# Matemáticas

Licenciatura en Biología

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Salamanca

# Índice

# Tema 1

# Funciones, Límites y Continuidad

## 1.1 Introducción

El objetivo de este tema es recordar conceptos ya conocidos acerca de las funciones reales de variable real, así como de los límites en dichas funciones y las propiedades de continuidad de las mismas. Al final del tema se incluyen, como apéndice, una serie de definiciones básicas sobre la topología de la recta real.

## 1.2 Funciones Reales de Variable Real

**Definición.** Una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una correspondencia de $A \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que asigne a todo $x \in A$ a lo más un número real $y = f(x)$.
**Definición.** Llamaremos Dominio de $f$ (Dom $f$) al conjunto de elementos de $A$ para los cuales existe $f(x)$.

Habitualmente consideraremos $A = \mathrm{Dom} f$, en tal caso $f$ será una aplicación.

Otra definición elemental es la de imagen de $f$ ($\mathrm{Im} f$):

$$\mathrm{Im} f = \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in A, f(x) = y\}$$

---

**Ejemplo:** La función: $f(x) = x^2$ está definida sobre todos los números reales, es decir $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$, pero su imagen la constituyen tan sólo los números reales no negativos: Im $f = \mathbb{R}_+$.

---

**Definiciones básicas:**

**1.** Forma analítica, gráfica y tabular de presentar una función. Se dice que una función $y = f(x)$ está expresada en forma analítica si se define por la fórmula que indica las operaciones que debemos realizar con todo valor del dominio de $f$ para obtener el correspondiente valor de la imagen. En general, si no está especificado, se sobreentiende que el dominio de la función es el conjunto de valores reales para los cuales la expresión analítica que define la función toma sólo valores reales y finitos. (Nota: la expresión o fórmula no tiene por qué ser única, la función puede estar definida "a trozos").

Se denomina gráfica de una función $y = f(x)$ al conjunto de puntos que se obtienen tomando los pares de valores $(x, f(x))$ como coordenadas de un punto del plano. Una función está expresada gráficamente si viene dada por su gráfica.

Una función se dice prefijada en forma tabular si se indican los valores numéricos de la función para algunos valores de la variable $x$. Los hechos experimentales suelen estar descritos por este tipo de expresión.

---

**Ejemplo:** La función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x > 1 \\ -2x+3 & \text{si} \quad x \leq 1 \end{cases}$$

está definida en forma analítica a trozos. Su representación gráfica es la siguiente:

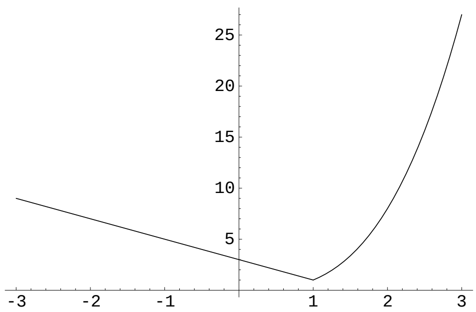



Figura 1.1: *Gráfica de $f(x)$.*

Como curiosidad, podemos citar que no todas las funciones reales de variable real admiten representación gráfica, así por ejemplo la función de Dirichlet: $D(x) = 1$ si $x$ es un número racional, y $D(x) = 0$ si $x$ es irracional, no puede ser representada.

---

**2.** Crecimiento y decrecimiento. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ ($A$=Dom$f$) y sea $B \subset A$. Entonces:

$f$ es creciente en $B$ si $\forall x_1, x_2 \in B$ tales que $x_1 < x_2$ se verifica $f(x_1) \leq f(x_2)$.

$f$ es estrictamente creciente en $B$ si $\forall x_1, x_2 \in B$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

$f$ es decreciente y estrictamente decreciente en $B$ de maneras análogas.

---

**Ejemplo:** La función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ x-1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

es creciente pero no estrictamente creciente en $\mathbb{R}$. En las regiones $A_1 = (-\infty, 0]$ y $A_2 = [1, \infty)$, la función es estrictamente creciente.

---

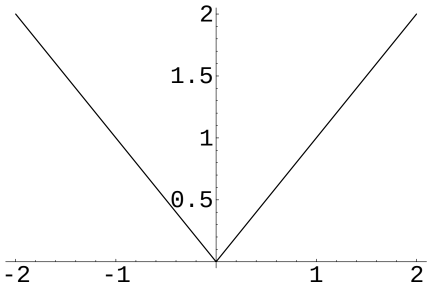
**3.** Paridad e imparidad. Sea $f : A \to \mathbb{R}$, con Dom$f$ =$A$ y tal que si $x \in A \Rightarrow -x \in A$.

$f$ es una función impar si $\forall x \in A$ se verifica $f(-x) = -f(x)$.

$f$ es una función par si $\forall x \in A$ se verifica $f(-x) = f(x)$.

---

**Ejemplo:** La función valor absoluto $f(x) = |x|$ es un ejemplo sencillo de función par. La función $g(x) = x^3 - 3x$ es impar.



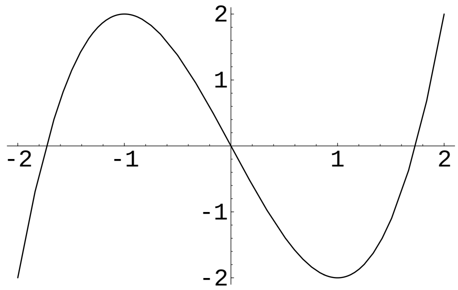




Figura 1.2: *Gráficas de* $f(x) = |x|$ *y* $g(x) = x^3 - 3x$.

---

**4.** Acotación. $f$ es una función acotada (en cualquier sentido) si $\mathrm{Im}f$ es un conjunto acotado (en el sentido respectivo) en $\mathbb{R}$.

**5.** Periodicidad. $f$ es una función periódica si existe $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$, tal que:

$$f(x) = f(x+h), \qquad \forall x, x+h \in \mathrm{Dom}f$$

$h$ recibe el nombre de periodo de la función $f$.

---

**Ejemplo:** Las funciones periódicas más conocidas son, sin duda, las trigonométricas circulares, es decir, el seno, el coseno y la tangente de un ángulo. El periodo de las funciones seno y coseno es $2\pi$ radianes, mientras que el periodo de la tangente es $\pi$.

$$\mathrm{sen}(x+2\pi) = \mathrm{sen}\, x\ , \quad \cos(x+2\pi) = \cos x\ , \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\tan(x+\pi) = \tan x\ , \qquad \forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

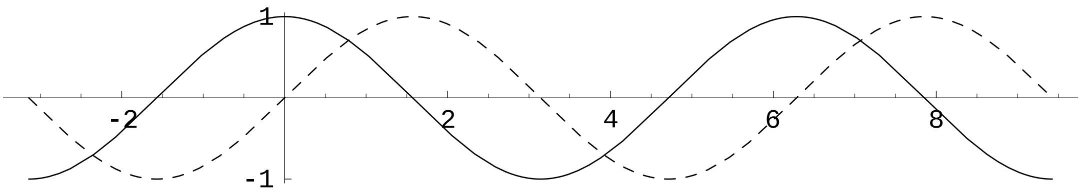



Figura 1.3: *Gráficas de las funciones seno (trazo discontinuo) y coseno. Es evidente a partir de la gráfica que ambas son funciones acotadas, además el seno es una función impar mientras que el coseno es par.*

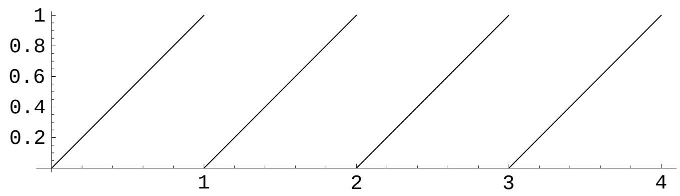



Figura 1.4: *Gráfica de la función* $f(x) = x - E[x]$.

**Ejemplo:** La función $f(x) = x - E[x]$ es periódica de periodo 1. $E[x]$ es la función "parte entera" (por ejemplo: $E[1.8] = 1$, $E[4.782] = 4, \ldots$).

---

**6.** Composición de funciones. Dadas las funciones $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$, tales que $A =$Dom$f$, $B =$Dom$g$, Im$f \subset B$, se define la función compuesta:

$$g \circ f : A \to \mathrm{R}$$

de la forma $g \circ f(x) = g(f(x))$, $\forall x \in A$.

**7.** Función inversa. Sea $f : A \to \mathbb{R}$, con Dom$f$=$A$, una función inyectiva (es decir, tal que si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$), entonces existe y es única la función $h$ :Im$f \to \mathbb{R}$ tal que $h(f(x)) = x$, $\forall x \in A$, a la que llamaremos función inversa de $f$ y denotaremos $h = f^{-1}$. También es inyectiva y verifica $f(h(x)) = x$, $\forall x \in$Dom$h$=Im$f$.

---

**Ejemplo 1:** La inversa de la función exponencial: $f(x) = e^x$ es la función logaritmo neperiano: $h(x) = \ln x$, es decir:

$$f(h(x)) = e^{\ln x} = x \quad , \qquad h(f(x)) = \ln e^x = x$$

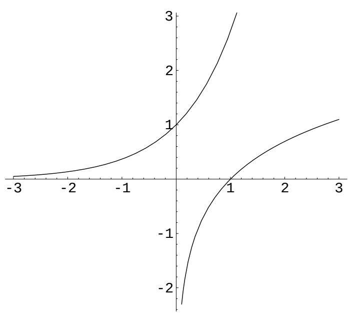



Figura 1.5: *Gráficas de las funciones exponencial y logaritmo neperiano.*

**Ejemplo 2:** La función tangente no es inyectiva. Por ello su función inversa, el arcotangente, no está bien definida, pues se trata de una función multivaluada. Si nos limitamos a considerar $f(x) = \tan x$ en intervalo $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, entonces $h(x) = \arctan x$ sí que está bien definida (y recibe el nombre de Determinación Principal del arcotangente). Ver figuras 1.5 y 1.6.

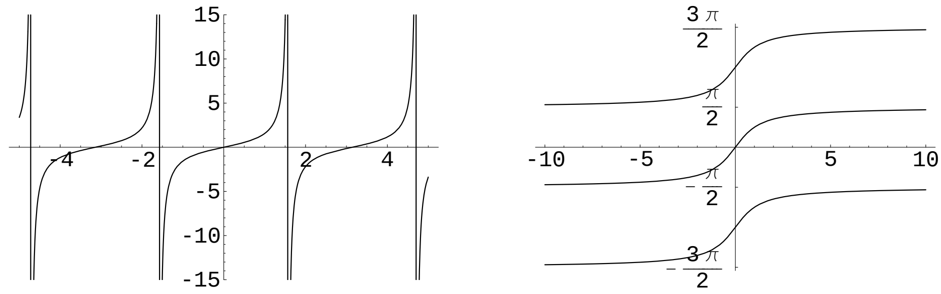



Figura 1.6: *Gráficas de las funciones tangente y arcotangente.*

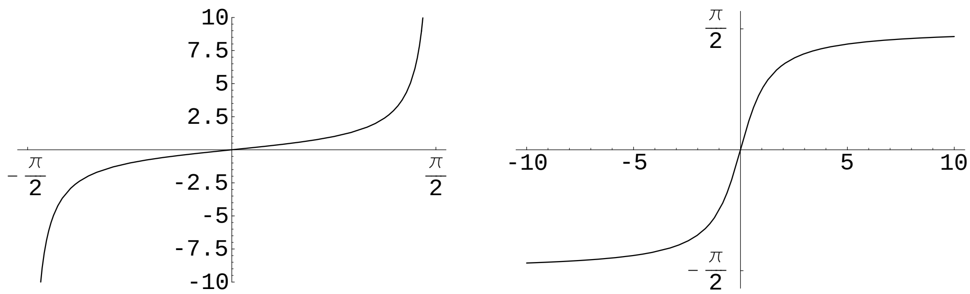



Figura 1.7: *Gráficas de la tangente y de la determinación principal del arcotangente.*

---

# 1.3 Límites

## 1.3.1 Definiciones y Teoremas básicos

Estudiaremos en esta sección una serie conceptos básicos acerca de los límites de las funciones reales.

**Definición.** Dada una función $f(x)$ definida (al menos) en un entorno reducido[1] de un punto $x_0$, $E^*(x_0)$, un número real $L$ se denomina límite de la función $f(x)$ en el punto $x_0$ (o límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a $x_0$) si para todo $\epsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que para todos los $x \in E^*(x_0)$ que satisfacen $\mid x - x_0 \mid < \delta$ se verifica $\mid f(x) - L \mid < \epsilon$.

[1]Un entorno $E(x_0)$ de un número real $x_0 \in \mathbb{R}$ es todo intervalo abierto que lo contenga. Ejemplo: El intervalo $(1,4)$ es un entorno del número real 3. Un entorno reducido de $x_0$ es un entorno de $x_0$ en el que se suprime el propio punto $x_0$. Ejemplo: $E^*(3) = (1,4) - \{3\} = (1,3) \cup (3,4)$ es un entorno reducido de 3. Ver el apéndice de este tema.

Se escribe, en forma simbólica:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in E^*(x_0), 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

**Definición.** Dada una función $f(x)$ definida (al menos) en un intervalo $(a, x_0)$, se dice que $L$ es el límite por la izquierda de la función $f(x)$ en el punto $x_0$, si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x_0 - \delta < x < x_0$ entonces $\mid f(x) - L \mid< \epsilon$.

Se escribe: $L = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$.
Se define de manera análoga el límite por la derecha $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$.

Es fácil deducir, a partir de las definiciones, el siguiente teorema:

**Teorema.** La condición necesaria y suficiente para que una función tenga límite $L$ en un punto es que existan los límites laterales en ese punto y que coincidan (con $L$, lógicamente).

Si una función está definida en todo el eje numérico o al menos en una de sus semirrectas (todos los $x$ que satisfacen $\mid x \mid> K$ para algún $K > 0$), entonces tendrá sentido hablar de valores de $f(x)$ para $x$ infinitamente grandes en valor absoluto, en tales casos es posible definir:

**Definición.** Un número $L$ de denomina límite de la función $f(x)$ para $x$ tendiendo a infinito y se denota: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un número $B > 0$ tal que si $x > B$ entonces $\mid f(x) - L \mid< \epsilon$. Y análogamente para $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$.

**Definición.** Dada una función $f(x)$ definida (al menos) en un entorno reducido de un punto $x_0$, $E^*(x_0)$, se dice que $f(x)$ tiende a $\infty$ cuando $x$ tiende a $x_0$ si:

$$\lim_{x\to x_0} = +\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathrm{R}, \exists\delta > 0, x \in E^*(x_0), |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > K$$

Análogamente:

$$\lim_{x\to x_0} = -\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathrm{R}, \exists\delta > 0, x \in E^*(x_0), |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < K$$

**Propiedades de los límites:**

- 1. Si una función $f(x)$ tiene límite en un punto $x_0$, este límite es único.
- 2. Si una función $f(x)$ tiene límite finito en un punto $x_0$, entonces está acotada en un entorno de dicho punto; es decir $\exists M > 0,\ \exists\delta > 0$ tales que

$$\mid f(x) \mid\leq M \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),\ x \neq x_0.$$

- 3. Si $f(x) \leq g(x)$ para todos los $x$ en un entorno reducido de $x_0$, $E^*(x_0)$ (en el que ambas están definidas), y en el punto $x_0$ cada una de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tiene límite, entonces[2]

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$$

[2]Nota: de la desigualdad estricta para las funciones no se desprende la de sus límites.

- 4. Regla del sandwich. Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todos los puntos de un entorno reducido de $x_0$ $E^*(x_0)$ (en el que las tres están definidas), y las funciones $g(x)$ y $h(x)$ tienen el mismo límite $L$ en el punto $x_0$, entonces la función $f(x)$ tiene, también en ese punto $x_0$ el límite igual al mismo número $L$.

- 5. Álgebra de los límites. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones definidas (al menos) en un entorno reducido de $x_0$, $E^*(x_0)$, y tales que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = G$. Entonces su suma, su producto y su cociente (siempre y cuando $G \neq 0$) tienen límite en $x_0$, verificándose:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = L + G \quad ; \qquad \lim_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = LG$$

  Además, si $G \neq 0$: $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{G}$
  Si alguno de los límites, $L$ y $G$, es infinito, las anteriores relaciones siguen verificándose, a excepción de algunos casos concretos, conocidos como indeterminaciones.

La propiedad 5, junto con el conocimiento de algunos límites elementales, permite en la práctica el cálculo de infinidad de límites de forma trivial. Así por ejemplo, sabiendo que $\lim_{x\to x_0} x = x_0$ y que el límite de una función constante es igual a dicha constante en cualquier punto, automáticamente, por aplicaciones sucesivas de la propiedad 5 concluimos que el límite cuando $x$ tiende a $x_0$ de cualquier polinomio $p(x)$ es exactamente el valor de $p(x_0)$, y otro tanto podemos afirmar para cualquier función racional, siempre y cuando $x_0$ no sea una raíz del denominador. Por esta razón, los límites realmente interesantes son aquéllos en los que aparece alguna indeterminación.

### 1.3.2 Infinitos e Infinitésimos

**Definición.** Sea $f(x)$ una función definida (al menos) en un entorno reducido de $x_0 \in \mathbb{R}$. Diremos que $f(x)$ es un infinitésimo en $x_0$ si $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.
**Definición.** Sea $f(x)$ una función definida (al menos) en un entorno reducido de $x_0 \in \mathbb{R}$. Diremos que $f(x)$ es un infinito en $x_0$ si $\frac{1}{f(x)}$ es un infinitésimo en $x_0$, es decir, si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ (o $-\infty$).
**Definición.** Dos infinitésimos ($f(x)$ y $g(x)$) en $x_0$ se denominan comparables si existe el límite: $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.
Dados dos infinitésimos comparables, diremos que son del mismo orden si se verifica:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Diremos que $f(x)$ es de mayor orden que $g(x)$ si:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Y diremos que son equivalentes si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

---

**Ejemplos:** Las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = x$ son infinitésimos equivalentes en $x_0 = 0$, es decir: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. Si representamos gráficamente ambas funciones en un entorno de $x_0 = 0$ puede observarse que el comportamiento de ambas es completamente similar cuando estamos muy próximos a 0.

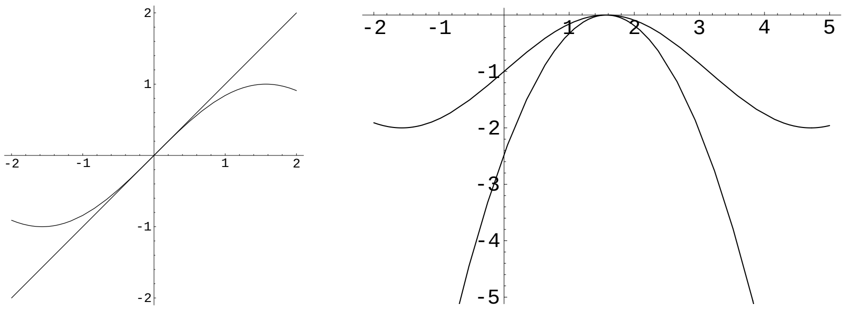



Figura 1.8: *(izquierda) Gráficas de* $f(x) = \operatorname{sen} x$ *y de* $g(x) = x$ *en un entorno del cero. (derecha) Gráficas de* $h(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2}) - 1$ *y de* $p(x) = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$ *en un entorno de* $\frac{\pi}{2}$.

Otro ejemplo lo constituyen las funciones $h(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2}) - 1$ y de $p(x) = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$, infinitésimos equivalentes en $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

---

Es habitual "clasificar" los infinitésimos por comparación con las funciones $f_n(x) = (x - x_0)^n$. Es evidente que para todo $n \geq 1$ la función $f_n(x)$ tiende a cero cuando $x$ tiende a $x_0$. Diremos que una función $g(x)$ es un infinitésimo de orden $n$ en $x_0$ si es del mismo orden que $f_n(x) = (x - x_0)^n$. Así por ejemplo, la función $h(x)$ del ejemplo anterior es un infinitésimo de orden dos en $x_0 = \frac{\pi}{2}$, mientras que $\operatorname{sen} x$ es un infinitésimo de orden uno en $x_0 = 0$.

**Teorema.** Sea $f(x)$ un infinitésimo en $x_0$ y sea $g(x)$ una función acotada en un entorno de $x_0$, entonces el producto de ambas es un infinitésimo en $x_0$, es decir:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = 0$$

**Tabla de infinitésimos equivalentes.** Los infinitésimos en $x_0 = 0$ que se utilizan más habitualmente en el cálculo de límites son:

$$x \sim \operatorname{sen} x \sim \operatorname{arcsen} x \ ; \quad x \sim \tan x \sim \arctan x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \ ; \quad \operatorname{Ln}(1 + x) \sim x \ ; \quad a^x - 1 \sim x \operatorname{Ln} a, \qquad a > 0$$

Tal y como se verá en las clases de problemas, el conocimiento de algunos infinitésimos equivalentes permite considerables simplificaciones a la hora de resolver un buen número de límites.

### 1.3.3 Indeterminaciones

Como ya hemos comentado, el álgebra de límites no es válido en ciertos casos en los que alguno de los límites es infinito o cero. Además, el límite de la exponenciación de funciones es igual a la exponenciación de los límites en todos los casos menos en tres. Estas excepciones se conocen con el nombre de indeterminaciones, y el cálculo de las mismas requiere la utilización de técnicas concretas. Las indeterminaciones son las siguientes (las representamos simbólicamente):

$$\infty - \infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad 0.\infty \qquad 1^{\infty} \qquad 0^0 \qquad \infty^0$$

Expresiones que han de leerse, lógicamente como función que tiende a $\infty$-función que tiende a $\infty$, etc.

## 1.4 Continuidad

### 1.4.1 Definiciones y Propiedades básicas

**Definición.** Dada una función $f(x)$ definida en un entorno de $x_0$, $E(x_0)$, se dice que la función es continua en $x_0$ si :

1) La función tiene límite en $x_0$, y

2) Dicho límite es igual al valor de la función en $x_0$, $f(x_0)$.

Recordando la definición de límite, se puede dar otra definición paralela:

**Definición.** Una función $f(x)$ definida en un entorno de $x_0$, $E(x_0)$, es continua en $x_0$ si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta \text{tal que si } \mid x - x_0 \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x) - f(x_0) \mid < \epsilon$$

**Definición.** Sea $f(x)$ definida en un conjunto $A$ de números reales, entonces se dice que es continua en $A$ si lo es cada uno de sus puntos. (Si $A$ fuera un intervalo cerrado, se intuye que la continuidad será sólo lateral en los extremos correspondientes, la definición de continuidad lateral por la izquierda y por la derecha es absolutamente obvia).

**Propiedades de las funciones continuas:** Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$ definidas en un entorno $E(x_0)$ del punto $x_0$ y continuas en él. Entonces $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x)g(x)$ y $\frac{f(x)}{g(x)}$ (siempre y cuando $g(x_0) \neq 0$) también son continuas en $x_0$.

Las demostraciones son triviales a partir de las correspondientes propiedades de los límites.

**Teorema.** Si $f : A \to \mathbb{R}$ es continua en $x_0 \in A$ y $g : \mathrm{Im} f \to \mathbb{R}$ lo es en $f(x_0)$, entonces $g \circ f$ es continua en $x_0$.

### 1.4.2 Discontinuidades

**Definición.** Una discontinuidad de $f(x)$ es todo $x \in \mathbb{R}$ en el que $f$ no es continua. Las clasificamos en diferentes tipos:
1. Discontinuidades evitables. Diremos que $f(x)$ tiene una discontinuidad evitable en $x_0$ si existe el límite de $f(x)$ en $x_0$ pero no coincide con el valor de la función $f(x_0)$ en dicho punto (bien por que difieren bien por que éste último no exista). La discontinuidad se puede "evitar" redefiniendo $\bar{f}(x) = f(x) \forall x \neq x_0$, $\bar{f}(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$.
2. Discontinuidades de Primera especie o de salto. Se dice que una función tiene una discontinuidad de primera especie o de salto en $x_0$ si existen los límites laterales de la función en ese punto pero no coinciden. Puede ser que sea continua por uno de los lados o no. El salto se denominará finito si ambos límites son finitos e infinito en caso contrario.
3. Discontinuidades de Segunda especie o esenciales. Se dice que una función tiene una discontinuidad de segunda especie o esencial en $x_0$ si no existe alguno de los límites laterales de la función en ese punto.

### 1.4.3 Teoremas sobre continuidad

Existen varios teoremas muy conocidos acerca de las funciones continuas que enunciamos a continuación.

**Teorema de Bolzano.** Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y tal que tome valores de signo contrario en los extremos del mismo $(\text{Sign}(f(a)) \neq \text{Sign}(f(b)))$, entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.
**Teorema de Darboux.** Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces $f$ toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$.
**Teorema.** Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces $f(x)$ está acotada en $[a, b]$.
**Teorema de Weierstrass.** Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces $f$ alcanza en $[a, b]$ su valor máximo y su valor mínimo, es decir $\exists x_1, x_2 \in [a, b]/$ $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, $\forall x \in [a, b]$.

## 1.5 Apéndice

**Definición.** Se llama valor absoluto (o módulo) de un número real $a$ al mismo número $a$ si $a$ es positivo, y al número $-a$ si $a$ es negativo. El valor absoluto de cero es cero. Lo denotaremos por el símbolo $|a|$.
Si $\alpha$ es mayor que cero, es evidente que la relación $|x| \leq \alpha$ es equivalente a la relación: $-\alpha \leq x \leq \alpha$.

Propiedades: para cualesquiera números reales $a$ y $b$ se verifica:

- 1) $|a.b| = |a|.|b|$
- 2) $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$, $(b \neq 0)$
- 3) $|a+b| \leq |a| + |b|$,
- 4) $||a| - |b|| \leq |a-b|$.

**Definición.** El conjunto de todos los números reales $x$ que satisfacen la condición: $a \leq x \leq b$, donde $a < b$, se denomina intervalo cerrado $[a, b]$.

El conjunto de todos los números reales $x$ que satisfacen la condición: $a < x < b$, donde $a < b$, se denomina intervalo abierto $(a, b)$.

**Definición.** Se dice que un conjunto $E$ de números reales está acotado superiormente (resp. inferiormente) cuando existe un número real $b$ (resp. $a$) tal que para todo $x \in E$ se verifica $x \leq b$ (resp. $x \geq a$).

**Definición.** Se dice que un conjunto de números reales $E$ está acotado si lo está superior e inferiormente. Lógicamente, un conjunto acotado está contenido en un intervalo cerrado $[a, b]$.

El número real $b$ (resp. $a$) de la anterior definición recibe el nombre de cota superior (resp. inferior) del conjunto $E$.

**Definición.** La menor de todas las cotas superiores de un conjunto de números reales $E$ recibe el nombre de supremo de $E$. Respectivamente, la mayor de las inferiores es el ínfimo de $E$.

Si el supremo (resp. ínfimo) de un conjunto de números reales pertenece a dicho conjunto, entonces se le llama máximo (resp. mínimo).

**Definición.** Dado un número real $x_0$, llamaremos entorno de $x_0$, $E(x_0)$ a todo intervalo abierto que contenga dicho punto.

Se suelen utilizar entornos centrados en el punto $x_0$ y de radio $\epsilon$, es decir, de la forma: $E_\epsilon(x_0) = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$.

Se denomina entorno reducido $E^*(x_0)$ del punto $x_0$ a un entorno de $x_0$, $E(x_0)$ del cual se excluye al punto $x_0$.

**Definición.** Un punto $x_0$, perteneciente o no a un conjunto de números reales $E$, se llama punto de acumulación de $E$ si todo entorno reducido de $x_0$ contiene puntos de $E$.

**Definición.** Un punto $x_0$, perteneciente a un conjunto de números reales $E$, se denomina punto interior de $E$ si existe un entorno de $x_0$ contenido completamente en $E$.

**Definición.** Un punto $x_0$, perteneciente a un conjunto de números reales $E$, se denomina punto aislado de $E$ si existe un entorno reducido de $x_0$ que no contiene puntos de $E$.

## 1.6 Ejercicios del Tema 1

**Funciones. Primeras Aplicaciones**

**1.** El porcentaje de germinación, $G$, de una variedad de tomates se mide a tres temperaturas diferentes, $T$. A 9°C sólo germina el 20%, a 12°C el 40% y a 15°C el porcentaje es del 70%. Encuentra una expresión de $G$ como función cuadrática de $T$ y usando dicha expresión predice el porcentaje de germinación a 17°C y a 18°C. ¿A qué temperatura la germinación será del 10%? Comenta los resultados.

**2.** Dos pequeños árboles crecen a diferente velocidad. Cuando se comienza a tomar medidas, uno de ellos tiene una altura de 100 mm y crece a razón de un 1% de su altura cada semana. La altura al cabo de $n$ semanas puede ser aproximada por la expresión:

$$100 + 0.995\, n + 0.005 n^2$$

El otro mide inicialmente 110 mm y crece en una proporción constante de un 1% de su altura inicial cada semana. Tras $n$ semanas, su altura es:

$$110 + 1.1\ n$$

Calcula en qué momento los dos árboles tienen la misma altura.

**3.** Se dispone de los siguientes datos de la germinación de algunas semillas a cuatro diferentes temperaturas:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Temperatura (°C) | 6 | 9 | 12 | 15 |
| Germinación (%) | 0 | 20 | 40 | 70 |

Encuentra una expresión de la tasa de germinación en función de la temperatura que se ajuste a los datos anteriores.

