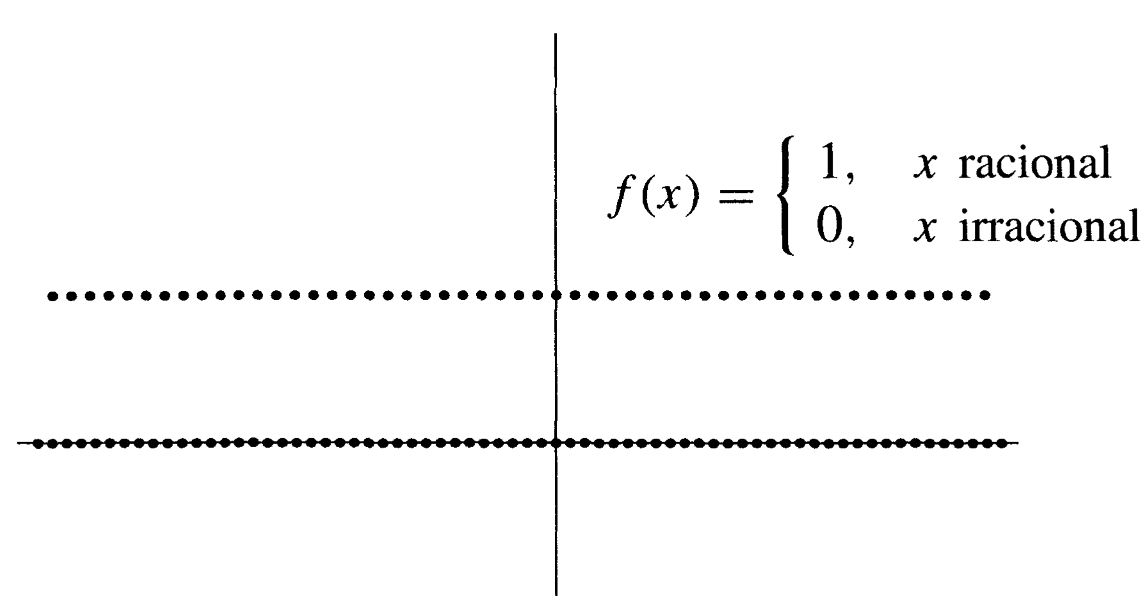


Figura 24

Las peculiaridades que presentan algunas funciones son tan atrayentes que es fácil olvidar a algunos de los subconjuntos del plano más sencillos y más importantes, que no corresponden a la gráfica de ninguna función. El ejemplo más importante lo constituye el **círculo**. Un círculo de centro (a,b) y radio $r > 0$ contiene, por definición, todos aquellos puntos (x,y) cuya distancia a (a,b) es igual a r. Así pues, el círculo consiste (Figura 25) en aquellos puntos (x,y) tales que

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r$$

o

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2.$$

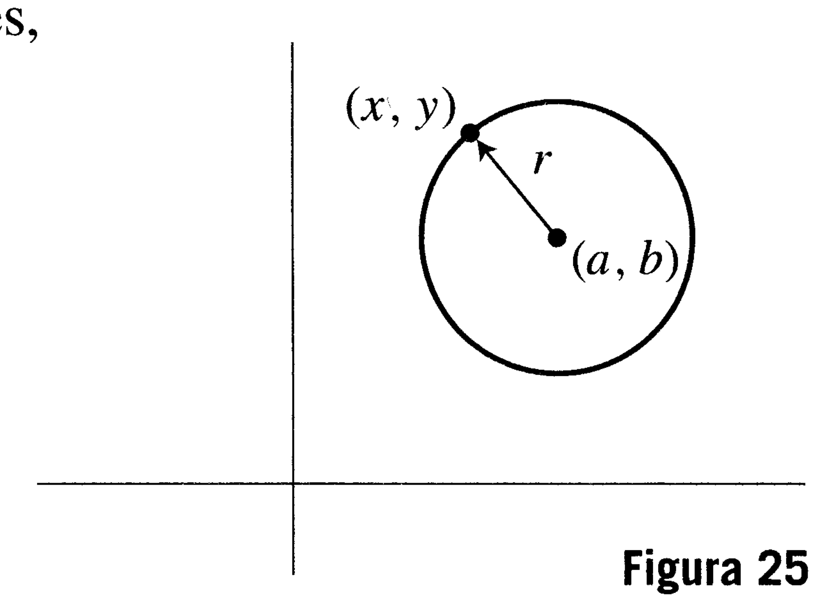


Figura 25

El círculo de centro $(0,0)$ y radio 1, considerado a menudo como una especie de patrón, se denomina el *círculo unidad*.

Un pariente próximo del círculo es la **elipse**. Esta se define como el conjunto de los puntos tales que la *suma* de sus distancias a dos puntos fijos llamados "focos" es constante. (Cuando los dos puntos fijos coinciden se obtiene el círculo.) Si se toman los puntos fijos como $(-c,0)$ y $(c,0)$ y la suma de distancias se toma como $2a$ (el factor 2 simplifica los cálculos), entonces (x,y) está sobre la elipse si y sólo si

$$\sqrt{(x-(-c))^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

o

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

o

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

o

$$4(cx-a^2) = -4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

o

$$c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 = a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)$$

o

$$(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$$

obteniéndose finalmente

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1.$$

Dicha ecuación se suele escribir como

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ (puesto que es evidente que debe elegirse $a > c$, se deduce que $a^2 - c^2 > 0$). En la Figura 26 se presenta la imagen de una elipse. La elipse corta al eje horizontal cuando $y = 0$, de manera que

$$\frac{x^2}{a^2} = 1, \qquad x = \pm a,$$

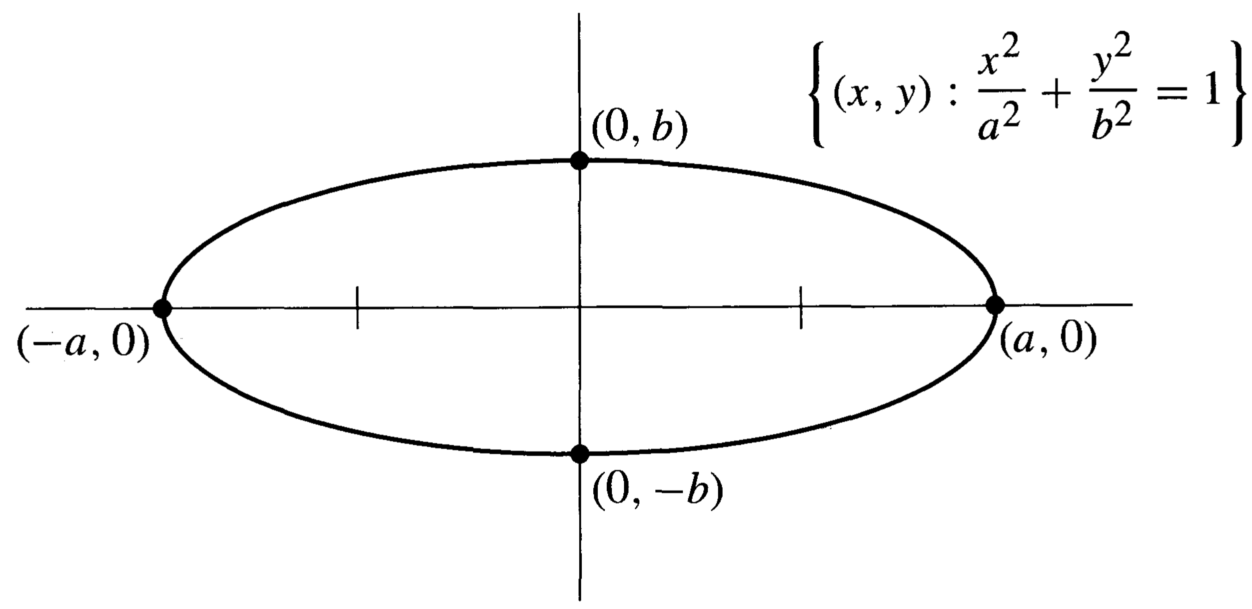


Figura 26

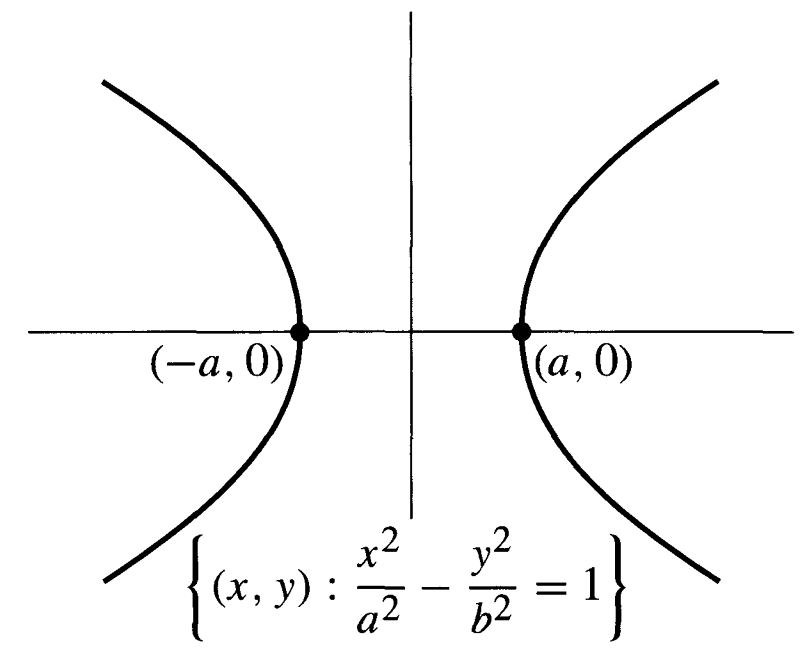


Figura 27

y corta al eje vertical cuando $x = 0$, de manera que

$$\frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad y = \pm b.$$

La **hipérbola** se define de manera análoga, sólo que ahora requeriremos que sea constante la *diferencia* de las dos distancias. Eligiendo de nuevo los puntos $(-c, 0)$ y $(c, 0)$, y tomando $2a$ como diferencia constante se obtiene como condición de que (x, y) esté sobre la hipérbola,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a,$$

lo que, simplificando, da

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Sin embargo, en este caso se debe elegir $c > a$, de manera que $a^2 - c^2 < 0$. Si $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, entonces (x, y) está sobre la hipérbola si y sólo si

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

La imagen se puede ver en la Figura 27. Contiene dos tramos, porque la diferencia entre las distancias de (x, y) a $(-c, 0)$ y a $(c, 0)$ puede tomarse en dos órdenes distintos. La hipérbola corta al eje horizontal cuando $y = 0$, de manera que $x = \pm a$, pero no corta al eje vertical.

Es interesante (Figura 28) comparar la hipérbola que tiene $a = b = \sqrt{2}$ con la gráfica de la función $f(x) = 1/x$. Las figuras tienen el mismo aspecto y los dos conjuntos son en realidad idénticos, salvo una rotación de un ángulo de $\pi/4$ radianes (Problema 23).

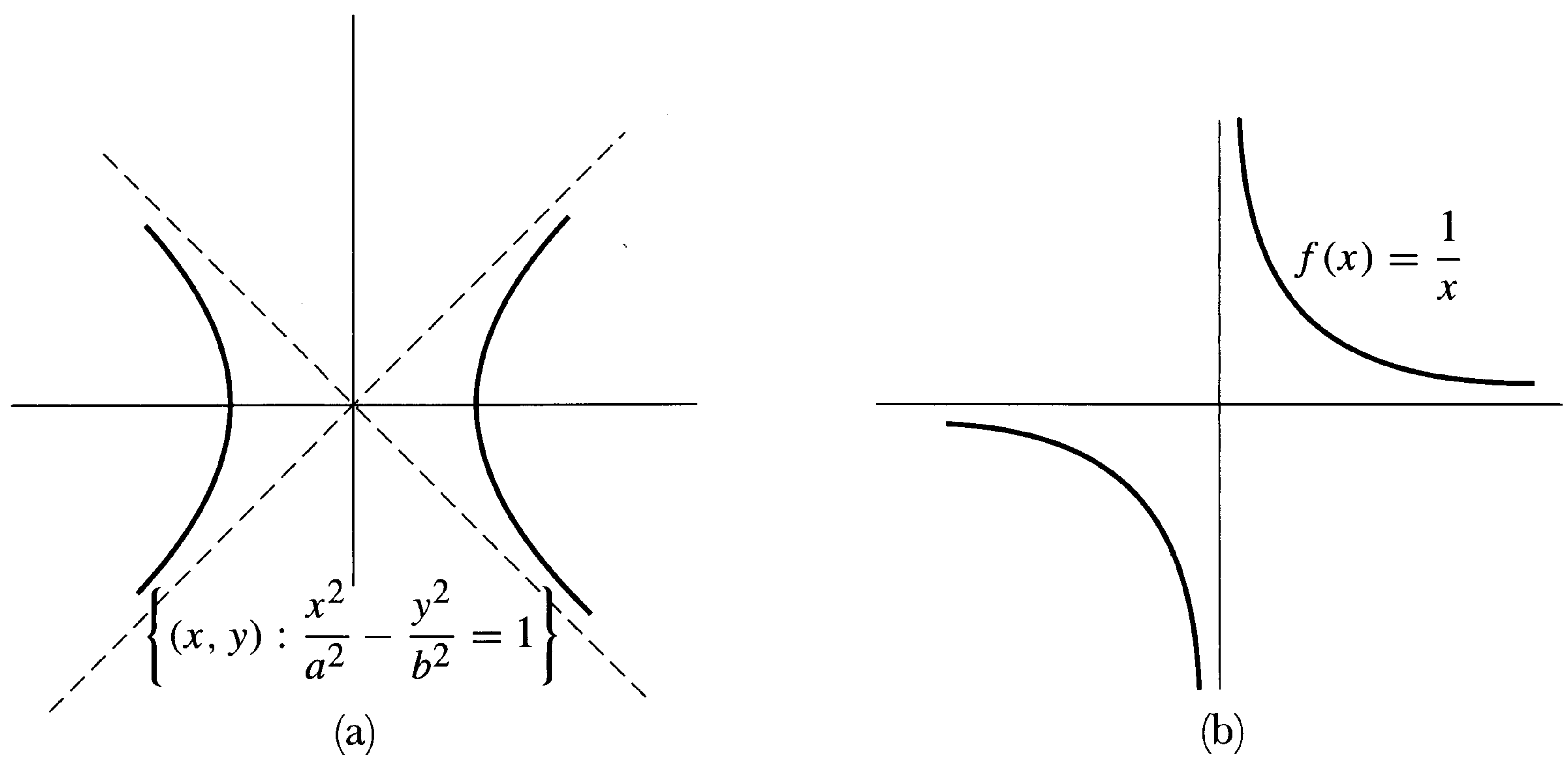


Figura 28

Es claro que ninguna rotación del plano podrá convertir círculos o elipses en gráficas de funciones. Sin embargo, el estudio de estas importantes figuras geométricas puede reducirse a menudo al estudio de funciones. Las elipses, por ejemplo, están compuestas por las gráficas de dos funciones,

$$f(x) = b\sqrt{1-(x^2/a^2)}, \qquad -a \le x \le a$$

y

$$g(x) = -b\sqrt{1-(x^2/a^2)}, \qquad -a \le x \le a.$$

Existen, por supuesto, muchos otros pares de funciones con esta misma propiedad. Por ejemplo, se puede tomar

$$f(x) = \begin{cases} b\sqrt{1-(x^2/a^2)}, & 0 < x \le a \\ -b\sqrt{1-(x^2/a^2)}, & -a \le x \le 0 \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} -b\sqrt{1-(x^2/a^2)}, & 0 < x \le a \\ b\sqrt{1-(x^2/a^2)}, & -a \le x \le 0. \end{cases}$$

Podríamos también elegir

$$f(x) = \begin{cases} b\sqrt{1-(x^2/a^2)}, & x \text{ racional}, -a \le x \le a \\ -b\sqrt{1-(x^2/a^2)}, & x \text{ irracional}, -a \le x \le a \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} -b\sqrt{1-(x^2/a^2)}, & x \text{ racional}, -a \le x \le a \\ b\sqrt{1-(x^2/a^2)}, & x \text{ irracional}, -a \le x \le a. \end{cases}$$

Pero todos estos pares necesariamente encierran funciones raras que van dando saltos. Una demostración o aún una formulación precisa de este hecho resultaría por el momento demasiado difícil. Aunque el lector haya, probablemente, empezado ya a distinguir las funciones con gráficas regulares de las que tienen gráficas irregulares, resulta muy difícil establecer una definición adecuada de función regular. No es nada fácil dar una definición matemática de este concepto y una gran parte de este libro puede considerarse como una serie de intentos progresivos de establecer las condiciones que debe satisfacer una función "regular". A medida que vayamos definiendo estas condiciones nos preocuparemos de comprobar si hemos conseguido realmente seleccionar aquellas funciones que merecen el nombre de regulares. La respuesta será, por desgracia, siempre "no" o, en el mejor de los casos, un "sí" condicionado.

Problemas

1. Represente sobre una recta el conjunto de todos los x que satisfacen las siguientes condiciones. Dé un nombre a cada conjunto utilizando la notación para los intervalos (en algunos casos será necesario utilizar el signo $\cup$).

(i) $|x-3|<1$. (ii) $|x-3|\leq 1$.

(iii) $|x-a|<\varepsilon$. (iv) $|x^2-1|<\frac{1}{2}$.

(v) $\dfrac{1}{1+x^2}\geq \frac{1}{5}$. (vi) $\dfrac{1}{1+x^2}\leq a$ (dé una respuesta en función de a, distinguiendo varios casos).

(vii) $x^2+1\geq 2$. (viii) $(x+1)(x-1)(x-2)>0$.

2. Existe una forma muy útil de describir a los puntos del intervalo cerrado $[a, b]$ (suponemos, como de costumbre, que $a<b$).

(a) Considere en primer lugar el intervalo $[0,b]$, siendo $b>0$. Demuestre que si x es un punto de $[0,b]$, entonces $x=tb$ para algún t con $0\leq t\leq 1$. ¿Cuál es el significado del número t? ¿Cuál es el punto situado en el centro del intervalo $[0,b]$?

(b) Demuestre ahora que si x pertenece al intervalo $[a, b]$, entonces $x=(1-t)a+tb$ para algún t con $0\leq t\leq 1$. Indicación: Esta expresión puede escribirse también como $a+t(b-a)$. ¿Cuál es el punto situado en el centro del intervalo $[a, b]$? ¿Cuál es el punto situado a 1/3 de la distancia de a a b?

(c) Demuestre, recíprocamente, que si $0\leq t\leq 1$, entonces $(1-t)a+tb$ pertenece al intervalo $[a, b]$.

(d) Los puntos del intervalo *abierto* (a, b) son aquellos de la forma $(1-t)a+tb$ para $0<t<1$.

3. Dibuje el conjunto de todos los puntos (x,y) que satisfacen las siguientes condiciones. (En la mayoría de los casos la figura resultante será una parte apreciable del plano y no simplemente una recta o una curva.)

(i) $x>y$. (ii) $x+a>y+b$. (iii) $y<x^2$.

(iv) $y\leq x^2$. (v) $|x-y|<1$. (vi) $|x+y|<1$.

(vii) $x+y$ es un entero. (viii) $\dfrac{1}{x+y}$ es un entero. (ix) $(x-1)^2+(y-2)^2<1$.

(x) $x^2<y<x^4$.

4. Dibuje el conjunto de todos los puntos (x,y) que satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $|x|+|y|=1$. (ii) $|x|-|y|=1$.
(iii) $|x-1|=|y-1|$. (iv) $|1-x|=|y-1|$.
(v) $x^2+y^2=0$. (vi) $xy=0$.
(vii) $x^2-2x+y^2=4$. (viii) $x^2=y^2$.

5. Dibuje el conjunto de todos los puntos (x,y) que satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $x=y^2$. (ii) $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$.
(iii) $x=|y|$. (iv) $x=\operatorname{sen} y$.

Indicación: Ya conoce las respuestas cuando se intercambian x e y.

6. (a) Demuestre que la recta que pasa por (a,b) y de pendiente m es la gráfica de la función $f(x)=m(x-a)+b$. Esta fórmula, conocida como "forma punto-pendiente", es mucho más conveniente que la expresión equivalente $f(x)=mx+(b-ma)$; con la forma punto-pendiente queda inmediatamente claro que la pendiente es m y que el valor de f en a es b.

(b) Para $a\neq c$, demuestre que la recta que pasa por (a,b) y (c,d) es la gráfica de la función

$$f(x)=\frac{d-b}{c-a}(x-a)+b.$$

(c) ¿Cuáles son las condiciones para que las gráficas de $f(x)=mx+b$ y $g(x)=m'x+b'$ sean rectas paralelas?

7. (a) Si A, B y C, siendo A y B distintos de 0, son números cualesquiera, demuestre que el conjunto de todos los (x,y) que satisfacen $Ax+By+C=0$ es una recta (que puede ser vertical). Indicación: Decida primero cuando dicha ecuación describe a una recta vertical.

(b) Demuestre, recíprocamente, que toda recta, incluyendo a las verticales, puede ser descrita como el conjunto de todos los (x,y) que satisfacen $Ax+By+C=0$.

8. (a) Demuestre que las gráficas de las funciones

$$\begin{aligned} f(x) &= mx+b,\\ g(x) &= nx+c, \end{aligned}$$

son perpendiculares si $mn=-1$, calculando los cuadrados de las longitudes de los lados del triángulo de la Figura 29. (¿Por qué puede deducirse el caso general a partir de este caso especial en el que las rectas se cortan en el origen?)

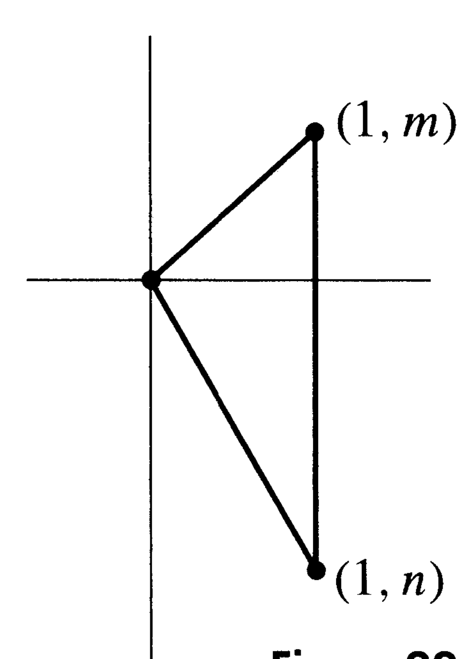


Figura 29

(b) Demuestre que las dos rectas formadas por todos los puntos (x,y) que satisfacen las condiciones

$$\begin{aligned} Ax+By+C &= 0,\\ A'x+B'y+C' &= 0, \end{aligned}$$

son perpendiculares si y sólo si $AA'+BB'=0$.

9. (a) Utilizando el Problema 1-19 demuestre que

$$\sqrt{(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2} \leq \sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2}+\sqrt{y_1{}^2+y_2{}^2}.$$

(b) Demuestre que

$$\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2} \leq \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}+\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}.$$

Interprete esta desigualdad (denominada la "desigualdad triangular") geométricamente. ¿En qué casos se satisface la igualdad?

10. Trace la gráfica de las siguientes funciones, representando un número de puntos suficiente para tener una idea aproximada de su aspecto general. (Una parte del problema consiste en decidir cuántos puntos serían "suficientes"; las cuestiones que se plantean en el primer apartado del problema intentan servir de ayuda en este sentido, mostrando que vale más pensar un poco que dibujar centenares de puntos.)

(i) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$. (¿Qué ocurre cuando x se aproxima a 0 y cuando x es grande? ¿Qué posición ocupa la gráfica en relación con la gráfica de la función identidad? ¿Por qué es suficiente considerar primero sólo x positivos?)

(ii) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$. (iii) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$. (iv) $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x^2}$.

11. Describa las características generales de la gráfica de f si

(i) f es par.

(ii) f es impar.

(iii) f es no negativa.

(iv) $f(x) = f(x+a)$ para todo x (una función con esta propiedad se denomina **periódica**, con **período** a).

12. Trace la gráfica de las funciones $f(x) = \sqrt[m]{x}$ para $m = 1, 2, 3, 4$. (Hay una manera fácil de hacerlo, utilizando la Figura 14. Recuerde, sin embargo, que $\sqrt[m]{x}$ significa la raíz *m-ésima positiva* de x cuando m es par; debe observarse también que existirá una diferencia importante entre las gráficas cuando m es par y cuando m es impar.)

13. (a) Trace la gráfica de $f(x) = |x|$ y de $f(x) = x^2$.

(b) Trace la gráfica de $f(x) = |\operatorname{sen} x|$ y de $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$. (Existe una diferencia importante entre las gráficas que todavía no podemos describir rigurosamente. Intente descubrir en qué consiste; el apartado (a) puede servirle de orientación.)

14. Describa la gráfica de g en términos de la gráfica de f si

(i) $g(x) = f(x) + c$. (ii) $g(x) = f(x+c)$. (Aquí es fácil equivocarse.)

(iii) $g(x) = cf(x)$. (iv) $g(x) = f(cx)$. (Distinga los casos $c = 0$, $c > 0$, $c < 0$.)

(v) $g(x) = f(1/x)$. (vi) $g(x) = f(|x|)$.

(vii) $g(x) = |f(x)|$. (viii) $g(x) = \text{máx}(f, 0)$.

(ix) $g(x) = \text{mín}(f, 0)$. (x) $g(x) = \text{máx}(f, 1)$.

15. Dibuje la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$. Indicación: Utilice los métodos del Problema 1-18.

16. Suponga que A y C no son ambos 0. Demuestre que el conjunto de todos los (x, y) que satisfacen la ecuación

$$Ax^2 + Bx + Cy^2 + Dy + E = 0$$

es una parábola, una elipse o una hipérbola (o también un "caso degenerado": dos rectas [que se cortan o son paralelas], una recta, un punto o el conjunto vacío $\emptyset$). Indicación: El caso $C = 0$ es esencialmente el Problema 15, y el caso $A = 0$ es una variante menor del anterior. Considere ahora por separado los casos en los que A y B son ambos positivos o negativos, y el caso en el que uno es positivo y el otro negativo. ¿Cuando se obtiene un círculo?

17. El símbolo $[x]$ designa el mayor entero $\leq x$. Así, $[2{,}1] = [2] = 2$ y $[-0{,}9] = [-1] = -1$. Dibuje la gráfica de las siguientes funciones (todas ellas son muy interesantes y algunas volverán a aparecer con frecuencia en otros problemas).

(i) $f(x) = [x]$.
(ii) $f(x) = x - [x]$.
(iii) $f(x) = \sqrt{x - [x]}$.
(iv) $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$.
(v) $f(x) = \left[\dfrac{1}{x}\right]$.
(vi) $f(x) = \dfrac{1}{\left[\dfrac{1}{x}\right]}$.

18. Trace la gráfica de las siguientes funciones.

(i) $f(x) = \{x\}$, donde $\{x\}$ se define como la distancia de x al entero más próximo.
(ii) $f(x) = \{2x\}$.
(iii) $f(x) = \{x\} + \frac{1}{2}\{2x\}$.
(iv) $f(x) = \{4x\}$.
(v) $f(x) = \{x\} + \frac{1}{2}\{2x\} + \frac{1}{4}\{4x\}$.

Muchas funciones pueden describirse en términos del desarrollo decimal de un número. Aunque no estaremos en condiciones de describir rigurosamente decimales infinitos hasta el Capítulo 23, nuestra noción intuitiva de decimales infinitos debería ser suficiente para poder resolver el siguiente problema y otros que aparecerán antes del Capítulo 23. En relación con los decimales infinitos existe una ambigüedad que debe ser eliminada: todo decimal que termine en una sucesión infinita de nueves es igual a otro que termina en una sucesión infinita de ceros (por ejemplo, $1{,}23999\ldots = 1{,}24000\ldots$). Nosotros utilizaremos siempre el que termina en una sucesión de nueves.

***19.** Describa lo mejor que se pueda las gráficas de las funciones siguientes (la descripción completa es, por lo general, imposible).

(i) $f(x) =$ el primer número del desarrollo decimal de x.
(ii) $f(x) =$ el segundo número del desarrollo decimal de x.
(iii) $f(x) =$ el número de sietes del desarrollo decimal de x si este número es finito, y 0 en caso contrario.
(iv) $f(x) = 0$ si el número de sietes del desarrollo decimal de x es finito, y 1 en caso contrario.
(v) $f(x) =$ al número obtenido sustituyendo todas las cifras del desarrollo decimal de x que vienen después del primer siete (si las hay) por 0.
(vi) $f(x) = 0$ si 1 no aparece en el desarrollo decimal de x, y n si 1 aparece por primera vez en el n-ésimo lugar.

***20.** Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ \dfrac{1}{q}, & x = \dfrac{p}{q} \text{ racional en forma irreducible.} \end{cases}$$

(Un número p/q es **irreducible** si p y q son enteros sin divisores comunes y $q > 0$.) Dibuje la gráfica de f lo mejor que sepa (no represente puntos al azar; considere primero los números racionales con $q = 2$, luego aquéllos con $q = 3$, etc.).

21. (a) Los puntos de la gráfica de $f(x) = x^2$ son los de la forma (x, x^2). Demuestre que cada uno de tales puntos equidista del punto $(0, \frac{1}{4})$ y de la gráfica de $g(x) = -\frac{1}{4}$. (Vea la Figura 30.)

(b) Dada una recta horizontal L, gráfica de la función $g(x) = \gamma$, y un punto $P = (\alpha, \beta)$ no situado en la recta L, de manera que $\gamma \neq \beta$, demuestre que el conjunto de todos los puntos (x, y) equidistantes de P y de L es la gráfica de una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. ¿Cuál es dicho conjunto si $\gamma = \beta$?

***22.** (a) Demuestre que el cuadrado de la distancia de (c, d) a (x, mx) es

$$x^2(m^2+1) + x(-2md - 2c) + d^2 + c^2.$$

Utilizando el Problema 1-18 para encontrar el mínimo de estos números, demuestre que la distancia de (c, d) a la gráfica de $f(x) = mx$ es

$$|cm - d|/\sqrt{m^2+1}.$$

(b) Halle la distancia de (c, d) a la gráfica de $f(x) = mx + b$. (Reduzca este caso al del apartado (a).)

***23.** (a) Utilizando el Problema 22, demuestre que los números x' e y' indicados en la Figura 31 vienen dados por

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y, \qquad y' = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y.$$

(b) Demuestre que el conjunto de todos los (x, y) con $(x'/\sqrt{2})^2 - (y'/\sqrt{2})^2 = 1$ es el mismo que el conjunto de todos los (x, y) con $xy = 1$.

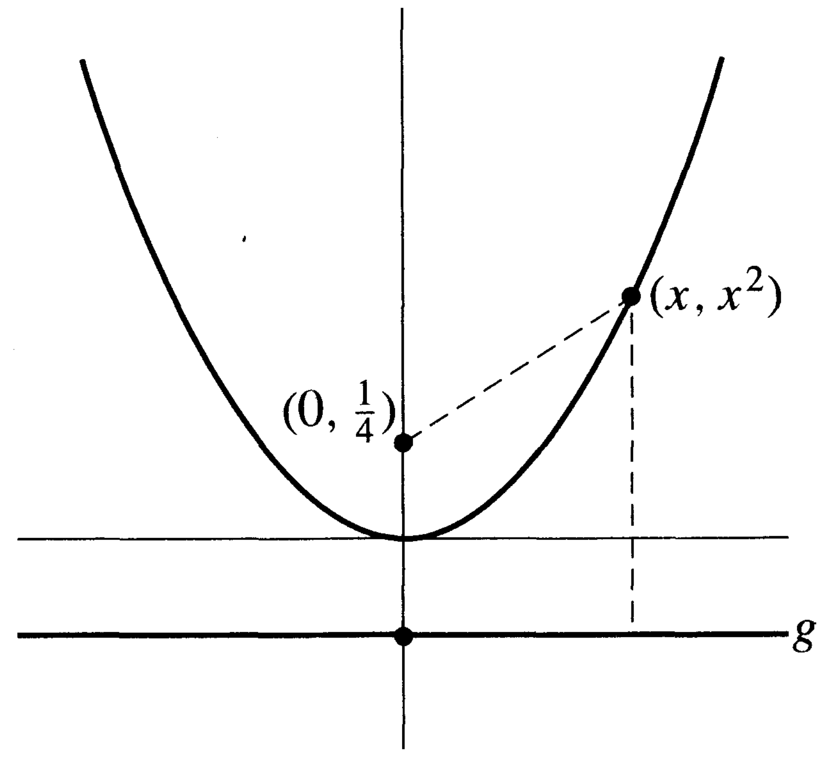


Figura 30

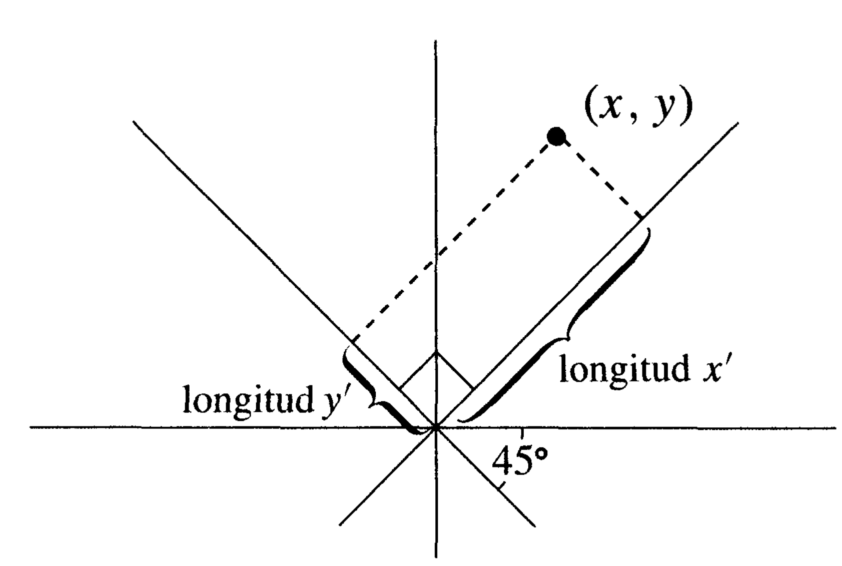


Figura 31

Apéndice 1
Vectores

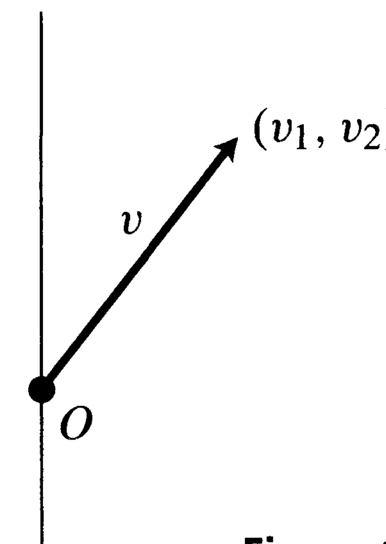


Figura 1

Supongamos que v es un punto del plano; es decir v es un par de números

$$v = (v_1, v_2).$$

Por conveniencia utilizaremos el convenio de que los subíndices indican el primer y el segundo elemento del par que define al punto representado por una letra. Así, si mencionamos a los puntos w y z, se entiende que w es el par (w_1, w_2), mientras que z es el par (z_1, z_2).

En lugar de representar al punto mediante el par de números (v_1, v_2), a menudo v se representa mediante una flecha que va desde el origen O hasta el punto (Figura 1); estas flechas se denominan *vectores* en el plano. Por supuesto, todavía no hemos dicho nada nuevo, únicamente hemos introducido un término alternativo para denominar a un punto del plano y una representación mental de dicho objeto. Lo que pretendemos realmente con esta nueva terminología es enfatizar que vamos a hacer cosas nuevas con los puntos del plano.

Por ejemplo, supongamos que tenemos dos vectores (es decir, puntos) del plano,

$$v = (v_1, v_2), \quad w = (w_1, w_2).$$

Entonces podemos definir un nuevo vector (un nuevo punto del plano) $v + w$ mediante la ecuación

(1) $$v + w = (v_1 + w_1, v_2 + w_2).$$

Observemos que todas las letras de la parte derecha de esta ecuación son números y el signo $+$ representa la adición ordinaria de números. Por el contrario, el signo $+$ de la parte izquierda es nuevo: la suma de dos puntos del plano no había sido definida previamente y, simplemente, hemos utilizado la ecuación (1) como una *definición*.

Un matemático muy estricto propondría, seguramente, utilizar algún símbolo nuevo para representar a esta nueva operación que acabamos de definir, como por ejemplo

$$v \mathbf{+} w, \qquad \text{o quizás} \qquad v \oplus w,$$

aunque no es necesario realmente llegar a estos extremos; como $v + w$ no ha sido definido todavía, no existe posibilidad de confusión, por tanto es mejor mantener el símbolo que hemos utilizado simplificando así la notación.

Por supuesto, cualquiera puede utilizar una nueva notación; por ejemplo, como se trata de nuestra definición, podríamos haber definido la suma $v + w$ mediante $(v_1 + w_1 \cdot w_2, v_2 + {w_1}^2)$, u otra expresión todavía más extraña. La cuestión fundamental es si nuestra definición tiene realmente algún sentido.

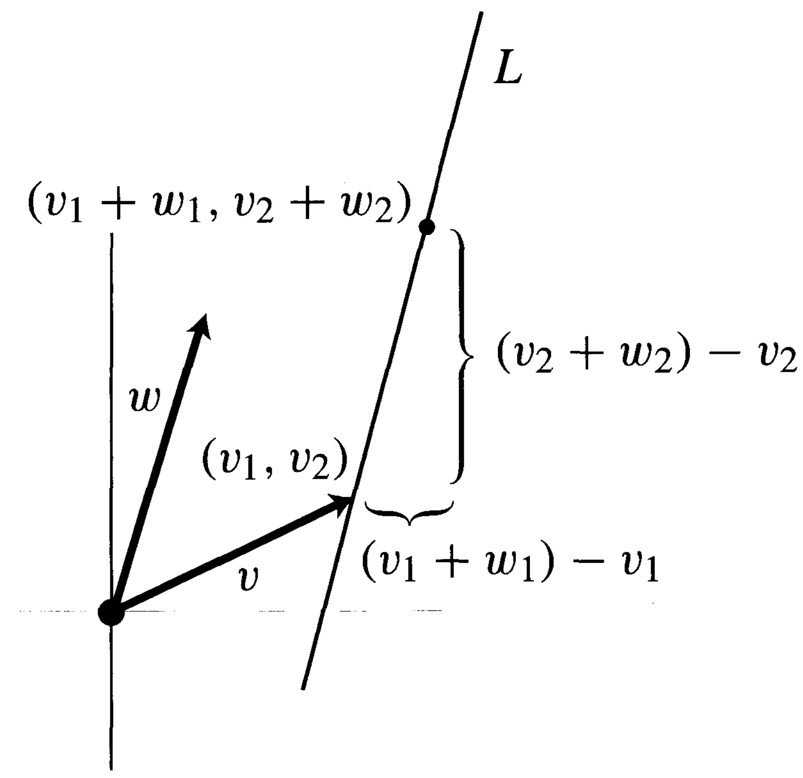


Figura 2

En la Figura 2 se muestran dos vectores v y w, así como el punto

$$(v_1 + w_1, v_2 + w_2),$$

al cual hemos representado, por el momento, mediante la notación usual, sin dibujar ninguna flecha. Observemos que es fácil calcular la pendiente de la recta L definida por el vector v y nuestro nuevo punto: tal como se indica en la Figura 2, dicha pendiente es

$$\frac{(v_2 + w_2) - v_2}{(v_1 + w_1) - v_1} = \frac{w_2}{w_1},$$

y es igual, evidentemente, a la pendiente de nuestro vector w, que va desde el origen O hasta el punto (w_1, w_2). En otras palabras, la recta L es paralela a w.

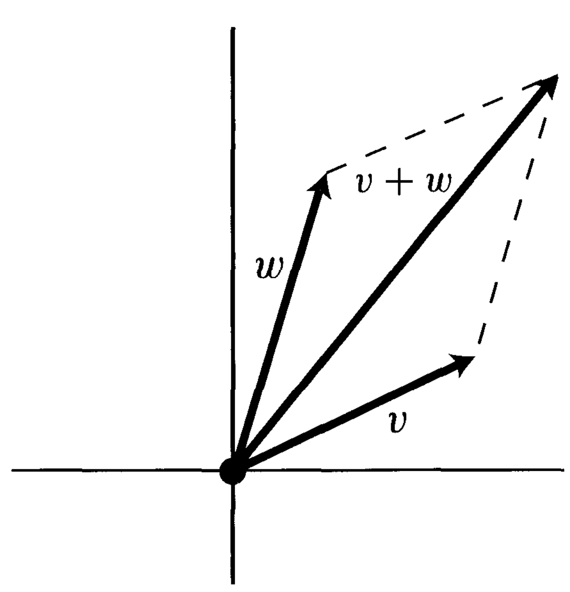


Figura 3

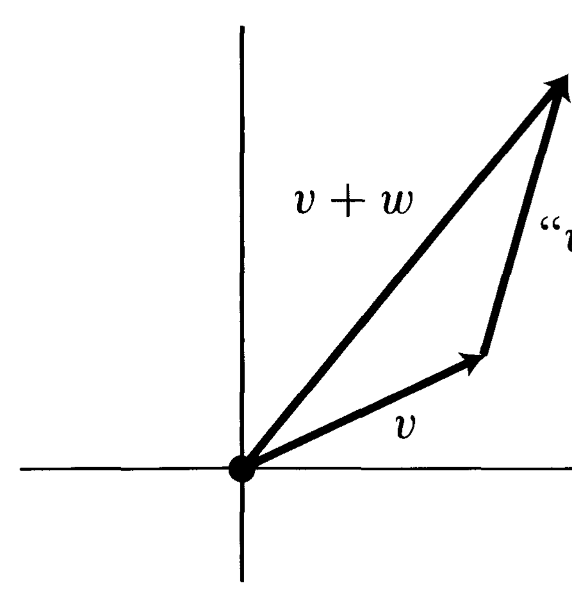


Figura 4

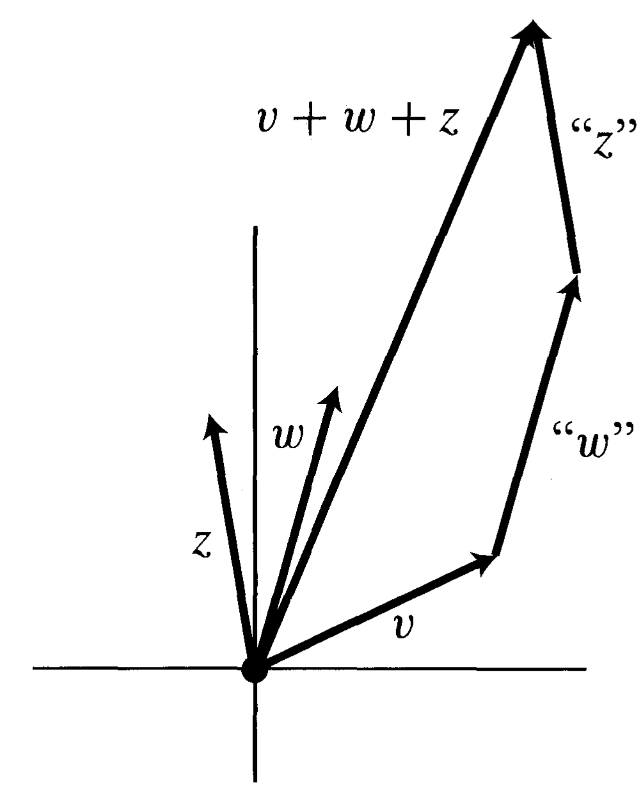


Figura 5

Análogamente, la pendiente de la recta M entre (w_1, w_2) y nuestro nuevo punto es

$$\frac{(v_2 + w_2) - w_2}{(v_1 + w_1) - v_2} = \frac{v_2}{v_1},$$

que es la pendiente del vector v; por tanto M es paralela a v. En resumen, el nuevo punto $v + w$ está situado en el paralelogramo de lados v y w. Cuando dibujamos $v + w$ como una flecha (Figura 3), ésta apunta en la dirección de la diagonal de dicho paralelogramo. En física los vectores se utilizan para simbolizar fuerzas, y la suma de dos vectores representa la fuerza resultante de aplicar simultaneamente dos fuerzas diferentes sobre el mismo objeto. En la Figura 4 se muestra otra manera de visualizar la suma $v + w$. Si utilizamos el símbolo "w" para representar una flecha paralela a w y de la misma longitud, que parte de v en lugar del origen, entonces $v + w$ es el vector que va de O al punto extremo final; por tanto, obtenemos $v + w$ siguiendo primero a v y luego siguiendo a w.

Muchas de las propiedades de la suma $+$ de números ordinarios también las posee esta nueva $+$ de vectores. Por ejemplo, es obvio que se verifica la "ley conmutativa"

$$v + w = w + v,$$

como sugiere la representación geométrica, ya que el paralelogramo generado por v y w es el mismo que el generado por w y v. Esta propiedad se comprueba también fácilmente de forma analítica, ya que afirma que

$$(v_1+w_1, v_2+w_2) = (w_1+v_1, w_2+v_2),$$

y, por tanto, depende únicamente de la ley conmutativa de los números:

$$\begin{aligned} v_1+w_1 &= w_1+v_1, \\ v_2+w_2 &= w_2+v_2. \end{aligned}$$

De la misma manera, transcribiendo las definiciones, se obtiene la "ley asociativa"

$$[v+w]+z = v+[w+z].$$

En la Figura 5 se indica un método para hallar $v+w+z$.

El origen $O=(0,0)$ es una "identidad aditiva",

$$O+v = v+O = v,$$

y si definimos

$$-v = (-v_1, -v_2),$$

obtenemos también

$$v+(-v) = -v+v = O.$$

Naturalmente, podemos definir también

$$w-v = w+(-v),$$

exactamente de la misma manera que con los números; equivalentemente,

$$w-v = (w_1-v_1, w_2-v_2).$$

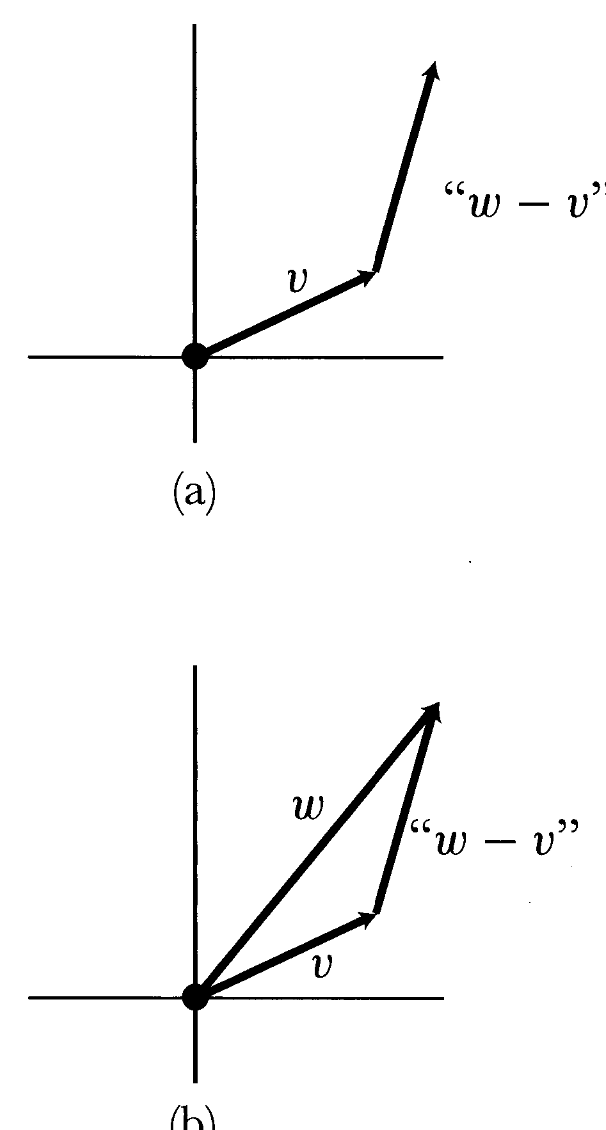


Figura 6

Al igual que ocurre con los números, la definición que hemos dado de $w-v$ significa simplemente que ésta satisface

$$v+(w-v) = w.$$

En la Figura 6(a) se muestra a v y una flecha "$w-v$" paralela a $w-v$ pero que comienza en el extremo de v. Como ya se estableció en la Figura 4, el vector que va desde el origen hasta el extremo de esta flecha es precisamente $v+(w-v)=w$ (Figura 6(b)). En otras palabras, es posible representar a $w-v$ geométricamente como una flecha que va de v a w (aunque debe ser trasladado de manera que parta del origen).

También existe una manera de multiplicar un vector por un número: dado un número a y un vector $v=(v_1, v_2)$, definimos

$$a \cdot v = (av_1, av_2).$$

(A veces se escribe av en lugar de $a \cdot v$; en este caso es muy importante recordar que v representa a un vector y no a un número.) El vector $a \cdot v$ apunta en la misma dirección que v cuando $a>0$ y en dirección opuesta cuando $a<0$ (Figura 7).

Es fácil comprobar las siguiente fórmulas:

$$\begin{aligned} a\cdot(b\cdot v) &= (ab)\cdot v,\\ 1\cdot v &= v,\\ 0\cdot v &= O,\\ -1\cdot v &= -v. \end{aligned}$$

Observemos que únicamente hemos definido el producto de un vector por un número y no la manera de "multiplicar" dos vectores para obtener otro vector.* Sin embargo, existen varias maneras de "multiplicar" vectores para obtener números, las cuales se analizan en los problemas que se enuncian a continuación.

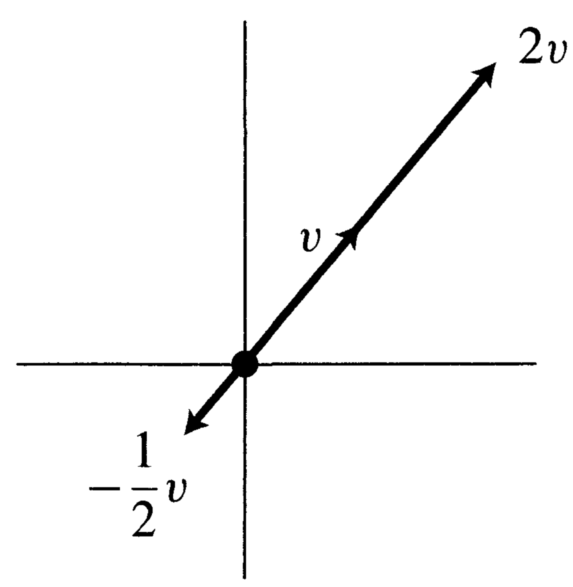


Figura 7

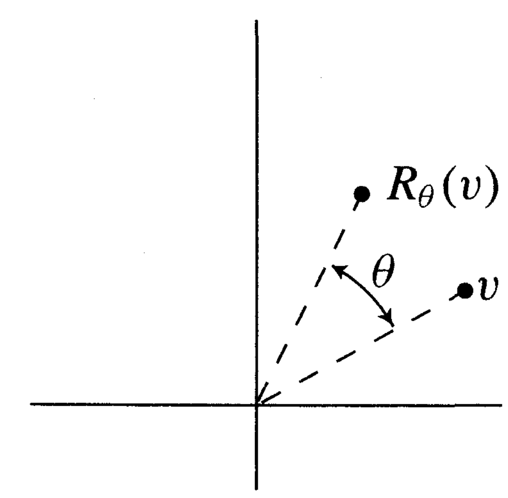


Figura 8

Problemas

1. Dado un punto v del plano, sea $R_\theta(v)$ el vector resultante de la rotación de v con respecto al origen según un ángulo θ (Figura 8). El objetivo de este problema es obtener una fórmula para R_θ haciendo un número mínimo de cálculos.

   (a) Demuestre que

   $$\begin{aligned} R_\theta(1,0) &= (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta), \qquad \text{[de hecho, deberíamos escribir } R_\theta((1,0))\text{, etc.]}\\ R_\theta(0,1) &= (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta). \end{aligned}$$

   (b) Explique por qué se verifica que

   $$\begin{aligned} R_\theta(v+w) &= R_\theta(v)+R_\theta(w),\\ R_\theta(a\cdot w) &= a\cdot R_\theta(w). \end{aligned}$$

   (c) Demuestre ahora que para cualquier punto (x,y) se verifica que

   $$R_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta, x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta).$$

   (d) Utilice este resultado para hallar otra solución del Problema 4-23.

*Si se consulta el Capítulo 25, se observará que existe una manera importante de definir un producto, aunque se trata de un caso especial de vectores en el plano; la definición no sirve, por ejemplo, para vectores del espacio tridimensional, aunque las otras construcciones si que son válidas.

2. Dados v y w, se define el *número*

$$v \cdot w = v_1w_1 + v_2w_2;$$

que se suele denominar el "producto punto" o "producto escalar" de v y w (la palabra "escalar" es otra manera, algo anticuada, de denominar a un número, en contraposición al término vector).

(a) Dado v, halle un vector w tal que $v \cdot w = 0$. Describa al conjunto de todos estos vectores w.

(b) Demuestre que

$$\begin{aligned} v \cdot w &= w \cdot v \\ v \cdot (w+z) &= v \cdot w + v \cdot z \end{aligned}$$

y que

$$a \cdot (v \cdot w) = (a \cdot v) \cdot w = v \cdot (a \cdot w).$$

Observe que la última de estas ecuaciones incluye a *tres* productos: el producto escalar $\cdot$ de dos vectores, el producto $\cdot$ de un número y un vector y el producto ordinario $\cdot$ de dos números.

(c) Demuestre que $v \cdot v \geq 0$, y que $v \cdot v = 0$ si y sólo si $v = O$. Por tanto podemos definir la *norma* $\|v\|$ como

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v},$$

que es igual a 0 sólo si $v = O$. ¿Cuál es la interpretación geométrica de la norma?

(d) Demuestre que

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|,$$

y que la igualdad se verifica si y sólo si $v = 0$, $w = 0$ o $w = a \cdot v$ para algún $a > 0$.

(e) Demuestre que

$$v \cdot w = \frac{\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2}{4}.$$

3. (a) Sea R_θ la rotación de ángulo θ (Problema 1). Demuestre que

$$R_\theta(v) \cdot R_\theta(w) = v \cdot w.$$

(b) Sea $e = (1, 0)$ el vector de longitud 1 situado a lo largo del primer eje, y sea $w = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ un vector de longitud 1 que forma un ángulo θ con el primer eje (compárese con el Problema 1). Compruebe que

$$e \cdot w = \cos\theta,$$

y concluya que, en general,

$$v \cdot w = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos\theta,$$

siendo θ el ángulo entre v y w.

4. Dados dos vectores v y w, se esperaría que existiera una fórmula sencilla (expresada en función de las coordenadas v_1, v_2, w_1, w_2) para el área del paralelogramo generado por ambos vectores. En la Figura 9 se indica una estrategia para hallar dicha fórmula: como el triángulo con vértices $w, A, v+w$ es congruente con el triángulo OBv, puede reducirse el problema a otro más sencillo en el que un lado del paralelogramo está situado en el eje horizontal:

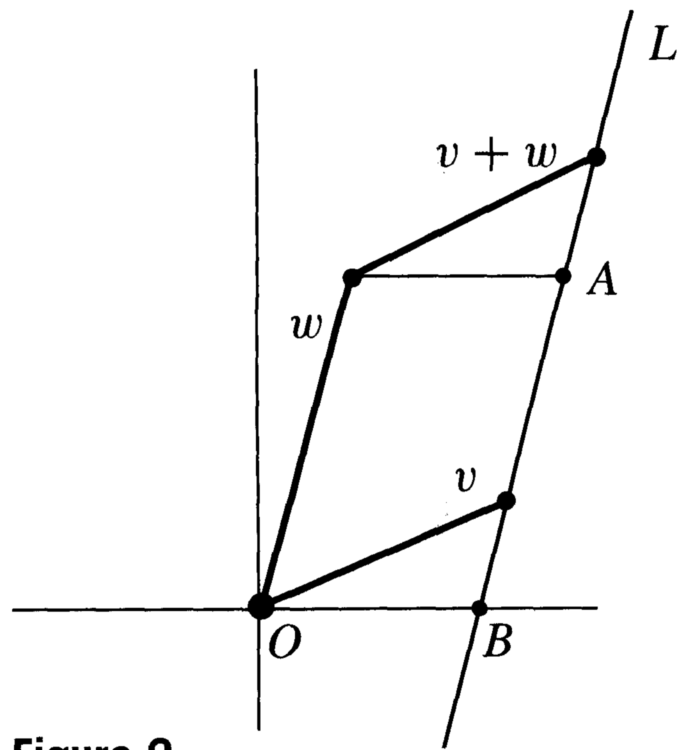


Figura 9

(a) La recta L pasa por v y es paralela a w, de manera que su pendiente es igual a w_2/w_1. Deduzca que una de las coordenadas del punto B vale

$$\frac{v_1w_2 - w_1v_2}{w_2},$$

y que el área del paralelogramo es igual, por tanto, a

$$\det(v,w) = v_1w_2 - w_1v_2.$$

Esta fórmula, que define al *determinante* det, parece ser bastante sencilla pero no puede ser cierto que el $\det(v,w)$ siempre permita obtener el área ya que

$$\det(w,v) = -\det(v,w),$$

de manera que en algunos casos el det es negativo. En efecto, es fácil comprobar que en nuestra "deducción" hemos incluido todo tipo de suposiciones (que w_2 es positivo, que B tiene una coordenada positiva, etc.). Sin embargo, parece plausible que $\det(v,w)$ sea $\pm$ el área; en el siguiente problema se da una demostración independiente.

5. (a) Si v se sitúa a lo largo de la parte positiva del eje horizontal, demuestre que $\det(v,w)$ es el área del paralelogramo generado por v y w, si w se sitúa por encima del eje horizontal ($w_2 > 0$) y el negativo de dicha área si w se sitúa por debajo de dicho eje.

(b) Si R_θ es la rotación de ángulo θ (Problema 1), demuestre que

$$\det(R_\theta v, R_\theta w) = \det(v,w).$$

Deduzca que $\det(v,w)$ es el área del paralelogramo generado por v y w cuando la rotación de v hacia w se efectua en sentido contrario al de las agujas del reloj y el negativo de dicha área cuando la rotación se efectua en sentido de las agujas del reloj.

6. Demuestre que

$$\begin{aligned}\det(v,w+z) &= \det(v,w)+\det(v,z)\\ \det(v+w,z) &= \det(v,z)+\det(w,z)\end{aligned}$$

y que

$$a\det(v,w) = \det(a\cdot v,\, w) = \det(v,\, a\cdot w).$$

7. Utilizando el método del Problema 3, demuestre que

$$\det(v,w) = \|v\|\cdot\|w\|\cdot \operatorname{sen}\theta,$$

lo cual es obvio también según la interpretación geométrica (Figura 10).

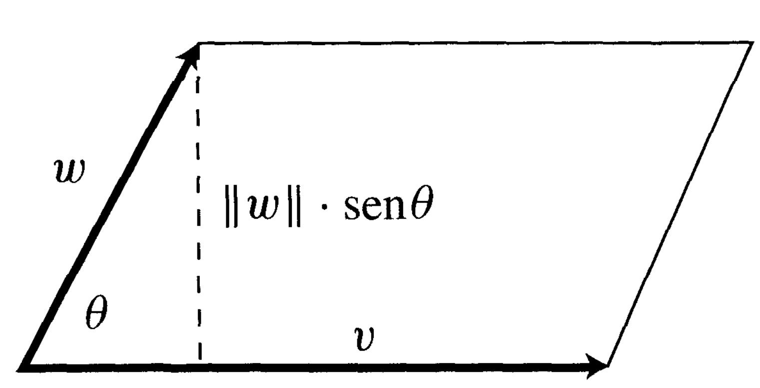


Figura 10

Apéndice 2
Las secciones cónicas

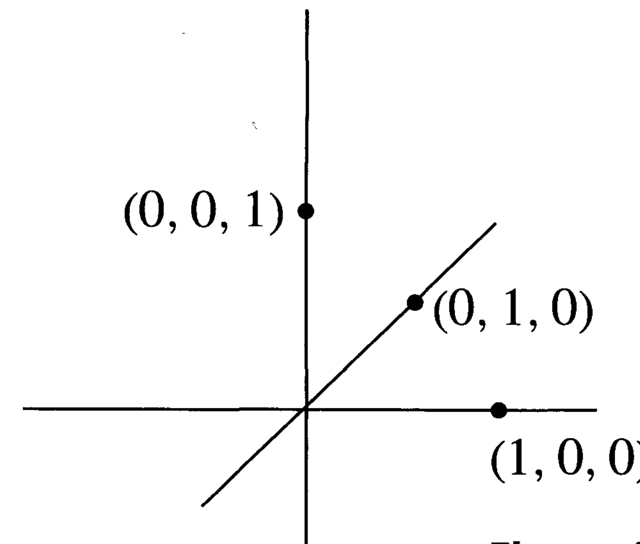


Figura 1

Aunque nos limitaremos casi exclusivamente a considerar sólo figuras en el plano, definido éste formalmente como el conjunto de todos los pares de números reales, en este Apéndice consideraremos el espacio tridimensional, el cual puede ser descrito en términos de ternas de números reales utilizando un "sistema de coordenadas tridimensional"; dicho sistema consiste en tres rectas que se cortan formando ángulos rectos (Figura 1). Los clásicos ejes *horizontal* y *vertical* mutan ahora para transformarse en dos ejes en el plano horizontal y en un tercer eje perpendicular a ambos.

Uno de los subconjuntos más sencillos de este espacio tridimensional es el *cono* (infinito) que se ilustra en la Figura 2; dicho cono es generado mediante la rotación alrededor del tercer eje de una "recta generatriz", de pendiente C.

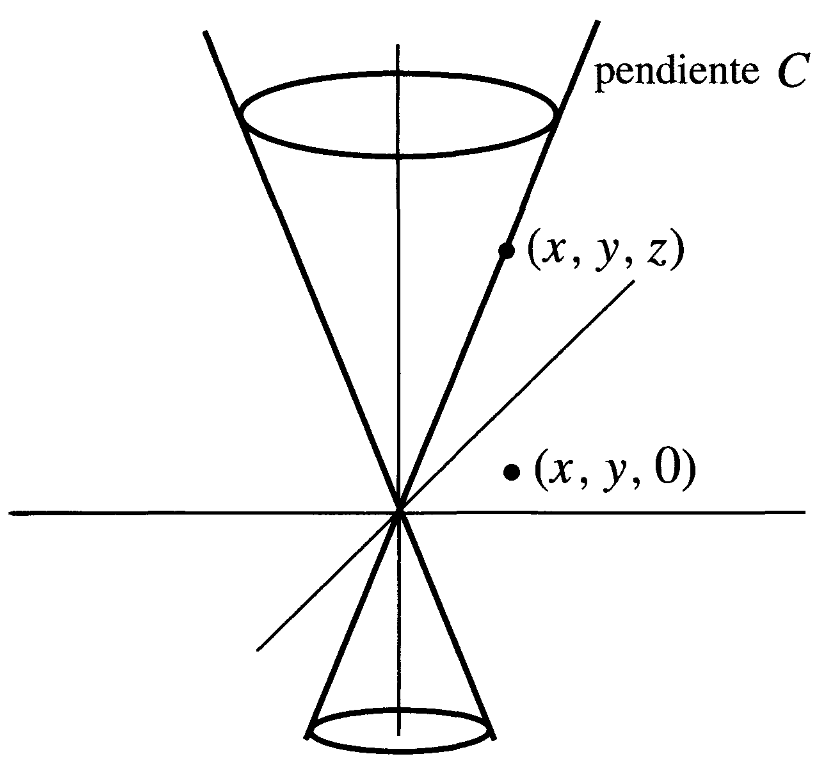


Figura 2

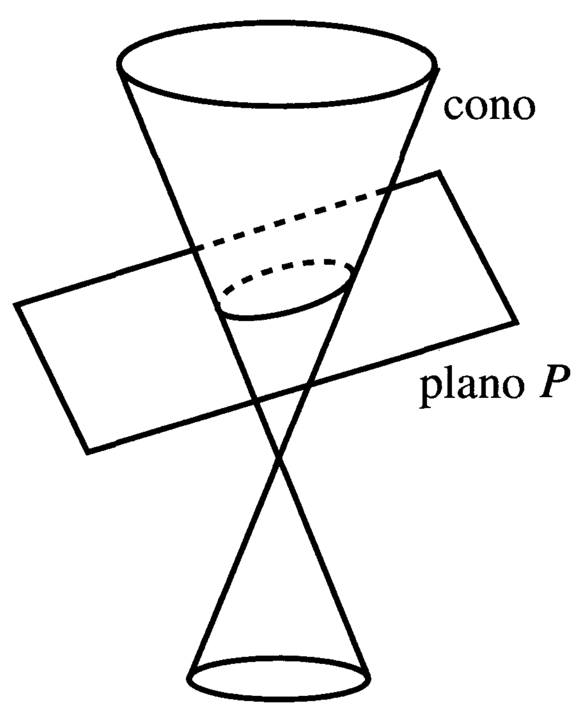


Figura 3

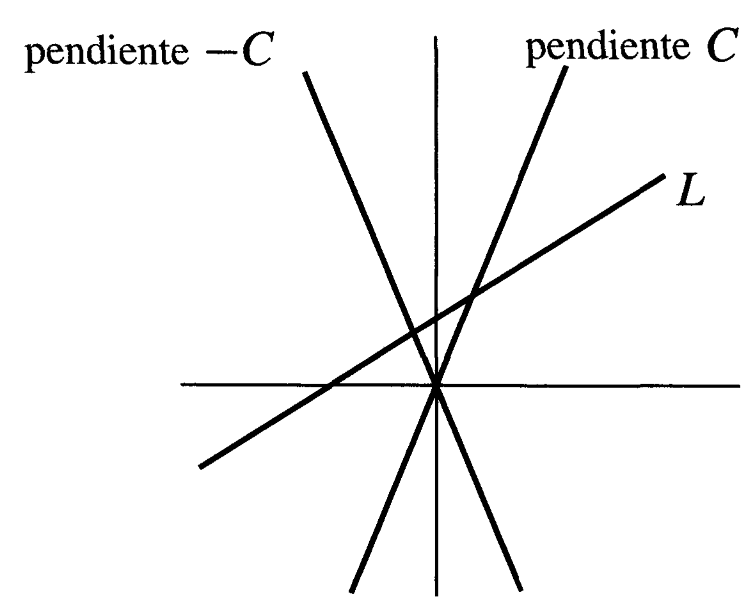


Figura 4

Dadas dos primeras coordenadas cualesquiera x e y, el punto $(x,y,0)$ se encuentra en el plano horizontal a una distancia $\sqrt{x^2+y^2}$ del origen y por tanto

(1) (x,y,z) se encuentra en la superficie del cono si y sólo si $z = \pm C\sqrt{x^2+y^2}$.

Podemos descender de estas vistas tridimensionales al nivel bidimensional, más familiar, preguntándonos qué ocurre cuando el cono es cortado por algún plano P (Figura 3).

Si el plano es paralelo al plano horizontal no hay ningún misterio, la intersección es un círculo. Si no es así, la intersección del plano P con el plano horizontal es una recta. Podemos simplificar las cosas si giramos todo el sistema alrededor del eje vertical, de manera que esta recta intersección apunte hacia afuera del plano del papel, al mismo tiempo que el primer eje se sitúa en su posición usual. Así, el plano P se observa "de perfil", de manera que todo lo que vemos (Figura 4) es su intersección L con el plano determinado por el primer y tercer eje; además, la intersección del cono con dicho plano son dos líneas rectas.

Si esta linea L resulta ser vertical, formada por todos los puntos (a, z) para algún a, entonces la ecuación (1) nos dice que la intersección del cono y el plano consiste en todos los puntos (a, y, z) con

$$z^2 - C^2y^2 = C^2a^2,$$

que es una hipérbola.

En otro caso, en el plano del primer y tercer eje, la linea L puede ser descrita como la colección de todos los puntos de la forma

$$(x, Mx + B),$$

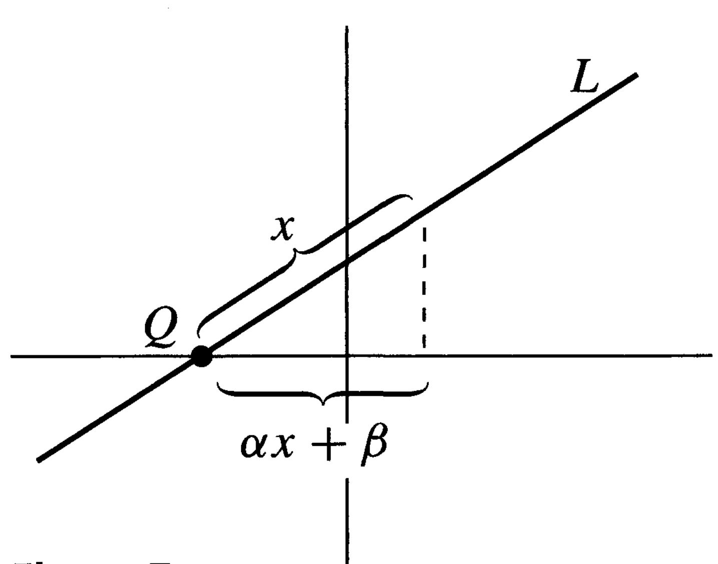


Figura 5

donde M es la pendiente de L. Para un punto arbitrario (x, y, z) se deduce que

(2) $\quad (x, y, z)$ está en el plano P si y sólo si $z = Mx + B$.

Combinando (1) y (2) vemos que (x, y, z) está en la intersección del cono y el plano si y sólo si

(*) $$Mx + B = \pm C\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ahora hemos de elegir ejes de coordenadas en el plano P. Podemos elegir L como el primer eje, midiendo las distancias de la intersección Q con el plano horizontal (Figura 5); como segundo eje elegimos la recta que pasa por Q paralela a nuestro segundo eje original. Si la primera coordenada de un punto en P con respecto a estos ejes es x, entonces la primera coordenada de este punto con respecto a los ejes originales puede escribirse en la forma

$$\alpha x + \beta$$

para algún α y β. Por otra parte, si la segunda coordenada del punto con respecto a estos ejes es y, entonces y es también la segunda coordenada con respecto a los ejes originales.

Por consiguiente, $(*)$ nos dice que el punto se encuentra en la intersección del plano y el cono si y sólo si

$$M(\alpha x + \beta) + B = \pm C\sqrt{(\alpha x + \beta)^2 + y^2}.$$

Aunque esta ecuación parece bastante complicada, después de elevarla al cuadrado podemos escribirla como

$$C^2y^2 - \alpha^2(M^2 - C^2)x^2 + Ex + F = 0$$

para algún E y F que no vamos a detallar.

Pero el Problema 4-16 nos indica ahora que se trata de una parábola, una elipse o una hipérbola. De hecho, examinando más detalladamente la solución, vemos que los valores de E y F son irrelevantes:

(1) Si $M = \pm C$ obtenemos una parábola.
(2) Si $C^2 > M^2$ obtenemos una elipse.
(3) Si $C^2 < M^2$ obtenemos una hipérbola.

Estas condiciones analíticas son fáciles de interpretar geométricamente (Figura 6):

(1) Si nuestro plano es paralelo a una de las rectas generatrices del cono obtenemos una parábola.

(2) Si su pendiente es menor que la de la recta generatriz del cono (y por tanto la intersección omite a una mitad del cono), obtenemos una elipse.

(3) Si su pendiente es mayor que la de la recta generatriz del cono, obtenemos una hipérbola.

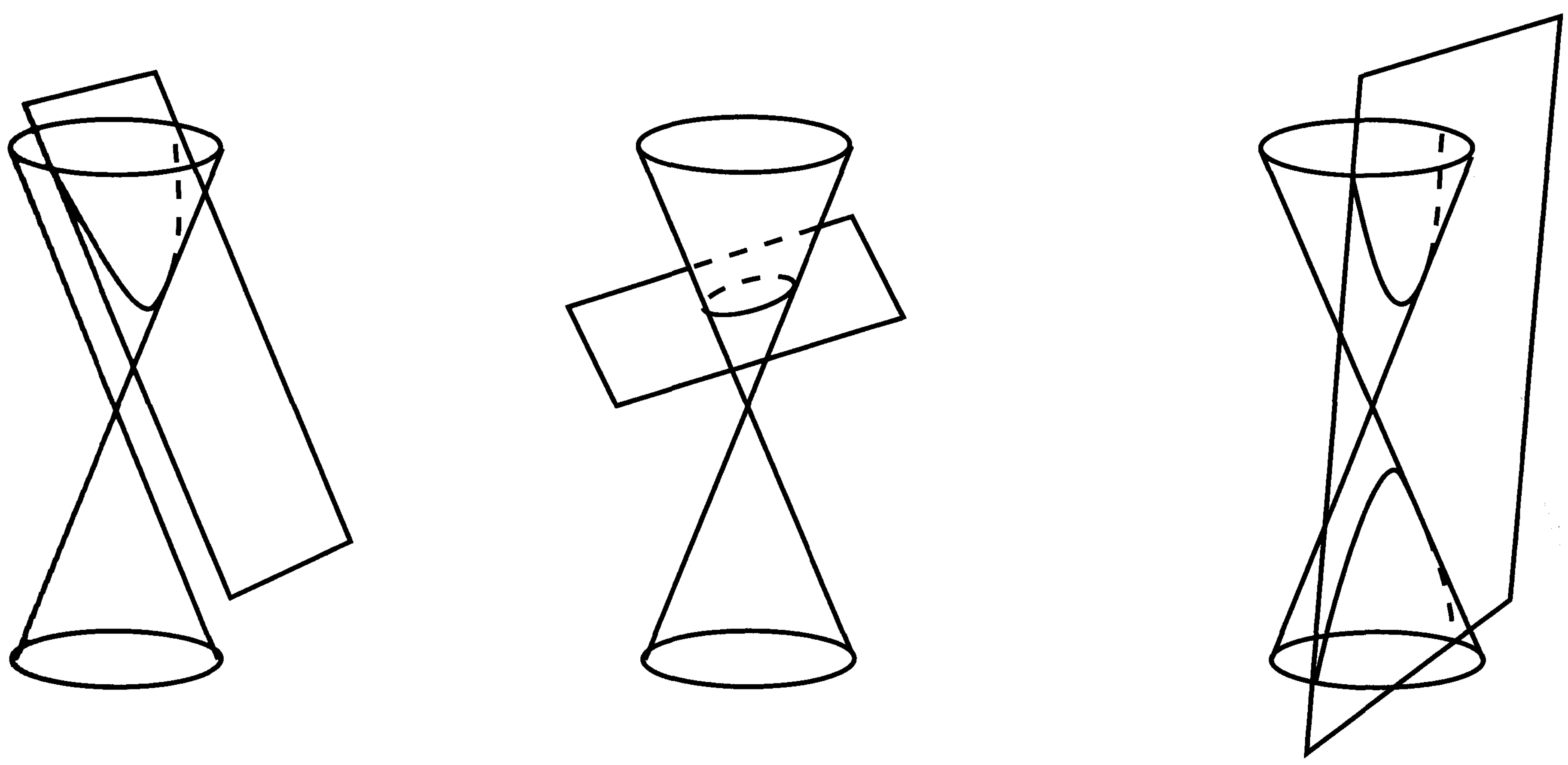


Figura 6

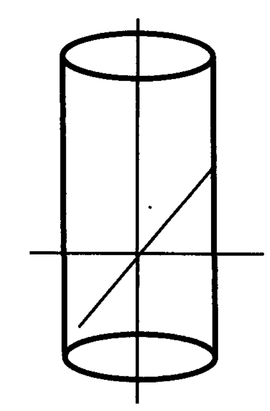


Figura 7

De hecho, los mismos nombres de estas "secciones cónicas" están relacionados con esta descripción. La palabra *parábola* proviene de una raíz griega que significa "al costado de", la misma raíz que aparece en las palabras parábola (narración de un suceso fingido), paradigma, paradoja, párrafo, paralelo e incluso paracaídas. *Elipse* proviene de una raíz griega que significa "defecto", u omisión, como en elipsis (una omisión, . . . o los puntos suspensivos que la indican). E *hipérbola* proviene de la raíz griega que significa "exceso". Con un surtido de palabras como hiperactivo, hipersensible o hiperventilado, podemos afirmar sin riesgo de hipérbole que esta raíz es familiar para casi todos. *

Problemas

1. Considere un cilindro con un generador perpendicular al plano horizontal (Figura 7); el único requisito que debe verificar un punto (x,y,z) para estar situado en la superficie del cilindro es que (x,y) esté en el círculo:

$$x^2+y^2=C^2.$$

*Aunque hay una correspondencia perfecta entre estas raíces y la imagen geométrica, en honor a la verdad debemos indicar que los griegos aplicaron originalmente estas palabras para describir características de ciertas ecuaciones relativas a las secciones cónicas.

Demuestre que la intersección de un plano con el cilindro puede ser descrita mediante una ecuación de la forma

$$(\alpha x+\beta)^2+y^2=C^2.$$

¿Qué posibilidades hay?

2. En la Figura 8, la esfera S_1 tiene el mismo diámetro que el cilindro, de manera que su ecuador C_1 está situado en la superficie del cilindro; la esfera es también tangente al plano P en el punto F_1. Análogamente, el ecuador C_2 de S_2 está situado en la superficie del cilindro y S_2 es tangente a P en F_2.

(a) Sea z un punto de la intersección de P con el cilindro. Explique por qué la longitud del segmento rectilineo de z a F_1 es igual a la longitud del segmento vertical L de z a C_1.

(b) Demostrando un resultado similar para la longitud del segmento de z a F_2, pruebe ahora que la distancia de z a F_1 más la distancia de z a F_2 es constante, de manera que la intersección es una elipse, con focos F_1 y F_2.

3. Análogamente, utilice la Figura 9(a) para demostrar geométricamente que la intersección de un plano y un cono es una elipse cuando el plano corta sólo a la mitad del cono. En el caso de que el plano corte a ambas mitades del cono, utilice (b) para demostrar que la intersección es una hipérbola.

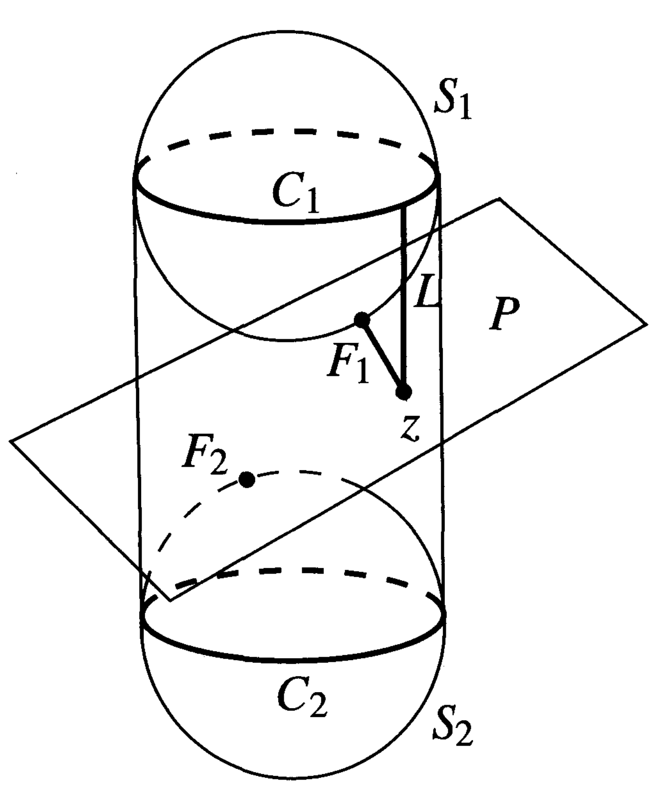


Figura 8

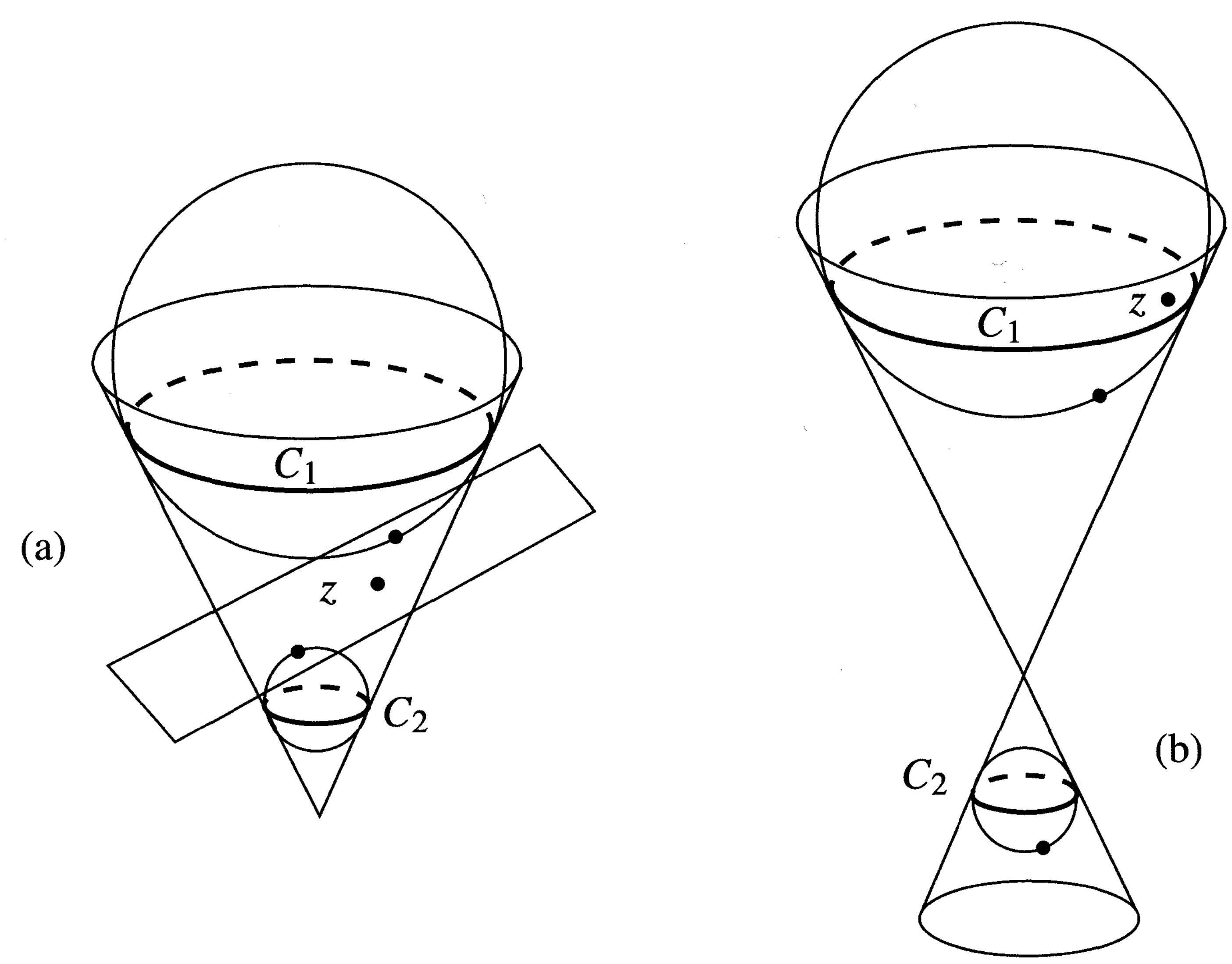


Figura 9

Apéndice 3
Coordenadas polares

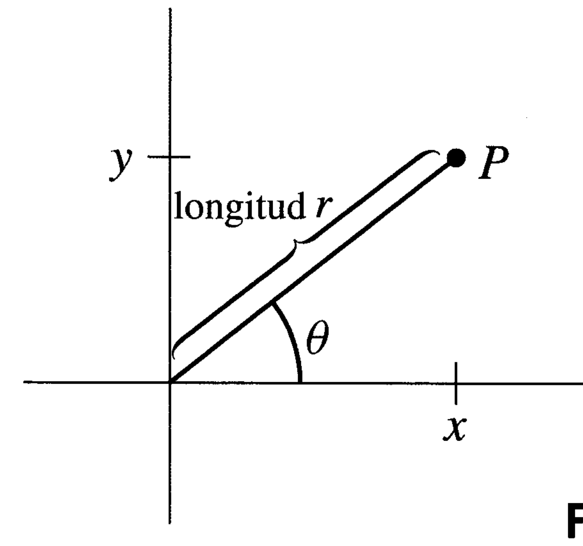
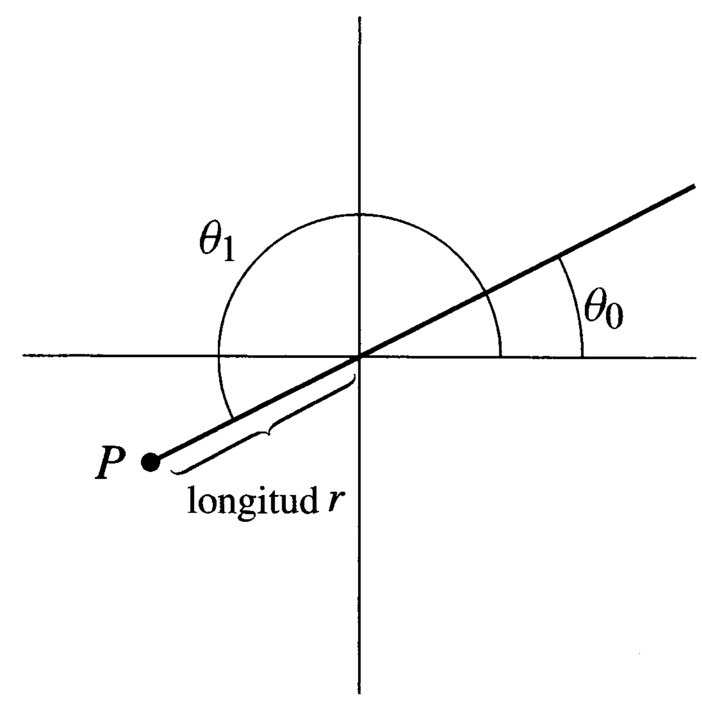


Figura 1



P es el punto con coordenadas polares (r,θ_1) y también el punto con coordenadas polares $(-r,\theta_2)$.

Figura 2

En este capítulo hemos procedido como si sólo hubiera una manera de representar puntos del plano con pares de números. En realidad existen muchas maneras diferentes y cada una da lugar a un "sistema de coordenadas" distinto. Las coordenadas usuales de un punto se denominan sus coordenadas cartesianas, ya que fue el matemático y filósofo francés René Descartes (1596-1650) quien introdujo por primera vez la idea de los sistemas de coordenadas. En muchos casos es más conveniente introducir coordenadas polares, las cuales se representan en la Figura 1. Al punto P se le asignan las coordenadas polares (r,θ), siendo r la distancia desde el origen O a P, y θ la medida, en radianes, del ángulo entre el eje horizontal y la recta de O a P. Existe una ambigüedad en la determinación de este ángulo ya que, por ejemplo, los puntos situados en el lado derecho del eje horizontal podrían tener un $\theta = 0$ o un $\theta = 2\pi$; además, θ es totalmente ambiguo en el origen O. Por tanto, es necesario excluir alguno de los radios que pasan por el origen si se quiere asignar un único par (r,θ) a cada punto considerado.

Por el contrario, no hay problema en asociar un único punto a cualquier par (r,θ). De hecho, incluso es posible (aunque no todos los autores lo aprueban) asociar un punto al par (r,θ) cuando $r < 0$, según el esquema que se indica en la Figura 2. Así, siempre es posible hablar del "punto con coordenadas polares (r,θ)" (incluyendo o no la posibilidad de que $r < 0$), aunque exista una cierta ambigüedad cuando se habla de las "coordenadas polares" de un punto dado.

Tal como se muestra en la Figura 1 (y en la Figura 2), está claro que el punto con coordenadas polares (r,θ) tiene coordenadas cartesianas (x,y) que se expresan mediante

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta.$$

Recíprocamente, si un punto tiene coordenadas cartesianas (x,y), entonces (cualesquiera de) sus coordenadas polares (r,θ) satisfacen

$$r = \pm\sqrt{x^2+y^2}$$
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} \qquad \text{si } x \neq 0.$$

Supongamos ahora que f es una función. Entonces se entiende por la **gráfica de f en coordenadas polares** la colección de todos los puntos P con coordenadas polares (r,θ) que satisfacen $r = f(\theta)$. En otras palabras, la gráfica de f en coordenadas polares es

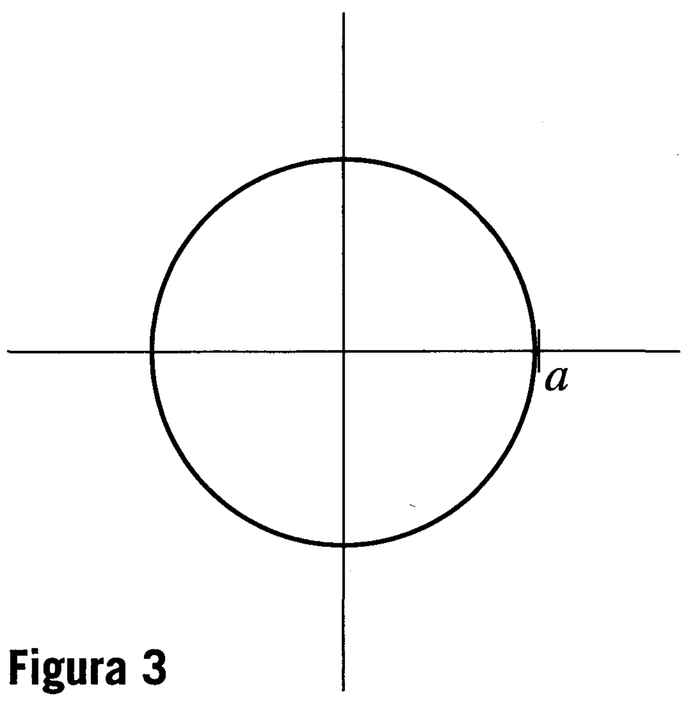
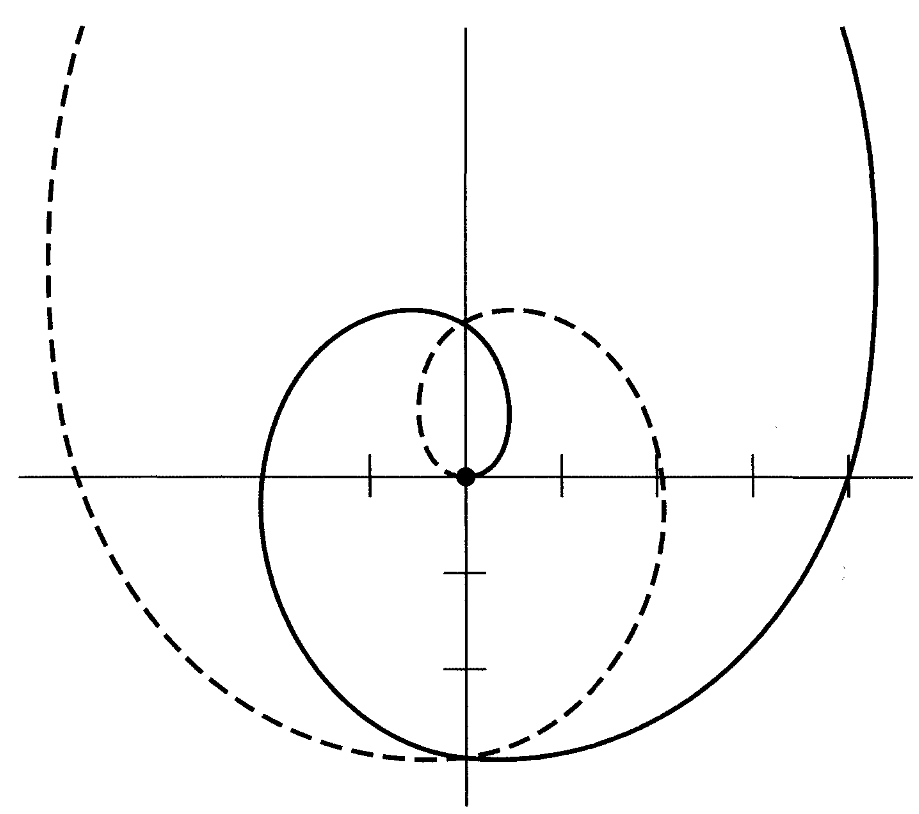


Figura 3

el conjunto de todos los puntos con coordenadas polares $(f(\theta),\theta)$. El hecho de que se consideren los pares $(f(\theta),\theta)$, colocando a $f(\theta)$ en primer lugar, en comparación con los pares $(x, f(x))$ de la gráfica usual de f, no tiene ningún significado especial; es únicamente por convenio que r se considere la primera coordenada polar y θ la segunda.

La gráfica de f en coordenadas polares se describe a menudo como "la gráfica de la ecuación $r = f(\theta)$". Por ejemplo, supongamos que f es una función constante, $f(\theta) = a$ para todo θ. La gráfica de la ecuación $r = a$ es simplemente un círculo de centro O y radio a (Figura 3). Este ejemplo ilustra, de manera flagrante, que las coordenadas polares probablemente simplificaran las cosas en situaciones en las que interviene la simetría con respecto al origen O.

En la Figura 4 se muestra la gráfica de la ecuación $r = \theta$. La línea continua corresponde a todos los valores de $\theta \geq 0$, y la línea a trazos a todos los valores $\theta \leq 0$.



Espiral de Arquímedes

Figura 4

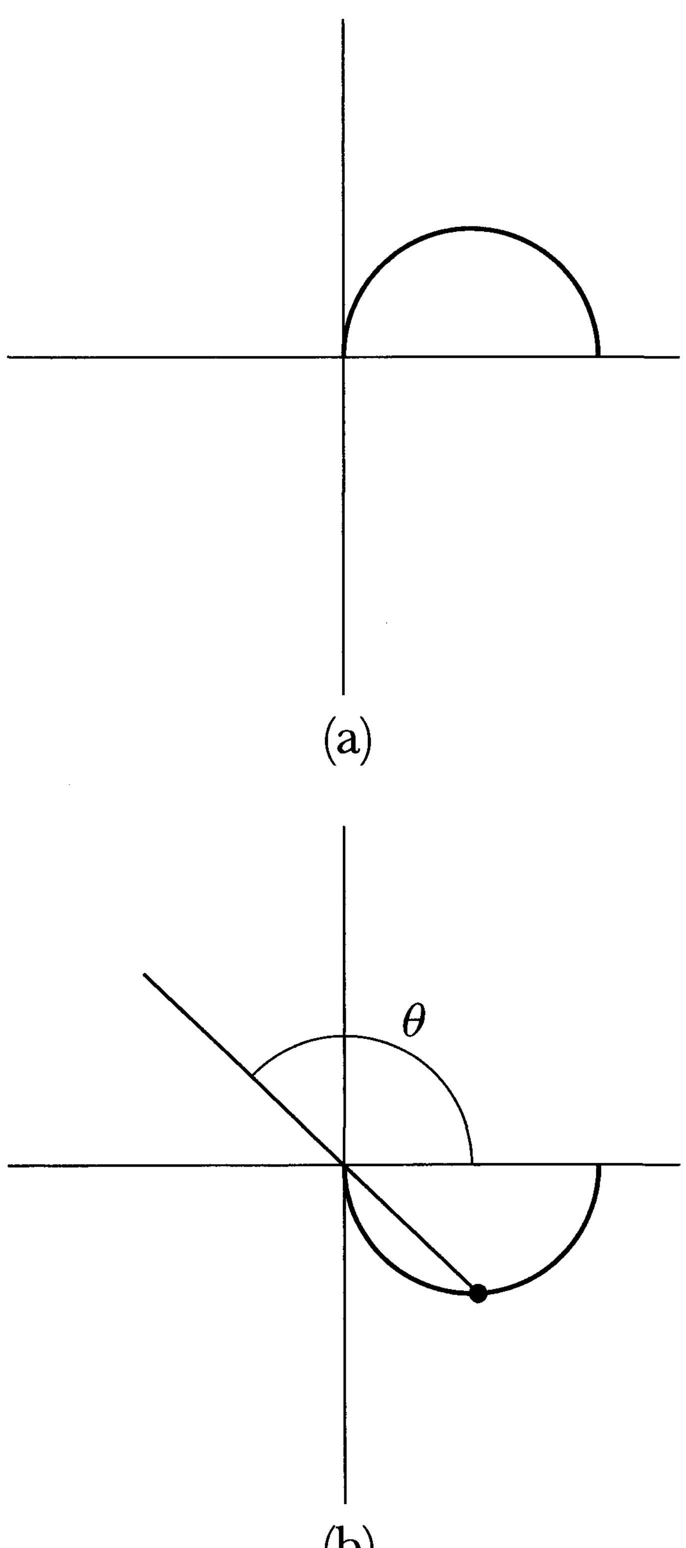


Figura 5

Para dar otro ejemplo que incluya tanto valores positivos como valores negativos de r, consideremos la gráfica de la ecuación $r = \cos\theta$. En la Figura 5(a) se muestra la parte de la gráfica correspondiente a $0 \leq \theta \leq \pi/2$ y en la Figura 5(b) la parte de la gráfica correspondiente a $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$; en este caso $r < 0$. El lector puede comprobar que no se añaden nuevos puntos a la gráfica en el caso que $\theta > \pi$ o $\theta < 0$. Es fácil describir a esta misma gráfica en términos de las coordenadas cartesianas de sus puntos. Como las coordenadas polares de cualquier punto de la gráfica satisfacen

$$r = \cos\theta,$$

y por tanto

$$r^2 = r\cos\theta,$$

sus coordenadas cartesianas satisfacen la ecuación

$$x^2 + y^2 = x$$

la cual describe a un círculo (Problema 4-16). [Recíprocamente, es fácil ver que si las coordenadas cartesianas de un punto satisfacen $x^2+y^2=x$, entonces dicho punto pertenece a la gráfica de la ecuación $r=\cos\theta$.]

Aunque ya hemos obtenido un círculo de dos maneras diferentes, podríamos pensar que hallar la ecuación de una elipse en coordenadas polares es mucho más difícil. Sin embargo no es así ya que se puede obtener una elegante ecuación si se elige uno de los *focos* como el origen de coordenadas. En la Figura 6 se muestra una elipse con uno de los focos en el punto O, y la suma de las distancias de cada punto de la elipse a O y al otro foco **f** igual a $2a$. Hemos elegido **f** a la izquierda de O, de manera que sus coordenadas se pueden expresar mediante

$$(-2\varepsilon a, 0),$$

(con $0 \leq \varepsilon < 1$, ya que debe verificarse que $2a >$ distancia de **f** a O).

La distancia r de (x,y) a O viene dada por

(1) $$r^2 = x^2 + y^2.$$

Según nuestra suposición, la distancia de (x,y) a **f** es $2a-r$, por tanto

$$(2a-r)^2 = (x-[-2\varepsilon a])^2 + y^2,$$

o sea

(2) $$4a^2 - 4ar + r^2 = x^2 + 4\varepsilon ax + 4\varepsilon^2 a^2 + y^2.$$

Restando (1) de (2) y dividiendo por $4a$ obtenemos

$$a - r = \varepsilon x + \varepsilon^2 a,$$

es decir

$$\begin{aligned} r &= a - \varepsilon x - \varepsilon^2 a \\ &= (1-\varepsilon^2)a - \varepsilon x, \end{aligned}$$

lo cual puede escribirse como

(3) $$r = \Lambda - \varepsilon x, \qquad \text{con } \Lambda = (1-\varepsilon^2)a.$$

Sustituyendo x por $r\cos\theta$, obtenemos

$$\begin{aligned} r &= \Lambda - \varepsilon r \cos\theta, \\ r(1+\varepsilon\cos\theta) &= \Lambda, \end{aligned}$$

y por tanto

(4) $$r = \frac{\Lambda}{1+\varepsilon\cos\theta}.$$

En el Capítulo 4 vimos que

(5) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

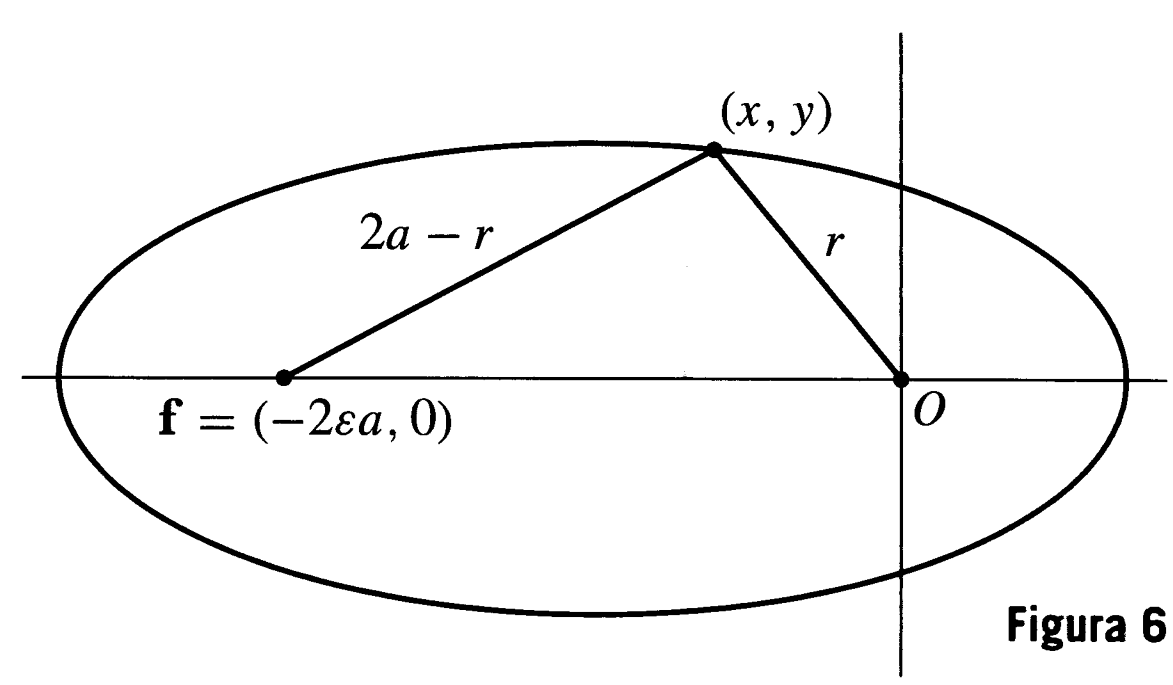


Figura 6

es la ecuación en coordenadas cartesianas de una elipse en la que $2a$ es la suma de las distancias a los focos, situados en $(-c,0)$ y $(c,0)$, con

$$b=\sqrt{a^2-c^2}.$$

Como la distancia entre los focos es $2c$, cuando esta elipse es desplazada c unidades hacia la izquierda, de manera que el foco $(c,0)$ se sitúa ahora en el origen, se obtiene la elipse (4) si $c=\varepsilon a$ o $\varepsilon=c/a$ (Λ está determinada por la ecuación (3)). Recíprocamente, dada la elipse descrita por (4), el valor de a en la correspondiente ecuación (5) viene determinado por (3),

$$a=\frac{\Lambda}{1-\varepsilon^2},$$

y utilizando nuevamente $c=\varepsilon a$, obtenemos

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{a^2-\varepsilon^2a^2}=a\sqrt{1-\varepsilon^2}=\frac{\Lambda}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Así, podemos obtener a y b, las longitudes de los semiejes mayor y menor, inmediatamente a partir de ε y Λ.

El número

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2},$$

la denominada *excentricidad* de la elipse, determina la "forma" de la elipse (la razón entre su semidistancia focal y su semieje mayor; una elipse será más redondeada cuanto más se aproxime su excentricidad al valor 0), mientras que el número Λ determina su "tamaño," como muestra la ecuación (4).

Problemas

1. Si dos puntos tienen coordenadas polares (r_1,θ_1) y (r_2,θ_2), demuestre que la distancia d entre los mismos viene dada por

$$d^2={r_1}^2+{r_2}^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2).$$

¿Cuál es el significado geométrico de dicha expresión?

2. Describa las características generales de la gráfica de f en coordenadas polares si

(i) f es par. (ii) f es impar. (iii) $f(\theta)=f(\theta+\pi)$.

3. Trace las gráficas de las siguientes ecuaciones:

(i) $r=a\,\mathrm{sen}\,\theta$.

(ii) $r=a\sec\theta$. Indicación: Es una gráfica muy sencilla.

(iii) $r=\cos 2\theta$. ¡Que haya suerte con esta gráfica!

(iv) $r=\cos 3\theta$. (v) $r=|\cos 2\theta|$. (vi) $r=|\cos 3\theta|$.

4. Halle las ecuaciones de las coordenadas cartesianas de los puntos de las gráficas (i), (ii) y (iii) del Problema 3.

5. Considere una hipérbola en la que la diferencia de la distancia entre los dos focos es la constante $2a$; elija un foco en O y el otro en $(-2\varepsilon a, 0)$. (En este caso debe cumplirse que $\varepsilon > 1$.) Demuestre que se obtiene exactamente la misma ecuación en coordenadas polares

$$r = \frac{\Lambda}{1 + \varepsilon\cos\theta}$$

que la obtenida en el caso de una elipse.

6. Considere el conjunto de puntos (x, y) tales que la distancia de (x, y) a O es igual a la distancia de (x, y) a la recta $y = a$ (Figura 7). Demuestre que la distancia a la recta es $a - r\cos\theta$ y deduzca que la ecuación puede escribirse como

$$a = r(1 + \cos\theta).$$

Observe que en el caso de una parábola esta ecuación tiene de nuevo la misma forma que (4).

7. Para cualquier Λ y ε, considere ahora la gráfica en coordenadas polares de la ecuación (4), la cual implica (3). Demuestre que los puntos que satisfacen dicha ecuación verifican también

$$(1 - \varepsilon^2)x^2 + y^2 = \Lambda^2 - 2\Lambda\varepsilon x.$$

Utilizando el Problema 4-16, demuestre que se trata de una elipse cuando $\varepsilon < 1$, de una parábola cuando $\varepsilon = 1$ y de una hipérbola cuando $\varepsilon > 1$.

8. (a) Trace la gráfica de la *cardioide* $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$.
(b) Demuestre que es también la gráfica de $r = -1 - \operatorname{sen}\theta$.
(c) Demuestre que puede ser descrita por la ecuación

$$x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} - y,$$

y deduzca que puede ser descrita por la ecuación

$$(x^2 + y^2 + y)^2 = x^2 + y^2.$$

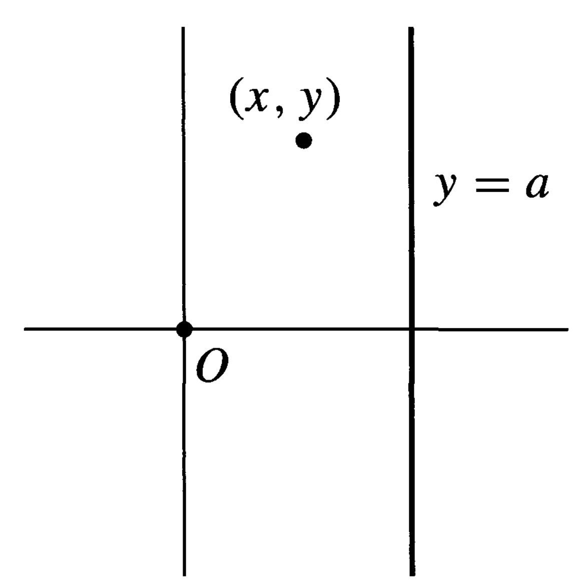


Figura 7

9. Trace las gráficas de las siguientes ecuaciones:

(i) $r = 1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta$. (ii) $r = 1 - 2\operatorname{sen}\theta$.
(iii) $r = 2 + \cos\theta$.

10. (a) Trace la gráfica de la *lemniscata*

$$r^2 = 2a^2\cos 2\theta.$$

(b) Halle una ecuación de sus coordenadas cartesianas.
(c) Demuestre que consiste en el conjunto de todos los puntos P de la Figura 8 que satisfacen $d_1 d_2 = a^2$.
(d) Trate de adivinar cuál es la forma de las curvas definidas por el conjunto de todos los puntos P que satisfacen $d_1 d_2 = b$, cuando $b > a^2$ y cuando $b < a^2$.

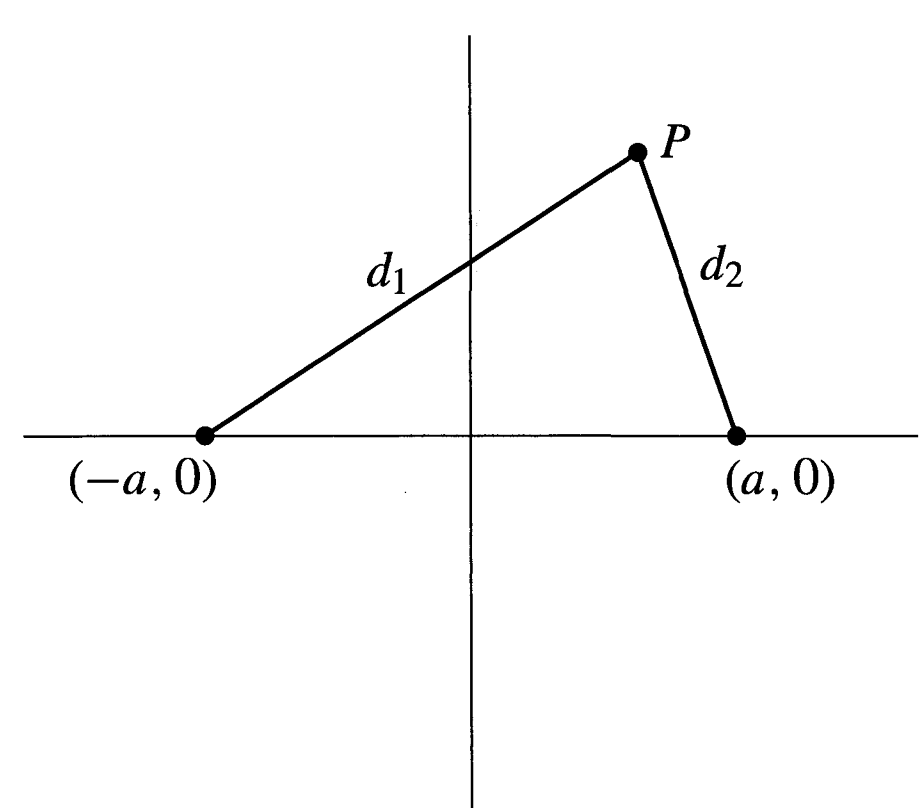


Figura 8

Límites

5

El concepto de límite es, seguramente, el más importante y probablemente el más difícil del cálculo infinitesimal. El objetivo de este capítulo es la definición de límites aunque comenzaremos, una vez más, con una definición provisional; lo que definiremos no es la palabra "límite" sino la noción de una función que se aproxima a un límite.

Definición provisional

> La función f se aproxima al límite l cerca de a, si $f(x)$ se aproxima tanto como se quiera a l si x se aproxima suficientemente a a pero es distinto de a.

De las seis funciones cuya gráfica se muestra en la Figura 1, sólo las tres primeras se aproximan a l en a. Observemos que, aunque $g(a)$ no está definida y $h(a)$ lo está "de manera incorrecta", todavía se verifica que g y h se aproximan a l cerca de a. Ello se debe a que en la definición que hemos dado se ha excluido explícitamente la necesidad de considerar el valor de la función en el punto a; tan sólo es necesario que $f(x)$ se aproxime a l cuando x se aproxima a a, siendo x *distinto* de a. Sencillamente no estamos interesados en el valor que pueda tener $f(a)$, ni tampoco en si f está definida en a.

Una manera conveniente de representar gráficamente el hecho de que f se aproxime a l cerca de a , consiste en utilizar un método para representar funciones que no mencionamos en el Capítulo 4. Dicho método consiste en dibujar dos rectas paralelas, cada una representando a **R**, y flechas que van desde un punto x situado en una de ambas rectas

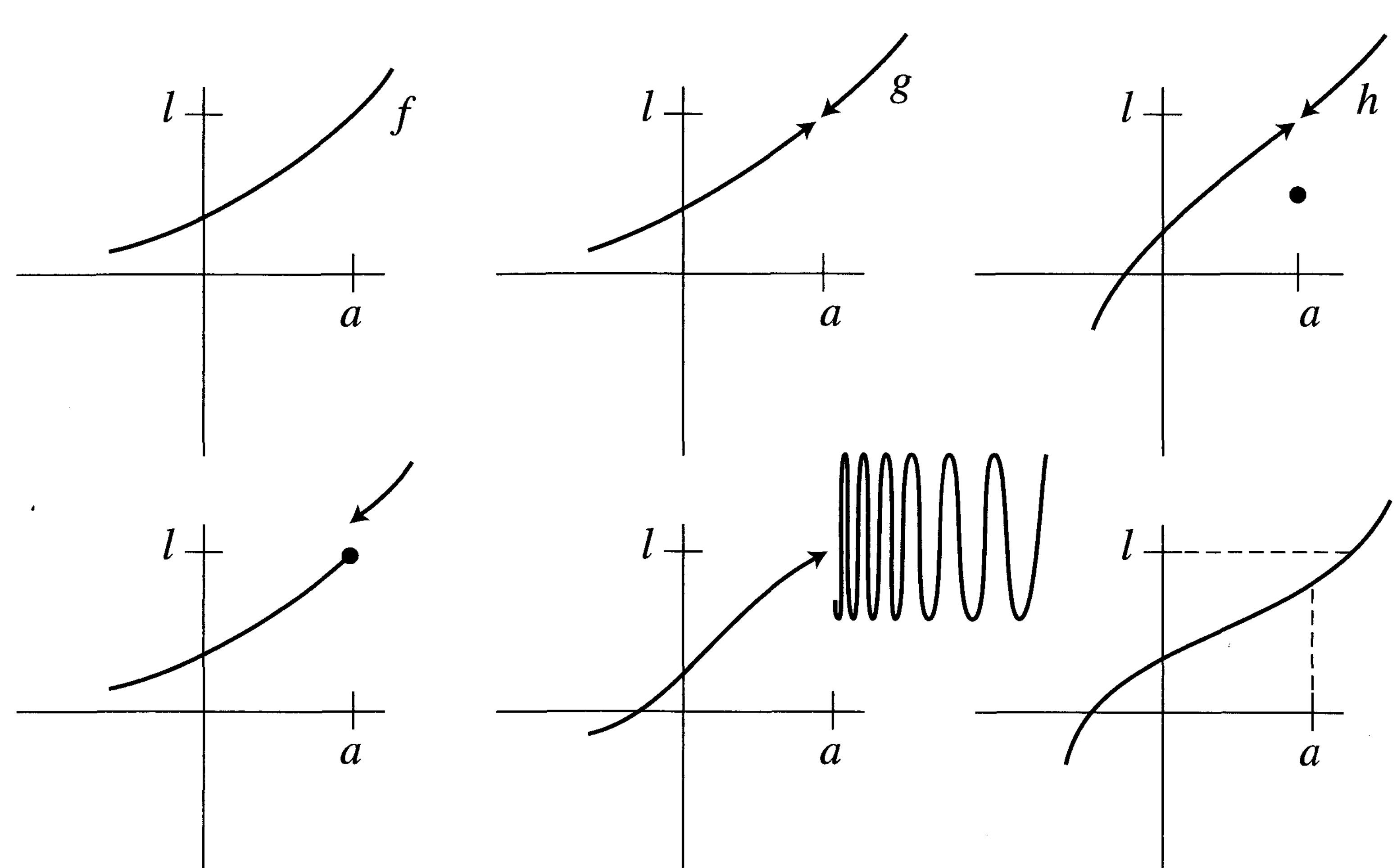
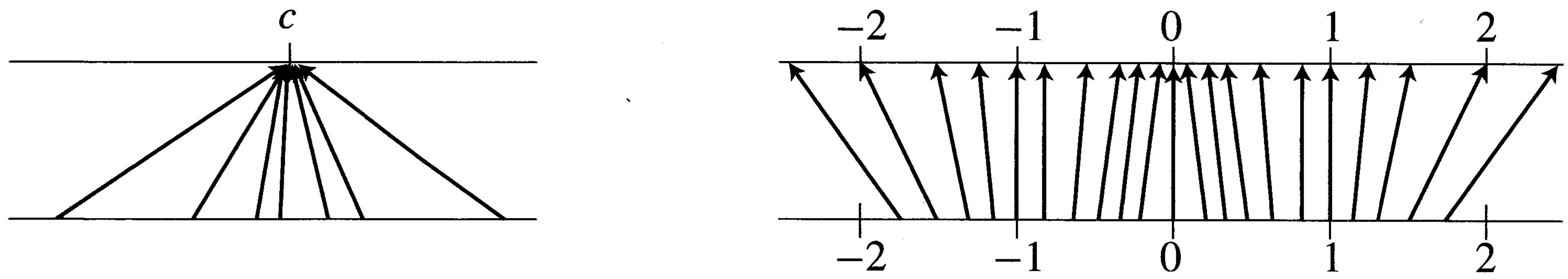


Figura 1

hasta un punto $f(x)$ situado en la otra recta. En la Figura 2 se ilustra este método de representación en el caso de dos funciones diferentes.



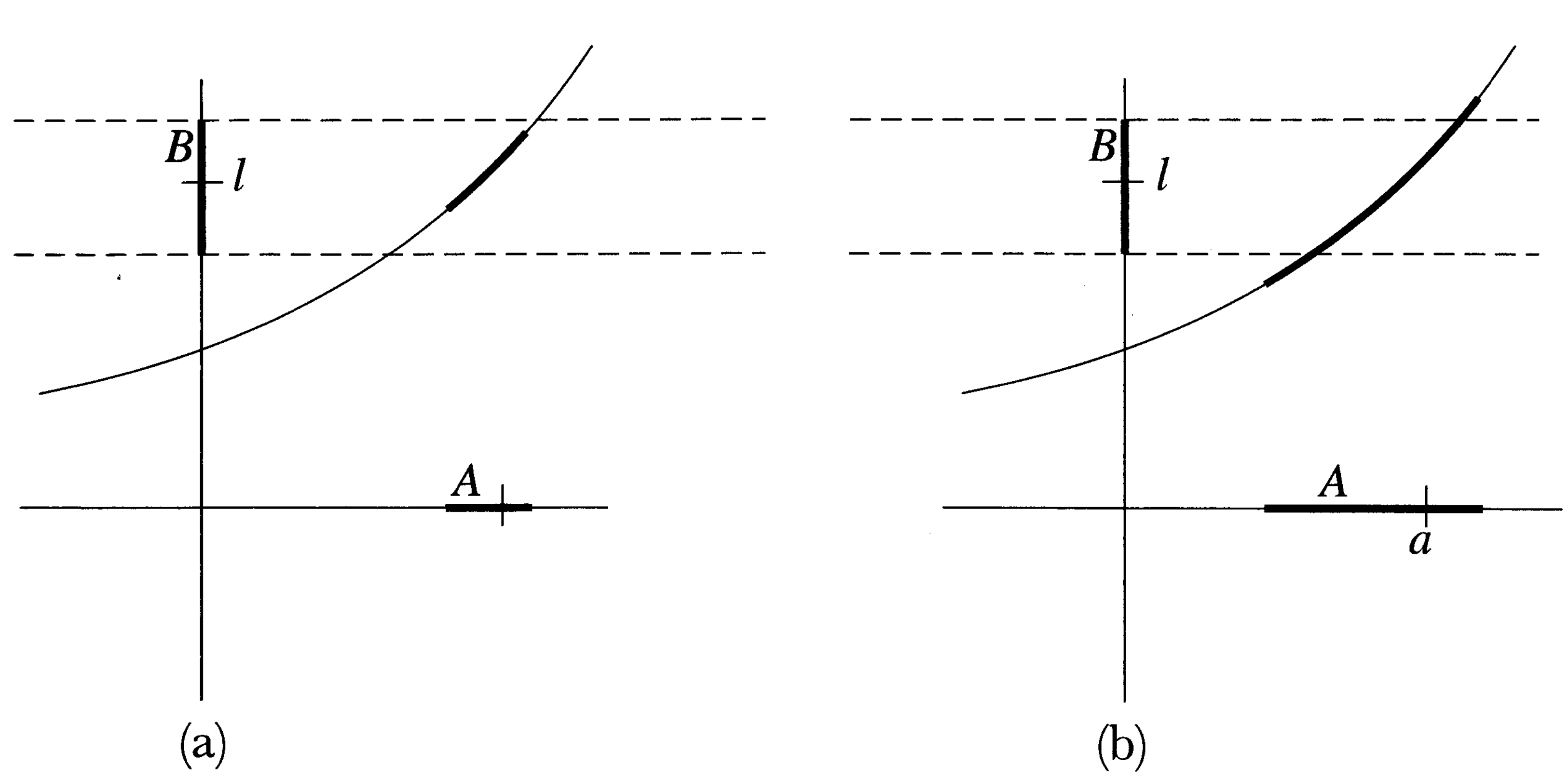
(a) $f(x) = c$ (b) $f(x) = x^3$

Figura 2

Consideremos ahora una función f cuya representación se ilustra en la Figura 3. Supongamos que interesa que $f(x)$ esté próximo a l, concretamente dentro del intervalo abierto B, que se muestra en la Figura 3. Esta condición la cumplen todos aquellos números x situados en el intervalo A de la Figura 3. (En este diagrama hemos elegido el mayor intervalo A que cumple la condición; cualquier otro incluido en A que contenga al punto a también la satisface.) Si elegimos un intervalo B' menor que B (Figura 4), en general deberíamos también elegir un intervalo menor, A', aunque sea cual sea el intervalo abierto B elegido se supone que siempre es posible encontrar un intervalo abierto A que satisface la condición.

Figura 3 **Figura 4**

Esta idea de límite también se puede ilustrar mediante la gráfica de f, aunque en este caso el intervalo B debe elegirse en el eje vertical, y el conjunto A en el eje horizontal. El hecho de que $f(x)$ pertenezca a B cuando x pertenece a A significa que la parte de la gráfica situada sobre A está contenida en la región limitada por las rectas horizontales que cortan a los puntos extremos de B; compárese la Figura 5(a), en la que se ha elegido un intervalo A válido, con la Figura 5(b), en la que A es demasiado largo.



(a) (b)

Figura 5

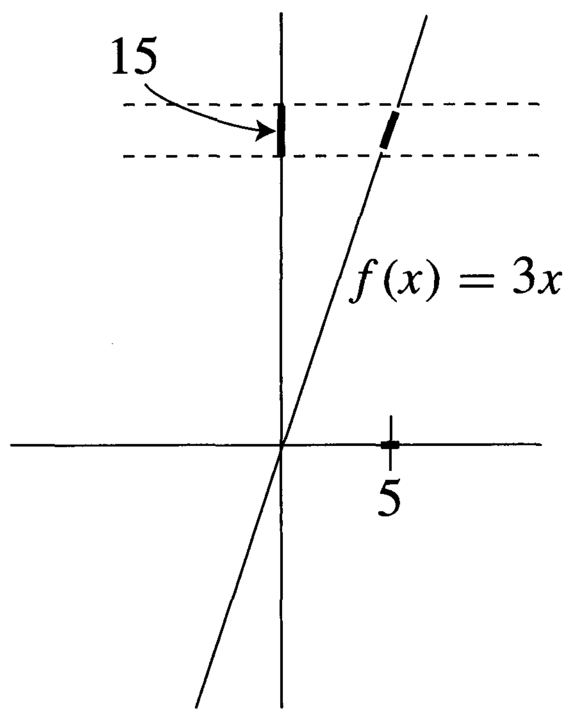


Figura 6

Para dar un ejemplo específico, consideremos la función $f(x) = 3x$ con $a = 5$ (Figura 6). Intuitivamente vemos que f debería aproximarse al límite 15 cerca de 5; deberíamos lograr que $f(x)$ estuviera tan próximo a 15 como deseáramos, si x estuviese suficientemente próximo a 5. Concretamente, supongamos que queremos conseguir que $3x$ se encuentre a una distancia de 15 menor que $\frac{1}{10}$. Esto significa que debe verificarse

$$15 - \frac{1}{10} < 3x < 15 + \frac{1}{10},$$

que puede escribirse como

$$-\frac{1}{10} < 3x - 15 < \frac{1}{10}.$$

Para conseguirlo basta exigir que

$$-\frac{1}{30} < x - 5 < \frac{1}{30},$$

o, simplemente, que $|x-5| < \frac{1}{30}$; no hay nada especial en el valor $\frac{1}{10}$. Se podría haber exigido también que $|3x - 15| < \frac{1}{100}$; en este caso, esto se cumpliría si $|x-5| < \frac{1}{300}$. De hecho, si hubiésemos elegido cualquier número positivo ε, podríamos lograr que $|3x - 15| < \varepsilon$ simplemente exigiendo que $|x-5| < \varepsilon/3$.

Tampoco no hay nada especial en el valor $a = 5$. Se puede comprobar también, con mucha facilidad, que f se aproxima al límite $3a$ en el punto a para cualquier a: para asegurarse de que

$$|3x - 3a| < \varepsilon$$

basta exigir que

$$|x - a| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Naturalmente, el mismo argumento sirve para la función $f(x) = 3\,000\,000$, aunque debemos ser 1 000 000 de veces más cuidadosos, eligiendo $|x - a| < \varepsilon/3\,000\,000$ para asegurarnos de que $|f(x) - a| < \varepsilon$.

La función $f(x) = x^2$ es más interesante. Seguramente deberíamos ser capaces de demostrar que $f(x)$ se aproxima a 9 cerca de 3. Esto significa que debemos conseguir que se verifique la desigualdad

$$|x^2 - 9| < \varepsilon$$

para cualquier número positivo ε, si $|x-3|$ es suficientemente pequeño. Es obvio que el primer paso consiste en escribir

$$|x^2 - 9| = |x-3| \cdot |x+3|,$$

ya que así se obtiene el factor útil $|x-3|$. Sin embargo, a diferencia de lo que ocurría en el caso de los ejemplos anteriores, aquí el factor extra es $|x+3|$, que no es una constante conveniente como 3 ó 3 000 000. Ahora bien, todo consiste en asegurarse de acotar convenientemente el valor de $|x+3|$, de manera que lo primero que vamos a hacer es exigir que $|x-3|<1$, es decir, que $2<x<4$, y por tanto que $5<x+3<7$, lo cual nos asegura que $|x+3|<7$. Por tanto, obtenemos

$$|x^2-9| = |x-3|\cdot|x+3| < 7|x-3|,$$

lo que demuestra que $|x^2-9|<\varepsilon$ si $|x-3|<\varepsilon/7$, con la condición de que $|x-3|<1$. O, para dar una respuesta más formal: debemos exigir que $|x-3|<\text{mín}(\varepsilon/7,1)$.

La especificación inicial $|x-3|<1$ la hicimos simplemente por conveniencia. Podríamos haber exigido también que $|x-3|<\frac{1}{10}$ ó que $|x-3|<10$, o cualquier otro valor conveniente. Para asegurarse de que entiende el razonamiento del párrafo anterior, el lector debería seguir los mismos pasos, suponiendo que $|x-3|<10$.

El argumento que hemos utilizado para demostrar que f se aproxima a 9 cerca de 3 servirá también para demostrar que f se aproxima a a^2 cerca de a para cualquier a, aunque en este caso va a ser algo más laborioso obtener la acotación apropiada para $|x-a|$. Exigiremos primero que $|x-a|<1$, confiando nuevamente en que esto asegure que $|x+a|$ no sea demasiado grande. De hecho, en el Problema 1-12 se demuestra que

$$|x|-|a| \leq |x-a| < 1,$$

y por tanto

$$|x| < 1+|a|,$$

de lo que se deduce que

$$|x+a| \leq |x|+|a| < 2|a|+1,$$

obteniendo

$$\begin{aligned} |x^2-a^2| &= |x-a|\cdot|x+a| \\ &< |x-a|\cdot(2|a|+1), \end{aligned}$$

de manera que $|x^2-a^2|<\varepsilon$ si $|x-a|<\varepsilon/(2|a|+1)$, con la condición de que $|x-a|<1$. Más formalmente: exigimos que $|x-a|<\text{mín}(\varepsilon/(2|a|+1),\,1)$.

En contraste con este ejemplo, consideraremos ahora la función $f(x)=1/x$ (con $x\neq 0$), e intentaremos demostrar que f se aproxima a $1/3$ cerca de 3. Esto significa que debemos demostrar que se verifica la desigualdad

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{3}\right| < \varepsilon$$

para cualquier número positivo ε si $|x-3|$ es suficientemente pequeño. Comenzamos escribiendo

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3-x}{3x}\right| = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{|x|}\cdot|x-3|,$$

obteniendo así el factor $|x-3|$ que necesitamos, junto con el factor de ajuste adicional $\frac{1}{3}$ y el factor problemático $1/|x|$. En este caso debemos asegurarnos que $|x|$ no sea demasiado *pequeño*, de manera que $1/|x|$ no sea demasiado grande.

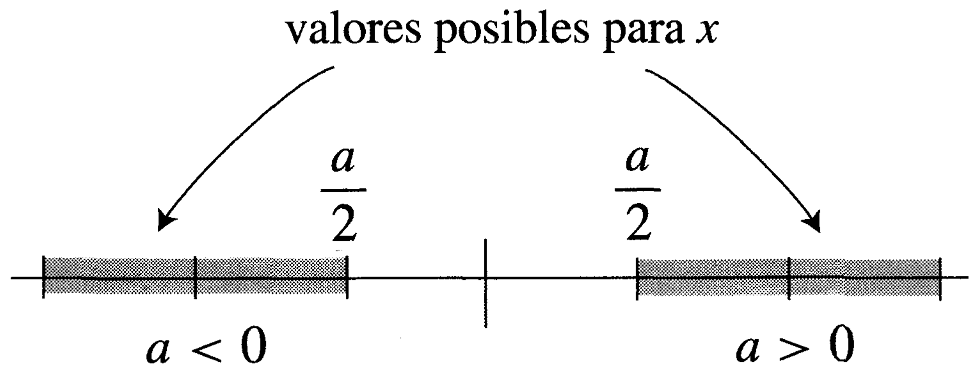


Figura 7

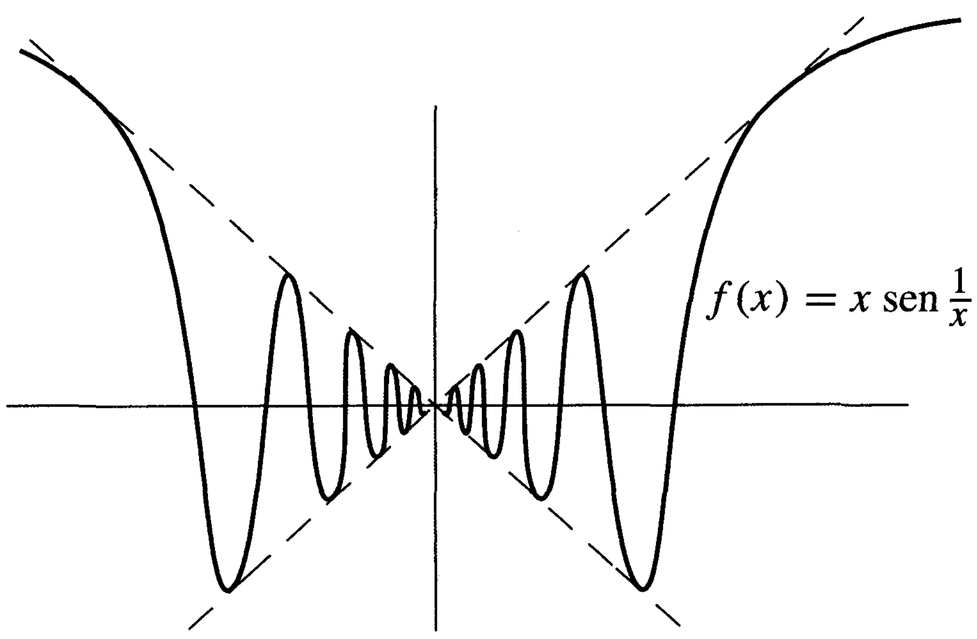


Figura 8

En primer lugar podemos exigir que $|x-3| < 1$, ya que entonces $2 < x < 4$, de manera que

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2},$$

lo cual nos asegura no sólo que $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$, sino también que $x > 0$, lo cual es importante para deducir que $\frac{1}{|x|} < \frac{1}{2}$. Obtenemos pues

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{|x|} \cdot |x-3| < \frac{1}{6}|x-3|,$$

lo que demuestra que $|1/x - 1/3| < \varepsilon$ si $|x-3| < 6\varepsilon$, con la condición de que $|x-3| < 1$. Nuevamente, para dar una expresión más formal, basta exigir que $|x-3| < \text{mín}(6\varepsilon, 1)$.

Si, por el contrario, deseáramos demostrar que f se aproxima a $-1/3$ cerca de -3, comenzaríamos estipulando que $|x-(-3)| < 1$, es decir que $-4 < x < -2$, lo cual implica nuevamente que $|1/x| < 1/2$, y a partir de aquí todos los pasos son iguales a los del apartado anterior.

Para demostrar en general que f se aproxima a $1/a$ cerca de a para cualquier a, vamos a seguir básicamente el mismo procedimiento excepto que, una vez más, hemos de ser más cuidadosos al formular las suposiciones iniciales. No basta exigir simplemente que $|x-a|$ sea menor que 1, o menor que otro valor particular, ya que si a tiende a 0 esto permitiría incluir valores de x negativos (por no hablar de la embarazosa posibilidad de que $x = 0$, valor en el cual f no está definida).

En este caso la estrategia consiste en exigir que

$$|x-a| < \frac{|a|}{2};$$

dicho de otra manera, x debe encontrarse a una distancia de a inferior a la mitad de la distancia de a a 0 (Figura 7). El lector debe comprobar que $x \neq 0$ y que $1/|x| < 2/|a|$, y luego proceder tal como hemos hecho anteriormente con el resto del argumento.

Con todo el trabajo requerido para explicar estos ejemplos sencillos, el lector ya debe haber empezado a estremecerse ante la perspectiva de abordar funciones todavía más complejas. Pero esto no será necesario realmente ya que al final dispondremos de algunos teoremas básicos que van a facilitar la tarea. En lugar de preocuparnos por la tediosa álgebra que podría necesitarse en el caso de funciones como $f(x) = x^3$ o $f(x) = 1/x^3$, vamos a dedicar nuestra atención a algunos ejemplos que, de entrada, podrían parecer todavía más intimidantes.

Consideremos en primer lugar la función $f(x) = x \operatorname{sen} 1/x$ (Figura 8). A pesar del comportamiento errático de esta función cerca de 0, está claro, al menos intuitivamente, que f tiende a $l = 0$ cerca de $a = 0$ (recordemos que nuestra definición provisional excluye específicamente el valor $x = a$, por tanto no importa que dicha función ni siquiera esté definida en 0). Queremos demostrar que es posible conseguir que $f(x) = x \operatorname{sen} 1/x$ esté tan próximo a 0 como se desee, con la condición de que x esté suficientemente próximo a 0, pero sea $\neq 0$. En otras palabras, para cualquier número $\varepsilon > 0$, queremos demostrar que

$$|f(x) - 0| = \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$$

con la condición de que $|x| = |x - 0|$ sea suficientemente pequeño (pero $\neq 0$). Esto es fácil. Como

$$\left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq 1, \qquad \text{para todo } x \neq 0,$$

se verifica que

$$\left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq |x|, \qquad \text{para todo } x \neq 0,$$

de manera que $|x \operatorname{sen} 1/x| < \varepsilon$ requiriendo simplemente que $|x| < \varepsilon$ y $\neq 0$.

En el caso de la función $f(x) = x^2 \operatorname{sen} 1/x$ (Figura 9) todavía parece más evidente que f tienda a 0 cerca de 0. Si deseamos, por ejemplo, que

$$\left| x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| < \frac{1}{10},$$

entonces basta con exigir que $|x| < \frac{1}{10}$ y $x \neq 0$, ya que esto implica que $|x^2| < \frac{1}{100}$ y por tanto que

$$\left| x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq |x^2| < \frac{1}{100} < \frac{1}{10}.$$

(Podríamos hacerlo todavía mejor y exigir que $|x| < 1/\sqrt{10}$ y $x \neq 0$, aunque no hace falta ser tan meticuloso.) En general, si $\varepsilon > 0$, para garantizar que

$$\left| x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| < \varepsilon,$$

tan sólo es necesario exigir que

$$|x| < \varepsilon \quad \text{y} \quad x \neq 0,$$

siempre y cuando $\varepsilon \leq 1$. Si ε es mayor que 1 (lo cual es posible, aunque son los ε "pequeños" los más interesantes), entonces no basta con exigir que $|x| < \varepsilon$, aunque es suficiente exigir que $|x| < 1$ y $x \neq 0$.

Como tercer ejemplo, consideremos la función $f(x) = \sqrt{|x|} \operatorname{sen} 1/x$ (Figura 10). Para conseguir que $|\sqrt{|x|} \operatorname{sen} 1/x| < \varepsilon$ podemos imponer la condición de que

$$|x| < \varepsilon^2 \quad \text{y} \quad x \neq 0$$

(las manipulaciones algebraicas se dejan para el lector).

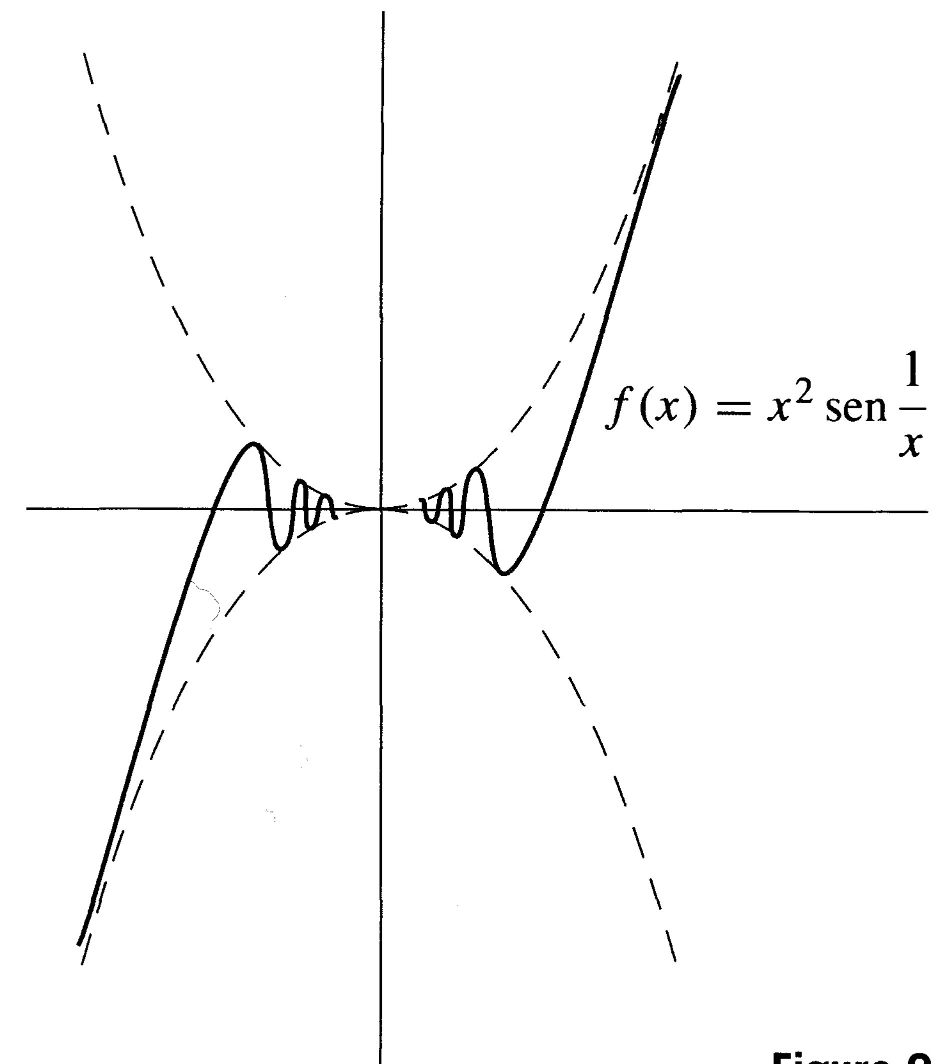


Figura 9

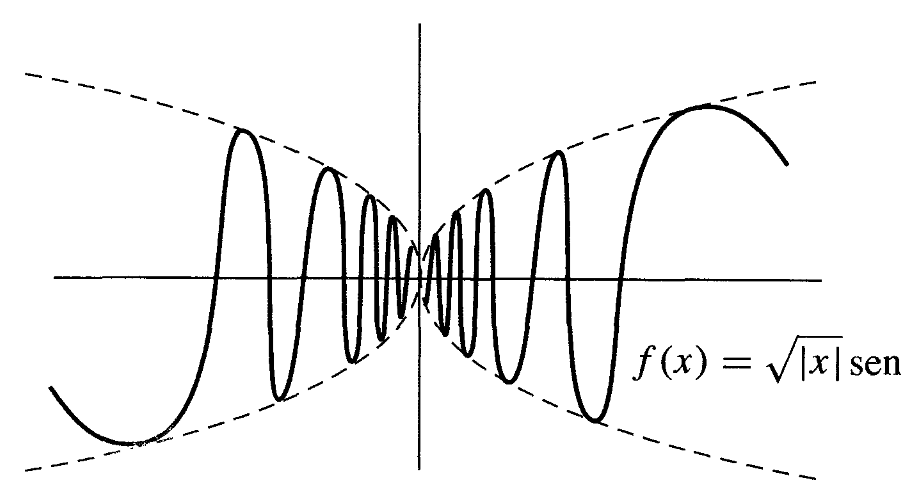


Figura 10

Finalmente, consideremos la función $f(x) = \operatorname{sen} 1/x$ (Figura 11). En este caso es *falso* que f tienda a 0 cerca de 0. Esto equivale a decir que para cada número $\varepsilon > 0$ no es verdad que $|f(x) - 0| < \varepsilon$ eligiendo x suficientemente próximo a 0 y $\neq 0$. Para demostrarlo basta hallar *un* $\varepsilon > 0$ para el cual no pueda garantizarse la condición $|f(x) - 0| < \varepsilon$, por pequeño que sea el valor de $|x|$. De hecho, basta elegir $\varepsilon = \frac{1}{2}$: es imposible asegurar que $|f(x)| < \frac{1}{2}$ por pequeño que sea el valor de $|x|$; ya que si A es cualquier intervalo que contiene a 0, existe un número $x = 1/(\frac{1}{2}\pi + 2n\pi)$ que pertenece a dicho intervalo tal que $f(x) = 1$.

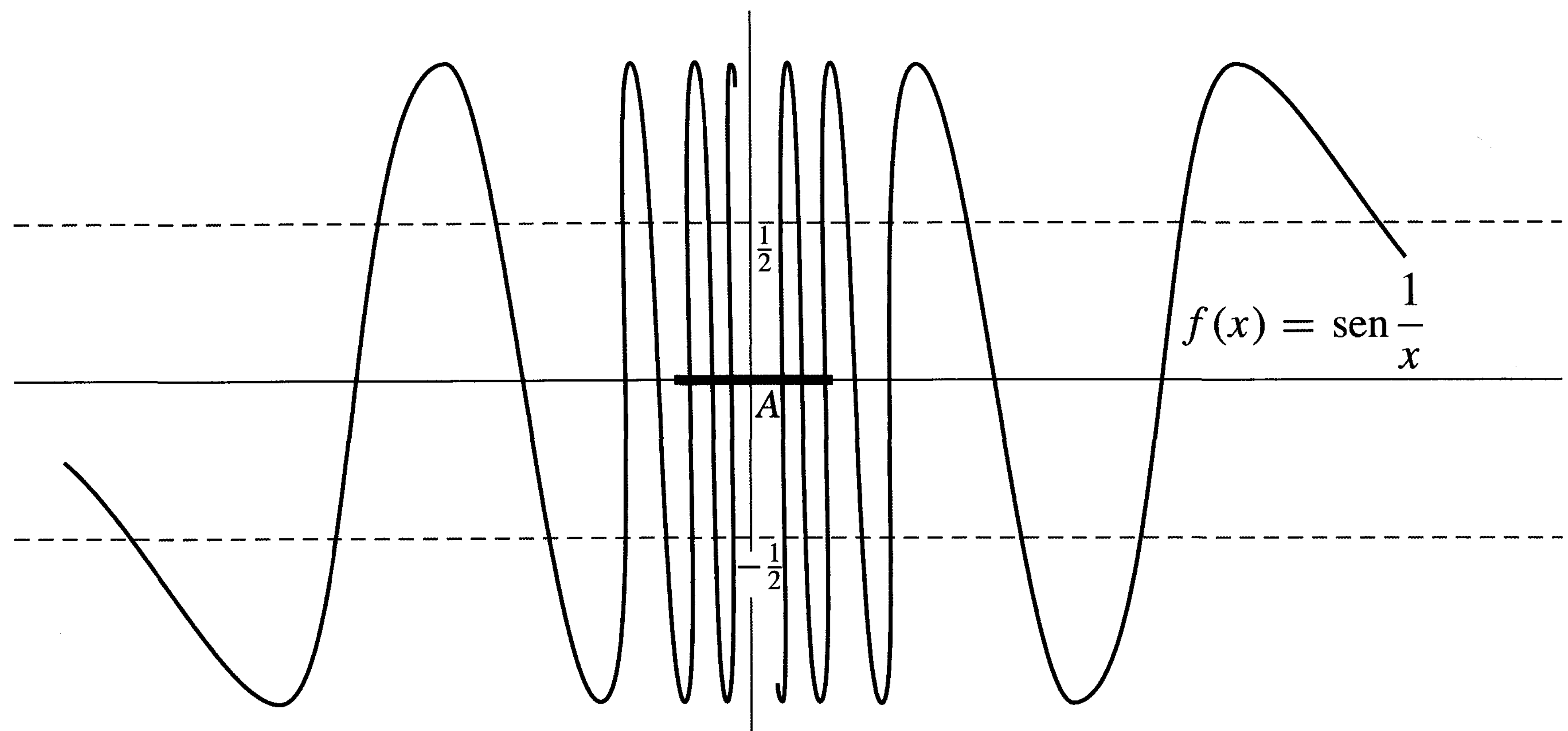


Figura 11

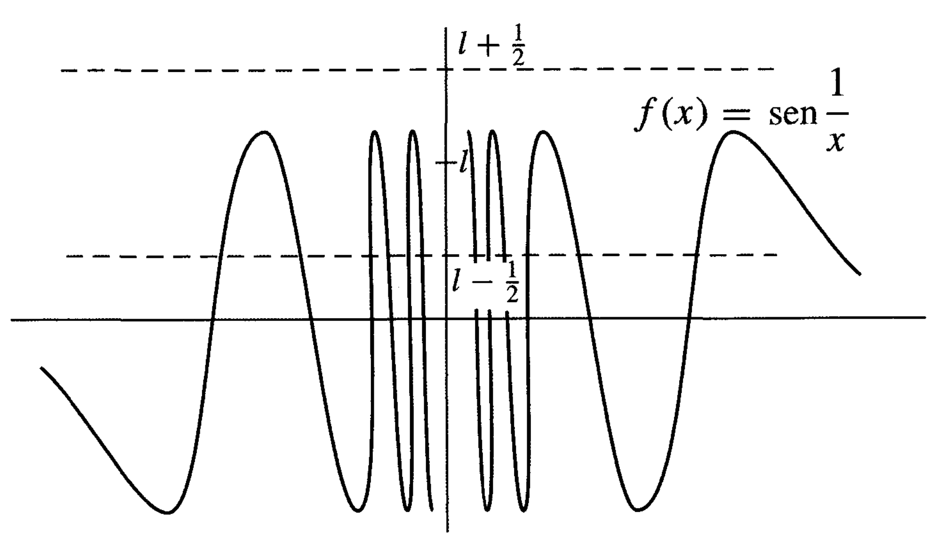


Figura 12

El mismo argumento puede utilizarse para demostrar que f no se aproxima a *ningún* número cerca de 0 (Figura 12). Para demostrarlo debemos elegir, para todo número l, algún número $\varepsilon > 0$ de manera que $|f(x) - l| < \varepsilon$ *no* sea cierto, por pequeño que sea el valor de x. La elección $\varepsilon = \frac{1}{2}$ también sirve para cualquier número l; es decir, por pequeño que sea $|x|$, no podemos asegurar que $|f(x) - l| < \frac{1}{2}$. La explicación radica en que para cualquier intervalo A que contenga a 0 podemos hallar dos números x_1 y x_2 del intervalo tales que

$$f(x_1) = 1 \qquad \text{y} \qquad f(x_2) = -1,$$

concretamente

$$x_1 = \frac{1}{\frac{1}{2}\pi + 2n\pi} \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{1}{\frac{3}{2}\pi + 2m\pi}$$

para valores suficientemente grandes de n y m. Pero el intervalo de $l - \frac{1}{2}$ a $l + \frac{1}{2}$ no puede contener a la vez a -1 y a 1, ya que su longitud total es tan sólo 1; de manera que no es posible que se verifique

$$|1 - l| < \tfrac{1}{2} \text{ y también que } |-1 - l| < \tfrac{1}{2},$$

sea cual sea el valor de l.

Este comportamiento especial de $f(x) = \operatorname{sen} 1/x$ cerca de 0 pueden presentarlo también otras funciones. Si consideramos la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ 1, & x \text{ racional}, \end{cases}$$

entonces, cualquiera que sea a, f no se aproxima a ningún número l cerca de a. De hecho, no es posible conseguir que $|f(x) - l| < \frac{1}{4}$ por mucho que se aproxime x a a, ya que en cualquier intervalo alrededor de a existen números x con $f(x) = 0$, y también números x con $f(x) = 1$, de manera que debería verificarse que $|0 - l| < \frac{1}{4}$ y también que $1 - l| < \frac{1}{4}$.

Una variante interesante de este comportamiento la presenta la función que se muestra en la Figura 13:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ racional} \\ 0, & x \text{ irracional}. \end{cases}$$

El comportamiento de esta función es "opuesto" al de $g(x) = \operatorname{sen} 1/x$; se aproxima a 0 en el punto 0, pero no se aproxima a ningún número en el punto a, si $a \neq 0$. A estas alturas el lector no debería tener ninguna dificultad en convencerse de que esta afirmación es cierta.

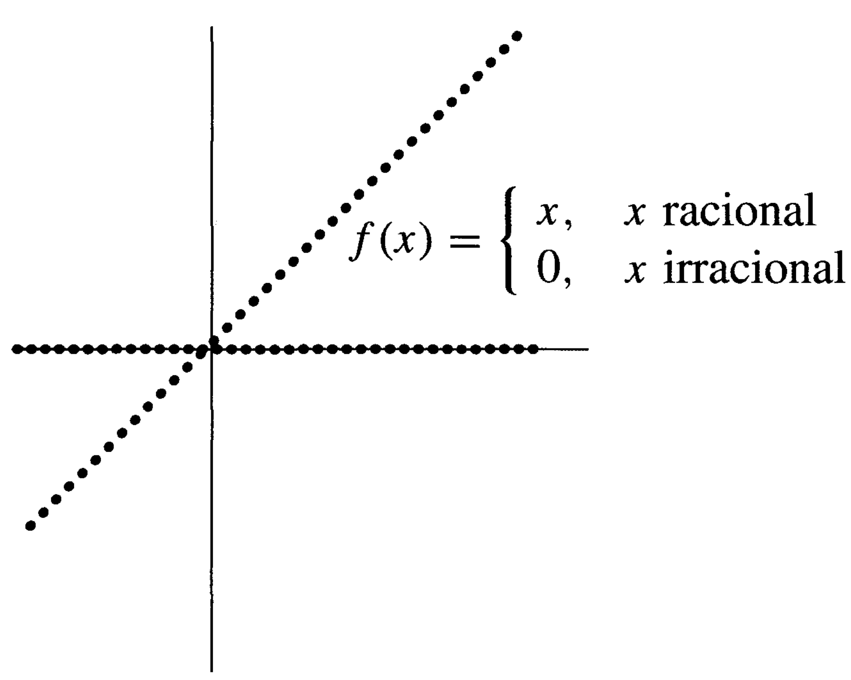


Figura 13

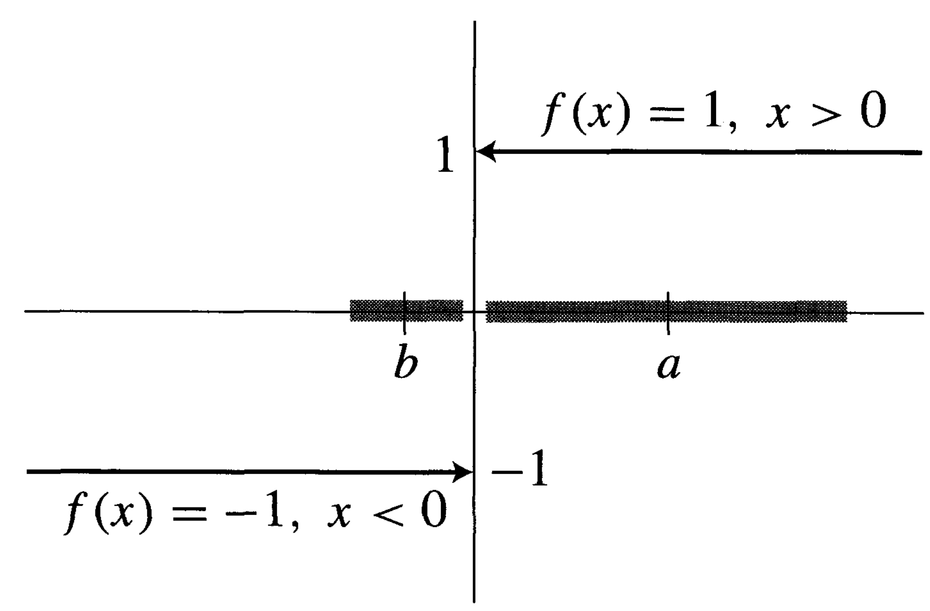


Figura 14

Concluimos con un ejemplo muy sencillo (Figura 14):

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Si $a > 0$, entonces f se aproxima a 1 cerca de a: en efecto, para garantizar que $|f(x) - 1 < \varepsilon$ basta con exigir que $|x - a| < a$, ya que en este caso

$$\begin{aligned} -a &< x - a \\ \text{o} \quad 0 &< x \end{aligned}$$

de manera que $f(x) = 1$. Análogamente, si $b < 0$, entonces f se aproxima a -1 cerca de b: para garantizar que $|f(x) - (-1)| < \varepsilon$ basta con exigir que $|x - b| < -b$. Finalmente, tal como el lector puede comprobar, f no se aproxima a ningún número cerca de 0.

Ha llegado el momento de hacer notar que, de las muchas demostraciones sobre límites que hemos dado, ninguna ha sido realmente una demostración en el verdadero sentido de la palabra. El problema radica no en el método deductivo empleado sino en la definición. Si la definición provisional de función que dimos en su momento admitía muchas críticas, la definición provisional de tender hacia un límite es todavía más vulnerable. Esta definición no es lo suficientemente precisa como para ser utilizada en las demostraciones. No está claro en absoluto como se puede "conseguir" que $f(x)$ se aproxime a l (sea cual sea el significado de "aproxime"), "exigiendo" que x esté suficientemente próximo a a (sea cual sea el significado de "suficientemente"). A pesar de las críticas a las que es vulnerable nuestra definición, el lector puede tener la sensación (espero que así sea) que los razonamientos que hemos utilizado son, sin embargo, totalmente convincentes. Para poder hacer cualquier tipo de deducción nos hemos visto obligados prácticamente a inventar la definición real. Es posible llegar a esta definición en varias etapas, cada una de ellas clarificando alguna frase ambigua que todavía se mantiene en la definición. Comencemos, una vez más, con nuestra definición provisional:

> La función f se aproxima al límite l cerca de a, si $f(x)$ se aproxima tanto como se quiera a l si x se aproxima suficientemente a a pero es distinto de a.

El primer cambio que hicimos en esta definición fue observar que hacer que $f(x)$ se aproxime a l significa que $|f(x)-l|$ es pequeño, y análogamente para x y a:

> La función f se aproxima al límite l cerca de a, si se puede conseguir que $|f(x)-l|$ sea tan pequeño como se desee con la condición de que $|x-a|$ sea suficientemente pequeño y $x \neq a$.

El segundo cambio , más significativo, consistió en observar que hacer $|f(x)-l|$ "tan pequeño como se desee" significa que $|f(x)-l| < \varepsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$ que elijamos:

> La función f se aproxima al límite l cerca de a, si para cada número $\varepsilon > 0$ es posible conseguir que $|f(x)-l| < \varepsilon$ si $|x-a|$ es suficientemente pequeño y $x \neq a$.

Todas las demostraciones sobre límites que hemos dado hasta ahora tienen un patrón común. Para cada número $\varepsilon > 0$ debíamos hallar otro número positivo, llamémosle δ, con la propiedad de que si $x \neq a$ y $|x-a| < \delta$, entonces $|f(x)-l| < \varepsilon$. En el caso de la función $f(x) = x \operatorname{sen} 1/x$ (con $a = 0$, $l = 0$), el número δ era precisamente el número ε; para $f(x) = \sqrt{|x|} \operatorname{sen} 1/x$, era ε^2; para $f(x) = x^2$ era el valor mínimo de 1 y $\varepsilon/(2|a|+1)$. En general no es evidente, en absoluto, cómo puede hallarse el número δ, dado ε, pero es la condición $|x-a| < \delta$ la que expresa cuan pequeño debe ser "suficientemente" pequeño:

> La función f se aproxima al límite l cerca de a, si para cada $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $|x-a| < \delta$ y $x \neq a$, entonces $|f(x)-l| < \varepsilon$.

Esta es, prácticamente, la definición que adoptaremos. Únicamente haremos un cambio trivial, observando que "$|x-a| < \delta$ y $x \neq a$" puede expresarse también mediante "$0 < |x-a| < \delta$".

Definición

La función ***f* tiende hacia el límite *l* en *a*** significa que: para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x)-l| < \varepsilon$.

Esta definición es tan importante (*todo* lo que hagamos a partir de ahora va a depender de ella) que sería inútil continuar sin conocerla. Si es necesario, el lector puede memorizarla, como un poema. Esto al menos es mejor que enunciarla incorrectamente, ya que en este caso es muy probable que se hagan demostraciones incorrectas. Un buen ejercicio para habituarse a dar demostraciones correctas consiste en revisar todos los hechos demostrados hasta ahora relativos a límites de funciones y dar, en cada caso, la demostración formal correspondiente. En la mayoría de casos esto supondrá, simplemente, cambiar algunas frases y símbolos para que se adecúen a la definición formal; todo el trabajo algebraico ya se ha realizado. Al demostrar que f *no* tiende al límite l en a, hay que asegurarse que la negación de la definición sea correcta:

Si *no* es cierto que

> para cada $\varepsilon > 0$ exista algún $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x)-l| < \varepsilon$,

debe verificarse que

> existe *algún* $\varepsilon > 0$ tal que para *todo* $\delta > 0$ existe *algún* x que satisface $0 < |x-a| < \delta$ pero no que $|f(x)-l| < \varepsilon$.

Así, para demostrar que la función $f(x) = \operatorname{sen} 1/x$ no tiende al límite 0 en 0, elegimos $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y comprobamos que para cada $\delta > 0$ existe algún x con $0 < |x-0| < \delta$ pero no $|\operatorname{sen} 1/x - 0| < \frac{1}{2}$, concretamente, los x de la forma $1/(\pi/2+2n\pi)$, siendo n lo suficientemente grande para que $1/(\pi/2+2n\pi) < \delta$.

Como ilustración final del uso de la definición de una función que tiende a un límite, hemos reservado a la función que se muestra en la Figura 15, la cual constituye un ejemplo clásico y uno de los más complicados:

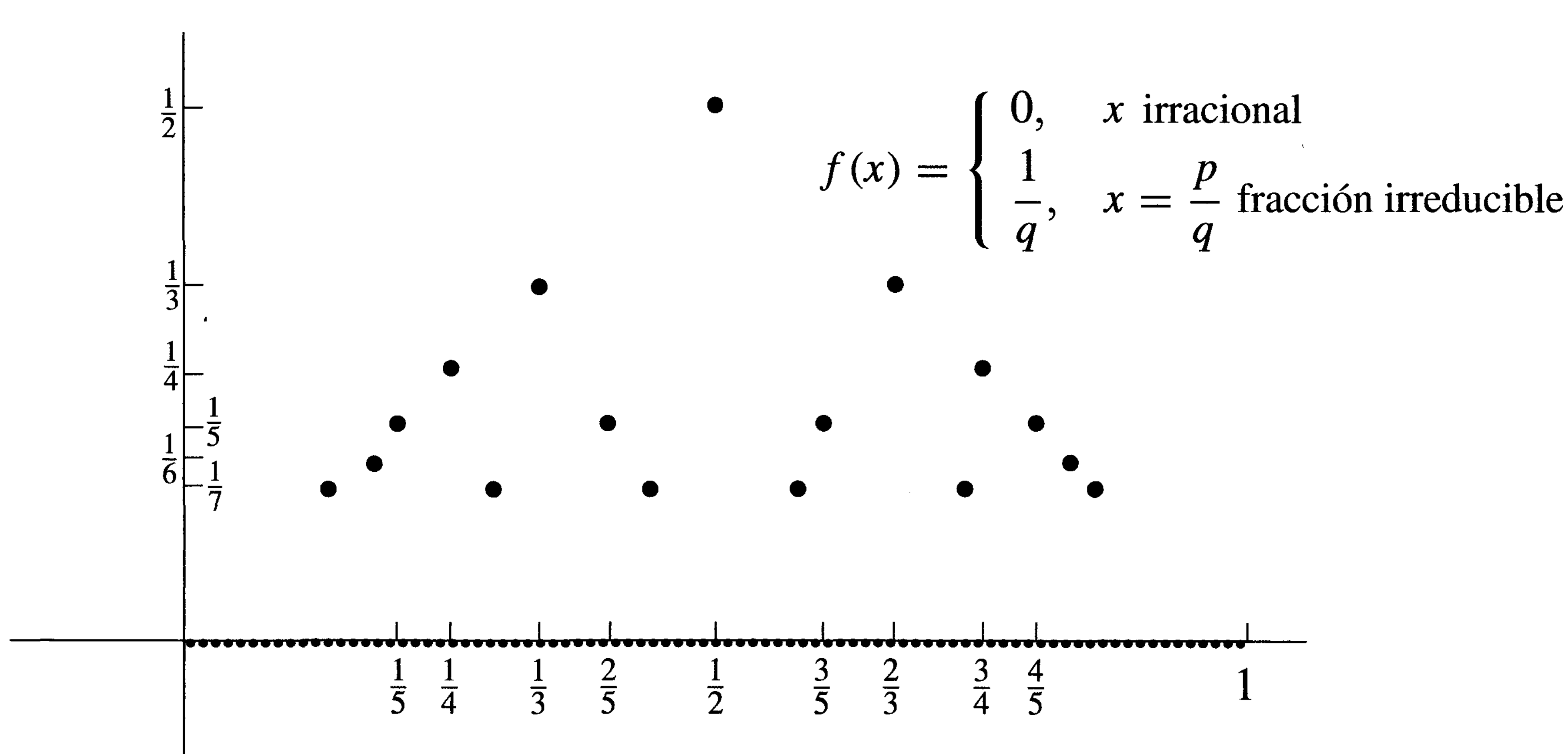


Figura 15

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional}, 0 < x < 1 \\ 1/q, & x = p/q \text{ fracción irreducible}, 0 < x < 1. \end{cases}$$

(Recordemos que p/q es una fracción irreducible si p y q son enteros sin divisores comunes y $q > 0$.)

Para cualquier número a, con $0 < a < 1$, la función f tiende a 0 en a. Para demostrarlo consideremos cualquier número $\varepsilon > 0$. Sea n un número natural suficientemente grande, de manera que $1/n \leq \varepsilon$. Observemos que los únicos números x para los que $|f(x) - 0| < \varepsilon$ podría ser falso son:

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \frac{1}{4}, \frac{3}{4}; \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}; \ldots; \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}.$$

(Si a es racional, entonces a podría ser uno de estos números.) Sin embargo, a pesar de que pueden ser muchos, tan sólo existe un número finito de ellos. Por tanto, de todos ellos existe uno que es el que más se aproxima a a; es decir $|p/q - a|$ es mínimo si p/q es uno de estos números (si a fuese uno de ellos, entonces basta considerar tan sólo aquellos valores $|p/q - a|$ tales que $p/q \neq a$). Esta mínima distancia puede elegirse como δ, ya que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces x *no* es ninguno de los números

$$\frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-1}{n}$$

y por tanto $|f(x) - 0| < \varepsilon$ es *cierto*. Esto completa la demostración. Observemos que la descripción que hemos dado de δ, la cual es válida para cualquier ε, es totalmente suficiente; no es necesario hallar una fórmula que exprese δ en función de ε.

Provistos con nuestra definición de límite, ya estamos preparados para demostrar el primer teorema; probablemente el lector ya habrá intuido su enunciado a lo largo de nuestra discusión, lo cual es totalmente lógico que así sea. Dicho teorema es realmente una prueba de fuego para la definición que hemos dado de límite de una función: si no pudiéramos demostrarlo, la definición sería inútil.

Teorema 1. *Una función no puede tender hacia dos límites diferentes en a. En otras palabras, si f tiende a l en a, y si f tiende a m en a, entonces* $l = m$.

Demostración. Como éste es nuestro primer teorema sobre límites, será necesario traducir las hipótesis siguiendo la definición.

Como f tiende a l en a, sabemos que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe algún número $\delta_1 > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_1, \text{ entonces } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Sabemos también, ya que f tiende a m en a, que existe algún $\delta_2 > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_2, \text{ entonces } |f(x) - m| < \varepsilon.$$

Hemos utilizado dos números, δ_1 y δ_2, ya que no sabemos si el valor de δ válido en la primera definición es también válido en la segunda. Pero, de hecho, ahora es fácil deducir que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{si } 0 < |x-a| < \delta, \text{ entonces } |f(x)-l| < \varepsilon \text{ y } |f(x)-m| < \varepsilon;$$

basta elegir simplemente $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$.

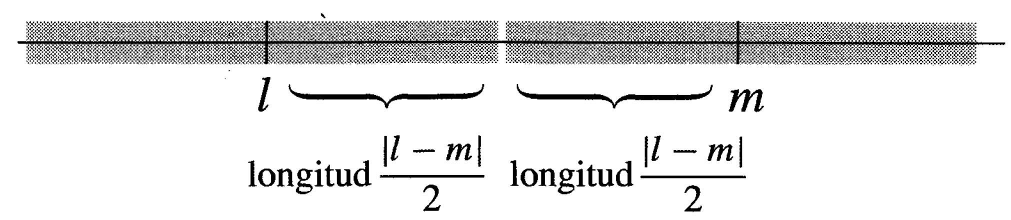


Figura 16

Para completar la demostración, tomemos un valor de $\varepsilon > 0$ para el cual no puedan verificarse simultáneamente las dos condiciones

$$|f(x)-l| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |f(x)-m| < \varepsilon$$

si $l \neq m$. La Figura 16 sugiere cuál debe ser la elección adecuada de dicho valor de ε. Si $l \neq m$, de manera que $|l-m| > 0$, podemos elegir como ε el valor $|l-m|/2$ y deducir que existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\begin{aligned} \text{si } 0 < |x-a| < \delta, \quad \text{entonces} \quad & |f(x)-l| < \frac{|l-m|}{2} \\ \text{y} \quad & |f(x)-m| < \frac{|l-m|}{2}. \end{aligned}$$

Esto implica que para $0 < |x-a| < \delta$ se verifica

$$\begin{aligned} |l-m| = |l-f(x)+f(x)-m| &\leq |l-f(x)| + |f(x)-m| \\ &< \frac{|l-m|}{2} + \frac{|l-m|}{2} \\ &= |l-m|, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. ■

El número l al cual tiende f en a se representa mediante $\lim_{x\to a} f(x)$ (se lee: el límite de $f(x)$ cuando x tiende hacia a). Esta definición sólo es posible gracias al Teorema 1, el cual asegura que $\lim_{x\to a} f(x)$ nunca puede representar a dos números diferentes. La ecuación

$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

significa lo mismo que la frase

$$f \text{ tiende hacia } l \text{ en } a.$$

Sin embargo, todavía queda la posibilidad de que f no tienda hacia l en a, para cualquier l, de manera que $\lim_{x\to a} f(x) = l$ sea falsa para todo número l. Esta posibilidad se expresa, en general, diciendo que "$\lim_{x\to a} f(x)$ no existe".

Observemos que la nueva notación introduce una letra x totalmente irrelevante, la cual podría ser sustituida por la letra t, la letra y, o cualquier otra; los símbolos

$$\lim_{x\to a} f(x), \qquad \lim_{t\to a} f(t), \qquad \lim_{y\to a} f(y),$$

representan todos ellos al mismo número, el cual depende de f y de a, y no tiene nada que ver con las letras x, t, o y utilizadas para representar a la variable (de hecho, estas letras no tienen ningún significado). Quizás un símbolo más lógico sería algo como $\lim\limits_{a} f$, pero esta notación, a pesar de su brevedad, es tan exasperantemente rígida que casi nadie ha propuesto en serio utilizarla. La notación $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ es mucho más útil ya que una función f generalmente no tiene un nombre sencillo, incluso aunque pueda ser posible expresar $f(x)$ mediante una simple fórmula que incluya a x. Así, el breve símbolo

$$\lim_{x\to a}(x^2+\operatorname{sen} x)$$

solamente puede ser parafraseado mediante la incómoda expresión

$$\lim_{a} f,\ \text{donde } f(x)=x^2+\operatorname{sen} x.$$

Otra ventaja del simbolismo estándar es ilustrada mediante las expresiones

$$\lim_{x\to a} x+t^3,$$
$$\lim_{t\to a} x+t^3.$$

La primera representa al número al que tiende f en a cuando

$$f(x)=x+t^3,\quad \text{para todo } x;$$

la segunda representa al número al que tiende f en a cuando

$$f(t)=x+t^3,\quad \text{para todo } t.$$

El lector no debería tener demasiada dificultad (sobre todo si consulta el Teorema 2) en demostrar que

$$\lim_{x\to a} x+t^3=a+t^3,$$
$$\lim_{t\to a} x+t^3=x+a^3.$$

Estos ejemplos ilustran la principal ventaja de nuestra notación, que es su flexibilidad. De hecho, la notación $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ es tan flexible que existe el peligro de olvidar lo que realmente significa. Un simple ejercicio en el uso de esta notación, que será importante más adelante, consiste en interpretar exactamente cuál es el significado de las expresiones que se dan a continuación, y luego demostrar que son iguales:

$$\lim_{x\to a} f(x)\quad \text{y}\quad \lim_{h\to 0} f(a+h).$$

Una parte importante de este capítulo consiste en la demostración de un teorema que facilitará el cálculo de muchos límites. La demostración depende de ciertas propiedades de las desigualdades y de los valores absolutos, lo cual no es de extrañar cuando se considera la definición de límite. Aunque estos hechos ya se han establecido en los Problemas 1-20, 1-21 y 1-22, dada su importancia los vamos a demostrar de nuevo en forma de un lema (un lema es un teorema auxiliar, un resultado que vale la pena destacar solamente en virtud del papel prominente que desempeña en la demostración de otro teorema). El lema afirma, a grandes rasgos, que si x está cerca de x_0, y si y está cerca de y_0, entonces $x+y$ estará cerca de x_0+y_0, xy estará cerca de x_0y_0 y $1/y$ estará cerca de $1/y_0$. Esta afirmación intuitiva es mucho más fácil de recordar que las estimaciones precisas del lema, y no estaría de más leer primero la demostración del Teorema 2 para ver como se aplican dichas estimaciones.

Lema. *(1) Si*

$$|x-x_0| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } |y-y_0| < \frac{\varepsilon}{2},$$

entonces

$$|(x+y)-(x_0+y_0)| < \varepsilon.$$

(2) Si

$$|x-x_0| < \text{mín}\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)}\right) \text{ y } |y-y_0| < \frac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)},$$

entonces

$$|xy-x_0y_0| < \varepsilon.$$

(3) Si $y_0 \neq 0$ y

$$|y-y_0| < \text{mín}\left(\frac{|y_0|}{2}, \frac{\varepsilon|y_0|^2}{2}\right),$$

entonces $y \neq 0$ y

$$\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{y_0}\right| < \varepsilon.$$

Demostración. (1)

$$\begin{aligned}|(x+y)-(x_0+y_0)| &= |(x-x_0)+(y-y_0)| \\ &\leq |x-x_0|+|y-y_0| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

(2) Como $|x-x_0| < 1$ obtenemos

$$|x|-|x_0| \leq |x-x_0| < 1,$$

de manera que

$$|x| < 1+|x_0|.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}|xy-x_0y_0| &= |x(y-y_0)+y_0(x-x_0)| \\ &\leq |x|\cdot|y-y_0|+|y_0|\cdot|x-x_0| \\ &< (1+|x_0|)\cdot\frac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)}+|y_0|\cdot\frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

(3) Se verifica que

$$|y_0| - |y| \leq |y - y_0| < \frac{|y_0|}{2},$$

y por tanto $|y| > |y_0|/2$. En particular, $y \neq 0$, y

$$\frac{1}{|y|} < \frac{2}{|y_0|}.$$

De manera que

$$\left| \frac{1}{y} - \frac{1}{y_0} \right| = \frac{|y_0 - y|}{|y| \cdot |y_0|} < \frac{2}{|y_0|} \cdot \frac{1}{|y_0|} \cdot \frac{\varepsilon |y_0|^2}{2} = \varepsilon. \blacksquare$$

Teorema 2. *Si* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ *y* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$*, entonces*

$$(1) \quad \lim_{x \to a} (f + g)(x) = l + m;$$

$$(2) \quad \lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = l \cdot m.$$

Además, si $m \neq 0$*, entonces*

$$(3) \quad \lim_{x \to a} \left(\frac{1}{g} \right)(x) = \frac{1}{m}.$$

Demostración. La hipótesis significa que para cada $\varepsilon > 0$ existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que, para todo x,

$$\begin{aligned} &\text{si } 0 < |x - a| < \delta_1, \text{ entonces } |f(x) - l| < \varepsilon, \\ \text{y} \quad &\text{si } 0 < |x - a| < \delta_2, \text{ entonces } |g(x) - m| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto significa (ya que, al fin y al cabo, $\varepsilon/2$ es también un número positivo) que existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que, para todo x,

$$\begin{aligned} &\text{si } 0 < |x - a| < \delta_1, \text{ entonces } |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ \text{y} \quad &\text{si } 0 < |x - a| < \delta_2, \text{ entonces } |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Sea ahora $\delta = \text{mín}(\delta_1, \delta_2)$. Si $0 < |x - a| < \delta$, entonces se verifica simultáneamente que $0 < |x - a| < \delta_1$ y $0 < |x - a| < \delta_2$, de manera que es la vez también

$$|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pero, según el apartado (1) del lema, esto significa que $|(f + g)(x) - (l + m)| < \varepsilon$, lo que demuestra (1).

Para demostrar (2) procederemos de manera análoga después de consultar el apartado (2) del lema. Si $\varepsilon > 0$ existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que, para todo x,

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_1, \text{ entonces } |f(x) - l| < \text{mín}\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|m| + 1)}\right),$$

$$\text{y} \quad \text{si } 0 < |x-a| < \delta_2, \text{ entonces } |g(x)-m| < \frac{\varepsilon}{2(|l|+1)}.$$

Una vez más, sea $\delta = \text{mín}(\delta_1, \delta_2)$. Si $0 < |x-a| < \delta$, entonces

$$|f(x)-l| < \text{mín}\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|m|+1)}\right) \quad \text{y} \quad |g(x)-m| < \frac{\varepsilon}{2(|l|+1)}.$$

De manera que, según el lema, $|(f \cdot g)(x) - l \cdot m| < \varepsilon$, lo cual demuestra (2).

Finalmente, si $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{si } 0 < |x-a| < \delta, \text{entonces } |g(x)-m| < \text{mín}\left(\frac{|m|}{2}, \frac{\varepsilon |m|^2}{2}\right).$$

Pero según el apartado (3) del lema, esto significa en primer lugar que $g(x) \neq 0$, de manera que $(1/g)(x)$ está definida, y en segundo lugar que

$$\left| \left(\frac{1}{g}\right)(x) - \frac{1}{m} \right| < \varepsilon,$$

lo que demuestra (3). ■

Utilizando el Teorema 2 podemos demostrar, trivialmente, hechos tales como

$$\lim_{x \to a} \frac{x^3 + 7x^5}{x^2+1} = \frac{a^3 + 7a^5}{a^2+1},$$

sin necesidad de aplicar el laborioso proceso de hallar un δ, dado un ε. Debemos comenzar con

$$\lim_{x \to a} 7 = 7,$$

$$\lim_{x \to a} 1 = 1,$$

$$\lim_{x \to a} x = a,$$

aunque estos límites son fáciles de calcular directamente. Sin embargo, si *queremos* hallar el δ, la demostración del Teorema 2 puede utilizarse como guía. Supongamos, para dar un ejemplo más sencillo, que queremos hallar un δ tal que, para todo x,

$$\text{si } 0 < |x-a| < \delta, \text{ entonces } |x^2 + x - (a^2+a)| < \varepsilon.$$

Consultando la demostración del Teorema 2(1), vemos que debemos hallar primero δ_1 y $\delta_2 > 0$ tales que, para todo x,

$$\text{si } 0 < |x-a| < \delta_1, \text{ entonces } |x^2 - a^2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{y} \quad \text{si } 0 < |x-a| < \delta_2, \text{ entonces } |x-a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como ya hemos demostrado que $\lim_{x \to a} x^2 = a^2$ y $\lim_{x \to a} x = a$, ahora ya sabemos como resolver el problema:

$$\delta_1 = \text{mín}\left(1, \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{2|a|+1}\right),$$

$$\delta_2 = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por tanto, podemos tomar

$$\delta = \text{mín}(\delta_1, \delta_2) = \text{mín}\left(\text{mín}\left(1, \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{2|a|+1}\right), \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Si $a \neq 0$, puede utilizarse el mismo método para hallar un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{si } 0 < |x-a| < \delta, \text{ entonces } \left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}\right| < \varepsilon.$$

La demostración del Teorema 2(3) permite asegurar que la segunda condición se verifica si encontramos un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{si } 0 < |x-a| < \delta, \text{ entonces } |x^2 - a^2| < \text{mín}\left(\frac{|a|^2}{2}, \frac{\varepsilon|a|^4}{2}\right).$$

Por tanto, podemos tomar

$$\delta = \text{mín}\left(1, \frac{\text{mín}\left(\frac{|a|^2}{2}, \frac{\varepsilon|a|^4}{2}\right)}{2|a|+1}\right).$$

Desde luego estas expresiones de δ tan complicadas pueden simplificarse considerablemente una vez obtenidas.

Hay un detalle técnico en la demostración del Teorema 2 que merece ser comentado. Como ya sabemos, para que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ esté definido, no es necesario que f esté definida en a, ni tampoco que esté definida en todos los puntos $x \neq a$. Sin embargo, debe existir algún $\delta > 0$ tal que $f(x)$ esté definida para todo x tal que $0 < |x-a| < \delta$; si no fuese así, la afirmación

"si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$"

no tendría sentido ya que el símbolo $f(x)$ no estaría definido para algunos x. Si f y g son dos funciones para las cuales la definición tiene sentido, es fácil ver que lo mismo es cierto para $f+g$ y $f \cdot g$. Pero no está tan claro en el caso de la función $1/g$, ya que $1/g$ no está definida en aquellos x tales que $g(x) = 0$. Sin embargo, este hecho ya ha quedado esclarecido en la demostración del Teorema 2(3).

A veces interesa considerar el límite al que tiende la función f en a, incluso aunque no exista ningún $\delta > 0$ tal que $f(x)$ esté definida en aquellos x que satisfacen $0 < |x-a| < \delta$. Por ejemplo, puede interesar distinguir el comportamiento de las dos funciones que se muestran en la Figura 17, incluso aunque no estén definidas en aquellos números menores que a. En el caso de la función de la Figura 17(a), escribimos

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = l \quad \text{o} \quad \lim_{x\downarrow a} f(x) = l.$$

(Se lee: límite de $f(x)$ cuando x tiende a a desde arriba). Estos "límites desde arriba" están estrechamente relacionados con los límites ordinarios, y la definición es muy similar: $\lim_{x\to a^+} f(x) = l$ significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{si } 0 < x - a < \delta, \text{ entonces } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

(La condición "$0 < x - a < \delta$" es equivalente a "$0 < |x - a| < \delta$ y $x > a$".)

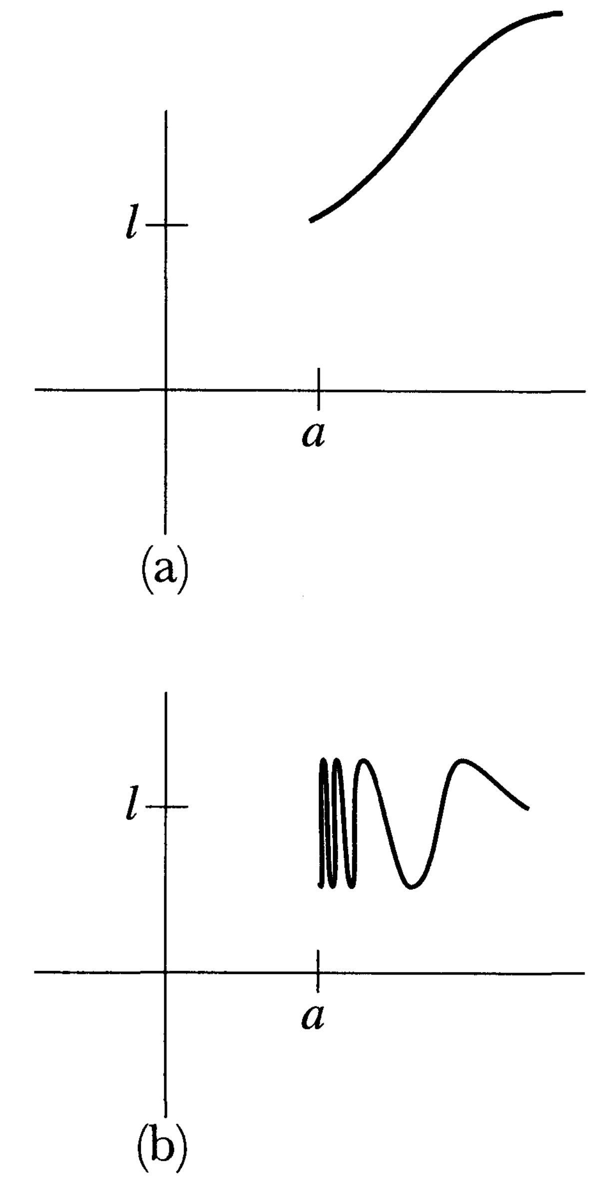


Figura 17

Los "límites desde abajo" (Figura 18) se definen de manera análoga: $\lim_{x\to a^-} f(x) = l$ (o $\lim_{x\uparrow a} f(x) = l$) significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{si } 0 < a - x < \delta, \text{ entonces } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Es posible considerar límites desde arriba o desde abajo incluso aunque la función f esté definida para valores mayores y menores que a. Así, en el caso de la función f de la Figura 14, se verifica que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1.$$

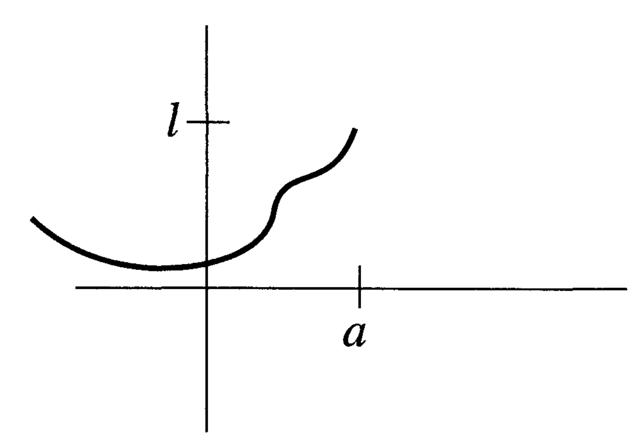


Figura 18

Es fácil demostrar (Problema 29) que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe si y sólo si los dos límites $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f(x)$ existen y son iguales.

Lo mismo que las definiciones de límite desde arriba y desde abajo, que se han introducido en el texto de manera informal, existen otras modificaciones del concepto de límite que resultarán muy útiles más adelante. En el Capítulo 4 afirmábamos que si x es grande entonces sen $1/x$ está cerca de 0. Este resultado se escribe en general utilizando la expresión

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} 1/x = 0.$$

El símbolo $\lim_{x\to\infty} f(x)$ se lee "límite de $f(x)$ cuando x tiende a ∞", o "cuando x se hace infinito", y un límite de la forma $\lim_{x\to\infty} f(x)$ se denomina límite en el infinito.

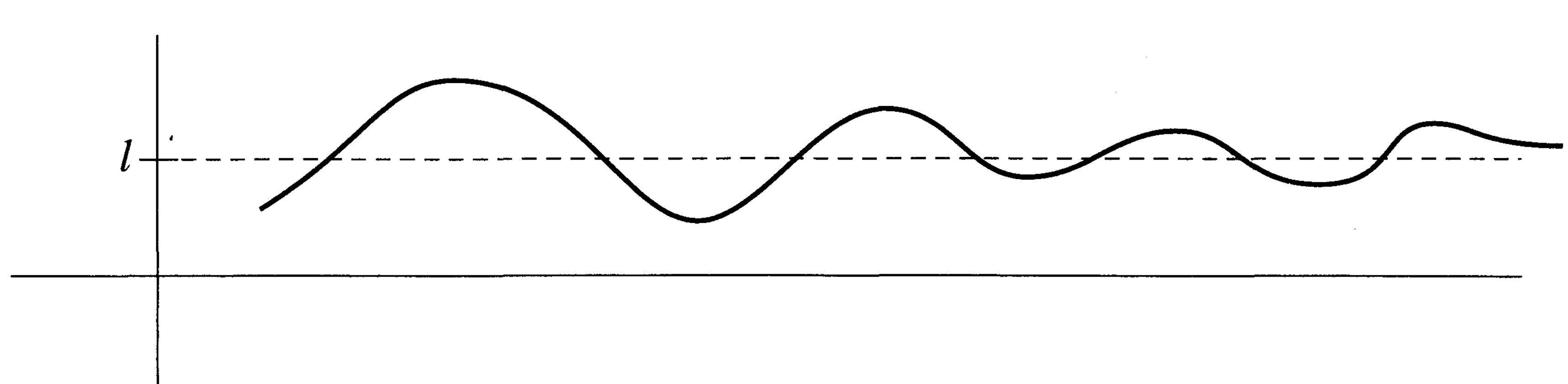


Figura 19

En la Figura 19 se ilustra una situación general en la que $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$. Formalmente, $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe un número N tal que, para todo x,

$$\text{si } x > N, \text{ entonces } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Está clara la analogía con la definición de límites ordinarios: mientras que la condición "$0 < |x-a| < \delta$" expresa el hecho de que x está cerca de a, la condición "$x > N$" expresa el hecho de que x es grande.

Hemos dedicado tan poco tiempo a los límites desde arriba y desde abajo, así como a los límites en el infinito, porque la idea general subyacente en estas definiciones no es difícil de entender si se conoce bien la definición de límites ordinarios (que son, con mucho, los más importantes). En los Problemas se proponen muchos ejercicios sobre estas definiciones, y también sobre otros tipos de límites que son útiles en algunas ocasiones.

Problemas

1. Halle los siguientes límites. (Todos ellos se deducen , tras algunas manipulaciones algebraicas, de los distintos apartados del Teorema 2; el lector debe asegurarse que conoce los distintos apartados que se utilizan en cada caso, aunque no es necesario que los enumere.)

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x+1}$. (ii) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$.

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^3-8}{x-2}$. (iv) $\displaystyle\lim_{x\to y} \frac{x^n-y^n}{x-y}$.

(v) $\displaystyle\lim_{y\to x} \frac{x^n-y^n}{x-y}$. (vi) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$.

2. Halle los siguientes límites.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$. (ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$. (iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$.

3. En cada uno de los casos siguientes calcule el límite l para cada a indicado y demuestre que efectivamente se trata del límite hallando un δ tal que $|f(x)-l| < \varepsilon$ para todo x que satisface $0 < |x-a| < \delta$.

(i) $f(x) = x[3-\cos(x^2)]$, $a = 0$. (ii) $f(x) = x^2+5x-2$, $a = 2$.

(iii) $f(x) = \dfrac{100}{x}$, $a = 1$. (iv) $f(x) = x^4$, para cualquier a arbitrario.

(v) $f(x) = x^4 + \dfrac{1}{x}$, $a = 1$. (vi) $f(x) = \dfrac{x}{2-\operatorname{sen}^2 x}$, $a = 0$.

(vii) $f(x) = \sqrt{|x|}$, $a = 0$. (viii) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$.

4. Para cada una de las funciones del Problema 4-17, decida para qué números a existe el $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$.

***5.** (a) Haga lo mismo para cada una de las funciones del Problema 4-19.

(b) El mismo problema pero utilizando decimales infinitos que terminen en una fila de ceros en lugar de una fila de nueves.

6. Suponga que las funciones f y g poseen la siguiente propiedad: para todo $\varepsilon > 0$ y todo x,

$$\text{si } 0 < |x-2| < \operatorname{sen}^2\left(\frac{\varepsilon^2}{9}\right) + \varepsilon, \text{ entonces } |f(x)-2| < \varepsilon,$$
$$\text{si } 0 < |x-2| < \varepsilon^2, \text{ entonces } |g(x)-4| < \varepsilon.$$

Para cada $\varepsilon > 0$ halle un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

(i) si $0 < |x-2| < \delta$, entonces $|f(x)+g(x)-6| < \varepsilon$,

(ii) si $0 < |x-2| < \delta$, entonces $|f(x)g(x)-8| < \varepsilon$,

(iii) si $0 < |x-2| < \delta$, entonces $\left|\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{4}\right| < \varepsilon$,

(iv) si $0 < |x-2| < \delta$, entonces $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$.

7. Dé un ejemplo de una función f para la cual sea *falsa* la afirmación: si $|f(x)-l| < \varepsilon$ cuando $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x)-l| < \varepsilon/2$ cuando $0 < |x-a| < \delta/2$.

8. (a) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ no existen, ¿puede existir el $\lim\limits_{x\to a} [f(x)+g(x)]$? ¿Y el $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$?

(b) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe y también el $\lim\limits_{x\to a} [f(x)+g(x)]$, ¿debe existir el $\lim\limits_{x\to a} g(x)$?

(c) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ no existe, ¿puede existir el $\lim\limits_{x\to a} [f(x)+g(x)]$?

(d) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe y también el $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$, ¿se deduce necesariamente que exista el $\lim\limits_{x\to a} g(x)$?

9. Demuestre que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(a+h)$. (Se trata sobre todo de un ejercicio de comprensión del significado de los términos.)

10. (a) Demuestre que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ si y sólo si $\lim\limits_{x\to a} [f(x)-l] = 0$. (Vea primero por qué la proposición es evidente; dé después una demostración rigurosa. En este capítulo debe hacerse lo mismo en la mayoría de los problemas en los que se pidan demostraciones.)

(b) Demuestre que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x-a)$.

(c) Demuestre que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x^3)$.

(d) Dé un ejemplo en el que exista el $\lim\limits_{x\to 0} f(x^2)$, pero no el $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

11. Suponga que existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) = g(x)$ cuando $0 < |x-a| < \delta$. Demuestre que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$. En otras palabras, el $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ depende solamente de los valores de $f(x)$ cuando x está cerca de a; este hecho se expresa a menudo diciendo que los límites poseen una "propiedad local". (Será conveniente utilizar δ', o cualquier otra letra, en lugar de δ en la definición de límites.)

12. (a) Suponga que $f(x) \le g(x)$ para todo x. Demuestre que $\lim\limits_{x\to a} f(x) \le \lim\limits_{x\to a} g(x)$, si estos límites existen.

(b) ¿Cómo puede obtenerse una hipótesis más débil?

(c) Si $f(x) < g(x)$ para todo x, ¿se deduce necesariamente que $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$?

13. Suponga que $f(x) \le g(x) \le h(x)$ y que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x)$. Demuestre que existe el $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ y que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x)$. (¡Haga un dibujo!)

*14. (a) Demuestre que si $\lim\limits_{x\to 0} f(x)/x = l$ y $b \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x\to 0} f(bx)/x = bl$. Indicación: Escriba $f(bx)/x = b[f(bx)/bx]$.

(b) ¿Qué ocurre si $b = 0$?

(c) El apartado (a) nos permite hallar el $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{sen} 2x)/x$ en función de $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{sen} x)/x$. Halle este límite mediante otro procedimiento.

15. Calcule los siguientes límites expresando el resultado en función del número $\alpha = \lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{sen} x)/x$.

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}$.

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx}$.

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 2x}{x}$.

(iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 2x}{x^2}$.

(v) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

(vi) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^2 x + 2x}{x + x^2}$.

(vii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \operatorname{sen} x}{1-\cos x}$.

(viii) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}$.

(ix) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1}$.

(x) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2(3+\operatorname{sen} x)}{(x+\operatorname{sen} x)^2}$.

(xi) $\lim\limits_{x\to 1} (x^2-1)^3 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^3$.

16. (a) Demuestre que si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, entonces $\lim\limits_{x\to a} |f|(x) = |l|$.

(b) Demuestre que si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = m$, entonces $\lim\limits_{x\to a} \text{máx}(f,g)(x) = \text{máx}(l,m)$ y análogamente para el mín.

17. (a) Demuestre que $\lim\limits_{x\to 0} 1/x$ no existe, es decir, demuestre que es falso que el $\lim\limits_{x\to 0} 1/x = l$ para cualquier número l.

(b) Demuestre que $\lim\limits_{x\to 1} 1/(x-1)$ no existe.

18. Demuestre que si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, entonces existen un número $\delta > 0$ y un número M tales que $|f(x)| < M$ si $0 < |x-a| < \delta$. (¿Cuál es la interpretación gráfica de este resultado?) Indicación: ¿Por qué basta demostrar que $l - 1 < f(x) < l + 1$ para $0 < |x-a| < \delta$?

19. Demuestre que si $f(x) = 0$ para x irracional y $f(x) = 1$ para x racional, entonces el $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no existe para cualquier a.

*20. Demuestre que si $f(x) = x$ para x racional y $f(x) = -x$ para x irracional, entonces el $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no existe si $a \neq 0$.

21. (a) Demuestre que si $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, entonces el $\lim\limits_{x\to 0} g(x) \operatorname{sen} 1/x = 0$.

(b) Generalice este hecho de la manera siguiente: si $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ y $|h(x)| \leq M$ para todo x, entonces $\lim\limits_{x\to 0} g(x)h(x) = 0$. (Naturalmente no es necesario resolver el apartado (a) si primero se resuelve el apartado (b); en realidad el enunciado del apartado (b) facilita la resolución del apartado (a); ésta es una de las ventajas de la generalización.)

22. Considere una función f que posee la siguiente propiedad: si g es cualquier función para la cual no existe el $\lim_{x\to 0} g(x)$, entonces tampoco existe el $\lim_{x\to 0} [f(x)+g(x)]$. Demuestre que esto ocurre si y sólo si *existe* el $\lim_{x\to 0} f(x)$. Indicación: En realidad el problema es muy fácil de resolver: si no existiera el $\lim_{x\to 0} f(x)$, se obtiene una contradicción inmediata eligiendo a una g adecuada.

****23.** Este problema es análogo al Problema 22 reemplazando $f+g$ por $f\cdot g$. En este caso la situación es mucho más compleja y el análisis requiere varias etapas (el lector interesado por los problemas especialmente difíciles puede intentar encontrar una solución independiente).

(a) Suponga que existe el $\lim_{x\to 0} f(x)$ y que es $\neq 0$. Demuestre que si $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existe, entonces tampoco existe el $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)$.

(b) Demuestre el mismo resultado si el $\lim_{x\to 0} |f(x)| = \infty$. (La definición precisa de este tipo de límite se da en el Problema 37.)

(c) Demuestre que si no se verifica ninguna de estas dos condiciones, entonces existe una función g tal que no existe el $\lim_{x\to 0} g(x)$ pero si que existe el $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)$.
Indicación: Deben considerarse separadamente los dos casos siguientes: (1) para algún $\varepsilon > 0$ tenemos $|f(x)| > \varepsilon$ para todos aquellos x suficientemente pequeños. (2) Para cada $\varepsilon > 0$, existen x suficientemente pequeños con $|f(x)| < \varepsilon$. En el segundo caso debe comenzarse eligiendo puntos x_n con $|x_n| < 1/n$ y $|f(x_n)| < 1/n$.

***24.** Suponga que A_n es algún conjunto *finito* de números del intervalo$[0,1]$ para cada número natural n, y que A_n y A_m no poseen ningún elemento en común si $m \neq n$. Definimos f de la manera siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 1/n, & \text{si } x \text{ está en } A_n \\ 0, & \text{si } x \text{ no está en } A_n \text{ para ningún } n. \end{cases}$$

Demuestre que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ para todo a de $[0,1]$.

25. Explique por qué son correctas las siguientes definiciones de $\lim_{x\to a} f(x) = l$: para todo $\delta > 0$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que, para todo x,

(i) si $0 < |x-a| < \varepsilon$, entonces $|f(x)-l| < \delta$,
(ii) si $0 < |x-a| < \varepsilon$, entonces $|f(x)-l| \leq \delta$,
(iii) si $0 < |x-a| < \varepsilon$, entonces $|f(x)-l| < 5\delta$,
(iv) si $0 < |x-a| < \varepsilon/10$, entonces $|f(x)-l| < \delta$.

***26.** Ponga ejemplos para demostrar que las siguientes definiciones de $\lim_{x\to a} f(x) = l$ *no* son correctas.

(a) Para todo $\delta > 0$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x)-l| < \varepsilon$.
(b) Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|f(x)-l| < \varepsilon$, entonces $0 < |x-a| < \delta$.

27. Para cada una de las funciones del Problema 4-17 indique para qué números a existen los límites laterales $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f(x)$.

***28.** (a) Haga lo mismo para cada una de las funciones del Problema 4-19.
(b) Considere también qué ocurre si se usan decimales que terminen en una fila de ceros en vez de decimales que terminen en nueves.

29. Demuestre que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe si $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$.

30. Demuestre que

(i) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(-x)$.

(ii) $\lim_{x\to 0} f(|x|) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$.

(iii) $\lim_{x\to 0} f(x^2) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$.

(Estas ecuaciones y otras parecidas son susceptibles de diversas interpretaciones. Pueden significar solamente que los dos límites son iguales si es que ambos existen; o que si uno determinado de ellos existe, el otro también existe y es igual a él; o que si cualquiera de los dos existe entonces el otro existe y es igual a él. Decida el lector por sí mismo cuáles de estas interpretaciones son las adecuadas.)

31. Suponga que $\lim_{x\to a^-} f(x) < \lim_{x\to a^+} f(x)$. (Ilustre esta aserción con un dibujo.) Demuestre que existe algún $\delta > 0$ tal que $f(x) < f(y)$ siempre que $x < a < y$, $|x-a| < \delta$ y $|y-a| < \delta$. ¿Se cumple la recíproca?

32. Demuestre que $\lim_{x\to\infty} (a_nx^n + \cdots + a_0)/(b_mx^m + \cdots + b_0)$ (con $a_n \neq 0$ y $b_m \neq 0$) existe si y sólo si $m \geq n$. ¿Cuál es el límite cuando $m = n$? ¿Y cuando $m > n$? Indicación: El límite fácil es $\lim_{x\to\infty} 1/x^k = 0$; realice algunas manipulaciones algebraicas para conseguir que ésta sea la única información necesaria.

33. Halle los siguientes límites.

(i) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x + \operatorname{sen}^3 x}{5x+6}$.

(ii) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x \operatorname{sen} x}{x^2+5}$.

(iii) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - x$.

(iv) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2(1+\operatorname{sen}^2 x)}{(x+\operatorname{sen} x)^2}$.

34. Demuestre que $\lim_{x\to 0^+} f(1/x) = \lim_{x\to\infty} f(x)$.

35. Halle los siguientes límites en función del número $\alpha = \lim_{x\to 0} (\operatorname{sen} x)/x$.

(i) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

(ii) $\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.

36. Defina "$\lim_{x\to -\infty} f(x) = l$".

(a) Halle $\lim_{x\to -\infty} (a_nx^n + \cdots + a_0)/(b_mx^m + \cdots + b_0)$.

(b) Demuestre que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} f(-x)$.

(c) Demuestre que $\lim_{x\to 0^-} f(1/x) = \lim_{x\to -\infty} f(x)$.

37. Definamos $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ si para todo N existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $f(x) > N$. (¡Ilustre con un dibujo adecuado!) (Desde luego, podemos afirmar todavía que $\lim_{x\to a} f(x)$ "no existe" en el sentido ordinario.)

(a) Demuestre que $\lim_{x\to 3} 1/(x-3)^2 = \infty$.

(b) Demuestre que si $f(x) > \varepsilon > 0$ para todo x, y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x)/|g(x)| = \infty.$$

38. (a) Definamos $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$. (O al menos, convénzase el lector de que puede escribir las definiciones si tiene el ánimo suficiente. ¿Cuántos otros símbolos de este tipo se podrían definir?)

(b) Demuestre que $\lim_{x\to 0^+} 1/x = \infty$.

(c) Demuestre que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ si y sólo si $\lim_{x\to\infty} f(1/x) = \infty$.

39. Halle los siguientes límites cuando estos existan.

(i) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3+4x-7}{7x^2-x+1}$

(ii) $\lim_{x\to\infty} x(1+\operatorname{sen}^2 x)$.

(iii) $\lim_{x\to\infty} x\operatorname{sen}^2 x$.

(iv) $\lim_{x\to\infty} x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$.

(v) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2x}-x$.

(vi) $\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$.

(vii) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{|x|}}{x}$.

40. (a) Halle el perímetro de un n-ágono regular inscrito en un círculo de radio r.

[Respuesta: $2rn\operatorname{sen}(\pi/n)$.]

(b) ¿Hacia qué valor tiende este perímetro cuando n se hace muy grande?

(c) Basándose en el resultado anterior, ¿qué valor debería tener el $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ si x se expresa en radianes?

41. (a) Para $c > 1$, demuestre que $c^{1/n} = \sqrt[n]{c}$ tiende a 1 cuando n se hace muy grande. Indicación: Demuestre que para cualquier $\varepsilon > 0$ no es posible que $c^{1/n} > 1+\varepsilon$ para valores grandes de n.

(b) En general, si $c > 0$, entonces $c^{1/n}$ tiende a 1 cuando n se hace muy grande.

***42.** Después de enviar el manuscrito de la primera edición de este libro al editor, pensé en una manera mucho más sencilla de demostrar que $\lim_{x \to a} x^2 = a^2$ y $\lim_{x \to a} x^3 = a^3$, sin necesidad de recurrir a todos los artilugios de factorización de la página 92. Supongamos, por ejemplo, que deseamos demostrar que $\lim_{x \to a} x^2 = a^2$, donde $a > 0$. Dado un $\varepsilon > 0$, basta tomar como δ el mínimo de $\sqrt{a^2+\varepsilon} - a$ y $a - \sqrt{a^2-\varepsilon}$ (vea la Figura 20); entonces $|x-a| < \delta$ implica que $\sqrt{a^2-\varepsilon} < x < \sqrt{a^2+\varepsilon}$, de manera que $a^2 - \varepsilon < x^2 < a^2 + \varepsilon$, or $|x^2 - a^2| < \varepsilon$. Por fortuna estas páginas ya habían sido enviadas a la imprenta y no pude hacer estos cambios, ya que esta "demostración" es totalmente errónea. ¿Dónde radica el error?

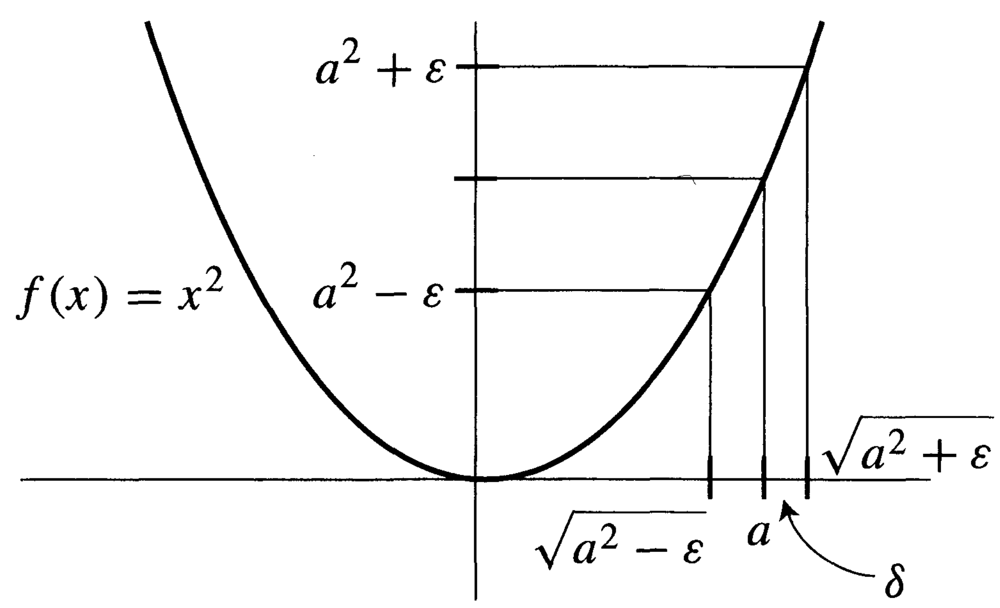


Figura 20

Funciones continuas

6

Si f es una función cualquiera, no se cumple necesariamente que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

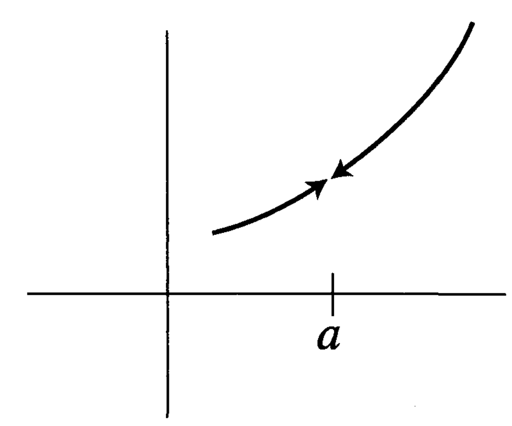


Figura 1

De hecho, hay muchas maneras en las que esta ecuación puede ser falsa. Por ejemplo, f podría no estar ni siquiera definida en a, en cuyo caso la ecuación no tendría sentido (Figura 1).

