Investigación De Operaciones
Volumen I

- Introducción
- Formulación
- Método Gráfico
- Método Algebraico
- Método Simplex
- Método de las dos fases
- Método Matricial
- El problema Dual y el Método Dual Simplex
- Análisis Post-óptimo y Sensibilidad
- Transporte y Transbordo
- Asignaciones
- Programación Lineal Entera y Binaria

Francisco Chediak
Ingeniero Industrial

Dedicatoria

Así dijo Jehová: No se alabe el sabio en su sabiduría, ni en su valentía se alabe el valiente, ni el rico se alabe en sus riquezas.

Mas alábese en esto el que se hubiere de alabar: en entenderme y conocerme, que yo soy Jehová, que hago misericordia, juicio y justicia en la tierra; porque estas cosas quiero, dice Jehová.

Jeremías 9: 23, 24

Francisco Chediak
Ingeniero Industrial

Contenido

Prólogo

Consciente de la importancia asumida en los tiempos modernos de los Métodos Cuantitativos como la ciencia del arte de la toma de decisiones, el presente libro está escrito bajo la óptica de hacer fácil el aprendizaje y la aplicación en pregrado de los temas asignados a la cátedra de Investigación de Operaciones I en los programas de Ingeniería Industrial e Ingeniería de Sistemas de la Corporación Universitaria de Ibagué.

Durante el desarrollo de los temas que lo ameritan, se ilustrará el uso del software WinQsb e INVOP; Programas especializados en la investigación de operaciones. Es de vital importancia el aprendizaje y manejo e interpretación de la información suministrada por el software, en atención al impulso que la invención del computador, trajo al desarrollo de la Investigación de Operaciones.

Se recomienda al lector enfatizar su atención a la formulación de modelos, labor ésta primordial para la aplicación en la práctica de los métodos de solución, que sin una perfecta modelación acarrea un estruendoso fracaso y pérdida de recursos. Juicioso es tener como meta, estudiar todos los modelos posibles en los diferentes textos, revistas y trabajos de grado en donde se formulen problemas de investigación de operaciones, la experiencia hará fluir la inventiva que enfrentará el reto de formular el nuevo problema de optimización que el desarrollo de nuestra profesión, con certeza nos brindará la oportunidad de resolverlo y tomar la mejor decisión posible.

El primer capítulo trata de manera introductoria los temas de: La toma de decisiones, La Investigación de Operaciones, La Ingeniería Industrial y la Investigación de Operaciones y una breve reseña histórica de la Investigación de Operaciones, recomendando al lector efectuar la lectura del apéndice 1 que recopila lecturas de diferentes autores que tratan los siguientes temas: Historia de la investigación de Operaciones, Definición de la Investigación de Operaciones, Reseña del fundador de la programación Lineal George Dantzing, La naturaleza del trabajo, condiciones de trabajo, Empleo y perspectivas futuras de trabajo de un analista de Investigación de Operaciones, La investigación de Operaciones en la Práctica, Estadísticas de las técnicas más usadas de Investigación de Operaciones y una visualización general de los modelos de Investigación de Operaciones. La lectura de éstos artículos tiene como finalidad, responder la pregunta: ¿para qué sirve la Investigación de Operaciones?

El capítulo segundo está dedicado a la formulación de problemas de programación lineal, es una colección de modelos clásicos, debidamente resueltos y explicados. Tiene como objetivo capacitar al lector para enfrentarse a nuevos problemas. Al inicio del capítulo se define matemáticamente su forma general y sus características, además se incluyen los artículos sobre "Pautas y comentarios para la formulación de modelos" y "Aprendiendo a formular Modelos". Se recomienda al lector enriquecerse, estudiando la mayor cantidad de modelos posibles en los textos de la bibliografía.

Atendiendo a la pregunta de cómo solucionar los problemas formulados en el capítulo segundo, el capítulo tercero ofrece la metodología para solucionar problemas de dos ó menos variables. Se ofrece en este capítulo una colección de ejemplos resueltos y explicados, que ilustran todos los casos posibles de solución que se pueden presentar. Se recomienda al lector resolver los problemas propuestos al final del capítulo, ello le dará la certeza del aprendizaje logrado y le preparará para comprender las técnicas de solución que se explican en los capítulos posteriores.

El capítulo cuarto resuelve la pregunta: ¿cómo solucionar problemas de más de dos (2) variables?. Aquí se presenta el método algebraico, fundamental para la total comprensión del Método Simplex, el Dual Simplex y el Análisis Post óptimo.

Método Simplex, que resuelve lo dispendioso de la aplicación del método algebraico, se explica en el capítulo quinto. Varios de los problemas formulados en el capítulo segundo, son resueltos aquí mediante el Método Simplex. Al final del capítulo se ilustra el uso del software WinQsb.

El Método Algebraico y el Método simplex, según las características del problema, hacen uso de variables artificiales que se acompañan en la función objetivo con un coeficiente de valor muy grande y que se representa con una "M", ello hace que los cálculos sean dispendiosos, para evitar usarla se diseñó el Método de las dos Fases, cuyo objetivo es eliminar el uso de la gran "M" durante el proceso de solución, siendo éste método el objetivo del capítulo sexto.

Para los programadores de computadores que enfrentan el reto de construir un software que ejecute el Método Simplex, es fundamental el estudio del capítulo séptimo donde se presenta el Método Matricial, base para la construcción de la programación mediante el uso de matrices y vectores, elementos estos de uso común en el computador.

El capítulo ocho y nueve presentan la formulación del problema Dual, el Método Dual Simplex, el análisis post óptimo y de sensibilidad, herramienta fundamental para el tomador de decisiones quien podrá analizar alternativas y generar estrategias, posteriores a la solución del problema.

Los capítulos diez y once presentan Métodos específicos para la solución de problemas particulares de programación lineal como lo son el problema del transporte, transbordo y asignaciones. Se ilustra en cada uno de estos capítulos el uso del software WinQsb e INVOP.

Por último el capítulo doce presenta Métodos de solución para atender aquellos problemas que por su naturaleza, exigen valores enteros para sus variables ó variables de carácter binario (0,1). También se muestra el uso del software WinQsb para atender estos casos.

Para terminar esta presentación, motivo a los lectores al uso de las técnicas que ofrecen los Métodos Cuantitativos para la toma de decisiones en su vida profesional, el hacerlo beneficiará grandemente a la sociedad, tal como ha ocurrido en otros pueblos que lo han hecho.

Francisco Chediak
Ingeniero Industrial

Capítulo 1
Introducción

- La Toma de Decisiones
- La Investigación de Operaciones
- La Ingeniería Industrial y la Investigación de Operaciones
- Reseña histórica de la Investigación de Operaciones

La toma de decisiones

La toma de decisiones estratégicas para la vida de una empresa, es la principal responsabilidad indelegable de un gerente. El inicio de la toma de una decisión, generalmente empieza cuando se detecta un problema. Conocido el problema, el gerente debe proceder a definirlo de manera clara y formular el objetivo, seguidamente identifica las restricciones, evalúa las alternativas y seguramente el mejor curso de acción que lo llevará al la solución óptima. Este proceso lo realiza de manera cualitativa o cuantitativa. Si lo hace bajo el enfoque cualitativo, el gerente está confiando en su juicio personal o en su experiencia pasada en situaciones similares. Si lo hace bajo el enfoque cuantitativo, no necesariamente debe tener experiencia en casos similares, pero si debe hacer un análisis exhaustivo, especialmente si la decisión involucra una gran cantidad de dinero, un conjunto de variables muy grande ó se trata de un problema altamente repetitivo, en cuyo caso, el desarrollo de un procedimiento cuantitativo ahorrará tiempo valioso al gerente.

La habilidad para resolver problemas mediante el análisis cuantitativo, es propio de cada gerente, pero puede adquirirse ó aumentarse con la experiencia; Esta habilidad puede adquirirse mediante el estudio de las herramientas matemáticas que ofrece la investigación de operaciones, ellas le permitirán maximizar la efectividad en la toma de decisiones, pudiendo comparar y combinar información cualitativa y cuantitativa.

La Investigación de Operaciones (IO)

Ofrece a los gerentes herramientas cuantitativas para la toma de decisiones que resuelven los problemas diarios de un negocio ó sirven para tomar decisiones en la planeación a corto o largo plazo, sea el negocio de carácter gubernamental, de producción, de servicios, gremial ó cooperativo.

En la aplicación de la investigación de operaciones se aplican los siguientes seis pasos metodológicos científicos a saber:

1. Análisis y definición del problema.
2. Desarrollo del modelo.
3. Selección de datos de entrada.
4. Obtención de una solución.
5. Limitaciones del modelo y la solución.
6. Utilización del modelo.

La Ingeniería Industrial y la Investigación de Operaciones

La humanidad ha logrado muchos de sus progresos en los siglos más recientes, como consecuencia de la aplicación del método científico a la administración (Planeación, Organización y Control de Operaciones).

La Ingeniería Industrial nació cuando el hombre aplicó el método científico a los problemas administrativos. Ejemplo antiguo sobre organización, el que se narra en La Biblia en el libro de Éxodo, cuando Moisés, atendiendo el concejo de su suegro Jetro procede a nombrar los jueces que resolverán los problemas del pueblo de Israel. Otro ejemplo antiguo lo constituye la reparación de los antiguos barcos en Venecia, mediante una línea de ensamble sobre la que trabajadores expertos efectuaban trabajos especializados. Para 1832, Charles Babbage escribió sobre la economía de la maquinaria y los fabricantes, demostrando conocimientos en Ingeniería Industrial. Para finales del siglo XIX Frederick W. Taylor, convirtió la Ingeniería Industrial en una profesión, mereciéndole el título de padre la de administración científica, mediante su trabajo que maximizó el rendimiento de los mineros, determinando que la única variable realmente significativa era el peso combinado de la pala y su carga, diseñando diferentes palas para diferentes tipos de materiales. Otro hombre importante en los principios de la administración científica fué Henry L. Gantt quien trabajó en resolver el problema de la planeación de la producción. Mientras que Taylor se enfocaba en resolver un problema único, Gantt adoptó un punto de vista más amplio al observar los diferentes pasos en una operación completa. Éste cambio de interés alejándose de lo particular de la administración hacia aspectos más amplios fué en realidad una transferencia de énfasis de la Ingeniería Industrial a la Investigación de Operaciones con un enfoque multidisciplinario a problemas complejos, reconociéndose la necesidad de tener especialistas, reunidos para trabajar en equipos de investigación con sistemas completos en vez de partes del sistema.

Reseña histórica de la Investigación de Operaciones

Arquímedes en el año 212 antes de Jesucristo, cuando tenía 75 años, fué contratado por la ciudad de Siracusa para idear un método de romper el sitio naval a la ciudad, que estaba bajo el ataque de los romanos.

El concepto de Investigación de Operaciones nació durante la primera guerra mundial en Inglaterra entre los años 1914 – 1915, cuando F. W. Lanchester intentó tratar cuantitativamente las operaciones militares, obteniendo ecuaciones que relacionaban el resultado de una batalla en función de la fuerza numérica relativa de los combatientes y de su capacidad relativa de fuego. Lanchester modeló una situación que involucraba opciones estratégicas, y después probó ese modelo contra la situación real. Éste procedimiento es el que los Investigadores de Operaciones han venido practicando desde entonces.

Tomás Alva Edison en los Estados Unidos de América, estudió el proceso de la guerra antisubmarina. Efectuó un análisis estadístico para desarrollar maniobras mediante las cuales los barcos pudieran evadir y destruir a los submarinos.

En 1917, el matemático Danés A. K. Erlang, que trabajaba en la compañía telefónica de Copenhage, publicó el trabajo ***Soluciones a algunos problemas en la teoría de probabilidades importantes en las centrales telefónicas automáticas*** , contenía fórmulas de tiempo de espera que más tardes fueron empleadas por la Oficina Postal Británica para calcular el número de circuitos necesarios.

En 1915 Ford W. Harris describió el primer modelo sobre el tamaño de lote económico de inventario, posteriormente contribuyeron al desarrollo de modelos de control de inventarios H. S. Owen (1925), Benjamín Cooper (1926), R.H. Wilson (1926) y W. A. Mueller (1927). Las técnicas matemáticas del control de inventarios son de las más antiguas herramientas de la Investigación de Operaciones.

El desarrollo de la Programación Lineal ocurrió hacia 1760 cuando los economistas empezaron a describir sistemas económicos en términos matemáticos. El profesor de Harvard Wassily Leontieff desarrolló un modelo de programación Lineal que representaba la totalidad de la economía de los Estados Unidos de Norte América.

Como consecuencia del ingreso de Inglaterra a la segunda guerra mundial dos años antes que Estados Unidos, en 1939 existía un núcleo de una organización Británica de Investigación de Operaciones y sus principales aportes fueron: El mejoramiento del sistema de radar, el cañoneo antiaéreo, en la guerra antisubmarina, en la defensa de la población civil, en el diseño del tamaño de los convoy y en la conducción de ataques de bombardeo sobre Alemania.

El grupo de Investigación de Operaciones con mayor publicidad fué el denominado ***El circo de blackett*** dirigido por el profesor P.M.S. Blackett de la Universidad de Manchester, ministro de la Royal Society, laureado nobel y ex-oficial naval. El grupo estaba conformado por 3 Fisioligistas, 2 Físicos matemáticos, 1 Astrofísico, 1 Oficial del ejército, 1 Topógrafo, 1 Físico general y 2 Matemáticos. El valor del enfoque del equipo Heterogéneo fué de éxito notorio.

Al ingresar los Estados Unidos a la segunda guerra mundial, creó grupos de análisis de operaciones en la fuerza aérea y en la armada, ésta última creó grupos de Investigación de Operaciones en el Laboratorio de municiones naval y en la décima flota.

Después de la segunda guerra mundial, tanto el ejército como la fuerza aérea de los Estados Unidos de Norte América, continuaron con los grupos de Investigación de Operaciones pero las técnicas desarrolladas empezaron a ser usadas en la planeación de los negocios. La industria debía renovar su producción y organización para servir rápidamente a las necesidades en tiempos de paz. En 1950 se organizó la Operations Research Society of América (ORSA) y The Institute of Management Science (TIMS). Desde 1952 ORSA publica la revista Operations Research y desde 1953 TIMS publica su revista Management Science. Desde la década de los 70 (s) las dos sociedades publican la revista trimestral ***Interfases*** con trabajos y artículos relacionados con los problemas operacionales del uso de la ciencia administrativa y la investigación de Operaciones. En Inglaterra se formó en 1948 el Operational Research Club quien cambió su nombre posteriormente a la Operational Research Society of the United Kingdom y para 1950 crearon la revista Operational Research Quarterly. Más recientemente se han formado sociedades de Investigación de Operaciones en Francia, Italia, Israel y Austria.

Se recomienda al lector leer la totalidad del apéndice 1, en donde se coleccionan varias lecturas interesantes sobre el tema.

Capítulo 2
Formulación

$$\textbf{Max ó Min } Z = C\,X$$

C.S.R.

$$A\,X \leq B$$

$$X_J \geq 0\ ; \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Objetivo

El presente trabajo es una recopilación de algunos problemas representativos de programación lineal, en donde se muestra al lector la solución a diferentes modelos, buscando desarrollar la capacidad inventiva para formular problemas de optimización de recursos.

Programación Lineal - Problema General

La Programación Lineal resuelve un tipo muy especial de problema, uno en el cual todas las relaciones entre las variables son lineales, tanto en las restricciones como en la Función Objetivo.

Definición: Dado un conjunto de m desigualdades lineales ó ecuaciones lineales, con n variables, se requiere hallar valores **no negativos** de éstas variables que satisfagan las restricciones y maximicen ó minimicen alguna función lineal de las variables llamada Función Objetivo.

Matemáticamente:

Hallar X_J , $J = 1, 2, \ldots\ldots n$ Para:

Maximizar
ó $Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$
Minimizar

Con las siguientes restricciones:

$$
\begin{array}{cccccccc}
a_{11}X_1 + & \ldots & + a_{1j}X_j + & \ldots & + a_{1n}X_n & \leq \text{ó} \geq & b_1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{i1}X_1 + & \ldots & + a_{ij}X_j + & \ldots & + a_{in}X_n & \leq \text{ó} \geq & b_i \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1}X_1 + & \ldots & + a_{mj}X_j + & \ldots & + a_{mn}X_n & \leq \text{ó} \geq & b_m
\end{array}
$$

$X_j \geq 0 \;\; ; \;\; j = 1, 2, \ldots\ldots n$

Características de la Programación Lineal

1. Linealidad asume que no pueden haber términos así:

$$X_1X_2 \qquad X_3^2 \qquad a_{14}\text{Log } X_4$$

2. Asume las propiedades aditivas y multiplicativas.

   - Si una unidad tipo 1 necesita 2 horas en la Máquina A y una unidad tipo 2 necesita 2½ horas, entonces ambas necesitan 4½ horas.
   - Si una unidad tipo 3 necesita 1 hora en la máquina B, entonces 10 unidades necesitan 10 horas.

3. La función que se va a optimizar (maximizar ó minimizar) se llama función objetiva, fíjese que no aparece ningún término independiente ó constante. Los valores de las X_j son independientes de cualquier constante.

4. Cuando se dice que hay m restricciones, no están incluidas las condiciones $X_j \geq 0$ (condición de no negatividad).

5. a) Cualquier conjunto de X_j que satisface las m restricciones se llama *una solución al problema.*

b) Si la solución satisface la condición de no negatividad $X_j \geq 0$, se llama *una solución factible*

c) Una solución factible que optimiza la función objetiva se llama *una solución factible óptima*

Usualmente hay un número infinito de soluciones factibles al problema, de todas estas, tiene que hallarse una óptima

Pautas y comentarios para la formulación de modelos

En la conversión de modelos verbales a modelos formales, será muy útil describir primero con palabras un modelo que corresponda al problema dado. Es decir, se puede proceder de la siguiente forma:

1. Exprese cada restricción en palabras; al hacer esto, ponga cuidadosa atención en si la restricción es un requerimiento de la forma ≥ (mayor ó igual que, al menos, por lo menos, como mínimo), una limitación de la forma ≤ (menor ó igual que, no mayor que, como máximo), ó = (igual a, exactamente igual a).

2. Después expresar el objetivo en palabras.

3. Identificar verbalmente las variables de decisión: Con frecuencia, una cuidadosa lectura del contenido del problema le revelará que las variables de decisión y el objetivo se le dan en la forma exacta que necesita. Es imperativo e importante que estén definidas en forma correcta sus variables de decisión. En ocasiones encontrará que hay varias elecciones posibles. Una guía útil es hacerse a si mismo la pregunta: **Qué decisión debe tomarse para optimizar la función objetivo ?** . La respuesta a esta pregunta le ayudará a llegar a identificar correctamente las variables de decisión.

4. Expresar la función objetivo mediante símbolos, es decir en términos de las variables de decisión.

5. Expresar las restricciones mediante símbolos, es decir, en términos de las variables de decisión.

   En esta etapa es necesario e imperativo comprobar si las unidades son consistentes. Por ejemplo, si los coeficientes de una función objetivo están dados por pesos por libra, las variables de decisión que aparezcan en la función objetivo deben resultar en libras, no en toneladas ni onzas. De manera análoga, compruebe que para cada restricción las unidades del lado derecho son las mismas que las del lado izquierdo. Por ejemplo, si una de las restricciones es una limitante de la forma ≤ de horas de trabajo, el lado derecho debe ser de horas de trabajo. Dicho de otra forma más simple, no puede tener unidades

de horas en el lado izquierdo de la restricción y en el otro lado minutos ó segundos ó libras ó toneladas.
Es conveniente comentar que las restricciones en programación lineal no pueden tener una desigualdad estricta, con los signos $<$ ó $>$. La razón de esto es de naturaleza matemática para que asegure que un problema bien formulado tenga solución ya que cualquier situación del mundo real que uno pueda imaginar y que implique desigualdades de restricción es casi seguro que la representación con los signos $\leq$ o $\geq$ captará por completo el significado del mundo real.

Aprendiendo a Formular Modelos

Este capitulo contiene ejemplos de formulación que le servirán para cimentar su habilidad al traducir problemas del mundo real a modelos matemáticos. Esta transición, o modo en que se ha de elaborar el modelo, la forma en que se definirá las variables y se formularán las restricciones y la función objetivo es de primordial importancia.
Intente resolver los siguientes problemas por si mismo. **Formúlelos con la rapidez que le sea posible y <u>no lea en un problema más de lo que se le da</u>**. Por ejemplo, no introduzca restricciones adicionales o matices lógicos o datos imaginarios que en su opinión podrían hacer más realista el modelo. Por ejemplo, no se preocupe por lo que **ocurra la semana siguiente** si el problema nunca se refiere a la semana siguiente. Los problemas que se muestran han sido escogidos para facilitarle el desarrollo del aprendizaje de la formulación. Para lograr esto y que pueda comprobar su trabajo y calibrar su progreso dentro del contexto descrito, la formulación correcta, debe carecer por completo de ambigüedad. En otras palabras, que haya una *respuesta correcta*. Más tarde, cuando tenga experiencia, la amplitud de las dudas en la interpretación y las sutilezas del mundo real serán mayores. Debido a que el tema de la formulación es tan importante y como la práctica es el único camino para dominarlo, se recomienda hacer un número de problemas grande. Como último consejo: No lea simplemente el problema y después vaya de inmediato a la solución. Esa sería la mejor forma de engañarse a si mismo sobre lo que ha comprendido. No lea la solución hasta que esté seguro de haber solucionado en forma correcta el problema por si mismo o esté totalmente convencido que se encuentra en un callejón sin salida.

1. Problema de producción

Un taller tiene tres (3) tipos de máquinas A, B y C; puede fabricar dos (2) productos 1 y 2, todos los productos tienen que ir a cada máquina y cada uno va en el mismo orden: Primero a la máquina A, luego a la B y luego a la C. La tabla siguiente muestra:

1. Las horas requeridas en cada máquina, por unidad de producto
2. Las horas totales disponibles para cada máquina, por semana
3. La ganancia por unidad vendida de cada producto

Tipo de Máquina	Producto 1	Producto 2	Horas disponibles por semana
A	2	2	16
B	1	2	12
C	4	2	28
Ganancia por unidad	1	1,50	

Que cantidad de cada producto (1 y 2) se debe manufacturar cada semana, para obtener la máxima ganancia ?

Cuantas horas semanales sobran en cada departamento ?

Formulación

1. Definición de las variables:

X_j = Unidades semanales a producir del articulo j-ésimo (j=1 y 2)

2. Función objetivo:

Maximizar $Z = X_1 + 3/2\ X_2$ Con las siguientes restricciones (c.s.r.):

3. Restricciones:

$2X_1 + 2X_2 \leq 16$ Restricción debida a las horas disponibles por semana de la MQ A
$X_1 + 2X_2 \leq 12$ Restricción debida a las horas disponibles por semana de la MQ B
$4X_1 + 2X_2 \leq 28$ Restricción debida a las horas disponibles por semana de la MQ C

4. Condición de no negatividad:

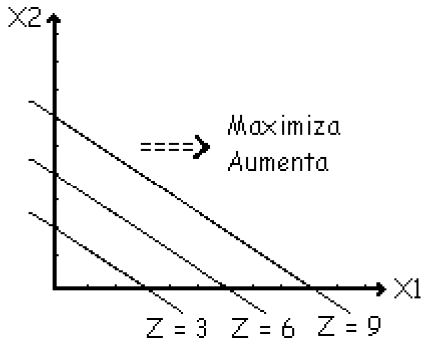
$X_j \geq 0$; $j = 1$ y 2

5. Solución Mediante el método gráfico:

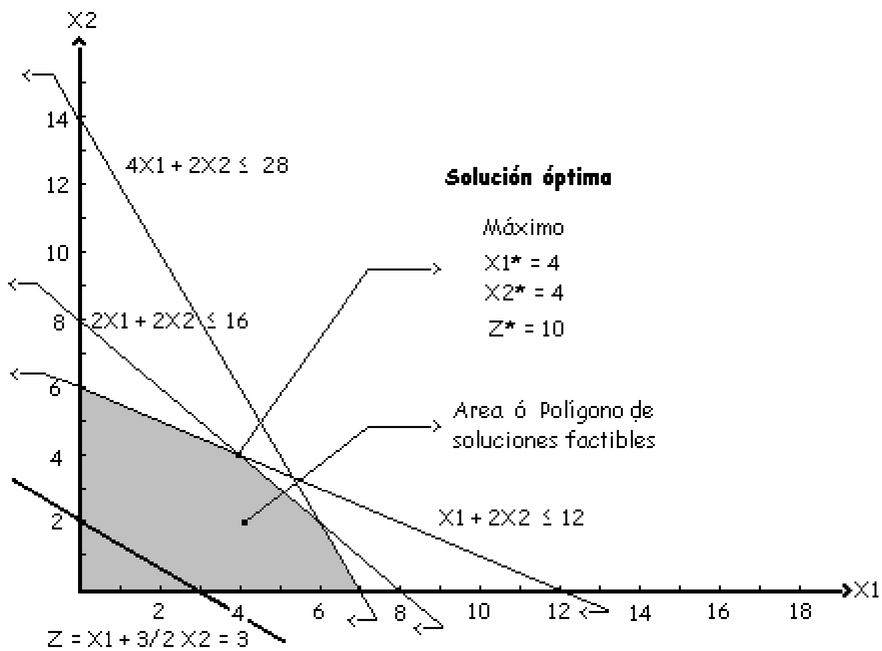
Preparamos analíticamente las restricciones para graficarlas sobre el plano cartesiano, así:

$2X_1 + 2X_2 \leq 16$	$X_1 + 2X_2 \leq 12$	$4X_1 + 2X_2 \leq 28$	$Z = X_1 + 3/2\ X_2$
$2X_1 + 2X_2 = 16$	$X_1 + 2X_2 = 12$	$4X_1 + 2X_2 = 28$	$Z = X_1 + 3/2\ X_2 = 3$
$X_1 = 0$ $X_2 = 0$	$X_1 = 0$ $X_2 = 0$	$X_1 = 0$ $X_2 = 0$	$X_1 = 0$ $X_2 = 0$
$X_2 = 8$ $X_1 = 8$	$X_2 = 6$ $X_1 = 12$	$X_2 = 14$ $X_1 = 7$	$X_2 = 2$ $X_1 = 3$
P(0,0) => $0 \leq 16$	P(0,0) => $0 \leq 12$	P(0,0) => $0 \leq 28$	
Verdad	Verdad	Verdad	

Fíjese que la función objetivo $X_1 + 3/2\ X_2 = Z$ es la ecuación de una familia de rectas paralelas, las que se generan cada vez que cambiemos el valor de Z, aquí hemos dado el valor arbitrario a Z de 3. Como observará en la gráfica siguiente, la recta que representa a ésta función objetivo, la desplazaremos a izquierda o derecha para encontrar el último punto que intercepta a la derecha del área de soluciones factibles, para encontrar la solución factible óptima.



$X_1 + 3/2\ X_2 = 3$	$X_1 + 3/2\ X_2 = 6$	$X_1 + 3/2\ X_2 = 9$
$X_1 = 0 \quad X_2 = 0$	$X_1 = 0 \quad X_2 = 0$	$X_1 = 0 \quad X_2 = 0$
$X_2 = 2 \quad X_1 = 3$	$X_2 = 4 \quad X_1 = 6$	$X_2 = 6 \quad X_1 = 9$



Tiempo sobrante de cada máquina:

Máquina A	**Máquina B**	**Máquina C**
$2X_1^* + 2X_2^* \leq 16$	$X_1^* + 2X_2^* \leq 12$	$4X_1^* + 2X_2^* \leq 28$
$2(4) + 2(4) \leq 16$	$(4) + 2(4) \leq 12$	$4(4) + 2(4) \leq 28$
$16 \leq 16$	$12 \leq 12$	$24 \leq 28$
Se usan todas las horas semanales disponibles	Se usan todas las horas semanales disponibles	A la Máquina C le sobran 4 horas Semanales

2. Optimización del corte de madera

En una marquetería se fabrican cuadros, cuyos marcos se obtienen de cortar varillas para bocel, cuya longitud original es de 300 cms. El Departamento de ventas tiene pedidos para el siguiente mes de 175 cuadros de 119 x 90 cms. El Jefe de producción ordena que se corten 350 boceles de 119 cents. Y 350 boceles de 90 cms. (Cada cuadro lleva 2 boceles de cada dimensión).

Con ésta manera de cortar la madera, la Fábrica necesita el capital para comprar 292 varillas para bocel de 300 cms. cada una y genera 14.450 cms. De desperdicio.

Formule un problema de programación lineal que minimice el desperdicio, la compra de materia prima y optimice la productividad.

← 300 cms →

Materia Prima: Varilla de madera para Bocel de 300 cms de larga

Medidas necesarias para el marco

← 119 cms → ← 90 cms →

Número de Boceles para 175 cuadros: 175 x 2 = 350

Método de corte actual y su valoración

cms 119 | cms 119 | cms 62

Número de varillas a comprar:
(175 x 2) / 2 = 175 varillas
Desperdicio: 175 x 62 = 10.850 cms

cms 90 | cms 90 | cms 90 | cms 30

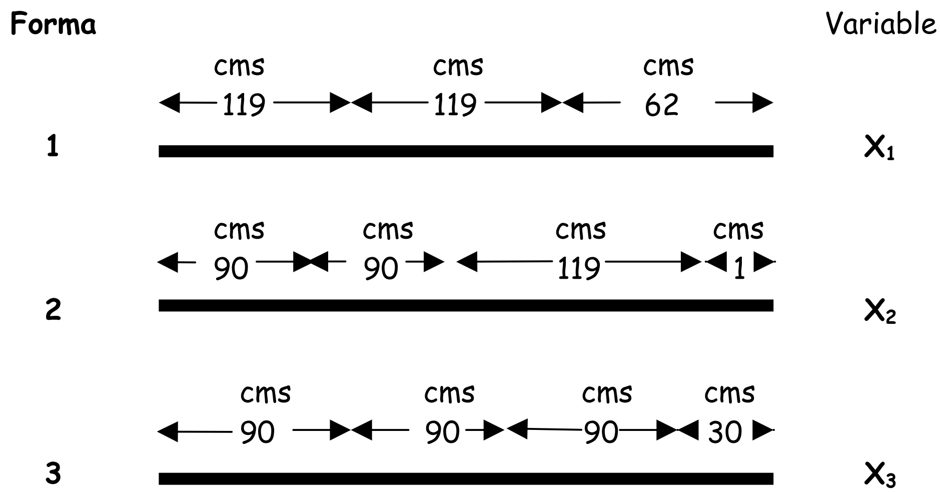
Número de varillas a comprar:
(175 x 2) / 3 = 116,6 ≡ 117 varillas
Desperdicio: 117 x 30 + 90 = 3.600 cms

Total de varillas de 300 cms a comprar: 175 + 117 = 292 varillas
Total de centímetros de desperdicio: 10.850 + 3600 = 14.450 cms

Formulación

X_j = Número de varillas a cortar de la forma j-ésima (j = 1, 2 y 3)

Formas posibles de cortar la varilla



Minimizar $Z = 62X_1 + X_2 + 30X_3$ Minimizar el desperdicio

C.S.R.	$2X_1 + X_2 = 350$	Restricciones debidas a la necesidad
	$2X_2 + 3X_3 = 350$	De Boceles de cada tamaño
$X_J \geq 0$	; J = 1, 2 y 3 Enteros	Restricción de no negatividad

Resolviendo por el método de Branch and Bound ó el método de los planos cortantes de Gomory ó usando el software del QSB ó QSB+ ó WINQSB, se obtiene la siguiente solución:

$X_1^* = 89$ Cortar 89 veces de la manera 1
$X_2^* = 172$ Cortar 172 veces de la manera 2
$X_3^* = 2$ Cortar 2 veces de la manera 3
$Z^* = 5.750$ centímetros de desperdicio

Número de varillas a comprar: 89 + 172 + 2 = 263 varillas de 300 cms de largo cada una

Cuadro comparativo de los ahorros:

Conceptos	**Materia prima**	**Desperdicio (cms.)**
Antes	292	14.450
Después	263	5.750
Diferencia	29	8.700
% disminuido	9,93 %	60,20 %

3. Corridas de producción

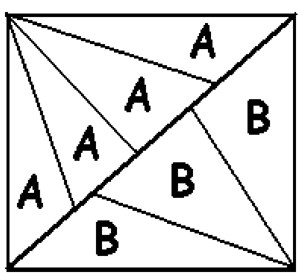
Una empresa produce un artículo cuya unidad está compuesta por 4 unidades de componente **A** y 3 unidades de componente **B** que se producen por corrida de producción a partir de las materias primas 1 y 2 y en tres diferentes departamentos. La producción por corrida de producción se muestra en la siguiente tabla:

Elabore un plan de producción para maximizar la cantidad de artículo a producir.

	Materia Prima 1	**Materia Prima 2**	**Componente A**	**Componente B**
Departamento 1	8	6	7	5
Departamento 2	5	9	6	9
Departamento 3	3	8	8	4
Disponibilidad	100	200		

Formulación:

X_J = Número de corridas de producción en el departamento j-ésimo (j = 1,2 y 3)



Número de componentes A: $7X_1 + 6X_2 + 8X_3$
Número de componentes B: $5X_1 + 9X_2 + 4X_3$
Número de artículos completos
con los componentes A: $(7X_1 + 6X_2 + 8X_3) / 4$
Número de artículos completos
con los componentes B: $(5X_1 + 9X_2 + 4X_3) / 3$

Unidad completa del
Producto

Maximizar {Mínimo entero entre{ $(7X_1 + 6X_2 + 8X_3) / 4$, $(5X_1 + 9X_2 + 4X_3) / 3$ }}

C.S.R. $8X_1 + 5X_2 + 3X_3 \leq 100$ Restricciones debidas a la disponibilidad
$6X_1 + 9X_2 + 8X_3 \leq 200$ De materias primas tipo 1 y 2
$X_J \geq 0$ J = 1, 2 y 3 Enteros Restricción de no negatividad

Usando la técnica de la programación por metas y usando el QSB para programación lineal entera ó el método de Branch and Bound en 43 iteraciones se encuentra la siguiente solución óptima:
$X_1^* = 1$ Hacer la corrida de producción en el departamento 1, 1 vez
$X_2^* = 7$ Hacer la corrida de producción en el departamento 2, 7 veces
$X_3^* = 16$ Hacer la corrida de producción en el departamento 3, 16 veces

Z^* = 44 Unidades completas del producto

Partes A a producir: $7X_1^* + 6X_2^* + 8X_3^* = 7(1) + 6(7) + 8(16) = 177$ unidades de A
Partes B a producir: $5X_1^* + 9X_2^* + 4X_3^* = 5(1) + 9(7) + 4(16) = 132$ unidades de B
Con 177 unidades de A se fabrican 177/4 = 44 unidades enteras del articulo
Con 132 unidades de B se fabrican 132/3 = 44 unidades enteras del articulo

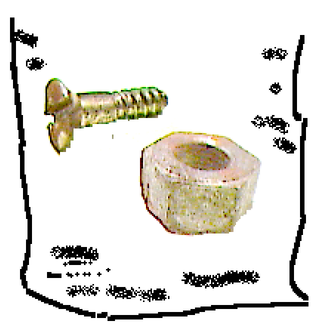
$8X_1^* + 5X_2^* + 3X_3^* \leq 100$; $8(1) + 5(7) + 3(16) \leq 100$; $91 \leq 100$ Sobran 9 unidades de materia prima 1
$6X_1^* + 9X_2^* + 8X_3^* \leq 200$; $6(1) + 9(7) + 8(16) \leq 200$; $197 \leq 200$ Sobran 3 unidades de materia prima 2

4. El problema de los paquetes de tuercas

Un distribuidor de ferretería planea vender paquetes de tuercas y tornillos mezclados. Cada paquete pesa por lo menos 2 libras. Tres tamaños de tuercas y tornillos componen el paquete y se compran en lotes de 200 libras. Los tamaños 1, 2 y 3 cuestan respectivamente \$20, \$8 y \$12, además:

a) El peso combinado de los tamaños 1 y 3 debe ser **al menos** la mitad del peso total del paquete.
b) El peso de los tamaños 1 y 2 **no debe ser mayor** que 1,6 libras
c) Cualquier tamaño de tornillo **debe ser al menos** el 10% del paquete total

Cuál será la composición del paquete que ocasionará un costo mínimo ?



Vende bolsas de al menos 2 Libras cada una

X_j= Peso en libras de las tuercas y tornillos del tamaño j-ésimo (j=1,2 y 3) en la bolsa

Observe que:

20/200 es lo que vale una libra de tornillos tipo 1
8/200 es lo que vale una libra de tornillos tipo 2
12/200 es lo que vale una libra de tornillos tipo 3

Minimizar $Z = 20/200\ X_1 + 8/200\ X_2 + 12/200\ X_3$

C.S.R.	$X_1 + X_3 \geq (X_1 + X_2 + X_3) / 2$	Los tamaños 1 y 3 al menos la mitad del peso
	$X_1 + X_2 \leq 1{,}6$	Los tamaños 1 y 2 no deben ser mayor de 1,6 lbs
	$X_1 \geq 0{,}1\ (X_1 + X_2 + X_3)$	El tamaño 1 debe ser al menos el 10% del total
	$X_2 \geq 0{,}1\ (X_1 + X_2 + X_3)$	El tamaño 2 debe ser al menos el 10% del total
	$X_3 \geq 0{,}1\ (X_1 + X_2 + X_3)$	El tamaño 3 debe ser al menos el 10% del total
	$X_1 + X_2 + X_3 \geq 2$	El paquete debe ser al menos de 2 libras
$X_J \geq 0$	$J = 1, 2$ y 3	Condición de no negatividad

Solución:

Minimizar $Z = 0{,}1X_1 + 0{,}04X_2 + 0{,}06X_3$

C.S.R.

$$
\begin{array}{rrrl}
X_1 & - X_2 & + X_3 & \geq 0 \\
X_1 & + X_2 & & \leq 1{,}6 \\
0{,}9X_1 & -0{,}1X_2 & -0{,}1X_3 & \geq 0 \\
-0{,}1X_1 & +0{,}9X_2 & -0{,}1X_3 & \geq 0 \\
-0{,}1X_1 & -0{,}1X_2 & +0{,}9X_3 & \geq 0 \\
X_1 & + X_2 & + X_3 & \geq 2
\end{array}
$$

$X_J \geq 0$ $J = 1, 2$ y 3

Usando el WINQSB se encuentra que la solución óptima es:

$X_1^* = 0{,}2$ Libras del tamaño 1
$X_2^* = 1{,}0$ Libras del tamaño 2
$X_3^* = 0{,}8$ Libras del tamaño 3
$Z^* = \$0{,}108$ Costo mínimo del paquete

5. Problema clásico del transporte

Un fabricante tiene tres centros de distribución en: Bogotá, Medellín y Cali. Estos centros tienen disponibilidades de: 20, 40 y 40 unidades respectivamente. Sus detallistas requieren los siguientes cantidades: Pereira 25, Tulúa 10, Anserma 20, Ibagué 30 y Armenia 15. El costo de transporte por unidad en pesos entre cada centro de distribución y las localidades de los detallistas se dan en la siguiente tabla:

		Detallistas				
		Pereira	Tulúa	Anserma	Ibagué	Armenia
Centros de distribución	Bogotá	55	30	40	50	40
	Medellín	35	30	100	45	60
	Cali	40	60	95	35	30

Cuanto unidades debe mandar el fabricante desde cada centro de distribución a cada detallista, de manera que los costos totales de transporte sean mínimos ?

X_J = Cantidad de unidades a enviar desde el centro de distribución i-ésimo (i = 1 = Bogotá, i = 2 = Medellín, i = 3 = Cali), al detallista j-ésimo (j = 1 = Pereira, j = 2 = Tulúa, j = 3 = Anserma, j = 4 = Ibagué, j = 5 = Armenia)

Minimizar $Z = 55X_{11} + 30X_{12} + 40X_{13} + 50X_{14} + 40X_{15} + 35X_{21} + 30X_{22} + 100X_{23} + 45X_{24} + 60X_{25} + 40X_{31} + 60X_{32} + 95X_{33} + 35X_{34} + 30X_{35}$

C.S.R. $X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} \leq 20$
$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} \leq 40$
$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} \leq 40$

Restricciones debidas a la disponibilidad de unidades en los respectivos centros de distribución 1, 2 y 3

$X_{11} + X_{21} + X_{31} \geq 25$
$X_{12} + X_{22} + X_{32} \geq 10$
$X_{13} + X_{23} + X_{33} \geq 20$
$X_{14} + X_{24} + X_{34} \geq 30$
$X_{15} + X_{25} + X_{35} \geq 15$

Restricciones debidas a los requerimientos de unidades, de los detallistas respectivos 1, 2, 3, 4 y 5

$X_{ij} \geq 0$; i = 1, 2 y 3 ; j = 1, 2, 3, 4 y 5

Empleando el QSB ó el INVOP obtenemos la siguiente solución factible óptima:

$X^*_{11} = 0$	$X^*_{21} = 25$	$X^*_{31} = 0$	$Z^* = \$ 3.525$
$X^*_{12} = 0$	$X^*_{22} = 10$	$X^*_{32} = 0$	
$X^*_{13} = 20$	$X^*_{23} = 0$	$X^*_{33} = 0$	
$X^*_{14} = 0$	$X^*_{24} = 5$	$X^*_{34} = 25$	
$X^*_{15} = 0$	$X^*_{25} = 0$	$X^*_{35} = 15$	

6. El problema del trasbordo

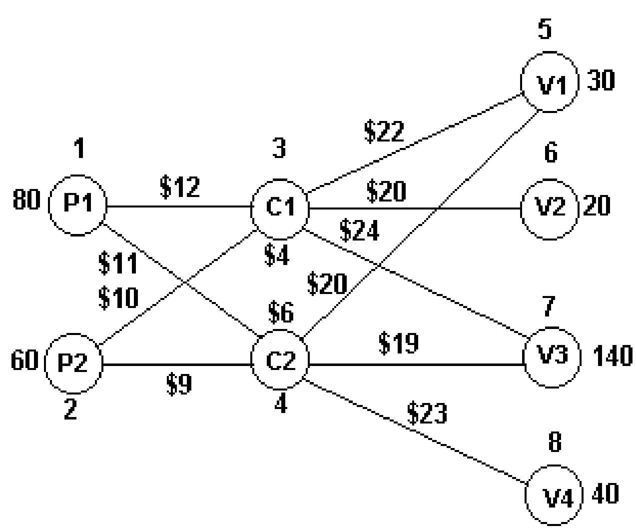
Una empresa fabrica monitores de alta resolución en dos plantas de producción P_1 y P_2 . Las capacidades de producción por semana son de 80 y 60 unidades, respectivamente. Los monitores se llevan a cuatro centros de ventas V_i , i = 1, 2, 3 Y 4 que solicitan para la

próxima semana 30 unidades para V_1, 20 para V_2 y 40 para V_4. V_3 no ha cuantificado su demanda indicando que va a ser muy alta y aceptaría toda la producción.
La legislación vigente obliga a la empresa a transportar los monitores de las plantas a los puntos de venta a través de alguno de los dos centros de control de calidad existentes C_1 y C_2 en los que se controlan los monitores y cuya capacidad es muy grande. El costo de control por unidad en C_1 es de $4.000 y en C_2 es de $6.000.
Los costos en miles de pesos del transporte unitario de las plantas a los centros de control y de estos a los puntos de venta, aparecen en la tabla siguiente:

		Plantas de producción		Centros de venta			
		P_1	P_2	V_1	V_2	V_3	V_4
Centros de control de calidad	C_1	12	10	22	20	24	-
	C_2	11	9	20	-	19	23

La empresa desea distribuir toda la producción para la semana entrante, sin mostrar preferencia por la utilización de un determinado centro de control o punto de venta, pues su interés reside en minimizar el costo global de transporte. Cual debe ser la distribución de las plantas a los puntos de venta ?

Formulación:



X_{IJ} = Unidades a enviar desde el nodo i-ésimo (i = 1,2,3 y 4) al nodo j-ésimo (j = 3,4,5,6,7 y 8)

Minimizar $Z = 12X_{13} + 11X_{14} + 10X_{23} + 9X_{24} + 4(X_{13} + X_{23}) + 6(X_{14} + X_{24}) + 22X_{35} + 20X_{36} + 24X_{37} + 20X_{45} + 19X_{47} + 23X_{48}$

C.S.R.

$X_{13} + X_{14} \le 80$ $X_{23} + X_{24} \le 60$	Restricciones debidas a la disponibilidad de monitores en las plantas p_1 y p_2
$X_{13} + X_{23} = X_{35} + X_{36} + X_{37}$ $X_{14} + X_{24} = X_{45} + X_{47} + X_{48}$	Restricciones debidas a que la suma de monitores entrante debe ser igual a la suma de monitores saliente de cada centro C_1 y C_2
$X_{35} + X_{45} \ge 30$ $X_{36} \ge 20$ $X_{37} + X_{47} \ge 140$ $X_{48} \ge 40$	Restricciones debidas a la demanda de monitores en cada centro de venta V_1 , V_2 , V_3 y V_4
$X_{ij} \ge 0$; ¥$_i$, ¥$_j$ Enteros	Restricción de no negatividad

Otra manera de formularlo es, convirtiéndolo en un problema clásico de transporte, así: Construimos una tabla de costos mínimos, desde cada origen P_i a cada destino V_j señalando el centro de control de calidad C_k , usado en dicha ruta de mínimo costo.

	V_1	**V_2**	**V_3**	**V_4**
P_1	**37 (C_2)***	36 (C_1)	36 (C_2)	40 (C_2)
P_2	35 (C_2)	34 (C_1)	34 (C_2)	38 (C_2)

Ejemplo: Para enviar monitores desde la planta P_1 al centro de ventas V_1 existen dos alternativas:

1) $P_1 \Rightarrow C_1 \Rightarrow V_1$ con costos por unidad de: \$12 + \$4 + \$22 = \$38
2) $P_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow V_1$ con costos por unidad de: \$11 + \$6 + \$20 = **\$37 ***

Inscribimos el menor costo de estas dos alternativas en la tabla, especificando que se hace a través del centro de investigación C_2

X_{ij} = Cantidad de monitores de alta resolución a enviar desde la planta i-ésima (i=1, i=2) al centro de venta j-ésimo (j=1, 2, 3 y 4)

Minimizar $Z = 37X_{11} + 36X_{12} + 36X_{13} + 40X_{14} + 35X_{21} + 34X_{22} + 34X_{23} + 38X_{24}$

C.S.R.

$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} \le 80$ $X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} \le 60$	Restricciones debidas a la disponibilidad de monitores en las plantas P_1 y P_2
$X_{11} + X_{21} \ge 30$ $X_{12} + X_{22} \ge 20$ $X_{13} + X_{23} \ge 140$ $X_{14} + X_{24} \ge 40$	Restricciones debidas a la demanda de monitores, encada centro de ventas V_1 , V_2 , V_3 y V_4

$X_{ij} \geq 0$; i = 1 y 2 ; j = 1, 2 , 3 y 4 Enteros | Condición de no negatividad

Solución: Empleando cualquiera de las dos formulaciones, se obtiene mediante el WinQsb o el INVOP la siguiente solución:
De la planta de producción P_1 enviar 20 monitores al centro de control de calidad C_1
De la planta de producción P_1 enviar 60 monitores al centro de control de calidad C_2
De la planta de producción P_2 enviar 60 monitores al centro de control de calidad C_2
Del centro de control de calidad C_1 enviar 20 monitores al centro de ventas V_2
Del centro de control de calidad C_2 enviar 120 monitores al centro de ventas V_3
Costo total Mínimo del trasporte y revisión de calidad $4.920

7. Problema de localización de planta

Una empresa del sector textil, que opera en todo el país, dispone de la siguiente configuración: Dos plantas de fabricación en Pereira e Ibagué, con capacidades de 900 y 1.500 unidades respectivamente. Cuatro almacenes regionales de distribución que sirven a los clientes de sus respectivas zonas en: Neiva, Medellín, Cali y Bogotá, con demandas de: 700, 800, 500 y 400 unidades respectivamente.
En los próximos años, la empresa espera un crecimiento de la demanda del orden del 25%, lo cual ha llevado a la dirección de la misma a plantearse la apertura de una nueva fábrica. A la vista de los criterios que la empresa estima importantes para la localización de la nueva planta, existen dos alternativas a considerar: Pasto (alternativa 1) y Villavicencio (Alternativa 2). La elección recaerá en aquella que provoque los menores costos de transporte entre las fabricas y los almacenes, dado que ambas parecen ser igualmente convenientes respecto a otros factores. La tabla siguiente muestra los costos de transporte unitarios entre cada origen y destino.

Plantas de fabricación	Almacenes regionales de distribución			
	Neiva	Medellín	Cali	Bogotá
Pereira	6	4	2	6
Ibagué	2	3	7	5
Pasto	6	4	4	8
Villavicencio	6	3	4	2

Formulación:
(a) Considerando establecer la nueva planta en Pasto
X_{ij} = Unidades a enviar desde la planta i-ésima (i = 1 = Pereira, i = 2 = Ibagué, i = 3 Pasto) al almacén j-ésimo (j = 1 = Neiva, j = 2 = Medellín, j = 3 = Cali, j = 4 = Bogotá)

Minimizar $Z = 6X_{11} + 4X_{12} + 2X_{13} + 6X_{13} + 2X_{21} + 3X_{22} + 7X_{23} + 5X_{24} + 6X_{31} + 4X_{32} + 4X_{33} + 8X_{34}$

C.S.R.

$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 900$ $X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 1.500$ $X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 600$	Restricciones debidas a la disponibilidad de unidades en las plantas 1, 2 y 3 respectivamente
$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 700 + 175 = 875$ $X_{12} + X_{22} + X_{32} = 800 + 200 = 1.000$ $X_{13} + X_{23} + X_{33} = 500 + 125 = 625$ $X_{14} + X_{24} + X_{34} = 400 + 100 = 500$	Restricciones debidas a los requerimientos de unidades de los almacenes regionales de distribución 1, 2, 3 y 4

$X_{ij} \geq 0$; $i = 1,2$ y 3 ; $j = 1,2,3$ y 4

Empleando el QSB o el INVOP, se obtiene la siguiente solución óptima:

$X^*_{13} = 625$ $\quad X^*_{21} = 875$ $\quad X^*_{32} = 600$
$X^*_{14} = 275$ $\quad X^*_{22} = 400$
$X^*_{24} = 225$ $\quad Z^* = \$9.375$

(b) Considerando establecer la nueva planta en Villavicencio:

X_{ij} = Unidades a enviar desde la planta i-ésima (i = 1 = Pereira, i = 2 = Ibagué, i = 3 Villavicencio) al almacén j-ésimo (j = 1 = Neiva, j = 2 = Medellín, j = 3 = Cali, j = 4 = Bogotá)

Minimizar $Z = 6X_{11} + 4X_{12} + 2X_{13} + 6X_{13} + 2X_{21} + 3X_{22} + 7X_{23} + 5X_{24} + 6X_{31} + 3X_{32} + 4X_{33} + 2X_{34}$

C.S.R.

$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 900$ $X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 1.500$ $X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 600$	Restricciones debidas a la disponibilidad de unidades en las plantas 1, 2 y 3 respectivamente
$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 875$ $X_{12} + X_{22} + X_{32} = 1.000$ $X_{13} + X_{23} + X_{33} = 625$ $X_{14} + X_{24} + X_{34} = 500$	Restricciones debidas a los requerimientos de unidades de los almacenes regionales de distribución 1, 2, 3 y 4

$X_{ij} \geq 0$; $i = 1,2$ y 3 ; $j = 1,2,3$ y 4

Empleando el QSB o el INVOP, se obtiene la siguiente solución óptima:

$X^*_{12} = 275$ $\quad X^*_{21} = 875$ $\quad X^*_{32} = 100$ $\quad Z^* = \$7.275$
$X^*_{13} = 625$ $\quad X^*_{22} = 625$ $\quad X^*_{34} = 500$

De los resultados obtenidos se deriva que Villavicencio es la mejor localización bajo el criterio de minimizar los costos del transporte.

8. El problema de asignaciones

Se usan cuatro barcos cargueros para transportar bienes de un puerto a otros cuatro puertos (numerados 1,2,3 y 4). Se puede usar cualquier barco para hacer cualquiera de los cuatro viajes. Sin embargo, dadas algunas diferencias entre los barcos y las cargas, el costo total de cargar, transporte y descargue de bienes para las distintas combinaciones de barcos y puertos varia mucho. Estos costos se muestran el la siguiente tabla:

		P U E R T O			
		1	**2**	**3**	**4**
Barco	**1**	5	4	6	7
	2	6	6	7	5
	3	7	5	7	6
	4	5	4	6	6

El objetivo es asignar los barcos a los puertos en una correspondencia uno a uno, de manera que se minimice el costo total de los cuatro barcos.

X_{ij} = 0, No asigne el barco i-ésimo (i = 1,2,3 y 4) al puerto j-ésimo (j = 1,2,3 y 4)
X_{ij} = 1, Si asigne el barco i-ésimo (i = 1,2,3 y 4) al puerto j-ésimo (j = 1,2,3 y 4)

Minimice $Z = 5X_{11} + 4X_{12} + 6X_{13} + 7X_{14} + 6X_{21} + 6X_{22} + 7X_{23} + 5X_{24} + 7X_{31} + 5X_{32} + 7X_{33} + 6X_{34} + 5X_{41} + 4X_{42} + 6X_{43} + 6X_{44}$

C.S.R.

$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 1$
$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 1$
$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 1$
$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} = 1$

Restricciones que aseguran que un solo barco es asignado a un solo puerto

$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} = 1$
$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} = 1$
$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} = 1$
$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} = 1$

Restricciones que aseguran que un solo puerto es asignado a un solo barco

$X_{ij} \geq 0$; i = 1,2,3 y 4 ; j = 1,2,3 y 4

Empleando el método Húngaro se obtiene la siguiente solución óptima y factible

$X^*_{11} = 1$	$X^*_{21} = 0$	$X^*_{31} = 0$	$X^*_{41} = 0$	$Z^* = 21$
$X^*_{12} = 0$	$X^*_{22} = 0$	$X^*_{32} = 1$	$X^*_{42} = 0$	
$X^*_{13} = 0$	$X^*_{23} = 0$	$X^*_{33} = 0$	$X^*_{43} = 1$	
$X^*_{14} = 0$	$X^*_{24} = 1$	$X^*_{34} = 0$	$X^*_{44} = 0$	

Barco 1 --------→ Puerto 1 --------→ Costo $ 5
Barco 2 --------→ Puerto 4 --------→ Costo $ 5
Barco 3 --------→ Puerto 2 --------→ Costo $ 5
Barco 4 --------→ Puerto 3 --------→ Costo $ 6

Costo total mínimo: $21

9. Problema de la mezcla

Una compañía de petróleos produce tres tipos de gasolina: Super, Normal y Euro. Se obtienen por mezcla de tres calidades de crudo (A,B,C), que contienen tres componentes (1,2,3) . La participación de estos componentes en la composición de cada crudo es:

		COMPONENTES (%)		
		1	**2**	**3**
CRUDOS	**A**	80	10	5
	B	45	30	20
	C	30	40	25

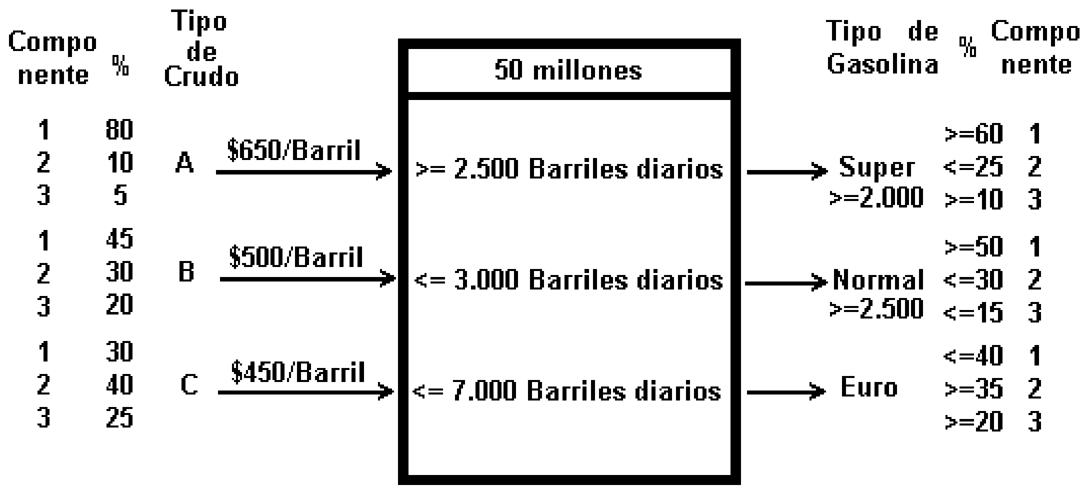
Las especificaciones de los tres tipos de gasolina son:

		COMPONENTES (%)		
		1	**2**	**3**
GASOLINA	**SUPER**	≥ 60	≤ 25	≥ 10
	NORMAL	≥ 50	≤ 30	≤ 15
	EURO	≤ 40	≥ 35	≥ 20

Los costos por barril de crudo A, B y C son: $650, $500 y $450, respectivamente.
El presupuesto diario de compra es de $50 Millones.
La disponibilidad diaria de crudos B y C se limita, respectivamente, a 3.000 y 7.000 barriles.
Ciertos acuerdos obligan a comprar al menos 2.500 barriles de A.
Las demandas de gasolina Super y Normal son de 2.000 y 2.500 barriles diarios, que deben satisfacerse. La compañía desea maximizar la producción de gasolina Euro.

Formule un modelo de programación lineal que de respuesta al problema planteado por la compañía.

Formulación:



X_{ij} = Cantidad de barriles diarios del crudo i-ésimo (i = A, B, C) dedicado al tipo de gasolina j-ésima (j = S, N, E)

Maximizar $Z = X_{AE} + X_{BE} + X_{CE}$

C.S.R.

$650(X_{AS} + X_{AN} + X_{AE}) + 500(X_{BS} + X_{BN} + X_{BE}) + 450(X_{CS} + X_{CN} + X_{CE}) \leq 500'000.000$

Restricción debida a la limitación de disponibilidad de capital

$X_{AS} + X_{AN} + X_{AE} \geq 2.500$ $X_{BS} + X_{BN} + X_{BE} \leq 3.000$ $X_{CS} + X_{CN} + X_{CE} \leq 7.000$	Restricciones debidas a las limitaciones de crudo y al acuerdo comercial
$X_{AS} + X_{BS} + X_{CS} \geq 2.000$ $X_{AN} + X_{BN} + X_{CN} \geq 2.500$	Restricciones debidas a la demanda de gasolina Super y Normal, respectivamente
$0,80X_{AS}+0,45X_{BS}+0,30X_{CS} \geq 0,60(X_{AS}+X_{BS}+X_{CS})$ $0,10X_{AS}+0,30X_{BS}+0,40X_{CS} \leq 0,25(X_{AS}+X_{BS}+X_{CS})$ $0,05X_{AS}+0,20X_{BS}+0,25X_{CS} \geq 0,10(X_{AS}+X_{BS}+X_{CS})$	Restricciones debidas al porcentaje de cada componente en la gasolina Super
$0,80X_{AN}+0,45X_{BN}+0,30X_{CN} \geq 0,50(X_{AN}+X_{BN}+X_{CN})$ $0,10X_{AN}+0,30X_{BN}+0,40X_{CN} \leq 0,30(X_{AN}+X_{BN}+X_{CN})$ $0,05X_{AN}+0,20X_{BN}+0,25X_{CN} \leq 0,15(X_{AN}+X_{BN}+X_{CN})$	Restricciones debidas al porcentaje de cada componente en la gasolina Normal
$0,80X_{AE}+0,45X_{BE}+0,30X_{CE} \leq 0,40(X_{AE}+X_{BE}+X_{CE})$ $0,10X_{AE}+0,30X_{BE}+0,40X_{CE} \geq 0,35(X_{AE}+X_{BE}+X_{CE})$ $0,05X_{AE}+0,20X_{BE}+0,25X_{CE} \geq 0,20(X_{AE}+X_{BE}+X_{CE})$	Restricciones debidas al porcentaje de cada componente en la gasolina Euro

$X_{ij} \geq 0$; i = A, B, C ; j = S, N, E

10. El problema del financiero

Un inversionista tiene la intención de hacer varias inversiones, las cuales se extenderán por un periodo de cinco años, al final del cual necesitará de todo el capital. Las inversiones se hacen el 1º de Enero de cada año y son:

Inversión A: Disponible el 1º de Enero de cada año y produce el 15% de interés al final de cada año.

Inversión B: Disponible en dos años a partir de ahora (Comienzo del 3º año), y produce un retorno del 25% al final del 3º año y lo máximo que el inversionista considerará son $40.000

Inversión C: Disponible en un año a partir de ahora (Comienzo del 2º año), y produce el 40% al final del cuarto año. Esta inversión será de $30.000 como máximo.

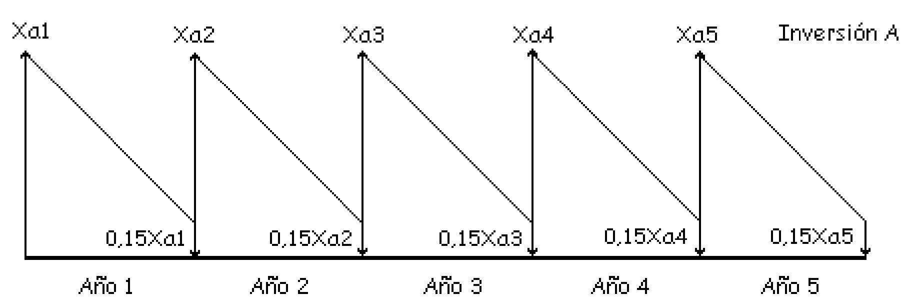
El inversionista tiene $100.000 disponibles para las inversiones.

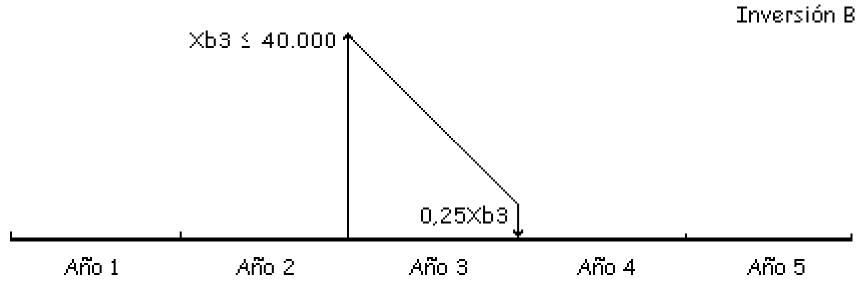
Cuál debe ser el portafolio de inversión que le permita obtener la máxima cantidad de dinero al final del año quinto ?

Formulación:

X_{ij} = Cantidad de dinero a invertir en la alternativa i-ésima (i=A, B y C) al principio del año j-ésimo (j = 1, 2, 3, 4 y 5).

Capital Inicial: $100.000





Maximizar $Z = 0{,}15\ (X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} + X_{A4} + X_{A5}) + 0{,}25X_{B3} + 0{,}4X_{C2}$

Para construir las restricciones piense, que al principio de cada año va a tener disponibles algunas alternativas de inversión para las que no podrá invertir más de lo tenga disponible en ese momento. El lado izquierdo de las restricciones, representa la cantidad de dinero que el inversionista invertirá en las alternativas disponibles al principio de cada año y el lado derecho representa la cantidad de dinero disponible para invertir, que es la suma de: El capital inicial + La suma de todos los intereses recibidos hasta la fecha - Los capitales que están invertidos en ese momento y que no han retornado.

C.S.R.

$X_{A1} \le 100.000$	Restricciones debidas a la cantidad de dinero disponible al principio de cada uno de los cinco años
$X_{A2} + X_{C2} \le 100.000 + 0{,}15X_{A1}$	
$X_{A3} + X_{B3} \le 100.000 + 0{,}15(X_{A1} + X_{A2}) - X_{C2}$	
$X_{A4} \le 100.000 + 0{,}15(X_{A1} + X_{A2} + X_{A3}) + 0{,}25X_{B3} - X_{C2}$	
$X_{A5} \le 100.000 + 0{,}15(X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} + X_{A4}) + 0{,}25X_{B3} + 0{,}4X_{C2}$	
$X_{B3} \le 40.000$	
$X_{C2} \le 30.000$	

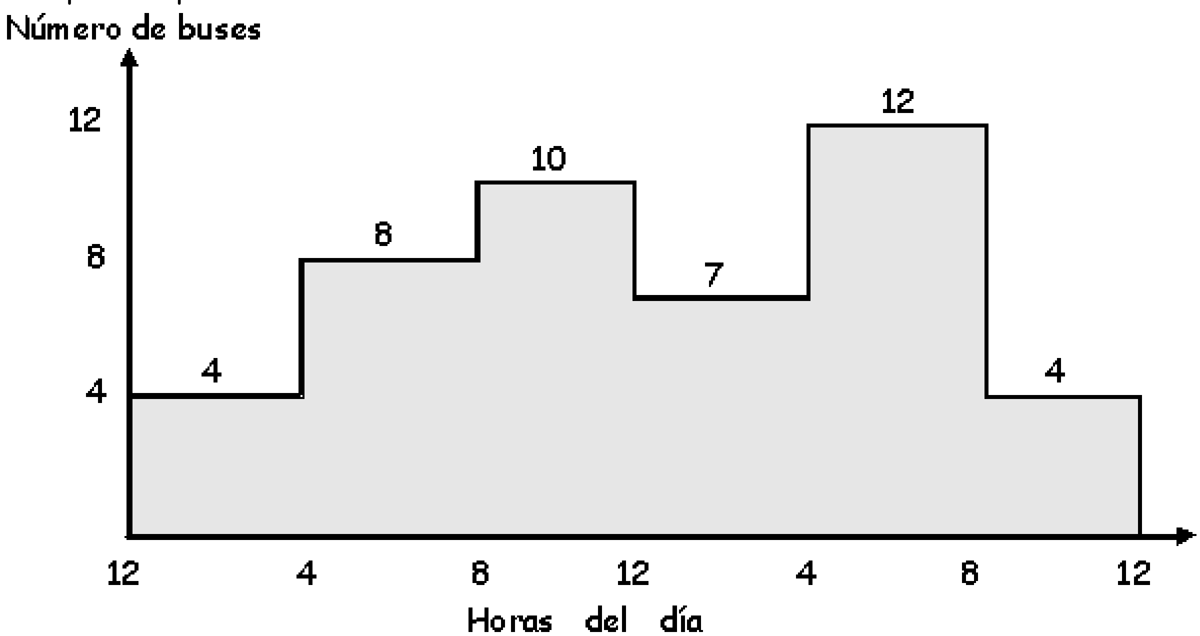
$X_{ij} \ge 0$; $i = A$, B y c ; $j = 1, 2, 3, 4$ y 5

Empleando el WinQsb se obtiene la siguiente solución óptima factible:

X^*_{A1} = \$100.000	X^*_{A3} = \$ 92.250	X^*_{A5} = \$179.500,6	X^*_{C2} = \$0
X^{*A2} = \$115.000	X^*_{A4} = \$156.087,50	X^*_{B3} = \$ 40.000	Z^* = \$206.425,7

11. Problema de distribución de buses

Transporte y Tránsito del Tolima estudia la factibilidad de introducir un sistema de autobuses de transporte masivo que aliviará el problema del smog al reducir el tránsito en la ciudad. El estudio inicial busca determinar el mínimo número de autobuses que pueden suplir las necesidades de transporte en la ciudad. El estudio inicial busca determinar el número mínimo de autobuses que pueden suplir las necesidades de transporte. Después de recolectar la información necesaria, el ingeniero de la entidad advierte que el número mínimo de autobuses que se necesitan para cubrir la demanda fluctúa según la hora del día. Estudiando los datos más a fondo descubrió que el número requerido de autobuses se puede suponer constante en intervalos sucesivos de 4 horas cada uno. En la figura se resumen los hallazgos del ingeniero. Se decidió que para hacer el mantenimiento diario requerido, cada autobús podría operar solo 8 horas sucesivas al día.