**4.** La ecuación de Michaelis-Menton:

$$\frac{r}{R} = \frac{c}{k_M + c}$$

expresa la proporción inicial de una enzima catalizadora de una reacción como una fracción de la proporción máxima $R$ en términos de la concentración $c$ del sustrato. $k_M$ es una constante característica de cada reacción concreta, y se le denomina constante de Michaelis. Representa de forma aproximada la curva que se obtiene al considerar $\frac{r}{R}$ como función de $c$. ¿Cuál es el significado de $k_M$?

**5.** El aumento de la carga $Q$ de un nervio con respecto al tiempo $t$ puede ser representado por medio de una ecuación de la forma:

$$Q = Q_0 \left(1 - e^{-kt}\right)$$

donde $Q_0$ y $k$ son constantes positivas. Analiza la forma general de la gráfica de esa función y explica el significado de la constante $Q_0$.

**Límites**

**6.** Calcula los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3};\qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3};\qquad c)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$$

**7.** Calcula los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Ln}(1+x)}{2^x-1};\qquad b)\ \lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{Ln} x}{e^x-e};\qquad c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x^2}{x^2};\qquad d)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen} x}{x}$$

**8.** Calcula los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{\operatorname{sen} x}{x}};\qquad b)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x;$$

$$c)\ \lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} 2x)^{\frac{\pi}{x}};\qquad d)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Ln} x}{\operatorname{cotan} x}$$

**9.** Estudia si existen los límites:

$$a)\ \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}};\qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}$$

**10.** Calcula los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x-x}{x^3};\qquad b)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x^2}-\frac{1}{x^2}\right);$$

$$c)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}-\frac{1}{x^2}\right);\qquad d)\ \lim_{x\to\infty} x\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}$$

**11.** Calcula el valor de $a$ para que se verifique:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=4\quad;\qquad \lim_{x\to 1}f(x)=2;\qquad f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{si } x\le 1\\ 3-ax^2 & \text{si } x>1\end{cases}$$

**12.** Estudia si existen los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2};\qquad b)\ \lim_{x\to 0} x\operatorname{sen}\frac{1}{x};\qquad c)\ \lim_{x\to 0}\arctan\frac{1}{x}$$

$$d)\ \lim_{x\to 2} g(x);\qquad g(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & \text{si } x<2\\ 1+\operatorname{sen}\frac{1}{x-2} & \text{si } x>2\end{cases}$$

**13.** Calcula los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to 0} x^x;\quad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left((1+x)^m-1\right);\quad c)\ \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x});\quad d)\ \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x(x+a)}-x)$$

**Continuidad**

**14.** Calcula el dominio de continuidad de las siguientes funciones y clasifica sus discontinuidades.

$$a)\ f_1(x)=\begin{cases}x^3 & x<0\\ 7 & x=0\\ \operatorname{sen} x+\tan x & x>0\end{cases}\qquad b)\ f_2(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x-3} & \text{si } x\ne 3\\ 6 & \text{si } x=3\end{cases};$$

$$c)\ f_3(x) = \begin{cases} x2^{\frac{-1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad d)\ f_4(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$$

$$e)\ f_5(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x}; \qquad f)\ f_6(x) = \frac{(1+x)^n - 1}{x}$$

$$g)\ f_7(x) = (x^2 - 6x + 9)\arctan\left(\frac{1}{x^2 - 5x + 6}\right)$$

**15.** Estudiar la continuidad de la función $f(x)$ para los diferentes valores del parámetro $\alpha$:

$$f(x) = \begin{cases} |\ x\ |^\alpha \operatorname{sen}\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ \alpha & x = 0 \end{cases}$$

**16.** Estudiar la continuidad de la función $g(x)$ y calcular el valor que debe de tomar $a$ para que sea continua en $x = 0$.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si } x \leq 0 \\ \operatorname{sen}\frac{\pi x}{2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \operatorname{Ln} x & \text{si } 1 \leq x \leq e \\ \frac{x}{e} & \text{si } x > e \end{cases}$$

**17.** La función $f(x)$ no está determinada en el punto $x = 0$. Determinar $f(0)$ de manera que $f(x)$ sea continua en dicho punto si:

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}; \quad f(x) = \frac{\operatorname{Ln}(x+1) - \operatorname{Ln} x}{x}; \quad f(x) = \frac{\operatorname{Ln}(x+1) - \operatorname{Ln}(1-x)}{x}$$

**18.** Probar que $f(x) = x \operatorname{sen}\frac{\pi}{x}$ sólo es discontinua en $x = 0$. Definir $f(0)$ de manera que la nueva función global obtenida sea contínua.

**19.** Estudiar la continuidad de las funciones:

$$a)\ f(x) = \frac{x^2}{x-2} \qquad b)\ f(x) = \frac{x}{|x|} \qquad c)\ f(x) = \frac{1+x^3}{1+x}$$

$$d)\ f(x) = \operatorname{Ln}(\cos x) \qquad e)\ f(x) = 1 + 2^{\left(\frac{1}{x}\right)}$$

**20.** Estudiar la continuidad de las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}; \quad f(x) = \frac{|2x-3|}{2x-3}; \quad f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ x^3 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

**21.** Sea $f(x)$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x \leq c \\ ax + b & \text{si } x > c \end{cases}$$

siendo $a, b, c$ constantes. Si $b$ y $c$ están dados, hallar todos los valores de $a$ (si existe alguno) para los que $f$ es continua en el punto $c$.

**22.** Sean $f, g$ dos funciones definidas como sigue: $f(x) = \dfrac{x + |x|}{2}$, para todo $x$, y

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Calcular la función compuesta $h(x) = f[g(x)]$ y estudiar su continuidad en $\mathbb{R}$.

**23.** La función
$$f(x) = \mathrm{arctg}\frac{1}{x-2}$$
carece de sentido cuando $x = 2$. ¿Puede elegirse el valor de $f(2)$ de tal forma que la función completada sea continua cuando $x = 2$?

**24.** Estudiar la continuidad de las funciones:
$$f(x) = \cos(\mathrm{Ln}x); \qquad f(x) = \mathrm{Ln}\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|; \qquad f(x) = \mathrm{arctg}\frac{1}{x};$$
$$f(x) = e^{\frac{1}{1+x}}; \qquad f(x) = e^{\frac{-1}{x^2}}; \qquad f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1+x}}}$$

## Soluciones:

(1.) $G(T) = \frac{5}{9}T^2 - 5T + 20$. $G(17°) = 96\%$. $G(18°) = 110\%$ !!!. $G(6°) = 10\%$.
(2.) 56.4 semanas.
(3.) $G(T) = \frac{5}{81}T^3 - \frac{5}{3}T^2 + \frac{190}{9}T - 80$.
(6.) a) $\frac{1}{2}$. b) $\frac{2}{3}$. c) 0.
(7.) a) $\frac{1}{\ln 2}$. b) $\frac{1}{e}$. c) 1. d) 1.
(8.) a) 1. b) $e^2$. c) $e^{2\pi}$. d) 0.
(9.) a) No existe. b) No existe.
(10.) a) $\frac{-1}{6}$. b) 0. c) $\frac{1}{3}$. d) $\pi$.
(11.) a) $a = \ln 2$. b) $a = 1$.
(12.) a) $\infty$. b) 0. c) No existe. d) No existe.
(13.) a) 1. b) $m$. c) 0. d) $\frac{a}{2}$.
(14) a) $\mathrm{Dom}(f_1) = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $\mathrm{DomCont}(f_1) = \mathbb{R} - \{0\} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. $x = 0 \Rightarrow$ Discontinuidad evitable. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow$ Discontinuidades de salto infinito.
b) $\mathrm{Dom}(f_2)$=$\mathrm{DomCont}(f_2) = \mathbb{R}$.
c) $\mathrm{Dom}(f_3) = \mathbb{R}$. $\mathrm{DomCont}(f_3) = \mathbb{R} - \{0\}$. Discontinuidad de Salto Infinito en $x = 0$.
d) $\mathrm{Dom}(f_4) = \mathrm{DomCont}(f_4) = \mathbb{R} - \{0\}$. Discontinuidad de Salto Finito en $x = 0$.
e) $\mathrm{Dom}(f_5) = \mathrm{DomCont}(f_5) = \mathbb{R} - \{0\}$. Discontinuidad evitable en $x = 0$.
f) $\mathrm{Dom}(f_6) = \mathrm{DomCont}(f_6) = \mathbb{R} - \{0\}$. Discontinuidad evitable en $x = 0$.
g) $\mathrm{Dom}(f_7) = \mathrm{DomCont}(f_7) = \mathbb{R} - \{2, 3\}$. Discontinuidad evitable en $x = 3$ y Discontinuidad de salto finito en $x = 2$.

# Tema 2

# Cálculo Diferencial

## 2.1 Introducción

Repasaremos en este Tema el Cálculo Diferencial de funciones reales de variable real. Recordaremos también algunas de las aplicaciones fundamentales de las derivadas.

## 2.2 Conceptos Básicos

**<u>Definición.</u>** Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo abierto $(a,b)$. Diremos que $f$ es derivable en el punto $x_0 \in (a,b)$ si existe el límite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

al cual denominaremos *derivada*[1] de $f$ en $x_0$, $f'(x_0)$. Notaciones alternativas:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

donde $\Delta y = y(x_0+\Delta x) - y(x_0)$ e $y = f(x)$.

**Rectas tangente y normal a una curva.** Desde el punto de vista geométrico, la derivada $f'(x_0)$ de la función $y = f(x)$ en $x_0$ no es más que la pendiente de la recta

[1] A veces es adecuado definir la derivada de una función en un punto de la siguiente forma alternativa: Una función $f(x)$ es derivable en $x_0$ si existe un número $f'(x_0)$ tal que la función $h(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)$ es un infinitésimo de orden superior a uno en $x_0$, es decir:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = 0$$

Es evidente que esta definición es equivalente a la anterior.

tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ y, por tanto, la ecuación de dicha recta será:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Desde este punto de vista, es evidente que el signo de la derivada de una función en un punto determina si dicha función es creciente o decreciente en un entorno de dicho punto (ver Sección 2.5 de este tema).

Si $f'(x_0) \neq 0$, la recta normal (perpendicular) a la curva en $x_0$ será (ver Ejercicio 1):

$$y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

**Diferencial de una función.** Dada una función derivable en $x_0$, llamaremos diferencial de $f$ en $x_0$ a la aplicación lineal:

$$df(x_0) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

que hace corresponder a todo $x$ el número $f'(x_0)x$.

Tradicionalmente se denomina a la variable no $x$ sino $dx$ y $dy$ a su imagen, en particular escribiremos[2]:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \Leftrightarrow df = f'(x)\,dx$$

**Definición.** Si $f$ es una función definida en un conjunto abierto $A$ y es derivable en todos los puntos de $A$, diremos que $f$ es *derivable* en $A$.

**Definición.** Si $f$ es derivable en $A$, llamaremos *función derivada* de $f$, $f'$ a la que asigna a cada $x \in A$ el valor $f'(x)$.

**Definición.** Si la función derivada $f'$ es a su vez derivable, entonces tiene sentido plantear la derivada de la derivada, o *derivada segunda* $f''$. De manera análoga, hablaremos de las derivadas sucesivas $f'$, $f''$, $f'''$, $f^{iv} = f^{(4)}$, etc.

## 2.3 Propiedades de las funciones derivables

1. Si $f$ es derivable en $x_0$ entonces es continua en $x_0$. (Se sobreentiende que sólo si la derivada es finita). (No es cierta la recíproca).

2. Si $f$ y $g$ son dos funciones derivables en $x_0$ entonces también son derivables en $x_0$ las funciones $f + g$, $fg$ y $cf$ para $c \in \mathbb{R}$, y se verifica:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \quad ; \qquad (cf)'(x_0) = cf'(x_0)$$

[2]Utilizaremos indistintamente la notación de "primas" (debida a Newton) y la de "cociente de diferenciales" (debida a Leibnitz) para denotar a las derivadas.

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Si además $g(x_0) \neq 0$, entonces $\frac{f}{g}$ es derivable en $x_0$ y se verifica:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

**Regla de la cadena.** Si $f$ es una función derivable en un punto $x_0$ y $g$ lo es en $f(x_0)$, entonces la función compuesta $g \circ f$ es derivable en $x_0$ y su derivada vale:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

**Tabla de derivadas.**

Adjuntamos la siguiente tabla con las derivadas de algunas funciones de uso habitual.

$$n \neq 0, \quad \frac{d}{dx}x^n = n\,x^{n-1} \quad ; \quad \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \quad ; \quad \frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$a > 0, \quad \frac{d}{dx}\log_a x = \frac{\log_a e}{x} \quad ; \quad \frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x \quad ; \quad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \quad ; \quad \frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x \quad ; \quad \frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x \quad ; \quad \frac{d}{dx}\tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad ; \quad \frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{x^2+1} \quad ; \quad \frac{d}{dx}\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsenh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad ; \quad \frac{d}{dx}\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{1-x^2} \quad ; \quad \frac{d}{dx}\operatorname{arccosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

## 2.4 Teoremas importantes del Cálculo Diferencial

**Teorema de Rolle.** Si la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, es derivable en el intervalo $(a, b)$ y toma valores iguales en los extremos del intervalo ($f(a) = f(b)$), entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ en el cual la derivada de $f(x)$ se anula, es decir: $f'(c) = 0$.

---

**Demostración:** Al ser $f(x)$ continua en el intervalo cerrado, por el Teorema de Weierstrass alcanza en dicho intervalo un máximo y un mínimo, los denominaremos $M$ y $m$ respectivamente. Casos que pueden presentarse:

1) Que $M = m$, en tal caso $M \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a, b]$, pero entonces $f(x)$ es constante en el intervalo, y así su derivada sería cero en todos los puntos.

2) $M \neq m$, como $f(a) = f(b)$ al menos uno de los dos valores se alcanza en el abierto, sea, por ejemplo $M$, entonces existe un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = M$, tendremos:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{f(c-h) - f(c)}{-h}$$

Pero entonces, al ser $f(c) = M$, máximo de la función, se verifica: $f(c+h) - f(c) \leq 0$, $f(c-h) - f(c) \leq 0$ y, en definitiva: $f'(c) \leq 0$ y $0 \leq f'(c)$, por tanto, $f'(c) = 0$. Q.E.D.

---

**Teorema de Lagrange.** (de los incrementos finitos). Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$, entonces existe por lo menos un punto $c \in (a, b)$ tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

**Teorema de Cauchy.** Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $[a, b]$, derivables en $(a, b)$ y $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$, entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

---

**Demostración:** Es trivial aplicando el Teorema de Rolle a la función:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

La demostración de Lagrange es obvia al reducirse a un caso particular de Cauchy.

---

## 2.5 Aplicaciones de las derivadas

### 2.5.1 Cálculo de Límites

El Teorema de L'Hôpital (o Regla de L'Hôpital) permite simplificar extraordinariamente el cálculo de límites donde aparecen indeterminaciones de tipo cociente:

**Teorema: Regla de L'Hôpital.** Sean $f$ y $g$ dos funciones derivables al menos en un entorno reducido del punto $x_0 \in \mathbb{R}$ y tales que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$. Si existe el límite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

entonces también existe $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y coincide con el anterior.

La Regla de L'Hôpital es también aplicable en límites cuando $x \to \pm\infty$, así como en el caso de indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

**Ejemplo 1:** Calculemos el límite $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\operatorname{sen} x}$. Se trata de un indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, aplicando L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{(1+2x)}}{\cos x} = 2$$

**Ejemplo 2:** Calculemos el límite $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2 - x^2}{x^3}$. Se trata de un indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, en la que además no es posible aplicar infinitésimos equivalentes, aplicando L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2 - 2x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos x^2 - 4x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x^2 - 4x^2 \sin x^2 - 4}{2} = -1$$

### 2.5.2 Aproximación de funciones por polinomios

El polinomio de Taylor constituye uno de los métodos de aproximación más comunes en las diferentes aplicaciones de las matemáticas. Por el Teorema de Taylor, la diferencia entre una función dada y su polinomio de Taylor de grado $n$ en un punto concreto $x_0$ es un infinitésimo de orden $n+1$ en dicho punto, lo que se traduce en que el polinomio proporciona una aproximación muy buena en las cercanías del punto $x_0$.

**Teorema. Fórmula de Taylor**. Sea $f(x)$ una función $n$ veces derivable en un entorno de un punto $x_0$. Entonces se verifica:

$$f(x) = P_{n-1}(x) + R_n(x)$$

para cualquier $x$ perteneciente a dicho entorno, donde:

$$P_{n-1}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$$

es el *Polinomio de Taylor de f(x) en $x_0$ de grado* $n-1$, mientras que $R_n(x)$ es un infinitésimo de orden $n$ en $x_0$.

**Demostración:** Realmente lo que tenemos que demostrar es que existe una función $R_n(x)$ que haga cierta la fórmula siendo un infinitésimo de orden $n$. Para ello lanzamos la siguiente hipótesis: $R_n(x) = K(x-x_0)^n$, con $K$ constante. Esta hipótesis no supone pérdida alguna de generalidad puesto que no niega la posibilidad de que existan otras funciones que lo verifiquen. Nuestro problema se reduce por tanto a calcular esa $K$, pues la hipótesis ya garantiza el carácter infinitesimal al orden requerido.

Tomemos la función:

$$\Phi(y) = f(x) - \left[f(y) + \frac{f'(y)}{1!}(x-y) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(y)}{(n-1)!}(x-y)^{n-1} + K(x-y)^n\right]$$

$\Phi(y)$ verifica las hipótesis del Teorema de Rolle en el intervalo $[x_0, x]$ (si $x$ fuera menor que $x_0$ se cambiaría el orden, obviamente). Efectivamente, $\Phi$ es una función continua en dicho intervalo, además de derivable en el correspondiente abierto. Por otro lado $\Phi(x_0)$ es cero por la propia definición de $R_n(x)$, mientras que $\Phi(x)$ se anula de forma evidente.

Existe, por tanto, al menos un punto $c \in (x_0, x)$ tal que $\Phi'(c) = 0$.

Calculemos dicha derivada, tras las simplificaciones oportunas:

$$\Phi'(c) = -\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1} + Kn(x-c)^{n-1} = 0 \Rightarrow K = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

y queda demostrado el Teorema. Q.E.D.

---

La función:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$$

recibe el nombre de *Resto de Taylor* de $f(x)$ en $x_0$ de orden $n$, concretamente expresado en forma de *Lagrange*.

---

**Ejemplo 1:** Calculemos el polinomio de Taylor en $x_0 = 0$ (Polinomio de McLaurin) de la función $f(x) = e^x$. La simplicidad de las derivadas de la exponencial facilita enormemente este cálculo: $f(x) = e^x = f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(n)}(x)$. De esta forma: $1 = f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0)$. Por tanto:

$$P_n(x) = 1 + \frac{1}{1!}(x-0)^1 + \frac{1}{2!}(x-0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}(x-0)^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

**Ejemplo 2:** Compararemos en este ejemplo la función seno con sus polinomios de McLaurin de grados uno y tres respectivamente. Es fácil comprobar que (ver problema 17): $\operatorname{sen} x \approx P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$, para el grado tres, mientras que $\operatorname{sen} x \approx x$ en el caso de grado uno.

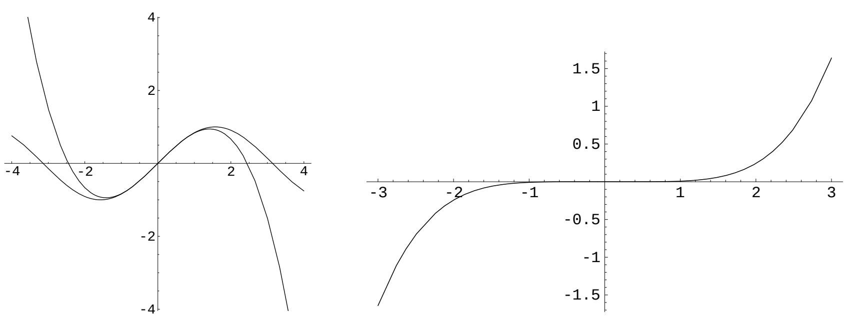



Figura 2.1: *(izquierda) Gráficas de* $\operatorname{sen} x$ *y de* $P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$ *en un entorno del cero. (derecha) Gráfica de la función diferencia (resto de Taylor)* $h(x) = \operatorname{sen} x - P_3(x)$.

En las figuras 2.1 y 2.2 podemos comprobar cómo la aproximación de tercer grado es bastante buena en un intervalo algo mayor que el $(-1, 1)$ mientras que la de primer grado es correcta tan sólo en $(-0.4, 0.4)$.

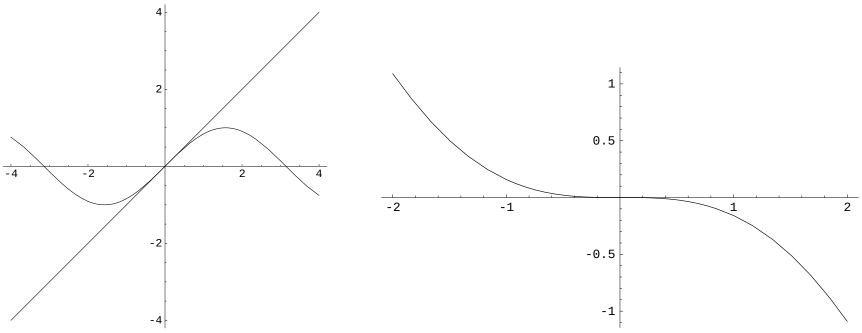



Figura 2.2: *(izquierda) Gráficas de* $\operatorname{sen} x$ *y de* $P_1(x) = x$ *en un entorno del cero. (derecha) Gráfica de la función diferencia (resto)* $h(x) = \operatorname{sen} x - P_1(x)$.

**Ejemplo 3:** En un medio de cultivo adecuado, la evolución en la población de Escherichia Coli viene dada por la expresión:

$$y(t) = \frac{2488986}{414831 + 5585169e^{-0.65\,t}}$$

donde $y(t)$ representa la densidad de células (en millones por mililitro) y el tiempo $t$ viene medido en días.

Si utilizamos el polinomio de McLaurin de grado 3 para aproximar la función $y(t)$ tendremos:

$$y(t) \approx 0.414831 + 0.250998\,t + 0.0702944\,t^2 + 0.0108494\,t^3$$

En las figuras siguientes se observa que la aproximación es razonablemente buena en los primeros cuatro días, posteriormente la aproximación es muy mala, de hecho el polinomio crece indefinidamente, mientras que la función $y(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = 6$. De hecho, esto significa la existencia de un nivel de saturación, con la consiguiente estabilización en el número de células. El polinomio, por contra, nos indicaría un crecimiento indefinido del número de células.

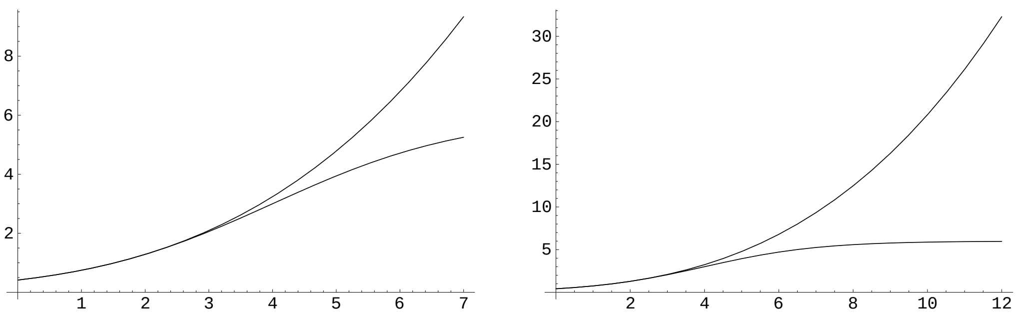



Figura 2.3: *Gráficas de* $y(x)$ *y de* $P_3$*. En la gráfica de la izquierda se aprecia la región donde la aproximación es razonable, la gráfica de la derecha permite intuir claramente la existencia de una asíntota para* $y(x)$.

### 2.5.3 Máximos y Mínimos

Los máximos y mínimos locales de una función derivable nos vienen determinados por los valores de las derivadas primera y segunda de la función. Recordemos simplemente el método para determinar dichos puntos:

Denominaremos puntos críticos de una función derivable $f(x)$ a los puntos en los que su derivada primera se hace nula, es decir las soluciones de la ecuación: $f'(x) = 0$ (esto significa, obviamente, que la recta tangente a la curva $y = f(x)$ es horizontal en los puntos críticos).

Un punto crítico $x_0$ de $f(x)$ se corresponde con un máximo local de $f(x)$ si $f''(x_0) < 0$. De manera análoga, un punto crítico se corresponde con un mínimo local si $f''(x_0) > 0$.

Si $x_0$ es un punto crítico de $f(x)$ y $f''(x_0)$ también se anula, entonces es necesario calcular las derivadas sucesivas hasta encontrar la primera de ellas que no se anula en $x_0$. Supongamos que $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ y $f^{(n-1)}(x_0) = \ldots = f''(x_0) = f'(x_0) = 0$. Si $n$ es un número par, entonces se repite el criterio anterior, es decir: $f^{(n)}(x_0) < 0$ conduce a un máximo y $f^{(n)}(x_0) > 0$ a un mínimo. Si $n$ es impar, entonces la función presenta en $x_0$ un punto de inflexión (ver apartado siguiente).

### 2.5.4 Concavidad y Convexidad

La derivada segunda de una función $f(x)$ determina el crecimiento y decrecimiento de la derivada primera, y ello se traduce, desde el punto de vista gráfico, en que la función sea cóncava o convexa según sea la derivada segunda positiva o negativa. En los puntos en los que la derivada segunda se anula, cambia la concavidad, y se les denomina puntos de inflexión (siempre y cuando la derivada tercera sea no nula en dichos puntos).
Nota: No existe unanimidad a la hora de decidir cuándo denominar a una función cóncava y cuándo convexa. A veces se dice simplemente cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo para aclarar exactamente qué se está especificando.

---

## 2.6 Ejercicios del Tema 2

**Derivabilidad y Derivadas**

**1.** Demuestra que la ecuación de la recta normal a la curva $y = f(x)$ en $x_0$ es (siempre y cuando $f'(x_0) \neq 0$):

$$y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Nota: Utilizar la identidad: $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \, \tan b}$.

**2.** Estudiar la continuidad y la derivabilidad de las siguientes funciones:

*a)* $f(x) = |x|$ *b)* $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ *c)* $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

**3.** Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones:

$$a)\ f(x) = \begin{cases} -(2x+1) & \text{si} \quad x \le -1 \\ x^2 & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases} \qquad b)\ f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si} \quad x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

**4.** Calcular la derivada de:

$$a)\quad y = \frac{\operatorname{Ln} x - \operatorname{Ln} x^2}{\operatorname{arctg} x} \qquad b)\quad y = x e^{x^{\operatorname{Ln} x^2}}$$

$$c)\quad y = \operatorname{arcsen} e^x \qquad d)\quad y = \operatorname{Ln}\left(\sqrt{1+e^x} - 1\right) - \operatorname{Ln}\left(\sqrt{1+e^x} + 1\right)$$

$$e)\quad y = x \operatorname{sen}\left(\operatorname{Ln} x - \frac{\pi}{4}\right) \qquad f)\quad \frac{1}{2} \operatorname{Ln}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{\cos x}{\operatorname{sen} 2x}\right)$$

**5.** Calcular la derivada de

$$a)\quad y = \sqrt[x]{x} \qquad b)\quad y = x^{\sqrt{x}} \qquad c)\quad y = x^{x^x}$$

$$d)\quad y = x^{\operatorname{sen} x} \qquad e)\quad y = (\cos x)^{\operatorname{sen} x} \qquad f)\quad y = (x+1)(x+2)(x+3)$$

**6.** Verificar que la función $f(x) = x - x^3$ satisface las condiciones del teorema de Rolle en los intervalos $-1 \le x \le 0$, $0 \le x \le 1$ y hallar el valor de $c$.
**7.** La función $f(x) = (x-2)^{\frac{2}{3}}$ en los extremos del intervalo $[0,4]$ toma valores iguales: $f(0) = f(4) = \sqrt[3]{4}$. ¿Es válido para esta función el teorema de Rolle?

**Regla de L'Hôpital**

**8.** Utilizando la Regla de L'Hôpital calcula los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - \cos 2x}{e^{3x} - \cos 3x} \quad , \qquad b)\ \lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) \quad , \qquad c)\ \lim_{x\to 0} x^x$$

**Representación gráfica**

**9.** La población de una especie en estudio viene dada aproximadamente por la expresión:

$$P = \frac{105}{1 + 20\, e^{-0.15\, t}}$$

donde $P$ se mide en millones de individuos y $t$ viene dado en días. Calcula una expresión para la velocidad de crecimiento $\frac{dP}{dt}$ en función del tiempo. Determina en qué instante de tiempo esta velocidad de crecimiento es máxima y el valor de la población en dicho instante. Calcula finalmente una expresión de $\frac{dP}{dt}$ en términos de la propia población $P$. Representar gráficamente la función $P$.
**10.** Representa gráficamente las funciones:

$$a)\quad y = x^2 e^{-x} \qquad b)\quad y = \tfrac{\operatorname{sen} x}{x} \qquad c)\quad y = \operatorname{Ln}(1+x)$$

$$d)\quad y = \tfrac{x}{\operatorname{Ln} x} \qquad e)\quad y = \sqrt{x^3 - 3x} \qquad f)\quad y = \operatorname{sen} x + \cos x$$

**11.** Representar las siguientes funciones:

$$a)\quad y = \frac{3x^4+1}{x^3} \qquad b)\quad y = \frac{1}{x^4 - 2x^2} \qquad c)\quad y = \frac{x}{1-x^2}$$

**12.** La población de una especie de mamíferos superiores presenta un comportamiento doblemente oscilante. Por una lado la población oscila anualmente en una proporción aproximada del 20% de su valor medio, y por otro, presenta grandes oscilaciones con un periodo de 11 años. Dicho comportamiento se puede representar con la fórmula:

$$P(t) = P_0 \left(1 + \frac{1}{5}\,\mathrm{sen}(2\pi t) + \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2}{11}\pi t\right)\right)$$

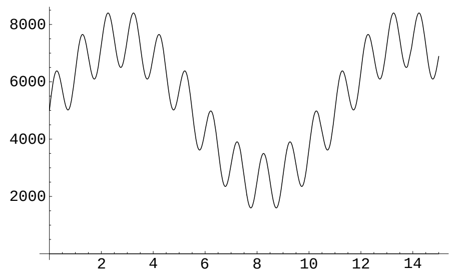



Figura 2.4: Gráfica de $P(t)$.