Podría ocurrir también que el $\lim_{x \to a} f(x)$ no existiera (Figura 2), o, tal como se ilustra en la Figura 3, que f estuviera definida en a y que existiera el $\lim_{x \to a} f(x)$ pero dicho límite fuese distinto de $f(a)$.

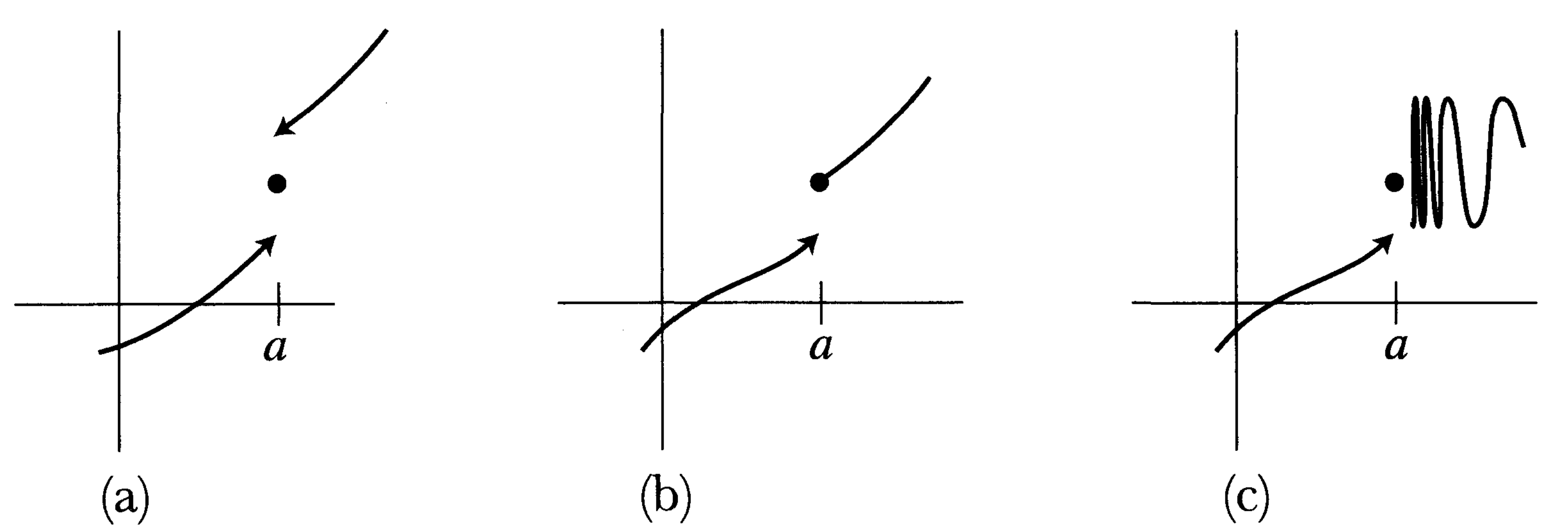


Figura 2

Podríamos considerar a todo comportamiento de este tipo como anormal y calificar con un apelativo ilustre a las funciones que no lo presentan. El calificativo adoptado ha sido el de función "continua". Intuitivamente, una función f es continua si su gráfica no contiene interrupciones, ni saltos ni oscilaciones indefinidas. Aunque en general esta descripción permite decidir si una función es continua simplemente observando su gráfica (una habilidad que vale la pena ejercitar), es fácil engañarse; por esta razón es *muy importante* disponer de una definición rigurosa de continuidad.

Definición

La función f es **continua en a** si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

No presenta ninguna dificultad encontrar muchos ejemplos de funciones que son o no son continuas en algún numero a; cada ejemplo de límite constituye un ejemplo acerca de la continuidad y en el Capítulo 5 ya se han comentado muchos de estos ejemplos.

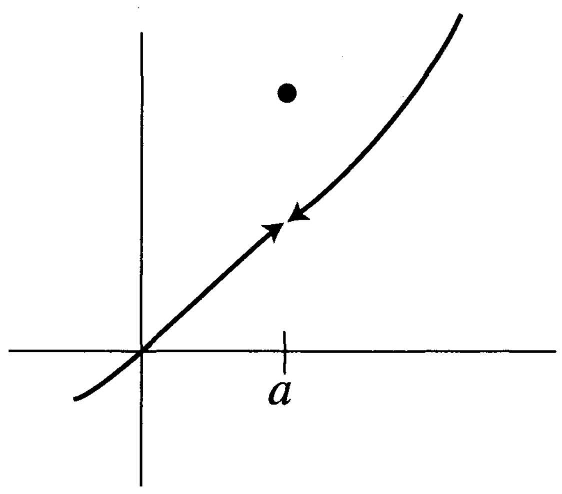


Figura 3

La función $f(x) = \operatorname{sen} 1/x$ no es continua en 0 ya que ni siquiera está definida en dicho punto, y lo mismo ocurre en el caso de la función $g(x) = x \operatorname{sen} 1/x$. Por otra parte, si quisiéramos extender esta última función, es decir, si quisiéramos definir una nueva función G mediante

$$G(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} 1/x, & x \neq 0 \\ a, & x = 0, \end{cases}$$

entonces es posible elegir el valor de $a = G(0)$ de manera que G sea continua en 0; para conseguirlo basta definir (de hecho, se debe definir) $G(0) = 0$ (Figura 4). En el caso de la función $f(x) = \operatorname{sen} 1/x$ no es posible hacer esta extensión; si definimos

$$F(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} 1/x, & x \neq 0 \\ a, & x = 0, \end{cases}$$

entonces F no será continua en 0, sea cual sea el valor de a, ya que no existe el $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

La función

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ racional} \\ 0, & x \text{ irracional} \end{cases}$$

no es continua en a, si $a \neq 0$, ya que no existe el $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. Sin embargo, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$, por lo tanto f es continua sólo en el punto 0.

Las funciones $f(x) = c$, $g(x) = x$ y $h(x) = x^2$ son continuas en todos los números a, puesto que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} c = c = f(a),$$

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} x = a = g(a),$$

$$\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} x^2 = a^2 = h(a).$$

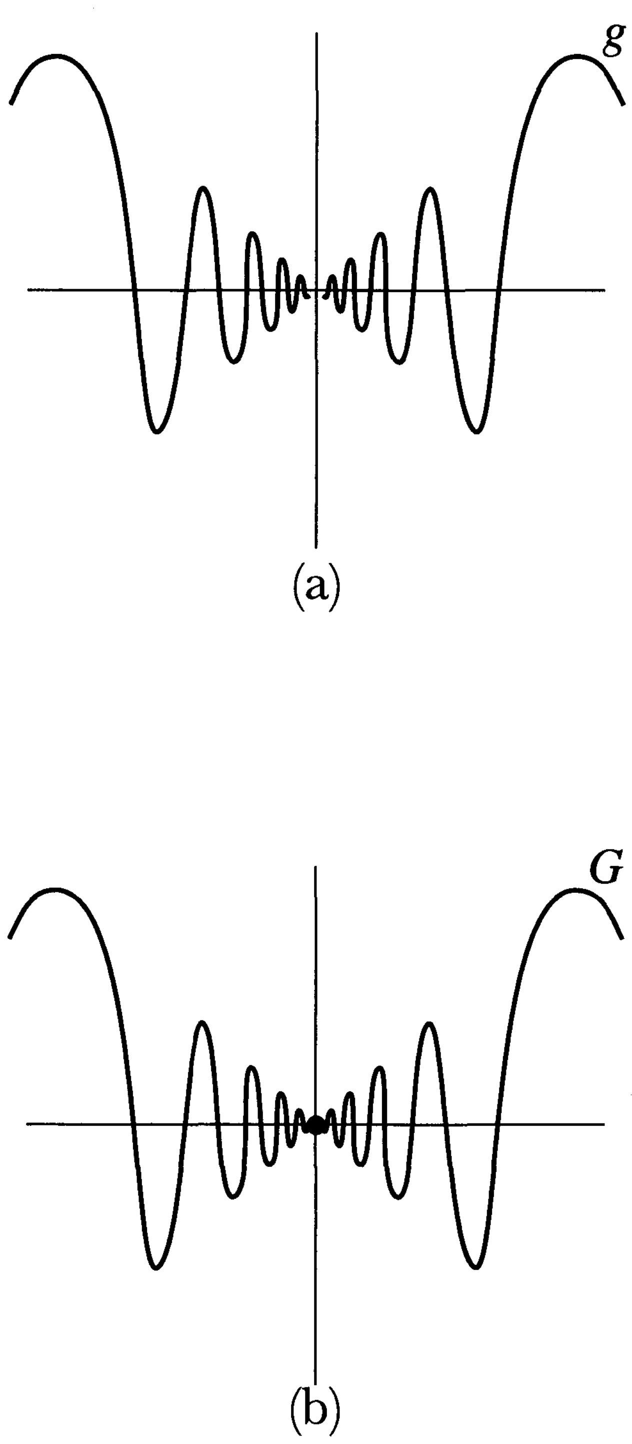


Figura 4

Finalmente, consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ 1/q, & x = p/q \text{ fracción irreducible.} \end{cases}$$

En el Capítulo 5 demostramos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ para todo a (en realidad lo demostramos sólo cuando $0 < a < 1$, pero es fácil ver que es cierto para todo a). Como $0 = f(a)$ sólo si a es irracional, esta función es continua en a si a es irracional pero no si a es racional.

Todavía es más fácil dar ejemplos acerca de la continuidad si se dispone de dos teoremas sencillos.

Teorema 1. *Si f y g son continuas en a, entonces*

(1) *$f + g$ es continua en a,*
(2) *$f \cdot g$ es continua en a.*

Además, si $g(a) \neq 0$, entonces

$$(3)\ 1/g \text{ es continua en } a.$$

Demostración. Como f y g son continuas en a,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = g(a).$$

Según el Teorema 2(1) del Capítulo 5 esto implica que

$$\lim_{x\to a} (f+g)(x) = f(a)+g(a) = (f+g)(a),$$

que es precisamente la condición que debe cumplirse para que $f+g$ sea continua en a. Las demostraciones de los apartados (2) y (3) se dejan para el lector. ■

Partiendo de las funciones $f(x) = c$ y $f(x) = x$, que son continuas en a, para todo a, podemos utilizar el Teorema 1 para deducir que una función

$$f(x) = \frac{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0}{c_m x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \cdots + c_0}$$

es continua en cada punto de su dominio. Pero ir más allá ya es mucho más difícil. Cuando estudiemos en detalle la función seno será fácil demostrar que sen es continua en a para todo a; si suponemos por el momento que esto es así, entonces es fácil demostrar que una función del tipo

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}^2 x + x^2 + x^4 \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^{27} x + 4x^2 \operatorname{sen}^2 x}$$

es continua en cada punto de su dominio. Pero todavía no podemos demostrar la continuidad de una función como $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$; obviamente necesitamos un teorema referente a la composición de funciones continuas. Antes de introducirlo, vale la pena comentar el siguiente punto acerca de la definición de continuidad. Si traducimos la ecuación $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ según la definición de límites, obtenemos

para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,
si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Pero en este caso, como el límite es $f(a)$, la frase

$$0 < |x-a| < \delta$$

puede sustituirse por la condición más sencilla

$$|x-a| < \delta,$$

ya que si $x = a$ ciertamente se verifica que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Teorema 2. *Si g es continua en a, y f es continua en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es continua en a. (Observemos que se requiere que f sea continua en $g(a)$ y no en a.)*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Queremos hallar un $\delta > 0$ tal que para todo x,

$$\text{si } |x-a| < \delta, \quad \text{entonces } |(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)| < \varepsilon,$$
$$\text{es decir, } |f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon.$$

Utilizaremos primero la continuidad de f para estimar lo cerca que debe estar $g(x)$ de $g(a)$ para que se verifique la desigualdad anterior. Como f es continua en $g(a)$, existe un $\delta' > 0$ tal que, para todo y,

(1) $$\text{si } |y - g(a)| < \delta', \text{ entonces } |f(y) - f(g(a))| < \varepsilon.$$

En particular, esto significa que

(2) $$\text{si } |g(x) - g(a)| < \delta', \text{ entonces } |f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon.$$

Ahora utilizaremos la continuidad de g para estimar lo cerca que debe estar x de a para que se verifique la desigualdad $|g(x) - g(a)| < \delta'$. El número δ' es un número positivo como cualquier otro; podemos por tanto tomar δ' como ε (!) en la definición de continuidad de g en a. Deducimos pues que existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

(3) $$\text{si } |x-a| < \delta, \text{ entonces } |g(x) - g(a)| < \delta'.$$

Combinando (2) y (3) vemos que, para todo x,

$$\text{si } |x-a| < \delta, \text{ entonces } |f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon. \blacksquare$$

Ahora podemos volver a considerar la función

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ya hemos visto que f es continua en 0. Unas cuantas aplicaciones de los Teoremas 1 y 2, junto con la continuidad de la función seno, demuestran que f es también continua en a, para $a \neq 0$. El lector debería ser capaz de analizar con la misma facilidad funciones tales como $f(x) = \operatorname{sen}(x^2 + \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen}^2(x^3)))$.

Los pocos teoremas de este capítulo se refieren a la continuidad de funciones en un punto, pero el concepto de continuidad no empieza a ser realmente interesante hasta que se considera la continuidad de funciones en todos los puntos de un intervalo. Si f es continua en x para todo x de (a, b), entonces se dice que f es **continua en** (a, b); como un "caso especial", f es **continua en** $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ [ver la página 57] si es continua en x para todo x en $\mathbf{R}$. La continuidad en un intervalo cerrado se define de modo algo diferente; una función f se dice que es **continua en** $[a, b]$ si

(1) f es continua en x para todo x de (a, b),

(2) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

(A menudo también se dice que una función es continua si lo es en cada punto x de su dominio.)

Las funciones continuas en un intervalo son las que se considera que tienen un comportamiento más adecuado; de hecho, podría decirse que la continuidad es la primera condición que debe satisfacer una función "razonable". Una función continua se describe a veces intuitivamente como aquella cuya gráfica puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel. Basta únicamente considerar la función

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

para darse cuenta que esta descripción es demasiado optimista, aunque sin embargo es cierto que muchos resultados importantes se refieren a funciones que son continuas en un intervalo. Estos teoremas son, en general, mucho más difíciles de demostrar que los de este capítulo, aunque existe un teorema sencillo que puede considerarse un nexo de unión entre los dos tipos de resultados. La hipótesis de este teorema requiere la continuidad en un solo punto, pero la conclusión describe el comportamiento de la función en algún intervalo que contenga el punto. Aunque este teorema constituye en realidad un lema que se utilizará en argumentaciones posteriores, se incluye aquí como una visión anticipada de lo que ha de venir.

Teorema 3. *Supongamos que f es continua en a, y $f(a) > 0$. Entonces $f(x) > 0$ para todo x de algún intervalo que contiene a a; dicho de manera más precisa, existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo x tal que $|x-a| < \delta$. Análogamente, si $f(a) < 0$, entonces existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para todo x tal que $|x-a| < \delta$.*

Demostración. Consideremos el caso $f(a) > 0$. Como f es continua en a, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\begin{aligned} &\text{si } |x-a| < \delta, \text{ entonces } & |f(x) - f(a)| < \varepsilon, \\ & \text{i.e.,} & -\varepsilon < f(x) - f(a) < \varepsilon. \end{aligned}$$

En particular, esto debe verificarse para $\varepsilon = \frac{1}{2}f(a)$, ya que $\frac{1}{2}f(a) > 0$ (Figura 5). Por tanto existe un $\delta > 0$ tal que para todo x,

$$\text{si } |x-a| < \delta, \text{ entonces } -\tfrac{1}{2}f(a) < f(x) - f(a) < \tfrac{1}{2}f(a),$$

y esto implica que $f(x) > \frac{1}{2}f(a) > 0$. (Podríamos haber elegido también ε igual a $f(a)$ lo cual nos habría permitido dar una demostración más elegante aunque el dibujo hubiera sido más difícil de interpretar.)

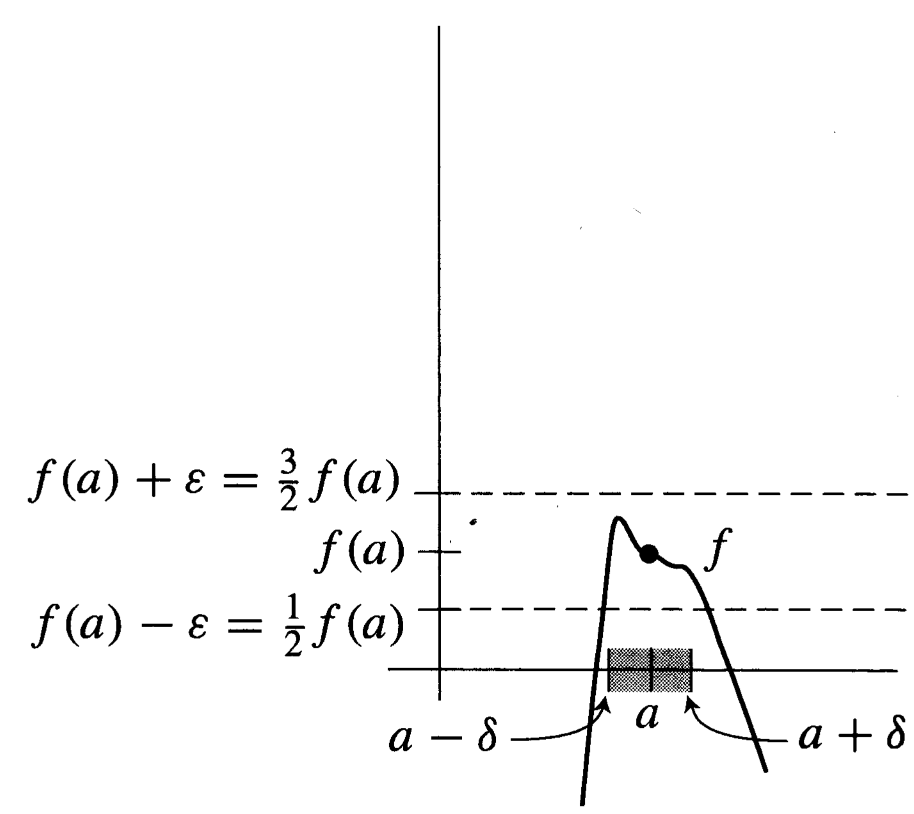


Figura 5

Puede darse una demostración análoga en el caso $f(a) < 0$; tomemos $\varepsilon = -\frac{1}{2}f(a)$. O también se puede aplicar el primer caso a la función $-f$. ■

Problemas

1. ¿Para cuáles de las siguientes funciones f existe una función continua F con dominio $\mathbf{R}$ tal que $F(x) = f(x)$ para todo x del dominio de f?

   (i) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$. (ii) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$.

   (iii) $f(x) = 0$, x irracional. (iv) $f(x) = 1/q$, $x = p/q$ fracción irreducible.

2. ¿En qué puntos son continuas las funciones de los Problemas 4-17 y 4-19?

3. (a) Suponga que f es una función que satisface $|f(x)| \leq |x|$ para todo x. Demuestre que f es continua en 0. (Observe que $f(0)$ debe ser igual a 0).

   (b) Dé un ejemplo de una función f de este tipo que no sea continua en ningún $a \neq 0$.

   (c) Suponga que g es continua en 0, que $g(0) = 0$ y que $|f(x)| \leq |g(x)|$. Demuestre que f es continua en 0.

4. Dé un ejemplo de una función f tal que f no sea continua en ningún punto, pero que $|f|$ sea continua en todos los puntos.

5. Para todo número a, halle una función que sea continua en a, pero no lo sea en ningún otro punto.

6. (a) Halle una función f que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ pero continua en todos los demás puntos.

   (b) Halle una función f que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ y en 0, pero continua en todos los demás puntos.

7. Suponga que f satisface $f(x+y) = f(x) + f(y)$, y que f es continua en 0. Demuestre que f es continua en a para todo a.

8. Suponga que f es continua en a y $f(a) = 0$. Demuestre que si $\alpha \neq 0$, entonces $f + \alpha$ es distinta de cero en algún intervalo abierto que contiene a a.

9. (a) Suponga que f está definida en a pero no es continua en a. Demuestre que para un determinado $\varepsilon > 0$ existen números x tan próximos como se quiera a a con $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$. Interprete gráficamente.

   (b) Deduzca que para algún $\varepsilon > 0$ *o bien* existen números x tan próximos como se quiera a a con $f(x) < f(a) - \varepsilon$ *o* existen números x tan próximos como se quiera a a con $f(x) > f(a) + \varepsilon$.

10. (a) Demuestre que si f es continua en a, entonces también lo es $|f|$.

    (b) Demuestre que cada función f continua en $\mathbf{R}$ puede escribirse como $f = E + O$, donde E es par y continua y O es impar y continua.

    (c) Demuestre que si f y g son continuas, también lo son $\max(f, g)$ y $\min(f, g)$.

    (d) Demuestre que toda función continua f puede escribirse en la forma $f = g - h$, donde g y h son no negativas y continuas.

11. Demuestre el Teorema 1(3) aplicando el Teorema 2 y la continuidad de la función $f(x) = 1/x$.

*12. (a) Demuestre que si f es continua en l y $\lim_{x \to a} g(x) = l$, entonces $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(l)$. (Se puede hacer partiendo de las definiciones, pero es más fácil considerar la función G con $G(x) = g(x)$ para $x \neq a$, y $G(a) = l$.)

(b) Demuestre que si no se supone la continuidad de f en l, entonces no se cumple, por lo general, que $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x))$. Indicación: Haga la prueba con $f(x) = 0$ para $x \neq l$, y $f(l) = 1$.

13. (a) Demuestre que si f es continua en $[a, b]$, entonces existe una función g continua en $\mathbf{R}$, y que satisface $g(x) = f(x)$ para todo x de $[a, b]$. Indicación: Como hay un gran margen para elegir, haga la prueba con g constante en $(-\infty, a]$ y $[b, \infty)$.

(b) Dé un ejemplo que demuestre que esta afirmación es falsa si $[a, b]$ se sustituye por (a, b).

14. (a) Suponga que g y h son continuas en a, y que $g(a) = h(a)$. Defina $f(x)$ como $g(x)$ si $x \geq a$ y $h(x)$ si $x \leq a$. Demuestre que f es continua en a.

(b) Suponga que g es continua en $[a, b]$, que h es continua en $[b, c]$ y que $g(b) = h(b)$. Sea $f(x)$ igual a $g(x)$ para x en $[a, b]$ e igual a $h(x)$ para x en $[b, c]$. Demuestre que f es continua en $[a, c]$. (Así, pues, las funciones continuas pueden "soldarse".)

15. Demuestre que si f es continua en a, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que cuando $|x-a| < \delta$ e $|y-a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

16. (a) Demuestre la siguiente versión del Teorema 3 para la "continuidad por la derecha": suponga que $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, y $f(a) > 0$. Entonces existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo x que satisface $0 \leq x - a < \delta$. Análogamente, si $f(a) < 0$, entonces existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para todo x que satisface $0 \leq x - a < \delta$.

(b) Demuestre una versión del Teorema 3 cuando $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

17. Si existe el $\lim_{x\to a} f(x)$ pero es $\neq f(a)$, entonces se dice que f tiene una **discontinuidad evitable** en a.

(a) Si $f(x) = \operatorname{sen} 1/x$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 1$, ¿tiene f una discontinuidad evitable en 0? ¿Y si $f(x) = x \operatorname{sen} 1/x$ para $x \neq 0$, y $f(0) = 1$?

(b) Suponga que f tiene una discontinuidad evitable en a. Sea $g(x) = f(x)$ para $x \neq a$, y sea $g(a) = \lim_{x\to a} f(x)$. Demuestre que g es continua en a. (No se esfuerce demasiado, es muy fácil.)

(c) Sea $f(x) = 0$ si x es irracional, y sea $f(p/q) = 1/q$ si p/q es una fracción irreducible. ¿Cuál es la función g definida mediante $g(x) = \lim_{y\to x} f(y)$?

*(d) Sea f una función con la propiedad de que cada punto de discontinuidad es una discontinuidad evitable. Esto significa que existe el $\lim_{y\to x} f(y)$ para todo x, pero que f puede ser discontinua en algunos (incluso en infinitos) números x. Defina $g(x) = \lim_{y\to x} f(y)$. Demuestre que g es continua. (Este apartado no es tan fácil como el apartado (b).)

**(e) ¿Existe alguna función f que sea discontinua en todo punto y que tenga solamente discontinuidades evitables? (Vale la pena pensar en este problema ahora pero sólo como un ejercicio de intuición; aunque el lector pueda intuir la respuesta correcta, no podrá demostrarla de momento. Vea el Problema 22-33.)

Tres teoremas fuertes

7

Este capítulo está dedicado a tres teoremas relativos a funciones continuas y a algunas de sus consecuencias. Las demostraciones de los tres teoremas no se darán hasta el próximo capítulo por razones que explicaremos al final del presente capítulo.

Teorema 1. *Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$, entonces existe algún x de $[a,b]$ tal que $f(x) = 0$.*

(Geométricamente, esto significa que la gráfica de una función continua que comienza por debajo del eje horizontal y termina por encima del eje horizontal, debe cortar a dicho eje en al menos un punto, tal como se muestra en la Figura 1.)

Teorema 2. *Si f es continua en $[a, b]$, entonces f está acotada superiormente en $[a, b]$, es decir, existe algún número N tal que $f(x) \leq N$ para todo x de $[a, b]$.*

(Geométricamente, este teorema significa que la gráfica de f se situa por debajo de alguna recta paralela al eje horizontal, como se muestra en la Figura 2.)

Teorema 3. *Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe algún número y de $[a, b]$ tal que $f(y) \geq f(x)$ para todo x de $[a, b]$ (Figura 3).*

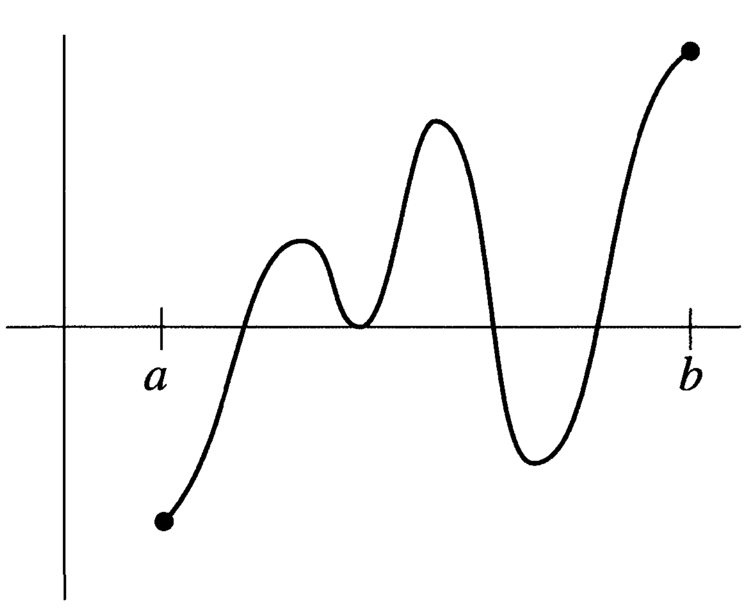


Figura 1

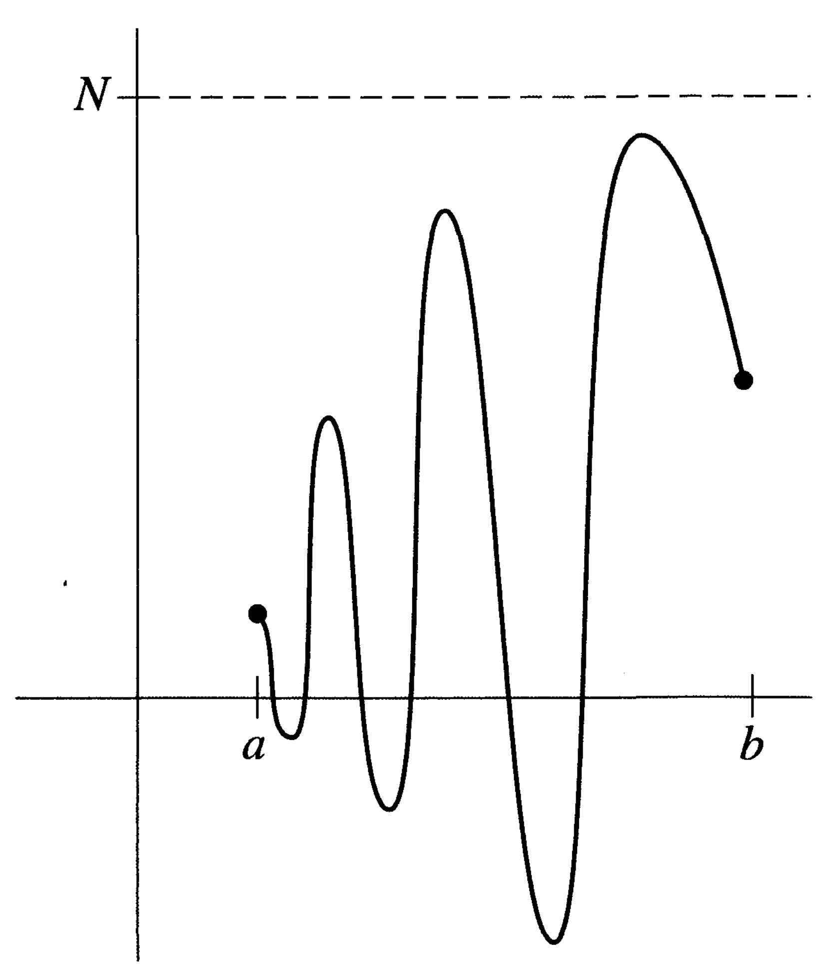


Figura 2

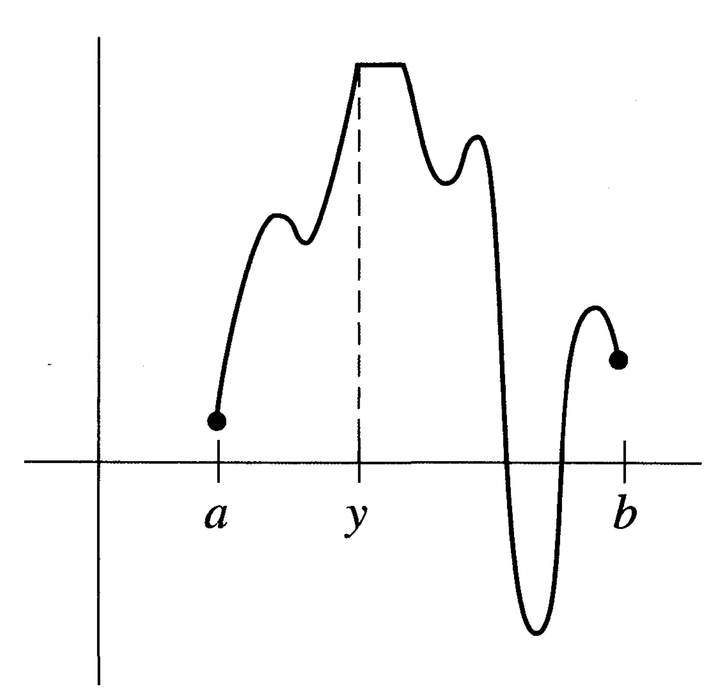


Figura 3

Estos tres teoremas difieren notablemente de los teoremas del Capítulo 6, en los cuales las hipótesis incluían siempre la continuidad en un solo punto, mientras que en los tres teoremas de este capítulo las hipótesis exigen la continuidad de f en todo el intervalo $[a, b]$; si la continuidad falla en un solo punto, las conclusiones pueden ser erróneas. Por ejemplo, sea f la función que se muestra en la Figura 4,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & 0 \le x < \sqrt{2} \\ 1, & \sqrt{2} \le x \le 2. \end{cases}$$

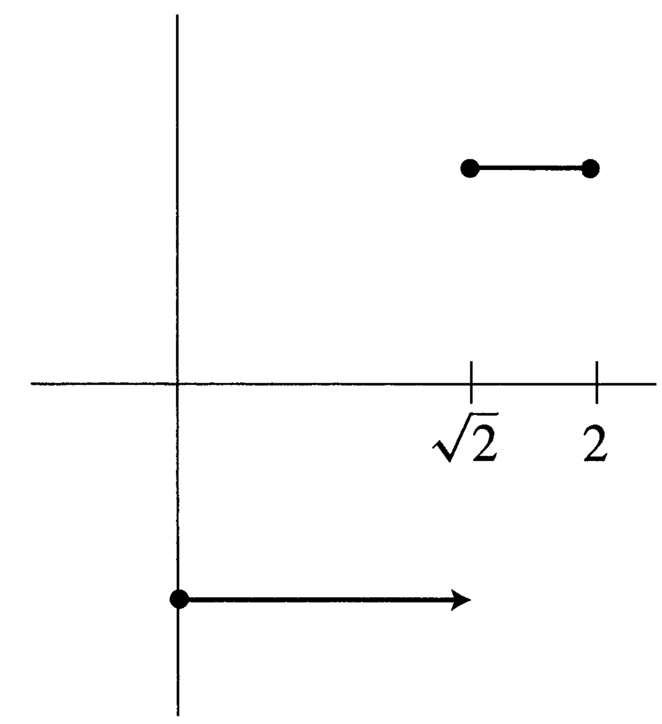


Figura 4

En este caso f es continua en cada punto de $[0, 2]$ excepto en $\sqrt{2}$, y $f(0) < 0 < f(2)$, pero no existe ningún punto x de $[0, 2]$ tal que $f(x) = 0$; la discontinuidad en el único punto $\sqrt{2}$ es suficiente para invalidar la conclusión del Teorema 1.

Análogamente, supongamos que f es la función que se muestra en la Figura 5,

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

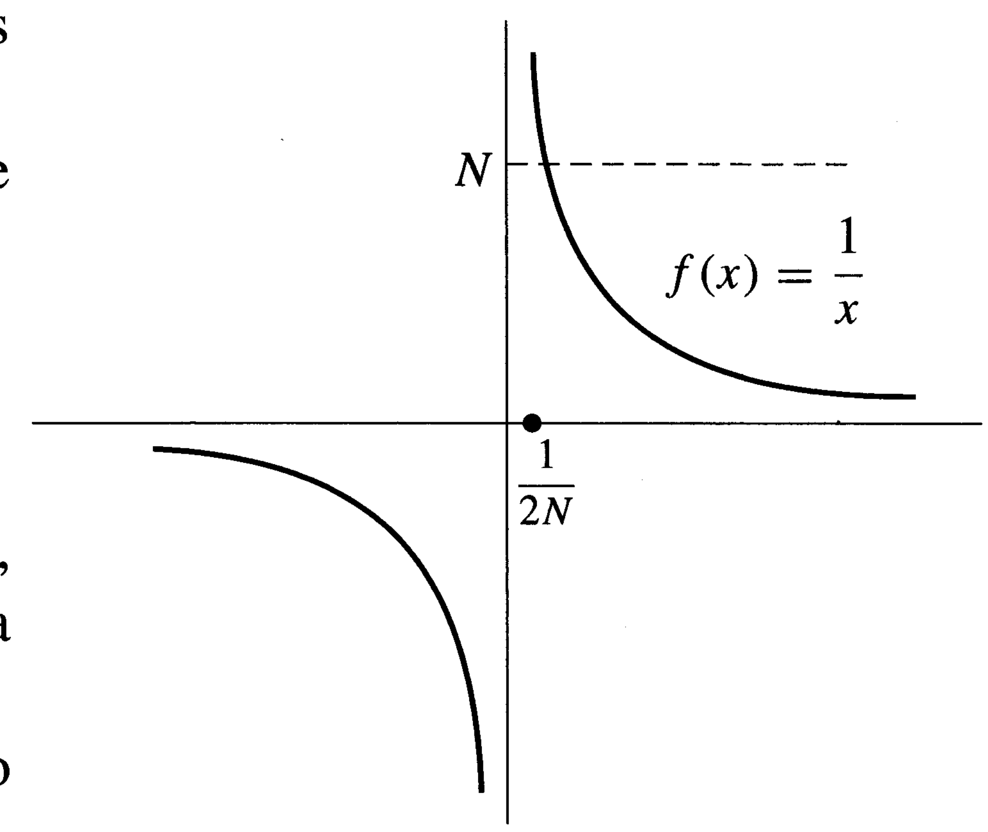


Figura 5

Entonces f es continua en cada punto de $[0, 1]$ excepto en 0, pero f no está acotada superiormente en $[0, 1]$. De hecho, para cualquier número $N > 0$ se verifica que $f(1/2N) = 2N > N$.

Este ejemplo también demuestra que el intervalo cerrado $[a, b]$ del Teorema 2 no puede sustituirse por el intervalo abierto (a, b), ya que la función f es continua en $(0, 1)$, pero no está acotada en dicho intervalo.

Finalmente, consideremos la función que se muestra en la Figura 6,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 0, & x \ge 1. \end{cases}$$

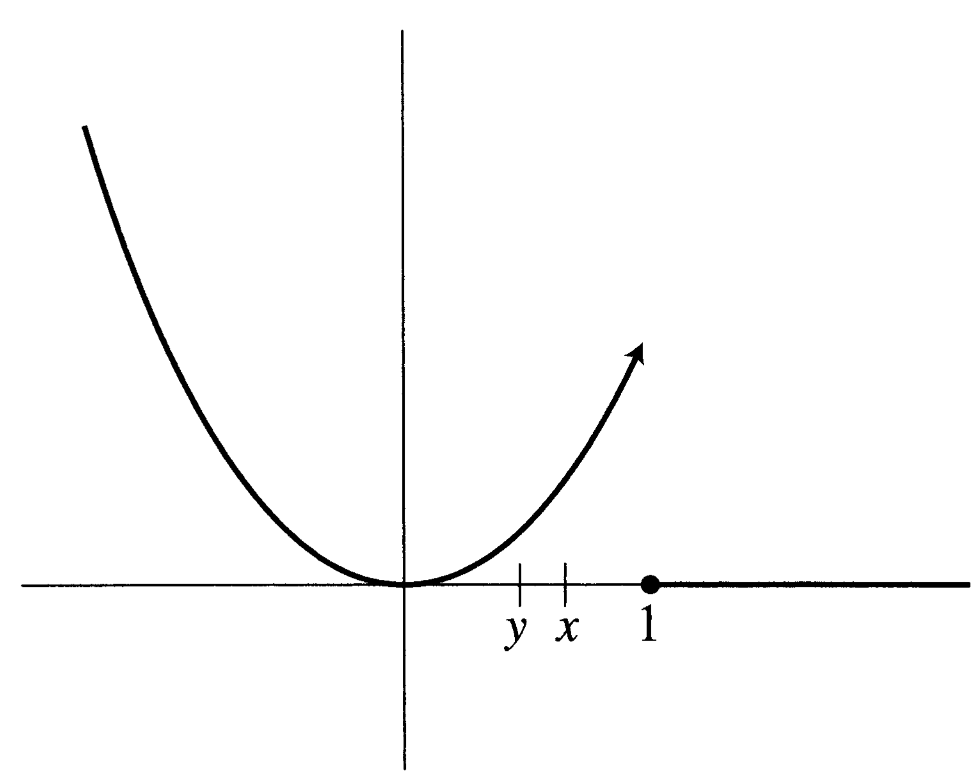


Figura 6

En el intervalo $[0, 1]$ la función f está acotada superiormente, por tanto f satisface la conclusión del Teorema 2, a pesar de no ser continua en $[0, 1]$. Pero f no satisface la conclusión del Teorema 3; no existe ningún y de $[0, 1]$ tal que $f(y) \ge f(x)$ para todo x de $[0, 1]$; de hecho, no es cierto que $f(1) \ge f(x)$ para cualquier x de $[0, 1]$, por tanto no podemos elegir $y = 1$, ni tampoco ningún $0 \le y < 1$ ya que $f(y) < f(x)$ si x es cualquier número que verifica $y < x < 1$.

Este ejemplo demuestra que el Teorema 3 es considerablemente más fuerte que el Teorema 2. El Teorema 3 se enuncia a veces diciendo que una función continua en un intervalo cerrado "toma su valor máximo" en dicho intervalo.

Como compensación al caracter restrictivo de las hipótesis de nuestros tres teoremas, las conclusiones que se pueden deducir de los mismos son de un alcance mucho mayor que las de los teoremas precedentes. Los teoremas fuertes describen el comportamiento de una función no sólo en el entorno de un punto sino en todo un intervalo; estas propiedades "globales" de una función son siempre significativamente más difíciles de demostrar que las propiedades "locales" y tienen, correspondientemente, una potencia mucho mayor. Para ilustrar la utilidad de los Teoremas 1, 2 y 3, pronto deduciremos algunas consecuencias importantes, pero antes será útil mencionar algunas generalizaciones sencillas.

Teorema 4. *Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < c < f(b)$, entonces existe algún x de $[a, b]$ tal que $f(x) = c$.*

Demostración. Sea $g = f - c$. Entonces g es continua y $g(a) < 0 < g(b)$. Según el Teorema 1, existe algún x de $[a, b]$ tal que $g(x) = 0$. Pero esto significa que $f(x) = c$. ■

Teorema 5. *Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) > c > f(b)$, entonces existe algún x de $[a, b]$ tal que $f(x) = c$.*

Demostración. La función $-f$ es continua en $[a, b]$ y $-f(a) < -c < -f(b)$. Según el Teorema 4 existe algún x de $[a, b]$ tal que $-f(x) = -c$, lo que significa que $f(x) = c$. ■

Conjuntamente, los Teoremas 4 y 5 demuestran que f toma cualquier valor entre $f(a)$ y $f(b)$. Podemos incluso mejorar este resultado: si c y d están en $[a, b]$, entonces f toma cualquier valor entre $f(c)$ y $f(d)$. La demostración es sencilla: si, por ejemplo, $c < d$, entonces basta aplicar los Teoremas 4 y 5 al intervalo $[c, d]$. En resumen, si una función continua en un intervalo toma dos valores, toma también todos los valores posibles entre ambos; esta ligera generalización del Teorema 1 se denomina a menudo el Teorema del Valor Intermedio.

Teorema 6. *Si f es continua en $[a, b]$, entonces f está acotada inferiormente en $[a, b]$, es decir, existe algún número N tal que $f(x) \geq N$ para todo x de $[a, b]$.*

Demostración. La función $-f$ es continua en $[a, b]$, por tanto, según el Teorema 2 existe un número M tal que $-f(x) \leq M$ para todo x de $[a, b]$. Pero esto significa que $f(x) \geq -M$ para todo x de $[a, b]$, de manera que podemos tomar $N = -M$. ■

Conjuntamente, los Teoremas 2 y 6 demuestran que una función continua f en $[a, b]$ está acotada en $[a, b]$, es decir, que existe un número N tal que $|f(x)| \leq N$ para todo x de $[a, b]$. De hecho, como el Teorema 2 garantiza la existencia de un número N_1 tal que $f(x) \leq N_1$ para todo x de $[a, b]$, y el Teorema 6 garantiza la existencia de un número N_2 tal que $f(x) \geq N_2$ para todo x de $[a, b]$, podemos tomar $N = \text{máx}(|N_1|, |N_2|)$.

Teorema 7. *Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe algún y de $[a, b]$ tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo x de $[a, b]$. (Una función continua en un intervalo cerrado alcanza su valor mínimo en dicho intervalo.)*

Demostración. La función $-f$ es continua en $[a, b]$; según el Teorema 3 existe algún y de $[a, b]$ tal que $-f(y) \geq -f(x)$ para todo x de $[a, b]$, lo que significa que $f(y) \leq f(x)$ para todo x de $[a, b]$. ■

Ahora que ya hemos deducido las consecuencias triviales de los Teoremas 1, 2 y 3, podemos empezar a demostrar algunos resultados interesantes.

Teorema 8. *Todo número positivo admite una raíz cuadrada. En otras palabras, si $\alpha > 0$, existe algún número x tal que $x^2 = \alpha$.*

Demostración. Consideremos la función $f(x) = x^2$, la cual, ciertamente, es continua. Observemos que el enunciado del teorema puede expresarse en términos de f: "el número α admite una raíz cuadrada" significa que f toma el valor α. La demostración de esta propiedad de f es una consecuencia inmediata del Teorema 4.

Existe, evidentemente, un número $b > 0$ tal que $f(b) > \alpha$ (como se ilustra en la Figura 7); de hecho, si $\alpha > 1$ podemos tomar $b = \alpha$, y si $\alpha < 1$ podemos tomar $b = 1$. Como $f(0) < \alpha < f(b)$, aplicando el Teorema 4 al intervalo $[0, b]$ deducimos que existe un x (de $[0, b]$) tal que $f(x) = \alpha$, es decir, $x^2 = \alpha$. ■

Puede utilizarse el mismo argumento para demostrar que un número positivo tiene una raíz n-ésima, para cualquier número natural n. Si n es impar, es posible incluso mejorar el resultado: *todo* número tiene una raíz n-ésima. Para demostrar esta última afirmación basta observar que si el número positivo α tiene la raíz n-ésima x, es decir, si $x^n = \alpha$, entonces $(-x)^n = -\alpha$ (ya que n es impar), de manera que $-\alpha$ tiene la raíz n-ésima $-x$. Afirmar que, para n impar, cualquier número α tiene una raíz n-ésima, es equivalente a decir que la ecuación

$$x^n - \alpha = 0$$

admite una raíz si n es impar. Expresado de esta manera, este resultado es susceptible de una gran generalización.

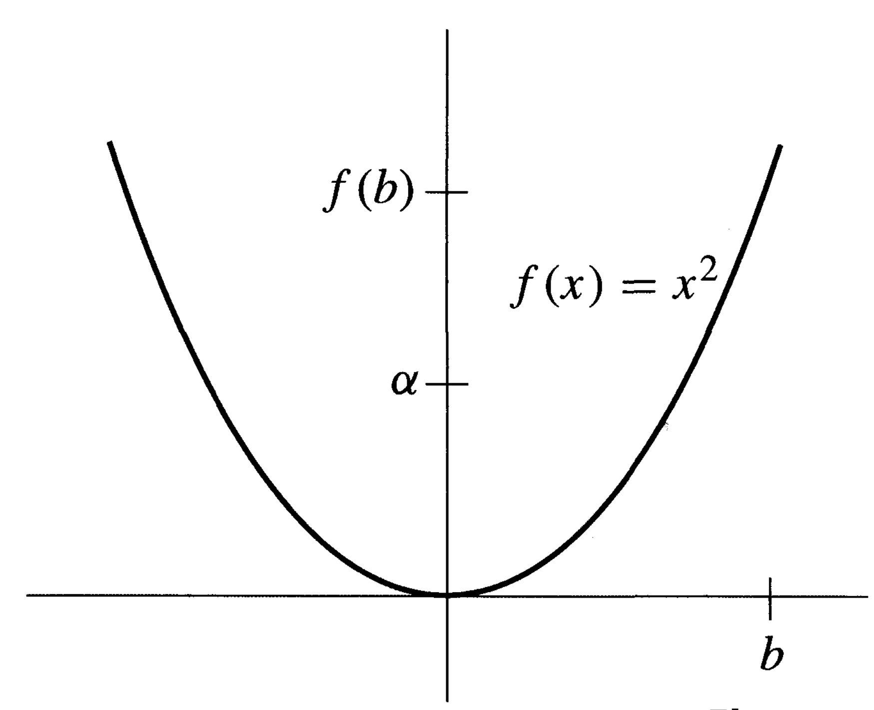


Figura 7

Teorema 9. *Si n es impar, entonces cualquier ecuación de la forma*

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

admite una raíz.

Demostración. Evidentemente, hemos de considerar la función

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0;$$

deseamos demostrar que f es a veces positiva y a veces negativa. La idea intuitiva es que para valores grandes de $|x|$, la función es muy parecida a $g(x) = x^n$ y, como n es impar, esta función es positiva para valores grandes positivos de x y negativa para valores grandes negativos de x. Sólo se necesita un poco de álgebra para transformar esta idea intuitiva en una demostración matemática.

El análisis riguroso de f se basa en escribir dicha función como

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = x^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right).$$

Observemos que

$$\left|\frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right| \leq \frac{|a_{n-1}|}{|x|} + \cdots + \frac{|a_0|}{|x^n|}.$$

Por consiguiente, si elegimos un x tal que

$$(*) \qquad |x| > 1, 2n|a_{n-1}|, \ldots, 2n|a_0|,$$

entonces $|x^k| > |x|$ y

$$\frac{|a_{n-k}|}{|x^k|} < \frac{|a_{n-k}|}{|x|} < \frac{|a_{n-k}|}{2n|a_{n-k}|} = \frac{1}{2n},$$

es decir

$$\left|\frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right| \leq \underbrace{\frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ términos}} = \frac{1}{2}.$$

En otras palabras,

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n} \leq \frac{1}{2},$$

lo que implica que

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}.$$

Por tanto, si elegimos un $x_1 > 0$ que satisfaga $(*)$, entonces

$$\frac{(x_1)^n}{2} \leq (x_1)^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x_1} + \cdots + \frac{a_0}{(x_1)^n}\right) = f(x_1),$$

de manera que $f(x_1) > 0$. Por otra parte, si $x_2 < 0$ satisface $(*)$, entonces $(x_2)^n < 0$ y

$$\frac{(x_2)^n}{2} \geq (x_2)^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x_2} + \cdots + \frac{a_0}{(x_2)^n}\right) = f(x_2),$$

de manera que $f(x_2) < 0$.

Aplicando ahora el Teorema 1 al intervalo $[x_2, x_1]$ concluímos que existe un x en $[x_2, x_1]$ tal que $f(x) = 0$. ■

El Teorema 9 se basa tan alegremente en las ecuaciones de grado impar que sería frustrante no discutir en absoluto el problema de las de grado par. Sin embargo, a primera vista, dicho problema parece insuperable. Algunas ecuaciones como $x^2 - 1 = 0$ admiten una solución, y algunas como $x^2 + 1 = 0$, no; ¿qué más podemos añadir? Sin embargo, si consideramos una cuestión más general, si que *podemos* decir algo interesante. En lugar de intentar resolver la ecuación

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0,$$

investiguemos la posibilidad de resolver ecuaciones del tipo

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = c$$

para todos los posibles números c. Esto equivale a hacer variar el término constante a_0. La información que podemos obtener concerniente a la solución de estas ecuaciones depende de un hecho que se ilustra en la Figura 8.

La gráfica de la función $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, con n par, posee, al menos de la forma en que la hemos dibujado, un valor mínimo. En otras palabras, existe un número y tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo x; la función f alcanza un valor mínimo, no sólo en cada intervalo cerrado, sino en toda la recta real. (Observemos que este resultado es falso si n es impar.) La demostración depende del Teorema 7, aunque será necesario aplicar un artilugio. Es posible aplicar el Teorema 7 a cualquier intervalo $[a, b]$, y obtener un punto y_0 tal que $f(y_0)$ es el valor mínimo de f en $[a, b]$; pero si resulta que el intervalo $[a, b]$ es, por ejemplo, el que se muestra en la Figura 8, entonces el punto y_0 no es aquél en el cual f posee el valor mínimo en toda la recta real. Como se muestra en el siguiente teorema, la clave de la demostración radica en elegir un intervalo $[a, b]$ en el que esto no ocurra.

Teorema 10. *Si n es par y $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, entonces existe un número y tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo x.*

Demostración. Al igual que en la demostración del Teorema 9, si

$$M = \text{máx}(1, 2n|a_{n-1}|, \ldots, 2n|a_0|),$$

entonces para todo x con $|x| \geq M$, se verifica que

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}.$$

Como n es par, $x^n \geq 0$ para todo x, por tanto

$$\frac{x^n}{2} \leq x^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right) = f(x),$$

si $|x| \geq M$. Consideremos ahora el número $f(0)$. Sea $b > 0$ un número tal que $b^n \geq 2f(0)$ y también $b > M$. Entonces, si $x \geq b$, obtenemos (Figura 9)

$$f(x) \geq \frac{x^n}{2} \geq \frac{b^n}{2} \geq f(0).$$

Análogamente, si $x \leq -b$, entonces

$$f(x) \geq \frac{x^n}{2} \geq \frac{(-b)^n}{2} = \frac{b^n}{2} \geq f(0).$$

En resumen:

si $x \geq b$ o $x \leq -b$, entonces $f(x) \geq f(0)$.

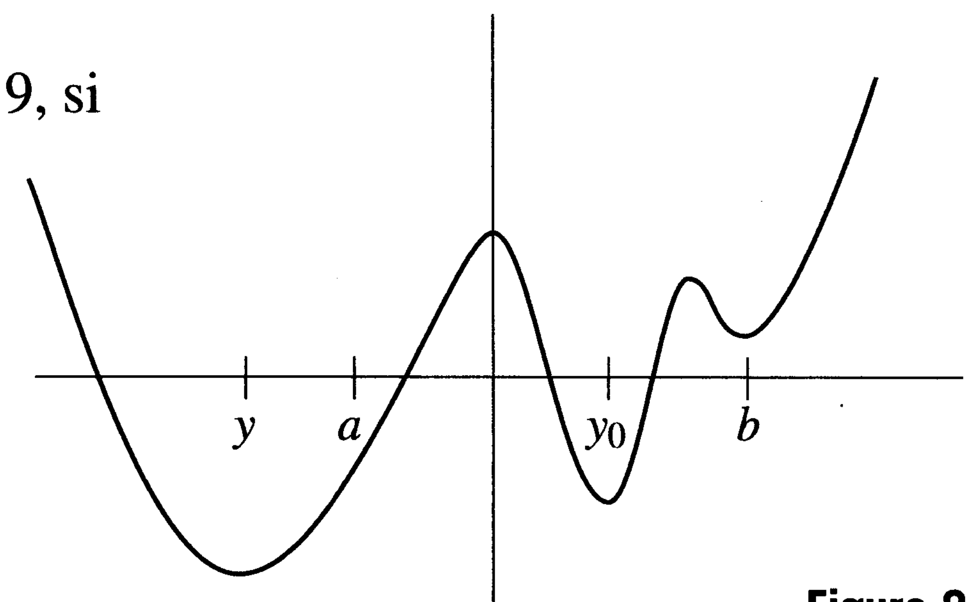


Figura 8

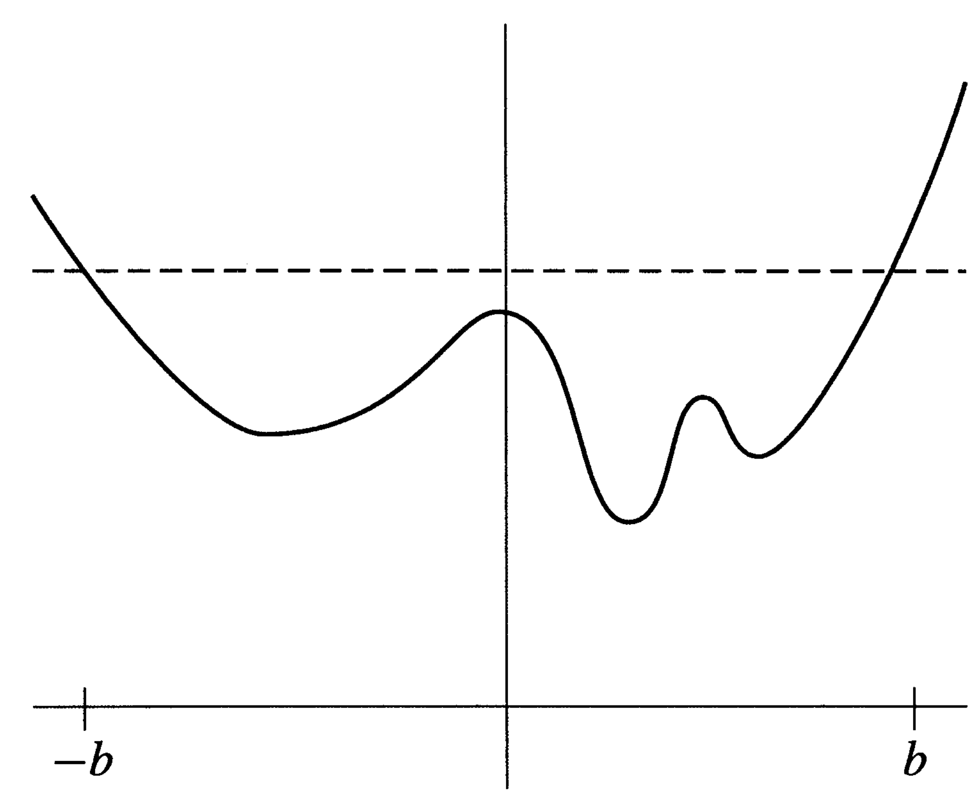


Figura 9

Apliquemos ahora el Teorema 7 a la función f en el intervalo $[-b, b]$. Deducimos que existe un número y tal que

$$\text{(1)} \qquad \text{si } -b \leq x \leq b, \text{ entonces } f(y) \leq f(x).$$

En particular, $f(y) \leq f(0)$. Así

$$\text{(2)} \qquad \text{si } x \leq -b \text{ o } x \geq b, \text{ entonces } f(x) \geq f(0) \geq f(y).$$

Combinando (1) y (2) vemos que $f(y) \leq f(x)$ para todo x. ■

El Teorema 10 nos permite demostrar ahora el siguiente resultado.

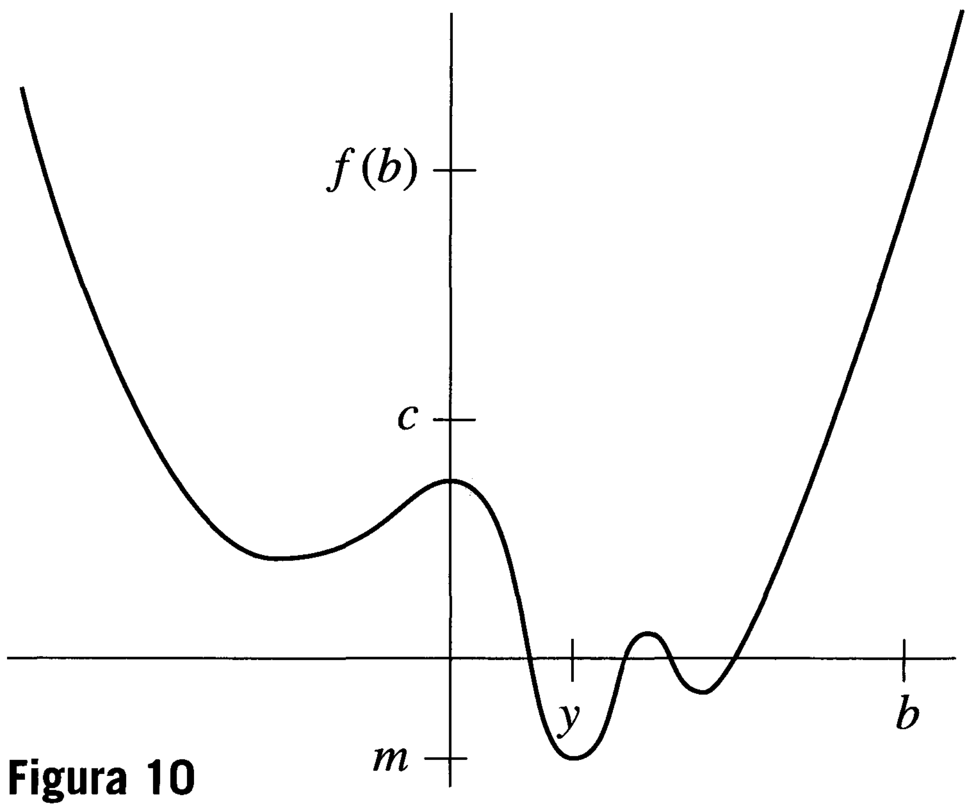


Figura 10

Teorema 11. *Consideremos la ecuación*

$$(*) \qquad x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = c,$$

y supongamos que n es par. Entonces existe un número m tal que $(*)$ *admite una solución para* $c \geq m$ *y no tiene solución para* $c < m$.

Demostración. Sea $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ (Figura 10). Según el Teorema 10 existe un número y tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo x. Sea $m = f(y)$. Si $c < m$, entonces la ecuación $(*)$ obviamente no tiene solución, ya que el lado izquierdo de la igualdad siempre posee un valor $\geq m$. Si $c = m$, entonces $(*)$ admite a y como una solución. Finalmente, supongamos que $c > m$. Sea b un número tal que $b > y$ y $f(b) > c$. Entonces $f(y) = m < c < f(b)$. Por consiguiente, según el Teorema 4, existe algún número x en $[y, b]$ tal que $f(x) = c$, de manera que x es una solución de $(*)$. ■

Estas consecuencias de los Teoremas 1, 2 y 3 son las únicas que deduciremos de momento (aunque estos teoremas tendrán una importancia capital en todo lo que hagamos más adelante). Sólo nos queda una tarea: demostrar los Teoremas 1, 2 y 3. Por desgracia, no podemos hacerlo por ahora; basándonos en lo que sabemos acerca de los números reales (es decir, las propiedades P1-P12), esta tarea resulta *imposible*. Existen varias maneras de convencerse de que esta conclusión tan pesimista es realmente cierta. Por ejemplo, la demostración del Teorema 8 se basa únicamente en la demostración del Teorema 1; si pudiésemos demostrar el Teorema 1, entonces la demostración del Teorema 8 sería completa, y tendríamos una prueba de que todo número positivo admite una raíz cuadrada. Como ya indicábamos en la Parte I, es imposible demostrar esta propiedad basándose únicamente en P1-P12. Podemos también considerar la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}.$$

Si no existiera ningún número x tal que $x^2 = 2$, entonces f sería continua ya que el denominador nunca sería $= 0$. Pero f no está acotada en $[0, 2]$. De manera que el Teorema 2 depende esencialmente de la existencia de números distintos a los números racionales, y por tanto de alguna propiedad de los números reales distinta de P1-P12.

A pesar de que, de momento, no podemos demostrar los Teoremas 1, 2 y 3, son resultados que esperamos que sean ciertos. Si los esquemas que hemos estado dibujando tienen alguna conexión con las matemáticas que venimos desarrollando, y si nuestra noción de función continua se corresponde en alguna medida con nuestra noción intuitiva, los Teoremas 1, 2 y 3 han de ser ciertos. Como la demostración de cualquiera de estos teoremas requiere, necesariamente, la aplicación de alguna propiedad nueva de **R** que de momento no hemos considerado, las dificultades con las que ahora nos encontramos sugieren una manera de descubrir dicha propiedad: intentemos dar una demostración del Teorema 1, por ejemplo, y veamos donde falla el razonamiento.

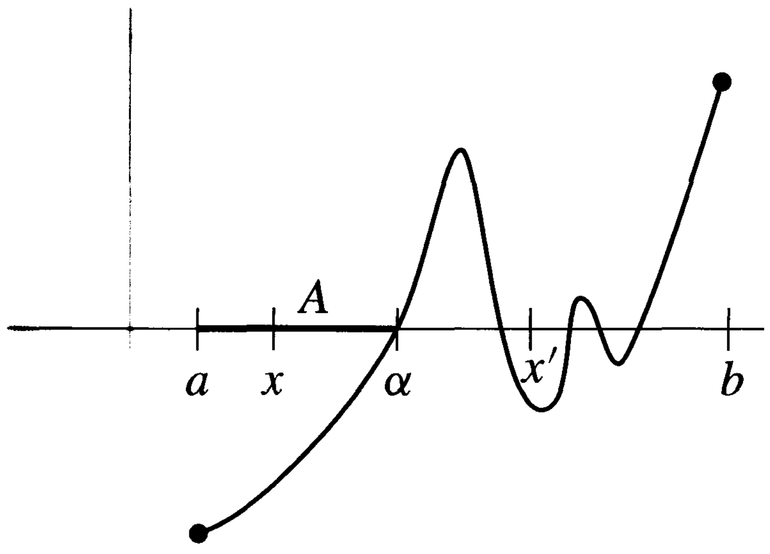


Figura 11

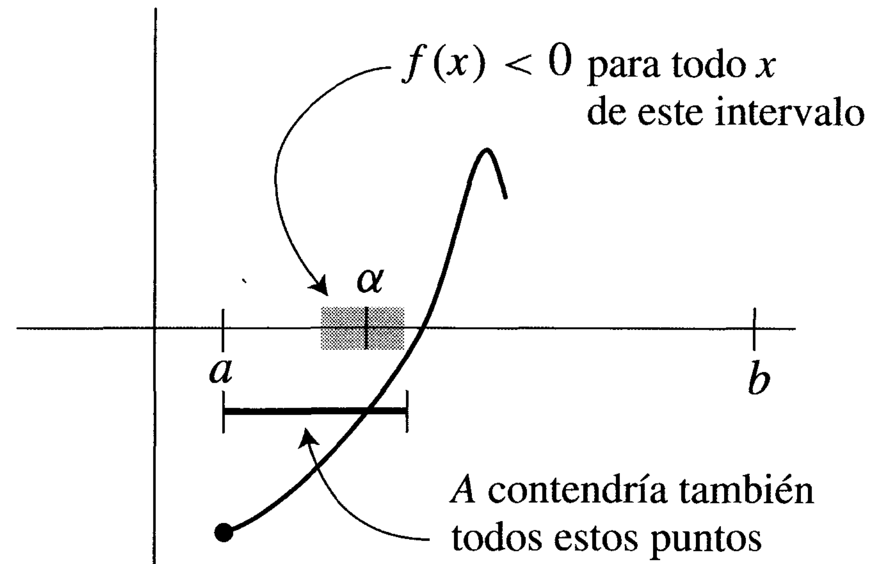


Figura 12

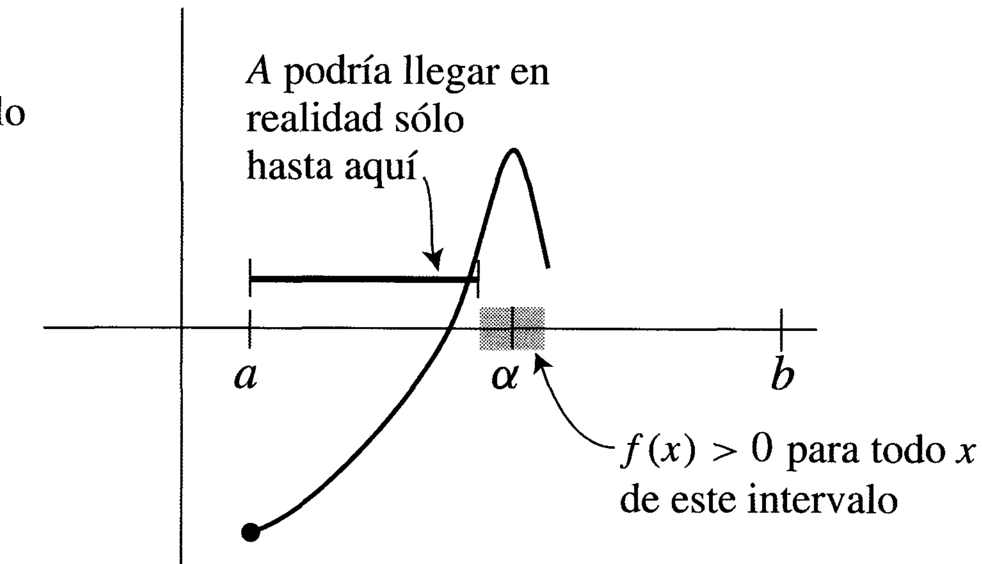


Figura 13

Una idea que, a primera vista, parece prometedora, consiste en localizar el primer punto en el cual $f(x) = 0$, es decir, el menor x de $[a, b]$ tal que $f(x) = 0$. Para hallar este punto, consideremos primero el conjunto A que contiene a todos los números x de $[a, b]$ tales que f es negativa en $[a,x]$. En la Figura 11, x es uno de estos puntos mientras que x' no lo es. En la figura, el conjunto A se representa mediante una línea de trazo grueso. Como f es negativa en a y positiva en b, el conjunto A contiene algunos puntos mayores que a, mientras que todos los puntos suficientemente próximos a b no pertenecen a A. (Aquí estamos utilizando la continuidad de f en $[a, b]$ y el resultado del Problema 6-16.)

Supongamos ahora que α es el menor número que es mayor que todos los miembros de A; obviamente $a < \alpha < b$. Nuestra idea es que $f(\alpha) = 0$, y para demostrarlo únicamente hemos de descartar las posibilidades $f(\alpha) < 0$ y $f(\alpha) > 0$.

Supongamos primero que $f(\alpha) < 0$. Entonces, según el Teorema 6-3, $f(x)$ sería menor que 0 para todo x en un pequeño intervalo que contiene a α, en particular para algunos números mayores que α (Figura 12); pero esto contradice el hecho de que α es mayor que cada número de A, ya que los números más grandes también estarían en A. Por consiguiente, $f(\alpha) < 0$ es falsa.

Por otra parte, supongamos que $f(\alpha) > 0$. Aplicando nuevamente el Teorema 6-3, vemos que $f(x)$ sería positivo para todo x de un pequeño intervalo que contiene a α, en particular para algunos números menores que α (Figura 13). Esto significa que estos números más pequeños *no* pertenecerían a A. Por consiguiente, se podría haber elegido un α todavía más pequeño que sería mayor que todos los miembros de A. Una vez más llegamos a una contradicción; $f(\alpha) > 0$ es también falsa, por tanto $f(\alpha) = 0$ y casi no podemos evitar caer en la tentación de decir Q.E.D.

Sin embargo, sabemos que debe haber algún error, ya que en nuestro razonamiento no hemos utilizado ninguna propiedad nueva de **R**; de hecho, no es necesario cavilar demasiado para ver donde radica el error. Es evidente que podemos elegir un número α mayor que cualquier miembro de A (por ejemplo, podemos elegir $\alpha = b$), pero no está claro en absoluto que podamos elegir uno que sea el *menor*. Supongamos, por ejemplo, que A consiste en todos los números $x \geq 0$ tales que $x^2 < 2$. Si no existiese el número $\sqrt{2}$, no habría un menor número mayor que todos los miembros de A; para cualquier $y > \sqrt{2}$ que eligiésemos, siempre podríamos encontrar otro número más pequeño que y mayor que todos los miembros de A.

Ahora que ya hemos descubierto el sofisma, casi resulta obvio qué propiedad adicional es necesario que posean los números reales. Todo lo que debemos hacer es definirla adecuadamente y utilizarla. Esto es lo que haremos en el siguiente capítulo.

Problemas

1. Para cada una de las siguientes funciones decida cuáles están acotadas superior o inferiormente en el intervalo que se indica, y cuáles alcanzan su valor máximo o mínimo. (Observe que f *podría* tener estas propiedades incluso aunque no fuese continua e incluso si el intervalo no fuese cerrado.)

   (i) $f(x) = x^2$ en $(-1,1)$. (ii) $f(x) = x^3$ en $(-1,1)$. (iii) $f(x) = x^2$ en $\mathbf{R}$.

   (iv) $f(x) = x^2$ en $[0,\infty)$.

   (v) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq a \\ a+2, & x > a \end{cases}$ en $(-a-1, a+1)$. (Suponemos que $a > -1$, de manera que $-a-1 < a+1$; será necesario considerar varias posibilidades para a).

   (vi) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < a \\ a+2, & x \geq a \end{cases}$ en $[-a-1, a+1]$. (Suponga nuevamente que $a > -1$.)

   (vii) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ 1/q, & x = p/q \text{ fracción irreducible} \end{cases}$ en $[0, 1]$.

   (viii) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ irracional} \\ 1/q, & x = p/q \text{ fracción irreducible} \end{cases}$ en $[0, 1]$.

   (ix) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ irracional} \\ -1/q, & x = p/q \text{ fracción irreducible} \end{cases}$ en $[0, 1]$.

   (x) $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ racional} \\ 0, & x \text{ irracional} \end{cases}$ en $[0, a]$.

   (xi) $f(x) = \operatorname{sen}^2(\cos x + \sqrt{a + a^2})$ en $[0, a^3]$. (xii) $f(x) = [x]$ en $[0, a]$.

2. Para cada una de las siguientes funciones polinómicas f, encuentre un entero n tal que $f(x) = 0$ para algún x entre n y $n+1$.

   (i) $f(x) = x^3 - x + 3$. (ii) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$. (iii) $f(x) = x^5 + x + 1$. (iv) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$.

3. Demuestre que existe algún número x tal que

   (i) $x^{179} + \dfrac{163}{1 + x^2 + \operatorname{sen}^2 x} = 119$. (ii) $\operatorname{sen} x = x - 1$.

4. Este problema es una continuación del Problema 3-7.
   (a) Si $n - k$ es par, y ≥ 0, halle una función polinómica de grado n que tenga exactamente k raíces.
   (b) Se dice que una raíz a de la función polinómica f tiene una **multiplicidad** m si $f(x) = (x-a)^m g(x)$, siendo g una función polinómica que *no* posee a como raíz. Sea f una función polinómica de grado n. Suponga que f tiene k raíces, contando sus multiplicidades, es decir, suponga que k es la suma de las multiplicidades de todas las raíces. Demuestre que $n - k$ es par.

5. Suponga que f es continua en $[a, b]$ y que $f(x)$ es siempre racional. ¿Qué puede decirse acerca de f?

6. Suponga que f es *continua* en $[-1, 1]$ y que $x^2 + (f(x))^2 = 1$ para todo x. (Esto significa que $(x, f(x))$ siempre se encuentra sobre el círculo unidad.) Demuestre que o bien $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ para todo x, o bien que $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ para todo x.

7. ¿Cuántas funciones continuas f hay que satisfagan $(f(x))^2 = x^2$ para todo x?

8. Suponga que f y g son continuas, que $f^2 = g^2$, y que $f(x) \neq 0$ para todo x. Demuestre que o bien $f(x) = g(x)$ para todo x, o bien $f(x) = -g(x)$ para todo x.

9. (a) Suponga que f es continua, que $f(x) = 0$ sólo para $x = a$, y que $f(x) > 0$ para algún $x > a$ así como también para algún $x < a$. ¿Qué puede decirse acerca de $f(x)$ para todo $x \neq a$?

(b) Suponga nuevamente que f es continua y que $f(x) = 0$ sólo para $x = a$, pero en este caso suponga también que $f(x) > 0$ para algún $x > a$ y que $f(x) < 0$ para algún $x < a$. ¿Qué puede decirse en este caso acerca de $f(x)$ para $x \neq a$?

*(c) Discuta el signo de $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$ cuando x e y no son ambos 0.

10. Suponga que f y g son continuas en $[a, b]$ y que $f(a) < g(a)$, pero $f(b) > g(b)$. Demuestre que $f(x) = g(x)$ para algún x de $[a, b]$. (Si su demostración no es muy corta, no es la correcta.)

11. Suponga que f es una función continua en $[0, 1]$ y que $f(x)$ pertenece al intervalo $[0, 1]$ para cada x (dibuje un esquema). Demuestre que $f(x) = x$ para algún x.

12. (a) El Problema 11 demuestra que f corta a la diagonal del cuadrado de la Figura 14 (línea continua). Demuestre que f debe cortar también a la otra diagonal (línea a trazos).

(b) Demuestre la siguiente propiedad más general: si g es continua en $[0, 1]$ y $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ ó $g(0) = 1$, $g(1) = 0$, entonces $f(x) = g(x)$ para algún x.

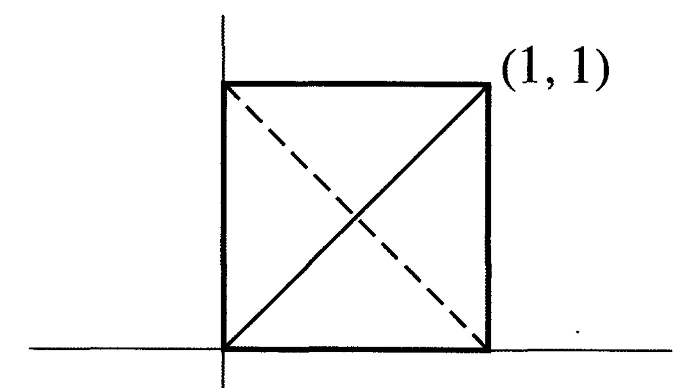


Figura 14

13. (a) Sea $f(x) = \operatorname{sen} 1/x$ para $x \neq 0$ y sea $f(0) = 0$. ¿Es f continua en $[-1, 1]$? Demuestre que f satisface la conclusión del Teorema del Valor Intermedio en $[-1, 1]$; en otras palabras, si f toma dos valores comprendidos en $[-1, 1]$, toma también todos los valores intermedios.

*(b) Suponga que f satisface la conclusión del Teorema de los Valores Intermedios y que f toma *sólo una vez* cada uno de los valores. Demuestre que f es continua.

*(c) Generalice al caso en el que f toma cada valor sólo un número finito de veces.

14. Si f es una función continua en $[0, 1]$, sea $\|f\|$ el valor máximo de $|f|$ en $[0, 1]$.

(a) Demuestre que, cualquiera que sea el número c se verifica que $\|cf\| = |c| \cdot \|f\|$.

*(b) Demuestre que $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$. Dé un ejemplo en el que $\|f + g\| \neq \|f\| + \|g\|$.

(c) Demuestre que $\|h - f\| \leq \|h - g\| + \|g - f\|$.

***15.** Suponga que ϕ es continua y que $\lim\limits_{x \to \infty} \phi(x)/x^n = 0 = \lim\limits_{x \to -\infty} \phi(x)/x^n$.

(a) Demuestre que si n es impar, entonces existe un número x tal que $x^n + \phi(x) = 0$.

(b) Demuestre que si n es par, entonces existe un número y tal que $y^n + \phi(y) \leq x^n + \phi(x)$ para todo x.

Indicación: En este problema, ¿qué demostraciones se trata de comprobar que el lector haya entendido?

***16.** (a) Suponga que f es continua en (a, b) y que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \infty$. Demuestre que f posee un valor mínimo en (a, b).

(b) Demuestre el mismo resultado en el caso que $a = -\infty$ y/o $b = \infty$.

***17.** Sea f una función polinómica. Demuestre que existe algun número y tal que $|f(y)| \leq |f(x)|$ para todo x.

***18.** Suponga que f es una función continua con $f(x) > 0$ para todo x, y que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. (Dibuje un esquema.) Demuestre que existe algún número y tal que $f(y) \geq f(x)$ para todo x.

***19.** (a) Suponga que f es continua en $[a, b]$, y sea x cualquier número. Demuestre que existe un punto en la gráfica de f que es el que está más próximo al punto $(x,0)$; en otras palabras, existe un y de $[a, b]$ tal que la distancia de $(x,0)$ a $(y, f(y))$ es $\leq$ que la distancia de $(x,0)$ a $(z, f(z))$ para todo z de $[a, b]$. (Vea la Figura 15.)

(b) Demuestre que este resultado no es necesariamente cierto si $[a, b]$ se sustituye por (a, b) .

(c) Demuestre que el resultado *es* cierto si $[a, b]$ se sustituye por $\mathbf{R}$.

(d) En los casos (a) y (c), sea $g(x)$ la mínima distancia de $(x,0)$ a un punto de la gráfica de f. Demuestre que $g(y) \leq g(x) + |x-y|$, y concluya que g es continua.

(e) Demuestre que existen números x_0 y x_1 de $[a, b]$ tales que la distancia de $(x_0,0)$ a $(x_1, f(x_1))$ es $\leq$ que la distancia de $(x_0',0)$ a $(x_1', f(x_1'))$ para cualesquiera x_0', x_1' de $[a, b]$.

20. (a) Suponga que f es continua en $[0, 1]$ y que $f(0) = f(1)$. Sea n cualquier número natural. Demuestre que existe algún número x tal que $f(x) = f(x+1/n)$, como se indica en la Figura 16 para $n = 4$. Indicación: Considere la función $g(x) = f(x) - f(x+1/n)$; ¿qué ocurriría si $g(x) \neq 0$ para todo x?

*(b) Suponga que $0 < a < 1$, pero que a no es igual a $1/n$ para cualquier número natural n. Encuentre una función f que sea continua en $[0, 1]$ y que satisfaga $f(0) = f(1)$, pero que no satisfaga $f(x) = f(x+a)$ para ningún x.

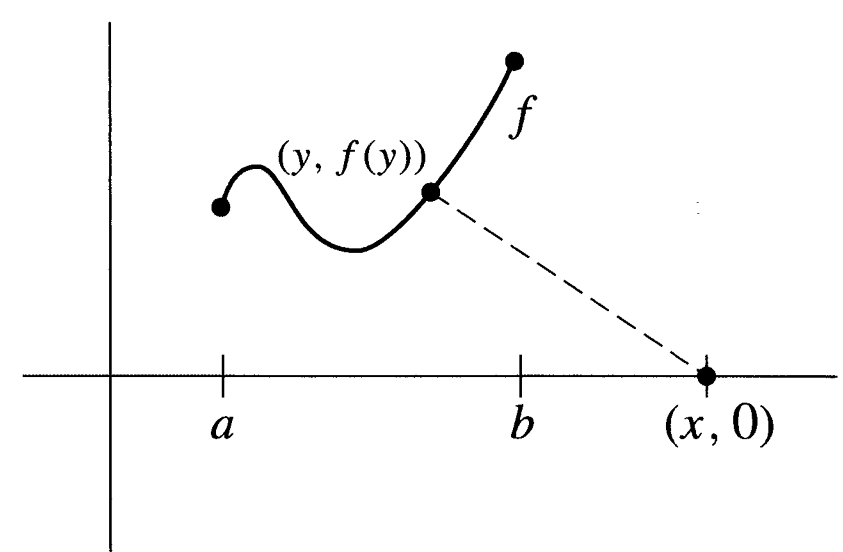


Figura 15

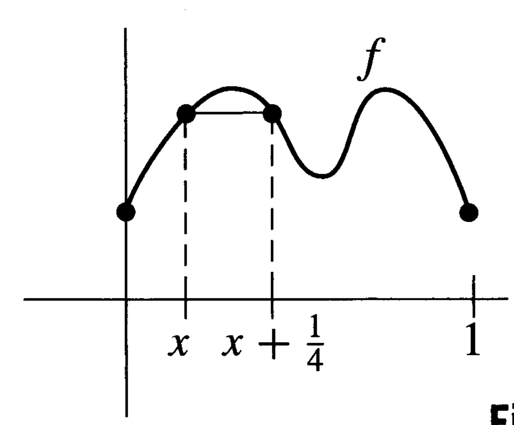


Figura 16

***21.** (a) Demuestre que no existe ninguna función continua f definida en $\mathbf{R}$ que tome exactamente dos veces cada uno de los valores. Indicación: Si $f(a) = f(b)$ para $a < b$, entonces o bien $f(x) > f(a)$ para todo x de (a, b), o bien $f(x) < f(a)$ para todo x de (a, b). ¿Por qué? En el primer caso todos los valores próximos a $f(a)$, pero ligeramente mayores que $f(a)$, son alcanzados en algún punto de (a, b); esto implica que $f(x) < f(a)$ para $x < a$ y $x > b$.

(b) Precise el apartado (a) demostrando que no existe ninguna función continua f que tome cada valor 2 veces o bien ninguna, es decir, que tome exactamente dos veces cada valor alcanzado por la función. Indicación: La indicación anterior implica que f posee o bien un valor máximo o un valor mínimo (el cual debe ser alcanzado dos veces). ¿Qué puede decirse acerca de los valores próximos al valor máximo?

(c) Halle una función continua f que tome todos los valores exactamente tres veces. De modo más general, halle una función continua que tome todos los valores exactamente n veces, si n es impar.

(d) Demuestre que si n es par, entonces no existe ninguna función continua f que tome todos los valores exactamente n veces. Indicación: Para abordar, por ejemplo, el caso $n = 4$, ponga $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4)$. Entonces, o bien $f(x) > 0$ para todo x en dos de los tres intervalos (x_1,x_2), (x_2,x_3), (x_3,x_4), o bien $f(x) < 0$ para todo x en dos de los tres intervalos.

Cotas superiores mínimas

8

Este capítulo trata de la propiedad más importante de los números reales. Sin embargo, es únicamente una continuación del Capítulo 7, y como ya hemos indicado el camino a seguir, alargar la discusión sería un retraso inútil.

Definición

Un conjunto A de números reales está **acotado superiormente** si existe un número x tal que

$$x \geq a \quad \text{para todo } a \text{ de } A.$$

Este número x se denomina una **cota superior** de A.

Obviamente A está acotado superiormente si y sólo si existe un número x que es una cota superior de A (y en este caso existirán muchas cotas superiores de A); a menudo se dice, como una concesión al lenguaje más coloquial, que "A posee una cota superior" cuando en realidad lo que se quiere decir es que existe un número que es una cota superior de A.

Observemos que el término "acotado superiormente" se ha utilizado con dos significados diferentes: primero, en el Capítulo 7, con referencia a las funciones, y ahora con referencia a los conjuntos. Esta utilización dual no debe ser motivo de confusión ya que siempre queda claro por el contexto si estamos hablando de conjuntos de números o de una función. Además, las dos definiciones están estrechamente relacionadas: si A es el conjunto $\{f(x) : a \leq x \leq b\}$, entonces la función f está acotada superiormente en $[a, b]$ si y sólo si el conjunto A está acotado superiormente.

El conjunto $\mathbf{R}$ de números reales y el conjunto $\mathbf{N}$ de números naturales constituyen ejemplos de conjuntos que *no* están acotados superiormente. Un ejemplo de conjunto que *está* acotado superiormente es

$$A = \{x : 0 \leq x < 1\}.$$

Para demostrar que A está acotado superiormente sólo es necesario identificar alguna cota superior de A, lo cual es bastante sencillo; por ejemplo, 138 es una cota superior de A, así como 2, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{4}$ y 1. Obviamente, 1 es la cota superior mínima de A; aunque la frase anterior se entiende por si misma, para evitar cualquier posible confusión (en particular, para asegurarnos que todos entendemos el significado del término "mínima"), daremos una definición explícita.

Definición

Un número x es una **cota superior mínima** de A si

$$\begin{array}{rl} (1) & x \text{ es una cota superior de } A, \\ \text{y} \quad (2) & \text{si } y \text{ es una cota superior de } A, \text{ entonces } x \leq y. \end{array}$$

El uso del artículo indeterminado "una" en la definición fue tan sólo una concesión a la ignorancia temporal. Ahora que disponemos ya de una definición precisa, se comprueba fácilmente que si x e y son ambos cotas superiores mínimas de A, entonces $x = y$. En efecto, en este caso

$$\begin{array}{rll} & x \leq y, & \text{ya que } y \text{ es una cota superior, y } x \text{ es una cota superior mínima,} \\ \text{e} & y \leq x, & \text{ya que } x \text{ es una cota superior, e } y \text{ es una cota superior mínima;} \end{array}$$

por lo tanto $x = y$. Es por esta razón que hablamos de *la* cota superior mínima de A. El término **supremo** de A es sinónimo al de cota superior mínima y tiene una ventaja: se puede abreviar mediante un símbolo muy adecuado

$$\sup A$$

que es más directo que otras abreviaturas.*

Existe una serie de definiciones importantes, análogas a las que acabamos de dar, las cuales podemos considerar ahora, brevemente. Un conjunto A de números reales está **acotado inferiormente** si existe un número x tal que

$$x \leq a \qquad \text{para todo } a \text{ de } A.$$

Dicho número x se denomina una **cota inferior** de A. Un número x es la **cota inferior máxima** de A si

$$\begin{array}{rl} (1) & x \text{ es una cota inferior de } A, \\ \text{y} \quad (2) & \text{si } y \text{ es una cota inferior de } A, \text{ entonces } x \geq y. \end{array}$$

La cota inferior máxima de A se denomina también el **ínfimo** de A, abreviadamente

$$\text{ínf} A$$

un símbolo también muy adecuado.**

Hasta ahora hemos omitido un detalle en nuestra discusión: la cuestión de qué conjuntos tienen al menos una, y por tanto exactamente una, cota superior mínima o cota inferior máxima. Consideraremos únicamente cotas superiores mínimas ya que, una vez resuelta esta cuestión, el tema relativo a las cotas inferiores máximas puede ser resuelto fácilmente (Problema 2).

Si A no está acotado superiormente entonces no posee ninguna cota superior ni, por tanto, ninguna cota superior mínima. Es tentador decir que A posee una cota superior

---

*En inglés, otros autores utilizan también la abreviatura "lubA" por "least upper bound", que significa "cota superior mínima" (Nota del traductor)

**En inglés, otros autores utilizan también la abreviatura "glbA" por "greatest lower bound" que significa "cota inferior máxima" (Nota del traductor) mínima si tiene *alguna* cota superior, pero al igual que ocurre con el principio de inducción matemática, esta afirmación puede dejar de ser cierta en casos muy particulares. Si $A = \emptyset$, entonces A está acotado superiormente; en efecto, cualquier número x es una cota superior de $\emptyset$:

$$x \geq y \quad \text{para todo } y \text{ de } \emptyset$$

debido simplemente a que no existe ningún y en $\emptyset$. Como *cualquier* número es una cota superior de $\emptyset$, no existe ninguno que sea la mínima cota superior de $\emptyset$. Sin embargo, aparte de esta excepción trivial, la afirmación es cierta, y muy importante, tanto que merece que la consideremos detalladamente enunciando la última propiedad que necesitamos de los números reales.

(P13) (Propiedad de la cota superior mínima) Si A es un conjunto de números reales, $A \neq \emptyset$, y A está acotado superiormente, entonces A posee una cota superior mínima.

Puede que el lector quede algo decepcionado por la aparente sencillez de dicha Propiedad P13, pero ésta es precisamente una de sus virtudes. Para completar nuestra lista de propiedades básicas de los números reales no necesitamos ninguna proposición particularmente enrevesada, sino tan sólo una propiedad tan simple que podría parecer estúpido por nuestra parte haberla pasado por alto. Por supuesto, la propiedad de la mínima cota superior no es realmente tan inocente como parece; de hecho, *no* la posee el conjunto de los números racionales $\mathbf{Q}$. Por ejemplo, si A es el conjunto de los números racionales x que satisfacen $x^2 < 2$, entonces no existe ningún número *racional* y que sea cota superior de A y a la vez sea menor o igual que cualquier otra cota superior *racional* de A. El enorme significado de P13 se hará patente sólo de manera gradual, aunque ya estamos en condiciones de comprobar su importancia dando las demostraciones que omitimos en el Capítulo 7.

Teorema 7.1. *Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$, entonces existe algún número x de $[a, b]$ tal que $f(x) = 0$.*

Demostración. La demostración es tan sólo una versión rigurosa del método esbozado al final del Capítulo 7: localizaremos el menor número x de $[a, b]$ tal que $f(x) = 0$.

Definamos el conjunto A, que se muestra en la Figura 1, de la manera siguiente:

$$A = \{x : a \leq x \leq b, \text{ y } f \text{ es negativa en el intervalo } [a,x]\}.$$

Obviamente $A \neq \emptyset$, ya que a pertenece a A; de hecho, existe un $\delta > 0$ tal que A contiene a todos los puntos x que satisfacen $a \leq x < a + \delta$; esto se deduce del Problema 6-16, ya que f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < 0$. Análogamente, b es una cota superior de A y, de hecho, existe un $\delta > 0$ tal que todos los puntos x que satisfacen $b - \delta < x \leq b$ son cotas superiores de A; esto también se deduce del Problema 6-16, ya que $f(b) > 0$.

A partir de estas observaciones se deduce que A posee una cota superior mínima α y que $a < \alpha < b$. Ahora demostraremos que $f(\alpha) = 0$, excluyendo las posibilidades $f(\alpha) < 0$ y $f(\alpha) > 0$.

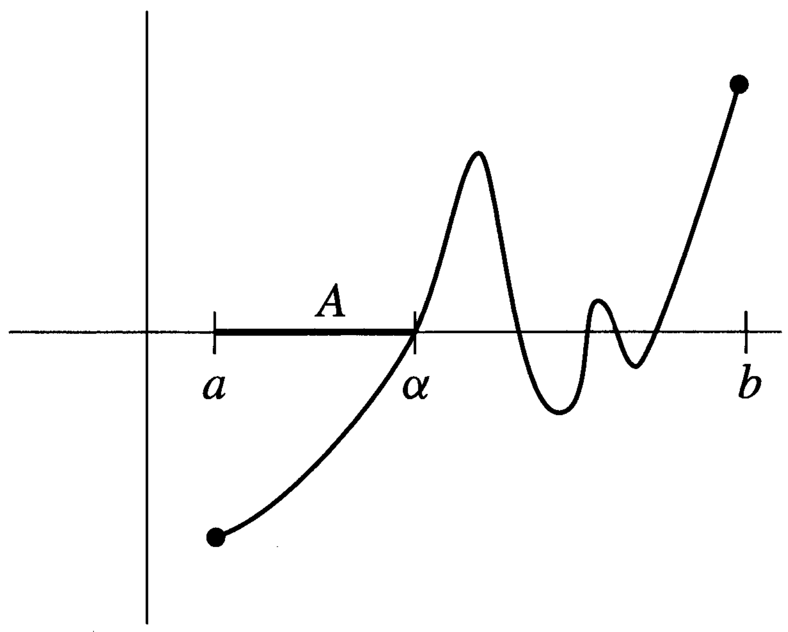


Figura 1

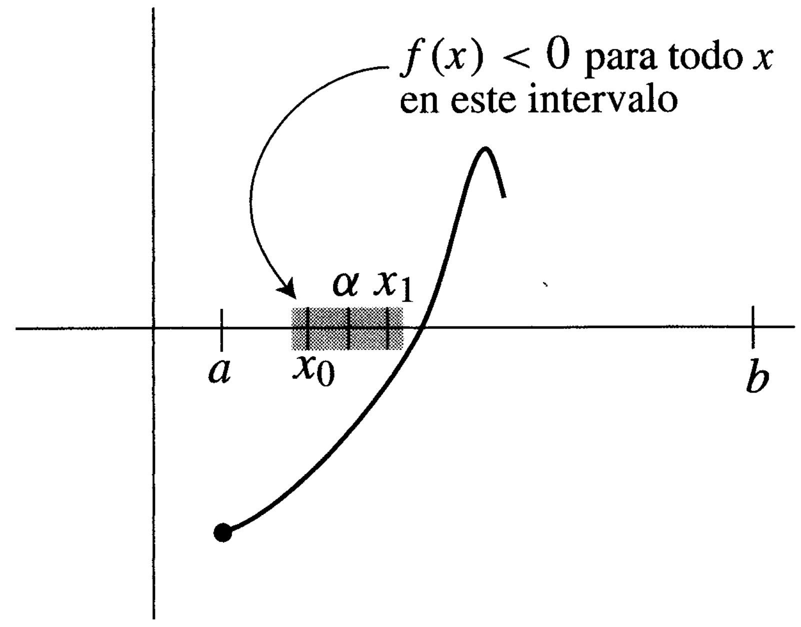


Figura 2

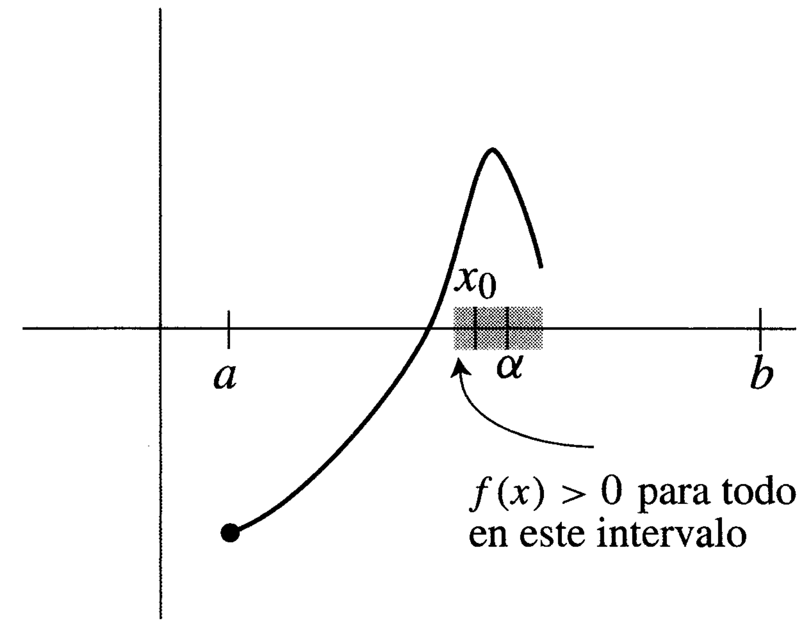


Figura 3

Supongamos primero que $f(\alpha) < 0$. Según el Teorema 6-3, existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ si $\alpha - \delta < x < \alpha + \delta$ (Figura 2). Ha de existir un número x_0 de A que satisface $\alpha - \delta < x_0 < \alpha$ (ya que sino α no sería la *mínima* cota superior de A). Esto significa que f es negativa en todo el intervalo $[a, x_0]$. Pero si x_1 es un número situado entre α y $\alpha + \delta$, entonces f también es negativa en todo el intervalo $[x_0, x_1]$. Por tanto, f es negativa en el intervalo $[a, x_1]$, de manera que x_1 pertenece a A. Pero esto contradice el hecho de que α sea una cota superior de A; concluímos pues que la suposición que hemos hecho anteriormente, de que $f(\alpha) < 0$ debe ser falsa.

Supongamos ahora que $f(\alpha) > 0$. Entonces existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ si $\alpha - \delta < x < \alpha + \delta$ (Figura 3). Una vez más, sabemos que existe un x_0 de A que satisface $\alpha - \delta < x_0 < \alpha$; pero esto significa que f es negativa en $[a, x_0]$, lo cual es imposible ya que $f(x_0) > 0$. Así pues, la suposición de que $f(\alpha) > 0$ conduce a una contradicción, quedando sólo la posibilidad de que $f(\alpha) = 0$. ■

Las demostraciones de los Teoremas 2 y 3 del Capítulo 7 requieren un sencillo resultado preliminar, que va a desempeñar una función muy similar a la del Teorema 6-3 en la demostración anterior.

Teorema 1. *Si f es continua en a, existe un número $\delta > 0$ tal que f está acotada superiormente en el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ (ver la Figura 4).*

Demostración. Como el $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{si } |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Tan sólo es necesario aplicar esta propiedad a algún ε en particular (cualquier ε servirá), por ejemplo, $\varepsilon = 1$. Deducimos pues que existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{si } |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < 1,$$

y, en particular, si $|x - a| < \delta$, entonces $f(x) - f(a) < 1$. Esto completa la demostración: en el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ la función f está acotada superiormente por $f(a) + 1$. ■

Por supuesto, ahora podríamos demostrar también que f está acotada inferiormente en algún intervalo $(a-\delta, a+\delta)$, concluyendo, por tanto, que f está acotada en algún intervalo abierto que contiene a a.

En este sentido, cabe destacar en particular la observación de que si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que f está acotada en el conjunto $\{x : a \leq x < a+\delta\}$, pudiendo hacerse una observación análoga si $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$. Hechas pues estas observaciones (y suponiendo que el lector hará las oportunas demostraciones), ya podemos abordar nuestro segundo teorema principal.

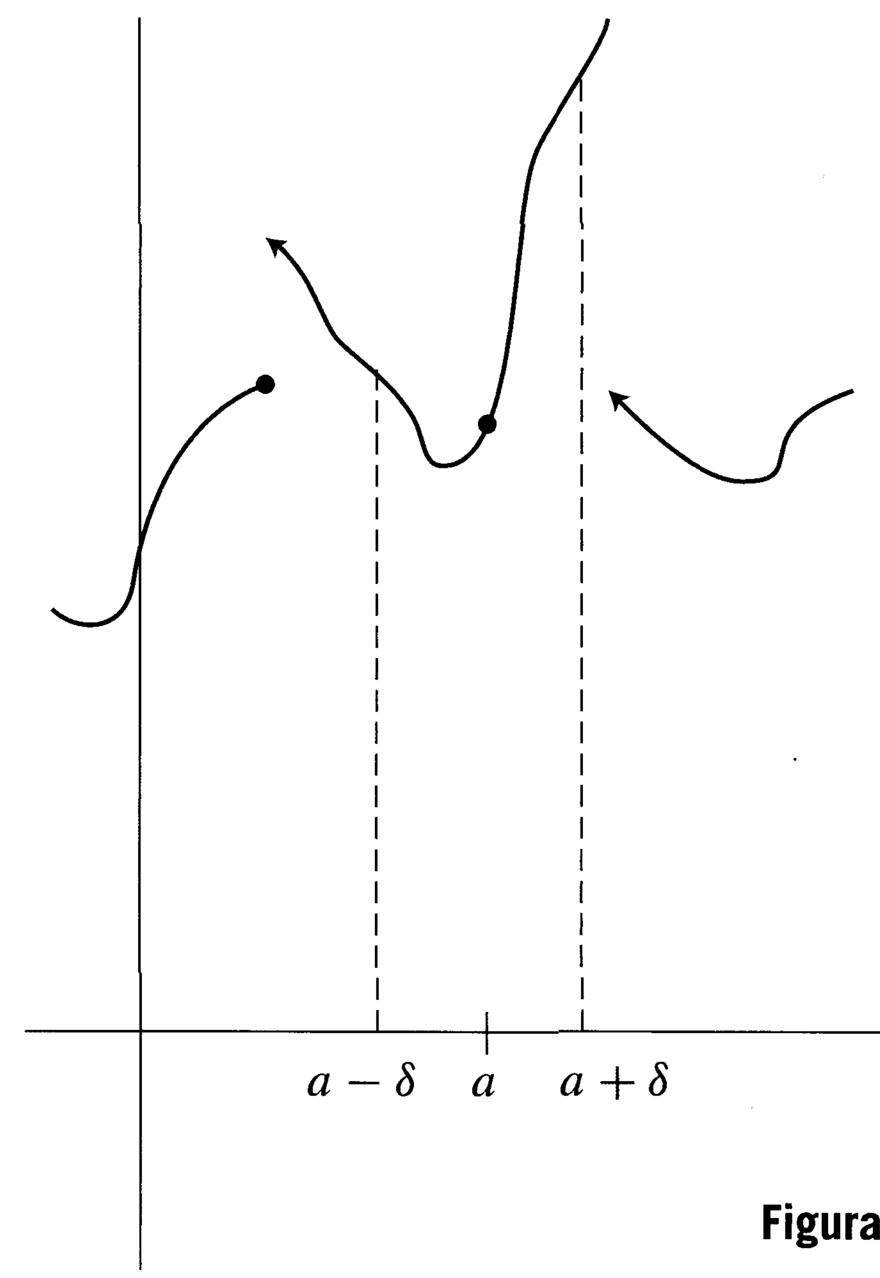


Figura 4

Teorema 7.2. *Si f es continua en $[a, b]$, entonces f está acotada superiormente en $[a, b]$.*

Demostración. Sea

$$A = \{x : a \leq x \leq b \text{ y } f \text{ está acotada superiormente en } [a,x]\}.$$

Obviamente $A \neq \emptyset$ (ya que a pertenece a A), y está acotado superiormente (por b), de manera que A posee una cota superior mínima α. Observemos que estamos aplicando el término "acotado superiormente" tanto al conjunto A, localizado en el eje horizontal, como a la función f, es decir, a conjuntos del tipo $\{f(y) : a \leq y \leq x\}$, localizados en el eje vertical (Figura 5).

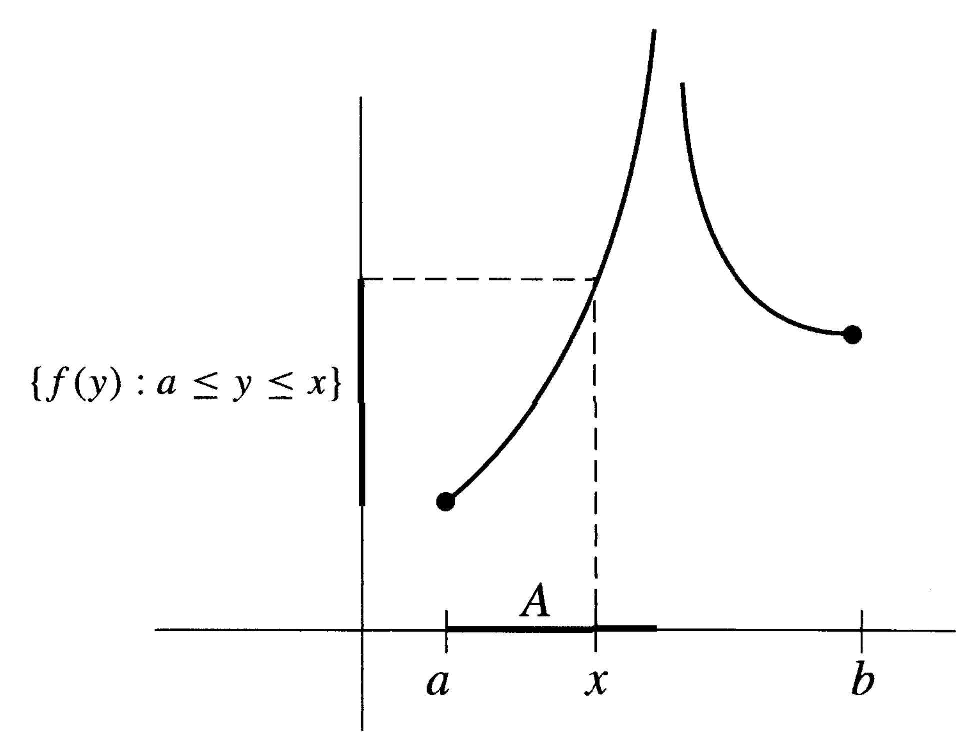


Figura 5

La primera etapa de la demostración consiste en probar que $\alpha = b$. Supongamos, por el contrario, que $\alpha < b$. Según el Teorema 1 existe un $\delta > 0$ tal que f está acotada en $(\alpha-\delta, \alpha+\delta)$. Como α es la cota superior mínima de A existe algún x_0 de A que satisface $\alpha - \delta < x_0 < \alpha$. Esto significa que f está acotada en $[a, x_0]$. Pero si x_1 es cualquier número tal que $\alpha < x_1 < \alpha + \delta$, entonces f también está acotada en $[x_0, x_1]$. Por tanto, f está acotada en $[a, x_1]$, de manera que x_1 pertenece a A, lo que contradice el hecho de que α sea una cota superior de A. Esta contradicción demuestra que $\alpha = b$. Debemos mencionar un detalle: en la demostración hemos supuesto implícitamente que $a < \alpha$ [de manera que f está definida en algún intervalo $(\alpha-\delta, \alpha+\delta)$]; la posibilidad $a = \alpha$ puede excluirse de manera similar, utilizando el hecho de que existe un $\delta > 0$ tal que f está acotada en $\{x : a \leq x < a+\delta\}$.

La demostración todavía no es completa; únicamente sabemos que f está acotada en $[a, x]$ para todo $x < b$, no necesariamente que f está acotada en $[a, b]$. Sin embargo, sólo es necesario añadir una pequeña observación.

Existe un $\delta > 0$ tal que f está acotada en $\{x : b-\delta < x \leq b\}$. Existe también un x_0 de A tal que $b - \delta < x_0 < b$. De manera que f está acotada en $[a, x_0]$ y también en $[x_0, b]$, por tanto f está acotada en $[a, b]$. ■

Para demostrar el tercer teorema importante, recurriremos a un artilugio.

Teorema 7.3. *Si f es continua en $[a,b]$, entonces existe un número y de $[a,b]$ tal que $f(y) \geq f(x)$ para todo x de $[a,b]$.*

Demostración. Sabemos que f está acotada en $[a,b]$, lo que significa que el conjunto

$$\{f(x) : x \text{ pertenezca a } [a,b]\}$$

está acotado. Además, dicho conjunto es, obviamente, distinto del $\emptyset$, de manera que admite una cota superior mínima α. Como $\alpha \geq f(x)$ para x de $[a,b]$, basta demostrar que $\alpha = f(y)$ para algún y de $[a,b]$.

Supongamos, por el contrario, que $\alpha \neq f(y)$ para todo y de $[a,b]$. Entonces la función g definida mediante

$$g(x) = \frac{1}{\alpha - f(x)}, \quad x \text{ de } [a,b]$$

es continua en $[a,b]$, ya que el denominador de la expresión del lado derecho de la igualdad nunca vale 0. Por otra parte, α es la mínima cota superior de $\{f(x) : x$ pertenece a $[a,b]\}$; esto significa que

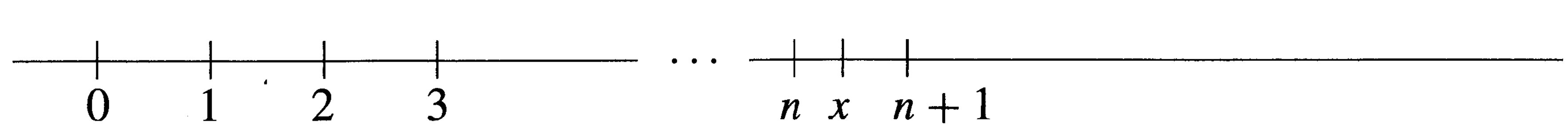
$$\text{para cada } \varepsilon > 0 \text{ existe un } x \text{ de } [a,b] \text{ con } \alpha - f(x) < \varepsilon.$$

Esto, a su vez, significa que

$$\text{para cada } \varepsilon > 0 \text{ existe un } x \text{ de } [a,b] \text{ con } g(x) > 1/\varepsilon.$$

Pero *esto* quiere decir que g no está acotada en $[a,b]$, lo que contradice el resultado del teorema anterior. ■

Al comienzo de este capítulo citamos, como un ejemplo de conjunto no acotado, al conjunto **N** de los números naturales. Ahora vamos a *demostrar* que **N** no está acotado. Después de los teoremas difíciles que hemos demostrado en este capítulo, el lector podría sorprenderse de que incluyamos un teorema tan "obvio" en nuestra lista de demostraciones. Seguramente ello es debido a que el lector se deja influir demasiado por la imagen geométrica de **R**, pudiendo argumentar: "es que los números reales pueden disponerse sobre la recta de manera que cada número real x se situa entre dos enteros n y $n+1$ (a no ser que el mismo x sea un entero)".



Pero una prueba basada en un argumento geométrico no es una demostración, e incluso esta imagen geométrica encierra la suposición de que si se colocan segmentos de longitud unidad, uno al lado del otro, finalmente se obtiene un segmento mayor que cualquier segmento dado. Este axioma, que a menudo se omite en un primer curso de introducción a la geometría, se atribuye (aunque no con absoluta justicia) a Arquímedes, y la propiedad correspondiente aplicada a los números (la que afirma que **N** no está acotado) se denomina la *propiedad Arquimediana* de los números reales. Esta propiedad *no* es una consecuencia de P1-P12 (vea la referencia [14] de las Lecturas aconsejadas), aunque, por supuesto, la posee el conjunto **Q** de los números racionales. Sin embargo, una vez se dispone de P13, la demostración de que **N** no está acotado superiormente no presenta ningún problema.

Teorema 2. **N** *no está acotado superiormente.*

Demostración. Supongamos que **N** estuviera acotado superiormente. Como $\mathbf{N} \neq \emptyset$, existiría una cota superior mínima α de **N**. Entonces

$$\alpha \geq n \qquad \text{para todo } n \text{ de } \mathbf{N}.$$

Por consiguiente,

$$\alpha \geq n+1 \quad \text{para todo } n \text{ de } \mathbf{N},$$

ya que si n pertenece a **N**, $n+1$ también. Pero esto significa que

$$\alpha - 1 \geq n \quad \text{para todo } n \text{ de } \mathbf{N},$$

lo cual quiere decir que $\alpha - 1$ también es una cota superior de **N**, lo que contradice el hecho de que α sea la cota superior mínima de **N**. ■

El Teorema 2 tiene una consecuencia (en realidad, una formulación equivalente) que a menudo hemos asumido implícitamente.

Teorema 3. *Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número natural n con $1/n < \varepsilon$.*

Demostración. Supongamos que no fuese así; entonces $1/n \geq \varepsilon$ para todo n de **N**. Por tanto, $n \leq 1/\varepsilon$ para todo n de **N**. Pero esto significa que $1/\varepsilon$ es una cota superior de **N**, lo cual contradice el resultado del Teorema 2. ■

Si el lector da una ojeada al Capítulo 6 observará que el resultado del Teorema 3 se ha utilizado en la discusión de muchos ejemplos. Por supuesto, el Teorema 3 no estaba disponible en aquél momento, pero los ejemplos eran tan importantes que para introducirlos nos permitimos esta licencia. Podemos justificar, en parte, esta deshonestidad, argumentando que este resultado no fue utilizado en la demostración de ningún *teorema*, como así puede comprobarlo el lector revisando todas las demostraciones que hemos dado hasta ahora. Afortunadamente, gracias al resultado del Teorema 6, ya no será necesario tener ninguna prevención a este respecto. Hemos enunciado, pues, todas las propiedades de los números reales que utilizaremos en el resto del libro. A partir de este momento se han acabado las mentiras.

Problemas

1. Halle la cota superior mínima y la cota inferior máxima (si existen) de los siguientes conjuntos. Decida también cuáles de ellos poseen un elemento máximo y un elemento mínimo (es decir, en qué casos la cota superior minima y la cota inferior máxima pertenecen al conjunto).

(i) $\left\{\dfrac{1}{n} : n \text{ en } \mathbf{N}\right\}$.

(ii) $\left\{\dfrac{1}{n} : n \text{ en } \mathbf{Z} \text{ y } n \neq 0\right\}$.

(iii) $\{x : x = 0 \text{ o } x = 1/n \text{ para algún } n \text{ en } \mathbf{N}\}$.

(iv) $\{x : 0 \leq x \leq \sqrt{2} \text{ y } x \text{ racional}\}$.

(v) $\{x : x^2 + x + 1 \geq 0\}$.

(vi) $\{x : x^2 + x - 1 < 0\}$.

(vii) $\{x : x < 0 \text{ y } x^2 + x - 1 < 0\}$.

(viii) $\left\{\dfrac{1}{n} + (-1)^n : n \text{ en } \mathbf{N}\right\}$.

2. (a) Suponga que $A \neq \emptyset$ está acotado inferiormente. Sea $-A$ el conjunto de todos los $-x$ con x en A. Demuestre que $-A \neq \emptyset$, que $-A$ está acotado superiormente y que $-\sup(-A)$ es la cota inferior máxima de A.

(b) Si $A \neq \emptyset$ está acotado inferiormente, sea B el conjunto de todas las cotas inferiores de A. Demuestre que $B \neq \emptyset$, que B está acotado superiormente y que $\sup B$ es la cota inferior máxima de A.

3. Sea f una función continua en $[a, b]$ con $f(a) < 0 < f(b)$.

(a) La demostración del Teorema 7-1 estableció que existe un x mínimo de $[a, b]$ con $f(x) = 0$. Si existe más de un x de $[a, b]$ con $f(x) = 0$, ¿Existe necesariamente un segundo elemento más pequeño x tal que $f(x) = 0$? Demuestre que existe un x máximo de $[a, b]$ con $f(x) = 0$. (Intente dar una demostración fácil considerando una nueva función muy relacionada con f.)

(b) La demostración del Teorema 7-1 se basaba en considerar el conjunto $A = \{x : a \leq x \leq b \text{ y } f \text{ negativa en } [a,x]\}$. Dé otra demostración del Teorema 7-1, basada en considerar $B = \{x : a \leq x \leq b \text{ y } f(x) < 0\}$. ¿Qué punto x de $[a, b]$ con $f(x) = 0$ será localizado con esta demostración? Dé un ejemplo en el cual los conjuntos A y B no sean los mismos.

*4. (a) Suponga que f es continua en $[a, b]$ y que $f(a) = f(b) = 0$. Suponga también que $f(x_0) > 0$ para algún x_0 de $[a, b]$. Demuestre que existen números c y d con $a \leq c < x_0 < d \leq b$ tales que $f(c) = f(d) = 0$, pero $f(x) > 0$ para todo x de (c, d). Indicación: Puede utilizarse, convenientemente, el problema anterior.

(b) Suponga que f es continua en $[a, b]$ y que $f(a) < f(b)$. Demuestre que existen números c y d con $a \leq c < d \leq b$ tales que $f(c) = f(a)$ y $f(d) = f(b)$ y $f(a) < f(x) < f(d)$ para todo x de (c, d).

5. (a) Suponga que $y - x > 1$. Demuestre que existe un entero k tal que $x < k < y$. Indicación: Sea l el mayor entero que satisface $l \leq x$ y considere $l + 1$.

(b) Suponga que $x < y$. Demuestre que existe un número racional r tal que $x < r < y$. Indicación: Si $1/n < y - x$, entonces $ny - nx > 1$. (Pregunta: ¿por qué se han pospuesto los apartados (a) y (b) hasta este conjunto de problemas?)

(c) Suponga que $r < s$ son números racionales. Demuestre que existe un número irracional entre r y s. Indicación: Para empezar, se sabe que existe un número irracional entre 0 y 1.

(d) Suponga que $x < y$. Demuestre que existe un número irracional entre x e y. Indicación: No hace falta trabajar más; esto es consecuencia de los apartados (b) y (c).

***6.** Se dice que un conjunto A de números reales es **denso** si todo intervalo abierto contiene un punto de A. Por ejemplo, el Problema 5 demuestra que el conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales son densos.

(a) Demuestre que si f es continua y $f(x) = 0$ para todos los números x de un conjunto denso A, entonces $f(x) = 0$ para todo x.

(b) Demuestre que si f y g son continuas y $f(x) = g(x)$ para todo x de un conjunto denso A, entonces $f(x) = g(x)$ para todo x.

(c) Si suponemos, en cambio, que $f(x) \geq g(x)$ para todo x de A, demuestre que $f(x) \geq g(x)$ para todo x. ¿Puede sustituirse el símbolo $\geq$ por el símbolo $>$ en todas partes?

7. Demuestre que si f es continua y $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo x e y, entonces existe un número c tal que $f(x) = cx$ para todo x. (Esta conclusión puede ser demostrada simplemente combinando los resultados de dos problemas anteriores.) Punto de información: *existen* funciones *no continuas* f que satisfacen $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo x e y, pero este hecho no lo podemos demostrar ahora; esta cuestión tan sencilla encierra ideas que por lo general no se mencionan en los cursos para pregraduados. (En las Lecturas aconsejadas se citan referencias [7].)

***8.** Suponga que f es una función tal que $f(a) \leq f(b)$ siempre que $a < b$ (Figura 6).

(a) Demuestre que $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ existen ambos. Indicación: ¿Por qué se ha incluido este problema en este capítulo?

(b) Demuestre que f no tiene nunca una discontinuidad evitable (esta terminología proviene del Problema 6-17).

(c) Demuestre que si f satisface las conclusiones del Teorema del Valor Intermedio, entonces f es continua.

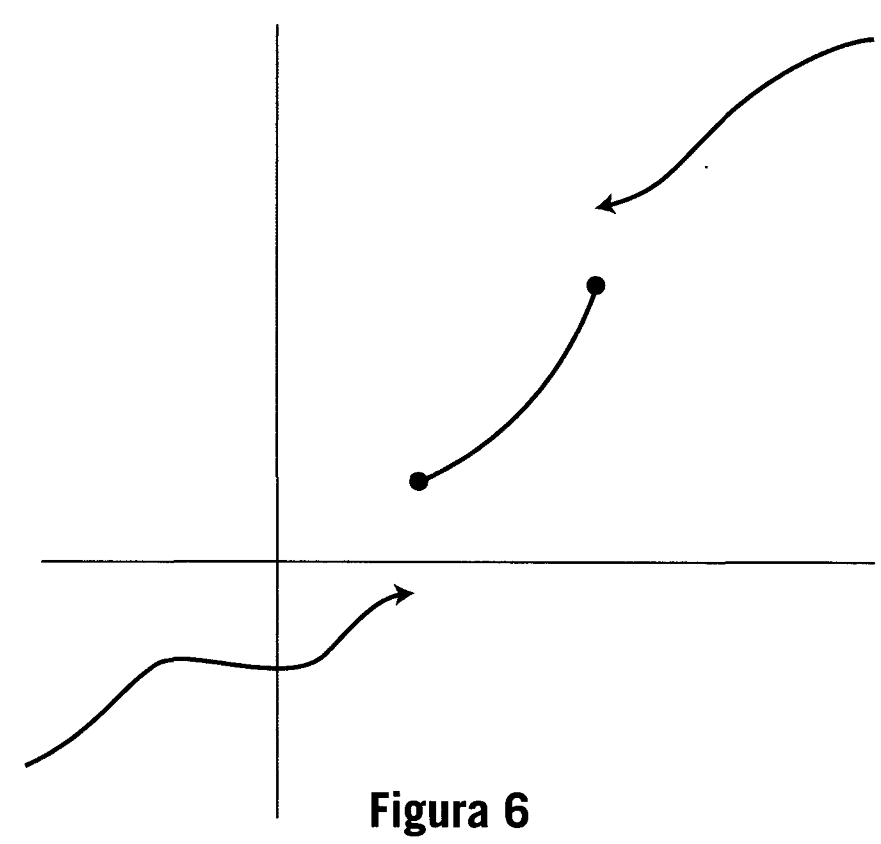


Figura 6

***9.** Si f es una función acotada en $[0, 1]$, sea $|||f||| = \sup\{\, |f(x)| : x \text{ en } [0, 1]\}$. Demuestre las propiedades análogas a las de $\| \ \|$ del Problema 7-14.

10. Suponga que $\alpha > 0$. Demuestre que todo número x puede escribirse de manera única en la forma $x = k\alpha + x'$, donde k es un entero y $0 \leq x' < \alpha$.

11. (a) Suponga que $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es una sucesión de números positivos con $a_{n+1} \leq a_n/2$. Demuestre que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe algún n con $a_n < \varepsilon$.

(b) Suponga que P es un polígono regular inscrito en un círculo. Si P' es el polígono regular inscrito de doble número de lados, demuestre que la diferencia entre el área del círculo y el área de P' es menor que la mitad de la diferencia entre el área del círculo y el área de P (utilice la Figura 7).

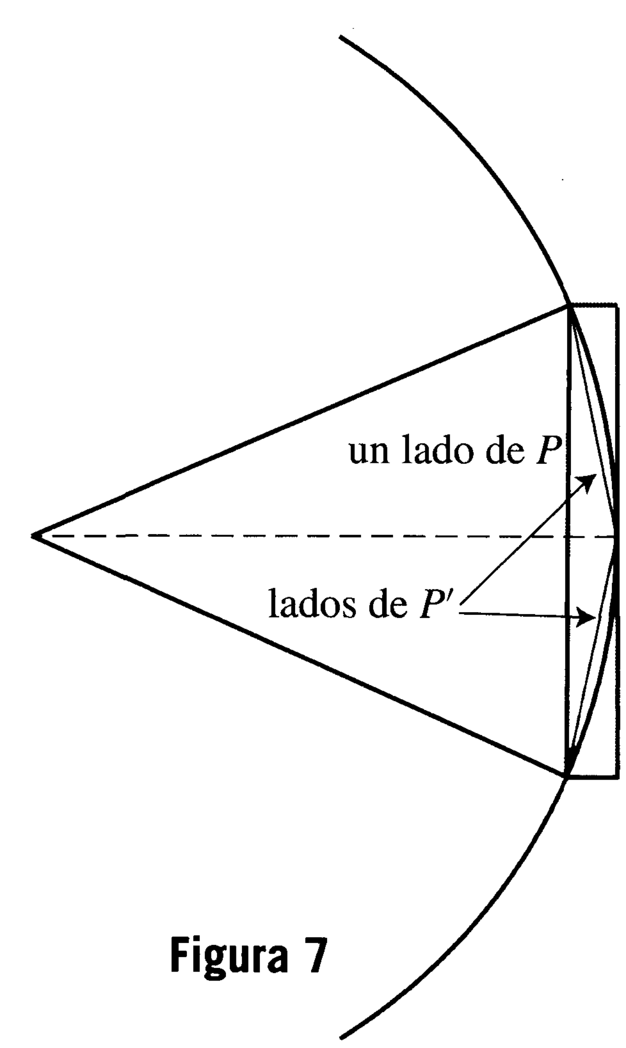


Figura 7

(c) Demuestre que existe un polígono regular P inscrito en un círculo y con área tan próxima como se desee al área del círculo. Para resolver el apartado (c) se necesita el apartado (a). Este hecho ya lo conocían los griegos, quienes utilizaron el apartado (a) como base de su estudio de la proporción y el área. Calculando las áreas de los polígonos, este método ("método exhaustivo") permite el cálculo de π con tanta aproximación como se desee; Arquímedes lo utilizó para demostrar que $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$. aunque dicho método tiene una importancia teórica mucho mayor:

*(d) Utilizando el hecho de que las áreas de dos polígonos regulares con el mismo número de lados están entre sí en la misma relación que los cuadrados de sus lados, demuestre que las áreas de dos círculos están en la misma relación que los cuadrados de sus radios. Indicación: Deduzca, inscribiendo los polígonos adecuados, que el suponer que la relación entre las áreas es mayor o menor que la relación entre los cuadrados de los radios conduce a una contradicción.

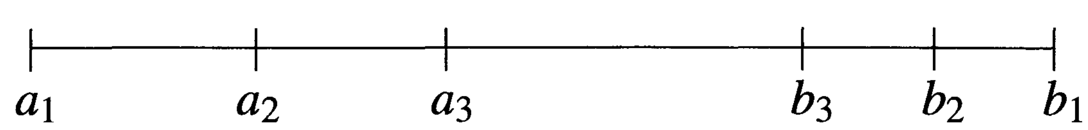
12. Suponga que A y B son dos conjuntos no vacíos de números tales que $x \leq y$ para todo x de A y todo y de B.

(a) Demuestre que $\sup A \leq y$ para todo y de B.

(b) Demuestre que $\sup A \leq \inf B$.

13. Sean A y B dos conjuntos numéricos no vacíos y acotados superiormente, y sea $A+B$ el conjunto de todos los números $x+y$ con x de A e y de B. Demuestre que $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$. Indicación: La desigualdad $\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$ es fácil. ¿Por qué? Para demostrar que $\sup A + \sup B \leq \sup(A+B)$ basta demostrar que $\sup A + \sup B \leq \sup(A+B) + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$; comience eligiendo un x de A y un y de B tales que $\sup A - x < \varepsilon/2$ y $\sup B - y < \varepsilon/2$.

Figura 8



14. (a) Considere una sucesión de intervalos cerrados $I_1 = [a_1, b_1], I_2 = [a_2, b_2], \ldots$ Suponga que $a_n \leq a_{n+1}$ y que $b_{n+1} \leq b_n$ para todo n (Figura 8). Demuestre que existe un punto x que pertenece a todos los I_n.

(b) Demuestre que esta conclusión es falsa si se consideran intervalos abiertos en lugar de intervalos cerrados.

El sencillo resultado del Problema 14(a) se denomina el "Teorema de los Intervalos Encajados". Puede utilizarse para dar otras demostraciones de los Teoremas 1 y 2. El procedimiento utilizado, que se ilustra en los dos problemas siguientes, ilustra un método general denominado "argumento de bisección".

***15.** Suponga que f es continua en $[a,b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$. Entonces o bien $f((a+b)/2) = 0$, o f tiene signos distintos en los extremos del intervalo $[a,(a+b)/2]$, o bien f tiene signos distintos en los extremos del intervalo $[(a+b)/2, b]$. ¿Por qué? Si $f((a+b)/2) \neq 0$, sea I_1 aquel de los dos intervalos en el que f cambia de signo. Divida ahora I_1 en dos mitades. O bien f es 0 en el punto medio, o bien f cambia de signo en uno de los dos intervalos. Sea I_2 uno de estos. Continue de esta manera definiendo I_n para cada n (a no ser que f sea 0 en algún punto medio). Utilice el Teorema de los Intervalos Encajados para hallar un punto x en el que $f(x) = 0$.

***16.** Suponga que f fuese continua en $[a,b]$, pero que no estuviese acotada en $[a,b]$. Entonces f no estaría acotada en $[a,(a+b)/2]$ o bien no lo estaría en $[(a+b)/2, b]$. ¿Por qué? Sea I_1 uno de estos intervalos en los que f no está acotada. Aplique el método utilizado en el Problema 15 para llegar a una contradicción.

17. (a) Sea $A = \{x : x < \alpha\}$. Demuestre lo siguiente (todos los apartados son fáciles):

(i) Si x pertenece a A e $y < x$, entonces y pertenece a A.

(ii) $A \neq \emptyset$. (iii) $A \neq \mathbf{R}$.

(iv) Si x pertenece a A, entonces existe algún numero x' de A tal que $x < x'$.

(b) Suponga, a la inversa, que A satisface (i)–(iv). Demuestre que $A = \{x : x < \sup A\}$.

***18.** Un número x se denomina una **casi cota superior** de A si en A existen sólo un número finito de números y con $y \geq x$. Del mismo modo se define una **casi cota inferior** de A.

(a) Halle todas las casi cotas superiores y todas las casi cotas inferiores de los conjuntos del Problema 1.

(b) Suponga que A es un conjunto infinito acotado. Demuestre que el conjunto B de todas las casi cotas superiores de A es no vacío y está acotado inferiormente.

(c) Del apartado (b) se deduce que existe el $\inf B$; este número se denomina el **límite superior** de A, y se representa mediante el símbolo $\overline{\text{lím}}\, A$ o $\text{lím}\sup A$. Halle el $\overline{\text{lím}}\, A$ para cada conjunto A del Problema 1.

(d) Defina el $\underline{\text{lím}}\, A$ y hállelo para todos los A del Problema 1.

***19.** Si A es un conjunto infinito acotado demuestre que

(a) $\underline{\text{lím}}\, A \leq \overline{\text{lím}}\, A$. (b) $\overline{\text{lím}}\, A \leq \sup A$.

(c) Si $\overline{\text{lím}}\, A < \sup A$, entonces A contiene un elemento máximo.

(d) Demuestre los casos análogos a los apartados (b) y (c) para $\underline{\text{lím}}$.

20. Sea f una función continua en $\mathbf{R}$. Un punto x se denomina un **punto de sombra** de f si existe un número $y > x$ con $f(y) > f(x)$. El fundamento de esta terminología se indica en la Figura 9; las rectas paralelas son los rayos de sol que salen por el este (el lector está mirando hacia el norte). Suponga que todos los puntos de (a, b) son puntos de sombra, pero que a y b no lo son. En este caso se verifica, evidentemente, que $f(a) \geq f(b)$.

(a) Suponga que $f(a) > f(b)$. Demuestre que el punto en el que f alcanza su valor máximo en $[a, b]$ ha de ser a.

(b) Demuestre ahora que esto conduce a una contradicción, de manera que se ha de verificar que $f(a) = f(b)$.

Este resultado, conocido como el Lema del Sol Naciente, se utiliza en la demostración de varios elegantes teoremas que no aparecen en este libro; vea la página 451.

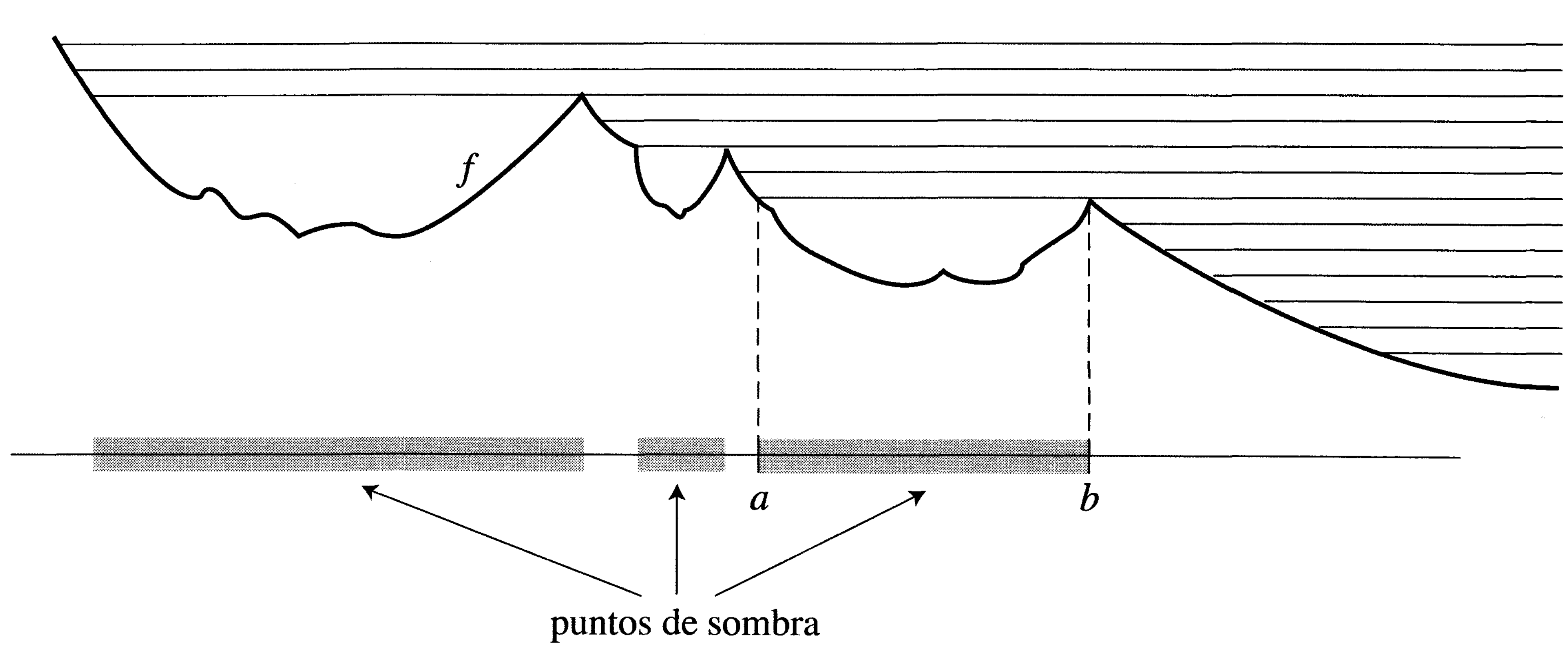


Figura 9

Apéndice
Continuidad Uniforme

Ahora que ya hemos terminado los "fundamentos", resulta apropiado considerar todavía otro concepto fundamental. Aunque no se hace un uso crucial de este concepto en el resto del libro, puede ayudar a esclarecer muchas cuestiones que se consideraran posteriormente.

Sabemos que la función $f(x) = x^2$ es continua en a para todo a. En otras palabras,

> si a es cualquier número, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $|x-a| < \delta$, entonces $|x^2 - a^2| < \varepsilon$.

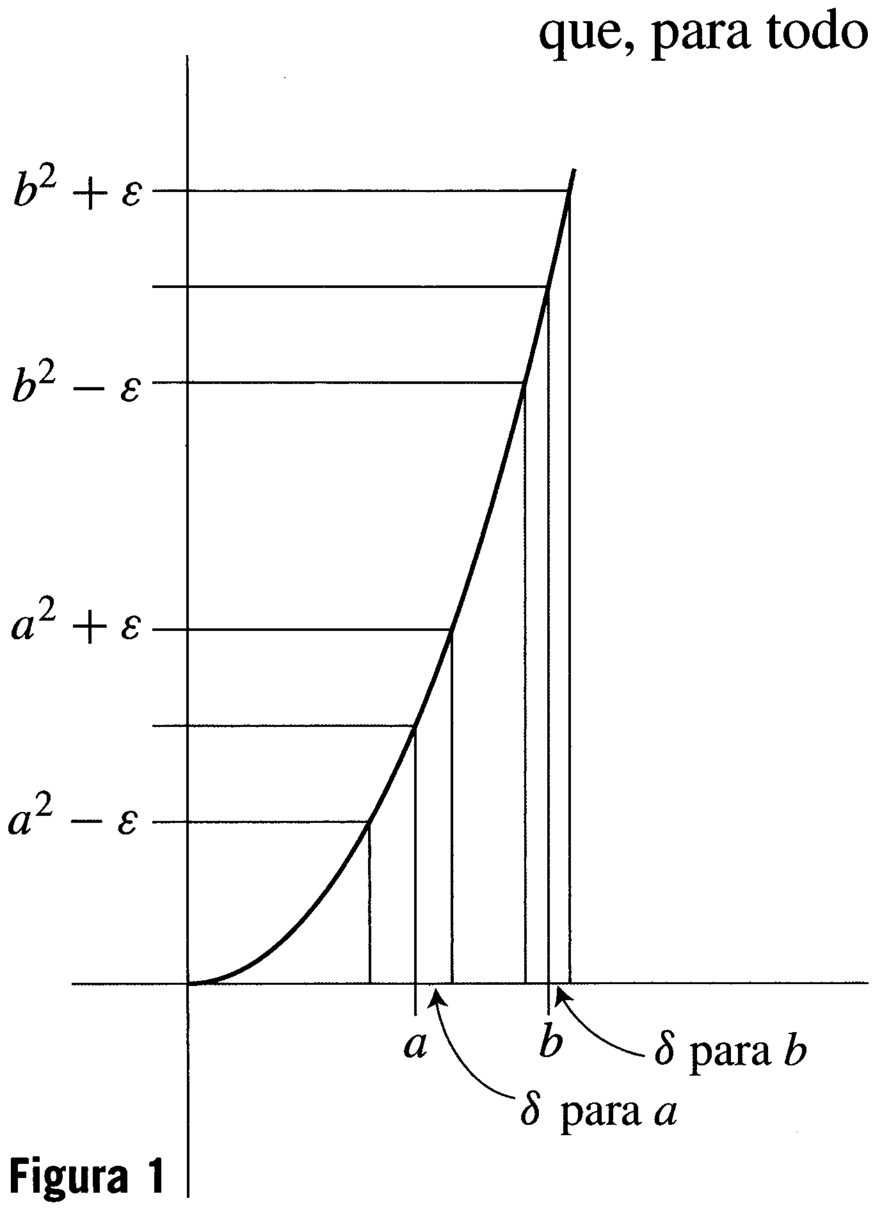


Figura 1

Por supuesto, δ depende de ε. Pero δ *también depende* de a; el δ que vale para a puede no ser válido para b (Figura 1). En efecto, está claro que dado un $\varepsilon > 0$ no existe ningún $\delta > 0$ que sea válido para todo a, o incluso para todo a positivo. De hecho, el número $a + \delta/2$ satisface la desigualdad $|x-a| < \delta$, pero si $a > 0$, entonces

$$\left|\left(a+\frac{\delta}{2}\right)^2 - a^2\right| = \left|a\delta + \frac{\delta^2}{4}\right| \geq a\delta,$$

y esta expresión no será $< \varepsilon$ si $a > \varepsilon/\delta$. (Esta es una manera, ciertamente algo confusa desde el punto de vista computacional, de decir que f crece cada vez más rápidamente.)

Por otra parte, para cualquier $\varepsilon > 0$ *existirá* un $\delta > 0$ válido para todo a de cualquier intervalo $[-N, N]$. El δ válido para N o $-N$ será también válido para cualquier otro punto del intervalo.

Como un último ejemplo consideremos la función $f(x) = \operatorname{sen} 1/x$, cuya gráfica se muestra en la Figura 18 de la página 63. Es fácil ver que si $\varepsilon < 1$, no existirá ningún $\delta > 0$ que sea válido para esta función en todos los puntos a del intervalo abierto $(0, 1)$.

Estos ejemplos ilustran el distinto comportamiento de varias funciones continuas en ciertos intervalos, el cual puede explicarse mediante un concepto importante que ayuda a entender dichas diferencias.

Definición

La función f es **uniformemente continua en un intervalo** A si para cada $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x e y de A,

$$\text{si } |x-y| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Hemos visto que una función puede ser continua en toda la recta real, o en un intervalo abierto, sin ser uniformemente continua en estos dominios de definición. Por otra parte, la función $f(x) = x^2$ es uniformemente continua en cualquier intervalo cerrado. Esto no debería sorprender –es la misma situación que se presenta cuando nos preguntamos si una función está acotada en un intervalo– y nos induce a pensar que cualquier función continua en un intervalo cerrado es uniformemente continua en dicho intervalo. Para demostrarlo tendremos primero que considerar una cuestión delicada.

Sean dos intervalos $[a, b]$ y $[b, c]$ con un punto en común b, y una función f continua en $[a, c]$. Sea $\varepsilon > 0$ y supongamos que se verifican las dos propiedades siguientes:

(i) si x e y pertenecen a $[a, b]$ y $|x - y| < \delta_1$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$,
(ii) si x e y pertenecen a $[b, c]$ y $|x - y| < \delta_2$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

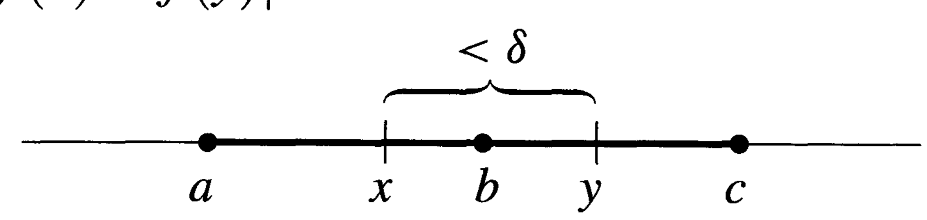


Figura 2

Deseamos saber si existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ si x e y son puntos de $[a, c]$ con $|x - y| < \delta$. En un primer momento podríamos pensar que el δ adecuado sería el mínimo de δ_1 y δ_2, pero es fácil ver donde radica el error de dicha elección (Figura 2): podría ocurrir que x estuviera en el intervalo $[a, b]$ e y en el intervalo $[b, c]$; en este caso ni (i) ni (ii) nos permiten saber nada acerca de $|f(x) - f(y)|$. De manera que hemos de ser más cautelosos y utilizar también la continuidad de f en b.

Lema. *Sea $a < b < c$ y f continua en el intervalo $[a, c]$. Sea $\varepsilon > 0$ y supongamos que se verifican (i) y (ii). Entonces existe un $\delta > 0$ tal que,*

$$\text{si } x \text{ e } y \text{ pertenecen a } [a, c] \text{ y } |x - y| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Demostración. como f es continua en b, existe un $\delta_3 > 0$ tal que,

$$\text{si } |x - b| < \delta_3, \text{ entonces } |f(x) - f(b)| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Deducimos pues que

$$\text{(iii)} \quad \text{si } |x - b| < \delta_3 \text{ y } |y - b| < \delta_3, \text{ entonces } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Si elegimos δ igual al mínimo de δ_1, δ_2 y δ_3, es fácil demostrar que éste es el valor buscado; en efecto, supongamos que x e y son dos puntos cualesquiera del intervalo $[a, c]$ tales que $|x - y| < \delta$. Si x e y están en el intervalo $[a, b]$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ según (i): y si x e y pertenecen ambos al intervalo $[b, c]$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ según (ii). La única posibilidad que queda es que

$$x < b < y \qquad \text{o} \qquad y < b < x.$$

En ambos casos, como $|x - y| < \delta$, se verifica también que $|x - b| < \delta$ y $|y - b| < \delta$. De manera que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ según (iii). ■

Teorema 1. *Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es uniformemente continua en $[a, b]$.*

Demostración. Emplearemos la estrategia acostumbrada, aunque hemos de ir con cuidado con el mecanismo de la demostración. Dado un $\varepsilon > 0$ diremos que f es *ε-adecuada* en $[a, b]$ si existe algun $\delta > 0$ tal que, para todo y y z de $[a, b]$,

$$\text{si } |y - z| < \delta, \text{ entonces } |f(y) - f(z)| < \varepsilon.$$

De hecho, queremos demostrar que f es ε-adecuada en $[a, b]$ para todo $\varepsilon > 0$.

Consideremos un $\varepsilon > 0$ determinado. Sea

$$A = \{x : a \leq x \leq b \text{ y } f \text{ es } \varepsilon\text{-adecuada en } [a,x]\}.$$

Entonces $A \neq \emptyset$ (ya que a pertenece a A), y A está acotado superiormente (por b), de manera que A posee una cota superior mínima α. En realidad tendríamos que escribir α_ε, ya que A y α podrían depender de ε. Pero no lo haremos ya que, precisamente, lo que intentamos demostrar es que $\alpha = b$, sea cual sea el ε elegido.

Supongamos que $\alpha < b$. Como f es continua en α, existe algún $\delta_0 > 0$ tal que, si $|y - \alpha| < \delta_0$, entonces $|f(y) - f(\alpha)| < \varepsilon/2$. Por tanto, si $|y - \alpha| < \delta_0$ y $|z - \alpha| < \delta_0$, entonces $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$. Esto nos asegura que f es ε-adecuada en el intervalo $[\alpha - \delta_0, \alpha + \delta_0]$. Por otra parte, como α es la cota superior mínima de A, se verifica también que f es ε-adecuada en el intervalo $[a, \alpha - \delta_0]$. Entonces el Lema demostrado anteriormente implica que f es ε-adecuada en $[a, \alpha + \delta_0]$, por tanto $\alpha + \delta_0$ pertenece a A, lo que contradice el hecho de que α sea una cota superior de A.

Para completar la demostración hemos de probar que $\alpha = b$ pertenece a A. El argumento, en este caso, es prácticamente el mismo: ya que f es continua en b, existe algún $\delta_0 > 0$ tal que, si $b - \delta_0 < y < b$, entonces $|f(y) - f(b)| < \varepsilon/2$. Por tanto f es ε-adecuada en $[b - \delta_0, b]$. Pero f es también ε-adecuada en $[a, b - \delta_0]$, de manera que el Lema implica que f es ε-adecuada en $[a, b]$. ■

Problemas

1. (a) ¿Para cuáles de los siguientes valores de α, la función $f(x) = x^\alpha$ es uniformemente continua en $[0, \infty)$? $\alpha = 1/3$, $1/2$, 2, 3.

(b) Halle una función f que sea continua y acotada en $(0, 1]$, pero no uniformemente continua en $(0, 1]$.

(c) Halle una función f que sea continua y acotada en $[0, \infty)$ pero no uniformemente continua en $[0, \infty)$.

2. (a) Demuestre que si f y g son uniformemente continuas en A, entonces $f + g$ también lo es.

(b) Demuestre que si f y g son uniformemente continuas y acotadas en A, entonces fg es uniformemente continua en A.

(c) Demuestre que esta conclusión no es válida si una de ambas funciones no está acotada.

(d) Suponga que f es uniformemente continua en A, que g es uniformemente continua en B y que $f(x)$ pertenece a B para todo x de A. Demuestre que $g \circ f$ es uniformemente continua en A.

3. Utilice el "argumento de la bisección" (página 142) para dar otra demostración del Teorema 1.

4. Deduzca el Teorema 7-2 como una consecuencia del Teorema 1.

Parte III

Derivadas e integrales

En 1604, en la cumbre de
su carrera científica, Galileo llegó a la conclusión
de que para un movimiento rectilíneo
en el que la velocidad aumenta proporcionalmente
a la distancia recorrida,
la ley del movimiento debía ser
precisamente aquella $(x = ct^2)$
que él había descubierto
en la investigación de la caída de los cuerpos.
Entre 1695 y 1700
ninguno de los números mensuales
de las Acta Eruditorum de Leipzig se publicó
sin artículos de Leibniz,
de los hermanos Bernoulli
o del Marqués de l'Hôpital que trataban,
con notación ligeramente distinta
de la hoy día en uso,
los problemas más variados de
cálculo diferencial, cálculo integral
y del cálculo de variaciones.
Así en el espacio de casi precisamente
un siglo
el cálculo infinitesimal o,
como se suele llamar ahora en inglés,
El Calculus,
el instrumento de calcular por excelencia,
fue forjado;
y casi tres siglos de
uso constante no han agotado
este instrumento incomparable.

NICHOLAS BOURBAKI

Derivadas

9

La derivada de una función es el primero de los dos conceptos principales de esta sección. Junto con la integral, constituye la fuente de la cual el cálculo infinitesimal adquiere su aroma particular. Aunque es cierto que el concepto de función es fundamental, que no se puede hacer nada sin los límites o la continuidad, y que las cotas superiores mínimas son esenciales, todo lo que hemos hecho hasta ahora ha sido una preparación –que si ha resultado acertada, esta sección será más fácil que las anteriores– para las ideas realmente fascinantes que vamos a presentar, los potentes conceptos que constituyen la auténtica esencia del cálculo infinitesimal.

Quizá (algunos dirían “ciertamente”) el interés de las ideas que se van a introducir en esta sección proviene de la íntima relación entre los conceptos matemáticos y ciertas ideas físicas. Muchas definiciones, e incluso algunos teoremas, pueden ser descritos en términos de problemas físicos, a menudo de una manera muy reveladora. De hecho, los requerimientos de los físicos fueron la inspiración original de estas ideas fundamentales, y a menudo comentaremos las interpretaciones físicas. Pero siempre definiremos primero las ideas en una forma matemática precisa, y discutiremos su significado en términos de problemas matemáticos.

El conjunto de todas las funciones exhibe una diversidad tal que casi es imposible descubrir cualquier propiedad general interesante que todas ellas la satisfagan. Como el conjunto de funciones continuas constituye ya una clase mucho más restringida, podríamos esperar encontrar teoremas no triviales que los cumplieran todas ellas, y la repentina abundancia de tales teoremas después del Capítulo 6 demuestra que esta expectativa está justificada. Pero los resultados más potentes e interesantes acerca de las funciones se obtendrán sólo cuando restrinjamos aún más nuestra atención, a aquéllas que con mayor mérito merecen el calificativo de “razonables,” las cuales se comportan todavía mejor que la mayor parte de las funciones continuas.

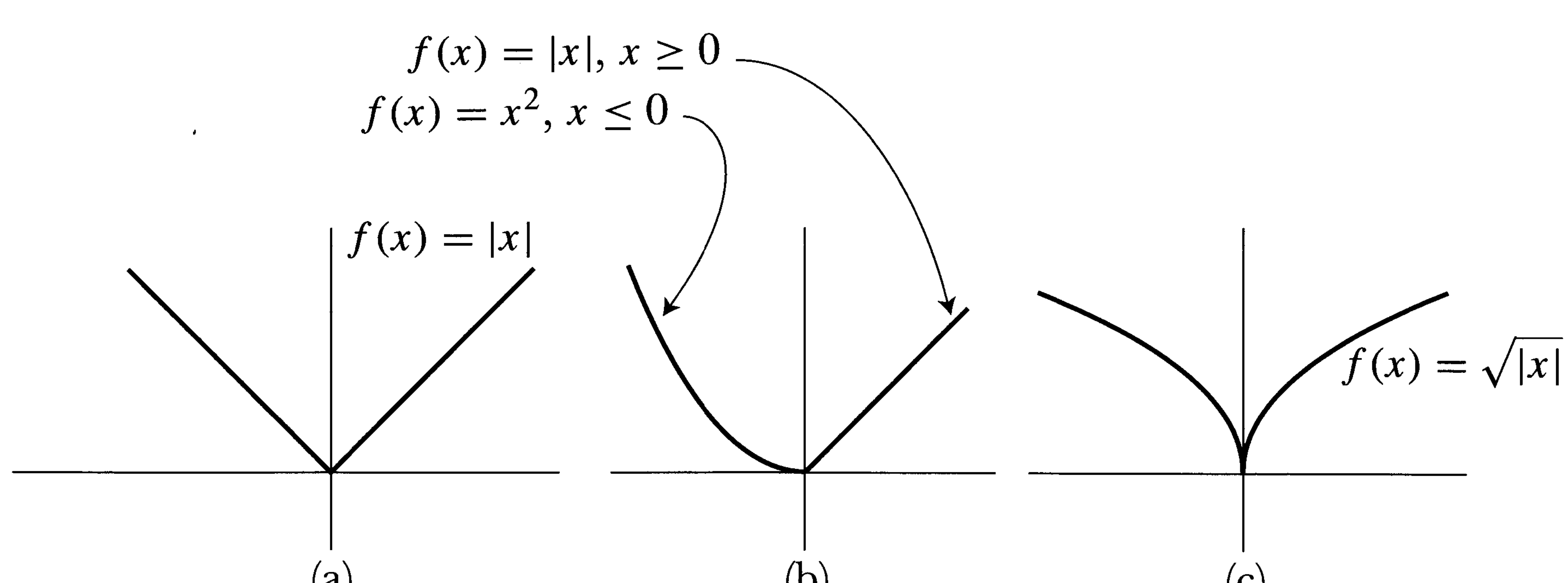


Figura 1

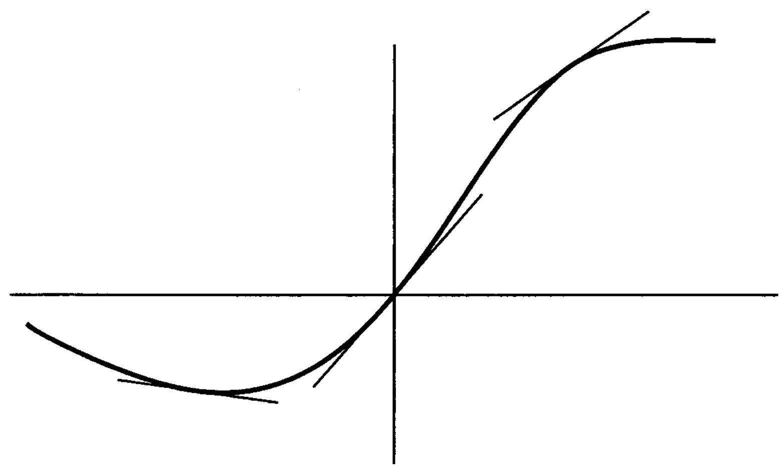


Figura 2

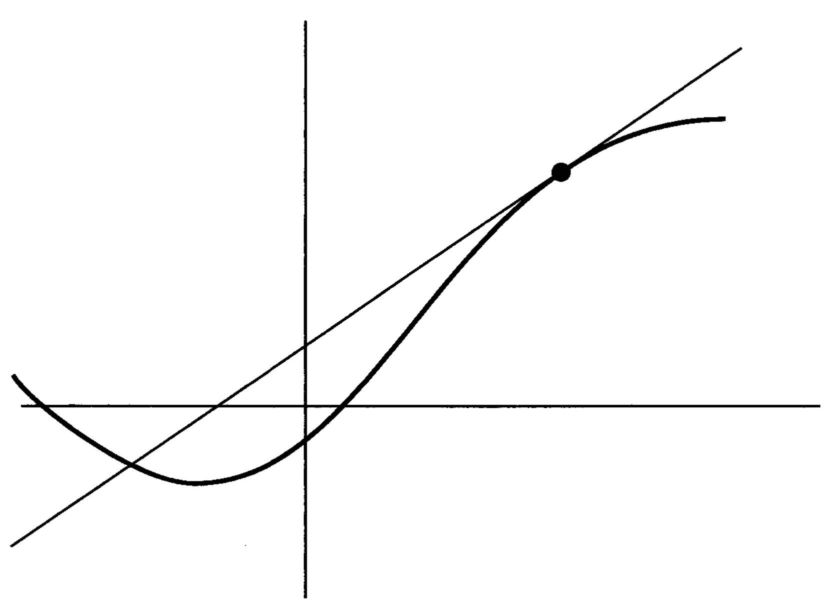


Figura 3

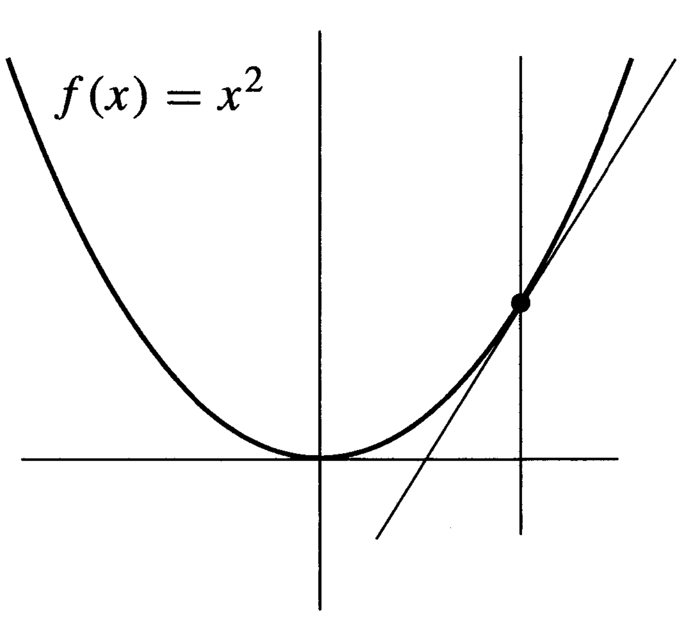


Figura 4

La Figura 1 ilustra ciertos tipos de comportamiento irregular que pueden presentar las funciones continuas. Las gráficas de dichas funciones estan “quebradas”en $(0,0)$, a diferencia de la gráfica de la Figura 2, en la que es posible trazar una “recta tangente” en cada punto. Las comillas se han utilizado para evitar la sugerencia de que se hubiesen definido los conceptos “quebradas” o “recta tangente,” aunque si que estamos insinuando que la gráfica puede estar “quebrada” en un punto en el cual no pueda trazarse una “recta tangente”. Probablemente el lector ya habrá advertido que una recta tangente no puede definirse como aquella que corta a la gráfica de la función solamente una vez; esta definición sería a la vez demasiado restrictiva y demasiado permisiva. Según esta definición, la recta de la Figura 3 no sería una recta tangente a la gráfica representada en la figura, mientras que la parábola tendría dos rectas tangentes en cada punto (Figura 4), y las tres funciones de la Figura 5 tendrían más de una tangente en los puntos donde están “quebradas”.

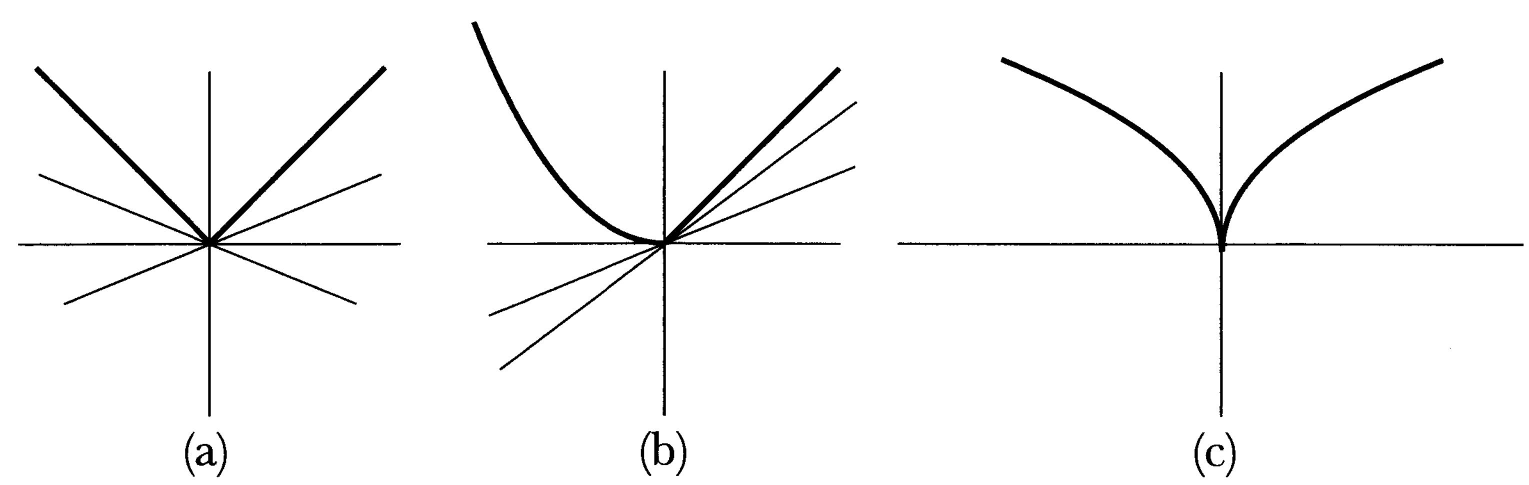


Figura 5

Una manera más prometedora de abordar el problema de la definición de recta tangente sería comenzar con “secantes” y utilizar la noción de límite. Si $h \neq 0$, entonces los dos puntos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$ determinan una línea recta, tal como se muestra en la Figura 6, cuya pendiente es

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

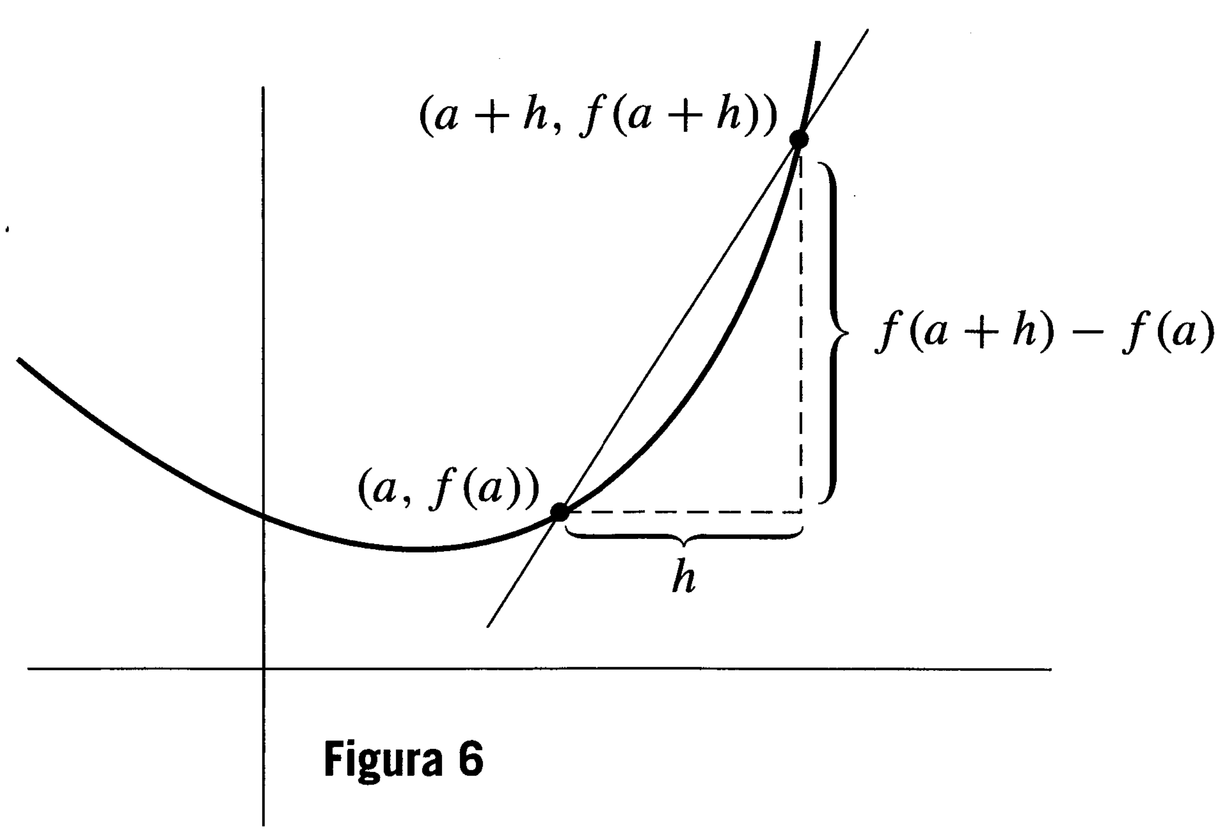


Figura 6

Como se ilustra en la Figura 7 la "recta tangente" en el punto $(a, f(a))$ parece ser el límite, en cierto sentido, de estas "secantes", cuando h tiende a 0. Hasta ahora nunca habíamos considerado el "límite" de rectas, pero si que *podemos* considerar el límite de sus pendientes: la pendiente de la tangente en el punto $(a, f(a))$ debería ser

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Ahora ya estamos preparados para dar una definición y hacer algunos comentarios.

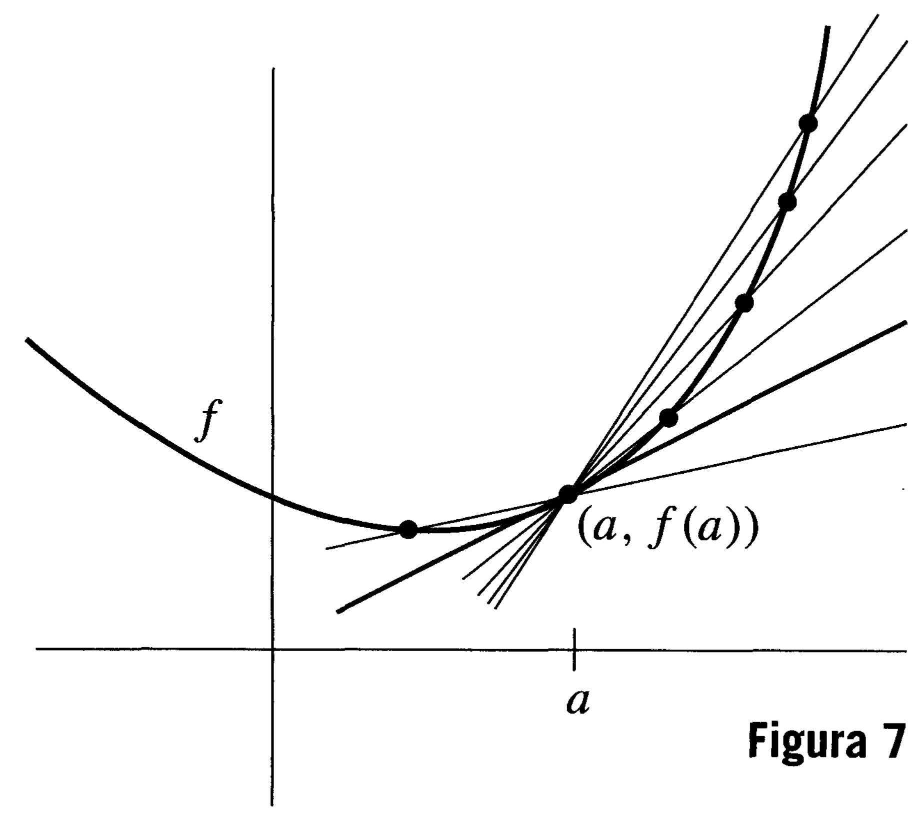


Figura 7

Definición

La función f es **diferenciable en a** si existe el

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

En este caso, dicho límite se representa mediante $\boldsymbol{f'(a)}$ y se denomina la **derivada de f en a**. (Diremos también que f es **diferenciable** si f es diferenciable en a para todo a del dominio de f.)

El primer comentario a nuestra definición es en realidad un añadido; definimos la **tangente** a la gráfica de f en $(a, f(a))$ como la recta que pasa por $(a, f(a))$ y cuya pendiente es $f'(a)$. Esto significa que la tangente en $(a, f(a))$ está definida sólo si f es diferenciable en a.

El segundo comentario se refiere a la notación. El símbolo $f'(a)$ es ciertamente una reminiscencia de la notación funcional. De hecho, para cualquier función f, representamos por $\boldsymbol{f'}$ a la función cuyo dominio es el conjunto de todos aquellos números a tales que f es diferenciable en a, y cuyo valor en dicho número a es

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Para ser más precisos: f' es la colección de todos los pares

$$\left(a, \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$$

para los que existe el $\lim\limits_{h\to 0} [f(a+h)-f(a)]/h$.) La función f' se denomina la **derivada de** f.

El tercer comentario, algo más largo que los dos anteriores, se refiere a la interpretación física de la derivada. Consideremos una partícula en movimiento a lo largo de una recta (Figura 8(a)) sobre la cual se ha elegido un "origen" O, una dirección en la cual las distancias a O se escriben como números positivos, y otra dirección en la cual las distancias a O se escriben como números negativos. Sea $s(t)$ la distancia de la partícula

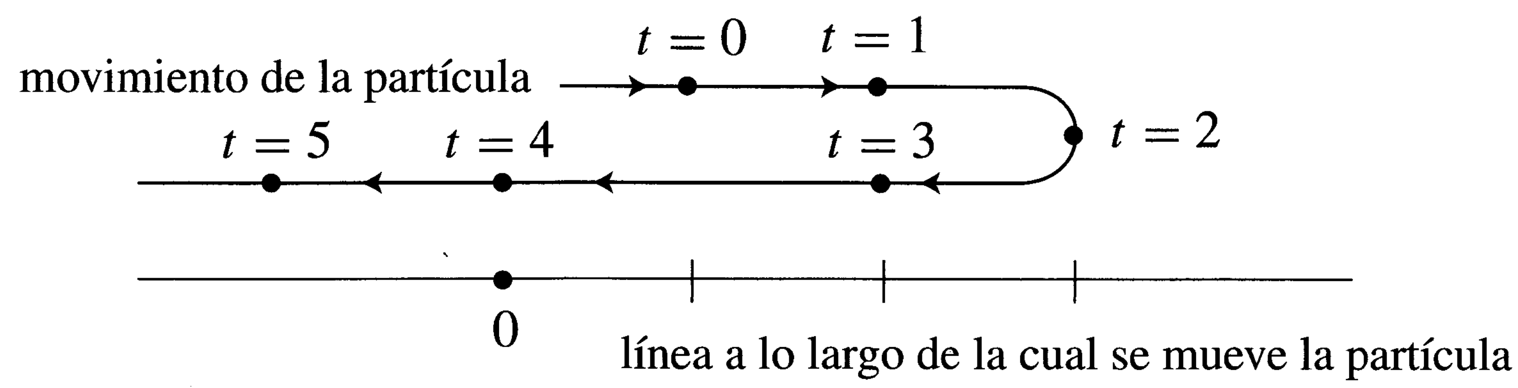


Figura 8(a)

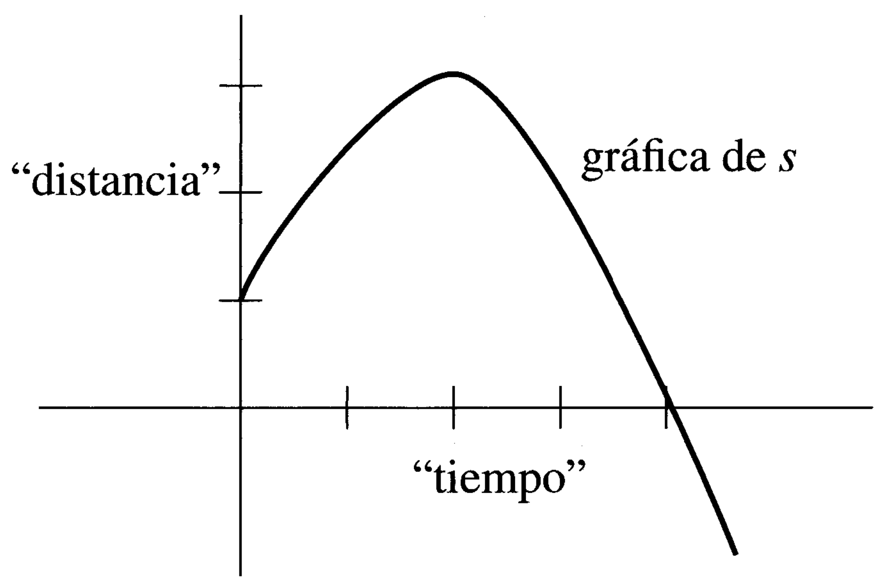


Figura 8(b)

a O, en el tiempo t. La sugestiva notación $s(t)$ se ha elegido intencionadamente; ya que a cada número t le corresponde una distancia $s(t)$, la situación física nos proporciona automáticamente una cierta función s. En la gráfica de s se representa la distancia de la partícula a O en el eje vertical, en función del tiempo, indicado en el eje horizontal (Figura 8(b)).

El cociente

$$\frac{s(a+h)-s(a)}{h}$$

tiene una interpretación física natural. Es la "velocidad media" de la partícula durante el intervalo de tiempo entre a y $a+h$. Evidentemente, para cualquier partícula a, esta velocidad media depende de h . Por otra parte, el límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{s(a+h)-s(a)}{h}$$

depende únicamente de a (así como de la función particular s) y existen importantes razones físicas para considerar este límite. Nos gustaría hablar de la "velocidad de la partícula en el tiempo a", pero la definición usual de velocidad es en realidad una definición de velocidad media; la única definición razonable de "velocidad en el tiempo a" (la denominada "velocidad instantánea") es el límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{s(a+h)-s(a)}{h}.$$

Así pues, *definimos* la **velocidad (instantánea)** de la partícula en el tiempo a como $s'(a)$. Observemos que $s'(a)$ puede ser negativa; al valor absoluto $|s'(a)|$ se le denomina a veces **rapidez (instantánea)**.

Es importante darse cuenta que la velocidad instantánea es un concepto teórico, una abstracción que no se corresponde exactamente con ninguna cantidad observable. Aunque no sería correcto afirmar que la velocidad instantánea no tiene nada que ver con la velocidad media, hay que recordar que $s'(t)$ no es

$$\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$$

para ningún h particular, sino únicamente el límite de estas velocidades medias cuando h tiende a 0. Así, cuando en física se miden velocidades, lo que el físico realmente mide es una velocidad media en un intervalo de tiempo (muy pequeño); este procedimiento no da una respuesta exacta, aunque esto no es ningún defecto ya que las mediciones físicas nunca pueden ser exactas.

La velocidad de una partícula se denomina a menudo la "tasa de variación de su posición". Esta noción de derivada, como una tasa de variación, se aplica a cualquier otra situación física en la cual una cantidad varía en función del tiempo. Por ejemplo, la "tasa de variación de la masa" de un objeto en crecimiento significa la derivada de la función m, donde $m(t)$ es la masa en el tiempo t.

Para familiarizarnos con la definiciones básicas de este capítulo, vamos a dedicar un cierto tiempo a examinar las derivadas de funciones particulares. Antes de demostrar los importantes resultados teóricos del Capítulo 11, es importante tener muy claro el concepto de derivada de una función. El próximo capítulo está dedicado exclusivamente a un aspecto de este problema: calcular la derivada de funciones complicadas. En este capítulo insistiremos más en los conceptos, y no en los cálculos, considerando unos pocos ejemplos sencillos. La más simple de todas las funciones es la función constante, $f(x) = c$. En este caso

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0.$$

Así, f es diferenciable en a para todo número a, y $f'(a) = 0$. Esto significa que el valor de la pendiente de la tangente a la gráfica de f en a siempre es 0, por tanto la recta tangente coincide con la gráfica de la función.

Las funciones constantes no son las únicas cuyas gráficas coinciden con las de sus tangentes; esto también ocurre en el caso de cualquier función lineal $f(x) = cx + d$. En efecto

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{c(a+h)+d-[ca+d]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{ch}{h} = c; \end{aligned}$$

la pendiente de la tangente es c, la misma que la pendiente de la gráfica de f.

En el caso de la función $f(x) = x^2$ ya encontramos una novedad importante, pues

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2-a^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 2a+h \\ &= 2a. \end{aligned}$$

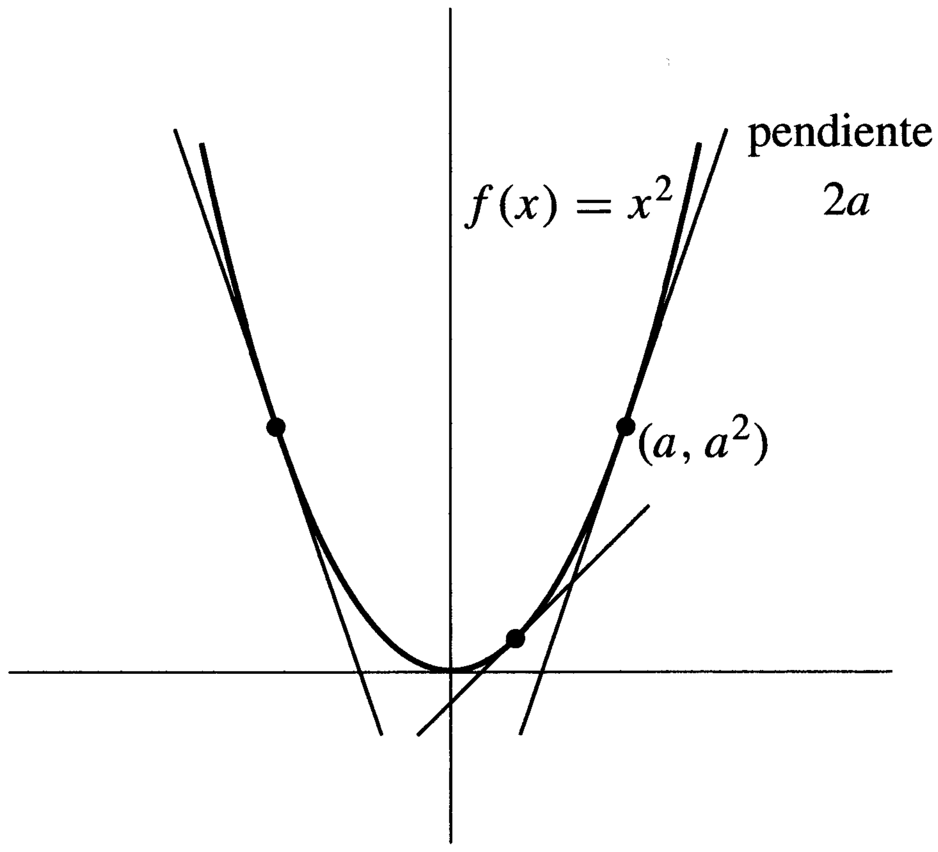


Figura 9

En la Figura 9 se presentan algunas tangentes a la gráfica de f. En dicha figura, parece que cada recta tangente corta a la gráfica de la función tan sólo en un punto, y este hecho puede comprobarse fácilmente: puesto que la tangente por el punto (a, a^2) tiene pendiente $2a$, es la gráfica de la función

$$\begin{aligned} g(x) &= 2a(x-a)+a^2 \\ &= 2ax - a^2. \end{aligned}$$

Ahora bien, si las gráficas de f y g se cortan en el punto $(x, f(x)) = (x, g(x))$, entonces

$$\begin{aligned} & x^2 = 2ax - a^2 \\ \text{o} \quad & x^2 - 2ax + a^2 = 0; \\ \text{por tanto} \quad & (x-a)^2 = 0 \\ \text{o} \quad & x = a. \end{aligned}$$

En otras palabras, (a, a^2) es el único punto de intersección.

En este aspecto, la función $f(x) = x^2$ resulta ser de un tipo muy especial; en general, la tangente a la gráfica de una función corta a dicha gráfica más de una vez. Consideremos, por ejemplo, la función $f(x) = x^3$. En este caso

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - a^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 3a^2 + 3ah + h^2 \\ &= 3a^2. \end{aligned}$$

Por tanto, la tangente a la gráfica de f en (a, a^3) tiene pendiente $3a^2$. Esto significa que la tangente es la gráfica de

$$\begin{aligned} g(x) &= 3a^2(x-a) + a^3 \\ &= 3a^2x - 2a^3. \end{aligned}$$

Las gráficas de f y g se cortan en el punto $(x, f(x)) = (x, g(x))$ cuando se verifica que

$$x^3 = 3a^2x - 2a^3$$

o

$$x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0.$$

Esta ecuación se puede resolver fácilmente, recordando que una solución de la ecuación ha de ser $x = a$, por lo tanto $(x-a)$ es un divisor del primer miembro de la igualdad; el otro factor se puede encontrar haciendo la división. Se obtiene así

$$(x-a)(x^2+ax-2a^2)=0.$$

$x^2+ax-2a^2$ es divisible también por $x-a$; obtenemos finalmente

$$(x-a)(x-a)(x+2a)=0.$$

Así pues, como se ilustra en la Figura 10, la tangente por (a,a^3) corta también a la gráfica de la función en el punto $(-2a,-8a^3)$. Estos dos puntos son siempre distintos excepto cuando $a=0$.

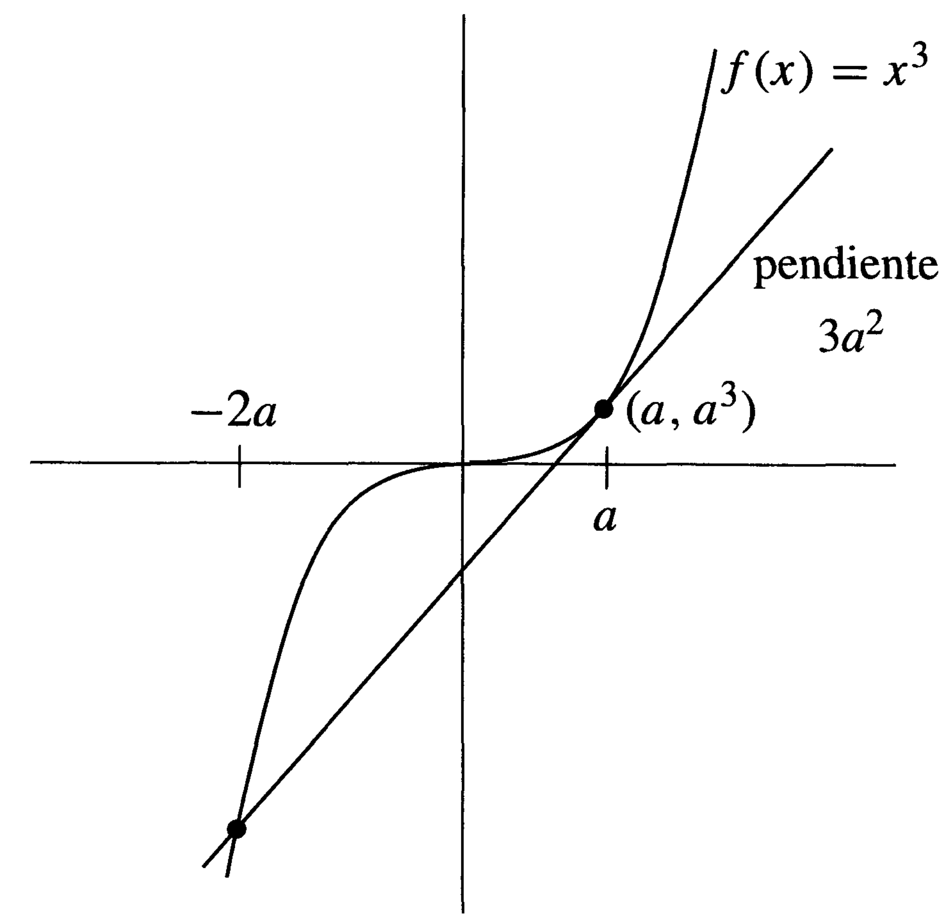


Figura 10

Hemos calculado ya la derivada de un número suficiente de funciones para ilustrar la notación clásica para las derivadas. Dicha notación todavía es muy popular. Para una función dada f, la derivada f' se representa a menudo mediante

$$\frac{df(x)}{dx}.$$

Por ejemplo, el símbolo

$$\frac{dx^2}{dx}$$

representa la derivada de la función $f(x)=x^2$. Las distintas partes de la expresión

$$\frac{df(x)}{dx}$$

carecen de todo significado cuando se consideran separadamente; las d *no* son números, *no pueden* simplificarse, y la expresión completa *no* es el cociente de otros dos números "$df(x)$" y "dx". Esta notación se debe a Leibniz (considerado generalmente, junto con Newton, el descubridor del cálculo infinitesimal), y por deferencia se la denomina notación de Leibniz. * Aunque la notación $df(x)/dx$ parece muy complicada, en casos concretos puede ser más corta; en realidad el símbolo dx^2/dx es más conciso que la frase "la derivada de la función $f(x)=x^2$".

Las siguientes fórmulas expresan en la notación de Leibniz toda la información que hasta ahora hemos obtenido:

*Leibniz llegó a este símbolo a través de su noción intuitiva de derivada, que él consideraba no como el límite del cociente $[f(x+h)-f(x)]/h$, sino como el 'valor" de este cociente cuando h es un número "infinitamente pequeño". Esta cantidad "infinitamente pequeña" fue designada por dx y la correspondiente diferencia "infinitamente pequeña" $f(x+dx)-f(x)$ por $df(x)$. Aunque es imposible reconciliar este punto de vista con las propiedades (P1)–(P13) de los números reales, algunos encuentran adecuada esta notación de la derivada.

$$\begin{aligned}\frac{dc}{dx} &= 0,\\ \frac{d(ax+b)}{dx} &= a,\\ \frac{dx^2}{dx} &= 2x,\\ \frac{dx^3}{dx} &= 3x^2.\end{aligned}$$

Aunque el significado de estas fórmulas es suficientemente claro, su interpretación literal se ve dificultada por la restricción de que una ecuación no debe contener una función a un lado de la igualdad y un número al otro lado. Por ejemplo, para que la tercera ecuación sea cierta, entonces o bien $df(x)/dx$ debe representar a $f'(x)$, y no a f', o sino $2x$ ha de representar no a un número, sino a la función cuyo valor en x es $2x$. Realmente, es imposible decidir cuál de estas dos alternativas es la que se pretende representar; en la práctica, $df(x)/dx$ a veces representa a f' y otras veces a $f'(x)$, mientras que $2x$ puede representar o bien a un número o a una función. Debido a esta ambigüedad, la mayoría de autores se resisten a representar a $f'(a)$ por

$$\frac{df(x)}{dx}(a);$$

en lugar de esto, $f'(a)$ se representa generalmente por el extraño, pero no ambiguo, símbolo

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}.$$

Además de estas dificultades, la notación de Leibniz está asociada con una ambigüedad adicional. Aunque la notación dx^2/dx es totalmente estándar, la notación $df(x)/dx$ a veces se sustituye por df/dx. Esto, nuevamente, se ajusta a la práctica de confundir una función con su valor en x. Tan arraigada está esta tendencia, que las funciones se indican a menudo mediante una frase como la siguiente: "consideremos la función $y=x^2$". En este texto a veces seguiremos la costumbre clásica de utilizar y como el nombre de una función, pero haremos una distinción cuidadosa entre la función y sus valores; así pues, siempre haremos afirmaciones parecidas a "consideremos la función (definida por) $y(x)=x^2$".

A pesar de sus numerosas ambigüedades, la notación de Leibniz es la que se utiliza casi exclusivamente en los textos matemáticos antiguos, y aún es muy utilizada en la actualidad. Los oponentes más acérrimos a esta notación admiten que se mantendrá todavía durante algún tiempo, mientras que sus más fervientes admiradores dirán que se mantendrá siempre, y que así sea. En cualquier caso, la notación de Leibniz no puede ignorarse completamente.

La decisión que se ha adoptado en este libro es no utilizar la notación de Leibniz en el texto, pero sí en los problemas; varios capítulos contienen unos pocos problemas (que se reconocen inmediatamente) expresamente diseñados para ilustrar las ambigüedades de la notación de Leibniz. Confiando en que estos problemas permitirán al lector adquirir una práctica suficiente con esta notación, volvemos ahora a nuestro objetivo básico de examinar algunos ejemplos sencillos de derivadas.

Las pocas funciones examinadas hasta ahora, han sido todas diferenciables. Para apreciar totalmente el significado de la derivada, es también importante dar algunos ejemplos de funciones que *no* son diferenciables. Los candidatos obvios son las tres funciones que hemos considerado primero en este capítulo, y que se representan en la Figura 1; si resultase que son diferenciables en 0, es evidente que algo no iría bien.

Consideremos en primer lugar la función $f(x) = |x|$. En este caso

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}.$$

Ahora bien, $|h|/h = 1$ para $h > 0$, y $|h|/h = -1$ para $h < 0$. Esto demuestra que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} \text{ no existe.}$$

De hecho,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 1$$

$$\text{y} \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = -1.$$

(Estos dos límites se denominan a veces la **derivada por la derecha** y la **derivada por la izquierda**, respectivamente, de f en 0.)

Si $a \neq 0$, entonces $f'(a)$ existe. De hecho,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \quad \text{si } x > 0, \\ f'(x) &= -1 \quad \text{si } x < 0. \end{aligned}$$

La demostración de este hecho se deja como ejercicio para el lector (es fácil si se recuerda la derivada de una función lineal). Las gráficas de f y de f' se muestran en la Figura 11.

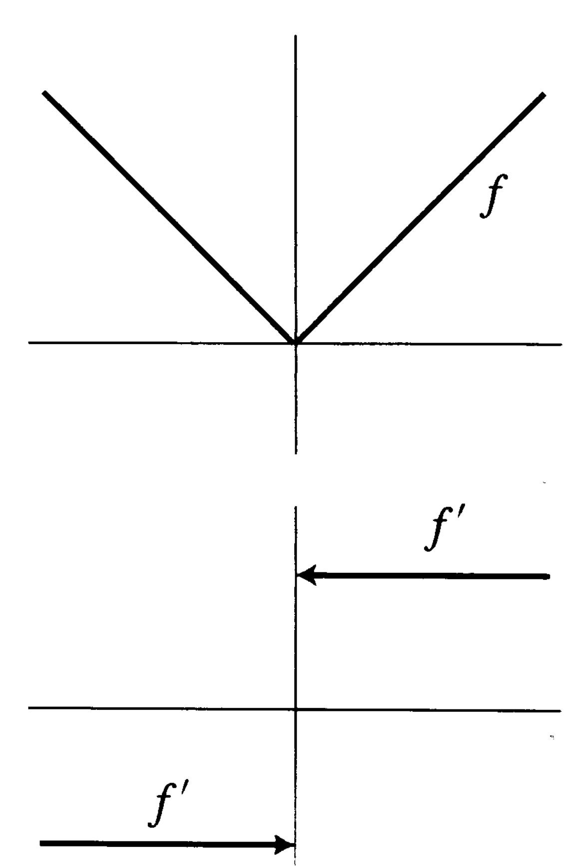


Figura 11

En el caso de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x, & x \geq 0, \end{cases}$$

surge una dificultad similar en relación con $f'(0)$. Tenemos

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \begin{cases} \dfrac{h^2}{h} = h, & h < 0 \\[2ex] \dfrac{h}{h} = 1, & h > 0. \end{cases}$$

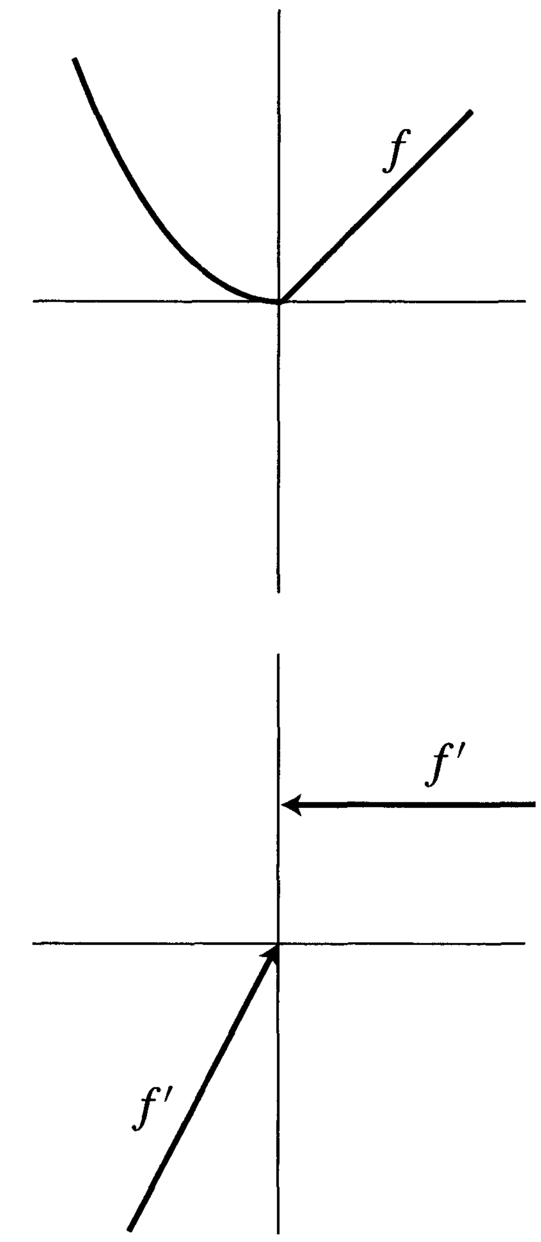


Figura 12

Por tanto,

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 0,$$

$$\text{pero} \quad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 1.$$

Así, $f'(0)$ no existe; f no es diferenciable en 0. Una vez más, sin embargo, $f'(x)$ existe para $x \neq 0$; es fácil ver que

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Las gráficas de f y de f' se muestran en la Figura 12.

La situación es todavía peor en el caso de la función $f(x) = \sqrt{|x|}$. En efecto,

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}, & h > 0 \\[2ex] \dfrac{\sqrt{-h}}{h} = -\dfrac{1}{\sqrt{-h}}, & h < 0. \end{cases}$$

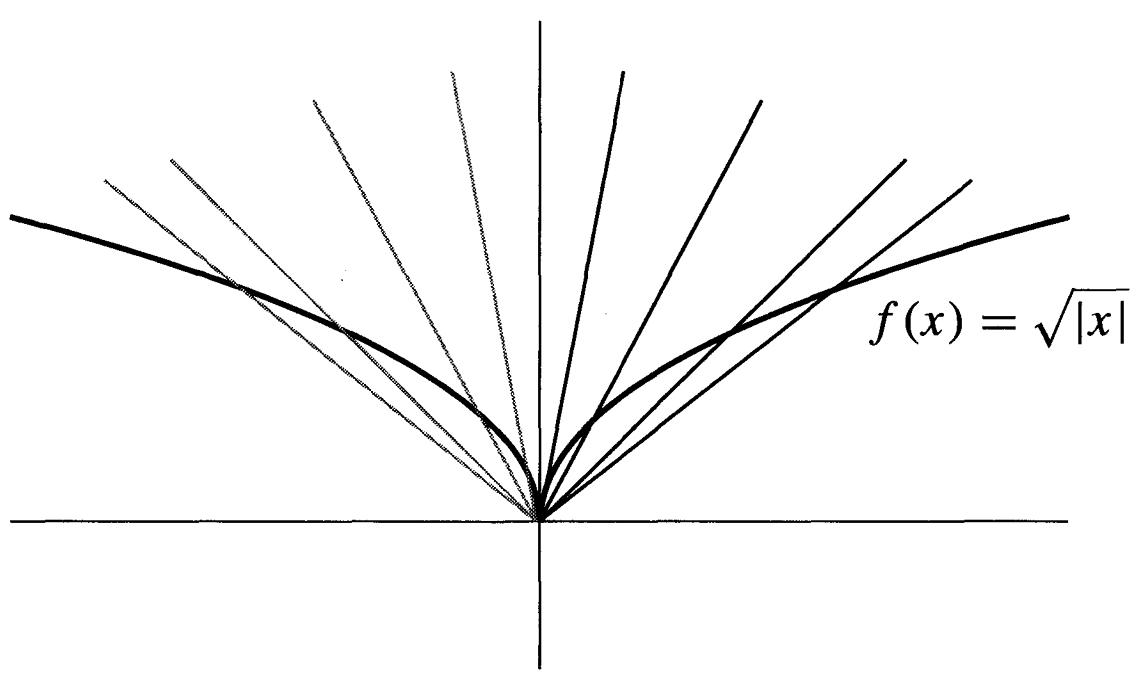


Figura 13

En este caso el límite por la derecha

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}}$$

no existe; por el contrario, $1/\sqrt{h}$ aumenta indefinidamente cuando h tiende a 0. Y, lo que es más, $-1/\sqrt{-h}$ aumenta indefinidamente en valor absoluto, pero *negativo* (Figura 13).

Aunque la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$, tampoco es diferenciable en 0, al menos se comporta algo mejor. El cociente

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \frac{h^{1/3}}{h} = \frac{1}{h^{2/3}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{h})^2}$$

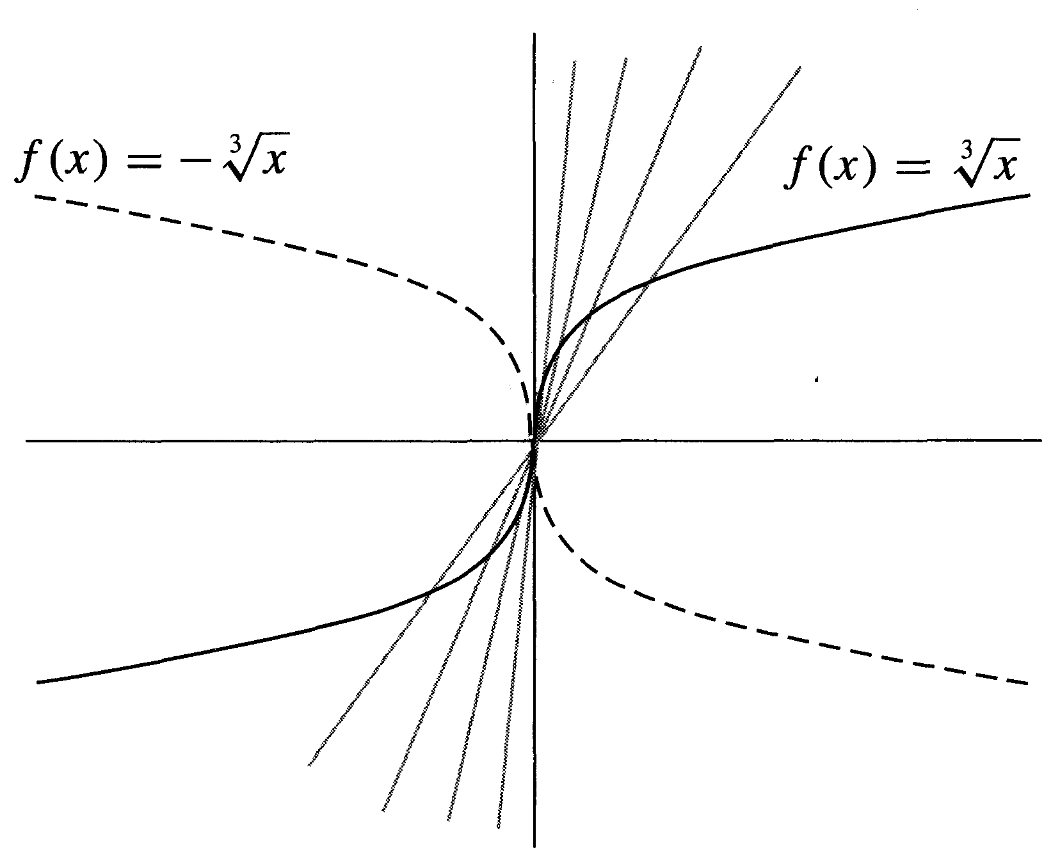


Figura 14

tan sólo aumenta indefinidamente cuando h tiende a 0. A veces se dice que f tiene una derivada "infinita" en 0. Geométricamente, esto significa que la gráfica de f tiene una "recta tangente" que es paralela al eje vertical (Figura 14). Por supuesto, la función $f(x) = -\sqrt[3]{x}$ tiene la misma propiedad geométrica, pero en este caso se dice que f tiene una derivada "infinita negativa" en 0.

Recordemos que la diferenciabilidad se supone que es una mejora respecto a la simple continuidad.

Esto lo demuestran los numerosos ejemplos de funciones que son continuas, pero no diferenciables; sin embargo, hay que destacar un punto importante:

Teorema 1. *Si f es diferenciable en el punto a, entonces f es continua en a.*

Demostración

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} f(a+h)-f(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot h\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot \lim_{h\to 0} h\\ &= f'(a)\cdot 0\\ &= 0.\end{aligned}$$

Como ya indicamos en el Capítulo 5, la ecuación $\lim_{h\to 0} f(a+h)-f(a)=0$ es equivalente a $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$; así, f es continua en a. ■

Es muy importante recordar el Teorema 1, e igualmente importante recordar que el recíproco no es cierto. Una función diferenciable es continua, pero una función continua no necesariamente es diferenciable (el lector puede recordar la función $f(x)=|x|$, y así nunca olvidará cuál de las afirmaciones es verdadera o falsa).

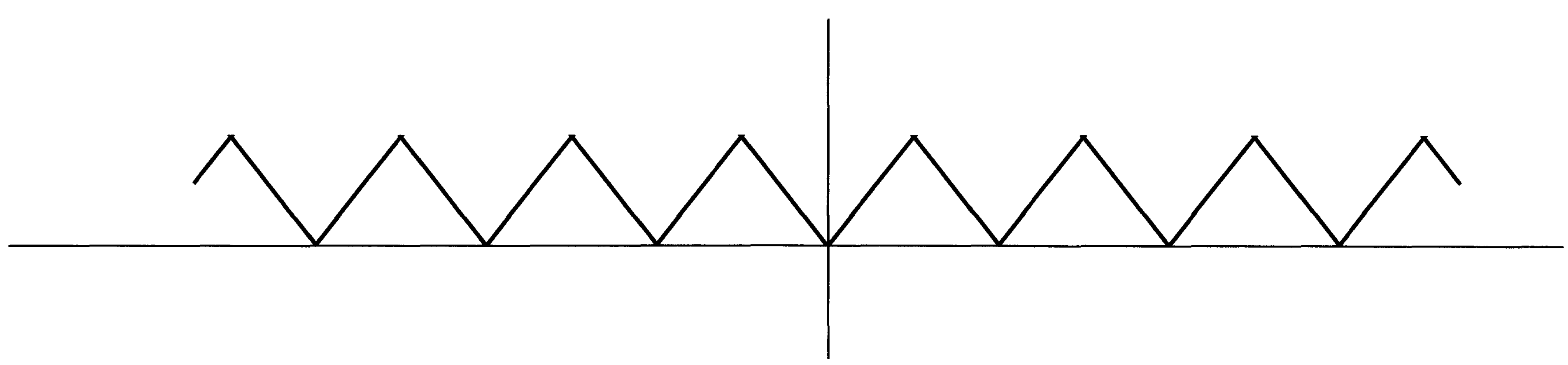


Figura 15

Hasta ahora, las funciones continuas que hemos examinado han resultado ser diferenciables en todos los puntos, con una excepción como máximo, pero es fácil encontrar ejemplos de funciones que no son diferenciables en varios puntos, e incluso que no son diferenciables en infinitos puntos (Figura 15). Realmente, la situación puede ser todavía mucho peor. Existe una función que es *continua en cada punto* y *no es diferenciable en ninguno*, aunque habrá que esperar hasta el Capítulo 24 para poder definirla adecuadamente, y, además, he sido incapaz de persuadir al artista para que la dibujase (si el lector considera por un momento cómo tendría que ser la gráfica de esta función, estará de acuerdo con el artista). Es posible, sin embargo, dibujar aproximaciones a dicha gráfica. En la Figura 16 se representan algunas, cada vez más ajustadas a la gráfica real.

