



# MÉTODOS Y MODELOS DE INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

**Vol. I MODELOS DETERMINÍSTICOS**

**JUAN PRAWDA**

$$\begin{aligned} \text{Opt}Z &= cx \\ Ax &< b \\ x &> 0 \end{aligned}$$



### **Acerca del autor:**

Dr. JUAN PRAWDA WITENBERG, graduado en ingeniería mecánica eléctrica de la Universidad Nacional Autónoma de México en 1966, obtuvo los grados de maestría y doctorado en investigación de operaciones en Northwestern University, Evanston, Illinois, E.U.A., en 1968 y 1970, respectivamente.

El Dr. Prawda fue profesor adjunto en las escuelas de graduados en Administración de Negocios y de Hospitales, ambas de Tulane University, Nueva Orleans, E.U.A. de 1970-1974. Prestó sus servicios en la Compañía Nacional de Subsistencias Populares (CONASUPO) de 1973 a 1976; en la Secretaría de Comercio en 1977; y en la Secretaría de Educación Pública de 1978 a 1989, en esta última como Director General de Planeación, Programación, Presupuesto y Sistemas de Información. Fue consultor de varios organismos internacionales (UNESCO, Instituto Internacional de Planeación Educativa de la UNESCO, Organización Mundial de la Salud y Organización de Estados Americanos) y privados (Banco Nacional de México, Altos Hornos de México, entre otros).

Ha escrito en revistas científicas, tanto del campo de la investigación de operaciones como de la educación además de publicar cinco libros, tres en Investigación de Operaciones y dos sobre educación. Ha impartido cursos de Investigación de Operaciones, Macro y Microplaneación y Planeación Prospectiva en el Instituto Politécnico Nacional, El Colegio de la Frontera Norte (Tijuana), la Universidad de Monterrey, así como en diversos foros en Colombia, Cuba y Estados Unidos.

Desde 1990 presta sus servicios en el Banco Mundial, Washington D.C., E.U.A., como especialista en educación. Complementariamente es profesor de los seminarios regionales anuales sobre Planificación y Administración Educativa que ofrece la UNESCO a los países miembros de América Latina y el Caribe.

MÉTODOS  
Y MODELOS DE  
INVESTIGACIÓN  
DE OPERACIONES

This One



WA06-EF5-HK1G Copyrighted material





# MÉTODOS Y MODELOS DE INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

## **VOL. I MODELOS DETERMINÍSTICOS**

**Dr. Juan Prawda Witenberg**

Asesor de la Subdirección de  
Planeación y Finanzas de la  
Compañía Nacional de Subsistencias  
Populares (CONASUPO).

Profesor de la Sección de Graduados de la  
Unidad Profesional Interdisciplinaria de  
Ingeniería y Ciencias Sociales y Administrativas  
(UPHCSA) del Instituto Politécnico Nacional.



MÉXICO • España • Venezuela • Colombia

Prawda, Juan

*MÉTODOS Y MODELOS DE INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES I : Modelos determinísticos / Juan Prawda.* -- México : Limusa, 2004.

936 p. : il. ; 15.5 cm.

ISBN 968-18-0590-9.

Rústica.

1. Investigación operativa

LC: T57.6

Dewey: 658.54<sup>2</sup> - dc21

LA PRESENTACIÓN Y DISPOSICIÓN EN CONJUNTO DE

**MÉTODOS Y MODELOS DE INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES. VOLUMEN 1**

SON PROPIEDAD DEL EDITOR. NINGUNA PARTE DE ESTA OBRA PUEDE SER REPRODUCIDA O TRANSMITIDA, MEDIANTE NINGÚN SISTEMA O MÉTODO, ELECTRÓNICO O MECÁNICO (INCLUYENDO EL FOTOCOPIADO, LA GRABACIÓN O CUALQUIER SISTEMA DE RECUPERACIÓN Y ALMACENAMIENTO DE INFORMACIÓN), SIN CONSENTIMIENTO POR ESCRITO DEL EDITOR.

DERECHOS RESERVADOS:

© 2004, EDITORIAL LIMUSA, S.A. DE C.V.

GRUPO NORIEGA EDITORES

BALDERAS 95, MÉXICO, D.F.

C.P. 06040

☎ 8503 8050

☎ 01(800) 706 9100

☎ 5512 2903

✉ [limusa@noriega.com.mx](mailto:limusa@noriega.com.mx)

✉ [www.noriega.com.mx](http://www.noriega.com.mx)

CANIEM Núm. 121

HECHO EN MÉXICO  
ISBN 968-18-0590-9

19.1



Este libro está dedicado a dos conjuntos de personas, **A** y **B**, tal que

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \phi$$

donde

$$\mathbf{A} = \{\text{Deborah; mis padres}\}$$

$$\mathbf{B} = \{\text{Todos aquellos que utilizan la investigación de operaciones en la toma de sus decisiones}\}$$





# Prólogo

Existe hoy en día, una variedad bastante extensa de herramientas que permiten incrementar la probabilidad de tomar mejores decisiones en cualquier organización. Cabe mencionar que entre esta gama de herramientas se encuentran por ejemplo, los sistemas de información, los métodos estadísticos, las técnicas tradicionales de la ingeniería industrial, la evaluación económica, el procesamiento de datos, la investigación de operaciones, etc.

Esta obra, dividida en dos volúmenes trata precisamente sobre esta última herramienta, la investigación de operaciones. Mucho se ha escrito al respecto en idiomas diferentes al nuestro. Algunas de estas obras, son ya clásicas, y se han traducido al español. Otras, sirven sólo para hacer bulto en las bibliotecas particulares o para hacer contrapeso en los laboratorios de revelado fotográfico. En esta área, como en muchas otras, nosotros los latinoamericanos, nos hemos distinguido por nuestra raquíca cohtribución a la causa.

La investigación de operaciones es un área muy fértil, característica que no nos sorprende, pues es aún muy joven, 25 años de vida. Se ha investigado profusamente en muchos países (de los cuales nos volvemos orgullosamente a excluir) y por lo tanto existe un volumen bastante considerable de literatura al respecto.

Mi objetivo es el de presentar, explicar e ilustrar aquello de la investigación de operaciones, que se ha utilizado más frecuentemente en las organizaciones (públicas o privadas). Así se han producido dos volúmenes. En el primero se presentan los métodos y modelos determinísticos de la investigación de operaciones (programación lineal, entera, dinámica, no-lineal y redes de optimización), dejando en el segundo volumen a los estocásticos (teoría de colas, inventarios, simulación, procesos markovianos de decisión, análisis de decisiones, redes estocásticas, programación estocástica, problemas de localización y de reemplazo).

Me he propuesto como primer subobjetivo, el de presentar los modelos y métodos desde un punto de vista balanceado, es decir, donde se utilice por un lado la suficiente teoría para justificar lo que se expone

## 8 Prólogo

y alejarse de las "recetas de cocina" que se olvidan tan rápidamente como se aprenden, y por el otro lado, el de utilizar los suficientes ejemplos, lo más apegados a la realidad, para aclarar e ilustrar el uso de modelos y métodos.

Como segundo subobjetivo, he resuelto hacer uso, hasta donde mis posibilidades me lo permitan, de ejemplos directamente relacionados con mi experiencia en la aplicación de la investigación de operaciones en los sectores públicos y privados, tanto de países desarrollados como, y más importante, países en vías de desarrollo, tales como México.

Quizás aquí sea donde se logre contribuir al gran vacío creado por la falta de participación de obras *originales* en español en este campo. Las obras traducidas al español, de ninguna manera eliminan la enorme diferencia que existe entre los sistemas donde se crean estos métodos y modelos, y los sistemas tipo "Tercer Mundo" donde vivimos y hay necesidad de aplicarlos.

Se pretende hacer de éste libro, un texto para cursos de investigación de operaciones, tanto a nivel de licenciatura como a nivel de posgrado. La estructura del libro se desarrolló de los cursos que impartí en la Escuela de Graduados de Administración de Negocios y Escuela de Graduados de Administración de Hospitales, ambas de Tulane University, Nueva Orleans, E.U.A.; el departamento de Ingeniería Industrial de Northwestern University, Evanston, Illinois, E.U.A.; la Universidad del Norte, Barranquilla, Colombia y la Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Ciencias Sociales y Administrativas del I.P.N, México. Secundariamente, el libro puede utilizarse como consulta en todas aquellas ramas que requieran de la investigación de operaciones.

Para el primer volumen se requiere que el lector tenga conocimientos elementales de cálculo diferencial e integral y de álgebra lineal. Por tal motivo, se anexan al finalizar dicho volumen, dos apéndices al respecto. Para el segundo volumen, se requiere del lector conocimientos elementales de probabilidad, estadística y pronósticos, que se resumen en un apéndice.

El texto sigue un orden lógico, no arbitrario. Se recomienda al lector que siga dicho orden. Se recomienda también que aquellos lectores que no posean los requisitos mínimos indispensables exigidos en cada parte del libro, recuerden sus conocimientos leyendo los apéndices apropiados.

A nivel de licenciatura, creo yo, que el siguiente material del primer volumen, no es *absolutamente indispensable*, y por consiguiente, tanto el lector como el maestro lo pueden eliminar:

Capítulo 2. Teoría del método simplex (parte de 2.2), teoremas de dualidad (parte de 2.3), programación paramétrica (análisis de sensibilidad continuo, parte de 2.4), método revisado (2.5), descomposición (2.6) y método de cota superior (2.7).

Capítulo 3. Estructura de transportes (3.2), transportes generalizados (3.8).

Capítulo 4. Teorema de flujo máximo y corte mínimo de una red (4.4), cadenas múltiples en una red (4.7), el algoritmo del "out of kilter" (parte de 4.8), flujo de bienes múltiples en una red (4.11), síntesis de una red de actividad (4.12.5).

En los dos últimos capítulos *se puede eliminar todo, con excepción de:*

Capítulo 6. Ejemplos ilustrativos (6.1), método fraccional de Gomory (6.2.1), método de bifurcación y acotación de Land-Doig (6.3.1), aplicación al problema tipo "mochila" (6.3.4) y "agente-viajero" (6.3.5).

Capítulo 7. Introducción (7.1), método de Fibonacci (7.2.1.1), método de Newton-Raphson (7.2.2.3), método de ascenso o descenso acelerado (7.2.3.1), método de Wolfe para la programación cuadrática (7.4.2) y aplicación real de la programación no lineal (7.8).

Se escribieron los dos volúmenes, pensando en dos semestres de 20 semanas cada uno, con 4 horas de clase por semana. A nivel de licenciatura se pueden cubrir en un semestre, los tópicos recomendados del capítulo 1 al 5 inclusive del primer volumen. El segundo semestre cubrirá los tópicos selectos de los capítulos 6 y 7, más los que se recomiendan en el segundo volumen. A nivel de posgrado, se puede cubrir completamente todo el primer volumen en un semestre, si es que el alumno dedica por lo menos 2 horas de estudio por hora de clase y tiene un nivel introductorio de la materia.

Es mi convicción, de que en la medida en que formemos una buena infraestructura de tomadores de decisiones y asesores de los mismos, la cortina de "nopal", en la cual nos encontramos, se esfumará para siempre.

Dr. Juan Prawda





# Agradecimientos

Esta obra se ha formado gracias a la participación directa o indirecta de muchas personas. En esta última categoría se encuentran varios cientos de estudiantes míos, que tuvieron la desgracia de descifrar los primeros borradores de esta obra. A ellos, que sirviendo como conejillos de indias, permitieron crear la infraestructura de esta obra, gracias.

El manuscrito fue leído en su totalidad por el Dr. Ariel Kleinman. Gracias a su paciente y meticulosa lectura se detectaron errores, se mejoraron formatos y se reestructuraron ideas para una mejor presentación al lector. Si la obra mejoró, ha sido gracias a él. Sigo siendo el único responsable de cualquier error.

Al compañero del gremio, Ing. Filiberto Cepeda Tijerina, le agradezco la orientación que me brindó respecto al concepto de sistemas. A él, le debo gran parte de la inspiración del primer capítulo. Gracias.

Para crear una obra se requiere de un ambiente. Este ambiente se encontró en la Sección de Graduados de la Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Ciencias Sociales y Administrativas (UPIICSA) del I.P.N., cuyo director, el Dr. Alfredo Careaga, ha sido constante estímulo para mí. Sin embargo, esta obra difícilmente hubiera aparecido, de no ser por la inestimable ayuda y facilidades que me proporcionó el Dr. Raúl Talan, director de UPIICSA, otra fuente de estímulo.

Gracias a la Srita. Nieves Mote Serrano, por haber mecanografiado el manuscrito y a la editorial LIMUSA por haber corregido mi español.

El último renglón es para agradecer a los compañeros de CONASUPO, que me brindaron la oportunidad de venir a diseñar, construir, evaluar e implantar modelos de investigación de operaciones, para la toma de decisiones de la compañía. Muchas personas intervinieron y a todas ellas, reitero mi profundo agradecimiento. Quiero únicamente destacar a unos cuantos: Lic. Fernando Solana, Subdirector de Planeación y Finanzas, Ing. Enrique Jiménez Espriú, Gerente Técnico, Ing. Miguel Alonzo, Subgerente de Investigación de Operaciones e Ing. José Urquiaga, Gerente de Producción de Industrias CONASUPO.



# Contenido

<b><u>1. La investigación de operaciones en la toma de decisiones</u></b>	<b>19</b>
<u>1.1 ¿Qué es la investigación de operaciones?, 19</u>	
<u>1.2 Breve resumen histórico de la investigación de operaciones, 23</u>	
<u>1.3 Análisis de las componentes de un proyecto de investigación de operaciones, 24</u>	
<u>1.3.1 Beneficios de un proyecto de investigación de operaciones, 24</u>	
<u>1.3.2 Formulación de los problemas, 27</u>	
<u>1.3.3 Construcción de modelos, 33</u>	
<u>1.3.4 Derivar las soluciones del modelo, 34</u>	
<u>1.3.5 Pruebas del modelo y de las soluciones. Control de implantación de los modelos, 35</u>	
<u>1.4 Formulación de diferentes modelos, 37</u>	
<u>Referencias, 54</u>	
<b><u>2. La programación lineal</u></b>	<b>57</b>
<u>2.1 Métodos gráficos, 57</u>	
<u>2.2 El método simplex, 67</u>	
<u>2.3 Dualidad, 126</u>	
<u>2.4 Análisis de sensibilidad y programación paramétrica, 146</u>	
<u>2.5 Método revisado, 181</u>	
<u>2.6 Método de descomposición lineal, 186</u>	
<u>2.7 Técnicas de cota inferior y superior, 204</u>	
<u>2.8 Aplicación real de un programa lineal en la administración pública mexicana, 213</u>	



## 14 Contenido

- [2.9 Lista de algunos programas comerciales de computadoras para resolver problemas de programación lineal, 230](#)
  - [Problemas, 231](#)
  - [Referencias, 241](#)

### **3. Problemas de transporte y asignación 245**

- [3.1 Algunos ejemplos intuitivos, 245](#)
- [3.2 La estructura de transportes, 253](#)
- [3.3 El algoritmo de transporte, 261](#)
- [3.4 Problemas de transporte degenerados, 281](#)
- [3.5 Problemas de transporte con capacidad restringida en sus flujos, 284](#)
- [3.6 Problemas de transbordo o transportes con nodos intermedios, 284](#)
- [3.7 Problemas de asignación, 289](#)
- [3.8 Problemas de transporte generalizado, 297](#)
- [3.9 Aplicación real del problema de transporte en la administración pública en México, 311](#)
- [3.10 Programas de computadora para resolver problemas de transportes, 320](#)
  - [Problemas, 321](#)
  - [Referencias, 327](#)

### **4. Redes de optimización 329**

- [4.1 Conceptos elementales, 329](#)
- [4.2 El problema de flujo máximo, 332](#)
- [4.3 Redes de optimización y la programación lineal, 343](#)
- [4.4 El teorema del flujo máximo y el corte mínimo de una red, 345](#)
- [4.5 Problemas de flujo a costo mínimo, 347](#)
- [4.6 Algunas aplicaciones de los problemas de flujo a costo mínimo, 352](#)
- [4.7 Cadenas múltiples económicas en una red, 353](#)
- [4.8 Problemas de flujo máximo a costo mínimo, 357](#)
- [4.9 Problemas paramétricos de redes y problemas de expansión, 379](#)
- [4.10 Arbol mínimo de comunicación en una red, 385](#)
- [4.11 Flujo de bienes \(o productos\) múltiples en una red, 387](#)
- [4.12 Redes de actividad, 397](#)
  - [4.12.1 El caso determinístico. Rutas críticas, 399](#)
  - [4.12.2 El caso probabilístico. PERT, 404](#)
  - [4.12.3 Cálculo de sensibilidad en las redes PERT, 408](#)
  - [4.12.4 Asignación uniforme de recursos y compresión de la duración de una red de actividades, 409](#)
  - [4.12.5 Síntesis de una red de actividad o su representación como un programa lineal, 415](#)
    - [Problemas, 417](#)
    - [Referencias, 434](#)

**5. La programación dinámica 437**

- [5.1 El principio de descomposición, 437](#)
- [5.2 El problema de decisión de una etapa, 443](#)
- [5.3 El problema de decisión de  \$n\$  etapas, 449](#)
- [5.4 La función recursiva, 453](#)
- [5.5 Composiciones más generales de las eficiencias y/o efectividades de un sistema, 461](#)
- [5.6 Diferentes estructuras de programación dinámica, 467](#)
- [5.7 Comparación del método de solución de entrada a salida contra el de salida a entrada, 487](#)
- 5.8 El problema de dimensionalidad en la programación dinámica, 489**
  - [Problemas, 493](#)
  - [Referencias, 501](#)

**6. Programación entera y heurística 503**

- [6.1 Ejemplos ilustrativos, 504](#)
- 6.2 Métodos de planos de corte, 520**
  - [6.2.1 Algoritmo fraccional de Gomory, 523](#)
  - [6.2.2 Algoritmo entero puro de Gomory, 527](#)
  - [6.2.3 Algoritmo entero-mixto de Gomory, 534](#)
  - [6.2.4 Otros métodos basados en planos de corte, 540](#)
- 6.3 Métodos de bifurcación y acotación, 541**
  - [6.3.1 Algoritmo de Land-Doig, 541](#)
  - [6.3.2 Algoritmo para el problema entero-mixto, 546](#)
  - [6.3.3 Aceleración de los métodos de bifurcación y acotación, 550](#)
  - [6.3.4 Método de bifurcación y acotación y el problema tipo "mochila", 553](#)
  - 6.3.5 El método de bifurcación y acotación y el problema del "agente viajero", 559**
- 6.4 Métodos de enumeración implícita, 564**
  - [6.4.1 Método aditivo de Balas para resolver problemas binarios \(cero-uno\) por enumeración implícita, 565](#)
  - [6.4.2 Algoritmo aditivo generalizado de Balas, 572](#)
  - [6.4.3 Restricciones de reemplazo, 575](#)
  - [6.4.4 Problemas enteros no-lineales, 577](#)
- 6.5 Comentarios finales de los métodos de programación entera, 581**
- 6.6 Problemas de secuenciación de vehículos, 584**
- 6.7 Problema de determinación del tamaño de una flota de vehículos, 589**
  - [Problemas, 600](#)
  - [Referencias, 608](#)

<b>7. Optimización no-lineal</b>	<b>615</b>
7.1 Introducción,	615
7.2 Problemas de optimización no restringidos,	622
7.2.1 Métodos de optimización de funciones unimodales de una sola variable en problemas no restringidos,	627
7.2.1.1 Método de búsqueda de Fibonacci,	630
7.2.1.2 Método de búsqueda de la "sección de oro",	635
7.2.2 Métodos de optimización de funciones multimodales de una sola variable en problemas no restringidos,	640
7.2.2.1 Interpolación cúbica,	640
7.2.2.2 Interpolación cuadrada,	642
7.2.2.3 Método de Newton-Raphson,	644
7.2.3 Método de optimización que utilizan derivadas para funciones de varias variables en problemas no restringidos,	648
7.2.3.1 Método de ascenso o descenso acelerado,	655
7.2.3.2 Método de Newton,	659
7.2.3.3 Direcciones conjugadas,	660
7.2.3.4 Método de Davidon-Fletcher-Powell,	667
7.2.3.5 Método de Fletcher-Reeves,	674
7.2.4 Optimización de funciones no restringidas, no diferenciables de varias variables. Método de Powell,	677
7.2.5 Comentarios de evaluación de métodos de optimización de funciones de varias variables en problemas no restringidos,	681
7.3 Problemas de optimización no lineal, con restricciones,	683
7.3.1 Programación convexa,	683
7.3.2 Condiciones de Kuhn-Tucker,	693
7.3.2.1 Introducción,	693
7.3.2.2 Representación geométrica de las condiciones de Kuhn-Tucker,	695
7.3.2.3 Representación matemática de las condiciones necesarias de Kuhn-Tucker,	700
7.3.2.4 Puntos de silla y las condiciones suficientes de Kuhn-Tucker,	701
7.4 Métodos de optimización no lineal basados en la aproximación lineal,	709
7.4.1 Método de Griffith-Stewart,	710
7.4.2 Método de Wolfe para la programación cuadrática,	714

- 7.4.3 Método de direcciones factibles, 719
- 7.4.4 Programación separable, 725

- 7.5 Métodos penales, 733
- 7.6 Otros métodos. Evaluación. Programas de computadoras, 741
- 7.7 Programación geométrica, 744
- 7.8 Aplicación real de la programación no lineal, 762
  - Problemas, 767
  - Referencias, 779

**APENDICE A. Conceptos básicos del álgebra, cálculo diferencial e integral** **785**

- A-1** Conceptos básicos del álgebra, 785
  - A-1-1** Números, 785
  - A-1-2** Factores, 786
  - A-1-3** Simbología, 786
  - A-1-4** Operación entre fracciones, 787
  - A-1-5** Leyes de álgebra, 787
  - A-1-6** Igualdades y desigualdades, 788
  - A-1-7** Factorización y multiplicación algebraica, 788
  - A-1-8** Solución de ecuaciones de segundo grado, 789
  - A-1-9** Exponentes, 789
  - A-1-10** Notación científica, 791
- A-2** Conjuntos, relaciones y funciones, 791
  - A-2-1** Conjuntos, 791
  - A-2-2** Algebra de conjuntos, 793
  - A-2-3** Producto cartesiano, 796
  - A-2-4** Relaciones y funciones, 798
  - A-2-5** Algebra de funciones. Composición de funciones. Función explícita e implícita, 803
  - A-2-6** Gráfica de funciones, 806
  - A-2-7** Funciones exponenciales y logarítmicas, 808
- A-3** Límites y continuidad, 812
  - A-3-1** Límite de una función, 812
  - A-3-2** Teorema de límites, 814
  - A-3-3** Continuidad, 815
- A-4** Derivadas. Máximos y mínimos de funciones de una sola variable, 818
  - A-4-1** Concepto intuitivo de derivada, 818
  - A-4-2** Cálculo de la derivada por medio de la definición, 820

## 18 Contenido

- [A-4-3](#) Algunas fórmulas de derivadas, 820
- [A-4-4](#) Continuidad y la derivada de una función, 822
- [A-4-5](#) Derivadas implícitas, 823
- [A-4-6](#) Aplicaciones de derivadas, 825
  - [A-4-6-1](#) Diferenciales, 825
  - [A-4-6-2](#) Máximos y mínimos, 826

### [A-5](#) Derivadas parciales. Máximos y mínimos de funciones de varias variables, 836

- [A-5-1](#) Derivadas parciales, 836
- [A-5-2](#) Derivadas parciales mixtas y de mayor orden, 838
- [A-5-3](#) Máximos y mínimos de funciones de varias variables sin restricciones, 839
- [A-5-4](#) Máximos y mínimos de funciones de varias variables con restricciones (métodos de optimización por Lagrangeanos), 842

### [A-6](#) Nociones de cálculo integral, 845

- [A-6-1](#) Antiderivada y la integral indefinida, 845
- [A-6-2](#) Algunas reglas de integración, 847
- [A-6-3](#) La integral definida. Área bajo la curva, 848
- [A-6-4](#) Integrales impropias e integración numérica, 851
- [A-6-5](#) Integrales múltiples, 853

### [A-7](#) Algunos teoremas importantes del cálculo, 854

- [Problemas, 857](#)
- [Referencias, 862](#)

## **APENDICE B. Álgebra lineal y espacios vectoriales 865**

- [B-1](#) Vectores, 865
- [B-2](#) Matrices y determinantes, 868
- [B-3](#) Espacios vectoriales, 881
- [B-4](#) Solución de sistemas de ecuaciones lineales, 891
- [B-5](#) Sistema de inecuaciones lineales, 895
- [B-6](#) Conos y conjuntos convexos, 905
- [B-7](#) Formas cuadráticas, 913
  - [Problemas, 913](#)
  - [Referencias, 916](#)

## Índice onomástico, 917

## Índice alfabético, 923

# La investigación de operaciones en la toma de decisiones

El objetivo de este capítulo introductorio es presentar al lector lo que es la Investigación de Operaciones, dándole, desde la definición más aceptada, hasta su reseña histórica, explicando la manera como se le usa y sus ventajas.

Se explican en este capítulo las condiciones que deben existir para que la Investigación de Operaciones se pueda aplicar en la solución de problemas reales. Además, se detallan las diferentes etapas por las que necesariamente debe pasar todo estudio o proyecto de Investigación de Operaciones.

Se finaliza este capítulo con la presentación de una serie de problemas reales y su representación por medio de modelos matemáticos, que son precisamente los que utiliza la Investigación de Operaciones. La formulación, justificación y uso de varios de estos modelos matemáticos de Investigación de Operaciones, es el material básico de este texto.

## 1.1. ¿Qué es la investigación de operaciones?

Se han dado muchas definiciones de lo que es la *Investigación de Operaciones* o *Investigación Operacional*, como suele llamársele en los países europeos. Todas estas definiciones han dado origen a numerosas polémicas, discusiones y aun confusiones, como son por ejemplo:

- a) La Investigación de Operaciones es un método científico. Esto es completamente erróneo, porque hace suponer la existencia de muchos métodos científicos, cuando en la realidad sólo existe uno.
- b) La Toma de Decisiones queda incluida *dentro* de la Investigación de Operaciones. Esto también es falso, puesto que la Investigación de Operaciones es una de las tantas herramientas que existen para la Toma de Decisiones. Otras herramientas pueden ser por ejemplo, las técnicas clásicas que aportan la Ingeniería Industrial, o la Estadística, o el Análisis de Decisiones, etc.

## 20 La investigación de operaciones en la toma de decisiones

- c) La Teoría de Sistemas se encuentra ubicada *dentro* de la Investigación de Operaciones. Esto también es falso, porque mientras que la Teoría de Sistemas es un marco conceptual que permite entender, interpretar, operar o diseñar la realidad, la Investigación de Operaciones, es una de tantas herramientas que permite que un sistema se convierta en otro más eficiente y/o eficaz.

Sin embargo, con objeto de establecer una base para que se pueda entender la naturaleza de la Investigación de Operaciones se hace uso de la definición de Churchman, Ackoff y Arnoff [2], bastante aceptada entre el grupo de técnicos de Investigación de Operaciones. Esta definición dice:

*La Investigación de Operaciones es la aplicación, por grupos interdisciplinarios, del método científico a problemas relacionados con el control de las organizaciones o sistemas (hombre-máquina) a fin de que se produzcan soluciones que mejor sirvan a los objetivos de toda la organización.*

De la definición anterior se pueden resaltar las siguientes palabras: organización, sistema, grupos interdisciplinarios, objetivo y metodología científica.

A continuación se amplía el significado de cada una de estas palabras.

- a) Una *organización* se puede interpretar como un *sistema*, pues así se facilita su entendimiento. Todo sistema tiene *componentes* e *interacciones* entre las mismas. Algunas interacciones son *controlables*, mientras que otras *no lo son*.

En un sistema, el comportamiento de cualquiera de sus partes o componentes tiene efectos directos e indirectos con el resto. Quizás no todos estos efectos sean importantes, o más aún, posibles de detectar. Por lo tanto, es muy necesario que exista un procedimiento sistemático que logre, por un lado, identificar aquellas interacciones de un sistema que tengan efectos de importancia y, por el otro, logre identificar las componentes controlables asociadas. Uno de esos procedimientos sistemáticos es la Investigación de Operaciones, mientras que otros pueden ser, por ejemplo, las técnicas clásicas de la Ingeniería Industrial, la Estadística, el Análisis de Sistemas, el Análisis de Decisiones, etc.

- b) Todo sistema es una *estructura que funciona*. Así por ejemplo, un hombre vivo es un sistema, mientras que ese mismo hombre, pero muerto, no es un sistema, sino simplemente una estructura. La *información* es el elemento que convierte a una estructura en un sistema, es decir, la información dinamiza a las estructuras. Se puede concluir que todo sistema es un sistema de información.

En toda estructura existen *componentes* y *canales* que comunican a éstas. A través de los canales fluye la *información*. Al fluir la información las componentes *interaccionan* de una forma determinada. Se ha convenido entonces en la ventaja de representar a una organización por un sistema, el cual tiene componentes, canales e información que fluye por éstos. Gráficamente se tiene:



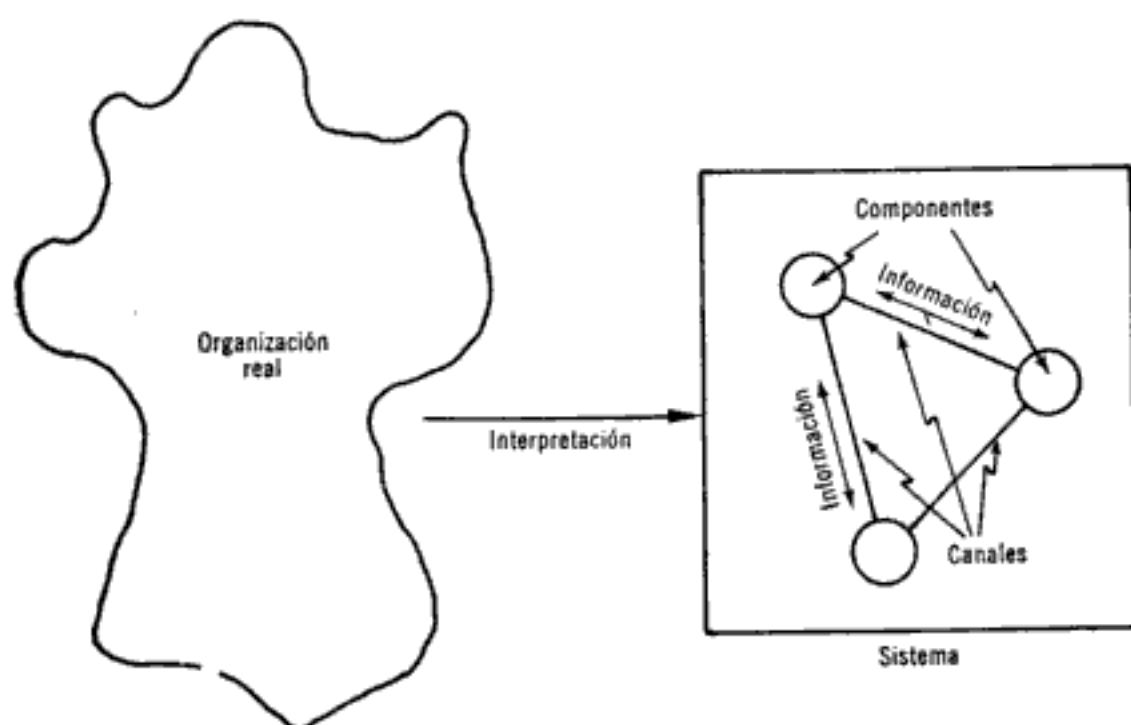


Figura 1.1

Dentro de la estructura de los sistemas se encuentran los siguientes elementos: *recursos humanos*, *materiales* (equipo, edificios, materia prima) y *financieros*. Dentro de los recursos humanos se generan interacciones derivadas de la selección y entrenamiento del personal, del rendimiento del trabajo del personal y, por último, de la motivación del mismo. Las interacciones emanadas de los recursos materiales se asocian al diseño, construcción y mantenimiento de máquinas y edificios; primero como entes aislados y después como subsistemas hombres-máquinas.<sup>1</sup> Los productos terminados, fruto de la relación hombre-máquina, generan interacciones de control de calidad, distribución y venta. Los recursos monetarios generan interacciones de adquisición, retención y financiamiento.

Los objetivos de la organización (sistema) se refieren a la eficiencia y efectividad con que las diferentes componentes del mismo pueden controlarse y/o modificarse. Se refiere también a la manera como esas componentes reaccionan ante un estímulo que se presenta al sistema.

La Investigación de Operaciones es un método que permite encontrar las relaciones óptimas que mejor operen un sistema, dado un objetivo específico.

La información que fluye a través de los canales, *comunica* a las componentes. Por comunicación, en su modelo más simple, se entiende al conjunto de: información, transmisor, receptor y canal. El transmisor y receptor son componentes de la estructura del sistema. La comunicación es la relación que se establece entre las diferentes componentes del sis-

<sup>1</sup> Después de todo se requieren seres humanos para diseñar, construir y mantener máquinas y edificios.



## 22 La investigación de operaciones en la toma de decisiones

tema. Esta relación puede ser, por ejemplo, de diálogo, de entendimiento, etcétera.

En todo sistema, donde sus componentes se comunican e interaccionan a raíz de la información que fluye por los canales apropiados, debe existir además un *control*. El control es un mecanismo de autoaprendizaje (autocorrección, autoadaptación) del sistema. El control permite evaluar los resultados asociados a los objetivos que se establecen y las acciones requeridas para iniciar y/o modificar los patrones de comportamiento de las diferentes componentes controlables del sistema, a medida que éstos se requieran.

c) La segunda mitad del siglo xx se ha caracterizado por el tremendo avance que se ha tenido en las diferentes ramas de la ciencia. Bajo tal avance, el ser humano no ha tenido más remedio que abandonar la formación generalista de las profesiones, tan común en los siglos que antecedieron a éste y abocarse a la especialización creciente. Los problemas que se presentan en las organizaciones, no son de las que fácilmente encajan en una de esas especialidades. Por el contrario, son problemas *multidisciplinarios*. Por lo tanto, el análisis y solución de estos problemas requiere de grupos compuestos de diferentes especialistas. Estos grupos interdisciplinarios requieren necesariamente de una cierta coordinación y comunicación. Esta coordinación y comunicación se logra a través de un lenguaje común. La dificultad real estriba en muchos casos, precisamente en la ausencia de estos lenguajes. N. Wiener [8], trató que la Cibernética fuera ese puente entre las ciencias.

d) La Investigación de Operaciones es la aplicación de la metodología científica a través de modelos, primero para representar al problema real que se quiere resolver en un sistema y segundo para resolverlo. Los modelos que utiliza la Investigación de Operaciones son matemáticos y toman la forma de ecuaciones. Estos modelos son diferentes a otros modelos, por ejemplo, los modelos de experimentación que se utilizan en las ciencias médico-biológicas, o los modelos de representación que se utilizan por ejemplo en la Astronomía.

Los modelos matemáticos de decisión permiten calcular los valores exactos o aproximados de las componentes controlables del sistema para que pueda comportarse mejor, de acuerdo con ciertos criterios establecidos. Estos cálculos se realizan bajo el supuesto de que se conoce la información asociada al estado de aquellas componentes del sistema que no se pueden controlar. El acto de calcular el valor apropiado de estas componentes controlables, se conoce como *derivar una solución* al problema en cuestión, utilizando un modelo. La manera como se logra esta derivación de soluciones es muy variada y no existen reglas generales. Se puede lograr por simulación o emulación, o bien por un riguroso análisis matemático (algoritmo). El objetivo de este libro es, precisamente, presentar al lector los modelos más comunes en la Investigación de Operaciones, la manera como éstos se resuelven y la forma como se les utiliza para representar problemas reales. Antes de entrar más en detalle respecto a las diferentes etapas que constituyen un proyecto de Investigación de Operaciones, conviene remontarse a su reseña histórica.

## 1.2. Breve resumen histórico de la Investigación de Operaciones

Los inicios de lo que hoy se conoce como Investigación de Operaciones se remontan a los años 1759 cuando el economista Quesnay empieza a utilizar modelos primitivos de programación matemática. Más tarde, otro economista de nombre Walras, hace uso, en 1874, de técnicas similares. Los modelos lineales de la Investigación de Operaciones, tienen como precursores a Jordan en 1873, Minkowsky en 1896 y a Farkas en 1903. Los modelos dinámicos probabilísticos tienen su origen con Markov a fines del siglo pasado. El desarrollo de los modelos de inventarios, así como el de tiempos y movimientos, se lleva a cabo por los años veintes de este siglo, mientras que los modelos de línea de espera se originan con los estudios de Erlang, a principios del siglo xx. Los problemas de asignación se estudian con métodos matemáticos por los húngaros König y Egervary en la segunda y tercera décadas de este siglo. Los problemas de distribución se estudian por el ruso Kantorovich en 1939. Von Neuman cimenta en 1937 lo que años más tarde culminará como la Teoría de Juegos y la Teoría de Preferencias (esta última desarrollada en conjunto con Morgenstern). Hay que hacer notar que los modelos matemáticos de la Investigación de Operaciones que utilizaron estos precursores, estaban basados en el Cálculo Diferencial e Integral (Newton, Lagrange, Laplace, Lebesgue, Leibnitz, Reimman, Stieltjes, por mencionar algunos), la Probabilidad y la Estadística (Bernoulli, Poisson, Gauss, Bayes, Gosset, Snedecor, etc.).

No fue sino hasta la Segunda Guerra Mundial, cuando la Investigación de Operaciones empezó a tomar auge. Primero se le utilizó en la logística estratégica para vencer al enemigo (Teoría de Juegos) y, más tarde al finalizar la guerra, en la logística de distribución de todos los recursos militares de los aliados dispersos por todo el mundo. Fue debido precisamente a este último problema, que la fuerza aérea norteamericana, a través de su centro de investigación Rand Corporation, comisionó a un grupo de matemáticos para que resolviera este problema que estaba consumiendo tantos recursos humanos, financieros y materiales. Fue el doctor George Dantzig, el que en 1947, resumiendo el trabajo de muchos de sus precursores, inventara el método Simplex, con lo cual dio inicio a la Programación Lineal. Con el avance de las computadoras digitales se empezó a extender la Investigación de Operaciones, durante la decena de los cincuenta en las áreas de Programación Dinámica (Bellman), Programación No Lineal (Kuhn y Tucker), Programación Entera (Gomory), Redes de Optimización (Ford y Fulkerson), Simulación (Markowitz), Inventarios (Arrow, Karlin, Scarf, Whittin), Análisis de Decisiones (Raiffa) y Procesos Markovianos de Decisión (Howard). La generalización de la Investigación de Operaciones han tratado de darla Churchman, Ackoff y Arnoff.

Actualmente, la Investigación de Operaciones no sólo se aplica en el sector privado (industrias, sistemas de comercialización, sistemas financieros, transportes, sistemas de salud, etc.), sino también en el sector de los servicios públicos, tanto en los países desarrollados como en los países

## 24 La investigación de operaciones en la toma de decisiones

del tercer mundo. Precisamente en México, la Investigación de Operaciones se utiliza dentro del sector de servicios públicos, entre otros en la Compañía Nacional de Subsistencias Populares (CONASUPO), la Secretaría de Obras Públicas, la Secretaría de Comunicaciones y Transportes, la Secretaría de Recursos Hidráulicos, la Secretaría de la Presidencia, Petróleos Mexicanos, Comisión Federal de Electricidad, Instituto Mexicano del Seguro Social, Banco de México, Departamento del Distrito Federal, Guanos y Fertilizantes, etc.

Existen varias asociaciones que agrupan a miembros que se dedican a la aplicación de la Investigación de Operaciones en todo el mundo. Solamente dos en los Estados Unidos, agrupaban en 1972 a varios miles de miembros: la Operations Research Society of America, con aproximadamente 8 000 miembros y el Institute of Management Science, con unos 6 000 miembros. Además, hay asociaciones Canadienses, Europeas, Latinoamericanas y Asiáticas. Se publican mensualmente más de dos docenas de revistas diferentes en todo el mundo, relacionadas a los tópicos de Investigación de Operaciones.

Hoy en día se han diseñado programas profesionales y de posgrado (maestrías y doctorados) en la especialidad de Investigación de Operaciones. Se puede concluir que la Investigación de Operaciones todavía se encuentra en una edad incipiente y que hay mucho por hacer en el desarrollo de este campo tan fértil, tanto en su teoría como en su aplicación.

### 1.3. Análisis de las componentes de un proyecto de investigación de operaciones

#### 1.3.1. Beneficios de un proyecto de Investigación de Operaciones

En la práctica, la instrumentación de un proyecto de Investigación de Operaciones en la solución de un problema real en una organización, acarrea los siguientes beneficios:

a) *Incrementa la posibilidad de tomar mejores decisiones.* Antes de la aplicación de la Investigación de Operaciones en una organización, las decisiones que se toman son generalmente de carácter intuitivo, ignorando la mayoría de las interrelaciones que existen entre las componentes del sistema. Esto es natural, ya que pueden existir en el sistema cientos de componentes y miles o cientos de miles de interrelaciones. El ser humano, sin la ayuda de una tecnología más sofisticada (como la Investigación de Operaciones) y de herramientas más modernas (como lo son las computadoras electrónicas), no puede visualizar, mucho menos analizar, todas las posibles alternativas generadas por los millares de interacciones que existen. Así, por ejemplo, en la Compañía Nacional de Subsistencias Populares (CONASUPO), se debe diariamente controlar el movimiento de comercialización del maíz, que consiste en decidir la distribución de este grano de 1 200 posibles orígenes (Bodegas Rura-

les CONSUPO, S. A.), a aproximadamente 500 centros de consumo (Almacenes Nacionales de Depósito, S. A. y Estaciones de Ferrocarril), a fin de satisfacer la demanda de las zonas de consumo y cuidando que las reservas reguladoras de los lugares de origen se respeten. A la Gerencia de Almacenes y Transportes de CONASUPO, que es la responsable de tomar las decisiones, se le presentan por lo menos  $1\,200 \times 500 = 600\,000$  diferentes alternativas de decisión, generadas por las interrelaciones de las 1\,700 componentes de este sistema.