Si la constante (población inicial) $P_0$ vale 5000, calcula la derivada $\frac{dP(t)}{dt}$ y el primer punto donde dicha derivada se anula (es decir, el primer máximo o mínimo relativo de $P(t)$).

**Fórmula de Taylor**

**13.** Calcular el polinomio de Taylor en $x_0 = 1$ de: $f(x) = \mathrm{Ln}\, x$ y $g(x) = \mathrm{Ln}(x+1)$.
**14.** Desarrollar en un entorno del punto $x_0 = 2$ la función $y = e^{2x}$, por la fórmula de Taylor, con el resto de Lagrange.
**15.** Calcular el resto de Lagrange para el polinomio de Taylor de grado n de $f(x) = e^x$ en $x = 0$. Calcular el número $e$ con cuatro cifras decimales exactas.
**16.** De acuerdo con un modelo matemático, la concentración de una sustancia tóxica en una célula de tipo A en función del tiempo transcurrido desde la intoxicación de la misma puede ser descrita según la expresión:

$$c_A(t) = 0.1\, e^{-\frac{t}{4}}$$

Para las células de tipo B se produce un fenómeno de absorción-expulsión de la sustancia a través de la membrana que puede modelizarse mediante la expresión:

$$c_B(t) = 0.1 - \frac{0.1}{1+t}\,\mathrm{sen}(4t)$$

Calcula $\lim_{t\to\infty} c_A(t)$ y $\lim_{t\to\infty} c_B(t)$, ¿Qué significado tienen dichos límites?
Esboza de forma aproximada la representación gráfica de las funciones $c_A(t)$ y $c_B(t)$.
Calcula el polinomio de MacLaurin de grado 2 de $c_A(t)$ y $c_B(t)$ y utilizándolos calcula de forma aproximada $c_A(1)$ y $c_B(1)$. ¿Qué error se comete en dicha aproximación?
**17.** Aplicar la Fórmula de Taylor a la función $f(x) = \mathrm{sen}\, x$ en el punto $x_0 = 0$. Utilizar el resultado para calcular $\mathrm{sen}\, 15°$ con una exactitud hasta 0.001.
**18.** La población de una especie presenta oscilaciones anuales y puede ser representada analíticamente de la forma:

$$P(t) = P_0\,(3 + \mathrm{sen}(2\pi t))\; e^{-\frac{t}{10}}$$

donde $P_0$ es constante y $t$ se mide en años. Encuentra una aproximación cuadrática para $P(t)$ en valores del $t$ cercanos a $t_0 = 2.5$ años.

# Tema 3

# Cálculo Integral

## 3.1 Integral Indefinida

**Definición.** Se denomina *primitiva* de la función $f(x)$ en un intervalo $(a, b)$ a toda función $F(x)$ diferenciable en $(a, b)$ y tal que $F'(x) = f(x)$.

Dos propiedades importantes que verifican las primitivas de una función dada $f(x)$ son las siguientes:
1) Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ en $(a, b)$, entonces la función $G(x) = F(x) + C$, con $C \in \mathbb{R}$ constante, también lo es en $(a, b)$.
2) Si $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas de $f(x)$ en $(a, b)$, entonces su diferencia es una constante: $F(x) - G(x) = C, \quad \forall x \in (a, b)$.

**Definición.** Llamaremos *integral indefinida* de una función $f(x)$ en un intervalo $(a, b)$ al conjunto de todas sus funciones primitivas en dicho intervalo. Lo representaremos con la notación habitual $\int f(x)\,dx$.

**Propiedades.**

- $\displaystyle\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- $\forall k \in \mathbb{R}$, se verifica: $\displaystyle\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

## 3.2 Integrales Inmediatas

Se suelen denominar integrales inmediatas a las que resultan evidentes por ser el integrando la derivada de una función conocida. Evidentemente la *inmediatez* no constituye una propiedad matemática, o dicho con otras palabras, una integral es inmediata si uno se la sabe de memoria, y lo sigue siendo mientras no la olvidemos.

En cualquier caso, es habitual asumir que son inmediatas las siguientes integrales indefinidas:

$$\int x^p\,dx = \frac{1}{p+1}\,x^{p+1} + C, \quad p \neq 1, \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \quad , \qquad \int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}\,a^x + C, \quad a > 0, a \neq 1$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \quad , \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C \quad , \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cotan} x + C \quad , \qquad \int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + C \quad , \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C$$

$$\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + C \quad , \qquad \int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C \quad , \qquad \int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arccosh} x + C \quad , \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arcsenh} x + C \quad , \qquad \int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arctanh} x + C$$

## 3.3 Métodos de Integración

### 1. Cambio de variable o sustitución

Dada la función $\Phi$ de clase $C^1$ y dada $f$ continua, si $x = \Phi(t)$, entonces:

$$\int f(x)dx = \int f(\Phi(t))\Phi'(t)dt$$

Alternativamente, si $\Phi'(t) \neq 0$, $\forall t$, entonces:

$$\int f(\Phi(t))dt = \int f(x)(\Phi^{-1})'(x)dx$$

---

**Ejemplos:** Calculemos las siguientes integrales para las que hay un cambio de variable "casi-evidente":

$$I_1 = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx \quad , \quad I_2 = \int \cos x\, e^{\operatorname{sen} x}\,dx \quad , \quad I_3 = \int \frac{\ln x}{x}\,dx$$

Para el primer caso, el cambio de variable: $x^2 + 1 = t$ nos lleva a que $x\,dx = \frac{1}{2}dt$ y así:

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\,\ln(x^2+1) + C$$

En la segunda integral cambiamos: $\operatorname{sen} x = u \Rightarrow \cos x\,dx = du$:

$$I_2 = \int e^u\,du = e^u + C = e^{\operatorname{sen} x} + C$$

Finalmente, $I_3$ se convierte en inmediata con el cambio: $\ln x = z \Rightarrow \frac{dx}{x} = dz$:

$$I_3 = \int z\,dz = \frac{1}{2}\,z^2 + C = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$$

---

## 2. Integración por partes

Dadas dos funciones derivables $f$ y $g$, se verifica:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int g'(x)f(x)dx$$

o alternativamente:

$$\int u\,dv \;=\; uv \;-\; \int v\,du$$

---

**Ejemplos:** Calculemos la siguiente integral:

$$I = \int x\,e^x\,dx$$

Identificaremos $e^x\,dx = dv$ mientras que $u = x$, tendremos así: $du = dx$, $v = e^x$, y por tanto:

$$I = e^x\,x - \int e^x\,dx = e^x\,x - e^x + C = e^x(x-1) + C$$

---

## 3. Integración de funciones racionales

Son las integrales de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, donde $P$ y $Q$ son polinomios. Si el grado de $P$ es mayor o igual que el de $Q$, dividiendo se tiene: $P = QC + R$, con grado de $R$ (resto) menor que el grado de $Q$. Entonces:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx \;=\; \int C(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$$

Tomaremos así en lo sucesivo que el grado de $P(x)$ es menor que el de $Q(x)$.

Se distinguen cuatro casos:

**3.1** El denominador posee raíces reales simples:

$$Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_r)$$

En tal caso se descompone el cociente en fracciones simples de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \;=\; \frac{A_1}{x-a_1} + \ldots + \frac{A_r}{x-a_r}$$

calculándose los coeficientes $A_i$. La integral (gracias a la linealidad) queda reducida a integrales de la forma:

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = \;A\,\ln(x-a)$$

**3.2** El denominador tiene raíces reales múltiples:

$$Q(x) = (x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_r)^{\alpha_r}$$

Se procede de manera análoga al caso anterior, pero ahora los sumandos correspondientes a la raíz $a_i$ son:

$$\frac{A_{i1}}{(x-a_i)^1}+\frac{A_{i2}}{(x-a_i)^2}+\ldots+\frac{A_{i\alpha_i}}{(x-a_i)^{\alpha_i}}$$

con lo cual la integral queda reducida a las del caso anterior más las de la forma:

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = \frac{-A}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$$

**3.3** El denominador posee raíces complejas simples:

Dado que si $c = a+bi$ es raíz de $Q(x)$, entonces su conjugado $\bar{c} = a-bi$ también lo es, podemos agrupar las raíces complejas dos a dos $((x-c)(x-\bar{c}) = x^2+px+q)$, y así será posible escribir $Q(x)$ de la forma:

$$Q(x) = (x^2+p_1x+q_1)\ldots(x^2+p_rx+q_r)$$

y la descomposición en fracciones simples es:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1x+B_1}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots+\frac{A_rx+B_r}{x^2+p_rx+q_r}$$

La integral queda reducida a integrales de la forma:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx$$

Completando cuadrados, es posible escribir:

$$x^2+px+q = (x-a)^2+b^2$$

y utilizando el cambio $x-a = bt$ se obtiene:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{Mt+N}{t^2+1}\,dt = \frac{M}{2}\ln(t^2+1)+N\arctan t$$

Deshaciendo el cambio de variables, se concluye.

---

**Ejercicio:** Calcular la integral:

$$I = \int \frac{x^2+3}{(x+2)^2x(x^2+3x+4)}dx$$

Se trata evidentemente de una integral racional donde el grado del numerador es mayor que el del denominador. Se tienen dos raíces (del denominador) reales, $x=-2$ de multiplicidad dos y $x=0$ de multiplicidad uno, y dos raíces complejas simples, $x = -\frac{3}{2}\pm i\sqrt{7}$. La descomposición en fracciones simples de la función racional será:

$$\frac{x^2+3}{(x+2)^2x(x^2+3x+4)} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{C}{x}+\frac{Dx+E}{x^2+3x+4}$$

Tras un breve (o semi-breve) cálculo se obtiene:

$$A = -\frac{3}{4}; \qquad B = -\frac{7}{4}; \qquad C = \frac{3}{16}; \qquad D = \frac{9}{16}; \qquad E = \frac{31}{16}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} I &= -\frac{3}{4}\int \frac{dx}{x+2} - \frac{7}{4}\int \frac{dx}{(x+2)^2} + \frac{3}{16}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{16}\int \frac{9x+31}{x^2+3x+4}dx \\ &= -\frac{3}{4}\ln|x+2| + \frac{7}{4}\frac{1}{x+2} + \frac{3}{16}\ln|x| + \frac{1}{16}\int \frac{9x+31}{x^2+3x+4}dx \end{aligned}$$

Para realizar esta última integral comenzamos por completar cuadrados en el denominador:

$$x^2+3x+4 = x^2 + 2x\frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 4 = \left(x+\frac{3}{2}\right) + \frac{7}{4}$$

De acuerdo con la técnica general que hemos estudiado, el cambio de variable adecuado será ahora:

$$x + \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2}t \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{7}}{2}dt$$

y así:

$$\frac{1}{16}\int \frac{9x+31}{x^2+3x+4}dx = \frac{\sqrt{7}}{32}\int \frac{9\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t - \frac{3}{2}\right)+31}{\frac{7}{4}(t^2+1)}dt = \frac{9}{16}\int \frac{t\,dt}{t^2+1} + \frac{5\sqrt{7}}{16}\int \frac{dt}{t^2+1}$$

y en definitiva:

$$\frac{1}{16}\int \frac{9x+31}{x^2+3x+4}dx = \frac{9}{32}\ln|t^2+1| + \frac{5\sqrt{7}}{16}\arctan t + C$$

Deshaciendo el cambio de variables:

$$I = -\frac{3}{4}\ln|x+2| + \frac{7}{4}\frac{1}{x+2} + \frac{3}{16}\ln|x| + \frac{9}{32}\ln\left|\frac{4}{7}(x^2+3x+4)\right| + \frac{5\sqrt{7}}{16}\arctan\frac{2x+3}{\sqrt{7}} + C$$

Teniendo en cuenta que $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ se puede simplificar finalmente (redefiniendo la constante) a la expresión:

$$I = \frac{7}{4(x+2)} + \frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^3(x^2+3x+4)^{\frac{9}{2}}}{(x+2)^{12}}\right| + \frac{5\sqrt{7}}{16}\arctan\frac{2x+3}{\sqrt{7}} + C$$

---

**3.4** El denominador posee raíces complejas múltiples:

$$Q(x) = (x^2+p_1x+q_1)^{\alpha_1}\dots(x^2+p_rx+q_r)^{\alpha_r}$$

Los sumandos correspondientes a $x^2+p_ix+q_i$ en la descomposición en fracciones simples son:

$$\frac{A_{i1}x+B_{i1}}{x^2+p_ix+q_i} + \frac{A_{i2}x+B_{i2}}{(x^2+p_ix+q_i)^2} + \dots + \frac{A_{i\alpha_i}x+B_{i\alpha_i}}{(x^2+p_ix+q_i)^{\alpha_i}}$$

con lo cual la integral queda reducida a integrales de la forma:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,dx$$

Efectuando, como en el apartado anterior, el cambio $x - a = bt$, dicha integral se reduce a

$$\int \frac{Mt + N}{(t^2 + 1)^n}\, dt = M \int \frac{t}{(t^2 + 1)^n}\, dt + N \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^n}$$

La primera integral del segundo miembro se integra fácilmente mediante el cambio de variable $u = t^2 + 1$. En cuanto a la segunda, se puede utilizar una fórmula recurrente de cálculo (que se demuestra fácilmente integrando por partes). Llamando:

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^n}$$

se tiene:

$$I_n = \frac{t}{2(n-1)(t^2 + 1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$$

Como $I_1 = \arctan t$, se concluye.

## 4. Integración de irracionales cuadráticas

Son las integrales de la forma $\int R(x, y)\, dx$, donde $R$ es una función racional e $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$.

La ecuación

$$y^2 = ax^2 + bx + c$$

es la de una curva cónica. Sea $(x_0, y_0)$ un punto de dicha cónica. Efectuando el cambio $y - y_0 = t(x - x_0)$ la integral se reduce a una integral racional y, por tanto, se resuelve según el apartado 3.

Para la elección del punto $(x_0, y_0)$ se distinguen varios casos:
i) Si $c > 0$. Puede tomarse en este caso $(x_0, y_0) = (0, \sqrt{c})$. El cambio entonces será: $\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{c} = tx$.
ii) Si $a > 0$. Se efectúa el cambio: $\sqrt{ax^2 + bx + c} + x\sqrt{a} = t$.
iii) Si $a < 0$. Es este caso $ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$. Se efectúa el cambio: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - r_1)$ o bien $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - r_2)$.

## 4b. Integración de irracionales cuadráticas 2

Otra posibilidad para tratar las integrales anteriormente expuestas es efectuar los siguientes cambios:
i) Para integrales de la forma: $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$, se hace $x = a \operatorname{sen} t$ ó $x = a \cos t$.
ii) Para integrales de la forma: $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$, se hace $x = a \tan t$ ó $x = a \operatorname{senh} t$.
iii) Para integrales de la forma: $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$, se hace $x = a \sec t$ ó $x = a \cosh t$.

**5. Integración de funciones trigonométricas**

Son las integrales de la forma $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx$, siendo $R$ una función racional. Con el cambio $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ la integral se reduce a una integral racional. Con dicho cambio se pueden realizar las siguientes sustituciones:

$$dx = \frac{2\, dt}{1+t^2}, \qquad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

En algunos casos especiales, hay otros cambios de variable que también reducen la integral a una integral racional, más sencilla que la que se obtiene con el cambio anterior. Son los siguientes:

i) Si $R$ es una función impar en $\operatorname{sen} x$, es decir: $R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, se resuelve con el cambio: $\cos x = t$.

ii) Si $R$ es una función impar en $\cos x$, es decir: $R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, se resuelve con el cambio: $\operatorname{sen} x = t$.

iii) Si $R$ es una función par en $\operatorname{sen} x$ y en $\cos x$, es decir: $R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, se resuelve con el cambio: $\tan x = t$. Entonces, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ y $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$.

## 3.4 Integral Definida

### 3.4.1 Definición de Integral Definida

El concepto de integral definida se construye a partir de la idea de pasar al límite una suma cuando el número de sumandos tiende a infinito y simultáneamente cada uno de los sumandos tiende a cero. Para determinar con precisión esta idea introduciremos las siguientes definiciones:

**Definición.** Dado un intervalo $[a, b]$ llamaremos partición de $[a, b]$ a toda colección de $n + 1$ puntos $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ tales que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Toda partición $P$ del intervalo $[a, b]$ lo divide en $n$ subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de anchuras respectivas $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

**Definición.** Dada una función $f(x)$ definida en el intervalo $[a, b]$, una partición $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ de $[a, b]$ y dados $n$ puntos $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$ tales que $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, se llama *suma integral o suma de Riemann* de la función $f(x)$ en $[a, b]$ correspondiente a la partición $P$ y a la elección de puntos $\xi$ a la suma siguiente:

$$S(f, P, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = f(\xi_1)\Delta x_1 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n$$

Si suponemos que la función es continua[1] en $[a, b]$ entonces, por el teorema de Weierstrass, $f(x)$ alcanza su valor máximo $M_k$ y su mínimo $m_k$ en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, podemos entonces construir las sumas de Riemann correspondientes a dichos valores, obteniendo la *suma superior de Riemann* de $f(x)$ en $[a, b]$ con respecto a la partición $P$:

$$U(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

y la respectiva *suma inferior*:

$$L(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$$

Es evidente entonces que el conjunto de todas las sumas de Riemann de una función dada en un intervalo, con respecto a una partición concreta $P$, está acotado superiormente por $U(f, P)$ e inferiormente por $L(f, P)$.

**Definición.** Se dice que una función $f(x)$ definida en $[a, b]$ es integrable (en el sentido de Riemann, o simplemente integrable) en $[a, b]$ si el supremo de todas sus sumas inferiores de Riemann coincide con el ínfimo de todas sus sumas superiores. A dicho número se le denomina *integral definida* o *integral de Riemann* de $f(x)$ en $[a, b]$ y se denota como:

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

Es posible definir de manera equivalente la integral definida como el límite de las sumas de Riemann de la función en el intervalo cuando el número de puntos de las particiones consideradas tiende a infinito mientras que la anchura máxima de los subintervalos determinados por la partición tiende a cero.

La definición de integral definida se completa añadiendo que se considerará también el caso en el que $a > b$ de la forma:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

mientras que:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

### 3.4.2 Propiedades básicas

1. Si $f(x)$ es integrable en $[a, b]$ entonces está acotada en $[a, b]$.

2. Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ entonces es integrable en $[a, b]$.

[1] Realmente sería suficiente con que $f(x)$ fuera continua en cada subintervalo de la partición $P$.

3. Si $f(x)$ está acotada en $[a, b]$ y presenta en dicho intervalo un número finito de discontinuidades, entonces es integrable en $[a, b]$.

4. La integral definida es lineal, es decir: Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones integrables en $[a, b]$, entonces su suma tambien lo es y se verifica:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

mientras que si $k$ es un número real cualquiera, entonces:

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

5. Dados tres números reales $a, b$ y $c$, se verifica:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

siempre que las integrales anteriores existan.

6. Si $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$ y ambas son integrables en $[a, b]$, entonces se verifica:

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$$

7. Si $a < b$ y $f(x)$ es integrable en $[a, b]$, se verifica:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

### 3.4.3 Teorema Fundamental del Cálculo y Regla de Barrow

**Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.** Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces existe en $[a, b]$ al menos un punto $c$ tal que se verifica:

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)\, f(c)$$

Nota: al número real $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ se le llama valor medio o valor promedio de $f(x)$ en $[a, b]$.

**Demostración:** Dado que $f(x)$ es continua en $[a, b]$, por el teorema de Weierstrass alcanza en $[a, b]$ su valor máximo, $M$ y su mínimo, $m$. Tendremos entonces, utilizando las propiedades anteriormente expuestas:

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow$$

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int M\,dx \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

y así:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$$

Pero al ser $M$ y $m$ alcanzados en $[a,b]$ (supongamos que en los puntos $x_1$ y $x_2$, $[x_1,x_2] \subset [a,b]$), tendremos que $f(x)$ alcanza todos los valores intermedios entre $m$ y $M$, y por tanto: $\exists c \in [x_1,x_2] \Rightarrow c \in [a,b]$ tal que:

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

Q.E.D.

Plantearemos a continuación el Teorema Fundamental del Cálculo, que relaciona dos conceptos aparentemente diferentes como son el de integral indefinida (operación inversa o recíproca de la derivación) y el de integral definida (límite de sumas cuando el número de sumandos tiende a infinito mientras que cada sumando tiende a cero):

**Teorema Fundamental del Cálculo.** Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a,b]$, entonces la función $F(x)$ definida de la forma:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

en el intervalo $[a,b]$ es derivable en $(a,b)$ y además $F'(x) = f(x)$.

Nota: Si $f(x)$ es integrable pero no continua en $[a,b]$ entonces sólo podemos asegurar que $F(x)$ es continua en $[a,b]$, pero la derivabilidad de $F(x)$ sólo está garantizada en los puntos de continuidad de $f(x)$.

La función $F(x)$ tiene un significado geométrico evidente dado que nos proporciona el "área determinada[2]" por la gráfica de $f(x)$ entre el punto inicial $a$ y un punto concreto $x$ del intervalo $[a,b]$.

**Regla de Barrow.** Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y $G(x)$ es una primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$, entonces se verifica:

$$\int_a^b f(x)dx = G(x)|_a^b = G(b) - G(a)$$

**Demostraciones:**

Demostraremos en primer lugar el Teorema Fundamental del Cálculo: Dada la función $f(x)$ continua en $[a,b]$, definiremos entonces en $[a,b]$ la función:

$$F(x) = \int_a^x f(u)du$$

[2]Evidentemente hablamos de área en sentido figurado, pues se trata realmente de un área para funciones definidas positivas en $[a,b]$.

Consideremos $h > 0$ tal que $x$ y $x + h$ pertenezcan ambos al intervalo $[a, b]$, tendremos entonces (aplicando las propiedades básicas de las integrales) que:

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(u)du - \int_a^x f(u)du = \int_x^{x+h} f(u)du$$

Aplicando a continuación el Teorema del Valor Medio en el intervalo $[x, x+h]$, existirá un valor $c \in [x, x+h]$ tal que:

$$\int_x^{x+h} f(u)du = f(c)(x+h-x) = f(c)\,h$$

Pero entonces la derivada de $F(x)$ en el punto $x$ se re-escribe de la forma:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c)$$

y dado que $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y, en consecuencia, en $[x, x + h]$, tendremos que $h \to 0$ nos lleva a que $x \leq c \leq x + h \Rightarrow x \leq c \leq x$, y en definitiva, al ser $f(x)$ continua:

$$\lim_{h\to 0} f(c) = \lim_{c\to x} f(c) = f(x) \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

Q.E.D[3].

Demostración de la regla de Barrow:

Dada al función continua $f(x)$ en $[a, b]$, si $G(x)$ es una primitiva de $f(x)$ en $[a, b]$ tendremos que, dado que $F(x)$ definida anteriormente también lo es, ambas deben diferenciarse tan sólo en una constante $C$, de esta forma:

$$G(x) - F(x) = C \quad , \quad \forall x \in [a, b]$$

En particular:

$$G(a) - F(a) = C \Rightarrow G(a) - \int_a^a f(x)dx = C$$

$$G(b) - F(b) = C \Rightarrow G(b) - \int_a^b f(x)dx = C$$

restando ambas expresiones, y considerando que $\int_a^a f(x)dx = 0$, tendremos:

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

Q.E.D.

[3]Estrictamente hablando hemos demostrado tan sólo que la derivada por la derecha de $F(x)$ es $f(x)$. Es trivial completar la demostración en el otro sentido.

## 3.5 Aplicaciones de las Integrales al cálculo de áreas, volúmenes y longitudes

### 3.5.1 Áreas.

**Funciones explícitas en Coordenadas Cartesianas.**

Dada una curva $y = f(x)$, el área determinada por dicha curva, las rectas $x = a$, $x = b$ (con $a < b$) y el eje de abscisas nos viene dada por la integral definida:

$$A = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

En el caso de que la variable despejada sea la $x$, es decir una ecuación explícita de la forma $x = g(y)$, la expresión:

$$A = \int_c^d |g(y)|\, dy$$

nos proporciona el área determinada por el eje de ordenadas, las rectas $y = c$, $y = d$ y la gráfica de $g(y)$.

**Expresiones en paramétricas:**

El área delimitada por la curva $c$ expresada en ecuaciones paramétricas, $c \equiv \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ y el eje OX entre las abscisas $x(t_1)$ y $x(t_2)$ es,

$$A = \int_{t_1}^{t_2} |y(t)||x'(t)|dt$$

**Expresiones en coordenadas polares:**

El área delimitada por la curva $c$ expresada en ecuaciones polares $r = r(\theta)$ y las rectas radiales $\theta = \theta_1$ y $\theta = \theta_2$ es dada por,

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2(\theta)d\theta$$

### 3.5.2 Longitud de arco de una curva:

**Expresiones en coordenadas cartesianas:**

La longitud de la curva $y = f(x)$ entre las abscisas $x = x_1$ y $x = x_2$ viene expresada mediante la fórmula:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

**Expresiones en paramétricas:**

La longitud de la curva $c \equiv \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ entre las abscisas $x(t_1)$ y $x(t_2)$ es calculada por:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

**Expresiones en coordenadas polares:**

La longitud de la curva $r = r(\theta)$ entre las coordenadas angulares $\theta = \theta_1$ y $\theta = \theta_2$ viene dada como:

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2} d\theta$$

### 3.5.3 Volúmenes de revolución (alrededor del eje OX):

**Expresiones en coordenadas cartesianas:**

El volumen generado por la curva $y = y(x)$ al girar alrededor del eje OX entre las abscisas $x_1$ y $x_2$ corresponde a la fórmula:

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} (f(x))^2 dx$$

**Expresiones en paramétricas**

El volumen de revolución respecto del eje OX de la curva $(x(t), y(t))$ delimitado por las abscisas $x(t_1)$ y $x(t_2)$ es dado por:

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} (y(t))^2 |x'(t)| dt$$

**Expresiones en coordenadas polares:**

El volumen de revolución de la curva $r = r(\theta)$ sobre el eje OX delimitado por las variables angulares $\theta_1$ y $\theta_2$ es

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^3(\theta) |\mathrm{sen}\theta| d\theta$$

### 3.5.4 Áreas de revolución (alrededor del eje OX):

El área generado por la curva $c$ al girar alrededor del eje OX puede ser calculado según las siguientes expresiones:

**Expresiones en coordenadas cartesianas:**

El área lateral referido anteriormente de la curva $y = f(x)$ entre las abscisas $x_1$ y $x_2$ será:

$$A_L = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

**Expresiones en paramétricas:**

En ecuaciones paramétricas, el área lateral limitada por las abscisas $x(t_1)$ y $x(t_2)$ viene dada por:

$$A_L = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |y(t)|\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

**Expresiones en coordenadas polares:**

La expresión en coordenadas polares es:

$$A_L = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} r(\theta) \operatorname{sen}\theta \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2}d\theta$$

## 3.6 Integrales Impropias

En la construcción y definición de integral definida o integral de Riemann hemos partido de una función $f(x)$ definida en un intervalo finito $[a, b]$ y además acotada en el mismo. Las integrales impropias se definen precisamente para contemplar la posibilidad de integrar en intervalos infinitos, por un lado, e integrar funciones no acotadas, por otro.

### 3.6.1 Integrales Impropias de Primera Especie

Una integral impropia de primera especie es una integral extendida a un intervalo no finito. Para definirla utilizaremos la siguiente expresión:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Si dicho límite existe y es finito diremos que la integral impropia de primera especie

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$

es convergente, en caso contrario será divergente.

De manera análoga se definen las integrales impropias de primera especie siguientes:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{-k}^{k} f(x)dx$$

### 3.6.2 Integrales Impropias de Segunda Especie

Una condición necesaria para que $f(x)$ fuera integrable en $[a, b]$ era que estuviera acotada en $[a, b]$. Si $f(x)$ es integrable en $[a, b-\varepsilon]$ y no está acotada en un entorno de $b$, definimos la integral impropia de segunda especie:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

La integral será convergente si el límite existe y es finito.