Aunque debemos posponer estos ejemplos espectaculares de no diferenciabilidad, podemos, sin embargo, con una cierta ingenuidad, hallar una función continua que no sea diferenciable en infinitos puntos, *todos ellos pertenecientes al intervalo* $[0, 1]$. Una de

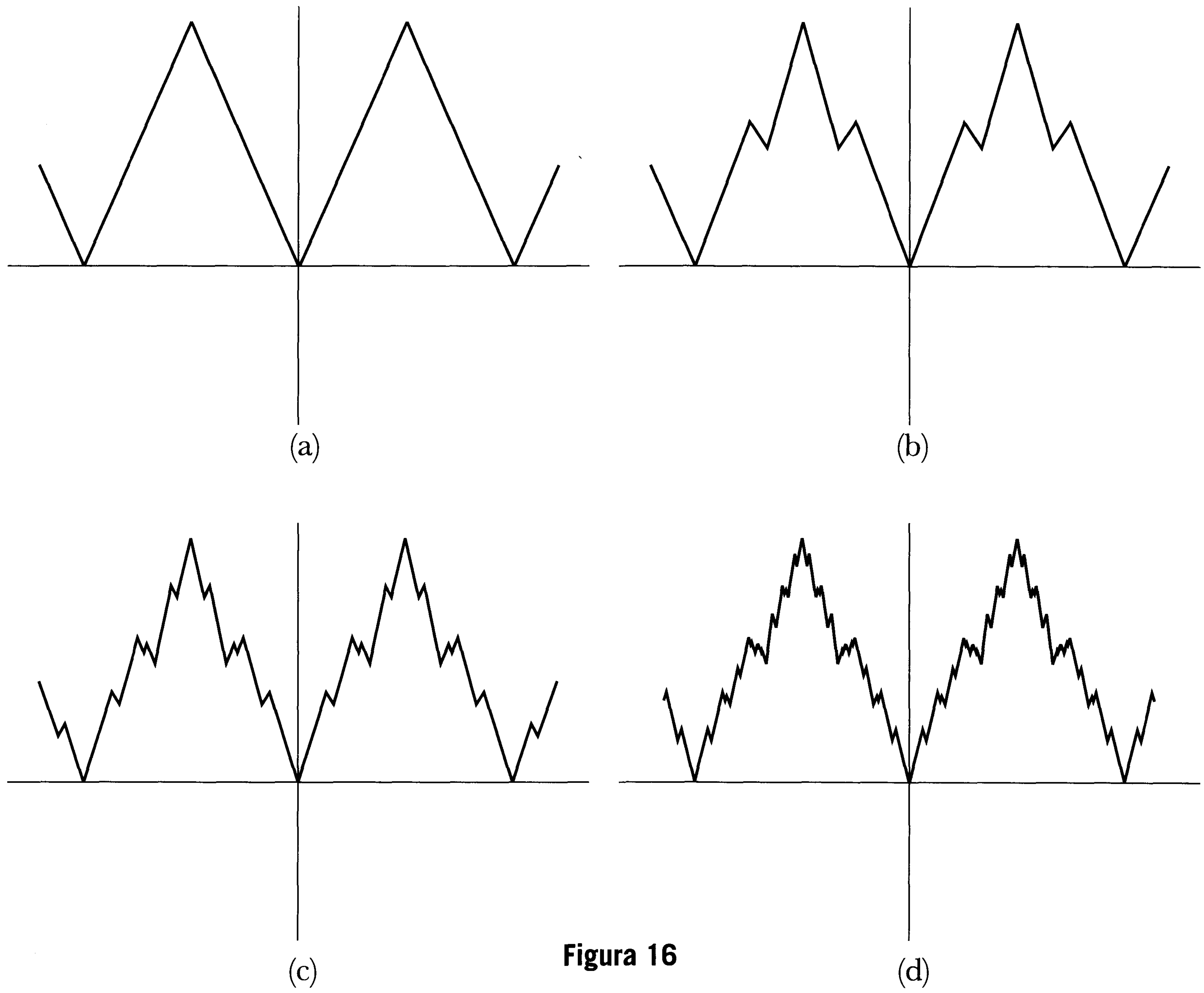


Figura 16

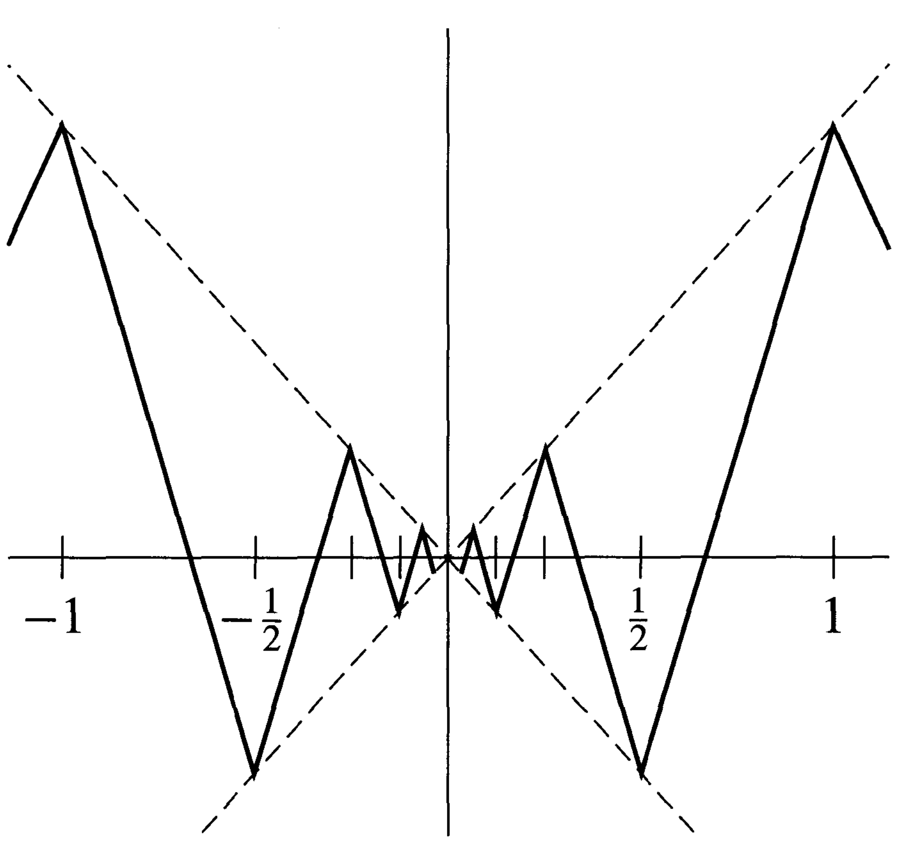


Figura 17

estas funciones se ilustra en la Figura 17. Se deja para el lector el problema de definirla con precisión; se trata de una versión lineal de la función

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Esta función f es muy sensible a la cuestión de la diferenciabilidad. En efecto, para $h \neq 0$ tenemos

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{h \operatorname{sen} \dfrac{1}{h} - 0}{h} = \operatorname{sen} \frac{1}{h}.$$

Hace mucho demostramos que $\lim_{h \to 0} \operatorname{sen} 1/h$ no existe, por tanto f no es diferenciable en 0. Geométricamente puede observarse que no puede existir una tangente, ya que la secante por los puntos $(0,0)$ y $(h, f(h))$ de la Figura 18 puede tener cualquier pendiente entre -1 y 1, por pequeño que sea el valor de h.

Esta observación es un triunfo, en cierta manera; aunque continua, la función f no parece muy razonable, y ahora podemos enunciar una característica no deseable matemáticamente de esta función; no es diferenciable en 0. Sin embargo, no debemos entusiasmarnos demasiado con el criterio de diferenciabilidad. Por ejemplo, la función

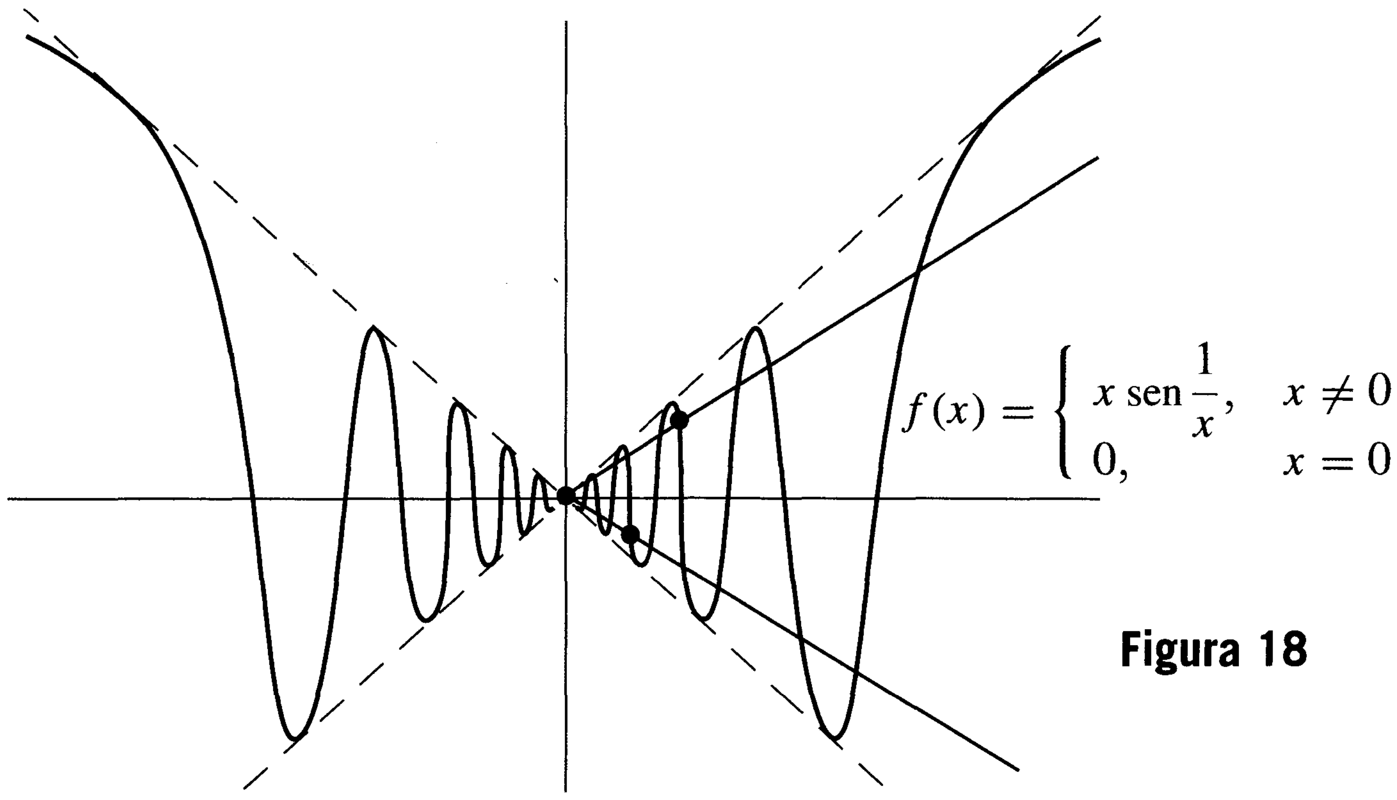


Figura 18

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

es diferenciable en 0; de hecho $g'(0) = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{h}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} h \operatorname{sen} \frac{1}{h} \\ &= 0. \end{aligned}$$

La tangente a la gráfica de g en $(0, 0)$ es, por tanto, el eje horizontal (Figura 19).

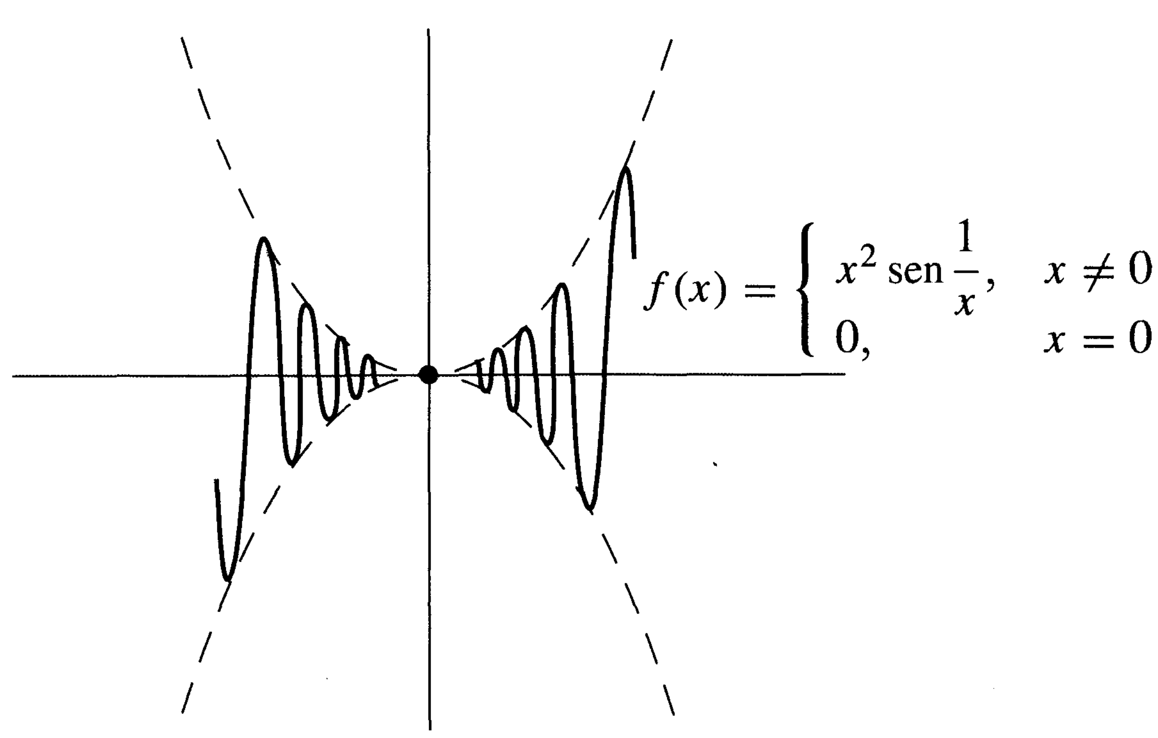


Figura 19

Este ejemplo sugiere que debemos buscar condiciones todavía más restrictivas para una función que la mera diferenciabilidad. Es posible utilizar la derivada para formular dichas condiciones si se introduce otro conjunto de definiciones, las últimas de este capítulo.

Dada una función f, si calculamos su derivada obtenemos una nueva función f' (cuyo dominio puede ser considerablemente menor que el de f). La noción de diferenciabili-

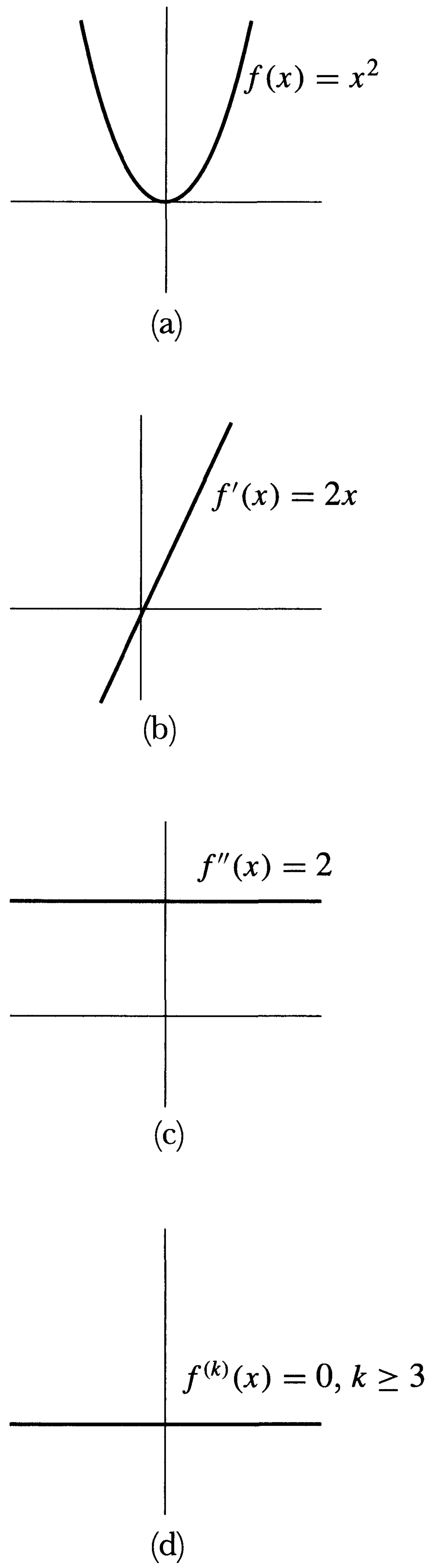


Figura 20

dad puede aplicarse también a la función f', obteniéndose una nueva función $(f')'$, cuyo dominio está formado por todos los puntos a tales que f' es diferenciable en a. La función $(f')'$ se representa generalmente mediante el símbolo f'' y se denomina la **derivada segunda** de f. Si $f''(a)$ existe, entonces f se dice que es 2 veces diferenciable en a, y el número $f''(a)$ se denomina la **derivada segunda de f en a.**

En Física, la derivada segunda es especialmente importante. Si $s(t)$ es la posición en el tiempo t de una partícula que se desplaza a lo largo de una recta, entonces $s''(t)$ se denomina la **aceleración** en el tiempo t. La aceleración desempeña un papel especial en física, ya que, como se enuncia en las leyes del movimiento de Newton, la fuerza de una partícula es el producto de su masa por su aceleración. Por tanto, el lector puede sentir el efecto de la derivada segunda sentado en un coche que acelera.

No hay motivo para detenerse en la derivada segunda; se puede definir también $f''' = (f'')'$, $f'''' = (f''')'$, etc. Esta notación se vuelve rápidamente inmanejable, por tanto en general se utiliza la siguiente abreviación (en realidad se trata de una definición recursiva):

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= f', \\ f^{(k+1)} &= (f^{(k)})'. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= f' \\ f^{(2)} &= f'' = (f')', \\ f^{(3)} &= f''' = (f'')', \\ f^{(4)} &= f'''' = (f''')', \text{ etc.} \end{aligned}$$

Las distintas funciones $f^{(k)}$, para $k \geq 2$, se denominan generalmente **derivadas de orden superior** de f.

En general, se recurre a la notación $f^{(k)}$ sólo cuando $k \geq 4$, aunque es conveniente también disponer de la definición de la expresión $f^{(k)}$ para valores menores de k. De hecho, puede darse también una definición razonable para $f^{(0)}$, a saber,

$$f^{(0)} = f.$$

También debemos comentar la utilización de la notación de Leibniz en el caso de las derivadas de orden superior. El símbolo de Leibniz natural para $f''(x)$, es decir,

$$\frac{d\left(\dfrac{df(x)}{dx}\right)}{dx},$$

se abrevia mediante

$$\frac{d^2f(x)}{(dx)^2}, \quad \text{o, más frecuentemente, mediante} \quad \frac{d^2f(x)}{dx^2}.$$

En el caso de $f^{(k)}(x)$ se utiliza una notación similar.

El siguiente ejemplo ilustra la notación $f^{(k)}$, y también muestra, en un caso muy sencillo, cómo se relacionan las derivadas de orden superior con la función original. Sea $f(x) = x^2$. Entonces, como ya hemos comprobado,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x, \\ f''(x) &= 2, \\ f'''(x) &= 0, \\ f^{(k)}(x) &= 0, \quad \text{si } k \geq 3. \end{aligned}$$

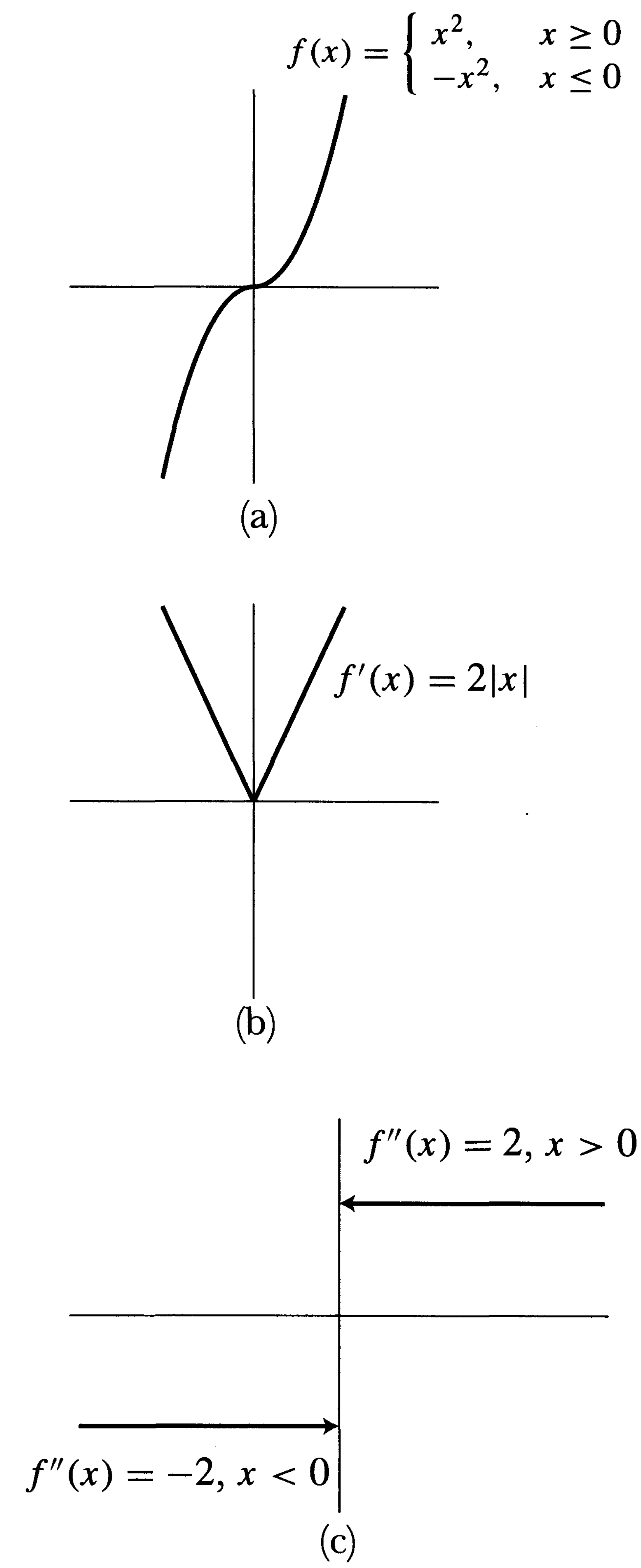


Figura 21

La Figura 20 muestra la función f, junto con sus derivadas sucesivas.

Un ejemplo más ilustrativo viene representado por la función cuya gráfica se muestra en la Figura 21(a):

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x \leq 0. \end{cases}$$

Es fácil comprobar que (Figura 21(c))

$$\begin{aligned} f'(a) &= \ \ 2a \quad \text{si } a > 0, \\ f'(a) &= -2a \quad \text{si } a < 0. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h}. \end{aligned}$$

Ahora bien

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2}{h} = 0$$

$$\text{y} \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h^2}{h} = 0,$$

por tanto

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

Esta información se puede resumir de la manera siguiente (Figura 21(b)):

$$f'(x) = 2|x|.$$

Por tanto, $f''(0)$ ¡no existe! Exigir, pues, que una función admita derivada segunda, es un criterio bastante restrictivo. Incluso una función tan "suave" como f manifiesta alguna irregularidad cuando se examina mediante la segunda derivada. Esto sugiere que el comportamiento irregular de la función

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

podría manifestarse también mediante la segunda derivada. Por el momento, sabemos que $g'(0) = 0$, pero no conocemos $g'(a)$ para cualquier $a \neq 0$, por tanto es inútil comenzar calculando $g''(0)$. Volveremos a esta cuestión al final del siguiente capítulo, una vez que hayamos perfeccionado la técnica de hallar derivadas.

Problemas

1. (a) Demuestre, aplicando directamente la definición, que si $f(x) = 1/x$, entonces $f'(a) = -1/a^2$, para $a \neq 0$.
   (b) Demuestre que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, 1/a)$ sólo corta a la gráfica de f en este punto.
2. (a) Demuestre que si $f(x) = 1/x^2$, entonces $f'(a) = -2/a^3$ para $a \neq 0$.
   (b) Demuestre que la recta tangente a f en el punto $(a, 1/a^2)$ corta a f en otro punto, que se encuentra en el lado opuesto del eje vertical.
3. Demuestre que si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces $f'(a) = 1/(2\sqrt{a})$, para $a > 0$. (La expresión que se obtendrá para $[f(a+h) - f(a)]/h$ requiere alguna manipulación algebraica, pero la respuesta debería sugerir la manera de resolverlo).
4. Para cada número natural n, sea $S_n(x) = x^n$. Recordando que $S_1{}'(x) = 1$, $S_2{}'(x) = 2x$, y que $S_3{}'(x) = 3x^2$, encuentre una fórmula para $S_n{}'(x)$. Demuestre que la fórmula es correcta. (La expresión $(x+h)^n$ puede desarrollarse mediante el binomio de Newton.)
5. Halle f' si $f(x) = [x]$.
6. Demuestre, aplicando la definición (y dibujando un esquema, a modo de ilustración):
   (a) si $g(x) = f(x) + c$, entonces $g'(x) = f'(x)$;
   (b) si $g(x) = cf(x)$, entonces $g'(x) = cf'(x)$.
7. Suponga que $f(x) = x^3$.
   (a) ¿Cuál es el valor de $f'(9)$, $f'(25)$, $f'(36)$?
   (b) ¿Y el valor de $f'(3^2)$, $f'(5^2)$, $f'(6^2)$?
   (c) Calcule $f'(a^2)$, $f'(x^2)$. Si no encuentra este problema trivial es que no tiene en cuenta una cuestión muy importante: $f'(x^2)$ significa la derivada de f en el punto que denominamos x^2; *no* es la derivada en el punto x de la función $g(x) = f(x^2)$. Para aclarar la cuestión:
   (d) si $f(x) = x^3$, compare $f'(x^2)$ y $g'(x)$ donde $g(x) = f(x^2)$.
8. (a) Suponga que $g(x) = f(x+c)$. Demuestre (partiendo de la definición) que $g'(x) = f'(x+c)$. Dibuje un esquema para ilustrarlo. Para resolver el problema debe escribir las definiciones de $g'(x)$ y $f'(x+c)$ correctamente. El objetivo del Problema 7 era convencerle de que aunque este problema es fácil no se trata de una trivialidad, y que hay algo que debe demostrarse: no se puede simplemente poner primas en la ecuación $g(x) = f(x+c)$. Con el objeto de enfatizar este punto:
   (b) Demuestre que si $g(x) = f(cx)$, entonces $g'(x) = c \cdot f'(cx)$. Intente también visualizar gráficamente por qué esta igualdad es cierta.

(c) Suponga que f es diferenciable y periódica, con periodo a (por ejemplo, $f(x+a) = f(x)$ para todo x). Demuestre que f' es también periódica.

9. Halle $f'(x)$ y también $f'(x+3)$ en los siguientes casos. Hay que ser muy metódico para no cometer un error en algún paso. Consulte las respuestas (después de resolver el problema, naturalmente).

(a) $f(x) = (x+3)^5$.

(b) $f(x+3) = x^5$.

(c) $f(x+3) = (x+5)^7$.

10. Halle $f'(x)$ si $f(x) = g(t+x)$, y si $f(t) = g(t+x)$. Las respuestas *no* son idénticas.

11. (a) Demuestre que Galileo se equivocó: si un cuerpo cae una distancia $s(t)$ en t segundos, y s' es proporcional a s, entonces s no puede ser una función de la forma $s(t) = ct^2$.

(b) Demuestre que las siguientes afirmaciones sobre s son ciertas, si $s(t) = (a/2)t^2$ (la primera afirmación demostrará por qué hemos hecho el cambio de c a $a/2$):

(i) $s''(t) = a$ (la aceleración es constante).

(ii) $[s'(t)]^2 = 2as(t)$.

(c) Si s se mide en pies, el valor de a es 32. ¿Cuántos segundos tendrá que permanecer fuera de la trayectoria de una lámpara que cae del techo, desde una altura de 400 pies? Si no se aparta, ¿cuál será la velocidad de la lámpara cuando le golpee? ¿A qué altura se encontraba la lámpara cuando se desplazaba a la mitad de dicha velocidad?

12. Suponga que en una carretera el límite de velocidad se especifica en cada punto. En otras palabras, existe una cierta función L tal que la velocidad límite a x millas desde el inicio de la carretera es $L(x)$. Dos automóviles, A y B, se desplazan por dicha carretera; la posición del automóvil A en el tiempo t es $a(t)$, y la del automóvil B es $b(t)$.

(a) ¿Qué ecuación expresa el hecho de que el automóvil A siempre se desplaza a la velocidad límite? (La respuesta *no* es $a'(t) = L(t)$.)

(b) Suponga que A siempre se desplaza a la velocidad límite, y que la posición de B en el tiempo t es la posición de A en el tiempo $t-1$. Demuestre que B también se desplaza en todo momento a la velocidad límite.

(b) Suponga, por el contrario, que B siempre se mantiene a una distancia constante por detrás de A. ¿En qué condiciones B se desplazará todavía en todo momento a la velocidad límite?

13. Suponga que $f(a) = g(a)$ y que la derivada por la izquierda de f en a es igual a la derivada por la derecha de g en a. Defina $h(x) = f(x)$ para $x \leq a$, y $h(x) = g(x)$ para $x \geq a$. Demuestre que h es diferenciable en a.

14. Sea $f(x) = x^2$ si x es racional, y $f(x) = 0$ si x es irracional. Demuestre que f es diferenciable en 0. (No se deje impresionar por esta función. Tan sólo escriba la definición de $f'(0)$.)

15. (a) Sea f una función tal que $|f(x)| \leq x^2$ para todo x. Demuestre que f es diferenciable en el punto 0. (Si ha resuelto el problema 14 debería poder resolver éste.)

(b) Este resultado se puede generalizar si x^2 se sustituye por $|g(x)|$, en el caso de que g cumpla una determinada propiedad. ¿Cuál?

16. Sea $\alpha > 1$. Si f satisface $|f(x)| \leq |x|^\alpha$, demuestre que f es diferenciable en 0.

17. Sea $0 < \beta < 1$. Demuestre que si f satisface $|f(x)| \geq |x|^{\beta}$ y $f(0) = 0$, entonces f no es diferenciable en 0.

***18.** Sea $f(x) = 0$ si x es irracional, y $1/q$ si $x = p/q$, fracción irreducible. Demuestre que f no es diferenciable en a para cualquier a. Indicación: Obviamente, basta demostrar la afirmación para a irracional. ¿Por qué? Si $a = m.a_1a_2a_3\dots$ es el desarrollo decimal de a, considere $[f(a+h) - f(a)]/h$ para h racional, y también para

$$h = -0{,}00\dots 0a_{n+1}a_{n+2}\dots$$

19. (a) Suponga que $f(a) = g(a) = h(a)$, que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo x, y que $f'(a) = h'(a)$. Demuestre que g es diferenciable en a, y que $f'(a) = g'(a) = h'(a)$. (Empiece con la definición de $g'(a)$.)

(b) Demuestre que la conclusión no es cierta si se omite la hipótesis $f(a) = g(a) = h(a)$.

20. Sea f una función polinómica; veremos en el próximo capítulo que f es diferenciable. La recta tangente a f en $(a, f(a))$ es la gráfica de $g(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$. Por tanto, $f(x) - g(x)$ es la función polinómica $d(x) = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$. Ya hemos visto que si $f(x) = x^2$, entonces $d(x) = (x-a)^2$, y si $f(x) = x^3$, entonces $d(x) = (x-a)^2(x+2a)$.

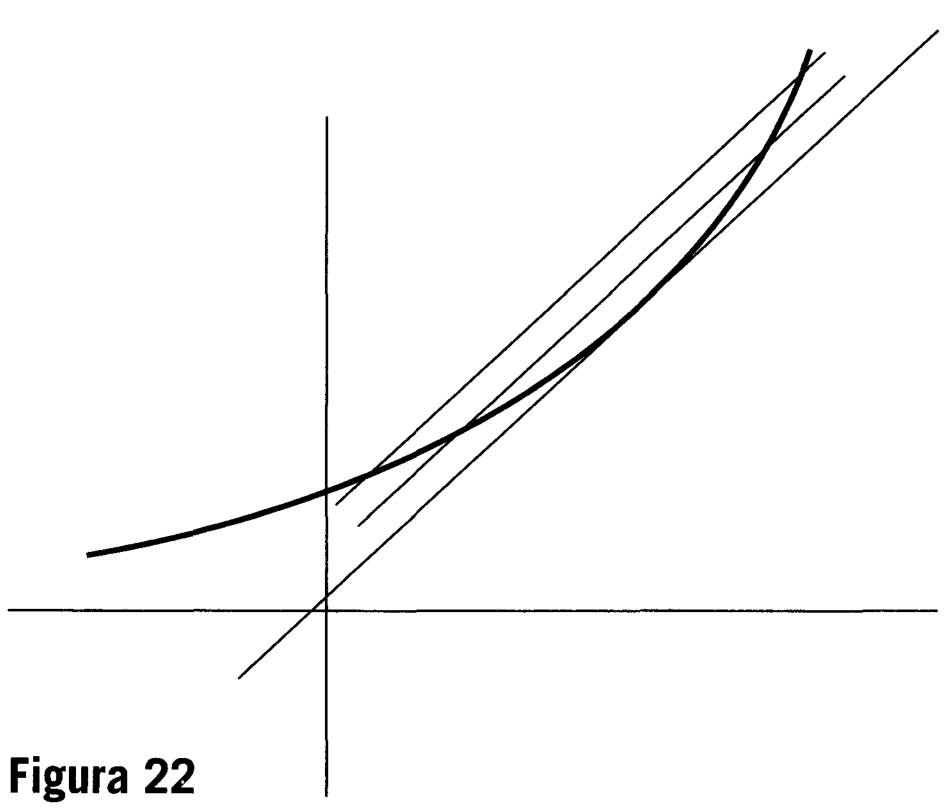


Figura 22

(a) Halle $d(x)$ cuando $f(x) = x^4$, y demuestre que es divisible por $(x-a)^2$.

(b) Parece, ciertamente, que $d(x)$ siempre sea divisible por $(x-a)^2$. En la Figura 22 se da un argumento intuitivo: en general, las rectas paralelas a la tangente cortan la gráfica de la función en dos puntos; la recta tangente corta a la gráfica sólo una vez cerca del punto, de manera que la intersección debería ser una "doble intersección". Para dar una demostración rigurosa, observe en primer lugar que

$$\frac{d(x)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a).$$

Ahora responda a las siguientes cuestiones. ¿Por qué $f(x) - f(a)$ es divisible por $(x-a)$? ¿Por qué existe una función polinómica h tal que $h(x) = d(x)/(x-a)$ para $x \neq a$? ¿Por qué el $\lim_{x \to a} h(x) = 0$? ¿Por qué $h(a) = 0$? ¿Por qué esto resuelve el problema?

21. (a) Demuestre que $f'(a) = \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)]/(x-a)$. (Aquí no hay nada especial.)

(b) Demuestre que las derivadas son una "propiedad local": si $f(x) = g(x)$ para todo x en algún intervalo abierto que contiene a, entonces $f'(a) = g'(a)$. (Esto significa que al calcular $f'(a)$, puede ignorarse a $f(x)$ para un determinado $x \neq a$. Evidentemente, ¡no se puede ignorar a $f(x)$ para todos estos x simultáneamente!)

22. (a) Suponga que f es diferenciable en x. Demuestre que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Indicación: Recuerde un antiguo truco algebraico: un número no varía si se le añade y sustrae la misma cantidad.

**(b) Demuestre, más generalmente, que

$$f'(x) = \lim_{h,k\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x-k)}{h+k}.$$

Aunque hasta ahora no habíamos encontrado expresiones como $\lim_{h,k\to 0}$, su significado debería ser claro para el lector, y por tanto debería ser capaz de formular la definición ε-δ adecuada. Lo importante en este caso es que $\lim_{h,k\to 0^+}$, de manera que estamos considerando únicamente valores de h y k positivos.

23. Demuestre que si f es par, entonces $f'(x) = -f'(-x)$. (Para evitar al máximo la confusión, sea $g(x) = f(-x)$; hállese $g'(x)$ y *luego* recuerde qué otra cosa es g.) ¡Dibuje un esquema!

24. Demuestre que si f es impar, entonces $f'(x) = f'(-x)$. Una vez más, dibuje un esquema.

25. En los Problemas 23 y 24 se afirma que f' es par si f es impar, e impar si f es par. Por tanto, ¿qué puede afirmarse de $f^{(k)}$?

26. Halle $f''(x)$ si

(i) $f(x) = x^3$. (ii) $f(x) = x^5$. (iii) $f'(x) = x^4$. (iv) $f(x+3) = x^5$.

27. Si $S_n(x) = x^n$, y $0 \leq k \leq n$, demuestre que

$$\begin{aligned} S_n{}^{(k)}(x) &= \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} \\ &= k!\binom{n}{k}x^{n-k}. \end{aligned}$$

28. (a) Halle $f'(x)$ si $f(x) = |x|^3$. Halle $f''(x)$. ¿Existe $f'''(x)$ para todo x?
(b) Analice f de manera similar si $f(x) = x^4$ para $x \geq 0$ y $f(x) = -x^4$ para $x \leq 0$.

29. Sea $f(x) = x^n$ para $x \geq 0$ y sea $f(x) = 0$ para $x \leq 0$. Demuestre que $f^{(n-1)}$ existe (y encuentre una fórmula que la describa), pero que $f^{(n)}(0)$ no existe.

30. Interprete las siguientes expresiones en las que se utiliza la notación de Leibniz; cada una de ellas es una nueva definición de un hecho ya considerado en un problema previo.

(i) $\dfrac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$.

(ii) $\dfrac{dz}{dy} = -\dfrac{1}{y^2}$ si $z = \dfrac{1}{y}$.

(iii) $\dfrac{d[f(x)+c]}{dx} = \dfrac{df(x)}{dx}$.

(iv) $\dfrac{d[cf(x)]}{dx} = c\dfrac{df(x)}{dx}$.

(v) $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dy}{dx}$ si $z = y+c$.

(vi) $\left.\dfrac{dx^3}{dx}\right|_{x=a^2} = 3a^4$.

(vii) $\left.\dfrac{df(x+a)}{dx}\right|_{x=b} = \left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=b+a}$.

(viii) $\left.\dfrac{df(cx)}{dx}\right|_{x=b} = c\cdot\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=cb}$.

(ix) $\dfrac{df(cx)}{dx} = c\cdot\left.\dfrac{df(y)}{dy}\right|_{y=cx}$.

(x) $\dfrac{d^kx^n}{dx^k} = k!\dbinom{n}{k}x^{n-k}$.

Diferenciación

10

El proceso de hallar la derivada de una función se denomina *diferenciación*. Del capítulo anterior, se puede tener la impresión que este proceso es generalmente laborioso, que requiere acudir a la definición de derivada y que depende de la habilidad de reconocer algún límite. Es cierto que esta metodología es, a menudo, la única alternativa posible; si se olvida la definición de derivada, es muy probable perderse en el proceso. Sin embargo, en este capítulo aprenderemos a diferenciar un gran número de funciones, incluso sin necesidad de recurrir a la definición de derivada. Unos pocos teoremas nos permitirán utilizar un procedimiento mecánico para poder diferenciar un gran número de funciones, las cuales están formadas por unas pocas funciones más simples mediante el proceso de adición, multiplicación, división y composición. Esta descripción debería sugerir al lector qué teoremas van a ser demostrados. Primero hallaremos las derivadas de unas pocas funciones simples, y luego demostraremos teoremas relativos a la suma, producto, cociente y composición de funciones diferenciables. El primer teorema es un mero reconocimiento formal de un cálculo que ya realizamos en el capítulo anterior.

Teorema 1. *Si f es una función constante, $f(x) = c$, entonces*

$$f'(a) = 0 \quad \textit{para todo número } a.$$

Demostración.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0. \blacksquare$$

El segundo teorema es también un caso especial de un cálculo que realizamos en el último capítulo.

Teorema 2. *Si f es la función identidad, $f(x) = x$, entonces*

$$f'(a) = 1 \quad \textit{para todo número } a.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a+h-a}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1. \blacksquare \end{aligned}$$

La derivada de la suma de dos funciones es, tal como se esperaría, la suma de las derivadas.

Teorema 3. *Si f y g son diferenciables en a, entonces $f+g$ es también diferenciable en a, y*

$$(f+g)'(a) = f'(a)+g'(a).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
(f+g)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)+g(a+h)-[f(a)+g(a)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} \\
&= f'(a)+g'(a). \blacksquare
\end{aligned}$$

La fórmula de la derivada de un producto no es tan simple como podría suponerse, aunque si que es agradablemente simétrica, y la demostración tan sólo requiere un sencillo truco algebraico que ya hemos utilizado anteriormente: un número no varía si se le añade y sustrae la misma cantidad.

Teorema 4. *Si f y g son diferenciables en a, entonces $f\cdot g$ es también diferenciable en a, y*

$$(f\cdot g)'(a) = f'(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g'(a).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
(f\cdot g)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f\cdot g)(a+h)-(f\cdot g)(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(a+h)[g(a+h)-g(a)]}{h} + \frac{[f(a+h)-f(a)]g(a)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} f(a+h)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} g(a) \\
&= f(a)\cdot g'(a)+f'(a)\cdot g(a).
\end{aligned}$$

(Observemos que hemos utilizado el Teorema 9-1 para deducir que $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$.) $\blacksquare$

Hay un caso especial en el cual el Teorema 4 se simplifica considerablemente:

Teorema 5. *Si $g(x) = cf(x)$ y f es diferenciable en a, entonces g es diferenciable en a, y*

$$g'(a) = c \cdot f'(a).$$

Demostración. Si $h(x) = c$, de manera que $g = h \cdot f$, entonces según el Teorema 4,

$$\begin{aligned} g'(a) &= (h \cdot f)'(a) \\ &= h(a) \cdot f'(a) + h'(a) \cdot f(a) \\ &= c \cdot f'(a) + 0 \cdot f(a) \\ &= c \cdot f'(a). \blacksquare \end{aligned}$$

En particular, $(-f)'(a) = -f'(a)$, y por tanto $(f-g)'(a) = (f+[-g])'(a) = f'(a) - g'(a)$.

Para demostrar lo que hasta ahora hemos logrado, calcularemos la derivada de algunas funciones particulares.

Teorema 6. *Si $f(x) = x^n$ para algún número natural n, entonces*

$$f'(a) = na^{n-1} \qquad \textit{para todo } a.$$

Demostración. La demostración la haremos por inducción sobre n. Para $n = 1$ se aplica simplemente el Teorema 2. Supongamos ahora que el teorema es cierto para n, de manera que si $f(x) = x^n$, entonces

$$f'(a) = na^{n-1} \qquad \text{para todo } a.$$

Sea $g(x) = x^{n+1}$. Si $I(x) = x$, la ecuación $x^{n+1} = x^n \cdot x$ se puede escribir como

$$g(x) = f(x) \cdot I(x) \qquad \text{para todo } x;$$

así, $g = f \cdot I$. A partir del Teorema 4 deducimos que

$$\begin{aligned} g'(a) = (f \cdot I)'(a) &= f'(a) \cdot I(a) + f(a) \cdot I'(a) \\ &= na^{n-1} \cdot a + a^n \cdot 1 \\ &= na^n + a^n \\ &= (n+1)a^n, \qquad \text{para todo } a. \end{aligned}$$

Este es precisamente el caso $n+1$ que queríamos demostrar. $\blacksquare$

Utilizando los teoremas que hemos demostrado hasta ahora, podemos calcular f' para una f de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Obtenemos

$$f'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2x + a_1.$$

Podemos calcular también f'':

$$f''(x) = n(n-1)a_nx^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + \cdots + 2a_2.$$

Se puede continuar este proceso fácilmente. Cada diferenciación reduce la potencia más alta de x en una unidad, y elimina un a_i más. Vale la pena calcular las derivadas f''', $f^{(4)}$, y quizás también $f^{(5)}$, hasta que la regla general quede perfectamente clara. La última derivada interesante que se obtiene en el proceso anterior es

$$f^{(n)}(x) = n!a_n;$$

para $k > n$ tenemos

$$f^{(k)}(x) = 0.$$

Evidentemente, el próximo paso de nuestro programa va a ser calcular la derivada de un cociente f/g. Para ello es mucho más sencillo, y según el Teorema 4, obviamente suficiente, calcular la derivada de $1/g$.

Teorema 7. *Si g es diferenciable en a, y $g(a) \neq 0$, entonces $1/g$ es diferenciable en a, y*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{[g(a)]^2}.$$

Demostración. Incluso antes de escribir

$$\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(a+h) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{h}$$

debemos asegurarnos que esta expresión tiene sentido; es necesario comprobar que $(1/g)(a+h)$ está definido para valores suficientemente pequeños de h. Para ello son necesarias solamente dos observaciones. Como g es, por hipótesis, diferenciable en a, se deduce del Teorema 9-1 que g es continua en a. Como $g(a) \neq 0$, deducimos también, a partir del Teorema 6-3, que existe un $\delta > 0$ tal que $g(a+h) \neq 0$ para $|h| < \delta$. Por tanto, $(1/g)(a+h)$ *tiene* sentido para valores de h suficientemente pequeños, y así podemos escribir

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(a+h) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{g(a+h)} - \dfrac{1}{g(a)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(a) - g(a+h)}{h[g(a)\cdot g(a+h)]} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-[g(a+h) - g(a)]}{h} \cdot \frac{1}{g(a)g(a+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-[g(a+h) - g(a)]}{h} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(a)\cdot g(a+h)} \\
&= -g'(a) \cdot \frac{1}{[g(a)]^2}.
\end{aligned}$$

(Observemos que hemos utilizado una vez más la continuidad de g en a.) ■

Ahora es fácil obtener la fórmula general de la derivada de un cociente. Aunque no es particularmente llamativa, es importante y debe simplemente memorizarse (yo siempre utilizo las *palabras mágicas*: "el denominador por la derivada del numerador, menos el numerador por la derivada del denominador, dividido por el cuadrado del denominador").

Teorema 8. *Si f y g son diferenciables en a y $g(a) \neq 0$, entonces f/g es diferenciable en a, y*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a)\cdot f'(a) - f(a)\cdot g'(a)}{[g(a)]^2}.$$

Demostración. Como $f/g = f\cdot(1/g)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(a)\\
&= f'(a)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)(a) + f(a)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'(a)\\
&= \frac{f'(a)}{g(a)} + \frac{f(a)(-g'(a))}{[g(a)]^2}\\
&= \frac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{[g(a)]^2}. \blacksquare
\end{aligned}$$

Ahora ya podemos diferenciar unas cuantas funciones más. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
&\text{si } f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}, &&\text{entonces } f'(x) = \frac{(x^2+1)(2x)-(x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2};\\
&\text{si } f(x) = \frac{x}{x^2+1}, &&\text{entonces } f'(x) = \frac{(x^2+1)-x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2};\\
&\text{si } f(x) = \frac{1}{x}, &&\text{entonces } f'(x) = -\frac{1}{x^2} = (-1)x^{-2}.
\end{aligned}$$

Observemos que el último ejemplo puede generalizarse: si

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \qquad \text{para algún número natural } n,$$

entonces

$$f'(x) = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = (-n)x^{-n-1};$$

así el Teorema 6 es válido tanto para enteros positivos como negativos. Si interpretamos $f(x) = x^0$ como $f(x) = 1$, y $f'(x) = 0\cdot x^{-1}$ como $f'(x) = 0$, entonces el Teorema 6 se verifica también para $n = 0$. (La palabra "interpretar" es necesaria ya que no está claro cómo debe definirse 0^0; en cualquier caso, $0\cdot 0^{-1}$ no tiene sentido.)

Para progresar más en la derivación es necesario conocer las derivadas de ciertas funciones especiales, que estudiaremos más adelante. Una de ellas es la función seno. Por el momento adelantamos la siguiente información y hacemos uso de ella sin demostraciones:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}'(a) &= \cos a \qquad \text{para todo } a, \\ \cos'(a) &= -\operatorname{sen} a \qquad \text{para todo } a, \end{aligned}$$

Esta información nos permite diferenciar muchas otras funciones. Por ejemplo, si

$$f(x) = x \operatorname{sen} x,$$

entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= x \cos x + \operatorname{sen} x, \\ f''(x) &= -x \operatorname{sen} x + \cos x + \cos x \\ &= -x \operatorname{sen} x + 2 \cos x; \end{aligned}$$

si

$$g(x) = \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x,$$

entonces

$$\begin{aligned} g'(x) &= \operatorname{sen} x \cdot \cos x + \cos x \cdot \operatorname{sen} x \\ &= 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x, \\ g''(x) &= 2[(\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x) + \cos x \cdot \cos x] \\ &= 2[\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x]; \end{aligned}$$

si

$$h(x) = \cos^2 x = \cos x \cdot \cos x,$$

entonces

$$\begin{aligned} h'(x) &= (\cos x)(-\operatorname{sen} x) + (-\operatorname{sen} x) \cos x \\ &= -2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x, \\ h''(x) &= -2[\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x]. \end{aligned}$$

Observemos que

$$g'(x) + h'(x) = 0,$$

lo que no es sorprendente, ya que $(g+h)(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. Como es de esperar, también se obtiene que $g''(x) + h''(x) = 0$.

Los ejemplos anteriores incluían sólo productos de dos funciones. Las funciones que contienen tres productos también se pueden diferenciar utilizando el Teorema 4; de hecho, se puede hacer de dos maneras. Recordemos que $f \cdot g \cdot h$ es una abreviación de

$$(f \cdot g) \cdot h \quad \text{o} \quad f \cdot (g \cdot h).$$

Eligiendo la primera expresión, por ejemplo, obtenemos

$$\begin{aligned}(f\cdot g\cdot h)'(x) &= (f\cdot g)'(x)\cdot h(x)+(f\cdot g)(x)h'(x)\\ &= [f'(x)g(x)+f(x)g'(x)]h(x)+f(x)g(x)h'(x)\\ &= f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x).\end{aligned}$$

Por supuesto, si hubiésemos elegido la segunda expresión $f\cdot(g\cdot h)$ hubiésemos obtenido el mismo resultado, con un paso intermedio diferente. La respuesta final es completamente simétrica y fácil de recordar:

> $(f\cdot g\cdot h)'$ es la suma de tres términos obtenidos derivando cada una de las funciones f, g y h y multiplicándola por las otras dos.

Por ejemplo, si

$$f(x)=x^3\operatorname{sen} x\cdot\cos x,$$

entonces

$$f'(x)=3x^2\operatorname{sen} x\cdot\cos x+x^3\cos x\cdot\cos x+x^3(\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x).$$

Los productos de más de tres funciones pueden ser tratados de una manera similar. Por ejemplo, el lector no debería tener dificultad para deducir la fórmula

$$\begin{aligned}(f\cdot g\cdot h\cdot k)'(x) = f'(x)g(x)h(x)k(x)+f(x)g'(x)h(x)k(x)\\ +f(x)g(x)h'(x)k(x)+f(x)g(x)h(x)k'(x).\end{aligned}$$

El lector podría incluso tratar de demostrar (por inducción) la fórmula general:

$$(f_1\cdot\ldots\cdot f_n)'(x)=\sum_{i=1}^{n} f_1(x)\cdot\ldots\cdot f_{i-1}(x)f_i'(x)f_{i+1}(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x).$$

Para poder derivar las funciones más interesantes, es necesario disponer de una fórmula para $(f\circ g)'(x)$ en términos de f' y g'. Para poder asegurar que $f\circ g$ es diferenciable en a, parece que una hipótesis razonable es que g sea diferenciable en a. Como el comportamiento de $f\circ g$ cerca de a depende del comportamiento de f cerca de $g(a)$ (no cerca de a), parece también razonable suponer que f sea diferenciable en $g(a)$. En efecto, vamos a demostrar que si g es diferenciable en a y f es diferenciable en $g(a)$, entonces $f\circ g$ es diferenciable en a, y

$$(f\circ g)'(a)=f'(g(a))\cdot g'(a).$$

Esta fórmula, extraordinariamente importante, se denomina la *Regla de la Cadena*, seguramente porque una composición de funciones podría considerarse una “cadena” de funciones. Observemos que $(f\circ g)'$ no es exactamente el producto de f' y g': f' ha de ser evaluada en $g(a)$ y g' en a. Antes de demostrar este teorema consideraremos unas pocas aplicaciones. Supongamos que

$$f(x)=\operatorname{sen} x^2.$$

Utilizaremos, de manera provisional, el símbolo S para representar la función ("elevar al cuadrado") $S(x) = x^2$. Entonces

$$f = \text{sen} \circ S.$$

Obtenemos por tanto

$$\begin{aligned} f'(x) &= \text{sen}'(S(x)) \cdot S'(x) \\ &= \cos x^2 \cdot 2x. \end{aligned}$$

Se obtiene un resultado completamente diferente si

$$f(x) = \text{sen}^2 x.$$

En este caso

$$f = S \circ \text{sen},$$

por tanto

$$\begin{aligned} f'(x) &= S'(\text{sen}\, x) \cdot \text{sen}'(x) \\ &= 2\,\text{sen}\, x \cdot \cos x. \end{aligned}$$

Observemos que este resultado coincide (tal como debe ser) con el que se obtendría al escribir $f = \text{sen} \cdot \text{sen}$ y utilizar la fórmula de la diferenciación de un producto.

Aunque hemos inventado el símbolo especial S para representar la función "elevar al cuadrado", no hace falta demasiada práctica para resolver problemas como el anterior sin tener que preocuparse de representar a las funciones componentes con símbolos especiales, e incluso sin tener que escribir la composición particular de funciones que definen a f; uno se acostumbra pronto a separar mentalmente a f en sus componentes. Las siguientes diferenciaciones pueden servir de práctica a esta gimnasia mental; si el lector considera necesario resolver algunas en un papel, no dude en hacerlo pero debería intentar desarrollar la costumbre de escribir f' inmediatamente después de ver la definición de f; los problemas de esta clase son tan sencillos que, con recordar la regla de la cadena, ya no hace falta pensar más.

$$\begin{array}{llll} \text{si } f(x) &= \text{sen}\, x^3 & \text{entonces } f'(x) &= \cos x^3 \cdot 3x^2 \\ f(x) &= \text{sen}^3 x & f'(x) &= 3\,\text{sen}^2 x \cdot \cos x \\ f(x) &= \text{sen}\, \dfrac{1}{x} & f'(x) &= \cos \dfrac{1}{x} \cdot \left(\dfrac{-1}{x^2}\right) \\ f(x) &= \text{sen}(\text{sen}\, x) & f'(x) &= \cos(\text{sen}\, x) \cdot \cos x \\ f(x) &= \text{sen}(x^3 + 3x^2) & f'(x) &= \cos(x^3 + 3x^2) \cdot (3x^2 + 6x) \\ f(x) &= (x^3 + 3x^2)^{53} & f'(x) &= 53(x^3 + 3x^2)^{52} \cdot (3x^2 + 6x). \end{array}$$

Una función como

$$f(x) = \text{sen}^2 x^2 = [\text{sen}\, x^2]^2,$$

que es la composición de tres funciones,

$$f = S \circ \operatorname{sen} \circ S,$$

también se puede derivar utilizando la regla de la cadena. Sólo es necesario recordar que una triple composición $f \circ g \circ h$ significa $(f \circ g) \circ h$ o $f \circ (g \circ h)$. Así, si

$$f(x) = \operatorname{sen}^2 x^2$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} f &= (S \circ \operatorname{sen}) \circ S, \\ f &= S \circ (\operatorname{sen} \circ S). \end{aligned}$$

Se puede hallar la derivada de cualquiera de las dos expresiones anteriores aplicando dos veces la regla de la cadena; la única duda está en si las dos expresiones nos conducen a cálculos igualmente sencillos. De hecho, como cualquier experto en derivación sabe, es mucho mejor utilizar la segunda expresión:

$$\boxed{f = S \circ (\operatorname{sen} \circ S).}$$

Ahora podemos calcular $f'(x)$ de una sola vez. Para empezar, observemos que la primera función que debe diferenciarse es S, de manera que la fórmula de $f'(x)$ debe comenzar por

$$f'(x) = 2(\qquad) \cdot \boxed{}\,.$$

Dentro del paréntesis debe escribirse $\operatorname{sen} x^2$, el valor de la segunda función $\operatorname{sen} \circ S$ en el punto x. De manera que comenzamos escribiendo

$$f'(x) = 2 \operatorname{sen} x^2 \cdot \boxed{}$$

(de hecho, los paréntesis no eran necesarios). Ahora debemos multiplicar está parte de la respuesta por la derivada de $\operatorname{sen} \circ S$ en el punto x; esta parte es fácil; incluye una composición de dos funciones, que ya sabemos resolver. Como respuesta final obtenemos,

$$f'(x) = 2 \operatorname{sen} x^2 \cdot \cos x^2 \cdot 2x.$$

En el siguiente ejemplo se procede de manera análoga. Supongamos que

$$\boxed{f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x^2).}$$

Incluso sin tomarse la molestia de escribir f como la composición de tres funciones $g \circ h \circ k$, vemos que la que se encuentra más a la izquierda es sen, por tanto la expresión para $f'(x)$ debe comenzar como

$$f'(x) = \cos(\qquad) \cdot \boxed{}\,.$$

Dentro del paréntesis debemos poner el valor de $h \circ k(x)$; éste es $\operatorname{sen} x^2$ (que es el que se obtiene de la expresión $\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x^2)$ eliminando el primer sen). Por tanto, nuestra expresión para $f'(x)$ comienza como

$$f'(x) = \cos(\operatorname{sen} x^2) \cdot \boxed{}\,.$$

Ahora podemos olvidarnos del primer sen en $\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x^2)$; hemos de multiplicar lo que hasta ahora tenemos por la derivada de la función cuyo valor en el punto x es $\operatorname{sen} x^2$, que es, nuevamente, un problema que ya sabemos resolver:

$$f'(x) = \cos(\operatorname{sen} x^2) \cdot \cos x^2 \cdot 2x.$$

Finalmente, he aquí las derivadas de algunas otras funciones que se expresan como la composición de sen y S, así como algunas otras composiciones triples. El lector puede simplemente "ver" que las respuestas son correctas y si no, puede intentar escribir f como una composición:

$$\begin{array}{rclcrcl}
\text{si } f(x) & = & \operatorname{sen}((\operatorname{sen} x)^2) & \text{entonces} & f'(x) & = & \cos((\operatorname{sen} x)^2) \cdot 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x \\
f(x) & = & [\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)]^2 & & f'(x) & = & 2 \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) \cdot \cos(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x \\
f(x) & = & \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)) & & f'(x) & = & \cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)) \cdot \cos(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x \\
f(x) & = & \operatorname{sen}^2(x \operatorname{sen} x) & & f'(x) & = & 2 \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} x) \cdot \cos(x \operatorname{sen} x) \\
 & & & & & & \qquad \cdot [\operatorname{sen} x + x \cos x] \\
f(x) & = & \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x^2 \operatorname{sen} x)) & & f'(x) & = & \cos(\operatorname{sen}(x^2 \operatorname{sen} x)) \cdot \cos(x^2 \operatorname{sen} x) \\
 & & & & & & \qquad \cdot [2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x].
\end{array}$$

La regla para derivar composiciones de cuatro (o incluso más) funciones es fácil: siempre deben colocarse (mentalmente) los paréntesis comenzando por la derecha,

$$f \circ (g \circ (h \circ k)),$$

y comenzar reduciendo los cálculos a la derivada de una composición de un número menor de funciones:

$$f'(g(h(k(x)))) \cdot \boxed{}\,.$$

Por ejemplo, si

$$f(x) = \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}^2(x)) \qquad \begin{aligned}[t] [f &= S \circ \operatorname{sen} \circ S \circ \operatorname{sen} \\ &= S \circ (\operatorname{sen} \circ (S \circ \operatorname{sen}))] \end{aligned}$$

entonces

$$f'(x) = 2 \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^2 x) \cdot \cos(\operatorname{sen}^2 x) \cdot 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x;$$

si

$$f(x) = \operatorname{sen}((\operatorname{sen} x^2)^2) \qquad \begin{aligned}[t] [f &= \operatorname{sen} \circ S \circ \operatorname{sen} \circ S \\ &= \operatorname{sen} \circ (S \circ (\operatorname{sen} \circ S))] \end{aligned}$$

entonces

$$f'(x) = \cos((\operatorname{sen} x^2)^2) \cdot 2 \operatorname{sen} x^2 \cdot \cos x^2 \cdot 2x;$$

si

$f(x) = \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$ [el lector puede escribir la expresión de la composición, si es necesario] entonces

$$f'(x) = 2\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)) \cdot \cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)) \cdot \cos(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x.$$

Con estos ejemplos de referencia, el lector sólo necesita una cosa más para llegar a ser un experto en derivadas: práctica, que puede ir adquiriendo con los ejercicios del final del capítulo. Después de todas estas consideraciones procedemos ya a demostrar la regla de la cadena.

El siguiente argumento, aunque no es una demostración, indica algunas de las estrategias que podrían intentarse, así como las dificultades que se presentan. Comenzamos, obviamente, aplicando la definición:

$$\begin{aligned}(f\circ g)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f\circ g)(a+h)-(f\circ g)(a)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h))-f(g(a))}{h}.\end{aligned}$$

En algún lugar de esta expresión debería aparecer la definición de $g'(a)$. Una manera de conseguirlo es ponerla por las buenas:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h))-f(g(a))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h))-f(g(a))}{g(a+h)-g(a)} \cdot \frac{g(a+h)-g(a)}{h}.$$

La expresión obtenida no tiene mal aspecto, e incluso mejora si escribimos

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0} \frac{(f\circ g)(a+h)-(f\circ g)(a)}{h}\\ &\quad = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a)+[g(a+h)-g(a)])-f(g(a))}{g(a+h)-g(a)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h}.\end{aligned}$$

El segundo límite es el factor $g'(a)$ que deseabamos obtener. Si hacemos $g(a+h)-g(a)=k$ (en rigor deberíamos poner $k(h)$), entonces el primer límite es

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(a)+k)-f(g(a))}{k}.$$

Parece que este límite debería ser $f'(g(a))$, ya que la continuidad de g en a implica que k tiende a 0 cuando lo hace h. De hecho, es posible precisar más este razonamiento, que es lo que vamos a hacer a continuación. Sin embargo, existe un problema que el lector cuidadoso con las divisiones ya habrá advertido. Incluso aunque $h \neq 0$ podría ser que $g(a+h)-g(a)=0$, y por tanto no tendría sentido multiplicar y dividir por $g(a+h)-g(a)$. La observación es cierta, ya que sólo nos interesamos por valores pequeños de h, pero $g(a+h)-g(a)$ podría ser 0 para valores de h arbitrariamente pequeños. La manera más fácil en la que esto puede ocurrir es en el caso en que g sea una función constante, $g(x)=c$, ya que entonces $g(a+h)-g(a)=0$ para todo h, y $f\circ g$ también es una función constante, $(f\circ g)(x)=f(c)$, de manera que se verifica la Regla de la Cadena:

$$(f\circ g)'(a) = 0 = f'(g(a))\cdot g'(a).$$

Ahora bien, existen funciones g que no son constantes para las que $g(a+h)-g(a)=0$ para valores arbitrariamente pequeños de h. Por ejemplo, si $a=0$, la función g podría ser

$$g(x)=\begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

En este caso, $g'(0)=0$, como demostramos en el Capítulo 9. Si la Regla de la Cadena es correcta, debe verificarse que $(f\circ g)'(0)=0$ para cualquier función diferenciable f, lo cual no es obvio. Puede obtenerse una demostración de la Regla de la Cadena considerando a estas funciones recalcitrantes separadamente, pero es más fácil abandonar este procedimiento y utilizar otra estrategia.

Teorema 9 (Regla de la Cadena). *Si g es diferenciable en a, y f es diferenciable en $g(a)$, entonces $f\circ g$ es diferenciable en a, y*

$$(f\circ g)'(a)=f'(g(a))\cdot g'(a).$$

Demostración. Definamos una función ϕ de la manera siguiente:

$$\phi(h)=\begin{cases} \dfrac{f(g(a+h))-f(g(a))}{g(a+h)-g(a)}, & \text{si } g(a+h)-g(a)\neq 0\\ f'(g(a)), & \text{si } g(a+h)-g(a)=0.\end{cases}$$

Se intuye fácilmente que ϕ es continua en 0: cuando h es pequeño, $g(a+h)-g(a)$ también es pequeño, de manera que si $g(a+h)-g(a)$ no es 0, entonces $\phi(h)$ se aproximará a $f'(g(a))$; y si es 0, entonces $\phi(h)$ es igual a $f'(g(a))$, lo que es mejor todavía. Ya que la continuidad de ϕ es el punto crucial de toda la demostración, vamos a desarrollar rigurosamente este argumento intuitivo.

Sabemos que f es diferenciable en $g(a)$. Esto significa que

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(g(a)+k)-f(g(a))}{k}=f'(g(a)).$$

Así, si $\varepsilon>0$ existe algún número $\delta'>0$ tal que, para todo k,

(6) $$\text{si } 0<|k|<\delta', \text{ entonces } \left|\frac{f(g(a)+k)-f(g(a))}{k}-f'(g(a))\right|<\varepsilon.$$

Pero g es diferenciable en a, y por tanto continua en a, de manera que existe un $\delta>0$ tal que, para todo h,

(7) $$\text{si } |h|<\delta, \text{ entonces } |g(a+h)-g(a)|<\delta'.$$

Consideremos ahora cualquier h con $|h|<\delta$. Si $k=g(a+h)-g(a)\neq 0$, entonces

$$\phi(h)=\frac{f(g(a+h))-f(g(a))}{g(a+h)-g(a)}=\frac{f(g(a)+k)-f(g(a))}{k};$$

se deduce de (2) que $|k| < \delta'$, y por tanto de (1) deducimos que

$$|\phi(h) - f'(g(a))| < \varepsilon.$$

Por otro lado, si $g(a+h) - g(a) = 0$, entonces $\phi(h) = f'(g(a))$, de manera que se verifica ciertamente que

$$|\phi(h) - f'(g(a))| < \varepsilon.$$

Por tanto hemos demostrado que

$$\lim_{h\to 0} \phi(h) = f'(g(a)),$$

o sea que ϕ es continua en 0. El resto de la demostración es fácil. Si $h \neq 0$, entonces tenemos

$$\frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} = \phi(h) \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

incluso aunque $g(a+h) - g(a) = 0$ (ya que en este caso ambos miembros de la igualdad son iguales a 0). Por tanto

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} = \lim_{h\to 0} \phi(h) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\ &= f'(g(a)) \cdot g'(a). \blacksquare \end{aligned}$$

Ahora que ya podemos derivar fácilmente tantas funciones, vamos a considerar nuevamente la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

En el Capítulo 9 demostramos que $f'(0) = 0$, utilizando directamente la definición (la única manera posible). Para $x \neq 0$ podemos utilizar los métodos de este capítulo. Tenemos

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right);$$

Por lo tanto

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Como indica la fórmula, la primera derivada f' tiene un comportamiento anómalo en **0**; no es ni siquiera continua en este punto. Si ahora consideramos la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

entonces

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}-x\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

En este caso f' es continua en 0, pero $f''(0)$ no existe (ya que la expresión $3x^2\operatorname{sen}1/x$ define a una función que es diferenciable en 0, pero no así la expresión $-x\cos 1/x$).

Como el lector ya habrá podido sospechar, incrementando la potencia de x se obtiene nuevamente una mejora. Si

$$f(x)=\begin{cases} x^4\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

entonces

$$f'(x)=\begin{cases} 4x^3\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}-x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Es fácil comprobar, a partir de la definición, que $(f')'(0)=0$, y $f''(x)$ para $x\neq 0$ es igual a:

$$f''(x)=\begin{cases} 12x^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}-4x\cos\dfrac{1}{x}-2x\cos\dfrac{1}{x}-\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

En este caso, la *segunda* derivada f'' no es continua en 0. El lector puede haber intuido ya la siguiente regla general, cuya demostración se propone en dos de los problemas del presente capítulo: si

$$f(x)=\begin{cases} x^{2n}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

entonces existen $f'(0),\dots,f^{(n)}(0)$, pero $f^{(n)}$ no es continua en 0; si

$$f(x)=\begin{cases} x^{2n+1}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

entonces existen $f'(0),\dots,f^{(n)}(0)$, y $f^{(n)}$ es continua en 0, pero $f^{(n)}$ no es diferenciable en 0. Estos ejemplos sugieren que las funciones "razonables" puede caracterizarse por poseer derivadas de orden superior; a pesar de intentar enmascarar la oscilación infinita de $f(x)=\operatorname{sen}1/x$, parece que siempre una derivada de orden suficientemente alto pondrá de manifiesto la irregularidad subyacente. Pero, por desgracia, veremos más adelante que pueden ocurrir cosas mucho peores.

Después de todos estos cálculos tan elaborados, vamos a concluir el capítulo con una pequeña observación. Muchas veces es tentador, y parece más elegante, escribir algunos de los teoremas de este capítulo como ecuaciones de funciones más que como ecuaciones de sus valores. Así, el Teorema 3 podría escribirse como

$$(f+g)' = f' + g',$$

el Teorema 4 podría escribirse como

$$(f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g,$$

y el Teorema 9 a menudo aparece en la forma

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'.$$

En rigor, estas ecuaciones pueden ser falsas ya que las funciones del lado izquierdo de la igualdad pueden tener un dominio más amplio que las del lado derecho. Sin embargo, no vale la pena preocuparse por ello. Si f y g son diferenciables en cualquier punto de sus dominios, estas ecuaciones y otras parecidas *son* ciertas, y éste es el único caso que interesa.

Problemas

1. Como ejercicio de precalentamiento, halle $f'(x)$ para cada una de las siguientes f. (No se preocupe por el dominio de f o de f'; obtenga tan sólo una fórmula para $f'(x)$ que dé la respuesta correcta cuando tenga sentido.)

(i) $f(x) = \operatorname{sen}(x+x^2)$.

(ii) $f(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x^2$.

(iii) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos x)$.

(iv) $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$.

(v) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\cos x}{x}\right)$.

(vi) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(\cos x)}{x}$.

(vii) $f(x) = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} x)$.

(viii) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(\operatorname{sen} x))$.

2. Halle $f'(x)$ para cada una de las siguientes funciones f. (El autor tardó 20 minutos en calcular las derivadas para la sección de soluciones, y al lector no debería costarle mucho más tiempo calcularlas. Aunque la rapidez en los cálculos no es un objetivo de las matemáticas, si se desea tratar con aplomo las aplicaciones teóricas de la Regla de la Cadena, estas aplicaciones concretas deberían ser un juego de niños; a los matemáticos les gusta hacer ver que ni siquiera saben sumar, pero la mayoría pueden hacerlo cuando lo necesitan.)

(i) $f(x) = \operatorname{sen}((x+1)^2(x+2))$.

(ii) $f(x) = \operatorname{sen}^3(x^2 + \operatorname{sen} x)$.

(iii) $f(x) = \operatorname{sen}^2((x + \operatorname{sen} x)^2)$.

(iv) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x^3}{\cos x^3}\right)$.

(v) $f(x) = \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} x) + \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x^2)$.

(vi) $f(x) = (\cos x)^{31^2}$.

(vii) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x^2 \operatorname{sen}^2 x^2$.

(viii) $f(x) = \operatorname{sen}^3(\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x))$.

(ix) $f(x) = (x + \operatorname{sen}^5 x)^6$.

(x) $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))))$.

(xi) $f(x) = \operatorname{sen}((\operatorname{sen}^7 x^7 + 1)^7)$.

(xii) $f(x) = (((x^2 + x)^3 + x)^4 + x)^5$.

(xiii) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2 + \operatorname{sen}(x^2 + \operatorname{sen} x^2))$.

(xiv) $f(x) = \operatorname{sen}(6\cos(6\operatorname{sen}(6\cos 6x)))$.

(xv) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x^2 \operatorname{sen}^2 x}{1 + \operatorname{sen} x}$.

(xvi) $f(x) = \dfrac{1}{x - \dfrac{2}{x + \operatorname{sen} x}}$.

(xvii) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)}\right)$.

(xviii) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x - \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x - \operatorname{sen} x}\right)}\right)$.

3. Halle las derivadas de las funciones tg, ctg, sec, cosec. (No es necesario memorizar estas fórmulas, aunque se necesitarán de vez en cuando; si se expresan las soluciones de manera correcta, resultan sencillas y algo simétricas.)

4. Para cada una de las siguientes funciones f, halle $f'(f(x))$ (*no* $(f \circ f)'(x)$).

(i) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$. (ii) $f(x) = \operatorname{sen} x$. (iii) $f(x) = x^2$. (iv) $f(x) = 17$.

5. Para cada una de las siguientes funciones f, halle $f(f'(x))$.

(i) $f(x) = \dfrac{1}{x}$. (ii) $f(x) = x^2$. (iii) $f(x) = 17$. (iv) $f(x) = 17x$.

6. Halle f' en función de g' si

(i) $f(x) = g(x + g(a))$. (ii) $f(x) = g(x \cdot g(a))$. (iii) $f(x) = g(x + g(x))$.
(iv) $f(x) = g(x)(x - a)$. (v) $f(x) = g(a)(x - a)$. (vi) $f(x+3) = g(x^2)$.

7. (a) Un objeto circular va aumentando de tamaño de manera no especificada, pero se sabe que cuando el radio es 6, la tasa de variación del mismo es 4. Halle la tasa de variación del área cuando el radio es 6. (Si $r(t)$ y $A(t)$ representan el radio y el área en el tiempo t, entonces las funciones r y A satisfacen $A = \pi r^2$; tan sólo es necesario aplicar directamente la Regla de la Cadena.)

(b) Suponga que el objeto circular que hemos estado observando es la sección transversal de un objeto esférico. Halle la tasa de variación del *volumen* cuando el radio es 6. (Es necesario conocer la fórmula del volumen de una esfera; en caso de que el lector la haya olvidado, el volumen es $\frac{4}{3}\pi$ veces el cubo del radio.)

(c) Suponga ahora que la tasa de variación del área de la sección transversal circular es 5 cuando el radio es 3. Halle la tasa de variación del volumen cuando el radio es 3. Este problema se puede resolver de dos maneras: primero, utilizando las fórmulas del área y el volumen en función del radio; y después expresando el volumen en función del área (para utilizar este método se necesita el Problema 9-3).

8. El área entre dos círculos concéntricos variables vale siempre $9\pi\,\text{cm}^2$. La tasa de cambio del área del círculo mayor es de $10\pi\,\text{cm}^2/\text{seg}$. ¿A qué velocidad varía la circunferencia del círculo pequeño cuando su área es de $16\pi\,\text{cm}^2$?

9. Una partícula A se desplaza a lo largo del eje horizontal positivo, y una partícula B a lo largo de la gráfica de $f(x) = -\sqrt{3}x$, $x \leq 0$. En un momento dado, A se encuentra en el punto $(5,0)$ y se desplaza a una velocidad de 3 unidades/seg; y B se encuentra a una distancia de 3 unidades del origen y se desplaza a una velocidad de 4 unidades/seg. ¿Cuál es la tasa de variación de la distancia entre A y B?

10. Sea $f(x) = x^2 \operatorname{sen} 1/x$ para $x \neq 0$, y $f(0) = 0$. Supongamos también que h y k son dos funciones tales que

$$\begin{aligned} h'(x) &= \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}(x+1)) \qquad & k'(x) &= f(x+1) \\ h(0) &= 3 & k(0) &= 0. \end{aligned}$$

Halle

(i) $(f \circ h)'(0)$.

(ii) $(k \circ f)'(0)$.

(iii) $\alpha'(x^2)$, donde $\alpha(x) = h(x^2)$. Ir con mucho cuidado en la resolución de este apartado.

11. Halle $f'(0)$ si

$$f(x) = \begin{cases} g(x) \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

y

$$g(0) = g'(0) = 0.$$

12. Utilizando la derivada de $f(x) = 1/x$, tal como se ha hallado en el Problema 9-1, calcule $(1/g)'(x)$ mediante la Regla de la Cadena.

13. (a) Aplicando el Problema 9-3, halle $f'(x)$ para $-1 < x < 1$, si $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

(b) Demuestre que la tangente a la gráfica de f en $(a, \sqrt{1-a^2})$ corta a la gráfica solamente en este punto (y así demuestre que la definición geométrica elemental de tangente coincide con la nuestra).

14. Demuestre análogamente que las tangentes a una elipse o a una hipérbola cortan a las gráficas correspondientes solamente una vez.

15. Si $f+g$ es diferenciable en a, ¿son f y g necesariamente diferenciables en a? Si $f \cdot g$ y f son diferenciables en a, ¿qué condiciones debe cumplir f para que g sea diferenciable en a?

16. (a) Demuestre que si f es diferenciable en a, entonces $|f|$ también es diferenciable en a, si $f(a) \neq 0$.

(b) Dé un contraejemplo si $f(a) = 0$.

(c) Demuestre que si f y g son diferenciables en a, entonces las funciones $\operatorname{máx}(f,g)$ y $\operatorname{mín}(f,g)$ son diferenciables en a, si $f(a) \neq g(a)$.

(d) Dé un contraejemplo si $f(a) = g(a)$.

17. Dé un ejemplo de funciones f y g tales que g toma todos los valores, y $f \circ g$ y g son diferenciables, pero f no es diferenciable. (El problema es trivial si no se exige que g tome todos los valores; en este caso g podría ser una función constante, o una función que sólo tomara valores de un intervalo (a,b), en cuyo caso el comportamiento de f fuera de (a,b) sería irrelevante.)

18. (a) Si $g = f^2$ halle una fórmula para g' (que incluya a f').

(b) Si $g = (f')^2$, halle una fórmula para g' (que incluya a f'').

(c) Suponga que la función $f > 0$ verifica que

$$(f')^2 = f + \frac{1}{f^3}.$$

Halle una fórmula para f'' en función de f. (En este apartado, además de cálculos sencillos, es necesario tener cuidado.)

19. Si f es tres veces diferenciable y $f'(x) \neq 0$, la *derivada de Schwarz* de f en x se define mediante

$$\mathscr{D}f(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2.$$

(a) Demuestre que

$$\mathscr{D}(f \circ g) = [\mathscr{D}f \circ g] \cdot g'^2 + \mathscr{D}g.$$

(b) Demuestre que si $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, con $ad - bc \neq 0$, entonces $\mathscr{D}f = 0$. Por consiguiente, $\mathscr{D}(f \circ g) = \mathscr{D}g$.

20. Suponga que existen $f^{(n)}(a)$ y $g^{(n)}(a)$. Demuestre la *fórmula de Leibniz*:

$$(f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) \cdot g^{(n-k)}(a).$$

***21.** Demuestre que si $f^{(n)}(g(a))$ y $g^{(n)}(a)$ existen ambas, entonces también existe $(f \circ g)^{(n)}(a)$. Con un poco de práctica el lector debería convencerse que no es sensato tratar de encontrar una fórmula para $(f \circ g)^{(n)}(a)$. Para demostrar que $(f \circ g)^{(n)}(a)$ existe, es necesario, por tanto, encontrar una proposición razonable acerca de $(f \circ g)^{(n)}(a)$ que pueda ser demostrada por inducción. Se puede intentar algo como: "existe $(f \circ g)^{(n)}(a)$ y es una suma de términos, cada uno de los cuales es un producto de términos de la forma ..."

22. (a) Si $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, halle una función g tal que $g' = f$. Encuentre otra.

(b) Si

$$f(x) = \frac{b_2}{x^2} + \frac{b_3}{x^3} + \cdots + \frac{b_m}{x^m},$$

halle una función g que verifique $g' = f$.

(c) ¿Existe una función

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_m}{x^m}$$

tal que $f'(x) = 1/x$?

23. Demuestre que existe una función polinómica f de grado n tal que

(a) $f'(x) = 0$ para exactamente $n-1$ números x.

(b) $f'(x) = 0$ para ningún x, si n es impar.

(c) $f'(x) = 0$ para exactamente un x, si n es par.

(d) $f'(x) = 0$ para exactamente k números x, si $n - k$ es impar.

24. (a) El número a se denomina una **raíz doble** de la función polinómica f si $f(x) = (x-a)^2 g(x)$ para alguna función polinómica g. Demuestre que a es una raíz doble de f si y sólo si a es una raíz de f y de f'.

(b) ¿Cuándo tiene $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ una raíz doble? ¿Cuál es la interpretación geométrica de esta condición?

25. Si f es diferenciable en a, sea $d(x) = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$. Halle $d'(a)$. En relación con el Problema 24, esto nos da otra solución para el Problema 9-20.

***26.** Este problema es parecido al Problema 3-6. Sean $a_1, \ldots, a_n$ y $b_1, \ldots, b_n$ números dados.

(a) Si $x_1, \ldots, x_n$ son números distintos, demuestre que existe una función polinómica f de grado $2n-1$, tal que $f(x_j) = f'(x_j) = 0$ para $j \neq i$, y $f(x_i) = a_i$ y $f'(x_i) = b_i$. Indicación: Recuerde el Problema 24.

(b) Demuestre que existe una función polinómica f de grado $2n-1$ con $f(x_i) = a_i$ y $f'(x_i) = b_i$ para todo i.

***27.** Suponga que a y b son dos raíces consecutivas de una función polinómica f, pero que a y b no son raíces dobles, de manera que podemos escribir $f(x) = (x-a)(x-b)g(x)$ donde $g(a) \neq 0$ y $g(b) \neq 0$.

(a) Demuestre que $g(a)$ y $g(b)$ tienen el mismo signo. (Recuerde que a y b son raíces consecutivas.)

(b) Demuestre que existe algún número x con $a < x < b$ y $f'(x) = 0$. (Dibuje un esquema para ilustrar este hecho.) Indicación: Compare el signo de $f'(a)$ y $f'(b)$.

(c) Demuestre ahora el mismo hecho, incluso si a y b son raíces múltiples. Indicación: Si $f(x) = (x-a)^m(x-b)^n g(x)$ donde $g(a) \neq 0$ y $g(b) \neq 0$, considere la función polinómica $h(x) = f'(x)/(x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1}$.

Este teorema fue demostrado por el matemático francés Rolle, en relación con el problema de la aproximación de raíces de polinomios, pero el resultado no se definió en un principio en términos de derivadas. De hecho, Rolle fue uno de los matemáticos que nunca aceptó las nuevas ideas del cálculo infinitesimal. Su actitud no debe juzgarse como demasiado obstinada, ya que durante un período de cien años nadie fue capaz de definir los límites en otros términos que no fueran los que lindaban con la mística, pero en general la historia ha sido particularmente benévola con Rolle; su nombre se ha vinculado con un resultado mucho más general que aparecerá en el próximo capítulo y que constituye la base de los resultados teóricos más importantes del cálculo infinitesimal.

28. Suponga que $f(x) = xg(x)$ para alguna función g que es continua en 0. Demuestre que f es diferenciable en 0, y halle $f'(0)$ en función de g.

29. Suponga que f es diferenciable en 0, y que $f(0) = 0$. Demuestre que $f(x) = xg(x)$ para alguna función g continua en 0. Indicación: ¿Qué ocurre si intenta escribir $g(x) = f(x)/x$?

30. Si $f(x) = x^{-n}$ para n en $\mathbf{N}$, demuestre que

$$
\begin{aligned}
f^{(k)}(x) &= (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} x^{-n-k} \\
&= (-1)^k k! \binom{n+k-1}{k} x^{-n-k}, \qquad \text{para } x \neq 0.
\end{aligned}
$$

***31.** Demuestre que es imposible expresar $x = f(x)g(x)$ donde f y g son diferenciables y $f(0) = g(0) = 0$. Indicación: Derive.

32. ¿Qué es $f^{(k)}(x)$ si

(a) $f(x) = 1/(x-a)^n$?

*(b) $f(x) = 1/(x^2-1)$?

***33.** Sea $f(x) = x^{2n} \operatorname{sen} 1/x$ si $x \neq 0$, y $f(0) = 0$. Demuestre que existe $f'(0), \ldots, f^{(n)}(0)$ y que $f^{(n)}$ no es continua en 0. (Se encontrará la misma dificultad básica que en el Problema 21.)

***34.** Sea $f(x) = x^{2n+1} \operatorname{sen} 1/x$ si $x \neq 0$, y $f(0) = 0$. Demuestre que existe $f'(0), \ldots, f^{(n)}(0)$, que $f^{(n)}$ es continua en 0, y que $f^{(n)}$ no es diferenciable en 0.

35. Con la notación de Leibniz la Regla de la Cadena debería escribirse:

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \left.\frac{df(y)}{dy}\right|_{y=g(x)} \cdot \frac{dg(x)}{dx}.$$

En vez de esto, se suele encontrar generalmente la siguiente proposición: “Sea $y = g(x)$ y $z = f(y)$. Entonces

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.\text{”}$$

Observe que z en dz/dx denota la función compuesta $f \circ g$, mientras que la z de dz/dy denota la función f; se sobreentiende también que dz/dy será “una expresión que incluye y” y que en la solución final $g(x)$ debe sustituirse por y. En cada uno de los siguientes casos halle dz/dx aplicando esta fórmula; después compare el resultado con el del Problema 1.

(i) $z = \operatorname{sen} y, \quad y = x + x^2.$

(ii) $z = \operatorname{sen} y, \quad y = \cos x.$

(iii) $z = \operatorname{sen} u, \quad u = \operatorname{sen} x.$

(iv) $z = \operatorname{sen} v, \quad v = \cos u, \quad u = \operatorname{sen} x.$

Significado de la derivada

11

El objetivo de este capítulo va a ser justificar el tiempo que hemos empleado aprendiendo a calcular la derivada de una función. Como veremos, conociendo tan sólo un poco acerca de f' nos permite decir mucho acerca de f. Sin embargo, no es tarea fácil extraer información sobre f a partir de la información sobre f'; comenzaremos nuestro estudio con un teorema sencillo sobre el valor máximo de una función en un intervalo. Aunque ya hemos utilizado este término, de manera informal, en el Capítulo 7, vale la pena precisarlo y generalizarlo.

Definición

Sea f una función y A un conjunto de números contenido en el dominio de f. Un punto x de A es un **punto máximo** de f en A si

$$f(x) \geq f(y) \quad \text{para todo } y \text{ de } A.$$

El número $f(x)$ se denomina el **valor máximo** de f en A (y también diremos que f "alcanza su valor máximo en el punto x de A").

Observemos que $f(x)$ podría ser el valor máximo de f en A para distintos x (Figura 1); en otras palabras, una función f puede tener distintos puntos máximos en A, aunque, a lo sumo, un valor máximo. En general, nos interesará el caso en que A es un intervalo cerrado $[a, b]$; si f es continua, entonces el Teorema 7-3 garantiza que f alcanza realmente dicho valor máximo en $[a, b]$.

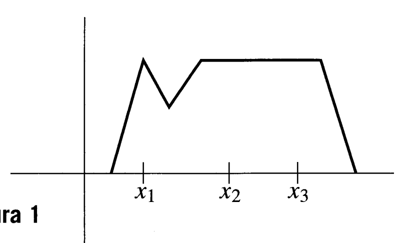


Figura 1

La definición de mínimo de f en A se deja para el lector. (Una posible definición es la siguiente: f tiene un mínimo en el punto x de A si $-f$ tiene un máximo en el punto x de A.)

Ahora ya estamos en condiciones para enunciar un teorema que ni siquiera depende de la existencia de cotas superiores mínimas.

Teorema 1. *Sea f cualquier función definida en (a, b). Si x es un punto máximo (o mínimo) de f en (a, b) y f es diferenciable en x, entonces $f'(x) = 0$.*
(Observemos que no hemos supuesto la diferenciabilidad, ni siquiera la continuidad, de f en otros puntos.)

Demostración. Consideremos el caso en que f tiene un máximo en x. En la Figura 2 se ilustra la idea sencilla subyacente a todo el argumento; las secantes trazadas por los puntos situados a la izquierda de $(x, f(x))$ tienen pendientes ≥ 0, y las secantes trazadas por puntos situados a la derecha de $(x, f(x))$ tienen pendientes ≤ 0. Analíticamente, este argumento se expresa de la manera siguiente.

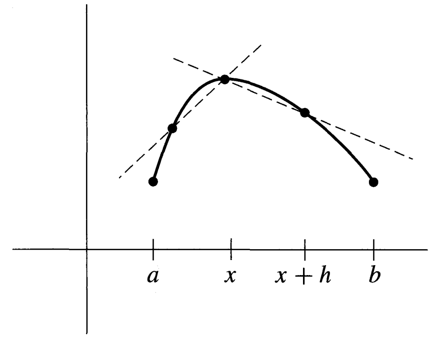


Figura 2

Si h es cualquier número tal que $x+h$ pertenece a (a, b), entonces

$$f(x) \geq f(x+h),$$

ya que f tiene un máximo en el punto x de (a, b). Esto significa que

$$f(x+h) - f(x) \leq 0.$$

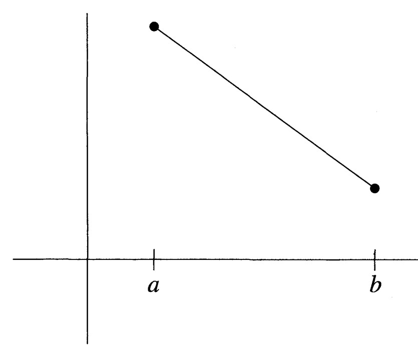


Figura 3

De manera que, si $h > 0$ tenemos

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq 0,$$

y por tanto

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq 0,$$

Por otra parte, si $h < 0$, tenemos

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0,$$

o sea

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Por hipótesis, f es diferenciable en x, de manera que ambos límites deben ser iguales (de hecho, iguales a $f'(x)$). Esto significa que

$$f'(x) \leq 0 \quad \text{y} \quad f'(x) \geq 0,$$

de lo cual se deduce que $f'(x) = 0$.

El caso en el que f tiene un mínimo en el punto x se deja para el lector (dar una demostración que no ocupe más de una línea). ■

Observemos (Figura 3) que no se puede sustituir (a, b) por $[a, b]$ en el enunciado del teorema (a no ser que se añada a la hipótesis la condición de que x pertenezca a (a, b)).

Como $f'(x)$ depende solamente de los valores de f próximos a x, es casi obvio cómo puede obtenerse una versión más fuerte del Teorema 1. Comenzaremos con una definición que se ilustra en la Figura 4.

Definición

Sea f una función, y A un conjunto de números contenido en el dominio de f. Un punto x de A es un **punto máximo [mínimo] local** de f en A si existe algún $\delta > 0$ tal que x es un punto máximo [mínimo] de f en $A \cap (x-\delta, x+\delta)$.

Teorema 2. *Si x es un máximo o mínimo local de f en (a,b) y f es diferenciable en x, entonces $f'(x) = 0$.*

Demostración. Se trata de una aplicación sencilla del Teorema 1. ■

Claramente, el recíproco del Teorema 2 no es cierto; es posible que $f'(x)$ valga 0 aunque x no sea un punto máximo o mínimo local de f. El ejemplo más sencillo lo proporciona la función $f(x) = x^3$; en este caso $f'(0) = 0$, pero f no posee ningún máximo o mínimo local en todo su dominio.

En lo que se refiere al cálculo infinitesimal, uno de los errores más comunes que se suelen cometer tiene relación con el comportamiento de una función f cerca de x cuando $f'(x) = 0$. La observación del párrafo anterior se olvida tan fácilmente por aquellos que desean que las cosas sean más sencillas de lo que en realidad son, que vamos a repetirla: el recíproco del Teorema 2 es *falso*; la condición $f'(x) = 0$ *no* implica que x sea un punto máximo o mínimo local de f. Precisamente por esta razón, se ha adoptado una terminología especial para describir a aquellos números x que satisfacen la condición $f'(x) = 0$.

Definición

Un **punto crítico** de una función f es un número x tal que

$$f'(x) = 0.$$

Al número $f(x)$ se le denomina **valor crítico** de f.

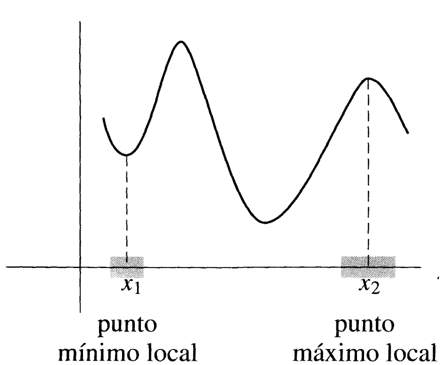


Figura 4

Los valores críticos de f, junto con algunos otros números, son los que deben tenerse en cuenta para hallar el valor máximo y mínimo de una función dada f. Para los no iniciados, el problema de hallar el valor máximo y mínimo de una función constituye uno de los aspectos más intrigantes del cálculo, y hay que reconocer que los problemas de este tipo son divertidos (hasta que se ha hecho el primer centenar).

Consideremos en primer lugar el problema de hallar el máximo o el mínimo de f en un intervalo cerrado $[a,b]$. (En este caso, si f es continua, sabemos que dicho valor máximo y mínimo debe existir.) Para localizarlos, deben considerarse tres clases de puntos:

(1) Los puntos críticos de f en $[a,b]$.
(2) Los puntos extremos a y b.
(3) Aquellos puntos x de $[a,b]$ tales que f no es diferenciable en x.

Si x es un punto máximo o mínimo de f en $[a, b]$, entonces x debe pertenecer a una de las tres clases anteriores: ya que si x no pertenece ni al segundo ni al tercer grupo, entonces debe forzosamente pertenecer al primero ya que en este caso x *pertenece* a (a, b) y f *es* diferenciable en x; según el Teorema 1, $f'(x) = 0$, lo que significa que x pertenece al primer grupo.

Si existen muchos puntos en cada una de estas tres categorías, el problema de hallar el máximo y el mínimo de f puede ser todavía una ardua tarea, pero cuando sólo existen unos pocos puntos críticos y unos pocos puntos en los que f no es diferenciable, el método de cálculo es muy sencillo: se trata de hallar $f(x)$ para cada x que satisface $f'(x) = 0$, y $f(x)$ para cada x tal que f no es diferenciable en x y, por último, $f(a)$ y $f(b)$. El mayor de estos números debe ser el valor máximo de f, y el menor el valor mínimo. A continuación, vamos a ilustrar este método de cálculo con un ejemplo sencillo.

Supongamos que se desea hallar el valor máximo y mínimo de la función

$$f(x) = x^3 - x$$

en el intervalo $[-1, 2]$. Para empezar, observemos que

$$f'(x) = 3x^2 - 1,$$

por lo tanto $f'(x) = 0$ cuando $3x^2 - 1 = 0$, es decir, cuando

$$x = \sqrt{1/3} \quad \text{o} \quad -\sqrt{1/3}.$$

Ambos números $\sqrt{1/3}$ y $-\sqrt{1/3}$ pertenecen al intervalo $[-1, 2]$, de manera que el primer grupo de candidatos para localizar el máximo y el mínimo es

$$(1) \quad \sqrt{1/3},\ -\sqrt{1/3}.$$

El segundo grupo incluye a los extremos del intervalo,

$$(2) \quad -1,\ 2.$$

El tercer grupo es vacío, ya que f es diferenciable en todas partes. El paso final consiste en calcular

$$\begin{aligned}
f(\sqrt{1/3}) &= (\sqrt{1/3})^3 - \sqrt{1/3} = \tfrac{1}{3}\sqrt{1/3} - \sqrt{1/3} = -\tfrac{2}{3}\sqrt{1/3},\\
f(-\sqrt{1/3}) &= (-\sqrt{1/3})^3 - (-\sqrt{1/3}) = -\tfrac{1}{3}\sqrt{1/3} + \sqrt{1/3} = \tfrac{2}{3}\sqrt{1/3},\\
f(-1) &= 0,\\
f(2) &= 6.
\end{aligned}$$

Evidentemente el valor mínimo es $-\frac{2}{3}\sqrt{1/3}$, que se presenta en el punto $\sqrt{1/3}$, y el valor máximo es 6, en el punto 2.

Cuando el método es factible, siempre permite localizar el valor máximo y mínimo de una función continua en un intervalo cerrado. Aunque, si la función considerada no es continua, o si se busca el máximo o el mínimo en un intervalo abierto o en toda la recta real, entonces ni siquiera puede asegurarse de antemano que los valores máximo

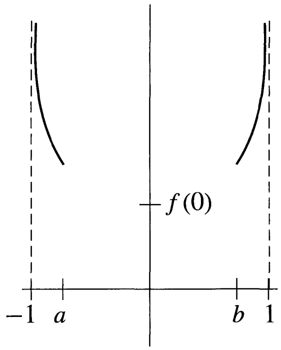


Figura 5

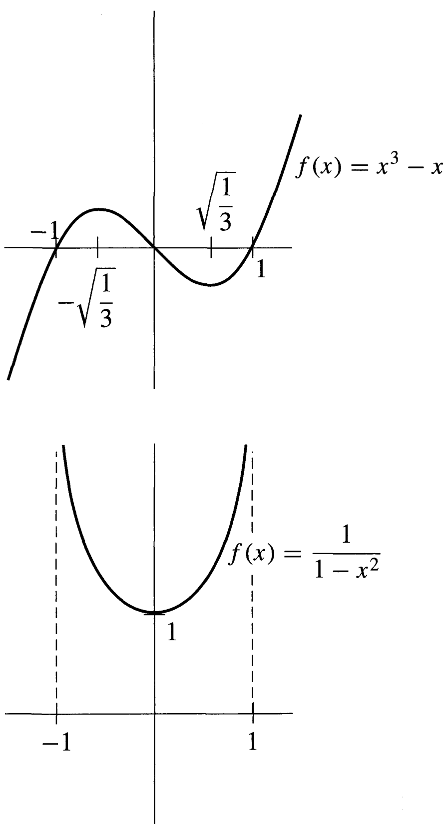


Figura 6

y mínimo existan, de manera que toda la información obtenida mediante este procedimiento puede ser en vano. Sin embargo, con un poco de ingenio a menudo se puede revelar la naturaleza de las cosas. En el Capítulo 7 ya resolvimos un problema de este tipo cuando demostramos que si n es par, la función

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

tiene un valor mínimo en toda la recta real. Esto demuestra que dicho valor mínimo debe presentarse en un determinado valor x que satisface

$$0 = f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1.$$

Dicho valor mínimo se puede encontrar resolviendo la ecuación, si es posible, y comparando los valores de $f(x)$ en dichos x. Un ejemplo más puede ser útil. Supongamos que se desea encontrar el máximo y el mínimo, si es que existen, de la función

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

en el intervalo abierto $(-1,1)$. Se tiene

$$f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2},$$

por tanto $f'(x) = 0$ únicamente en el punto $x = 0$. Se puede comprobar inmediatamente que para valores de x próximos a 1 o -1 los valores de $f(x)$ se hacen arbitrariamente grandes, de manera que f carece ciertamente de un máximo. Esta observación permite demostrar fácilmente que f tiene un mínimo en 0. Observemos (Figura 5) que existen números a y b con

$$-1 < a < 0 \quad \text{y} \quad 0 < b < 1,$$

tales que $f(x) > f(0)$ para

$$-1 < x \leq a \quad \text{y} \quad b \leq x < 1.$$

Esto significa que el mínimo de f en $[a, b]$ es el mínimo de f en todo el intervalo $(-1, 1)$. Pero en $[a, b]$, el mínimo se presenta o bien en 0 (el único en el que $f' = 0$), o bien en a o en b, pero a y b ya han sido descartados, de manera que el valor mínimo de la función es $f(0) = 1$.

Al resolver estos problemas no hemos dibujado, deliberadamente, las gráficas de $f(x) = x^3 - x$ y $f(x) = 1/(1-x^2)$, aunque se puede hacer (Figura 6) siempre y cuando no se confíe exclusivamente en el dibujo a la hora de demostrar algo. Precisamente, vamos a describir a continuación un método para dibujar la gráfica de una función que proporciona suficiente información para localizar máximos y mínimos; incluso máximos y mínimos *locales*. Este método requiere considerar el signo de $f'(x)$, y se basa en algunos teoremas importantes.

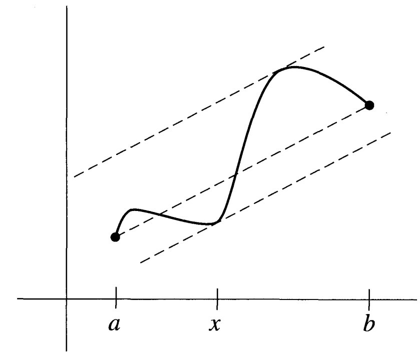


Figura 7

Los teoremas de derivación demostrados hasta ahora siempre proporcionan información acerca de f' en términos de información acerca de f. Esto es así, incluso en el caso del Teorema 1, aunque este teorema puede utilizarse algunas veces para obtener cierta información sobre f, concretamente la localización de los máximos y mínimos. Al introducir el concepto de derivada, se insistió en el hecho de que $f'(x)$ no es igual a $[f(x+h)-f(x)]/h$ para ningún h en particular, sino únicamente el límite de esta expresión cuando h tiende a 0; este hecho se pone de manifiesto de manera particularmente clara cuando se intenta extraer información acerca de f a partir de información acerca de f', tal como se ilustra en la siguiente cuestión: si $f'(x)=0$ para todo x, ¿ha de ser f una función constante? Es imposible imaginar qué otra cosa podría ser f, y este convencimiento se refuerza al considerar la interpretación física; si la velocidad de una partícula siempre es 0, evidentemente la partícula debe estar en reposo. Sin embargo, es difícil incluso esbozar una demostración de que únicamente las funciones constantes satisfacen $f'(x)=0$ para todo x. La hipótesis $f'(x)=0$ significa tan sólo que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0,$$

y no está claro en absoluto cómo se puede utilizar esta información acerca del límite para obtener información acerca de la función. El hecho de que f sea una función constante si $f'(x)=0$ para todo x, y muchas otras propiedades del mismo tipo, pueden deducirse a partir de un teorema fundamental denominado el Teorema del Valor Medio, el cual permite deducir resultados mucho más fuertes. La Figura 7 permite intuir que si f es diferenciable en $[a,b]$, entonces existe algún x en (a,b) tal que

$$f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Geométricamente, esto significa que alguna recta tangente es paralela a la recta que une $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$. El Teorema del Valor Medio afirma que esto es cierto; existe algún x en (a,b) tal que $f'(x)$, la tasa instantánea de variación de f en x, es exactamente igual a la variación "media" de f en $[a,b]$, siendo esta variación media $[f(b)-f(a)]/[b-a]$. (Por ejemplo, si recorremos 60 millas en una hora, entonces en algún momento habremos estado viajando exactamente a 60 millas por hora.) Este teorema es uno de los instrumentos teóricos más importantes del cálculo infinitesimal; probablemente el resultado más relevante de todo el tema de derivación. El lector podría deducir, de esta observación, que la demostración del Teorema del Valor Medio es difícil, pero no es así; los teoremas fuertes (difíciles) de este libro ya se consideraron en el Capítulo 7. Es cierto que si el lector intenta demostrar el Teorema del Valor Medio por sí mismo, probablemente fracasará en su intento, pero esto no quiere decir ni que el Teorema sea difícil, ni que el lector deba avergonzarse de no haberlo conseguido.

La primera demostración que se dio del Teorema constituyó una hazaña, pero actualmente se puede dar una demostración muy sencilla. Para ello es útil comenzar con un caso particular.

Teorema 3 (Teorema de Rolle). *Si f es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), y $f(a) = f(b)$, entonces existe un número x en (a, b) tal que $f'(x) = 0$.*

Demostración. A partir de la continuidad de f en $[a, b]$ deducimos que f tiene un valor máximo y un valor mínimo en $[a, b]$. Supongamos primero que el valor máximo se presenta en un punto x de (a, b). Entonces $f'(x) = 0$ según el Teorema 1, y la demostración queda completada (Figura 8). Supongamos ahora que el valor mínimo de f se presenta en algún punto x de (a, b). Entonces, de nuevo $f'(x) = 0$ según el Teorema 1 (Figura 9). Finalmente, supongamos que los valores máximo y mínimo se presentan ambos en los extremos del intervalo. Como $f(a) = f(b)$, dichos valores coinciden, de manera que f es una función constante (Figura 10), y en este caso se puede elegir cualquier valor x de (a, b). ■

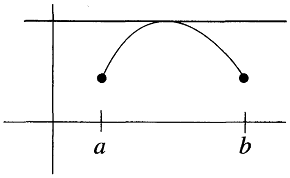


Figura 8

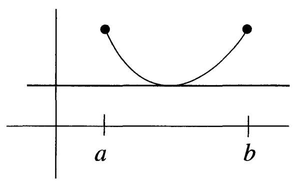


Figura 9

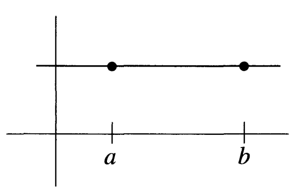


Figura 10

Observemos que era realmente necesario suponer que f es diferenciable en todo punto de (a, b) para poder aplicar el Teorema 1. Sin esta suposición, el teorema es falso (Figura 11).

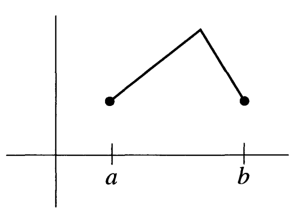


Figura 11

El lector podría preguntarse porqué se asigna un nombre especial a un teorema tan fácil de demostrar como el Teorema de Rolle. La razón es que, aunque el Teorema de Rolle es un caso particular del Teorema del Valor Medio, también permite obtener una demostración sencilla de este último. Para demostrar el Teorema del Valor Medio aplicaremos el Teorema de Rolle a la función que representa la longitud del segmento vertical que se muestra en la Figura 12; dicha longitud viene dada por la diferencia entre $f(x)$ y la altura en x de la recta L que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Como L es la gráfica de

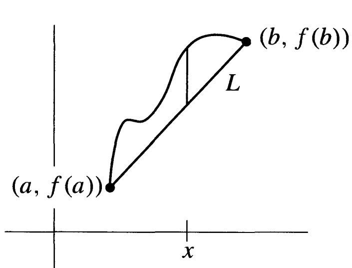


Figura 12

$$g(x) = \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a) + f(a),$$

debemos considerar la función

$$f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a) - f(a).$$

Como veremos, la constante $f(a)$ es irrelevante.

Teorema 4 (Teorema del Valor Medio). *Si f es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), existe un número x en (a, b) tal que*

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demostración. Sea

$$h(x) = f(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](x-a).$$

Evidentemente, h es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), y

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a), \\ h(b) &= f(b) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](b-a) \\ &= f(a). \end{aligned}$$

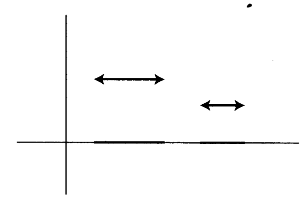


Figura 13

Por lo tanto, se puede aplicar el Teorema de Rolle a la función h y deducir que existe algún x en (a, b) tal que

$$0 = h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

de modo que

$$f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \blacksquare$$

Observemos que el Teorema del Valor Medio todavía se incluye en el modelo de los teoremas anteriores: la información acerca de f proporciona información acerca de f'. Sin embargo, esta información es tan potente que ahora si que es posible ir en la otra dirección.

Corolario 1. *Si f está definida en un intervalo y $f'(x) = 0$ en todo x del intervalo, entonces f es constante en dicho intervalo.*

Demostración. Sean a y b dos puntos del intervalo con $a \neq b$. Entonces existe algún x de (a, b) tal que

$$f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Pero $f'(x) = 0$ para todo x del intervalo, por tanto

$$0 = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

y por consiguiente $f(a) = f(b)$. Así pues, el valor de f en dos puntos cualesquiera del intervalo es el mismo, lo cual significa que f es constante en el intervalo. ■

Naturalmente, el corolario 1 no se verifica en el caso de funciones definidas en dos o más intervalos (Figura 13).

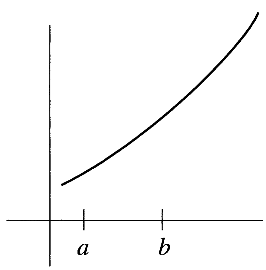
Corolario 2. *Si f y g estan definidas en el mismo intervalo y $f'(x) = g'(x)$ para todo x del intervalo, entonces existe algún número c tal que $f = g + c$.*

Demostración. Para todo x del intervalo se verifica que $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, de manera que, según el corolario 1, existe un número c tal que $f - g = c$. ■

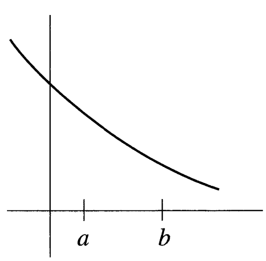
La proposición del corolario siguiente exige alguna terminología que se ilustra en la Figura 14.

Definición

Una función es **creciente** en un intervalo si $f(a) < f(b)$ siendo a y b dos números del intervalo con $a < b$. La función f es **decreciente** en un intervalo si $f(a) > f(b)$ para todo a y b del intervalo con $a < b$. (A menudo se dice simplemente que f es creciente o decreciente, en cuyo caso se deduce que el intervalo es el dominio de f.)



(a) función creciente



(b) función decreciente

Figura 14

Corolario 3. *Si $f'(x) > 0$ para todo x de un intervalo, entonces f es creciente en dicho intervalo; si $f'(x) < 0$ para todo x del intervalo, entonces f es decreciente en dicho intervalo.*

Demostración. Consideremos el caso en que $f'(x) > 0$. Sean a y b dos puntos del intervalo con $a < b$. Entonces existe algún punto x en (a, b) que verifica

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Pero $f'(x) > 0$ para todo x de (a, b), por tanto

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0.$$

Como $b - a > 0$ se deduce que $f(b) > f(a)$.

La demostración en el caso que $f'(x) < 0$ para todo x se deja como ejercicio para el lector. ■

Observemos que aunque los recíprocos de los corolarios 1 y 2 son ciertos (y obvios), el recíproco del corolario 3 no es cierto. Si f es creciente, es fácil ver que $f'(x) \geq 0$ para todo x, pero podría verificarse el signo de igualdad para algún x (considérese $f(x) = x^3$).

El Corolario 3 proporciona suficiente información para tener una idea bastante aproximada de la gráfica de una función trazando el menor número posible de puntos. Consideremos, una vez más, la función $f(x) = x^3 - x$. Se verifica que

$$f'(x) = 3x^2 - 1.$$

Ya hemos observado que $f'(x) = 0$ para $x = \sqrt{1/3}$ y $x = -\sqrt{1/3}$, y es posible también determinar el signo de $f'(x)$ para todos los demás x. Observemos que $3x^2 - 1 > 0$ precisamente cuando

$$\begin{aligned} 3x^2 &> 1 \\ x^2 &> \tfrac{1}{3}, \\ x > \sqrt{1/3} \quad &\text{o} \quad x < -\sqrt{1/3}; \end{aligned}$$

de manera que $3x^2 - 1 < 0$ precisamente cuando

$$-\sqrt{1/3} < x < \sqrt{1/3}.$$

Así f es creciente para $x < -\sqrt{1/3}$, decreciente entre $-\sqrt{1/3}$ y $\sqrt{1/3}$ y nuevamente creciente para $x > \sqrt{1/3}$. Combinando esta información con los siguientes hechos

(1) $f(-\sqrt{1/3}) = \frac{2}{3}\sqrt{1/3}$, $f(\sqrt{1/3}) = -\frac{2}{3}\sqrt{1/3}$,
(2) $f(x) = 0$ para $x = -1, 0, 1$,
(3) $f(x)$ se hace grande con x, y grande negativo cuando x es grande negativo,

es posible obtener una buena aproximación de la gráfica de la función (Figura 15).

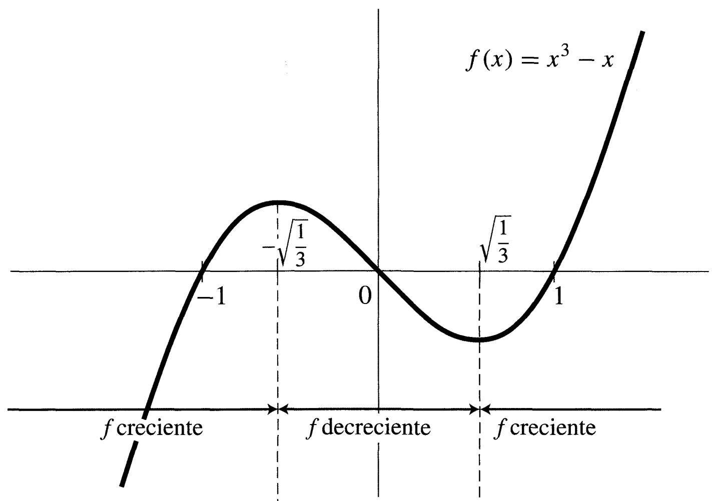


Figura 15

Por cierto, observemos que los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f se han obtenido sin necesidad de examinar el signo de f'. Por ejemplo, ya que f' es continua, y se anula únicamente en $-\sqrt{1/3}$ y $\sqrt{1/3}$, sabemos que f' siempre tiene el mismo signo en el intervalo $(-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3})$. Como $f(-\sqrt{1/3}) > f(\sqrt{1/3})$, deducimos que f es decreciente en este intervalo. Análogamente, f' siempre tiene el mismo signo en $(\sqrt{1/3}, \infty)$ y $f(x)$ es grande para valores grandes de x, de manera que f ha de ser creciente en $(\sqrt{1/3}, \infty)$. Otra propiedad que vale la pena destacar es que si f' es continua, entonces el signo de f' en el intervalo entre dos puntos críticos adyacentes, puede determinarse simplemente hallando el signo de $f'(x)$ para *cualquier* x de dicho intervalo.

El esbozo de la gráfica que hemos hecho de $f(x) = x^3 - x$ contiene suficiente información como para poder afirmar con seguridad que $-\sqrt{1/3}$ es un punto máximo local, y que $\sqrt{1/3}$ es un mínimo local. De hecho, podemos dar un esquema general para decidir si un punto crítico es un máximo local, un mínimo local o ninguna de las dos cosas (Figura 16):

(1) Si $f' > 0$ en algún intervalo a la izquierda de x y $f' < 0$ en algún intervalo a la derecha de x, entonces x es un punto máximo local.

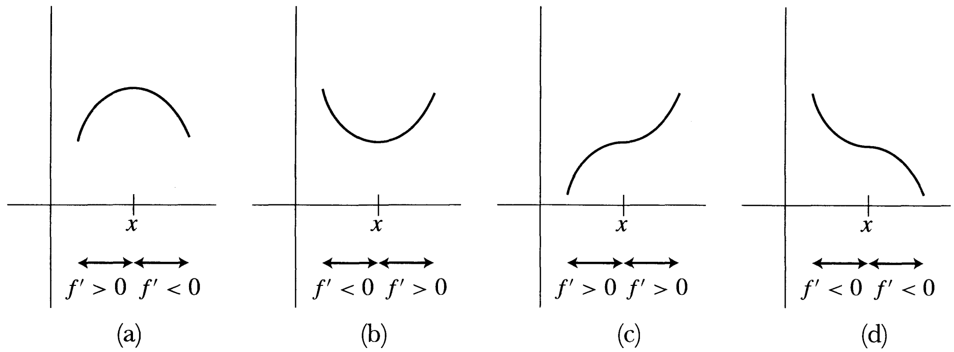


Figura 16

(2) Si $f' < 0$ en algún intervalo a la izquierda de x y $f' > 0$ en algún intervalo a la derecha de x, entonces x es un punto mínimo local.

(3) Si f' tiene el mismo signo en algún intervalo a la izquierda de x que en algún intervalo a la derecha, entonces x no es ningún punto máximo ni mínimo local.

(No hace falta memorizar estas reglas; siempre se puede hacer el dibujo.)

Las funciones polinómicas se pueden analizar siempre mediante este método, e incluso es posible describir la forma general de la gráfica de dichas funciones.

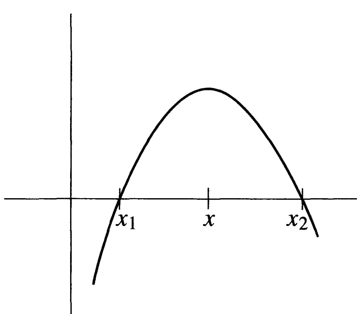


Figura 17

Para empezar, se necesita un resultado que ya mencionamos en el Problema 3-7: si

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

entonces f tiene a lo sumo n "raíces," es decir, existen como máximo n números x tales que $f(x) = 0$. Aunque éste es un teorema algebraico, es posible utilizar el cálculo infinitesimal para dar una demostración sencilla. Observemos que si x_1 y x_2 son raíces de f (Figura 17), es decir, si $f(x_1) = f(x_2) = 0$, entonces por el Teorema de Rolle existe un número x entre x_1 y x_2 tal que $f'(x) = 0$. Esto significa que si f tiene k raíces diferentes $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$, entonces f' tiene al menos $k-1$ raíces diferentes: una entre x_1 y x_2, una entre x_2 y x_3, etc. Ahora es fácil demostrar por inducción que una función polinómica

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

tiene a lo sumo n raíces: la afirmación es cierta, evidentemente, para $n = 1$, y si suponemos que es cierta para n, entonces el polinomio

$$g(x) = b_{n+1}x^{n+1} + b_n x^n + \cdots + b_0$$

no puede tener más de $n+1$ raíces, ya que si así fuera entonces g' tendría más de n raíces.

Con esta información no es difícil describir la gráfica de

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Al ser la derivada una función polinómica de grado $n-1$, posee a lo sumo $n-1$ raíces. Por tanto, f posee a lo sumo $n-1$ puntos críticos. Por supuesto, un punto crítico no es necesariamente un punto máximo o mínimo local, pero en cualquier caso, si a y b son puntos críticos adyacentes de f, entonces f' será positiva o negativa en (a, b), ya que f' es continua; por consiguiente, f será creciente o decreciente en (a, b). Así, f posee a lo sumo n regiones de crecimiento o decrecimiento.

Como ejemplo concreto, consideremos la función

$$f(x) = x^4 - 2x^2.$$

Como

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1),$$

los puntos críticos de f son -1, 0 y 1, y

$$\begin{aligned} f(-1) &= -1, \\ f(0) &= 0, \\ f(1) &= -1. \end{aligned}$$

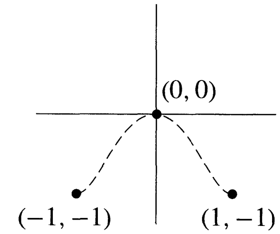


Figura 18

El comportamiento de f en los intervalos entre los puntos críticos se puede determinar por uno de los métodos que hemos mencionado anteriormente. En particular, podemos calcular el signo de f' en estos intervalos simplemente examinando la fórmula de $f'(x)$. O también, únicamente a partir de los tres puntos críticos, se puede observar (Figura 18) que f crece en $(-1, 0)$ y decrece en $(0, 1)$. Para determinar el signo de f' en $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$ se puede calcular

$$\begin{aligned} f'(-2) &= 4\cdot(-2)^3 - 4\cdot(-2) = -24, \\ f'(2) &= 4\cdot 2^3 - 4\cdot 2 = 24, \end{aligned}$$

y concluir que f es decreciente en $(-\infty, -1)$ y creciente en $(1, \infty)$. Estas conclusiones también se deducen del hecho de que $f(x)$ es grande para valores grandes de x y para valores grandes negativos de x.

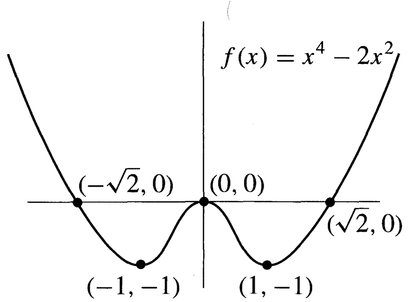


Figura 19

Ahora ya es posible dibujar una buena representación gráfica de la función; dos datos adicionales permiten dar los retoques finales (Figura 19). En primer lugar, es fácil comprobar que $f(x) = 0$ para $x = 0, \pm\sqrt{2}$; en segundo lugar, está claro que f es par.

$f(x) = f(-x)$, por lo tanto la gráfica de la función es simétrica con respecto al eje vertical. La función $f(x) = x^3 - x$, que ya hemos representado en la Figura 15, es impar, $f(x) = -f(-x)$, y por consiguiente simétrica con respecto al origen. En las representaciones gráficas de las funciones, puede ahorrarse la mitad del trabajo teniendo en cuenta estas cuestiones desde el principio.

En varios problemas de este capítulo y de capítulos sucesivos se pide hacer una representación gráfica de funciones. En cada caso se debe determinar

(1) los puntos críticos de f,
(2) el valor de f en los puntos críticos,
(3) el signo de f' en las regiones entre los puntos críticos (si esto no está claro ya),
(4) los números x tales que $f(x) = 0$ (si es posible),
(5) el comportamiento de $f(x)$ cuando x se hace grande o grande negativo (si es posible).

Finalmente, téngase en cuenta que una comprobación rápida, para ver si la función es par o impar, puede ahorrar mucho trabajo.

Este tipo de análisis, si se hace con cuidado, revelará en general la forma básica de la gráfica, pero a veces existen algunas características especiales que requieren un trabajo adicional. Es imposible anticiparlas aquí, pero hay un dato que generalmente es muy importante: si f no está definida en algunos puntos (por ejemplo, si f es una función racional cuyo denominador se anula en algunos puntos), entonces debe determinarse el comportamiento de f cerca de estos puntos.

Por ejemplo, consideremos la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1},$$

la cual no está definida en 1. Tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x-1)(2x-2) - (x^2 - 2x + 2)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Así pues

(1) los puntos críticos de f son 0 y 2.

Además,

$$\text{(2)}\quad \begin{aligned} f(0) &= -2, \\ f(2) &= 2. \end{aligned}$$

Como f no está definida en todo el intervalo $(0, 2)$, debe determinarse separadamente el signo de f' en los intervalos $(0, 1)$ y $(1, 2)$, así como también en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(2, \infty)$, lo cual puede hacerse eligiendo puntos particulares en cada uno de estos intervalos, o simplemente observando con atención la fórmula para f'. En cualquier caso se obtiene que

$$\begin{aligned}(3)\quad f'(x) &> 0 \quad \text{si} \quad x < 0,\\ f'(x) &< 0 \quad \text{si} \quad 0 < x < 1,\\ f'(x) &< 0 \quad \text{si} \quad 1 < x < 2,\\ f'(x) &> 0 \quad \text{si} \quad 2 < x.\end{aligned}$$

Finalmente, debe analizarse el comportamiento de $f(x)$ cuando x se hace grande o grande negativo, así como cuando x se aproxima a 1 (está información nos permitirá también determinar de otra manera las regiones de crecimiento y decrecimiento de f). Para examinar el comportamiento de f cuando x se hace grande, escribimos

$$\frac{x^2-2x+2}{x-1} = x-1+\frac{1}{x-1};$$

lo cual nos permite observar que $f(x)$ se acerca a $x-1$ (siendo ligeramente mayor) cuando x es grande, y que $f(x)$ se acerca a $x-1$ (siendo ligeramente inferior) cuando x es grande negativo. También se puede determinar fácilmente el comportamiento de f cerca de 1; como

$$\lim_{x\to 1}(x^2-2x+2) = 1 \neq 0,$$

la fracción

$$\frac{x^2-2x+2}{x-1}$$

se hace grande cuando x se acerca a 1 por la derecha y grande negativa cuando x se acerca a 1 por la izquierda.

Toda esta información puede parecer abrumadora, pero existe solamente una manera de sintetizarla (Figura 20); el lector debe asegurarse de entender cada uno de los rasgos de la gráfica.

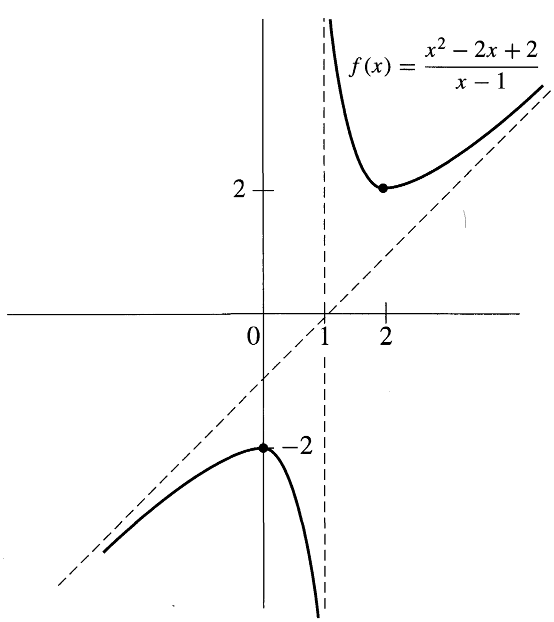


Figura 20

Una vez concluido el trazado, éste tiene el aspecto de la gráfica de una función impar desplazada en una unidad, y la expresión

$$\frac{x^2-2x+2}{x-1}=\frac{(x-1)^2+1}{x-1}$$

muestra que esto es así realmente. Sin embargo, ésta es una de aquellas características especiales que deben analizarse sólo cuando ya se ha utilizado la otra información para tener una idea aproximada del aspecto de la gráfica .

Aunque la representación gráfica detallada de una función siempre revela la localización de los máximos y mínimos locales, en general no es necesario realizar tanto trabajo. Existe un criterio popular para hallar los máximos y mínimos locales, que depende del comportamiento de la función sólo en los puntos críticos.

Teorema 5. *Supongamos que $f'(a)=0$. Si $f''(a)>0$, entonces f tiene un mínimo local en a; si $f''(a)<0$, entonces f tiene un máximo local en a.*

Demostración. Por definición,

$$f''(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}.$$

Como $f'(a)=0$, esta igualdad puede escribirse como

$$f''(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)}{h}.$$

Supongamos ahora que $f''(a)>0$. Entonces $f'(a+h)/h$ ha de ser positivo para valores suficientemente pequeños de h. Por lo tanto:

$f'(a+h)$ ha de ser positivo para valores de $h>0$ suficientemente pequeños

y $f'(a+h)$ ha de ser negativo para valores de $h<0$ suficientemente pequeños.

Esto significa (Corolario 3) que f es creciente en algún intervalo a la derecha de a y f es decreciente en algún intervalo a la izquierda de a. Por consiguiente, f tiene un mínimo local en a. La demostración es análoga en el caso que $f''(a)<0$. ∎

El Teorema 5 puede aplicarse a la función $f(x)=x^3-x$, que ya hemos considerado anteriormente. Se verifica que

$$f'(x)=3x^2-1$$
$$f''(x)=6x.$$

En los puntos críticos, $-\sqrt{1/3}$ y $\sqrt{1/3}$, tenemos

$$f''(-\sqrt{1/3})=-6\sqrt{1/3}<0,$$
$$f''(\sqrt{1/3})=6\sqrt{1/3}>0.$$

Por tanto, $-\sqrt{1/3}$ es un punto máximo local y $\sqrt{1/3}$ es un punto mínimo local.

Aunque el Teorema 5 es muy útil en el caso de funciones polinómicas, para muchas otras funciones la segunda derivada es tan complicada que es más fácil considerar el signo de la primera derivada. Además, si a es un punto crítico de f puede ocurrir que $f''(a) = 0$. En este caso, el Teorema 5 no proporciona información: es posible que a sea un punto máximo local, un mínimo local o ninguna de las dos cosas, como se ilustra en el caso de las funciones (Figura 21)

$$f(x) = -x^4, \quad f(x) = x^4, \quad f(x) = x^5;$$

en cada caso $f'(0) = f''(0) = 0$, pero 0 es un punto máximo local de la primera función, un punto mínimo local de la segunda y no es ni máximo ni mínimo local de la tercera. Esta cuestión será tratada con más detalle en la Parte IV.

Es interesante observar que el Teorema 5 permite demostrar automáticamente un recíproco parcial de sí mismo.

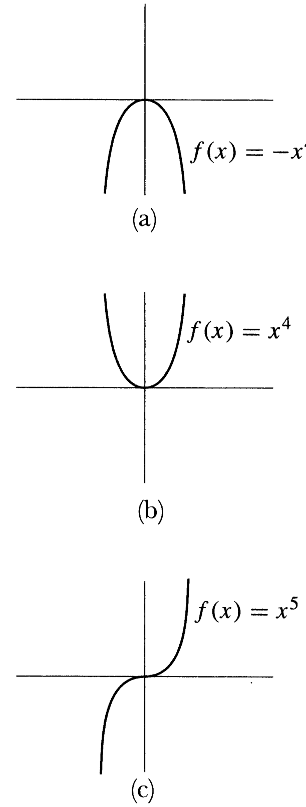


Figura 21

Teorema 6. *Supongamos que $f''(a)$ existe. Si f tiene un mínimo local en a, entonces $f''(a) \geq 0$; si f tiene un máximo local en a, entonces $f''(a) \leq 0$.*

Demostración. Supongamos que f tiene un mínimo local en a. Si $f''(a) < 0$, entonces f tendría también un máximo local en a, por el Teorema 5. Es decir, f sería constante en algún intervalo que contiene a a, y por tanto $f''(a) = 0$, lo cual es una contradicción. Por tanto, debe verificarse que $f''(a) \geq 0$. El caso de un máximo local se trata de manera análoga. ■

(Este recíproco parcial del Teorema 5 es lo más que se puede conseguir: los signos $\geq$ y $\leq$ no pueden sustituirse por $>$ y $<$, como lo demuestran las funciones $f(x) = x^4$ y $f(x) = -x^4$.)

En lo que queda del capítulo ya no consideraremos la representación gráfica de funciones, o los máximos y mínimos, sino tres consecuencias del Teorema del Valor Medio. La primera viene representada por un teorema muy simple, aunque también muy elegante, que desempeña un papel importante en el Capítulo 15, y que ilustra muchos ejemplos considerados en capítulos anteriores.

Teorema 7. *Supongamos que f es continua en a y que $f'(x)$ existe para todo x de algún intervalo que contiene a a, excepto quizás en $x = a$. Supongamos, además, que $\lim_{x \to a} f'(x)$ existe. Entonces $f'(a)$ también existe y*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} f'(x).$$

Demostración. Por definición,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Para valores de $h > 0$ suficientemente pequeños, la función f es continua en $[a, a+h]$ y diferenciable en $(a, a+h)$ (lo mismo ocurre para valores de $h < 0$ suficientemente pequeños). Según el Teorema del Valor Medio, existe un número α_h en $(a, a+h)$ tal que

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(\alpha_h).$$

Además α_h tiende a a cuando h tiende a 0, ya que α_h pertenece al intervalo $(a, a+h)$; como $\lim_{x\to a} f'(x)$ existe, se deduce que

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} f'(\alpha_h) = \lim_{x\to a} f'(x).$$

(Es aconsejable que el lector demuestre rigurosamente, utilizando un argumento ε-δ, este paso final, tratado aquí de manera algo informal.) ■

Incluso si f es una función diferenciable en todo punto, es posible que f' sea discontinua. Esto sucede, por ejemplo, si

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

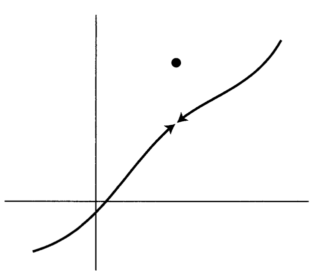


Figura 22

Según el Teorema 7, sin embargo, la gráfica de f' nunca puede presentar una discontinuidad del tipo que se muestra en la Figura 22. En el Problema 61 se esboza la demostración de otro elegante teorema que proporciona información adicional sobre la función f', y en el Problema 62 se utiliza este resultado para reforzar el Teorema 7.

El siguiente teorema, una generalización del Teorema del Valor Medio, tiene interés debido principalmente a sus numerosas aplicaciones.

Teorema 8 (Teorema del Valor Medio de Cauchy). *Si f y g son continuas en $[a, b]$ y diferenciables en (a, b), entonces existe un número x en (a, b) tal que*

$$[f(b)-f(a)]g'(x) = [g(b)-g(a)]f'(x).$$

(Si $g(b) \neq g(a)$ y $g'(x) \neq 0$, esta ecuación puede escribirse como

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Observemos que si $g(x) = x$ para todo x, entonces $g'(x) = 1$, y se obtiene el Teorema del Valor Medio. Por otra parte, aplicando el Teorema del Valor Medio a f y a g por separado, se deduce que existen un x e y en (a, b) que verifican

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(y)};$$

pero no existe ninguna garantía de que los x e y hallados de esta manera sean iguales.

Estas consideraciones pueden hacer pensar que el Teorema del Valor Medio de Cauchy es muy difícil de demostrar, pero en realidad basta aplicar uno de los artilugios más simples).

Demostración. Sea

$$h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)].$$

Entonces h es continua en $[a, b]$, diferenciable en (a, b), y

$$h(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b) = h(b).$$

Según el Teorema de Rolle, $h'(x) = 0$ para algún x de (a, b), lo que significa que

$$0 = f'(x)[g(b) - g(a)] - g'(x)[f(b) - f(a)]. \blacksquare$$

El Teorema del Valor Medio de Cauchy es la herramienta básica necesaria para demostrar un teorema que facilita el cálculo de límites de la forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

cuando

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0.$$

En este caso no es aplicable el Teorema 5-2. Toda derivada es un límite de esta forma, y el cálculo de derivadas requiere generalmente un esfuerzo considerable. Pero si ya se conocen algunas derivadas, muchos límites de esta forma pueden calcularse fácilmente.

Teorema 9 (Regla de L'Hôpital). *Supongamos que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0,$$

y supongamos también que $\lim_{x \to a} f'(x)/g'(x)$ *existe. Entonces* $\lim_{x \to a} f(x)/g(x)$ *existe y*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(Observe que el Teorema 7 es un caso particular.)

Demostración. La hipótesis de que el $\lim_{x \to a} f'(x)/g'(x)$ existe contiene dos suposiciones implícitas:

(1) existe un intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ tal que $f'(x)$ y $g'(x)$ existen para todo x de $(a - \delta, a + \delta)$ excepto quizás para $x = a$,
(2) en este intervalo $g'(x) \neq 0$ excepto quizás, de nuevo, en $x = a$.

Por otra parte, no se supone ni siquiera que f y g estén definidas en el punto a. Si definimos $f(a) = g(a) = 0$ (cambiando, si es necesario, los valores previos de $f(a)$ y

$g(a)$), entonces f y g son continuas en el punto a. Si $a < x < a+\delta$, puede aplicarse a f y a g el Teorema del Valor Medio y el Teorema del Valor Medio de Cauchy en el intervalo $[a, x]$ (y lo mismo ocurre en el caso de que $a - \delta < x < a$). Aplicando en primer lugar el Teorema del Valor Medio a g, vemos que $g(x) \neq 0$, ya que si $g(x) = 0$ entonces existiría algún x_1 en (a, x) tal que $g'(x_1) = 0$, lo que contradice (2). Aplicando ahora el Teorema del Valor Medio de Cauchy a f y a g, vemos que existe un número α_x en (a, x) tal que

$$[f(x) - 0]g'(\alpha_x) = [g(x) - 0]f'(\alpha_x)$$

o

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)}.$$

Pero α_x se aproxima a a cuando x se aproxima a a, ya que α_x está en el intervalo (a, x); como estamos suponiendo que el $\lim_{y\to a} f'(y)/g'(y)$ existe, se deduce que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} = \lim_{y\to a} \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

(Una vez más, se invita al lector a que aporte los detalles de esta parte de la demostración.) ■

Problemas

1. Para cada una de las siguientes funciones, halle los valores máximos y mínimos en los intervalos indicados, determinando aquellos puntos del intervalo en los que la derivada es igual a 0 y comparando los valores de la función en estos puntos con sus valores en los extremos del intervalo.

(i) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en $[-2, 2]$.

(ii) $f(x) = x^5 + x + 1$ en $[-1, 1]$.

(iii) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

(iv) $f(x) = \dfrac{1}{x^5 + x + 1}$ en $[-\frac{1}{2}, 1]$.

(v) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ en $[-1, \frac{1}{2}]$.

(vi) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ en $[0, 5]$.

2. Trace ahora la gráfica de cada una de las funciones del Problema 1 y halle todos los puntos máximos y mínimos locales.

3. Trace las gráficas de las siguientes funciones:

(i) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

(ii) $f(x) = x + \dfrac{3}{x^2}$.

(iii) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$.

(iv) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

4. (a) Si $a_1 < \ldots < a_n$, halle el valor mínimo de $f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x - a_i)^2$.

*(b) Halle ahora el valor mínimo de $f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - a_i|$. Este es un problema en el que el cálculo infinitesimal no nos puede ayudar. En los intervalos entre los a_i la función f es lineal, por tanto

el valor mínimo se localiza en uno de los a_i, y estos son, precisamente, los puntos en los cuales la función f no es diferenciable. Sin embargo, la solución es fácil de encontrar si se considera como varía $f(x)$ al pasar de un intervalo a otro.

*(c) Sea $a > 0$. Demuestre que el valor máximo de

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-a|}$$

es $(2+a)/(1+a)$. (Puede hallarse por separado la derivada en cada uno de los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, a)$ y (a, ∞).)

5. Para cada una de las siguientes funciones, halle todos los puntos máximos y mínimos locales.

(i) $f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 3,5,7,9 \\ 5, & x = 3 \\ -3, & x = 5 \\ 9, & x = 7 \\ 7, & x = 9. \end{cases}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ 1/q, & x = p/q \text{ fracción irreducible.} \end{cases}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ racional} \\ 0, & x \text{ irracional.} \end{cases}$

(iv) $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1/n \text{ para algún } n \text{ de } \mathbf{N} \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$

(v) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si el desarrollo decimal de } x \text{ contiene un 5} \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$

6. Demuestre la siguiente propiedad (que se utiliza muchas veces de manera implícita): si f es creciente en (a, b) y continua en a y b, entonces f es creciente en $[a, b]$. En particular, si f es continua en $[a, b]$ y $f' > 0$ en (a, b), entonces f es creciente en $[a, b]$.

7. Se traza una recta desde el punto $(0, a)$ hasta el eje horizontal y desde allí otra a $(1, b)$, tal como se indica en la Figura 23. Demuestre que la longitud total es mínima cuando los ángulos α y β son iguales. (Naturalmente, deberá entrar en juego una función: expresar la longitud en términos de x, donde $(x, 0)$ es el punto del eje horizontal. La línea a trazos de la Figura 23 sugiere una demostración geométrica; tanto en un caso como en otro puede resolverse el problema sin necesidad de hallar el punto $(x, 0)$.)

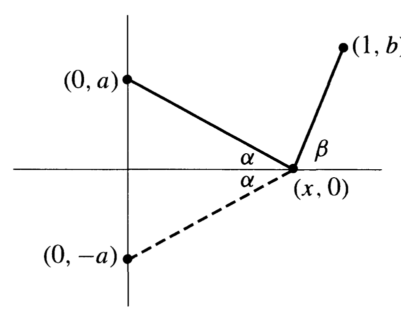


Figura 23

8. (a) Sea (x_0, y_0) un punto del plano, y sea L la gráfica de la función $f(x) = mx + b$. Halle el punto $\bar{x}$ tal que la distancia de (x_0, y_0) a $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ sea mínima. [Observe que minimizar esta distancia equivale a minimizar su cuadrado. Esto puede simplificar, en cierta medida, los cálculos.]

(b) Halle también $\bar{x}$ observando que la recta que va de (x_0, y_0) a $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ es perpendicular a L.

(c) Halle la distancia de (x_0, y_0) a L, es decir, la distancia de (x_0, y_0) a $(\bar{x}, f(\bar{x}))$. [Facilitará los cálculos suponer primero que $b = 0$; luego aplicar el resultado a la gráfica de $f(x) = mx$ y el punto $(x_0, y_0 - b)$.] Compárese con el Problema 4-22.

(d) Considere una recta descrita mediante la ecuación $Ax+By+C=0$ (Problema 4-7). Demuestre que la distancia de (x_0, y_0) a esta recta es $(Ax_0+By_0+C)/\sqrt{A^2+B^2}$.

9. El Problema anterior sugiere la siguiente cuestión: ¿cuál es la relación entre los puntos críticos de f y los de f^2?

10. Demuestre que entre todos los rectángulos de igual perímetro, el de mayor área es el cuadrado.

11. Entre todos los cilindros circulares rectos de volumen fijo V, halle el de menor superficie (incluyendo las superficies de las caras superior e inferior como en la Figura 24).

12. Un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene una longitud a gira alrededor de uno de sus lados, generando un cono circular recto. Halle el volumen máximo que puede tener este cono.

13. Demuestre que la suma de un número positivo y de su recíproco es al menos 2.

14. Halle el trapezoide de mayor área que puede ser inscrito en un semicírculo de radio a, con una base situada a lo largo del diámetro.

15. Dos pasillos de anchuras a y b, forman un ángulo recto (Figura 25). ¿Cuál es la longitud máxima de una escalera que puede ser transportada horizontalmente alrededor de la esquina?

16. Se diseña un jardín en forma de un sector circular (Figura 26), de radio R y ángulo central θ. El jardín debe tener un área fija A. ¿Para qué valor de R y θ (en radianes) será mínima la longitud de la valla alrededor del perímetro del jardín?

17. Un ángulo recto se desplaza a lo largo del diámetro de un círculo de radio a, tal como se muestra en la Figura 27. ¿Cuál es la mayor longitud posible $(A+B)$ interceptada por el círculo sobre el ángulo?

18. El ecólogo Ed debe cruzar un lago circular de 1 milla de radio. Puede remar a través del lago a una velocidad de 2 millas por hora, o caminar alrededor del lago a una velocidad de 4 millas por hora; también puede remar un cierto trecho y completar el itinerario caminando (Figura 28). ¿Qué ruta debe tomar de manera que:

(i) pueda ver la mayor cantidad de paisaje posible?
(ii) pueda cruzar tan rápido como sea posible?

19. (a) Considere los puntos A y C de un círculo, con centro O, formando un ángulo $\alpha = \angle AOC$ (Figura 29). ¿Cómo debe elegirse el punto B de manera que la suma de las áreas del triángulo $\triangle AOB$ y del triángulo $\triangle BOC$

El área de la superficie es la suma de estas áreas

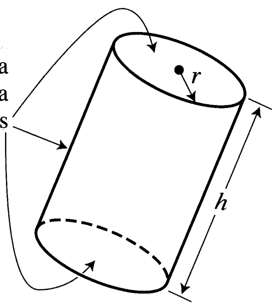


Figura 24

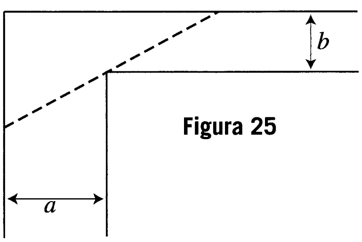


Figura 25

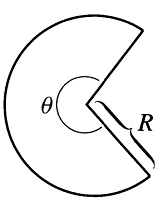


Figura 26

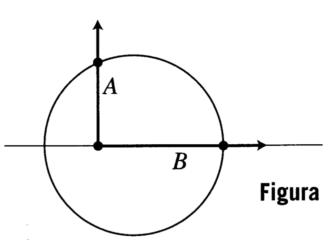


Figura 27

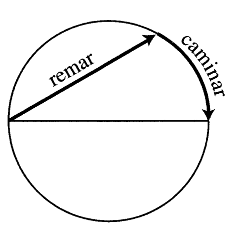


Figura 28

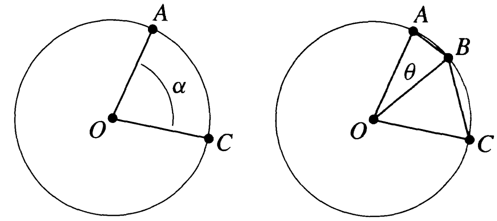


Figura 29

sea máxima? Indicación: Exprese todo en función de $\theta = \angle AOB$.

(b) Demuestre que para $n \geq 3$, de todos los n-ágonos inscritos en un círculo, el n-ágono regular es el de área máxima.

***20.** Se dobla la esquina inferior derecha de una página de manera que coincida con el margen izquierdo del papel, como se muestra en la Figura 30. Si la anchura del papel es α y la página es muy larga, demuestre que la longitud mínima del pliegue es $3\sqrt{3}\alpha/4$.

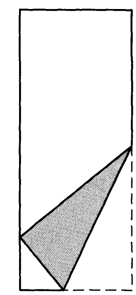


Figura 30

21. La Figura 31 muestra la gráfica de la *derivada* de f. Halle todos los puntos máximos y mínimos locales de f.

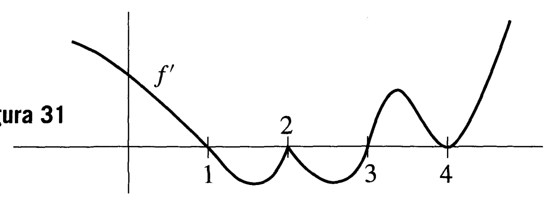


Figura 31

22. Suponga que f es una función polinómica $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ con puntos críticos -1, 1, 2, 3, 4 y sus correspondientes valores críticos 6, 1, 2, 4, 3. Trace la gráfica de f, distinguiendo los casos n par y n impar.

23. (a) Suponga que los puntos críticos de la función polinómica $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ son $-1, 1, 2, 3$ y que $f''(-1) = 0$, $f''(1) > 0$, $f''(2) < 0$, $f''(3) = 0$. Trace la gráfica de f tan exactamente como sea posible basándose en esta información.

(b) ¿Existe una función polinómica con las propiedades anteriores, excepto que 3 no sea un punto crítico?

24. Describa la gráfica de una función racional (en términos muy generales, análogamente a la descripción del texto de la gráfica de una función polinómica).

25. (a) Demuestre que dos funciones polinómicas de grados m y n, respectivamente, se cortan a lo sumo en $\text{máx}(m, n)$ puntos.

(b) Para cada m y n muestre dos funciones polinómicas de grados m y n que se corten $\text{máx}(m, n)$ veces.

26. Suponga que f es una función polinómica de grado n con $f \geq 0$ (por tanto n debe ser par). Demuestre que $f + f' + f'' + \cdots + f^{(n)} \geq 0$.

***27.** (a) Suponga que la función polinómica $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ tiene exactamente k puntos críticos y $f''(x) \neq 0$ para todos los puntos críticos x. Demuestre que $n - k$ es impar.

(b) Para cada n, demuestre que existe una función polinómica f de grado n con k puntos críticos, en cada uno de los cuales f'' es distinta de cero si $n - k$ es impar.

(c) Suponga que la función polinómica $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ tiene k_1 puntos máximos locales y k_2 puntos mínimos locales. Demuestre que $k_2 = k_1 + 1$ si n es par y $k_2 = k_1$ si n es impar.

(d) Sean n, k_1, k_2 tres enteros con $k_2 = k_1 + 1$ si n es par, $k_2 = k_1$ si n es impar y $k_1 + k_2 < n$. Demuestre que existe una función polinómica f de grado n con k_1 puntos máximos locales y k_2 puntos mínimos locales.

Indicación: Elija $a_1 < a_2 < \ldots < a_{k_1+k_2}$ y pruebe con $f'(x) = \prod_{i=1}^{k_1+k_2} (x - a_i) \cdot (1 + x^2)^l$ para un número apropiado l.

28. (a) Demuestre que si $f'(x) \geq M$ para todo x de $[a, b]$, entonces $f(b) \geq f(a) + M(b - a)$.
(b) Demuestre que si $f'(x) \leq M$ para todo x de $[a, b]$, entonces $f(b) \leq f(a) + M(b - a)$.
(c) Formule un teorema análogo cuando $|f'(x)| \leq M$ para todo x de $[a, b]$.

29. Suponga que $f'(x) \geq M > 0$ para todo x de $[0, 1]$. Demuestre que existe un intervalo de longitud $\frac{1}{4}$ en el cual $|f| \geq M/4$.

30. (a) Suponga que $f'(x) > g'(x)$ para todo x, y que $f(a) = g(a)$. Demuestre que $f(x) > g(x)$ para $x > a$ y $f(x) < g(x)$ para $x < a$.
(b) Demuestre mediante un ejemplo que estas conclusiones no son válidas sin la hipótesis $f(a) = g(a)$.
(c) Suponga que $f(a) = g(a)$, que $f'(x) \geq g'(x)$ para todo x y que $f'(x_0) > g'(x_0)$ para algún $x_0 > a$. Demuestre que $f(x) > g(x)$ para todo $x \geq x_0$.

31. Halle todas las funciones f tales que
(a) $f'(x) = \operatorname{sen} x$. (b) $f''(x) = x^3$. (c) $f'''(x) = x + x^2$.

32. Si bien es verdad que un peso que se suelta partiendo del reposo caerá $s(t) = 4{,}9t^2$ metros en t segundos, este hecho experimental no menciona el comportamiento de los pesos que son lanzados hacia arriba o hacia abajo. Por otra parte, la ley $s''(t) = 9{,}8$ se cumple siempre y tiene la ambigüedad suficiente para explicar el comportamiento de un peso soltado desde cualquier altura y con cualquier velocidad inicial. Para mayor sencillez convengamos en medir las alturas hacia arriba desde el nivel del suelo; en este caso las velocidades son positivas para cuerpos que se elevan y negativas para cuerpos que caen, y todos los cuerpos caen según la ley $s''(t) = -9{,}8$.
(a) Demuestre que s es de la forma $s(t) = -4{,}9t^2 + \alpha t + \beta$.
(b) Haciendo $t = 0$ en la fórmula para s, y después en la fórmula para s', demuestre que $s(t) = -4{,}9t^2 + v_0 t + s_0$, donde s_0 es la altura desde la cual el cuerpo es soltado en el tiempo 0, y v_0 es la velocidad con la cual se suelta.
(c) Se lanza un peso hacia arriba con una velocidad de v metros por segundo desde el nivel del suelo. ¿A qué altura llegará? ("A qué altura" significa "¿cuál es la máxima altura para todos los tiempos?") ¿Cuál es su velocidad en el momento en que alcanza su altura máxima? ¿Cuál es la aceleración en dicho momento? ¿Cuándo llegará otra vez al suelo? ¿Cuál será su velocidad en el momento de alcanzar el suelo?

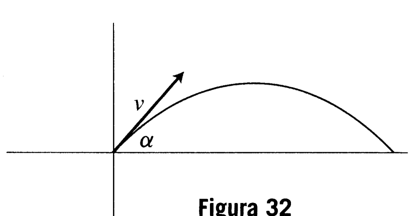


Figura 32

33. Una bala de cañón se lanza desde el suelo con velocidad v y según un ángulo α (Figura 32) de modo que su componente vertical de velocidad es $v \operatorname{sen} \alpha$ y la componente horizontal $v \cos \alpha$. Su distancia $s(t)$ sobre el nivel del suelo obedece a la ley $s(t) = -4{,}9t^2 + (v \operatorname{sen} \alpha)t$, mientras que su velocidad horizontal se mantiene con el valor constante $v \cos \alpha$.

(a) Demuestre que la trayectoria de la bala es una parábola (halle la posición para cada tiempo t, y demuestre que estos puntos están sobre una parábola).

(b) Halle el ángulo α que hace máxima la distancia horizontal recorrida por la bala antes de alcanzar el suelo.

34. (a) Dé un ejemplo de una función f para la cual exista el $\lim_{x\to\infty} f(x)$, pero no exista el $\lim_{x\to\infty} f'(x)$.

(b) Demuestre que si existen el $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y el $\lim_{x\to\infty} f'(x)$, entonces $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

(c) Demuestre que si existe el $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y existe el $\lim_{x\to\infty} f''(x)$, entonces el $\lim_{x\to\infty} f''(x) = 0$. (Vea también el Problema 20-22.)

35. Suponga que f y g son dos funciones diferenciables que satisfacen $fg' - f'g = 0$. Demuestre que si $f(a) = 0$ y $g(a) \neq 0$, entonces $f(x) = 0$ para todo x de un intervalo alrededor de a. Indicación: Demuestre que en cualquier intervalo en el que f/g esté definida, es constante.

36. Suponga que $|f(x) - f(y)| \leq |x-y|^n$ para $n > 1$. Demuestre que f es constante considerando f'. Compare con el Problema 3-20.

37. Una función f es *Lipschitz de orden α en x* si existe una constante C tal que

$$(*) \qquad |f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha$$

para todo y de un intervalo alrededor de x. La función f es *Lipschitz de orden α en un intervalo* si $(*)$ se verifica para todo x e y del intervalo.

(a) Si f es Lipschitz de orden $\alpha > 0$ en x, entonces f es continua en x.

(b) Si f es Lipschitz de orden $\alpha > 0$ en un intervalo, entonces f es uniformemente continua en este intervalo. (Vea el Capítulo 8, Apéndice.)

(c) Si f es diferenciable en x, entonces f es Lipschitz de orden 1 en x. ¿Es cierta la recíproca?

(d) Si f es diferenciable en $[a, b]$, ¿es f Lipschitz de orden 1 en $[a, b]$?

(e) Si f es Lipschitz de orden $\alpha > 1$ en $[a, b]$, entonces f es constante en $[a, b]$.

38. Demuestre que si

$$\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0,$$

entonces

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$$

para algún x de $(0, 1)$.

39. Demuestre que, cualquiera que sea m , la función polinómica $f_m(x) = x^3 - 3x + m$ no tiene nunca dos raíces en $[0, 1]$.(Esto es una consecuencia fácil del Teorema de Rolle. Resulta instructivo, una vez efectuada la demostración analítica, trace las gráficas de f_0 y f_1, y considerar la posición de la gráfica de f_m en relación con ellas.)

40. Suponga que f es continua y diferenciable en $[0, 1]$, que $f(x)$ está en $[0, 1]$ para cada x y que $f'(x) \neq 1$ para todo x de $[0, 1]$. Demuestre que existe exactamente un número x en $[0, 1]$ tal que $f(x) = x$. (La mitad de este problema ya ha sido resuelta en el Problema 7-11.)

41. (a) Demuestre que la función $f(x) = x^2 - \cos x$ satisface $f(x) = 0$ para exactamente dos números x.

(b) Demuestre lo mismo para la función $f(x) = x^2 - x \operatorname{sen} x - \cos x$.

*(c) Demuéstrelo también para la función $f(x) = 2x^2 - x \operatorname{sen} x - \cos^2 x$. (Será útil hacer algunas estimaciones preliminares para restringir la posible localización de los ceros de f.)

42. (a) Demuestre que si f es una función dos veces diferenciable con $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $f'(0) = f'(1) = 0$, entonces $|f''(x)| \geq 4$ para algún x de $(0,1)$. En términos más pintorescos: una partícula que recorre una distancia unidad en la unidad de tiempo, y empieza y termina con velocidad 0, tiene en algún momento una aceleración ≥ 4. Indicación: Demuestre que o bien $f''(x) \geq 4$ para algún x de $(0, \frac{1}{2})$, o bien $f''(x) \leq -4$ para algún x de $(\frac{1}{2}, 1)$.

(b) Demuestre que de hecho debe verificarse que $|f''(x)| > 4$ para algún x de $(0,1)$.

43. Suponga que f es una función tal que $f'(x) = 1/x$ para todo $x > 0$ y $f(1) = 0$. Demuestre que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y > 0$. Indicación: Halle $g'(x)$ cuando $g(x) = f(xy)$.

44. Suponga que f satisface

$$f''(x) + f'(x)g(x) - f(x) = 0$$

para alguna función g. Demuestre que si f es 0 en dos puntos, entonces f es 0 en el intervalo entre ellos. Indicación: Utilice el Teorema 6.

45. Suponga que f es continua en $[a, b]$, n-veces diferenciable en (a, b) y que $f(x) = 0$ para $n+1$ puntos x diferentes de $[a, b]$. Demuestre que $f^{(n)}(x) = 0$ para algún x de (a, b).

46. Sean $x_1, \ldots, x_{n+1}$ puntos arbitrarios del intervalo $[a, b]$, y sea

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i).$$

Suponga que f es una función $(n+1)$-veces diferenciable y que P es una función polinómica de grado $\leq n$ tal que $P(x_i) = f(x_i)$ para $i = 1, \ldots, n+1$ (vea el Problema 3-6). Demuestre que para cada x de $[a, b]$ existe un número c de (a, b) tal que

$$f(x) - P(x) = Q(x) \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Indicación: Considere la función

$$F(t) = Q(x)[f(t) - P(t)] - Q(t)[f(x) - P(x)].$$

Demuestre que F se anula en $n+2$ puntos diferentes de $[a, b]$ y utilice el Problema 45.

47. Demuestre que

$$\tfrac{1}{9} < \sqrt{66} - 8 < \tfrac{1}{8}$$

(sin calcular $\sqrt{66}$ con 2 cifras decimales.)

48. Demuestre la siguiente ligera generalización del Teorema del Valor Medio: si f es continua y diferenciable en (a, b) y $\lim\limits_{y \to a^+} f(y)$ y $\lim\limits_{y \to b^-} f(y)$ existen, entonces existe algún x de (a, b) tal que

$$f'(x) = \frac{\lim\limits_{y \to b^-} f(y) - \lim\limits_{y \to a^+} f(y)}{b - a}.$$

(La demostración debe empezar: "esto es una consecuencia trivial del Teorema del Valor Medio porque...".)

49. Demuestre que la conclusión del Teorema del Valor Medio de Cauchy puede escribirse en la forma

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

suponiendo, además, que $g(b) \neq g(a)$ y que $f'(x)$ y $g'(x)$ no se anulan simultáneamente en ningún punto de (a, b).

50. Demuestre que si f y g son continuas en $[a, b]$ y diferenciables en (a, b), y $g'(x) \neq 0$ para todo x de (a, b), entonces existe algún x en (a, b) con

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(b)-g(x)}.$$

Indicación: Multiplique en cruz para ver lo que esto realmente significa.

51. ¿Dónde se encuentra el error en la siguiente aplicación de la Regla de L'Hôpital?:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3.$$

(El límite es, en realidad, -4.)

52. Halle los siguientes límites: (i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x}$. (ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2}$.

53. Halle $f'(0)$ si

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

y $g(0) = g'(0) = 0$ y $g''(0) = 17$.

54. Demuestre las siguientes formas de la Regla de L'Hôpital (ninguna de ellas requiere un razonamiento esencialmente nuevo).

(a) Si $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ y $\lim_{x\to a^+} f'(x)/g'(x) = l$, entonces $\lim_{x\to a^+} f(x)/g(x) = l$ (y análogamente para límites por la izquierda).

(b) Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = \infty$, entonces $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \infty$ (y análogamente para $-\infty$, o si se sustituye $x \to a$ por $x \to a^+$ o $x \to a^-$).

(c) Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ y $\lim_{x\to\infty} f'(x)/g'(x) = l$, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = l$ (y análogamente para $-\infty$). Indicación: Considere $\lim_{x\to 0^+} f(1/x)/g(1/x)$.

(d) Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ y $\lim_{x\to\infty} f'(x)/g'(x) = \infty$, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = \infty$.

55. Existe otra forma de la Regla de L'Hôpital que exige más manipulaciones algebraicas: si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, y $\lim_{x\to\infty} f'(x)/g'(x) = l$, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = l$. Demuéstrelo de la manera siguiente:

(a) Para todo $\varepsilon > 0$ existe un número a tal que

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - l \right| < \varepsilon \quad \text{para } x > a.$$

Aplique el Teorema del Valor Medio de Cauchy a f y g en $[a, x]$ para demostrar que

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} - l \right| < \varepsilon \quad \text{para } x > a.$$

(¿Por qué se puede suponer que $g(x) - g(a) \neq 0$?)

(b) Escriba ahora

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{f(x)}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{g(x)}$$

(¿por qué se puede suponer que $f(x) - f(a) \neq 0$ para x grandes?) y deduzca que

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < 2\varepsilon \quad \text{para } x \text{ suficientemente grandes.}$$

56. Para completar la orgía de variantes de la regla de L'Hôpital, aplicar el Problema 55 para demostrar unos cuantos casos más de la siguiente proposición general (existen tantas posibilidades que el lector debe seleccionar aquellas, si las hay, que sean de su interés):

Si $\lim\limits_{x \to [\,]} f(x) = \lim\limits_{x \to [\,]} g(x) = \{\quad\}$ y $\lim\limits_{x \to [\,]} f'(x)/g'(x) = (\quad)$, entonces $\lim\limits_{x \to [\,]} f(x)/g(x) = (\quad)$. Aquí $[\,]$ puede ser a o a^+ o a^- o ∞ o $-\infty$, $\{\quad\}$ puede ser 0 o ∞ o $-\infty$ y $(\quad)$ puede ser l o ∞ o $-\infty$.

57. Si f y g son diferenciables y existe el $\lim\limits_{x \to a} f(x)/g(x)$, ¿puede concluirse que también existe el $\lim\limits_{x \to a} f'(x)/g'(x)$? (se trata del recíproco de la Regla de L'Hôpital).

58. Demuestre que si f' es creciente, entonces toda tangente de f corta a la gráfica de f una sola vez. (En particular, esto se cumple en el caso de la función $f(x) = x^n$ si n es par.)

59. Resuelva otra vez el Problema 10-18 (c) cuando

$$(f')^2 = f - \frac{1}{f^2}.$$

(¿Por qué está este problema en este capítulo?)

***60.** (a) Suponga que f es diferenciable en $[a, b]$. Demuestre que si el mínimo de f en $[a, b]$ se encuentra en el punto a, entonces $f'(a) \geq 0$, y si se encuentra en el punto b, entonces $f'(b) \leq 0$. (Deberá examinarse la mitad de la demostración del Teorema 1.)

(b) Suponga que $f'(a) < 0$ y que $f'(b) > 0$. Demuestre que $f'(x) = 0$ para algún x de (a, b). Indicación: Considere el mínimo de f en $[a, b]$; ¿por qué debe estar en algún punto de (a, b)?

(c) Demuestre que si $f'(a) < c < f'(b)$, entonces $f'(x) = c$ para algún x de (a, b). (Este resultado se conoce como el Teorema de Darboux. Advierta que *no* estamos suponiendo que f' sea continua). Indicación: Construya una función adecuada a la cual se pueda aplicar la parte (b).

61. Suponga que f es diferenciable en algún intervalo que contiene a pero que f' es discontinua en a. Demuestre lo siguiente:

(a) Ambos límites laterales $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x)$ y $\lim\limits_{x \to a^-} f'(x)$ no pueden existir. (Se trata de una pequeña variación del Teorema 7.)

(b) Ambos límites laterales no pueden existir incluso si se acepta que puedan tener valores iguales a $+\infty$ o $-\infty$. Indicación: Utilice el Teorema de Darboux (Problema 60).

***62.** Es fácil encontrar una función f tal que $|f|$ sea diferenciable sin serlo f. Por ejemplo, podemos elegir $f(x) = 1$ para x racional y $f(x) = -1$ para x irracional. En este ejemplo f no es ni siquiera continua y esto no es una mera coincidencia. Demuestre que si $|f|$ es diferenciable en a y f es continua en a, entonces f es también diferenciable en a. Indicación: Basta considerar solamente a con $f(a) = 0$. ¿Por qué? En este caso, ¿cómo debe ser $|f|'(a)$?

***63.** (a) Sea $y \neq 0$ y sea n par. Demuestre que $x^n + y^n = (x+y)^n$ solamente cuando $x = 0$. Indicación: Si ${x_0}^n + y^n = (x_0 + y)^n$, aplicar el Teorema de Rolle a $f(x) = x^n + y^n - (x+y)^n$ en $[0, x_0]$.

(b) Demuestre que si $y \neq 0$ y n es impar, entonces $x^n + y^n = (x+y)^n$ sólo si $x = 0$ ó $x = -y$.

64. Suponga que $f(0) = 0$ y que f' es creciente. Demuestre que la función $g(x) = f(x)/x$ es creciente en $(0, \infty)$. Indicación: Evidentemente hay que considerar a $g'(x)$. Demuestre que es positiva aplicando el Teorema del Valor Medio a f en el intervalo adecuado (será útil recordar que la hipótesis $f(0) = 0$ es esencial, como lo demuestra la función $f(x) = 1 + x^2$).

65. Utilice derivadas para demostrar que si $n \geq 1$, entonces

$$(1+x)^n > 1 + nx \quad \text{para } -1 < x < 0 \;\text{ y }\; 0 < x$$

(observe que la igualdad se cumple para $x = 0$).

66. Sea $f(x) = x^4 \operatorname{sen}^2 1/x$ para $x \neq 0$ y sea $f(0) = 0$ (Figura 33).

(a) Demuestre que 0 es un punto mínimo local de f.

(b) Demuestre que $f'(0) = f''(0) = 0$.

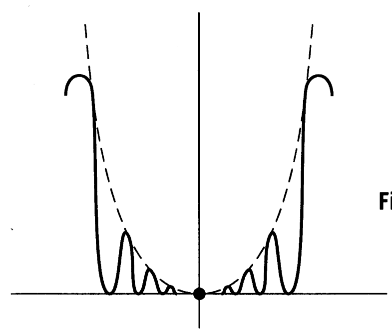


Figura 33

Esta función constituye otro ejemplo demostrativo de que el Teorema 6 no puede ser mejorado. También ilustra una sutileza acerca de los máximos y mínimos que frecuentemente pasa desapercibida: una función puede no ser creciente en ningún intervalo a la derecha de un punto mínimo local ni tampoco decreciente en ningún intervalo a la izquierda.

***67.** (a) Demuestre que si $f'(a) > 0$ y f' es continua en a, entonces f es creciente en algún intervalo que contiene a.

Las dos partes siguientes de este problema demuestran que la continuidad de f' es esencial.

(b) Si $g(x) = x^2 \operatorname{sen} 1/x$, demuestre que existen números x tan próximos como se quiera a 0 con $g'(x) = 1$ y también con $g'(x) = -1$.

(c) Suponga que $0 < \alpha < 1$. Sea $f(x) = \alpha x + x^2 \operatorname{sen} 1/x$ para $x \neq 0$ y sea $f(0) = 0$ (vea la Figura 34). Demuestre que f no es creciente en ningún intervalo abierto que contenga a 0, probando que en cualquiera de estos intervalos existen puntos x con $f'(x) > 0$ y también puntos x con $f'(x) < 0$.

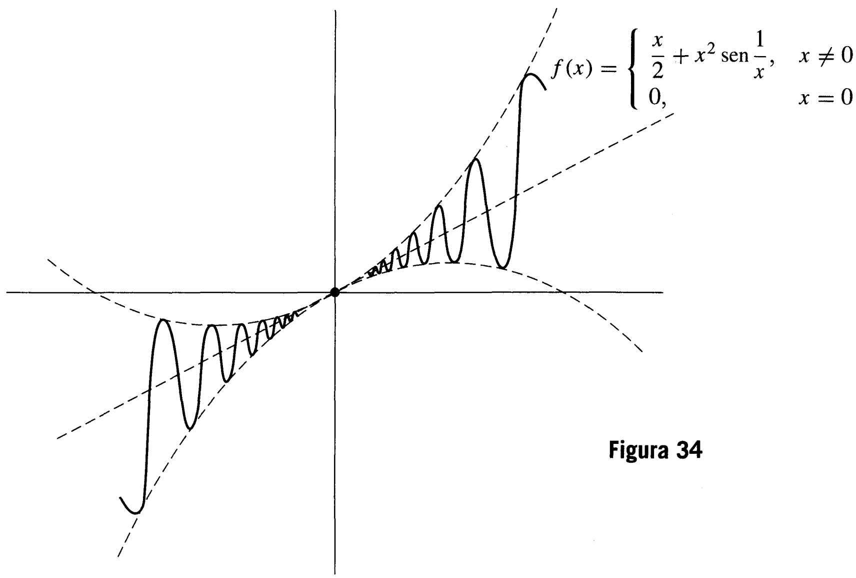


Figura 34

El comportamiento de f para $\alpha \geq 1$, que es mucho más difícil de analizar, se discute en el problema siguiente.

****68.** Sea $f(x) = \alpha x + x^2 \operatorname{sen} 1/x$ para $x \neq 0$ y sea $f(0) = 0$. Para hallar el signo de $f'(x)$ cuando $\alpha \geq 1$ es necesario decidir si $2x$ sen $1/x - \cos 1/x$ es < -1 para cualquier número x próximo a 0. Resulta algo más conveniente considerar la función $g(y) = 2(\operatorname{sen} y)/y - \cos y$ para $y \neq 0$; queremos saber si $g(y) < -1$ para valores grandes y. Esta cuestión es muy delicada; la parte más importante de $g(y)$ es $-\cos y$ que alcanza el valor -1, pero esto ocurre solamente cuando sen $y = 0$, y no está claro en absoluto si la misma g puede tener valores < -1. La manera evidente de abordar este problema es hallar los valores mínimos locales de g. Por desgracia, es imposible resolver explícitamente la ecuación $g'(y) = 0$ de manera que debe aguzarse el ingenio para encontrar otra solución.

(a) Demuestre que si $g'(y) = 0$, entonces

$$\cos y = (\operatorname{sen} y)\left(\frac{2 - y^2}{2y}\right),$$

y deduzca que

$$g(y) = (\operatorname{sen} y)\left(\frac{2 + y^2}{2y}\right).$$

(b) Demuestre ahora que si $g'(y) = 0$, entonces

$$\operatorname{sen}^2 y = \frac{4y^2}{4 + y^4},$$

y deduzca que

$$|g(y)| = \frac{2 + y^2}{\sqrt{4 + y^4}}.$$

(c) Utilizando el hecho de que $(2+y^2)/\sqrt{4+y^4} > 1$, demuestre que si $\alpha = 1$, entonces f no es creciente en ningún intervalo alrededor de 0.

(d) Utilizando el hecho de que $\lim\limits_{y\to\infty} (2+y^2)/\sqrt{4+y^4} = 1$, demuestre que si $\alpha > 1$, entonces f *es* creciente en algún intervalo alrededor de 0.

****69.** Una función f es **creciente en** a si existe algún número $\delta > 0$ tal que

$$f(x) > f(a) \quad \text{si} \quad a < x < a+\delta$$

y

$$f(x) < f(a) \quad \text{si} \quad a-\delta < x < a.$$

Observe que esto *no* significa que f sea creciente en el intervalo $(a-\delta, a+\delta)$; por ejemplo, la función de la Figura 34 es creciente en 0, pero no es una función creciente en cualquier intervalo abierto que contenga 0.

(a) Suponga que f es continua en $[0, 1]$ y y que f es creciente en a para todo a de $[0, 1]$. Demuestre que f es creciente en $[0, 1]$. (El lector debe convencerse, en primer lugar, que hay algo que se debe demostrar.) Indicación: Para $0 < b < 1$, demuestre que el mínimo de f en $[b, 1]$ debe situarse en b.

(b) Demuestre la parte (a) sin suponer que f sea continua, considerando para cada b en $[0, 1]$ el conjunto $S_b = \{x : f(y) \geq f(b)$ para todo y de $[b, x]\}$. (Esta parte del problema no hace falta para las demás partes.) Indicación: Demuestre que $S_b = \{x : b \leq x \leq 1\}$ considerando $\sup S_b$.

(c) Si f es creciente en a y f es diferenciable en a, demuestre que $f'(a) \geq 0$ (esto es fácil).

(d) Si $f'(a) > 0$, demuestre que f es creciente en a (partir de la definición de $f'(a)$).

(e) Utilice las partes (a) y (d) para demostrar, sin hacer uso del Teorema del Valor Medio, que si f es continua en $[0, 1]$ y $f'(a) > 0$ para todo a en $[0, 1]$, entonces f es creciente en $[0, 1]$.

(f) Suponga que f es continua en $[0, 1]$ y $f'(a) = 0$ para todo a de $(0, 1)$. Aplique la parte (e) a la función $g(x) = f(x) + \varepsilon x$ para demostrar que $f(1) - f(0) > -\varepsilon$. Análogamente, demuestre que $f(1) - f(0) < \varepsilon$ considerando $h(x) = \varepsilon x - f(x)$. Concluya que $f(0) = f(1)$.

Esta demostración particular de que una función con derivada nula debe ser constante coincide en muchos puntos con una demostración de H. A. Schwarz, la cual es posible que sea la primera demostración rigurosa que se haya dado de este hecho. Al menos su descubridor así parecía creerlo. Vea su exuberante carta en la referencia [54] de la bibliografía.

****70.** (a) Si f es una función constante, entonces cada punto es un máximo local de f. Esto puede ocurrir también aunque f no sea una función constante: por ejemplo, si $f(x) = 0$ para $x < 0$ y $f(x) = 1$ para $x \geq 0$. Demuestre, sin embargo, utilizando el Problema 8-4, que si f es continua en $[a, b]$ y cada punto de $[a, b]$ es un punto máximo local, entonces f es una función constante. Por supuesto, se verifica el mismo resultado si cada punto de $[a, b]$ es un punto mínimo local.

(b) Suponga ahora que cada punto es un punto máximo local o un punto mínimo local de la función continua f (aunque no excluimos la posibilidad de que algunos puntos sean máximos locales y otros mínimos locales). Demuestre que f es constante de la manera siguiente: suponga que $f(a_0) < f(b_0)$. Entonces se puede suponer que $f(a_0) < f(x) < f(b_0)$ para $a_0 < x < b_0$. (¿Por qué?) Utilizando el Teorema 1 del Apéndice del Capítulo 8, efectúe una partición de

$[a_0, b_0]$ en intervalos en los que $\sup f - \text{ínf} f < (f(b_0) - f(a_0))/2$; elija también las longitudes de dichos intervalos menores que $(b_0 - a_0)/2$. Entonces existe uno de estos intervalos $[a_1, b_1]$ con $a_0 < a_1 < b_1 < b_0$ y $f(a_1) < f(b_1)$. (¿Por qué?) Continue inductivamente y utilice el Teorema de los Intervalos Encajados (Problema 8-14) para hallar un punto x que no pueda ser un máximo o un mínimo local.

****71.** (a) Un punto x se dice que es un punto **estrictamente máximo** de f en A si $f(x) > f(y)$ para todo y de A con $y \neq x$ (compare con la definición de un punto máximo ordinario). De una manera correspondiente se define un punto **estrictamente máximo local**. Halle todos los puntos estrictamente máximos locales de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ \dfrac{1}{q}, & x = \dfrac{p}{q} \text{ fracción irreducible.} \end{cases}$$

Parece muy improbable que una función pueda tener un punto estrictamente máximo local para *todo* punto (aunque el ejemplo anterior podría inducir a pensar que es posible). Demuestre que no es posible de la manera siguiente:

(b) Suponga que todo punto es un punto estrictamente máximo local para f. Sea x_1 un número cualquiera y elija $a_1 < x_1 < b_1$ con $b_1 - a_1 < 1$ tales que $f(x_1) > f(x)$ para todo x de $[a_1, b_1]$. Sea $x_2 \neq x_1$ un punto cualquiera de (a_1, b_1) y elija $a_1 \leq a_2 < x_2 < b_2 \leq b_1$ con $b_2 - a_2 < \frac{1}{2}$ tales que $f(x_2) > f(x)$ para todo x de $[a_2, b_2]$. Continue de esta manera y aplique el Teorema de los Intervalos Encajados (Problema 8-14) para obtener una contradicción.

Apéndice
Convexidad y concavidad

Aunque la gráfica de una función se puede representar con bastante exactitud con la información proporcionada por la derivada, algunos aspectos sutiles de la gráfica se ponen de manifiesto únicamente al examinar la segunda derivada. Hasta ahora hemos omitido a propósito estos detalles ya que la representación gráfica de funciones es de por si ya suficientemente compleja sin tener que preocuparse de los mismos, y la información adicional obtenida no merece, en muchos casos, este esfuerzo adicional. A pesar de estas observaciones desalentadoras, vale la pena asimilar la información que se presenta en este apéndice ya que las nociones de convexidad y de concavidad son mucho más importantes de lo que cabría suponer de su utilización como simples herramientas en la representación gráfica de funciones. Además, las demostraciones tienen un agradable carácter geométrico, ausente en muchos teoremas del cálculo infinitesimal; incluso la misma definición básica de estos conceptos es de naturaleza geométrica (ver la Figura 1).

Definición 1

Una función f es **convexa** en un intervalo, si para todo a y b del intervalo, el segmento rectilíneo que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ se sitúa por encima de la gráfica de f.

La condición geométrica que aparece en la definición puede expresarse de forma analítica, la cual es, a veces, más útil en las demostraciones. La recta entre $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es la gráfica de la función g definida mediante

$$g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a).$$

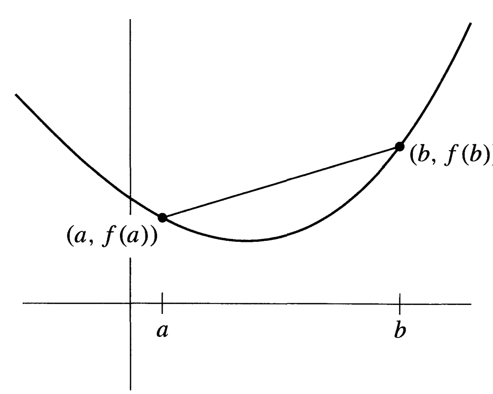


Figura 1

Esta recta se sitúa por encima de la gráfica de f en x si $g(x) > f(x)$, es decir, si

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a) > f(x)$$

o bien

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) > f(x)-f(a)$$

es decir

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > \frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

con lo cual hemos obtenido una definición equivalente de convexidad.

Definición 2

Una función f es **convexa** en un intervalo si, dados a, x y b del intervalo con $a < x < b$ se verifica que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

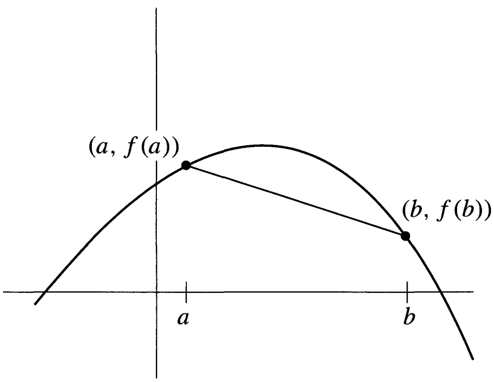


Figura 2

Si la palabra "encima" de la Definición 1 se sustituye por "debajo" o equivalentemente, si la desigualdad de la Definición 2 se sustituye por

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

se obtiene la definición de una función **cóncava** (Figura 2). No es difícil comprobar que las funciones cóncavas son precisamente aquellas de la forma $-f$, siendo f una función convexa. Por esta razón, los tres teoremas siguientes relativos a funciones convexas, poseen corolarios inmediatos relativos a funciones cóncavas, tan sencillos que ni siquiera nos molestaremos en enunciarlos.

En la Figura 3 se muestran algunas rectas tangentes a una función convexa. Al observarlas, se hacen aparentes dos resultados:

1. La gráfica de f se sitúa por encima de la recta tangente en el punto $(a, f(a))$, excepto en el mismo punto $(a, f(a))$ (este punto se denomina **punto de contacto** de la recta tangente).
2. Si $a < b$, entonces la pendiente de la recta tangente en $(a, f(a))$ es menor que la pendiente de la recta tangente en $(b, f(b))$; es decir, f' es creciente.

Estos resultados resultan ser ciertos y sus demostraciones no son difíciles.

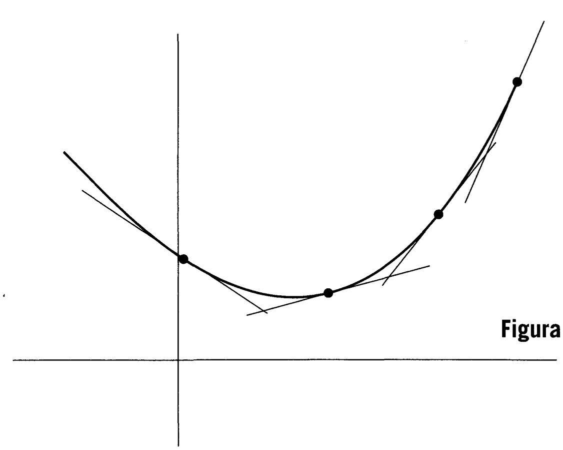


Figura 3

Teorema 1. *Sea f convexa. Si f es diferenciable en a, entonces la gráfica de f se situa por encima de la tangente a f en el punto $(a, f(a))$, excepto en el mismo punto de contacto $(a, f(a))$. Si $a < b$ y f es diferenciable en a y en b, entonces $f'(a) < f'(b)$.*

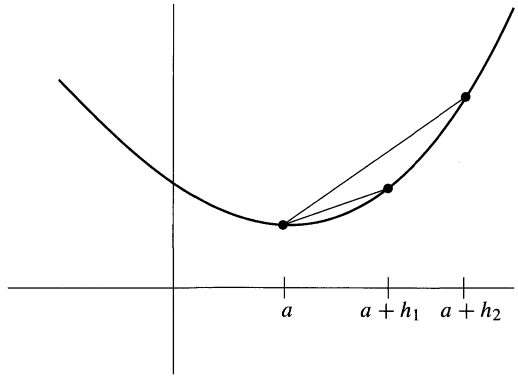


Figura 4

Demostración. Si $0 < h_1 < h_2$, entonces, como se muestra en la Figura 4,

$$(1) \qquad \frac{f(a+h_1)-f(a)}{h_1} < \frac{f(a+h_2)-f(a)}{h_2}.$$

A partir de la Definición 2 aplicada a los puntos $a < a+h_1 < a+h_2$, se obtiene una demostración de esta desigualdad sin basarse en ningún dibujo o esquema. Dicha desigualdad (1) demuestra que los valores de

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

disminuyen cuando $h \to 0^+$. Por consiguiente,

$$f'(a) < \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad \text{para } h > 0$$

(de hecho, la derivada $f'(a)$ es el ínfimo de todos estos valores). Pero esto significa que, para $h > 0$, la secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$ tiene una pendiente mayor que la tangente, lo que implica que $(a+h, f(a+h))$ se sitúa por encima de la tangente (la traducción analítica de este hecho es inmediata).

En el caso de valores de h negativos, la situación es similar (Figura 5): si $h_2 < h_1 < 0$, entonces

$$\frac{f(a+h_1)-f(a)}{h_1} > \frac{f(a+h_2)-f(a)}{h_2}.$$

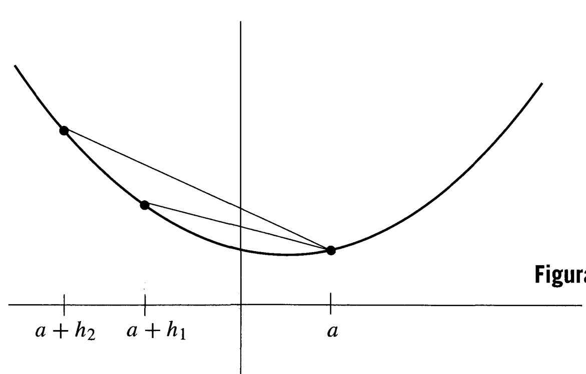


Figura 5

Esto demuestra que la pendiente de la tangente es mayor que

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{para } h<0$$

(de hecho, $f'(a)$ es el supremo de todos estos números), esto demuestra que $f(a+h)$ se sitúa por encima de la recta tangente si $h<0$. Queda demostrada pues la primera parte del teorema.

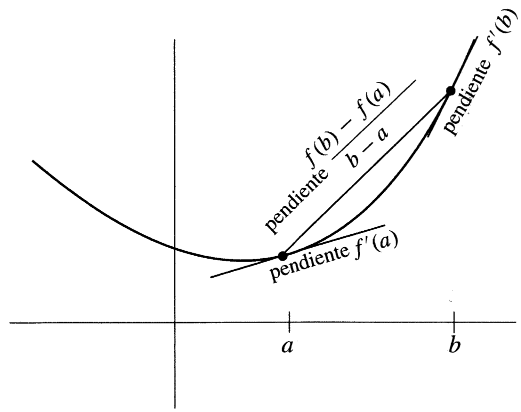


Figura 6

Supongamos ahora que $a<b$. Entonces, como ya hemos visto (Figura 6),

$$f'(a) < \frac{f(a+(b-a))-f(a)}{b-a} \quad \text{ya que } b-a>0$$
$$= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f'(b) > \frac{f(b+(a-b))-f(b)}{a-b} \quad \text{ya que } a-b<0$$
$$= \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

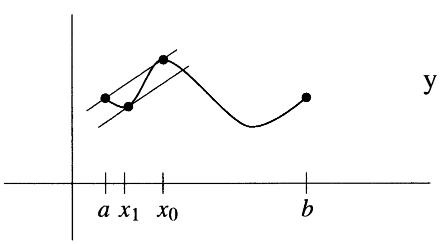


Figura 7

Combinando estas desigualdades, obtenemos $f'(a)<f'(b)$. ■

El Teorema 1 posee dos recíprocos. En este caso, sin embargo, las demostraciones son un poco más difíciles. Comenzaremos con un lema que desempeña la misma función en el siguiente teorema que el Teorema de Rolle en la demostración del Teorema del Valor Medio. Afirma que si f' es creciente, entonces la gráfica de f se sitúa por debajo de cualquier secante *horizontal*.

Lema. *Supongamos que f es diferenciable y que f' es creciente. Si $a<b$ y $f(a)=f(b)$, entonces $f(x)<f(a)=f(b)$ para $a<x<b$.*

Demostración. Supongamos que $f(x) \geq f(a)=f(b)$ para algún x de (a,b). Entonces el máximo de f en $[a,b]$ se localiza en algún punto x_0 de (a,b) con $f(x_0) \geq f(a)$ y, por supuesto, $f'(x_0) = 0$ (Figura 7). Por otra parte, aplicando el Teorema del Valor Medio en el intervalo $[a, x_0]$, vemos que existe un x_1 tal que $a < x_1 < x_0$ y

$$f'(x_1) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} \geq 0,$$

lo que contradice el hecho de que f' sea creciente. ■

Vamos a abordar ahora el caso general, utilizando las mismas manipulaciones algebraicas que en el caso de la demostración del Teorema del Valor Medio.

Teorema 2. *Si f es diferenciable y f' es creciente, entonces f es convexa.*

Demostración. Sea $a < b$. Definamos g mediante

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Es fácil comprobar que g' también es creciente; además, $g(a) = g(b) = f(a)$. Aplicando el lema a la función g deducimos que

$$g(x) < f(a) \quad \text{si} \quad a < x < b.$$

En otras palabras, si $a < x < b$, entonces

$$f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) < f(a)$$

o

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

es decir f es convexa. ■

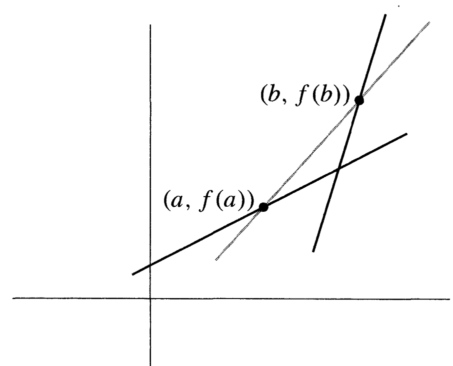


Figura 8

Teorema 3. *Si f es diferenciable y la gráfica de f se sitúa por encima de cada recta tangente excepto en el punto de contacto,entonces f es convexa.*

Demostración. Sea $a < b$. Como se puede observar en la Figura 8, si $(b, f(b))$ se sitúa por encima de la tangente en $(a, f(a))$, y $(a, f(a))$ se sitúa por encima de la tangente en $(b, f(b))$, entonces la pendiente de la tangente en $(b, f(b))$ ha de ser mayor que la pendiente de la tangente en $(a, f(a))$. En el siguiente razonamiento se demuestra analíticamente este hecho mediante ecuaciones.

Como la recta tangente en $(a, f(a))$ queda definida por la gráfica de la función

$$g(x) = f'(a)(x - a) + f(a),$$

y como $(b, f(b))$ se sitúa por encima de la recta tangente, obtenemos

(1) $$f(b) > f'(a)(b - a) + f(a).$$

Análogamente, como la recta tangente en $(b, f(b))$ queda definida por la gráfica de la función

$$h(x) = f'(b)(x-b) + f(b),$$

y $(a, f(a))$ se situa por encima de la tangente en $(b, f(b))$, obtenemos

$$(2) \qquad f(a) > f'(b)(a-b) + f(b).$$

A partir de (1) y (2) deducimos que $f'(a) < f'(b)$, de manera que, según el Teorema 2 f es convexa. ■

Si una función f posee una segunda derivada razonable, la información suministrada por estos teoremas puede utilizarse para localizar las regiones en las cuales f es convexa o cóncava.Consideremos, por ejemplo, la función

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Para esta función,

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

Por tanto, $f'(x) = 0$ sólo para $x = 0$ y $f(0) = 1$, mientras que

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\quad \text{si} \quad x < 0, \\ f'(x) < 0 &\quad \text{si} \quad x > 0. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} &f(x) > 0 \quad \text{para todo } x, \\ &f(x) \to 0 \quad \text{cuando } x \to \infty \text{ o } -\infty, \\ &f \text{ es par.} \end{aligned}$$

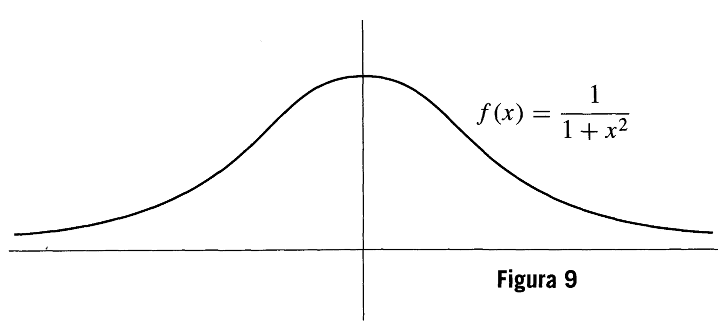


Figura 9

Por tanto, la gráfica de f se parece a la que se muestra en la Figura 9. Calculamos ahora

$$f''(x) = \frac{(1+x^2)^2(-2) + 2x \cdot [2(1+x^2) \cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}.$$

No es difícil determinar el signo de $f''(x)$. Observemos en primer lugar que $f''(x) = 0$ sólo cuando $x = \sqrt{1/3}$ o $-\sqrt{1/3}$. Como f'' es claramente continua, debe mantener el mismo signo en cada uno de los intervalos

$$(-\infty, -\sqrt{1/3}),$$
$$(-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}),$$
$$(\sqrt{1/3}, \infty).$$

Basta pues calcular el valor de f'' en algún punto de estos intervalos para conocer su signo. Por ejemplo

$$\begin{aligned} f''(-1) &= \ \tfrac{1}{2} > 0, \\ f''(0) &= -2 < 0, \\ f''(1) &= \ \tfrac{1}{2} > 0, \end{aligned}$$

concluimos pues que

$$\begin{aligned} &f'' > 0 \quad \text{en el intervalo} \quad (-\infty, -\sqrt{1/3}) \text{ y en el intervalo } (\sqrt{1/3}, \infty), \\ &f'' < 0 \quad \text{en el intervalo} \quad (-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}). \end{aligned}$$

Como $f'' > 0$ significa que f' es creciente, deducimos, según el Teorema 2 que f es convexa en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{1/3})$ y en el intervalo $(\sqrt{1/3}, \infty)$, mientras que f es cóncava en el intervalo $(-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3})$ (Figura 10).

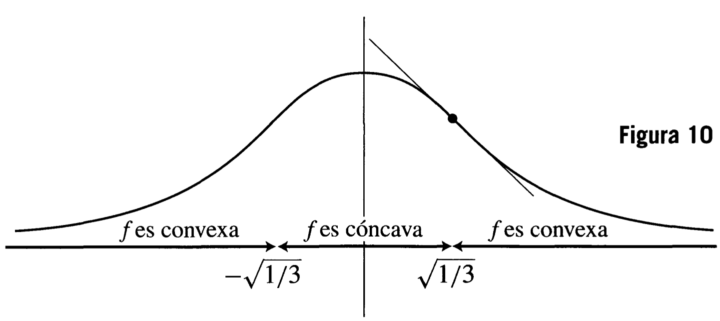


Figura 10

Observemos que la recta tangente se sitúa por debajo de la gráfica de la función a la derecha del punto $(\sqrt{1/3}, \frac{3}{4})$, ya que la función es convexa en el intervalo $(\sqrt{1/3}, \infty)$, y por encima de la gráfica de la función a la izquierda del punto $(\sqrt{1/3}, \frac{3}{4})$ ya que f es cóncava en el intervalo $(-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3})$; por lo tanto, la tangente corta a la gráfica en dicho punto. En general, un número a se denomina un **punto de inflexión** de f si la recta tangente a la gráfica de f en $(a, f(a))$ corta a la gráfica; así $\sqrt{1/3}$ y $-\sqrt{1/3}$ son puntos de inflexión de $f(x) = 1/(1+x^2)$. Observemos que la condición $f''(a) = 0$ *no* nos asegura que a sea un punto de inflexión de f; por ejemplo, si $f(x) = x^4$, entonces $f''(0) = 0$, pero f es convexa, de manera que la recta tangente en $(0, 0)$ ciertamente no corta a la gráfica de f. Para determinar que a es un punto de inflexión de una función f, deberíamos comprobar que f'' tiene signos diferentes a la izquierda y a la derecha de a.

Este ejemplo ilustra el procedimiento que puede utilizarse para analizar cualquier función f. Después de hacer un esquema de la gráfica , utilizando la información proporcionada por f', se calculan los ceros de f'' y se determina el signo de f'' en los intervalos entre ceros consecutivos. En aquellos intervalos en los que $f'' > 0$, la función es convexa; en aquellos en los que $f'' < 0$, la función es cóncava. El conocimiento de aquellas regiones en las que f es cóncava o convexa puede evitar, a menudo, las interpretaciones absurdas de otros datos relativos a f. En los problemas se dan varias funciones que pueden analizarse siguiendo este método, en los cuales se incluyen también algunas cuestiones teóricas.

Para redondear nuestra discusión sobre la convexidad y la concavidad, vamos a demostrar otro resultado adicional, que el lector probablemente ya habrá comenzado a sospechar. Hemos visto que las funciones convexas y cóncavas poseen la propiedad de que toda tangente corta a la gráfica de la función solamente una vez; mediante unos cuantos dibujos el lector podrá convencerse de que ningún otro tipo de función posee dicha propiedad, pero la única demostración conocida por el autor de esta propiedad es bastante artificiosa.

Teorema 4. *Si f es diferenciable en un intervalo y corta a cada una de sus rectas tangentes una sola vez, entonces f es convexa o cóncava en dicho intervalo.*

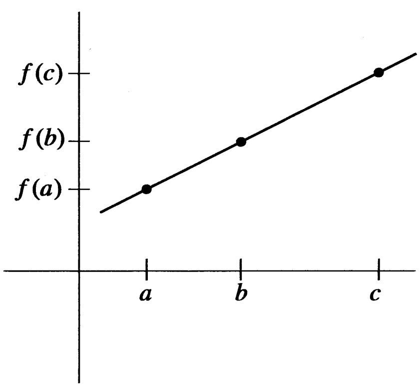


Figura 11

Demostración. La demostración se desglosa en dos apartados.
1. Primero veamos que ninguna recta puede cortar a la gráfica de f en *tres* puntos diferentes. Supongamos, por el contrario, que alguna recta corta a la gráfica de f en los puntos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ y $(c, f(c))$, con $a < b < c$ (Figura 11). Entonces se verificaría que

$$(1) \qquad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}.$$

Consideremos la función

$$g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad \text{para } x \text{ en } [b, c].$$

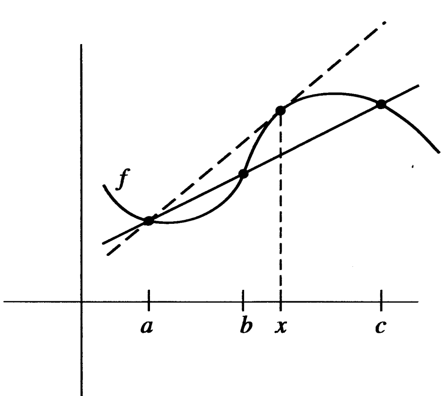


Figura 12

La ecuación (1) demuestra que $g(b) = g(c)$. Por tanto, según el Teorema de Rolle, existe algún número x en (b, c) en el que $0 = g'(x)$, y así

$$0 = (x-a)f'(x) - [f(x) - f(a)]$$

o sea

$$f'(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Pero esto significa (Figura 12) que la recta tangente en $(x, f(x))$ corta al punto $(a, f(a))$, lo que contradice a las hipótesis.

2. Supongamos ahora que $a_0 < b_0 < c_0$ y $a_1 < b_1 < c_1$ son puntos del intervalo. Sea

$$\begin{aligned} x_t &= (1-t)a_0 + ta_1 \\ y_t &= (1-t)b_0 + tb_1 \qquad\qquad 0 \le t \le 1. \\ z_t &= (1-t)c_0 + tc_1 \end{aligned}$$

Entonces, $x_0 = a_0$ y $x_1 = a_1$ y (Problema 4-2) los puntos x_t se sitúan entre a_0 y a_1, con resultados análogos para y_t y z_t. Además,

$$x_t < y_t < z_t \qquad \text{para} \qquad 0 \le t \le 1.$$

Consideremos ahora la función

$$g(t) = \frac{f(y_t) - f(x_t)}{y_t - x_t} - \frac{f(z_t) - f(x_t)}{z_t - x_t} \qquad \text{para } 0 \le t \le 1.$$

Según el apartado 1, $g(t) \neq 0$ para todo t de $[0, 1]$. Por lo tanto, o bien $g(t) > 0$ para todo t de $[0, 1]$ o $g(t) < 0$ para todo t de $[0, 1]$. Así, o bien f es convexa o f es cóncava. ■

Problemas

1. Dibuje las funciones del Problema 11-1, indicando las regiones de convexidad y concavidad y los puntos de inflexión (considere (iv) con doble asterisco).
2. La Figura 30 del Capítulo 11 muestra la gráfica de f'. Dibuje la gráfica de f.
3. Demuestre que f es convexa en un intervalo si y sólo si para todo x e y del intervalo se verifica

   $$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y), \quad \text{para } 0 < t < 1.$$

   (Se trata solamente de otra expresión equivalente a la definición que hemos dado de función convexa, aunque muy útil en muchos casos.)
4. (a) Demuestre que si f y g son convexas y f es creciente, entonces $f \circ g$ es convexa. (La demostración es más sencilla si se utiliza el resultado del Problema 3.)
   (b) Dé un ejemplo de un caso en el que $g \circ f$ no sea convexa.
   (c) Suponga que f y g son dos veces diferenciables. Dé otra demostración del resultado del apartado (a) considerando las derivadas segundas.
5. (a) Suponga que f es diferenciable y convexa en un intervalo. Demuestre que o bien f es creciente, o bien f es decreciente, o sino que existe un número c tal que f es decreciente a la izquierda de c y creciente a la derecha de c.
   (b) Utilice este hecho para dar otra demostración del resultado del Problema 4(a), siendo f y g (una vez) diferenciables. (Hay que ir con cuidado al comparar $f'(g(x))$ y $f'(g(y))$ para $x < y$.)
   (c) Demuestre el resultado del apartado (a) sin suponer que f es diferenciable. Hay que tener en cuenta distintos casos, aunque no es necesario tener ideas particularmente luminosas. Comience demostrando que si $a < b$ y $f(a) < f(b)$, entonces f es creciente a la derecha de b; y si $f(a) > f(b)$, entonces f es decreciente a la izquierda de a.

***6.** Sea f una función dos veces diferenciable que posee las siguientes propiedades: $f(x) > 0$ para $x \geq 0$, f es decreciente y $f'(0) = 0$. Demuestre que $f''(x) = 0$ para algún $x > 0$ (de manera que, en casos razonables, f tendrá un punto de inflexión en x; considérese por ejemplo la función $f(x) = 1/(1+x^2)$). Cada hipótesis de este teorema es esencial, como lo demuestra el caso de la función $f(x) = 1 - x^2$, que no es positiva para todo x; también el caso de la función $f(x) = x^2$, que no es decreciente, y el caso de la función $f(x) = 1/(x+1)$, que no satisface la condición $f'(0) = 0$. Indicación: Elija $x_0 > 0$ con $f'(x_0) < 0$. No es posible que $f'(y) \leq f'(x_0)$ para todo $y > x_0$. ¿Por qué? Por tanto, $f'(x_1) > f'(x_0)$ para algún $x_1 > x_0$. Considere f' en $[0, x_1]$.

***7.** (a) Demuestre que si f es convexa entonces $f([x+y]/2) < [f(x)+f(y)]/2$.

(b) Suponga que f satisface dicha condición. Demuestre que $f(kx+(1-k)y) < kf(x)+(1-k)f(y)$ siendo k un número racional entre 0 y 1, de la forma $m/2^n$. Indicación: El apartado (a) constituye el caso especial $n = 1$. Utilice el principio de inducción, empleando el apartado (a) en cada caso.

(c) Suponga que f satisface la condición del apartado (a) y que f es continua. Demuestre que f es convexa.

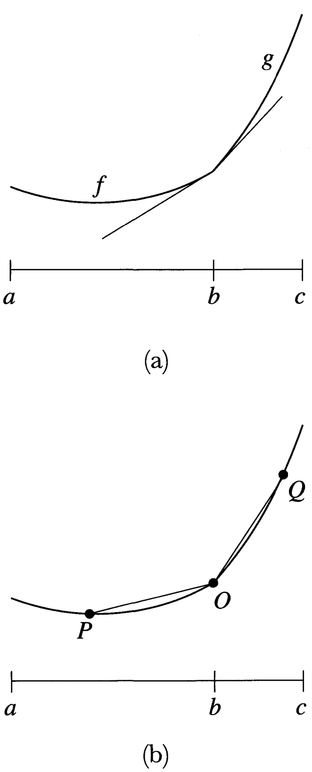


Figura 13

***8.** Para $n > 1$, sean $p_1, \ldots, p_n$ números *positivos* con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

(a) Siendo $x_1, \ldots, x_n$ números cualesquiera, demuestre que $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ está situado entre el menor y el mayor de los x_i.

(b) Demuestre lo mismo para $(1/t)\sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i$, donde $t = \sum_{i=1}^{n-1} p_i$.

(c) Demuestre la *desigualdad de Jensen:* si f es convexa, entonces $f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) < \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)$. Indicación: Utilice el Problema 3, observando que $p_n = 1 - t$. (Se necesita el apartado (b) para demostrar que $(1/t)\sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i$ pertenece al dominio de f si $x_1, \ldots, x_n$ son puntos del dominio de f.)

***9.** (a) Para cualquier función f, la derivada por la derecha, $\lim_{h\to 0^-} [f(a+h)-f(a)]/h$, se representa mediante $f'_+(a)$, y la derivada por la izquierda por $f'_-(a)$. La demostración del Teorema 1 muestra realmente que $f'_+(a)$ y $f'_-(a)$ siempre existen si f es convexa en algún intervalo abierto que contenga al punto a. Compruebe dicha afirmación y demuestre que f'_+ y f'_- son crecientes; demuestre también que $f'_-(a) \leq f'_+(a)$.

(b) Recíprocamente, suponga que f es convexa en $[a, b]$ y que g es convexa en $[b, c]$, con $f(b) = g(b)$ y $f'_-(b) \leq g'_+(b)$ (Figura 13 (a)). Si definimos la función h en $[a, c]$ como aquélla que es igual a f en $[a, b]$ y a g en $[b, c]$, demuestre que h es convexa en $[a, c]$. Indicación: Dados P y Q situados en lados opuestos de $O = (b, f(b))$, como se muestra en la Figura 13 (b), compare la pendiente de OQ con la pendiente de PO.

(c) Demuestre que si f es convexa, entonces $f'_+(a) = f'_-(a)$ si y sólo si f'_+ es continua en a. (Por tanto, f es diferenciable precisamente cuando f'_+ es continua.) Indicación: $[f(b)-f(a)]/(b-a)$ está próximo a $f'_-(a)$ para $b < a$ próximo a a, y $f'_+(b)$ es menor que este cociente.

***10.** (a) Demuestre que una función convexa definida en $\mathbf{R}$, o en cualquier intervalo abierto, debe ser continua.

(b) Dé un ejemplo de una función convexa en un intervalo cerrado que *no* sea continua y explique exactamente qué tipos de discontinuidades son posibles.

11. Una función f se denomina *débilmente convexa* en un intervalo, si para $a < b < c$ de dicho intervalo, se verifica que

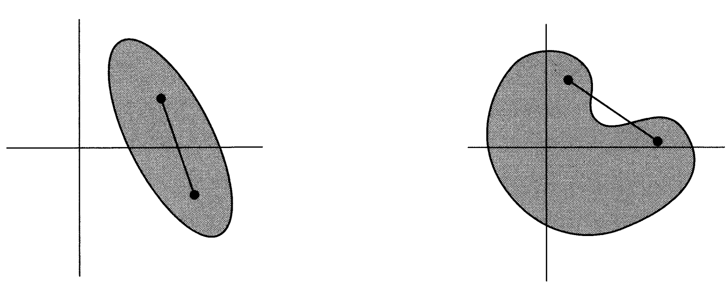
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

(a) Demuestre que una función débilmente convexa es convexa si y sólo si su gráfica no contiene segmentos rectilíneos. (A veces, una función débilmente convexa se denomina simplemente "convexa", mientras que las funciones convexas en el sentido que las hemos definido en este libro se denominan "estrictamente convexas".)

(b) Reformule los teoremas de esta sección para el caso de funciones débilmente convexas.

12. Halle dos funciones convexas f y g tales que $f(x) = g(x)$ si y sólo si x es un entero. Indicación: Halle primero un caso en el que g sea sólo débilmente convexa y luego modifíquelo utilizando el resultado del Problema 9 como guía.

13. Un conjunto A de puntos del plano se denomina *convexo* si A contiene a cualquier segmento rectilíneo que une a dos puntos cualesquiera del conjunto (Figura 14). Dada una función f, sea A_f el conjunto de los puntos (x,y) con $y \geq f(x)$, de manera que A_f es el conjunto de los puntos situados en la gráfica o por encima de la gráfica de f. Demuestre que A_f es convexo si y sólo si f es débilmente convexa, según la terminología introducida en el problema anterior. En la referencia [18] de las Lecturas Aconsejadas, puede encontrarse más información referente a los conjuntos convexos.



(a) un conjunto convexo del plano (b) un conjunto no convexo del plano

Figura 14

Funciones inversas

12

Ahora que ya disponemos de métodos potentes para investigar funciones, lo que nos falta es una cantera adecuada de funciones a las cuales sean aplicables estos métodos. Hemos estudiado distintas maneras de formar nuevas funciones a partir de otras dadas –suma, multiplicación, división y composición– pero con estas operaciones únicamente se pueden formar las funciones racionales (incluso la función seno, a pesar de haberla utilizado frecuentemente en los ejemplos, no la hemos definido todavía). En los siguientes capítulos comenzaremos a construir nuevas funciones mediante procedimientos muy elaborados, pero existe un método importante que prácticamente doblará la utilidad de cualquier otro método que descubramos.

Si recordamos que una función es una colección de pares de números, podríamos tener la brillante idea de, simplemente, invertir todos los pares. Así, a partir de la función

$$f = \{(1,2),(3,4),(5,9),(13,8)\},$$

obtenemos

$$g = \{(2,1),(4,3),(9,5),(8,13)\}.$$

Vemos que $f(1) = 2$ y $f(3) = 4$, mientras que $g(2) = 1$ y $g(4) = 3$.

Por desgracia, esta brillante idea no siempre funciona. Si

$$f = \{(1,2),(3,4),(5,9),(13,4)\},$$

entonces la colección

$$\{(2,1),(4,3),(9,5),(4,13)\}$$

no es una función ya que contiene a $(4,3)$ y $(4,13)$. Está claro donde radica la dificultad: $f(3) = f(13)$, incluso aunque $3 \neq 13$. Este es el único caso en el que puede existir dificultad y por ello vale la pena dar un nombre a las funciones en las que esto no ocurre.

Definición

Una función f es **uno-uno** (que se lee “uno a uno”) si $f(a) \neq f(b)$ cuando $\boldsymbol{a \neq b}$.

La función identidad I es, obviamente, uno-uno, como también lo es la siguiente modificación:

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \neq 3,5 \\ 3, & x = 5 \\ 5, & x = 3. \end{cases}$$

La función $f(x) = x^2$ no es uno-uno ya que $f(-1) = f(1)$, pero si definimos

$$g(x) = x^2, \qquad x \geq 0$$

(y mantenemos g no definida para $x < 0$), entonces g es uno-uno ya que g es creciente (la derivada $g'(x) = 2x > 0$ para $x > 0$). Esta observación se generaliza fácilmente: si n es un número natural y

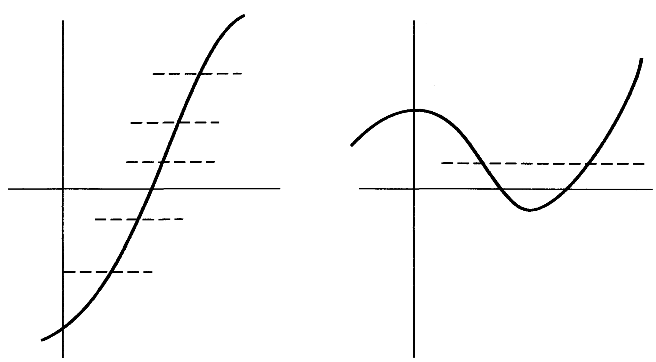
$$f(x) = x^n, \qquad x \geq 0,$$

entonces f es uno-uno. Aún más, si n es impar la función

$$f(x) = x^n \qquad \text{para todo } x$$

es uno-uno (ya que $f'(x) = nx^{n-1} > 0$ para todo $x \neq 0$).