X_j = Número de buses a signar en el turno j-ésimo (j = 1, 2, 3, 4, 5 y 6) de 8 horas cada uno.

J = 1 = Turno que empieza a las 12 a.m.	De 12 a.m. a 8 a.m.
J = 2 = Turno que empieza a las 4 a.m.	De 4 a.m. a 12 meridiano
J = 3 = Turno que empieza a las 8 a.m.	De 8 a.m. a 4 p.m.
J = 4 = Turno que empieza a las 12 meridiano	De 12 Meridiano a 8 p.m.
J = 5 = Turno que empieza a las 4 p.m.	De 4 p.m. a 12 p.m.
J = 6 = Turno que empieza a las 8 p.m.	De 8 p.m. a 4 a.m.

Horario de la demanda	Turnos de 8 horas, empezando a las 12 de la noche						Número de buses necesarios
	X_1 12 - 8	X_2 4 - 12	X_3 8 - 4	X_4 12 - 8	X_5 4 - 12	X_6 8 - 4	
12 - 4	✔					✔	4
4 - 8	✔	✔					8
8 - 12		✔	✔				10
12 - 4			✔	✔			7
4 - 8				✔	✔		12
8 - 12					✔	✔	4

Minimizar $Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$

C.S.R.

$X_1 + X_6 \geq 4$
$X_1 + X_2 \geq 8$
$X_2 + X_3 \geq 10$
$X_3 + X_4 \geq 7$
$X_4 + X_5 \geq 12$
$X_5 + X_6 \geq 4$

Restricciones debidas a la demanda de buses cada cuatro horas

$X_j \geq 0$; $j = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6 ; y enteros

Empleando la programación lineal entera y el software WinQsb, se encuentra la solución óptima factible siguiente:

$X^*_1 = 4$
$X^*_2 = 10$
$X^*_3 = 0$
$X^*_4 = 8$
$X^*_4 = 4$
$X^*_6 = 0$
$Z^* = 26$ buses

Interpretación

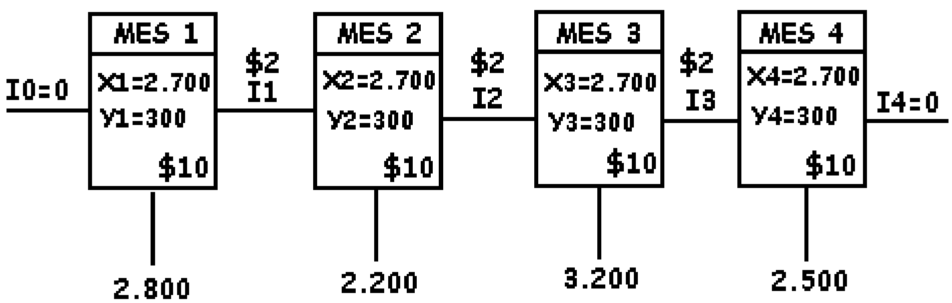
$X^*_1 = 4$ Asignar 4 buses en el turno de 12 de la noche a 4 a.m.
$X^*_2 = 10$ Asignar 10 buses en el turno de 4 a.m. a 8 a.m.
$X^*_3 = 0$ No asignar buses en el turno de 8 a.m. a 12 meridiano
$X^*_4 = 8$ Asignar 8 buses en el turno de 12 meridiano a 4 p.m.
$X^*_4 = 4$ Asignar 4 buses en el turno de 4 p.m. a 8 p.m.
$X^*_6 = 0$ No asignar buses en el turno de 8 p.m. a 12 de la noche

12. Problema de inventarios

Un producto de la firma XYZ tiene la siguiente demanda pronosticada para los próximos cuatro meses: Mes 1: 2.800 unidades, Mes 2: 2.200 unidades, Mes 3: 3.200 unidades y Mes 4: 2.500 unidades.

La compañía puede producir 2.700 unidades del artículo por mes en sus turnos normales. Utilizando tiempo extra es posible fabricar 300 unidades adicionales. La producción en tiempo extra tiene un sobre costo de $10 por unidad. La administración ha estimado que se incurre en un costo de almacenamiento de $2 por unidad que se produzca en un mes determinado y no se venda en el mismo.

Se trata de determinar un programa óptimo de producción que minimice los costos totales de producción y almacenamiento. Supóngase que la cantidad en existencia es cero y se desea un inventario final del periodo igual a cero.



X_i = Unidades a producir en el mes i-ésimo (i = 1, 2, 3 y 4) en tiempo normal
Y_i = Unidades a producir en el mes i-ésimo (i = 1, 2, 3 y 4) en tiempo extra
I_i = Unidades a almacenar al final del mes i-ésimo (i = 1, 2, 3 y 4)

Minimizar $Z = 10Y_1 + 10Y_2 + 10Y_3 + 10Y_4 + 2I_1 + 2I_2 + 2I_3$
C.S.R.

$X_1 + Y_1 = I_1 + 2.800$
$I_1 + X_2 + Y_2 = I_2 + 2.200$
$I_2 + X_3 + Y_3 = I_3 + 3.200$
$I_3 + X_4 + Y_4 = 2.500$
$X_i \leq 2.700$; i = 1, 2, 3 y 4
$Y_i \leq 300$; i = 1, 2, 3 y 4
$X_i \geq 0$; $Y_i \geq 0$; $I_i \geq 0$; i = 1, 2, 3 y 4

Restricciones debidas a que el inventario inicial más lo que se produce en tiempo normal mas lo que se produce en tiempo extra, debe ser igual a la demanda mas el inventario final

Solución usando el WinQsb

$X^*_1 = 2.700$	$X^*_4 = 2.500$	$Y^*_3 = 0$	$I^*_2 = 500$
$X^*_2 = 2.700$	$Y^*_1 = 100$	$Y^*_4 = 0$	$I^*_3 = 0$
$X^*_3 = 2.700$	$Y^*_2 = 0$	$I^*_1 = 0$	$Z^* = 2.000$

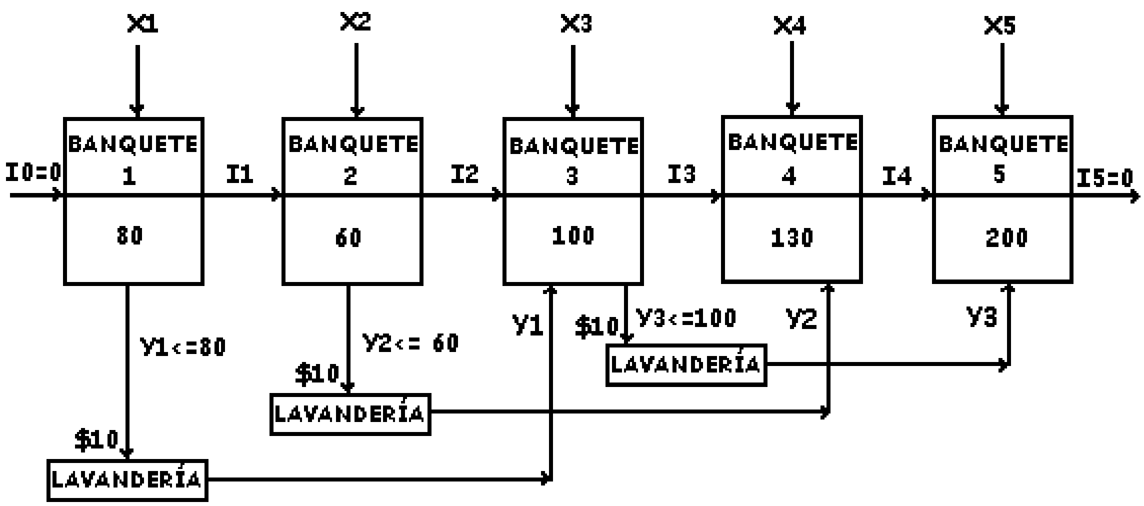
13. El problema de los manteles

En un salón de banquetes se tienen programados banquetes durante los siguientes cinco días. Los requisitos de manteles por banquete son:

Banquete	1	2	3	4	5
Número de manteles	80	60	100	130	200

El problema del administrador es que se requieren manteles diferentes a los que se usan, por lo que tendrá que comprar ese tipo de manteles. El costo de cada mantel es de $40 y el costo de mandarlo a la lavandería bajo servicio urgente para tenerlo listo a los dos días es de $10 por mantel.

Cuál es el modelo que le permitirá al administrador cumplir con sus requisitos y además minimizar el costo total ?



X_i = Número de manteles a comprar para el banquete i-ésimo (i = 1, 2, 3, 4 y 5)
Y_i = Número de manteles a mandar a lavar después del banquete i-ésimo (i = 1, 2 y 3)
I_i = Número de manteles limpios al final de cada banquete i-ésimo (i = 1, 2, 3 y 4)

Minimizar $Z = 40(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5) + 10(Y_1 + Y_2 + Y_3)$

C.S.R.

$X_1 = 80 + I_1$	$Y_3 + I_4 + X_5 = 200$	$X_i \geq 0$; i = 1, 2, 3, 4 y 5
$I_1 + X_2 = 60 + I_2$	$Y_1 \leq 80$	$I_i \geq 0$; i = 1, 2, 3 y 4
$Y_1 + I_2 + X_3 = 100 + I_3$	$Y_2 \leq 60$	$Y_i \geq 0$; i = 1, 2 y 3
$Y_2 + I_3 + X_4 = 130 + I_4$	$Y_3 \leq 100$	

Empleando el WinQsb se obtiene la siguiente solución óptima factible:

$X^*_1 = 80$	$X^*_3 = 20$	$X^*_5 = 100$	$Y^*_2 = 60$	$I^*_i = 0$; i = 1, 2, 3 Y 4
$X^*_2 = 60$	$X^*_4 = 70$	$Y^*_1 = 80$	$Y^*_3 = 100$	$Z^* = \$15.600$

14. Sistema Operativo de Producción

La compañíía Wetski Water Ski es la más grande productora de skis para agua, como Usted sospecha, existe una estimación de alta demanda, con un máximo en los meses de verano y un mínimo en los meses de invierno. Conociendo los costos y el pronóstico por trimestre; Formule un programa de programación lineal que minimice los costos y satisfaga la demanda. ¿Cuáles son los costos de ese plan?

Trimestre	Pronóstico de ventas (Unidades)
1	50.000
2	150.000
3	200.000
4	52.000

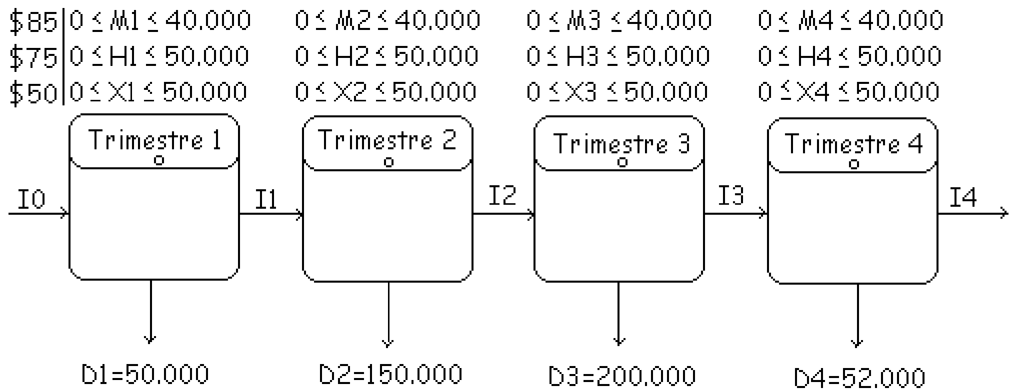
Costo de llevar inventario	\$3,00 Por par de skis por trimestre
Producción por empleado	1.000 par de skis por trimestre
Fuerza de trabajo regular	50 trabajadores
Capacidad en horas extras	50.000 pares de skis
Capacidad de subcontratar (Maquila)	40.000 pares de skis
Costo de producción regular	\$50,00 por par de skis
Costo de producción en horas extras	\$75,00 por par de skis
Costo de producción subcontratada	\$85,00 por par de skis

Solución:
Producción máxima por trimestre con la fuerza de trabajo regular:

1.000 (Pares /Empleado) * 50 (Empleados) = 50.000 skis

X_j = Pares de skis a fabricar con la fuerza de trabajo regular en el trimestre j-ésimo.
H_j = Pares de skis a fabricar en horas extras en el trimestre j-ésimo.
M_j = Pares de skis a fabricar con subcontratos en el trimestre j-ésimo
I_j = Unidades en inventario al final del trimestre j-ésimo
$J = 1, 2, 3, 4$

Es lógico pensar que $I_0 = 0$ y $I_4 = 0$, para minimizar los costos.



Minimizar $Z = 50(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) + 75(H_1 + H_2 + H_3 + H_4) + 85(M_1 + M_2 + M_3 + M_4) + \ldots$

$\ldots + 3(I_1 + I_2 + I_3)$

C.S.R.

$$
\begin{aligned}
X_1 + H_1 + M_1 &= 50.000 + I_1 \\
I_1 + X_2 + H_2 + M_2 &= 150.000 + I_2 \\
I_2 + X_3 + H_3 + M_3 &= 200.000 + I_3 \\
I_3 + X_4 + H_4 + M_4 &= 52.000 \\
X_J \leq 50.000 &\;;\quad J=1,2,3,4 \\
H_J \leq 50.000 &\;;\quad J=1,2,3,4 \\
M_J \leq 40.000 &\;;\quad J=1,2,3,4 \\
X_J \geq 0 &\;;\quad J=1,2,3,4 \\
H_J \geq 0 &\;;\quad J=1,2,3,4 \\
M_J \geq 0 &\;;\quad J=1,2,3,4 \\
I_J \geq 0 &\;;\quad J=1,2,3,4
\end{aligned}
$$

Empleando el WinQsb, la solución para éste problema es:

$X_1^* = 50.000$	$H_1^* = 50.000$	$M_1^* = 20.000$	$I_1^* = 70.000$
$X_2^* = 50.000$	$H_2^* = 50.000$	$M_2^* = 40.000$	$I_2^* = 60.000$
$X_3^* = 50.000$	$H_3^* = 50.000$	$M_3^* = 40.000$	$I_3^* = 0$
$X_4^* = 50.000$	$H_4^* = 2.000$	$M_4^* = 0$	$Z^* = 30'290.000$

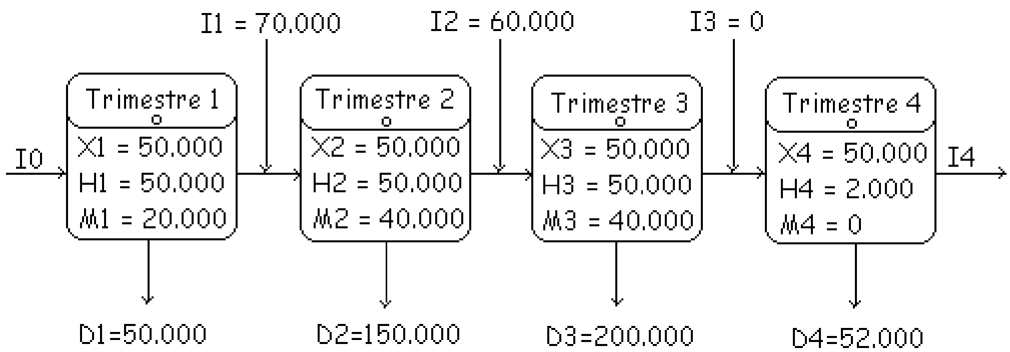
Interpretación:

Con la fuerza de trabajo regular, debemos producir 50.000, 50.000, 50.000 y 50.000 pares de skis durante cada trimestre, respectivamente.

Usando la capacidad en horas extras, debemos producir 50.000, 50.000, 50.000 y 2.000 pares de skis durante cada trimestre, respectivamente.

Debemos subcontratar la elaboración de 20.000, 40.000, 40.000 y 0 pares de skis durante cada trimestre, respectivamente.

El inventario final para cada trimestre es: 70.000 para el primer trimestre, 60.000 para el segundo trimestre y 0 para el tercer trimestre.

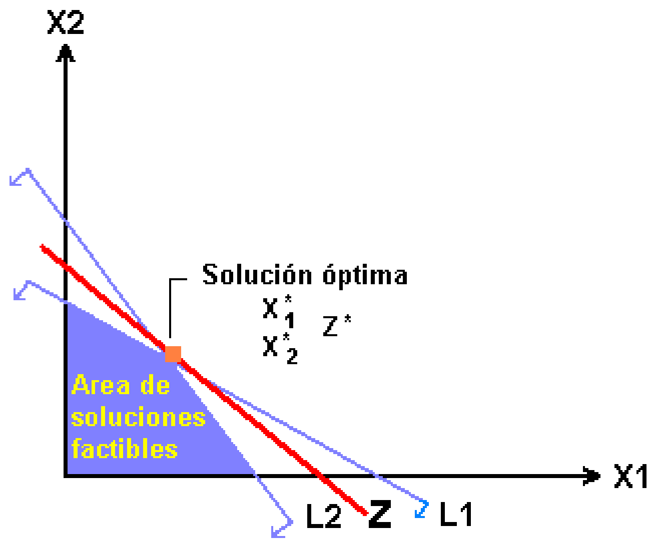


Fíjese que los costos de producción e inventarios para cada trimestre son:

Trimestre 1	50.000(50)+50.000(75)+20.000(85)	=	7’950.000
Trimestre 2	70.000(3)+50.000(50)+50.000(75)+40.000(85)	=	9’860.000
Trimestre 3	60.000(3)+50.000(50)+50.000(75)+40.000(85)	=	9’830.000
Trimestre 4	50.000(50) + 2.000(75)	=	2’650.000
	Total	=	30’290.000

Nota: En el capitulo de transporte, se formula y resuelve éste problema, como un problema de transporte.

Capítulo 3
Método Gráfico

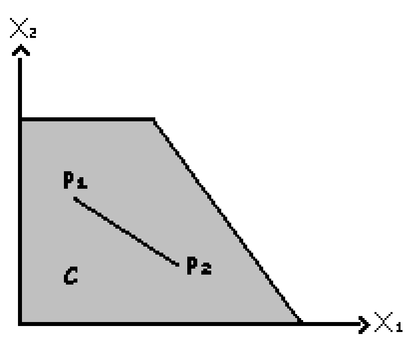


Introducción

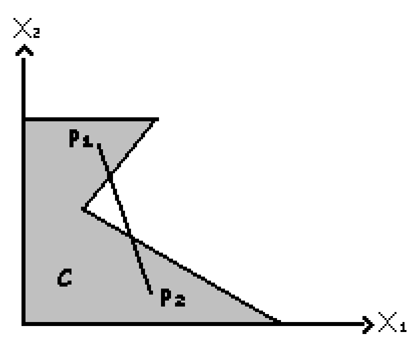
En el presente capítulo se muestra la solución a varios tipos de problemas de programación lineal que solamente tienen en su formulación dos variables empleando el método gráfico.

Conjunto convexo

Un conjunto *C* es un conjunto convexo si el segmento rectilíneo que une cualquier par de puntos de *C* se encuentra completamente en *C*.



Conjunto convexo



Conjunto no convexo

1. Problema de única solución

Maximice $Z = 2X_1 + X_2$

C.S.R.

$$
\begin{aligned}
2X_1 - X_2 &\leq 8 \\
X_1 - X_2 &\leq 3 \\
X_1 + 2X_2 &\leq 14 \\
X_1 + 4X_2 &\leq 24
\end{aligned}
$$

$X_j \geq 0$; $j = 1, 2$

Cálculos analíticos para graficar el sistema de inecuaciones lineales, incluyendo la condición de no negatividad ($X_j \geq 0$; $j = 1, 2$), que nos indica que solamente trabajaremos en el primer cuadrante del plano cartesiano, cuadrante en donde X_1 y X_2 son positivas.

1° Restricción		2° Restricción		3° Restricción		4° Restricción		Función Objetivo	
$2X_1 - X_2 \leq 8$		$X_1 - X_2 \leq 3$		$X_1 + 2X_2 \leq 14$		$X_1 + 4X_2 \leq 24$		$Z = 2X_1 + X_2$	
$2X_1 - X_2 = 8$		$X_1 - X_2 = 3$		$X_1 + 2X_2 = 14$		$X_1 + 4X_2 = 24$		$2X_1 + X_2 = 2$	
$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$
$X_2 = -8$	$X_1 = 4$	$X_2 = -3$	$X_1 = 3$	$X_2 = 7$	$X_1 = 14$	$X_2 = 6$	$X_1 = 24$	$X_2 = 2$	$X_1 = 1$
$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 8$		$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 3$		$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 14$		$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 24$			
Verdad		Verdad		Verdad		Verdad			

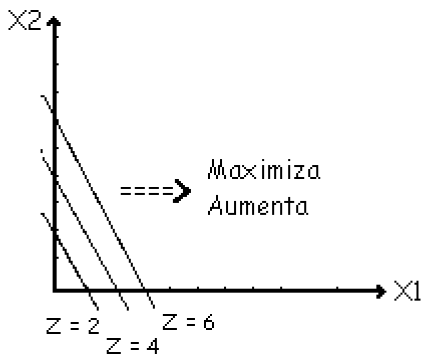
Restricciones

Fíjese que para cada inecuación, primero suponemos que es una igualdad y luego tabulamos dos puntos fáciles de calcular, como lo son las intersecciones de la recta con los ejes cartesianos abcisa y ordenada, esto siempre que el término independiente (Lado derecho de la inecuación) sea diferente de cero, es decir siempre y cuando la recta no pase por el origen de coordenadas P(0,0).

A continuación con un punto de prueba cualquiera $P(X_1, X_2)$, (Asegúrese que se encuentre al lado derecho ó izquierdo de la recta, NO sobre ella, es decir, el punto de prueba NO puede pertenecer a la recta), Aquí, como ya sabemos que la recta no pasa por el origen de coordenadas (Término independiente diferente de cero), usamos como punto de prueba P(0,0), es decir $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ que nos facilita los cálculos cuando lo remplacemos en la inecuación y observamos si la hace una verdad ó una falsedad; Averiguar esto nos permite conocer si el área solución de la inecuación está al lado derecho ó izquierdo (Por supuesto, incluyendo los puntos sobre la recta, ya que todas las inecuaciones son menor ó igual ($\leq$)); Si el punto de prueba hace verdad la inecuación lineal, entonces, todos los puntos que se encuentran al mismo lado del punto de prueba la harán verdad, si el punto de prueba no hace verdad la inecuación lineal, los puntos que la harán verdad están al lado contrario en donde se encuentra el punto de prueba. Esto es, si el punto de prueba se encuentra al lado izquierdo de la recta y hace verdad la inecuación, entonces el área de soluciones para ésta inecuación, son todos los puntos que pertenecen a la recta y los que se encuentran al lado izquierdo de ella. Si el punto de prueba situado a la izquierda de la recta, no hace verdad la inecuación, entonces el área de soluciones para ésta inecuación, son todos los puntos que pertenecen a la recta y los que se encuentran al lado derecha de ella.

Función objetivo

La función objetivo $Z = 2X_1 + X_2$ expresada como $2X_1 + X_2 = Z$ tiene la estructura de una línea recta, solo que no conocemos su término independiente. Graficando ésta ecuación con diferentes valores para Z, observamos que la función objetivo, representa una familia de rectas paralelas, que al aumentar el valor de Z la recta se desplaza hacia el lado derecho, por lo que concluimos que Z aumenta cuando la recta se desplaza paralelamente hacia la derecha, esto se cumple siempre que la ecuación de la función objetiva tenga pendiente negativa, es decir inclinada al lado izquierdo. Para funciones objetivo con pendiente positiva (Inclinadas al lado derecho), se recomienda dar varios valores a Z y graficar para observar si al desplazarse a la derecha Z aumenta o por el contrario disminuye.



$2X_1 + X_2 = 2$		$2X_1 + X_2 = 4$		$2X_1 + X_2 = 6$	
$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$
$X_2 = 2$	$X_1 = 1$	$X_2 = 4$	$X_1 = 2$	$X_2 = 6$	$X_1 = 3$

Aquí se le ha dado a Z el valor arbitrario de 2, ya que solo necesitamos graficar una de las rectas que pertenece a la familia de rectas paralelas, para facilitar la tabulación de la función objetivo, se recomienda dar el valor arbitrario de Z como un múltiplo de los coeficientes de las variables, que se consigue fácilmente, multiplicando el coeficiente de X_1 por el coeficiente de X_2 . Es conveniente fijarse en los valores de las coordenadas para graficar la función objetivo observando que sean parecidos en magnitud a los hallados para graficar las restricciones (Observe que puede dar el valor adecuado a Z), esto hará que la gráfica quede convenientemente presentada para el análisis.

Existen dos procedimientos para encontrar la solución factible óptima:

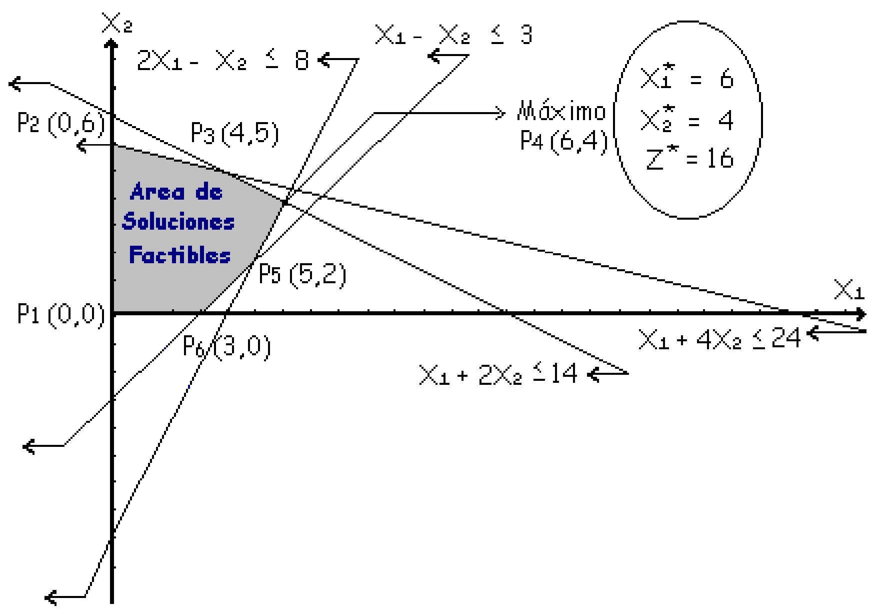
1. Evaluar la función objetivo Z en cada una de las esquinas del área de soluciones factibles. La debilidad de este procedimiento se presenta cuando se tienen muchas restricciones que por supuesto generan un área con muchas esquinas, volviéndose dispendiosa la consecución de sus coordenadas, que implica la solución de muchos sistemas de ecuaciones lineales.

2. Usando la función objetivo para determinar la esquina del área de soluciones factible que la optimiza. La debilidad de éste procedimiento se presenta cuando la función

objetiva es aproximadamente paralela a uno de los lados del área de soluciones factible, originando la duda visual sobre la gráfica de cual de los dos extremos (esquinas) es el que hace que la función objetivo se optimice.

Se recomienda usar el segundo procedimiento y en caso de dudas visuales sobre la gráfica, recurrir al primer procedimiento para dirimir la duda respecto al par de esquinas.

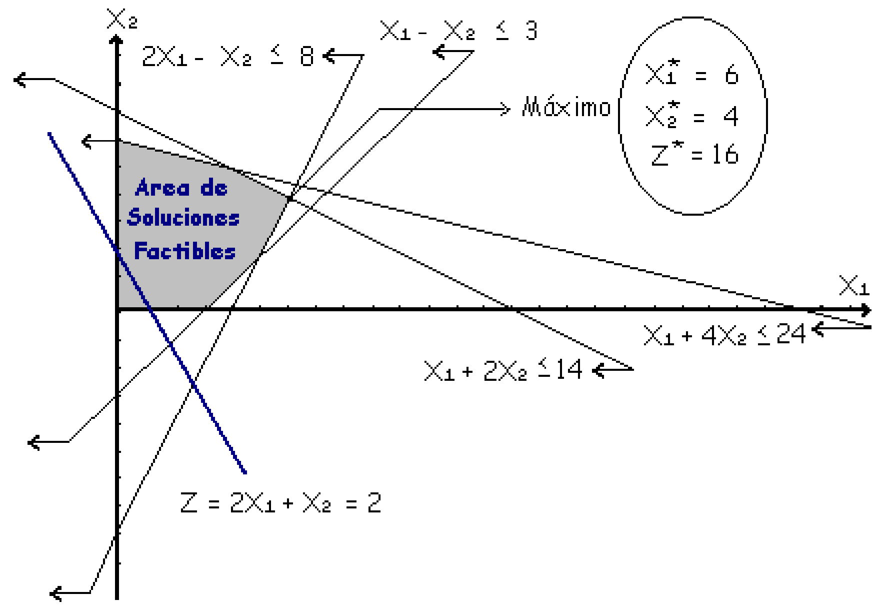
Primer procedimiento: Evaluar la función objetivo Z en cada una de las esquinas del área de soluciones factibles.



El valor de la función objetivo en cada una de las esquinas del área de soluciones factible es:

$Z_{(0,0)} = 2(0) + 0 = 0$
$Z_{(0,6)} = 2(0) + 6 = 6$
$Z_{(4,5)} = 2(4) + 5 = 13$
$Z_{(6,4)} = 2(6) + 4 = 16$ ➡ La función objetivo se maximiza cuando $X_1 = 6$ y $X_2 = 4$
$Z_{(5,2)} = 2(5) + 2 = 12$
$Z_{(3,0)} = 2(3) + 0 = 6$

Segundo procedimiento: Usando la función objetivo para determinar la esquina del área de soluciones factible que la optimiza.



Fíjese que al desplazar la función objetivo Z hacia la derecha, el último punto a la derecha del área de soluciones factible que toca es: X1 = 6 , X_2 = 4. Para encontrar las coordenadas debemos interceptar las ecuaciones de las restricciones $X_1 + 2X_2 = 14$ con $2X_1 - X_2 = 8$ Una manera de hacer esto es empleando el método de los determinantes, que para un sistema de dos ecuaciones y dos variables es:

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 14 & 2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-14 - 16}{-1 - 4} = \frac{-30}{-5} = 6 \qquad X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 14 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{8 - 28}{-1 - 4} = \frac{-20}{-5} = 4$$

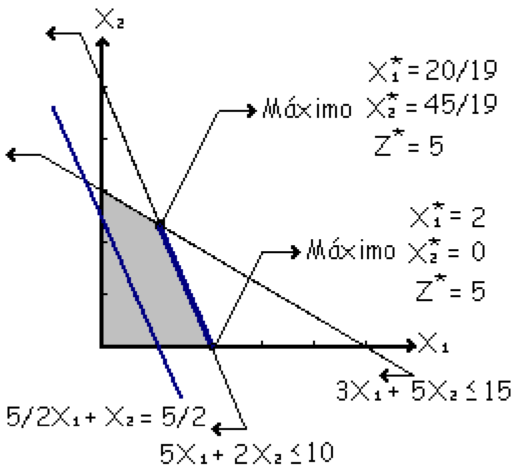
2. Problema de múltiples soluciones

Maximice $Z = 5/2X_1 + X_2$

C.S.R. $3X_1 + 5X_2 \leq 15$
$5X_1 + 2X_2 \leq 10$

$X_j \geq 0$; j = 1, 2

1° Restricción		**2° Restricción**		**Función Objetivo**	
$3X_1 + 5X_2 \leq 15$		$5X_1 + 2X_2 \leq 10$		$Z = 5/2X_1 + X_2$	
$3X_1 + 5X_2 = 15$		$5X_1 + 2X_2 = 10$		$5/2X_1 + X_2 = 5/2$	
$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$
$X_2 = 3$	$X_1 = 5$	$X_2 = 5$	$X_1 = 2$	$X_2 = 5/2$	$X_1 = 1$
$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 15$		$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 10$			
Verdad		Verdad			



$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 5 \\ 10 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{30 - 50}{6 - 25} = \frac{-20}{-19} = 20/19$$

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 15 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{30 - 75}{6 - 25} = \frac{-45}{-19} = 45/19$$

Observe que la solución óptima recae sobre un lado del área de soluciones factible, o sea que todos los puntos que pertenecen a la recta $5X_1 + 2X_2 = 10$ entre los puntos (2,0) y (20/19, 45/19), maximizan la función objetivo, esto es, existen múltiples soluciones, dos de ellas son: $X_1^* = 2$, $X_2^* = 0$, $Z^* = 5$ ó $X_1^* = 20/19$, $X_2^* = 45/19$, y por supuesto $Z^* = 5$.
Una forma más técnica de expresar la solución es: La solución son todas las parejas de puntos que pertenecen a la recta $5X_1 + 2X_2 = 10$, en el intervalo $20/19 \leq X_1 \leq 2$ o en el intervalo $0 \leq X_2 \leq 45/19$; Cualquiera de estos dos puntos hace que Z valga 5

$Z^*_{20/19,45/19} = 5/2X_1^* + X_2^* = 5/2(20/19) + (45/19) = 5$
$Z^*_{2,0} = 5/2X_1^* + X_2^* = 5/2(2) + (0) = 5$

3. Problema de soluciones indeterminadas

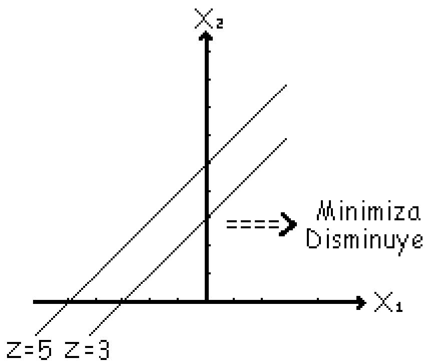
Minimice $Z = - X_1 + X_2$

C.S.R. $X_1 \geq X_2$
$- 0,5X_1 + X_2 \leq 1$

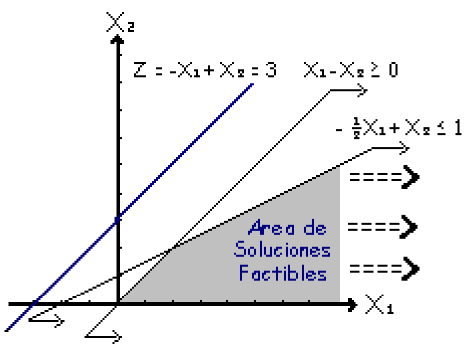
$X_j \geq 0 \; ; \; j = 1, 2$

1° Restricción		**2° Restricción**		**Función Objetivo**	
$X_1 - X_2 \geq 0$		$-1/2X_1 + X_2 \leq 1$		$Z = - X_1 + X_2$	
$X_1 - X_2 = 0$		$-1/2X_1 + X_2 = 1$		$- X_1 + X_2 = 3$	
$X_1 = 0$	$X_2 = 5$	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$
$X_2 = 0$	$X_1 = 5$	$X_2 = 1$	$X_1 = -2$	$X_2 = 3$	$X_1 = -3$
$P(3,0) \Rightarrow 3 \geq 0$		$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 1$			
Verdad		Verdad			

Fíjese que para tabular la ecuación de la primera restricción, cuyo término independiente es igual a cero, es una ecuación que pasa por el origen de coordenadas P(0,0) y por lo tanto corta el eje de la abcisa y la ordenada en el mismo punto P(0,0), esto hace necesario tabular un segundo punto, que para el presente caso se uso X_2 = 5 y se despejó X_1 obteniendo el valor de 5, con lo que obtenemos un segundo punto P(5,5), que delimita la línea recta.



$-X_1 + X_2 = 3$		$-X_1 + X_2 = 5$	
$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$X_1 = 0$	$X_1 = 0$
$X_2 = 3$	$X_1 = -3$	$X_2 = 5$	$X_2 = -5$

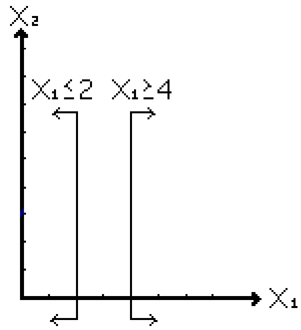


Fíjese que al desplazar la función objetivo hacia la derecha, siempre encontrará un punto más a la derecha del área de soluciones factible que la minimice. Entre más a la derecha se encuentre un punto (X_1 , X_2) que pertenezca al área de soluciones factibles, más pequeño será el valor de la función objetivo, pero siempre habrá una alternativa de encontrar un punto (X_1 , X_2) más a la derecha, por ser una área abierta. Se dice entonces que el problema tiene solución indeterminada.

Si se está modelando sobre un problema real y ocurre éste caso, falta considerar una restricción, que justamente cierre el área de soluciones factibles por el lado derecho. Se ha dejado de considerar la restricción de algún recurso, ya que los valores de las variables en la realidad no pueden crecer de manera ilimitada, irrestrictamente.

4. Problema sin solución

Este caso se presenta cuando entre las restricciones existen al menos dos de ellas que sean excluyentes, tal como: $X_1 \leq 2$ y $X_1 \geq 4$. Aquí nunca podremos encontrar un número que al mismo tiempo sea menor ó igual a 2 y mayor ó igual a 4, las dos restricciones son excluyentes y por lo tanto no existe área de soluciones factible, gráficamente se observa de la siguiente manera:



Si esto ocurre al formular sobre un caso de la vida real, revise la lógica de las restricciones involucradas, en especial el sentido de las desigualdades. Generalmente un par de variables de la vida real no tienen este comportamiento.

5. Problema de programación lineal

Para el siguiente problema de programación lineal: $Z = 3X_1 - 5X_2$ con las siguientes restricciones: $5X_1 - 4X_2 \geq -20$; $X_1 \leq 8$; $X_2 \leq 10$; $X_2 \geq 3$; $5X_1 + 4X_2 \geq 20$ y $Xj \geq 0$; $j = 1,2$

a) En un plano cartesiano grafique las restricciones y la función objetivo, señalando claramente el área de soluciones factible.
b) Calcule las coordenadas de los vértices del área de soluciones factibles.
c) Calcule el valor de la función objetivo Z en cada vértice del área de soluciones factibles.
d) Cuál es el valor de X_1 y X_2 que maximiza, y el que minimiza la función objetivo Z.

1° Restricción	**2° Restricción**	**3° Restricción**	**4° Restricción**	**5° Restricción**
$5X_1 - 4X_2 \geq -20$	$X_1 \leq 8$	$X_2 \leq 10$	$X_2 \geq 3$	$5X_1 + 4X_2 \geq 20$
$5X_1 - 4X_2 = -20$	$X_1 = 8$	$X_2 = 10$	$X_2 = 3$	$5X_1 + 4X_2 = 20$
$X_1 = 0$ $X_2 = 0$	$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 8$	$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 10$	$P(0,0) \Rightarrow 0 \geq 3$	$X_1 = 0$ $X_2 = 0$
$X_2 = 5$ $X_1 = -4$	Verdad	Verdad	Falso	$X_2 = 5$ $X_1 = 4$
$P(0,0) \Rightarrow 0 \geq -20$	Perpendicular al	Perpendicular al	Perpendicular al	$P(0,0) \Rightarrow 0 \geq 20$
Verdad	eje X_1	eje X_2	eje X_2	Falso

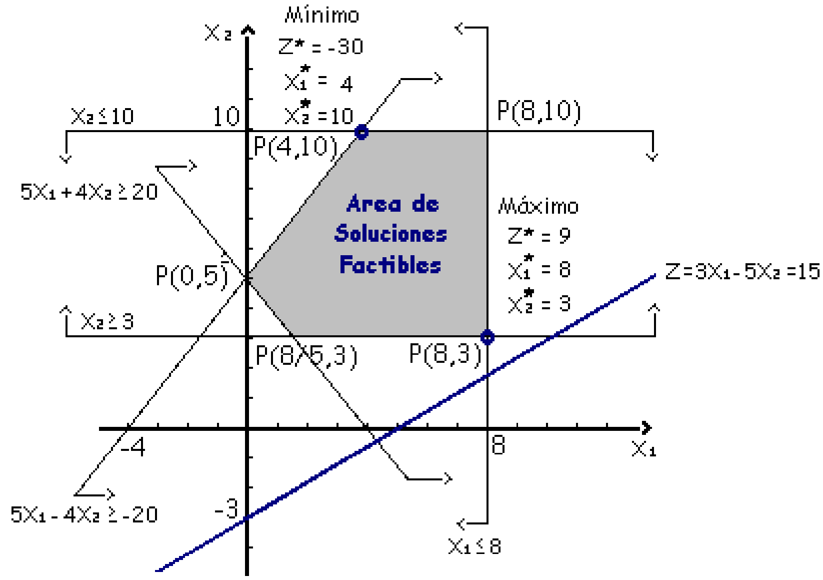
Función Objetivo

$Z = 3X_1 - 5X_2$

$3X_1 - 5X_2 = 15$

$X_1 = 0$ $X_2 = 0$

$X_2 = -3$ $X_1 = 5$



Para encontrar las coordenadas de algunas esquinas del área de soluciones factibles, que no se observan a simple vista en la gráfica, se hace necesario resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$5X_1 + 4X_2 = 20$	$5X_1 - 4X_2 = -20$
$X_2 = 3$	$X_2 = 10$
$5X_1 + 4(3) = 20$	$5X_1 - 4(10) = -20$
$X_1 = 8/5$	$X_1 = 4$
P(8/5,3)	P(4,2)

El valor de la función objetivo en cada uno de los vértices es:

$Z = 3X_1 - 5X_2$

$Z_{8/5,3} = 3(8/5) - 5(3) = 25/4 - 60/4 = -35/4$

$Z_{8,3} = 3(8) - 5(3) = 24 - 15 = 9$ Máximo: $X_1^* = 8$; $X_2^* = 3$; $Z^* = 9$

$Z_{8,10} = 3(8) - 5(10) = 24 - 50 = -26$

$Z_{4,10} = 3(4) - 5(10) = 12 - 50 = -38$ Mínimo: $X_1^* = 4$; $X_2^* = 10$; $Z^* = -38$

$Z_{0,5} = 3(0) - 5(5) = 0 - 25 = -5$

Fíjese que la función objetivo del presente ejercicio, tiene pendiente positiva (está inclinada hacia la derecha), y que al desplazarse paralelamente hacia la derecha el valor de Z aumenta y hacia la izquierda el valor de Z disminuye. Al remplazar los valores de las variables (tanto del máximo como del mínimo) en las restricciones, estas deben cumplirse. Adicionalmente observe que el punto que hace que Z sea mínimo, es la intersección de las rectas $5X_1 - 4X_2 = -20$ y $X_2 = 10$, a estas restricciones se les denomina activas ó de estricto cumplimiento, el resto de restricciones se les denomina no activas o de no estricto cumplimiento. Igualmente para el caso de maximizar en el que las restricciones activas o de estricto cumplimiento son: $X_1 \leq 8$ y $X_2 \geq 3$. Para observar esto remplazamos tanto el punto máximo como el mínimo en cada una de las restricciones.

$X_1^* = 4$; $X_2^* = 10$ Valor que hace a $Z^*_{Mínimo} = -30$

$5X_1^* - 4X_2^* \geq -20$	$X_1^* \leq 8$	$X_2^* \leq 10$	$X_2^* \geq 3$	$5X_1^* + 4X_2^* \geq 20$
$5(4)-4(10) \geq -20$	$4 \leq 8$	$10 \leq 10$	$10 \geq 3$	$5(4)+4(10) \geq 20$
$20 - 40 \geq -20$				$20+40 \geq 20$
$-20 \geq -20$				$60 \geq 20$
Verdad	Verdad	Verdad	Verdad	Verdad
Activa	Inactiva	**Activa**	Inactiva	Inactiva
De estricto cumplimiento	De no estricto cumplimiento	**De estricto cumplimiento**	De no estricto cumplimiento	De no estricto cumplimiento

$X_1^* = 8$; $X_2^* = 3$ Valor que hace a $Z^*_{Maximo} = 9$

$5X_1^* - 4X_2^* \geq -20$	$X_1^* \leq 8$	$X_2^* \leq 10$	$X_2^* \geq 3$	$5X_1^* + 4X_2^* \geq 20$
$5(8)-4(3) \geq -20$	$8 \leq 8$	$3 \leq 10$	$3 \geq 3$	$5(8)+4(3) \geq 20$
$40 - 12 \geq -20$				$40+12 \geq 20$
$28 \geq -20$				$52 \geq 20$
Verdad	Verdad	Verdad	Verdad	Verdad
Inactiva	**Activa**	Inactiva	**Activa**	Inactiva
De no estricto cumplimiento	**De estricto cumplimiento**	De no estricto cumplimiento	**De estricto cumplimiento**	De no estricto cumplimiento

6. Un caso de producción

La corporación XYZ fabrica dos modelos de producto Z-1.200 y Z-1.500 . Los requerimientos de producción y las disponibilidades están mostradas a continuación.

Departamento	**Requisitos de mano de obra**		**Capacidad Horas / día**
	Modelo Z-1.200	**Modelo Z-1.500**	
1	20	0	2.300
2	0	30	1.540
3	25	23	2.440
4	11	11	1.300

Los beneficios unitarios logrados a la venta de los modelos Z-1.200 y Z-1.500 son de \$50 y \$40 , respectivamente. Encuentre el número óptimo de cada producto que va a producir.

Si la corporación XYZ está produciendo actualmente 30 unidades del modelo Z-1.200 y 20 unidades del modelo Z-1.500, ¿Cuánto está dejando de ganar?

Solución

Xj = Unidades a producir y vender del producto j-ésimo (j = 1 = Modelo Z-1.200, j = 2 = Modelo Z-1.500).

Maximice $Z = 50X_1 + 40X_2$

C.S.R.

$$20X_1 \leq 2.300$$
$$30X_2 \leq 1.540$$
$$25X_1 + 23X_2 \leq 2.440$$
$$11X_1 + 11X_2 \leq 1.300$$

$X_j \geq 0$; j = 1, 2

1° Restricción	2° Restricción	3° Restricción	4° Restricción
$20X_1 \leq 2.300$	$30X_2 \leq 1.540$	$25X_1+23X_2 \leq 2.440$	$11X_1 + 11X_2 \leq 1.300$
$20X_1 = 2.300$	$30X_2 = 1.540$	$25X_1+23X_2 = 2.440$	$11X_1 + 11X_2 = 1.300$
$X_1 = 115$	$X_2 = 51,3$	$X_1 = 0$; $X_2 = 0$	$X_1 = 0$; $X_2 = 0$
		$X_2 = 106,08$; $X_1 = 97,6$	$X_2 = 118,18$; $X_1 = 118,18$
P(0,0)=>0 $\leq$ 2.300	P(0,0)=>0 $\leq$ 1.540	P(0,0) => 0 $\leq$ 2.440	P(0,0) => 0 $\leq$ 1.300
Verdad	Verdad	Verdad	Verdad

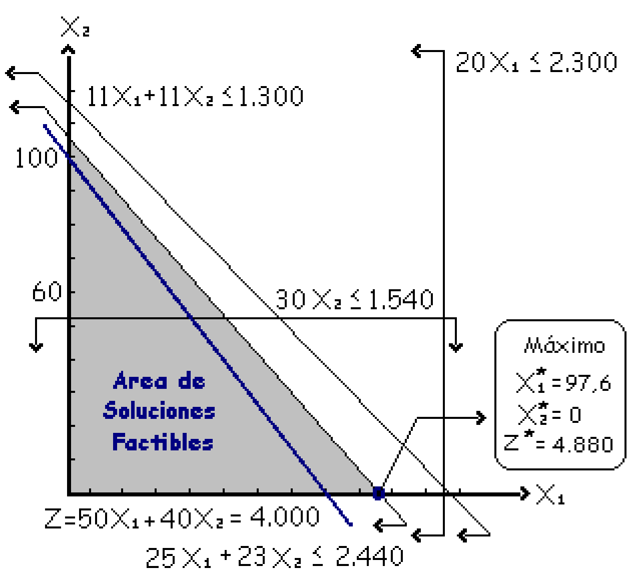
Función Objetivo

$Z = 50X_1 + 40X_2$

$50X_1+40X_2=4.000$

$X_1 = 0$ $\quad X_2 = 0$

$X_2 = 100$ $\quad X_1 = 80$



Fíjese en la gráfica que la cuarta restricción: $11X_1 + 11X_2 \leq 1.300$ es redundante, si la retiramos de la gráfica, el área de soluciones factible sigue siendo la misma y el óptimo también.

Si actualmente $X_1 = 30$ y $X_2 = 20$ entonces Z = 50(30) + 40(20) = 2.300 , luego se están dejando de ganar: \$4.880 – \$2.300 = \$2.580

Interpretación:

Para obtener el beneficio total máximo de \$4.880, se deben producir y vender 97,6 unidades del modelo Z-1.200 y no producir el modelo Z-1.500. El modelo Z-1.200 contribuye al beneficio total con: 50(97,6) = \$4.880, y el modelo Z-1.500 contribuye al beneficio total con: 40(0) = \$0 . Un análisis sobre las restricciones, empleando la solución óptima nos permite conocer la siguiente información:

$$20X_1 \leq 2.300$$
$$20(97,6) \leq 2.300$$
$$1.952 \leq 2.300$$

El departamento 1 trabajará 1.952 horas / día de las 2.300 horas disponibles. Luego tendrá (2.300 – 1.952) 348 horas por día en que no produce ninguno de los dos modelos.

$$30X_2 \leq 1.540$$
$$30(0) \leq 1.540$$
$$0 \leq 1.540$$

En el departamento 2, todas las horas disponibles no serán usadas. No se producirán unidades de ninguno de los dos modelos.

$$25X_1+23X_2 \leq 2.440$$
$$25(97,6)+23(0) \leq 2.440$$
$$2.440 \leq 2.440$$

Todas la horas disponibles en el departamento 3, serán utilizadas, produciendo el modelo Z-1.200

$$11X_1 + 11X_2 \leq 1.300$$
$$11(97,6)+ 11(0) \leq 1.300$$
$$1.073,6 \leq 1.300$$

En el departamento 4 se trabajarán 1.073,6 horas / día de las 1.300 disponibles, se tendrán 226,4 horas / día ociosas.

7. Un caso de producción

Una compañía automotriz produce automóviles y camiones. Cada vehículo tiene que pasar por un taller de pintura y por un taller de montaje de la carrocería. Si el taller de pintura pintara solamente camiones, se podrían pintar 40 camiones al día, y si pintara solamente automóviles, se podrían pintar 60 automóviles. Si el taller de carrocerías ensamblara solamente camiones, podría ensamblar 50 camiones al día y si ensamblara solamente automóviles, podría ensamblar 50 automóviles al día. Cada camión aporta \$300 a la utilidad y cada automóvil, \$200

Solución

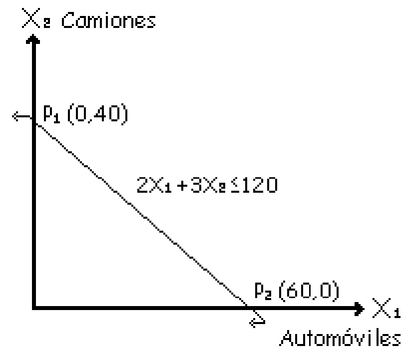
Fíjese que aquí nos han dado las coordenadas por donde cada restricción corta los ejes cartesianos abcisa y ordenada, por lo tanto debemos conseguir las ecuaciones de cada restricción, conociendo dos puntos que pertenecen a la recta.

X_j = Unidades a producir del j-ésimo tipo de vehículo (j = 1 = Automóviles, j = 2 = Camiones)

Taller de pintura

Si $X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 40$
Si $X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 60$
$m = Y_2 - Y_1 / X_2 - X_1$
$m = -40 / 60 = -2/3$

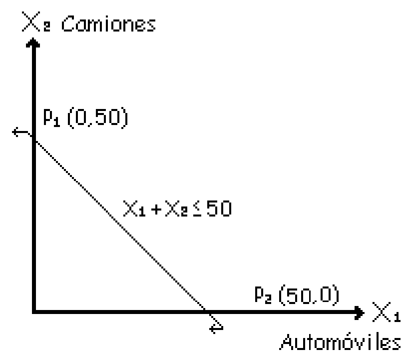
$Y = mX + b = -2/3X + 40$
$3Y=-2X+120 \Rightarrow 2X+3Y=120$
$2X_1+3X_2 = 120 \Rightarrow$
$\mathbf{2X_1+3X_2 \leq 120}$



Taller de ensamble de la carrocería

Si $X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 50$
Si $X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 50$
$m = Y_2 - Y_1 / X_2 - X_1$
$m = -40 / 50 = -1$

$Y = mX + b = -X + 50$
$X + Y = 50 \Rightarrow$
$\mathbf{X_1 + X_2 \leq 50}$

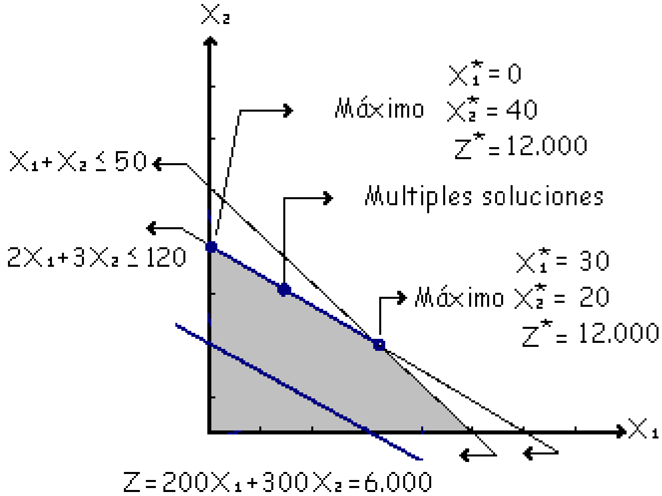


Maximice $Z = 200X_1 + 300X_2$

C.S.R.	$2X_1 + 3X_2$	$\leq$	120	Restricción debida a las horas disponibles en el taller de pintura.
	$X_1 + X_2$	$\leq$	50	Restricción debida a las horas disponibles en el taller de ensamble de la carrocería.

$X_j \geq 0$; $j = 1, 2$

1° Restricción		**2° Restricción**		**Función Objetivo**	
$2X_1 + 3X_2 \leq 120$		$X_1 + X_2 \leq 50$		$Z = 200X_1 + 300X_2$	
$2X_1 + 3X_2 = 120$		$X_1 + X_2 = 50$		$200X_1 + 300X_2 = 6000$	
$X_1 = 0$	$X_2 = 5$	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$
$X_2 = 40$	$X_1 = 60$	$X_2 = 50$	$X_1 = 50$	$X_2 = 20$	$X_1 = 30$
$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 120$		$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 50$			
Verdad		Verdad			



$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 120 & 3 \\ 50 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{120-150}{2-3} = \frac{-30}{-1} = 30$$

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 120 \\ 1 & 50 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{100-120}{2-3} = \frac{-20}{-1} = 20$$

$Z^* = 200X_1^* + 300X_2^* = 200(30) + 300(20) = 6.000 + 6.000 = 12.000$ ó
$Z^* = 200X_1^* + 300X_2^* = 200(0) + 300(40) = 0 + 12.000 = 12.000$

Interpretación:

El problema tiene múltiples soluciones, dos de ellas son las mostradas sobre la gráfica, analizando la solución $X_1^* = 30$; $X_2^* = 20$ sobre las restricciones, el departamento de pintura y el departamento de ensamble de la carrocería utilizarán todo el tiempo disponible.

$2X_1+3X_2 \leq 120$ $2(30)+3(20) \leq 120$ $60 + 60 \leq 120$ $120 \leq 120$	Todas la horas disponibles en el departamento de pintura, serán utilizadas así: 60 horas pintando automóviles y 60 horas pintando camiones.
$X_1 + X_2 \leq 50$ $30 + 20 \leq 50$ $50 \leq 50$	Todas la horas disponibles en el departamento de ensamble de carrocería, serán utilizadas así: 30 horas ensamblando carrocerías en automóviles y 20 horas ensamblando carrocerías en camiones.

8. Regla de equivalencia y constante en la función objetivo

Una planta ensambladora de radios produce dos modelos, HiFi-1 y HiFi-2, en la misma línea de ensamble. La línea de ensamble consta de tres estaciones. Los tiempos de ensamble en las estaciones son:

Estación de trabajo	Minutos por unidad de producto producido	
	Radios HiFi-1	Radios HiFi-2
1	6	4
2	5	5
3	4	6

Cada estación de trabajo tiene una disponibilidad máxima de 480 minutos por día. Sin embargo, las estaciones de trabajo requieren mantenimiento diario, que constituye el 10%, 14% y 12% de los 480 minutos totales de que se dispone diariamente para las estaciones 1, 2 y 3 respectivamente. La compañía desea determinar las unidades diarias que se ensamblarán de HiFi-1 y HiFi-2 a fin de minimizar la suma de tiempos inactivos en las tres estaciones.

Solución

Xj = Cantidad de radios a producir del modelo j-ésimo (j = 1 = HiFi-1 ; j = 2 = HiFi-2)

Estación de trabajo	Disponibilidad Máxima minutos	Tiempo que se usará Cada estación de trabajo minutos	Tiempo inactivo de Cada estación de trabajo minutos
1	(1-0,10)480=432,0	$6X_1 + 4X_2$	$432{,}0 - 6X_1 + 4X_2$
2	(1-0,14)480=412,8	$5X_1 + 5X_2$	$412{,}8 - 5X_1 + 5X_2$
3	(1-0,12)480=422,4	$4X_1 + 6X_2$	$422{,}4 - 4X_1 + 6X_2$

$Z = 432{,}0 - 6X_1 + 4X_2 + 412{,}8 - 5X_1 + 5X_2 + 422{,}4 - 4X_1 + 6X_2$

$Z = -15X_1 - 15X_2 + 1.267{,}2$	Para facilitar la solución del problema, hacemos los siguientes cambios:
$Z = -15X_1 - 15X_2$	Como el término independiente 1.267,2 es constante, lo podemos obviar y al final lo sumamos a la solución optima
$\text{Max } Z = 15X_1 + 15X_2$	Podemos multiplicar la función objetivo por (-1) y maximizar, al final volvemos a multiplicar a Z por (-1), esto se llama la regla de equivalencia: Min (-Z) = Max(+Z) ó Min (Z) = Max(-Z)

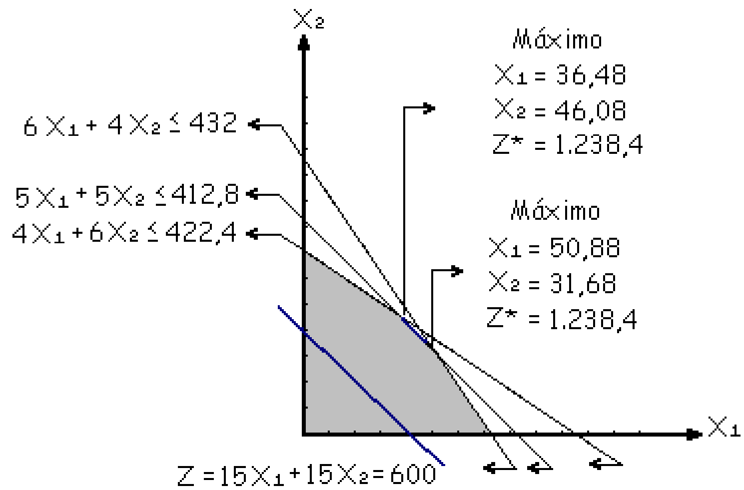
$Z = 15X_1 + 15X_2$

C.S.R.

$6X_1 + 4X_2 \leq 432{,}0$	Restricciones debidas a la disponibilidad de tiempo en cada una de las estaciones de trabajo 1, 2 y 3 respectivamente.
$5X_1 + 5X_2 \leq 412{,}8$	
$4X_1 + 6X_2 \leq 422{,}4$	

$X_j \geq 0 \; ; \; j = 1, 2$

1° Restricción	2° Restricción	3° Restricción	Función Objetivo
$6X_1 + 4X_2 \leq 432$	$5X_1 + 5X_2 \leq 412,8$	$4X_1 + 6X_2 \leq 422,4$	$Z = 15X_1 + 15X_2$
$6X_1 + 4X_2 = 432$	$5X_1 + 5X_2 = 412,8$	$4X_1 + 6X_2 = 422,4$	$15X_1+15X_2 = 600$
$X_1 = 0$ | $X_2 = 0$	$X_1 = 0$ | $X_2 = 0$	$X_1 = 0$ | $X_2 = 0$	$X_1 = 0$ | $X_2 = 0$
$X_2 = 108$ | $X_1 = 72$	$X_2 = 82,56$ | $X_1 = 82,56$	$X_2 = 70,4$ | $X_1 = 105,6$	$X_2 = 40$ | $X_1 = 40$
$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 432$	$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 412,8$	$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 14$	
Verdad	Verdad	Verdad	



$5X_1 + 5X_2 = 412,8$
$6X_1 + 4X_2 = 432$

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 412,8 & 5 \\ 432 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{1.651,2 - 2.160}{20 - 30} = \frac{-508,8}{-10} = 50,88$$

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 412,8 \\ 6 & 432 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{2.160 - 2.476,8}{20 - 30} = \frac{-316,8}{-10} = 31,68$$

$$Z^* = 15X_1^* + 15X_2^* = 15(50,88) + 15(31,68) = 1.238,4$$

$$Z^* = 1.238,4$$

$5X_1 + 5X_2 = 412,8$
$4X_1 + 6X_2 = 422,4$

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 412,8 & 5 \\ 422,4 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{2.476,8 - 2.112}{30 - 20} = \frac{364,8}{10} = 36,48$$

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 412,8 \\ 4 & 422,4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{2.112 - 1.651,2}{30 - 20} = \frac{460,8}{10} = 46,08$$

$$Z^* = 15X_1^* + 15X_2^* = 15(36,48) + 15(46,08) = 1.238,4$$

$$Z^* = 1.238,4$$

Tiempo inactivo mínimo bajo las dos soluciones consideradas

$Z_{50,88\,;\,31,68} = -15X_1^* - 15X_2^* + 1.267,2 = -15(50,88) - 15(31,68) + 1.267,2 = 28,8$ minutos

$Z_{36,48\,;\,46,08} = -15X_1^* - 15X_2^* + 1.267,2 = -15(36,48) - 15(46,08) + 1.267,2 = 28,8$ minutos

Bajo cada una de las dos soluciones ofrecidas, de las múltiples, podemos saber en las restricciones el tiempo inactivo de cada estación de trabajo.

Bajo la solución $X_1^* = 50{,}88$; $X_2^* = 31{,}68$

Estación de trabajo 1	Estación de trabajo 2	Estación de trabajo 3
$6X_1^* + 4X_2^* \leq 432$	$5X_1^* + 5X_2^* \leq 412{,}8$	$4X_1^* + 6X_2^* \leq 422{,}4$
$6(50{,}88) + 4(31{,}68) \leq 432$	$5(50{,}88) + 5(31{,}68) \leq 412{,}8$	$4(50{,}88) + 6(31{,}68) \leq 422{,}4$
$432 \leq 432$	$412{,}8 \leq 412{,}8$	$393{,}6 \leq 422{,}4$
No estará inactiva	No estará inactiva	Tiempo inactiva: 28,8 minutos

Bajo la solución $X_1^* = 36{,}48$; $X_2^* = 46{,}08$

Estación de trabajo 1	Estación de trabajo 2	Estación de trabajo 3
$6X_1^* + 4X_2^* \leq 432$	$5X_1^* + 5X_2^* \leq 412{,}8$	$4X_1^* + 6X_2^* \leq 422{,}4$
$6(36{,}48) + 4(46{,}08) \leq 432$	$5(36{,}48) + 5(46{,}08) \leq 412{,}8$	$4(36{,}48) + 6(46{,}08) \leq 422{,}4$
$403{,}2 \leq 432$	$412{,}8 \leq 412{,}8$	$422{,}4 \leq 422{,}4$
Tiempo inactiva: 28,8 minutos	No estará inactiva	No estará inactiva

La estación de trabajo 2, nunca tendrá tiempo inactivo, siempre estará trabajando todo su tiempo disponible, 412,8 minutos.

9. Un caso especial del método gráfico

Hallar el máximo y el mínimo, mediante el método gráfico, al siguiente problema de programación lineal.