Suponiendo que se rechacen el 99% de todas esas interacciones por no ser importantes y que solamente se consideren el 1% como importantes, aún quedan 6\,000 decisiones por analizar. Obviamente, sin la ayuda de herramientas y técnicas modernas de decisión, se tomarán decisiones intuitivas, cuyos resultados muchas veces, en vez de mejorar al sistema lo perjudican. Aquí el daño en que puede incurrir la organización, es que se mande demasiado maíz a una plaza y un mes después se tenga que regresar al lugar de origen para satisfacer la demanda de ese centro. Así, se originan movimientos falsos, con su correspondiente alza en el costo (aproximadamente \$105.00/tonelada) y creando horrendos cuellos de botella a nuestro ya deficiente sistema ferrocarrilero.

Para este problema en particular se diseñó, construyó y se está operando un modelo matemático de distribución de maíz, que ha permitido evitar los movimientos falsos de distribución, ha abatido los costos en casi un 52%, ahorrándole a la CONASUPO cerca de 80 millones de pesos al año y ha permitido pronosticar los futuros movimientos del grano a 30 y 60 días en el futuro.

b) *Mejora la coordinación entre las múltiples componentes de la organización.* En otras palabras, la Investigación de Operaciones genera un mayor nivel de ordenación. Por ejemplo, de qué sirve que se incrementen las exportaciones de México al mundo exterior, cuando la capacidad de maniobras de nuestros puertos permanecen estancadas. Mientras una parte del sistema económico trata de equilibrar la balanza de pagos, la otra tiende a crear cuellos de botella de mercancía que tiene que esperar en el puerto hasta que se le embarque, muchas veces a la intemperie, con riesgo de deteriorarse. El tiempo de demora del cliente aumenta, su apatismo para comerciar con México se incrementa y, a corto plazo, se empiezan a sentir otra vez los efectos negativos en la balanza de pagos.

En este ejemplo, el sistema de comercialización de las exportaciones estaría compuesto por varias componentes, una de las cuales podría ser el Instituto Mexicano de Comercio Exterior que impulsaría las exportaciones; otra sería la Comisión Nacional de Puertos que en conjunto con la Secretaría de Obras Públicas y la Secretaría de Marina, expandiría la capacidad de carga y descarga de puertos; otra sería la Secretaría de Hacienda y Crédito Público, que haría más fluidos los trámites fiscales y, por último, se podría pensar en la componente de transporte, formada por los Ferrocarriles Nacionales de México, Aeroméxico y Mexicana de Aviación.

El elemento coordinador entre todas las componentes, podría ser en este caso, la Secretaría de la Presidencia. Un proyecto de Investigación

## 26 La investigación de operaciones en la toma de decisiones

de Operaciones integraría en su estudio al mecanismo de coordinación, para evitar que las componentes del sistema se desmembrasen y actúen independientemente unas de otras.

c) *Mejora el control del sistema* al instituir procedimientos sistemáticos que supervisan por un lado las operaciones que se llevan a cabo en la organización y por el otro, evita el regreso a un sistema peor. De esta manera, por ejemplo, existe una liberación de las gentes dedicadas a actividades de tipo tedioso y rutinario, permitiéndoles acceso a una nueva variedad de las mismas. Además, estos procedimientos sistemáticos permiten señalar decisiones que pueden conducir a resultados muy peligrosos para la estabilidad y buen funcionamiento del sistema.

Así, por ejemplo, el modelo de distribución de granos de la CONASUPO permite que el grupo de la Gerencia de Almacenes y Transportes, pueda proyectar políticas de importación de granos al futuro (en el caso de que sea necesario), en el tiempo que antes le dedicaban a la tediosa preparación de un programa diario de distribución. Utilizando el modelo de distribución de granos como otra herramienta más para manipular toda la información con que cuentan para elaborar sus programas diarios, necesitan ahora hacer solamente pequeños ajustes a los programas que se han establecido con 30 y a veces 60 días de anticipación. El tiempo que se dedicaba a la elaboración de estos programas diarios de distribución se ha acortado un poco (no eliminado por completo) y el tiempo restante se aprovecha para otras cosas.

El programa de distribución puede pronosticar, en casos de escasez de granos nacionales, la cantidad de grano que debe importarse, cuándo debe importarse, por dónde debe internarse al país el grano y a qué centros de consumo debe mandarse. Puede imaginarse el lector qué pasaría si por falta de maíz nacional (baja producción en los cultivos de temporal que representan más del 80% de la superficie cultivable del país) y por una mala política de importación no se puede, por ejemplo, satisfacer la demanda de maíz en la ciudad de Puebla por dos semanas. ¿Cuántas vitrinas se romperían por la muchedumbre que pide tortillas y no les dan? ¿Cuántas cabezas de funcionarios públicos municipales, estatales y federales caerían rodando como calabazas?

d) *Logra un mejor sistema* al hacer que éste opere con costos más bajos, con interacciones más fluidas, eliminando cuellos de botella y logrando una mejor coordinación entre los elementos más importantes de todo el sistema.

Una vez que se acepta que las soluciones emanadas de los proyectos de Investigación de Operaciones aplicadas a organizaciones acarrearán una serie de beneficios cuantitativos y cualitativos para la misma, se explica a continuación cuáles son las etapas por las que debe pasar dicho proyecto.

Ackoff [9] considera que las fases de un proyecto de Investigación de Operaciones, son las siguientes:

- a) Estudio de la organización.
- b) Interpretación de la organización como un sistema.

- c) Formulación de los problemas de la organización.
- d) Construcción del modelo.
- e) Derivación de soluciones del modelo.
- f) Prueba del modelo y sus soluciones.
- g) Diseño de controles asociados a las soluciones.
- h) Implantación de las soluciones al sistema.

A continuación se explica y desarrolla cada una de estas etapas (excepto las primeras dos que ya se discutieron) que son necesarias para el estudio de un proyecto de la Investigación de Operaciones.

### 1.3.2. *Formulación de los problemas*

En la Investigación de Operaciones como en la medicina, el problema se presenta por los síntomas, no por el diagnóstico. En todo estudio de Investigación de Operaciones se deben buscar el mayor número de síntomas antes de empezar el proyecto que generará soluciones. Las condiciones, según Ackoff y Sasieni [1], para que exista el más simple de los problemas son:

- a) Debe existir por lo menos un individuo que se encuentra dentro de un marco de referencia, al cual se le puede atribuir el problema del sistema.
- b) El individuo debe tener, por lo menos, un par de alternativas para resolver su problema. En caso contrario no existe el problema.
- c) Deben existir, por lo menos, un par de soluciones, una de las cuales debe tener mayor aceptación que la otra en el individuo. En caso contrario, no existe el problema. Esta preferencia está asociada a un cierto objetivo dentro del marco de referencia en donde se encuentra el individuo del sistema.
- d) La selección de cualquiera de las soluciones debe repercutir de manera diferente en los objetivos del sistema, es decir, existe una eficiencia y/o efectividad asociadas con cada solución. Estas eficiencias y/o efectividades deben ser diferentes, puesto que de lo contrario no existe un problema.
- e) Por último, el individuo que toma las decisiones ignora las soluciones y/o eficiencias y/o efectividades asociadas con las soluciones del problema.

Si estas cinco situaciones existen, entonces se tiene un problema. Esta situación puede complicarse en los siguientes casos:

- a) El problema recae en un grupo, no en un individuo.
- b) El marco de referencia donde se encuentra el grupo, cambia en forma dinámica.
- c) El número de alternativas que el grupo puede escoger es bastante grande, pero finito.
- d) El grupo dentro del sistema puede tener objetivos múltiples. Peor aún, no necesariamente estos objetivos son consistentes entre sí.



## 28 La investigación de operaciones en la toma de decisiones

e) Las alternativas que selecciona el grupo son ejecutadas por otro grupo ajeno, al cual no se le puede considerar como elemento independiente del problema.

f) Los efectos de la decisión del grupo pueden sentirse por elementos que aún siendo ajenos al sistema considerado, influyen directa o indirectamente, favorable o desfavorablemente hacia él (políticos, consumidores, etcétera).

Para formular un problema se necesita la siguiente información:

- a) ¿Existe un problema?
- b) ¿De quién es el problema?
- c) ¿Cuál es el marco de referencia del sistema donde se encuentra el problema?
- d) ¿Quién o quiénes toman las decisiones?
- e) ¿Cuáles son sus objetivos?
- f) ¿Cuáles son las componentes controlables del sistema y cuáles no lo son?
- g) ¿Cuáles son las interrelaciones más importantes del sistema?
- h) ¿Cómo se emplearán los resultados del proyecto de Investigación de Operaciones? ¿Por quién? ¿Qué efectos tendrá?
- i) ¿Las soluciones tendrán efecto a corto o largo plazo?
- j) ¿Podrán los efectos de las soluciones modificarse o cambiarse fácilmente?
- k) ¿Cuántos elementos del sistema se afectarán por las soluciones del proyecto? ¿En qué grado?

Formular un problema requiere:

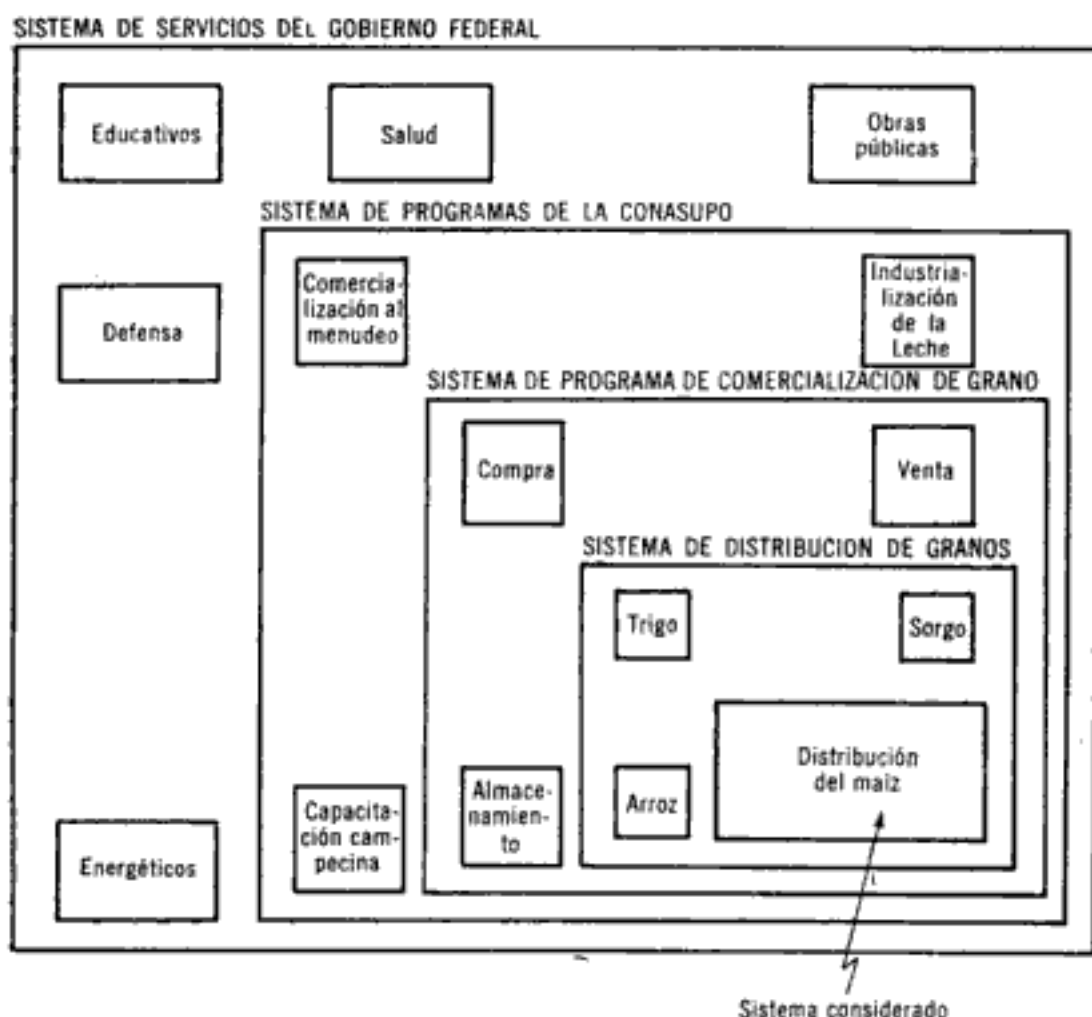
- a) Identificar las componentes controlables y no controlables de un sistema.
- b) Identificar posibles rutas de acción, dadas por las componentes controlables.
- c) Definir el marco de referencia, dado por las componentes no controlables.
- d) Definir los objetivos que se persiguen y clasificarlos por su orden de importancia.
- e) Identificar las interrelaciones importantes entre las diferentes componentes del sistema. Este paso equivale a encontrar las restricciones que existen, a la vez que permite más adelante representar estas interrelaciones en forma matemática.

La identificación de la estructura del sistema (componentes, canales, interacciones, etc.) se hace a través de un proceso sistemático, que se conoce como *Diseño de Sistemas*.<sup>2</sup> El Diseño de Sistemas se lleva a cabo de la siguiente manera:

<sup>2</sup> No confundir este método con los instrumentos o técnicas utilizadas por los vendedores de computadoras electrónicas.

a) *Se ubica al sistema considerado dentro de sistemas más grandes.* Al transformar la realidad en un enfoque de sistemas, este no queda aislado del mundo que lo rodea. Todo lo contrario, el sistema considerado pasa a formar parte de un sistema mayor, es decir, se convierte en un subsistema. Dentro de ese nuevo sistema, el Diseño de Sistemas permite identificar los subsistemas no considerados y las interrelaciones que existen entre éstos y el sistema considerado.

Así por ejemplo, el sistema de distribución de maíz de la Compañía Nacional de Subsistencias Populares (CONASUPO), pasa a ser un subsistema dentro del macrosistema de distribución de granos, y éstos, a su vez, pasan a ser subsistemas de los programas de la Compañía, y éstos, a su vez, pasan a ser servicios del Gobierno Federal, etc. Gráficamente se tiene:



**Figura 1.2**

b) *Se determinan las componentes del sistema.* Por ejemplo, en el caso del sistema de distribución de maíz de la CONASUPO, las componentes de la misma son: las poblaciones urbanas y rurales del país, las almacenadoras urbanas y rurales, los centros receptores del grano y los centros de venta del mismo.



FLUJO DE DOCUMENTOS HASTA TRANSFORMARSE EN REPORTES

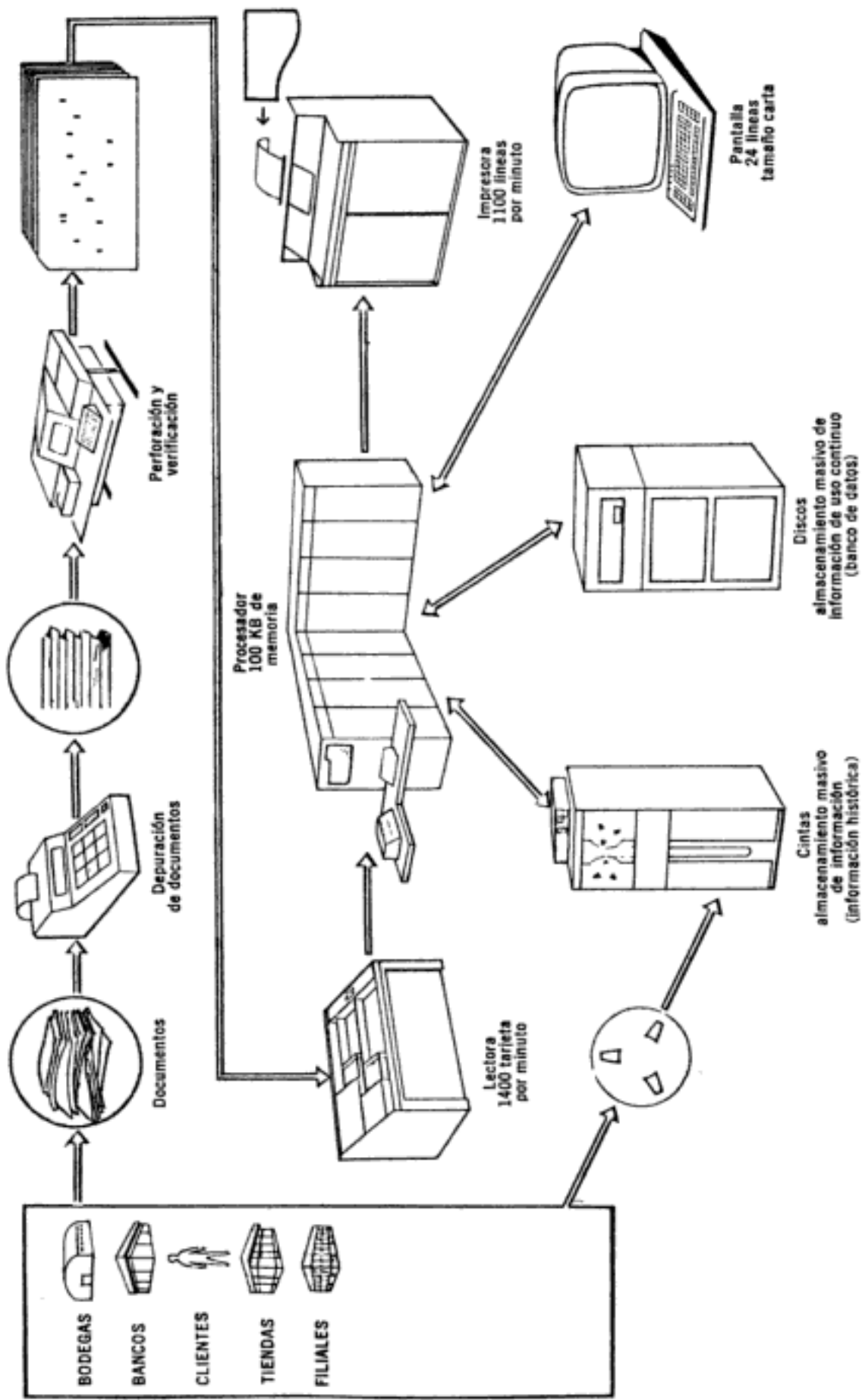


Figura 1.3

c) *Se determinan los canales de comunicación entre las componentes del sistema y de éste hacia los elementos de otros subsistemas que van a tener influencia directa o indirecta.* Por ejemplo, en el caso del sistema de distribución de maíz de la CONASUPO, estos canales de comunicación están constituidos por la red ferrocarrilera, de carreteras y de transporte marítimo. En otros sistemas, estos canales pueden ser los procesos contables, o las formas para pedidos, encuestas, facturas, etc.

d) *Se determina de qué manera se tiene acceso a la información requerida, cómo se procesa ésta y cómo se transmite entre las diferentes componentes del sistema.* Por ejemplo, en el caso de la Compañía Nacional de Subsistencias Populares (CONASUPO), hay información de carácter operativo que se captura en el momento de ocurrir la acción. Un barco que descarga granos de importación en alguno de los puertos mexicanos, es motivo para que telefónicamente se comuniquen a la Gerencia de Almacenes y Transportes, entre otras cosas, las siguientes: de qué barco se trata, qué grano se está descargando, en qué cantidades, a qué contrato pertenece esa importación, tiempo de descarga del barco, etc. Un campesino que vende maíz a la CONASUPO, a través de sus Bodegas Rurales, es motivo para que se notifique vía telex a la misma Gerencia, la cantidad que se compra, de qué grano se trata, en qué condiciones, cantidad pagada al campesino, etc. La información referente al almacenamiento, distribución y venta del grano se comunica también a dicha Gerencia. Toda esta información se vacía en formas especiales, las cuales después se envían a la Subgerencia de Investigación de Operaciones para que se conviertan en tarjetas perforadas. Las tarjetas se verifican y se pasan a la computadora para que se les grave en una cinta magnética. La cinta magnética después se usa para procesar la información de una manera especial y preparar informes que se despachan a los responsables de tomar decisiones, como lo son el Director, Subdirectores, Gerentes, etc. (ver figura 1.3).

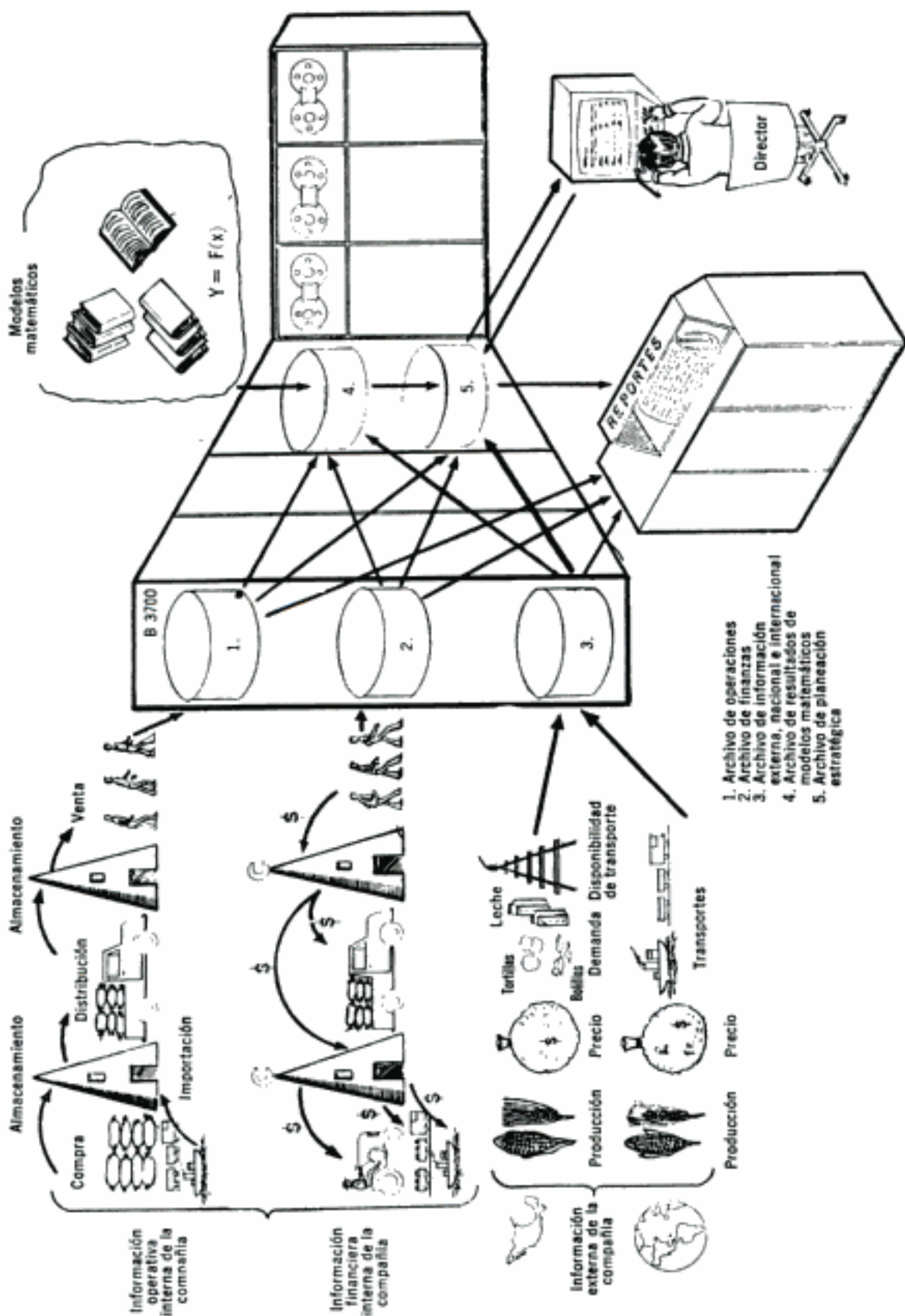
Además, las cintas de información de las actividades operativas, financieras e información ajena a la institución (tanto nacional como internacional), se emplean como insumo de datos para el archivo de modelos matemáticos de Investigación de Operaciones (modelos de distribución de granos, modelos de pronósticos de compras y ventas, etc.), que resolverán una serie de problemas importantes de la organización (figura 1.4).

La Investigación de Operaciones se utiliza en tres tipos de problemas: *determinísticos, con riesgo, bajo incertidumbre.*

*Los problemas determinísticos* son aquellos en los que cada alternativa del problema (hay más de dos) tiene una y sólo una solución. Como hay varias alternativas, hay también varias soluciones, cada una con una diferente eficiencia y/o efectividad asociada a los objetivos del sistema. Por lo tanto, existe el problema de decisión.

*Los problemas con riesgo* son aquellos en los que cada alternativa del problema (hay más de dos), tiene varias soluciones. Cada solución puede ocurrir con una cierta probabilidad. La distribución de estas probabilidades se conoce o se puede estimar.

CARACTERÍSTICAS DEL SISTEMA DE PLANEACION ESTRATEGICA



1. Archivo de operaciones
2. Archivo de finanzas
3. Archivo de información externa, nacional e internacional
4. Archivo de resultados de modelos matemáticos
5. Archivo de planeación estratégica

Figura 1.4

*Los problemas bajo incertidumbre* son aquellos en los que cada alternativa del problema (hay más de dos), tiene varias soluciones. Sin embargo, se ignora con qué probabilidad o distribución probabilística ocurrirán estas soluciones.

El volumen uno de este texto se refiere a los métodos y modelos de la Investigación de Operaciones que resuelven problemas determinísticos. El segundo volumen, trata con los modelos que se utilizan para los problemas con riesgo y bajo incertidumbre.

### 1.3.3. Construcción de modelos

En la Investigación de Operaciones existen tres clases de modelos: *icónicos, analógicos, simbólicos*.

Los *modelos icónicos* son imágenes a escala del sistema cuyo problema se quiere resolver. Por ejemplo, las fotografías, las maquetas, dibujos y modelos a escala de barcos, automóviles, aviones, canales, etc., son modelos icónicos. Los *modelos analógicos* se basan en la representación de las propiedades de un sistema cuyos problemas se quieren resolver utilizando otro sistema cuyas propiedades son equivalentes. Por ejemplo, las propiedades de un sistema hidráulico son equivalentes a las de un sistema eléctrico o, inclusive, económico. Los *modelos simbólicos* son conceptualizaciones abstractas del problema real a base del uso de letras, números, variables y ecuaciones. Este tipo de modelos son fáciles de manipular y se puede hacer con ellos un gran número de experimentos. De las tres clases de modelos, los simbólicos son los más económicos de construir y operar.

Ackoff y Sasieni [1] consideran los siguientes grados de dificultad en la construcción de modelos:

*Grado de dificultad 1.* La estructura del sistema es sencilla de observar, analizar, entender y modelar a simple vista y/o como consecuencia de pláticas realizadas con el grupo de individuos que componen el sistema.

*Grado de dificultad 2.* La estructura del sistema es más complicada de modelar y, por lo tanto, se requiere de un sistema análogo cuya modelación cae dentro del grado de dificultad anterior. Por ejemplo, los problemas de localización de plantas, problemas de inventarios, secuenciación de máquinas, etc., tienen una analogía con sistemas de redes (a explicarse en el capítulo 4 del primer volumen), cuya modelación es muy sencilla (cae dentro del grado de dificultad uno).

*Grado de dificultad 3.* La estructura del sistema puede deducirse o aproximarse en base a un análisis de cierta información. Por ejemplo, el estudio del tráfico en una ciudad puede modelarse en base a datos que se obtienen por observación directa de automóviles y peatones, en un determinado lugar y período de tiempo.

*Grado de dificultad 4.* La estructura del sistema no se puede deducir, sino únicamente aproximar a base de pura experimentación. Este es el caso, por ejemplo, de la calendarización de la producción de un

## 34 La investigación de operaciones en la toma de decisiones

nuevo producto, cuyo pronóstico de mercado, se ha inferido en base a la venta de un producto similar de una compañía adversaria (experimentación de mercado).

*Grado de dificultad 5.* La estructura del sistema no se puede deducir (ya sea por falta de datos o de experimentos) y, por lo tanto, se conceptualiza una estructura artificial. Este es el caso, por ejemplo, de los modelos que los Estados Unidos han utilizado en su simulación de ataques nucleares, ocasionados por una supuesta guerra con la Unión Soviética o la República Popular China. Otro ejemplo, que desgraciadamente lo han puesto en uso nuestras autoridades policiacas, son los modelos que el FBI en los Estados Unidos desarrolló para control de motines callejeros, a raíz de los disturbios en Watts (Los Angeles) en 1965, Detroit 1966 y en Chicago durante la convención democrática de 1968 (sólo para citar algunos ejemplos).

Los requerimientos de la información para resolver un determinado problema hace necesario a veces que un modelo se cambie por otro, cuya información es más fácil de obtener. Así como es muy difícil extraer una respuesta correcta a un problema mal formulado, también es cierto que modelos pragmáticos que se aproximan a la representación del problema real, son más útiles que los modelos más completos, que no se pueden utilizar por falta de información.

Los modelos siempre deben ser menos complejos que el sistema real, de otra manera, para qué quebrarse la cabeza con modelos si se puede trabajar con el sistema real en sí. Los sistemas que son muy complejos pueden representarse por una serie de submodelos, que unidos, representarían al modelo del sistema original (ver el principio de descomposición que se trata en los capítulos 2 y 5 del primer volumen).

Cuando el marco de referencia es dinámico, es decir cambia con el tiempo, existe una serie de modelos secuenciales que toman en cuenta este factor (ver la programación dinámica, que se trata en el capítulo 5 del primer volumen).

Se han mencionado en repetidas ocasiones las palabras "componentes controlables y no controlables". En los términos de la Investigación de Operaciones, estas componentes son las *variables*, unas de tipo *independiente* (al cual se les asignan valores arbitrarios) y otras *dependientes*, cuyos valores dependerán de las interrelaciones que tengan con las variables independientes y el valor de estas últimas.

### 1.3.4. Derivar las soluciones del modelo

Resolver un modelo consiste en encontrar los valores de las variables dependientes, asociadas a las componentes controlables del sistema a fin de optimizar, si es posible, o en caso de no serlo, mejorar la eficiencia y/o efectividad del sistema, dentro del marco de referencia que fijan los objetivos establecidos por el grupo de toma de decisiones.

El *análisis matemático clásico* se utiliza para obtener las soluciones a un modelo de Investigación de Operaciones, en forma *deductiva*. Cuando éstas no son posibles de obtener en forma deductiva, se utiliza el

*análisis numérico*, a fin de resolver el modelo en forma *inductiva*. Existen métodos de solución de tipo *iterativo* que son aquellas que se aproximan a la solución, o bien, dan la solución exacta, en base a una serie de repeticiones de la misma regla analítica sobre los resultados de una repetición anterior.

Existen métodos de *simulación* que imitan o emulan al sistema real, en base a un modelo matemático (se discute este tipo de modelos en un capítulo del segundo volumen). La técnica de simulación es muy útil en la solución de problemas con riesgo y bajo incertidumbre. Muchas de estas técnicas de simulación se han estado utilizando en *técnicas de juegos*. Estas técnicas de juegos se utilizan cuando en el sistema considerado existen *varios grupos de decisión* que interaccionan entre sí. Por ejemplo, si se supone que la Ford Motor Co. de México va a empezar a producir un automóvil económico, el grupo de toma de decisiones podría simular por medio de técnicas de juego, la competencia que este automóvil tendría, por ejemplo, con el Volkswagen y con el Datsun. Los jugadores en este sistema serían las compañías Ford, Volkswagen y Datsun. En la práctica, sin embargo, este tipo de técnicas son poco prácticas, debido más que nada a la validez de la posible información que se pudiera conseguir.

### 1.3.5. Pruebas del modelo y de las soluciones. Control e implantación de los modelos

Los modelos no deben utilizarse confiando sólo en la intuición de la persona o grupo que los diseñe. Es necesario *probar* la validez de modelo, observando si es que los resultados del mismo predicen o no, con cierta aproximación o exactitud, los efectos relativos generados por las diferentes alternativas disponibles.

Los proyectos de Investigación de Operaciones se aplican generalmente en organizaciones que están operando y que, por lo tanto, ya arrojan ciertos resultados. Si los resultados que se deriven del modelo se alejan bastante de los resultados reales del sistema operativo, entonces hay que cerciorarse de lo siguiente:

a) Que el *Diseño de Sistemas* que se aplicó en el estudio del sistema en cuestión, no ha omitido ninguna componente controlable importante y que no haya rechazado ninguna interacción que genere efectos de importancia. Se debe corroborar que *todas* las opiniones de las personas que forman el grupo de toma de decisiones se hayan incluido en el análisis.

b) Una vez que se cerciore de la validez del Diseño de Sistemas que se efectuó, hay que corroborar las expresiones matemáticas que representan a los objetivos del grupo de toma de decisiones de la organización y de las diferentes restricciones que representan las interacciones de importancia.

c) Una vez que se cerciore de la validez del modelo (representación matemática de las interacciones y objetivos del mismo), hay que corroborar que las técnicas que resuelven a éste se aplican de manera correcta



## 36 La investigación de operaciones en la toma de decisiones

y que los resultados del mismo se analizan e interpretan también de manera correcta.

d) Por último, hay que cerciorarse que la manera como se comunican los resultados al grupo de toma de decisiones sea utilizando un lenguaje que ellos entiendan.

*Si todos estos pasos se ejecutan de una manera recurrente, cada vez que se obtienen resultados del modelo y se le presentan al grupo de toma de decisiones, se empieza a ejercer un procedimiento sistemático de control que depura y ajusta al mismo con la realidad.* El vacío que pudiera existir entre el grupo real que tiene el problema y el grupo de Investigación de Operaciones que viene a resolverlo, se empieza a cerrar, construyéndose un puente de entendimiento y comunicación entre ambos grupos. Este tipo de control puede, de una manera muy sencilla, ajustar los modelos ya operativos a los cambios dinámicos que la organización pudiera sufrir en el futuro.

La *implantación* de estos modelos (una vez probados y controlados), es en la opinión del autor la parte más difícil y delicada de todo el proyecto, sobre todo en países del Tercer Mundo como el nuestro.

Es característico en nuestros países, por los problemas típicos que se tienen (reparto inequitativo de la riqueza, centralismo del desarrollo económico, poder político-económico piramidal, dependencia técnico-financiera del exterior, altas tasas de crecimiento demográfico, baja productividad, etc.), encontrar esas burocracias (tanto públicas como privadas) que son más rígidas al cambio que la misma Muralla China (que ha sobrevivido al tiempo por tantos miles de años). Cuando un elemento de esa burocracia, que al mismo tiempo pertenece al grupo de toma de decisiones, no entiende la utilidad del modelo que se le presenta y no sabe interpretar las soluciones del mismo y asociarlas a su problema original, entonces el resultado típico es que éste combate al grupo de Investigación de Operaciones, como al enemigo más acérrimo. La razón de esto es natural, porque cuando uno no entiende algo, lo trata de rechazar debido, entre otras cosas, al temor de que esta "herramienta tan misteriosa" (???) lo desplace de un cargo público o privado, que en esta estructura piramidal de poder político y económico, es tan valiosa y a veces tan difícil de conseguir por la vía de la habilidad y conocimientos (se consiguen por compadrazgos e influencias).

*Es por lo tanto importantísimo que en todo estudio de Investigación de Operaciones el grupo de toma de decisiones del sistema SEA PARTE ACTIVA, en mayor o menor grado, en todas las fases del proyecto.* Este autor aconseja que, cuando el estudio de Investigación de Operaciones se haga en países del Tercer Mundo, además de hacer participar a todos los elementos del grupo de toma de decisiones, se invite también a participar, quizás en menor grado, a cuanto elemento sea posible que esté arriba en la estructura piramidal de la organización. Esto se hace con objeto de interesar e incrementar la curiosidad de aquellos que tienen control sobre el grupo de toma de decisiones.

Así, por ejemplo, en el proyecto de Investigación de Operaciones que este autor diseñó, construyó y actualmente controla su operación dentro de la Compañía Nacional de Subsistencias Populares (CONASUPO),<sup>3</sup> para la distribución de granos (maíz, trigo) y costalera, se tuvo cuidado, desde un principio, de hacer participar en el proyecto, además del grupo de toma de decisiones en este problema (Gerencia de Almacenes y Transportes, Gerencia de Compras y Gerencias de Ventas), a los Subdirectores (de Planeación-Finanzas y de Operaciones) y al mismo Director de la Compañía, aunque estos últimos en menor grado. Es más, en las oficinas del Director y de los Subdirectores existen pantallas de planeación estratégica, conectadas a la computadora de la Compañía, donde ellos pueden consultar directamente y en forma continua, si así lo desean, los resultados de los modelos (claro, expresados éstos en un formato sencillo, que ellos entienden).

Se concluye esta sección mencionando que en un reciente artículo, Urban [18] resume, desde un punto de vista muy moderno y tomando en cuenta la experiencia emanada de los resultados publicados en los 25 años de vida de la Investigación de Operaciones, la manera como los grupos de Investigación de Operaciones pueden incrementar sus posibilidades de éxito al diseñar, construir, operar, controlar e implementar un modelo en la solución de los problemas de las organizaciones.<sup>4</sup>

#### 1.4. Formulación de diferentes modelos

El objetivo de la presente sección es el de introducir la formulación de modelos matemáticos a partir de la descripción de los problemas. La selección hecha de los problemas, se hizo en base a los capítulos contenidos en los dos volúmenes de este texto.

Esta sección debe tomarse como una ilustración introductoria a la Investigación de Operaciones, dejando el resto del libro (dos volúmenes) a la presentación y explicación de la misma. No es importante a estas alturas si el lector no entiende cómo se derivó cierta expresión matemática.

##### a) *Un problema agrícola:*

Supóngase que en el poblado de Tixtla, Gro. la Nacional Financiera pretende hacer inversiones cuantiosas en el cultivo de aguacate, lima reina, mango y zapote prieto. Se persiguen dos objetivos, uno el de reducir el desempleo rural y otro el de aumentar las exportaciones que vendrán a equilibrar la balanza de pagos de la nación. Se sabe que la producción promedio de cada árbol está dada por la siguiente tabla:

<sup>3</sup> Se describe con mayor detalle en la sección 2.8.

<sup>4</sup> Los resultados de *cualquier modelo* deben ser analizados, evaluados, discriminados por el grupo de toma de decisiones, quienes con su experiencia deberán emitir la última palabra en la materia. Los modelos *deben ser herramientas adicionales* en la toma de decisiones y *jamás* deben tomar la decisión definitiva.



TABLA 1-1

<i>Tipo de árbol</i>	<i>Producción promedio anual</i>		<i>Observación</i>
	<i>(en unidades)</i>	<i>(en kg)</i>	
Aguacate	350	150	Una vez por año
Lima reina	230	200	Una vez por año
Mango	150	50	Una vez por año
Zapote prieto	400	150	Una vez por año

El precio promedio en el mercado mundial a precios de 1974 fue de \$ 10.00 por kg de aguacate, \$ 4.00 por kg de lima reina, \$ 15.00 por kg de mango y \$ 7.00 por kg de zapote prieto. Existe una extensión de 250 000 m<sup>2</sup> de tierra de propiedad federal propicia para el cultivo de esos productos. Supóngase que técnicos de la Secretaría de Agricultura han determinado que las siguientes extensiones mínimas son necesarias para el cultivo de esos productos.

TABLA 1-2

<i>Tipo de árbol</i>	<i>Extensión mínima de cultivo por árbol</i>
Aguacate	4 m <sup>2</sup>
Lima reina	5 m <sup>2</sup>
Mango	3 m <sup>2</sup>
Zapote prieto	6 m <sup>2</sup>

Afortunadamente no existe problema de agua, pues hay varios manantiales dentro de la propiedad, que aseguran la existencia de ese preciado líquido por los próximos 20 años. El costo por sembrar un árbol de aguacate es de \$ 2.00, \$ 0.50 por árbol de lima reina, \$ 1.00 por árbol de mango y \$ 1.50 por árbol de zapote prieto; estos costos ya incluyen la compra del árbol más su cuidado y mantenimiento. Cada árbol empieza a ser productivo, aproximadamente a los 3 años de ser plantado. Cada árbol de aguacate requiere de cuidados equivalentes a 36 horas-hombre/año; 72 horas-hombre/año por árbol de lima reina; 50 horas-hombre/año por árbol de mango y 10 horas-hombre/año por árbol de zapote prieto.

La Nacional Financiera pretende hacer una inversión de 20 millones de pesos, pensando exportar toda su producción a partir del tercer año. El desempleo en Tixtla se ha calculado en 500 personas y, el Gobierno Federal ha delineado que éste proyecto emplee al menos 200 personas en forma continua.

Bajo estas circunstancias, ¿cuántos árboles de aguacate, lima reina, mango y zapote prieto deberán sembrarse con objeto de maximizar el valor de la futura exportación anual?

*Formulación:*

Sean

- $X_a$  : el número de árboles de aguacate a ser sembrados,
- $X_l$  : el número de árboles de lima reina a ser sembrados,
- $X_m$  : el número de árboles de mangos a ser sembrados,
- $X_z$  : el número de árboles de zapote prieto a ser sembrados,

la notación usada para denotar todas las variables del problema.

El valor promedio de la exportación (*VPE*) anual se puede representar por:

$$VPE = (10)(150)X_a + (4)(200)X_l + (15)(50)X_m + (7)(150)X_z$$

cuyas dimensiones están dadas por:

$$\begin{aligned} VPE = & \left( \frac{\$}{\text{kg agc.}} \right) \left( \frac{\text{kg agc.}}{\text{árb. agc.}} \right) \text{árb. agc.} + \left( \frac{\$}{\text{kg lima reina}} \right) \left( \frac{\text{kg lima reina}}{\text{árb. lima reina}} \right) \text{árb. lima reina} \\ & + \left( \frac{\$}{\text{kg mango}} \right) \left( \frac{\text{kg mango}}{\text{árb. mango}} \right) \text{árb. mango} + \\ & \left( \frac{\$}{\text{kg zap. prto.}} \right) \left( \frac{\text{kg zap. prto.}}{\text{árb. zap. prto.}} \right) \text{árb. zapote prieto} = \$ \end{aligned}$$

La restricción correspondiente a la extensión de tierra laborable está dada por:

$$4X_a + 5X_l + 3X_m + 6X_z \leq 250\,000 \text{ m}^2.$$

Dimensionalmente, se puede verificar que en efecto las unidades en ambos lados de la desigualdad son  $\text{m}^2$ .