Basándose en la gráfica de f es muy sencillo decidir si f es uno-uno: la condición $f(a) \neq f(b)$ para $a \neq b$ significa que ninguna línea *horizontal* corta a la gráfica de f en más de un punto (Figura 1).



función uno-uno (a) función que no es uno-uno (b)

Figura 1

Si se invierten todos los pares de una función (no necesariamente uno-uno), se obtiene en cualquier caso otra colección de pares. Lo más normal es abstenerse de utilizar este método cuando f no es uno-uno, aunque no existe ninguna razón particular para ello; en lugar de una definición con condiciones restrictivas, obtenemos una definición y un teorema.

Definición

> Para cualquier función f, la **inversa** de f, denotada por f^{-1}, es el conjunto de todos los pares (a, b) para los que el par (b, a) pertenece a f.

Teorema 1. *f^{-1} es una función si y sólo si f es uno-uno.*

Demostración. Supongamos primero que f es uno-uno. Sean (a,b) y (a,c) dos pares de f^{-1}. Entonces (b,a) y (c,a) pertenecen a f, de manera que $a=f(b)$ y $a=f(c)$; como f es uno-uno, $b=c$. Por tanto, f^{-1} es una función.

Recíprocamente, supongamos que f^{-1} es una función. Si $f(b)=f(c)$, entonces f contiene a los pares $(b,f(b))$ y $(c,f(c))=(c,f(b))$, y por tanto $(f(b),b)$ y $(f(b),c)$ pertenecen a f^{-1}. Como por hipótesis, f^{-1} es una función, $b=c$, es decir, f es uno-uno. ■

Las gráficas de f y de f^{-1} están tan relacionadas que es posible utilizar la gráfica de f para visualizar la gráfica de f^{-1}. Como la gráfica de f^{-1} consiste en todos los pares (a,b) tales que (b,a) pertenece a la gráfica de f, se puede obtener la gráfica de f^{-1} simplemente intercambiando los ejes horizontal y vertical. Si f tiene la gráfica representada en la Figura 2(a),

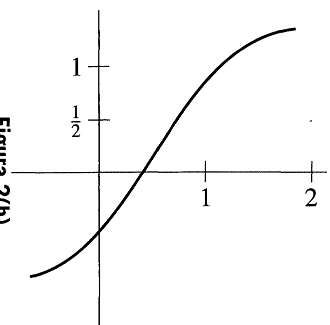


Figura 2(b)

Figura 2(a)

girando esta página en sentido contrario al de las agujas del reloj un ángulo recto, aparece a la izquierda la gráfica de f^{-1} (Figura 2(b)). La única dificultad radica en que la numeración del eje horizontal va ahora en dirección equivocada; por tanto es necesario voltear la figura para obtener la gráfica usual de f^{-1}, que se representa a la derecha (Figura 3).

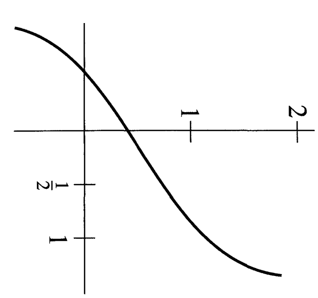


Figura 3

Este procedimiento resulta muy artificioso con los libros y es imposible de realizar con las pizarras, por tanto es una suerte de que se disponga de otra manera de construir la gráfica de f^{-1}. Los puntos (a, b) y (b, a) son el reflejo uno del otro respecto a la gráfica de $I(x) = x$, que se denomina la **diagonal** (Figura 4). Para obtener la gráfica de f^{-1} basta reflejar la gráfica de f respecto a esta recta (Figura 5).

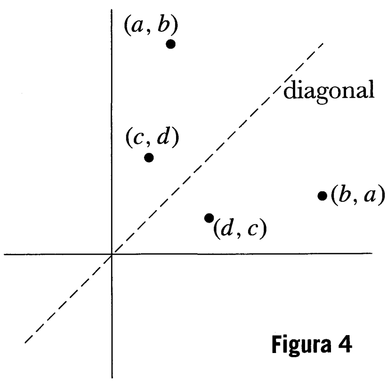


Figura 4

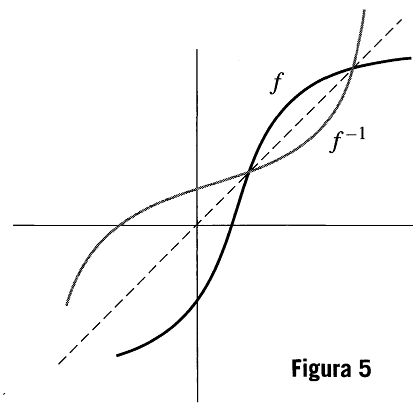


Figura 5

Si se refleja dos veces respecto a la diagonal se vuelve a obtener, obviamente, la gráfica de la función inicial; esto significa que $(f^{-1})^{-1} = f$, lo cual es evidente a partir de la definición. En conjunción con el Teorema 1, esta ecuación tiene una consecuencia significativa: si f es una función uno-uno, entonces la función f^{-1} también es uno-uno (ya que $(f^{-1})^{-1}$ es una función).

Existen otras manipulaciones sencillas con la funciones inversas que conviene conocer. Como (a, b) pertenece a f si y sólo si (b, a) pertenece a f^{-1}, deducimos que

$$b = f(a) \qquad \text{significa lo mismo que} \qquad a = f^{-1}(b).$$

Por tanto, $f^{-1}(b)$ es el (único) número a tal que $f(a) = b$; por ejemplo, si $f(x) = x^3$, entonces $f^{-1}(b)$ es el único número a tal que $a^3 = b$ y este número es, por definición, $\sqrt[3]{b}$.

El hecho de que $f^{-1}(x)$ sea el número y tal que $f(y) = x$, puede ser expresado de una forma mucho más compacta:

$$f(f^{-1}(x)) = x, \qquad \text{para todo } x \text{ del dominio de } f^{-1}.$$

Además,

$$f^{-1}(f(x)) = x, \qquad \text{para todo } x \text{ del dominio de } f;$$

esto se deduce de la ecuación anterior, sustituyendo f por f^{-1}. Estas dos importantes ecuaciones pueden escribirse como

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1} &= I, \\ f^{-1} \circ f &= I \end{aligned}$$

(con la salvedad de que la función identidad del lado derecho de la igualdad tendrá un dominio mayor si el dominio de f o de f^{-1} no es todo $\mathbf{R}$).

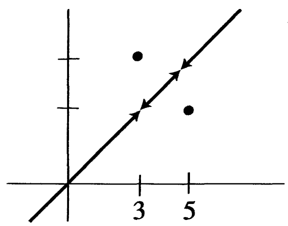


Figura 6

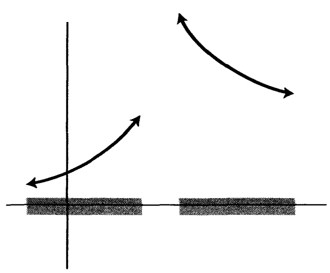


Figura 7

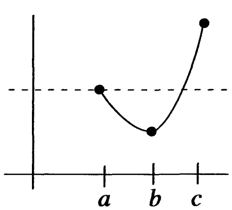


Figura 8

Como muchas funciones estándar serán definidas como las inversas de otras funciones, es muy importante poder determinar qué funciones son uno-uno. Ya tenemos una idea de qué clase de funciones son las más fáciles de manejar: las funciones crecientes o decrecientes son, obviamente, uno-uno. Además, si f es creciente, f^{-1} también es creciente, y si f es decreciente, f^{-1} también es decreciente (la demostración de este hecho se deja para el lector). Por otra parte, f es creciente si y sólo si $-f$ es decreciente, una propiedad muy útil que vale la pena recordar.

Desde luego, no es cierto que toda función uno-uno sea creciente o decreciente. Ya hemos dado un ejemplo de este hecho, cuya gráfica se representa en la Figura 6:

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \neq 3,5 \\ 3, & x = 5 \\ 5, & x = 3. \end{cases}$$

La Figura 7 muestra que existen incluso funciones continuas uno-uno que no son ni crecientes ni decrecientes, pero si el lector trata de hacer algunos dibujos, pronto se dará cuenta que toda función uno-uno continua definida en un intervalo, es creciente o decreciente.

Teorema 2. *Si f es continua y uno-uno en un intervalo, entonces f es creciente o decreciente en dicho intervalo.*

Demostración. La demostración se da en tres etapas sencillas:

(1) Si $a < b < c$ son tres puntos del intervalo, entonces

$$\begin{array}{lll} \text{o bien} & \text{(i)} & f(a) < f(b) < f(c) \\ \text{o} & \text{(ii)} & f(a) > f(b) > f(c). \end{array}$$

Supongamos, por ejemplo, que $f(a) < f(c)$. Si $f(b) < f(a)$ (Figura 8), entonces, aplicando el Teorema del Valor Intermedio al intervalo $[b, c]$ se obtendría un x con $b < x < c$ y $f(x) = f(a)$, lo que contradice el hecho de que f sea uno-uno en $[a, c]$. Análogamente, $f(b) > f(c)$ conduciría también a una contradicción, de manera que $f(a) < f(b) < f(c)$.

Naturalmente, el mismo argumento sirve para el caso $f(a) > f(c)$.

(2) Si $a < b < c < d$ son cuatro puntos del intervalo, entonces

$$\begin{array}{lll} \text{o bien} & \text{(i)} & f(a) < f(b) < f(c) < f(d) \\ \text{o} & \text{(ii)} & f(a) > f(b) > f(c) > f(d). \end{array}$$

ya que puede aplicarse (1) primero a los puntos $a < b < c$ y luego a los puntos $b < c < d$.

(3) Tomemos cualquier $a < b$ del intervalo y supongamos que $f(a) < f(b)$. Entonces f es creciente ya que si c y d son dos puntos cualesquiera del intervalo, podemos aplicar (2) al conjunto $\{a, b, c, d\}$ (después de colocar a los puntos en orden creciente). ■

De ahora en adelante nos centraremos casi exclusivamente en aquellas funciones que son continuas, crecientes o decrecientes, en un intervalo. Si f es una de estas funciones, es posible determinar con precisión cómo será el dominio de f^{-1}.

Supongamos primero que f es una función continua, creciente, definida en el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces, según el Teorema del Valor Intermedio, f toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$. Por tanto, el dominio de f^{-1} es el intervalo cerrado $[f(a), f(b)]$. Análogamente, si f es continua y decreciente en el intervalo $[a, b]$, entonces el dominio de f^{-1} es $[f(b), f(a)]$.

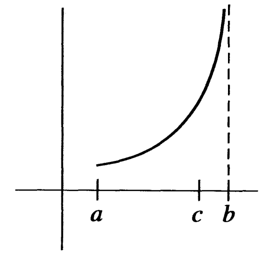


Figura 9

Si f es una función continua, creciente, en un intervalo *abierto* (a, b), el análisis es un poco más complicado. Para empezar, elijamos un punto c de (a, b). Primero veremos cuáles son los valores $> f(c)$ tomados por f. Una posibilidad es que f tome valores arbitrariamente grandes (Figura 9). En este caso, f toma *todos* los valores $> f(c)$, según el Teorema del Valor Intermedio. Si, por el contrario, f no toma valores arbitrariamente grandes, entonces $A = \{f(x) : c \leq x < b\}$ está acotado superiormente, de modo que A tiene una cota superior mínima α (Figura 10). Supongamos ahora que y es cualquier número que verifica $f(c) < y < \alpha$. Entonces f toma algún valor $f(x) > y$ (ya que α es la cota superior mínima de A). Según el Teorema del Valor Intermedio, f toma efectivamente el valor y. Observemos que f no puede tomar el valor α, ya que si $\alpha = f(x)$ para $a < x < b$ y elegimos un t tal que $x < t < b$, entonces $f(t) > \alpha$, lo cual es imposible.

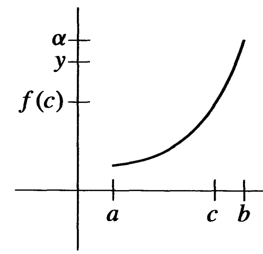


Figura 10

Se pueden utilizar los mismos argumentos para valores menores que $f(c)$: o bien f toma todos los valores menores que $f(c)$, o existe un número $\beta < f(c)$ tal que f toma todos los valores entre β y $f(c)$, pero no el mismo β.

Puede repetirse todo el razonamiento si f es decreciente, y si el dominio de f es $\mathbf{R}$ o (a, ∞) o $(-\infty, a)$. En resumen: si f es una función continua, creciente o decreciente, cuyo dominio es un intervalo de una de las formas (a, b), $(-\infty, b)$, (a, ∞), o $\mathbf{R}$, entonces el dominio de f^{-1} es también un intervalo de una de estas cuatro formas; además, en esta discusión se pueden incluir también, fácilmente, los casos correspondientes a los restantes intervalos del tipo $(a, b]$, $[a, b)$, $(-\infty, b]$ y $[a, \infty)$.

Ahora que ya hemos completado este análisis preliminar acerca de las funciones continuas uno-uno, es posible preguntarse qué propiedades importantes de una función uno-uno son heredadas por su inversa. En el caso de la continuidad no existe ningún problema.

Teorema 3. *Si f es continua y uno-uno en un intervalo, entonces f^{-1} es también continua.*

Demostración. Según el Teorema 2 sabemos que f es creciente o decreciente. Podemos suponer que f es creciente ya que, entonces, el caso en que f es decreciente se puede tratar de manera análoga acudiendo al recurso habitual de considerar a la función $-f$. También podríamos suponer que el intervalo en el que f está definida es abierto, ya que es fácil ver que una función continua, creciente o decreciente, en cualquier intervalo, puede extenderse a otra definida en un intervalo abierto mayor.

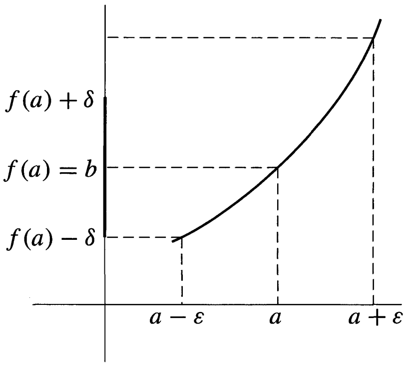


Figura 11

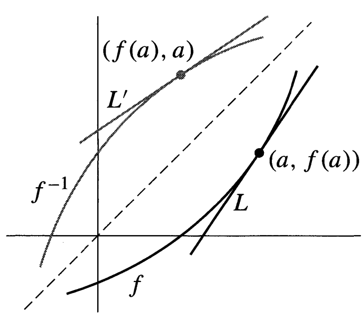


Figura 12

Hemos de demostrar que

$$\lim_{x\to b} f^{-1}(x) = f^{-1}(b)$$

para cada b del dominio de f^{-1}. Este número b es de la forma $f(a)$ para un cierto a del dominio de f. Para cualquier $\varepsilon > 0$, hemos de hallar un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{si } f(a)-\delta < x < f(a)+\delta, \text{ entonces } a-\varepsilon < f^{-1}(x) < a+\varepsilon.$$

La Figura 11 sugiere la manera de hallar δ (recordemos que girando la figura lateralmente puede observarse la gráfica de f^{-1}): como

$$a-\varepsilon < a < a+\varepsilon,$$

se deduce que

$$f(a-\varepsilon) < f(a) < f(a+\varepsilon);$$

sea δ el menor de los números $f(a+\varepsilon)-f(a)$ y $f(a)-f(a-\varepsilon)$. La Figura 11 contiene la demostración completa de que este δ es un valor adecuado, y lo que sigue a continuación es tan sólo una explicación verbal de la información contenida en la imagen de la figura.

Nuestra elección de δ garantiza que

$$f(a-\varepsilon) \le f(a)-\delta \text{ y } f(a)+\delta \le f(a+\varepsilon).$$

Por lo tanto, si

$$f(a)-\delta < x < f(a)+\delta,$$

entonces

$$f(a-\varepsilon) < x < f(a+\varepsilon).$$

Como f es creciente, f^{-1} también es creciente, obteniéndose

$$f^{-1}(f(a-\varepsilon)) < f^{-1}(x) < f^{-1}(f(a+\varepsilon)),$$

es decir,

$$a-\varepsilon < f^{-1}(x) < a+\varepsilon,$$

que es precisamente lo que se quería demostrar. ■

Después del resultado positivo obtenido al investigar la continuidad de f^{-1}, es natural que abordemos la cuestión de la diferenciabilidad. Una vez más, una imagen nos va a indicar cuál es el resultado que cabría esperar. La Figura 12 muestra la gráfica de una función uno-uno, f, con una recta tangente L en $(a, f(a))$. Si la imagen se refleja con respecto a la diagonal, se observa la gráfica de f^{-1} y la recta tangente L' en $(f(a), a)$. La pendiente de L' es el recíproco de la pendiente de L. En otras palabras, parece que

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Esta fórmula puede escribirse de manera que exprese $(f^{-1})'(b)$ directamente, para cada b del dominio de f^{-1}:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

A diferencia del caso de la continuidad, esta "demostración" visual se complica cuando se formula analíticamente. Sin embargo, se puede utilizar otro método. Como sabemos que

$$f(f^{-1}(x)) = x,$$

podemos intentar demostrar la fórmula anterior aplicando la Regla de la Cadena:

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1,$$

de manera que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Por desgracia, esto no constituye una prueba de que f^{-1} sea diferenciable, ya que la Regla de la Cadena no puede aplicarse, a no ser que ya se conozca que f^{-1} es diferenciable. Pero la deducción anterior nos indica cómo debería ser $(f^{-1})'(x)$ si f^{-1} *es* diferenciable. Además, la podemos utilizar también para obtener una información preliminar importante.

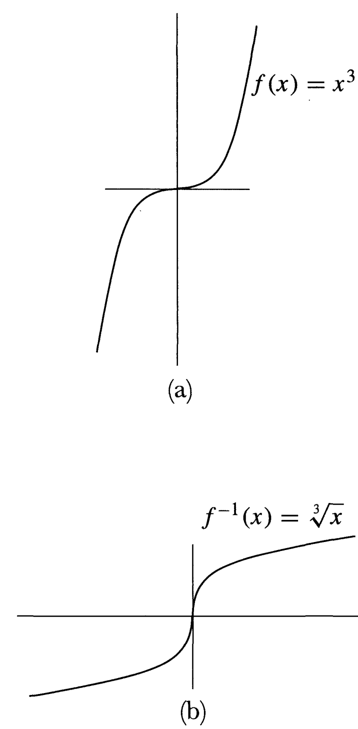


Figura 13

Teorema 4. *Si f es una función continua uno-uno definida en un intervalo y $f'(f^{-1}(a)) = 0$, entonces f^{-1} no es diferenciable en a.*

Demostración. Tenemos que

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

Si f^{-1} *fuese* diferenciable en a, la Regla de la Cadena implicaría que

$$f'(f^{-1}(a)) \cdot (f^{-1})'(a) = 1,$$

por tanto

$$0 \cdot (f^{-1})'(a) = 1,$$

lo cual es absurdo. ■

Un ejemplo sencillo al cual se aplica el Teorema 4 lo tenemos en el caso de la función $f(x) = x^3$. Ya que $f'(0) = 0$ y $0 = f^{-1}(0)$, la función f^{-1} no es diferenciable en 0 (Figura 13).

Habiendo decidido en qué puntos una función inversa no puede ser diferenciable, estamos ya en condiciones de dar una demostración rigurosa de que, en todos los demás puntos, la derivada de la función inversa viene dada por la fórmula que ya hemos "deducido" de dos maneras diferentes. Observemos que durante el proceso de la demostración rigurosa supondremos que f^{-1} es *continua* lo cual ya ha sido demostrado previamente.

Teorema 5. *Sea f una función continua uno-uno definida en un intervalo, y supongamos que f es diferenciable en $f^{-1}(b)$, con derivada $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$. Entonces f^{-1} es diferenciable en b, y*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Demostración. Sea $b = f(a)$. Entonces

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} & \frac{f^{-1}(b+h) - f^{-1}(b)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(b+h) - a}{h}\end{aligned}$$

Cada número $b+h$ del dominio de f^{-1} puede escribirse en la forma

$$b+h = f(a+k)$$

para un único k (deberíamos escribir realmente $k(h)$, aunque mantendremos la notación k para simplificar). Entonces

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} & \frac{f^{-1}(b+h) - a}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(f(a+k)) - a}{f(a+k) - b} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{k}{f(a+k) - f(a)}.\end{aligned}$$

Efectivamente, vamos por buen camino. No es difícil obtener una expresión explícita para k; ya que

$$b+h = f(a+k)$$

deducimos que

$$f^{-1}(b+h) = a+k$$

es decir

$$k = f^{-1}(b+h) - f^{-1}(b).$$

Según el Teorema 3, la función f^{-1} es continua en b. Esto significa que k tiende a 0 cuando h tiende a 0. Como

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(a+k)-f(a)}{k} = f'(a) = f'(f^{-1}(b)) \neq 0,$$

esto implica que

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}. \blacksquare$$

El trabajo que hemos realizado con las funciones inversas se verá ampliamente recompensado más adelante, pero ahora ya podemos adelantar un beneficio inmediato. Si n es impar, sea

$$f_n(x) = x^n \qquad \text{para todo } x;$$

si n es par, sea

$$f_n(x) = x^n, \qquad x \geq 0.$$

En ambos casos, f_n es una función continua uno-uno, cuya función inversa viene dada por

$$g_n(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}.$$

Según el Teorema 5, para $x \neq 0$ se verifica

$$\begin{aligned} g_n{}'(x) &= \frac{1}{f_n{}'(f_n{}^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{n(f_n{}^{-1}(x))^{n-1}} \\ &= \frac{1}{n(x^{1/n})^{n-1}} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^{1-(1/n)}} \\ &= \frac{1}{n} \cdot x^{(1/n)-1}. \end{aligned}$$

Por tanto, si $f(x) = x^a$ y a es un entero o el recíproco de un número natural, entonces $f'(x) = ax^{a-1}$. Ahora es fácil comprobar que esta fórmula se verifica para cualquier número racional a: sea $a = m/n$, donde m es un entero y n es un número natural; si

$$f(x) = x^{m/n} = \left(x^{1/n}\right)^m,$$

entonces, según la Regla de la Cadena,

$$\begin{aligned} f'(x) &= m\left(x^{1/n}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot x^{(1/n)-1} \\ &= \frac{m}{n} \cdot x^{[(m/n)-(1/n)]+[(1/n)-1]} \\ &= \frac{m}{n} x^{(m/n)-1}. \end{aligned}$$

Aunque ahora ya disponemos de una fórmula para $f'(x)$ cuando $f(x)=x^a$ siendo a un número racional, tendremos que dejar para más adelante el tratamiento de la función $f(x)=x^a$ cuando a es un número irracional, ya que de momento, ni siquiera conocemos el *significado* de un símbolo como $x^{\sqrt{2}}$. En realidad, las funciones inversas tendrán un papel crucial en la definición de x^a siendo a un número irracional. De hecho, en los próximos capítulos vamos a definir algunas funciones importantes en términos de sus funciones inversas.

Problemas

1. Halle f^{-1} para cada una de las siguientes funciones f.

(i) $f(x)=x^3+1$.

(ii) $f(x)=(x-1)^3$.

(iii) $f(x)=\begin{cases} x, & x \text{ racional} \\ -x, & x \text{ irracional.} \end{cases}$

(iv) $f(x)=\begin{cases} -x^2, & x\geq 0 \\ 1-x^3, & x<0. \end{cases}$

(v) $f(x)=\begin{cases} x, & x\neq a_1,\dots,a_n \\ a_{i+1}, & x=a_i, \quad i=1,\dots,n-1 \\ a_1, & x=a_n. \end{cases}$

(vi) $f(x)=x+[x]$.

(vii) $f(0.a_1a_2a_3\dots)=0.a_2a_1a_3\dots$.
(Se utiliza la representación decimal.)

(viii) $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}, \quad -1<x<1.$

2. Describa la gráfica de f^{-1} si

(i) f es creciente y siempre positiva.

(ii) f es creciente y siempre negativa.

(iii) f es decreciente y siempre positiva.

(iv) f es decreciente y siempre negativa.

3. Demuestre que si f es creciente, entonces f^{-1} también lo es, y análogamente en el caso que f sea decreciente.

4. Si f y g son crecientes, ¿lo son también $f+g$, $f\cdot g$ y $f\circ g$?

5. (a) Demuestre que si f y g son uno-uno, entonces $f\circ g$ también es uno-uno. Halle $(f\circ g)^{-1}$ en términos de f^{-1} y g^{-1}. Indicación: La respuesta *no* es $f^{-1}\circ g^{-1}$.

(b) Halle g^{-1} en términos de f^{-1} si $g(x)=1+f(x)$.

6. Demuestre que $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ es uno-uno si y sólo si $ad-bc\neq 0$, y halle f^{-1} en este caso.

7. ¿En qué intervalos $[a,b]$ son uno-uno las siguientes funciones?

(i) $f(x)=x^3-3x^2$.

(ii) $f(x)=x^5+x$.

(iii) $f(x)=(1+x^2)^{-1}$.

(iv) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$.

8. Suponga que f es diferenciable con derivada $f'(x)=(1+x^3)^{-1/2}$. Demuestre que $g=f^{-1}$ satisface $g''(x)=\frac{3}{2}g(x)^2$.

9. Suponga que f es uno-uno y que f^{-1} tiene una derivada que no se anula en ningún punto. Demuestre que f es diferenciable. Indicación: Existe una demostración inmediata.

10. Como continuación del Problema 10-17, ¿qué condición adicional debe satisfacer g para asegurar que f es diferenciable?

11. Halle una fórmula para $(f^{-1})''(x)$.

***12.** Demuestre que si $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ y existe $f^{(k)}(f^{-1}(x))$, entonces también existe $(f^{-1})^{(k)}(x)$.

13. En el Problema 10-19 se definió la derivada de Schwarz $\mathscr{D}f$.

(a) Demuestre que si $\mathscr{D}f(x)$ existe para todo x, entonces $\mathscr{D}f^{-1}(x)$ también existe para todo x del dominio de f^{-1}.

(b) Halle una fórmula para $\mathscr{D}f^{-1}(x)$.

***14.** (a) Demuestre que existe una función diferenciable f tal que $[f(x)]^5 + f(x) + x = 0$ para todo x. Indicación: Demuestre que f puede expresarse como una función inversa. La manera más fácil de hacerlo es hallar f^{-1}. Y la manera más fácil de hacer *esto* es definiendo $x = f^{-1}(y)$.

(b) Halle f' en términos de f, aplicando un teorema apropiado de este capítulo.

(c) Halle f' de otra manera, simplemente derivando la ecuación que define a f.

A menudo se dice que la función del Problema 14 está **definida implícitamente** por la ecuación $y^5 + y + x = 0$. Sin embargo, en el caso de esta ecuación, la situación es muy especial. Como demuestra el siguiente problema, una ecuación no define en general a una función implícitamente en toda la recta, y en algunas regiones puede estar definida implícitamente más de una función.

15. (a) ¿Cuáles son las dos funciones diferenciables f definidas implícitamente en $(-1,1)$ por la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, es decir, que satisfacen $x^2 + [f(x)]^2 = 1$ para todo x de $(-1,1)$? Observe que no existen soluciones definidas fuera de $[-1,1]$.

(b) ¿Cuáles son las funciones f que satisfacen $x^2 + [f(x)]^2 = -1$?

*(c) ¿Qué funciones diferenciables f satisfacen $[f(x)]^3 - 3f(x) = x$? Indicación: Será útil dibujar primero la gráfica de la función $g(x) = x^3 - 3x$.

En general, la determinación de los intervalos en los que una función diferenciable queda definida implícitamente mediante una ecuación particular, suele ser un problema bastante delicado, que se trata de manera más completa en los manuales de cálculo infinitesimal avanzado. Sin embargo, si *suponemos* que f es una solución diferenciable de este tipo, entonces se puede obtener una fórmula para $f'(x)$, al igual que en el Problema 14(c), diferenciando ambos miembros de la ecuación que define a f (un proceso conocido como "diferenciación implícita"):

16. (a) Aplique este método a la ecuación $[f(x)]^2 + x^2 = 1$. Observe que la solución contendrá a $f(x)$; esto era de esperar puesto que existe más de una función definida implícitamente por la ecuación $y^2 + x^2 = 1$.

(b) A pesar de ello, compruebe que la solución va bien para las dos funciones f halladas en el Problema 15(a).

(c) Aplique este mismo método a $[f(x)]^3 - 3f(x) = x$.

17. (a) Use la diferenciación implícita para hallar $f'(x)$ y $f''(x)$ de las funciones f definidas implícitamente por la ecuación $x^3 + y^3 = 7$.

(b) Una de estas funciones f satisface $f(-1) = 2$. Halle $f'(-1)$ y $f''(-1)$ para esta f.

18. La colección de todos los puntos (x,y) tales que $3x^3+4x^2y-xy^2+2y^3=4$ forma una cierta curva en el plano. Halle la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $(-1,1)$.

19. La notación de Leibniz es particularmente adecuada para la diferenciación implícita. Como y se utiliza de manera tan consistente como una abreviación de $f(x)$, la ecuación en x e y que define a f implícitamente, representará automáticamente a la ecuación que ha de satisfacer f. ¿Cómo se escribiría el siguiente cálculo en nuestra notación?

$$\begin{aligned} y^4+y^3+xy&=1,\\ 4y^3\frac{dy}{dx}+3y^2\frac{dy}{dx}+y+x\frac{dy}{dx}&=0,\\ \frac{dy}{dx}&=\frac{-y}{4y^3+3y^2+x}. \end{aligned}$$

20. Al considerar la notación de Leibniz, debemos mencionar dicha notación en el caso de las derivadas de las funciones inversas. Si dy/dx representa a la derivada de f, entonces la derivada de f^{-1} se representa mediante la notación dx/dy. Escriba el Teorema 5 con dicha notación. La ecuación resultante pondrá de manifiesto otra de las razones por las cuales la notación de Leibniz tiene tantos partidarios. También explicará en qué punto ha de calcularse $(f^{-1})'$ cuando se utiliza la notación dx/dy. ¿Cuál es el significado del siguiente cálculo?

$$\begin{aligned} x&=y^n,\\ y&=x^{1/n},\\ \frac{dx^{1/n}}{dx}&=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{ny^{n-1}}. \end{aligned}$$

21. Suponga que f es una función uno-uno diferenciable, con derivada que no se anula en ningún punto y que $f=F'$. Sea $G(x)=xf^{-1}(x)-F(f^{-1}(x))$. Demuestre que $G'(x)=f^{-1}(x)$. (Prescindiendo de detalles, este problema pone de relieve un hecho muy interesante: si conocemos una función cuya derivada es f, entonces también conocemos otra función cuya derivada es f^{-1}. Pero, ¿cómo puede obtenerse la función G? En los Problemas 14-14 y 19-16 se indican dos maneras de hacerlo.)

22. Suponga que h es una función tal que $h'(x)=\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}(x+1))$ y $h(0)=3$. Halle

(i) $(h^{-1})'(3)$. (ii) $(\beta^{-1})'(3)$, donde $\beta(x)=h(x+1)$.

23. (a) Demuestre que una función creciente y otra decreciente se cortan como máximo una sola vez.

(b) Halle dos funciones continuas crecientes f y g tales que $f(x)=g(x)$ precisamente cuando x es un entero.

(c) Halle una función continua creciente f y una función continua decreciente g, definidas en $\mathbf{R}$, que no se corten en ningún punto.

***24.** (a) Si f es una función continua en $\mathbf{R}$ y $f=f^{-1}$, demuestre que existe al menos un x tal que $f(x)=x$. (¿Cuál es el significado geométrico de la condición $f=f^{-1}$?)

(b) Dé varios ejemplos de funciones continuas f tales que $f = f^{-1}$ y $f(x) = x$ para un único x. Indicación: Pruebe con una f decreciente y recuerde la interpretación geométrica. Una posibilidad es $f(x) = -x$.

(c) Demuestre que si f es una función creciente tal que $f = f^{-1}$, entonces $f(x) = x$ para todo x. Indicación: Aunque la interpretación geométrica convencerá inmediatamente, la demostración más sencilla (unas dos líneas) consiste en excluir las posibilidades $f(x) < x$ y $f(x) > x$.

***25.** ¿Qué funciones tienen la propiedad de que su gráfica sigue siendo la gráfica de una función después de reflejada a través de la gráfica de $-I$ (la "antidiagonal")?

26. Una función f es **no decreciente** si $f(x) \leq f(y)$ siempre que $x < y$. (Para ser más precisos deberíamos estipular que el dominio de f es un intervalo.) Una función **no creciente** se define de una manera análoga. Advertencia: algunos autores utilizan "creciente" en lugar de "no decreciente," y "estrictamente creciente" en lugar de nuestro "creciente."

(a) Demuestre que si f es no decreciente, pero no es creciente, entonces f es constante en algún intervalo. (Evite los involuntarios equívocos: no es lo mismo decir que una función "no es creciente" que decir que es "no creciente.")

(b) Demuestre que si f es diferenciable y no decreciente, entonces $f'(x) \geq 0$ para todo x.

(c) Demuestre que si $f'(x) \geq 0$ para todo x, entonces f es no decreciente.

***27.** (a) Suponga que $f(x) > 0$ para todo x y que f es decreciente. Demuestre que existe una función *continua* decreciente g tal que $0 < g(x) \leq f(x)$ para todo x.

(b) Demuestre que se puede incluso hacer que g satisfaga $\lim_{x\to\infty} g(x)/f(x) = 0$.

Apéndice
Representación paramétrica de curvas

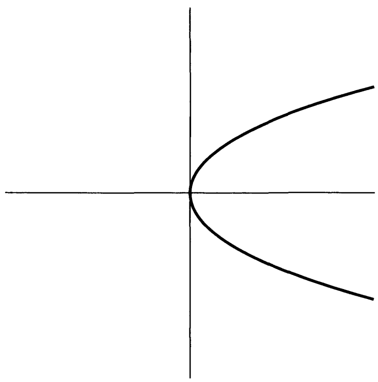


Figura 1

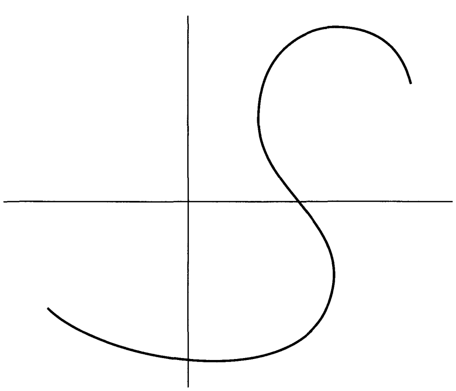


Figura 2

El material de este capítulo sirve para enfatizar algo que ya observamos hace mucho tiempo: una curva de aspecto impecable no necesariamente es la gráfica de una función (Figura 1). En otras palabras, es posible que no podamos describirla como el conjunto de todos los puntos $(x, f(x))$. Desde luego, podríamos describir la curva como el conjunto de todos los puntos $(f(x), x)$; por ejemplo, la curva de la Figura 1 es el conjunto de todos los puntos (x^2, x). Pero incluso este truco no funciona en muchos casos. No nos permitiría, en efecto, describir a la circunferencia, formada por todos los puntos (x, y) tales que $x^2 + y^2 = 1$, o a una elipse, y no puede utilizarse para describir a una curva como la de la Figura 2.

La manera más sencilla de describir curvas en el plano se basa en el concepto físico de una curva como el recorrido de una partícula que se desplaza en el plano. En cada instante t, la partícula se encuentra en un cierto punto, el cual posee dos coordenadas; para enfatizar la dependencia de estas coordenadas del tiempo t, podemos representarlas mediante $u(t)$ y $v(t)$. Finalmente, pues, obtenemos *dos* funciones. Recíprocamente, dadas dos funciones u y v, podemos considerar la curva formada por todos los puntos $(u(t), v(t))$. Se dice que esta curva está representada *paramétricamente* por u y v, y al par de funciones u, v se le denomina una representación paramétrica de la curva. La curva representada paramétricamente por u y v consiste pues en todos los pares (x, y) con $x = u(t)$ y $y = v(t)$. A menudo se describe brevemente como "la curva $x = u(t), y = v(t)$." Observemos que la gráfica de una función f puede describirse siempre paramétricamente como la curva $x = t, y = f(t)$.

En lugar de considerar a una curva en el plano como definida mediante dos funciones, podemos obtener una imagen conceptualmente más sencilla si ampliamos nuestra definición original de función. En lugar de considerar una regla que asocia un número con otro número, podemos considerar una "función c de los números reales en el plano," es decir, una regla c que asocia a cada número t,un *punto del plano*, que podemos representar mediante $c(t)$. Según esta noción, una curva no es más que una función de algún intervalo de números reales en el plano.

Evidentemente, estas dos descripciones de una curva son esencialmente idénticas: un par de funciones (ordinarias) u y v determina una sola función c de los números reales en el plano, mediante la regla

$$c(t) = (u(t), v(t)),$$

y, recíprocamente, dada una función c de los números reales en el plano, cada $c(t)$ es un punto del plano, por tanto consiste en un par de números que podemos denominar $u(t)$ y $v(t)$, de manera que obtenemos funciones únicas u y v que satisfacen esta ecuación.

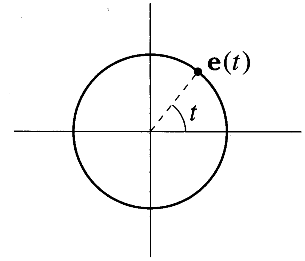


Figura 3

En el Apéndice 1 del Capítulo 4, utilizamos el término "vector" para describir a un punto del plano. Conforme a este proceder, una curva del plano puede denominarse también una "función vectorial." Las convenciones definidas en aquel apéndice nos llevarían a escribir $c(t) = (c_1(t), c_2(t))$, pero en este Apéndice continuaremos utilizando la notación $c(t) = (u(t), v(t))$ para minimizar el uso de subíndices.

Un ejemplo sencillo y muy útil de función vectorial es

$$\mathbf{e}(t) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t),$$

que va girando alrededor del círculo unidad (Figura 3).

Dadas dos funciones (ordinarias) f y g, podemos definir dos nuevas funciones $f+g$ y $f \cdot g$ mediante las reglas

(1) $$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

(2) $$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Como ya hemos definido un método para sumar vectores, podemos imitar a la primera de estas definiciones en el caso de funciones con valores vectoriales c y d: definimos a la función vectorial $c+d$ mediante la igualdad

$$(c+d)(t) = c(t) + d(t),$$

en la cual el símbolo $+$ del lado derecho representa ahora una *suma de vectores*. Esto significa, simplemente, decir que si

$$c(t) = (u(t), v(t)),$$
$$d(t) = (w(t), z(t)),$$

entonces

$$(c+d)(t) = \big(u(t), v(t)\big) + \big(w(t), z(t)\big) = \big(u(t) + w(t), v(t) + z(t)\big).$$

Recordemos que hemos definido también $a \cdot v$ para un número a y un vector v. Para extender esta notación a las funciones vectoriales consideraremos una *función* α y una función vectorial c, de manera que para cada t tenemos un número $\alpha(t)$ y un vector $c(t)$. Entonces podemos definir una nueva función vectorial $\alpha \cdot c$ mediante

$$(\alpha \cdot c)(t) = \alpha(t) \cdot c(t),$$

donde el símbolo $\cdot$ del lado derecho de la igualdad representa el producto de un número por un vector. Esto simplemente equivale a decir que

$$(\alpha \cdot c)(t) = \alpha(t) \cdot (u(t), v(t)) = \big(\alpha(t) \cdot u(t),\, \alpha(t) \cdot v(t)\big).$$

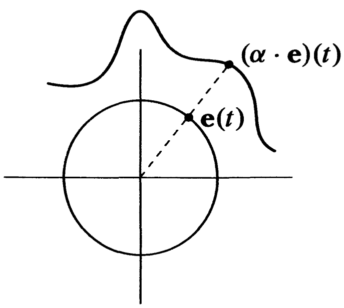


Figura 4

Observemos que la curva $\alpha \cdot \mathbf{e}$,

$$(\alpha \cdot \mathbf{e})(t) = (\alpha(t)\cos t,\, \alpha(t)\operatorname{sen} t),$$

ya tiene una forma muy general (Figura 4). Siguiendo la notación introducida en el Apéndice 3 del Capítulo 4, el punto $(\alpha \cdot \mathbf{e})(t)$ tiene coordenadas polares $\alpha(t)$ y t, de manera que $(\alpha \cdot \mathbf{e})(t)$ es la "gráfica de α en coordenadas polares."

Todavía de manera más general, dada cualquier función vectorial c, podemos definir nuevas funciones r y θ mediante

$$c(t) = r(t) \cdot \mathbf{e}(\theta(t)),$$

donde $r(t)$ es la distancia desde el origen a $c(t)$, y $\theta(t)$ es alguna elección del ángulo de $c(t)$ (como siempre, la función θ no está definida de modo inequívoco, por tanto hay que ir con cuidado al utilizar esta notación en el caso de una curva arbitraria c.)

No podemos extender (2) al caso de funciones vectoriales en general ya que no hemos definido el producto de dos vectores. Sin embargo, en los Problemas 2 y 4 del Apéndice 1 del Capítulo 4 se definen dos productos con valores *reales* $v \cdot w$ y $\det(v, w)$. En este caso está claro cómo definiríamos, dadas dos funciones vectoriales c y d, a las funciones ordinarias (con valores reales)

$$c \cdot d \qquad \text{y} \qquad \det(c, d).$$

Podemos ir más allá y no limitarnos a imitar las simples operaciones aritméticas con funciones, considerando, por ejemplo, problemas más interesantes como los límites. En el caso de $c(t) = (u(t), v(t))$, podemos definir

$$(*) \quad \lim_{t \to a} c(t) = \lim_{t \to a} (u(t), v(t)) \quad \text{es igual, por definición, a} \quad \left(\lim_{t \to a} u(t), \lim_{t \to a} v(t)\right).$$

A partir de esta definición se deducen inmediatamente reglas como

$$\lim_{t \to a} c + d = \lim_{t \to a} c + \lim_{t \to a} d,$$
$$\lim_{t \to a} \alpha \cdot c = \lim_{t \to a} \alpha(t) \cdot \lim_{t \to a} c$$

El Problema 10 muestra como dar una definición equivalente que imita directamente a la definición básica de límites.

Por supuesto, los límites nos conducen a las derivadas. Para

$$c(t) = (u(t), v(t))$$

podemos definir c' de la manera más obvia mediante

$$c'(a) = \big(u'(a), v'(a)\big).$$

También podríamos intentar imitar a la definición básica de derivada:

$$c'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{c(a+h)-c(a)}{h},$$

donde la fracción del lado derecho de la igualdad significa

$$\frac{1}{h}\cdot [c(a+h)-c(a)].$$

De hecho, estas dos definiciones son equivalentes, ya que

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{c(a+h)-c(a)}{h} &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{u(a+h)-u(a)}{h}, \frac{v(a+h)-v(a)}{h}\right)\\ &= \left(\lim_{h\to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h}, \lim_{h\to 0} \frac{v(a+h)-v(a)}{h}\right)\\ &\qquad \text{según nuestra definición } (*) \text{ de límites}\\ &= \big(u'(a), v'(a)\big).\end{aligned}$$

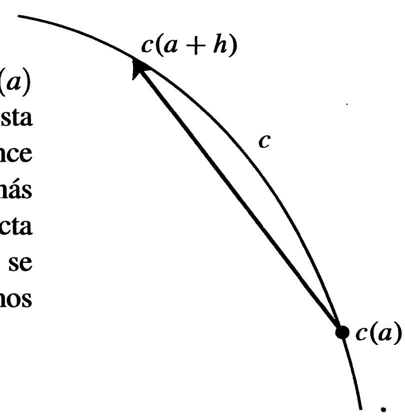


Figura 5

La Figura 5 muestra a $c(a+h)$ y $c(a)$, así como la flecha desde $c(a)$ hasta $c(a+h)$; como demostramos en el Apéndice 1 del Capítulo 4, esta flecha es $c(a+h)-c(a)$, salvo que está desplazada para que comience en $c(a)$. Cuando $h \to 0$, esta flecha se desplaza, situándose cada vez más cerca de la tangente a la curva, por tanto parece razonable *definir* la recta tangente a c en $c(a)$ como la recta a lo largo de $c'(a)$, cuando $c'(a)$ se desplaza de manera que comience en $c(a)$. En otras palabras, definimos la recta tangente a c en $c(a)$ al conjunto de todos los puntos

$$c(a)+s\cdot c'(a);$$

si $s=0$ obtenemos el punto $c(a)$; si $s=1$, el punto $c(a)+c'(a)$, y así sucesivamente. (Observemos, sin embargo, que esta definición no tiene sentido cuando $c'(a)=(0,0)$.) El Problema 1 demuestra que esta definición concuerda con la definición clásica de recta tangente a una función (ordinaria) f en el punto $(a, f(a))$, es decir cuando la curva c se define mediante

$$c(t) = (t, f(t)),$$

de manera que, en este caso, tenemos simplemente la gráfica de f.

Una vez más comprobamos que varias fórmulas clásicas tienen sus equivalentes. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}(c+d)'(a) &= c'(a)+d'(a),\\ (\alpha\cdot c)'(a) &= \alpha'(a)\cdot c(a)+\alpha(a)\cdot c'(a),\end{aligned}$$

o, expresadas como ecuaciones que contienen funciones,

$$\begin{aligned}(c+d)' &= c'+d',\\ (\alpha\cdot c)' &= \alpha'\cdot c+\alpha\cdot c'.\end{aligned}$$

Estas fórmulas pueden deducirse inmediatamente a partir de la definición, en términos de las funciones componentes. También pueden obtenerse a partir de la definición de límite, imitando a las demostraciones anteriores; en el caso de la segunda fórmula, utilizaríamos, como de costumbre, la estrategia que consiste en escribir

$$\alpha(a+h)c(a+h)-\alpha(a)c(a)=\alpha(a+h)\cdot[c(a+h)-c(a)]+[\alpha(a+h)-\alpha(a)]\cdot c(a).$$

Podemos considerar también a la función

$$d(t)=c(p(t))=(c\circ p)(t),$$

donde p es ahora una función ordinaria, de números a números.La nueva curva d pasa por los mismos puntos que c, pero en tiempos diferentes; así p corresponde a una "reparametrización" de c. En el caso de que

$$\begin{aligned} c&=(u,v),\\ d&=(u\circ p, v\circ p), \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} d'(a)&=\big((u\circ p)'(a),(v\circ p)'(a)\big)\\ &=\big(p'(a)u'(p(a)),\ p'(a)v'(p(a))\big)\\ &=p'(a)\cdot\big(u'(p(a)),\ v'(p(a))\big)\\ &=p'(a)\cdot c'(p(a)), \end{aligned}$$

o simplemente

$$d'=p'\cdot(c'\circ p).$$

Observemos que si $p(a)=a$, es decir, si d y c pasan por el mismo punto en el tiempo a, entonces $d'(a)=p'(a)\cdot c'(a)$, de manera que el vector tangente $d'(a)$ es simplemente un múltiplo de $c'(a)$. Esto significa que la *recta* tangente a c en $c(a)$ es la misma que la recta tangente a la curva reparametrizada d en $d(a)=c(a)$ exceptuando el caso en que $p'(a)=0$, ya que entonces la recta tangente a d no está definida, aunque puede estarlo la recta tangente a c . Por ejemplo, $d(t)=c(t^3)$ no tiene una tangente en $t=0$, aunque se trata simplemente de una reparametrización de c.

Finalmente, ya que podemos definir funciones con valores reales

$$\begin{aligned} (c\cdot d)(t)&=c(t)\cdot d(t),\\ \det(c,d)(t)&=\det(c(t),d(t)), \end{aligned}$$

deberíamos poder obtener fórmulas para las derivadas de estas nuevas funciones. Como el lector ya habrá podido adivinar, las fórmulas adecuadas son

$$\begin{aligned} (c\cdot d)'(a)&=c(a)\cdot d'(a)+c'(a)\cdot d(a),\\ [\det(c,d)]'(a)&=\det(c',d)(a)+\det(c,d')(a). \end{aligned}$$

Dichas fórmulas pueden obtenerse mediante cálculos inmediatos a partir de las definiciones, en términos de las funciones componentes. Pero es más elegante imitar la demostración de la regla clásica del producto, utilizando las fórmulas sencillas de los Problemas 2 y 4 del Apéndice 1 del Capítulo 4, y, por supuesto, la "estrategia acostumbrada" que hemos mencionado anteriormente.

Problemas

1. (a) Dada una función f, la expresión "punto-pendiente" (Problema 4-6) de la recta tangente en $(a, f(a))$ puede escribirse como $y - f(a) = (x-a)f'(a)$, de modo que la recta tangente está formada por todos los puntos

$$\big(x, f(a) + (x-a)f'(a)\big).$$

Deduzca que la recta tangente está formada por todos los puntos

$$\big(a+s, f(a) + sf'(a)\big).$$

(b) Si c es la curva $c(t) = (t, f(t))$, deduzca que la recta tangente a c en $(a, f(a))$ [utilizando nuestra nueva definición] es la misma que la recta tangente a f en $(a, f(a))$.

2. Sea $c(t) = (f(t), t^2)$, donde f es la función que se muestra en la Figura 21 del Capítulo 9. Demuestre que c se sitúa a lo largo de la gráfica de la función no diferenciable $h(x) = |x|$, pero que $c'(0) = (0, 0)$. En otras palabras, una reparametrización puede "esconder" a un punto anguloso. Por esta razón, a menudo interesa considerar a aquellas curvas c con c' siempre distinta a $(0, 0)$.

3. Suponga que $x = u(t)$, $y = v(t)$ es una representación paramétrica de una curva, y que u es uno-uno en algún intervalo.

(a) Demuestre que en este intervalo la curva se sitúa a lo largo de la gráfica de $f = v \circ u^{-1}$.

(b) Si u es diferenciable en este intervalo y $u'(t) \neq 0$, demuestre que en el punto $x = u(t)$ se verifica

$$f'(x) = \frac{v'(t)}{u'(t)}.$$

Utilizando la notación de Leibniz, esta igualdad se escribe a menudo de una manera tan sugerente como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}.$$

(c) Demuestre que también se verifica

$$f''(x) = \frac{u'(t)v''(t) - v'(t)u''(t)}{(u'(t))^3}.$$

4. Considere la función f definida implícitamente por la ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$. Calcule $f'(x)$ de dos maneras:

(i) mediante diferenciación implícita,

(ii) considerando la representación paramétrica $x = \cos^3 t$, $y = \operatorname{sen}^3 t$.

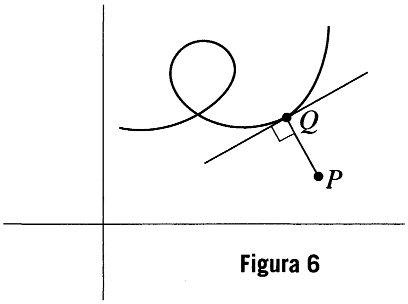


Figura 6

5. Sea $x = u(t)$, $y = v(t)$ la representación paramétrica de una curva, con u y v diferenciables, y sea $P = (x_0, y_0)$ un punto del plano. Demuestre que si el punto $Q = (u(\bar{t}), v(\bar{t}))$, situado sobre la curva, es el más próximo a (x_0, y_0) y $u'(\bar{t})$ y $v'(\bar{t})$ son distintos de 0, entonces la recta de P a Q es perpendicular a la recta tangente a la curva en Q (Figura 6). El mismo resultado se verifica si Q es el punto más alejado a (x_0, y_0).

Hemos visto que la "gráfica de f en coordenadas polares" es la curva

$$(f \cdot \mathbf{e})(t) = (f(t)\cos t,\ f(t)\operatorname{sen} t);$$

en otras palabras, la gráfica de f en coordenadas polares es la curva con una representación paramétrica

$$x = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = f(\theta)\operatorname{sen}\theta.$$

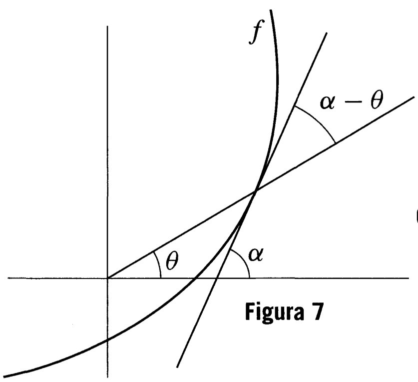


Figura 7

6. (a) Demuestre que si la gráfica de f se expresa en coordenadas polares, la pendiente de la tangente en el punto con coordenadas polares $(f(\theta), \theta)$ es

$$\frac{f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\operatorname{sen}\theta}{-f(\theta)\operatorname{sen}\theta + f'(\theta)\cos\theta}.$$

(b) Demuestre que si $f(\theta) = 0$ y f es diferenciable en θ, entonces la recta que pasa por el origen y forma un ángulo θ con el eje horizontal positivo, es una tangente a la gráfica de f en coordenadas polares. Utilice este resultado para añadir algunos detalles a la gráfica de la espiral de Arquímedes del Apéndice 3 del Capítulo 4, y a las gráficas de los Problemas 3 y 10 de dicho Apéndice.

(c) Suponga que el punto con coordenadas polares $(f(\theta), \theta)$ está más alejado del origen O que cualquier otro punto de la gráfica de f. ¿Qué puede afirmarse respecto de la recta tangente a la gráfica en dicho punto? Compare con el Problema 5.

(d) Suponga que la recta tangente a la gráfica de f en el punto con coordenadas polares $(f(\theta), \theta)$ forma un ángulo α con el eje horizontal (Figura 7), de modo que $\alpha - \theta$ es el ángulo entre la recta tangente y la recta que va desde el origen O al punto. Demuestre que

$$\operatorname{tg}(\alpha - \theta) = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)}.$$

7. (a) En el Problema 8 del Apéndice 3 del Capítulo 4 vimos que la cardioide $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$ puede describirse también mediante la ecuación $(x^2 + y^2 + y)^2 = x^2 + y^2$. Halle la pendiente de la tangente a la cardioide en un punto de dos maneras:

(i) mediante diferenciación implícita, (ii) utilizando el problema anterior.

(b) Compruebe que en el origen las rectas tangentes son verticales, como parece que así debe ser observando la Figura 8.

En el siguiente problema se utiliza material del Capítulo 15, en particular la medida en radianes y las funciones trigonométricas inversas y sus propiedades.

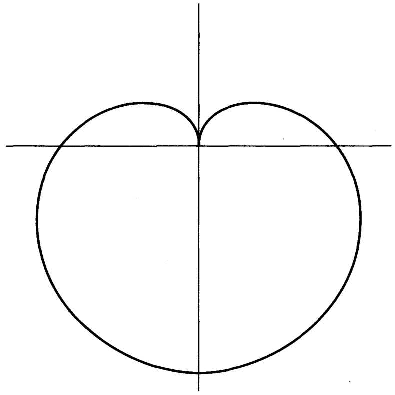


Figura 8

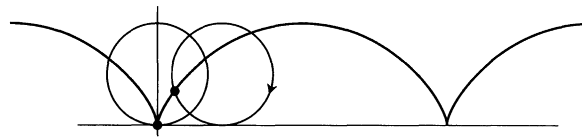


Figura 9

8. Una *cicloide* se define como la trayectoria descrita por un punto situado en el borde de una rueda de radio a. Es posible observar una hermosa cicloide pegando un reflector en el lateral de una rueda de bicicleta y dejando que un amigo, montado en ella, pase lentamente por delante de los faros de nuestro automóvil por la noche. Si el lector no dispone de automóvil, de bicicleta o de un amigo en quien confiar, puede contentarse observando la Figura 9.

(a) Sean $u(t)$ y $v(t)$ las coordenadas del punto situado en el borde de la rueda, después que ésta ha girado un ángulo de t radianes. Esto significa que el arco de rueda de P a Q que se muestra en la Figura 10, tiene una longitud at. Como la rueda va girando, at es también la distancia de O a Q. Demuestre que la representación paramétrica de la cicloide se expresa mediante:

$$u(t) = a(t - \operatorname{sen} t)$$
$$v(t) = a(1 - \cos t).$$

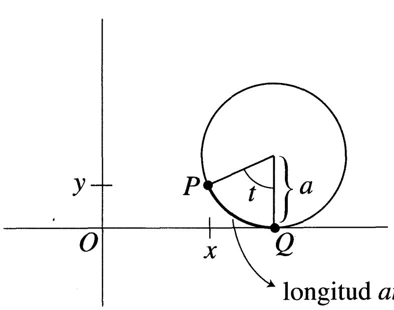


Figura 10

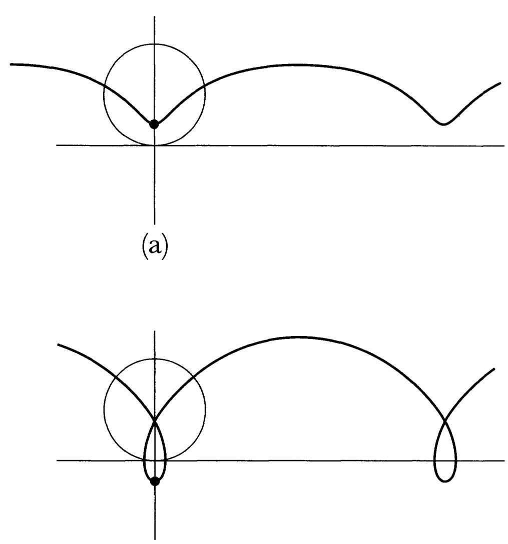


Figura 11

En la Figura 11 se muestran las curvas que se obtienen si la distancia del punto al centro de la rueda es (a) menor que el radio o (b) mayor que el radio. En este último caso, la curva no es la gráfica de una función; además, en algunos instantes el punto se mueve hacia atrás aunque la rueda se desplaza hacia adelante.

En la Figura 9 se ha dibujado a la cicloide como la gráfica de una función, aunque debe comprobarse que esto es así, realmente:

(b) Calcule $u'(t)$ y concluya que u es creciente. El Problema 3 demuestra que la cicloide es la gráfica de $f = v \circ u^{-1}$ y nos permite calcular $f'(t)$.

(c) Demuestre que las rectas tangentes a la cicloide en los "vértices" son verticales.

No es posible obtener una fórmula explícita de f, pero podemos hallar una aproximación.

(d) Demuestre que

$$u(t) = a \arccos \frac{a - v(t)}{a} \pm \sqrt{[2a - v(t)]v(t)}.$$

Indicación: Resuelva primero para t en términos de $v(t)$.

(e) La primera mitad del primer arco de la cicloide es la gráfica de g^{-1}, donde

$$g(y) = a \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{(2a-y)y}.$$

9. Sean u y v continuas en $[a, b]$ y diferenciables en (a, b); u y v permiten obtener pues una representación paramétrica de una curva de $P = (u(a), v(a))$ a $Q = (u(b), v(b))$. Geométricamente parece evidente que, en algún punto de la curva (Figura 12), la recta tangente es paralela al segmento que va de P a Q. Demuéstrelo analíticamente. Indicación: Este problema permite obtener una interpretación geométrica de uno de los teoremas del Capítulo 11. El lector deberá suponer también que $u'(x) = v'(x) = 0$ no se verifica en ningún punto x de (a, b) (compare con el Problema 2).

10. La siguiente definición de límite de una función vectorial es una analogía directa de la definición de límite en el caso de las funciones ordinarias:

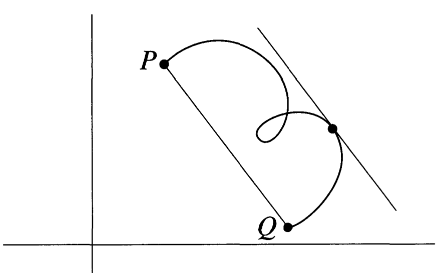


Figura 12

$\lim_{t \to a} c(t) = l$ significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo t, si $0 < |t - a| < \delta$, entonces $\|c(t) - l\| < \varepsilon$.

En este caso $\| \ \|$ es la *norma*, definida en el Problema 2 del Apéndice 1 del Capítulo 4. Si $l = (l_1, l_2)$, entonces

$$\|c(t) - l\|^2 = |u(t) - l_1|^2 + |v(t) - l_2|^2.$$

(a) Deduzca que

$$|u(t) - l_1| \leq \|c(t) - l\| \qquad \text{y} \qquad |v(t) - l_2| \leq \|c(t) - l\|,$$

y demuestre que si $\lim_{t \to a} c(t) = l$ según la definición anterior, entonces se verifica también que

$$\lim_{t \to a} u(t) = l_1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{t \to a} v(t) = l_2,$$

de manera que $\lim_{t \to a} c(t) = l$ según la definición $(*)$ que hemos dado en términos de las funciones componentes, en la página 246.

(b) Recíprocamente, demuestre que si $\lim_{t \to a} c(t) = l$ según la definición en términos de las funciones componentes, entonces se verifica también que $\lim_{t \to a} c(t) = l$ según la definición anterior.

Integrales

13

La derivada no despliega toda su fuerza hasta que se alia con la "integral," el segundo concepto fundamental de la Parte III. Al principio este tema puede parecer una total digresión, ¡en este capítulo las derivadas no aparecen ni una sola vez! El estudio de las integrales requiere una larga preparación, pero una vez se ha completado este trabajo preliminar, las integrales resultan una herramienta indispensable para crear nuevas funciones, y la derivada volverá a reaparecer en el Capítulo 14, más poderosa que nunca.

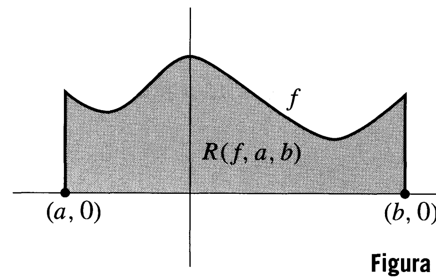


Figura 1

Aunque en último término la definición va a ser más complicada, la integral formaliza un concepto simple e intuitivo: el de área. A estas alturas ya no ha de ser ninguna sorpresa saber que la definición de un concepto intuitivo puede presentar grandes dificultades y el de "área" no es ciertamente ninguna excepción.

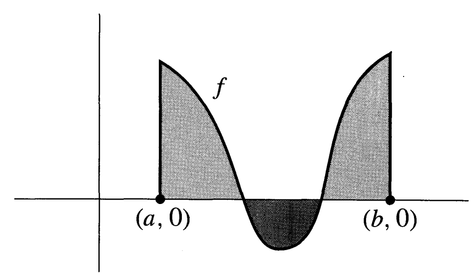


Figura 2

En geometría elemental se deducen las fórmulas de las áreas de muchas figuras planas, aunque reflexionando un poco se observa que en raras ocasiones se da una definición aceptable de área. El área de una región se define a veces como el número de cuadrados con lados de longitud 1, que pueden incluirse en la región. Pero esta definición sólo es adecuada para las regiones más simples. Por ejemplo, un círculo de radio 1 supuestamente tiene un área cuyo valor es igual al número irracional π, aunque no está nada claro qué significa "π cuadrados". Incluso si consideramos un círculo de radio $1/\sqrt{\pi}$, el cual supuestamente tiene un área igual a 1, es difícil decir de qué manera un cuadrado de lado unidad puede encajar en este círculo, ya que no parece posible dividir el cuadrado unitario en partes que puedan disponerse formando un círculo.

En este capítulo sólo pretendemos definir el área de regiones muy especiales (Figura 1): aquellas que están limitadas por el eje horizontal, las líneas verticales que pasan por $(a, 0)$ y $(b, 0)$, y la gráfica de la función f con $f(x) \geq 0$ para todo x en $[a, b]$. Es conveniente indicar dicha región mediante $R(f, a, b)$. Observemos que estas regiones incluyen rectángulos y triángulos, así como a otras figuras geométricas importantes.

El número que finalmente asignaremos al área de $R(f, a, b)$ se denominará la *integral* de f en $[a, b]$. De hecho, la integral también se definirá para funciones f que no satisfacen la condición $f(x) \geq 0$ para todo x en $[a, b]$. Si f es la función cuya gráfica se muestra en la Figura 2, la integral corresponde a la diferencia de las áreas representadas con un sombreado gris claro y con un sombreado gris oscuro ("área algebraica"de $R(f, a, b)$).

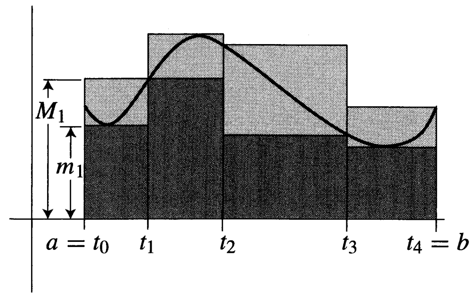


Figura 3

La idea subyacente a la definición de integral que vamos a dar se indica en la Figura 3. El intervalo $[a, b]$ se ha subdividido en cuatro subintervalos

$$[t_0, t_1] \quad [t_1, t_2] \quad [t_2, t_3] \quad [t_3, t_4]$$

mediante los números t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 con

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 = b$$

(la numeración de los subíndices comienza con 0 para que el subíndice mayor sea igual al número de subintervalos).

En el primer intervalo $[t_0, t_1]$ la función f tiene un valor mínimo m_1 y un valor máximo M_1; análogamente, en el intervalo i-ésimo $[t_{i-1}, t_i]$ indicaremos mediante m_i al valor mínimo de f en dicho intervalo, y mediante M_i al valor máximo. La suma

$$s = m_1(t_1 - t_0) + m_2(t_2 - t_1) + m_3(t_3 - t_2) + m_4(t_4 - t_3)$$

representa el área total de los rectángulos situados dentro de la región $R(f, a, b)$, mientras que la suma

$$S = M_1(t_1 - t_0) + M_2(t_2 - t_1) + M_3(t_3 - t_2) + M_4(t_4 - t_3)$$

representa el área total de los rectángulos que contienen a la región $R(f, a, b)$. El principio que nos guía en nuestro intento de definir el área A de $R(f, a, b)$ es la observación de que A debería satisfacer

$$s \leq A \quad \text{y} \quad A \leq S,$$

y que esto debería ser cierto *independientemente de cómo se subdivida el intervalo* $[a, b]$. Cabe esperar que estos requisitos determinen el área A. Las definiciones que damos a continuación comienzan a formalizar y a eliminar algunas de las suposiciones implícitas en esta discusión.

Definición

Sea $a < b$. Una **partición** del intervalo $[a, b]$ es una colección finita de puntos de $[a, b]$, uno de los cuales es a y otro es b.

Los puntos de una partición pueden enumerarse de forma $t_0, \ldots, t_n$ de modo que

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b;$$

siempre supondremos que ha sido asignada esta enumeración.

Definición

Supongamos que f está acotada en $[a, b]$ y que $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ es una partición de $[a, b]$. Sea

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}, \\ M_i &= \sup\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}. \end{aligned}$$

La **suma inferior** de f respecto a P, representada mediante $L(f, P)$, se define como

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}).$$

La **suma superior** de f respecto a P, representada mediante $U(f, P)$, se define como

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Las sumas inferior y superior corresponden a las sumas s y S del ejemplo anterior; se supone que representan las áreas totales de los rectángulos situados por debajo y por encima de la gráfica de f. Observemos, sin embargo, que a pesar de la motivación geométrica, estas sumas se han definido de manera precisa, sin invocar ningún concepto de "área."

Hay dos detalles de la definición que merecen un comentario. El requisito de que f esté acotada en $[a, b]$ es esencial para que los m_i y M_i estén bien definidos. Observemos, además, que es necesario definir a los números m_i y M_i como ínfimos y supremos y no como máximos y mínimos, ya que no se supone que f sea continua.

Es evidente que las sumas superiores e inferiores verifican la siguiente desigualdad: si P es cualquier partición, entonces

$$L(f, P) \leq U(f, P),$$

ya que

$$\begin{aligned} L(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}), \\ U(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}), \end{aligned}$$

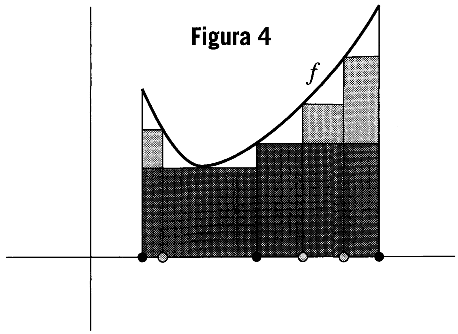
y para cada i se verifica

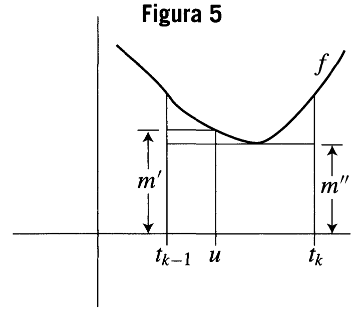
$$m_i(t_i - t_{i-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Por otra parte, también *debería* verificarse otra desigualdad menos obvia: si P_1 y P_2 son dos particiones *cualesquiera* de $[a, b]$, entonces

$$L(f, P_1) \leq U(f, P_2),$$

ya que $L(f, P_1)$ debe ser $\leq$ área $R(f, a, b)$, y $U(f, P_2)$ debe ser $\geq$ área $R(f. a. b)$.





Esta observación no demuestra nada (ya que el "área de $R(f, a, b)$" no ha sido ni siquiera definida todavía), pero indica que si hay que albergar alguna esperanza de poder definir el área de $R(f, a, b)$, primero debe demostrarse que $L(f, P_1) \leq U(f, P_2)$. La demostración que vamos a dar depende de un lema referente al comportamiento de las sumas inferiores y superiores, a medida que van introduciéndose más puntos en la partición. En la Figura 4 la partición P contiene a los puntos representados con círculos negros, y Q contiene a los puntos representados con círculos negros y círculos grises. La figura indica que los rectángulos correspondientes a la partición Q constituyen una mejor aproximación a la región $R(f, a, b)$ que los rectángulos de la partición original P. Precisemos ahora esta cuestión:

Lema. *Si Q contiene a P (es decir, si todos los puntos de P pertenecen a Q), entonces*

$$\begin{aligned} L(f,P) &\leq L(f,Q), \\ U(f,P) &\geq U(f,Q). \end{aligned}$$

Demostración. Consideremos primero el caso especial (Figura 5) en el cual Q contenga solamente un punto más que P:

$$\begin{aligned} P &= \{t_0, \dots, t_n\}, \\ Q &= \{t_0, \dots, t_{k-1}, u, t_k, \dots, t_n\}, \end{aligned}$$

donde

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < u < t_k < \dots < t_n = b.$$

Sea

$$\begin{aligned} m' &= \text{ínf}\{f(x) : t_{k-1} \leq x \leq u\}, \\ m'' &= \text{ínf}\{f(x) : u \leq x \leq t_k\}. \end{aligned}$$

Entonces

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}),$$

$$L(f,Q) = \sum_{i=1}^{k-1} m_i(t_i - t_{i-1}) + m'(u - t_{k-1}) + m''(t_k - u) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}).$$

Para demostrar que $L(f, P) \leq L(f, Q)$ es suficiente, por lo tanto, comprobar que

$$m_k(t_k - t_{k-1}) \leq m'(u - t_{k-1}) + m''(t_k - u).$$

En efecto, el conjunto $\{f(x) : t_{k-1} \leq x \leq t_k\}$ contiene a todos los números de $\{f(x) : t_{k-1} \leq x \leq u\}$ y posiblemente a otros más pequeños, de manera que la cota inferior máxima del primer conjunto ha de ser *menor o igual* que la cota inferior máxima del segundo; por lo tanto

$$m_k \leq m'.$$

Análogamente,

$$m_k \leq m''.$$

Por lo tanto,

$$m_k(t_k - t_{k-1}) = m_k(u - t_{k-1}) + m_k(t_k - u) \leq m'(u - t_{k-1}) + m''(t_k - u).$$

Esto demuestra que $L(f, P) \leq L(f, Q)$ en este caso particular. La demostración de que $U(f, P) \geq U(f, Q)$ es similar y se deja como un ejercicio, muy útil, para el lector.

Ahora puede deducirse fácilmente el caso general. La partición Q puede obtenerse a partir de P añadiendo un punto cada vez; en otras palabras, existe una sucesión de particiones

$$P = P_1, P_2, \ldots, P_\alpha = Q$$

tales que P_{j+1} contiene exactamente un punto más que P_j. Luego

$$L(f, P) = L(f, P_1) \leq L(f, P_2) \leq \cdots \leq L(f, P_\alpha) = L(f, Q),$$

y

$$U(f, P) = U(f, P_1) \geq U(f, P_2) \geq \cdots \geq U(f, P_\alpha) = U(f, Q). \blacksquare$$

El teorema que queremos demostrar es una consecuencia sencilla de este lema.

Teorema 1. *Sean P_1 y P_2 particiones de $[a, b]$, y sea f una función acotada en $[a, b]$. Entonces*

$$L(f, P_1) \leq U(f, P_2).$$

Demostración. Existe una partición P que contiene tanto a P_1 como a P_2 (considérese la partición P formada por la unión de P_1 y P_2). Según el lema que acabamos de demostrar,

$$L(f, P_1) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq U(f, P_2). \blacksquare$$

Del Teorema 1 se deduce por tanto que cualquier suma $U(f, P')$ es una cota superior del conjunto de todas las sumas inferiores $L(f, P)$. Por consiguiente, cualquier suma superior $U(f, P')$ es mayor o igual que la cota superior *mínima* de todas las sumas inferiores:

$$\sup\{L(f, P) : P \text{ una partición de } [a, b]\} \leq U(f, P'),$$

para toda partición P'. Esto a su vez significa que $\sup\{L(f, P)\}$ es una cota inferior del conjunto de todas las sumas superiores de f. Por consiguiente,

$$\sup\{L(f,P)\} \leq \inf\{U(f,P)\}.$$

Además, es evidente que ambos números están comprendidos entre la suma inferior y la suma superior de f para *todas* las particiones:

$$L(f,P') \leq \sup\{L(f,P)\} \leq U(f,P'),$$
$$L(f,P') \leq \inf\{U(f,P)\} \leq U(f,P'),$$

para todas las particiones P'.

Puede ocurrir que

$$\sup\{L(f,P)\} = \inf\{U(f,P\};$$

en este caso, es el *único* número comprendido entre la suma inferior y la suma superior de f para todas las particiones, lo cual le hace ser un candidato ideal para el valor del área de $R(f,a,b)$. Por otra parte, si

$$\sup\{L(f,P)\} < \inf\{U(f,P)\},$$

entonces todo número x entre $\sup\{L(f,P)\}$ e $\inf\{U(f,P)\}$ satisface la desigualdad

$$L(f,P') \leq x \leq U(f,P')$$

para todas las particiones P'.

Aunque todavía no sabemos cuando $\sup\{L(f,P)\} = \inf\{U(f,P\}$ o bien cuando $\sup\{L(f,P)\} < \inf\{U(f,P)\}$, los dos ejemplos que se dan a continuación, aunque no tan interesantes como los que pronto aparecerán, demuestran que ambos casos son posibles.

Supongamos primero que $f(x) = c$ para todo x en $[a,b]$ (Figura 6). Si $P = \{t_0,\ldots,t_n\}$ es cualquier partición de $[a,b]$, entonces

$$m_i = M_i = c,$$

por tanto

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} c(t_i - t_{i-1}) = c(b-a),$$
$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} c(t_i - t_{i-1}) = c(b-a).$$

En este caso todas las sumas inferiores y superiores son iguales y

$$\sup\{L(f,P)\} = \inf\{U(f,P)\} = c(b-a).$$

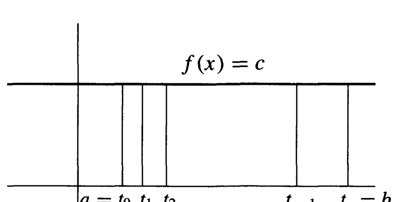


Figura 6

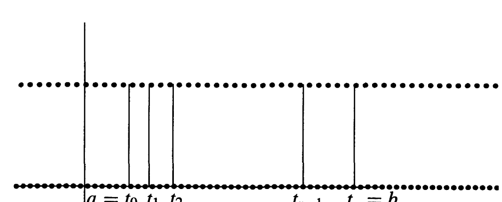


Figura 7

Consideremos ahora (Figura 7) la función f definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ 1, & x \text{ racional.} \end{cases}$$

Si $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ es cualquier partición, entonces

$$m_i = 0, \text{ ya que existe un número irracional en } [t_{i-1}, t_i],$$

y

$$M_i = 1, \text{ ya que existe un número racional en } [t_{i-1}, t_i].$$

Por tanto,

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot (t_i - t_{i-1}) = 0,$$
$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot (t_i - t_{i-1}) = b - a.$$

Así, en este caso, *no* es cierto que $\sup\{L(f, P)\} = \text{ínf}\{U(f, P)\}$. Vemos pues que el principio en el que había de basarse la definición de área no proporciona suficiente información para determinar un área específica de la región $R(f, a, b)$; cualquier número entre 0 y $b - a$ podría ser un buen candidato. Por otra parte, la región $R(f, a, b)$ es tan extraña que no nos faltaría razón en renunciar a asignarle cualquier área en particular. De hecho, podemos concluir que, en general, cuando

$$\sup\{L(f, P)\} \neq \text{ínf}\{U(f, P)\},$$

la región $R(f, a, b)$ es tan extraña que no merece que se le asigne un área. Como sugiere nuestra apelación a la palabra "extraña", vamos a revestir nuestra ignorancia con terminología.

Definición

Una función f acotada en $[a, b]$ es **integrable** en $[a, b]$ si

$$\sup\{L(f, P) : P \text{ es una partición de } [a, b]\} = \text{ínf}\{U(f, P) : P \text{ es una partición de } [a, b]\}.$$

En este caso, a este número común se le denomina la **integral** de f en $[a, b]$ y se representa mediante

$$\int_a^b f.$$

(El símbolo $\int$ se denomina un *signo integral* y originalmente era una s alargada que significaba "suma"; los números a y b se denominan *límites de integración inferior y superior, respectivamente.*) La integral $\int_a^b f$ se denomina también el **área** de $R(f, a, b)$ cuando $f(x) \geq 0$ para todo x en $[a, b]$.

Si f es integrable, entonces de acuerdo con la definición que acabamos de dar,

$$L(f, P) \leq \int_a^b f \leq U(f, P) \quad \text{para todas las particiones } P \text{ de } [a, b].$$

Además, $\int_a^b f$ es el *único* número con esta propiedad.

Esta definición únicamente precisa, pero no resuelve, el problema que hemos discutido anteriormente: no sabemos qué funciones son integrables (ni tampoco sabemos calcular la integral de f en $[a,b]$ cuando f *es* integrable). De momento sólo conocemos dos ejemplos:

(1) si $f(x)=c$, entonces f es integrable en $[a,b]$ y $\int_a^b f = c\cdot(b-a)$.

(Observemos que esta integral asigna el valor esperado del área de un rectángulo.)

(2) si $f(x)=\begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ 1, & x \text{ racional,}\end{cases}$ entonces f no es integrable en $[a,b]$.

Antes de discutir estos problemas con mayor profundidad, vamos a dar algunos ejemplos más. Sin embargo, incluso para estos ejemplos, es útil disponer del siguiente criterio de integrabilidad.

Teorema 2. *Si f está acotada en $[a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$ si y solamente si para cada $\varepsilon>0$ existe una partición P de $[a,b]$ tal que*

$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon.$$

Demostración. Supongamos primero que para cada $\varepsilon>0$ existe una partición P con

$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon.$$

Como

$$\begin{aligned}\text{ínf}\{U(f,P')\} &\le U(f,P),\\ \sup\{L(f,P')\} &\ge L(f,P),\end{aligned}$$

resulta que

$$\text{ínf}\{U(f,P')\}-\sup\{L(f,P')\}<\varepsilon.$$

Como esto es cierto para todo $\varepsilon>0$, se deduce que

$$\sup\{L(f,P')\}=\text{ínf}\{U(f,P')\};$$

luego, por definición, f es integrable. La demostración de la implicación inversa es similar: si f es integrable, entonces

$$\sup\{L(f,P)\}=\text{ínf}\{U(f,P)\}.$$

Esto significa que para cada $\varepsilon>0$ existen particiones P', P'' con

$$U(f,P'')-L(f,P')<\varepsilon.$$

Sea P una partición que contenga a P' y a P''. Entonces, según el lema,

$$\begin{aligned}U(f,P) &\le U(f,P''),\\ L(f,P) &\ge L(f,P');\end{aligned}$$

por consiguiente,

$$U(f,P)-L(f,P)\leq U(f,P'')-L(f,P')<\varepsilon. \blacksquare$$

Aunque la mecánica de la demostración requirió un cierto espacio, debe observarse que el Teorema 2 no es más que otra manera equivalente de definir la integrabilidad. Sin embargo, es una definición muy útil ya que no incluye a supremos ni a ínfimos, los cuales siempre son difíciles de manejar. El siguiente ejemplo ilustra este punto y sirve también como una buena introducción al tipo de razonamiento que requiere la compleja definición de integral, incluso en situaciones muy sencillas.

Sea f la función definida en $[0, 2]$ mediante

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\neq 1\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

Supongamos que $P=\{t_0,\ldots,t_n\}$ es una partición de $[0, 2]$ con

$$t_{j-1}<1<t_j$$

(ver la Figura 8). Entonces

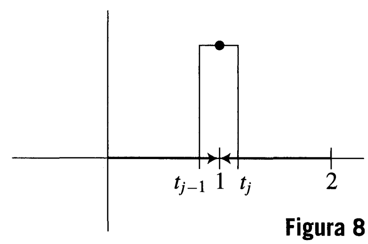


Figura 8

$$m_i=M_i=0 \quad \text{si} \quad i\neq j,$$

pero

$$m_j=0 \qquad \text{y} \qquad M_j=1.$$

Ya que

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{j-1} m_i(t_i-t_{i-1})+m_j(t_j-t_{j-1})+\sum_{i=j+1}^{n} m_i(t_i-t_{i-1}),$$

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{j-1} M_i(t_i-t_{i-1})+M_j(t_j-t_{j-1})+\sum_{i=j+1}^{n} M_i(t_i-t_{i-1}),$$

obtenemos

$$U(f,P)-L(f,P)=t_j-t_{j-1}.$$

Lo cual demuestra que f es integrable: para obtener una partición P respecto de la cual

$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon,$$

basta tan sólo elegir una partición que verifique

$$t_{j-1}<1<t_j \quad \text{y} \quad t_j-t_{j-1}<\varepsilon.$$

Además, está claro que

$$L(f,P)\leq 0\leq U(f,P) \quad \text{para todas las particiones } P.$$

Como f es integrable, existe solamente *un* número comprendido entre todas las sumas inferiores y todas las sumas superiores, concretamente, la integral de f, por lo tanto

$$\int_0^2 f = 0.$$

Aunque la discontinuidad de f era la responsable de las dificultades que hemos tenido en el ejemplo anterior, todavía surgen problemas peores en el caso de funciones continuas muy sencillas. Por ejemplo, sea $f(x) = x$, y para simplificar consideremos un intervalo $[0,b]$, donde $b > 0$. Si $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ es una partición de $[0,b]$, entonces (Figura 9)

$$m_i = t_{i-2} \qquad \text{y} \qquad M_i = t_i$$

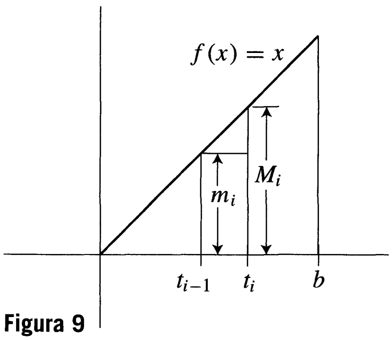


Figura 9

por tanto

$$\begin{aligned} L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} t_{i-1}(t_i - t_{i-1}) \\ &= t_0(t_1 - t_0) + t_1(t_2 - t_1) + \cdots + t_{n-1}(t_n - t_{n-1}), \\ U(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} t_i(t_i - t_{i-1}) \\ &= t_1(t_1 - t_0) + t_2(t_2 - t_1) + \cdots + t_n(t_n - t_{n-1}). \end{aligned}$$

Ninguna de estas fórmulas es particularmente interesante, pero ambas se simplifican considerablemente en el caso de particiones $P_n = \{t_0, \ldots, t_n\}$ con n subintervalos *iguales*. En este caso, la longitud $t_i - t_{i-1}$ de cada subintervalo es b/n, de manera que

$$\begin{aligned} t_0 &= 0, \\ t_1 &= \frac{b}{n}, \\ t_2 &= \frac{2b}{n}, \text{ etc;} \end{aligned}$$

en general

$$t_i = \frac{ib}{n}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} L(f,P_n) &= \sum_{i=1}^{n} t_{i-1}(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{(i-1)b}{n} \right\} \cdot \frac{b}{n} \\ &= \left[\sum_{i=1}^{n} (i-1) \right] \frac{b^2}{n^2} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{n-1} j \right) \frac{b^2}{n^2}. \end{aligned}$$

Recordando la fórmula

$$1 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

$L(f, P_n)$ puede escribirse como

$$L(f, P_n) = \frac{(n-1)(n)}{2} \cdot \frac{b^2}{n^2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{b^2}{2}.$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} U(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} t_i(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{ib}{n} \cdot \frac{b}{n} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{b^2}{n^2} \\ &= \frac{n+1}{n} \cdot \frac{b^2}{2}. \end{aligned}$$

Si n es muy grande, tanto $L(f, P_n)$ como $U(f, P_n)$ se aproximan a $b^2/2$, y esta observación facilita la demostración de que f es integrable. Observemos primero que

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) = \frac{2}{n} \cdot \frac{b^2}{2}.$$

Esto demuestra que existen particiones P_n para las cuales la diferencia $U(f, P_n) - L(f, P_n)$ se puede hacer tan pequeña como se desee. Según el Teorema 2 la función f es integrable. Además, $\int_0^b f$ puede calcularse ahora tan sólo con un pequeño esfuerzo adicional. En primer lugar, está claro que

$$L(f, P_n) \leq \frac{b^2}{2} \leq U(f, P_n) \quad \text{para todo } n.$$

Esta desigualdad demuestra tan sólo que $b^2/2$ se encuentra entre determinadas sumas superiores e inferiores, pero hemos visto que $U(f, P_n) - L(f, P_n)$ se puede hacer tan pequeña como se desee, por tanto existe *tan sólo un* número con esta propiedad. Como ciertamente la integral tiene esta propiedad, deducimos que

$$\int_0^b f = \frac{b^2}{2}.$$

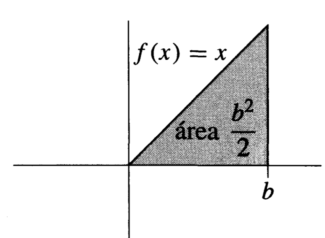


Figura 10

Observemos que esta ecuación asigna el área $b^2/2$ al triángulo rectángulo de base y altura igual a b (Figura 10). Utilizando cálculos más complicados, o recurriendo al Teorema 4, puede demostrarse que

$$\int_a^b f = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

La función $f(x) = x^2$ todavía presenta mayores dificultades. En este caso (Figura 11), si $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ es una partición de $[0, b]$, entonces

$$m_i = f(t_{i-1}) = (t_{i-1})^2 \quad \text{y} \quad M_i = f(t_i) = t_i^2.$$

Eligiendo, una vez más, una partición $P_n = \{t_0, \dots, t_n\}$ en n subintervalos iguales, de manera que

$$t_i = \frac{i \cdot b}{n},$$

las sumas inferiores y superiores son iguales a

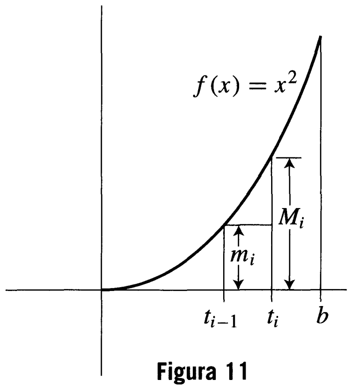


Figura 11

$$\begin{aligned}
L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} (t_{i-1})^2 \cdot (t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{b}{n} \\
&= \frac{b^3}{n^3} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} j^2, \\
U(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \cdot (t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^2 \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{b}{n} \\
&= \frac{b^3}{n^3} \sum_{j=1}^{n} j^2.
\end{aligned}$$

Recordando la fórmula

$$1^2 + \cdots + k^2 = \tfrac{1}{6} k(k+1)(2k+1)$$

del Problema 2-1, estas sumas pueden escribirse como

$$\begin{aligned}
L(f, P_n) &= \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{1}{6}(n-1)(n)(2n-1), \\
U(f, P_n) &= \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{1}{6}(n+1)(n)(2n+1).
\end{aligned}$$

No es difícil demostrar que

$$L(f, P_n) \leq \frac{b^3}{3} \leq U(f, P_n),$$

y que $U(f, P_n) - L(f, P_n)$ se puede hacer tan pequeña como se desee, eligiendo un n suficientemente grande. El mismo tipo de razonamiento que el que hemos realizado anteriormente permite deducir que

$$\int_0^b f = \frac{b^3}{3}.$$

Este cálculo nos permite obtener ya un resultado no trivial: el área de la región limitada por una parábola no se obtiene, en general, en geometría elemental, aunque Arquímedes ya lo conocía y lo dedujo esencialmente de la misma manera. La única superioridad que podemos atribuirnos es que en el siguiente capítulo descubriremos un procedimiento mucho más sencillo para llegar a este resultado.

Podemos resumir los resultados que hemos obtenido hasta ahora de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f &= c\cdot(b-a) && \text{si} \quad f(x)=c && \text{para todo } x,\\
\int_a^b f &= \frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2} && \text{si} \quad f(x)=x && \text{para todo } x,\\
\int_a^b f &= \frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3} && \text{si} \quad f(x)=x^2 && \text{para todo } x.
\end{aligned}$$

Este listado ya pone de manifiesto que la notación $\int_a^b f$ adolece de falta de notación conveniente para nombrar a las funciones definidas mediante fórmulas. Por esta razón es útil emplear una notación alternativa, * análoga a la notación $\lim_{x\to a} f(x)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{significa exactamente lo mismo que} \quad \int_a^b f.$$

Así

$$\int_a^b c\,dx = c\cdot(b-a), \qquad \int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}, \qquad \int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}.$$

Observemos que, al igual que con la notación $\lim_{x\to a} f(x)$, el símbolo x puede sustituirse por cualquier otra letra (excepto, evidentemente, por f, a, o b):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(\alpha)\,d\alpha = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(c)\,dc.$$

El símbolo dx por si solo no tiene ningún significado, al igual que el símbolo $x\to$, excepto en el contexto $\lim_{x\to a} f(x)$. En la ecuación

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3},$$

todo el símbolo $x^2\,dx$ puede considerarse una abreviación de:

la función f tal que $f(x)=x^2$ para todo x.

Esta notación para la integral es tan flexible como la notación $\lim_{x\to a} f(x)$. A continuación se dan algunos ejemplos que pueden ayudar a interpretar los distintos tipos de fórmulas que aparecen frecuentemente; hemos utilizado los Teoremas 5 y 6.**

---

*La notación $\int_a^b f(x)\,dx$ es la más antigua, y durante muchos años fue el único símbolo utilizado para la integral. Leibniz lo utilizó ya que consideraba que la integral era la suma (representada por $\int$) de infinitos rectángulos de altura $f(x)$ y de anchura "infinitamente pequeña" dx. Más tarde otros autores utilizaron $x_0,\ldots,x_n$ para representar los puntos de una partición, abreviando la longitud de los subintervalos $x_i - x_{i-1}$ con el símbolo Δx_i. La integral se definía como el límite cuando Δx_i tiende a 0 de las sumas $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$ (análogas a las sumas inferiores y las sumas superiores). El hecho de que el límite se obtenga cambiando $\sum$ por $\int$, $f(x_i)$ por $f(x)$ y Δx_i por dx, es del agrado de muchas personas.

**Para que el caos no se adueñe del lector al consultar otros libros, la ecuación (1) requiere una aclaración importante. Esta ecuación interpreta $\int_a^b y\,dx$ como la integral de la función f tal que cada valor $f(x)$ es el

(1) $$\int_a^b (x+y)\,dx = \int_a^b x\,dx + \int_a^b y\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} + y(b-a).$$

(2) $$\int_a^x (y+t)\,dy = \int_a^x y\,dy + \int_a^x t\,dy = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2} + t(x-a).$$

(3) $$\begin{aligned}\int_a^b \left(\int_a^x (1+t)\,dz\right) dx &= \int_a^b (1+t)(x-a)\,dx \\ &= (1+t)\int_a^b (x-a)\,dx \\ &= (1+t)\left[\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} - a(b-a)\right].\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}\int_a^b \left(\int_c^d (x+y)\,dy\right) dx &= \int_a^b \left[x(d-c) + \frac{d^2}{2} - \frac{c^2}{2}\right] dx \\ &= \left(\frac{d^2}{2} - \frac{c^2}{2}\right)(b-a) + (d-c)\int_a^b x\,dx \\ &= \left(\frac{d^2}{2} - \frac{c^2}{2}\right)(b-a) + (d-c)\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right).\end{aligned}$$

Los cálculos de $\int_a^b x\,dx$ y $\int_a^b x^2\,dx$ pueden sugerir que evaluar integrales resulta generalmente difícil o imposible. De hecho, *es* imposible determinar exactamente el valor de las integrales de la mayoría de funciones (*aunque puede calcularse aproximadamente, con el grado de exactitud deseado, mediante la evaluación de sumas inferiores y superiores*). Sin embargo, como veremos en el siguiente capítulo, la integral de muchas funciones puede calcularse de manera muy sencilla.

Incluso aunque el valor de la mayoría de integrales no pueda calcularse exactamente, es importante saber cuando una función f *es* integrable en $[a, b]$. Aunque es posible determinar qué funciones son integrables, el criterio de integrabilidad es demasiado complicado para poder enunciarlo aquí, por tanto deberemos limitarnos a dar unos resultados parciales. De estos, el más útil se expone en el siguiente Teorema, pero en la demostración se utiliza material del Apéndice del Capítulo 8. Si el lector lo prefiere, puede esperar hasta el final del siguiente capítulo, donde se da una demostración totalmente diferente.

Teorema 3. *Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.*

Demostración. Observemos en primer lugar que f está acotada en $[a, b]$, ya que es continua en $[a, b]$. Para demostrar que f es integrable en $[a, b]$, utilizaremos el Teorema 2, y demostraremos que para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P de $[a, b]$ tal que

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

---

número y. Pero en la notación clásica se utiliza a menudo y en lugar de $y(x)$, de manera que $\int_a^b y\,dx$ podría interpretarse como la integral de alguna *función* arbitraria y.

El Teorema 1 del Apéndice del Capítulo 8, nos permite afirmar que f es uniformemente continua en $[a, b]$. Por tanto, existe algún $\delta > 0$ tal que para todo x e y de $[a, b]$,

$$\text{si } |x-y| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Ahora se trata simplemente de elegir una partición $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ tal que cada $|t_i - t_{i-1}| < \delta$. Entonces para cada i tenemos

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad \text{para todo } x,\ y \text{ de } [t_{i-1}, t_i].$$

Como f es continua en cada subintervalo, alcanza a sus extremos m_i y M_i, lo cual permite afirmar que

$$M_i - m_i \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Como esto se verifica para todo i, obtenemos

$$\begin{aligned} U(f,P) - L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} t_i - t_{i-1} \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot b - a \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

que es lo que pretendíamos demostrar. ■

Aunque este teorema aporta toda la información necesaria para el uso de las integrales en este libro, resulta más satisfactorio poseer un mayor surtido de funciones integrables. Esta cuestión se considera más detalladamente en algunos de los problemas. En este sentido, es útil conocer los tres teoremas siguientes, que demuestran que f es integrable en $[a, b]$, si es integrable en $[a, c]$ y $[c, b]$; que $f + g$ es integrable si f y g lo son; y que $c \cdot f$ es integrable si f lo es y c es cualquier número.

Como una aplicación sencilla de estos teoremas, recordemos que si f vale 0 excepto en un punto, en el cual su valor es 1, entonces f es integrable. Multiplicando esta función por c, deducimos que f también es integrable si su valor en este punto excepcional es c. Sumando esta función a otra función integrable, vemos que el valor de una función integrable puede variar arbitrariamente en un punto sin destruir su integrabilidad. Descomponiendo el intervalo en muchos subintervalos, vemos que dicho valor puede variar en un número finito de puntos.

En las demostraciones de estos teoremas se utiliza a menudo el criterio alternativo de integrabilidad enunciado en el Teorema 2; como ilustran algunas de las demostraciones que hemos realizado anteriormente, los detalles del argumento a menudo oscurecen el objetivo final de la demostración. Por ello es aconsejable que el lector trate de realizar las demostraciones por si mismo, consultando las que se dan en el libro tan sólo como un último recurso, o para comprobar sus resultados. Esto aclarará, probablemente, las demostraciones, y permitirá al lector adquirir una cierta práctica con las técnicas que se utilizan en algunos de los problemas.

Teorema 4. *Sea $a < c < b$. Si f es integrable en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$. Recíprocamente, si f es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$. Finalmente, si f es integrable en $[a, b]$, entonces*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Demostración. Supongamos que f es integrable en $[a, b]$. Si $\varepsilon > 0$, existe una partición $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$ tal que

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

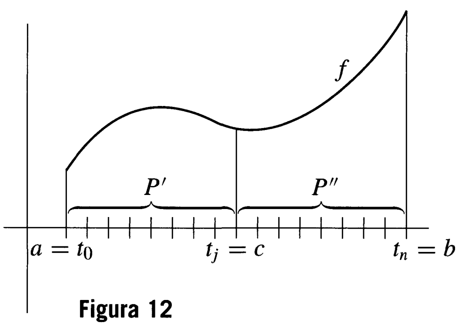


Figura 12

Podemos suponer que $c = t_j$ para algún j. (En otro caso, sea Q la partición que contiene a $t_0, \dots, t_n$ y c; entonces Q contiene a P, de manera que $U(f, Q) - L(f, Q) \leq U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$.) Además, $P' = \{t_0, \dots, t_j\}$ es una partición de $[a, c]$ y $P'' = \{t_j, \dots, t_n\}$ es una partición de $[c, b]$ (Figura 12). Ya que

$$L(f, P) = L(f, P') + L(f, P''),$$
$$U(f, P) = U(f, P') + U(f, P''),$$

obtenemos

$$[U(f, P') - L(f, P')] + [U(f, P'') - L(f, P'')] = U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

Como cada uno de los términos entre corchetes es no negativo, cada uno de ellos debe ser menor que ε. Esto demuestra que f es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$. Observemos también que

$$L(f, P') \leq \int_a^c f \leq U(f, P'),$$
$$L(f, P'') \leq \int_c^b f \leq U(f, P''),$$

de manera que

$$L(f, P) \leq \int_a^c f + \int_c^b f \leq U(f, P).$$

Como esto es cierto para cualquier P, se verifica que

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f.$$

Supongamos ahora que f es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$. Si $\varepsilon > 0$, existe una partición P' de $[a, c]$ y una partición P'' de $[c, b]$ tal que

$$U(f, P') - L(f, P') < \varepsilon/2,$$
$$U(f, P'') - L(f, P'') < \varepsilon/2.$$

Si P es una partición de $[a, b]$ que contiene a todos los puntos de P' y de P'', entonces

$$L(f,P) = L(f,P') + L(f,P''),$$
$$U(f,P) = U(f,P') + U(f,P'');$$

por consiguiente,

$$U(f,P) - L(f,P) = [U(f,P') - L(f,P')] + [U(f,P'') - L(f,P'')] < \varepsilon. \blacksquare$$

El Teorema 4 permite justificar algunas convenciones de notación. La integral $\int_a^b f$ se ha definido sólo en el caso $a < b$. Ahora añadimos las definiciones

$$\int_a^a f = 0 \qquad \text{y} \qquad \int_a^b f = -\int_b^a f \quad \text{si } a > b.$$

Con estas definiciones, la ecuación $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$ se verifica para todo a, c, b incluso si $a < c < b$ no es cierto (la demostración de esta afirmación consiste en una comprobación caso por caso, bastante tediosa).

Teorema 5. *Si f y g son integrables en $[a, b]$, entonces $f+g$ es integrable en $[a, b]$ y*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Demostración. Sea $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ cualquier partición de $[a, b]$ y sean

$$m_i = \text{ínf}\{(f+g)(x) : t_{i-1} \le x \le t_i\},$$
$$m_i' = \text{ínf}\{f(x) : t_{i-1} \le x \le t_i\},$$
$$m_i'' = \text{ínf}\{g(x) : t_{i-1} \le x \le t_i\},$$

definimos también M_i, M_i', M_i'' de manera similar. En general, no es cierto que

$$m_i = m_i' + m_i'',$$

pero si se cumple (Problema 10) que

$$m_i \ge m_i' + m_i''.$$

Análogamente,

$$M_i \le M_i' + M_i''.$$

Por tanto,

$$L(f,P) + L(g,P) \le L(f+g,P)$$

y

$$U(f+g,P) \le U(f,P) + U(g,P).$$

Así,

$$L(f,P) + L(g,P) \le L(f+g,P) \le U(f+g,P) \le U(f,P) + U(g,P).$$

Como f y g son integrables, existen particiones P', P'' con

$$U(f,P') - L(f,P') < \varepsilon/2,$$
$$U(g,P'') - L(g,P'') < \varepsilon/2.$$

Si P contiene a P' y a P'', entonces

$$U(f,P) + U(g,P) - [L(f,P) + L(g,P)] < \varepsilon,$$

y por consiguiente

$$U(f+g,P) - L(f+g,P) < \varepsilon.$$

Esto demuestra que $f+g$ es integrable en $[a,b]$. Además,

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} L(f,P) + L(g,P) &\leq L(f+g,P) \\ &\leq \int_a^b (f+g) \\ &\leq U(f+g,P) \leq U(f,P) + U(g,P); \end{aligned}$$

y también

$$\text{(2)} \qquad L(f,P) + L(g,P) \leq \int_a^b f + \int_a^b g \leq U(f,P) + U(g,P).$$

Como $U(f,P) - L(f,P)$ y $U(g,P) - L(g,P)$ pueden hacerse ambos tan pequeños como se desee, se deduce que

$$U(f,P) + U(g,P) - [L(f,P) + L(g,P)]$$

puede hacerse también tan pequeño como se desee; obtenemos pues, a partir de (1) y (2) que

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g. \blacksquare$$

Teorema 6. *Si f es integrable en $[a,b]$, entonces para cualquier número c, la función cf es integrable en $[a,b]$ y*

$$\int_a^b cf = c \cdot \int_a^b f.$$

Demostración. La demostración (que es mucho más sencilla que la del Teorema 5) se deja como ejercicio para el lector. Es útil considerar por separado los casos $c \geq 0$ y $c \leq 0$. ¿Por qué? $\blacksquare$

(El Teorema 6 no es más que un caso especial de un teorema más general en el que se demuestra que $f \cdot g$ es integrable en $[a,b]$, si f y g lo son, pero este resultado es mucho más difícil de demostrar (ver el Problema 38).)

En este capítulo hemos adquirido únicamente una definición complicada, unos pocos teoremas sencillos con demostraciones bastante enrevesadas y un teorema cuya demostración exigió utilizar material del Apéndice del Capítulo 8. Esto no es debido a que las integrales sean un tema más difícil que las derivadas, sino a que no hemos utilizado las potentes y útiles herramientas de los capítulos anteriores. El descubrimiento más significativo del cálculo infinitesimal es el hecho de que la integral y la derivada están íntimamente relacionadas; una vez conocida esta relación, la integral resultará ser tan útil como la derivada y tan fácil de utilizar. La relación entre derivadas e integrales merece un capítulo aparte, pero los preparativos que haremos en este capítulo pueden servir ya como una introducción. Primero estableceremos una desigualdad sencilla relativa a las integrales, que será muy útil en la demostración de muchos teoremas importantes.

Teorema 7. *Supongamos que f es integrable en $[a, b]$ y que*

$$m \leq f(x) \leq M \quad \textit{para todo } x \textit{ en } [a, b].$$

Entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

Demostración. Está claro que

$$m(b-a) \leq L(f, P) \quad \text{y} \quad U(f, P) \leq M(b-a)$$

para toda partición P. Como $\displaystyle\int_a^b f = \sup\{L(f, P)\} = \operatorname{ínf}\{U(f, P)\}$, se obtiene inmediatamente la desigualdad deseada. ■

Supongamos ahora que f es integrable en $[a, b]$. Podemos definir una nueva función F en $[a, b]$ mediante

$$F(x) = \int_a^x f = \int_a^x f(t)\,dt.$$

(Según el Teorema 4, F está bien definida.) Hemos visto que f puede ser integrable incluso aunque no sea continua, y en los Problemas se dan ejemplos de funciones integrables totalmente patológicas. Por ello, el comportamiento de F es una agradable sorpresa.

Teorema 8. *Si f es integrable en $[a, b]$ y F se define en $[a, b]$ mediante*

$$F(x) = \int_a^x f,$$

entonces F es continua en $[a, b]$.

Demostración. Supongamos que c es un punto de $[a, b]$. Como f es integrable en $[a, b]$ entonces, por definición, f está acotada en $[a, b]$; sea M un número tal que

$$|f(x)| \leq M \quad \text{para todo } x \text{ de } [a, b].$$

Si $h > 0$, entonces (Figura 13)

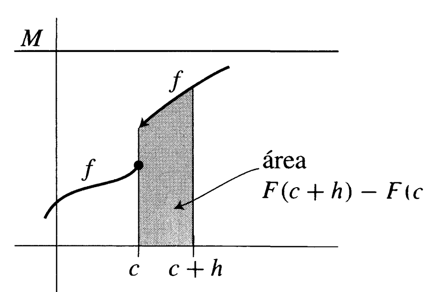


Figura 13

$$F(c+h) - F(c) = \int_a^{c+h} f - \int_a^c f = \int_c^{c+h} f.$$

Como

$$-M \leq f(x) \leq M \quad \text{para todo } x,$$

se deduce, según el Teorema 7, que

$$-M \cdot h \leq \int_c^{c+h} f \leq M \cdot h;$$

en otras palabras,

(1) $$-M \cdot h \leq F(c+h) - F(c) \leq M \cdot h.$$

Si $h < 0$, se puede deducir una desigualdad similar: observemos que

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f = -\int_{c+h}^{c} f.$$

Aplicando el Teorema 7 en el intervalo $[c+h, c]$, de longitud $-h$, obtenemos

$$M \cdot h \leq \int_{c+h}^{c} f \leq -M \cdot h;$$

multiplicando por -1, lo cual invierte todas las desigualdades, obtenemos

(2) $$M \cdot h \leq F(c+h) - F(c) \leq -M \cdot h.$$

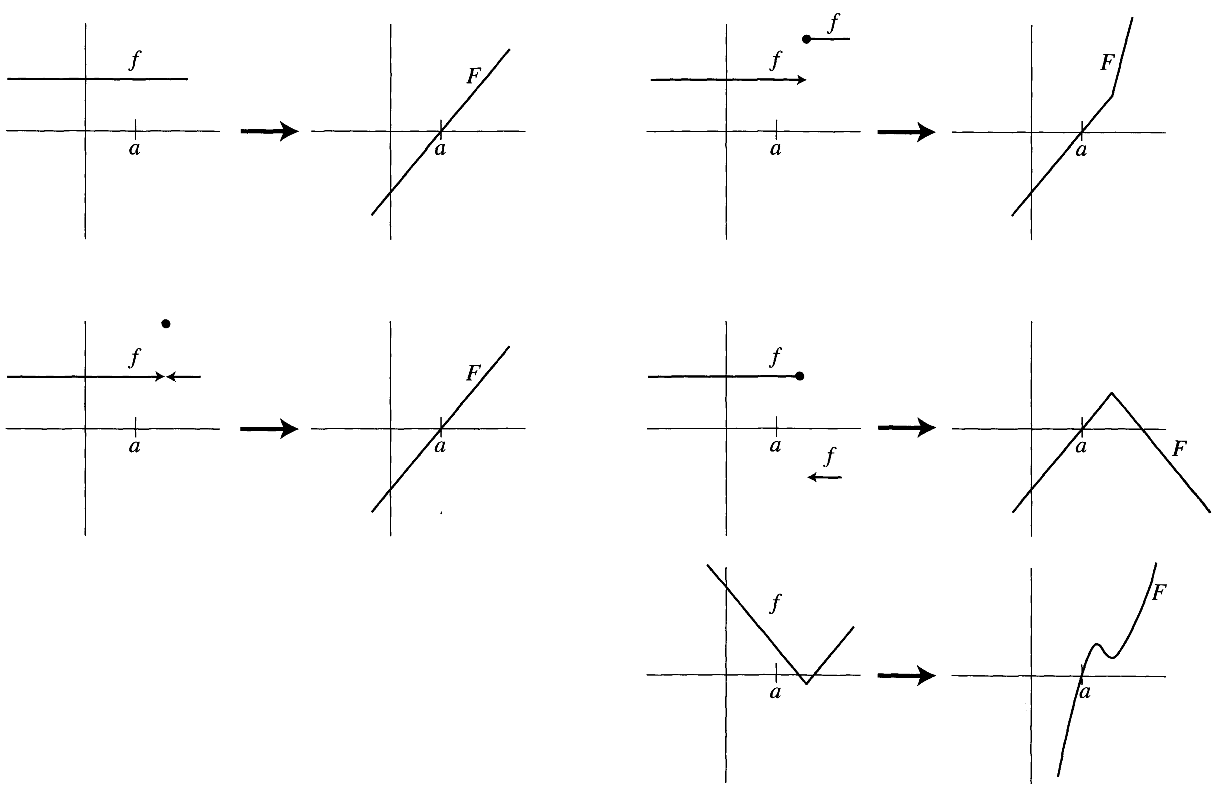


Figura 14

Las desigualdades (1) y (2) pueden combinarse:

$$|F(c+h)-F(c)| \leq M \cdot |h|.$$

Por tanto, si $\varepsilon > 0$, se verifica que

$$|F(c+h)-F(c)| < \varepsilon,$$

si $|h| < \varepsilon/M$. Esto demuestra que

$$\lim_{h \to 0} F(c+h) = F(c);$$

es decir, que F es continua en c. ■

En la Figura 14 se comparan f y $F(x) = \int_a^x f$ para distintas funciones f; observando las gráficas parece que F siempre se comporte mejor que f. En el siguiente capítulo demostraremos la veracidad de esta afirmación.

Problemas

1. Demuestre que $\displaystyle\int_0^b x^3\,dx = b^4/4$, considerando particiones en n subintervalos iguales y utilizando la fórmula para $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3$ hallada en el Problema 2-6. Este problema requiere solamente una simple imitación de los cálculos del texto, pero conviene que el lector lo escriba con detalle como una demostración formal para asegurarse de que todos los puntos delicados del razonamiento quedan claros.

2. Demuestre, análogamente, que $\displaystyle\int_0^b x^4\,dx = b^5/5$.

***3.** (a) Utilizando el Problema 2-7, demuestre que la suma $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p/n^{p+1}$ puede aproximarse tanto como se quiera a $1/(p+1)$, eligiendo n suficientemente grande.

(b) Demuestre que $\displaystyle\int_0^b x^p\,dx = b^{p+1}/(p+1)$.

***4.** Este problema describe un método ingenioso para calcular $\displaystyle\int_a^b x^p\,dx$ para $0 < a < b$. (El resultado para $a = 0$ se deduce entonces debido a la continuidad.) La idea consiste en utilizar particiones $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ en las que todos los *cocientes* $r = t_i/t_{i-1}$ son iguales, en lugar de utilizar particiones en las que todas las diferencias $t_i - t_{i-1}$ son iguales.

(a) Demuestre que para tal partición P se verifica $t_i = a \cdot c^{i/n}$ para $c = \frac{b}{a}$.

(b) Si $f(x) = x^p$, demuestre, utilizando la fórmula del Problema 2-5, que

$$\begin{aligned} U(f,P) &= a^{p+1}(1-c^{-1/n}) \sum_{i=1}^{n} (c^{(p+1)/n})^i \\ &= (a^{p+1} - b^{p+1}) c^{(p+1)/n} \frac{1-c^{-1/n}}{1-c^{(p+1)/n}} \\ &= (b^{p+1} - a^{p+1}) c^{p/n} \cdot \frac{1}{1 + c^{1/n} + \cdots + c^{p/n}} \end{aligned}$$

y encuentre una fórmula similar para $L(f, P)$.

(c) Concluya que

$$\int_a^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}. \quad \text{(Puede ser útil consultar el Problema 5-41.)}$$

5. Halle, sin realizar ningún cálculo:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3\sqrt{1-x^2}\,dx.$ (b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^5+3)\sqrt{1-x^2}\,dx.$

6. Demuestre que

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t+1}\,dt > 0$$

para todo $x > 0$.

7. Decida cuáles de las siguientes funciones son integrables en $[0,2]$, y calcule la integral cuando sea posible.

(i) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ x-2, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$ (ii) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ x-2, & 1 < x \le 2. \end{cases}$

(iii) $f(x) = x + [x]$. (iv) $f(x) = \begin{cases} x+[x], & x \text{ racional} \\ 0, & x \text{ irracional}. \end{cases}$

(v) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es de la forma } a+b\sqrt{2} \text{ para } a \text{ y } b \text{ racionales} \\ 0, & \text{si } x \text{ no es de esta forma.} \end{cases}$

(vi) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]}, & 0 < x \le 1 \\ 0, & x = 0 \text{ o } x > 1. \end{cases}$ (vii) f es la función indicada en la Figura 15.

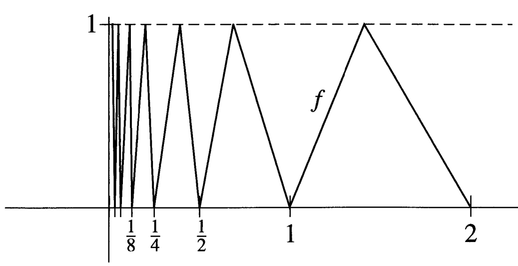


Figura 15

8. Halle las áreas de las regiones limitadas por:

(i) Las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2$.

(ii) Las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2$ y las verticales por $(-1,0)$ y $(1,0)$.

(iii) Las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = 1 - x^2$.

(iv) Las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = 1 - x^2$ y $h(x) = 2$.

(v) Las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x + 4$ y el eje vertical.

(vi) La gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$, el eje horizontal, y la vertical por $(2,0)$. (No intente el lector hallar $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{x}\,dx$; debería darse cuenta de la manera de adivinar la respuesta utilizando sólo integrales que ya sabe calcular. Las cuestiones que este ejemplo debería sugerir se consideran en el Problema 21.)

9. Halle

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x)g(y)\,dy \right) dx$$

en términos de $\int_a^b f$ y $\int_c^d g$. (Este problema es un ejercicio de notación de un nivel más elevado que el usual,en estos casos; es crucial que el lector sepa reconocer una constante cuando aparezca.)

10. Demuestre, utilizando la notación del Teorema 5, que

$$m_i{}' + m_i{}'' = \text{ínf}\{f(x_1) + g(x_2) : t_{i-1} \leq x_1, x_2 \leq t_i\} \leq m_i.$$

11. (a) ¿Qué funciones tienen la propiedad de que toda suma inferior es igual a toda suma superior?

(b) ¿Qué funciones tienen la propiedad de que alguna suma superior es igual a alguna suma inferior (distinta)?

(c) ¿Qué funciones continuas tienen la propiedad de que todas las sumas inferiores son iguales?

*(d) ¿Qué funciones integrables tienen la propiedad de que todas las sumas inferiores son iguales? (Recuerde que una de estas funciones es $f(x) = 0$ para x irracional, $f(x) = 1/q$ para $x = p/q$ fracción irreducible.) Indicación: Hará falta el concepto de conjunto denso, introducido en el Problema 8-6, así como los resultados del Problema 30.

12. Si $a < b < c < d$ y f es integrable en $[a,d]$, demuestre que f es integrable en $[b,c]$. (No hay que trabajar demasiado.)

13. (a) Demuestre que si f es integrable en $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para todo x de $[a, b]$, entonces $\int_a^b f \geq 0$.

(b) Demuestre que si f y g son integrables en $[a, b]$ y $f(x) \geq g(x)$ para todo x de $[a, b]$, entonces $\int_a^b f \geq \int_a^b g$. (A estas alturas ya no debería hacer falta advertir que si se trabaja mucho en la parte (b) se está perdiendo el tiempo.)

14. Demuestre que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx.$$

(La interpretación geométrica ayudará a ver que el resultado es muy plausible.) Indicación: Toda partición $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a, b]$ da origen a una partición $P' = \{t_0 + c, \ldots, t_n + c\}$ de $[a+c, b+c]$, y viceversa.

***15.** Si $a, b > 1$ demuestre que

$$\int_1^a \frac{1}{t}\,dt + \int_1^b \frac{1}{t}\,dt = \int_1^{ab} \frac{1}{t}\,dt.$$

Indicación: Esto puede escribirse $\int_1^a 1/t\,dt = \int_b^{ab} 1/t\,dt$. Toda partición $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[1.a]$ origina una partición $P' = \{bt_0, \ldots, bt_n\}$ de $[b, ab]$, y viceversa.

***16.** Demuestre que

$$\int_{ca}^{cb} f(t)\,dt = c\int_a^b f(ct)\,dt.$$

(Observe que el Problema 15 es un caso especial.)

17. Dado que el área de un círculo unidad, descrito por la ecuación $x^2+y^2=1$, es π, utilice el Problema 16 para demostrar que el área de la elipse descrita por la ecuación $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ es πab.

18. Este problema describe otro método más para calcular $\int_a^b x^n\,dx$; fue utilizado por Cavalieri, uno de los matemáticos anteriores a la invención del cálculo.

(a) Sea $c_n=\int_0^1 x^n\,dx$. Utilice el Problema 16 para demostrar que $\int_0^a x^n\,dx=c_n a^{n+1}$.

(b) El Problema 14 demuestra que

$$\int_0^{2a} x^n\,dx=\int_{-a}^{a}(x+a)^n\,dx.$$

Utilice esta fórmula para demostrar que

$$2^{n+1}c_n a^{n+1}=2a^{n+1}\sum_{k\text{ par}}\binom{n}{k}c_k.$$

(c) Utilice ahora el Problema 2-3 para demostrar que $c_n=1/(n+1)$.

19. Suponga que f está acotada en $[a,b]$ y que f es continua en cada punto de $[a,b]$ con la excepción de x_0 en (a,b). Demuestre que f es integrable en $[a,b]$. Indicación: Imite uno de los ejemplos del texto.

20. Suponga que f es no decreciente en $[a,b]$. Observe que f está automáticamente acotada en $[a,b]$, ya que $f(a)\le f(x)\le f(b)$ para x en $[a,b]$.

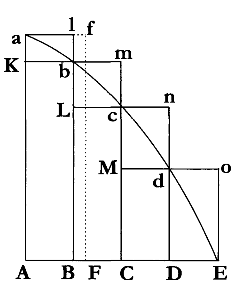
(a) Si $P=\{t_0,\dots,t_n\}$ es una partición de $[a,b]$, ¿cómo son $L(f,P)$ y $U(f,P)$?

(b) Suponga que $t_i-t_{i-1}=\delta$ para todo i. Demuestre que $U(f,P)-L(f,P)=\delta[f(b)-f(a)]$.

(c) Demuestre que f es integrable.

(d) Dé un ejemplo de función no decreciente en $[0,1]$ que sea discontinua en un número infinito de puntos.

Puede ser de interés comparar este problema con el siguiente extracto de los *Principia* de Newton.*



Lema 1. *Si en cualquier figura* AacE, *limitada por las rectas* Aa, AE, *y la curva* acE, *se inscribe un número cualquiera de paralelogramos* Ab, Bc, Cd, *etc, comprendidos entre bases iguales* AB, BC, CD, *etc, y los lados,* Bb, Cc, Dd, *etc, paralelos a un lado* Aa *de la figura; y los paralelogramos* aKbl, bLcm, cMdn, *etc, se completan: entonces, si la anchura de estos paralelogramos se supone que disminuye y que su número aumenta* hasta el infinito, *afirmo que las relaciones últimas en que estarán entre sí la figura inscrita* AKbLcMdD, *la figura circunscrita* AalbmcndoE, *y la figura curvilínea* AabcdE, *serán relaciones de igualdad.*

**Principia* de Newton, una revisión de la traducción de Mott, por Florian Cajori. University of California Press, Berkeley, California, 1946.

Pues la diferencia entre las figuras inscrita y circunscrita es la suma de los paralelogramos Kl, Lm, Mn, Do, es decir (por la igualdad de todas sus bases), el rectángulo con una de sus bases Kb y como altura la suma de sus alturas Aa, es decir, el rectángulo ABla. Pero este rectángulo, puesto que su anchura AB se supone que disminuye *hasta el infinito*, se hace más pequeño que cualquier espacio dado. Y por lo tanto (según el Lema 1) las figuras inscrita y circunscrita al final se igualarán una a otra; y con mayor razón la figura curvilínia intermedia será al final igual a cualquiera de las dos. Q.E.D.

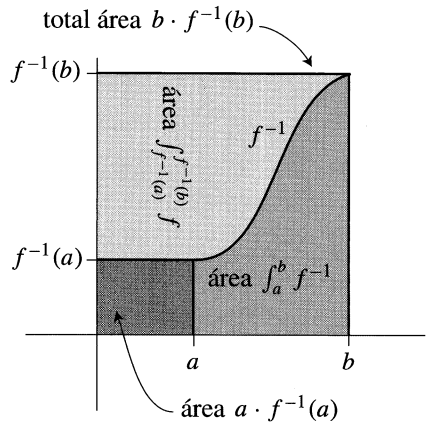


Figura 16

***21.** Suponga que f es creciente. La Figura 16 sugiere que

$$\int_a^b f^{-1} = bf^{-1}(b) - af^{-1}(a) - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f.$$

(a) Si $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ es una partición de $[a, b]$, sea $P' = \{f^{-1}(t_0), \ldots, f^{-1}(t_n)\}$. Demuestre que, según sugiere la Figura 17,

$$L(f^{-1}, P) + U(f, P') = bf^{-1}(b) - af^{-1}(a).$$

(b) Demuestre ahora la fórmula enunciada arriba.

(c) Halle $\int_a^b \sqrt[n]{x}\, dx$ para $0 \le a < b$.

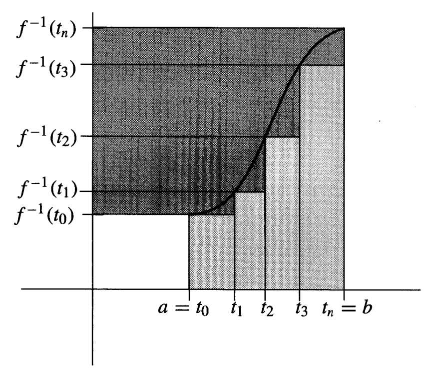


Figura 17

22. Suponga que f es una función continua y creciente con $f(0) = 0$. Demuestre que para $a, b > 0$ se verifica la *Desigualdad de Young*,

$$ab \le \int_0^a f(x)\, dx + \int_0^b f^{-1}(x)\, dx,$$

y que la igualdad se verifica si y sólo si $b = f(a)$. Indicación: ¡Dibuje un esquema como el de la Figura 16!

23. (a) Demuestre que si f es integrable en $[a, b]$ y $m \le f(x) \le M$ para todo x en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b-a)\mu$$

para un cierto número μ con $m \le \mu \le M$.

(b) Demuestre que si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b-a)f(\xi)$$

para un cierto ξ de $[a, b]$.

(c) Demuestre también, mediante un ejemplo, que la continuidad es esencial.

(d) En general, suponga que f es continua en $[a, b]$ y que g es integrable y no negativa en $[a, b]$. Demuestre que

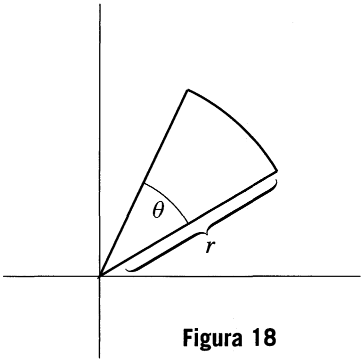


Figura 18

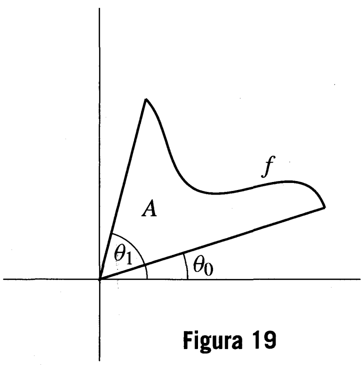


Figura 19

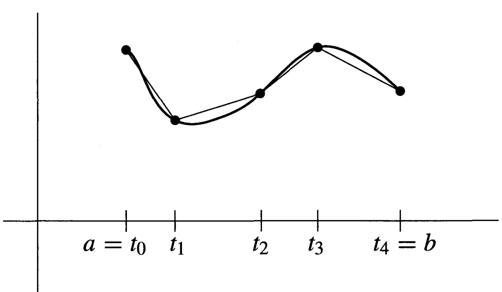


Figura 20

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$$

para un cierto ξ de $[a, b]$. Este resultado se denomina el Teorema del Valor Medio para Integrales.

(e) Deduzca el mismo resultado si g es integrable y no positiva en $[a, b]$.

(f) Demuestre que una de estas dos hipótesis relativas a g es esencial.

24. En este problema considere la gráfica de una función en coordenadas polares (Capítulo 4, Apéndice 3). La Figura 18 muestra un sector de un círculo, con un ángulo central θ. Cuando θ se mide en radianes, el área de este sector es $r^2 \cdot \dfrac{\theta}{2}$. Considere ahora la región A que se muestra en la Figura 19, donde la curva es la gráfica en coordenadas polares de la función continua f. Demuestre que

$$\text{área } A = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta)^2\,d\theta.$$

***25.** Sea f una función continua en $[a, b]$. Si $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ es una partición de $[a, b]$, definimos

$$\ell(f, P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + [f(t_i) - f(t_{i-1})]^2}.$$

El número $\ell(f, P)$ representa la longitud de la curva poligonal inscrita en la gráfica de f (vea la Figura 20). Definimos la **longitud** de f en $[a, b]$ como la mínima cota superior de todos los $\ell(f, P)$ para todas las particiones P (si el conjunto de todos los $\ell(f, P)$ está acotado superiormente).

(a) Si f es una función lineal en $[a, b]$, demuestre que la longitud de f es la distancia de $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$.

(b) Si f no es lineal, demuestre que existe una partición $P = \{a, t, b\}$ de $[a, b]$ tal que $\ell(f, P)$ es mayor que la distancia de $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$. (Es necesario utilizar el resultado del Problema 4-9.)

(c) Concluya que de todas las funciones f en $[a, b]$ con $f(a) = c$ y $f(b) = d$, la longitud de la función lineal es menor que la longitud de cualquier otra función. (O, en términos convencionales pero totalmente confusos: “una línea recta es la distancia más corta entre dos puntos”.)

(d) Suponga que f' está acotada en $[a, b]$. Si P es cualquier partición de $[a, b]$ demuestre que

$$L\left(\sqrt{1 + (f')^2}, P\right) \le \ell(f, P) \le U\left(\sqrt{1 + (f')^2}, P\right).$$

Indicación: Utilice el Teorema del Valor Medio.

(e) ¿Por qué el $\sup\left\{L\left(\sqrt{1 + (f')^2}, P\right)\right\} \le \sup\{\ell(f, P)\}$? (Esto es fácil.)

(f) Demuestre ahora que el $\sup\{\ell(f,P)\} \leq \inf\{U(\sqrt{1+(f')^2},P)\}$, con lo cual queda probado que la longitud de f en $[a,b]$ es $\int_a^b \sqrt{1+(f')^2}$, si $\sqrt{1+(f')^2}$ es integrable en $[a,b]$. Indicación: Basta demostrar que si P' y P'' son dos particiones cualesquiera, entonces $\ell(f,P') \leq U(\sqrt{1+(f')^2},P'')$. Si P contiene los puntos de P' y de P'', compare $\ell(f,P')$ con $\ell(f,P)$.

(g) Sea $\mathscr{L}(x)$ la longitud de la gráfica de f en $[a,x]$ y sea $d(x)$ la longitud del segmento rectilíneo desde $(a,f(a))$ hasta $(x,f(x))$. Demuestre que si $\sqrt{1+(f')^2}$ es integrable en $[a,b]$ y f' es continua en a (o sea, si $\lim_{x\to a^+} f'(x) = f'(a)$), entonces

$$\lim_{x\to a^+} \frac{\mathscr{L}(x)}{d(x)} = 1.$$

Indicación: Utilice un par de Teoremas del Valor Medio.

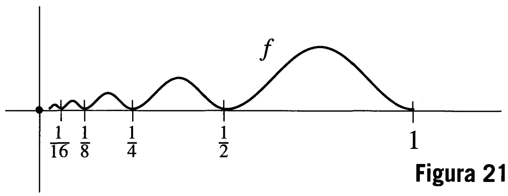


Figura 21

(h) En la Figura 21, la parte de la gráfica de f entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$ es justo la mitad de la parte entre $\frac{1}{2}$ y 1, la parte entre $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{4}$ es la mitad de la parte entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$, etc. Demuestre que la conclusión de la parte (g) no se cumple para esta f.

26. Una función s definida en $[a,b]$ se dice que es una **función escalonada** si existe una partición $P = \{t_0,\dots,t_n\}$ de $[a,b]$ tal que s es constante en cada (t_{i-1},t_i) (los valores de s en t_i pueden ser arbitrarios).

(a) Demuestre que si f es integrable en $[a,b]$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una función escalonada $s_1 \leq f$ con $\int_a^b f - \int_a^b s_1 < \varepsilon$, y también una función escalonada $s_2 \geq f$ con $\int_a^b s_2 - \int_a^b f < \varepsilon$.

(b) Suponga que para todo $\varepsilon > 0$ existen funciones escalonadas $s_1 \leq f$ y $s_2 \geq f$ tales que $\int_a^b s_2 - \int_a^b s_1 < \varepsilon$. Demuestre que f es integrable.

(c) Halle una función f que no sea una función escalonada, pero que satisfaga $\int_a^b f = L(f,P)$ para alguna partición P de $[a,b]$.

***27.** Demuestre que si f es integrable en $[a,b]$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existen funciones continuas $g \leq f \leq h$ con $\int_a^b h - \int_a^b g < \varepsilon$. Indicación: Obtenga primero funciones escalonadas con esta propiedad y luego funciones continuas. Un esquema será de una gran ayuda.

28. (a) Demuestre que si s_1 y s_2 son funciones escalonadas en $[a,b]$, entonces s_1+s_2 lo es también.

(b) Demuestre, sin utilizar el Teorema 5, que $\int_a^b (s_1+s_2) = \int_a^b s_1 + \int_a^b s_2$.

(c) Utilice la parte (b) (y el Problema 26) para dar otra demostración del Teorema 5.

29. Suponga que f es integrable en $[a,b]$. Demuestre que existe un número x de $[a,b]$ tal que $\int_a^x f = \int_x^b f$. Demuestre con un ejemplo que *no* siempre es posible elegir un x que esté en $(a.\,b)$.

***30.** El objetivo de este problema es demostrar que si f es integrable en $[a,b]$, entonces f debe ser continua en muchos puntos de $[a,b]$.

(a) Sea $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$ con $U(f, P) - L(f, P) < b - a$. Demuestre que para algún i se tiene $M_i - m_i < 1$.

(b) Demuestre que existen números a_1 y b_1 con $a < a_1 < b_1 < b$ y $\sup\{f(x) : a_1 \le x \le b_1\} - \text{ínf}\{f(x) : a_1 \le x \le b_1\} < 1$. (Se puede elegir $[a_1, b_1] = [t_{i-1}, t_i]$ de la parte (a) salvo si $i = 1$ ó n; y en estos dos casos un artificio sencillo resuelve el problema.)

(c) Demuestre que existen números a_2 y b_2 con $a_1 < a_2 < b_2 < b_1$ y $\sup\{f(x) : a_2 \le x \le b_2\} - \text{ínf}\{f(x) : a_2 \le x \le b_2\} < \frac{1}{2}$.

(d) Continúe de esta manera para hallar una sucesión de intervalos $I_n = [a_n, b_n]$ tales que $\sup\{f(x) : x \text{ en } I_n\} - \text{ínf}\{f(x) : x \text{ en } I_n\} < 1/n$. Aplique el Teorema de los Intervalos Encajados(Problema 8-14) para hallar un punto x en el cual f es continua.

(e) Demuestre que f es continua en infinitos puntos de $[a, b]$.

***31.** Sea f integrable en $[a, b]$. Recuerde, del Problema 13, que $\int_a^b f \ge 0$ si $f(x) \ge 0$ para todo x de $[a, b]$.

(a) Dé un ejemplo en el que $f(x) \ge 0$ para todo x, $f(x) > 0$ para algún x de $[a, b]$ y $\int_a^b f = 0$.

(b) Suponga $f(x) \ge 0$ para todo x de $[a, b]$ y que f es continua en x_0 de $[a, b]$ y $f(x_0) > 0$. Demuestre que $\int_a^b f > 0$. Indicación: Basta hallar una suma inferior $L(f, P)$ que sea positiva.

(c) Suponga que f es integrable en $[a, b]$ y $f(x) > 0$ para todo x de $[a, b]$. Demuestre que $\int_a^b f > 0$. Indicación: Va a hacer falta el Problema 30; en realidad ésta fue una de las razones para incluir el Problema 30.

***32.** (a) Suponga que f es continua en $[a, b]$ y $\int_a^b fg = 0$ para todas las funciones continuas g en $[a, b]$. Demuestre que $f = 0$. (Esto es fácil; hay una g clara para elegir.)

(b) Suponga que f es continua en $[a, b]$ y que $\int_a^b fg = 0$ para aquellas funciones continuas g en $[a, b]$ que satisfacen además las condiciones $g(a) = g(b) = 0$. Demuestre que $f = 0$. (Este hecho, inocente en apariencia, constituye un lema importante del cálculo de variaciones; vea la referencia [22] de la bibliografía.) Indicación: Deduzca una contradicción si se supone $f(x_0) > 0$ o $f(x_0) < 0$; la g que se elija dependerá del comportamiento de f cerca de x_0.

33. Sea $f(x) = x$ para x racional y $f(x) = 0$ para x irracional.

(a) Calcule $L(f, P)$ para todas las particiones P de $[0,1]$.

(b) Halle $\text{ínf}\{U(f, P) : P \text{ partición de } [0, 1]\}$.

***34.** Sea $f(x) = 0$ para x irracional y $1/q$ si $x = p/q$ fracción irreducible. Demuestre que f es integrable en $[0, 1]$ y que $\int_0^1 f = 0$. (Cada suma inferior es igual a 0, evidentemente; el lector debe encontrar la manera de hacer pequeñas las sumas superiores.)

***35.** Halle dos funciones f y g que sean integrables pero cuya composición $g \circ f$ no lo sea. Indicación: El Problema 34 es apropiado.

***36.** Sea f una función acotada en $[a, b]$ y sea P una partición de $[a, b]$. Suponga que M_i y m_i tienen sus significados habituales y que $M_i{}'$ y $m_i{}'$ tienen los significados correspondientes para la función $|f|$.

(a) Demuestre que $M_i{}' - m_i{}' \le M_i - m_i$.

(b) Demuestre que si f es integrable en $[a, b]$, entonces también lo es $|f|$.

(c) Demuestre que si f y g son integrables en $[a, b]$, también lo son $\text{máx}(f, g)$ y $\text{mín}(f, g)$.

(d) Demuestre que f es integrable en $[a, b]$ si y sólo si su "parte positiva" $\text{máx}(f, 0)$ y su "parte negativa" $\text{mín}(f, 0)$ son integrables en $[a, b]$.

37. Demuestre que si f es integrable en $[a, b]$, entonces

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Indicación: Esto se deduce fácilmente de cierta cadena de desigualdades; el Problema 1-14 es apropiado.

***38.** Suponga que f y g son integrables en $[a, b]$ y $f(x), g(x) \geq 0$ para todo x de $[a, b]$. Sea P una partición de $[a, b]$. Sean $M_i{}'$ y $m_i{}'$ los supremos e ínfimos apropiados para f. Defina análogamente $M_i{}''$ y $m_i{}''$ para g, así como M_i y m_i para fg.

(a) Demuestre que $M_i \leq M_i{}'M_i{}''$ y $m_i \geq m_i{}'m_i{}''$.

(b) Demuestre que

$$U(fg, P) - L(fg, P) \leq \sum_{i=1}^{n} [M_i{}'M_i{}'' - m_i{}'m_i{}''](t_i - t_{i-1}).$$

(c) Aplicando el hecho de que f y g están acotadas, de modo que $|f(x)|$, $|g(x)| \leq M$ para x de $[a, b]$, demuestre que

$$U(fg, P) - L(fg, P)$$
$$\leq M\left\{\sum_{i=1}^{n} [M_i{}' - m_i{}'](t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} [M_i{}'' - m_i{}''](t_i - t_{i-1})\right\}.$$

(d) Demuestre que fg es integrable.

(e) Elimine ahora la restricción de que sean $f(x), g(x) \geq 0$ para x de $[a, b]$.

39. Suponga que f y g son integrables en $[a, b]$. La *desigualdad de Cauchy-Schwarz* afirma que

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right).$$

(a) Demuestre que la desigualdad de Schwarz es un caso especial de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

(b) Dé tres demostraciones de la desigualdad de Cauchy-Schwarz imitando las demostraciones de la desigualdad de Schwarz del Problema 2-21. (La última exigirá un cierto grado de imaginación.)

(c) Si se verifica la igualdad, ¿es cierto, necesariamente, que $f = \lambda g$ para un cierto λ? Y si f y g son continuas?

(d) Demuestre que $\left(\int_0^1 f\right)^2 \leq \left(\int_0^1 f^2\right)$. ¿Es cierto este resultado si 0 y 1 se sustituyen por a y b?

***40.** Suponga que f es integrable en $[0, x]$ para todo $x > 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$. Demuestre que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = a.$$

Indicación: La condición $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ implica que $f(t)$ se aproxima a a para $t \geq$ un cierto N. Esto significa que $\int_N^{N+M} f(t)\,dt$ se aproxima a Ma. Si M es grande en comparación con N, entonces $Ma/(N+M)$ se aproxima a a.

Apéndice
Sumas de Riemann

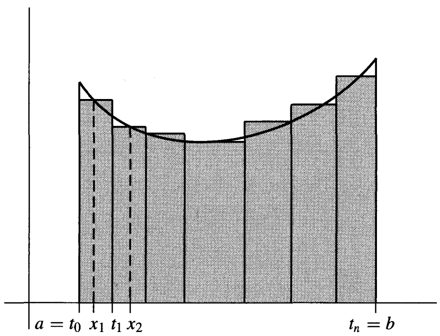


Figura 1

Supongamos que $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ es una partición de $[a, b]$ y que para cada i se elige un punto x_i de $[t_{i-1}, t_i]$. Entonces se verifican, evidentemente, las siguientes desigualdades:

$$L(f, P) \le \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(t_i - t_{i-1}) \le U(f, P).$$

Cualquier suma $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)(t_i - t_{i-1})$ se denomina una *suma de Riemann* de f correspondiente a la partición P. En la Figura 1 se muestra la interpretación geométrica de una suma de Riemann; es el área total de n rectángulos situados en parte por debajo de la gráfica de f y en parte por encima. Debido a la arbitrariedad con la que se eligen las alturas de los rectángulos, no se puede saber cuando una determinada suma de Riemann es menor o igual que la integral $\int_a^b f(x)\,dx$. Pero no parece que los solapamientos tengan mucha importancia; si las bases de todos los rectángulos son suficientemente estrechas, entonces la suma de Riemann debería tener un valor muy próximo al de la integral. El siguiente teorema permite precisar esta observación.

Teorema 1. *Supongamos que f es integrable en $[a, b]$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, si $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ es cualquier partición de $[a, b]$ con todas las longitudes $t_i - t_{i-1} < \delta$, se verifica*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(t_i - t_{i-1}) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon,$$

para cualquier suma de Riemann formada eligiendo x_i de $[t_{i-1}, t_i]$.

Demostración. Ya que la suma de Riemann y la integral se encuentran ambas entre $L(f, P)$ y $U(f, P)$, esto equivale a demostrar que para cualquier ε se puede conseguir que $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$ eligiendo un δ tal que $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$ para cualquier partición con todas las longitudes $t_i - t_{i-1} < \delta$.

Como, por definición, f es integrable en $[a, b]$, y por tanto acotada, se verifica que $|f| \le M$ para un cierto M. Elegimos primero una partición $P^* = \{u_0, , \dots, u_K\}$ para la cual

$$U(f, P^*) - L(f, P^*) < \varepsilon/2,$$

y luego elegimos un δ tal que

$$\delta < \frac{\varepsilon}{4MK}.$$

Para cualquier partición P con todos los $t_i - t_{i-1} < \delta$, podemos descomponer la suma

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1})$$

en dos sumandos. El primero incluye a aquellos i para los que el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ está contenido en uno de los intervalos $[u_{j-1}, u_j]$. Este sumando es claramente $\leq U(f,P^*) - L(f,P^*) < \varepsilon/2$. Para los restantes i se verifica $t_{i-1} < u_j < t_i$ para un cierto $j = 1, \ldots, K-1$, por lo tanto existen como máximo $K-1$ de estos j. Por consiguiente, la suma de todos estos términos es $< (K-1) \cdot 2M \cdot \delta < \varepsilon/2$. ■

La conclusión que podemos extraer de este Teorema es que cualquier expresión que parece una buena aproximación a la integral realmente lo es, si todas las longitudes $t_i - t_{i-1}$ de los intervalos de la partición son suficientemente pequeñas. Algunos de los problemas que se enuncian a continuación permitirán consolidar, sin duda, este mensaje.

Problemas

1. Suponga que f y g son funciones continuas en $[a,b]$. Para una partición $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a,b]$ elijamos un conjunto de puntos x_i de $[t_{i-1}, t_i]$ y otro conjunto de puntos u_i de $[t_{i-1}, t_i]$. Consideremos la suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)g(u_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Observe que ésta *no* es una suma de Riemann de fg respecto a P. Demuestre, sin embargo, que todas estas sumas se encuentran dentro de un ε de $\int_a^b fg$ si todas las longitudes $t_i - t_{i-1}$ de P son suficientemente pequeñas. Indicación: Calcule la diferencia entre esta suma y la suma de Riemann; será necesario utilizar la continuidad uniforme (Capítulo 8, Apéndice).

2. Este problema es similar, aunque un poco más difícil, que el anterior. Suponga que f y g son funciones continuas y no negativas en $[a,b]$. Para una partición P, considere las sumas

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{f(x_i) + g(u_i)}\,(t_i - t_{i-1}).$$

Demuestre que estas sumas se encuentran dentro de un ε de $\int_a^b \sqrt{f+g}$ si todas las longitudes $t_i - t_{i-1}$ son suficientemente pequeñas. Indicación: Utilice el hecho de que la función raíz cuadrada es uniformemente continua en el intervalo cerrado $[0, M]$.

3. ¡Finalmente estamos en condiciones de abordar algo importante! (Compare con el Problema 13-25.) Considere una curva c definida paramétricamente mediante dos funciones u y v en $[a,b]$. Para una partición $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a,b]$ definimos

$$\ell(c,P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[u(t_i) - u(t_{i-1})]^2 + [v(t_i) - v(t_{i-1})]^2};$$

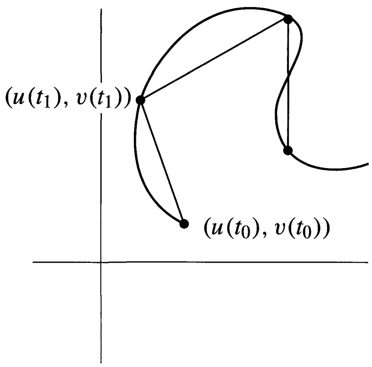


Figura 2

esto representa la longitud de una curva poligonal inscrita (Figura 2). Definimos también la longitud de c como la mínima cota superior de todas las $\ell(f, P)$, si es que existe. Demuestre que si u' y v' son continuas en $[a, b]$, entonces la longitud de c es

$$\int_a^b \sqrt{u'^2 + v'^2}.$$

4. Sea f' continua en el intervalo $[\theta_0, \theta_1]$. Demuestre que la gráfica de f, expresada en coordenadas polares, en este intervalo, tiene una longitud igual a

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{f^2 + f'^2}.$$

5. Utilizando el Teorema 1, demuestre que la desigualdad de Cauchy-Schwarz (Problema 13-39) es una consecuencia de la desigualdad de Schwarz.

El Teorema Fundamental del Cálculo

14

Por las indicaciones dadas en el capítulo anterior, el lector ya habrá adivinado cuál va a ser el primer teorema de este capítulo. Sabemos que si f es integrable, entonces $F(x) = \int_a^x f$ es continua; es natural, pues, preguntarse qué ocurre cuando la función original f es continua. Resulta entonces que F es diferenciable (y su derivada es particularmente sencilla).

Teorema 1 (el primer Teorema Fundamental del Cálculo). *Sea f integrable en $[a, b]$, y definamos F en $[a, b]$ mediante*

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Si f es continua en c de $[a, b]$, entonces F es diferenciable en c, y

$$F'(c) = f(c).$$

(Si $c = a$ o b, entonces se entiende que $F'(c)$ significa la derivada por la derecha o por la izquierda de F.)

Demostración. Supondremos que c es un punto de (a, b); las sencillas modificaciones para el caso $c = a$ o b se dejan para el lector. Por definición,

$$F'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h}.$$

Supongamos primero que $h > 0$. Entonces

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f.$$

Definamos m_h y M_h de la manera siguiente (Figura 1):

$$m_h = \inf\{f(x) : c \leq x \leq c+h\},$$
$$M_h = \sup\{f(x) : c \leq x \leq c+h\}.$$

Según el Teorema 13-7 deducimos que

$$m_h \cdot h \leq \int_c^{c+h} f \leq M_h \cdot h.$$

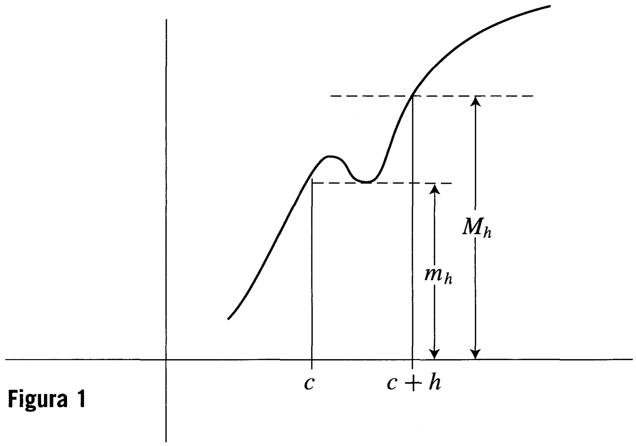


Figura 1

Por tanto

$$m_h \leq \frac{F(c+h)-F(c)}{h} \leq M_h.$$

Si $h < 0$, únicamente deben cambiarse algunos detalles de la demostración. Sea

$$m_h = \text{ínf}\{f(x) : c+h \leq x \leq c\},$$
$$M_h = \sup\{f(x) : c+h \leq x \leq c\}.$$

Entonces

$$m_h \cdot (-h) \leq \int_{c+h}^{c} f \leq M_h \cdot (-h).$$

Como

$$F(c+h)-F(c) = \int_{c}^{c+h} f = -\int_{c+h}^{c} f$$

obtenemos

$$m_h \cdot h \geq F(c+h)-F(c) \geq M_h \cdot h.$$

Como $h < 0$, al dividir por h se invierte nuevamente la desigualdad, obteniéndose el mismo resultado que en el caso anterior:

$$m_h \leq \frac{F(c+h)-F(c)}{h} \leq M_h.$$

Esta desigualdad es cierta para cualquier función integrable, sea o no continua. Sin embargo, como f es continua en c,

$$\lim_{h\to 0} m_h = \lim_{h\to 0} M_h = f(c),$$

y esto demuestra que

$$F'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{F(c+h)-F(c)}{h} = f(c). \blacksquare$$

Aunque en el Teorema 1 se considera únicamente la función obtenida al variar el límite de integración superior, un sencillo argumento demuestra lo que ocurre cuando lo que varía es el límite de integración inferior. Si G se define mediante

$$G(x) = \int_{x}^{b} f,$$

entonces

$$G(x) = \int_{a}^{b} f - \int_{a}^{x} f.$$

Por consiguiente, si f es continua en c, entonces

$$G'(c) = -f(c).$$

El signo menos que aparece en la igualdad anterior permite extender el Teorema 1 al caso en que la función

$$F(x) = \int_a^x f$$

esté definida incluso para $x < a$. En este caso podemos escribir

$$F(x) = -\int_x^a f,$$

de manera que si $c < a$ obtenemos

$$F'(c) = -(-f(c)) = f(c),$$

exactamente lo mismo que antes.

Observemos que en cualquier caso la diferenciabilidad de F en c está asegurada por la continuidad de f únicamente en c. Sin embargo, el Teorema 1 es mucho más interesante cuando f es continua en todos los puntos del intervalo $[a, b]$. En este caso F es diferenciable en todos los puntos de $[a, b]$ y

$$F' = f.$$

En general, es extremadamente difícil saber si una función f dada es la derivada de alguna otra función; por esta razón el Teorema 11-7 y los Problemas 11-60 y 11-61 son particularmente interesantes ya que revelan ciertas propiedades que f debe poseer. Sin embargo, si f es continua no hay ninguna dificultad, según el Teorema 1, f *es* la derivada de alguna otra función, en particular la función

$$F(x) = \int_a^x f.$$

El Teorema 1 tiene un corolario sencillo que, a menudo, reduce el cálculo de integrales a una trivialidad.

Corolario. *Si f es continua en $[a, b]$ y $f = g'$ para alguna función g, entonces*

$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$

Demostración. Sea

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Entonces $F' = f = g'$ en $[a, b]$. Por consiguiente, existe un número c tal que

$$F = g + c.$$

El número c puede calcularse fácilmente: observemos que

$$0 = F(a) = g(a) + c,$$

por tanto $c = -g(a)$; así

$$F(x) = g(x) - g(a).$$

Esto se cumple, en particular, para $x = b$. De manera que

$$\int_a^b f = F(b) = g(b) - g(a). \blacksquare$$

A primera vista, la demostración de este corolario parece inútil ya que, ¿cuál es la ventaja de saber que

$$\int_a^b f = g(b) - g(a)$$

si g es, por ejemplo, la función $g(x) = \int_a^x f$? La ventaja radica en que podría conocerse una función, muy distinta a la función g, con esta propiedad. Por ejemplo, si

$$g(x) = \frac{x^3}{3} \quad \text{y} \quad f(x) = x^2,$$

entonces $g'(x) = f(x)$ de manera que obtenemos, incluso sin tener que calcular sumas inferiores y superiores:

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

Se pueden tratar, análogamente, otras potencias; si n es un número natural y $g(x) = x^{n+1}/(n+1)$, entonces $g'(x) = x^n$, por tanto

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Para cualquier número natural n, la función $f(x) = x^{-n}$ no está acotada en cualquier intervalo que contenga 0, pero si a y b son ambos positivos o negativos, entonces

$$\int_a^b x^{-n}\,dx = \frac{b^{-n+1}}{-n+1} - \frac{a^{-n+1}}{-n+1}.$$

Naturalmente esta fórmula sólo es válida si $n \neq 1$. *No conocemos ninguna expresión sencilla para*

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx.$$

El problema de calcular esta integral se discute más adelante pero constituye una buena oportunidad para advertir sobre la posibilidad de cometer un serio error. La conclusión del Corolario 1 se confunde a menudo con la definición de las integrales; muchos estudiantes piensan que $\int_a^b f$ se define como: "$g(b)-g(a)$, siendo g una función cuya derivada es f". Esta "definición" no sólo es errónea, sino también inútil. Una razón de ello es que una función f puede ser integrable sin ser la derivada de ninguna otra función. Por ejemplo, si $f(x)=0$ para $x \neq 1$ y $f(1)=1$, entonces f es integrable, pero f no puede ser una derivada (¿por qué no?). Otra razón, mucho más importante, es que si f es continua entonces sabemos que $f=g'$ para alguna función g; pero esto lo sabemos *únicamente por el Teorema 1*. La función $f(x)=1/x$ constituye un ejemplo excelente de este hecho: si $x>0$, entonces $f(x)=g'(x)$, siendo

$$g(x)=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt,$$

y no conocemos ninguna otra función g más simple con esta propiedad.

El corolario del Teorema 1 es tan útil que frecuentemente se le denomina el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo. En este libro, dicha denominación se reserva para un resultado algo más fuerte (aunque en la práctica no mucho más útil). Como acabamos de comentar, una función f podría ser de la forma g' incluso aunque f no fuese continua. Si f es integrable, entonces todavía es cierto que

$$\int_a^b f = g(b)-g(a).$$

Sin embargo, la demostración debe ser totalmente diferente; no podemos utilizar el Teorema 1, lo que nos obliga a volver de nuevo a la definición de las integrales.

Teorema 2 (el segundo Teorema Fundamental del Cálculo). *Si f es integrable en $[a,b]$ y $f=g'$ para alguna función g, entonces*

$$\int_a^b f = g(b)-g(a).$$

Demostración. Sea $P=\{t_0,\dots,t_n\}$ una partición cualquiera de $[a,b]$. Según el Teorema del Valor Medio existe un punto x_i de $[t_{i-1},t_i]$ tal que

$$\begin{aligned} g(t_i)-g(t_{i-1}) &= g'(x_i)(t_i-t_{i-1}) \\ &= f(x_i)(t_i-t_{i-1}). \end{aligned}$$

Si

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x): t_{i-1}\le x\le t_i\}, \\ M_i &= \sup\{f(x): t_{i-1}\le x\le t_i\}, \end{aligned}$$

entonces claramente

$$m_i(t_i-t_{i-1}) \le f(x_i)(t_i-t_{i-1}) \le M_i(t_i-t_{i-1}),$$

es decir,

$$m_i(t_i-t_{i-1}) \le g(t_i)-g(t_{i-1}) \le M_i(t_i-t_{i-1}).$$

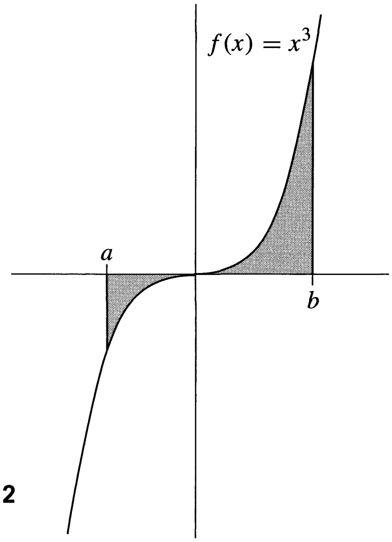


Figura 2

Sumando estas ecuaciones para $i = 1, \dots, n$ obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \le g(b) - g(a) \le \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$$

de manera que

$$L(f,P) \le g(b) - g(a) \le U(f,P)$$

para toda partición P. Pero esto significa que

$$g(b) - g(a) = \int_a^b f. \blacksquare$$

Ya hemos utilizado el corolario del Teorema 1 (o, equivalentemente, el Teorema 2) para hallar las integrales de unas pocas funciones elementales:

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}, \; n \neq -1.$$

(a y b ambos positivos o ambos negativos si $n < 0$).

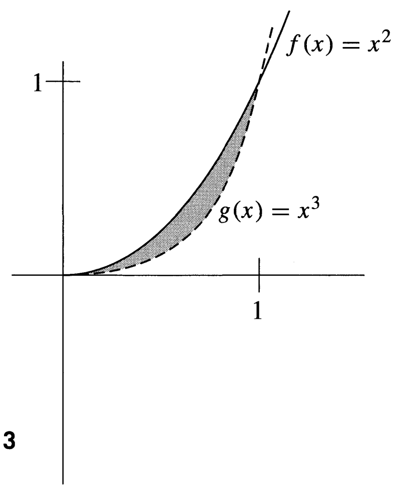


Figura 3

Como ya indicamos en el Capítulo 13, esta integral no siempre representa el área limitada por la gráfica de la función, el eje horizontal, y las líneas verticales por $(a,0)$ y $(b,0)$. Por ejemplo, si $a < 0 < b$, entonces

$$\int_a^b x^3\,dx$$

no representa el área de la región representada en la Figura 2; dicha área se calcula mediante la expresión

$$-\left(\int_a^0 x^3\,dx\right) + \int_0^b x^3\,dx = -\left(\frac{0^4}{4} - \frac{a^4}{4}\right) + \left(\frac{b^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right)$$
$$= \frac{a^4}{4} + \frac{b^4}{4}.$$

Debe también tenerse un especial cuidado al calcular las áreas de regiones limitadas por las gráficas de dos o más funciones, un problema que a menudo puede exigir un grado considerable de ingenio. Supongamos, para dar primero un ejemplo sencillo, que se desea hallar el área de la región, representada en la Figura 3, entre las gráficas de las funciones

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = x^3$$

en el intervalo $[0, 1]$. Si $0 \le x \le 1$, entonces $0 \le x^3 \le x^2$, de manera que la gráfica de g se encuentra por debajo de la gráfica de f. El área de la región de interés es, por tanto,

$$\text{área } R(f, 0, 1) - \text{área } R(g, 0, 1),$$

que es igual a

$$\int_0^1 x^2\,dx - \int_0^1 x^3\,dx = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{12}.$$

Esta área podría haberse expresado como

$$\int_a^b (f-g).$$

Si $g(x) \leq f(x)$ para todo x de $[a,b]$, entonces dicha integral representa siempre el área limitada por f y g, *incluso aunque f y g sean a veces negativas*. La manera más fácil de visualizarlo se muestra en la Figura 4. Si c es un número tal que $f+c$ y $g+c$ son no negativas en $[a,b]$, entonces la región R_1, limitada por f y g, tiene la misma área que la región R_2, limitada por $f+c$ y $g+c$. Por consiguiente,

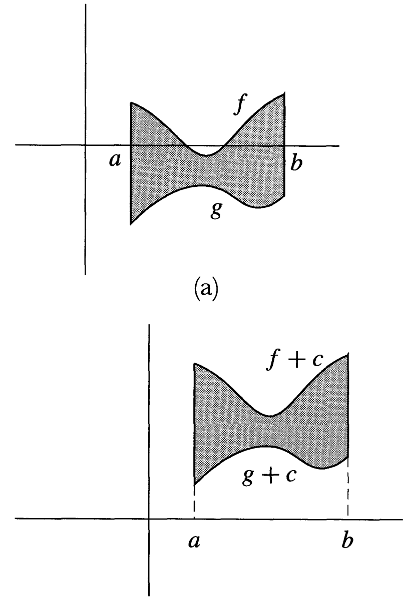


Figura 4

$$\begin{aligned}\text{área } R_1 = \text{área } R_2 &= \int_a^b (f+c) - \int_a^b (g+c)\\ &= \int_a^b [(f+c)-(g+c)]\\ &= \int_a^b (f-g).\end{aligned}$$

Esta observación es útil en el siguiente problema: hallar el área de la región limitada por las gráficas de

$$f(x) = x^3 - x \quad \text{y} \quad g(x) = x^2.$$

Primero debe determinarse la región de manera más precisa. Las gráficas de f y g se intersecan cuando

$$\begin{aligned}& x^3 - x = x^2,\\ \text{o}\quad & x^3 - x^2 - x = 0,\\ \text{o}\quad & x(x^2 - x - 1) = 0,\\ \text{o}\quad & x = 0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$

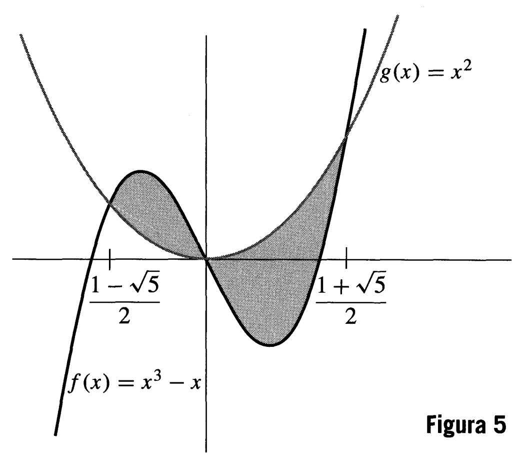


Figura 5

En el intervalo $([1-\sqrt{5}]/2, 0)$ se verifica que $x^3 - x \geq x^2$ y en el intervalo $(0, [1+\sqrt{5}]/2)$ se verifica que $x^2 \geq x^3 - x$. Aunque estas desigualdades son evidentes observando las gráficas (Figura 5), pueden comprobarse fácilmente, de la manera siguiente. Como $f(x) = g(x)$ sólo si $x = 0$, $[1+\sqrt{5}]/2$, o $[1-\sqrt{5}]/2$, la función $f-g$ no cambia de signo en los intervalos $([1-\sqrt{5}]/2, 0)$ y $(0, [1+\sqrt{5}]/2)$; por tanto, tan sólo es necesario observar, por ejemplo, que

$$\begin{gathered}(-\tfrac{1}{2})^3 - (-\tfrac{1}{2}) - (-\tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{8} > 0,\\ 1^3 - 1 - 1^2 = -1 < 0,\end{gathered}$$

para concluir que

$$f-g \geq 0 \text{ en } ([1-\sqrt{5}]/2, 0),$$
$$f-g \leq 0 \text{ en } (0, [1+\sqrt{5}]/2).$$

El área de la región en cuestión es pues

$$\int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{0} (x^3-x-x^2)\,dx + \int_{0}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} [x^2-(x^3-x)]\,dx.$$

Como ilustra este ejemplo, uno de los principales problemas del cálculo de áreas puede ser la determinación exacta de la región cuya área desea calcularse. Sin embargo, existen otros problemas más sustanciales de naturaleza lógica; hasta ahora hemos definido solamente las áreas de ciertas regiones muy especiales ¡que incluso no incluyen algunas de las regiones cuyas áreas hemos calculado! Simplemente hemos supuesto que tenía sentido atribuir un área a dichas regiones y que se cumplían ciertas propiedades razonables del "área". Estas observaciones no significan que el lector no deba utilizar el ingenio para el cálculo de áreas, sino que indican simplemente que existe una manera mejor de definir las áreas, aunque el lugar apropiado para hacerlo sería en un libro de cálculo avanzado. El deseo de definir el área fue la motivación, tanto en este libro como históricamente, de la definición de integral, pero la integral no proporciona realmente el mejor método para *definir* las áreas, aunque generalmente es la herramienta adecuada para *calcularlas* .

Puede ser desalentador saber que las integrales no son adecuadas para el propósito por el cual fueron inventadas, pero pronto veremos lo esenciales que resultan ser para otros propósitos. Ya hemos comentado la utilidad más importante de las integrales: si f es continua, la integral permite obtener una función y tal que

$$y'(x) = f(x).$$

Esta ecuación constituye el ejemplo más sencillo de una "ecuación diferencial" (una ecuación de una función y que incluye las derivadas de y). El Teorema Fundamental del Cálculo afirma que dicha ecuación diferencial tiene una solución si f es continua. En capítulos sucesivos, y en varios problemas, resolveremos ecuaciones más complicadas, pero la solución casi siempre dependerá, de alguna manera, de la integral; para resolver una ecuación diferencial es necesario construir una nueva función, y la integral es una de las mejores maneras para hacerlo.

Como las funciones diferenciables suministradas por el Teorema Fundamental del Cálculo van a desempeñar un papel esencial en nuestro estudio posterior, es muy importante saber que dichas funciones pueden combinarse, al igual que ocurre con otras no tan sofisticadas, para obtener todavía más funciones cuyas derivadas pueden calcularse mediante la Regla de la Cadena.

Supongamos, por ejemplo, que

$$f(x) = \int_a^{x^3} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt.$$

Aunque la notación dificulta la interpretación, en realidad f es la composición de las funciones

$$C(x) = x^3 \quad \text{y} \quad F(x) = \int_a^x \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt.$$

De hecho, $f(x) = F(C(x))$; en otras palabras, $f = F \circ C$. Por tanto, aplicando la Regla de la Cadena,

$$\begin{aligned} f'(x) &= F'(C(x)) \cdot C'(x) \\ &= F'(x^3) \cdot 3x^2 \\ &= \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x^3} \cdot 3x^2. \end{aligned}$$

Si, por el contrario, f se define mediante

$$f(x) = \int_{x^3}^a \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt,$$

entonces

$$f'(x) = -\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x^3} \cdot 3x^2.$$

Si f se define mediante la composición *inversa*,

$$f(x) = \left(\int_a^x \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt\right)^3,$$

entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= C'(F(x)) \cdot F'(x) \\ &= 3\left(\int_a^x \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}. \end{aligned}$$

Análogamente, si

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_a^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt, \\ g(x) &= \int_{\operatorname{sen} x}^a \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt, \\ h(x) &= \operatorname{sen}\left(\int_a^x \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt\right), \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x)} \cdot \cos x, \\ g'(x) &= \frac{-1}{1+\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x)} \cdot \cos x, \\ h'(x) &= \cos\left(\int_a^x \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt\right) \cdot \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}. \end{aligned}$$

La función de aspecto aterrador

$$f(x) = \int_a^{\left(\int_a^x \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt\right)} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt$$

es también una composición; de hecho, $f = F \circ F$. Por tanto

$$\begin{aligned} f'(x) &= F'(F(x)) \cdot F'(x) \\ &= \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2\left(\int_a^x \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt\right)} \cdot \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}. \end{aligned}$$

Como muestran estos ejemplos, la expresión situada en el límite de integración superior (o inferior) es aquella función que aparecerá a la *derecha* cuando f se escribe como una composición. Como un último ejemplo, consideremos las composiciones triples

$$f(x) = \int_a^{\left(\int_a^{x^3} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt\right)} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt, \qquad g(x) = \int_a^{\left[\int_a^{\left(\int_a^x \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt\right)} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt\right]} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt,$$

que pueden escribirse como

$$f = F \circ F \circ C \quad \text{y} \quad g = F \circ F \circ F.$$

Omitiendo los pasos intermedios (que el lector puede ir calculando, si todavía se siente inseguro), obtenemos

$$f'(x) = \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2\left(\int_a^{x^3} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt\right)} \cdot \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x^3} \cdot 3x^2,$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2\left[\int_a^{\left(\int_a^x \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt\right)} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt\right]} \cdot \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2\left(\int_a^x \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt\right)} \cdot \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}.$$

Como en el caso de las diferenciaciones más simples del Capítulo 10, estas diferenciaciones se hacen mucho más sencillas con la práctica proporcionada por algunos de los problemas, y, al igual que ocurría con los problemas del Capítulo 10, constituyen una manera de comprobar si el lector ha entendido la Regla de la Cadena, en el contexto algo menos familiar ofrecido por el Teorema Fundamental del Cálculo.

Las importantes aplicaciones de la integral, que consideraremos en los siguientes capítulos, dependen del Teorema Fundamental del Cálculo, a pesar de que la demostración de dicho teorema resultó ser bastante sencilla; da la impresión de que la auténtica dificultad radicaba en la definición de la integral. En realidad esto no es del todo cierto.

Para poder aplicar el Teorema 1 a una función continua, es necesario saber que si f es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$. Aunque ya hemos dado una demostración de este resultado, existe otro argumento más elemental que quizás el lector pueda preferir. Como la mayoría de los argumentos "elementales", el que vamos a dar es bastante artificioso, pero tiene la virtud de que obligará al lector a revisar la demostración del Teorema 1.

Si f es cualquier función acotada en $[a, b]$, entonces

$$\sup\{L(f, P)\} \quad \text{y} \quad \inf\{U(f, P)\}$$

existen ambos, incluso aunque f no sea integrable. Estos números se denominan la **integral inferior** de f en $[a, b]$ y la **integral superior** de f en $[a, b]$, respectivamente, y los representaremos mediante

$$\mathbf{L}\int_a^b f \quad \text{y} \quad \mathbf{U}\int_a^b f.$$

Las integrales superiores e inferiores comparten varias propiedades con la integral. En particular, si $a < c < b$, entonces

$$\mathbf{L}\int_a^b f = \mathbf{L}\int_a^c f + \mathbf{L}\int_c^b f \quad \text{y} \quad \mathbf{U}\int_a^b f = \mathbf{U}\int_a^c f + \mathbf{U}\int_c^b f,$$

y si $m \leq f(x) \leq M$ para todo x de $[a, b]$, entonces

$$m(b-a) \leq \mathbf{L}\int_a^b f \leq \mathbf{U}\int_a^b f \leq M(b-a).$$

Las demostraciones de estos hechos se dejan como ejercicios para el lector, ya que son muy similares a las demostraciones correspondientes para las integrales. De hecho, los resultados obtenidos para las integrales son un corolario de los resultados correspondientes a las integrales superiores e inferiores, ya que f es integrable precisamente cuando

$$\mathbf{L}\int_a^b f = \mathbf{U}\int_a^b f.$$

Demostraremos que una función continua f es integrable, probando que esta igualdad siempre se verifica para las funciones continuas. En realidad, es más fácil demostrar que

$$\mathbf{L}\int_a^x f = \mathbf{U}\int_a^x f$$

para todo x de $[a, b]$; la estrategia consiste en observar que la mayor parte de la demostración del Teorema 1 no dependió del hecho de que f fuese integrable.

Teorema 13-3. *Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.*

Demostración. Definamos las funciones L y U en $[a, b]$ mediante

$$L(x) = \mathbf{L}\int_a^x f \quad \text{y} \quad U(x) = \mathbf{U}\int_a^x f.$$

Sea x un punto de (a, b). Si $h > 0$ y

$$m_h = \text{ínf}\{f(t) : x \leq t \leq x+h\},$$
$$M_h = \sup\{f(t) : x \leq t \leq x+h\},$$

entonces

$$m_h \cdot h \leq \mathbf{L}\int_x^{x+h} f \leq \mathbf{U}\int_x^{x+h} f \leq M_h \cdot h,$$

por lo tanto

$$m_h \cdot h \leq L(x+h) - L(x) \leq U(x+h) - U(x) \leq M_h \cdot h$$

o sea

$$m_h \leq \frac{L(x+h) - L(x)}{h} \leq \frac{U(x+h) - U(x)}{h} \leq M_h.$$

Si $h < 0$ y

$$m_h = \text{ínf}\{f(t) : x+h \leq t \leq x\},$$
$$M_h = \sup\{f(t) : x+h \leq t \leq x\},$$

se obtiene la misma desigualdad, al igual que en la demostración del Teorema 1.

Como f es continua en x, resulta que

$$\lim_{h \to 0} m_h = \lim_{h \to 0} M_h = f(x),$$

y esto demuestra que

$$L'(x) = U'(x) = f(x) \quad \text{para } x \text{ de } (a, b),$$

lo cual significa que existe un número c tal que

$$U(x) = L(x) + c \quad \text{para todo } x \text{ de } [a, b].$$

Como

$$U(a) = L(a) = 0,$$

el número c debe ser igual a 0, por tanto

$$U(x) = L(x) \quad \text{para todo } x \text{ de } [a, b].$$

En particular,

$$\mathbf{U}\int_a^b f = U(b) = L(b) = \mathbf{L}\int_a^b f,$$

y esto significa que f es integrable en $[a, b]$. ■

Problemas

1. Halle las derivadas de cada una de las siguientes funciones.

(i) $F(x) = \displaystyle\int_a^{x^3} \operatorname{sen}^3 t\, dt.$

(ii) $F(x) = \displaystyle\int_3^{\left(\int_1^x \operatorname{sen}^3 t\, dt\right)} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^6 t + t^2}\, dt.$

(iii) $F(x) = \displaystyle\int_{15}^x \left(\int_8^y \frac{1}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t}\, dt\right) dy.$

(iv) $F(x) = \displaystyle\int_x^b \frac{1}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t}\, dt.$

(v) $F(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{x}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t}\, dt.$

(vi) $F(x) = \operatorname{sen}\left(\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}\left(\int_0^y \operatorname{sen}^3 t\, dt\right) dy\right).$

(vii) F^{-1}, siendo $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\, dt.$

(viii) F^{-1}, siendo $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt.$

(Halle $(F^{-1})'(x)$ en términos de $F^{-1}(x)$.)

2. Para cada una de las f siguientes, si $F(x) = \int_0^x f$, ¿en qué puntos x se verifica que $F'(x) = f(x)$? (Precaución: podría ocurrir que $F'(x) = f(x)$, incluso si f no es continua en x.)

(i) $f(x) = 0$ si $x \le 1$, $f(x) = 1$ si $x > 1$.
(ii) $f(x) = 0$ si $x < 1$, $f(x) = 1$ si $x \ge 1$.
(iii) $f(x) = 0$ si $x \ne 1$, $f(x) = 1$ si $x = 1$.
(iv) $f(x) = 0$ si x es irracional, $f(x) = 1/q$ si $x = p/q$ fracción irreducible.
(v) $f(x) = 0$ si $x \le 0$, $f(x) = x$ si $x \ge 0$.
(vi) $f(x) = 0$ si $x \le 0$ o $x > 1$, $f(x) = 1/[1/x]$ si $0 < x \le 1$.
(vii) f es la función indicada en la Figura 6.
(viii) $f(x) = 1$ si $x = 1/n$ para algún n de $\mathbf{N}$, $f(x) = 0$ en los demás casos.

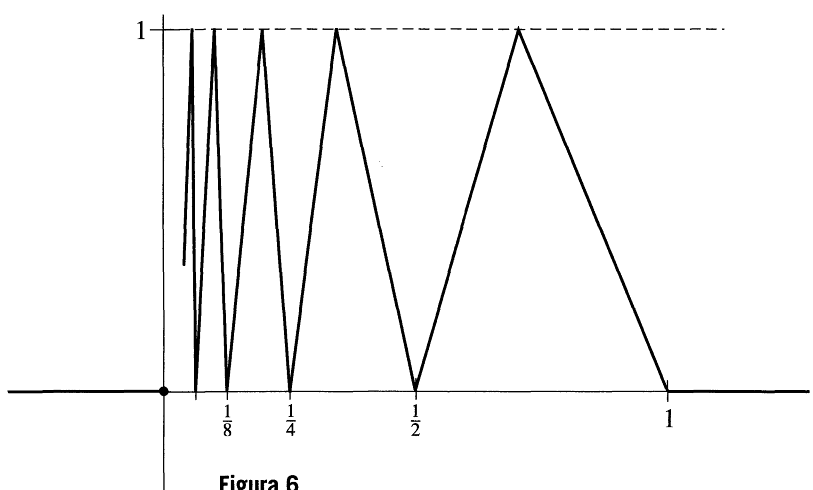


Figura 6

3. Demuestre que los valores de las siguientes expresiones no dependen de x:

(i) $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt + \int_0^{1/x} \frac{1}{1+t^2}\, dt.$

(ii) $\displaystyle\int_{-\cos x}^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt, \quad x$ en $(0, \pi/2)$.

4. Halle $(f^{-1})'(0)$ si

(i) $f(x)=\int_0^x 1+\operatorname{sen}(\operatorname{sen} t)\,dt.$ (ii) $f(x)=\int_1^x \cos(\cos t)\,dt.$

(No evaluar f explícitamente.)

5. Halle una función g tal que

(i) $\int_0^x tg(t)\,dt = x+x^2.$ (ii) $\int_0^{x^2} tg(t)\,dt = x+x^2.$

(Observe que no se supone que g sea continua en 0.)

6. (a) Halle todas las funciones continuas f que satisfacen

$$\int_0^x f = (f(x))^2 + C \qquad \text{para alguna constante } C \neq 0,$$

suponiendo que f tiene al menos un 0.

(b) Halle también una solución que sea 0 en un intervalo $(-\infty, b]$, con $0 < b$, pero no cero para $x > b$.

(c) Finalmente, para $C = 0$ y cualquier intervalo $[a, b]$ dado con $a < 0 < b$, halle una solución que sea 0 en $[a, b]$ pero no cero en cualquier otra parte.

7. Utilice el Problema 13-23 para demostrar que

(i) $\dfrac{1}{7\sqrt{2}} \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \leq \frac{1}{7}.$ (ii) $\dfrac{3}{8} \leq \displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx \leq \frac{\sqrt{3}}{4}.$

8. Halle $F'(x)$ si $F(x)=\int_0^x xf(t)\,dt$. (La respuesta *no* es $xf(x)$; debe realizarse una manipulación obvia en la integral antes de intentar calcular F'.)

9. Demuestre que si f es continua, entonces

$$\int_0^x f(u)(x-u)\,du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\,dt\right) du.$$

Indicación: Diferencie ambos lados de la igualdad, utilizando el Problema 8.

***10.** Utilice el Problema 9 para demostrar que

$$\int_0^x f(u)(x-u)^2\,du = 2\int_0^x \left(\int_0^{u_2} \left(\int_0^{u_1} f(t)\,dt\right) du_1\right) du_2.$$

11. Halle una función f tal que $f'''(x) = 1 \,/\, \sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}$. (Este problema se supone que es fácil; **no** interprete erróneamente la palabra “halle”.)

12. Una función f es **periódica**, con **período** a, si $f(x+a) = f(x)$ para todo x.

(a) Si f es periódica con período a e integrable en $[0,a]$, demuestre que

$$\int_0^a f = \int_b^{b+a} f \quad \text{para todo } b.$$

(b) Halle una función f que no sea periódica, pero que lo sea f'. Indicación: Elija una g periódica para la cual pueda asegurarse que $f(x) = \int_0^x g$ no sea periódica.

(c) Si f' es periódica con período a y $f(a) = f(0)$, entonces f es también periódica con período a.

*(d) Recíprocamente, si f' es periódica con período a y f es periódica (con algún período no necesariamente $= a$), entonces $f(a) = f(0)$.

13. Halle $\int_0^b \sqrt[n]{x}\,dx$, encontrando simplemente una función f con $f'(x) = \sqrt[n]{x}$, y utilizando el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo. Coteje después con el problema 13-21.

***14.** Aplique el Teorema Fundamental del Cálculo y el Problema 13-21 para deducir el resultado enunciado en el Problema 12-21.

***15.** Sean C_1, C y C_2 curvas que pasan por el origen, tal como se muestra en la Figura 7. Cada punto de C se puede unir a un punto de C_1 mediante un segmento rectilíneo vertical y a un punto de C_2 mediante un segmento horizontal. Diremos que C *biseca* C_1 y C_2 si las regiones A y B tienen la misma área para cada punto de C.

(a) Si C_1 es la gráfica de $f(x) = x^2$, $x \geq 0$ y C es la gráfica de $f(x) = 2x^2$, $x \geq 0$, halle C_2 de manera que C biseque a C_1 y C_2.

(b) En general, halle C_2 si C_1 es la gráfica de $f(x) = x^m$, y C es la gráfica de $f(x) = cx^m$ para algún $c > 1$.

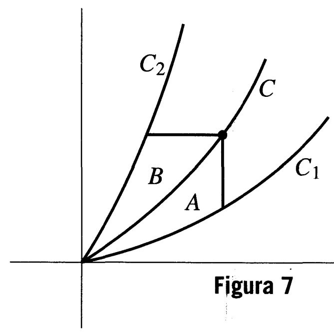


Figura 7

16. (a) Halle las derivadas de $F(x) = \int_1^x 1/t\,dt$ y $G(x) = \int_b^{bx} 1/t\,dt$.

(b) Dé ahora una nueva demostración para el Problema 13-15.

***17.** Aplique el Teorema Fundamental del Cálculo y el Teorema de Darboux (Problema 11-60) para dar otra demostración del Teorema del Valor Intermedio.

18. Demuestre que si h es continua, f y g son diferenciables, y

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\,dt,$$

entonces $F'(x) = h(g(x)) \cdot g'(x) - h(f(x)) \cdot f'(x)$. Indicación: Intente reducir el problema a los dos casos ya conocidos, con una constante como límite de integración inferior o superior.

19. Sea f integrable en $[a, b]$, sea c un punto de (a, b), y sea

$$F(x) = \int_a^x f, \quad a \leq x \leq b.$$

Para cada una de las siguientes afirmaciones, dé una demostración o un contraejemplo.

(a) Si f es diferenciable en c, entonces F es diferenciable en c.

(b) Si f es diferenciable en c, entonces F' es continua en c.

(c) Si f' es continua en c, entonces F' es continua en c.

***20.** Sea

$$f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

La función $F(x) = \int_0^x f$ ¿es diferenciable en 0? Indicación: Consulte la página 180.

21. Suponga que f' es integrable en $[0, 1]$ y que $f(0) = 0$. Demuestre que para todo x de $[0, 1]$ se verifica

$$|f(x)| \leq \sqrt{\int_0^1 |f'|^2}.$$

Demuestre también que la hipótesis $f(0) = 0$ es necesaria. Indicación: Problema 13-39.

***22.** Suponga que f es una función diferenciable con $f(0) = 0$ y $0 < f' \leq 1$. Demuestre que para todo $x \geq 0$ se verifica

$$\int_0^x f^3 \leq \left(\int_0^x f\right)^2.$$

***23.** (a) Suponga que $G' = g$ y $F' = f$. Demuestre que si la función y satisface la ecuación diferencial

(*) $$g(y(x)) \cdot y'(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \text{ de algún intervalo,}$$

entonces existe un número c tal que

(**) $$G(y(x)) = F(x) + c \quad \text{para todo } x \text{ de este intervalo.}$$

(b) Demuestre, recíprocamente, que si y satisface $(**)$, entonces y es una solución de $(*)$.

(c) Halle qué condición debe satisfacer y si

$$y'(x) = \frac{1+x^2}{1+y(x)}.$$

(En este caso $g(t) = 1+t$ y $f(t) = 1+t^2$.) Entonces "resuelva" las ecuaciones resultantes para hallar todas las soluciones posibles y (ninguna solución posee $\mathbf{R}$ como su dominio).

(d) Halle qué condición debe satisfacer y si

$$y'(x) = \frac{-1}{1+5[y(x)]^4}.$$

(Una referencia al Problema 12-14 demostrará que *existen* funciones que satisfacen la ecuación resultante.)

(e) Halle todas las funciones y tales que

$$y(x)y'(x) = -x.$$

Halle la solución y que verifica $y(0) = -1$.

24. En el Problema 10-19 vimos que la derivada de Schwarz

$$\frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2$$

era 0 para $f(x) = (ax+b)/(cx+d)$. Suponga ahora que f es cualquier función cuya derivada de Schwarz es 0.

(a) f''^2/f'^3 es una función constante.

(b) f es de la forma $f(x) = (ax+b)/(cx+d)$. Indicación: Considere $u = f'$ y aplique el problema anterior.

25. El límite $\lim_{N\to\infty} \int_a^N f$, si existe, se designa por $\int_a^\infty f$ (o $\int_a^\infty f(x)\,dx$), y se le denomina "integral impropia".

(a) Determine $\int_1^\infty x^r\,dx$, si $r < -1$.

(b) Utilice el Problema 13-15 para demostrar que $\int_1^\infty 1/x\,dx$ no existe. Indicación: ¿Qué se puede decir de $\int_1^{2^n} 1/x\,dx$?

(c) Suponga que $f(x) \geq 0$ para $x \geq 0$ y que $\int_0^\infty f$ existe. Demuestre que si $0 \leq g(x) \leq f(x)$ para todo $x \geq 0$, y g es integrable en cada intervalo $[0, N]$, entonces también existe $\int_0^\infty g$.

(d) Explique por qué $\int_0^\infty 1/(1+x^2)\,dx$ existe. Indicación: Separe esta integral en 1.

26. Decida si las siguientes integrales impropias existen.

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx.$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{1+x^{3/2}}\,dx.$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x\sqrt{1+x}}\,dx$ (en realidad, este tipo ya se consideró en el Problema 28).

27. La integral impropia $\int_{-\infty}^a f$ se define,obviamente, como $\lim_{N\to-\infty} \int_N^a f$. Pero otro tipo de integral impropia $\int_{-\infty}^\infty f$ se define de una manera no tan evidente: es igual a $\int_0^\infty f + \int_{-\infty}^0 f$, siempre y cuando ambas integrales impropias existan.

(a) Explique por qué $\int_{-\infty}^\infty 1/(1+x^2)\,dx$ existe.

(b) Explique por qué no existe $\int_{-\infty}^\infty x\,dx$. (Observe, sin embargo, que $\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^N x\,dx$ *sí* existe.)

(c) Demuestre que si $\int_{-\infty}^\infty f$ existe, entonces existe $\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^N f$ y es igual a $\int_{-\infty}^\infty f$. Demuestre, además, que $\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N+1} f$ y $\lim_{N\to\infty} \int_{-N^2}^N f$ existen ambos y son iguales a $\int_{-\infty}^\infty f$. ¿Puede dar el lector una generalización razonable a estos hechos? (En caso contrario, le será difícil tratar estos casos particulares.)

28. Existe otro tipo de "integral impropia" en la cual el intervalo esté acotado, pero la *función* no esté acotada:

(a) Si $a > 0$, halle $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^a 1/\sqrt{x}\,dx$. Este límite se designa mediante $\int_0^a 1/\sqrt{x}\,dx$, incluso aunque la función $f(x) = 1/\sqrt{x}$ no esté acotada en $[0, a]$, independientemente de cómo se defina $f(0)$.

(b) Halle $\int_0^a x^r\,dx$ si $-1 < r < 0$.

(c) Utilice el Problema 13-15 para demostrar que $\int_0^a x^{-1}\,dx$ no tiene sentido, ni siquiera como límite.

(d) Invente una definición razonable de $\int_a^0 |x|^r\,dx$ para $a < 0$ y calcúlela para $-1 < r < 0$.

(e) Invente una definición razonable de $\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2}\,dx$, como una suma de dos límites, y demuestre que los límites existen. Indicación: ¿Por qué existe $\int_{-1}^0 (1+x)^{-1/2}\,dx$? ¿Cómo es $(1+x)^{-1/2}$ comparado con $(1-x^2)^{-1/2}$ para $-1 < x < 0$?

29. (a) Si f es continua en $[0, 1]$, calcule $\lim_{x\to 0^+} x\int_x^1 \frac{f(t)}{t}\,dt$.

*(b) Si f es integrable en $[0, 1]$ y continua en 0, calcule

$$\lim_{x\to 0^+} x\int_x^1 \frac{f(t)}{t^2}\,dt.$$

30. Es posible, finalmente, combinar las dos extensiones posibles del concepto de integral.

(a) Si $f(x) = 1/\sqrt{x}$ para $0 \leq x \leq 1$ y $f(x) = 1/x^2$ para $x \geq 1$, halle $\int_0^\infty f(x)\,dx$ (una vez decidido cuál debe ser su significado).

(b) Demuestre que $\int_0^\infty x^r\,dx$ nunca tiene sentido. (Distinga los casos $-1 < r < 0$ y $r < -1$. En uno de los casos el fallo está en 0, y en el otro en ∞; para $r = -1$ el fallo está en ambos sitios.)

Las funciones trigonométricas

15

Las definiciones de las funciones sen y cos son considerablemente más sutiles de lo que se podría sospechar. Por esta razón, este capítulo comienza con algunas definiciones informales e intuitivas, que no deben ser analizadas demasiado rigurosamente ya que pronto serán sustituidas por las definiciones formales que son las que nos interesa utilizar en realidad.

En geometría elemental un ángulo se define como la unión de dos semirrectas con un punto inicial común (Figura 1).

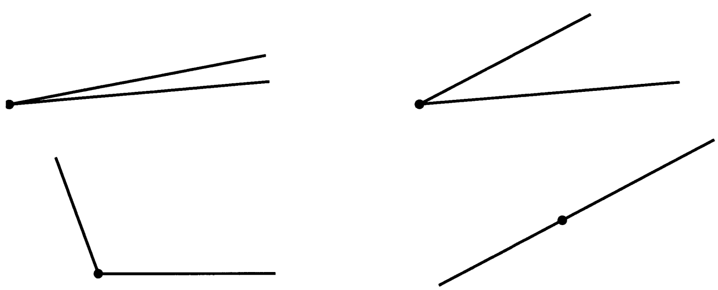


Figura 1

En trigonometría son más útiles los "ángulos dirigidos", que pueden considerarse como pares de semirrectas (l_1, l_2) con el mismo punto inicial, visualizadas como las de la Figura 2.

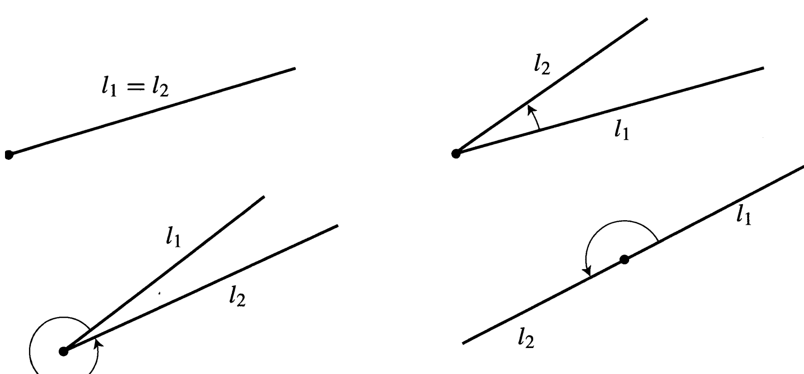


Figura 2

Si siempre se elige como l_1 la mitad positiva del eje horizontal, un ángulo dirigido queda completamente determinado por la segunda semirrecta (Figura 3).

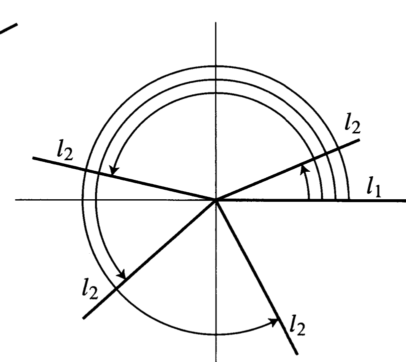


Figura 3

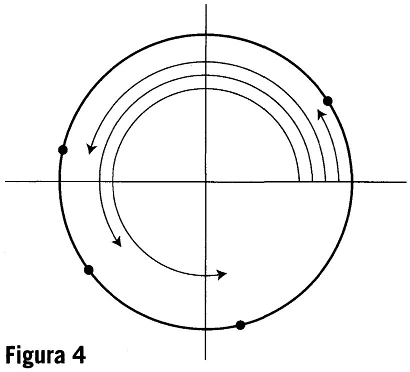


Figura 4

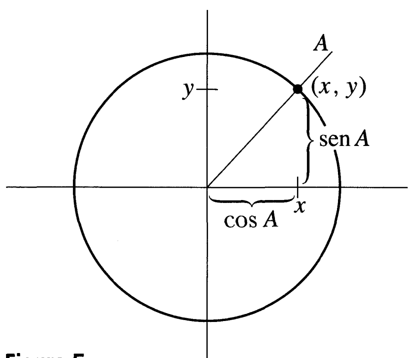


Figura 5

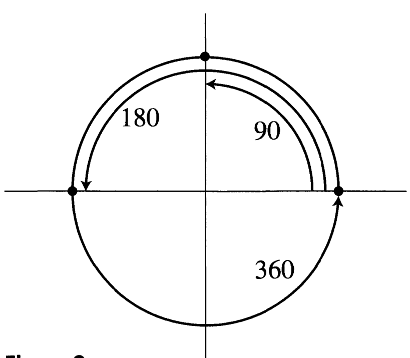


Figura 6

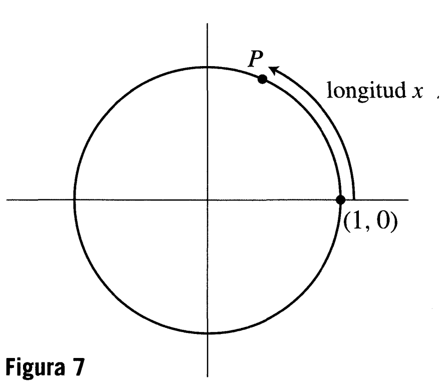


Figura 7

Como cada semirrecta corta al círculo unidad exactamente una vez, un ángulo dirigido puede describirse todavía de una manera más sencilla, mediante un punto del círculo unidad (Figura 4), es decir, mediante un punto (x,y) con $x^2+y^2=1$.

Ahora es posible definir el seno y el coseno de un ángulo dirigido de la manera siguiente (Figura 5): un ángulo dirigido está determinado por un punto (x,y) con $x^2+y^2=1$; el seno del ángulo se define como y, y el coseno como x.

A pesar del aura de precisión que envuelve al párrafo anterior, todavía no hemos acabado con las definiciones de sen y cos. Efectivamente, no hemos hecho más que empezar. Lo que hemos definido es el seno y el coseno de un ángulo dirigido; lo que queremos definir es el sen x y el cos x para cada *número x*. El procedimiento usual para hacerlo consiste en asociar un ángulo a cada número. El método más antiguo se basa en "medir los ángulos en grados". Un ángulo completo (o perigonal) se asocia con 360, un ángulo llano se asocia con 180, un ángulo recto con 90, etc. (Figura 6). El ángulo asociado de esta manera con el número x, se denomina "ángulo de x grados". El ángulo de 0 grados es el mismo que el de 360 grados, y esta ambigüedad se hace extensible intencionadamente a los demás casos, de manera que, por ejemplo, un ángulo de 90 grados es también un ángulo de $360+90$ grados, etc. Ahora es posible definir una función, que representaremos mediante sen°, de la manera siguiente:

$$\text{sen}^\circ(x) = \text{seno del ángulo de } x \text{ grados.}$$

Este método tiene dos dificultades. Aunque puede estar claro lo que significa un ángulo de 90 ó 45 grados, no resulta tan obvio el significado de un ángulo de $\sqrt{2}$ grados. Incluso aunque esta dificultad pudiera subsanarse, no es probable que este método, basado en la elección arbitraria del valor de 360, conduzca a resultados elegantes; sería realmente pura casualidad que la función sen° tuviese propiedades matemáticas agradables.

La "medida en'radianes" permite remediar ambos defectos. Dado cualquier número x, elijamos un punto P del círculo unidad tal que x es la longitud del arco que comienza en $(1,0)$ y se extiende, en sentido contrario a las agujas del reloj, hasta el punto P (Figura 7). El ángulo dirigido determinado por P se denomina el "ángulo de x radianes". Como la longitud de la circunferencia es 2π, el ángulo de x radianes y el ángulo de $2\pi+x$ radianes son idénticos. Ahora podemos definir una función sen^r de la manera siguiente:

$$\text{sen}^r(x) = \text{seno del ángulo de } x \text{ radianes.}$$

Este mismo método puede adoptarse fácilmente para definir sen°; como debe verificarse que $\text{sen}^\circ 360 = \text{sen}^r 2\pi$, podemos definir

$$\text{sen}^\circ x = \text{sen}^r \frac{2\pi x}{360} = \text{sen}^r \frac{\pi x}{180}.$$

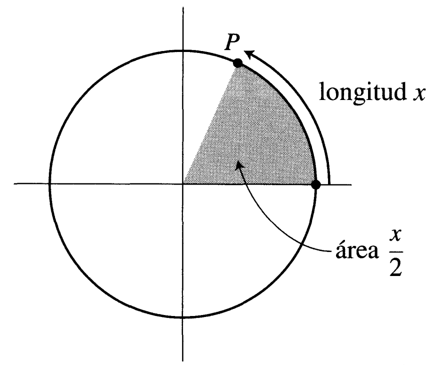


Figura 8

Pronto abandonaremos el superíndice r en sen^r, ya que sen^r (y no sen°) es la única función que nos va a interesar; antes, sin embargo, debemos hacer algunas advertencias.

Las expresiones $\text{sen}^\circ x$ y $\text{sen}^r x$ a veces se escriben

$$\text{sen}\, x^\circ$$
$$\text{sen}\, x \text{ radianes},$$

pero esta notación induce a confusión; un número x es simplemente un número; no lleva un distintivo que indique que se expresa en "grados" o en "radianes". Si no está claro el significado de la notación "sen x", generalmente suele preguntarse:

"¿x se expresa en grados o radianes?"

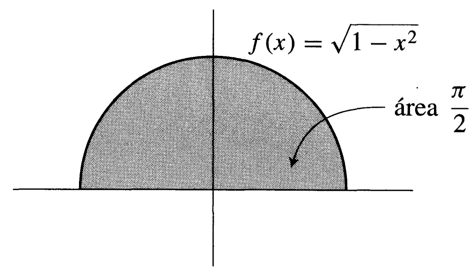


Figura 9

pero lo que realmente se pretende saber es si la notación sen x se refiere a sen° o sen^r. Incluso para los matemáticos más adictos a la precisión, estas observaciones no constituirían un problema relevante si no fuese porque al no tenerlas en cuenta pueden cometerse errores en la resolución de algunos problemas (en el Problema 19 se da un ejemplo concreto de esta posibilidad).

Aunque la función sen^r es la que deseamos denotar simplemente por sen (y utilizarla exclusivamente de ahora en adelante), existe una dificultad inherente en la definición de sen^r. La definición que hemos propuesto depende del concepto de longitud de una curva. Aunque en algunos problemas ya hemos definido el concepto de longitud de una curva, es fácil también reformular la definición en términos de áreas (en el Problema 28 se indica una construcción de las funciones trigonométricas en términos de la longitud).

Supongamos que x es la longitud del arco del círculo unidad, que va desde $(1,0)$ a P; este arco contiene pues $x/2\pi$ de la longitud total de la circunferencia del círculo unidad. Sea S el "sector" que se muestra en la Figura 8; S está limitado por el círculo unidad, el eje horizontal y la semirrecta que va desde $(0,0)$ a P. El área de S ha de ser igual a $x/2\pi$ veces el área del círculo unidad, la cual vale π; por tanto, S debe tener un área igual a

$$\frac{x}{2\pi} \cdot \pi = \frac{x}{2}.$$

De manera que podemos definir $\cos x$ y $\text{sen}\, x$ como las coordenadas del punto P que determina un sector de área $x/2$.

Basándonos en estas observaciones, estamos ya en condiciones de dar una definición rigurosa de las funciones sen y cos. La primera definición identifica a π como el área del círculo unidad; más concretamente como el doble del área del semicírculo (Figura 9).

Definición

$$\pi = 2 \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

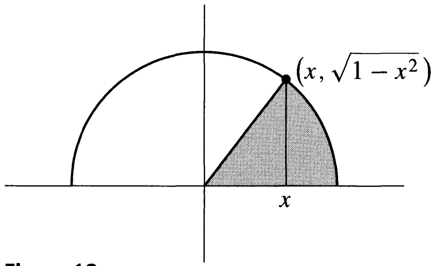


Figura 10

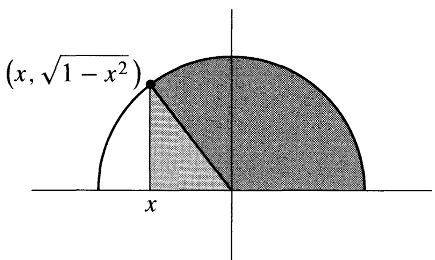


Figura 11

(Esta definición no se da tan sólo por motivos estéticos; para definir las funciones trigonométricas será necesario definir primero sen x y cos x sólo para $0 \leq x \leq \pi$.)

La segunda definición describe el área $A(x)$ del sector limitado por el círculo unidad, el eje horizontal y la semirrecta que corta al círculo unidad en el punto $(x, \sqrt{1-x^2})$ para $-1 \leq x \leq 1$. Si $0 \leq x \leq 1$, dicha área puede expresarse (Figura 10) como la suma del área de un triángulo y el área de una región en el círculo unidad:

$$\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \int_x^1 \sqrt{1-t^2}\,dt.$$

La misma fórmula es válida también para $-1 \leq x \leq 0$. En este caso (Figura 11), el término

$$\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$$

es negativo, y representa el área del triángulo que debe sustraerse del término

$$\int_x^1 \sqrt{1-t^2}\,dt.$$

Definición

Si $-1 \leq x \leq 1$, entonces

$$\boldsymbol{A(x)} = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \int_x^1 \sqrt{1-t^2}\,dt.$$

Observemos que si $-1 < x < 1$, entonces A es diferenciable en x y (utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo),

$$\begin{aligned}
A'(x) &= \frac{1}{2}\left[x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2}\right] - \sqrt{1-x^2} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-x^2 + (1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\right] - \sqrt{1-x^2} \\
&= \frac{1-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} \\
&= \frac{1-2x^2-2(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}$$

Observemos también (Figura 12) que en el intervalo $[-1,1]$ la función A decrece desde

$$A(-1) = 0 + \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

hasta $A(1) = 0$. Esto se deduce directamente de la definición de A, y también del hecho de que la derivada $A'(x)$ es negativa en $(-1,1)$.

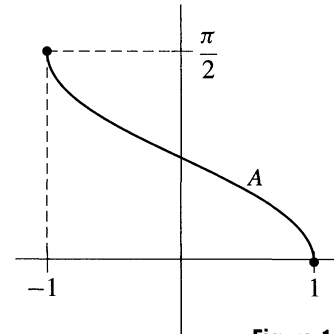


Figura 12

Para $0 \le x \le \pi$ deseamos ahora definir $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ como las coordenadas de un punto $P = (\cos x, \operatorname{sen} x)$ del círculo unidad, que determina un sector cuya área es $x/2$ (Figura 13). En otras palabras:

Definición

Si $0 \le x \le \pi$, entonces **cos *x*** es el único número de $[-1,1]$ tal que

$$A(\cos x) = \frac{x}{2};$$

y

$$\mathbf{sen}(\boldsymbol{x}) = \sqrt{1-(\cos x)^2}.$$

Esta definición requiere una justificación. El hecho de que A sea continua y tome los valores 0 y $\pi/2$ nos asegura la existencia de un número y tal que $A(y) = x/2$. Esta referencia tácita al Teorema del Valor Intermedio es crucial si queremos que nuestra definición preliminar sea precisa. Habiendo pues justificado la definición, ahora podemos proseguir más rápidamente.

Teorema 1. *Si* $0 < x < \pi$, *entonces*

$$\begin{aligned} \cos'(x) &= -\operatorname{sen} x, \\ \operatorname{sen}'(x) &= \cos x. \end{aligned}$$

Demostración. Si $B = 2A$, entonces la definición $A(\cos x) = x/2$ puede escribirse como

$$B(\cos x) = x;$$

en otras palabras, cos es precisamente la inversa de B. Ya hemos demostrado que

$$A'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}},$$

de lo cual podemos deducir que

$$B'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Por consiguiente,

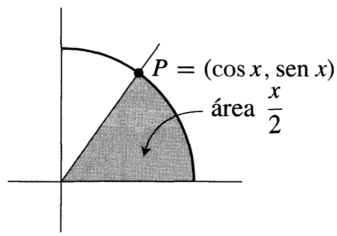


Figura 13

$$\begin{aligned}
\cos'(x) &= (B^{-1})'(x) \\
&= \frac{1}{B'(B^{-1}(x))} \\
&= \frac{1}{-\dfrac{1}{\sqrt{1-[B^{-1}(x)]^2}}} \\
&= -\sqrt{1-(\cos x)^2} \\
&= -\operatorname{sen} x.
\end{aligned}$$

Ya que

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{1-(\cos x)^2},$$

obtenemos también

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{-2\cos x \cdot \cos'(x)}{\sqrt{1-(\cos x)^2}} \\
&= \frac{\cos x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} \\
&= \cos x. \blacksquare
\end{aligned}$$

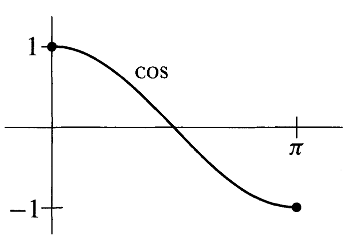


Figura 14

La información contenida en el Teorema 1 puede utilizarse para representar las gráficas de sen y cos en el intervalo $[0, \pi]$. Como

$$\cos'(x) = -\operatorname{sen} x < 0, \quad 0 < x < \pi,$$

la función cos decrece desde $\cos 0 = 1$ hasta $\cos \pi = -1$ (Figura 14). Por tanto, $\cos y = 0$ para un único y del intervalo $[0, \pi]$. Para hallar dicho y, observemos que la definición de la función cos,

$$A(\cos x) = \frac{x}{2},$$

significa que

$$A(0) = \frac{y}{2},$$

de manera que

$$y = 2\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt.$$

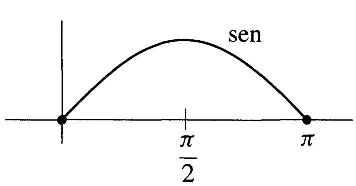


Figura 15

Es fácil comprobar que

$$\int_{-1}^0 \sqrt{1-t^2}\,dt = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$$

por tanto, podemos escribir

$$y = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

Se verifica igualmente que

$$\operatorname{sen}'(x) = \cos x \begin{cases} > 0, & 0 < x < \pi/2 \\ < 0, & \pi/2 < x < \pi, \end{cases}$$

de manera que sen crece en $[0, \pi/2]$ desde $\operatorname{sen} 0 = 0$ hasta $\operatorname{sen} \pi/2 = 1$, y luego decrece en $[\pi/2, \pi]$ hasta $\operatorname{sen} \pi = 0$ (Figura 15).

Para valores de x fuera del intervalo $[0, \pi]$, los valores de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ pueden definirse mediante un procedimiento sencillo que consta de dos etapas:

(1) Si $\pi \leq x \leq 2\pi$, entonces

$$\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(2\pi - x),$$
$$\cos x = \cos(2\pi - x).$$

En la Figura 16 se muestran las gráficas de sen y cos en el intervalo $[0, 2\pi]$.

(2) Si $x = 2\pi k + x'$ para algún entero k, y algún x' de $[0, 2\pi]$, entonces

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x',$$
$$\cos x = \cos x'.$$

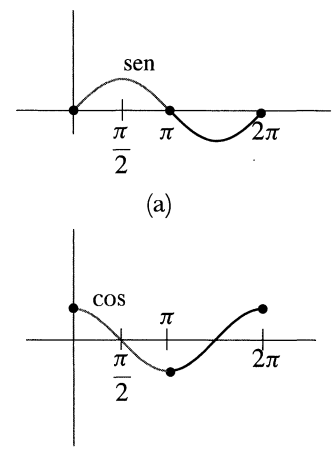


Figura 16

En la Figura 17 se muestran las gráficas de sen y cos, funciones definidas ahora en todo **R**.

