ÍNDICE

FUNCIONES POLINOMIALES DE GRADO MAYOR QUE 2

POLINOMIOS DE GRADO MAYOR QUE 2

1 CONCEPTUALIZACIÓN

Si f es una función polinomial con coeficientes reales de grado n entonces:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \text{ con } a_n \neq 0$$

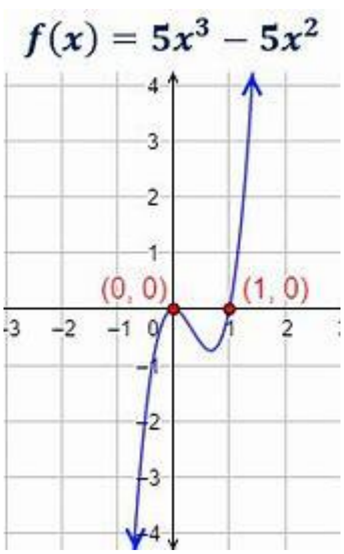
Una función es polinomial si los exponentes de las variables son enteros positivos. Por ejemplo, el polinomio: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 9$ es una función polinomial, porque los exponentes de las variables son todos enteros positivos; en cambio, $\boldsymbol{f}(x) = 2x^3 + 5x^2 + \sqrt{x}$ no es una función polinomial, ya que $\sqrt{x}$ Se puede escribir como $x^{\frac{1}{2}}$, por lo que hay una variable cuyo exponente no es un número entero, sino fraccionario.

La potencia más alta define el grado del polinomio.

Ejemplos de funciones polinomiales de grado mayor que 2:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3$$
$$f(x) = 5x^3 - 5x^2$$
$$f(x) = x^5 + 2x^4 - 6x^3 + 2x - 4$$

Todas las funciones polinomiales son funciones continuas, es decir, sus representaciones gráficas se pueden dibujar sin cortes o interrupciones. Una gráfica de una función cúbica es la siguiente:



Lo que sigue en estos apuntes está referido a la división de polinomios de grado mayor que 2.

2 DIVISIÓN LARGA DE POLINOMIOS

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos polinomios. Si $g(x)$ es un factor de $f(x)$, entonces $f(x)$ es *divisible* por $g(x)$. Por ejemplo, $x^4 - 16$ es divisible entre $x^2 - 4$, entre $x^2 + 4$, entre $x + 2$ y entre $x - 2$.

Como el polinomio $x^4 - 16$ no es divisible entre $x^2 + 3x + 1$ se puede, mediante la denominada División larga, hallar su cociente y residuo o resto.

Cuando un polinomio no es divisible por otro, se puede usar el proceso denominado *División larga* para encontrar un *cociente* y un *residuo o resto*. Este proceso termina cuando se llega a un residuo que es 0 o a un polinomio que tiene un grado menor que el divisor.

Ejemplo: Obtener el residuo de dividir $x^4 - 16$ entre $x^2 + 3x + 1$

Nota: Dado que en el dividendo no hay variable al cubo, al cuadrado y elevada a 1, se las incluye con coeficiente 0: $0x^3, 0x^2, 0x$.

$$(x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 16):(x^2 + 3x + 1) = x^2 - 3x + 8$$

$$\begin{array}{l}
\underline{x^4 + 3x^3 + \ \ x^2} \\
\\
\quad -3x^3 - \ \ x^2 \\
\quad \underline{-3x^3 - 9x^2 - 3x} \\
\\
\qquad\qquad 8x^2 + 3x - 16 \\
\qquad\qquad \underline{8x^2 + 24x + \ 8} \\
\\
\qquad\qquad\qquad -21x - \ 24 \text{ resto}
\end{array}$$

El residuo o resto de la división es: $\boldsymbol{-21x - \ 24}$.
El resultado de la división es:

$$\frac{x^4 - 16}{x^2 + 3x + 1} = x^2 - 3x + 8 + \left(\frac{-21x - \ 24}{x^2 + 3x + 1}\right)$$

Ejemplo: Obtener el residuo de dividir $4x^3 - 11x^2 - x + 14$ entre $x - 3$

$$(4x^3 - 11x^2 - x + 14):(x - 3) = 4x^2 + x + 2$$

$$\begin{array}{l}
\underline{4x^3 - 12x^2} \\
\qquad\quad x^2 - x \\
\qquad\quad x^2 - 3x \\
\qquad\qquad\quad 2x + 14 \\
\qquad\qquad\quad \underline{2x - \ \ 6\ } \\
\qquad\qquad\qquad\quad 20 \text{ residuo}
\end{array}$$

El residuo o resto de la división es **20**.
El resultado de la división es:

$$\frac{(4x^3 - 11x^2 - x + 14)}{(x - 3)} = 4x^2 + x + 2 + (\frac{20}{x - 3})$$

Ejemplo: Obtener el residuo de dividir $2x^4 - x^3 - 3x^2 + 7x - 12$ entre $x^2 - 3$

$$\begin{array}{l}
(2x^4 - x^3 - 3x^2 + 7x - 12):(x^2 - 3) = 2x^2 - x + 3 \\
\underline{2x^4 \qquad - 6x^2} \\
\qquad -x^3 + 3x^2 \\
\qquad \underline{-x^3 \qquad + 3x} \\
\qquad\qquad +3x^2 + 4x \\
\qquad\qquad \underline{+3x^2 \qquad - \ 9} \\
\qquad\qquad\qquad 4x \quad - 3 \text{ residuo}
\end{array}$$

El residuo o resto de la división es $4x - 3$.

El resultado de la división es:

$$\frac{(2x^4 - x^3 - 3x^2 + 7x - 12)}{(x^2 - 3)} = 2x^2 - x + 3 + (\frac{4x - 3}{x^2 - 3})$$

3 ALGORITMO DE LA DIVISIÓN PARA POLINOMIOS

Según los ejemplos anteriores sobre División larga, si $f(x)$ como dividendo y $p(x)$ como divisor son polinomios y si $p(x) \neq 0$, entonces existen polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$ tales que:

$$f(x) = p(x) \cdot q(x) + r(x)$$

O bien:

$$\frac{f(x)}{p(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{p(x)}$$

Donde $r(x) = 0$, o tiene un grado menor que el grado de $p(x)$

$q(x) = cociente$
$r(x) = residuo\ o\ resto\ de\ la\ división\ de\ f(x)$.