Respecto a la inversión inicial se tiene que

$$2X_a + 0.50X_l + 1X_m + 1.50X_z \leq 20\,000\,000,$$

siendo pesos las unidades que prevalecen en ambos lados de esta última desigualdad.

#### 40 La investigación de operaciones en la toma de decisiones

Respecto a la condición de empleo mínimo que el Gobierno Federal se ha fijado, ésta puede representarse por:

$$36X_a + 72X_l + 50X_m + 100X_z \geq 8 \times 200 \times 365,$$

siendo las dimensiones de esta desigualdad, las siguientes

$$\left(\frac{\text{h-hombre}}{\text{año-árb. agc.}}\right) \text{árb. agc.} + \left(\frac{\text{h-hombre}}{\text{año-árb. lima}}\right) \text{árb. lima} + \left(\frac{\text{h-hombre}}{\text{año-árb. mgo.}}\right) \text{árb. mgo.} + \left(\frac{\text{h-hombre}}{\text{año-árb. zap.}}\right) \text{árb. zap.} \cong \left(\frac{\text{h-hombre-día}}{\text{día año}}\right);$$

y ya simplificando, queda (horas-hombre)/año en ambos lados de la desigualdad.

Finalmente, como el número de árboles, de cualquier especie, no puede ser negativo (en vez de sembrar, se destruye), se tiene que

$$X_a \geq 0, X_l \geq 0, X_m \geq 0, X_z \geq 0.$$

Resumiendo, se tiene que el siguiente modelo matemático formula el problema en cuestión.

$$\text{Maximizar } 1\,500X_a + 800X_l + 750X_m + 1\,050X_z$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 4X_a + 5X_l + 3X_m + 6X_z &\leq 250\,000 \\ 2X_a + 0.5X_l + X_m + 1.5X_z &\leq 20\,000\,000 \\ 36X_a + 72X_l + 50X_m + 100X_z &\geq 584\,000 \\ X_a \geq 0, X_l \geq 0, X_m \geq 0, X_z &\geq 0. \end{aligned}$$

Este es un modelo de PROGRAMACION LINEAL, cuya teoría y métodos de solución se explican en el capítulo 2.

Se hace la observación de que si en la vida real, el agua no existe en el terreno y hay que traerse de otros lugares a un cierto costo, esto podría fácilmente representarse matemáticamente en función al consumo de agua por año por clase de árbol en cuestión. De la misma manera, puede modelarse entre otras cosas el costo de oportunidad de financiar a 3 años, el costo de erradicación de plagas, costo de abono y mantenimiento de tierra, salario de campesinos, riesgo de pérdida en cosechas, etcétera.

La solución del modelo anterior puede generar resultados fraccionarios, que serían imposible de aplicarse en la realidad. ¿Quién podría sembrar 104.7781 árboles de mango? Para evitar unidades fraccionarias, se desea que el número de árboles, de cualquier especie no sólo no fuera negativo, sino también entero, es decir

$$\begin{aligned}
 X_a &\geq 0 \text{ y entero,} \\
 X_1 &\geq 0 \text{ y entero,} \\
 X_m &\geq 0 \text{ y entero,} \\
 X_s &\geq 0 \text{ y entero.}
 \end{aligned}$$

Esto haría cambiar el modelo de programación lineal a un modelo de PROGRAMACION ENTERA cuyos métodos de solución son enteramente diferentes. Este tema se trata en el capítulo 6.

b) *Un problema de distribución:*

La Fábrica Nacional de Cerveza tiene plantas ubicadas en el Distrito Federal, Guadalajara, Monterrey, Tijuana y Mérida. La Fábrica Nacional de Latas, una subsidiaria de la Fábrica Nacional de Cerveza, tiene plantas ubicadas en Puebla, Torreón y Celaya.

La demanda mensual de latas de cerveza se pronostica en:

TABLA 1-3

<i>Planta de cerveza</i>	<i>Demanda mensual en latas</i>
Distrito Federal	2 000 000
Guadalajara	500 000
Monterrey	400 000
Tijuana	100 000
Mérida	100 000

Las latas de cerveza abiertas, se retornan a la Fundidora Nacional de Aluminio, en donde se reconvierten en aluminio y de ahí se mandan a la fábrica de latas.

La producción máxima mensual de latas es:

TABLA 1-4

<i>Planta de latas</i>	<i>Capacidad mensual en latas</i>
Puebla	1 000 000
Torreón	1 500 000
Celaya	750 000

## 42 La investigación de operaciones en la toma de decisiones

Los fletes son una función de las distancias que existen entre las plantas productoras de cerveza y las plantas productoras de latas. Estos fletes son:

**TABLA 1-5**

	<i>Puebla</i>	<i>Torreón</i>	<i>Celaya</i>
<i>Distrito Federal</i>	5	20	15
<i>Guadalajara</i>	20	15	2
<i>Monterrey</i>	25	2	10
<i>Tijuana</i>	75	50	40
<i>Mérida</i>	45	80	60

(pesos por transportar 1 000 latas)

Bajo éstas condiciones, ¿qué programa de distribución mensual de latas se debería establecer a fin de satisfacer la demanda mensual en las fábricas de cerveza, sin exceder la producción mensual y todo a costo mínimo? Las unidades del programa de distribución mensual se da en miles de latas.

*Formulación:*

Sea:

$X_{ij}$ : la cantidad de miles de latas que se envían de la fábrica  $i$  ( $i =$  Puebla, Torreón, Celaya) a la fábrica de cerveza  $j$  ( $j =$  Distrito Federal, Guadalajara, Monterrey, Torreón y Mérida) en un mes.

Entonces, el costo total de envío es:

$$\begin{aligned} \text{COSTO} = & 5 X_{P,D.F.} + 20 X_{P,G} + 25 X_{P,M} + 75 X_{P,T} + 45 X_{P,ME} + \\ & 20 X_{TO,D.F.} + 15 X_{TO,G} + 2 X_{TO,M} + 50 X_{TO,T} + 80 X_{TO,ME} \\ & + 15 X_{C,D.F.} + 2 X_{C,G} + 10 X_{C,M} + 40 X_{C,T} + 60 X_{C,ME}, \end{aligned}$$

el cual se tiene que minimizar, sujeto a las restricciones que a continuación se escriben.

Las expresiones matemáticas que implican que la demanda mensual se satisfaga, son:

a) En el Distrito Federal:

$$X_{P,D.F.} + X_{TO,D.F.} + X_{C,D.F.} \geq \frac{2\,000\,000}{1\,000} \text{ latas.}$$

b) En Guadalajara:

$$X_{P,G} + X_{TO,G} + X_{C,G} \geq \frac{500\,000}{1\,000} \text{ latas.}$$

c) En Monterrey:

$$X_{P,M} + X_{TO,M} + X_{C,M} \geq \frac{400\,000}{1\,000} \text{ latas.}$$

d) En Tijuana:

$$X_{P,T} + X_{TO,T} + X_{C,T} \geq \frac{100\,000}{1\,000} \text{ latas.}$$

e) En Mérida:

$$X_{P,ME} + X_{TO,ME} + X_{C,ME} \geq \frac{100\,000}{1\,000} \text{ latas.}$$

Por otro lado, las restricciones que indican que no se puede exceder la capacidad de producción mensual de latas son:

f) Planta en Puebla:

$$X_{P,D.F.} + X_{P,G} + X_{P,M} + X_{P,T} + X_{P,ME} \leq \frac{1\,000\,000}{1\,000} \text{ latas.}$$

g) Planta en Torreón:

$$X_{TO,D.F.} + X_{TO,G} + X_{TO,M} + X_{TO,T} + X_{TO,ME} \leq \frac{1\,500\,000}{1\,000} \text{ latas.}$$

h) Planta en Celaya:

$$X_{C,D.F.} + X_{C,G} + X_{C,M} + X_{C,T} + X_{C,ME} \leq \frac{750\,000}{1\,000} \text{ latas.}$$

Por último todas las variables  $X_{ij}$  ( $i = P, TO, C; j = D.F., G, M, T, ME$ ) deben ser no-negativas, de lo contrario se mandarían las latas de regreso, es decir de las plantas de cerveza a las fábricas de latas.

Un modelo de éste tipo, que se trata en el capítulo 3 y, que cae dentro de la familia de programación lineal, se llama de TRANSPORTE.

Este capítulo también trata otros tipos de problemas de transporte, tales como los MODELOS DE ASIGNACION, MODELOS DE TRANSBORDO o TRANSPORTES CON NODOS INTERMEDIOS Y TRANSPORTES GENERALIZADOS.

c) *Un problema de asignación de recursos educativos*

Se supone que la Secretaría de Educación Pública se ha trazado un plan a 4 años, para entrenar maestros urbanos y rurales de ense-

#### 44 La investigación de operaciones en la toma de decisiones

ñanza primaria. El entrenamiento de ambas clases de maestros tarda 1 año y los costos de entrenamiento están dados por:

**TABLA 1-6**

	<i>Por maestro rural</i>	<i>Por maestro urbano</i>
<i>Año 1—(1977)</i>	\$ 10 000	\$ 12 500
<i>Año 2—(1978)</i>	\$ 10 100	\$ 13 000
<i>Año 3—(1979)</i>	\$ 10 200	\$ 13 500
<i>Año 4—(1980)</i>	\$ 10 300	\$ 14 000

La demanda pronosticada de maestros de ambas clases es de:

**TABLA 1-7**

<i>Año</i>	<i>Maestro rural</i>	<i>Maestro urbano</i>
1977	1 000	5 000
1978	1 500	6 000
1979	2 000	7 000
1980	2 500	8 000

Los salarios anuales percibidos por maestro rural y urbano son de:

**TABLA 1-8**

<i>Año</i>	<i>Maestro rural</i>	<i>Maestro urbano</i>
1977	\$ 10 000	\$ 12 000
1978	\$ 10 100	\$ 12 200
1979	\$ 10 200	\$ 12 400
1980	\$ 10 300	\$ 12 600

Al finalizar un año de trabajo se les ofrece la opción a los maestros de continuar en su mismo trabajo o de cambiar de urbano a rural o viceversa, de rural a urbano. De no cambiar, su salario permanecerá regido por la tabla anterior. Los maestros que cambien de rural a urbano percibirán un salario correspondiente a la tabla vigente para maestros urbanos en ese año. En cambio, maestros urbanos que cambien a rurales percibirán el salario de maestro urbano correspondiente a ese año.

Debido a la capacidad de las instalaciones, el Gobierno Federal puede únicamente entrenar y graduar a no más de 3 000 maestros en total (urbanos y rurales), por año. Si por la oferta limitada en cierto año, es necesario cubrir la demanda, ésta se hará con maestros jubilados a un costo de \$ 15 000 por año por maestro, independientemente a que funcionen como rural o urbano.

Bajo tales circunstancias, ¿cuántos maestros de cada tipo deberían prepararse por año, cuántos deberían de cambiar de calidad por año y cuántos maestros jubilados deberían emplearse por año, tal que el costo total se minimice y se atenga a la demanda pronosticada?

*Formulación:*

Este problema podría resolverse mediante una red, como la que se muestra en la figura 1.5, donde el nodo 0 es una fuente inagotable de jóvenes que quieren ser maestros, ya sea urbanos o rurales. Los arcos 0-1, 0-2, 0-3, 0-4 representan a la gente que el Gobierno Federal empieza a entrenar en los años 1976, 1977, 1978, 1979, a fin de que inicien sus servicios un año más tarde. Nótese que el arco 0-5 ya no interesa, pues gente graduada en 1981 cae fuera del plan a 4 años. La capacidad de cada uno de estos arcos es de 3 000 individuos por arco como máximo. El flujo de jóvenes en los nodos 1, 2, 3 y 4 pueden seleccionar la ruta de maestro rural a cierto costo para el Gobierno Federal (arcos 1-6, 2-7, 3-8, 4-9) o de maestro urbano a otro costo (arcos 1-10, 2-11, 3-12 y 4-13). La demanda anual rural se da por un *mínimo* de flujo que debe circular por los arcos 6-14, 7-15, 8-16 y 9-17, mientras que la demanda urbana se da por un *mínimo* de flujo que debe circular por los arcos 10-18, 11-19, 12-20 y 13-21. Los maestros durante el año que ejerzan percibirán el sueldo anual dado por los arcos 14-7, 15-8, 16-9 para maestros rurales y 18-11, 19-12, 20-13 para maestros urbanos. Al finalizar un año, los maestros urbanos que deseen trabajar como rurales lo pueden hacer a un costo para el Gobierno Federal dado por la cantidad que se muestra en los arcos 18-14, 19-15, 20-16 y 21-17. Los maestros rurales que deseen trabajar como urbanos lo harán a un costo para el Gobierno Federal dado por los arcos 14-18, 15-19, 16-20 y 17-21. Si es necesario cubrir la demanda con maestros jubilados esto se hace a un costo dado por los arcos 22-6, 22-7, 22-8, 22-9, 22-10, 22-11, 22-12 y 22-13. Se supone que la cantidad de maestros jubilados que se puede emplear es bastante grande (suficiente para cubrir la demanda). Como el Gobierno Federal tiene otros planes para después de 1980, todos los arcos que emanan hacia el año 1981, no se considerarán.



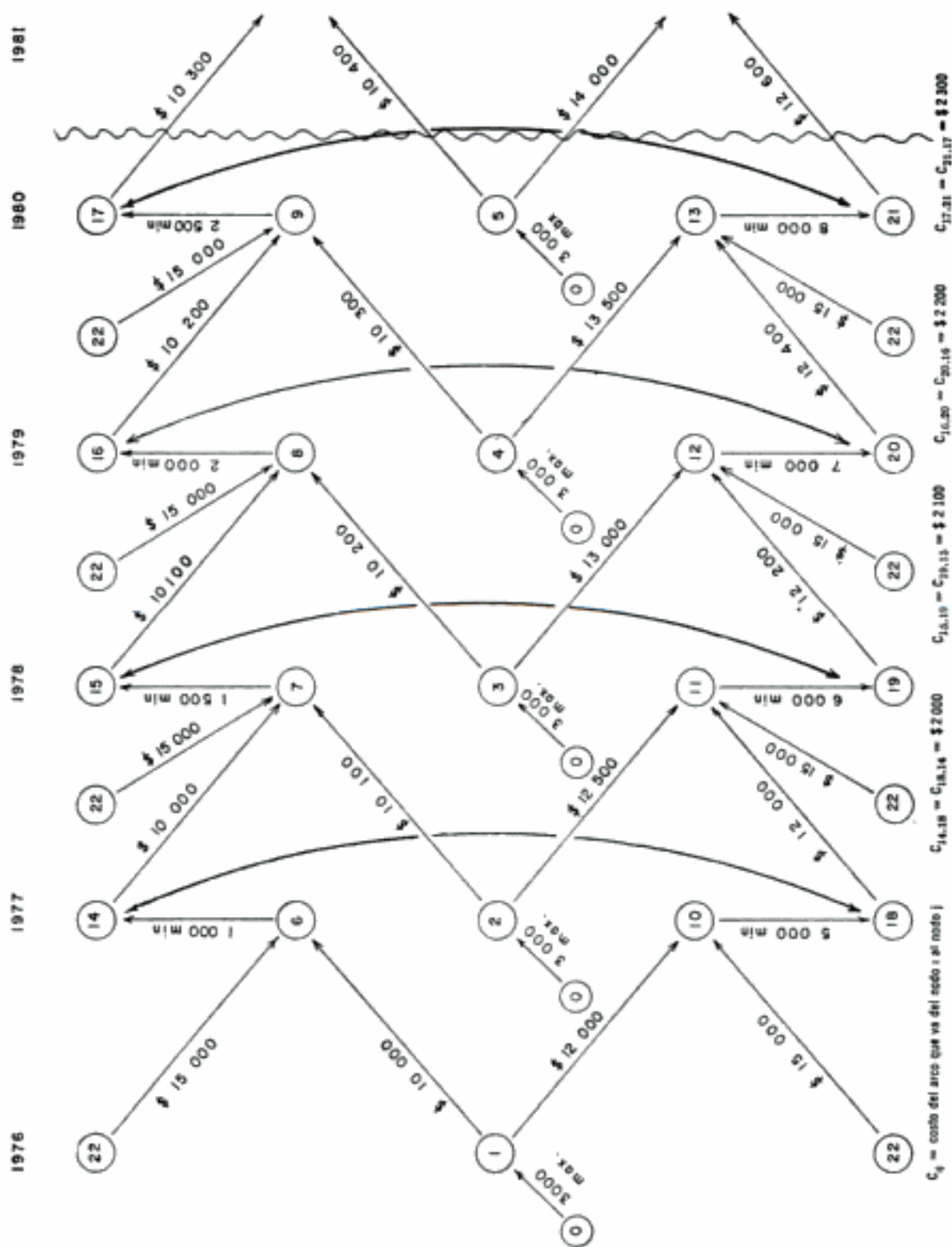


Figura 1.5

A este tipo de modelo se le denomina RED DE OPTIMIZACION y su tratado así como sus métodos de solución se dan en el capítulo 4.

Este tipo de redes puede ser análogo a una serie de tuberías de diferentes gruesos por donde en ocasiones no debe de fluir *más* de cierta cantidad y otras veces debe de fluir al *menos* cierta cantidad y todo a diferentes costos. El problema a resolver sería el de hacer circular el flujo (de maestros en este caso) a costo mínimo sin violar las capacidades mínimas y máximas de cada arco.

d) *Un problema de construcción*

Se supone que el Gobierno Mexicano y el de Guatemala han decidido construir una presa en el río Usumacinta para la generación de energía eléctrica que se utilizará, por una parte para alimentar los parques industriales de Cd. del Carmen (Campeche), Chetumal (Q. Roo), Mérida (Yuc.), Tuxtla Gutiérrez y Tapachula (Chis.) y por la otra para satisfacer la demanda de las ciudades de Guatemala, Quezaltenango y Puerto Barrios en Guatemala. El lugar de construcción es únicamente accesible por chalán que se toma cerca de Tenoziqúe (Chis.). El recorrido en chalán es de aproximadamente 50 km, por el río Usumacinta. Se piensa construir 10 chalanes, que puedan transportar cada uno 1 000 m<sup>3</sup> de materiales de construcción. Cada chalán tendrá un compartimiento rectangular de  $t_1$  metros de largo,  $t_2$  de ancho,  $t_3$  de altura y solamente tendrá fondo, pues la parte superior estará al descubierto. Las paredes laterales y el fondo tienen un precio de \$1 000 m<sup>2</sup>, mientras que los extremos, que son de otro material más resistente, cuestan \$ 2 000 m<sup>2</sup>. Los chalanes harán el recorrido a un costo de \$ 100.00 por viaje redondo.

¿De qué dimensiones debe ser cada chalán tal que el costo total de cada viaje redondo sea mínimo?

Las dimensiones del río hacen necesario que el ancho de cada chalán no exceda de los 10 m y, su altura de 3 m. Los puertos de embarque y desembarque hacen necesario que el largo  $t_1$  no exceda de los 50 m.

*Formulación:*

La figura 1.6 da una idea de la forma geométrica del compartimiento de carga de cada chalán.

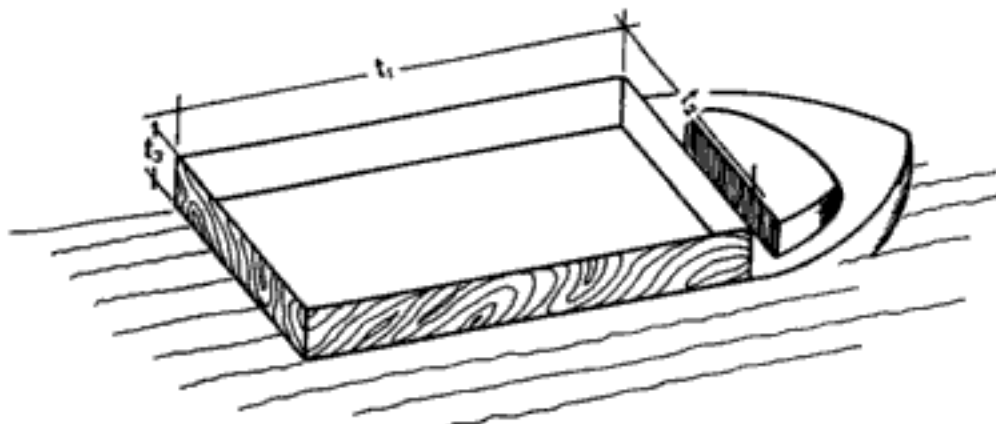


Figura 1.6

## 48 La investigación de operaciones en la toma de decisiones

El costo de cada extremo es:

$$2\,000\ t_2\ t_3\ \frac{\$}{\text{m}^2}\ \text{m}^2$$

y como hay 2 extremos, se tiene

$$4\,000\ t_2\ t_3.$$

El costo de las paredes laterales más el fondo está dado por

$$(2)\ (1\,000)\ t_1\ t_3 + (1\,000)\ t_1\ t_2.$$

El costo del viaje, redondo es

$$\left(\frac{1\,000}{t_1\ t_2\ t_3}\right) (100)\ \frac{\text{m}^3}{\text{m}^3}\ \$.$$

El costo total puede escribirse como

$$C = 4\,000\ t_2\ t_3 + 2\,000\ t_1\ t_3 + 1\,000\ t_1\ t_2 + \frac{1\,000\,000}{t_1\ t_2\ t_3}.$$

El problema es minimizar el costo total  $C$ , sujeto a las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} 0 &\leq t_1 \leq 50 \text{ metros,} \\ 0 &\leq t_2 \leq 10 \text{ metros,} \\ 0 &\leq t_3 \leq 3 \text{ metros.} \end{aligned}$$

A este tipo de modelos se les llama de PROGRAMACION NO LINEAL. El modelo descrito arriba, es un caso particular de programación no lineal, llamado PROGRAMACION GEOMETRICA. Estos tópicos se tratan en el capítulo 7.

### e) *Un problema de control de aguas*

Se supone que la Secretaría de Recursos Hidráulicos en coordinación con la Comisión Federal de Electricidad tienen el problema de optimizar el control de agua de descarga en la Hidroeléctrica de Gusanillo Verde que surte de energía eléctrica a toda el área industrial de esa región. Dada la demanda de energía eléctrica y la distribución de probabilidad del gasto<sup>5</sup> de agua que fluye a la presa, se trata de satisfacer la demanda de fluido eléctrico a costo mínimo.

Se tienen datos históricos que le han permitido al personal federal pronosticar ciertas condiciones de la presa para los próximos  $N$  días. Denótese por  $S_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) la variable que se refiere a la cantidad de agua almacenada en la presa de la hidroeléctrica al principiar el día

<sup>5</sup> Gasto es igual a volumen por unidad de tiempo.

( $i = 1, \dots, N$ ); por  $Y_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) el *gasto* pronosticado de agua que llega a la presa durante el día  $i$  ( $i = 1, \dots, N$ );  $d_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) a la demanda pronosticada de energía eléctrica para el día  $i$  y por último  $X_i$  la variable que se refiere a la descarga de agua durante el día  $i$ .

La tecnología del sistema hidroeléctrico es tal que permite evaluar el costo de generación de energía eléctrica durante el día  $i$ , como una función de la demanda  $d_i$ , del gasto  $Y_i$ , de descarga  $X_i$  y del agua almacenada  $S_i$ . Sea esa función de costo para el período  $i$

$$G_i (X_i, S_i, Y_i, d_i), i = 1, \dots, N.$$

El gasto de agua  $Y_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) solamente puede ser expresado en función de cierta distribución de probabilidad de la forma

$$P_i (Y_i | Y_{i-1}), i = 1, \dots, N,$$

que significa que el *gasto* en el día  $i$  depende en forma condicional del "gasto" en el día  $i - 1$ ,  $i = 1, \dots, N$ . La  $P_i (Y_i | Y_{i-1})$  puede tomarse como una *función de densidad*.<sup>6</sup>

El valor esperado del costo es:

$$VEC = \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} G_i (X_i, S_i, Y_i, d_i) P_i (Y_i | Y_{i-1}) dY_i.$$

Obviamente, los técnicos de ambas secretarías de estado conocen la relación que existe entre el agua acumulada en el día  $i + 1$  en función a la que existe el día  $i$  más el *gasto* durante el día  $i$  y la descarga en dicho día. Esta relación bien podría escribirse como

$$S_{i+1} = S_i + Y_i - X_i, i = 1, \dots, N.$$

El problema es el de encontrar las descargas  $X_1, X_2, \dots, X_N$  y los volúmenes acumulados  $S_1, S_2, \dots, S_N$  tal que se minimice el valor esperado del costo  $VEC$ , sujeto a la restricción que

$$S_{i+1} = S_i + Y_i - X_i, i = 1, \dots, N.$$

Este problema puede resolverse por métodos de PROGRAMACION DINAMICA que se explican en el capítulo 5, para situaciones determinísticas, o bien por PROCESOS MARKOVIANOS DE DECISION, en

<sup>6</sup> La función de densidad  $f(x)$  para una variable aleatoria continua  $X$  es una función que satisface:  $f(x) \geq 0$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$  y  $\int_b^a f(x) dx = P(a < x < b)$ , donde  $a$  y  $b$  son dos números reales tal que  $a < b$  y  $P$  significa probabilidad de un evento. En el caso de que  $X$  sea una variable aleatoria discreta,  $f(X) = P(X = Y)$ . Ver apéndice A de ambos volúmenes.

## 50 La investigación de operaciones en la toma de decisiones

situaciones estocásticas, como sería el caso para este problema. Este último tipo de métodos se explica en el segundo volumen.

### f) Un problema de rutas

Se supone que existen  $N$  gasolineras en la Ciudad de México, que han sido numeradas del 1 al  $N$ . La gasolina NOVA debe ser distribuida y surtida a todas estas gasolineras desde la refinería de Azcapotzalco. Se supone que la gasolinera  $i$ , requiere de  $q(i)$  litros de NOVA y la distancia entre las gasolineras  $i$  y  $j$  ( $i, j = 1, \dots, N; i \neq j$ ) está dada por  $d(i, j)$  kilómetros. PEMEX (Petróleos Mexicanos) sólo tiene una flotilla limitada de vehículos tipo "pipa", cada uno con capacidad máxima de  $Q$  litros de NOVA, que tienen que surtir en una determinada ruta antes de regresar a cargar más NOVA a la refinería. Por disposiciones sindicales a los choferes no se les permite manejar más de  $K$  kilómetros por ruta.

Una programación de rutas especificaría  $S$  rutas  $R_1, R_2, \dots, R_S$  donde cada ruta se inicia en la refinería, visita una cantidad determinada de diferentes gasolineras y regresa por último a la refinería sin exceder las limitaciones de capacidad de carga  $Q$  y de kilometraje  $K$ .

El objetivo de PEMEX es determinar el mínimo número  $S$  de rutas que satisfagan la demanda (diaria, semanal o mensual) tal que el kilometraje total de recorrido,  $DT$ , sea mínimo.

### Formulación:

Se supone que la ruta  $R_i$  tiene que surtir a  $n_i$  gasolineras denotadas  $G_i(1), G_i(2), \dots, G_i(n_i)$ . El kilometraje recorrido en ésta ruta es:

$$D_i = d(\text{ref.}, G_i(1)) + \sum_{j=2}^{n_i} d(G_i(j-1), G_i(j)) + d(G_i(n_i), \text{ref.}).$$

El kilometraje total cubierto en todas las  $S$  rutas es

$$DT = \sum_{i=1}^S D_i.$$

Las variables del problema son obviamente las siguientes:

a) ¿Cuántas rutas  $S$  deben existir? En otras palabras, ¿cuál es el valor de  $S$ ?

b) Dada una ruta  $i$  determinada, ¿cuántas gasolineras deberán surtir en esa ruta, es decir, cuál es el valor de  $n_i$  por cada ruta  $i = 1, \dots, S$ ?

c) Sabiendo cuál es el valor de  $n_i$ , identificar las  $n_i$  gasolineras que forman esa ruta, es decir  $G_i(1), G_i(2), \dots, G_i(n_i)$ .

Las respuestas de (a), (b), (c) deben ser tal que  $S$ , el número total de rutas sea mínimo;  $DT$ , la distancia total de todas las rutas sea mínima y además que se respeten las restricciones de kilometraje dadas por

$$D_i \leq K, \quad i = 1, \dots, S,$$

y de capacidad, dadas por

$$\sum_{j=1}^{n_i} q(G_i(j)) \leq Q, \quad \text{para } i = 1, \dots, S.$$

Se supone que  $Q \geq q(i)$  para toda gasolinera.

Los métodos que resuelven éste tipo de problemas COMBINATORIOS, se llaman HEURISTICOS y algunos de ellos se tratan en el capítulo 6.

g) *Un problema de inventario*

La compra de maíz y frijol que la Compañía Nacional de Subsistencias Populares (CONASUPO) hace a través de las Bodegas Rurales Conasupo a los ejidatarios del país, se lleva a cabo en forma encostalada. En el estado de Chiapas, uno de los grandes productores de maíz, se ha notado que la demanda de costales de 70 kg cada uno, que la CONASUPO presta a los ejidatarios, tiene la siguiente distribución anual:

TABLA 1-9

$\xi = \text{Paca de costales}$ (1 000 costales)	$\xi(\phi) = \text{Probabilidad}$ <i>de consumo</i>
0	. 0
1	.20
2	.30
3	.25
4	.20
5	.05

donde cada paca de costal tiene 1 000 costales. Los costales por su uso pueden darse de baja, cuando están muy deteriorados. Para reponer esos costales deteriorados y dados de baja se deben fabricar nuevos costales. La paca de costales tiene un costo de almacenamiento bajísimo de \$ 10.00 /paca/año. El costo de fabricación de una paca es de \$ 5 000.00. Los daños que sufre el maíz que no puede almacenarse encostalado por falta de costales y que debe dejarse a granel a la intemperie es de \$500.00 por paca (es decir \$ 500.00 por 1 000 costales de 70 kg cada uno o sea \$ 500.00 por 70 toneladas de maíz o frijol).

## 52 La investigación de operaciones en la toma de decisiones

Suponiendo que el inventario de pacas de costales en Chiapas sube o baja dependiendo de la fabricación de nuevos costales o retiro de aquéllos que están dañados, ¿cuál sería el punto de reorden que minimizara los costos totales?

*Formulación:*

El costo total está dado por:

Costo total = costo de fabricación + costo de almacenamiento + costo de deterioro del maíz a la intemperie.

Si se supone que el nivel del inventario es  $Y$  (en pacas), que la demanda es  $\xi$  (en pacas) y que los costales mandados a fabricar es  $X$  (en pacas), se tiene que el valor esperado del costo total es:

$$E \{CT(Y)\} = 5\,000(Y-X) + 10 \sum_{\xi=0}^Y (Y-\xi)\phi(\xi) + 500 \sum_{\xi=Y+1}^{\infty} (\xi-Y)\phi(\xi).$$

Se trata de encontrar una  $Y^*$  tal que minimice la expresión anterior. Una vez hallado el punto crítico  $Y^*$ , la política de reorden de pacas de costales sería simplemente:

- a) si el nivel de pacas  $Z$  es menor a  $Y^*$ , fabríquese  $Y^* - Z$  pacas,
- b) si el nivel de pacas  $Z$  es mayor o igual a  $Y^*$  no se fabrique nada.

Este tipo de modelos llamado de INVENTARIOS, se trata en el segundo volumen. Los métodos de SIMULACION que se aplican a la solución de problemas de INVENTARIOS y de LINEAS DE ESPERA también se explican en el segundo volumen.

A continuación se presenta un problema típico de LINEAS DE ESPERA, aunque en esta ocasión no se formula su modelo matemático.

### h) *Visita a una clínica del Seguro Social*

A don Sigismundo Ontivaños, trabajador en la línea de producción de la fábrica de tornillos La Rosca, S. A., se le ha dado cita en el Laboratorio de Radiología del Hospital de la Raza con objeto de practicarle un examen de bario. Su cita es a las 9.00 h de la mañana del lunes. Don Sigismundo se encuentra pacientemente esperando desde las 9.00 h del día lunes y su examen se lleva a cabo el siguiente miércoles a las 3.00 h de la tarde. La razón de la espera es obvia, pues el Dr. Bariola, radiólogo en dicho Hospital no puede darse abasto con su trabajo y lleva 2 y medio días de retraso.

Mientras tanto, en la fábrica de tornillos, han tenido que cubrir el turno de don Sigismundo con un suplente, para no parar la producción de la línea. El costo por introducir al suplente es de \$ 150.00 (\$ 50.00 por día). Este costo aunado a otros tantos, será pasado al pobre consumidor de tornillos.

Bajo tal esquema, las autoridades del Seguro Social se preguntan, cuántos doctores deberían atender a los asegurados en el departamento de Radiología de dicho Hospital, tal que el costo social de espera fuera equilibrado con el costo de operaciones de dicho laboratorio.

i) ¿Se compra o se repara la locomotora de ferrocarril?

Se supone que se tiene conocimiento de las utilidades anuales  $r_n(j)$ , costos de operación anuales  $U_n(j)$  y costo de reventa anual  $S_n(j)$  de una locomotora construida en el año  $n$  y que ha estado trabajando por  $j$  años. Se supone que el precio de compra de una locomotora construida en el año  $n$  es  $C_n$ .

El problema consiste en determinar en qué años conviene reemplazar la locomotora por una de nueva tecnología a un costo actualizado total mínimo.

*Formulación:*

Si  $T$  reemplazos se hacen en los años  $X(1), X(2), \dots, X(T)$ , y el costo de reemplazo de una locomotora construida en el año  $n$  con  $j$  años de uso es  $C_n(j)$ , y si se establece la definición

$$\begin{aligned} Y &= X(i) & i &= 1, \dots, T, \\ Z &= X(i+1) - 1, & i &= 1, \dots, T, \end{aligned}$$

entonces el costo actualizado al tipo de interés bancario  $d$  es:

$$G(i) = \sum_{t=Y}^Z (r_Y(t) - U_Y(t)) d^{t-1} + C_Y(Z - Y + 1) d^Z$$

El problema de optimización consiste en hallar el número total de reemplazos de locomotora,  $T$ , los años de reemplazo  $X(1), X(2), \dots, X(T)$ , tal que se minimice el costo total:

$$\sum_{i=1}^T G(i),$$

y sujeto a las restricciones

$$\begin{aligned} T &\geq 0, \text{ entero,} \\ X(1) &\geq 0, \text{ entero,} \\ X(i+1) &\geq X(i), \quad i = 1, \dots, T, \\ X(N) &\leq \text{horizonte de planeación,} \\ X(i) &\geq 0, \text{ entero, } i = 2, \dots, T. \end{aligned}$$



## 54 La investigación de operaciones en la toma de decisiones

Este tipo de problemas se analiza en el segundo volumen bajo el título de **MODELOS DE REEMPLAZO**. En ese mismo volumen se describen métodos de **LOCALIZACION DE PLANTAS**.<sup>7</sup>

Se espera que a estas alturas el lector se halla dado cuenta, que en efecto, existe una cantidad muy variada de problemas emanados de múltiples sectores, cuya solución tradicional de tipo intuitivo resulta muy difícil si no imposible. Para resolver estos problemas conviene formularlos por diferentes modelos matemáticos.

A continuación se trata cada uno de estos modelos con más detalle, proporcionando la teoría necesaria para darle validez al modelo, explicando sus métodos de solución e ilustrándolos con una serie de ejemplos significativos. *El primer volumen trata los modelos determinísticos y el segundo los estocásticos.*

Es necesario el conocimiento de los apéndices *A* (cálculo) y *B* (álgebra lineal), para este primer volumen y el apéndice *A* (probabilidad, estadística, pronósticos) del segundo volumen para los modelos estocásticos.

### REFERENCIAS

#### I. Libros

- [1] Ackoff, R. L. y Sasieni M. W. *Fundamentals of Operations Research*, John Wiley & Sons, 1968.
- [2] Churchman, C. W., Ackoff, R. L. y Arnoff, E. L. *Introduction to Operations Research*. John Wiley & Sons, 1957.
- [3] Hillier, S. F. y Lieberman, G. J. *Introduction to Operations Research*, Holden-Day, Inc., 1967.
- [4] Huysmans, J. H. B. M., *The Implementation of Operations Research*, John Wiley & Sons, 1970.
- [5] Hyvärinen, L. *Mathematical Modeling for Industrial Processes*, Springer Verlag, 1970.
- [6] Miller, D. W. y Starr, M. K. *Executive Decisions and Operations Research*, Prentice-Hall, 1960.
- [7] Wagner, M. H. *Principles of Operations Research*. Prentice-Hall, 1969.
- [8] Wiener, N. *Cibernética*, Guadiana de Publicaciones, Madrid, 1960.

#### II. Artículos

- [9] Ackoff, R. "The Development of Operations Research as a Science" *Operations Research*, Vol. 4, 1956.
- [10] Argyris, C. "Management Information Systems: The Challenge to Rationality and Emotionality". *Management Science*, Vol. 17, pp. B257-B292, 1971.
- [11] Arrow, K. J. "Decision Theory and Operations Research". *Operations Research*, Vol. 5, pp. 765-774, 1957.
- [12] Churchman, C. W. y Shainblatt, A. H. "The Researcher and the Manager: A Dialectic of Implementation", *Management Science*, Vol. 11, pp. B69-B87, 1965.

<sup>7</sup> Algunos problemas de reemplazo de carácter determinístico, se cubren en los capítulos de redes (4) y de programación dinámica (5) del primer volumen.

- [13] Doktor, R. H. y Hamilton, W. F. "Cognitive Style and the Acceptance of Management Science Recommendations". *Management Science*, Vol. 29, pp. 884-894, 1973.
- [14] Little, J. D. F. "Models and Managers: The Concept of a Decision Calculus". *Management Science*, Vol. 16-8, pp. B466-B485, 1970.
- [15] Radnor, M. y Rubinstein, A. H. "Implementation in Operations Research and R & D. in Government and Business Organization". *Operations Research*, Vol. 18, pp. 967-991, 1970.
- [16] Rubinstein, A. H., Radnor, M., Baker, N. R., Heiman, D. R. y McColly, J. B. "Some Organizations Factors Related to the Effectiveness of Management Science Groups in Industry". *Management Science*, Vol. 13, pp. B508-B518, 1967.
- [17] Shakun, M. "Management Science and Management: Implementing Management Science via Situational Normativism". *Management Science*, Vol. 18, pp. 367-377, 1972.
- [18] Urban, L. G. "Building Models for Decision Makers". *Interfaces*, Vol. 4-3, pp. 1-11, 1974.



## La programación lineal

El objetivo de este capítulo es presentar al lector la teoría de la *programación lineal*, sus métodos de solución, así como las extensiones que a los mismos se han hecho en la práctica de solución de problemas reales. Se empieza con el *método gráfico* que presenta una idea intuitiva de lo que es un modelo de programación lineal y da las bases que cimantan su solución; a continuación se explica el *método simplex* y la teoría que lo justifica; inmediatamente después se cubre la *teoría de la dualidad*, *análisis de sensibilidad* y *programación paramétrica*; se finaliza el capítulo con la explicación de los métodos que permiten resolver problemas reales de dimensiones bastante grandes.

### 2.1. Métodos gráficos

Supóngase el lector, que por un momento es dueño de una planta que produce únicamente dos tipos de cerveza: clara y oscura. Existen tecnologías bastante diferentes para la elaboración de cada uno de los tipos de cerveza, obviamente cada tecnología a un costo diferente.

El lector no sabe cuál deba ser su producción óptima semanal de cada producto, y por lo tanto se decide a identificar dos *variables de decisión*.

$X_1$ : miles de litros de cerveza clara a producir en una semana.

$X_2$ : miles de litros de cerveza oscura a producir en una semana.

El precio al mayoreo de 1 000 litros de cerveza clara es de \$ 5 000.00 mientras que el precio al mayoreo de 1 000 litros de cerveza oscura es de \$ 3 000.00. El ingreso semanal de la venta de ambos productos sería:

$$Z = 5\,000 X_1 + 3\,000 X_2 \quad (2.1)$$

cuyas unidades son

## 58 La programación lineal

$$\begin{aligned} \$ &= \frac{\$}{(\text{miles de litros de cerv. cl.})} (\text{miles de litros de cerv. cl.}) \\ &+ \frac{\$}{(\text{miles de litros de cerv. obs.})} (\text{miles de litros de cerv. obs.}). \end{aligned}$$

Si el objetivo del lector, como el de cualquier industrial, es el de maximizar los ingresos semanales, produciría un gran volumen de  $X_1$  y  $X_2$ . ¿Cuán grande? Por ejemplo, si produce y vende 100 000 litros de cerveza clara y 100 000 litros de cerveza oscura en una semana, su ingreso sería de

$$Z = 5\,000(100) + 3\,000(100) = 800\,000.$$

Por favor recuerde el lector que las unidades que se están empleando están dadas en miles de litros y que por esa razón es necesario dividir la producción semanal entre 1 000.

Para maximizar  $Z$  se debe incrementar  $X_1$  y  $X_2$ . Desgraciadamente hay restricciones físicas en el sistema real de producción que le impiden al dueño de la planta incrementar arbitrariamente la producción de  $X_1$  y  $X_2$ . Entre otras restricciones se pueden mencionar las siguientes: espacio de almacenamiento, capacidad de producción, capital, mano de obra, etc. Para facilidad de explicación, permítase utilizar solamente dos restricciones de las muchas que existen en la realidad. Sean éstas:

restricciones de mano de obra,  
restricciones de costos de producción.

Un estudio de tiempos y movimientos ha demostrado que para producir 1 000 litros de cerveza clara se requiere un total de 3 obreros en el proceso de producción. En cambio se requieren 5 obreros para producir 1 000 litros de cerveza oscura. Se supone que la planta tiene un total de 15 obreros. Esto quiere decir que la producción de  $X_1$  y  $X_2$  depende del número disponible de obreros. Esto puede representarse por la siguiente desigualdad:

$$3X_1 + 5X_2 \leq 15, \quad (2.2)$$

donde las unidades son

$$\begin{aligned} &\frac{\text{obrerros}}{(\text{miles de litros cerv. cl.})} (\text{miles de litros de cerv. cl.}) + \\ &\frac{\text{obrerros}}{(\text{miles de litros cerv. obsc.})} (\text{miles de litros de cerv. obsc.}) \leq \text{obrerros}. \end{aligned}$$

La desigualdad (2.2) dice que la cantidad de obreros utilizados en la producción semanal de  $X_1$  y  $X_2$  no puede exceder de 15. Producir 100 000 litros de cerveza clara y 100 000 litros de cerveza oscura utilizarían 800 obreros, que exceden al límite disponible.