$Z = 3X_1 + X_2$

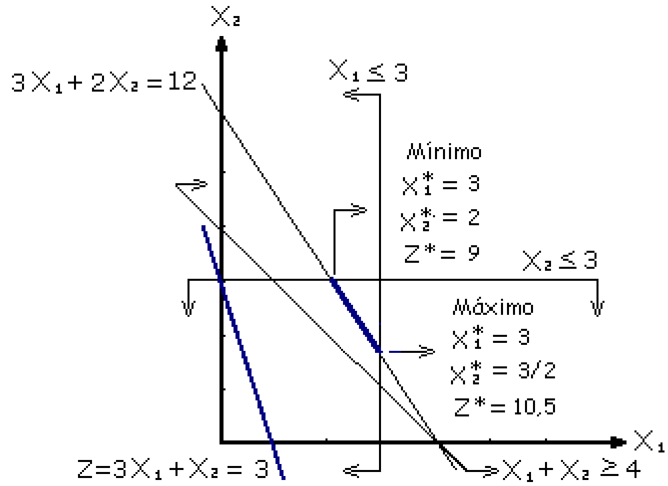
C.S.R.

$$
\begin{aligned}
X_1 &\leq 3 \\
X_2 &\leq 3 \\
X_1 + X_2 &\geq 4 \\
3X_1 + 2X_2 &= 12
\end{aligned}
$$

$Xj \geq 0$; $j = 1, 2$

Solución:

1° Restricción	2° Restricción	3° Restricción		4° Restricción		Función Objetivo	
$X_1 \leq 3$	$X_2 \leq 3$	$X_1 + X_2 \geq 4$		$3X_1 + 2X_2 = 12$		$Z = 3X_1 + X_2$	
$X_1 = 3$	$X_2 = 3$	$X_1 + X_2 = 4$				$3X_1 + X_2 = 3$	
		$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$
		$X_2 = 4$	$X_1 = 4$	$X_2 = 6$	$X_1 = 4$	$X_2 = 3$	$X_1 = 1$
$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 3$	$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 3$	$P(0,0) \Rightarrow 0 \geq 4$					
Verdad	Verdad	Falso					



Mínimo	**Máximo**
$X_2^* = 3$	$X_1^* = 3$
$3X_1 + 2X_2 = 12$	$3X_1 + 2X_2 = 12$
$3X_1 + 2(3) = 12$	$3(3) + 2X_2 = 12$
$X_1^* = 2$	$X_2^* = 3/2$
$Z^*_{2,3} = 3X_1^* + X_2^* = 3(2) + 3 = 9$	$Z^*_{3,3/2} = 3X_1^* + X_2^* = 3(3) + 3/2 = 21/2 = 10,5$

Fíjese que aquí, el área de soluciones factible es un segmento de la recta $3X_1 + 2X_2 = 12$
Y sus extremos el mínimo y máximo respectivamente.

Nota: Puede darse el caso en que el área de soluciones factible, se reduzca a un punto, en cuyo caso el máximo = mínimo.

Ejercicios propuestos

1. Identifique el área de soluciones factible para cada una de las siguientes inecuaciones lineales, de forma independiente. Suponga que todas las variables son positivas.

   a) $-3X_1 + X_2 \leq 7$ b) $X_1 - 2X_2 \geq 5$ c) $2X_1 - 3X_2 \leq 8$

   d) $X_1 - X_2 \leq 0$ e) $-X_1 + X_2 \geq 0$ f) $X_1 \leq 4$

2. Identifique la dirección del crecimiento o decrecimiento de Z en cada uno de los siguientes casos:

   a) Maximizar $Z = X_1 - X_2$ b) Minimizar $Z = -3X_1 + X_2$

   c) Minimizar $Z = -X_1 - 2X_2$ d) Maximizar $Z = -5X_1 - 6X_2$

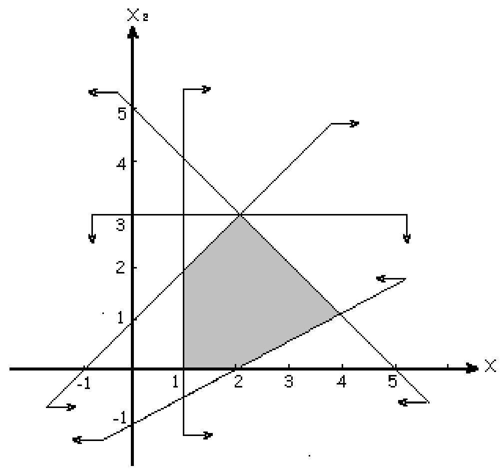
3. Determine el área de soluciones factibles para el siguiente sistemas de inecuaciones lineales:

$$X_1 + X_2 \leq 4$$
$$4X_1 + 3X_2 \leq 12$$
$$-X_1 + X_2 \geq 1$$
$$X_1 + X_2 \leq 6$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

¿ Qué restricciones son redundantes ?

Reduzca el sistema al menor número de restricciones que definirán el mismo espacio de soluciones

4. Escriba las restricciones asociadas con el espacio de soluciones que se presenta en la gráfica e identifique todas las restricciones redundantes.



5. Considere el siguiente problema:

Maximizar $Z = 6X_1 - 2X_2$

C.S.R. $X_1 - X_2 \leq 1$
$3X_1 - X2 \leq 6$

$Xj \geq 0 ; j = 1, 2$

Demuestre en forma gráfica que en la solución óptima, las variables X_1 y X_2 pueden aumentarse en forma indefinida en tanto que el valor de la función objetivo Z se mantiene constante.

6. Resuelva gráficamente el siguiente problema:

Maximizar $Z = 5X_1 + 6X_2$

C.S.R. $X_1 - 2X_2 \geq 2$
$-2X_1 + 3X2 \geq 2$

X_1 , X_2 irrestricta en signo

7. Considere el siguiente problema:

Maximizar $Z = 3X_1 + 2X_2$ C.S.R. $2X_1 + X_2 \leq 2$ $3X_1 + 4X2 \geq 12$ $Xj \geq 0$; $j = 1, 2$	Demuestre gráficamente que el problema no tiene puntos extremos factibles. ¿Qué se puede concluir en relación con la solución al problema?

8. Resolver gráficamente:

Maximizar $Z = 5X_1 + 2X_2$

C.S.R. $X_1 + X_2 \leq 10$
$X_1 = 5$

$Xj \geq 0$; $j = 1, 2$

9. Considere el espacio de soluciones del punto 4; Determine la solución óptima, suponiendo que la función objetivo es la siguiente:

a) Minimizar $Z = 2X_1 + 6X_2$ b) Maximizar $Z = -3X_1 + 4X_2$ c) Minimizar $Z = 3X_1 + 4X_2$

d) Minimizar $Z = X_1 - 2X_2$ e) Minimizar $Z = X_1$ f) Maximizar $Z = X_1$

10. Considere el siguiente problema de programación lineal:

Maximizar $Z = 3X_1 + 4X_2$ C.S.R. $-2X_1 + 4X_2 \leq 16$ $2X_1 + 4X2 \leq 24$ $-6X_1 - 3X_2 \geq -48$ $Xj \geq 0$; $j = 1, 2$	a) Use el método gráfico para encontrar la solución óptima (X_1, X_2) y el valor de la función objetivo Z^* b) b) Encuentre los valores de holgura o excedente de cada restricción.

11. Considere el siguiente problema de programación lineal:

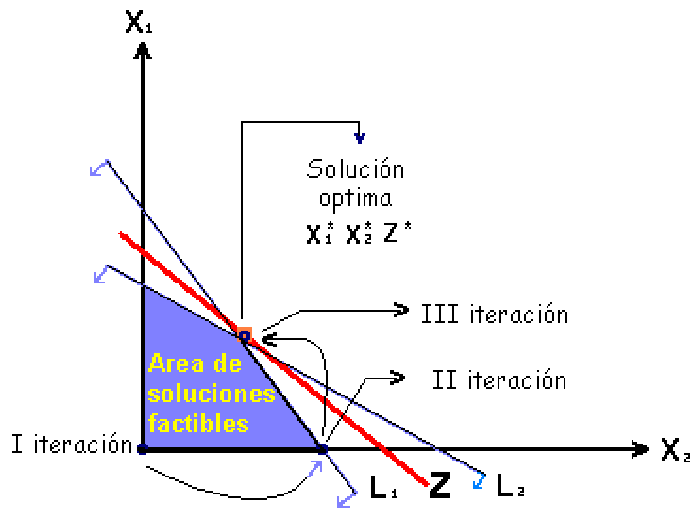
Minimice $Z = 5X_1 + 2X_2$

C.S.R.
$$3X_1 + 6X_2 \geq 18$$
$$5X_1 + 4X2 \geq 20$$
$$8X_1 + 2X_2 \geq 16$$
$$7X_1 + 6X_2 \leq 42$$

$Xj \geq 0$; $j = 1, 2$

a) Use el método gráfico para encontrar la solución óptima y Z^*
b) ¿Cuáles restricciones son activas?
c) ¿Cuáles son los valores de holgura o excedente de cada restricción?
d) ¿Cuántos puntos extremos tiene la región factible?

Capítulo 4
Método Algebraico



Introducción

En la necesidad de desarrollar un método para resolver problemas de programación lineal de más de dos variables, los matemáticos implementaron el método algebraico, el que más tarde se convertiría en el tan afamado método simplex.

Como su nombre lo indica, el método usa como su principal herramienta, el álgebra, que ligada a un proceso de lógica matemática dio como resultado el método algebraico.

Con el siguiente ejemplo se ilustra el algoritmo del método algebraico; El ejercicio que se usa para ello es de dos variables X_1 , X_2 , con el propósito de observar lo que el método realiza sobre la gráfica en el plano cartesiano, ofreciéndonos ésta metodología la ventaja de comparar paso a paso el método gráfico con el método algebraico.

Ejemplo 1

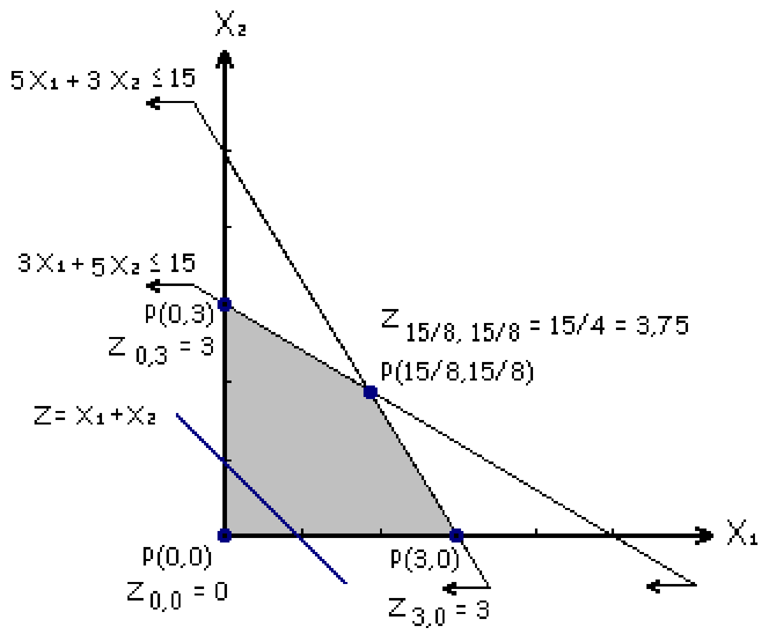
Maximizar $Z = X_1 + X_2$
C.S.R.

$$5X_1 + 3X_2 \leq 15$$
$$3X_1 + 5X_2 \leq 15$$

$X_j \geq 0 \ ; \ j = 1, 2$

Todo problema de programación lineal que se formule de la forma Maximice, con todas sus restricciones $\leq$ y con la condición de no negatividad, se le llama **Forma Estándar ó Forma Normal**

El área de soluciones factible, las coordenadas de cada esquina y el valor de la función objetivo Z en cada una de ellas, se muestra en la gráfica siguiente:



Algoritmo del Método Algebraico

1) Hallar una solución básica y factible (Solución inicial)

    a) Expresar las inecuaciones (desigualdades) como ecuaciones (igualdades)
    b) Hallar una variable básica para cada ecuación
    c) Organizar el sistema de ecuaciones lineales

2) Escoger la variable que entra

3) Escoger la variable que sale

4) Reorganizar el sistema de ecuaciones

5) Repetir los pasos 2, 3 y 4 hasta encontrar la solución

1) Hallar una solución básica factible

a) Expresar todas la inecuaciones como ecuaciones lineales, para ello y en éste caso usamos variables de relleno, también llamadas de holgura, para igualar el lado izquierdo al lado derecho de la inecuación; así:

$$5X_1 + 3X_2 \leq 15 \qquad 3X_1 + 5X_2 \leq 15$$
$$5X_1 + 3X_2 + X_3 = 15 \qquad 3X_1 + 5X_2 + X_4 = 15$$

Aquí X_3 y X_4 son las variables de holgura o relleno, que al adicionarlas al lado izquierdo, establecen la igualdad con el lado derecho de la inecuación lineal.
La variables X_1 y X_2 se denominan variables de decisión o variables reales, las variables de relleno o holgura, se usan para convertir una inecuación en una ecuación, esto es, igualar el lado izquierdo al lado derecho. Las variables de holgura o de relleno, se suman o restan al lado izquierdo de la inecuación, según convenga para establecer la igualdad.

b) Escoger en cada ecuación una variable que sirva como solución inicial al problema y que tome un valor positivo (≥ 0), NO son elegibles las variables de decisión o variables reales. Entonces, las variables de holgura o relleno (si las hay), son las primeras opcionadas a ser escogidas como variables básicas y factibles, lo que significa que deben tomar un valor mayor o igual a cero (≥ 0), dicho de otra forma, las variable básicas factibles, deben cumplir con la condición de no negatividad. De no conseguirse una variable de holgura que sea factible, se utiliza el recurso de las variables de súper-avit o artificiales, pero de éste caso nos ocuparemos en el segundo ejemplo, para el que usaremos el denominado método de la gran M.
Aquí tanto X_3 como X_4 , variables de holgura, son escogidas como variables básicas factibles, ya que ambas asumen valores positivos al ser X_1 y X_2 variables no básicas e iguales a cero (0), esto es:

$5X_1 + 3X_2 + X_3 = 15$	$3X_1 + 5X_2 + X_4 = 15$
$X_1 = X_2 = 0$, entonces	$X_1 = X_2 = 0$, entonces
$X_3 = 15$, valor ≥ 0	$X_4 = 15$, valor ≥ 0

c) Organizamos el sistema de ecuaciones de la siguiente manera:

$$\begin{array}{llcl} (0) & Z - X_1 - X_2 & & = 0 \\ (1) & 5X_1 + 3X_2 + X_3 & & = 15 \\ (2) & 3X_1 + 5X_2 & + X_4 & = 15 \end{array}$$

En la ecuación (0) siempre Z es la variable básica.

Fíjese que en cada ecuación existe una y solo una variable básica con coeficiente (1), lo que permite leer su valor de manera automática al lado derecho; esto es:

$Z = 0$; $X_3 = 15$ y $X_4 = 15$; esto es una SOLUCIÓN BÁSICA FACTIBLE.

Una lista clasificada de las variables es:

$X_1 = 0$	Variable de decisión ó variable real	Variable no básica
$X_2 = 0$	Variable de decisión ó variable real	Variable no básica
$X_3 = 15$	Variable de holgura ó relleno	Variable básica
$X_4 = 15$	Variable de holgura ó relleno	Variable básica
$Z = 0$	Variable de decisión ó variable real	Variable básica, Siempre !!

2) **Escoger la variable que entra**

Aquí analizamos si existe una solución mejor que la solución básica factible, para ello despejamos de la ecuación (0) del sistema de ecuaciones inmediatamente anterior a Z y hacemos la siguiente pregunta:

¿CUÁL ES LA VARIABLE QUE AL CRECER HACE QUE Z CREZCA MÁS?

Aquí la velocidad de crecimiento, tanto de X_1 como de X_2 es uno (1), coeficiente de las variables X_1 y X_2 , luego se presenta un empate, el cual se dirime al azar, escogemos como ***variable para entrar a X_1*** . Como regla general, la variable para entrar es aquella que al crecer haga que Z crezca más, ya que el objetivo es Maximizar el valor de Z, Dicho de otra forma, entrará la variable que tenga el coeficiente más positivo, si estuviésemos minimizando se escoge la variable que haga que Z disminuya más, o sea la que tenga el coeficiente más negativo.

Si no hubiese variable para entrar, ello indica que nos encontramos en la solución óptima.

3) **Escoger la variable que sale**

Despejamos de la ecuación (1) y (2) las variables básicas.

(1) $X_3 = 15 - 5X_1 - 3X_2$ (2) $X_4 = 15 - 3X_1 - 5X_2$	Como de las variables no básicas X_1 y X_2 ya fue escogida X_1 para entrar a la base, entonces X_2 seguirá siendo variable no básica e igual a cero (0), esto simplifica las ecuaciones así:
(1) $X_3 = 15 - 5X_1$ (2) $X_4 = 15 - 3X_1$	Fíjese que para todos los casos, siempre quedarán despejadas las variables básicas en función de la variable escogida para entrar.

Aquí la pregunta es:

¿CUÁL ES LA VARIABLE BÁSICA QUE RESTRINGE MÁS EL CRECIMIENTO DE LA VARIABLE QUE ENTRA?

Para averiguarlo, hacemos que las variables básicas X_3 y X_4 asuman su menor valor factible o sea cero (0) y observamos el valor que asume la variable escogida para entrar (X_1).

(1) $15 - 5X_1 = X_3$	(2) $15 - 3X_1 = X_4$
(1) $15 - 5X_1 = 0$	(2) $15 - 3X_1 = 0$
$X_1 = 3$	$X_1 = 5$
X_3 deja crecer a X_1 , como máximo hasta 3	X_4 deja crecer a X_1 , como máximo hasta 5

Resumiendo:

		X_1
(1) $X_3 = 15 - 5X_1 - \overset{0}{\cancel{3X_2}}$	$X_3 = 15 - 5X_1$	$X_1 \leq 3$
(2) $X_4 = 15 - 3X_1 - \overset{0}{\cancel{5X_2}}$	$X_4 = 15 - 3X_1$	$X_1 \leq 5$

La variable básica que debe salir es aquella que restringa más el crecimiento de la variable que entra, en caso de empate, se dirime arbitrariamente. Aquí se está cuidando la factibilidad de las variables, esto es, que todas sean positivas (≥ 0) . En el caso de ser un problema de minimización, la presente regla de selección es igual.

Para nuestro problema, ***la variable que sale es X_3*** ya que como máximo dejará crecer a X_1 hasta 3, mientras que X_4 la deja crecer como máximo hasta 5.

4) Reorganizar el sistema de ecuaciones

Observe que al entrar X_1 y salir X_3 , el sistema de ecuaciones ya no tendrá una sola variable básica en cada fila con coeficiente uno (1), esto es:

(0)	$Z - X_1 - X_2 = 0$	Variables básicas: Z y X_1
(1)	$5X_1 + 3X_2 + X_3 = 15$	Variable básica: X_1
(2)	$3X_1 + 5X_2 + X_4 = 15$	Variables básicas: X_1 y X_4

Fíjese que en la ecuación (1) se encuentra la variable que entra X_1 y la variable que sale X_3 por ello en ésta fila solo queda como variable básica X_1 , lo molo aquí es que tiene coeficiente diferente de uno (1), por ello multiplicamos toda la fila por el inverso del coeficiente de X_1 (1/5) y la ecuación resultante la llamamos ***Fila Pivote*** ya que posteriormente servirá para eliminar a X_1 de las ecuaciones (0) y (2).

(1) $5X_1 + 3X_2 + X_3 = 15$ (1/5)
(1) $X_1 + 3/5X_2 + 1/5X_3 = 3$ ➔ Fila pivote

Para encontrar el nuevo sistema de ecuaciones en el que en cada fila figure una y solo una variable básica con coeficiente uno (1), de tal forma que se pueda leer automáticamente su valor en el término independiente de cada ecuación, multiplicamos la fila pivote por el coeficiente de X_1 (multiplicado por –1), de cada una de las otras ecuaciones y sumamos la fila pivote con cada una de las otras ecuaciones para encontrar las nuevas ecuaciones del sistema. Para nuestro problema, esto es:

- Multiplicamos la fila pivote, fila (1) por uno (1) y le sumamos la fila (0). El resultado es la nueva fila (0).

  (1) $X_1 + 3/5X_2 + 1/5X_3 = 3$ (1) ➔
  (0) $Z - X_1 - X_2 = 0$
  (1) $X_1 + 3/5X_2 + 1/5X_3 = 3$

  ---
  (0) $Z - 2/5X_2 + 1/5X_3 = 3$ Nueva fila (0)

  Fíjese que hemos eliminado a X_1 de la ecuación (0)

- Multiplicamos la fila pivote por (-3) y le sumamos la fila (2), el resultado es la nueva ecuación (2)

  (1) $X_1 + 3/5X_2 + 1/5X_3 = 3$ (-3) ➔
  (2) $3X_1 + 5X_2 + X_4 = 15$
  (1) $-3X_1 - 9/5X_2 - 3/5X_3 = -9$

  ---
  (2) $16/5X_2 - 3/5X_3 + X_4 = 6$ Nueva fila (2)

  Fíjese que hemos eliminado a X_1 de la ecuación (2)

El nuevo sistema de ecuaciones es:

(0) $Z \quad -2/5X_2 + 1/5X_3 = 3$
(1) $X_1 \quad +3/5X_2 + 1/5X_3 = 3$
(2) $16/5X_2 - 3/5X_3 + X_4 = 15$

Aquí la solució es:
$X_1 = 3$
$X_2 = 0$
$Z = 3$

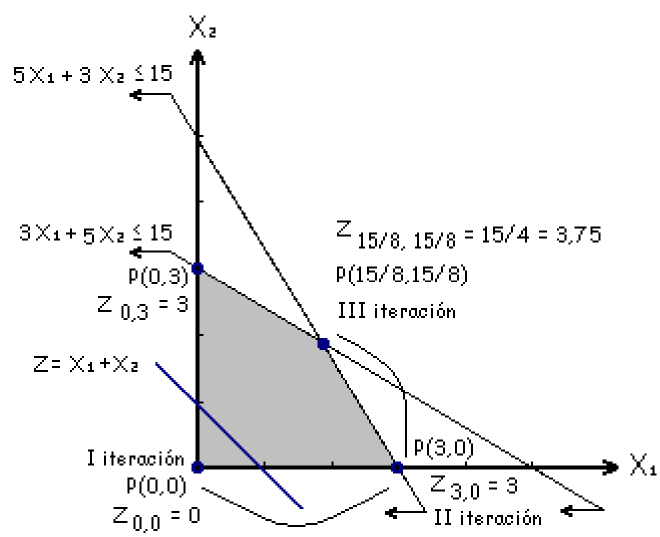
Una lista clasificada de variables para ésta iteración es:

$X_1 = 3$	Variable de decisión ó variable real	Variable básica
$X_2 = 0$	Variable de decisión ó variable real	Variable no básica
$X_3 = 0$	Variable de holgura ó relleno	Variable no básica
$X_4 = 6$	Variable de holgura ó relleno	Variable básica
$Z = 3$	Variable de decisión ó variable real	Variable básica

Fíjese en las siguientes características que siempre debe tener el sistema de ecuaciones

- En cada fila hay una y solo una variable básica con coeficiente uno (1)
- En la función objetivo, ecuación cero (0), la variable básica siempre es Z y estará acompañada por las variables no básicas.
- Los términos independientes, siempre serán los valores de las variables básicas para cada ecuación.

Observe en la gráfica, que lo que ha hecho el método algebraico es saltar de una esquina del área de soluciones factible a otra esquina contigua y ha empezado por la peor solución básica factible posible.



Ahora la pregunta es:

¿ES ÉSTA LA SOLUCIÓN ÓPTIMA?

La respuesta la hallamos, si encontramos una variable que al entrar haga que la función objetivo crezca más, lo anterior significa que debemos repetir los pasos 2, 3 y 4 hasta que no se encuentre una variable que haga que Z crezca, cuando ello ocurra estamos en el óptimo.

II iteración

Variable que entra

$Z = 2/5X_2 - 1/5X_3 + 3$; variable que entra: X_2

Variable que sale

$X_1 = 3 - 3/5X_2 \rightarrow X_2 \leq 5$
$X_4 = 6 - 16/5X_2 \rightarrow X_2 \leq 15/8 = 1{,}875$; variable que sale X_4

Nuevo sistema de ecuaciones

Último sistema de ecuaciones

(0)	**Z**		$- 2/5X_2$	$+ 1/5X_3$		= 3	
(1)		$\mathbf{X_1}$	$+ 3/5X_2$	$+ 1/5X_3$		= 3	
(2)			$+ 16/5X_2$	$- 3/5X_3$	$+ \mathbf{X_4}$	= 6	(5/16)

Nuevo sistema de ecuaciones

(0)	**Z**			$+ 1/8X_3$	$+ 1/8X_4$	= 15/4	
(1)		$\mathbf{X_1}$		$+ 5/16X_3$	$- 3/16X_4$	= 15/8	
(2)			$\mathbf{X_2}$	$- 3/16X_3$	$+ 5/16X_4$	= 15/8	(2/5) (-3/5)

III Iteración

Variable que entra

(0) $Z + 1/8X_3 + 1/8X_4 = 15/4$
$Z = 15/4 - 1/8X_3 - 1/8X_4$
Ninguna variable al crecer hace que Z crezca, luego estamos en la solución óptima.

Solución óptima

Variables de decisión ó reales	Variables de holgura ó relleno
$X_1^* = 15/8 = 1{,}875$	$X_3^* = X_4^* = 0$
$X_2^* = 15/8 = 1{,}875$	
$Z^* = 15/4 = 3{,}75$	

Fíjese que $X_3 = X_4 = 0$ significa, que los recursos que representan las restricciones 1 y 2 se usarán en su totalidad, ambas restricciones son activas, de estricto cumplimiento.
Ahora resolveremos un segundo ejemplo que tiene las siguientes características.

- El criterio de optimización en la función objetivo es de Minimización
- Más de 2 variables, de hecho tendrá tres (3) variables de decisión ó reales.

- Se consideran en las restricciones las inecuaciones del tipo $\leq$, = y $\geq$
- Aprenderemos en éste ejemplo, cómo el método algebraico nos indica que el problema tiene múltiples soluciones.

Ejemplo 2

Minimizar $Z = 6X_1 + 4X_2 + 2X_3$

C.S.R.

$$6X_1 + 2X_2 + 6X_3 \geq 6$$
$$6X_1 + 4X_2 = 12$$
$$2X_1 - 2X_2 \leq 2$$

$X_j \geq 0$; j = 1, 2, 3

I Iteración

El objetivo de la primera iteración es conseguir la solución básica factible y lograr el primer sistema de ecuaciones, para esto conseguiremos en cada una de las restricciones una variable básica factible, así:

Primera restricción: $6X_1 + 2X_2 + 6X_3 \geq 6$

Aquí para establecer la igualdad, se hace necesario restar una variable al lado izquierdo en atención a que es mayor ó igual al lado derecho, para ello empleamos la variable X_4 , resultando la siguiente igualdad: $6X_1 + 2X_2 + 6X_3 - X_4 = 6$. Ahora escogemos una variable en ésta ecuación para ser variable básica factible, la candidata es X_4 , pero ella toma el valor de $X_4 = -6$ (recuerde que $X_1 = X_2 = X_3$ son Variables de decisión ó reales, no básicas e iguales a cero (0)), en atención a que X_4 asume un valor no factible (negativo, no cumple con la condición de no negatividad), se hace necesario emplear una nueva variable, que adicionada convenientemente asuma un valor factible y nos sirva como variable básica, ésta variable la llamamos X_5 y se denomina variable de Super-avit ó variable artificial, quedando la ecuación de la siguiente manera: $6X_1 + 2X_2 + 6X_3 - X_4 + X_5 = 6$; Aquí escogemos como variable básica a X_5 quien asume el valor de $X_5 = 6$, las demás variables son no básicas iguales a cero (0). Lo único malo es que al adicionar X_5 al lado izquierdo de la ecuación, la hemos desbalanceado, a no ser que nos aseguremos que X_5 al final valga cero (0), esto se logra, castigando ó adicionando a X_5 en la función objetivo con un coeficiente muy grande en comparación con el resto de coeficientes de las demás variables, de tal forma que nunca sea escogida para entrar a la base y termine siendo variable no básica igual a cero (0), este artificio matemático es conocido como método de la gran M. Aquí como nuestra función objetivo tiene como criterio de optimización minimizar, la variable que entra será aquella que tenga el coeficiente más negativo, por ello debemos adicionar a X_5 como $+MX_5$, de ésta manera jamás será escogida para entrar a la base. La función objetivo queda de la siguiente manera: Minimizar $Z = 6X_1 + 4X_2 + 2X_3 + MX_5$

Segunda restricción: $6X_1 + 4X_2 = 12$

Aquí la igualdad ya está hecha, luego no se necesita variable de holgura ó relleno, pero al escoger variable tenemos el inconveniente de no encontrar ninguna variable como candidata ya que inicialmente $X_1 = X_2 = X_3$ son Variables de decisión ó reales, no básicas e iguales a cero (0). Debemos entonces hacer uso de la variable artificial ó Super-avit X_6 adicionándola convenientemente en la igualdad de tal manera que asuma un valor factible (≥ 0), quedando así: $6X_1 + 4X_2 + X_6 = 12$, por supuesto la adicionamos a la función objetivo como $+MX_6$, quedando la función objetivo asó: Minimizar $Z = 6X_1 + 4X_2 + 2X_3 + MX_5 + MX_6$.

Nota: Siempre que se adiciona una variable artificial ó de Super-avit, se debe adicionarla en la función objetivo. Si la función objetivo es Maximice la adicionamos como $-MXj$ y si la función objetivo es Minimice la adicionamos como $+MXj$.

Tercera restricción: $2X_1 - 2X_2 \leq 2$

Para ésta restricción solo necesitamos una variable de holgura ó relleno X_7 que asume como variable básica factible en razón a toma un valor de $X_7 = 2$

El problema queda expresado de la siguiente manera:

Minimizar $Z = 6X_1 + 4X_2 + 2X_3 + MX_5 + M_6$

C.S.R.

$$
\begin{aligned}
6X_1 + 2X_2 + 6X_3 - X_4 + X_5 \qquad\qquad &= 6 \\
6X_1 + 4X_2 \qquad\qquad + X_6 \qquad &= 12 \\
2X_1 - 2X_2 \qquad\qquad\qquad + X_7 &= 2
\end{aligned}
$$

$Xj \geq 0$; $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

El sistema de ecuaciones es:

$$
\begin{array}{llllllllllll}
(0) & \boxed{Z} - & 6X_1 & - & 4X_2 & - & 2X_3 & & & -\boxed{\mathbf{MX_5}} & -\boxed{\mathbf{MX_6}} & & = 0 \\
(1) & & 6X_1 & + & 2X_2 & + & 6X_3 & - & X_4 & +\boxed{X_5} & & & = 6 \ (M) \\
(2) & & 6X_1 & + & 4X_2 & & & & & & +\boxed{X_6} & & = 12 \ (M) \\
(3) & & 2X_1 & - & 2X_2 & & & & & & & +\boxed{X_7} & = 2
\end{array}
$$

Antes de empezar a iterar, debemos asegurar que en cada ecuación exista una y solo una variable básica con coeficiente uno (1) y que en la ecuación (0), la variable básica sea Z. Como en la ecuación (o) existen adicionalmente a Z dos variables básicas X_5 y X_6 , debemos tratar la ecuación (0) con las ecuaciones (1) y (2) para eliminar a X_5 y X_6 de la ecuación (0), ello se logra sumándole a la ecuación (0) el resultado de multiplicar las ecuaciones (1) y (2) por M. La nueva ecuación (0) por supuesto solo tendrá como variable básica a Z.

$$\begin{array}{llrrrrrrl}
(0) & Z & -\ 6X_1 & -\ 4X_2 & -\ 2X_3 & & -\ MX_5 & -\ MX_6 & =\ 0 \\
(1) & & 6MX_1 & +\ 2MX_2 & +\ 6MX_3 & -\ MX_4 & +\ MX_5 & & =\ 6M \\
(2) & & 6MX_1 & +\ 4MX_2 & & & & +\ MX_6 & =\ 12M \\
\hline
(0) & Z & +\ (12M-6)X_1 & +\ (6M-4)X_2 & +\ (6M-2)X_3 & -\ MX_4 & & & =\ 18M
\end{array}$$

El nuevo sistema de ecuaciones es:

$$\begin{array}{llrrrrrrrl}
(0) & \boxed{Z} & +\ (12M-6)X_1 & +\ (6M-4)X_2 & +\ (6M-2)X_3 & -\ MX_4 & & & & =\ 18M \\
(1) & & 6X_1 & +\ 2X_2 & +\ 6X_3 & -\ X_4 & +\ \boxed{X_5} & & & =\ 6 \\
(2) & & 6X_1 & +\ 4X_2 & & & & +\ \boxed{X_6} & & =\ 12 \\
(3) & & 2X_1 & -\ 2X_2 & & & & & +\ \boxed{X_7} & =\ 2
\end{array}$$

En ésta primera iteración el valor de las variables es:

$X_1 = NB = 0$	$X_5 = VB = 6$	Solución: $X_1 = 0$
$X_2 = NB = 0$	$X_6 = VB = 12$	$X_2 = 0$
$X_3 = NB = 0$	$X_7 = VB = 2$	$X_3 = 0$
$X_4 = NB = 0$	$Z = VB = 18M$	$Z = 18M$

II iteración

Variable que entra: $Z = 18M - \mathbf{(12M - 6)X_1} - (6M-4)X_2 - (6M-2)X_3 + MX_4$

Variable que entra: X_1

Variable que sale:

$X_5 = 6 - 6X_1 \Rightarrow \mathbf{X_1 \leq 1}$	*Aquí se presenta un empate entre X_5 y X_7, arbitrariamente se escoge como variable para salir a X_5.*
$X_6 = 12 - 6X_1 \Rightarrow X_1 \leq 2$	
$X_7 = 2 - 2X_1 \Rightarrow X_1 \leq 1$	

Nuevo sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{llrrrrrrrll}
(0) & Z & +\ \boxed{(12M-6)X_1} & +\ (6M-4)X_2 & +\ (6M-2)X_3 & -\ MX_4 & & & & =\ 18M & \\
(1) & & \mathbf{6X_1} & +\ 2X_2 & +\ 6X_3 & -\ X_4 & +\ X_5 & & & =\ 6 & (1/6) \\
(2) & & 6X_1 & +\ 4X_2 & & & & +\ X_6 & & =\ 12 & \\
(3) & & 2X_1 & -\ 2X_2 & & & & & +\ X_7 & =\ 2 &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{lllllll}
(0) & \boxed{Z} + (2M-2)X_2 & - (6M-4)X_3 & + (M-1)X_4 & - (2M-1)X_5 & & = 6M+6 \\
(1) & \boxed{X_1} + \frac{1}{3} X_2 & + X_3 & - \frac{1}{6}X_4 & + \frac{1}{6}X_5 & & = 1 \quad [-(12M-6)]\ (-6)\ (-2) \\
(2) & 2X_2 & - 6X_3 & + X_4 & - X_5 & + \boxed{X_6} & = 6 \\
(3) & -\frac{8}{3} X_2 & - 2X_3 & + \frac{1}{3}X_4 & - \frac{1}{3}X_5 & + \boxed{X_7} & = 0
\end{array}
$$

En ésta segunda iteración el valor de las variables es:

$X_1 = VB = 1$	$X_5 = NB = 0$	Solución: $X_1 = 1$
$X_2 = NB = 0$	$X_6 = VB = 6$	$X_2 = 0$
$X_3 = NB = 0$	$X_7 = VB = 0$	$X_3 = 0$
$X_4 = NB = 0$	$Z = VB = 6M + 6$	$Z = 6M + 6$

III iteración

Variable que entra: $Z = (6M + 6)$ **$- (2M-2)X_2$** $+ (6M-4)X_3 - (M - 1)X_4 + (2M-1)X_5$
Variable que entra: X_2

Variable que sale:

$X_1 = 1 - 1/3X_2 \rightarrow X_2 \leq 3$	*Aquí se presenta un empate entre X_1 y X_6, arbitrariamente se escoge como variable para salir a X_6.*
$X_6 = 6 - 2X_2 \rightarrow X_2 \leq 3$	
$X_7 = 8/3X_2 \rightarrow$ No restringe	

Observe que para cualquier valor positivo de la variable que entra X_2, X_7 permanecerá positiva, esto quiere decir que X_7 no restringe el crecimiento de la variable que entra X_2

Nuevo sistema de ecuaciones

$$
\begin{array}{lllllll}
(0) & Z + (2M-2)X_2 & - (6M-4)X_3 & + (M-1)X_4 & - (2M-1)X_5 & & = 6M+6 \\
(1) & X_1 + \frac{1}{3} X_2 & + X_3 & - \frac{1}{6}X_4 & + \frac{1}{6}X_5 & & = 1 \\
(2) & \mathbf{2X_2} & - 6X_3 & + X_4 & - X_5 & + X_6 & = 6 \quad (1/2) \\
(3) & -\frac{8}{3} X_2 & - 2X_3 & + \frac{1}{3}X_4 & - \frac{1}{3}X_5 & + X_7 & = 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllllll}
(0) & \boxed{Z} & - 2X_3 & & - MX_5 & - (M-1)X_6 & = 12 \\
(1) & \boxed{X_1} & + 2X_3 & - \frac{1}{3}X_4 & + \frac{1}{3}X_5 & - \frac{1}{6}X_6 & = 0 \\
(2) & \boxed{X_2} & - 3X_3 & + \frac{1}{2}X_4 & - \frac{1}{2}X_5 & + \frac{1}{2}X_6 & = 3 \quad [-(2M-2)]\ (-1/3)\ (8/3) \\
(3) & & - 10X_3 & + \frac{5}{3}X_4 & - \frac{5}{3}X_5 & + \frac{4}{3}X_6 + \boxed{X_7} & = 8
\end{array}
$$

En ésta tercera iteración el valor de las variables es:

$X_1 = VB = 0$	$X_5 = NB = 0$	Solución: $X_1 = 0$
$X_2 = VB = 3$	$X_6 = NB = 0$	$X_2 = 3$

X_3 = NB = 0	X_7 = VB = 8	$X_3 = 0$
X_4 = NB = 0	Z = VB = 12	Z = 12

Variable que entra: $Z = 12 + 2X_3 + MX_5 + (M-1)X_6$

No hay variable que al crecer haga que Z disminuya (Minimizar), entonces estamos en la solución óptima.

El método algebraico da una señal de que el problema tiene múltiples soluciones, cuando el coeficiente en la función objetivo (Ecuación (0)) de una variable no básica es cero (0). Aquí el coeficiente de la variable no básica X_4 en la función objetivo es cero (0).

Solución: El problema tiene múltiples soluciones, una de ellas es:

Variables de decisión	**Variables de holgura**	**Variables artificiales**
$X_1^* = 0$		
$X_2^* = 3$	$X_4^* = 0$	$X_5^* = 0$
$X_3^* = 0$	$X_7^* = 8$	$X_6^* = 0$
$Z^* = 12$		

Fíjese que las variables artificiales X_5^* y X_6^* terminaron siendo no básicas iguales a cero (0), de acuerdo con el artificio matemático inicial ó método de la gran M.

Al reemplazar la solución óptima en las restricciones se obtiene que:

$6X_1 + 2X_2 + 6X_3 \geq 6$	$6X_1 + 4X_2 = 12$	$2X_1 - 2X_2 \leq 2$
$5(0) + 2(3) + 6(0) \geq 6$	$6(0) + 4(3) = 12$	$2(0) - 2(3) \leq 2$
$6 \geq 6$	$12 = 12$	$-6 \leq 2$
Restricción activa	Restricción activa	Restricción no activa
Se usa el mínimo recurso	Se usa todo el recurso	Se usa menos del recurso

Notas importantes:

- Cuando en la solución óptima, al menos una de las variables básicas sea variable artificial ó de Super-avit, el problema no tiene solución, a no ser que valga cero (0)
- Cuando al decidir cuál es la variable para entrar a la base, todas las variables básicas no restringen a la variable que entra, entonces es un problema de solución indeterminada.
- Cuando en una iteración se escoge una variable para entrar y otra para salir y en la siguiente iteración se escoge como variable para entrar la que salió y como variable para salir la que entro, se dice que el problema se ha degenerado y por lo tanto no tiene una

solución, ya que en las iteraciones siguientes se repetirán sistemáticamente los sistemas de ecuaciones.

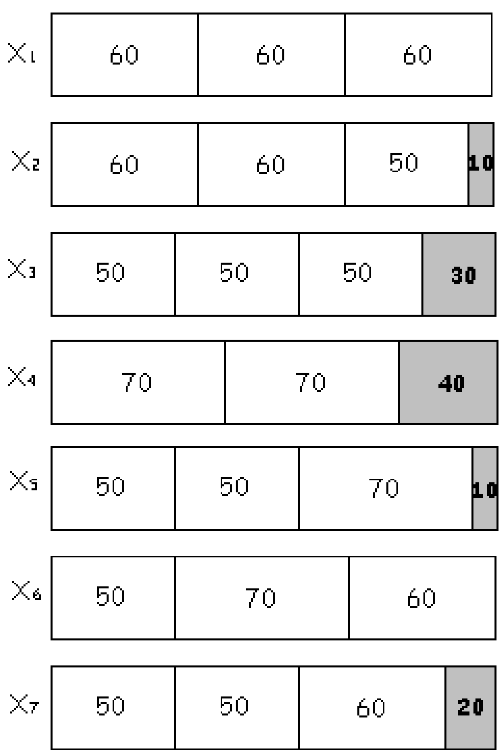
Un resumen para las reglas de decisión del método algebraico es:

Criterio a decidir	Maximizar	Minimizar
Gran M	-M	+M
Variable que entra	La más positiva (+)	La más negativa (-)
Variable que sale	La menos (+)	La menos (+)
Óptimo	Todos los $C_j \le 0$	Todos los $C_j \ge 0$

Ejemplo 3

La empresa Laminas S.A. produce láminas de 180 x 30 cm. ; ha recibido los siguientes tres (3) pedidos: 5.000 láminas de 60 x 30 cm. ; 15.000 láminas de 70 x 30 cm. Y 5.000 láminas de 50 x 30 cm. La empresa desea cumplir exactamente con los pedidos, no quiere tener existencias en inventario y desea saber cuál debe ser su programación de corte, de tal manera que minimice el desperdicio.

X_j = Número de láminas a cortar de la forma j-ésima (j=1,2,3,4,5,6,7)



Minimizar $Z = 10X_2 + 30X_3 + 40X_4 + 10X_5 + 20X_7$

C.S.R. = Con las siguientes restricciones:

$$3X_1 + 2X_2 + X_6 + X_7 = 5.000$$
$$2X_4 + X_5 + X_6 = 15.000$$
$$X_2 + 3X_3 + 2X_5 + X_6 + 2X_7 = 5.000$$

$X_j \ge 0$; j = 1,2,3,4,5,6,7

Min $Z=10X_2+30X_3+40X_4+10X_5+20X_7+M\mathbf{X_8}+M\mathbf{X_9}+M\mathbf{X_{10}}$

C.S.R.

$$3X_1 + 2X_2 + X_6 + X_7 + \mathbf{X_8} = 5.000$$
$$2X_4 + X_5 + X_6 + \mathbf{X_9} = 15.000$$
$$X_2 + 3X_3 + 2X_5 + X_6 + 2X_7 + \mathbf{X_{10}} = 5.000$$

$X_j \ge 0$; j = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10

Variables básicas X_8 , X_9 y X_{10}

$$
\begin{array}{ll}
(0) & Z - 10X_2 - 30X_3 - 40X_4 - 10X_5 - 20X_7 - MX_8 - MX_9 - MX_{10} = 0 \\
(1) & 3MX_1 + 2MX_2 + MX_6 + MX_7 + MX_8 = 5.000M \\
(2) & 2MX_4 + MX_5 + MX_6 + MX_9 = 15.000M \\
(3) & MX_2 + 3MX_3 + 2MX_5 + MX_6 + 2MX_7 + MX_{10} = 5.000M \\
\hline
(0) & Z + 3MX_1 + (3M-10)X_2 + (3M-30)X_3 + (2M-40)X_4 + (3M-10)X_5 + 3MX_6 + (3M-20)X_7 = 25.000M
\end{array}
$$

I Iteración

$$
\begin{array}{ll}
(0) & \boxed{Z} + 3MX_1 + (3M-10)X_2 + (3M-30)X_3 + (2M-40)X_4 + (3M-10)X_5 + 3MX_6 + (3M-20)X_7 = 25.000M \\
(1) & 3X_1 + 2X_2 + X_6 + X_7 + \boxed{X_8} = 5.000 \\
(2) & 2X_4 + X_5 + X_6 + \boxed{X_9} = 15.000 \\
(3) & X_2 + 3X_3 + 2X_5 + X_6 + 2X_7 + \boxed{X_{10}} = 5.000
\end{array}
$$

II Iteración

Variable que entra: X_6 — $X_8 = 5.000 - 3X_1 \Rightarrow X_1 \leq 1.666,66$

Variable que sale : X_8 — $X_9 = 15.000 \Rightarrow$ No Restringe

$X_{10} = 5.000 \Rightarrow$ No Restringe

$$
\begin{array}{ll}
(0) & \boxed{Z} + (M-10)X_2 + (3M-30)X_3 + (2M-40)X_4 + (3M-10)X_5 + 2MX_6 + (2M-20)X_7 - MX_8 = 20.000M \\
(1) & \boxed{X_1} + 2/3X_2 + 1/3X_6 + 1/3X_7 + 1/3X_8 = 5.000/3 \\
(2) & 2X_4 + X_5 + X_6 + \boxed{X_9} = 15.000 \\
(3) & X_2 + 3X_3 + 2X_5 + X_6 + 2X_7 + \boxed{X_{10}} = 5.000
\end{array}
$$

III Iteración

Variable que entra: X_5 — $X_1 = 5.000/3 \Rightarrow$ No restringe

Variable que sale : X_{10} — $X_9 = 15.000 - X_5 \Rightarrow X_5 \leq 15.000$

$X_{10} = 5.000 - 2X_5 \Rightarrow X_5 \leq 2.500$

$$
\begin{array}{ll}
(0) & \boxed{Z} - (1/2M+5)X_2 - (3/2M+15)X_3 + (2M-40)X_4 + (1/2M+5)X_6 - (M+10)X_7 - MX_8 - (3/2M-5)X_{10} = 12.500M+25.000 \\
(1) & \boxed{X_1} + 2/3X_2 + 1/3X_6 + 1/3X_7 + 1/3X_8 = 5.000/3 \\
(2) & - 1/2X_2 - 3/2X_3 + 2X_4 + 1/2X_6 - X_7 + \boxed{X_9} - 1/2X_{10} = 12.500 \\
(3) & + 1/2X_2 + 3/2X_3 + \boxed{X_5} + 1/2X_6 + X_7 + 1/2X_{10} = 2.500
\end{array}
$$

IV Iteración

Variable que entra: X_4 — $X_1 = 5.000/3 \Rightarrow$ No restringe

Variable que sale : X_9 — $X_9 = 12.500 - 2X_5 \Rightarrow X_4 \leq 6.250$

$X_5 = 2.500 \Rightarrow$ No restringe

$$
\begin{array}{ll}
(0) & \boxed{Z} - 15X_2 - 45X_3 + 15X_6 - 30X_7 - MX_8 - (M-20)X_9 - (M+5)X_{10} = 275.000 \\
(1) & \boxed{X_1} + 2/3X_2 + 1/3X_6 + 1/3X_7 + 1/3X_8 = 5.000/3 \\
(2) & - 1/4X_2 - 3/4X_3 + \boxed{X_4} + 1/4X_6 - 1/2X_7 + 1/2X_9 - 1/4X_{10} = 6.250 \\
(3) & + 1/2X_2 + 3/2X_3 + \boxed{X_5} + 1/2X_6 + X_7 + 1/2X_{10} = 2.500
\end{array}
$$

V Iteración

Variable que entra: X_6 $\quad X_1 = 5.000/3 - 1/3X_6 \Rightarrow X_6 \leq 5.000$

Variable que sale : X_1 $\quad X_4 = 6.2500 - 1/4X_6 \Rightarrow X_6 \leq 25.000$

$X_5 = 2.500 - 1/2X_6 \Rightarrow X_6 \leq 5.000$

$$
\begin{array}{ll}
(0) & Z - 45X_1 - 45X_2 - 45X_3 - 45X_7 - (M+15)X_8 - (M-20)X_9 - (M+5)X_{10} = 200.000 \\
(1) & 3X_1 + 2X_2 + X_6 + X_7 + X_8 = 5.000 \\
(2) & -3/4X_1 - 3/4X_2 - 3/4X_3 + X_4 - 3/4X_7 - 1/4X_8 + 1/2X_9 - 1/4X_{10} = 5.000 \\
(3) & -3/2X_1 - 1/2X_2 + 3/2X_3 + X_5 + 1/2X_7 - 1/2X_8 + 1/2X_{10} = 0
\end{array}
$$

Variable que entra: No hay variable para entrar, estamos en el óptimo.

Solución:

Variables de decisión o Variables reales	**Variables artificiales o Variables de Super avit**
$X_1^*=X_2^*=X_3^*=X_5^*=X_7^*=0$ $X_4^* = 5.000$ $X_6^* = 5.000$ $Z^* = 200.000$	$X_8^* = X_9^* = X_{10}^* = 0$

Interpretación: Para que halla un mínimo de desperdicio de 200.000 cm de lámina y cumplir exactamente con los pedidos, hay que cortar 5.000 láminas de la forma 4 y 5.000 láminas de la forma 6

Ejercicios propuestos

Resolver empleando el método gráfico, si el problema es de dos (2) variables y mediante el método algebraico, los siguientes ejercicios:

1) Maximizar $Z = 3X_1 + 5X_2$

C.S.R.

$X_1 \leq 4$

$3X_1 + 2X_2 \leq 18$

$X_j \geq 0 ; j = 1, 2$

Respuesta: $X_1^* = 0$, $X_2^* = 9$, $Z^* = 45$

2) Maximizar $Z = 3X_1 + 5X_2$

C.S.R.

$X_1 \leq 4$

$X_2 \leq 6$

$3X_1 + 2X_2 \leq 18$

$X_j \geq 0 ; j = 1, 2$

Respuesta: $X_1^* = 2$, $X_2^* = 6$, $Z^* = 36$

3) Minimizar $Z = 4X_1 + X_2$

C.S.R.

$3X_1 + X_2 = 3$

$4X_1 + 3X_2 \geq 6$

$X_1 + 2X_2 \leq 4$

$X_j \geq 0 ; j = 1, 2$

Respuesta: $X_1^* = 2/5$, $X_2^* = 9/5$, $Z^* = 17/5$

4) Minimizar $Z = X_1 + 2X_2$

C.S.R.

$3X_1 + X_2 \geq 3$

$4X_1 + 3X_2 \geq 6$

$X_1 + X_2 \leq 3$

$X_j \geq 0 ; j = 1, 2$

Respuesta: $X_1^* = 3/5$, $X_2^* = 6/5$, $Z^* = 21/5$

5) Maximizar $Z = X_1 + X_2$

C.S.R.

$$X_1 + 2X_2 \leq 6$$
$$2X_1 + X_2 \geq 9$$

$X_j \geq 0 \; ; \; j = 1, 2$

Respuesta:
$X_1^* = 6$
$X_2^* = 0$
$Z^* = 6$

6) Maximizar $Z = 2X_1 + 3X_2$

C.S.R.

$$X_1 + 3X_2 \leq 6$$
$$3X_1 + 2X_2 \leq 6$$

$X_j \geq 0 \; ; \; j = 1, 2$

Respuesta:
$X_1^* = 0{,}857$
$X_2^* = 1{,}714$
$Z^* = 6{,}857$

7) Max $Z = 6X_1 + 4X_2 + 2X_3$

C.S.R.

$$6X_1 + 2X_2 + 6X_3 \geq 6$$
$$6X_1 + 4X_2 = 12$$
$$2X_1 - 2X_2 \leq 2$$

$X_j \geq 0 \; ; \; j = 1,2,3$

Respuesta:
$X_1^* = 0$
$X_2^* = 3$
$X_3^* = 0$
$Z^* = 12$
Sol. Múltiples

8) Max $Z = 4X_1 - 2X_2 + 2X_3$

C.S.R.

$$2X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 2X_4 \leq 16$$
$$4X_2 - 2X_3 \leq 8$$
$$4X_1 - 2X_2 - X_4 \leq 4$$

$X_j \geq 0 \; ; \; j = 1,2,3,4$

Respuesta:
$X_1^* = 1$
$X_2^* = 0$
$X_3^* = 7$
$X_4^* = 0$
$Z^* = 18$

9) Max $Z = 5X_1 - 2X_2 + 3X_3$

C.S.R.

$$2X_1 + 2X_2 - X_3 \geq 2$$
$$3X_1 - 4X_2 \leq 3$$
$$X_2 + 3X_3 \leq 5$$

$X_j \geq 0 \; ; \; j = 1,2,3$

Respuesta:
$X_1^* = 23/3$
$X_2^* = 5$
$X_3^* = 0$
$Z^* = 85/3$

10) Max $Z = 6X_1 - 2X_2$

C.S.R.

$$X_1 - X_2 \leq 1$$
$$3X_1 - X_2 \leq 6$$

$X_j \geq 0 \; ; \; j = 1,2$

Respuesta:
$X_1^* = 5/2$
$X_2^* = 3/2$
$Z^* = 12$

11) Min $Z = 3X_1 - 9X_2 - 5X_3 + 4X_4$

C.S.R.

$$X_1 + 4X_2 + 5X_3 + 8X_4 \leq 8$$
$$X_1 + 2X_2 + 6X_3 + 4X_4 \leq 4$$

$X_j \geq 0 \; ; \; j = 1,2,3,4$

Respuesta:
$X_1^* = 0$
$X_2^* = 2$
$X_3^* = 0$
$X_4^* = 0$
$Z^* = -18$

12) Min $Z = 2X_1 + 9X_2 + 6X_3 + 8X_4$

C.S.R.

$$X_1 + X_2 + X_3 - X_4 = 1$$
$$X_1 + 2X_2 - X_3 + 2X_4 = 0$$

$X_j \geq 0 \; ; \; j = 1,2,3,4$

Respuesta:
$X_1^* = 1/2$
$X_2^* = 0$
$X_3^* = 1/2$
$X_4^* = 0$
$Z^* = 4$

13) Min $Z = 0{,}5X_1 + 1{,}5X_2 - 0{,}5X_3$

C.S.R.

$$-0{,}5X_1 - 0{,}5X_2 + X_3 \leq 2{,}5$$
$$X_1 - 0{,}5X_2 + 0{,}5X_3 \leq 3{,}0$$
$$0{,}5X_1 - 1{,}5X_2 + 2{,}5X_3 \geq 10{,}0$$

$X_j \geq 0 \; ; \; j = 1,2,3$

Respuesta:
$X_1^* = 0$
$X_2^* = 0$
$X_3^* = 3$
$Z^* = -3$

14) Max $Z = X_1 + 2X_2 - X_3 + 4X_4$

C.S.R.

$$X_1 + 2X_2 - 3X_3 + X_4 = 4$$
$$X_1 + 2X_2 + X_3 + 2X_4 = 4$$

$X_j \geq 0 \; ; \; j = 1,2,3,4$

Soluciones múltiples

Respuesta:
$X_1^* = 0$
$X_2^* = 2$
$X_3^* = 0$
$X_4^* = 0$
$Z^* = 4$

Capítulo 5
Método Simplex

Cj →			5	-2	3	0	-M	0	0	b/a
↓	V.B.	b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	
5	X_1	13/9	**1**	**0**	**0**	**-4/15**	**4/15**	**7/45**	**4/45**	**NO**
3	X_3	14/9	**0**	**0**	**1**	1/15	**-1/15**	**2/45**	**14/45**	**70/3**
-2	X_2	1/3	**0**	**1**	**0**	**-3/15**	**3/15**	**-2/15**	**1/15**	**NO**
Zj - Cj		101/9	**0**	**0**	**0**	**-11/15**	**M+11/15**	**53/45**	**56/45**	

Introducción

El método algebraico es muy dispendioso, en razón a que trabaja con todos los datos de las ecuaciones, para mejorar éste aspecto se creó el método simplex cuya gran virtud es su sencillez, método muy práctico, ya que solo trabaja con los coeficientes de la función objetivo y de las restricciones. Ilustraremos su funcionamiento mediante un ejemplo, pero previamente mostraremos las reglas de decisión para determinar la variable que entra, la que sale, la gran M, y cómo determinar que estamos en el óptimo; Todas éstas reglas de decisión fueron deducidas del método algebraico, solamente que aquí se han acomodado para ser usadas en el tipo de tablero simplex que se usará.

Criterio de decisión	**Maximizar**	**Minimizar**
Gran M en la función objetivo	- MXj	+MXj
Variable que entra	La más negativa de los Zj - Cj	La más positiva de los Zj - Cj
Variable que sale	La menos positiva de los b/a , Siendo a > 0 , de lo contrario no restringe	La menos positiva de los b/a , Siendo a > 0 , de lo contrario no restringe a la variable que entra
Solución óptima	Cuando todos los Zj – Cj $\geq$ 0	Cuando todos los Zj – Cj $\leq$ 0

Adicionalmente se presentan las siguientes notas a tener en cuanta:

- Si en el tablero simplex de la solución óptima queda al menos una variable de Super avit ó artificial dentro de las variables básicas, con un valor > 0 , el problema no tiene solución, esto quiere decir que al menos existen dos restricciones excluyentes, por lo tanto no existe área de soluciones factible y menos una solución , en éste caso se debe revisar la formulación del problema.
- Si al escoger la variable que sale, ninguna de las variables básicas restringe el crecimiento de la variable no básica escogida para entrar, el problema tiene solución indeterminada y se debe revisar la formulación en busca de una nueva restricción que no se tuvo en cuenta en la formulación inicial.
- Si en el tablero simplex del óptimo, al menos una de las variables no básicas tiene coeficiente cero (0) en la función objetivo, esto es su Zj – Cj = 0, el problema tiene múltiples soluciones y se nos está ofreciendo una de ellas.

Ejemplo 1

Maximizar $Z = X_1 + X_2$
C.S.R.
$5X_1 + 3X_2 \leq 15$
$3X_1 + 5X_2 \leq 15$
$X_j \geq 0 ; j = 1, 2$

Todo problema de programación lineal que se formule de la forma Maximice, con todas sus restricciones $\leq$ y con la condición de no negatividad, se le llama **Forma Estándar ó Forma Normal**

Aquí, al igual que en el método algebraico, debemos conseguir una solución básica factible, empleando las variables de holgura y/o artificiales, quedando el sistema de ecuaciones así:

Maximizar $Z = X_1 + X_2$
C.S.R.
$5X_1 + 3X_2 + \mathbf{X_3} \qquad = 15$
$3X_1 + 5X_2 \qquad + \mathbf{X_4} = 15$
$X_j \geq 0 ; j = 1,2,3,4$

Las variables básicas son $\mathbf{X_3}$ y $\mathbf{X_4}$ y por su puesto en la función objetivo **Z**.
Este ejercicio es el ejemplo 1 del capitulo de método algebraico. Compare los resultados entre los dos métodos.

A continuación construimos la siguiente tabla:

Cj →			1	1	0	0	b/a
↓	V.B.	b	X_1	X_2	X_3	X_4	
0	X_3	**15**	5	3	1	0	
0	X_4	**15**	3	5	0	1	
Zj - Cj		**0**	-1	-1	0	0	

El valor de la función objetiva Z, se encuentra frente a la casilla de Zj – Cj , en éste caso vale cero (0) y se calcula multiplicando el vector fila (en la tabla es la columna inmediatamente anterior a la de las variables básica V.B.) que contiene los coeficientes de las variables básicas en la función objetiva original por el vector columna de los términos independientes b

C_{XB} = Vector fila de los coeficientes en la función objetivo original de las variables básicas actuales, sus valores se encuentran en la primera columna del tablero.

b = Vector columna de los términos independientes de las restricciones, que al mismo tiempo son los valores de las variables básicas actuales, sus valores se encuentran bajo la columna denominada b

$C_{XB} = (0,0)$; $b = \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \end{pmatrix}$ ➔ $(0,0)\begin{pmatrix} 15 \\ 15 \end{pmatrix} = (0)(15) + (0)(15) = 0$

Cj →			**1**	**1**	**0**	**0**	b/a
↓	V.B.	b	X_1	X_2	X_3	X_4	
0	X_3	15	**5**	**3**	**1**	**0**	
0	X_4	15	**3**	**5**	**0**	**1**	
Zj - Cj		0	**-1**	**-1**	**0**	**0**	

El valor de los Zj – Cj se calcula multiplicado el vector fila C_{xB} por el vector apuntador a_j de la columna de la variable j-ésima, menos el Cj, esto es:

$Z_j - C_j = C_{xB}\, a_j - C_j$; Los cálculos se efectúan así:

$$Z_1 - C_1 = C_{xB}\, a_1 - C_1 = (0,0)\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 = (0)(5)+(0)(3) - 1 = -1$$

$$Z_2 - C_2 = C_{xB}\, a_2 - C_2 = (0,0)\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - 1 = (0)(3)+(0)(5) - 1 = -1$$

$$Z_3 - C_3 = C_{xB}\, a_3 - C_3 = (0,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = (0)(1)+(0)(0) - 0 = 0$$

$$Z_4 - C_4 = C_{xB}\, a_4 - C_4 = (0,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = (0)(0)+(0)(1) - 0 = 0$$

Cj →			**1**	1	0	0	b/a
↓	V.B.	b	**X_1**	X_2	X_3	X_4	a > 0
0	**X_3**	**15**	**5**	**3**	**1**	**0**	**15/5 = 3**
0	X_4	15	**3**	5	0	1	15/3 = 5
Zj - Cj		0	**-1**	-1	0	0	

(1/5)

Variable que entra X_1
Variable que sale X_3

Recuerde que la columna de b/a se calcula, siempre y cuando el denominador sea a > 0 ; de lo contrario la variable básica respectiva no restringe el valor de la variable escogida para entrar, los valores de a, están en el respectivo vector apuntador de la variable j-ésima escogida para entrar, en ésta iteración son 5 y 3 y el calculo respectivo 15/5 = 3 y 15/3 = 5; Lo que significa que la variable básica X_3 restringe el crecimiento de la variable que entra X_1 hasta 3 (no la deja tomar valores superiores a 3) y la variable básica X_4 restringe el crecimiento de la variable que entra X_1 hasta 5 (no la deja tomar valores superiores a 5). Por supuesto la variable básica que restringe más el crecimiento de la variable que entra X_1 es X_3 por lo tanto es la variable básica escogida para salir.

La fila de la variable básica escogida para salir se divide por el elemento que se encuentra en la intersección de dicha fila con la columna de la variable que entra, la fila resultante es la fila pivote y se coloca en un nuevo tablero, desde el que se suman múltiplos de la fila pivote a las demás filas del tablero anterior de tal forma que se eliminen de cada una de ellas la variable escogida para entrar, en nuestro caso X_1 , este procedimiento se denomina, hacer un uno (1) en la intersección y el resto de la columna ceros (0), por lo tanto en dicha columna aparecerá un vector unitario, el procedimiento se repite en cada iteración, hasta que todos los $Zj - Cj$ sean mayores ó iguales a cero en el caso de maximizar ó menores ó iguales a cero en el caso de minimizar.

A continuación se muestran todas las iteraciones y en cada fila los valores por los cuales fueron multiplicadas para ser sumadas a otras filas, ello se expresa como sumar múltiplos de una fila a otra.

Fíjese que se suman múltiplos de las restricciones a la función objetivo para eliminar las variables básicas de ella.

Cj →			1	**1**	0	0	b/a	
↓	V.B.	b	X_1	**X_2**	X_3	X_4	a > 0	
1	X_1	3	1	**3/5**	1/5	0	5	(-3)
0	**X_4**	**6**	**0**	**16/5**	**-3/5**	**1**	15/8 = 1,875	(5/16)
Zj - Cj		3	0	**-2/5**	1/5	0		

Variable que entra X_2
Variable que sale X_4

Cj →			1	1	0	0
↓	V.B.	b	X_1	X_2	X_3	X_4
1	X_1	15/8	1	0	5/16	-3/16
1	X_2	15/8	0	1	-3/16	5/16
Zj - Cj		15/4	0	0	1/8	1/8

Solución óptima:

$X_1^* = 15/8$
$X_2^* = 15/8$
$Z^* = 15/4$

Conclusiones:

- La solución es única: $X_1^* = 15/8$; $X_2^* = 15/8$; $Z^* = 14/4$
- El método simplex es más práctico que el método algebraico

Ejemplo 2

Minimizar $Z = 6X_1 + 4X_2 + 2X_3$

C.S.R.

$$6X_1 + 2X_2 + 6X_3 \geq 6$$
$$6X_1 + 4X_2 = 12$$
$$2X_1 - 2X_2 \leq 2$$

$X_j \geq 0$; $j = 1, 2, 3$

Minimizar $Z = 6X_1 + 4X_2 + 2X_3 + MX_5 + M_6$

C.S.R.

$$6X_1 + 2X_2 + 6X_3 - X_4 + X_5 = 6$$
$$6X_1 + 4X_2 + X_6 = 12$$
$$2X_1 - 2X_2 + X_7 = 2$$

$X_j \geq 0$; $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

Las variables básicas son $X_5 = 6$, $X_6 = 12$ $X_7 = 2$

Este ejercicio es el ejemplo 2 del capitulo de método algebraico. Compare los resultados entre los dos métodos, en cada iteración.

Cj	→		**6**	4	2	0	M	M	0	b/a	
↓	V.B.	b	**X_1**	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7		
M	**X_5**	**6**	**6**	**2**	**6**	**-1**	**1**	**0**	**0**	**1**	(1/6)
M	X_6	12	**6**	4	0	0	0	1	0	2	
0	X_7	2	**2**	-2	0	0	0	0	1	1	
Zj - Cj		18M	**12M-6**	6M-4	6M-2	-M	0	0	0		

Cj	→		6	**4**	2	0	M	M	0	b/a	
↓	V.B.	b	X_1	**X_2**	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7		
6	X_1	1	1	**1/3**	1	-1/6	1/6	0	0	3	(-6) (-2)
M	**X_6**	**6**	**0**	**2**	**-6**	**1**	**-1**	**1**	**0**	**3**	(1/2)
0	X_7	0	0	**-8/3**	-2	1/3	-1/3	0	1	NO	
Zj - Cj		6M+6	0	**2M-2**	-6M+4	M-1	-2M+1	0	0		

Cj	→		6	4	2	0	M	M	0
↓	V.B.	b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
6	X_1	0	1	0	2	-1/3	1/3	-1/6	0
4	X_2	3	0	1	-3	1/2	-1/2	1/2	0
0	X_7	8	0	0	-10	5/3	-5/3	4/3	1
Zj - Cj		12	0	0	-2	0	-M	-M+1	0

Solución Óptima:

Variables de decisión:

$X_1^* = 0$, $X_2^* = 3$, $X_3^* = 0$, $Z^* = 12$

Variables de holgura : $X_4^* = 0$, $X_7^* = 8$

Variables artificiales: $X_5^* = 0$, $X_6^* = 0$

Ejemplo 3

Aquí, se muestra el método simplex aplicado al ejemplo 3 del capítulo de método algebraico.

