Tabla de contenido

ECUACIONES CUADRÁTICAS O DE SEGUNDO GRADO 2

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA POR FACTORIZACIÓN 4

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA COMPLETANDO EL TRINOMIO CUADRADO PERFECTO 8

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA APLICANDO LA FÓRMULA GENERAL 10

RELACIÓN ENTRE LOS COEFICIENTES DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA Y SUS RAÍCES Y LA NATURALEZA DE ELLAS 15

DEDUCCIÓN DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO DADAS SUS RAÍCES O SOLUCIONES 20

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA APLICANDO LA FÓRMULA DE PO-SHEN-LOH 25

ECUACIONES BICUADRÁTICAS 28

EJERCICIOS PROPUESTOS 31

FUNCIONES CUADRÁTICAS 32

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES CUADRÁTICAS (LA PARÁBOLA) 32

¿Cómo determinar si un punto del plano pertenece o no a una parábola? 32

Concavidad de la parábola: 34

Intersección con los ejes del plano cartesiano: 35

Vértice de la parábola: 36

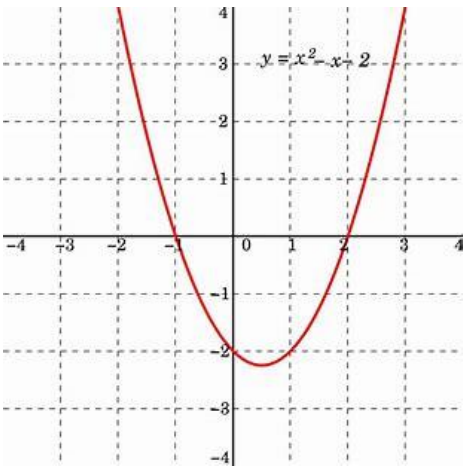
Representación gráfica en el plano cartesiano de una función cuadrática: 36

EJERCICIOS VARIOS 52

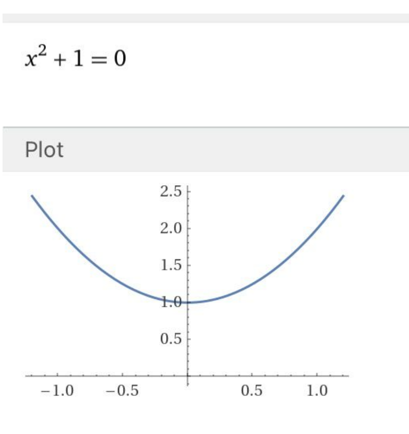
ECUACIONES CUADRÁTICAS O DE SEGUNDO GRADO

Una ecuación cuadrática o de segundo grado con una incógnita, es una ecuación que se expresa de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con $a, b\ c \in \mathbb{R}\ y\ a \neq 0$. Se ve que al menos una de las incógnitas está elevada al cuadrado, siendo la mayor potencia de ella.

Todas las ecuaciones cuadráticas tienen dos soluciones en el conjunto de los números reales y estas corresponden a los puntos donde la gráfica de la función correspondiente a la ecuación cuadrática corta, en el plano cartesiano, al eje de las *x*. Por ejemplo, en la gráfica siguiente se ve que las soluciones de la ecuación $x^2 - x - 2 = 0$, representada por la función $y = x^2 - x - 2$, son los puntos $x_1 = -1\ y\ x_2 = 2$, que son los puntos donde la gráfica corta al eje de las x.



Sin embargo, la ecuación cuadrática $x^2 = -1$, que está asociada a la función $y = x^2 + 1$ no tiene solución en el conjunto de los números reales ($x = \pm\sqrt{-1} \rightarrow x_1 = +i$; $x_2 = -i$), lo que se podría verificar al ver que la gráfica de la función en el plano cartesiano no corta al eje de las x, está por arriba de él.



Clasificación de las ecuaciones cuadráticas:

Las ecuaciones cuadráticas se clasifican en completas e incompletas:

Completas	Incompletas		
$ax^2 + bx + c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$ax^2 + c = 0$	$ax^2 = 0$

En la ecuación $ax^2 + bx = 0$ falta el término *c.*
En la ecuación $ax^2 + c = 0$ falta el término *bx.*
En la ecuación $ax^2 = 0$ faltan los términos *bx y c.*

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA POR FACTORIZACIÓN

Se aplica la siguiente propiedad: $a \cdot b = 0 \ si \ y \ solo \ si \ a = 0 \ o \ b = 0$

Ejemplo: Resolver la ecuación cuadrática completa $x^2 - 6x = 0$ por factorización

$x(x-6) = 0$
$x = 0 \ o \ x - 6 = 0$
$x_1 = 0$
$x - 6 = 0 \Longrightarrow x_2 = 6$

Ejemplo: Resolver la ecuación cuadrática incompleta $5x^2 + 24x = 0$ por factorización

$x(5x + 24) = 0$
$x = 0 \ o \ 5x + 24 = 0$
$x_1 = 0$
$5x + 24 = 0$
$5x = -24$
$x_2 = -\frac{24}{5}$

Ejemplo: Resolver la ecuación cuadrática incompleta $x^2 - 16 = 0$ por factorización

$(x+4)(x-4) = 0$
$x + 4 = 0 \ o \ x - 4 = 0$
$x_1 = -4$
$x - 4 = 0$
$x_2 = 4$

Nota: Cuando esta ecuación no se resuelve por factorización, se procede de la siguiente manera:

$x^2 - 16 = 0$
$x^2 = 16$

Se extrae raíz cuadrada de ambos miembros:

$\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$

$x = \pm\sqrt{16}$

$x = \pm 4$

Es decir:

$x_1 = -4$

$x_2 = 4$

Otra manera de proceder es la siguiente: Sabiendo que $\sqrt{x^2} = |x|$, es decir, que la raíz cuadrada de un número al cuadrado es su valor absoluto:

$\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$
$|x| = 4$

En esta ecuación con valor absoluto x puede ser 4 -o -4. Porque $|4| = 4\ y\ |-4| = 4$

Se aplicó la regla general siguiente: Si $k > 0$, entonces,
$|x| = k$ es equivalente a $x = k\ o\ x = -k$

Ejemplo: Resolver la ecuación cuadrática incompleta $x^2 - 5 = 0$ por factorización

$(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) = 0$
$x + \sqrt{5} = 0\ o\ x - \sqrt{5} = 0$
$x + \sqrt{5} = 0 \Longrightarrow x_1 = -\sqrt{5}$
$x - \sqrt{5} = 0 \Longrightarrow x_2 = \sqrt{5}$

Ejemplo: Resolver la ecuación cuadrática incompleta $x^2 = 4x$ por factorización

$x^2 - 4x = 0$
$x(x - 4) = 0$
$x_1 = 0$
$(x - 4) = 0$
$x_2 = 4$

Observación: Si en vez de factorizar se hubiera dividido ambos miembros entre x, se obtendría una sola de las raíces de la ecuación, perdiéndose $x_1 = 0$. Efectivamente:

$x^2 - 4x = 0$

$\frac{x^2}{x} - \frac{4x}{x} = 0$

$x - 4 = 0$

$x = 4$

Ejemplo: Resolver la ecuación cuadrática incompleta $5x^2 - 3x = 2x$ por factorización

$5x^2 - 3x - 2x = 0$
$5x^2 - 5x = 0$

$x(5x - 5) = 0$
$x_1 = 0$
$(5x - 5) = 0$
$5x = 5$
$x_2 = 1$

Ejemplo: Resolver la ecuación cuadrática completa $16x^2 - 24x + 9 = 0$ por factorización

Extrayendo raíz cuadrada del primer y último término se tiene una pista de cómo factorizar el trinomio:

$(4x - 3)(4x - 3) = 0$
$4x - 3 = 0 \Longrightarrow 4x = 3 \Longleftrightarrow x_1 = \frac{3}{4}$
$4x - 3 = 0 \Longrightarrow 4x = 3 \Longleftrightarrow x_2 = \frac{3}{4}$

Ejemplo: Resolver la ecuación cuadrática $3+\frac{4}{x+2}=\frac{x^2}{x+2}-1$
Fuente: Matemáticas técnicas de Rice y Knight

Multiplicando ambos miembros por $x+2$:

$3(x+2)+\frac{4}{x+2}(x+2)=\frac{x^2}{x+2}(x+2)-1(x+2)$

$3x+6+4=x^2-x-2)$
$6+4+2=x^2-x-3x)$
$12=x^2-4x$

$x^2-4x-12=0$

Factorizando:

$(x-6)=0\rightarrow x=6$
$(x+2)=0\rightarrow x=-2$

Advertencia:
$x=6$ satisface la ecuación cuadrática, pero $x=-2$, no. Esto se debió a que se multiplicó ambos miembros de la ecuación original por una expresión que contiene la incógnita. Se multiplicó por $(x+2)$.

Se debió haber resuelto el ejercicio reacomodando las fracciones como sigue:

$$3+1=\frac{x^2}{x+2}-\frac{4}{x+2}$$

$$4=\frac{x^2-4}{x+2}$$

$$4=\frac{\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{x+2}}$$

$$4=x-2$$

$$x=6$$

Que es la raíz que sí satisface la ecuación cuadrática.

Ejemplo: La suma de dos números es 18 y la de sus cuadrados es 180. ¿cuáles son los números? Resolver por factorización.

Primer número = x
Segundo número = 18 – x. (sumados dan x+18-x=18)
Cuadrado del primer número: x^2
Cuadrado del segundo número: $(18-x)^2$

$x^2+(18-x)^2=180$
$x^2+324-36x+x^2-180=0$
$2x^2-36x+144=0$
$x^2-18x+72=0$

$(x-12)(x-6)=0$
$(x-12)=0$
$x=12$

$(x-6)=0$
$x=6$

<u>Ejemplo</u>: Hallar dos números enteros pares consecutivos positivos cuyo producto sea 224.

Sean los siguientes números pares consecutivos: $2x$ y $2x+2$

$(2x)(2x+2)=224$

$4x^2+4x-224=0$

Dividiendo ambos miembros entre 4:

$x^2+x-56=0$

$(x-7)(x+8)=0$
$(x-7)=0 \rightarrow x=7$
$(x+8)=0 \rightarrow x=-8$

Por tanto:

Primer par es: $2x=2\cdot 7=14$
Segundo par es: $2x+2=14+2=16$

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA COMPLETANDO EL TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Se suele seguir los siguientes pasos:

1. Asegurarse que el coeficiente de x^2 sea 1. Si no es así, iguálelo a 1 dividiendo ambos miembros de la ecuación entre el coeficiente de x^2.
2. Si es necesario sume un número a ambos lados de la ecuación para poner el término constante del lado derecho del signo igual.
3. Complete el cuadrado:
    a. Encuentre la mitad del coeficiente de x y elévelo al cuadrado.
    b. Sume el cuadrado a ambos lados de la ecuación.
4. Factorice el trinomio cuadrado y combine los términos semejantes.
5. Resuelva la ecuación resultante con el uso de la propiedad de la raíz cuadrada.

<u>Ejemplo1</u>: Resolver $3x^2 - 5x + 2 = 0$ completando el cuadrado perfecto

Paso 1: Como el coeficiente del término cuadrático no es 1 sino 3, se divide ambos miembros entre 3:

$$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0$$

Paso 2: Se dejan los términos en x en el primer miembro de la ecuación, restando $\frac{2}{3}$ en ambos miembros de la ecuación:

$$x^2 - \frac{5}{3}x = -\frac{2}{3}$$

Paso 3: Completar el trinomio cuadrado perfecto. Para ello se suma en ambos miembros de la igualdad el cuadrado de la mitad del coeficiente del término lineal de la ecuación, es decir, $(\frac{b}{2})^2$.

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{\frac{5}{3}}{2}\right)^2 = \frac{25}{36}$$

$$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{36} = -\frac{2}{3} + \frac{25}{36}$$

$$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{36} = \frac{1}{36}$$

Paso 4:

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

Paso 5: Extrayendo raíz cuadrada en ambos miembros:

$$x - \frac{5}{6} = \pm\sqrt{\frac{1}{36}}$$

$$x - \frac{5}{6} = \pm\frac{1}{6}$$

$x = \pm\frac{1}{6} + \frac{5}{6}$

$x_1 = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \frac{6}{6} = 1$

$x_2 = -\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Ejemplo 2: Resolver $x^2 + 4x + 3 = 0$ completando el cuadrado perfecto

Se dejan los términos en *x* en el primer miembro de la ecuación:

$x^2 + 4x = -3$

Lo que debe hacerse es completar el trinomio cuadrado perfecto. Para ello se suman en ambos miembros de la igualdad el cuadrado de la mitad del coeficiente del término lineal de la ecuación, es decir, $(\frac{b}{2})^2$.