Se supone que producir 1 000 litros de cerveza clara le cuestan al dueño de la planta \$ 500.00, mientras que 1 000 litros de cerveza oscura le cuestan solamente \$ 200.00. Su capital no le permite gastar más de \$ 1 000.00 semanales en la producción de  $X_1$  y  $X_2$ . Matemáticamente esta restricción puede expresarse así:

$$500 X_1 + 200 X_2 \leq 1\,000, \quad (2.3)$$

cuyas dimensiones, como el lector puede comprobar fácilmente, son pesos. De nuevo, la producción de 100 000 litros de  $X_1$  y  $X_2$ , significarían un gasto semanal de \$ 70 000.00 que excede al límite de 1 000.

La pregunta a la que el dueño desea una solución es la siguiente: ¿Cuáles deben ser los niveles de producción semanal de cerveza clara  $X_1$ , y de cerveza oscura  $X_2$ , que maximicen el ingreso por concepto de venta semanal, sin exceder las restricciones de personal y de capital? Matemáticamente se trata de resolver el siguiente problema, llamado de *programación lineal*.

Maximizar

$$Z = 5\,000 X_1 + 3\,000 X_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3 X_1 + 5 X_2 &\leq 15 \\ 500 X_1 + 200 X_2 &\leq 1\,000 \\ X_1 &\geq 0, \quad X_2 \geq 0. \end{aligned}$$

La última restricción ( $X_1 \geq 0$ ,  $X_2 \geq 0$ ), se llama *condición de no-negatividad*, y evita que los resultados den un absurdo negativo, que en este caso podría significar una producción negativa (destrucción).

En un sistema de coordenadas rectangulares se puede describir gráficamente, como el dueño de la planta puede resolver óptimamente su programa de producción semanal. Un eje del sistema medirá la cantidad de cerveza clara  $X_1$  y el otro la cantidad de cerveza oscura  $X_2$ . Como  $X_1$  y  $X_2$  deben ser no-negativas, se refiere únicamente al cuadrante derecho superior del sistema coordenado, tal como se indica en la figura 2.1.

A continuación se interpreta la representación geométrica de las desigualdades

$$\begin{aligned} 3 X_1 + 5 X_2 &\leq 15 \\ 500 X_1 + 200 X_2 &\leq 1\,000. \end{aligned}$$

Si por el momento se considera a estas desigualdades como igualdades, se tiene:

$$\begin{aligned} 3 X_1 + 5 X_2 &= 15 \\ 500 X_1 + 200 X_2 &= 1\,000 \end{aligned} \quad (2.4)$$

o lo que es lo mismo

$$X_2 = 3 - \frac{3}{5} X_1 \quad (2.5)$$

## 60 La programación lineal

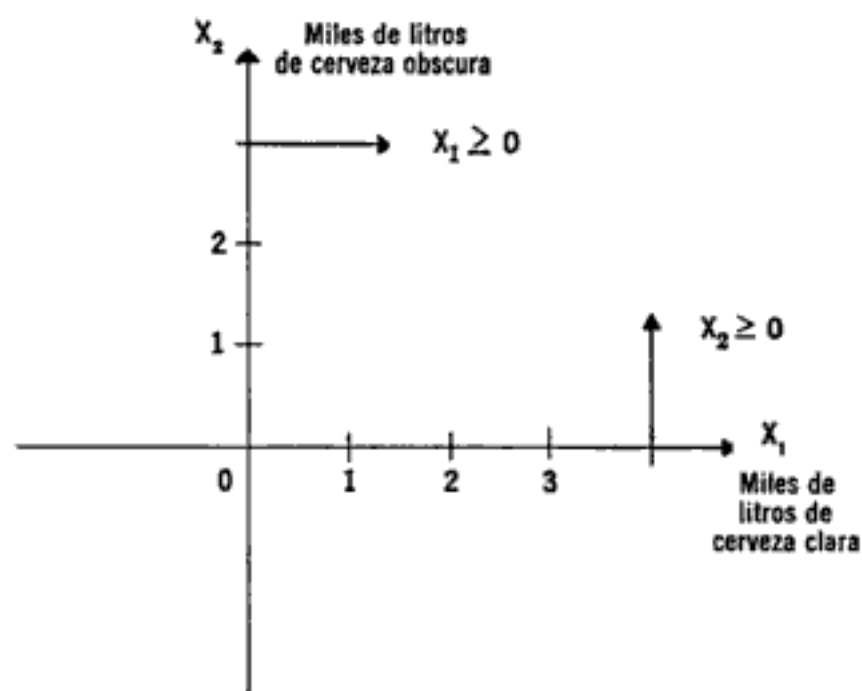


Figura 2.1

$$X_2 = 5 - \frac{5}{2}X_1. \quad (2.6)$$

Si arbitrariamente se le da valores a  $X_1$ , se obtiene el correspondiente valor de  $X_2$ , en ambas rectas. Un par de valores arbitrarios de  $X_1$ , generarían dos puntos, que unidos dan la recta en cuestión. Se dan a  $X_1$  el valor cero en ambas rectas, y los valores cinco y dos en (2.5) y (2.6), respectivamente. La tabla a continuación da el valor de  $X_2$ :

TABLA 2-1

<i>Recta <math>X_2 = 3 - \frac{3}{5}X_1</math></i>		<i>Recta <math>X_2 = 5 - \frac{5}{2}X_1</math></i>	
<i>Valor arbitrario de <math>X_1</math></i>	<i>Valor computado de <math>X_2</math></i>	<i>Valor arbitrario de <math>X_1</math></i>	<i>Valor computado de <math>X_2</math></i>
0	3	0	5
5	0	2	0

Graficando los puntos obtenidos se obtienen las rectas mostradas en la figura 2.2.

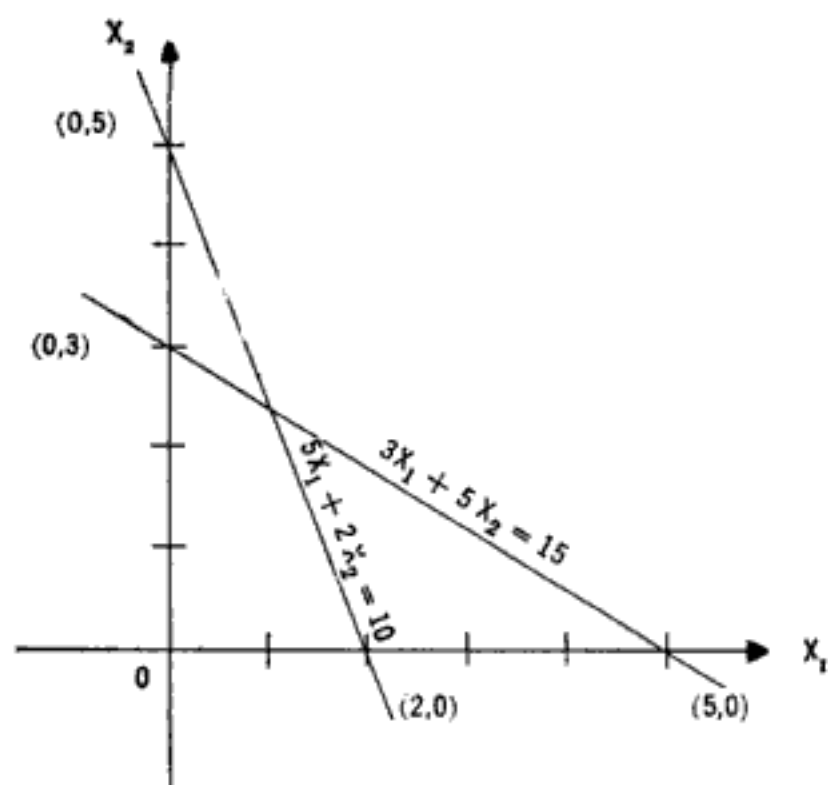


Figura 2.2

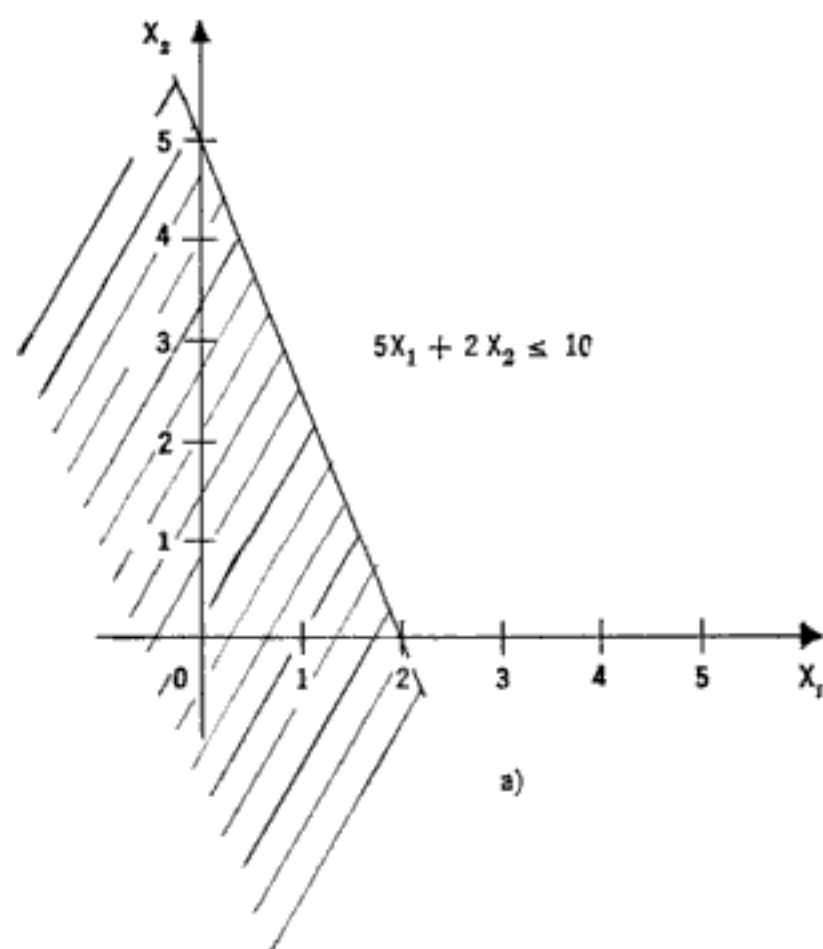


Figura 2.3



## 62 La programación lineal

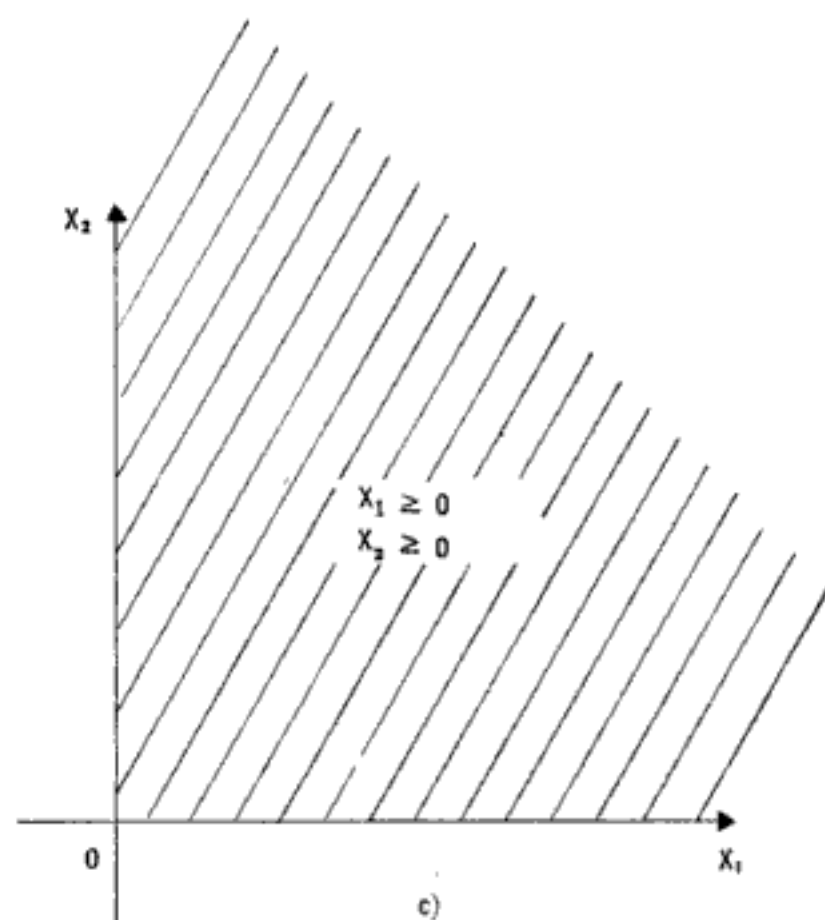
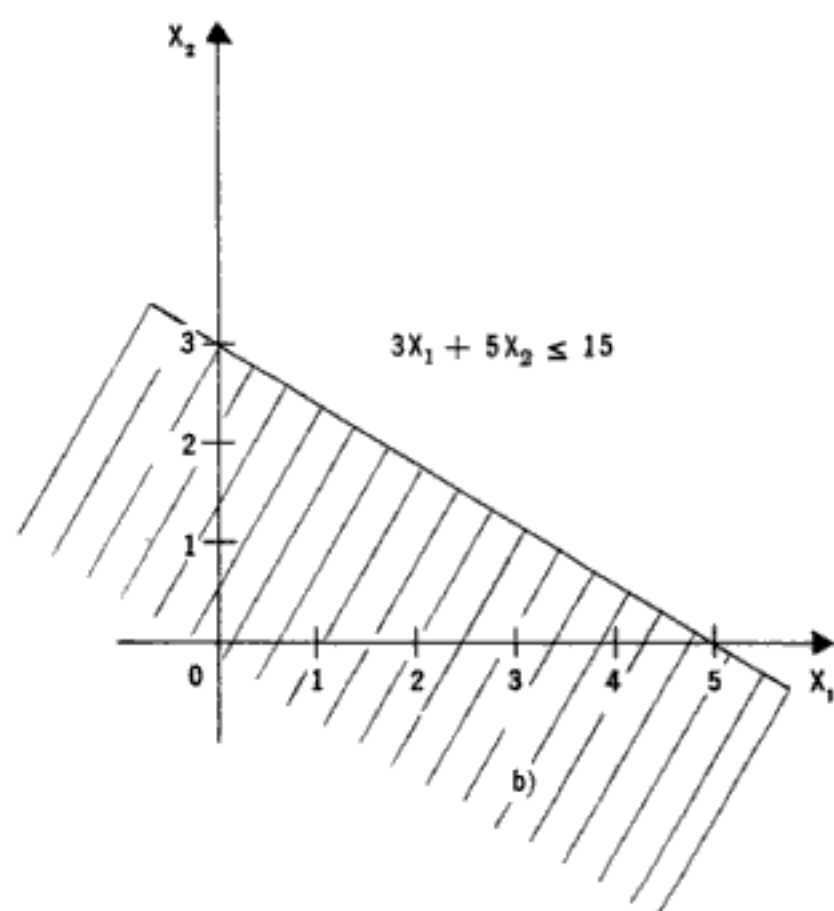


Figura 2.3

Sin embargo, no interesan las igualdades (2.4), sino las desigualdades (2.2), (2.3) y éstas se muestran pictóricamente en las áreas sombreadas de las figuras 2.3, (a), (b) y (c). Esto quiere decir que cualquier punto  $(X_1, X_2)$  en la zona sombreada de la figura 2.3 (a) satisface la restricción  $5X_1 + 2X_2 \leq 10$  mientras, que un punto  $(X_1, X_2)$  en la zona blanca de la misma figura, viola esa restricción, es decir, satisface  $5X_1 + 2X_2 > 10$ . Intersectando las 3 figuras se obtiene la figura 2.4.

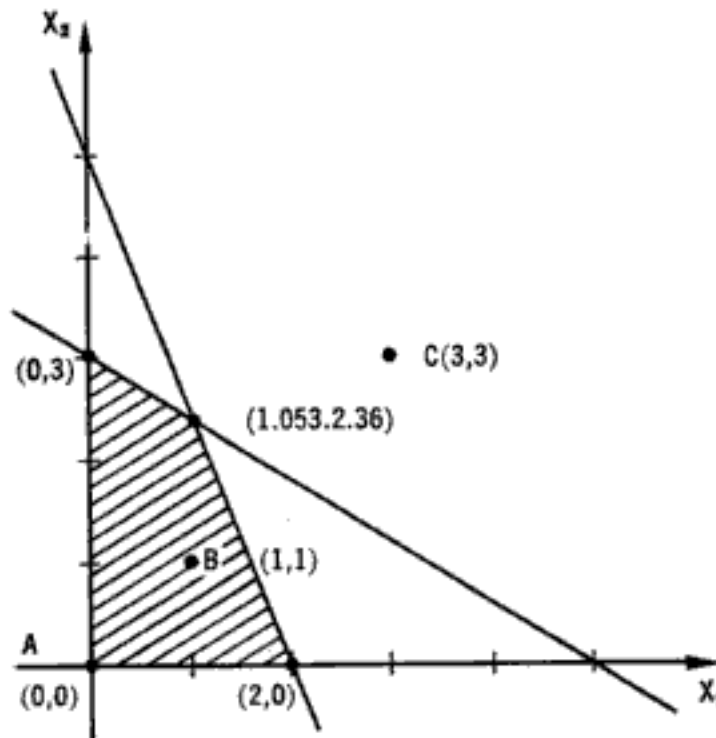


Figura 2.4

Los puntos  $(X_1, X_2)$  contenidos dentro del área sombreada, son los únicos que satisfacen las restricciones laborales, de capital y de no-negatividad, *simultáneamente*. El industrial tiene que buscar dentro de esa infinidad de puntos, cuáles son los que le producen la mejor utilidad  $Z$ . Por ejemplo, el punto  $A$ , donde  $X_1 = 0$  y  $X_2 = 0$ , satisface todas las restricciones (2.2), (2.3) y no-negatividad como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} 3(0) + 5(0) &= 0 \leq 15 \\ 500(0) + 200(0) &= 0 \leq 1\,000 \\ 0 &\geq 0, \quad 0 \geq 0, \end{aligned}$$

pero produce una utilidad de

$$Z = 5\,000(0) + 3\,000(0) = 0.$$

## 64 La programación lineal

El punto  $B$  donde se producirían  $X_1 = 1\,000$  litros de cerveza clara y  $X_2 = 1\,000$  litros de cerveza oscura, también satisface todas las restricciones

$$\begin{aligned}3(1) + 5(1) &= 8 \leq 15 \\500(1) + 200(1) &= 700 \leq 1\,000 \\1 &\geq 0, \quad 1 \geq 0\end{aligned}$$

y produce una utilidad de

$$Z = 5\,000(1) + 3\,000(1) = 8\,000 \text{ pesos,}$$

que es una utilidad mucho mejor que la obtenida en el punto  $A$ . El punto  $C$ , donde se producirían  $X_1 = 3\,000$  litros de cerveza clara y  $X_2 = 3\,000$  litros de cerveza oscura generarían una utilidad de

$$Z = 5\,000(3) + 3\,000(3) = 24\,000 \text{ pesos}$$

que es una utilidad mucho mejor que la producida por los puntos  $A$  y  $B$ . Sin embargo, la producción del punto  $C$  viola las restricciones de personal y de capital. La primera porque utiliza 24 personas, cuando el máximo permisible son 15,

$$3(3) + 5(3) = 24 \not\leq 15,$$

mientras que la segunda, porque se están utilizando 2 100 pesos, cuando el máximo permisible son 1 000,

$$500(3) + 200(3) = 2\,100 \not\leq 1\,000.$$

Esta región sombreada lleva el nombre de *región de factibilidad*.

A continuación se verá cómo puede obtenerse gráficamente el punto  $(X_1, X_2)$  que da el nivel de la producción, que satisfaciendo ambas restricciones proporciona la utilidad óptima.

La función de utilidad se expresa como

$$Z = 5\,000 X_1 + 3\,000 X_2.$$

Supóngase que  $Z$  es igual a 15 000. Eso implica

$$15\,000 = 5\,000 X_1 + 3\,000 X_2 \quad (2.7)$$

o sea

$$X_2 = 5 - \frac{5}{3} X_1.$$

Dándole a  $X_1$  valores arbitrarios de 0 y 3, se obtiene respectivamente valores de  $X_2$  iguales a 5 y 0. Al unir los puntos (0,5) y (3,0) con una recta, se obtendrá el lugar geométrico de todos los puntos  $(X_1, X_2)$  que satisfacen la recta (2.7). Gráficamente se tiene

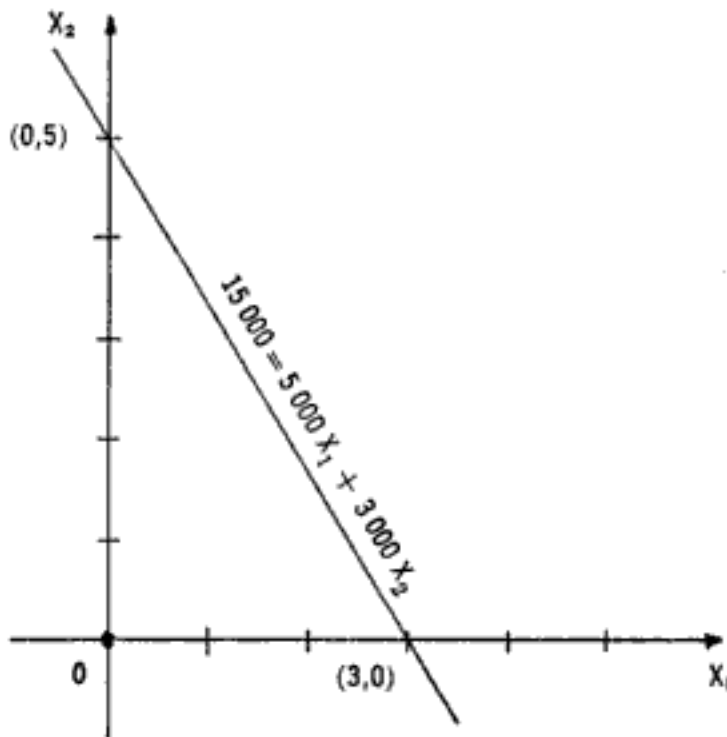


Figura 2.5

Haciendo  $Z$  ahora igual a  $10\,000$ , se obtiene una recta paralela a la anterior pero desplazada un poco hacia abajo. De la misma manera con una  $Z = 30\,000$  se obtendría otra recta paralela a las dos anteriores, pero desplazada un poco hacia arriba. Gráficamente se tiene

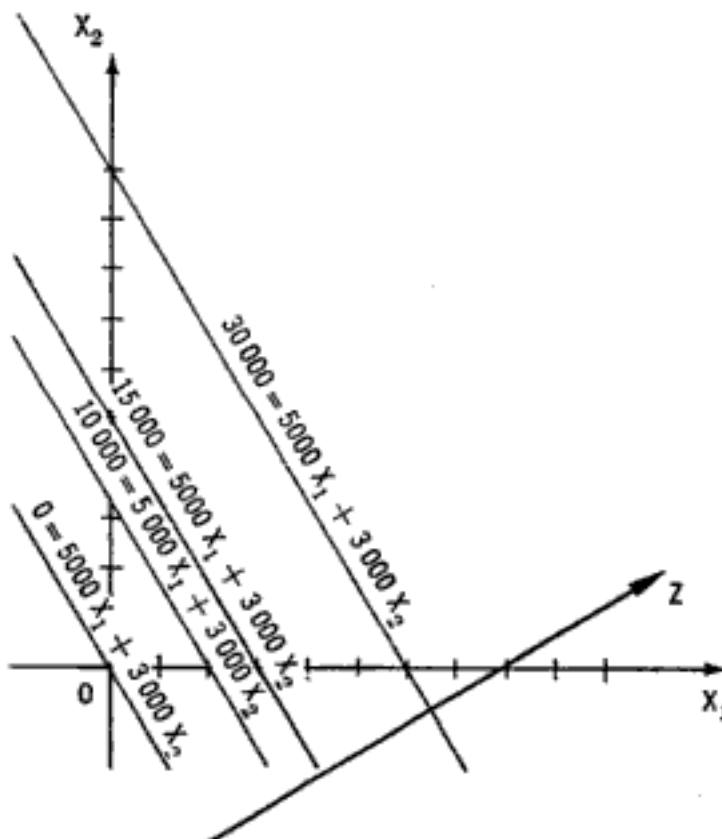


Figura 2.6

## 66 La programación lineal

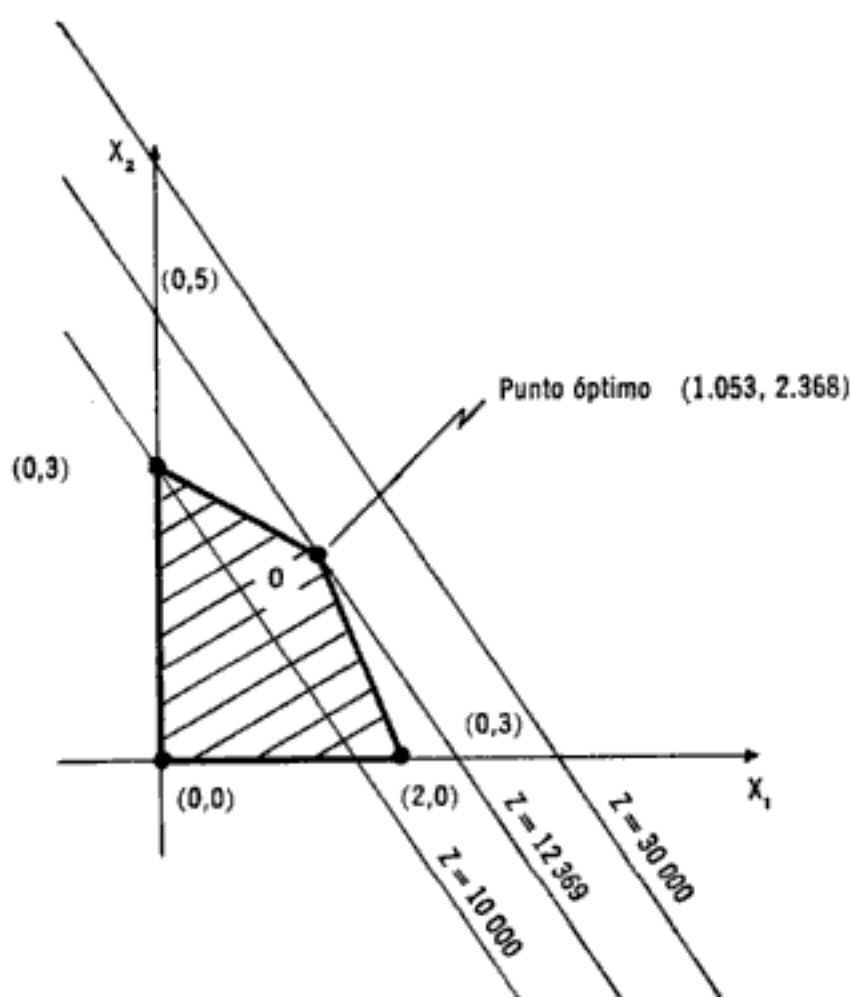


Figura 2.7

A estas alturas se puede afirmar que si se desplaza la recta hacia abajo, el valor de  $Z$  disminuye, mientras que un desplazamiento hacia arriba aumentaría el valor de  $Z$ . La pregunta a que nuestro lector debe responder es cuál es el máximo desplazamiento hacia arriba, que proporciona el mayor valor de  $Z$ , y cuya correspondiente producción no viole las restricciones de personal y capital. Un momento de reflexión observando la figura 2.7, convencerá al lector que el punto 0 de coordenadas  $(X_1^*, X_2^*)$ , es el punto buscado. En este ejemplo, ese punto es el siguiente:

$$X_1^* = 1\,053 \text{ litros de cerveza clara}$$

$$X_2^* = 2\,368 \text{ litros de cerveza oscura,}$$

que generan una utilidad óptima de

$$Z^* = 5\,000(1.053) + 3\,000(2.368) = 12\,369 \text{ pesos.}$$

Este problemita (que dista de ser real, porque una compañía cervecera probablemente produce más de dos productos y tiene más de dos restricciones que tomar en consideración) ha permitido ilustrar gráficamente en qué consiste una solución de un programa lineal.

Desgraciadamente esa es la única utilidad que tienen los métodos gráficos, o sea el de ilustrar de manera sencilla los conceptos introductorios de la programación lineal. Es posible, aunque francamente no recomendable, resolver problemas con tres variables de decisión. Sin embargo de cuatro variables en adelante, no hay manera de resolver problemas de programación lineal por métodos gráficos, ni rezándole a "San Garabato de los Milagros". Por eso se hace necesario que se utilicen otros métodos para resolver este tipo de problemas.

A continuación se presenta la teoría de un método que permite resolver eficientemente problemas de programación lineal.

## 2.2. El método simplex

*Definición.* Se entiende por programa lineal aquel que optimiza

$$Z = \mathbf{c}\mathbf{X} \quad (2.8)$$

sujeto a

$$\mathbf{A}\mathbf{X} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \mathbf{b} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0} \quad (2.10)$$

donde la función lineal (2.8) se llama *función objetivo*; las desigualdades (2.9) se llaman *restricciones* y a (2.10) se le conoce como *condición de no-negatividad*. La palabra optimizar puede significar *maximizar* o *minimizar*.

En el programa lineal definido arriba se tiene que  $\mathbf{X}$  es un vector columna con  $n$  componentes. A este vector se le denomina el *vector de actividades* y sus  $n$  componentes son variables de decisión. Sea entonces

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Al vector renglón  $\mathbf{c}$ , también con  $n$  componentes ( $c_1, c_2, \dots, c_n$ ) se le denomina el *vector de precios* o *costos unitarios*. El vector columna  $\mathbf{b}$ , con  $m$  componentes, se le denomina el *vector de disponibilidad de recursos*. El vector  $\mathbf{0}$  es un *vector columna de  $n$  ceros*. Por último la matriz  $\mathbf{A}$ , con  $m$  renglones y  $n$  columnas se le denomina la *matriz de coeficientes tecnológicos*. Cada elemento  $a_{ij}$  en la matriz  $\mathbf{A}$ , con  $i = 1, \dots, m$  y  $j = 1, \dots, n$  representa la cantidad de recursos  $j$  que se necesita por unidad de la actividad  $i$ .

## 68 La programación lineal

Matricialmente se reescribe al programa lineal como

$$\text{Opt } (c_1, c_2, \dots, c_n) \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

sujeto a

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

y

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Otra forma de escribirlo es

$$\text{Opt } Z = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \cdots + c_n X_n \quad (2.15)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \cdots + a_{1n} X_n & \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} b_1 \\ a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \cdots + a_{2n} X_n & \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} b_2 \\ \dots & \dots \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \cdots + a_{mn} X_n & \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} b_m \\ X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad \dots \quad X_n \geq 0. & \quad (2.17) \end{aligned}$$

Por último, también se puede escribir

$$\text{Opt } Z = \sum_{i=1}^n c_i X_i \quad (2.18)$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} X_i \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} b_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (2.19)$$

$$X_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.20)$$

Todas las formas son equivalentes. Las componentes de **c**, **b** y **a** son números reales, es decir, pueden ser negativos, ceros o positivos.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Se excluyen los números complejos, que se definen en el apéndice A.

**Formas equivalentes de la programación lineal**

En el desarrollo que a continuación se presenta se usa la siguiente forma de la programación lineal, denominada *forma canónica*.

$$\text{Máx } Z = \mathbf{cX}$$

sujeto a

$$\mathbf{AX} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}. \quad (2.21)$$

Cualquier otra forma es equivalente a la (2.21). Esta equivalencia se prueba fácilmente por medio del uso de cualquiera de las siguientes cinco reglas.

**Regla 1**

- a) Maximizar  $\mathbf{cX}$  es equivalente a Minimizar  $-\mathbf{cX}$ .
- b) Minimizar  $\mathbf{cX}$  es equivalente a Maximizar  $-\mathbf{cX}$ .

**Ejemplo:**

$$a) \quad \text{Máx } Z = 3X_1 - 4X_2 + 5X_3$$

es equivalente a

$$\text{Mín } -Z = -3X_1 + 4X_2 - 5X_3$$

$$b) \quad \text{Mín } Z = 16X_1 - 5X_2$$

es equivalente a

$$\text{Máx } -Z = -16X_1 + 5X_2.$$

**Regla 2**

- a) La desigualdad  $\mathbf{AX} \leq \mathbf{b}$  es equivalente a la desigualdad  $-\mathbf{AX} \geq -\mathbf{b}$ .
- b) La desigualdad  $\mathbf{AX} \geq \mathbf{b}$  es equivalente a la desigualdad  $-\mathbf{AX} \leq -\mathbf{b}$ .

**Ejemplo:**

$$a) \quad 3X_1 + 4X_2 - 3X_3 \leq 1000$$

es equivalente a

$$-3X_1 - 4X_2 + 3X_3 \geq -1000.$$

$$b) \quad 12X_1 - 4X_2 \geq 800$$

es equivalente a

$$-12X_1 + 4X_2 \leq -800.$$



## 70 La programación lineal

### Regla 3

Toda igualdad de la forma  $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$ , puede descomponerse como la intersección de dos desigualdades  $\mathbf{AX} \leq \mathbf{b}$  y  $\mathbf{AX} \geq \mathbf{b}$ .

Ejemplo:

$$\begin{array}{l} 14 X_1 - 3 X_2 = 7 \\ \text{es equivalente a} \\ 14 X_1 - 3 X_2 \leq 7 \\ \text{y} \\ 14 X_1 - 3 X_2 \geq 7. \end{array}$$

### Regla 4

- a) Toda desigualdad de la forma  $\mathbf{AX} \leq \mathbf{b}$  puede convertirse en igualdad mediante la adición de un vector  $\mathbf{Y}$ , llamado *de holgura*. El vector columna  $\mathbf{Y}$  tiene  $m$  componentes, todas ellas no-negativas, es decir

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_m \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- b) Toda desigualdad de la forma  $\mathbf{AX} \geq \mathbf{b}$  puede convertirse en igualdad mediante la resta de un vector  $\mathbf{Z}$ , llamado *superfluo*. El vector columna  $\mathbf{Z}$ , tiene  $m$  componentes, todas no-negativas, es decir:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_m \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \\ 14 X_1 - 3 X_2 \leq 10 \\ 12 X_1 + 4 X_2 \leq 12 \end{array}$$

es equivalente a

$$\begin{array}{l} 14 X_1 - 3 X_2 + X_3 = 10 \\ 12 X_1 + 4 X_2 + X_4 = 12 \\ X_3 \geq 0, \quad X_4 \geq 0 \end{array}$$

donde el vector de holgura es

$$\begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$b) \quad \begin{array}{rcl} 16 X_1 - 8 X_2 & \geq & 5 \\ 7 X_1 + 3 X_2 & \geq & 10 \end{array}$$

es equivalente a

$$\begin{array}{rcl} 16 X_1 - 8 X_2 - X_3 & = & 5 \\ 7 X_1 + 3 X_2 - X_4 & = & 10 \\ X_3 \geq 0, & X_4 \geq 0, & \end{array}$$

donde el vector de exceso o superfluo es

$$\begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

### Regla 5

Una variable *no restringida*, o sea aquella que puede tomar toda clase de valores positivos, cero y negativos puede escribirse como la diferencia de dos variables no-negativas.

### Ejemplo:

Sea  $X_1$  una variable no restringida, entonces

$$X_1 = X_2 - X_3$$

donde  $X_2 \geq 0$ ,  $X_3 \geq 0$ . Nótese que si  $X_2 > X_3$ , eso implica que  $X_1 > 0$ ; si  $X_2 = X_3$ , entonces  $X_1 = 0$ ; si  $X_2 < X_3$  se tiene que  $X_1 < 0$ .

En seguida se aplican las cinco reglas para convertir el siguiente programa lineal a la forma canónica (2.21).

$$\text{Mín } Z = 3 X_1 - 4 X_2 + X_3$$

sujeto a

$$\begin{array}{rcl} 0.5 X_1 + 2 X_2 & \geq & 3 \\ X_2 - X_3 & = & 4 \\ X_1 \geq 0, X_2 \leq 0, X_3 \text{ no restringida.} & & \end{array}$$

Por medio de la regla 1, la función objetivo queda

$$\text{Máx } h = -Z = -3 X_1 + 4 X_2 - X_3.$$

Usando la regla 2, se tiene que la segunda restricción queda

$$-0.5 X_1 - 2 X_2 \leq -3,$$

mientras que

$$X_4 = -X_2 \geq 0.$$

## 72 La programación lineal

Usando la regla 3, la igualdad queda como

$$X_2 - X_3 \leq 4$$

y

$$X_2 - X_3 \geq 4,$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} X_2 - X_3 &\leq 4 \\ -X_2 + X_3 &\leq -4. \end{aligned}$$

Por último, utilizando la regla 5, se tiene que

$$\begin{aligned} X_3 &= X_5 - X_6 \\ X_5 &\geq 0, \quad X_6 \geq 0. \end{aligned}$$

Resumiendo todos estos elementos se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Máx } h &= -3X_1 + 4X_2 - X_3 \\ \text{sujeto a} \quad & -0.5X_1 - 2X_2 \leq -3 \\ & X_2 - X_3 \leq 4 \\ & -X_2 + X_3 \leq -4 \\ & X_1 \geq 0, X_2 \leq 0, X_3 \text{ no restringida.} \end{aligned}$$

Esto es igual a

$$\begin{aligned} \text{Máx } h &= -3X_1 - 4X_4 - X_5 + X_6 \\ \text{sujeto a} \quad & -0.5X_1 + 2X_4 \leq -3 \\ & -X_4 - X_5 + X_6 \leq 4 \\ & X_4 + X_5 - X_6 \leq -4 \\ & X_1 \geq 0, X_4 \geq 0, X_5 \geq 0, X_6 \geq 0. \end{aligned}$$

Esta última forma ya tiene la estructura canónica dada en (2.21). La regla 4, se utilizará más adelante.

### Teoremas básicos de la programación lineal<sup>2</sup>

Se considera la forma canónica

$$\begin{aligned} \text{Máx } Z &= \mathbf{cX} \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{AX} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{X} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.21}$$

<sup>2</sup> Es indispensable para leer esta sección haber leído el apéndice B. El lector no interesado en la teoría puede pasarse directamente a la sección de las reglas del método *simplex*.

donde

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}, \mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n), \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

y  $\mathbf{A}$  es de orden  $m$  por  $n$ .

### Definiciones

*Solución factible.* Una solución factible al problema lineal dado en (2.21) es aquel vector columna,<sup>3</sup>  $\mathbf{X}^T = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  que satisface las restricciones.

$$\mathbf{AX} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}.$$

*Solución factible básica.* Una solución factible básica es aquella solución factible con no más de  $m$  componentes positivas.

*Solución factible básica no degenerada.* Es una solución factible básica donde exactamente  $m$  componentes del vector columna  $\mathbf{X}$  son positivas.

*Solución factible básica degenerada.* Es una solución factible básica donde hay menos de  $m$  componentes positivas del vector  $\mathbf{X}$ .

*Región de factibilidad.* Es el conjunto de todas las soluciones factibles.

**Teorema 2.1.** El conjunto de todas las soluciones factibles de un programa de programación lineal es un conjunto convexo.

*Prueba.* Si  $\mathbf{X}$  es una solución factible a un programa lineal, satisface las siguientes condiciones

$$\mathbf{AX} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}.$$

Por el teorema B-10, del apéndice B, cada una de las desigualdades  $\sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \leq b_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  es un conjunto convexo.

Por el teorema B-11 del apéndice B, la intersección de  $m$  conjuntos convexos es también convexa. El teorema queda demostrado.

**Teorema 2.2.** La función objetivo de un programa lineal obtiene su valor máximo (o mínimo) en un punto extremo del conjunto convexo de soluciones factibles.

<sup>3</sup> La notación  $\mathbf{X}^T$  significa transposición, tal como está explicado en el apéndice B.

## 74 La programación lineal

*Prueba.* Se considera el problema canónico (2.21). Sea  $\mathbf{K}$  el conjunto de todos los puntos extremos del conjunto convexo generado por todas las restricciones del problema lineal (2.21). O sea

$$\mathbf{K} = \{\mathbf{X}_i | i \in \mathbf{I}, \mathbf{I} \text{ denota los índices de los puntos extremos}\}.$$

Por ejemplo, en el conjunto convexo del espacio de dos dimensiones de la figura 2.8, se tiene

$$\mathbf{I} = \{1, 3, 7, 15, 20\}$$

y

$$\mathbf{K} = \{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_7, \mathbf{X}_{15}, \mathbf{X}_{20}\}.$$

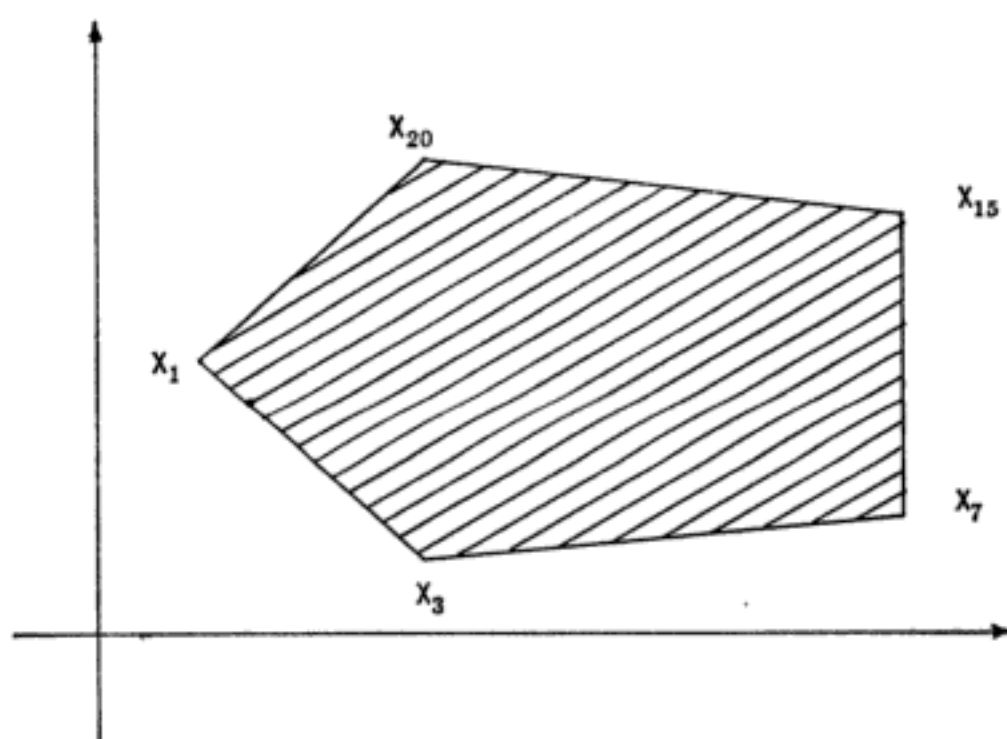


Figura 2.3

Supóngase que  $\mathbf{X}_0$  es un punto extremo óptimo<sup>4</sup> del conjunto  $\mathbf{K}$ , esto es:

$$Z_0 = \mathbf{c}\mathbf{X}_0 = \text{Máx } \mathbf{c}\mathbf{X} = \text{Máx}_{i \in \mathbf{I}} [\mathbf{c}\mathbf{X}_i].$$

Supóngase otro punto  $\mathbf{X}^*$  que no pertenezca al conjunto  $\mathbf{K}$ , tal que

$$Z^* = \mathbf{c}\mathbf{X}^* > \mathbf{c}\mathbf{X}_0 = Z_0.$$

En otras palabras se ha supuesto que el punto  $\mathbf{X}^*$ , que no es extremo, da un mejor valor de la función objetivo, que el mejor candidato  $\mathbf{X}_0$  de los puntos extremos.