---

**Ejemplos:** Una integral impropia de primera especie convergente:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b\to\infty} (\arctan b - \arctan 0) = \frac{\pi}{2}$$

y otra de segunda especie:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} (\operatorname{arcsen}(1-\varepsilon) - \operatorname{arcsen} 0) = \frac{\pi}{2}$$

---

## 3.7 Ejercicios

### 3.7.1 Ejercicios Integral Indefinida

1.– Calcular:

$$\int (6x^2+8x+3)dx; \qquad \int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}; \qquad \int \left(\sqrt{x}+1\right)\cdot\left(x-\sqrt{x}+1\right)dx; \qquad \int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$$

2.– Calcular

$$\int \frac{dx}{x^2+7}; \qquad \int \frac{dx}{x^2-10}; \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}; \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$$

3.– Calcular:

$$\int 3^x\cdot e^x\,dx; \qquad \int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx; \qquad \int \frac{x^2+5x+7}{x+3}\,dx; \qquad \int \frac{x^4+x^2+1}{x+3}\,dx$$

4.– Calcular:

$$\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx; \int \sqrt{a-bx}\,dx; \qquad \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx; \qquad \int \frac{\sqrt{x}+\mathrm{L}nx}{x}\,dx$$

5.– Calcular:

$$\int \frac{dx}{3x^2+5}; \qquad \int \frac{dx}{7x^2-8}; \qquad \int \frac{x^2}{x^2+2}\,dx; \qquad \int \frac{x^2-5x+6}{x^2+4}\,dx$$

6.– Calcular :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}}; \qquad \int \frac{2x-5}{3x^2-2}\,dx; \qquad \int \frac{3x+1}{\sqrt{5x^2+1}}\,dx; \qquad \int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$$

7.– Calcular:

$$\int \frac{x\ dx}{\sqrt{a^4-x^4}}; \qquad \int \sqrt{\frac{\mathrm{arcsen}x}{1-x^2}}\,dx; \qquad \int \frac{\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)}{4+x^2}\,dx$$

8.– Calcular:

$$\int x\cdot e^{-(x^2+1)}\,dx; \qquad \int x\cdot 7^{(x^2)}dx; \qquad \int \frac{e^{\left(\frac{1}{x}\right)}}{x^2}\,dx$$

9.– Calcular:

$$\int \frac{x^3}{x^8+5}\,dx; \qquad \int x\cdot e^{(-x^2)}\,dx; \qquad \int \frac{3-\sqrt{2+3x^2}}{2+3x^2}\,dx$$

10.– Calcular:

$$\int \frac{x^3-1}{x+1}\,dx; \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{e^x}}; \qquad \int \frac{1-\mathrm{sen}x}{x+\cos x}\,dx$$

11.– Calcular:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx; \qquad \int \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}}\,dx; \qquad \int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx$$

12.– Calcular:

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx; \qquad \int \sqrt{1-x^2}\,dx; \qquad \int \mathrm{arctg}x\ dx$$

13.–Calcular:

$$\int x\cdot \mathrm{sen}x\ dx; \qquad \int x\cdot \cos 3x\ dx; \qquad \int \frac{x}{e^x}\,dx; \qquad \int x^2e^{3x}\,dx$$

14.– Calcular:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx; \qquad \int \frac{dx}{x^2+2x+5}; \qquad \int \frac{dx}{x^2+2x}$$

15.– Calcular:

$$\int \frac{dx}{3x^3-x+1}; \qquad \int \frac{x\ dx}{x^2-7x+13}; \qquad \int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}\,dx$$

16.– Calcular:

$$\int \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}\,dx; \qquad \int \frac{x^2\ dx}{x^2-6x+10}; \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$$

17.– Calcular:

$$\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx; \qquad \int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}\,dx; \qquad \int \frac{dx}{x(x+1)^2}$$

18.– Calcular:

$$\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\,dx; \qquad \int \frac{dx}{x^3+1}; \qquad \int \frac{dx}{x^4+1}$$

19.– Calcular:

$$\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx; \qquad \int \sqrt{2+x^2}\,dx; \qquad \int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}\,dx$$

20.– Calcular:

$$\int \frac{4x^3+2x^2+1}{4x^3-x}\,dx; \qquad \int \frac{dx}{x^3-1}; \qquad \int \frac{x^2-2x+3}{x^3-4x^2+x+6}\,dx; \qquad \int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$$

### 3.7.2 Ejercicios Integral Definida

1. Hallar el área determinada por la curva $y = x^2 + x - 2$, las rectas $x = -3$ y $x = 2$, y el eje de abscisas.

2. Hallar el área determinada por la gráfica de la función: $f(x) = \frac{1}{x^2+9}$ y su asíntota.

3. Calcular el área encerrada entre las curvas $y = \frac{1}{x^2+1}$ e $y = \frac{1}{2}\,x^2$.

4. Una vaca está atada a uno de los vértices de un prado de forma cuadrada de lado $L$. Sabiendo que la longitud de la cuerda es $R$, calcular la superficie de hierba, en función de $L$ y $R$, que puede comer la vaca.

5. Calcular:

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$$

6. Demostrar que el área encerrada por la circunferencia dada en ecuaciones paramétricas por: $x = a\cos t$, $y = a\,\mathrm{sen}\,t$, con $t \in [0, 2\pi]$ es $A = \pi a^2$.

7. La curva cicloide se define por medio de las ecuaciones paramétricas:

$$x = a(t - \mathrm{sen}\,t) \quad , \quad y = a(1 - \cos t)$$

Calcular:

a) La longitud del arco de cicloide comprendido entre $t = 0$ y $t = 2\pi$.
b) El área encerrada por dicho arco y el eje de abscisas.
c) El área lateral de la superficie engendrada al girar dicho arco alrededor del eje $OX$.
d) El área lateral de la superficie engendrada al girar dicho arco alrededor del eje $OY$.
e) El volumen del cuerpo engendrado al girar la región del apartado b) alrededor del eje $OX$.

8. Calcular el área encerrada por una hoja de la curva $r = a\ \mathrm{sen}\,3\theta$.

9. Calcular la longitud de un arco de la parábola $y = x^2 - 2x + 5$ entre $x = 1$ y $x = \frac{3}{2}$.

10. Calcular la longitud de la espiral: $r = e^{-\theta}$, con $\theta \in [0, \infty)$.

11. Calcular el volumen engendrado al girar la curva:

$$y = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$$

alrededor del eje $OX$ entre $x = 2$ y $x = 4$.

# Tema 4

# Ecuaciones Diferenciales. Conceptos Generales

## 4.1 Definiciones Generales

**Definición:** Llamaremos *ecuación diferencial ordinaria* (e.d.o.) a toda relación entre una variable independiente $x$, una dependiente (la función desconocida $y(x)$) y sus derivadas $y'(x),\ y''(x),\ \ldots,\ y^{(n)}(x)$:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

**Definición:** Se llama *orden* de una ecuación diferencial ordinaria al mayor de los órdenes de las derivadas que contiene.

La clasificación más general de las ecuaciones diferenciales se realiza en función del número de variables independientes presentes, las ecuaciones diferenciales ordinarias, tal y como se han definido, involucran a una única variable independiente y, en consecuencia, las derivadas que aparecen en la ecuación son derivadas ordinarias. En cambio, si se tienen dos o más variables independientes, las ecuaciones poseerán derivadas parciales y, por tanto, serán denominadas *ecuaciones en derivadas parciales* (e.d.p.)

---

**Ejemplos:**

- $xy'' + y' + xy = 0$ es una e.d.o. de segundo orden con utilidad en la aerodinámica.
- $y' + \frac{x}{y'} = \ln y$ es una e.d.o. de primer orden.
- $m\frac{d^2x}{dt^2} = F$ es una e.d.o. de segundo orden (Segunda Ley de Newton de la Mecánica).
- $\frac{dN}{dt} = kN$ es la ecuación de Malthus (e.d.o. de primer orden).
- $\frac{dy}{dx} = \frac{y(2-3x)}{x(1+3y)}$ es una e.d.o. de primer orden que aparece en Ecología al estudiar la competencia entre dos especies.

- $\frac{dQ}{dt} = aQ$, con $a < 0$, es la ecuación que modeliza la desintegración de una sustancia radiactiva (e.d.o. de primer orden).
- $y'' - \epsilon(1 - y^2)y' + 9y = 0$ es la ecuación de Van der Pol (e.d.o. de segundo orden), con aplicación en varios campos de la ciencia.
- $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$ es la ecuación de Laplace en el plano (e.d.p. de segundo orden).
- $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$ es la ecuación de ondas en una dimensión (e.d.p. de segundo orden).

---

Estudiaremos en esta asignatura diversos tipos de e.d.o. y sus aplicaciones, particularmente e.d.o. de primer orden.

Si en una e.d.o. de primer orden fuera posible despejar $y'$, se dice que la ecuación se presenta en *forma normal*:

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x, y)$$

## 4.2 Soluciones exactas

**Definición:** Llamaremos *solución* de una e.d.o. $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ a toda función $y = \phi(x)$ que sustituida en la ecuación la convierta en una identidad.

---

**Ejemplos:**

- La función $y = e^{2x}$ es solución de la ecuación diferencial de segundo orden: $y''-5y'+6y = 0$, puesto que $y' = 2e^{2x}$, $y'' = 4e^{2x}$ y por tanto:

$$4e^{2x} - 5(2e^{2x}) + 6e^{2x} = 10e^{2x} - 10e^{2x} \equiv 0$$

- Las funciones $N_1(t) = 5e^{kt}$ y $N_2(t) = 12e^{kt}$ son soluciones de la Ecuación de Malthus antes escrita.
- La función $y = ax^2+bx+c$, para cualesquiera constantes $a, b$ y $c$, es solución de la ecuación de tercer orden $y''' = 0$.

---

**Definición:** Se llama *solución general* de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden a una expresión del tipo:

$$y = y(x, C)$$

donde $C$ es una constante real, de forma que para cada valor de $C$ la función $y = y(x, C)$ sea solución de la e.d.o. Cada una de dichas soluciones (para los diferentes valores de $C$) se llama *solución particular* de la ecuación.

---

**Ejemplos:**

- La ecuación: $y' = y$ tiene como solución general: $y = Ce^x$.
- $N(t) = Ce^{kt}$ es la solución general de la ecuación de Malthus.

---

**Comentarios:**

- Las soluciones de una ecuación diferencial no siempre se nos presentan en forma explícita, es decir, con la variable dependiente despejada: $y = y(x)$. Muy frecuentemente la solución aparece definida implícitamente por una ecuación $\Phi(x, y) = 0$, y la solución general otro tanto: $\Phi(x, y, C) = 0$.

  **Ejemplo:** La solución general de la ecuación $y' = \frac{-x}{y}$ es la familia de circunferencias: $x^2 + y^2 = C$.

- Que la solución general de una e.d.o. de primer orden dependa de una constante arbitraria es intuitivamente muy sencillo de entender si se tiene en cuenta que para "eliminar" una derivada primera será necesario realizar una integral indefinida, y, por tanto, aparecerá una constante arbitraria durante dicho proceso de integración. De igual manera, la solución general de una e.d.o. de segundo orden dependerá de dos constantes arbitrarias, y así sucesivamente.

- Pueden existir soluciones de una e.d.o. que no sean particulares, es decir, que no puedan obtenerse a partir de la solución general para un valor concreto de la constante arbitraria, en ese caso reciben el nombre de *soluciones singulares*.

  **Ejemplo:** La ecuación $(y' - y)(y - x^3) = 0$ tiene como solución general $y = Ce^x$, pero además admite la solución singular $y = x^3$, que no puede ser obtenida de la general para ningún valor de $C$.

- Geométricamente, una e.d.o. de primer orden puede entenderse como una relación que liga a cada punto de la gráfica de $y(x)$, $(x, y(x))$, con la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto. La solución general es una familia de infinitas curvas que verifican dicha condición, y cada solución particular es una curva concreta de la familia.

- Las ecuaciones de primer orden pueden aparecer escritas en *forma diferencial*, esencialmente equivalente a la *forma normal*. Así por ejemplo, la ecuación $2x^2y\,dx + (x + y)\,dy = 0$, escrita en forma diferencial, equivale a la ecuación $y' = \frac{-2x^2y}{x+y}$, escrita en forma de derivadas. Un matiz interesante es el siguiente: si analizamos una ecuación en forma diferencial, el carácter dependiente/independiente de las variables es arbitrario, es decir, podemos atribuir el carácter de variable independiente a cualquiera de las dos variables presentes. De esta manera, a la ecuación $\frac{dx}{dy} = \frac{x+y}{-2x^2y}$ le corresponde también la ecuación en forma diferencial anterior.

## 4.3 Problema de valor inicial. Teorema de Picard

**Definición:** Se llama *problema de Cauchy* o *problema de valor inicial* al sistema formado por la ecuación diferencial ordinaria $y' = f(x, y)$ y por la condición inicial $y(x_0) = y_0$.

De manera general, un Problema de valor inicial de orden $n$ consiste en una ecuación diferencial ordinaria de orden $n$ más $n$ condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, $\cdots$, $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

---

**Ejemplos:**

- La ecuación $y' = 2x^2 + y$, junto con la condición $y(1) = 3$, constituyen un problema de valor inicial.
- Las condiciones iniciales típicas de la ecuación de Newton, $F = m\frac{d^2x}{dt^2}$, son la posición inicial, $x(0) = x_0$, y la velocidad inicial $\frac{dx}{dt}(0) = v_0$.
- La ecuación de Malthus antes escrita suele ir acompañada de un "dato inicial", la población a tiempo cero: $N(0) = N_0$.

---

Desde el punto de vista geométrico el problema de Cauchy de primer orden no es más que dar una e.d.o. de primer orden y un punto del plano. Una solución de dicho problema será una curva solución de la e.d.o. que pase por el punto $(x_0, y_0)$. El Teorema que veremos a continuación establece las condiciones que tiene que cumplir un problema de valor inicial para tener solución.

**Teorema de Picard de existencia y unicidad:**[1] Si la función $f(x, y)$ es diferenciable en un entorno del punto $(x_0, y_0)$, entonces el problema de Cauchy $y' = f(x, y)$; $y(x_0) = y_0$ tiene solución única en dicho entorno. Es decir, existe una única función $y = \phi(x)$ definida en el entorno de $x_0$ considerado, tal que sea solución de la ecuación y que verifique $\phi(x_0) = y_0$.

---

**Ejemplos:**

- La solución al problema de valor inicial: $y' = y$, $y(0) = 2$ es: $y = 2e^x$, es decir, se trata de la única solución particular de la ecuación diferencial $y' = y$ que pasa por el punto $(0, 2)$.
- La solución del problema de Malthus: $\frac{dN}{dt} = kN$, $N(0) = N_0$, es: $N(t) = N_0 e^{kt}$.

[1] Nota: Esta es una versión simplificada del Teorema de Picard, con la que se intenta dar la idea básica presente en los teoremas de existencia y unicidad de las soluciones de las ecuaciones diferenciales. En particular, no es necesario que la función $f(x, y)$ sea diferenciable, basta con que verifique propiedades menos restrictivas que la derivabilidad (ver apéndice al final del tema).

# Tema 5

# Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

## 5.1 Ecuaciones en variables separadas o separables

Se dice que una e.d.o. de primer orden es de *variables separadas* si se escribe de la forma:

$$f(x)dx = g(y)dy$$

Las ecuaciones de variables separadas se integran de forma directa:

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy \Rightarrow F(x) + C_1 = G(y) + C_2 \Rightarrow F(x) - G(y) = C$$

con $C = C_2 - C_1$. La solución general $y(x, C)$ de la ecuación queda definida de forma implícita[1] por la expresión: $F(x) - G(y) = C$.

Alternativamente, si se desea resolver un problema de valor inicial con ecuación separable: $f(x)dx = g(y)dy\,,\ y(x_0) = y_0$, utilizando integrales definidas es posible escribir la solución particular en la forma:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = \int_{y_0}^{y} g(y)dy \ \Rightarrow\ F(x) - F(x_0) = G(y) - G(y_0)$$

---

**Ejemplos:**

- La ecuación $x\,dx + ydy = 0$ es de variables separadas, su solución general se obtiene de forma trivial y es una familia de circunferencias: $x^2 + y^2 = C$.
- Toda ecuación que no dependa explícitamente de la variable dependiente es de variables separadas. Efectivamente, dada la ecuación: $y' = f(x)$, su solución general es, evidentemente: $y = \int f(x)dx + C$.

---

[1] No siempre es posible obtener la solución de una e.d.o. de forma explícita $y = y(x)$ (ver comentario en el Tema anterior).

Muchas ecuaciones no son de variables separadas, pero sí fácilmente *separables*, bien mediante operaciones elementales, bien mediante cambios de variables, bien mediante métodos más sofisticados. De hecho, los diferentes tipos de ecuaciones resolubles de forma exacta que vamos a ver en este tema no son más que ecuaciones que de una manera u otra se convierten en variables separadas.

Veamos algunos casos de variables separables fácilmente reconocibles:

- Las ecuaciones de la forma:

$$f_1(x)g_1(y)dx = f_2(x)g_2(y)dy$$

  son siempre separables sin más que agrupar en cada miembro las funciones que dependen de la misma variable[2]:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy$$

- Las ecuaciones de la forma:

$$y' = f(ax + by + c)$$

  con $a, b$ y $c$ constantes se convierten en variables separadas si se cambia la variable dependiente $y$ por $u = ax + by + c$.

  Efectivamente, si $u = ax + by + c$ entonces $u' = a + by'$ y la ecuación será:

$$\frac{1}{b}(u' - a) = f(u)$$

  que es evidentemente de variables separadas al no aparecer la variable independiente explícitamente (ver sección siguiente).

---

**Ejemplo 1:** Resolver la ecuación diferencial: $(1 + y^2)xdx - y(1 + x^2)dy = 0$ con la condición inicial: $y(0) = 1$.
La ecuación se separa fácilmente:

$$\frac{xdx}{1+x^2} = \frac{ydy}{1+y^2} \Rightarrow \int \frac{xdx}{1+x^2} = \int \frac{ydy}{1+y^2} \Rightarrow \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,|1+x^2| = \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,|1+y^2| + C$$

Podemos simplificar la solución, definiendo la nueva constante: $K = e^{2C}$, y escribirla en la forma:

$$x^2 + 1 = K(y^2 + 1)$$

Obtengamos ahora la solución particular que verifica $y(0) = 1$:

$$0 + 1 = K(1+1) \Rightarrow K = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 + 1 = \frac{1}{2}(y^2+1) \Rightarrow y = \sqrt{2x^2+1}$$

[2]Es necesario precisar que a veces dichos “agrupamientos” llevan aparejados la aparición (o supresión) de soluciones singulares de la ecuación.

**Ejemplo 2:** Integrar la ecuación diferencial: $y' = (x+y)^2$ con la condición $y(0) = 1$
Se trata de una ecuación de la forma $y' = f(ax+by+c)$, antes comentada, con $ax+by+c = x+y$.
Llamando $u = x+y$ y derivando se obtiene: $u' = 1 + y'$ y así, en variables $(x, u)$:

$$u' - 1 = u^2 \Rightarrow \int \frac{du}{u^2+1} = \int dx \Rightarrow \arctan u = x + C$$

Deshaciendo el cambio y simplificando la solución general será:

$$y = \tan(x + C) - x$$

Sustituyendo la condición inicial se llega a la solución particular buscada:

$$y = \tan(x + \frac{\pi}{4}) - x$$

---

### 5.1.1 Ecuaciones Autónomas

Las ecuaciones diferenciales de primer orden que no dependen explícitamente de la variable independiente son de especial interés en el campo de las aplicaciones. Se trata de ecuaciones fácilmente separables:

$$y' = f(y) \Rightarrow \frac{dy}{f(y)} = dx \Rightarrow F(y) = x + C$$

(ver el Ejemplo 2 anterior).

Si se dispone de una condición inicial: $y(x_0) = y_0$ la solución particular será simplemente:

$$F(y) - F(y_0) = x - x_0$$

Se suele llamar *ecuaciones autónomas* a las de este tipo (sobre todo cuando la variable independiente es el tiempo).

A menudo el cálculo de la integral $\int \frac{dy}{f(y)}$ no es fácil, y también frecuentemente resulta complicado (o directamente imposible) despejar de la expresión final la solución explícita $y(x)$. Sin embargo en las ecuaciones autónomas es posible obtener información relevante sobre las soluciones aún sin resolver la ecuación completamente. Ilustraremos este hecho con un ejemplo concreto.

---

**Ejemplo:** Analicemos la ecuación:

$$y' = y^2(y^2 - 1) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y^2(y^2-1)} = \int dx$$

Aunque es posible calcular la integral, puesto que se trata de una integral racional sencilla, es mucho más complicado el problema de invertir el resultado para obtener la solución explícita $y = y(x, C)$. Sin embargo es muy fácil calcular las soluciones constantes de dicha ecuación, que suelen denominarse *soluciones estacionarias*: para $y = 0$ e $y = \pm 1$ es evidente que el segundo miembro de la ecuación es nulo, mientras que la derivada de una constante también lo es. Se trata por tanto de soluciones de la ecuación que no dependen de la variable independiente $x$. Sus gráficas son obviamente rectas horizontales en el plano. Teniendo en cuenta el Teorema de Picard, las soluciones no pueden cortarse, de manera que las rectas citadas dividen el plano en cuatro regiones que no pueden comunicarse por medio de una solución de la ecuación.

Por otro lado, de la ecuación se deduce directamente que para todo $y$ tal que $y^2 > 1$, es decir, para $y \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, la derivada $y'$ es siempre positiva, mientras que para $y \in (-1, 1)$ la derivada es negativa. Conocemos entonces las regiones en las que las soluciones son crecientes y decrecientes.

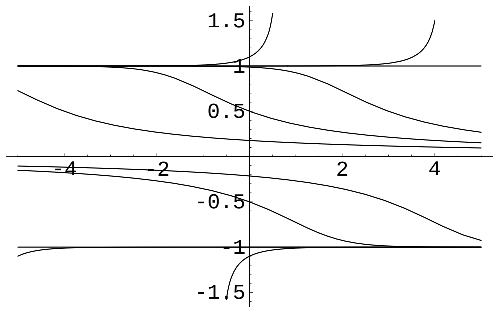



Figura 5.1: *Gráficas de algunas soluciones de la ecuación* $y' = y^2(y^2 - 1)$ *obtenidas mediante métodos numéricos en el ordenador.*

En el próximo tema utilizaremos este tipo de técnicas para conocer propiedades de las soluciones de diversas ecuaciones sin necesidad de resolverlas de forma completa.

## 5.2 Ecuaciones Lineales de primer orden

De manera general se dice que una ecuación diferencial ordinaria es lineal si lo es en la variable dependiente y sus derivadas, de esta manera la forma genérica de una ecuación lineal de orden $n$ será (con $a_n(x) \neq 0$):

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x) = g(x)$$

Si los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son funciones de la variable independiente se dice que es una ecuación con coeficientes variables, por contra, si se trata de números tendremos una ecuación con coeficientes constantes.

Por otro lado, $g(x)$ es el "término independiente" de la ecuación. Si es nulo, hablaremos de una ecuación lineal homogénea, en caso contrario, ecuación lineal no-homogénea.

**Ejemplos:**

- La ecuación: $y'' + 3y' - 2y = 0$ es una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes y homogénea.

- La ecuación $y''' + 2x^3y'' - e^x y' + 2y = \operatorname{sen} x$ es una ecuación lineal de tercer orden con coeficientes variables y no-homogénea.

---

Las ecuaciones lineales de primer orden son de la forma:

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

que, dividiendo por $a_1(x)$, reduce a la forma habitual:

$$y' + f(x)y = g(x)$$

Las ecuaciones lineales de primer orden se pueden resolver por varios caminos equivalentes, si bien todos se basan en la siguiente proposición:

**Proposición:** Toda ecuación lineal de primer orden, $y' + f(x)y = g(x)$, se convierte en una ecuación de variables separadas si se cambia la variable dependiente $y$ a la variable $u$ determinada por la expresión $y = u \cdot v$, donde $v(x)$ es una solución particular no trivial de la ecuación $y' + f(x)y = 0$, que recibe habitualmente el nombre de Ecuación Lineal Homogénea Asociada a la ecuación $y' + f(x)y = g(x)$.

---

**Demostración:** Si $v(x)$ es una solución de la ecuación lineal homogénea asociada, entonces $v'(x) + f(x)v(x) = 0$. Dado que $y = u \cdot v$, entonces: $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$, y así la ecuación en variables $(x, u)$ se escribe:

$$u'v + uv' + f(x)uv = g(x) \Rightarrow u'v + u\ (v' + f(x)v) = g(x) \Rightarrow u' = \frac{g(x)}{v(x)}$$

que es evidentemente de variables separadas. Q.E.D.

---

La proposición nos permite además dar una fórmula general que resuelve la ecuación lineal de primer orden, por un lado $u(x)$ se escribe como:

$$u(x) = \int \frac{g(x)}{v(x)} dx$$

pero la ecuación lineal homogénea asociada es siempre de variables separadas y su solución general es evidentemente:

$$y_{\text{H.A.}} = Ke^{-\int f(x)dx}$$

Tomando la solución particular $v(x)$ como la resultante de considerar $K = 1$ tendremos:

$$\boxed{y(x) = u(x) \cdot v(x) = e^{-\int f(x)dx} \left( \int g(x)e^{\int f(x)dx} dx + C \right)} \quad .$$

---

**Ejemplo:** Resolver la ecuación diferencial $y' - \frac{2y}{x} = x^3 + 3x^2$.

La ecuación lineal homogénea asociada es $y' - \frac{2y}{x} = 0$, cuya integración es fácil:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x} \Rightarrow \mathrm{Ln}\,|y| = 2\,\mathrm{Ln}\,|x| + C \Rightarrow y_{\mathrm{H.A.}} = Kx^2$$

donde $K = \pm e^C$. Tomando $K = 1$ obtenemos $v = x^2$.

El cambio a realizar es por tanto: $y = ux^2$, y en consecuencia: $y' = u'x^2 + 2ux$. La ecuación se escribe en variables $(x, u)$ de la forma:

$$u'x^2 + 2ux - \frac{2ux^2}{x} = x^3 + 3x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = x + 3 \Rightarrow u = \frac{1}{2}x^2 + 3x + C$$

y finalmente:

$$y = ux^2 = Cx^2 + \frac{1}{2}x^4 + 3x^3$$

---

Es de reseñar que la solución general de una ecuación lineal de primer orden siempre consiste, como hemos visto, en una solución particular de la misma más la solución general de la ecuación lineal homogénea asociada. Esta propiedad se deriva del caracter lineal de la ecuación[3]. Estudiaremos en el Tema 5 más propiedades de las soluciones de las ecuaciones lineales.

### 5.2.1 Ecuaciones de Bernoulli

Se denominan ecuaciones de Bernoulli[4] a las que se pueden escribir de la forma:

$$y' + f(x)y = g(x)y^\alpha$$

donde evidentemente $\alpha \neq 0, 1$ (nótese que $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$ hacen que estas ecuaciones sean directamente lineales).

Las ecuaciones de Bernoulli se reducen a ecuaciones lineales si se cambia de variables $(x, y)$ a variables $(x, z)$, donde $z = y^{1-\alpha}$.

[3]No es difícil demostrar este hecho. En primer lugar es trivial comprobar que si $y_1$ es una solución particular de la ecuación $y' + f(x)y = g(x)$, entonces $y_2 = y_1 + y_H$ también lo es, donde $y_H$ denota una solución de la ecuación homogénea asociada. En segundo lugar, si $y_1$ e $y_2$ son soluciones de la ecuación, entonces de manera obvia se comprueba que $y_1 - y_2$ es una solución de la ecuación homogénea asociada. Combinando ambos resultados, queda probado que la solución general puede ser escrita siempre como la solución general de la ecuación homogénea asociada más una solución particular concreta de la ecuación completa.

[4]Se denominan así por ser Jakob Bernoulli quien las propuso y planteó un método para su resolución. Su hermano Johann Bernoulli encontró otro método y finalmente Leibnitz fue el "descubridor" del cambio $z = y^{1-\alpha}$ que comentamos. También a Leibnitz debemos la resolución de las ecuaciones lineales de primer orden y las ecuaciones homogéneas que veremos en la sección siguiente.

Demostremos esta afirmación: Si $z = y^{1-\alpha}$, entonces $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, de manera que la ecuación se puede escribir de la forma (multiplicando ambos miembros por $y^{-\alpha}$):

$$y^{-\alpha}y^{\alpha}\frac{z'}{1-\alpha} + y^{-\alpha}f(x)y = g(x)y^{-\alpha}y^{\alpha} \Rightarrow z' + (1-\alpha)f(x)z = (1-\alpha)g(x)$$

que es una ecuación lineal de primer orden.

Otra manera de resolver las ecuaciones de Bernoulli es tratarlas directamente como si fueran ecuaciones lineales, es decir: La ecuación de Bernoulli $y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha}$ se convierte en una ecuación de variables separables si se realiza el cambio de variable $y = u \cdot v$ donde $v$ es una solución particular no trivial de la ecuación asociada: $y' + f(x)y = 0$.

## 5.3 Ecuaciones Homogéneas

Se llama *ecuación homogénea* a toda ecuación diferencial ordinaria $y' = f(x,y)$ tal que la función $f(x,y)$ verifique[5]: $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Existe evidentemente una cierta confusión en la notación entre lo que hemos denominado “ecuación lineal homogénea asociada” (ecuación lineal con término independiente nulo) y “ecuación homogénea” (la que acabamos de definir).

Las ecuaciones homogéneas son convertibles en variables separadas mediante un cambio único (válido para todas las ecuaciones de este tipo). Efectivamente, llamando $u = \frac{y}{x}$ tendremos que la ecuación en variables $(x,u)$ es de variables separables[6].