$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$

$x^2 + 4x + 4 = -3 + 4$

$(x + 2)^2 = 1$

Extrayendo raíz cuadrada en ambos miembros:

$x + 2 = \pm\sqrt{1}$

$x = \pm\sqrt{1} - 2$

$x_1 = 1 - 2 = -1$

$x_2 = -1 - 2 = -3$

Ejemplo 3: Complete el cuadrado perfecto en: $x^2 + 14x + ?$

$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{14}{2}\right)^2 = 49$

$x^2 + 14x + 49 = (x + 7)^2$

Ejemplo 4: Complete el cuadrado perfecto en: $y^2 + \frac{4}{3}x + ?$

$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{\left(\frac{4}{3}\right)}{2}\right)^2 = \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

$x^2 + 14x + \frac{4}{9} = (x + \frac{2}{3})^2$

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA APLICANDO LA FÓRMULA GENERAL

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Fórmula general o cuadrática:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nota: Esta fórmula recibe también el nombre de Bhaskara,

La cantidad su radical $b^2 - 4ac$ se llama *Discriminante* y se denota con la letra griega *delta* ($\triangle$).

$$\triangle = b^2 - 4ac$$

Si $\triangle > 0 \Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ y\ x_1 \neq x_2. La\ ecuación\ tiene\ raíces\ reales\ y\ distintas$
Si $\triangle = 0 \Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ y\ x_1 = x_2. La\ ecuación\ tiene\ raíces\ reales\ iguales$ (ver ejercicio 3 y 6)
Si $\triangle < 0 \Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{C}. La\ ecuación\ tiene\ raíces\ complejas$

<u>Ejemplos</u>: Determinar las raíces o soluciones de las siguientes ecuaciones, utilizando la fórmula general:

1) $x^2 - 9x - 36 = 0$

$a = 1$
$b = -9$
$c = -36$

$$x_1 = \frac{-(-9) + \sqrt{(-9)^2 - 4(1)(-36)}}{2(1)} = \frac{9 + \sqrt{81 + 144}}{2} = \frac{9 + \sqrt{225}}{2} = \frac{9 + 15}{2} = 12$$

$$x_2 = \frac{-(-9) - \sqrt{(-9)^2 - 4(1)(-36)}}{2} = \frac{9 - \sqrt{81 + 144}}{2} = \frac{9 - \sqrt{225}}{2} = \frac{9 - 15}{2} = -3$$

Comprobación: Reemplazando $x_1 = 12$ y $x_2 = -3$ en la ecuación cuadrática, se debe llegar a $0 = 0$.
Reemplazando $x_1 = 12$

$x^2 - 9x - 36 = 0$
$12^2 - 9(12) - 36 = 0$
$144 - 108 - 36 = 0$
$0 = 0$

Reemplazando $x_2 = -3$

$x^2 - 9x - 36 = 0$
$-3^2 - 9(-3) - 36 = 0$
$9 + 27 - 36 = 0$
$0 = 0$

2) $2x^2 + 7x - 4 = 0$

$a = 2$
$b = 7$
$c = -4$

$$x_1 = \frac{-7 + \sqrt{(7)^2 - 4(2)(-4)}}{2(2)} = \frac{-7 + \sqrt{49 + 32}}{4} = \frac{-7 + \sqrt{81}}{4} = \frac{-7 + 9}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-7 - \sqrt{(7)^2 - 4(2)(-4)}}{2(2)} = \frac{-7 - \sqrt{49 + 32}}{4} = \frac{-7 - \sqrt{81}}{4} = \frac{-7 - 9}{4} = -4$$

También se puede resolver Factorizando $2x^2 + 7x - 4 = 0$ como sigue:

$(2x - 1)(x + 4) = 0$

$(2x - 1) = 0$
$2x = 1$
$x = \frac{1}{2}$

$(x + 4) = 0$

$x = -4$

3) $x^2 = 2x + 2$

Reordenando los términos de la ecuación a su forma estándar:

$x^2 - 2x - 2 = 0$

$a = 1$
$b = -2$
$c = -2$

$$x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{2 + \sqrt{4 + 8}}{2} = \frac{2 + \sqrt{12}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{-(-2) - \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{2 - \sqrt{4 + 8}}{2} = \frac{2 - \sqrt{12}}{2} = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3}$$

4) $27ay - 14y^2 = 10a^2$

Reordenando:

$-14y^2 + 27ay - 10a^2 = 0$
$14y^2 - 27ay + 10a^2 = 0$

$a = 14$
$b = -27a$
$c = 10a^2$

$$x_1 = \frac{-(-27a) + \sqrt{(-27a)^2 - 4(14)(10a^2)}}{28} = \frac{27a + \sqrt{729a^2 - 560a^2}}{28} = \frac{27a + \sqrt{169a^2}}{28} = \frac{27a + 13a}{28}$$
$$= \frac{40a}{28} = \frac{10a}{7}$$

$$x_2 = \frac{-(-27a) - \sqrt{(-27a)^2 - 4(14)(10a^2)}}{28} = \frac{27a - \sqrt{729a^2 - 560a^2}}{28} = \frac{27a - \sqrt{169a^2}}{28} = \frac{27a - 13a}{28}$$
$$= \frac{14a}{28} = \frac{a}{2}$$

5) $9x = x^2$

Es una ecuación cuadrática incompleta. Hay que reordenar sus términos para expresarla en su forma estándar $ax^2 + bx + c = 0$:

$x^2 - 9x + 0 = 0$

$a = 1$
$b = -9$
$c = 0$

$$x_1 = \frac{-(-9) + \sqrt{(-9)^2 - 4(1)(0)}}{2(1)} = \frac{9 + \sqrt{81}}{2} = \frac{9+9}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$x_2 = \frac{-(-9) - \sqrt{(-9)^2 - 4(1)(0)}}{2(1)} = \frac{9 - \sqrt{81}}{2} = \frac{9-9}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

Solución alternativa: Factorizando la ecuación cuadrática, como sigue:

$x^2 - 9x = 0$
$x(x-9) = 0$
$(x-9) = 0$
$x = 9$
$x = 0$

6) $\frac{x^2}{8} = -\frac{x}{4} - \frac{1}{8}$

Reordenando sus términos:

$$\frac{x^2}{8} + \frac{x}{4} + \frac{1}{8} = 0$$

$$a = \frac{1}{8}$$

$$b = \frac{1}{4}$$

$$c = \frac{1}{8}$$

$$x_1 = \frac{-\frac{1}{4} + \sqrt{(1/4)^2 - 4(1/8)(1/8)}}{2/8} = \frac{-\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{4}{64}}}{1/4} = \frac{-\frac{1}{4} + \sqrt{(4-4)/64}}{1/4} == \frac{-\frac{1}{4} + \sqrt{0}}{1/4} = \frac{-\frac{1}{4}}{1/4} = -1$$
$$x_2 = \frac{-\frac{1}{4} - \sqrt{(1/4)^2 - 4(1/8)(1/8)}}{2/8} = \frac{-\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{4}{64}}}{1/4} = \frac{-\frac{1}{4} - \sqrt{(4-4)/64}}{1/4} == \frac{-\frac{1}{4} - \sqrt{0}}{1/4} = \frac{-\frac{1}{4}}{1/4} = -1$$

En este ejercicio, ambas soluciones son iguales, porque $\triangle = b^2 - 4ac = 0$. En efecto:

$$\triangle = b^2 - 4ac = \frac{1}{16} - 4\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$\triangle = b^2 - 4ac = \frac{1}{16} - 4\left(\frac{1}{64}\right)$$
$$\triangle = b^2 - 4ac = \frac{1}{16} - \left(\frac{1}{16}\right) = 0$$

7) $2x^2 + 3x = -3$

Reordenando para que adquiera la forma estándar:

$2x^2 + 3x + 3 = 0$

$a = 2$
$b = 3$
$c = 3$
$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(3)}}{4} = \frac{-3 + \sqrt{9 - 24}}{4} = \frac{-3 + \sqrt{-15}}{4}$$
$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(3)}}{4} = \frac{-3 - \sqrt{9 - 24}}{4} = \frac{-3 - \sqrt{-15}}{4}$$

Pero como $\sqrt{-15}$ no es un número real, la ecuación no tiene solución real.

8) $x(x + 2) = 2x(x + 1) - 4$
Operando:

$x^2 + 2x = 2x^2 + 2x - 4$
$x^2 - 2x^2 + 2x - 2x + 4 = 0$
$-x^2 + 4 = 0$

Multiplicando por menos 1 ambos miembros de la ecuación:

$x^2 - 4 = 0$
$x^2 = 4$
$x = \sqrt{4} = \pm 2$

9) $\frac{x}{x-2} - \frac{5}{2} = \frac{x-2}{x}$

Mínimo Común Múltiplo: $2(x)(x - 2)$

Multiplicando todos los términos de la ecuación por el MCM:

$$\frac{x * 2(x)(x-2)}{x-2} - \frac{5 * 2(x)(x-2)}{2} = \frac{(x-2) * 2(x)(x-2)}{x}$$

$$2x^2 - 5x(x - 2) = \frac{(x-2)^2 * 2(x)}{x}$$

$2x^2 - 5x^2 + 10x = (x - 2)^2(2)$
$2x^2 - 5x^2 + 10x = 2(x^2 - 4x + 4)$

$2x^2 - 5x^2 + 10x = 2x^2 - 8x + 8$
$-5x^2 + 18x - 8 = 0$

Multiplicando ambos miembros por menos 1:
$5x^2 - 18x + 8 = 0$
$a = 5$
$b = -18$
$c = 8$

$$x_1 = \frac{18 + \sqrt{(-18)^2 - 4(5)(8)}}{10} = \frac{18 + \sqrt{324 - 160}}{10} = \frac{18 + \sqrt{(4)(41)}}{10} = \frac{18 + 2\sqrt{41}}{10} = \frac{2(9 + \sqrt{41})}{10}$$
$$= \frac{(9 + \sqrt{41})}{5} = \frac{9}{5} + \frac{\sqrt{41})}{5}$$
$$x_2 = \frac{18 - \sqrt{(-18)^2 - 4(5)(8)}}{10} = \frac{18 - \sqrt{324 - 160}}{10} = \frac{18 - \sqrt{(4)(41)}}{10} = \frac{18 - 2\sqrt{41}}{10} = \frac{2(9 - \sqrt{41})}{10}$$
$$= \frac{(9 - \sqrt{41})}{5} = \frac{9}{5} - \frac{\sqrt{41})}{5}$$

10) Encuentre dos números enteros consecutivos tal que la suma de sus cuadrados sea 13.

Sea:

$n \text{ el primer número}$
$n + 1 \text{ el siguiente número}$

$n^2 + (n + 1)^2 = 13$
$n^2 + n^2 + 2n + 1 = 13$
$2n^2 + 2n - 12 = 0$

$n^2 + n - 6 = 0$

$$n_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 + 5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$n_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 - 5}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

11) Encuentre dos números enteros consecutivos cuyo producto sea 30.

Sea:

$n \text{ el primer número}$

$n + 1 \text{ el número siguiente}$

$n(n + 1) = 30$
$n^2 + n = 30$
$n^2 + n - 30 = 0$

$$n_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 120}}{2} = \frac{-1 + 11}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$n_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 120}}{2} = \frac{-1 - 11}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

RELACIÓN ENTRE LOS COEFICIENTES DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA Y SUS RAÍCES Y LA NATURALEZA DE ELLAS

Ecuación general:

Discriminante: Determina la naturaleza de las raíces (soluciones) de la ecuación cuadrática.

El discriminante es: $b^2 - 4ac$ y se denota con la letra griega *delta* ($\triangle$).

$$\triangle = b^2 - 4ac$$

Si $\triangle > 0 \Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ y\ x_1 \neq x_2. La\ ecuación\ tiene\ raíces\ reales\ y\ distintas.$
Si $\triangle = 0 \Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ y\ x_1 = x_2. La\ ecuación\ tiene\ raíces\ reales\ e\ iguales.$
Si $\triangle < 0 \Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{C}\ . La\ ecuación\ tiene\ raíces\ complejas\ y\ distintas.$

Suma de las raíces: Se verifica que:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

Producto de las raíces:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

<u>Ejemplo 1</u>: Determinar la suma de las soluciones de la ecuación: $3x^2 - 9x - 16 = 0$

$a = 3$
$b = -9$
$c = -16$
$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-9}{3} = 3$

<u>Ejemplo 2</u>: Determinar el producto de las soluciones de la ecuación: $2x^2 + x - 15 = 0$

$a = 2$
$b = 1$
$c = -15$
$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-15}{2} = -\frac{15}{2}$

<u>Ejemplo 3</u>: ¿Qué valores debe tomar k en la ecuación: $9x^2 - kx + 1 = 0$ para que sus soluciones sean números reales e iguales?
$a = 9$
$b = -k$
$c = 1$
$\triangle = b^2 - 4ac = 0$

$(-k)^2 - 4(9)(1) = 0$
$(-k)^2 - 36 = 0$
$(-k)^2 = 36$

$k^2 = 36$
$k = \pm\sqrt{36} = \pm 6$

<u>Ejemplo 4</u>: ¿Qué valores debe tomar k en la ecuación: $kx^2 + 2x + 1 = 0$ para que sus soluciones sean números complejos conjugados?