<sup>4</sup> Pueden haber otros.

Como  $\mathbf{X}^*$  no pertenece al conjunto  $\mathbf{K}$ , es decir no es punto extremo, puede escribirse como una combinación lineal de los puntos extremos<sup>5</sup> de  $\mathbf{K}$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^* &= \sum_{i \in \mathbf{I}} \mu_i \mathbf{X}_i \\ \mu_i &\geq 0, \quad i \in \mathbf{I}, \\ \sum_{i \in \mathbf{I}} \mu_i &= 1. \end{aligned}$$

Entonces

$$Z^* = \mathbf{c}\mathbf{X}^* = \mathbf{c} \sum_{i \in \mathbf{I}} \mu_i \mathbf{X}_i. \quad (2.22)$$

La suma (2.22) no disminuye si se substituye cada punto extremo  $\mathbf{X}_i$ ,  $i \in \mathbf{I}$  por el mejor punto extremo  $\mathbf{X}_0$ . Entonces se tiene

$$Z^* = \mathbf{c}\mathbf{X}^* = \mathbf{c} \sum_{i \in \mathbf{I}} \mu_i \mathbf{X}_i \leq \mathbf{c} \sum_{i \in \mathbf{I}} \mu_i \mathbf{X}_0 = \mathbf{c}\mathbf{X}_0 \sum_{i \in \mathbf{I}} \mu_i = \mathbf{c}\mathbf{X}_0 = Z_0$$

porque

$$\sum_{i \in \mathbf{I}} \mu_i = 1.$$

En resumen se ha probado que

$$Z^* = \mathbf{c}\mathbf{X}^* \leq \mathbf{c}\mathbf{X}_0 = Z_0$$

y por lo tanto el punto óptimo debe ser un punto extremo del conjunto de soluciones factibles. El teorema queda demostrado.

Para el siguiente teorema es conveniente escribir la forma canónica (2.21) de la siguiente manera:

$$\text{Máx } Z = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \cdots + c_n X_n$$

sujeto a

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \cdots + a_{1n} X_n \leq b_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \cdots + a_{2n} X_n \leq b_2$$

.....

$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \cdots + a_{mn} X_n \leq b_m$$

$$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad \dots, \quad X_n \geq 0,$$

donde las columnas de la matriz  $\mathbf{A}$  se denotarán por  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ , es decir,

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

<sup>5</sup> Esto es a consecuencia de la definición de puntos extremos dados en el apéndice B.

## 76 La programación lineal

**Teorema 2.3.** Si existe un conjunto  $K \leq m$  de columnas de la matriz  $A$ , que sean linealmente independientes, tales como  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  tal que

$$X_1^* \mathbf{a}_1 + X_2^* \mathbf{a}_2 + \dots + X_k^* \mathbf{a}_k = \mathbf{b} \quad (2.23)$$

con  $X_i^* \geq 0, i = 1, \dots, n, \mathbf{b}^T = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ , entonces el punto  $\mathbf{X}^* = (X_1^*, X_2^*, \dots, X_k^*, 0, 0, \dots, 0)$  es un punto extremo del conjunto de soluciones factibles.

*Prueba.* Si  $\mathbf{X}^*$  no es un punto extremo, puede escribirse como una combinación lineal de cualquier par de puntos extremos tales como  $\mathbf{X}'$  y  $\mathbf{X}''$ . Esto es

$$\mathbf{X}^* = \lambda \mathbf{X}' + (1-\lambda) \mathbf{X}'' \quad (2.24)$$

$$0 < \lambda < 1$$

donde

$$\mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} X_1^* \\ X_2^* \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}' = \begin{bmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X'_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}'' = \begin{bmatrix} X''_1 \\ X''_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X''_n \end{bmatrix}$$

Como todas las componentes de  $\mathbf{X}^*$  son no-negativas, con las últimas  $n-k$  componentes igual a cero, y  $\lambda$  es diferente de cero y uno, se establece por (2.24) que las últimas  $n-k$  componentes de los puntos extremos  $\mathbf{X}'$  y  $\mathbf{X}''$  también son nulas. Es decir

$$\begin{bmatrix} X_1^* \\ X_2^* \\ \vdots \\ \vdots \\ X_k^* \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X'_k \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + (1-\lambda) \begin{bmatrix} X''_1 \\ X''_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X''_k \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por hipótesis se sabe que los vectores  $\mathbf{X}^*, \mathbf{X}'$  y  $\mathbf{X}''$  son factibles en (2.23) y por lo tanto se satisface

$$X^*_1 \mathbf{a}_1 + X^*_2 \mathbf{a}_2 + \dots + X^*_k \mathbf{a}_k = \mathbf{b}, \quad (2.25)$$

$$X'_1 \mathbf{a}_1 + X'_2 \mathbf{a}_2 + \dots + X'_k \mathbf{a}_k = \mathbf{b}, \quad (2.26)$$

$$X''_1 \mathbf{a}_1 + X''_2 \mathbf{a}_2 + \dots + X''_k \mathbf{a}_k = \mathbf{b}. \quad (2.27)$$

Restando (2.26) de (2.25) y (2.27) de (2.26) se obtiene

$$(X^*_1 - X'_1)\mathbf{a}_1 + (X^*_2 - X'_2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (X^*_k - X'_k)\mathbf{a}_k = \mathbf{0} \quad (2.28)$$

$$(X'_1 - X''_1)\mathbf{a}_1 + (X'_2 - X''_2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (X'_k - X''_k)\mathbf{a}_k = \mathbf{0}. \quad (2.29)$$

Pero como  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  son linealmente independientes se tiene que la única forma de satisfacer (2.28) y (2.29) es cuando

$$X^*_i - X'_i = 0, \quad i = 1, \dots, k$$

$$X'_i - X''_i = 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

Pero esto implica

$$X^*_i = X'_i = X''_i, \quad i = 1, \dots, k,$$

lo que quiere decir que  $\mathbf{X}'$  y  $\mathbf{X}''$  no son puntos extremos, porque se ha supuesto que  $\mathbf{X}^*$  tampoco lo es. Esto a su vez implica que  $\mathbf{X}^*$  no ha podido ser escrito como la combinación lineal de puntos extremos y por lo tanto  $\mathbf{X}^*$  es un punto extremo.<sup>6</sup> El teorema queda demostrado.

**Teorema 2.4.** Sea  $\bar{\mathbf{X}} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  un punto extremo del conjunto de todas las soluciones factibles. Entonces las columnas de la matriz  $\mathbf{A}$  asociadas con cada componente  $X_i$  que sea positivo,  $i = 1, \dots, n$ , son linealmente independientes, con un máximo de  $m$  componentes  $X_i$  positivas (el resto son cero).

*Prueba.* Supóngase que las primeras  $k$  componentes de  $\bar{\mathbf{X}}$  son positivas siendo el resto cero.

$$\bar{\mathbf{X}} = (X_1, X_2, \dots, X_k, 0, 0, \dots, 0).$$

Como  $\bar{\mathbf{X}}$  es factible, entonces satisface las siguientes restricciones

$$X_1\mathbf{a}_1 + X_2\mathbf{a}_2 + \cdots + X_k\mathbf{a}_k = \mathbf{b}. \quad (2.30)$$

Se demuestra el teorema por contradicción. Supóngase que  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  NO son linealmente independientes. Entonces existe una combinación de estos vectores tales que

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0} \quad (2.31)$$

con, al menos, una de las  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  diferente de cero. Sea ésta  $\alpha_j$ . Tomando  $\beta > 0$  se multiplica (2.31) por  $\beta$

$$\beta\alpha_1\mathbf{a}_1 + \beta\alpha_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \beta\alpha_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}. \quad (2.32)$$

Sumando (2.30) con (2.32) se obtiene

<sup>6</sup> Véase la definición de puntos extremos en el apéndice B.



## 78 La programación lineal

$$\sum_{i=1}^k (X_i + \beta\alpha_i) \mathbf{a}_i = \mathbf{b}. \quad (2.33)$$

Restando (2.32) de (2.30) se obtiene

$$\sum_{i=1}^k (X_i - \beta\alpha_i) \mathbf{a}_i = \mathbf{b}. \quad (2.34)$$

Nótese que (2.33) y (2.34) satisfacen la restricción (2.30), es decir, existen dos nuevos vectores  $\mathbf{X}'$  y  $\mathbf{X}''$  que satisfacen (2.30). Las componentes de estos vectores están dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{X}' &= (X_1 + \beta_1\alpha_1, X_2 + \beta_2\alpha_2, \dots, X_k + \beta_k\alpha_k, 0, 0, \dots, 0) \\ \mathbf{X}'' &= (X_1 - \beta_1\alpha_1, X_2 - \beta_2\alpha_2, \dots, X_k - \beta_k\alpha_k, 0, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Resulta obvio que

$$\bar{\mathbf{X}} = \frac{1}{2} \mathbf{X}' + \frac{1}{2} \mathbf{X}''$$

contradiciendo el hecho que  $\bar{\mathbf{X}}$  es un punto extremo. La suposición de que  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  son linealmente dependientes ha llevado a la contradicción de que  $\bar{\mathbf{X}}$  no es un punto extremo. Por lo tanto como  $\bar{\mathbf{X}}$  es un punto extremo,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  deben ser linealmente independientes.

Como el rango de la matriz  $\mathbf{A}$  puede ser a lo más  $m$ , no se pueden tener más de  $m$  componentes positivas de  $X_i$ . El teorema queda demostrado.

### Conclusiones finales

Si se hace a  $\mathbf{K}$  el conjunto de todas las soluciones factibles, es decir

$$\mathbf{K} = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{AX} = \mathbf{b}, \mathbf{X} \geq \mathbf{0}\}$$

se tiene.

### Conclusión 1

Cada solución factible básica de un programa lineal corresponde con un punto extremo del conjunto convexo  $\mathbf{K}$  de soluciones factibles.

### Conclusión 2

Cada punto extremo del conjunto  $\mathbf{K}$  tiene asociados  $m$  vectores linealmente independientes de la matriz  $\mathbf{A}$  de coeficientes tecnológicos del programa lineal. En otras palabras *cualquier* combinación lineal no negativa de  $m$  vectores linealmente independientes de  $\mathbf{A}$ , corresponde con un punto extremo de  $\mathbf{K}$ .

*Conclusión 3*

Existe un punto extremo de  $K$ , quizás no único,<sup>7</sup> donde la función objetivo  $Z = \mathbf{cX}$  de un programa lineal obtiene su valor (máximo o mínimo) óptimo.

Estas tres conclusiones son importantísimas, porque aun cuando existe un número infinito de vectores  $\mathbf{X}$  que son factibles (todos los puntos en el interior y en la frontera de la región convexa de factibilidad), solamente existe un número finito de puntos extremos. La solución óptima se obtiene en un punto extremo. Entonces, para obtener la solución de un programa lineal, habrá que ver en teoría qué valor tiene la función objetivo en cada punto extremo y seleccionar el mejor. Esto puede convertirse en una tarea bastante tardada, si se tiene en cuenta que una región factible proveniente de un programa lineal con  $n$  actividades y  $m$  restricciones puede tener<sup>8</sup> un máximo de

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

puntos extremos, que pueden ser muchos. Así, un programa con 50 variables de decisión y 30 restricciones podría generar un conjunto convexo factible con

$$\binom{50}{30} = \frac{50!}{30!20!} = \frac{3041409318 \times 10^{55}}{6453342152 \times 10^{41}} = 47, 129, 212, 220, 000$$

puntos extremos que son muchos para examinar.

Afortunadamente el Dr. George Dantzig, llamado el padre de la programación lineal, halló un método a fines de la década de los años 40, que permite resolver un problema lineal sin necesidad de analizar explícitamente el valor de la función objetivo en cada punto extremo. Su método se conoce con el nombre del *método simplex*, cuya teoría se cubre a continuación, pasando después a las reglas del mismo con su respectiva ilustración.

**Teoría del método simplex<sup>9</sup>**

Se considera el programa lineal en su forma canónica

$$\text{Máx } Z = \mathbf{cX}$$

<sup>7</sup> Puede darse el caso que el valor óptimo se obtenga en una arista de la región de factibilidad. La arista es la combinación lineal de dos puntos extremos del conjunto de soluciones factibles.

<sup>8</sup> El número exacto puede ser un poco menor.

<sup>9</sup> El lector que no esté interesado en la justificación del *método simplex* puede pasar directamente a la sección de las reglas del *simplex*.

## 80 La programación lineal

sujeto a

$$\begin{aligned} \mathbf{AX} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{X} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{A}$  es de orden  $m$  por  $n$ ;  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{X}$  son vectores renglón y columna respectivamente con  $n$  componentes y  $\mathbf{b}$  es un vector columna con  $m$  componentes. Se denota a las columnas de  $\mathbf{A}$  por  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  con  $m < n$ . Se considera a la matriz  $\mathbf{A}$  partida en dos matrices, una  $\mathbf{B}$  con  $m$  vectores linealmente independientes y otra  $\mathbf{N}$  con  $n-m$  vectores linealmente dependientes:

$$\mathbf{A}_{m,n} = (\mathbf{B}_{m,m} \mathbf{N}_{m,n-m}).$$

La matriz  $\mathbf{B}$  se le llamará la *base* y cualquier vector  $\mathbf{a}_j$  en  $\mathbf{A}$  que no está en  $\mathbf{B}$ , puede escribirse como una combinación de los vectores de  $\mathbf{B}$ . Es decir dado  $\mathbf{a}_j \notin \mathbf{B}$ , este puede escribirse como

$$\mathbf{a}_j = Y_{1j}\mathbf{a}_1 + Y_{2j}\mathbf{a}_2 + \dots + Y_{mj}\mathbf{a}_m = \sum_{k=1}^m Y_{kj}\mathbf{a}_k$$

donde

$$\mathbf{a}_i \in \mathbf{B}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Se hace

$$\mathbf{Y}_j = \begin{bmatrix} Y_{1j} \\ Y_{2j} \\ \vdots \\ Y_{mj} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

por lo que

$$\mathbf{a}_j = \mathbf{B}\mathbf{Y}_j$$

y como  $\mathbf{B}$  tiene inversa  $\mathbf{B}^{-1}$ ,

$$\mathbf{Y}_j = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j. \quad (2.36)$$

Considerando las restricciones originales del programa lineal<sup>10</sup>

$$\mathbf{AX} = \mathbf{b}$$

se tiene que

$$(\mathbf{B} \mid \mathbf{N}) \begin{pmatrix} \mathbf{X}_B \\ \mathbf{X}_N \end{pmatrix} = \mathbf{b} \quad (2.37)$$

<sup>10</sup> Recuérdese que mediante la adición de variables de holgura se puede convertir las desigualdades en igualdades (regla de equivalencias).

donde

$$\mathbf{A} = (\mathbf{B}|\mathbf{N}) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1m} & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m | \mathbf{a}_{m+1}, \dots, \mathbf{a}_n)$$

$$\mathbf{X} = \left( \begin{array}{c} \mathbf{X}_B \\ \mathbf{X}_N \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} X_1 \\ \vdots \\ X_m \\ X_{m+1} \\ \vdots \\ X_n \end{array} \right)$$

Entonces desarrollando (2.37) se tiene

$$\mathbf{B}\mathbf{X}_B + \mathbf{N}\mathbf{X}_N = \mathbf{b}. \tag{2.38}$$

Si se hace uso de la definición de solución básica factible se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_B &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{X}_N &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

y (2.38) se convierte en

$$\mathbf{B}\mathbf{X}_B = \mathbf{b}$$

o

$$\mathbf{X}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$$

que es una *solución básica* de  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b}$ . El vector  $\mathbf{X}_B$  se le denomina *vector básico* y a  $\mathbf{X}_N$ , *vector no básico*. Si se parte el vector de costos o precios unitarios  $\mathbf{c}$  en

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= (\mathbf{c}_B | \mathbf{c}_N) \\ \mathbf{c} &= (c_{B_1}, c_{B_2}, \dots, c_{B_m} | c_{B_{m+1}}, \dots, c_{B_n}) \end{aligned} \tag{2.39}$$

se tiene que la función objetivo puede escribirse

$$\begin{aligned} Z &= \mathbf{c}\mathbf{X} \\ &= (\mathbf{c}_B | \mathbf{c}_N) \left( \begin{array}{c} \mathbf{X}_B \\ \mathbf{X}_N \end{array} \right) \\ &= \mathbf{c}_B \mathbf{X}_B + \mathbf{c}_N \mathbf{X}_N \\ &= \mathbf{c}_B \mathbf{X}_B, \end{aligned}$$

porque  $\mathbf{X}_N = \mathbf{0}$ .

A continuación se define el escalar  $z_j$  como

$$z_j = \mathbf{c}_B \mathbf{Y}_j \tag{2.40}$$

## 82 La programación lineal

donde  $\mathbf{Y}_j$  es el vector columna (2.35) y  $\mathbf{c}_B$  es el vector de precios o costos unitarios correspondientes al vector básico de decisión  $\mathbf{X}_B$ . Otra manera de escribir (2.40) es

$$\begin{aligned} z_j &= \sum_{k=1}^m c_{B_k} Y_{kj} \\ &= c_{B_1} Y_{1j} + c_{B_2} Y_{2j} + \cdots + c_{B_m} Y_{mj} \end{aligned}$$

donde  $(c_{B_1}, c_{B_2}, \dots, c_{B_m})$  son las  $m$  componentes de  $\mathbf{c}_B$ .

Suponiendo que se empieza con una solución básica,<sup>11</sup> se debe demostrar que la solución es óptima o que se puede obtener una mejor solución básica factible.

Se supone que se empieza con una solución básica factible dada por

$$\mathbf{B}\mathbf{X}_B = \mathbf{b}.$$

Esta solución corresponde a un punto extremo de la región de factibilidad. Si este punto extremo no es óptimo, se debe mover a un punto extremo vecino<sup>12</sup> con objeto de mejorar la solución de la función objetivo. El cambio a este punto vecino se hace fácilmente cambiando un vector de la base  $\mathbf{B}$ , es decir hay que sacar un vector de  $\mathbf{B}$  y reemplazarlo por otro de  $\mathbf{N}$ . Hay muchas maneras de hacer ese cambio. G. Dantzig fijó la teoría que justifica el juego de reglas de cambio que garantiza el mejor incremento en el valor de la función objetivo en el caso de maximización, o la mejor reducción en el caso de minimización.

Se ve a continuación cuál es esta teoría. Cualquier columna  $\mathbf{a}_j$  de  $\mathbf{A}$  en  $\mathbf{N}$  (no en  $\mathbf{B}$ ) puede escribirse como una combinación lineal de los vectores de  $\mathbf{B}$ , es decir

$$\mathbf{a}_j = \sum_{k=1}^m Y_{kj} \mathbf{a}_k, \quad j = m+1, \dots, n. \quad (2.41)$$

Se supone que el vector que se va a sacar de  $\mathbf{B}$ , es el  $\mathbf{a}_r$  y que la componente  $Y_{rj}$  de  $\mathbf{Y}_j$  es diferente de cero. Entonces (2.41) se puede reescribir:

$$\mathbf{a}_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^m Y_{kj} \mathbf{a}_k + Y_{rj} \mathbf{a}_r$$

o

$$\mathbf{a}_r = \frac{1}{Y_{rj}} \mathbf{a}_j - \frac{1}{Y_{rj}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^m Y_{kj} \mathbf{a}_k, \quad Y_{rj} \neq 0$$

<sup>11</sup> Pronto se mostrará cuál es un método práctico para generar una solución básica.

<sup>12</sup> El movimiento a un punto extremo vecino (con un valor de la función objetivo, mejor al ya obtenido) se hace con objeto de minimizar el número de iteraciones del método.

$$= \frac{1}{Y_{rj}} \mathbf{a}_j - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^m \frac{Y_{kj}}{Y_{rj}} \mathbf{a}_k, \quad Y_{rj} \neq 0. \quad (2.42)$$

Por otro lado la solución básica factible

$$\mathbf{B}\mathbf{X}_B = \mathbf{b}$$

puede escribirse en función de las columnas de la base  $B$  como

$$\sum_{k=1}^m \mathbf{a}_k X_{B_k} = \mathbf{b} \quad (2.43)$$

donde  $X_{B_k}$ ,  $k = 1, \dots, m$  son las  $m$  componentes de  $\mathbf{X}_B$ . Pero (2.43) puede reescribirse como

$$\mathbf{a}_r X_{B_r} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^m \mathbf{a}_k X_{B_k} = \mathbf{b}$$

y tomando (2.42) en consideración

$$\left( \frac{1}{Y_{rj}} \mathbf{a}_j - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^m \frac{Y_{kj}}{Y_{rj}} \mathbf{a}_k \right) X_{B_r} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^m \mathbf{a}_k X_{B_k} = \mathbf{b}.$$

Esta última expresión puede reagruparse como

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^m \left( X_{B_k} - X_{B_r} \frac{Y_{kj}}{Y_{rj}} \right) \mathbf{a}_k + \frac{X_{B_r}}{Y_{rj}} \mathbf{a}_r = \mathbf{b} \quad (2.44)$$

que es una *nueva solución básica*, porque satisface  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b}$ , mas puede no ser factible puesto que aún no se asegura que  $\mathbf{X}_B = [X_{B_1}, X_{B_2}, \dots, X_{B_m}] \geq \mathbf{0}$ .

En seguida se ve qué condiciones son necesarias para garantizar  $\mathbf{X}_B \geq \mathbf{0}$ , y en consecuencia factibilidad.

La nueva solución básica (2.44) puede reescribirse

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^m \hat{X}_k \mathbf{a}_k + \hat{X}_r \mathbf{a}_r = \mathbf{b}$$

donde

$$\hat{X}_k = X_{B_k} - X_{B_r} \frac{Y_{kj}}{Y_{rj}} \quad k \neq r, \quad Y_{rj} \neq 0, \quad k = 1, \dots, m$$

## 84 La programación lineal

y

$$\hat{X}_r = \frac{X_{B_r}}{Y_{rj}}, \quad Y_{rj} \neq 0.$$

Para asegurarse que la nueva solución básica es también factible se necesita que el nuevo vector básico  $\hat{\mathbf{X}}$  tenga todas sus componentes no-negativas, es decir

$$\hat{\mathbf{X}} = [\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_r, \dots, \hat{X}_m] \geq \mathbf{0}$$

y para esto se hace necesario que

$$\hat{X}_k = X_{B_k} - X_{B_r} \frac{Y_{kj}}{Y_{rj}} \geq 0, \quad k \neq r, \quad Y_{rj} \neq 0, \quad k = 1, \dots, m \quad (2.45)$$

y

$$\hat{X}_r = \frac{X_{B_r}}{Y_{rj}} \geq 0, \quad Y_{rj} \neq 0. \quad (2.46)$$

Como  $X_{B_r} \geq 0$  se requiere en *primer término que*  $Y_{rj} > 0$  para que (2.46) sea no-negativo. En segundo término se tiene que si todas las  $Y_{kj} < 0$ ,  $k \neq r$ ,  $k = 1, \dots, m$  entonces se garantiza que (2.45) sea no-negativo. Sin embargo, ¿qué pasaría si alguna de las  $Y_{kj} > 0$ ,  $k \neq r$ ,  $k = 1, \dots, m$ ? Para analizar lo que pasa se toma (2.45)

$$X_{B_k} - X_{B_r} \frac{Y_{kj}}{Y_{rj}}, \quad Y_{rj} > 0$$

y se dividen ambas partes entre  $Y_{kj} > 0$

$$\frac{X_{B_k}}{Y_{kj}} - \frac{X_{B_r}}{Y_{kj}} \frac{Y_{kj}}{Y_{rj}}, \quad Y_{rj} > 0, \quad Y_{kj} > 0,$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{X_{B_k}}{Y_{kj}} - \frac{X_{B_r}}{Y_{rj}}, \quad Y_{kj} > 0, \quad Y_{rj} > 0.$$

El decir que (2.45) sea mayor o igual a cero es equivalente por este desarrollo, a decir que

$$\frac{X_{B_k}}{Y_{kj}} - \frac{X_{B_r}}{Y_{rj}} \geq 0, \quad Y_{kj} > 0, \quad Y_{rj} > 0 \quad (2.47)$$

y para garantizar que (2.47) se cumpla se requiere que

$$\frac{X_{B_r}}{Y_{rj}} \leq \frac{X_{B_k}}{Y_{kj}}, \quad Y_{kj} > 0, \quad Y_{rj} > 0.$$

Esto sólo se puede llevar a cabo si en las reglas del juego, la columna que se remueve de la base  $\mathbf{B}$ , satisface la siguiente condición importantísima

$$\frac{X_{B_r}}{Y_{rj}} = \underset{k}{\text{Mín}} \left\{ \frac{X_{B_k}}{Y_{kj}} \mid Y_{kj} > 0 \right\}. \quad (2.48)$$

Traducido a otro lenguaje (2.48) significa que si se supiera a priori qué columna  $\mathbf{a}_j$  de  $\mathbf{N}$  entraría en la nueva base  $\mathbf{B}$ , entonces el vector de  $\mathbf{B}$  a remover sería aquel cuyo cociente  $\frac{X_{B_k}}{Y_{kj}}$ , cuando el denominador  $Y_{kj} > 0$ , es el menor de todos los posibles  $m$  cocientes. El vector que se remueve se denomina  $r$ . Recuerde el lector que todas las componentes del vector  $\mathbf{X}_B$ , las  $X_{B_k}$ ,  $k = 1, \dots, m$  son conocidas por la relación

$$\mathbf{X}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$$

y todas las  $Y_{kj}$ ,  $k = 1, \dots, m$  también son conocidas.<sup>13</sup>

Se ha encontrado pues una regla que garantiza que el cambio de un vector de  $\mathbf{B}$  por otro de  $\mathbf{N}$  resulta en una nueva solución factible básica. Como consecuencia de este cambio se ha construido una nueva base  $\hat{\mathbf{B}}$  que difiere de la base anterior  $\mathbf{B}$  en un solo vector. Como cada base se asocia a un punto extremo de la región de factibilidad, con el cambio de base el proceso se ha movido a otro punto extremo  $\hat{\mathbf{X}}_B$  tal que

$$\hat{\mathbf{X}}_B = \hat{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{b}$$

y el nuevo valor de la función objetivo es

$$\hat{Z} = \hat{\mathbf{c}}_B \hat{\mathbf{X}}_B.$$

A continuación se deduce la regla que permite hacer la mejor selección del vector  $\mathbf{a}_j$  en  $\mathbf{N}$  que se va a introducir a  $\mathbf{B}$ . Recuérdese que el valor actual de la función objetivo correspondiente al punto extremo asociado con la base  $\mathbf{B}$  es

$$Z = \mathbf{c}_B \mathbf{X}_B$$

y el nuevo valor  $\hat{Z}$  asociado con la nueva base  $\hat{\mathbf{B}}$  es

$$\hat{Z} = \hat{\mathbf{c}}_B \hat{\mathbf{X}}_B.$$

<sup>13</sup> Más adelante el lector podrá comprobar, que en efecto todas estas cantidades son conocidas.



## 86 La programación lineal

La única diferencia entre  $\mathbf{B}$  y  $\hat{\mathbf{B}}$  es que se ha sacado el vector  $\mathbf{a}_r$  de  $\mathbf{B}$  y se ha reemplazado con el vector  $\mathbf{a}_j$  en  $\mathbf{N}$ , creando así  $\hat{\mathbf{B}}$ . La única diferencia entre  $\mathbf{c}_B$  y  $\hat{\mathbf{c}}_B$  se encuentra en la  $r$ -ava componente, es decir

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_B &= (c_{B_1}, c_{B_2}, \dots, c_{B_r}, \dots, c_{B_m}) \\ \hat{\mathbf{c}}_B &= (c_{B_1}, c_{B_2}, \dots, c_j, \dots, c_{B_m}).\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\hat{Z} &= \hat{\mathbf{c}}_B \hat{\mathbf{X}}_B \\ &= \sum_{k=1}^m c_{B_k} \hat{X}_k \\ &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^m c_{B_k} \hat{X}_k + c_{B_r} \hat{X}_r \\ &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^m c_{B_k} \hat{X}_k + c_j \hat{X}_r,\end{aligned}\tag{2.49}$$

(2.45) y (2.46) en (2.49) originan la siguiente expresión

$$\hat{Z} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^m c_{B_k} \left[ X_{B_k} - X_{B_r} \frac{Y_{kj}}{Y_{rj}} \right] + c_j \frac{X_{B_r}}{Y_{rj}}, \quad Y_{rj} \neq 0.\tag{2.50}$$

Si se nota cuidadosamente, el único término faltante en la sumatoria de la expresión (2.50) es el siguiente:

$$c_{B_r} \left( X_{B_r} - X_{B_r} \frac{Y_{rj}}{Y_{rj}} \right) = 0, \quad Y_{rj} \neq 0,$$

que es igual a cero. Si se introduce este término en (2.50) no afecta la expresión y se obtiene:

$$\begin{aligned}\hat{Z} &= \sum_{k=1}^m c_{B_k} \left[ X_{B_k} - X_{B_r} \frac{Y_{kj}}{Y_{rj}} \right] + c_j \frac{X_{B_r}}{Y_{rj}}, \quad Y_{rj} \neq 0, \\ \hat{Z} &= \sum_{k=1}^m c_{B_k} X_{B_k} - \sum_{k=1}^m c_{B_k} X_{B_r} \frac{Y_{kj}}{Y_{rj}} + c_j \frac{X_{B_r}}{Y_{rj}}, \quad Y_{rj} \neq 0, \\ \hat{Z} &= Z - \frac{X_{B_r}}{Y_{rj}} \sum_{k=1}^m c_{B_k} Y_{kj} + c_j \frac{X_{B_r}}{Y_{rj}}, \quad Y_{rj} \neq 0.\end{aligned}$$

Utilizando (2.40) se obtiene:

$$\hat{Z} = Z - \frac{X_{B_r}}{Y_{rj}} z_j + \frac{X_{B_r}}{Y_{rj}} c_j, \quad Y_{rj} \neq 0$$

$$\hat{Z} = Z - (z_j - c_j) \frac{X_{B_r}}{Y_{rj}}, \quad Y_{rj} \neq 0. \quad (2.51)$$

Recapitando al observar (2.51) se nota que el nuevo valor de la función objetivo  $\hat{Z}$  es mucho mayor en el caso de maximización, que el valor inmediato pasado de la función objetivo  $Z$ , si y sólo si

$$(z_j - c_j) \frac{X_{B_r}}{Y_{rj}} < 0, \quad Y_{rj} \neq 0.$$

En el caso de minimización  $\hat{Z} < Z$  si y solo si

$$(z_j - c_j) \frac{X_{B_r}}{Y_{rj}} > 0, \quad Y_{rj} \neq 0.$$

Para ahorrar palabras, se atiende al caso de maximización, pues se sabe por la regla 1, que el problema de minimizar es equivalente. De (2.46) se deduce que el término  $\frac{X_{B_r}}{Y_{rj}} \geq 0$ , por lo que  $\hat{Z} > Z$  si y sólo si

$$(z_j - c_j) < 0.$$

El mayor incremento  $\hat{Z} - Z$  se conseguirá si se elige a la  $(z_j - c_j)$  con  $j$  en  $\mathbf{N}$ , más negativa. Es decir, el mejor incremento en el valor de la nueva función objetivo se logrará cuando se seleccione aquel vector  $\mathbf{a}_j \notin \mathbf{B}$  que entrará en la nueva base  $\mathbf{B}$ , cuyo  $z_j - c_j$  sea el más negativo.

En resumen: en el cambio de una base  $\mathbf{B}$  a otra nueva  $\hat{\mathbf{B}}$ , es decir de un punto extremo de la región de factibilidad a otro vecino, se debe sacar un vector  $\mathbf{a}_r$  de  $\mathbf{B}$  y sustituirlo por un vector  $\mathbf{a}_j$  en  $\mathbf{N}$ . Las reglas del cambio que garantizarán el mejor incremento en el valor de la función objetivo son las siguientes:

*Regla de entrada.* Selecciónese aquel vector  $\mathbf{a}_j$  no en  $\mathbf{B}$  (o sea  $\mathbf{a}_j$  en  $\mathbf{N}$ ) que tenga la  $z_j - c_j$  más negativa,  $j \in \mathbf{N}$ .

*Regla de salida.* Una vez que se sepa que  $\mathbf{a}_j$  va a entrar en la nueva base  $\hat{\mathbf{B}}$ , sáquese aquel vector  $\mathbf{a}_r$  en  $\mathbf{B}$  que cumpla con la siguiente condición:

$$\frac{X_{B_r}}{Y_{rj}} = \text{Mín}_k \left\{ \frac{X_{B_k}}{Y_{kj}} \mid Y_{kj} > 0 \right\}.$$

Recuérdese que todos los valores  $z_i - c_i$ ,  $X_{B_k}$ ,  $Y_{kj}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  $k = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, m$  son totalmente conocidos. En la ilustración del método simplex se podrá comprobar esta afirmación.

## 88 La programación lineal

Ya se sabe, al menos en teoría, cómo mejorar el valor de la función objetivo, pero, ¿cuándo se debe detener el proceso, pues se ha obtenido una solución óptima? El siguiente teorema da la contestación.

**Teorema 2.5.** La solución óptima del programa lineal canónico (2.21) se obtiene cuando todas las  $z_j - c_j \geq 0$  para toda  $j$  en  $\mathbf{N}$ .

*Prueba.* Sea  $\mathbf{X}^* = [X^*_1, X^*_2, \dots, X^*_n] \geq \mathbf{0}$  una solución factible al sistema  $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$ .<sup>14</sup> Entonces

$$X^*_1 \mathbf{a}_1 + X^*_2 \mathbf{a}_2 + \dots + X^*_n \mathbf{a}_n = \mathbf{b} \quad (2.52)$$

y

$$Z = c_1 X^*_1 + c_2 X^*_2 + \dots + c_n X^*_n \quad (2.53)$$

donde  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  son las  $n$  columnas de  $\mathbf{A}$ . Cualquier vector  $\mathbf{a}_j$  en  $\mathbf{N}$ , puede escribirse como una combinación lineal de los  $m$  vectores de la base  $\mathbf{B}$ . Recuerdese que se ha partido a la matriz  $\mathbf{A} = (\mathbf{B}|\mathbf{N})$ . Entonces

$$\mathbf{a}_j = \sum_{k=1}^m Y_{kj} \mathbf{a}_k, \quad (2.54)$$

(2.54) en (2.52) da

$$X^*_1 \sum_{k=1}^m Y_{k1} \mathbf{a}_k + X^*_2 \sum_{k=1}^m Y_{k2} \mathbf{a}_k + \dots + X^*_n \sum_{k=1}^m Y_{kn} \mathbf{a}_k = \mathbf{b}$$

que una vez reagrupado puede escribirse como

$$\left[ \sum_{k=1}^n X^*_k Y_{1k} \right] \mathbf{a}_1 + \left[ \sum_{k=1}^n X^*_k Y_{2k} \right] \mathbf{a}_2 + \dots + \left[ \sum_{k=1}^n X^*_k Y_{mk} \right] \mathbf{a}_m = \mathbf{b}. \quad (2.55)$$

Esta última igualdad expresa al vector  $\mathbf{b}$  en términos de los  $m$  vectores  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$  que forman la base  $\mathbf{B}$ . Como esos  $m$  vectores son linealmente independientes, esa expresión de  $\mathbf{b}$  es *única* y por lo tanto comparando (2.55) con

$$\mathbf{BX}_B = \mathbf{b}$$

se tiene que

$$X_{B_i} = \sum_{k=1}^n X^*_k Y_{ik}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.56)$$

Por otro lado, de (2.36) se deduce que

$$\mathbf{Y}_j = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j$$

<sup>14</sup> Recuerdese que aunque las restricciones de (2.21) están dadas como  $\mathbf{AX} < \mathbf{b}$ , por la regla 4 de equivalencias, se pueden convertir a  $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$ .

o

$$\begin{aligned} [\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_m, \dots, \mathbf{Y}_n] &= \mathbf{B}^{-1} [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m, \dots, \mathbf{a}_n] \\ &= \mathbf{B}^{-1} [\mathbf{B}, \mathbf{a}_{m+1}, \dots, \mathbf{a}_n] \\ &= [\mathbf{I}_{m,m}, \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_{m+1}, \dots, \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_n] \end{aligned}$$

implicando que

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_i &= \mathbf{e}_i, \quad i = 1, \dots, m \\ \mathbf{Y}_k &= \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_k, \quad k = m + 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.57)$$

donde  $\mathbf{e}_i$  es un vector columna con un uno en la posición  $i$  y ceros en el resto del vector, es decir

$$\mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{posición } i.$$

Recuérdese que de (2.40)

$$z_j = \sum_{k=1}^m Y_{kj} c_{B_k}$$

pero (2.57) en (2.40) da

$$z_j = \mathbf{c}_B \mathbf{e}_j = c_j, \quad j = 1, \dots, m$$

y por lo tanto

$$z_j - c_j = 0$$

para toda  $j$  en  $\mathbf{B}$ . A continuación se verá qué pasa con  $j$  en  $\mathbf{N}$ . Se parte de la suposición que

$$z_j - c_j \geq 0, \quad j \text{ en } \mathbf{A},$$

cuando el programa lineal ha tenido su valor óptimo (esto es lo que se quiere demostrar). La desigualdad arriba indicada implica

$$z_j \geq c_j, \quad j \text{ en } \mathbf{A}$$

o lo que es lo mismo

$$z^*_j X^*_j \geq c_j X^*_j, \quad j \text{ en } \mathbf{A}.$$

Como esta desigualdad se cumple para cada componente  $j$ , la siguiente desigualdad también es cierta

$$z_1 X^*_1 + z_2 X^*_2 + \dots + z_n X^*_n \geq c_1 X^*_1 + c_2 X^*_2 + \dots + c_n X^*_n = Z^*.$$

## 90 La programación lineal

Utilizando (2.40) se tiene

$$X^*_{1} \sum_{k=1}^m Y_{k1} c_{B_k} + X^*_{2} \sum_{k=1}^m Y_{k2} c_{B_k} + \cdots + X^*_{n} \sum_{k=1}^m Y_{kn} c_{B_k} \geq Z^*$$

o reagrupando

$$\left[ \sum_{k=1}^n X^*_{k} Y_{1k} \right] c_{B_1} + \cdots + \left[ \sum_{k=1}^n X^*_{k} Y_{mk} \right] c_{B_m} \geq Z^*. \quad (2.58)$$

Finalmente comparando (2.58) con (2.56) se tiene

$$c_{B_1} X_{B_1} + \cdots + c_{B_m} X_{B_m} = Z_0 \geq Z^*. \quad (2.59)$$

La expresión (2.59) significa que se ha obtenido una solución factible  $\mathbf{X}$

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_B, \mathbf{X}_N]$$

$$\mathbf{X} = [X_{B_1}, X_{B_2}, \dots, X_{B_m}, 0, 0, \dots, 0]$$

para la cual todos los elementos  $z_j - c_j \geq 0$  para toda  $j$  en  $\mathbf{A}$  y la cual produce un valor de la función objetivo  $Z_0$ , mayor o igual a cualquier valor  $Z^*$  correspondiente a cualquier solución factible (o punto extremo). El teorema queda demostrado.

Se puede a continuación pasar a explicar e ilustrar las reglas del método simplex, descubierto por el Dr. George Dantzig.

### Reglas del método simplex

*Paso 1.* Dado cualquier programa lineal transfórmese por medio de las reglas de equivalencia 1, 2, 3 y 5 al programa lineal canónico.

$$\text{Máx } Z = \mathbf{cX}$$

sujeto a

$$\mathbf{AX} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}.$$

Si se proporcionan únicamente las reglas del *método simplex* en relación a la forma canónica arriba descrita, se ahorran muchas palabras y reglas, y además se evitan confusiones al lector.

*Paso 2.* Re-escríbase la función objetivo de la siguiente manera

$$Z - \mathbf{cX} = 0.$$

*Paso 3.* Aplicando la regla de equivalencias 4, conviértanse todas las desigualdades en igualdades. Este paso requerirá el uso de variables de holgura. Usando los primeros 3 pasos, la forma canónica ha sido convertida en

$$\begin{aligned} \text{Máx } Z - \mathbf{c}\mathbf{X} &= 0 \\ \mathbf{A}\mathbf{X} + \bar{\mathbf{X}} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{X} &\geq \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{X}} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

donde  $\bar{\mathbf{X}}$  es el vector de variables de holgura. Esto mismo puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Z - c_1X_1 - c_2X_2 - \dots - c_nX_n &= 0 \\ a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n + X_{n+1} &= b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n + X_{n+2} &= b_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n + X_{n+m} &= b_m \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_n \geq 0, \underbrace{X_{n+1} \geq 0, \dots, X_{n+m} \geq 0}_{\text{variables de holgura}} \end{aligned}$$

Este paso es necesario, pues la adición de las variables de holgura crea la primera base  $\mathbf{B}$ , que resulta ser la matriz identidad. Esto, a su vez, genera el primer punto extremo de la región de factibilidad cuyas coordenadas están dadas por el vector  $\mathbf{b}$ .