---

**Ejemplo:** Resolver la ecuación diferencial: $xyy' = x^2 + y^2$.

La ecuación es evidentemente homogénea[7]:

$$y' = \frac{x^2+y^2}{xy} \Rightarrow f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2}{\lambda x \lambda y} = \frac{x^2+y^2}{xy}$$

Hacemos por tanto $y = ux$ y así: $y' = u'x + u$. Utilizando ya variables $(x,u)$ tendremos:

$$x^2u(u'x+u) = x^2 + u^2x^2 \Rightarrow u'x + u = \frac{1}{u} + u \Rightarrow \frac{du}{dx}x = \frac{1}{u} \Rightarrow udu = \frac{dx}{x}$$

Por integración directa concluimos que la solución general de la ecuación es: $u^2 = \mathrm{Ln}\, x^2 + C$. Finalmente, en variables $(x,y)$, tendremos

$$y^2 = x^2 \,\mathrm{Ln}\, x^2 + Cx^2$$

---

[5]Esta propiedad se enuncia alternativamente diciendo que $f(x,y)$ debe ser una *función homogénea de grado cero*. En general se llama función homogénea de grado $p$ a toda función (en este caso de dos variables, en general de cualquier número de variables) $f(x,y)$ que verifique: $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^p f(x,y)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

[6]No es difícil demostrar esta afirmación, veamos: si $y = ux$, entonces $y' = u'x + u$, mientras que, por ser una función homogénea de grado cero, se verificará: $f(x,ux) = f(1,u)$ que no depende explícitamente de $x$. Tendremos por tanto, que en variables $(x,u)$ la ecuación se escribe de la forma: $\frac{du}{dx}x = g(u) - u$, donde $g(u) = f(1,u)$, que es evidentemente de variables separables.

[7]Nótese que también es una ecuación de Bernoulli.

### 5.3.1 Ecuaciones reducibles a homogéneas

**a)** Las ecuaciones de la forma

$$(ax + by + c)dx + (px + qy + r)dy = 0$$

(con $a, b, c, p, q, r$ constantes y $c$ y/o $r$ no nulas) son evidentemente no-homogéneas. Es posible, sin embargo, convertirlas en homogéneas mediante un cambio de variables. Si se verifica:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix} \neq 0$$

entonces las rectas $ax + by + c = 0$ y $px + qy + r = 0$ se cortan en un punto $(x_0, y_0)$. Cambiamos entonces de variables $(x, y)$ a variables $(X, Y)$ definidas de la forma: $X = x - x_0$, $Y = y - y_0$. La ecuación resultante será de tipo homogénea.

Comprobaremos esta afirmación para un ejemplo concreto:

---

**Ejemplo:** Dada la ecuación:

$$(x + y - 3)dx + (2x - 3y + 4)dy = 0$$

el punto de corte entre las dos rectas es fácilmente calculable: $x_0 = 1$, $y_0 = 2$. El cambio de variable será por tanto:

$$X = x - 1, \quad Y = y - 2 \quad \Rightarrow \quad x = X + 1, \quad y = Y + 2$$

tendremos así: $dx = dX$ y $dy = dY$, y la ecuación se re-escribe en variables $(X, Y)$ de la forma:

$$(X + Y)dX + (2X - 3Y)dY = 0$$

que es evidentemente homogénea.

---

Si las dos rectas son paralelas, o coincidentes (el determinante antes citado sería entonces nulo), la ecuación es directamente convertible en variables separadas puesto que en tal caso $px + qy$ debe ser proporcional a $ax + by$, y en consecuencia la ecuación se reduce a una del tipo:

$$y' = f(ax + by)$$

analizadas en la primera sección del tema.

**b)** Algunas ecuaciones no homogéneas pueden convertirse en tales mediante algún cambio de variable. En particular son frecuentes los cambios del tipo $y = z^\alpha$ para algún valor de la constante $\alpha$. Presentemos un ejemplo:

---

**Ejemplo:** La ecuación $x^3\, dy + 2(y^2 - yx^2)\, dx = 0$ es claramente no-homogénea. Probemos un cambio de la forma: $y = z^\alpha$, entonces $dy = \alpha\, z^{\alpha-1}\, dz$, y tendremos la ecuación, en variables $(x, z)$:

$$\alpha x^3 z^{\alpha-1}\, dz + 2(z^{2\alpha} - z^\alpha x^2)\, dx = 0$$

en forma normal:

$$z' = \frac{-2}{\alpha}\,\frac{z^{2\alpha} - z^{\alpha}x^2}{x^3 z^{\alpha-1}}$$

que será homogénea si se verifica que $\alpha + 2 = \alpha + 2 = 2\alpha$. Estas ecuaciones tienen solución: $\alpha = 2$ y por tanto el cambio $y = z^2$ convierte la ecuación original en homogénea:

$$z' = \frac{zx^2 - z^3}{x^3}$$

---

Es interesante comentar que no es posible conocer *a priori* si una ecuación no-homogénea admite o no admite un cambio de este tipo, no queda más remedio, por tanto, que utilizar el método de "prueba y error".

## 5.4 Ejercicios

**1.** Integrar las siguientes ecuaciones con variables separables y problemas de valor inicial:

1.1) $(1 + y^2)dx + xydy = 0$
1.2) $(y^2 + xy^2)y' + x^2 - yx^2 = 0$
1.3) $(1 + y^2)dx = xdy; \quad y(1) = 1.$
1.4) $x\sqrt{1 + y^2} + yy'\sqrt{1 + x^2} = 0$
1.5) $e^{-y}(1 + y') = 1$
1.6) $y \ln y dx + xdy = 0$, con la condición $y(1) = e$
1.7) $x\sqrt{1 - y^2}dx + y\sqrt{1 - x^2}dy = 0$, con la condición $y(0) = 1$
1.8) $(1 + e^x)yy' = e^y$, con la condición $y(0) = 0$

**2.** Analiza las propiedades esenciales de las soluciones de las ecuaciones autónomas siguientes (de forma cualitativa).

2.1) $y' = y^2 - 1$
2.2) $y' = y(1 - y)$
2.3) $y' = -y^2 + y - \frac{1}{10}$
2.4) $y' = -y^2 + y - \frac{1}{4}$
2.5) $y' = -y^2 + y - 1$

**3.** Resolver las siguientes ecuaciones lineales de primer orden y de Bernoulli.

3.1) $y' - \tan x.\ y = \cos x$
3.2) $y' + 2y = x^2 + 2x$
3.3) $(x^2 + 2x - 1)y' - (x + 1)y = x - 1$
3.4) $2xy' - y = 3x^2$
3.5) $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$
3.6) $8xy' - y = -\frac{1}{y^3\sqrt{x+1}}$
3.7) $(xy + x^2y^3)y' = 1$
3.8) $y' + \frac{y}{x+1} = -\frac{1}{2}(x + 1)^3y^2$

**4.** Intenta expresar la ecuación: $y' = \dfrac{1}{x\cos y + \operatorname{sen} 2y}$ como una ecuación lineal y encuentra su solución.

**5.** Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas:

5.1) $(x-y)y - x^2y' = 0$
5.2) $(x^2-3y^2)dx + 2xydy = 0$, con la condición $y(2) = 1$
5.3) $4x - 3y + y'(2y-3x) = 0$
5.4) $4x^2 + xy - 3y^2 + y'(-5x^2 + 2xy + y^2) = 0$
5.5) $xy' = \sqrt{y^2 - x^2}$
5.6) $y' = \frac{2xy}{3x^2-y^2}$

**6.** Convertir las siguientes ecuaciones en ecuaciones homogéneas y resolverlas.

6.1) $(y^4 - 3x^2)dy = -xydx$
6.2) $y^3dx + 2(x^2 - xy^2)dy = 0$
6.3) $(x-y+3)dx + (3x+y+1)dy = 0$
6.4) $(x+y)dx + (x+y-1)dy = 0$

**7.** Clasificar las siguientes ecuaciones según su tipo y resolverlas.

7.1) $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$
7.2) $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0$
7.3) $4xy^2dx + (3x^2y-1)dy = 0$
7.4) $xy' = y + \sqrt{y^2-x^2}$
7.5) $2xy'(x^2+y^2) = y(y^2+2x^2)$
7.6) $4x^2 - xy + y^2 + y'(x^2 - xy + 4y^2) = 0$
7.7) $(x^2+y^2+1)dy + xydx = 0$
7.8) $y' - 4\frac{y}{x} = x\sqrt{y}$

**8.** Clasificar las siguientes ecuaciones según su tipo.

8.1) $y' = \frac{1}{x \operatorname{sen} y + 2 \operatorname{sen} 2y}$
8.2) $x(x^3+1)y' + (2x^3-1)y = \frac{x^3-2}{x}$
8.3) $y' + y\cos x = \operatorname{sen} x \cos x$
8.4) $3xy' - 2y = \frac{x^3}{y^2}$
8.5) $y' - y = 2xe^{x+x^2}$
8.6) $(y - xy')^2 = x^2 + y^2$
8.7) $3x + y - 2 + y'(x-1) = 0$
8.8) $2x + 2y - 1 + y'(x+y-2) = 0$
8.9) $(3y - 7x + 7)dx - (3x - 7y - 3)dy = 0$
8.10) $(y + y\sqrt{x^2y^4+1})dx + 2xdy = 0$
8.11) $(x+y)^2y' = a^2$
8.12) $(1-y)e^yy' + \frac{y^2}{x\ln x} = 0$
8.13) $(y^2+1)dx = (y - \sqrt{1+y^2})(1+x^2)^{\frac{3}{2}}dy$
8.14) $xy^2(xy'+y) = a^2$
8.15) $(x^2y^2+1)dx + 2x^2dy = 0$

# Tema 6

# Modelos Matemáticos basados en E. D. O. de Primer Orden I

Incluiremos en este Tema algunos modelos sencillos que utilizan ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. En el Tema siguiente, continuación de éste, nos centraremos en modificaciones o generalizaciones más complicadas, que a menudo no pueden ser resueltos de forma exacta.

## 6.1 Modelización Matemática

En general se entiende por "modelización matemática" el proceso por el cual se imita la realidad en términos matemáticos. El objetivo evidentemente es bien explicar o comprender los fenómenos naturales, bien encontrar respuestas a problemas técnicos o científicos.

Toda modelización lleva consigo un proceso de "idealización". La realidad suele ser compleja y los problemas reales habitualmente dependen de multitud de parámetros o variables, al mismo tiempo que suelen estar inter-relacionados con otros procesos. El diseño de un modelo matemático lleva aparejada la simplificación de muchos aspectos del problema real.

Veremos en este Tema varios modelos matemáticos relativos a las Ciencias Naturales en general, en los que el "modelo" consiste en representar un fenómeno por medio de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. La resolución de la ecuación permitirá no sólo comprender en profundidad algunos aspectos relevantes del fenómeno en cuestión sino además, en los casos en los que se trate de estudiar la evolución de un sistema, hacer predicciones sobre el comportamiento futuro del mismo.

De manera general (y simplificada), la modelización matemática puede describirse de forma sistemática por medio de los siguientes pasos a seguir[1]:

[1]Para detalles, ver: T.P. Dreyer, *Modelling with Ordinary Differential Equations*, CRC Press, 1993.

- 1. **Identificación.** Se trata de clarificar las preguntas que se intentan responder con el modelo, formular el problema en palabras, documentar los datos relevantes e identificar el mecanismo subyacente al problema real.

- 2. **Suposiciones.** El problema debe ser analizado para decidir los factores del mismo que son importantes y aquéllos que pueden ser ignorados. Con todo ello deben hacerse suposiciones (o idealizaciones) lo más realistas posible.

- 3. **Construcción.** En este paso se "construye" el modelo, es decir, se traduce al lenguaje matemático el problema (junto con las suposiciones anteriormente realizadas) obteniéndose un conjunto de ecuaciones (o inecuaciones) después de haber identificado las variables que deben intervenir en las mismas.

- 4. **Análisis o Resolución.** Se trata de la resolución del problema. Las soluciones consistirán en general en funciones por medio de las cuales la o las variables dependientes se expresarán en términos de la o las variables independientes. Por otro lado, se obtendrá información acerca de los parámetros que intervienen en el modelo.

- 5. **Interpretación.** En este paso, la solución matemática debe ser comparada con la realidad para observar si se ajusta a lo conocido acerca del problema real. Se trata, en definitiva, de interrumpir el proceso si se obtiene soluciones carentes de sentido real.

- 6. **Validación.** Una vez interpretada la solución, se comprueba numéricamente que concuerda con los datos disponibles sobre el problema.

- 7. **Implementación.** Finalmente, se usa el modelo para describir el problema, se pueden por tanto realizar predicciones sobre los valores de las variables. Es necesario prestar atención al rango de validez del modelo.

## 6.2 Modelos de Crecimiento de Poblaciones

El número de individuos $N$ de una especie determinada en un instante dado de tiempo $t$ es obviamente un número natural $N(t) \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Si $N$ es grande, podemos considerarlo como un número real $N(t) \in \mathbb{R}$ y así suponer que $N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función[2] continua y derivable $\forall t \in \mathbb{R}$.

---

[2]Dada la libertad que tenemos en "empezar a contar el tiempo", podemos escribir en general $t \in \mathbb{R}$. Es habitual no obstante comenzar el estudio del fenómeno de crecimiento o decrecimiento en un instante concreto $t_0 = 0$, con lo cual $t$ sólo podría tomar valores positivos $t \in \mathbb{R}^+$.

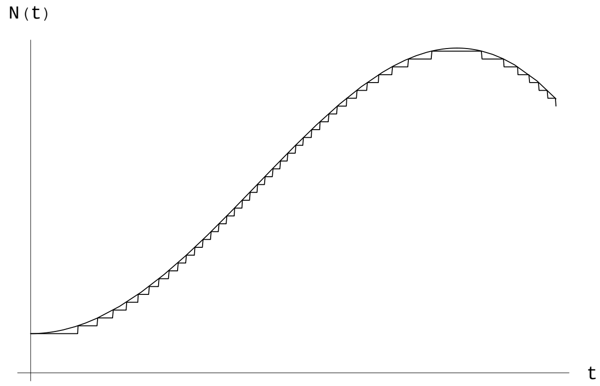



Figura 6.1: *Gráficas de una $N(t)$ "real" (curva discontinua, $N$ toma únicamente valores naturales) y de su idealización, la función real de variable real $N(t)$.*

La tasa de incremento de la población (crecimiento o decrecimiento, según el caso) en un intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ vendrá dada por:

$$\frac{N(t_2) - N(t_1)}{t_2 - t_1}$$

mientras que la tasa instantánea o "velocidad de crecimiento", cuando $t_2 \to t_1$, será la derivada:

$$\frac{dN(t)}{dt}$$

Hasta aquí hemos expresado matemáticamente, mediante una función derivable, la población de una especie aislada, vamos a considerar por tanto "modelos continuos para una única especie"[3].

En este problema tenemos la posibilidad de establecer una "ley (ecuación) de conservación", lo cual será de una inestimable ayuda a la hora de construir un modelo concreto (en otros problemas no se dispone de tales leyes de conservación). En este caso, es evidente que se verificará:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \text{nacimientos}(t) - \text{muertes}(t) + \text{migraciones}(t)$$

(idealizando evidentemente que la tasa de nacimientos, muertes y migraciones puedan ser considerados una función del tiempo $t$).

Con estos ingredientes podemos ya plantear diferentes modelos consistentes en una e.d.o. en las variables $(t, N(t))$. Cada modelo concreto será característico de nuevas idealizaciones que se tengan en consideración.

[3]Veremos en próximos temas modelos para varias especies y comentaremos las posibilidades que ofrece el considerar modelos discretos.

### 6.2.1 Modelo de Malthus

En el contexto antes referido, se llaman Modelos de Malthus o Modelos malthusianos a todos aquellos en los que se considera que los nacimientos y las muertes son proporcionales a la propia población, es decir: nacimientos= $aN$, muertes= $bN$, con $a$ y $b$ constantes evidentemente positivas, mientras que no existen migraciones. La ecuación será por tanto:

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN = kN$$

donde $k = a - b$ será positiva si la tasa de natalidad es mayor que la tasa de mortalidad, negativa en caso contrario y nula si se produce la situación ideal en la que ambas coinciden (las unidades en las que viene dada $k$ son evidentemente de $T^{-1}$, inverso de tiempo).

La solución de la ecuación diferencial ordinaria $N' = kN$ es trivial (se trata de una ecuación de variables separadas) y se tiene:

$$N(t) = C\,e^{kt}$$

Si se dispone, como dato añadido, de la población en el instante inicial $N(t_0) = N_0$, la solución particular del problema de Cauchy $N' = kN; N(t_0) = N_0$ será:

$$N(t) = N_0 e^{k(t-t_0)}$$

Como ya se ha comentado, en general se considera el "inicio" del tiempo en el instante $t_0$, es decir $t_0 = 0$, con lo cual la solución se reduce a:

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

Esta solución presenta un comportamiento cualitativamente muy diferente según sea el signo de la constante de proporcionalidad $k$.

El modelo fue propuesto en 1798 por el economista y demógrafo Thomas Malthus, si bien ya había sido sugerido con anterioridad por L. Euler. El modelo de Malthus suele ser útil como modelo estimativo para intervalos de tiempo no muy grandes. Se ha usado para el estudio de colonias de bacterias, poblaciones de pequeños mamíferos e incluso para población humana.

### 6.2.2 Modelo Logístico

El Modelo de Malthus que acabamos de estudiar implica que multitud de factores no sean tenidos en cuenta, de hecho es un modelo extremadamente simple.

Una sustancial mejora en las suposiciones del modelo de Malthus viene dada por el Modelo Logístico, propuesto por el matemático belga P. F. Verhulst en 1836. La idea de Verhulst fue mejorar el Modelo de Malthus introduciendo la competencia entre

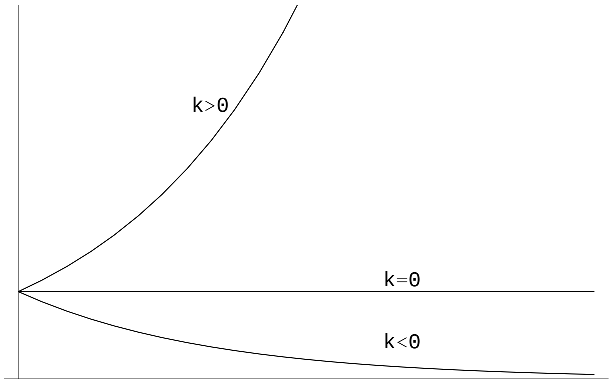



Figura 6.2: *Gráfica de tres soluciones posibles de la ecuación de Malthus con idéntico valor de $N_0$, correspondientes a un valor de $k$ positivo, negativo y nulo.*

los individuos de la especie en estudio como factor que altera los nacimientos y/o las muertes. Tanto si la competencia afecta a la lucha por los alimentos, o por sobrevivir al contagio de enfermedades, o al factor de que se trate, una suposición razonable es medir dicha competencia por medio del número de contactos posibles entre dos individuos de la especie: el número de tales contactos, cuando se dispone de $N$ individuos en total, es $\binom{N}{2} = \frac{1}{2}N(N-1)$. De esta manera la ecuación de Verhulst o ecuación logística se plantea de la forma[4]:

$$\frac{dN}{dt} = k_1 N - k_2 \frac{N(N-1)}{2} \Rightarrow \frac{dN}{dt} = r\,N\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

donde se han redefinido las constantes: $r = k_1 + \frac{1}{2}k_2$ y $K = 2\frac{k_1}{k_2} + 1$. Las dos constantes así definidas tienen un significado importante, $\frac{1}{r}$ tiene unidades de tiempo y recibe el nombre de "escala temporal" del modelo, se suele estimar que $\frac{1}{r}$ proporciona el intervalo de tiempo en el cual el modelo puede considerarse como una aproximación aceptable al problema real. Por su parte, $K$ (unidades de población) recibe el nombre de "población límite" por motivos que se harán evidentes en cuanto resolvamos la ecuación anterior.

La ecuación logística es de variables separadas, su resolución y posterior simplificación, tomando además como dato inicial $N(0) = N_0$ nos lleva a la solución particular (ver Problema 1):

$$N(t) = \frac{N_0 K e^{rt}}{K + N_0\,(e^{rt} - 1)} = \frac{N_0 K}{N_0 + (K - N_0)\,e^{-rt}}$$

Dado que se trata de una ecuación autónoma (ver tema anterior) es fcil observar que $N = 0$ y $N = K$ son las soluciones estacionarias de la ecuación logística. El significado

[4]Puede entenderse en esta ecuación que el término $k_1 N$ es de tipo Malthusiano, mientras que $-k_2\frac{1}{2}N(N-1)$ mide la influencia (negativa) que la competencia tiene sobre la natalidad y/o (positiva) sobre el número de muertes.

de la solución $N = 0$ es trivial, si la población inicial es nula no hay posibilidades de crecimiento dentro de este modelo (ni de cualquiera en el que las migraciones no sean consideradas). La segunda solución estacionaria, que se produce cuando $N_0 = K$, nos indica que para una población inicial exactamente igual a $K$, encontramos que $N(t)$ es constante $\forall t \in \mathbb{R}^+$. Se trata por tanto de dos estados de equilibrio. Por otro lado, la ecuación logística verifica de manera evidente las hipótesis del Teorema de Picard para cualquier valor de $N$, y en consecuencia, las soluciones $N = K$ y $N = 0$ no pueden ser cortadas por ninguna otra solución particular del modelo.

Si calculamos ahora el límite cuando $t \to \infty$ de la solución tendremos:

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{N_0 K e^{rt}}{K + N_0\left(e^{rt} - 1\right)} = K$$

encontramos que, para una población inicial $N_0 > 0$ cualquiera, la solución siempre tiende al valor $K$, de ahí su nombre de "población límite".

Observamos en definitiva que el modelo logístico no prevé un crecimiento sin límite de la población, como ocurría en el Modelo de Malthus (con constante positiva), sino que se prevé una estabilización de la población alrededor del valor $K$. Se encuentran tres regímenes bien diferenciados según $N_0$ sea mayor que $K$, menor que $K$ pero mayor que $\frac{K}{2}$ y menor que $\frac{K}{2}$, como puede observarse en la Figura 6.3 (ver problema 3).

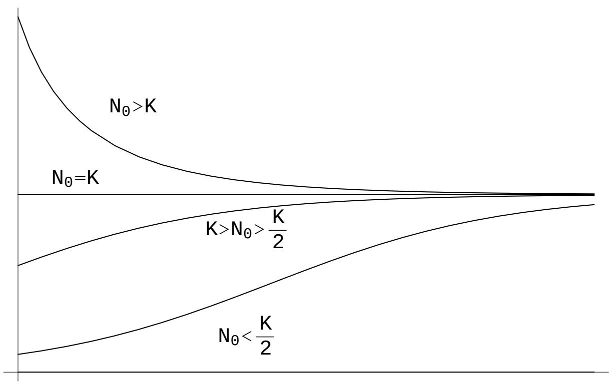



Figura 6.3: *Gráficas de las soluciones del modelo logístico para los diferentes valores relativos de las constantes $N_0$ y $K$.*

Finalmente es interesante comentar que a pesar de sus restricciones evidentes, el modelo logístico (e incluso el de Malthus para intervalos de tiempo cortos) se ajustan muy razonablemente a los datos de que se dispone para algunas poblaciones, incluso a veces más allá de lo que cabría esperar (por ejemplo en análisis de poblaciones humanas sujetas a considerables migraciones y que aún así se ajustan a una curva tipo logística).

Existe una razón para que esto ocurra: Consideramos un modelo general de la forma:

$$\frac{dN}{dt} = f(N)$$

es decir donde tan sólo suponemos que la ecuación es autónoma. Siempre podemos aproximar la función $f(N)$ (que en principio será todo lo complicada que deseemos), en las cercanías del punto inicial $N_0$ por su polinomio de Taylor de grado $n$, en particular, para $n = 2$:

$$\frac{dN}{dt} \approx f(N_0) + f'(N_0)\,(N - N_0) + \frac{f''(N_0)}{2}\,(N - N_0)^2 + \dots$$

desarrollando el segundo miembro:

$$\frac{dN}{dt} \approx a_0 + a_1 N + a_2 N^2$$

Si además suponemos que $a_0 = 0$ ($a_0 \neq 0$ significa que el modelo presenta "generación espontánea" de individuos, o bien migraciones), esta ecuación se reduce a la del modelo logístico estándar.

Concluimos por tanto que independientemente de los razonamientos que llevaron a introducir los modelos de Malthus y logístico, éstos constituyen respectivamente las aproximaciones lineal y cuadrática naturales a cualquier modelo autónomo que se pueda plantear.

## 6.3 Análisis Compartimental

Estudiaremos en esta sección modelos básicos de análisis compartimental. Se trata de describir mediante una función $x(t)$ la cantidad de una sustancia que esté presente en un compartimento en el instante de tiempo $t$. El "compartimento" puede ser de cualquier tipo: un lago, un tanque de mezclas, etc. La idea básica de estos modelos está en una ley de conservación evidente: la tasa de cambio de la sustancia en el compartimento $\frac{dx}{dt}$ será igual a la velocidad de entrada de la sustancia en el compartimento en el instante $t$ menos la velocidad de salida de la misma:

$$\frac{dx}{dt} = v_{\text{entrada}} - v_{\text{salida}}$$

Dado que las velocidades de entrada y salida de la sustancia en el compartimento dependen del proceso en cuestión, poco más podemos decir de manera general sobre estos modelo. Pasamos por tanto directamente a analizar un problema concreto:

---

**Ejemplo:** El agua del Lago Magdalena se está viendo sujeta a un proceso contaminante debido a la concentración de plaguicidas consecuencia de la fumigación de los naranjales cercanos. Por otro lado, el río Aguadulce, que desemboca en el lago, fluye hacia éste a razón de 200 l/m portando

una concentración de plaguicidas de 5 partes por millón. Si se suspende la fumigación en los alrededores del lago en el momento en el que la concentración de plaguicidas había alcanzado el valor de 40 partes por millón y se supone que en dicho instante el volumen del lago es de 100 millones de litros, calcular el tiempo que transcurrirá hasta que la concentración sea inferior a 20 partes por millón. ¿Qué volumen tendrá el lago en ese instante?
Nota: Suponer que el lago pierde agua a razón de 300 l/m.

**Resolución:** Denominaremos $x(t)$ a la cantidad de plaguicidas presentes en el lago a tiempo $t$. La concentración de plaguicidas en el lago a tiempo $t$, que denominaremos $c(t)$, será obviamente: $c(t) = \frac{x(t)}{vol(t)}$, donde $vol(t)$ denota el volumen del lago en cada instante de tiempo.

Es importante, en este tipo de problemas, distinguir con precisión las velocidades de entrada y salida de la disolución y las correspondientes al soluto, es decir a la sustancia en cuestión (en este caso los plaguicidas). Desde este punto de vista la velocidad de entrada de disolución en el compartimento (lago) es $v_{\text{entrada dis.}} = 200$ l/m y la de salida $v_{\text{salida dis.}} = 300$ l/m, donde l denota litro de disolución. Las respectivas velocidades del soluto se obtendrán multiplicando las de la disolución por la concentración correspondiente. De esta manera, al tener la disolución entrante una concentración de 5 partes por millón (es decir 5 mg/l) tendremos:

$$v_{\text{entrada}} = 200\,\text{l/m}\ 5\,\text{mg/l} = 1000\,\text{mg/m}$$

Por otro lado, el volumen $vol(t)$ será evidentemente: $vol(t) = vol(0) + (v_{\text{entrada dis.}} - v_{\text{salida dis.}})\,t$. Como $vol(0) = 100\,10^6 = 10^8$, se tiene:

$$vol(t) = 10^8 - 100\,t = 100\,(10^6 - t)$$

y así:

$$c(t) = \frac{x(t)}{100(10^6 - t)}$$

Podemos calcular finalmente la velocidad de salida:

$$v_{\text{salida}} = 300\,\text{l/m}\frac{x(t)}{100(10^6 - t)}\ \text{mg/l} = \frac{3x(t)}{10^6 - t}\ \text{mg/m}$$

y así escribir la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = 1000 - \frac{3x}{10^6 - t}$$

La ecuación es fácilmente identificable como una ecuación lineal de primer orden en las variables $(t, x)$. La ecuación lineal homogénea asociada:

$$\frac{dx}{dt} + \frac{3x}{10^6 - t} = 0$$

tiene como solución general:

$$x_{\text{H.A.}} = K\,(10^6 - t)^3$$

y en consecuencia el cambio de variable adecuado para resolver la ecuación completa será $x = u\,(10^6 - t)^3$. Este cambio convierte la ecuación en:

$$\frac{du}{dt} = \frac{1000}{(10^6 - t)^3}$$

cuya integración nos conduce a la solución general (tras deshacer el cambio de variable):

$$x(t) = 500\,(10^6 - t) + C(10^6 - t)^3$$

para la cantidad de plaguicidas y

$$c(t) = \frac{x(t)}{100(10^6 - t)} = 5 + \frac{C}{100}(10^6 - t)^2$$

para la concentración de plaguicidas en el lago.