$a = k$
$b = 2$
$c = 1$
$\triangle = b^2 - 4ac < 0$
$(2)^2 - 4(k)(1) < 0$
$4 - 4(k)(1) < 0$

$-4(k) < -4$
$4(k) > 4$
$k > \frac{4}{4}$

$k > 1$

Ejemplo 5: Analice el discriminante de la siguiente ecuación e indique el número y tipo de raíces:

$\frac{x+5}{x} + \frac{2x-3}{x} = \frac{x-3}{x-2}$
$\frac{x+5+2x-3}{x} = \frac{x-3}{x-2}$

$\frac{3x+2}{x} = \frac{x-3}{x-2}$

Multiplicando cruzado:

$(3x+2)(x-2) = x(x-3)$
$3x^2 - 6x + 2x - 4 = x^2 - 3x$
$3x^2 - 4x - 4 = x^2 - 3x$
$2x^2 - x - 4 = 0$

$\triangle = b^2 - 4ac$
$(-1)^2 + 4(2)(4) = 1 + 32 = 33 > 0$

Como el discriminante es 33, mayor que cero, las raíces de la ecuación cuadrática son reales y diferentes.

Ejercicio 6: Demostrar que $\frac{3}{2}$ $y - \frac{1}{3}$ son soluciones de la ecuación $6x^2 - 7x - 3 = 0$

$a = 6$
$b = -7$
$c = -3$

Recordando que:
$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$-\frac{b}{a} = -(-\frac{7}{6}) = \frac{7}{6}$

Si la suma de las soluciones es $\frac{7}{6}$, entonces, $\frac{3}{2}$ $y - \frac{1}{3}$ son soluciones:

$x_1 + x_2 = \frac{3}{2} + \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{9-2}{6} = \frac{7}{6}$

$$\frac{c}{a} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Si el producto de las soluciones es $-\frac{1}{2}$, entonces $\frac{3}{2}$ $y - \frac{1}{3}$ son soluciones:

Recordando que:
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

<u>Ejercicio 7</u>: Use el discriminante para determinar la naturaleza de las soluciones de la ecuación: $2x^2 - 4x + 5 = 0$

$\triangle = b^2 - 4ac = 16 - 40 = -24 < 0$. Por tanto, las raíces son complejas conjugadas.

<u>Ejercicio 8</u>: Use el discriminante para determinar la naturaleza de las soluciones de la ecuación: $4x^2 - 12x + 9 = 0$

$\triangle = b^2 - 4ac = 144 - 144 = 0$. Por tanto, las raíces son reales e iguales.

<u>Ejercicio 9</u>: Resolver $3x(x + 1) = 2x + 2$

$$3x^2 + 3x - 2x - 2 = 0$$

$$3x^2 + x - 2 = 0$$
$$(3x - 2)(x + 1) = 0$$
$$(3x - 2) = 0$$
$$3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1$$

<u>Nota</u>: Si se hubiera factorizado 2 en el segundo miembro de la ecuación, se podría haber dividido ambos miembros entre $x + 1$, pero habría entregado solo una solución $x = \frac{2}{3}$. En vez de dos por ser ecuación cuadrática. En efecto:

$$3x(x + 1) = 2x + 2$$
$$3x(x + 1) = 2(x + 1)$$
$$3x = 2$$

$$x = \frac{2}{3}$$

<u>Ejercicio 10</u>:
Dada la ecuación $9x^2 - 5kx + 1 = 0$, ¿cuáles deben ser los valores de k para que la ecuación tenga dos raíces iguales?

Para que la ecuación tenga dos raíces iguales, su discriminante debe ser igual a cero: $\triangle = b^2 - 4ac = 0$

$$a = 9$$
$$b = -5k$$
$$c = 1$$

$b^2 - 4ac = 0$
$(-5k)^2 - 4(9)(1) = 0$
$25k^2 - 36 = 0$
$(5k + 6)(5k - 6) = 0$
$(5k + 6) = 0$
$5k = -6 \Rightarrow k = -\frac{6}{5}$
$(5k - 6) = 0$
$5k = 6 \Rightarrow k = \frac{6}{5}$

Ejercicio 11:

Dada la ecuación $9x^2 - kx + 1 = 0$, ¿qué valores debe tomar k para que sus soluciones sean números reales e iguales?
Fuente: Álgebra de Carreño y Cruz, p. 236.

Para que la ecuación tenga dos raíces iguales, su discriminante debe ser igual a cero: $\triangle = b^2 - 4ac = 0$

$a = 9$
$b = -k$
$c = 1$

$b^2 - 4ac = 0$
$(-k)^2 - 4(9)(1) = 0$
$k^2 - 36 = 0$
$(k + 6)(k - 6) = 0$
$(k + 6) = 0$
$k = -6$
$(k + 6) = 0$
$k = -6$

Ejercicio 12:
La ecuación $3x^2 - 4x + k = 0$ tiene raíces complejas. ¿cuánto vale k?

Si la ecuación tiene raíces complejas, su discriminante debe ser menor que cero: $\triangle = b^2 - 4ac < 0$

$a = 3$
$b = -4$
$c = k$

$b^2 - 4ac < 0$

$16 - 4(3)(k) < 0$
$-12k < -16$
$12k > 16$ (la desigualdad cambió de sentido, porque se multiplicó ambos miembros por menos 1)
$k > \frac{16}{12}$

$k > \frac{4}{3}$

Por tanto, k es mayor que $\frac{4}{3}$

Ejercicio 13:
La ecuación $5x^2 + 2x + k = 0$ tiene raíces complejas conjugadas. ¿cuánto vale k?
Fuente: Álgebra de Carreño y Cruz, p. 239.

Si la ecuación tiene raíces complejas, su discriminante debe ser menor que cero: $\triangle = b^2 - 4ac < 0$

$a = 5$
$b = 2$
$c = k$

$b^2 - 4ac < 0$

$4 - 4(5)(k) < 0$
$-20k < -4$
$20k > 4$ (la desigualdad cambió de sentido, porque se multiplicó ambos miembros por menos 1)
$k > \frac{4}{20} => \frac{1}{5}$

$k > \frac{1}{5}$

Ejercicio 14:
Dada la ecuación $4x^2 - (k - 6)x + 2k + 21 = 0$, ¿cuáles deben ser los valores de k para que la ecuación tenga dos raíces iguales?

Para que la ecuación tenga dos raíces iguales, su discriminante debe ser igual a cero: $\triangle = b^2 - 4ac = 0$

$a = 4$
$b = k - 6$
$c = 2k + 21$

$b^2 - 4ac = 0$
$(k - 6)^2 - 4(4)(2k + 21) = 0$
$k^2 - 12k + 36 - 16(2k + 21) = 0$
$k^2 - 12k + 36 - 32k - 336 = 0$
$k^2 - 44k - 300 = 0$

$$k = \frac{44 \pm \sqrt{(44)^2 + 1200}}{2} = \frac{44 \pm \sqrt{1936 + 1200}}{2} = \frac{44 \pm \sqrt{3136}}{2} = \frac{44 \pm 56}{2}$$

$$k_1 = \frac{44 + 56}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

$$k_1 = \frac{44 - 56}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

DEDUCCIÓN DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO DADAS SUS RAÍCES O SOLUCIONES

Sean $x_1\ y\ x_2$ las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$

La ecuación se deduce aplicando la siguiente expresión:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 * x_2) = 0$$

O bien, que es lo mismo:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Ejemplo 1: Determine la ecuación de segundo grado si las soluciones son: -3 y 5

$x_1 = -3$
$x_2 = 5$

Usando: $x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 * x_2) = 0$

$x^2 - (-3 + 5)x + (-3 * 5) = 0$
$x^2 - 2x - 15 = 0$

Usando $(x - x_1)(x - x_2) = 0$, se llega al mismo resultado:

$(x - -(-3))(x - 5) = 0$
$(x + 3)(x - 5) = 0$
$x^2 + 3x - 5x - 15 = 0$
$x^2 - 2x - 15 = 0$

Ejemplo 2: Determine la ecuación de segundo grado si las soluciones son: $1 - 4i$ y $1 + 4i$

$x_1 = 1 - 4i$
$x_2 = 1 + 4i$

Usando: $x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 * x_2) = 0$

$x^2 - [(1 - 4i) + (1 + 4i)x + [(1 - 4i)(1 + 4i) = 0$
$x^2 + 2x + (1 - 16i^2) = 0$
$x^2 - 2x + 1 + 16 = 0$

$x^2 - 2x + 17 = 0$

Alternativamente, usando $(x - x_1)(x - x_2) = 0$

$[(x - (1 - 4i)(x - (1 + 4i)] = 0$
$(x - 1 + 4i)(x - 1 - 4i) = 0$
$x^2 - x - 4xi - x + 1 + 4i + 4xi - 4i - 16i^2 = 0$
$x^2 - 2x + 1 - 16(-1) = 0$

$x^2 - 2x + 17 = 0$

Ejemplo 3: Determine la ecuación de segundo grado si las soluciones son: 3 y -3

$x_1 = 3$
$x_2 = -3$

Usando: $x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 * x_2) = 0$
$x^2 - (3 + (-3))x + (3 * (-3) = 0$
$x^2 - 0x - 9 = 0$
$x^2 - 9 = 0$

Usando $(x - x_1)(x - x_2) = 0$, se llega al mismo resultado:

$(x - 3)(x + 3) = 0$
$x^2 - 9 = 0$

Ejemplo 4: Determinar la ecuación cuadrática sabiendo que la suma de sus raíces es $\frac{4}{3}$ y el producto de estas, es $\frac{5}{2}$.
Fuente: Guía Ale. (Es un ejercicio especial)

Paso 1:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{5}{2}$$

Paso 2: Se igualan los denominadores. El de la suma de raíces se multiplica por 2 y el del producto de raíces se multiplica por 3.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{4}{3} = \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{8}{6}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{5}{2} = \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{15}{6}$$

Se aprecia, entonces, que $-b = 8 \Rightarrow b = -8$
Se aprecia, entonces, que $a = 6$
Se aprecia, entonces, que $c = 15$

Paso 3: Recordando que una ecuación cuadrática es de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$

Se tiene que la ecuación cuadrática solicitada es: ecuación $6x^2 - 8x + 15 = 0$

Comprobación: Se calculan las raíces de la ecuación mediante la fórmula general. La suma de ellas debe dar $\frac{4}{3}$ y el producto de ellas debe ser $\frac{5}{2}$.

$a = 6$
$b = -8$
$c = 15$

$$x_1 = \frac{-(-8) + \sqrt{(-8)^2 - 4(6)(15)}}{12} = \frac{8 + \sqrt{64 - 360}}{12} = \frac{8 + \sqrt{-296}}{12} = \frac{8 + i\sqrt{296}}{12}$$

$$x_1 = \frac{-(-8) - \sqrt{(-8)^2 - 4(6)(15)}}{12} = \frac{8 - \sqrt{64 - 360}}{12} = \frac{8 - \sqrt{-296}}{12} = \frac{8 - i\sqrt{296}}{12}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{8 + i\sqrt{296}}{12} + \frac{8 - i\sqrt{296}}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{8 + i\sqrt{296}}{12} * \frac{8 - i\sqrt{296}}{12} = \frac{64 - (i^2)\left(\sqrt{296})^2\right)}{144} = \frac{64 - (-1)(296)}{144}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{64 + 296}{144} = \frac{360}{144} = \frac{5}{2}$$

<u>Ejemplo 5</u>: En la ecuación $5x^2 + 3(k+1)x - 2k = 0$, ¿cuál es el valor de k si la suma de las raíces es 2?

$a = 5$
$b = 3(k+1)$
$c = -2k$
$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{-3(k+1)}{5} = 2$

Multiplicando ambos miembros por 5:

$-3(k+1) = 10$

$-3k - 3 = 10$
$-3k = 13$
$k = -\frac{13}{3}$

<u>Ejemplo 6</u>: ¿Qué valor debe tener k en la ecuación $3x^2 - 5kx - 2 = 0$ para que una de sus raíces sea -2?