Siguiendo con el ejemplo anterior donde se llegó a:

$$\frac{x^4 - 16}{x^2 + 3x + 1} = x^2 - 3x + 8 + (\frac{-21x - 24}{x^2 + 3x + 1})$$

$f(x) = x^4 - 16$
$p(x) = x^2 + 3x + 1$
$q(x) = x^2 - 3x + 8$
$r(x) = -21x - 24$

Multiplicando ambos miembros por $x^2 + 3x + 1$:

$f(x) = p(x) \cdot q(x) + r(x)$

$x^4 - 16 = (x^2 - 3x + 8) \cdot (x^2 - 3x + 8) + (-21x - 24)$

4 TEOREMA DEL RESIDUO O RESTO

Si un polinomio $f(x)$ se divide entre $(x-c)$, entonces el residuo o resto es $f(c)$. El polinomio $x-c$ tiene que ser de primer grado.

Ejemplo: Si $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 5$ use el teorema del residuo para hallar $f(2)$.

Según el teorema del residuo, $f(2)$ es el residuo cuando $f(x)$ se divide entre:

$(x - c)$
$[x - (2)]$

Empleando la división larga:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 3x^2 + x + 5) : (x - 2) = x^2 - x - 1 \\
\underline{\quad x^3 - 2x^2} \\
\qquad\quad -x^2 + x \\
\qquad\quad \underline{-x^2 + 2x} \\
\\
\qquad\qquad\quad -x + 5 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-x + 2} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 3
\end{array}
$$

En consecuencia: $f(2) = \mathbf{3}$.
Comprobación:

$f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 5$
$f(2) = 2^3 - 3(2)^2 + 2 + 5$

$f(2) = 8 - 12 + 7 = 3$

Ejemplo: Encontrar el residuo al dividir $f(x) = x^3 - 2x^2 + 8$ entre $(x + 2)$

El binomio $x + 2$ se iguala a cero, se espeja x y su valor se evalúa en $f(x)$:

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

Residuo = $f(-2)$

$f(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 + 8$
$f(-2) = -8 - 8 + 8 = -8$

Por tanto, el residuo es $\mathbf{-8}$.

A este mismo resultado se llega con la división larga, pero de manera más laboriosa.

Ejemplo: Encontrar el residuo al dividir $f(x) = 2x^4 - x^2 - 7x + 6$ entre $(x - 2)$

Mediante la división larga:

$$
\begin{array}{l}
(2x^4 + 0x^3 - x^2 - 7x + 6) : (x - 2) = 2x^3 + 4x^2 + 7x + 7 \\
\underline{2x^4 - 4x^3} \\
\qquad 4x^3 - x^2 \\
\qquad \underline{4x^3 - 8x^2} \\
\qquad\qquad 7x^2 - 7x \\
\qquad\qquad \underline{7x^2 - 14x} \\
\qquad\qquad\qquad 7x + 6 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{7x - 14} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 20
\end{array}
$$

Por tanto, el residuo es **20**.

Mediante el Teorema del Residuo:

$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

$f(x) = 2x^4 - x^2 - 7x + 6$
$f(2) = 2(2)^4 - 2^2 - 7(2) + 6 = 32 - 4 - 14 + 6 = 20$

Ejemplo: Obtener el residuo en la siguiente división de polinomios.

$(4x^3 - 11x^2 - x + 12) : (x - 3)$

Solución:

$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$

$f(3) = 4(3)^3 - 11(3)^2 - 3 + 12$

$f(3) = 108 - 99 - 3 + 12$

$f(3) = 18$

En consecuencia, el residuo de la división es **18**.

Ejemplo: Obtener el residuo de dividir $4x^3 - 11x^2 - x + 14$ entre $x - 3$

Método 1: Se iguala $x - 3$ a cero y se despeja x:

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

Se reemplaza este valor en el polinomio $P(x) = 4x^3 - 11x^2 - x + 14$

$$P(3) = 4(3)^3 - 11(3)^2 - 3 + 14$$
$$P(3) = 108 - 99 + 11 = 20$$

El residuo o resto de la división es **20**.

Método 2 (División larga):

$$\begin{array}{l}
(4x^3 - 11x^2 - x + 14):(x-3) = 4x^2 + x + 2 \\
\underline{4x^3 - 12x^2} \\
\qquad\quad x^2 - x \\
\qquad\quad x^2 - 3x \\
\qquad\qquad\quad 2x + 14 \\
\qquad\qquad\quad \underline{2x - \quad 6} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 20
\end{array}$$

El residuo o resto de la división es **20**.

El resultado de la división es:

$$\frac{(4x^3 - 11x^2 - x + 14)}{(x-3)} = 4x^2 + x + 2 + \frac{x-3}{20}$$

Ejemplo: Obtener el residuo de dividir $P(x) = x^3 + 13x^2 + 14x - 88$ entre $x + 2$

El binomio $x + 2$ se iguala a cero, se espeja x y su valor se evalúa en $P(x)$

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

Se reemplaza este valor en el polinomio $P(x) = x^3 + 13x^2 + 14x - 88$

$$P(-2) = (-2)^3 + 13(-2)^2 + 14(-2) - 88$$
$$P(-2) = -8 + 52 - 28 - 88 = -72$$

El residuo o resto de la división es $\mathbf{-72}$.

5 TEOREMA DEL FACTOR

Un polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ con $a_n \neq 0$ tiene un factor $(x - c)$ si y solo sí $f(c) = 0$.

Donde:

- n es el grado del polinomio, siendo n el mayor número entero al que se eleva la variable independiente x.
- Los valores $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1$ son los coeficientes del polinomio, que generalmente son números reales, pero también pueden ser números complejos.

Ejemplo: Demostrar que $3x - 1$ es factor del polinomio $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 19x + 6$

Solución:

$3x - 1 = 0$
$3x = 1$

$$x = \frac{1}{3}$$

Este resultado se evalúa en $f(x)$:

$$f(\frac{1}{3}) = 3(\frac{1}{3})^3 + 2(\frac{1}{3})^2 - 19(\frac{1}{3}) + 6$$

$$f(\frac{1}{3}) = 3(\frac{1}{27}) + 2(\frac{1}{9}) - 19(\frac{1}{3}) + 6$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} - \frac{19}{3} + 6 = 0$$

Como el resultado de $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$, se concluye que $\mathbf{3x - 1}$ **sí es factor** del polinomio.

Ejemplo: Indicar cuál de los siguientes factores $x - 2,\ x - 1,\ x - 5,$ son factores del polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10$

Solución:

El binomio $x - 2$ se iguala a cero y se espeja x:

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

Este resultado se evalúa en P(x):

$P(2) = (3)^3 - 4(2)^2 - 7(2) + 10$
$P(2) = 27 - 16 - 14 + 10 = 7$

Como el resultado de $P(2) = 7$, se concluye que $\boldsymbol{x} - \mathbf{2}$ **no es factor** del polinomio.