Si se tiene en cuenta ahora la condición inicial: $c(0) = 40$, es fácil calcular la constante $C$ que determina la solución particular que estamos buscando: $C = 35\,10^{-10}$. Podemos escribir finalmente la solución particular:

$$x(t) = 500\,(10^6 - t) + 35\,10^{-10}\,(10^6 - t)^3$$

$$c(t) = 5 + 35\,10^{-12}(10^6 - t)^2$$

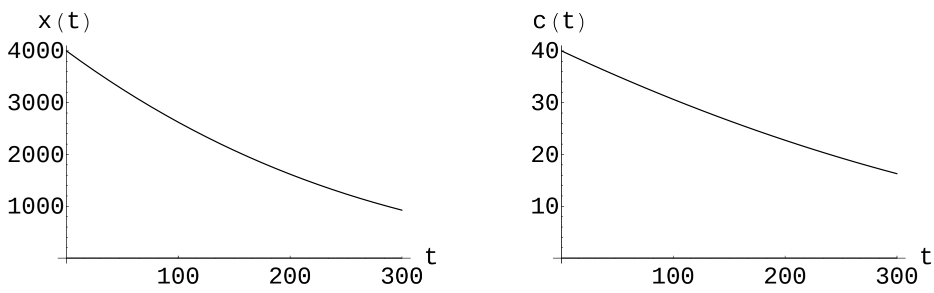



Figura 6.4: *Gráfica de $x(t)$ ($x$ en kilogramos, $t$ en días) y de $c(t)$ (en mg/ml, $t$ en días).*

La ecuación

$$20 = 5 + 35\,10^{-12}(10^6 - t_1)^2$$

nos proporciona el tiempo que tarda la concentración en descender hasta 20 partes por millón: $t_1 = 345346$ minutos $= 239.8$ días. El volumen del lago en $t = t_1$ será de 65.4 millones de litros.

---

De manera general esta es la resolución típica de un problema de análisis compartimental con un sólo compartimento. Si se dispone de varios compartimentos interconectados el planteamiento es similar pero se obtienen sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden, que estudiaremos en un tema posterior.

## 6.4 Ley de Newton del Calentamiento y Enfriamiento

Entre las muchísimas aportaciones de Isaac Newton a la ciencia se encuentra la llamada "Ley de Newton del Calentamiento y Enfriamiento" que establece: "La razón de cambio de la temperatura de un cuerpo en contacto con otro es proporcional a la diferencia de temperatura entre ambos". De esta manera, si $T(t)$ representa la temperatura del cuerpo en estudio y $T_{\text{ext}}(t)$ es la temperatura otro cuerpo en contacto con él, o, en muchos casos, la temperatura del exterior o ambiente que rodea al cuerpo, entonces la ley de Newton queda establecida por medio de la ecuación diferencial[5]:

$$\frac{dT(t)}{dt} = k\ (T_{\text{ext}}(t) - T(t))$$

donde $k$ es la constante de proporcionalidad (obviamente positiva).

Se pueden construir modelos más realistas si se añaden en la ecuación nuevos términos que tengan en consideración la influencia de otros factores como pueden ser aparatos de calefacción, calor generado por el propio cuerpo en estudio, etc. Tendríamos así la ecuación:

$$\frac{dT(t)}{dt} = k\ (T_{\text{ext}}(t) - T(t)) + f(T,t)$$

Si nos restringimos al caso más sencillo, con $f(T,t) = 0$ y $T_{\text{ext}}$ =constante, la ecuación se reduce a una del tipo variables separadas, cuya integración es inmediata:

$$\frac{dT}{dt} = k\ (T_{\text{ext}} - T) \Rightarrow T(t) = T_{\text{ext}} + Ce^{-kt}$$

Si se tiene en cuenta la condición inicial: $T(0) = T_0$ se deduce fácilmente que la solución particular buscada es:

$$T(t) = T_{\text{ext}} + (T_0 - T_{\text{ext}})\, e^{-kt}$$

Analizando la solución se observa que la Ley de Newton predice que con el paso del tiempo la temperatura del cuerpo tiene a $T_{\text{ext}}$ de manera asintótica.

[5]Evidentemente se da por sentado que todos los puntos de ambos cuerpos tienen exactamente la misma temperatura.

## 6.5 Ejercicios

**1.** Resolver la ecuación logística:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

con la condición inicial $N(0) = N_0$.

**2.** Demostrar que las constantes que aparecen en la ecuación logística, $K$ y $r$, pueden expresarse de la forma:

$$K = \frac{N_1\left(N_0N_1 + N_1N_2 - 2N_0N_2\right)}{N_1^2 - N_0N_2}; \quad r = \frac{1}{t_1}\ln\left(\frac{N_2(N_1 - N_0)}{N_0(N_2 - N_1)}\right)$$

siempre y cuando se conozcan los datos $N(0) = N_0$, $N(t_1) = N_1$ y $N(2t_1) = N_2$.

**3.** Demostrar que la curva logística $N(t) = \frac{N_0K}{N_0+(K-N_0)e^{-rt}}$ presenta un punto de inflexión ($N''(\alpha) = 0$) en $\mathbb{R}^+$ sólo si $K > 2N_0$.

**4.** En 1970, el Departamento de Recursos Naturales arrojó en un lago 1000 ejemplares de una especie de pez híbrido. En 1977 se calculó que la población de esta especie en el lago era de 3000. Usando una ley malthusiana para el crecimiento de la población, calcule la población de estos peces en el lago en 1980. ¿Cuál sería la población en 1991?

**5.** En el problema anterior, suponga que se dispone de la información adicional de que la población de peces en 1984 se estimó en 5000. Use un modelo logístico para calcular la población de peces en 1991. ¿Cuál es la población límite?.

**6.** En 1970 se estimó que la población de caimanes en los terrenos del Centro Espacial Kennedy era exactamente de 300. En 1980, la población había crecido hasta alcanzar un valor aproximado de 1500 ejemplares. Usando una ley malthusiana para el crecimiento de la población, calcule la población de caimanes en los terrenos citados en el año 2000.

**7.** Con respecto al problema anterior, se dispone de la información adicional de que en 1975 la población de caimanes era de 1200 ejemplares. Utilice un modelo logístico para calcular la población de caimanes en el año 2000. ¿Cuál es la predicción de población límite?

**8.** a) En 1790 la población de Estados Unidos era de 3.93 millones, y en 1800, de 5.31 millones. Usando un modelo malthusiano, estime la población de Estados Unidos en función del tiempo.
b) Conocida la población en 1790 (3.93 millones), en 1840 (17.07 millones) y en 1890 (62.95 millones), use el modelo logístico para calcular la población correspondiente al tiempo $t$.

**9.** En una región relativamente aislada del África subsahariana se estudió la evolución de la población de gorilas. En 1940 se estimó en 500 el número de gorilas presentes en dicha zona, mientras que en 1950 dicho número había ascendido hasta 700 ejemplares.

**a)** Estima la población de gorilas en 1960 y en 1970 suponiendo que el crecimiento de dicha población fuera explicable mediante el Modelo de Malthus.

**b)** Conociendo además que en 1960 el número de gorilas presentes en la zona era aproximadamente 900, calcula el valor de la población en 1970 utilizando el modelo Logístico. Calcula la población límite.

**10.** Considere un gran tanque que contiene 1000 litros de agua, dentro del cual una solución salada de salmuera empieza a fluir a una velocidad constante de 6 l/m (litros por minuto). La solución dentro del tanque se mantiene bien agitada y fluye hacia el exterior del tanque a una velocidad de 6 l/m. Si la concentración de sal en la salmuera que entra en el tanque es de 1 kg/l, determine cuándo será de 1/2 kg/l la concentración de sal en el tanque.

**11.** En las mismas condiciones que el problema anterior supóngase que ahora que la salmuera sale del tanque a razón de 5 l/m en lugar de a 6 l/m. Determine la concentración de sal en el tanque en función del tiempo.

**12.** Una solución de salmuera de sal fluye a razón de 8 l/m hacia el interior de un gran tanque que inicialmente contiene 100 litros de solución de salmuera de sal en la cual establan disueltos 5 kg de sal. La solución en el interior del tanque se mantiene bien agitada y fluye hacia el exterior con la misma rapidez. Si la concentración de sal en la salmuera que entra en el tanque es de 0.5 kg/l, determine la cantidad de sal presente en el tanque al cabo de $t$ minutos. ¿Cuándo alcanzará la concentración de sal en el tanque el valor de 0.2 kg/l?

**13.** Una disolución de ácido nítrico fluye a razón constante de 6 l/m hacia el interior de un gran tanque que inicialmente contiene 200 l de una disolución de ácido nítrico al 0.5%. La disolución contenida en el tanque se mantiene bien agitada y fluye hacia el exterior del mismo a razón de 3 l/m. Si la disolución que entra en el tanque es de 20% de ácido nítrico, determine la cantidad de ácido nítrico presente en el tanque al cabo de $t$ minutos. ¿En qué momento el porcentaje de ácido nítrico contenido en el tanque será del 10%?

**14.** Una alberca cuyo volumen es de 10000 litros contiene agua con el 0.01% de cloro. Empezando en $t = 0$, desde la ciudad se bombea agua que contiene 0.001% de cloro, hacia el interior de la alberca a razón de 5 l/m, y el agua de la alberca fluye hacia el exterior a la misma velocidad. ¿Cuál es el porcentaje de cloro en la alberca al cabo de 1 hora? ¿Cuándo tendrá el agua de la alberca 0.02% de cloro?

**15.** La corriente sanguínea lleva un medicamento hacia el interior de un órgano a razón de 3 $\text{cm}^3$/s y sale de él a la misma velocidad. El órgano tiene un volumen líquido de 125 $\text{cm}^3$. Si la concentración del medicamento en la sangre que entra en el órgano es de 0.2 g/$\text{cm}^3$, ¿cuál es la concentración del medicamento en el órgano en el instante $t$ si inicialmente no había vestigio alguno del medicamento? ¿Cuándo la concentración del medicamento en el órgano será de 0.1 g/$\text{cm}^3$?

**16.** El agua del río Aguadulce fluye hacia el lago Magdalena a razón de 300 l/m. El lago Magdalena contiene aproximadamente 100 millones de litros de agua. La fumigación de los naranjales cercanos ha ocasionado que la concentración de plaguicidas en el lago llegue a ser de 35 partes por millón. Si se suspende la aplicación de plaguicidas, ¿cuánto tiempo transcurrirá hasta que la concentración de los mismos en el lago Magdalena esté por debajo de 10 partes por millón?
Nota: Suponer que el agua del río Aguadulce no contiene plaguicidas y que el volumen del lago permanece constante.

**17.** Supongamos que un termómetro que marca 100° se coloca en un medio que se encuentra a una temperatura constante de 70°. Al cabo de 6 minutos el termómetro marca 80°. ¿Cuál será la lectura al cabo de 20 minutos?

**18.** a) Una ecuación diferencial que describe el crecimiento de los peces es la "ecuación alométrica":

$$\frac{dP}{dt} = kP^{\alpha}$$

donde $P(t)$ es el peso del pez en función del tiempo y $k$ y $\alpha$ son constantes de crecimiento. Resolver la ecuación alométrica para el rango $0 < \alpha < 1$.
b) Un modelo un poco más realista que el anterior consiste en modificar la ecuación alométrica de la siguiente forma:

$$\frac{dP}{dt} = k_1 P^{\alpha}\left(1 - \frac{P^{\mu}}{k_2^{\mu}}\right)$$

donde ahora se tienen cuatro constantes positivas $k_1$, $k_2$, $\alpha$ y $\mu$. Resolver esta nueva ecuación sabiendo que las constantes de las que depende se han determinado empíricamente y valen, aproximadamente:

$$k_1 = 12, \qquad k_2 = 64, \qquad \alpha = \frac{2}{3}, \qquad \mu = \frac{1}{3}$$

Calcular el límite de las soluciones de los dos modelos cuanto $t \to \infty$.
Sabiendo que el peso inicial de uno de los peces en estudio es de 1 Kg y que el tiempo viene dado en meses, calcular su peso al cabo de un mes, según los dos modelos resueltos.

**19.** La desintegración radiactiva está regida por la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} + a\,x = 0$$

donde $x(t)$ es la masa de la sustancia radiactiva en función del tiempo $t$ y $a$ es una constante evidentemente positiva (llamada "constante de desintegración"). La vida media o semi-vida $T$ de una sustancia radiactiva es el tiempo que tarda una determinada masa de la sustancia en desintegrarse a la mitad de su valor inicial. Expresar $T$ en función de $a$ y evaluar $a$ para el isótopo de uranio $U^{238}$ para el cual $T = 4.5\ 10^9$ años.

**20.** El carbono $C^{14}$ extraido de un cráneo antiguo contenía sólamente una sexta parte del extraido de un hueso de los tiempos actuales. ¿Cuál es la antigüedad del cráneo? (Nota: la constante de desintegración del $C^{14}$ es aproximadamente igual a 0.000126 1/años).

**21.** La vida media del cobalto radiactivo es 5.27 años. Supóngase que un accidente nuclear ha provocado que el nivel de este cobalto ascienda en una región hasta 100 veces el nivel aceptable para la vida humana. ¿Cuánto tiempo pasará hasta que la región vuelva a ser habitable?

# Tema 7

# Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Orden Superior al primero

Una ecuación diferencial ordinaria de orden $n$ es de manera general una expresión del tipo:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

o bien, escrita en forma normal:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{7.1}$$

donde $x$ es la variable independiente, $y(x)$ la dependiente, e $y^{(j)} = \frac{d^j y}{dx^j}$ , para $j = 1, \ldots, n$, son las derivadas sucesivas de $y(x)$ con respecto a $x$.

Una ecuación de orden $n$ es siempre equivalente a un sistema de $n$ ecuaciones ordinarias de primer orden, que estudiaremos en el próximo tema, por medio de la introducción de variables auxiliares, de la siguiente manera:

Dada la ecuación (9.3), en variable independiente $x$ y dependiente $y(x)$, definiremos nuevas variables dependientes como las derivadas sucesivas de $y$: $y_2 = y'$, $y_3 = y'' = y_2'$, $\ldots$, $y_n = y^{(n-1)} = y_{n-1}'$, además de identificar $y \equiv y_1$, de manera que la ecuación (9.3) es equivalente al sistema de $n$ ecuaciones ordinarias de primer orden:

$$\left.\begin{array}{lcl} y_1' & = & y_2 \\ y_2' & = & y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n' & = & f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{array}\right\} \tag{7.2}$$

en variables $(x; y_1, \ldots, y_n)$.

---

**Ejemplo 1:** Consideremos la ecuación diferencial de segundo orden $y'' + 2xy' - y^2 = 0$. Si llamamos $y' = p$, entonces la ecuación es equivalente al sistema de dos ecuaciones de primer orden siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = p \\ \frac{dp}{dx} = y^2 - 2xp \end{array}\right\}$$

donde $y$ y $p$ son las variables dependientes y $x$ es la variable independiente.

---

**Ejemplo 2:** Si consideramos la ecuación: $y''' = 2xy' - (y'')^2$ y llamamos: $p = y'$, $z = y'' = p'$ entonces es evidente que la ecuación de tercer orden es equivalente al sistema de tres ecuaciones de primer orden (en variable independiente $x$ y variables dependientes $(y, p, z)$):

$$\left.\begin{array}{lcl} y' & = & p \\ p' & = & z \\ z' & = & 2xp - z^2 \end{array}\right\}$$

---

Aunque no entraremos en detalles técnicos en este tema[1], sí que comentaremos ahora que un Problema de Valor Inicial o Problema de Cauchy de orden $n$ es el conjunto formado por la ecuación diferencial:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

más las $n$ condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{lcl} y(x_0) & = & y_0 \\ y'(x_0) & = & y'_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) & = & y_0^{(n-1)} \end{array}\right\}$$

que bajo ciertas condiciones de "buen comportamiento" matemático, tiene solución única. Se generaliza entonces el Teorema que vimos para las ecuaciones de primer orden, pasando de una ecuación diferencial y una condición inicial a una ecuación de orden $n$ más $n$ condiciones iniciales para la variable dependiente y sus $n - 1$ primeras derivadas.

---

**Ejemplo 1:** Consideremos la e.d.o. de tercer orden: $y''' = 0$. Su solución es trivial, las funciones cuya derivada tercera es idénticamente nula no son otras que los polinomios de grado dos, la solución general de la ecuación será por tanto:

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2$$

y evidentemente depende de tres constantes arbitrarias.

[1] Dada la equivalencia entre las ecuaciones de orden $n$ y los sistemas de $n$ ecuaciones de primer orden, dejaremos para el próximo tema la exposición detallada del Teorema de Picard, que será válido para ambos conceptos.

Si planteamos ahora la resolución del problema de valor inicial:

$$y''' = 0 \quad ; \qquad y(0) = 2 \quad ; \qquad y'(0) = 1 \quad ; \qquad y''(0) = 4$$

es fácil concluir con que existe una única solución que verifica las tres condiciones iniciales:

$$y = 2 + x + 2x^2$$

es decir: $C_1 = 2$, $C_2 = 1$ y $C_3 = 2$.

---

**Ejemplo 2:** La ecuación diferencial que determina el movimiento rectilineo uniformemente acelerado es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a \tag{7.3}$$

donde $t$ es el tiempo (variable independiente), $x(t)$ es la posición (variable dependiente), y $a$ es una constante (la aceleración constante que caracteriza el movimiento en estudio). La integración de (9.4) es trivial: $x = \frac{1}{2}at^2 + C_1 t + C_2$. Tomando como condiciones iniciales: $x(0) = x_0$ y $x'(0) = v_0$ se deduce fácilmente la solución particular:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\,a\,t^2$$

---

Un concepto importante que aparece al considerar ecuaciones de orden superior, a diferencia de las de primer orden, es que existen diferentes posibilidades a la hora de determinar las "condiciones iniciales" que pueden acompañar a una ecuación dada. Mientras que para primer orden toda condición $y(x_0) = y_0$ será una condición inicial, en las ecuaciones por ejemplo de segundo orden, podemos tener un Problema de valor inicial, como hemos definido anteriormente, dado por

$$\left.\begin{array}{lcl} y'' & = & f(x,y,y') \\ y(x_0) & = & y_0 \\ y'(x_0) & = & y'_0 \end{array}\right\}$$

o bien otras variantes si las condiciones no se imponen en $y$ e $y'$ para un mismo $x_0$.

Por ejemplo, podemos conocer el valor de $y(x)$ en un punto inicial $x_0$: $y(x_0) = y_0$ y en otro posterior: $y(x_1) = y_1$, en vez de conocer el valor inicial de $y$ y de $y'$. En ese caso tendremos un Problema de Frontera o Problema de Contorno, particularmente un Problema de Dirichlet:

$$\left.\begin{array}{lcl} y'' & = & f(x,y,y') \\ y(x_0) & = & y_0 \\ y(x_1) & = & y_1 \end{array}\right\}$$

Otra posibilidad es un Problema de Contorno de Neumann:

$$\left.\begin{array}{lcl} y'' & = & f(x,y,y') \\ y'(x_0) & = & y'_0 \\ y'(x_1) & = & y'_1 \end{array}\right\}$$

Es importante resaltar que para estos problemas de contorno ya no existe un análogo al Teorema de Picard, puede que exista una solución particular única, puede que no exista ninguna, pueden existir varias, etc. dependiendo de cada caso concreto. Veamos algunos ejemplos:

---

**Ejemplo:** Resolver el problema de contorno:

$$y'' - y = 0 \quad ; \qquad y(0) = 1 \quad ; \qquad y(1) = 1$$

La solución general de la ecuación es fácil de obtener (como veremos en los apartados siguientes) y resulta:

$$y = C_1\, e^x + C_2\, e^{-x}$$

Si sustituimos ambas condiciones:

$$\left.\begin{array}{lcl} C_1 + C_2 & = & 1 \\ C_1\, e + C_2 \frac{1}{e} & = & 1 \end{array}\right\}$$

sistema que da lugar a solución única: $C_1 = \frac{1}{1+e}$, $C_2 = \frac{e}{1+e}$. En definitiva, se trata de un problema de contorno con solución única:

$$y = \frac{1}{1+e}\left(e^x + e^{1-x}\right)$$

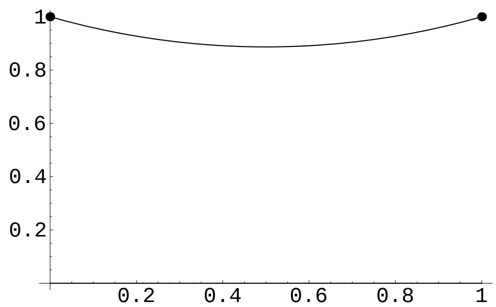



Figura 7.1: *Solución del Problema de Contorno:* $y'' - y = 0$, $y(0) = 1$, $y(1) = 1$.

---

**Ejemplo 2:** La ecuación

$$y'' = -y$$

tiene como solución general:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$$

Si imponemos las condiciones de contorno:

$$y(0) = 0 \quad ; \qquad y(\pi) = 0$$

tendremos infinitas soluciones ($C_1 = 0$ y $C_2$ puede tomar cualquier valor):

$$y = C_2 \operatorname{sen} x$$

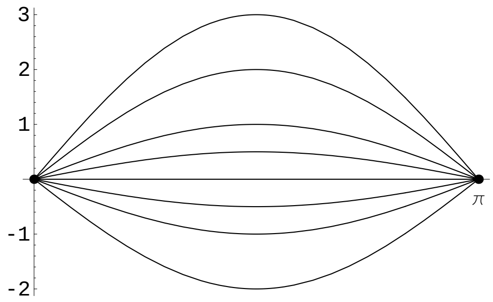



Figura 7.2: *Soluciones del Problema de Contorno:* $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

Sin embargo, las condiciones

$$y(0) = 0 \quad ; \qquad y(\pi) = 1$$

nos conducen a que $C_1 = 0$ y $C_1 = -1$, y por tanto no existe ninguna solución que las verifique.

---

## 7.1 Ecuaciones Lineales

Dedicaremos la parte fundamental de este tema a las ecuaciones lineales, particularmente a las de coeficientes constantes, por tratarse del único tipo de ecuaciones de orden superior que puede ser siempre resuelto.

Se llama ecuación diferencial lineal de orden $n$ a la que es lineal en la variable dependiente y sus derivadas, es decir una expresión del tipo siguiente:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = f(x)$$

Si los coeficientes $a_i(x)$ son funciones de la variable independiente $x$, se dice que la ecuación es "de coeficientes variables", mientras que si todos los coeficientes son funciones constantes se denomina a la ecuación "de coeficientes constantes". Por otro lado, si el término independiente $f(x)$ es nulo se dice que la ecuación es homogénea, siendo no homogénea en caso contrario.

La estructura que se obtuvo al analizar las ecuaciones lineales de primer orden se reproduce a nivel general, es decir: El conjunto de todas las soluciones de una ecuación lineal tiene estructura de espacio afín de dimensión $n$ y además de tal manera que la solución general de la ecuación viene dada por la solución general de la ecuación homogénea asociada más una solución particular de la ecuación completa.

Por su parte, el conjunto de soluciones de una ecuación lineal homogénea tiene estructura de espacio vectorial de dimensión $n$, de manera que se verifican las propiedades características de superposición de soluciones: la suma de dos soluciones de una ecuación lineal homogénea sigue siendo solución de la misma, y el producto de una solución por una constante también es solución. El conocimiento de $n$ soluciones linealmente independientes[2] $\{\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_n(x)\}$ resuelve completamente la ecuación homogénea, al ser su solución general:

$$y(x) = C_1\phi_1(x) + C_2\phi_2(x) + \ldots + C_n\phi_n(x)$$

### 7.1.1 Ecuaciones Lineales Homogéneas con coeficientes constantes

Nos restringiremos en este análisis a ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes, es decir de la forma:

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{7.4}$$

si bien los resultados que obtendremos son fácilmente generalizables al caso de orden $n$, como se comentará más tarde.

Si tenemos en cuenta la explicación presentada en el apartado anterior para una ecuación lineal homogénea (tanto si es de coeficientes constantes somo si es de coeficientes variables), la resolución de la ecuación (7.4) puede reducirse a encontrar dos soluciones fundamentales, es decir dos soluciones concretas linealmente independientes, lo cual puede hacerse directamente por varios caminos equivalentes. Seguiremos sin embargo un método constructivo para tal cometido.

Denominaremos $D$ al operador "derivada con respecto a $x$": $D = \frac{d}{dx}$. Con esta nueva notación es evidente que la ecuación (7.4) puede re-escribirse como:

$$y'' + py' + qy = 0 \Leftrightarrow DDy \; + \; p\,Dy + qy = 0 \Leftrightarrow (D^2 + p\,D + q)y = 0$$

Desde un punto de vista algebraico, la expresión $D^2 + pD + q$ puede verse como un polinomio en $D$, de hecho llamaremos ecuación característica o ecuación auxiliar del problema a la ecuación algebraica (en una variable genérica $\lambda$):

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

Si calculamos las raíces de dicha ecuación y las denominamos $\alpha$ y $\beta$ tendremos que la

[2]Un sistema de funciones $\{\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_n(x)\}$ definidas en un intervalo $[x_1, x_2]$ es linealmente dependiente en $[x_1, x_2]$ si existen constantes no nulas $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tales que:

$$\lambda_1\phi_1(x) + \lambda_2\phi_2(x) + \ldots + \lambda_n\phi_n(x) = 0$$

para todo $x \in [x_1, x_2]$. En caso contrario las funciones serán linealmente independientes en $[x_1, x_2]$. Existen varios criterios para determinar la independencia lineal de un conjunto de funciones (determinante Wronskiano, determinante de Gram, etc.).

ecuación diferencial se escribe finalmente en la forma[3]:

$$(D-\alpha)(D-\beta)y = 0$$

Y la resolución de esta ecuación se puede reducir fácilmente a la integración de dos ecuaciones diferenciales lineales de primer orden mediante el cambio $(D-\beta)y = y' - \beta y = z$. Es decir resolveremos el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} z' - \alpha z & = & 0 \\ y' - \beta y & = & z \end{array}\right\}$$

La primera ecuación es trivial y su solución general es:

$$z = C\, e^{\alpha x}$$

Y así la segunda ecuación se reduce a:

$$y' - \beta y = Ce^{\alpha x}$$

Ecuación lineal de primer orden no homogénea, cuya solución, si $\alpha \neq \beta$, es:

$$y = \frac{C}{\alpha-\beta}e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x} = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

donde se ha renombrado la constante $C$ de la forma: $C_1 = \frac{C}{\alpha-\beta}$.

Podemos entonces resumir lo demostrado en que la solución general de la ecuación $y'' - (\alpha+\beta)y' + \alpha\beta y = (D-\alpha)(D-\beta)y = 0$ se reduce a la suma de las soluciones generales de las ecuaciones $(D-\alpha)y = 0$ y $(D-\beta)y = 0$. Tenemos dos soluciones fundamentales: $e^{\alpha x}$ y $e^{\beta x}$, y todas las demás soluciones son combinaciones lineales de ellas. Analicemos un ejemplo concreto antes de continuar con el razonamiento.

---

**Ejemplo:** Consideremos la ecuación: $y'' + 2y' - 3y = 0$. Si denominamos $D = \frac{d}{dx}$ la ecuación se reescribe, en términos del operador derivada $D$ en la forma:

$$(D^2 + 2D - 3)y = 0$$

la ecuación característica es entonces $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$, cuyas raíces son fácilmente calculables, resultando que $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = (\lambda-1)(\lambda+3)$. Tendremos así:

$$(D-1)y = 0 \Rightarrow y' - y = 0 \Rightarrow y = C_1 e^{x}$$

$$(D+3)y = 0 \Rightarrow y' + 3y = 0 \Rightarrow y = C_2 e^{-3x}$$

[3]Estamos denominando $\alpha$ y $\beta$ a las raíces de la ecuación cuadrática: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, independientemente de que dichas raíces sean reales o complejas. Por otro lado, se deja al lector la comprobación de las identidades:

$$(D-\alpha)(D-\beta)y = (D-\beta)(D-\alpha)y = y'' - (\alpha+\beta)y' + \alpha\beta y$$

y por tanto la solución final será:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$$

---

En el razonamiento anterior se imponía que $\alpha \neq \beta$, ¿qué ocurre si $\alpha = \beta$?, en este caso la ecuación a resolver es:

$$y' - \alpha y = Ce^{\alpha x}$$

y su integración conduce a:

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x}$$

Las soluciones fundamentales son por tanto: $e^{\alpha x}$ y $xe^{\alpha x}$.

Finalmente, un comentario aparte es necesario para el caso en el que las raíces, $\alpha$ y $\beta$ son complejas, es decir $\alpha = a + bi$, $\beta = a - bi$. Formalmente todo lo comentado es válido, es decir, las soluciones fundamentales son $e^{ax}e^{bxi}$ y $e^{ax}e^{-bxi}$ y todas las soluciones pueden obtenerse como combinación lineal de ellas. El problema es que nosotros estamos interesados tan sólo en las soluciones dadas por funciones reales de variable real, necesitaríamos por tanto construir combinaciones lineales de esas funciones que den lugar a un resultado real. Esto se consigue fácilmente teniendo en cuenta que: $e^{bxi} = \cos(bx) + i\,\mathrm{sen}(bx)$, $e^{-bxi} = \cos(bx) - i\,\mathrm{sen}(bx)$. De esta manera, considerando como soluciones fundamentales a las funciones: $e^{ax}\cos(bx)$ y $e^{ax}\,\mathrm{sen}(bx)$, sus combinaciones lineales son exactamente las combinaciones lineales "reales" anteriores.
Evidentemente, lo expuesto anteriormente es válido para ecuaciones de orden superior al segundo (ver ejemplo posterior). Resumimos los resultados obtenidos

- Ecuaciones de la forma: $(D-\alpha)(D-\beta)y = 0$, solución: $y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$.
- Ecuaciones de la forma: $(D-\alpha)^2 y = 0$, solución: $y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x}$.
- Ecuaciones de la forma: $(D-(a+ib))(D-(a-ib))y = 0$, solución: $y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \,\mathrm{sen}\, bx)$.