*Paso 4.* Constrúyase una *tabla* o *tableau* con los coeficientes del programa lineal como la que se muestra en la página siguiente.

Este tableau también tendrá la siguiente estructura condensada que es equivalente a la anterior.

	Z	$X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n$	$X_{n+1} \ X_{n+2} \ \dots \ X_{n+m}$	
	1	$\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{c}$	$\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{c}_B \mathbf{X}_B$
$a_{B1}$ $a_{B2}$ $\vdots$ $a_{Bm}$	0	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}$	$\mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{X}_B$

*Paso 5.* Selecciónese como vector de entrada aquél cuya  $z_j - c_j$  sea la más negativa. Si no hay ningún candidato de entrada, es decir que

		<i>Variabes originales</i>			<i>Variabes de holgura</i>			<i>Valor de la función objetivo asociado a la base actual B</i>
		$X_1$	$X_2$	$\dots X_n$	$X_{n+1}$	$X_{n+2}$	$\dots X_{n+m}$	
$Z$								
	1	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	$\dots z_n - c_n$	$z_{n+1} - c_{n+1}$	$z_{n+2} - c_{n+2}$	$\dots z_{n+m} - c_{n+m}$	$Z_0$
$a_{B1}$	0	$Y_{11}$	$Y_{12}$	$Y_{1n}$	$Y_{1,n+1}$	$Y_{1,n+2}$	$\dots Y_{1,n+m}$	<i>Identificación del punto extremo asociado a la base actual B</i>
$a_{B2}$	0	$Y_{21}$	$Y_{22}$	$Y_{2n}$	$Y_{2,n+1}$	$Y_{2,n+2}$	$\dots Y_{2,n+m}$	
.	.	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
.	.	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
$a_{Bm}$	0	$Y_{m1}$	$Y_{m2}$	$Y_{mn}$	$Y_{m,n+1}$	$Y_{m,n+2}$	$\dots Y_{m,n+m}$	

**Tableau de programación lineal**

todas las  $z_j - c_j \geq 0$  para toda  $j$  en  $\mathbf{A}$ , la solución  $\mathbf{X}_B$  mostrada en ese tableau es óptimo. En el caso de que exista un empate entre varios vectores que puedan ser candidatos, rómpase el empate arbitrariamente, es decir, selecciónese a cualquiera de los candidatos.

*Paso 6.* Una vez seleccionada la columna  $\mathbf{a}_j$  que entrará a la nueva base, selecciónese el vector de salida  $\mathbf{a}_r$  de la base actual utilizando la siguiente regla:

$$\frac{X_{B_r}}{Y_{rj}} = \text{Mín}_k \left\{ \frac{X_{B_k}}{Y_{kj}} \mid Y_{kj} > 0 \right\}.$$

En el caso de que exista un empate entre varios vectores candidatos, hay que aplicar las llamadas *reglas lexicográficas*<sup>15</sup> para romper el empate. Una decisión arbitraria puede causar que el proceso cicle continuamente sin alcanzar la *solución óptima*.

En el caso de que todas las  $Y_{kj}$  del denominador sean negativos, se tiene el caso de una *solución no acotada*.<sup>16</sup>

*Paso 7.* La intersección en el tableau de la columna que entra y la que sale determina el elemento *pivote*  $Y_{rj}$ . Aplíquese operaciones matriciales elementales<sup>17</sup> en el pivote  $Y_{rj}$ , con objeto de convertir a la columna  $\mathbf{a}_j$  en el vector unitario  $e_r$ , es decir ceros en toda la columna, y un uno en la  $r$ -ava componente, que resulta ser  $Y_{rj}$ . Regrésese al paso 5.

Por ejemplo si la columna seleccionada a entrar en la base es la  $\mathbf{a}_2$  y la columna a salir es la  $\mathbf{a}_7$ , hágase al elemento  $Y_{72}$  del tableau igual a uno y al resto de las componentes de la columna  $\mathbf{a}_2$ , ceros (incluyendo a  $z_2 - c_2$ ) mediante el uso de operaciones matriciales elementales.

Este paso genera una nueva base  $\mathbf{B}$ , un nuevo punto extremo  $\mathbf{X}_B$  y un nuevo valor de la función objetivo  $Z$ .

*Ejemplo:* Resuélvase por medio del *método simplex* el siguiente problema:<sup>18</sup>

$$\text{Máx } Z = 5\,000 X_1 + 3\,000 X_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3 X_1 + 5 X_2 &\leq 15 \\ 5 X_1 + 2 X_2 &\leq 10 \\ X_1 &\geq 0, \quad X_2 \geq 0. \end{aligned}$$

El paso 1 ya está satisfecho. El paso 2 genera

$$Z - 5\,000 X_1 - 3\,000 X_2 = 0.$$

<sup>15</sup> A ser explicadas en breve.

<sup>16</sup> A ser explicada en breve.

<sup>17</sup> Véase éste tipo de operaciones en el apéndice de álgebra lineal (apéndice B).

<sup>18</sup> Ya resuelto por el método gráfico al principio de este capítulo.



## 94 La programación lineal

El paso 3 proporciona la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \text{Máx } Z - 5\,000 X_1 - 3\,000 X_2 &= 0 \\ 3 X_1 + 5 X_2 + X_3 &= 15 \\ 5 X_1 + 2 X_2 + X_4 &= 10 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, X_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Las variables  $X_3$  y  $X_4$  son de holgura. La variable  $X_3$  representa la diferencia entre el número de obreros que se van a utilizar en la producción óptima y los que hay disponibles. La variable  $X_4$  representa la diferencia entre el capital que se va a gastar semanalmente en la producción óptima y el capital disponible.

El tableau original (paso 4) tiene la siguiente estructura:

		Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$Z_0$	
		1	-5 000	-3 000	0	0	0	
Vectores en la base.	$a_3$	0	3	5	1	0	15	$X_B$
	$a_4$	0	5	2	0	1	10	

Comparando este tableau con la siguiente estructura general

	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$Z_0$
1		$c_B B^{-1} A - c$		$c_B B^{-1}$		$Z_0$
0		$B^{-1} A$		$B^{-1}$		$X_B$

se tiene que

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, X_B = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix}, Z_0 = 0,$$

$$B^{-1}A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, c_B B^{-1} = (z_3 - c_3, z_4 - c_4) = (0, 0),$$

$$c_B B^{-1}A - c = (z_1 - c_1, z_2 - c_2) = (-5000, -3000), B = (a_3, a_4),$$

$$X = \begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, X_N = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La adición de las variables de holgura ha generado el primer punto extremo de la región de factibilidad, o sea la primera base formada por las columnas  $\mathbf{a}_3$  y  $\mathbf{a}_4$  de  $\mathbf{A}$ . Este punto extremo está identificado por las siguientes co-ordenadas en el espacio de cuatro dimensiones:

$$X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 15, X_4 = 10.$$

En este punto extremo, que por cierto el lector debe comprobar que es factible, básico y no degenerado,<sup>19</sup> el valor de la función objetivo es cero.

La pregunta a contestar es la siguiente: ¿Existe un punto extremo en la región de factibilidad donde el valor de la función objetivo sea mejor que el actual?

Los pasos 5 y 6 del *método simplex* darán la respuesta. El paso 5 indica que hay que seleccionar a todas las  $z_j - c_j < 0$  para toda columna  $j$  en  $\mathbf{A}$  que no pertenezca a la base actual  $\mathbf{B}$ . Las únicas columnas que no pertenecen son  $\mathbf{a}_1$  y  $\mathbf{a}_2$ . Se debe seleccionar al más negativo de estas  $z_j - c_j$ . Como se ve a continuación:

$$z_j - c_j = \text{Mín} \{-5000, -3000\} = -5000$$

por lo que la columna a entrar a la nueva base es  $\mathbf{a}_1$ . Para ver qué vector  $\mathbf{a}_r$  debe salir de la base actual se aplica el paso 6. Los únicos candidatos a salir están dados por la regla

$$\frac{X_{B_r}}{Y_{rj}} = \text{Mín} \left\{ \frac{X_{B_k}}{Y_{kj}} \mid Y_{kj} > 0 \right\}$$

o sea, que sabiendo que  $j = 1$  se tiene:

$$\frac{X_{B_r}}{Y_{r1}} = \text{Mín} \left\{ \frac{15}{3}, \frac{10}{5} \right\} = \text{Mín} \{5, 2\} = 2.$$

El vector que debe salir es el  $\mathbf{a}_4$ . Sabiendo que el vector  $\mathbf{a}_1$  es el que debe entrar y  $\mathbf{a}_4$  el que va a salir, el pivote queda determinado. El pivote en este caso es el elemento  $Y_{14} = 5$ , tal como se muestra a continuación:

	Z	$\downarrow$ $X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	
	1	-5 000	-3 000	0	0	0
$\mathbf{a}_3$	0	3	5	1	0	15
$\mathbf{a}_4$	0	5	2	0	1	10

pivote

<sup>19</sup> Factible porque satisface las restricciones  $AX \leq b, X \geq 0$ ; básico porque  $X$  no tiene más de dos (el número de renglones de  $A$ , que es igual al número de vectores de la base) componentes positivas; no degenerado, porque  $X$  tiene exactamente dos componentes positivas.

## 96 La programación lineal

Para encontrar la nueva base hay que convertir la columna  $\mathbf{a}_1$  en una columna unitaria  $\mathbf{e}_2$ , con un uno en la segunda componente y ceros en el resto de la columna, incluyendo  $z_1 - c_1$ . Esto se logra con operaciones matriciales elementales.<sup>20</sup> El resultado de estas operaciones se muestran en el siguiente tableau.

		Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	
		1	0	-1 000	0	1 000	10 000
Vectores en la base.	$\mathbf{a}_3$	0	0	19/5	1	-3/5	9
	$\mathbf{a}_1$	0	1	2/5	0	1/5	2
							$\mathbf{X}_B$

Se ha terminado una iteración completa del *método simplex*. En esta iteración, el proceso se ha movido de un punto extremo con componentes  $X_1 = 0$ ,  $X_2 = 0$ ,  $X_3 = 15$ ,  $X_4 = 10$ , correspondiente a la base  $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$  y en donde la función objetivo es igual a cero, a otro punto extremo con componentes  $X_1 = 2$ ,  $X_2 = 0$ ,  $X_3 = 9$ ,  $X_4 = 0$ , correspondiente a una nueva base  $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1)$  y a un nuevo valor de la función objetivo de 10 000.

Sin embargo, como  $z_2 - c_2 = -1,000 < 0$ , es negativo, el valor de la función objetivo puede aún mejorarse. Repitiendo otra iteración del *método simplex*, se tiene que  $\mathbf{a}_2$  entra a la nueva base y que

$$\begin{aligned} \frac{X_{B_1}}{Y_{r2}} &= \underset{h}{\text{Mín}} \left\{ \frac{9}{19}, \frac{2}{2} \right\} \\ &= \underset{h}{\text{Mín}} \left\{ \frac{45}{19}, \frac{10}{2} \right\} = \frac{45}{19}, \end{aligned}$$

por lo que el vector  $\mathbf{a}_3$  tiene que salir. El nuevo pivote como se puede ver a continuación es  $Y_{12} = \frac{19}{5}$ .

		Z	$X_1$	$\downarrow$ $X_2$	$X_3$	$X_4$	Z
		1	0	-1 000	0	1 000	10 000
Vectores en la base.	$\mathbf{a}_3$	0	0	19/5	1	-3/5	9
	$\mathbf{a}_1$	0	1	2/5	0	1/5	2
							$\mathbf{X}_B$

<sup>20</sup> Si el lector no entiende cómo se obtuvo el siguiente tableau quiere decir que aún no domina este tipo de operaciones matriciales. Se le recomienda que vuelva a estudiar más seriamente este capítulo en el apéndice B.

Por medio de operaciones matriciales elementales se convierte al vector  $\mathbf{a}_2$ , en el vector unitario  $\mathbf{e}_1$ , es decir con ceros en toda la columna y un uno en la posición del pivote.

		Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	Z	
		1	0	0	5 000/19	16 000/19	235 000/19	
Vectores en la base.	$\mathbf{a}_2$	0	0	1	5/19	-3/19	45/19	$\mathbf{X}_B$
	$\mathbf{a}_1$	0	1	0	-2/19	25/95	20/19	

La nueva solución o punto extremo correspondiente a la nueva base  $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1)$ , que por cierto es ya óptima porque todas las  $z_j - c_j \geq 0$ , es:

$$X_1 = \frac{20}{19} = 1.052 \text{ miles de litros de cerveza clara,}$$

$$X_2 = \frac{45}{19} = 2.368 \text{ miles de litros de cerveza oscura,}$$

$$X_3 = 0 \text{ exceso de obreros,}$$

$$X_4 = 0 \text{ exceso de capital semanal,}$$

$$Z = \frac{235000}{19} = \$ 12,368.42 \text{ de utilidad semanal.}$$

Se corrobora en seguida, que en efecto esta solución es factible. Poniendo las soluciones óptimas en las restricciones se tiene

$$3 \left( \frac{20}{19} \right) + 5 \left( \frac{45}{19} \right) = 15,$$

que es exactamente el número de obreros disponibles, y de ahí que la variable de holgura  $X_3$  que mide la diferencia entre lo que se tiene disponible para utilizarse y lo que en realidad se utiliza sea igual a cero. En relación a la segunda restricción se tiene

$$5 \left( \frac{20}{19} \right) + 2 \left( \frac{45}{19} \right) = 10,$$

que es el capital (en miles de pesos) semanal disponible para cubrir los costos de producción. Por último, la función objetivo en ese punto extremo tiene el siguiente valor.

$$Z = 5\,000 \left( \frac{20}{19} \right) + 3\,000 \left( \frac{45}{19} \right) = 12\,368.42.$$

## 98 La programación lineal

Es conveniente aclarar que el método simplex usó dos iteraciones completas. Un análisis exhaustivo de todos los puntos extremos requerirían de

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{4} = 6$$

análisis.

Antes de pasar a explicar ciertas extensiones de la programación lineal, tal como la resolución de problemas de minimización, identificación de soluciones no acotadas y múltiples, se enriquece esta sección con una variedad de diferentes problemas y sus correspondientes modelos de programación lineal.

### Formulación de varios problemas

*Ejemplo 1.* La Oficina Nacional de Planificación Familiar tiene un presupuesto anual de \$50.000,000 en publicidad sobre *paternidad responsable*. La propaganda se hará a través del radio, prensa y televisión. Se utilizarán los 5 periódicos de más circulación, la cadena nacional de radio y televisión.

Un estudio económico a largo plazo, hecho por el Ministerio de Planificación ha determinado que un 70% de la intensidad del programa deberá estar dirigido a la población femenina rural entre los 15 y 50 años y un 30% a la población femenina urbana entre los 15 y 50 años.

La penetración de la red nacional de televisión cubre el 20% de todas las zonas rurales y el 90% de todas las zonas urbanas. La penetración "efectiva" de publicidad a través de la red nacional de televisión que la Oficina Nacional de Planificación está realizando en el grupo meta de mujeres rurales y urbanas en edad fértil es de

$$(.70) (.20) + (.30) (.90) = .41.$$

La penetración efectiva de la red nacional de televisión, significa que si hay 1.000,000 de mujeres en edad fértil, tanto rurales como urbanas en toda la nación, solamente 410,000 podrán probablemente ver la publicidad de paternidad responsable vía red nacional de televisión. Este número se denominará la "penetración efectiva nacional" vía red nacional de televisión.

Supóngase que la red nacional de televisión cobra \$10,000/día por 15 mensajes de *paternidad responsable* de 2 minutos cada mensaje. El número efectivo de mujeres por día en el grupo meta por peso gastado en publicidad vía red nacional de televisión sería entonces de

$$\frac{410,000 \text{ (mujeres efectivas en el grupo meta)}}{10,000 \text{ (pesos/día)}} = 41.$$

Este número es la "penetración efectiva nacional por peso gastado" vía red nacional de televisión.

Un análisis similar se hace para los demás medios de publicidad con los siguientes resultados:

Tabla 2 - 2

	Penetración		Pene- tración efectiva	Pene- tración efectiva nacional por cada millón de mujeres	Costo de publi- cidad	Pene- tración efectiva nacional por peso gastado
	Zona rural	Zona urb.				
1. Red Nacional de Televisión	20%	90%	.41	410000	10000	41
2. Red Nacional de Radio	50%	95%	.64	640000	1000	640
3. El Diario Nacional	10%	60%	.25	250000	500	500
4. La Verdad	10%	50%	.22	220000	400	550
5. El Revolucionario Simple	5%	40%	.16	160000	300	533.33
6. El Matutino	5%	30%	.13	130000	250	520
7. El Corre Noticias	5%	20%	.10	100000	200	500

La gran preocupación de la Oficina Nacional de Planificación Familiar es como gastar los \$50.000,000 en publicidad tal que se maximice la "penetración efectiva nacional".

Este problema puede resolverse fácilmente por medio de programación lineal. Si se define

$X_i$ : la cantidad de dinero a gastar en publicidad, vía el medio de publicidad  $i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ ),

se tiene que la función objetivo, medida en unidades de penetración efectiva nacional es

$$\text{Máx} = 41X_1 + 640X_2 + 500X_3 + 550X_4 + 533.33X_5 + 520X_6 + 500X_7$$

y las restricciones son que no se puede gastar más de lo presupuestado, es decir

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 \leq 50.000,000.$$

Además se tienen las restricciones de no-negatividad  $X_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, 7$ .

Las unidades de la función objetivo son

$$\frac{\$ \text{ (penetración efectiva nacional)}}{\$} = \text{penetración efectiva nacional.}$$

## 100 La programación lineal

*Ejemplo 2.* La Productora Nacional de Fertilizantes quiere programar su producción trimestral para el próximo año de 1975. Supóngase que la demanda de fertilizantes pronosticada por la Secretaría de Agricultura es de

<i>Periodo</i>	<i>Ton de Fertilizantes</i>
1er. trimestre 1975	100,000
2do. trimestre 1975	120,000
3er. trimestre 1975	110,000
4º trimestre 1975	90,000

La capacidad de producción de la Productora Nacional de Fertilizantes es de 95,000 toneladas por trimestre. Sin embargo se pueden producir 30,000 toneladas adicionales por trimestre si se pone a trabajar un tercer turno. Cuesta \$300/ton/trimestre más el producir el fertilizante en el turno extra, que durante los turnos normales. Eso se debe a que en los turnos extras los salarios son más altos. Al fertilizante que no se pueda vender, hay que almacenarlo en bodegas a un costo de \$500/ton/trimestre. Las bodegas no pueden almacenar más de 20,000 ton/trimestre.

Bajo estas condiciones, ¿cuántas toneladas deben producirse por trimestre en turnos normales y extras tal que la demanda se satisfaga y se abatan los costos extras de producción y de almacenamiento? Supóngase que el costo normal de producción es de \$700/ton/trimestre.

Este problema también puede resolverse por medio de programación lineal. Sea

$X_i \geq 0$ : las toneladas de fertilizantes producidas en el trimestre  $i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) durante los turnos regulares.

$Y_i \geq 0$ : las toneladas de fertilizante producidas en el trimestre  $i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) durante los turnos extra.

$Z_i \geq 0$ : las toneladas de fertilizantes que quedan almacenadas al fin del trimestre  $i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

Las ecuaciones que indican el balance de flujo son:

$$X_1 + Y_1 = 100\,000 + Z_1,$$

$$X_2 + Y_2 + Z_1 = 120\,000 + Z_2,$$

$$X_3 + Y_3 + Z_2 = 110\,000 + Z_3,$$

$$X_4 + Y_4 + Z_3 = 90\,000 + Z_4.$$

Las restricciones que indican las limitaciones de producción son:

$$X_i \leq 95\,000 \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$Y_i \leq 30\,000 \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

en cambio las limitaciones en almacenamiento están dadas por

$$Z_i \leq 20\,000 \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

La función objetivo que se trata de minimizar es la de la suma de costos de producción normales y extras, más los costos de almacenamiento. Esta función está dada por:

$$\begin{aligned} \text{Mín } Z = & 700(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) + (700 + 300)(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) \\ & + 500(Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4). \end{aligned}$$

*Ejemplo 3.* La Fábrica Nacional de Automóviles puede fabricar 3 piezas de la carrocería o importarlas. Sean esas piezas  $P_1, P_2, P_3$ . Si las piezas son fabricadas en el país deben producirse cada una en 4 máquinas-herramientas. Sean esas máquinas-herramientas  $M_1, M_2, M_3, M_4$ . La siguiente tabla dá las unidades de tiempo requeridas en cada máquina por pieza fabricada.

	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
$P_1$	0.11	0.25	0.39	0.05
$P_2$	0.15	0.93	0.12	0.15
$P_3$	0.17	0.17	0.12	0.25

La demanda anual de cada una de las piezas es de 20 000 unidades. No se tiene más de 8760 horas anuales disponibles en cada una de las máquinas.

El costo de producción y de importación de cada pieza está dado en la siguiente tabla.

Pieza	Costo de producción en el país (por pieza)	Costo de importación (por pieza)
$P_1$	\$ 4.25	\$ 2.10
$P_2$	\$ 3.80	\$ 0.95
$P_3$	\$ 5.20	\$ 3.75

El Gobierno Federal desea que el número de piezas fabricadas en el país sea mayor que el número de piezas similares importadas. Además, el Gobierno Federal desea que el costo total de importación no exceda al 40% del costo total de producción en el país. Bajo estas condiciones, ¿cuántas piezas anuales deben fabricarse en el país, cuántas importarse, tal que el costo total de producción e importación se minimice; pero atendiendo a la demanda anual, a las limitaciones de producción y a las restricciones gubernamentales?



## 102 La programación lineal

Este programa también puede ser resuelto mediante la programación lineal. Sea

$X_i \geq 0$ : la cantidad de piezas anuales del tipo  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) a ser producidas en el país,

$Y_i \geq 0$ : la cantidad de piezas anuales del tipo  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) a ser importadas,

entonces, el costo total puede representarse por

$$\text{Mín } Z = 4.25X_1 + 3.80X_2 + 5.20X_3 + 2.10Y_1 + 0.95Y_2 + 3.75Y_3$$

sujeto a:

a) restricciones de la demanda

$$X_1 + Y_1 = 20\,000 \text{ piezas } P_1,$$

$$X_2 + Y_2 = 20\,000 \text{ piezas } P_2,$$

$$X_3 + Y_3 = 20\,000 \text{ piezas } P_3,$$

b) restricciones de capacidad de producción, dadas en números de horas es

$$0.11X_1 + 0.15X_2 + 0.07X_3 \leq 8760 \text{ horas en la máquina 1,}$$

$$0.25X_1 + 0.93X_2 + 0.17X_3 \leq 8760 \text{ horas en la máquina 2,}$$

$$0.39X_1 + 0.12X_2 + 0.12X_3 \leq 8760 \text{ horas en la máquina 3,}$$

$$0.05X_1 + 0.15X_2 + 0.25X_3 \leq 8760 \text{ horas en la máquina 4,}$$

c) restricciones gubernamentales que quedan expresadas por

$$2.10Y_1 + 0.95Y_2 + 3.75Y_3 \leq 0.4(4.25X_1 + 3.80X_2 + 5.20X_3)$$

y

$$Y_1 \leq X_1, Y_2 \leq X_2, Y_3 \leq X_3.$$

*Ejemplo 4.* Supóngase que los Ferrocarriles Nacionales de México tienen la siguiente demanda mensual de locomotoras diesel para operar su sistema en todo el país.

<i>Período</i>	<i>Locomotoras Diesel</i>
1er. mes	750
2do. mes	800
3er. mes	780

La gerencia de los ferrocarriles puede satisfacer su demanda mediante la combinación de las siguientes políticas:

- a) uso de la existencia de locomotoras diesel que se tiene en estado funcionable para ese mes,
- b) comprar locomotoras al extranjero que se entregan de inmediato,
- c) mandar reparar locomotoras a los talleres nacionales. El tiempo de reparación normal es de 2 meses,
- d) mandar reparar locomotoras a los talleres nacionales con carácter de extra urgente. El tiempo de reparación extra urgente es de 1 mes.

La política (b) tiene un costo de \$ 5 000 000 por locomotora; la (c) de \$ 50 000 por locomotora y la (d) de \$ 250 000 por locomotora.

Se supone que cada mes el 5% de las locomotoras tienen que darse a componer y que hay  $\frac{1}{2}\%$  de bajas, es decir locomotoras tan viejas que ya no son reparables. El presupuesto para los próximos 3 meses es de \$ 100 000 000 y se tienen al iniciar el primer mes 650 locomotoras en operación, 0 en reparación normal y 0 en reparación extra urgente.

Bajo estas condiciones, ¿qué combinación de políticas debe seguir la gerencia de los Ferrocarriles, para minimizar costos y satisfacer la demanda?

Se formula este problema como un programa lineal. Sea

$X_i \geq 0$ : la cantidad de locomotoras diesel que se compran en el mes  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ),

$Y_i \geq 0$ : la cantidad de locomotoras diesel mandadas a reparar normalmente en el mes  $i$  y que estarán disponibles en el mes  $i + 2$  ( $i = 1, 2, 3$ ),

$Z_i \geq 0$ : la cantidad de locomotoras diesel mandadas a reparar en forma extra urgente en el mes  $i$ , y que estarán disponibles en el mes  $i + 1$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Obviamente la función de costo a minimizar es

$$\text{Mín } Z = 5\,000\,000 \sum_{i=1}^3 X_i + 50\,000 \sum_{i=1}^3 Y_i + 250\,000 \sum_{i=1}^3 Z_i.$$

Durante el primer mes la demanda deberá satisfacerse de la siguiente manera

$$650 + X_1 = 750.$$

Al finalizar ese mes habrá un total de  $X_1 + 650$  locomotoras diesel, 5% del cual pasará a reparación (normal o extra urgente) y  $\frac{1}{2}\%$  se dará completamente de baja. Esto quiere decir que el número de locomotoras a repararse<sup>21</sup> es de

<sup>21</sup> Se supone que las locomotoras que se dan de baja provienen de las que se mandan a reparar. Si no es así, la expresión que indica las locomotoras a reparar sería:  $Y_1 + Z_1 = 0.05 (650 + X_1) - 0.005 (650 + X_1)$ .

## 104 La programación lineal

$$Y_1 + Z_1 = 0.05 (650 + X_1),$$

y el número total en operación es de

$$650 + X_1 - 0.05(650 + X_1) - 0.005(650 + X_1) = (650 + X_1)(1 - 0.055) = .945 (650 + X_1).$$

La demanda en el siguiente mes se satisfará con la existencia, más compras, más reparaciones extra urgentes, es decir

$$0.945 (650 + X_1) + X_2 + Z_1 = 800.$$

Al fin de ese mes se tiene que el número de unidades a reparación es de

$$0.5 [0.945 (650 + X_1) + X_2 + Z_1]$$

o sea

$$Y_2 + Z_2 = 0.05 [0.945 (650 + X_1) + X_2 + Z_1],$$

y el número total en operación al empezar el tercer mes es de

$$0.945(650 + X_1) + X_2 + Z_1 - 0.05 [0.945(650 + X_1) + X_2 + Z_1] - 0.005 [0.945 (650 + X_1) + X_2 + Z_1]$$

o sea

$$[0.945 (650 + X_1) + X_2 + Z_1] (1 - 0.05 - 0.005)$$

o

$$0.945 [0.945 (650 + X_1) + X_2 + Z_1].$$

Para satisfacer la demanda del tercer y último mes se tiene la siguiente expresión

$$0.945 [0.945 (650 + X_1) + X_2 + Z_1] + X_3 + Z_2 + Y_1 = 780.$$

Por último, las reparaciones del último mes serán

$$Y_3 + Z_3 = 0.05 \{ (0.945) [0.945(650 + X_1) + X_2 + Z_1] + X_3 + Z_2 + Y_1 \}.$$

El presupuesto trimestral quedaría expresado como

$$5\,000\,000 \sum_{i=1}^3 X_i + 50\,000 \sum_{i=1}^3 Y_i + 250\,000 \sum_{i=1}^3 Z_i \leq 100\,000\,000.$$

En resumen el programa lineal (sin arreglar términos) sería:

$$\text{Mín } Z = 5\,000\,000 \sum_{i=1}^3 X_i + 50\,000 \sum_{i=1}^3 Y_i + 250\,000 \sum_{i=1}^3 Z_i$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
 650 + X_1 &= 750 \\
 0.945 (650 + X_1) + X_2 + Z_1 &= 800 \\
 0.945 [0.945 (650 + X_1) + X_2 + Z_1] + X_3 + Z_2 + Y_1 &= 780 \\
 Y_1 + Z_1 &= 0.05 (650 + X_1) \\
 Y_2 + Z_2 &= 0.05 [0.945 (650 + X_1) + X_2 + Z_1] \\
 Y_3 + Z_3 &= (0.05) \{0.945 [0.945 (650 + X_1) + X_2 + Z_1] + X_3 + Z_2 + Y_1\} \\
 5\,000\,000 \sum_{i=1}^3 X_i + 50\,000 \sum_{i=1}^3 Y_i + 250\,000 \sum_{i=1}^3 Z_i &\leq 100\,000\,000 \\
 X_i \geq 0, \quad Y_i \geq 0, \quad Z_i \geq 0, \quad i &= 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

### Soluciones óptimas no acotadas

Existen problemas lineales cuyas soluciones óptimas no son números finitos, sino por el contrario es el infinito. Supóngase un problema lineal

$$\text{Máx } Z = 4X_1 + 4X_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
 -2X_1 + 2X_2 &\leq 2 \\
 -X_1 + 2X_2 &\leq 4 \\
 X_1 \geq 0 \quad X_2 &\geq 0,
 \end{aligned}$$

cuya representación geométrica es

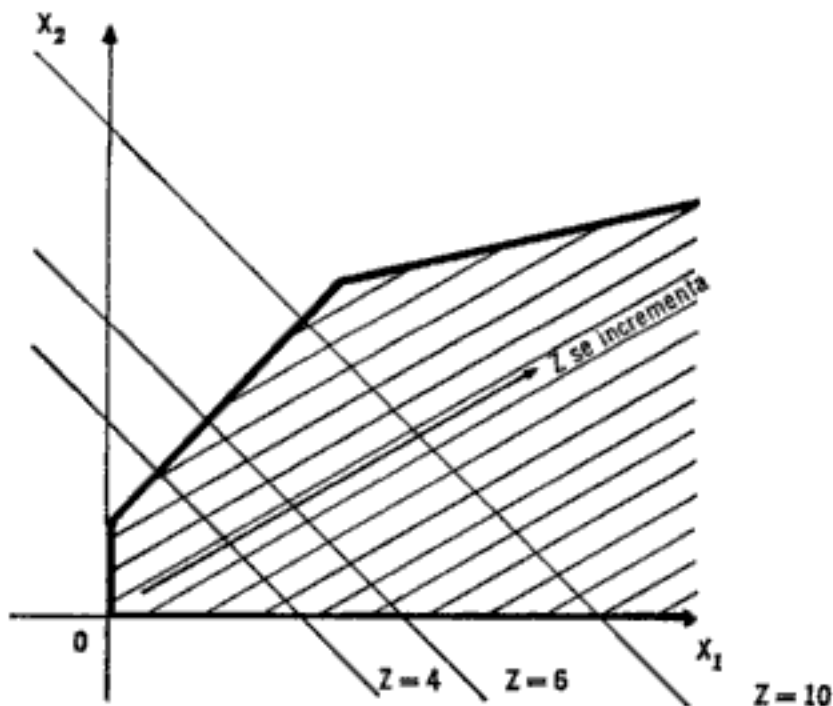


Figura 2.9

## 106 La programación lineal

Como el lector podrá darse cuenta, a medida que la función objetivo se mueve paralelamente hacia la derecha, su valor se incrementa. Como la región de factibilidad no está cerrada o acotada en el lado derecho, el movimiento hacia la derecha de la función objetivo no tiene límite, y por lo tanto el valor óptimo de ese programa lineal es infinito.

Se observará en seguida cómo se puede identificar esa situación en el *método simplex*.

**Teorema 2.6.** Supóngase el problema lineal en forma canónica, Máx  $Z = \mathbf{c}\mathbf{X}$ , sujeto a  $\mathbf{A}\mathbf{X} \leq \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$ . Supóngase que en cualquier iteración del método simplex, el vector que entra a la base es el  $\mathbf{a}_k$ . Entonces si todas las  $Y_{ik} \leq 0$ , para toda  $i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , la solución del problema lineal es no acotado.

*Prueba.* Supóngase que  $\mathbf{X}_B = (X_{B_1}, X_{B_2}, \dots, X_{B_m})$  es una solución básica factible. Entonces se cumple

$$X_{B_1}\mathbf{a}_1 + X_{B_2}\mathbf{a}_2 + \dots + X_{B_m}\mathbf{a}_m = \mathbf{b}.$$

Si se suma y resta a la expresión anterior el vector  $\phi\mathbf{a}_k$ , donde  $\phi$  es cualquier escalar arbitrario y  $\mathbf{a}_k$  es el vector a entrar a la base, se tiene que la expresión no cambia

$$\begin{aligned} X_{B_1}\mathbf{a}_1 + X_{B_2}\mathbf{a}_2 + \dots + X_{B_m}\mathbf{a}_m - \phi\mathbf{a}_k + \phi\mathbf{a}_k &= \mathbf{b} \\ \sum_{i=1}^m X_{B_i}\mathbf{a}_i - \phi\mathbf{a}_k + \phi\mathbf{a}_k &= \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Pero  $\mathbf{a}_k$  puede representarse como una combinación de los vectores en la base. Se tiene entonces que

$$\mathbf{a}_k = Y_{1k}\mathbf{a}_1 + Y_{2k}\mathbf{a}_2 + \dots + Y_{mk}\mathbf{a}_m. \quad (2.61)$$

Poniendo (2.61) en (2.60) se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m X_{B_i}\mathbf{a}_i - \phi \sum_{i=1}^m Y_{ik}\mathbf{a}_i + \phi\mathbf{a}_k &= \mathbf{b} \\ \sum_{i=1}^m (X_{B_i} - \phi Y_{ik}) \mathbf{a}_i + \phi\mathbf{a}_k &= \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

La solución en (2.62) es factible, pero no básica porque tiene  $m+1$  componentes que son positivos. La función objetivo para esta solución es:

$$\begin{aligned} \hat{Z} &= \sum_{i=1}^m c_{B_i} (X_{B_i} - \phi Y_{ik}) + c_k \phi \\ &= \sum_{i=1}^m c_{B_i} X_{B_i} - \phi \sum_{i=1}^m c_{B_i} Y_{ik} + c_k \phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= Z - \phi z_k + c_k \phi \\
 &= Z - \phi (z_k - c_k).
 \end{aligned}
 \tag{2.63}$$

Como la solución (2.62) es factible se tiene que

$$X_{B_i} - \phi Y_{ik} \geq 0$$

por lo que tomando en consideración que todos los  $Y_{ik}$  se han supuesto menor o igual a cero para toda  $i = 1, \dots, m$ , se arroja como conclusión de que  $\phi \geq 0$ . Por otro lado como  $\mathbf{a}_k$  es el vector de entrada se tiene en (2.63) que  $z_k - c_k < 0$ . Ambas conclusiones, la de que  $\phi \geq 0$  y la de que  $z_k - c_k < 0$ , arrojan una tercera y esta es que el valor de  $\hat{Z}$  crece a medida que  $\phi$  se incrementa. Como  $\phi$  es arbitrario,  $\hat{Z}$  puede hacerse tan grande como se quiera. El teorema queda demostrado.

*Ejemplo.* Resuélvase por el método simplex el siguiente programa lineal.

$$\text{Máx } Z = 4X_1 + 4X_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
 -2X_1 + 2X_2 &\leq 2 \\
 -X_1 + 2X_2 &\leq 4 \\
 X_1 &\geq 0 \quad X_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

↓

		Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	
		1	-4	-4	0	0	0
<i>tableau inicial</i>	$\mathbf{a}_3$	0	-2	Ⓜ	1	0	2 ←
	$\mathbf{a}_4$	0	-1	2	0	1	4 ←
		1	-8	0	2	0	4
<i>primera iteración</i>	$\mathbf{a}_2$	0	-1	1	1/2	0	1 ←
	$\mathbf{a}_4$	0	Ⓜ	0	-1	1	2 ←
		1	0	0	-6	8	20
<i>segunda iteración</i>	$\mathbf{a}_2$	0	0	1	-1/2	1	3
	$\mathbf{a}_1$	0	1	0	-1	1	2

En la tercera iteración  $\mathbf{a}_3$  debe entrar, pero  $Y_{13} = -1/2 < 0$  y  $Y_{23} = -1 < 0$ , y por lo tanto la regla de selección del vector que debe salir de la base no se puede llevar a cabo. Nótese que esa misma condi-

## 108 La programación lineal

ción se encuentra en el tableau inicial, si en vez de introducir  $a_2$  a la base se introdujera  $a_1$ .<sup>22</sup>

### Soluciones óptimas múltiples

Existen problemas lineales que no tienen una solución óptima única, sino que al contrario, tienen un número infinito de soluciones. Tal es el caso del siguiente programa lineal.

$$\text{Máx } Z = 5X_1 + 2X_2$$

sujeto a

$$6X_1 + 10X_2 \leq 30$$

$$10X_1 + 4X_2 \leq 20$$

$$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0,$$

cuya representación geométrica está dada a continuación

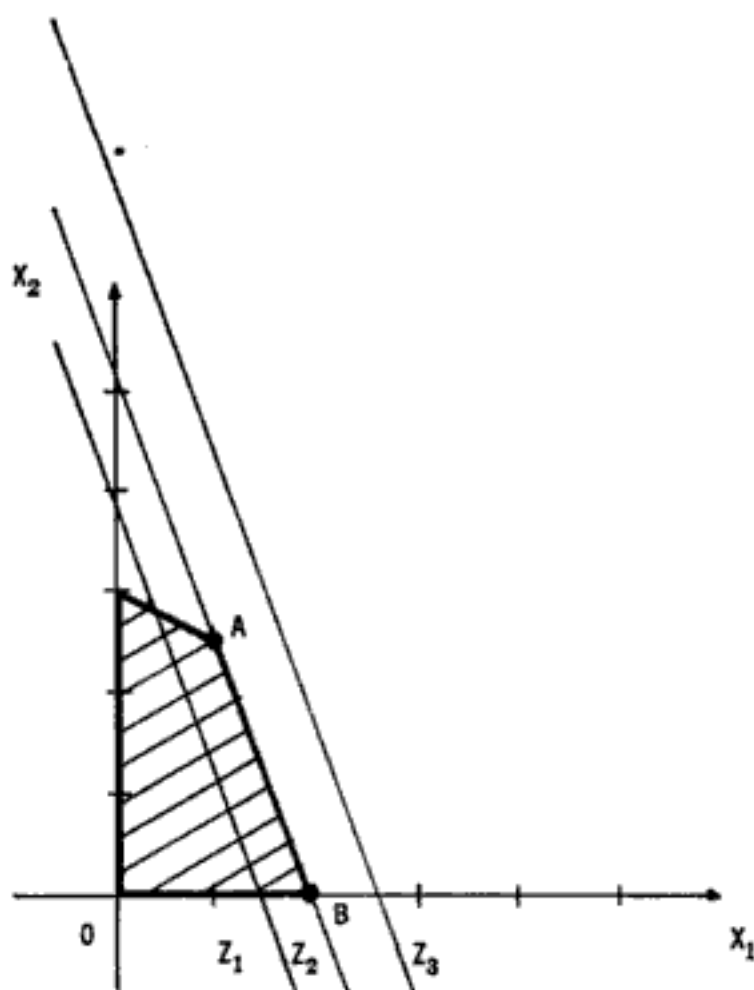


Figura 2.10

<sup>22</sup> Recuérdese que los empates en la regla de selección del vector de entrada pueden decidirse arbitrariamente.

Como se ve en la figura, la función objetivo obtiene su valor óptimo cuando coincide con la arista  $AB$  de la región de factibilidad. La solución óptima se sigue obteniendo en un punto extremo, sólo que en este caso son dos puntos extremos los óptimos, a saber, el punto  $A$  y el punto  $B$ . Cualquier combinación lineal de los puntos  $A$  y  $B$ , es también óptimo, es decir, cualquier punto en la recta  $AB$  es óptimo. Como hay una infinidad de puntos, existen una infinidad de soluciones óptimas, dando todos el mismo valor de la función objetivo. Matemáticamente se tiene que si  $\mathbf{X}_A$  es el vector del punto  $A$  y  $\mathbf{X}_B$  el del punto  $B$  entonces

$$\mathbf{X} = \lambda \mathbf{X}_A + (1 - \lambda) \mathbf{X}_B, \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

es también una solución óptima. El próximo teorema da las condiciones que permiten identificar soluciones óptimas múltiples en un tableau del método simplex.

**Teorema 2.7.** Dado el programa lineal en forma canónica Máx  $Z = \mathbf{c}\mathbf{X}$ , sujeto a  $\mathbf{A}\mathbf{X} \leq \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$ , si existe un vector  $\mathbf{a}_k$  que no esté en la base cuya correspondiente  $z_k - c_k$  sea igual a cero, el resto de las  $z_i - c_i \geq 0$  y todas las  $Y_{ik} > 0$ ,  $i = 1, \dots, m$  entonces el programa lineal tiene soluciones óptimas múltiples y la base es óptima.