El binomio $x - 1$ se iguala a cero y se espeja x:

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

Este resultado se evalúa en $P(x)$:

$P(1) = (1)^3 - 4(1)^2 - 7(1) + 10$
$P(1) = 1 - 4 - 7 + 10 = 0$

Como el resultado de $P(1) = 0$, se concluye que $x - \mathbf{1}$ **sí es factor** del polinomio.

El binomio x −5 se iguala a cero y se espeja x:

$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

Este resultado se evalúa en $P(x)$:

$P(5) = (5)^3 - 4(5)^2 - 7(5) + 10$
$P(5) = 125 - 100 - 35 + 10 = 0$

Como el resultado de $P(5) = 0$, se concluye que $x - \mathbf{5}$ **sí es factor** del polinomio.

Ejemplo: Identificar cuál de las siguientes expresiones: $5x + 1; x - 4; y\ x + 4$ son factores del polinomio: $f(x) = 10x^3 + 57x^2 + 71x + 12$

Solución: Las expresiones señaladas se hacen igual a cero y se despeja x para luego evaluar los resultados obtenidos en f(x):

$$5x + 1 = 0 \to x = -\frac{1}{5}$$

$$f\left(-\frac{1}{5}\right) = 10(-\frac{1}{5})^3 + 57(-\frac{1}{5})^2 + 71\left(-\frac{1}{5}\right) + 12$$

$$f\left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{10}{125} + \frac{57}{25} - \frac{71}{5} + 12$$

$$f\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{-10 + 285 - 1775 + 1500}{125} = \frac{0}{125} = 0$$

Por tanto, $\mathbf{5x + 1}$ **sí es factor** del polinomio

$x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$

$f(4) = 10(4)^3 + 57(4)^2 + 71(4) + 12$
$f\left(-\frac{1}{5}\right) = 640 + 912 + 284 + 12 = 1848$

Por tanto, $\boldsymbol{x - 4}$ **no es factor** del polinomio.

$x + 4 = 0 \rightarrow x = -4$

$f(4) = 10(-4)^3 + 57(-4)^2 + 71(-4) + 12$
$f\left(-\frac{1}{5}\right) = -640 + 912 - 284 + 12 = 0$

Por tanto, $x + \mathbf{4}$ **sí es factor** del polinomio

Ejemplo: Hallar la constante "a" para que $(x - 2)$ sea factor del siguiente polinomio:

$$P(x) = -x^3 - 4ax^2 + ax + 1$$

Solución: ¿Qué valor de x hace que $(x - 2)$ sea cero?

$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

Para encontrar el valor de "*a*" se calcula $P(2)$:

$-x^3 - 4ax^2 + ax + 1 = 0$
$-(2)^3 - 4(2)^2 + a(2) + 1 = 0$
$-8 - 16a + 2a + 1 = 0$
$-7 - 14a = 0$
$14a + 7 = 0$
$\boldsymbol{a} = -\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{14}} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

Ejemplo: Hallar la constante "k" para que $(x + 1)$ sea factor del siguiente polinomio:

$$P(x) = a^2x^3 - 4ax^2 + ax + 1$$

Solución: ¿Qué valor de *x* hace que $(x + 1)$ sea cero?

$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

Para encontrar el valor de "*a*" se calcula $P(-1)$:

$a^2(-1)^3 - 2a(-1)^2 - (-1) + 7 = 0$
$-(a)^2 - 2a + 1 + 7 = 0$
$-(a)^2 - 2a + 8 = 0$
$(a)^2 + 2a - 8 = 0$
$(a + 4)(a - 2) = 0$
$(a + 4) = 0$
$a = -4$

$(a - 2) = 0$

$\boldsymbol{a = 2}$

Ejemplo: ¿Qué valor debería tener la constante real *k* de modo que el polinomio
(Guía Ale USACH)

$$P(x) = 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 + kx + 3$$

sea divisible por $Q(x) = x + 1$?

Solución: ¿Qué valor de x hace que $(x + 1)$ sea cero?

$(x + 1) = 0 \rightarrow x = -1$

Para encontrar el valor de "*k*" se calcula $P(-1)$:

$2(-1)^5 - 3(-1)^3 + 4(-1)^2 + k(-1) + 3 = 0$
$-2 + 3 + 4 - k + 3 = 0$
$-k + 8 = 0$
$k - 8 = 0$

$\boldsymbol{k = 8}$

Ejemplo: ¿Qué valor debería tener la constante real *k* de modo que los polinomios que se indican sean divisibles entre sí:

$$(5x^3 - kx^2 - 4x - 96) : (x - 3)$$

Solución: ¿Qué valor de x hace que $(x - 3)$ sea cero?

$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$

Para encontrar el valor de "*k*" se calcula $P(3)$:

$5(3)^3 - k(3)^2 - 4(3) - 96 = 0$
$5(27) - 9k - 12 - 96 = 0$
$135 - 9k - 108 = 0$
$-9k + 27 = 0$
$-9k = -27$
$9k = 27$

$\boldsymbol{k = 3}$

6 DETERMINACIÓN DE UN POLINOMIO CON CEROS CONOCIDOS

Un polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ con $a_n \neq 0$

Donde:

- n es el grado del polinomio, siendo n el mayor número entero al que se eleva la variable independiente x
- Los valores $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1$ son los coeficientes del polinomio, que generalmente son números reales, pero también pueden ser números complejos.

Si $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, son raíces del polinomio, entonces el polinomio se puede expresar como el producto de n binomios de la siguiente forma: $x - x_n$ donde x_n es la e-nésima raíz de $f(x)$.

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n)$$

Ya que el número de raíces de un polinomio es igual al grado de este.

Ejemplo: Encuentre un polinomio $f(x)$ de grado 3 que tenga como ceros o raíces: $x_1 = 4, x_2 = -1\ y\ x_3 = 3$.

$f(x) = a[(x - (4)][(x - (-1)][(x - (3)]$

En donde a puede asumir cualquier valor distinto de cero. Si $a = 1$, se tiene:

$f(x) = (x - 4)(x + 1)(x - 3)$

Multiplicando los factores se encuentra el siguiente polinomio que tiene las raíces señaladas:

$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

Ejemplo: Factorizar el polinomio $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$, si sus ceros son: $-1, 2\ y\ 4$.

Por tanto, el polinomio factorizado, asumiendo que $a = 1$ es:

$f(x) = 1[x - (-1)] \cdot [x - (2)] \cdot [x - (4)]$

$f(x) = [x + 1][x - 2][x - 4]$

Ejemplo: Encuentre un polinomio $f(x)$ de grado 4 que tenga como ceros o raíces: $-2, \pm 1\ y\ 4$.