---

**Ejemplo:** Resolver la ecuación:

$$(D-1)^3 D^2 (D^2+4) y = 0$$

Dado que el polinomio lo encontramos ya factorizado, es decir la ecuación característica es: $(\lambda - 1)^3 \lambda^2 (\lambda - 2i)(\lambda + 2i) = 0$, podemos escribir directamente la solución general:

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^x + (C_4 + C_5 x)e^{0x} + e^{0x}(C_6 \cos 2x + C_7 \,\mathrm{sen}\, 2x) =$$

$$= (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^x + C_4 + C_5 x + C_6 \cos 2x + C_7 \,\mathrm{sen}\, 2x$$

---

### 7.1.2 Ecuaciones no homogéneas. Cálculo de soluciones particulares

Plantearemos ahora la resolución de las ecuaciones no homogéneas:

$$y'' + p\,y' + q\,y = f(x) \tag{7.5}$$

Como ya se ha comentado, la solución general será de la forma:

$$y(x) = y_{\text{H.A.}} + y_{\text{P}}$$

donde $y_{\text{H.A.}}$ es la solución general de la ecuación homogénea asociada e $y_{\text{P}}$ es una solución particular de la ecuación completa.

Supongamos[4] conocidas las raíces de la ecuación característica asociada a la ecuación (7.5): $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, de manera que re-escribimos la ecuación en la forma:

$$(D - \alpha)(D - \beta)y = f(x)$$

o bien el sistema equivalente:

$$\left.\begin{array}{l} z' - \alpha z = f(x) \\ y' - \beta y = z \end{array}\right\}$$

La primera ecuación es lineal de primer orden no homogénea y su solución general es:

$$z = Ce^{\alpha x} + e^{\alpha x} \int e^{-\alpha x} f(x)dx$$

mientras que la segunda nos proporcionará la expresión:

$$y = C_2 e^{\beta x} + e^{\beta x} \int e^{-\beta x} z dx$$

con lo que podemos concluir que la resolución de un problema de este estilo requiere calcular la integral del término independiente $f(x)$ multiplicada por una exponencial, y posteriormente integrar dicho resultado multiplicado por una segunda exponencial. Explícitamente, y suponiendo el caso $\alpha \neq \beta$:

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x} + e^{\beta x} \int e^{(\alpha-\beta)x} \left[\int e^{-\alpha x} f(x)dx\right] dx$$

Mientras que para $\alpha = \beta$ la solución se simplifica a:

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x} + e^{\alpha x} \int \left[\int e^{-\alpha x} f(x)dx\right] dx$$

[4]Los dos métodos más habituales que aparecen en la literatura matemática para la resolución de estas ecuaciones son el Método de los Coeficientes Indeterminados, que comentaremos más tarde, y el Método de Variación de las Constantes. Plantearemos a continuación un análisis general de estas ecuaciones que nos llevará de manera natural al Método de los Coeficientes Indeterminados.

Tenemos por tanto formalmente la solución de cualquier ecuación lineal con coeficientes constantes de segundo orden. Es interesante plantearse en este momento qué tipos de integrales de la forma:

$$\int e^{-\alpha x} f(x)\, dx$$

se pueden resolver explícitamente por las técnicas de integración habituales. La lista de las mismas es bastante reducida, de hecho (suponiendo evidentemente que $\alpha \neq 0$) se limita a tres tipos de integrales:

$$\int e^{-\alpha x} P_m(x)\, dx \quad , \qquad \int e^{-\alpha x} \operatorname{sen}(bx)\, dx \quad , \qquad \int e^{-\alpha x} \cos bx\, dx$$

y variantes de las mismas (por ejemplo exponencial por polinomio y por seno, etc.) (Ver Problema 1).

Tenemos en definitiva que la resolución explícita de una ecuación de este tipo sólo es posible de manera general para unos tipos muy concretos de funciones $f(x)$ en el término independiente de la ecuación. Este hecho lleva a plantear el llamado Método de los Coeficientes Indeterminados:

Dada la ecuación

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

tendremos:

- 1. Si el término independiente es un polinomio de grado $m$: $f(x) = P_m(x)$
  - 1.a. Si 0 no es una raíz de la ecuación característica: una solución particular será un polinomio del mismo grado $y_{\mathrm{P}} = Q_m(x)$
  - 1.b. Si 0 es una raíz de la ecuación característica con multiplicidad $k$, entones $y_{\mathrm{P}} = x^k\, Q_m(x)$.
- 2. Si el término independiente es de la forma[5] $f(x) = e^{\alpha x}\, P_m(x)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.
  - 2.1. Si $\alpha$ no es una raíz de la ecuación característica: $y_{\mathrm{P}} = e^{\alpha x}\, Q_m(x)$.
  - 2.2. Si $\alpha$ es una raíz de la ecuación característica con multiplicidad $k$, entonces: $y_{\mathrm{P}} = e^{\alpha x} x^k\, Q_m(x)$.
- 3. Si $f(x) = e^{\alpha x}\,(P_l(x)\, \cos(\beta x) + Q_m(x)\, \operatorname{sen}(\beta x))$, entonces:
  - Si $\alpha \pm \beta i$ no son raíces de la ecuación caraterística, tendremos:

    $$y_{\mathrm{P}} = e^{\alpha x}\,(T_r(x) \cos(\beta x) + S_r(x) \operatorname{sen}(\beta x))$$

    donde $r = $máx $(l, m)$.

[5]Nótese que si $\alpha = 0$ este caso se reduce al anteriormente considerado.

– Si $\alpha \pm \beta i$ son raíces de la ecuación caraterística con multiplicidad $k$, tendremos:

$$y_{\mathrm{P}} = x^k e^{\alpha x} \left(T_r(x)\cos(\beta x) + S_r(x)\,\mathrm{sen}(\beta x)\right)$$

donde $r =$máx $(l, m)$.

Finalmente, es necesario insistir en que el método expuesto es sólo válido para determinadas funciones en el término independiente (eso sí, aquellas funciones para las que es posible la integración explícita de manera general). Si se admiten funciones de todo tipo, aunque la integración explícita no sea posible, es necesario recurrir a otros métodos, como el ya citado Método de Variación de las Constantes, Método de Cauchy, etc.

---

**Ejemplo:** La ecuación $y'' - 6y' + 9y = 25e^x \,\mathrm{sen}\, x$ admite como solución particular[6]: $y_p = e^x\,(4\cos x + 3\,\mathrm{sen}\, x)$.

---

**Ejemplo:** La ecuación $y''+5y'+6y = e^{-2x}$ tiene asociada la ecuación característica $\lambda^2+5\lambda+6 = 0$ cuyas raíces son $\lambda = -3$ y $\lambda = -2$. Probando por tanto una solución particular de la forma $y_p = Axe^{-2x}$ obtendremos que la solución general de la ecuación se escribe de la forma: $y(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x} + xe^{-2x}$.

---

**Ejemplo:** Análogamente, la ecuación $y'' + 5y' + 6y = e^x$ tiene como solución general a la expresión: $y(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x} + \frac{1}{12}e^x$.

---

## 7.2 Ecuaciones de Euler

Se denominan ecuaciones de Euler a las de la forma:

$$a_n\, x^n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, x^{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1\, xy' + a_0\, y \;=\; f(x)$$

Se trata, evidentemente, de ecuaciones lineales con coeficientes variables. La principal característica de las ecuaciones de Euler es que son convertibles en lineales con coeficientes constantes mediante el cambio de variable independiente[7]: $x = e^t$, $t = \ln x$. De esta manera tendremos:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dx}{dt} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt} \Rightarrow xy' = \frac{dy}{dt}$$

para la primera derivada. Por cálculo directo y repetidas aplicaciones de la Regla de la Cadena se obtiene:

$$x^2y'' = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

[6]Nótese que la ecuación característica tiene una sóla raíz (doble) que obviamente no coincide con $1 \pm i$.

[7]Desde un punto de vista riguroso, este cambio de variable sólo es posible para $x > 0$. Se puede generalizar, no obstante, tomando $x = -e^t$ para el rango: $x < 0$. En $x = 0$, en cualquier caso, el cambio es singular.

y así sucesivamente se deducen las expresiones correspondientes a todos los órdenes que sea necesario.

Completaremos la explicación con un ejemplo concreto:

---

**Ejemplo:** Resolver la ecucación de Euler:

$$x^2y'' - xy' + y = \sqrt{x}$$

Denominando $D = \frac{d}{dt}$ aplicaremos las identidades antes deducidas:

$$xy' = Dy \quad , \qquad x^2y'' = (D^2 - D)y$$

de manera que la ecuación se re-escribe, en variables $(t, y)$:

$$(D^2 - 2D + 1)y = e^{\frac{t}{2}}$$

cuya solución es, tras un breve cálculo:

$$y = C_1e^t + C_2te^t + 4e^{\frac{t}{2}}$$

Deshaciendo el cambio:

$$y = C_1\,x + C_2x\,\ln x + 4\sqrt{x}$$

---

## 7.3 Ecuaciones no lineales reducibles de orden

Determinados tipos de ecuaciones de orden superior al primero son reducibles a una ecuación de orden más bajo. Analicemos algunos de estos casos:

- Ecuaciones en las que no aparece explícitamente la variable dependiente:

  $$y'' = f(x, y')$$

  En este caso el cambio de variable $y' = p$ nos conduce al sistema de ecuaciones:

  $$\left.\begin{array}{rl} \frac{dy}{dx} = & p \\ \frac{dp}{dx} = & f(x,p) \end{array}\right\}$$

  De manera que podemos resolver la ecuación segunda y sustituir el resultado en la primera para obtener finalmente $y(x)$.

- Generalización del caso anterior: Si una ecuación de orden $n$ no contiene explícitamente ni a la variable dependiente ni a sus $k-1$ primeras derivadas, entonces el cambio $y^{(k)} = p$ reduce la ecuación a una de orden $n-k$.

- Ecuaciones que no contienen explícitamente a la variable independiente, es decir: $y'' = f(y, y')$, o en general $y^{(n)} = f(y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$. En este caso se cambia de variables $(x, y)$ a variables $(y, p)$ donde $p = y'$. Es necesario por tanto usar la regla de la cadena, de forma que:

$$y' = p; y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

El cambio de variables conduce a una nueva ecuación de primer orden (de orden $n-1$ para el caso general).

## 7.4 Ejercicios

**1.** a) Demostrar que la integral de una exponencial por un polinomio es igual a la misma exponencial por un polinomio del mismo grado.

b) Calcula las integrales siguientes:

$$\int e^{\alpha x}\cos(bx)\,dx \quad ; \qquad \int e^x \operatorname{sen} x\,(x+1)dx$$

**2.** Resolver las siguientes ecuaciones:

$$a) \quad y'' + 4y' + 4y = e^x \quad , \qquad b) \quad y'' + y' - 2y = 2x^2 + 5$$

$$c) \quad y'' + 4y = \cos x \quad , \qquad d) \quad y''' + y'' + 9y' + 9y = 0$$

$$e) \quad y'' - 2y' + 3y == 4 \quad , \qquad f) \quad y'' + 9y = -4\operatorname{sen} x \quad , \qquad g) \quad y'' + 9y = 27x^3$$

Soluciones: $a)$ $y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x) + \frac{e^x}{9}$,
$b)$ $y = -(x^2 + x + 4) + C_1 e^{2x} + C_2 e^x$
$c)$ $y = C_1\cos(2x) + C_2\operatorname{sen}(2x) + \frac{\cos x}{3}$
$d)$ $y = C_1 e^{-x} + C_2\cos(3x) + C_3\operatorname{sen}(3x)$
$e)$ $y = e^x(C_1\cos(\sqrt{2}x) + C_2\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)) + \frac{4}{3}$
$f)$ $y = C_1\cos 3x + C_2\operatorname{sen} 3x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t$
$g)$ $y = C_1\cos 3x + C_2\operatorname{sen} 3x + 3x^2 - 2x$

**3.** Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$y'' - 2y' + y = 3e^x \operatorname{sen} x; \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = -1$$

Solución: $y = e^x(1 + x - 3\operatorname{sen} x)$

**4.** Resolver las ecuaciones:

$$a) \quad y'' = y'^2$$

$$b) \quad y\,y'' - y'^2 = 0$$

$$c) \quad (1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$$

Soluciones: $a) y = C_2 - \ln(x + C_1)$; $\quad b) y = C_2 e^{C_1 x}$; $\quad c) y = \frac{-x}{C_1} + \frac{C_1^2+1}{C_1^2} \ln|1 + C_1 x| + C_2$

**5.** Resolver las siguientes ecuaciones:

$$a) \quad x^2 y'' + \frac{5}{2} x y' = 0 \quad , \qquad b) \quad y'' + \frac{2}{x} y' = 0 \quad , \qquad c) \quad x^2 y'' + 6xy' + 6y = \frac{1}{x^2}$$

**6.** Un cierto ecosistema puede soportar una población máxima de $P_M$ individuos de unas determinadas especies. Se tiene inicialmente que la población de $N_0 = \frac{1}{5} P_M$, mientras que la velocidad de crecimiento es de $\frac{1}{20} P_M$ individuos por mes. En dicho instante tiene lugar una "explosión de población" que altera el balance ambiental de manera que la población excede $P_M$. Dado que el ecosistema no soporta tales situaciones se produce un descenso de la población que finalmente termina presentando oscilaciones decrecientes alrededor del valor $P_M$.

Una "explosión" como la citada puede modelizarse por la ecuación:

$$\frac{d^2 N}{dt^2} + \frac{dN}{dt} + \frac{5}{4} N = \frac{5}{4} P_M$$

donde $N$ es el nḿero de individuos y $t$ es el tiempo en meses. Calcula $N(t)$ y encuentra el valor máximo que alcanza $N(t)$ y en qué instante de tiempo se produce.

Solución:

$$N(t) = P_M \left( 1 - \left( \frac{4}{5} \cos t + \frac{7}{20} \operatorname{sen} t \right) e^{-\frac{1}{2} t} \right)$$

Máximo en $t = 3.09$ meses, $N(3.09) = 1.167\, P_M$.

# Tema 8

# Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

## 8.1 Conceptos Básicos

Introduciremos en este tema los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, en particular los de primer orden. Por simplicidad nos referiremos en esta sección a sistemas de dos ecuaciones, si bien las definiciones generales (para cualquier número de ecuaciones) son esencialmente análogas.

De manera general un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias es toda pareja de ecuaciones de la forma:

$$\left.\begin{array}{rl} \Phi_1(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(m)}(t), y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)) & = 0 \\ \Phi_2(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(p)}(t), y(t), y'(t), \ldots, y^{(r)}(t)) & = 0 \end{array}\right\}$$

donde $t$ es una variable independiente, y $x(t)$ e $y(t)$ denotan las variables dependientes. Nos referiremos en estas notas a sistemas de dos únicas ecuaciones diferenciales, si bien casi todo lo explicado es generalizable fácilmente al caso de $n$ ecuaciones.

Una solución de dicho sistema es toda pareja de funciones $(x(t), y(t))$ que sustituidas en el sistema lo convierten en dos identidades. Si nos restringimos a sistemas de primer orden tendremos en general:

$$\left.\begin{array}{rl} \Phi_1(t, x(t), x'(t), y(t), y'(t)) & = 0 \\ \Phi_2(t, x(t), x'(t), y(t), y'(t)) & = 0 \end{array}\right\}$$

y si fuera posible resolver en términos de las derivadas, se escribe en forma normal como:

$$\left.\begin{array}{rl} x'(t) & = g(x, y, t) \\ y'(t) & = h(x, y, t) \end{array}\right\} \tag{8.1}$$

**Ejemplos:** El sistema:

$$\left.\begin{aligned} x' &= 2x^3y + e^t y \\ y' &= t^3 x \end{aligned}\right\}$$

está escrito en forma normal.

El sistema

$$\left.\begin{aligned} xy' + x'^2 y &= t^3 \\ y' + x' \cos t &= x^3 \end{aligned}\right\}$$

no está escrito en forma normal.

---

La solución general de un sistema de dos ecuaciones depende de dos constantes arbitrarias, es decir, serán dos funciones de la forma: $x = x(t, C_1, C_2)$ e $y = y(t, C_1, C_2)$.

Un problema de valor inicial o problema de Cauchy será ahora un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$\left.\begin{aligned} x'(t) &= g(x, y, t) \\ y'(t) &= h(x, y, t) \end{aligned}\right\}; \qquad \left.\begin{aligned} x(t_0) &= x_0 \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

Y el teorema de Picard se generaliza fácilmente bajo las condiciones habituales de "buen comportamiento" para las funciones $g$ y $h$ en un entorno del punto $(t_0, x_0, y_0)$, garantizándose la existencia y unicidad de la solución del problema[1].

**Sistemas acoplados y no acoplados**. Un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden está desacoplado si es de la forma:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= f(x, t) \\ \tfrac{dy}{dt} &= g(y, t) \end{aligned}\right\}$$

Evidentemente un sistema desacoplado es más bien un conjunto de dos ecuaciones "independientes" y su resolución se reduce a la de ambas ecuaciones por separado.

---

**Ejemplo:** Consideremos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= 2\tfrac{t}{x} \\ \tfrac{dy}{dt} &= y \end{aligned}\right\}$$

La primera ecuación nos proporciona $\frac{1}{2}x^2(t) = t^2 + C_1 \Rightarrow x(t) = \pm\sqrt{2t^2 + 2C_1}$, mientras que la segunda tiene como solución general $y(t) = C_2 e^t$.

---

Un sistema acoplado, evidentemente, es aquél en el cual las variables dependientes se ven envueltas en ambas ecuaciones. A veces los sistemas acoplados son casi triviales

[1]De manera análoga a lo que se expuso en el Tema 1 de la asignatura para ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, una versión simplificada del Teorema de Existencia y Unicidad nos dice que si las funciones $g(x, y, t)$ y $h(x, y, t)$ son de clase $C^1$ (continuas y diferenciables) en un entorno del punto $(x_0, y_0, t_0)$ entonces el problema de valor inicial tiene solución única en un entorno de dicho punto. Obviaremos por tanto versiones mas "finas" del teorema, que requerieren no la diferenciabilidad de las funciones si no tan sólo que se satisfaga la condición de Lipschitz.

de resolver, si una de las ecuaciones depende sólo de la variable dependiente adecuada, como podemos ver en el siguiente ejemplo:

---

**Ejemplo:**

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 2xy \\ \frac{dy}{dt} = y \end{array}\right\}$$

Se trata de un sistema acoplado, pero es evidente que la segunda ecuación es una ecuación desacoplada y podemos resolverla fácilmente:

$$y(t) = C_1\, e^t$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$x'(t) = 2xC_1e^t \Rightarrow \frac{dx}{x} = 2C_1e^t dt \Rightarrow \ln|x| = 2C_1e^t + C_2$$

---

## 8.2 Interpretación geométrica de las soluciones de un S.E.D.O.

Dado un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = f(x,y,t) \\ \frac{dy}{dt} = g(x,y,t) \end{array}\right\}$$

sea $(x(t), y(t))$ una solución particular del mismo. Podemos entonces representar independientemente las funciones $x(t)$ e $y(t)$ frente a la variable de la que dependen, es decir $t$. Pero también es posible identificar la solución particular como las ecuaciones paramétricas de una curva $\sigma : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^2$, $\sigma(t) = (x(t), y(t))$. En tal caso, al plano $\mathbb{R}^2$ en el que representamos dicha curva se le denomina "plano de fase" del sistema y a la curva "órbita solución".

---

**Ejemplo:** El sistema

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 2\cos t \\ \frac{dy}{dt} = -\operatorname{sen} t \end{array}\right\}$$

con la condición inicial $(x(0), y(0)) = (0, 2)$ tiene como solución particular a: $x(t) = 2\operatorname{sen} t$, $y(t) = \cos t$, que son las ecuaciones paramétricas de una elipse en el plano centrada en el origen del mismo y con semiejes 2 y 1 respectivamente. Es fácil eliminar el parámetro $t$ entre ambas ecuaciones y obtener así la ecuación implícita de dicha órbita: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. (Ver Figura 6.1).

---

Un sistema de condiciones iniciales $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$ se traduce en fijar un punto por el que pasa la órbita.

Es importante hacer notar que la órbita de la solución no da cuenta más que de parte de la información contenida en las soluciones. De hecho diferentes sistemas de ecuaciones

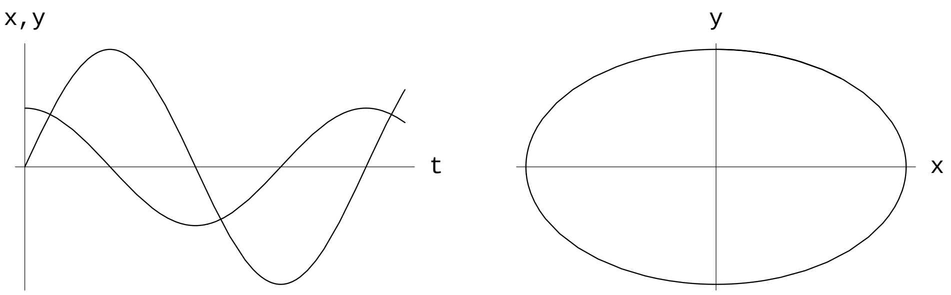



Figura 8.1: *Gráficas de las soluciones (izquierda) y de la órbita (derecha).*

pueden dar lugar a idénticas órbitas aunque las soluciones sean distintas. También hay que resaltar que las soluciones proporcionan unas ecuaciones paramétricas concretas de la órbita, de manera que (interpretando la variable $t$ como "tiempo") queda determinado el "modo de recorrer" la órbita según la parametrización.

## 8.3 Sistemas Lineales

Restringiéndonos, como en la sección anterior, a sistemas de dos ecuaciones diferenciales ordinarias, y además escritos en forma normal, diremos que el sistema (9.1) es lineal si las funciones $g(x, y, t)$ y $h(x, y, t)$ son lineales en las variables dependientes, será no lineal en caso contrario. De manera general por tanto un sistema lineal es de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)y + f(t) \\ \frac{dy}{dt} = c(t)x + d(t)y + g(t) \end{array}\right\}$$

Si los coeficientes $a(t), b(t), c(t)$ y $d(t)$ son constantes, tendremos un "sistema lineal con coeficientes constantes", en caso contrario será un sistema lineal con coeficientes variables.

**Sistemas Homogéneos de Ecuaciones Lineales:** se trata de aquellos sistemas con términos independientes nulos, es decir, para el caso de dos ecuaciones, serán sistemas de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)y \\ \frac{dy}{dt} = c(t)x + d(t)y \end{array}\right\}$$

**Propiedades de las soluciones de un sistema lineal:** El conjunto de las soluciones de un sistema lineal homogéneo tiene estructura de espacio vectorial real[2], esto significa que si $(x_1(t), y_1(t))$ y $(x_2(t), y_2(t))$ son soluciones de un sistema lineal homogéneo, entonces $(x_1(t) + x_2(t), y_1(t) + y_2(t))$ también lo es, al igual que $(\lambda x_1(t), \lambda y_1(t))$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. De lo anterior se deduce que si conocemos dos soluciones independientes de un sistema

[2]La dimensión de dicho espacio vectorial es igual al número de ecuaciones.

lineal homogéneo, entonces conocemos todas las soluciones del sistema, pues cualquier solución será una combinación lineal de las anteriores.

De manera análoga a lo que ocurría con las ecuaciones lineales estudiadas en temas anteriores, la solución general de un sistema lineal (no homogéneo) siempre puede escribirse como la solución general del sistema homogéneo asociado más una solución particular del sistema completo, es decir la solución general será de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = x_{\text{H.A.}}(t, C_1, C_2) + x_{\text{P}} \\ y(t) = y_{\text{H.A.}}(t, C_1, C_2) + y_{\text{P}} \end{array}\right\}$$

Como vemos, para resolver un sistema lineal basta con resolver en primer lugar el sistema lineal homogéneo asociado y determinar posteriormente una solución particular del sistema completo. Desgraciadamente, la resolución del sistema homogéneo no siempre es fácil. Veremos a continuación cómo para los sistemas con coeficientes constantes sí que podemos siempre obtener las soluciones de una forma no demasiado difícil.

### 8.3.1 Método de Eliminación

El Método de eliminación consiste en convertir un sistema de dos ecuaciones lineales con coeficientes constantes en una única ecuación lineal con coeficientes constantes de segundo orden. Si partimos del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = ax + by + f(t) \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy + g(t) \end{array}\right\}$$

y denominamos $D = \frac{d}{dt}$ al operador derivada con respecto a $t$, tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} (D - a)x - by = f(t) \\ -cx + (D - d)y = g(t) \end{array}\right\}$$

Si decidimos eliminar la variable $x$ del sistema procederemos de la siguiente forma: multiplicando la primera ecuación por $-c$ y la segunda por $(D - a)$ y restando los resultados, reducimos el sistema a una ecuación de la forma:

$$(D^2 + pD + q)y = h(t)$$

Ecuación lineal con coeficientes constantes de segundo orden que resolveremos con las técnicas aprendidas en el tema anterior.

---

**Ejemplo 1:** Resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rl} \frac{dx}{dt} = & 4x - y \\ \frac{dy}{dt} = & 2x + y \end{array}\right\}$$

El sistema puede ser re-escrito, en términos del operador $D = \frac{d}{dt}$ en la forma:

$$\left.\begin{array}{rcl}(D-4)x+y & = & 0\\ -2x+(D-1)y & = & 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl}(D-1)(D-4)x+(D-1)y & = & 0\\ -2x+(D-1)y & = & 0\end{array}\right\}$$

y así, restando ambas ecuaciones, tendremos:

$$(D-1)(D-4)x+2x=0 \Rightarrow (D^2-5D+6)x=0$$

que puede ser resuelta fácilmente y tendremos:

$$x(t) = C_1\, e^{3t} + C_2\, e^{2t}$$

Teniendo en cuenta ahora la primera ecuación: $y(t) = 4x(t) - \frac{dx(t)}{dt}$, resultará:

$$y(t) = C_1\, e^{3t} + 2C_2 e^{2t}$$

---

El ejemplo anterior nos ha mostrado fácilmente cómo se puede proceder en un sistema lineal homogéneo. Sin embargo, es posible y a menudo más sencillo determinar de forma directa la ecuación característica asociada al sistema. Veamos:

Dado el sistema lineal homogéneo con coeficientes constantes:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{dx}{dt} = ax+by\\ \frac{dy}{dt} = cx+dy\end{array}\right\}$$

el proceso de eliminación mostrado nos lleva a una ecuación lineal de segundo orden con operador asociado $(D^2+pD+q)$, tanto si se elimina la variable $x$ como si se hace con la $y$. Es fácil demostrar entonces que la ecuación característica $\lambda^2+p\lambda+q=0$ de dicho problema se obtiene directamente de la expresión[3]:

$$\left|\begin{array}{cc}a-\lambda & b\\ c & d-\lambda\end{array}\right| = 0$$

Apliquemos este hecho a un ejemplo concreto:

---

**Ejemplo 2:** Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\left.\begin{array}{rcr}\frac{dx}{dt} & = & y\\ \frac{dy}{dt} & = & -x\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l}x(0)=1\\ y(0)=1\end{array}\right\}$$

[3]La demostración más habitual (y elegante) de este hecho se puede hacer expresando matricialmente el sistema y diagonalizando la matriz de coeficientes asociada. De una manera más directa, y basándonos en el razonamiento antes expuesto para la eliminación de la variable, tenemos que la ecuación característica será: $bc+(\lambda-a)(\lambda-d)=0$, y así:

$$bc+(\lambda-a)(\lambda-d)=0 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{cc}a-\lambda & b\\ c & d-\lambda\end{array}\right| = 0$$

La ecuación característica será:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0$$

Por tanto tenemos dos raíces imaginarias: $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. De esta manera, la solución será, por ejemplo para $x(t)$:

$$x(t) = K_1 \cos t + K_2 \operatorname{sen} t$$

mientras que la variable $y(t)$ la obtenemos fácilmente a partir de la primera ecuación: $y(t) = x'(t)$:

$$y(t) = K_2 \cos t - K_1 \operatorname{sen} t$$

Sustituyendo las condiciones iniciales en ambas expresiones generales tendremos la solución particular buscada:

$$\left.\begin{array}{rl} x(t) = & \cos t + \operatorname{sen} t \\ y(t) = & \cos t - \operatorname{sen} t \end{array}\right\}$$

La órbita solución es en este caso una circunferencia de radio $\sqrt{2}$, como puede observarse fácilmente si elevamos al cuadrado $x(t)$ e $y(t)$ y sumamos ambas expresiones. Por otro lado, la resolución general del sistema visto como sistema autónomo (que estudiaremos en la sección siguiente), conduce a la ecuación diferencial de las órbitas: $x\,dx + y\,dy = 0$ que da como solución evidente una familia de circunferencias concéntricas.

---

## 8.4 Sistemas autónomos

Un sistema de ecuaciones diferenciales es "autónomo" si no depende explícitamente de la variable independiente, su forma general (para el caso de dos ecuaciones de primer orden) será por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = f(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x,y) \end{array}\right\}$$

Para los sistemas autónomos es siempre posible aplicar una estrategia de resolución consistente en obtener en primer lugar la ecuación implícita de las órbitas solución, de la siguiente forma: Las ecuaciones pueden escribirse en forma diferencial:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{f(x,y)} = dt \\ \frac{dy}{g(x,y)} = dt \end{array}\right\}$$

de manera que se puede eliminar la variable independiente, igualando los primeros miembros y obtenemos la ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{dx}{f(x,y)} = \frac{dy}{g(x,y)}$$

cuyas curvas solución son evidentemente las órbitas del sistema de ecuaciones. Si en la solución general es posible despejar una de las incógnitas, entonces su substitución en el sistema original nos proporciona una ecuación ordinaria y, en definitiva, las soluciones del sistema.