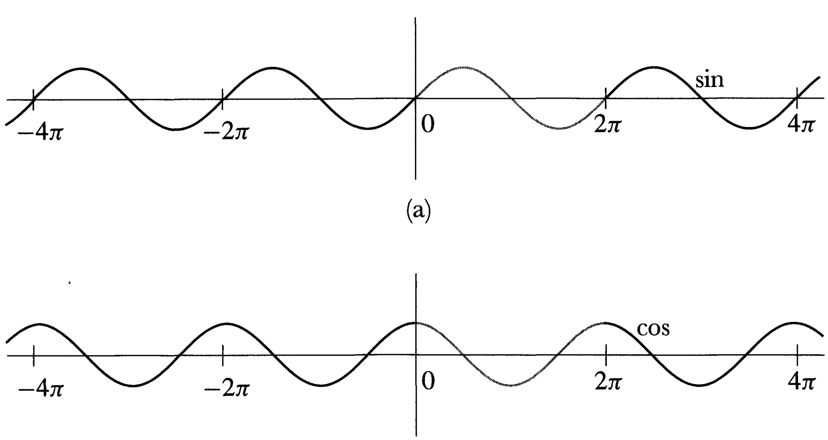


Figura 17

Habiendo extendido las funciones sen y cos a **R**, ahora debemos comprobar que continúan verificando sus propiedades básicas. Esto es fácil en la mayoría de los casos. Por ejemplo, está claro que, para todo x, se verifica la ecuación

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Tampoco es difícil demostrar que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}'(x) &= \cos x,\\ \cos'(x) &= -\operatorname{sen} x,\end{aligned}$$

si x no es un múltiplo de π. Por ejemplo, si $\pi < x < 2\pi$, entonces

$$\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(2\pi - x),$$

de manera que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}'(x) &= -\operatorname{sen}'(2\pi - x)\cdot(-1)\\ &= \cos(2\pi - x)\\ &= \cos x.\end{aligned}$$

Si x es un múltiplo de π , recurrimos a un artilugio; tan sólo es necesario aplicar el Teorema 11-7 para deducir que, también en este caso, se verifican las mismas fórmulas.

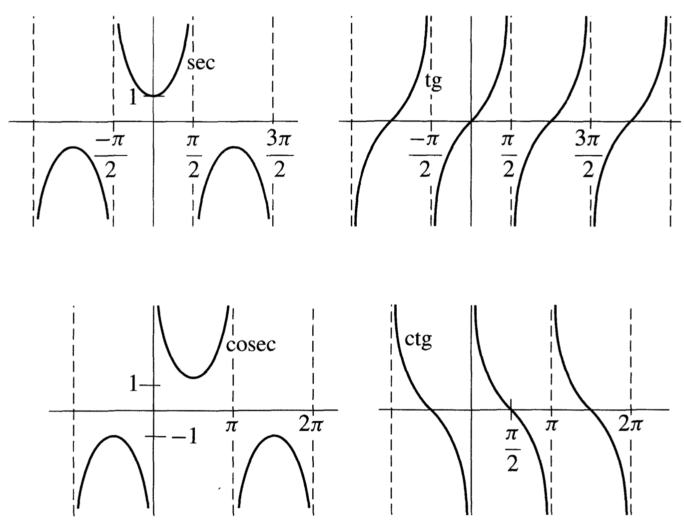


Figura 18

Las restantes funciones trigonométricas estándar no presentan ninguna dificultad. Definamos

$$\left.\begin{aligned}\sec x &= \frac{1}{\cos x}\\ \operatorname{tg} x &= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\end{aligned}\right\} x \neq k\pi + \pi/2,$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{cosec} x &= \frac{1}{\operatorname{sen} x}\\ \operatorname{ctg} x &= \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\end{aligned}\right\} x \neq k\pi.$$

Las gráficas se representan en la Figura 18. Es aconsejable que el lector trate de convencerse de que las características generales de estas gráficas pueden predecirse a partir de las derivadas de dichas funciones, las cuales se resumen en el siguiente teorema (no es necesario memorizar las fórmulas ya que éstas pueden deducirse fácilmente en el momento en que se necesitan).

Teorema 2. *Si $x \neq k\pi + \pi/2$, entonces*

$$\sec'(x) = \sec x \operatorname{tg} x,$$
$$\operatorname{tg}'(x) = \sec^2 x.$$

Si $x \neq k\pi$, entonces

$$\operatorname{cosec}'(x) = -\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x,$$
$$\operatorname{ctg}'(x) = -\operatorname{cosec}^2 x.$$

Demostración. Se deja como ejercicio para el lector (se trata de un cálculo directo, que no ofrece ninguna dificultad). ■

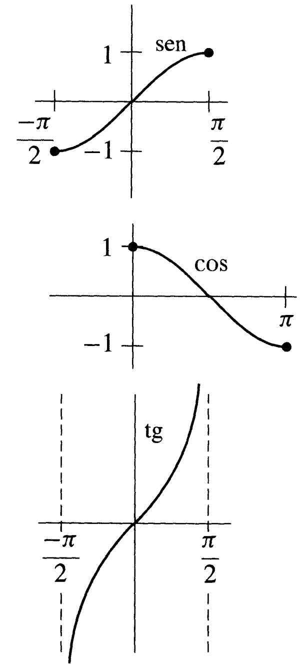


Figura 19

Las inversas de las funciones trigonométricas también se pueden diferenciar fácilmente. Las funciones trigonométricas no son uno-uno, por lo tanto, para considerar sus inversas, deben restringirse a determinados intervalos; la mayor longitud del intervalo que se puede conseguir es π, y los intervalos que se utilizan normalmente son (Figura 19)

$[-\pi/2, \pi/2]$	para sen,
$[0, \pi]$	para cos,
$(-\pi/2, \pi/2)$	para tg.

(Las inversas de las restantes funciones trigonométricas se utilizan tan raramente que ni siquiera las mencionaremos.)

La inversa de la función

$$f(x) = \operatorname{sen} x, \qquad -\pi/2 \leq x \leq \pi/2$$

se denomina **arcsen** (Figura 20); el dominio de arcsen es $[-1, 1]$. Se ha evitado utilizar la notación sen^{-1} ya que la función arcsen no es la inversa de sen (la cual no es uno-uno), sino de la función f que es la restricción de sen al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$; a veces la función restringida f se denota mediante Sin, y arcsen mediante Sin^{-1}.

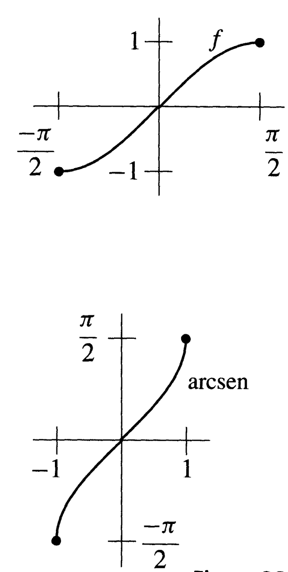


Figura 20

La inversa de la función

$$g(x) = \cos x, \qquad 0 \leq x \leq \pi$$

se denomina **arccos** (Figura 21); el dominio de arccos es $[-1, 1]$. A veces g se representa mediante Cos, y arccos mediante Cos^{-1}.

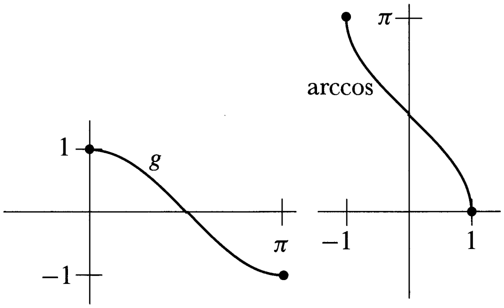


Figura 21

La inversa de la función

$$h(x) = \operatorname{tg} x, \qquad -\pi/2 < x < \pi/2$$

se denomina **arctg** (Figura 22); arctg constituye uno de los ejemplos sencillos de una función diferenciable que está acotada aunque es uno-uno en todo **R**. A veces la función h se representa mediante Tan, y arctg mediante Tan^{-1}.

Las derivadas de las funciones trigonométricas inversas son sorprendentemente sencillas y no incluyen a funciones trigonométricas. No es difícil calcular dichas derivadas, pero para expresarlas de manera adecuada deberemos simplificar expresiones como

$$\cos(\operatorname{arcsen} x), \qquad \sec(\operatorname{arctg} x).$$

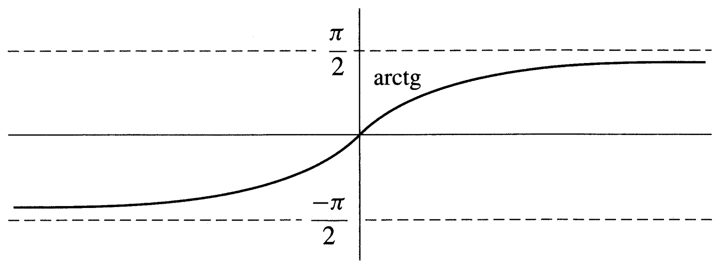


Figura 22

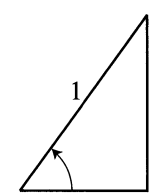


Figura 23

Un pequeño dibujo es la mejor manera de recordar las simplificaciones correctas. Por ejemplo, en la Figura 23 se representa un ángulo dirigido cuyo seno es x, dicho ángulo es, pues, un ángulo de $(\operatorname{arcsen} x)$ radianes; por consiguiente, $\cos(\operatorname{arcsen} x)$ es la longitud del otro lado, o sea $\sqrt{1-x^2}$. Sin embargo, en la demostración del siguiente teorema no recurriremos a dibujos de este tipo.

Teorema 3. *Si* $-1 < x < 1$, *entonces*

$$\operatorname{arcsen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\operatorname{arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Además, para todo x se verifica

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Demostración

$$\begin{aligned}\operatorname{arcsen}'(x) &= (f^{-1})'(x)\\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\\ &= \frac{1}{\operatorname{sen}'(\operatorname{arcsen} x)}\\ &= \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} x)}.\end{aligned}$$

Sabemos que

$$[\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)]^2 + [\cos(\operatorname{arcsen} x)]^2 = 1,$$

es decir,

$$x^2 + [\cos(\operatorname{arcsen} x)]^2 = 1;$$

por tanto,

$$\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1-x^2}.$$

(Debe tomarse la raíz cuadrada positiva ya que $\operatorname{arcsen} x$ se encuentra en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, de manera que $\cos(\operatorname{arcsen} x) > 0$.) Esto demuestra la primera fórmula.

La segunda fórmula ya se ha establecido (en la demostración del Teorema 1). El lector puede también imitar la demostración de la primera fórmula, ejercicio muy recomendable si dicha demostración le supuso alguna dificultad. La tercera fórmula se demuestra de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
\operatorname{arctg}'(x) &= (h^{-1})'(x) \\
&= \frac{1}{h'(h^{-1}(x))} \\
&= \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x)} \\
&= \frac{1}{\sec^2(\operatorname{arctg} x)}
\end{aligned}$$

Dividiendo ambos miembros de la identidad

$$\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$$

por $\cos^2 a$, obtenemos

$$\operatorname{tg}^2 a + 1 = \sec^2 a.$$

De lo cual se deduce que

$$[\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)]^2 + 1 = \sec^2(\operatorname{arctg} x),$$

es decir

$$x^2 + 1 = \sec^2(\operatorname{arctg} x),$$

lo que demuestra la tercera fórmula. ■

En el Problema 27 se esboza la demostración tradicional de la fórmula $\operatorname{sen}'(x) = \cos x$ (muy distinta a la demostración que hemos dado aquí). Dicha demostración tradicional se basa en establecer primero que el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1,$$

y en la "fórmula de la adición"

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y.$$

Ambas fórmulas pueden deducirse fácilmente ahora que ya conocemos la derivada de sen y cos. La primera no es más que el caso particular $\text{sen}'(0) = \cos 0$. La segunda depende de una caracterización elegante de las funciones sen y cos. Para deducir este resultado se necesita un lema cuya demostración incluye un sagaz artilugio; en la Parte IV daremos una demostración más convencional.

Lema. *Supongamos que f admite una segunda derivada en cualquier punto y que*

$$\begin{aligned} f'' + f &= 0, \\ f(0) &= 0, \\ f'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Entonces $f = 0$.

Demostración. Multiplicando ambos lados de la primera ecuación por f', obtenemos

$$f'f'' + ff' = 0.$$

Así

$$[(f')^2 + f^2]' = 2(f'f'' + ff') = 0,$$

por tanto $(f')^2 + f^2$ es una función constante. Como por hipótesis $f(0) = 0$ y $f'(0) = 0$ deducimos que la constante es igual a 0; así

$$[f'(x)]^2 + [f(x)]^2 = 0 \quad \text{para todo } x.$$

Esto implica que

$$f(x) = 0 \quad \text{para todo } x. \blacksquare$$

Teorema 4. *Si f admite una segunda derivada en cualquier punto y*

$$\begin{aligned} f'' + f &= 0, \\ f(0) &= a, \\ f'(0) &= b, \end{aligned}$$

entonces

$$f = b \cdot \text{sen} + a \cdot \cos.$$

(En particular, si $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$, entonces $f = \text{sen}$; si $f(0) = 1$ y $f'(0) = 0$, entonces $f = \cos$.)

Demostración. Sea

$$g(x) = f(x) - b\,\text{sen}\,x - a\cos x.$$

Entonces

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) - b\cos x + a\,\text{sen}\,x, \\ g''(x) &= f''(x) + b\,\text{sen}\,x + a\cos x. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} g'' + g &= 0, \\ g(0) &= 0, \\ g'(0) &= 0, \end{aligned}$$

lo que demuestra que

$$0 = g(x) = f(x) - b \operatorname{sen} x - a \cos x, \qquad \text{para todo } x. \blacksquare$$

Teorema 5. *Si x e y son dos números cualesquiera, entonces*

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x+y) &= \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y, \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y. \end{aligned}$$

Demostración. Dado un número y cualquiera, podemos definir una función f mediante

$$f(x) = \operatorname{sen}(x+y).$$

Entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x+y) \\ f''(x) &= -\operatorname{sen}(x+y). \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} f'' + f &= 0, \\ f(0) &= \operatorname{sen} y, \\ f'(0) &= \cos y. \end{aligned}$$

Deducimos pues, según el Teorema 4, que

$$f = (\cos y) \cdot \operatorname{sen} + (\operatorname{sen} y) \cdot \cos;$$

es decir,

$$\operatorname{sen}(x+y) = \cos y \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y \cos x, \qquad \text{para todo } x.$$

Como el número y elegido podía ser cualquiera, esto demuestra la primera fórmula para todo x y todo y.

La segunda fórmula se demuestra de una manera análoga. ■

Para concluir este capítulo, y como un preludio al Capítulo 18, mencionaremos un método alternativo de definir la función sen. Ya que

$$\operatorname{arcsen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{para } -1 < x < 1,$$

deducimos, según el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, que

$$\operatorname{arcsen} x = \operatorname{arcsen} x - \operatorname{arcsen} 0 = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt.$$

Esta ecuación se podía haber tomado como la *definición* de arcsen. De aquí se deduciría inmediatamente que

$$\operatorname{arcsen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

la función sen se definiría entonces como $(\operatorname{arcsen})^{-1}$ y la fórmula de derivación de la función inversa permitiría demostrar que

$$\operatorname{sen}'(x) = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x},$$

la cual podría definirse como $\cos x$. Por último, se demostraría que $A(\cos x) = x/2$, recuperando al final de todo este desarrollo la definición con la que comenzamos. A pesar de que este método es más rápido, la definición resultaría totalmente desmotivada; sólo el autor conocería los detalles y pormenores de todo el razonamiento, no el estudiante que es a quien va dirigido. Sin embargo, como veremos en el Capítulo 18, este tipo de métodos son a veces los más adecuados.

Problemas

1. Diferencie cada una de las siguientes funciones.

(i) $f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{arctg}(\operatorname{arctg} x))$.

(ii) $f(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{arctg}(\arccos x))$.

(iii) $f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x \operatorname{arctg} x)$.

(iv) $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

2. Halle los siguientes límites aplicando la Regla de l'Hôpital.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x + x^3/6}{x^3}$.

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x + x^3/6}{x^4}$.

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^2}$.

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^4}$.

(v) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x - x + x^3/3}{x^3}$.

(vi) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$.

3. Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

(a) Halle $f'(0)$.

(b) Halle $f''(0)$.

A este nivel el lector deberá aplicar, casi con toda seguridad, la regla de l'Hôpital, pero en el Capítulo 24 utilizaremos un método que permitirá calcular $f^{(k)}(0)$ para todo k, casi sin ninguna dificultad.

4. Represente gráficamente las siguientes funciones.

(a) $f(x) = \operatorname{sen} 2x$.

(b) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$. (Puede obtenerse una gráfica bastante aceptable de esta función utilizando únicamente un esquema de la gráfica de sen. En efecto, la única posibilidad que tiene el lector en este problema es dejarse llevar por el puro razonamiento, ya que determinar el signo de la derivada $f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$ no es más fácil que determinar el comportamiento de f directamente. Sin embargo, la fórmula de $f'(x)$ si que indica un hecho importante: $f'(0) = 0$, lo cual debe ser cierto ya que f es par, y además debería resultar aparente en la gráfica dibujada por el lector.)

(c) $f(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$. (Seguramente resultará instructivo dibujar cuidadosamente primero las gráficas de $g(x) = \operatorname{sen} x$ y $h(x) = \operatorname{sen} 2x$ en el mismo sistema de ejes de coordenadas, desde 0 hasta 2π, y tratar de intuir cómo será el aspecto de la suma. El lector puede calcular fácilmente cuántos puntos críticos posee f en $[0, 2\pi]$ considerando la derivada de f. Luego puede determinar la naturaleza de estos puntos críticos calculando el signo de f en cada punto; la gráfica sugerirá, probablemente, la respuesta.)

(d) $f(x) = \operatorname{tg} x - x$. (Determine primero el comportamiento de f en $(-\pi/2, \pi/2)$; en los intervalos $(k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2)$ la gráfica de f será la misma aunque desplazada una cierta cantidad. ¿Por qué?)

(e) $f(x) = \operatorname{sen} x - x$. (En el caso de esta función será especialmente útil el material del Apéndice del Capítulo 11.)

(f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

(El apartado (d) debería permitir al lector determinar, aproximadamente, donde se localizan los ceros de f'. Observe que f es par y continua en 0; considere también el valor de f para valores grandes de x.)

(g) $f(x) = x \operatorname{sen} x$.

***5.** La *espiral hiperbólica* es la gráfica de la función $f(\theta) = a/\theta$ en coordenadas polares (Capítulo 4, Apéndice 3). Represente gráficamente dicha curva, prestando atención sobre todo a su comportamiento cuando θ se aproxima a 0.

6. Demuestre la fórmula de la adición para cos.

7. (a) A partir de la fórmula de la adición para sen y cos deduzca fórmulas para $\operatorname{sen} 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{sen} 3x$ y $\cos 3x$.

(b) Utilice estas fórmulas para hallar los siguientes valores de las funciones trigonométricas (deducidos normalmente, en trigonometria elemental, utilizando argumentos geométricos):

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1,$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

8. (a) Demuestre que $A \operatorname{sen}(x+B)$ puede escribirse como $a \operatorname{sen} x + b \cos x$ para valores adecuados de a y b. (Uno de los teoremas de este capítulo permite dar una demostración de una línea. El lector debería intuir también qué valores han de tener a y b.)

(b) Recíprocamente, dados a y b, halle números A y B tales que $a \operatorname{sen} x + b \cos x = A \operatorname{sen}(x+B)$ para todo x.

(c) Utilice el apartado (b) para trazar la gráfica de $f(x) = \sqrt{3} \operatorname{sen} x + \cos x$.

9. (a) Demuestre que

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

si x, y y $x+y$ no son de la forma $k\pi + \pi/2$. (Utilice las fórmulas de la adición para sen y cos.)

(b) Demuestre que

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right),$$

indicando las restricciones necesarias que han de verificar x e y. Indicación: Sustituya x por $\operatorname{arctg} x$ e y por $\operatorname{arctg} y$ en el apartado (a).

10. Demuestre que

$$\operatorname{arcsen} \alpha + \operatorname{arcsen} \beta = \operatorname{arcsen}\left(\alpha\sqrt{1-\beta^2} + \beta\sqrt{1-\alpha^2}\right),$$

indicando las restricciones que deben satisfacer α y β.

11. Demuestre que si m y n son números cualesquiera, entonces

$$\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = \tfrac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],$$

$$\operatorname{sen} mx \cos nx = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x],$$

$$\cos mx \cos nx = \tfrac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x].$$

12. Demuestre que si m y n son números naturales, entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx \, dx = 0.$$

Estas relaciones son particularmente relevantes en la teoría de las series de Fourier. Aunque a este tema le dedicaremos una atención algo más detallada sólo en las Lecturas Recomendadas (vea la referencia [26]), el siguiente problema permite hacerse una idea de su importancia.

13. (a) Si f es integrable en $[-\pi, \pi]$, demuestre que el valor mínimo de

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - a \cos nx)^2 \, dx$$

se alcanza cuando

$$a = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$

y que el valor mínimo de

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - a\,\mathrm{sen}\,nx)^2\,dx$$

se alcanza cuando

$$a = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx.$$

(En cada caso, sacar a fuera del signo integral, obteniendo una expresión cuadrática en a.)

(b) Defina

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n = 0,1,2,\ldots,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx, \quad n = 1,2,3,\ldots.$$

Demuestre que si c_i y d_i son números cualesquiera, entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - \left[\frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} c_n\cos nx + d_n\,\mathrm{sen}\,nx\right]\right)^2 dx$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\,dx - 2\pi\left(\frac{a_0c_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_nc_n + b_nd_n\right) + \pi\left(\frac{c_0{}^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} c_n{}^2 + d_n{}^2\right)$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\,dx - \pi\left(\frac{a_0{}^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n{}^2 + b_n{}^2\right)$$
$$+\pi\left(\left(\frac{c_0}{\sqrt{2}} - \frac{a_0}{\sqrt{2}}\right)^2 + \sum_{n=1}^{N}(c_n - a_n)^2 + (d_n - b_n)^2\right),$$

demostrando así que la primera integral alcanza un valor mínimo cuando $a_i = c_i$ y $b_i = d_i$. En otras palabras, entre todas las "combinaciones lineales" de las funciones $s_n(x) = \mathrm{sen}\,nx$ y $c_n(x) = \cos nx$ para $1 \le n \le N$, la función particular

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n\cos nx + b_n\,\mathrm{sen}\,nx$$

es la que presenta un "máximo ajuste" a f en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

14. (a) Halle una fórmula para $\mathrm{sen}\,x + \mathrm{sen}\,y$. (Observe que, al hacerlo, también se obtiene una fórmula para $\mathrm{sen}\,x - \mathrm{sen}\,y$.) Indicación: Halle primero una fórmula para $\mathrm{sen}(a+b) + \mathrm{sen}(a-b)$. ¿Qué ventaja supone hacer esto en primer lugar?

(b) Halle también una fórmula para $\cos x + \cos y$ y $\cos x - \cos y$.

15. (a) Partiendo de la fórmula para $\cos 2x$, deduzca fórmulas para $\mathrm{sen}^2 x$ y $\cos^2 x$ en términos de $\cos 2x$.

(b) Demuestre que
$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
para $0 \le x \le \pi/2$.

(c) Utilice el apartado (a) para hallar $\int_a^b \operatorname{sen}^2 x\,dx$ y $\int_a^b \cos^2 x\,dx$.

(d) Represente gráficamente a la función $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$.

16. Halle $\operatorname{sen}(\operatorname{arctg} x)$ y $\cos(\operatorname{arctg} x)$ como expresiones que no incluyan funciones trigonométricas. Indicación: $y = \operatorname{arctg} x$ significa que $x = \operatorname{tg} y = \operatorname{sen} y/\cos y = \operatorname{sen} y/\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}$.

17. Si $x = \operatorname{tg} u/2$, exprese $\operatorname{sen} u$ y $\cos u$ en términos de x. (Utilice el Problema 16; las respuestas deben ser expresiones muy sencillas.)

18. (a) Demuestre que $\operatorname{sen}(x+\pi/2) = \cos x$. (De hecho, hemos estado dibujando las gráficas de sen y cos como si esto fuese así).

(b) ¿A qué son iguales $\operatorname{arcsen}(\cos x)$ y $\arccos(\operatorname{sen} x)$?

19. (a) Halle $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$. Indicación: La respuesta no es 45.

(b) Halle $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

20. Halle $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$.

21. (a) Defina las funciones sen° y $\cos^\circ$ mediante $\operatorname{sen}^\circ(x) = \operatorname{sen}(\pi x/180)$ y $\cos^\circ(x) = \cos(\pi x/180)$. Halle $(\operatorname{sen}^\circ)'$ y $(\cos^\circ)'$ en términos de estas mismas funciones.

(b) Halle $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^\circ x}{x}$ y $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}^\circ \frac{1}{x}$.

22. Demuestre que todo punto del círculo unidad es de la forma $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ para por lo menos un número θ (y por lo tanto para infinitos).

23. (a) Demuestre que π es la longitud máxima posible de un intervalo en el cual sen es uno-uno, y que un tal intervalo debe ser de la forma $[2k\pi - \pi/2, 2k\pi + \pi/2]$ ó $[2k\pi + \pi/2, 2(k+1)\pi - \pi/2]$.

(b) Suponga que $g(x) = \operatorname{sen} x$ para x en $(2k\pi - \pi/2, 2k\pi + \pi/2)$ ¿A qué es igual $(g^{-1})'$?

24. Sea $f(x) = \sec x$ para $0 \le x \le \pi$. Halle el dominio de f^{-1} y haga un esquema de su gráfica.

25. Demuestre que $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| < |x-y|$ para todos los números $x \ne y$. Indicación: El mismo resultado, pero reemplazando $<$ por $\le$, es una consecuencia inmediata de un teorema bien conocido; a partir de dicho teorema, sólo se necesitan unas sencillas consideraciones suplementarias para mejorar el resultado de $\le$ a $<$.

***26.** Es un test de intuición excelente predecir el valor de
$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen} \lambda x\,dx.$$
Las funciones continuas deberían ser más accesibles a la intuición, pero una vez que se tiene la idea adecuada para una demostración el límite se puede hallar fácilmente para cualquier función integrable f.

(a) Demuestre que $\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty} \int_c^d \operatorname{sen} \lambda x\,dx = 0$, calculando la integral explícitamente.

(b) Demuestre que si s es una función escalonada en $[a,b]$ (terminología del Problema 13-26), entonces $\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b s(x)\operatorname{sen}\lambda x\,dx = 0$.

(c) Finalmente, utilice el Problema 13-26 para demostrar que $\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\operatorname{sen}\lambda x\,dx = 0$ para cualquier función f integrable en $[a,b]$. Este resultado, al igual que el obtenido en el Problema 12, desempeña un papel importante en la teoría de las series de Fourier; se conoce como el Lema de Riemann-Lebesgue.

27. Este problema describe el método clásico empleado para el estudio de las funciones trigonométricas. El sector sombreado de la Figura 24 tiene un área igual a $x/2$.

(a) Considerando los triángulos OAB y OCB demuestre que si $0 < x < \pi/4$, entonces

$$\frac{\operatorname{sen} x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{sen} x}{2\cos x}.$$

(b) Concluya que

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1,$$

y demuestre que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

(c) Utilice este límite para hallar

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}.$$

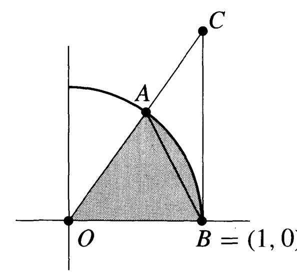


Figura 24

(d) Utilizando los apartados (b) y (c), y la fórmula de la adición para sen, halle $\operatorname{sen}'(x)$, comenzando con la definición de derivada.

***28.** En este problema se presenta un tratamiento de las funciones trigonométricas en términos de la longitud, y se utilizan los resultados del Problema 13-25. Sea $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ para $-1 \le x \le 1$. Defina $\mathscr{L}(x)$ como la longitud de f en $[x,1]$.

(a) Demuestre que

$$\mathscr{L}(x) = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

(Se trata de una integral impropia, tal como se definió en el Problema 14-28, por tanto primero se debe demostrar que la afirmación es cierta si la longitud posee un valor comprendido en el intervalo $[x, 1-\varepsilon]$ y luego demostrar que $\mathscr{L}(x)$ es el límite de estas longitudes cuando $\varepsilon \to 0^+$.)

(b) Demuestre que

$$\mathscr{L}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{para } -1 < x < 1.$$

(c) Defina π como $\mathscr{L}(-1)$. Para $0 \le x \le \pi$, defina $\cos x$ como $\mathscr{L}(\cos x) = x$, y defina $\operatorname{sen} x = \sqrt{1-\cos^2 x}$. Demuestre que $\cos'(x) = -\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{sen}'(x) = \cos x$ para $0 < x < \pi$.

***29.** En el texto se definió también, brevemente, otro método para abordar el estudio de las funciones trigonométricas: comenzando con las funciones inversas definidas mediante integrales. Es conveniente comenzar con arctg, ya que esta función está definida en todo x. Para hacer este problema, el lector debe simular que nunca ha oído hablar de las funciones trigonométricas.

(a) Sea $\alpha(x) = \int_0^x (1+t^2)^{-1}\,dt$. Demuestre que α es impar y creciente, y que $\lim_{x\to\infty} \alpha(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} \alpha(x)$ existen ambos, y son los negativos uno del otro. Si definimos $\pi = 2\lim_{x\to\infty} \alpha(x)$, entonces α^{-1} está definida en $(-\pi/2, \pi/2)$.

(b) Demuestre que $(\alpha^{-1})'(x) = 1 + [\alpha^{-1}(x)]^2$.

(c) Para $-\pi/2 < x < \pi/2$, defina $\operatorname{tg} x = \alpha^{-1}(x)$, y entonces defina $\operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x/\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}$. Demuestre que

(i) $\lim_{x\to\pi/2^-} \operatorname{sen} x = 1$

(ii) $\lim_{x\to-\pi/2^+} \operatorname{sen} x = -1$

(iii) $\operatorname{sen}'(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x}, & -\pi/2 < x < \pi/2 \text{ y } x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

(iv) $\operatorname{sen}''(x) = -\operatorname{sen} x$ para $-\pi/2 < x < \pi/2$.

***30.** Si se supone que ciertas ecuaciones diferenciales poseen soluciones, entonces es posible emplear otro método para el estudio de las funciones trigonométricas. Suponga, en particular, que existe alguna función y_0 que no siempre vale 0 y que satisface $y_0'' + y_0 = 0$.

(a) Demuestre que ${y_0}^2 + (y_0')^2$ es constante, y concluya que o bien $y_0(0) \neq 0$ o $y_0'(0) \neq 0$.

(b) Demuestre que existe una función s que satisface $s'' + s = 0$ y $s(0) = 0$ y $s'(0) = 1$. Indicación: Pruebe s de la forma $ay_0 + by_0'$.

Si definimos sen $= s$ y cos $= s'$, entonces casi todos los hechos relativos a las funciones trigonométricas son triviales. Sin embargo, existe un punto que requiere una atención especial: obtener el número π. La manera más fácil de hacerlo consiste en utilizar el ejercicio del Apéndice del Capítulo 11.

(c) Utilice el Problema 6 del Apéndice del Capítulo 11 para demostrar que $\cos x$ no puede ser positivo para todo $x > 0$. De aquí se deduce que existe un menor $x_0 > 0$ con $\cos x_0 = 0$, y entonces se puede definir $\pi = 2x_0$.

(d) Demuestre que $\operatorname{sen} \pi/2 = 1$. (Como $\operatorname{sen}^2 + \cos^2 = 1$, obtenemos $\operatorname{sen} \pi/2 = \pm 1$; el problema consiste en decidir por qué $\operatorname{sen} \pi/2$ es positivo.)

(e) Halle $\cos \pi$, $\operatorname{sen} \pi$, $\cos 2\pi$, y $\operatorname{sen} 2\pi$. (Naturalmente se puede utilizar cualquiera de las fórmulas de adición ya que éstas pueden deducirse una vez que sabemos que $\operatorname{sen}' = \cos$ y $\cos' = -\operatorname{sen}$.)

(f) Demuestre que cos y sen son periódicas, con periodo 2π.

31. (a) Después de todo el trabajo que hemos dedicado a la definición de sen, sería desalentador observar que sen es una función racional. Demuestre que no lo es. (Existe una propiedad sencilla de la función sen que no la puede cumplir ninguna función racional excepto la función nula.)

(b) Demuestre que sen no está ni siquiera definida implícitamente mediante una ecuación algebraica; es decir, no existen funciones racionales $f_0, \ldots, f_{n-1}$ tales que

$$(\operatorname{sen} x)^n + f_{n-1}(x)(\operatorname{sen} x)^{n-1} + \cdots + f_0(x) = 0 \quad \text{para todo } x.$$

Indicación: Demuestre que $f_0 = 0$, de manera que $\operatorname{sen} x$ pueda sacarse factor común. El factor que queda es 0 excepto quizás para múltiplos de π. Pero esto implica que es 0 para todo x. (¿Por qué?) El lector está ahora preparado para una demostración por inducción.

***32.** Suponga que ϕ_1 y ϕ_2 satisfacen

$$\begin{aligned}\phi_1'' + g_1\phi_1 &= 0,\\ \phi_2'' + g_2\phi_2 &= 0,\end{aligned}$$

y que $g_2 > g_1$.

(a) Demuestre que $\phi_1''\phi_2 - \phi_2''\phi_1 - (g_2 - g_1)\phi_1\phi_2 = 0$.

(b) Demuestre que si $\phi_1(x) > 0$ y $\phi_2(x) > 0$ para todo x de (a,b), entonces

$$\int_a^b [\phi_1''\phi_2 - \phi_2''\phi_1] > 0,$$

y concluya que

$$[\phi_1'(b)\phi_2(b) - \phi_1'(a)\phi_2(a)] - [\phi_1(c)\phi_2'(b) - \phi_1(a)\phi_2'(a)] > 0.$$

(c) Demuestre que en este caso no puede ser que $\phi_1(a) = \phi_1(b) = 0$. Indicación: Considere el signo de $\phi_1'(a)$ y de $\phi_1'(b)$.

(d) Demuestre que las ecuaciones $\phi_1(a) = \phi_1(b) = 0$ son también imposibles si $\phi_1 > 0$, $\phi_2 < 0$ o $\phi_1 < 0$, $\phi_2 > 0$ o $\phi_1 < 0$, $\phi_2 < 0$ en (a,b). (El lector debería ser capaz de deducirlo casi sin ningún esfuerzo adicional.)

El resultado neto de este problema puede resumirse de la manera siguiente: si a y b son ceros consecutivos de ϕ_1, entonces ϕ_2 debe tener algún cero en algún punto entre a y b. Este resultado, definido de una manera algo más general, se conoce como el Teorema de Comparación de Sturm. Como ejemplo particular, cualquier solución de la ecuación diferencial

$$y'' + (x+1)y = 0$$

debe tener al menos un cero en cualquier intervalo $(n\pi, (n+1)\pi)$.

33. (a) Utilizando la fórmula para $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y$ deducida en el Problema 14, demuestre que

$$\operatorname{sen}(k+\tfrac{1}{2})x - \operatorname{sen}(k-\tfrac{1}{2})x = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos kx.$$

(b) Concluya que

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})x}{2\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}}.$$

Al igual que en el caso de otros dos resultados de esta colección de problemas, esta ecuación es muy importante en el estudio de las series de Fourier, y también lo utilizaremos en los Problemas 19-43 y 23-22.

(c) Análogamente, deduzca la fórmula

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \cdots + \operatorname{sen} nx = \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{n}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}}.$$

(En el Problema 27-14 indicaremos una manera más natural de deducir estas fórmulas.)

(d) Utilice los apartados (b) y (c) para hallar $\int_0^b \operatorname{sen} x\,dx$ y $\int_0^b \cos x\,dx$ directamente a partir de la definición de integral.

π es irracional

16*

Este corto capítulo, que se aparta de la corriente principal del libro, se incluye para mostrar que ya estamos en condiciones de desarrollar matemáticas de cierto nivel, y se dedica en su totalidad a obtener una demostración elemental de que π es irracional. Como ocurre en muchas demostraciones "elementales" de teoremas profundos, no podemos dar una motivación adecuada para muchos de los pasos de nuestra deducción; con todo es posible seguir la demostración paso a paso.

Dos observaciones deben efectuarse antes de la demostración. La primera se refiere a la función

$$f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!},$$

que satisface, claramente,

$$0 < f_n(x) < \frac{1}{n!} \quad \text{para } 0 < x < 1.$$

Una propiedad importante de la función f_n aparece cuando consideramos la expresión obtenida al desarrollar $x^n(1-x)^n$. La menor potencia de x que aparece en dicho desarrollo será la n-ésima, mientras que la más alta será la $2n$-ésima. Así pues, f_n puede escribirse como

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n} c_i x^i,$$

donde los c_i son números enteros. A partir de esta expresión es evidente que

$$f_n{}^{(k)}(0) = 0 \quad \text{si } k < n \text{ o bien } k > 2n.$$

Además,

$$\begin{aligned}
f_n{}^{(n)}(x) &= \frac{1}{n!}[n!\,c_n + \text{ términos dependientes de } x]\\
f_n{}^{(n+1)}(x) &= \frac{1}{n!}[(n+1)!\,c_{n+1} + \text{ términos dependientes de } x]\\
&\vdots\\
f_n{}^{(2n)}(x) &= \frac{1}{n!}[(2n)!\,c_{2n}].
\end{aligned}$$

Ello implica que

$$\begin{aligned} f_n{}^{(n)}(0) &= c_n, \\ f_n{}^{(n+1)}(0) &= (n+1)c_{n+1}, \\ &\vdots \\ f_n{}^{(2n)}(0) &= (2n)(2n-1)\cdot\ldots\cdot(n+1)c_{2n}, \end{aligned}$$

donde los números situadas a la derecha de las igualdades son todos enteros. Así pues,

$$f_n{}^{(k)}(0) \text{ es un } \textit{número entero} \text{ para todo } k.$$

La relación

$$f_n(x) = f_n(1-x)$$

implica que

$$f_n{}^{(k)}(x) = (-1)^k f_n{}^{(k)}(1-x);$$

por tanto,

$$f_n{}^{(k)}(1) \text{ es también un } \textit{número entero} \text{ para todo } k.$$

La demostración de que π es irracional requiere una nueva observación: si a es cualquier número positivo, y $\varepsilon > 0$, entonces para valores de n suficientemente grandes tendremos

$$\frac{a^n}{n!} < \varepsilon.$$

Para demostrar esto, observemos que si $n \geq 2a$, entonces

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a}{n+1} \cdot \frac{a^n}{n!} < \frac{1}{2} \cdot \frac{a^n}{n!}.$$

Sea ahora n_0 un número natural cualquiera con $n_0 \geq 2a$. Entonces, cualquiera que sea el valor de

$$\frac{a^{n_0}}{(n_0)!}$$

los valores consecutivos siguientes satisfacen

$$\begin{aligned} \frac{a^{(n_0+1)}}{(n_0+1)!} &< \frac{1}{2} \cdot \frac{a^{n_0}}{(n_0)!} \\ \frac{a^{(n_0+2)}}{(n_0+2)!} &< \frac{1}{2} \cdot \frac{a^{(n_0+1)}}{(n_0+1)!} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^{n_0}}{(n_0)!} \\ &\vdots \\ \frac{a^{(n_0+k)}}{(n_0+k)!} &< \frac{1}{2^k} \cdot \frac{a^{n_0}}{(n_0)!}. \end{aligned}$$

Si k es lo suficientemente grande para que $\dfrac{a^{n_0}}{(n_0)!\,\varepsilon} < 2^k$, entonces

$$\frac{a^{(n_0+k)}}{(n_0+k)!} < \varepsilon,$$

que es el resultado que pretendíamos demostrar. Una vez efectuadas estas observaciones, estamos preparados para abordar el único teorema de este capítulo.

Teorema 1. *El número π es irracional; de hecho, π^2 es irracional. (Observemos que la irracionalidad de π^2 implica la irracionalidad de π, ya que si π fuese racional, entonces π^2 ciertamente lo sería también.)*

Demostración. Supongamos que π^2 es un número racional, es decir que

$$\pi^2 = \frac{a}{b}$$

para ciertos números enteros positivos a y b. Sea

(1) $$G(x) = b^n[\pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n{}''(x) + \pi^{2n-4} f_n{}^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f_n{}^{(2n)}(x)].$$

Observemos que cada uno de los factores

$$b^n \pi^{2n-2k} = b^n (\pi^2)^{n-k} = b^n \left(\frac{a}{b}\right)^{n-k} = a^{n-k} b^k$$

es un número entero. Teniendo en cuenta que $f_n{}^{(k)}(0)$ y $f_n{}^{(k)}(1)$ son también números enteros, concluimos que

$$G(0) \text{ y } G(1) \text{ son números enteros.}$$

Derivando G dos veces obtenemos

(2) $$G''(x) = b^n[\pi^{2n} f_n{}''(x) - \pi^{2n-2} f_n{}^{(4)}(x) + \cdots + (-1)^n f_n{}^{(2n+2)}(x)].$$

El último término, $(-1)^n f_n{}^{(2n+2)}(x)$, es cero. Por tanto, sumando (1) y (2) se obtiene

(3) $$G''(x) + \pi^2 G(x) = b^n \pi^{2n+2} f_n(x) = \pi^2 a^n f_n(x).$$

Sea ahora

$$H(x) = G'(x) \operatorname{sen} \pi x - \pi G(x) \cos \pi x.$$

Entonces

$$\begin{aligned} H'(x) &= \pi G'(x) \cos \pi x + G''(x) \operatorname{sen} \pi x - \pi G'(x) \cos \pi x + \pi^2 G(x) \operatorname{sen} \pi x \\ &= [G''(x) + \pi^2 G(x)] \operatorname{sen} \pi x \\ &= \pi^2 a^n f_n(x) \operatorname{sen} \pi x, \text{ por (3).} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo Infinitesimal,

$$\begin{aligned}\pi^2 \int_0^1 a^n f_n(x) \operatorname{sen} \pi x dx &= H(1) - H(0) \\ &= G'(1) \operatorname{sen} \pi - \pi G(1) \cos \pi - G'(0) \operatorname{sen} 0 + \pi G(0) \cos 0 \\ &= \pi[G(1) + G(0)],\end{aligned}$$

que nos permite concluir que

$$\pi \int_0^1 a^n f_n(x) \operatorname{sen} \pi x dx \quad \text{es un } \textit{número entero}.$$

Por otra parte, $0 < f_n(x) < 1/n!$ para $0 < x < 1$, por tanto

$$0 < \pi a^n f_n(x) \operatorname{sen} \pi x < \frac{\pi a^n}{n!} \quad \text{for } 0 < x < 1.$$

En consecuencia,

$$\int_0^1$$

$$0 < \pi \int_0^1 a^n f_n(x) \operatorname{sen} \pi x dx < \frac{\pi a^n}{n!}.$$

Hemos efectuado este razonamiento independientemente del valor de n. Si ahora consideramos valores de n lo suficientemente grandes, tendremos

$$0 < \pi \int_0^1 a^n f_n(x) \operatorname{sen} \pi x dx < \frac{\pi a^n}{n!} < 1.$$

Pero esto es absurdo ya que sabemos que π multiplicado por la integral es un número entero, y no existe ningún entero entre 0 y 1. Por tanto nuestra suposición inicial debe ser incorrecta: π^2 es irracional. ■

Esta demostración resulta un tanto misteriosa; quizá lo más misterioso de todo es el papel que ha jugado π en la demostración, casi parece que pueda probarse que π es irracional sin ni siquiera haber dado una definición de π. Un examen más cuidadoso de la demostración pondrá de relieve que hay precisamente una propiedad de π que resulta ser esencial:

$$\operatorname{sen}(\pi) = 0.$$

La demostración depende realmente de las propiedades de la función sen, y demuestra la irracionalidad del número x positivo más pequeño tal que $\operatorname{sen} x = 0$. De hecho se requieren muy pocas propiedades de la función sen, concretamente:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}' &= \cos, \\ \cos' &= -\operatorname{sen}, \\ \operatorname{sen}(0) &= 0, \\ \cos(0) &= 1.\end{aligned}$$

Incluso podemos resumir aún más esta lista; con respecto a la demostración que nos atañe, la función cos puede definirse simplemente como sen'. Las propiedades de la función sen requeridas en la demostración pueden enunciarse como

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}'' + \operatorname{sen} &= 0, \\ \operatorname{sen}(0) &= 0, \\ \operatorname{sen}'(0) &= 1. \end{aligned}$$

Naturalmente, esto no nos debe resultar demasiado sorprendente, ya que, según hemos visto en el capítulo anterior, estas propiedades caracterizan por completo a la función sen.

Problemas

1. (a) Demuestre que las áreas de los triángulos OAB y OAC de la Figura 1, con $\angle AOB \leq \pi/4$, satisfacen la igualdad

$$\text{área } OAC = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-16(\text{área } OAB)^2}}{2}}.$$

Indicación: Resuelva las ecuaciones $xy = 2(\text{área } OAB)$, $x^2 + y^2 = 1$, despejando y.

(b) Sea P_m un polígono regular de m lados inscrito en la circunferencia unidad. Si A_m es el área de P_m demuestre que

$$A_{2m} = \frac{m}{2}\sqrt{2 - 2\sqrt{1-(2A_m/m)^2}}.$$

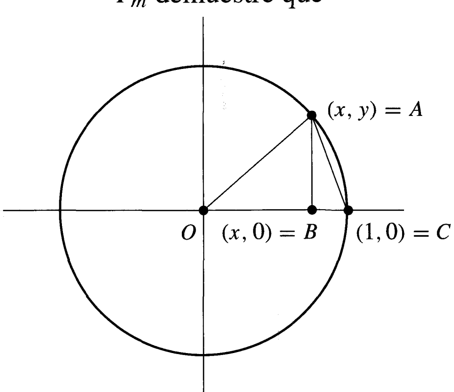


Figura 1

Este resultado nos permite obtener expresiones (cada vez más complicadas) de A_{2^n}, empezando con $A_4 = 2$, y de este modo, aumentando n, calcular el valor de π con tanta aproximación como queramos (según el Problema 8-11). Aunque veremos mejores métodos en el Capítulo 20, una ligera variante de este último procedimiento nos proporcionará una aproximación muy interesante del número π:

2. (a) Sabiendo que

$$\frac{\text{área }(OAB)}{\text{área }(OAC)} = OB,$$

demuestre que si α_m es la distancia desde O a un lado de P_m, entonces

$$\frac{A_m}{A_{2m}} = \alpha_m.$$

(b) Demuestre que

$$\frac{2}{A_{2^k}} = \alpha_4 \cdot \alpha_8 \cdot \ldots \cdot \alpha_{2^{k-1}}.$$

(c) Teniendo en cuenta que

$$\alpha_m = \cos\frac{\pi}{m},$$

y la fórmula $\cos x/2 = \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$ (Problema 15-15), demuestre que

$$\alpha_4 = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\alpha_8 = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}},$$

$$\alpha_{16} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}},$$

etc.

Todo ello junto con la parte (b), demuestra que $2/\pi$ puede ser escrito como un "producto infinito"

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\ldots;$$

para ser precisos, esta ecuación significa que el producto de los n primeros factores se puede aproximar a $2/\pi$ tanto como se quiera, con tal de escoger n lo suficientemente grande. Esta expresión fue descubierta por François Viète en 1579, y no es más que una de las muchas expresiones fascinantes de π, algunas de las cuales mencionaremos más adelante.

Movimiento planetario

17*

La Naturaleza y sus Leyes permanecían ocultas en la oscuridad
dijo Dios "Hágase Newton", y se hizo la luz.

Alexander Pope

Este extenso capítulo también difiere de la corriente principal del libro pero, a diferencia del breve Capítulo 16, lo hace esta vez para mostrar que estamos ya preparados para abordar auténticos problemas de física.

En 1609 Kepler publicó sus primeras dos leyes acerca del movimiento de los planetas. La primera ley describe la forma de las órbitas planetarias:

> *Cada planeta se mueve describiendo una elipse, con el Sol en uno de los focos.*

La segunda ley concierne al área barrida por el segmento rectilíneo que une al Sol con el planeta (el "radio vector desde el Sol hasta el citado planeta") durante diferentes intervalos de tiempo (Figure 1):

> *El radio vector barre áreas iguales en tiempos iguales. (Equivalentemente, el área barrida durante un tiempo t es proporcional a t.)*

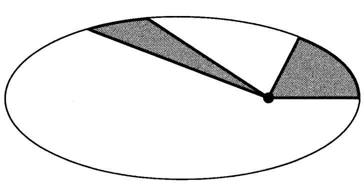


Figura 1

La tercera ley de Kepler, publicada en 1619, relaciona los movimientos de diferentes planetas.

Si a es la longitud del semieje mayor de la órbita elíptica de un planeta y T es su período, es decir el tiempo que tarda dicho planeta en regresar a una determinada posición, entonces:

> *El cociente a^3/T^2 es el mismo para todos los planetas.*

El gran logro de Newton fue demostrar que las leyes de Kepler se deducen, usando su segunda ley general del movimiento que establece que la fuerza que actúa sobre un cuerpo es igual a la masa del mismo por su aceleración, de la hipótesis de que los planetas son atraídos hacia el Sol por una fuerza (la fuerza gravitatoria debida al Sol) siempre dirigida hacia el centro de dicho astro, directamente proporcional a la masa del planeta e "inversamente proporcional a un cuadrado"; concretamente, por una fuerza dirigida hacia el centro del Sol cuya magnitud varia de forma inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre el Sol y el planeta y directamente proporcional a la masa del planeta. Puesto que la fuerza es igual a la masa por la aceleración, esto es equivalente a decir simplemente que la magnitud de la aceleración es una constante dividida por el cuadrado de la distancia del planeta al Sol.

El análisis de Newton en realidad estableció tres resultados relacionados con cada una de las leyes de Kepler. El primero de estos resultados se refiere a la segunda ley de Kepler (que fue en realidad descubierta en primer lugar, preservando de forma estética la cronología de los hallazgos):

> *La segunda ley de Kepler es verdadera precisamente para 'fuerzas centrales', i.e., si y sólo si la fuerza entre el Sol y el planeta siempre actúa a lo largo de la recta que une a ambos cuerpos.*

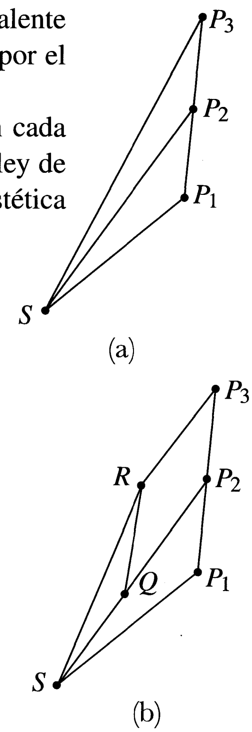


Figura 2

Aunque Newton es reverenciado como el descubridor del Cálculo Infinitesimal, y en realidad lo inventó precisamente para poder abordar el tipo de problemas que estamos tratando, en este caso su deducción no parece que use ningún tipo de cálculo en absoluto. En vez de considerar una fuerza que varia de forma continua con el movimiento del planeta, Newton considera en primer lugar cortos intervalos de tiempo de la misma duración y asume que se ejerce una fuerza momentáneamente al principio y al final de cada uno de estos intervalos temporales.

En concreto, imaginemos que, durante el primer intervalo de tiempo el planeta se mueve a lo largo de la línea P_1P_2, con velocidad uniforme (Figura 2a). Si, durante el siguiente intervalo de tiempo de igual duración, el planeta continuara moviéndose a lo largo de esta misma línea, terminaría en P_3, donde la longitud de P_1P_2 coincidiría con la longitud de P_2P_3. Esto implicaría que el triángulo SP_1P_2 tuviera la misma área que el triángulo SP_2P_3 (ya que tienen bases iguales, y la misma altura); este argumento sólo nos indica que segunda ley de Kepler se cumple en el caso particular que la fuerza sea igual a 0.

Supongamos ahora (Figura 2b) que en el momento en que el planeta llega a P_2 experimenta una fuerza ejercida *a lo largo de la línea desde S hasta* P_2 que, por si sola, haría que el planeta se desplazara hasta el punto Q. Pero, combinada con el movimiento que el planeta ya posee, hará que el planeta se mueva hasta R, el vértice opuesto a P_2 en el paralelogramo cuyos lados son P_2P_3 y P_2Q.

Por tanto, la superficie barrida durante el segundo intervalo de tiempo es en realidad el triángulo SP_2R. Pero el área del triángulo SP_2R es igual a la del triángulo SP_3P_2, ya que ambos comparten la misma base SP_2, y la misma altura (al ser RP_3 paralelo a SP_2). Por consiguiente, finalmente, el área del triángulo SP_2R ¡coincide con la del triángulo original SP_1P_2! A la inversa, si el triángulo SRP_2 tiene el mismo área que SP_1P_2, y por tanto el mismo área que SP_3P_2, entonces RP_3 debe ser paralelo a SP_2, y esto implica que Q debe estar alineado a lo lago de SP_2.

Naturalmente éste no es el tipo de argumento que uno esperaría encontrar en un libro moderno, pero, con encanto propio, muestra en términos físicos porqué el resultado debe ser cierto.

Para analizar los movimientos planetarios usaremos el material del Apéndice del Capítulo 12, y el "determinante" det definido en el Problema 4 del Apéndice 1 del

Capítulo 4 y describiremos el movimiento de un planeta mediante una curva, en forma paramétrica, que expresará la posición del planeta en función del tiempo

$$c(t) = r(t)(\cos\theta(t), \operatorname{sen}\theta(t))$$

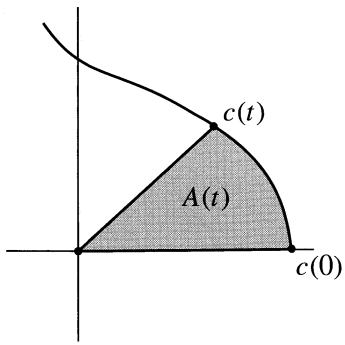


Figura 3

donde r es la longitud del segmento rectilíneo que une el Sol al planeta en un determinado instante, mientras que θ es el ángulo que forma dicho segmento rectilíneo con aquel otro correspondiente a un instante inicial, y que supondremos que es una función creciente (si θ fuera decreciente se trataría de forma similar). Resultará conveniente escribir dicha curva como

$$(1) \qquad c(t) = r(t)\cdot \mathbf{e}(\theta(t)),$$

donde

$$\mathbf{e}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

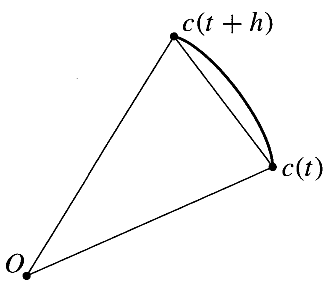


Figura 4

es la curva, en forma paramétrica, cuya imagen, o traza de la misma, es el circulo unidad. Observemos que

$$\mathbf{e}'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$$

es también un vector unitario, perpendicular a $\mathbf{e}(t)$, y, además,

$$(2) \qquad \det\big(\mathbf{e}(t), \mathbf{e}'(t)\big) = 1.$$

Derivando (1), empleando las fórmulas de las páginas 247 y 248, obtenemos

$$(3) \qquad c'(t) = r'(t)\cdot\mathbf{e}(\theta(t)) + r(t)\theta'(t)\cdot\mathbf{e}'(\theta(t)),$$

y combinando (1), junto con las fórmulas del Problema 6 en el Apéndice 1 del Capítulo 4, obtenemos

$$\begin{aligned}\det\big(c(t), c'(t)\big) &= r(t)r'(t)\det\big(\mathbf{e}(\theta(t)), \mathbf{e}(\theta(t))\big) + r(t)^2\theta'(t)\det\big(\mathbf{e}(\theta(t)), \mathbf{e}'(\theta(t))\big)\\ &= r(t)^2\theta'(t)\det\big(\mathbf{e}(\theta(t)), \mathbf{e}'(\theta(t))\big),\end{aligned}$$

ya que $\det(v, v)$ es siempre igual a 0. A partir de (2) resulta

$$(4) \qquad \det(c, c') = r^2\theta'.$$

Como veremos, $r^2\theta'$ resulta que tiene otra importante interpretación.

Supongamos que $A(t)$ es el área barrida entre los tiempos 0 y t (Figura 3). Queremos obtener una fórmula para $A'(t)$, y, con el mismo espíritu que Newton, empezaremos haciendo una conjetura. La Figura 4 muestra $A(t+h) - A(t)$, junto con un segmento rectilíneo entre $c(t)$ y $c(t+h)$. Es fácil obtener una fórmula del área del triángulo $\Delta(h)$ con vértices O, $c(t)$, y $c(t+h)$: a partir de los problemas 4 y 5 del Apéndice 1 del Capítulo 4, el área es

$$\text{área}(\Delta(h)) = \tfrac{1}{2}\det\big(c(t), c(t+h) - c(t)\big).$$

Podemos observar que el área del triángulo $\Delta(h)$ es prácticamente igual a $A(t+h) - A(t)$. ello demuestra (aunque no rigurosamente) que

$$\begin{aligned}
A'(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{A(t+h)-A(t)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\text{área}\,\Delta(h)}{h}\\
&= \tfrac{1}{2}\det\left(c(t), \lim_{h\to 0}\frac{c(t+h)-c(t)}{h}\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\det\big(c(t), c'(t)\big).
\end{aligned}$$

Una demostración rigurosa, que permite establecer además otros resultados, se puede hacer basándonos en el problema 13-24, donde se obtiene una fórmula para el área de una región determinada por la gráfica de una función expresada en coordenadas polares. Conforme a este problema, podemos escribir

$$(*) \qquad A(t) = \frac{1}{2}\int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \rho(\phi)^2\, d\phi$$

si nuestra curva en forma paramétrica $c(t) = r(t)\cdot \mathbf{e}(\theta(t))$ coincide con la gráfica de la función ρ en coordenadas polares (aquí hemos empleado ϕ para denotar el ángulo correspondiente a un sistema de coordenadas polares, para evitar la confusión con la función θ utilizada para describir la curva c).

Ahora la función ρ es simplemente

$$\rho = r\circ\theta^{-1}$$

[sea cual sea el valor de ϕ que consideremos, $\theta^{-1}(\phi)$ es igual al tiempo para el cual el ángulo, al expresar la curva c en coordenadas polares, vale ϕ, mientras que $r(\theta^{-1}(t))$ es la correspondiente distancia al origen]. Aunque la presencia de la función inversa puede intimidar, en realidad es bastante inofensiva: si aplicamos el Primer Teorema Fundamental del Cálculo y la Regla de la Cadena a $(*)$ obtenemos inmediatamente

$$\begin{aligned}
A'(t) &= \tfrac{1}{2}\rho(\theta(t))^2\cdot\theta'(t)\\
&= \tfrac{1}{2}r(t)^2\theta'(t), \qquad \text{ya que } \rho = r\circ\theta^{-1}.
\end{aligned}$$

Abreviadamente,

$$A' = \tfrac{1}{2}r^2\theta'.$$

Combinando con (4), tendremos

$$(5) \qquad \boxed{A' = \frac{1}{2}\det(c,c') = \frac{1}{2}r^2\theta'.}$$

Ahora estamos preparados para considerar la segunda ley de Kepler. Observemos que *la segunda ley de Kepler es equivalente a decir que A' es constante*, y por tanto equivalente a $A'' = 0$. Pero

$$\begin{aligned}
A'' = \tfrac{1}{2}\big[\det(c,c')\big]' &= \tfrac{1}{2}\det(c',c') + \tfrac{1}{2}\det(c,c'') \qquad \text{(ver página 248)}\\
&= \tfrac{1}{2}\det(c,c'').
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\boxed{\text{la segunda ley de Kepler es equivalente a } \det(c,c'')=0.}$$

Combinando todos estos resultados tenemos:

Teorema 1. *La segunda ley de Kepler es verdadera si y sólo si la fuerza es central y, en este caso, la trayectoria de cada planeta* $c(t)=r(t)\cdot\mathbf{e}(\theta(\mathbf{t}))$ *satisface la ecuación*

$$r^2\theta' = \det(c,c') = \text{constante}. \qquad (K_2)$$

Demostración. Decir que la fuerza es central sólo significa que su dirección coincide con la dirección del vector posición $c(t)$. Puesto que $c''(t)$ posee la misma dirección que la fuerza, ello equivale a decir que la dirección de $c''(t)$ coincide con la dirección de $c(t)$. Y esto es equivalente a decir que siempre tendremos que

$$\det(c,c'')=0,$$

y acabamos de ver que esto es equivalente a la segunda ley de Kepler.

Además, esta ecuación implica que $[\det(c,c')]'=0$, que mediante (5) proporciona (K_2). ■

A continuación Newton demostró que si la fuerza gravitacional del Sol es una fuerza central e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al mismo, entonces la trayectoria de cualquier objeto sometido a dicha fuerza será una sección cónica, con el Sol en un foco. Cuando consideramos un planeta, la sección cónica correspondiente será, por supuesto, una elipse, y esto es también cierto para aquellos cometas que visitan al Sol de forma periódica; parábolas e hipérbolas describirán las trayectorias de objetos que vienen de fuera del sistema solar, para seguir su marcha alejándose definitivamente del mismo después.

Teorema 2. *Si la fuerza gravitatoria del Sol es una fuerza central inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al mismo, entonces la trayectoria de cualquier cuerpo sometido a dicha fuerza será una sección cónica, con el Sol en un foco (de forma más detallada: será una elipse, o bien una parábola o una hipérbola).*

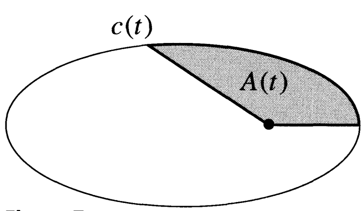


Figura 5

Demostración. Observemos que nuestra conclusión se refiere a la forma de la trayectoria, no a una parametrización concreta de la misma. Pero esta parametrización está esencialmente determinada por el Teorema 1: la hipótesis de una fuerza central implica que el área $A(t)$ (Figura 5) es proporcional a t, por tanto determinar $c(t)$ es en esencia equivalente a determinar A para puntos arbitrarios situados sobre la elipse. Desafortunadamente, las áreas de los sectores correspondientes no pueden ser halladas explícitamente*. ¡Esto significa que tendremos que determinar la *forma* de la trayectoria $c(t)=r(t)\cdot\mathbf{e}(\theta(\mathbf{t}))$ sin hallar su parametrización! La función $r\circ\theta^{-1}$ define la forma de la trayectoria expresada en coordenadas polares, por tanto no debe sorprendernos encontrar que θ^{-1} juega un importante papel en la demostración.

*De forma más precisa, no podemos escribir una solución en términos de nuestras familiares "funciones estándar," como las funciones sen, arcsen, etc.

Por el Teorema 1, la hipótesis de una fuerza central implica que

$$r^2\theta' = \det(c, c') = M \quad (K_2)$$

para alguna constante M. La hipótesis de que la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia puede escribirse como

$$(*) \qquad c''(t) = -\frac{H}{r(t)^2}\mathbf{e}(\theta(t))$$

para una constante H. A partir de (K_2), tenemos

$$\frac{c''(t)}{\theta'(t)} = -\frac{H}{M}\mathbf{e}(\theta(\mathbf{t})).$$

Observemos que el lado izquierdo de esta ecuación es igual a

$$[c' \circ \theta^{-1}]'(\theta(t)).$$

Por tanto si introducimos

$$D = c' \circ \theta^{-1}$$

(este es el artificio principal: "considerar a c' como una función de θ"), entonces podemos expresar la anterior ecuación como

$$D'(\theta(t)) = -\frac{H}{M}\mathbf{e}(\theta(t)) = -\frac{H}{M}(\cos\theta(t), \operatorname{sen}\theta(t)),$$

o simplemente como

$$D'(u) = -\frac{H}{M}(\cos u, \operatorname{sen} u) = \left(-\frac{H}{M}\cos u, -\frac{H}{M}\operatorname{sen} u\right)$$

[para todo u de la forma $\theta(t)$ para algún t], prescindiendo así de θ de forma explícita.

La expresión que acabamos de obtener está formada por un par de ecuaciones, correspondientes a cada una de las componentes de D, que pueden ser resueltas por separado; por tanto tenemos que

$$D(u) = \left(\frac{H \cdot \operatorname{sen} u}{-M} + A, \ \frac{H \cdot \cos u}{M} + B\right)$$

para dos constantes A y B. Introduciendo $u = \theta(t)$ de nuevo, obtenemos una fórmula explícita para c':

$$c' = \left(\frac{H \cdot \operatorname{sen}\theta}{-M} + A, \ \frac{H \cdot \cos\theta}{M} + B\right).$$

[Aquí $\operatorname{sen}\theta$ denota $\operatorname{sen} \circ \theta$, etc., notación abreviada que usaremos ampliamente.]

Aunque no podemos obtener una expresión análoga para el mismo c, si sustituimos la anterior fórmula junto con $c = r(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, en la ecuación

$$\det(c, c') = M \qquad (\text{ecuación } (K_2)),$$

obtenemos

$$r\left[\frac{H}{M}\cos^2\theta + B\cos\theta + \frac{H}{M}\operatorname{sen}^2\theta - A\operatorname{sen}\theta\right] = M,$$

y simplificando resulta

$$r\left[\frac{H}{M^2}+\frac{B}{M}\cos\theta-\frac{A}{M}\operatorname{sen}\theta\right]=1.$$

El Problema 15-8 demuestra que podemos escribir dicha expresión como

$$r(t)\left[\frac{H}{M^2}+C\cos(\theta(t)+D)\right]=1,$$

para algunas constantes C y D. Si tomamos $D=0$, ya que esto sólo equivale a efectuar una rotación sobre el sistema de coordenadas polares (escogiendo a que semirrecta le corresponde la coordenada $\theta=0$), podemos escribir, finalmente,

$$r[1+\varepsilon\cos\theta]=\frac{M^2}{H}=\Lambda.$$

Pero ésta es la fórmula de una sección cónica deducida en el Apéndice 3 del Capítulo 4 (junto con los problemas 5, 6 y 7 del citado Apéndice). ■

En función de la constante M en la ecuación

$$r^2\theta'=M$$

y la constante A en la ecuación de la órbita

$$r[1+\varepsilon\cos\theta]=\Lambda$$

la última ecuación empleada en nuestra demostración nos indica que podemos reescribir $(*)$ como

$$(**)\qquad c''(t)=-\frac{M^2}{\Lambda}\cdot\frac{1}{r(t)^2}\mathbf{e}(\theta(t)).$$

Recordar que (página 88) el semieje mayor a de la elipse es igual a

$$\text{(a)}\qquad a=\frac{\Lambda}{1-\varepsilon^2},$$

mientras que el semieje menor b es igual a

$$\text{(b)}\qquad b=\frac{\Lambda}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Por consiguiente,

$$\text{(c)}\qquad \frac{b^2}{\Lambda}=a.$$

Observemos también que la ecuación (5) proporciona

$$A'(t)=\tfrac{1}{2}r^2\theta'=\tfrac{1}{2}M,$$

y por tanto

$$A(t)=\tfrac{1}{2}Mt.$$

Podemos por consiguiente interpretar M en función del período T de la órbita. Este período T es, por definición, el valor del tiempo t para el cual se verifica que $\theta(t)=2\pi$, obteniendo de esta forma la elipse completa. Por tanto

$$\text{área de la elipse} = A(T) = \tfrac{1}{2}MT,$$

o

$$M = \frac{2(\text{área de la elipse})}{T} = \frac{2\pi ab}{T} \qquad \text{por el problema 13-17.}$$

Por tanto la constante M^2/Λ en $(**)$ es

$$\begin{aligned}\frac{M^2}{\Lambda} &= \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2\Lambda}\\ &= \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}, \qquad \text{usando (c).}\end{aligned}$$

Esto completa la última etapa del análisis de Newton:

Teorema 3. *La tercera ley de Kepler es verdadera si y sólo si las aceleraciones $c''(t)$ de los diferentes planetas, cuya trayectoria es elíptica, satisface*

$$c''(t) = -G\cdot\frac{1}{r^2}\mathbf{e}(\theta(t))$$

para una constante G independiente del planeta considerado.

Debe mencionarse que el recíproco del Teorema 2 es también verdadero. Para demostrar esto, queremos establecer primero otra consecuencia de la segunda ley de Kepler. Recordemos que

$$\mathbf{e}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

tenemos

$$\mathbf{e}'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t).$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{e}''(t) = (-\cos t, -\operatorname{sen} t) = -\mathbf{e}(t).$$

Derivando ahora (3) obtenemos

$$\begin{aligned}c''(t) &= r''(t)\cdot\mathbf{e}(\theta(t)) + r'(t)\theta'(t)\cdot\mathbf{e}'(\theta(t))\\ &+ r'(t)\theta'(t)\cdot\mathbf{e}'(\theta(t)) + r(t)\theta''(t)\cdot\mathbf{e}'(\theta(t)) + r(t)\theta'(t)\theta'(t)\cdot\mathbf{e}''(\theta(t)).\end{aligned}$$

A partir de $\mathbf{e}''(t) = -\mathbf{e}(\mathbf{t})$ obtenemos

$$c''(t) = \left[r''(t) - r(t)\theta'(t)^2\right]\cdot\mathbf{e}(\theta(t)) + \left[2r'(t)\theta'(t) + r(t)\theta''(t)\right]\cdot\mathbf{e}'(\theta(t)).$$

Debido a que la segunda ley de Kepler implica fuerzas centrales, resulta que $c''(t)$ siempre será un múltiplo de $c(t)$, y por tanto un múltiplo de $\mathbf{e}(\theta(t))$ y el coeficiente de $\mathbf{e}'(\theta(t))$ debe ser igual a 0 [de hecho, podemos ver esto inmediatamente derivando la expresión (K_2)]. Por tanto, la segunda ley de Kepler implica que

$$(6) \qquad c''(t) = \left[r''(t) - r(t)\theta'(t)^2\right]\cdot\mathbf{e}(\theta(t)).$$

Teorema 4. *Si la trayectoria de un planeta moviéndose bajo la acción de una fuerza central es una sección cónica con el Sol en uno de los focos, entonces la magnitud de dicha fuerza debe ser inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del planeta al Sol.*

Demostración. Como en el Teorema 2, observemos que la hipótesis sobre la forma de la trayectoria junto con la hipótesis de una fuerza central, que es equivalente a la segunda ley de Kepler, determina en esencia la parametrización. Pero no podemos escribir explícitamente una solución, por tanto tendremos que obtener información de la aceleración sin realmente haberla sabido determinar.

Una vez más, la hipótesis de fuerza central implica que

$$(K_2) \qquad r^2\theta' = M,$$

para alguna constante M, y la hipótesis de que la trayectoria es una sección cónica con el Sol en uno de los focos implica que satisface la ecuación

$$(\mathrm{A}) \qquad r[1+\varepsilon\cos\theta] = \Lambda,$$

para algún ε y Λ. Para nuestra (no especialmente esclarecedora) demostración, derivaremos y combinaremos ambas ecuaciones.

Primero derivaremos (Λ) para obtener

$$r'[1+\varepsilon\cos\theta] - \varepsilon r\theta' \operatorname{sen}\theta = 0.$$

Multiplicando por r, resulta

$$rr'[1+\varepsilon\cos\theta] - \varepsilon r^2\theta' \operatorname{sen}\theta = 0.$$

A partir de (A) y (K_2), obtenemos

$$\Lambda r' - \varepsilon M \operatorname{sen}\theta = 0.$$

Derivando de nuevo, se obtiene

$$\Lambda r'' - \varepsilon M\theta' \cos\theta = 0.$$

Utilizando (K_2) deducimos

$$\Lambda r'' - \frac{\varepsilon M^2}{r^2}\cos\theta = 0,$$

y entonces a partir de (A) tenemos

$$\Lambda r'' - \frac{M^2}{r^2}\left[\frac{\Lambda}{r} - 1\right] = 0.$$

Sustituyendo a partir de (K_2) de nuevo, resulta

$$\Lambda[r'' - r(\theta')^2] + \frac{M^2}{r^2} = 0,$$

o

$$r'' - r(\theta')^2 = -\frac{M^2}{\Lambda r^2}.$$

Comparando con (6), se deduce

$$c''(t) = -\frac{M^2}{\Lambda r^2}\mathbf{e}(\theta(\mathbf{t})),$$

que es precisamente lo que tratábamos de demostrar: la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del Sol al planeta. ■

Las funciones logaritmo y exponencial

18

En el Capítulo 15 la integral proporcionó una formulación rigurosa para una definición preliminar de las funciones sen y cos. En este capítulo la integral desempeña un papel todavía más esencial. Para algunas funciones incluso una definición preliminar presenta dificultades. Consideremos, por ejemplo, la función

$$f(x) = 10^x.$$

Esta función se supone que está definida para todo x y que posee función inversa, definida para cualquier x positivo, a la que denominaremos "logaritmo en base 10",

$$f^{-1}(x) = \log_{10} x.$$

En álgebra, 10^x se suele definir sólo para x *racional*, mientras que la definición para x irracional se suele ignorar por completo. Un breve repaso de la definición para x racional no sólo explicará el porqué de dicha omisión sino que nos recordará un principio importante en el que se basa la definición de 10^x.

El símbolo 10^n se define en primer lugar cuando n es un número natural. Esta notación es extremadamente útil, especialmente para multiplicar números muy grandes, ya que

$$10^n \cdot 10^m = 10^{n+m}.$$

La extensión de la definición de 10^x a x racional se efectúa imponiendo que se preserve dicha propiedad; este requisito nos determina en realidad la definición habitual. Puesto que deseamos que la igualdad

$$10^0 \cdot 10^n = 10^{0+n} = 10^n$$

sea cierta, debemos definir $10^0 = 1$; debido a que exigimos que la ecuación

$$10^{-n} \cdot 10^n = 10^0 = 1$$

se cumpla, debemos definir $10^{-n} = 1/10^n$; puesto que deseamos que la expresión

$$\underbrace{10^{1/n} \cdot \ldots \cdot 10^{1/n}}_{n \text{ veces}} = 10^{\overbrace{}^{}\underbrace{1/n + \cdots + 1/n}_{n \text{ veces}}} = 10^1 = 10$$

sea verdadera, debemos definir $10^{1/n} = \sqrt[n]{10}$; y al exigir que se satisfaga la igualdad

$$\underbrace{10^{1/n} \cdot \ldots \cdot 10^{1/n}}_{m \text{ veces}} = 10^{\underbrace{1/n + \cdots + 1/n}_{m \text{ veces}}} = 10^{m/n}$$

debemos definir $10^{m/n} = (\sqrt[n]{10})^m$.

Por desgracia, en este punto, nuestro método de generalización nos lleva a un callejón sin salida. Nos hemos guiado por el principio de que 10^x debía ser definido con el objetivo de preservar que $10^{x+y} = 10^x 10^y$; pero este principio no nos sugiere ninguna forma algebraica sencilla de definir 10^x cuando x es un número irracional. Por esta razón deberemos buscar métodos más sofisticados para definir una función f tal que

$$(*) \qquad f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \quad \text{para cualquier } x \text{ e } y.$$

Naturalmente buscamos una función que no sea la función constante igual a cero, así que podríamos añadir la condición $f(1) \neq 0$. Si, además, imponemos la condición más específica $f(1) = 10$, entonces $(*)$ implicará que $f(x) = 10^x$ para x racionales, y entonces 10^x podría ser *definido* como $f(x)$ para otros x; en general $f(x)$ será igual a $[f(1)]^x$ para x racionales.

Una forma de encontrar tal función nos viene sugerida si tratamos de resolver un problema aparentemente más difícil: encontrar una función *diferenciable* f tal que

$$\begin{aligned} f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \quad &\text{para todo } x \text{ e } y, \\ f(1) = 10&. \end{aligned}$$

Si suponemos que tal función existe, podemos tratar de hallar f'; el conocimiento de la derivada de f nos podría proporcionar la clave para la definición de la misma f. Ahora bien

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x) \cdot f(h) - f(x)}{h} \\ &= f(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 1}{h}. \end{aligned}$$

La solución depende, por tanto, de

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 1}{h};$$

supongamos, de momento, que este límite existe y denotémoslo por α. Entonces

$$f'(x) = \alpha \cdot f(x) \quad \text{para cualquier } x.$$

Aunque α pudiera ser calculado, este procedimiento parece condenado al fracaso. La función derivada de f ha sido expresada de nuevo en términos de f.

Si examinamos la función inversa $f^{-1} = \log_{10}$, la situación cambia, introduciendo una nueva perspectiva:

$$\begin{aligned} \log_{10}{}'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{\alpha \cdot f(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\alpha x}. \end{aligned}$$

La función derivada de f^{-1} es casi tan sencilla como podíamos desear. Y, lo que aún es más interesante, entre todas las integrales $\int_a^b x^n\,dx$ examinadas previamente, la integral $\int_a^b x^{-1}\,dx$ era la única que no podíamos calcular. Ya que $\log_{10} 1 = 0$ deberíamos tener

$$\frac{1}{\alpha}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \log_{10}x - \log_{10}1 = \log_{10}x.$$

Esto nos conduce a definir $\log_{10}x$ como $(1/\alpha)\int_1^x t^{-1}\,dt$. La dificultad está en que α es desconocido. Una manera de eludir esta dificultad consiste en definir

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt,$$

y confiar en que esta integral sea el logaritmo en *alguna* base, que pueda ser determinada con posterioridad. En cualquier caso, la función así definida es más razonable, desde un punto de vista matemático, que $\log_{10}$. La utilidad de $\log_{10}$ depende del importante papel que juega el número 10 en la numeración arábiga (y en último término del hecho de que tenemos diez dedos), mientras que la función log proporciona de hecho una notación para una integral particularmente sencilla que no puede ser expresada en términos de ninguna otra función de las ya conocidas por nosotros.

Definición

Si $x > 0$, entonces

$$\mathbf{log}\,x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt.$$

La gráfica de la función log se ilustra en la Figura 1. Podemos observar que si $x > 1$, entonces $\log x > 0$, y si $0 < x < 1$, entonces $\log x < 0$, ya que, a partir de nuestras convenciones,

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt < 0.$$

Para $x \leq 0$, un número $\log x$ no puede definirse con el procedimiento anterior, ya que $f(t) = 1/t$ no está acotada en el intervalo $[x, 1]$.

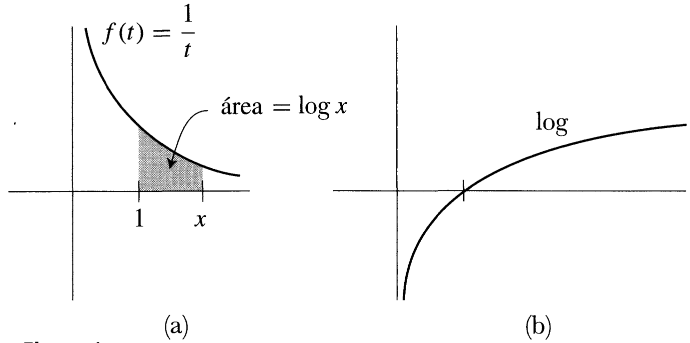


Figura 1

La justificación de la notación "log" proviene del siguiente teorema.

Teorema 1. *Si* $x, y > 0$, *entonces*

$$\log(xy) = \log\, x + \log y.$$

Demostración. Observemos en primer lugar, por el Teorema Fundamental del Cálculo, que $\log'(x) = 1/x$. Elijamos a continuación un número $y > 0$ arbitrario y definamos

$$f(x) = \log(xy).$$

Entonces

$$f'(x) = \log'(xy) \cdot y = \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{1}{x}.$$

Por consiguiente $f' = \log'$. Esto significa que existe un número c tal que

$$f(x) = \log\, x + c \quad \text{para todo } x > 0,$$

es decir,

$$\log(xy) = \log\, x + c \quad \text{para todo } x > 0.$$

El número c puede calcularse observando que para $x = 1$ se obtiene

$$\begin{aligned} \log(1 \cdot y) &= \log 1 + c \\ &= c. \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\log(xy) = \log\, x + \log y \qquad \text{para todo } x.$$

Y, al tener en cuenta que esto se verifica para cualquier $y > 0$, el teorema queda demostrado. ■

Corolario 1. *Si n es un número natural y* $x > 0$, *entonces*

$$\log(x^n) = n \log\, x.$$

Demostración. La dejamos para el lector (utilice inducción). ■

Corolario 2. *Si* $x, y > 0$, *entonces*

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log\, x - \log y.$$

Demostración. Esto se deduce de las ecuaciones

$$\log\, x = \log\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = \log\left(\frac{x}{y}\right) + \log y. \blacksquare$$

El Teorema 1 nos proporciona información importante sobre la gráfica de log. La función log es evidentemente creciente, pero, debido a que $\log'(x) = 1/x$, la derivada se hace cada vez más pequeña a medida que x aumenta, y, por tanto, el crecimiento de log se hará más y más lento. No es evidente si la función log está acotada o no en **R**. Observemos, sin embargo, que para un número natural n,

$$\log(2^n) = n\log 2 \quad (\text{y } \log 2 > 0);$$

se sigue que log no es una función acotada superiormente. De forma similar,

$$\log\left(\frac{1}{2^n}\right) = \log 1 - \log 2^n = -n\log 2;$$

y, por consiguiente, la función log no está acotada inferiormente en el intervalo $(0,1)$. Al ser log una función continua tomará todos los valores reales posibles. Por tanto **R** es el dominio de la función $\log^{-1}$. Esta importante función tiene un nombre especial, cuya oportunidad quedará pronto de manifiesto.

Definición

La "función exponencial," **exp**, *se define como* $\log^{-1}$.

La gráfica de la función exp se ilustra en la Figura 2. Puesto que $\log x$ se define sólo para $x > 0$, siempre ocurrirá que $\exp(x) > 0$. La derivada de la función exp resulta fácil de calcular.

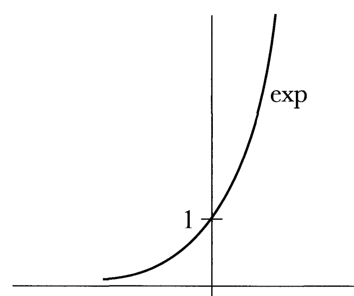


Figura 2

Teorema 2. *Para cualquier número x,*

$$\exp'(x) = \exp(x).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\exp'(x) &= (\log^{-1})'(x) = \frac{1}{\log'(\log^{-1}(x))}\\ &= \frac{1}{\dfrac{1}{\log^{-1}(x)}}\\ &= \log^{-1}(x) = \exp(x). \blacksquare\end{aligned}$$

Una segunda propiedad importante de exp es una consecuencia inmediata del Teorema 1.

Teorema 3. *Si x e y son dos números cualquiera, entonces*

$$\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y).$$

Demostración. Sean $x' = \exp(x)$ e $y' = \exp(y)$, tales que

$$x = \log x',$$
$$y = \log y'.$$

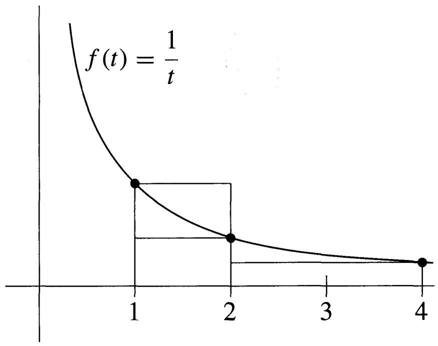


Figura 3

Entonces

$$x+y = \log x' + \log y' = \log(x'y').$$

Esto significa que

$$\exp(x+y) = x'y' = \exp(x)\cdot\exp(y). \blacksquare$$

Este teorema, y la discusión al comienzo del presente capítulo, sugieren que $\exp(1)$ es particularmente importante. Existe, en efecto, un símbolo especial para designar a dicho número.

Definición

$$\boldsymbol{e} = \exp(1).$$

Esta definición es equivalente a la ecuación

$$1 = \log e = \int_1^e \frac{1}{t}\,dt.$$

Tal como se indica en la Figura 3,

$$\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt < 1, \quad \text{ya que } 1\cdot(2-1) \text{ es una suma superior de } f(t) = 1/t \text{ en } [1,2],$$

y

$$\int_1^4 \frac{1}{t}\,dt > 1, \quad \text{puesto que } \tfrac{1}{2}\cdot(2-1) + \tfrac{1}{4}\cdot(4-2) = 1 \text{ es una suma inferior de } f(t) = 1/t \text{ en } [1,4]$$

Por tanto

$$\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt < \int_1^e \frac{1}{t}\,dt < \int_1^4 \frac{1}{t}\,dt,$$

lo cual demuestra que

$$2 < e < 4.$$

En el Capítulo 20 encontraremos aproximaciones mucho mejores del número e, y demostraremos también que e es un número irracional (la demostración es mucho más fácil que la demostración de que π es irracional).

Tal como hemos indicado al comienzo del presente capítulo la ecuación

$$\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)$$

implica que

$$\begin{aligned}\exp(x) &= [\exp(1)]^x \\ &= e^x, \text{ para todo número } \textit{racional } x.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que exp está definida para todo x y $\exp(x) = e^x$ para x racionales, es coherente con nuestro uso previo de la notación exponencial el *definir* e^x como $\exp(x)$ para todo x.

Definición

Para cualquier número x,

$$e^x = \exp(x).$$

A estas alturas la terminología "función exponencial" debería resultar clara. Hemos tenido éxito en definir e^x para exponentes x arbitrarios (incluso irracionales). No hemos definido todavía a^x, si $a \neq e$, pero hay un principio razonable para guiarnos en tal propósito. Si x es *racional*, entonces

$$a^x = (e^{\log a})^x = e^{x \log a}.$$

Pero la última expresión está definida para *todo* x, por tanto podemos usarla para definir a^x.

Definición

Si $a > 0$, entonces, para cualquier número real x,

$$a^x = e^{x \log a}.$$

(Si $a = e$ esta definición coincide claramente con la anterior.)

El requisito $a > 0$ es necesario para garantizar que $\log a$ esté definido. Ello no resulta excesivamente restrictivo ya que, por ejemplo, ni siquiera esperamos que una expresión como

$$(-1)^{1/2} \stackrel{?}{=} \sqrt{-1}$$

pueda definirse. (Por supuesto que, para ciertos números racionales x, el símbolo a^x tendrá sentido, según la antigua definición; por ejemplo,

$$(-1)^{1/3} = \sqrt[3]{-1} = -1.)$$

Nuestra definición de a^x fue pensada para garantizar que

$$(e^x)^y = e^{xy} \quad \text{para todo } x \text{ e } y.$$

Como era de esperar esta identidad resulta ser cierta si reemplazamos e por cualquier número $a > 0$. La demostración consiste en una clarificación algo complicada de la terminología. Demostraremos al mismo tiempo las demás propiedades importantes de a^x.

Teorema 4. *Si $a > 0$, entonces*

(1) $(a^b)^c = a^{bc}$ *para todo b, c.*

(Observemos que a^b será necesariamente positivo, y por tanto $(a^b)^c$ estará bien definido;)

(2) $a^1 = a$ *y* $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ *para todo x, y.*

(Observemos que (2) implica que esta definición de a^x coincide con la antigua, válida para x racionales.)

Demostración

(1) $$(a^b)^c = e^{c \log a^b} = e^{c \log(e^{b \log a})} = e^{c(b \log a)} = e^{cb \log a} = a^{bc}.$$

(Cada uno de los pasos de esta cadena de igualdades se deduce de nuestra última definición, o del hecho de que $\exp = \log^{-1}$.)

$$a^1 = e^{1 \log a} = e^{\log a} = a,$$

(2) $$a^{x+y} = e^{(x+y)\log a} = e^{x \log a + y \log a} = e^{x \log a} \cdot e^{y \log a} = a^x \cdot a^y. \blacksquare$$

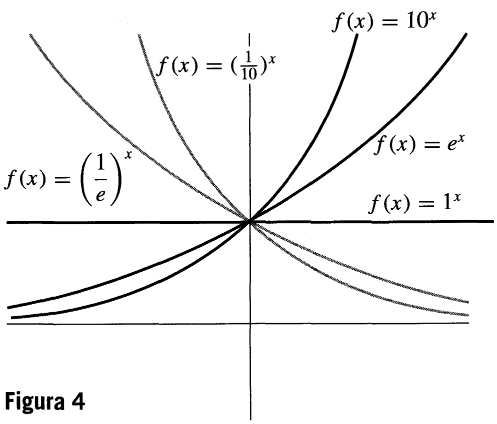


Figura 4

La Figura 4 nos muestra las gráficas de $f(x) = a^x$ para diferentes valores de a. El comportamiento de la función depende de si $a < 1$, $a = 1$ o $a > 1$. Si $a = 1$, entonces $f(x) = 1^x = 1$. Supongamos $a > 1$. En este caso $\log a > 0$. Por tanto,

$$\begin{array}{ll} \text{si} & x < y, \\ \text{entonces} & x \log a < y \log a, \\ \text{de modo que} & e^{x \log a} < e^{y \log a}, \\ \text{es decir,} & a^x < a^y. \end{array}$$

Por consiguiente la función $f(x) = a^x$ es creciente. Por otra parte, si $0 < a < 1$, y por ello $\log a < 0$, un argumento análogo demuestra que la función $f(x) = a^x$ es decreciente. En cualquier caso, si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces $f(x) = a^x$ es una función uno-uno. Debido a que exp puede tomar cualquier valor positivo es también fácil ver que a^x puede tomar cualquier valor positivo. Por tanto la función inversa estará definida para cualquier número positivo, y puede tomar cualquier valor. Si $f(x) = a^x$, entonces f^{-1} es la función designada habitualmente por $\log_a$ (Figura 5).

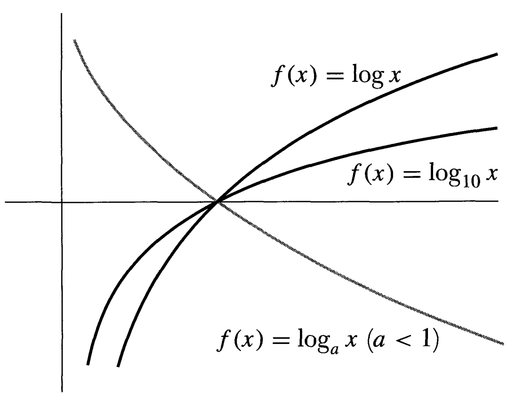


Figura 5

Del mismo modo que a^x puede expresarse por medio de la función exp, así también $\log_a$ puede ser expresada mediante la función log. En efecto,

$$\begin{array}{ll} \text{si} & y = \log_a x, \\ \text{entonces} & x = a^y = e^{y \log a}, \\ \text{por tanto} & \log x = y \log a, \\ \text{o} & y = \dfrac{\log x}{\log a}. \end{array}$$

En otras palabras,

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

Las derivadas de $f(x) = a^x$ y $g(x) = \log_a x$ son ambas fáciles de calcular:

$$f(x) = e^{x \log a}, \quad \text{por tanto } f'(x) = \log a \cdot e^{x \log a} = \log a \cdot a^x,$$

$$g(x) = \frac{\log x}{\log a}, \quad \text{por tanto } g'(x) = \frac{1}{x \log a}.$$

Una función más complicada tal como

$$f(x) = g(x)^{h(x)}$$

es también fácil de derivar, si recordamos que, *por definición*,

$$f(x) = e^{h(x)\log g(x)};$$

se deduce, a partir de la Regla de la Cadena, que

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{h(x)\log g(x)} \cdot \left[h'(x)\log g(x) + h(x)\frac{g'(x)}{g(x)}\right] \\ &= g(x)^{h(x)} \cdot \left[h'(x)\log g(x) + h(x)\frac{g'(x)}{g(x)}\right]. \end{aligned}$$

No hay necesidad en recordar esta fórmula, basta aplicar el procedimiento que hemos usado en cada caso concreto que aparezca; ayuda, sin embargo, recordar que el primer factor en la derivada será $g(x)^{h(x)}$.

Hay un caso especial de la fórmula anterior que vale la pena memorizar. La función $f(x) = x^a$ fue inicialmente definida sólo para a racionales. Podemos ahora definir y hallar la derivada de la función $f(x) = x^a$ para cualquier número a; el resultado es exactamente el que podíamos esperar:

$$f(x) = x^a = e^{a\log x}$$

por tanto

$$f'(x) = \frac{a}{x} \cdot e^{a\log x} = \frac{a}{x} \cdot x^a = ax^{a-1}.$$

Las manipulaciones algebraicas con funciones exponenciales se harán con los ojos cerrados después de un poco de práctica; sólo recordar que todas las reglas que deberían funcionar, funcionan realmente. Las propiedades básicas de la función exp siguen siendo las enunciadas en los Teoremas 2 y 3:

$$\begin{aligned} \exp'(x) &= \exp(x), \\ \exp(x+y) &= \exp(x) \cdot \exp(y). \end{aligned}$$

De hecho, cada una de estas propiedades casi caracteriza a la función exp. Naturalmente, exp no es la única función f que satisface $f' = f$, ya que si $f = ce^x$, entonces $f'(x) = ce^x = f(x)$; estas funciones son, sin embargo, las únicas con esta propiedad.

Teorema 5. *Si f es diferenciable y*

$$f'(x) = f(x) \quad \text{para todo } x,$$

entonces existe un cierto número c tal que

$$f(x) = ce^x \quad \text{para todo } x.$$

Demostración. Sea

$$g(x) = \frac{f(x)}{e^x}.$$

(Ello es posible ya que $e^x \neq 0$ para todo x.) Entonces

$$g'(x) = \frac{e^x f'(x) - f(x)e^x}{(e^x)^2} = 0.$$

Por tanto existe un número c tal que

$$g(x) = \frac{f(x)}{e^x} = c \quad \text{para todo } x. \blacksquare$$

La segunda propiedad básica de exp requiere un razonamiento más elaborado. La función exp ciertamente no es la única función f que satisface

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y).$$

En efecto, $f(x) = 0$ o cualquier función de la forma $f(x) = a^x$ también satisface dicha propiedad. Pero la realidad es mucho más compleja que todo esto; existen otras infinitas funciones que satisfacen dicha propiedad, aunque es imposible, sin recurrir a matemáticas más avanzadas, demostrar que existe ni siquiera una sola función distinta a las ya antes mencionadas. Es por esta razón que la definición de 10^x es tan difícil: hay infinitas funciones f que satisfacen

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y),$$
$$f(1) = 10,$$

pero que *no* son la función $f(x) = 10^x$. Una cosa es, sin embargo, cierta: cualquier función *continua* f que satisfaga

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

debe ser de la forma $f(x) = a^x$ o $f(x) = 0$. (El Problema 38 indica la manera de demostrar esto, y alude a la existencia de funciones discontinuas con esta propiedad.)

Además de las dos propiedades básicas expuestas en los Teoremas 2 y 3, la función exp satisface otra característica muy importante: exp "crece más rápido que cualquier polinomio". En otras palabras,

Teorema 6. *Para cualquier número natural n,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty.$$

Demostración. La demostración consta de varios pasos.

Paso 1. $e^x > x$ para todo x, y por consiguiente $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ (éste puede ser considerado como el caso $n = 0$).

Para demostrar esta afirmación (que es obvia para $x \leq 0$) es suficiente probar que

$$x > \log x \quad \text{para todo } x > 0.$$

Si $x < 1$ esto es evidente, ya que $\log x < 0$. Si $x > 1$, entonces (Figura 6) $x - 1$ es una suma superior de $f(t) = 1/t$ en el intervalo $[1,x]$, de modo que $\log x < x - 1 < x$.

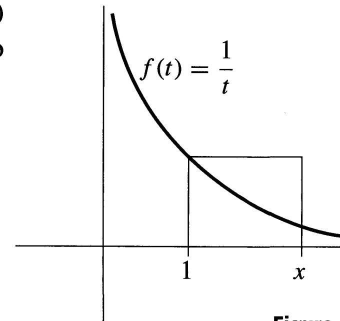


Figura 6

Paso 2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x} = \infty.$

Para demostrar esto, observemos que

$$\frac{e^x}{x} = \frac{e^{x/2}\cdot e^{x/2}}{\frac{x}{2}\cdot 2} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{x/2}}{\frac{x}{2}}\right)\cdot e^{x/2}.$$

Según el paso 1, deducimos que la expresión entre paréntesis es mayor que 1, y $\lim\limits_{x\to\infty} e^{x/2} = \infty$; ello prueba que $\lim\limits_{x\to\infty} e^x/x = \infty$.

Paso 3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = \infty.$

Observemos que

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{(e^{x/n})^n}{\left(\frac{x}{n}\right)^n\cdot n^n} = \frac{1}{n^n}\cdot\left(\frac{e^{x/n}}{\frac{x}{n}}\right)^n.$$

La expresión entre paréntesis se hace arbitrariamente grande, según el paso 2, por tanto la n-ésima potencia evidentemente también se hará arbitrariamente grande. ■

Ahora estamos en condiciones de examinar cuidadosamente la siguiente interesante función: $f(x) = e^{-1/x^2}, x \neq 0$. Tenemos

$$f'(x) = e^{-1/x^2}\cdot\frac{2}{x^3}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} f'(x) &< 0 \quad \text{para } x < 0,\\ f'(x) &> 0 \quad \text{para } x > 0, \end{aligned}$$

concluyendo que f es decreciente para valores de x negativos y creciente para valores de x positivos. Además si $|x|$ es grande, entonces x^2 también, y por lo tanto $-1/x^2$ tiene un valor próximo a 0, entonces el valor de e^{-1/x^2} será cercano a 1 (Figura 7).

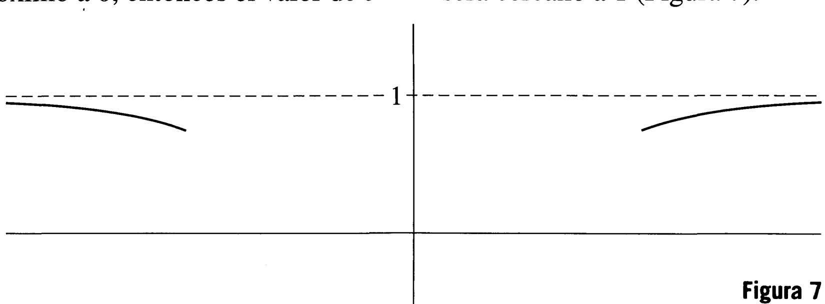


Figura 7

El comportamiento de f cerca de 0 es de lo más interesante. Si x es pequeño, entonces el valor de $1/x^2$ será grande y el de e^{1/x^2} también, mientras que el valor de $e^{-1/x^2} = 1/(e^{1/x^2})$ será pequeño. Este razonamiento, convenientemente expresado con diversos ε y δ, demuestra que

$$\lim_{x\to 0} e^{-1/x^2} = 0.$$

Por tanto, si definimos

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

entonces la función f será continua (Figura 8). De hecho, f será incluso diferenciable en 0:

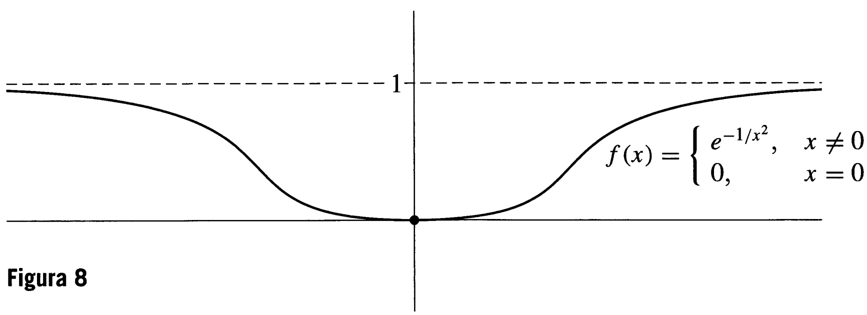


Figura 8

en efecto,

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{-1/h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1/h}{e^{(1/h)^2}},$$

y

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1/h}{e^{(1/h)^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{(x^2)}}, \qquad \text{mientras} \qquad \lim_{h\to 0^-} \frac{1/h}{e^{(1/h)^2}} = -\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{(x^2)}}.$$

Ya sabemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty;$$

por consiguiente

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{(x^2)}}{x} = \infty,$$

y ello significa que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{(x^2)}} = 0.$$

Por tanto

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} \cdot \dfrac{2}{x^3}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ahora podemos calcular

$$\begin{aligned} f''(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(h)-f'(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{-1/h^2}\cdot \dfrac{2}{h^3}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2\cdot e^{-1/h^2}}{h^4} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cdot \dfrac{1}{h^4}}{e^{1/h^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^4}{e^{(x^2)}}; \end{aligned}$$

un argumento parecido al anterior demuestra que $f''(0)=0$. Por tanto

$$f''(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}\cdot \dfrac{-6}{x^4} + e^{-1/x^2}\cdot \dfrac{4}{x^6} & x\neq 0 \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

Podemos proseguir con este tipo de razonamientos. En efecto, usando inducción es posible demostrar (Problema 40) que $f^{(k)}(0)=0$ para *cualquier* k. La función f es *extremadamente* llana en 0, y tiende a 0 tan rápidamente que puede enmascarar muchas irregularidades de otras funciones. Por ejemplo (Figura 9), supongamos que

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}\cdot \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

Puede demostrarse (Problema 41) que para esta función se cumple también $f^{(k)}(0)=0$ para todo k. Este ejemplo nos muestra, quizás de una forma más impactante que otros, lo malévola que puede ser una función, sin dejar de ser infinitamente diferenciable. En la Parte IV investigaremos condiciones aún más restrictivas para una función, que excluirán los comportamientos de este tipo.

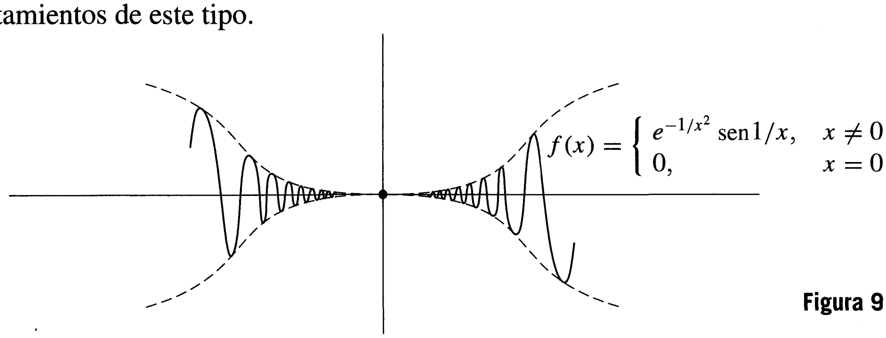


Figura 9

Problemas

1. Derive cada una de las siguientes funciones (recuerde que a^{b^c} designa siempre $a^{(b^c)}$).

(i) $f(x) = e^{e^{e^{e^x}}}$.

(ii) $f(x) = \log(1+\log(1+\log(1+e^{1+e^{1-x}})))$.

(iii) $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}$.

(iv) $f(x) = e^{\left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)}$.

(v) $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}}$.

(vi) $f(x) = \log_{(e^x)} \operatorname{sen} x$.

(vii) $f(x) = \left[\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}\right)\right]^{\log(\operatorname{sen} e^x)}$.

(vii) $f(x) = (\log(3+e^4))e^{4x} + (\operatorname{arcsen} x)^{\log 3}$.

(ix) $f(x) = (\log x)^{\log x}$.

(x) $f(x) = x^x$.

(xi) $f(x) = \operatorname{sen}\left(x^{\operatorname{sen}(x^{\operatorname{sen} x})}\right)$.

2. (a) Compruebe que la derivada de $\log\circ f$ es f'/f.

A esta expresión se la denomina la *derivada logarítmica* de f. Con frecuencia resulta más fácil de calcular que f', ya que los productos y las potencias que aparezcan en la definición de f se convertirán en sumas y productos en la expresión $\log\circ f$. La derivada f' podemos obtenerla simplemente multiplicando el resultado por f; a este procedimiento se le denomina *derivación logarítmica**.

(b) Use la derivación logarítmica para encontrar $f'(x)$ para cada una de las siguientes funciones.

(i) $f(x) = (1+x)(1+e^{x^2})$.

(ii) $f(x) = \dfrac{(3-x)^{1/3}x^2}{(1-x)(3+x)^{2/3}}$.

(iii) $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\cos x} + (\cos x)^{\operatorname{sen} x}$.

(iv) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^{2x}(1+x^3)}$.

3. Halle

$$\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt$$

(para funciones $f > 0$ en $[a,b]$).

4. Represente gráficamente cada una de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = e^{x+1}$.

(b) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$.

(c) $f(x) = e^x + e^{-x}$.
(d) $f(x) = e^x - e^{-x}$.
(Compare la gráfica con las correspondientes a las funciones exp y $1/\exp$.)

(e) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = 1 - \dfrac{2}{e^{2x}+1}$.

5. Encuentre los siguientes límites utilizando la Regla de l'Hôpital.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - x^2/2}{x^2}$.

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - x^2/2 - x^3/6}{x^3}$.

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - x^2/2}{x^3}$.

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x + x^2/2}{x^2}$.

(v) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x + x^2/2}{x^3}$.

(vi) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x + x^2/2 - x^3/3}{x^3}$.

---

*Nota del traductor: también conocida como *diferenciación logarítmica*

6. Encuentre los siguientes límites utilizando la Regla de l'Hôpital.

(i) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{1/x}$. (ii) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

(iii) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$.

7. Las funciones

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1},$$

reciben el nombre de el **seno hiperbólico, coseno hiperbólico** y **tangente hiperbólica**, respectivamente (aunque habitualmente nos refiramos a ellas literalmente como 'senh,' 'cosh,' y 'tgh'). Hay muchas analogías entre estas funciones y las correspondientes funciones trigonométricas ordinarias. Una analogía se ilustra en la en la Figura 10; una demostración de que la región mostrada en la Figura 10(b) tiene efectivamente área $x/2$ es mejor posponerla hasta el próximo capítulo, donde desarrollaremos métodos para calcular integrales. Otras analogías se estudian en los tres problemas siguientes, aunque la más profunda debe esperar hasta el Capítulo 27. Si el lector aún no ha hecho el Problema 4, es conveniente que efectúe una representación gráfica de las funciones senh, cosh y tgh.

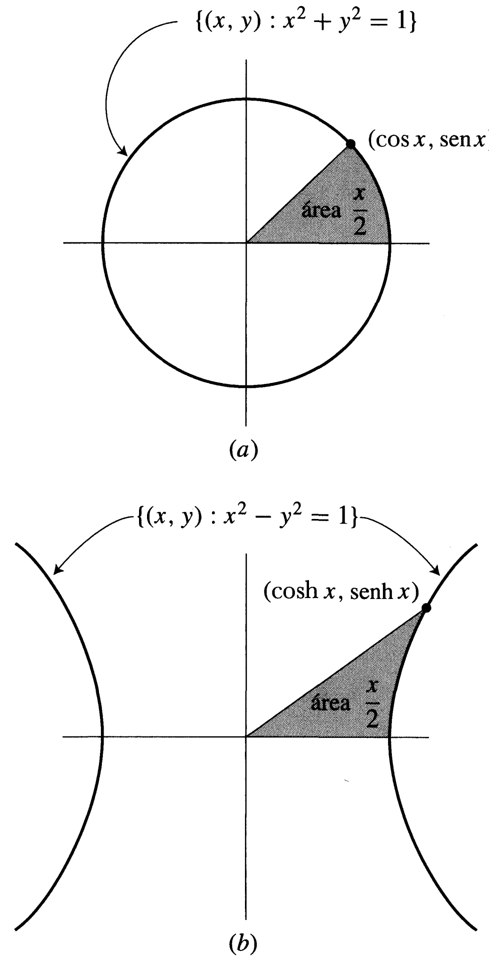


Figura 10

8. Demuestre que

(a) $\cosh^2 - \operatorname{senh}^2 = 1$. (b) $\operatorname{tgh}^2 + 1/\cosh^2 = 1$.

(c) $\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$.

(d) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$. (e) $\operatorname{senh}' = \cosh$.

(f) $\cosh' = \operatorname{senh}$. (g) $\operatorname{tgh}' = \dfrac{1}{\cosh^2}$.

9. Las funciones senh y tgh son uno-uno; sus inversas senh^{-1} y tgh^{-1}, están definidas en todo $\mathbf{R}$ y en $(-1,1)$, respectivamente. Estas funciones inversas se suelen designar por arg senh y arg tgh (el "argumento" del seno y de la tangente hiperbólicos). Si cosh se restringe a $[0,\infty)$ tiene función inversa designada por arg cosh, o simplemente como $\cosh^{-1}$, definida en $[1,\infty)$. Demuestre, utilizando la información del Problema 8, que

(a) $\operatorname{senh}(\cosh^{-1} x) = \sqrt{x^2-1}$. (b) $\cosh(\operatorname{senh}^{-1} x) = \sqrt{1+x^2}$.

(c) $(\operatorname{senh}^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

(d) $(\cosh^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ para $x > 1$.

(e) $(\operatorname{tgh}^{-1})'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ para $|x| < 1$.

10. (a) Encuentre una fórmula explícita para senh^{-1}, $\cosh^{-1}$, y tgh^{-1} (resolviendo la ecuación $y = \operatorname{senh}^{-1} x$ expresando x en función de y, etc.).

(b) Calcule $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$,

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx \quad \text{para } a,b > 1 \text{ ó } a,b < -1,$$

$$\int_a^b \frac{1}{1-x^2}\,dx \quad \text{para } |a|,|b| < 1.$$

Compare su respuesta de la tercera integral con la que se obtiene a partir de

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right].$$

11. Demuestre que

$$F(x) = \int_2^x \frac{1}{\log t}\,dt$$

no está acotada en $[2,\infty)$.

12. Sea f una función no decreciente en $[1,\infty)$, y definamos

$$F(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t}\,dt, \qquad x \geq 1.$$

Demuestre que f está acotada en $[1,\infty)$ si y sólo si $F/\log$ está acotada en $[1,\infty)$.

13. Halle

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} a^x$ para $0 < a < 1$. (¡Recuerde la definición!)

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{(\log x)^n}$.

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(\log x)^n}{x}$.

(d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x(\log x)^n$. Indicación: $x(\log x)^n = \dfrac{(-1)^n\left(\log \dfrac{1}{x}\right)^n}{\dfrac{1}{x}}$.

(e) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

14. Represente gráficamente $f(x) = x^x$ para $x > 0$. (Utilice el Problema 13(e).)

15. (a) Encuentre el valor mínimo de $f(x) = e^x/x^n$ para $x > 0$, y concluya que $f(x) > e^n/n^n$ para $x > n$.

(b) Utilizando la expresión $f'(x) = e^x(x-n)/x^{n+1}$, demuestre que $f'(x) > e^{n+1}/(n+1)^{n+1}$ para $x > n+1$, y obtenga de este modo otra demostración de que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

16. Represente gráficamente $f(x) = e^x/x^n$.

17. (a) Encuentre $\lim_{y\to 0} \log(1+y)/y$. (Puede usar la Regla de l'Hôpital, pero sería ridículo.)

(b) Calcule $\lim_{x\to\infty} x\log(1+1/x)$.

(c) Demuestre que $e = \lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x$.

(d) Deduzca que $e^a = \lim_{x\to\infty}(1+a/x)^x$. (Es posible probar esto teniendo en consideración el apartado c) con sólo un poco de habilidad algebraica.)

*(e) Pruebe que $\log b = \lim_{x\to\infty} x(b^{1/x}-1)$.

18. Represente gráficamente $f(x) = (1+1/x)^x$ para $x > 0$. (Utilice el Problema 17(c).)

19. Si un banco presta al a por ciento de interés anual, entonces una inversión inicial I produce $I(1+a/100)$ pasado un año. Si el banco presta a interés compuesto (cuenta los intereses devengados como parte del capital para el cálculo de los intereses que se devengaran a final del siguiente año), entonces la inversión inicial crece hasta $I(1+a/100)^n$ transcurridos n años. Suponga ahora que los intereses se devengan dos veces al año. La cantidad final acumulada después de n años ¡por desgracia para el banco! no es $I(1+a/100)^{2n}$, sino sólo $I(1+a/200)^{2n}$; a pesar de que se haya doblado el número de veces en que se devengan los intereses, los períodos son semestrales y, por tanto, el tanto por ciento de interés debe ser reducido a la mitad en cada cálculo: $a/2$ por medio año. Esta cantidad es más grande que $I(1+a/100)^n$, aunque no mucho más. Suponga ahora que el banco presta a interés compuesto de forma continua, i.e., el banco considera lo que la inversión debería producir al final de un año si reclamara los intereses k veces durante el mismo, sumándolos cada vez al capital inicial, y tomando finalmente como cantidad adeudada al final del año a la cota superior más pequeña de todos las cantidades calculadas, considerando diversos valores de k. ¿Cuanto producirá una inversión inicial de una unidad monetaria después de un año?

20. (a) Sea $f(x) = \log|x|$ para $x \neq 0$. Demuestre que $f'(x) = 1/x$ para $x \neq 0$.

(b) Si $f(x) \neq 0$ para todo x, demuestre que $(\log|f|)' = f'/f$.

21. Suponga que sobre cierto intervalo la función f satisface la ecuación $f' = cf$ para un cierto número c.

(a) Suponiendo que f no sea nunca igual a 0, utilice el Problema 20(b) para demostrar que $|f(x)| = le^{cx}$ para un cierto número l (> 0). De ahí se deduce que $f(x) = ke^{cx}$ para algún k.

(b) Demuestre que este resultado se obtiene igualmente sin la suposición extra de que f no sea nunca igual a 0. Indicación: Demuestre que f no puede ser 0 en el extremo final de un intervalo abierto si sobre éste nunca se ha anulado.

(c) Obtenga una demostración más simple de que $f(x) = ke^{cx}$ para algún número k considerando la función $g(x) = f(x)/e^{cx}$.

(d) Suponga que $f' = fg'$ para alguna función g. Demuestre que $f(x) = ke^{g(x)}$ para cierto número k.

***22.** Una sustancia radioactiva desaparece a un ritmo proporcional a la cantidad que queda de ella misma (debido a que todos los átomos tienen la misma probabilidad de desintegrarse, la velocidad de desintegración de dicha sustancia es directamente proporcional al número de átomos de la misma que permanecen sin desintegrar). Si $A(t)$ es la cantidad de sustancia en el tiempo t, esto significa que $A'(t) = cA(t)$ para algún número c conveniente (que depende de la probabilidad de que un átomo se desintegre).

(a) Determine $A(t)$ mostrando explícitamente su dependencia de la cantidad de sustancia $A_0 = A(0)$ presente en el tiempo igual a 0.

(b) Pruebe que hay un número τ (denominado el "período de semidesintegración" de la sustancia radioactiva) con la propiedad de que $A(t+\tau) = A(t)/2$.

23. La *Ley de enfriamiento de Newton* establece que un objeto se enfría a una velocidad directamente proporcional a la diferencia entre su propia temperatura y la temperatura del ambiente que le rodea. Encuentre la temperatura $T(t)$ del objeto en el tiempo t, en función de su temperatura T_0 en el tiempo igual a 0, suponiendo que la temperatura del ambiente que le rodea se mantiene constante, M. Indicación: Para resolver la ecuación diferencial que expresa la Ley del enfriamiento de Newton, recuerde que $T' = (T-M)'$.

24. Demuestre que si $f(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, entonces $f = 0$.

25. Halle todas las funciones continuas f que satisfacen

(a) $\int_0^x f = e^x$.

(b) $\int_0^{x^2} f = 1 - e^{2x^2}$.

26. Halle todas las funciones f que satisfacen $f'(t) = f(t) + \int_0^1 f(t)\,dt$.

27. Halle todas las funciones continuas f que satisfacen la ecuación

$$(f(x))^2 = \int_0^x f(t)\frac{t}{1+t^2}\,dt.$$

28. (a) Sean f y g dos funciones continuas en $[a,b]$ siendo g no negativa. Suponga que para un cierto número C tenemos

$$f(x) \le C + \int_a^x fg, \qquad a \le x \le b.$$

Demuestre *la desigualdad de Gronwall*:

$$f(x) \le Ce^{\int_a^x g}.$$

Indicación: Considere la derivada de la función $h(x) = \left(C + \int_a^x fg\right)e^{-\int_a^x g}$.

(b) Sean f y g dos funciones no negativas tales que g es continua y f diferenciable. Suponga que $f'(x) = g(x)f(x)$ y $f(0) = 0$. Demuestre que $f = 0$. (Compare con el Problema 21.)

29. (a) Demuestre que

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \le e^x \quad \text{para } x \ge 0.$$

Indicación: Aplique inducción sobre n y compare las derivadas.

(b) Proporcione una nueva demostración de que $\lim\limits_{x\to\infty} e^x/x^n = \infty$.

30. Proporcione todavía una nueva demostración de este mismo hecho, empleando la forma apropiada de la Regla de l'Hôpital. (Vea el Problema 11-56.)

31. (a) Calcule $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt$. (El lector debería ser capaz de conjeturar el resultado antes de realizar ningún cálculo.)

(b) Halle los siguientes límites.

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2}\int_x^{x+(1/x)} e^{t^2}\,dt$.

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2}\int_x^{x+(\log x)/x} e^{t^2}\,dt$.

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2}\int_x^{x+(\log x)/2x} e^{t^2}\,dt$.

32. Este problema esboza el enfoque clásico a las funciones logarítmicas y exponenciales. Para empezar, sólo supondremos que la función $f(x) = a^x$, definida de forma elemental para x racionales, puede ser extendida de alguna forma a una función uno-uno y continua, que satisface las mismas propiedades algebraicas, en toda la recta. (Vea el Problema 22-29 para una demostración directa de esto.) La función inversa de f será designada entonces por $\log_a$.

(a) Demuestre, directamente a partir de la definición, que

$$\begin{aligned}\log_a{}'(x) &= \lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{1/h}\\ &= \frac{1}{x}\cdot\log_a\left(\lim_{k\to 0}(1+k)^{1/k}\right).\end{aligned}$$

Por tanto, el problema se reduce exclusivamente a la determinación de $\lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{1/h}$. Si podemos demostrar que esta expresión tiene por límite e, entonces $\log_e{}'(x) = \dfrac{1}{x}\cdot\log_e e = \dfrac{1}{x}$, y por consiguiente $\exp = \log_e^{-1}$ tiene como derivada $\exp'(x) = \exp(x)$.

(b) Sea $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ para números naturales n. Usando el Teorema Binomial, demuestre que

$$a_n = 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Concluya que $a_n < a_{n+1}$.

(c) A partir de $1/k! \le 1/2^{k-1}$ para $k \ge 2$, demuestre que, para todo n, $a_n < 3$. En consecuencia el conjunto de números $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ está acotado, y, por tanto, tiene una cota superior mínima e. Demuestre que para cualquier $\varepsilon > 0$ tendremos $e - a_n < \varepsilon$ para valores de n suficientemente grandes.

(d) Si $n \leq x \leq n+1$, entonces

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Concluya que $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. También demuestre que $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, y deduzca que $\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h} = e$.

***33.** Un punto P se mueve a lo largo de un segmento rectilíneo AB de longitud 10^7 mientras que otro punto Q se mueve a lo largo de una semirrecta infinita (Figure 11). La velocidad de P es siempre igual a la distancia entre P a B (en otras palabras, si $P(t)$ es la posición de P en el tiempo t, entonces $P'(t) = 10^7 - P(t)$), mientras que Q se mueve con velocidad constante $Q'(t) = 10^7$. La distancia recorrida por Q después de un tiempo t se define como el *logaritmo Neperiano* de la distancia entre P y B en el tiempo t. Por tanto,

$$10^7 t = \text{Nap}\log[10^7 - P(t)].$$

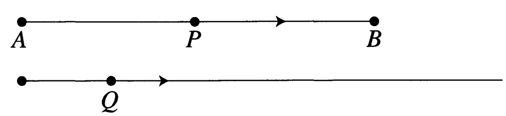


Figura 11

Esta fue la definición de logaritmo introducida por Neper (1550-1617) en su publicación de 1614, *Mirifici logarithmonum canonis description* (Descripción de las Maravillosas Leyes de los Logaritmos) ¡trabajo que se realizó *antes* de que se inventara el uso de los exponentes! El número 10^7 se eligió porque las tablas que disponía Neper (destinadas a cálculos astronómicos y de navegación), proporcionaban los logaritmos de los senos de ángulos con un máximo de siete dígitos decimales, y Neper quería evitar el uso de fracciones. Demuestre que

$$\text{Nap}\log x = 10^7 \log\frac{10^7}{x}.$$

Indicación: Utilice el mismo artificio que en el Problema 23 para despejar P en la ecuación.

***34.** (a) Esboce el gráfico de $f(x) = (\log x)/x$ (poniendo especial atención a su comportamiento cerca de 0 y en ∞).

(b) ¿Cuál de los números e^π o π^e es mayor?

(c) Demuestre que si $0 < x \leq 1$, ó $x = e$, entonces el único número y que satisface $x^y = y^x$ es $y = x$; pero si $x > 1, x \neq e$, entonces existe exactamente un número $y \neq x$ que satisface $x^y = y^x$; además, si $x < e$, entonces $y > e$, y si $x > e$, entonces $y < e$. (Interprete estos resultados a partir de la gráfica obtenida en el apartado (a).)

(d) Demuestre que si x e y son números naturales y $x^y = y^x$, entonces $x = y$ ó $x = 2, y = 4$, ó $x = 4, y = 2$.

(e) Pruebe que el conjunto de todos los pares (x,y) tales que $x^y = y^x$ se obtienen de la intersección de una curva con una recta; halle dicha intersección y dibuje un esquema aproximado.

*(f) Para $1 < x < e$ sea $g(x)$ el único número $> e$ con $x^{g(x)} = g(x)^x$. Demuestre que g es diferenciable. (Es una buena idea considerar las siguientes funciones por separado,

$$f_1(x) = \frac{\log x}{x}, \quad 0 < x < e$$

$$f_2(x) = \frac{\log x}{x}, \quad e < x$$

y escribir g en función de f_1 y f_2. Si el lector resuelve convenientemente este apartado, debería ser capaz de demostrar que

$$g'(x) = \frac{[g(x)]^2}{1 - \log g(x)} \cdot \frac{1 - \log x}{x^2}.)$$

***35.** Este problema utiliza resultados del Apéndice del Capítulo 11.

(a) Demuestre que exp es una función convexa y log es una función cóncava.

(b) Demuestre que si $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y todos $p_i > 0$, entonces si para todo $z_i > 0$ tenemos

$$z_1{}^{p_1} \cdot \ldots \cdot z_n{}^{p_n} < p_1 z_1 + \cdots + p_n z_n.$$

(Utilice el Problema 8 del Apéndice del Capítulo 11.)

(c) Obtenga otra demostración de que $G_n \leq A_n$ (Problema 2-22).

36. (a) Sea f una función positiva en $[a,b]$, y sea P_n una partición de $[a,b]$ en n intervalos de igual longitud. Utilice el Problema 2-22 para demostrar que

$$\frac{1}{b-a} L(\log f, P_n) \leq \log\left(\frac{1}{b-a} L(f, P_n)\right).$$

(b) Utilice el Apéndice del Capítulo 13 para concluir que para toda función integrable $f > 0$ resulta

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \log f \leq \log\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f\right).$$

Un enfoque más directo se ilustra en el siguiente apartado:

(c) En el Problema 35, el Problema 2-22 se deducía como un caso particular de la desigualdad

$$g\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i g(x_i)$$

para $p_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y g convexa. Para g cóncava tenemos la desigualdad inversa

$$\sum_{i=1}^{n} p_i g(x_i) \leq g\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right).$$

Use este resultado con $g = \log$ para demostrar el resultado del apartado (b) directamente, para cualquier función integrable f.

(d) Establezca un teorema general del cual se deduzca el apartado (b) como un caso particular.

37. Suponga que f satisface $f' = f$ y $f(x+y) = f(x)f(y)$ para todo x e y. Demuestre que o bien $f = \exp$ o $f = 0$.

***38.** Demuestre que si f es continua y $f(x+y) = f(x)f(y)$ para todo x e y, entonces o bien $f = 0$ o $f(x) = [f(1)]^x$ para todo x. Indicación: Demuestre que $f(x) = [f(1)]^x$ para x racionales, y entonces utilice el Problema 8-6. Este problema está muy relacionado con el Problema 8-7 y la información citada al final del Problema 8-7 puede emplearse para demostrar que hay funciones discontinuas f que satisfacen $f(x+y) = f(x)f(y)$.

***39.** Demuestre que si f es una función continua definida sobre los números reales positivos, tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para todo x e y positivos, entonces o bien $f = 0$ o $f(x) = f(e)\log x$ para todo $x > 0$. Indicación: Considere $g(x) = f(e^x)$.

***40.** Demuestre que si $f(x) = e^{-1/x^2}$ para $x \neq 0$, y $f(0) = 0$, entonces $f^{(k)}(0) = 0$ para todo k (el lector encontrará el mismo tipo de dificultades que en el Problema 10-21). Indicación: Considere funciones $g(x) = e^{-1/x^2}P(1/x)$ para una función polinómica P.

***41.** Demuestre que si $f(x) = e^{-1/x^2}$ sen $1/x$ para $x \neq 0$, y $f(0) = 0$, entonces $f^{(k)}(0) = 0$ para todo k.

42. (a) Demuestre que si α es una raíz de la ecuación

$$(*) \quad a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

entonces la función $y(x) = e^{\alpha x}$ satisface la ecuación diferencial

$$(**) \quad a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

*(b) Demuestre que si α es una raíz doble de $(*)$, entonces $y(x) = xe^{\alpha x}$ también satisface $(**)$. Indicación: Recuerde que si α es una raíz doble de una ecuación polinómica $f(x) = 0$, entonces $f'(\alpha) = 0$.

*(c) Demuestre que si α es una raíz de $(*)$ de orden r, entonces $y(x) = x^k e^{\alpha x}$ es una solución de $(**)$ para $0 \leq k \leq r-1$. Si $(*)$ tiene n raíces reales (teniendo en cuenta las multiplicidades), el apartado (c) proporciona n soluciones $y_1, \ldots, y_n$ de $(**)$.

(d) Demuestre que en este caso la función $c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$ también satisface la ecuación $(**)$. Hay un teorema que establece que en realidad son éstas las únicas soluciones de $(**)$. El Problema 21 y los dos problemas siguientes demuestran casos particulares del citado teorema, y el caso general se considera en el Problema 20-26. En el Capítulo 27 veremos que hacer cuando $(*)$ no posee n raíces reales.

***43.** Suponga que f satisface la ecuación $f'' - f = 0$ y además $f(0) = f'(0) = 0$. Demuestre que $f = 0$ de la forma siguiente.

(a) Demuestre que $f^2 - (f')^2 = 0$.

(b) Suponga que $f(x) \neq 0$ para todo x en algún intervalo (a,b). Demuestre que o bien $f(x) = ce^x$ o bien $f(x) = ce^{-x}$ para todo x de (a,b), para cierta constante c.

**(c) Si $f(x_0) \neq 0$ para $x_0 > 0$, digamos, entonces existiría un número a tal que $0 \leq a < x_0$ y $f(a) = 0$, mientras que $f(x) \neq 0$ para $a < x < x_0$. ¿Por qué? Utilice este hecho y el apartado (b) para llegar a una contradicción.

***44.** (a) Demuestre que si f satisface la ecuación $f'' - f = 0$, entonces $f(x) = ae^x + be^{-x}$ para algún a y b. (En primer lugar averigüe cual debería ser el valor de a y b en términos de $f(0)$ y $f'(0)$, y entonces utilice el Problema 43.)

(b) Demuestre también que $f = a\,\text{senh} + b\cosh$ para otros ciertos valores (diferentes) de a y b.

45. Encuentre todas las funciones f que satisfacen

(a) $f^{(n)} = f^{(n-1)}$.

(b) $f^{(n)} = f^{(n-2)}$.

***46.** Este problema, complementario del Problema 15-30, esboza un tratamiento de la función exponencial basado en la suposición que la ecuación diferencial $f' = f$ tiene una solución distinta de la función idénticamente igual a cero.

(a) Suponga que existe una función $f \neq 0$ con $f' = f$. Demuestre que $f(x) \neq 0$ para todo x considerando $g(x) = f(x_0 + x)f(x_0 - x)$, donde $f(x_0) \neq 0$.

(b) Demuestre que existe una función f que satisface $f' = f$ y $f(0) = 1$.

(c) Para dicha función f demuestre que $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ considerando la función $g(x) = f(x+y)/f(x)$.

(d) Demuestre que f es una función uno-uno tal que $(f^{-1})'(x) = 1/x$.

47. Sean f y g dos funciones continuas tales que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Diremos que f *crece más rápido que* g ($f \gg g$) si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty,$$

y que f y g *crecen a la misma velocidad* ($f \sim g$) si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ existe y es } \neq 0, \infty.$$

Por ejemplo, para cualquier función polinómica P con $\lim\limits_{x\to\infty} P(x) = \infty$ (i.e., P no es constante y el coeficiente del término de mayor grado es positivo) tenemos $\exp \gg P$ y $P \gg \log^n$ para cualquier entero positivo n.

(a) Dadas f y g, con $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$, ¿se satisfacen, necesariamente, una de estas tres condiciones $f \gg g$, $g \gg f$ o $f \sim g$?

(b) Si $f \gg g$, entonces $f + g \sim f$.

(c) Si

$$\frac{\log f}{\log g} \geq c > 1$$

para valores de x suficientemente grandes, entonces $f \gg g$.

(d) Si $f \gg g$ y $F(x) = \int_0^x f$, $G(x) = \int_0^x g$, ¿se deduce necesariamente que $F \gg G$?

(e) Ordene cada uno de los siguientes conjuntos de funciones de menor a mayor orden de crecimiento (para mayor comodidad hemos indicado cada función dando su valor en x):

(i) x^3, e^x, $x^3+\log(x^3)$, $\log 4x$, $(\log x)^x$, x^x, $x+e^{-5x}$, $x^3\log x$.

(ii) $x\log^2 x$, e^{5x}, $\log(x^x)$, e^{x^2}, x^x, $x^{\log x}$, $(\log x)^x$.

(iii) e^x, x^e, x^x, e^{x^2}, 2^x, $e^{x/2}$, $(\log x)^{2x}$.

48. Suponga que $g_1, g_2, g_3, \ldots$ son funciones continuas. Demuestre que existe una función continua f que crece más rápidamente que cualquiera de la funciones g_i.

49. Demuestre que $\log_{10} 2$ es un número irracional.

Integración en términos elementales

19

El cálculo de cualquier derivada permite resolver, según el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, una determinada integral. Así por ejemplo,

$$\text{si } F(x) = x(\log x) - x \quad \text{entonces } F'(x) = \log x;$$

por tanto,

$$\int_a^b \log x\, dx = F(b) - F(a) = b(\log b) - b - [a(\log a) - a], \quad 0 < a, b.$$

Las fórmulas de este tipo se simplifican considerablemente si adoptamos la notación

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Entonces podemos escribir

$$\int_a^b \log x\, dx = x(\log x) - x\Big|_a^b.$$

Esta forma de calcular $\int_a^b \log x\, dx$ depende del hallazgo afortunado de que log es la derivada de la función $F(x) = x(\log x) - x$. En general, a una función F que satisface $F' = f$ se la denomina una **primitiva** de f. Por supuesto que **cualquier función continua f siempre posee una primitiva**, concretamente,

$$F(x) = \int_a^x f,$$

pero en el presente capítulo trataremos de hallar una primitiva que pueda expresarse en términos de funciones familiares tales como sen, log, etc. Una función que pueda expresarse de esta forma la denominaremos función elemental. Precisando más, * una **función elemental** es aquella que puede obtenerse mediante la suma, multiplicación, división y composición de funciones racionales, funciones trigonométricas y sus inversas así como las funciones log y exp.

*La definición que vamos a dar será consistente, pero en realidad no es exacta, o al menos no es la habitual. Corrientemente las funciones elementales se definen de tal forma que incluyen a las funciones "algebraicas", es decir, funciones g que satisfacen ecuaciones tales como

$$(g(x))^n + f_{n-1}(x)(g(x))^{n-1} + \cdots + f_0(x) = 0,$$

donde f_i son funciones racionales. Pero para nuestros propósitos estas funciones pueden ser ignoradas.

Debemos decir desde el principio que, en general, no es posible encontrar primitivas elementales. Por ejemplo, no hay ninguna función *elemental* F tal que

$$F'(x) = e^{-x^2} \quad \text{para todo } x$$

(no se trata simplemente de una constatación de nuestra actual ignorancia matemática; hay un teorema, difícil, que establece que una tal función no existe). Y lo que es aún peor, no tendremos forma de saber cuando una primitiva elemental *puede* ser hallada (el lector tendrá que confiar que los problemas de este capítulo no contengan erratas). Debido a lo incierto que resulta la búsqueda de primitivas elementales, el hecho de hallarlas proporciona a menudo satisfacciones particulares. Si observamos que la función

$$F(x) = x \operatorname{arctg} x - \frac{\log(1+x^2)}{2}$$

satisface

$$F'(x) = \operatorname{arctg} x$$

(la manera de llegar a tal resultado es otra historia), de modo que

$$\int_a^b \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \left.\frac{\log(1+x^2)}{2}\right|_a^b,$$

es ahora cuando podemos tener la impresión de que "realmente" hemos calculado $\int_a^b \operatorname{arctg} x \, dx$.

Este capítulo consiste en poco más que el desarrollo de métodos para encontrar primitivas elementales de determinadas funciones elementales (una técnica conocida simplemente como " integración"), junto con notación, abreviaturas y convenios orientados a facilitar este proceso. Esta preocupación por las funciones elementales puede justificarse mediante tres consideraciones:

(1) La integración es un tema clásico de cálculo infinitesimal, del que todo el mundo debe estar algo enterado.

(2) En ocasiones puede ser necesario calcular una integral sin poder consultar cualquiera de las tablas de integrales disponibles de ordinario (por ejemplo, el lector podría estar siguiendo un curso (de física) en el que se espera que sea capaz de integrar).

(3) Los "métodos" más útiles de integración son en realidad teoremas muy importantes (aplicables a todas las funciones no solamente las funciones elementales).

Naturalmente, la razón crucial es la última. Aunque el lector crea que olvidará como se integra (y, con el tiempo, probablemente olvidará alguno de los detalles aprendidos por primera vez), nunca deberá olvidar los métodos básicos.

Estos métodos básicos son teoremas que nos permiten expresar primitivas de una función en términos de primitivas de otras funciones. Para empezar a integrar necesitaremos una lista de primitivas de *algunas* funciones; dicha lista se puede obtener simplemente derivando varias funciones bien conocidas. La lista dada a continuación hace uso de un símbolo estándar que requiere alguna explicación. El símbolo

$$\int f \quad \text{o} \quad \int f(x)\, dx$$

significa "una primitiva de f" o, para ser más precisos, "el conjunto de todas las primitivas de f". El símbolo $\int f$ será usado a menudo en el enunciado de los teoremas, mientras que $\int f(x)\, dx$ es más útil en fórmulas tales como la siguiente:

$$\int x^3\, dx = \frac{x^4}{4}.$$

Esta "ecuación" significa que la función $F(x) = x^4/4$ satisface $F'(x) = x^3$. No puede ser interpretada literalmente porque la derecha de la igualdad es un número, no un función, pero en este contexto vamos a permitir tales discrepancias; nuestro objetivo es hacer de la integración un proceso tan mecánico como sea posible, y para ello recurriremos a cualquier clase de artificios. Otra característica de la ecuación merece destacarse. La mayoría de la gente escribe

$$\int x^3\, dx = \frac{x^4}{4} + C$$

para destacar que las primitivas de $f(x) = x^3$ son precisamente las funciones de la forma $F(x) = x^4/4 + C$ para algún número C. Aunque es posible (Problema 14) llegar a contradicciones si no se tiene en cuenta este punto, en la práctica no suelen surgir tales dificultades, y la preocupación por esta constante no es más que una molestia.

Hay un convenio importante que acompaña esta notación: la letra que aparece en la parte derecha de la ecuación debe ser la misma que aparece después de la letra "d" en la izquierda; así pues

$$\int u^3\, du = \frac{u^4}{4},$$

$$\int t x\, dx = \frac{t x^2}{2},$$

$$\int t x\, dt = \frac{x t^2}{2}.$$

A una función $\int f(x)\, dx$, es decir, a una primitiva de f, se la denomina a menudo "integral indefinida" de f, mientras que $\int_a^b f(x)\, dx$ se la llama, por contraste, "integral definida". Esta atractiva notación funciona bastante bien en la práctica, pero es importante no dejarse confundir por ella. Aún a riesgo de aburrir al lector, hacemos notar una vez más que la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ *no* se define como " $F(b) - F(a)$, donde F es una integral indefinida de f"(si al lector no le parece esta afirmación repetitiva es hora de que vuelva a leer el Capítulo 13).

Podemos comprobar las fórmulas de la siguiente reducida tabla de integrales indefinidas derivando simplemente las funciones indicadas a la derecha.

$$\int a\,dx = ax$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log x$$

$\left(\int \frac{1}{x}\,dx\right.$ se escribe a menudo por conveniencia $\int \frac{dx}{x}$; abreviaciones análogas se usan en los dos últimos ejemplos de esta tabla.)

$$\int e^x\,dx = e^x$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x$$

$$\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \sec x$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x$$

Dos fórmulas generales del mismo estilo son consecuencia de los teoremas propios de la derivación de funciones:

$$\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx,$$

$$\int c\cdot f(x)\,dx = c\cdot \int f(x)\,dx.$$

Estas fórmulas deben interpretarse en el sentido de que una primitiva de $f+g$ puede obtenerse sumando una primitiva de f con una primitiva de g, mientras que una primitiva de $c\cdot f$ puede obtenerse multiplicando una primitiva de f por c.

Observemos las consecuencias de estas fórmulas para el cálculo de integrales definidas: si f y g son continuas, entonces

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$

$$\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\cdot \int_a^b f(x)\,dx.$$

Estos resultados son consecuencia de las fórmulas anteriores, ya que cada integral definida puede expresarse como la diferencia de los valores de una primitiva, correspondiente a dicha integral, en a y en b. La continuidad se precisa para garantizar la existencia de tales primitivas. (Por supuesto que estas fórmulas son también válidas cuando f y g son simplemente funciones integrables, pero recordemos la dificultad que supone demostrarlo en ese caso.)

La fórmula de la derivada del producto proporciona un teorema más interesante, que puede expresarse de distintas formas.

Teorema 1 (Integración por partes). *Si f' y g' son continuas, entonces*

$$\int fg' = fg - \int f'g,$$

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx,$$

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

(Observemos que en la segunda ecuación $f(x)g(x)$ denota la función $f \cdot g$.)

Demostración. La fórmula

$$(fg)' = f'g + fg'$$

puede escribirse como

$$fg' = (fg)' - f'g.$$

Así pues,

$$\int fg' = \int (fg)' - \int f'g,$$

y fg puede escogerse entre una de las funciones designadas por $\int (fg)'$. Esto demuestra la primera fórmula.

La segunda fórmula es simplemente una expresión alternativa de la primera, mientras que la tercera es consecuencia inmediata de cualquiera de las otras dos. ■

Según indican los siguientes ejemplos, la integración por partes es útil cuando la función a integrar puede considerarse como el producto de una función f, cuya derivada es más sencilla que f, por otra función que claramente es de la forma g'.

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x}_{f}\underbrace{e^x}_{g'}\,dx &= \underbrace{x}_{f}\underbrace{e^x}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'}\cdot \underbrace{e^x}_{g}\,dx\\ &= xe^x - e^x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x}_{f}\underbrace{\operatorname{sen} x}_{g'}\,dx &= \underbrace{x}_{f}\cdot \underbrace{(-\cos x)}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'}\cdot \underbrace{(-\cos x)}_{g}\,dx\\ &= -x\cos x + \operatorname{sen} x\end{aligned}$$

Hay dos trucos que a menudo funcionan en la integración por partes. El primero consiste en considerar que la función g' es constante igual a 1, lo cual siempre es posible.

$$\int \log x\,dx = \int \underset{\substack{\downarrow\\ g'}}{1} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\ f}}{\log x}\,dx = \underset{\substack{\downarrow\\ g}}{x}\underset{\substack{\downarrow\\ f}}{\log x} - \int \underset{\substack{\downarrow\\ g}}{x} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\ f'}}{(1/x)}\,dx$$

$$= x(\log x) - x.$$

El segundo truco consiste en utilizar la integración por partes para hallar $\int h$ en función, otra vez, de $\int h$, y después despejar $\int h$ en la ecuación resultante. Un ejemplo sencillo es el cálculo siguiente

$$\int \underset{\substack{\downarrow\\ g'}}{(1/x)} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\ f}}{\log x}\,dx = \underset{\substack{\downarrow\\ g}}{\log x} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\ f}}{\log x} - \int \underset{\substack{\downarrow\\ f'}}{(1/x)} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\ g}}{\log x}\,dx,$$

lo cual implica que

$$2\int \frac{1}{x} \log x\,dx = (\log x)^2$$

o

$$\int \frac{1}{x} \log x\,dx = \frac{(\log x)^2}{2}.$$

A menudo se requiere un cálculo más elaborado:

$$\int \underset{\substack{\downarrow\\ f}}{e^x}\underset{\substack{\downarrow\\ g'}}{\operatorname{sen} x}\,dx = \underset{\substack{\downarrow\\ f}}{e^x} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\ g}}{(-\cos x)} - \int \underset{\substack{\downarrow\\ f'}}{e^x} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\ g}}{(-\cos x)}\,dx$$

$$= -e^x \cos x + \int \underset{\substack{\downarrow\\ u}}{e^x}\underset{\substack{\downarrow\\ v'}}{\cos x}\,dx$$

$$= -e^x \cos x + [\underset{\substack{\downarrow\\ u}}{e^x} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\ v}}{(\operatorname{sen} x)} - \int \underset{\substack{\downarrow\\ u'}}{e^x}\underset{\substack{\downarrow\\ v}}{(\operatorname{sen} x)}\,dx];$$

por tanto,

$$2\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)$$

o

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = \frac{e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)}{2}.$$

Debido a que la integración por partes está basada en el reconocimiento de que una función es de la forma g', cuantas más funciones sepamos integrar tanto mayores serán nuestras posibilidades de éxito. Es con frecuencia conveniente hacer una integración preliminar antes de abordar el problema principal. Por ejemplo, podemos integrar por partes para resolver

$$\int (\log x)^2\, dx = \int \underset{\substack{\downarrow \\ f}}{(\log x)}\underset{\substack{\downarrow \\ g'}}{(\log x)}\, dx$$

si recordamos que $\displaystyle\int \log x\, dx = x(\log x) - x$ (fórmula que fue deducida a su vez mediante integración por partes); tenemos

$$\begin{aligned}
\int \underset{\substack{\downarrow \\ f}}{(\log x)}\underset{\substack{\downarrow \\ g'}}{(\log x)}\, dx &= \underset{\substack{\downarrow \\ f}}{(\log x)}\underset{\substack{\downarrow \\ g}}{[x(\log x) - x]} - \int \underset{\substack{\downarrow \\ f'}}{(1/x)}\underset{\substack{\downarrow \\ g}}{[x(\log x) - x]}\, dx \\
&= (\log x)[x(\log x) - x] - \int [\log x - 1]\, dx \\
&= (\log x)[x(\log x) - x] - \int \log x\, dx + \int 1\, dx \\
&= (\log x)[x(\log x) - x] - [x(\log x) - x] + x \\
&= x(\log x)^2 - 2x(\log x) + 2x.
\end{aligned}$$

El método de integración más importante es consecuencia de la Regla de la Cadena. La aplicación de este método exige bastante más ingenio que la integración por partes, y hasta la explicación del mismo es más difícil. Desarrollaremos por tanto dicho método por etapas, enunciando primero el teorema para integrales definidas, y reservando para más adelante el tratamiento de las integrales indefinidas.

Teorema 2 (La fórmula de sustitución). *Si f y g' son continuas, entonces*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_a^b (f \circ g) \cdot g'$$

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx.$$

Demostración. Si F es una primitiva de f, entonces la parte izquierda de la igualdad es $F(g(b)) - F(g(a))$. Por otra parte,

$$(F \circ g)' = (F' \circ g) \cdot g' = (f \circ g) \cdot g',$$

por tanto $F \circ g$ es una primitiva de $(f \circ g) \cdot g'$ y la parte derecha de la igualdad es igual a

$$(F \circ g)(b) - (F \circ g)(a) = F(g(b)) - F(g(a)). \blacksquare$$

Las aplicaciones más sencillas de la fórmula de sustitución consisten en darse cuenta que una determinada función es de la forma $(f \circ g) \cdot g'$. Por ejemplo, la integración de

$$\int_a^b \operatorname{sen}^5 x \cos x\, dx \ \left(= \int_a^b (\operatorname{sen} x)^5 \cos x\, dx \right)$$

se facilita por la presencia del término $\cos x$, que será el factor $g'(x)$ cuando $g(x) = \operatorname{sen} x$; el término restante, $(\operatorname{sen} x)^5$, puede escribirse como $(g(x))^5 = f(g(x))$, con $f(u) = u^5$. Por tanto

$$\int_a^b \operatorname{sen}^5 x \cos x \, dx \qquad \begin{bmatrix} g(x) &= \operatorname{sen} x \\ f(u) &= u^5 \end{bmatrix}$$

$$= \int_a^b f(g(x))g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$$

$$= \int_{\operatorname{sen} a}^{\operatorname{sen} b} u^5 \, du = \frac{\operatorname{sen}^6 b}{6} - \frac{\operatorname{sen}^6 a}{6}.$$

La integración de $\displaystyle\int_a^b \operatorname{tg} x \, dx$ puede tratarse de forma similar si escribimos

$$\int_a^b \operatorname{tg} x \, dx = -\int_a^b \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx.$$

En este caso el factor $-\operatorname{sen} x$ es $g'(x)$, cuando $g(x) = \cos x$; el factor restante $1/\cos x$ puede escribirse como $f(\cos x)$ para $f(u) = 1/u$. Por tanto

$$\int_a^b \operatorname{tg} x \, dx \qquad \begin{bmatrix} g(x) &= \cos x \\ f(u) &= \dfrac{1}{u} \end{bmatrix}$$

$$= -\int_a^b f(g(x))g'(x)\, dx = -\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$$

$$= -\int_{\cos a}^{\cos b} \frac{1}{u}\, du = \log(\cos a) - \log(\cos b).$$

Finalmente, para hallar

$$\int_a^b \frac{1}{x \log x}\, dx,$$

observemos que $1/x = g'(x)$ donde $g(x) = \log x$, y que $1/\log x = f(g(x))$ para $f(u) = 1/u$. Por tanto

$$\int_a^b \frac{1}{x \log x}\, dx \qquad \begin{bmatrix} g(x) &= \log x \\ f(u) &= \dfrac{1}{u} \end{bmatrix}$$

$$= \int_a^b f(g(x))g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$$

$$= \int_{\log a}^{\log b} \frac{1}{u}\, du = \log(\log b) - \log(\log a).$$

Afortunadamente, estas aplicaciones de la regla de sustitución pueden abreviase considerablemente. Los pasos intermedios que supone escribir

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du,$$

pueden fácilmente eliminarse si observamos lo siguiente: para pasar de la parte izquierda a la derecha de la igualdad,

$$\text{sustituya}\ \begin{cases} g(x) & \text{por } u \\ g'(x)\,dx & \text{por } du \end{cases}$$

(y cambie los límites de integración);

las sustituciones pueden efectuarse directamente en la función original (hecho que justifica el nombre del teorema). Por ejemplo,

$$\int_a^b \operatorname{sen}^5 x \cos x\,dx \left[\text{sustituya}\ \begin{array}{rl} \operatorname{sen} x & \text{por } u \\ \cos x\,dx & \text{por } du \end{array}\right] = \int_{\operatorname{sen} a}^{\operatorname{sen} b} u^5\,du,$$

y de forma análoga

$$\int_a^b \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx \left[\text{sustituya}\ \begin{array}{rl} \cos x & \text{por } u \\ -\operatorname{sen} x\,dx & \text{por } du \end{array}\right] = \int_{\cos a}^{\cos b} \frac{1}{u}\,du.$$

Este método se suele abreviar aún más diciendo simplemente:

$$\text{“Sea}\quad \begin{aligned} u &= g(x) \\ du &= g'(x)\,dx.\text{”} \end{aligned}$$

Por tanto

$$\int_a^b \frac{1}{x \log x}\,dx \left[\begin{array}{ll} \text{sea} & u = \log x \\ & du = \dfrac{1}{x}\,dx \end{array}\right] = \int_{\log a}^{\log b} \frac{1}{u}\,du.$$

En este capítulo estamos interesados en primitivas más que en integrales definidas, pero si podemos calcular $\int_a^b f(x)\,dx$ cualquiera que sean los valores de a y b, entonces ciertamente sabremos hallar $\int f(x)\,dx$. Por ejemplo, puesto que

$$\int_a^b \operatorname{sen}^5 x \cos x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^6 b}{6} - \frac{\operatorname{sen}^6 a}{6},$$

deducimos que

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^6 x}{6}.$$

De forma análoga,

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\log\cos x,$$

$$\int \frac{1}{x \log x}\,dx = \log(\log x).$$

Es bastante poco práctico tratar de obtener primitivas a partir de la fórmula de sustitución hallando primero integrales definidas. En vez de esto, las dos etapas pueden combinarse dando lugar al siguiente proceso:

(1) Hagamos

$$\begin{aligned} u &= g(x), \\ du &= g'(x)\,dx; \end{aligned}$$

(después de estas sustituciones y arreglos solamente debe aparecer la letra u, *ninguna* letra x).

(2) Hallemos a continuación la primitiva correspondiente (en términos de u).

(3) Deshagamos el cambio sustituyendo u por $g(x)$.

Así pues, para calcular

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos x\,dx,$$

(1) hacemos

$$u = \operatorname{sen} x,$$
$$du = \cos x\,dx$$

por tanto obtenemos

$$\int u^5\,du;$$

(2) calculemos

$$\int u^5\,du = \frac{u^6}{6};$$

(3) y no olvidemos deshacer el cambio sustituyendo u por $\operatorname{sen} x$, obteniendo finalmente

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^6 x}{6}.$$

Análogamente, si

$$u = \log x,$$
$$du = \frac{1}{x}\,dx,$$

entonces

$$\int \frac{1}{x\log x}\,dx \quad \text{se convierte en} \quad \int \frac{1}{u}\,du = \log u,$$

y por tanto

$$\int \frac{1}{x\log x}\,dx = \log(\log x).$$

Para calcular

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx,$$

hagamos

$$\begin{aligned} u &= 1+x^2, \\ du &= 2x\,dx; \end{aligned}$$

el factor 2 que acaba de aparecer no supone ningún problema: la integral se convierte en

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\log u,$$

por tanto

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\log(1+x^2).$$

(Este resultado puede combinarse con una integración por partes para obtener una integral mencionada anteriormente:

$$\begin{aligned} \int 1\cdot \operatorname{arctg} x\,dx &= x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx \\ &= x\operatorname{arctg} x - \tfrac{1}{2}\log(1+x^2).) \end{aligned}$$

Estas aplicaciones de la fórmula de sustitución** son ejemplos de los casos más elementales y menos interesantes; una vez reconocido el factor $g'(x)$, el problema puede ser tan fácil que hasta sea posible resolverlo mentalmente. Los tres problemas siguientes requieren solamente la información suministrada por la reducida tabla de integrales indefinidas del comienzo de este capítulo y, naturalmente, la sustitución adecuada (en el tercer problema la sustitución correcta se ha enmascarado ligeramente mediante una argucia algebraica).

$$\int \sec^2 x\,\operatorname{tg}^5 x\,dx,$$

$$\int (\cos x)e^{\operatorname{sen} x}\,dx,$$

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx.$$

**La fórmula de sustitución se expresa a menudo como

$$\int f(u)\,du = \int f(g(x))g'(x)\,dx, \quad u = g(x).$$

Esta fórmula no debe ser considerada literalmente (después de todo, $\int f(u)\,du$ debería significar una primitiva de f y el símbolo $\int f(g(x))g'(x)\,dx$ debería significar una primitiva de $(f\circ g)\cdot g'$; ciertamente éstas no son iguales). Sin embargo, puede ser considerado como un resumen simbólico del procedimiento que hemos desarrollado. Si usamos la notación de Leibniz y un poco de trampa, la expresión queda particularmente bonita:

$$\int f(u)\,du = \int f(u)\frac{du}{dx}\,dx.$$

Si el lector no ha conseguido hallar las sustituciones adecuadas, debería ser capaz de adivinarlas a partir de las soluciones, que son $(\operatorname{tg}^6 x)/6$, $e^{\operatorname{sen} x}$, y $\operatorname{arcsen} e^x$. Al principio estos problemas pueden parecer demasiado difíciles para hacerlos mentalmente, pero por lo menos cuando g es tan sencilla como $g(x) = ax + b$ no se debería perder tiempo escribiendo la sustitución. Las siguientes integraciones deberían estar todas claras. (El único detalle inquietante es la correcta colocación de la constante. ¿La respuesta a la segunda integral debería ser $e^{3x}/3$ o $3e^{3x}$? Personalmente siempre manejo estos problemas como sigue. Evidentemente $\int e^{3x}\,dx = e^{3x}\cdot$ (algo). Ahora si derivamos $F(x) = e^{3x}$, obtenemos $F'(x) = 3e^{3x}$, por tanto este "algo" debe ser $\frac{1}{3}$, para eliminar el 3.)

$$\int \frac{dx}{x+3} = \log(x+3),$$

$$\int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3},$$

$$\int \cos 4x\,dx = \frac{\operatorname{sen} 4x}{4},$$

$$\int \operatorname{sen}(2x+1)\,dx = \frac{-\cos(2x+1)}{2},$$

$$\int \frac{dx}{1+4x^2} = \frac{\operatorname{arctg} 2x}{2}.$$

Aplicaciones más interesantes de la fórmula de sustitución se presentan cuando el factor $g'(x)$ *no* aparece. Hay dos tipos principales de sustituciones en las que esto ocurre. Consideremos en primer lugar

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx.$$

La destacada aparición del término e^x sugiere la sustitución simplificadora

$$u = e^x,$$
$$du = e^x\,dx.$$

Aunque no aparezca la expresión $e^x\,dx$, siempre la podemos intercalar:

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx = \int \frac{1+e^x}{1-e^x}\cdot\frac{1}{e^x}\cdot e^x\,dx.$$

Obtenemos por tanto

$$\int \frac{1+u}{1-u}\cdot\frac{1}{u}\,du,$$

que puede ser resuelta mediante un artificio algebraico

$$\int \frac{1+u}{1-u}\cdot\frac{1}{u}\,du = \int \frac{2}{1-u} + \frac{1}{u}\,du = -2\log(1-u) + \log u,$$

de modo que

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx = -2\log(1-e^x) + \log e^x = -2\log(1-e^x) + x.$$

Hay una forma alternativa, y más adecuada, de tratar este problema, que no requiere multiplicar y dividir por e^x. Si escribimos

$$u = e^x, \quad x = \log u,$$
$$dx = \frac{1}{u}\,du,$$

entonces

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx \quad \text{se convierte inmediatamente en} \quad \int \frac{1+u}{1-u}\cdot\frac{1}{u}\,du.$$

La mayoría de los problemas de sustitución resultan más simples si recurrimos al truco de expresar x en función de u, y dx en función de du, en vez de lo contrario. No es difícil ver por qué este truco da siempre resultado (siempre que la función que expresa u en función de x sea una función uno-uno para todos los x en consideración): si aplicamos la sustitución

$$u = g(x), \quad x = g^{-1}(u)$$
$$dx = (g^{-1})'(u)\,du$$

a la integral

$$\int f(g(x))\,dx,$$

obtenemos

(1) $$\int f(u)(g^{-1})'(u)\,du.$$

Por otra parte, si aplicamos la sustitución directa

$$u = g(x)$$
$$du = g'(x)\,dx$$

a la misma integral,

$$\int f(g(x))\,dx = \int f(g(x))\cdot\frac{1}{g'(x)}\cdot g'(x)\,dx,$$

obtenemos

(2) $$\int f(u)\cdot\frac{1}{g'(g^{-1}(u))}\,du.$$

Las integrales (1) y (2) son idénticas, ya que $(g^{-1})'(u) = 1/g'(g^{-1}(u))$.

Para tener otro determinado ejemplo, consideremos

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx.$$

En este caso llegaremos al extremo de sustituir toda la expresión $\sqrt{e^x+1}$ por una letra. Así pues elegimos la sustitución

$$u = \sqrt{e^x+1},$$
$$u^2 = e^x+1,$$
$$u^2-1 = e^x, \quad x = \log(u^2-1),$$
$$dx = \frac{2u}{u^2-1}\, du.$$

La integral se convierte entonces en

$$\int \frac{(u^2-1)^2}{u} \cdot \frac{2u}{u^2-1}\, du = 2\int u^2-1\, du = \frac{2u^3}{3} - 2u.$$

Así pues

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\, dx = \frac{2}{3}(e^x+1)^{3/2} - 2(e^x+1)^{1/2}.$$

Otro ejemplo, que ilustra el segundo tipo principal de sustituciones que pueden presentarse, es la integral

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx.$$

En este caso, en vez de reemplazar una expresión complicada por una sencilla, reemplazaremos x por sen u, ya que $\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u} = \cos u$. Esto en realidad significa que estamos usando la sustitución $u = \operatorname{arcsen} x$, pero es al escribir x como función de u lo que nos ayuda a encontrar la expresión que ha de reemplazar dx. Por tanto,

$$\begin{aligned} \text{sea} \quad x &= \operatorname{sen} u, \quad [u = \operatorname{arcsen} x] \\ dx &= \cos u\, du; \end{aligned}$$

entonces la integral se convierte en

$$\int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u}\, \cos u\, du = \int \cos^2 u\, du.$$

El cálculo de esta integral se basa en la ecuación

$$\cos^2 u = \frac{1+\cos 2u}{2}$$

(ver más adelante en este capítulo el estudio de las funciones trigonométricas) de forma que

$$\int \cos^2 u\, du = \int \frac{1+\cos 2u}{2}\, du = \frac{u}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2u}{4},$$

y

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2}\, dx &= \frac{\operatorname{arcsen} x}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2 \operatorname{arcsen} x)}{4} \\ &= \frac{\operatorname{arcsen} x}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) \cdot \cos(\operatorname{arcsen} x) \\ &= \frac{\operatorname{arcsen} x}{2} + \frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

La sustitución y la integración por partes son los únicos métodos fundamentales que el lector debe aprender; con su ayuda pueden hallarse primitivas de un gran número de funciones. No obstante, como revelan algunos de nuestros ejemplos, el éxito depende a menudo de algunos artificios adicionales. Seguidamente referiremos los más importantes. Utilizándolos, el lector debería ser capaz de integrar todas las funciones desde el Problema 1 hasta el 10 (unos pocos interesantes artificios complementarios se explicarán en los problemas restantes).

1. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Puesto que

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

y

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x,$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1, \\ \cos 2x &= (1 - \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x, \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2}, \\ \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2}. \end{aligned}$$

Estas fórmulas pueden usarse para integrar

$$\int \operatorname{sen}^n x \, dx,$$

$$\int \cos^n x \, dx,$$

si n es par. Sustituyendo

$$\frac{(1 - \cos 2x)}{2} \quad \text{o} \quad \frac{(1 + \cos 2x)}{2}$$

en vez de $\operatorname{sen}^2 x$ o $\cos^2 x$ se obtiene una suma de términos que contienen potencias inferiores de cos. Por ejemplo,

$$\int \operatorname{sen}^4 x \, dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \int \frac{1}{4}\, dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x \, dx$$

y

$$\int \cos^2 2x \, dx = \int \frac{1 + \cos 4x}{2} \, dx.$$

Si n es impar, $n = 2k+1$, entonces

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = \int \operatorname{sen} x(1-\cos^2 x)^k\,dx;$$

la última expresión, una vez desarrollada, contiene términos de la forma $\operatorname{sen} x \cos^l x$, todos los cuales pueden ser integrados fácilmente. La integral de $\cos^n x$ puede tratarse de forma análoga. Una integral de la forma

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\,dx$$

se trata de la misma forma si n o m es impar. Si n y m son ambos pares, usaremos las fórmulas de $\operatorname{sen}^2 x$ y $\cos^2 x$.

Una última e importante integral trigonométrica es

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \sec x\,dx = \log(\sec x + \operatorname{tg} x).$$

A pesar de que hay varias formas de "deducir" este resultado, mediante los métodos que ya disponemos (Problema 13), es más fácil comprobar esta fórmula derivando la parte derecha de la igualdad y aprendiéndola de memoria.

2. FÓRMULAS DE REDUCCIÓN

Integrando por partes obtenemos (Problema 21)

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx,$$

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x\operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx,$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx = \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\,dx$$

y muchas fórmulas análogas. Las dos primeras, aplicadas repetidamente, proporcionan un método alternativo para hallar primitivas de sen^n o $\cos^n$. La tercera es muy importante para integrar una amplia clase de funciones, con la que completaremos nuestro estudio.

3. FUNCIONES RACIONALES

Consideremos una función racional p/q donde

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0,$$
$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0.$$

No hay inconveniente en suponer que $a_n = b_m = 1$, y además $n < m$, de lo contrario podemos expresar p/q como un polinomio más una función racional que *es* de esta forma sin más que dividir (el siguiente cálculo

$$\frac{u^2}{u-1} = u + 1 + \frac{1}{u-1}$$

es un simple ejemplo). La integración de una función racional arbitraria depende de dos hechos; el primero se deduce del "Teorema Fundamental del Álgebra" (ver el Capítulo 26, Teorema 2 y el Problema 26-3), pero el segundo no será demostrado en este libro.

Teorema. *Cada función polinómica*

$$q(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0$$

puede escribirse como un producto

$$q(x) = (x-\alpha_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{s_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+\beta_l x+\gamma_l)^{s_l}$$

(donde $r_1 + \cdots + r_k + 2(s_1 + \cdots + s_l) = m$).

(En esta expresión, se han agrupado los factores idénticos, por tanto todos los $x-\alpha_i$ y los $x^2+\beta_i x+\gamma_i$ supondremos que son distintos y, además, que cada término cuadrático no se puede factorizar de nuevo. Esto significa que

$$\beta_i{}^2 - 4\gamma_i < 0,$$

ya que de lo contrario se podría factorizar

$$x^2+\beta_i x+\gamma_i = \left[x - \left(\frac{-\beta_i + \sqrt{\beta_i{}^2 - 4\gamma_i}}{2}\right)\right] \cdot \left[x - \left(\frac{-\beta_i - \sqrt{\beta_i{}^2 - 4\gamma_i}}{2}\right)\right]$$

como producto de factores lineales.)

Teorema. *Si $n < m$ y*

$$\begin{aligned} p(x) &= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, \\ q(x) &= x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0 \\ &= (x-\alpha_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{s_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+\beta_l x+\gamma_l)^{s_l}, \end{aligned}$$

entonces $p(x)/q(x)$ puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{q(x)} = &\left[\frac{a_{1,1}}{(x-\alpha_1)} + \cdots + \frac{a_{1,r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}}\right] + \cdots \\ &+ \left[\frac{a_{k,1}}{(x-\alpha_k)} + \cdots + \frac{a_{k,r_k}}{(x-\alpha_k)^{r_k}}\right] \\ &+ \left[\frac{b_{1,1}x + c_{1,1}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)} + \cdots + \frac{b_{1,s_1}x + c_{1,s_1}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{s_1}}\right] + \cdots \\ &+ \left[\frac{b_{l,1}x + c_{l,1}}{(x^2+\beta_l x+\gamma_l)} + \cdots + \frac{b_{l,s_l}x + c_{l,s_l}}{(x^2+\beta_l x+\gamma_l)^{s_l}}\right]. \end{aligned}$$

Esta expresión, conocida como la "descomposición en fracciones simples" de $p(x)/q(x)$, es tan complicada que es más sencillo examinar el siguiente ejemplo, que ilustra tal descomposición e indica como efectuarla. Según el teorema, es posible escribir

$$\frac{2x^7+8x^6+13x^5+20x^4+15x^3+16x^2+7x+10}{(x^2+x+1)^2(x^2+2x+2)(x-1)^2}$$
$$=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{cx+d}{x^2+2x+2}+\frac{ex+f}{x^2+x+1}+\frac{gx+h}{(x^2+x+1)^2}.$$

Para hallar los números a, b, c, d, e, f, g y h, escribiremos la parte derecha de la igualdad como un polinomio dividido por el común denominador $(x^2+x+1)^2(x^2+2x+3)(x-1)^2$; el numerador se convierte en

$$\begin{aligned}&a(x-1)(x^2+2x+2)(x^2+x+1)^2+b(x^2+2x+2)(x^2+x+1)^2\\&\quad+(cx+d)(x-1)^2(x^2+x+1)^2+(ex+f)(x-1)^2(x^2+2x+2)(x^2+x+1)\\&\quad+(gx+h)(x-1)^2(x^2+2x+2).\end{aligned}$$

En realidad, desarrollando esta expresión (!) obtenemos un polinomio de grado 8, cuyos coeficientes dependen de $a,\dots,h$. Igualando estos coeficientes con los coeficientes de $2x^7+8x^6+13x^5+20x^4+15x^3+16x^2+7x+10$ (el coeficiente de x^8 es 0) obtenemos 8 ecuaciones con las ocho incógnitas $a,\dots,h$. Después de cálculos laboriosos, éstas pueden resolverse, obteniendo

$$\begin{aligned}a&=1, & b&=2, & c&=1, & d&=3,\\ e&=0, & f&=0, & g&=0, & h&=1.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\int\frac{2x^7+5x^6+13x^5+20x^4+17x^3+16x^2+7x+7}{(x^2+x+1)^2(x^2+2x+2)(x-1)^2}\,dx$$
$$=\int\frac{1}{(x-1)}\,dx+\int\frac{2}{(x-1)^2}\,dx+\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx+\int\frac{x+3}{x^2+2x+2}\,dx.$$

(En casos más sencillos los cálculos requeridos pueden ser en realidad más asequibles. Obtuve este ejemplo concreto *partiendo* de la descomposición en fracciones simples hasta convertirla en una única fracción.)

Ya estamos en condiciones de encontrar cada una de las integrales que aparecen en la expresión anterior; los cálculos ilustrarán todas las dificultades que surgen en la integración de funciones racionales.

Las dos primeras integrales son simples:

$$\int\frac{1}{x-1}\,dx=\log(x-1),$$
$$\int\frac{2}{(x-1)^2}\,dx=\frac{-2}{x-1}.$$

La tercera integral se basa en "completar el cuadrado":

$$\begin{aligned} x^2+x+1 &= (x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4} \\ &= \frac{3}{4}\left[\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2+1\right]. \end{aligned}$$

(Si hubiésemos obtenido $-\frac{3}{4}$ en vez de $\frac{3}{4}$ no podríamos haber tomado la raíz cuadrada, pero en ese caso nuestro factor cuadrático original podría haberse factorizado como producto de factores lineales.) Podemos ahora escribir

$$\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \frac{16}{9}\int \frac{1}{\left[\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2+1\right]^2}\,dx.$$

La sustitución

$$\begin{aligned} u &= \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}, \\ du &= \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\,dx, \end{aligned}$$

transforma esta integral en

$$\frac{16}{9}\int \frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{(u^2+1)^2}\,du,$$

que puede ser calculada usando la tercera fórmula de reducción dada anteriormente.

Finalmente, para calcular

$$\int \frac{x+3}{(x^2+2x+2)}\,dx$$

escribimos

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx + \int \frac{2}{(x+1)^2+1}\,dx.$$

La primera integral del segundo miembro de la anterior igualdad ha sido construida para que podamos calcularla mediante la sustitución

$$\begin{aligned} u &= x^2+2x+2, \\ du &= (2x+2)\,dx. \end{aligned}$$

La segunda integral del segundo miembro, que es igual a la diferencia entre las otras dos, es simplemente $2\operatorname{arctg}(x+1)$. Si la integral original fuera

$$\int \frac{x+3}{(x^2+2x+2)^n}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^n}\,dx + \int \frac{2}{[(x+1)^2+1]^n}\,dx,$$

la primera integral de la derecha de la igualdad se calcularía igualmente mediante la misma sustitución. La segunda integral se calcularía por medio de una fórmula de reducción.

Este ejemplo probablemente ha convencido al lector que la integración de las funciones racionales es sólo una curiosidad teórica, principalmente porque es necesario encontrar la factorización de $q(x)$ antes de poder comenzar siquiera. Esto es sólo parcialmente cierto. Ya hemos visto que en ocasiones se presentan funciones racionales sencillas, como en la integración de

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx;$$

otro importante ejemplo es la integral

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}\log(x-1) - \frac{1}{2}\log(x+1).$$

Por otra parte, si podemos reducir un problema a la la integración de una función racional, entonces es seguro que existe una primitiva elemental, aun cuando la dificultad o imposibilidad de hallar los factores del denominador pueda impedir escribir dicha primitiva de forma explícita.

Problemas

1. Este problema contiene algunas integrales que requieren poco más que cierta manipulación algebraica, y por lo tanto evalúan la habilidad del lector para descubrir trucos algebraicos, más que su comprensión de los procesos de integración. Sin embargo, cualquiera de estos trucos pueden ser un importante paso preliminar para un problema decente de integración. Además, el lector puede desarrollar su capacidad para reconocer cuando una integral es fácil y, por tanto, en que momento se vislumbra el final del proceso de integración. La sección de soluciones, si el lector tiene que recurrir a ella, sólo indicará que manipulación algebraica se debería haber utilizado.

(i) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$ (ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}.$ (iii) $\displaystyle\int \frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}}{e^{4x}}\,dx.$ (iv) $\displaystyle\int \frac{a^x}{b^x}\,dx.$

(v) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,dx.$ Las integrales trigonométricas son siempre muy delicadas, ya que hay tantas identidades trigonométricas que un problema fácil puede, con frecuencia, parecer difícil.

(vi) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2}.$ (vii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$ (viii) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x}.$

(ix) $\displaystyle\int \frac{8x^2+6x+4}{x+1}\,dx.$ (x) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx.$

2. Las siguientes integrales requieren simples sustituciones, la mayoría de las cuales deberían poder hacerse mentalmente.

(i) $\displaystyle\int e^x \operatorname{sen} e^x\,dx.$ (ii) $\displaystyle\int xe^{-x^2}\,dx.$

(iii) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\,dx.$ (En el texto esta integral se resolvió por partes.)

(iv) $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+2e^x+1}.$ (v) $\displaystyle\int e^{e^x}e^x\,dx.$

(vi) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}.$ (vii) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$

(viii) $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\,dx.$ (ix) $\displaystyle\int \log(\cos x)\operatorname{tg} x\,dx.$

(x) $\displaystyle\int \frac{\log(\log x)}{x\log x}\,dx.$

3. Integración por partes.

(i) $\displaystyle\int x^2e^x\,dx.$ (ii) $\displaystyle\int x^3e^{x^2}\,dx.$

(iii) $\displaystyle\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx.$ (iv) $\displaystyle\int x^2\operatorname{sen} x\,dx.$

(v) $\displaystyle\int (\log x)^3\,dx.$ (vi) $\displaystyle\int \frac{\log(\log x)}{x}\,dx.$

(vii) $\displaystyle\int \sec^3 x\,dx.$ (Ésta es una integral artificiosa e importante que se presenta a menudo. Si no consigue resolverla, debe consultar la solución.)

(viii) $\displaystyle\int \cos(\log x)\,dx.$ (ix) $\displaystyle\int \sqrt{x}\log x\,dx.$

(x) $\displaystyle\int x(\log x)^2\,dx.$

4. Las siguientes integraciones se pueden hacer todas con sustituciones de la forma $x = \operatorname{sen} u$, $x = \cos u$, etc. Para realizar alguna de ellas es preciso recordar que

$$\int \sec x\,dx = \log(\sec x + \operatorname{tg} x)$$

así como la siguiente expresión, que puede comprobarse derivando:

$$\int \operatorname{cosec} x\,dx = -\log(\operatorname{cosec} x + \operatorname{ctg} x).$$

Además, las derivadas de las funciones trigonométricas deberían tenerse ahora muy a mano.

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$ (Esta integral es ya conocida por el lector, pero haga de todos modos la sustitución $x = \operatorname{sen} u$, sólo para ver el resultado.)

(ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$ (Ya que $\operatorname{tg}^2 u + 1 = \sec^2 u$, conviene usar la sustitución $x = \operatorname{tg} u$.)

(iii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}.$

(iv) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. (La solución será una determinada función inversa a la que se dio poca importancia en el texto.)

(v) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$.

(vi) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

(vii) $\displaystyle\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$.

(viii) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$.

(Hará falta recordar los métodos de integración de las potencias de sen y cos).

(ix) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,dx$. (x) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,dx$.

5. Las siguientes integraciones requieren sustituciones de varios tipos. Lo que no se puede sustituir es la agudeza de ingenio, pero hay una regla general a seguir: suele ser útil sustituir una expresión que aparece con frecuencia o en un lugar destacado, y si dos expresiones complicadas diferentes aparecen, las trataremos de expresar en términos de una nueva. Y no se olvide que por lo general conviene expresar x directamente como función de u, para hallar el término adecuado que ha de sustituir dx.

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$.

(ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x}$.

(iii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

(iv) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$. (La sustitución $u = e^x$ nos lleva a una integral que requiere una nueva sustitución; ello es correcto, pero ambas sustituciones pueden realizarse a la vez.)

(v) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\operatorname{tg} x}$.

(vi) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}$. (Otro ejemplo en que una única sustitución puede hacer el trabajo de dos.)

(vii) $\displaystyle\int \frac{4^x+1}{2^x+1}\,dx$.

(viii) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx$.

(ix) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}\,dx$. (En este caso es preferible realizar dos sustituciones sucesivas; hay dos candidatos evidentes para la primera sustitución, y cualquiera de ellos servirá.)

*(x) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{1}{x^2}\,dx$.

6. El problema anterior nos ha proporcionado gratuitamente una selección al azar de funciones racionales a integrar. Damos aquí una selección más sistemática.

(i) $\displaystyle\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}\,dx.$

(ii) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^3-3x^2+3x-1}\,dx.$

(iii) $\displaystyle\int \frac{x^3+7x^2-5x+5}{(x-1)^2(x+1)^3}\,dx.$

(iv) $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+1}{(x+3)(x-1)^2}\,dx.$

(v) $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+1}\,dx.$

(vi) $\displaystyle\int \frac{x^3+x+2}{x^4+2x^2+1}\,dx.$

(vii) $\displaystyle\int \frac{3x^2+3x+1}{x^3+2x^2+2x+1}\,dx.$

(viii) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}.$

(ix) $\displaystyle\int \frac{2x}{(x^2+x+1)^2}\,dx.$

(x) $\displaystyle\int \frac{3x}{(x^2+x+1)^3}\,dx.$

***7.** Halle $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^n-x^2}}$, integral que parece muy diferente a las efectuadas hasta ahora. Indicación: Resulta de utilidad escribir $(x^n-x^2)^{1/2}=x(x^{n-2}-1)^{1/2}$. Indicación adicional 1: Pruebe una sustitución de la forma $u^2=\dots$ para obtener una solución en la que aparezca la función arctg. Indicación adicional 2: Ensaye una sustitución de la forma $y=x^\alpha$ para obtener una solución en la que aparezca la función arcsen.

***8.** Miscelánea (sin restricciones). Las siguientes integraciones requieren todos los métodos de los problemas anteriores

(i) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx.$

(ii) $\displaystyle\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}\,dx.$

(iii) $\displaystyle\int \log\sqrt{1+x^2}\,dx.$

(iv) $\displaystyle\int x\log\sqrt{1+x^2}\,dx.$

(v) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,dx.$

(vi) $\displaystyle\int \operatorname{arcsen}\sqrt{x}\,dx.$

(vii) $\displaystyle\int \frac{x}{1+\operatorname{sen} x}\,dx.$

(viii) $\displaystyle\int e^{\operatorname{sen} x}\cdot\frac{x\cos^3 x-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx.$

(ix) $\displaystyle\int \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx.$

(x) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6+1}.$
(Para descomponer x^6+1 en factores, descomponga primero y^3+1, utilizando el Problema 1-1.)

Los dos siguientes problemas proporcionan todavía más práctica de integración, si el lector la necesita (y puede soportarla). El Problema 9 requiere manipulaciones algebraicas y trigonométricas e integración por partes, mientras que el Problema 10 requiere sustituciones. (Naturalmente, en muchos casos, las integrales resultantes requerirán todavía otras manipulaciones.)

9. Resuelva las siguientes integrales.

(i) $\displaystyle\int \log(a^2+x^2)\,dx.$ (ii) $\displaystyle\int \frac{1+\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx.$

(iii) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx.$ (iv) $\displaystyle\int x\operatorname{arctg} x\,dx.$

(v) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\,dx.$ (vi) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^2 x}\,dx.$

(vii) $\displaystyle\int x^2\operatorname{arctg} x\,dx.$ (viii) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-2x+2}}.$

(ix) $\displaystyle\int \sec^3 x\operatorname{tg} x\,dx.$ (x) $\displaystyle\int x\operatorname{tg}^2 x\,dx.$

10. Resuelva las siguientes integrales.

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}.$ (ii) $\displaystyle\int \sqrt{1-\operatorname{sen} x}\,dx.$

(iii) $\displaystyle\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx.$ (iv) $\displaystyle\int \operatorname{sen}\sqrt{x+1}\,dx.$

(v) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^3-2}}{x}\,dx.$ (vi) $\displaystyle\int \log(x+\sqrt{x^2-1})\,dx.$ $\Bigg\{$ Hay una sustitución obvia que se puede intentar, pero la integración por partes es mucho más fácil. Comparar las respuestas obtenidas puede ser instructivo.

(vii) $\displaystyle\int \log(x+\sqrt{x})\,dx.$ (viii) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-x^{3/5}}.$

(ix) $\displaystyle\int (\operatorname{arcsen} x)^2\,dx.$ (x) $\displaystyle\int x^5\operatorname{arctg}(x^2)\,dx.$

11. Si el lector ha resuelto el Problema 18-10, las integrales (ii) y (iii) en el Problema 4 le resultaran familiares. En general, la sustitución $x=\cosh u$ a menudo funciona para integrales que contienen el término $\sqrt{x^2-1}$, mientras que $x=\operatorname{senh} u$ es lo indicado para integrales que contienen $\sqrt{x^2+1}$. Pruebe estas sustituciones en las otras integrales del Problema 4. (El método no es en realidad recomendable; es más fácil atenerse a las sustituciones trigonométricas.)

***12.** La sustitución más ingeniosa del mundo es sin duda

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\quad x=2\operatorname{arctg} t,\quad dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Tal como encontramos en el Problema 15-17, esta sustitución conduce a las expresiones

$$\operatorname{sen} x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

y permite transformar cualquier integral que contenga exclusivamente las funciones sen y cos, combinadas con la suma, producto y división, en una integral de una función racional. Halle

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x}$. (Compare su respuesta con la obtenida en el Problema 1(viii).)

(ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\operatorname{sen}^2 x}$. (En este caso es mejor efectuar la sustitución $t = \operatorname{tg} x$. ¿Por qué?)

(iii) $\displaystyle\int \frac{dx}{a \operatorname{sen} x + b\cos x}$. (Hay otra forma de resolverla, utilizando el Problema 15-8.)

(iv) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$. (Un ejercicio destinado al lector para convencerle de que esta sustitución debe usarse sólo como último recurso.)

(v) $\displaystyle\int \frac{dx}{3+5\operatorname{sen} x}$. (Un último recurso.)

13. Deduzca la fórmula de $\int \sec x\, dx$ de las dos maneras siguientes:

(a) Escribiendo

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos x} &= \frac{\cos x}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen}^2 x}\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} + \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}\right],\end{aligned}$$

expresión claramente inspirada en la descomposición de una función racional en fracciones simples. Observe bien el lector que $\displaystyle\int \cos x/(1-\operatorname{sen} x)\, dx = -\log(1-\operatorname{sen} x)$; el signo menos es muy importante. Y recuerde que $\frac{1}{2}\log \alpha = \log\sqrt{\alpha}$. De ahí en adelante, siga calculado, y confíe en el éxito.

(b) Usando la sustitución $t = \operatorname{tg} x/2$. Una vez más, se requerirá una larga manipulación hasta obtener la solución en la forma deseada; la expresión $\operatorname{tg} x/2$ puede abordarse utilizando el Problema 15-9, o ambas soluciones pueden expresarse en función de t. Existe otra expresión para $\int \sec x\, dx$, que resulta menos engorrosa que $\log(\sec x + \operatorname{tg} x)$; utilizando el Problema 15-9, obtenemos

$$\int \sec x\, dx = \log\left(\frac{1+\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}\right) = \log\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Esta última expresión fue en realidad la primera en descubrirse y fue obtenida, no por el ingenio de un matemático, sino por un casual hecho histórico: en 1599 Wright calculó tablas náuticas que equivalían a integrales definidas de la función sec. Cuando se editaron las primeras tablas de logaritmos de tangentes, se observó de inmediato la correspondencia entre ambas tablas (pero la coincidencia permaneció sin explicación hasta la invención del cálculo infinitesimal).

14. La deducción de $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$ proporcionada en el texto parece demostrar que la única primitiva de $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$ es $F(x) = e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)/2$, mientras que $F(x) = e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)/2 + C$ es también una primitiva, cualquiera que sea la constante C. ¿De donde proviene la constante C? (¿Cuál es el significado de la ecuación

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx?)$$

15. Suponga que f'' es continua y que

$$\int_0^{\pi} [f(x) + f''(x)] \operatorname{sen} x\, dx = 2.$$

Dado que $f(\pi) = 1$, calcule $f(0)$.

16. (a) Halle $\int \operatorname{arcsen} x\, dx$, utilizando el mismo artificio que sirvió para las funciones log y arctg.

*(b) Generalize este artificio: halle $\int f^{-1}(x)\, dx$ en términos de $\int f(x)\, dx$. Compare el resultado con los Problemas 12-21 y 14-14.

17. (a) Halle $\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$ de dos formas diferentes: en primer lugar usando una fórmula de reducción, y después usando la fórmula de $\operatorname{sen}^2 x$.

(b) Combine sus respuestas para obtener una identidad trigonométrica digna de mención.

18. Exprese $\int \log(\log x)\, dx$ en términos de $\int (\log x)^{-1}\, dx$. (Ninguna de las dos son expresables en términos de funciones elementales.)

19. Exprese $\int x^2 e^{-x^2}\, dx$ en términos de $\int e^{-x^2}\, dx$.

20. Demuestre que la función $f(x) = e^x/(e^{5x} + e^x + 1)$ tiene una primitiva elemental. (¡No trate de hallarla!)

21. Demuestre las fórmulas de reducción del texto. Para la tercera escriba

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \int \frac{x^2\, dx}{(x^2+1)^n}$$

y trabaje con la última integral. (Otra posibilidad es usar la sustitución $x = \operatorname{tg} u$.)

22. Encuentre una fórmula de reducción para

(a) $\int x^n e^x\, dx$.

(b) $\int (\log x)^n\, dx$.

***23.** Demuestre que

$$\int_1^{\cosh x} \sqrt{t^2 - 1}\, dt = \frac{\cosh x \operatorname{senh} x}{2} - \frac{x}{2}.$$

(Vea en el Problema 18-7 la importancia de dicho cálculo.)

24. Demuestre que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx.$$

(Una interpretación geométrica clarifica dicha igualdad, que resulta un buen ejercicio en el manejo de los límites de integración cuando efectuamos una sustitución.)

25. Demuestre que el área de un círculo de radio r es πr^2. (Naturalmente el lector debe recordar que π está definido como el área de un circulo unidad.)

26. Sea ϕ una función no negativa e integrable tal que $\phi(x) = 0$ para $|x| \geq 1$ y tal que $\int_{-1}^{1} \phi = 1$. Para $h > 0$, sea

$$\phi_h(x) = \frac{1}{h}\phi(x/h).$$

(a) Demuestre que $\phi_h(x) = 0$ para $|x| \geq h$ y que $\int_{-h}^{h} \phi_h = 1$.

(b) Sea f una función integrable en $[-1,1]$ y continua en 0. Demuestre que

$$\lim_{h\to 0^+} \int_{-1}^{1} \phi_h f = \lim_{h\to 0^+} \int_{-h}^{h} \phi_h f = f(0).$$

(c) Demuestre que

$$\lim_{h\to 0^+} \int_{-1}^{1} \frac{h}{h^2+x^2}\,dx = \pi.$$

Este último apartado de este problema puede parecer, a primera vista, completamente análogo al apartado (b), pero en realidad requiere un argumento más cuidadoso.

(d) Sea f una función integrable en $[-1,1]$ y continua en 0. Demuestre que

$$\lim_{h\to 0^+} \int_{-1}^{1} \frac{h}{h^2+x^2} f(x)\,dx = \pi f(0).$$

Indicación: Si h es pequeña, entonces $h/(h^2+x^2)$ será pequeña en la mayor parte de $[-1,1]$.

Los dos siguientes problemas utilizan la fórmula

$$\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta)^2\,d\theta,$$

deducida en el Problema 13-24, para el área de una región limitada por la gráfica de una función f expresada en coordenadas polares.

27. Para cada una de las siguientes funciones, encuentre el área limitada por las gráficas en coordenadas polares. (Tenga cuidado al determinar el rango de variación adecuado de θ, ¡de lo contrario obtendrá resultados absurdos!)

(i) $f(\theta) = a \operatorname{sen}\theta$.

(ii) $f(\theta) = 2 + \cos\theta$.

(iii) $f(\theta)^2 = 2a^2 \cos 2\theta$.

(iv) $f(\theta) = a\cos 2\theta$.

28. La Figura 1 muestra la gráfica de f en coordenadas polares; la región OAB por tanto tiene área $\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta)^2\,d\theta$. Ahora suponga que esta gráfica también es la gráfica ordinaria de una cierta función g. Entonces la región OAB también tiene área

$$\text{área } \Delta Ox_1B + \int_{x_1}^{x_0} g - \text{ área } \Delta Ox_0A.$$

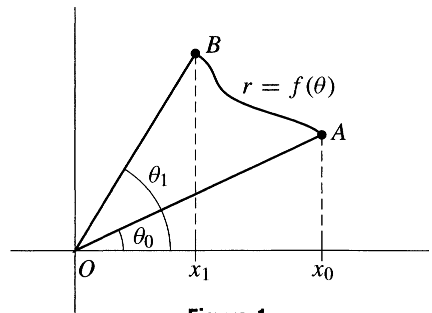


Figura 1

Demuestre con argumentos analíticos que estos dos números coinciden. Indicación: La función g está determinada por las ecuaciones

$$x = f(\theta)\cos\theta, \qquad g(x) = f(\theta)\operatorname{sen}\theta.$$

Los siguientes cuatro problemas utilizan las fórmulas deducidas en los Problemas 3 y 4 del Apéndice del Capítulo 13, para la longitud de una curva representada paramétricamente (y, en particular, de las gráficas de funciones expresadas en coordenadas polares).

29. Sea c una curva representada paramétricamente por u y v en $[a,b]$, y sea h una función creciente tal que $h(\bar{a}) = a$ y $h(\bar{b}) = b$. Entonces en $[\bar{a},\bar{b}]$ las funciones $\bar{u} = u \circ h$, $\bar{v} = v \circ h$ proporcionan una representación paramétrica de otra curva $\bar{c}$; intuitivamente, $\bar{c}$ no es más que la misma curva c descrita a diferente velocidad.

(a) Demuestre, directamente a partir de la definición de longitud, que la longitud de c en $[a,b]$ coincide con la longitud de $\bar{c}$ en $[\bar{a},\bar{b}]$.

(b) Suponiendo que todas las funciones que intervengan sean diferenciables, demuestre que las longitudes son iguales usando la fórmula integral de la longitud, así como la sustitución apropiada.

30. Encuentre la longitud de las siguientes curvas, cada una de ellas descrita mediante la gráfica de una función, excepto (iii), que está representada en forma paramétrica.

(i) $f(x) = \frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}, \qquad 0 \le x \le 1.$

(ii) $f(x) = x^3 + \frac{1}{12x}, \qquad 1 \le x \le 2.$

(iii) $x = a^3\cos^3 t, \qquad y = a^3\operatorname{sen}^3 t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$

(iv) $f(x) = \log(\cos x), \qquad 0 \le x \le \pi/6.$

(v) $f(x) = \log x, \qquad 1 \le x \le e.$

(vi) $f(x) = \operatorname{arcsen} e^x, \qquad -\log 2 \le x \le 0.$

31. Para las siguientes funciones, encuentre la longitud de las gráficas en coordenadas polares.

(i) $f(\theta) = a\cos\theta$. (ii) $f(\theta) = a(1-\cos\theta)$.

(iii) $f(\theta) = a\,\mathrm{sen}^2(\theta/2)$. (iv) $f(\theta) = \theta \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$.

(v) $f(\theta) = 3\sec\theta \qquad 0 \le \theta \le \pi/3$.

32. En el Problema 8 del Apéndice del Capítulo 12 describimos la curva cicloide, cuya representación paramétrica es

$$x = u(t) = a(t - \mathrm{sen}\,t), \qquad y = v(t) = a(1-\cos t).$$

(a) Encuentre la longitud de un arco de la cicloide. [Respuesta: $8a$.]

(b) Recuerde que la curva cicloide es el gráfico de $v \circ u^{-1}$. Encuentre el área bajo un arco de la cicloide utilizando la sustitución apropiada en $\displaystyle\int f$ y calculando la integral resultante. [Respuesta: $3\pi a^2$.]

33. Utilice un razonamiento por inducción e integración por partes para generalizar el Problema 14-10:

$$\int_0^x \frac{f(u)(x-u)^n}{n!}\,du = \int_0^x \left(\int_0^{u_n} \left(\dots \left(\int_0^{u_1} f(t)\,dt \right) du_1 \right) \dots \right) du_n.$$

34. Si f' es continua en $[a,b]$, utilice integración por partes para demostrar el Lema de Riemann-Lebesgue para f:

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b f(t)\,\mathrm{sen}(\lambda t)\,dt = 0.$$

Este resultado es simplemente un caso especial del Problema 15-26, pero puede emplearse para demostrar el caso general (en gran parte del mismo modo que el Lema de Riemann-Lebesgue se demostró en el Problem 15-26 a partir del caso especial en que f era una función escalonada).

35. El Teorema del Valor Medio para Integrales fue introducido en el Problem 13-23. El “Segundo Teorema del Valor Medio para Integrales” establece lo siguiente. Supongamos que f es integrable en $[a,b]$ y que ϕ es o bien no decreciente o no creciente en $[a,b]$. Entonces existe un número ξ en $[a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\phi(x)\,dx = \phi(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx + \phi(b)\int_{\xi}^b f(x)\,dx.$$

En este problema supondremos que f es continua y que ϕ es diferenciable, con derivada continua ϕ'.

(a) Demuestre que si el resultado es verdadero para funciones no crecientes ϕ, entonces es también verdadero para funciones no decrecientes ϕ.

(b) Demuestre que si el resultado es verdadero para funciones no crecientes ϕ tales que $\phi(b)=0$, entonces es también verdadero para cualquier función no creciente ϕ.

Por tanto, podemos suponer que ϕ es no creciente y $\phi(b)=0$. En ese caso, hemos de demostrar que

$$\int_a^b f(x)\phi(x)\,dx = \phi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx.$$

(c) Pruebe este resultado utilizando integración por partes.

(d) Demuestre que la hipótesis de que ϕ es o bien no decreciente o no creciente es necesaria.

A partir de este caso especial del Segundo Teorema del Valor Medio para Integrales, podría deducirse el caso general mediante argumentos de aproximación, tal como en el Lema de Riemann-Lebesgue. Pero hay una forma más instructiva, esbozada en el siguiente problema.

36. (a) Dados $a_1,\dots,a_n$ y $b_1,\dots,b_n$, sea $s_k=a_1+\cdots+a_k$. Demuestre que

$$(*)\qquad \begin{aligned} a_1b_1+\cdots+a_nb_n &= s_1(b_1-b_2)+s_2(b_2-b_3)\\ &\quad +\cdots+s_{n-1}(b_{n-1}-b_n)+s_nb_n. \end{aligned}$$

Esta fórmula que desarma por su simpleza es conocida a veces como "fórmula de Abel de sumación por partes." Puede ser considerada como un análogo para sumas de la fórmula de integración por partes

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b f(x)g'(x)\,dx,$$

especialmente si usamos sumas de Riemann (Capítulo 13, Apéndice). En efecto, para una partición $P=\{t_0,\dots,t_n\}$ de $[a,b]$, el lado izquierdo de la igualdad es aproximadamente igual a

$$(1)\qquad \sum_{k=1}^n f'(t_k)g(t_{k-1})(t_k-t_{k-1}),$$

mientras que el lado derecho es aproximadamente igual a

$$f(b)g(b)-f(a)g(a)-\sum_{k=1}^n f(t_k)g'(t_k)(t_k-t_{k-1})$$

el cual es aproximadamente

$$\begin{aligned} f(b)g(b)-f(a)g(a)&-\sum_{k=1}^n f(t_k)\frac{g(t_k)-g(t_{k-1})}{t_k-t_{k-1}}(t_k-t_{k-1})\\ &= f(b)g(b)-f(a)g(a)+\sum_{k=1}^n f(t_k)[g(t_{k-1})-g(t_k)]\\ &= f(b)g(b)-f(a)g(a)+\sum_{k=1}^n [f(t_k)-f(a)]\cdot[g(t_{k-1})-g(t_k)]\\ &\qquad +f(a)\sum_{k=1}^n g(t_{k-1})-g(t_k). \end{aligned}$$

Puesto que la suma situada más a la derecha es exactamente $g(a)-g(b)$, esto permite obtener

(2) $$[f(b)-f(a)]g(b)+\sum_{k=1}^{n}[f(t_k)-f(a)]\cdot[g(t_{k-1})-g(t_k)].$$

Si escogemos

$$a_k = f'(t_k)(t_k-t_{k-1}), \qquad b_k = g(t_{k-1})$$

entonces

(1) $$\text{es} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k b_k,$$

que resulta ser la parte izquierda de $(*)$, mientras que

$$s_k=\sum_{i=1}^{k} f'(t_i)(t_i-t_{i-1}) \quad \text{es aproximadamente} \quad \sum_{i=1}^{k} f(t_i)-f(t_{i-1}) = f(t_k)-f(a),$$

por tanto

(2) $$\text{es aproximadamente} \qquad s_n b_n + \sum_{k=1}^{n} s_k(b_k-b_{k-1}),$$

que resulta ser el lado derecho de $(*)$.

Esta discusión no pretende sugerir que la fórmula de Abel pueda en realidad ser deducida a partir de la fórmula de integración por partes, o *viceversa*. Pero, como veremos, la fórmula de Abel puede a menudo ser utilizada como una alternativa a la integración por partes cuando las funciones que intervienen no sean diferenciables.

(b) Suponga que $\{b_n\}$ es no creciente, con $b_n \geq 0$ para cualquier n, y que

$$m \leq a_1 + \cdots + a_n \leq M$$

para todo n. Demuestre el Lema de Abel:

$$b_1 m \leq a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \leq b_1 M.$$

(Y, además,

$$b_k m \leq a_k b_k + \cdots + a_n b_n \leq b_k M,$$

una fórmula que aparenta ser más general, pero que en realidad no lo es.)

(c) Sea f una función integrable en $[a,b]$ y sea ϕ una función no creciente en $[a,b]$ tal que $\phi(b)=0$. Sea $P=\{t_0,\ldots,t_n\}$ una partición de $[a,b]$. Demuestre que la suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\phi(t_{i-1})(t_i-t_{i-1})$$

está entre la más pequeña y la más grande de las siguientes sumas

$$\phi(a)\sum_{i=1}^{k} f(t_{i-1})(t_i-t_{i-1}).$$

Concluya que

$$\int_a^b f(x)\phi(x)\,dx$$

está entre el mínimo y el máximo de

$$\phi(a)\int_a^x f(t)\,dt,$$

y que por tanto es igual a $\phi(a)\displaystyle\int_a^{\xi} f(t)\,dt$ para algún ξ en $[a,b]$.

37. (a) Demuestre que las dos siguientes integrales impropias son convergentes.

(i) $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}\left(x+\frac{1}{x}\right)dx.$ (ii) $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}^2\left(x+\frac{1}{x}\right)dx.$

(b) Determine cuales de las siguientes integrales impropias son convergentes.

(i) $\displaystyle\int_1^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)dx.$ (ii) $\displaystyle\int_1^{\infty} \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right)dx.$

38. (a) Calcule la integral (impropia) $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx.$

(b) Demuestre que la integral impropia $\displaystyle\int_0^{\pi} \log(\operatorname{sen} x)\,dx$ converge.

(c) Utilice la sustitución $x = 2u$ para demostrar que

$$\int_0^{\pi} \log(\operatorname{sen} x)\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \log(\operatorname{sen} x)\,dx + 2\int_0^{\pi/2} \log(\cos x)\,dx + \pi\log 2.$$

(d) Calcule $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log(\cos x)\,dx.$

(e) Utilizando la relación $\cos x = \operatorname{sen}(\pi/2 - x)$, calcule $\displaystyle\int_0^{\pi} \log(\operatorname{sen} x)\,dx.$

39. Demuestre la siguiente versión de integración por partes para integrales impropias:

$$\int_a^{\infty} u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^{\infty} - \int_a^{\infty} u(x)v'(x)\,dx.$$

El primer símbolo del segundo término de la igualdad significa, evidentemente,

$$\lim_{x\to\infty} u(x)v(x) - u(a)v(a).$$

***40.** Una de las más importantes funciones en Análisis Matemático es la función Gamma,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt.$$

(a) Demuestre que la integral impropia $\Gamma(x)$ está bien definida si $x > 0$.

(b) Utilice integración por partes (en concreto, la versión para integrales impropias del problema anterior) para demostrar que

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

(c) Demuestre que $\Gamma(1) = 1$, y concluya que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para todos los números naturales n.

La función Gamma por tanto proporciona un simple ejemplo de una función continua que "interpola" el valor de $n!$ para números naturales n. Evidentemente hay infinitas funciones continuas f tales que $f(n) = (n-1)!$; hay incluso infinitas funciones continuas f que verifican $f(x+1) = xf(x)$ para cualquier $x > 0$. Sin embargo, la función Gamma tiene la importante propiedad adicional de que $\log \circ \Gamma$ es convexa, una condición que pone de manifiesto la extrema suavidad de dicha función. Un hermoso teorema debido a Harold Bohr y Johannes Mollerup afirma que Γ es la única función f con $\log \circ f$ convexa, $f(1) = 1$ y $f(x+1) = xf(x)$. Vea la referencia [43] de las Lecturas Recomendadas.

***41.** (a) Utilice una fórmula de reducción para $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n x\, dx$ con el propósito de demostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx.$$

(b) Demuestre ahora que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\, dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \cdots \cdot \frac{2n}{2n+1},$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-1}{2n},$$

y concluya que

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \cdots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \frac{\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\, dx}{\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\, dx}.$$

(c) Demuestre que el valor del cociente de las dos integrales en esta expresión está entre 1 y $1 + 1/2n$, empezando con las desigualdades

$$0 < \operatorname{sen}^{2n+1} x \leq \operatorname{sen}^{2n} x \leq \operatorname{sen}^{2n-1} x \quad \text{para } 0 < x < \pi/2.$$

Este resultado, que demuestra que los productos

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \cdots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}$$

pueden ser efectuados hasta alcanzar un valor tan próximo a $\pi/2$ como se desee, se escribe habitualmente como un producto infinito, conocido como producto de Wallis:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \cdots .$$

(d) Demuestre también que los productos

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\,\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot \quad 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}$$

pueden acercarse a $\sqrt{\pi}$ tanto como se quiera. (Este hecho se utilizará en el siguiente problema y en el Problema 27-19.)

¡La forma de proceder de Wallis fue bastante diferente! Trabajó con la integral $\int_0^1 (1-x^2)^n\, dx$ (que aparece en el Problema 42), esperando obtener, a partir de los resultados obtenidos para números naturales n, una fórmula para

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 (1-x^2)^{1/2}\, dx.$$

Una descripción detallada puede hallarse en la referencia [49] de las Lecturas Recomendadas, pero el siguiente resumen proporciona las ideas básicas. Wallis obtuvo en primer lugar la fórmula

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-x^2)^n\, dx &= \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}\\ &= \frac{(2\cdot 4\cdots 2n)^2}{2\cdot 3\cdot 4\cdots 2n(2n+1)} = \frac{2^n}{2n+1}\,\frac{(n!)^2}{(2n)!}.\end{aligned}$$

Entonces razonó que $\pi/4$ tenía que ser

$$\int_0^1 (1-x^2)^{1/2}\, dx = \frac{2^1}{2}\,\frac{\left(\frac{1}{2}!\right)^2}{1!} = \left(\tfrac{1}{2}!\right)^2.$$

Si interpretamos que $\frac{1}{2}!$ significa $\Gamma(1+\frac{1}{2})$, esto concuerda con el Problema 45, pero Wallis no conocía la función gamma (que fue inventada por Euler, guiándose principalmente por el trabajo de Wallis). Ya que $(2n)!/(n!)^2$ es el coeficiente binomial $\binom{2n}{n}$, Wallis espero encontrar $\frac{1}{2}!$ por medio de $\binom{p+q}{p}$ con $p = q = 1/2$. Ahora

$$\binom{p+q}{p} = \frac{(p+q)(p+q-1)\cdots(p+1)}{q!}$$

y este resultado tiene sentido aunque p no sea un número natural. Wallis por tanto decidió que

$$\binom{\frac{1}{2}+q}{\frac{1}{2}} = \frac{(\frac{1}{2}+q)\cdots(\frac{3}{2})}{q!}.$$

Con esta interpretación de $\binom{p+q}{p}$ con $p = 1/2$, es todavía cierto que

$$\binom{p+q+1}{p} = \frac{p+q+1}{q+1}\binom{p+q}{p}.$$

Si denotamos a $\binom{\frac{1}{2}+q}{\frac{1}{2}}$ por $W(q)$ esta ecuación puede escribirse como

$$W(q+1) = \frac{\frac{1}{2}+q+1}{q+1}W(q) = \frac{2q+3}{2q+2}W(q),$$

que conduce a la tabla

q	1	2	3	$\cdots$
$W(q)$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}$	

Pero, puesto que $W(\frac{1}{2})$ debería ser $4/\pi$, Wallis también construyó la tabla

$$\begin{array}{ccccc} q & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \\ W(q) & \frac{4}{\pi} & \frac{4}{\pi}\cdot\frac{4}{3} & \frac{4}{\pi}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5} & \cdots \end{array}$$

Después Wallis observó que si a_1, a_2, a_3, a_4 eran 4 valores sucesivos $W(q)$, $W(q+1)$, $W(q+2)$, $W(q+3)$, que aparecían en cualquiera de estas tablas, entonces

$$\frac{a_2}{a_1} > \frac{a_3}{a_2} > \frac{a_4}{a_3} \qquad \text{ya que} \qquad \frac{2q+3}{2q+2} > \frac{2q+5}{2q+4}\cdot\frac{2q+7}{2q+6}$$

(ello nos informa que $\log\circ(1/W)$ es convexa, considerando las observaciones efectuadas antes del Problema 41), lo que implica que

$$\sqrt{\frac{a_3}{a_1}} > \frac{a_3}{a_2} > \sqrt{\frac{a_4}{a_2}}.$$

¡Wallis entonces argumentó que esto tenía que ser también cierto cuando a_1, a_2, a_3, a_4 fueran cuatro valores sucesivos en una tabla combinada donde q es un determinado valor *o bien* entero o medio-entero! Por tanto, tomando como los cuatro valores sucesivos $W(n+\frac{1}{2})$, $W(n)$, $W(n+\frac{3}{2})$, $W(n+1)$, obtuvo

$$\sqrt{\frac{\frac{4}{\pi}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2n+4}{2n+3}}{\frac{4}{\pi}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2n+2}{2n+1}}} > \frac{\frac{4}{\pi}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2n+2}{2n+1}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdots\frac{2n+1}{2n}} > \sqrt{\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{2n+3}{2n+2}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdots\frac{2n+1}{2n}}}$$

lo que conduce simplemente

$$\sqrt{\frac{2n+4}{2n+3}} > \frac{4}{\pi}\cdot\left[\frac{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdots(2n)(2n)(2n+2)}{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdots(2n+1)(2n+1)}\right] > \sqrt{\frac{2n+3}{2n+2}},$$

a partir del cual el producto de Wallis se deduce fácilmente.

****42.** Es un hecho asombroso que integrales impropias como $\int_0^\infty f(x)\,dx$ pueden a menudo ser calculadas aún cuando las integrales ordinarias correspondientes $\int_a^b f(x)\,dx$ no puedan serlo. No hay una fórmula elemental para $\int_a^b e^{-x^2}\,dx$, pero ¡podemos encontrar el valor de $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ con precisión! Hay muchas formas de evaluar dicha integral, pero la mayoría requieren conocer algunas técnicas avanzadas; el siguiente método implica una considerable cantidad de trabajo, pero no requiere hechos que no sean ya conocidos por el lector.

(a) Demuestre que

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1},$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-3}{2n-2}.$$

(Esto puede hacerse usando fórmulas de reducción, o mediante sustituciones apropiadas, junto con los resultados del problema anterior.)

(b) Demuestre, utilizando derivadas, que

$$1-x^2 \le e^{-x^2} \qquad \text{para } 0 \le x \le 1.$$

$$e^{-x^2} \le \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{para } 0 \le x.$$

(c) Integre la n-ésima potencia de estas desigualdades desde 0 a 1 y desde 0 a ∞, respectivamente. Seguidamente utilice la sustitución $y = \sqrt{n}\,x$ para demostrar que

$$\sqrt{n}\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}$$

$$\le \int_0^{\sqrt{n}} e^{-y^2}\,dy \le \int_0^{\infty} e^{-y^2}\,dy \le \frac{\pi}{2}\sqrt{n}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-3}{2n-2}.$$

(d) Ahora utilice el Problema 41(d) para demostrar que

$$\int_0^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

****43.** (a) Utilice integración por partes para demostrar que

$$\int_a^b \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\cos a}{a} - \frac{\cos b}{b} - \int_a^b \frac{\cos x}{x^2}\,dx,$$

y concluya que $\int_0^{\infty} (\operatorname{sen} x)/x\,dx$ existe. (Utilice la parte izquierda de la igualdad para investigar el límite cuando $a \to 0^+$ y la parte derecha para el límite $b \to \infty$.)