Minimizar $Z = 10X_2 + 30X_3 + 40X_4 + 10X_5 + 20X_7$

C.S.R. = Con las siguientes restricciones:

$$
\begin{aligned}
3X_1 + 2X_2 + X_6 + X_7 &= 5.000 \\
2X_4 + X_5 + X_6 &= 15.000 \\
X_2 + 3X_3 + 2X_5 + X_6 + 2X_7 &= 5.000
\end{aligned}
$$

$X_j \geq 0$; $j = 1,2,3,4,5,6,7$

Adicionando las variables artificiales necesarias para obtener una solución básica factible, el problema queda expresado de la siguiente forma:

Min $Z = 10X_2 + 30X_3 + 40X_4 + 10X_5 + 20X_7 + M\mathbf{X_8} + M\mathbf{X_9} + M\mathbf{X_{10}}$

C.S.R.

$$
\begin{aligned}
3X_1 + 2X_2 + X_6 + X_7 + \mathbf{X_8} &= 5.000 \\
2X_4 + X_5 + X_6 + \mathbf{X_9} &= 15.000 \\
X_2 + 3X_3 + 2X_5 + X_6 + 2X_7 + \mathbf{X_{10}} &= 5.000
\end{aligned}
$$

$X_j \geq 0$; $j = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$

Variables básicas X_8 , X_9 y X_{10}

Cj →			**0**	10	30	40	10	0	20	M	M	M	b/a	
↓	V.B.	b	**X_1**	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}		
M	**X_8**	**5.000**	**3**	**2**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	2.000	(1/3)
M	X_9	15.000	**0**	0	0	2	1	1	0	0	1	0	15.000	
M	X_{10}	5.000	**0**	1	3	0	2	1	2	0	0	1	5.000	
Zj - Cj		25.000M	**3M**	3M-10	3M-30	2M-40	3M-10	3M	3M-20	0	0	0		

Cj →			0	10	30	40	**10**	0	20	M	M	M	b/a	
↓	V.B.	b	X_1	X_2	X_3	X_4	**X_5**	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}		
0	X_1	5.000/3	1	2/3	0	0	**0**	1/3	1/3	1/3	0	0	NO	
M	X_9	15.000	0	0	0	2	**1**	1	0	0	1	0	15.000	
M	**X_{10}**	**5.000**	**0**	**1**	**3**	**0**	**2**	**1**	**2**	**0**	**0**	**1**	2.500	(1/2)
Zj - Cj		20.000M	0	M-10	3M-30	2M-40	**3M-10**	2M	2M-20	-M	0	0		

Cj →			0	10	30	40	10	0	20	M	M	M	b/a
↓	V.B.	b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	
0	X_1	5.000/3	1	2/3	0	0	0	1/3	1/3	1/3	0	0	NO
M	X_9	**12.500**	**0**	**-1/2**	**-3/2**	**2**	**0**	**1/2**	**-1**	**0**	**1**	**-1/2**	6.250
10	X_5	2.500	0	1/2	3/2	0	1	1/2	1	0	0	1/2	NO
Zj - Cj		12.500M+25.000	0	-1/2M-5	-3/2M-15	**2M-40**	0	1/2M+5	-M-10	-M	0	-3/2M+5	

Cj →			0	10	30	40	10	0	20	M	M	M	b/a
↓	V.B.	b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	
0	X_1	**5.000/3**	**1**	**2/3**	**0**	**0**	**0**	**1/3**	**1/3**	**1/3**	**0**	**0**	5.000
40	X_4	6.250	0	-1/4	-3/4	1	0	**1/4**	-1/2	0	1/2	-1/4	25.000
10	X_5	2.500	0	1/2	3/2	0	1	**1/2**	1	0	0	1/2	5.000
Zj - Cj		275.000	0	-15	-45	0	0	**15**	-30	-M	-M+20	-M-5	

Cj →			0	10	30	40	10	0	20	M	M	M
↓	V.B.	b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
0	X_6	5.000	3	2	0	0	0	1	1	1	0	0
40	X_4	5.000	-3/4	-3/4	-3/4	1	0	0	-3/4	-1/4	1/2	-1/4
10	X_5	0	-3/2	-1/2	3/2	0	1	0	1/2	-1/2	0	1/2
Zj - Cj		200.000	-45	-45	-45	0	0	0	-45	-M-15	-M+20	-M-5

Solución:

Variables de Decisión: $X_1^* = X_2^* = X_3^* = X_5^* = X_7^* = 0$; $X_4^* = X_6^* = 5.000$; $Z^* = 200.000$

Variables Artificiales: $X_8^* = X_9^* = X_{10}^* = 0$

Interpretación: Para que halla un mínimo de desperdicio de 200.000 cm de lámina y cumplir exactamente con los pedidos, hay que cortar 5.000 láminas de la forma 4 y 5.000 láminas de la forma 6

Ejemplo 4

En este ejemplo se muestra como resolver un problema en donde no todas las variables deben cumplir la condición de no negatividad, dicho de otra manera, con variables irrestrictas. Aquí el secreto consiste en reemplazar cada una de las variables irrestrictas por la diferencia de dos variables que si deban cumplir la condición de no negatividad.

Maximizar $Z = 4X_1 + 5X_2 + 2X_3 - X_4$

C.S.R.

$$X_1 + X_2 + 2X_3 - X_4 \geq 1$$
$$2X_1 + 2X_2 - 3X_3 + X_4 \leq 3$$
$$X_1 + 4X_2 + 3X_3 + 2X_4 \leq 5$$

$X_j \geq 0$; $j = 1, 2, 4$

Aquí X_3 tiene libertad en el signo, esto es puede tomar valores positivos ó negativos. Hacemos $X_3 = K - W$, en donde K y W deben ser positivas, $K \geq 0$ y $W \geq 0$

Fíjese que si $K > W \Rightarrow X_3$ será positiva, si $K = W \Rightarrow X_3$ será igual a cero (0) y si $K < W \Rightarrow X_3$ será negativa.

Lo que hemos conseguido es convertir un problema que es irrestricto en su variable X_3 en uno que es restringido en todas sus variables, el problema queda así:

Maximizar $Z = 4X_1 + 5X_2 + 2K - 2W - X_4$

C.S.R.

$$X_1 + X_2 + 2K - 2W - X_4 \geq 1$$
$$2X_1 + 2X_2 - 3K + 3W + X_4 \leq 3$$
$$X_1 + 4X_2 + 3K - 3W + 2X_4 \leq 5$$

$X_j \geq 0$; $j = 1, 2, 4$; $K \geq 0$; $W \geq 0$

Fíjese que este problema, es uno clásico de programación lineal y procedemos a resolverlo empleando el método simplex, para lo que adicionamos las variables de holgura y artificiales que sean necesarias para conseguir la solución básica factible.

Maximizar $Z = 4X_1 + 5X_2 + 2K - 2W - X_4 - MX_6$

C.S.R.

$$X_1 + X_2 + 2K - 2W - X_4 - X_5 + \mathbf{X_6} = 1$$
$$2X_1 + 2X_2 - 3K + 3W + X_4 \quad \mathbf{X_7} = 3$$
$$X_1 + 4X_2 + 3K - 3W + 2X_4 + \mathbf{X_8} \leq 5$$

$X_j \geq 0$; $j = 1, 2, 4$; $K \geq 0$; $W \geq 0$

Aquí las variables básicas son: X_6, X_7, y X_8

Cj →			4	5	2	-2	-1	0	-M	0	0	b/a	
↓	V.B.	b	X_1	X_2	K	W	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8		
-M	**X_6**	**1**	**1**	**1**	**2**	**-2**	**-1**	**-1**	**1**	**0**	**0**	**1/2**	(1/2)
0	X_7	3	2	2	**-3**	3	1	0	0	1	0	NO	
0	X_8	5	1	4	**3**	-3	2	0	0	0	1	5/3 = 1,66	
Zj - Cj		-M	-M-4	-M-5	**-2M-2**	2M+2	M+1	M	0	0	0		

Cj →			4	5	2	-2	-1	0	-M	0	0	b/a	
↓	V.B.	b	X_1	**X_2**	K	W	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8		
2	**K**	**1/2**	**1/2**	**1/2**	**1**	**-1**	**-1/2**	**-1/2**	**1/2**	**0**	**0**	**1**	(3) (-3) (2)
0	X_7	9/2	7/2	**7/2**	0	0	-1/2	-3/2	3/2	1	0	9/7 = 1,28	
0	X_8	7/2	-1/2	**5/2**	0	0	7/2	3/2	-3/2	0	1	7/5 = 1,40	
Zj - Cj		1	-3	**-4**	0	0	0	-1	M+1	0	0		

Cj →			4	5	2	**-2**	-1	0	-M	0	0	b/a	
↓	V.B.	b	X_1	X_2	K	**W**	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8		
5	X_2	1	1	1	2	**-2**	-1	-1	1	0	0	NO	(-7/2) (-5/2)
0	**X_7**	**1**	**0**	**0**	**-7**	**7**	**3**	**2**	**-2**	**1**	**0**	**1/7 = 0,14**	(1/7)
0	X_8	1	-3	0	-5	**5**	6	4	-4	0	1	1/5 = 0,20	
Zj - Cj		5	1	0	8	**-8**	-4	-5	M+5	0	0		

Cj →			4	5	2	-2	-1	**0**	-M	0	0	b/a	
↓	V.B.	b	X_1	X_2	K	W	X_4	**X_5**	X_6	X_7	X_8		
5	X_2	9/7	1	1	0	0	-1/7	**-3/7**	3/7	2/7	0	NO	
-2	W	1/7	0	0	-1	1	3/7	**2/7**	-2/7	1/7	0	1/2 = 0,5	(2) (-5)
0	**X_8**	**2/7**	**-3**	**0**	**0**	**0**	**27/7**	**18/7**	**-18/7**	**-5/7**	**1**	**1/9 = 0,1**	(7/18)
Zj - Cj		43/7	1	0	0	0	-4/7	**-19/7**	M+19/7	8/7	0		

Cj →			**4**	5	2	-2	-1	0	-M	0	0	b/a	
↓	V.B.	b	**X_1**	X_2	K	W	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8		
5	X_2	4/3	**1/2**	1	0	0	1/2	0	0	1/6	1/6	8/3 = 2,6	
-2	**W**	**1/9**	**1/3**	**0**	**-1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**2/9**	**-1/9**	**1/3 = 0,3**	(3)
0	X_5	1/9	**-7/6**	0	0	0	3/2	1	-1	-5/18	7/18	NO	(-2/7) (3/7)
Zj - Cj		58/9	**-13/6**	0	0	0	7/2	0	M	7/18	19/18		

Cj →			4	5	**2**	-2	-1	0	-M	0	0	b/a	
↓	V.B.	b	X_1	X_2	**K**	W	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8		
5	**X_2**	**7/6**	**0**	**1**	**3/2**	**-3/2**	**1/2**	**0**	**0**	**-1/6**	**-1/3**	**7/9 = 0,7**	(2/3)
4	X_1	1/3	1	0	**-3**	3	0	0	0	2/3	-1/3	NO	(-1/2) (7/6)
0	X_5	1/2	0	0	**-7/2**	7/2	3/2	1	-1	1/2	0	NO	
Zj - Cj		43/6	0	0	**-13/2**	13/2	7/2	0	M	11/6	1/3		

Cj →			4	5	2	-2	-1	0	-M	0	0	
↓	V.B.	b	X_1	X_2	K	W	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	
2	K	7/9	0	2/3	1	-1	1/3	0	0	-1/9	2/9	(3) (7/2)
4	X_1	8/3	1	2	0	0	1	0	0	1/3	1/3	
0	X_5	29/9	0	7/3	0	0	8/3	1	-1	1/9	7/9	
Zj - Cj		110/9	0	13/3	0	0	17/3	0	M	10/9	16/9	

Aquí todos los $Z_j - C_j$ son ≥ 0 , entonces estamos en la solución óptima.

La solución, mostrando las variables clasificadas es:

Variables de decisión	Variables de holgura	Variables artificiales
$X_1^* = 8/3$	$X_5^* = 29/9$	$X_6^* = 0$
$X_2^* = 0$	$X_7^* = 0$	
$X_3^* = K^* - W^* = 7/9 - 0 = 7/9$	$X_8^* = 0$	
$X_4^* = 0$		
$Z^* = 110/9 = 12{,}22$		

Ejemplo 5

En este ejemplo observaremos que a pesar de que el sistema tiene 4 variables, el número de iteraciones es apenas de 2

Minimizar $Z = 3X_1 - 9X_2 - 5X_3 - 4X_4$
C.S.R.

$$X_1 + 4X_2 + 5X_3 + 8X_4 \leq 8$$
$$X_1 + 2X_2 + 6X_3 + 4X_4 \leq 4$$

$X_j \geq 0$; $j = 1, 2, 3, 4$

➔

Minimizar $Z = 3X_1 - 9X_2 - 5X_3 - 4X_4$
C.S.R.

$$X_1 + 4X_2 + 5X_3 + 8X_4 + X_5 = 8$$
$$X_1 + 2X_2 + 6X_3 + 4X_4 + X_6 = 4$$

$X_j \geq 0$; $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Cj →			3	**-9**	-5	-4	0	0	b/a	
↓	V.B.	b	X_1	**X_2**	X_3	X_4	X_5	X_6		
0	**X_5**	**8**	**1**	**4**	**5**	**8**	**1**	**0**	**2**	(1/4)
0	X_6	4	1	**2**	6	4	0	1	2	
Zj - Cj		0	-3	**9**	5	4	0	0		

Cj →			3	-9	-5	-4	0	0
↓	V.B.	b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
-9	X_2	2	1/4	1	5/4	2	1/4	0
0	X_6	0	1/2	0	7/2	0	-1/2	1
Zj - Cj		-18	-21/4	0	-25/4	-14	-9/4	0

Solución: $X_1^* = 0$ $X_5^* = 0$
$X_2^* = 2$ $X_6^* = 0$
$X_3^* = 0$
$X_4^* = 0$
$Z^* = -18$

Ejemplo 6

Solución al problema número 4) El problema de los paquetes de tuercas, del capítulo 2, formulación.

Minimizar $Z = 0{,}1X_1 + 0{,}04X_2 + 0{,}06X_3$
C.S.R.

$$
\begin{aligned}
X_1 - X_2 + X_3 &\geq 0\\
X_1 + X_2 &\leq 1{,}6\\
0{,}9X_1 - 0{,}1X_2 - 0{,}1X_3 &\geq 0\\
-0{,}1X_1 + 0{,}9X_2 - 0{,}1X_3 &\geq 0\\
-0{,}1X_1 - 0{,}1X_2 + 0{,}9X_3 &\geq 0\\
X_1 + X_2 + X_3 &\geq 2
\end{aligned}
\quad \Rightarrow
$$

$Xj \geq 0$; $j = 1, 2, 3$

Min $Z = 1/10X_1 + 1/25X_2 + 3/50X_3$
C.S.R.

$$
\begin{aligned}
X_1 - X_2 + X_3 &\geq 0\\
X_1 + X_2 &\leq 8/5\\
9/10X_1 - 1/10X_2 - 1/10X_3 &\geq 0\\
-1/10X_1 + 9/10X_2 - 1/10X_3 &\geq 0\\
-1/10X_1 - 1/10X_2 + 9/10X_3 &\geq 0\\
X_1 + X_2 + X_3 &\geq 2
\end{aligned}
$$

$Xj \geq 0$; $j = 1, 2, 3$

Min $Z = 1/10X_1 + 1/25X_2 + 3/50X_3 + MX_{10}$
C.S.R.

$$
\begin{aligned}
-X_1 + X_2 - X_3 + \mathbf{X_4} &= 0\\
X_1 + X_2 + \mathbf{X_5} &= 8/5\\
-9/10X_1 + 1/10X_2 + 1/10X_3 + \mathbf{X_6} &= 0\\
1/10X_1 - 9/10X_2 + 1/10X_3 + \mathbf{X_7} &= 0\\
1/10X_1 + 1/10X_2 - 9/10X_3 + \mathbf{X_8} &= 0\\
X_1 + X_2 + X_3 - X_9 + \mathbf{X_{10}} &= 2
\end{aligned}
$$

$Xj \geq 0$; $j = 1, 2, 3$

Las variables básicas son:
X_4 , X_5 , X_6 , X_7 , X_8 , X_{10}

Cj →			1/10	**1/25**	3/50	0	0	0	0	0	0	M	b/a	
↓	V.B.	b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}		
0	**X_4**	**0**	**-1**	**1**	**-1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	(1)
0	X_5	8/5	1	**1**	0	0	1	0	0	0	0	0	8/5	
0	X_6	0	-9/10	**1/10**	1/10	0	0	1	0	0	0	0	0	
0	X_7	0	1/10	**-9/10**	1/10	0	0	0	1	0	0	0	NO	
0	X_8	0	1/10	**1/10**	-9/10	0	0	0	0	1	0	0	0	
M	X_{10}	2	1	**1**	1	0	0	0	0	0	-1	1	2	
Zj - Cj		2M	M-1/10	**M-1/25**	M-3/50	0	0	0	0	0	0	0		

Cj →			1/10	1/25	**3/50**	0	0	0	0	0	0	M	b/a	
↓	V.B.	b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}		
1/25	X_2	0	-1	1	**-1**	1	0	0	0	0	0	0	NO	(-1)(-1/10)(9/10) (-1/10)(-1)
0	X_5	8/5	2	0	**1**	-1	1	0	0	0	0	0	8/5	
0	**X_6**	**0**	**-4/5**	**0**	**1/5**	**-1/10**	**0**	**1**	**0**	**0**		**0**	**0**	(5)
0	X_7	0	-4/5	0	**-4/5**	9/10	0	0	1	0	0	0	NO	
0	X_8	0	1/5	0	**-4/5**	-1/10	0	0	0	1	0	0	NO	
M	X_{10}	2	2	0	**2**	-1	0	0	0	0	-1	1	1	
Zj - Cj		2M	2M-7/50	0	**2M-1/10**	-M+1/25	0	0	0	0	-M	0		

Cj →			**1/10**	1/25	3/50	0	0	0	0	0	0	M	b/a	
↓	V.B.	b	**X_1**	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}		
1/25	X_2	0	**-5**	1	0	1/2	1	5	0	0	0	0	NO	
0	X_5	8/5	**6**	0	0	-1/2	0	-5	0	0	0	0	8/30	
3/50	X_3	0	**-4**	0	1	-1/2	0	5	0	0	0	0	NO	(1)(-1) (4/5)(-2)
0	X_7	0	**-4**	0	0	1/2	0	4	1	0	0	0	NO	
0	X_8	0	**-3**	0	0	-1/2	0	4	0	1	0	0	NO	
M	**X_{10}**	**2**	**10**	**0**	**0**	**0**	**0**	**-10**	**0**	**0**	**-1**	**1**	**1/5**	(1/10)
Zj - Cj		2M	**10M-27/50**	0	0	-1/100	0	-10M+1/2	0	0	-M	0		

Cj →			1/10	1/25	3/50	0	0	0	0	0	0	M	
↓	V.B.	b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	
1/25	X_2	1	0	1	0	1/2	0	0	0	0	-1/2	1/2	
0	X_5	2/5	0	0	0	-1/2	1	1	0	0	3/5	-3/5	
3/50	X_3	4/5	0	0	1	-1/2	0	1	0	0	-2/5	2/5	
0	X_7	4/5	0	0	0	1/2	0	0	1	0	-2/5	2/5	
0	X_8	3/5	0	0	0	-1/2	0	1	0	1	-3/10	3/10	
1/10	X_1	1/5	1	0	0	0	0	-1	0	0	-1/10	1/10	(5)(-2)(4) (4)(3)
Zj - Cj		27/250	0	0	0	-1/100	0	-1/25	0	0	-27/500	-M+27/500	

Variables de decisión	Variables de holgura	Variables artificiales
$X_1^* = 1/5$	$X_4^* = 0$	$X_{10}^* = 0$
$X_2^* = 1$	$X_5^* = 2/5 = 0,4$	
$X_3^* = 4/5 = 0,8$	$X_6^* = 0$	
$Z^* = 27/250 = 0,108$	$X_7^* = 4/5 = 0,8$	
	$X_8^* = 3/5 = 0,6$	
	$X_9^* = 0$	

Conclusión

El método simplex es más práctico que el método algebraico, pero para problemas de un gran número de variables y restricciones, fácilmente se vuelve dispendioso por el número de iteraciones y por supuesto demorado para obtener la solución óptima, es aquí donde el uso del computador se hace indispensable y útil en términos de eficiencia, para ello existe el software adecuado, los más conocidos son:

- Winqsb de Yih-Long Chang, distribuido por John Wiley & Sons. Inc N.Y.
- Solver de Frontline Systems Inc. , que viene integrado con el Excel de Microsoft.
- Lindo de Lindo Systems Inc. Que viene integrado con Visicalc.
- El AD, Ayuda a la decisión de la Universidad Cienfuegos de Cuba.

Se sugiere consultar las siguientes páginas en Internet:

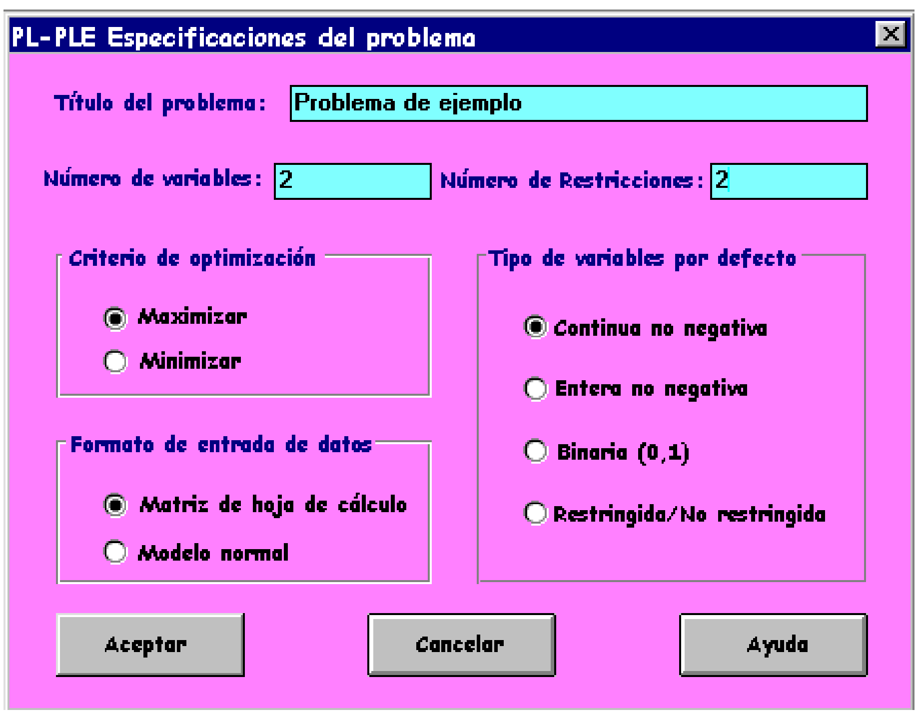
www.cui.edu.co/industrial/SOF01.html
http://members/tripod.com/~operativa
www.lindo.com

De estos lugares se puede bajar software gratuito ó en demostración, y manuales, además se dispone de interesantes enlaces.

El Winqsb es un software muy completo para resolver problemas de Métodos Cuantitativos, tiene los siguientes módulos:

1) Análisis de aceptación.
2) Planeación agregada.
3) Análisis de decisión.
4) Programación dinámica.
5) Localización y distribución.
6) Series de tiempo.
7) Programación meta.
8) Sistemas y teoría de inventarios.
9) Programación del trabajo.
10) Programación lineal y entera.
11) Procesos de Markov.
12) Planeación del requerimiento de materiales.
13) Modelos de redes.
14) Programación no lineal.
15) PERT – CPM
16) Programación cuadrática.
17) Gráficas de control de calidad.
18) Análisis de colas.
19) Sistemas de simulación de colas.

A continuación se presentan las principales ventanas del módulo de programación lineal y entera.



Fíjese que hay que darle un nombre al problema, los datos de entrada se pueden almacenar en un archivo que tendrá el nombre del problema, esto es útil cuando el problema es grande. El resto de la ventana se explica por si sola, debido a la claridad de las preguntas. Fíjese en la variedad en el tipo de variables.

A continuación se muestra un ejemplo de cómo se introducen los datos de un pequeño problema.

Fíjese que se puede cambiar el tipo de variable, de forma individual, al igual que el sentido de la desigualdad ó cambiarla por una igualdad.

El software resuelve problemas de dos variables por el método gráfico, resuelve el problema mostrando todos los tableros (paso a paso) ó muestra la solución de inmediato; También efectúa análisis de sensibilidad, hace gráficas y trabaja con el problema de la dualidad. La solución final se muestra a continuación:

	10:04:24		Miercoles	Diciembre	27	2000		
	Variables de decisión	Solución	Costo/Util. por unid (Cj)	Contribución total	Costo reducido	Estado de la variable	Mínimo(Cj) permitido	Máximo(Cj) permitido
1	X1	18.0000	50.0000	900.0000	0	Básica	40.0000	90.0000
2	X2	48.0000	60.0000	2,880.0000	0	Básica	33.3333	75.0000
	Función	Objetivo	(Max.) =	3,780.0000				
	Restricciones	Lado izquierdo	Dirección	Lado derecho	Sobrante ó Faltante	Precio Sombra	Mínimo (bi) permitido	Máximo (bi) permitido
1	C1	180.0000	<=	180.0000	0	16.0000	100.0000	225.0000
2	C2	150.0000	<=	150.0000	0	6.0000	120.0000	270.0000

El precio sombra es lo que se incrementa la función objetivo por unidad adicional de recurso, aquí si el recurso de la restricción uno, que es 180 unidades, se incrementara a 181 unidades, la función objetivo crece en 16 unidades monetarias.

Problemas propuestos

1. Suponga que una persona acaba de heredar $6.000 y desea invertirlos. Al oír ésta noticia, dos amigos distintos le ofrecen la oportunidad de participar como socio en dos negocios, cada negocio planteado por cada amigo. En ambos casos, la inversión significa dedicar un poco de tiempo el siguiente verano, al igual que invertir efectivo. Con el primer amigo, al convertirse en socio completo, tendría que invertir $5.000 y 400 horas, y la ganancia estimada (ignorando el valor del tiempo) sería de $4.500. Las cifras correspondientes a la proposición del segundo amigo son $4.000 y 500 horas, con una ganancia estimada de $4.500. Sin embargo, ambos amigos son flexibles y le permitirían entrar en el negocio con cualquier fracción de la sociedad; la participación en las utilidades sería proporcional a esa fracción. Como de todas maneras, ésta persona está buscando un trabajo interesante para el verano (600 horas a lo sumo), ha decidido participar en una ó ambas propuestas, con la combinación que maximice la ganancia total estimada. Formule y resuelva el problema.

   Solución:

   $X_1^* = \$3.333,3$ $X_3^* = X_4^* = 0$ Precio sombra, para el capital: $0,50
   $X_2^* = \$2.666,6$ Precio sombra, para el tiempo: $5,00
   $Z^* = \$6.000$

   Máxima utilidad a lograr $6.000
   Con el amigo 1, invertirá $3.333,33 y obtendrá una utilidad de $3.000
   Con el amigo 2, invertirá $2.666,66 y obtendrá una utilidad de $3.000
   Con el amigo 1, trabajará 266,6 horas
   Con el amigo 2, trabajará 333,3 horas
   Por cada peso ($) adicional que invierta, incrementará la utilidad en $0,50
   Por cada hora adicional que trabaje, incrementará la utilidad en $5

2. Una compañía manufacturera descontinuó la producción de cierta línea de productos no redituable. Esto creó un exceso considerable en la capacidad de producción. La gerencia quiere dedicar ésta capacidad a uno o más de tres productos; llámense productos 1, 2 y 3. En la siguiente tabla se resume la capacidad disponible de cada máquina que puede limitar la producción:

Tipo de máquina	Tiempo disponible (Horas)
Fresadora	500
Torno	350
Rectificadora	150

   El número de horas-máquina que se requiere para cada producto es:

Tipo de máquina	Producto 1	Producto 2	Producto 3
Fresadora	9	3	5
Torno	5	4	0
Rectificadora	3	0	2

El departamento de ventas ha indicado que las ventas potenciales para los productos 1 y 2 exceden la tasa máxima de producción y que las ventas potenciales del producto 3 son 20 unidades por semana. La ganancia unitaria sería $50, $20 y $25, respectivamente, para los productos 1, 2 y3 . El objetivo es determinar cuántos productos de cada tipo debe producir la compañía para maximizar la ganancia.

Solución:

X_1^*=26,1905 unidades del producto 1 Máxima ganancia Z^* = $2.904,7620
X_2^*=54,7619 unidades del producto 2
X_3^*=20 unidades del producto 3

Contribución del producto 1 a la ganancia: $1.309,5240
Contribución del producto 2 a la ganancia: $1.095,2380
Contribución del producto 3 a la ganancia: $500
La fresadora será usada todo el tiempo disponible; 500 horas
El torno será usado todo el tiempo disponible; 350 horas
La rectificadora será usada 118,5714 horas y quedará ociosa durante 31,4286 horas
Toda la demanda potencial del producto 3 será fabricada.
Por cada hora adicional de la fresadora, la ganancia aumentará en $4,7619
Por cada hora adicional de torno, la ganancia aumentará en $1,4286
El aumento de 1 hora adicional en la rectificadora no aumentará la ganancia.
Por cada unidad potencial de demanda del producto 3, la ganancia aumentará en $1,1905
para mantener la solución óptima actual, el beneficio por unidad de cada producto, debe estar entre:

25 ≤ Ganancia por unidad del producto 1 ≤ 51,25
19 ≤ Ganancia por unidad del producto 2 ≤ 40
25,8095 ≤ Ganancia por unidad del producto 3 ≤ infinito

3. Se ha concedido permiso a una empresa de turismo para realizar vuelos entre Ibagué y las islas de San Andrés e interinsulares. para ello, debe comprar turborreactores con los que cubrir los vuelos entre Ibagué y las islas, así como aviones de hélice y / o helicópteros con los que atender los vuelos interinsulares. El presupuesto de compra es de 2.800 millones de pesos. Las características de los aparatos que puede comprar se resumen en la tabla.

Tipo de Avión	Costo / unid. (X 10^6 \$)	Mant./Unid. (\$/día)	Tripulación			Capacidad (pas/mes)
			Pilotos	Copilotos	Azafatas	
Turborre.	300	120.000	2	-	2	4.000
A. hélice	100	60.000	1	1	1	300
Helicóptero	50	30.000	1	-	-	100

Se pueden contratar hasta 20 pilotos y 16 azafatas. Se desea emplear al menos a 3 copilotos. El tráfico entre Ibagué y San Andrés se estima en 8.000 pasajeros por mes y el interinsular en 500 pasajeros por mes. El permiso concedido requiere que el número mínimo de aparatos sea 15. La compañía desea operar con costo de mantenimiento mínimo.

a) Formule un problema de programación lineal que proporcione al plan óptimo de compra.
b) Resolverlo e interpretar la solución.

Solución:

Se deben comprar 2 turborreactores, 3 aviones de hélice y 10 helicópteros, siendo el costo de mantenimiento diario mínimo $720.000

4. Un empresario pretende fabricar dos tipos de congeladores denominados A y B. Cada uno de ellos debe pasar por tres operaciones antes de su comercialización: Ensamblaje, pintado y control de calidad. Los congeladores requieren, respectivamente, 2,5 y 3 horas de ensamblaje, 3 y 6 Kg. De esmalte para su pintado y 14 y 10 horas de control de calidad. Los costos totales de fabricación por unidad son, respectivamente, 30 y 28, y los precios de venta 52 y 48, todos ellos en miles de pesos.
El empresario dispone semanalmente de 4.500 horas para ensamblaje, de 8.400 Kg. De esmalte y 20.000 horas para control de calidad. Los estudios de mercado muestran que la demanda semanal de congeladores no supera las 1.700 unidades y que, en particular, la de tipo A es de, al menos, 600 unidades. Se desea:

a) Formular un modelo de programación lineal que indique cuántos congeladores deben fabricarse de cada tipo para que el beneficio sea máximo, teniendo en cuenta el estudio de demanda.
b) Resolverlo mediante el método simplex. Interpretar la solución óptima incluyendo las variables de holgura.
c) Determinar los precios sombra de las horas de ensamblaje y control de calidad. Al fabricante le ofrecen disponer de 200 horas más para ensamblaje con un costo adicional total de $750.000 pesos. ¿Debería aceptar la oferta?

Solución:
Debe producir 882 congeladores tipo A y 764 congeladores tipo B con un beneficio óptimo de $34'684.000

En el departamento de ensamblaje sobran 3 horas, no se consumirán 295,6 Kg. De esmalte, sobrarán 12 horas de control de calidad, se dejarán de producir 54 congeladores, se fabricarán 282 congeladores tipo A por encima del límite de 600

Por cada hora de ensamble adicional (dentro del intervalo 4.268,5 ; 4.725) el beneficio aumentará en $3.530

5. En un laboratorio se fabrican 4 productos P_1, P_2, P_3, P_4 que consumen un día por unidad en su proceso completo de producción, aunque se pueden producir varias unidades simultáneamente. El espacio (m^2) en el almacén y la mano de obra (número de trabajadores) disponibles limitan la producción. La siguiente tabla contiene los datos relevantes del proceso de producción, así como los costos de fabricación y precios de venta (en miles de pesos).

Producto	P_1	P_2	P_3	P_4	**Disponibilidad**
Área (m^2 /und.)	10	30	80	40	900
Trabajadores /und.	2	1	1	3	80
Costos /unidad	20	30	45	58	
Precio de venta /und.	30	50	85	90	

a) Encontrar el plan de producción de beneficio máximo
b) Interpretar los valores de los precios sombra
c) Cuál es el rango de los recursos del programa construido para el que se mantiene la optimalidad de tales valores?
d) La firma podría alquilar 150 m^2 más de superficie de almacén a un costo de $70.000 por día. ¿Debería alquilar éste espacio? Si es así, ¿Cuál es el nuevo plan de producción?

Solución
De producto 1 debe producir 10 unidades y de producto 4, 20 unidades; de los productos 2 y 3 no debe producir.
Por cada m^2 adicional de bodega el beneficio aumenta en $680
Por cada trabajador adicional el beneficio aumenta en $1.600

Capítulo 6
Método de las dos fases

C_j	→		4	1	M	0	M	0
↓	V.B.	b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
M	X_3	3	3	1	1	0	0	0
M	X_3	6	4	3	0	-1	1	0
0	X_6	4	1	2	0	0	0	1
$Z_j - C_j$		9M	7M-4	4M-1	0	-M	0	0

Cómo evitar usar la gran M

Introducción

Como en el computador se usa la gran M, "Un número muy grande", existe un efecto de error en los cálculos, ya que la gran M tiende a infinito, para evitar usar la gran M, se diseño el **Método de las dos fases**.

Fase I

Minimizar la suma de las variables de Super-Avit ó Artificiales, usadas en el problema.

Si Z = 0 , proceder con la fase II
Si Z es diferente de cero, el problema no tiene solución

Fase II

Use la solución de la fase I como solución inicial factible de la fase II, teniendo en cuenta que todas las variables de Super-Avit ó Artificiales son iguales a cero.

Ejemplo

$$\begin{array}{l} \text{Min } Z = 4X_1 + X_2 \\ \text{C.S.R.} \\ \quad 3X_1 + X_2 = 3 \\ \quad 4X_1 + 3X_2 \geq 6 \\ \quad X_1 + 2X_2 \leq 4 \\ X_J \geq 0 \ ; \ J = 1,2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Min } Z = 4X_1 + X_2 + MX_3 + MX_5 \\ \text{C.S.R.} \\ 3X_1 + X_2 + X_3 = 3 \\ 4X_1 + 3X_2 - X_4 + X_5 = 6 \\ X_1 + 2X_2 + X_6 = 4 \\ X_J \geq 0 \ ; \ J = 1,2,3,4,5,6 \end{array}$$

Fase I

$$\begin{array}{l} \text{Min } Z = X_3 + X_5 \\ \text{C.S.R.} \\ 3X_1 + X_2 + X_3 = 3 \\ 4X_1 + 3X_2 - X_4 + X_5 = 6 \\ X_1 + 2X_2 + X_6 = 4 \\ X_J \geq 0 \ ; \ J = 1,2,3,4,5,6 \end{array}$$

Fíjese Que en la fase I , siempre será Minimizar la suma de todas las variables Artificiales que tenga el problema.

A continuación procedemos a solucionar el problema planteado, usando el método simplex, ya sea manualmente ó mediante el software Winqsb. De forma manual, los resultados son los siguientes:

C_j →			0	0	1	0	1	0	b/a	
↓	V.B.	b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6		
1	X_3	3	3	1	1	0	0	0	1	(1/3)
1	X_5	6	4	3	0	-1	1	0	3/2	
0	X_6	4	1	2	0	0	0	1	4	
$Z_j - C_j$		9	7	4	0	-1	0	0		

C_j →			0	0	1	0	1	0	b/a	
↓	V.B.	b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6		
0	X_1	1	1	1/3	1/3	0	0	0	3	(-4)(-1)
1	X_5	2	0	5/3	-4/3	-1	1	0	6/5	(3/5)
0	X_6	3	0	5/3	-1/3	0	0	1	9/5	
$Z_j - C_j$		2	0	5/3	-7/3	-1	0	0		

C_j →			0	0	1	0	1	0	
↓	V.B.	b	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
0	X_1	3/5	1	0	3/5	1/5	-1/5	0	
0	X_2	6/5	0	1	-4/5	-3/5	3/5	0	(-1/3)(-5/3)
0	X_6	1	0	0	1	1	-1	1	
$Z_j - C_j$		0	0	0	-1	0	-1	0	

Fíjese Que aquí $Z^* = 0$

Fase II

Con la solución óptima de la fase I, planteamos el siguiente problema:

$$
\begin{array}{l}
\text{Min } Z = 4X_1 + X_2 \\
\text{C.S.R.} \\
X_1 \quad + 3/5\mathbf{X_3} + 1/5X_4 - 1/5\mathbf{X_5} = 3/5 \\
\quad X_2 - 4/5\mathbf{X_3} - 3/5X_4 + 3/5\mathbf{X_5} = 6/5 \\
\qquad \mathbf{X_3} \quad + X_4 \quad - \mathbf{X_5} + X_6 = 1 \\
X_J \geq 0 \text{ ; } J = 1,2,3,4,5,6
\end{array}
$$

En la fase I, establecimos que $X_3 = X_5 = 0$ Luego las eliminamos de las restricciones

$$
\begin{array}{l}
\text{Min } Z = 4X_1 + X_2 \\
\text{C.S.R.} \\
X_1 \quad + 1/5X_4 = 3/5 \\
\quad X_2 - 3/5X_4 = 6/5 \\
\qquad + X_4 + X_6 = 1 \\
X_J \geq 0 \text{ ; } J = 1,2,4,6
\end{array}
$$

Fíjese que el nuevo problema no tiene la gran M, ya que han dejado de figurar las variables Artificiales, en atención a que ya sabemos que efectivamente son iguales a cero. La solución al nuevo problema se halla mediante el método simplex. Así:

C_j	→		4	1	0	0	b/a	
↓	**V.B.**	**b**	X_1	X_2	X_4	X_6		
4	X_1	3/5	1	0	1/5	0	3	
1	X_2	6/5	0	1	-3/5	0	NO	
0	X_6	1	0	0	1	1	1	(1)
$Z_j - C_j$		18/5	0	0	1/5	0		

C_j	→		4	1	0	0	
↓	**V.B.**	**b**	X_1	X_2	X_4	X_6	
4	X_1	2/5	1	0	0	-1/5	
1	X_2	9/5	0	1	0	3/5	
0	X_4	1	0	0	1	1	(-1/5)(3/5)
$Z_j - C_j$		17/5	0	0	0	-1/5	

Solución

$X_1^* = 2/5$ $\quad X_4^* = 1$ $\quad X_3^* = X_5^* = 0$

$X_2^* = 9/5$ $\quad X_6^* = 0$

$Z^* = 17/5$

Nota: El lector debe resolver el ejemplo, empleando el método simplex con la gran M y comparar los tableros con los del método de las dos fases, para observar que el método de las dos fases, lo que hace es evitar los tableros en donde figura la gran M.

Ejercicios propuestos

Resolver empleando el método de las dos fases, todos los ejercicios resueltos y propuestos de los capítulos 4 y 5 que usen la gran M.

Capítulo 7
Método Matricial

$$\text{Max } Z = \bar{C}\,\bar{X}$$
C.S.R.
$$\bar{A}\bar{X} \leq \bar{b}$$
$$\bar{X} \geq 0$$

Introducción

Para problemas de una gran cantidad de variables y de restricciones, es dispendioso hallar la solución de forma manual, mediante el método algebraico ó el método simplex, se hace necesario generar un programa de computador que agilice el proceso de solución, para ello se resuelve el problema de forma matricial, en atención a que el computador maneja eficientemente los arreglos matriciales.

Método Simplex: Forma Matricial para Maximizar

I Variable Que entra: Calcule: $Z_k - C_k$ = mínimo $(Z_j - C_j)$, $Z_j - C_j < 0$
luego X_k entra en la base.

II Variable que sale: Calcule $X_{B,r} / a_{rk}$ = mínimo i (X_{Bi} / a_{ik}) , $a_{i,k} > 0$

III $Z_j - C_j = a_{m+1,j}$

IV $\hat{a}_{i,j} = a_{i,j} - (a_{i,k}/a_{r,k})a_{r,j}$ para i = 1,2,....,m+1 pero $i \neq r$; j = 0,1,2,....,n

V $\hat{a}_{r,j} = a_{r,j} / a_{r,k}$ Para i = r ; j = 0,1,2,....,n

VI $\hat{\bar{X}}_B = \hat{\bar{a}}_0$

VII $\hat{Z}_j - C_j = \hat{a}_{m+1,j} \quad j = 1,2,\ldots,n$

IIX $\hat{Z}_j = \hat{a}_{m+1,0}$

IX Máximo, cuando para toda j: $Z_j - C_j \geq 0$

Método simplex: Forma Matricial para Minimizar

I Variable que entra: Calcule: $Z_k - C_k$ = máximo $(Z_k - C_j)$, $Z_j - C_j > 0$
luego X_k entra en la base.

II Mínimo cuando para toda j: $Z_j - C_j \leq 0$

Nota: El resto del proceso es igual que maximizando.

Ejemplo 1

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar } Z = 3X_1 + 5X_2 & \\ \text{C.S.R.} & \\ X_1 \leq 4 & \\ 2X_2 \leq 12 & \\ 3X_1 + 2X_2 \leq 18 & \\ X_j \geq 0 \ ; \ j = 1,2 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Maximizar } Z = 3X_1 + 5X_2 \\ \text{C.S.R.} \\ X_1 + X_3 = 4 \\ 2X_2 + X_4 = 12 \\ 3X_1 + 2X_2 + X_5 = 18 \\ X_j \geq 0 \ ; \ j = 1,2,3,4,5 \end{array}$$

I Iteración

Definimos las siguientes Matrices:

$\bar{X}_B$ Matriz que contiene las variables básicas

$$\bar{X}_B = \begin{bmatrix} X_{B1} = X_3 = 4 \\ X_{B2} = X_4 = 12 \\ X_{B3} = X_5 = 18 \end{bmatrix}$$

X_{B1} = Primera posición en la base, ocupada ahora por X_3
X_{B2} = Segunda posición en la base, ocupada ahora por X_4
X_{B3} = Tercera posición en la base, ocupada ahora por X_5

$\bar{C}_B = (0,0,0)$ Matriz cuyos elementos son los coeficientes de las variables básicas en la función objetivo

$\bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}$; Términos independientes de las restricciones

$$Z = \bar{C}_B \, \bar{b} = (0,0,0)\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} = 0$$

$$\bar{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 & \bar{a}_4 & \bar{a}_5 \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \end{array} \Rightarrow \bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} ; \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} ; \bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \bar{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \bar{a}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$C_j = (3,5,0,0,0)$; Coeficientes de las variables en la función objetivo

$$Z_j - C_j = \bar{C}_B \, \bar{a}_j - c_j = (0,0,0)\, \bar{a}_j - C_j \quad ; j = 1,2,3,4,5$$

$$Z_1 - c_1 = (0,0,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 = -3 \qquad Z_2 - c_2 = (0,0,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 5 = -5$$

$$Z_3 - c_3 = (0,0,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 0 \qquad Z_4 - c_4 = (0,0,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 0$$

$$Z_5 - c_5 = (0,0,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = 0 \qquad Z = \bar{C}_B \, \bar{b} = (0,0,0)\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} = 0$$

Con estos elementos construimos la siguiente matriz:

J = 0	J = 1	J = 2	J = 3	J = 4	J = 5	
$\bar{a}_0$	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	$\bar{a}_5$	
4	1	0	1	0	0	i = 1
12	0	2	0	1	0	i = 2
18	3	2	0	0	1	i = 3 = m
0	-3	-5	0	0	0	i = 4 = m + 1
Z	$Z_1 - c_1$	$Z_2 - c_2$	$Z_3 - c_3$	$Z_4 - c_4$	$Z_5 - c_5$	

i = 1,2,3 ; j = 0,1,2,3,4,5

Fíjese que los $Z_j - C_j = a_{m+1\,,\,j}$; j = 1,2,3,4,5

II Iteración

Variable que entra

Mínimo $Z_j - C_j$, siendo $Z_j - C_j < 0$; luego k = j y X_k entra en la base

$Z_1 - C_1 = -3$
$\mathbf{Z_2 - C_2 = -5}$
$Z_3 - C_3 = 0$
$Z_4 - C_4 = 0$
$Z_5 - C_5 = 0$

El menor $Z_j - C_j$ negativo es $Z_2 - C_2 = -5 \rightarrow$ k = 2 y X_2 entra en la base, ocupando la posición que abandona la variable que escojamos para salir.

Variable que sale

Mínimo i ($X_{Bi} / a_{i,k}$) , $a_{i,k} > 0$; i = 1,2,3

$X_{B1} / a_{1,2} = 4/0$ = No restringe
$\mathbf{X_{B2} / a_{2,2} = 12/2 = 6}$
$X_{B3} / a_{3,2} = 18/2 = 9$

Luego r = i = 2 y $X_{B2} = X_4$ es la variable que sale de la base. Fíjese que r indica la posición de la variable que sale, dentro de la base. (Fila 2)

Elemento pivote = $a_{r,\,k} = a_{2,\,2} = 2$. Los nuevos valores $\hat{a}_{i,j}$ son:

i = 1	i = r = 2	i = 3	i = 4
$\hat{a}_{1,j} = a_{1,j} - (0/2)a_{2,j}$	$\hat{a}_{2,j} = a_{2,j}\ /2$	$\hat{a}_{3,j} = a_{3,j} - (2/2)a_{2,j}$	$\hat{a}_{4,j} = a_{4,j} - (5/2)a_{2,j}$
$\hat{a}_{1,0} = 4 - (0)12 = 4$	$\hat{a}_{2,0} = 12\ /2 = 6$	$\hat{a}_{3,0} = 18 - (1)12 = 6$	$\hat{a}_{4,0} = 0 - (5/2)12 = 30$
$\hat{a}_{1,1} = 1 - (0)\ 0 = 1$	$\hat{a}_{2,1} = 0\ /2 = 0$	$\hat{a}_{3,1} = 3 - (1)\ 0 = 3$	$\hat{a}_{4,1} = -3 - (5/2)\ 0 = -3$
$\hat{a}_{1,2} = 0 - (0)\ 2 = 0$	$\hat{a}_{2,2} = 2\ /2 = 1$	$\hat{a}_{3,2} = 2 - (1)\ 2 = 0$	$\hat{a}_{4,2} = -5 - (5/2)\ 2 = 0$
$\hat{a}_{1,3} = 1 - (0)\ 0 = 0$	$\hat{a}_{2,3} = 0\ /2 = 0$	$\hat{a}_{3,3} = 0 - (1)\ 0 = 0$	$\hat{a}_{4,3} = 0 - (5/2)\ 0 = 0$
$\hat{a}_{1,4} = 0 - (0)\ 1 = 0$	$\hat{a}_{2,4} = 1\ /2 = 1/2$	$\hat{a}_{3,4} = 0 - (1)\ 1 = -1$	$\hat{a}_{4,4} = 0 - (5/2)\ 1 = 5/2$
$\hat{a}_{1,5} = 0 - (0)\ 0 = 0$	$\hat{a}_{2,5} = 0\ /2 = 0$	$\hat{a}_{3,5} = 1 - (1)\ 0 = 1$	$\hat{a}_{4,5} = 0 - (5/2)\ 0 = 0$

Aquí:

$$\hat{X}_B = \hat{a}_o = \begin{bmatrix} X_{B1} = X_3 = 4 \\ X_{B2} = X_2 = 6 \\ X_{B3} = X_5 = 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \hat{Z}_j - C_j = \hat{a}_{m+1,j} = (-3,0,0,5/2,0) \\ \qquad\qquad\qquad\quad \uparrow \\ \hat{Z} = \hat{a}_{m+1,o} = 30 \end{array}$$

III Iteración

Variable que entra: El $Z_j - C_j$ más negativo ➔ X_1 entra y $k = 1$

Variable que sale:

$X_{B1} / a_{1,1} = 4/1 = 4$	
$X_{B2} / a_{2,1} = 6/0 =$ No	Variable que sale X_5 ➔ $r = 3$ y el elemento pivote $a_{r,k} = \hat{a}_{3,1} = 3$
$X_{B3} / a_{3,1} = 6/3 = 2$ *	

i = 1	i = 2	i = r = 3	i = 4
$\hat{a}_{1,j} = a_{1,j} - (1/3)a_{3,j}$	$\hat{a}_{2,j} = a_{2,j} - (0/3)a_{3,j}$	$\hat{a}_{3,j} = a_{3,j}\ /3$	$\bar{a}_{4,j} = a_{4,j} + a_{3,j}$
$\hat{a}_{1,0} = 4 - (1/3)6 = 2$	$\hat{a}_{2,0} = 6$	$\hat{a}_{3,0} = 6/3 = 2$	$\hat{a}_{4,0} = 30 + 6 = 36$
$\hat{a}_{1,1} = 1 - (1/3)3 = 0$	$\hat{a}_{2,1} = 0$	$\hat{a}_{3,1} = 3/3 = 1$	$\hat{a}_{4,1} = -3 + 3 = 0$
$\hat{a}_{1,2} = 0 - (1/3)0 = 0$	$\hat{a}_{2,2} = 1$	$\hat{a}_{3,2} = 0/3 = 0$	$\hat{a}_{4,2} = 0 + 0 = 0$
$\hat{a}_{1,3} = 1 - (1/3)0 = 0$	$\hat{a}_{2,3} = 0$	$\hat{a}_{3,3} = 0/3 = 0$	$\hat{a}_{4,3} = 0 + 0 = 0$
$\hat{a}_{1,4} = 0 - 1/3(-1) = 1/3$	$\hat{a}_{2,4} = 1/2$	$\hat{a}_{3,4} = -1/3$	$\hat{a}_{4,4} = 5/2 - 1 = 3/2$
$\hat{a}_{1,5} = 0 - (1/3)1 = -1/3$	$\hat{a}_{2,5} = 0$	$\hat{a}_{3,5} = 1/3$	$\hat{a}_{4,5} = 0 + 1 = 1$

Aquí:

$$\hat{\bar{X}}_B = \hat{\bar{a}}_0 = \begin{bmatrix} X_{B1} = X_3 = 2 \\ X_{B2} = X_2 = 6 \\ X_{B3} = X_1 = 2 \end{bmatrix} \qquad \hat{Z}_j - C_j = \hat{a}_{m+1,j} = (0,0,0,3/2,1) \qquad \hat{Z}^* = \hat{a}_{m+1,0} = 36$$

Observe que nos encontramos en la solución óptima, ya que para toda j, $Z_j - C_j \geq 0$

Solución: $X_1^* = 2$; $X_2^* = 6$; $X_3^* = 2$; $X_4^* = X_5^* = 0$; $Z^* = 36$

Ejemplo 2

Minimizar $Z = 6X_1 + 4X_2 + 2X_3$
C.S.R.

$$\begin{aligned} 6X_1 + 2X_2 + 6X_3 &\geq 6 \\ 6X_1 + 4X_2 &= 12 \\ 2X_1 - 2X_2 &\leq 2 \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$X_j \geq 0$; $j = 1,2,3$

Minimizar $Z = 6X_1 + 4X_2 + 2X_3 + MX_5 + MX_6$
C.S.R.

$$\begin{aligned} 6X_1 + 2X_2 + 6X_3 - X_4 + X_5 &= 6 \\ 6X_1 + 4X_2 + X_6 &= 12 \\ 2X_1 - 2X_2 + X_7 &= 2 \end{aligned}$$

$X_j \geq 0$; $j = 1,2,3,4,5,6,7$

I Iteración

$$\bar{X}_B = \begin{bmatrix} X_{B1} = X_5 = 6 \\ X_{B2} = X_6 = 12 \\ X_{B3} = X_7 = 2 \end{bmatrix} \qquad \bar{C}_B = (M,M,0) \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$C_j = (6,4,2,0,M,M,0) \qquad Z = \bar{C}_B \bar{b} = (M,M,0)\begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix} = 18M$$

$a_{1,0} = 6$; $a_{2,0} = 12$; $a_{3,0} = 2$; $a_{4,0} = 18M$

$$a_{4,1} = Z_1 - C_1 = (M,M,0)\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} - 6 = 12M - 6 \qquad a_{4,5} = Z_5 - C_5 = (M,M,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - M = 0$$

$$a_{4,2} = Z_2 - C_2 = (M,M,0)\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} - 4 = 6M - 4 \qquad a_{4,6} = Z_6 - C_6 = (M,M,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - M = 0$$

$$a_{4,3} = Z_3 - C_3 = (M,M,0)\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 = 6M - 2 \qquad a_{4,7} = Z_7 - C_7 = (M,M,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = 0$$

$$a_{4,4} = Z_4 - C_4 = (M,M,0)\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} - 0 = -M$$

Ordenando los datos, tenemos que:

$a_{1,0} = 6$	$a_{1,1} = 6$	$a_{1,2} = 2$	$a_{1,3} = 6$	$a_{1,4} = -1$	$a_{1,5} = 1$	$a_{1,6} = 0$	$a_{1,7} = 0$
$a_{2,0} = 12$	$a_{2,1} = 6$	$a_{2,2} = 4$	$a_{2,3} = 0$	$a_{2,4} = 0$	$a_{2,5} = 0$	$a_{2,6} = 1$	$a_{2,7} = 0$
$a_{3,0} = 2$	$a_{3,1} = 2$	$a_{3,2} = -2$	$a_{3,3} = 0$	$a_{3,4} = 0$	$a_{3,5} = 0$	$a_{3,6} = 0$	$a_{3,7} = 1$
$a_{4,0} = 18M$	$a_{4,1} = 12M-6$	$a_{4,2} = 6M-4$	$a_{4,3} = 6M-2$	$a_{4,4} = -M$	$a_{4,5} = 0$	$a_{4,6} = 0$	$a_{4,7} = 0$

II Iteración

Variable que entra

Calcule el $Z_k - C_k$ = Máximo $(Z_j - C_j)$, con $Z_j - C_j > 0$; luego X_k entra en la base. El más positivo de los $Z_j - C_j$ es $Z_1 - C_1 = 12M - 6$, siendo M un número muy grande, luego la variable que entra es X_1 y $k = 1$

Variable que sale

Calcule $X_{Br} / a_{r,k}$ = mínimo i $(X_{Bi} / a_{i,k})$; $a_{i,k} > 0$; $i = 1,2,3$

$X_{B1} / a_{1,1} = 6/6 = 1$ $\quad$ $X_{B2} / a_{2,1} = 12/6 = 2$ $\quad$ $X_{B3} / a_{3,1} = 2/2 = 1$

Se presenta un empate entre X_5 y X_7 , arbitrariamente escogemos X_5 para salir, que ocupa la primera posición en la base, entonces $r = 1$ y el elemento pivote $a_{r,k} = a_{1,1} = 6$

i = r = 1	i = 2	i = 3	i = 4
$\hat{a}_{1,j} = a_{1,j}\ /6$	$\hat{a}_{2,j} = a_{2,j} - a_{1,j}$	$\hat{a}_{3,j} = a_{3,j} - (1/3)a_{1,j}$	$\hat{a}_{4,j} = a_{4,j} - (2M-1)a_{1,j}$
$\hat{a}_{1,0} = 6/6 = 1$	$\hat{a}_{2,0} = 12 - 6 = 6$	$\hat{a}_{3,0} = 2 - (1/3)6 = 0$	$\hat{a}_{4,0} = 18M-(2M-1)6 = 6M+6$
$\hat{a}_{1,1} = 6/6 = 1$	$\hat{a}_{2,1} = 6 - 6 = 0$	$\hat{a}_{3,1} = 2 - (1/3)6 = 0$	$\hat{a}_{4,1} = 12M-6-(2M-1)6 = 0$
$\hat{a}_{1,2} = 1/3$	$\hat{a}_{2,2} = 4 - 2 = 2$	$\hat{a}_{3,2} = -2 - (1/3)2 = -8/3$	$\hat{a}_{4,2} = 6M-4-(2M-1)2 = 2M-2$
$\hat{a}_{1,3} = 1$	$\hat{a}_{2,3} = 0 - 6 = -6$	$\hat{a}_{3,3} = 0 - (1/3)6 = -2$	$\hat{a}_{4,3} = 6M-2-(2M-1)6 = -6M+4$
$\hat{a}_{1,4} = -1/6$	$\hat{a}_{2,4} = 0 + 1 = 1$	$\hat{a}_{3,4} = 0 - (1/3)(-1) = 1/3$	$\hat{a}_{4,4} = -M-(2M-1)(-1) = M-1$
$\hat{a}_{1,5} = 1/6$	$\hat{a}_{2,5} = 0 - 1 = -1$	$\hat{a}_{3,5} = 0 - (1/3)1 = -1/3$	$\hat{a}_{4,5} = 0-(2M-1)1 = -2M+1$
$\hat{a}_{1,6} = 0$	$\hat{a}_{2,6} = 1 - 0 = 1$	$\hat{a}_{3,6} = 0 - (1/30 = 0$	$\hat{a}_{4,6} = 0-(2M-1)0 = 0$
$\hat{a}_{1,7} = 0$	$\hat{a}_{2,7} = 0 - 0 = 0$	$\hat{a}_{3,7} = 0 - (1/3)0 = 1$	$\hat{a}_{4,7} = 0-(2M-1)0 = 0$

Variable que entra: $X_2 \rightarrow k = 2$

Variable que sale:

$$\hat{\bar{X}}_B = \hat{a}_0 = \begin{bmatrix} X_{B1} = X_1 = 1 \\ X_{B2} = X_6 = 6 \\ X_{B3} = X_7 = 0 \end{bmatrix}$$

$X_{B1} / a_{1,2} = 1/1/3 = 3$

$X_{B2} / a_{2,2} = 6/2 \quad = 3$

$X_{B3} / a_{3,2} = 0/-8/3 =$ No

Se presenta un empate entre X_1 y X_6 , arbitrariamente escogemos X_6, para salir, que ocupa el segundo lugar en la base, entonces r = 2

El elemento pivote $a_{r,k} = a_{2,2} = 2$

i= 1	i= r = 2	i = 3	i = 4
$\hat{a}_{1,j} = a_{1,j} - (1/6)a_{2,j}$	$\hat{a}_{2,j} = a_{2,j}\ /2$	$\hat{a}_{3,j} = a_{3,j} + (1/3)a_{2,j}$	$\hat{a}_{4,j} = a_{4,j} - [(2M-2)/2]a_{2,j}$
$\hat{a}_{1,0} = 1-1/6(6) = 0$	$\hat{a}_{2,0} = 3$	$\hat{a}_{3,0} = 8$	$\hat{a}_{4,0} = 12$
$\hat{a}_{1,1} = 1-1/6(0) = 1$	$\hat{a}_{2,1} = 0$	$\hat{a}_{3,1} = 0$	$\hat{a}_{4,1} = 0$
$\hat{a}_{1,2} = 1/3 - 1/6(2) = 0$	$\hat{a}_{2,2} = 1$	$\hat{a}_{3,2} = 0$	$\hat{a}_{4,2} = 0$
$\hat{a}_{1,3} = 1 - 1/6(-6) = 2$	$\hat{a}_{2,3} = -3$	$\hat{a}_{3,3} = -10$	$\hat{a}_{4,3} = -2$
$\hat{a}_{1,4} = -1/6 - 1/6(1) = -1/3$	$\hat{a}_{2,4} = 1/2$	$\hat{a}_{3,4} = 5/3$	$\hat{a}_{4,4} = 0$
$\hat{a}_{1,5} = 1/6 - 1/6(-1) = 1/3$	$\hat{a}_{2,5} = -1/2$	$\hat{a}_{3,5} = -5/3$	$\hat{a}_{4,5} = -M$
$\hat{a}_{1,6} = 0 - 1/6(1) = -1/6$	$\hat{a}_{2,6} = 1/2$	$\hat{a}_{3,6} = 4/3$	$\hat{a}_{4,6} = -M + 1$
$\hat{a}_{1,7} = 0 - 1/6(0) = 0$	$\hat{a}_{2,7} = 0$	$\hat{a}_{3,7} = 1$	$\hat{a}_{4,7} = 0$

Aquí:

$$\hat{\bar{X}}_B = \hat{a}_0 = \begin{bmatrix} X_{B1} = X_1 = 0 \\ X_{B2} = X_2 = 3 \\ X_{B3} = X_7 = 8 \end{bmatrix}$$

$Z_j - C_j = (0,0,-2,0,-M,-M+1,0)$

$\hat{Z}^* = \hat{a}_{m+1,0} = \hat{a}_{4,0} = 12$

Estamos en el óptimo, ya que para toda j; $Z_j - C_j \leq 0$; Luego la solución óptima es:

$X_1^* = 0$; $X_2^* = 3$; $X_3^* = 0$; $X_4^* = X_5^* = X_6^* = 0$; $X_7^* = 8$; $Z^* = 12$

Ejercicios Propuestos

1) Maximizar $Z = X_1 + 3/2X_2$

C.S.R.

$$2X_1 + 2X_2 \leq 160$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 120$$
$$4X_1 + 2X_2 \leq 280$$

$X_j \geq 0$; j =1,2

Respuesta:
$X_1^* = 40$
$X_2^* = 40$
$Z^* = 100$

2) Maximizar $Z = 2X_1 + 2X_2$

C.S.R.

$$X_1 + X_2 \leq 10$$
$$X_1 + 2X_2 \geq 8$$
$$-X_1 + X_2 = 2$$

$X_j \geq 0$; j =1,2

Respuesta:
$X_1^* = 4$
$X_2^* = 6$
$Z^* = 20$

3) Maximizar $Z = 3X_1 + 2X_2$

C.S.R.

$$X_1 + X_2 \leq 20$$
$$X_1 \leq 15$$
$$X_1 + 3X_2 \leq 45$$
$$-3X_1 + 5X_2 \leq 60$$

$X_J \geq 0$; $J = 1,2$

Respuesta:
$X_1^* = 15$
$X_2^* = 5$
$Z^* = 55$

4) Maximizar $Z = 3/2X_1 + X_2$

C.S.R.

$$2X_1 + X_2 \leq 8$$
$$X_2 = 4$$
$$2X_1 + 3X_2 \geq 7$$

$X_J \geq 0$; $J = 1,2$

Respuesta:
$X_1^* = 2$
$X_2^* = 4$
$Z^* = 10$

5) Max $Z = 4X_1 - 2X_2 + 2X_3$

C.S.R.

$$2X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 2X_4 \leq 16$$
$$4X_2 - 2X_3 \leq 8$$
$$4X_1 - 2X_2 - X_4 \leq 4$$

$X_J \geq 0$; $J = 1,2,3,4$

Respuesta:
$X_1^* = 4,5$
$X_2^* = 0$
$X_3^* = 0$
$X_4^* = 3,5$
$Z^* = 18$

6) Min $Z = 1/2X_1 + 3/2X_2 - 1/2X_3$

C.S.R.

$$-0,5X_1 - 0,5X_2 + X_3 \leq 2,5$$
$$X_1 - 0,5X_2 + 0,5X_3 \leq 4$$
$$0,5X_1 - 1,5X_2 + 2,5X_3 \geq 10$$

$X_J \geq 0$; $J = 1,2,3$

Res:
$X_1^* = 0$
$X_2^* = 0$
$X_3^* = 3$
$Z^* = -3$

Capítulo 8
El problema Dual y el Método Dual Simplex

$$\begin{array}{lcl} \text{Max } Z = \bar{C}\,\bar{X} & & \text{Min } Z = \bar{b}'\bar{Y} \\ \text{C.S.R.} & \Rightarrow & \text{C.S.R.} \\ \qquad \bar{A}\bar{X} \leq \bar{b} & & \qquad \bar{A}'\bar{Y} \geq \bar{C}' \\ \bar{X} \geq 0 & & \bar{Y} \geq 0 \end{array}$$

Introducción

En el desarrollo de la programación Lineal, se descubrió la existencia de un problema que se encuentra estrechamente relacionado con un problema de Programación Lineal dado: Dicho problema se denominó **PROBLEMA DUAL**. Cada problema dado (Problema principal, Problema primo, Problema primero), de programación lineal, tiene un problema dual que tiene las siguientes muy interesantes características:

1. En problemas de un gran número de restricciones, resolver el problema dual en la computadora es más eficiente que resolver el problema principal.
2. En algunas ocasiones resulta más sencilla la resolución del problema dual que la del problema principal, en términos de menor número de iteraciones.
3. Los valores óptimos de las variables del dual, proporcionan una interpretación económica del problema principal, interesante.
4. Algunas veces se puede evitar el uso de las variables artificiales (Super-Avit), mediante la aplicación del método de solución denominado Dual – Simplex, sobre el problema dual.
5. Facilita el estudio del impacto sobre la optimalidad por cambios en el problema original.

El presente capítulo tiene como objetivo principal, formular el problema dual y mostrar el método de solución para el problema dual, denominado Método Dual-Simplex, para problemas de maximización, ya que, por medio de la regla de equivalencia (Min(z) = Max(-z))Toda formulación de un problema de programación lineal se puede expresar de la forma estándar: Maximice (z), con todas las restricciones $\leq$

Si tenemos un problema de programación lineal así:

$$\text{Max } Z = \bar{C}\bar{X}$$
c.s.r.
$$\bar{A}\bar{X} \le \bar{b}$$
$$\bar{X} \ge 0$$

Problema Principal

Existe otro problema, el Dual, que se expresa así:

$$\text{Min } Z = \bar{b}'\bar{Y}$$
c.s.r.
$$\bar{A}'\bar{Y} \ge \bar{C}'$$
$$\bar{Y} \ge 0$$

Problema Dual

En donde:

Problema Principal

$$\bar{C} = (C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_n)$$

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Problema Dual

$$\bar{b}' = (b_1, \ldots, b_i, \ldots, b_m)$$

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_j \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} \quad \bar{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1j} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{mj} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \bar{C}' = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_j \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$$

El siguiente ejemplo numérico ilustra lo anterior:

Problema Principal

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 3X_2$$
c.s.r.
$$X_1 + 2X_2 \le 7$$
$$3X_1 + 2X_2 \le 15$$
$$X_j \ge 0 \quad j = 1, 2$$

Problema Dual

$$\text{Min } Z = 7Y_1 + 15Y_2$$
c.s.r.
$$Y_1 + 3Y_2 \ge 4$$
$$2Y_1 + 2Y_2 \ge 3$$
$$Y_j \ge 0 \quad j = 1, 2$$

Fíjese que cada restricción del problema principal está representada por una variable en el dual.