$f(x) = a[(x - (-2)][(x - (1)][(x - (-1)][(x - (4)]$

En donde a puede asumir cualquier valor distinto de cero. Si $a = 1$, se tiene:

$f(x) = (x + 2)(x - 1)(x + 1)(x - 4)$

$f(x) = (x + 2)(x^2 - 1)(x - 4)$

Multiplicando los factores se encuentra el siguiente polinomio que tiene las raíces señaladas:

$f(x) = x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8$

Ejemplo: Encuentre un polinomio $f(x)$ de grado 3 que tenga como ceros o raíces: $-2, 0\ y\ 5$.

$f(x) = a[(x - (-2)][(x - (0)][(x - (5)]$

En donde a puede asumir cualquier valor distinto de cero. Si $a = 1$, se tiene:

$f(x) = (x + 2)(x)(x - 5)$

Multiplicando los factores se encuentra el siguiente polinomio que tiene las raíces señaladas:

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 10x$

Ejemplo: Determine el polinomio cuyas raíces son -3, 0 y 4.

Solución: Como son tres raíces, el polinomio será de la forma:

$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$
donde:

$x_1 = -3$
$x_2 = 0$
$x_3 = 4$

$P(x) = (x - (-3))(x - 0)(x - (4))$
$P(x) = (x + 3)(x)(x - 4)$

Al desarrollar el producto se llega a que el polinomio es:

$P(x) = x^3 - x^2 - 12x$

Ejemplo: Determinar el polinomio de tercer grado cuyas raíces son $(-1 - i), (-1 + i)\ y\ 5$.

Solución: Como son tres raíces, el polinomio será de la forma:

$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$
donde:

$x_1 = (-1 - i)$
$x_2 = (-1 + i)$
$x_3 = 5$

$P(x) = \big(x - (-1 - i)\big)(x - (-1 + i))(x - 5)$
$P(x) = (x + 1 + i)(x + 1 - i)(x - 5)$

Al desarrollar el producto se llega al siguiente polinomio:

$P(x) = x^3 - 3x^2 - 8x - 10$

Ejemplo: Encuentre un polinomio $f(x)$ mediante la factorización que tenga grado 3, con raíces 2, -1 y 3 que satisfaga $f(1) = 5$

Solución: Por el teorema del factor el polinomio $f(x)$ tiene factores de la forma $x - c$

Factores:

$(x - (+2)) = x - 2$
$(x - (-1)) = x + 1$
$(x - (+3)) = x - 3$

Por tanto, el polinomio adopta la forma:

$f(x) = a(x - 2)(x + 1)(x - 3)$

Para algún número *a*. Dado que $f(1) = 5$:

$5 = \ a(1 - 2)(1 + 1)(1 - 3)$
$5 = \ a(-1)(2)(-2)$
$5 = 4\,a$

$a = \dfrac{5}{4}$

$f(x) = \dfrac{5}{4}(x - 2)(x + 1)(x - 3)$
$f(x) = \dfrac{5}{4}x^3 - 5x^2 + \dfrac{5}{4}x + \dfrac{15}{2}$

Ejemplo: Encuentre un polinomio $f(x)$ mediante la factorización que tenga grado 3, con raíces -1, 2 y 3 que satisfaga $f(-2) = 80$

Solución: Por el teorema del factor el polinomio $f(x)$ tiene factores de la forma $x - c$

Factores:

$(x - (-1)) = x + 1$
$(x - (2)) = x - 2$
$(x - (+3)) = x - 3$

Por tanto, el polinomio adopta la forma:

$f(x) = a(x + 1)(x - 2)(x - 3)$

Para algún número a. Dado que $f(-2) = 80$:

$80 = a(-2 + 1)(-2 - 2)(-2 - 3)$
$80 = a(-1)(-4)(-5)$
$80 = -20a$

$$a = -\frac{80}{20} = -4$$

$f(x) = -4(x + 1)(x - 2)(x - 3)$

$f(x) = -4x^3 + 16x^2 - 4x - 24$

Ejemplo: Encuentre un polinomio $f(x)$ mediante la factorización que tenga grado 3, con raíces -4, 3 y 0 que satisfaga $f(2) = -36$

Solución: Por el teorema del factor el polinomio $f(x)$ tiene factores de la forma $x - c$

Factores:

$(x - (-4)) = x + 4$
$(x - (3)) = x - 3$
$(x - (0)) = x$

Por tanto, el polinomio adopta la forma:

$f(x) = a(x + 4)(x - 3)(x)$

Para algún número a. Dado que $f(2) = -36$:

$-36 = a(2+4)(2-3)(2)$
$-36 = a(6)(-1)(2)$
$-36 = -12a$

$$a = \frac{-36}{-12} = 3$$

$$f(x) = 3(x+4)(x-3)(x)$$

$$f(x) = 3x^3 + 3x^2 - 36x$$

Ejemplo: Determinar el polinomio de cuarto grado cuyas raíces son $2i, -3$ y además $P(-1) = -50 \; y \; P(0) = -48$.

Solución: Como el polinomio es de cuarto grado se representa como:

$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$
donde:

$x_1 = 2i$
$x_2 = -3$

$$P(x) = (x - 2i)(x+3)(x - x_3)(x - x_4)$$

Pero $P(-1) = -50$, entonces:

Pero $P(-1) = (-1-2i)(-1+3)(-1-x_3)(-1-x_4)$

$-50 = (-1-2i)(2)(-1-x_3)(-1-x_4)$
$-50 = (-2-4i)(1 + x_4 + x_3 + x_3 \cdot x_4)$

$$\frac{-50}{(-2-4i)} = (1 + x_4 + x_3 + x_3 \cdot x_4)$$

$$\frac{-50}{(-2-4i)} - 1 = x_3 + x_4 + x_3 \cdot x_4$$

$$\frac{-50+2+4i}{-2-4i} = x_3 + x_4 + x_3 \cdot x_4$$

$$\frac{-48+4i}{-2-4i} = x_3 + x_4 + x_3 \cdot x_4$$

$$\frac{-2(24-2i)}{-2(1+2i)} = x_3 + x_4 + x_3 \cdot x_4$$

$$x_3 + x_4 + x_3 \cdot x_4 = \frac{-24 - 2i}{1 + 2i}$$

También se cumple que $P(0) = -48$, por tanto:

Pero $P(01) = (0 - 2i)(0 + 3)(0 - x_3)(0 - x_4)$

$$-48 = (-2i)(3)(-x_3)(-x_4)$$
$$-48 = -6i)(x_3)(x_4)$$
$$(x_3)(x_4) = -\frac{48}{-6i} = \frac{8}{i}$$

Se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} (x_3)(x_4) = -\dfrac{48}{-6i} = \dfrac{8}{i} \\ \\ x_3 + x_4 + x_3 \cdot x_4 = \dfrac{-24 - 2i}{1 + 2i} \end{array}\right\}$$

Las soluciones de este sistema son: $x_3 = 4 \ y \ x_4 = 2i$

Por lo que el polinomio queda definido como:

$$P(x) = (x - 2i)(x + 3)(x - 4)(x + 2i)$$

$$P(x) = x^4 - x^3 - 8x^2 - 4x - 48$$

7 DIVISIÓN SINTÉTICA DE UN POLINOMIO (REGLA DE RUFFINI)

Este método simplifica la división de un polinomio $f(x)$ entre un polinomio de primer grado de la forma $x - c$.