(b) Utilice el Problema 15-33 para demostrar que

$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})t}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\,dt = \pi$$

par cualquier número natural n.

(c) Demuestre que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(\lambda+\tfrac{1}{2})t \left[\frac{2}{t} - \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\right] dt = 0.$$

Indicación: El término entre corchetes está acotado como puede verse a partir del Problema 15-2(vi); entonces podemos aplicar el Lema de Riemann-Lebesgue.

(d) Utilice la sustitución $u = (\lambda+\frac{1}{2})t$ y la parte (b) para demostrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

44. Dado el valor de $\int_0^{\infty} (\operatorname{sen} x)/x\,dx$ teniendo en cuenta el Problema 43, calcule

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 dx$$

utilizando integración por partes. (Como en el Problema 38, la fórmula para $\operatorname{sen} 2x$ jugará un papel importante.)

***45.** (a) Utilice la sustitución $u = t^x$ para demostrar que

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-u^{1/x}}\,du.$$

(b) Halle $\Gamma(\frac{1}{2})$.

***46.** (a) Suponga que $\dfrac{f(x)}{x}$ es una función integrable en cualquier intervalo $[a,b]$ con $0 < a < b$, y que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = A$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = B$. Demuestre que para cualquier $\alpha, \beta > 0$ tenemos

$$\int_0^\infty \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x}\,dx = (A-B)\log\frac{\beta}{\alpha}.$$

Indicación: Para estimar $\displaystyle\int_\varepsilon^N \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x}\,dx$ utilice dos sustituciones diferentes.

(b) Ahora suponga que $\displaystyle\int_a^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx$ converja para todo $a > 0$ y que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = A$. Demuestre que

$$\int_0^\infty \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x}\,dx = A\log\frac{\beta}{\alpha}.$$

(c) Calcule las siguientes integrales:

(i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\,dx.$ (ii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(\alpha x) - \cos(\beta x)}{x}\,dx.$

En el Capítulo 13 dijimos, un tanto despreocupadamente, que las integrales podían ser calculadas con tanta precisión como se deseara por medio del cálculo de sumas superiores y sumas inferiores. Pero un matemático aplicado, quien realmente tiene que efectuar los cálculos en lugar de hablar sólo de los mismos, tal vez no se entusiasme con la idea de calcular sumas inferiores para calcular una integral hasta, por ejemplo, el tercer decimal (una precisión que fácilmente se requiere en muchas aplicaciones). Los siguientes tres problemas muestran cómo métodos más refinados permiten hacer los cálculos de forma mucho más eficiente.

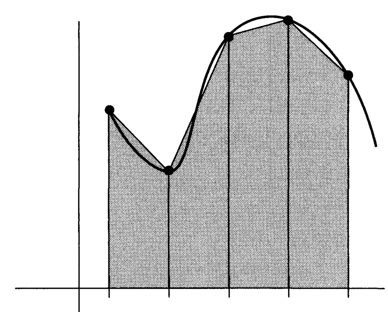


Figura 2

Debemos mencionar, en primer lugar que el cálculo de las sumas superiores e inferiores ni siquiera podría ser realizable, ya que podría no ser posible calcular las cantidades m_i y M_i para cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Es mucho más razonable seleccionar simplemente puntos x_i en $[t_{i-1}, t_i]$ y considerar $\displaystyle\sum_{i=1}^n f(x_i)\cdot(t_i - t_{i-1})$. Esto representa la suma de las áreas de algunos rectángulos que se superponen parcialmente a la gráfica de f (ver Figura 1 en el Apéndice del Capítulo 13). Pero vamos a obtener una resultado mucho mejor si en su lugar elegimos los trapecios que se muestran en la Figura 2.

Supongamos, en particular, que dividimos $[a,b]$ en n intervalos de igual longitud, por medio de los puntos

$$t_i = a + i\left(\frac{b-a}{n}\right) = a + ih.$$

Entonces el trapecio con base $[t_{i-1}, t_i]$ tiene un área de $\dfrac{f(t_{i-1}) + f(t_i)}{2}\cdot(t_i - t_{i-1})$

y la suma de todas estas áreas es simplemente

$$\Sigma_n = h\left[\frac{f(t_1)+f(a)}{2} + \frac{f(t_2)+f(t_1)}{2} + \cdots + \frac{f(b)+f(t_{n-1})}{2}\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + f(b)\right], \qquad h = \frac{b-a}{n}.$$

Este método aproximado para el cálculo de una integral se le denomina *regla del trapecio.* Tenga en cuenta que para obtener Σ_{2n} a partir de Σ_n no es necesario volver a calcular de nuevo los antiguos $f(t_i)$, su contribución a la Σ_{2n} es $\frac{1}{2}\Sigma_n$. Así que en la práctica lo mejor es calcular Σ_2, Σ_4, $\Sigma_8 \ldots$, para obtener aproximaciones a $\int_a^b f$. En el siguiente problema estimaremos $\int_a^b f - \Sigma_n$.

47. (a) Suponga que f'' es continua. Sea P_i la función lineal que coincide con f en t_{i-1} y t_i. Utilizando el Problema 11-46, demuestre que si n_i y N_i son el mínimo y el máximo de f'' en $[t_{i-1}, t_i]$ e

$$I = \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x - t_{i-1})(x - t_i)\, dx$$

entonces

$$\frac{n_i I}{2} \geq \int_{t_{i-1}}^{t_i} (f - P_i) \geq \frac{N_i I}{2}.$$

(b) Estime I para obtener

$$-\frac{n_i h^3}{12} \geq \int_{t_{i-1}}^{t_i} (f - P_i) \geq -\frac{N_i h^3}{12}.$$

(c) Concluya que existe un c en (a, b) con

$$\int_a^b f = \Sigma_n - \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c).$$

Observe que el "error residual" $(b-a)^3 f''(c)/12n^2$ varia proporcionalmente a $1/n^2$ (mientras que el error obtenido empleando sumas superiores e inferiores ordinarias varia proporcionalmente a $1/n$).

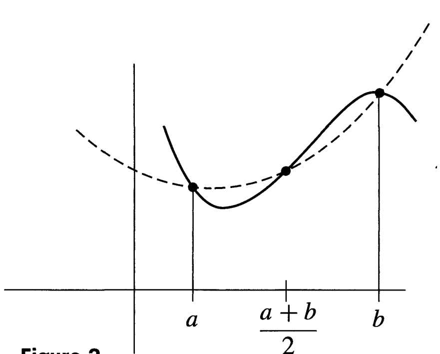


Figura 3

Podemos obtener resultados aún más precisos si aproximamos f mediante funciones cuadráticas en vez de lineales. En primer lugar, consideremos lo que ocurre cuando dividimos el intervalo $[a, b]$ en dos intervalos iguales (Figura 3).

48. (a) Suponga en primer lugar que $a = 0$ y $b = 2$. Sea P el polinomio de grado ≤ 2 que coincide con f en 0, 1 y 2 (Problema 3-6). Demuestre que

$$\int_0^2 P = \frac{1}{3}[f(0) + 4f(1) + f(2)].$$

(b) Concluya que en el caso general

$$\int_a^b P = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right].$$

(c) Naturalmente $\int_a^b P = \int_a^b f$ si f es un polinomio de segundo grado. Pero, de forma remarcable, ¡la misma relación se cumple si f es un polinomio de tercer grado! Demuestre esto, utilizando el Problema 11-46; observe que f''' es una constante.

El problema anterior demuestra que no hemos de hacer ningún nuevo cálculo para hallar $\int_a^b Q$ cuando Q es un polinomio *cúbico* que coincide con f en a, b, y $\frac{a+b}{2}$ todavía tenemos que

$$\int_a^b Q = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right].$$

Pero hay muchos más casos en la elección de Q, que podemos utilizar a nuestro favor:

49. (a) Demuestre que existe un polinomio de tercer grado Q tal que

$$Q(a)=f(a), \qquad Q(b)=f(b), \qquad Q\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$Q'\left(\frac{a+b}{2}\right)=f'\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Indicación: Claramente $Q(x)=P(x)+A(x-a)(x-b)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$ para alguna función A.

(b) Demuestre que si $f^{(4)}$ está definida en $[a,b]$, entonces para cada x en $[a,b]$ tenemos

$$f(x)-Q(x)=(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}$$

para algún ξ en (a,b). Indicación: Imite la demostración del Problema 11-46.

(c) Concluya que si $f^{(4)}$ es continua, entonces

$$\int_a^b f = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(c)$$

para algún c en (a,b).

(d) Ahora divida $[a,b]$ en $2n$ intervalos mediante los puntos

$$t_i=a+ih, \qquad h=\frac{b-a}{2n}.$$

Demuestre la *regla de Simpson*:

$$\int_a^b f = \frac{b-a}{6n}\left(f(a)+4\sum_{i=1}^{n}f(t_{2i-1})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(t_{2i})+f(b)\right)$$
$$-\frac{(b-a)^5}{2880n^4}f^{(4)}(\bar{c})$$

para algún $\bar{c}$ en (a,b).

Apéndice
La universalidad de la integral

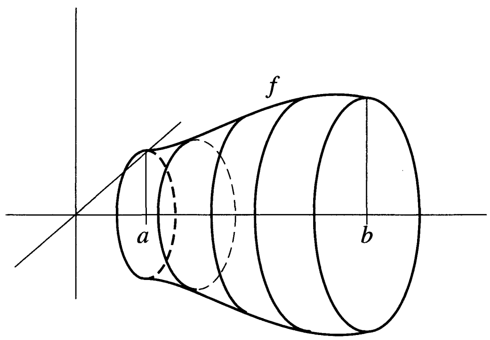


Figura 1

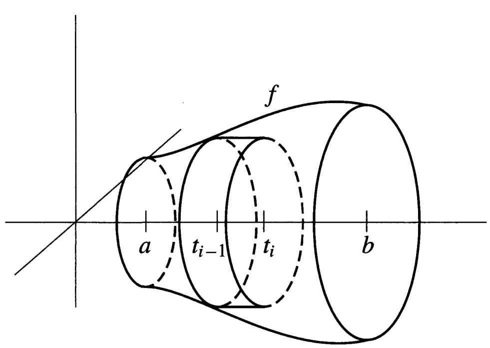


Figura 2

Hemos introducido originalmente la integral a fin de encontrar el área bajo la gráfica de una función, pero la integral es una herramienta mucho más versátil que eso. Por ejemplo, el Problema 13-24 utiliza la integral para expresar el área de una región de una forma bastante distinta. Además, el Problema 13-25 mostró que la integral se puede también utilizar para hallar las longitudes de las curvas, ¡aunque, tal como hemos visto en el Apéndice del Capítulo 13, se requiera una gran cantidad de trabajo para tratar el caso general! Esta aplicación de la integral fue algo más sorprendente, ya que la integral parece ser, a primera vista, una criatura bidimensional. En realidad, la integral hace su aparición en no pocas fórmulas geométricas, algunas de las cuales presentaremos en este Apéndice. Para obtenerlas vamos a suponer algunos resultados de geometría elemental (y nos permitiremos ciertas licencias).

En lugar de reducir la dimensión, considerando objetos unidimensionales, vamos a empezar por hacer frente a algunos cuerpos tridimensionales. Hay algunos sólidos especiales, cuyo volumen puede expresarse mediante integrales. La forma más simple de dichos sólidos ocurre cuando V es un "sólido de revolución", obtenido al hacer girar la región bajo la gráfica de $f \geq 0$ en $[a,b]$ alrededor del eje horizontal, cuando consideramos el plano inmerso en el espacio tridimensional (Figura 1). Si $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ es una partición de $[a,b]$, y m_i y M_i tienen su significado habitual, entonces

$$\pi {m_i}^2 (t_i - t_{i-1})$$

es el volumen de un disco situado en el interior del sólido V (Figura 2). De forma parecida, $\pi {M_i}^2(t_i - t_{i-1})$ es el volumen de un disco que contiene la parte de V entre t_{i-1} y t_i. Por consiguiente,

$$\pi \sum_{i=1}^{n} {m_i}^2 (t_i - t_{i-1}) \leq \text{ volumen } V \leq \pi \sum_{i=1}^{n} {M_i}^2 (t_i - t_{i-1}).$$

Pero las sumas en los extremos de esta desigualdad son las sumas inferiores y superiores de f^2 en $[a,b]$:

$$\pi \cdot L(f^2, P) \leq \text{volumen } V \leq \pi \cdot U(f^2, P).$$

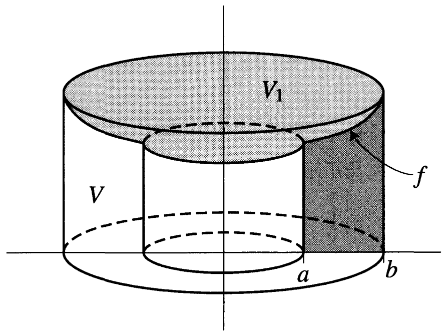


Figura 3

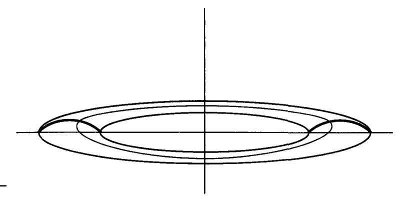


Figura 4

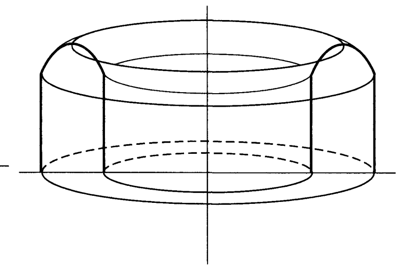


Figura 5

Por tanto, el volumen de V debe ser igual a

$$\text{volumen } V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

Este método de hallar volúmenes se le conoce familiarmente cómo el "método del disco."

La Figura 3 muestra un sólido más complejo V obtenido por revolución de la región bajo la gráfica de f alrededor del eje *vertical* (V es el sólido que queda cuando partiendo del gran cilindro de radio b quitamos el pequeño cilindro de radio a y el sólido V_1 que descansa directamente sobre él). En este caso supondremos $a \geq 0$ a la vez que $f \geq 0$. Las Figuras 4 y 5 indican otras posibles formas para V.

Para una partición $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ consideremos las "capas" obtenidas por la rotación del rectángulo con base $[t_{i-1}, t_i]$ y altura m_i o M_i (Figura 6). Sumando los volúmenes de estas capas obtenemos

$$\pi \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i{}^2 - t_{i-1}{}^2) \leq \text{volumen } V \leq \pi \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i{}^2 - t_{i-1}{}^2),$$

que podemos escribir como

$$\pi \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i + t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \leq \text{volumen } V \leq \pi \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i + t_{i-1})(t_i - t_{i-1}).$$

Ahora estas sumas no son ahora sumas superiores o inferiores de nada. Pero el Problema 1 del Apéndice al Capítulo 13 muestra que cada suma

$$\sum_{i=1}^{n} m_i t_i (t_i - t_{i-1}) \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i t_{i-1} (t_i - t_{i-1})$$

puede acercarse tanto como se quiera a $\int_a^b xf(x)\, dx$ escogiendo las longitudes $t_i - t_{i-1}$ suficientemente pequeñas. Lo mismo ocurre para las sumas situadas a la derecha, por tanto podemos encontrar que

$$\text{volumen } V = 2\pi \int_a^b xf(x)\, dx;$$

éste es el llamado "método de integración por capas" para encontrar volúmenes.

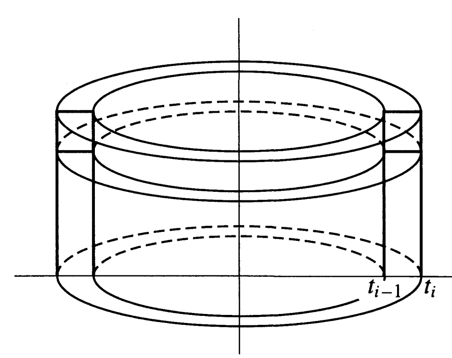


Figura 6

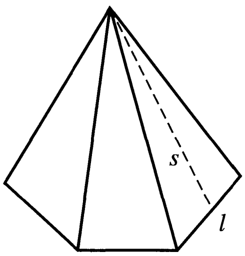


Figura 7

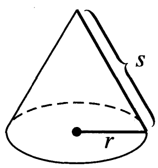
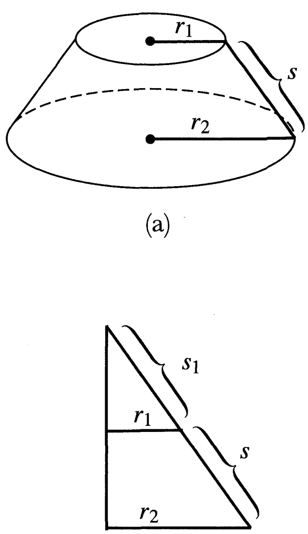


Figura 8



(a)

(b)

Figura 9

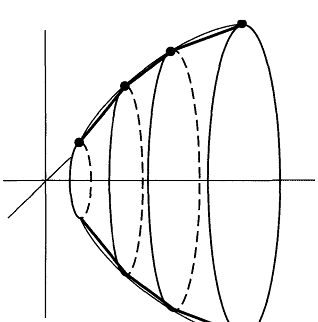


Figura 10

La superficie de ciertas regiones curvadas también puede expresarse mediante integrales. Antes de abordar regiones complicadas, agradeceremos aquí un pequeño repaso de algunas fórmulas geométricas elementales.

La Figura 7 muestra una pirámide recta formada por triángulos con bases de longitud l y altura s. El área total de la superficie de los lados de la pirámide es por tanto

$$\frac{1}{2}ps,$$

donde p es el perímetro de la base. Si consideramos que la base es un polígono regular con un gran número de caras vemos que el área de un cono recto de base circular (Figura 8) debe ser

$$\frac{1}{2}(2\pi r)s = \pi rs,$$

donde s es la longitud de la "generatriz" del cono. Por último, consideremos el tronco de cono con generatriz s y radio r_1 y r_2 mostrado en la Figura 9(a). Si lo completamos hasta un formar un cono, como en la Figura 9(b), tenemos

$$\frac{s_1}{r_1} = \frac{s_1+s}{r_2},$$

por tanto

$$s_1 = \frac{r_1 s}{r_2 - r_1}, \qquad s_1 + s = \frac{r_2 s}{r_2 - r_1}.$$

En consecuencia, el área de la superficie es

$$\pi r_2(s_1+s) - \pi r_1 s_1 = \pi s \frac{{r_2}^2 - {r_1}^2}{r_2 - r_1} = \pi s(r_1 + r_2).$$

Consideremos ahora la superficie formada por la rotación de la gráfica f alrededor del eje horizontal. Para una partición $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ podemos inscribir una sucesión de troncos de cono, como en la Figura 10. El área total de la superficie de estos troncos de cono es

$$\begin{aligned}
&\pi \sum_{i=1}^{n} [f(t_{i-1}) + f(t_i)] \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + [f(t_i) - f(t_{i-1})]^2} \\
&\quad = \pi \sum_{i=1}^{n} [f(t_{i-1}) + f(t_i)] \sqrt{1 + \left(\frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2} (t_i - t_{i-1}).
\end{aligned}$$

Por el Teorema del Valor Medio, esto es

$$\pi \sum_{i=1}^{n} \left[f(t_{i-1}) + f(t_i)\right] \sqrt{1 + f'(x_i)^2}\, (t_i - t_{i-1})$$

para determinados x_i en (t_{i-1}, t_i). A partir del Problema 1 del Apéndice al Capítulo 13, concluimos que si f' es continua, entonces el área de la superficie es

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Problemas

1. (a) Halle el volumen del sólido de revolución obtenido mediante el giro de la región limitada por las gráficas de $f(x) = x$ y $f(x) = x^2$ alrededor del eje horizontal.

(b) Encuentre el volumen del sólido de revolución obtenido mediante el giro de la misma región alrededor del eje vertical.

2. Encuentre el volumen de una esfera de radio r.

3. Cuando giramos la elipse consistente en todos los puntos (x, y) tales que $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ alrededor del eje horizontal obtenemos un "elipsoide de revolución" (Figura 11). Encuentre el volumen del sólido correspondiente.

4. Encuentre el volumen del "toro" (Figura 12), obtenido mediante rotación de la circunferencia $(x-a)^2 + y^2 = b^2$ $(a > b)$ alrededor del eje vertical.

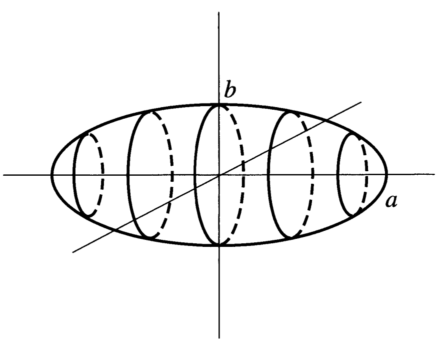


Figura 11

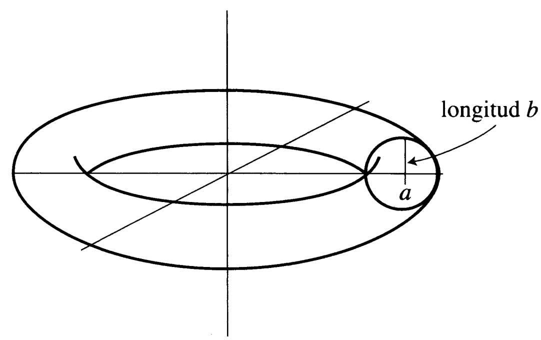


Figura 12

5. Se efectúa un agujero cilíndrico de radio a en el centro de una esfera de radio $2a$ (Figura 13). Encuentre el volumen del sólido resultante.

6. (a) Encuentre el volumen del sólido mostrado en la Figura 14 mediante el método de integración por capas.

(b) Este volumen también puede ser calculado mediante el método del disco. Escriba la integral que debe ser resuelta en ese caso; observe que es más complicada. El siguiente problema aborda una pregunta que sugiere este último apartado.

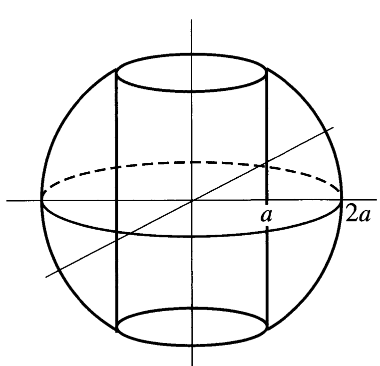


Figura 13

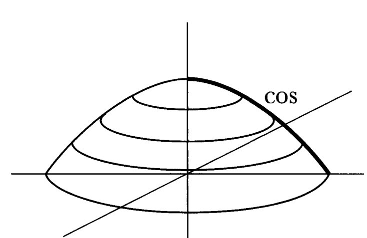


Figura 14

7. La Figura 15 muestra un cilindro de altura b y radio $f(b)$, dividido en tres sólidos, uno de los cuales, V_1, es un cilindro de altura a y radio $f(a)$. Si f es una función uno-uno, entonces una comparación del método del disco y del método de integración por capas para el cálculo de volúmenes nos conduce a pensar que

$$\pi b f(b)^2 - \pi a f(a)^2 - \pi \int_a^b f(x)^2\,dx = \text{volumen } V_2$$

$$= 2\pi \int_{f(a)}^{f(b)} y f^{-1}(y)\,dy.$$

Demuestre esta igualdad con argumentos propios del análisis matemático, utilizando la fórmula para $\int f^{-1}$ a partir del Problema 19-16 o, de forma más simple, siguiendo los pasos que hemos realizado para obtenerla.

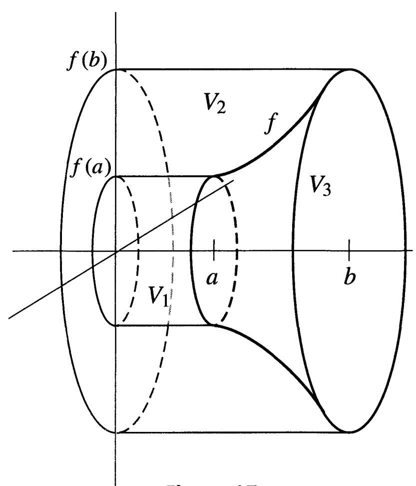


Figura 15

8. (a) La Figura 16 muestra un sólido con una base circular de radio a. Cada plano perpendicular al diámetro AB interseca al sólido formado una figura limitada por un cuadrado. Utilizando argumentos similares a los ya usados en este Apéndice, exprese el volumen del sólido como una integral, y resuélvala.

(b) El mismo problema, pero considere ahora que cada plano interseca al sólido formando triángulos equiláteros.

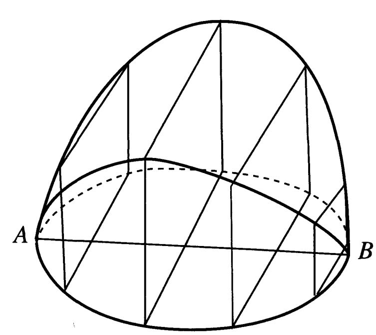


Figura 16

9. Encuentre el volumen de una pirámide (Figura 17) en función de su altura h y del área A de su base.

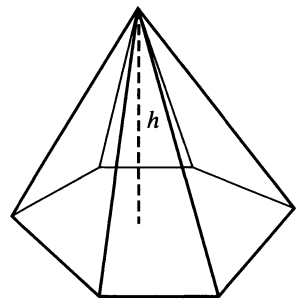


Figura 17

10. Halle el volumen de un sólido determinado por la intersección de los dos cilindros en la Figura 18. Indicación: Encuentre la intersección de dicho sólido con cualquier plano horizontal.

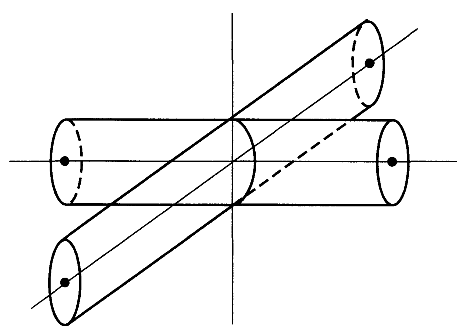


Figura 18

11. (a) Demuestre que el área de la superficie de una esfera de radio r es $4\pi r^2$.

(b) Demuestre, con mayor generalidad, que el área de la porción de esfera mostrada en la Figura 19 es $2\pi rh$. (Observe que este resultado depende sólo de h, no de la posición de los planos.)

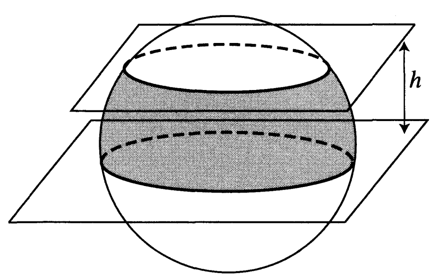
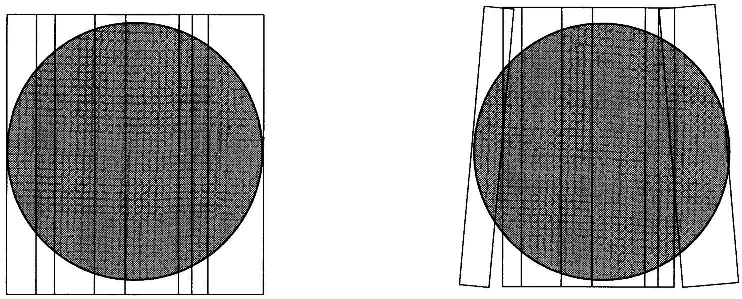


Figura 19

(c) Un charco de barro circular puede recubrirse mediante una colección de tablones paralelos. perfectamente ajustados entre sí, cubriendo exactamente el charco y cuya longitud es al menos el diámetro del círculo, tal como indica la Figura 20 (a). Demuestre que el charco no puede recubrirse por los mismos tablones si estos no se disponen de forma paralela. tal como se indica en la Figura 20(b).



(a) (b)

Figura 20

12. (a) Halle el área de la superficie del elipsoide de revolución del Problema 19-3.
    (b) Encuentre el área de la superficie del toro del Problema 19-4.
13. Efectuamos una rotación de la gráfica de $f(x) = 1/x, x \geq 1$ alrededor del eje horizontal (Figura 21).
    (a) Encuentre el volumen limitado por la "trompeta infinita."
    (b) Demuestre que el área de dicha superficie es infinita.
    (c) Suponga que rellenamos con pintura la citada trompeta con la cantidad finita encontrada en el apartado (a). Parecería, por tanto, que hemos cubierto una superficie de área infinita con una cantidad finita de pintura. ¿Cómo es esto posible?

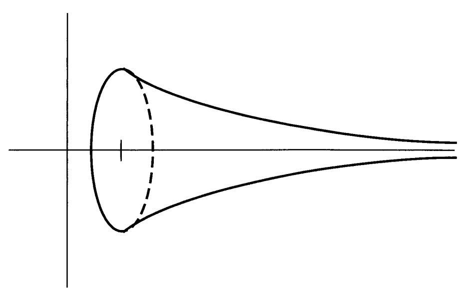


Figura 21

Parte IV

Sucesiones y series infinitas

Una de las series más notables del
análisis algebraico es la siguiente:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots + \frac{m(m-1)\cdots[(m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdots n}x^n+\cdots$$

Cuando m es un entero positivo,
la suma de la serie,
que entonces es finita, puede expresarse,
según se sabe, por $(1+x)^m$.
Cuando m no es entero,
la serie va hacia el infinito, y
convergerá o divergerá según que
las cantidades m y x
tengan unos valores u otros.
En este caso, se escribe la misma igualdad

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots \text{ etc.}$$

...Se supone que
la igualdad numérica se cumplirá
siempre que la serie sea convergente,
pero esto todavía no ha sido demostrado.

NIELS HENRIK ABEL

Aproximación mediante funciones polinómicas

20

En cierto sentido las llamadas "funciones elementales" no lo son en absoluto. Si p es una función polinómica,

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,$$

entonces $p(x)$ puede calcularse fácilmente para cualquier número x. Esto no es en absoluto cierto para otras funciones como sen, log o exp. Por ahora, para hallar $\log x = \int_1^x 1/t\,dt$ de forma aproximada, debemos calcular alguna suma superior o inferior, y asegurarnos de que el error cometido al aproximar $\log x$ por tal suma no sea demasiado grande. Calcular $e^x = \log^{-1}(x)$ sería aún más difícil: tendríamos que calcular $\log a$ para muchos valores de a hasta encontrar un número a tal que $\log a$ fuera aproximadamente igual a x: entonces a sería aproximadamente igual a e^x.

En este capítulo obtendremos importantes resultados teóricos que reducen el cálculo de $f(x)$, para muchas funciones f, al cálculo de funciones polinómicas. El método consiste en encontrar funciones polinómicas que sean buenas aproximaciones a f. Para acertar con el polinomio adecuado, es útil, en primer lugar, examinar más a fondo las propias funciones polinómicas.

Supongamos que

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n.$$

Es interesante, y para nuestros fines muy importante, observar que los coeficientes a_i pueden expresarse en términos de los valores que toma la función p y de sus sucesivas derivadas en 0. Para empezar, observemos que

$$p(0) = a_0.$$

Derivando la expresión original de $p(x)$ obtenemos

$$p'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}.$$

Por tanto,

$$p'(0) = p^{(1)}(0) = a_1.$$

Derivando de nuevo obtenemos

$$p''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2\cdot a_3x + \cdots + n(n-1)\cdot a_nx^{n-2}.$$

Por tanto,

$$p''(0) = p^{(2)}(0) = 2a_2.$$

En general, tendremos

$$p^{(k)}(0) = k!\,a_k \quad \text{o} \quad a_k = \frac{p^{(k)}(0)}{k!}.$$

Si convenimos en definir $0! = 1$, y empleando la notation $p^{(0)} = p$, entonces esta fórmula se cumple también para $k = 0$.

Si hubiésemos empezado considerando una función p escrita como un "polinomio en $(x-a)$",

$$p(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n,$$

entonces un razonamiento parecido demostraría que

$$a_k = \frac{p^{(k)}(a)}{k!}.$$

Supongamos ahora que f is una función (no necesariamente un polinomio) tal que

$$f^{(1)}(a), \ldots, f^{(n)}(a)$$

existen todas. Sea

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad 0 \le k \le n,$$

y definamos

$$P_{n,a}(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n.$$

El polinomio $P_{n,a}$ recibe el nombre de **polinomio de Taylor de grado n de f en a.**

(Estrictamente hablando, deberíamos usar una notación todavía más complicada, tal como $P_{n,a,f}$, para indicar la dependencia de f; en ocasiones esta notación más precisa será conveniente.) El polinomio de Taylor ha sido definido para que

$${P_{n,a}}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \quad \text{para } 0 \le k \le n;$$

de hecho, es evidentemente el único polinomio *de grado* $\le n$ con esta propiedad.

Aunque los coeficientes de $P_{n,a,f}$ parecen depender de f de manera bastante complicada, las funciones elementales más importantes tienen unos polinomios de Taylor muy sencillos. Consideremos en primer lugar la función sen. Tenemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(0) &= 0, \\
\operatorname{sen}'(0) &= \cos 0 = 1, \\
\operatorname{sen}''(0) &= -\operatorname{sen} 0 = 0, \\
\operatorname{sen}'''(0) &= -\cos 0 = -1, \\
\operatorname{sen}^{(4)}(0) &= \operatorname{sen} 0 = 0.
\end{aligned}$$

De aquí en adelante, las derivadas sucesivas se repiten en ciclos de período 4. Los números

$$a_k = \frac{\operatorname{sen}^{(k)}(0)}{k!}$$

son

$$0,\ 1,\ 0,\ -\frac{1}{3!},\ 0,\ \frac{1}{5!},\ 0,\ -\frac{1}{7!},\ 0,\ \frac{1}{9!},\ \ldots$$

Por tanto, el polinomio de Taylor $P_{2n+1,0}$ de grado $2n+1$ de la función sen en 0 es

$$P_{2n+1,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

(Por supuesto, $P_{2n+1,0} = P_{2n+2,0}$.)

El polinomio de Taylor $P_{2n,0}$ de grado $2n$ de la función cos en 0 es (dejamos los cálculos para el lector)

$$P_{2n,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

El polinomio de Taylor de la función exp es especialmente fácil de calcular. Puesto que $\exp^{(k)}(0) = \exp(0) = 1$ para cualquier k, el polinomio de Taylor de grado n en 0 es

$$P_{n,0}(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

El polinomio de Taylor de la función log debe calcularse en un punto $a \neq 0$, ya que log ni siquiera está definido en 0. La elección estándar es $a = 1$. Entonces

$$\begin{aligned} \log'(x) &= \frac{1}{x}, & \log'(1) &= 1; \\ \log''(x) &= -\frac{1}{x^2}, & \log''(1) &= -1; \\ \log'''(x) &= \frac{2}{x^3}, & \log'''(1) &= 2; \end{aligned}$$

en general

$$\log^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}, \quad \log^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!$$

Por tanto, el polinomio de Taylor de grado n de la función log en 1 es

$$P_{n,1}(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}.$$

Muchas veces es más conveniente considerar la función $f(x) = \log(1+x)$. En este caso podemos escoger $a = 0$. Tendremos

$$f^{(k)}(x) = \log^{(k)}(1+x),$$

de modo que

$$f^{(k)}(0) = \log^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!$$

Por tanto el polinomio de Taylor de grado n de la función f en 0 será

$$P_{n,0}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}.$$

Hay otra función elemental cuyo polinomio de Taylor es importante: arctg. Los cálculos de las primeras derivadas son

$$\begin{aligned}
\operatorname{arctg}'(x) &= \frac{1}{1+x^2} & \operatorname{arctg}'(0) &= 1;\\
\operatorname{arctg}''(x) &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, & \operatorname{arctg}''(0) &= 0;\\
\operatorname{arctg}'''(x) &= \frac{(1+x^2)^2\cdot(-2)+2x\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}, & \operatorname{arctg}'''(0) &= -2.
\end{aligned}$$

Está claro que este cálculo basado en la fuerza bruta no nos llevará muy lejos. Sin embargo, los polinomios de Taylor de la función arctg serán fáciles de calcular después de haber examinado las propiedades de los mismos más detenidamente; aunque el polinomio de Taylor $P_{n,a,f}$ se definió simplemente como aquel que coincide con la función f en a, así como sus n primeras derivadas, la conexión entre f y $P_{n,a,f}$ resultará ser en realidad mucho más profunda.

Una forma de evidenciar la estrecha conexión entre f y los polinomios de Taylor de f ocurre al examinar el polinomio de Taylor de grado 1, que es

$$P_{1,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Observemos que

$$\frac{f(x)-P_{1,a}(x)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a).$$

Ahora, por la definición de $f'(a)$ tenemos

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-P_{1,a}(x)}{x-a} = 0.$$

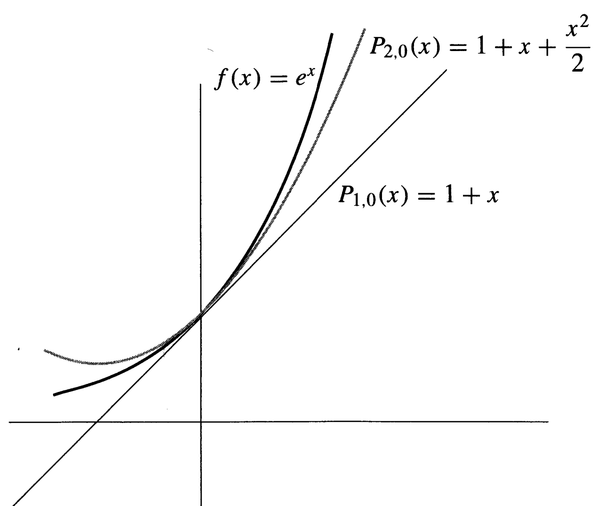


Figura 1

En otras palabras, a medida que x tiende hacia a la diferencia $f(x)-P_{1,a}(x)$ no sólo se vuelve pequeña, sino que incluso se hace pequeña en comparación con $x-a$. La Figura 1 ilustra la gráfica de $f(x) = e^x$ y de

$$P_{1,0}(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + x,$$

que es el polinomio de Taylor de grado 1 de la función f en 0. El diagrama también muestra la gráfica de

$$P_{2,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

que es el polinomio de Taylor de grado 2 de dicha función f en 0. A medida que x tiende hacia 0, las diferencias $f(x) - P_{2,0}(x)$ parecen hacerse más rápidamente pequeñas incluso que la diferencia $f(x) - P_{1,0}(x)$. Tal como está expresada, esta afirmación no es muy precisa, pero ahora estamos preparados para darle un significado bien definido. Acabamos de ver que, en general,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{1,a}(x)}{x - a} = 0.$$

Para $f(x) = e^x$ y $a = 0$, esto significa que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - P_{1,0}(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x} = 0.$$

Por otra parte, una fácil doble aplicación de la Regla de l'Hôpital demuestra que

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Por tanto, aunque $f(x) - P_{1,0}(x)$ se hace pequeño comparado con x, cuando x tiende a 0, *no* se hace pequeño en comparación con x^2. Cuando consideramos $P_{2,0}(x)$ la situación es muy distinta; el término adicional $x^2/2$ proporciona exactamente la compensación adecuada:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}}{x^2} &= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{2x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2} = 0.\end{aligned}$$

Este resultado se cumple en general: si $f'(a)$ y $f''(a)$ existen, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{2,a}(x)}{(x - a)^2} = 0;$$

de hecho, la afirmación correspondiente para $P_{n,a}$ es también cierta.

Teorema 1. *Supongamos que f es una función tal que*

$$f'(a), \ldots, f^{(n)}(a)$$

todas existen. Sea

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad 0 \leq k \leq n,$$

y definamos

$$P_{n,a}(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n.$$

Entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Demostración. Escribiendo $P_{n,a}(x)$ explícitamente, obtenemos

$$\frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = \frac{f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i}{(x-a)^n} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Será conveniente introducir las nuevas funciones

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i \quad \text{y} \quad g(x) = (x-a)^n;$$

ahora debemos demostrar que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - Q(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} Q^{(k)}(a) &= f^{(k)}(a), \quad k \leq n-1, \\ g^{(k)}(x) &= n!(x-a)^{n-k}/(n-k)! \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to a} [f(x) - Q(x)] = f(a) - Q(a) = 0, \\ &\lim_{x\to a} [f'(x) - Q'(x)] = f'(a) - Q'(a) = 0, \\ &\quad \vdots \\ &\lim_{x\to a} [f^{(n-2)}(x) - Q^{(n-2)}(x)] = f^{(n-2)}(a) - Q^{(n-2)}(a) = 0, \end{aligned}$$

y

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} g'(x) = \cdots = \lim_{x\to a} g^{(n-2)}(x) = 0.$$

Podemos aplicar por tanto la Regla de l'Hôpital $n-1$ veces para así obtener

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - Q(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - Q^{(n-1)}(x)}{n!\,(x-a)}.$$

Puesto que Q es un polinomio de grado $n-1$, su derivada de orden $(n-1)$ es **una** constante; en concreto, $Q^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(a)$. Por tanto

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - Q(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{n!\,(x-a)}$$

y este último límite es $f^{(n)}(a)/n!$ por definición de $f^{(n)}(a)$. ■

Una sencilla consecuencia del Teorema 1 nos permite perfeccionar el método de determinación de máximos y mínimos locales que se desarrolló en el Capítulo 11. Si a es un punto crítico de f, entonces, de acuerdo con el Teorema 11-5, la función f tiene un mínimo local en a si $f''(a) > 0$, y un máximo local en a si $f''(a) < 0$. Si $f''(a) = 0$ no fue posible obtener ninguna conclusión, pero podemos pensar que el signo de $f'''(a)$ podría darnos información al respecto, y si $f'''(a) = 0$, entonces el signo de $f^{(4)}(a) = 0$ podría ser significativo. Incluso de manera más general, podemos preguntarnos qué pasa cuando

$$(*) \qquad \begin{aligned} &f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \\ &f^{(n)}(a) \neq 0. \end{aligned}$$

El resultado en este caso se puede adivinar examinando las funciones

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-a)^n, \\ g(x) &= -(x-a)^n, \end{aligned}$$

que satisfacen $(*)$. Observemos (Figura 2) que si n es impar, entonces a no es ni un máximo ni un mínimo local de las funciones f o g. Por otra parte, si n es par, entonces f, con una derivada n-ésima positiva, tiene un mínimo local en a, mientras que g, con una derivada n-ésima negativa, tiene un máximo local en a. De todas las funciones que satisfacen $(*)$, éstas son las más sencillas disponibles; no obstante describen exactamente la situación general. De hecho, el punto central de la siguiente demostración es que cualquier función que satisface $(*)$ se parece mucho a una de estas funciones, en un sentido precisado por el Teorema 1.

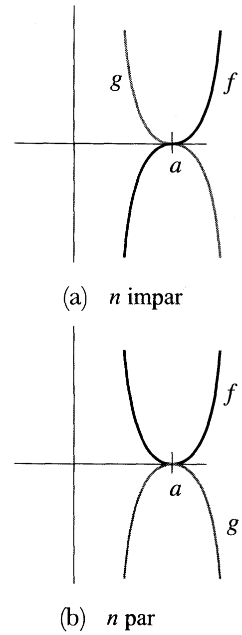


Figura 2

Teorema 2. *Supongamos que*

$$\begin{aligned} f'(a) &= \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \\ f^{(n)}(a) &\neq 0. \end{aligned}$$

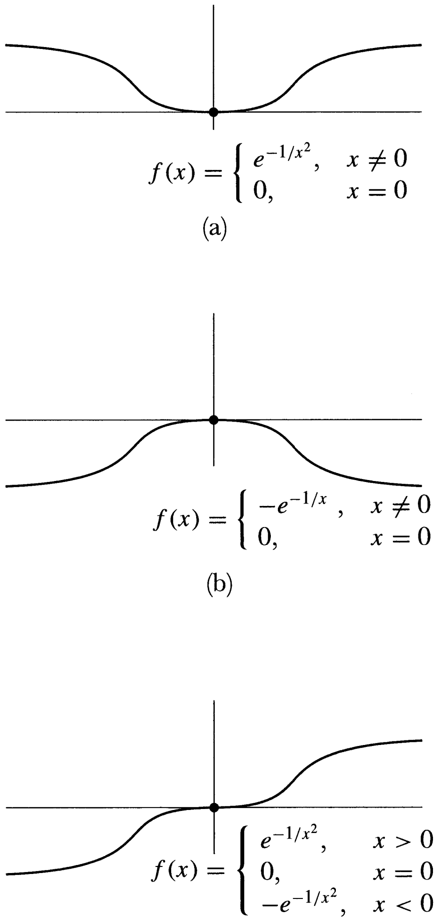
(1) Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$, entonces la función f tiene un mínimo local en a.
(2) Si n es par y $f^{(n)}(a) < 0$, entonces la función f tiene un máximo local en a.
(3) Si n es impar, entonces la función f no tiene ni un máximo ni un mínimo en a.

Demostración. Evidentemente no hay pérdida de generalidad en suponer que $f(a) = 0$, ya que no alteramos ni las hipótesis ni las conclusiones si reemplazamos la función f por $f - f(a)$. Entonces, ya que las $n-1$ primeras derivadas de f en a son 0, el polinomio de Taylor $P_{n,a}$ de la función f es

$$\begin{aligned} P_{n,a}(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \end{aligned}$$

Así pues, el Teorema 1 establece que

$$0 = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{(x-a)^n} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right].$$



$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(a)

$f(x) = \begin{cases} -e^{-1/x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(b)

$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -e^{-1/x^2}, & x < 0 \end{cases}$

(c)

Figura 3

En consecuencia, si x es suficientemente cercano a a, entonces

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n} \quad \text{tiene el mismo signo que} \quad \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Supongamos ahora que n es par. En este caso $(x-a)^n > 0$ para todo $x \neq a$. Puesto que $f(x)/(x-a)^n$ tiene el mismo signo que $f^{(n)}(a)/n!$ para x suficientemente próximos al punto a, se deduce que $f(x)$ tiene el mismo signo que $f^n(a)/n!$ para x suficientemente próximos al punto a. Si $f^{(n)}(a) > 0$, significa que

$$f(x) > 0 = f(a)$$

para x próximos al punto a. En consecuencia, f tiene un mínimo local en a. Una demostración similar vale para el caso $f^{(n)}(a) < 0$.

Supongamos ahora que n es impar. El mismo razonamiento anterior muestra que si x está suficientemente cercano al punto a, entonces

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n} \quad \text{siempre tiene el mismo signo.}$$

Pero $(x-a)^n > 0$ para $x > a$ y $(x-a)^n < 0$ para $x < a$. Por tanto $f(x)$ tiene *diferente* signo según $x > a$ o bien $x < a$. Esto demuestra que la función f no tiene ni un máximo ni un mínimo local en a. ■

Aunque el Teorema 2 resuelve el problema de la determinación de máximos y mínimos locales para casi cualquier función que se presente en la práctica, tiene algunas limitaciones teóricas, puesto que $f^{(k)}(a)$ puede ser 0 para *todo* k. Esto ocurre (Figura 3(a)) en el caso de la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

que tiene un mínimo en 0, y también para esta misma función cambiada de signo (Figura 3(b)), que tiene un máximo en 0. Por otra parte (Figura 3(c)), si

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -e^{-1/x^2}, & x < 0, \end{cases}$$

entonces $f^{(k)}(0) = 0$ para todo k, pero f no tiene ni un máximo ni un mínimo local en **0**.

La conclusión del Teorema 1 se expresa a menudo en términos del importante concepto de "orden de igualdad." Dos funciones f y g son **iguales hasta el orden n en a si**

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

En los términos de esta definición, el Teorema 1 afirma que el polinomio de Taylor $P_{n,a,f}$ es igual a f hasta el orden n en el punto a. El polinomio de Taylor podría muy bien haberse definido como aquel polinomio que hace que dicha propiedad se cumpla, puesto que existe a lo sumo un único polinomio de grado $\leq n$ con esta propiedad. Esta afirmación es consecuencia del siguiente teorema elemental.

Teorema 3. *Sean P y Q dos polinomios en $(x-a)$, de grado $\leq n$, y supongamos que P y Q son iguales hasta el orden n en a. Entonces $P = Q$.*

Demostración. Hagamos $R = P - Q$. Puesto que R es un polinomio de grado $\leq n$, sólo necesitamos demostrar que si

$$R(x) = b_0 + \cdots + b_n(x-a)^n$$

satisface

$$\lim_{x \to a} \frac{R(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

entonces $R = 0$. Ahora bien, las hipótesis acerca de R implican con seguridad que

$$\lim_{x \to a} \frac{R(x)}{(x-a)^i} = 0 \quad \text{para } 0 \leq i \leq n.$$

Cuando $i = 0$ esta condición se reduce a $\lim\limits_{x \to a} R(x) = 0$; por otra parte,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} R(x) &= \lim_{x \to a} [b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n] \\ &= b_0. \end{aligned}$$

Así pues, $b_0 = 0$ y

$$R(x) = b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n.$$

Por tanto,

$$\frac{R(x)}{x-a} = b_1 + b_2(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^{n-1}$$

y

$$\lim_{x \to a} \frac{R(x)}{x-a} = b_1.$$

Así pues, $b_1 = 0$ y

$$R(x) = b_2(x-a)^2 + \cdots + b_n(x-a)^n.$$

Continuando este proceso, concluimos que

$$b_0 = \cdots = b_n = 0. \blacksquare$$

Corolario. *Sea f una función diferenciable n-veces en el punto a, y supongamos que P es un polinomio en $(x-a)$ de grado $\leq n$, igual a f hasta el orden n en a. Entonces $P = P_{n,a,f}$.*

Demostración. Puesto que P y $P_{n,a,f}$ son iguales a f hasta el orden n en a, es fácil ver que P es igual a $P_{n,a,f}$ hasta el orden n en a. Por consiguiente, $P = P_{n.a.f}$ según el Teorema anterior. $\blacksquare$

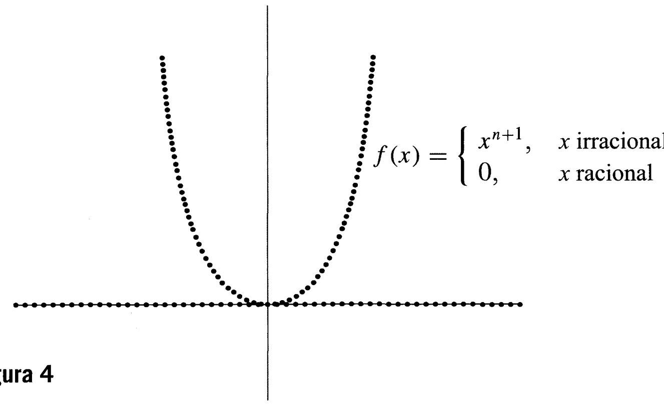


Figura 4

A primera vista, puede parece que este corolario tiene unas hipótesis innecesariamente complicadas, pues podría pensarse que la existencia del polinomio P implicaría necesariamente que f fuese diferenciable un suficiente número de veces para que existiera $P_{n,a,f}$. Pero en realidad no es así. Por ejemplo (Figura 4), supongamos que

$$f(x) = \begin{cases} x^{n+1}, & x \text{ irracional} \\ 0, & x \text{ racional.} \end{cases}$$

Si $P(x) = 0$, entonces P es evidentemente un polinomio de grado $\leq n$ igual a f hasta el orden n en 0. Por otra parte, $f'(a)$ no existe para ningún $a \neq 0$, por tanto $f''(0)$ no está definida.

Cuando f es derivable n veces en a, sin embargo, el corolario puede proporcionar un método útil para encontrar el polinomio de Taylor de f. En particular, recordemos que nuestro primer intento de hallar el polinomio de Taylor de la función arctg terminó en fracaso. La ecuación

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

sugiere un método prometedor para hallar un polinomio que se aproxime a la función arctg; dividamos 1 por $1+t^2$, para obtener un polinomio más un resto:

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

Esta fórmula, que puede comprobarse fácilmente multiplicando ambos lados de la igualdad por $1+t^2$, demuestra que

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} x &= \int_0^x 1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-1)^n t^{2n}\,dt + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt. \end{aligned}$$

Según nuestro corolario, el polinomio que aquí aparece será el polinomio de Taylor de grado $2n+1$ de la función arctg en 0, siempre que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt}{x^{2n+1}} = 0.$$

Puesto que

$$\left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \right| \le \left| \int_0^x t^{2n+2}\,dt \right| = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3},$$

esto se cumple evidentemente. Por tanto, hemos encontrado que el polinomio de Taylor de grado $2n+1$ de la función arctg en 0 es

$$P_{2n+1,0}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

A propósito, ahora que hemos obtenido los polinomios de Taylor de la función arctg, es posible proceder a la inversa y encontrar $\operatorname{arctg}^{(k)}(0)$ para cualquier k: puesto que

$$P_{2n+1,0}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

y ya que este polinomio es, por definición,

$$\operatorname{arctg}^{(0)}(0) + \operatorname{arctg}^{(1)}(0)x + \frac{\operatorname{arctg}^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\operatorname{arctg}^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}x^{2n+1},$$

podemos encontrar $\operatorname{arctg}^{(k)}(0)$ simplemente igualando los coeficientes de x^k en estos dos polinomios:

$$\frac{\operatorname{arctg}^{(k)}(0)}{k!} = 0 \quad \text{si } k \text{ es par,}$$

$$\frac{\operatorname{arctg}^{(2l+1)}(0)}{(2l+1)!} = \frac{(-1)^l}{2l+1} \quad \text{o} \quad \operatorname{arctg}^{(2l+1)}(0) = (-1)^l \cdot (2l)!$$

Un hecho mucho más interesante surge si volvemos a la ecuación original

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt,$$

y recordamos la acotación

$$\left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \right| \le \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}.$$

Cuando $|x| \le 1$, el valor de esta expresión es como máximo $1/(2n+3)$, y podemos hacer esta cantidad tan pequeña como queramos simplemente escogiendo n lo suficientemente grande. En otras palabras, para $|x| \le 1$ *podemos utilizar los polinomios de Taylor de la función* arctg *para calcular* $\operatorname{arctg} x$ *con tanta precisión como queramos.* Los teoremas más importantes acerca de los polinomios de Taylor extienden este resultado particular a otras funciones, y los polinomios de Taylor desempeñaran pronto un papel completamente nuevo. Los teoremas demostrados hasta ahora siempre examinaban el comportamiento del polinomio de Taylor $P_{n,a}$ para un determinado *n fijo*, a medida que x se aproxima hacia a. En adelante compararemos los polinomios de Taylor $P_{n,a}$ para un determinado *x fijo*, y diferentes valores de n. Anticipándonos al próximo teorema introduciremos nueva notación.

Si f es una función para la cual existe $P_{n,a}(x)$, definiremos el **resto** $R_{n,a}(x)$ por

$$\begin{aligned} f(x) &= P_{n,a}(x)+R_{n,a}(x) \\ &= f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_{n,a}(x). \end{aligned}$$

Nos gustaría tener una expresión para $R_{n,a}(x)$ cuya magnitud fuera fácil de estimar. Tal expresión existe y encierra una integral, al igual que en el caso de la función arctg. Una forma de llegar a la misma consiste en empezar con el caso $n=0$:

$$f(x)=f(a)+R_{0,a}(x).$$

El Teorema Fundamental del Cálculo nos permite escribir

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\,dt,$$

de forma que

$$R_{0,a}(x)=\int_a^x f'(t)\,dt.$$

Una expresión semejante para $R_{1,a}(x)$ puede obtenerse a partir de esta fórmula utilizando la integración por partes de una manera bastante ingeniosa: sea

$$u(t)=f'(t) \quad \text{y} \quad v(t)=t-x$$

(observemos que x representa un determinado número fijo en la expresión $v(t)$, por tanto $v'(t)=1$); entonces

$$\begin{aligned} \int_a^x f'(t)\,dt &= \int_a^x \underset{u(t)}{\underset{\downarrow}{f'(t)}}\cdot \underset{v'(t)}{\underset{\downarrow}{1}}\,dt \\ &= u(t)v(t)\Big|_a^x - \int_a^x \underset{u'(t)}{\underset{\downarrow}{f''(t)}}\underset{v(t)}{\underset{\downarrow}{(t-x)}}\,dt. \end{aligned}$$

Puesto que $v(x)=0$, obtenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a)+\int_a^x f'(t)\,dt \\ &= f(a)-u(a)v(a)+\int_a^x f''(t)(x-t)\,dt \\ &= f(a)+f'(a)(x-a)+\int_a^x f''(t)(x-t)\,dt. \end{aligned}$$

Así pues

$$R_{1,a}(x)=\int_a^x f''(t)(x-t)\,dt.$$

Es difícil dar una motivación para la elección de $v(t)=t-x$, en vez de $v(t)=t$. Lo que pasa es que ésta es la elección que funciona, conclusión a la que se puede llegar después de muchos intentos parecidos pero infructuosos. Sin embargo, resulta fácil adivinar la fórmula correspondiente a $R_{2,a}(x)$. Si

$$u(t)=f''(t) \quad \text{y} \quad v(t)=\frac{-(x-t)^2}{2},$$

entonces $v'(t) = (x-t)$, así que

$$\begin{aligned}\int_a^x f''(t)(x-t)\,dt &= u(t)v(t)\Big|_a^x - \int_a^x f'''(t)\cdot\frac{-(x-t)^2}{2}\,dt \\ &= \frac{f''(a)(x-a)^2}{2} + \int_a^x \frac{f'''(t)}{2}(x-t)^2\,dt.\end{aligned}$$

Esto demuestra que

$$R_{2,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(3)}(t)}{2}(x-t)^2\,dt.$$

El lector debería encontrar pocas dificultades en obtener una demostración rigurosa, por inducción, de que si $f^{(n+1)}$ es continua en $[a,x]$, entonces

$$R_{n,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt.$$

Esta fórmula se denomina forma integral del resto, y podemos fácilmente acotarla a partir de estimaciones de $f^{(n+1)}/n!$ en $[a,x]$. Si m y M son el mínimo y el máximo de $f^{(n+1)}/n!$ en $[a,x]$, entonces $R_{n,a}(x)$ satisface

$$m\int_a^x (x-t)^n\,dt \le R_{n,a}(x) \le M\int_a^x (x-t)^n\,dt,$$

así que podemos escribir

$$R_{n,a}(x) = \alpha\cdot\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

para algún número α entre m y M. Puesto que hemos supuesto que $f^{(n+1)}$ es continua, esto significa que para un cierto t en (a,x) podemos también escribir

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

expresión denominada forma de Lagrange del resto (estos arreglos serán familiares para los lectores que hayan resuelto el Problema 13-23).

La forma de Lagrange del resto es la que necesitaremos en casi todos los casos, e incluso podemos proporcionar una demostración de que no es necesaria la hipótesis de que la función $f^{(n+1)}$ sea continua (una mejora decididamente de menor importancia en la mayoría de aplicaciones, donde a menudo suponemos que f tiene derivadas de todos los órdenes). Esta es la forma del resto que escogeremos en la formulación de nuestro próximo teorema (Teorema de Taylor).

Lema. *Supongamos que la función R es diferenciable $(n+1)$ veces en $[a,b]$, y*

$$R^{(k)}(a) = 0 \quad \text{para } k = 0,1,2,\dots,n.$$

Entonces para cualquier x en $(a,b]$ tenemos

$$\frac{R(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{R^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} \quad \text{para algún } t \text{ en } (a,x).$$

Demostración. Para $n = 0$, este resultado no es más que el Teorema del Valor Medio, y demostraremos el caso general para cualquier n por inducción sobre n. Para ello utilizaremos el Teorema del Valor Medio de Cauchy para escribir

$$\frac{R(x)}{(x-a)^{n+2}} = \frac{R'(z)}{(n+2)(z-a)^{n+1}} = \frac{1}{n+2}\frac{R'(z)}{(z-a)^{n+1}} \quad \text{para algún } z \text{ en } (a,x),$$

y entonces aplicaremos la hipótesis de inducción *a R' en el intervalo* $[a,z]$ para obtener

$$\begin{aligned}\frac{R(x)}{(x-a)^{n+2}} &= \frac{1}{n+2}\frac{(R')^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} \quad \text{para algún } t \text{ en } (a,z)\\ &= \frac{R^{(n+2)}(t)}{(n+2)!}. \blacksquare\end{aligned}$$

Teorema 4 (Teorema de Taylor). *Supongamos que $f', \dots, f^{(n+1)}$ están definidas en $[a,x]$, y que $R_{n,a}(x)$ está definido por*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,a}(x).$$

Entonces

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{para algún } t \text{ en } (a,x)$$

(forma de Lagrange del resto).

Demostración. La función $R_{n,a}$ satisface las condiciones del Lema por la propia definición de polinomio de Taylor, así pues

$$\frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{{R_{n,a}}^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}$$

para algún t en (a,x). Pero

$${R_{n,a}}^{(n+1)} = f^{(n+1)},$$

ya que $R_{n,a} - f$ es un polinomio de grado n. $\blacksquare$

Aplicando el Teorema de Taylor a las funciones sen, cos y exp, con $a = 0$, obtenemos las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{\operatorname{sen}^{(2n+2)}(t)}{(2n+2)!}x^{2n+2}\\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{\cos^{(2n+1)}(t)}{(2n+1)!}x^{2n+1}\\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^t}{(n+1)!}x^{n+1}\end{aligned}$$

(Evidentemente, podríamos en realidad haber incrementado en uno el grado del resto de los términos correspondientes a las funciones sen y cos.)

Acotaciones de los dos primeros son especialmente fáciles. Puesto que

$$|\operatorname{sen}^{(2n+2)}(t)| \le 1 \quad \text{para cualquier } t,$$

tenemos

$$\left|\frac{\operatorname{sen}^{(2n+2)}(t)}{(2n+2)!}x^{2n+2}\right| \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

De forma similar, podemos demostrar que

$$\left|\frac{\cos^{(2n+1)}(t)}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right| \le \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Estas acotaciones son particularmente interesantes, ya que (tal como se demostró en el Capítulo 16) para cualquier $\varepsilon > 0$ podemos hacer

$$\frac{x^n}{n!} < \varepsilon$$

con tal de escoger n suficientemente grande (lo grande que tendrá que ser n dependerá de x). Esto nos permite calcular $\operatorname{sen} x$ con tanta aproximación como queramos calculando simplemente el polinomio de Taylor adecuado $P_{n,0}(x)$. Por ejemplo, supongamos que deseamos calcular sen 2 con un error menor a 10^{-4}. Puesto que

$$\operatorname{sen} 2 = P_{2n+1,0}(2) + R, \quad \text{donde } |R| \le \frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!},$$

podemos utilizar $P_{2n+1,0}(2)$ como solución, siempre que

$$\frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!} < 10^{-4}.$$

Un número n con esta propiedad puede encontrarse mediante una búsqueda directa; evidentemente sirve de ayuda disponer de una tabla con los valores de $n!$ y 2^n (ver página 432). En este caso resulta que $n = 5$ es adecuado, de modo que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 2 &= P_{11,0}(2) + R\\ &= 2 - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} - \frac{2^7}{7!} + \frac{2^9}{9!} - \frac{2^{11}}{11!} + R,\\ &\qquad \text{donde } |R| < 10^{-4}.\end{aligned}$$

Es aún más fácil efectuar el cálculo aproximado de sen 1, ya que

$$\operatorname{sen} 1 = P_{2n+1,0}(1) + R, \quad \text{donde } |R| < \frac{1}{(2n+2)!}.$$

Para obtener un error menor que ε sólo necesitamos encontrar un número n tal que

$$\frac{1}{(2n+2)!} < \varepsilon,$$

y esto sólo requiere echar un vistazo a la tabla de factoriales. (Además, los términos de $P_{2n+1,0}(1)$ serán más fáciles de manejar.)

Para valores de x muy pequeños las estimaciones serán todavía más fáciles. Por ejemplo,

$$\operatorname{sen}\frac{1}{10} = P_{2n+1,0}\left(\frac{1}{10}\right) + R, \quad \text{donde } |R| < \frac{1}{10^{2n+2}(2n+2)!}.$$

Para obtener $|R| < 10^{-10}$ podemos evidentemente emplear $n = 4$ (incluso lo podríamos conseguir con $n = 3$). Estos métodos puede utilizarse en realidad para calcular tablas de las funciones sen y cos; un ordenador de alta velocidad puede calcular $P_{2n+1,0}(x)$ para diferentes valores de x casi instantáneamente. Actualmente, los ordenadores, e incluso las baratas calculadoras de bolsillo, calculan los valores de tales funciones "sobre la marcha", mediante métodos más especializados, aún más rápidos.

La acotación del resto de e^x es sólo ligeramente más difícil. Por simplicidad supongamos que $x \geq 0$ (las acotaciones del resto cuando $x \leq 0$ se obtendrán en el Problema 15). Sobre el intervalo $[0,x]$ el valor máximo de e^t es e^x, debido a que exp es creciente, así pues

$$R_{n,0} \leq \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Puesto que ya sabemos que $e < 4$, tenemos

$$\frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{4^x x^{n+1}}{(n+1)!},$$

que puede hacerse tan pequeño como se desee con tal de escoger n suficientemente grande. Lo grande que tenga que ser n dependerá de x (y el factor 4^x hará las cosas más difíciles). De nuevo, las acotaciones serán más fáciles para pequeños valores de x. Si $0 \leq x \leq 1$, entonces

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R, \quad \text{donde } 0 < R < \frac{4}{(n+1)!}.$$

En particular, si $n = 4$, entonces

$$0 < R < \frac{4}{5!} < \frac{1}{10},$$

así pues

$$\begin{aligned} e = e^1 &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + R, \quad \text{donde } 0 < R < \frac{1}{10} \\ &= 2 + \frac{17}{24} \end{aligned}$$

que demuestra que

$$2 < e < 3.$$

Esto nos permite mejorar ligeramente nuestra acotación de R,

$$0 < R < \frac{3^x x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Tomando $n = 7$ podemos encontrar que los 3 primeros decimales de e son

$$e = 2{,}718\ldots$$

(el lector debería comprobar que $n = 7$ nos proporciona efectivamente este grado de precisión, pero sería una crueldad insistir en que efectuara los cálculos).

La función arctg es también importante pero, como el lector recordará, una expresión para $\operatorname{arctg}^{(k)}(x)$ es irremisiblemente complicada, de modo que no es viable buscar derivando expresiones para el resto. Por otra parte, nuestra deducción del polinomio de Taylor de arctg nos proporcionó automáticamente una formula para el resto:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt.$$

Tal como hemos acotado ya,

$$\left| \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt \right| \leq \left| \int_0^x t^{2n+2}\, dt \right| = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}.$$

De momento sólo consideraremos números x tales que $|x| \leq 1$. En este caso, el resto claramente se puede hacer tan pequeño como se quiera escogiendo n suficientemente grande. En particular,

$$\operatorname{arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + R, \quad \text{donde } |R| < \frac{1}{2n+3}.$$

Con esta acotación es fácil encontrar un número n tal que haga el resto menor que cualquier número positivo prefijado; por contra, n será a menudo tan grande que hará los cálculos irremediablemente largos. Para obtener un resto $< 10^{-4}$, por ejemplo, debemos tomar $n > (10^4 - 3)/2$. Esto es una verdadera lástima, ya que $\operatorname{arctg} 1 = \pi/4$, de modo que el polinomio de Taylor para arctg nos debería permitir el cálculo del número π. Afortunadamente, hay algunos ingeniosos artificios que nos permitirán superar estas dificultades. Puesto que

$$|R_{2n+1,0}(x)| < \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3},$$

bastaran valores de n mucho menores simplemente considerando valores de x algo más pequeños en valor absoluto. El artificio para un cálculo más eficiente del número π consiste en expresar $\operatorname{arctg} 1$ en términos de $\operatorname{arctg} x$ para valores de x más pequeños; el Problema 6 nos indica una forma conveniente de aplicar esta idea.

A partir de los cálculos de la página 413, vemos que para $x \geq 0$ tenemos

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{n+1} t^{n+1}$$

donde

$$\left| \frac{(-1)^n}{n+1} t^{n+1} \right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

y la acotación es ligeramente más complicada cuando $-1 < x < 0$ (Problema 16). Para esta función el resto puede hacerse tan pequeño como se quiera escogiendo n suficientemente grande, siempre que $-1 < x \leq 1$.

El comportamiento de los restos de la función arctg y $f(x) = \log(x+1)$ es ya otro asunto cuando $|x| > 1$. En este caso, las acotaciones

$$|R_{2n+1,0}(x)| < \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \quad \text{para arctg},$$

$$|R_{n,0}(x)| < \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (x > 0) \text{ para } f,$$

no son útiles, ya que cuando $|x| > 1$ las cotas x^m/m crecen a medida que m crece. Este situación es inevitable, y no se debe a haber obtenido unas acotaciones inapropiadas. Es fácil obtener acotaciones en sentido contrario, que demuestran que los residuos siguen siendo grandes. Para obtener una tal acotación para arctg, observemos que si t esta en $[0,x]$ (o en $[x,0]$ si $x < 0$), entonces

$$1+t^2 \leq 1+x^2 \leq 2x^2, \quad \text{si } |x| \geq 1,$$

por tanto

$$\left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \right| \geq \frac{1}{2x^2} \left| \int_0^x t^{2n+2}\,dt \right| = \frac{|x|^{2n+1}}{4n+6}.$$

Para obtener una acotación parecida correspondiente a la función $\log(1+x)$, podemos usar la fórmula

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t};$$

para obtener

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt.$$

Si $x > 0$, entonces para t en $[0,x]$ tenemos

$$1+t \leq 1+x \leq 2x, \quad \text{si } x \geq 1,$$

por tanto

$$\int_0^x \frac{t^n}{t+1}\,dt \geq \frac{1}{2x}\int_0^x t^n\,dt = \frac{x^n}{2n+2}.$$

Estas acotaciones indican que si $|x| > 1$, entonces los restos crecen a medida que n crece. En otras palabras, para $|x| > 1$, los polinomios de Taylor de las funciones arctg y f ***no son útiles en absoluto para el cálculo de*** arctg x y $\log(x+1)$. Esto no es ninguna tragedia, puesto que los valores de estas funciones pueden calcularse para cualquier número x una vez que son conocidos para todos los números x con $|x| < 1$.

La misma situación ocurre de forma espectacular en el caso de la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ya hemos visto que $f^{(k)}(0) = 0$ para cualquier número natural k. Esto significa que el polinomio de Taylor $P_{n,0}$ de la función f es

$$\begin{aligned} P_{n,0}(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= 0. \end{aligned}$$

En otras palabras, el resto $R_{n,0}(x)$ es siempre igual a $f(x)$, y el polinomio de Taylor es inútil para calcular $f(x)$, excepto para $x = 0$. Más adelante podremos ofrecer una explicación del comportamiento de esta función, que ilustra de forma tan desconcertante las limitaciones del Teorema de Taylor.

La palabra "calcular" ha sido utilizada tantas veces en conexión con nuestras acotaciones del resto, que podría dar lugar a una mala interpretación del significado del Teorema de Taylor. Es cierto que el Teorema de Taylor es un instrumento ideal para el cálculo (a pesar de su ignominioso fracaso en el ejemplo anterior), pero tiene aún más importantes consecuencias teóricas. La mayor parte de éstas se desarrollaran en los siguientes capítulos, pero dos demostraciones ilustraran algunas maneras de emplear el Teorema de Taylor. La primera demostración será particularmente impactante para aquellos que se hayan adentrado en la demostración, en el Capítulo 16, de que π es un número irracional.

Teorema 5. *El número e es irracional.*

Demostración. Sabemos que, para cualquier n,

$$e = e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_n, \quad \text{donde } 0 < R_n < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Supongamos que e fuera un número racional, por ejemplo $e = a/b$, donde a y b son enteros positivos. Escojamos $n > b$ y también $n > 3$. Entonces

$$\frac{a}{b} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_n,$$

de modo que

$$\frac{n!a}{b} = n! + n! + \frac{n!}{2!} + \cdots + \frac{n!}{n!} + n!R_n.$$

Todos los términos de esta igualdad diferentes de $n!R_n$ son enteros (el lado izquierdo de la igualdad es un número entero ya que $n > b$). Por consiguiente, $n!R_n$ debe ser también un número entero. Pero

$$0 < R_n < \frac{3}{(n+1)!},$$

de modo que

$$0 < n!R_n < \frac{3}{n+1} < \frac{3}{4} < 1,$$

lo cual es imposible para un entero. ∎

La segunda ilustración es meramente una demostración directa de un hecho probado en el Capítulo 15: si

$$\begin{aligned} f''+f &= 0, \\ f(0) &= 0, \\ f'(0) &= 0, \end{aligned}$$

entonces $f=0$. Para demostrar esto, observemos primero que $f^{(k)}$ existe para cualquier k; en efecto

$$\begin{aligned} &f^{(3)} = (f'')' = -f', \\ &f^{(4)} = (f^{(3)})' = (-f')' = -f'' = f, \\ &f^{(5)} = (f^{(4)})' = f', \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Esto demuestra, no sólo que todas las $f^{(k)}$ existen, sino también que existen a lo sumo cuatro diferentes: $f,\ f',\ -f,\ -f'$. Puesto que $f(0)=f'(0)=0$, todos las $f^{(k)}(0)$ son 0. Ahora el Teorema de Taylor afirma que, para cualquier n,

$$f(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^n$$

para algún t en $[0,x]$. Cada función $f^{(n+1)}$ es continua (ya que $f^{(n+2)}$ existe), por tanto para cualquier x particular existe un número M tal que

$$|f^{(n+1)}(t)| \leq M \quad \text{para } 0 \leq t \leq x, \text{ y } \textit{todo } n$$

(podemos añadir la frase "y *todo n*" ya que hay sólo cuatro diferentes $f^{(k)}$). Así pues

$$|f(x)| \leq \frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Puesto que esto es cierto para cualquier n, y puesto que $|x|^n/n!$ puede hacerse tan pequeño como queramos con tal de escoger n suficientemente grande, esto demuestra que $|f(x)| \leq \varepsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$; por consiguiente, $f(x)=0$.

Las demás aplicaciones del Teorema de Taylor que expondremos en los capítulos siguientes están estrechamente relacionadas con aspectos calculísticos que nos han ocupado en gran parte del presente capítulo. Si el resto $R_{n,a}(x)$ puede hacerse tan pequeño como se quiera con tal de escoger n lo suficientemente grande, entonces $f(x)$ puede ser calculado con tanta aproximación como se desee utilizando los polinomios $P_{n,a}(x)$. A medida que requiramos una precisión más y más elevada deberemos añadir más y más términos. Si estamos dispuestos a sumar un número infinito de términos (¡en teoría al menos!), podríamos olvidarnos del resto por completo. Deberían existir "sumas infinitas" como

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots,$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots,$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad \text{si } |x| \le 1,$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad \text{si } -1 < x \le 1.$$

Estamos casi del todo preparados para dar este paso. Sólo un obstáculo permanece: nunca hemos definido una suma infinita. Los Capítulos 22 y 23 contienen las definiciones necesarias.

Problemas

1. Halle los polinomios de Taylor (del grado y en el punto indicados) para las siguientes funciones.

(i) $f(x) = e^{e^x}$; grado 3, en 0.

(ii) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$ grado 3, en 0.

(iii) sen; grado $2n$, en $\frac{\pi}{2}$.

(iv) cos; grado $2n$, en π.

(v) exp; grado n, en 1.

(vi) log; grado n, en 2.

(vii) $f(x) = x^5 + x^3 + x$; grado 4, en 0.

(viii) $f(x) = x^5 + x^3 + x$; grado 4, en 1.

(ix) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$; grado $2n+1$, en 0.

(x) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$; grado n, en 0.

2. Escriba cada uno de los siguientes polinomios en x como polinomios en $(x-3)$. (Basta calcular el polinomio de Taylor en 3, del mismo grado que el polinomio original. ¿Por qué?)

(i) $x^2 - 4x - 9$.

(ii) $x^4 - 12x^3 + 44x^2 + 2x + 1$.

(iii) x^5.

(iv) $ax^2 + bx + c$.

3. Escriba una suma (utilizando la notación $\sum$) que sea igual a cada uno de los siguientes números con el grado de aproximación que se indica. Para reducir los cálculos necesarios, consulte las tablas para 2^n y $n!$ que siguen.

(i) sen 1; error $< 10^{-17}$.

(ii) sen 2; error $< 10^{-12}$.

(iii) sen $\frac{1}{2}$; error $< 10^{-20}$.

(iv) e; error $< 10^{-4}$.

(v) e^2; error $< 10^{-5}$.

n	2^n	$n!$
1	2	1
2	4	2
3	8	6
4	16	24
5	32	120
6	64	720
7	128	5 040
8	256	40 320
9	512	362 880
10	1 024	3 628 800
11	2 048	39 916 800
12	4 096	479 001 600
13	8 192	6 227 020 800
14	16 384	87 178 291 200
15	32 768	1 307 674 368 000
16	65 536	20,922 789 888 000
17	131 072	355 687 428 096 000
18	262 144	6 402 373 705 728 000
19	524 888	121 645 100 408 832 000
20	1 048 576	2 432 902 008 176 640 000

***4.** Este problema es similar al anterior, salvo que los errores que se especifican son tan pequeños que no se pueden utilizar las tablas. Habrá que pensar un poco, y en algunos casos se tendrá que consultar la demostración del Capítulo 16, de que $x^n/n!$ puede hacerse tan pequeño como se quiera escogiendo un número n suficientemente grande; la demostración proporciona en realidad un método para hallar el número n apropiado. En el problema anterior bastaron sumas más bien cortas; de hecho, fue posible hallar el número n más pequeño que garantizaba que la acotación del valor absoluto del resto obtenido por el Teorema de Taylor fuese menor que el error deseado. Pero en el presente problema el hallazgo de *cualquier* suma constituye una victoria moral (siempre que se pueda demostrar que dicha suma garantiza la precisión requerida).

(i) sen 1; error $< 10^{-(10^{10})}$.

(ii) e; error $< 10^{-1000}$.

(iii) sen 10; error $< 10^{-20}$.

(iv) e^{10}; error $< 10^{-30}$.

(v) arctg $\frac{1}{10}$; error $< 10^{-(10^{10})}$.

5. (a) En el Problema 11-41 el lector demostró que la ecuación $x^2 = \cos x$ tiene exactamente dos soluciones. Utilice el polinomio de Taylor de tercer grado de la función cos para demostrar que estas soluciones son aproximadamente iguales a $\pm\sqrt{2/3}$, y acote el error cometido. cometido. A continuación utilice el polinomio de Taylor de quinto grado para obtener una aproximación mejor.

(b) Haga una estimación de las soluciones de la ecuación $2x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos^2 x$.

6. (a) Demuestre, utilizando el Problema 15-9, que

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3},\\ \frac{\pi}{4} &= 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239}.\end{aligned}$$

(b) Demuestre que $\pi = 3{,}14159\ldots$ (Todo estudiante de matemáticas debería comprobar por sí mismo algunos decimales del número π, pero el objetivo de este ejercicio no es abrumar al lector con cálculos interminables. Si se utiliza la segunda expresión de la parte (a), los cinco primeros decimales del número π podrán calcularse con muy poco trabajo.)

7. Suponga que a_i y b_i son los coeficientes de los polinomios de Taylor en a de las funciones f y g, respectivamente. En otras palabras, $a_i = f^{(i)}(a)/i!$ y $b_i = g^{(i)}(a)/i!$. Encuentre los coeficientes c_i de los polinomios de Taylor en a de las siguientes funciones, a partir de los a_i y los b_i.

(i) $f+g$.

(ii) fg.

(iii) f'.

(iv) $h(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

(v) $k(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

8. (a) Demuestre que el polinomio de Taylor de $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ de grado $4n+2$ en 0 es

$$x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}.$$

Indicación: Si P es el polinomio de Taylor de grado $2n+1$ de la función sen en 0, entonces $\operatorname{sen} x = P(x) + R(x)$, donde $\lim_{x\to 0} R(x)/x^{2n+1} = 0$. ¿Que implica esto respecto al límite $\lim_{x\to 0} R(x^2)/x^{4n+2}$?

(b) Halle $f^{(k)}(0)$ para todo k.

(c) En general, si $f(x) = g(x^m)$, obtenga $f^{(k)}(0)$ a partir de las derivadas de g en 0.

Las ideas manejadas en este problema pueden extenderse considerablemente, de diversas formas que se exploraran en los tres siguientes problemas.

9. (a) El Problema 7 (i) equivale a la ecuación

$$P_{n,a,f+g} = P_{n,a,f} + P_{n,a,g}.$$

Proporcione una demostración más directa escribiendo

$$\begin{aligned} f(x) &= P_{n,a,f}(x) + R_{n,a,f}(x)\\ g(x) &= P_{n,a,g}(x) + R_{n,a,g}(x),\end{aligned}$$

y una propiedad obvia acerca de $R_{n,a,f} + R_{n,a,g}$.

(b) De forma parecida, el Problema 7 (ii) podría usarse para demostrar que

$$P_{n,a,fg} = [P_{n,a,f} \cdot P_{n,a,g}]_n,$$

donde $[P]_n$ indica el **truncamiento** de P hasta el grado n, (la suma de todos los términos de P de grado $\leq n$, con P escrito como un polinomio en $x-a$). De nuevo, dé una demostración más directa, utilizando propiedades obvias acerca de los productos en los que interviene R_n.

(c) Demuestre que si p y q son polinomios en $x-a$ y $\lim_{x\to 0} R(x)/(x-a)^n = 0$, entonces

$$p(q(x)+R(x)) = p(q(x)) + \bar{R}(x)$$

donde

$$\lim_{x\to 0} \bar{R}(x)/(x-a)^n = 0.$$

Además observe que si p es un polinomio en $x-a$ que posee sólo términos de grado $> n$, y q es un polinomio en $x-a$ cuyo término constante es 0, entonces todos los términos de $p(q(x-a))$ son de grado $> n$.

(d) Si $a = 0$ y $b = g(a) = 0$, entonces

$$P_{n,a,f\circ g} = [P_{n,b,f} \circ P_{n,a,g}]_n.$$

(el Problema 8 es un caso especial.)

(e) El mismo resultado en realidad vale para todos los a y para cualquier valor de $g(a)$. Indicación: Considere $F(x) = f(x+g(a))$, $G(x) = g(x+a)$ y $H(x) = G(x) - g(a)$.

(f) Si $g(a) = 0$, entonces

$$P_{n,a,\frac{1}{1-g}} = \left[1 + P_{n,a,g} + (P_{n,a,g})^2 + \cdots + (P_{n,a,g})^n\right]_n.$$

10. Para las siguientes aplicaciones del Problema 9, supondremos por simplicidad $a = 0$, y escribiremos simplemente $P_{n,f}$ en vez de $P_{n,a,f}$.

(a) Para $f(x) = e^x$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$, encuentre $P_{5,f+g}(x)$.

(b) Para la misma f y g, encuentre $P_{5,fg}$.

(c) Halle $P_{5,\operatorname{tg}}(x)$. Indicación: Utilice primero el Problema 9 (f) y el valor de $P_{5,\cos}(x)$ para encontrar $P_{5,1/\cos}(x)$. (Respuesta: $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$)

(d) Encuentre $P_{4,f}$ para $f(x) = e^{2x}\cos x$. (Respuesta: $1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{24}x^4$)

(e) Halle $P_{5,f}$ para $f(x) = \operatorname{sen} x/\cos 2x$. (Respuesta: $x + \frac{11}{6}x^3 + \frac{361}{120}x^5$)

(f) Calcule $P_{6,f}$ for $f(x) = x^3/[(1+x^2)e^x]$. (Respuesta: $x^3 - x^4 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{6}x^6$)

11. Cálculos de esta naturaleza pueden usarse para determinar límites que de otro modo se tendrían que tratar de resolver mediante el laborioso empleo de la Regla de l'Hôpital. Halle los siguientes:

(a) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{N(x)}{D(x)}.$$

Indicación: Halle primero $P_{3,0,N}(x)$ y $P_{3,0,D}(x)$ para el numerador y denominador $N(x)$ y $D(x)$.

(b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{e^x}{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x^2}{x - \operatorname{sen} ,x}$.

Indicación: Para el término $e^x/(1+x)$, escriba primero $1/(1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$

(c) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$.

(d) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^2 \operatorname{sen}^2 x}$.

(e) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{sen}(x^2)}$.

(f) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen} x)(\operatorname{arctg} x) - x^2}{1 - \cos(x^2)}$.

12. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Nuestro objetivo es el cálculo de $\int_0^1 f$ con un error menor que 10^{-3}. Empezando con el polinomio de Taylor de grado $2n+1$ de la función $\operatorname{sen} x$, junto con la acotación del resto obtenida en la página 425, demuestre que

$$f(x) = \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\right) + R_{2n,0,f}(x)$$

donde

$$|R_{2n,0,f}(x)| \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+2)!},$$

y utilice el resultado para concluir que

$$\int_0^1 f \approx \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}\right) dx = \frac{1703}{1800} \approx ,946.$$

con un error menor que 10^{-4}.

13. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Encuentre el polinomio de Taylor de grado n de la función f en 0, calcule $f^{(k)}(0)$, y proporcione una acotación para el valor absoluto del resto $R_{n,0,f}$.

(b) Calcule $\int_0^1 f$ con un error menor que 10^{-4}.

14. Calcule $\int_0^{0,1} \exp(x^2)\,dx$ con un error menor que 10^{-5}.

15. Demuestre que si $x \le 0$, entonces el resto de Taylor $R_{n,0}$ correspondiente a e^x satisface

$$|R_{n,0}| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

16. Demuestre que si $-1 < x \le 0$, entonces el resto de Taylor $R_{n,0}$ correspondiente a $\log(1+x)$ satisface

$$|R_{n,0}| \le \frac{|x|^{n+1}}{(1+x)(n+1)}.$$

***17.** (a) Demuestre que si $|g'(x)| \le M|x-a|^n$ para $|x-a| < \delta$, entonces

$$|g(x)-g(a)| \le M|x-a|^{n+1}/(n+1) \text{ para } |x-a| < \delta.$$

(b) Utilice la parte (a) para demostrar que si $\lim_{x\to a} g'(x)/(x-a)^n = 0$, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{(x-a)^{n+1}} = 0.$$

(c) Demuestre que si $g(x) = f(x) - P_{n,a,f}(x)$, entonces $g'(x) = f'(x) - P_{n-1,a,f'}(x)$.

(d) Proporcione una demostración del Teorema 1 por inducción, sin utilizar la Regla de l'Hôpital.

18. Deduzca el Teorema 1 como un corolario del Teorema de Taylor, con cualquiera de las expresiones para el resto. (El problema es que será necesario asumir la existencia de una derivada más que en las hipótesis del Teorema 1.)

19. El método de Lagrange para demostrar el Teorema de Taylor utilizó el siguiente procedimiento. Consideremos un determinado número x y escribamos

$$(*) \quad f(x) = f(t) + f'(t)(x-t) + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + S(t)$$

con $S(t) = R_{n,t}(x)$. La notación es un indicio de que vamos a considerar el lado derecho de la igualdad como una función de variable t, para seguidamente observar que la derivada de dicha función es 0, ya que es igual a la función constante cuyos imágenes son siempre iguales a $f(x)$. Para asegurarse de que el lector entiende los papeles de x y t, compruebe que si

$$g(t) = \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k,$$

entonces

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1}(-1) + \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k \\ &= -\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} + \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k. \end{aligned}$$

(a) Demuestre que

$$\begin{aligned}0 = f'(t) \quad &+ \left[-f'(t) + \frac{f''(t)}{1!}(x-t)\right] \\ &+ \left[\frac{-f''(t)}{1!}(x-t) + \frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x-t)^2\right] \\ &+ \cdots \\ &+ \left[\frac{-f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\right] \\ &+ S'(t),\end{aligned}$$

y observe que, después de simplificar cancelando la mayoría de términos, obtenemos

$$S'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}S(x) &= R_{n,x}(x) = 0,\\ S(a) &= R_{n,a}(x),\end{aligned}$$

podemos aplicar el Teorema del Valor Medio de Cauchy a las funciones S y $h(t) = (x-t)^{n+1}$ en $[a,x]$ para obtener la forma de Lagrange del resto (Lagrange en realidad obtuvo este resultado mediante otro argumento).

(b) De forma parecida, aplique el Teorema del Valor Medio a S para obtener esta extraña fórmula híbrida

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a).$$

Esta expresión se conoce como forma de Cauchy del resto.

20. Deduzca las formas de Cauchy y Lagrange del resto a partir de la forma integral, utilizando el Problema 13-23. Hay la misma limitación que en el Problema 18.

Sólo conozco una situación en la que la forma de Cauchy del resto se utiliza. El siguiente problema nos prepara para esta eventualidad.

21. Para cualquier número α, y cualquier número natural n, se define el "coeficiente binomial"

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!},$$

con $\binom{\alpha}{0} = 1$, como de costumbre. Si α no es un entero, entonces $\binom{\alpha}{n}$ nunca es 0, y alterna su signo para $n > \alpha$. Demuestre que el polinomio de Taylor de grado n de la función $f(x) = (1-x)^{\alpha}$ en 0 es $P_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k$, y que las formas de Cauchy y Lagrange del resto son las siguientes:

Forma de Cauchy:

$$\begin{aligned} R_{n,0}(x) &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)}{n!}x(x-t)^n(1+t)^{\alpha-n-1} \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)}{n!}x(1+t)^{\alpha-1}\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n \\ &= (n+1)\binom{\alpha}{n+1}x(1+t)^{\alpha-1}\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n, \quad t \text{ en } (0,x) \text{ o } (x,0). \end{aligned}$$

Forma de Lagrange:

$$\begin{aligned} R_{n,0}(x) &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+t)^{\alpha-n-1} \\ &= \binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+t)^{\alpha-n-1}, \quad t \text{ en } (0,x) \text{ o } (x,0). \end{aligned}$$

La acotación de estos restos es bastante difícil de obtener, y se pospone al Problema 23-21.

22. (a) Suponga que f es dos veces diferenciable en $(0,\infty)$ y que $|f(x)| \leq M_0$ para todo $x > 0$, mientras que $|f''(x)| \leq M_2$ para todo $x > 0$. Utilice el polinomio de Taylor apropiado para demostrar que para cualquier $x > 0$ tenemos

$$|f'(x)| \leq \frac{2}{h}M_0 + \frac{h}{2}M_2 \qquad \text{para todo } h > 0$$

(b) Demuestre que para cualquier $x > 0$ tenemos

$$|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

Indicación: Considere el menor valor de la expresión que aparece en (a).

(c) Si f es dos veces diferenciable en $(0,\infty)$, f'' está acotada y $f(x)$ tiende a 0 cuando $x \to \infty$, entonces también $f'(x)$ tiende a 0 cuando $x \to \infty$.

(d) Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existe y $\lim\limits_{x\to\infty} f''(x)$ también, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} f''(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$. (Compare con el Problema 11-34.)

23. (a) Demuestre que si $f''(a)$ existe, entonces

$$f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}.$$

El límite de la derecha se denomina la *segunda derivada de Schwarz* de f en a. Indicación: Utilice el polinomio de Taylor $P_{2,a}(x)$ con $x = a+h$ y con $x = a-h$.

(b) Sea $f(x) = x^2$ para $x \geq 0$, y $-x^2$ para $x \leq 0$. Demuestre que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)+f(0-h)-2f(0)}{h^2}$$

existe, mientras que $f''(0)$ no existe.

(c) Demuestre que si f tiene un máximo local en a, y la segunda derivada de Schwarz de f **en** $\boldsymbol{a}$ existe, entonces ésta es ≤ 0.

(d) Demuestre que si$f'''(a)$ existe, entonces

$$\frac{f'''(a)}{3} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h) - 2hf'(a)}{h^3}.$$

24. Utilice el polinomio de the Taylor $P_{1,a,f}$, junto con el resto, para demostrar una forma débil del Teorema 2 del apéndice del Capítulo 11: si $f'' > 0$, entonces la gráfica de f siempre está situada encima la recta tangente de f, excepto en el punto de contacto.

***25.** El Problema 18-43 presentó una demostración bastante complicada de que $f = 0$ si $f'' - f = 0$ y $f(0) = f'(0) = 0$. Proporcione otra demostración, utilizando el Teorema de Taylor. (Este problema es en realidad una escaramuza preliminar antes de la batalla por el caso general en el Problema 26, y está destinada a convencer al lector de que el Teorema de Taylor es una buena herramienta para abordar estos problemas, aunque haya artificios más claros en algunos casos especiales.)

****26.** Considere la función f que satisface la ecuación diferencial

$$f^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^{(j)},$$

para ciertos números $a_0, \ldots, a_{n-1}$. Algunos casos especiales ya han sido tratados detalladamente, o bien en el texto o en otros problemas; en particular, hemos encontrado todas las funciones que satisfacen $f' = f$, $f'' + f = 0$ o $f'' - f = 0$. El artificio realizado en el Problema 18-42 nos permitió encontrar muchas soluciones de estas ecuaciones, pero no nos informa si éstas son las únicas soluciones. Se requiere un resultado relativo a la *unicidad*, que será proporcionado en el presente problema. Al final el lector encontrará algunas observaciones (necesariamente esquemáticas) acerca de la solución general.

(a) Deduzca la siguiente fórmula para $f^{(n+1)}$ (convengamos que "a_{-1}" es 0):

$$f^{(n+1)} = \sum_{j=0}^{n-1} (a_{j-1} + a_{n-1}a_j) f^{(j)}.$$

(b) Deduzca la fórmula para $f^{(n+2)}$.

La fórmula del apartado (b) no va a ser usada; sólo está para convencer al lector que una fórmula general para $f^{(n+k)}$ no se requiere para nuestro propósito. Por otra parte, tal como el apartado (c) indica, no es muy difícil obtener estimaciones sobre la magnitud de $f^{(n+k)}(x)$.

(c) Sea $N = \text{máx}(1, |a_0|, \ldots, |a_{n-1}|)$. Entonces $|a_{j-1} + a_{n-1}a_j| \leq 2N^2$; esto significa que

$$f^{(n+1)} = \sum_{j=0}^{n-1} b_j{}^1 f^{(j)}, \quad \text{donde } |b_j{}^1| \leq 2N^2.$$

Demuestre que

$$f^{(n+2)} = \sum_{j=0}^{n-1} b_j{}^2 f^{(j)}, \quad \text{donde } |b_j{}^2| \leq 4N^3,$$

y, más generalmente,

$$f^{(n+k)} = \sum_{j=0}^{n-1} b_j{}^k f^{(j)}, \quad \text{donde } |b_j{}^k| \le 2^k N^{k+1}.$$

(d) Concluya a partir del apartado (c) que, para cualquier número x, existe un número M tal que

$$|f^{(n+k)}(x)| \le M \cdot 2^k N^{k+1} \quad \text{para todo } k.$$

(e) Suponga ahora que $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$. Demuestre que

$$|f(x)| \le \frac{M \cdot 2^{k+1} N^{k+2} |x|^{n+k+1}}{(n+k+1)!} \le \frac{M \cdot |2Nx|^{n+k+1}}{(n+k+1)!},$$

y concluya que $f = 0$.

(f) Demuestre que si f_1 y f_2 son ambas soluciones de la ecuación diferencial

$$f^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^{(j)},$$

y $f_1{}^{(j)}(0) = f_2{}^{(j)}(0)$ para $0 \le j \le n-1$, entonces $f_1 = f_2$.

En otras palabras, las soluciones de esta ecuación diferencial son determinadas por las "condiciones iniciales" (los valores $f^{(j)}(0)$ para $0 \le j \le n-1$). Esto significa que podemos encontrar *todas* las soluciones una vez podamos hallar suficientes soluciones para satisfacer cualquier combinación de condiciones iniciales. Si la ecuación

$$x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_0 = 0$$

tiene n distintas raíces $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, entonces cualquier función de la forma

$$f(x) = c_1 e^{\alpha_1 x} + \cdots + c_n e^{\alpha_n x}$$

es una solución, y

$$\begin{aligned} f(0) &= c_1 + \cdots + c_n, \\ f'(0) &= \alpha_1 c_1 + \cdots + \alpha_n c_n, \\ &\vdots \\ f^{(n-1)}(0) &= \alpha_1{}^{n-1} c_1 + \cdots + \alpha_n{}^{n-1} c_n. \end{aligned}$$

De hecho, cada solución es de este forma, ya que podemos obtener cualquier conjunto de números en el lado izquierdo de la ecuación con tal de elegir las constantes c adecuadamente, pero no vamos a tratar de demostrar esta última afirmación. (Es un hecho puramente algebraico, que se puede comprobar fácilmente para $n = 2$ ó 3.) Estas observaciones son también ciertas si algunas de las raíces son múltiples, e incluso en la situación más general considerada en el Capítulo 27.

**27. (a) Suponga que f es una función continua en $[a,b]$ con $f(a)=f(b)$ y que para todo x en (a,b) la segunda derivada de Schwarz de f en x es 0 (Problema 23). Demuestre que f es constante en $[a,b]$. Indicación: Suponga que $f(x)>f(a)$ para algún x en (a,b). Considere la función

$$g(x)=f(x)-\varepsilon(x-a)(b-x)$$

con $g(a)=g(b)=f(a)$. Para valores suficientemente pequeños de $\varepsilon>0$ tendremos $g(x)>g(a)$, por tanto g tendrá un máximo y en (a,b). Ahora utilice el Problema 23(c) (la segunda derivada de Schwarz $(x-a)(b-x)$ es simplemente su derivada segunda ordinaria).

(b) Si f es una función continua en $[a,b]$ cuya segunda derivada de Schwarz es 0 en todos los puntos de (a,b), entonces f es lineal.

*28. (a) Sea $f(x)=x^4\operatorname{sen} 1/x^2$ para $x\neq 0$, y $f(0)=0$. Demuestre que $f=0$ hasta el orden 2 en 0, aunque $f''(0)$ no existe.

Este ejemplo es un poco más complejo, pero también más impresionante, que el ejemplo proporcionado en el texto, porque tanto $f'(a)$ como $f''(a)$ existen para $a\neq 0$. Por tanto, para cualquier número a existe otro número $m(a)$ tal que

$$(*)\qquad f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{m(a)}{2}(x-a)^2+R_a(x),$$

$$\text{donde } \lim_{x\to a}\frac{R_a(x)}{(x-a)^2}=0;$$

a saber, $m(a)=f''(a)$ para $a\neq 0$, y $m(0)=0$. Observe que la función m definida de este modo no es continua.

(b) Suponga que f es una función diferenciable tal que $(*)$ se satisface para todo a, con $m(a)=0$. Utilize el Problema 27 para demostrar que $f''(a)=m(a)=0$ para todo a.

(c) Suponga ahora que $(*)$ se satisface para todo a, y que m es continua. Demuestre que para todo a la derivada segunda $f''(a)$ existe y es igual a $m(a)$.

e es trascendente

21*

La irracionalidad de e fue tan fácil de demostrar que en este capítulo optativo intentaremos una hazaña más difícil, y demostraremos que el número e no es simplemente un número irracional, sino que en realidad es algo mucho peor. En qué manera un número puede ser peor que irracional puede expresarse con un ligero cambio de redacción de las definiciones. Un número x es irracional si no es posible escribir $x = a/b$ para enteros cualesquiera a y b, con $b \neq 0$. Esto es lo mismo que decir que x no satisface ninguna ecuación

$$bx - a = 0$$

para enteros a y b, excepto para $a = 0$, $b = 0$. Desde esta perspectiva, la irracionalidad de $\sqrt{2}$ no parece constituir una deficiencia demasiado terrible; parece más bien que $\sqrt{2}$ es irracional pero por muy poco: aunque $\sqrt{2}$ no es solución de una ecuación como

$$a_1 x + a_0 = 0,$$

sí *es* solución de la ecuación

$$x^2 - 2 = 0,$$

de grado superior en una unidad. El Problema 2-18 indica cómo fabricar muchos números irracionales x que satisfacen ecuaciones de grado superior

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0,$$

donde los a_i son enteros no todo ellos iguales a 0. Un número que satisface una ecuación "algebraica" de este tipo recibe el nombre de **número algebraico**, y prácticamente todos los números que hemos encontrado están definidos en términos de soluciones de ecuaciones algebraicas (π y e son las grandes excepciones de nuestra limitada experiencia matemática). Todas las raíces, tales como

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt[10]{3}, \quad \sqrt[4]{7},$$

son claramente números algebraicos, e incluso combinaciones complicadas, tales como

$$\sqrt[3]{3 + \sqrt{5} + \sqrt[4]{1 + \sqrt{2}} + \sqrt[5]{6}}$$

son números algebraicos (aunque no intentaremos demostrar esto). Los números que no pueden ser obtenidos mediante el proceso de resolver ecuaciones algebraicas reciben el nombre de **trascendentes**; el resultado principal de este capítulo establece que e es un número de este tipo anómalo.

La demostración de que e es trascendente está ya a nuestro alcance, y en teoría lo estaba incluso antes del Capítulo 20. Sin embargo, con la inclusión de esta demostración, podemos considerarnos ya como algo más que novicios en el estudio de matemáticas avanzadas; mientras que muchas demostraciones de irracionalidad dependen solamente de propiedades elementales de los números, la demostración de que un número es trascendente supone por lo general unas matemáticas de más alto nivel. Incluso las fechas relacionadas con la transcendencia de e son impresionantemente recientes: la primera demostración de que e es trascendente, debida a Hermite, data de 1873. La demostración que vamos a dar es una simplificación debida a Hilbert.

Antes de abordar la demostración misma, conviene esbozar la estrategia, basada en una idea utilizada ya en la demostración de que e es irracional. Dos características de la expresión

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_n$$

fueron importantes para la demostración e es irracional: por una parte, el número

$$1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

puede escribirse como una fracción p/q con $q \leq n!$ (de manera que $n!\,(p/q)$ es entero); por otra parte, $0 < R_n < 3/(n+1)!$ (de modo que $n!R_n$ no es entero). Estos dos hechos demuestran que e puede aproximarse particularmente bien mediante números racionales. Por supuesto, todo número x puede aproximarse tanto como se quiera mediante números racionales: si $\varepsilon > 0$ existe un número racional r con $|x - r| < \varepsilon$; el inconveniente está, sin embargo, en que puede ser necesario un denominador muy grande para r, tan grande quizá como $1/\varepsilon$. Para e tenemos la seguridad de que éste no es el caso: existe una fracción p/q que difiere de e en menos de $3/(n+1)!$, cuyo denominador q es a lo sumo $n!$. Si se observa cuidadosamente la demostración de que e es irracional, se verá que solamente se utiliza esta propiedad de e. El número e no es de ningún modo único a este respecto: en términos generales, cuanto *mejor* puede ser aproximado un número mediante número racionales, tanto *peor* es este número (en el Problema 3 se presenta alguna evidencia para esta afirmación). La demostración de que e es trascendente depende de una extensión natural de esta idea: no solamente e, sino cualquier número finito de potencias $e, e^2, \ldots, e^n$, pueden ser aproximadas simultáneamente y particularmente bien mediante número racionales. En nuestra demostración empezaremos suponiendo que e es algebraico, de modo que

$$(*) \qquad a_n e^n + \cdots + a_1 e + a_0 = 0, \quad a_0 \neq 0$$

para algunos enteros $a_0, \ldots, a_n$. Para obtener una contradicción hallaremos entonces ciertos enteros $M, M_1, \ldots, M_n$ y ciertos números "pequeños" $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ tales que

$$e^1 = \frac{M_1 + \varepsilon_1}{M},$$
$$e^2 = \frac{M_2 + \varepsilon_2}{M},$$
$$\vdots$$
$$e^n = \frac{M_n + \varepsilon_n}{M}.$$

Lo pequeños que tengan que ser los ε se verá cuando se sustituyan estas expresiones en la ecuación supuesta $(*)$. Después de multiplicar todo por M obtenemos

$$[a_0 M + a_1 M_1 + \cdots + a_n M_n] + [\varepsilon_1 a_1 + \cdots + \varepsilon_n a_n] = 0.$$

El primer término entre corchetes es entero y elegiremos los M de tal manera que dicho término sea necesariamente un entero *no nulo*. Nos arreglaremos para hallar los ε de manera que

$$|\varepsilon_1 a_1 + \cdots + \varepsilon_n a_n| < \tfrac{1}{2};$$

esto nos conducirá a la contradicción deseada; ¡la suma de un entero no nulo y de un número de valor absoluto menor que $\frac{1}{2}$ nunca puede ser cero!

Como estrategia básica resulta bastante razonable y sencilla. La parte destacable de la demostración será la manera en que se definan los M y los ε. Para abordar la demostración será necesario saber algo acerca de la función gamma. (Esta función se introdujo en el Problema 19-40.)

Teorema 1. *e es trascendente.*

Demostración. Supongamos que existen unos números enteros $a_0, \ldots, a_n$, con $a_0 \neq 0$, tales que

$$(*) \quad a_n e^n + a_{n-1} e^{n-1} + \cdots + a_0 = 0.$$

Definamos los números enteros $M, M_1, \ldots, M_n$ y $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ como sigue.

$$M = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}[(x-1)\cdot \ldots \cdot (x-n)]^p e^{-x}}{(p-1)!}\,dx,$$

$$M_k = e^k \int_k^\infty \frac{x^{p-1}[(x-1)\cdot \ldots \cdot (x-n)]^p e^{-x}}{(p-1)!}\,dx,$$

$$\varepsilon_k = e^k \int_0^k \frac{x^{p-1}[(x-1)\cdot \ldots \cdot (x-n)]^p e^{-x}}{(p-1)!}\,dx.$$

El número indeterminado p representa un número primo* que elegiremos más adelante.

*El término "número primo" se definió en el Problema 2-17. Una propiedad importante relativa a los números primos será aplicada en la demostración, aunque no se demuestra en este libro: si p es un número primo que no divide al entero a, ni al entero b, entonces p tampoco divide a ab. En la bibliografía se dan

A pesar del aspecto intimidante de estas tres expresiones, con un poco de trabajo parecerán mucho más aceptables. Fijémonos primero en M. Si la expresión entre corchetes,

$$[(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n)],$$

se desarrolla, obtenemos un polinomio

$$x^n+\cdots\pm n!$$

de coeficientes enteros. Al elevarlo a la potencia p-ésima éste se convierte en un polinomio todavía más complicado

$$x^{np}+\cdots\pm(n!)^p.$$

Así pues, M puede escribirse en la forma

$$M=\sum_{\alpha=0}^{np}\frac{1}{(p-1)!}C_\alpha\int_0^\infty x^{p-1+\alpha}e^{-x}\,dx,$$

donde los C_α son ciertos enteros, y $C_0=\pm(n!)^p$. Pero

$$\int_0^\infty x^k e^{-x}\,dx=k!\,.$$

Así pues,

$$M=\sum_{\alpha=0}^{np}C_\alpha\frac{(p-1+\alpha)!}{(p-1)!}.$$

Ahora bien, para $\alpha=0$ obtenemos el término

$$\pm(n!)^p\frac{(p-1)!}{(p-1)!}=\pm(n!)^p.$$

Consideraremos ahora solamente números primos $p>n$; entonces este término es un entero *no* divisible por p. Por otra parte, si $\alpha>0$, entonces

$$C_\alpha\frac{(p-1+\alpha)!}{(p-1)!}=C_\alpha(p+\alpha-1)(p+\alpha-2)\cdot\ldots\cdot p,$$

el cual *es* divisible por p. Por lo tanto, M mismo es un entero *no* divisible por p.

Consideremos ahora M_k. Tenemos

$$\begin{aligned}M_k&=e^k\int_k^\infty\frac{x^{p-1}[(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n)]^p e^{-x}}{(p-1)!}\,dx\\&=\int_k^\infty\frac{x^{p-1}[(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n)]^p e^{-(x-k)}}{(p-1)!}\,dx.\end{aligned}$$

---

referencias para este teorema (el cual es fundamental en la demostración de que la descomposición de un entero en producto de números primos es única). Utilizaremos también el resultado del Problema 2-17(d), de que existen infinitos números primos; el lector debe poder decir en qué puntos de la demostración hacemos uso de esta información.

Estas integrales pueden ser transformadas en una expresión muy parecida a M mediante la sustitución

$$\begin{aligned} u &= x-k \\ du &= dx. \end{aligned}$$

Los límites de integración pasan a ser 0 e ∞, y

$$M_k = \int_0^\infty \frac{(u+k)^{p-1}[(u+k-1)\cdot\ldots\cdot u\cdot\ldots\cdot(u+k-n)]^p e^{-u}}{(p-1)!}\,du.$$

Existe una diferencia muy importante entre esta expresión y la de M. El término entre corchetes contiene el factor u en el lugar k. Así pues, la potencia p-ésima contiene el factor u^p. Esto significa que la expresión entera

$$(u+k)^{p-1}[(u+k-1)\cdot\ldots\cdot(u+k-n)]^p$$

es un polinomio de coeficientes enteros, *cada uno de cuyos términos* es de grado no menor que p. Así pues,

$$M_k = \sum_{\alpha=1}^{np} \frac{1}{(p-1)!} D_\alpha \int_0^\infty u^{p-1+\alpha} e^{-u}\,du = \sum_{\alpha=1}^{np} D_\alpha \frac{(p-1+\alpha)!}{(p-1)!},$$

donde los D_α son ciertos enteros. Observemos que la suma empieza con $\alpha = 1$; en este caso *cada uno* de los términos de la suma es divisible por p. Así pues, cada M_k es un entero que *es* divisible por p.

Está claro ahora que

$$e^k = \frac{M_k + \varepsilon_k}{M}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Sustituyendo en $(*)$ y multiplicando por M obtenemos

$$[a_0 M + a_1 M_1 + \cdots + a_n M_n] + [a_1\varepsilon_1 + \cdots + a_n\varepsilon_n] = 0.$$

Además de exigir que sea $p > n$ supongamos también que $p > |a_0|$. Esto significa que tanto M y a_0 no son divisibles por p, de modo que $a_0 M$ tampoco es divisible por p. Al ser cada M_k divisible por p, se sigue que

$$a_0 M + a_1 M_1 + \cdots + a_n M_n$$

no es divisible por p. En particular es un entero *no nulo*.

Para obtener una contradicción a la ecuación supuesta $(*)$, y demostrar así que e es trascendente, sólo hace falta demostrar que

$$|a_1\varepsilon_1 + \cdots + a_n\varepsilon_n|$$

puede hacerse tan pequeño como se quiera, eligiendo p suficientemente grande; basta evidentemente demostrar que cada $|\varepsilon_k|$ puede hacerse tan pequeño como se quiera. Esto no exige más que algunas acotaciones sencillas; para el resto del razonamiento recordemos que n es un cierto número fijo (el grado de la supuesta ecuación polinómica $(*)$). Para empezar, si $1 \leq k \leq n$, entonces

$$
\begin{aligned}
|\varepsilon_k| &\le e^k \int_0^k \frac{|x^{p-1}[(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n)]^p|e^{-x}}{(p-1)!}\,dx \\
&\le e^n \int_0^n \frac{n^{p-1}|(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n)|^p e^{-x}}{(p-1)!}\,dx.
\end{aligned}
$$

Sea ahora A el máximo de $|(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n)|$ con x en $[0,n]$. Entonces

$$
\begin{aligned}
|\varepsilon_k| &\le \frac{e^n n^{p-1} A^p}{(p-1)!}\int_0^n e^{-x}\,dx \\
&\le \frac{e^n n^{p-1} A^p}{(p-1)!}\int_0^\infty e^{-x}\,dx \\
&= \frac{e^n n^{p-1} A^p}{(p-1)!} \\
&\le \frac{e^n n^p A^p}{(p-1)!} = \frac{e^n (nA)^p}{(p-1)!}.
\end{aligned}
$$

Pero n y A son fijos; así pues $(nA)^p/(p-1)!$ puede hacerse tan pequeño como se quiera haciendo p suficientemente grande. ■

Esta demostración, de forma parecida a la demostración de que π es irracional, merece algunas consideraciones filosóficas. A primera vista, el razonamiento parece muy "avanzado"; después de todo, utilizamos integrales, y además integrales desde 0 a ∞. En realidad, como han observado muchos matemáticos, estas integrales pueden ser eliminadas por completo del razonamiento; las únicas integrales esenciales para la demostración son de la forma

$$\int_0^\infty x^k e^{-x}\,dx$$

con k entero, y estas integrales pueden ser sustituidas por $k!$ siempre que se presenten. Así pues, M, por ejemplo, podría definirse inicialmente como

$$M = \sum_{\alpha=0}^{np} C_\alpha \frac{(p-1+\alpha)!}{(p-1)!},$$

donde C_α son los coeficientes del polinomio

$$[(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n)]^p.$$

Aplicando repetidamente esta idea, se obtiene la demostración "completamente elemental" de que e es trascendente, demostración que se basa solamente en el hecho de que

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

Por desgracia, esta demostración "elemental" es más difícil de comprender que la original; ¡toda la estructura de la demostración debe quedar oculta sólo por querer eliminar unos pocos signos de integral! Esta característica de dicho teorema no es en ningún modo excepcional; los razonamientos "elementales" son con frecuencia más difíciles que los "avanzados". Nuestra demostración de que π es irracional constituye un ejemplo de ello. Es probable que el lector ya no recuerde nada acerca de esta demostración, salvo que intervienen en ella algunas funciones muy complicadas. Existe en realidad una demostración más avanzada, pero mucho más conceptual que demuestra que π es *trascendente*, hecho que es de gran interés tanto históricamente como en sí mismo. Uno de los problemas clásicos de la matemática griega era construir, sólo con regla y compás, un cuadrado cuya área fuese la del círculo de radio 1. Esto exige la construcción de un segmento de longitud $\sqrt{\pi}$, lo cual se podría llevar a cabo si fuese posible construir un segmento de longitud π. Los griegos fueron totalmente incapaces de decidir si un tal segmento podía ser construido, e incluso con todos los recursos de la matemática moderna no se logró dilucidar esta cuestión hasta 1882. En dicho año Lindemann demostró que π es trascendente; puesto que la longitud de cualquier segmento que puede ser construido con regla y compás se puede expresar en términos de $+$, $\cdot$, $-$, $\div$ y $\sqrt{\ }$, y es por lo tanto algebraico, esto demuestra que es imposible construir un segmento de longitud π.

La demostración de que π es trascendente exige unos recursos matemáticos considerables, demasiado avanzados para tratarse en este libro. Sin embargo, la demostración no es mucho más difícil que la demostración de que e es trascendente. De hecho, la demostración para π es prácticamente la misma que la demostración para e. Esta última afirmación debería sin duda sorprender al lector. La demostración de que e es trascendente parece depender tan profundamente de propiedades específicas de e que es casi inconcebible cómo alguna modificación pueda ser adaptada para π; después de todo, ¿qué tiene que ver e con π? ¡Pronto lo verá el lector!

Problemas

1. (a) Demuestre que si $\alpha > 0$ es algebraico, entonces $\sqrt{\alpha}$ es algebraico.

(b) Demuestre que si α es algebraico y r es racional, entonces $\alpha + r$ y αr son algebraicos.

El apartado (b) puede en realidad reforzarse considerablemente: la suma, producto y cociente de números algebraicos es algebraica. Este hecho es demasiado difícil para demostrarlo aquí, pero pueden examinarse algunos casos particulares:

2. Demuestre que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ y $\sqrt{2}(1+\sqrt{3})$ son algebraicos, hallando efectivamente las ecuaciones algebraicas que satisfacen. (Harán falta ecuaciones de grado 4.)

***3.** (a) Sea α un número algebraico no racional. Suponga que α satisface la ecuación polinómica

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0,$$

y que ninguna función polinómica de grado inferior tiene esta propiedad. Demuestre que $f(p/q) \neq 0$ para cualquier número racional p/q. Indicación: Aplique el Problema 3-7(b).

(b) Demuestre ahora que $|f(p/q)| \geq 1/q^n$ para todos los números racionales p/q con $q > 0$. Indicación: Escriba $f(p/q)$ como fracción con el denominador común q^n.

(c) Sea $M = \sup\{\,|f'(x)| : |x-\alpha| < 1\}$. Aplique el Teorema del Valor Medio para demostrar que si p/q es un número racional con $|\alpha - p/q| < 1$, entonces $|\alpha - p/q| > 1/Mq^n$. (Se deduce que para $c = \text{mín}(1, 1/M)$ tenemos $|\alpha - p/q| > c/q^n$ para todos los p/q racionales.)

***4.** Sea

$$\alpha = 0{,}110001000000000000000001000\ldots,$$

donde los 1 están en el lugar $n!$ para cada n. Utilice el Problema 3 para demostrar que α es trascendente. (Para cada n, demostrar que α no es una raíz de una ecuación de grado n.)

Aunque el Problema 4 sólo menciona un determinado número trascendente, debe quedar claro que se pueden construir fácilmente otros infinitos números α que no satisfacen $|\alpha - p/q| > c/q^n$ cualesquiera que sean c y n. Tales números fueron considerados primeramente por Liouville (1809-1882), y la desigualdad del Problema 3 se la denomina a menudo desigualdad de Liouville. Ninguno de los números trascendentes construidos de esta manera resulta ser particularmente interesante, pero durante algún tiempo los números trascendentes de Liouville fueron los únicos conocidos. Esta situación cambió de forma radical con el trabajo de Cantor (1845-1918), quien demostró, sin poner de manifiesto ningún número trascendente concreto, que *la mayor parte* de los números son trascendentes. Los dos problemas siguientes nos proporcionan una introducción a las ideas que permiten dar sentido a tales afirmaciones. La definición básica con que debemos operar es la siguiente: se dice que un conjunto A es **numerable** si es posible disponer sus elementos en una sucesión

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

El ejemplo inmediato (en realidad, más o menos el ideal platónico de) conjunto numerable es $\mathbf{N}$, el conjunto de los números naturales; evidentemente también es numerable el conjunto de todos los números pares:

$$2, 4, 6, 8, \ldots$$

Algo más sorprendente es encontrar que $\mathbf{Z}$, conjunto de todos los enteros (positivos, negativos y 0) también es numerable, pero ver es creer:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$$

Los dos problemas siguientes, donde se trazan las características básicas de los conjuntos numerables, constituyen en realidad una serie de ejemplos para demostrar que (1) hay muchos más conjuntos numerables de los que se puede suponer y (2) existen, no obstante, algunos conjuntos no numerables.

***5.** (a) Demuestre que si A y B son numerables, entonces también lo es $A \cup B = \{x : x \text{ está en } A \text{ o } x \text{ está en } B\}$. Indicación: Aplique el mismo artificio que dio resultado para $\mathbf{Z}$.

(b) Demuestre que el conjunto de los números racionales positivos es numerable. (Esto es verdaderamente sorprendente; utilice la siguiente demostración descriptiva:

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\[2ex]
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \cdots \\[2ex]
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \cdots)
\end{array}$$

(c) Demuestre que el conjunto de todos los pares (m,n) de enteros es numerable. (Esto es prácticamente lo mismo de la parte (b).)

(d) Si $A_1, A_2, A_3, \ldots$ son todos numerables, demuestre que

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$$

es también numerable. (Aplique de nuevo el mismo artificio que en la parte (b).)

(e) Demuestre que el conjunto de todas las ternas (l,m,n) de enteros es numerable. (Se puede describir una terna (l,m,n) mediante un par (l,m) y un número n.)

(f) Demuestre que el conjunto de todas las n-tuplas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es numerable. (Si se ha hecho la parte (e), se puede hacer esto por inducción.)

(g) Demuestre que el conjunto de todas las raíces de las funciones polinómicas de grado n es numerable. (La parte (f) demuestra que el conjunto de todas las funciones polinómicas de grado n puede ser dispuesto según una sucesión, y que cada una de estas funciones tiene a lo sumo n raíces.)

(h) Utilice ahora las partes (d) y (g) para demostrar que el conjunto de todos los números algebraicos es numerable.

***6.** Puesto que resulta haber tantos conjuntos numerables, es importante observar que el conjunto de todos los números reales comprendidos entre 0 y 1 *no* es numerable. En otras palabras, no es posible disponer todos estos números reales según una sucesión

$$\alpha_1 = 0{,}a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\ldots$$

$$\alpha_2 = 0{,}a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\ldots$$

$$\alpha_3 = 0{,}a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\ldots$$

$$\ldots$$

(en los segundos miembros se utiliza la notación decimal). Para demostrar que esto es así, suponga que fuera posible una tal lista y considere el decimal

$$0{,}\bar{a}_{11}\bar{a}_{22}\bar{a}_{33}\bar{a}_{44}\ldots,$$

donde $\bar{a}_{nn} = 5$ si $a_{nn} \neq 5$ y $\bar{a}_{nn} = 6$ if $a_{nn} = 5$. Demuestre que este número no puede estar en la lista, obteniendo así una contradicción.

Los Problemas 5 y 6 pueden resumirse como sigue. El conjunto de todos los números algebraicos es numerable. Si el conjunto de los números trascendentes fuese también numerable, entonces el conjunto de todos los números reales sería numerable, según el Problema 5(a), y en consecuencia el conjunto de los números reales comprendidos entre 0 y 1 sería numerable. Pero esto es falso. Así pues, el conjunto de los números algebraicos es numerable y el conjunto de los números trascendentes no lo es ("existen más números trascendentes que números algebraicos"). Los dos problemas restantes ilustran todavía más lo importante que es distinguir entre los conjuntos numerables y los que no lo son.

***7.** Sea f una función no decreciente sobre $[0, 1]$. Recuerde (Problema 8-8) que $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f(x)$ existen ambos.

(a) Para cualquier $\varepsilon > 0$ demuestre que existen solamente un número finito de números a en $[0, 1]$ con $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) - \lim\limits_{x \to a^-} f(x) > \varepsilon$. Indicación: Existen, efectivamente, a lo sumo $[f(1) - f(0)]/\varepsilon$ de ellos.

(b) Demuestre que el conjunto de los puntos en que f es discontinua es numerable. Indicación: Si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) - \lim\limits_{x \to a^-} f(x) > 0$, entonces es $> 1/n$ para algún número natural n.

Este problema demuestra que una función no decreciente es automáticamente continua en casi todos los puntos. Para la diferenciación, la situación es más difícil de analizar pero también más interesante. Una función no decreciente puede dejar de ser diferenciable en un conjunto no numerable de puntos, pero sigue siendo verdad que las funciones no decrecientes son diferenciables en casi todos los puntos (según un sentido diferente de la palabra "casi todos"). La referencia [38] de la bibliografía proporciona una bonita demostración, aplicando el Lema del Sol Naciente del Problema 8-20. Para los que hayan hecho el Problema 9 del Apéndice al Capítulo 11, es posible dar por lo menos una aplicación a la diferenciación de las ideas ya desarrolladas en este conjunto de problemas: si f es convexa, entonces f es diferenciable excepto en aquellos puntos en que su derivada por la derecha ${f_+}'$ es discontinua; pero la función ${f_+}'$ es decreciente, de modo que una función convexa es automáticamente diferenciable excepto en un conjunto numerable de puntos.

***8.** (a) El Problema 11-70 hizo ver que si todo punto es máximo local de una función *continua* f, entonces f es una función constante. Suponga ahora que se abandona la hipótesis de continuidad. Demuestre que f toma solamente un conjunto numerable de valores. Indicación: Para cada x elija números *racionales* a_x y b_x tales que $a_x < x < b_x$ y x es un punto máximo para f sobre (a_x, b_x). Entonces todo valor $f(x)$ es el valor máximo de f sobre algún intervalo (a_x, b_x). ¿Cuántos intervalos de estos existen?

(b) Deduzca ahora el Problema 11-70 como corolario de la parte (a).

(c) Demuestre el resultado del Problema 11-70(b) del mismo modo.

Sucesiones infinitas

22

El concepto de sucesión infinita es tan natural que hasta parece que pueda prescindirse de toda definición. Se escribe con frecuencia sencillamente "una sucesión infinita

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots\text{''},$$

indicando los tres puntos que los números a_i continúan "indefinidamente" hacia la derecha. No es difícil, sin embargo, formular una definición rigurosa de sucesión infinita; lo importante acerca de una sucesión infinita es que para todo número natural n existe un número real a_n. Es precisamente este tipo de correspondencia lo que se quiere formalizar con las funciones.

Definición

Una **sucesión infinita** de números reales es una función cuyo dominio es el conjunto de números naturales **N**.

Según esta definición una sucesión debería designarse una sucesión mediante una simple letra, tal como a, y los valores particulares mediante

$$a(1), a(2), a(3), \ldots,$$

pero la notación con subíndices

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

es la que casi siempre se usa y la sucesión propiamente dicha suele designarse mediante un símbolo tal como $\{a_n\}$. Así pues, $\{n\}$, $\{(-1)^n\}$ y $\{1/n\}$ designan las sucesiones α, β y γ definidas por

$$\alpha_n = n,$$

$$\beta_n = (-1)^n,$$

$$\gamma_n = \frac{1}{n}.$$

Una sucesión, lo mismo que cualquier función, puede representarse gráficamente (Figura 1) pero la gráfica, por lo general, es poco significativa ya que la mayor parte de la función no cabe en la página.

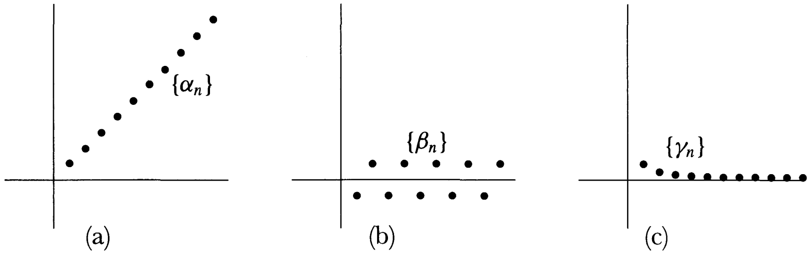


Figura 1

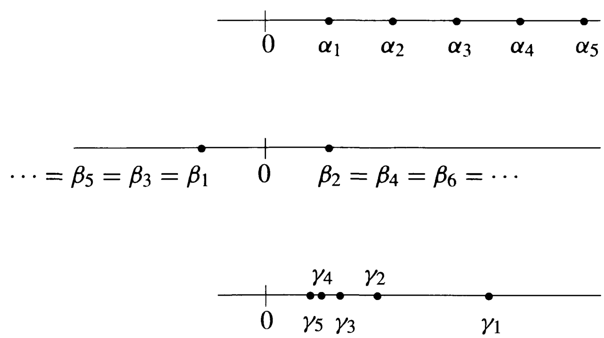


Figura 2

Se obtiene una representación más conveniente de una sucesión marcando simplemente los puntos a_1, a_2, a_3,... sobre una recta (Figura 2). Este tipo de diagrama indica "hacia dónde va" la sucesión. La sucesión $\{\alpha_n\}$ "va hacia el infinito", la sucesión $\{\beta_n\}$ "va dando saltos entre -1 y 1" y la sucesión $\{\gamma_n\}$ "converge hacia 0". De las tres frases entre comillas, la última se refiere al concepto crucial asociado con las sucesiones que será definido posteriormente con precisión (dicha definición se ilustra en la Figura 3).

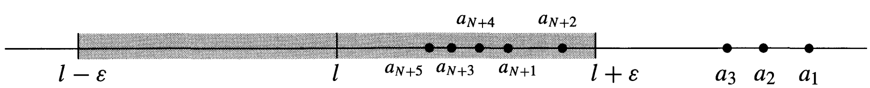


Figura 3

Definición

Una sucesión $\{a_n\}$ **converge hacia l** (en símbolos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$) si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que, para todos los números naturales n,

$$\text{si } n > N, \text{ entonces } |a_n - l| < \varepsilon.$$

Además de la terminología introducida en esta definición, decimos a veces que la sucesión $\{a_n\}$ **tiende hacia l** o que tiene el **límite l**. Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ **converge** si converge hacia l para algún l, y que **diverge** si no converge.

Para demostrar que la sucesión $\{\gamma_n\}$ converge hacia 0, basta observar lo siguiente. Si $\varepsilon > 0$, existe un número natural N tal que $1/N < \varepsilon$. Entonces, si $n > N$ tenemos

$$\gamma_n = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon, \quad \text{por tanto } |\gamma_n - 0| < \varepsilon.$$

El límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}=0$$

parecerá probablemente razonable después de un poco de reflexión (nos dice simplemente que $\sqrt{n+1}$ es prácticamente igual a $\sqrt{n}$ cuando n es grande), pero la demostración matemática no es tan evidente. Para estimar $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ podemos efectuar un arreglo algebraico:

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1}-\sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

También es posible estimar $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ aplicando el Teorema del Valor Medio a la función $f(x)=\sqrt{x}$ sobre el intervalo $[n,n+1]$. Obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{1} &= f'(x)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad \text{para algún } x \text{ en } (n,n+1)\\ &< \frac{1}{2\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

Se puede utilizar cualquiera de estas estimaciones para demostrar el límite anterior; la demostración detallada se deja para el lector como ejercicio sencillo pero que vale la pena hacer.

El límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+7n^2+1}{4n^3-8n+63}=\frac{3}{4}$$

también debería parecer razonable, ya que los términos que encierran n^3 son los más importantes cuando n es grande. Si se recuerda la demostración del Teorema 7-9 se adivinarán los arreglos a efectuar para convertir esta idea en una demostración; dividiendo numerador y denominador por n^3 se obtiene

$$\frac{3n^3+7n^2+1}{4n^3-8n+63}=\frac{3+\dfrac{7}{n}+\dfrac{1}{n^3}}{4-\dfrac{8}{n^2}+\dfrac{63}{n^3}}.$$

Utilizando esta expresión, la demostración del límite anterior no es difícil, especialmente si se tienen en cuenta los siguientes hechos:

Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ y $\lim_{n\to\infty} b_n$ existen ambos, entonces

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n;$$

además, si $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, entonces $b_n \neq 0$ para todo n mayor que algún N, y

$$\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = \lim_{n\to\infty} a_n / \lim_{n\to\infty} b_n.$$

(Si hubiéramos querido hablar con absoluta precisión, la tercera afirmación hubiera tenido que ser todavía más complicada. Tal como está, estamos considerando el límite de una sucesión $\{c_n\} = \{a_n/b_n\}$, donde los números c_n podrían incluso no estar definidos para algunos $n < N$. Esto, en realidad, no tiene importancia –para tales n podríamos definir c_n de manera arbitraria– ya que el límite de una sucesión no se altera si cambiamos la sucesión en un número finito de puntos.)

Aunque estos hechos son muy útiles, no nos molestaremos en establecerlos como teorema; el lector no debería tener dificultad en demostrar por sí mismo estos resultados, al ser la definición de $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ tan semejante a las anteriores definiciones de límites, especialmente $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$.

El parecido entre las definiciones de $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ es algo más que pura analogía; es posible definir el primero en términos del segundo. Si f es la función cuya gráfica (Figura 4) consiste en segmentos rectilíneos que unen

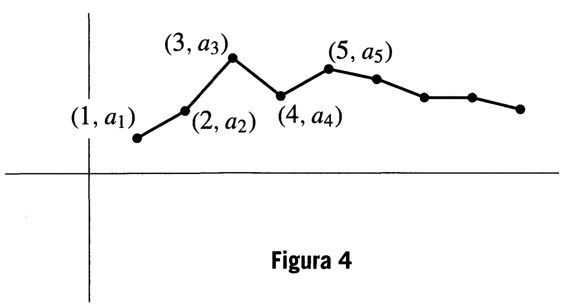


Figura 4

los puntos de la gráfica de la sucesión $\{a_n\}$, de modo que

$$f(x) = (a_{n+1} - a_n)(x - n) + a_n \qquad n \leq x \leq n+1,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = l.$$

De otro modo, si f satisface $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$, y establecemos $a_n = f(n)$, entonces $\lim_{x\to\infty} a_n = l$.

Esta observación es con frecuencia muy útil. Supongamos, por ejemplo, que $0 < a < 1$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0.$$

Para demostrar esto observemos que

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\log a} = 0,$$

al ser $\log a < 0$, de modo que $x\log a$ es negativo aunque grande en valor absoluto para x grandes. Observemos que en realidad tenemos

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0 \quad \text{si } |a| < 1;$$

ya que si $a < 0$ podemos escribir

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n|a|^n = 0.$$

El comportamiento de la función logarítmica indica también que si $a > 1$, entonces a^n se hace arbitrariamente grande al hacerse n grande. Esta afirmación se escribe a menudo

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \infty, \quad a > 1,$$

e incluso se dice a veces que $\{a^n\}$ tiende hacia ∞. Escribimos también ecuaciones tales como

$$\lim_{n\to\infty} -a^n = -\infty,$$

y decimos que $\{-a^n\}$ tiende hacia $-\infty$. Observemos, sin embargo, que si $a < -1$, entonces $\lim_{n\to\infty} a^n$ no existe, ni siquiera en este sentido generalizado.

A pesar de esta conexión con un concepto familiar, es más importante representarse la convergencia en términos de la imagen de una sucesión de puntos sobre una recta (Figura 3). Existe otra conexión entre límites de funciones y límites de sucesiones relacionada con *esta* imagen. Esta conexión es algo menos evidente, pero considerablemente más interesante, que la antes mencionada; en vez de definir límites de sucesiones en términos de límites de funciones, es posible invertir el proceso.

Teorema 1. *Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene c, excepto quizá el propio c, con*

$$\lim_{x\to c} f(x) = l.$$

Supongamos que $\{a_n\}$ es una sucesión tal que

$$\begin{aligned} &(1) \quad \text{cada } a_n \text{ pertenece al dominio de } f,\\ &(2) \quad \text{cada } a_n \neq c,\\ &(3) \quad \lim_{n\to\infty} a_n = c. \end{aligned}$$

Entonces la sucesión $\{f(a_n)\}$ satisface

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l.$$

Recíprocamente, si esto se cumple para toda sucesión $\{a_n\}$ que satisface las condiciones anteriores, entonces $\lim_{x\to c} f(x) = l$.

Demostración. Supongamos primero que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = l$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x,

$$\text{si } 0 < |x-c| < \delta, \text{ entonces } |f(x)-l| < \varepsilon.$$

Si la sucesión $\{a_n\}$ satisface $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$, entonces (Figura 3) existe un número natural N tal que,

$$\text{si } n > N, \text{ entonces } |a_n - c| < \delta.$$

Según nuestra elección de δ, esto significa que

$$|f(a_n)-l| < \varepsilon,$$

lo cual demuestra que

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l.$$

Recíprocamente, supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = l$ para toda sucesión $\{a_n\}$ con $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$. Si *no* fuese $\lim\limits_{x\to c} f(x) = l$, entonces existiría algún $\varepsilon > 0$ tal que para *todo* $\delta > 0$ existiría un x con

$$0 < |x-c| < \delta \quad \text{pero con} \quad |f(x)-l| > \varepsilon.$$

En particular, para todo n existiría algún número x_n tal que

$$0 < |x_n - c| < \frac{1}{n} \quad \text{pero con} \quad |f(x_n)-l| > \varepsilon.$$

Con esto tendríamos que la sucesión $\{x_n\}$ converge claramente hacia c, pero, por ser $|f(x_n)-l| > \varepsilon$ para todo n, la sucesión $\{f(x_n)\}$ no converge hacia l. Esto estaría en contradicción con la hipótesis, de modo que debe cumplirse $\lim\limits_{x\to c} f(x) = l$. ■

El Teorema 1 suministra muchos ejemplos de sucesiones convergentes. Por ejemplo, las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ definidas por

$$a_n = \operatorname{sen}\left(13 + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$b_n = \cos\left(\operatorname{sen}\left(1 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right)\right),$$

convergen claramente hacia $\operatorname{sen}(13)$ y $\cos(\operatorname{sen}(1))$, respectivamente. Es, sin embargo, importante, disponer de algunos criterios que garanticen la convergencia de sucesiones que no sean ostensiblemente de este tipo. Existe un criterio importante, muy fácil de demostrar, pero que constituye la base para todos los demás resultados. Este criterio se expresa en términos de conceptos definidos para funciones, que son por tanto también aplicables a sucesiones: una sucesión $\{a_n\}$ es **creciente** si $a_{n+1} > a_n$ para todo n, **no decreciente** si $a_{n+1} \geq a_n$ para todo n, y **acotada superiormente** si existe un número M tal que $a_n \leq M$ para todo n; existen definiciones análogas para sucesiones que son decrecientes, no crecientes y acotadas inferiormente.

Teorema 2. *Si $\{a_n\}$ es no decreciente y acotada superiormente, entonces $\{a_n\}$ converge (un enunciado análogo se cumple si $\{a_n\}$ es no creciente y acotada inferiomente).*

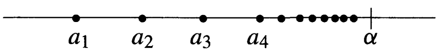


Figura 5

Demostración. El conjunto A formado por todos los números a_n es, según se ha supuesto, acotado superiormente, de modo que A tiene una cota superior mínima α. Veremos que $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ (Figura 5). En efecto, si $\varepsilon > 0$, existe algún a_N que satisface $\alpha - a_N < \varepsilon$, puesto que α es la cota superior mínima de A. Entonces si $n > N$ tenemos

$$a_n \geq a_N, \quad \text{de modo que} \quad \alpha - a_n \leq \alpha - a_N < \varepsilon.$$

Esto demuestra que $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$. ∎

La hipótesis de que $\{a_n\}$ está acotada superiormente es evidentemente esencial en el Teorema 2: si $\{a_n\}$ no está acotada superiormente, entonces (tanto si $\{a_n\}$ es no decreciente como si no lo es) $\{a_n\}$ claramente diverge. Con esta observación, podría parecer que no debería haber dificultad alguna en decidir si una sucesión no decreciente dada $\{a_n\}$ está o no acotada superiormente, y en consecuencia decidir si $\{a_n\}$ converge o no. En el próximo capítulo tales sucesiones surgirán de modo muy natural y, según veremos, el determinar si convergen o no, no será siempre trivial. De momento, el lector puede intentar decidir si la siguiente (evidentemente creciente) sucesión está o no acotada superiormente:

$$1,\ 1+\tfrac{1}{2},\ 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3},\ 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4},\ \ldots$$

Aunque el Teorema 2 trata solamente un caso muy particular de sucesiones, resulta más útil de lo que a primera vista puede parecer, puesto que es siempre posible extraer de cualquier sucesión $\{a_n\}$ otra sucesión que es o bien no creciente o bien no decreciente. Hablando con precisión, definamos una **subsucesión** de una sucesión $\{a_n\}$ como una sucesión de la forma

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots,$$

donde los n_j son números naturales con

$$n_1 < n_2 < n_3 \cdots$$

Entonces toda sucesión contiene una subsucesión que es o bien no decreciente o bien no creciente. Es muy posible confundirse al tratar de demostrar esta afirmación, si bien la demostración es muy corta cuando se acierta con la idea adecuada; vale la pena establecerla como lema.

Lema. *Cualquier sucesión $\{a_n\}$ contiene una subsucesión que es o bien no decreciente o bien no creciente.*

Demostración. Llamemos "punto cumbre" de una sucesión $\{a_n\}$ a un número natural n tal que $a_m < a_n$ para todo $m > n$ (Figura 6).

Caso 1. La sucesión tiene infinitos puntos cumbre.. En este caso, si $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ son los puntos cumbre, entonces $a_{n_1} > a_{n_2} > a_{n_3} > \cdots$, de modo que $\{a_{n_k}\}$ es la subsucesión (no creciente) deseada.

Caso 2. La sucesión tiene solamente un número finito de puntos cumbre. En este caso, sea n_1 mayor que todos los puntos cumbre. Puesto que n_1 no es punto cumbre, existe algún $n_2 > n_1$ tal que $a_{n_2} \geq a_{n_1}$. Puesto que n_2 no es punto cumbre (es mayor que n_1, y por lo tanto mayor que todos los puntos cumbre) existe algún $n_3 > n_2$ tal que $a_{n_3} \geq a_{n_2}$. Continuando de esta forma obtenemos la subsucesión (no decreciente) deseada. ■

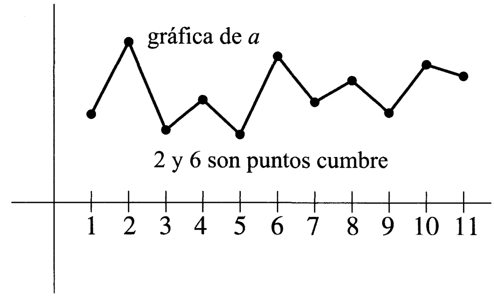


Figura 6

Si suponemos que nuestra sucesión original $\{a_n\}$ está acotada, podemos establecer de paso otro corolario.

Corolario (Teorema de Bolzano-Weierstrass). *Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.*

Hasta aquí es donde podemos llegar sin suposiciones adicionales: es fácil construir sucesiones que tengan muchas, incluso infinitas, subsucesiones que converjan hacia números distintos (ver el Problema 3). Existe otra suposición razonable que, al añadirla, da una condición necesaria y suficiente para la convergencia de cualquier sucesión. Aunque esta condición no va a ser crucial para nuestro trabajo, simplifica muchas demostraciones. Además, esta condición desempeña un papel fundamental en investigaciones más avanzadas, y sólo por esta razón ya vale la pena establecerla ahora.

Si una sucesión converge, de modo que sus términos eventualmente se aproximan todos a un mismo número, entonces la diferencia entre términos cualesquiera debe hacerse muy pequeña. Para ser precisos, si $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ para algún l, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un N tal que $|a_n - l| < \varepsilon/2$ para $n > N$; ahora bien, si es a la vez $n > N$ y $m > N$, entonces

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - l| + |l - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esta desigualdad final, $|a_n - a_m| < \varepsilon$, que elimina la mención del límite l, puede utilizarse para formular una condición (la condición de Cauchy) que es claramente necesaria para la convergencia de una sucesión.

Definición

Una sucesión $\{a_n\}$ es una **sucesión de Cauchy** si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que, para todo m y n,

$$\text{si } m, n > N, \text{ entonces } |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

(Esta condición se escribe generalmente $\lim_{m,n\to\infty} |a_m - a_n| = 0$.)

Lo bueno de la condición de Cauchy está en que es también suficiente para asegurar la convergencia de una sucesión. Después de todo nuestro trabajo preliminar, queda poco por hacer para demostrar esto.

Teorema 3. *Una sucesión $\{a_n\}$ converge si y sólo si es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. Hemos demostrado ya que $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy si converge. La demostración del recíproco contiene solamente una característica artificiosa: demostrar que toda sucesión de Cauchy $\{a_n\}$ está acotada. Si tomamos $\varepsilon = 1$ en la definición de una sucesión de Cauchy encontramos que existe algún N tal que

$$|a_m - a_n| < 1 \qquad \text{para } m, n > N.$$

En particular, esto significa que

$$|a_m - a_{N+1}| < 1 \qquad \text{para todo } m > N.$$

Así pues, $\{a_m : m > N\}$ está acotada; puesto que sólo hay a lo sumo un número finito de términos a_i restantes, toda la sucesión está acotada.

El corolario del Lema implica así que alguna subsucesión de $\{a_n\}$ converge.

Solamente queda un punto, cuya demostración se deja para el lector: si una subsucesión de una sucesión de Cauchy converge, entonces la misma sucesión de Cauchy converge. ■

Problemas

1. Compruebe cada uno de los siguiente límites.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1.$ (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3}{n^3+4} = 0.$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[4]{n+1} = 0.$ Indicación: El lector debe poder demostrar por lo menos que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[8]{n^2} = 0.$$

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0.$

(v) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \qquad a > 0.$

(vi) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

(vii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n} = 1.$

(viii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = \text{máx}(a,b), \qquad a, b \geq 0.$

(ix) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha(n)}{n} = 0$, donde $\alpha(n)$ es el número de números primos que dividen n. Indicación: El hecho de que todo número primo es ≥ 2 proporciona una estimación muy sencilla de lo pequeño que debe ser $\alpha(n)$.

*(x) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}} = \dfrac{1}{p+1}.$

2. Encuentre los siguientes límites.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n+1}{n}$. (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} n - \sqrt{n+a}\sqrt{n+b}$. (iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n + (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^{n+1}}$.

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n \sqrt{n}\,\mathrm{sen}(n^n)}{n+1}$. (v) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$. (vi) $\lim\limits_{n\to\infty} nc^n, \qquad |c| < 1$.

(vii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n^2}}{n!}$.

3. (a) ¿Qué puede decirse acerca de la sucesión $\{a_n\}$ si es convergente y cada uno de sus términos a_n es entero?

(b) Halle todas las subsucesiones convergentes de la sucesión $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ (Existen infinidad de ellas, pero sólo hay dos límites posibles para estas subsucesiones.)

(c) Halle todas las subsucesiones convergentes de la sucesión 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, ... (Existen infinitos límites que estas subsucesiones pueden tener.)

(d) Considere la sucesión

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$$

¿Para qué números α existe una subsucesión que converge hacia α?

4. (a) Demuestre que si una subsucesión de una sucesión de Cauchy converge, entonces también converge la sucesión de Cauchy original.

(b) Demuestre que cualquier subsucesión de una sucesión convergente es convergente.

5. (a) Demuestre que si $0 < a < 2$, entonces $a < \sqrt{2a} < 2$.

(b) Demuestre que la sucesión

$$\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$$

converge.

(c) Halle el límite. Indicación: Observe que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2a_n} = \sqrt{2l}$, según el Teorema 1.

6. Sea $0 < a_1 < b_1$ y definamos

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

(a) Demuestre que las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ convergen.

(b) Demuestre que ambas tienen el mismo límite.

7. En el Problema 2-16 vimos que cualquier aproximación racional k/l a $\sqrt{2}$ puede ser sustituida por una mejor aproximación $(k+2l)/(k+l)$. En particular, empezando con $k = l = 1$, obtenemos

$$1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \ldots$$

(a) Demuestre que esta sucesión se da recurrentemente por

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n}.$$

(b) Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$. Esto da la llamada *desarrollo en fracción continua*

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}.$$

Indicación: Considere separadamente las sucesiones $\{a_{2n}\}$ y $\{a_{2n+1}\}$.

(c) Demuestre que para cualquier número natural a y b,

$$\sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \dots}}.$$

8. Identifique la función $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\lim\limits_{k\to\infty} (\cos n!\,\pi x)^{2k}\right)$. (Ha sido mencionada muchas veces en este libro.)

9. Muchos límites de aspecto impresionante pueden ser calculados fácilmente (en particular por el que los construye), puesto que son en realidad sumas inferiores o superiores disfrazadas. Con ayuda de esta observación, calcule cada uno de los siguientes. (Aviso: la lista contiene camuflado un límite que puede resolverse mediante consideraciones elementales.)

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \cdots + \sqrt[n]{e^n}}{n}$.

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \cdots + \sqrt[n]{e^{2n}}}{n}$.

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$.

(iv) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}\right)$.

(v) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{n}{(n+n)^2}\right)$.

(vi) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}\right)$.

10. Aunque los límites tales como $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$ pueden calcularse utilizando resultados relativos al comportamiento de las funciones logaritmo y exponencial, este procedimiento no es satisfactorio, porque las raíces enteras y las potencias pueden definirse sin utilizar dichas funciones. Algunos de los razonamientos "elementales" corrientes para tales límites se indican aquí; los instrumentos básicos son desigualdades derivadas del teorema del binomio, especialmente

$$(1+h)^n \geq 1 + nh, \qquad \text{para } h > 0;$$

y, para la parte (e),

$$(1+h)^n \geq 1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2 \geq \frac{n(n-1)}{2}h^2, \qquad \text{para } h>0.$$

(a) Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$ si $a > 1$, poniendo $a = 1+h$, donde $h > 0$.

(b) Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ si $0 < a < 1$.

(c) Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ si $a > 1$, poniendo $\sqrt[n]{a} = 1+h$ y estimando h.

(d) Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ si $0 < a < 1$.

(e) Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

11. (a) Demuestre que una sucesión convergente es siempre acotada.

(b) Suponga que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, y que cada $a_n > 0$. Demuestre que el conjunto de todos los números a_n tiene en realidad un elemento máximo.

12. (a) Demuestre que

$$\frac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log n < \frac{1}{n}.$$

(b) Si

$$a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n,$$

demuestre que la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente, y que cada $a_n \geq 0$. Se sigue que existe un número

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right).$$

Este número, conocido como el número de Euler, ha resultado ser del todo refractario; ni siquiera se sabe si γ es racional.

13. (a) Suponga que f es creciente sobre $[1,\infty)$. Demuestre que

$$f(1)+\cdots+f(n-1) < \int_1^n f(x)\,dx < f(2)+\cdots+f(n).$$

(b) Elija ahora $f = \log$, demuestre que

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n};$$

se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

Este resultado indica que $\sqrt[n]{n!}$ es aproximadamente n/e, en el sentido de que la relación entre estas dos cantidades tiende hacia 1 para n grande. Pero no podemos concluir que $n!$ está próximo a $(n/e)^n$ para valores de n grandes; de hecho, esto es falso. Una estimación para $n!$ es muy deseable. incluso para cálculos concretos, ya que $n!$ no puede ser calculado fácilmente ni siquiera con tablas de logaritmos. El clásico (y difícil) teorema que proporciona la información adecuada se encontrará en el Problema 27-19.

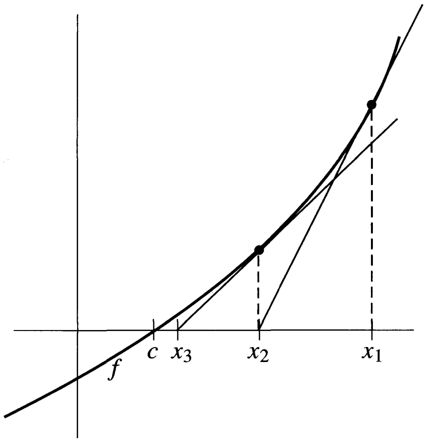


Figura 7

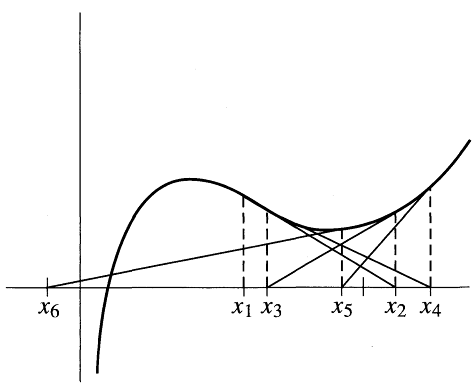


Figura 8

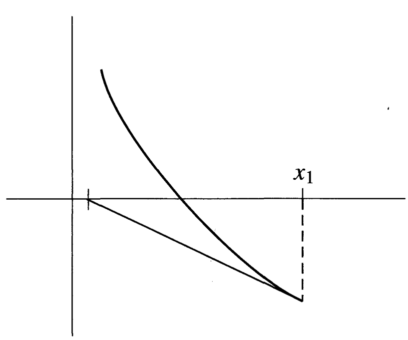


Figura 9

14. (a) Demuestre que la recta tangente a la gráfica f en $(x_1, f(x_1))$ corta el eje horizontal en $(x_2, 0)$, donde

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Este punto de intersección puede considerarse como una tosca aproximación al punto donde la gráfica de f corta el eje horizontal. Si ahora empezamos en x_2 y repetimos el proceso para obtener x_3, entonces usar x_3 para obtener x_4, etc., tenemos una sucesión $\{x_n\}$ definida inductivamente por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

La Figura 7 nos sugiere que $\{x_n\}$ convergerá a un número c con $f(c) = 0$; a este método de la denomina *método de Newton* para encontrar un cero de f. En el resto de este problema vamos a establecer algunas condiciones bajo las cuales el método de Newton funciona (las Figuras 8 y 9 muestran dos casos donde no lo hace). Algunos resultados sobre convexidad pueden resultar útiles; ver el Apéndice del Capítulo 11.

(b) Suponga que $f,' f'' > 0$, y que elegimos x_1 con $f(x_1) > 0$. Demuestre que $x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > c$.

(c) Sea $\delta_k = x_k - c$. Entonces

$$\delta_k = \frac{f(x_k)}{f'(\xi_k)}$$

para algunos ξ_k en (c, x_k). Demuestre que

$$\delta_{k+1} = \frac{f(x_k)}{f'(\xi_k)} - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Concluya que

$$\delta_{k+1} = \frac{f(x_k)}{f'(\xi_k) f'(x_k)} \cdot f''(\eta_k)(x_k - \xi_k)$$

para algunos η_k en (c, x_k), y entonces que

$$(*) \qquad \delta_{k+1} \leq \frac{f''(\eta_k)}{f'(x_k)} {\delta_k}^2.$$

(d) Sea $m = f'(c) = \text{ínf} f'$ en $[c, x_1]$ y sea $M = \sup f''$ en $[c, x_1]$. Demuestre que el método de Newton funciona si $x_1 - c < m/M$.

(e) ¿Cuál es la fórmula para x_{n+1} cuando $f(x) = x^2 - A$?

Si tomamos $A = 2$ y $x_1 = 1{,}4$ tendremos

$$\begin{aligned} x_1 &= 1{,}4 \\ x_2 &= 1{,}4142857 \\ x_3 &= 1{,}4142136 \\ x_4 &= 1{,}4142136, \end{aligned}$$

¡aproximación qué ya es correcta hasta el séptimo decimal! Note que el número correcto de decimales al menos se ha duplicado cada vez. Esto está esencialmente garantizado por la desigualdad $(*)$ cuando $M/m < 1$.

15. Utilice el método de Newton para estimar los ceros de las siguientes funciones.

(i) $f(x) = \operatorname{tg} x - \cos^2 x$ cerca de 0. (ii) $f(x) = \cos x - x^2$ cerca de 0.

(iii) $f(x) = x^3 + x - 1$ en $[0, 1]$. (iv) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ en $[0, 1]$.

***16.** Demuestre que si $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = l.$$

Indicación: Este problema es muy parecido (en realidad un caso particular) al Problema 13-40.

17. (a) Demuestre que si $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} - a_n = l$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n/n = l$. Indicación: Vea el problema anterior.

(b) Suponga que f es continua y $\lim_{x\to\infty} f(x+1) - f(x) = l$. Demuestre que $\lim_{x\to\infty} f(x)/x = l$. Indicación: Sean a_n y b_n el ínf y sup de f en $[n, n+1]$.

***18.** Suponga que $a_n > 0$ para cada n y que $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = l$. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. Indicación: Esto requiere el mismo tipo de razonamiento que da resultado en el Problema 16, excepto que hay que utilizar la multiplicación en lugar de la adición, junto con el hecho de que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, para $a > 0$.

19. (a) Suponga que $\{a_n\}$ es una sucesión convergente de números, todos ellos en $[0, 1]$. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} a_n$ está también en $[0, 1]$.

(b) Halle una sucesión convergente $\{a_n\}$ de puntos de $(0, 1)$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n$ no esté en $(0, 1)$.

20. Suponga que f es continua y que la sucesión

$$x,\ f(x),\ f(f(x)),\ f(f(f(x))),\ \ldots$$

converge hacia l. Demuestre que l es un "punto fijo" para f, es decir, $f(l) = l$. Indicación: Se han presentado ya dos casos particulares.

21. (a) Suponga que f es continua en $[0, 1]$ y que $0 \le f(x) \le 1$ para todo x de $[0, 1]$. El Problema 7-11 indica que f tiene un punto fijo (según la terminología del Problema 20). Si f es *creciente*, se puede hacer una afirmación mucho más fuerte: para todo x de $[0, 1]$, la sucesión

$$x,\ f(x),\ f(f(x)), \ldots$$

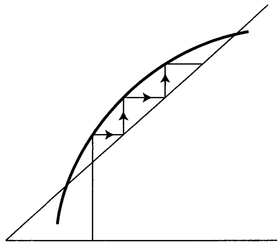


Figura 10

tiene límite (el cual es necesariamente un punto fijo, según el Problema 20). Demuestre esta afirmación, examinando el comportamiento de la sucesión para $f(x) > x$ y $f(x) < x$, o bien observando la Figura 10. Un diagrama de este tipo se usa en la obra de Littlewood *Mathematician's Miscellany* para resaltar el valor de los dibujos: "Para el profesional la única demostración que hace falta es [esta Figura]."

*(b) Suponga que f y g son dos funciones continuas en $[0, 1]$, con $0 \leq f(x) \leq 1$ y $0 \leq g(x) \leq 1$ para todo x de $[0, 1]$, que satisfacen $f \circ g = g \circ f$. Suponga, además, que f es creciente. Demuestre que f y g tienen un punto fijo común; en otras palabras, existe un número l tal que $f(l) = l = g(l)$. Indicación: Empiece eligiendo un punto fijo para g.

Por un tiempo los matemáticos se entretuvieron preguntándose si la conclusión de la parte (b) se cumplía sin la hipótesis de que f fuera creciente, pero dos comunicados independientes en el *Notices* del American Mathematical Society, Volumen 14, Número 2 proporcionaron contraejemplos, así que probablemente era un problema bastante tonto desde del principio.

El artificio del Problema 20 es en realidad de mucho más valor de lo que el Problema 20 parece sugerir, y algunos de los más importantes "teoremas de punto fijo" se basan en la observación de sucesiones de la forma x, $f(x)$, $f(f(x))$, ... Un caso particular, pero ilustrativo, de un teorema de este tipo se trata en el Problema 23 (del cual el problema próximo es una preparación).

22. (a) Utilice el Problema 2-5 para demostrar que si $c \neq 1$, entonces

$$c^m + c^{m+1} + \cdots + c^n = \frac{c^m - c^{n+1}}{1 - c}.$$

(b) Suponga que $|c| < 1$. Demuestre que

$$\lim_{m,n \to \infty} c^m + \cdots + c^n = 0.$$

(c) Suponga que $\{x_n\}$ es una sucesión con $|x_n - x_{n+1}| \leq c^n$, donde $0 < c < 1$. Demuestre que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

***23.** Suponga que f es una función sobre $\mathbf{R}$ tal que

$$(*) \qquad |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|, \qquad \text{para todo } x \text{ e } y,$$

donde $c < 1$. (Una tal función recibe el nombre de *contracción*.)

(a) Demuestre que f es continua.

(b) Demuestre que f tiene a lo sumo un punto fijo.

(c) Considerando la sucesión

$$x,\ f(x),\ f(f(x)),\ \ldots,$$

para cualquier x, demuestre que f tiene un punto fijo. (Este resultado, en un contexto más general, es conocido como "lema de contracción".)

24. (a) Demuestre que si f es diferenciable y $|f'| < 1$, entonces f tiene como mucho un punto fijo.

(b) Demuestre que si $|f'(x)| \leq c < 1$ para todo x, entonces f tiene un punto fijo.

(c) Dé un ejemplo para demostrar que la hipótesis $|f'(x)| \leq 1$ no es suficiente para asegurar que f tiene un punto fijo.

25. Este problema es una especie de recíproco del problema anterior. Sea b_n una sucesión definida por $b_1 = a$, $b_{n+1} = f(b_n)$. Demuestre que si $b = \lim_{n\to\infty} b_n$ existe y f' es continua en b, entonces $|f'(b)| \leq 1$ (siempre que no tengamos ya $b_n = b$ para algún n). Indicación: Si $|f'(b)| > 1$, entonces $|f'(x)| > 1$ para todo x en un intervalo entorno a b, con b_n en este intervalo para n lo suficientemente grande. Ahora considere f en el intervalo $[b, b_n]$.

26. Este problema investiga para que $a > 0$ el símbolo

$$a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

tiene sentido. En otras palabras, si definimos $b_1 = a$, $b_{n+1} = a^{b_n}$, ¿cuándo existe $b = \lim_{n\to\infty} b_n$? Note que si b existe, entonces $a^b = b$ por el Problema 20.

(a) Si b existe, entonces a se puede escribir bajo la forma $y^{1/y}$ para algunos y. Describa la gráfica de $g(y) = y^{1/y}$ y concluya que $0 < a \leq e^{1/e}$.

(b) Suponga que $1 \leq a \leq e^{1/e}$. Demuestre que $\{b_n\}$ es creciente y también $b_n \leq e$. Esto demuestra que b existe (y también que $b \leq e$).

El análisis para $a < 1$ es más difícil.

(c) Usando el Problema 25, demuestre que si b existe, entonces $e^{-1} \leq b \leq e$. A continuación, demuestre que $e^{-e} \leq a \leq e^{1/e}$.

A partir de ahora vamos a suponer que $e^{-e} \leq a < 1$.

(d) Demuestre que la función

$$f(x) = \frac{a^x}{\log x}$$

es decreciente en el intervalo $(0, 1)$.

(e) Sea b el único número de manera que $a^b = b$. Demuestre que $a < b < 1$. Usando la parte (e), demuestre que si $0 < x < b$, entonces $x < a^{a^x} < b$. Concluya que $l = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$ existe y que $a^{a^l} = l$.

(f) Usando la parte (e) otra vez, demuestre que $l = b$.

(g) Finalmente, demuestre que $\lim_{n\to\infty} a_{2n+2} = b$, de modo que $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

27. Sea $\{x_n\}$ una sucesión que está acotada, y sea

$$y_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}.$$

(a) Demuestre que la sucesión $\{y_n\}$ converge. El límite $\lim_{n\to\infty} y_n$ se designa por $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$ o bien por $\limsup_{n\to\infty} x_n$, y es llamado el **límite superior** de la sucesión $\{x_n\}$.

(b) Halle $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ para cada una de las sucesiones siguientes:

(i) $x_n = \dfrac{1}{n}$. (ii) $x_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$.

(iii) $x_n = (-1)^n \left[1 + \dfrac{1}{n}\right]$. (iv) $x_n = \sqrt[n]{n}$.

(c) Defina $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ (o $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$) y demuestre que

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$

(d) Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ existe si y sólo si $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ y que en este caso

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$

(e) Recuerde la definición del Problema 8-18, de $\overline{\lim}\, A$ para un conjunto acotado A. Demuestre que si los números x_n son distintos, entonces $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \overline{\lim}\, A$, donde $A = \{x_n : n \text{ en } \mathbf{N}\}$.

28. En el Apéndice del Capítulo 8 definimos la continuidad uniforme de una función en un intervalo. Si $f(x)$ se define sólo para x racionales, este concepto todavía tiene sentido: podemos decir que f es uniformemente continua en un intervalo si para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, si x y y son número racionales en un intervalo y $|x-y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

(a) Sea x un punto cualquiera (racional o irracional) en el intervalo, y sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos *racionales* en un intervalo tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Demuestre que la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge.

(b) Demuestre que el límite de la sucesión $\{f(x_n)\}$ no depende de la elección de la sucesión $\{x_n\}$.

Denotaremos este límite por $\bar{f}(x)$, de modo que $\bar{f}$ es una extensión de f para todo el intervalo.

(c) Demuestre que la función ampliada $\bar{f}$ es uniformemente continua en el intervalo.

29. Sea $a > 0$, y para x racional sea $f(x) = a^x$, definido en la forma habitual algebraica elemental. Este problema muestra directamente que f se puede extender a una función continua $\bar{f}$ en toda la recta real. El Problema 28 proporciona los mecanismos necesarios.

(a) Para $x < y$ racionales, demuestre que $a^x < a^y$ para $a > 1$ y $a^x > a^y$ para $a < 1$.

(b) Usando el Problema 10, demuestre que para cualquier $\varepsilon > 0$ tenemos $|a^x - 1| < \varepsilon$ para números racionales x lo suficientemente cerca de 0.

(c) Empleando la ecuación $a^x - a^y = a^y(a^{x-y} - 1)$, demuestre que en cualquier intervalo cerrado f es uniformemente continua, en el sentido del Problema 28.

(d) Demuestre que la función extendida $\bar{f}$ del Problema 28 es creciente para $a > 1$ y decreciente para $a < 1$ y que satisface $\bar{f}(x+y) = \bar{f}(x)\bar{f}(y)$.

***30.** El Teorema de Bolzano-Weierstrass se suele enunciar, y también demostrar, de modo muy diferente del que se ha dado en el texto; el enunciado clásico utiliza la noción de puntos de acumulación. Un punto x es un **punto de acumulación** del conjunto A si para todo $\varepsilon > 0$ existe un punto a en A con $|x-a| < \varepsilon$ pero $x \neq a$.

(a) Halle todos los puntos de acumulación de los siguientes conjuntos.

(i) $\left\{\frac{1}{n} : n \text{ en } \mathbf{N}\right\}$.

(ii) $\left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n \text{ y } m \text{ en } \mathbf{N}\right\}$.

(iii) $\left\{(-1)^n \left[1 + \frac{1}{n}\right] : n \text{ en } \mathbf{N}\right\}$.

(iv) $\mathbf{Z}$.

(v) $\mathbf{Q}$.

(b) Demuestre que x es un punto de acumulación de A si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existen infinitos puntos a de A que satisfacen $|x-a| < \varepsilon$.

(c) Demuestre que $\overline{\lim}\ A$ es el punto de acumulación más grande de A, y que $\underline{\lim}\ A$ es el más pequeño.

En su enunciado usual, el Teorema de Bolzano-Weierstrass establece que si A es un conjunto infinito de números contenidos en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces algún punto de $[a,b]$ es un punto de acumulación de A. Demuestre esto de dos maneras:

(d) Utilizando la forma ya demostrada en el texto. Indicación: Puesto que A es infinito, existen en A números distintos $x_1, x_2, x_3, \ldots$

(e) Utilizando el teorema de los intervalos encajados. Indicación: Si $[a,b]$ se divide en dos intervalos, por lo menos uno de ellos contendrá infinitos puntos de A.

31. (a) Utilice el Teorema de Bolzano-Weierstrass para demostrar que si f es continua sobre $[a,b]$, entonces f está acotada superiormente sobre $[a,b]$. Indicación: Si f no está acotada superiormente, entonces existen puntos x_n en $[a,b]$ con $f(x_n) > n$.

(b) Utilice también el Teorema de Bolzano-Weierstrass para demostrar que si f es continua sobre $[a,b]$, entonces f es uniformemente continua sobre $[a,b]$ (ver el Apéndice del Capítulo 8).

****32.** (a) Sea $\{a_n\}$ la sucesión

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \ldots$$

Suponga que $0 \leq a < b \leq 1$. Sea $N(n;a,b)$ el número de enteros $j \leq n$ tales que a_j está en (a,b). (Así, $N(2;\frac{1}{3},\frac{2}{3}) = 2$, y $N(4;\frac{1}{3},\frac{2}{3}) = 3$.) Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(n;a,b)}{n} = b - a.$$

(b) Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ de número de [0, 1] es **uniformemente distribuida** en [0, 1] si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(n;a,b)}{n} = b-a$$

para todo a y b con $0 \le a < b \le 1$. Demuestre que si s es una función escalonada definida sobre [0, 1], y $\{a_n\}$ es uniformemente distribuida en [0, 1], entonces

$$\int_0^1 s = \lim_{n\to\infty} \frac{s(a_1)+\cdots+s(a_n)}{n}.$$

(c) Demuestre que si $\{a_n\}$ es uniformemente distribuida en [0, 1] y f es integrable sobre [0, 1], entonces

$$\int_0^1 f = \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_1)+\cdots+f(a_n)}{n}.$$

****33.** (a) Sea f una función definida sobre [0, 1] tal que $\lim_{y\to a} f(y)$ existe para todo a en [0, 1]. Para cualquier $\varepsilon > 0$, demuestre que existe solamente un número finito de puntos a de [0, 1] con $|\lim_{y\to a} f(y) - f(a)| > \varepsilon$. Indicación: Demuestre que el conjunto de tales puntos no puede tener un punto de acumulación x, probando que $\lim_{y\to x} f(y)$ podría no existir.

(b) Demuestre que, en la terminología del Problema 21-5, el conjunto de puntos en que f es discontinua es numerable. Esto resuelve finalmente la cuestión del Problema 6-17: si f tiene solamente discontinuidades evitables, entonces f es continua excepto en un conjunto numerable de puntos, y en particular, f no puede ser discontinua por todas partes.

Series infinitas

23

Las sucesiones infinitas se introdujeron en el capítulo anterior con la intención específica de poder considerar posteriormente sus "sumas"

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Estas sumas no se pueden hacer sin más, ya que hasta ahora nunca se ha definido la suma de infinitos números. Lo que puede definirse son "las sumas parciales"

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n,$$

y se puede presumir que las sumas infinitas deberán definirse en términos de sumas parciales. Afortunadamente, el mecanismo para formular esta definición ha sido desarrollado ya en el capítulo anterior. Si existe alguna esperanza de ponder calcular la suma infinita $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, las sumas parciales s_n deben representar aproximaciones cada vez más cercanas a medida que n se va haciendo más grande. Esta última afirmación equivale a poco más que una definición informal de límite: la "suma infinita" $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ debería ser $\lim_{n\to\infty} s_n$. Este enfoque del presente problema dejará necesariamente sin definir la "suma" de muchas sucesiones, ya que es fácil que la sucesión $\{s_n\}$ no tenga límite. Por ejemplo, la sucesión

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots$$

con $a_n = (-1)^{n+1}$ proporciona la nueva sucesión

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1 = 1,\\
s_2 &= a_1 + a_2 = 0,\\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = 1,\\
s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0,\\
&\ldots,
\end{aligned}$$

para la cual no existe $\lim_{n\to\infty} s_n$. Si bien existen muchas ingeniosas extensiones de la definición aquí sugerida (ver los Problemas 12 y 24-20) parece inevitable que algunas sucesiones carezcan de suma. Por esta razón, una definición aceptable de suma de una sucesión debe contener, como componente esencial, una terminología que permita distinguir las sucesiones para las que podemos definir su suma, de las menos afortunadas.

Definición

La sucesión $\{a_n\}$ es **sumable** si la sucesión $\{s_n\}$ converge, siendo

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n.$$

En este caso, se designa $\lim_{n\to\infty} s_n$ por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{(o, menos formalmente, } a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\text{)}$$

y recibe el nombre de **suma** de la sucesión $\{a_n\}$.

La terminología introducida en esta definición se suele sustituir por expresiones menos precisas; de hecho, el título de este capítulo pertenece a este lenguaje corriente. A una suma infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se la denomina generalmente *serie infinita*, destacando la palabra "serie" la conexión con la noción de sucesión infinita $\{a_n\}$. La afirmación de que $\{a_n\}$ es, o no es, sumable se sustituye convencionalmente por la afirmación de que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, o no converge. Esta terminología es algo peculiar, porque en el mejor de los casos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ denota un número (de modo que no puede "converger") y no designa nada en absoluto si $\{a_n\}$ no es sumable. Sin embargo, este lenguaje informal es práctico, muy usado y es poco probable que pueda ceder ante ataques fundamentados en la lógica.

Ciertas operaciones aritméticas elementales sobre series infinitas son consecuencias directas de la definición. Es un ejercicio sencillo demostrar que si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sumables, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Hasta ahora estas igualdades no son todavía demasiado interesantes puesto que no tenemos ejemplos de sucesiones sumables (aparte de los ejemplos triviales basados en sucesiones cuyos términos son todos 0 a partir de un término en adelante). Antes de que mostremos una sucesión sumable de forma efectiva, estableceremos algunas condiciones generales para la sumabilidad.

Hay una condición necesaria y suficiente para la sumabilidad que puede ser enunciada inmediatamente. La sucesión $\{a_n\}$ es sumable si y sólo si la sucesión $\{s_n\}$ converge, lo cual ocurre, según el Teorema 22-3, si y sólo si $\lim_{m,n\to\infty} s_m - s_n = 0$; esta condición puede expresarse en términos de la sucesión original como sigue.

Criterio de Cauchy. *La sucesión $\{a_n\}$ es sumable si y sólo si*

$$\lim_{m,n\to\infty} a_{n+1} + \cdots + a_m = 0.$$

Aunque el criterio de Cauchy tiene importancia teórica, es poco útil para decidir la sumabilidad de una sucesión particular cualquiera. Sin embargo, una consecuencia sencilla del criterio de Cauchy proporciona una condición *necesaria* para la sumabilidad, condición que es demasiado importante para dejar de mencionarla explícitamente.

Condición del resto. *Si $\{a_n\}$ es sumable, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Esta condición se obtiene del criterio de Cauchy tomando $m = n+1$; también puede demostrarse directamente como sigue. Si $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = l$, entonces

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) &= \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1}\\ &= l - l = 0.\end{aligned}$$

Desgraciadamente, esta condición está lejos de ser suficiente. Por ejemplo, $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$, pero la sucesión $\{1/n\}$ no es sumable; efectivamente, la siguiente agrupación de los números $1/n$ demuestra que la sucesión $\{s_n\}$ no es acotada:

$$1 + \tfrac{1}{2} + \underbrace{\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{9}+\cdots+\tfrac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{2}} + \cdots$$

(2 términos, cada uno $\geq \frac{1}{4}$) (4 términos, cada uno $\geq \frac{1}{8}$) (8 términos, cada uno $\geq \frac{1}{1}6$)

El método de demostración utilizado en este ejemplo, un ingenioso artificio que posiblemente nunca se le hubiera ocurrido a uno, revela la necesidad de encontrar métodos más sistemáticos de abordar estos problemas. Dichos métodos se desarrollarán pronto (uno de ellos va a proporcionar una demostración alternativa de que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n$ no converge) pero será necesario dar antes unos pocos ejemplos de series convergentes.

La más importante de todas las series infinitas es la "serie geométrica"

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$$

Solamente son interesantes los casos $|r| < 1$, puesto que si $|r| \geq 1$ los términos individuales no tienden hacia 0. Estas series son manejables porque sus sumas parciales

$$s_n = 1 + r + \cdots + r^n$$

pueden calcularse en términos sencillos. Las dos ecuaciones

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + r + r^2 + \cdots + r^n\\ rs_n &= \phantom{1 + {}} r + r^2 + \cdots + r^n + r^{n+1}\end{aligned}$$

llevan a

$$s_n(1-r) = 1 - r^{n+1}$$

o

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

(la división por $1 - r$ es válida puesto que hemos excluido el caso $r = 1$). Ahora bien, $\lim_{n \to \infty} r^n = 0$, puesto que $|r| < 1$. Se sigue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}, \qquad |r| < 1.$$

En particular,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 1,$$

es decir,

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \cdots = 1,$$

suma infinita que siempre es posible recordar con el dibujo de la Figura 1.

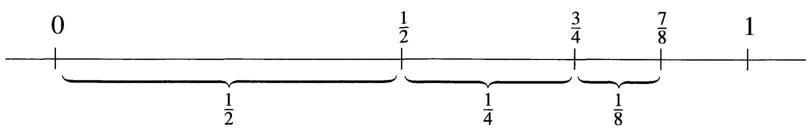


Figura 1

Especiales como son, las series geométricas constituyen ejemplos típicos de los que se derivarán importantes pruebas de sumabilidad.

De momento vamos a considerar solamente sucesiones $\{a_n\}$ con cada $a_n \geq 0$; tales sucesiones son llamadas **no negativas**. Si $\{a_n\}$ es una sucesión no negativa, entonces la sucesión $\{s_n\}$ es claramente no decreciente. Esta observación, combinada con el Teorema 22-2, suministra una sencilla prueba de sumabilidad:

Criterio de acotación. *Una sucesión no negativa $\{a_n\}$ es sumable si y sólo si el conjunto de las sumas parciales s_n es acotado.*

Por si sólo este criterio no es muy útil: decidir si el conjunto s_n es o no acotado es precisamente lo que no sabemos hacer. Por otra parte, si se dispone de algunas series convergentes para comparación podemos utilizar este criterio para obtener un resultado cuya sencillez encubre su importancia (constituye la base para casi todas las demás pruebas).

Teorema 1 (Prueba de comparación). *Supongamos que*

$$0 \leq a_n \leq b_n \qquad \text{para todo } n.$$

Entonces si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, también converge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Demostración. Si

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n,$$
$$t_n = b_1 + \cdots + b_n,$$

entonces

$$0 \leq s_n \leq t_n \qquad \text{para todo } n.$$

Ahora bien, $\{t_n\}$ es acotada, ya que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge. Por lo tanto, $\{s_n\}$ es acotada; en consecuencia, según el criterio de acotación, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. ■

Se puede utilizar con mucha frecuencia la prueba de comparación para analizar series de aspecto muy complicado en las cuales la mayor parte de la complicación es irrelevante. Por ejemplo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\operatorname{sen}^3(n+1)}{2^n+n^2}$$

converge porque

$$0 \leq \frac{2+\operatorname{sen}^3(n+1)}{2^n+n^2} < \frac{3}{2^n},$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

es una serie (geométrica) convergente.

Análogamente, podemos esperar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1 + \operatorname{sen}^2 n^3}$$

converja, puesto que el término n-ésimo de la serie es prácticamente $1/2^n$ para n grande, y esperamos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$$

sea divergente, ya que $(n+1)/(n^2+1)$ es prácticamente $1/n$ para n grande. Estos hechos pueden ser derivados inmediatamente del siguiente teorema, otro tipo de "prueba de comparación."

Teorema 2 (Prueba de comparación en el límite). *Si a_n, $b_n > 0$ y $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = c \neq 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.*

Demostración. Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge. Puesto que $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = c$, existe algún N tal que

$$a_n \leq 2cb_n \qquad \text{para } n \geq N.$$

Pero la sucesión $2c\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ es ciertamente convergente. Entonces el Teorema 1 permite afirmar que $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ converge, y esto implica la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, que sólo contiene un número finito de términos adicionales.

El recíproco se deduce inmediatamente, ya que tenemos también

$$\lim_{n\to\infty} b_n/a_n = 1/c \neq 0. \blacksquare$$

La prueba de comparación proporciona otras pruebas importantes cuando otras series previamente ya analizadas se utilizan como catalizadores. Eligiendo la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$, serie convergente por *excelencia*, obtenemos la más importante de todas las pruebas de sumabilidad.

Teorema 3 (Prueba del cociente). *Sea $a_n > 0$ para todo n, y supongamos que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r.$$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $r < 1$. Por otra parte, si $r > 1$, entonces los términos a_n no tienden hacia 0, de modo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. (Observemos que es por lo tanto esencial calcular $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$ y no $\lim_{n\to\infty} a_n/a_{n+1}$!)

Demostración. Supongamos primero que $r < 1$ y elijamos un número cualquiera s con $r < s < 1$. La hipótesis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r < 1$$

implica que existe algún N tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq s \qquad \text{para } n \geq N.$$

Esto puede escribirse

$$a_{n+1} \leq s a_n \qquad \text{para } n \geq N.$$

Así pues,

$$\begin{aligned} a_{N+1} &\leq s a_N, \\ a_{N+2} &\leq s a_{N+1} \leq s^2 a_N, \\ &\vdots \\ a_{N+k} &\leq s^k a_N. \end{aligned}$$

Puesto que $\sum_{k=0}^{\infty} a_N s^k = a_N \sum_{k=0}^{\infty} s^k$ converge, la prueba de comparación indica que

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{N+k}$$

converge. Esto implica la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. El caso $r > 1$ es todavía más fácil. Si $1 < s < r$, entonces existe un número N tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq s \qquad \text{para } n \geq N,$$

lo cual significa que

$$a_{N+k} \geq a_N s^k \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

de modo que los términos no están acotados. ■

Como aplicación sencilla de la prueba del cociente, consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n!$. Haciendo $a_n = 1/n!$ obtenemos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

Así pues,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0,$$

lo cual nos indica que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n!$ converge. Si consideramos ahora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} r^n/n!$, donde r es un determinado número positivo, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{r^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{r^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{r}{n+1} = 0,$$

de modo que $\sum_{n=1}^{\infty} r^n/n!$ converge. Concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{n!} = 0,$$

resultado ya demostrado en el Capítulo 16 (la demostración que proporcionamos allí estuvo basada en las mismas ideas utilizadas en la demostración de la prueba del cociente). Finalmente, si consideramos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nr^n$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)r^{n+1}}{nr^n} = \lim_{n\to\infty} r \cdot \frac{n+1}{n} = r,$$

ya que $\lim_{n\to\infty} (n+1)/n = 1$. Esto demuestra que si $0 \leq r < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} nr^n$ converge, y en consecuencia

$$\lim_{n\to\infty} nr^n = 0.$$

(Este resultado se cumple también claramente para $-1 < r \leq 0$.) Constituye un ejercicio útil dar una demostración directa de este límite, sin utilizar de intermediario la prueba del cociente.

Aunque la prueba del cociente va a ser de suma importancia teórica, como instrumento práctico muchas veces va a decepcionar. Un inconveniente de la prueba del cociente es el hecho de que $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$ pueden ser muy difícil de determinar, e incluso puede no existir. Una deficiencia más seria, que aparece con regularidad desconcertante, es el hecho de que el límite puede ser igual a 1. El caso $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 1$ es precisamente el que no permite sacar ninguna conclusión: $\{a_n\}$ puede no ser sumable (por ejemplo, si $a_n = 1/n$), pero también puede serlo. De hecho, nuestra próxima prueba demostrará que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1/n)^2$ converge, aun cuando

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\dfrac{1}{n+1}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{n}\right)^2} = 1.$$

Esta prueba ofrece un método completamente distinto para la determinación de la convergencia o divergencia de series infinitas; lo mismo que la prueba del cociente, es una consecuencia inmediata de la prueba de comparación, pero la serie elegida para comparación constituye una novedad.

Teorema 4 (Prueba de la integral). *Supongamos que f es positiva y decreciente sobre $[1,\infty)$, y que $f(n) = a_n$ para todo n. Entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si el límite*

$$\int_1^{\infty} f = \lim_{A\to\infty} \int_1^A f$$

existe.

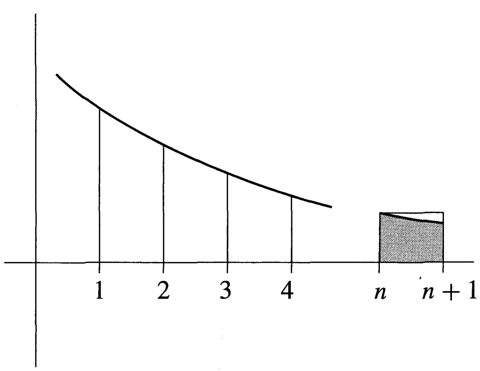


Figura 2

Demostración. La existencia de $\lim\limits_{A\to\infty} \int_1^A f$ es equivalente a la convergencia de la serie

$$\int_1^2 f + \int_2^3 f + \int_3^4 f + \cdots$$

Ahora bien, al ser f decreciente tenemos (Figura 2)

$$f(n+1) < \int_n^{n+1} f < f(n).$$

La primera mitad de esta doble desigualdad indica que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ puede compararse a la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f$, demostrando que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ (y por lo tanto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$) converge si $\lim\limits_{A\to\infty} \int_1^A$ existe.

La segunda mitad de la desigualdad indica que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f$ puede compararse a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, demostrando que $\lim_{A\to\infty} \int_1^A f$ debe existir si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. ■

Solamente vamos a dar aquí un ejemplo de aplicación de la prueba de la integral, pero éste resuelve la cuestión de la convergencia para un número infinito de series a la vez. Si $p > 0$, la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ es equivalente, según la prueba de la integral, a la existencia de

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx.$$

Ahora bien,

$$\int_1^A \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{(p-1)}\cdot\dfrac{1}{A^{p-1}} + \dfrac{1}{p-1}, & p \neq 1 \\ \log A, & p = 1. \end{cases}$$

Esto indica que $\lim_{A\to\infty} \int_1^A 1/x^p\,dx$ existe si $p > 1$, pero no si $p \leq 1$. Así pues, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ converge precisamente para $p > 1$. En particular, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge.

Las pruebas consideradas hasta aquí son aplicables solamente a sucesiones no negativas, pero las sucesiones no positivas pueden ser tratadas exactamente de la misma manera. Efectivamente, al ser

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\left(\sum_{n=1}^{\infty} -a_n\right),$$

todas las consideraciones acerca de sucesiones no positivas pueden reducirse a cuestiones que afectan a sucesiones no negativas. Las sucesiones que contienen términos tanto positivos como negativos son cuestión totalmente distinta.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una sucesión con términos positivos y negativos, se puede considerar en su lugar la sucesión $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, cuyos términos son todos no negativos. Olvidando alegremente la posibilidad de haber desperdiciado toda la información interesante acerca de la sucesión original, vamos a dignificar aquellas sucesiones que se convierten por este procedimiento en sucesiones convergentes.

Definición

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **absolutamente convergente** si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente. (Más formalmente, la sucesión $\{a_n\}$ es **absolutamente sumable** si la sucesión $\{|a_n|\}$ es sumable.)

Aunque no tenemos ningún derecho a esperar que esta definición pueda ser de interés, resulta ser sumamente importante. El siguiente teorema indica que por lo menos la definición no es del todo inútil.

Teorema 5. *Toda serie absolutamente convergente es convergente. Además, una serie es absolutamente convergente si y sólo si la serie formada con sus términos positivos y la serie formada con sus términos negativos son ambas convergentes.*

Demostración. Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces, según el criterio de Cauchy,

$$\lim_{m,n\to\infty} |a_{n+1}| + \cdots + |a_m| = 0.$$

Al ser

$$|a_{n+1} + \cdots + a_m| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_m|,$$

se deduce que

$$\lim_{m,n\to\infty} a_{n+1} + \cdots + a_m = 0,$$

lo cual indica que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Para demostrar la segunda parte del teorema, sean

$$a_n{}^+ = \begin{cases} a_n, & \text{si } a_n \geq 0 \\ 0, & \text{si } a_n \leq 0, \end{cases}$$

$$a_n{}^- = \begin{cases} a_n, & \text{si } a_n \leq 0 \\ 0, & \text{si } a_n \geq 0, \end{cases}$$

de modo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^+$ es la serie formada con los términos positivos de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^-$ es la serie formada con los términos negativos.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^+$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^-$ convergen ambas, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n{}^+ - (a_n{}^-)] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^-$$

también converge, de modo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

Por otra parte, si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces, según acabamos de demostrar, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge. Por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^+ = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\right)$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\right)$$

convergen ambas. ■

Se sigue del Teorema 5 que toda serie convergente de términos positivos puede utilizarse para obtener una infinidad de series convergentes, poniendo sencillamente menos signos al azar. Sin embargo, no todas las series convergentes pueden ser obtenidas de esta manera; existen series que son convergentes, pero no absolutamente convergentes (tales series reciben el nombre de **condicionalmente convergentes**). Para demostrar esta afirmación necesitamos una prueba de convergencia que se aplique específicamente a series con términos positivos y negativos.

Teorema 6 (Teorema de Leibniz). *Supongamos que*

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0,$$

y que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \cdots$$

converge.

Demostración. La Figura 3 ilustra las relaciones entre las sumas parciales que vamos a establecer:

(1) $s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \cdots,$

(2) $s_1 \geq s_3 \geq s_5 \geq \cdots,$

(3) $s_k \leq s_l$ si k es par y l impar.

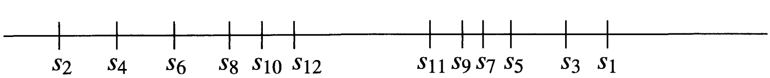


Figura 3

Para demostrar las dos primeras desigualdades, observemos que

$$\begin{aligned} (1) \quad s_{2n+2} &= s_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \\ &\geq s_{2n}, \qquad \text{ya que } a_{2n+1} \geq a_{2n+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad s_{2n+3} &= s_{2n+1} - a_{2n+2} + a_{2n+3} \\ &\leq s_{2n+1}, \qquad \text{ya que } a_{2n+2} \geq a_{2n+3}. \end{aligned}$$

Para demostrar la tercera desigualdad, observemos primero que

$$\begin{aligned} s_{2n} &= s_{2n-1} - a_{2n} \\ &\le s_{2n-1} \qquad \text{al ser } a_{2n} \ge 0. \end{aligned}$$

Esto demuestra sólo un caso particular de (3), pero en conjunción con (1) y (2), el caso general es fácil: si k es par y l impar, elegiremos n de forma que

$$2n \ge k \quad \text{y} \quad 2n-1 \ge l;$$

entonces

$$s_k \le s_{2n} \le s_{2n-1} \le s_l,$$

lo cual demuestra (3).

Ahora bien, la sucesión $\{s_{2n}\}$ converge, porque es no decreciente y acotada superiormente (por s_l para cualquier l impar). Sea

$$\alpha = \sup\{s_{2n}\} = \lim_{n\to\infty} s_{2n}.$$

Análogamente, sea

$$\beta = \inf\{s_{2n+1}\} = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}.$$

Se sigue de (3) que $\alpha \le \beta$; al ser

$$s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

se cumple efectivamente que $\alpha = \beta$. Esto demuestra que $\alpha = \beta = \lim_{n\to\infty} s_n$. ■

El ejemplo típico derivado del Teorema 6 es la serie

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \cdots,$$

la cual es convergente, pero *no* absolutamente convergente (ya que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ no converge). Si la suma de esta serie se designa por x, las siguientes manipulaciones llevan a un resultado completamente paradójico:

$$\begin{aligned} x &= 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \cdots \\ &= 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{14} - \tfrac{1}{16} + \cdots \end{aligned}$$

(La regla seguida aquí consiste en tomar un término positivo seguido de dos negativos.)

$$\begin{aligned} &= (1 - \tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6}) - \tfrac{1}{8} + (\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{10}) - \tfrac{1}{12} + (\tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{14}) - \tfrac{1}{16} + \cdots \\ &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{14} - \tfrac{1}{16} + \cdots \\ &= \tfrac{1}{2}(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \cdots) \\ &= \tfrac{1}{2}x, \end{aligned}$$

de modo que $x = x/2$, lo cual implica que $x = 0$. Por otra parte, es fácil ver que $x \neq 0$: la suma parcial s_2 es igual a $\frac{1}{2}$, y la demostración del Teorema de Leibniz indica que $x \geq s_2$.

Esta contradicción obedece a un paso en el cual se da por supuesto que las operaciones válidas para sumas finitas tienen necesariamente operaciones análogas válidas para sumas infinitas. Es verdad que la sucesión

$$\{b_n\} = 1,\ -\tfrac{1}{2},\ -\tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{3},\ -\tfrac{1}{6},\ -\tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{5},\ -\tfrac{1}{10},\ -\tfrac{1}{12},\ \ldots$$

contiene todos los números de la sucesión

$$\{a_n\} = 1,\ -\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ -\tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{5},\ -\tfrac{1}{6},\ \tfrac{1}{7},\ -\tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{9},\ -\tfrac{1}{10},\ \tfrac{1}{11},\ -\tfrac{1}{12},\ \ldots$$

Efectivamente, $\{b_n\}$ es una **reordenación** de $\{a_n\}$ en el siguiente sentido preciso: cada $b_n = a_{f(n)}$ donde f es una cierta función que "permuta" los números naturales, es decir, todo número natural m es $f(n)$ para un único n. En nuestro ejemplo,

$$\begin{aligned}
f(2m+1) &= 3m+1 \quad &&\text{(los términos } 1, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{5}, \ldots \text{ van a los lugares } 1^{\text{o}}, 4^{\text{o}}, 7^{\text{o}}, \ldots),\\
f(4m) &= 3m &&\text{(los términos } -\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{8}, -\tfrac{1}{12}, \ldots \text{ van a los lugares } 3^{\text{o}}, 6^{\text{o}}, 9^{\text{o}}, \ldots),\\
f(4m+2) &= 3m+2 &&\text{(los términos } -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{6}, -\tfrac{1}{10}, \ldots \text{ van a los lugares } 2^{\text{o}}, 5^{\text{o}}, 8^{\text{o}}, \ldots).
\end{aligned}$$

No obstante, no existe razón alguna para suponer que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ deba ser igual a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$: estas sumas son, por definición, $\lim_{n\to\infty} b_1 + \cdots + b_n$ y $\lim_{n\to\infty} a_1 + \cdots + a_n$, de modo que el orden particular de los términos puede importar. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n$ no es excepcional a este respecto; en efecto, su comportamiento es típico de series que no son absolutamente convergentes; el siguiente resultado (en realidad más un gran contraejemplo que un teorema) indica lo desconcertantes que son las series condicionalmente convergentes.

Teorema 7. *Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, pero no converge absolutamente, entonces para cualquier número α existe una reordenación $\{b_n\}$ de $\{a_n\}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha$.*

Demostración. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ la serie formada con los términos positivos de $\{a_n\}$ y sea $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ la serie de los términos negativos. Se sigue del Teorema 5 que por lo menos una de estas series no converge. De hecho, deben dejar de converger las dos, ya que si una de ellas tuviese sumas parciales acotadas, y la otra tuviese sumas parciales no acotadas, entonces la serie original $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tendría también sumas parciales no acotadas, en contradicción con la hipótesis de ser convergente.

Sea ahora α un número cualquiera. Supongamos, para mayor sencillez, que $\alpha > 0$ (la demostración para $\alpha < 0$ será una sencilla modificación). Por ser la serie $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ no convergente, existe un número N tal que

$$\sum_{n=1}^{N} p_n > \alpha.$$

Elegiremos N_1 como el N *más pequeño* con esta propiedad. Esto significa que

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{N_1-1} p_n \leq \alpha,$$

pero

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{N_1} p_n > \alpha.$$

Entonces si

$$S_1 = \sum_{n=1}^{N_1} p_n,$$

tenemos

$$S_1 - \alpha \leq p_{N_1}.$$

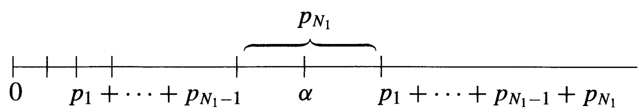


Figura 4

Esta relación, que queda clara por la Figura 4, se sigue inmediatamente de la ecuación (1):

$$S_1 - \alpha \leq S_1 - \sum_{n=1}^{N_1-1} p_n = p_{N_1}.$$

A la suma S_1 añadimos ahora precisamente tantos términos como sean necesarios para obtener una nueva suma T_1 que sea menor que α. En otras palabras, elegimos el entero M_1 más pequeño para el cual

$$T_1 = S_1 + \sum_{n=1}^{M_1} q_n < \alpha.$$

Como antes, tenemos

$$\alpha - T_1 \leq -q_{M_1}.$$

Continuamos ahora indefinidamente con este procedimiento, obteniendo alternativamente sumas más grandes y más pequeñas que α, eligiendo cada vez el N_k o M_k más pequeño posible. La sucesión

$$p_1, \ldots, p_{N_1}, q_1, \ldots, q_{M_1}, p_{N_1+1}, \ldots, p_{N_2}, \ldots$$

es una reordenación de $\{a_n\}$. Las sumas parciales de esta reordenación aumentan hasta S_1, después decrecen hasta T_1, después crecen hasta S_2, después decrecen hasta T_2, etc. Para completar la demostración observaremos simplemente que $|S_k - \alpha|$ y $|T_k - \alpha|$ son menores o iguales que p_{N_k} o $-q_{M_k}$, respectivamente y que estos términos, al ser miembros de la sucesión original $\{a_n\}$, deben decrecer hacia 0, puesto que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. ■

Junto el Teorema 7, el teorema próximo establece definitivamente la distinción entre series condicionalmente convergentes y absolutamente convergentes.

Teorema 8. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente, y* $\{b_n\}$ *es una reordenación cualquiera de* $\{a_n\}$*, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *también converge (absolutamente), y*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Demostración. Designemos por s_n las sumas parciales de $\{a_n\}$ y por t_n las de $\{b_n\}$.

Supongamos que $\varepsilon > 0$. Al ser $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente, existe algún N tal que

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - s_N\right| < \varepsilon.$$

Además, al ser $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ convergente, podemos también elegir N tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| - (|a_1| + \cdots + |a_N|) < \varepsilon,$$

es decir, tal que

$$|a_{N+1}| + |a_{N+2}| + |a_{N+3}| + \cdots < \varepsilon.$$

Elijamos ahora M tan grande que cada uno de los $a_1, \ldots, a_N$ aparezca entre los $b_1, \ldots, b_M$. Entonces siempre que sea $m > M$, la diferencia $t_m - s_N$ es la suma de ciertos a_i, *donde* $a_1, \ldots, a_N$ *quedan definitivamente excluidos*. En consecuencia,

$$|t_m - s_N| \leq |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + |a_{N+3}| + \cdots$$

Así pues, si $m > M$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - t_m\right| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - s_N - (t_m - s_N)\right| \\ &\leq \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - s_N\right| + |t_m - s_N| \\ &< \varepsilon + \varepsilon.\end{aligned}$$

Al ser eso verdad para todo $\varepsilon > 0$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge hacia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Para demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge absolutamente, observemos que $\{|b_n|\}$ es una reordenación de $\{|a_n|\}$; al ser $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge absolutamente, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ converge por la primera parte del teorema. ■

La convergencia absoluta es también importante cuando se quiere multiplicar dos series infinitas. A diferencia del caso de la adición, donde tenemos la sencilla fórmula

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n),$$

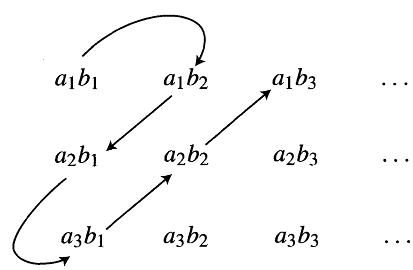
no hay un candidato claro para el producto

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = (a_1 + a_2 + \cdots) \cdot (b_1 + b_2 + \cdots).$$

Parece que tenemos que sumar todos los productos $a_i b_j$. El problema es que estos forman una matriz bidimensional, en lugar de una sucesión:

$$\begin{array}{cccc} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \ldots \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \ldots \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Sin embargo, todos los elementos de esta matriz pueden disponerse formando una sucesión. El dibujo siguiente muestra una forma de hacer esto, entre las infinitas posibles.



Supongamos que $\{c_n\}$ es una sucesión de este tipo, que contiene cada producto $a_i b_j$ una sola vez. Entonces podríamos esperar ingenuamente que

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Pero esto *no* es verdad (ver el Problema 10), ni es realmente tan sorprendente, ya que no hemos dicho nada acerca de la disposición específica de dichos términos. El siguiente teorema muestra que el resultado se cumple cuando la disposición de los términos es irrelevante.

Teorema 9. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *convergen absolutamente, y* $\{c_n\}$ *es cualquier sucesión que contiene los productos* $a_i b_j$ *para cada par* (i, j)*, entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Demostración. Observemos primero que la sucesión

$$p_L = \sum_{i=1}^{L} |a_i| \cdot \sum_{j=1}^{L} |b_j|$$

converge, al ser $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ absolutamente convergentes, y que el límite de un producto es el producto de los límites. Por tanto $\{p_L\}$ es una sucesión de Cauchy, que significa que para cualquier $\varepsilon > 0$, si L y L' son suficientemente grandes, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^{L'} |a_i| \cdot \sum_{j=1}^{L'} |b_j| - \sum_{i=1}^{L} |a_i| \cdot \sum_{j=1}^{L} |b_j| \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Se deduce que

$$(1) \qquad \sum_{i \text{ o } j > L} |a_i| \cdot |b_j| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Supongamos ahora que N es cualquier número tan grande que los términos c_n cuando $n \leq N$ incluyan a cada término $a_i b_j$ para $i, j \leq L$. Entonces la diferencia

$$\sum_{n=1}^{N} c_n - \sum_{i=1}^{L} a_i \cdot \sum_{j=1}^{L} b_j$$

consiste en términos $a_i b_j$ con $i > L$ o $j > L$, por tanto

$$(2) \qquad \begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{N} c_n - \sum_{i=1}^{L} a_i \cdot \sum_{j=1}^{L} b_j \right| &\leq \sum_{i \text{ o } j > L} |a_i| \cdot |b_j| \\ &< \varepsilon \qquad \text{por (1).} \end{aligned}$$

Pero puesto que el límite de un producto es el producto de los límites, tenemos también

$$(3) \qquad \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=1}^{\infty} b_j - \sum_{i=1}^{L} a_i \cdot \sum_{j=1}^{L} b_j \right| < \varepsilon$$

para L suficientemente grandes. En consecuencia, si escogemos L, y entonces N, suficientemente grandes, tendremos

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=1}^{\infty} b_j - \sum_{i=1}^{N} c_n \right| &\leq \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=1}^{\infty} b_j - \sum_{i=1}^{L} a_i \cdot \sum_{j=1}^{L} b_j \right| \\ &\quad + \left| \sum_{i=1}^{L} a_i \cdot \sum_{j=1}^{L} b_j - \sum_{n=1}^{N} c_n \right| \\ &< 2\varepsilon \qquad \text{por (2) y (3),} \end{aligned}$$

lo que demuestra el teorema. ■

A diferencia de los teoremas anteriores, que estaban exclusivamente preocupados por la sumabilidad, este resultado nos dice algo acerca de las sumas mismas. Hablando de un modo general, no existe razón alguna para suponer que una suma infinita dada pueda "calcularse" en términos sencillos. Sin embargo, muchas expresiones sencillas pueden igualarse a sumas infinitas utilizando el Teorema de Taylor. El Capítulo 20 ofrece muchos ejemplos de funciones para las cuales

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i + R_{n,a}(x),$$

donde $\lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = 0$.

Esto equivale precisamente a

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i,$$

lo cual significa a su vez que

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i.$$

Como ejemplos particulares tenemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, \\
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \\
\operatorname{arctg} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, && |x| \le 1, \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots, && -1 < x \le 1.
\end{aligned}$$

(Observemos que las series para $\operatorname{arctg} x$ y $\log(1+x)$ ni siquiera convergen para $|x| > 1$; además, cuando $x = -1$, la serie para $\log(1+x)$ se convierte en

$$-1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} - \cdots$$

la cual no converge.)

Se obtienen algunos resultados bastante impresionantes al dar valores particulares a x:

$$\begin{aligned}
0 &= \pi - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \frac{\pi^7}{7!} + \cdots, \\
e &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots, \\
\frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots, \\
\log 2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots.
\end{aligned}$$

Se pueden anticipar desarrollos más significativos si comparamos las series de las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ con algo más de cuidado. La serie para $\cos x$ es precisamente la que hubiésemos obtenido si, llevados de nuestro entusiasmo, hubiésemos derivado

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

término a término ambos miembros de la ecuación, olvidado el hecho de que nunca hemos demostrado nada acerca de derivadas de sumas infinitas. Del mismo modo, si derivamos ambos lados de la fórmula para $\cos x$ formalmente (es decir, sin justificación), obtenemos la fórmula $\cos'(x) = -\operatorname{sen} x$, y si derivamos la fórmula para e^x obtenemos $\exp'(x) = \exp(x)$. En el próximo capítulo veremos que tal diferenciación término a término de sumas infinitas es efectivamente válido en ciertos casos importantes.

Problemas

1. Decida si son convergentes o divergentes cada una de las siguientes series infinitas. Los instrumentos que se necesitarán son el Teorema de Leibniz y las pruebas de comparación, del cociente, y de la integral. Unos pocos ejemplos han sido elegidos intencionadamente con malicia; dos series de aspecto muy parecido pueden requerir pruebas diferentes (y también puede no ser así). La indicación que sigue dice qué pruebas pueden usarse.

   (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\theta}{n^2}$.

   (ii) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$.

   (iii) $1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \cdots$.

   (iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n}$.

   (v) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}$. (La suma empieza con $n = 2$ sencillamente para evitar el término sin sentido que se obtiene para $n = 1$).

   (vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$.

   (vii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$.

   (viii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$.

   (ix) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$.

   (x) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^k}$.

   (xi) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$.

   (xii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(\log n)^n}$.

   (xiii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$.

   (ivx) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$.

   (xv) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$.

   (xvi) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$.

(xvii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2(\log n)}$. (xviii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$. (xix) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$. (xx) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

Indicación: Aplique la prueba de comparación para (i), (v), (vi), (ix), (x), (xi), (xiii), (xiv), (xvii); la prueba del cociente para (vii), (xviii), (xix), (xx); la prueba de la integral para (viii), (xv), (xvi).

Los dos problemas siguientes examinan, con indicaciones, algunas series infinitas que requieren análisis más delicados que los del Problema 1.

***2.** (a) Si se ha conseguido resolver los ejemplos (xix) y (xx) del Problema 1, habrá quedado claro que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^n n!/n^n$ converge para $a < e$ y diverge para $a > e$. Para $a = e$ la prueba del cociente falla; demuestre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^n n!/n^n$ en realidad diverge, aplicando el Problema 22-13.

(b) Decida cuando $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n/a^n n!$ converge, recurriendo de nuevo al Problema 22-13 cuando falle la prueba del cociente.

***3.** El Problema 1 presentó las dos series $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (\log n)^{-k}$ y $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (\log n)^{-n}$, de las cuales la primera diverge mientras que la segunda converge. La serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}},$$

que está entre estas dos, se analiza en las partes (a) y (b).

(a) Demuestre que $\displaystyle\int_1^{\infty} e^y/y^y\,dy$ existe, considerando la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (e/n)^n$.

(b) Demuestre que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$$

converge, aplicando la prueba de la integral. Indicación: Utilice una sustitución adecuada y la parte (a).

(c) Demuestre que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log(\log n)}}$$

diverge, aplicando la prueba de la integral. Indicación: Utilice la misma sustitución que en la parte (b), y demuestre directamente que la integral resultante diverge.

4. Decida si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$ converge o no.

5. (a) Demuestre que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^3$ también lo es.

*(b) Demuestre que esto no ocurre si la convergencia es condicional.

6. Sea f una función continua en un intervalo que contiene el número 0, y sea $a_n = f(1/n)$ (para n suficientemente grandes).

(a) Demuestre que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $f(0) = 0$.

(b) Demuestre que si $f'(0)$ existe y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $f'(0) = 0$.

(c) Demuestre que si $f''(0)$ existe y $f(0) = f'(0) = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(d) Suponga que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. ¿Debe existir $f'(0)$?

(e) Suponga que $f(0) = f'(0) = 0$. ¿Debe converger $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

7. (a) Sea $\{a_n\}$ una sucesión de enteros con $0 \leq a_n \leq 9$. Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ existe (y está entre 0 y 1). (Éste es, por supuesto, el número que por lo general designamos por $0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots$)

(b) Suponga que $0 \leq x \leq 1$. Demuestre que existe una sucesión de enteros $\{a_n\}$ con $0 \leq a_n \leq 9$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n} = x$. Indicación: Por ejemplo, $a_1 = [10x]$ (donde $[y]$ designa el mayor entero que es $\leq y$).

(c) Demuestre que si $\{a_n\}$ es periódica, es decir, es de la forma $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_1, a_2, \ldots$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ es un número racional (y hallarlo). El mismo resultado se cumple naturalmente si $\{a_n\}$ es periódica a partir de un cierto término, es decir, si la sucesión $\{a_{N+k}\}$ es periódica para algún N.