Otro ejemplo numérico es el siguiente:

Problema Principal

$$\text{Max } Z_X = 3X_1 - 2X_2$$

c.s.r.

$$\begin{array}{lcl} X_1 & \leq 4 & (Y_1) \\ X_2 & \leq 6 & (Y_2) \\ X_1 + X_2 & \leq 5 & (Y_3) \\ - X_2 & \leq -1 & (Y_4) \end{array}$$

$X_J \geq 0$; $J = 1, 2$

Problema Dual

$$\text{Min } Z_Y = 4Y_1 + 6Y_2 + 5Y_3 - Y_4$$

c.s.r.

$$\begin{array}{lcl} Y_1 + Y_3 & \geq & 3 \\ Y_2 + Y_3 - Y_4 & \geq & -2 \end{array}$$

$Y_J \geq 0$; $J = 1, 2, 3, 4$

El problema principal tiene cuatro (4) restricciones, entonces el dual tendrá cuatro (4) variables. Cada uno de los recursos del problema principal estará representado por una variable en el problema dual.

Entre el problema principal y el problema dual existen las siguientes relaciones:

1. El dual del dual, tiene como resultado el problema principal.
2. Una restricción que es una igualdad en el problema principal, genera una variable en el dual sin restricción en el signo
3. Una variable del problema principal, sin restricción en el signo, genera una restricción de igualdad en el problema dual.
4. El número de restricciones del problema principal es igual al número de variables en el problema dual.
5. El número de variables del problema principal es igual al número de restricciones en el problema dual.

EL MÉTODO DUAL – SIMPLEX

Una vez formulado el problema dual, debemos encontrar su solución, el método a emplear será el denominado Método Dual-Simplex el cuál empieza con una solución óptima o mejor que óptima ($Z_j - C_j \geq 0$; $\forall_j$), pero no factible (Algunos b_i son ≤ 0), y se mueve hacia el óptimo mediante iteraciones que mejoran su factibilidad conservando su optimalidad. Fíjese que es lo contrario al método Simplex, en donde se empieza mediante una solución factible pero no óptima y mediante iteraciones se mejora la optimalidad, conservando la factibilidad. Esto se ilustra mediante la siguiente gráfica:

Método Simplex	**Solución Optima y Factible**	**Método Dual Simplex**
Solución Factible Pero NO Óptima		Solución NO Factible Pero Óptima
Método Simplex Mejora su Optimalidad Conservando su Factibilidad →		← **Método Dual Simplex** Mejora su Factibilidad Conservando su Optimalidad

ALGORITMO PARA MAXIMIZAR EN EL MÉTODO DUAL – SIMPLEX

Se requiere que el problema esté expresado en términos de Maximizar la Función objetivo y todas sus restricciones con mayor ó igual ($\geq$)
Variable que sale de la Base: Aquella que tenga el valor menos factible ó sea la más negativa, matemáticamente: $X_{B,r}$ = Mínimo i $X_{B,i}$, $X_{B,i} < 0$; $X_{B,i} < 0$ implica que la solución es NO factible. Variable que entra a la Base: Aquella variable que tenga el valor menos negativo en su expresión: $(Z_j - C_j) / a_{r,j}$, matemáticamente: $(Z_K - C_K) / a_{r,k}$ = Máximo j $(Z_j - C_j) / a_{r,j}$; Siendo $a_{r,j} < 0$. El siguiente ejemplo ilustra un paralelo entre el Método Simplex y el Método Dual – Simplex en donde se resalta para cada iteración, la relación entre los dos (2) Métodos.
Hallar la solución óptima al problema siguiente:

Problema Principal

Max $Z(x) = 3X_1 + 5X_2$
c.s.r.

$$\begin{aligned} X_1 \quad\quad &\leq 4 \\ X_2 &\leq 6 \\ 3X_1 + 2X_2 &\leq 18 \end{aligned}$$

$X_J \geq 0$;   J = 1,2

Max $Z(x) = 3X_1 + 5X_2$
c.s.r.

$$\begin{aligned} X_1 + X_3 &= 4 \\ X_2 + X_4 &= 6 \\ 3X_1 + 2X_2 + X_5 &= 18 \end{aligned}$$

$X_J \geq 0$;   J = 1,2,3,4,5

Problema Dual

Min $Z(y) = 4Y_1 + 6Y_2 + 18Y_3$
c.s.r.

$$\begin{aligned} Y_1 + 3Y_3 &\geq 3 \\ Y_2 + 2Y_3 &\geq 5 \end{aligned}$$

$Y_J \geq 0$;   J = 1,2,3

Max $Z(y) = - 4Y_1 - 6Y_2 - 18Y_3$
c.s.r.

$$\begin{aligned} - Y_1 - 3Y_3 + Y_4 &= - 3 \\ - Y_2 - 2Y_3 + Y_5 &= - 5 \end{aligned}$$

$Y_J \geq 0$;   J = 1,2,3,4,5

Problema Principal

C_J →			3	5	0	0	0	b	
↓	V.B.	$\bar{b}$	X_1	**X_2**	X_3	X_4	X_5	a	
0	X_3	4	1	**0**	1	0	0	NO	
0	**X_4**	**6**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**6**	→
0	X_5	18	3	**2**	0	0	1	9	
$Z_J - C_J$		0	-3	**-5**	0	0	0		
				↑					
			Y_4	Y_5	Y_1	Y_2	Y_3		

$X_1 = 0$	$X_4 = 6$	$Y_1 = 0$	$Y_4 = -3$
$X_2 = 0$	$X_5 = 18$	$Y_2 = 0$	$Y_5 = -5$
$X_3 = 4$	$Z_X = 0$	$Y_3 = 0$	$Z_Y = 0$

C_J →			3	5	0	0	0	b	
↓	V.B.	$\bar{b}$	**X_1**	X_2	X_3	X_4	X_5	a	
0	X_3	4	**1**	0	1	0	0	4	
5	X_2	6	**0**	1	0	1	0	NO	
0	**X_5**	**6**	**3**	**0**	**0**	**-2**	**1**	**2**	→
$Z_J - C_J$		30	**-3**	0	0	5	0		
			↑						
			Y_4	Y_5	Y_1	Y_2	Y_3		

$X_1 = 0$	$X_4 = 0$	$Y_1 = 0$	$Y_4 = -3$
$X_2 = 6$	$X_5 = 6$	$Y_2 = 5$	$Y_5 = 0$
$X_3 = 4$	$Z_X = 30$	$Y_3 = 0$	$Z_Y = 30$

C_J →			3	5	0	0	0
↓	V.B.	$\bar{b}$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
0	X_3	2	0	0	1	2/3	-1/3
5	X_2	6	0	1	0	1	0
3	X_1	2	1	0	0	-2/3	1/3
$Z_J - C_J$		36	0	0	0	3	1
			Y_4	Y_5	Y_1	Y_2	Y_3

$X_1 = 2$	$X_4 = 0$	$Y_1 = 0$	$Y_4 = 0$
$X_2 = 6$	$X_5 = 0$	$Y_2 = 3$	$Y_5 = 0$
$X_3 = 2$	$Z_X = 36$	$Y_3 = 1$	$Z_Y = 36$

Problema Dual

C_J →			-4	-6	-18	0	0	
↓	V.B.	$\bar{b}$	Y_1	**Y_2**	Y_3	Y_4	Y_5	
0	Y_4	-3	-1	**0**	-3	1	0	
0	**Y_5**	**-5**	**0**	**-1**	**-2**	**0**	**1**	→
$Z_J - C_J$		0	4	**6**	18	0	0	
$(Z_J - C_J)/a_{RJ}$			NO	**-6**	-9	NO	NO	
				↑				
			X_3	X_4	X_5	X_1	X_2	

$Y_1 = 0$	$Y_4 = -3$	$X_1 = 0$	$X_4 = 6$
$Y_2 = 0$	$Y_5 = -5$	$X_2 = 0$	$X_5 = 18$
$Y_3 = 0$	$Z_Y = 0$	$X_3 = 4$	$Z_X = 0$

C_J →			-4	-6	-18	0	0	
↓	V.B.	$\bar{b}$	Y_1	Y_2	**Y_3**	Y_4	Y_5	
0	**Y_4**	**-3**	**-1**	**0**	**-3**	**1**	**0**	→
-6	Y_2	5	0	1	**2**	0	-1	
$Z_J - C_J$		-30	4	0	**6**	0	6	
$(Z_J - C_J)/a_{RJ}$			-4	NO	**-2**	NO	NO	
					↑			
			X_3	X_4	X_5	X_1	X_2	

$Y_1 = 0$	$Y_4 = -3$	$X_1 = 0$	$X_4 = 0$
$Y_2 = 5$	$Y_5 = 0$	$X_2 = 6$	$X_5 = 6$
$Y_3 = 0$	$Z_Y = 30$	$X_3 = 4$	$Z_X = 30$

C_J →			-4	-6	-18	0	0
↓	V.B.	$\bar{b}$	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
-18	Y_3	1	1/3	0	1	-1/3	0
-6	Y_2	3	-2/3	1	0	2/3	-1
$Z_J - C_J$		-36	2	0	0	2	6
			X_3	X_4	X_5	X_1	X_2

$Y_1 = 0$	$Y_4 = 0$	$X_1 = 2$	$X_4 = 0$
$Y_2 = 3$	$Y_5 = 0$	$X_2 = 6$	$X_5 = 0$
$Y_3 = 1$	$Z_Y = 36$	$X_3 = 2$	$Z_X = 36$

Observe que en el Dual – Simplex se hizo uso de la regla de equivalencia, multiplicando la función objetiva por (-1), y al final, nuevamente se multiplicó el valor de Z por (-1).

En cada iteración del Método Simplex se muestra que:

1. Los $Z_j - C_j$ de las variables de holgura X_3,X_4,X_5 (Z_3-C_3 , Z_4-C_4 , Z_5-C_5) son los valores de las variables reales del Dual (Y_1,Y_2,Y_3)
2. Los $Z_j - C_j$ de las variables reales X_1,X_2 (Z_1-C_1 , Z_2-C_2) son los valores de las variables de holgura del Dual (Y_4,Y_5)

En cada iteración del Método Dual – Simplex se muestra que:

1. Los $Z_j - C_j$ de las variables de holgura Y_4,Y_5 (Z_4-C_4 , Z_5-C_5) son los valores de las variables reales del problema principal (X_1,X_2)
2. Los $Z_j - C_j$ de las variables reales Y_1,Y_2 ,Y_3 (Z_1-C_1 , Z_2-C_2 , Z_3-C_3) son los valores de las variables de holgura del problema principal (X_3,X_4,X_5)

En el siguiente capítulo, denominado ANÁLISIS POST-ÓPTIMO Y SENSIBILIDAD, el Método Dual – Simplex es herramienta fundamental para lograr la información necesaria que permita hacer el análisis posterior, después de haber encontrado la solución óptima.

Ejercicios propuestos

1. Una fábrica hace tres productos: Mesas, sillas y libreros, que se procesan a travéz de los departamentos de ensamble, acabados y empaque. El departamento de ensamble tiene 60 horas disponibles; El departamento de acabados puede manejar hasta 40 horas de trabajo y el departamento de empaque hasta 80 horas. La fabricación de una mesa requiere 3 horas de ensamble, 2 horas en el departamento de acabados y 1 hora en el departamento de empaque. La fabricación de una silla requiere 4 horas en el departamento de ensamble, 1 hora en el departamento de acabados y 3 horas en el departamento de empaque. La fabricación de un librero requiere 2 horas en cada uno de los tres departamentos. Si la utilidad es de $2 por mesa producida y vendida, $4 por silla producida y vendida y $3 por librero producido y vendido, cuál es la mejor combinación posible de mesas, sillas y libreros a producir y vender para obtener la máxima utilidad?

   a) Formule el problema como uno de programación lineal y resuelvalo empleando el método simplex. Lea la solución al problema dual en el tablero óptimo del simplex.

b) Formule el problema dual y resuelvalo empleando el método dual – simplex. Lea la solución al problema principal en el tablero óptimo del simplex – dual.

2. Un fabricante de telas en Ibagué se puso en contacto con los estudiantes de Investigación de Operaciones de Coruniversitaria en busca de ayuda en una situación donde picos estacionales en la demanda excedían la capacidad de producción corriente. El fabricante sabe que para satisfacer la demanda estacional, tiene que programar la producción anticipadamente y después almacenarla. Además tiene la opción, tanto de tiempo normal como de tiempo extra, con un costo de mano de obra más alto para el tiempo extra. En la tabla siguiente se muestra la demanda pronosticada (En horas de la planta) y la capacidad disponible (En horas de la planta) tanto para la temporada de demanda alta (Los últimos 6 meses del año) y la temporada baja (Los primeros 6 meses del año).

Periodo de tiempo	Demanda pronosticada (Horas)	Capacidad de planta (Horas)	
		Tiempo regular	Tiempo extra
1° Trimestre del año	24	28	12
2° Trimestre del año	29	28	12
3° Trimestre del año	34	28	14
4° Trimestre del año	48	28	14
Total	**135**	**112**	**52**

Tomando en cuenta el costo por hora de mano de obra para producción en tiempo normal o tiempo extra y el costo de almacenar una hora de producción por longitudes variables de tiempo, los contadores de costos de la compañía llegaron a la cifra de costos aplicables siguientes:

Una hora de producción en:		Para vender en:			
		1° Trimestre	2° Trimestre	3° Trimestre	4° Trimestre
1° Trimestre	Tiempo Normal	8	9	10	11
	Tiempo Extra	12	13	14	15
2° Trimestre	Tiempo Normal		8	9	10
	Tiempo Extra		12	13	14
3° Trimestre	Tiempo Normal			8	9
	Tiempo Extra			12	13
4° Trimestre	Tiempo Normal				8
	Tiempo Extra				12

Formule el problema como uno de programación lineal y resuelvalo empleando el método simplex. Lea la solución al problema dual en el tablero óptimo del simplex.

Sugerencia: Defina la variable como la cantidad de unidades de producto a producir en el trimestre i-ésimo en el tipo de tiempo j-ésimo para ser vendida en el el trimestre k-ésimo.

Solución: Costo Mínomo: $1.185

Producir en:		**Para vender en:** 1° Trimestre	2° Trimestre	3° Trimestre	4° Trimestre
1° Trimestre	**Tiempo Normal**	24	1	0	3
	Tiempo Extra	0	0	0	0
2° Trimestre	**Tiempo Normal**	-	28	0	0
	Tiempo Extra	-	0	0	0
3° Trimestre	**Tiempo Normal**	-	-	25	3
	Tiempo Extra	-	-	9	0
4° Trimestre	**Tiempo Normal**	-	-	-	28
	Tiempo Extra	-	-	-	14

3. En una compañía que fabrica hilos se tiene el problema típico llamado balance del telar, que se origina en dos operaciones primarias: El cardado, que es el proceso que hace que las fibras de algodón queden arregladas en la misma dirección y el hilado que convierte una greña suelta de algodón en un hilo fuerte al jalar y doblar simultaneamente en un huso. Cuando la fábrica produce hilos gruesos el proceso de cardado no puede dar abasto a la hilatura, cada huso produce tantas yardas de hilo por hora que la operación de cardado simplemente se atrasa, debido a la limitación de producción de la sección de cardado. De forma contraria, cuando la fábrica produce hilos finos, la cantidad de hilo producida por hora por huso es tan pequeña, que la operación de cardado puede abastecer suficiente algodón para hilar en sólo dos horas al día y como consecuencia las máquinas se paran una buena parte del día. La situación desde el punto de vista de los trabajadores, produce horarios irregulares de trabajo y desde el punto de vista de la gerencia la incapacidad de determinar que clase de hilos producir para maximizar la contribución a la utilidad. La fábrica produce y vende seis tipos de hilo, de diferente grosor (Llamado números); Cada uno de éstos hilos tiene su propia contribución a las utilidades y se produce una cantidad diferente de hilo por hora por huso.

Para resolver el problema se reunió la siguiente información. La capacidad máxima de la sección de cardado en libras de algodón por hora, las libras por hora que los seis diferentes números de hilo de algodón producirían en un huso, La contribución ganada por cada uno de los seis números de hilos y el número de husos que la compañía tiene en operación en sus máquinas de hilado.

Número del hilo		**Libras/hora/huso**	**Contribución/Libra ($/Libra)**
Grueso	**3's**	0,78	0,08
	6's	0,61	0,11
	8's	0,54	0,12
	10's	0,42	0,14
	12's	0,31	0,15
Fino	**16's**	0,22	0,21

Capacidad máxima de la sección de cardado: 20.000 Libras/ Turno de 8 horas
Husos actuales en operación: 15.000

Formule el problema como uno de programación lineal y resuelvalo empleando el método simplex. Lea la solución al problema dual en el tablero óptimo del simplex.

Sugerencia: Defina la variable como la cantidad de libras a producir por tipo de hilo j-esimo, siendo j = 1,2,3,4,5,6

Capítulo 9
Análisis Post-Óptimo y Sensibilidad

- **Cambio en C_j cuando X_j^* es no básica**
- **Cambio en C_j cuando X_j^* es básica**
- **Cambio en b_i**
- **Cambio en $a_{i,j}$ cuando X_j^* es no básica**
- **Cambio en $a_{i,j}$ cuando X_j^* es básica**
- **Adición de una restricción**
- **Adición de una variable**

Introducción

En todo modelo cuantitativo los distinto coeficientes pueden estar sujetos a cambios, fluctuaciones o errores. Por ello, su conocimiento no siempre es preciso y pueden cambiar en muchas ocasiones. Un uso típico es el caso en el que hemos obtenido la solución óptima y deseamos encontrar la nueva solución óptima cuando hayan cambiado, por ejemplo, las disponibilidades de los recursos (b_i), los precios ó costos unitarios por unidad (C_j), cambio en los coeficientes tecnológicos ($a_{i,j}$), incorporación de una nueva variable (Nuevo producto X_j) y adición de una nueva restricción. Necesario para el tomador de decisiones conocer en que rango se puede mover los distintos coeficientes mencionados, manteniéndose la presente solución óptima; ello le da una ventaja competitiva frente a otro tomador de decisiones, de incalculable valor en dependencia con la situación ó problema particular.

En éste capítulo se consideran siete (7) posibles cambios en las condiciones iniciales del problema original, uno a la vez, con su respectivo análisis de sensibilidad, presentando los argumentos para cada caso y una metodología práctica y rápida en su aplicación; para ello se usa el siguiente ejemplo, al que inicialmente encontramos la solución óptima mediante el método simplex, colocando al frente de cada tablero su respectivo sistema de ecuaciones del método algebraico.

Problema Principal

Maximizar $Z = 3X_1 + 5X_2$
c.s.r.

$$X_1 \leq 4$$
$$3X_1 + 2X_2 \leq 18$$

$X_J \geq 0$; $J = 1,2$

C_J	→		3	5	0	0	$\frac{b}{a}$
↓	VB	$\bar{b}$	X_1	**X_2**	X_3	X_4	
0	X_3	4	1	**0**	1	0	NO
0	**X_4**	**18**	**3**	**2**	**0**	**1**	**9** →
$Z_J - C_J$		0	-3	**-5**	0	0	
				↑			

Adición de variables de Holgura

Maximizar $Z = 3X_1 + 5X_2$
c.s.r.

$$X_1 + X_3 = 4$$
$$3X_1 + 2X_2 + X_4 = 18$$

$X_J \geq 0$; $J = 1,2,3,4$

(0) $Z_X - 3X_1 - 5X_2 = 0$
(1) $X_1 + X_3 = 4$
(2) $3X_1 + 2X_2 + X_4 = 18$

$X_1 = 0$ $\quad X_3 = 4$ $\quad Z_X = 0$
$X_2 = 0$ $\quad X_4 = 18$

C_J	→		3	5	0	0
↓	VB	$\bar{b}$	X_1	X_2	X_3	X_4
0	X_3	4	1	0	1	0
5	X_2	9	3/2	1	0	1/2
$Z_J - C_J$		45	9/2	0	0	5/2

(0) $Z_X + 9/2X_1 + 5/2X_4 = 45$
(1) $X_1 + X_3 = 4$
(2) $3/2X_1 + X_2 + 1/2X_4 = 9$

$X_1 = 0$ $\quad X_3 = 4$ $\quad Z_X = 45$
$X_2 = 9$ $\quad X_4 = 0$

Solución óptima y factible:

Problema Principal

$X_1^* = 0$ $\quad X_4^* = 0$
$X_2^* = 9$ $\quad Z_X^* = 45$
$X_3^* = 4$

Problema Dual

$Y_1^* = 0$ $\quad Y_4^* = 0$
$Y_2^* = 5/2$ $\quad Z_Y^* = 45$
$Y_3^* = 9/2$

Sobre la presente solución óptima, consideraremos los siguientes cambios, uno a la vez para cada caso, con su respectivo análisis de sensibilidad y metodología abreviada.

1. Cambio en C_j cuando X_j^* es no básica
2. Cambio en C_j cuando X_j^* es básica

3. Cambio en b_i
4. Cambio en $a_{i,j}$ cuando X_j^* es no básica
5. Cambio en $a_{i,j}$ cuando X_j^* es básica
6. Adición de una restricción
7. Adición de una variable

Los casos 1 y 2 se generalizarán bajo una metodología única que haga fácil su aplicación, al igual que en los casos 4 y 5 en los que adicionalmente se mostrará su relación con el concepto de productividad, tema importante del estudio del trabajo.

En el caso 3 se encontrará el significado de los valores de las variables del Dual, denominado **EL PRECIO SOMBRA** y el **COSTO REDUCIDO**, valores éstos importantes para el análisis económico y la toma de decisiones.

1. CAMBIO EN C_J CUANDO X_J* ES NO BÁSICA

Aquí se propone que la función objetivo original sea cambiada de la siguiente manera:

$Z_X = 3X_1 + 5X_2$ ➔ $Z'_X = 6X_1 + 5X_2$; Se ha modificado el valor de $C_1 = 3$ por $C_1' = 6$; Siendo C_1 el coeficiente de X_1 variable que en el óptimo es NO-Básica

Éste cambio tiene un efecto sobre el valor de $Z_1^* - C_1$ en el óptimo actual, que tiene un valor de 9/2, valor que ahora podrá tener las siguientes opciones:

Si el nuevo valor de $Z_1^* - C_1' > 0$; Entonces la solución óptima se mantiene igual en el problema principal y en el dual solo cambia el valor de la variable de holgura Y_3^*

Si el nuevo valor de $Z_1^* - C_1' = 0$; Entonces la solución óptima se mantiene igual en el problema principal pero de soluciones múltiples y en el dual solo cambia el valor de la variable de holgura Y_3^* cuyo valor será cero (0)

Si el nuevo valor de $Z_1^* - C_1' < 0$; La solución deja de ser óptima haciendo necesario el empleo del método simplex, escogiendo X_1 como la variable que entra a la base

El problema aquí, es encontrar el nuevo valor de $Z_1^* - C_1$, que en términos generales se deduce así:

$Z_J^* - C_J' = \mathbf{Z_J^*} - C_J' + C_J - \mathbf{C_J} = (Z_J^* - C_J) - (C_J' - C_J)$; Quedando en definitiva que el nuevo valor es igual a: El valor actual de $(Z_1 - C_1)$ restándole la diferencia entre el nuevo valor y el actual valor de C_1, así:

$(Z_1 - C_1) = 9/2 - (6-3) = 3/2$; valor éste mayor que cero, por lo tanto la solución actual sigue siendo óptima y se mantiene para todos los valores de X_j^* y de Z_x^* cambiando solo el valor de la variable del dual Y_3^* que ahora toma el valor de 3/2

Una manera abreviada de efectuar éste procedimiento, consiste en realizar los cambios directamente sobre el tablero simplex de la solución óptima y recalcular el valor de $Z_1 - C_1$ que nos indicará si la solución presente conserva su optimalidad ó por el contrario la pierde, quedando en éste caso el tablero listo para efectuar la iteración siguiente.

C_J	→		**6**	5	0	0
↓	VB	$\bar{b}$	X_1	X_2	X_3	X_4
0	X_3	4	1	0	1	0
5	X_2	9	3/2	1	0	1/2
$Z_J - C_J$		45	**3/2**	0	0	5/2

$X_1 = 0$ $\quad Y_1^* = 0$
$X_2 = 9$ $\quad Y_2^* = 5/2$
$X_3 = 4$ $\quad Y_3^* = 3/2$ Lo único que cambió
$X_4 = 0$ $\quad Y_4^* = 0$
$Z_X = 45$ $\quad Z_Y^* = 45$

Análisis de sensibilidad

Ahora la pregunta es: Entre que valores puede cambiar C_1 , de tal forma que se mantenga la solución actual óptima y factible

Para contestar ésta pregunta, basta con plantear la ecuación que recalcula el valor de $(Z_1 - C_1)$, colocando en el tablero óptimo como valor para C_1, un valor cualquiera que cumpla con la condición de que su $Z_1 - C_1$ debe ser ≥ 0 para mantener la respuesta actual óptima y factible

C_J	→		$\mathbf{C_1'}$	5	0	0
↓	VB	$\bar{b}$	X_1	X_2	X_3	X_4
0	X_3	4	1	0	1	0
5	X_2	9	3/2	1	0	1/2
$Z_J - C_J$		45	$\mathbf{Z_1 - C_1'}$	0	0	5/2

$(5)(3/2) + (0)(1) - C_1' \geq 0$ Entonces $C_1' \leq 15/2$ para mantener la solución actual óptima y factible; el valor de C_1' debe estar comprendido entre el rango:

$$-\infty \leq \mathbf{C_1'} \leq \mathbf{15/2}$$

Si C_j es el precio unitario de venta del artículo uno (1), entonces su precio de venta puede estar entre cero (0) y \$7,50 sin alterar la solución óptima actual, fíjese que en la solución actual $X_1^* = 0$ o sea no se producen ni venden unidades del producto uno (1)

Tan pronto C_1 tome un valor mayor de \$7,50 , la solución actual no se mantendrá y habrá que efectuar nuevas iteraciones empleando el método simplex para encontrar la nueva solución óptima, un ejemplo de ello es el caso de $C_1 = 8$, para el que $Z_1 - C_1'$ valdrá:

$(Z_1 - C_1') = (5)(3/2) + (0)(1) - 8 = -1/2 = -0,5$

La consecución de la nueva solución óptima para cuando $C_1' = 8$, se deja al lector, quien debe efectuar la iteración sobre el tablero óptimo, escogiendo como variable que entra a X_1

2. CAMBIO EN C_J CUANDO X_J* ES BÁSICA

Para éste caso se propone que la función objetivo sea cambiada de la siguiente manera:

$Z_X = 3X_1 + 5X_2 \quad \Rightarrow \quad Z'_X = 3X_1 + X_2$; Se ha modificado el valor de $C_2 = 5$ por $C_2' = 1$; Siendo C_2 el coeficiente de X_2 , variable que en el óptimo es variable Básica.

Aquí el nuevo valor de $Z_j^* - C_j'$ es:

$Z_J^* - C_J' = \mathbf{Z_J^*} - C_J' + C_J - \mathbf{C_J} = (Z_J^* - C_J) - (C_J' - C_J)$; Como el $(Z_J^* - C_J)$ pertenece a una variable básica, su valor siempre será igual a cero (0), quedando la expresión simplificada a:

$Z_J^* - C_J' = -(C_J' - C_J)$; Quedando en definitiva que el nuevo valor es igual a menos la diferencia entre el nuevo valor y el actual valor de C_j, así:

$Z_2^* - C_2' = -(1 - 5) = 4$; Esto implica que en la ecuación (0) del método algebraico aparecerá la variable básica X_2 con el coeficiente 4, evento que obliga a modificar el sistema de ecuaciones, eliminando a X_2 de la ecuación (0) ya que en ella solo puede figurar como variable básica Z. El sistema de ecuaciones queda así:

$$\begin{array}{lllll} (0) & Z_X + 9/2X_1 + \mathbf{4X_2} & & + 5/2X_4 & = 45 \\ (1) & \quad X_1 & + X_3 & & = 4 \\ (2) & 3/2X_1 + X_2 & & + 1/2X_4 & = 9 \end{array}$$

Multiplicando la ecuación (2) por (- 4) y sumándole la ecuación (0), eliminamos a X_2 de la función objetivo, quedando el sistema así:

$$\begin{array}{lllll} (0) & Z_X - \mathbf{3/2}X_1 & & + 1/2X_4 & = 9 \\ (1) & \quad X_1 & + X_3 & & = 4 \\ (2) & 3/2X_1 + X_2 & & + 1/2X_4 & = 9 \end{array}$$

Observe que el coeficiente de X_1 es negativo, lo que indica que la solución no es óptima y que hay que iterar empleando el método simplex.

C_J	→		3	1	0	0	b
↓	VB	$\bar{b}$	X_1	X_2	X_3	X_4	a
0	**X_3**	**4**	**1**	**0**	**1**	**0**	**4**
1	X_2	9	**3/2**	1	0	1/2	6
$Z_J - C_J$		9	**-3/2**	0	0	1/2	
			↑				

→

C_J	→		3	1	0	0	
↓	VB	$\bar{b}$	X_1	X_2	X_3	X_4	
3	X_1	4	1	0	1	0	(-3/2)
1	X_2	3	0	1	-3/2	1/2	
$Z_J - C_J$		15	0	0	3/2	1/2	

Nueva solución óptima:

$X_1^* = 4$ $\quad$ $X_4^* = 0$ $\quad$ $Y_1^* = 3/2$ $\quad$ $Y_4^* = 0$

$X_2^* = 3$ $\quad$ $Z_X^* = 15$ $\quad$ $Y_2^* = 1/2$ $\quad$ $Z_Y^* = 15$

$X_3^* = 0$ $\quad$ $Y_3^* = 0$

Una manera abreviada de efectuar éste procedimiento, consiste en realizar los cambios directamente sobre el tablero simplex de la solución óptima y recalcular todos los valores de los $Z_j - C_j$ que nos indicará si la solución presente conserva su optimalidad ó por el contrario la pierde, quedando en éste caso el tablero listo para efectuar la iteración siguiente, si ello es necesario.

C_J	→		3	**1**	0	0
↓	VB	$\bar{b}$	X_1	X_2	X_3	X_4
0	X_3	4	1	0	1	0
1	X_2	9	3/2	1	0	1/2
$Z_J - C_J$		**9**	**-3/2**	**0**	**0**	**1/2**

$Z = (1)(9) + (0)(4) = 9$

$Z_1 - C_1 = (1)(3/2) + (0)(1) - 3 = -3/2$

$Z_2 - C_2 = (1)(1) + (0)(0) - 1 = 0$

$Z_3 - C_3 = (1)(0) + (0)(1) - 0 = 0$

$Z_4 - C_4 = (1)(1/2) + (0)(0) - 0 = 1/2$

Fíjese que aquí, el tablero simplex ha quedado automáticamente listo para iterar, ya que se observa en él, que su solución es factible ($b_i \geq 0$) pero no óptima, en atención a que el valor de $(Z_1 - C_1) < 0$ ó sea $-3/2$; Los valores del tablero simplex para la siguiente iteración son los mismos que se hallaron anteriormente.

Análisis de sensibilidad

Ahora la pregunta es: Entre que valores puede cambiar C_2 , de tal forma que se mantenga la solución actual óptima y factible.

Para contestar ésta pregunta, basta con plantear las ecuación que recalcula el valor de $(Z_j - C_j)$ de cada una de las variables no básicas, colocando en el tablero óptimo como valor para C_2, un valor cualquiera que cumpla con la condición de que su $Z_j - C_j$ debe ser ≥ 0 para mantener la respuesta actual óptima y factible.

C_J	→		3	C_2	0	0
↓	VB	$\bar{b}$	X_1	X_2	X_3	X_4
0	X_3	4	1	0	1	0
C_2	X_2	9	3/2	1	0	1/2
$Z_J - C_J$		$9C_2$	$Z_1 - C_1$	0	0	$Z_4 - C_4$

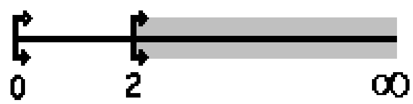
$(3/2)\,C_2 + (0)(1) - 3 \geq 0$ para $Z_1 - C_1$

$C_2 \geq 2$

$(1/2)\,C_2 + (0)(0) - 0 \geq 0$ para $Z_4 - C_4$

$C_2 \geq 0$

Para mantener la solución actual óptima; el valor de C_2 debe estar comprendido dentro del rango: $\mathbf{2 \leq C_2 \leq +\infty}$; Esto se puede apreciar gráficamente así:



3. CAMBIO EN b_i

El análisis de éste caso nos revelará el significado de las variables del dual, dando origen a dos conceptos de interpretación económica denominados el precio sombra y el costo reducido. En las aplicaciones prácticas, es muy aplicado, ya que se trata de cambios efectuados sobre la disponibilidad de los recursos.

Un cambio en un b_i afecta los valores de las variables básicas en la solución óptima, haciendo que ésta siga factible o no, por ello se dice que afecta la factibilidad del problema.

Si al efectuar el cambio, al menos un b_i se hace < 0; Entonces se hace necesario aplicar el método dual – simplex

El coeficiente de la variable de holgura de la ecuación donde ocurre el cambio, nos indica el número de veces que cada ecuación ha sido sumada ó restada de las demás ecuaciones ó sea el número de veces que ocurre el cambio, siendo el cambio la diferencia entre el nuevo y el actual valor de b_i

Para éste caso se propone cambiar la segunda restricción de la siguiente forma:

$3X_1 + 2X_2 \leq 18$ a $3X_1 + 2X_2 \leq 14$

Ecuación donde ocurre el cambio: La segunda restricción
Variable que inicia con coeficiente uno (1), la variable artificial: X_4

Los coeficientes de X_4 en cada fila, indican el número de veces que ocurrió el cambio en cada fila; sobre el término independiente.

(0) $45 + 5/2\ (14-18) = 35$	45,4,9 = Términos independientes de la solución óptima actual.
(1) $4 + 0\ (14-18) = 4$	5/2,0,1/2 = Número de veces que ocurre el cambio en cada fila
(2) $9 + 1/2(14-18) = 7$	(14-18) = El cambio, el nuevo b_i' menos el actual bi

Como todos los b_i' nuevos son ≥ 0 ; Entonces $b_1' = 4$; $b_2' = 7$; La nueva solución es:

$X_1^* = 0$	$X_4^* = 0$	$Y_1^* = 0$	$Y_4^* = 0$
$X_2^* = 7$	$Z_X^* = 35$	$Y_2^* = 5/2$	$Z_Y^* = 35$
$X_3^* = 4$		$Y_3^* = 9/2$	

Si al menos un b_i' nuevo fuese < 0 (negativo, NO factible); Entonces se modifica el tablero simplex óptimo con los nuevos b_i' y se aplica el método dual – simplex para efectuar las iteraciones y encontrar el nuevo óptimo.

Análisis de sensibilidad

Ahora la pregunta es: Entre que valores pueden cambiar los bi (Recursos) , de tal forma que se mantenga la solución actual factible.

Para contestar ésta pregunta, basta con plantear las ecuaciones que calculan los valores de los b_i' nuevos, remplazando el nuevo bi', por un valor cualquiera que cumpla con la condición de que el nuevo valor de las variables básicas sea ≥ 0 que mantenga la respuesta actual factible.

Análisis de sensibilidad para b_1

(1) $4 + 1\ (b_1' - 4) \geq 0$	(2) $9 + 0(b_1' - 4) \geq 0$	Luego b_1 debe tomar valores entre
		$0 \leq b_1 \leq \infty$ para que el tablero simplex
$b_1' \geq 0$	No restringe	óptimo actual se mantenga factible

Análisis de sensibilidad para b_2

(1) $4 + 0\ (b_2' - 18) \geq 0$	(2) $9 + 1/2\ (b_2' - 18) \geq 0$	Luego b_2 debe tomar valores entre
		$0 \leq b_2 \leq \infty$ para que el tablero simplex
No restringe	$b_2' \geq 0$	óptimo actual se mantenga factible

Es interesante observar que le sucede al valor actual de Z* cuando se hace un cambio de una unidad (1) en b_i

Cambio en b_1 de 4 a 5

(0) 45 + 0 (5-4) = 45 + 0 (1) = 45 (1) 4 + 1 (5-4) = 4 + 1 (1) = 5 (2) 9 +0 (5-4) = 9 + 0 (1) = 9	Aquí, Z* no aumentó. Observe que la primera variable del dual Y_1 vale cero (0)

Cambio en b_2 de 18 a 19

(0) 45 + 5/2 (19-18) = 45 + 5/2 (1) = 95/2 (1) 4 + 0 (19-18) = 4 + 0 (1) = 4 (2) 9 + 1/2 (19-18) = 9 + 1/2 (1) = 19/2	Aquí, Z* aumentó 5/2, Observe que la segunda variable del dual Y_2 vale 5/2

Lo anterior significa que las variables reales del dual (Y_1* , Y_2*) son el incremento de Z* por unidad de recurso aumentado, siempre y cuando éste aumento de los recursos se mantenga dentro del rango de sensibilidad ($0 \leq b_1 \leq \infty$) y ($0 \leq b_2 \leq \infty$). Por ello, el valor de las variables reales del dual es llamado el precio sombra.

De manera similar, las variables de holgura del dual (Y_3* , Y_4*) indican lo que Z* disminuye por cada unidad que se decida hacer crecer a una variable NO básica, esto se llama el costo reducido.

4. CAMBIO EN $a_{i,j}$ CUANDO X_j* ES NO-BÁSICA

Aquí se efectúa el cambio sobre el coeficiente tecnológico de las variables, para muchos problemas éste coeficiente tecnológico $a_{i,j}$ es el valor inverso de la productividad, concepto éste de vital importancia para el tomador de decisiones.

Productividad	Coeficiente tecnológico	Q = Unidades
P = Q / t	$a_{i,j}$ = t / Q	t = Tiempo

Para éste cambio y los siguientes, de nuevo se aplica el principio de que el coeficiente de la variable de holgura de la ecuación donde ocurre el cambio, nos indica el número de veces que cada ecuación ha sido sumada ó restada de las demás ecuaciones ó sea el número de veces que ocurre el cambio, siendo el cambio la diferencia entre el nuevo y el actual valor de $a_{i,j}$

Se propone hacer el cambio en la segunda restricción de la siguiente forma:

$3X_1 + 2X_2 \leq 18$ por $X_1 + 2X_2 \leq 18$; El $a_{2,1}$ a cambiado de 3 a 1 y es el coeficiente de X_1 que en el óptimo es variable NO básica.

El cambio ocurre en la ecuación (2), que tiene la variable de holgura X_4 que inició con coeficiente (1), luego su coeficiente en cada ecuación indica el número de veces que ocurre el cambio en cada ecuación. Matemáticamente:

En el óptimo:

(0) $Z_X + 9/2X_1 \quad + \mathbf{5/2X_4} = 45$
(1) $X_1 \quad + X_3 \quad = 4$
(2) $3/2X_1 + X_2 \quad + \mathbf{1/2X_4} = 9$

El coeficiente de X_4 indica el número de veces que ocurre el cambio en cada fila, siendo el cambio (1 – 3)

(0) $Z_X + \mathbf{[9/2 + 5/2\ (1 - 3)]}\ X_1 \quad + 5/2X_4 = 45$
(1) $\mathbf{[\ 1 + 0\ (1 - 3)]}\ X_1 \quad + X_3 \quad = 4$
(2) $\mathbf{[\ 3/2 + 1/2\ (1 - 3)]}\ X_1 + X_2 \quad + 1/2X_4 = 9$

(0) $Z_X - 1/2X_1 \quad + 5/2X_4 = 45$
(1) $X_1 \quad + X_3 \quad = 4$
(2) $1/2X_1 + X_2 \quad + 1/2X_4 = 9$

El coeficiente de X_1 en la ecuación (0) que es el $(Z_1 - C_1)$ se ha vuelto negativo, indicando que la solución NO es óptima, luego debemos iterar.

C_J →			3	5	0	0	$\frac{b}{a}$	
↓	VB	$\bar{b}$	X_1	X_2	X_3	X_4		
0	X_3	4	1	0	1	0	4	→
5	X_2	9	1/2	1	0	1/2	18	
$Z_J - C_J$		45	-1/2	0	0	5/2		
			↑					

C_J →			3	5	0	0
↓	VB	$\bar{b}$	X_1	X_2	X_3	X_4
3	X_1	4	1	0	1	0
5	X_2	7	0	1	-1/2	1/2
$Z_J - C_J$		47	0	0	1/2	5/2

Solución:

$X_1^* = 4$ $X_4^* = 0$ $Y_1^* = 1/2$ $Y_4^* = 0$
$X_2^* = 7$ $Z_X^* = 47$ $Y_2^* = 5/2$ $Z_Y^* = 47$
$X_3^* = 0$ $Y_3^* = 0$

Análisis de sensibilidad

Entre que valores puede cambia a_{21} (Coeficiente tecnológico) , de tal forma que se mantenga la solución actual óptima.

Para contestar ésta pregunta, basta con replantear la ecuación que recalcula el valor de ($Z_1 - C_1$), remplazando el nuevo $a_{2,1}$, por un valor cualquiera que cumpla con la condición de que el nuevo valor de ($Z_1 - C_1$) sea ≥ 0 , que mantenga la respuesta actual óptima.

$9/2 + 5/2\ (a_{2,1}' - 3) \geq 0$; Despejando $a_{2,1}'$ se encuentra que $a_{2,1}' \geq 6/5$; Luego el rango de sensibilidad para $a_{2,1}'$ es: $\mathbf{6/5 \leq a_{2,1}' \leq \infty}$

5. CAMBIO EN $a_{i,j}$ CUANDO X_j^* ES BÁSICA

Como el cambio se efectúa sobre el coeficiente de una variable que en el óptimo es Básica, ello hará que aparezca dicha variable con coeficiente diferente de cero (0) en la función objetivo, teniendo que ser eliminada. Éste proceso ocasionará cambios en los $Z_j - C_j$ de las variables NO – básicas que en caso de tomar valores menores que cero (0), no mantienen la optimalidad y habrá que iterar empleando el método simplex; También pueden ocurrir cambios en los b_i convirtiendo la solución en NO factible, en cuyo caso debe emplearse el método Dual – Simplex

Se propone cambiar el a_{22} de 2 a 4 , coeficiente de X_2 en la segunda restricción, variable que en el óptimo actual es variable básica.

$3X_1 + 2X_2 \leq 18$ cambiar por $3X_1 + 4X_2 \leq 18$

La ecuación en donde ocurre el cambio es la segunda, y en ella la variable que empezó con coeficiente uno (1) es X_4 , luego los coeficientes de X_4 en cada ecuación indican las veces que ocurre al cambio en cada ecuación, matemáticamente:

$$\begin{array}{lllll}
(0) & Z_X + 9/2X_1 & & + \mathbf{5/2X_4} & = 45 \\
(1) & X_1 & + X_3 & & = 4 \\
(2) & 3/2X_1 + X_2 & & + \mathbf{1/2X_4} & = 9
\end{array}$$

El coeficiente de X_4 indica el número de veces que ocurre el cambio en cada fila, siendo el cambio (4 – 2)

$$\begin{array}{llllll}
(0) & Z_X + 9/2X_1 & + \mathbf{[0 + 5/2\ (4 - 2)]\ X_2} & & + 5/2X_4 & = 45 \\
(1) & X_1 & + \mathbf{[0 + 0\ (4 - 2)]\ X_2} & + X_3 & & = 4 \\
(2) & 3/2X_1 & + \mathbf{[1 + 1/2\ (4 - 2)]\ X_2} & & + 1/2X_4 & = 9
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
(0) & Z_X + 9/2X_1 & + \mathbf{5X_2} & & + 5/2X_4 & = 45 \\
(1) & X_1 & & + X_3 & & = 4 \\
(2) & 3/2X_1 & + \mathbf{2X_2} & & + 1/2X_4 & = 9
\end{array}$$

$5X_2$ debe eliminarse de la función objetivo
$2X_2$ debe tener coeficiente (1), luego multiplicamos toda la fila por (1/2)

$$\begin{array}{llllll}
(0) & Z_X + 9/2X_1 & + 5X_2 & & + 5/2X_4 & = 45 \\
(1) & X_1 & & + X_3 & & = 4 \\
(2) & 3/4X_1 & + 1X_2 & & + 1/4X_4 & = 9/2
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllllll}
(0) & Z_X + \mathbf{3/4}X_1 & & & + \mathbf{5/4}X_4 & = 45 & \\
(1) & X_1 & & + X_3 & & = \mathbf{4} & \\
(2) & 3/4X_1 & + X_2 & & + 1/4X_4 & = \mathbf{9} & (-5)
\end{array}$$

Optimalidad

El nuevo $Z_1^* - C_1 = 3/4$; Valor que es ≥ 0
El nuevo $Z_4^* - C_4 = 5/4$; Valor que es ≥ 0

Factibilidad

$b_1 = X_3^* = 4$; Valor que es ≥ 0
$b_2 = X_2^* = 9$; Valor que es ≥ 0

Solución:

$X_1^* = 0$	$X_4^* = 0$	$Y_1^* = 0$	$Y_4^* = 0$
$X_2^* = 9/2$	$Z_X^* = 45/2$	$Y_2^* = 5/4$	$Z_Y^* = 45/2$
$X_3^* = 4$		$Y_3^* = 3/4$	

Análisis de sensibilidad

Entre que valores puede cambia a_{22} (Coeficiente tecnológico) , de tal forma que se mantenga la solución actual óptima y factible.

Para éste caso el análisis es más complejo ya que ocurren cambios tanto en los (Z_j-C_j), como en los b_i poniendo en peligro tanto la optimalidad como la factibilidad de la solución. Como en todos los casos anteriores, se reconstruyen las ecuaciones que dan origen a los cambios tanto de los (Z_j-C_j), como de los b_i

Análisis de sensibilidad, cuidando la optimalidad, (Z_j-C_j) $\geq$ 0 para las variables No – Básicas.

para (Z_1 – C_1)

$$\left(\frac{\frac{3}{2}}{1+\frac{1}{2}(a22'-2)}\right)\left(-\frac{5}{2}(a22'-2)\right) + \frac{9}{2} \geq 0$$; Despejando a_{22}' ➔ **$a_{22}' \leq 5$**

para (Z_4 – C_4)

$$\left(\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}(a22'-2)}\right)\left(-\frac{5}{2}(a22'-2)\right) + \frac{5}{4} \geq 0$$; Despejando a_{22}' ➔ **$a_{22}' \leq 4$**

Análisis de sensibilidad, cuidando la factibilidad, $b_i \geq 0$ para todas las restricciones.

para b_1 : [0 + 0 (a_{22}' – 2)] (9/2) + 4 $\geq$ 0 ; NO altera la factibilidad

para b_2 : [1 + ½ (a_{22}' – 2) > 0 ; ➔ $a_{22}' > 0$

Concluyendo; El valor de a_{22}' debe estar dentro del siguiente rango: **$0 < a_{22}' \leq 4$**

6. ADICIÓN DE UNA RESTRICCIÓN

Éste caso plantea la posibilidad de añadir una restricción, que se halla olvidado, en la formulación inicial del problema, como en el caso de los problemas de solución indeterminada, en los que se presume el no haber tenido en cuenta la restricción de un recurso que afecta la solución del problema.

Supongamos que se ha olvidado tener en cuenta la siguiente tercera (3) restricción: $X_2 \leq 6$

Observamos si la nueva restricción cumple con la solución óptima actual; Si cumple, la solución actual se mantiene, si no, añadimos la nueva restricción.

La solución actual es: $X_1^* = 0$; $X_2^* = 9$; Remplazando en la nueva restricción $X_2 \leq 6$; $9 \leq 6$; Aseveración ésta que es falsa, luego debemos proceder a añadir la nueva restricción, así:

(3) $X_2 \leq 6$

(3) $X_2 + \mathbf{X_5} = 6$; X_5 nueva variable de holgura y variable básica de ésta ecuación, luego debemos eliminar a X_2 porque también es variable básica en la solución óptima actual; Recordemos que en cada ecuación solo debe aparecer una variable básica, con coeficiente (1), para lograrlo, tratamos la ecuación (3) con la (2), eliminando X_2 y obteniendo la nueva ecuación (3), así:

$$
\begin{array}{llcl}
(2) & 3/2\, X_1 + \cancel{X_2} + 1/2\, X_4 & = & 9 \\
(3) & \underline{\quad - \cancel{X_2} \qquad\qquad - X_5} & = & \underline{-6} \\
(3) & 3/2\, X_1 + 1/2\, X_4 - X_5 & = & 3
\end{array}
$$

Multiplicando por (-1)

$$(3)\ -3/2\, X_1 - 1/2\, X_4 + X_5 = -3$$

El nuevo sistema de ecuaciones es:

$$
\begin{array}{llcl}
(0) & Z + 9/2\, X_1 + 5/2\, X_4 & = & 45 \\
(1) & X_1 + X_3 & = & 4 \\
(2) & 3/2\, X_1 + X_2 + 1/2\, X_4 & = & 9 \\
(3) & -3/2\, X_1 - 1/2\, X_4 + X_5 & = & -3
\end{array}
$$

En donde $X_5 = -3$; valor no factible. Introducimos los datos al tablero simplex y aplicamos el método dual simplex para eliminar la infactibilidad generada por la adición de la nueva restricción.

Método Dual - Simplex

C_j ↓	→		3	5	0	0	0	
	VB	$\bar{b}$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	4	1	0	1	0	0	
5	X_2	9	3/2	1	0	1/2	0	
0	X_5	-3	-3/2	0	0	-1/2	1	→ (- 2/3)
$Z_J - C_J$		45	9/2	0	0	5/2	0	
$Z_J - C_J / a_{R,J}$			-3	NO	NO	-5	NO	
			↑					

C_j ↓	→		3	5	0	0	0
	VB	$\bar{b}$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
0	X_3	2	0	0	1	-1/3	2/3
5	X_2	6	0	1	0	0	1
3	X_1	2	1	0	0	1/3	-2/3
$Z_J - C_J$		36	0	0	0	1	3

Nueva solución:

$X_1^* = 2$	$X_4^* = 0$	$Y_1^* = 0$	$Y_4^* = 0$
$X_2^* = 6$	$X_5^* = 0$	$Y_2^* = 1$	$Y_5^* = 0$
$X_3^* = 2$	$Z_X^* = 36$	$Y_3^* = 3$	$Z_Y^* = 36$

7. ADICIÓN DE UNA VARIABLE

Aquí se considera la adición de una variable, que en la vida real puede ser un producto nuevo, entonces estamos midiendo los efectos de ésta decisión y sus implicaciones sobre la solución actual.

El cambio que se propone es el siguiente:

Max $Z = 3X_1 + 5X_2$	Max $Z = 3X_1 + 5X_2 + \mathbf{7X_5}$
C.S.R. $X_1 \leq 4$	C.S.R. $X_1 \quad \mathbf{X_5} \leq 4$
$3X_1 + 2X_2 \leq 18$	$3X_1 + 2X_2 + \mathbf{2X_5} \leq 18$
$X_J \geq 0$; $J = 1,2$	$X_J \geq 0$; $J = 1,2,5$

Fíjese que es la combinación de un cambio en un C_j y el cambio de $a_{i,j}$ en dos (2) restricciones, al mismo tiempo.

El C_5 ha cambiado de (0) a (7) en la función objetivo.
El coeficiente de X_5 en la 1° restricción cambió de (0) a (1); El cambio fue de 1 – 0 = 1
El coeficiente de X_5 en la 2° restricción cambió de (0) a (2); El cambio fue de 2 – 0 = 2

El objetivo se reduce a reconstruir toda la columna de la nueva variable X_5 en cada una de las ecuaciones del simplex. Aplicamos nuevamente el concepto de que la variable que inicia con coeficiente 1 (Generalmente las variables de holgura), Su coeficiente en el óptimo nos indica, el número de veces que ocurrió el cambio en cada ecuación.

Hay que tener en cuenta que en el método algebraico todos los términos se trasladan al lado izquierdo, cambiando su signo, por eso aquí, el coeficiente de X_5 empezó con un coeficiente de (-7); Matemáticamente:

$$
\begin{array}{llll}
(0) & Z_x + 9/2\,X_1 \qquad\qquad + 5/2\,X_4 & + [\,-7 + (0)(1) + (5/2)(2)\,]\,X_5 & = 45 \\
(1) & \qquad X_1 \quad + X_3 & + [\qquad (1)(1) + (\;0\;)(2)\,]\,X_5 & = 4 \\
(2) & 3/2\,X_1 + X_2 \qquad + 1/2\,X_4 & + [\qquad (0)(1) + (1/2)(2)\,]\,X_5 & = 9
\end{array}
$$

Fíjese que los nuevos coeficientes de X_5 para cada ecuación están afectados por tres (3) términos: La primera columna corresponde al efecto producido por la aparición de X_5 en la función objetiva, por ello solo afecta la ecuación cero (0), la segunda columna refleja el efecto producido por un cambio de un $a_{i,j}$ en la primera restricción y por último, la tercera columna refleja el efecto producido por un cambio de un $a_{i,j}$ en la segunda restricción.

Efectuando los cálculos aritméticos, el sistema de ecuaciones queda así:

$$
\begin{array}{llll}
(0) & Z + 9/2\,X_1 \qquad\qquad + 5/2\,X_4 & - \mathbf{2}\,X_5 & = 45 \\
(1) & \qquad X_1 \quad + X_3 & + \quad X_5 & = 4 \\
(2) & 3/2\,X_1 + X_2 \qquad + 1/2\,X_4 & + \quad X_5 & = 9
\end{array}
$$

Fíjese que la optimalidad se ha afectado ya que el $Z_5 - C_5$ es igual a –2, por lo que hay que iterar, empleando el método simplex

C_j ➔			3	5	0	0	7	$\frac{b}{a}$	
↓	VB	$\bar{b}$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5		
0	X_3	4	1	0	1	0	1	4	➔
5	X_2	9	3/2	1	0	1/2	1	9	
$Z_j - C_j$		45	9/2	0	0	5/2	-2		
							↑		

C_j ➔			3	5	0	0	7	
↓	VB	$\bar{b}$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
7	X_5	4	1	0	1	0	1	
5	X_2	5	1/2	1	-1	1/2	0	
$Z_j - C_j$		53	13/2	0	2	5/2	0	
			Y_3	Y_4	Y_1	Y_2	Y_5	Fíjese en el orden

Nueva solución:

$X_1^* = 0$	$X_4^* = 0$	$Y_1^* = 2$	$Y_4^* = 0$
$X_2^* = 5$	$X_5^* = 4$	$Y_2^* = 5/2$	$Y_5^* = 0$
$X_3^* = 0$	$Z_X^* = 53$	$Y_3^* = 13/2$	$Z_Y^* = 53$

El WinQsb y el Análisis de Sensibilidad

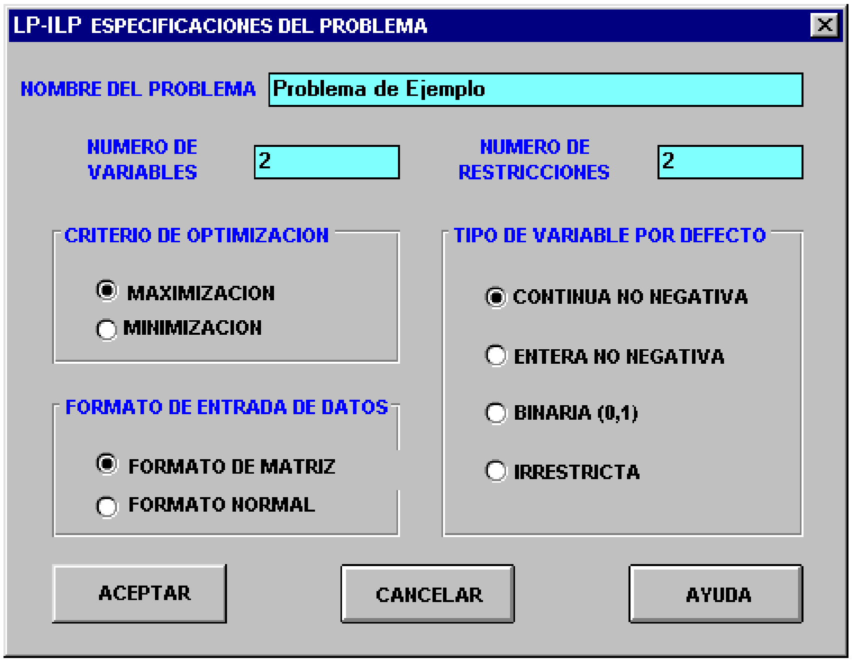
Por último nos ocuparemos de ilustrar el uso del Software WinQsb en lo que se relaciona con la solución de problemas de programación lineal y el análisis de Sensibilidad.
A continuación ilustraremos la ventana inicial, en donde introducimos los datos generales del problema, luego, la ventana de captura de los datos correspondientes a la función objetiva y las restricciones y por último la ventana que nos muestra los resultados de la solución óptima; El problema que se usa, es el mismo que se ha utilizado como ejemplo durante todo el capítulo.

Max $Z = 3X_1 + 5X_2$

C.S.R. $\quad X_1 \leq 4$

$\quad 3X_1 + 2X_2 \leq 18$

$X_J \geq 0$; $J = 1,2$

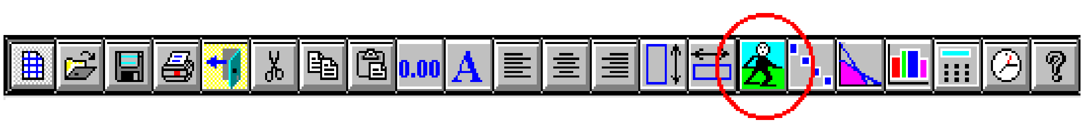


Fíjese que el problema debe tener un nombre, el cual será usado en los informes escritos y de pantalla.
El número de restricciones no incluye las restricciones de NO-NEGATIVIDAD.
El software le ofrece cuatro (4) tipo de variables: Continua positiva, Entera positiva, Binaria (0,1) e irrestricta (Que puede tomar cualquier valor).
Se recomienda el formato de matriz de hoja de cálculo por ser la más didáctica.

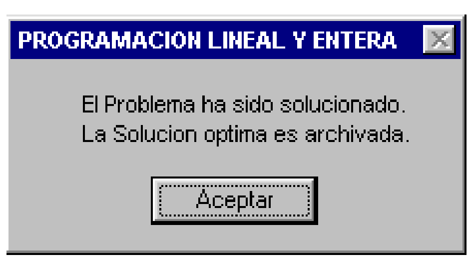
VARIABLES ->	X1	X2	DIRECCION	RECURSO
MAXIMIZAR	3	5		
RESTRICCION 1	1		<=	4
RESTRICCION 2	3	2	<=	18
V/R INFERIOR	0	0		
V/R SUPERIOR	M	M		
TIPO VARIABLE	CONTINUA	CONTINUA		

Con doble clic del ratón se puede cambiar el sentido de la desigualdad ó convertirla en igualdad, y el tipo de variable. También se puede restringir el valor de cada variable, cambiando su valor mínimos y máximo.

Para solucionar el problema se da clic sobre el icono que aparece en la parte superior y que se señala en la gráfica siguiente:



El programa anuncia, mediante una ventana, que el problema ha sido solucionado y que la solución óptima ha sido archivada, se acepta dando clic sobre el botón de aceptar, siguiente:



En la siguiente ventana se nos ofrece la solución óptima y algunos datos del análisis de sensibilidad, cuyo significado, entramos a explicar.

Para efectos de una interpretación que guarde mayor relación con la realidad, supondremos que las variables X_1 y X_2 representan las cantidades a producir de los artículos 1 y 2. Las restricciones representan la cantidad de recursos disponibles del tipo A y B y la función objetiva son las utilidades logradas.

En el encabezado de ésta ventana se muestra la hora y la fecha en que la que se logró la presente solución.

La ventana la hemos dividido en dos, mediante una línea de color rojo, en la parte superior de dicha línea, se encuentra la información relacionada con las variables básicas, y la función objetivo. En ésta área, el significado para la fila 1, de los datos de izquierda a derecha es:

Del artículo 1 (X_1^*) debemos producir cero (0) unidades. Su utilidad por unidad (C_1) es de $3 y su contribución a al utilidad total es de cero (0) pesos (0)(3)=0. Si decidiéramos llevar la contraria a ésta solución óptima y decidiéramos producir unidades del producto 1, entonces por cada unidad producida, perderíamos $4,50 de nuestras utilidades, esto se denomina el costo reducido del producto 1. En la siguiente casilla a la derecha, se nos informa que ésta variable está en su valor límite posible ($X_1 \geq 0$). Por último, en las dos últimas casillas de ésta fila, se muestra el análisis de sensibilidad para C_1 que nos indica que la utilidad por unidad del artículo 1 debe estar en el rango de: $\mathbf{-\infty \leq C_1' \leq 15/2}$ para que la solución actual se mantenga óptima.

El significado para la fila 2, de los datos de izquierda a derecha es:

Del artículo 2 (X_2^*) debemos producir 9 unidades. Su utilidad por unidad (C_2) es de $5 y su contribución a al utilidad total es de $45 [(5)(9)=45]. Aquí el costo reducido es de $0 en atención a que sí se van a producir unidades del artículo 2. En la siguiente casilla a la derecha, se nos informa que ésta variable es básica. En las dos últimas casillas de ésta fila, se muestra el análisis de sensibilidad para C_2 que nos indica que la utilidad por unidad del artículo 2 debe estar en el rango de: $\mathbf{2 \leq C_2 \leq +\infty}$ para que la solución actual se mantenga óptima.

En la siguiente fila se muestra el valor total de la contribución ó valor máximo de la función objetivo $Z^* = \$45$

	18:36:16		Tuesday	June	19	2001		
	Variables de Decisión	Solución	Costo ó Beneficio Por Unidad Cj	Contribucion Total	Costo Reducido	Estado de la variable Básica	Mínimo Cj Admisible	Máximo Cj Admisible
1	X1	0	3.0000	0	-4.5000	En el Limite	-M	7.5000
2	X2	9.0000	5.0000	45.0000	0	Básica	2.0000	M
	Función	Objetivo	(Max.) =	45.0000				
	Restric-ciones	Lado Izquierdo	Dirección	Lado Derecho Recurso bi	Holgura ó Excedente	Precio Sombra	Mínimo Recurso bi	Máximo Recurso bi
1	C1	0	<=	4.0000	4.0000	0	0	M
2	C2	18.0000	<=	18.0000	0	2.5000	0	M

En la parte inferior de la línea roja, se encuentra la información referente a cada una de las restricciones y su interpretación es la siguiente:

La fila 1 corresponde a la restricción 1, referente a la disponibilidad del recurso A , para el que se muestra el valor del lado izquierdo, evaluado con la solución optima y que indica que del recurso A no se utilizará ninguna unidad, de las 4 disponibles, por ello la holgura ó excedente de dicho recurso es de 4 unidades. El precio sombra nos indica que si se dispone de una unidad adicional del recurso A, ello ocasionará un incremento en la utilidad de $0 ;Siempre y cuando el valor del recurso se encuentre entre los límites de sensibilidad $0 \leq b_1 \leq \infty$; que son los valores que hacen que la solución actual permanezca factible.

La fila 2 corresponde a la restricción 2, referente a la disponibilidad del recurso B , para el que se muestra el valor del lado izquierdo, evaluado con la solución optima y que indica que del recurso B se utilizan 18 unidades, de las 18 disponibles, por ello la holgura ó excedente de dicho recurso es de 0 unidades. El precio sombra nos indica que si se dispone de una unidad adicional del recurso B, ello ocasionará un incremento en la utilidad de $2,50 siempre y cuando el valor del recurso se encuentre entre los límites de sensibilidad $0 \leq b_2 \leq \infty$; que son los valores que hacen que la solución actual permanezca factible.

Ejercicios propuestos

1. Considere el siguiente problema de programación lineal

Maximice $Z = - X_1 + 3X_2 - 2X_3$

C.S.R.

$3X_1 - X_2 + 2X_3 \leq 7$	Recurso A	
$-2X_1 + 4X_2 \leq 12$	Recurso B	
$-4X_1 + 3X_2 + 8X_3 \leq 10$	Recurso C	$X_j \geq 0$; $j = 1,2,3$

a) Cuál es la solución óptima ? Z_X^* , X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, X_5^* ^ X_6^* en donde X_4, X_5^*^ X_6 son variables de holgura de las restricciones correspondientes a los recursos A,B,C respectivamente.

b) Formule el Dual.

c) Cuál es la solución óptima del dual.

d) Si consideramos que Z es ganancia en pesos. Cuál seria la contribución a la ganancia si hubiese una unidad más de recurso A ?, lo mismo para B, lo mismo para C.

e) Supóngase que datos mas recientes nos dicen que la función objetiva es: $Z = -X_1 + 3X_2 + X_3$. Es la vieja solución todavía óptima ? si no, encuentre la nueva solución óptima.

f) Suponga que queremos investigar el efecto de cambiar la función objetiva a $Z = -X_1 + X_2 - 2X_3$. Aún será óptima la antigua solución ? si no, encuentre el nuevo óptimo.

g) Si uno encuentra que solo hay 10 unidades disponibles del recurso B, el óptimo será el mismo? Si no, encuentre el nuevo óptimo.

h) Cambiaría la solución óptima si añadimos la nueva restricción $X_1 + X_2 + X_3 \leq 8$. Si sí, encuentre el nuevo óptimo.

i) Supóngase que se ha descubierto que una cuarta actividad, denotada por X_7 , es relevante y que el nuevo modelo matemático es:

Maximice $Z = - X_1 + 3X_2 - 2X_3 + X_7$

C.S.R.