$a = 3$
$b = -5k$
$c = -2$

Sabiendo que:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

Suponga que $x_2 = -2$

$x_1 - 2 = \frac{5k}{3}$
$3x_1 - 6 = 5k$

Sabiendo que:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot (-2) = \frac{-2}{3}$$

$$-6x_1 = -2$$

$$x_1 = -\frac{2}{-6}$$

$$x_1 = \frac{1}{3}$$

Reemplazando en:
$3x_1 - 6 = 5k$

$3 \cdot \frac{1}{3} - 6 = 5k$
$1 - 6 = 5k$
$-5 = 5k$

$\boldsymbol{k = -1}$

<u>Comprobación con</u>
$x_1 = \frac{1}{3}$

$3x^2 - 5kx - 2 = 0$
$3(\frac{1}{3})^2 - 5(-1)x - 2 = 0$

$\frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{3} - 2 = 0$

$\frac{1}{3} + \frac{5}{3} - 2 = 0$
$\frac{6}{3} - \frac{2}{1} = 0$

$\frac{6-6}{3} = 0$
$\frac{0}{3} = 0$

$\boldsymbol{0 = 0}$

<u>Ejemplo 7</u>: Una de las raíces de la ecuación $x^2 - 2x - 15$ =0, es -3. Determine la otra raíz sin resolver la ecuación.

Se puede usar indistintamente la propiedad de la suma o producto de las raíces:

$a = 1$
$b = -2$
$c = -15$

Usando el producto:
$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-15}{1} = -15$

Si $x_1 = -3$

$-3 \cdot x_2 = -15 \Rightarrow x_2 = 5$

Ejemplo 8: En la ecuación $4x^2 + 20x + k$ =0, encontrar el valor de k para que tenga dos raíces iguales.

$a = 4$
$b = 20$
$c = k$

Discriminante debe ser cero:

$\Delta = b^2 - 4ac = 0$
$20^2 - 4(4)(k) = 0$
$400 - 16k = 0$
$-16k = -400$
$$\boldsymbol{k = \frac{400}{16} = 25}$$

Ejemplo 9: En la ecuación $2x^2 + kx + 8$ =0, encontrar el valor de k para que no tenga solución en los números reales.

$a = 2$
$b = k$
$c = 8$

Discriminante debe ser menor que cero:

$\Delta = b^2 - 4ac < 0$
$k^2 - 4(2)(8) < 0$
$k^2 - 64 < 0$
$k^2 < 64$

$|k| =< 8 \rightarrow \boldsymbol{k < 8\ y\ \ k > -8}$

Ejemplo 10: En la ecuación $x^2 + x - 5k$ =0, encontrar el valor de k para que tenga dos soluciones reales distintas.

$a = 1$
$b = 1$
$c = .5k$

Discriminante debe ser mayor que cero:

$\Delta = b^2 - 4ac > 0$
$1^2 - 4(1)(-5K) > 0$
$1 + 20k > 0$
$20k > -1$

$$\boldsymbol{k > -\frac{1}{20}}$$

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA APLICANDO LA FÓRMULA DE PO-SHEN-LOH

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Para utilizar esta fórmula se requiere que el coeficiente de x^2 sea 1.

$$x^2 + bx + c = 0$$

Pasos:

Calcular: $m = -\frac{b}{2}$

$$m^2 - u^2 = c$$
$$x_1 = m - u$$
$$x_2 = m + u$$

Ejemplo: $2x^2 + 7x - 4 = 0$

Como el coeficiente de x^2no es 1, se dividen todos los términos entre 2, ya que 2 es el coeficiente de x^2:

$$\frac{2x^2}{2} + \frac{7}{2}x - \frac{4}{2} = 0$$

$$x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{4}{2} = 0$$

$$m = -\frac{\frac{7}{2}}{2} = -\frac{7}{4}$$

$m^2 - u^2 = c$

$(-\frac{7}{4})^2 - u^2 = -\frac{4}{2}$

$\frac{49}{16} + \frac{4}{2} = u^2$

$u^2 = \frac{49}{16} + \frac{4}{2} = \frac{49 + 32}{16} = \frac{81}{16}$

$u = \pm\sqrt{\frac{81}{16}} = \pm\frac{9}{4}$

$x_1 = m - u$

$x_1 = -\frac{7}{4} - \frac{9}{4} = -\frac{16}{4} = -4$

$x_2 = m + u$

$x_2 = -\frac{7}{4} + \frac{9}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Ejemplo: $-16x^2 + 96x - 44 = 0$

Como el coeficiente de x^2no es 1, se dividen todos los términos entre -16, ya que -16 es el coeficiente de x^2:

$$\frac{-16x^2}{-16} + \frac{96}{-16}x - \frac{44}{-16} = 0$$

$$x^2 - 6x + \frac{11}{4} = 0$$

$m = -\frac{-6}{2} = 3$

$m^2 - u^2 = c$
$9 - u^2 = \frac{11}{4}$
$9 - \frac{11}{4} = u^2$

$u^2 = 9 - \frac{11}{4} = \frac{36 - 11}{4} = \frac{25}{4}$
$u = \pm\sqrt{\frac{25}{4}} = \pm\frac{5}{2}$

$x_1 = m - u = 3 - \frac{5}{2} = \frac{6 - 5}{2} = \frac{1}{2}$

$x_2 = m + u = 3 + \frac{5}{2} = \frac{6 + 5}{2} = \frac{11}{2}$

Ejemplo: $2x(x + 5) - 1 = 0$

$$2x^2 + 10x - 1 = 0$$

Como el coeficiente de x^2no es 1, se dividen todos los términos entre 2, ya que 2 es el coeficiente de x^2:

$$\frac{2x^2}{2} + \frac{10}{2}x - \frac{1}{2} = 0$$

$$x^2 + 5x + \frac{1}{2} = 0$$

$m = -\frac{5}{2}$

$m^2 - u^2 = c$
$(-\frac{5}{2})^2 - u^2 = -\frac{1}{2}$
$\frac{25}{4} - u^2 = -\frac{1}{2}$

$u^2 = \frac{25}{4} + \frac{1}{2} = \frac{25 + 2}{4} = \frac{27}{4}$

$u = \pm\sqrt{\frac{27}{4}} = \pm\sqrt{\frac{9 \cdot 3}{4}} = \pm\frac{3}{2}\sqrt{3}$

$x_1 = m - u = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}$

$$x_2 = m + u = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

ECUACIONES BICUADRÁTICAS

Esta es una ecuación cuadrática especial y se denomina *tipo cuadrático o bicuadrática*. Como es de cuarto grado, tiene cuatro soluciones.

Su forma general es: $ax^4 + bx^2 + 1 = 0$ y se resuelven haciendo el siguiente cambio de variable:

$$u = x^2$$
$$u^2 = x^4$$

Con este cambio, la ecuación original se transforma en una ecuación cuadrática en la variable *u.*

$$au^2 + bu + c = 0$$

1) Resolver la ecuación bicuadrática: $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$.

Sea $u = x^2$, entonces, reemplazando en la ecuación dada, se tiene:
$u^2 = x^4$

$u^2 - 3u + 1 = 0$

$$u_1 = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(1)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

como $u = x^2$

$$x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}$$

Por tanto, hay cuatro soluciones:

$$= \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}};\ -\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}};\ \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = -\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

2) Resolver la ecuación bicuadrática $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Esta es una ecuación *bicuadrática*. Como es de cuarto grado, tiene cuatro soluciones.

Sea: $u = x^2$
$u^2 = x^4$

Reemplazando en la ecuación dada, se tiene:

$u^2 - 13u + 36 = 0$

$$u_1 = \frac{13 + \sqrt{(13)^2 - 4(36)}}{2} = \frac{13 + \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 + \sqrt{25}}{2} = \frac{13 + 5}{2} = 9$$

$$u_2 = \frac{13 - \sqrt{(13)^2 - 4(36)}}{2} = \frac{13 - \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 - \sqrt{25}}{2} = \frac{13 - 5}{2} = 4$$

como $u = x^2$
$u = x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

$u = x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

3) Resolver la ecuación bicuadrática $8x^4 - 6x^2 + 1 = 0$..
Fuente: Álgebra de Carreño y Cruz, p. 235

Sea: $u = x^2$, entonces,
$u^2 = x^4$

Reemplazando en la ecuación dada, se tiene:

$8u^2 - 6u + 1 = 0$

$$u_1 = \frac{6 + \sqrt{(6)^2 - 4(8)}}{16} = \frac{6 + \sqrt{36 - 32}}{16} = \frac{6 + \sqrt{4}}{16} = \frac{6 + 2}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$
$$u_1 = \frac{6 - \sqrt{(6)^2 - 4(8)}}{16} = \frac{6 - \sqrt{36 - 32}}{16} = \frac{6 - \sqrt{4}}{16} = \frac{6 - 2}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

como $x^2 = u$

$$x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x_1 = +\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \pm\frac{1}{2}$$
$$x_3 = +\frac{1}{2}$$

$$x_4 = -\frac{1}{2}$$

4) Resolver la ecuación $\sqrt[3]{x} = 2\sqrt[4]{x}$.

Conviene elevar ambos miembros de la ecuación al producto de 3 y 4 es decir, a 12.

$(\sqrt[3]{x})^{12} = (2\sqrt[4]{x})^{12}$

$x^{12/3} = 2^{12}(x)^{12/4}$
$x^4 = 2^{12}(x)^3$
$x^4/x^3 = 2^{12}$
$x = 2^{12} = 4096$

5) Resolver la ecuación $4^{x+1} + \frac{64}{4^x} = 257$

Conviene usar una incógnita auxiliar: $u = 4^x$

$$4^{x+1} + \frac{64}{4^x} = 257$$
$$4^x(4) + \frac{64}{4^x} = 257$$

$$4u + \frac{64}{u} = 257$$

$$4u^2 + 64 - 257u = 0$$

$$4u^2 - 257u + 64 = 0$$

$$u = \frac{257 \pm \sqrt{66049 - 1024}}{8} = \frac{257 \pm \sqrt{65025}}{8} = \frac{257 \pm 255}{8}$$

$$u_1 == \frac{257 + 255}{8} = \frac{512}{8} = 64$$

$$u_2 == \frac{257 - 255}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Como: $u = 4^x$

$64 = 4^x$

$4^3 = 4^x \Rightarrow x = 3$

$$\frac{1}{4} = 4^x$$

$4^{-1} = 4^x \Rightarrow x = -1$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas mediante la fórmula general:

1) $x^2 + 2x\sqrt{7} = 6$ Sol. $x_1 = -\sqrt{7} - \sqrt{13}$; $x_2 = -\sqrt{7} + \sqrt{13}$
2) $5x^2 + 10x + 1 = 0$ Sol. $x_1 = -1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $x_2 = -1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}$
3) $x^2 + 5 = 0$ Sol. $x_1 = -\sqrt{5i}$; $x_2 = \sqrt{5i}$
4) $x^2 + 29 = 2(2 - 5x)$ Sol. $x_1 = -5$; $x_2 = -5$
5) $x(3x - 4) + 5(2 + x) = 2(3x + 4)$ Sol. $x_1 = \frac{2}{3}$; $x_2 = 1$
6) $x^{2/3} + x^{1/3} - 6 = 0$ Sol. $x_1 = -27$; $x_2 = 8$

Nota: Como este último ejercicio es una ecuación *tipo cuadrático*, usar la incógnita auxiliar: $u = x^{1/3}$.

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas mediante factorización:

1) $x^2 + 8x + 16 = 0$ Sol. $x_1 = -4$; $x_2 = -4$
2) $x^2 - 10x = 0$ Sol. $x_1 = 0$; $x_2 = 10$
3) $2(x - 3)^2 = x(x - 1)$ Sol. $x_1 = 2$; $x_2 = 9$
4) $x^2 - \frac{16}{36} = 0$ Sol. $x_1 = -\frac{2}{3}$; $x_2 = \frac{2}{3}$
5) $x^2 - 16 = 0$ Sol. $x_1 = 4$; $x_2 = -4$

Nota: resolver este último ejercicio, a) Factorizando como la suma por la diferencia y b) sumando 16 a ambos miembros de la ecuación.

Otros ejercicios (tipo PAES):

1) Si el discriminante de la ecuación $3x^2 - 2x + q = 0$ es 64. ¿cuál es el valor de q?