*Prueba.* Se tiene que

$$\frac{X_{B_r}}{Y_{rk}} = \text{Mín}_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{X_{B_i}}{Y_{ik}} \mid Y_{ik} > 0 \right\}$$

y

$$\hat{Z} = Z - \frac{X_{B_r}}{Y_{rk}} (z_k - c_k).$$

Como  $z_k - c_k = 0$ , se tiene que

$$\hat{Z} = Z.$$

Supóngase que  $\mathbf{X}$  sea el vector factible básico asociado a  $Z$ , y que  $\hat{\mathbf{X}}$  sea el vector factible básico asociado a  $\hat{Z}$ . Ambos vectores  $\mathbf{X}$  y  $\hat{\mathbf{X}}$  dan el mismo valor de la función objetivo, ya que  $\hat{Z} = Z$ . Entonces, cualquier vector factible básico  $\mathbf{X}^*$ , que sea una combinación lineal de  $\mathbf{X}$  y  $\hat{\mathbf{X}}$  también da el mismo valor de la función objetivo. Matemáticamente:

$$\mathbf{X}^* = \lambda \mathbf{X} + (1 - \lambda) \hat{\mathbf{X}}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Esto demuestra el teorema.

*Ejemplo.* Resuélvase por el método simplex el siguiente problema lineal:

$$\text{Máx } Z = 5X_1 + 2X_2$$



## 110 La programación lineal

sujeto a

$$\begin{aligned} 6X_1 + 10X_2 &\leq 30 \\ 10X_1 + 4X_2 &\leq 20 \\ X_1 \geq 0, \quad X_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	
	1	-5	-2	0	0	0
$a_3$	0	6	10	1	0	30
$a_4$	0	10	4	0	1	20
	1	0	0	0	1/2	10
$a_3$	0	0	38/5	1	-6/10	18
$a_1$	0	1	2/5	0	1/10	2

Como  $z_2 - c_2 = 0$  y  $a_2$  no está en la base  $\mathbf{B} = (a_3, a_1)$  y todas las demás  $z_j - c_j > 0$ ,  $j$  en  $\mathbf{A}$  se tiene una solución óptima múltiple. Sea un punto extremo óptimo el siguiente:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que da un valor óptimo de  $Z = 10$ . Para ver cuál sería el otro punto extremo, se introduce  $a_2$  a la base.

	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	
	1	0	0	0	1/2	10
$a_2$	0	0	1	5/38	-30/380	90/38
$a_1$	0	1	0	-1/19	125/950	20/19

Este tableau también es óptimo y corresponde a un punto extremo  $\hat{\mathbf{X}}$  cuyos componentes son

$$\hat{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20/19 \\ 90/38 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y cuyo valor de la función objetivo también es 10. Entonces, cualquier combinación lineal de los puntos  $\mathbf{X}$  y  $\hat{\mathbf{X}}$  también es óptimo, dando el

mismo valor de la función objetivo. Matemáticamente, cualquier  $X^*$  definido por la expresión:

$$X^* = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} 20/19 \\ 90/38 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

es un punto óptimo.

### Problemas de minimización

A continuación se verá qué tipo de problemas se desarrollan en un programa de minimización. Se eliminan para empezar los problemas de minimización triviales, que son aquellos que pueden representarse como

$$\text{Mín } Z = cX$$

sujeto a

$$AX \leq b$$

$$X \geq 0$$

$$b \geq 0.$$

Este tipo de problemas tiene como solución óptima  $X = (X_B, X_N) = (0, 0, 0, \dots, 0, \dots, 0, 0)$ . Como se puede ver gráficamente a continuación la solución óptima es no hacer nada.

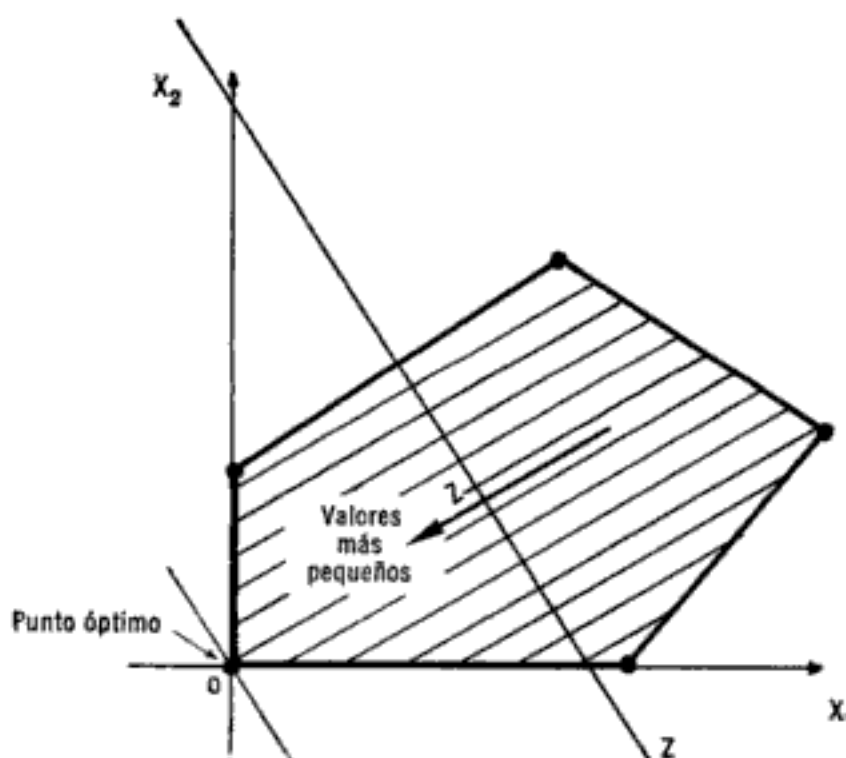


Figura 2.11

## 112 La programación lineal

Los problemas de minimización interesantes son aquellos en donde el vector  $\mathbf{b}$  no es necesariamente mayor o igual al vector  $\mathbf{0}$ . Este tipo de problemas tienen la siguiente representación canónica

$$\text{Mín } Z = \mathbf{cX}$$

sujeto a

$$\mathbf{AX} \geq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}. \quad (2.64)$$

Con objeto de ver cuáles son los problemas y los mecanismos de solución se toma el siguiente problema

$$\text{Mín } Z = -3X_1 + 5X_2$$

sujeto a

$$X_1 \leq 4$$

$$X_2 \leq 6$$

$$3X_1 + 2X_2 \geq 18$$

$$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0,$$

que se resuelve por el *método simplex*.

La región de factibilidad y la pendiente de la función objetivo se muestran a continuación

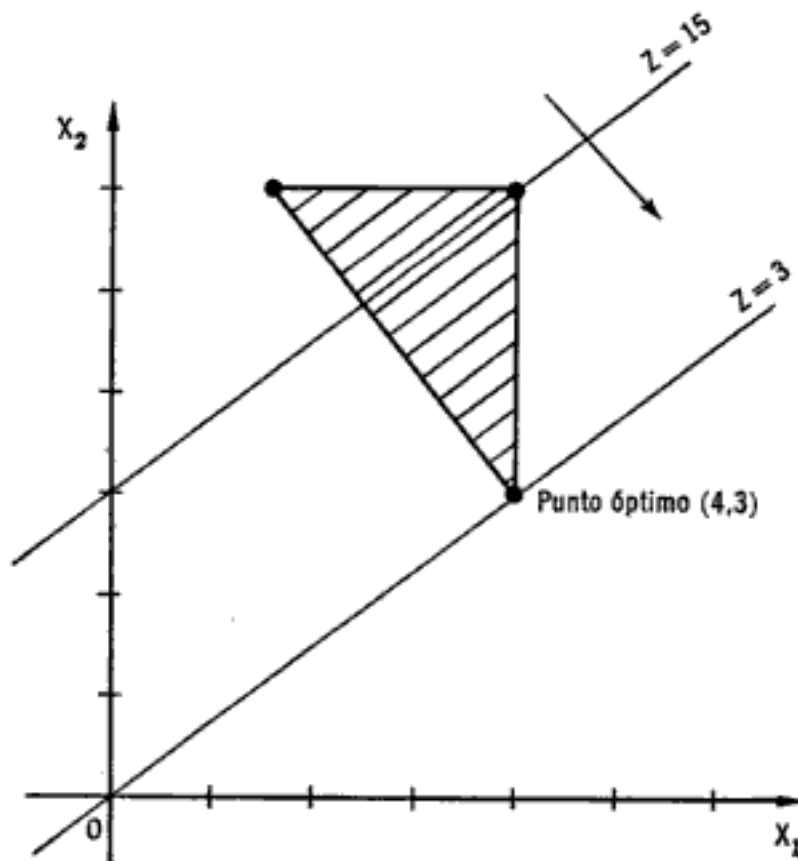


Figura 2.12

Los pasos del *método simplex* conducen a resolver

$$\text{Máx } h = -Z = 3X_1 - 5X_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} X_1 &\leq 4 \\ X_2 &\leq 6 \\ -3X_1 - 2X_2 &\leq -18 \\ X_1 \geq 0, \quad X_2 &\geq 0, \end{aligned}$$

y ya en forma de tableau

	$h$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	
	1	-3	5	0	0	0	0
$a_3$	0	1	0	1	0	0	4
$a_4$	0	0	1	0	1	0	6
$a_5$	0	-3	-2	0	0	1	-18

La solución básica  $\mathbf{X}_B$  que se tiene es

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_B &= \begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -18 \end{pmatrix} \\ \mathbf{X}_N &= \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esta solución *no es factible* pues  $X_5 = -18 < 0$ , y está violando la restricción de que todas las variables, incluyendo las de holgura sean no-negativas. Se concluye que para problemas de minimización no triviales, el *método simplex* no trabaja. ¿Qué modificaciones hay que hacerle al *método simplex* para resolver este problema?

Hay varias maneras de darle solución a este problema. Se describen a continuación dos, uno el *método de penalización* y el otro el *método de doble fase*.

### El método de penalización<sup>23</sup>

**Teorema 2.8.** La solución óptima al problema

$$\text{Mín } Z = \mathbf{cX} + \mathbf{MW}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \mathbf{AX} - \mathbf{Y} + \mathbf{W} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{X} \geq 0, \quad \mathbf{Y} \geq 0, \quad \mathbf{W} &\geq 0, \end{aligned}$$

<sup>23</sup> En la literatura inglesa éste método se conoce como el "Big M Method". En esta sección el vector  $\mathbf{M}$  tiene componentes  $\mathbf{M} = (M, M, \dots, M)$ .

## 114 La programación lineal

es también solución óptima del problema

$$\text{Mín } Z = \mathbf{cX}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \mathbf{AX} &\geq \mathbf{b} \\ \mathbf{X} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

si y sólo si el vector  $\mathbf{W} = \mathbf{0}$ .

*Prueba.* Dado el problema de minimización

$$\text{Mín } Z = \mathbf{cX}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \mathbf{AX} &\geq \mathbf{b} \\ \mathbf{X} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

éste se puede escribir como

$$\text{Mín } Z = \mathbf{cX}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \mathbf{AX} - \mathbf{Y} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{X} &\geq \mathbf{0}, \\ \mathbf{Y} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{Y}$  es un vector superfluo. Este problema es igual al

$$\text{Mín } Z = \mathbf{cX} + \mathbf{MW}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \mathbf{AX} - \mathbf{Y} + \mathbf{W} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{X} \geq \mathbf{0}, \mathbf{Y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{W} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

sólo cuando  $\mathbf{W} = \mathbf{0}$ . El teorema queda demostrado.

El *método de penalización* consiste en modificar el problema original para dar lugar a un nuevo problema, donde la solución inicial es factible y básica. Esto se puede lograr añadiendo un vector  $\mathbf{W}$ , llamado de *variables artificiales* y penalizando<sup>24</sup> a la función objetivo con un costo  $\mathbf{MW}$ , donde  $\mathbf{M}$  es un vector de valores positivos arbitrarios muy elevados. Mientras el vector artificial tenga alguna componente positiva, el valor de la función objetivo se elevará considerablemente en el caso de un problema de minimización. Como el *método simplex* siempre trata en cada iteración de mejorar la función objetivo, si el problema original no tiene restricciones inconsistentes, llegará un momento en que  $\mathbf{W}$  salga completamente de la base. En ese momento  $\mathbf{W} = \mathbf{0}$  y se ha retornado al problema original cuya solución óptima está garantizada por el *método simplex*. Si durante la solución del *método penal* se llega a una solución óptima pero  $\mathbf{W} > \mathbf{0}$ , entonces el problema original NO tiene solución.<sup>25</sup>

<sup>24</sup> En el caso de una minimización se suma el costo penal. En el caso de una maximización se resta el costo penal.

<sup>25</sup> Debido a restricciones inconsistentes.

Ejemplo. Resuélvase por el método penal el siguiente problema lineal

$$\begin{aligned} \text{Mín } Z &= -3X_1 && + 5X_2 \\ X_1 &&& \leq 4 \\ &&& X_2 \leq 6 \\ 3X_1 &&+ 2X_2 &\geq 18 \\ X_1 &\geq 0, && X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Este problema puede re-escribirse como

$$\begin{aligned} \text{Máx } h &= -Z = 3X_1 - 5X_2 \\ X_1 &+ X_3 &&= 4 \\ &X_2 &+ X_4 &= 6 \\ 3X_1 + 2X_2 &&&- X_5 = 18 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, X_4 \geq 0, X_5 \geq 0 \end{aligned}$$

y ya introduciendo la variable artificial  $W_1$ ,

$$\begin{aligned} \text{Máx } h &= 3X_1 - 5X_2 && - MW_1 \\ X_1 &+ X_3 &&= 4 \\ &X_2 &+ X_4 &= 6 \\ 3X_1 + 2X_2 &&&- X_5 + W_1 = 18 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, X_4 \geq 0, X_5 \geq 0, W_1 \geq 0 \end{aligned}$$

que en forma de tableau da la siguiente estructura:

	$h$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$W_1$	
	1	-3	5	0	0	0	$M$	0
$a_3$	0	1	0	1	0	0	0	4
$a_4$	0	0	1	0	1	0	0	6
$a_{w_1}$	0	3	2	0	0	-1	1	18

Si se quiere que la base  $\mathbf{B}$  esté compuesta de los vectores  $\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_{w_1}$ , se necesita que  $\mathbf{a}_{w_1}$  sea un vector unitario tipo  $\mathbf{e}_3$ . Para eso se convierte  $z_{w_1} - c_{w_1}$  en cero, mediante el uso de operaciones matriciales elementales. El siguiente tableau, da la primera base y el primer punto extremo (básico y factible) del programa modificado. A partir de ahí se sigue aplicando el método simplex en forma normal hasta que las condiciones de optimalidad se cumplan.

## 116 La programación lineal

	$h$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$W_1$	
	1	$-3-3M$	$5-2M$	0	0	$M$	0	$-18M$
$a_3$	0	①	0	1	0	0	0	4
$a_4$	0	0	1	0	1	0	0	6
$a_{w_1}$	0	3	2	0	0	-1	1	18
	1	0	$5-2M$	$3+3M$	0	$M$	0	$12-6M$
$a_1$	0	1	0	1	0	0	0	4
$a_4$	0	0	1	0	1	0	0	6
$a_{w_1}$	0	0	②	-3	0	-1	1	6
	1	0	0	$21/2$	0	$5/2$	$M-5/2$	-3
$a_1$	0	1	0	1	0	0	0	4
$a_4$	0	0	0	$3/2$	1	$1/2$	$-1/2$	3
$a_2$	0	0	1	$-3/2$	0	$-1/2$	$1/2$	3

Este último tableau es óptimo<sup>26</sup> y como  $a_{w_1}$  está fuera de la base,  $W_1 = 0$ , por lo que la solución es también óptima para el programa original. La solución óptima es

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_R \\ \mathbf{X}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_4 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_5 \\ W_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con una función objetivo óptima

$$h = -Z = -3$$

por lo que

$$Z = 3$$

tal como se obtuvo gráficamente.

El único problema serio del *método penal*, es que al usarse en una computadora, como a las componentes del vector  $\mathbf{M}$  se les tienen que dar valores reales positivos, por ejemplo, 999999999.99, al iterarse varias veces, se empiezan a acumular errores de redondeo que pueden afectar seriamente el resultado final óptimo. Por esa razón el *método penal* se ha substituido en la práctica por el *método de doble fase*.

<sup>26</sup> El término  $z_{w_1} - c_{w_1} = -5/2 + M > 0$ , porque  $M$  es un número positivo arbitrario bastante grande.

**Método de doble fase**

En esencia es igual al *método de penalización*, en que primero se introducen las variables artificiales al problema original

$$\text{Mín } Z = \mathbf{cX}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \mathbf{AX} &\geq \mathbf{b} \\ \mathbf{X} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

quedando como

$$\text{Mín } Z = \mathbf{cX}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \mathbf{AX} - \mathbf{Y} + \mathbf{W} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{X} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{Y} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{W} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{W}$  es el vector de variables artificiales con componentes  $(W_1, W_2, \dots, W_p)$ . En la primera fase se resuelve el problema

$$\text{Mín } \sum_{i=1}^p W_i$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \mathbf{AX} - \mathbf{Y} + \mathbf{W} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{X} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

La solución óptima de esta fase debe ser  $\mathbf{W} = \mathbf{0}$ . Si al obtener las condiciones de optimalidad en esta fase,  $\mathbf{W} > \mathbf{0}$ , el problema original no tiene solución.<sup>27</sup>

Supóngase que la primera fase es óptima,  $\mathbf{W} = \mathbf{0}$  y que la base asociada al tableau es  $\mathbf{B}$ . En la segunda fase se aplica el *método simplex* para resolver el problema

$$\text{Mín } \mathbf{cX}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{AX} - \mathbf{B}^{-1} \mathbf{Y} &= \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \\ \mathbf{X} &\geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{Y} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

La solución óptima a esta segunda fase, es la solución óptima al problema original. Es importante observar que al empezar la segunda fase, todos los vectores de la base óptima correspondiente a la primera fase permanezcan unitarios. Empleense operaciones matriciales elementales para restituir todos aquellos vectores que deben ser unitarios.

*Ejemplo.* Resuélvase por el *método de doble fase* el siguiente problema lineal

<sup>27</sup> Debido a restricciones inconsistentes.



## 118 La programación lineal

$$\begin{aligned} \text{Mín } Z &= -3X_1 + 5X_2 \\ \text{sujeto a} \quad & X_1 \leq 4 \\ & X_2 \leq 6 \\ & 3X_1 + 2X_2 \geq 18 \\ & X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Primero se reescribe el problema como

$$\begin{aligned} \text{Mín } Z &= -3X_1 + 5X_2 \\ \text{sujeto a} \quad & X_1 + X_3 = 4 \\ & X_2 + X_4 = 6 \\ & 3X_1 + 2X_2 - X_5 + W_1 = 18 \\ & X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, X_4 \geq 0, X_5 \geq 0, W_1 \geq 0. \end{aligned}$$

La primera fase consiste en resolver el problema<sup>28</sup>

$$\begin{aligned} \text{Mín } W_1 \\ \text{sujeto a} \quad & X_1 + X_3 = 4 \\ & X_2 + X_4 = 6 \\ & 3X_1 + 2X_2 - X_5 + W_1 = 18 \\ & X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, X_4 \geq 0, X_5 \geq 0, W_1 \geq 0. \end{aligned}$$

Aplicando el *método simplex*, una vez que se ha cambiado la función objetivo a Máx  $-W_1$ , se tiene

	$W_1$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	
	1	0	0	0	0	0	0
$a_3$	0	1	0	1	0	0	4
$a_4$	0	0	1	0	1	0	6
$a_{w_1}$	1	3	2	0	0	-1	18

Para tener el primer punto extremo se requiere que los vectores de la base sean unitarios. Por lo tanto se convierte  $a_{w_1}$  en vector unitario  $e_2$ .

<sup>28</sup> Nótese que el vector  $W$  de variables artificiales sólo tiene una componente, que es  $W_1$ .

	$W$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	
	0	-3	-2	0	0	1	-18
$a_3$	0	①	0	1	0	0	4
$a_4$	0	0	1	0	1	0	6
$a_{w_1}$	1	3	2	0	0	-1	18
	0	0	-2	3	0	1	-6
$a_1$	0	1	0	1	0	0	4
$a_4$	0	0	1	0	1	0	6
$a_{w_1}$	1	0	②	-3	0	-1	6
	1	0	0	0	0	0	0
$a_1$	0	1	0	1	0	0	4
$a_4$	-1/2	0	0	3/2	1	1/2	3
$a_2$	1/2	0	1	-3/2	0	-1/2	3

Esta es la solución óptima a la fase uno, y como  $W = 0$  el problema original tiene solución. Para empezar la fase dos, tómesese todo el tableau óptimo anterior, únicamente ignorando la columna  $a_{w_1}$  (que ya no se necesita) y el renglón de los  $z_j - c_j$ . Substitúyase ese renglón por la función objetivo original.

$$\text{Mín } Z = -3X_1 + 5X_2$$

o equivalentemente

$$\text{Máx } h = -Z = 3X_1 - 5X_2$$

$$h - 3X_1 + 5X_2 = 0.$$

Al iniciarse la fase dos se tiene la siguiente estructura:

	$h$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	
	1	-3	5	0	0	0	0
$a_1$	0	1	0	1	0	0	4
$a_4$	0	0	0	3/2	1	1/2	3
$a_2$	0	0	1	-3/2	0	-1/2	3

pero como  $B = (a_1, a_4, a_2)$  se necesita que  $a_1 = e_1$ ,  $a_4 = e_2$ , y  $a_2 = e_3$ . Los vectores unitarios  $e_1, e_2, e_3$ , que son respectivamente  $a_1, a_4, a_2$ , son restaurados por medio de operaciones matriciales elementales obteniendo el siguiente tableau:

## 120 La programación lineal

	$h$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	
	1	0	0	21/2	0	5/2	-3
$a_1$	0	1	0	1	0	0	4
$a_4$	0	0	0	3/2	1	1/2	3
$a_2$	0	0	1	-3/2	0	-1/2	3

En este ejemplo no es necesario seguir iterando en la fase dos, pues al restaurar los vectores unitarios correspondientes a la base del tableau óptimo de la fase uno, se obtuvieron por pura coincidencia las condiciones de optimalidad  $(z_j - c_j) \geq 0$  para toda  $j$  en  $\mathbf{A}$ . Por lo general éste no será el caso y será necesario hacer varias iteraciones del *método simplex* en la segunda fase. La solución óptima es la misma que la obtenida en el *método gráfico* y en el *método de penalización*, es decir

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_B \\ \mathbf{X}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_4 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_5 \\ W_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$h = -Z = -3$$

o

$$Z = 3.$$

Este es el método utilizado en los programas de bibliotecas de las computadoras electrónicas.<sup>29</sup>

### Problemas sin solución

Tanto el *método de penalización* como el de *doble fase* permiten identificar cuándo un programa lineal no tiene solución. Los problemas lineales no tienen solución cuando sus restricciones son inconsistentes. Tal es el caso del siguiente programa

$$\text{Máx } Z = 2X_1 + 2X_2$$

sujeto a

$$X_1 + X_2 \leq 2$$

$$X_1 + X_2 \geq 4$$

$$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0,$$

cuya representación gráfica se da a continuación

<sup>29</sup> Un pequeño resumen de diferentes programas de biblioteca para resolver problemas lineales en la computadora se da al finalizar este capítulo.

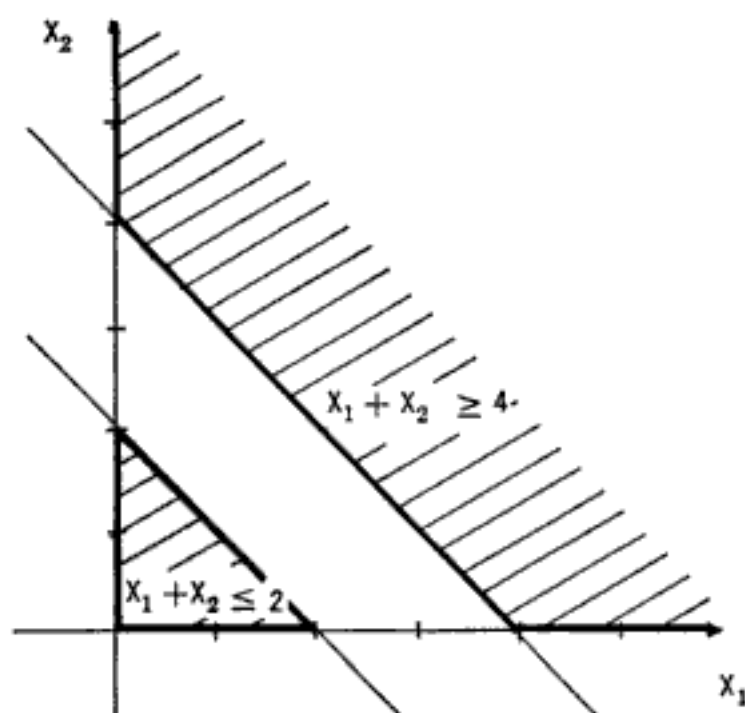


Figura 2.13

Como podrá observar el lector, no existen valores de  $X_1$  y  $X_2$  que puedan estar *simultáneamente* en ambas regiones sombreadas. A continuación se ve cómo se identifica esta condición por medio del *método simplex*.

	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	W	
	1	-2	-2	0	0	M	0
$a_3$	0	1	1	1	0	0	2
$a_{10}$	0	1	1	0	-1	1	4
	1	$-2-M$	$-2-M$	0	M	0	$-4M$
$a_3$	0	①	1	1	0	0	2
$a_{10}$	0	1	1	0	-1	1	4
	1	0	0	$2+M$	M	0	$4-2M$
$a_1$	0	1	1	1	0	0	2
$a_{10}$	0	0	0	-1	-1	1	2

La solución óptima al programa *modificado* se obtuvo en el último tableau. Sin embargo, como la variable artificial no es nula, sino que  $W = 2$ , el problema original no tiene solución.

### Problemas degenerados y las reglas lexicográficas

Se ha mencionado anteriormente que al existir un empate en decidir qué vector entra a la base, este puede romperse arbitrariamente sin

## 122 La programación lineal

ningún efecto considerable en el número de iteraciones del *método simplex*. En cambio un empate en el vector de salida no puede decidirse arbitrariamente porque *se puede ocasionar un ciclaje* tal, que nunca se obtenga la solución óptima. Por ejemplo, se analiza el siguiente problema lineal donde en la primera iteración se pueden seleccionar como vector de salida tanto  $\mathbf{a}_5$  como  $\mathbf{a}_6$ . Seleccionando  $\mathbf{a}_5$  causa un ciclaje,<sup>30</sup> tal como se ve a continuación:

$$\text{Máx } Z = 3/4X_1 - 20X_2 + 1/2X_3 - 6X_4$$

sujeto a

$$1/4X_1 - 8X_2 - X_3 + 9X_4 \leq 0$$

$$1/2X_1 - 12X_2 - 1/2X_3 + 3X_4 \leq 0$$

$$X_5 \leq 1$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, X_4 \geq 0.$$

	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	
	1	-3/4	20	-1/2	6	0	0	0	0
$\mathbf{a}_5$	0	1/4	-8	-1	9	1	0	0	0←
$\mathbf{a}_6$	0	1/2	-12	-1/2	3	0	1	0	0
$\mathbf{a}_7$	0	0	0	1	0	0	0	1	1
	1	0	-4	-7/2	33	3	0	0	0
$\mathbf{a}_1$	0	1	-32	-4	36	4	0	0	0
$\mathbf{a}_6$	0	0	4	3/2	-15	-2	1	0	0←
$\mathbf{a}_7$	0	0	0	1	0	0	0	1	1
	1	0	0	-2	18	1	1	0	0
$\mathbf{a}_1$	0	1	0	8	-84	-12	8	0	0←
$\mathbf{a}_2$	0	0	1	3/8	-15/4	-1/2	1/4	0	0
$\mathbf{a}_7$	0	0	0	1	0	0	0	1	1
	1	1/4	0	0	-3	-2	3	0	0
$\mathbf{a}_3$	0	1/8	0	1	-21/2	-3/2	1	0	0
$\mathbf{a}_2$	0	-3/64	1	0	3/16	1/16	-1/8	0	0←
$\mathbf{a}_7$	0	-1/8	0	0	21/2	3/2	-1	1	1
	1	-1/2	16	0	0	-1	1	0	0
$\mathbf{a}_3$	0	-5/2	56	1	0	2	-6	0	0←
$\mathbf{a}_4$	0	-1/4	16/3	0	1	1/3	-2/3	0	0
$\mathbf{a}_7$	0	5/2	-56	0	0	-2	6	1	1

<sup>30</sup> Se vuelve al tableau original después de 6 iteraciones.

	1	-7/4	44	1/2	0	0	-2	0	0
$a_5$	0	-5/4	28	1/2	0	1	-3	0	1
$a_4$	0	1/6	-4	-1/6	1	0	1/3	0	0 ←
$a_7$	0	0	0	1	0	0	0	1	0
	1	-3/4	20	-1/2	6	0	0	0	0
$a_5$	0	1/4	-8	-1	9	1	0	0	0
$a_6$	0	1/2	-12	-1/2	3	0	1	0	0
$a_7$	0	0	0	1	0	0	0	1	1

Nótese que después de seis iteraciones se ha vuelto al punto inicial y aún no se tienen las condiciones de optimalidad. Nótese también que en cada iteración se están obteniendo soluciones factibles básicas degeneradas. Por ejemplo, en la primera iteración se tiene

$$X = \begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que es una solución factible básica degenerada.

El ciclaje que conduce al punto inicial de partida se debe a "lo degenerado" de las soluciones factibles básicas. Para evitar este tipo de problemas se usan las llamadas reglas lexicográficas.

*Definición.* Un vector es lexicográficamente positivo si la primera componente diferente de cero es positiva. Un vector lexicográficamente positivo se escribe  $X \succ 0$ .

*Ejemplo:*

$$\begin{aligned} X &= (0, 3, -2, 9) \succ 0 \\ Y &= (108, -3, 12) \succ 0 \\ Z &= (0, 0, -3, 12) \text{ no es } \succ 0. \end{aligned}$$

*Definición.* Un vector  $X$  es lexicográficamente mayor que otro vector  $Y$ , si el vector  $X - Y \succ 0$ .

*Ejemplo:*

Sean

$$\begin{aligned} X &= (0, 3, -2) \\ Y &= (1, 2, 2) \end{aligned}$$

entonces

$$Y - X = (1, -1, 4) \succ 0$$

pero

$$X - Y = (-1, 1, -4) \text{ no es } \succ 0.$$

Aplicando las reglas lexicográficas para romper un empate en decidir qué vector sale de la base, al usar el criterio

## 124 La programación lineal

$$\frac{X_{B_r}}{Y_{rk}} = \text{Mín}_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{X_{B_i}}{Y_{ik}} \mid Y_{ik} > 0 \right\}$$

se tienen los siguientes pasos.

*Paso 1.* Arregle el tableau tal que los primeros  $m$  vectores del tableau sean los de la base  $\mathbf{B}$ .

*Paso 2.* Calcule el mínimo de los siguientes cocientes:

$$\text{Mín}_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{X_{B_i}}{Y_{ik}} \mid Y_{ik} > 0 \right\}.$$

Si el mínimo es único, por ejemplo  $i = r$ , entonces  $X_{B_r}$  sale de la base. En el caso contrario, constrúyase un conjunto de índices  $\mathbf{I}_1 \subset \mathbf{I}$  (donde  $\mathbf{I}$  es el conjunto de índices de todas las columnas que están en la base) formado por todos los índices para los cuales

$$\frac{X_{B_i}}{Y_{ik}} = \text{constante},$$

y esa constante sea la mínima de todos los cocientes calculados en el paso 2.

*Paso 3.* Evalúese

$$\text{Mín}_{i \in \mathbf{I}_1} \left\{ \frac{Y_{i1}}{Y_{ik}} \right\}.$$

Si el mínimo es único, por ejemplo  $i = r$ , entonces el vector  $\mathbf{a}_r$  sale de la base. En caso contrario constrúyase un conjunto de índices  $\mathbf{I}_2 \subset \mathbf{I}_1$ , formado por todos los índices para los cuales

$$\frac{Y_{i1}}{Y_{ik}} = \text{constante}, \quad i \in \mathbf{I}_1$$

y esa constante es la mínima de todos los cocientes calculados en el paso 3.

*Paso 4.* Calcúlese

$$\text{Mín}_{i \in \mathbf{I}_2} \left[ \frac{Y_{i2}}{Y_{ik}} \right]$$

y prosiga análogamente al paso 3.

Así se crean conjuntos  $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \dots, \mathbf{I}_p$ , tal que  $\mathbf{I}_p \subset \mathbf{I}_{p-1} \subset \dots \subset \mathbf{I}_1 \subset \mathbf{I}_2 \subset \mathbf{I}$ . Como el número de columnas y renglones en la base  $\mathbf{B}$  es finito, eventualmente se llega a romper cualquier empate, y se hace la selección correcta del vector que debe dejar la base. Este tipo de reglas no permiten el ciclaje de las iteraciones del *método simplex*. La mayoría de los programas comerciales de computadoras que resuelven problemas

de programación lineal ya vienen equipados con este tipo de reglas lexicográficas.

*Ejemplo.* Utilizando las reglas lexicográficas para resolver el problema anterior se tiene.

*Paso 1.* Se reescribe el tableau original, pero con los vectores de la base  $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_7)$  en las primeras tres posiciones.

	Z	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
	1	0	0	0	$-3/4$	20	$-1/2$	6	0
$\mathbf{a}_5$	0	1	0	0	$1/4$	-8	-1	9	0
$\mathbf{a}_6$	0	0	1	0	$1/2$	-12	$-1/2$	3	0 ←
$\mathbf{a}_7$	0	0	0	1	0	0	1	0	1

Note que

$$\mathbf{I} = \{5, 6, 7\}.$$

Aplicando la regla

$$\text{Mín}_{i=1,2,3} \left\{ \frac{X_{B_i}}{Y_{ik}} \mid Y_{ik} > 0 \right\},$$

se tiene

$$\text{Mín} \left\{ \frac{0}{1/4}, \frac{0}{1/2} \right\} = \text{Mín} \{0, 0\} = 0,$$

por lo que

$$\mathbf{I}_1 = \{5, 6\}.$$

Nótese que

$$\mathbf{I}_1 = \{5, 6\} \subset \mathbf{I} = \{5, 6, 7\}.$$

*Paso 2.* Evaluando

$$\text{Mín}_{i \in \mathbf{I}_1} \left\{ \frac{Y_{i1}}{Y_{ik}} \right\}$$

donde  $k = 4$ , se tiene

$$\text{Mín} \left\{ \frac{Y_{21}}{Y_{24}}, \frac{Y_{31}}{Y_{34}} \right\} = \text{Mín} \left\{ \frac{1}{1/4}, \frac{0}{1/2} \right\} = \text{Mín} \{4, 0\} = 0,$$

por lo que  $\mathbf{a}_6$  deja la base y el pivote es  $Y_{24}$ . Ejecutando operaciones matriciales elementales, dejando al pivote como uno y al resto de la columna  $\mathbf{a}_1$  con ceros, se genera el siguiente tableau.



	Z	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	
	1	0	3/2	0	0	2	-5/4	21/2	0
$a_5$	0	1	-1/2	0	0	-2	-3/4	15/2	0
$a_1$	0	0	2	0	1	-24	-1	6	0
$a_7$	0	0	0	1	0	0	①	0	1←
	1	0	3/2	5/4	0	2	0	21/2	5/4
$a_5$	0	1	-1/2	3/4	0	-2	0	15/2	3/4
$a_1$	0	0	2	1	1	-24	0	6	1
$a_3$	0	0	0	1	0	0	1	0	1

Una iteración adicional genera la solución óptima que es:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_B \\ \mathbf{X}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_5 \\ X_1 \\ X_3 \\ X_2 \\ X_4 \\ X_6 \\ X_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

con

$$Z = 5/4.$$

### 2.3. Dualidad

Asociada a cualquier estructura canónica de programación lineal ( $P_1$ )

$$\text{Máx } Z = \mathbf{c}\mathbf{X}$$

sujeto a

$$\mathbf{A}\mathbf{X} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}, \quad (P_1)$$

que se denomina el *problema primario*, se define la siguiente estructura<sup>31</sup> ( $D_1$ )

$$\text{Mín } \mathbf{G} = \mathbf{b}^T\mathbf{Y}$$

sujeto a

$$\mathbf{A}^T\mathbf{Y} \geq \mathbf{c}^T$$

$$\mathbf{Y} \geq \mathbf{0} \quad (D_1)$$

que se denomina el *problema dual*.

<sup>31</sup> La  $T$  significa traspuesta. Véase el apéndice B.

La siguiente tabla proporciona la descripción de cada uno de los elementos del problema primario y dual.

**Tabla 2-3**

<i>Problema</i>	<i>Elemento</i>	<i>Dimensión</i>	<i>Característica</i>
Primario	<b>X</b>	Vector columna con $n$ componentes.	Vector de variables de actividad primaria.
	<b>c</b>	Vector renglón con $n$ componentes.	Vector de precios unitarios primarios.
	<b>b</b>	Vector columna con $m$ componentes.	Vector de disponibilidad de recursos primarios.
	<b>A</b>	Matriz de $m$ por $n$ .	Matriz de coeficientes tecnológicos.
	<b>Z</b>	Escalar	Función objetivo primaria.
Dual	<b>0</b>	Vector columna con $n$ ceros	
	<b>Y</b>	Vector columna con $m$ componentes.	Vector de variables de actividades duales.
	<b>c<sup>T</sup></b>	Transpuesta del vector <b>c</b> , o sea, vector columna con $n$ componentes.	Vector de disponibilidad de recursos duales.
	<b>b<sup>T</sup></b>	Transpuesta del vector <b>b</b> , o sea, vector renglón con $m$ componentes.	Vector de precios unitarios duales.
	<b>A<sup>T</sup></b>	Transpuesta de la matriz <b>A</b> , o sea, matriz de $n$ por $m$ .	Matriz de coeficientes tecnológicos.
	<b>G</b>	Escalar.	Función objetivo dual.
	<b>0</b>	Vector columna con $m$ ceros.	

Antes de pasar a discutir las propiedades y usos de la dualidad, se ven a continuación otras formas de dualidad.

*Forma 2.* Dado el problema primario ( $P_2$ ) su dual es ( $D_2$ ).

$$\text{Mín } Z = \mathbf{cX}$$

sujeto a

$$\mathbf{AX} \geq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

( $P_2$ )

$$\text{Máx } \mathbf{G} = \mathbf{b}^T \mathbf{Y}$$

sujeto a

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Y} \leq \mathbf{c}^T$$

$$\mathbf{Y} \geq \mathbf{0}.$$

( $D_2$ )

## 128 La programación lineal

*Prueba.* El problema primario ( $P_2$ ) puede escribirse como

$$\text{Máx } -Z = -\mathbf{c}\mathbf{X}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} -\mathbf{A}\mathbf{X} &\leq -\mathbf{b} \\ \mathbf{X} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

y aplicando la definición de dualidad se tiene

$$\text{Mín } -\mathbf{G} = -\mathbf{b}^T \mathbf{Y}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} -\mathbf{A}^T \mathbf{Y} &\geq -\mathbf{c}^T \\ \mathbf{Y} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

que es equivalente a

$$\text{Máx } \mathbf{G} = \mathbf{b}^T \mathbf{Y}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{Y} &\leq \mathbf{c}^T \\ \mathbf{Y} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

*Forma 3.* Dado el problema primario ( $P_3$ ) su dual es ( $D_3$ ).

$$\text{Máx } Z = \mathbf{c}\mathbf{X}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{X} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{X} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

( $P_3$ )

$$\text{Mín } \mathbf{G} = \mathbf{b}^T \mathbf{Y}$$

sujeto a

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Y} \geq \mathbf{c}^T$$

$\mathbf{Y}$  no restringida en signo. ( $D_3$ )

*Prueba.* El problema primario ( $P_3$ ) puede escribirse como

$$\text{Máx } Z = \mathbf{c}\mathbf{X}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{X} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{A}\mathbf{X} &\geq \mathbf{b} \\ \mathbf{X} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

o

$$\text{Máx } Z = \mathbf{c}\mathbf{X}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{X} &\leq \mathbf{b} \\ -\mathbf{A}\mathbf{X} &\leq -\mathbf{b} \\ \mathbf{X} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Aplicando la definición de dualidad, asociando al vector dual  $\mathbf{W}$  con las restricciones primarias  $\mathbf{A}\mathbf{X} \leq \mathbf{b}$  y al vector dual  $\mathbf{V}$  con las restricciones primarias  $-\mathbf{A}\mathbf{X} \leq -\mathbf{b}$  se tiene:

$$\begin{aligned} & \text{Mín } G = \mathbf{b}^T \mathbf{W} - \mathbf{b}^T \mathbf{V} \\ \text{sujeto a} & \quad \mathbf{A}^T \mathbf{W} - \mathbf{A}^T \mathbf{V} \geq \mathbf{c}^T \\ & \quad \mathbf{W} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{V} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Agrupando se tiene

$$\begin{aligned} & \text{Mín } G = \mathbf{b}^T (\mathbf{W} - \mathbf{V}) \\ \text{sujeto a} & \quad \mathbf{A}^T (\mathbf{W} - \mathbf{V}) \geq \mathbf{c}^T \\ & \quad \mathbf{W} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{V} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Si se hace  $\mathbf{Y} = \mathbf{W} - \mathbf{V}$ ,  $\mathbf{W} \geq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{V} \geq \mathbf{0}$ , se tiene que el vector  $\mathbf{Y}$  es no restringido en signo, pues:

- a) si  $\mathbf{W} > \mathbf{V}$  entonces  $\mathbf{Y} > \mathbf{0}$ ,
- b) si  $\mathbf{W} = \mathbf{V}$  entonces  $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$ ,
- c) si  $\mathbf{W} < \mathbf{V}$  entonces  $\mathbf{Y} < \mathbf{0}$ .