$3X_1 - X_2 + 2X_3 + X_7 \leq 7$	Recurso A	Es la antigua solución con $X_7 = 0$ aún óptima? Si no, encuentre el nuevo óptimo.
$-2X_1 + 4X_2 - 2X_7 \leq 12$	Recurso B	
$-4X_1 + 3X_2 + 8X_3 - X_7 \leq 10$	Recurso C	
$X_j \geq 0$; $j = 1,2,3,7$		

Nota: No son necesarios cálculos largos para ninguno de los encisos del problema

La solución óptima actual es:

Cj →			-1	3	-2	0	0	0
↓	VB	$\bar{b}$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
-1	X_1	4	1	0	4/5	2/5	1/10	0
3	X_2	5	0	1	2/5	1/5	3/10	0
0	X_6	11	0	0	10	1	-1/2	1
$Z_J - C_J$		11	0	0	12/5	1/5	4/5	0

2. Se ha concedido licencia a una nueva empresa de turismo, para realizar vuelos entre Bogotá y las Islas de San Andrés y Providencia e Interinsulares (Vuelos entre las islas del archipiélago). para ello, debe comprar turborreactores con los que cubrir los vuelos entre Bogotá y las Islas, así como Aviones de Hélice y/o helicópteros con los que servir los vuelos interinsulares. El presupuesto de compra es de $2.800'000.000. Las características de los aparatos que puede comprar la empresa de turismo son:

Tipo de Aparato	**Costo Por Unidad (en Millones de $)**	**Man/nto por Unidad ($ / día)**	**Requerimientos de Tripulación**			**Capacidad Pasajeros/mes**
			Pilotos	**Copi-lotos**	**Aza-fatas**	
Turborreactores	300	120.000	2	-	2	4.000
Aviones de Hélice	100	60.000	1	1	1	300
Helicópteros	50	30.000	1	-	-	100

Se pueden contratar como máximo 10 pilotos y 16 azafatas. Se desea contratar al menos 3 copilotos. El tráfico entre Bogotá y las Islas de San Andrés se estima en 8.000 pasajeros por mes; y el interinsular en 500 pasajeros por mes. El permiso concedido requiere que el número mínimo de aparatos sea de 15. La Empresa de Turismo desea operar con costos de mantenimiento mínimos.

a) Formular un modelo de programación Lineal que proporcione el plan óptimo de compra.
b) Resolver e interpretar al solución, manualmente y con el Software WinQsb.
c) Si existe la posibilidad de contratar 10 pilotos más, ¿ Cuál será la nueva solución?
d) Un cambio en el contrato reduce el número mínimo de aparatos a 14, ¿Cuál es el efecto económico a ésta modificación?

3. Un Empresario pretende fabricar dos tipos diferentes de congeladores denominados A y B . Cada uno de ellos debe pasar por tres operaciones antes de su comercialización: Ensamblaje, pintura y control de calidad. Los congeladores requieren, 2,5 y 3 horas de ensamblaje respectivamente, 3 y 6 kilogramos de esmalte para su pintura respectivamente y 14 y 10 horas de control de calidad respectivamente. Los costos totales de fabricación por unidad son: $30.000 y $28.000 respectivamente, y los precios de venta $52.000 y $48.000 respectivamente.

   El Empresario dispone semanalmente de 4.500 horas para ensamblaje, 3.400 kilogramos de esmalte y de 20.000 horas para control de calidad. Los estudios de mercado muestran que la demanda semanal de congeladores no supera las 1.700 unidades y que, la demanda del congelador tipo A, es de al menos, 600 unidades. Se desea:

   a) Formular un modelo de programación lineal que indique cuántos congeladores deben fabricarse de cada tipo para que el beneficio sea máximo, teniendo en cuenta el estudio de demanda.
   b) Resolverlo mediante el método simplex. Interpretar la solución óptima incluyendo las variables de holgura (Redondear la solución al valor entero por defecto). Resolverlo empleando el WinQsb, escogiendo como tipo de variable, la opción de ENTERA.
   c) Determinar los precios sombra de las horas de ensamblaje y control de calidad. Al fabricante le ofrecen disponer de 200 horas más para ensamblaje con un costo adicional total de $750.000. ¿Debería aceptar la oferta?

4. Una editorial dispone para impresión de 4.500 horas y para encuadernación de 4.000 horas. La tabla que sigue da los tiempos, en horas, empleados en ambas tareas para cuatro libros L_i ; i = 1,2,3,4 , así como sus beneficios, en miles de pesos.

Tipo de libro ➔	L_1	L_2	L_3	L_4
Impresión	0,1	0,3	0,8	0,4
Encuadernación	0,2	0,1	0,1	0,3
Beneficio / unidad	1	1	4	3

   a) Formule un modelo de programación lineal que proporcione el máximo beneficio y resuélvalo.
   b) Suponga que el departamento comercial de la Editorial no encuentran la solución razonable, y creen que, a lo sumo, se podrán vender 5.000 copias del libro L_4 a ese precio. para vender 10.000, su precio deberá bajar en $2.000 por copia. ¿Qué consecuencias tiene ésta hipótesis?. Obtener la mejor solución.

c) Al director de la Editorial le gustaría imprimir el libro L_2 . Desearía saber las consecuencias sobre el beneficio, así como la producción de los libros L_1 y L_4 si se producen 2.000 copias de L_2.
d) Si además en c) se propone que el libro L_2 lo encuaderne otra editorial que carga $500 más por copia, ¿Merece la pena ésta propuesta?

5. Una compañía vende dos tipos de fertilizantes que son fabricados en dos departamentos. El tipo A contribuye con $3 y el tipo B contribuye con $4 por tonelada.

Departamento	**Horas / tonelada**		**Horas máximas trabajadas por semana**
	Tipo A	**Tipo B**	
1	2	3	40
2	3	3	75

¿A cuál departamento debe dar prioridad en los fondos para la expanción de la planta?

6. Del problema principal, sabemos que una unidad de X_1 contribuye con $6 por unidad a la utilidad, requiere 2 horas en el departamento A y 1 hora en el departamento B. Una unidad de x_2 contribuye con $7 por unidad a la utilidad y requiere 1 hora en el departamento A y 3 horas en el departamento B. La capacidad máxima para cada departamento es de 40 horas.

   Formule el dual e indique el valor que se incrementa la utilidad por cada hora adicional en cada departamento.

7. Un taller de artesanías fabrica dos productos en dos departamentos. El producto X_1 contribuye con $6 por unidad a la utilidad y toma 6 horas en el departamento 1 y 6 horas en el departamento 2. El producto X_2 contribuye con $14 por unidad a la utilidad y toma 8 horas en el departamento 1 y 2 horas en el departamento 2. El departamento 1 tiene una capacidad de 38 horas y el departamento 2 42 horas. Indique el número máximo de producción en unidades y el nivel de producción para maximizar la utilidad y muestre la diferencia en la contrinución a la utilidad de los dos.

8. Una compañía requiere vendedores entrenados, las ventas del producto tienden a ser estacionales. La compañía rquiere el siguiente número mínimo de vendedores durante cada mes del año.

Mes	Número mínimo requerido de vendedores	Mes	Número mínimo requerido de vendedores
Enero	30	**Julio**	120
Febrero	20	**Agosto**	100
Marzo	40	**Septiembre**	60
Abril	90	**Octubre**	20
Mayo	110	**Noviembre**	20
Junio	120	**Diciembre**	10

Después de contratar un vendedor, se le envía a una escuela de entrenamientodurante 4 meses; después de su entrenamiento, el vendedor empieza a vender activamente. Aunque los miembros de la fuerza de venta reciben un buen salario, el trabajo es bastante pesado y la empresa ha observado que cada mes, aproximadamente el 10% del personal activo renuncia a la empresa. Construya la función objetivo y las restricciones que le permita a la compañía determinar el número de candidatos a vendedores que deben admitirsen al entrenamiento cada mes por los próximos 12 meses. La compañía desea contratar el menor número de personas pero manteniendo los requerimientos mínimos de la fuerza de venta para cada mes. Al principio de enero, la fuerza de venta consta de 50 vendedores activos y 90 en entrenamiento de los cuales 30 se convertirán en vendedores activos el 1º de marzo y 60 en vendedores activos el 1º de abril.

Use el WinQsb y haga un completo análisis post-óptimo a la solución óptima de éste problema.

9. He aquí la función objetivo, las restricciones y la tabla simplex final para un problema de mezcla de productos de programación lineal:

Función objetivo: Maximizar $Z = 2X_1 + 5X_2 + 8X_3$

con las siguientes restricciones:

$6X_1 + 8X_2 + 4X_3 \leq 96$
$2X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 40$
$5X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 60$

$X_J \geq 0$; $j = 1,2$ y 3

C_J	$\rightarrow$		2	5	8	0	0	0
$\downarrow$	**V.B.**	$\bar{b}$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
5	X_2	8/3	1/3	1	0	1/6	-1/3	0
8	X_3	56/3	5/6	0	1	-1/12	2/3	0
0	X_6	44/3	7/3	0	0	-1/3	-1/3	1
$Z_J - C_J$		**488/3**	**19/3**	**0**	**0**	**1/6**	**11/3**	**0**

a. Comente sobre el valor adicional para la compañía al añadir capacidad adicional en cada uno de los tres departamentos.
b. Determine el rango sobre el cual los precios marginales para las variables de holgura serán válidos.
c. Determine el rango sobre el cual los coeficientes de X_2 y X_3 pueden variar sin afectar la solución óptima.
d. ¿Cuál tendría que ser la contribución por unidad de X_1 para que esté en la solución óptima?
e. ¿Cuáles son las implicaciones de mercado de las respuestas que encontró en la parte c) y d) anteriores?

10. Del problema principal sabemos que una unidad del producto 1 contribuye a la utilidad con $7 y que requiere 3 unidades de entrada 1 (1 ingrediente) y 2 horas de mano de obra. Una unidad del producto 2 contribuye a la utilidad con $5 y requiere 1 unidad de entrada 1 y 1 hora de mano de obra. La capacidad de las entradas es actualmente de 48 unidades y hay 40 horas de mano de obra. Formule el dual de este problema e indique el valor para la firma de otra unidad de entrada 1 y otra hora de mano de obra.

11. He aquí la función objetivo, las restricciones, y la table simplex final de un problema de programación lineal de mezclas que involucra 4 productos y 3 departamentos.

    Función objetivo: Maximice $Z = 2X_1 + 4X_2 + X_3 + X_4$ con las siguientes restricciones:

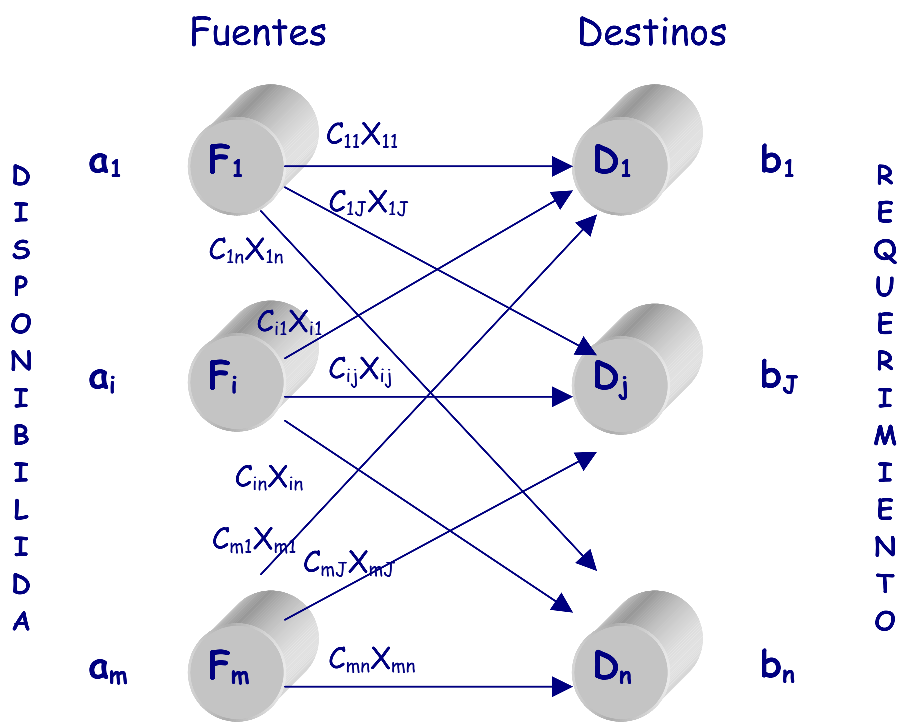
$$
\begin{aligned}
X_1 + 3X_2 \qquad\quad + X_4 &\leq 4 \\
2X_1 + X_2 \qquad\qquad\quad &\leq 3 \\
X_2 + 4X_3 + X_4 &\leq 3
\end{aligned}
$$

$X_j \geq 0$; $j = 1,2,3$ y 4

C_J $\rightarrow$			2	4	1	1	0	0	0
$\downarrow$	V.B.	$\bar{b}$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
4	X_2	1	0	1	0	2/5	2/5	-1/5	0
2	X_1	1	1	0	0	-1/5	-1/5	3/5	0
1	X_3	1/2	0	0	1	3/20	-1/10	1/20	1/3
$Z_J - C_J$		**13/2**	**0**	**0**	**0**	**7/20**	**11/10**	**9/20**	**1/3**

a) Comente sobre el valor que tiene para esta compañía el añadir capacidad adicional en cada uno de estos tres departamentos.
b) Determine el rango sobre el cual cada uno de los precios marginales para las variables de holgura serán válidos.
c) Determine el rango sobre el cual cada uno de los coeficientes de X_1, X_2 y X_3 puede variar sin afectar la solución óptima.
d) ¿Cuál tendría que ser la contribución de X_4 para que estuviera en la solución óptima?
e) ¿Cuáles son las implicaciones de mercado de las respuestas que encontró para las partes c) y d) anteriores?

Capítulo 10
Transporte y Transbordo



Introducción

En éste capítulo estudiaremos un modelo particular de problema de programación lineal, uno en el cual su resolución a través del método simplex es dispendioso, pero que debido a sus características especiales ha permitido desarrollar un método más práctico de solución.
El modelo de transporte se define como una técnica que determina un programa de transporte de productos o mercancías desde unas fuentes hasta los diferentes destinos al menor costo posible.

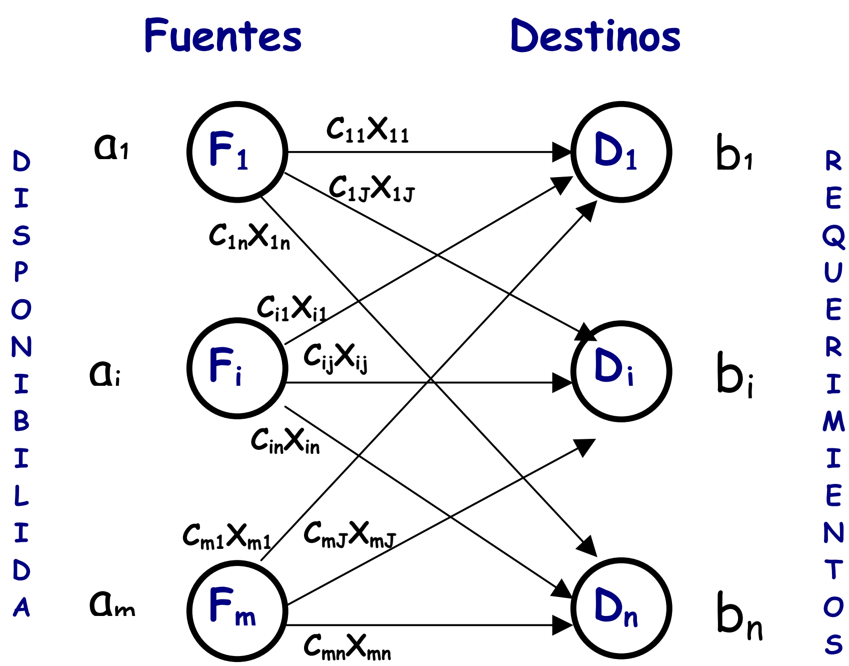
También estudiaremos el problema del transbordo en el que entre fuentes y destinos, existen estaciones intermedias. Por último estudiaremos el software WinQsb y el Invop.

Modelo General del Problema del Transporte

Es un caso especial de problema de programación Lineal, en el que todos los coeficientes de las variables en las restricciones tienen coeficiente uno (1), esto es:

$a_{i,j} = 1$; para todo i , para todo j

Gráficamente:



$X_{i,j}$= Unidades a enviar desde la fuente i-ésima (i=1,...,m) al destino j-ésimo (j=1,...,n)
$C_{i,j}$= Costo de enviar una unidad desde la fuente i-ésima (i=1,...,m) al destino j-ésimo (j=1,...,n)
a_i = Disponibilidad (oferta) en unidades, de la fuente i-ésima (i=1,...,m)
b_j = Requerimiento (demanda) en unidades, del destino j-ésimo (j=1,...,n)

Lo disponible = Lo requerido ➔ Oferta = Demanda ➔ Mercado Perfecto

Matemáticamente:

Minimizar $Z = C_{1,1}X_{1,1} + ... + C_{1,j}X_{1,j} + ... + C_{1,n}X_{1,n} + ... + C_{i,1}X_{i,1} + ... + C_{i,j}X_{i,j} + ... + C_{i,n}X_{i,n} + ... + C_{m,1}X_{m,1} + ... + C_{m,j}X_{m,j} + ... + C_{m,n}X_{m,n}$

C.S.R.

Todo lo disponible es enviado	Todo lo enviado fue requerido	¡¡ No se pierde nada !!
$X_{11} + \ldots + X_{1j} + \ldots + X_{1n} = a_1$	$X_{11} + \ldots + X_{ij} + \ldots + X_{mn} = b_1$	$X_{ij} \geq 0$
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$	
$X_{i1} + \ldots + X_{ij} + \ldots + X_{in} = a_i$	$X_{1j} + \ldots + X_{ij} + \ldots + X_{mj} = b_j$	$\forall_i , \forall_j$
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$	
$X_{m1} + \ldots + X_{mj} + \ldots + X_{mn} = a_m$	$X_{m1} + \ldots + X_{mj} + \ldots + X_{mn} = b_n$	

Todo lo disponible es enviado | **Todo lo enviado fue requerido** | **!! No se pierde nada !!**

Otra manera de formularlo

Minimice Z = $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} Xij$

C.S.R. $\sum_{j=1}^{n} Xij = a_i \quad ; \quad i = 1,\ldots,m$ Todo lo disponible es enviado

$\sum_{i=1}^{m} Xij = b_j \quad ; \quad j = 1,\ldots,n$ Todo lo enviado fue requerido

$X_{ij} \geq 0 \ ; \ i = 1,\ldots,m \ ; \ j = 1,\ldots,n$

Observación:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} Xij = \sum_{i=1}^{m} ai$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} Xij = \sum_{j=1}^{n} bj$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} ai = \sum_{j=1}^{n} bj$$

Disponibilidad = Requerimiento
Oferta = Demanda
Mercado Perfecto

Metodología General

Modelo Imperfecto	➔	Modelo Perfecto	➔	Método de Solución	➔	Solución	➔	Interpretación
Generalmente es lo que ocurre en la vida real.		Igualamos la oferta a la demanda, mediante fuentes o destinos de holgura		• Hallar una solución básica y factible. • Hallar la solución óptima				Interpretar la solución teórica v.s. la realidad.

Metodología de solución

Solución Básica Factible	➔	Optimización	➔	Solución Óptima	➔	Interpretación
Métodos Esquina Noroeste Costo Mínimo Vogel		**Métodos** Algebraico Heurístico Modi				

Ejemplo

Tres (3) fábricas envían su producto a cinco (5) distribuidores. Las disponibilidades, los requerimientos y costos unitarios de transporte, se dan en la siguiente tabla.

Fábricas	Distribuidores					Disponibilidades
	1	2	3	4	5	
1	20	19	14	21	16	**40**
2	15	20	13	19	16	**60**
3	18	15	18	20	**X**	**70**
Requerimientos	**30**	**40**	**50**	**40**	**60**	

¿Qué cantidad del producto se debe enviar desde cada fábrica a cada distribuidor para minimizar los costos del transporte?
NOTA: La "X" significa que desde la fábrica 3 es imposible enviar unidades al distribuidor 5

Solución

Observe que el modelo no es perfecto: La oferta es diferente a la demanda. Se adiciona una fábrica de relleno con costos de transporte igual a cero (0) y que ofrezca justo lo que le hace falta a la oferta para ser igual a la demanda.

Modelo Imperfecto ➔ Modelo de mercado perfecto

a_i	Fábricas	Distribuidores	b_j
40	1	1	30
60	2	2	40
70	3	3	50
170		4	40
50	4	5	60
220			**220**

NOTA: Adicionamos la fábrica cuatro (4) con una oferta de 50 unidades, para igualar la oferta a la demanda, dicha fábrica es de holgura.

Formulación

X_{ij} = Unidades a enviar desde la fábrica i-ésima (i=1,2,3,4) al distribuidor j-ésimo (j=1,2,3,4,5)

Minimizar $Z = 20X_{11} + 19X_{12} + 14X_{13} + 21X_{14} + 16X_{15} + 15X_{21} + 20X_{22} + 13X_{23} + 19X_{24} + 16X_{25} + 18X_{31} + 15X_{32} + 18X_{33} + 20X_{34} + \mathbf{MX_{35}}$

Valor muy grande en comparación con los demás C_{ij}

Nota: A X_{35} se le castiga con un coeficiente muy grande "Gran M" ya que Z nunca se minimizará mientras $X_{35} \geq 0$; Luego X_{35} terminará siendo variable NO-Básica, igual a cero (0) para que Z se minimice.

Con Las siguientes restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} = 40 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} = 60 \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} = 70 \\ X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} + X_{45} = 40 \end{array}\right| \text{Todo lo disponible es enviado}$$

$$\left.\begin{array}{l} X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} = 30 \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} = 40 \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} = 50 \\ X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} = 40 \\ X_{15} + X_{25} + X_{35} + X_{45} = 60 \end{array}\right| \text{Todo lo requerido fue enviado}$$

$X_{ij} \geq 0$; i = 1,2,3,4 ; j = 1,2,3,4,5

Solución Básica Factible

Como cada variable figura dos (2) veces en el sistema de ecuaciones, entonces tiene m+n-1 grados de libertad y el número de variables básicas debe ser igual al número de grados de libertad del sistema. Lo anterior nos asegura una solución básica factible no degenerada.

NÚMERO DE VARIABLES BÁSICAS = m + n – 1

Método de la esquina noroeste

Características

. Sencillo y fácil de hacer
. No tiene en cuenta los costos para hacer las asignaciones
. Generalmente nos deja lejos del óptimo

Algoritmo

1. Construya una tabla de ofertas (disponibilidades) y demandas (requerimientos).
2. Empiece por la esquina noroeste.
3. Asigne lo máximo posible (Lo menor entre la oferta y la demanda, respectivamente)
4. Actualice la oferta y la demanda y rellene con ceros el resto de casillas (Filas ó Columnas) en donde la oferta ó la demanda halla quedado satisfecha.
5. Muévase a la derecha o hacia abajo, según halla quedado disponibilidad para asignar.
6. Repita los pasos del 3 al 5 sucesivamente hasta llegar a la esquina inferior derecha en la que se elimina fila y columna al mismo tiempo.

Nota: No elimine fila y columna al mismo tiempo, a no ser que sea la última casilla. El romper ésta regla ocasionará una solución en donde el número de variables básicas es menor a m+n-1, produciendo una solución básica factible degenerada.

En nuestro problema de ejemplo:

30					~~40~~ 10
0					60
0					70
0					50
~~30~~ 0	40	50	40	60	

Aquí, asignamos en la fila 1, columna 1 lo máximo posible entre 40 y 30 o sea 30 unidades; X_{11}=30 variable básica. Actualizamos la oferta y la demanda, quedando éstas en: 10 y 0 y rellenamos con cero el resto de la columna 1, ya que la demanda de 30 unidades quedó satisfecha. Terminando el método, el tablero aparecerá así:

30	**10**	0	0	0	~~40~~ ~~10~~ 0
0	**30**	**30**	0	0	~~60~~ ~~30~~ 0
0	0	**20**	**40**	**10**	~~70~~ ~~50~~ ~~10~~ 0
0	0	0	0	**50**	~~50~~ 0
~~30~~	~~40~~	~~50~~	~~40~~	~~60~~	
0	~~30~~	~~20~~	0	~~50~~	
	0	0		0	

$X_{11} = 30$ $X_{12} = 10$ $X_{22} = 30$ $X_{23} = 30$ $X_{33} = 20$ $X_{34} = 40$ $X_{35} = 10$ $X_{45} = 50$

Nota: Es una solución básica factible no degenerada, porque se satisface todas las demandas y ofertas, todas las $X_{ij} \geq 0$ y el número de variables básicas es $m+n-1 = 4+5-1 = 8$

Como evitar eliminar fila y columna al mismo tiempo, sin estar en la última casilla, uso de ε

Supongamos que nuestro problema es:

30	0	0	0	0	~~30~~ 0
					70
					70
					50
~~30~~	40	50	40	60	
ε					

El $a_1 = 40$ y $a_2 = 60$ se han cambiado por $a_1 = 30$ y $a_2 = 70$ produciendo un empate entre la oferta y la demanda de la casilla 1,1 de 30 unidades

Para éste caso, procedemos así: Escoger satisfacer la fila o la columna (oferta o demanda), para nuestro ejemplo escogemos satisfacer la oferta, entonces decidimos que a la demanda le queda una cantidad muy pequeña por satisfacer, llamada ε (epsilon) cuyo valor es aproximadamente igual a cero (0), $\varepsilon \cong 0$ y para efectos de cálculos futuros $\varepsilon = 0$.

30	0	0	0	0	~~30~~ 0
ε	**40**	**30**	0	0	~~70~~ ~~70~~ ~~30~~ 0
0	0	**20**	**40**	**10**	~~70~~ ~~50~~ ~~10~~ 0
0	0	0	0	**50**	~~50~~ 0
~~30~~	~~40~~	~~50~~	~~40~~	~~60~~	
ε	0	~~20~~	0	~~50~~	
0		0		0	

Fíjese que el número de variables básicas es $m+n-1=8$

$X_{11} = 30$ $X_{21} = \varepsilon = 0$ $X_{22} = 40$ $X_{23} = 30$ $X_{33} = 20$ $X_{34} = 40$ $X_{35} = 10$ $X_{45} = 50$

Método del costo mínimo

Características

. Es más elaborado que el método de la esquina noroeste
. Tiene en cuenta los costos para hacer las asignaciones
. Generalmente nos deja alejados del óptimo

Algoritmo

1. Construya una tabla de disponibilidades, requerimientos y costos
2. Empiece en la casilla que tenga el menor costo de toda la tabla, si hay empate, escoja arbitrariamente (Cualquiera de los empatados).
3. Asigne lo máximo posible entre la disponibilidad y el requerimiento (El menor de los dos).
4. Rellene con ceros (0) la fila o columna satisfecha y actualice la disponibilidad y el requerimiento, restándoles lo asignado.
   Nota: Recuerde que no debe eliminar ó satisfacer fila y columna al mismo tiempo, caso en que la oferta sea igual a la demanda, en tal caso recuerde usar la ε (Epsilon).
5. Muévase a la casilla con el costo mínimo de la tabla resultante (Sin tener en cuenta la fila o columna satisfecha).
6. Regrese a los puntos 3,4,5 sucesivamente, hasta que todas las casillas queden asignadas.

En nuestro ejemplo, la tabla queda así:

0 [20]	[19]	[14]	[21]	[16]	40
0 [15]	[20]	[13]	[19]	[16]	60
0 [18]	[15]	[18]	[20]	[M]	70
30 [0]	[0]	[0]	[0]	[0]	~~50~~ 20
~~30~~ 0	40	50	40	60	

Fíjese que el menor costo de toda la tabla es cero (0), pero hay 5 celdas con costo cero (0), Escogemos al azar la fila 4, columna 1 y asignamos lo máximo posible entre 50 y 40 o sea 30, rellenamos la columna 1 con ceros (0) ya que quedó satisfecha y actualizamos la oferta de 50 a 20 (50 – 30 = 20).

Ahora escogemos el menor costo en la tabla que queda, volviéndose a presentar un múltiple empate, el cual dirimimos escogiendo la casilla de la fila 4, columna 2, y asignamos lo máximo posible entre 40 y 20. Diligenciando todo el tablero obtenemos:

0 [20]	0 [19]	0 [14]	0 [21]	40 [16]	40
0 [15]	0 [20]	50 [13]	0 [19]	10 [16]	60
0 [18]	20 [15]	0 [18]	40 [20]	10 [M]	70
30 [0]	20 [0]	0 [0]	0 [0]	0 [0]	~~50~~ 20
~~30~~ 0	~~40~~ ~~20~~ 0	~~50~~ 0	~~40~~ 0	~~60~~ ~~20~~ ~~10~~ 0	

Fíjese que el número de variables básicas es m+n-1=8
$X_{15} = 40$ $X_{23} = 50$ $X_{25} = 10$
$X_{32} = 20$ $X_{34} = 40$ $X_{35} = 10$
$X_{41} = 30$ $X_{42} = 20$
Nota: Es una solución básica factible no degenerada, porque se satisfacen todas las demandas y ofertas, todas las $X_{ij} \geq 0$ y el número de variables básicas es m+n-1=8

Método de vogel

Características

. Es más elaborado que los anteriores, más técnico y dispendioso.
. Tiene en cuenta los costos, las ofertas y las demandas para hacer las asignaciones.
. Generalmente nos deja cerca al óptimo.

Algoritmo

1. Construir una tabla de disponibilidades (ofertas), requerimientos (demanda) y costos.
2. Calcular la diferencia entre el costo mas pequeño y el segundo costo más pequeño, para cada fila y para cada columna.
3. Escoger entre las filas y columnas, la que tenga la mayor diferencia (en caso de empate, decida arbitrariamente).
4. Asigne lo máximo posible en la casilla con menor costo en la fila o columna escogida en el punto 3.
5. asigne cero (0) a las otras casillas de la fila o columna donde la disponibilidad ó el requerimiento quede satisfecho.
6. Repita los pasos del 2 al 5, sin tener en cuenta la(s) fila(s) y/o columna(s) satisfechas, hasta que todas las casillas queden asignadas.

Nota: Recuerde que no debe satisfacer filas y columnas al mismo tiempo; caso en que la disponibilidad sea igual al requerimiento; en tal caso use el ε (epsilon).

							a_i	D_i
		20	19	14	0 [21]	16	40	2
		15	20	13	0 [19]	16	60	2
		18	15	18	0 [20]	M	70	3
		0	0	0	40 [0]	0	~~50~~ 10	0
b_j		30	40	50	~~40~~ 0	60		
D_j		15	15	13	**19**	16		

Fíjese que la mayor diferencia la tiene la columna 4 con un valor de 19, escogido entre 2,2,3,0,15,13,19 y 16. El menor costo de la columna 4 es cero (0), se asigna lo máximo posible entre 50 y 40, que es 40, se satisface la columna y se actualiza la oferta y la demanda.

Ahora recalculamos las diferencias, sin tener en cuenta la columna 4, que está satisfecha.

Una vez ejecutado todo el algoritmo hasta asignar todas las casillas, obtenemos la siguiente asignación básica y factible inicial.

		D I S T R I B U I D O R E S					a_i	**Diferencias**
		1	**2**	**3**	**4**	**5**		
FÁBRICAS	**1**	0 [20]	0 [19]	0 [14]	0 [21]	**40** [16]	~~40~~ 0	**2**
	2	**30** [15]	0 [20]	**20** [13]	0 [19]	**10** [16]	~~60~~ ~~30~~ ~~10~~ 0	~~2~~ **3**
	3	0 [18]	**40** [15]	**30** [18]	0 [20]	0 [M]	~~70~~ ~~30~~ 0	~~3~~ ~~0~~ **M-18**
	4	0 [0]	0 [0]	0 [0]	**40** [0]	**10** [0]	~~50~~ ~~10~~ 0	**0**
b_j		~~30~~ 0	~~40~~ 0	~~50~~ ~~20~~ 0	~~40~~ 0	~~60~~ ~~50~~ 0	220	
Diferencias		~~15~~ **3**	~~15~~ **4**	~~13~~ **1**	**19**	~~16~~ **0**		

Fíjese que el número de variables básicas es: m+n-1=8

Solución básica factible no degenerada:

$X_{15}=40$; $X_{21}=30$; $X_{23}=20$; $X_{25}=10$; $X_{32}=40$; $X_{33}=30$; $X_{44}=40$; $X_{45}=10$

Z = 16(40) + 15(30) + 13(20) + 16(10) + 15(40) + 18(30) + 0(40) + 0(10) = 2.650

Conclusión: Hemos conseguido tres (3) soluciones básicas factibles no degeneradas (# de variables básicas = m+n-1=8) por medio de tres (3) métodos: El de la esquina noroeste, el del costo mínimo y el de Vogel. Pero ninguna de ellas nos garantiza que la solución encontrada es la óptima. Para saberlo, debemos estar seguros que ninguna de las variables no básicas pueda entrar a la base haciendo que la función objetivo disminuya. Para discernir un método que nos evalúe el efecto de introducir una unidad de cada variable no básicas, recurrimos al método algebraico que posteriormente se convertirá en el método MODI.

Importante: A partir de cualquiera de éstas tres (3) soluciones básicas factibles no degeneradas, debemos comenzar a iterar, para encontrar el óptimo.

Método algebraico

El sistema de ecuaciones iniciales es:

$$(0)\ \underline{\mathbf{Z}}-20X_{11}-19X_{12}-14X_{13}-21X_{14}-\underline{\mathbf{16X_{15}}}-\underline{\mathbf{15X_{21}}}-20X_{22}-\underline{\mathbf{13X_{23}}}-19X_{24}-\underline{\mathbf{16X_{25}}}-18X_{31}-\underline{\mathbf{15X_{32}}}-\underline{\mathbf{18X_{33}}}-20X_{34}-MX_{35} = 0$$

$$(1)\ X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} = 40 \quad (0)$$
$$(2)\ X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{44} + X_{15} = 60 \quad (0)$$
$$(3)\ X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} = 70 \quad (5)$$
$$(4)\ X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} + X_{45} = 50 \quad (-16)$$

$$(5)\ X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} + X_{51} = 30 \quad (15)$$
$$(6)\ X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} + X_{52} = 40 \quad (10)$$
$$(7)\ X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} + X_{53} = 50 \quad (13)$$
$$(8)\ X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} + X_{54} = 40 \quad (16)$$
$$(9)\ X_{15} + X_{25} + X_{35} + X_{45} + X_{55} = 60 \quad (16)$$

Fíjese que en la ecuación (0) aparece Z (Variable básica) acompañada de todas las variables básicas escogidas inicialmente.
Como en la ecuación (0) la variable básica debe ser Z, debemos sumar múltiplos de las restricciones a la función objetivo, de tal forma que se eliminen las variables básicas $X_{15},X_{21},X_{23},X_{25},X_{32},X_{33},X_{44},X_{45}$. Una forma de lograr esto, es multiplicar cada restricción por las constantes que aparecen entre paréntesis, frente a cada restricción.

$$Z-20X_{11}-19X_{12}-14X_{13}-21X_{14}-16X_{15}-15X_{21}-20X_{22}-13X_{23}-19X_{24}-16X_{25}-18X_{31}-15X_{32}-18X_{33}-20X_{34}-MX_{35}-0X_{41}-0X_{42}-0X_{43}-0X_{44}-0X_{45} = 0$$
$$5X_{31}+5X_{32}+5X_{33}+5X_{34}+5X_{35}-16X_{41}-16X_{42}-16X_{43}-16X_{44}-16X_{45} = 360-800$$
$$15X_{11}+10X_{12}+13X_{13}+16X_{14}+16X_{15}+15X_{21}+10X_{22}+13X_{23}+16X_{24}+16X_{25}+15X_{31}+10X_{32}+13X_{33}+16X_{34}+16X_{35}+15X_{41}+10X_{42}+13X_{43}+16X_{44}+16X_{45} = 450+400+650+640+960$$
$$Z-5X_{11}-9X_{12}-X_{13}-5X_{14}-10X_{22}-3X_{24}+2X_{31}+X_{34}-(M-21)X_{35}-X_{41}-6X_{42}-3X_{43}-0X_{44}-0X_{45} = 2.650$$

Observe que la nueva función objetiva es:

$$Z = 5X_{11} + 9X_{12} + X_{13} + 5X_{14} + 10X_{22} + 3X_{24} - 2X_{31} - X_{34} + (M-21)X_{35} + X_{41} + 6X_{42} + 3X_{43} + 2.650$$

Fíjese que se han eliminado todas las variables básicas de la función objetivo, siendo solamente Z la variable básica con un valor de 2.650

Si nos preguntamos: Cual es la variable que al aumentar hace que Z disminuya más, la respuesta es X_{31} (Tiene el coeficiente más negativo), luego es la mejor candidata para ser la variable que entra ya que por cada unidad que aumente, los costos totales del transporte se disminuyen en 2 unidades monetarias.

Nota: Éste proceso es muy dispendioso !! y por lo tanto vamos a considerar otro.

Método de tanteo:

Partiendo de la solución básica factible obtenida mediante el método de Vogel.

+1				$\mathbf{40^{-1}}$	40
$\mathbf{30^{-1}}$		20		$\mathbf{10^{+1}}$	60
	40	30			70
			40	10	50
30	40	50	40	60	

Analizamos que efecto causa sobre el valor de la función objetivo actual (Z=2.650) el intentar enviar 1 unidad desde la fábrica 1 al distribuidor 1 ($X_{11}=1$). Éste cambio causa un desequilibrio en la oferta y la demanda; La primera fila suma 41 en lugar de 40 y la primera columna suma 31 en lugar de 30. Esto se arregla sumando 1 y restado 1 en sitios estratégicos, de tal forma que la oferta y la demanda se vuelvan a cumplir.

1^{20}				39^{16}	40
29^{15}		20^{13}		11^{16}	60
	40^{15}	30^{18}			70
			40^{0}	10^{0}	50
30	40	50	40	60	

El nuevo valor de Z es: Z = 20(1) + 16(39) + 15(29) + 13(20) + 16(11) + 15(40) + 18(30) + 0(40) + 0(10) = 2.655
El valor de Z se incrementó en: 2.655-2.650 = **5**. Observe que **5** es el coeficiente de X_{11} en la nueva ecuación de Z obtenida mediante el método algebraico.

Conclusión: Mediante éste método podemos analizar todos los efectos, de considerar enviar una unidad desde las fábricas a los distribuidores, en las casillas de las variables no-básicas (X_{ij} = 0) , para observar si existen variables no-básicas que al entrar a la base, hagan que Z disminuya; Por supuesto, los resultados coincidirán con los coeficientes de la función objetiva lograda mediante el método algebraico.

Conclusión: El presente método es muy dispendioso, aunque un poco menos que el método algebraico; Si se efectúa en su totalidad, el resultado es:

5	9	1	5	
	10		3	
-2			**-1**	M-21
1	6	3		

Aquí, al igual que en el método algebraico la variable a escoger para entrar a la base es: X_{31} ya que por cada unidad que crezca, hace que Z disminuya 2 unidades monetarias.

Ahora se describe un método más practico para encontrar éste último tablero en donde podemos escoger la variable que entra de forma rápida. Primero se muestra la deducción matemática del método y después su aplicación práctica. El procedimiento recibe el nombre del Método Modificado de distribución (Modi), ya que lleva a escoger la variable que entra, la variable que sale y la nueva solución mejorada en donde Z disminuye su valor.

Método Modificado de distribución (Modi)

Variable que entra

El problema original es:

$$\text{Minimice } Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} CijXij \qquad\qquad \text{Minimice } Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} CijXij$$

$$\text{C.S.R.} \quad \sum_{j=1}^{n} Xij = a_i \ ; \ i = 1,\dots,m \qquad \Rightarrow \qquad \text{C.S.R.} \quad a_i - \sum_{j=1}^{n} Xij = 0 \ ; \ i = 1,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} Xij = b_j \ ; \ j = 1,\dots,n \qquad\qquad b_j - \sum_{i=1}^{m} Xij = 0 \ ; \ j = 1,\dots,n$$

$$X_{ij} \geq 0 \ ; \ i = 1,\dots,m \ ; \ j = 1,\dots,n \qquad\qquad X_{ij} \geq 0 \ ; \ i = 1,\dots,m \ ; \ j = 1,\dots,n$$

Al haber escogido una solución básica factible (Con cualquiera de los tres (3) métodos estudiados: Esquina noroeste, mínimo costo ó Vogel), aparecen en la función objetivo algunas de las variables básicas, y cualquier múltiplo de las restricciones puede sumarse o restarse de la función objetiva para eliminarlas, llamamos éstos múltiplos u_i y v_j ; Luego:

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} CijXij$$

$$\left[a_i - \sum_{j=1}^{n} Xij = 0\right] u_i \ ; \ i = 1,\dots,m$$

$$\left[b_j - \sum_{i=1}^{m} Xij = 0\right] v_j \ ; \ j = 1,\dots,n$$

Escogemos los u_i y los v_j de tal manera que al restar los múltiplos de las restricciones a la función objetivo, se eliminen las variables básicas de ésta.

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} CijXij + u_i\left[a_i - \sum_{j=1}^{n} Xij = 0\right] + v_j\left[b_j - \sum_{i=1}^{m} Xij = 0\right]$$

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} CijXij \ + \ \sum_{i=1}^{m} uiai \ - \ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} uiXij \ + \ \sum_{j=1}^{n} vjbj \ - \ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} vjXij$$

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (Cij - ui - vj)Xij \ + \ \sum_{i=1}^{m} uiai \ + \ \sum_{j=1}^{n} vjbj$$

Para las **VARIABLES BÁSICAS**, se debe cumplir que $C_{ij} - u_i - v_j = 0$
Para las **VARIABLES NO BÁSICAS**, su coeficiente es $C_{ij} - u_i - v_j$

Partiendo de la solución básica factible encontrada por el método de vogel, aplicamos el método de modi, para averiguar cual es la variable no básica que debe entrar y cual la variable básica que debe salir. para ello efectuamos los siguientes pasos:

1. Construimos una tabla de costos para las variables básicas y en ella calculamos los u_i y los v_j que cumplan $C_{ij} - u_i - v_j = 0$
2. Construimos una tabla de costos ó coeficientes en la función objetiva para las variables no básicas cuyo valor es $C_{ij} - u_i - v_j$

[20]	[19]	[14]	[21]	40 [16]
30 [15]	[20]	20 [13]	[19]	10 [16]
[18]	40 [15]	30 [18]	[20]	[M]
[0]	[0]	[0]	40 [0]	10 [0]

Z = 2.650

Solución básica factible no degenerada lograda mediante el método de vogel, con m+n-1=8 variables básicas.

						u_i
					16	0
	15		13		16	<u>0</u>
		15	18			5
				0	0	-16
v_j	15	10	13	16	16	

Tabla de costos para las variables básicas

Calculamos los u_i ^ v_j de tal forma que $C_{ij} - u_i - v_j = 0$. Asignamos el primer valor de u_i ó de v_j arbitrariamente, Preferentemente 0 (Puede ser cualquier valor) en la fila ó columna, que tenga la mayor cantidad de asignaciones (Variables Básicas), para nuestro caso, fila 3 ó columna 5. Con base en éste primer valor, calculamos todos los u_i y v_j, aplicando $C_{ij} - u_i - v_j = 0$, para $u_i = C_{ij} - v_j$ ó $v_j = C_{ij} - u_i$, así:

$V_1 = C_{21} - u_2 = 15 - 0 = 15$ $u_1 = C_{15} - v_5 = 16 - 16 = 0$ $V_2 = C_{32} - u_3 = 15 - 5 = 10$
$V_3 = C_{23} - u_2 = 13 - 0 = 13$ $u_3 = C_{33} - v_3 = 18 - 13 = 5$ $V_5 = C_{45} - u_5 = 0 - (-16) = 16$
$V_5 = C_{25} - u_2 = 16 - 0 = 16$ $u_5 = C_{45} - v_5 = 0 - 16 = -16$

Observe que el cálculo para cualquier u_i ,es el costo menos el respectivo v_j y para cualquier v_j , es el costo menos el respectivo u_i

5	9	1	5	
	10		3	
-2			**-1**	M-21
1	6	3		

Tabla de costos para las variables no básicas $C_{ij}-u_i-v_j$, así:

$C_{11} - u_1 - v_1 = 20 - 0 - 15 = 5$ $C_{14} - u_1 - v_4 = 21 - 0 - 16 = 5$
$C_{12} - u_1 - v_2 = 19 - 0 - 10 = 9$ $C_{22} - u_2 - v_2 = 20 - 0 - 10 = 10$
$C_{13} - u_1 - v_3 = 14 - 0 - 13 = 1$ $C_{24} - u_2 - v_4 = 19 - 0 - 16 = 3$

$C_{31} - u_3 - v_1 = 18 - 5 - 15 = -2$ $C_{41} - u_4 - v_1 = 0 - (-16) - 15 = 1$
$C_{34} - u_3 - v_4 = 20 - 5 - 16 = -1$ $C_{42} - u_4 - v_2 = 0 - (-16) - 10 = 6$
$C_{35} - u_3 - v_5 = M - 5 - 16 = M-21$ $C_{43} - u_4 - v_3 = 0 - (-16) - 13 = 3$

Observe que éstos cálculos se pueden hacer directamente sobre la tabla, aplicando para las casillas de las variables no básicas $C_{ij} - u_i - v_j$

Fíjese que en ésta última tabla, están todos los coeficientes de las variables no básicas en la función objetiva, después de haber sumado múltiplos de las restricciones a la función objetivo para eliminar las variables básicas. La nueva función objetivo es:

$$Z = 5X_{11} + 9X_{12} + X_{13} + 5X_{14} + 10X_{22} + 3X_{24} \mathbf{-2\underline{X}_{31} - \underline{X}_{34}} + (M-21)X_{35} + X_{41} + 6X_{42} + 3X_{43} + 2.650$$

La variable que al crecer hace que Z disminuya más es X_{31} , luego escogemos ésta variable para entrar a la base.
Observe que en la tabla de costos para las variables no básicas se encuentran los valores en que aumenta ó disminuye Z por cada unidad de crecimiento de las variables no básicas.
Identificada la variable para entrar (X_{31}), debemos determinar la variable para salir, que debe ser aquella que primero se vuelva cero (0) a medida que la variable que entra crezca. para ello, construimos un circuito cerrado de (+) y (-), empezando, sumando en la casilla de la variable que entra X_{31}. Observe que el circuito de (+) y (-) tiene como objetivo preservar la suma de las filas y de las columnas, esto es, seguir satisfaciendo la oferta y la demanda, conservando la factibilidad del problema.

20	19	14	21	40 16
30 15 −	20	**20** 13 +	19	10 16
18 +	40 15	**30** 18 −	20	M
0	0	0	40 0	10 0

Z=2.650 ; Variable que entra X_{31}. Fíjese que a medida que X_{31} crece, X_{21} y X_{33} decrecen en la misma cantidad. Aquí X_{21} y X_{33} llegan a cero al mismo tiempo. Escogemos arbitrariamente a X_{33} como variable que sale y a X_{21} al restarle 30 quedará con un valor de $\varepsilon \cong 0$

20	19	14	21	40 16	40
ε 15	20	50 13	19	10 16	60
30 18	40 15	18	20	M	70
0	0	0	40 0	10 0	50
30	40	50	40	60	

Z=(40)(15)+(0)(15)+(50)(13)+(10)(16)+(30)(18)+(40)(15)+(40)(0)+(10)(0) = 2.590

. Fíjese que m+n-1=8
. X_{21} es variable básica = 0
. La oferta es igual a la demanda.
. Z disminuye en 60 unidades; 2(30)=60
$\Rightarrow$ 2.650 – 60 = 2.590

La pregunta aquí es: Ésta es la solución óptima?, la respuesta la conoceremos cuando calculemos la nueva tabla de costos para las variables no básicas.

					u_i
				16	0
	15		13		16	0
	18	15				3
				0	0	-16
v_j	15	12	13	16	16	

Tabla de costos para las variables básicas: $C_{ij} - u_i - v_j = 0$

5	7	1	5	
	8		3	
		2	1	M-19
1	4	3		

Tabla de costos para las variables no básicas: $C_{ij} - u_i - v_j$

<u>**Fíjese que todos son > 0 $\Rightarrow$ Estamos en la solución óptima.**</u>

Solución óptima

Variables básicas:

$X_{15}^* = 40$	$X_{25}^* = 10$	$X_{54}^* = 40$	$Z^* = 40(16)+0(15)+50(13)+10(16)+30(18)+40(15)+$
$X_{21}^* = \varepsilon = 0$	$X_{31}^* = 30$	$X_{55}^* = 10$	$40(0)+10(0) = 2.590$
$X_{23}^* = 50$	$X_{32}^* = 40$		

Interpretación de la solución

La forma óptima de hacer los envíos desde las fábricas (1,2,3) a los distribuidores (1,2,3,4,5) para que los costos totales del transporte sean mínimos es:

Desde la fábrica 1 al distribuidor 5 enviar 40 unidades, a un costo de: $ 640
Desde la fábrica 2 al distribuidor 3 enviar 50 unidades, a un costo de: $ 650
Desde la fábrica 2 al distribuidor 5 enviar 100 unidades, a un costo de: $ 160
Desde la fábrica 3 al distribuidor 1 enviar 30 unidades, a un costo de: $ 540
Desde la fábrica 3 al distribuidor 2 enviar 40 unidades, a un costo de: $ 600

Total de unidades enviadas 170, a un costo total de $2.590

Observe que el distribuidor 4 se quedará sin sus 40 unidades y que el distribuidor 5 sin sus 10 unidades, en total quedará una demanda insatisfecha de 50 unidades (Información que conocimos desde el principio), lo relevante aquí, es que ahora sabemos a quien no enviarle las 50 unidades que no tienen los distribuidores y que podemos tomar decisiones administrativas referentes a la demanda no cubierta, tales como:

1. Conseguir las 50 unidades a través de la competencia agremiada, como consecuencia de acuerdos previamente establecidos.
2. Acordar con el distribuidor 4 y 5 cubrir dicha demanda en el periodo de producción siguiente.
3. Otras decisiones podrán ser tomadas en concordancia con la situación real.

Problema de transporte con costos de producción

Una compañía tiene 4 fábricas (F_1 , F_2 , F_3 , F_4), que envían su producción a 4 almacenes (A_1 , A_2 , A_3 , A_4). Los costos y capacidades de producción, en cada una de las 4 fábricas son:

Fábricas	Costos por unidad ($/Unidad)	Capacidad máxima de producción (Unidades / mes)
F_1	40	140
F_2	43	260
F_3	39	360
F_4	45	220

Las demandas mensuales del producto en cada uno de los 4 puntos de distribución son:

Almacén	Demanda mensual (En Unidades)
A_1	180
A_2	280
A_3	150
A_4	200

Los costos del transporte, en $/Unidad, entre las diversas combinaciones de fábricas y almacenes son:

Fábrica	A L M A C E N E S			
	A_1	A_2	A_3	A_4
F_1	48	60	56	58
F_2	47	57	53	59
F_3	51	63	61	63
F_4	51	63	55	61

Formule Un problema de programación lineal para minimizar los costos de transporte y producción, y encuentre la solución óptima.

X_{ij} = Unidades de producto a enviar desde la fábrica i-ésima (i=1,2,3,4), al almacén j-ésimo(j=1,2,3,4)

Minimizar $Z = 40(X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14}+) + 43(X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24}) + 39(X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34}) + 45(X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44}) + 48X_{11} + 60X_{12} + 56X_{13} + 58X_{14} + 47X_{21} + 57X_{22} + 53X_{23} + 59X_{24} + 51X_{31} + 63X_{32} + 61X_{33} + 63X_{34} + 51X_{41} + 63X_{42} + 55X_{43} + 61X_{44}$

C.S.R.

$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} \leq 140$ $\quad$ $X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} \geq 180$ $\quad$ $X_{ij} \geq 0$; $i = 1,2,3,4$

$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} \leq 260$ $\quad$ $X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} \geq 280$ $\quad$ $J = 1,2,3,4$

$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} \leq 360$ $\quad$ $X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} \geq 150$

$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} \leq 220$ $\quad$ $X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} \geq 200$

Simplificando la función objetivo, queda así:

Minimice Z = $88X_{11} + 100X_{12} + 96X_{13} + 98X_{14} + 90X_{21} + 100X_{22} + 96X_{23} + 102X_{24} + 90X_{31} + 102X_{32} + 100X_{33} + 102X_{34} + 96X_{41} + 108X_{42} + 100X_{43} + 106X_{44}$

Evaluamos las oferta frente a la demanda, de no ser iguales, la igualamos mediante variables de holgura.

Fábricas	a_i	Distribuidores	b_j
F_1	140	A_1	180
F_2	260	A_2	280
F_3	360	A_3	150
F_4	220	A_4	200
	980		810
		A_5	170
			980

Creamos el almacén artificial A_5 con una demanda de 170 unidades.

$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} = 140$
$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} = 260$
$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} = 360$
$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} + X_{45} = 220$

$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} = 180$
$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} = 280$
$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} = 150$
$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} = 200$
$X_{15} + X_{25} + X_{35} + X_{45} = 170$

$X_{ij} \geq 0$; i = 1,2,3,4
J = 1,2,3,4,5

		D I S T R I B U I D O R E S					a_i	**Diferencias**
		1	**2**	**3**	**4**	**5**		
FÁBRICAS	**1**	88 0	100 0	96 0	98 **140**	0 0	~~140~~ 0	~~88~~ ~~8~~ 2
	2	90 0	100 **160**	96 **100**	102 0	0 0	~~260~~ ~~160~~ 0	~~90~~ ~~6~~ 4 2
	3	90 **180**	102 **120**	100 0	102 **60**	0 0	~~370~~ ~~180~~ 0	~~90~~ ~~10~~ ~~2~~ 0
	4	96 0	108 0	100 **50**	106 0	0 **170**	~~220~~ ~~50~~ 0	~~96~~ 4 6
b_j		~~180~~ 0	~~280~~ ~~120~~	~~150~~ ~~100~~ 0	~~200~~ ~~60~~ 0	~~170~~ 0	980	
Diferencias		2	~~0~~ 2	0	4 0	0		

Número de variables básicas: m + n – 1 = 4 + 5 – 1 = 8

Partiendo de ésta solución básica factible no degenerada encontrada por el método de aproximación de vogel, aplicamos el método de modi, para efectuar las iteraciones y encontrar la solución óptima.

Z = 78.880

			140	
	160	100		
180	120		60	
		50		170

					u_i
			98		-4
	100	96			-2
0	102		102		0
		100			2
0	102	98	102	-2	

12	2	2		6
2			2	4
		2		2
4	4		2	

$X_{14}^* = 140$
$X_{22}^* = 160$
$X_{23}^* = 100$
$X_{31}^* = 180$
$X_{32}^* = 120$
$X_{34}^* = 60$
$X_{43}^* = 50$
$X_{45}^* = 170$

La fábrica 4 se quedará con 170 unidades en su bodega, ya que el destinatario 5 es artificial.

$Z^* = 140(98) + 160(100) + 100(96) + 180(90) + 120(102) + 60(102) + 50(100) + 170(0) = \$78.880$

El problema del transbordo

Este problema corresponde al enunciado del problema número 6 del capítulo de formulación. Allí se convirtió un problema de transbordo en un problema clásico de transporte, construyéndose la siguiente matriz de costos.

Plantas de Producción	**Centros de Ventas**				**Disponibilidad (Monitores)**
	V_1	**V_2**	**V_3**	**V_4**	
P_1	37	36	36	40	80
P_2	35	34	34	38	60
Requerimientos	30	20	140	40	230 140

Igualamos la oferta y la demanda mediante la creación de una planta de producción ficticia.

Plantas de Producción	a_i	Centros de ventas	b_j
P_1	80	V_1	30
P_2	60	V_2	20
	140	V_3	140
P_4	90	V_4	40
	230		230

Aplicamos el método aproximativo de Vogel

		Centro de Ventas 1	**2**	**3**	**4**	**a_i**	**Diferencias**
PLANTA	**1**	0 $\boxed{37}$	**20** $\boxed{36}$	**60** $\boxed{36}$	0 $\boxed{40}$	~~80~~ 0	0
	2	0 $\boxed{35}$	0 $\boxed{34}$	**60** $\boxed{34}$	0 $\boxed{38}$	~~60~~ 0	0
	3	**30** $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	**20** $\boxed{0}$	**40** $\boxed{0}$	~~90~~ ~~50~~ ~~20~~ 0	0
b_j		~~30~~ 0	~~20~~ 0	~~140~~ ~~120~~ 60	~~40~~ 0	Número de variables Básicas:	
Diferencias		35	34	34	38	m+n-1 = 3+4-1 = 6	

Z = 4.920

	20	60	
		60	
30		20	40

	36	36		36
		34		34
0		0	0	0
0	0	0	0	

1			4
1	0		4
	0		

Z = 20(36) + 60(36) + 60(34) + 30(0) + 20(0) = 4.920

Solución Óptima:

$X_{12}^* = 20$
$X_{13}^* = 60$
$X_{23}^* = 60$
$X_{31}^* = 30$
$X_{33}^* = 20$
$X_{34}^* = 40$

$Z^* = \$4.920$

De acuerdo a la matriz de costos y al gráfico presentado en el problema 6 del capítulo de formulación, las unidades deberán ser despachadas así:

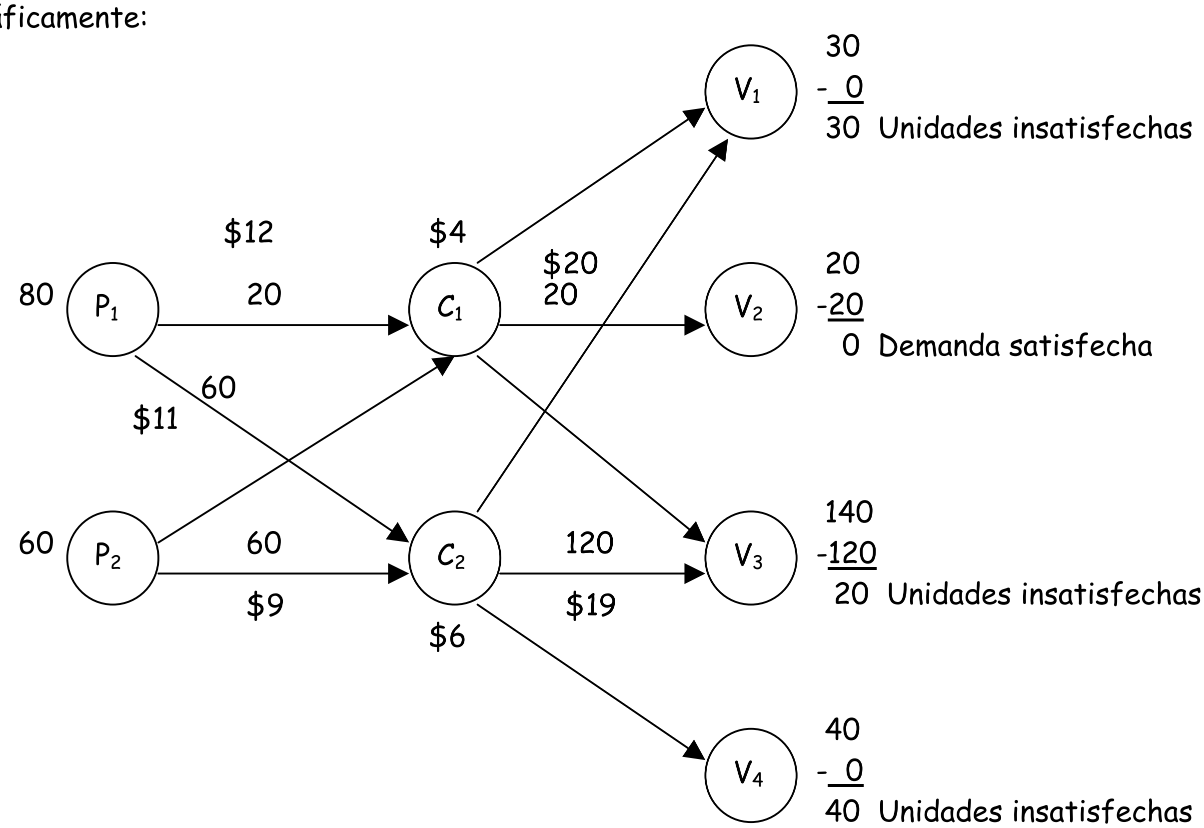
	V_1	V_2	V_3	V_4
P_1	37 (C_2)	36 (C_1)	36 (C_2)	40 (C_2)
P_2	35 (C_2)	34 (C_1)	34 (C_2)	38 (C_2)

Desde la planta de producción P_1 , enviar 20 monitores de alta resolución al centro de ventas V_2 , a través del centro de control de calidad C_1.

Desde la planta de producción P_1, enviar 60 unidades al centro de ventas V_3, a través del centro de control de calidad C_2..

Desde la planta de producción P_2, enviar 60 unidades al centro de ventas V_3, a través del centro de control de calidad C_2 .

Gráficamente:



Costos Totales: 20(12) + 20(4) + 20(20) = 720
60(11) + 60(6) + 60(19) = 2.160
60(9) + 60(6) + 60(19) = 2.040
$4.920

Sistema Operativo de Producción

Este problema corresponde al enunciado del problema número 14 del capítulo de formulación. Allí se resolvió mediante el método simplex; Aquí construimos una tabla de costos, disponibilidades y requerimientos.

		Primer Trimestre	Segundo Trimestre	Tercer Trimestre	Cuarto Trimestre	Capacidad de Producción	Plan de Producción
Primer Trimestre	Tiempo Normal	X_{11} 50	X_{12} 53	X_{13} 56	X_{14} 59	50.000	
	Tiempo Extra	H_{11} 75	H_{12} 78	H_{13} 81	H_{14} 84	50.000	
	Tiempo Maquina	M_{11} 85	M_{12} 88	M_{13} 91	M_{14} 94	40.000	
Segundo Trimestre	Tiempo Normal		X_{22} 50	X_{23} 53	X_{24} 56	50.000	
	Tiempo Extra		H_{22} 75	H_{23} 78	H_{24} 81	50.000	
	Tiempo Maquina		M_{22} 85	M_{23} 88	M_{24} 91	40.000	
Tercer Trimestre	Tiempo Normal			X_{33} 50	X_{34} 53	50.000	
	Tiempo Extra			H_{33} 75	H_{34} 78	50.000	
	Tiempo Maquina			M_{33} 85	M_{34} 88	40.000	
Cuarto Trimestre	Tiempo Normal				X_{44} 50	50.000	
	Tiempo Extra				H_{44} 75	50.000	
	Tiempo Maquina				M_{44} 85	40.000	
Demanda		50.000	150.000	200.000	52.000		
Costos Totales							

X_{ij} = Unidades a fabricar mediante la fuerza de trabajo regular en el trimestre i-ésimo (i=1,2,3,4), para atender la demanda del trimestre j-ésimo (j=1,2,3,4).

H_{ij} = Unidades a fabricar mediante la fuerza de trabajo en horas extras en el trimestre i-ésimo (i=1,2,3,4), para atender la demanda del trimestre j-ésimo (j=1,2,3,4).

M_{ij} = Unidades a fabricar mediante la fuerza de trabajo subcontratada en el trimestre i-ésimo (i=1,2,3,4), para atender la demanda del trimestre j-ésimo (j=1,2,3,4)

Siendo j = i, ... ,n ; Ya no es lógico producir unidades para atender demandas pasadas.

En la parte superior derecha de cada casilla aparece el costo unitario por unidad producida, es así como una unidad producida mediante la fuerza de trabajo regular, para suplir la demanda del segundo trimestre, tiene un costo de $53, distribuidos así: $50 de producción más $3 de inventario.

Empezamos por la esquina noroeste y asignamos lo máximo posible para atender la demanda de 50.000 unidades, produciendo lo máximo posible en tiempo normal, cubrimos la demanda.

Nos movemos a la fila del segundo trimestre con producción en tiempo normal y asignamos lo máximo posible (50.000), haciéndose necesario producir lo máximo posible en horas extras, (50.000) y en trabajo suplementario (40.000), para un total de 140.000 unidades a producir, quedando sin cubrir la demanda de 10.000 unidades, ya que la totalidad de la demanda para el segundo trimestre es de 150.000 unidades. Lo anterior obliga a recurrir a unidades (lo más baratas posibles) producidas en el trimestre inmediatamente anterior, luego asignamos 10.000 unidades a producir en el primer trimestre en tiempo extra para cubrir la demanda del segundo trimestre; Este movimiento se muestra en la tabla parcial siguiente:

		Primer Trimestre	**Segundo Trimestre**	**Tercer Trimestre**	**Cuarto Trimestre**	**Capacidad de Producción**	**Plan de Producción**
Primer Trimestre	Tiempo Normal	50.000 (50)	(53)	(56)	(59)	~~50.000~~ 0	
	Tiempo Extra	(75)	10.000 (78)	(81)	(84)	~~50.000~~ 40.000	
	Tiempo Maquina	(85)	(88)	(91)	(94)	40.000	
Segundo Trimestre	Tiempo Normal		50.000 (50)	(53)	(56)	~~50.000~~ 0	
	Tiempo Extra		50.000 (75)	(78)	(81)	~~50.000~~ 0	
	Tiempo Maquina		40.000 (85)	(88)	(91)	~~40.000~~ 0	
Demanda		~~50.000~~ 0	~~150.000~~ 0				

Completando la tabla, los datos aparecen así:

		Primer Trimestre	Segundo Trimestre	Tercer Trimestre	Cuarto Trimestre	Capacidad de Producción	Plan de Producción
Primer Trimestre	Tiempo Normal	**50** 50.000	**53**	**56**	**59**	~~50.000~~ 0	50.000
	Tiempo Extra	**75**	**78** 10.000	**81** 40.000	**84**	~~50.000~~ ~~40.000~~ 0	50.000
	Tiempo Maquina	**85**	**88**	**91** 20.000	**94**	~~40.000~~ ~~20.000~~ 0	20.000
Segundo Trimestre	Tiempo Normal		**50** 50.000	**53**	**56**	~~50.000~~ 0	50.000
	Tiempo Extra		**75** 50.000	**78**	**81**	~~50.000~~ 0	50.000
	Tiempo Maquina		**85** 40.000	**88**	**91**	~~40.000~~ 0	40.000
Tercer Trimestre	Tiempo Normal			**50** 50.000	**53**	~~50.000~~ 0	50.000
	Tiempo Extra			**75** 50.000	**78**	~~50.000~~ 0	50.000
	Tiempo Maquina			**85** 40.000	**88**	~~40.000~~ 0	40.000
Cuarto Trimestre	Tiempo Normal				**50** 50.000	~~50.000~~ 0	50.000
	Tiempo Extra				**75** 2.000	~~50.000~~ 48.000	2.000
	Tiempo Maquina				**85**	40.000	
Demanda		~~50.000~~ 0	~~150.000~~ 0	~~200.000~~ 0	~~52.000~~ 0		
Costos Totales		$2'500.000	$10'430.000	$14'710.000	$2'650.000	$30'290.000	

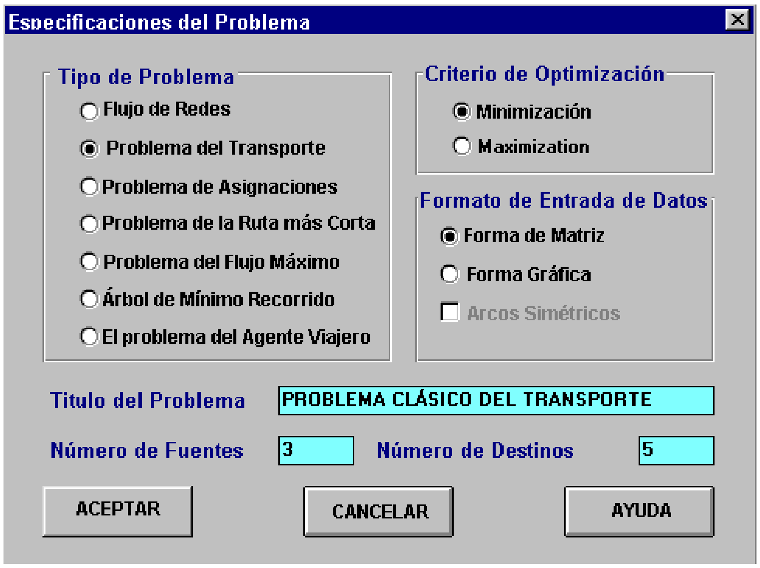
En la última columna queda diseñado el plan de producción por tipo de fuerza de trabajo y por trimestre; En la última fila se muestran los costos de las unidades producidas por trimestre. Los inventarios trimestrales se observan sobre cada columna, anteriores al trimestre observado y ellos son: 70.000 y 60.000 unidades para los semestres 2 y 3 respectivamente, todas unidades producidas durante el primer semestre.