A) 6
B) 5
C) 3
D) -5 (alternativa correcta)
E) -6

FUNCIONES CUADRÁTICAS

Función cuadrática es toda función del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ donde a, b, c son números reales y $a \neq 0$.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES CUADRÁTICAS (LA PARÁBOLA)

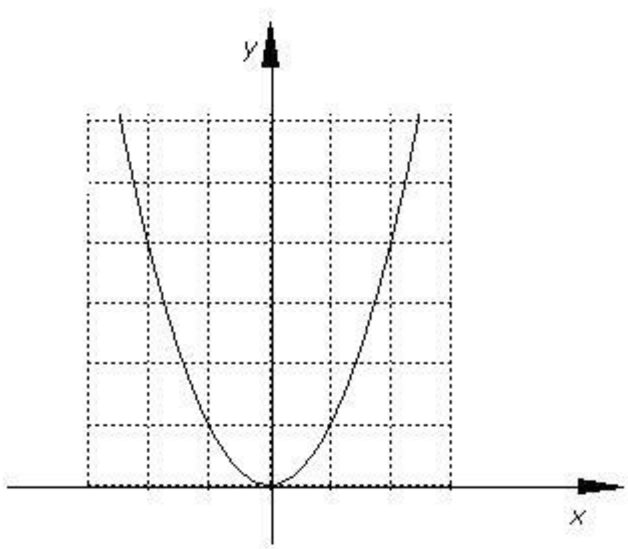
La gráfica de una función cuadrática de la forma $f(x) = y = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales y a es distinto de cero, es una ***parábola***, donde "y" es la variable dependiente (depende de los valores de x) y "x" es la variable independiente.

$a\ y\ b\ se\ llaman\ coeficientes\ númericos\ de\ x^2\ y\ x$
$c = término\ independiente$

Para graficar una función cuadrática, por ejemplo, $f(x) = x^2$, se utiliza una tabla de datos como la siguiente:

$x\ (preimágenes)$	$y = f(x)(imágenes)$	$(x, y)\ pares\ ordenados$
1	1	$(1, 1)$
-1	1	$(-1, 1)$
0	0	$(0, 0)$
2	4	$(2, 4)$
-2	4	$(-2, 4)$

La gráfica de la parábola se obtiene ubicando en el plano cartesiano los pares ordenados.



¿Cómo determinar si un punto del plano pertenece o no a una parábola?

Ejemplo 1**:** Determinar si el punto (1,-1) y (2, 1) pertenecen o no a la parábola:

$$y = x^2 + 3x - 5$$

Para el punto (1, -1). El valor 1 corresponde al valor de x y el -1 al valor de y. Por lo tanto, se reemplazan en la función anterior:
$-1 = 1^2 + 3(1) - 5$

$-1 = 1 + 3 - 5$
$-1 = -1$

Como se cumple la igualdad, entonces el punto (1,-1) pertenece a la parábola.

Para el punto (2,1):
$1 = 2^2 + 3(2) - 5$
$1 = 4 + 6 - 5$
$1 \neq 5$

Como no se cumple la igualdad, el punto (2,1) no pertenece a la parábola.

Ejemplo 2**:** Determinar si los puntos (-4,1) y (4, 23), (5, 45), (10, 125), (-7, -23), (1/2, -13/4) pertenecen o no a la parábola:

$y = x^2 + 3x - 5$

Para el punto (-4, 1). El valor 1 corresponde al valor de x y el -1 al valor de y. Por lo tanto, se reemplazan en la función anterior:

$1 = (-4)^2 + 3(-4) - 5$
$1 = 16 - 12 - 5$
$1 \neq -1$

Como no se cumple la igualdad, entonces el punto (-4,1) no pertenece a la parábola.

Para el punto (4,23):
$23 = 4^2 + 3(4) - 5$
$23 = 16 + 12 - 5$
$23 = 23$

Como se cumple la igualdad, el punto (4,23) pertenece a la parábola.

Para el punto (5,45):
$45 = 5^2 + 3(5) - 5$
$45 = 25 + 15 - 5$
$45 \neq 35$

Como no se cumple la igualdad, el punto (5,45) no pertenece a la parábola.

Para el punto (10,125):
$125 = 10^2 + 3(10) - 5$
$125 = 100 + 30 - 5$
$125 = 125$

Como se cumple la igualdad, el punto (10,125) pertenece a la parábola.

Para el punto (-7,-23):
$-23 = (-7)^2 + 3(-7) - 5$
$-23 = 49 - 21 - 5$
$-23 \neq 23$

Como no se cumple la igualdad, el punto (-7, -23) no pertenece a la parábola.
Para el punto (1/2,-13/4):

$$-\frac{13}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}\right) - 5$$

$$-\frac{13}{4} = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} - \frac{5}{1}$$

$$-\frac{13}{4} = \frac{1 + 6 - 20}{4} = \frac{-13}{4} = -\frac{13}{4}$$

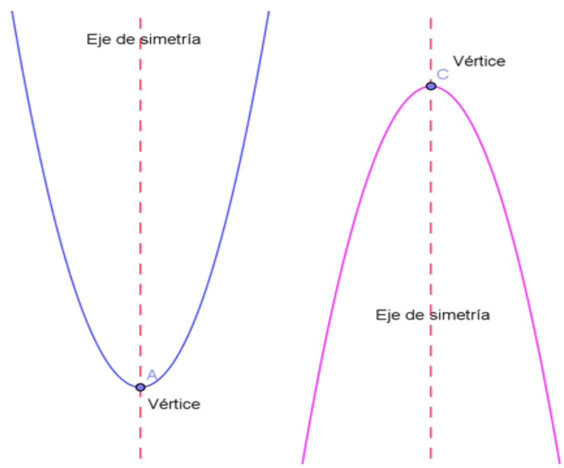
Como se cumple la igualdad, el punto (1/2, -13/4) pertenece a la parábola.

Concavidad de la parábola:

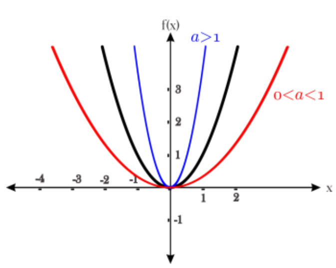
Que la parábola se abra hacia arriba o hacia abajo depende del valor del coeficiente de x^2, es decir, de "a".

Si $a > 0$, la parábola es cóncava hacia arriba y su vértice representa el punto mínimo de la función.

Si $a < 0$, la parábola es cóncava hacia abajo y su vértice representa el punto máximo de la función.



Del valor de "a" depende también la dilatación o contracción de la parábola. Mientras mayor sea el valor absoluto de "a", la parábola se contrae, y mientras menor sea el valor absoluto de "a", la parábola se expande.



Intersección con los ejes del plano cartesiano:

- Intersecciones de la parábola **con el eje Y (de las ordenadas)**: Se obtiene haciendo $x = 0$. Por ello, todos los puntos sobre el eje Y son de la forma $(0, y)$. Si en la función $y = ax^2 + bx + c$ se hace $x = 0$, se tiene:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = a(0) + b(0) + c$$
$$y = 0 + 0 + c$$

$$y = c$$

Por lo tanto, si $x = 0$, entonces $y = c$. Así, el punto de intersección de la parábola con el eje Y es:

$$(0, c)$$

Ejemplo: La parábola representada por la función $y = 2x^2 - 5x + 6$ intersecta al eje Y en el punto $(0, 6)$

- Intersecciones de la parábola **en el eje X (de las abscisas**). Todos los puntos sobre el eje X son de la forma $(x, 0)$, es decir, la coordenada y es igual a cero.

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$0 = ax^2 + bx + c$$

Por lo tanto, hay que resolver la ecuación anterior para obtener los valores de x. Dichos valores se determinan mediante una factorización o aplicando la fórmula de Bhaskara:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A los puntos de intersección de la parábola con el eje X se les llama también *ceros de la función*.

El discriminante: $b^2 - 4ac$, que se denota con la letra *delta (Δ),* determina la naturaleza de las raíces (soluciones) de la ecuación cuadrática.

$$\triangle = b^2 - 4ac$$

Si $\triangle > 0 \Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ y\ x_1 \neq x_2.\ Las\ raíces\ son\ reales\ y\ distintas$. Hay dos intersecciones con el eje X (los puntos $x_1\ y\ x_2$)

Si$\triangle = 0 \Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ y\ x_1 = x_2.\ Las\ raíces\ son\ reales\ e\ iguales$. Hay una sola intersección con el eje X.

Si $\triangle < 0 \Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{C}.\ La\ ecuación\ tiene\ raíces\ complejas\ y\ distintas$. No hay intersección con el eje X.

Ejemplo: Si $y = x^2 + 3x + 2$

$$x_1 = \frac{-3+\sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3+1}{2} = -1$$
$$x_2 = \frac{-3-\sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3-1}{2} = -2$$

Por lo tanto, la parábola intercepta al eje x en los puntos: $(-1,0) y\ (-2,0)$.

Se aprecia que el discriminante $\triangle = \sqrt{9-8} = \sqrt{1} = 1 > 0$, por lo que las raíces son distintas y pertenecen al conjunto de los números reales.

Vértice de la parábola:

Las coordenadas del vértice de la parábola son: $V\left(-\frac{b}{2a}, -(\frac{b^2-4ac}{4a})\right)$. En el vértice, la función cuadrática toma su valor máximo o mínimo. También se suele también representar así: $(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right))$, ya que si $(x = -\frac{b}{2a})$ se reemplaza en $ax^2 + bx + c = 0$, se llega a – $(\frac{b^2-4ac}{4a})$.

Eje de simetría:

El eje de simetría es: $x = -\frac{b}{2a}$

Alternativamente, se puede calcular como la semisuma de las raíces de la ecuación cuadrática:

$$\boxed{\mathrm{x} = \frac{(\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2)}{2}}$$

Dominio y recorrido de una función cuadrática:

Dominio: Es el conjunto de los números reales.

Recorrido: Depende de la concavidad.

Si a >0: $Rec\ (f) = [-(\frac{b^2-4ac}{4a}) + \infty)$.

Si a <0: $Rec\ (f) = (-\infty, -(\frac{b^2-4ac}{4a})]$

Representación gráfica en el plano cartesiano de una función cuadrática:

- Si la gráfica de la función cuadrática intercepta al eje X en dos puntos, tales puntos son soluciones o raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.
- Si la gráfica es tangente (toca al eje X en un solo punto), la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ solo tiene una raíz cuyo valor es $-\frac{b}{2a}$.

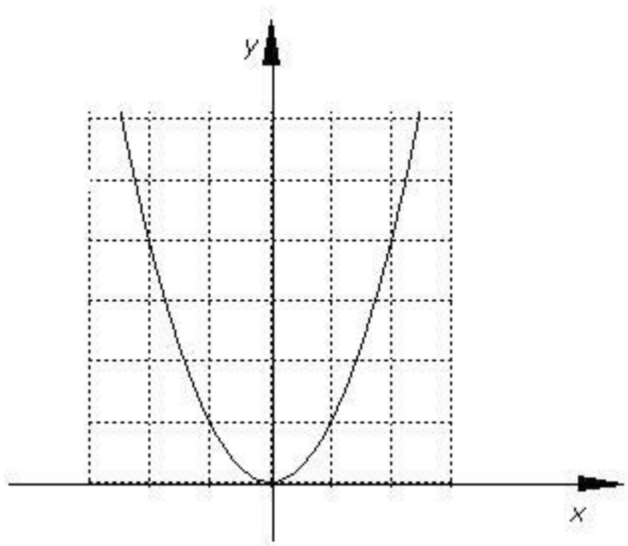
Si la gráfica no intercepta al eje de las X, entonces las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ no son reales (pertenecen al conjunto de los números complejos).

Para graficarla se eligen valores para x y luego se reemplazan en la función para obtener los correspondientes valores para y.

<u>Ejemplo 1</u>: Representar gráficamente $y = x^2$, donde:

$a = 1$
$b = 0$
$c = 0$
Para representarla, se confecciona una tabla de valores como sigue:
Nota: $\left(x, f(x)\right)$ *es equivalente a* (x, y)

x	y	$\left(x, f(x)\right)$
-2	4	(-2, 4)
-1	1	(-1, 1)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	4	(2, 4)

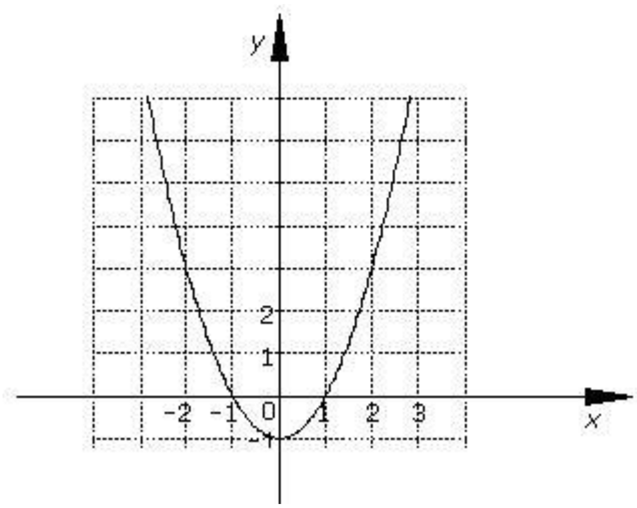


<u>Ejemplo 2</u>: Gráfica de la función cuadrática: $y = x^2 - 1$

$a = 1$
$b = 0$
$c = -1$

Para representarla, se confecciona una tabla de valores como sigue:

x	y	$\left(x, f(x)\right)$
-2	3	(-2, 3)
-1	0	(-1, 0)
0	-1	(0, -1)
1	0	(1, 0)
2	3	(2, 3)



<u>Ejemplo 3</u>: ¿Graficar la función: $y = x^2 + 5x - 6$ y determinar:

a) Puntos en los que la parábola corta al eje X.
b) Cuáles son sus raíces.
c) Cuáles son las coordenadas del vértice de la parábola.
d) La concavidad de la parábola y qué representa su vértice.

x	y	$(x, f(x))$
-6	0	(-6, 0)
-5	-6	(-5, -6)
-4	-10	(-4, -10)
-3	-12	(-3,-12)
-5/2	-49/4	(-5/2, -49/4)
-2	-12	(-2, -12)
-1	-10	(-1, -10)
0	-6	(0, -6)
1	0	(1, 0)

a) La parábola corta el eje de las X en los valores $x = -6;\ x = 1$ porque en esos valores el valor de y es cero.
b) Las raíces $x = -6\ o\ x = 1$
c) Como $a = 1;\ b = 5;\ c = -6$. $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right) = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{25+24}{4}\right) = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{49}{4}\right)$, es decir, el vértice tiene como abscisa $x = -\frac{5}{2}$ y ordenada $y = -\frac{49}{4}$.
d) La concavidad de la parábola es hacia arriba porque $a > 0$ y su vértice representa el punto mínimo de la función.