(d) Demuestre que si $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ es racional, entonces $\{a_n\}$ es periódica a partir de un cierto término. (Basta observar el proceso de hallar el desarrollo decimal de p/q, dividiendo p por q mediante división obteniendo un número suficientemente elevado de decimales.)

8. Suponga que $\{a_n\}$ satisface la hipótesis del Teorema de Leibniz. Utilice la demostración del Teorema de Leibniz para obtener la estimación siguiente:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n - [a_1 - a_2 + \cdots \pm a_N] \right| < a_{N+1}.$$

9. (a) Demuestre que si $a_n \geq 0$ y $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $r < 1$, y diverge si $r > 1$. (La demostración es muy parecida a la de la prueba del cociente.) Este resultado se conoce como "prueba de la raíz." Con mayor generalidad, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si existe un $s < 1$ tal que todos los términos $\sqrt[n]{a_n}$, excepto a lo sumo un número finito, son $\leq s$, y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge si un número infinito de términos $\sqrt[n]{a_n}$ son ≥ 1. Este resultado se conoce como "prueba fina de la raíz" (hay también una prueba fina del cociente, parecida). Se deduce, utilizando la notación del Problema 22-27, que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} < 1$ y diverge si $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} > 1$; ninguna conclusión es posible si $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

(b) Demuestre que si la prueba del cociente permite decidir, la prueba de la raíz también. Indicación: Utilice un problema del capítulo anterior.

Es fácil construir series para las cuales la prueba del cociente no decide, mientras que la prueba de la raíz si permite hacerlo. Por ejemplo, la prueba de la raíz indica que la serie

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{3})^2 + (\tfrac{1}{2})^3 + (\tfrac{1}{3})^3 + \cdots$$

converge, aun cuando los cocientes de términos sucesivos no tienden hacia ningún límite. La mayor parte de los ejemplos son de este tipo bastante artificial, pero la prueba de la raíz es, no obstante, un instrumento teórico muy importante.

10. Dadas dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, sea $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}$. (Entonces c_n es la suma de los términos de la n-ésima diagonal en el dibujo de la página 486.) A la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ se la denomina *producto de Cauchy* de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Si $a_n = b_n = (-1)^n/\sqrt{n}$, demuestre que $|c_n| \geq 1$, por tanto el producto de Cauchy no converge.

11. (a) Considere el conjunto A de números naturales que *no* contienen al dígito 9 en su habitual representación en base 10. Demuestre que la suma los inversos de los números de A *converge*. Indicación: ¿Cuántos números entre 1 y 9 están en A?; ¿cuántos entre 10 y 99?; etc.

(b) Si B es el conjunto de todos los números naturales que no tienen *todos los 10 dígitos* $0, \ldots. 9$ en su representación habitual en base 10, entonces la suma de los inversos de los numeros de B converge. (Por tanto "la mayoría" de enteros deben tener los diez dígitos en su representación habitual.)

12. Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es **sumable Cesàro**, y que la suma de Cesàro es l, si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n} = l$$

(donde $s_k = a_1 + \cdots + a_k$). El Problema 22-16 indica que una sucesión sumable es automáticamente sumable Cesàro, y que su suma es igual a su suma de Cesàro. Halle una sucesión que ***no*** sea sumable, pero que *sea* sumable Cesàro.

13. Suponga que $a_n > 0$ y $\{a_n\}$ es sumable Cesàro. Suponga también que la sucesión $\{na_n\}$ está acotada. Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Indicación: Si $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ y $\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s_i$, demuestre que $s_n - \frac{n}{n+1}\sigma_n$ está acotada.

14. Este problema proporciona a grandes rasgos una demostración alternativa del Teorema 8 no basada en el criterio de Cauchy.

(a) Suponga que $a_n \geq 0$ para cada n. Sea $\{b_n\}$ una reordenación de $\{a_n\}$, y sea $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ y $t_n = b_1 + \cdots + b_n$. Demuestre que para cada n existe algún m tal que $s_n \leq t_m$.

(b) Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ existe.

(c) Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(d) Sustituya ahora la condición $a_n \geq 0$ por la hipótesis de que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, utilizando la segunda parte del Teorema 5.

15. (a) Demuestre que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, y $\{b_n\}$ es una subsucesión cualquiera de $\{a_n\}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es absolutamente convergente.

(b) Demuestre que esto es falso si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no es absolutamente convergente.

*(c) Demuestre que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots) + (a_2 + a_4 + a_6 + \cdots).$$

16. Demuestre que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

***17.** El Problema 19-43 indica que la integral impropia $\int_0^{\infty} (\operatorname{sen} x)/x\, dx$ converge. Demuestre que

$$\int_0^{\infty} |(\operatorname{sen} x)/x|\, dx$$

diverge.

***18.** Halle una función continua f con $f(x) \geq 0$ para todo x tal que $\int_0^{\infty} f(x)\, dx$ exista, pero no exista $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

*19. Sea $f(x) = x \operatorname{sen} 1/x$ para $0 < x \le 1$, tal que $f(0) = 0$. Recuerde la definición de $\ell(f, P)$ del Problema 13-25 y demuestre que el conjunto de todos los $\ell(f, P)$ siendo P una partición de $[0, 1]$ no está acotado (así pues, f tiene una "longitud infinita"). Indicación: Pruebe particiones de la forma

$$P = \left\{0, \frac{2}{(2n+1)\pi}, \ldots, \frac{2}{7\pi}, \frac{2}{5\pi}, \frac{2}{3\pi}, \frac{2}{\pi}, 1\right\}.$$

20. Sea f la función indicada en la Figura 5. Halle

$$\int_0^1 f,$$

y también el área de la región sombreada de la Figura 5.

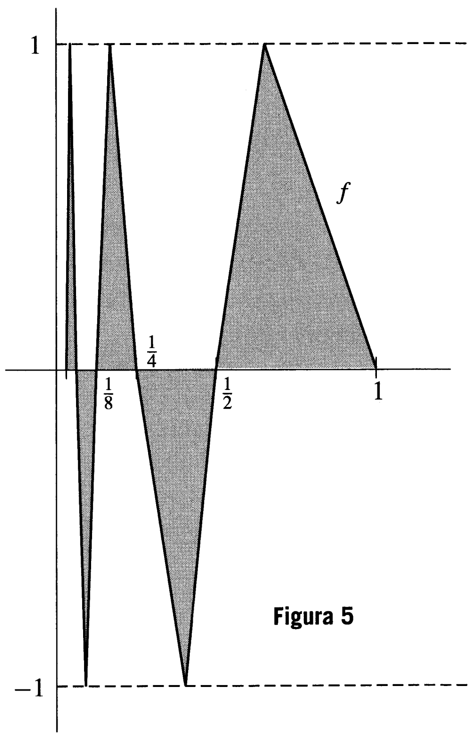


Figura 5

*21. En este problema vamos a establecer la "serie binomial"

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \qquad |x| < 1,$$

para un α cualquiera, demostrando que $\lim_{n\to\infty} R_{n,0}(x) = 0$. La demostración consta de varios pasos, y utiliza las formas de Cauchy y Lagrange halladas en el Problema 20-21.

(a) Utilice la prueba del cociente para demostrar que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} r^k$ efectivamente converge para $|r| < 1$ (esto no equivale necesariamente a decir que converge hacia $(1+r)^\alpha$). Se sigue en particular que $\lim_{n\to\infty} \binom{\alpha}{n} r^n = 0$ para $|r| < 1$.

(b) Suponga primero que $0 \leq x < 1$. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} R_{n,0}(x) = 0$, utilizando la forma de Lagrange del resto, y observando que $(1+t)^{\alpha-n-1} \leq 1$ para $n+1 > \alpha$.

(c) Suponga ahora que $-1 < x < 0$; el número t en la forma del resto de Cauchy satisface $-1 < x < t \leq 0$. Demuestre que

$$|x(1+t)^{\alpha-1}| \leq |x|M, \qquad \text{donde } M = \text{máx}(1, (1+x)^{\alpha-1}),$$

y

$$\left|\frac{x-t}{1+t}\right| = |x|\left(\frac{1-t/x}{1+t}\right) \leq |x|.$$

Utilizando la forma del resto de Cauchy, y el hecho de que

$$(n+1)\binom{\alpha}{n+1} = \alpha\binom{\alpha-1}{n},$$

demuestre que $\lim_{n\to\infty} R_{n,0}(x) = 0$.

22. (a) Suponga que las sumas parciales de la sucesión $\{a_n\}$ son acotadas y que $\{b_n\}$ es una sucesión decreciente con $b_n \geq b_{n+1}$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge. Este resultado se conoce como la *prueba de Dirichlet*. Indicación: Aplique el Lema de Abel (Problema 19-36) para comprobar el criterio de Cauchy.

(b) Deduzca de este resultado el Teorema de Leibniz.

(c) Demuestre, utilizando el Problema 15-33, que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\cos nx)/n$ converge si x no es de la forma $2k\pi$ para un entero k (en cuyo caso claramente diverge).

(d) Demuestre la *prueba de Abel*: Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $\{b_n\}$ es una sucesión que es o bien no decreciente o no creciente además de acotada, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge. Indicación: Considere $b_n - b$, donde $b = \lim_{n\to\infty} b_n$.

***23.** Suponga que $\{a_n\}$ es decreciente y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Demuestre que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ también converge (el "Teorema de Condensación de Cauchy"). Observe que la divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ es un caso particular, pues si $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ convergiera, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n(1/2^n)$ también convergería; esta observación puede servir de ayuda.

***24.** (a) Demuestre que si $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ y $\sum_{n=1}^{\infty} {b_n}^2$ convergen, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

(b) Demuestre que si $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^{\alpha}$ converge para cualquier $\alpha > \frac{1}{2}$.

***25.** Suponga que $\{a_n\}$ es decreciente siendo cada $a_n > 0$. Demuestre que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. Indicación: Escriba el criterio de Cauchy y utilice el hecho de que $\{a_n\}$ es decreciente.

***26.** Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces las sumas parciales s_n están acotadas, y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Se está tentado a conjeturar que la acotación de las sumas parciales, junto con la condición $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, implica la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Halle un contraejemplo para demostrar que esto *no* es verdad. Indicación: Observe que alguna *subsucesión* de las sumas parciales tendrá que converger; de alguna manera habrá que conseguir esto sin dejar que la sucesión misma converja.

27. Demuestre que si $a_n \geq 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ también diverge. Indicación: Compare las sumas parciales. ¿Se cumple lo contrario?

28. Para $b_n > 0$ decimos que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge* si la sucesión $p_n = \prod_{i=1}^{n} b_i$ converge, y también $\lim_{n\to\infty} p_n \neq 0$.

(a) Demuestre que si $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces b_n tiende a 1.

(b) Demuestre que $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ converge si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} \log b_n$ converge.

(c) Para $a_n \geq 0$, demuestre que $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$ converge si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Indicación: Utilice el Problema 27 para una de las implicaciones, y una simple acotación de $\log(1+a)$ para la implicación recíproca.

En la parte restante de este problema demostraremos que la hipótesis $a_n \geq 0$ es necesaria.

(d) Utilice las serie de Taylor de la función $\log(1+x)$ para demostrar que para x suficientemente pequeños, tenemos

$$\tfrac{1}{4}x^2 \leq x - \log(1+x) \leq \tfrac{3}{4}x^2.$$

Concluya que si todos los $a_n > -1$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+a_n)$ converge si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ converge. De forma similar, si todos los $a_n > -1$ y $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+a_n)$ converge si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Indicación: Utilice el criterio de Cauchy.

(e) Demuestre que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

converge, pero

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

diverge.

(f) Consideremos la sucesión

$$\{a_n\} = \underbrace{1, -\tfrac{1}{2},}_{1 \text{ par}} \underbrace{\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{4},}_{3 \text{ pares}} \underbrace{\tfrac{1}{5}, -\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{5}, -\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{5}, -\tfrac{1}{6}, \ldots}_{5 \text{ pares}} \quad \ldots$$

(compare con el Problema 26). Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, pero

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = 1.$$

29. (a) Calcule $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

(b) Calcule $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^{2^n})$ para $|x| < 1$.

30. La divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ es una consecuencia particular del siguiente hecho destacable: Cualquier número racional positivo x puede escribirse como suma *finita* de números *distintos* de la forma $1/n$. La clave de la demostración se revela a través del siguiente cálculo de $\frac{27}{31}$: puesto que

$$\begin{aligned} \frac{27}{31} - \frac{1}{2} &= \frac{23}{62} \\ \frac{23}{62} - \frac{1}{3} &= \frac{7}{186} \\ \frac{7}{186} &< \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{26} \\ \frac{7}{186} - \frac{1}{27} &= \frac{1}{1674} \end{aligned}$$

tenemos

$$\frac{27}{31} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{27} + \frac{1}{1674}.$$

Observe que los numeradores 23, 7, 1 son decrecientes.

(a) Demuestre que si $1/(n+1) < x < 1/n$ para algún n, entonces el denominador, en este tipo de cálculos, debe ser siempre decreciente; concluya que x puede escribirse como una suma finita de distintos números de la forma $1/k$.

(b) Ahora demuestre el resultado para cualquier x usando la divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} 1 \ n$.

Convergencia uniforme y series de potencias

24

Las consideraciones del final del capítulo anterior sugieren una manera completamente nueva de considerar las series infinitas. Nuestra atención se trasladará ahora de las sumas infinitas particulares a ecuaciones tales como

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

referentes a sumas de cantidades que dependen de x. En otras palabras, estamos interesados en *funciones* definidas mediante ecuaciones de la forma

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots$$

(en el capítulo anterior $f_n(x) = x^{n-1}/(n-1)!$). En tal situación $\{f_n\}$ será una determinada sucesión de funciones; para cada x obtenemos una sucesión de números $\{f_n(x)\}$, y $f(x)$ es la suma de esta sucesión. Para analizar tales funciones hará falta ciertamente recordar que cada suma

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots$$

es, por definición, el límite de la sucesión

$$f_1(x),\ f_1(x) + f_2(x),\ f_1(x) + f_2(x) + f_3(x),\ \ldots$$

Si definimos una nueva sucesión de funciones $\{s_n\}$ mediante

$$s_n = f_1 + \cdots + f_n,$$

entonces podemos expresar de forma más resumida este hecho escribiendo

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x).$$

De momento nos concentramos, por tanto, en funciones definidas como límites,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

más que en funciones definidas como sumas infinitas. Todos los resultados referentes a tales funciones pueden resumirse muy fácilmente: nada de lo que era de esperar que se cumpliera, se cumple en realidad; disponemos, por el contrario, de una espléndida colección de contraejemplos. El primero de estos indica que aun siendo continua cada f_n puede no serlo la función f. Contrariamente a lo que se podría esperar, las funciones f_n serán muy sencillas. La Figura 1 muestra las gráficas de las funciones

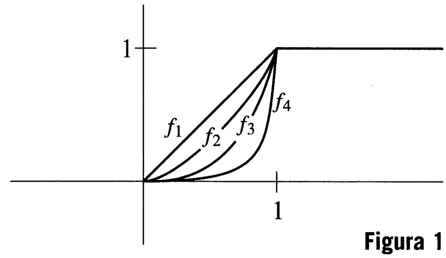


Figura 1

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

Estas funciones son todas continuas, pero la función $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ no es continua; en efecto,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

Otro ejemplo de este mismo fenómeno se ilustra en la Figura 2; las funciones f_n están definidas por

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & x \le -\dfrac{1}{n} \\ nx, & -\dfrac{1}{n} \le x \le \dfrac{1}{n} \\ 1, & \dfrac{1}{n} \le x. \end{cases}$$

En este caso, si $x < 0$, entonces $f_n(x)$ es eventualmente (es decir, para n suficientemente grande) igual a -1, y si $x > 0$, entonces $f_n(x)$ es eventualmente 1, mientras $f_n(0) = 0$ para todo n. Así pues,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0; \end{cases}$$

de modo que, una vez más, la función $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ no es continua.

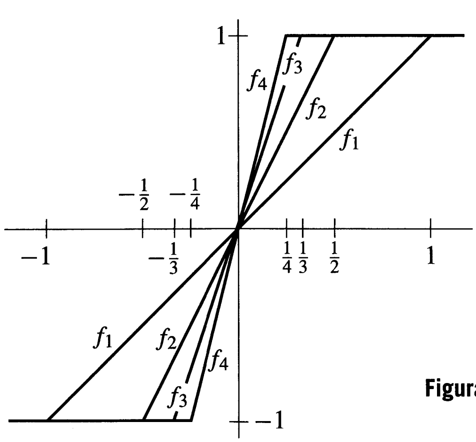


Figura 2

Redondeando las esquinas en los ejemplos anteriores es incluso posible construir una sucesión de funciones *diferenciables* para las cuales la función $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ no es continua. Tal sucesión es fácil de definir explícitamente:

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & x \le -\dfrac{1}{n} \\ \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi x}{2}\right), & -\dfrac{1}{n} \le x \le \dfrac{1}{n} \\ 1, & \dfrac{1}{n} \le x. \end{cases}$$

Estas funciones son diferenciables (Figura 3), pero continuamos teniendo

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

La continuidad y la diferenciabilidad no son, además, las únicas propiedades que presentan problemas. Otra dificultad se ilustra mediante la sucesión $\{f_n\}$ indicada en la Figura 4; sobre el intervalo $[0, 1/n]$ la gráfica de f_n forma un triángulo isósceles de altura n, mientras que $f_n(x) = 0$ para $x \ge 1/n$. Estas funciones pueden definirse explícitamente como sigue:

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x, & 0 \le x \le \dfrac{1}{2n} \\ 2n - 2n^2x, & \dfrac{1}{2n} \le x \le \dfrac{1}{n} \\ 0, & \dfrac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$

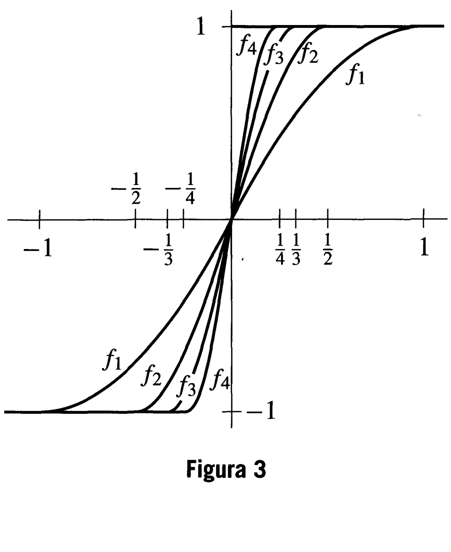


Figura 3

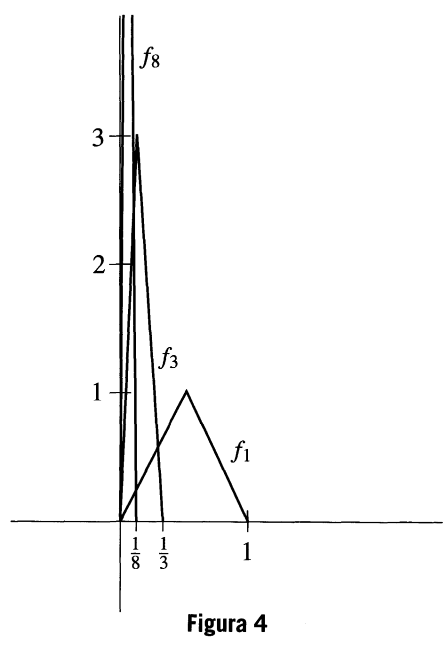


Figura 4

Al variar esta sucesión de manera tan errática en la proximidad de 0, nuestros instintos matemáticos primitivos podrían sugerirnos que $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ no siempre existe. No obstante, este límite existe para todo x, y la función $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ es incluso continua. Efectivamente, si $x > 0$, entonces $f_n(x)$ es eventualmente 0, de modo que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$; además, $f_n(0) = 0$ para todo n, de modo que tenemos ciertamente $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$. En otras palabras, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ para todo x. Por otra parte, la integral revela rápidamente el comportamiento extraño de esta sucesión; tenemos

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \tfrac{1}{2},$$

pero

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

Así pues,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Esta sucesión particular de funciones se comporta de manera que nunca hubiésemos podido imaginar cuando empezamos a considerar funciones definidas por límites. Si bien es verdad que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{para cada } x \text{ en } [0, 1],$$

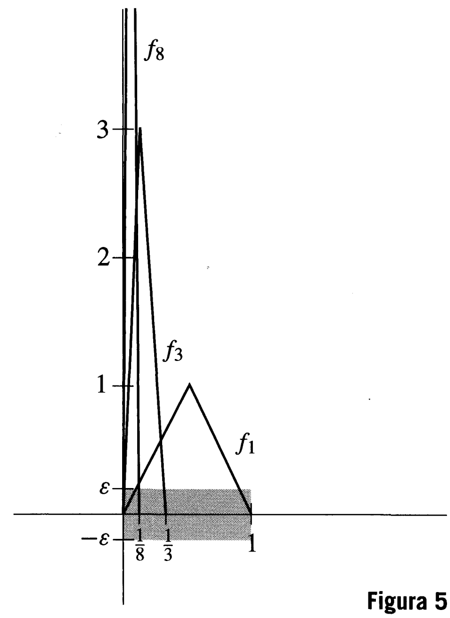


Figura 5

las gráficas de las funciones f_n no se "acercan" a la gráfica de f en el sentido de estar próximas a ella; si, como en la Figura 5, dibujamos una banda alrededor de f de anchura total 2ε (con anchura ε tanto por encima como por debajo), entonces las gráficas de f_n no quedan completamente dentro de esta banda, por grande que hagamos n. Por supuesto, para cada x existe algún N tal que el punto $(x, f_n(x))$ queda dentro de esta banda para $n > N$; esta afirmación equivale al hecho de que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Pero hace falta elegir unos N cada vez más grandes a medida que elegimos los x más próximos a 0, y no habrá ningún N que dé resultado para todos los x a la vez.

La misma situación se presenta en realidad, aunque no tan descaradamente, para cada uno de los otros ejemplos comentados anteriormente.

La Figura 6 ilustra este punto para la sucesión

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

Se ha trazado una banda de anchura total 2ε a lo largo de la gráfica de $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Si $\varepsilon < \frac{1}{2}$, esta banda se compone de dos partes, las cuales no contienen ningún punto con

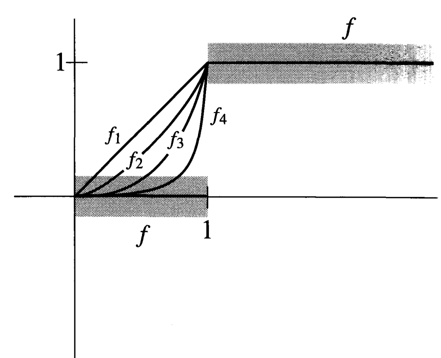


Figura 6

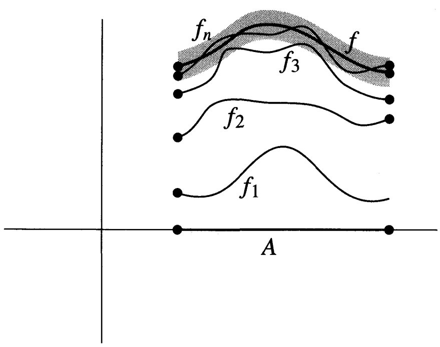


Figura 7

segunda coordenada igual a $\frac{1}{2}$; puesto que cada una de las funciones f_n toma el valor $\frac{1}{2}$, la gráfica de cada f_n deja de estar dentro de esta banda. Una vez más, para cada punto x existe algún N tal que $(x, f_n(x))$ queda dentro de esta banda para $n > N$; pero no es posible elegir un N que dé resultado a la vez para todos los x.

Es fácil comprobar que la misma situación se presenta exactamente para cada uno de los demás ejemplos. En cada caso tenemos una función f, y una sucesión de funciones $\{f_n\}$, definidas todas sobre algún conjunto A, tales que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{para todo } x \text{ de } A.$$

Esto significa que

> para todo $\varepsilon > 0$, y para todo x de A, existe algún N tal que si $n > N$, entonces $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

Pero en cada caso deben elegirse unos N distintos para distintos x, y *no* se cumple que

> para todo $\varepsilon > 0$ existe algún N tal que para todo x de A, si $n > N$, entonces $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

Aunque esta condición difiere solamente de la primera en un pequeño desplazamiento de la frase "para todo x de A", tiene un significado completamente distinto. Si una sucesión $\{f_n\}$ satisface esta segunda condición, entonces las gráficas de f_n serán eventualmente próximas a la gráfica de f, según queda ilustrado en la Figura 7. Esta es precisamente la condición que hace posible el estudio de las funciones límites.

Definición

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en A, y sea f una función también definida en A. Entonces f recibe el nombre de **límite uniforme de** $\{f_n\}$ **en** A si para todo $\varepsilon > 0$ existe algún N tal que para todo x de A,

$$\text{si } n > N, \text{ entonces } |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Decimos también que $\{f_n\}$ **converge uniformemente hacia f en A**, o que f_n **tiende hacia f uniformemente en A**.

En contraposición con esta definición, si solamente sabemos que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{para todo } x \text{ de } A,$$

entonces decimos que $\{f_n\}$ **converge puntualmente hacia f en A**. Evidentemente, la convergencia uniforme implica la convergencia puntual (¡pero no el recíproco!).

No es difícil reunir evidencia de la utilidad de la convergencia uniforme. Las integrales representan un tema particularmente fácil; por la Figura 7 resulta casi evidente que si $\{f_n\}$ converge uniformemente hacia f, entonces la integral de f_n puede hacerse tan próxima como se quiera a la integral de f. Expresado con más precisión, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1. *Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones integrables en $[a,b]$, y que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[a,b]$ hacia una función f integrable en $[a,b]$. Entonces*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Existe algún N tal que para todo $n > N$ tenemos

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \text{ para todo } x \text{ de } [a,b].$$

Así pues, si $n > N$ resulta

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx \right| &= \left| \int_a^b [f(x) - f_n(x)]\,dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx \\ &\leq \int_a^b \varepsilon\,dx \\ &= \varepsilon(b-a). \end{aligned}$$

Al cumplirse esto para cualquier $\varepsilon > 0$, se sigue que

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n. \blacksquare$$

Solamente algo más difícil resulta el tratamiento de la continuidad, que requiere un "razonamiento $\varepsilon/3$", una acotación en tres pasos de $|f(x) - f(x+h)|$. Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente hacia f, entonces existe algún n tal que

$$(1) \qquad |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$(2) \qquad |f(x+h) - f_n(x+h)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Además, al ser f_n continua, para h suficientemente pequeño tenemos

$$(3) \qquad |f_n(x) - f_n(x+h)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Se seguirá de (1), (2) y (3) que $|f(x) - f(x+h)| < \varepsilon$. Para obtener (3), debemos restringir, sin embargo, el tamaño de $|h|$ en un modo que no puede determinarse hasta haber elegido n; es por lo tanto crucial que exista algún n fijo que haga que se cumpla (2) sin importar lo pequeño que $|h|$ sea; es precisamente en este punto donde entra en la demostración la convergencia uniforme.

Teorema 2. *Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones continuas en $[a, b]$, y que $\{f_n\}$ converge uniformemente hacia f en $[a, b]$. Entonces f es también continua en $[a, b]$.*

Demostración. Para todo x de $[a, b]$ debemos demostrar que f es continua en x. Trataremos solamente el caso en que x está en (a, b); los casos $x = a$ y $x = b$ requieren las sencillas modificaciones usuales.

Sea $\varepsilon > 0$. Al converger $\{f_n\}$ uniformemente hacia f en $[a, b]$, existe algún n tal que

$$|f(y) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ para todo } y \text{ de } [a, b].$$

En particular, para todo h tal que $x + h$ está en $[a, b]$, tenemos

$$(1) \qquad |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$(2) \qquad |f(x+h) - f_n(x+h)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ahora bien f_n es continua, de modo que existe algún $\delta > 0$ tal que para $|h| < \delta$ tenemos

$$(3) \qquad |f_n(x) - f_n(x+h)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Así pues, si $|h| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}
|f(x+h) - f(x)| &= |f(x+h) - f_n(x+h) + f_n(x+h) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)| \\
&\leq |f(x+h) - f_n(x+h)| + |f_n(x+h) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Esto demuestra que f es continua en x. ■

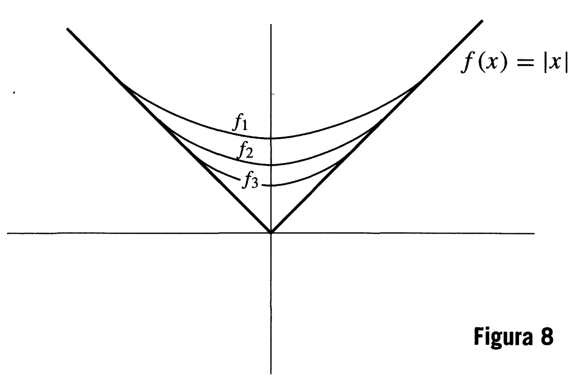


Figura 8

Después de los dos notables éxitos ofrecidos por los Teoremas 1 y 2, la cuestión de la diferenciabilidad resulta muy decepcionante. Si cada f_n es diferenciable, y si $\{f_n\}$ converge uniformemente hacia f, todavía no se cumple necesariamente que f sea diferenciable. Por ejemplo, la Figura 8 indica que existe una sucesión de funciones diferenciables $\{f_n\}$ que converge uniformemente hacia la función $f(x) = |x|$. Incluso aunque f *sea* diferenciable, puede que no sea verdad que

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n{}'(x);$$

esto no es en ningún modo sorprendente si tenemos en cuenta que una función suave puede ser aproximada por funciones de oscilación muy rápida. Por ejemplo (Figura 9), si

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\operatorname{sen}(n^2x),$$

entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente hacia la función $f(x) = 0$, pero

$$f_n{}'(x) = n\cos(n^2x),$$

y $\lim\limits_{n\to\infty} n\cos(n^2x)$ no existe siempre (por ejemplo, no existe si $x = 0$).

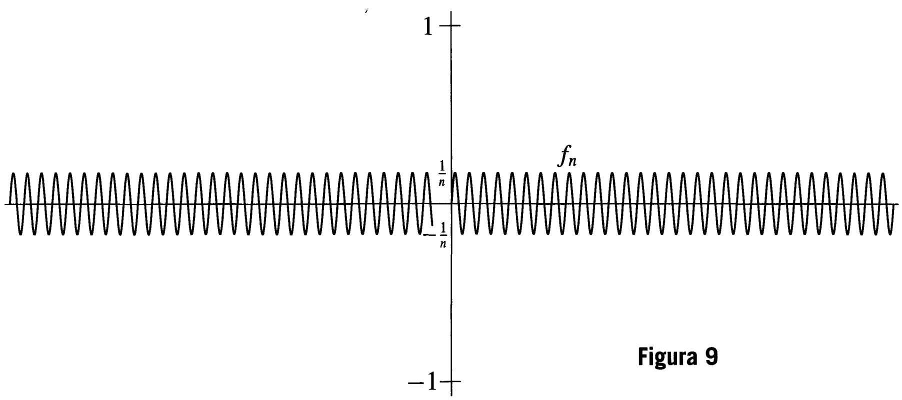


Figura 9

A pesar de estos ejemplos, el Teorema Fundamental del Cálculo garantiza prácticamente que se podrá deducir del Teorema 1 algún tipo de teorema referente a las derivadas; la hipótesis crucial es que $\{f_n{}'\}$ converja uniformemente (hacia *alguna* función continua).

Teorema 3. *Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones diferenciables en $[a, b]$, con derivadas integrables $f_n{}'$, y que $\{f_n\}$ converge (puntualmente) hacia f. Supongamos, además, que $\{f_n{}'\}$ converge uniformemente en $[a, b]$ hacia alguna función continua g. Entonces f es diferenciable y*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n{}'(x).$$

Demostración. Aplicando el Teorema 1 al intervalo $[a,x]$, vemos que para cada x se tiene que

$$\begin{aligned}\int_a^x g &= \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n{}' \\ &= \lim_{n\to\infty} [f_n(x) - f_n(a)] \\ &= f(x) - f(a).\end{aligned}$$

Al ser g continua, se sigue que $f'(x) = g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n{}'(x)$ para todo x del intervalo $[a, b]$. ■

Una vez establecidos ahora los hechos fundamentales acerca de los límites uniformes, resulta claro cómo tratar las funciones definidas como sumas infinitas,

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots$$

Esta ecuación significa que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_1(x) + \cdots + f_n(x);$$

nuestros teoremas anteriores son aplicables cuando la nueva sucesión

$$f_1,\ f_1 + f_2,\ f_1 + f_2 + f_3,\ \ldots$$

converge uniformemente hacia f. Puesto que éste es el único caso que va a ser de interés para nosotros, lo destacamos con una definición.

Definición

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **converge uniformemente** (con más formalidad: la sucesión $\{f_n\}$ es **uniformemente sumable**) **hacia f en A**, si la sucesión

$$f_1,\ f_1 + f_2,\ f_1 + f_2 + f_3,\ \ldots$$

converge uniformemente hacia f en A.

Podemos aplicar ahora cada uno de los Teoremas 1, 2 y 3 a series uniformemente convergentes; los resultados pueden enunciarse en un corolario común.

Corolario. *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uniformemente convergente hacia f en $[a, b]$.*

(1) *Si cada f_n es continua en $[a, b]$, entonces f es continua en $[a, b]$.*

(2) *Si f y cada f_n son integrables en $[a, b]$, entonces*

$$\int_a^b f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n.$$

Además, si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge (puntualmente) hacia f en $[a, b]$, y f_n tiene una derivada integrable $f_n{}'$ y $\sum_{n=1}^{\infty} f_n{}'$ converge uniformemente en $[a, b]$ hacia alguna función continua, entonces

(3) $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n{}'(x)$ para todo x de $[a, b]$.

Demostración. (1) Si cada f_n es continua,entonces también lo es cada $f_1 + \cdots + f_n$, y f es el límite uniforme de la sucesión f_1, $f_1 + f_2$, $f_1 + f_2 + f_3$, ..., de modo que f es continua según el Teorema 2.

(2) Puesto que $f_1, f_1 + f_2, f_1 + f_2 + f_3, \ldots$ converge uniformemente hacia f, se sigue del Teorema 1 que

$$\begin{aligned}\int_a^b f &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b (f_1 + \cdots + f_n)\\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f_1 + \cdots + \int_a^b f_n\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n.\end{aligned}$$

(3) Cada función $f_1 + \cdots + f_n$ es derivable, con derivada $f_1{}' + \cdots + f_n{}'$, y $f_1{}'$, $f_1{}' + f_2{}'$, $f_1{}' + f_2{}' + f_3{}', \ldots$ converge por hipótesis uniformemente hacia una función continua. Se sigue del Teorema 3 que

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{n\to\infty} [f_1{}'(x) + \cdots + f_n{}'(x)]\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n{}'(x). \blacksquare\end{aligned}$$

Por el momento este corolario no resulta demasiado útil, puesto que parece muy difícil predecir cuándo la sucesión f_1, $f_1 + f_2$, $f_1 + f_2 + f_3, \ldots$ va a converger uniformemente. La condición más importante que asegura tal convergencia uniforme es ofrecida por el siguiente teorema; la demostración resulta ser casi una trivialidad debido al ingenio con que han sido elegidas las muy sencillas hipótesis.

Teorema 4. (La prueba M de Weierstrass). *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en A, y supongamos que $\{M_n\}$ es una sucesión de números tales que*

$$|f_n(x)| \le M_n \text{ para todo } x \text{ de } A.$$

Supongamos, además, que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge. Entonces para todo x de A la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge (de hecho, converge absolutamente), y $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en A hacia la función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Demostración. Para cada x de A la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ converge, según la prueba de comparación; en consecuencia $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge (absolutamente). Además, para todo x de A tenemos

$$\left| f(x) - [f_1(x) + \cdots + f_n(x)] \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \right|$$
$$\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)|$$
$$\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n.$$

Al ser $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ convergente, el número $\sum_{n=N+1}^{\infty} M_n$ puede hacerse tan pequeño como se quiera, eligiendo N suficientemente grande. ■

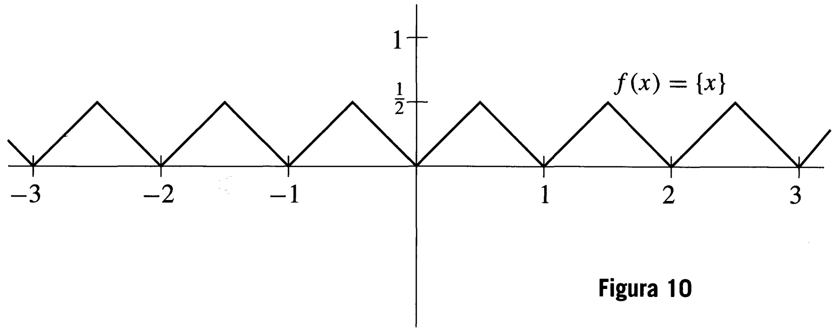


Figura 10

La siguiente sucesión $\{f_n\}$ ilustra una aplicación sencilla de la prueba M de Weierstrass. Sea $\{x\}$ la distancia de x al entero más próximo (la gráfica de $f(x) = \{x\}$ puede verse en la Figura 10). Definamos ahora

$$f_n(x) = \frac{1}{10^n}\{10^n x\}.$$

Las funciones f_1 y f_2 pueden verse en la Figura 11 (pero para simplificar los dibujos, se ha sustituido 10^n por 2^n). Esta sucesión de funciones ha sido definida de tal manera que

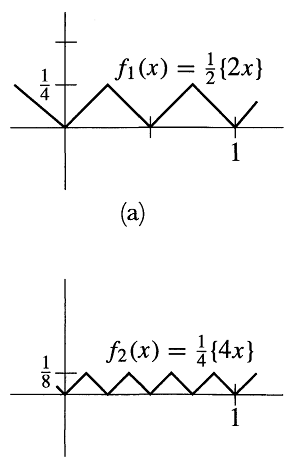


Figura 11

la prueba M de Weierstrass es automáticamente aplicable: evidentemente

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{10^n} \text{ para todo } x,$$

y $\sum_{n=1}^{\infty} 1/10^n$ converge. Así pues $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente; al ser cada f_n continua, el corolario implica que la función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}\{10^n x\}$$

es también continua. En la Figura 12 puede verse la gráfica de las primeras sumas parciales $f_1 + \cdots + f_n$. Cuando n aumenta, las gráficas se hacen cada vez más difíciles de dibujar y la suma infinita $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es absolutamente no dibujable, según demuestra el siguiente teorema (incluido principalmente a modo de interesante ilustración, que el lector puede pasar por alto, si se le hace demasiado difícil).

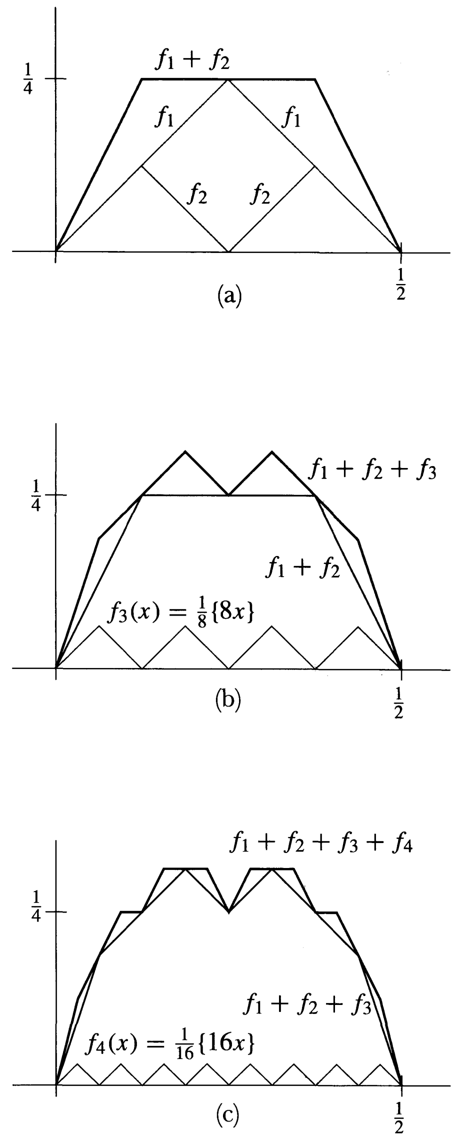


Figura 12

Teorema 5. *La función*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}\{10^n x\}$$

¡es continua en todas partes y derivable en ninguna!

Demostración. Acabamos de demostrar que f es continua; ésta es la única parte de la demostración en que se aplica la convergencia uniforme. Demostraremos que f no es derivable en a, cualquiera que sea a, por el método directo de exhibir una sucesión particular $\{h_m\}$ que tiende hacia 0 y para la cual

$$\lim_{m \to \infty} \frac{f(a+h_m) - f(a)}{h_m}$$

no existe. Basta evidentemente considerar sólo aquellos números a que satisfacen $0 < a \leq 1$.

Supongamos que el desarrollo decimal de a es

$$a = 0{,}a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$$

Sea $h_m = 10^{-m}$ si $a_m \neq 4$ ó 9, mientras que $h_m = -10^{-m}$ si $a_m = 4$ ó 9 (la razón de estas dos excepciones aparecerá pronto). Entonces

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h_m) - f(a)}{h_m} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \cdot \frac{\{10^n(a+h_m)\} - \{10^n a\}}{\pm 10^{-m}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \pm 10^{m-n}[\{10^n(a+h_m)\} - \{10^n a\}].\end{aligned}$$

Esta serie finita es en realidad una suma finita, ya que si $n \geq m$, entonces $10^n h_m$ es entero, de modo que

$$\{10^n(a+h_m)\} - \{10^n a\} = 0.$$

Por otra parte, para $n < m$ podemos escribir

$$10^n a = \text{entero} + 0, a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}\dots a_m \dots$$
$$10^n(a+h_m) = \text{entero} + 0, a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}\dots(a_m \pm 1)\dots$$

(para que se cumpla la segunda ecuación es esencial elegir $h_m = -10^{-m}$ cuando $a_m = 9$). Supongamos ahora que

$$0, a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}\dots a_m \dots \leq \tfrac{1}{2}.$$

Entonces tenemos también

$$0, a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}\dots(a_m \pm 1)\dots \leq \tfrac{1}{2}$$

(en el caso especial $m = n+1$ la segunda ecuación se cumple porque elegimos $h_m = -10^{-m}$ cuando $a_m = 4$). Esto significa que

$$\{10^n(a+h_m)\} - \{10^n a\} = \pm 10^{n-m},$$

y exactamente la misma ecuación puede deducirse cuando $0, a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}\dots > \frac{1}{2}$. Así, para $n < m$ tenemos

$$10^{m-n}[\{10^n(a+h_m)\} - \{10^n a\}] = \pm 1.$$

Dicho de otro modo,

$$\frac{f(a+h_m) - f(a)}{h_m}$$

es la suma de $m-1$ números, cada uno de los cuales es ± 1. Al sumar ahora $+1$ o -1 a un número se cambia la paridad de éste. La suma de $m-1$ números cada uno de ellos igual a ± 1 es, por lo tanto, un *entero par* si m es impar, y un *entero impar* si m es par. En consecuencia, la sucesión de cocientes

$$\frac{f(a+h_m) - f(a)}{h_m}$$

no puede converger, puesto que es una sucesión de enteros alternativamente impares y pares. ■

Además del papel que desempeña en el teorema anterior, la prueba M de Weierstrass constituye un instrumento ideal para analizar funciones de cierta regularidad. Pondremos especial atención a funciones de la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n,$$

las cuales pueden describirse también mediante la ecuación

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x),$$

para $f_n(x) = a_n(x-a)^n$. Una tal suma de funciones que dependen solamente de potencias de $(x-a)$, recibe el nombre de **serie de potencias centrada *a***. En aras de la simplicidad, nos concentraremos por lo general en series de potencias centradas en 0,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Un grupo especialmente importante de series de potencias son aquellas de la siguiente forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

donde f es alguna función que tiene derivadas de todos los órdenes en a; esta serie recibe el nombre de **serie de Taylor para *f* en *a***. Por supuesto, no se cumple necesariamente que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n;$$

esta ecuación se cumple solamente cuando los restos satisfacen $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = 0$.

Sabemos ya que una serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ no converge necesariamente para todo x. Por ejemplo, la serie de potencias

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

converge solamente para $|x| \leq 1$, mientras que la serie de potencias

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots$$

converge solamente para $-1 < x \leq 1$. Es incluso posible obtener una serie de potencias que converja solamente para $x = 0$. Por ejemplo, la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$$

no converge para $x \neq 0$; efectivamente, los cocientes

$$\frac{(n+1)!(x^{n+1})}{n!x^n} = (n+1)x$$

no están acotados, cualesquiera que sea $x \neq 0$. Sin embargo, si una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para algún $x_0 \neq 0$ entonces pueden decirse muchas cosas acerca de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ para $|x| < |x_0|$.

Teorema 6. *Supongamos que la serie*

$$f(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n {x_0}^n$$

converge, y sea a un número cualquiera con $0 < a < |x_0|$. Entonces en $[-a, a]$ la serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

converge uniformemente (y absolutamente). Además, se cumple lo mismo para la serie

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Finalmente, f es diferenciable y

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

para todo x con $|x| < |x_0|$.

Demostración. Al ser $\sum_{n=0}^{\infty} a_n {x_0}^n$ convergente, los términos $a_n {x_0}^n$ tienden hacia 0. Están por lo tanto acotados: existe algún número M tal que

$$|a_n {x_0}^n| = |a_n| \cdot |{x_0}^n| \leq M \text{ para todo } n.$$

Ahora bien, si x está en $[-a, a]$, entonces $|x| \leq |a|$, de modo que

$$\begin{aligned} |a_n x^n| &= |a_n| \cdot |x^n| \\ &\leq |a_n| \cdot |a^n| \\ &= |a_n| \cdot |x_0|^n \cdot \left| \frac{a}{x_0} \right|^n \quad \text{(éste es el paso ingenioso)} \\ &\leq M \left| \frac{a}{x_0} \right|^n. \end{aligned}$$

Pero $|a/x_0| < 1$, de modo que la serie (geométrica)

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{a}{x_0} \right|^n = M \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{a}{x_0} \right|^n$$

converge. Eligiendo $M \cdot |a/x_0|^n$ como el número M_n de la prueba M de Weierstrass, se deduce que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformemente en $[-a, a]$.

Para demostrar lo mismo para $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$ observemos que

$$\begin{aligned}
|na_nx^{n-1}| &= n|a_n| \cdot |x^{n-1}| \\
&\leq n|a_n| \cdot |a^{n-1}| \\
&= \frac{|a_n|}{|a|} \cdot |x_0|^n n \left|\frac{a}{x_0}\right|^n \\
&\leq \frac{M}{|a|} n \left|\frac{a}{x_0}\right|^n.
\end{aligned}$$

Al ser $|a/x_0| < 1$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{|a|} n \left|\frac{a}{x_0}\right|^n = \frac{M}{|a|} \sum_{n=1}^{\infty} n \left|\frac{a}{x_0}\right|^n$$

converge (este hecho se demostró en el Capítulo 23 como aplicación de la prueba del cociente). Recurriendo de nuevo a la prueba M de Weierstrass se demuestra que $\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$ converge uniformemente en $[-a, a]$.

Finalmente, nuestro corolario demuestra, en primer lugar, que g es continua, y después que

$$f'(x) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} \quad \text{para } x \text{ en } [-a, a].$$

Puesto que hubiésemos podido elegir cualquier número a con $0 < a < |x_0|$, este resultado se cumple para todo x con $|x| < |x_0|$. ■

Ahora estamos en condiciones de manipular series de potencias con facilidad. La mayoría de los arreglos algebraicos son consecuencias bastante directas de los teoremas generales sobre las series infinitas. Por ejemplo, supongamos que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n$, donde ambas series de potencias convergen para algún x_0. Entonces para $|x| < |x_0|$ tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_nx^n + b_nx^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)x^n.$$

Por tanto las series $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)x^n$ también convergen para $|x| < |x_0|$, y $h = f + g$ para estos x.

El tratamiento del producto es sólo un poco más elaborado. Si $|x| < |x_0|$, entonces sabemos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n$ convergen *absolutamente*. Por tanto se deduce del Teorema 23-9 que el producto $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n$ viene dado por

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_i x^i b_j x^j,$$

donde los elementos $a_i x^i b_j x^j$ están dispuestos en cualquier orden. En particular, podemos escoger la ordenación

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots$$

que puede escribirse como

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ para } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Este es el llamado "producto de Cauchy" que fue introducido en el Problema 23-10. Por tanto, el producto de Cauchy $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ también converge para $|x| < |x_0|$ y $h = fg$ para estos x.

Finalmente, supongamos que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, donde $a_0 \neq 0$, de modo que $f(0) = a_0 \neq 0$. Entonces podemos tratar de encontrar una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ lo que representa $1/f$. Esto significa que queremos tener

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 1 = 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots$$

Puesto que el lado izquierdo de esta ecuación se obtendrá mediante el producto de Cauchy, queremos tener

$$\begin{aligned}
&a_0b_0 = 1\\
&a_0b_1 + a_1b_0 = 0\\
&a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 = 0\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Ya que $a_0 \neq 0$, podemos despejar de la primera de estas ecuaciones b_0. Seguidamente podemos despejar b_1 de la segunda, etc. Por supuesto, todavía tenemos que probar que la nueva serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ sea convergente para algún $x \neq 0$. Esto se deja como ejercicio (Problema 18).

Respecto a las derivadas, el Teorema 6 nos proporciona toda la información que necesitamos. En particular, el Teorema 6 aplicado a las series infinitas

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots,\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots,\\
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots,
\end{aligned}$$

proporciona precisamente los resultados esperados. Cada una de éstas converge para cualquier x_0, de donde las conclusiones del Teorema 6 son aplicables para cualquier x:

$$\operatorname{sen}'(x) = 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \cdots = \cos x,$$

$$\cos'(x) = -\frac{2x}{2!} + \frac{4x^3}{4!} - \frac{6x^5}{6!} + \cdots = -\operatorname{sen} x,$$

$$\exp'(x) = 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \cdots = \exp(x).$$

Para las funciones arctg y $f(x) = \log(1+x)$, la situación es sólo algo más complicada. Al ser la serie

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

convergente para $x_0 = 1$, es también convergente para $|x| < 1$, y

$$\operatorname{arctg}'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \frac{1}{1+x^2} \text{ para } |x| < 1.$$

En este caso, ocurre que la serie converge también para $x = -1$. Sin embargo, la fórmula para la derivada no es correcta para $x = 1$ o $x = -1$; en efecto, la serie

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

diverge para $x = 1$ y $x = -1$. Observemos que esto no contradice al Teorema 6, el cual demuestra que la derivada viene dada mediante la fórmula esperada sólo para $|x| < |x_0|$.

Al ser la serie

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

convergente para $x_0 = 1$, es también convergente para $|x| < 1$, y

$$\frac{1}{1+x} = \log'(1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \qquad \text{para } |x| < 1.$$

En este caso, la serie original no converge para $x = -1$; además, la serie de las derivadas no converge para $x = 1$.

Todas las consideraciones que son aplicables a series de potencias serán automáticamente aplicables a sus derivadas, en los puntos en que la derivada esté representada mediante una serie de potencias. Si

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

converge para todo x de algún intervalo $(-R, R)$, entonces el Teorema 6 implica que

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

para todo x en $(-R, R)$. Aplicando de nuevo el Teorema 6 encontramos que

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2},$$

y procediendo por inducción encontramos que

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)a_n x^{n-k}.$$

Así pues, una función definida mediante una serie de potencias convergente en algún intervalo $(-R,R)$, es automáticamente infinitamente diferenciable en este intervalo. Además, la ecuación anterior implica que

$$f^{(k)}(0) = k!\,a_k,$$

de modo que

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Dicho de otro modo, *una serie de potencias convergente centrada en* 0 *es siempre la serie de Taylor en* 0 *de la función que define.*

Llegados a este punto feliz podríamos dar por terminado aquí nuestro estudio de las series de potencias y las series de Taylor. Sin embargo, un examen cuidadoso de nuestra situación va a revelar algunos hechos todavía no explicados.

Las series de Taylor de sen, cos y exp son tan satisfactorias como se puede desear; convergen para todo x, y pueden ser derivadas término a término para cualquier x. La serie de Taylor de la función $f(x) = \log(1+x)$ es algo menos complaciente, ya que converge solamente para $-1 < x \le 1$, pero esta deficiencia es una consecuencia obligada de la naturaleza básica de las series de potencias. Si la serie de Taylor para f convergiera para cualquier x_0 con $|x_0| > 1$, entonces convergería en el intervalo $(-|x_0|, |x_0|)$; y en este intervalo la función que define sería diferenciable, y por lo tanto continua. Pero esto es imposible, ya que no está acotada en el intervalo $(-1,1)$, donde es igual a $\log(1+x)$.

La serie de Taylor para arctg es más difícil de comprender; parece no haber excusa posible para que esta serie deje de converger cuando $|x| > 1$. Este misterioso comportamiento queda ejemplificado de modo todavía más sorprendente por la función $f(x) = 1/(1+x^2)$, función infinitamente diferenciable, que es lo mejor que podemos tener si dejamos aparte las funciones polinómicas. El polinomio de Taylor de f viene dado por

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

Si $|x| \ge 1$, la serie de Taylor no converge en absoluto. ¿Por qué? ¿Qué obstáculo invisible impide que la serie de Taylor se extienda más allá de 1 y -1? Resulta siempre peligroso hacer preguntas de este tipo, ya que es posible que la respuesta resulte poco grata: sucede porque sucede; ¡las cosas son así! En este caso, existe una explicación, pero esta explicación es imposible proporcionarla ahora; si bien se trata de una cuestión acerca de números reales, solamente tiene solución adecuada cuando se coloca en un contexto más amplio. Será por lo tanto necesario, antes de completar nuestro estudio de las series de Taylor en el Capítulo 27, dedicar dos capítulos a una materia completamente nueva.

Problemas

1. Para cada una de las sucesiones $\{f_n\}$ siguientes, determine el límite puntual de $\{f_n\}$ (si existe) en el intervalo indicado, e indique si $\{f_n\}$ converge uniformemente hacia esta función.

(i) $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$, en $[0, 1]$.

(ii) $f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq n \\ x-n, & x \geq n, \end{cases}$ en $[a, b]$ y en $\mathbf{R}$.

(iii) $f_n(x) = \dfrac{e^x}{x^n}$, en $(1, \infty)$.

(iv) $f_n(x) = e^{-nx^2}$, en $[-1, 1]$.

(v) $f_n(x) = \frac{e^{-x^2}}{n}$, en $\mathbf{R}$.

2. En el presente ejercicio se pide lo mismo que en el Problema 1, pero las funciones no son tan fáciles de analizar. Algunas indicaciones se proporcionan al final.

(i) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ en $[0, 1]$.

(ii) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n+x}$ en $[0, \infty)$.

(iii) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$ en $[a, \infty)$, $a > 0$.

(iv) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$ en $\mathbf{R}$.

(v) $f_n(x) = \sqrt{x + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}$ en $[a, \infty)$, $a > 0$.

(vi) $f_n(x) = \sqrt{x + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}$ en $[0, \infty)$.

(vii) $f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$ en $[a, \infty)$, $a > 0$.

(viii) $f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$ en $[0, \infty)$ y en $(0, \infty)$.

Indicaciones: (i) Para cada n, encuentre el máximo de $|f - f_n|$ en $[0, 1]$. (ii) Para cada n, considere $|f(x) - f_n(x)|$ para valores de x grandes. (iii) Teorema del Valor Medio. (iv) Dé una acotación específica de $|f(x) - f_n(x)|$ para valores pequeños de $|x|$. (vii) Utilice (v).

3. Halle la serie de Taylor en 0 para cada una de las siguientes funciones.

(i) $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$, $a \neq 0$.

(ii) $f(x) = \log(x-a)$, $a < 0$.

(iii) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}=(1-x)^{-1/2}$. (Utilice el Problema 20-21.)

(iv) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(v) $f(x)=\operatorname{arcsen} x$.

4. Halle cada una de las siguientes sumas infinitas.

(i) $1-x+\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots$

(ii) $1-x^3+x^6-x^9+\cdots$ para $|x|<1$.

Indicación: ¿Qué es $1-x+x^2-x^3+\cdots$?

(iii) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3\cdot 2}+\dfrac{x^4}{4\cdot 3}-\dfrac{x^5}{5\cdot 4}+\cdots$ para $|x|<1$.

Indicación: Derive.

5. Calcule las siguientes sumas infinitas. (En la mayoría de los casos son iguales a $f(a)$ donde a es un número obvio y $f(x)$ está definida mediante una serie de potencias. Para calcular estas series, hay que efectuar los arreglos necesarios hasta que aparezcan algunas series de potencias bien conocidas.)

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}\pi^{2n}}{(2n)!}$.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}$.

(iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$.

(iv) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

(v) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n(n+1)}$.

(vi) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n n!}$.

6. Si $f(x)=(\operatorname{sen} x)/x$ para $x\neq 0$ y $f(0)=1$, halle $f^{(k)}(0)$. Indicación: Halle la serie de potencias para f.

7. En este problema deducimos la serie binomial $(1+x)^\alpha=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$, $|x|<1$ sin recurrir a todo el trabajo del Problema 23-21, aunque utilizando un hecho establecido en la parte (a) de aquel problema: la serie $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ converge para $|x|<1$.

(a) Demuestre que $(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$ para $|x| < 1$.

(b) Demuestre ahora que cualquier función f que satisfaga la parte (a) es de la forma

$$f(x) = c(1+x)^{\alpha}$$

para alguna constante c, y utilice este hecho para establecer la serie binomial. Indicación: Considere $g(x) = f(x)/(1+x)^{\alpha}$.

8. Suponga que f_n son funciones no negativas y acotadas en A y sean $M_n = \sup f_n$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en A, ¿se deduce que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge? (un recíproco de la prueba M de Weierstrass).

9. Demuestre que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$$

converge uniformemente en $\mathbf{R}$.

10. (a) Demuestre que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \operatorname{sen} \frac{1}{3^n x}$$

converge uniformemente en $[a,\infty)$ para $a > 0$. Indicación: $\lim_{h\to 0} (\operatorname{sen} h)/h = 1$.

(b) Considerando la suma desde N a ∞ para $x = 2/(\pi 3^N)$, demuestre que la serie no converge uniformemente en $(0,\infty)$.

11. (a) Demuestre que la serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx}{1+n^4x^2}$$

converge uniformemente en $[a,\infty)$ para $a > 0$. Indicación: En primer lugar halle el máximo de $nx/(1+n^4x^2)$ en $[0,\infty)$.

(b) Demuestre que

$$f\left(\frac{1}{N}\right) \geq \frac{N}{2} \sum_{n \geq \sqrt{N}} \frac{1}{n^3},$$

y, utilizando una integral para estimar esta suma, demuestre que $f(1/N^2) \geq 1/4$. Concluya que dicha serie no converge uniformemente en $\mathbf{R}$.

(c) ¿Que ocurre con la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}\ ?$$

12. (a) Utilice el Problema 15-33 y el Lema de Abel (Problema 19-36) para obtener una "condición de Cauchy uniforme", demostrando que para cualquier $\varepsilon > 0$,

$$\left| \sum_{k=m}^{n} \frac{\operatorname{sen} kx}{k} \right|$$

puede hacerse arbitrariamente en todo el intervalo $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ con tal de escoger m (y n) suficientemente grandes. Concluya que la serie converge uniformemente en el intervalo $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ para $\varepsilon > 0$.

(b) Para $x = \pi/N$, con N suficientemente grande, demuestre que

$$\left| \sum_{k=N}^{2N} \operatorname{sen} kx \right| = \left| \sum_{k=0}^{N} \operatorname{sen} kx \right| \geq \frac{N}{\pi}.$$

Concluya que

$$\left| \sum_{k=N}^{2N} \frac{\operatorname{sen} kx}{k} \right| \geq \frac{1}{2\pi},$$

y que la serie no converge uniformemente en $[0, 2\pi]$.

13. (a) Suponga que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para todo x en algún intervalo $(-R, R)$ y que $f(x) = 0$ para todo x de $(-R, R)$. Demuestre que cada $a_n = 0$. (Esto es fácil si se recuerda la fórmula para a_n.)

(b) Suponga que sólo sabemos que $f(x_n) = 0$ para alguna sucesión $\{x_n\}$ con $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$. Demuestre de nuevo que cada $a_n = 0$. Indicación: Demuestre primero que $f(0) = a_0 = 0$; después que $f'(0) = a_1 = 0$, etc.

Este resultado indica que si $f(x) = e^{-1/x^2} \operatorname{sen} 1/x$ para $x \neq 0$, entonces f no puede expresarse como serie de potencias. Demuestra también que una función definida mediante una serie de potencias no puede ser 0 para $x \leq 0$ y distinta de 0 para $x > 0$; de este modo, una serie de potencias no puede describir el movimiento de una partícula que ha permanecido en reposo hasta el tiempo 0 y después se pone en movimiento.

(c) Suponga que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ convergen para todo x de algún intervalo que contiene 0 y que $f(t_m) = g(t_m)$ para alguna sucesión $\{t_m\}$ que converge hacia 0. Demuestre que $a_n = b_n$ para todo n.

14. Demuestre que si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es una función continua par, entonces $a_n = 0$ para n impar, y si f es una función impar, entonces $a_n = 0$ para n par.

15. Demuestre que la serie de potencias para $f(x) = \log(1 - x)$ converge solamente para $-1 \leq x < 1$, y que la serie de potencias para $g(x) = \log[(1 + x)/(1 - x)]$ converge solamente para los x de $(-1, 1)$.

***16.** Recuerde que la sucesión de Fibonacci $\{a_n\}$ está definida por $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

(a) Demuestre que $a_{n+1}/a_n \leq 2$.

(b) Sea
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots$$
Utilice la prueba del cociente para demostrar que $f(x)$ converge si $|x| < 1/2$.

(c) Demuestre que si $|x| < 1/2$, entonces
$$f(x) = \frac{-1}{x^2 + x - 1}.$$
Indicación: Esta ecuación puede escribirse como $f(x) - xf(x) - x^2 f(x) = 1$.

(d) Utilice la descomposición en fracciones simples para $1/(x^2 + x - 1)$, y la serie de potencias para $1/(x-a)$, para obtener otra serie de potencias para f.

(e) Puesto que las dos series de potencias obtenidas para f deben ser la misma (ambas son la serie de Taylor de la función), concluya que
$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

17. Sean $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Suponga que solamente sabemos que
$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$
para algunos c_n, pero no sabemos como multiplicar series en general. Utilice la fórmula de Leibniz (Problema 10-20) para demostrar de forma directa que la serie correspondiente a fg debe de hecho ser el producto de Cauchy de las series que definen f y g.

18. Suponga que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para algún x_0, y que $a_0 \neq 0$; por simplicidad, supondremos además que $a_0 = 1$. Sea $\{b_n\}$ la sucesión definida de forma recursiva por
$$b_0 = 1$$
$$b_n = -\sum_{k=0}^{n-1} b_k a_{n-k}.$$
El objetivo de este problema es demostrar que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ también converge para algún $x \neq 0$, y por tanto coincide con $1/f$ para valores de $|x|$ suficientemente pequeños.

(a) Si todos los $|a_n {x_0}^n| \leq M$, demuestre que
$$|b_n {x_0}^n| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} |b_k {x_0}^k|.$$

(b) Escoja M para que $|a_n {x_0}^n| \leq M$, y también para que $M/(M^2-1) \leq 1$. Demuestre que

$$|b_n {x_0}^n| \leq M^{2n}.$$

(c) Concluya que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ converge para $|x|$ suficientemente pequeños.

***19.** Suponga que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. Sabemos que la serie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ debe converger uniformemente en $[-a, a]$ para $0 < a < 1$, pero puede no converger uniformemente sobre $[-1, 1]$; de hecho, puede incluso no converger en el punto -1 (por ejemplo, si $f(x) = \log(1+x)$). Sin embargo, un elegante Teorema de Abel demuestra que la serie *converge* uniformemente en $[0, 1]$. En consecuencia, f es continua en $[0, 1]$ y, en particular, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Demostrar el Teorema de Abel observando que si $|a_m + \cdots + a_n| < \varepsilon$, entonces $|a_m x^m + \cdots + a_n x^n| < \varepsilon$, según el Lema de Abel (Problema 19-36).

20. Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es **sumable Abel** si existe $\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$; el Problema 19 indica que una sucesión sumable es necesariamente sumable Abel. Halle una sucesión que sea sumable Abel, pero que no sea sumable. Indicación: Repase la lista de las series de Taylor hasta que se encuentre una que no converge en 1, aunque la función que representa sea continua en 1.

21. (a) Utilizando el Problema 19, calcule las siguientes sumas infinitas.

(i) $\dfrac{1}{2\cdot 1} - \dfrac{1}{3\cdot 2} + \dfrac{1}{4\cdot 3} - \dfrac{1}{5\cdot 4} + \cdots$

(ii) $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots$

(b) Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ el producto de Cauchy producto de dos series de potencias convergentes $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, y suponga solamente que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge. Demuestre que, en efecto, esta serie converge al producto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

22. Demuestre que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{n+1}}{2n+2}$$

converge uniformemente a $\frac{1}{2}\log(x+1)$ en $[-a, a]$ para $0 < a < 1$, pero que en 1 converge a $\log 2$. (¿Por qué esto no contradice al Teorema de Abel (Problema 19)?)

23. (a) Suponga que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones acotadas (no necesariamente continuas) en $[a, b]$ que converge uniformemente hacia f en $[a, b]$. Demuestre que f es una función acotada en $[a, b]$.

(b) Halle una sucesión de funciones continuas en $[a, b]$ que converja puntualmente hacia una función no acotada en $[a, b]$.

24. Suponga que f es derivable. Demuestre que la función f' es el límite puntual de una sucesión de funciones continuas. (Puesto que ya conocemos ejemplos de derivadas discontinuas, el presente problema ofrece otro ejemplo en que el límite puntual de funciones continuas no es una función continua.)

25. Halle una sucesión de funciones integrables $\{f_n\}$ que converja hacia la función (no integrable) f que toma el valor 1 para los números racionales y 0 para los irracionales. Indicación: Cada f_n será 0 excepto en unos pocos puntos.

26. (a) Demuestre que si f es el límite uniforme de $\{f_n\}$ en $[a, b]$ y cada f_n es integrable en $[a, b]$, entonces también lo es f. (Por tanto una de las hipótesis del Teorema 1 era innecesaria.)

(b) En el Teorema 3 suponemos sólo que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f. Demuestre que las restantes hipótesis aseguran que $\{f_n\}$ en realidad converge uniformemente a f.

(c) Si, en el Teorema 3, no suponemos que $\{f_n\}$ converge a una función f, sino que en su lugar asumimos sólo que $f_n(x_0)$ converge para algún x_0 en $[a, b]$, demuestre que f_n no converge (uniformemente) a alguna función f (con $f' = g$).

(d) Demuestre que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$$

converge uniformemente en $[0, \infty)$.

27. Suponga que f_n son funciones continuas en $[0, 1]$ que convergen uniformemente a f. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1-1/n} f_n = \int_0^1 f.$$

¿Es esto cierto si la convergencia no es uniforme?

28. (a) Suponga que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones continuas en $[a, b]$ que convergen a 0 puntualmente. Suponga además que tenemos $f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \geq 0$ para todo n y todo x en $[a, b]$. Demuestre que $\{f_n\}$ en realidad tiende a 0 uniformemente en $[a, b]$. Indicación: Suponga lo contrario, escoja una sucesión apropiada de puntos x_n en $[a, b]$, y aplique el Teorema de Bolzano-Weierstrass.

(b) Demuestre el Teorema de Dini: Si $\{f_n\}$ es una sucesión no creciente de funciones continuas en $[a, b]$ que tiende a una función continua f puntualmente, entonces $\{f_n\}$ también tiende a f uniformemente en $[a, b]$. (El mismo resultado se cumple si $\{f_n\}$ es una sucesión no decreciente.)

(c) ¿Se cumple el Teorema de Dini si f no es continua? ¿Que pasaría si $[a, b]$ se reemplaza por un intervalo abierto (a, b)?

29. (a) Suponga que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones continuas en $[a, b]$ que converge uniformemente a f. Demuestre que si x_n tiende a x, entonces $f_n(x_n)$ tiende a $f(x)$.

(b) ¿Sería esta afirmación verdadera si no suponemos que las f_n son continuas?

(c) Demuestre el recíproco de la parte a (a): si f es continua en $[a, b]$ y $\{f_n\}$ es una sucesión con la propiedad de que $f_n(x_n)$ tiende $f(x)$ cualquiera que sea la sucesión x_n convergente a x, entonces f_n converge uniformemente a f en $[a, b]$. Indicación: En caso contrario, existiría un $\varepsilon > 0$ y una sucesión x_n con $|f_n(x_n) - f(x_n)| > \varepsilon$ para un número infinito de distintos x_n. Seguidamente utilice el Teorema de Bolzano-Weierstrass.

30. Este problema esboza un estudio de la integral bajo un punto de vista completamente distinto; en consecuencia, no estaría justificado hacer uso de hechos previamente deducidos acerca de integrales.

(a) Sea s una función escalonada en $[a, b]$, de modo que s es constante en (t_{i-1}, t_i) para alguna partición $\{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a, b]$. Defina $\int_a^b s$ como $\sum_{i=1}^{n} s_i \cdot (t_i - t_{i-1})$ donde s_i es el valor (constante) de s en (t_{i-1}, t_i). Demuestre que esta definición no depende de la partición $\{t_0, \ldots, t_n\}$.

(b) Se dice que una función f es una función **regulada** en $[a, b]$ si es el límite uniforme de una sucesión de funciones escalonadas $\{s_n\}$ en $[a, b]$. Demuestre que en este caso existe, para todo $\varepsilon > 0$, algún N tal que para $m, n > N$ tenemos $|s_n(x) - s_m(x)| < \varepsilon$ para todo x en $[a, b]$.

(c) Demuestre que la sucesión de números $\left\{\int_a^b s_n\right\}$ será una sucesión de Cauchy.

(d) Suponga que $\{t_n\}$ es otra sucesión de funciones escalonadas en $[a, b]$ que converge uniformemente hacia f. Demuestre que para todo $\varepsilon > 0$ existe un N tal que para $n > N$ tenemos $|s_n(x) - t_n(x)| < \varepsilon$ para x en $[a, b]$.

(e) Deduzca que $\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n$. Esto significa que podemos *definir* $\int_a^b f$ como $\lim_{n\to\infty} s_n$ para cualquier sucesión de funciones escalonadas $\{s_n\}$ que converja uniformemente hacia f. La única cuestión que queda es: ¿Cuáles son las funciones reguladas?

*(f) Demuestre que una función continua es regulada. Indicación: Para hallar una función s en $[a, b]$ con $|f(x) - s(x)| < \varepsilon$ para todo x de $[a, b]$, considere todos los y para los cuales existe una tal función escalonada en $[a, y]$.

(g) Cada función escalonada s tiene la propiedad de que $\lim_{x\to a^+} s(x)$ y $\lim_{x\to a^-} s(x)$ existe para todo a. Concluya que cada función regulada tiene la misma propiedad, y encuentre una función integrable que no sea a la vez una función regulada. (Es también verdad que, recíprocamente, cada función f con la propiedad de que $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f(x)$ exista para todo a es regulada.)

***31.** Halle una sucesión $\{f_n\}$ que tienda uniformemente hacia f en $[0, 1]$ para la cual $\lim_{n\to\infty}$ (longitud de f_n en $[0, 1]$) $\neq$ longitud de f sobre $[0, 1]$. (La longitud se define en el Problema 13-25, pero el ejemplo más sencillo utilizará funciones la longitud de cuyas gráficas resulta evidente.)

Números complejos

25

Con excepción de los últimos párrafos del capítulo anterior, este libro no ha cesado de proclamar las excelencias de los números reales. Sin embargo, los números reales tienen una gran deficiencia: la de que no toda función polinómica posee una raíz real. El ejemplo más sencillo y notable es el hecho de que no existe ningún número x que satisfaga $x^2+1=0$. Esta deficiencia es tan grave que, desde hace mucho tiempo, los matemáticos han sentido la necesidad de "inventar" un número i con la propiedad de que $i^2+1=0$. Durante mucho tiempo la situación del "número" i fue absolutamente misteriosa: al no existir ningún número x que satisfaga $x^2+1=0$, no tiene sentido decir "sea i el número que satisface $i^2+1=0$". No obstante, la admisión del número "imaginario" i en la familia de los números parecía simplificar considerablemente muchos cálculos algebraicos, especialmente cuando se admitían los "números complejos" $a+bi$ (para a y b en $\mathbf{R}$), y se suponían válidas todas las leyes del cálculo aritmético enumeradas en el Capítulo 1. Por ejemplo, toda ecuación cuadrática

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a\neq 0)$$

puede resolverse de manera formal dando

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{o} \quad x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Si $b^2-4ac\geq 0$, estas fórmulas proporcionan las soluciones correctas; cuando se admiten números complejos las fórmulas parecen tener sentido en todos los casos. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2+x+1=0$$

carece de raíces reales, puesto que

$$x^2+x+1=(x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}>0, \quad \text{para todo } x.$$

Pero la fórmula para las raíces de una ecuación cuadrática sugiere las "soluciones"

$$x=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \quad \text{y} \quad x=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2};$$

si interpretamos $\sqrt{-3}$ como $\sqrt{3\cdot(-1)} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{3}i$, entonces estos números serían

$$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{y} \quad -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

No es difícil comprobar que estos números, por el momento puramente formales, satisfacen efectivamente la ecuación

$$x^2+x+1=0.$$

Es incluso posible "resolver" ecuaciones cuadráticas cuyos coeficientes son a su vez números complejos. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2+x+1+i=0$$

debería tener las soluciones

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4(1+i)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3-4i}}{2},$$

donde el símbolo $\sqrt{-3-4i}$ significa un número complejo $\alpha+\beta i$ cuyo cuadrado es $-3-4i$. Para obtener

$$(\alpha+\beta i)^2=\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta i=-3-4i$$

necesitamos que sea

$$\begin{aligned} \alpha^2-\beta^2 &= -3,\\ 2\alpha\beta &= -4. \end{aligned}$$

Estas dos ecuaciones pueden resolverse fácilmente para α y β reales; efectivamente, existen dos soluciones posibles:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 \\ \beta &= -2 \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} \alpha &= -1 \\ \beta &= 2. \end{aligned}$$

Así, las dos "raíces cuadradas" de $-3-4i$ son $1-2i$ y $-1+2i$. No existe ninguna manera razonable de decidir cuál de éstas debe ser designada por $\sqrt{-3-4i}$, y cuál por $-\sqrt{-3-4i}$; el uso convencional de $\sqrt{x}$ tiene solamente sentido para $x\geq 0$ reales, en cuyo caso $\sqrt{x}$ designa la raíz (real) no negativa. Por está razón, la solución

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{-3-4i}}{2}$$

debe entenderse como abreviación de:

$$x=\frac{-1+r}{2},$$

donde r es una de las raíces cuadradas de $-3-4i$. Con este convenio llegamos a las soluciones

$$x = \frac{-1+1-2i}{2} = -i,$$

$$x = \frac{-1-1+2i}{2} = -1+i;$$

como fácilmente puede comprobarse, estos números suministran efectivamente soluciones formales para la ecuación

$$x^2+x+1+i=0.$$

Los números complejos son igualmente útiles para ecuaciones cúbicas. Toda ecuación cúbica

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \qquad (a \neq 0)$$

con coeficientes reales a, b, c y d, tiene, según sabemos, una raíz real α, y si dividimos ax^3+bx^2+cx+d por $x-\alpha$ obtenemos un polinomio de segundo grado cuyas raíces son las raíces restantes de $ax^3+bx^2+cx+d=0$; las raíces de este polinomio de segundo grado pueden ser números complejos. Así, una ecuación cúbica tendrá o bien tres raíces reales o bien una raíz real y dos raíces complejas. La existencia de la raíz real queda garantizada por nuestro teorema de que toda ecuación de grado impar tiene una raíz real, pero en realidad no hace falta apelar a este teorema (el cual es totalmente inaplicable si los coeficientes son complejos); en el caso de una ecuación cúbica podemos encontrar, con destreza suficiente, una fórmula que nos dé todas las raíces. La siguiente deducción de tal fórmula la presentamos aquí no sólo como una demostración interesante del ingenio de matemáticos antepasados, sino como prueba de la importancia de los números complejos (sean estos lo que sean).

Para resolver la ecuación cúbica más general, basta evidentemente considerar sólo ecuaciones de la forma

$$x^3+bx^2+cx+d=0.$$

Es incluso posible eliminar el término en x^2, mediante una manipulación bastante directa. Si ponemos

$$x = y - \frac{b}{3},$$

entonces

$$x^3 = y^3 - by^2 + \frac{b^2y}{3} - \frac{b^3}{27},$$

$$x^2 = y^2 - \frac{2by}{3} + \frac{b^2}{9},$$

de modo que

$$\begin{aligned}
0 &= x^3+bx^2+cx+d\\
&= \left(y^3-by^2+\frac{b^2y}{3}-\frac{b^3}{27}\right)+\left(by^2-\frac{2b^2y}{3}+\frac{b^3}{9}\right)+\left(cy-\frac{bc}{3}\right)+d\\
&= y^3+\left(\frac{b^2}{3}-\frac{2b^2}{3}+c\right)y+\left(\frac{b^3}{9}-\frac{b^3}{27}-\frac{bc}{3}+d\right).
\end{aligned}$$

El segundo miembro no contiene ahora ningún término en y^2. Si podemos despejar y en la ecuación podremos hallar x; esto demuestra que es suficiente considerar en primer lugar solamente ecuaciones de la forma

$$x^3+px+q=0.$$

En el caso particular $p=0$ obtenemos la ecuación $x^3=-q$. Veremos más adelante que todo número complejo que tiene una raíz cúbica, en realidad tiene tres, de modo que tiene tres soluciones. El caso $p\neq 0$, por otra parte, exige un paso considerablemente artificioso. Pongamos

$$(*) \qquad x = w-\frac{p}{3w}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
0=x^3+px+q &= \left(w-\frac{p}{3w}\right)^3+p\left(w-\frac{p}{3w}\right)+q\\
&= w^3-\frac{3w^2p}{3w}+\frac{3wp^2}{9w^2}-\frac{p^3}{27w^3}+pw-\frac{p^2}{3w}+q\\
&= w^3-\frac{p^3}{27w^3}+q.
\end{aligned}$$

Esta ecuación puede escribirse

$$27(w^3)^2+27q(w^3)-p^3=0,$$

la cual es una ecuación cuadrática en w^3 (!!).

Así pues,

$$\begin{aligned}
w^3 &= \frac{-27q\pm\sqrt{(27)^2q^2+4\cdot 27p^3}}{2\cdot 27}\\
&= -\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}.
\end{aligned}$$

Recordemos que esto significa en realidad:

$$w^3=-\frac{q}{2}+r, \quad \text{donde } r \text{ es una raíz cuadrada de } \frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

Podemos escribir, por lo tanto,

$$w = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}};$$

esta ecuación significa que w es alguna raíz cúbica de $-q/2 + r$, donde r es alguna raíz cuadrada de $q^2/4 + p^3/27$. Esto da lugar a seis posibilidades para w, pero al sustituir éstas en $(*)$, dando

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3 \cdot \sqrt[3]{\frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}},$$

¡resulta que se obtienen solamente 3 valores distintos para x! Una característica todavía más sorprendente de esta solución surge al considerar una ecuación cúbica cuyas raíces son todas reales; la fórmula antes deducida puede, a pesar de todo, contener números complejos en forma esencial. Por ejemplo, las raíces de

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

son 4, $-2 + \sqrt{3}$ y $-2 - \sqrt{3}$. Por otra parte, la fórmula antes deducida (con $p = -15$, $q = -4$) da como una de sus soluciones

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} - \frac{-15}{3 \cdot \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}}} \\ &= \sqrt[3]{2 + 11i} + \frac{15}{3 \cdot \sqrt[3]{2 + 11i}}. \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} (2+i)^3 &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 i + 3 \cdot 2 \cdot i^2 + i^3 \\ &= 8 + 12i - 6 - i \\ &= 2 + 11i, \end{aligned}$$

de modo que una de las raíces cúbicas de $2 + 11i$ es $2 + i$. Así pues, obtenemos como una de las soluciones de la ecuación

$$\begin{aligned} x &= 2 + i + \frac{15}{6 + 3i} \\ &= 2 + i + \frac{15}{6 + 3i} \cdot \frac{6 - 3i}{6 - 3i} \\ &= 2 + i + \frac{90 - 45i}{36 + 9} \\ &= 4\,(!). \end{aligned}$$

Las restantes raíces pueden también obtenerse si son conocidas las demás raíces cúbicas de $2+11i$. El hecho de que se pueda obtener incluso una de estas raíces reales a partir de una expresión que depende de números complejos es suficientemente impresionante para dar a entender que el uso de los números complejos no puede ser totalmente absurdo. De hecho, las fórmulas que dan las soluciones de las ecuaciones cuadráticas y cúbicas pueden interpretarse enteramente en términos de números reales.

Supongamos que convenimos, por el momento, en escribir todos los números complejos en la forma $a+bi$, escribiendo el número real a como $a+0i$ y el número i como $0+1i$. Las leyes ordinarias de la aritmética y la relación $i^2=-1$ demuestran que

$$\begin{aligned}(a+bi)+(c+di)&=(a+c)+(b+d)i\\(a+bi)\cdot(c+di)&=(ac-bd)+(ad+bc)i.\end{aligned}$$

Así pues, una ecuación tal como

$$(1+2i)\cdot(3+1i)=1+7i$$

puede sencillamente considerarse como una forma abreviada de las *dos* ecuaciones

$$\begin{aligned}1\cdot 3-2\cdot 1&=1,\\1\cdot 1+2\cdot 3&=7.\end{aligned}$$

La solución de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ con coeficientes reales puede parafrasearse como sigue:

$$\text{Si}\ \begin{cases}u^2-v^2=b^2-4ac,\\ uv=0,\end{cases}$$

$$\text{(es decir, si } (u+vi)^2=b^2-4ac\text{),}$$

$$\text{entonces}\ \begin{cases}a\left[\left(\dfrac{-b+u}{2a}\right)^2-\left(\dfrac{v}{2a}\right)^2\right]+b\left[\dfrac{-b+u}{2a}\right]+c=0,\\[2ex] a\left[2\left(\dfrac{-b+u}{2a}\right)\left(\dfrac{v}{2a}\right)\right]+b\left[\dfrac{v}{2a}\right]=0,\end{cases}$$

$$\left(\text{i.e., entonces } a\left(\frac{-b+u+vi}{2a}\right)^2+b\left(\frac{-b+u+vi}{2a}\right)+c=0\right).$$

No resulta muy difícil comprobar esta afirmación relativa a los números reales sin escribir ningún "i", pero las complicaciones del mismo enunciado deben convencer al lector que vale la pena introducir ecuaciones acerca de números complejos como abreviaciones para pares de ecuaciones relativas a números reales. (Si el lector todavía no está convencido, intente parafrasear la solución de la ecuación cúbica.) Sin embargo, si pretendemos de verdad utilizar los números complejos de manera consecuente, va a ser necesario presentar alguna definición razonable.

Una posibilidad ha estado implícita en la discusión precedente. Todas las propiedades matemáticas de un número complejo $a+bi$ están completamente determinadas por los números reales a y b; cualquier objeto matemático con esta misma propiedad puede ser utilizado razonablemente para definir un número complejo. El candidato que tenemos más a mano es el par ordenado (a,b) de números reales; *definiremos*, en consecuencia, un número complejo como un par de números reales y del mismo modo *definiremos* el significado que se ha de dar a la suma y a la multiplicación de números complejos.

Definición

Un **número complejo** es un par ordenado de números reales; si $z=(a,b)$ es un número complejo, se dice entonces que a es la **parte real** de z, y que b es la **parte imaginaria** de z. El conjunto de todos los números complejos es designado por **C**. Si (a,b) y (c,d) son dos números complejos, definimos

$$\begin{aligned}(a,b)+(c,d) &= (a+c,b+d)\\ (a,b)\cdot(c,d) &= (a\cdot c-b\cdot d,a\cdot d+b\cdot c).\end{aligned}$$

(El $+$ y el $\cdot$ que aparecen a la izquierda son símbolos nuevos que se están definiendo, mientras que el $+$ y $\cdot$ que aparecen a la derecha representan la suma y la multiplicación ya conocidas de los números reales.)

Cuando se introdujeron por primera vez los números complejos, se entendía que los números reales eran, en particular, números complejos; esto no es así si tomamos en serio nuestra definición: un número real no es, después de todo, lo mismo que un par de números reales. Esta dificultad es, sin embargo, sólo un estorbo de menor importancia. Observemos que

$$\begin{aligned}(a,0)+(b,0) &= (a+b,0+0)=(a+b,0),\\ (a,0)\cdot(b,0) &= (a\cdot b-0\cdot 0,a\cdot 0+0\cdot b)=(a\cdot b,0);\end{aligned}$$

esto indica que los números complejos de la forma $(a,0)$ se comportan respecto a la suma y a la multiplicación de números complejos, exactamente de la misma manera en que lo hacen los números reales respecto a su suma y multiplicación propias. Por esta razón convendremos en designar $(a,0)$ simplemente por a. La notación corriente $a+bi$ de los números complejos puede obtenerse ahora mediante otra definición.

Definición

$$\boldsymbol{i}=(0,1).$$

Observemos que $i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1$ (el último signo de igualdad se justifica por nuestro convenio). Además

$$\begin{aligned}(a,b) &= (a,0)+(0,b)\\ &= (a,0)+(b,0)\cdot(0,1)\\ &= a+bi.\end{aligned}$$

El lector puede tener la impresión de que nuestra definición es sólo un artificio complicado para definir números complejos como "expresiones de la forma $a+bi$". Esto es esencialmente correcto; constituye un prejuicio firmemente establecido de la matemática moderna el que los objetos nuevos deben definirse como algo específico, no como "expresiones". Sin embargo, es interesante observar que hasta que se propuso la definición moderna, los matemáticos se sentían molestos en su fuero interno cuando utilizaban los números complejos. Además, la definición precisa hace resaltar otro punto importante. Nuestro objetivo al introducir los números complejos fue el de evitar la necesidad de parafrasear enunciados acerca de números complejos en términos de sus partes real e imaginaria. Esto quiere decir que pretendemos trabajar con números complejos de la misma manera en que trabajamos con números racionales o reales. Por ejemplo, la solución de la ecuación cúbica requería escribir $x = w - p/3w$, de modo que necesitamos saber que $1/w$ tiene sentido. Además, w^3 se obtuvo resolviendo una ecuación cuadrática, hecho que exige muchas otras manipulaciones algebraicas. En resumen, es probable que tengamos que utilizar, en un momento o en otro, cualquier manipulación con números reales. Ciertamente no queremos detenernos cada vez para justificar todos los pasos. Esto afortunadamente no es necesario. Puesto que todas las manipulaciones algebraicas efectuadas con números reales pueden justificarse mediante las propiedades enumeradas en el Capítulo 1, sólo hace falta comprobar que estas propiedades se cumplen también para los números complejos. En la mayor parte de los casos esto es muy sencillo, y estos hechos no van a ser establecidos como teoremas formales. Por ejemplo, la demostración de P1,

$$[(a,b)+(c,d)]+(e,f) = (a,b)+[(c,d)+(e,f)]$$

exige solamente la aplicación de la definición de sumas para números complejos. El primer miembro se convierte en

$$([a+c]+e,[b+d]+f),$$

y el segundo miembro se convierte en

$$(a+[c+e],b+[d+f]);$$

los dos son iguales porque P1 se cumple para números reales. Conviene comprobar P2-P6, P8 y P9. Observemos que los números complejos que desempeñan el papel de 0 y 1 en P2 y P6 son, respectivamente, $(0,0)$ y $(1,0)$. No es difícil imaginar cómo ha de ser $-(a,b)$, pero el inverso de (a,b) exigido en P7 resulta algo más artificioso: si $(a,b) \neq (0,0)$, entonces $a^2+b^2 \neq 0$ y

$$(a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = (1,0).$$

Se hubiese podido predecir este hecho de dos maneras. Para hallar (x,y) con

$$(a,b)\cdot(x,y) = (1,0)$$

basta resolver las ecuaciones

$$\begin{aligned} ax-by &= 1, \\ bx+ay &= 0. \end{aligned}$$

Las soluciones son $x = a/(a^2+b^2)$, $y = -b/(a^2+b^2)$. Es también posible razonar que si $1/(a+bi)$ ha de significar algo, entonces debe cumplirse que

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}.$$

Una vez demostrada la existencia de inversos (después de obtener de alguna manera el inverso), se sigue que esta manipulación es efectivamente válida; es la más fácil de recordar cuando se busca el inverso de un número complejo; fue éste precisamente el artificio que utilizamos para calcular

$$\begin{aligned} \frac{15}{6+3i} &= \frac{15}{6+3i} \cdot \frac{6-3i}{6-3i} \\ &= \frac{90-45i}{36+9}. \end{aligned}$$

Contrariamente a lo que ocurre con P1-P9, las reglas P10-P12 carecen de análogas: es fácil demostrar que *no* existe ningún conjunto P de números *complejos* tal que P10–P12 se cumplan para todos los números *complejos*. En efecto, si un tal conjunto existiese, entonces P tendría que contener 1 (puesto que $1 = 1^2$) y también -1 (puesto que $-1 = i^2$), lo cual estaría en contradicción con P10. La ausencia de P10-P12 no tendrá consecuencias desastrosas, pero significa efectivamente que no podemos definir $z < w$ para z y w complejos. Puede también recordar el lector que para los números reales, P10-P12 se utilizaron para demostrar que $1 + 1 \neq 0$. Afortunadamente, el hecho correspondiente para los números complejos puede reducirse a éste: evidentemente $(1,0)+(1,0) \neq (0,0)$.

Si bien escribiremos por lo general los números complejos en la forma $a+bi$, vale la pena recordar que el conjunto de todos los números complejos $\mathbf{C}$ no es más que la colección de todos los pares de números reales. Hace mucho que identificamos esta colección con el plano, y por esta razón el plano recibe muchas veces el nombre de "plano complejo." El eje horizontal, que consiste en todos los puntos $(a,0)$ para a en $\mathbf{R}$, recibe muchas veces el nombre de *eje real*, y el eje vertical recibe el nombre de *eje imaginario*. Dos importantes definiciones están también relacionadas con esta representación geométrica.

Definición

Si $z = x+iy$ es un número complejo (con x e y reales), entonces el **conjugado** $\bar{z}$ de z se define como

$$\bar{z} = x - iy,$$

y el **valor absoluto** o **módulo** $|z|$ de z está definido por

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

(Observemos que $x^2+y^2 \geq 0$, de modo que $\sqrt{x^2+y^2}$ está definido sin ambigüedad; designa la raíz cuadrada real no negativa de x^2+y^2.)

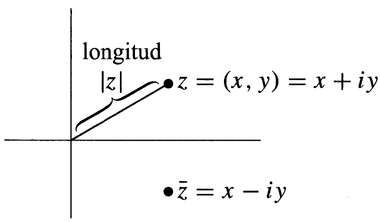


Figura 1

Geométricamente, $\bar{z}$ es sencillamente la reflexión de z respecto al eje real, mientras que $|z|$ es la distancia de z a $(0,0)$ (Figura 1). Observemos que la notación para el valor absoluto de los números complejos es consistente con la de los números reales. La **distancia** entre dos números complejos z y w puede definirse muy fácilmente como $|z-w|$. El siguiente teorema enumera todas las propiedades importantes de conjugados y valores absolutos.

Teorema 1. *Sean z y w números compuestos. Entonces*

(1) $\bar{\bar{z}} = z$.

(2) $\bar{z} = z$ *si y sólo si z es real (es decir, es de la forma $a+0i$, para algún número real a).*

(3) $\overline{z+w} = \bar{z}+\bar{w}$.

(4) $\overline{-z} = -\bar{z}$.

(5) $\overline{z\cdot w} = \bar{z}\cdot\bar{w}$.

(6) $\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$, *si* $z \neq 0$.

(7) $|z|^2 = z\cdot\bar{z}$.

(8) $|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$.

(9) $|z+w| \leq |z|+|w|$.

Demostración. Los enunciados (1) y (2) son evidentes. Las ecuaciones (3) y (5) pueden comprobarse mediante cálculos directos y (4) y (6) pueden después demostrarse mediante un artificio:

$$0 = \bar{0} = \overline{z+(-z)} = \bar{z}+\overline{-z}, \qquad \text{de modo que } \overline{-z} = -\bar{z},$$

$$1 = \bar{1} = \overline{z\cdot(z^{-1})} = \bar{z}\cdot\overline{z^{-1}}, \qquad \text{de modo que } \overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}.$$

Las ecuaciones (7) y (8) pueden también demostrarse mediante cálculo directo. La única parte difícil del teorema es (9). En realidad esta desigualdad ya se ha presentado (Problema 4-9), pero repetiremos aquí la demostración utilizando una terminología ligeramente distinta.

Está claro que en (9) se cumple la igualdad si $z=0$ ó $w=0$. Es también fácil ver que (9) se cumple si $z=\lambda w$ para cualquier número real λ (consideraremos por separado los casos $\lambda>0$ y $\lambda<0$). Supongamos, por otra parte, que $z\neq\lambda w$ para un número real cualquiera λ, y que $w\neq 0$. Entonces, para todos los números reales λ,

$$(*)\qquad \begin{aligned} 0 < |z-\lambda w|^2 &= (z-\lambda w)\cdot\overline{(z-\lambda w)} \\ &= (z-\lambda w)\cdot(\bar{z}-\lambda\bar{w}) \\ &= z\bar{z}+\lambda^2 w\bar{w}-\lambda(w\bar{z}+z\bar{w}) \\ &= \lambda^2|w|^2+|z|^2-\lambda(w\bar{z}+z\bar{w}). \end{aligned}$$

Observemos que $w\bar{z}+z\bar{w}$ es real, puesto que

$$\overline{w\bar{z}+z\bar{w}} = \bar{w}\bar{\bar{z}}+\bar{z}\bar{\bar{w}} = \bar{w}z+\bar{z}w = w\bar{z}+z\bar{w}.$$

De este modo el segundo miembro de $(*)$ es una ecuación cuadrática en λ con coeficientes reales y sin soluciones reales; su discriminante debe ser, por lo tanto, negativo. Así pues,

$$(w\bar{z}+z\bar{w})^2 - 4|w|^2\cdot|z|^2 < 0;$$

se deduce, al ser $w\bar{z}+\bar{z}w$ y $|w|\cdot|z|$ números reales, y $|w|\cdot|z|\geq 0$, que

$$(w\bar{z}+z\bar{w}) < 2|w|\cdot|z|.$$

De esta desigualdad se sigue que

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 &= (z+w)\cdot(\bar{z}+\bar{w}) \\
&= |z|^2+|w|^2+(w\bar{z}+z\bar{w}) \\
&< |z|^2+|w|^2+2|w|\cdot|z| \\
&= (|z|+|w|)^2,
\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$|z+w| < |z|+|w|. \blacksquare$$

Las operaciones de suma y multiplicación de números complejos tienen ambas importantes interpretaciones geométricas. La representación de la suma es muy sencilla (Figura 2). Dos números complejos $z=(a,b)$ y $w=(c,d)$ determinan un paralelogramo, dos de cuyos lados son el segmento rectilíneo de $(0,0)$ a z, y el segmento rectilíneo de $(0,0)$ a w; el vértice opuesto a $(0,0)$ es $z+w$ (la demostración de este hecho geométrico se deja para el lector [comparemos con el Apéndice 1 del Capítulo 4]).

La interpretación de la multiplicación es más complicada. Si $z=0$ ó $w=0$, entonces $z\cdot w=0$ (puede darse una demostración de una línea, pero ni siquiera ésta es necesaria; se ha demostrado ya que la afirmación es consecuencia de P1-P9), de modo que podemos limitar nuestra atención a números complejos no nulos. Empezamos poniendo cada número complejo no nulo en forma especial (comparemos con el Apéndice 3 del capítulo 4).

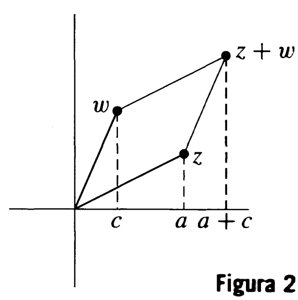


Figura 2

Para cualquier número complejo $z\neq 0$ podemos escribir

$$z = |z|\frac{z}{|z|};$$

en esta expresión, $|z|$ es un número real positivo, mientras que

$$\left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{|z|} = 1,$$

de modo que $z/|z|$ es un número complejo de valor absoluto 1. Ahora cualquier número complejo $a = x + iy$ con $1 = |a| = x^2 + y^2$ puede escribirse en la forma

$$a = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$$

para algún número θ. Así todo número complejo z no nulo puede escribirse

$$z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

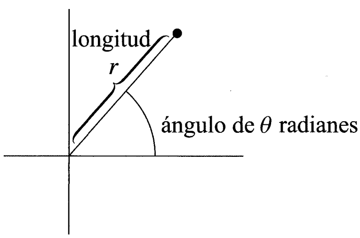


Figura 3

para algún $r > 0$ y algún número θ. El número r es único (es igual a $|z|$), pero θ no es único; si una posibilidad es θ_0, entonces las demás son $\theta_0 + 2k\pi$ para k en $\mathbf{Z}$; cualquiera de estos números recibe el nombre de **argumento** de z. La Figura 3 hace ver z en términos de r y θ. (Para hallar un argumento θ de $z = x + iy$ podemos observar que la ecuación

$$x + iy = z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

significa que

$$\begin{aligned} x &= |z|\cos\theta, \\ y &= |z|\operatorname{sen}\theta. \end{aligned}$$

De modo que, por ejemplo, si $x > 0$ podemos tomar por lo tanto $\theta = \operatorname{arctg} y/x$; si $x = 0$, podemos tomar $\theta = \pi/2$ cuando $y > 0$ y $\theta = 3\pi/2$ cuando $y < 0$.)

El producto de dos números complejos

$$\begin{aligned} z &= r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta), \\ w &= s(\cos\phi + i\operatorname{sen}\phi), \end{aligned}$$

es ahora

$$\begin{aligned} z \cdot w &= rs(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)(\cos\phi + i\operatorname{sen}\phi) \\ &= rs[(\cos\theta\cos\phi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi) + i(\operatorname{sen}\theta\cos\phi + \cos\theta\operatorname{sen}\phi)] \\ &= rs[\cos(\theta+\phi) + i\operatorname{sen}(\theta+\phi)]. \end{aligned}$$

Así pues, el valor absoluto de un producto es el producto de los valores absolutos de los factores, mientras que la suma de cualquier argumento para cada uno de los factores será un argumento para el producto. Para un número complejo no nulo

$$z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

es ahora fácil demostrar mediante inducción la siguiente fórmula muy importante (conocida a veces como Teorema de De Moivre):

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta), \text{ para un argumento cualquiera } \theta \text{ de } z.$$

Esta fórmula describe z^n tan explícitamente que es fácil decidir cuándo es precisamente $z^n = w$:

Teorema 2. *Todo número complejo no nulo tiene exactamente n raíces n-ésimas complejas.*

Con más precisión, para cualquier número complejo $w \neq 0$, y cualquier número natural n, existen precisamente n números complejos distintos z que satisfacen $z^n = w$.

Demostración. Sea

$$w = s(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi)$$

para $s = |w|$ y algún número ϕ. Entonces un número complejo

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

satisface $z^n = w$ si y sólo si

$$r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) = s(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi),$$

lo cual sucede si y sólo si

$$\begin{aligned} r^n &= s, \\ \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta &= \cos\phi + i \operatorname{sen}\phi. \end{aligned}$$

De la primera ecuación se sigue que

$$r = \sqrt[n]{s},$$

donde $\sqrt[n]{s}$ designa la raíz n-ésima real positiva de s. De la segunda ecuación se sigue que para algún entero k tenemos

$$\theta = \theta_k = \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Recíprocamente, si elegimos $r = \sqrt[n]{s}$ y $\theta = \theta_k$ para algún k, entonces el número $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ satisfará $z^n = w$. Para determinar el número de raíces n-ésimas de w, basta por lo tanto determinar cuáles de estos z son distintos. Ahora bien, cualquier entero k puede escribirse

$$k = nq + k'$$

para algún entero q, y algún entero k' entre 0 y $n-1$. Entonces

$$\cos\theta_k + i \operatorname{sen}\theta_k = \cos\theta_{k'} + i \operatorname{sen}\theta_{k'}.$$

Esto indica que todo z que satisface $z^n = w$ puede escribirse como

$$z = \sqrt[n]{s}(\cos\theta_k + i \operatorname{sen}\theta_k) \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Además, es fácil ver que estos números son todos distintos, ya que dos θ_k cualesquiera para $k = 0, \ldots, n-1$ difieren en menos de 2π. ■

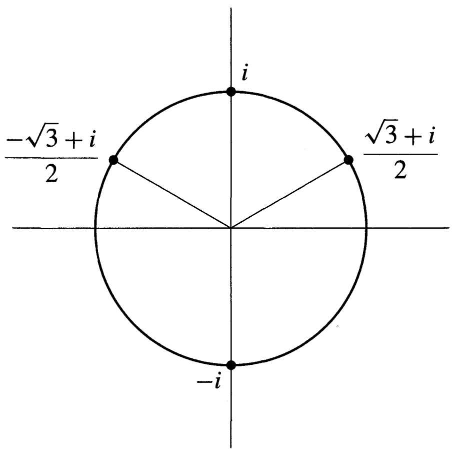


Figura 4

En el curso de la demostración del Teorema 2 hemos desarrollado, en realidad, un método para hallar las raíces n-ésimas de un número complejo. Por ejemplo, para hallar las raíces cúbicas de i (Figura 4) observemos que $|i| = 1$ y que $\pi/2$ es un argumento para i. Las raíces cúbicas de i son por lo tanto

$$1 \cdot \left[\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right],$$

$$1 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)\right] = \cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6},$$

$$1 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right)\right] = \cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}.$$

Puesto que es

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

$$\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

$$\cos \frac{3\pi}{2} = 0, \qquad \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = -1,$$

las raíces cúbicas de i son

$$\frac{\sqrt{3}+i}{2}, \quad \frac{-\sqrt{3}+i}{2}, \quad -i.$$

En general, no se pueden esperar siempre resultados tan sencillos. Por ejemplo, para hallar las raíces cúbicas de $2+11i$, observemos que $|2+11i| = \sqrt{2^2+11^2} = \sqrt{125}$ y que $\operatorname{arctg} \frac{11}{2}$ es un argumento para $2+11i$. Una de las raíces cúbicas de $2+11i$ es por lo tanto

$$\sqrt[6]{125}\left[\cos\left(\frac{\operatorname{arctg} \frac{11}{2}}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\operatorname{arctg} \frac{11}{2}}{3}\right)\right]$$
$$= \sqrt{5}\left[\cos\left(\frac{\operatorname{arctg} \frac{11}{2}}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\operatorname{arctg} \frac{11}{2}}{3}\right)\right].$$

Observamos antes que $2+i$ es también una raíz cúbica de $2+11i$. Al ser $|2+i| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$, y puesto que $\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$ es un argumento de $2+i$, podemos escribir esta raíz cúbica como

$$2+i = \sqrt{5}(\cos \operatorname{arctg} \tfrac{1}{2} + i \operatorname{sen} \operatorname{arctg} \tfrac{1}{2}).$$

Estas dos raíces cúbicas son en realidad el mismo número, porque

$$\frac{\operatorname{arctg} \frac{11}{2}}{3} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$$

(el lector puede comprobar esto utilizando la fórmula del Problema 15-9), pero esto es el tipo de cosas que hubiese sido difícil observar a primera vista!.

El hecho de que todo número complejo tiene una raíz n-ésima, cualquiera que sea n no es sino un caso particular de un teorema muy importante. En su origen el número i fue introducido para suministrar una solución de la ecuación $x^2+1=0$. El *Teorema Fundamental del Álgebra* afirma el hecho notable de que esta introducción suministra automáticamente soluciones para todas las demás ecuaciones polinómicas: toda ecuación

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \qquad a_0, \ldots, a_{n-1} \text{ en } \mathbf{C}$$

tiene una raíz compleja!

En el próximo capítulo vamos a dar una demostración casi completa del Teorema Fundamental del Álgebra; la pequeña laguna que se deja en el texto puede ser completada como ejercicio (Problema 26-5). La demostración del teorema se basará sobre varios conceptos nuevos que surgirán de un modo completamente natural en una investigación más a fondo de los números complejos.

Problemas

1. Halle el valor absoluto y el argumento de cada uno de los siguientes números.

(i) $3+4i$. (ii) $(3+4i)^{-1}$. (iii) $(1+i)^5$.

(iv) $\sqrt[7]{3+4i}$. (v) $|3+4i|$.

2. Resuelva las ecuaciones siguientes.

(i) $x^2+ix+1=0$. (ii) $x^4+x^2+1=0$. (iii) $x^2+2ix-1=0$.

(iv) $\begin{cases} ix-(1+i)y=3, \\ (2+i)x+iy=4 \end{cases}$. (v) $x^3-x^2-x-2=0$.

3. Describa el conjunto de todos los números complejos z tales que

(i) $\bar{z}=-z$. (ii) $\bar{z}=z^{-1}$. (iii) $|z-a|=|z-b|$.

(iv) $|z-a|+|z-b|=c$. (v) $|z|<1-$ parte real de z.

4. Demuestre que $|z|=|\bar{z}|$, y que la parte real de z es $(z+\bar{z})/2$, mientras que la parte imaginaria es $(z-\bar{z})/2i$.

5. Demuestre que $|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2)$, e interprete geométricamente este enunciado.

6. ¿Cuál es la relación entre z y $\sqrt{i}\cdot\overline{z\sqrt{-i}}$ en la representación gráfica? (Observe que puede haber más de una respuesta, porque tanto $\sqrt{i}$ como $\sqrt{-i}$ tienen dos soluciones diferentes.) Indicación: ¿Cuál es la recta que se transforma en el eje real al multiplicar por $\sqrt{-i}$?

7. (a) Demuestre que si $a_0, \ldots, a_{n-1}$ son *reales* y $a+bi$ (siendo a y b reales) satisface la ecuación $z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0=0$, entonces $a-bi$ satisface también esta ecuación. (Así pues, las raíces no reales de una tal ecuación se presentan siempre a pares, y el número de estas raíces es par.)

(b) Concluya que $z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0$ es divisible por $z^2-2az+(a^2+b^2)$ (cuyos coeficientes son reales).

***8.** (a) Sea c un entero que no es el cuadrado de ningún otro entero. Si a y b son enteros, definimos el **conjugado** de $a+b\sqrt{c}$, designado por $\overline{a+b\sqrt{c}}$, como $a-b\sqrt{c}$. Demuestre que el conjugado está bien definido haciendo ver que un número puede expresarse de forma única como $a+b\sqrt{c}$, para enteros a y b.

(b) Demuestre que para todo α y β de la forma $a+b\sqrt{c}$, tenemos $\bar{\bar{\alpha}}=\alpha$; $\bar{\alpha}=\alpha$ si y sólo si α es un entero; $\overline{\alpha+\beta}=\bar{\alpha}+\bar{\beta}$; $\overline{-\alpha}=-\bar{\alpha}$; $\overline{\alpha\cdot\beta}=\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}$; y $\overline{\alpha^{-1}}=(\bar{\alpha})^{-1}$ si $\alpha\neq 0$.

(c) Demuestre que si $a_0, \ldots, a_{n-1}$ son *enteros* y $z=a+b\sqrt{c}$ satisface la ecuación

$$z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0=0,$$

entonces $\bar{z}=a-b\sqrt{c}$ satisface también esta ecuación.

9. Halle todas las raíces cuartas de i; exprese la que tenga un argumento más pequeño sin hacer intervenir ninguna función trigonométrica.

***10.** (a) Demuestre que si ω es una raíz n-ésima de 1, entonces también lo es ω^k.

(b) Se dice que un número ω es una **raíz primitiva n-ésima** de 1 si $\{1,\omega,\omega^2,\ldots,\omega^{n-1}\}$ es el conjunto de todos las raíces n-ésimas de 1. ¿Cuántas raíces n-ésimas de 1 existen para $n=3$, 4, 5, 9?

(c) Sea ω una raíz n-ésima de 1, con $\omega\neq 1$. Demuestre que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k=0$.

***11.** (a) Demuestre que si $z_1,\ldots,z_k$ quedan en el mismo lado que alguna recta que pase por 0, entonces $z_1+\cdots+z_k\neq 0$. Indicación: Esto es evidente partiendo de la interpretación geométrica de la suma, pero también puede darse fácilmente una demostración analítica: el enunciado es evidente si la recta es el eje real, y el caso general puede reducirse a éste mediante un artificio.

(b) Demuestre, además, que ${z_1}^{-1}, \ldots, {z_k}^{-1}$ quedan todos del mismo lado de una recta por 0, de modo que ${z_1}^{-1}+\cdots+{z_k}^{-1}\neq 0$.

***12.** Demuestre que si $|z_1|=|z_2|=|z_3|$ y $z_1+z_2+z_3=0$, entonces z_1, z_2, y z_3 son los vértices de un triángulo equilátero. Indicación: Convendrá suponer que z_1 es real, y esto puede hacerse sin pérdida de generalidad. ¿Por qué?

Funciones complejas 26

El lector probablemente no se sorprenderá al darse cuenta de que una investigación más profunda de los números complejos ha de basarse necesariamente en el concepto de función. Hasta ahora una función era (intuitivamente) una regla que asignaba números reales a ciertos otros números reales. Pero no existe razón alguna para que no se pueda extender este concepto; se puede considerar igualmente una regla que asigne números complejos a ciertos otros números complejos. La definición rigurosa no presenta problemas (ni siquiera le vamos a conceder los honores de una definición formal): una función es una colección de pares de números complejos que no contiene dos pares distintos con el mismo primer elemento. Puesto que consideramos los números reales como ciertos números complejos, la definición antigua es en realidad un caso particular de la nueva. Sin embargo recurriremos algunas veces a una terminología particular para poner en claro el contexto en que se está considerando una función. Una función f se dice que es de **valores reales** si $f(z)$ es un número real para todos los z del dominio de f, y de **valores complejos** para destacar que no es necesariamente de valores reales. Análogamente, con frecuencia indicaremos explícitamente que una función f está definida en [un subconjunto de] **R** en aquellos casos en que el dominio de f sea [un subconjunto de] **R**; en otros casos diremos que f está definida en [un subconjunto de] **C** para destacar que $f(z)$ está definida para valores de z tanto reales como complejos.

Entre la multitud de funciones definidas sobre **C**, algunas son particularmente importantes. Entre éstas se encuentran en primer lugar las funciones de la forma

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0,$$

donde $a_0, \ldots, a_n$ son números complejos. Estas funciones son llamadas, lo mismo que en el caso real, funciones polinómicas; incluyen la función $f(z) = z$ (la "función identidad") y las funciones de la forma $f(z) = a$ para algún número complejo a ("funciones constantes"). Otra importante generalización de una función conocida es la "función valor absoluto" $f(z) = |z|$ para todo z de **C**.

Dos funciones de particular importancia para los números complejos son Re (la "función parte real") e Im (la "función parte imaginaria"), definidas por

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Re}(x+iy) &= x, \\ \mathrm{Im}(x+iy) &= y, \end{aligned}\right. \quad \text{para } x \text{ e } y \text{ reales.}$$

La "función conjugada" está definida por

$$f(z) = \bar{z} = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z).$$

Las conocidas funciones reales definidas sobre **R** pueden combinarse de muchas maneras para dar lugar a nuevas funciones de valores complejos definidas sobre **C**; un ejemplo es la función

$$f(x+iy) = e^y \operatorname{sen}(x-y) + ix^3 \cos y.$$

La expresión de esta función particular hace ver una descomposición que siempre es posible realizar. Cualquier función f de valores complejos puede escribirse en la forma

$$f = u + iv$$

para algunas funciones u y v de valores reales; definamos simplemente $u(z)$ como la parte real de $f(z)$, y $v(z)$ como la parte imaginaria. Esta descomposición es útil muchas veces, pero no siempre; por ejemplo, no sería conveniente describir una función polinómica de esta manera.

Otra función va a desempeñar un papel importante en este capítulo. Recordemos que un *argumento* de un número complejo z no nulo es un número (real) θ tal que

$$z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta).$$

Existen infinitos argumentos para z, pero sólo uno que satisface $0 \leq \theta < 2\pi$. Si designamos por $\theta(z)$ a este argumento único, entonces θ es una función (de valores reales, la "función argumento") en $\{z \text{ en } \mathbf{C} : z \neq 0\}$.

Las "gráficas" de las funciones de valores complejos definidas sobre **C**, al estar en un espacio de cuatro dimensiones, son, como se puede suponer, poco útiles para la visualización. En vez de una gráfica clásica, puede utilizarse la representación alternativa de una función mencionada en el Capítulo 4: trazamos dos copias de **C**, y flechas desde z en una de las copias, a $f(z)$ en la otra (Figura 1).

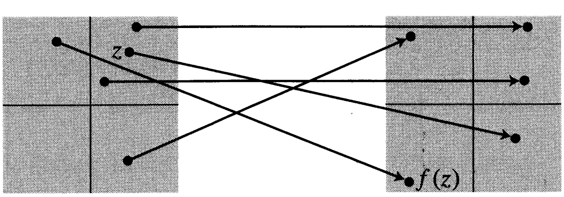
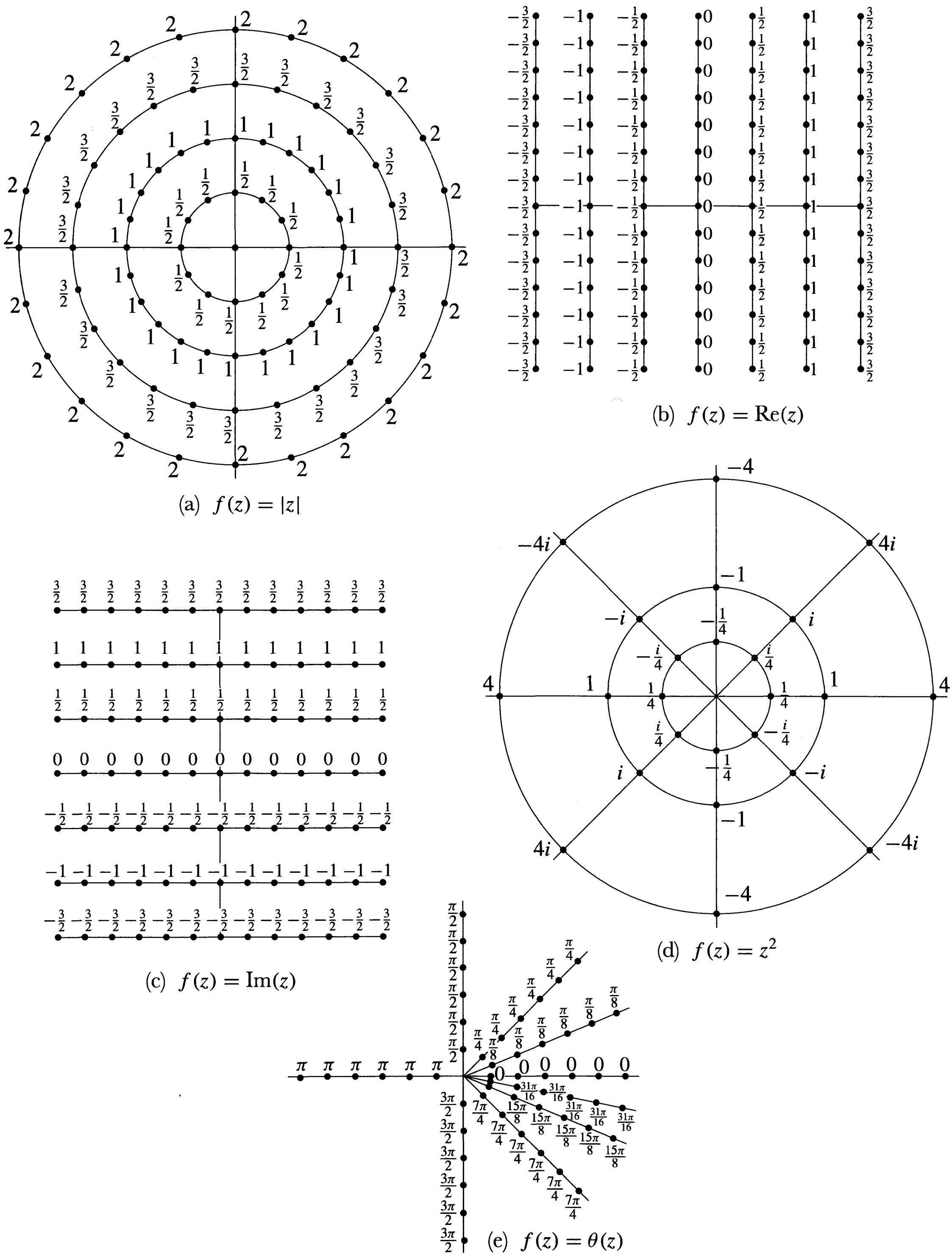


Figura 1

La representación gráfica más común de una función de valores complejos se obtiene rotulando un punto del plano con el valor $f(z)$, en vez de con el valor z (el cual puede estimarse por la posición del punto en la figura). La Figura 2 indica este tipo de representación para varias funciones distintas. Ciertas características de la función quedan ilustradas muy claramente mediante esta "gráfica". Por ejemplo, la función valor absoluto es constante sobre círculos concéntricos alrededor de 0, las funciones Re e Im son constantes sobre los ejes vertical y horizontal, respectivamente, y la función $f(z) = z^2$ envuelve dos veces el círculo de radio r alrededor del círculo de radio r^2.

A pesar de los problemas planteados por la visualización de funciones de valores complejos en general, es todavía posible definir propiedades análogas a las propiedades importantes definidas con anterioridad para funciones de valores reales en **R**, y en



(a) $f(z) = |z|$

(b) $f(z) = \mathrm{Re}(z)$

(c) $f(z) = \mathrm{Im}(z)$

(d) $f(z) = z^2$

(e) $f(z) = \theta(z)$

Figura 2

algunos casos estas propiedades pueden ser más fáciles de visualizar en el caso complejo. Por ejemplo, la noción de límite puede definirse como sigue:

> $\lim_{z\to a} f(z) = l$ significa que para todo número (real) $\varepsilon > 0$ existe un número (real) $\delta > 0$ tal que, para todo z, si $0 < |z-a| < \delta$, entonces $|f(z)-l| < \varepsilon$.

Aunque la definición es exactamente la misma que antes, la interpretación es algo diferente. Al ser $|z-w|$ la distancia entre los números complejos z y w, la ecuación $\lim_{z\to a} f(z) = l$ significa que los valores de $f(z)$ puede conseguirse que queden dentro de cualquier círculo dado alrededor de l, siempre que se restrinja z a estar dentro de un círculo suficientemente pequeño alrededor de a. Este enunciado es particularmente fácil de visualizar utilizando la representación de "dos copias" de una función (Figura 3).

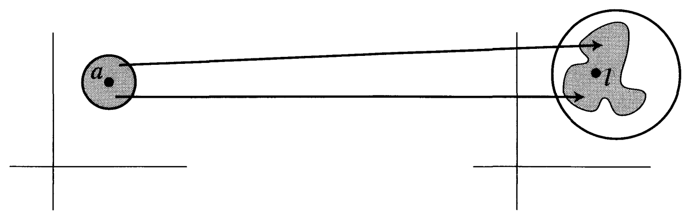


Figura 3

Ciertos hechos acerca de límites pueden demostrarse exactamente de la misma forma que en el caso real. En particular,

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to a} c &= c,\\
\lim_{z\to a} z &= a,\\
\lim_{z\to a} [f(z)+g(z)] &= \lim_{z\to a} f(z) + \lim_{z\to a} g(z),\\
\lim_{z\to a} f(z)\cdot g(z) &= \lim_{z\to a} f(z)\cdot \lim_{z\to a} g(z),\\
\lim_{z\to a} \frac{1}{g(z)} &= \frac{1}{\lim_{z\to a} g(z)}, \quad \text{si } \lim_{z\to a} g(z) \neq 0.
\end{aligned}$$

La propiedad esencial de los valores absolutos sobre la que están basados estos resultados es la desigualdad $|z+w| \leq |z| + |w|$, y esta desigualdad se cumple para números complejos lo mismo que para números reales. Estos hechos suministran ya bastantes límites, pero se pueden obtener muchos más del siguiente teorema.

Teorema 1. *Sea $f(z) = u(z) + iv(z)$ para funciones de valores reales u y v, y sea $l = \alpha + i\beta$ para números reales α y β. Entonces $\lim_{z\to a} f(z) = l$ si y sólo si*

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to a} u(z) &= \alpha,\\
\lim_{z\to a} v(z) &= \beta.
\end{aligned}$$

Demostración. Supongamos en primer lugar que $\lim_{z\to a} f(z) = l$. Si $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo z,

$$\text{si } 0 < |z-a| < \delta, \text{ entonces } |f(z)-l| < \varepsilon.$$

La segunda desigualdad puede escribirse

$$\big|[u(z)-\alpha]+i[v(z)-\beta]\big| < \varepsilon,$$

o

$$[u(z)-\alpha]^2+[v(z)-\beta]^2 < \varepsilon^2.$$

Al ser $u(z)-\alpha$ y $v(z)-\beta$ números reales, sus cuadrados son positivos; esta desigualdad implica por lo tanto que

$$[u(z)-\alpha]^2 < \varepsilon^2 \quad \text{y} \quad [v(z)-\beta]^2 < \varepsilon^2,$$

lo cual implica

$$|u(z)-\alpha| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |v(z)-\beta| < \varepsilon.$$

Al cumplirse esto para todo $\varepsilon > 0$, se deduce que

$$\lim_{z\to a} u(z) = \alpha \quad \text{y} \quad \lim_{z\to a} v(z) = \beta.$$

Supongamos ahora que se cumplen estas dos ecuaciones. Si $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, para todo z, si $0 < |z-a| < \delta$, entonces

$$|u(z)-\alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |v(z)-\alpha| < \frac{\varepsilon}{2},$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} |f(z)-l| &= \big|[u(z)-\alpha]+i[v(z)-\beta]\big| \\ &\leq |u(z)-\alpha| + |i|\cdot|v(z)-\beta| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto demuestra que $\lim_{z\to a} f(z) = l$. ■

Para aplicar fructíferamente el Teorema 1, observemos que, puesto que ya conocemos el límite $\lim_{z\to a} z = a$, podemos concluir que

$$\begin{aligned} &\lim_{z\to a} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(a), \\ &\lim_{z\to a} \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(a). \end{aligned}$$

Un límite tal como

$$\lim_{z\to a} \operatorname{sen}(\mathrm{Re}(z)) = \operatorname{sen}(\mathrm{Re}(a))$$

se deduce fácilmente, utilizando la continuidad de la función sen. Aplicaciones reiteradas de estos principios demuestran límites tales como los siguientes:

$$\lim_{z\to a} \bar{z} = \bar{a},$$
$$\lim_{z\to a} |z| = |a|,$$
$$\lim_{(x+iy)\to a+bi} e^y \operatorname{sen} x + ix^3 \cos y = e^b \operatorname{sen} a + ia^3 \cos b.$$

Una vez que hemos extendido ahora el concepto de límite a funciones complejas, puede extenderse también el concepto de continuidad: f es **continua en** a si $\lim_{z\to a} f(z) = f(a)$, y f es **continua** si f es continua en a para todo a del dominio de f. Lo visto anteriormente acerca de límites demuestra que son continuas todas las funciones siguientes:

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0,$$
$$f(z) = \bar{z},$$
$$f(z) = |z|,$$
$$f(x+iy) = e^y \operatorname{sen} x + ix^3 \cos y.$$

Es fácil obtener ejemplos de funciones discontinuas, y algunas de ellas surgen de modo muy natural. Un ejemplo particularmente decepcionante es la "función argumento" θ, pues es discontinua para todos los números reales no negativos (ver la "gráfica" en la Figura 2). Variando convenientemente la definición de θ es posible cambiar las discontinuidades; por ejemplo (Figura 4), si $\theta'(z)$ designa el argumento único de z con $\pi/2 \leq \theta'(z) < 5\pi/2$, entonces θ' es discontinua en ai para cualquier número real no negativo a. Pero, sea cual sea la forma en que se vuelva a definir θ, se presentarán siempre algunas discontinuidades.

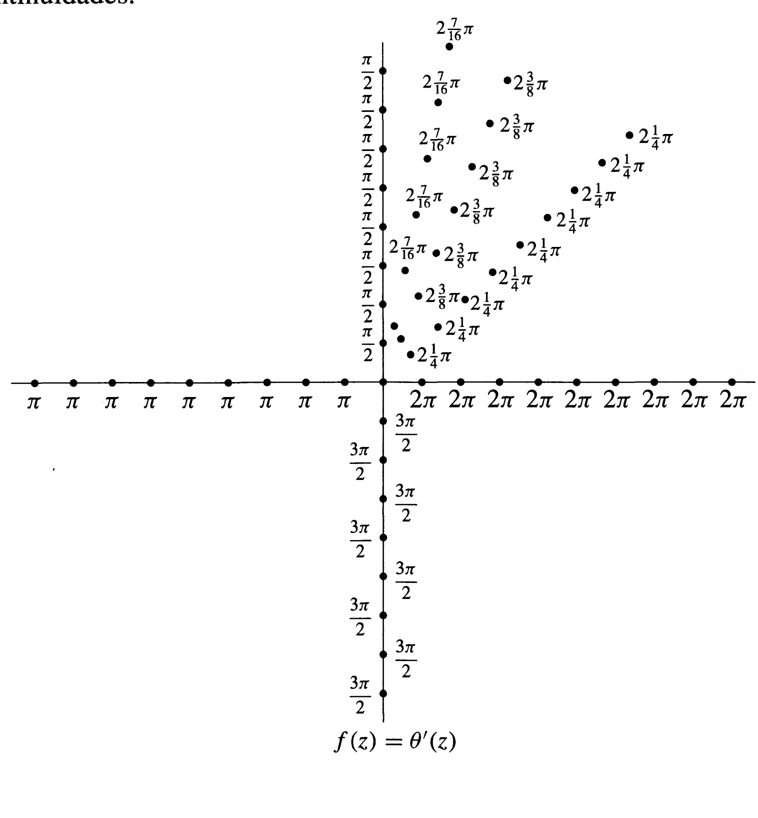


Figura 4

La discontinuidad de θ tiene una relación importante con el problema de definir una "función raíz cuadrada", es decir, una función f tal que $(f(z))^2 = z$ para todo z. Considerando números reales la función $\sqrt{\ }$ tiene como dominio solamente los números reales no negativos. Si se admiten los números complejos, entonces todo número tiene dos raíces cuadradas (excepto 0, que tiene sólo una). Aunque esta situación parezca ser mejor, resulta ser peor en algún aspecto; al ser las raíces cuadradas de z números complejos, no existe ningún criterio claro para seleccionar una de las raíces como $f(z)$, con preferencia a la otra.

Una manera de definir f es la siguiente. Hacemos $f(0) = 0$, y para $z \neq 0$ hacemos

$$f(z) = \sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\theta(z)}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\theta(z)}{2}\right).$$

Evidentemente $(f(z))^2 = z$, pero la función f es discontinua, ya que θ es discontinua. De hecho, es imposible encontrar una f continua tal que $(f(z))^2 = z$ para cualquier z. Más aún, es incluso imposible definir $f(z)$ para cualquier z con $|z| = 1$. Para demostrar esta afirmación por reducción al absurdo, podemos suponer que $f(1) = 1$ (puesto que siempre podríamos reemplazar f por $-f$). Entonces podemos afirmar que para todos los θ con $0 \leq \theta < 2\pi$ tenemos

$$(*) \qquad f(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = \cos\frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}.$$

Los detalles de la demostración se dejan para el lector (es un razonamiento estándar basado en el supremo). Pero $(*)$ implica que

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 2\pi} f(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) &= \cos\pi + i \operatorname{sen}\pi \\ &= -1 \\ &\neq f(1),\end{aligned}$$

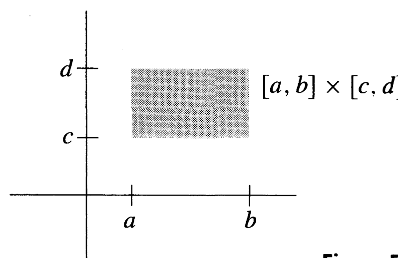


Figura 5

aunque $\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \to 1$ cuando $\theta \to 2\pi$. Tenemos por tanto una contradicción. Razonamientos parecidos demuestran que es imposible definir "funciones raíces n-ésimas" continuas cualquiera que sea $n \geq 2$.

Para funciones continuas complejas existen importantes teoremas análogos a ciertos teoremas que describen el comportamiento de funciones de valores reales sobre intervalos cerrados. Un análogo natural del intervalo $[a,b]$ es el conjunto de los números complejos $z = x + iy$ con $a \leq x \leq b$ y $c \leq y \leq d$ (Figura 5). Este conjunto recibe el nombre de **rectángulo cerrado**, y se designa por $[a,b] \times [c,d]$.

Si f es una función continua de valores complejos cuyo dominio es $[a,b] \times [c,d]$, entonces parece razonable, y además se cumple, que f sea una función acotada sobre $[a,b] \times [c,d]$. Es decir, existe algún número real M tal que

$$|f(z)| \leq M \quad \text{para todo } z \text{ de } [a,b] \times [c,d].$$

No tiene sentido decir que f tiene un máximo y un mínimo en $[a,b] \times [c,d]$, puesto que no existe el concepto de orden para los números complejos. Sin embargo, si f es una función de valores reales, entonces esta afirmación tiene sentido y es verdad. En particular, si f

es una función continua cualquiera de valores complejos sobre $[a,b] \times [c,d]$, entonces $|f|$ es también continua, de modo que existe algún z_0 en $[a,b] \times [c,d]$ tal que

$$|f(z_0)| \leq |f(z)| \quad \text{para todo } z \text{ de } [a,b] \times [c,d];$$

un enunciado análogo se cumple con la desigualdad invertida. Se dice a veces que "f alcanza sus módulos máximo y mínimo en $[a,b] \times [c,d]$".

No demostraremos aquí los distintos hechos mencionados en el párrafo anterior, si bien indicaremos algunas demostraciones en el Problema 5. Sin embargo, aceptando estos hechos, podemos dar ahora una demostración del Teorema Fundamental del Álgebra, el cual es verdaderamente muy sorprendente, ya que hasta el momento hemos dicho pocas cosas que distingan a las funciones polinómicas de otras funciones continuas.

Teorema 2. (Teorema Fundamental del Álgebra) *Si* $a_0, \ldots, a_{n-1}$ *son números complejos cualesquiera, entonces existe un número complejo* z *tal que*

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_0 = 0.$$

Demostración. Si hacemos

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Entonces f es continua, y también lo es la función $|f|$ definida por

$$|f|(z) = |f(z)| = |z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0|.$$

Nuestra demostración está basada en la observación de que un punto z_0 con $f(z_0) = 0$ tiene que ser evidentemente un punto mínimo para $|f|$. Para demostrar el teorema haremos ver primero que $|f|$ tiene efectivamente un valor mínimo en *todo el plano complejo*. La demostración va a ser casi idéntica a la demostración, del Capítulo 7, de que un función polinómica de grado par (con coeficientes reales) tiene un valor mínimo en todo $\mathbf{R}$; las dos demostraciones se basan en el hecho de que si $|z|$ es grande, entonces $|f(z)|$ es grande.

Empezamos haciendo, para $z \neq 0$,

$$f(z) = z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right),$$

de modo que

$$|f(z)| = |z|^n \cdot \left|1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right|.$$

Hagamos

$$M = \text{máx}(1, 2n|a_{n-1}|, \ldots, 2n|a_0|).$$

Entonces para todo z con $|z| \geq M$, tenemos $|z^k| \geq |z|$ y

$$\frac{|a_{n-k}|}{|z^k|} \leq \frac{|a_{n-k}|}{|z|} \leq \frac{|a_{n-k}|}{2n|a_{n-k}|} = \frac{1}{2n},$$

de modo que

$$\left|\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_0}{z^n}\right| \le \left|\frac{a_{n-1}}{z}\right|+\cdots+\left|\frac{a_0}{z^n}\right| \le \frac{1}{2},$$

lo cual implica que

$$\left|1+\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_0}{z^n}\right| \ge 1-\left|\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_0}{z^n}\right| \ge \frac{1}{2}.$$

Esto significa que

$$|f(z)| \ge \frac{|z|^n}{2} \quad \text{para } |z| \ge M.$$

En particular, si $|z| \ge M$ y también $|z| \ge \sqrt[n]{2|f(0)|}$, entonces

$$|f(z)| \ge |f(0)|.$$

Consideremos ahora $[a,b]\times[c,d]$ un rectángulo cerrado (Figura 6) que contiene $\{z : |z| \le \text{máx}\big(M, \sqrt[n]{2|f(0)|}\big)\}$, y supongamos que el mínimo de $|f|$ en $[a,b]\times[c,d]$ se alcanza en z_0, de modo que

(1) $$|f(z_0)| \le |f(z)| \quad \text{para } z \text{ en } [a,b]\times[c,d].$$

Se deduce, en particular, que $|f(z_0)| \le |f(0)|$. Así pues,

(2) $$|z| \ge \text{máx}\big(M, \sqrt[n]{2|f(0)|}\big), \text{ entonces } |f(z)| \ge |f(0)| \ge |f(z_0)|.$$

Combinando (1) y (2) vemos que $|f(z_0)| \le |f(z)|$ para todo z, de modo que $|f|$ alcanza en z_0 su valor mínimo en todo el plano complejo.

Para completar la demostración del teorema demostramos ahora que $f(z_0) = 0$. Resulta conveniente introducir la función g definida por

$$g(z) = f(z+z_0).$$

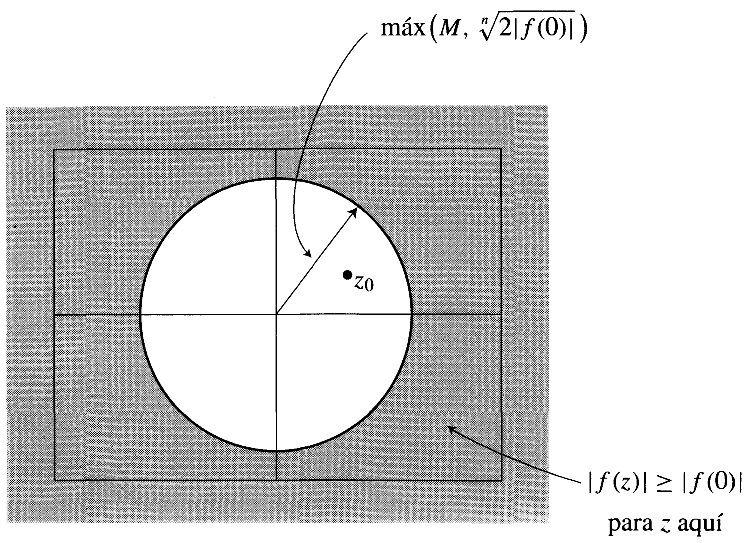


Figura 6

Entonces g es una función polinómica de grado n, cuyo valor absoluto mínimo se presenta en 0. Queremos demostrar que $g(0) = 0$.

Supongamos, por el contrario, que $g(0) = \alpha \neq 0$. Si m es la potencia más pequeña de z que se presenta en la expresión de g, podemos escribir

$$g(z) = \alpha + \beta z^m + c_{m+1}z^{m+1} + \cdots + c_n z^n,$$

donde $\beta \neq 0$. Ahora bien, según el Teorema 25-2, existe un número complejo γ tal que

$$\gamma^m = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Haciendo entonces $d_k = c_k\gamma^k$, tenemos

$$\begin{aligned}
|g(\gamma z)| &= |\alpha + \beta\gamma^m z^m + d_{m+1}z^{m+1} + \cdots + d_n z^n| \\
&= |\alpha - \alpha z^m + d_{m+1}z^{m+1} + \cdots| \\
&= \left|\alpha\left(1 - z^m + \frac{d_{m+1}}{\alpha}z^{m+1} + \cdots\right)\right| \\
&= \left|\alpha\left(1 - z^m + z^m\left[\frac{d_{m+1}}{\alpha}z + \cdots\right]\right)\right| \\
&= |\alpha| \cdot \left|1 - z^m + z^m\left[\frac{d_{m+1}}{\alpha}z + \cdots\right]\right|.
\end{aligned}$$

Esta expresión, tan trabajosamente obtenida, nos permitirá llegar rápidamente a una contradicción. Observemos primero que, eligiendo $|z|$ suficientemente pequeño, tendremos

$$\left|\frac{d_{m+1}}{\alpha}z + \cdots\right| < 1.$$

Si elegimos, entre todos los z para los que se cumple esta desigualdad, algún z que sea *real y positivo*, entonces

$$\left|z^m\left[\frac{d_{m+1}}{\alpha}z + \cdots\right]\right| < |z^m| = z^m.$$

En consecuencia, si $0 < z < 1$ tenemos

$$\begin{aligned}
\left|1 - z^m + z^m\left[\frac{d_{m+1}}{\alpha}z + \cdots\right]\right| &\leq |1 - z^m| + \left|z^m\left[\frac{d_{m+1}}{\alpha}z + \cdots\right]\right| \\
&= 1 - z^m + \left|z^m\left[\frac{d_{m+1}}{\alpha}z + \cdots\right]\right| \\
&< 1 - z^m + z^m \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Ésta es la contradicción deseada: para un tal número z tenemos

$$|g(\gamma z)| < |\alpha|,$$

en contradicción con el hecho de que $|\alpha|$ es el mínimo de $|g|$ en todo el plano. Por lo tanto, la suposición original tiene que ser incorrecta, y $g(0) = 0$. Esto implica, finalmente, que $f(z_0) = 0$. ■

Aún teniendo en cuenta nuestra omisión de las demostraciones de los hechos básicos acerca de funciones complejas continuas, esta demostración ha establecido un resultado profundo con sorprendentemente poco trabajo. Parece natural esperar que surjan otros interesantes desarrollos si seguimos buscando las análogas de las propiedades de las funciones reales. El próximo paso obligado es el de tratar de definir derivadas: una función f es **diferenciable en** a si

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(a+z)-f(a)}{z} \text{ existe,}$$

en cuyo caso se designará al límite por $f'(a)$. Es fácil demostrar que

$$\begin{aligned}
f'(a) &= 0 \qquad \text{si } f(z) = c,\\
f'(a) &= 1 \qquad \text{si } f(z) = z,\\
(f+g)'(a) &= f'(a) + g'(a),\\
(f\cdot g)'(a) &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a),\\
\left(\frac{1}{g}\right)'(a) &= \frac{-g'(a)}{[g(a)]^2} \qquad \text{si } g(a) \neq 0,\\
(f\circ g)'(a) &= f'(g(a))\cdot g'(a);
\end{aligned}$$

las demostraciones de todas estas fórmulas son exactamente las mismas que antes. Se sigue, en particular, que si $f(z) = z^n$, entonces $f'(z) = nz^{n-1}$. Sin embargo, estas fórmulas demuestran solamente la derivabilidad de funciones racionales. Muchos otras funciones corrientes *no* son diferenciables. Supongamos, por ejemplo, que

$$f(x+iy) = x - iy \quad (\text{es decir, } f(z) = \bar{z}).$$

Si f ha de ser diferenciable en 0, entonces debe existir el límite

$$\lim_{(x+iy)\to 0} \frac{f(x+iy)-f(0)}{x+iy} = \lim_{(x+iy)\to 0} \frac{x-iy}{x+iy}$$

Observemos, sin embargo, que

$$\text{si } y = 0, \text{ entonces } \frac{x-iy}{x+iy} = 1,$$

y

$$\text{si } x = 0, \text{ entonces } \frac{x-iy}{x+iy} = -1;$$

por lo tanto, este límite no puede existir, puesto que el cociente alcanza ambos valores 1 y -1 para $x+iy$ arbitrariamente próximos a 0.

A la vista de este ejemplo, no está claro en absoluto de dónde van a proceder otras funciones derivables. Recordando las definiciones de sen y exp, se verá que no existe ninguna esperanza de poder generalizar estas definiciones a números complejos. Por el momento las perspectivas son sombrías, pero pronto se verán resueltos todos nuestros problemas.

Problemas

1. (a) Para cualquier número real y, defina $\alpha(x) = x + iy$ (de modo que α es una función de valores complejos definida en $\mathbf{R}$). Demuestre que α es continua. (Esto se deduce inmediatamente de un teorema de este capítulo.) Demuestre análogamente que $\beta(y) = x + iy$ es continua.

(b) Suponga que f es una función continua definida en $\mathbf{C}$. Para y fijo, considere $g(x) = f(x+iy)$. Demuestre que g es una función continua (definida en $\mathbf{R}$). Demuestre análogamente que $h(y) = f(x+iy)$ es continua. Indicación: Utilice la parte (a).

2. (a) Suponga que f es una función continua de valores reales definida en un rectángulo cerrado $[a,b] \times [c,d]$. Demuestre que si f toma los valores $f(z)$ y $f(w)$ para z y w en $[a,b] \times [c,d]$, entonces f toma también todos los valores comprendidos entre $f(z)$ y $f(w)$. Indicación: Considere $g(t) = f(tz + (1-t)w)$ para t en $[0,1]$.

*(b) Si f es una función continua de valores complejos definida en $[a,b] \times [c,d]$, el enunciado de la parte (a) ya no tiene sentido, puesto que no podemos hablar de números complejos entre $f(z)$ y $f(w)$. Podríamos conjeturar que f toma todos los valores del segmento rectilíneo entre $f(z)$ y $f(w)$, pero incluso esto es falso. Halle un ejemplo que lo demuestre.

3. (a) Demuestre que si $a_0, \ldots, a_{n-1}$ son números complejos cualesquiera, entonces existen números complejos $z_1, \ldots, z_n$ (no necesariamente distintos) tales que

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = \prod_{i=1}^{n}(z - z_i).$$

(b) Demuestre que si $a_0, \ldots, a_{n-1}$ son *reales*, entonces $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ puede escribirse como producto de factores lineales $z + a$ y factores cuadráticos $z^2 + az + b$ cuyos coeficientes son todos reales. (Utilice el Problema 25-7.)

4. En este problema vamos a considerar solamente polinomios con coeficientes reales. Un polinomio de este tipo recibe el nombre de **suma de cuadrados** si puede escribirse en la forma ${h_1}^2 + \cdots + {h_n}^2$ para polinomios h_i de coeficientes reales.

(a) Demuestre que si f es una suma de cuadrados, entonces $f(x) \geq 0$ para todo x.

(b) Demuestre que si f y g son sumas de cuadrados, entonces también lo es $f \cdot g$.

(c) Suponga que $f(x) \geq 0$ para todo x. Demuestre que f es una suma de cuadrados. Indicación: Escriba primero $f(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - a_i)^2 g(x)$, donde $g(x) > 0$ para todo x. Utilice ahora el Problema 3(b).

5. (a) Sea A un conjunto de números complejos. Lo mismo que en el caso real, un número z recibe el nombre de **punto de acumulación** del conjunto A si para todo $\varepsilon > 0$ (real), existe un punto a en A con $|z - a| < \varepsilon$ pero $z \neq a$. Demuestre la versión bidimensional del Teorema de Bolzano-Weierstrass. Si A es un subconjunto infinito de $[a,b] \times [c,d]$, entonces A tiene un punto de acumulación en $[a,b]\times[c,d]$. Indicación: Divida primero $[a,b]\times[c,d]$ por la mitad mediante una recta vertical como en la Figura 7(a). Puesto que A es infinito, por lo menos una de las dos mitades contendrá infinitos puntos de A. Divida ésta por la mitad mediante una recta horizontal, como en la Figura 7(b). Continue de esta manera, dividiendo alternativamente mediante rectas verticales y horizontales.

(El argumento de bisección bidimensional indicado aquí es tan clásico que el título "Bolzano-Weierstrass" sirve muchas veces para describir el método de demostración, además del teorema mismo. Vea, por ejemplo, H. Petard, "A Contribution to the Mathematical Theory of Big Game Hunting," *AmerMathMonthly*, **45** (1938), 446–447.)

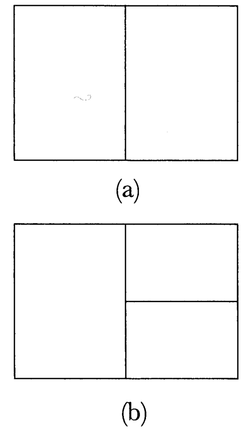


Figura 7

(b) Demuestre que una función continua (de valores complejos) en $[a,b]\times[c,d]$ es acotada en $[a,b]\times[c,d]$. (Considere la resolución del Problema 22-31.)

(c) Demuestre que si f es una función continua de valores reales en $[a,b]\times[c,d]$, entonces f toma un valor máximo y mínimo en $[a,b]\times[c,d]$. (Se puede usar el mismo artificio que da resultado para el Teorema 7-3.)

***6.** La demostración del Teorema 2 no puede considerarse como completamente elemental porque la posibilidad de elegir γ con $\gamma^m=-\alpha/\beta$ depende del Teorema 25-2, y por lo tanto de las funciones trigonométricas. Presenta, por lo tanto, cierto interés proporcionar una demostración elemental de que existe una solución para la ecuación $z^n-c=0$.

(a) Haga un cálculo explícito para demostrar que las soluciones de $z^2-c=0$ pueden hallarse, cualquiera que sea el número complejo c.

(b) Explique por qué la solución de $z^n-c=0$ puede ser reducida al caso de ser n impar.

(c) Sea z_0 el punto en que la función $f(z)=z^n-c$ alcanza su valor absoluto mínimo. Si $z_0\neq 0$, demuestre que el entero m de la demostración del Teorema 2 es igual a 1; puesto que podemos encontrar ciertamente γ con $\gamma^1=-\alpha/\beta$, el resto de la demostración nos sirve para f. Basta por lo tanto demostrar que el valor absoluto mínimo de f no se presenta en 0.

(d) Suponga por el contrario que f alcanza un valor absoluto mínimo en 0. Al ser n impar, los puntos $\pm\delta,\pm\delta i$ se aplican por f en $-c\pm\delta^n$, $-c\pm\delta^n i$. Demuestre que para δ pequeños, por lo menos uno de estos puntos tiene un valor absoluto menor que el de $-c$, obteniendo así una contradicción.

7. Sea $f(z)=(z-z_1)^{m_1}\cdot\ldots\cdot(z-z_k)^{m_k}$ para $m_1,\ldots,m_k>0$.

(a) Demuestre que $f'(z)=(z-z_1)^{m_1}\cdot\ldots\cdot(z-z_k)^{m_k}\cdot\sum_{\alpha=1}^{k}m_\alpha(z-z_\alpha)^{-1}$.

(b) Sea $g(z)=\sum_{\alpha=1}^{k}m_\alpha(z-z_\alpha)^{-1}$. Demuestre que si $g(z)=0$, entonces $z_1,\ldots,z_k$ no pueden estar todos sobre el mismo lado de una recta por z. Indicación: Utilice el Problema 25-11.

(c) Se dice que un subconjunto K del plano es **convexo** si K contiene el segmento rectilíneo que une a dos cualesquiera de sus puntos (Figura 8). Para un conjunto cualesquiera A, existe un conjunto convexo mínimo que lo contiene, el cual recibe el nombre de **envoltura convexa** de A (Figura 9); si un punto P no está en la envoltura convexa de A, entonces todo A está contenido en un mismo lado de alguna recta por P. Utilizando esta información, demuestre que las raíces de $f'(z) = 0$ están dentro de la envoltura convexa del conjunto $\{z_1, \dots, z_k\}$. Más información sobre conjuntos convexos puede hallarse en la referencia [18] de las Lecturas aconsejadas.

8. Demuestre que si f es derivable en z, entonces f es continua en z.

***9.** Suponga que $f = u + iv$, donde u y v son funciones de valores reales.

(a) Para y_0 fijo sea $g(x) = u(x + iy_0)$ y $h(x) = v(x + iy_0)$. Demuestre que si $f'(x_0 + iy_0) = \alpha + i\beta$ para α y β reales, entonces $g'(x_0) = \alpha$ y $h'(x_0) = \beta$.

(b) Suponga, por otra parte, que $k(y) = u(x_0 + iy)$ y $l(y) = v(x_0 + iy)$. Demuestre que $l'(y_0) = \alpha$ y $k'(y_0) = -\beta$.

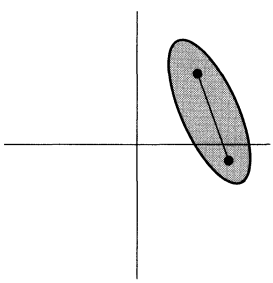
(c) Suponga que $f'(z) = 0$ para todo z. Demuestre que f es una función constante.

10. (a) Utilizando la expresión

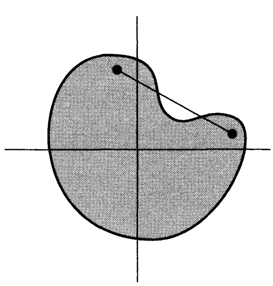
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right),$$

halle $f^{(k)}(x)$ para todo k.

(b) Utilice este resultado para hallar $\operatorname{arctg}^{(k)}(0)$ para todo k.



(a) un subconjunto convexo del plano



(b) un subconjunto no convexo del plano

Figura 8

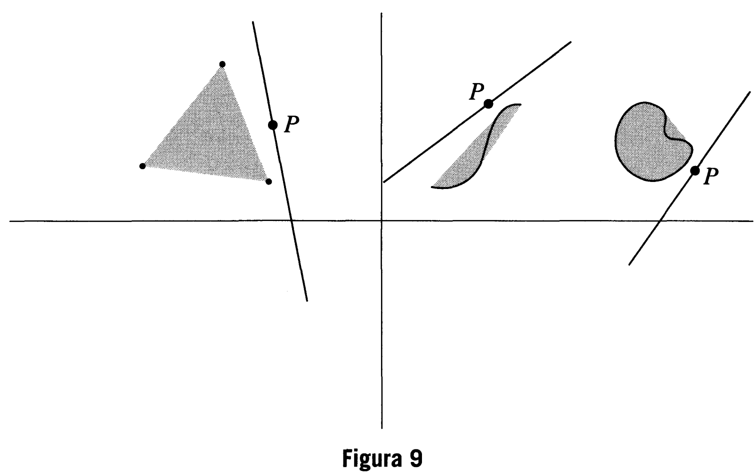


Figura 9

Series complejas de potencias

27

Si el lector no ha adivinado ya de dónde van a proceder las funciones complejas diferenciables, el título de este capítulo debería descubrir el secreto: pretendemos definir funciones por medio de series infinitas. Para esto hará falta un estudio de sucesiones infinitas de números complejos, y de sumas de tales sucesiones, pero (como en el caso de los límites y de la continuidad) las definiciones básicas son casi exactamente las mismas que para sucesiones y series reales.

Formalmente, una **sucesión infinita** de números complejos es una función de valores complejos cuyo dominio es **N**; la adecuada notación con subíndices de las sucesiones de números reales se utilizará también para las sucesiones de números complejos. La mejor representación de una sucesión $\{a_n\}$ de números complejos se obtiene dibujando los puntos a_n en el plano (Figura 1).

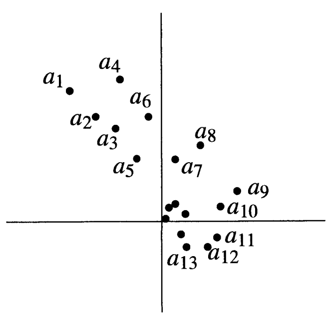


Figura 1

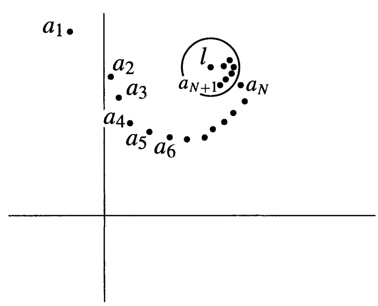


Figura 2

La sucesión indicada en la Figura 1 converge hacia 0, estando definida la "convergencia" de números complejos exactamente de la misma forma que para sucesiones reales: la sucesión $\{a_n\}$ **converge** hacia l, simbólicamente

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l,$$

si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que, para todo n,

$$\text{si } n > N, \text{ entonces } |a_n - l| < \varepsilon.$$

Esta condición significa que cualquier disco centrado en l contendrá a_n para todo n suficientemente grande (Figura 2); expresado de modo más coloquial, la sucesión queda eventualmente dentro de cualquier disco centrado en l.

La definición de convergencia de sucesiones complejas no sólo abarca las sucesiones reales, sino que incluso puede reducirse a este caso ya conocido.

Teorema 1. *Sea*

$$a_n = b_n + ic_n \quad \textit{para } b_n \textit{ y } c_n \textit{ reales},$$

y sea

$$l = \beta + i\gamma \quad \textit{para } \beta \textit{ y } \gamma \textit{ reales}.$$

Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ *si y sólo si*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta \quad y \quad \lim_{n\to\infty} c_n = \gamma.$$

Demostración. La demostración se deja como ejercicio. Si queda alguna duda acerca de cómo proceder, debe consultarse el Teorema 1, análogo al actual, del Capítulo 26. ■

La **suma** de una sucesión $\{a_n\}$ se define, una vez más, como $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, donde

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n.$$

Las sucesiones para las cuales este límite existe se llaman **sumables**; podemos decir también que la serie infinita $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge** si este límite existe, y **diverge** en caso contrario. No hace falta desarrollar nuevas pruebas de convergencia de series infinitas, gracias al siguiente teorema.

Teorema 2. *Sea*

$$a_n = b_n + ic_n \quad \textit{para } b_n \textit{ y } c_n \textit{ reales}.$$

Entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge si y sólo si* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *y* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *convergen ambas, y en este caso*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n + i\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n\right).$$

Demostración. Esto es una consecuencia inmediata del Teorema 1 aplicado a la sucesión de sumas parciales de $\{a_n\}$. ■

Para las series complejas existe también el concepto de convergencia absoluta: la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge absolutamente** si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge (ésta es una serie de números reales, a la que, por tanto, pueden aplicarse nuestras pruebas anteriores). El siguiente teorema ya no es tan fácil como el anterior.

Teorema 3. *Sea*

$$a_n = b_n + ic_n \quad \textit{para } b_n \textit{ y } c_n \textit{ reales}.$$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente si y sólo si* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *convergen ambas absolutamente.*

Demostración. Supongamos primero que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ convergen ambas absolutamente, es decir, que $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ convergen ambas. Se sigue que $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| + |c_n|$ converge. Ahora bien,

$$|a_n| = |b_n + ic_n| \leq |b_n| + |c_n|.$$

De la prueba de comparación se deduce que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge (los números $|a_n|$ y $|b_n| + |c_n|$ son reales y no negativos). Así pues, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

Supongamos ahora que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge. Al ser

$$|a_n| = \sqrt{{b_n}^2 + {c_n}^2},$$

está claro que

$$|b_n| \leq |a_n| \quad \text{y} \quad |c_n| \leq |a_n|.$$

Una vez más, la prueba de comparación demuestra que $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ convergen. ■

Son en particular dignas de mención dos consecuencias del Teorema 3. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ convergen también absolutamente; en consecuencia $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ convergen, según el Teorema 23-5, de modo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge según el Teorema 2. Dicho de otro modo, la convergencia absoluta implica la convergencia. Razonamientos análogos demuestran que cualquier reordenación de una serie absolutamente convergente tiene la misma suma. Estos hechos se pueden demostrar también directamente, sin aplicar los teoremas correspondientes para los números reales, estableciendo primero un análogo del criterio de Cauchy (ver Problema 13).

Una vez establecidos estos preliminares, podemos considerar ahora **series complejas de potencias**, es decir, funciones de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots$$

Aquí los números a y a_n pueden ser complejos, y como es natural estamos interesados en el comportamiento de f para z complejo. Lo mismo que en el caso real, consideraremos generalmente series de potencias centradas en 0,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n;$$

en este caso, si $f(z_0)$ converge, entonces $f(z)$ también convergerá para $|z| < |z_0|$. La demostración de este hecho será parecida a la demostración del Teorema 24-6, pero, por razones que pronto se verán, no vamos a utilizar todo el aparato de la convergencia uniforme y de la prueba M de Weierstrass, a pesar de que todo esto tiene su análogo en el campo complejo. Nuestro próximo teorema generaliza por lo tanto sólo una pequeña parte del Teorema 24-6.

Teorema 4. *Supongamos que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n {z_0}^n = a_0 + a_1 z_0 + a_2 {z_0}^2 + \cdots$$

converge para algún $z_0 \neq 0$. Entonces si $|z| < |z_0|$, las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdots$$

convergen ambas absolutamente.

Demostración. Lo mismo que en la demostración del Teorema 24-6, necesitaremos solamente el hecho de que el conjunto de los números $a_n z_0^n$ es acotado: existe un número M tal que

$$|a_n {z_0}^n| \leq M \qquad \text{para todo } n.$$

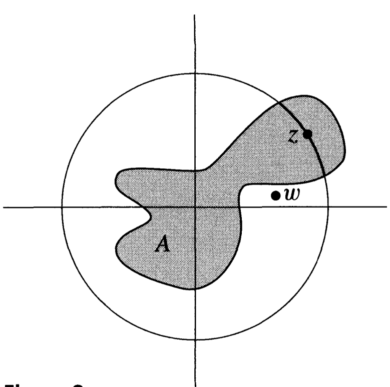


Figura 3

Tenemos entonces

$$|a_n z^n| = |a_n {z_0}^n| \cdot \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$$
$$\leq M \left| \frac{z}{z_0} \right|^n,$$

y, para $z \neq 0$,

$$|n a_n z^{n-1}| = \frac{1}{|z|} n |a_n {z_0}^n| \cdot \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$$
$$\leq \frac{M}{|z|} n \left| \frac{z}{z_0} \right|^n.$$

Al ser convergentes las series $\sum_{n=0}^{\infty} |z/z_0|^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} n\,|z/z_0|^n$, esto demuestra que tanto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ como $\sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$ convergen absolutamente (el razonamiento para $\sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$ suponía que $z \neq 0$, pero ciertamente esta serie converge también para $z = 0$). ■

El Teorema 4 restringe evidentemente en gran manera la extensión del conjunto

$$\left\{ z : \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ converge} \right\}.$$

Por ejemplo, el conjunto sombreado A de la Figura 3 no puede ser el conjunto de todos los z en que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge, puesto que contiene z, pero no el número w que satisface $|w| < |z|$.

Parece poco probable que el conjunto de los puntos en que una serie de potencias converge pueda ser otra cosa que el conjunto de los puntos interiores a un disco. Si admitimos "discos de radio 0" (en los que la serie de potencias converge solamente en 0) y "discos de radio ∞" (cuando la serie de potencias converge en todos los puntos), entonces este enunciado se cumple (con una complicación que pronto mencionaremos); la demostración requiere sólo el Teorema 4 y cierta habilidad para organizarse bien.

Teorema 5. *Para una serie de potencias cualquiera*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

se cumple necesariamente una de las tres posibilidades siguientes:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *converge sólo para* $z = 0$.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *converge absolutamente para todo* z *de* $\mathbf{C}$.

(3) Existe un número $R > 0$ *tal que* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *converge absolutamente si* $|z| < R$ *y diverge si* $|z| > R$. *(Observemos que no mencionamos lo que ocurre cuando* $|z| = R$.*)*

Demostración. Sea

$$S = \left\{ x \text{ en } \mathbf{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n \text{ converge para algún } w \text{ con } |w| = x \right\}.$$

Supongamos primero que S no está acotado. Entonces para cualquier número complejo z, existe un número x en S tal que $|z| < x$. Según la definición de S, esto significa que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ converge para algún w con $|w| = x > |z|$. Se deduce del Teorema 4 que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolutamente. Así pues, en este caso se cumple la posibilidad (2).

Supongamos ahora que S es acotado, y sea R la cota superior mínima de S. Si $R = 0$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge solamente para $z = 0$, de modo que se cumple la posibilidad (1). Supongamos, por otra parte, que $R > 0$. Entonces, si z es un número complejo con $|z| < R$, existe un número x en S con $|z| < x$. Una vez más, esto significa que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ converge para algún w con $|z| < |w|$, de modo que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolutamente. Además, si $|z| > R$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ no converge, puesto que $|z|$ no está en S. ■

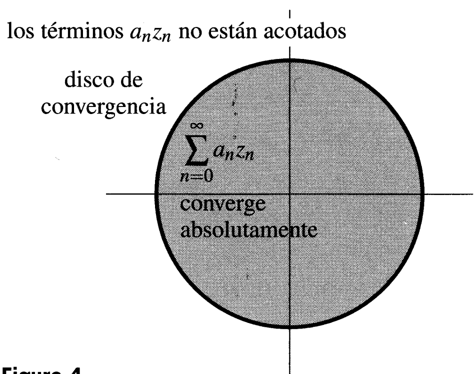


Figura 4

El número R que se presenta en el caso (3) recibe el nombre de **radio de convergencia** de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. En los casos (1) y (2) se acostumbra a decir que el radio de convergencia es 0 e ∞, respectivamente. Cuando $0 < R < \infty$, el disco $\{z : |z| = R\}$ recibe el nombre de **disco de convergencia** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Si z está fuera del disco, entonces, por supuesto, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ no converge, pero en realidad se puede hacer una afirmación mucho más fuerte: los términos $a_n z^n$ ni siquiera están acotados. Para demostrar esto, sea w un número cualquiera con $|z| > |w| > R$; si los términos $a_n z^n$ estuviesen acotados, entonces la demostración del Teorema 4 indicaría que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ converge, lo cual es falso. Así pues (Figura 4), dentro del disco de convergencia la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge de la mejor manera posible (absolutamente) y fuera del disco la serie diverge de la peor manera posible (los términos $a_n z^n$ no están acotados).

Lo que ocurre *sobre* la circunferencia que limita el disco de convergencia es una cuestión mucho más difícil. No vamos a considerar en absoluto esta cuestión, y sólo mencionaremos que existen series de potencias que convergen en todas partes sobre dicha circunferencia, series de potencias que no convergen en ningún punto sobre la misma, y series en las que se da un caso intermedio. (Ver el Problema 5.)

Manipulaciones algebraicas en series complejas de potencias se pueden justificar del mismo modo que en el caso real. Por tanto, si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ ambas tienen un radio de convergencia $\geq R$, entonces $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$ también tiene un radio de convergencia $\geq R$ y $h = f + g$ dentro del disco de radio R. De forma parecida, el producto de Cauchy $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, con $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, tiene radio de convergencia $\geq R$ y $h = fg$ dentro del disco de radio R. Y si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tiene radio de convergencia > 0

y $a_0 \neq 0$, entonces podemos encontrar una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ con radio de convergencia > 0 que representa $1/f$ dentro de su disco de convergencia.

Pero recordemos que lo que nos proponemos en este capítulo es obtener funciones derivables. Necesitamos, por lo tanto, generalizar el resultado, demostrado en el Capítulo 24 para series de potencias reales, de que una función definida mediante una serie de potencias puede ser derivada término a término dentro del disco de convergencia. En este punto ya no podemos imitar la demostración del Capítulo 24, ni siquiera introduciendo la convergencia uniforme, puesto que no disponemos de ningún análogo del Teorema 24-3. Utilizaremos en su lugar un razonamiento directo (el cual hubiera podido usarse también en el Capítulo 24). Antes de empezar la demostración, observaremos que por lo menos no existe ningún problema en cuanto a la convergencia de las series obtenidas mediante derivación término a término. Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tiene radio de convergencia R, entonces el Teorema 4 implica inmediatamente que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ converge también para $|z| < R$. Además, si $|z| > R$, de modo que los términos $a_n z^n$ no están acotados, entonces los términos $n a_n z^{n-1}$ evidentemente no están acotados, de modo que $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ no converge. Esto demuestra que el radio de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ es exactamente R también.

Teorema 6. *Si la serie de potencias*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

tiene radio de convergencia $R > 0$, entonces f es derivable en z para todo z con $|z| < R$, y

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Demostración. Vamos a utilizar otro "razonamiento $\varepsilon/3$". El hecho de que el teorema se cumple claramente para funciones polinómicas hace aconsejable escribir

$$(*) \qquad \left| \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{((z+h)^n - z^n)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right|$$
$$\leq \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{((z+h)^n - z^n)}{h} - \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{((z+h)^n - z^n)}{h} \right|$$
$$+ \left| \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{((z+h)^n - z^n)}{h} - \sum_{n=1}^{N} n a_n z^{n-1} \right|$$
$$+ \left| \sum_{n=1}^{N} n a_n z^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right|.$$

Demostraremos que para cualquier $\varepsilon > 0$, cada uno de los valores absolutos de la derecha puede hacerse $< \varepsilon/3$ eligiendo N suficientemente grande y h suficientemente pequeño. Esto demostrará claramente el teorema.

Solamente presentará alguna dificultad el primer término de la derecha de $(*)$. Para empezar, elegiremos algún z_0 con $|z| < |z_0| < R$; en adelante consideraremos solamente valores de h con $|z+h| \leq |z_0|$. La expresión $((z+h)^n - z^n)/h$ puede escribirse de manera más conveniente si recordamos que

$$\frac{x^n - y^n}{x-y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + y^{n-1}.$$

Aplicando esto a

$$\frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \frac{(z+h)^n - z^n}{(z+h)-z},$$

obtenemos

$$\frac{(z+h)^n - z^n}{h} = (z+h)^{n-1} + z(z+h)^{n-2} + \cdots + z^{n-1}.$$

Al ser

$$|(z+h)^{n-1} + z(z+h)^{n-2} + \cdots + z^{n-1}| \leq n|z_0|^{n-1},$$

obtenemos

$$\left| a_n \frac{((z+h)^n - z^n)}{h} \right| \leq n|a_n| \cdot |z_0|^{n-1}.$$

Pero la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n| \cdot |z_0|^{n-1}$ converge, de modo que si N es suficientemente grande, entonces

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n| \cdot |z_0|^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Esto significa que

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{((z+h)^n - z^n)}{h} - \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{((z+h)^n - z^n)}{h} \right| \\
&\qquad = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \frac{((z+h)^n - z^n)}{h} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| a_n \frac{((z+h)^n - z^n)}{h} \right| \\
&\qquad \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n| \cdot |z_0|^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

En resumen, si N es suficientemente grande, entonces

(1) $$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{((z+h)^n - z^n)}{h} - \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{((z+h)^n - z^n)}{h} \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

para *todo* h con $|z+h| \leq |z_0|$.

El tercer término de la derecha de $(*)$ resulta fácil de tratar: al ser $\sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$ convergente, se deduce que si N es suficientemente grande, entonces

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1} - \sum_{n=1}^{N} na_n z^{n-1} \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2}$$

Finalmente, eligiendo un N tal que (1) y (2) se cumplan, observamos que

$$\lim_{h \to 0} \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{((z+h)^n - z^n)}{h} = \sum_{n=1}^{N} na_n z^{n-1},$$

puesto que la función polinómica $g(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ es ciertamente derivable. Por lo tanto,

$$\left| \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n((z+h)^n - z^n)}{h} - \sum_{n=1}^{N} na_n z^{n-1} \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3}$$

para h suficientemente pequeño.

Según hemos indicado ya, (1), (2) y (3) demuestran el teorema. ■

El Teorema 6 tiene un corolario evidente: una función representada mediante una serie de potencias es infinitamente diferenciable dentro del disco de convergencia, y la serie de potencias es su serie de Taylor en 0. Se deduce en particular que f es continua dentro del disco de convergencia, ya que una función derivable en z es continua en z (Problema 26-8).

La continuidad de una serie de potencias dentro de su disco de convergencia ayuda a explicar el comportamiento de ciertas series de Taylor obtenidas para funciones reales, y proporciona las soluciones prometidas a las cuestiones que surgieron al final del Capítulo 24. Hemos visto ya que la serie de Taylor para la función $f(z) = 1/(1+z^2)$, a saber,

$$1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots,$$

converge para valores de z reales solamente cuando $|z| < 1$, y en consecuencia tiene radio de convergencia 1. No es accidental que el disco de convergencia contenga los dos puntos i y $-i$ en los cuales f no está definida. Si esta serie de potencias convergiera en un disco de radio mayor que 1, entonces (Figura 5) representaría una función que sería continua en aquel disco, en particular en i y en $-i$. Pero esto es imposible, puesto que es igual a $1/(1+z^2)$ dentro del disco unidad, $1/(1+z^2)$ no tiende hacia ningún límite cuando z tiene hacia i o $-i$ desde dentro del disco unidad.

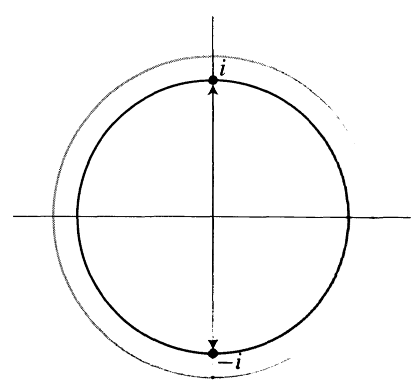


Figura 5

El uso de los números complejos arroja también alguna luz sobre el extraño comportamiento de la serie de Taylor para la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Aunque no hemos definido todavía e^z para z complejo, es de esperar que se cumpla que si y es real y distinto de 0, entonces

$$f(iy) = e^{-1/(iy)^2} = e^{1/y^2}.$$

El hecho interesante acerca de esta expresión es que se hace grande cuando y se hace pequeño. Así pues, f no será ni siquiera continua en 0 cuando se defina para números complejos, de modo que apenas puede sorprender que sea igual a su serie de Taylor solamente para $z = 0$.

El método que utilizaremos en realidad para definir e^z (lo mismo que $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$) para z complejo debería ahora estar claro. Para x reales sabemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots, \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots, \\ e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots \end{aligned}$$

Para z complejo *definimos* por lo tanto

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots, \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots, \\ \exp(z) = e^z &= 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots \end{aligned}$$

Entonces $\operatorname{sen}'(z) = \cos z$, $\cos'(z) = -\operatorname{sen} z$ y $\exp'(z) = \exp(z)$ según el Teorema 6. Además, si sustituimos z por iz en la serie para e^z, y efectuando una reordenación de los términos (justificada por la convergencia absoluta), ocurre algo particularmente interesante:

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \cdots \\ &= 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{iz^5}{5!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\right), \end{aligned}$$

de modo que

$$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z.$$

Según las definiciones (es decir, las series de potencias), está claro que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(-z) &= -\operatorname{sen} z, \\ \cos(-z) &= \cos z, \end{aligned}$$

de modo que tenemos también

$$e^{-iz} = \cos z - i \operatorname{sen} z.$$

A partir de las ecuaciones para e^{iz} y e^{-iz} podemos deducir las fórmulas

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

El desarrollo de las series complejas de potencias coloca así a la función exponencial en el verdadero centro del desarrollo de las funciones elementales: pone de manifiesto una conexión entre las funciones trigonométricas y la exponencial que nunca pudo imaginarse cuando se definieron por primera vez estas funciones, y que jamás se hubiese descubierto de no haber sido por la introducción de los números complejos. Como producto secundario de esta relación, obtenemos una conexión, hasta aquí insospechada, entre los números e y π: si en la fórmula

$$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$$

hacemos $z = \pi$, obtenemos el notable resultado

$$e^{i\pi} = -1.$$

(De forma más general, $e^{2\pi i/n}$ es una raíz n-ésima de 1.)

Con estas observaciones concluimos nuestra investigación de las funciones complejas. Y a pesar de todo quedan todavía sin mencionar algunas hechos básicos acerca de las series de potencias. Hasta aquí, apenas hemos considerado series de potencias centradas en a,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

excepto para $a = 0$. Esta omisión se hizo en parte para simplificar la exposición. Para las series de potencias centradas en a existen versiones evidentes de todos los teoremas de este capítulo (las demostraciones requieren solamente modificaciones triviales): existe un número R (posiblemente 0 o "∞") tal que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ converge absolutamente para z con $|z-a| < R$, y tiene términos no acotados para z con $|z-a| > R$; además, para todo z con $|z-a| < R$ la función

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

tiene derivada

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1}.$$

Resulta menos directo investigar la posibilidad de representar una función mediante una serie de potencias centrada en b, si ya está escrita como serie de potencias centrada en a. Si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

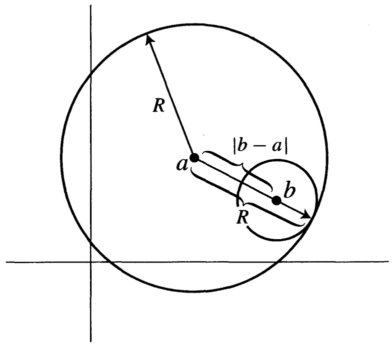


Figura 6

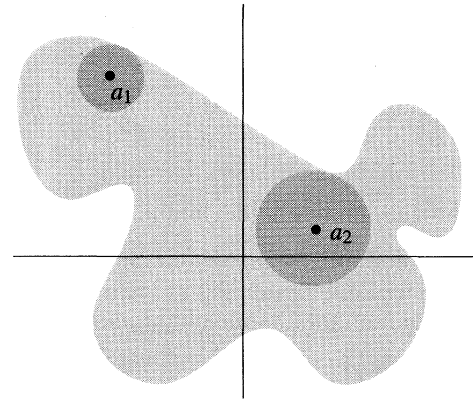


Figura 7

tiene radio de convergencia R, y b es un punto con $|b-a|<R$ (Figura 6), entonces se cumple que $f(z)$ puede expresarse también como serie de potencias centrada en b,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-b)^n$$

(los números b_n son necesariamente $f^{(n)}(b)/n!$); además, esta serie tiene un radio de convergencia que es por lo menos $R-|b-a|$ (*puede ser mayor*).

No vamos a demostrar los hechos mencionados en el párrafo anterior, y quedan otros hechos importantes que tampoco vamos a demostrar. Por ejemplo, si

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \qquad \text{y} \qquad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-b)^n,$$

y $g(b)=a$, entonces debería ser posible expresar $f\circ g$ como serie de potencias centrada en b. Todos estos hechos podrían demostrarse ahora sin introducir nuevos conceptos básicos, pero las demostraciones no serían tan fáciles como las demostraciones relativas a las sumas, productos y recíprocos de series de potencias. La posibilidad de cambiar una serie de potencias centrada en a en una centrada en b resulta todavía más complicado, y el tratamiento de $f\circ g$ exige verdadera habilidad. En vez de terminar esta sección con una exhibición de potencia calculatoria, vamos a dar una visión anticipada del "análisis complejo", una de las ramas más elegantes de la matemática, donde todos estos hechos se deducen como consecuencias directas de algunos resultados fundamentales.

Las series de potencias fueron introducidas en este capítulo con el fin de obtener funciones complejas diferenciables. Puesto que estas funciones resultan ser en realidad infinitamente diferenciables, resulta natural suponer que sólo hemos seleccionado una colección muy especial de funciones complejas diferenciables. Los teoremas fundamentales de análisis complejo demuestran que esto no es así en absoluto:

> *Si una función compleja está definida en alguna región A del plano y es diferenciable en A, entonces automáticamente es infinitamente diferenciable en A. Además, para todo punto a de A la serie de Taylor para f en a convergerá hacia f en cualquier disco contenido en A (Figura 7).*

Estos hechos son los primeros que hay que demostrar en el análisis complejo. Es imposible dar una idea de las demostraciones mismas: los métodos utilizados difieren esencialmente de los análisis elemental. Sin embargo, admitido esto, los hechos mencionados pueden demostrarse fácilmente.

Supongamos, por ejemplo, que f y g son funciones que pueden expresarse como series de potencias. Entonces, según hemos demostrado, f y g son diferenciables; se deduce entonces de fáciles teoremas generales que $f+g$, $f\cdot g$, $1/g$ y $f\circ g$ son también diferenciables. Recurriendo a los resultados del análisis complejo, se deduce que pueden expresarse como series de potencias.

Ya sabemos cómo calcular las series de potencias asociadas a $f+g$, $f\cdot g$ y $1/g$ a partir de las correspondientes a f y g. Es también fácil adivinar como calcularíamos una expresión para $f\circ g$ como una serie de potencias en $(z-b)$ cuando ya tenemos las series de potencias

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

$$g(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-b)^k,$$

con $a=g(b)=b_0$, por tanto

$$g(z)-a=\sum_{k=1}^{\infty}b_k(z-b)^k.$$

En primer lugar, sabemos como calcular la serie de potencias

$$(g(z)-a)^l=\left(\sum_{k=1}^{\infty}b_k(z-b)^k\right)^l,$$

y esta serie de potencias empezará con $(z-b)^l$. Por consiguiente, el coeficiente de z^n en

$$f(g(z))=\sum_{l=0}^{\infty}a_l(g(z)-a)^l$$

puede expresarse como una suma finita, que contiene sólo coeficientes que aparecen en las n primeras potencias de $g(z)-a$.

Análogamente, si

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

tiene radio de convergencia R, entonces f es diferenciable en la región $A=\{z:|z-a|<R\}$. Así pues, si b está en A, es posible expresar f como serie de potencias centrada en b, la cual convergerá en el disco de radio $R-|b-a|$. El coeficiente correspondiente a z^n será $f^{(n)}(b)/n!$. Esta serie puede converger en realidad en un disco más amplio, ya que $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$ puede ser la serie para una función diferenciable en una región más amplia que A. Por ejemplo, supongamos que $f(z)=1/(1+z^2)$. Entonces f es diferenciable.

excepto en i y $-i$, donde no está definida. Así pues, $f(z)$ puede expresarse como serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ con radio de convergencia 1 (sabemos de hecho que $a_{2n} = (-1)^n$ y $a_k = 0$ si k es impar). Es también posible escribir

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - \tfrac{1}{2})^n,$$

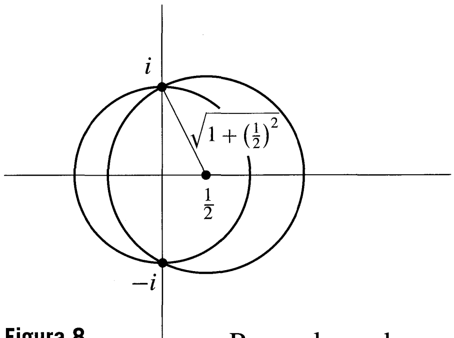


Figura 8

donde $b_n = f^{(n)}(\frac{1}{2})/n!$. Podemos predecir fácilmente el radio de convergencia de esta serie: es $\sqrt{1+(\frac{1}{2})^2}$, la distancia de $\frac{1}{2}$ a i o $-i$ (Figura 8). Como un incentivo más para proseguir el estudio del análisis complejo, mencionamos otro resultado que está muy cerca de la superficie y que se encuentra en cualquier tratado sobre la materia.

Para valores de z reales, los valores de sen z están siempre entre -1 y 1, pero para los z complejos esto no se cumple en absoluto. Efectivamente, si $z = iy$, para y real, entonces

$$\text{sen } iy = \frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i} = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i}.$$

Si y es grande, entonces sen iy es también grande en valor absoluto. Este comportamiento de sen es típico de funciones que están definidas y son derivables sobre todo el plano complejo (tales funciones reciben el nombre de *enteras*). Un resultado que se presenta muy pronto en análisis complejo es el siguiente:

> *Teorema de Liouville: Las únicas funciones enteras acotadas son las funciones constantes.*

Como aplicación sencilla del Teorema de Liouville, consideremos una función polinómica

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0,$$

donde $n > 1$, de modo que f no es constante. Sabemos ya que $f(z)$ es grande cuando z es grande, de modo que el Teorema de Liouville no nos dice nada interesante de f. Pero consideremos la función

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}.$$

Si $f(z)$ no fuese nunca 0, entonces g sería entera; al hacerse $f(z)$ grande para z grande, la función g sería también acotada, en contradicción con el Teorema de Liouville. Así pues, $f(z) = 0$ para algún z, con lo que hemos demostrado el Teorema Fundamental del Álgebra.

Problemas

1. Decida si converge cada una de las siguientes series, y si convergen absolutamente.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n!}$. (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2i}{2^n}$. (iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$.

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)^n$. (v) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n} + i^n \frac{\log n}{n}$.

2. Utilice la prueba del cociente para demostrar que el radio de convergencia de cada una de las siguientes series de potencias es 1. (En cada caso los cocientes de términos sucesivos tenderán a un límite < 1 si $|z| < 1$, pero para $|z| > 1$ los cocientes tenderán hacia ∞ o hacia un límite > 1.)

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$. (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. (iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^n$.

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n+2^{-n})z^n$. (v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^{n!}$.

3. Utilice la prueba de la raíz (Problema 23-9) para hallar el radio de convergencia de cada una de las siguientes series de potencias. (En algunos casos, se necesitarán límites obtenidos en los problemas del Capítulo 22.)

(i) $\displaystyle\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3}+\frac{z^3}{2^2}+\frac{z^4}{3^2}+\frac{z^5}{2^3}+\frac{z^6}{3^3}+\cdots$.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$. (iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,z^n}{n^n}$. (iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} z^n$. (v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^{n!}$.

4. La prueba de la raíz puede utilizarse siempre, por lo menos en teoría, para hallar el radio de convergencia de una serie de potencias; de hecho, un análisis detenido de la situación lleva a una fórmula para el radio de convergencia conocida por "fórmula de Cauchy-Hadamard." Suponga primero que el conjunto de los números $\sqrt[n]{|a_n|}$ es acotado.

(a) Utilice el Problema 23-9 para demostrar que si $\displaystyle\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}\,|z| < 1$, entonces $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge.

(b) Demuestre también que si $\displaystyle\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}\,|z| > 1$, entonces $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tiene términos no acotados.

(c) Las partes (a) y (b) demuestran que el radio de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es $1/\displaystyle\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ (donde "1/0" significa "∞"). Para completar la fórmula, defina $\displaystyle\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ si el conjunto de todos los $\sqrt[n]{|a_n|}$ es no acotado. Demuestre que en este caso $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverge para $z \neq 0$, de modo que el radio de convergencia es 0 (el cual puede ser considerado como "$1/\infty$").

5. Considere las tres series siguientes del Problema 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} z^n.$$

Demuestre que la primera serie converge por todas partes sobre el disco unidad; que la tercera serie no converge en ninguna parte sobre el disco unidad, y que la segunda serie converge para un punto por lo menos del disco unidad y diverge también sobre dicho disco por lo menos en un punto.

6. (a) Demuestre que $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$ para todos los números complejos z y w demostrando que la serie e^{z+w} es el producto de Cauchy de las series e^z y e^w.

(b) Demuestre que $\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w$ y $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w$ para todos los complejos z y w.

7. (a) Demuestre que todo número complejo de valor absoluto 1 puede expresarse como e^{iy} para algún número real y.

(b) Demuestre que $|e^{x+iy}| = e^x$ para x e y reales.

8. (a) Demuestre que exp toma todos los valores complejos excepto 0.

(b) Demuestre que sen toma todos los valores complejos.

9. Para cada una de las siguientes funciones, calcule lo tres primeros términos no nulos de la serie de Taylor centrada en 0 correspondiente, mediante manipulación de series de potencias.

(i) $f(z) = \operatorname{tg} z$.

(ii) $f(z) = z(1-z)^{-1/2}$.

(iii) $f(z) = \dfrac{e^{\operatorname{sen} z} - 1}{z}$.

(iv) $f(z) = \log(1-z^2)$.

(v) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 z}{z^2}$.

(vi) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(z^2)}{z \cos^2 z}$.

(vii) $f(z) = \dfrac{1}{z^4 - 2z^2 + 3}$.

(viii) $f(z) = \dfrac{1}{z}[e^{(\sqrt{1+z}-1)} - 1]$.

10. (a) Suponga que escribimos una función compleja diferenciable f como $f = u + iv$, donde u y v son funciones de valores reales. Denote por $\bar{u}$ y $\bar{v}$ las restricciones de u y v a los números reales. En otras palabras, $\bar{u}(x) = u(x)$ para números reales x (pero $\bar{u}$ no está definida para otros x). Utilizando el Problema 26-9, demuestre que para cualquier x tenemos

$$f'(x) = \bar{u}'(x) + i\bar{v}'(x),$$

donde f' denota la derivada compleja, mientras que $\bar{u}'$ y $\bar{v}'$ denotan las derivadas de estas funciones de valores reales en **R**.

(b) Demuestre, con más generalidad, que

$$f^{(k)}(x) = \bar{u}^{(k)}(x) + i\bar{v}^{(k)}(x).$$

(c) Suponga que f satisface la ecuación

$$(*) \qquad f^{(n)} + a_{n-1}f^{(n-1)} + \cdots + a_0 f = 0,$$

donde las a_i son números reales, y donde las $f^{(k)}$ denotan las derivadas complejas de órdenes superiores. Demuestre que $\bar{u}$ y $\bar{v}$ satisfacen la misma ecuación, donde $\bar{u}^{(k)}$ y $\bar{v}^{(k)}$ indican ahora las derivadas de ordenes superiores de funciones de valores reales en **R**.

(d) Demuestre que si $a = b + ci$ es una raíz compleja de la ecuación $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$, entonces $f(x) = e^{bx}$ sen cx y $f(x) = e^{bx}\cos cx$ son ambas soluciones de $(*)$.

11. (a) Demuestre que exp *no* es uno-uno sobre **C**.

(b) Dado $w \neq 0$, demuestre que $e^z = w$ si y sólo si $z = x + iy$ con $x = \log|w|$ (aquí log denota la función logarítmica real), e y un argumento de w.

*(c) Demuestre que no existe ninguna función continua log definida sobre números complejos no nulos, tal que $\exp(\log(z)) = z$ para todo $z \neq 0$. (Demuestre que log no puede ni siquiera ser definida de manera continua para $|z| = 1$.)

Al no haber manera de definir una función logarítmica continua no podemos hablar de *el* logaritmo de un número complejo, sino sólo de "un logaritmo para w", significando uno de los infinitos números z con $e^z = w$. Y para los números complejos a y b, definimos a^b como un *conjunto* de números complejos, a saber, el conjunto de todos los números $e^{b\log a}$ o, más exactamente, el conjunto de todos los números e^{bz}, donde z es un logaritmo de a.

(d) Si m es un entero, entonces a^m es simplemente un único número, el mismo que se obtiene mediante la definición elemental de a^m.

(e) Si m y n son enteros, entonces el conjunto $a^{m/n}$ coincide con el conjunto de valores obtenidos mediante su habitual definición elemental, es decir el conjunto de todos los b^m donde b es una raíz n-ésima de a.

(f) Si a y b son números reales y b es un número irracional, entonces a^b contiene infinitos elementos, incluso cuando $a > 0$.

(g) Halle todos los logaritmos de i, y todos los valores de i^i.

(h) Mediante $(a^b)^c$ denotamos el conjunto de todos los números de la forma z^c para algún número z en el conjunto a^b. Demuestre que $(1^i)^i$ tiene infinitos elementos, mientras que $1^{i\cdot i}$ tiene sólo uno.

(i) Demuestre que todos los valores de $a^{b\cdot c}$ son también valores de $(a^b)^c$. ¿Es $a^{b\cdot c} = (a^b)^c \cap (a^c)^b$?

12. (a) Para x real, demuestre que podemos elegir $\log(x+i)$ y $\log(x-i)$ como

$$\log(x+i) = \log\left(\sqrt{1+x^2}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right),$$

$$\log(x-i) = \log\left(\sqrt{1+x^2}\right) - i\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right).$$

(Servirá de ayuda observar que $\pi/2 - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 1/x$ para $x > 0$.)

(b) De la expresión

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)$$

se obtiene, formalmente,

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2i}[\log(x-i) - \log(x+i)].$$

Utilice la parte (a) para comprobar que esta solución concuerda con la usual.

13. (a) Una sucesión $\{a_n\}$ de números complejos recibe el nombre de **sucesión de Cauchy** si $\lim\limits_{m,n\to\infty} |a_m - a_n| = 0$. Suponga que $a_n = b_n + ic_n$, donde b_n y c_n son reales. Demuestre que $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy si y sólo si $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ son sucesiones de Cauchy.

(b) Demuestre que toda sucesión de Cauchy de números complejos converge.

(c) Proporcione demostraciones directas, sin aplicar los teoremas acerca de series reales, de que una serie absolutamente convergente es convergente y de que cualquier reordenación tiene la misma suma. (Está permitido, y en realidad es aconsejable, utilizar las *demostraciones* de los teoremas correspondientes para series reales.)

14. (a) Demuestre que

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{n}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}} e^{i(n+1)x/2}.$$

(b) Deduzca las fórmulas para $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx$ y $\sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx$ que se indican en el Problema 15-33.

15. Considere la sucesión de Fibonacci, $\{a_n\}$ definida por $a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$.

(a) Si $r_n = a_{n+1}/a_n$, demuestre que $r_{n+1} = 1 + 1/r_n$.

(b) Demuestre que $r = \lim\limits_{n\to\infty} r_n$ existe, entonces $r = 1 + 1/r$, de modo que $r = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$.

(c) Demuestre que el límite no existe. Indicación: Si $r_n < \left(1+\sqrt{5}\right)/2$, entonces $r_n{}^2 - r_n - 1 < 0$ y $r_n < r_{n+2}$.

(d) Demuestre que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ tiene radio de convergencia $2/\left(1+\sqrt{5}\right)$. (Utilizando los teoremas no demostrados de este capítulo y el hecho de que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n = -1/(z^2+z-1)$ a partir del Problema 24-16 podríamos haber predicho que el radio de convergencia es igual al menor valor absoluto de las raíces de $z^2 + z - 1 = 0$; puesto que dichas raíces son $\left(-1 \pm \sqrt{5}\right)/2$, el radio de convergencia debería ser $\left(-1+\sqrt{5}\right)/2$. Observe que este número es en realidad igual a $2/\left(1+\sqrt{5}\right)$.)

16. Puesto que $(e^z - 1)/z$ puede escribirse como serie de potencias $1 + z/2! + z^2/3! + \cdots$ que es distinta de cero en 0, se deduce que hay una serie de potencias

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$$

con radio de convergencia no nulo. Utilizando los teoremas no demostrados de este capítulo, podemos incluso predecir el radio de convergencia: es igual a 2π, puesto que éste es el menor valor absoluto de los números no nulos de la forma $z = 2k\pi i$ que satisfacen $e^z - 1 = 0$. Los números b_n que aparecen aquí son conocidos como los **números de Bernoulli**. *

(a) Claramente $b_0 = 1$. Ahora demuestre que

$$\frac{z}{e^z - 1} = -\frac{z}{2} + \frac{z}{2} \cdot \frac{e^z + 1}{e^z - 1},$$

$$\frac{e^{-z} + 1}{e^{-z} - 1} = -\frac{e^z + 1}{e^z - 1},$$

y deduzca que

$$b_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad b_n = 0 \quad \text{si } n \text{ es impar y } n > 1.$$

(b) Hallando el coeficiente de z^n en el segundo miembro de la ecuación

$$z = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} z^k\right)\left(z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right),$$

demuestre que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} b_i = 0 \quad \text{para } n > 1.$$

Esta fórmula nos permite calcular cualquier b_k en términos de los anteriores, y demuestra que cada uno de ellos es racional. Calcule dos o tres de los siguientes:

$$b_2 = \tfrac{1}{6}, \quad b_4 = -\tfrac{1}{30}, \quad b_6 = \tfrac{1}{42}, \quad b_8 = -\tfrac{1}{30}.$$

*(c) La parte (a) demuestra que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{2n}}{(2n)!} z^{2n} = \frac{z}{2} \cdot \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \frac{z}{2} \cdot \frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}}.$$

Sustituya z por $2iz$ y demuestre que

$$z \operatorname{ctg} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{2n}}{(2n)!} (-1)^n 2^{2n} z^{2n}.$$

*(d) Demuestre que

$$\operatorname{tg} z = \operatorname{ctg} z - 2 \operatorname{ctg} 2z.$$

*(e) Demuestre que

$$\operatorname{tg} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n}}{(2n)!} (-1)^{n-1} 2^{2n} (2^{2n} - 1) z^{2n-1}.$$

(Esta serie converge para $|z| < \pi/2$.)

---

*A veces los números $B_n = (-1)^{n-1} b_{2n}$ son llamados los números de Bernoulli, porque $b_n = 0$ si n es un número impar y > 1 (ver el apartado (a)) y porque los números b_{2n} alternan su signo. aunque no lo demostraremos. Se dan también otras variantes de la citada nomenclatura.

17. Los números de Bernoulli desempeñan un papel importante en un teorema cuyo enunciado se hace cómodamente mediante una notación disparatada. Utilicemos D para denotar el "operador de derivación," de modo que Df denota f'. Entonces $D^k f$ significará $f^{(k)}$ y $e^D f$ significará $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}/n!$ (por supuesto esta serie no tiene sentido en general, pero tendrá sentido si f es, por ejemplo, una función polinómica). Finalmente, sea Δ el "operador diferencia" para el cual $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$. El teorema de Taylor implica ahora, prescindiendo de cuestiones de convergencia, que

$$f(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!},$$

o

$$(*) \qquad f(x+1) - f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!};$$

podemos escribir esto simbólicamente como $\Delta f = (e^D - 1)f$, donde 1 es el "operador identidad". Esto puede escribirse, todavía más simbólicamente, $\Delta = e^D - 1$, lo cual sugiere que

$$D = \frac{D}{e^D - 1}\Delta.$$

Así pues, deberíamos tener evidentemente

$$D = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} D^k \Delta,$$

es decir,

$$(**) \qquad f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!}[f^{(k)}(x+1) - f^{(k)}(x)].$$

¡Lo bueno que tiene todo este disparate es que da resultado!

(a) Demuestre que $(**)$ es literalmente verdad si f es una función polinómica (en cuyo caso la suma infinita es en realidad una suma finita). Indicación: Aplicando $(*)$ a $f^{(k)}$, halle una fórmula para $f^{(k)}(x+1) - f^{(k)}(x)$; utilice después la fórmula del Problema 16(b) para hallar el coeficiente de $f^{(j)}(x)$ del segundo miembro de $(**)$.

(b) Deduzca de $(**)$ que

$$f'(0) + \cdots + f'(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!}[f^{(k)}(n+1) - f^{(k)}(0)].$$

(c) Demuestre que para cualquier función polinómica g tenemos

$$g(0) + \cdots + g(n) = \int_0^{n+1} g(t)\,dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k!}[g^{(k-1)}(n+1) - g^{(k-1)}(0)].$$

(d) Aplique esto a $g(x) = x^p$ para demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \sum_{k=1}^{p} \frac{b_k}{k}\binom{p}{k-1} n^{p-k+1}.$$

Utilice el hecho de que $b_1 = -\frac{1}{2}$, y demuestre que

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \sum_{k=2}^{p} \frac{b_k}{k}\binom{p}{k-1} n^{p-k+1}.$$

Los diez primeros ejemplares de esta fórmula fueron expuestos en el Problema 2-7, el cual proponía como ejercicio descubrir la regla general. Esto puede parecer ahora una sugerencia absurda, pero los números de Bernoulli fueron descubiertos en realidad precisamente de esta manera. Después de escribir estas diez fórmulas, Bernoulli dice (en su obra póstuma *Ars Conjectandi*, 1713): "Cualquiera que examine la serie en cuanto a su regularidad puede continuar la tabla." Escribe después la fórmula anterior sin dar de ella demostración alguna, observando solamente que los coeficientes b_k (que él denota simplemente por $A, B, C, \ldots$) satisfacen la ecuación del Problema 16(b). La relación entre estos números y los coeficientes de las series de potencias para $z/(e^z - 1)$ fue descubierta por Euler.

***18.** La fórmula del Problema 17(c) puede generalizarse al caso en que g no es una función polinómica; la suma infinita debe ser sustituida por una suma finita más un resto. Para hallar una expresión del resto, resulta útil introducir algunas funciones nuevas.

(a) Los *polinomios de Bernoulli* φ_n están definidos por

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} x^k.$$

Los tres primeros son

$$\varphi_1(x) = x - \frac{1}{2},$$

$$\varphi_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$

$$\varphi_3(x) = x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2}.$$

Demuestre que

$$\begin{aligned} \varphi_n(0) &= b_n, \\ \varphi_n(1) &= b_n \qquad \text{si } n > 1, \\ \varphi_n{}'(x) &= n\varphi_{n-1}(x), \\ \varphi_n(x) &= (-1)^n \varphi_n(1-x). \end{aligned}$$

Indicación: Demuestre la última ecuación mediante inducción sobre n.

(b) Sea $R_N{}^k(x)$ el resto de la fórmula de Taylor para $f^{(k)}$, sobre el intervalo $[x, x+1]$, de modo que

$$(*) \qquad f^{(k)}(x+1) - f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{f^{(k+n)}(x)}{n!} + R_N{}^k(x).$$

Demuestre que

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{b_k}{k!}[f^{(k)}(x+1) - f^{(k)}(x)] - \sum_{k=0}^{N} \frac{b_k}{k!} R_{N-k}{}^k(x).$$

Indicación: Imite el Problema 17(a). Observe el subíndice $N-k$ de R.

(c) Utilice la forma integral del resto para demostrar que

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{b_k}{k!} R_{N-k}{}^{k}(x) = \int_x^{x+1} \frac{\varphi_N(x+1-t)}{N!} f^{(N+1)}(t)\,dt.$$

(d) Deduzca la "Fórmula de Sumación de Euler-Maclaurin":

$$g(x)+g(x+1)+\cdots+g(x+n)$$

$$= \int_x^{x+n+1} g(t)\,dt + \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{k!}[g^{(k-1)}(x+n+1) - g^{(k-1)}(x)] + S_N(x,n),$$

donde

$$S_N(x,n) = -\sum_{j=0}^{n} \int_{x+j}^{x+j+1} \frac{\varphi_N(x+j+1-t)}{N!} g^{(N)}(t)\,dt.$$

(e) Sea ψ_n la función periódica, con período 1, que satisface $\psi_n(t) = \varphi_n(t)$ para $0 \le t < 1$. (La parte (a) implica que si $n > 1$, entonces ψ_n es continua, ya que $\varphi_n(1) = \varphi_n(0)$, y también que ψ_n es par si n es par, e impar si n es impar.) Demuestre que

$$S_N(x,n) = -\int_x^{x+n+1} \frac{\psi_N(x-t)}{N!} g^{(N)}(t)\,dt$$

$$\left(= (-1)^{N+1} \int_x^{x+n+1} \frac{\psi_N(t)}{N!} g^{(N)}(t)\,dt \qquad \text{si } x \text{ es un entero} \right).$$

Contrariamente a lo que ocurre con el resto del Teorema de Taylor, el resto $S_N(x,n)$ no satisface por lo general $\lim_{N\to\infty} S_N(x,n) = 0$, porque los números y las funciones de Bernoulli se hacen grandes muy rápidamente (a pesar de que los primeros ejemplos no sugieren esto). Sin embargo, se puede obtener muchas veces información importante a partir de la fórmula de sumación. La situación general se comprende mejor dentro del contexto de un estudio especializado ("series asintóticas"), pero el próximo problema muestra un ejemplo particularmente importante.

**19. (a) Utilice la Fórmula de Euler-Maclaurin, con $N = 2$, para demostrar que

$$\log 1 + \cdots + \log(n-1)$$

$$= \int_1^n \log t\,dt - \frac{1}{2}\log n + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - 1\right) + \int_1^n \frac{\psi_2(t)}{2t^2}\,dt.$$

(b) Demuestre que

$$\log\left(\frac{n!}{n^{n+1/2}e^{-n+1/(12n)}}\right) = \frac{11}{12} + \int_1^n \frac{\psi_2(t)}{2t^2}\,dt.$$

(c) Explique por qué existe la integral impropia $\beta = \int_1^\infty \psi_2(t)/2t^2\,dt$, y demuestre que si $\alpha = \exp(\beta + 11/12)$, entonces

$$\log\left(\frac{n!}{\alpha n^{n+1/2}e^{-n+1/(12n)}}\right) = -\int_n^\infty \frac{\psi_2(t)}{2t^2}\,dt.$$

(d) El Problema 19-41(d) demuestra que

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}.$$

Utilice la parte (c) para demostrar que

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^2 n^{2n+1}e^{-2n}2^{2n}}{\alpha(2n)^{2n+1/2}e^{-2n}\sqrt{n}},$$

y concluya que $\alpha = \sqrt{2\pi}$.

(e) Demuestre que

$$\int_0^{1/2} \varphi_2(t)\,dt = \int_0^1 \varphi_2(t)\,dt = 0.$$

(El lector puede realizar los cálculos explícitamente, pero el resultado también se deduce de inmediato del Problema 18(a).) Concluya que

$$\bar{\psi}(x) = \int_0^x \psi_2(t)\,dt \quad \begin{cases} \geq 0 & \text{para } 0 \leq x \leq 1/2 \\ \leq 0 & \text{para } 1/2 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

con $\bar{\psi}(n) = 0$ para todo n. Indicación: Represente gráficamente $\bar{\psi}$ en $[0,1]$, poniendo particular atención a sus valores en x_0, $\frac{1}{2}$, y x_1, donde x_0 y x_1 son las raíces de φ_2 (Figura 9).

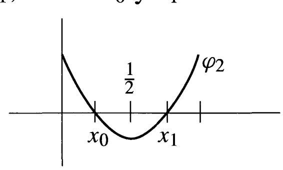


Figura 9

(f) Observando que $\bar{\psi}(x) = -\bar{\psi}(1-x)$, demuestre que

$$\bar{\bar{\psi}}(x) = \int_0^x \bar{\psi}(t)\,dt \geq 0 \quad \text{en } [0,1],$$

y por tanto en todas partes, con $\bar{\bar{\psi}}(n) = 0$ para todo n.

(g) Seguidamente, utilice esta información junto con una integración por partes para demostrar que

$$\int_n^\infty \frac{\psi_2(t)}{2t^2}\,dt > 0.$$

(h) Utilizando el hecho que el valor máximo de $|\varphi_2(x)|$ para x en $[0,1]$ es $\frac{1}{6}$, concluya que

$$0 < \int_n^\infty \frac{\psi_2(t)}{2t^2}\,dt < \frac{1}{12n}.$$

(i) Finalmente, concluya que

$$\sqrt{2\pi}\,n^{n+1/2}e^{-n} < n! < \sqrt{2\pi}\,n^{n+1/2}e^{-n+1/(12n)}.$$

El resultado final del Problema 19, una versión fuerte de la Fórmula de Stirling, demuestra que $n!$ es aproximadamente $\sqrt{2\pi}\,n^{n+1/2}e^{-n}$, en el sentido de que esta expresión difiere de $n!$ en una cantidad que es pequeña comparada con n cuando n es grande. Por ejemplo, para $n = 10$ obtenemos 3598696 en vez de 3628800, con un error $< 1\,\%$.

Una forma más general de la Fórmula de Stirling ilustra la naturaleza “asintótica” de la fórmula de sumación. El mismo razonamiento usado en el Problema 19 puede usarse ahora para demostrar que para $N \geq 2$ tenemos

$$\log\left(\frac{n!}{\sqrt{2\pi}\,n^{n+1/2}e^{-n}}\right) = \sum_{k=2}^{N} \frac{b_k}{k(k-1)n^{k-1}} \pm \int_n^\infty \frac{\psi_N(t)}{Nt^N}\,dt.$$

Puesto que ψ_N es acotado, podemos obtener estimaciones de la forma

$$\left|\int_n^\infty \frac{\psi_N(t)}{Nt^N}\,dt\right| \leq \frac{M_N}{n^{N-1}}.$$

Si N es grande, la constante M_N será también grande; pero para valores de n muy grandes el factor n^{1-N} hará el producto muy pequeño. Así pues, la expresión

$$\sqrt{2\pi}\,n^{n+1/2}e^{-n} \cdot \exp\left(\sum_{k=2}^{N} \frac{b_k}{k(k-1)n^{k-1}}\right)$$

puede ser una aproximación muy mala para $n!$ cuando n es pequeño, pero para n grande (lo *grande* que tenga que ser dependerá de N) será una aproximación muy buena (lo *buena* que sea dependerá de N).

Parte V

Epílogo

Hubo una vez un ingeniosísimo arquitecto
que había concebido un método nuevo
para edificar casas,
empezando por el tejado y prosiguiendo
hacia abajo hasta los cimientos.

JONATHAN SWIFT

Cuerpos

28

A lo largo de todo este libro hemos procurado definir concienzudamente todos los conceptos importantes, incluso términos tales como "función", para los cuales muchas veces se considera una definición intuitiva. Pero **Q** y **R**, los dos protagonistas principales de esta historia, solamente han sido nombrados, nunca definidos. Lo que no se ha definido nunca no puede ser nunca sometido a un análisis profundo, y las "propiedades" P1–P13 deben considerarse como suposiciones, no como teoremas acerca de números. Sin embargo, hemos evitado intencionadamente el término "axioma", y en este capítulo examinaremos más detenidamente el lugar que corresponde a P1–P13 desde un punto de vista lógico.

Lo mismo que **Q** y **R**, los conjuntos **N** y **Z** han quedado sin definir. Bien es verdad que en el Capítulo 2 se insertaron algunas consideraciones acerca de los cuatro, pero aquellas descripciones superficiales estaban muy lejos de constituir una definición. Decir, por ejemplo, que **N** consiste en 1, 2, 3, etc., no es más que nombrar algunos elementos de **N** sin identificarlos (y el "etc." no sirve de nada). Los números naturales *pueden* definirse, pero el procedimiento es complicado y se aparta de la tónica del resto del libro. La lista de lecturas aconsejadas contiene referencias a este problema, así como a los demás pasos que son necesarios si se quiere desarrollar el cálculo infinitesimal partiendo de su base lógica fundamental. El desarrollo ulterior de este programa procedería con la definición de **Z**, en términos de **N**, y la definición de **Q** en términos de **Z**. Este programa da como resultado cierto conjunto **Q** bien definido, ciertas operaciones explícitamente definidas $+$ y $\cdot$, y las propiedades P1–P12 como *teoremas*. La fase final de este programa es la construcción de **R**, en términos de **Q**. Esta última construcción es la que nos va a ocupar. Suponiendo que **Q** ha sido definido, y que P1–P12 han sido demostradas para **Q**, *definiremos* en último término **R** y *demostraremos* para **R** todas las propiedades P1–P13.