Problema clásico del transporte

Este problema corresponde al enunciado del problema número 5 del capítulo de formulación. Aquí, se mostrará la aplicación del software WinQsb e Invop para encontrar la solución óptima.

Software WinQsb

El WinQsb maneja el problema del transporte en su módulo de Modelos de Redes, el cual en su inicio nos muestra la siguiente ventana, que se debe diligenciar así:



Fíjese que éste módulo también resuelve otros modelos de redes, que se especifican en la parte izquierda de la ventana.

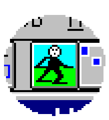
Los datos se pueden ingresar de dos formas: En una matriz ó tablero de doble entrada ó de forma gráfica.

A continuación se ilustra el ingreso de datos en la tabla de doble entrada

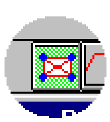
Desde \ hasta	Pereira	Tulúa	Anserma	Ibagué	Armenia	Oferta
Bogotá	55	30	40	50	40	20
Medellín	35	30	100	45	60	40
Cali	40	60	95	35	30	40
Demanda	25	10	20	30	15	

El modo de edición del menú principal permite cambiar los rótulos de las fuentes y los destinos. No es necesario que la oferta sea igual a la demanda, el software se encarga de agregar fuentes ó destinos de holgura, según sea la necesidad.

Para solucionar el problema, se da clic sobre el icono que aparece en la parte superior y que se señala en la figura siguiente:

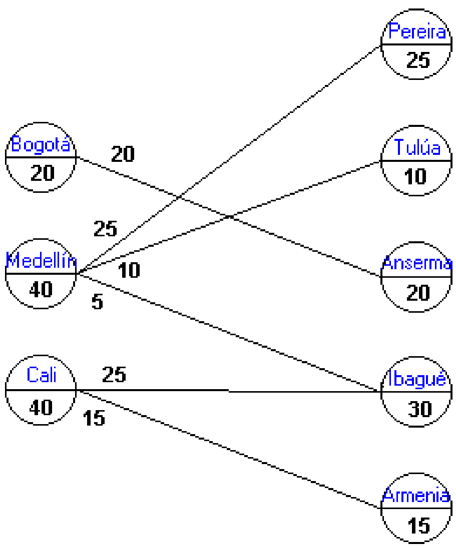


El WinQsb le ofrecerá entonces una ventana con la respuesta óptima del problema, indicando cuántas unidades enviar desde cada una de las ciudades de origen a cada una de las ciudades de destino, con su costo por envío y el costo total de la operación.



Si se usa éste icono, el WinQsb nos ilustrará mediante una red la respectiva respuesta óptima al problema.

06-26-2001	Desde	Hasta	despacho	Costo Unitario	Costo Total	Costo Reducido
1	Bogotá	Anserma	20	40	800	0
2	Medellín	Pereira	25	35	875	0
3	Medellín	Tulúa	10	30	300	0
4	Medellín	Ibagué	5	45	225	0
5	Cali	Ibagué	25	35	875	0
6	Cali	Armenia	15	30	450	0
	Valor Total de la Función Objetivo = 3525					



Observe que en éste problema la oferta de los Centros de distribución es igual a los requerimientos de los detallistas, por lo tanto no hubo necesidad de adicionar ni fuentes, ni destinos ficticios y se trata de un problema de mercado perfecto.

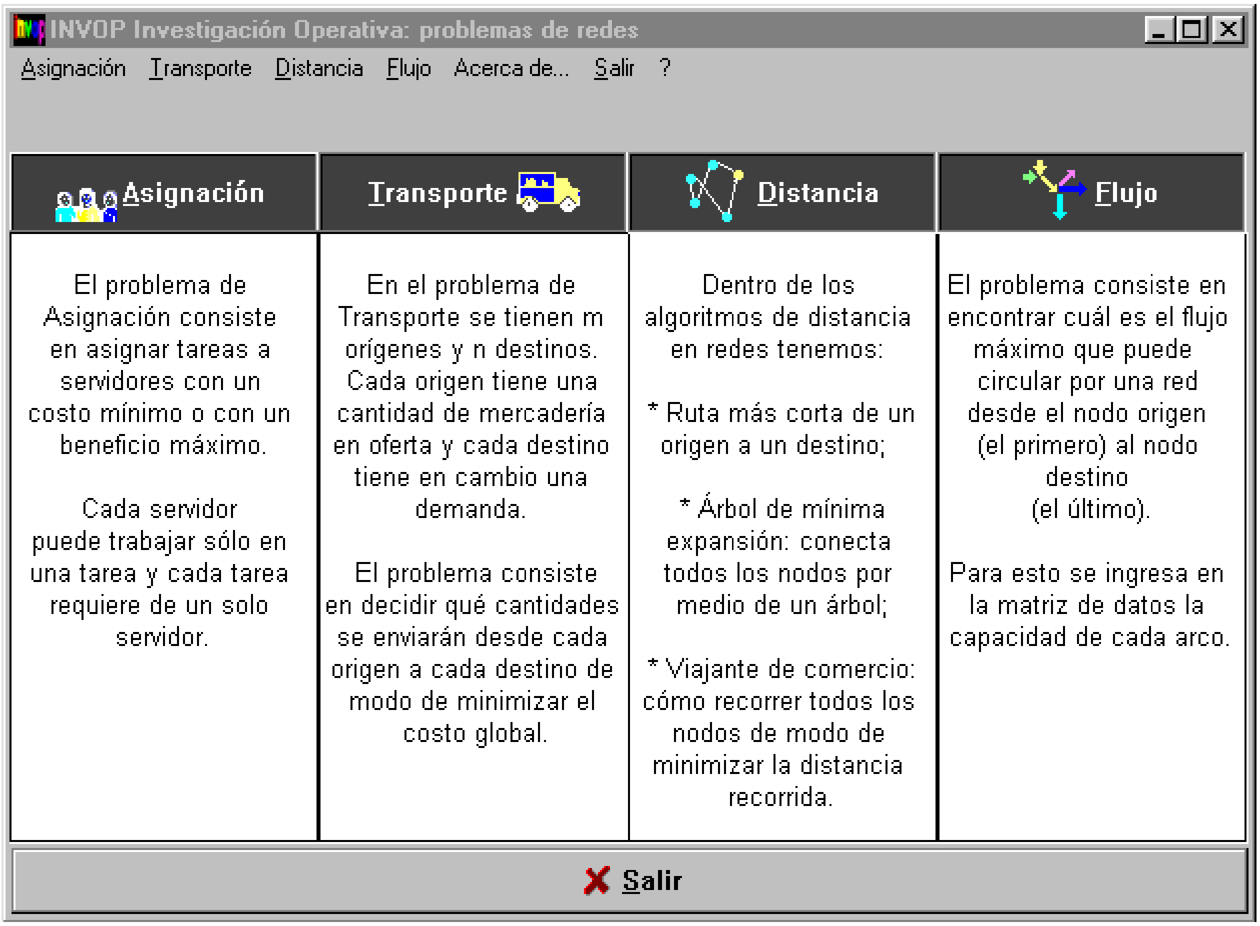
A continuación se ilustra el mismo problema; Pero bajo el software del INVOP (Investigación de Operaciones), Software creado por Beatriz Loubet y Sandra Segura de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad del Cuyo en Argentina; El software está hecho en lenguaje Delphi y puede ser adquirido gratuitamente de la siguientes direcciones en internet:
http//members.tripod.com/~operativa
www.cui.edu.co/industrial/SOF01.html

Software INVOP

Este software maneja las siguientes aplicaciones: Asignaciones, Transporte, Distancias en redes (Ruta más corta, Árbol de mínimo recorrido, Agente viajero), Flujo de redes.

El invop está en Español y su metodología dirigido a la enseñanza, ofreciendo al usuario tanto la parte teórica de fundamento matemático como la parte práctica de solución de problemas con sus respectivos ejemplos.

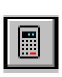
El Invop presenta una ventana principal, en la que hace una breve, pero útil reseña de sus aplicaciones, de ellas seleccionamos la de transporte, como se muestra en la figura siguiente:



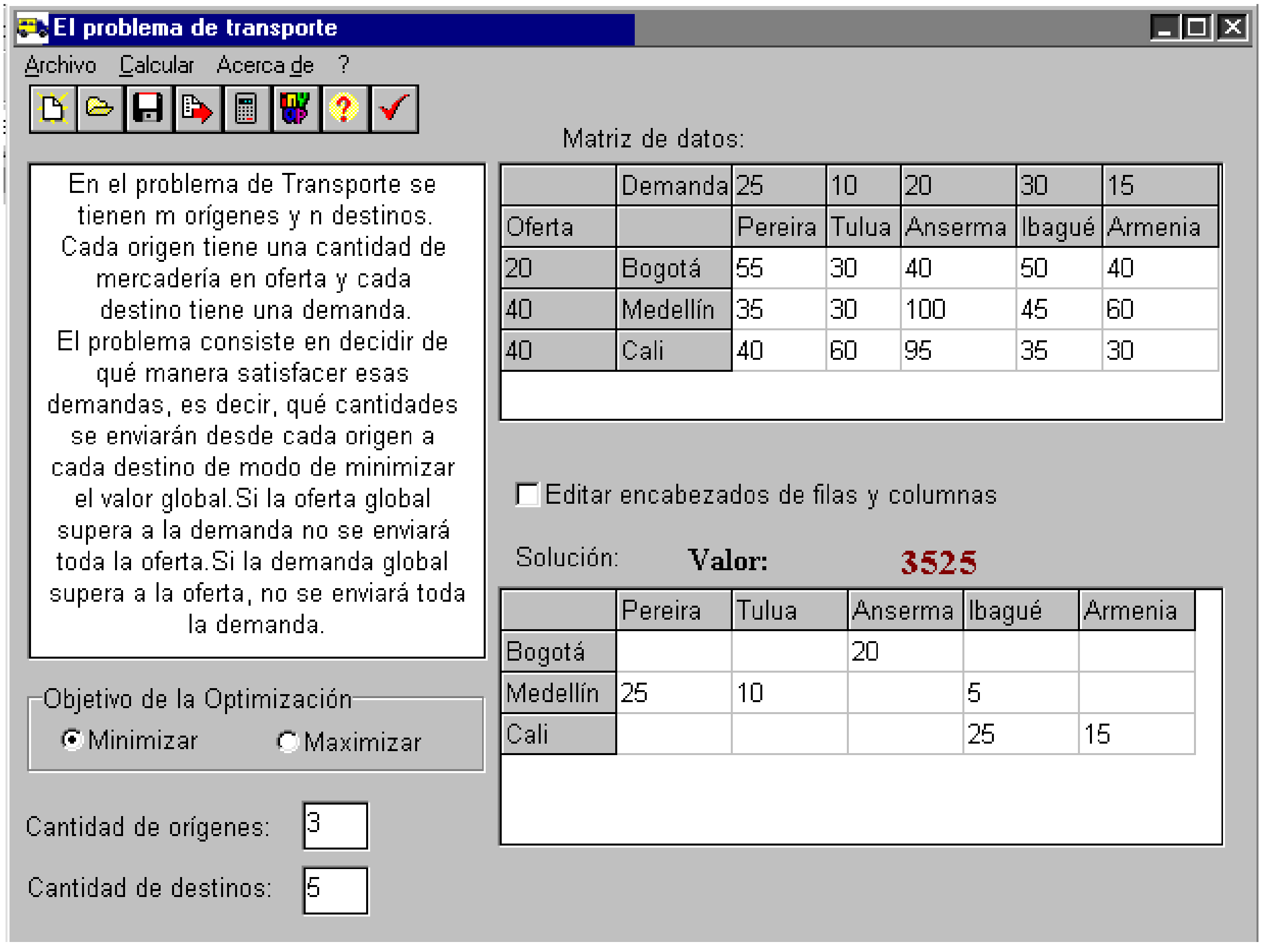
Al escoger la opción de transporte, el INVOP nos ofrece una ventana en donde captura los datos del problema y en un recuadro situado en la parte inferior derecha, donde nos ofrece la solución óptima. Colocando el cursor sobre algunos sitios de interés de ésta ventana, se ofrece un rótulo en fondo amarillo con la respectiva instrucción de ayuda.

En la parte inferior izquierda de la ventana se especifica el criterio de optimización y la cantidad de fuentes y destinos, en la parte superior derecha se introducen los costos por unidad a transportar y habilitando el cuadro de control, se editan los encabezados de fila y columna, al igual que las ofertas y las demandas de fuentes y destinos.

Cuando la información del problema está introducida, se procede a solucionar el problema, haciendo clic sobre el icono del menú superior, que tiene la figura de una calculadora,



Entonces se llena el cuadro en la parte inferior derecha con la solución óptima. En la figura siguiente se ilustra ésta ventana.



Se recomienda al Usuario del Software leer la ayuda (Help), en la que se explica toda la parte conceptual y matemática del algoritmo del transporte al igual que se ilustran varios ejemplos de muy buena calidad.

Problemas Propuestos

1. Formular, Resolver manualmente, e interpretar la solución, de todos los problemas de ejemplo de la Ayuda del Software INVOP.

2. Desarrolle un algoritmo para el caso de Maximización de un problema de transporte; Tanto para encontrar la solución básica inicial por el método de vogel, como para hallar la solución óptima por el método MODI.
3. Una cadena de cinco (5) Almacenes, ubicados en diferentes partes del país, requieren cierta mercancía para cada uno de sus almacenes. Las Empresas abastecedoras han

informado que disponen de la mercancía solicitada, pero en tres (3) diferentes fábricas. La escasez del producto hace que la cadena de almacenes deba transportar la mercancía. En base a los costos del transporte por unidad, a los requerimientos de los almacenes y a la disponibilidad de las fábricas, que se muestra en el siguiente cuadro; Formule el problema de programación lineal que minimice los costos totales del transporte y resuélvalo.

	ALMACENES					**Disponibilidad**
FÁBRICAS	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	
A	10	20	40	30	50	**1.000**
B	20	30	50	40	10	**1.000**
C	30	40	10	50	20	**1.500**
Requerimientos	**1.000**	**800**	**600**	**800**	**300**	**3.500**

4. Una Compañía desea saber, que política de distribución minimizará sus costos totales, se cuenta con tres (3) fábricas y cuatro (4) clientes, la producción de las fábricas es de: 550,300 y 260 unidades respectivamente; y las necesidades de los cuatro (4) clientes son: 250,300,200, y 160 unidades respectivamente. Los costos de enviar una (1) unidad entre cada fábrica y los clientes se da a continuación:

		C L I E N T E S				**OFERTA**
		1	**2**	**3**	**4**	
FÁBRICAS	**A**	8	3	4	5	**550**
	B	7	6	5	2	**300**
	C	2	4	3	3	**260**
DEMANDA		**250**	**300**	**200**	**160**	

5. Considere el problema de transporte que tiene la siguiente tabla de costos y requerimientos.

		D E S T I N O S						OFERTA
		1	2	3	4	5	6	
FUENTES	1	21	12	28	17	9	0	50
	2	15	13	20	M	12	0	60
	3	18	17	22	10	8	0	40
	4	M	2	10	5	0	0	70
	5	33	29	35	27	23	0	30
DEMANDA		40	30	50	60	50	20	250

a) Use el método de la esquina noroeste para obtener una solución básica factible.
b) Use el método del costo mínimo para obtener una solución básica factible.
c) Use el método de vogel para obtener una solución básica factible.
d) Obtenga la solución óptima, partiendo de la solución básica obtenida por el método de vogel.

6. Considere el problema del transporte que tiene la siguiente tabla de costos y requerimientos:

		D E S T I N O S						OFERTAS
		1	2	3	4	5	6	
FUENTES	1	2	1	3	3	2	5	50
	2	3	2	2	4	3	4	40
	3	3	5	4	2	4	1	60
	4	4	2	2	1	2	2	31
DEMANDA		30	50	20	40	30	11	181

a) Use el método de la esquina noroeste para obtener una solución básica factible.
b) Use el método del costo mínimo para obtener una solución básica factible.
c) Use el método de vogel para obtener una solución básica factible.
d) Obtenga la solución óptima, partiendo de la solución básica obtenida por el método de vogel.

7. Una compañía tiene un programa de embarque. La empresa tiene 3 fábricas y 4 bodegas. A continuación se dan los datos necesarios en términos de costo del transporte, capacidad de cada fábrica y los requerimientos de cada bodega. Busque un programa óptimo de embarque de tal manera que los costos sean mínimos.

		B O D E G A S				DISPONIBILIDAD
		1	2	3	4	
FÁBRICAS	A	10	16	14	12	1.600
	B	8	14	16	14	1.200
	C	16	8	12	12	600
REQUERIMIENTOS		1.600	400	400	1.000	3.400

8. Una compañía tiene 4 almacenes y 6 tiendas. Los almacenes juntos tienen un exceso de 22 unidades de un producto dado, que se divide entre ellos como sigue:

ALMACÉN	EXCESO
1	5
2	6
3	2
4	9
TOTAL	22

Las 6 tiendas juntas necesitan 22 unidades del producto. Los requerimientos individuales son:

TIENDA	REQUERIMIENTOS
1	4
2	4
3	6
4	2
5	4
6	2
TOTAL	22

Los costos de enviar una unidad del producto del almacén i-ésimo a la tienda j-ésima son:

		TIENDAS					
		1	2	3	4	5	6
ALMACENES	1	9	12	9	6	9	10
	2	7	3	7	7	5	5
	3	6	5	9	11	3	11
	4	6	8	11	2	2	10

Cuántas unidades se deben enviar de cada almacén a cada tienda, para minimizar los costos? ¿Cuál es el costo total mínimo?

9. Se tiene que distribuir un producto desde 3 fábricas (A, B, C), hasta 5 almacenes (d, e, f, g, h), la siguiente tabla muestra: Costos, demandas y ofertas.

	D	E	F	G	H	OFERTA
A	42	42	44	40	44	19
B	34	42	40	46	48	28
C	46	44	42	48	46	25
DEMANDA	11	13	7	17	24	

Qué cantidad de producto se debe enviar de cada fábrica a cada almacén, si se quiere minimizar los costos?

10. Se envían automóviles en camión desde 3 centros de distribución a 5 distribuidores. El costo de envío está basado en la distancia recorrida entre las fuentes y destinos. El costo es independiente de si el camión hace el recorrido con una carga parcial o completa. La tabla que sigue, hace un resumen de las distancias a recorrer entre los centros de distribución y los distribuidores y también las cifras mensuales de oferta y demanda calculadas en número de automóviles. Cada camión puede transportar un máximo de 18 vehículos. Dado que el costo de transporte por kilómetro recorrido es de $10; Formule el problema como un modelo de transporte, resuélvalo e interprete la solución.

		DISTRIBUIDORES					OFERTA
		1	2	3	4	5	
CENTROS DE DISTRIBUCIÓN	1	100	150	200	140	35	400
	2	50	70	60	65	80	200
	3	40	90	100	150	130	150
DEMANDA		100	200	150	160	140	

11. “FIBRATOLIMA” ha transportado desde su planta en Ibagué, 400 Toneladas de tela al puerto de Santa Marta, 200 Toneladas al puerto de Cartagena y 150 Toneladas al puerto

de Barranquilla; para atender sus pedidos de exportación así: Panamá requiere 200 Toneladas que pagará a $120.000 Tonelada; Honduras requiere 300 Toneladas que pagará a $110.000 Tonelada y Venezuela desea 250 Toneladas que pagará a $100.000 Tonelada.
A Fibratolima le cuesta $50.000 traer cada tonelada de su planta en Ibagué hasta Santa Marta, $40.000 Tonelada a Cartagena y $30.000 Tonelada a Barranquilla.

La siguiente tabla muestra el costo de transportar la tela desde cada puerto de embarque al sitio de pedido.

DESDE	**HASTA (Por mar)**		
	Panamá (P)	**Honduras (H)**	**Venezuela (V)**
Santa Marta (S)	25.000	25.000	20.000
Cartagena (C)	25.000	20.000	20.000
Barranquilla (B)	20.000	15.000	15.000

Se requiere:

a) Formular el problema
b) Use el método de vogel para obtener una solución básica factible
c) Obtenga la solución óptima

12. Tres plantas generadoras de energía eléctrica, con capacidades de 25,40 y 30 millones de kilowatts-hora (KWH), suministra electricidad a 3 ciudades cuyas demandas máximas son: 30, 35 y 25 millones de KWH. El costo en unidades monetarias (u.m.) de la venta de corriente eléctrica a las diferentes ciudades, por millón de KWH es:

		CIUDADES		
		1	**2**	**3**
PLANTAS	**1**	60	70	40
	2	32	30	35
	3	50	48	45

Durante el siguiente mes, se incrementa u 20% la demanda en cada una de las tres ciudades. para satisfacer el exceso de demanda, la compañía eléctrica debe comprar electricidad adicional de otra red a 100 unidades monetarias por millón de KWH.

a) Formule el problema como uno de transporte, con el fin de establecer el plan de distribución más económico, desde el punto de vista de la compañía eléctrica.
b) Utilizando el método de vogel, encuentre una solución básica factible.
c) Encuentre la solución óptima e interprete la solución.

13. Una compañía produce motores eléctricos pequeños en cada una de sus tres plantas, para 4 fabricantes de instrumentos. Los costos de producción por unidad varían según las ubicaciones, debido a diferencias en el equipo de producción y en el rendimiento de los trabajadores. Los costos de producción por unidad y la capacidad mensual (Oferta) se presentan en la siguiente tabla

PLANTA	Costo de Producción por Unidad	Capacidad de Producción Mensual
A	17	800
B	20	600
C	24	700

DESDE	A			
	1	2	3	4
A	3	2	5	7
B	6	4	8	3
C	9	1	5	4

Tabla de costos por unidad transportada.

Los pedidos de los clientes que deben producirse el siguiente mes, se muestran en la tabla siguiente:

CLIENTE	DEMANDA
1	300
2	500
3	400
4	600

La empresa debe decidir cuántas unidades se producirán en cada planta y qué porción de la demanda de cada cliente se surtirá desde cada una de ellas. Se desea minimizar la producción total y los costos de transporte. Formule el problema como uno de transporte y resuélvalo, indicando claramente cuántas unidades se deben enviar y producir desde cada planta a cada cliente y cuál es el costo mínimo.

14. Una empresa tiene 3 centros de distribución: Bogotá, Barranquilla y Medellín, con una capacidad de despacho de 9.000, 11.000 y 5.000 unidades por semana. Los clientes están clasificados por zonas: Occidente, Costa, Oriente y Viejo Caldas; Cuyas demandas por semana son: 6.000, 5.000, 8.500 y 4.500 unidades respectivamente. En la siguiente tabla se muestran los costos de despachar 100 unidades desde cualquier centro de distribución a cualquier zona.

	OCCIDENTE	COSTA	ORIENTE	VIEJO CALDAS
BOGOTÁ	420	395	400	435
BARRANQUILLA	460	305	380	345
MEDELLÍN	300	375	455	405

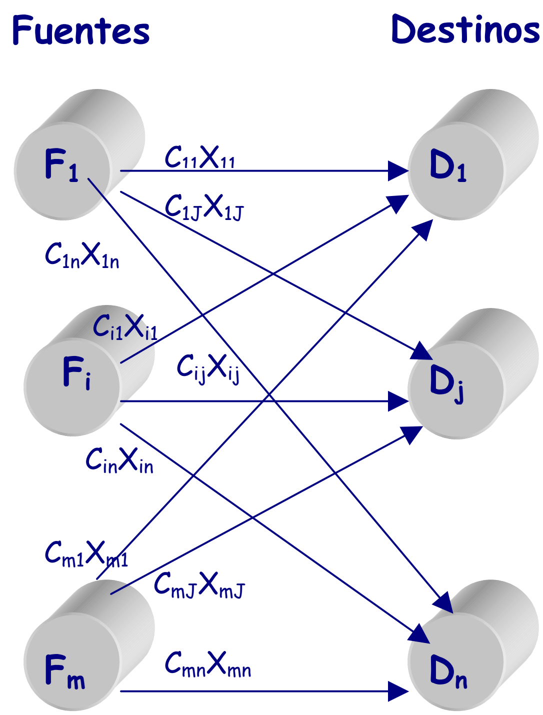
Cuál es la cantidad de unidades que hay que despachar desde cada centro de distribución a cada cliente con el fin de que los costos totales del transporte sean mínimos y todos los clientes queden satisfechos.

15. Una firma dedicada al alquiler de automóviles, tiene escasez de coches en una serie de ciudades ubicadas en Colombia. Las Ciudades de Bogotá, Medellín, Cali y Barranquilla disponen de 20,35,15 y 10 coches menos de los que se necesitan para los alquileres esperados. El director de la firma se entera que en Ibagué, Armenia y Pereira tienen 40, 25 y 30 coches de más respectivamente. Los costos en pesos, del transporte de un coche entre las distintas ciudades queda reflejado en la siguiente tabla.

	BOGOTÁ	MEDELLÍN	CALI	BARRANQUILLA
IBAGUÉ	22	20	23	24
ARMENIA	18	15	19	20
PEREIRA	18	15	22	30

El problema consiste en minimizar el costo total de transporte para solucionar el problema de escasez.

Capítulo 11
Asignaciones



Introducción

El problema de asignaciones es un caso especial del problema del transporte, uno en el cual, todas las variables son de carácter binario (0,1) y a cada fuente se le debe asignar uno y solo un destino, y a cada destino una y solo una fuente. Al final del capítulo, se ilustra el uso del software WinQsb e Invop para resolver éste tipo de modelo.

Características del modelo

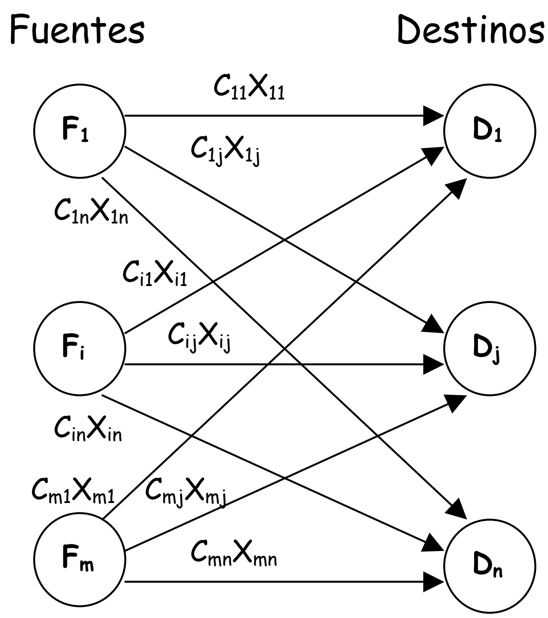
X_{ij} = 0 = No asigne la fuente i-ésima al destino j-ésimo
X_{ij} = 1 = Si asigne la fuente i-ésima al destino j-ésimo

$a_i = 1$, para todo i $\quad$ $a_{ij} = 1$, para todo i y para todo j

$b_j = 1$, para todo j $\quad$ $m = n$, Número de fuentes igual a número de destinos

C_{ij} = Costo de asignar la fuente i-ésima al destino j-ésimo

Gráficamente



El presente modelo de asignación, se puede resolver mediante el método simplex, pero al resultar dispendiosa su solución, los Húngaros desarrollaron un método más efectivo y práctico, el cual se ilustra a continuación.

Para iniciar la aplicación del algoritmo, se debe igualar el número de fuentes al número de destinos, con fuentes ó destinos ficticios, si ello es necesario.

Algoritmo para Minimizar

1. Construya una tabla de costos en la que el número de filas sea igual al número de columnas y en cada casilla figure el costo de asignar cada fuente (Filas) a cada destino (Columnas).

2. Reste el valor del elemento mínimo (Costo Mínimo) de cada fila a cada elemento de la fila. Con la tabla resultante, haga lo mismo pero para cada columna..

3. Examinar las filas y las columnas sucesivamente.

   Para cada fila (Columna) que tenga exactamente uno y solo un cero, resérvelo para asignarlo (enciérrelo en un cuadrado), y no considere (Tache), los otros elementos cero de la correspondiente columna (Fila). Éste proceso se debe repetir hasta que todos loa elementos cero estén reservados ó eliminados (Tachados). En caso de que sistemáticamente queden ceros no reservados ni tachados, después de recorrer repetitivamente las filas y las columnas, elija un cero al azar y resérvelo ó táchelo y proceda con el resto de los ceros, reservándolos ó tachándolos.

   Si los elementos reservados para asignar, representan una asignación completa (A cada fuente le corresponde un destino y a cada destino le corresponde una fuente), se ha encontrado la solución óptima; de lo contrario pase al punto cuatro (4).

4. Cubrir todos los ceros (Reservados ó Tachados), con un número de líneas horizontales y verticales, igual al número de ceros reservados para asignar.

5. Examinar todos los elementos no cubiertos por una línea, escoger el mínimo de éstos y restarlo de todos los elementos no cubiertos; luego sumarlo a cada elemento que se encuentre en la intersección (Si la hay) de dos (2) líneas.

6. Ir al punto tres (3), para tratar de encontrar un solución completa.

Algoritmo para Maximizar

Restar del mayor de toda la tabla, todos los elementos de la tabla y proceda a minimizar con la tabla resultante.

Ejemplo 1

Un taller a comprado 3 máquinas nuevas de usos distintos. Hay 4 sitios posibles para éstas máquinas, pero algunos de éstos sitios son más preferibles que otros, por razón de costo de manejo de materiales, el objetivo es asignar las máquinas en los sitios, para minimizar el costo total de manejo de materiales.

Los costos de manejo de materiales, según se coloque cada máquina en cada sitio, son:

		S I T I O S			
		1	2	3	4
MÁQUINAS	**A**	13	10	12	11
	B	15	X	13	20
	C	5	7	10	6

X = La máquina B no cabe en el sitio 2

Solución

13	10	12	11
15	M	13	20
5	7	10	6
0	0	0	0

Como $m \neq n$ ($m = 3$ y $n = 4$), adicionamos una máquina ficticia (Fila 4, Variables de holgura), que tienen coeficiente cero (0) en la función objetiva. Para evitar que la máquina B sea asignada al sitio 2, castigamos en la función objetiva con un costo muy alto (M) a la variable X_{22}, variable artificial.

3	0	2	1
2	M-13	0	7
0	2	5	1
0	0	0	0

El menor elemento de cada fila ha sido restado de todos los elementos de cada fila, en la fila 1 el menor costo es 10, luego los nuevos elementos de la fila 1 son: 13 – 10 = 3 ; 10 – 10 = 0 ; 12 – 10 = 2 ; 11 – 10 = 1 ; Al menos en cada fila debe quedar un cero (0), el del elemento más pequeño.

3	0	2	1
2	M-13	0	7
0	2	5	1
0	0	0	0

Teniendo como referencia la tabla anterior, el menor elemento de cada columna ha sido restado de todos los elementos de cada columna. Como en cada columna hay un cero, la tabla queda igual a la anterior.

Ahora, intentamos hacer una asignación completa, para ello hacemos la siguiente pregunta clave para cada fila.

HAY UN SOLO CERO (0) EN LA FILA ?, SI SÍ, RESÉRVELO PARA ASIGNARLO Y TACHE TODOS LOS CEROS DE LA COLUMNA RESPECTIVA.

Una vez recorridas todas la filas, hacemos la misma pregunta para cada columna.

HAY UN SOLO CERO (0) EN LA COLUMNA ?, SI SÍ, RESÉRVELO PARA ASIGNARLO Y TACHE TODOS LOS CEROS DE LA FILA RESPECTIVA.

3	$\boxed{0}$	2	1
2	M-13	0	7
0	2	5	1
0	~~0~~	0	0

¿Hay un solo cero en la fila 1?: Si, en la columna 2, entonces lo reservamos y tachamos todos los ceros de la columna 2.

3	$\boxed{0}$	2	1
2	M-13	$\boxed{0}$	7
0	2	5	1
0	~~0~~	~~0~~	0

¿Hay un solo cero en la fila 2?: Si, en la columna 3, entonces lo reservamos y tachamos todos los ceros de la columna 3.

3	$\boxed{0}$	2	1
2	M-13	$\boxed{0}$	7
$\boxed{0}$	2	5	1
~~0~~	~~0~~	~~0~~	0

¿Hay un solo cero en la fila 3?: Si, en la columna 1, entonces lo reservamos y tachamos todos los ceros de la columna 1.

3	$\boxed{0}$	2	1
2	M-13	$\boxed{0}$	7
$\boxed{0}$	2	5	1
~~0~~	~~0~~	~~0~~	$\boxed{0}$

¿Hay un solo cero en la fila 4?: Si, en la columna 4, entonces lo reservamos y tachamos todos los ceros de la columna 4.

Fíjese que en el último tablero, todos los ceros han quedado, ó reservados ó tachados, no se hizo necesario recorrer las columnas.

Aquí existe una asignación completa, en atención a que a cada máquina le a sido asignado un sitio y a cada sitio le hemos asignado una máquina, los sitios reservados los señalizamos con ceros encerrados en un cuadro.

Solución Óptima

La máquina A es asignada al sitio 2, con un costo de manejo de materiales de \$10
La máquina B es asignada al sitio 3, con un costo de manejo de materiales de \$13
La máquina C es asignada al sitio 1, con un costo de manejo de materiales de \$ 5
La máquina D es asignada al sitio 4, con un costo de manejo de materiales de \$ 0
La última asignación corresponde a la máquina de holgura D, colocada para hacer igual el número de máquinas al número de sitios; lo anterior significa que el sitio 4 quedará vacío y por el momento no se usará, al menos para colocar alguna de las máquinas disponibles de que trata el problema.

El costo óptimo de manejo de materiales es de \$28; que se logra asignando las máquinas a los sitios señalados.

Ejemplo 2

El jefe de un departamento, tiene 5 obreros y 5 trabajos para hacer, los obreros difieren en su eficiencia y los trabajos difieren en su dificultad intrínseca. El estimado de los tiempos que cada hombre tomará para hacer cada trabajo, está dado en la siguiente tabla.

		TRABAJADORES				
		1	**2**	**3**	**4**	**5**
TRABAJOS	**A**	11	17	8	16	20
	B	9	7	12	6	15
	C	13	16	15	12	16
	D	21	24	17	28	26
	E	14	10	12	11	15

¿Cómo deberán asignarse los trabajos, uno a cada obrero, para minimizar el total de horas hombre?

Cada trabajo debe ser ejecutado por uno y solo un obrero y a cada obrero solo le debe ser asignado uno y solo un trabajo.

Solución

Aquí, el número de fuentes es igual al número de destinos (El número de filas es igual al número de columnas) ó dicho de otra forma, el número de trabajos es igual al número de obreros, luego no se hace necesario ninguna variable de holgura.

11	17	8	16	20
9	7	12	6	15
13	16	15	12	16
21	24	17	28	26
14	10	12	11	15

Restamos el elemento más pequeño de cada fila a todos los elementos de cada fila.

3	9	0	8	12
3	1	6	0	9
1	4	3	0	4
4	7	0	11	9
4	0	2	1	5

Restamos el elemento más pequeño de cada columna a todos los elementos de cada columna.

2	9	$\boxed{0}$	8	8
2	1	6	$\boxed{0}$	5
$\boxed{0}$	4	3	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$
3	7	$\cancel{0}$	11	5
3	$\boxed{0}$	2	1	1

No se logro una asignación completa, ya que al trabajador 3, no le fue asignado ningún trabajo. Entonces, con un número de líneas, horizontales y / ó verticales iguales al número de ceros reservados , tachamos todos los ceros.

Número de líneas = Número de ceros reservados = 4

2	9	$\boxed{0}$	8	8
2	1	6	$\boxed{0}$	5
$\boxed{0}$	4	3	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$
3	7	$\cancel{0}$	11	5
3	$\boxed{0}$	2	1	1

De los elementos no tachados, escogemos el menor (2), lo restamos de todos los elementos no tachados y lo sumamos en las intersecciones que forman las líneas horizontales con las verticales. Si no hay intersecciones, no se suma.
Con la tabla resultante, intentamos nuevamente hacer una asignación completa.

$\boxed{0}$	7	$\cancel{0}$	6	6
2	1	8	$\boxed{0}$	5
$\cancel{0}$	4	5	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$
1	5	$\boxed{0}$	9	3
3	$\boxed{0}$	4	1	1

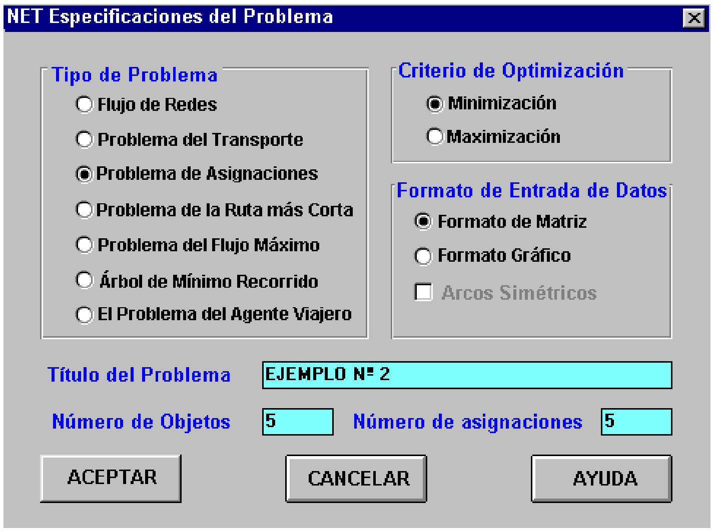
Aquí, hemos logrado una asignación completa. A cada trabajo le hemos asignado un trabajador y a cada trabajador le hemos asignado un trabajo.

Solución

Al trabajo A, le asignamos el trabajador 1, quien empleará 11 horas.
Al trabajo B, le asignamos el trabajador 4, quien empleará 6 horas.
Al trabajo C, le asignamos el trabajador 5, quien empleará 16 horas.
Al trabajo D, le asignamos el trabajador 3, quien empleará 17 horas
Al trabajo E, le asignamos el trabajador 2, quien empleará 10 horas.
El tiempo total para ejecutar los 5 trabajos es de 60 horas.
Para ilustrar el uso del software WinQsb e Invop, usaremos los datos numéricos del ejemplo 2.

Software WinQsb

El problema de asignaciones en el WinQsb, forma parte del módulo de redes y el ingreso de datos se efectúa mediante la siguiente ventana:

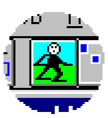


Los datos requeridos son los mismos que para el problema del transporte.

Los datos se pueden ingresar de dos formas: En una matriz ó tablero de doble entrada ó de forma gráfica.

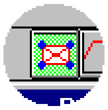
A continuación se ilustra el ingreso de datos en la matriz ó tabla de doble entrada. Fíjese que la siguiente tabla en comparación con la ofrecida en el problema del transporte, carece de disponibilidades y requerimientos.

Desde \ Hasta	TRABAJADOR 1	TRABAJADOR 2	TRABAJADOR 3	TRABAJADOR 4	TRABAJADOR 5
TRABAJO A	11	17	8	16	20
TRABAJO B	9	7	12	6	15
TRABAJO C	13	16	15	12	16
TRABAJO D	21	24	17	28	26
TRABAJO E	14	10	12	11	15

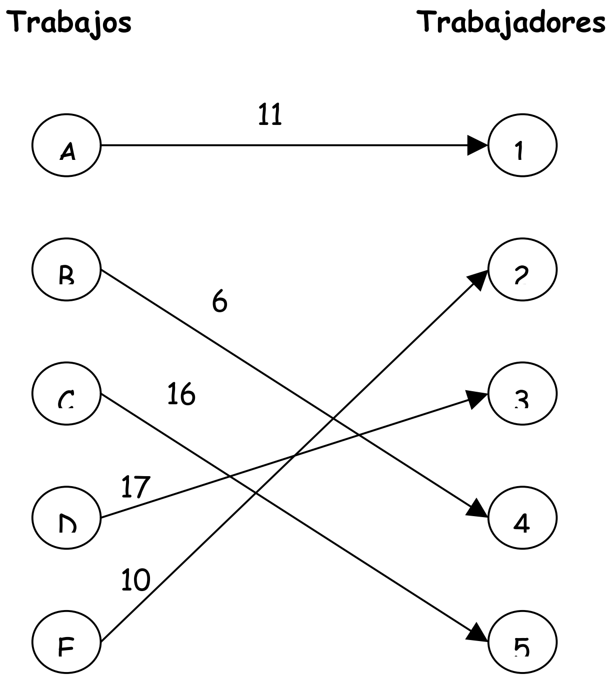


Para solucionar el problema, se da clic sobre el icono que aparece en la parte superior, hacia el centro de la ventana; entonces el WinQsb le ofrecerá una ventana con la respuesta óptima del problema, mostrando en ella , que trabajador se debe asignar a cada uno de los cinco trabajos, las horas que empleará cada trabajador y el tiempo total de realización de todos los trabajos.

06-29-2001	Desde	Hasta	Asignación	Horas	Horas Totales	Costo Reducido
1	TRABAJO A	Trabajador 1	1	11	11	0
2	TRABAJO B	Trabajador 4	1	6	6	0
3	TRABAJO C	Trabajador 5	1	16	16	0
4	TRABAJO D	Trabajador 3	1	17	17	0
5	TRABAJO E	Trabajador 2	1	10	10	0
		Valor Total de la Función Objetivo			60	



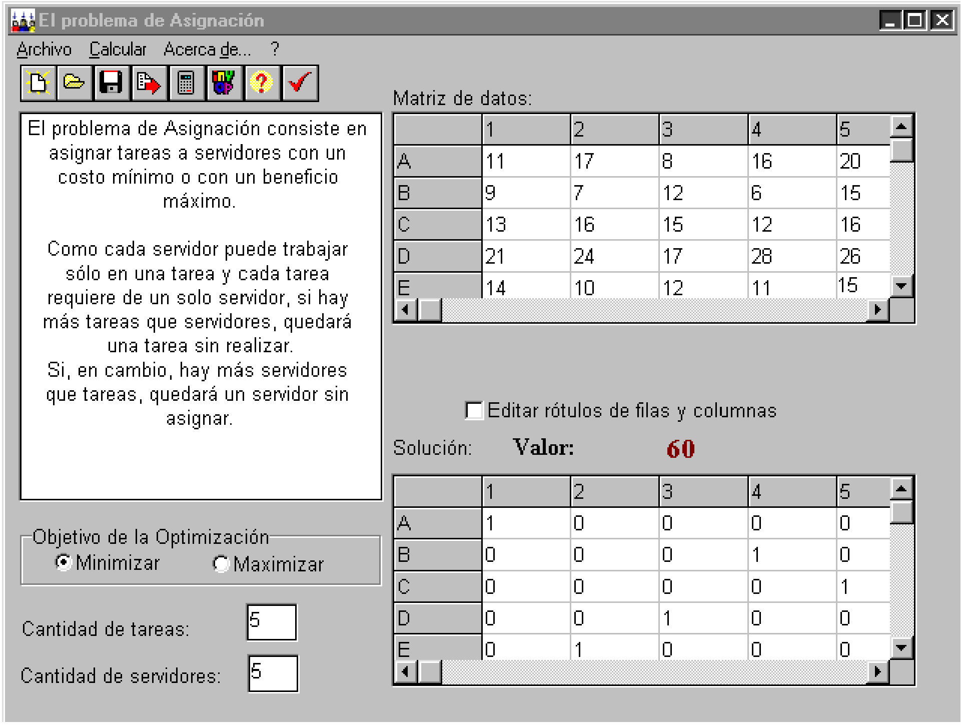
Si se usa éste icono, el WinQsb nos ilustrará mediante una red la respectiva respuesta óptima al problema.



Software INVOP

En la ventana principal del INVOP, escogemos la opción de asignaciones, y el programa nos ofrece una ventana en la que en la parte inferior izquierda se selecciona el criterio de optimización, en la parte superior derecha introducimos los datos, teniendo la opción de cambiar los rótulos de las filas y las columnas. A continuación damos clic sobre el icono que

Representa una calculadora y en la misma ventana, en la parte inferior derecha el programa nos ofrece la solución óptima.



Se recomienda leer todo el tutorial de éste programa, en ella se ofrecen ejemplos prácticos y todo el respaldo matemático del algoritmo del problema.

Problemas propuestos

1. El gerente de una empresa, tiene 4 trabajadores y 4 trabajos para ejecutar, por su experiencia y el nivel de dificultad de cada uno de los trabajos, los tiempos de ejecución de cada trabajador, se muestran en la siguiente tabla.

   El gerente desea que cada trabajo sea ejecutado por un solo trabajador y a cada trabajador, solo se le asigne un trabajo.

		TRABAJADORES			
		1	**2**	**3**	**4**
TRABAJOS	**A**	8	16	17	11
	B	13	28	4	26
	C	38	19	18	15
	D	19	26	24	10

Que trabajador se debe asignar a cada trabajo, de tal manera que la duración total de todos ellos sea la mínima?

2. Considere el problema de asignación, cuya matriz de costos es la siguiente:

	1	2	3	4
A	94	1	54	68
B	74	10	88	82
C	62	88	8	76
D	11	74	81	21

3. El entrenador de un equipo de natación debe asignar competidores para la prueba de 200 metros combinados por equipos, para enviarlos a las olimpiadas juveniles.
   Como muchos de sus nadadores son rápidos en más de un estilo, no le es fácil decidir a que estilo asignar a cada uno.
   Los cuatro mejores nadadores y sus mejores tiempos (En segundos), en cada estilo son:

		N A D A D O R E S			
		CARLOS	**JOSE**	**DAVID**	**FRANCISCO**
TIPO DE NADO	**DORSO**	37,7	32,9	33,8	37,0
	PECHO	43,4	33,1	42,2	34,7
	MARIPOSA	33,3	28,5	38,9	30,4
	LIBRE	29,2	26,4	29,6	28,5

   El entrenador quiere determinar como asignar los cuatro nadadores a los cuatro tipos de nado, para minimizar la suma de los mejores tiempos correspondientes.

4. Un corredor de bienes raíces, planea la venta de 5 lotes de terreno y ha recibido ofertas individuales de cuatro clientes. Debido a la cantidad de capital que se requiere, éstas ofertas se han hecho en el entendimiento de que ninguno de los cuatro clientes comprará más de un lote. Las ofertas se muestran en la siguiente tabla:

COMPRADOR	**L O T E S**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
A	16	15	25	19	20
B	19	17	24	15	25
C	15	15	18	0	16
D	19	0	15	17	18

   El corredor de bienes raíces quiere maximizar su ingreso total a partir de esas ofertas. Resuelva éste problema mediante el método Húngaro.

5. Una empresa va a decidir cuál de cuatro vendedores debe asignar a cada uno de sus cuatro distritos de ventas. Cada vendedor está en condiciones de lograr ventas diferentes en cada distrito. En la tabla siguiente se muestran las estimaciones de ventas para diferentes combinaciones de vendedor y distrito.

VENDEDORES	DISTRITOS			
	1	2	3	4
A	65	73	55	58
B	90	67	87	75
C	106	86	96	89
D	84	69	79	77

A la empresa le gustaría maximizar el volumen de ventas total. Sin embargo, es imposible asignar al vendedor B para el distrito 1 ó al vendedor A para el distrito 2, ya que esas decisiones violarían las políticas de rotación de personal. Use el método Húngaro para resolver éste problema. Establezca el valor óptimo de la función objetivo.

6. Una compañía de contadores, tiene tres nuevos clientes. Se asignarán a los tres clientes, tres jefes de proyecto. Con base en los distintos antecedentes y experiencia de los citados, las diversas asignaciones entre jefes de proyecto y clientes, varía en función de los tiempos esperados de terminación. Se muestra a continuación las posibles asignaciones y los tiempos esperados de terminación.

	C L I E N T E S		
JEFE DE PROYECTO	1	2	3
JUAN	10	16	32
PABLO	14	22	40
BENJAMÍN	22	24	34

Resuelva el problema y determine que jefe de proyecto se le asigna a cada cliente.

7. Se tienen 4 trabajadores que deben ser asignados a 4 trabajos, con base en los tiempos empleados por cada uno de ellos en cada trabajo, cuál es la asignación óptima que permite, en conjunto, obtener el tiempo mínimo?.

		TRABAJOS			
		A	B	C	D
TRABAJADORES	1	2	8	12	6
	2	18	14	20	18
	3	8	10	22	14
	4	16	14	16	10

8. Cuatro personas acaban de terminar el curso de ventas de la compañía y se les va a asignar a cuatro distritos diferentes. Basándose en su experiencia, actuación en el curso, conocimiento del proyecto y los clientes potenciales, la administración a hecho estimaciones del éxito esperado de cada uno en cada distrito. Las estimaciones en la escala de 1 (Bajo) al 10 (Alto), son:

	D I S T R I T O			
PERSONA	**NORTE**	**ORIENTE**	**SUR**	**OCCIDENTE**
A	7	9	10	9
B	8	7	9	9
C	7	10	9	8
D	6	8	8	7

9. El gerente de una agencia de publicidad, debe decidir, cuál de cuatro ejecutivos de contabilidad debe asignar a cada uno de sus cuatro clientes principales. En la tabla se presentan los costos estimados de la asignación de cada ejecutivo. Use el método Húngaro para encontrar la solución óptima del problema y establezca el valor de la función objetivo.

EJECUTIVOS	C U E N T A S			
	1	**2**	**3**	**4**
A	15	19	20	18
B	14	15	17	14
C	11	15	15	14
D	21	24	26	24

10. Coruniversitaria recibe ofertas para las 4 rutas de buses escolares de la ciudad. Cuatro compañías presentaron las ofertas que se muestran en la tabla siguiente:

	RUTA 1	RUTA 2	RUTA 3	RUTA 4
COMPAÑÍA 1	4.000	5.000	-	-
COMPAÑÍA 2	-	4.000	-	4.000
COMPAÑÍA 3	3.000	-	2.000	-
COMPAÑÍA 4	-	-	4.000	5.000

Suponga que se puede asignar solamente una ruta a cada licitador. Utilice el método de asignación para minimizar el costo de Coruniversitaria para operar las 4 rutas de buses.

11. Container, Inc., fabrica contenedores de muchos tamaños y formas. Recientemente ha recibido pedidos para producir diversas cantidades de contenedores de cocina de 5 diferentes tamaños. Cada tamaño de contenedor puede producirse en cualquiera de cuatro máquinas. Debido a las distintas tecnologías y tiempos de disposición, el número total de horas, incluyendo el tiempo de disposición, necesarias para procesar cada tamaño de contenedor en cada máquina varía, como se muestra en la siguiente tabla:

TAMAÑO DEL CONTENEDOR	M Á Q U I N A			
	1	2	3	4
3 X 4	25	20	28	30
4 X 6	24	22	25	23
6 X 8	30	30	28	25
8 X 12	38	32	30	30
12 X 18	40	40	28	30

Adecuar una máquina para que cambie el tamaño de un contenedor toma largo tiempo, así que la gerencia ha decidido que cada máquina producirá contenedores de un solo tamaño. Por tanto, solo se producirán 4 de los 5 tamaños en las 4 máquinas disponibles dentro de la fecha límite asignada. Como los ingresos por cada tamaño de contenedor son aproximadamente iguales, la gerencia de Container, Inc., es indiferente en cuanto a cual de los 5 pedidos no satisfacer. Como gerente del departamento de producción, se le ha pedido determinar cuáles 4 de los 5 pedidos aceptar y desarrollar un plan de producción que minimice el tiempo de procesamiento total para satisfacer esos pedidos.

12. La empresa cauchos del Tolima, necesita realizar 4 proyectos, por falta de personal se va a subcontratar a 4 empresas para que cada una realice un proyecto. Todas las empresas están en condiciones de realizar cualquiera de los proyectos. El gerente general no sabe como distribuir los proyectos. Usted, como la mano derecha del gerente, ¿Qué le aconsejaría?

		P R O Y E C T O S			
		1	2	3	4
EMPRESAS	1	10	15	22	19
	2	20	18	15	14
	3	16	17	12	20
	4	11	18	16	15

13. Se cuenta con 4 aviones que deben fumigar 4 campos sembrados. Por las características de los aviones y de los sembrados, cada avión emplea tiempos distintos en la fumigación de cada campo, como se ve en el siguiente cuadro:

		C A M P O S			
		A	**B**	**C**	**D**
AVIONES	**1**	2	4	2	1
	2	1	2	3	2
	3	4	6	2	4
	4	4	4	1	3

Se trata de determinar que avión debe fumigar cada uno de los campos, de tal manera que las horas de vuelo sean las mínimas posibles. Hallar dos soluciones.

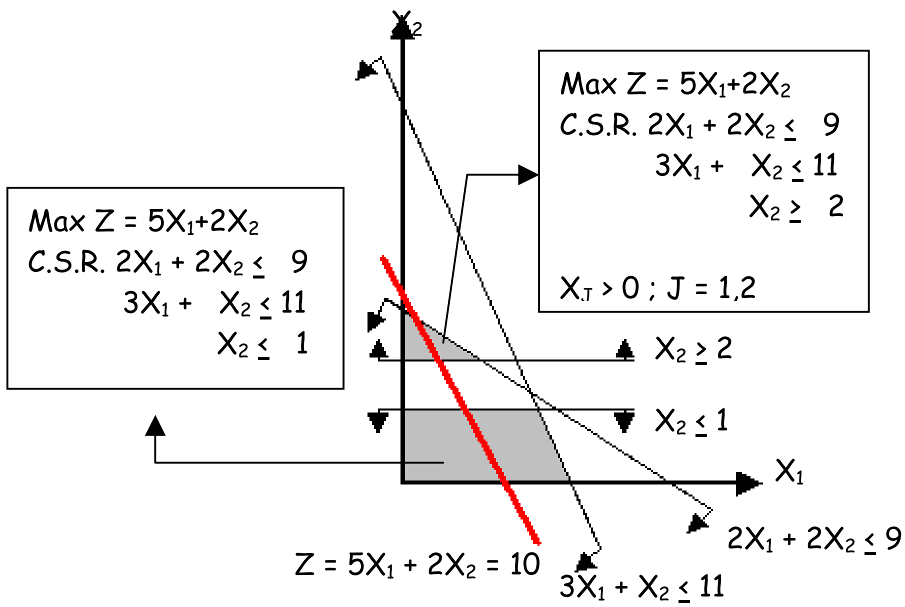
14. En la Universidad, cuatro contratistas diferentes, proponen construir cuatro edificios. Cada contratista ha remitido propuestas para la construcción de los cuatro edificios. El problema consiste en determinar que edificio debe adjudicarse a cada contratista para lograr el mínimo costo de la construcción de los cuatro edificios. En la tabla siguiente se muestran los costos de cada propuesta en millones de pesos.

		C O N T R A T I S T A S			
		1	**2**	**3**	**4**
EDIFICIO	**A**	48	48	50	44
	B	56	60	60	68
	C	96	94	90	85
	D	42	44	54	46

15. Una compañía transportadora dispone de cinco camiones situados en las ciudades A, B, C, D, E. Se requiere un camión en las ciudades 1, 2, 3, 4, 5, 6. En la tabla siguiente se muestra el kilometraje entre las ciudades. El problema consiste en determinar la asignación de camiones que minimiza el kilometraje recorrido por los camiones.

DESDE LAS CIUDADES	**HASTA LAS CIUDADES**					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
A	20	15	26	40	32	12
B	15	32	46	26	28	20
C	18	15	2	12	6	14
D	8	24	12	22	22	20
E	12	20	18	10	22	15

Capítulo 12
Programación Lineal Entera y Binaria



Introducción

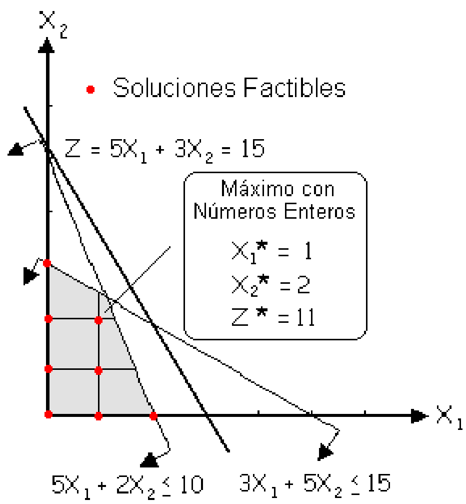
Muchos de los problemas de la vida real exigen soluciones con números entero, por lo tanto las variables de dicho problema deben ser definidas como variables enteras. Los métodos de solución que contemplaremos en éste capitulo son: Método gráfico, Método de los planos cortantes de Gomory, Método de Bifurcación y Acotación (Branch And Bound), el Método de Egon Balas en donde las variables son de carácter binario (0,1). Por último se ilustra el uso del software WinQsb para atender éste tipo de problema.

Método Gráfico

Es idéntico al método gráfico de programación lineal continua, solo que aquí, se seleccionan solo las soluciones enteras dentro del área de soluciones factibles.

Ejemplo

Max	$Z = 5X_1 + 3X_2$	$3X_1 + 5X_2 \leq 15$	$5X_1 + 2X_2 \leq 10$	$Z = 5X_1 + 3X_2 = 15$	
		$3X_1 + 5X_2 = 15$	$5X_1 + 2X_2 = 10$		
C.S.R.	$3X_1 + 5X_2 \leq 15$	$X_1 = 0 \quad X_2 = 0$	$X_1 = 0 \quad X_2 = 0$	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$
	$5X_1 + 2X_2 \leq 10$	$X_2 = 3 \quad X_1 = 5$	$X_2 = 5 \quad X_1 = 2$	$X_2 = 5$	$X_1 = 3$
		$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 15$	$P(0,0) \Rightarrow 0 \leq 10$		
$X_j \geq 0$	y Enteras $\forall_j$	Verdad	Verdad		



Aquí, las intersecciones de la cuadrícula, contenida en el área sombreada, conforma las soluciones factibles.

Entonces, el punto más a la derecha del área, que se intercepte con el barrido de la función objetivo, es la solución óptima.

Éste método es eficaz sólo para problemas de dos (2) variables ó menos. para problemas de más de 2 variables, estudiaremos el Método de los planos cortantes de Gomory y el Método de Bifurcación ý acotación, denominado también Branch And Bound.

Método de los planos cortantes de Gomory

Éste método sirve para solucionar problemas de más de dos (2) variables.

Algoritmo

1. Encontrar la solución, empleando el método simplex.

2. Si la solución es entera, entonces estamos en el óptimo.

3. Si no es entera, introducir una restricción nueva para la variable no entera, que tenga la mayor parte fraccional (Quebrar empates arbitrariamente) y resolver el nuevo problema mediante el método dual simplex.

Nueva restricción a partir de la restricción actual que tenga la variable cuyo valor en su parte fraccional sea mayor.

a) Escriba cada constante como la suma de: Un número entero de cualquier signo y una fracción no negativa, menor que uno (1).

b) Cambiar la ecuación trasladando los coeficientes enteros al lado derecho.

Ejemplo

Max:	$Z = X_1 + 5X_2$	→	Max:	$Z = X_1 + 5X_2$
C.S.R.	$X_1 + 10X_2 \leq 20$		C.S.R.	$X_1 + 10X_2 + X_3 \quad = 20$
	$X_1 \quad\quad \leq 2$			$X_1 \quad\quad + X_4 = 2$
$X_j \geq 0$	y enteros para toda j		$X_j \geq 0$	y enteros para toda j

A continuación solucionamos el problema por el método simplex, tal como se haría si el problema fuese de programación lineal continua.

C_j		→	1	5	0	0	$\frac{b}{a}$	
	VB	$\bar{b}$	X_1	X_2	X_3	X_4		
0	X_3	20	1	**10**	1	0	2	(1/10)
0	X_4	2	1	0	0	1	NO	
$Z_j - C_j$		0	-1	-5	0	0		
				↑				

Variable que entra X_2
Variable que sale X_3

C_j		→	1	5	0	0	$\frac{b}{a}$	
	VB	$\bar{b}$	X_1	X_2	X_3	X_4		
5	X_2	2	1/10	1	1/10	0	20	
0	X_4	2	**1**	0	0	1	2	→
$Z_j - C_j$		10	-5/10	0	5/10	0		
			↑					

Variable que entra X_1
Variable que sale X_4

C_j		→	1	5	0	0	
	VB	$\bar{b}$	X_1	X_2	X_3	X_4	
5	X_2	9/5	0	1	1/10	-1/10	→
1	X_1	2	1	0	0	1	-1/10
$Z_j - C_j$		11	0	0	1/2	1/2	

Solución óptima pero no entera: $X_1 = 2$; $X_2 = 9/5$; $X_3 = 0$; $X_4 = 0$; $Z^* = 11$
Ecuación 1 (Fila 1) para construir la nueva restricción; ya que tiene la variable (X2), cuyo valor en su parte fraccional es mayor.

Cálculo de la nueva restricción, a partir de la ecuación 2.

$X_2 + 1/10X_3 - 1/10X_4 = 9/5$

Remplazamos cada constante por la suma de un número entero de cualquier signo y una fracción no negativa menor que uno (1).

$(1+0)X_2 + (0+1/10)X_3 + (-1+9/10)X_4 = (1+4/5)$ Simplificando

$X_2 + 1/10X_3 - X_4 + 9/10X_4 = 4/5 + 1$;Trasladamos los términos con coeficiente entero, al lado derecho.

$\underline{1/10X_3 + 9/10X_4} = 4/5 \underline{+ 1 - X_2 + X_4}$; Fíjese que el lado izquierdo subrayado debe ser positivo y el lado derecho subrayado, debe ser entero, luego podemos asegurar que:

$1/10X_3 + 9/10X_4 \geq 4/5$; Multiplicando por (-1) ; $-1/10X_3 - 9/10X_4 \leq -4/5$; Adicionando una variable de holgura; $\mathbf{-1/10X_3 - 9/10X_4 + X_5 = -4/5}$; Ecuación ésta que adicionamos, así:

C_j →			1	5	0	0	0	
	VB	$\bar{b}$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
5	X_2	9/5	0	1	1/0	-1/10	0	
1	X_1	2	1	0	0	1	0	
0	X_5	-4/5	0	0	-1/10	-9/10	1	→
$Z_j - C_j$		11	0	0	1/2	1/2	0	
$Z_j - C_j / a_{rj}$			NO	NO	-5	-5/9	NO	
						↑		

C_j →			1	5	0	0	0
	VB	$\bar{b}$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
5	X_2	17/9	0	1	1/9	0	-1/9
1	X_1	10/9	1	0	-1/9	0	10/9
0	X_4	8/9	0	0	1/9	1	-10/9
$Z_j - C_j$		95/9	0	0	4/9	0	5/9

$X_1 = 10/9 = 1 + 1/9$; $X_2 = 17/9 = 1 + \mathbf{8/9}$; $X_3 = 0$; $X_4 = \mathbf{8/9}$; $X_5 = 0$; $Z = 95/9 = 10,\bar{5}$

Escogemos la variable básica con mayor parte fraccionaria, en caso de empate, escoja al azar. Escojo X_4

$1/9X_3 + X_4 - 10/9X_5 = 8/9 \Rightarrow (0+1/9)X_3 + (1+0)X_4 + (-2+8/9)X_5 = 8/9 \Rightarrow$

$\underbrace{1/9X_3 + X_4 - 2X_5 + 8/9X_5}_{\text{Positivo}} = 8/9 \Rightarrow 8/9 - \underbrace{X_4 + 2X_5}_{\text{Entero}}$

$1/9X_3 + 8/9X_5 \geq 8/9 \Rightarrow -1/9X_3 - 8/9X_5 \leq -8/9 \Rightarrow -1/9X_3 - 8/9X_5 + X_6 = -8/9$

C_j →			1	5	0	0	0	0
	VB	$\bar{b}$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
5	X_2	17/9	0	1	1/9	0	-1/9	0
1	X_1	10/9	1	0	-1/9	0	10/9	0
0	X_4	8/9	0	0	1/9	1	-10/9	0
0	X_6	-8/9	0	0	-1/9	0	-8/9	1
$Z_j - C_j$		95/9	0	0	4/9	0	5/9	0
$Z_j - C_j / a_{rj}$			NO	NO	-4	NO	-5/8 ↑	NO

→

C_j →			1	5	0	0	0	0
	VB	$\bar{b}$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
5	X_2	2	0	1	1/8	0	0	-1/8
1	X_1	0	1	0	-1/4	0	0	5/4
0	X_4	2	0	0	1/4	1	0	-5/4
0	X_5	1	0	0	1/8	0	1	-9/8
$Z_j - C_j$		10	0	0	3/8	0	0	5/8

Solución factible, óptima y entera

$X_1^* = 0$	$Y_1^* = 3/8$
$X_2^* = 2$	$Y_2^* = 0$
$X_3^* = 0$	$Y_3^* = 0$
$X_4^* = 2$	$Y_4^* = 5/8$
$X_5^* = 1$	$Y_5^* = 0$
$X_6^* = 0$	$Y_6^* = 0$
$Z_x^* = 10$	$Z_Y^* = 10$

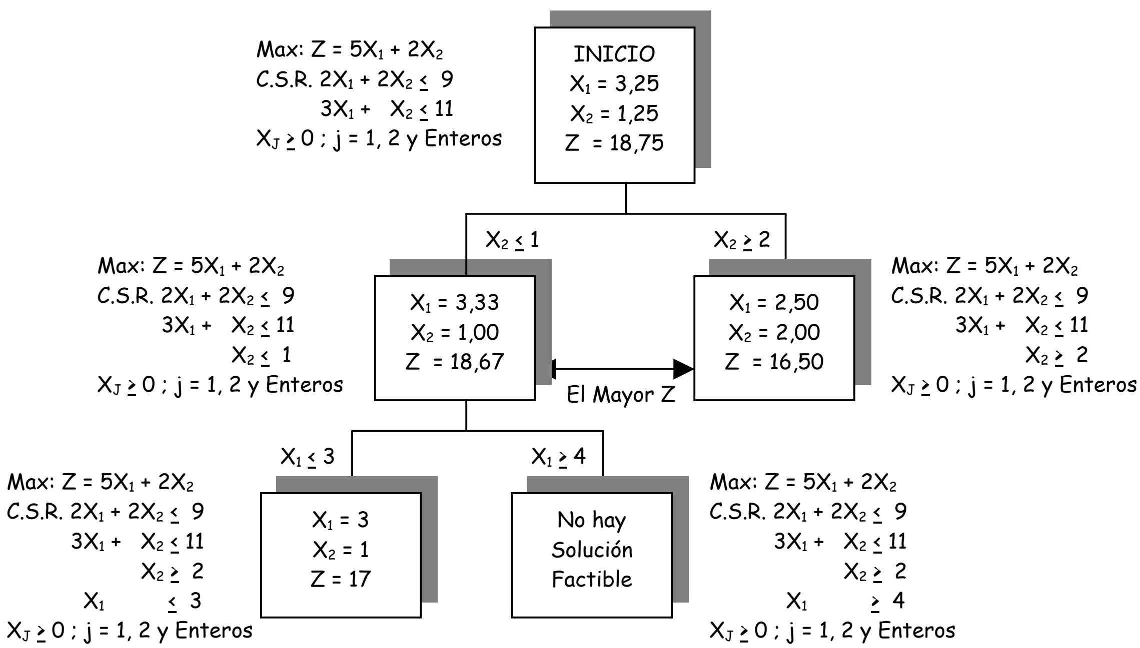
Método de Bifurcación y Acotación (Branch And Bound)

Es una estrategia sistemática, que reduce mucho el número de combinaciones que se deben examinar.