<u>Ejemplo 4</u>: ¿Graficar la función: $y = x^2 + x + 1$ y determinar:

a) Puntos en los que la parábola corta al eje X.
b) Cuáles son sus raíces.
c) Cuáles son las coordenadas del vértice de la parábola.
d) La concavidad de la parábola y qué representa su vértice.

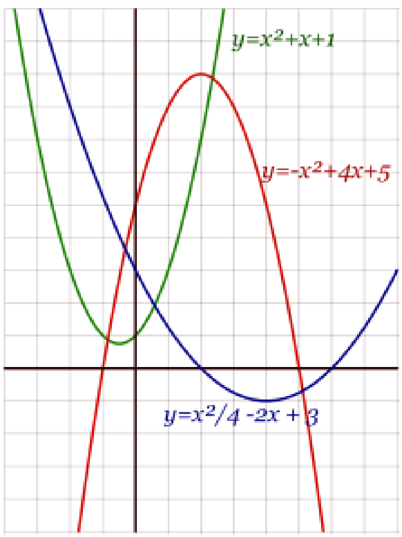
x	y	$(x, f(x))$
-4	13	(-4, 13)
-3	7	(-3, 7)
-2	3	(-2, 3)
-1	1	(-1, 1)
0	1	(0, 1)
1	3	(1, 3)
2	7	(2, 7)
3	13	(3, 13)

a) La parábola no corta al eje x.

b) Las raíces son: $y = \frac{(-1 \pm 2i)}{2} = -\frac{1}{2} \pm i$

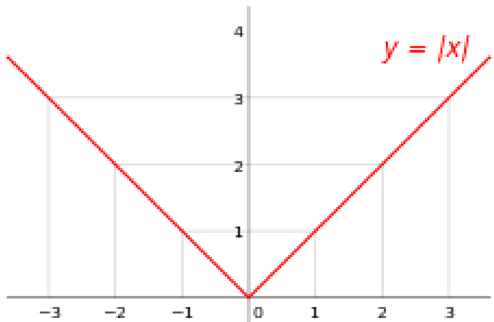
c) Las coordenadas del vértice son: $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1-4}{4(1)}) = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$

d) La concavidad de la parábola es hacia arriba porque $a > 0$ y su vértice representa el punto mínimo de la función.



Ejemplo 5: Graficar la función: $y = |x|$

x	y	$(x, f(x))$
-3	3	(-3, 3)
-2	2	(-2, 2)
-1	1	(-1, 1)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	2	(2, 2)
3	3	(3, 3)



Ejemplo 6: Graficar la función: $y = |x| + 2$

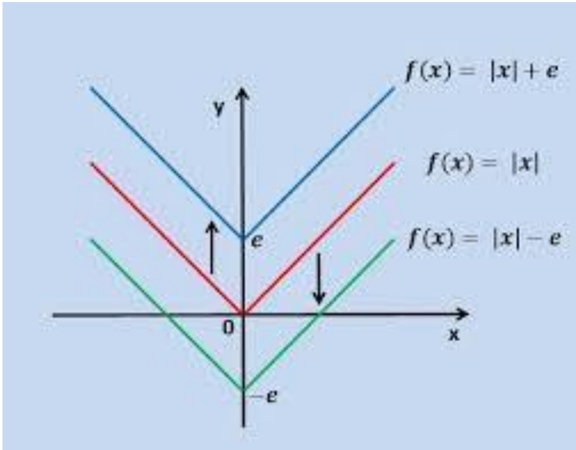
x	y	$(x, f(x))$
-3	3+2	(-3, 5)
-2	2+2	(-2, 4)
-1	1+2	(-1, 3)
0	0+2	(0, 2)
1	1+2	(1, 3)
2	2+2	(2, 4)
3	3+2	(3, 5)

La gráfica es la misma que $y = |x|$, excepto que está desplazada 2 unidades hacia arriba.
Ejemplo 7: Graficar la función: $y = |x| - 2$

x	y	$(x, f(x))$
-3	3-2	(-3, 1)
-2	2-2	(-2, 0)
-1	1-2	(-1, 1)
0	0-2	(0, -2)
1	1-2	(1, -1)
2	2-2	(2, 0)
3	3-2	(3, 1)

La gráfica es la misma que $y = |x|$, excepto que está desplazada 2 unidades hacia abajo.

En la gráfica siguiente se representa $y = |x|$; $y = |x| + 2$; $y = |x| - 2$, donde la letra "e" es +2 y -2, respectivamente.



Nota: Si f es una función y "e" es un número positivo, entonces:

- La gráfica de $y = f(x) + e$ es idéntica a la gráfica de $y = f(x)$, excepto que se traslada "e" unidades hacia arriba.
- La gráfica de $y = f(x) - e$ es idéntica a la gráfica de $y = f(x)$, excepto que se traslada "e" unidades hacia abajo.
- Por ejemplo: $f(x) = x^2 + 3$ *es idéntica a* $f(x) = x^2$, solo que está desplazada 3 unidades hacia arriba. $f(x) = x^2 - 3$ *es idéntica a* $f(x) = x^2$, solo que está desplazada 3 unidades hacia abajo.

Ejemplo 8**:** La función $s = -16t^2 + 128t$ es una parábola. a) ¿cuál es su concavidad? y b) ¿cuáles son las coordenadas de su vértice?, c) ¿en qué puntos la parábola corta al eje X?

Solución a):

$a = -16$. Como "a" es negativo, la parábola abre hacia abajo.

Solución b): Tener presente que el término independiente es $c = 0$

V= $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right) = (-\frac{128}{-32}, -\frac{(16384-4(-16)(0))}{-4(16)}) = (4, 256)$

Solución c): Dado que $b^2 - 4ac > 0$ hay dos raíces reales e iguales y se determinan mediante la fórmula general:
$-16t^2 + 128t + 0 = 0$

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-128 + \sqrt{16384 - 0}}{-32} = \frac{-128 + 128}{32} = 0$$

$$t_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-128 - \sqrt{16384 - 0}}{-32} = \frac{-128 - 128}{-32} = -\frac{256}{-32} = 8$$

La parábola corta al eje X en los puntos $t_1 = 0$; $t_2 = 8$.

Ejemplo 9: La ecuación $y - 2 = (x - 5)^2$ representa una función cuadrática cuya gráfica es una parábola. Encuentre su vértice.

Desarrollando:
$y = x^2 - 10x + 25 + 2$
$x^2 - 10x + 27 = 0$

V= $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right) = (-\frac{-10}{2}, -\frac{100-108}{4}) = (5, -\frac{-8}{4}) = (5,2)$

Ejemplo 10: Si una pelota se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 48 pies por segundo, su altura s después de t segundos está dada por la ecuación: $s = 48t - 16t^2$. Encuentre la altura máxima que alcanza la pelota y el tiempo que tarda en regresar al suelo.
Fuente: Álgebra intermedia, p. 533.

Solución: La gráfica de la ecuación dada es una parábola.

$48t - 16t^2 = 0$
$-16t^2 + 48t + 0 = 0$

La altura máxima viene dada por la ordenada del vértice:

V= $\left(-\frac{48}{-32}, -\frac{2304}{-64}\right) = (\frac{3}{2}, 36)$

Por tanto, la altura máxima corresponde a la ordenada 36 pies.

Para encontrar el tiempo que tarda en regresar al suelo (cortar el eje x), se debe encontrar las raíces de la función cuadrática:

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{48 + \sqrt{2304 - 0}}{32} = \frac{48 + 48}{32} = 3\ segundos$$

$$t_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{48 - \sqrt{2304 - 0}}{32} = \frac{48 - 48}{32} = 0$$

La pelota tarda 3 segundos en regresar al suelo.

Ejemplo 11: Determine la concavidad, coordenadas del vértice, la naturaleza de las raíces de la siguiente parábola y el punto donde se corta el eje Y.
$y = -x^2 + 2x - 4$

Solución:

- Concavidad: como $a < 0$, la parábola es cóncava hacia abajo.
- Vértice V:

V= $\left(-\frac{2}{-2}, -\frac{4-16}{-4}\right) = \left(1, -\frac{12}{4}\right) = (1, -3)$

- Naturaleza de las raíces:

Calcular $b^2 - 4ac$. $b^2 - 4ac = 4 - 16 = -12 < 0$, entonces, las raíces no son reales.

Corte en el eje Y: Se hace x = 0 en la función: $y = -0^2 + 2(o) - 4 = -4$ (corresponde al término $c = -4$ de la ecuación cuadrática).

Por lo tanto, la parábola corta al eje Y en el punto -4.

<u>Ejemplo 12</u>: Encontrar dos números cuya suma sea 20 y su producto sea máximo.

Primer número = x
Segundo número = $20 - x$
Producto = $x(20 - x) = 20x - x^2$

Se define la función cuadrática (parábola): $f(x) = 20x - x^2 = 0$

Como a < 0, la parábola es cóncava hacia abajo.

V= $\left(-\frac{20}{-2}, -\frac{400-0}{-4}\right) = (10, 100)$

El primer número es $x = 10$ y el segundo es $20 - x = 20 - 10 = 10$. Por lo tanto, los valores son 10 y 10. El producto de ambos da 100, que es la altura máxima que alcanza la parábola.

<u>Ejemplo 13</u>: Encontrar dos números cuya suma sea 100 y su producto sea máximo.

Primer número = x
Segundo número = $100 - x$
Producto = $x(100 - x) = 100x - x^2$

Se define la función cuadrática (parábola): $f(x) = 100x - x^2 = 0$

Como a < 0, la parábola es cóncava hacia abajo.

V= $\left(-\frac{100}{-2}, -\frac{10.000-0}{-4}\right) = (50, 2.500)$

El primer número es $x = 50$ y el segundo es $100 - x = 100 - 50 = 50$. Por lo tanto, los valores son 50 y 50. El producto de ambos da 2.500 que es la altura máxima que alcanza la parábola.

<u>Ejemplo 14</u>: Encontrar dos números cuya diferencia sea 20 y su producto sea mínimo.

Primer número = x
Segundo número = x + 20
Producto = $x(x + 20) = x^2 + 20x$

Se define la función cuadrática (parábola): $f(x) = x^2 + 20x = 0$

Como a > 0, la parábola es cóncava hacia arriba.

V= $\left(-\frac{20}{2}, -\frac{400-0}{4}\right) = (-10, -100)$

El primer número es $x = -10$ y el segundo es: $x + 20 = -10 + 20 = 10$. Por lo tanto, los valores son --10 y 10. El producto de ambos da -100 que es la altura mínima que alcanza la parábola.

Ejemplo 15: Encontrar el eje de simetría de la función cuadrática: $f(x) = 5x^2 - 6x + 8$

Método 1:

Es decir, el eje de simetría corta al eje de las X en el punto $x = \frac{3}{5}$

Método 2: Encontrar las raíces de la ecuación, sumarlas y el resultado dividirlo entre 2.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 + \sqrt{36 - 160}}{10} = \frac{6 + \sqrt{-124}}{10} = \frac{6 + \sqrt{-1}\,\sqrt{4}\sqrt{31}}{10} = \frac{6 + 2i\sqrt{31}}{10} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} i\sqrt{31}$$

$$x_2 = \frac{6 - \sqrt{36 - 160}}{10} = \frac{6 - \sqrt{-124}}{10} = \frac{6 - \sqrt{-1}\,\sqrt{4}\sqrt{31}}{10} = \frac{6 - 2i\sqrt{31}}{10} = \frac{3}{5} - \frac{1}{5} i\sqrt{31}$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{3}{5} + \frac{1}{5} i\sqrt{31} + \frac{3}{5} - \frac{1}{5} i\sqrt{31}}{2} = \frac{\frac{6}{5}}{2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Ejemplo 16: Analizar la función: $f(x) = x^2 + c$ con $c \in \mathbb{R}$

Análisis:

$a = 1$
$b = 0$
$c = c$

- El discriminante $\triangle = b^2 - 4ac = 0^2 - 4(1)(c) = -4c$ Como $\Delta < 0$, la función (una parábola) no tiene raíces reales sino complejas.