Se entrega a continuación una guía para la división sintética según se describe en el texto: Swokowski, E. y Cole, J. (2006). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. (11ª ed.), p. 262.

Sean los polinomios:

$Dividendo$: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$
$Divisor = x - c$

Paso 1: Poner ceros para cualesquiera coeficiente faltante en el polinomio dado.

$$
\begin{array}{cccccc}
a_n & a_{n-1} & a_{n-1} & a_1 & a_0 & [c \\
\downarrow & & & & & \\
\hline
a_n & & & & &
\end{array}
$$

Paso 2: Multiplique a_n por c y anote el producto ca_n debajo de a_{n-1} como lo indica la flecha de abajo. A continuación, encuentre $b_1 = a_{n-1} + ca_n$ y colóquelo debajo de la línea:

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 & [c \\
\downarrow & ca_n & cb_1 & cb_2\ \ldots & cb_{n-2} & cb_{n-1} & \\
\hline
a_n & b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-2} & b_{n-1} & r
\end{array}
$$

Paso 3: Multiplique $b_1$por c y coloque el producto cb_1 debajo de a_{n-2} como lo indica la segunda flecha. Al proseguir halle la suma $b_2 = a_{n-2} + cb_1$ que se pone debajo de la línea, como se muestra.

Paso 4: Continue este proceso, según lo indican las flechas, hasta obtener la suma final $r = a_0 + cb_{n-1}$. Los números $a_n, b_1, b_{2,}, \ldots, b_{n-2}, b_{n-1}$ son los coeficientes del cociente $q(x). Esto\ es$:

$$q(x) = a_n x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1}$$

Siendo $r\ el\ residuo\ o\ resto$.

Ejemplo: Hallar el cociente $q(x)$ y el residuo r si el polinomio $2x^4 + 5x^3 - 2x - 9$ se divide entre $x + 3$.

$x + 3 \rightarrow x = -3$, que es el valor de c en la expresión $x - c$

Poniendo 0 como coeficiente de la variable al cuadrado:

2	5	0	-2	-9	$[-3$
	-6	3	-9	33	
2	-1	3	-11	**24**	

Por tanto, las cifras 2, -1, 3, -11 son los coeficientes del cociente $q(x)$

$q(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 11$ y el resto es $r = 24$.

$$q(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 11 \; + \frac{24}{x+3}$$

Ejemplo: Efectuar el cociente entre $P(x) = 6x^4 - 10x^3 - 4x^2 - 3x + 6$ y $Q(x) = x - 2$.

Solución: Para determinar c:

$x - c = x - 2$

$-c = -2$

$c = 2$

6	-10	-4	-3	6	[2
	12	4	0	-6	
6	2	0	-3	**0**	

Se obtienen, así, los coeficientes del polinomio del Cociente, cuyo grado es inferior en una unidad al grado del polinomio del Dividendo y el último número representa el Resto de la división. Así, el cociente entre P(x) y Q(x) es:

$6x^3 + 2x^2 + 0x - 3$ y el resto es 0.

$6x^3 + 2x^2 - 3$ y el resto es 0.

Ejemplo: Efectuar el cociente entre $P(x) = x^5 - 2x^4 - 4x^3 - 3x + 12$ y $Q(x) = x - 3$.

Solución: Para determinar c:

$x - c = x - 3$
$-c = -3$
$c = 3$

1	-2	-4	0	-3	12	[3
	3	3	-3	-9	-36	
1	1	-1	-3	-12	**24**	

Por tanto, el cociente entre ambos polinomios es:

$$x^4 + x^3 - x^2 - 3x - 12 + \frac{24}{x - 3}$$

Ejemplo: Si $p(x) = 3x^5 - 38x^3 + 5x^2 - 6$, encuentre $p(4)$ mediante la división sintética.

Por el teorema del residuo, el residuo es $p(c)$ cuando el divisor es $x - c$
Por tanto:

$p(c) = p(4) \rightarrow c = 4$. De aquí que c en la división sintética es 4.

Poniendo 0 como coeficiente de la variable a la cuarta potencia:

3	0	-38	5	0	-6	[4
	12	48	40	180	720	
3	12	10	45	180	714	

En consecuencia, $\boldsymbol{p(4) = 714}$

Por tanto, las cifras 3, 12, 20, 45 y 180 son los coeficientes del cociente $q(x)$

$q(x) = 3x^4 + 12x^3 + 20x^2 + 45x + 180$ y el resto es $r = 714$.

$$q(x) = 3x^4 + 12x^3 + 20x^2 + 45x + 180 + \frac{714}{x - 4}$$

Si $p(x) = 3x^5 - 38x^3 + 5x^2 - 6$, encuentre $p(4)$ mediante la división sintética.

Ejemplo: Si $f(x) = 4x^4 - 20x^2 + 5x - 1$, encuentre $f(-5)$ mediante la división sintética.

Por el teorema del residuo, el residuo es $f(c)$ cuando el divisor es $x - c$.
Por tanto:

$f(c) = f(-5) \rightarrow c = -5$. De aquí que c en la división sintética es -5.

4	0	-20	5	-1	$[-5$
	-20	100	-400	1975	
4	-20	80	395	1974	

En consecuencia**,** $\boldsymbol{f(-5) = 1974}$

8 TEOREMA SOBRE LOS CEROS O RAÍCES RACIONALES DE UN POLINOMIO

Los ceros o raíces de un polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ con $a_n \neq 0$ son las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$.

Cada cero que pertenece al conjunto de los números reales es una intersección de la gráfica de $f(x)$ en el eje X del plano cartesiano.