---

**Ejemplo:** Consideremos el sistema autónomo:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \frac{2}{y} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x} \end{array}\right\}$$

La ecuación diferencial que describe a las órbitas será:

$$\frac{dx}{2/y} = dt = \frac{dy}{1/x} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2\,dy}{y} \Rightarrow \ln|x| = 2\,\ln|y| + C \Rightarrow x = Ky^2$$

sustituyendo en la segunda ecuación del sistema:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{Ky^2} \Rightarrow y^2\,dy = \frac{1}{K}dt \Rightarrow \frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{K}t + K' \Rightarrow y = \left(\frac{3}{K}t + 3K'\right)^{\frac{1}{3}}$$

y en consecuencia: $x = K\left(\frac{3}{K}t + 3K'\right)^{\frac{2}{3}}$, $y = \left(\frac{3}{K}t + 3K'\right)^{\frac{1}{3}}$ es la solución general del sistema (dependiente de las constantes arbitrarias $K$ y $K'$).

---

**Ejemplo 2:** Consideremos el sistema autónomo:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = 2x \end{array}\right\}$$

con las condiciones iniciales: $x(0) = 1$, $y(0) = \sqrt{2}$. La ecuación diferencial que describe a las órbitas será:

$$\frac{dx}{y} = dt = \frac{dy}{2x} \Rightarrow \frac{dx}{y} = \frac{dy}{2x} \Rightarrow 2xdx = ydy \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}y^2 + C \Rightarrow y = \pm\sqrt{2x^2 - K}$$

Ahora bien, de las condiciones iniciales se deduce que para $t = 0$, $x$ e $y$ han de tomar los valores 1 y $\sqrt{2}$ respectivamente, por tanto una única órbita es la relevante, la que pasa por el punto $(1, \sqrt{2})$ y, por tanto, nos quedaremos con la solución particular: $y = \sqrt{2}x$ (correspondiente a $K = 0$). Sustituyendo en la primera ecuación del sistema:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2}\,x \Rightarrow \frac{dx}{x} = \sqrt{2}dt \Rightarrow\; x = C\,e^{\sqrt{2}t}$$

Utilizando de nuevo las condiciones iniciales concluimos con la solución particular buscada: $x = e^{\sqrt{2}t}$, $y = \sqrt{2}e^{\sqrt{2}t}$.

---

## 8.5 Ejercicios

**1.** Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\left.\begin{array}{rl} \frac{dx}{dt} = & 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = & -4x + 2y \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{array}\right\}$$

Solución: $x(t) = e^{2t}\cos(2t)$, $y(t) = -2e^{2t}\,\mathrm{sen}(2t)$.

**2.** Calcular la solución general del sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rl} \frac{dx}{dt} = & -x+y \\ \frac{dy}{dt} = & -2x-4y+e^t \end{array}\right\}$$

Solución: $x(t) = C_1e^{-3t} + C_2e^{-2t} + \frac{e^t}{12}$, $y(t) = -2C_1e^{-3t} - C_2e^{-2t} + \frac{e^t}{6}$.

**3.** Calcular la solución general del sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rl} \frac{dx}{dt} = & -x+y \\ \frac{dy}{dt} = & -2x-4y+e^{-2t} \end{array}\right\}$$

Solución: $x(t) = C_1e^{-3t} + (C_2+t-1)e^{-2t}$, $y(t) = -2C_1e^{-3t} + (-C_2-t+2)e^{-2t}$.

**4.** Calcular la solución general del sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rl} \frac{dx}{dt} = & 4x-y+t+5 \\ \frac{dy}{dt} = & 2x+y+2t-1 \end{array}\right\}$$

Solución: $x(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{2t} - \frac{t}{2} - \frac{11}{12}$, $y(t) = C_1e^{3t} + 2C_2e^{2t} - t + \frac{11}{6}$.

**5.** Calcular la solución general del sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rl} \frac{dx}{dt} = & x+y \\ \frac{dy}{dt} = & 2x+2y \end{array}\right\}$$

**6.** Calcular la solución general del sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rl} \frac{dx}{dt} = & x+y \\ \frac{dy}{dt} = & -x+3y \end{array}\right\}$$

**7.** Calcular la solución general del sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rl} \frac{dx}{dt} = & x+y \\ \frac{dy}{dt} = & x+y \end{array}\right\}$$

Solución: $x(t) = \frac{C}{2} + Ke^{2t}$, $y(t) = -\frac{C}{2} + Ke^{2t}$.

**8.** Calcular la solución general del sistema:

$$\left.\begin{array}{rl} \frac{dx}{dt} = & 2xy \\ \frac{dy}{dt} = & y^2 \end{array}\right\}$$

Solución: $x(t) = \frac{C_2}{(t+C_1)^2}$, $y = \frac{-1}{t+C_1}$.

**9.** Calcular la ecuación de las órbitas solución del sistema:

$$\left.\begin{array}{rl} \frac{dx}{dt} = & -y^2+2y \\ \frac{dy}{dt} = & (x-2)(y-2) \end{array}\right\}$$

Determinar el sentido en el que se recorren las órbitas.

**10.** Resolver el problema de valor inicial:

$$\left.\begin{array}{rl} \frac{dx}{dt} = & x \\ \frac{dy}{dt} = & 2y \end{array}\right\}$$

con condiciones: $x(0) = 1$, $y(0) = 1$. Determinar el sentido en el que se recorren la órbita.

# Tema 9

# Resumen de los Temas 7 y 8

Nota: Estos apuntes son un resumen de lo explicado en los temas 7 y 8 de la asignatura de Matemáticas de primer curso de Biología.

## 9.1 Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

### 9.1.1 Introducción. Sistemas de E.D.O.

De manera general un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias es toda pareja de ecuaciones de la forma:

$$\left.\begin{array}{ll}\Phi_1(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(m)}(t), y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)) & = 0 \\ \Phi_2(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(p)}(t), y(t), y'(t), \ldots, y^{(r)}(t)) & = 0\end{array}\right\}$$

donde $t$ es una variable independiente, y $x(t)$ e $y(t)$ denotan las variables dependientes. Nos referiremos en estas notas a sistemas de dos únicas ecuaciones diferenciales, si bien casi todo lo explicado es generalizable fácilmente al caso de $n$ ecuaciones.

Una solución de dicho sistema es toda pareja de funciones $(x(t), y(t))$ que sustituidas en el sistema lo convierten en dos identidades. Si nos restringimos a sistemas de primer orden tendremos en general:

$$\left.\begin{array}{ll}\Phi_1(t, x(t), x'(t), y(t), y'(t)) & = 0 \\ \Phi_2(t, x(t), x'(t), y(t), y'(t)) & = 0\end{array}\right\}$$

y si fuera posible resolver en términos de las derivadas, se escribe en forma normal como:

$$\left.\begin{array}{ll}x'(t) & = g(x, y, t) \\ y'(t) & = h(x, y, t)\end{array}\right\} \tag{9.1}$$

La solución general de un sistema de dos ecuaciones depende de dos constantes arbitrarias, es decir, serán dos funciones de la forma: $x = x(t, C_1, C_2)$ e $y = y(t, C_1, C_2)$.

Un problema de valor inicial o problema de Cauchy será ahora un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$\left.\begin{array}{ll} x'(t) & = g(x,y,t) \\ y'(t) & = h(x,y,t) \end{array}\right\}; \qquad \left.\begin{array}{ll} x(t_0) & = x_0 \\ y(t_0) & = y_0 \end{array}\right\} \tag{9.2}$$

Y el teorema de Picard se generaliza fácilmente bajo las condiciones habituales de "buen comportamiento" para las funciones $g$ y $h$ en un entorno del punto $(t_0, x_0, y_0)$, garantizándose la existencia y unicidad de la solución del problema.

**Sistemas acoplados y no acoplados**. Un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden está desacoplado si es de la forma:

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{dx}{dt} & = f(x,t) \\ \frac{dy}{dt} & = g(y,t) \end{array}\right\}$$

Evidentemente un sistema desacoplado es más bien un conjunto de dos ecuaciones "independientes" y su resolución se reduce a la de ambas ecuaciones por separado.

---

**Ejemplo:** Consideremos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 2\frac{t}{x} \\ \frac{dy}{dt} = y \end{array}\right\}$$

La primera ecuación nos proporciona $\frac{1}{2}x^2(t) = t^2 + C_1 \Rightarrow x(t) = \pm\sqrt{2t^2 + 2C_1}$, mientras que la segunda tiene como solución general $y(t) = C_2 e^t$.

---

Un sistema acoplado, evidentemente, es aquél en el cual las variables dependientes se ven envueltas en ambas ecuaciones. A veces los sistemas acoplados son casi triviales de resolver, si una de las ecuaciones depende sólo de la variable dependiente adecuada, como podemos ver en el siguiente ejemplo:

---

**Ejemplo:**

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 2xy \\ \frac{dy}{dt} = y \end{array}\right\}$$

Se trata de un sistema acoplado, pero es evidente que la segunda ecuación es una ecuación desacoplada y podemos resolverla fácilmente:

$$y(t) = C_1\, e^t$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$x'(t) = 2xC_1e^t \Rightarrow \frac{dx}{x} = 2C_1e^t dt \Rightarrow \ln|x| = 2C_1e^t + C_2$$

---

### 9.1.2 Interpretación geométrica de las soluciones de un S.E.D.O.

Dado un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = f(x,y,t) \\ \frac{dy}{dt} = g(x,y,t) \end{array}\right\}$$

sea $(x(t), y(t))$ una solución particular del mismo. Podemos entonces representar independientemente las funciones $x(t)$ e $y(t)$ frente a la variable de la que dependen, es decir $t$. Pero también es posible identificar la solución particular como las ecuaciones paramétricas de una curva $\sigma : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^2$, $\sigma(t) = (x(t), y(t))$. En tal caso, al plano $\mathbb{R}^2$ en el que representamos dicha curva se le denomina "plano de fase" del sistema y a la curva "órbita solución".

---

**Ejemplo:** El sistema

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 2\cos t \\ \frac{dy}{dt} = -\operatorname{sen} t \end{array}\right\}$$

con la condición inicial $(x(0), y(0)) = (0, 2)$ tiene como solución particular a: $x(t) = 2\operatorname{sen} t$, $y(t) = \cos t$, que son las ecuaciones paramétricas de una elipse en el plano centrada en el origen del mismo y con semiejes 2 y 1 respectivamente. Es fácil eliminar el parámetro $t$ entre ambas ecuaciones y obtener así la ecuación implícita de dicha órbita: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

---

Un sistema de condiciones iniciales $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$ se traduce en fijar un punto por el que pasa la órbita.

### 9.1.3 Sistemas Lineales y no Lineales

Restringiéndonos, como en la sección anterior, a sistemas de dos ecuaciones diferenciales ordinarias, y además escritos en forma normal, diremos que el sistema (9.1) es lineal si las funciones $g(x,y,t)$ y $h(x,y,t)$ son lineales en las variables dependientes, será no lineal en caso contrario. De manera general por tanto un sistema lineal es de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)y + f(t) \\ \frac{dy}{dt} = c(t)x + d(t)y + g(t) \end{array}\right\}$$

Si los coeficientes $a(t), b(t), c(t)$ y $d(t)$ son constantes, tendremos un "sistema lineal con coeficientes constantes", en caso contrario será un sistema lineal con coeficientes variables.

**Sistemas Homogéneos de Ecuaciones Lineales:** se trata de aquéllos sistemas con términos independientes nulos, es decir, para el caso de dos ecuaciones, serán sistemas de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)y \\ \frac{dy}{dt} = c(t)x + d(t)y \end{array}\right\}$$

**Propiedades de las soluciones de un sistema lineal:** El conjunto de las soluciones de un sistema lineal homogéneo tiene estructura de espacio vectorial real[1], esto significa que si $(x_1(t), y_1(t))$ y $(x_2(t), y_2(t))$ son soluciones de un sistema lineal homogéneo, entonces $(x_1(t) + x_2(t), y_1(t) + y_2(t))$ también lo es, al igual que $(\lambda x_1(t), \lambda y_1(t))$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. De lo anterior se deduce que si conocemos dos soluciones independientes de un sistema lineal homogéneo, entonces conocemos todas las soluciones del sistema, pues cualquier solución será una combinación lineal de las anteriores.

De manera análoga a lo que ocurría con las ecuaciones lineales estudiadas en temas anteriores, la solución general de un sistema lineal (no homogéneo) siempre puede escribirse como la solución general del sistema homogéneo asociado más una solución particular del sistema completo, es decir la solución general será de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = x_{\text{H.A.}}(t, C_1, C_2) + x_{\text{P}} \\ y(t) = y_{\text{H.A.}}(t, C_1, C_2) + y_{\text{P}} \end{array}\right\}$$

Como vemos, para resolver un sistema lineal basta con resolver en primer lugar el sistema lineal homogéneo asociado y determinar posteriormente una solución particular del sistema completo. Desgraciadamente, la resolución del sistema homogéneo no siempre es fácil. Veremos a continuación cómo para los sistemas con coeficientes constantes sí que podemos siempre obtener las soluciones de una forma no demasiado difícil.

### Método de Eliminación

El Método de eliminación consiste en convertir un sistema de dos ecuaciones lineales con coeficientes constantes en una única ecuación lineal con coeficientes constantes de segundo orden. Si partimos del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = ax + by + f(t) \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy + g(t) \end{array}\right\}$$

y denominamos $D = \frac{d}{dt}$ al operador derivada con respecto a $t$, tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} (D - a)x - by = f(t) \\ -cx + (D - d)y = g(t) \end{array}\right\}$$

Si decidimos eliminar la variable $x$ del sistema procederemos de la siguiente forma: multiplicando la primera ecuación por $-c$ y la segunda por $(D - a)$ y restando los resultados, reducimos el sistema a una ecuación de la forma:

$$(D^2 + pD + q)y = h(t)$$

Ecuación lineal con coeficientes constantes de segundo orden que resolveremos en la sección siguiente.

[1]La dimensión de dicho espacio vectorial es igual al número de ecuaciones.

### 9.1.4 Sistemas autónomos

Un sistema de ecuaciones diferenciales es "autónomo" si no depende explícitamente de la variable independiente, su forma general (para el caso de dos ecuaciones de primer orden) será por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = f(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x,y) \end{array}\right\}$$

Para los sistemas autónomos es siempre posible aplicar una estrategia de resolución consistente en obtener en primer lugar la ecuación implícita de las órbitas solución, de la siguiente forma: Las ecuaciones pueden escribirse en forma diferencial:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{f(x,y)} = dt \\ \frac{dy}{g(x,y)} = dt \end{array}\right\}$$

de manera que se puede eliminar la variable independiente, igualando los primeros miembros y obtenemos la ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{dx}{f(x,y)} = \frac{dy}{g(x,y)}$$

cuyas curvas solución son evidentemente las órbitas del sistema de ecuaciones. Si en la solución general es posible despejar una de las incógnitas, entonces su substitución en el sistema original nos proporciona una ecuación ordinaria y, en definitiva, las soluciones del sistema.

---

**Ejemplo:** Consideremos el sistema autónomo:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \frac{2}{y} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x} \end{array}\right\}$$

La ecuación diferencial que describe a las órbitas será:

$$\frac{dx}{2/y} = dt = \frac{dy}{1/x} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2\,dy}{y} \Rightarrow \ln|x| = 2\,\ln|y| + C \Rightarrow x = Ky^2$$

sustituyendo en la segunda ecuación del sistema:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{Ky^2} \Rightarrow y^2\,dy = \frac{1}{K}dt \Rightarrow \frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{K}t + K' \Rightarrow y = \left(\frac{3}{K}t + 3K'\right)^{\frac{1}{3}}$$

y en consecuencia: $x = K\left(\frac{3}{K}t + 3K'\right)^{\frac{2}{3}}$, $y = \left(\frac{3}{K}t + 3K'\right)^{\frac{1}{3}}$ es la solución general del sistema (dependiente de las constantes arbitrarias $K$ y $K'$).

---

**Ejemplo 2:** Consideremos el sistema autónomo:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = 2x \end{array}\right\}$$

con las condiciones iniciales: $x(0) = 1$, $y(0) = \sqrt{2}$. La ecuación diferencial que describe a las órbitas será:

$$\frac{dx}{y} = dt = \frac{dy}{2x} \Rightarrow \frac{dx}{y} = \frac{dy}{2x} \Rightarrow 2xdx = ydy \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}y^2 + C \Rightarrow y = \pm\sqrt{2x^2 - K}$$

Ahora bien, de las condiciones iniciales se deduce que para $t = 0$, $x$ e $y$ han de tomar los valores 1 y $\sqrt{2}$ respectivamente, por tanto una única órbita es la relevante, la que pasa por el punto $(1, \sqrt{2})$ y, por tanto, nos quedaremos con la solución particular: $y = \sqrt{2}x$ (correspondiente a $K = 0$). Sustituyendo en la primera ecuación del sistema:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2}\,x \Rightarrow \frac{dx}{x} = \sqrt{2}dt \Rightarrow\; x = C\,e^{\sqrt{2}t}$$

Utilizando de nuevo las condiciones iniciales concluimos con la solución particular buscada: $x = e^{\sqrt{2}t}$, $y = \sqrt{2}e^{\sqrt{2}t}$.

---

## 9.2 Ecuaciones de Orden Superior al primero

Una ecuación diferencial ordinaria de orden $n$ es de manera general una expresión del tipo:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

o bien, escrita en forma normal:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \tag{9.3}$$

donde $x$ es la variable independiente, $y(x)$ la dependiente, e $y^{(j)} = \frac{d^j y}{dx^j}$ , para $j = 1, \dots, n$, son las derivadas sucesivas de $y(x)$ con respecto a $x$.

Sin entrar en detalles técnicos, comentaremos que bajo ciertas condiciones de "buen comportamiento" matemático, la ecuación (9.3), junto con las condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, …, $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, tiene solución única. De esta forma, lo que estamos comentando se resume en la existencia de un Teorema de Picard para las ecuaciones de orden superior al primero, donde ahora el concepto de problema de valor inicial dado por una ecuación diferencial y una condición inicial se extiende a una ecuación de orden $n$ más $n$ condiciones iniciales para la variable dependiente y sus $n - 1$ primeras derivadas.

---

**Ejemplo:** La ecuación diferencial que determina el movimiento rectilineo uniformemente acelerado es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a \tag{9.4}$$

donde $t$ es el tiempo (variable independiente), $x(t)$ es la posición (variable dependiente), y $a$ es una constante (la aceleración constante que caracteriza el movimiento en estudio). La integración de (9.4) es trivial: $x = \frac{1}{2}at^2 + C_1t + C_2$. Tomando como condiciones iniciales: $x(0) = x_0$ y $x'(0) = v_0$ se deduce fácilmente la solución particular:

$$x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}\,a\,t^2$$

Tal y como se planteó en la sección anterior, un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden es en general equivalente a una ecuación de segundo orden. De igual manera la resolución de una ecuación de orden $n$ equivale a resolver un sistema de $n$ ecuaciones de primer orden.

**Ejemplo:** Consideremos la ecuación diferencial de segundo orden $y''+2xy'-y^2=0$. Si llamamos $y'=p$, entonces la ecuación es equivalente al sistema de dos ecuaciones de primer orden siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dy}{dx}=p \\ \frac{dp}{dx}=y^2-2xp \end{array}\right\}$$

### 9.2.1 Ecuaciones Lineales con coeficientes constantes

Se llama ecuación diferencial lineal de orden $n$ a la que es lineal en la variable dependiente y sus derivadas, es decir una expresión del tipo siguiente:

$$y^{(n)}+a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+a_1(x)\,y'+a_0(x)\,y=f(x)$$

Si los coeficientes $a_i(x)$ son funciones de la variable independiente $x$, se dice que la ecuación es “de coeficientes variables”, mientras que si todos los coeficientes son funciones constantes se denomina a la ecuación “de coeficientes constantes”. Por otro lado, si el término independiente $f(x)$ es nulo se dice que la ecuación es homogénea, siendo no homogénea en caso contrario.

Nos restringiremos en este tema a ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes, es decir de la forma:

$$y''+p\,y'+q\,y=f(x)$$

La estructura de las soluciones que se obtuvo al analizar las ecuaciones lineales de primer orden se reproduce a nivel general, es decir: la solución general de una ecuación lineal es siempre la suma de la solución general de la ecuación homogénea asociada y una solución particular de la ecuación no-homogénea.

Comenzaremos por tanto el estudio de este tipo de ecuaciones con las ecuaciones homogéneas.

**Ejemplo:** Consideremos la ecuación: $y''+2y'-3y=0$. Si denominamos $D=\frac{d}{dx}$ la ecuación se reescribe, en términos del operador derivada $D$ en la forma:

$$(D^2+2D-3)y=0$$

denominaremos polinomio característico de la ecuación al polinomio $\lambda^2+2\lambda-3$, cuyas raíces son fácilmente calculables, resultando que $\lambda^2+2\lambda-3=(\lambda-1)(\lambda+3)$.

Es entonces fácil comprobar que la ecuación puede re-escribirse como $(D-1)(D+3)y=0$. El hecho crucial que permite la resolución sencilla de este tipo de ecuaciones es que la solución general de la ecuación $(D-1)(D+3)y=0$ no es más que la suma de las soluciones generales de las ecuaciones $(D-1)y=0$ y $(D+3)y=0$.

$$(D-1)y=0 \Rightarrow y'-y=0 \Rightarrow y=C_1e^x$$

$$(D+3)y=0 \Rightarrow y'+3y=0 \Rightarrow y=C_2e^{-3x}$$

y por tanto la solución final será:

$$y=C_1e^x+C_2e^{-3x}$$

---

Evidentemente, lo expuesto en el ejmplo es válido para cualquier ecuación tal que las raíces de su polinomio característico sean reales y diferentes. Existen otras dos posibilidades. Sin entrar en más detalles, señalaremos que en esos casos la resolución es similar, obteniéndose los siguientes resultados:

- Ecuaciones de la forma: $(D-\alpha)(D-\beta)y=0$, solución: $y=K_1e^{\alpha t}+K_2e^{\beta t}$.
- Ecuaciones de la forma: $(D-\alpha)^2y=0$, solución: $y=K_1e^{\alpha t}+K_2te^{\alpha t}$.
- Ecuaciones de la forma: $(D^2+\alpha^2)y=0$, solución: $y=K_1\operatorname{sen}\alpha t+K_2\cos\alpha t$.
- Ecuaciones de la forma: $(D-(\alpha+i\beta))(D-(\alpha-i\beta))y=0$, solución: $y=e^{\alpha t}(K_1\cos\beta t+K_2\operatorname{sen}\beta t)$.

**Cálculo de soluciones particulares**

Nos limitaremos a el método comúnmente conocido como de los coeficientes indeterminados, que permite calcular la solución particular de una ecuación no-homogénea en algunos casos concretos, es decir, para un determinado tipo de términos independientes. Dada la ecuación

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_1y'+a_0y=f(x)$$

tendremos:

- 1. Si el término independiente es un polinomio de grado $m$: $f(x)=P_m(x)$
  - 1.a. Si 0 no es una raíz de la ecuación característica: una solución particular será un polinomio del mismo grado $y_p=Q_m(x)$
  - 1.b. Si 0 es una raíz de la ecuación característica con multiplicidad $k$, entones $y_p=x^k\,Q_m(x)$.
- 2. Si el término independiente es de la forma[2] $f(x)=e^{\alpha x}\,P_m(x)$, con $\alpha\in\mathbb{R}$.

[2]Nótese que si $\alpha=0$ este caso se reduce al anteriormente considerado.

- 2.1. Si $\alpha$ no es una raíz de la ecuación característica: $y_p = e^{\alpha x}\, Q_m(x)$.
- 2.2. Si $\alpha$ es una raíz de la ecuación característica con multiplicidad $k$, entonces: $y_p = e^{\alpha x} x^k\, Q_m(x)$.

- 3. Si $f(x) = e^{\alpha x}\,(P_l(x)\,\cos(\beta x) + Q_m(x)\,\mathrm{sen}(\beta x))$, entonces:
  - Si $\alpha \pm \beta i$ no son raíces de la ecuación caraterística, tendremos:
  $$y_p = e^{\alpha x}\,(T_r(x)\cos(\beta x) + S_r(x)\,\mathrm{sen}(\beta x))$$
  donde $r =$máx $(l, m)$.
  - Si $\alpha \pm \beta i$ son raíces de la ecuación caraterística con multiplicidad $k$, tendremos:
  $$y_p = x^k e^{\alpha x}\,(T_r(x)\cos(\beta x) + S_r(x)\,\mathrm{sen}(\beta x))$$
  donde $r =$máx $(l, m)$.

---

**Ejemplo:** La ecuación $y'' - 6y' + 9y = 25e^x\,\mathrm{sen}\,x$ admite como solución particular[3]: $y_p = e^x\,(4\cos x + 3\,\mathrm{sen}\,x)$.

---

**Ejemplo:** La ecuación $y''+5y'+6y = e^{-2x}$ tiene asociada la ecuación característica $\lambda^2+5\lambda+6 = 0$ cuyas raíces son $\lambda = -3$ y $\lambda = -2$. Probando por tanto una solución particular de la forma $y_p = Axe^{-2x}$ obtendremos que la solución general de la ecuación se escribe de la forma: $y(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x} + xe^{-2x}$.

---

**Ejemplo:** Análogamente, la ecuación$y''+5y'+6y = e^x$ tiene como solución general a la expresión: $y(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x} + \frac{1}{12}e^x$.

---

### 9.2.2 Ecuaciones no lineales reducibles de orden

Determinados tipos de ecuaciones de orden superior al primero son reducibles a una ecuación de orden más bajo. Analicemos algunos de estos casos:

- Ecuaciones en las que no aparece explícitamente la variable dependiente:
  $$y'' = f(x, y')$$
  En este caso el cambio de variable $y' = p$ nos conduce al sistema de ecuaciones:
  $$\left.\begin{array}{rl} \frac{dy}{dx} = & p \\ \frac{dp}{dx} = & f(x,p) \end{array}\right\}$$
  De manera que podemos resolver la ecuación segunda y sustituir el resultado en la primera para obtener finalmente $y(x)$.

[3]Nótese que la ecuación característica tiene una sóla raíz (doble) que obviamente no coincide con $1 \pm i$.

- Generalización del caso anterior: Si una ecuación de orden $n$ no contiene explícitamente ni a la variable dependiente ni a sus $k-1$ primeras derivadas, entonces el cambio $y^{(k)} = p$ reduce la ecuación a una de orden $n-k$.

- Ecuaciones que no contienen explícitamente a la variable independiente, es decir: $y'' = f(y, y')$, o en general $y^{(n)} = f(y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$. En este caso se cambia de variables $(x, y)$ a variables $(y, p)$ donde $p = y'$. Es necesario por tanto usar la regla de la cadena, de forma que:

$$y' = p; y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

  El cambio de variables conduce a una nueva ecuación de primer orden (de orden $n-1$ para el caso general).

## 9.3 Ejercicios

**1.** Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\left.\begin{array}{rl} \frac{dx}{dt} = & 2x+y \\ \frac{dy}{dt} = & -4x+2y \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x(0)=1 \\ y(0)=0 \end{array}\right\}$$

Solución: $x(t) = e^{2t}\cos(2t)$, $y(t) = -2e^{2t}\operatorname{sen}(2t)$.

**2.** Calcular la solución general del sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rl} \frac{dx}{dt} = & -x+y \\ \frac{dy}{dt} = & -2x-4y+e^{t} \end{array}\right\}$$

**3.** Calcular la solución general del sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rl} \frac{dx}{dt} = & -x+y \\ \frac{dy}{dt} = & -2x-4y+e^{-2t} \end{array}\right\}$$

Nota: ver ejemplos del tema 5

**4.** Calcular la solución general del sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rl} \frac{dx}{dt} = & 4x-y+t+5 \\ \frac{dy}{dt} = & 2x+y+2t-1 \end{array}\right\}$$

Solución: $x(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{2t} - \frac{1}{2}(t+11)$, $y(t) = C_1e^{3t} + 2C_2e^{2t} - t + \frac{11}{6}$.

**5.** Calcular la solución general del sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rl} \frac{dx}{dt} = & x+y \\ \frac{dy}{dt} = & 2x+2y \end{array}\right\}$$

**6.** Calcular la solución general del sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rl} \frac{dx}{dt} = & x+y \\ \frac{dy}{dt} = & -x+3y \end{array}\right\}$$

**7.** Calcular la solución general del sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rl} \frac{dx}{dt} = & x+y \\ \frac{dy}{dt} = & x+y \end{array}\right\}$$

Solución: $x(t) = \frac{C}{2} + Ke^{2t}$, $y(t) = -\frac{C}{2} + Ke^{2t}$.

**8.** Un modelo de la propagación de una enfermedad a través de una población está dado por el sistema:

$$\left.\begin{array}{rl} \frac{dS}{dt} = & -aSI \\ \frac{dI}{dt} = & aSI-bI \end{array}\right\}$$

donde $a$ y $b$ son constantes positivas. $S(t)$ representa la población susceptible de enferemar e $I(t)$ la población infectada. Analizar el plano de fase para este sistema. Explicar por qué ocurre una epidemia cuando $S(0) > \frac{b}{a}$.