- Las raíces complejas son:

$$x^2 + c = 0$$
$$x^2 = -c$$
$$x = \pm\sqrt{-c} = \pm i\sqrt{c}$$

- Concavidad: La define el valor del coeficiente "a". Como $a = 1$, entonces $a > 0$, es decir, positivo, por lo que la parábola es cóncava hacia arriba.

- Eje de simetría: $x = -\frac{b}{2a} = \frac{0}{2a} = 0$, es decir, el eje de simetría coincide con el eje Y del plano cartesiano.

- Vértice de la parábola:

  V$= \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right) = \left(0, -\frac{0-4c}{4}\right) = \left(0, \frac{4c}{4}\right) = (0, c)$

El valor de c en el vértice de la parábola va a determinar su posición en el plano cartesiano. Por ejemplo, si $c = 1$ La parábola ubicará su vértice 1 unidad sobre el 0 en el eje Y. Si $c = 2$ lo ubicará 2 unidades sobre el 0 en el eje Y; si es $c = -1$, su vértice se posicionará 1 unidad por debajo del origen del plano cartesiano sobre el eje Y.

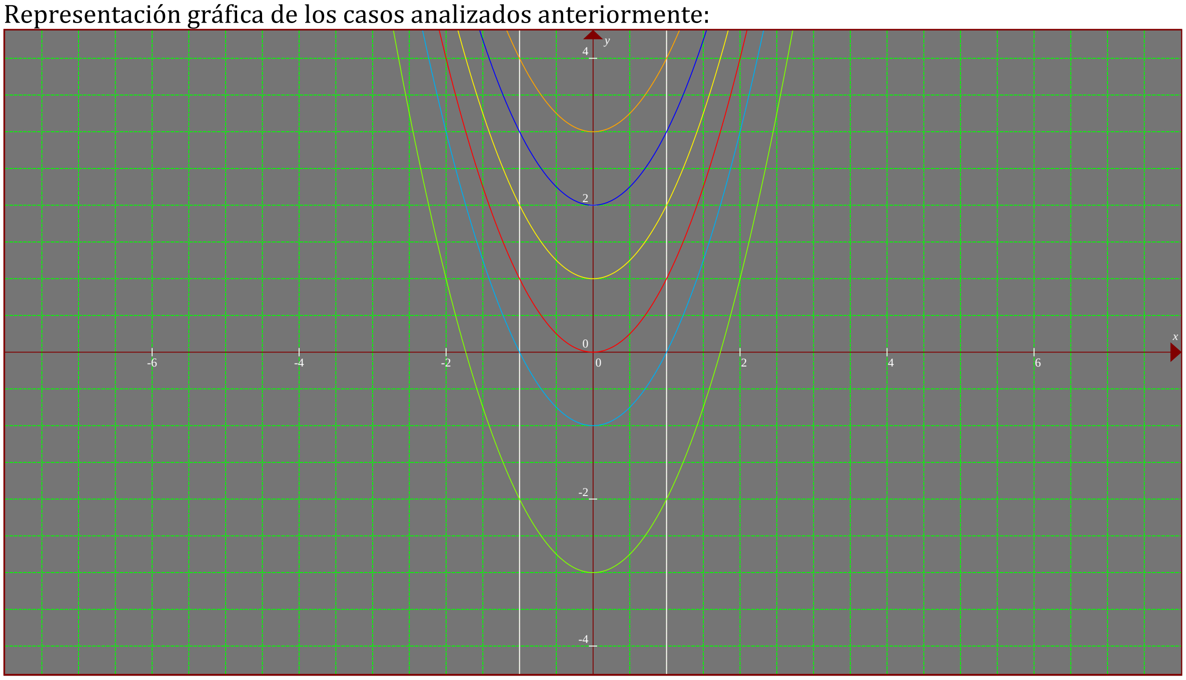
- Gráfico de la función: Simétrica al eje Y, ya que su eje de simetría coincide con dicho eje.

- Posición de la parábola en el plano cartesiano, según los valores que asume “c”. Si $c > 0$, la parábola se traslada c unidades hacia arriba y si $c < 0$, la parábola se traslada c unidades hacia abajo.

Valor c	Función	Eje simetría $x = \frac{-b}{2a}$	Concavidad	Raíces (soluciones) $\triangle = b^2 - 4ac$	Vértice V= $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$
Si $c = 0$	$f(x)) = x^2$	$x = \frac{-0}{2(1)} = 0$	$a > 0 \Rightarrow abre\ hacia\ arriba$	$\triangle = 0^2 - 4(1)(0)$ $\triangle = 0$ Como $\triangle = 0$ $Raíces\ reales\ e\ iguales$	V= $\left(-\frac{0}{2(1)}, -\frac{0^2-4(1)(0)}{4(1)}\right)$ V= (0,0)
Si $c = 1$	$f(x)) = x^2 + 1$	$x = \frac{-0}{2(1)} = 0$	$a > 0 \Rightarrow abre\ hacia\ arriba$	$\triangle = 0^2 - 4(1)(1)$ $\triangle = -4$ Como $\triangle < 0$ $Raíces\ imaginarias$	V= $\left(-\frac{0}{2(1)}, -\frac{0^2-4(1)(1)}{4(1)}\right)$ V= (0,1) La parábola se traslada 1 unidad hacia arriba en el plano cartesiano a partir del origen. Nota: Cuando $c > 0$ la parábola se traslada hacia arriba.
Si $c = 2$	$f(x)) = x^2 + 2$	$x = \frac{-0}{2(1)} = 0$	$a > 0 \Rightarrow abre\ hacia\ arriba$	$\triangle = 0^2 - 4(1)(2)$ $\triangle = -8$ Como $\triangle < 0$ $Raíces\ imaginarias$	V= $\left(-\frac{0}{2(1)}, -\frac{0^2-4(1)(2)}{4(1)}\right)$ V= (0,2) La parábola se traslada 2 unidades hacia arriba en el plano cartesiano a partir del origen. Nota: Cuando $c > 0$ la parábola se traslada hacia arriba.
Si $c = 3$	$f(x)) = x^2 + 3$	$x = \frac{-0}{2(1)} = 0$	$a > 0 \Rightarrow abre\ hacia\ arriba$	$\triangle = 0^2 - 4(1)(3)$ $\triangle = -12$ Como $\triangle < 0$ $Raíces\ imaginarias$	V= $\left(-\frac{0}{2(1)}, -\frac{0^2-4(1)(3)}{4(1)}\right)$ V= (0,3) La parábola se traslada 3 unidades hacia arriba en el plano cartesiano a partir del origen. Nota: Cuando $c > 0$ la parábola se traslada hacia arriba.

Si $c = -1$	$f(x)) = x^2 - 1$	$x = \frac{-0}{2(1)} = 0$	$a > 0 \Longrightarrow abre$ $hacia\ arriba$	$\triangle = 0^2 - 4(1)(-1)$ $\triangle = 4$ Como $\triangle > 0$ $Raíces\ reales$ $y\ diferentes$	V= $\left(-\frac{0}{2(1)}, -\frac{0^2-4(1)(-1)}{4(1)}\right)$ V= $(0, -1)$ La parábola se traslada 1 unidad hacia abajo en el plano cartesiano a partir del origen. Nota: Cuando $c < 0$ la parábola se traslada hacia abajo.
Si $c = -2$	$f(x)) = x^2 - 2$	$x = \frac{-0}{2(1)} = 0$	$a > 0 \Longrightarrow abre$ $hacia\ arriba$	$\triangle = 0^2 - 4(1)(-2)$ $\triangle = 8$ Como $\triangle > 0$ $Raíces\ reales$ $y\ diferentes$	V= $\left(-\frac{0}{2(1)}, -\frac{0^2-4(1)(-2)}{4(1)}\right)$ V= $(0, -2)$ La parábola se traslada 2 unidades hacia abajo en el plano cartesiano a partir del origen. Nota: Cuando $c < 0$ la parábola se traslada hacia abajo.

Representación gráfica de los casos analizados anteriormente:



Ejemplo 17: Analizar la función: $f(x) = (x+h)^2$ con $h \in \mathbb{R}$

Análisis:

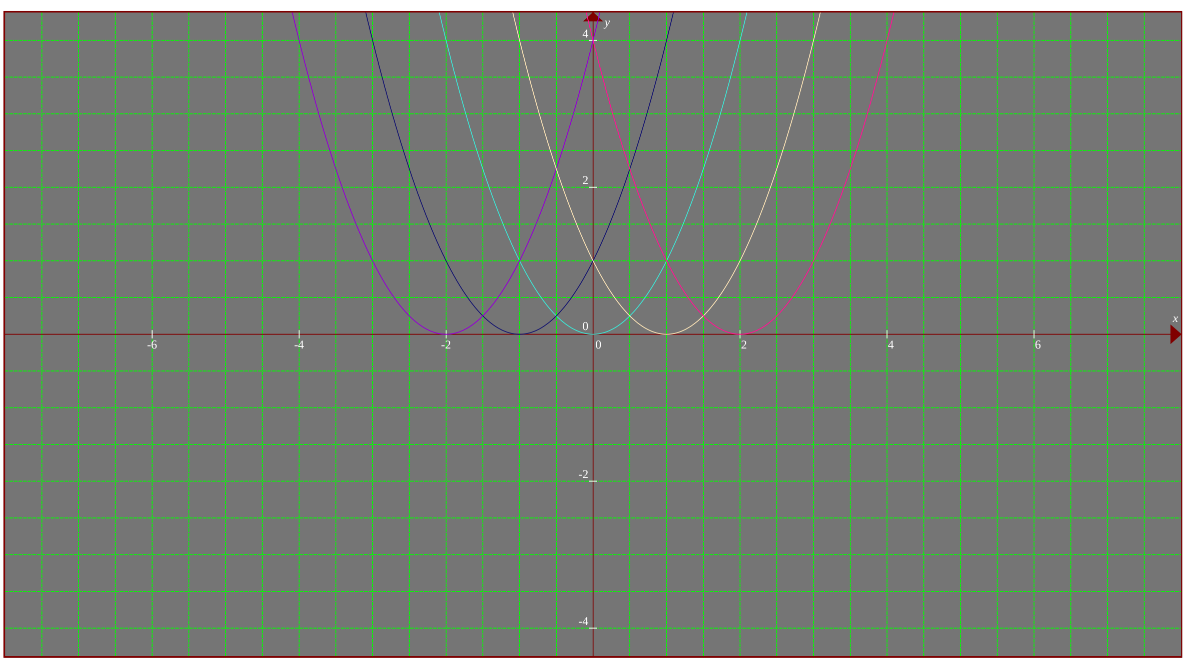
$f(x) = x^2 + 2xh + h^2$

$a = 1$
$b = 2h$
$c = h^2$

Valor h	Función	Eje simetría $x = \frac{-b}{2a}$	Concavidad	Raíces (soluciones) $\triangle = b^2 - 4ac$	Vértice V= $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$
Si $h = 0$	$f(x)) = x^2$	$x = \frac{-0}{2(1)} = 0$	$a > 0$ $\Longrightarrow abre$ $hacia\ arriba$	$\triangle = (2h)^2 - 4(1)(h^2)$ $\triangle = 4h^2 - 4h^2 = 0$ Como $\triangle = 0$ $Raíces\ reales\ e\ igu$	V= $\left(-\frac{2h}{2(1)}, -\frac{4h^2-4(1)(h^2)}{4(1)}\right)$ $\left(-\frac{2(0)}{2(1)}, -\frac{4(0)^2-4(1)(0^2)}{4(1)}\right)$ V= $(0,0)$ La parábola tiene su vértice en el origen del plano cartesiano.
Si $h = 1$	$f(x)) = x^2 + 2x + 1$	$x = \frac{-0}{2(1)} = 0$	$a > 0$ $\Longrightarrow abre$ $hacia\ arriba$	$\triangle = (2)^2 - 4$ $\triangle = 0$ Como $\triangle = 0$ $Solo\ una\ raíz\ real$	V= $\left(-\frac{2}{2(1)}, -\frac{4-4(1)(1)}{4(1)}\right)$ V= $(-1,0)$ La parábola se traslada 1 unidad hacia la izquierda en el plano cartesiano a partir del origen. Nota: Cuando $h > 0$, la parábola se traslada hacia la izquierda.
Si $h = 2$	$f(x)) = x^2 + 4x + 4$	$x = \frac{-0}{2(1)} = 0$	$a > 0$ $\Longrightarrow abre$ $hacia\ arriba$	$\triangle = (4)^2 - 4(1)(4)$ $\triangle = 16 - 16 = 0$ Como $\triangle = 0$ $Solo\ una\ raíz\ real$	V= $\left(-\frac{4}{2(1)}, -\frac{16-4(1)(4)}{4(1)}\right)$ V= $(-2,0)$ La parábola se traslada 2 unidades hacia la izquierda en el plano cartesiano a partir del origen. Nota: Cuando $h > 0$, la parábola se traslada hacia la izquierda.