Para enumerar los posibles ceros o raíces racionales del polinomio se usa el cociente:

$$Posibles\ ceros\ racionales = \frac{Factores\ del\ término\ constante\ o\ indpendiente\ a_0}{Factores\ del\ término\ inicial\ a_n}$$

Ejemplo: Encontrar las soluciones racionales de la ecuación: $x^3 + 6x^2 - 9x - 54 = 0$

Las opciones posibles de ceros racionales para el cociente del polinomio son las siguientes:

$Opciones\ para\ el\ numerador\ a_0 = 54$	$\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm9$
$Opciones\ para\ el\ denominador\ a_n = 1$	±1
Opciones para el cociente	$\pm\frac{1}{1} = \pm1;\ \pm\frac{2}{1} = \pm2; \pm\frac{3}{1} = \pm3;\ \pm\frac{6}{1} = \pm6;\ \pm\frac{9}{1} = \pm9$

Cuando el coeficiente de la variable de mayor grado es 1, como en la ecuación planteada, basta considerar únicamente los divisores del término independiente, en este ejemplo, de -54.

$$\{\pm1; \pm 2; \pm3; \pm6; \pm9\}$$

Para saber cuáles de estos valores son raíces o ceros racionales del polinomio hay que utilizar la división sintética o Regla de Ruffini, como sigue:

1	6	-9	-54	[1
	1	7	-2	
1	7	-2	**-56** no es cero, por consiguiente 1 no es raíz del polinomio.	

1	6	-9	-54	$[-1$
↓	-1	-5	14	
1	5	-14	**-40** no es cero, por consiguiente -1 no es raíz del polinomio.	

Nota: Este proceso para los valores $1\ y-1$ se pudo haber evitado, porque es fácil darse cuenta de que al sustituirlos en el polinomio no entregan un valor cero, por lo que no son raíces.

1	6	-9	-54	$[2$
↓	2	16	14	
1	8	7	**40** no es cero, por consiguiente 2 no es raíz del polinomio.	

1	6	-9	-54	$[-2$
↓	-2	-8	34	
1	4	-17	**20** no es cero, por consiguiente -2 no es raíz del polinomio.	

1	6	-9	-54	$[3$
↓	3	27	54	
1	9	18	**0 es cero, por consiguiente 3 es solución del polinomio.**	

El polinomio resultante es:

$$(x-3)(x^2+9x+18)$$

Correspondería seguir el procedimiento con las siguientes opciones de ceros, pero como el polinomio resultante que dio origen al primer cero es de segundo grado, se puede usar la fórmula general cuadrática para obtener los ceros faltantes.

$$x^2+9x+18=0$$

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_2\,\frac{-9+\sqrt{81-72}}{2}=\frac{-9+\sqrt{9}}{2}=\frac{-9+3}{2}=-3$$

$$x_3\,\frac{-9-\sqrt{81-72}}{2}=\frac{-9-\sqrt{9}}{2}=\frac{-9-3}{2}=-6$$

En consecuencia, las raíces o ceros de este polinomio son: $3, -3\ y - 6$.

Ejemplo: Encontrar las soluciones de la ecuación: $P(x) = 4x^4 + 9x^3 - 5x^2 + 9x - 9 = 0$

Nota: a diferencia del ejercicio anterior, el coeficiente del término principal no es 1 sino 4.

$Opciones\ para\ el\ numerador\ a_0 = 9$	$\pm 1, \pm 3, \pm 9$
$Opciones\ para\ el\ denominador\ a_n = 4$	$\pm 1 \pm 2, \pm 4$
Opciones para el cociente	$\pm\frac{1}{1} = \pm 1;\ \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{4};\ \pm\frac{3}{1} = \pm 3;\ \pm\frac{3}{2}; \pm\frac{3}{4}; \pm\frac{9}{1} = \pm 9;\ \pm\frac{9}{2};\ \pm\frac{9}{4}$

Posibles raíces del polinomio: Se obtienen dividiendo cada divisor del término independiente entre cada uno de los divisores del coeficiente del término principal, es decir:

Se suele comenzar con los números enteros, es decir, con los del numerador:

$\pm\frac{1}{1} = \pm 1$
$\pm\frac{3}{1} = \pm 3$
$\pm\frac{9}{1} = \pm 9$

4	9	-5	9	-9	$[1$
↓	4	13	8	17	
4	13	8	17	**8**	no es cero, por consiguiente 1 no es raíz del polinomio.

4	9	-5	9	-9	$[-1$
↓	-4	-5	10	-19	
4	5	-10	19	**-28**	no es cero, por consiguiente -1 no es raíz del polinomio.

4	9	-5	9	-9	$[3$
↓	12	63	174	549	
4	21	58	183	**540**	no es cero, por consiguiente 3 no es raíz del polinomio.

4	9	-5	9	-9	$[-3$
↓	-12	9	-12	9	
4	-3	4	-3	0	**es cero, por consiguiente -3 es raíz del polinomio.**

El polinomio resultante es:

$(x+3)(4x^3-3x^2+4x-3)$

Se continua el procedimiento con los coeficientes de este nuevo polinomio que es menor en un grado al original:

Si se intenta con las fracciones $\pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{4}; \pm\frac{3}{2}$ se verá que no son raíces del polinomio. Se continua, entonces con $\pm\frac{3}{4}$

4	-3	4	-3	[¾
↓	3	0	3	
4	**0**	**4**	**0**	**es cero, por consiguiente, ¾ es raíz real del polinomio.**

El polinomio resultante, ahora de segundo grado y se puede resolver mediante la fórmula general cuadrática o por otro método:

$$4x^2+0x+4=0$$
$$4x^2+4=0$$
$$4x^2=-4$$
$$x^2=-1$$
$$x=\pm\sqrt{-1}$$

$$\boldsymbol{x_3=+i}$$
$$\boldsymbol{x_4=-i}$$

Estas dos ultima raíces no pertenecen al conjunto de los números reales, sino al de los complejos. Por tanto, las cuatro raíces del polinomio son: $\{-3; \frac{3}{4}; i;\ -i\}$.

9 COMPROBACIÓN DE RAÍCES DE UN POLINOMIO

Dado el polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$ el número de raíces o ceros racionales corresponde al grado n del polinomio y son aquellos valores que cumplen la condición $P(x_n) = 0$. Estos valores pueden ser reales, complejos o ambos.

Un número a es raíz de un polinomio $P(x)$ si y solo si $P(a) = 0$

Si $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, son raíces del polinomio, entonces el polinomio se puede expresar de la siguiente forma:

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n)$$

Ejemplo: Determinar si 3, -2, 1 son raíces del polinomio: $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - 13x - 6$

Se sustituyen los valores 3, -2, 1 en el polinomio:

$$P(3) = 3^4 + 3^3 - 7(3)^2 - 13(3) - 6 = 81 + 27 - 63 - 39 - 6 = 0$$

Como el residuo es cero, 3 es raíz del polinomio.

$$P(-2) = (-2)^4 + (-2)^3 - 7(-2)^2 - 13(-2) - 6 = 16 - 8 - 28 + 26 - 6 = 0$$

Como el residuo es cero, -2 es raíz del polinomio.

$$P(1) = (1)^4 + (1)^3 - 7(1)^2 - 13(1) - 6 = 1 + 1 - 7 - 13 - 6 = -24$$

Como $P(1)$ es distinto de cero, no es raíz del polinomio.