Nuestra intención de demostrar P1–P13 significa que debemos definir no sólo a los números reales, sino también a la suma y a la multiplicación de los mismos. Los números reales son en efecto sólo de interés como conjunto con estas operaciones: el comportamiento de los números reales respecto a la suma y a la multiplicación es crucial; lo que los números reales puedan ser en realidad carece totalmente de importancia. Esta afirmación puede expresarse de una manera matemática significativa, utilizando el concepto de "cuerpo", el cual incluye como casos particulares los tres importantes sistemas numéricos de este libro. Esta abstracción, extraordinariamente importante, de la matemática moderna, incorpora las propiedades P1–P9 comunes a **Q**, **R**, y **C**. Un **cuerpo** es un conjunto F (de objetos de cualquier especie), junto con dos "operaciones binarias"

$+$ y $\cdot$ definidas sobre F (es decir, dos reglas que asocian a elementos a y b de F, otros elementos $a+b$ y $a \cdot b$ de F) para el cual se cumplen las siguientes condiciones:

(1) $(a+b)+c=a+(b+c)$ para todo a, b y c de F.

(2) Existe algún elemento de F que denotaremos por $\mathbf{0}$ tal que

(i) $a+\mathbf{0}=a$ para todo a de F,

(ii) para todo a de F, existe algún elemento b de F tal que $a+b=\mathbf{0}$.

(3) $a+b=b+a$ para todo a y b de F.

(4) $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$ para todo a, b y c de F.

(5) Existe algún elemento de F que denotaremos por $\mathbf{1}$ tal que $\mathbf{1} \neq \mathbf{0}$ y

(i) $a \cdot \mathbf{1}=a$ para todo a de F,

(ii) Para todo a de F con $a \neq \mathbf{0}$, existe algún elemento b en F tal que $a \cdot b=\mathbf{1}$.

(6) $a \cdot b=b \cdot a$ para todo a y b de F.

(7) $a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$ para todo a, b y c de F.

Los ejemplos corrientes de cuerpos son, según se ha indicado ya, **Q**, **R** y **C**, siendo $+$ y $\cdot$ las operaciones corrientes de $+$ y $\cdot$. Probablemente no hace falta explicar por qué estos son cuerpos, pero la explicación es, en todo caso, muy breve. Cuando se interpretan $+$ y $\cdot$ como las $+$ y $\cdot$ corrientes, las reglas (1), (3), (4), (6), (7) son simplemente nuevos enunciados de P1, P4, P5, P8, P9; los elementos que desempeñan el papel de $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$ son los números 0 y 1 (lo cual justifica la elección de los símbolos $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$); y el número b en (2) o (5) es $-a$ o a^{-1}, respectivamente. (Por esta razón, en un cuerpo cualquiera F designamos por $-\boldsymbol{a}$ el elemento tal que $a+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$, y por $a^{-\mathbf{1}}$ el elemento tal que $a \cdot a^{-\mathbf{1}}=\mathbf{1}$, para $a \neq \mathbf{0}$.)

Además de **Q**, **R** y **C**, existen otros cuerpos que pueden escribirse fácilmente. Un ejemplo es la colección F_1 de todos los números $a+b\sqrt{2}$ para a y b en **Q**. Las operaciones $+$ y $\cdot$ serán, una vez más, las $+$ y $\cdot$ corrientes de los números reales. Es necesario observar que estas operaciones producen efectivamente nuevos elementos de F_1:

$$(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}, \quad \text{el cual está en } F_1;$$
$$(a+b\sqrt{2})\cdot(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(bc+ad)\sqrt{2}, \quad \text{el cual está en } F_1.$$

Las condiciones (1), (3), (4), (6), (7) para un cuerpo son evidentes para F_1: al cumplirse para todos los números reales, se cumplen ciertamente para todos los números reales de la forma $a+b\sqrt{2}$. La condición (2) se cumple porque el número $0=0+0\sqrt{2}$ está en F_1, y para $\alpha=a+b\sqrt{2}$ en F_1 el número $\beta=(-a)+(-b)\sqrt{2}$ de F_1 satisface $\alpha+\beta=0$. Análogamente, $1=1+0\sqrt{2}$ está en F_1, de modo que (5i) se satisface. La verificación de (5ii) es el único punto ligeramente difícil. Si $a+b\sqrt{2} \neq 0$, entonces

$$(a+b\sqrt{2})\cdot\frac{1}{a+b\sqrt{2}}=1;$$

es por lo tanto necesario demostrar que $1/(a+b\sqrt{2})$ está en F_1. Esto se cumple, ya que

$$\frac{1}{a+b\sqrt{2}}=\frac{a-b\sqrt{2}}{(a-b\sqrt{2})(a+b\sqrt{2})}=\frac{a}{a^2-2b^2}+\frac{(-b)}{a^2-2b^2}\sqrt{2}.$$

(La división por $a-b\sqrt{2}$ es válida porque la relación $a-b\sqrt{2}=0$ solamente puede cumplirse si $a=b=0$ (puesto que $\sqrt{2}$ es irracional), lo cual queda excluido por la hipótesis $a+b\sqrt{2}\neq 0$.)

El siguiente ejemplo de cuerpo, F_2, es considerablemente más sencillo en un aspecto: solamente contiene dos elementos que podemos muy bien designar por **0** y **1**. Las operaciones $\mathbf{+}$ y $\cdot$ se describen mediante las siguientes tablas.

+	**0**	**1**
0	**0**	**1**
1	**1**	**0**

·	**0**	**1**
0	**0**	**0**
1	**0**	**1**

La verificación de las condiciones (1)–(7) se hace directamente, tratándose de comprobaciones caso por caso. Por ejemplo, la condición (1) puede demostrarse comprobando las 8 ecuaciones obtenidas al poner a, b, $c=\mathbf{0}$ ó $\mathbf{1}$. Observemos que en este cuerpo $\mathbf{1}\mathbf{+}\mathbf{1}=\mathbf{0}$; esta ecuación puede también escribirse $\mathbf{1}=\mathbf{-1}$.

Nuestro ejemplo final de cuerpo es bastante ingenuo: F_3 consiste en todos los pares (a,a) para a en $\mathbf{R}$, y $\mathbf{+}$ y $\cdot$ están definidas por

$$(a,a)\mathbf{+}(b,b)=(a+b,a+b),$$
$$(a,a)\cdot(b,b)=(a\cdot b,a\cdot b).$$

(El $+$ y $\cdot$ que aparecen en el segundo miembro son la suma y la multiplicación ordinarias de $\mathbf{R}$.) La verificación de que F_3 es un cuerpo se deja para el lector como ejercicio sencillo.

La investigación detallada de las propiedades de los cuerpos constituye por sí misma una materia de estudio, pero para nuestros fines, los cuerpos ofrecen un marco ideal para estudiar las propiedades de los números con la máxima economía de pensamiento. Por ejemplo, las consecuencias de P1–P9 deducidas para los "números" en el Capítulo 1 se cumplen en realidad para un cuerpo cualquiera; en particular se cumplen para los cuerpos $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ y $\mathbf{C}$.

Observemos que ciertas propiedades corrientes $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ y $\mathbf{C}$ no se cumplen para todos los cuerpos. Por ejemplo, es posible que la ecuación $\mathbf{1}\mathbf{+}\mathbf{1}=\mathbf{0}$ se cumpla en algunos cuerpos, y en consecuencia $a\mathbf{-}b=b\mathbf{-}a$ no implica necesariamente que $a=b$. Para el cuerpo $\mathbf{C}$ el enunciado $1+1\neq 0$ se dedujo de la descripción explícita de $\mathbf{C}$; sin embargo, para los cuerpos $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{R}$, este enunciado se dedujo a partir de otras propiedades que carecen de análogas en las condiciones que definen un cuerpo. Existe un concepto relacionado que hace uso de estas propiedades. Un **cuerpo ordenado** es un cuerpo F (con las operaciones $\mathbf{+}$ y $\cdot$) junto con cierto subconjunto $\mathbf{P}$ de F (los elementos "positivos") con las propiedades siguientes:

(8) Para todo a de F, se satisface una y sólo una de las siguientes condiciones:

(i) $a = \mathbf{0}$,
(ii) a está en $\mathbf{P}$,
(iii) $-a$ está en $\mathbf{P}$.

(9) Si a y b están en $\mathbf{P}$, entonces $a + b$ está en $\mathbf{P}$.

(10) Si a y b están en $\mathbf{P}$, entonces $a \cdot b$ está en $\mathbf{P}$.

Hemos visto ya que el cuerpo $\mathbf{C}$ no puede convertirse en cuerpo ordenado. Del mismo modo, el cuerpo F_2 que tiene solamente dos elementos, no puede convertirse en cuerpo ordenado: efectivamente, la condición (8), aplicada a $\mathbf{1} = -\mathbf{1}$, indica que $\mathbf{1}$ debe estar en $\mathbf{P}$; entonces (9) implica que $\mathbf{1} + \mathbf{1} = \mathbf{0}$ está en $\mathbf{P}$, en contradicción con (8). Por otra parte, el cuerpo F_1, que consiste en todos los números $a + b\sqrt{2}$ con a, b en $\mathbf{Q}$, puede ciertamente convertirse en un cuerpo ordenado: sea $\mathbf{P}$ el conjunto de todos los $a + b\sqrt{2}$ que son números reales positivos (en el sentido ordinario de la palabra). El cuerpo F_3 puede convertirse también en un cuerpo ordenado; la descripción de $\mathbf{P}$ se deja para el lector.

Resulta natural introducir una notación para un cuerpo ordenado cualquiera que se corresponda con la utilizada para $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{R}$: definimos

$$\begin{array}{lll} a > b & \text{si} & a - b \text{ está en } \mathbf{P}, \\ a < b & \text{si} & b > a, \\ a \leq b & \text{si} & a < b \text{ o } a = b, \\ a \geq b & \text{si} & a > b \text{ o } a = b. \end{array}$$

Utilizando estas definiciones podemos reproducir, para un cuerpo ordenado cualquiera F, las definiciones del Capítulo 7:

> Un conjunto A de elementos de F es **acotado superiormente** si existe algún x en F tal que $x \geq a$ para todo a de A. Un tal x recibe el nombre de **cota superior** de A. Un elemento x de F es una **cota superior mínima** de A si x es una cota superior de A y $x \leq y$ para todo y de F que sea una cota superior de A.

Finalmente, es posible enunciar una propiedad análoga a la propiedad P13 de $\mathbf{R}$; esto conduce a la última abstracción de este capítulo:

> Un **cuerpo ordenado completo** es un cuerpo ordenado en el cual todo conjunto no vacío que sea acotado superiormente tiene cota superior mínima.

La consideración de los cuerpos puede parecer que nos ha llevado lejos de nuestra finalidad de construir los números reales. Sin embargo, disponemos ahora de una manera inteligible de formular esta finalidad. Hay dos interrogantes que serán contestados en los dos capítulos siguientes:

1. ¿Existe un cuerpo ordenado completo?
2. ¿Existe solamente un cuerpo ordenado completo?

Nuestro punto de partida para estas consideraciones será **Q**, el cual se supone que es un cuerpo ordenado, que contiene **N** y **Z** como subconjuntos. En un punto crucial será necesario suponer otro hecho acerca de **Q**:

> Sea x un elemento de **Q** con $x > 0$. Entonces para cualquier y de **Q** existe algún n en **N** tal que $nx > y$.

Esta suposición, que afirma que los números racionales tienen la propiedad arquimediana de los reales, no es consecuencia de las demás propiedades de un cuerpo ordenado (para un ejemplo que demuestra esto de modo conclusivo, vea [14]). El punto importante para nosotros es que cuando **Q** se construye explícitamente, las propiedades P1–P12 aparecen como teoremas, y lo mismo ocurre con esta suposición adicional; si empezáramos efectivamente a partir del principio, no haría falta ninguna suposición acerca de **Q**.

Problemas

1. Sea F el conjunto $\{0, 1, 2\}$ y definamos las operaciones $+$ y $\cdot$ sobre F mediante la siguiente tabla. (La regla para construir esta es como sigue: sumar o multiplicar de la manera usual, y después restar el mayor múltiplo posible de 3; así $2 \cdot 2 = 4 = 3 + 1$, de modo que $2 \cdot 2 = 1$.)

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Demuestre que F es un cuerpo y, además, que no puede convertirse en un cuerpo ordenado.

2. Suponga ahora que intentamos construir un cuerpo F que tenga los elementos 0, 1, 2, 3 con las operaciones $+$ y $\cdot$ definidas como en el ejemplo anterior, sumando o multiplicando de la manera usual, y después restando el mayor múltiplo posible de 4. Demuestre que F *no* es un cuerpo.

3. Sea $F = \{0, 1, \alpha, \beta\}$ y definamos las operaciones $+$ y $\cdot$ sobre F mediante las siguientes tablas.

$+$	0	1	α	β
0	0	1	α	β
1	1	0	β	α
α	α	β	0	1
β	β	α	1	0

$\cdot$	0	1	α	β
0	0	0	0	0
1	0	1	α	β
α	0	α	β	1
β	0	β	1	α

Demuestre que F es un cuerpo.

4. (a) Suponga que F es un cuerpo en el cual $\mathbf{1}+\mathbf{1}=\mathbf{0}$. Demuestre que $a+a=\mathbf{0}$ para todo a (esto también puede escribirse como $a=-a$).

   (b) Suponga ahora que $a+a=\mathbf{0}$ para algún $a\neq\mathbf{0}$. Demuestre que $\mathbf{1}+\mathbf{1}=\mathbf{0}$ (y en consecuencia $b+b=\mathbf{0}$ para todo b).

5. (a) Demuestre que en un cuerpo cualquiera se tiene

$$\underbrace{(\mathbf{1}+\cdots+\mathbf{1})}_{m\text{ veces}}\cdot\underbrace{(\mathbf{1}+\cdots+\mathbf{1})}_{n\text{ veces}}=\underbrace{\mathbf{1}+\cdots+\mathbf{1}}_{mn\text{ veces}}$$

   para todos los números naturales m y n.

   (b) Suponga que en el cuerpo F tenemos

$$\underbrace{\mathbf{1}+\cdots+\mathbf{1}}_{m\text{ veces}}=0$$

   para algún número natural m. Demuestre que el m más pequeño con esta propiedad debe ser un número primo (este número primo recibe el nombre de **característica** de F).

6. Suponga que F es un cuerpo cualquiera con solamente un número finito de elementos.

   (a) Demuestre que deben existir números naturales distintos m y n tales que

$$\underbrace{\mathbf{1}+\cdots+\mathbf{1}}_{m\text{ veces}}=\underbrace{\mathbf{1}+\cdots+\mathbf{1}}_{n\text{ veces}}.$$

   (b) Concluya que existe algún número natural k tal que

$$\underbrace{\mathbf{1}+\cdots+\mathbf{1}}_{k\text{ veces}}=\mathbf{0}.$$

7. Suponga que a, b, c y d son elementos de un cuerpo F con $a\cdot d-b\cdot c\neq\mathbf{0}$. Demuestre que para cualquier α y β de F las ecuaciones

$$\begin{aligned}a\cdot x+b\cdot y&=\alpha,\\ c\cdot x+d\cdot y&=\beta,\end{aligned}$$

   pueden ser resueltas con x e y de F.

8. Suponga que a es un elemento de un cuerpo F. Una "raíz cuadrada" de a es un elemento b de F tal que $b^2=b\cdot b=a$.

   (a) ¿Cuántas raíces cuadradas tiene $\mathbf{0}$?

   (b) Suponga que $a\neq\mathbf{0}$. Demuestre que a tiene dos raíces cuadradas, a menos que sea $\mathbf{1}+\mathbf{1}=\mathbf{0}$, en cuyo caso a tiene sólo una.

9. (a) Considere una ecuación $x^2+b\cdot x+c=\mathbf{0}$, donde b y c son elementos de un cuerpo F. Suponga además que $b^2-\mathbf{4}\cdot c$ tiene una raíz cuadrada r en F. Demuestre que $(-b+r)/\mathbf{2}$ es una solución de esta ecuación. (Aquí $\mathbf{2}=\mathbf{1}+\mathbf{1}$ y $\mathbf{4}=\mathbf{2}+\mathbf{2}$.)

(b) En el cuerpo F_2 del texto, ambos elementos tienen evidentemente una raíz cuadrada. Por otra parte, es fácil comprobar que ninguno de ellos satisface la ecuación $x^2 + x + \mathbf{1} = \mathbf{0}$. Por lo tanto, en la parte (a) debe haber algún detalle incorrecto. ¿Cuál es?

10. Suponga que F es un cuerpo y a un elemento de F que *carece* de raíz cuadrada. Este problema indica cómo se construye un cuerpo más amplio F', que contiene F, en el cual a tiene una raíz cuadrada. (Esta construcción ya se ha ejecutado en un caso particular, a saber, $F = \mathbf{R}$ y $a = -1$; este caso particular debería servir de guía al lector en este ejemplo.)

Definamos ahora F' como el conjunto de todos los pares (x, y) con x e y en F. Si las operaciones sobre F son $+$ y $\cdot$, definamos las operaciones $\oplus$ y $\odot$ sobre F' como sigue:

$$(x, y) \oplus (z, w) = (x + z,\ y + w),$$
$$(x, y) \odot (z, w) = (x \cdot z + a \cdot y \cdot w,\ y \cdot z + x \cdot w).$$

(a) Demuestre que F', con las operaciones $\oplus$ y $\odot$, es un cuerpo.

(b) Demuestre también que

$$(x, \mathbf{0}) \oplus (y, \mathbf{0}) = (x + y, \mathbf{0}),$$
$$(x, \mathbf{0}) \odot (y, \mathbf{0}) = (x \cdot y, \mathbf{0}),$$

de manera que podemos convenir en abreviar $(x, \mathbf{0})$ por x.

(c) Halle una raíz cuadrada de $a = (a, \mathbf{0})$ en F'.

11. Suponga que F es el conjunto de todas las cuádruplas (w, x, y, z) de números reales. Defina $+$ y $\cdot$ mediante

$$(s, t, u, v) + (w, x, y, z) = (s + w, t + x, u + y, v + z),$$
$$(s, t, u, v) \cdot (w, x, y, z) = (sw - tx - uy - vz,\ sx + tw + uz - vy,$$
$$sy + uw + vx - tz,\ sz + vw + ty - ux).$$

(a) Demuestre que F satisface todas las condiciones de un cuerpo, excepto (6). A veces las manipulaciones algebraicas serán un tanto elaboradas, pero la existencia de inversos respecto a la multiplicación es el único punto que requiere cierta consideración.

(b) Es costumbre designar

$$\begin{array}{ll} (0, 1, 0, 0) & \text{por } i, \\ (0, 0, 1, 0) & \text{por } j, \\ (0, 0, 0, 1) & \text{por } k. \end{array}$$

Halle los 9 productos de pares i, j y k. Los resultados harán ver en particular que la condición (6) es definitivamente falsa. Este “cuerpo alabeado” F es conocido como cuerpo de los **cuaterniones**.

Construcción de los números reales

29

El cúmulo de trabajo rutinario contenido por necesidad en este capítulo está justificado por una idea de importancia verdaderamente primordial. Para demostrar la existencia de un cuerpo ordenado completo tendremos que describir explícitamente uno de ellos en detalle; la verificación de las condiciones (1)–(10) para un cuerpo ordenado es una tarea laboriosa pero sin mayores complicaciones, pero la descripción del cuerpo mismo, de sus elementos, es verdaderamente ingeniosa.

Tenemos a nuestra disposición el conjunto de los números racionales, y a partir de esta materia prima es necesario obtener el cuerpo que en último término será llamado de los números reales. Para el no iniciado esto puede parecer absolutamente imposible: si solamente se conocen los números racionales, ¿de dónde van a proceder los demás? Tenemos ahora ya experiencia suficiente para darnos cuenta de que la situación puede no ser tan desesperada como hace suponer esta observación superficial. La estrategia a adoptar en nuestra construcción ha sido ya utilizada eficazmente para definir funciones y números complejos. En vez de intentar determinar la "naturaleza real" de estos conceptos, nos contentamos con una definición que describe lo suficiente acerca de ellos para determinar completamente sus propiedades matemáticas.

Un intento análogo para definir los números reales exige una descripción de los números reales en términos de números racionales. La observación de que un número real debería quedar determinado por completo mediante el conjunto de los números racionales menores que él, sugiere una posibilidad llamativamente sencilla y considerablemente atractiva: un número real podría ser descrito (y efectivamente lo será) mediante una colección de números racionales. Sin embargo, para hacer efectivo este intento, debe encontrarse algún medio para describir "el conjunto de los números racionales menores que un número real" sin mencionar a los números reales, que por ahora no son más que ficciones heurísticas de nuestra imaginación matemática.

Si hemos de considerar a A como el conjunto de los números racionales que son menores que el número real α, entonces A debería tener la siguiente propiedad: si x está en A e y es un número racional que satisface $y < x$, entonces y está en A. Además de esta propiedad, el conjunto A debería tener unas pocas más. Puesto que debería existir algún número racional $x < \alpha$, el conjunto A no debería ser vacío. Del mismo modo, puesto que debe haber algún número $x > \alpha$, el conjunto A no debería ser todo $\mathbf{Q}$. Finalmente, si $x < \alpha$, entonces debería existir otro número racional y con $x < y < \alpha$, de modo que A no debería contener un elemento máximo.

Si consideramos de momento como conocidos a los números reales, entonces no es difícil comprobar (problema 8-17) que el conjunto A con estas propiedades es, efectivamente, el conjunto de los números racionales menores que algún número real α. Puesto que de momento los números reales están en el limbo, la demostración del lector, si es que aporta una, debe considerarse solamente como un comentario no oficial de estos procedimientos. Servirá, sin embargo, para convencerle que no hemos dejado de observar ninguna propiedad crucial del conjunto A. No parece que exista motivo alguno para seguir dudando.

Definición

Un **número real** es un conjunto α, de números racionales, con las cuatro siguientes propiedades:

(1) Si x está en α e y es un número racional con $y < x$, entonces y está también en α.

(2) $\alpha \neq \emptyset$.

(3) $\alpha \neq \mathbf{Q}$.

(4) No existe ningún elemento máximo en α; dicho de otro modo, si x está en α, entonces existe algún y en α con $y > x$. El conjunto de los números reales se designará por $\mathbf{R}$.

Vamos a dar un ejemplo explícito de número real con el único propósito de recordar al lector la lógica que hay detrás de nuestra definición:

$$\alpha = \{x \text{ en } \mathbf{Q} : x < 0 \text{ o } x^2 < 2\}.$$

Debe estar claro que α es el número real que eventualemente será conocido por $\sqrt{2}$, pero no es un ejercicio totalmente trivial demostrar que α es efectivamente un número real. La clave de tal ejercicio consiste en demostrar esto, haciendo uso solamente de hechos acerca de $\mathbf{Q}$; la parte difícil consistirá en comprobar la condición (4), pero esto ya ha aparecido como problema en un capítulo anterior (dejamos que el lector averigüe qué capítulo es). Observemos que la condición (4), aunque aquí muy fastidiosa, es en realidad esencial para evitar ambigüedades; si prescindimos de ella,

$$\{x \text{ en } \mathbf{Q} : x < 1\}$$

y

$$\{x \text{ en } \mathbf{Q} : x \leq 1\}$$

podrían ser tanto uno como otro el "número real 1".

El cambio de A por α en nuestra definición indica a la vez una preocupación conceptual y de notación. De aquí en adelante, un número real *es*, por definición, un conjunto de números racionales. Esto significa, en particular, que un número racional (un miembro de $\mathbf{Q}$) *no* es un número real; sin embargo, a todo número racional x le corresponde de forma natural un número real, a saber, $\{y \text{ en } \mathbf{Q} : y < x\}$. Después de completar la construcción de los números reales, podemos prescindir mentalmente de los elementos de **Q** y convenir en que en adelante **Q** designará estos conjuntos especiales. Sin embargo, por el momento, será necesario trabajar a la vez con números racionales, números reales (conjuntos de números racionales) e incluso conjuntos de números reales (conjuntos de conjuntos de números racionales). Quizá sea inevitable alguna confusión, pero ésta debería quedar reducida al mínimo mediante una notación adecuada. Los números racionales serán designados mediante letras minúsculas del alfabeto latino (x, y, z, a, b, c), y los números reales mediante letras minúsculas griegas (α, β, γ); las letras latinas mayúsculas (A, B, C) se utilizarán para designar conjuntos de números reales.

Lo que queda de este capítulo está dedicado a la definición de $+$, $\cdot$ y **P** para **R** y a la demostración de que con estas estructuras **R** es efectivamente un cuerpo ordenado completo.

Empezaremos en realidad con la definición de **P**, y aun aquí procederemos hacia atrás. Definiremos primero $\alpha < \beta$; después, una vez que dispongamos de $+$, $\cdot$ y $\mathbf{0}$, definiremos **P** como el conjunto de todos los α con $\mathbf{0} < \alpha$, y demostraremos las propiedades necesarias para **P**. La razón de empezar con la definición de $<$ es la sencillez de este concepto en nuestra situación presente:

Definición

Si α y β son números reales, entonces $\alpha < \beta$ significa que α está contenido en β (es decir, todo elemento de α es también un elemento de β), pero $\alpha \neq \beta$.

Una repetición de las definiciones de $\leq$, $>$, $\geq$ constituiría una morosidad, pero es interesante observar que $\leq$ puede ahora expresarse más sencillamente que $<$; si α y β son números reales, entonces $\alpha \leq \beta$ si y sólo si α está contenido en β.

Si A es una colección acotada de números reales, resulta casi evidente que A debe tener una cota superior mínima. Cada α de A es una colección de números racionales; si estos números racionales se ponen todos en una colección β, entonces es de suponer que β sea $\sup A$. En la demostración del siguiente teorema se comprueban todos los detalles que no se han mencionado, entre los cuales no es el menos importante el de que β *es* efectivamente un número real. (En este capítulo no nos molestaremos en numerar los teoremas, ya que todos ellos pueden resumirse en un gran Teorema: existe un cuerpo ordenado completo.)

Teorema. *Si A es un conjunto de números reales $A \neq \emptyset$ y A está acotado superiormente, entonces A tiene una cota superior mínima.*

Demostración. Sea $\beta = \{x : x \text{ está en algún } \alpha \text{ de } A\}$. Entonces β es ciertamente una colección de números racionales; la demostración de que β es un número real exige la comprobación de cuatro hechos.

(1) Supongamos que x está en β e $y < x$. La primera condición significa que x está en α para algún α de A. Al ser α un número real, la suposición $y < x$ implica que y está en α. Se cumple por lo tanto ciertamente que y está en β.

(2) Al ser $A \neq \emptyset$, existe algún α en A. Puesto que α es un número real, existe algún x en α. Esto significa que x está en β, de modo que $\beta \neq \emptyset$.

(3) Puesto que A está acotado superiormente, existe algún número real γ tal que $\alpha < \gamma$ para todo α de A. Al ser γ un número real, existe algún número racional x que no está en γ. Ahora bien, $\alpha < \gamma$ significa que α está contenido en γ, de modo que se cumple también que x no está en α para ningún α de A. Eso significa que x no está en β; así pues, $\beta \neq \mathbf{Q}$.

(4) Supongamos que x está en β. Entonces x está en α para algún α de A. Puesto que α carece de máximo elemento, existe algún número racional y con $x < y$ e y en α. Pero eso significa que y está en β; por lo tanto β carece de máximo elemento.

Estas cuatro observaciones demuestran que β es un número real. La demostración de que β es la cota superior mínima de A es más fácil. Si α está en A, entonces evidentemente α está contenido en β; eso significa que $\alpha \leq \beta$, de modo que β es una cota superior de A. Por otra parte, si γ es una cota superior de A, entonces $\alpha \leq \gamma$ para todo α de A; esto significa que α está contenido en γ, para todo α de A, y esto con seguridad implica que β está contenido en γ. *Esto* significa a su vez que $\beta \leq \gamma$; así pues, β es la cota superior mínima de A. ■

La definición de $+$ es a la vez evidente y fácil, pero debe ser complementada con una demostración de que esta definición "evidente" tiene sentido.

Definición

Si α y β son números reales, entonces

$$\alpha + \beta = \{x : x = y + z \text{ para algún } y \text{ de } \alpha \text{ y algún } z \text{ de } \beta\}.$$

Teorema. *Si α y β son números reales, entonces $\alpha + \beta$ es un número real.*

Demostración. Una vez más deben comprobarse cuatro hechos.

(1) Supongamos que $w < x$ para algún x de $\alpha + \beta$. Entonces $x = y + z$ para algún y de α y algún z de β, lo cual significa que $w < y + z$, y en consecuencia $w - y < z$. Esto significa que $w - y$ está en β (puesto que z está en β y β es un número real). Al ser $w = y + (w - y)$, se sigue que w está en $\alpha + \beta$.

(2) Es evidente que $\alpha + \beta \neq \emptyset$, ya que $\alpha \neq \emptyset$ y $\beta \neq \emptyset$.

(3) Puesto que $\alpha \neq \mathbf{Q}$ y $\beta \neq \mathbf{Q}$, existen números racionales a y b tales que a no está en α y b no está en β. Cualquier x de α satisface $x < a$ (pues si $a < x$, entonces la condición (1) para un número real implicaría que a estaría en α); análogamente, cualquier y de β satisface $y < b$. Así pues, $x + y < a + b$ para cualquier x de α e y de β. Esto indica que $a + b$ no está en $\alpha + \beta$, de modo que $\alpha + \beta \neq \mathbf{Q}$.

(4) Si x está en $\alpha + \beta$, entonces $x = y + z$ si y está en α y z en β. Existen y' en α y z' en β con $y < y'$ y $z < z'$; entonces $x < y' + z'$ e $y' + z'$ está en $\alpha + \beta$. Por lo tanto $\alpha + \beta$ carece de elemento máximo. ■

Ahora ya puede darse cuenta el lector de lo prolijo que va a ser todo este proceso. Cada vez que mencionemos a un número real, tenemos que demostrar que se trata *en* *efecto* de un número real; lo cual exige la comprobación de cuatro condiciones, que aun siendo triviales, exigen cierta concentración. Esto no se puede remediar (sólo que resultará menos aburrido si el lector comprueba por sí mismo las cuatro condiciones). Sin embargo, surgirán, afortunadamente, de vez en cuando algunos puntos de interés, y algunos de nuestros teoremas resultarán fáciles. En particular, hay dos propiedades de $+$ que no presentan problemas.

Teorema. *Si α, β y γ son números reales, entonces* $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

Demostración. Puesto que $(x+y)+z = x+(y+z)$ para todos los números racionales x, y y z, todo elemento de $(\alpha + \beta) + \gamma$ es también un elemento de $\alpha + (\beta + \gamma)$, y viceversa. ■

Teorema. *Si α y β son números reales, entonces* $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

Demostración. Se deja para el lector (es todavía más fácil). ■

Para demostrar las demás propiedades de $+$ definimos primero $\mathbf{0}$.

Definición

$$\mathbf{0} = \{x \text{ en } \mathbf{Q} : x < 0\}.$$

Es, afortunadamente, obvio que $\mathbf{0}$ es un número real, y el teorema siguiente es también sencillo.

Teorema. *Si α es un número real, entonces* $\alpha + \mathbf{0} = \alpha$.

Demostración. Si x está en α e y está en $\mathbf{0}$, entonces $y < 0$, de modo que $x+y < x$. Esto implica que $x+y$ está en α. Así pues, todo elemento de $\alpha + \mathbf{0}$ es también un elemento de α.

Por otra parte, si x está en α, entonces existe un número racional y en α tal que $y > x$. Puesto que $x = y + (x-y)$, donde y está en α, y $x - y < 0$ (de modo que $x - y$ está en $\mathbf{0}$), esto indica que x está en $\alpha + \mathbf{0}$. Así pues, todo elemento de α es también un elemento de $\alpha + \mathbf{0}$. ■

Parece razonable pensar que $-\alpha$ tendría que ser el conjunto

$$\{x \text{ en } \mathbf{Q} : -x \text{ no está en } \alpha\}$$

(ya que no estar $-x$ en α significa, intuitivamente, que $-x > \alpha$, de modo que $x < -\alpha$). Pero en ciertos casos este conjunto no será ni siquiera un número real. Si bien un número real α no tiene ningún elemento máximo, el conjunto

$$\mathbf{Q} - \alpha = \{x \text{ en } \mathbf{Q} : x \text{ no está en } \alpha\}$$

puede tener un elemento *mínimo* x_0; cuando α es un número real de esta clase, el conjunto $\{x : -x \text{ no está en } \alpha\}$ tendrá un elemento máximo $-x_0$. Es, por lo tanto, necesario introducir una ligera modificación en la definición de $-\alpha$, la cual viene equipada con un teorema.

Definición

> Si α es un número real, entonces
>
> $-\alpha = \{x \text{ en } \mathbf{Q} : -x \text{ no está en } \alpha, \text{ pero } -x \text{ no es el elemento mínimo de } \mathbf{Q} - \alpha\}$.

Teorema. *Si α es un número real, entonces $-\alpha$ es un número real.*

Demostración

(1) Supongamos que x está en $-\alpha$ e $y < x$. Entonces $-y > -x$. Al no estar $-x$ en α, se cumple también que $-y$ no está en α. Además, está claro que $-y$ no es el elemento mínimo de $\mathbf{Q} - \alpha$, ya que $-x$ es un elemento menor. Esto indica que y está en $-\alpha$.

(2) Puesto que $\alpha \neq \mathbf{Q}$, existe algún número racional y que no está en α. Podemos suponer que y no es el número racional mínimo de $\mathbf{Q} - \alpha$ (puesto que es siempre posible sustituir y por cualquier $y' > y$). Entonces $-y$ está en $-\alpha$. Así pues $-\alpha \neq \emptyset$.

(3) Puesto que $\alpha \neq \emptyset$, existe algún x en α. Entonces $-x$ no puede estar en $-\alpha$, de modo que $-\alpha \neq \mathbf{Q}$.

(4) Si x está en $-\alpha$, entonces $-x$ no está en α, y existe algún número racional $y < -x$ que tampoco está en α. Sea z un número racional con $y < z < -x$. Entonces z tampoco está en α, y claramente z no es el elemento mínimo de $\mathbf{Q} - \alpha$. Así pues, $-z$ está en $-\alpha$. Puesto que $-z > x$, esto indica que $-\alpha$ carece de elemento máximo. ■

La demostración de que $\alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}$ no es del todo obvia. Las dificultades no se deben, como se pudiera suponer, a los finos detalles de la definición de $-\alpha$. En este punto nos hace falta más bien la propiedad Arquimediana de $\mathbf{Q}$ establecida en la página 585, la cual no se sigue de P1–P12. Esta propiedad hace falta para demostrar el siguiente lema, que desempeña un papel crucial en el teorema que sigue después.

Lema. *Sea α un número real, y z un número racional positivo. Entonces existen (Figura 1) número racionales x en α, e y no en α, tales que $y - x = z$. Además, podemos suponer que y no es el elemento mínimo de $\mathbf{Q} - \alpha$.*

Demostración. Supongamos primero que z está en α. Si los números

$$z, 2z, 3z, \ldots$$

estuviesen *todos* en α, entonces *todo* número racional estaría en α, ya que todo número racional w satisface $w < nz$ para algún n, según la suposición adicional de la página 585. Esto contradice el hecho de que α es un número real de modo que existe algún k tal que $x = kz$ está en α e $y = (k+1)z$ no está en α. Evidentemente $y - x = z$.

Además, si ocurre que y es el elemento mínimo de $\mathbf{Q} - \alpha$, sea $x' > x$ un elemento de α y sustituyamos x por x' e y por $y + (x' - x)$.

Si z no está en α, existe una demostración parecida, basada en el hecho de que los números $(-n)z$ no pueden dejar todos de estar en α. ■

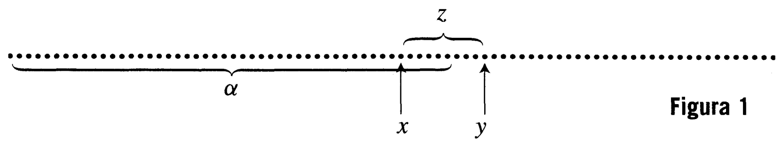


Figura 1

Teorema. *Si α es un número real, entonces*

$$\alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}.$$

Demostración. Supongamos que x está en α y que y está en $-\alpha$. Entonces $-y$ no está en α, de modo que $-y > x$. Por lo tanto, $x+y < 0$, de modo que $x+y$ está en $\mathbf{0}$. Así pues, todo elemento de $\alpha + (-\alpha)$ está en $\mathbf{0}$.

Algo más difícil resulta proceder en la otra dirección. Si z está en $\mathbf{0}$, entonces $-z > 0$. Según el lema, existe algún x en α, y algún y que no está en α, no siendo y el elemento mínimo de $\mathbf{Q} - \alpha$, tales que $y - x = -z$. Esta ecuación puede escribirse como $x + (-y) = z$. Al estar x en α, y $-y$ en $-\alpha$, esto demuestra que z está en $\alpha + (-\alpha)$. ■

Antes de proceder con la multiplicación, definimos los "elementos positivos" y demostramos una propiedad fundamental:

Definición

$$\mathbf{P} = \{\alpha \text{ en } \mathbf{R} : \alpha > \mathbf{0}\}.$$

Observemos que $\alpha + \beta$ está claramente en $\mathbf{P}$ si lo están α y β.

Teorema. *Si α es un número real, entonces se cumple una y sólo una de las condiciones siguientes:*

(i) $\alpha = \mathbf{0}$, *(ii)* α *está en* $\mathbf{P}$, *(iii)* $-\alpha$ *está en* $\mathbf{P}$.

Demostración. Si α contiene cualquier número racional positivo, entonces α contiene ciertamente todos los números racionales negativos, de modo que α contiene $\mathbf{0}$ y $\alpha \neq \mathbf{0}$, es decir, α está en $\mathbf{P}$. Si α no contiene ningún número racional positivo, entonces debe cumplirse una de las dos siguientes posibilidades:

(1) α contiene todos los números racionales negativos; entonces $\alpha = \mathbf{0}$.

(2) Existe algún número racional negativo x que no está en α; puede suponerse que x no es el elemento mínimo de $\mathbf{Q} - \alpha$ (ya que x podría ser sustituido por $x/2 > x$); entonces $-\alpha$ contiene el número racional positivo $-x$, de modo que, según acabamos de demostrar, $-\alpha$ está en $\mathbf{P}$.

Esto indica que debe cumplirse *por lo menos una* de las condiciones (i)–(iii). Si $\alpha = \mathbf{0}$, es imposible que se cumpla (ii) o (iii). Además, es imposible que $\alpha > \mathbf{0}$ y $-\alpha > \mathbf{0}$ se cumplan ambas, ya que esto implicaría que $\mathbf{0} = \alpha + (-\alpha) > \mathbf{0}$. ■

Recordemos que se definió $\alpha > \beta$ en el sentido de que α contiene β, pero es distinto de β. Esta definición fue adecuada para demostrar la completitud, pero ahora tenemos que demostrar que es equivalente a la definición que se hubiese hecho en términos de $\mathbf{P}$. Así pues, debemos demostrar que $\alpha - \beta > \mathbf{0}$ es equivalente a $\alpha > \beta$. Esto se deduce claramente del teorema siguiente.

Teorema. *Si α, β y γ son números reales y $\alpha > \beta$, entonces $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.*

Demostración. La hipótesis $\alpha > \beta$ implica que β está contenido en α; se sigue inmediatamente de la definición de $+$ que $\beta + \gamma$ está contenido en $\alpha + \gamma$. Esto indica que $\alpha + \gamma \geq \beta + \gamma$. Podemos excluir fácilmente la posibilidad de la igualdad, ya que si

$$\alpha + \gamma = \beta + \gamma,$$

entonces

$$\alpha = (\alpha + \gamma) + (-\gamma) = (\beta + \gamma) + (-\gamma) = \beta,$$

lo cual es falso. Así pues, $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$. ■

La multiplicación presenta dificultades propias. Si $\alpha, \beta > \mathbf{0}$, entonces $\alpha \cdot \beta$ puede definirse como sigue.

Definición

Si α y β son números reales y $\alpha, \beta > \mathbf{0}$, entonces

$$\alpha \cdot \beta = \{z : z \leq 0 \text{ o } z = x \cdot y \text{ para algún } x \text{ de } \alpha \text{ e } y \text{ de } \beta \text{ con } x, y > 0\}.$$

Teorema. *Si α y β son números reales con $\alpha, \beta > \mathbf{0}$, entonces $\alpha \cdot \beta$ es un número real.*

Demostración. Como de costumbre, debemos comprobar cuatro condiciones.

(1) Supongamos que $w < z$, donde z está en $\alpha \cdot \beta$. Si $w \leq 0$, entonces w está automáticamente en $\alpha \cdot \beta$. Supongamos que $w > 0$. Entonces $z > 0$, de modo que $z = x \cdot y$ para algún positivo x de α y algún positivo y de β. Ahora bien

$$w = \frac{wz}{z} = \frac{wxy}{z} = \left(\frac{w}{z} \cdot x\right) \cdot y.$$

Al ser $0 < w < z$, tenemos $w/z < 1$, de modo que $(w/z) \cdot x$ está en α. Así pues, w está en $\alpha \cdot \beta$.

(2) Evidentemente $\alpha \cdot \beta \neq \emptyset$.

(3) Si x no está en α e y no está en β, entonces $x > x'$ para todos los x' de α, e $y > y'$ para todos los y' de β. Por lo tanto, $xy > x'y'$ para todos estos positivos x' e y'. Así pues, xy no está en $\alpha \cdot \beta$; por lo tanto, $\alpha \cdot \beta \neq \mathbf{Q}$.

(4) Supongamos que w está en $\alpha \cdot \beta$, y $w \leq 0$. Existe algún x en α con $x > 0$ y algún y en β con $y > 0$. Entonces $z = xy$ está en $\alpha \cdot \beta$ y $z > w$. Supongamos ahora $w > 0$. Entonces $w = xy$ para algún positivo x de α y algún positivo y de β. Además, α contiene algún $x' > x$; si $z = x'y$, entonces $z > xy = w$, y z está en $\alpha \cdot \beta$. Así pues, $\alpha \cdot \beta$ no tiene ningún elemento máximo. ■

Observemos que $\alpha \cdot \beta$ está claramente en **P** si lo están α y β. Esto completa la verificación de todas las propiedades de **P**. Para completar la definición de $\cdot$ definimos primero $|\alpha|$.

Definición

Si α es un número real, entonces

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{si } \alpha \geq \mathbf{0} \\ -\alpha, & \text{si } \alpha \leq \mathbf{0}. \end{cases}$$

Definición

Si α y β son números reales, entonces

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{si } \alpha = \mathbf{0} \text{ o } \beta = \mathbf{0} \\ |\alpha| \cdot |\beta|, & \text{si } \alpha > \mathbf{0}, \beta > \mathbf{0} \text{ o } \alpha < \mathbf{0}, \beta < \mathbf{0} \\ -(|\alpha| \cdot |\beta|), & \text{si } \alpha > \mathbf{0}, \beta < \mathbf{0} \text{ o } \alpha < \mathbf{0}, \beta > \mathbf{0}. \end{cases}$$

Como era de suponer, las demostraciones de las propiedades de la multiplicación pueden reducirse por lo general al caso de números positivos.

Teorema. *Si α, β y γ son números reales, entonces* $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$.

Demostración. Esto resulta claro si $\alpha, \beta, \gamma > \mathbf{0}$. La demostración en general exige distinguir entre diversos casos (y se simplifica ligeramente si se aplica el siguiente teorema). ■

Teorema. *Si α y β son números reales, entonces* $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.

Demostración. Esto está claro si $\alpha, \beta > \mathbf{0}$, y los demás casos se comprueban fácilmente. ■

Definición

$\mathbf{1} = \{x \text{ en } \mathbf{Q} : x < 1\}$. (Está claro que **1** es un número real.)

Teorema. *Si α es un número real, entonces* $\alpha \cdot \mathbf{1} = \alpha$.

Demostración. Sea $\alpha > \mathbf{0}$. Es fácil ver que todo elemento de $\alpha \cdot \mathbf{1}$ es también un elemento de α. Por otra parte, supongamos que x está en α. Si $x \leq 0$, entonces x está automáticamente en $\alpha \cdot \mathbf{1}$. Si $x > 0$, entonces existe algún número racional y en α tal que $x < y$. Entonces $x = y \cdot (x/y)$, y x/y está en **1**, de modo que x está en $\alpha \cdot \mathbf{1}$. Esto demuestra que $\alpha \cdot \mathbf{1} = \alpha$ si $\alpha > \mathbf{0}$.

Si $\alpha < \mathbf{0}$, entonces, aplicando el resultado que acabamos de demostrar, se tiene

$$\alpha \cdot \mathbf{1} = -(|\alpha| \cdot |\mathbf{1}|) = -(|\alpha|) = \alpha.$$

Finalmente, el teorema es evidente cuando $\alpha = \mathbf{0}$. ■

Definición

Si α es un número real y $\alpha > \mathbf{0}$, entonces

$$\alpha^{-1} = \{x \text{ en } \mathbf{Q} : x \leq 0, \text{ o } x > 0 \text{ y } 1/x \text{ no está en } \alpha, \text{ pero } 1/x \text{ no es el elemento mínimo de } \mathbf{Q} - \alpha\};$$

si $\alpha < \mathbf{0}$, entonces $\alpha^{-1} = -(|\alpha|)^{-1}$.

Teorema. *Si α es un número real distinto de $\mathbf{0}$, entonces α^{-1} es un número real.*

Demostración. Basta evidentemente considerar sólo $\alpha > \mathbf{0}$. Deben comprobarse cuatro condiciones.

(1) Supongamos $y < x$, y que x está en α^{-1}. Si $y \leq 0$, entonces y está en α^{-1}. Si $y > 0$, entonces $x > 0$, de modo que $1/x$ no está en α. Puesto que $1/y > 1/x$, se sigue que $1/y$ no está en α, y $1/y$ no es evidentemente el elemento mínimo de $\mathbf{Q} - \alpha$, de modo que y está en α^{-1}.

(2) Claramente $\alpha^{-1} \neq \emptyset$.

(3) Al ser $\alpha > \mathbf{0}$, existe algún número racional positivo x en α. Entonces $1/x$ no está en α^{-1}, de modo que $\alpha^{-1} \neq \mathbf{Q}$.

(4) Supongamos que x está en α^{-1}. Si $x \leq 0$, existe evidentemente algún y en α^{-1} con $y > x$, ya que α^{-1} contiene algunos racionales positivos. Si $x > 0$, entonces $1/x$ no está en α. Puesto que $1/x$ no es el elemento mínimo de $\mathbf{Q} - \alpha$, existe algún número racional y que no está en α, con $y < 1/x$. Elijamos un número racional z con $y < z < 1/x$. Entonces $1/z$ está en α^{-1}, y $1/z > x$. Así pues, α^{-1} no contiene ningún elemento máximo. ■

Para demostrar que α^{-1} es efectivamente el inverso de α respecto a la multiplicación, resulta útil disponer de otro lema, que es el análogo multiplicativo de nuestro primer lema.

Lema. *Sea α un número real con $\alpha > \mathbf{0}$, y z un número racional con $z > 1$. Entonces existen números racionales x en α, e y no en α, tales que $y/x = z$. Además, podemos suponer que y no es el elemento mínimo de $\mathbf{Q} - \alpha$.*

Demostración. Supongamos primero que z está en α. Puesto que $z - 1 > 0$ y

$$z^n = (1 + (z-1))^n \geq 1 + n(z-1),$$

se sigue que los números

$$z, z^2, z^3, \ldots$$

no pueden estar todos en α. Existe por lo tanto algún k tal que $x = z^k$ está en α, e $y = z^{k+1}$ no está en α. Evidentemente $y/x = z$. Además, si y resulta ser el elemento mínimo de $\mathbf{Q} - \alpha$, sea $x' > x$ un elemento de α, y sustitúyase x por x' e y por yx'/x.

Si z no está en α, existe una demostración análoga, basada en el hecho de que los números $1/z^k$ no pueden todos dejar de estar en α. ■

Teorema. *Si α es un número real y $\alpha \neq \mathbf{0}$, entonces $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \mathbf{1}$.*

Demostración. Basta evidentemente considerar $\alpha > \mathbf{0}$, en cuyo caso $\alpha^{-1} > \mathbf{0}$. Supongamos que x es un número racional positivo de α, y que y es un número racional positivo de α^{-1}. Entonces $1/y$ no está en α, de modo que $1/y > x$; en consecuencia $xy < 1$, lo cual significa que xy está en $\mathbf{1}$. Puesto que todos los números racionales $x \leq 0$ están también en $\mathbf{1}$, esto demuestra que todo elemento de $\alpha \cdot \alpha^{-1}$ está en $\mathbf{1}$.

Para demostrar el enunciado recíproco, supongamos que z está en $\mathbf{1}$. Si $z \leq 0$, entonces evidentemente z está en $\alpha \cdot \alpha^{-1}$. Supongamos $0 < z < 1$. Según el lema, existen números racionales positivos x en α, e y no en α, tales que $y/x = 1/z$; y podemos suponer que y no es el elemento mínimo de $\mathbf{Q} - \alpha$. Pero esto significa que $z = x \cdot (1/y)$, donde x está en α, y $1/y$ está en α^{-1}. En consecuencia, z está en $\alpha \cdot \alpha^{-1}$. ■

¡Poco nos falta para terminar! Solamente queda la demostración de la ley distributiva. Una vez más hemos de considerar muchos casos, pero no desesperemos. El caso en que todos los números son positivos resulta crucial, y los demás casos pueden despacharse todos muy elegantemente.

Teorema. *Si α, β y γ son números reales, entonces $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.*

Demostración. Supongamos primero que $\alpha, \beta, \gamma > \mathbf{0}$. Entonces los dos números de la ecuación contienen todos los números racionales ≤ 0. Un número racional positivo de $\alpha \cdot (\beta + \gamma)$ es de la forma $x \cdot (y+z)$ para un x positivo de α, y en β y z en γ. Puesto que $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$, donde $x \cdot y$ es un elemento positivo de $\alpha \cdot \beta$, y $x \cdot z$ es un elemento positivo de $\alpha \cdot \gamma$, este número está también en $\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$. Así pues, todo elemento de $\alpha \cdot (\beta + \gamma)$ está también en $\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

Por otra parte, un número racional positivo de $\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ es de la forma $x_1 \cdot y + x_2 \cdot z$ para x_1, x_2 positivos en α, y en β, y z en γ. Si $x_1 \leq x_2$, entonces $(x_1/x_2) \cdot y \leq y$, de modo que $(x_1/x_2) \cdot y$ está en β. Así pues

$$x_1 \cdot y + x_2 \cdot z = x_2[(x_1/x_2)y + z]$$

está en $\alpha \cdot (\beta + \gamma)$. El mismo artificio da, por supuesto, resultado si $x_2 \leq x_1$.

Para completar la demostración es necesario considerar los casos en que α, β y γ no son todos $> \mathbf{0}$. Si cualquiera de los tres es igual a $\mathbf{0}$, la demostración es fácil y los casos en que $\alpha < \mathbf{0}$ pueden deducirse inmediatamente una vez que se han tenido en cuenta todas las posibilidades para β y γ. Así pues, suponemos $\alpha > \mathbf{0}$ y consideramos tres casos: $\beta, \gamma < \mathbf{0}$; $\beta < \mathbf{0}$, $\gamma > \mathbf{0}$ y $\beta > \mathbf{0}$, $\gamma < \mathbf{0}$. El primero es consecuencia inmediata del caso ya demostrado, y el tercero se sigue del segundo intercambiando β con γ. Nos concentramos por lo tanto en el caso $\beta < \mathbf{0}$, $\gamma > \mathbf{0}$. Existen entonces dos posibilidades:

(1) $\beta + \gamma \geq \mathbf{0}$. Entonces

$$\alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot ([\beta + \gamma] + |\beta|) = \alpha \cdot \beta + \gamma) + \alpha \cdot |\beta|,$$

de modo que

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\beta + \gamma) &= -(\alpha \cdot |\beta|) + \alpha \cdot \gamma \\ &= \alpha \cdot (\beta + \alpha \cdot \gamma. \end{aligned}$$

(2) $\beta + \gamma \leq \mathbf{0}$. Entonces

$$\alpha \cdot |\beta| = \alpha \cdot (|\beta + \gamma| + \gamma) = \alpha \cdot |\beta + \gamma| + \alpha \cdot \gamma,$$

así pues,

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = -(\alpha \cdot |\beta + \gamma|) = -(\alpha \cdot |\beta|) + \alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma. \blacksquare$$

Con esta demostración concluimos el trabajo de este capítulo. Aunque largo y muchas veces pesado, este capítulo contiene resultados suficientemente importantes para ser leído detenidamente por lo menos una vez (¡y preferiblemente sólo una vez!). Ahora es cuando empezamos a estar seguros de no haber estado operando en el vacío: existe efectivamente un cuerpo ordenado completo, los teoremas de este libro no están basados sobre suposiciones que no puedan ser nunca realizadas. Queda todavía una posibilidad interesante y horrenda: puede ser que existan varios cuerpos ordenados completos. Si esto es así, entonces los teoremas del cálculo infinitesimal son inesperadamente ricos de contenido, pero las propiedades P1–P13 son decepcionantemente incompletas. El último capítulo descarta esta posibilidad; las propiedades P1–P13 caracterizan por completo a los números reales: todo lo que se pueda demostrar acerca de los números reales, puede demostrarse basándose exclusivamente en estas propiedades.

Problemas

Solamente hay dos problemas en este capítulo, pero cada uno de ellos pide una construcción completamente distinta de los números reales. El examen detallado de otra construcción se recomienda sólo a masoquistas, pero vale la pena conocer las ideas principales en que se basan estas otras construcciones. Los números reales construidos en este capítulo podrían ser llamados "números reales de los algebristas," ya que están definidos con el intento de asegurar la propiedad de la cota superior mínima, lo cual supone la ordenación $<$, que es una noción algebraica. El sistema de números reales construido en el problema que sigue podría ser llamado "números reales de los analistas," ya que están pensados para que las sucesiones de Cauchy sean siempre convergentes.

1. Puesto que todo número real debe ser el límite de alguna sucesión de Cauchy de números racionales, podríamos intentar *definir* un número real como una sucesión de Cauchy de números racionales. Puesto que dos sucesiones de Cauchy pueden converger sin embargo hacia un mismo número real, este intento requiere algunas modificaciones.

   (a) Definamos como *equivalentes* dos sucesiones de Cauchy de números racionales $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ (designadas por $\{a_n\} \sim \{b_n\}$) si $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$. Demuestre que $\{a_n\} \sim \{a_n\}$, que $\{b_n\} \sim \{a_n\}$ si $\{a_n\} \sim \{b_n\}$, y que $\{a_n\} \sim \{c_n\}$ si $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ y $\{b_n\} \sim \{c_n\}$.

   (b) Suponga que α es el conjunto de todas las sucesiones equivalentes a $\{a_n\}$ y β es el conjunto de todas las sucesiones equivalentes a $\{b_n\}$. Demuestre que, o bien $\alpha \cap \beta = \emptyset$, o bien $\alpha = \beta$. (Si $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, entonces existe algún $\{c_n\}$ a la vez en α y en β. Demuestre que en este caso α y β consisten ambas precisamente en aquellas sucesiones que son equivalentes a $\{c_n\}$.)

   La parte (b) indica que la colección de todas las sucesiones de Cauchy puede descomponerse en partes disjuntas, cada una de ellas consistente en todas las sucesiones equivalentes a alguna sucesión fija. Cada una de estas colecciones decimos que es un número real, y designamos el conjunto de todos los números reales por **R**.

(c) Si α y β son números reales, sea $\{a_n\}$ una sucesión de α, y $\{b_n\}$ una sucesión de β. Definimos $\alpha+\beta$ como la colección de todas las sucesiones equivalentes a la sucesión $\{a_n+b_n\}$. Demuestre que $\{a_n+b_n\}$ es una sucesión de Cauchy y demuestre también que esta definición no depende de las sucesiones particulares $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ elegidas para α y β. Compruebe también que la definición análoga para la multiplicación está bien definida.

(d) Demuestre que **R** con estas operaciones es un cuerpo; el único punto interesante a comprobar es la existencia de un inverso respecto a la multiplicación.

(e) Defina los números reales positivos P de modo que **R** sea un cuerpo ordenado.

(f) Demuestre que toda sucesión de Cauchy de números reales es convergente. Recuerde que si $\{\alpha_n\}$ es una sucesión de números reales, entonces cada α_n mismo es una colección de sucesiones de Cauchy de números racionales.

2. Este problema indica la construcción de "los números reales de los estudiantes de bachillerato". Definimos un número real como un par $(a,\{b_n\})$, donde a es un entero y $\{b_n\}$ es una sucesión de números naturales de 0 a 9, con el supuesto de que la sucesión no es eventualmente 9; intuitivamente, este par representa $a+\sum_{n=1}^{\infty} b_n 10^{-n}$. Con esta definición, un número real es un objeto muy concreto, pero las dificultades que se encuentran para definir la suma y la multiplicación son formidables. (¿Cómo se pueden sumar infinitos decimales sin preocuparse de arrastrar enteros infinitamente lejos?) En lo que sigue indicamos un método razonable; el artificio consiste en utilizar desde el principio las cotas superiores mínimas.

(a) Definamos $(a,\{b_n\}) \mathbf{<} (c,\{d_n\})$ si $a<c$, o si $a=c$ y para algún n tenemos $b_n<d_n$ pero $b_j=d_j$ para $1\le j<n$. Utilizando esta definición, demuestre la propiedad de la cota superior mínima.

(b) Dado $\alpha=(a,\{b_n\})$, definamos $\alpha_k=na+\sum_{n=1}^{k} b_n 10^{-n}$; intuitivamente, α_k es el número racional obtenido cambiando por cero todas las cifras decimales posteriores a la k-ésima. Recíprocamente, dado un número racional r de la forma $a+\sum_{n=1}^{k} b_n 10^{-n}$, sea r' el número real $(a,\{b_n{}'\})$, donde $b_n{}'=b_n$ para $1\le n\le k$ y $b_n{}'=0$ para $n>k$. Para $\alpha=(a,\{b_n\})$ y $\beta=(c,\{d_n\})$ definamos ahora

$$\alpha \mathbf{+} \beta = \sup\{(\alpha_k+\beta_k)' : k \text{ un número natural}\}$$

(la cota superior mínima existe según la parte (a)). Si se define de manera análoga la multiplicación, entonces la verificación de todas las condiciones para un cuerpo es una tarea rutinaria no muy recomendada. Sin embargo, una vez más, la parte más difícil será demostrar la existencia del inverso a la multiplicación.

Unicidad de los números reales

30

En el presente capítulo volveremos a la notación habitual para los números reales, reservando los símbolos en negrita para otros cuerpos que podamos considerar. Además, vamos a considerar a los números enteros y a los racionales como casos particulares de números reales, y prescindiremos de la manera particular utilizada en el capítulo anterior para definir a los números reales. En este capítulo sólo nos interesa responder a una pregunta: ¿Existen cuerpos ordenados completos distintos de **R**? Si la consideramos al pie de la letra, la contestación a dicha pregunta es "sí". Por ejemplo, el cuerpo F_3 introducido en el Capítulo 28 es un cuerpo ordenado completo, y ciertamente no es **R**. Este cuerpo es un ejemplo "ingenuo", puesto que el par (a,a) puede considerarse simplemente como un nombre distinto para el número real a; las operaciones

$$(a,a) \mathbf{+} (b,b) = (a+b, a+b),$$
$$(a,a) \boldsymbol{\cdot} (b,b) = (a \cdot b, a \cdot b),$$

son consistentes con dicho cambio de nombre. Ejemplos de esta clase nos hacen ver que cualquier consideración inteligente de la cuestión exige algún instrumento matemático adecuado para estudiar tales procesos de cambio de nombre.

Si los elementos de un cuerpo F han de utilizarse para dar un nuevo nombre a los elementos de **R**, entonces para cada a de **R** debería corresponder un "nombre" $f(a)$ de F. La notación $f(a)$ nos sugiere que se puede formular dicho cambio de nombre en términos de funciones. Para ello vamos a necesitar un concepto de función mucho más general que cualquiera de los que se han presentado hasta ahora; necesitaremos efectivamente el concepto más general de "función" utilizado en matemáticas. Una función, en este sentido general, es sencillamente una regla que asigna a algunos objetos, otros objetos. Hablando formalmente, una **función** es una colección de pares ordenados (de objetos de cualquier tipo) que no contiene dos pares distintos con el mismo primer elemento. El **dominio** de una función f es el conjunto A de todos los objetos a tales que (a,b) está en f para algún b; este b (único) se designa por $\boldsymbol{f(a)}$. Si $f(a)$ está en el conjunto B para todo a de A, entonces f recibe el nombre de función **de** A **en** B. Por ejemplo,

si $f(x) = \operatorname{sen} x$ para todo x de **R** (y f está definida solamente para x de **R**), entonces f es una función de **R** en **R**; es también una función de **R** en $[-1,1]$;
si $f(z) = \operatorname{sen} z$ para todo z de **C**, entonces f es una función de **C** en **C**;

si $f(z) = e^z$ para todo z de **C**, entonces f es una función de **C** en **C**; es también una función de **C** en $\{z \text{ en } \mathbf{C} : \mathbf{z} \neq \mathbf{0}\}$;

θ es una función de $\{z \text{ en } \mathbf{C} : \mathbf{z} \neq \mathbf{0}\}$ en $\{x \text{ en } \mathbf{R} : \mathbf{0} \leq \mathbf{x} < \mathbf{2}\pi\}$;

si f es la colección de todos los pares $(a,(a,a))$ para a en $\mathbf{R}$, entonces f es una función de $\mathbf{R}$ en F_3.

Supongamos que F_1 y F_2 son dos cuerpos; designaremos las operaciones en F_1 por $\oplus$, $\odot$, etc., y las operaciones en F_2 por $\mathbf{+}$, $\cdot$, etc. Si F_2 ha de ser considerado como una colección de nombres nuevos para los elementos de F_1, entonces debería existir una función de F_1 en F_2 con las siguientes propiedades:

(1) La función f debe ser uno-uno, es decir, si $x \neq y$, entonces deberíamos tener $f(x) \neq f(y)$; esto significa que no existen dos elementos de F_1 que tengan el mismo nombre.

(2) La función f debe ser "sobre", es decir, para todo elemento z de F_2 debe haber algún x en F_1 tal que $z = f(x)$; esto significa que todo elemento de F_2 es utilizado para nombrar algún elemento de F_1.

(3) Para todo x e y de F_1 debemos tener

$$f(x \oplus y) = f(x) \mathbf{+} f(y),$$
$$f(x \odot y) = f(x) \cdot f(y);$$

esto significa que el proceso de cambio de nombre es consistente con las operaciones del cuerpo.

Si consideramos F_1 y F_2 como cuerpos ordenados, hemos de añadir una condición más:

(4) Si $x \otimes y$, entonces $f(x) \mathbf{<} f(y)$.

Una función con estas propiedades recibe el nombre de *isomorfismo* de F_1 en F_2. La definición es tan importante que la volvemos a enunciar formalmente.

Definición

Si F_1 y F_2 son dos cuerpos, un **isomorfismo** de F_1 en F_2 es una función f de F_1 en F_2 con las propiedades siguientes:

(1) Si $x \neq y$, entonces $f(x) \neq f(y)$.

(2) Si z está en F_2, entonces $z = f(x)$ para algún x de F_1.

(3) Si x e y están en F_1, entonces

$$\begin{aligned} f(x \oplus y) &= f(x) \mathbf{+} f(y), \\ f(x \odot y) &= f(x) \cdot f(y). \end{aligned}$$

Si F_1 y F_2 son cuerpos ordenados exigimos también que:

(4) Si $x \otimes y$, entonces $f(x) \mathbf{<} f(y)$.

A dos cuerpos F_1 y F_2 les llamaremos **isomorfos** si existe un isomorfismo entre ellos. Los cuerpos isomorfos pueden considerarse como esencialmente idénticos: cualquier propiedad importante de uno de ellos se cumplirá automáticamente para el otro. Podemos, por lo tanto, y debemos, reformular la pregunta presentada al principio de este capítulo; si F es un cuerpo ordenado completo resulta ingenuo esperar que F sea igual a $\mathbf{R}$; nos interesa más bien saber si F es isomorfo a $\mathbf{R}$. En el teorema siguiente, F será un cuerpo, con las operaciones $\boldsymbol{+}$ y $\boldsymbol{\cdot}$, y con "elementos positivos" $\mathbf{P}$; escribimos $a \boldsymbol{<} b$ para significar que $b \boldsymbol{-} a$ está en $\mathbf{P}$, etcétera.

Teorema *Si F es un cuerpo ordenado completo, entonces F es isomorfo a* $\mathbf{R}$.

Demostración. Puesto que dos cuerpos son, por definición, isomorfos, si existe un isomorfismo entre ellos, debemos construir una función f de $\mathbf{R}$ en F que constituya efectivamente un isomorfismo. Empezamos definiendo f para los enteros como sigue:

$$\begin{aligned} f(0) &= \mathbf{0}, \\ f(n) &= \underbrace{\mathbf{1} \boldsymbol{+} \cdots \boldsymbol{+} \mathbf{1}}_{n \text{ veces}} \qquad \text{para } n > 0, \\ f(n) &= \boldsymbol{-}\underbrace{(\mathbf{1} \boldsymbol{+} \cdots \boldsymbol{+} \mathbf{1})}_{|n| \text{ veces}} \qquad \text{para } n < 0. \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que

$$\begin{aligned} f(m+n) &= f(m) \boldsymbol{+} f(n), \\ f(m \cdot n) &= f(m) \boldsymbol{\cdot} f(n), \end{aligned}$$

para todos los enteros m y n, y resulta conveniente designar $f(n)$ por $\boldsymbol{n}$. Definimos después f para los números racionales por

$$f(m/n) = \boldsymbol{m/n} = \boldsymbol{m} \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{-1}}$$

(observemos que la suma de n sumandos $\mathbf{1} \boldsymbol{+} \cdots \boldsymbol{+} \mathbf{1} \neq \mathbf{0}$ si $n > 0$, ya que F es un cuerpo ordenado). Esta definición tiene sentido, ya que si $m/n = k/l$, entonces $ml = nk$, de modo que $\boldsymbol{m} \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{l} = \boldsymbol{k} \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{n}$, así que $\boldsymbol{m} \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{-1}} = \boldsymbol{k} \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{l}^{\boldsymbol{-1}}$. Es fácil comprobar que

$$\begin{aligned} f(r_1 + r_2) &= f(r_1) \boldsymbol{+} f(r_2), \\ f(r_1 \cdot r_2) &= f(r_1) \boldsymbol{\cdot} f(r_2), \end{aligned}$$

para todos los números racionales r_1 y r_2, y que $f(r_1) \boldsymbol{<} f(r_2)$ si $r_1 < r_2$.

La definición de $f(x)$ para un x arbitrario está basada en la idea, ahora ya familiar, de que cualquier número real está determinado por los números racionales menores que él. Para cualquier x de $\mathbf{R}$, sea A_x el subconjunto de F que consiste en todos los $f(r)$, para todos los números racionales $r < x$. El conjunto A_x no es ciertamente vacío y es acotado superiormente, ya que si r_0 es un número racional con $r_0 > x$, entonces $f(r_0) \boldsymbol{>} f(r)$ para todos los $f(r)$ de A_x. Al ser F un cuerpo ordenado completo, el conjunto A_x tiene una cota superior mínima; definimos $f(x)$ como sup A_x.

Tenemos ahora $f(x)$ definido de dos maneras distintas, primero para x racional, y después para x cualquiera. Antes de continuar, es preciso demostrar que ambas definiciones concuerdan cuando x es racional. Dicho de otro modo, si x es un número racional, tenemos que demostrar que

$$\sup A_x = f(x),$$

donde $f(x)$ denota aquí $\boldsymbol{m/n}$, para $x = m/n$. Esto no es inmediato, sino que se basa en la completitud de F; hace falta, pues, cierta demostración.

Por ser F completo, los elementos

$$\underbrace{\mathbf{1} \boldsymbol{+} \cdots \boldsymbol{+} \mathbf{1}}_{n \text{ veces}} \text{ para números naturales } n$$

forman un conjunto que no está acotado superiormente; la demostración es idéntica a la que proporcionamos para $\mathbf{R}$ (Teorema 8-2). Las consecuencias de este hecho en $\mathbf{R}$ tienen sus análogas exactas en F: en particular, si a y b son elementos de F con $a \boldsymbol{<} b$, entonces existe un número racional r tal que

$$a \boldsymbol{<} f(r) \boldsymbol{<} b.$$

Una vez hecha esta observación, volvemos a la demostración de que las dos definiciones de $f(x)$ concuerdan cuando x es racional. Si y es un número racional con $y < x$, entonces hemos visto ya que $f(y) \boldsymbol{<} f(x)$. De este modo todo elemento de A_x es $\boldsymbol{<} f(x)$. En consecuencia,

$$\sup A_x \boldsymbol{\geq} f(x).$$

Supongamos, por otra parte, que tuviéramos

$$\sup A_x \boldsymbol{<} f(x).$$

Existiría entonces un número racional r tal que

$$\sup A_x \boldsymbol{<} f(r) \boldsymbol{<} f(x).$$

Pero la condición $f(r) \boldsymbol{<} f(x)$ significa que $r < x$, lo cual significa que $f(r)$ está en el conjunto A_x; esto contradice claramente la condición $\sup A_x \boldsymbol{<} f(r)$. Esta contradicción demuestra que la suposición original es falsa, de modo que

$$\sup A_x = f(x).$$

Tenemos así cierta función bien definida f de $\mathbf{R}$ en F. Para demostrar que f es un isomorfismo debemos verificar las condiciones (1)-(4) de la definición. Empezaremos con (4).

Si x e y son números reales $x < y$, entonces claramente A_x está contenido en A_y. Así pues,

$$f(x) = \sup A_x \boldsymbol{\geq} \sup A_y = f(y).$$

Para excluir la posibilidad de la igualdad, observemos que existen números racionales r y s tales que

$$x < r < s < y.$$

Sabemos que $f(r) < f(s)$. Se deduce que

$$f(x) \leq f(r) < f(s) \leq f(y).$$

Esto demuestra (4).

La condición (1) se deduce inmediatamente de (4): si $x \neq y$, entonces o bien $x < y$ o $y < x$. En el primer caso, $f(x) < f(y)$, y en el segundo caso $f(y) < f(x)$; en cualquiera de los dos casos $f(x) \neq f(y)$.

Para demostrar (2), sea a un elemento de F, y sea B el conjunto de todos los números racionales r con $f(r) < a$. El conjunto B no es el conjunto vacío, y está acotado superiormente, ya que existe un número racional s con $f(s) > a$, de modo que $f(s) > f(r)$ para r en B, lo cual implica que $s > r$. Sea x la cota superior mínima de B; demostraremos que $f(x) = a$. Para ello basta eliminar las alternativas

$$f(x) < a,$$
$$a < f(x).$$

En el primer caso tendría que existir un número racional r con

$$f(x) < f(r) < a.$$

Pero esto significaría que $x < r$ y que r está en B, lo que sería contradictorio con el hecho de que $x = \sup B$. En el segundo caso tendría que existir un número racional r con

$$a < f(r) < f(x).$$

Esto implicaría que $r < x$. Puesto que $x = \sup B$, esto significaría que $r < s$ para algún s de B. Por lo tanto,

$$f(r) < f(s) < a,$$

lo cual sería de nuevo contradictorio. Así pues, $f(x) = a$, con lo cual queda demostrado (2).

Para comprobar (3), sean x e y números reales y supongamos que $f(x+y) \neq f(x) + f(y)$. Entonces, o bien

$$f(x+y) < f(x) + f(y) \qquad \text{o} \qquad f(x) + f(y) < f(x+y).$$

En el primer caso existiría un número racional r tal que

$$f(x+y) < f(r) < f(x) + f(y).$$

Pero esto significaría que

$$x+y < r.$$

Por lo tanto r podría escribirse como suma de dos números racionales

$$r = r_1 + r_2, \qquad \text{donde } x < r_1 \text{ y } y < r_2.$$

Entonces, utilizando los hechos comprobados acerca de f para los números *racionales*, se seguiría que

$$f(r) = f(r_1 + r_2) = f(r_1) \mathbin{\pmb{+}} f(r_2) \mathbin{\pmb{>}} f(x) \mathbin{\pmb{+}} f(y),$$

lo cual sería una contradicción. El otro caso se trata de manera análoga.

Finalmente, si x e y son números reales positivos, el mismo tipo de razonamiento demuestra que

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y);$$

el caso general se deduce entonces de forma sencilla. ■

Este teorema concluye nuestra investigación sobre los números reales, y resuelve cualquier duda acerca de ellos: *existe* un cuerpo ordenado completo y, salvo isomorfismo, solamente un cuerpo ordenado completo. Constituye una parte importante de una formación matemática seguir en detalle una construcción de los números reales, pero no es necesario referirse siempre de nuevo a esta construcción particular. Es absolutamente irrelevante que un número real sea una colección de números racionales y este hecho no debe formar parte nunca de la demostración de cualquier teorema importante acerca de números reales. Las demostraciones razonables deben utilizar solamente el hecho de que los números reales constituyen un cuerpo ordenado completo, ya que esta propiedad de los números reales los caracteriza salvo isomorfismo, y cualquier propiedad importante de los números reales se cumplirá para todos los cuerpos isomorfos. Para ser sincero, debo admitir que esta última afirmación no es más que un prejuicio del autor, pero es un prejuicio compartido por casi todos los matemáticos.

Problemas

1. Sea f un isomorfismo de F_1 a F_2.

(a) Demuestre que $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ y $f(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. (Aquí el $\mathbf{0}$ y el $\mathbf{1}$ de la izquierda designan elementos de F_1, mientras que el $\mathbf{0}$ y el $\mathbf{1}$ de la derecha designan elementos de F_2.)

(b) Demuestre que $f(-a) = -f(a)$ y $f(a^{-1} = f(a)^{-1}$, para $a \neq \mathbf{0}$.

2. Hay aquí una oportunidad para que el lector se convenza de que cualquier propiedad importante de un cuerpo es compartida por cualquier cuerpo isomorfo a él. El objetivo de este problema es que el lector escriba demostraciones muy formales hasta el punto de estar seguro de lograr de que todos los enunciados de este tipo sean para él evidentes. F_1 y F_2 serán dos cuerpos isomorfos; para mayor sencillez designaremos las operaciones en ambos por $\pmb{+}$ y $\pmb{\cdot}$. Demuestre que:

(a) Si la ecuación $x^2 \mathbin{\pmb{+}} \mathbf{1} = \mathbf{0}$ tiene una solución en F_1, entonces tiene una solución en F_2.

(b) Si toda ecuación polinómica $x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_0 = \mathbf{0}$ con $a_0, \ldots, a_{n-1}$ en F_1, tiene una raíz en F_1, entonces toda ecuación polinómica $x^n + b_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + b_0 = \mathbf{0}$ con $b_0, \ldots, b_{n-1}$ en F_2 tiene una raíz en F_2.

(c) Si $1 + \cdots + 1$ (sumado m veces) $= \mathbf{0}$ en F_1, entonces se cumple lo mismo en F_2.

(d) Si F_1 y F_2 son cuerpos ordenados (y el isomorfismo f satisface $f(x) < f(y)$ para $x < y$) y F_1 es completo, entonces F_2 es completo.

3. Sea f un isomorfismo de F_1 a F_2 y g un isomorfismo de F_2 a F_3. Defina la función $g \circ f$ de F_1 en F_3 poniendo $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Demuestre que $g \circ f$ es un isomorfismo.

4. Suponga que F es un cuerpo ordenado completo, de modo que existe un isomorfismo f de $\mathbf{R}$ a F. Demuestre que en realidad existe solamente *un* isomorfismo de $\mathbf{R}$ a F. Indicación: en el caso $F = \mathbf{R}$, esto es el Problema 3-17. Si f y g son ahora dos isomorfismos de $\mathbf{R}$ en F considere $g^{-1} \circ f$.

5. Halle un isomorfismo de $\mathbf{C}$ a $\mathbf{C}$ distinto de la función identidad.

Lecturas aconsejadas

Todo hombre debería leer
sólo aquello a que le lleva su inclinación;
ya que lo que lee como obligación
de poco le aprovechará.

SAMUEL JOHNSON

Uno de los objetivos de esta reseña bibliográfica es orientar al lector hacia otras fuentes, pero su función más importante es la de llamar la atención acerca de la enorme variedad de literatura matemática disponible. En consecuencia, hemos intentado que esta reseña ofrezca diversidad, pero no pretende ser completa. La presente plétora de libros de matemáticas hubiera hecho de esta pretensión una empresa casi imposible; en cualquier caso, y ya que he tratado de fomentar la lectura independiente, cuanto más estándar sea un texto tanto menos probable es que aparezca aquí. En algunos casos, esta filosofía puede parecer que se ha exagerado demasiado, ya que algunos textos aconsejados no pueden ser asimilados por un estudiante que acaba de terminar un primer curso de cálculo infinitesimal hasta que hayan transcurrido varios años. Sin embargo, hay muchas selecciones que se puede ya leer ahora y no creo que esté de más tener una idea de lo que tenemos por delante.

Para la mayoría de las citas, sólo se proporciona el título y el autor, ya que muchos de estos libros han pasado por numerosas ediciones e impresiones, a menudo habiéndose agotado y reapareciendo más tarde en una editorial diferente (no pocas veces como una edición de bolsillo de bajo coste de la formidable Dover Publications, o de la Mathematical Association of America). Información más detallada no es realmente necesaria, especialmente ahora que es tan fácil la búsqueda de libros on-line en Amazon.com u otros sitios similares.

El símbolo † se utiliza para indicar aquellos libros, ya sean nuevos o usados, cuya disponibilidad, es problemática. Búsquedas por autor y título pueden informar de otros libros interesantes del mismo autor, u otros libros con títulos similares. Además, muchos de estos libros todavía se encuentran en las bibliotecas universitarias bien surtidas, quizás los mejores lugares donde buscar; a pesar de la utilidad de internet, nada es comparable a la experiencia de un biblioteca real (a diferencia de una virtual), con libros apilados por temas, a la espera de ser descubiertos de forma fortuita.

Uno de los teoremas más elementales no demostrados mencionados en este libro es el "Teorema Fundamental de la Aritmética", el cual establece que cada número natural se puede escribir de forma única como producto de números primos. Esto se deduce del hecho básico aludido en la página 444. Una demostración de este teorema fundamental se encontrará en las primeras páginas de la mayoría de libros sobre teoría elemental de números. Pocos libros se han ganado un público tan entusiasta como

[1] *An Introduction to the Theory of Numbers*, de G. H. Hardy y E. M. Wright.

Otros dos libros recomendados son

†[2] *A Selection of Problems in the Theory of Numbers*, de W. Sierpinski.
[3] *Three Pearls of Number Theory*, de A. Khinchin.

El Teorema Fundamental también puede aplicarse en contextos algebraicos más generales, véanse las referencias [33] y [34].

El tema de los números irracionales está a caballo entre la teoría de números y el análisis. Una excelente introducción se encuentra en

[4] *Irrational Numbers*, de I. M. Niven.

Junto con muchas notas históricas, contiene referencias a algunos artículos bastante elementales en revistas matemáticas especializadas. También hay una demostración de que π es transcendente (ver también [59]) y, finalmente, una demostración del "teorema de Gelfond-Schneider": si a y b son algebraicos, con $a \neq 0$ o 1, y b es irracional, entonces a^b es transcendente.

Todos los libros mencionados hasta ahora comienzan con los números naturales, pero cuando los necesitan dan por conocidos a los números irracionales, por no hablar de los números enteros y los racionales. Hay varios libros que presentan una construcción de los números racionales a partir de los números naturales, pero es difícil que exista un tratamiento más lúcido que el desarrollado en

[5] *Foundations of Analysis*, de E. Landau.

Mientras que muchos matemáticos se contentan con aceptar los números naturales como un inicio natural, dichos números pueden ser definidos en términos de la teoría de conjuntos, siendo éste el punto de partida más fundamental de todos. Una exposición encantadora de la teoría de conjuntos se encuentra en un libro pequeño y sofisticado titulado

[6] *Naive Set Theory*, de P. R. Halmos.

Otra muy buena introducción es

[7] *Theory of Sets*, de E. Kamke.

Quizá es necesario persuadir a algunas víctimas de la "matemática moderna" que la teoría de conjuntos tiene efectivamente contenido matemático (de hecho, algunos teoremas muy profundos). A partir de dichos resultados Kamke demuestra que hay una función discontinua f tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para cualquier x e y.

Desigualdades, que fueron tratados como un tema elemental en los Capítulos 1 y 2, en realidad forman una especialidad matemática. Una buena introducción elemental es

[8] *Analytic Inequalities*, de N. Kazarinoff.

Doce demostraciones diferentes de que la media geométrica es menor o igual a la media aritmética, cada una basada en un principio diferente, puede encontrarse al comienzo del libro más avanzado

[9] *An Introduction to Inequalities*, de E. Beckenbach y R. Bellman.

La obra clásica sobre desigualdades es

[10] *Inequalities*, de G. H. Hardy, J. E. Littlewood, y G. Polya.

Cada uno de los autores de esta triple colaboración ha efectuado aportaciones propias a la escasa literatura sobre la naturaleza del pensamiento matemático, escritas desde el punto de vista de un matemático. Mi favorita es

[11] *A Mathematician's Apology*, de G. H. Hardy.

La antología de resultados de tipo anecdótico de Littlewood se titula

†[12] *A Mathematician's Miscellany*, de J. E. Littlewood.

Las contribuciones de Polya son la pedagogía al más alto nivel:

[13] *Mathematics and Plausible Reasoning* (Vol. I: *Induction and Analogy in Mathematics;* † Vol. II: *Patterns of Plausible Inference*), de G. Polya.

La geometría es el otro campo principal en el que se asienta el cálculo infinitesimal. Aunque los *Elementos* de Euclides puede ser considerado todavía una obra maestra, mejor perspectiva la proporcionan algunos textos más modernos, que examinan los fundamentos, la geometría no Euclídea, el papel del "axioma Arquimediano" en la geometría, así como otros resultados de "geometría clásica". De los siguientes tres libros, el primero, que figura en las ediciones anteriores de este libro, probablemente ha sido desplazado por los posteriores, que cubren un material más avanzado y cuya lectura quizá requiera un poco más de madurez matemática.

†[14] *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*, de E. Moise.
[15] *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*, de M. J. Greenberg.
[16] *Geometry: Euclid and Beyond*, de R. Hartshorne.

Además, toda clase de fascinantes tópicos geométricos pueden encontrarse en

[17] *Introduction to Geometry*, de H. S. Coxeter.

En casi todos los tratados de geometría se menciona como mínimo a la convexidad, otro gran tema de especialización. No puedo imaginarme una mejor introducción a la convexidad, o una mejor experiencia matemática en general, que la lectura y estudio de

†[18] *Convex Figures*, de I. M. Yaglom y W. G. Boltyanskii.

Este libro contiene una sucesión cuidadosamente ordenada de definiciones y *enunciados* de teoremas, cuyas demostraciones debe realizar el lector (al final del libro se proporcionan las demostraciones). Su actual falta de disponibilidad es tal vez una indicación de la falta de interés en el estudio a través de ejercicios, que también podría aplicarse a otro libro de geometría inspirado en el mismo principio:

†[19] *Combinatorial Geometry in the Plane*, de H. Hadwiger y H. Debrunner.

Junto a estos dos libros fuera de lo común, quería mencionar un pequeño texto especializado, valioso en extremo,

[20] *Counterexamples in Analysis*, de B. Gelbaum y J. Olmsted.

Muchos de los ejemplo de este libro provienen de temas más avanzados de análisis matemático, pero un buen número ellos pueden ser apreciados por alguien que sólo sepa cálculo infinitesimal.

Entre la infinidad de textos de cálculo infinitesimal, dos se consideran clásicos:

[21] *A Course of Pure Mathematics*, de G. H. Hardy.
[22] *Differential and Integral Calculus* (dos volúmenes), de R. Courant.

El texto de Courant abunda especialmente en aplicaciones a la física. Hay también una versión más moderna y actualizada

[23] *Introduction to Calculus and Analysis*, de R. Courant y F. John.

Hablando de aplicaciones a la física, una elegante exposición del material del Capítulo 17, junto con muchas otros temas tratados, puede encontrarse en el artículo

[24] *On the geometry of the Kepler problem*, de John Milnor; en *The American Mathematical Monthly*, Volumen 90 (1983), pp. 353-365.

(En este artículo la curva c' del Capítulo 17 se indica por $\mathbf{v}$, y la derivada de la importante función compuesta $\mathbf{v} \circ \theta^{-1}$ (página 335) se introduce sin demasiadas explicaciones como $d\mathbf{v}/\mathbf{d}\theta$.) Una demostración "directa" de las leyes de Kepler, junto con numerosas citas, puede encontrarse en otro artículo en esta misma revista,

[25] *The mathematical relationship between Kepler's laws and Newton's laws*, de Andrew T. Hyman; en *The American Mathematical Monthly*, Volumen 100 (1993), pp. 932-936.

La parte final del Tomo I de Courant contiene material que normalmente se encuentra en textos de cálculo avanzado, incluyendo ecuaciones diferenciales y series de Fourier. Una introducción a las series de Fourier (que requiere un poco de cálculo avanzado) también se encuentra en

[26] *An Introduction to Fourier Series and Integrals*, de R. Seeley.

El segundo volumen de Courant (cálculo avanzado en serio) contiene más resultados sobre ecuaciones diferenciales, así como una introducción al cálculo de variaciones. Un libro muy admirado sobre ecuaciones diferenciales es

[27] *Lectures on Ordinary Differential Equations*, de W. Hurewicz.

Un buen ejemplo de nuevos enfoques y temas lo proporciona

[28] *Differential Equations, Dynamical Systems, and An Introduction to Chaos*, de M. Hirsch, S. Smale, y R. L. Devaney.

Voy a pasar por alto la literatura más o menos estándar sobre cálculo avanzado (que puede ser encontrada fácilmente por el lector), ya que hoy en día la presentación del cálculo infinitesimal avanzado para estudiantes de matemáticas se basa en el álgebra lineal. Uno de los primeros textos de cálculo infinitesimal avanzado utilizando álgebra lineal es el muy agradable libro

†[29] *Calculus of Vector Functions*, de R. H. Crowell y R. E. Williamson.

Libros recomendables más recientes son

[30] *Advanced Calculus of Several Variables*, de C. H. Edwards, Jr.

[31] *Multivariable Mathematics*, de T. Shifrin.

y naturalmente sigo siendo parcial recomendando un texto más antiguo

[32] *Calculus on Manifolds*, de M. Spivak.

Hay otros tres temas que están algo fuera de lugar en esta bibliografía, ya que cada vez más forman parte de cualquier currículum de pregrado estándar. El estudio específico de los cuerpos y otras estructuras relacionadas es el dominio del "álgebra." Dos excelentes textos son

[33] *Algebra*, de Michael Artin.
[34] *Abstract Algebra*, de D. Dummit y R. Foote.

Referente al "análisis complejo", la tierra prometida del Capítulo 27, un texto clásico es

[35] *Complex Analysis*, de L. Ahlfors.

Bastante revolucionario cuando fue publicado por primera vez, actualmente podría considerarse algo anticuado, y es posible que el lector prefiera al segundo de una serie de libros (3 y consecutivos) que han aparecido más recientemente:

[36] *Fourier Analysis: An Introduction*, de E. Stein y R. Shakarchi.
[37] *Complex Analysis*, de E. Stein y R. Shakarchi.
[38] *Real Analysis*, de E. Stein y R. Shakarchi.

Y, ya que el tema del " análisis real"[Cálculo infinitesimal de alto octanaje] ya ha aparecido, deberemos mencionar dos textos clásicos. El segundo fue la fuente de varios problemas que aparecen en este libro; el primero es conocido cariñosamente como el "pequeño Rudin".

[39] *Principles of Mathematical Analysis*, de W. Rudin.
[40] *Functional Analysis*, de W. Rudin.

La "topología" no ha sido mencionada como tema antes, aunque realmente ha estado en el fondo de muchas discusiones ya que permite la generalización natural de las nociones de límites y continuidad, nociones que juegan un papel prominente en la Parte II del presente libro. El texto estándar es ahora

[41] *Topology*, de J. R. Munkres.

Respecto la materia afín de la "topología diferencial", tenemos

[42] *Differential Topology*, de V. Guillemin y A. Pollack.

Los temas próximos, algunos elementales otros difíciles, se incluyen en esta bibliografía por haber sido aludidos en el texto. Hay un libro pequeño y elegante dedicado exclusivamente a las propiedades de la función gamma, la mayoría de ellas demostradas usando el teorema de Bohr y Mollerup que se menciona en el Problema 19-40:

†[43] *The Gamma Function*, de E. Artin

La función gamma es sólo una entre muchas e importantes integrales impropias que aparecen en matemáticas. En particular, el cálculo de $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ (ver el Problema 19-42) es importante en la teoría de la probabilidad, donde la "función de distribución normal"

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy$$

juega un papel fundamental. Un libro clásico de la teoría de la probabilidad es

[44] *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, de W. Feller.

La imposibilidad de integrar determinadas funciones en términos elementales (entre ellos $f(x) = e^{-x^2}$) es un tema bastante esotérico. Una discusión de la posibilidades de integración en términos elementales, con un esbozo de las demostraciones de imposibilidad, y referencias a los trabajos originales de Liouville, se encuentra en

[45] *The Integration of Functions of a Single Variable*, de G. H. Hardy.

Las ideas, básicamente algebraicas, detrás de estos argumentos se esclarecieron más de cien años después del trabajo de Liouville, en el artículo

[46] *On Liouville's Theorem on functions with elementary integrals*, de M. Rosenlicht; en *Pacific Journal of Mathematics*, Volumen 24, No. 1 (1968), pp. 153-161. (También disponible on-line: hay que ir a `projecteuclid.org` y buscar `Rosenlicht`.)

Para una buena visión panorámica del tema, así como algunos desarrollos más recientes, podemos consultar

[47] *Integration in finite terms: the Liouville theory*, de T. Kasper; en *Mathematics Magazine*, Volumen 53, No. 4 (1980), pp. 195-201.

La referencia [46] hace uso de nociones de "álgebra diferencial", un campo en el que había sido resuelto anteriormente un problema relacionado, aparentemente más difícil. Hay ecuaciones diferenciales simples ($y'' + xy = 0$ es un ejemplo concreto) cuyas soluciones no pueden expresarse ni siquiera en términos de integrales indefinidas de funciones elementales. Este hecho se demuestra en la página 43 del libro (de 60 páginas):

†[48] *An Introduction to Differential Algebra*, de I. Kaplansky

Hay que decir también unas palabras en defensa del proceso de integración en términos elementales, proceso que muchos matemáticos consideran como un arte (a diferencia de la diferenciación, que no es más que una habilidad). El lector probablemente ya sabe que el proceso de integración puede acelerarse mediante el uso de tablas de integrales indefinidas. Hay varios libros que contienen extensas tablas de integrales (y también de series y productos), pero para la mayoría de las integraciones es suficiente consultar una de las extensas tablas de integrales indefinidas que están disponibles on-line, por ejemplo, en `sosmath.com`, y en `wikipedia.org`, con su creciente número de inmejorables entradas referentes a temas matemáticos y físicos.

Las referencias restantes son algo diferentes. Se dividen en tres categorías, de las cuales la primera es histórica.

Para la historia del cálculo diferencial en sí, una excelente y completa fuente de información, llena de detallados ejemplos explícitos, en lugar de descripciones generales, es

[49] *The Historical Development of Calculus*, de C. H. Edwards, Jr.

Algunas observaciones históricas, y un intento de incorporarlas a la enseñanza del cálculo diferencial, se encuentra en

[50] *The Calculus: A Genetic Approach*, de O. Toeplitz.

Un libro de texto admirable de la historia de las matemáticas en general, es

[51] *An Introduction to the History of Mathematics*, de H. Eves.

Como puede deducirse de la cita en la página 39, la idea básica para la construcción de los números reales se deriva de Dedekind, cuyas contribuciones se pueden encontrar en

[52] *Essays on the Theory of Numbers*, de R. Dedekind.

Las nociones más importantes de la teoría de conjuntos, en especial el tratamiento adecuado de los números infinitos, fueron introducidas por primera vez por Cantor, cuya obra se reproduce en

[53] *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, de G. Cantor.

La carta de H. A. Schwarz, citada en el Problema 11-69, se puede encontrar en

†[54] *Ways of Thought of Great Mathematicians*, de H. Meschkowski.

Por último, una gran cantidad de material de interés histórico también puede encontrarse on-line, en la dirección `www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/`

La segunda categoría, en este último grupo de libros, podríamos llamarla de "divulgación." Hay un número sorprendentemente grande de estos libros de primera clase, escritos por matemáticos de renombre.

[55] *What is Mathematics?*, de R. Courant and H. Robbins.
[56] *Geometry and the Imagination*, de D. Hilbert y S. Cohn-Vossen.
[57] *The Enjoyment of Mathematics*, de H. Rademacher y O. Toeplitz.
†[58] *Famous Problems of Mathematics*, de H. Tietze; Graylock Press, 1965.

Una de las más famosas "divulgaciones" está especialmente preocupada con la enseñanza de las matemáticas:

[59] *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*, de F. Klein (vol. 1: *Arithmetic, Algebra, Analysis*; vol. 2: *Geometry*); Dover, 1948.

El volumen 1 contiene una demostración de la transcendencia de π, que aunque no es tan elemental como la desarrollada en [4], es un análogo directo a la demostración de que e es transcendente, donde se sustituyen integrales ordinarias por integrales de línea complejas. Se puede leer tan pronto como se conozcan los hechos básicos relativos al análisis de números complejos.

La tercera categoría es el extremo opuesto: artículos originales. Las dificultades encontradas aquí son formidables, y sólo he tenido el valor de incluir uno de tales documentos, la fuente de la cita de la Parte IV. Ni siquiera está Inglés, a pesar de que hay varias opciones en lenguas extranjeras. El artículo original en francés se encuentra en

[60] *Oeuvres Complètes d'Abel.*

Fue publicado por primera vez en una traducción al alemán en el *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Volumen 1, 1826. Para hacerlo aún más difícil, estas referencias por lo general sólo estarán disponibles en las bibliotecas universitarias. Sin embargo, el estudio de este trabajo probablemente será tan valioso como cualquier otra lectura mencionada aquí. El motivo para incluirlo en la presente reseña lo sugiere un comentario del mismo Abel, que atribuía su profundo conocimiento de las matemáticas al hecho de que había leído a los maestros, en vez de los discípulos.

Soluciones de problemas seleccionados

Capítulo 1

1. (i) $1 = a^{-1}a = a^{-1}(ax) = (a^{-1}a)x = 1 \cdot x = x$.

(iii) Si $x^2 = y^2$, entonces $0 = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$, por tanto $x - y = 0$ o bien $x + y = 0$, esto es $x = -y$ o bien $x = y$.

(vi) Sustituya y por $-y$ en (iv).

2. Un paso requiere dividir por $x - y = 0$.

3. (i) $a/b = ab^{-1} = (ac)(b^{-1}c^{-1}) = (ac)(bc)^{-1}$ (por (iii)) $= ac/bc$.

(ii) $(ad+bc)/(bd) = (ad+bc)(bd)^{-1} = (ad+bc)(b^{-1}d^{-1})$ (por (iii)) $= ab^{-1} + cd^{-1} = a/b + c/d$.

(iii) $ab(a^{-1}b^{-1}) = (a \cdot a^{-1})(b \cdot b^{-1}) = 1$, por tanto $a^{-1} \cdot b^{-1} = (ab)^{-1}$.

(v) $(a/b)/(c/d) = (a/b)(c/d)^{-1} = (a \cdot b^{-1})(c \cdot d^{-1})^{-1} = (a \cdot b^{-1})(c^{-1} \cdot d) = ad(b^{-1} \cdot c^{-1}) = ad(bc)^{-1} = (ad)/(bc)$.

4. (i) $x < -1$.

(iii) $x > \sqrt{7}$ o bien $x < -\sqrt{7}$.

(v) Todo x, ya que $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$.

(vii) $x > 3$ o bien $x < -2$, puesto que 3 y -2 son las raíces de $x^2 - x - 6 = 0$.

(ix) $x > \pi$ o bien $-5 < x < 3$.

(xi) $x < 3$.

(xiii) $0 < x < 1$.

5. (i) $b - a$ y $d - c$ están en P, por tanto $(b-a) + (d-c) = (b+d) - (a+c)$ está en P. Así, $b + d > a + c$.

(iii) A partir de (ii), $-c < -d$; entonces (i) implica que $a + (-c) < b + (-d)$.

(v) $(b-a)$ y $-c$ está en P, por tanto $-c(b-a) = ac - bc$ está en P, es decir, $ac > bc$.

(vii) Utilizando (iv), $a > 0$ y $a < 1$, por tanto $a^2 < a$.

(ix) Sustituyendo a por c y b por d en (viii).

9. (i) $\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{7}$.

(iii) $|a+b| + |c| - |a+b+c|$.

(v) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7}$.

10. (i) a si $a \geq -b$ y $b \geq 0$;
$-a$ si $a \leq -b$ y $b \leq 0$;
$a + 2b$ si $a \geq -b$ y $b \leq 0$;
$-a - 2b$ si $a \leq -b$ y $b \geq 0$.

(iii) $x - x^2$ si $x \geq 0$;
$-x - x^2$ si $x \leq 0$.

11. (i) $x = 11, -5$.

(iii) $-6 < x < -2$.

(v) Ningún x (la distancia desde x hasta 1 más la distancia desde x hasta -1 es al menos 2).

(vii) $x = 1, -1$.

12. (i) $(|xy|)^2 = (xy)^2 = x^2y^2 = |x|^2|y|^2 = (|x| \cdot |y|)^2$; ya que $|xy|$ y $|x| \cdot |y|$ son ambos ≥ 0. esto demuestra que $|xy| = |x| \cdot |y|$.

(iii) $|x|/|y| = |x| \cdot |y|^{-1} = |x| \cdot |y^{-1}|$ (debido a (ii)) $= |xy^{-1}|$ (debido a (i)) $= x\ y$.

(v) Se deduce a partir de (iv) que $|x| = |y - (y - x)| \leq |y| + |y - x|$, por tanto $|x| - |y| \leq |x - y|$.

(vii) $|x+y+z| \leq |x+y|+|z| \leq |x|+|y|+|z|$. Si se cumple la igualdad, entonces $|x+y| = |x|+|y|$, por consiguiente x e y tienen el mismo signo. Además, z debe tener el mismo signo que $x+y$, por tanto x, y y z deben todos tener el mismo signo (excepto si uno es 0).

Capítulo 2

1. (i) Puesto que $1^2 = 1\cdot(2)\cdot(2\cdot 1+1)/6$, la fórmula es cierta para $n=1$. Supongamos ahora que la fórmula es verdadera para un cierto k. Entonces

$$\begin{aligned}
1^2+\cdots+k^2+(k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2 \\
&= \frac{(k+1)}{6}[k(2k+1)+6(k+1)] \\
&= \frac{(k+1)}{6}[(k+2)(2k+3)] \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2[k+1]+1)}{6},
\end{aligned}$$

por tanto la fórmula es también cierta para $k+1$.

2. (i)
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(2i-1) &= 1+3+5+\cdots+(2n-1) \\
&= 1+2+3+\cdots+2n-2(1+\cdots+n) \\
&= \frac{(2n)(2n+1)}{2}-n(n+1) \\
&= n^2.
\end{aligned}$$

5. (a) Teniendo en cuenta que

$$1+r = \frac{1-r^2}{1-r},$$

la fórmula es cierta para $n=1$. Supongamos que

$$1+r+\cdots+r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
1+r+\cdots+r^n+r^{n+1} &= \frac{1-r^{n+1}}{1-r}+r^{n+1} \\
&= \frac{1-r^{n+1}+r^{n+1}(1-r)}{1-r} \\
&= \frac{1-r^{n+2}}{1-r}.
\end{aligned}$$

(b) $S \;= 1 + r+\cdots+r^n$
$rS = \qquad r+\cdots+r^n+r^{n+1}$.
Así pues

$$S(1-r) = S-rS = 1-r^{n+1},$$

y por tanto

$$S = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}.$$

6. (i) A partir de

$$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1, \qquad k = 1, \ldots, n$$

obtenemos

$$(n+1)^4 - 1 = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + n,$$

por consiguiente

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{(n+1)^4 - 1 - 6\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\dfrac{n(n+1)}{2} - n}{4} \\ &= \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}. \end{aligned}$$

(iii) A partir de

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}, \qquad k = 1, \ldots, n$$

obtenemos

$$1 - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

8. 1 es o bien par o impar, de hecho es impar. Supongamos que n es o bien par o impar; entonces n puede ser escrito como $2k$ o bien $2k+1$. En el primer caso $n+1 = 2k+1$ es impar; en el segundo, $n+1 = 2k+1+1 = 2(k+1)$ es par. En cualquier caso, $n+1$ es o bien par o impar. (Admitamos que el razonamiento parece sospechoso, pero en realidad es correcto.)

9. Supongamos que B es el conjunto de todos los números naturales l tales que $n_0 - 1 + l$ está en A. Entonces 1 está en B, y $l+1$ está en B si l está en B, por tanto B contiene todos los números naturales, lo que significa que A contiene todos los números naturales $\geq n_0$.

12. (a) Si, ya que si $a+b$ fuera racional, entonces $b = (a+b) - a$ sería racional. Si a y b son irracionales, entonces $a+b$ podría ser racional, ya que b podría ser igual a $r - a$ para algún número racional r.

(b) Si $a = 0$, entonces ab es racional. Pero si $a \neq 0$, entonces ab podría no ser racional, ya que entonces $b = (ab) \cdot a^{-1}$ sería racional.

(c) Si; por ejemplo, $\sqrt[4]{2}$.

(d) Si; por ejemplo, $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$.

13. (a) Debido a que

$$\begin{aligned} (3n+1)^2 &= 9n^2 + 6n + 1 = 3(3n^2 + 2n) + 1. \\ (3n+2)^2 &= 9n^2 + 12n + 4 = 3(3n^2 + 4n + 1) + 1. \end{aligned}$$

se deduce que si k^2 es divisible por 3, entonces k debe ser también divisible por 3. Ahora supongamos que $\sqrt{3}$ fuera racional, y sea $\sqrt{3} = p/q$ donde p y q no tienen factores comunes. Entonces $p^2 = 3q^2$, por tanto p^2 es divisible por 3, por tanto p también lo será. Por tanto, $p = 3p'$ para algún número natural p', y por consiguiente $(3p')^2 = 3q^2$, o bien $3(p')^2 = q^2$. Por tanto, q es también divisible por 3, lo que supone una contradicción.

Las mismas demostraciones sirven para $\sqrt{5}$ y $\sqrt{6}$, porque las ecuaciones

$$\begin{aligned}
(5n+1)^2 &= 25n^2+10n+1 = 5(5n^2+2n)+1,\\
(5n+2)^2 &= 25n^2+20n+4 = 5(5n^2+4n)+4,\\
(5n+3)^2 &= 25n^2+30n+9 = 5(5n^2+6n+1)+4,\\
(5n+4)^2 &= 25n^2+40n+16 = 5(5n^2+8n+3)+1,
\end{aligned}$$

y las ecuaciones correspondientes para números de la forma $6n+m$, demuestran que si k^2 es divisible por 5 o bien por 6, entonces k también lo tiene que ser. La demostración falla para $\sqrt{4}$, porque $(4n+2)^2$ es divisible por 4. (Precisamente por este motivo, esta demostración no puede ser utilizada para demostrar que, en general, $\sqrt{a}$ es irracional si a no es un cuadrado perfecto: no tenemos ninguna garantía de que $(an+m)^2$ no sea un múltiplo de a para algunos $m < a$. En realidad, esta afirmación *es* verdadera, pero la demostración requiere la información proporcionada en el Problema 17.)

(b) Puesto que

$$(2n+1)^3 = 8n^3+12n^2+6n+1 = 2(4n^3+6n^2+3n)+1,$$

se deduce que si k^3 es par, entonces k es par. Si $\sqrt[3]{2} = p/q$ donde p y q no tienen factores comunes, entonces $p^3 = 2q^3$, por tanto p^3 es divisible por 2, y por consiguiente p también lo es. Así, $p = 2p'$ para algún número natural p', y en consecuencia $(2p')^3 = 2q^3$, o bien $4(p')^3 = q^3$. Por tanto, q es también par, lo que supone una contradicción.

La demostración para $\sqrt[3]{3}$ es análoga, utilizando las ecuaciones

$$\begin{aligned}
(3n+1)^3 &= 27n^3+27n^2+9n+1 = 3(9n^3+9n^2+3n)+1,\\
(3n+2)^3 &= 27n^3+54n^2+36n+8 = 3(9n^3+18n^2+12n+2)+2.
\end{aligned}$$

19. Si $n=1$, entonces $(1+h)^n = 1+nh$. Supongamos que $(1+h)^n \geq 1+nh$. Entonces

$$\begin{aligned}
(1+h)^{n+1} &= (1+h)(1+h)^n \geq (1+h)(1+nh), \quad \text{ya que } 1+h>0\\
&= 1+(n+1)h+nh^2 \geq 1+(n+1)h.
\end{aligned}$$

Para $h > 0$, la desigualdad se deduce directamente del Teorema del Binomio, puesto que todos los demás términos que aparecen en el desarrollo de $(1+h)^n$ son positivos.

Capítulo 3

1. (i) $(x+1)/(x+2)$; la expresión $f(f(x))$ tiene sentido solamente cuando $x \neq -1$ y $x \neq -2$.
(iii) $1/(1+cx)$ (para $x \neq -1/c$ si $c \neq 0$).
(v) $(x+y+2)/(x+1)(y+1)$ (para $x, y \neq -1$).
(vii) Sólo cuando $c = 1$, ya que $f(x) = f(cx)$ implica que $x = cx$, y esto debe ser cierto para al menos un $x \neq 0$.

2. (i) $y \geq 0$ con y racional, o bien $y \geq 1$.
(iii) 0.
(v) $-1, 0, 1$.

3. (i) $\{x : -1 \leq x \leq 1\}$.

(iii) $\{x : x \neq 1 \text{ y } x \neq 2\}$.

(v) $\emptyset$.

4. (i) 2^{2^y}.

(iii) $2^{2^{\operatorname{sen} t}} + \operatorname{sen}(2^t)$.

5. (i) $P \circ s$.

(iii) $s \circ S$.

(v) $P \circ P$.

(vii) $s \circ s \circ s \circ P \circ P \circ P \circ s$.

11. (a) y.

(b) $H(y)$.

(c) $H(y)$.

12. (a)

	par	impar
par	par	ni una ni otra
impar	ni una ni otra	impar

(b)

	par	impar
par	par	impar
impar	impar	par

(c)

	f par	f impar
g par	par	par
g impar	par	impar

(d) Sea $g(x) = f(x)$ para $x \geq 0$ y definamos g de forma arbitraria para $x < 0$.

21. (a) Sea $g(x) = h(x) = 1$ y f una función tal que $f(2) \neq f(1) + f(1)$. Entonces $f \circ (g + h) \neq f \circ g + f \circ h$.

(b) $[(g+h) \circ f](x) = (g+h)(f(x)) = g(f(x)) + h(f(x)) = (g \circ f)(x) + (h \circ f)(x) = [(g \circ f) + (h \circ f)](x)$.

(c) $\dfrac{1}{f \circ g}(x) = \dfrac{1}{f(g(x))} = \dfrac{1}{f}(g(x)) = \left(\dfrac{1}{f} \circ g\right)(x)$.

(d) Sea $g(x) = 2$ y f una función tal que $f(\frac{1}{2}) \neq 1/f(2)$. Entonces $1/(f \circ g) \neq f \circ (1/g)$.

Capítulo 4

1. (i) $(2,4)$.

(iii) $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

(v) $[-2,2]$.

(vii) $(-\infty,1]\cup[1,\infty)$.

3. (i) Todos los puntos por debajo de la gráfica de la función $f(x)=x$.

(iii) Todos los puntos por debajo de la gráfica de la función $f(x)=x^2$.

(v) Todos los puntos comprendidos entre las gráficas de las funciones $f(x)=x+1$ y $f(x)=x-1$.

(vii) Una colección de rectas paralelas a la gráfica de $f(x)=-x$, que cortan al eje horizontal en los puntos $(n,0)$ para n entero.

(ix) Todos los puntos interiores al círculo de radio 1 y centrado en el punto $(1,2)$.

4. (i) Un cuadrado de vértices $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, y $(0,-1)$.

(iii) La unión de la gráfica de las funciones $f(x)=x$ y $f(x)=2-x$.

(v) El punto $(0,0)$.

(vii) El círculo de radio $\sqrt{5}$ centrado en el punto $(1,0)$, ya que $x^2-2x+y^2=(x-1)^2+y^2-1$.

6. (a) Basta observar que la gráfica de la función $f(x)=m(x-a)+b=mx+(b-ma)$ es una recta de pendiente m, que pasa por el punto (a,b). (Lo importante de este ejercicio está en recordar dicha expresión.)

(b) La recta que pasa por los puntos (a,b) y (c,d) tiene pendiente $(d-b)/(c-a)$, por tanto la ecuación se deduce del apartado (a).

(c) Cuando $m=m'$ y $b\neq b'$. En este caso, claramente no hay ningún número x con $f(x)=g(x)$, mientras que un tal número x siempre existe si $m\neq m'$, concretamente $x=(b'-b)/(m-m')$.

7. (a) Si $B=0$ y $A\neq 0$, entonces el conjunto es la recta vertical formada por todos los puntos (x,y) con $x=-C/A$. Si $B\neq 0$, el conjunto es la gráfica de la función $f(x)=(-A/B)x+(-C/A)$.

(b) Los puntos (x,y) de la recta vertical tales que $x=a$ son precisamente aquellos que satisfacen $1\cdot x+0\cdot y+(-a)=0$. Los puntos (x,y) de la gráfica de la función $f(x)=mx+b$ son precisamente aquellos que satisfacen $(-m)x+1\cdot y+(-b)=0$.

11. (i) La gráfica de la función f es simétrica respecto el eje vertical.

(ii) La gráfica de la función f es simétrica respecto el origen. Equivalentemente, la parte de la gráfica situada a la izquierda del eje vertical se obtiene reflejándola primero a través del eje vertical y después a través del horizontal.

(iii) La gráfica de f se encuentra por encima o bien sobre el eje horizontal.

(iv) La gráfica de f repite una y otra vez la parte situada entre 0 y a.

21. (a) El cuadrado de la distancia entre (x,x^2) y $(0,\frac{1}{4})$ es

$$\begin{aligned} x^2+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)^2 &= x^2+x^4-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{16} \\ &= x^4+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{16} \\ &= (x^2+\tfrac{1}{4})^2, \end{aligned}$$

expresión que es igual al cuadrado de la distancia entre (x, x^2) y la gráfica de g.

(b) El punto (x, y) satisface esta condición si y sólo si

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(y-\gamma)^2,$$

o bien

$$x^2-2\alpha x+\alpha^2+y^2-2\beta y+\beta^2=y^2-2\gamma y+\gamma^2,$$

o

$$y=\left(\frac{1}{2\beta-2\gamma}\right)x^2+\left(\frac{\alpha}{\gamma-\beta}\right)x+\left(\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\beta-2\gamma}\right).$$

Si $\beta=\gamma$, y por tanto P está sobre la línea L, entonces la solución es la recta vertical que pasa por P.

Capítulo 5 **1.** (ii)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)=12.$$

(iv)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to y}\frac{x^n-y^n}{x-y}&=\lim_{x\to y}x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}\\&=y^{n-1}+y^{n-1}+\cdots+y^{n-1}=ny^{n-1}.\end{aligned}$$

(vi)

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}\\&=\frac{1}{2\sqrt{a}}.\end{aligned}$$

3. (i) $l=0$. Para cualquier x tenemos $|\cos(x^2)|\leq 1$, así pues $|3-\cos(x^2)|\leq 4$, y por tanto

$$|f(x)-0|=|x|\cdot|3-\cos(x^2)|\leq 4\cdot|x|.$$

Por consiguiente, podemos tomar $\delta=\varepsilon/4$.

(iii) $l=100$. Tenemos

$$\left|\frac{100}{x}-100\right|=100\cdot\left|\frac{1}{x}-1\right|=100\cdot\frac{1}{|x|}\cdot|x-1|.$$

La condición inicial $|x-1|<\frac{1}{2}$ implica $x>\frac{1}{2}$, así pues $1/|x|<2$, por tanto tenemos entonces

$$|f(x)-100|<200\cdot|x-1|.$$

Por consiguiente, podemos tomar $\delta=\text{mín}(1/2,\varepsilon/200)$.

(v) $l = 2$. La misma clase de argumento que fue utilizada en el texto y en el apartado (iii) demuestra que

$$\left|\frac{1}{x} - 1\right| < \varepsilon \text{ para } 0 < |x-1| < \delta_1 = \text{mín}(1/2, \varepsilon/2),$$

por tanto

$$\left|\frac{1}{x} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para } 0 < |x-1| < \bar{\delta}_1 = \text{mín}(1/2, \varepsilon/4).$$

De forma parecida, la solución del apartado (iv) nos proporciona un δ_2 tal que

$$|x^4 - 1| < \varepsilon \text{ para } 0 < |x-1| < \delta_2,$$

y tenemos un correspondiente $\bar{\delta}_2$. Entonces podemos tomar $\delta = \text{mín}(\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2)$.

(vii) $l = 0$. Tomemos $\delta = \varepsilon^2$.

6. (i) Necesitamos que $|f(x) - 2| < \varepsilon/2$ y $|g(x) - 4| < \varepsilon/2$, y por tanto debe ser

$$0 < |x-2| < \text{mín}\left(\text{sen}^2\left(\frac{\varepsilon^2}{36}\right) + \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon^2}{4}\right) = \delta.$$

(iii)] Necesitamos que

$$|g(x) - 4| < \text{mín}\left(\frac{|4|}{2}, \frac{\varepsilon|4|^2}{2}\right),$$

por tanto hace falta que sea

$$0 < |x-2| < [\text{mín}(2, 8\varepsilon)]^2 = \delta.$$

9. Sea $l = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ y definamos $g(h) = f(a+h)$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$. Ahora, si $0 < |h| < \delta$, entonces $0 < |(h+a) - a| < \delta$, por tanto $|f(a+h) - l| < \varepsilon$. Esta desigualdad puede escribirse como $|g(h) - l| < \varepsilon$. En consecuencia, $\lim\limits_{h \to 0} g(h) = l$, que también puede escribirse como $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = l$. El mismo tipo de razonamiento demuestra que si $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = m$, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = m$. Por tanto, la existencia de cualquiera de estos límites implica la existencia del otro, y, en este caso, ambos son iguales.

10. (a) Intuitivamente, podemos acercar $f(x)$ al número l tanto como queramos si y sólo si podemos aproximar $f(x) - l$ tanto como queramos a 0. La demostración rigurosa de ello es tan trivial que lleva un cierto trabajo lograr que parezca realmente una demostración. Para ser muy precisos, supongamos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ y sea $g(x) = f(x) - l$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$. Esta última desigualdad puede escribirse como $|g(x) - 0| < \varepsilon$, por tanto $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$. La demostración del recíproco es tan poco interesante como esta última.

(b) Intuitivamente, aproximar x a a es equivalente a aproximar $x - a$ a 0. Formalmente: supongamos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, y sea $g(x) = f(x-a)$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un

$\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x)-l| < \varepsilon$. Ahora, si $0 < |y| < \delta$, entonces $0 < |(y+a)-a| < \delta$, por tanto $|f(y+a)-l| < \varepsilon$. Pero esta última desigualdad puede escribirse como $|g(y)-l| < \varepsilon$. Por consiguiente $\lim\limits_{y \to 0} g(y) = l$. La deducción del recíproco es parecida.

(c) Intuitivamente, x está próximo a 0 si y sólo si si x^3 también lo está. Formalmente: sea $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = l$. para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x| < \delta$, entonces $|f(x)-l| < \varepsilon$. Entonces si $0 < |x| < \text{mín}(1, \delta)$, tenemos $0 < |x^3| < \delta$, por tanto $|f(x^3)-l| < \varepsilon$. Así, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = l$. Por otra parte, si suponemos que $\lim\limits_{x \to 0} f(x^3)$ existe, y digamos que $\lim\limits_{x \to 0} f(x^3) = m$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un δ tal que si $0 < |x| < \delta$, entonces $|f(x^3)-m| < \varepsilon$. Por consiguiente, si $0 < |x| < \delta^3$, tenemos $0 < |\sqrt[3]{x}| < \delta$, por tanto, $|f([\sqrt[3]{x}]^3)-m| < \varepsilon$, o bien $|f(x)-m| < \varepsilon$. Así $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = m$.

(d) Sea $f(x) = 1$ para $x \geq 0$, y $f(x) = -1$ para $x < 0$. Entonces $\lim\limits_{x \to 0} f(x^2) = 1$, pero $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ no existe.

17. (a) La función $f(x) = 1/x$ no puede tender a ningún límite en 0, puesto que se hace arbitrariamente grande cerca de 0. En efecto, sea cual sea $\delta > 0$, existen algunos x que satisfacen $0 < |x| < \delta$, pero a la vez $1/x > |l| + \varepsilon$, concretamente, cualquier $x < \text{mín}(\delta, 1/(|l|+\varepsilon))$. Cualquiera de estos x no satisfacen $|(1/x)-l)| < \varepsilon$.

(b) Sea cual sea $\delta > 0$ existe algún x que satisface $0 < |x-1| < \delta$, pero $1/(x-1) > |l| + \varepsilon$. Concretamente, cualquier $x < \text{mín}(1+\delta, 1+1/(|l|+\varepsilon))$. Cualquiera de estos x no satisface $|1/(x-1)-l| < \varepsilon$. (Es también posible aplicar el Problema 10(b): $\lim\limits_{x \to 0} 1/x = \lim\limits_{x \to 1} 1/(x-1)$ en caso de existir, por tanto este límite no puede existir según el apartado (a).)

25. (i) Ésta es la definición de siempre, sólo que llamando a los números δ y ε, en vez de ε y δ.

(ii) Ésta es una ligera modificación de (i): si la condición es verdadera para *todo* $\delta > 0$, entonces también se puede aplicar a $\delta/2$, por tanto existe un $\varepsilon > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \varepsilon$, entonces $|f(x)-l| \leq \delta/2 < \delta$.

(iii) Ésta es una modificación parecida: aplicada a $\delta/5$ para obtener (i).

(iv) Ésta es también una modificación: dice lo mismo que (i), puesto que $\varepsilon/10 > 0$, y es sólo la existencia de *algún* $\varepsilon > 0$ lo que está en cuestión.

29. Si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que, para todo x,

$$\text{si } a < x < a+\delta_1, \text{ entonces } |f(x)-l| < \varepsilon,$$
$$\text{si } a-\delta_2 < x < a, \text{ entonces } |f(x)-l| < \varepsilon.$$

Hagamos $\delta = \text{mín}(\delta_1, \delta_2)$. Si $0 < |x-a| < \delta$, entonces o bien $a-\delta_2 < a-\delta < x < a$ o bien $a < x < a+\delta < a+\delta_1$, por tanto $|f(x)-l| < \varepsilon$.

30. (i) Si $l = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x)-l| < \varepsilon$ para $0 < x < \delta$. Si $-\delta < x < 0$, entonces $0 < -x < \delta$, por tanto $|f(-x)-l| < \varepsilon$. Así $\lim\limits_{x \to 0^-} f(-x) = l$. Análogamente, si $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ existe, entonces $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ existe y tiene el mismo valor. (Intuitivamente, x es positivo y cercano a 0 si y sólo si $-x$ es negativo y cercano a 0.)

(ii) Si $l = \lim_{x \to 0^+} f(x)$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ siempre que $0 < x < \delta$. Por tanto si $0 < |x| < \delta$, entonces $|f(|x|) - l| < \varepsilon$. Así $\lim_{x \to 0} f(|x|) = l$. El razonamiento recíproco es parecido. (Intuitivamente, si x está próximo a 0, entonces $|x|$ es positivo y próximo a 0.)

(iii) Si $l = \lim_{x \to 0^+} f(x)$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ siempre que $0 < x < \delta$. Si $0 < |x| < \sqrt{\delta}$, entonces $0 < x^2 < \delta$, por tanto $|f(x^2) - l| < \varepsilon$. Así $\lim_{x \to 0} f(x^2) = l$. El razonamiento recíproco es parecido. (Intuitivamente, si x es próximo a 0, entonces x^2 es positivo y próximo a 0.)

34. Si $l = \lim_{x \to \infty} f(x)$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe algún N tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ para $x > N$, y podemos claramente suponer que $N > 0$. Ahora, si $0 < x < 1/N$, entonces $1/x > N$, por tanto $|f(1/x) - l| < \varepsilon$. Así $\lim_{x \to 0^+} f(1/x) = l$. El razonamiento recíproco es parecido.

Capítulo 6

1. (i) $F(x) = x + 2$ para todo x.

(iii) $F(x) = 0$ para todo x.

Capítulo 7

1. (i) Acotada superior e inferiormente; valor mínimo igual a 0; no posee máximo.

(iii) Acotada inferiormente pero no superiormente; mínimo igual a 0.

(v) Acotada superior e inferiormente. Si $a \le -\frac{1}{2}$, entonces $a \le -a - 1$, por consiguiente $f(x) = a + 2$ para todo x en $(-a-1, a+1)$, por tanto $a + 2$ es el valor máximo y mínimo. Si $-\frac{1}{2} < a \le 0$, entonces f toma el valor mínimo a^2, y si $a \ge 0$, entonces f tiene por valor mínimo 0. Puesto que $a + 2 > (a+1)^2$ sólo cuando $\left(-1 - \sqrt{5}\right)/2 < a < \left(-1 + \sqrt{5}\right)/2$, cuando $a \ge -\frac{1}{2}$ la función f sólo posee máximo cuando $a \le \left(-1 + \sqrt{5}\right)/2$ (siendo dicho máximo igual a $a + 2$).

(vii) Acotada superior e inferiormente; valor máximo igual a 1; valor mínimo 0.

(ix) Acotada superior e inferiormente; valor máximo igual a 1; valor mínimo -1.

(xi) f tiene máximo y mínimo, puesto que f es continua.

2. (i) $n = -2$, ya que $f(-2) < 0 < f(-1)$.

(iii) $n = -1$, ya que $f(-1) = -1 < 0 < f(0)$.

3. (i) Si $f(x) = x^{179} + 163/(1 + x^2 + \operatorname{sen}^2 x) - 119$, entonces f es continua en $\mathbf{R}$ y $f(2) > 0$, mientras que $f(-2) < 0$, por tanto $f(x) = 0$ para algún x en $(-2, 2)$.

5. f es constante, ya que si f tomara dos valores distintos, entonces f también tomaría todos los valores intermedios, incluyendo valores irracionales.

7. (1) $f(x) = x$;

(2) $f(x) = -x$;

(3) $f(x) = |x|$;

(4) $f(x) = -|x|$.

10. Podemos aplicar el Teorema 1 a $f - g$.

Si $f(0)=0$ o bien $f(1)=1$, escogeremos $x=0$ o bien 1. Si $f(0)>0=I(0)$ y $f(1)<1=I(1)$, entonces el Problema 10 aplicado a f e I implica que $f(x)=x$ para algún x.

Capítulo 8 **1.** (i) 1 es el máximo, y la mayor cota inferior es el número 0, el cual no pertenece al conjunto estudiado.

(iii) 1 es el máximo, y 0 el mínimo.

(v) Puesto que $\{x : x^2+x+1 \geq 0\} = \mathbf{R}$, no existe una cota superior mínima (supremo) o una cota inferior máxima (ínfimo).

(vii) Ya que $\{x : x<0 \text{ y } x^2+x-1<0\} = ([-1-\sqrt{5}]/2, 0)$, la mayor cota inferior, o ínfimo, es $[-1-\sqrt{5}]/2$, y la menor cota superior, o supremo, es 0; ninguno de estos números pertenece al conjunto estudiado.

2. (a) Puesto que $A \neq \emptyset$, existe algún x en A. Entonces $-x$ está en $-A$, por tanto $-A \neq \emptyset$. Ya que A está acotado superiormente, existe algún y tal que $y \leq x$ para todo x en A. Entonces $-y \geq -x$ para todo x en A, por tanto $-y \geq z$ para todo z en $-A$, por tanto $-A$ está acotado superiormente. Sea $\alpha = \sup(-A)$. Entonces α es una cota superior de $-A$, por tanto, invirtiendo el razonamiento que acabamos de hacer concluiremos que $-\alpha$ es una cota inferior de A.
Además, si β es cualquier cota inferior de A, entonces $-\beta$ es una cota superior de $-A$, por tanto $-\beta \geq \alpha$ y $\beta \leq -\alpha$. Por consiguiente $-\alpha$ es la mayor cota inferior, o ínfimo, de A.

5. (a) Si l es el mayor número entero que satisface $l \leq x$, entonces $l+1 > x$, pero $l+1 \leq x+1 < y$. Por tanto podemos tomar $k = l+1$. (Demostración de que dicho mayor entero l existe: puesto que $\mathbf{N}$ no está acotado superiormente, existe algún número natural n tal que $-n < x < n$. Por consiguiente habrá sólo un número finito de enteros l tales que $-n \leq l \leq x$. Tomemos el mayor de ellos.)

(b) Puesto que $y-x>0$, existe algún número natural n tal que $1/n < y-x$. Teniendo en cuenta que $ny-nx>1$, existirá, por el apartado (a), un entero k tal que $nx<k<ny$, lo cual significa que $x<k/n<y$.

(c) Escojamos $r+\sqrt{2}(s-r)/2$.

(d) Por el apartado (b), existe un número racional r tal que $x<r<y$, y por tanto un número racional s que satisface $x<r<s<y$. Apliquemos el apartado (c) a $r<s$.

10. Sea k el mayor número entero que satisface $\leq x/\alpha$ (la solución del problema 5 demuestra que tal número k existe), y sea $x' = x-k\alpha \geq 0$. Si $x-k\alpha = x' \geq \alpha$, entonces $x \geq (k+1)\alpha$, por tanto $k+1 \leq x/\alpha$, contradiciendo la elección de k. Por tanto $0 \leq x' < \alpha$.

12. (a) Puesto que cualquier y en B satisface $y \geq x$ para todo x en A, cualquier y en B es una cota superior de A, por tanto $y \geq \sup A$.

(b) El apartado (a) demuestra que $\sup A$ es una cota inferior de B, por tanto $\sup A \leq \inf B$.

13. Puesto que $x \leq \sup A$ y $y \leq \sup B$ para cualquier x en A e y en B, se deduce que $x+y \leq \sup A + \sup B$. En consecuencia, $\sup A + \sup B$ es una cota superior de $A-B$. por tanto $\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$. Si x y y se escogen en A y B, respectivamente, resultará que $\sup A - x < \varepsilon/2$ y $\sup B - y < \varepsilon/2$, entonces $\sup A + \sup B - (x+y) < \varepsilon$. Por consiguiente,

$$\sup(A+B) \geq x+y > \sup A + \sup B - \varepsilon.$$

Capítulo 9

1. (a)

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{a+h} - \dfrac{1}{a}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}.$$

(b) La recta tangente que pasa por el punto $(a, 1/a)$ viene dada por la gráfica de la función

$$g(x) = \frac{-1}{a^2}(x-a) + \frac{1}{a}$$
$$= \frac{-x}{a^2} + \frac{2}{a}.$$

Si $f(x) = g(x)$, entonces

$$\frac{1}{x} = -\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a}$$

o bien

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0,$$

por tanto, $x = a$.

2. (a)

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{(a+h)^2} - \dfrac{1}{a^2}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(-2ah-h^2)}{ha^2(a+h)^2} = -\frac{2}{a^3}.$$

(b) La recta tangente que pasa por el punto $(a, 1/a^2)$ viene dada por la gráfica de la función

$$g(x) = -\frac{2}{a^3}(x-a) + \frac{1}{a^2}$$
$$= -\frac{2x}{a^3} + \frac{3}{a^2}.$$

Si $f(x) = g(x)$, entonces

$$\frac{1}{x^2} = \frac{-2x}{a^3} + \frac{3}{a^2},$$

o bien

$$2x^3 - 3ax^2 + a^3 = 0,$$

o

$$0 = (x-a)(2x^2 - ax - a^2) = (x-a)(2x+a)(x-a).$$

Por tanto $x = a$ o bien $x = -a/2$; el punto $(-a/2, 4/a^2)$ se encuentra al lado opuesto de $(a, 1/a^2)$ respecto al eje vertical.

3.

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{a}}.
\end{aligned}$$

4. Conjetura: ${S_n}'(x) = nx^{n-1}$. Demostración:

$$\begin{aligned}
{S_n}'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{S_n(x+h)-S_n(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j}h^j - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j}h^{j-1} \\
&= \binom{n}{1} x^{n-1} = nx^{n-1}, \qquad \text{ya que } \lim_{h\to 0} h^{j-1} = 0 \text{ para } j > 1.
\end{aligned}$$

5. $f'(x) = 0$ para x no enteros, y $f'(x)$ no está definida si x es un entero.

6. (a)

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)+c]-[f(x)+c]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x).
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} \\
&= c\cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = cf'(x).
\end{aligned}$$

7. (a) $f'(9) = 3\cdot 9^2; f'(25) = 3\cdot(25)^2; f'(36) = 3\cdot(36)^2$.

(b) $f'(3^2) = f'(9) = 3\cdot 9^2; f'(5^2) = f'(25) = 3\cdot(25)^2; f'(6^2) = f'(36) = 3\cdot(36)^2$.

(c) $f'(a^2) = 3(a^2)^2 = 3a^4; f'(x^2) = 3(x^2)^2 = 3x^4$.

(d) $f'(x^2) = 3x^4$; pero $g(x) = x^6$, por tanto, $g'(x) = 6x^5$.

8. (a)

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h+c)-f(x+c)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f([x+c]+h)-f(x+c)}{h} = f'(x+c).
\end{aligned}$$

1. (b)
$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(cx+ch)-f(cx)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{c[f(cx+ch)-f(cx)]}{ch} = \lim_{k\to 0} \frac{c[f(cx+k)-f(cx)]}{k} \\ &= c\cdot \lim_{k\to 0} \frac{f(cx+k)-f(cx)}{k} = c\cdot f'(cx). \end{aligned}$$

(Compare los arreglos efectuados en estos cálculos con el problema 5-14.)

(c) Si $g(x)=f(x+a)$, entonces $g'(x)=f'(x+a)$, por el apartado (a). Pero $g=f$, por tanto $f'(x)=g'(x)=f'(x+a)$ para todo x, lo cual significa que f' es periódica, de periodo a.

9. (i) Si $g(x)=x^5$, entonces $g'(x)=5x^4$. Ahora $f(x)=g(x+3)$, por tanto, por el problema 8(a), $f'(x)=g'(x+3)=5(x+3)^4$, y $f'(x+3)=5(x+6)^4$.

(ii) $f(x)=(x-3)^5$, por tanto, $f'(x)=5(x-3)^4$, como en el apartado (i), y $f'(x+3)=5x^4$.

(iii) $f(x)=(x+2)^7$, por tanto, $f'(x)=7(x+2)^6$, como en el apartado (i), y $f'(x+3)=7(x+5)^6$.

10. Si $f(x)=g(t+x)$, entonces $f'(x)=g'(t+x)$, por el problema 8(a). Si $f(t)=g(t+x)$, entonces $f'(t)=g'(t+x)$, por el problema 8(a), por tanto, $f'(x)=g'(2x)$.

11. (a) Si $s(t)=ct^2$, entonces $s'(t)=2ct$, y no existe un número k tal que $s'(t)=ks(t)$ [es decir, $2ct=kct^2$] para todo t.

(Por cierto, hasta el momento presente no conocemos ninguna función no nula f que satisfaga que f' sea proporcional a f. Después del Capítulo 18 podría ser divertido averiguar cómo habría podido ser el mundo si Galileo hubiera estado en lo cierto.)

(b) (i) Si $s(t)=(a/2)t^2$, entonces $s'(t)=at$, por tanto, $s''(t)=a$.

(ii) $[s'(t)]^2=(at)^2=2a\cdot(a/2)t^2=2as(t)$.

(c) El candelabro cae $S(t)=16t^2$ pies en t segundos, Por tanto cae 400 pies en t segundos, si $400=16t^2$, o bien $t=5$. Después de 5 segundos, la velocidad será $s'(5)=5a=5\cdot 32=160$ pies por segundo. La velocidad era la mitad de esta cantidad cuando $80=s'(t)=32t$ o $t=\frac{5}{2}$.

21. (a) Esta es otra forma de escribir la definición (vea el problema 5-9).

(b) Esto se deduce del problema 5-11, aplicado a las funciones $\alpha(h)=[f(a+h)-f(a)]/h$ y $\beta(h)=[g(a+h)-g(a)]/h$.

26. (i) $f''(x)=6x$.

(ii) $3f''(x)=4x^3$.

30. (i) Significa que $f'(a)=na^{n-1}$ si $f(x)=x^n$.

(iii) Significa que $g'(a)=f'(a)$ si $g(x)=f(x)+c$.

(v) Significa lo mismo que el apartado (iii).

(vii) Significa que $g'(b)=f'(b+a)$ si $g(x)=f(x+a)$.

(ix) Significa que $g'(b)=cf'(cb)$ si $g(x)=f(cx)$.

Capítulo 10

1. (i) $(1+2x)\cdot\cos(x+x^2)$.

(iii) $(-\operatorname{sen} x)\cdot\cos(\cos x)$.

(v) $\cos\left(\dfrac{\cos x}{x}\right)\cdot\dfrac{-x\operatorname{sen} x-\cos x}{x^2}$.

(vii) $(\cos(x+\operatorname{sen} x))\cdot(1+\cos x)$.

2. (i) $(\cos((x+1)^2(x+2)))\cdot[2(x+1)(x+2)+(x+1)^2]$.

(iii) $[2\operatorname{sen}((x+\operatorname{sen} x)^2)\cos((x+\operatorname{sen} x)^2)]\cdot 2(x+\operatorname{sen} x)(1+\cos x)$.

(v) $(\cos(x\operatorname{sen} x))\cdot(\operatorname{sen} x+x\cos x)+(\cos(\operatorname{sen} x^2)(\cos x^2))\cdot 2x$.

(vii) $(2\operatorname{sen} x\cos x\operatorname{sen} x^2\operatorname{sen}^2 x^2)+(2x\cos x^2\operatorname{sen}^2 x\operatorname{sen}^2 x^2)$
$+(4x\operatorname{sen} x^2\cos x^2\operatorname{sen}^2 x\operatorname{sen} x^2)$.

(ix) $6(x+\operatorname{sen}^5 x)^5(1+5\operatorname{sen}^4 x\cos x)$.

(xi) $\cos(\operatorname{sen}^7 x^7+1)^7\cdot 7(\operatorname{sen}^7 x^7+1)^6\cdot(7\operatorname{sen}^6 x^7\cdot\cos x^7\cdot 7x^6)$.

(xiii) $\cos(x^2+\operatorname{sen}(x^2+\operatorname{sen} x^2))\cdot[(2x+\cos(x^2+\operatorname{sen} x^2)\cdot(2x+2x\cos x^2))]$.

(xv) $\dfrac{(1+\operatorname{sen} x)(2x\cos x^2\cdot\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x^2\cdot 2\operatorname{sen} x\cos x)-\cos x\operatorname{sen} x^2\operatorname{sen}^2 x}{(1+\operatorname{sen} x)^2}$.

(xvii) $$\cos\left(\frac{x^3}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)}\right)\cdot$$
$$\frac{3x^2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)-x^3\cos\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)\cdot\left(\dfrac{3x^2\operatorname{sen} x-x^3\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)}.$$

4. (i) $-\dfrac{(x+1)^2}{(x+2)^2}$.

(iii) $2x^2$.

5. (i) $-x^2$.

(iii) 17.

6. (i) $f'(x)=g'(x+g(a))$.

(iii) $f'(x)=g'(x+g(x))\cdot(1+g'(x))$.

(v) $f'(x)=g(a)$.

7. (a) $A'(t)=2\pi r(t)r'(t)$. Ya que $r'(t)=4$ y para este t con $r(t)=6$, se deduce que $A'(t)=2\pi\cdot 6\cdot 4=48\pi$ cuando $r(t)=6$.

(b) Si $V(t)$ es el volumen a tiempo t, entonces $V(t)=4\pi r(t)^3/3$, por tanto $V'(t)=4\pi r(t)^2 r'(t)=4\pi\cdot 6^2\cdot 4=576\pi$ cuando $r(t)=6$.

(c) Primer método: puesto que $A'(t)=2\pi r(t)r'(t)$, y $A'(t)=5$ cuando $r(t)=3$, se deduce que
$$r'(t)=\frac{A'(t)}{2\pi r(t)}=\frac{5}{6\pi}\quad\text{cuando } r(t)=3.$$

Así pues,
$$\begin{aligned}V'(t)&=4\pi r(t)^2 r'(t)\\&=4\pi\cdot 9\cdot\tfrac{5}{6\pi}\\&=30\quad\text{cuando } r(t)=3.\end{aligned}$$

Para aplicar el segundo método, observemos en primer lugar que si

$$f(t) = A(t)^{3/2} = \sqrt{A(t)^3},$$

entonces, utilizando el problema 9-3 y la Regla de la Cadena,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{2\sqrt{A(t)^3}} \cdot 3A(t)^2 A'(t) \\ &= \frac{1}{2A(t)^{3/2}} \cdot 3A(t)^2 A'(t) \\ &= \frac{3}{2} A(t)^{1/2} A'(t) \quad \text{(tal como habíamos conjeturado).} \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{4\pi r(t)^3}{3} = \frac{4\pi[r(t)^2]^{3/2}}{3} \\ &= \frac{4[\pi r(t)^2]^{3/2}}{3\pi^{1/2}} \\ &= \frac{4A(t)^{3/2}}{3\pi^{1/2}}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} V'(t) &= \frac{4}{3\pi^{1/2}} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{A(t)} A'(t) \\ &= \frac{2}{\pi^{1/2}} \cdot \pi^{1/2} r(t) A'(t) \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30. \end{aligned}$$

10. (i) $(f \circ h)'(0) = f'(h(0)) \cdot h'(0) = f'(3) \cdot \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} 1) = [6 \operatorname{sen} \frac{1}{3} - \cos \frac{1}{3}] \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} 1)$.
(iii) $\alpha'(x^2) = h'(x^4) \cdot 2x^2 = \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}(x^4+1)) \cdot 2x^2$.

12. La Regla de la Cadena implica que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{g}\right)'(x) &= (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= -\frac{1}{g(x)^2} \cdot g'(x). \end{aligned}$$

35. (i) $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = (\cos y) \cdot (1+2x) = (\cos(x+x^2)) \cdot (1+2x)$.

(iii) $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = (\cos u) \cdot (\cos x) = (\cos(\operatorname{sen} x)) \cdot (\cos x)$.

Capítulo 11 **1.** (i) $0 = f'(x) = 3x^2 - 2x - 8$ for $x = 2$ y $x = -\frac{4}{3}$, ambos valores están en el intervalo $[-2, 2]$;
$f(-2) = 5$, $f(2) = -11$, $f(-\frac{4}{3}) = \frac{203}{27}$;
máximo $= \frac{203}{27}$, mínimo $= -11$.

(iii) $0 = f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x = 12x(x^2 - 2x + 1)$ para $x = 0$ y $x = 1$, de los cuales sólo el número 0 está en el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$;

$f(-\frac{1}{2}) = \frac{43}{16}$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{11}{16}$, $f(0) = 0$;

máximo $= \frac{43}{16}$, mínimo $= 0$.

(v) $0 = f'(x) =$

$$\frac{x^2 + 1 - (x+1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1 - 2x - x^2}{(x^2+1)^2}$$

para $x = -1 + \sqrt{2}$ y $x = -1 - \sqrt{2}$, de los cuales sólo $-1 + \sqrt{2}$ está en el intervalo $[-1, \frac{1}{2}]$;

$f(-1) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{6}{5}$, $f(-1 + \sqrt{2}) = (1 + \sqrt{2})/2$;

máximo $= (1 + \sqrt{2})/2$, mínimo $= 0$.

2. (i) $-\frac{4}{3}$ es un máximo local, y 2 es un mínimo local.

(iii) 0 es un mínimo local y no hay máximos locales.

(v) $-1 + \sqrt{2}$ es un máximo local y $-1 - \sqrt{2}$ es a mínimo local.

4. (a) Observemos que f en realidad tiene tiene un mínimo, puesto que f es una función polinómica de grado par y es positivo el coeficiente del término de mayor grado. Dicho mínimo se presenta en el punto x tal que

$$0 = f'(x) = 2\sum_{i=1}^{n}(x - a_i),$$

por tanto $x = (a_1 + \cdots + a_n)/n$.

5. (i) 3 y 7 son máximos locales, mientras que 5 y 9 son mínimos locales.

(iii) Todos los números irracionales $x > 0$ son mínimos locales, mientras que todos los números irracionales $x < 0$ son máximos locales.

(v) x es un mínimo local si su representación decimal no contiene al dígito 5. Es un máximo local si uno de los dígitos de su representación decimal es un 5 seguido de una secuencia de infinitos 9. En los demás casos, x es tanto un máximo como un mínimo local.

7. Si llamamos $f(x)$ a la longitud total de la curva, entonces

$$f(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(1-x)^2 + b^2}.$$

La función positiva f posee claramente un mínimo, ya que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, y al ser f diferenciable en todo su dominio, si el mínimo se presenta en el punto x tendremos $f'(x) = 0$. Ahora, $f'(x) = 0$ cuando

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{(1-x)}{\sqrt{(1-x)^2 + b^2}} = 0.$$

Esta ecuación nos indica que $\cos\alpha = \cos\beta$.

También es posible observar que $f(x)$ es igual a la suma de las longitudes del segmento representado con línea discontinua y el segmento de representado con línea continua desde

$(x,0)$ hasta $(1,b)$. Esta cantidad es mínima cuando los dos segmentos rectilíneos están situados sobre la misma recta (tengamos en cuenta al problema 4-9(b), si hace falta un razonamiento riguroso); un poco de geometría en el plano demuestra que esto ocurre cuando $\alpha = \beta$.

10. Si x es la longitud de un lado de un rectángulo de perímetro P, entonces la longitud del otro lado es $(P-2x)/2$, por tanto el área es igual a

$$A(x) = \frac{x(P-2x)}{2}.$$

Por consiguiente se tendrá el rectángulo de mayor área cuando x sea el punto máximo de f en $(0,P/2)$. Puesto que A es continua en $[0,P/2]$, y $A(0) = A(P/2) = 0$, y $A(x) > 0$ para x en $(0,P/2)$, el máximo existe. Puesto que A es diferenciable en $(0,P/2)$, el punto mínimo x satisface

$$\begin{aligned} 0 = A'(x) &= \frac{P-2x}{2} - x \\ &= \frac{P-4x}{2}, \end{aligned}$$

por tanto $x = P/4$.

11. Sea $S(r)$ el área de la superficie de un cilindro recto de volumen V y radio r. Puesto que

$$V = \pi r^2 h \quad \text{donde } h \text{ es la altura,}$$

tenemos $h = V/\pi r^2$, por tanto

$$\begin{aligned} S(r) &= 2\pi r^2 + 2\pi r h \\ &= 2\pi r^2 + \tfrac{2V}{r}. \end{aligned}$$

Queremos hallar el mínimo de S en $(0,\infty)$; éste existe, ya que $\lim\limits_{r\to 0} S(r) = \lim\limits_{r\to\infty} S(r) = \infty$. Teniendo en cuenta que S es diferenciable en $(0,\infty)$, el punto mínimo r satisface

$$\begin{aligned} 0 = S'(r) &= 4\pi r - \frac{2V}{r^2} \\ &= \frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2}, \end{aligned}$$

equivalente a

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

21. 1 es un máximo local, y 3 es un mínimo local.

28. (a) Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} &= f'(x) \quad \text{para algún } x \text{ en } (a,b) \\ &\geq M, \end{aligned}$$

por tanto, $f(b) - f(a) \geq M(b-a)$.

(b) Tenemos

$$\begin{aligned}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} &= f'(x) \quad \text{para algún } x \text{ en } (a,b)\\ &\leq m,\end{aligned}$$

por tanto, $f(b)-f(a)\leq m(b-a)$.

(c) Si $|f'(x)|\leq M$ para todo x en $[a,b]$, entonces $-M\leq f(x)\leq M$, de modo que

$$f(a)-M(b-a)\leq f(b)\leq f(a)+M(b-a),$$

equivalente a

$$|f(b)-f(a)|\leq M(b-a).$$

31. (a) $f(x)=-\cos x+a$ para algún número a (puesto que $f(x)=-\cos x$ es una de dichas funciones, y la diferencia entre dos cualesquiera de tales funciones es una función constante).

(b) $f'(x)=x^4/4+a$ para algún número a, por tanto $f(x)=x^5/20+ax+b$ para algunos números a y b.

(c) $f''(x)=x^2+x^3/3+a$ para algún número a, por tanto, $f'(x)=x^3/6+x^4/12+ax+b$ para algunos números a y b, por tanto $f(x)=x^4/24+x^5/60+ax^2/2+bx+c$ para algunos números a, b, y c. Equivalentemente, y de forma más sencilla, $f(x)=x^4/24+x^5/60+ax^2+bx+c$ para algunos números a, b, y c.

32. (a) Puesto que $s''(t)=-32$, tenemos $s'(t)=-32t+\alpha$ para algún α, por tanto $s(t)=-16t^2+\alpha t+\beta$ para algún α y β.

(b) Evidentemente, $s(0)=0+0+\beta$ y $s'(0)=0+\alpha$. Por tanto, $\alpha=v_0$ y $\beta=s_0$.

(c) En este caso, $s_0=0$ y $v_0=v$, por tanto, $s(t)=-16t^2+vt$. El valor máximo de s se presenta cuando $0=s'(t)=-32t+v$, o bien $t=v/32$, por tanto, el valor máximo es

$$\begin{aligned}s\left(\frac{v}{32}\right) &= -16\left(\frac{v}{32}\right)^2+v\cdot\left(\frac{v}{32}\right)\\ &= \frac{-v^2}{64}+\frac{v^2}{32}\\ &= \frac{v^2}{64}.\end{aligned}$$

En este momento la velocidad es evidentemente igual a 0, pero la aceleración es -32 (como en cualquier otro momento). El peso golpea el suelo en un tiempo $t>0$ tal que

$$0=s(t)=-16t^2+vt,$$

equivalente a $t=v/16$ (se tarda lo mismo en caer que el tiempo que se empleo en subir hasta alcanzar el máximo). La velocidad será

$$\begin{aligned}s'(v/16) &= -32\left(\frac{v}{16}\right)+v\\ &= -v\end{aligned}$$

(la misma velocidad (en módulo) con la que subía en el instante inical).

47. Apliquemos el Teorema del Valor Medio a $f(x) = \sqrt{x}$ en $[64,66]$:

$$\frac{\sqrt{66}-\sqrt{64}}{66-64} = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{para algún } x \text{ en } [64,66].$$

Puesto que $64 < x < 81$, tenemos $8 < \sqrt{x} < 9$, por tanto

$$\frac{1}{2\cdot 9} < \frac{\sqrt{66}-8}{2} < \frac{1}{2\cdot 8}.$$

51. La Regla de l'Hôpital no es aplicable a la expresión

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2}$$

puesto que $\lim\limits_{x\to 1} 3x^2+1 \neq 0$.

52. (i)
$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sec^2 x} = \lim_{x\to 0} \cos^2 x = 1.$$

(ii)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\,\operatorname{sen} x \cos x}{2x} = -1.$$

Capítulo 12

1. (i) $f^{-1}(x) = (x-1)^{1/3}$. (Si $y = f^{-1}(x)$, entonces $x = f(y) = y^3+1$, por tanto, $y = (x-1)^{1/3}$.)

(iii) $f^{-1} = f$. (Si $y = f^{-1}(x)$, entonces

$$x = f(y) = \begin{cases} y, & y \text{ racional} \\ -y, & y \text{ irracional}; \end{cases}$$

(ya que $\pm y$ es racional o bien irracional si y sólo si y lo es, tenemos $y = x$ si x es racional e $y = -x$ si x es irracional, por tanto $y = f(x)$.)

(v)
$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & x \neq a_1, \dots, a_n \\ a_{i-1}, & x = a_i, \quad i = 2, \dots, n \\ a_n, & x = a_1. \end{cases}$$

(vii) $f^{-1} = f$.

2. (i) f^{-1} es creciente y $f^{-1}(x)$ no está definida para $x \leq 0$.
(iii) f^{-1} es decreciente y $f^{-1}(x)$ no está definida para $x \leq 0$.

3. Supongamos que f es creciente. Sea $a < b$. Entonces $f^{-1}(a) \neq f^{-1}(b)$, ya que f^{-1} es una función uno-uno. Por tanto, o bien $f^{-1}(a) < f^{-1}(b)$ o bien $f^{-1}(a) > f^{-1}(b)$. Pero si $f^{-1}(a) > f^{-1}(b)$, entonces

$$b = f(f^{-1}(b)) < f(f^{-1}(a)) = a,$$

lo que supone una contradicción. Podemos efectuar una demostración parecida para una función f decreciente, o bien podemos considerar la función $-f$ y aplicar lo que acabamos de demostrar a dicha función.

4. Evidentemente $f+g$ es creciente, si $f(a) < f(b)$ y $g(a) < g(b)$, entonces $(f+g)(a) = f(a) + g(a) < f(b) + g(b) = (f+g)(b)$.

$f \cdot g$ no es necesariamente creciente; por ejemplo, si $f(x) = g(x) = x$. (Pero $f \cdot g$ es creciente si $f(x), g(x) \geq 0$ para todo x.) $f \circ g$ es creciente, si $a < b$, entonces $g(a) < g(b)$, por tanto $f(g(a)) < f(g(b))$.

5. (a) Si $(f \circ g)(x) = (f \circ g)(y)$, por tanto $f(g(x)) = f(g(y))$, entonces $g(x) = g(y)$, ya que f es una función uno-uno, por tanto $x = y$, puesto que g es una función uno-uno.
$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$: pues si $y = (f \circ g)^{-1}(x)$, entonces $x = (f \circ g)(y) = f(g(y))$, por tanto $g(y) = f^{-1}(x)$, de donde $y = g^{-1}(f^{-1}(x))$.

6. Si $f(x) = f(y)$, entonces

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ay+b}{cy+d},$$

así

$$acxy + bcy + adx + bd = acxy + ady + bcx + bd,$$

o bien

$$ad(x-y) = bc(x-y).$$

Si $ad \neq bc$, esto implica que $x - y = 0$. (Pero si $ad = bc$, entonces $f(x) = f(y)$ para todo x e y en el dominio de f.)
Si $y = f^{-1}(x)$, entonces $x = f(y)$, por tanto

$$x = \frac{ay+b}{cy+d}$$

así

$$f^{-1}(x) = y = \frac{-dx+b}{cx-a} \qquad \text{para } x \neq a/c.$$

7. (i) Aquellos intervalos $[a,b]$ que están contenidos en $(-\infty, 0]$ o bien $[0,2]$ o $[2,\infty)$, puesto que f es creciente en $(-\infty, 0]$ y $[2,\infty)$, y decreciente en $[0,2]$.
(iii) Aquellos intervalos $[a,b]$ que están contenidos en $(-\infty, 0]$ o bien $[0,\infty)$, puesto que f es creciente en $(-\infty, 0]$ y decreciente en $[0,\infty)$.

11. Puesto que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

tenemos

$$\begin{aligned}(f^{-1})''(x) &= \frac{-f''(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x)}{[f'(f^{-1}(x))]^2} \\ &= \frac{-f''(f^{-1}(x))}{[f'(f^{-1}(x))]^3}.\end{aligned}$$

20. La fórmula de la derivada permite escribir:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}.$$

(En esta fórmula, se entiende que dx/dy significa $(f^{-1})'(y)$, mientras que dy/dx es una "expresión en x," y en el resultado final x debe ser sustituido por y, a partir de la ecuación $y = f(x)$.)

El cálculo en el problema 20, cuando se completa, demuestra que

$$\begin{aligned}\frac{dx^{1/n}}{dx} &= \frac{1}{n(x^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{nx^{1-(1/n)}}\\ &= \frac{1}{n}x^{(1/n)-1}.\end{aligned}$$

21.

$$\begin{aligned}G'(x) &= x(f^{-1})'(x) + f^{-1}(x) - F'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x)\\ &= x(f^{-1})'(x) + f^{-1}(x) - f(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x)\\ &= x(f^{-1})'(x) + f^{-1}(x) - x(f^{-1})'(x)\\ &= f^{-1}(x).\end{aligned}$$

22. (i)

$$(h^{-1})'(3) = \frac{1}{h'(h^{-1}(3))} = \frac{1}{h'(0)} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} 1)}.$$

Capítulo 13. **1.** Si $P_n = \{t_0, \ldots, t_n\}$ es una partición con $t_i = ib/n$, entonces

$$\begin{aligned}L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} (t_{i-1})^3 \cdot (t_i - t_{i-1})\\ &= \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 \cdot \frac{b_3}{n^3} \cdot \frac{b}{n}\\ &= \frac{b^4}{n^4} \sum_{j=0}^{n-1} j^3\\ &= \frac{b^4}{n^4}\left[\frac{(n-1)^4}{4} + \frac{(n-1)^3}{2} + \frac{(n-1)^2}{4}\right],\end{aligned}$$

y, de forma semejante,

$$\begin{aligned}U(f, P_n) &= \frac{b^4}{n^4} \sum_{j=1}^{n} j^3\\ &= \frac{b^4}{n^4}\left[\frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}\right].\end{aligned}$$

Evidentemente $L(f, P_n)$ y $U(f, P_n)$ pueden acercarse tanto como deseemos a $b^4/4$ con tal de escoger n suficientemente grande, por tanto $U(f, P_n) - L(f, P_n)$ puede hacerse tan pequeño como se quiera, escogiendo n lo suficientemente grande. Esto demuestra que f es integrable. Además, existe sólo un número a con $L(f, P_n) \le a \le U(f, P_n)$ para todo n; puesto que $\int_0^b x^3\,dx$ tiene esta propiedad, la demostración que $\int_0^b x^3\,dx = b^4/4$ se completa una vez demostremos que $L(f, P_n) \le b^4/4 \le U(f, P_n)$ para todo n. Esto puede hacerse mediante un cálculo directo, pero en realidad se deduce del hecho de que

$L(f, P_n)$ y $U(f, P_n)$ pueden acercarse tanto como se quiera al número real $b^4/4$ con tal de escoger n lo suficientemente grande. En efecto, si fuese cierto que $b^4/4 < \int_0^b x^3\,dx$, entonces no sería posible acercar $U(f, P_n)$ a $b^4/4$ tanto como quisiésemos escogiendo n lo bastante grande, puesto que cada $U(f, P_n) \geq \int_0^b x^3\,dx$, y, con un razonamiento parecido, concluiríamos que no puede ser que $b^4/4 > \int_0^b x^3\,dx$.

2. Tenemos

$$L(f, P_n) = \frac{b^5}{n^5}\left[\frac{(n-1)^5}{5} + \frac{(n-1)^4}{2} + \frac{(n-1)^3}{3} - \frac{(n-1)}{30}\right],$$
$$U(f, P_n) = \frac{b^5}{n^5}\left[\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}\right].$$

Evidentemente $L(f, P_n)$ y $U(f, P_n)$ pueden acercarse a $b^5/5$ tanto como queramos con tal de escoger n lo suficientemente grande. Como en el problema 1, esto implica que $\int_0^b x^4\,dx = b^5/5$.

7. (i) $\int_0^2 f = 0$. (iii) $\int_0^2 f = 3$. (v) f no es integrable. (vii) $\int_0^2 f = 1$.

(Para una demostración rigurosa de que las funciones en (i), (iii) y (vii) son integrables, vea el problema 19. El valor de las integrales, evidente si efectuamos un representación gráfica esquemática, puede también ser obtenido con rigor utilizando las ideas de la demostración del problema 19, junto con integrales ya conocidas.)

8. (i)
$$\int_{-2}^{2}\left[\left(\frac{x^2}{2}+2\right) - x^2\right] dx = \frac{16}{3}.$$

(iii)
$$\int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2}[(1-x^2)-x^2]\,dx = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

(v)
$$\int_0^2 [(x^2-2x+4)-x^2]\,dx = 4.$$

9.
$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x)g(y)\,dy\right)dx = \int_a^b\left(f(x)\int_c^d g(y)\,dy\right)dx \quad \text{(aquí } f(x) \text{ es la constante)}$$
$$= \int_c^d g(y)\,dy \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$
$$\text{(aquí } \int_c^d g(y)\,dy \text{ es la constante).}$$

13. (a) Evidentemente $L(f, P) \geq 0$ para cualquier partición P.

(b) Aplique el apartado (a) a la función $f - g$, y utilice el hecho de que

$$\int_a^b (f-g) = \int_a^b f - \int_a^b g.$$

23. (a) Evidentemente

$$m(b-a) \leq L(f,P) \leq U(f,P) \leq M(b-a)$$

para todas las particiones P de $[a,b]$. Por consiguiente,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Por tanto,

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

satisface $m \leq \mu \leq M$.

(b) Sean m y M los valores mínimo y máximo de la función f en $[a,b]$. Puesto que f es continua, toma todos los valores entre m y M, y en particular el número real μ del apartado (a).

33. (a) 0. (b) $\frac{1}{2}$.

37. Teniendo en cuenta que

$$-|f| \leq f \leq |f|,$$

tenemos

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|,$$

por tanto,

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

(El problema 36 implica que $\int_a^b |f|$ tiene sentido.)

Capítulo 14 **1.** (i) $(\operatorname{sen}^3 x^3) \cdot 3x^2$.

(iii) $\displaystyle\int_8^x \frac{1}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t}\,dt$.

(v) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t}\,dt$.

(vii) $\displaystyle(F^{-1})'(x) = \frac{1}{F'(F^{-1}(x))} = F^{-1}(x)$.

2. (i) Todo $x \neq 1$.

(iii) Todo $x \neq 1$.

(v) Todo x.

(vii) Todo $x \neq 0$. (F no es diferenciable en 0 ya que $F(x) = 0$ para $x \leq 0$, pero existen $x > 0$ arbitrariamente cercanos a 0 con $\frac{F(x)}{x} = \frac{1}{2}$.)

4. (i)
$$\begin{aligned}(f^{-1})'(0) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{1+\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(f^{-1}(0)))}\\ &= \frac{1}{1+\operatorname{sen}(\operatorname{sen} 0)} = 1.\end{aligned}$$

8. $F(x) = x\int_0^x f(t)\,dt$, por tanto
$$F'(x) = xf(x) + \int_0^x f(t)\,dt.$$

11.
$$f(x) = \int_0^x \left(\int_0^y \left(\int_0^z \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 t}}\,dt\right) dz\right) dy.$$

13. Podemos escoger
$$f(x) = \frac{x^{(1/n)+1}}{\dfrac{1}{n}+1}.$$

Entonces
$$\int_0^b \sqrt[n]{x}\,dx = f(b) - f(0) = \frac{b^{(1/n)+1}}{\dfrac{1}{n}+1}.$$

Capítulo 15 **1.** (i)
$$\frac{1}{1+\operatorname{arctg}^2(\operatorname{arctg} x)}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{arctg}^2 x}\cdot\frac{1}{1+x^2}.$$

(iii)
$$\frac{1}{1+(\operatorname{tg} x \operatorname{arctg} x)^2}\cdot\left(\sec^2 x \operatorname{arctg} x + \frac{\operatorname{tg} x}{1+x^2}\right).$$

2. (i) 0.

(iii) 0.

(v) 0.

7. (a)
$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 2x &= \operatorname{sen}(x+x) = \operatorname{sen} x\cos x + \cos x \operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen} x\cos x.\\ \cos 2x &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x.\\ \operatorname{sen} 3x &= \operatorname{sen}(2x+x) = \operatorname{sen} 2x\cos x + \cos 2x \operatorname{sen} x\\ &= 2\operatorname{sen} x\cos^2 x + (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sen} x\\ &= 3\operatorname{sen} x\cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x.\\ \cos 3x &= \cos(2x+x) = \cos 2x\cos x - \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x\\ &= (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\cos x = 2\operatorname{sen}^2 x\cos x\\ &= \cos^3 x - \operatorname{sen}^2 x\cos x - 2\operatorname{sen}^2 x\cos x\\ &= \cos^3 x - 3\operatorname{sen}^2 x\cos x\\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x.\end{aligned}$$

(b) Puesto que $\cos \pi/4 > 0$ y

$$0 = \cos \frac{\pi}{2} = \cos 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 2\cos^2 \frac{\pi}{4} - 1,$$

tenemos $\cos \pi/4 = \sqrt{2}/2$. Se deduce, debido a $\operatorname{sen} \pi/4 > 0$ y $\operatorname{sen}^2 + \cos^2 = 1$, que $\operatorname{sen} \pi/4 = \sqrt{2}/2$, y por consiguiente $\operatorname{tg} \pi/4 = 1$. Análogamente, debido a $\cos \pi/6 > 0$ y

$$0 = \cos \frac{\pi}{2} = \cos 3 \cdot \frac{\pi}{6} = 4\cos^3 \frac{\pi}{6} - 3\cos \frac{\pi}{6},$$

tenemos $\cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$. Se deduce, debido a $\operatorname{sen} \pi/6 > 0$, que

$$\operatorname{sen} \pi/6 = \sqrt{1 - (\sqrt{3}/2)^2} = \tfrac{1}{2}.$$

9. (a)

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(x+y) &= \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos(x+y)} \\
&= \frac{\operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y}{\cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y} \\
&= \frac{\operatorname{sen} x \cos y}{\cos x \cos y} + \frac{\cos x \operatorname{sen} y}{\cos x \cos y} \frac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{\cos x \cos y} \\
&= \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.
\end{aligned}$$

(b) A partir del apartado (a) tenemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y) &= \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y)}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y)} \\
&= \frac{x+y}{1-xy},
\end{aligned}$$

siempre que $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arctg} y$ y $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y \neq k\pi + \pi/2$. Puesto que $-\pi/2 < \operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arctg} y < \pi/2$, este es siempre el caso excepto cuando $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \pm\pi/2$, lo cual es equivalente a $xy = 1$. A partir de esta ecuación podemos asegurar que

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

siempre que $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y$ esté en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, lo cual es siempre cierto cuando $xy < 1$. (Si $x, y > 0$ y $xy > 1$, por tanto $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y > \pi/2$, entonces debemos añadir π al lado derecho, y si $x, y < 0$ y $xy > 1$, por tanto $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y < -\pi/2$, entonces debemos quitar π.)

11. La primera fórmula se deduce restando la segunda a la primera de las dos próximas ecuaciones:

$$\begin{aligned}\cos(m-n)x &= \cos(mx-nx) = \cos mx\cos(-nx) - \operatorname{sen} mx \operatorname{sen}(-nx)\\ &= \cos mx \cos nx + \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx,\\ \cos(m+n)x &= \cos mx \cos nx - \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx.\end{aligned}$$

Las demás fórmulas se obtienen de forma parecida.

12. Se deduce del problema 11 que si $m \neq n$, entonces

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]\,dx\\ &= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\operatorname{sen}(m-n)\pi}{m-n} - \frac{\operatorname{sen}(m+n)\pi}{m+n}\right]\right.\\ &\qquad \left. - \left[\frac{\operatorname{sen}(m-n)\pi}{m-n} - \frac{\operatorname{sen}(m+n)\pi}{m+n}\right]\right\}\\ &= 0.\end{aligned}$$

(Observemos que $\operatorname{sen}(m-n)(-\pi) = \operatorname{sen}(m-n)\pi$ puesto que $m-n$ es un entero.) Pero si $m = n$, entonces

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1 - \cos(m+n)x\,dx\\ &= \frac{1}{2}\left\{\left[\pi - \frac{\operatorname{sen}(m+n)\pi}{m+n}\right] - \left[-\pi - \frac{\operatorname{sen}(m+n)\pi}{m+n}\right]\right\}\\ &= \pi.\end{aligned}$$

Las demás fórmulas se demuestran de forma parecida.

15. (a) Tenemos

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2 x\\ &= 2\cos^2 x - 1.\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2 x &= \frac{1-\cos 2x}{2},\\ \cos^2 x &= \frac{1+\cos 2x}{2}.\end{aligned}$$

(b) Estas fórmulas se deducen del apartado (a), puesto que $\cos x/2 \geq 0$ y $\operatorname{sen} x/2 \geq 0$ (ya que $0 \leq x \leq \pi/2$).

(c)
$$\int_a^b \operatorname{sen}^2 x\,dx = \int_a^b \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}(b-a) - \frac{1}{4}(\operatorname{sen} 2b - \operatorname{sen} 2a).$$

$$\int_a^b \cos^2 x\,dx = \int_a^b \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}(b-a) + \frac{1}{4}(\operatorname{sen} 2b - \operatorname{sen} 2a).$$

19. (a) $\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \pi/4$.

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0 = \pi/2$.

20. $\lim\limits_{x\to\infty} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} \operatorname{sen} x = 1$.

21. (a)

$$(\operatorname{sen}^\circ)'(x) = \frac{\pi}{180}\cos\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi}{180}\cos^\circ(x).$$

$$(\cos^\circ)'(x) = \frac{\pi}{180}\cdot - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{-\pi}{180}\operatorname{sen}^\circ(x).$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^\circ x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\pi x/180)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\pi}{180}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}(\pi x/180)}{\pi x/180} = \dfrac{\pi}{180}$.

$\lim\limits_{x\to\infty} x \operatorname{sen}^\circ \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen}^\circ x}{x} = \dfrac{\pi}{180}$.

Capítulo 18 **1.** (i) $e^{e^{e^{e^x}}} \cdot e^{e^{e^x}} \cdot e^{e^x} \cdot e^x$.

(iii) $(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}[(\log(\operatorname{sen} x)) \cdot \cos(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x + (\cos x/\operatorname{sen} x) \cdot \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)]$.

(v) $$(\operatorname{sen} x)^{(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}}\left[(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}\cdot\log(\operatorname{sen} x)\left\{\cos x\cdot\log(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} x\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right\} + (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}\cdot\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right].$$

(vii) $$\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)\right]^{\log(\operatorname{sen} e^x)}\left[\left(\log\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)\right)\right)\cdot\frac{(\cos e^x)e^x}{\operatorname{sen} e^x} + \log(\operatorname{sen} e^x)\cdot\frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}\right)\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}\right)^2}\cdot\operatorname{sen}^2 x}\right].$$

(ix) $(\log x)^{\log x}\cdot\left[\log(\log x)\cdot\dfrac{1}{x} + \log x\cdot\dfrac{1}{\log x}\cdot\dfrac{1}{x}\right]$.

(xi) $$\cos\left(x^{\operatorname{sen}(x^{\operatorname{sen} x})}\right)\cdot x^{\operatorname{sen}(x^{\operatorname{sen} x})}\cdot\left[\cos\left(x^{\operatorname{sen} x}\right)\cdot x^{\operatorname{sen} x}\cdot\log x\left\{\cos x\cdot\log x + \frac{\cos x}{x}\right\} + \frac{\operatorname{sen}(x^{\operatorname{sen} x})}{x}\right].$$

5. (i) 0.

(iii) $\frac{1}{6}$.

(v) $\frac{1}{3}$.

8. (a)

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x &= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2\\ &= \left[\frac{e^{2x}}{4}+\frac{1}{2}+\frac{e^{-2x}}{4}\right] - \left[\frac{e^{2x}}{4}-\frac{1}{2}+\frac{e^{-2x}}{4}\right]\\ &= 1.\end{aligned}$$

(c)

$$\operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y = \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right)$$

$$= \left[\frac{e^{x+y}}{4} - \frac{e^{-x-y}}{4} - \frac{e^{-x+y}}{4} + \frac{e^{x-y}}{4}\right] + \left[\frac{e^{x+y}}{4} - \frac{e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{-x+y}}{4} - \frac{e^{x-y}}{4}\right]$$

$$= \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \operatorname{senh}(x+y).$$

(e) Puesto que

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

tenemos

$$\operatorname{senh}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

(g) Teniendo en cuenta que

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x},$$

tenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{tgh}'(x) &= \frac{(\cosh x)^2 - (\operatorname{senh} x)^2}{\cosh^2 x}\\ &= \frac{1}{\cosh^2 x} \quad \text{por el apartado (a).}\end{aligned}$$

9. (a) Si $y = \cosh^{-1} x$, entonces $y \geq 0$ y

$$x = \cosh y = \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 y} \quad \text{por el problema 7(a).}$$

Por tanto

$$\operatorname{senh}(\cosh^{-1} x) = \operatorname{senh} y = \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{ya que } \operatorname{senh} y \geq 0 \text{ para } y \geq 0.$$

(c)

$$\begin{aligned}(\operatorname{senh}^{-1})'(x) &= \frac{1}{\operatorname{senh}'(\operatorname{senh}^{-1}(x))}\\ &= \frac{1}{\cosh(\operatorname{senh}^{-1}(x))}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{por el apartado (b).}\end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned}(\mathrm{tgh}^{-1})'(x) &= \frac{1}{\mathrm{tgh}'(\mathrm{tgh}^{-1}(x))},\\ &= \cosh^2(\mathrm{tgh}^{-1}(x)).\end{aligned}$$

Ahora,

$$\mathrm{tgh}^2 y + \frac{1}{\cosh^2 y} = 1 \quad \text{por el problema 8(b)},$$

por tanto

$$\mathrm{tgh}^2(\mathrm{tgh}^{-1}(x)) + \frac{1}{\cosh^2(\mathrm{tgh}^{-1}(x))} = 1,$$

o bien

$$\cosh^2(\mathrm{tgh}^{-1}(x)) = \frac{1}{1-x^2}.$$

10. (a) Si $y = \mathrm{senh}^{-1} x$, entonces

$$x = \mathrm{senh}\, y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

por tanto

$$\begin{aligned} e^y - e^{-y} &= 2x,\\ e^{2y} - 2xe^y - 1 &= 0,\\ e^y &= \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2}\end{aligned}$$

por consiguiente

$$e^y = x + \sqrt{1+x^2} \quad \text{ya que } e^y > 0$$

o bien

$$y = \mathrm{senh}^{-1} x = \log(x + \sqrt{1+x^2}).$$

De forma parecida,

$$\begin{aligned}\cosh^{-1} x &= \log(x+\sqrt{x^2-1}),\\ \mathrm{tgh}^{-1} x &= \tfrac{1}{2}\log(1+x) - \tfrac{1}{2}\log(1-x).\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \mathrm{senh}^{-1} b - \mathrm{senh}^{-1} a \quad \text{por el problema 9(c)}\\ &= \log(b+\sqrt{1+b^2}) - \log(a+\sqrt{1+a^2}).\end{aligned}$$

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \begin{cases} \log(b+\sqrt{b^2-1}) - \log(a+\sqrt{a^2-1}) & a,b>1\\ -\log(-b+\sqrt{b^2-1}) + \log(-a+\sqrt{a^2-1}) & a,b<-1\end{cases}$$

$$\int_a^b \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}[\log(1+b) - \log(1-b) - \log(1+a) + \log(1-a)].$$

13. (a) $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \lim\limits_{x\to\infty} e^{x\log a}$. Puesto que $\log a < 0$, tenemos que $\lim\limits_{x\to\infty} x\log a = -\infty$, por tanto $\lim\limits_{x\to\infty} e^{x\log a} = 0$.

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(\log x)^n}{x} = \lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{y^n}{e^y} = 0$.

(e) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\log x}$. Ahora bien, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\log x = 0$ por el apartado (d), por tanto, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 1$.

17. (a) $\lim\limits_{y\to 0} \log(1+y)/y = \log'(1) = 1$.

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} x\log(1+1/x) = \lim\limits_{y\to 0^+} \log(1+y)/y = 1$.

(c)
$$\begin{aligned} e = \exp(1) &= \exp(\lim_{x\to\infty} x\log(1+1/x)) \\ (*) &= \lim_{x\to\infty} \exp(x\log(1+1/x)) \\ &= \lim_{x\to\infty} (1+1/x)^x. \end{aligned}$$

(La igualdad marcada con un asterisco depende de la continuidad de exp en 1, y puede justificarse como sigue. Para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que $|e - \exp y| < \varepsilon$ para $|y-1| < \delta$. Además, existe algún N tal que $|x\log(1+1/x) - 1| < \delta$ para $x > N$. Por tanto $|e - \exp(x\log(1+1/x))| < \varepsilon$ para $x > N$.

(d)
$$\begin{aligned} e^a &= [\lim_{x\to\infty} (1+1/x)^x]^a = \lim_{x\to\infty} (1+1/x)^{ax} \\ &= \lim_{ax\to\infty} (1+1/x)^{ax} \\ &= \lim_{y\to\infty} (1+a/y)^y. \end{aligned}$$

19. El número de dólares producido al cabo de un año por una inversión inicial de un dólar es
$$\lim_{x\to\infty} (1+a/100x)^x = e^{a/100}.$$

20. (a) Evidentemente $f'(x) = 1/x$ para $x > 0$. Si $x < 0$, entonces $f(x) = \log(-x)$, por tanto, $f'(x) = (-1)\cdot 1/(-x) = 1/x$.

(b) Podemos escribir $\log|f|$ en la forma $g\circ f$ donde $g(x) = \log|x|$ es la función del apartado (a). Por lo tanto, $(\log|f|)' = (g'\circ f)\cdot f' = 1/f\cdot f'$.

21. (c) Sea $g(x) = f(x)/e^{cx}$. Entonces
$$g'(x) = \frac{e^{cx}f'(x) - f(x)ce^{cx}}{e^{2cx}} = 0,$$
por tanto existe algún número k tal que $g(x) = k$ para todo x.

22. (a) Según el problema 21, existe algún k tal que $A(t) = ke^{ct}$. Entonces $k = ke^{0\cdot t} = A_0$. Por tanto, $A(t) = A_0e^{ct}$.

(b) Si $A(t+\tau) = A(t)/2$, entonces
$$A_0e^{ct+c\tau} = \frac{A_0e^{ct}}{2},$$

por tanto $e^{ct}e^{c\tau} = e^{ct}/2$ o bien $e^{c\tau} = \frac{1}{2}$, de donde $\tau = -(\log 2)/c$. Es fácil comprobar que dicho τ es el valor buscado.

23. La ley de Newton establece que, dado un cierto número (positivo) c,

$$T'(t) = c(T - M),$$

expresión que puede escribirse como

$$(T - M)' = c(T - M).$$

Por tanto, por el problema 21 existe algún número k tal que

$$T(t) - M = ke^{ct},$$

y $k = ke^{0\cdot t} = T(0) - M = T_0 - M$. Por consiguiente, $T(t) = M + (T_0 - M)e^{ct}$.

Capítulo 19

1. (i) $\left(\sqrt[5]{x^3} + \sqrt[6]{x}\right)/\sqrt{x} = x^{1/10} + x^{-1/3}$.

(ii) $\dfrac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}} = \dfrac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}{-2}$.

(iii) $(e^x + e^{2x} + e^{3x})/e^{4x} = e^{-3x} + e^{-2x} + e^{-x}$.

(iv) $a^x/b^x = (a/b)^x = e^{x\log(a/b)}$.

(v) $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$.

(vi) $\dfrac{1}{a^2 + x^2} = \dfrac{1/a^2}{1 + \left(\dfrac{x}{a}\right)^2}$.

(vii) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \dfrac{1/a}{\sqrt{1 - (x/a)^2}}$.

(viii) $\dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} x} = \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \sec^2 x - \sec x \operatorname{tg} x$.

(ix) $\dfrac{8x^2 + 6x + 4}{x + 1} = 8x - 2 + \dfrac{6}{x+1}$.

(x) $\dfrac{1}{\sqrt{2x - x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - (x-1)^2}}$.

2. (i) $-\cos e^x$. (Hagamos $u = e^x$.)

(iii) $(\log x)^2/2$. (Hagamos $u = \log x$.)

(v) e^{e^x}. (Hagamos $u = e^{e^x}$.)

(vii) $2e^{\sqrt{x}}$. (Hagamos $u = \sqrt{x}$.)

(ix) $-(\log(\cos x))^2/2$. (Hagamos $u = \log(\cos x)$.)

3. (i)

$$\begin{aligned}\int x^2e^x\,dx &= x^2e^x - \int 2xe^x\,dx = x^2e^x - 2\left[xe^x - \int e^x\,dx\right]\\ &= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x.\end{aligned}$$

(iii) Tenemos
$$\int e^{ax}\,\text{sen}\,bx\,dx = \frac{e^{ax}\,\text{sen}\,bx}{a} - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx$$
$$= \frac{e^{ax}\,\text{sen}\,bx}{a} - \frac{b}{a}\left[\frac{e^{ax}\cos bx}{a} - \frac{b}{a}\int e^{ax}(-\,\text{sen}\,bx)\,dx\right],$$

por tanto
$$\int e^{ax}\,\text{sen}\,bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}e^{ax}\,\text{sen}\,bx - \frac{b}{a^2+b^2}e^{ax}\cos bx.$$

(v) Utilizando el resultado $\int(\log x)^2\,dx = x(\log x)^2 - 2x(\log x) + 2x$ a partir del texto, tenemos
$$\begin{aligned}
\int(\log x)^3\,dx &= [x(\log x)^2 - 2x(\log x) + 2x]\log x \\
&\qquad - \int \frac{1}{x}[x(\log x)^2 - 2x(\log x) + 2x]\,dx \\
&= x(\log x)^3 - 2x(\log x)^2 + 2x\log x \\
&\qquad - \int(\log x)^2\,dx + 2[x\log x - x] - 2x \\
&= x(\log x)^3 - 2x(\log x)^2 + 2x\log x \\
&\qquad - [x(\log x)^2 - 2x(\log x) + 2x] + 2[x\log x - x] - 2x \\
&= x(\log x)^3 - 3x(\log x)^2 + 6x\log x - 6x.
\end{aligned}$$

(vii)
$$\begin{aligned}
\int \sec^3 x\,dx &= \int(\sec^2 x)(\sec x)\,dx = \text{tg}\,x\sec x - \int(\text{tg}\,x)(\sec x\,\text{tg}\,x)\,dx \\
&= \text{tg}\,x\sec x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)\,dx \\
&= \text{tg}\,x\sec x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx,
\end{aligned}$$

por tanto
$$\int \sec^3 x\,dx = \tfrac{1}{2}[\text{tg}\,x\sec x + \log(\sec x + \text{tg}\,x)].$$

(ix)
$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x}\log x\,dx &= \frac{2x^{3/2}}{3}\log x - \frac{2}{3}\int x^{3/2}\cdot\frac{1}{x}\,dx \\
&= \frac{2x^{3/2}}{3}\log x - \frac{2}{3}\int x^{1/2}\,dx \\
&= \frac{2x^{3/2}}{3}\log x - \frac{4}{9}x^{3/2}.
\end{aligned}$$

4. (i) Consideremos $x = \text{sen}\,u$, $dx = \cos u\,du$. La integral se convierte en
$$\int \frac{\cos u\,du}{\sqrt{1-\text{sen}^2 u}} = \int 1\,du = u = \text{arcsen}\,x.$$

(iii) Hagamos $x = \sec u$, $dx = \sec u \operatorname{tg} u\,du$. La integral se convierte en

$$\int \frac{\sec u \operatorname{tg} u\,du}{\sqrt{\sec^2 u - 1}} = \int \sec u\,du = \log(\sec u + \operatorname{tg} u)$$
$$= \log(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

(v) Consideremos $x = \operatorname{sen} u$, $dx = \cos u\,du$. La integral se convierte en

$$\int \frac{\cos u\,du}{\operatorname{sen} u\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 u}} = \int \operatorname{cosec} u\,du = -\log(\operatorname{cosec} u + \operatorname{ctg} u)$$
$$= -\log\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}\right).$$

(vii) Hagamos $x = \operatorname{sen} u$, $dx = \cos u\,du$. La integral se convierte en

$$\int (\operatorname{sen}^3 u \cos u) \cos u\,du = \int \operatorname{sen}^3 u \cos^2 u\,du = \int (\operatorname{sen} u)(1 - \cos^2 u)\cos^2 u\,du$$
$$= \int (\operatorname{sen} u)(\cos^2 u - \cos^4 u)\,du = -\frac{\cos^3 u}{3} + \frac{\cos^5 u}{5}$$
$$= -\frac{(1 - x^2)^{3/2}}{3} + \frac{(1 - x^2)^{5/2}}{5}.$$

(ix) Consideremos $x = \operatorname{tg} u$, $dx = \sec^2 u\,du$. La integral se convierte en

$$\int \sec u \sec^2 u\,du = \int \sec^3 u\,du$$
$$= \tfrac{1}{2}[\operatorname{tg} u \sec u + \log(\sec u + \operatorname{tg} u)] \quad \text{por el Problema 3(vii)}$$
$$= \tfrac{1}{2}[x\sqrt{1 + x^2} + \log(x + \sqrt{1 + x^2})].$$

5. (i) Consideremos $u = \sqrt{x + 1}$, $x = u^2 - 1$, $dx = 2u\,du$. La integral se convierte en

$$\int \frac{2u\,du}{1 + u} = \int \left(2 + \frac{-2}{1 + u}\right) du$$
$$= 2u - 2\log(1 + u) = 2\sqrt{x + 1} - 2\log(1 + \sqrt{x + 1}).$$

(iii) Hagamos $u = x^{1/6}$, $x = u^6$, $dx = 6u^5\,du$. La integral se convierte en

$$\int \frac{6u^5\,du}{u^3 + u^2} = 6\int \left(u^2 - u + 1 - \frac{1}{u + 1}\right) du = 2u^3 - 3u^2 + 6u - 6\log(u + 1)$$
$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\log(\sqrt[6]{x} + 1).$$

(v) Consideremos $u = \operatorname{tg} x$, $x = \operatorname{arctg} u$, $dx = du/(1+u^2)$. La integral se convierte en

$$\begin{aligned}
\int \frac{du}{(1+u^2)(2+u)} &= \frac{1}{5}\int \left(\frac{1}{2+u} - \frac{u-2}{1+u^2}\right) du \\
&= \frac{1}{5}\int \frac{du}{2+u} - \frac{1}{10}\int \frac{2u}{1+u^2}\,du + \frac{2}{5}\int \frac{du}{1+u^2} \\
&= \frac{1}{5}\log(2+u) - \frac{1}{10}\log(1+u^2) + \frac{2}{5}\operatorname{arctg} u \\
&= \frac{1}{5}\log(2+\operatorname{tg} x) - \frac{1}{10}\log(1+\operatorname{tg}^2 x) + \frac{2}{5}x.
\end{aligned}$$

(vii) Hagamos $u = 2^x$, $x = (\log u)/(\log 2)$, $dx = du/(u\log 2)$. La integral se convierte en

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\log 2}\int \frac{u^2+1}{(u+1)u}\,du &= \frac{1}{\log 2}\int \left(1 + \frac{1-u}{u(u+1)}\right) du \\
&= \frac{1}{\log 2}\int \left(1 + \frac{1}{u} - \frac{2}{u+1}\right) du \\
&= \frac{1}{\log 2}[u + \log u - 2\log(u+1)] \\
&= \frac{1}{\log 2}[2^x + x\log 2 - 2\log(2^x+1)].
\end{aligned}$$

(ix) Consideremos $u = \sqrt{x}$, $x = u^2$, $dx = 2u$. La integral se convierte en

$$\int \frac{\sqrt{1-u^2}\,2u\,du}{1-u}.$$

Hagamos ahora $u = \operatorname{sen} y$, $du = \cos y\,dy$. La integral se convierte en

$$\begin{aligned}
\int \frac{2\cos y \operatorname{sen} y \cos y}{1-\operatorname{sen} y}\,dy &= 2\int \frac{(1-\operatorname{sen}^2 y)\operatorname{sen} y}{1-\operatorname{sen} y}\,dy \\
&= 2\int (1+\operatorname{sen} y)\operatorname{sen} y\,dy \\
&= 2\int \operatorname{sen} y\,dy + \int 1 - \cos 2y\,dy \\
&= -2\cos y + y - \frac{\operatorname{sen} 2y}{2} = -2\cos y + y - \operatorname{sen} y \cos y \\
&= -2\sqrt{1-u^2} + \operatorname{arcsen} u - u\sqrt{1-u^2} \\
&= -2\sqrt{1-x} + \operatorname{arcsen}\sqrt{x} - \sqrt{x}\sqrt{1-x}.
\end{aligned}$$

El cambio de variable $u = \sqrt{1-x}$, $x = 1-u^2$, $dx = -2u\,du$ nos conduce a

$$\int \frac{-2u^2\,du}{1-\sqrt{1-u^2}}$$

y el cambio $u = \text{sen}\, y$ nos conduce a

$$\begin{aligned}\int \frac{-2\,\text{sen}^2 y \cos y\, dy}{1-\cos y} &= -2\,\text{sen}\, y - y - \text{sen}\, y \cos y \\ &= -2u - \text{arcsen}\, u - u\sqrt{1-u^2} \\ &= -2\sqrt{1-x} - \text{arcsen}\sqrt{1-x} - \sqrt{1-x}\sqrt{x}.\end{aligned}$$

Ambas respuestas coinciden puesto que

$$\text{arcsen}\sqrt{x} = \frac{\pi}{2} - \text{arcsen}\sqrt{1-x}$$

(compruebe este resultado comparando sus derivadas y sus valores para $x = 0$).

6. En problemas como éste, denotaremos por I a la integral que tratamos de calcular.

(i)
$$\begin{aligned}I &= \int \frac{2}{x-1}\,dx + \int \frac{3}{(x+1)^2}\,dx \\ &= 2\log(x-1) - \frac{3}{x+1}.\end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned}I &= \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{4}{(x+1)^3}\,dx \\ &= -\frac{1}{(x-1)} - \frac{2}{(x+1)^2}.\end{aligned}$$

(v)
$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{4}{x^2+1}\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}\log(x^2+1) + 4\,\text{arctg}\, x.\end{aligned}$$

(vii)
$$\begin{aligned}I &= \int \frac{1}{(x+1)}\,dx + \int \frac{2x}{(x^2+x+1)}\,dx \\ &= \int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx.\end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx &= \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx \\ &= \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}\,dx \\ &= \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{arctg}\left(\tfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\right) \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\text{arctg}\left(\tfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\right),\end{aligned}$$

por tanto

$$I = \log(x+1) + \log(x^2+x+1) - \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\tfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\right).$$

(ix)

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx - \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx \\ &= \int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx - \frac{16}{9}\int \frac{1}{\left(\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1\right)^2}\,dx. \end{aligned}$$

Ahora la sustitución

$$u = \tfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\tfrac{1}{2}\right), \quad dx = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,du$$

transforma la segunda integral en

$$-\frac{16}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{du}{(u^2+1)^2}.$$

Utilizando la fórmula de reducción, obtenemos

$$-\frac{8\sqrt{3}}{9}\left[\frac{u}{2(u^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+1}\right],$$

por tanto

$$I = -\frac{1}{x^2+x+1} - \frac{\sqrt{3}(x+\frac{1}{2})}{4(x^2+x+1)} - \frac{4\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\left(\tfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\right).$$

14. La ecuación

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

significa que cualquier función F con $F'(x) = e^x \operatorname{sen} x$ puede escribirse como

$$F(x) = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - G(x)$$

donde G es otra función con $G'(x) = e^x \operatorname{sen} x$. Naturalmente, $G = F + c$ para un cierto c, pero no es necesariamente cierto que $F = G$.

16. (a)

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arcsen} x\,dx &= \int 1\cdot \operatorname{arcsen} x\,dx = x \operatorname{arcsen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ &= x\operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

17. (a)

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^4 x\,dx &= -\frac{\operatorname{sen}^3 x\cos x}{4}+\frac{3}{4}\int \operatorname{sen}^2 x\,dx\\ &= -\frac{\operatorname{sen}^3 x\cos x}{4}+\frac{3}{4}\left[-\frac{\operatorname{sen} x\cos x}{2}+\frac{1}{2}\int 1\,dx\right]\\ &= -\frac{\operatorname{sen}^3 x\cos x}{4}-\frac{3\operatorname{sen} x\cos x}{8}+\frac{3}{8}x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^4 x\,dx &= \int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx=\int\left(\frac{1}{4}-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos^2 2x}{4}\right)dx\\ &= \frac{x}{4}-\frac{\operatorname{sen} 2x}{4}+\frac{1}{4}\int\frac{1+\cos 4x}{2}\,dx\\ &= \frac{x}{4}-\frac{\operatorname{sen} 2x}{4}+\frac{1}{4}\left[\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{sen} 4x}{8}\right]\\ &= \frac{3x}{8}-\frac{\operatorname{sen} 2x}{4}+\frac{\operatorname{sen} 4x}{32}.\end{aligned}$$

(b) Se deduce que ambas respuestas son idénticas, puesto que coinciden en $x=0$.

21. (a)

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^n x\,dx &= \int(\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen}^{n-1} x)\,dx\\ &= -\cos x\operatorname{sen}^{n-1} x+(n-1)\int\cos x(\operatorname{sen}^{n-2} x)\cos x\,dx\\ &= -\cos x\operatorname{sen}^{n-1} x+(n-1)\int(\operatorname{sen}^{n-2} x-\operatorname{sen}^n x)\,dx,\end{aligned}$$

por tanto

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx=-\frac{1}{n}\cos x\operatorname{sen}^{n-1} x+\frac{n-1}{n}\int\operatorname{sen}^{n-2} x\,dx.$$

(b)

$$\begin{aligned}\int\cos^n x\,dx &= \int(\cos x)(\cos^{n-1} x)\,dx\\ &= \operatorname{sen} x\cos^{n-1} x+(n-1)\int\operatorname{sen} x(\cos^{n-2} x)\operatorname{sen} x\,dx\\ &= \operatorname{sen} x\cos^{n-1} x+(n-1)\int(\cos^{n-2} x-\cos^n x)\,dx,\end{aligned}$$

y entonces

$$\int\cos^n x\,dx=\frac{1}{n}\operatorname{sen} x\cos^{n-1} x+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2} x\,dx.$$

(c)
$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^n}$$
$$= \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \int x \cdot \frac{x}{(x^2+1)^n}\,dx$$
$$= \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \left[\frac{x}{2(1-n)(x^2+1)^{n-1}} - \int \frac{dx}{2(1-n)(x^2+1)^{n-1}}\right]$$

por consiguiente

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2(n-1)}\,\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{2n-3}{2(n-1)}\int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\,dx.$$

Podemos también utilizar la sustitución $x = \operatorname{tg} u$, $dx = \sec^2 u\,du$, que transforma la integral en

$$\int \frac{\sec^2 u\,du}{\sec^{2n} u} = \int \cos^{2n-2} u\,du$$
$$= \frac{1}{2n-2}\cos^{2n-3} u \operatorname{sen} u + \frac{2n-3}{2n-2}\int \cos^{2n-4} u\,du$$
$$= \frac{1}{2n-2}\cdot\frac{1}{(\sqrt{x^2+1})^{2n-3}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}$$
$$= \frac{1}{2(n-1)}\,\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}.$$

Capítulo 20 **1.** (i) $P_{3,0}(x) = e + ex + ex^2 + (5e/3!)x^3$.

(iii) $P_{2n,\pi/2}(x) = 1 - \dfrac{(x-\pi/2)^2}{2!} + \dfrac{(x-\pi/2)^4}{4!} - \cdots + \dfrac{(-1)^n(x-\pi/2)^{2n}}{(2n)!}$.

(v) $P_{n,1}(x) = e + e(x-1) + \dfrac{e(x-1)^2}{2!} + \cdots + \dfrac{e(x-1)^n}{n!}$.

(vii) $P_{4,0}(x) = x + x^3$.

(ix) $P_{2n+1,0}(x) = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n}$.

2. Si f es una función polinómica de grado n, entonces $f^{(n+1)} = 0$. Se deduce, a partir del Teorema de Taylor, que $R_{n,a}(x) = 0$, por tanto $f(x) = P_{n,a}(x)$.

(i) $-12 + 2(x-3) + (x-3)^2$.
(iii) $243 + 405(x-3) + 270(x-3)^2 + 90(x-3)^3 + 15(x-3)^4 + (x-3)^5$.

3. (i) $\displaystyle\sum_{i=0}^{9} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!}\left(\text{puesto que } \frac{1}{(2n+2)!} < 10^{-17} \text{ para } 2n+2 \geq 19, \text{ o bien } n \geq 9\right)$.

(iii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{8} \frac{(-1)^i}{2^i(2i+1)!}\left(\text{ya que } \frac{1}{2^{2n+2}(2n+2)!} < 10^{-20} \text{ para } 2n+2 \geq 18,\ n \geq 8\right)$.

(v) $\displaystyle\sum_{i=0}^{13} \frac{2^i}{i!}$ $\left(\text{puesto que } \dfrac{3^2 \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-5} \text{ para } n+1 \geq 14, \text{ o bien } n \geq 13\right)$.

7. (i) $c_i = a_i + b_i$.

(iii) $c_i = (i+1)a_{i+1}$.

(v) $c_0 = \displaystyle\int_0^a f(t)\,dt; c_i = a_{i-1}/i$ para $i > 0$.

Capítulo 22

1. (i) $1 - n/(n+1) = 1/(n+1) < \varepsilon$ para $n+1 > 1/\varepsilon$.

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[4]{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[8]{n^2}\right) + \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[4]{n} - \sqrt[4]{n+1}\right) = 0 + 0 = 0.$ (Ambos límites pueden demostrarse del mismo modo que se demostró $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$ en el texto.)

(v) Evidentemente $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\log a)/n = 0$. Por tanto, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} e^{(\log a)/n} = e^0$ (por el Teorema 1) $= 1$.

(vii) $\sqrt[n]{n^2} \leq \sqrt[n]{n^2+n} \leq \sqrt[n]{2n^2}$, por tanto $(\sqrt[n]{n})^2 \leq \sqrt[n]{n^2+n} \leq \sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^2$, y $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^2 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^2 = 1$ por los apartados (v) y (vi).

(ix) Evidentemente $\alpha(n) \leq \log_2 n$, y $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\log_2 n)/n = 0$.

5. (a) Si $0 < a < 2$, entonces $a^2 < 2a < 4$, por tanto, $a < \sqrt{2a} < 2$.

(b) El apartado (a) demuestra que

$$\sqrt{2} < \sqrt{2\sqrt{2}} < \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} < \ldots < 2,$$

por tanto la sucesión converge, por el Teorema 2.

(c) Si designamos a esta sucesión por $\{a_n\}$, entonces la sucesión $\{\sqrt{2a_n}\}$ es la misma que $\{a_{n+1}\}$. Por tanto, la indicación nos muestra que $l = \sqrt{2l}$, o bien $l = 2$.

8. Si x es racional, entonces $n!\,\pi x$ es un múltiplo de π para valores de n suficientemente grandes, por tanto $(\cos n!\,\pi x)^{2k} = 1$ para tales valores n, y por consiguiente $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{k\to\infty} (\cos n!\,\pi x)^{2k}\right) = 1$. Si x es irracional, entonces $n!\,\pi x$ no es un múltiplo de π sea cual sea n, por tanto $|\cos n!\,\pi x| < 1$, en consecuencia $\displaystyle\lim_{k\to\infty} (\cos n!\,\pi x)^{2k} = 0$, y por consiguiente $f(x) = 0$.

9. (i) $\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx = e - 1$. (Utilize particiones de $[0,1]$ en n partes iguales.)

(iii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \log 2$.

(v) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,dx = \frac{1}{2}$.

Capítulo 23

1. (i) (Absolutamente) convergente, puesto que $|(\operatorname{sen} n\theta)/n^2| \leq 1/n^2$.

(iii) Divergente, ya que los primeros $2n$ términos tienen una suma $\frac{1}{2} + \cdots + 1/n$. (El criterio de Leibniz no puede aplicarse puesto que los términos, en valor absoluto, no son decrecientes con n.)

(v) Divergente, debido a que

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}} \geq \frac{1}{n^{2/3}}.$$

(vii) Convergente, puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2/(n+1)!}{n^2/n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n+1} = 0.$$

(ix) Divergente, ya que $1/(\log n) > 1/n$.

(xi) Convergente, puesto que $1/(\log n)^n < \dfrac{1}{2^n}$ para $n > 9$.

(xiii) Divergente, ya que

$$\frac{n^2}{n^3+1} > \frac{1}{2n}$$

para valores de n suficientemente grandes.

(xv) Divergente, puesto que

$$\int_2^N \frac{1}{x\log x}\,dx = \log(\log N) - \log(\log 2) \to \infty \text{ cuando } N \to \infty.$$

(Observemos que $f(x) = 1/(x\log x)$ es decreciente en $[2,\infty)$, puesto que

$$f'(x) = \frac{-[1+\log x]}{(x\log x)^2} < 0 \qquad \text{para } x > 1.)$$

(xvii) Convergente, ya que $1/n^2(\log n) < 1/n^2$ para $n > 2$.

(xix) Convergente, puesto que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{2^n n!/n^n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e},\end{aligned}$$

por el Problema 18-17.

7. (a) Para cada N tenemos, evidentemente,

$$0 \leq \sum_{n=1}^{N} a_n 10^{-n} < 9\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n} = 1,$$

por tanto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ converge por el criterio de acotación, y su valor está comprendido entre 0 y 1. (En realidad dicho número se puede representar por $0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots$ sólo cuando la sucesión $\{a_n\}$ no es idénticamente igual a 0.)

20. El área de la región sombreada es igual a $\frac{1}{2}$. La integral es

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}([1-\tfrac{1}{2}]+[\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{8}]+[\tfrac{1}{16}-\tfrac{1}{32}]+\cdots)-\tfrac{1}{2}([\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}]+[\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{16}]+\cdots)\\
&\quad=\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{32}+\tfrac{1}{128}+\cdots)-\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{64}+\tfrac{1}{256}+\cdots)\\
&\quad=\tfrac{1}{4}(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{64}+\cdots)-\tfrac{1}{8}(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{64}+\cdots)\\
&\quad=\tfrac{1}{8}\left(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4^2}+\tfrac{1}{4^3}+\cdots\right)\\
&\quad=\tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{1}{1-\frac{1}{4}}\\
&\quad=\tfrac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Capítulo 24 **1.** (i)

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ 1, & 0<x\le 1.\end{cases}$$

$\{f_n\}$ no converge uniformemente a f.

(iii) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$ (ya que $\lim\limits_{n\to\infty} x^n=\infty$ para $x>1$). La sucesión $\{f_n\}$ no converge uniformemente a f; en efecto, para cada n tenemos que los valores de $f_n(x)$ son grandes, escogiendo x suficientemente grandes.

(v) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$, y $\{f_n\}$ converge uniformemente a f, puesto que $|f_n(x)|\le 1/n$ para todo x.

3. (i) $-\dfrac{1}{a}-\dfrac{x}{a^2}-\dfrac{x^2}{a^3}-\cdots$

(iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-\frac{1}{2}}{k}x^k.$

(v) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\binom{-\frac{1}{2}}{k}}{2k+1}x^{2k+1}.$

4. (i) e^{-x}.

(iii) Si

$$f(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3\cdot 2}+\frac{x^4}{4\cdot 3}-\cdots,\qquad |x|\le 1$$

entonces

$$\begin{aligned}
f'(x)&=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\\
&=\log(1+x)\qquad |x|<1,
\end{aligned}$$

por tanto para $|x|<1$ tenemos $f(x)=(1+x)\log(1+x)-(1+x)+c$ para algún número c. Puesto que $f(0)=0$, tenemos $c=1$, por tanto $f(x)=(1+x)\cdot\log(1+x)-x$ para $|x|<1$.

6. Puesto que

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

tenemos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

(observar que el lado derecho es igual a 1 para $x = 0$). Por tanto,

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}, & k = 2n \\ 0, & k \text{ impar.} \end{cases}$$

Capítulo 25 **1.** (i) $|3+4i| = 5$; $\theta = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$.

(iii) $|(1+i)^5| = (|1+i|)^5 = (\sqrt{2})^5$; ya que $\pi/4 = \operatorname{arctg} 1/1$ es un argumento de $1+i$, un argumento de $(1+i)^5$ es $5\pi/4$.

(v) $|(|3+4i|)| = |5| = 5$; $\theta = 0$.

2. (i)

$$\begin{aligned} x &= \frac{-i \pm \sqrt{-1-4}}{2} \\ &= \frac{-i \pm \sqrt{5}i}{2} \\ &= \frac{(-1+\sqrt{5})i}{2} \quad \text{o} \quad \frac{(-1-\sqrt{5})i}{2}. \end{aligned}$$

(iii) $x^2 + 2ix - 1 = (x+i)^2$, por tanto, la única solución es $x = -i$.

(v) $x^3 - x^2 - x - 2 = (x-2)(x^2+x+1)$. Las soluciones son

$$2, \quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

3. (i) Todos los $z = iy$ con y real.

(iii) Todos los z sobre la recta perpendicular que divide en dos partes iguales el segmento rectilíneo entre a y b.

(v) Para $z = x + iy$, necesitamos que $\sqrt{x^2+y^2} < 1 - x$. Esto requiere que $1 - x > 0$, y entonces nuestra desigualdad es equivalente a $x^2 + y^2 < (1-x)^2$, o bien $x < (1-y^2)/2$ (y recíprocamente, esta desigualdad implica que $x < \frac{1}{2}$, por tanto $1 - x > 0$ se cumple). El conjunto de puntos $x + iy$ con $x = (1-y^2)/2$ es la parábola que apunta al eje vertical, siendo el punto $\frac{1}{2} + 0i$ el más cercano al origen, y que pasa por los puntos $0 + i$ y $0 - i$; el conjunto de números complejos deseados es el conjunto de puntos situados dentro de esta parábola.

4. $|x+iy|^2 = x^2 + y^2 = x^2 + (-y)^2 = |x - iy|^2$.

$(z + \bar{z})/2 = [(x+iy) + (x-iy)]/2 = x$.

$(z - \bar{z})/2 = [(x+iy) - (x-iy)]/2i = y$.

5. $|z+w|^2+|z-w|^2=(z+w)(\bar{z}+\bar{w})+(z-w)(\bar{z}-\bar{w})=2z\bar{z}+2w\bar{w}=2(|z|^2+|w|^2)$. Geométricamente, esta igualdad indica que la suma de las longitudes de las diagonales al cuadrado de un paralelogramo es igual a la suma de las longitudes al cuadrado de sus lados.

Capítulo 27

1. (i) Converge absolutamente, puesto que $|(1+i)^n/n!|=(\sqrt{2})^n/n!$, y $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2})^n/n!$ converge.

(iii) Converge, pero no es absolutamente convergente, ya que las partes reales forman la serie

$$-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{8}-\cdots$$

y las partes imaginarias forman la serie

$$i\left(\tfrac{1}{1}-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\cdots\right).$$

(v) Diverge, ya que las partes reales forman la serie

$$\frac{\log 3}{3}+2\frac{\log 4}{4}+\frac{\log 5}{5}+\frac{\log 7}{7}+2\frac{\log 8}{8}+\frac{\log 9}{9}+\cdots$$

2. (i) El límite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|z|^{n+1}/(n+1)^2}{|z|^n/n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2|z|=|z|$$

es <1 para $|z|<1$, pero >1 para $|z|>1$.

(iii) El límite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|z|^{n+1}}{|z|^n}=|z|$$

es <1 para $|z|<1$ pero >1 para $|z|>1$.

(v) El límite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}|z|^{(n+1)!}}{2^n|z|^{n!}}=\lim_{n\to\infty}2|z|^{(n+1)!-n!}$$

es 0 para $|z|<1$, pero ∞ para $|z|>1$.

3. (i) Los límites

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\frac{|z|^{2n}}{3^n}}=\frac{|z|}{\sqrt{3}}\qquad\text{y}\qquad\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{\frac{|z|^{2n+1}}{2^{n+1}}}=\frac{|z|}{\sqrt{2}}$$

son <1 para $|z|<\sqrt{2}$, por tanto la serie es absolutamente convergente para $|z|<\sqrt{2}$. Pero la serie no es absolutamente convergente para $|z|>\sqrt{2}$, por tanto el radio de convergencia es $\sqrt{2}$.

(iii) Puesto que

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n|z|^n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|z|}{2}\sqrt[n]{n}=\frac{|z|}{2}\quad\text{por el problema 22-1(vi),}$$

el radio de convergencia es 2.

(v) El límite

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n z^{n!}}=2\lim_{n\to\infty}z^{(n-1)!}$$

es 0 para $|z|<1$, pero es ∞ para $|z|>1$, por tanto el radio de convergencia es igual a 1.

Glosario de símbolos

Índice alfabético

*NT: musa inspiradora de la Historia.

**NT: expresión acuñada por los matemáticos D. C. Kelly y M. Spivak, que puede ser usada para designar artificios matemáticos sorprendentes o raros.

Calculus

Tercera edición
(Traducción de la cuarta edición original)

Esta cuarta edición del Calculus de M. Spivak viene a actualizar uno de los libros de cálculo más prestigiosos publicados durante las últimas décadas. Aunque se han introducido algunos pequeños cambios, especialmente en los Capítulos 5 y 20, la principal novedad de esta cuarta edición es la incorporación de problemas adicionales, una puesta al día completa de las Lecturas aconsejadas y la corrección de los errores detectados.

En esta edición, M. Spivak mantiene intacto el principal objetivo del libro, que no es otro que presentar el cálculo como la evolución de una idea que ayude a desarrollar la intuición del estudiante para la comprensión de los conceptos del análisis, y convencerle de que la precisión y el rigor representan la manera natural de formular y pensar sobre las cuestiones matemáticas.

Aspectos destacados del Calculus de Spivak

- Es reconocido como una de las mejores introducciones al análisis matemático.
- Es el libro más referenciado en las bibliografías de cálculo y análisis matemático.
- Se ha convertido en el libro más influyente en su área de conocimiento.
- Combina explicaciones detalladas con muchos ejemplos, ejercicios e ilustraciones.
- Su enfoque riguroso y detallado es a la vez práctico y de fácil comprensión.
- Arroja luz sobre los temas difíciles y recompensa el esfuerzo de los estudiantes.
- Edición revisada y actualizada.

EDITORIAL
REVERTÉ

www.reverte.com

ISBN 978-84-291-5182-4

9 788429 151824

EDITORIAL REVERTÉ