Si $h = -1$	$f(x)) = x^2 - 2x + 1$	$x = \frac{-0}{2(1)} = 0$	$a > 0 \Longrightarrow abre\ hacia\ arriba$	$\triangle = (-2)^2 - 4$ $\triangle = 4 - 4 = 0$ Como $\triangle = 0$ *Solo una raíz real*	V= $\left(-\frac{-2}{2(1)}, -\frac{4-4(1)(1)}{4(1)}\right)$ V= $(1{,}0)$ La parábola se traslada 1 unidad hacia la derecha en el plano cartesiano a partir del origen. Nota: Cuando $h < 0$, la parábola se traslada hacia la derecha.
Si $h = -2$	$f(x)) = x^2 - 4x + 4$	$x = \frac{-0}{2(1)} = 0$	$a > 0 \Longrightarrow abre\ hacia\ arriba$	$\triangle = (-4)^2 - 4(1)(4)$ $\triangle = 16 - 16 = 0$ Como $\triangle = 0$ *Solo una raíz real*	V= $\left(-\frac{-4}{2(1)}, -\frac{16-4(1)(4)}{4(1)}\right)$ V= $(2{,}0)$ La parábola se traslada 2 unidades hacia la derecha en el plano cartesiano a partir del origen. Nota: Cuando $h < 0$, la parábola se traslada hacia la derecha.

Representación gráfica de los casos analizados anteriormente:



Ejemplo 18: Analizar la función: $f(x) = (x-2)^2$ con $x \in \mathbb{R}$

Análisis:
$f(x) = x^2 - 4x + 4$

$a = 1$
$b = -4$
$c = 4$

- El discriminante $\triangle = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(4) = 16 - 16 = 0$ Como $\Delta = 0$, la función (una parábola) tiene raíces reales e iguales, es decir, $x_1 = x_2$.

- Las raíces reales son:
  $x^2 - 4x + 4 = 0$
  $(x-2)(x-2) = 0$
  $x - 2 = 0$
  $x_1 = 2$

  $x - 2 = 0$
  $x_2 = 2$

- Concavidad: La define el valor del coeficiente "a". Como $a = 1$, entonces $a > 0$, es decir, positivo, por lo que la parábola es cóncava hacia arriba.

- Eje de simetría: $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2(1)} = 2$, es decir, el eje de simetría se ubica dos unidades a la derecha del eje Y, en $(2, 0)$.

- Vértice de la parábola:

  V= $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right) = \left(2, -\frac{16-16}{4}\right) = (2,0)$

- Gráfico de la función: Una parábola desplazada 2 unidades hacia la izquierda del origen del plano cartesiano, con vértice en el punto (2,0) y su concavidad es hacia arriba.

Ejemplo 19: ¿Cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la parábola de función $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 6$?

I. (4, -2)
II. (-2, 13)
III. (-1, 37/4)

a) Solo I
b) Solo I y II
c) Solo I y III
d) Solo II y III
e) I, II y III

Solución:
Probando I) (4, -2)

$$f(x) = y = \frac{1}{4}(4)^2 - 3(4) + 6 = 4 - 12 + 6 = -2$$

Se cumple que x = 4 e y=-2, por tanto, I) es punto de la parábola.

Probando II) (-2, 13)

$$f(x) = y = \frac{1}{4}(-2)^2 - 3(-2) + 6 = 1 + 6 + 6 = 13$$

Se cumple que x = -2 e y=13, por tanto, II) es punto de la parábola.

Probando III) (-1,37/4)

$$f(x) = y = \frac{1}{4}(-1)^2 - 3(-1) + 6 = \frac{1}{4} + 3 + 6 = 37/4$$

Se cumple que x = -1 e y=37/4, por tanto, III) es punto de la parábola.

Por consiguiente, la alternativa correcta es la c) = I, II, III.

EJERCICIOS VARIOS

<u>Ejercicio 1</u>: (Fuente: guía Sofía)

Encontrar las soluciones reales de la ecuación: $P(x) = 2x^4 - 32x^2 = 0$

Solución:

$2x^2(x^2 - 16) = 0$
$2x^2 = 0$
$x^2 = 0$
$x = 0$

$(x^2 - 16) = 0$
$x^2 = 16$
$x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$

Por tanto, las raíces reales son (0, 4, -4).

<u>Ejercicio 2</u>: (Fuente: guía Sofía)

Encontrar las soluciones reales de la ecuación: $x^2 + 5x - \sqrt{x^2 + 5x} = 42$

Un primer camino de solución sería dejar en un solo miembro de la ecuación al término radical y luego elevar ambos miembros al cuadrado:

$x^2 + 5x - 42 = \sqrt{x^2 + 5x}$

Elevando al cuadrado:

$(x^2 + 5x - 42)^2 = x^2 + 5x$

Continuar por este camino es largo y engorroso, por lo que se recomienda utilizar incógnitas auxiliares y proceder como sigue:

Dado que $x^2 + 5x$ está también en la cantidad subradical, sea:

$x^2 + 5x = u$

$u - \sqrt{u} = 42$
$u - 42 = \sqrt{u}$

Elevando ambos miembros al cuadrado:

$(u - 42)^2 = u$

$u^2 - 84u + 1764 = u$
$u^2 - 85u + 1764 = 0$

$$u = \frac{85 \pm \sqrt{85^2 - 4(1)(1764)}}{2} = \frac{85 \pm \sqrt{7225 - 7056}}{2} = \frac{85 \pm \sqrt{169}}{2}$$
$$u_1 = \frac{85 + \sqrt{169}}{2} = \frac{85 + 13}{2} = \frac{98}{2} = 49$$

$$u_2 = \frac{85 - \sqrt{169}}{2} = \frac{85 - 13}{2} = \frac{72}{2} = 36$$

$$x^2 + 5x = 49$$
$$x^2 + 5x - 49 = 0$$
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 + 4(1)(49)}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{221}}{2}$$
$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{221}}{2}$$
$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{221}}{2}$$

<u>Ejercicio 3</u>: (Fuente: Proschle edición 1981, p. 208)

Encontrar las soluciones reales de la ecuación:

$$\sqrt{\frac{3x - 4}{x - 5}} + \sqrt{\frac{x - 5}{3x - 4}} = \frac{5}{2}$$

Sea:

$$\sqrt{\frac{3x - 4}{x - 5}} = u$$

$$\sqrt{\frac{x - 5}{3x - 4}} = \frac{1}{u}$$

Nota: Para demostrar esta última igualdad hay que elevar al cuadrado la expresión $\sqrt{\frac{3x-4}{x-5}} = u$, luego dividir ambos miembros entre $3x - 4$, pasar (u^2) al segundo miembro y extraer raíz de ambos miembros (hacerlo solo para comprobar).

Volviendo al ejercicio:

$$u + \frac{1}{u} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{(u^2 + 1)}{u} = \frac{5}{2}$$

$$2u^2 + 2 = 5u$$
$$2u^2 - 5u + 2 =$$

$$u = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4(2)(2)}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$$
$$u_1 = \frac{5 + 3}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$u_2 = \frac{5 - 3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{\frac{3x-4}{x-5}} = u$$
$$\sqrt{\frac{3x-4}{x-5}} = 2$$

Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$\frac{3x-4}{x-5} = 4$$
$$3x - 4 = 4x - 20$$
$$-x = -16$$

$$\boxed{x = 16}$$

$$\sqrt{\frac{3x-4}{x-5}} = u$$
$$\sqrt{\frac{3x-4}{x-5}} = \frac{1}{2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$\frac{3x-4}{x-5} = \frac{1}{4}$$

$$12x - 16 = x - 5$$
$$11x = 11$$
$$\boxed{x = 1}$$

<u>Ejercicio 4</u>: (Fuente: Guía Sofía)

$$\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 1$$
$$\sqrt{2x+3} = 1 + \sqrt{x+1}$$
$$2x + 3 = 1 + 2\sqrt{x+1} + x + 1$$
$$2x + 3 - 1 - x - 1 = +2\sqrt{x+1}$$
$$x + 1 = 2\sqrt{x+1})$$
$$(x+1)^2 = 4(x+1)$$
$$x^2 + 2x + 1 = 4x + 4$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4(3)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{2+4}{2} = 3$$
$$x_1 = \frac{2-4}{2} = -1$$

Solución $(3, -1)$

Ejercicio 5: (Fuente: Youtube. Matemática con Juan)

$(x+2)^2 = 4$

Se extrae raíz cuadrada en ambos miembros:

$\sqrt{(x+2)^2} = \sqrt{4}$

Como la raíz cuadrada de una potencia al cuadrado es su valor absoluto:

$|x+2| = \sqrt{4}$

$|x+2| = 2$

$x+2 = \pm 2$

$x_1 = +2-2 = 0$
$x_2 = -2-2 = -4$

Alternativamente se puede plantear como sigue:

$\sqrt{(x+2)^2} = \sqrt{4}$

$(x+2)^{\frac{2}{2}} = \pm\sqrt{4}$

$x+2 = \pm\sqrt{4}$
$x+2 = \pm 2$

$x_1 = +2-2 = 0$
$x_2 = -2-2 = -4$

Ejercicio 6: Una persona invierte \$10.000.000 en un depósito a plazo que rinde interés compuesto. ¿Cuál es la tasa de interés anual si el dinero, al cabo de 2 años, crece a \$11.000.000?

Hay que recordar que, si se depositan P pesos en una cuenta a interés compuesto y el interés que el banco paga anualmente es i, la cantidad S de la cuenta al cabo de n años se calcula aplicando la siguiente fórmula:

$$S = P(1+i)^n$$

Datos:
$S = 11.000.000$
$P = 10.000.000$
$n = 2$
$i = ?$

$11.000.000 = 10.000.000(1+i)^2$

$\frac{11.000.000}{10.000.000} = (1+i)^2$

$(1+i)^2 = 1{,}1$

$1+i = \pm\sqrt{1{,}1}$

$1 + i = \pm\, 1{,}0488$

$1 + i = +\, 1{,}0488 \rightarrow i = 1{,}0488 - 1 = 0{,}0488 = 4{,}88\%$

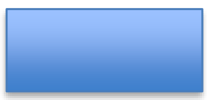
$1 + i = -\, 1{,}0488 \rightarrow i = -1{,}0488 - 1 = -2{,}0488 = -2{,}0488\%$

Como la tasa de interés no puede ser negativa, la respuesta es que la tasa de interés ganada en el período fue del 4,88%.

Ejercicio 7: Un rectángulo mide x de ancho y $x\ + 12$ de largo. Si su área es 253 cm^2, ¿Cuáles son sus dimensiones)

$x\ + 12$

x



$Área\ rectángulo\ es\ ancho\ x\ largo$

$x \cdot (x + 12) = 253$

$x^2 + 12x - 253 = 0$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 + (4)(1)(253)}}{2(1)} = \frac{-12 \pm \sqrt{1156}}{2} = \frac{-12 \pm 34}{2}$$

$$x_1 = \frac{-12 + 34}{2} = \frac{22}{2} = 11$$

$$x_2 = \frac{-12 - 34}{2} = -\frac{46}{2} = -23$$

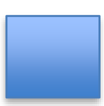
Como los lados del rectángulo son valores positivos, se usa $x_1 = 11$.

$Ancho\ x = 11$
$Largo\ x + 12 = 11 + 12 = 23$

$Área = 11 \cdot 23 = 253\ cm^2$

Ejercicio 8: El área de un cuadrado es numéricamente igual a su perímetro. Encuentre la longitud de cada lado del cuadrado.

x



$Área\ del\ cuadrado = x^2$
$Perímetro\ del\ cuadrado = 4x$

$x^2 = 4x$
$x^2 - 4x = 0$
$x(x - 4) = 0$
$x_1 = 0$

$x - 4 = 0$

$x_2 = 4$

Como los lados del cuadrado no pueden ser cero, la longitud del lado es $x_2 = 4$

Archivo: Ecuaciones cuadráticas.docx