Ejemplo: Determinar $-i, i, \frac{1}{3}$ son las raíces del polinomio: $P(x) = 3x^3 - x^2 + 3x - 1$

Se sustituyen los valores $-i, i, \frac{1}{3}$ en el polinomio:

$$\begin{aligned} P(-i) &= 3(-i)^3 - (-i)^2 + 3(-i) - 1 = 3(-i)^3 - (i)^2 - 3i - 1 \\ &= -3i^3 - (-1) - 3i - 1 = -3(-i) - (-1) - 3i - 1 = 3i + 1 - 3i - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(i) &= 3(i)^3 - (i)^2 + 3(i) - 1 = 3(i)^3 - (i)^2 + 3i - 1 = 3i^3 - (-1) + 3i - 1 \\ &= -3(i) + 1 + 3i - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$P(\frac{1}{3}) = 3(\frac{1}{3})^3 - (\frac{1}{3})^2 + 3\left(\frac{1}{3}\right) - 1 = 3\left(\frac{1}{27}\right) - \frac{1}{9} + 1 - 1 = \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + 1 - 1 = 0$$

Por tanto, al ser los residuos 0 en todos los tres casos, se comprueba que $-i, i, \frac{1}{3}$ son raíces del polinomio.

10 REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES

Permite determinar la cantidad y el tipo de raíz posible para un polinomio (positiva, negativa o compleja).

Sea el polinomio:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x^1 + a_0$$

Donde $a_0 \neq 0$

Sucede que:

- El número de raíces reales positivas de $P(x)$ es igual al número de cambios de signo en los coeficientes de $P(x)$, o es dicho número menos una cantidad par.
- El número de raíces reales negativas de $P(x)$ es igual al número de cambios de signo en los coeficientes de $P(-x)$, o es dicho número menos una cantidad par.
- El número de raíces complejas depende del número de raíces positivas o negativas que tenga el polinomio. Si el polinomio con coeficientes reales tiene una raíz compleja, entonces también tiene como raíz su conjugado.

Ejemplo: Dado el polinomio $P(x) = 2x^5 + 5x^4 - 8x^3 - 14x^2 + 6x + 9$ determine el número de raíces positivas, negativas y complejas.

Aplicando Descartes se observa que:

1. Raíces positivas (o ceros positivos):

   $$P(x) = 2x^5 + 5x^4 - 8x^3 - 14x^2 + 6x + 9$$

   Existen dos cambios de signo en $P(x)$, por lo que el polinomio tiene dos posibles raíces positiva, pero como a este número de cambios de signo se le pueden restar ceros de dos en dos, también puede haber 0 ceros positivos.

   Ceros positivos: 2,0

2. Raíces negativas (o ceros negativos): Se evalúa $P(-x)$ para determinar las posibles raíces negativas. Los cambios de signo se darán en las potencias con exponente impar.

   $$P(-x) = -2x^5 + 5x^4 + 8x^3 - 14x^2 - 6x + 9$$

   Existen tres cambios de signo, pero al restar 2, también puede haber un solo cero negativo $(3 - 2 = 1)$.

   Ceros negativos: 3,1

Las posibles combinaciones de raíces son 4, ya que hay dos posibles ceros positivos y dos posibles ceros negativos ($2\ x\ 2 = 4$):

Tipo de raíz	Opción 1	Opción 2	Opción 3	Opción 4
Raíces positivas	2	2	0	0
Raíces negativas	3	1	3	1
Raíces complejas	0	2	2	4
Total raíces	5	5	5	5

La cantidad de raíces complejas se determina restando de 5, que es el exponente del término principal, la suma de las raíces positivas y negativas. Por ejemplo, las raíces complejas de la primera columna: $5 - (2 + 3) = 5 - 5 = 0$.

Ejemplo: Dado el polinomio $P(x) = x^5 + 5x^4 - 2x^3 - 24x^2$ determine el número de raíces nulas, positivas y negativas.

Solución:
Como se observa, en el polinomio no hay término independiente, por lo que hay raíces nulas, las que se determinan factorizando:

$$P(x) = x^2(x^3 + 5x^2 - 2x - 24)$$

Como el factor es una potencia elevada a 2, hay dos raíces nulas. Si el factor fuera, en general, x^k, habría k raíces nulas.

Para determinar la cantidad de raíces positivas, se aplica el teorema al polinomio $Q(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$

Se observa un cambio de signo en los coeficientes, por tanto, hay una sola raíz real positiva, ya que si restamos 2 daría un número negativo ($1 - 2 = -1$), lo que no tiene sentido como número de raíces positivas.

Para determinar la cantidad de raíces negativas, se aplica el teorema al polinomio
$Q(-x) = -x^3 + 5x^2 + 2x - 24$

Se ven dos cambios de signo, por lo que hay dos opciones. La primera son 2 raíces negativas y la segunda 0 raíces negativas: $2 - 2 = 0$).

Por tanto, para el polinomio original se tienen dos combinaciones de raíces: $1\ positiva\ x\ 2\ negativas = 2$)

Tipo de raíz	Opción 1	Opción 2
Nulas	2	2
Positivas	1	1
Negativas	2	0
Complejas	0	2
Total de raíces	5	5

La opción correcta depende de cómo se plantea el ejercicio, ya que, si se dice que se requiere calcular raíces reales, hay que descartar la opción 2 que tiene raíces complejas.

Ejemplo: Dado el polinomio $P(x) = x^5 + 3x^4 + 2x^3$ determine el número de raíces nulas, positivas y negativas y las raíces del polinomio.

Solución:
Como se observa, en el polinomio no hay término independiente, por lo que hay raíces nulas, las que se determinan factorizando:

$$P(x) = x^3(x^2 + 3x + 2)$$

Como el factor es una potencia elevada a 3, hay tres raíces nulas. Si el factor fuera, en general, x^k, habría k raíces nulas.

Para determinar la cantidad de raíces positivas, se aplica el teorema al polinomio $Q(x) = x^5 + 3x^4 + 2x^3$

Se observa que no hay cambio de signo en los coeficientes, por tanto, no hay raíces reales positivas.

Para determinar la cantidad de raíces negativas, se aplica el teorema al polinomio
$Q(-x) = -x^5 + 3x^4 - 2x^3$

Se ven dos cambios de signo, por lo que hay dos opciones. La primera son 2 raíces negativas y la segunda 0 raíces negativas: $2 - 2 = 0$).

Tipo de raíz	Opción 1	Opción 2
Nulas	3	3
Positivas	0	0
Negativas	2	0
Complejas	0	2
Total de raíces	5	5

Cálculo de las raíces:

Hay tres raíces cero, ya que son tres las nulas.