Algoritmo

1. Encontrar la solución mediante el Método Simplex. Si la solución no es entera, pase al segundo punto.
2. Comienza con la solución óptima del simplex en donde se ignoran las restricciones de variables enteras.

3. Se selecciona una variable con valor no cero y se crean dos ramas mutuamente excluyentes, esto da lugar a dos (2) nuevos problemas de Programación Lineal; que se deben resolver.
4. Si ninguna solución es entera, con la rama de mayor valor de Z, se crean nuevas ramas y se resuelven nuevos problemas por programación lineal (Método Simplex).
5. Se repite el punto 4), Hasta encontrar la solución entera óptima.



Observe que la primera acotación se realizó sobre la variable X_2 , pero pudo haber sido sobre X_1 , de todas formas el método es dispendioso, en especial si se hace manualmente.

Método Aditivo de Egon Balas para problemas binarios (0,1)

No confundir éste método para solucionar problemas de asignaciones, aquí el problema de programación lineal tiene la forma general y lo diferente es que las variables solo pueden tomar valores binarios (0,1). La filosofía del método se basa en pensar que si se tiene una función objetiva minimizando y todos sus términos son positivos, entonces, entre menos variables tomen el valor de uno (1), la función objetiva será mínima.

Algoritmo

1. La función objetivo se minimiza, en caso de maximización, use la regla de equivalencia: Maximizar (Z) = Minimizar (-Z).

2. Se requiere que $C_j \geq 0$, $\forall_j$. En caso de que $C_j < 0$, entonces X_j se sustituye por: $X_J = 1 - \overline{X}_j$, es decir $\overline{X}_j$ es el complemento.

   Ejemplo: Min $Z = 3X_1 - 2X_2 \Rightarrow X_2 = 1 - \overline{X}_2$; Remplazando $Z = 3X_1 - 2(1- \overline{X}_2)$

   Min $Z = 3X_1 + 2\overline{X}_2 - 2$, que para el caso: Min $Z = 3X_1 + 2\overline{X}_2$

   Nota: El cambio de variable, también se debe aplicar a todas las restricciones.

Para apreciar la utilidad del método, resolveremos el siguiente ejemplo, primero, contemplando todas las posibles soluciones y a continuación aplicando el método aditivo de Egon Balas, que reduce el número de soluciones posibles a contemplar.

Minimice : $Z = 8X_1 + 7X_2 + 6X_3 + 5X_4 + X_5$

C.S.R. $-6X_1 - 3X_2 + 2X_3 - 4X_4 - X_5 \leq -3$

$-4X_1 - 5X_2 - 4X_3 - 3X_4 + 3X_5 \leq -7$

$X_J = 0, 1 \quad j = 1, 2, 3, 4, 5$

El número posible de soluciones es de 2^n , en donde n es el número de variables. En el ejemplo, el número posible de soluciones es $2^5 = 32$

En el siguiente diagrama se muestran todas las 32 posibles soluciones.

	32 POSIBLES SOLUCIONES																															
X_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
X_2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
X_3	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
X_4	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
X_5	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Algunas de éstas soluciones no son factibles, ya que no satisfacen las restricciones. Aquellas que satisfagan las restricciones, deberán ser remplazadas en la función objetivo y la que la haga más pequeña, será la solución óptima. Éste procedimiento es dispendioso, tanto en la consecución de todas las soluciones como en su evaluación para todas las restricciones y en su evaluación final sobre la función objetiva.

Aplicación del Método de Egon Balas

Evaluamos cada restricción, primeramente suponiendo que todas las variables valgan cero, y después, alternativamente a cada variable le asignamos el valor de uno (1) y al resto de variables el valor de cero (0). Cada vez que una solución no satisfaga una restricción, el que tan lejos está de satisfacerla, lo llamamos infactibilidad.

Ejemplo: Si $X_1 = 1$ y $X_2 = X_3 = X_4 = X_5 = 0$

Remplazando en la restricción uno (1), establecemos que: $-3 \leq 0$, luego aquí la infactibilidad es cero (0), ya que la solución evaluada, satisface la restricción, convirtiéndola en una afirmación verdadera.

Remplazando en la restricción dos (2), establecemos que: $3 \leq 0$, luego aquí la infactibilidad es tres (3), ya que la solución evaluada, no satisface la restricción, convirtiéndola en una afirmación falsa. El que tan lejos está de ser una verdad, es lo que llamamos infactibilidad.

En total, la solución evaluada tiene una infactibilidad de 0 + 3 = 3

Si en ésta primera iteración, encontramos una solución cuya infactibilidad sea cero (0), hemos encontrado la solución factible y óptima. Si encontramos que varias soluciones tienen la infactibilidad igual a cero (0), remplazamos todas éstas soluciones en la función objetivo y la solución óptima será aquella que haga que Z sea mínima.

Si no hay ninguna solución con su infactibilidad igual a cero (0), Escogemos la solución que menor infactibilidad tenga y de ella la variable que esté valiendo uno (1). Remplazamos en las restricciones dicha variable y sobre dichas restricciones iniciamos la segunda iteración. Éste procedimiento se repite hasta encontrar la solución óptima factible.

Primera Iteración

$-6X_1 - 3X_2 + 2X_3 - 4X_4 - X_5 + 3 \leq 0$
$-4X_1 - 5X_2 - 4X_3 - 3X_4 + 3X_5 + 7 \leq 0$

$X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = X_5 = 0$
$3 \leq 0$
$7 \leq 0$ Infactibilidad = 10

$X_1 = 1$; $X_2 = X_3 = X_4 = X_5 = 0$
$-3 \leq 0$
$3 \leq 0$ Infactibilidad = 3

$X_2 = 1$; $X_1 = X_3 = X_4 = X_5 = 0$
$0 \leq 0$
$2 \leq 0$ Infactibilidad = 2 ; **La menor**

$X_3 = 1$; $X_1 = X_2 = X_4 = X_5 = 0$
$5 \leq 0$
$3 \leq 0$ Infactibilidad = 8

$X_4 = 1$; $X_1 = X_2 = X_3 = X_5 = 0$
$-1 \leq 0$
$4 \leq 0$ Infactibilidad = 4

$X_5 = 1$; $X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 0$
$2 \leq 0$
$10 \leq 0$ Infactibilidad = 12

Aquí concluimos, que lo menos malo es fijar la primera variable con valor de uno (1) a X_2 ya que presenta la menor infactibilidad, remplazamos a $X_2 = 1$ en las dos restricciones e iniciamos la 2° iteración.

Segunda Iteración (X_2 = 1)

$-6X_1 + 2X_3 - 4X_4 - X_5 \leq 0$
$-4X_1 - 4X_3 - 3X_4 + 3X_5 + 2 \leq 0$

$X_1 = 1$; $X_3 = X_4 = X_5 = 0$
$-6 \leq 0$
$-2 \leq 0$ Infactibilidad = 0 ; Z=15

$X_3 = 1$; $X_1 = X_4 = X_5 = 0$
$2 \leq 0$
$-2 \leq 0$ Infactibilidad = 2

$X_4 = 1$; $X_1 = X_3 = X_5 = 0$
$-4 \leq 0$
$-1 \leq 0$ Infactibilidad = 0 Z=12

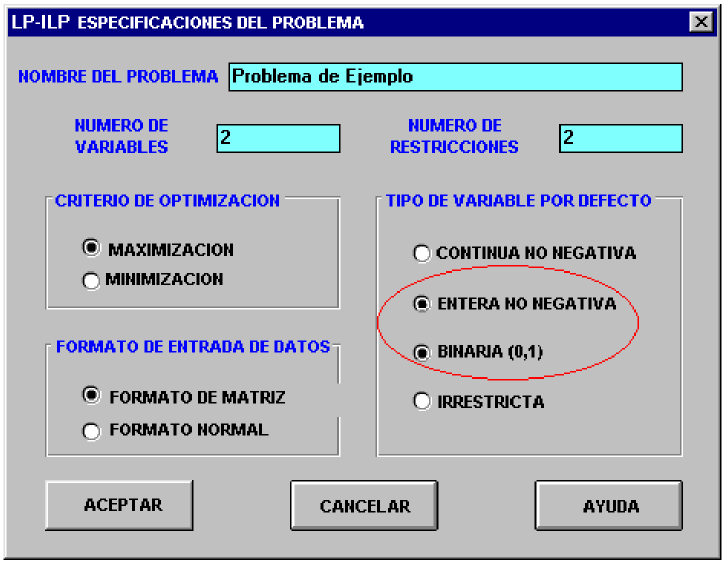
$X_5 = 1$; $X_1 = X_3 = X_4 = 0$
$-1 \leq 0$
$5 \leq 0$ Infactibilidad = 5

En ésta iteración hay dos soluciones con infactibilidad igual a cero (0), evaluado la función objetivo con ambas soluciones, encontramos la solución óptima con Z = 12
Solución: $X_1^* = 0$; $X_2^* = 1$; $X_3^* = 0$; $X_4^* = 1$ $X_5^* = 0$; $Z^* = 12$

Solamente se hizo necesario escudriñar 10 de las 32 soluciones posibles. Podemos asegurar que el método hace una búsqueda sistemática que evita probar todas las combinaciones posibles.

Software WinQsb

El software WinQsb en su módulo de programación lineal y entera, presenta en su ventana inicial las opciones respectivas, incluyendo la de programación lineal binaria, de la siguiente manera:



En ésta ventana se selecciona una de las opciones encerradas en la elipse de color rojo. El resto de las ventanas se tramita de igual manera que para un problema de programación lineal continua.

En la siguiente ventana, el WinQsb permite establecer el tipo de variable de manera individual; de ahí que podemos tener un problema de programación lineal con variables mezcladas, como se muestra en el siguiente ejemplo.

VARIABLES ->	X1	X2	DIRECCION	RECURSO
MAXIMIZAR	3	5		
RESTRICCION 1	1		<=	4
RESTRICCION 2	3	2	<=	18
V/R INFERIOR	3	-8		
V/R SUPERIOR	50	10		
TIPO VARIABLE	Entera	Binaria		

Dando doble clic sobre la casilla de tipo de variable, se ofrece consecutivamente las variables tipo continua, entera, binaria e irrestricta, éste último tipo de variable es la que no tiene restricción en el signo y puede tomar valores tanto negativos como positivos. También podemos fijar límites para los valores de las variables, siendo un problema de programación lineal restringido, en el ejemplo se exige que X_1 puede tomar valores enteros entre 3 y 50.

La solución se muestra en ventanas idénticas a las ya explicadas en programación lineal continua y se ofrece el mismo tipo de información.

Una conclusión relevante es la utilidad del computador y del software para la solución de problemas de programación lineal, que sin dicha herramienta es supremamente dispendiosa la consecución de la solución óptima para problemas de tamaño mediano y grande, que son los que en la vida real se presentan.

Problemas propuestos

1. Resolver gráficamente los siguientes ejercicios de programación lineal entera.

a) Max : $Z = X_1 + 5X_2$
C.S.R. $X_1 + 10X_2 \leq 20$
$X_1 \leq 2$
$X_J \geq 0$ $J = 1, 2$ y Enteros

b) Max : $Z = 3X_1 + X_2$
C.S.R. $X_1 + 2X_2 \leq 8$
$3X_1 - 4X_2 \leq 12$
$X_j \geq 0$ $\forall_j$ y Enteros

c) Max : $Z = 5/2X_1 + X_2$
C.S.R. $3X_1 + 5X_2 \leq 15$
$5X_1 + 2X_2 \leq 10$
$X_j \geq 0$ $\forall_j$ y Enteros

2. Resolver manualmente empleando el método de los planos cortantes de Gomory y mediante el software WinQsb los siguientes ejercicios de programación lineal entera.

a) Max : $Z = 3X_1 + X_2$
C.S.R. $X_1 + 2X_2 \leq 8$
$3X_1 - 4X_2 \leq 12$
$X_J \geq 0$ $\forall_j$ y Enteros
Solución: $X_1^*=5$; $X_2^*=1$; $Z^*= 16$

b) Max : $Z = 5X_1 + 2X_2$
C.S.R. $2X_1 + 2X_2 + X_3 = 9$
$3X_1 + X_2 + X_4 = 11$
$X_j \geq 0$ $\forall_j$ y Enteros
Solución: $X_1^*=3$; $X_2^*=1$; $Z^*= 17$

c) Max : $Z = 5X_1 + 2X_2$
C.S.R. $2X_1 + 2X_2 + X_3 = 9$
$3X_1 + X_2 + X_4 = 11$
$X_j \geq 0$ $\forall_j$ y X_1 , X_3 Enteros
Solución: $X_1^*=3$; $X_2^*=3/2$; $X_3^*=0$; $X_4^*=1/2$; $Z^*= 18$

3. Resolver manualmente empleando el método de Bifurcación y Acotación (Branch And Bound) y mediante el software WinQsb los siguientes ejercicios de programación lineal entera.

a) Max : $Z = 5X_1 + 2X_2$
C.S.R. $2X_1 + 2X_2 \leq 9$
$3X_1 + X_2 \leq 11$
$X_J \geq 0$ $\forall_j$ y X_2 Entero
Solución: $X_1^*=3,3$; $X_2^*=1$; $X_3^*=0,3$
$X_4^*=X_5^*=0$; $Z^*= 18,67$

b) Max : $Z = 60X_1 + 50X_2$
C.S.R. $2X_1 + 4X_2 \leq 80$
$3X_1 + 2X_2 \leq 55$
$X_1 \leq 16$
$X_2 \leq 18$
$X_j \geq 0$ $\forall_j$ y Enteros
Solución: $X_1^*=9$; $X_2^*=14$; $Z^*= 1.240$

4. Resolver manualmente empleando el método aditivo de Egon Balas y mediante el software WinQsb los siguientes ejercicios de programación lineal binaria.

a) Min: $Z = 5X_1 + 7X_2 + 10X_3 + 3X_4 + X_5$

C.S.R.
$$-X_1 + 3X_2 + 5X_3 - X_4 + 4X_5 \leq -2$$
$$2X_1 - 6X_2 + 3X_3 + 2X_4 - 2X_5 \leq 0$$
$$X_2 - 2X_3 + X_4 + X_5 \leq -1$$
$X_J = 0,1 \quad j = 1,2,3,4,5$

b) Max: $Z = 3X_1 + 2X_2 - 5X_3 - 2X_4 + 3X_5$

C.S.R.
$$X_1 + X_2 + X_3 + 2X_4 + X_5 \leq 4$$
$$7X_1 + 3X_3 - 4X_4 + 3X_5 \leq 8$$
$$11X_1 - 6X_2 + 3X_4 - 3X_5 \geq 3$$
$X_J = 0,1 \quad j = 1,2,3,4,5$

5. Una Compañía se especializa en la preparación de programas de computadora para el gobierno y la industria. Estos programas se escriben en uno de cuatro lenguajes de programación: Fortran, assambler, cobol y apl. La compañía tiene un programador que realiza ésta labor y existen cinco trabajos de programación que deben terminarse lo más pronto posible. La utilidad de cada tarea se muestra en la siguiente tabla.

	TRABAJO				
PROGRAMADOR	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
JOSE	100	150	200	100	50

En la siguiente tabla se muestra el tiempo que necesita el programador para terminar cada trabajo y el tiempo de que dispone después de realizar sus demás tareas.

	TRABAJO					TIEMPO DISPONIBLE
PROGRAMADOR	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**(HORAS)**
JOSE	40	15	20	10	5	35

¿Qué trabajos debe aceptar realizar la compañía para maximizar la utilidad?
Formule el problema como uno de programación lineal binaria, emplee el método manual de egon balas y el software WinQsb para solucionarlo.

Solución: Aceptar los trabajos 3, 4 y 5 para una utilidad máxima de $350

Apéndice 1
Lecturas

- Historia de la Investigación de Operaciones
- Definiciones de Investigación de Operaciones
- Bibliografía de George Bernard Dantzig
- El analísta de Investigación de Operaciones
- La Investigación de Operaciones en la práctica
- Modelos de Investigación de Operaciones

Historia de la Investigación de Operaciones

"Desde el advenimiento de la Revolución Industrial, el mundo ha sido testigo de un crecimiento sin precedentes en el tamaño y la complejidad de las organizaciones. Los pequeños talleres artesanales se convirtieron en las actuales corporaciones de miles de millones de dólares. Una parte integral de este cambio revolucionario fue el gran aumento de la división del trabajo y en la separación de las responsabilidades administrativas en estas organizaciones. Los resultados han sido espectaculares. Sin embargo, junto con los beneficios, el aumento en el grado de especialización creó nuevos problemas que ocurren hasta la fecha en muchas empresas. Uno de estos problemas es la tendencia de muchos de los componentes de la organización a convertirse en imperios relativamente autónomos, con sus propias metas y sistemas de valores, perdiendo con esto la visión de cómo sus actividades y objetivos encajan con los de toda la organización. Lo que es mejor para un componente, puede ir en detrimento de otro, de manera que pueden terminar trabajando con objetivos opuestos. Un problema relacionado con esto es que, conforme la complejidad y la especialización crecen, se vuelve más difícil asignar los recursos disponibles a las diferentes actividades de la manera más eficaz para la organización como un todo. Este tipo de problemas, y la necesidad de encontrar la mejor forma de resolverlos, proporcionaron el ambiente adecuado para el surgimiento de la investigación de operaciones.
Las raíces de la investigación de operaciones se remontan a muchas décadas, cuando se hicieron los primeros intentos para emplear el enfoque científico en la administración de una empresa. Sin embargo, el inicio de la actividad llamada *investigación de operaciones*, casi siempre se atribuye a los servicios militares prestados a principios de la Segunda Guerra Mundial. Debido a los esfuerzos bélicos, existía una necesidad urgente de asignar recursos escasos a las distintas operaciones militares y a las actividades dentro de cada

operación, en la forma más efectiva. Por todo esto, las administraciones militares americana e inglesa hicieron un llamado a un gran número de científicos para que aplicaran el enfoque científico a éste y a otros problemas de estrategia y táctica. De hecho, se les pidió que hicieran investigación sobre operaciones militares. Estos equipos de científicos fueron los primeros equipos de investigación de operaciones. Sus esfuerzos contribuyeron de una manera definitiva al triunfo del combate aéreo inglés en la isla de Campaña en el Pacífico, de la batalla del Atlántico Norte y de muchas otras.

Estimulados por el evidente éxito de la investigación de operaciones en lo militar, los industriales comenzaron a interesarse en este nuevo campo. Como la explosión industrial seguía su curso al terminar la guerra, los problemas causados por el aumento de la complejidad y especialización dentro de las organizaciones pasaron a primer plano. Comenzó a ser evidente para un gran número de personas, incluyendo a los consultores industriales que habían trabajado con o para los equipos de investigación de operaciones durante la guerra, que estos problemas eran básicamente los mismos que los enfrentados por la milicia, pero en un contexto diferente. De esta forma, la investigación de operaciones comenzó a introducirse en la industria, los negocios y el gobierno. Para 1951, ya se había introducido por completo en Gran Bretaña y estaba Estados Unidos en proceso de hacerlo.

Se pueden identificar por lo menos otros dos factores que jugaron un papel importante en el desarrollo de la investigación de operaciones durante este periodo. Uno es el gran progreso que ya se había hecho en el mejoramiento de las técnicas disponibles en esta área. Después de la guerra, muchos científicos que habían participado en los equipos de investigación de operaciones o que tenían información sobre este trabajo, se encontraban motivados a buscar resultados sustanciales en este campo; de esto resultaron avances importantes. Un ejemplo sobresaliente es el método simplex para resolver problemas de programación lineal, desarrollado en 1947 por George Dantzig. Muchas de las herramientas características de la investigación de operaciones, como programación lineal, programación dinámica, líneas de espera y teoría de inventarios, fueron desarrolladas casi por completo antes del término de la década de 1950. Además del rápido desarrollo teórico, el segundo factor que dio un gran ímpetu a la investigación de operaciones fue el advenimiento de las computadoras. Para manejar de una manera efectiva los complejos problemas inherentes a esta disciplina, por lo general se requiere un gran número de cálculos; llevarlos a cabo a mano puede resultar casi imposible. Entonces el desarrollo de la computadora electrónica digital, con su capacidad para realizar cálculos aritméticos, miles o tal vez millones de veces más rápido que los seres humanos, fue una gran ayuda para la investigación de operaciones. "

Hillier F.S., Lieberman G. J., *Introducción a la Investigación de Operaciones*, M^c Graw Hill, Quinta Edición.

"Los inicios de lo que hoy se conoce como Investigación de Operaciones se remontan a los años 1759 cuando el economista Quesnay empieza a utilizar modelos primitivos de programación matemática. Más tarde, otro economista de nombre Walras, hace uso, en 1874, de técnicas similares. Los modelos lineales de la Investigación de Operaciones tienen como precursores a Jordan en 1873, Minkowsky en 1896 y a Farkas en 1903. Los modelos dinámicos probabilísticos tienen su origen con Markov a fines del siglo pasado. El desarrollo de los modelos de inventarios, así como el de tiempos y movimientos, se lleva a cabo por los años veintes de este siglo, mientras que los modelos de línea de espera se originan con los estudios de Erlang, a principios del siglo XX. Los problemas de asignación se estudian con métodos matemáticos por los húngaros Konig y Egervary en la segunda y tercera décadas de este siglo. Los problemas de distribución se estudian por el ruso Kantorovich en 1939. Von Neuman cimienta en 1937 lo que años más tarde culminara como la Teoría de Juegos y la Teoría de Preferencias (esta última desarrollada en conjunto con Morgenstern). Hay que hacer notar que los modelos matemáticos de la Investigación de Operaciones que utilizaron estos precursores, estaban basados en el Cálculo Diferencial e Integral (Newton, Lagrange, Laplace, Lebesgue, Leibnitz, Reimman, Stieltjes, por mencionar algunos), la Probabilidad y la Estadística (Bernoulli, Poisson, Gauss, Bayes, Gosset, Snedecor, etc.).
No fue sino hasta la Segunda Guerra Mundial, cuando la Investigación de Operaciones empezó a tomar auge. Primero se le utilizó en la logística estratégica para vencer al enemigo (Teoría de Juegos) y, más tarde al finalizar la guerra, en la logística de distribución de todos los recursos militares de los aliados dispersos por todo el mundo. Fue debido precisamente a este último problema, que la fuerza aérea norteamericana, a través de su centro de investigación Rand Corporation, comisionó a un grupo de matemáticos para que resolviera este problema que estaba consumiendo tantos recursos humanos, financieros y materiales. Fue el doctor George Dantzig, el que en 1947, resumiendo el trabajo de muchos de sus precursores, inventara el método Simplex, con lo cual dio inicio a la Programación Lineal. Con el avance de las computadoras digitales se empezó a extender la Investigación de Operaciones, durante la decena de los cincuenta en las áreas de Programación Dinámica (Bellman), Programación No Lineal (Kuhn y Tucker), Programación Entera (Gomory), Redes de Optimización (Ford y Fulkerson), Simulación (Markowitz), Inventarios (Arrow, Karlin, Scarf, Whitin), Análisis de Decisiones (Raiffa) y Procesos Markovianos de Decisión (Howard). La generalización de la Investigación de Operaciones ha tratado de darla Churchman, Ackoff y Arnoff. "

Prawda Juan, *Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones*, Ed. Limusa

Algunas Definiciones De Investigación De Operaciones

" La Investigación de Operaciones es la aplicación, por grupos interdisciplinarios, del método científico a problemas relacionados con el control de las organizaciones o sistemas a fin de que se produzcan soluciones que mejor sirvan a los objetivos de toda organización."
Ackoff, R. L. y Sasieni M. W. *Fundamentals of Operations Research*, John Wiley & Sons,1968

"¿Qué es la investigación de operaciones? Una manera de tratar de responder a esta pregunta es dar una definición. Por ejemplo, la investigación de operaciones puede describirse como un enfoque científico de la toma de decisiones que requiere la operación de sistemas organizacionales. Sin embargo, esta descripción, al igual que los intentos anteriores de dar una definición, es tan general que se puede aplicar a muchos otros campos. Por lo tanto, tal vez la mejor forma de entender la naturaleza única de la investigación de operaciones sea examinar sus características sobresalientes.
Como su nombre lo dice, la investigación de operaciones significa "hacer investigación sobre las operaciones". Esto dice algo tanto del enfoque como del área de aplicación. Entonces, la investigación de operaciones se aplica a problemas que se refieren a la conducción y coordinación de operaciones o actividades dentro de una organización. La naturaleza de la organización es esencialmente inmaterial y, de hecho, la investigación de operaciones se ha aplicado en los negocios, la industria, la milicia, el gobierno, los hospitales, etc. Así, la gama de aplicaciones es extraordinariamente amplia. El enfoque de la investigación de operaciones es el mismo del método científico. En particular, el proceso comienza por la observación cuidadosa y la formulación del problema y sigue con la construcción de un modelo científico (por lo general matemático) que intenta abstraer la esencia del problema real. En este punto se propone la hipótesis de que el modelo es una representación lo suficientemente precisa de las características esenciales de la situación como para que las conclusiones (soluciones) obtenidas sean válidas también para el problema real. Esta hipótesis se verifica y modifica mediante las pruebas adecuadas. Entonces, en cierto modo, la investigación de operaciones incluye la investigación científica creativa de las propiedades fundamentales de las operaciones. Sin embargo, existe más que esto. En particular, la investigación de operaciones se ocupa también de la administración práctica de la organización. Así, para tener éxito, deberá también proporcionar conclusiones positivas y claras que pueda usar el tomador de decisiones cuando las necesite.
Una característica más de la investigación de operaciones es su amplio punto de vista. Como quedó implícito en la sección anterior, la investigación de operaciones adopta un punto de vista organizacional. Puede decirse que intenta resolver los conflictos de intereses entre los componentes de la organización de forma que el resultado sea el mejor para la organización completa. Esto no significa que el estudio de cada problema deba considerar en forma explícita todos los aspectos de la organización sino que los objetivos que se buscan

deben ser consistentes con los de toda ella. Una característica adicional, que se mencionó incidentalmente, es que la investigación de operaciones intenta encontrar la mejor solución, o la solución óptima, al problema bajo consideración. En lugar de contentarse con sólo mejorar el estado de las cosas, la meta es identificar el mejor curso de acción posible. Aun cuando debe interpretarse con todo cuidado, esta "búsqueda de la optimalidad" es un aspecto muy importante dentro de la investigación de operaciones.
Todas estas características llevan de una manera casi natural a otra. Es evidente que no puede esperarse que un solo individuo sea un experto en todos los múltiples aspectos del trabajo de investigación de operaciones o de los problemas que se estudian; se requiere un grupo de individuos con diversos antecedentes y habilidades. Entonces, cuando se va a realizar un estudio de investigación de operaciones completo de un nuevo problema, por lo general es necesario organizar un equipo. Éste debe incluir individuos con antecedentes firmes en matemáticas, estadística y teoría de probabilidades, al igual que en economía, administración de empresas, computación electrónica, ingeniería, ciencias físicas y del comportamiento y, por supuesto, en las técnicas especiales de investigación de operaciones. El equipo también necesita tener la experiencia y las habilidades necesarias para permitir la consideración adecuada de todas las ramificaciones del problema a través de la organización y para ejecutar eficientemente todas las fases del estudio.
En resumen, la investigación de operaciones se ocupa de la toma de decisiones óptima y del modelado de sistemas determinísticos y probabilísticos que se origina en la vida real. Estas aplicaciones, que ocurren en el gobierno, en los negocios, en la industria, en ingeniería, en economía y en las ciencias naturales y sociales, se caracterizan, en gran parte, por la necesidad de asignar recursos escasos. En estas situaciones, se puede obtener un conocimiento profundo del problema a partir del análisis científico que proporciona la investigación de operaciones. La contribución del enfoque de investigación de operaciones proviene principalmente de:

1.- La estructuración de una situación de la vida real como un modelo matemático, con lo que se logra una abstracción de los elementos esenciales para que pueda buscarse una solución que concuerde con los objetivos del tomador de decisiones. Esto implica tomar en cuenta el problema dentro del contexto del sistema completo.
2.- El análisis de la estructura de tales soluciones y el desarrollo de procedimientos sistemáticos para obtenerlas.
3.-El desarrollo de una solución, incluyendo la teoría matemática, si es necesario, que lleve al valor óptimo de la medida de lo que se espera del sistema (o quizá que compare los cursos de acción alternativos evaluando esta medida para cada uno). "

Hillier, F. S. y Lieberman G J. *Introducción a la Investigación de Operaciones*, M[c] Graw Hill, 1994

"El ramo de la investigación operacional desciende - bajo ciertos aspectos- de la administración científica, incrementada por métodos más refinados (principalmente matemáticos): la tecnología computacional y de una orientación rumbo a los problemas más amplios. La Investigación de Operaciones adopta el método científico como estructura para la solución de los problemas, dando mayor énfasis al juicio objetivo que al juicio subjetivo. Los autores de la escuela matemática, provienen la mayoría de la matemática, de la estadística, de la ingeniería y de la economía y poseen una orientación nítidamente técnico-económica y estrictamente racional y lógica.
Las definiciones de I.O. (**I**nvestigación de **O**peraciones) varían desde técnicas matemáticas específicas hasta el método científico en sí. Muchas de las definiciones incluyen tres aspectos básicos al enfoque de I. O. Para la toma de decisiones administrativas:

1.- Una visión sistemática del problema a ser resuelto.
2.- Una concordancia en cuanto al uso de método científico en la resolución de problemas.
3.- La utilización de técnicas específicas de estadística, probabilidad y modelos matemáticos para ayudar a quien toma las decisiones a resolver el problema.

La I.O. es considerada simplemente una "teoría de la decisión aplicada" : "la investigación operacional utiliza cualquier método científico, matemático o lógico, para hacer frente a los problemas que se presentan cuando el ejecutivo busca un raciocinio eficaz para enfrentar sus problemas de decisión". En su sentido más amplio, la I.O. puede ser caracterizada como la aplicación de métodos científicos, técnicas científicas e instrumentos científicos a problemas que involucran operaciones de sistemas, de modo que provean a los ejecutivos responsables de las operaciones, soluciones óptimas para los problemas".
El enfoque de I.O. incorpora el enfoque sistemático al reconocer que las variables internas en los problemas decisoriales son interdependientes e interrelacionadas.
La investigación operacional es "la aplicación de métodos, técnicas e instrumentos científicos a los problemas que envuelven las operaciones de un sistema, de modo que proporcione, a los que controlan el sistema, soluciones óptimas para el problema observado". Esta se "ocupa generalmente de operaciones de un sistema existente...", esto es, "materiales, energías, personas y máquinas ya existentes". "El objetivo de la investigación operacional es capacitar la administración para resolver problemas y tomar decisiones".

Los principales campos de aplicación de la I.O. son:

a. *Relativa a personas:*
    1.- Organización y gerencia.
    2.- Ausentismo y relaciones de trabajo.
    3.- Economía.
    4.- Decisiones individuales.
    5.- Investigaciones de mercado.

b. *Relativa a personas y máquinas:*
 1.- Eficiencia y productividad.
 2.- Organización de flujos en fábricas.
 3.- Métodos de control de calidad, inspección y muestreo.
 4.- Prevención de accidentes.
 5.- Organización de cambios tecnológicos.

c. *Relativa a movimientos:*
 1.- Transporte.
 2.- Almacenamiento, distribución y manipulación.
 3.- Comunicaciones.

Chiavenato Idalberto, *Introducción a la Teoría General de Administración*, M[c]. Graw Hill, 1989

George Dantzig: Fundador de la Programación Lineal

SIAM News, Noviembre de 1994

A pesar de los grandes adelantos en la optimización computacional ocurridos durante los últimos 20 años (por ejemplo, los avances en los métodos de punto interior), el método Simplex inventado por George B. Dantzig en 1947 es aún la herramienta principal en casi todas las aplicaciones de la programación lineal.

Dantzig es considerado como uno de los tres fundadores de la programación lineal, compartiendo dicho honor con Von Neumann y Kantorovich. A través de su investigación en teoría matemática, computación, análisis económico y aplicaciones de problemas industriales ha logrado contribuir más que cualquier otro investigador al desarrollo de la programación lineal.

El trabajo de Dantzig ha sido reconocido con numerosos honores, de entre los cuales sobresalen: La Medalla Nacional de la Ciencia (1975), el Premio John Von Neumann de la Sociedad Americana de Investigación de Operaciones y el Instituto de Ciencias Administrativas (1974), la membresía en la Academia Nacional de Ciencias, la Academia Nacional de Ingeniería y la Academia Americana de Ciencia y Arte.

La programación lineal y sus derivados (tales como la optimización no lineal con restricciones y la programación entera) han sido capaces de pasar la prueba del tiempo sin debilitarse, y en nuestros días afectan las prácticas económicas de las organizaciones y sus administraciones. El científico computacional Laszolo Lovasz dijo en 1980, "Si se tomaran estadísticas acerca de cuál problema matemático usa la mayoría del tiempo computacional en el mundo (sin incluir problemas de manejo de bases de datos, como la búsqueda y ordenamiento), seguramente la respuesta sería la programación lineal." En ese mismo año Eugene Lawler de Berkeley dijo lo siguiente: "La programación lineal se usa para asignar recursos, planear la producción, planear el horario de trabajadores, planear la cartera de inversión y formular estrategias de mercado (y militares). La versatilidad e impacto económico de la programación lineal en el mundo industrial actual es realmente impresionantes."

En palabras del propio Dantzig: "El tremendo poder del método Simplex me sorprende constantemente". Citando el simple ejemplo del problema de asignación (70 personas para 70 tareas) y el enorme poder computacional que se requeriría para analizar todas las permutaciones y seleccionar la solución óptima, observó lo siguiente: "sólo toma un momento encontrar la solución óptima usando una computadora personal y un paquete que maneje el método simplex estándar".

Dantzig escribió en 1991: "es interesante notar que el problema original que ocasionó mi investigación está todavía pendiente, es decir, el problema de la planeación dinámica a través del tiempo, particularmente bajo condiciones de incertidumbre. Si este tipo de problemas pudieran resolverse satisfactoriamente, se podría contribuir (tras una buena planeación) al mejoramiento de este mundo y del ser humano."

La contribución de Dantzig, según sus explicaciones, nació de su experiencia en el Pentágono durante la Segunda Guerra Mundial, en donde se convirtió en experto en programación (métodos de planeación hechos con calculadoras). En 1946, como consejero matemático de la Fuerza Aérea Norteamericana, tuvo el reto de mecanizar los procesos de planeación. En aquellos tiempos de computadoras pre-electrónicas, mecanizar quería decir usar aparatos analógicos o máquinas de tarjetas perforadas. ("Programar" era un término militar que no se refería a las instrucciones usadas por la computadora para resolver problemas, sino a los planes o calendarizaciones propuestas para el entrenamiento, logística, o despliegue de unidades de combate. El nombre de "programación lineal", que ha confundido a mucha gente, está basado en la definición militar de "programa").

Las contribuciones de Dantzig van desde la programación lineal y el método Simplex hasta la teoría de la descomposición, el análisis de sensibilidad, los métodos de pivote complementarios, la optimización a gran escala, la programación no lineal, y la programación bajo incertidumbre. Sus estudios en la programación lineal han tenido un impacto fundamental en el desarrollo de la investigación de operaciones como una disciplina.

"Los que mandan generalmente mueven las manos y dicen 'He considerado todas las alternativas'. Pero eso es casi siempre basura. Lo más probable es que no pudiesen estudiar todas las combinaciones."

George Bernard Dantzig nació el 8 de Noviembre de 1914 en Pórtland, Oregon, USA. Actualmente es profesor emérito en el departamento de Investigación de Operaciones de la Universidad de Stanford. Se recomienda consultar la siguiente dirección en internet **www.stanford.edu/dept/eesor/people/faculty/dantzig/**

George B. Dantzig , el creador de la programación lineal, en una entrevista publicada en **The College Mathematical Journal,** Marzo de 1986. Se presenta a continuación, parte de esta entrevista:

"Considere el problema de asignar 70 hombres a 70 empleos. Una 'actividad' consiste en asignar el iésimo hombre al j-ésimo empleo. Las restricciones son dos: en primer lugar hay 70 hombres, cada uno de los cuales debe asignarse a un puesto, y en segundo lugar, cada uno de los 70 puestos existentes debe estar ocupado. El nivel de una actividad puede ser 1, lo cual indica que está siendo usada, o 0, lo cual significa que no. En consecuencia hay 2 x 70 =140 restricciones y 70 x 70 = 4900 actividades con 4900 variables correspondientes de decisión uno-cero. Por desgracia también hay factorial de 70 permutaciones o formas de hacer las asignaciones. El problema consiste en comparar estas factorial de 70 formas y elegir la que sea la óptima o 'mejor' según algún criterio previamente establecido."

"En el ejemplo anterior, factorial de 70 es un número muy grande. A fin de tener una idea de qué tan grande es, supóngase que se hubiese tenido una computadora IBM del tipo mainframe en el instante en el que ocurrió el Big Bang hace quince millones de años. ¿Habría podido, entre ese entonces y ahora, examinar todas las soluciones posibles? ¡No! No obstante, supóngase que se hubiese tenido una computadora aun más poderosa, una que pudiese examinar mil millones de asignaciones por segundo. La respuesta seguiría siendo negativa. Aun si la Tierra se llenase con computadoras cuyas rapideces fueran de nanosegundos, todas ellas trabajando en paralelo, la respuesta aun sería no. Sin embargo, si existiesen diez Tierras, todas llenas con computadoras del tipo mencionado, todas programadas en paralelo desde el instante del Big Bang hasta que el Sol fuese una esfera fría, entonces quizás la respuesta podría ser sí. Lo notable es que el método Simplex, con la ayuda de una computadora moderna, puede resolver este problema en una fracción de segundo".

"Cuando el problema de la planeación fue formulado inicialmente para la Fuerza Aérea, no existía la noción exacta de una función objetivo, la idea de una meta claramente definida. Por supuesto, teníamos sólo un falso respeto hacia el concepto de objetivo. En el discurso de los militares escuché a menudo decir, 'nuestro objetivo es ganar la guerra'. En el mundo de los negocios se escucharía quizás 'nuestro objetivo es obtener ganancias'. Sin embargo, era imposible hallar alguna relación directa entre la meta establecida y las acciones emprendidas para tal fin."

"Si se estudiaba con cuidado el paso siguiente, se podía ver que algún líder había promulgado un montón de reglas básicas que, en su concepto, llevarían a la meta. Esto distaba mucho de lo que sería honestamente estudiar todas las combinaciones alternativas de las acciones a seguir para elegir la mejor combinación. Los que mandan generalmente mueven las manos y dicen 'He considerado todas las alternativas'. Pero eso es casi siempre basura. Lo más probable es que no pudiesen estudiar todas las combinaciones. Antes de 1947 era inconcebible pensar en la existencia de una herramienta como la programación lineal que permitiese examinar millones de combinaciones. No había algoritmo o herramienta computacional que pudiera hacer eso."

"No descubrí el modelo de la programación lineal en un instante, sino que tuvo un proceso de evolución. Se dedicó casi un año completo a la tarea de decidir si mi modelo podría ser utilizado en la formulación de problemas prácticos de distribución de tiempos. Como usted sabe, la planeación y la distribución de tiempos se llevaron a una escala inmensa durante la guerra. El funcionamiento de la Fuerza Aérea fue equivalente al funcionamiento de la economía de toda una nación. En el proceso intervinieron cientos de miles de personas. La logística tuvo una magnitud difícil de entender para alguien que no haya estado allí. Mi colega Marshall Wood y yo revisamos miles de situaciones tomadas de nuestra experiencia durante la guerra."

"Las reglas básicas empleadas en la planeación se expresaban en un formato completamente distinto del que se emplea en la actualidad para formular un programa lineal. Lo que hicimos fue revisar estas reglas una por una y demostrar que casi todas ellas podían reformularse aceptablemente en un formato de programación lineal. Pero no todas. En algunos casos era necesario tomar en cuenta el carácter discreto de las variables y las no convexidades."

"Cuando formulé por primera vez mi modelo de programación lineal, lo hice sin una función objetivo. Estuve luchando por algún tiempo con la adición de reglas básicas para elegir de entre las soluciones factibles la que en algún sentido fuese 'óptima'. Pero pronto abandoné esta idea y la sustituí por la de una función objetivo a ser maximizada. El modelo que formulé no estaba hecho específicamente para fines militares. Podía aplicarse a toda clase de problemas de planeación; todo lo que tenía que hacerse era cambiar los nombres de las columnas y los renglones, y entonces era aplicable a un problema de planeación económica lo mismo que a un problema de planeación industrial."

Bibliografía de George Bernard Dantzig

George Dantzig studied mathematics at the University of Maryland, receiving his A.B. in 1936. The following year he received an M.A. in mathematics from the University of Michigan.

Dantzig worked as a Junior Statistician in the U.S. Bureau of Labor Statistics from 1937 to 1939, then, from 1941 to 1946, he was head of the Combat Analysis Branch, U.S.A.F. Headquarters Statistical Control. He received his doctorate in mathematics from the University of California, Berkeley in 1946. In that year he was appointed Mathematical Advisor for USAF Headquarters.

In 1947 Dantzig made the contribution to mathematics for which he is most famous, the simplex method of optimization. It grew out of his work with the U.S. Air Force where he become an expert on planning methods solved with desk calculators. In fact this was known as "programming", a military term that, at that time, referred to plans or schedules for training, logistical supply or deployment of men.

Dantzig mechanized the planning process by introducing "linear programming", where "programming" has the military meaning explained above. The importance of linear programming methods was described, in 1980, by Laszlo Lovasz who wrote:-

> If one would take statistics about which mathematical problem is using up most of the computer time in the world, then ... the answer would probably be linear programming.

Also in 1980 Eugene Lawler wrote:-

> [Linear programming] is used to allocate resources, plan production, schedule workers, plan investment portfolios and formulate marketing (and military) strategies. The versatility and economic impact of linear programming in today's industrial world is truly awesome.

Dantzig however modestly wrote:-

> The tremendous power of the simplex method is a constant surprise to me.

Dantzig became a research mathematician with the RAND Corporation in 1952, then in 1960 he was appointed professor at Berkeley and Chairman of the Operations Research Center. While there he wrote Linear programming and extensions (1963). In 1966 he was appointed Professor of Operations Research and Computer Science at Stanford University.

His work in a wide range of topics related to optimization and operations research over the years has been of major importance. However, writing in 1991, Dantzig noted that:-

> ... it is interesting to note that the original problem that started my research is still outstanding - namely the problem of planning or scheduling dynamically over time, particularly planning dynamically under uncertainty. If such a problem could be successfully solved it could eventually through better planning contribute to the well-being and stability of the world.

Dantzig has received many honours including the Von Neumann Theory Prize in Operational Research in 1975. His work is summarized by Stanford University as follows:-

> A member of the National Academy of Engineering, the National Academy of Science, the American Academy of Arts and Sciences and recipient of the National Medal of Science, plus eight honorary degrees, Professor Dantzig's seminal work has laid the foundation for much of the field of systems engineering and is widely used in network design and component design in computer, mechanical, and electrical engineering.

Article by: J J O'Connor and E F Robertson

El Analista de Investigación de Operaciones

Naturaleza del Trabajo

Dirigir una organización u operación compleja, tal como una extensa planta manufacturera, una aerolínea, o un despliegue militar requiere coordinación precisa de materiales, máquinas y gente. Los analistas de investigación de operaciones ayudan a las organizaciones a coordinar y operar de la manera más eficiente aplicando métodos científicos y principios matemáticos a los problemas organizacionales. Los administradores pueden evaluar alternativas y escoger el curso de acción óptimo para la organización.

Los analistas de investigación de operaciones, también llamados analistas de las ciencias administrativas, son solucionadores de problemas. Los problemas que atacan están en su mayoría relacionados con las grandes organizaciones de negocios: estrategia, pronósticos, distribución de recursos, disposición de medios, control de inventarios, calendarización de personal, y sistemas de distribución. El método que usan generalmente involucra un modelo matemático (conjunto de ecuaciones) que explica la manera en que ocurren las cosas dentro de la organización. Dicho modelo es una representación simplificada que permite al analista dividir los sistemas en partes, asignar valores numéricos a cada componente, y examinar las relaciones matemáticas entre ellos. Estos valores pueden ser alterados para determinar qué ocurriría bajo diferentes circunstancias. Los principales tipos de modelos son: simulación, optimización lineal, redes, líneas de espera, y teoría de juegos.

Los analistas de investigación de operaciones hacen uso extensivo de los recursos computacionales en su trabajo. Generalmente son expertos en el manejo de bases de datos, programación, y desarrollo de software sofisticado. La mayoría de los modelos realizados por los analistas de investigación de operaciones son tan complicados que sólo una computadora los puede resolver eficientemente.

Los problemas que manipulan varían según la industria. Por ejemplo, un analista para una aerolínea coordinará la calendarización de vuelos y mantenimiento, estimados de nivel de pasajeros, y consumo de combustible para producir un calendario que optimice todos estos factores y así asegure la seguridad y producir la mayor ganancia posible. Por otro lado, un analista empleado en un hospital se concentrará en diferentes problemas, como el control de admisión de pacientes, el manejo del flujo de pacientes, la asignación de turnos, monitoreo de uso de servicios de farmacia y laboratorios, o el pronóstico de la demanda para nuevos servicios del hospital.

El papel del analista de investigación de operaciones varía de acuerdo a la estructura y filosofía administrativa de la compañía. Algunas empresas centralizan la investigación de operaciones en un departamento; otras dispersan el personal de investigación de operaciones a través de todas las divisiones. Algunos analistas de investigación de operaciones se especializan en un tipo de aplicación; otros se generalizan.

El grado de supervisión varía según la estructura y experiencia de la organización. En algunas empresas los analistas tienen un grado muy alto de independencia profesional; en otras, los analistas son supervisados celosamente. Los analistas de investigación de operaciones tienen una relación muy cercana con los administradores de alto nivel, quienes tienen una gran variedad de requerimientos de soporte. Los analistas deben adaptar su trabajo para cubrir estas necesidades.

Sin considerar la estructura de la organización o la industria, la investigación de operaciones vincula un conjunto similar de procedimientos. Los administradores comienzan el proceso describiendo los síntomas del problema al analista. El analista define entonces el problema, el cual algunas veces es de naturaleza general y otras es específico. Por ejemplo, un analista de una manufacturera automotriz querrá determinar el nivel óptimo de inventario de cada uno de los materiales para un nuevo proceso de producción o, más específicamente, para determinar cuánto acero debe ser almacenado.

Después de que el analista define el problema, aprende todo lo que se puede acerca de él. Investiga el problema, después lo divide en pequeños componentes. Entonces acumula información acerca de cada una de esas partes. Generalmente esto involucra consultar a un gran número de personal. Por ejemplo, para determinar la cantidad óptima de acero a ser almacenado, el analista podría hablar con los ingenieros acerca de los niveles de producción; discutir arreglos de adquisición con los compradores industriales; Y examinar los datos de los costos de almacenamiento provistos por el departamento de contabilidad.

Con esta información, el analista de investigación de operaciones está listo para seleccionar la técnica analítica más apropiada. Puede haber muchísimas técnicas que se adapten al problema, aunque también puede ser que sólo una se ajuste a nuestras necesidades. En algunos casos, el analista debe construir un modelo original para examinar y explicar el sistema. En casi todos los casos, el modelo seleccionado debe de ser modificado para reflejar las circunstancias específicas de la situación.

Un modelo para la calendarización de vuelos de una aerolínea, por ejemplo, puede tomar en cuenta la cantidad de combustible requerido para las rutas de vuelo, varios niveles de demanda de los pasajeros, diferentes precios de los boletos, calendarización de los pilotos, y costos de mantenimiento. El analista selecciona los valores para estas variables, alimenta con ellos a la computadora, la cual ha sido programada para hacer los cálculos requeridos, y corre el programa para producir el calendario óptimo de vuelos.

En este punto, el analista presenta el trabajo final a la administración además de ciertas recomendaciones basadas en los resultados de los análisis. Para la toma final de decisiones se requerirán corridas adicionales basadas en diferentes suposiciones. Una vez que se toma una decisión, el analista trabaja para asegurar su instrumentación.

Condiciones de trabajo

Los analistas de investigación de operaciones generalmente trabajan horas regulares en ambiente de oficina. Debido a que trabajan en proyectos que son de interés inmediato para la alta administración, los analistas trabajan constantemente bajo presión y por lo general más de 40 horas por semana. El trabajo es de naturaleza sedentaria, y se requiere muy poca fuerza física.

Empleo

El campo para los analistas de investigación de operaciones fue de 57,000 empleos en 1990 en Estados Unidos. Se requieren en la mayoría de las industrias. Las empresas que más necesitan los servicios de un analista de investigación de operaciones son las manufactureras de químicos, maquinaria y equipo de transporte; empresas que proveen servicios de transporte y telecomunicaciones; bancos; agencias de seguros; empresas de servicios públicos; y agencias gubernamentales de todos los niveles. Algunos analistas trabajan en agencias de consultoría administrativa que desarrollan aplicaciones de investigación de operaciones para empresas que no tienen personal de este tipo.

La mayoría de los analistas en el gobierno trabajan para las fuerzas armadas. Además, varios analistas que trabajan en la industria privada trabajan también directa o indirectamente para la Defensa Nacional.

Perspectivas futuras de trabajo

Se espera que las oportunidades de trabajo para los analistas de investigación de operaciones crezcan mucho más rápido que el promedio de las ocupaciones hasta el año 2005 debido a la importancia que está cobrando el análisis cuantitativo en la toma de decisiones y la cada vez mayor disponibilidad de recursos computacionales.

Cada vez más organizaciones están usando técnicas de investigación de operaciones para mejorar la productividad y reducir los costos. Además, hoy en día se pueden encontrar computadoras con las capacidades requeridas para correr aplicaciones de investigación de operaciones a muy bajos costos. Esto permite que hasta las empresas pequeñas se interesen por la investigación de operaciones. Esta tendencia estimulará en gran medida la demanda de analistas de investigación de operaciones en los próximos años.

Se espera que el mayor crecimiento de la demanda de trabajo ocurra en los sectores de transporte, manufactura, finanzas y servicios. Las empresas en estos sectores reconocen que el análisis cuantitativo puede ocasionar mejoras sustanciales en la eficiencia operativa y las utilidades. Cada vez más aerolíneas, por ejemplo, están usando investigación de operaciones para determinar la calendarización óptima de vuelos y mantenimiento, seleccionar las mejores rutas de servicio, analizar las características de los clientes, y controlar el consumo de combustible, entre otras cosas. Las cadenas de moteles están comenzando a utilizar la investigación de operaciones para mejorar su eficiencia. Por ejemplo, analizan los patrones de tráfico de automóviles y las actitudes de los clientes para determinar la localización, tamaño y estilo de los nuevos moteles.

La Investigación De Operaciones en la práctica

En esta sección se presenta un breve panorama de las técnicas de la Investigación de Operaciones. Después se presentan los resultados de algunas investigaciones que muestran cuáles técnicas se han utilizado con mayor frecuencia en la práctica y qué es necesario hacer para permitir al lector utilizar con éxito la Investigación de Operaciones a lo largo de su carrera.

Técnicas de la ciencia de la Investigación de Operaciones
En este texto se describen las siguientes técnicas de la ciencia de la Investigación de Operaciones.

Programación lineal: es un método de solución de problemas que se ha desarrollado para situaciones que implican la maximización o la minimización de una función lineal sujeta a restricciones lineales que limitan la medida en la que se puede tender hacia la función objetivo.

Programación lineal con números enteros: Es un método que se utiliza para problemas que pueden ser planteados como programas lineales, con el requisito adicional de que algunas o todas las decisiones recomendadas deben asumir valores enteros.

Modelos de redes: Es una representación gráfica de un problema que consiste en pequeños círculos, a los que se denomina nodos, interconectados por líneas a las que se denomina arcos. Existen procedimientos de solución especializados para este tipo de problemas que permiten resolver rápidamente muchos problemas gerenciales en áreas como diseño de sistemas de transporte, diseño de sistemas de información y programación de proyectos.

Administración de proyectos PERT/CPM: En muchos casos los administradores asumen la responsabilidad de la planeación, la programación y el control de proyectos que constan de numerosas tareas o trabajos que son llevados a cabo por diversos departamentos, personas, etc. PERT y CPM son técnicas que ayudan a los administradores a cumplir con sus responsabilidades en la administración de proyectos.

Modelos de inventarios: Estos modelos se utilizan para auxiliar a administradores que enfrentan los problemas duales de mantener suficientes inventarios para satisfacer la demanda de bienes y, al mismo tiempo, de incurrir en los menores costos posibles por el mantenimiento de esos inventarios.

Modelos de líneas de espera (teoría de colas): Se han desarrollado los modelos de líneas de espera (colas o filas) para ayudar a los administradores a comprender y a tomar mejores decisiones con respecto a la operación de sistemas que implican líneas de espera.

Simulación en computadora: Esta es una técnica que se utiliza para ensayar modelos de la operación de un sistema en el tiempo. Tal técnica emplea un programa computacional para modelar la operación y realizar cálculos sobre la simulación.

Análisis de decisiones: El análisis de decisiones puede servir para determinar estrategias óptimas en situaciones en las que existen varias alternativas de decisión y un patrón de eventos incierto o llenos de riesgo.

Programación de metas: Esta es una técnica que se utiliza para resolver problemas de decisiones con criterios múltiples, por lo general dentro de una estructura de programación lineal. Proceso analítico de jerarquización. Es una técnica de toma de decisiones con criterios múltiples que permite la inclusión de factores subjetivos para llegar a la decisión que se recomienda.

Pronósticos: Los métodos de pronóstico se pueden emplear para predecir aspectos futuros de una operación de negocios.

Modelos de procesos de Markov: Los modelos de procesos de Markov son útiles para estudiar la evolución de ciertos sistemas después de varias repeticiones. Por ejemplo, se han usado procesos de Markov para describir la probabilidad de que una máquina que está funcionando en un periodo continúe funcionando o se descomponga en otro periodo.

Programación dinámica: Esta programación es una técnica que permite descomponer un problema grande de manera que, una vez que se han resuelto los problemas más pequeños obtenidos en la descomposición, se tiene una solución óptima para el problema completo.

Métodos que se usan con mayor frecuencia

Un estudio realizado por Forgionne acerca de ejecutivos de empresas indica la frecuencia con la que se utilizan diversas técnicas de la ciencia de la Investigación de Operaciones. Como se muestra en la Tabla siguiente, los métodos que se usan con mayor frecuencia son los métodos estadísticos, la simulación en computadora, PERT/CPM, programación lineal y teoría de colas.

	Frecuencia de uso en % de respuestas		
	Nunca	Moderada	Frecuente
Estadística	1.6	38.7	59.7
Simulación en computadora	12.9	53.2	33.9
PERT/CPM	25.8	53.2	21.0
Programación lineal	25.8	59.7	14.5
Teoría de las colas	40.3	50.0	9,7
Programación no lineal	53.2	38.7	8.1
Programación dinámica	61.3	33.9	4.8
Teoría de los juegos	69.4	27.4	3,2

Estudio de Ledbetter y Cox apoya estas conclusiones al jerarquizar, en orden de uso, regresión (análisis estadístico), programación lineal, simulación, modelos de redes (PERT/CPM), filas o colas, programación dinámica y teoría de juegos.
Una investigación de Thomas y DaCostaS mostraba que el 88% de todas las empresas grandes utilizan los pronósticos y que más de 50% hacen uso de métodos cuantitativos para programación de la producción, control de inventarios, presupuestos de capital y transporte.
Un estudio realizado por Gaitheró sobre las aplicaciones de la ciencia de la administración en empresas manufactureras apoya también la elevada frecuencia de utilización del análisis estadístico, la simulación y la programación lineal. Sin embargo, PERT/CPM es el método que se identifica como el más frecuentemente empleado en las empresas manufactureras investigadas. Las empresas manufactureras reportan también una utilización superior al promedio de la teoría de colas, la programación no lineal y la programación según enteros.
Como parte de una investigación sobre practicantes en el gobierno, la industria y la academia, Shannon, Long y Buckles pidieron a administradores en ejercicio que señalaran si estaban familiarizados con los diversos métodos cuantitativos y si habían utilizado o no esos métodos en aplicaciones específicas. Los resultados, que se muestran en la siguiente Tabla, ofrecen apoyo adicional en el sentido de que es probable que las técnicas de la ciencia de la administración que más se conocen y utilizan son programación lineal, simulación, análisis de redes y teoría de colas.

Implicaciones para el uso de la ciencia de la administración

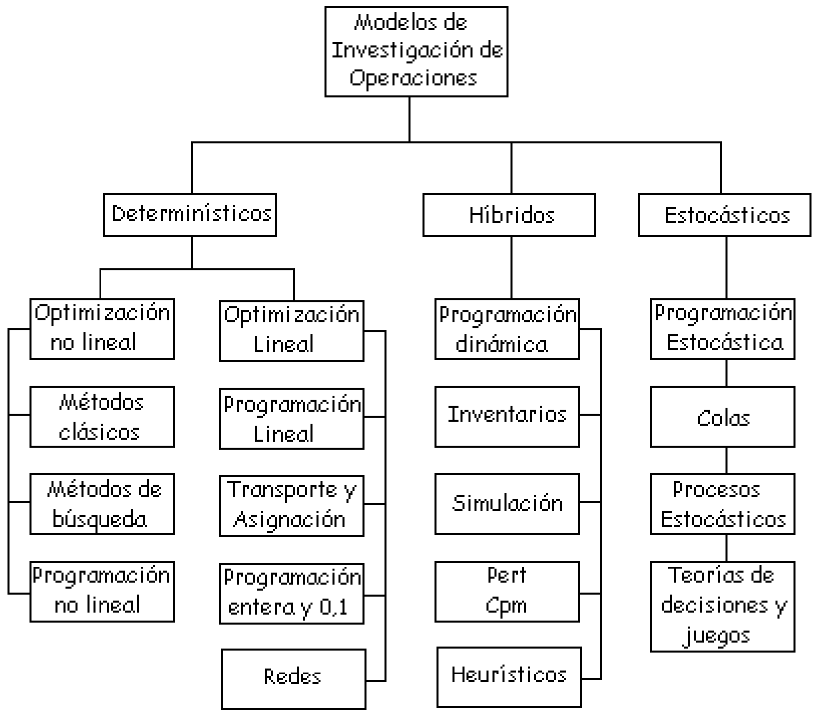
Recientemente, Morgans revisó 12 investigaciones sobre empresas y 3 investigaciones sobre practicantes que se han realizado en los últimos 30 años, incluyendo todos los estudios mencionados antes.

Método	Rango de conocimiento	Uso (%)
Programación Lineal	1	83,8
Simulación	2	80.3
Análisis de redes	3	58,1
Teoría de las colas	4	54,7
Árboles de decisión	5	54,7
Programación según enteros	6	38,5
Análisis de reposición	7	38,5
Programación dinámica	8	32,5
Procesos de Markov	9	31,6
Programación no lineal	10	30,7
Programación de metas	11	20,5
Teoría de los juegos	12	13,7

Su análisis apoya también el dato de que PERT/CPM, Programación lineal y simulación se encuentran entre los métodos que se utilizan con mayor frecuencia. Sin embargo, y esto es más importante, después de realizar un estudio cuidadoso de los resultados de todas las empresas, concluyó que (1) cualquier empresa que esté empezando a servirse de técnicas de ciencia de la administración debe ubicar a los analistas en las áreas funcionales y no en unidades centralizadas; (2) el uso inicial de la ciencia de la Investigación de Operaciones se debe concentrar en las técnicas que se utilizan con mayor frecuencia y en las más útiles; y (3) la mejor manera de eliminar las barreras que se oponen al uso de la ciencia de la administración es haciendo que los administradores comprendan mejor las técnicas de la ciencia de la administración. Además, para lograr la confianza y el apoyo de los administradores de primer nivel, *el analista de CA/IO debe aprender a "vender" sus métodos y soluciones, haciendo especial énfasis en el mejoramiento de la comunicación con los administradores.*

Tomado de: Introducción a los Métodos Cuantitativos para administración, por David R. Anderson, Dennis J. Sweeney, Thomas A. Williams. Grupo Editorial Iberoamericano.

Modelos de la Investigación de Operaciones



Bibliografía

BAZARAA, Mokhtar S., JARVIS, John J., SHERALI, Hanif D., *Programación Lineal y flujo de redes.* Editorial Limusa S.A. de C.V. Grupo Noriega Editores, Balderas 95, México D. F. Segunda edición. 1.998

CHANG, Yih-Long. *WinQsb,* Soporte para el software. John Wiley & Sons, Inc. 1.998

EPPEN D. G., GOULD F. J., SCHMIDT C. P. *Investigación de operaciones en la ciencia administrativa.,* Editorial Prentice –Hall Hispanoamericana S.A., México. Tercera edición 1.992

GALLEGHER Charles A., HUNG, J. Watson. *Métodos cuantitativos para la toma de decisiones en la administración.* Editorial McGraw-Hill Interamericana, México. Primera edición 1.982

GONZALEZ ARIZA, Angel León. *Manual práctico de investigación de operaciones.* Segunda edición 1.998. Ediciones Uninorte.

HILLIER, Frederick S.; LIEBERMAN, Gerald J. *Introducción a la investigación de operaciones.* Sexta edición. Editorial McGraw-Hill Interamericana, México. 1.997

LEVIN, Richard., KIRKPATRICK, Charles A., *Enfoques cuantitativos a la administración.* Compañía editorial continental, S. A. México. Novena reimpresión 1.997

MATHUR, Kamlesh., SOLOW Daniel., *Investigación de Operaciones : El arte de la toma de decisiones.* Editorial Prentice Hall Hispanoamericana S.A. 1.996

SASIENI, Maurice., YASPAN, Arthur., FRIEDMAN, Lawrence. *Investigación de Operaciones, Métodos y problemas.* Editorial Limusa, México, 1.978

MOSKOWITZ, Herbert; WRIGHT, Gordon P., *Investigación de operaciones.* Editorial Prentice Hall Internacional, Londres. Primera edición 1.982

NAMAKFOROOSH, Mamad Naghi. *Investigación de operaciones.* Editorial Limusa

PRAWDA WITENBERG, Juan. *Métodos y modelos de investigación de operaciones.* Volumen 1. Editorial Limusa 1.995

RÍOS INSUA, Sixto; RÍOS INSUA David; MATEOS, Alfonso; MARTÍN, Jacinto. *Programación lineal y aplicaciones.* Editorial Alfaomega S.A. 1.997

SHAMBLIN, James E.; STEVENS Jr. G. T. *Investigación de operaciones: Un enfoque fundamental.* Editorial McGraw-Hill Interamericana, México.

SOLOW, Daniel; KAMLESH, Mathur. *Investigación de operaciones.* Editorial Prentice – Hall Hispanoamericana S.A., México.

STEPHEN B. Bergen. *Apuntes de los cursos de investigación de operaciones de la Universidad se Stanford.* Universidad Tecnológica de Pereira .

TAHA, Handy A. *Investigación de operaciones: Una introducción.* Editorial Prentice Hall, México. Sexta edición 1.998

VARELA, Jaime Enrique. *Introducción a la investigación de operaciones.* Editorial Fondo Educativo Interamericano S.A., Colombia. Primera edición 1.982

WINSTON, Wayne L. *Operations Research, Applications And Algorithms.* Duxbury Press And Imprint of Wadsworth Publishing Company, Belmont, California. Tercera edición 1.994

Software

A continuación damos una lista de programas informáticos con la dirección Web, en las que el lector podrá obtener información reciente y detallada del software, incluyendo en muchos casos una versión de evaluación.

ARSHAM, Hossein Dr. www.brave.as/arsham

AIMMS, Paragon Decisión Technology, Haarlem, Holanda, http://www.paragon.nl

BOĞAZIÇI UNIVERSITY ISTANBUL-TURKEY, Departamento de sistemas., http://mis.boun.edu.tr/erdem/winqsb.html

CORPORACIÓN UNIVERSITARIA DE IBAGUÉ, Programa de Ingeniería Industrial., www.cui.edu.co/industrial/SOF01.html ; www.cui.edu.co/industrial/io.htl

CPLEX for AMPL, MINOS for AMPL, Compass Modeling Solutions, Reno, Nevada, http://www.modeling.com

FORT MP, Numerical Algorithms Group., http://www.nag.com

GAMS, Gams Development Corporation, Washington, http://www.gams.com
INVESTIGACIÓN OPERATIVA., http://members.tripod.com/~operativa

LINDO, LINGO, WHAT'S BEST, Lindo Systems, Chicago, http://www.lindo.com

LP/MIPSolvers, PREMIUM SOLVER for EXCEL, frontline Systems, http://www.frontsys.com

LPS-867, Applied Automated Engineering Corporation, Pennington, N. J., http://www.aae.com

MPL Modeling System, Maximal Software, Arlington, Va., http://www.maximal-usa.com

SAS Software, SAS Institute, Cary N.C., http://www.sas.com

DSPims, Aspen Technology, http://www.aspentech.com

XPRESS-MP, Dash Associates Ltd., Blisworth, UK, http://www. Dash.co.uk