$x_1 = 0$
$x_2 = 0$
$x_3 = 0$

Las siguientes se calculan con el polinomio degradado: $(x^2 + 3x + 2)$ aplicando, por ejemplo, la ley general cuadrática:

$$x_4 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{-3 + 1}{2} = -1$$

$$x_5 = \frac{-3 - \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{-3 - 1}{2} = -2$$

Estas raíces corresponden a la primera de las opciones, ya que no hay raíces complejas.

Ejemplo: Dado el polinomio $P(x) = 6x^5 - 5x^4 - 41x^3 + 71x^2 - 37x + 6$ determine el número de raíces positivas, negativas y complejas; además, las raíces del polinomio.

Como hay un término independiente, no hay raíces nulas, ya que, si el polinomio se evalúa en 0, $P(x) = 6$

Aplicando Descartes se observa que:

Raíces positivas (o ceros positivos):

$$P(x) = 6x^5 - 5x^4 - 41x^3 + 71x^2 - 37x + 6$$

Existen cuatro cambios de signo en $P(x)$, por lo que el polinomio tiene cuatro posibles raíces positiva, pero como a este número de cambios de signo se le pueden restar ceros de dos en dos, también puede haber 2 ceros positivos y 0 positivos.

Ceros positivos: 4,0

Raíces negativas (o ceros negativos): Se evalúa $P(-x)$ para determinar las posibles raíces negativas. Los cambios de signo se darán en las potencias con exponente impar.

$$P(-x) = -6x^5 - 5x^4 + 41x^3 + 71x^2 + 37x + 6$$

Existe un solo cambio de signo y no se puede restar 2.

Ceros negativos: 3,1

Las posibles combinaciones de raíces son 4, ya que hay dos posibles ceros positivos y dos posibles ceros negativos $(2\ x\ 2 = 4)$:

Tipo de raíz	Opción 1	Opción 2	Opción 3
Raíces positivas	4	2	0
Raíces negativas	1	1	1
Raíces complejas	0	2	4
Raíces nulas	0	0	0
Total raíces	5	5	5

Cálculo de las raíces: Aplicando división sintética o Regla de Ruffini:

Divisores del término independiente $a_0 = 6: 1,2,3,6$

Divisores del coeficiente del término principal $a_n = 6: 1,2,3,6$

Posibles raíces del polinomio: Se obtienen dividiendo cada divisor del término independiente entre cada uno de los divisores del coeficiente del término principal, es decir (sin repetirlos):

$$\pm\frac{1}{1};\ \pm\frac{1}{2};\ \pm\frac{1}{3};\ \pm\frac{1}{6};\pm\frac{2}{1};\ \pm\frac{2}{3};\ \pm\frac{3}{1};\ \pm\frac{3}{2};\pm\frac{6}{1}$$

Se suele comenzar con los números enteros, es decir, los del numerador:

$$\pm\frac{1}{1} = \pm 1$$
$$\pm\frac{2}{1} = \pm 2$$
$$\pm\frac{3}{1} = \pm 3$$
$$\pm\frac{6}{1} = \pm 6$$

6	-5	-41	71	-37	6	[1
↓	6	1	-40	31	6	
6	1	-40	31	-6	**0**	

es cero, por consiguiente **1 es raíz** del polinomio.

$$P(x) = (x-1)(6x^4 + x^3 - 40x^2 + 31x - 6)$$

Como en la división anterior se llegó a resto cero, se puede seguir el procedimiento con el polinomio degradado cuyos coeficientes son:

6	1	-40	31	-6		[2
	12	26	-28	6		
6	13	-14	3	0		

0 es cero, por consiguiente **2 es raíz** del polinomio.

$$P(x) = (x-1)(x-2)(6x^3 + 13x^2 - 14x + 3)$$

6	-5	-41	71	-37	6	[3
	18	39	-6	195	474	
6	13	-3	65	158	480	

480 no es cero, por consiguiente 3 no es raíz del polinomio.

6	-5	-41	71	-37	6	[6
	36	186	870	5646	203256	
6	31	145	941	33876	203262	

203262 no es cero, por consiguiente 6 no es raíz del polinomio.

6	-5	-41	71	-37	6	[-1
	-6	11	-30	-41	-78	
6	-11	30	41	-78	**72**	

72 no es cero, por consiguiente -1 no es raíz del polinomio.

6	-5	-41	71	-37	6	[-2
	-12	34	14	-170	414	
6	-17	-7	85	-207	42**0**	

42**0** no es cero, por consiguiente -2 no es raíz del polinomio.

6	-5	-41	71	-37	6	[-3
	-18	69	-84	39	-6	
6	-23	28	-13	2	**0**	

0 es cero, por consiguiente **-3 es raíz** del polinomio.

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x+3)(x^2 - 23x + 28 - 13 + 2)$$
$$P(x) = (x-1)(x-2)(x+3)(x^2 - 23x + 17)$$

6	-5	-41	71	-37	6	$[-6$
	-36	246	-1230	6954	-41502	
6	-41	205	-1159	6917	-41496	no es cero, por consiguiente 6 no es raíz del polinomio.

Una vez finalizados los intentos de encontrar las raíces con los números enteros, 1, 3 y 9, corresponde seguir con las fracciones, pero ahora con los coeficientes obtenidos al intentar con -3, que fue la primera raíz encontrada. Estos coeficientes corresponden, ahora, a un polinomio de grado 3.

Si se intenta con las fracciones $\pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{4}; \pm\frac{3}{2}$ se verá que no son raíces del polinomio. Se intenta con $\pm\frac{3}{4}$

4	-3	4	-3	[¾
	3	0	3	
4	0	4	0	**es cero, por consiguiente, ¾ es raíz real del polinomio.**

4	-3	4	-3	[-¾
	-3	0	-3	
4	0	4	**-6**	no es cero, por consiguiente, -¾ no es raíz del polinomio.

El nuevo polinomio pasa a ser de grado 2, que se puede resolver por la fórmula general cuadrática o por otro método. El polinomio es:

$$4x^2 + 0x + 4 = 0$$
$$4x^2 + 4 = 0$$
$$4x^2 = -4$$
$$x^2 = -1$$
$$x = \pm\sqrt{-1}$$

$$\boldsymbol{x_3 = +i}$$
$$\boldsymbol{x_4 = -i}$$

Estas dos ultima raíces no pertenecen al conjunto de los números reales, sino al de los complejos. Por tanto, las cuatro raíces del polinomio son: $\{-3; \frac{3}{4}; i;\ -i\}$.

Archivo: polinomios.docx
Julio 2024

José Santić.