Por lo tanto la forma anterior queda

$$\begin{aligned} & \text{Mín } G = \mathbf{b}^T \mathbf{Y} \\ \text{sujeto a} & \quad \mathbf{A}^T \mathbf{Y} \geq \mathbf{c}^T \\ & \quad \mathbf{Y} \text{ no restringido en signo.} \end{aligned}$$

*Forma 4.* Dado el problema primario  $(P_4)$  su dual es  $(D_4)$ .

$$\begin{aligned} & \text{Máx } Z = \mathbf{c}^T \mathbf{X} \\ \text{sujeto a} & \quad \mathbf{A} \mathbf{X} \geq \mathbf{b} \\ & \quad \mathbf{X} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{P_4}$$

$$\begin{aligned} & \text{Mín } G = \mathbf{b}^T \mathbf{Y} \\ \text{sujeto a} & \quad \mathbf{A}^T \mathbf{Y} \geq \mathbf{c}^T \\ & \quad \mathbf{Y} \leq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{D_4}$$

*Prueba.* El programa primario  $(P_4)$  puede escribirse como

$$\begin{aligned} & \text{Máx } Z = \mathbf{c}^T \mathbf{X} \\ \text{sujeto a} & \quad -\mathbf{A} \mathbf{X} \leq -\mathbf{b} \\ & \quad \mathbf{X} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Aplicando la definición de dualidad se tiene

$$\begin{aligned} & \text{Mín } G = -\mathbf{b}^T \mathbf{W} \\ \text{sujeto a} & \quad -\mathbf{A}^T \mathbf{W} \geq \mathbf{c}^T \\ & \quad \mathbf{W} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

### 130 La programación lineal

Haciendo  $\mathbf{Y} = -\mathbf{W}$  se tiene

$$\text{Mín } \mathbf{G} = \mathbf{b}^T \mathbf{Y}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{Y} &\geq \mathbf{c}^T \\ \mathbf{Y} &\leq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Se resumen a continuación los resultados obtenidos en las cuatro formas de dualidad.

<i>Primario</i>	<i>Dual</i>
Máx	Mín
Mín	Máx
restricción <sup>32</sup> $i \leq b_i$	variable $i \geq 0$
restricción <sup>32</sup> $i = b_i$	variable $i$ no restringida
restricción <sup>32</sup> $i \geq b_i$	variable $i \leq 0$
variable <sup>32</sup> $i \geq 0$	restricción $i \geq c_i$
variable <sup>32</sup> $i$ no restringida	restricción $i = c_i$
variable <sup>32</sup> $i \leq 0$	restricción $i \leq c_i$ .

*Ejemplo.* Sea el programa primario

$$\text{Máx } Z = 3X_1 + 5X_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} X_1 &\leq 4 \\ X_2 &\leq 6 \\ 3X_1 + 2X_2 &\leq 18 \\ X_1 + 4X_2 &\leq 10 \\ X_1 \geq 0, X_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Se comprueba que el programa dual es

$$\text{Mín } \mathbf{G} = 4Y_1 + 6Y_2 + 18Y_3 + 10Y_4$$

sujeto a

$$\begin{aligned} Y_1 &+ 3Y_3 + Y_4 \geq 3 \\ Y_2 &+ 2Y_3 + 4Y_4 \geq 5 \\ Y_1 \geq 0, Y_2 \geq 0, Y_3 \geq 0, Y_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

La forma del primario es

$$\text{Máx } Z = \mathbf{c}\mathbf{X}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{X} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{X} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

<sup>32</sup> Cuando la función objetivo primaria es  $\text{Máx } Z = \mathbf{c}\mathbf{X}$ .

cuya forma dual correspondiente ( $D_1$ ) es

$$\text{Mín } G = \mathbf{b}^T \mathbf{Y}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{Y} &\geq \mathbf{c}^T \\ \mathbf{Y} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (D_2)$$

$$\text{Como } \mathbf{c} = (3, 5), \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \\ 10 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}, \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}^T = (4, 6, 18, 10), \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix}$$

ejecutando las operaciones matriciales indicadas en ( $D_2$ ) se obtiene la forma dual deseada.

*Ejemplo.* Dado el problema primario

$$\text{Máx } Z = 3X_1 + 8X_2 + 2X_3 - 4X_4$$

sujeto a

$$X_1 + X_2 + 2X_3 + 3X_4 \leq 5$$

$$X_1 - X_2 = -1$$

$$X_3 - X_4 \geq 46$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, X_4 \geq 0,$$

compruebe que el dual correspondiente es

$$\text{Mín } G = 5Y_1 - Y_2 + 46Y_3$$

sujeto a

$$Y_1 + Y_2 \geq 3$$

$$Y_1 - Y_2 \geq 8$$

$$2Y_1 + Y_3 \geq 2$$

$$3Y_1 - Y_3 \geq -4$$

$$Y_1 \geq 0$$

$$Y_2 \text{ no restringido}$$

$$Y_3 \leq 0.$$

### Usos de la formulación dual

Las estructuras duales permiten entre otras cosas:

- a) Resolver problemas lineales que tienen más restricciones que actividades. Como el grado de dificultad en resolver un programa lineal por medio de una computadora está en función del nú-

## 132 La programación lineal

mero de filas<sup>33</sup> de la matriz  $\mathbf{A}$  y no en el número de columnas, al aplicarse la dualidad a un problema primario donde  $m > n$ , se obtiene otro problema lineal donde el número de filas  $n$  es menor al número de columnas  $m$ . Los teoremas que a continuación se demuestran, permiten verificar que resolviendo ya sea el primario, se resuelve automáticamente su correspondiente dual y viceversa.

- b) Hacer interpretaciones económicas de las soluciones óptimas de los problemas de programación lineal.
- c) Generar nuevos algoritmos para la solución de problemas de redes de optimización.<sup>34</sup>
- d) Generar métodos como el *dual simplex* para el análisis de sensibilidad de los programas de programación lineal.

### Teoremas concernientes a estructuras primarias y sus duales asociadas

En los teoremas que se prueban a continuación se hace uso de la forma  $(P_1)$  y  $(D_1)$  o sea

<i>Primario</i>	<i>Dual</i>
Máx $Z = \mathbf{c}\mathbf{X}$	Mín $G = \mathbf{b}^T \mathbf{Y}$
sujeto a	sujeto a
$\mathbf{A}\mathbf{X} \leq \mathbf{b}$	$\mathbf{A}^T \mathbf{Y} \geq \mathbf{c}^T$
$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$	$\mathbf{Y} \geq \mathbf{0}$ .
$(P_1)$	$(D_1)$

**Teorema 2.9.** Si  $\bar{\mathbf{X}}$  y  $\bar{\mathbf{Y}}$  son soluciones factibles a un par de programas primario  $(P_1)$  y su correspondiente dual  $(D_1)$  entonces

$$Z = \mathbf{c}\bar{\mathbf{X}} \leq \mathbf{b}^T \bar{\mathbf{Y}} = G.$$

*Prueba.* Como  $\bar{\mathbf{X}}$  es factible en  $(P_1)$ , cumple con  $\mathbf{A}\bar{\mathbf{X}} \leq \mathbf{b}$  y  $\bar{\mathbf{X}} \geq \mathbf{0}$ . Como  $\bar{\mathbf{Y}}$  es factible en  $(D_1)$  cumple con  $\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{Y}} \geq \mathbf{c}^T$  y  $\bar{\mathbf{Y}} \geq \mathbf{0}$ . Premultiplicando  $\mathbf{A}\bar{\mathbf{X}} \leq \mathbf{b}$  por  $\bar{\mathbf{Y}} \geq \mathbf{0}$  y a  $\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{Y}} \geq \mathbf{c}^T$  por  $\bar{\mathbf{X}} \geq \mathbf{0}$  se tiene

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Y}}^T \mathbf{A}\bar{\mathbf{X}} &\leq \bar{\mathbf{Y}}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \bar{\mathbf{Y}} \\ \bar{\mathbf{Y}}^T \mathbf{A}\bar{\mathbf{X}} &= \bar{\mathbf{X}}^T \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{Y}} \geq \bar{\mathbf{X}}^T \mathbf{c}^T = \mathbf{c}\bar{\mathbf{X}}. \end{aligned}$$

De estas dos últimas expresiones se concluye que

$$Z = \mathbf{c}\bar{\mathbf{X}} \leq \bar{\mathbf{Y}}^T \mathbf{A}\bar{\mathbf{X}} \leq \mathbf{b}^T \bar{\mathbf{Y}} = G$$

y el teorema queda demostrado.

<sup>33</sup> Recuérdese que dada una matriz  $A$  de  $m$  por  $n$ , la base  $B$  es de  $m$  por  $m$ .

<sup>34</sup> A tratarse en el capítulo 4.

El teorema 2.9 únicamente dice que para cualquier par de soluciones factibles  $(\bar{X}, \bar{Y})$  de  $(P_1)$  y  $(D_1)$ , la función objetivo primario es siempre menor o igual a la función objetivo dual.

**Teorema 2.10. Teorema de dualidad.** Dado un par de problemas primario  $(P_1)$  y su correspondiente dual  $(D_1)$  *únicamente uno y sólo uno* de los tres siguientes casos pueden ocurrir.

- a) Ambos programas tienen soluciones óptimas y sus funciones objetivos óptimas son iguales, es decir, si  $X^*$  es óptimo para  $(P_1)$  y  $Y^*$  es óptimo para  $(D_1)$  entonces

$$Z^* = cX^* = b^T Y^* = G^*.$$

- b) Si el problema primario  $(P_1)$  no tiene soluciones factibles y el problema dual  $(D_1)$  tiene al *menos una*, entonces, el dual tiene una solución óptima no acotada y viceversa, si el problema dual *no* tiene soluciones factibles y el primario tiene al *menos una*, entonces, el primario tiene una solución óptima no acotada.
- c) Ambos problemas  $(P_1)$  y  $(D_1)$  no tienen solución.

*Prueba.* Está dada en el apéndice B (Teorema B-7).

El teorema 2.10 es muy importante porque la información generada por la solución de uno de los problemas (ya sea el primario o el dual) permite conocer la solución del otro, sin tenerlo que resolver.

**Teorema 2.11.** La formulación dual de un problema dual genera la representación primaria.

*Prueba.* Considérese el problema primario:

$$\begin{aligned} & \text{Máx } Z = c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_nX_n \\ \text{sujeto a} & \\ & a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n \leq b_1 \\ & a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n \leq b_2 \\ \text{(P)} & \dots\dots\dots \\ & a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n \leq b_m \\ & X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, \dots X_n \geq 0, \end{aligned}$$

cuya formulación dual es

$$\begin{aligned} & \text{Mín } G = b_1Y_1 + b_2Y_2 + \dots + b_mY_m \\ \text{sujeto a} & \\ & a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 + \dots + a_{m1}Y_m \geq c_1 \\ & a_{12}Y_1 + a_{22}Y_2 + \dots + a_{m2}Y_m \geq c_2 \\ \text{(D)} & \dots\dots\dots \\ & a_{1n}Y_1 + a_{2n}Y_2 + \dots + a_{mn}Y_m \geq c_n \\ & Y_1 \geq 0, Y_2 \geq 0, \dots Y_m \geq 0. \end{aligned}$$



### 134 La programación lineal

Una forma equivalente del programa dual ( $D$ ) es

$$\begin{aligned} \text{Máx } -\mathbf{G} &= -b_1 Y_1 - b_2 Y_2 - \dots - b_m Y_m \\ \text{sujeto a} & \\ & -a_{11} Y_1 - a_{21} Y_2 - \dots - a_{m1} Y_m \leq -c_1 \\ & -a_{12} Y_1 - a_{22} Y_2 - \dots - a_{m2} Y_m \leq -c_2 \\ & \dots \dots \dots \\ & -a_{1n} Y_1 - a_{2n} Y_2 - \dots - a_{mn} Y_m \leq -c_n \\ & Y_1 \geq 0, \quad Y_2 \geq 0, \quad \dots \quad Y_m \geq 0. \end{aligned}$$

La formulación dual de esta última estructura lineal es

$$\begin{aligned} \text{Mín } -Z &= -c_1 X_1 - c_2 X_2 - \dots - c_n X_n \\ \text{sujeto a} & \\ & -a_{11} X_1 - a_{12} X_2 - \dots - a_{1n} X_n \geq -b_1 \\ & -a_{21} X_1 - a_{22} X_2 - \dots - a_{2n} X_n \geq -b_2 \\ & \dots \dots \dots \\ & -a_{m1} X_1 - a_{m2} X_2 - \dots - a_{mn} X_n \geq -b_m \\ & X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad \dots \quad X_n \geq 0, \end{aligned}$$

que es equivalente al programa primario ( $P$ ). El teorema queda demostrado. Cualquier otra forma se probaría idénticamente utilizando las reglas de equivalencia apropiada.

**Teorema 2.12.** Dado el siguiente par de programas primario y dual

<i>Primario</i>	<i>Dual</i>
Mín $Z = \mathbf{cX}$	Mín $\mathbf{G} = \mathbf{b}^T \mathbf{Y}$
sujeto a	sujeto a
$\mathbf{AX} \geq \mathbf{b}$ $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$ (P)	$\mathbf{A}^T \mathbf{Y} \leq \mathbf{c}^T$ $\mathbf{Y} \geq \mathbf{0}$ , (D)

una condición necesaria y suficiente para que  $\bar{\mathbf{X}}$  y  $\bar{\mathbf{Y}}$  sean óptimas respectivamente de ( $P$ ) y de ( $D$ ) es

$$\bar{\mathbf{Y}}^T (\mathbf{A}\bar{\mathbf{X}} - \mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

y

$$\bar{\mathbf{X}}^T (\mathbf{c}^T - \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{Y}}) = \mathbf{0}.$$

*Prueba.* Como  $\bar{\mathbf{X}}$  es factible para ( $P$ ) y  $\bar{\mathbf{Y}}$  para ( $D$ ) se tiene

$\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{Y}} \leq \mathbf{c}^T$	$\mathbf{A}\bar{\mathbf{X}} \geq \mathbf{b}$
$\bar{\mathbf{Y}} \geq \mathbf{0}$	$\bar{\mathbf{X}} \geq \mathbf{0}$

o lo que es lo mismo

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{X}} - \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$$

y

$$\mathbf{c}^T - \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{Y}} \geq \mathbf{0}.$$

Multiplicando a la primera desigualdad por  $\bar{\mathbf{Y}}^T \geq \mathbf{0}$  y a la segunda por  $\bar{\mathbf{X}}^T \geq \mathbf{0}$  no se afecta el sentido de la desigualdad, obteniéndose

$$\begin{aligned}\alpha &= \bar{\mathbf{Y}}^T (\mathbf{A}\bar{\mathbf{X}} - \mathbf{b}) \geq \mathbf{0} \\ \beta &= \bar{\mathbf{X}}^T (\mathbf{c}^T - \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{Y}}) \geq \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Sumando  $\alpha$  y  $\beta$  se tiene

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= \bar{\mathbf{Y}}^T (\mathbf{A}\bar{\mathbf{X}} - \mathbf{b}) + \bar{\mathbf{X}}^T (\mathbf{c}^T - \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{Y}}) \geq \mathbf{0} \\ &= \bar{\mathbf{Y}}^T \mathbf{A}\bar{\mathbf{X}} - \mathbf{b}^T \bar{\mathbf{Y}} + \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{Y}}^T \mathbf{A}\bar{\mathbf{X}} \geq \mathbf{0} \\ &= \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{X}} - \mathbf{b}^T \bar{\mathbf{Y}} \geq \mathbf{0},\end{aligned}$$

o sea

$$Z = \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{X}} \geq \mathbf{b}^T \bar{\mathbf{Y}} = G$$

Pero del teorema 2.9 se tiene que

$$Z = \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{X}} < \mathbf{b}^T \bar{\mathbf{Y}} = G$$

por lo que

$$Z = \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{X}} = \mathbf{b}^T \bar{\mathbf{Y}} = G$$

concluyendo que

$$\alpha + \beta = \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{X}} - \mathbf{b}^T \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{0}.$$

Como se supuso,  $\alpha \geq \mathbf{0}$  y  $\beta \geq \mathbf{0}$  se tiene que  $\alpha = \mathbf{0}$  y  $\beta = \mathbf{0}$ .

El teorema queda demostrado. Este teorema recibe el nombre de *teorema de holgura complementaria débil*.

**Teorema 2.13.** Dado un par de programas primario y su correspondiente dual se tienen las siguientes implicaciones:

- |    |  |         |  |
|----|--|---------|--|
| a) | $\bar{\mathbf{Y}} > \mathbf{0}$                | implica | $\mathbf{A}\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{b}$      |
| b) | $\mathbf{A}\bar{\mathbf{X}} > \mathbf{b}$      | implica | $\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{0}$                |
| c) | $\bar{\mathbf{X}} > \mathbf{0}$                | implica | $\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{c}^T$ |
| d) | $\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{Y}} > \mathbf{c}^T$ | implica | $\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$ .              |

*Prueba.* Se obtiene directamente de la aplicación del teorema 2.12.

Las relaciones (a), (b), (c) y (d) del teorema 2.13 deben ser ciertas para cualquier par de soluciones óptimas  $\bar{\mathbf{X}}$  y  $\bar{\mathbf{Y}}$  de un programa primario y su correspondiente dual, respectivamente. Puede darse el caso de que  $\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{A}\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{b}$ , o que  $\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{c}^T$ . El siguiente teorema, lla-

## 136 La programación lineal

mado de *holgura complementaria* evita lo anterior, es decir que no puede ocurrir simultáneamente que  $\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{c}^T$ , o  $\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{A} \bar{\mathbf{X}} = \mathbf{b}$ .

**Teorema 2.14.** *Teorema de holgura complementaria.* Dado un par de programas, primario y su correspondiente dual con soluciones factibles, entonces existen soluciones óptimas  $\bar{\mathbf{X}}$  y  $\bar{\mathbf{Y}}$  tal que

$$(\mathbf{A} \bar{\mathbf{X}} - \mathbf{b}) + \bar{\mathbf{Y}}^T > \mathbf{0}$$

y

$$(\mathbf{c}^T - \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{Y}}) + \bar{\mathbf{X}}^T > \mathbf{0}.$$

*Prueba.* Aparece en el apéndice B (teorema B-8).

El teorema 2.14 implica que

a) si  $(\mathbf{A} \bar{\mathbf{X}} - \mathbf{b}) = \mathbf{0}$  entonces  $\bar{\mathbf{Y}} > \mathbf{0}$ ,

b) si  $\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{0}$  entonces  $\mathbf{A} \bar{\mathbf{X}} - \mathbf{b} > \mathbf{0}$ ,

c) si  $(\mathbf{c}^T - \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{Y}}) = \mathbf{0}$  entonces  $\bar{\mathbf{X}} > \mathbf{0}$ ,

d) si  $\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$  entonces  $\mathbf{c}^T - \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{Y}} > \mathbf{0}$ .

### Solución de problemas duales

La solución de un problema lineal primario por medio del *método simplex*, resuelve implícitamente el problema dual.

Supóngase un problema primario en forma canónica

$$\text{Máx } Z = \mathbf{c} \mathbf{X}$$

sujeto a

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}.$$

Supóngase que la matriz de coeficientes tecnológicos  $\mathbf{A}$  se ha partido en un base  $\mathbf{B}$  y el complemento de la partición  $\mathbf{N}$ . Es decir

$$\mathbf{A} = (\mathbf{B} \mid \mathbf{N}).$$

Entonces el programa primario anterior puede escribirse

$$\text{Máx } Z = \mathbf{c}_B \mathbf{X}_B + \mathbf{c}_N \mathbf{X}_N$$

sujeto a

$$\mathbf{B} \mathbf{X}_B + \mathbf{N} \mathbf{X}_N = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{X}_B \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{X}_N = \mathbf{0}.$$

La solución de este problema, como ya se sabe, consiste en hacer al vector  $\mathbf{X}_N$  que no está en la base igual a cero y resolver el vector básico

$\mathbf{X}_B$  en términos de la base  $\mathbf{B}$ , es decir  $\mathbf{X}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$ . La función objetivo se convierte entonces en

$$Z = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}.$$

La función objetivo dual como se vio anteriormente es

$$\mathbf{b}^T \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T \mathbf{b}.$$

En condiciones de optimalidad, la función objetivo primaria es igual a la función objetivo dual, es decir

$$\hat{\mathbf{c}}_B \hat{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{b} = \hat{\mathbf{Y}}^T \mathbf{b},$$

donde  $\hat{\mathbf{B}}^{-1}$  es la inversa de la base óptima  $\hat{\mathbf{B}}$ ,  $\hat{\mathbf{c}}_B$  es el vector de los precios unitarios correspondientes al vector básico óptimo  $\hat{\mathbf{X}}_B$  ( $\hat{\mathbf{X}}_B = \hat{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{b}$ ) y  $\hat{\mathbf{Y}}$  es el vector dual óptimo. De la última igualdad se concluye por analogía en ambos lados de la igualdad que:

$$\hat{\mathbf{Y}}^T = \hat{\mathbf{c}}_B \hat{\mathbf{B}}^{-1}.$$

La estructura inicial de un programa lineal, al aplicar el *método simplex* es

Z	Variables originales	Variables de holgura	
1	-c	0	0
0	A	I	b

y tras cada iteración la estructura se convierte en

	$z_j - c_j$ correspondientes a las variables originales	$z_j - c_j$ correspondientes a las variables de holgura	
1	$\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{c}$	$\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$
0	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}$	$\mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$

Se ha identificado el lugar donde queda representada implícitamente la solución del problema dual. La solución óptima del problema dual queda inscrita en la posición  $z_j - c_j$  correspondiente a las variables  $X_j$  de holgura.

### 138 La programación lineal

Ejemplo:

Dado el problema lineal primario

$$\text{Máx } Z = 4X_1 + 3X_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} (P) \quad & 2X_1 + 3X_2 \leq 18 \\ & 4X_1 + 2X_2 \leq 10 \\ & X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \end{aligned}$$

se formula a continuación el problema dual y se resuelven ambos programas mediante el *método simplex*.

La formulación dual es

$$\text{Mín } G = 18Y_1 + 10Y_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} (D) \quad & 2Y_1 + 4Y_2 \geq 4 \\ & 3Y_1 + 2Y_2 \geq 3 \\ & Y_1 \geq 0, \quad Y_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Se tienen que hallar los valores óptimos de  $X_1$  y  $X_2$  que resuelven el problema (P) así como los valores óptimos  $Y_1$  y  $Y_2$  que resuelven (D). Se tiene también que comprobar que en el punto óptimo  $Z = G$ .

El tableau inicial correspondiente al problema (P) es

	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	
	1	-4	-3	0	0	0
$a_3$	0	2	3	1	0	18
$a_4$	0	④	2	0	1	10←
	1	0	-1	0	1	10
$a_3$	0	0	2	1	-1/2	13
$a_1$	0	1	①/2	0	1/4	5/2←
	1	2	0	0	3/2	15
$a_3$	0	-4	0	1	-3/2	3
$a_2$	0	2	1	0	1/2	5

El último tableau es óptimo para el problema primario (P). La solución óptima es:

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_2 \\ X_1 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{Z} = 15.$$

La solución óptima del problema dual es  $\hat{\mathbf{Y}} = (\hat{Y}_1, \hat{Y}_2)$  donde

$$\hat{Y}_1 = z_3 - c_3 = 0,$$

$$\hat{Y}_2 = z_4 - c_4 = 3/2.$$

A continuación se comprueba que la solución dual es factible y óptima. Comprobando en las restricciones duales se tiene

$$2(0) + 4(3/2) = 6 \geq 4$$

$$3(0) + 2(3/2) = 3 \geq 3$$

$$0 \geq 0, \quad 3/2 \geq 0,$$

$$\hat{G} = 18(0) + 10 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 15 = \hat{Z}.$$

### Interpretaciones económicas de las variables duales

Se ha visto que

$$\hat{\mathbf{Y}} = \hat{\mathbf{c}}_B \hat{\mathbf{B}}^{-1}$$

donde  $\hat{\mathbf{B}}^{-1}$  es la inversa de la base óptima  $\hat{\mathbf{B}}$  correspondiente a un programa primario. Multiplicando ambos lados de la igualdad por la base óptima  $\hat{\mathbf{B}}$  se tiene

$$\hat{\mathbf{Y}}^T \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{c}_B \hat{\mathbf{B}}^{-1} \hat{\mathbf{B}}$$

$$\hat{\mathbf{Y}}^T \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{c}_B.$$

Como  $\hat{\mathbf{B}}$  está compuesta por  $m$  columnas  $\mathbf{a}_j$  de  $\mathbf{A}$ , la igualdad anterior puede expresarse en términos de las componentes  $\mathbf{a}_j$  de la base de la siguiente manera:

$$\hat{\mathbf{Y}}^T \mathbf{a}_j = \mathbf{c}_{B,p} \quad j \text{ en } \mathbf{B},$$

donde  $\mathbf{Y}$  es el vector de las variables duales. La última igualdad es equivalente a la definición de  $z_j$  dada con anterioridad, y que era

$$z_j = \hat{\mathbf{Y}}^T \mathbf{a}_j.$$

Si se toma el vector de recursos  $\mathbf{b}$  y se incrementa en una pequeñísima cantidad<sup>35</sup>  $\Delta \mathbf{b}$ , tal que la base óptima actual  $\hat{\mathbf{B}}$  no cambie, la

<sup>35</sup>  $\Delta \mathbf{b}$  es un incremento vectorial.

## 140 La programación lineal

nueva solución  $\mathbf{X}_B$ , seguirá siendo óptima, si es que cumple la siguiente condición:

$$\mathbf{X}_B = \hat{\mathbf{B}}^{-1} (\mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}) \geq \mathbf{0}.$$

Como la base  $\hat{\mathbf{B}}$  no ha cambiado, tampoco ha cambiado  $\hat{\mathbf{B}}^{-1}$ , ni tampoco las  $z_j - c_j$ , es decir

$$z_j - c_j = \mathbf{c}_B \hat{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j, \quad \text{para toda } j \in \mathbf{A}$$

sigue igual que anteriormente.

La función dual, sin embargo, sí ha sufrido un cambio, pues ahora

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{G}} &= \hat{\mathbf{Y}}^T (\mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}) \\ &= \hat{\mathbf{Y}}^T \mathbf{b} + \hat{\mathbf{Y}}^T \Delta \mathbf{b} \\ &= \mathbf{G} + \hat{\mathbf{Y}}^T \Delta \mathbf{b} \\ &= Z + \hat{\mathbf{Y}}^T \Delta \mathbf{b}, \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{G}$  es el valor óptimo dual o primario anterior. Esta última igualdad indica que un pequeño incremento en el vector de recursos ha cambiado el valor óptimo de la función objetivo dual, y por lo tanto, de la función objetivo primario. Ese cambio es  $\hat{\mathbf{Y}}^T \Delta \mathbf{b}$ . Si el cambio en el vector  $\mathbf{b}$  es unitario, la función objetivo cambiará en  $\hat{Y}_i$  unidades, es decir, que si la componente  $b_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) de  $\mathbf{b}$ , sufre un cambio unitario, la función objetivo sufrirá un cambio de  $Y_i$  (la  $i$ -ava componente del vector dual,  $i = 1, \dots, m$ ) unidades. Resumiendo

$$Y_i = \frac{\partial Z}{\partial b_i}.$$

*Ejemplo:*

Si en el problema anterior  $b_2$  se convierte de 10 a 11 unidades (cambio unitario), el nuevo valor de la función objetivo será

$$\begin{aligned} \hat{Z} &= Z + Y_2 \\ &= 15 + 3/2 \\ &= 16.5. \end{aligned}$$

Si por el otro lado  $b_2$  se convierte de 10 a 9 unidades, el nuevo valor de  $Z$  es

$$\begin{aligned} \hat{Z} &= Z - Y_2 \\ &= 15 - 3/2 \\ &= 13.5. \end{aligned}$$

Nótese que un cambio unitario en  $b_1$ , tanto en aumento como en decremento, no tiene ningún efecto en la función objetivo, debido a que

$Y_1 = 0$ . ¿Por qué? La respuesta es que en el punto óptimo se consumen 15 unidades de las 18 disponibles del primer recurso. Como existe un exceso en la disponibilidad de ese recurso, un cambio marginal no afecta el valor óptimo de la función objetivo.

Es importante notar que esta interpretación económica es válida únicamente para cambios unitarios en el vector  $b$ , ya que éstos no afectan por lo general la estructura de la base óptima  $\hat{\mathbf{B}}$ .

Los cambios que no son unitarios se analizarán en la sección que a continuación se presenta bajo el nombre de *análisis de sensibilidad y programación paramétrica*.

Este tipo de interpretación económica de las variables duales se conoce con el nombre de *precios sombra*.

Se sabe que  $a_{ij}$  mide la cantidad de recurso  $i$  que absorbe una unidad de la actividad  $j$ . Entonces  $\sum_{i=1}^m a_{ij} Y_i$ , cuantifica el costo económico de utilizar la actividad  $X_j$ , evaluada de acuerdo con los precios sombra  $Y_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Las restricciones duales aseguran que en el punto óptimo no se utilizará una actividad  $X_j$  cuya utilidad  $c_j X_j$  sea menor a su costo económico  $\sum_{i=1}^m a_{ij} Y_i$ .<sup>36</sup>

Si bien  $Y_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  es el precio sombra del programa

$$\text{Máx } \mathbf{c}\mathbf{X}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{X} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{X} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

cuya interpretación económica se dio en los párrafos anteriores,  $X_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  es el precio sombra del programa

$$\text{Mín } \mathbf{b}^T \mathbf{Y}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{Y} &\geq \mathbf{c}^T \\ \mathbf{Y} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

En este caso  $X_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  mide el cambio en el valor de la función objetivo  $\sum_{i=1}^m b_i Y_i$  debido a un cambio marginal<sup>37</sup> en el valor del costo unitario  $c_j$ .

<sup>36</sup> Esto quiere decir que el proceso fuerza a todas las actividades  $X_j$ , cuya utilidad sea menor a su costo económico, a ser no-básicas ( $X_j = 0$ ,  $j \in \mathbf{N}$ ), mientras que, aquellas actividades cuya utilidad sea por lo menos igual a su costo económico, serán básicas ( $X_j \geq 0$ ,  $j \in \mathbf{B}$ ) en el punto óptimo.

<sup>37</sup> El cambio marginal puede ser en aumento o disminución del valor original.



**Método dual simplex**

Una de las aplicaciones inmediatas de la propiedad de dualidad, es en la solución de aquellos programas lineales que tienen más restricciones que variables. Como el grado de dificultad y el número de iteraciones del *método simplex* está en función del número de restricciones y no en el número de variables,<sup>38</sup> siempre es bueno resolver por el *método simplex* aquellos problemas lineales donde en la matriz  $\mathbf{A}$  de  $m$  por  $n$ ,  $m$  sea menor a  $n$ . En el caso contrario de que  $m$  sea mayor a  $n$ , resolviendo la formulación dual se tiene un nuevo programa lineal en donde el número de filas de  $\mathbf{A}^T$  es menor que el número de columnas.

La segunda aplicación de la dualidad es en la interpretación económica de cambios marginales en el vector de recursos  $\mathbf{b}$  y sus efectos en el valor de la función objetivo. Estos cambios y sus efectos se analizarán con más detalle en la siguiente sección de este capítulo.

Una tercera aplicación de la dualidad es la solución de problemas lineales por medio de un nuevo algoritmo llamado el *método dual simplex*, que se explica a continuación. Una vez explicado este método se compara con el *método simplex* y se ve en qué casos conviene utilizar uno y en qué casos otro.

Dado un programa lineal primario y su correspondiente dual

$$\text{Máx } Z = \mathbf{c}\mathbf{X}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{X} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{X} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (P)$$

$$\text{Mín } \mathbf{G} = \mathbf{b}^T\mathbf{Y}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T\mathbf{Y} &\geq \mathbf{c}^T \\ \mathbf{Y} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (D)$$

se resumen los pasos del *método simplex*.

*Paso 1.* Se seleccionará  $m$  de las  $n$  columnas de  $\mathbf{A}$  en cada iteración para construir la base  $\mathbf{B}$ .

*Paso 2.* Se utilizan operaciones matriciales elementales en cada iteración para hacer todos los elementos  $z_j - c_j$ ,  $j$  en  $\mathbf{B}$  igual a cero y convertir a la base  $\mathbf{B}$  de  $m$  por  $m$  en una matriz identidad. El lado derecho del tableau identifica en cada iteración al punto extremo, dado por  $\mathbf{X}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$  y éste vector debe ser no-negativo. Si al empezar el proceso iterativo no se puede tener una base cuya estructura corresponde a una matriz identidad, se agregan tantos vectores artificiales como sea necesario.

<sup>38</sup> El tamaño de la base queda determinado por el número de filas de la matriz  $\mathbf{A}$ .

*Paso 3.* El vector  $\mathbf{a}_k$  que se selecciona para entrar a la base es aquel cuya  $z_j - c_j$ ,  $j$  no en  $\mathbf{B}$ , sea el más negativo. El vector  $\mathbf{a}_r$  que sale de la base se selecciona en base a una regla que asegura que se mantiene  $\mathbf{X}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ .

*Paso 4.* La columna  $\mathbf{a}_k$  se convierte en el vector unitario  $\mathbf{e}_r$  con la componente  $Y_{rk}$  (llamado "pivote"), igual a uno. Estos cambios que convierten al vector  $\mathbf{a}_k$  en el vector  $\mathbf{e}_r$ , se llevan a cabo mediante operaciones matriciales elementales. Se repite el paso 3, hasta que todos los elementos  $z_j - c_j \geq 0$ , para toda  $j$  en  $\mathbf{A}$ .

Es importante hacer notar que en todas las iteraciones del *método simplex* se mantiene la factibilidad primaria, es decir, que  $\mathbf{X}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ , y que al alcanzar optimalidad  $z_j - c_j \geq 0$  para toda  $j$  en  $\mathbf{A}$ . La solución óptima presenta factibilidad primaria y factibilidad dual.

Para ver que  $z_j - c_j \geq 0$ ,  $j$  en  $\mathbf{A}$ , significa factibilidad dual se observa lo siguiente:

$$\begin{aligned} z_j - c_j &= \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j \\ &= \mathbf{Y}^T \mathbf{a}_j - c_j. \end{aligned}$$

Si  $z_j - c_j \geq 0$ , para toda  $j$  en  $\mathbf{A}$ , eso significa que

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{a}_j - c_j \geq 0, \text{ para toda } j \text{ en } \mathbf{A},$$

o

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{a}_j \geq c_j, \text{ para toda } j \text{ en } \mathbf{A},$$

o en notación condensada

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{A} \geq \mathbf{c}$$

o

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Y} \geq \mathbf{c}^T$$

que es precisamente la factibilidad dual.

Así como en el *método simplex* se requiere que en cada iteración exista factibilidad primaria, es decir,  $\mathbf{X}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ , así en el método que se explica a continuación se requiere que en cada iteración exista factibilidad dual, es decir  $z_j - c_j \geq 0$  para toda  $j$  en  $\mathbf{A}$ . Los pasos del *método dual simplex* son los siguientes:

*Paso 1.* Empiece con un tableau donde todas las  $z_j - c_j \geq 0$ , para toda  $j$  en  $\mathbf{A}$ .

*Paso 2.* Si  $X_{B_i} \geq 0$  para toda  $i = 1, \dots, m$ , el tableau actual es óptimo. Si no, selecciónese como vector de salida de la base, aquél cuyo correspondiente  $X_{B_i}$  sea el más negativo.

*Paso 3.* El vector  $\mathbf{a}_k$  de entrada será aquél que satisfaga la siguiente regla

$$\frac{z_k - c_k}{Y_{ik}} = \text{Máx}_{j=1, \dots, n} \left\{ \frac{z_j - c_j}{Y_{ij}} \mid Y_{ij} < 0 \right\}.$$

*Paso 4.* La columna  $\mathbf{a}_k$  se convierte en el vector unitario  $\mathbf{e}_i$  con el pivote  $Y_{ik}$  igual a uno. Los cambios se llevan a cabo con operaciones

## 144 La programación lineal

matriciales elementales. Regrésese al paso 2 y repítase hasta que las condiciones de optimalidad se cumplan.

Si durante la aplicación del paso 3, todos los elementos  $Y_{ik} \geq 0$ , el programa original no tiene solución.<sup>39</sup>

*Ejemplo.* Se va a resolver por el *método dual simplex* el siguiente programa lineal

$$\text{Mín } Z = 2X_1 + X_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3X_1 + X_2 &\geq 3 \\ 4X_1 + 3X_2 &\geq 6 \\ X_1 + 2X_2 &\geq 3 \\ X_1 \geq 0, X_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Se observa que este programa puede también resolverse por los *métodos de penalización* y de *doble fase* que se discutieron anteriormente. Se analiza en seguida qué ventajas se presentan con el uso del *método dual simplex*. Este programa puede reescribirse como

$$\text{Máx } h = -Z = -2X_1 - X_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} -3X_1 - X_2 + X_3 &= -3 \\ -4X_1 - 3X_2 + X_4 &= -6 \\ -X_1 - 2X_2 + X_5 &= -3 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, X_4 \geq 0, X_5 \geq 0. \end{aligned}$$

El primer tableau es

	$h$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	
	1	2	1	0	0	0	0
$a_3$	0	-3	-1	1	0	0	-3
$a_4$	0	-4	-3	0	1	0	-6 ←
$a_5$	0	-1	-2	0	0	1	-3

Nótese que existe factibilidad dual, pues todas las  $z_j - c_j \geq 0$ , para toda  $j$  en  $A$ . La solución actual no es óptima pues  $X_B \not\geq 0$ . Se selecciona al vector  $a_4$  como el vector que sale, pues  $X_{B_4} = -6$  es el más negativo. Para seleccionar al vector que entra se usa la regla<sup>40</sup>

<sup>39</sup> Otra manera de detectar problemas sin solución.

<sup>40</sup> El elemento  $Y_{B_4, 2}$  resulta ser el  $Y_{2,2}$ .

$$\begin{aligned} \frac{z_k - c_k}{Y_{B_4 k}} &= \text{Máx}_{j=1, \dots, n} \left\{ \frac{z_j - c_j}{Y_{B_4 j}} \mid Y_{B_4 j} < 0 \right\} \\ &= \text{Máx} \left\{ \frac{2}{-4}, \frac{1}{-3} \right\} \\ &= \text{Máx} \{-0.5, -0.33\} = -0.33, \end{aligned}$$

y por lo tanto  $\mathbf{a}_2$  entra a la base. El pivote es el elemento  $Y_{B_4, 2}$  o sea el  $Y_{2, 2}$ . El vector  $\mathbf{a}_2$  se convierte en la columna unitaria con un uno en la posición del pivote. Esto se logra con operaciones matriciales elementales que generan el siguiente tableau.

	Z	$X_1$ ↓	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	
	1	2/3	0	0	1/3	0	-2
$\mathbf{a}_3$	0	-5/3	0	1	-1/3	0	-1 ←
$\mathbf{a}_2$	0	4/3	1	0	-1/3	0	2
$\mathbf{a}_5$	0	5/3	0	0	-2/3	1	1

Repetiendo una iteración más, se ve que la solución actual no es óptima, porque  $X_{B_1} = -1 < 0$ . El vector  $\mathbf{a}_3$  sale de la base y la regla de entrada indica

$$\begin{aligned} \text{Máx} \left\{ \frac{2/3}{-5/3}, \frac{1/3}{-1/3} \right\} &= \\ \text{Máx} \{-0.4, -1.0\} &= -0.4, \end{aligned}$$

o sea que  $\mathbf{a}_1$  entra en la base. Haciendo el pivote  $Y_{B_1, 1}$  ( $Y_{1, 1}$ ) igual a uno y el resto de la columna  $\mathbf{a}_1$  igual a cero, por medio de operaciones matriciales elementales, se obtiene el siguiente tableau, que es óptimo, pues el vector  $\mathbf{X}_B \geq \mathbf{0}$ .

	h	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	
	1	0	0	2/5	1/5	0	-12/5
$\mathbf{a}_1$	0	1	0	-3/5	1/5	0	3/5
$\mathbf{a}_2$	0	0	1	4/5	-3/5	0	6/5
$\mathbf{a}_5$	0	0	0	1	-1	1	0

La solución óptima es:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_B \\ \mathbf{X}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 6/5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$h = -Z = -12/5,$$

por lo que

$$Z = 12/5.$$

Las ventajas de usar el *método dual simplex* en relación al *método de penalización* y al *método de dos fases*, es que primero no se requiere del uso de variables artificiales y segundo se utilizan mucho menos iteraciones. La desventaja de este método con respecto a los dos anteriores, es que se requiere para empezar a iterar, la condición de factibilidad dual,<sup>41</sup> es decir  $z_j - c_j \geq 0$ , para toda  $j$  en  $\mathbf{A}$ .

#### 2.4. Análisis de sensibilidad y programación paramétrica

Una vez que se halla resuelto un programa de programación lineal, puede darse el caso de que uno o varios parámetros de la formulación original, tales como los precios unitarios o la disponibilidad de ciertos recursos cambien, dando origen a un nuevo problema. ¿Es necesario en ese caso volver a resolver el problema desde el principio?

La respuesta es, afortunadamente no. Se dice afortunadamente, porque en términos de iteraciones y por consiguiente en tiempo de computadora existen métodos, llamados de *análisis de sensibilidad*, que permiten ahorrar muchas iteraciones, al resolver el nuevo problema partiendo de la solución óptima del problema original. El ahorrar iteraciones implica un ahorro considerable en los costos de utilización de una computadora.

El nuevo problema puede diferir del original en uno o varios de los siguientes cambios que pueden ocurrir simultáneamente.

- a) Cambio en el vector  $\mathbf{b}$ , o sea, cambios en la disponibilidad de recursos.
- b) Cambios en el vector  $\mathbf{c}$ , o sea, cambios en los precios o costos unitarios.
- c) Cambios en la matriz  $\mathbf{A}$ , o sea, cambios en los coeficientes tecnológicos  $a_{ij}$ .
- d) Cambio en el vector  $\mathbf{X}$ , o sea, cambios en el número de actividades, cuyo nivel debe decidirse.
- e) Cambios en el número de restricciones del sistema lineal a optimizarse.

Los primeros tres cambios pueden ocurrir en forma *discreta* o *continua*. El *cambio discreto* tanto en los vectores  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  o en los elementos  $a_{ij}$  de  $\mathbf{A}$ , significa que una o varias componentes originales de dichos vectores o matriz son reemplazados por nuevas cantidades. El *cambio continuo* es aquél en donde los vectores  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a}_j$ ,  $\mathbf{c}$  sufren cambios descritos por

<sup>41</sup> Aunque hay mecanismos para convertir la infactibilidad dual en factibilidad dual, mediante la adición de variables artificiales y así poder utilizar el *método dual simplex*, estos mecanismos no se exponen en este texto.

$$\mathbf{b} + \theta \Delta \mathbf{b} \quad , \quad -\infty < \theta < \infty,$$

$$\mathbf{c} + \alpha \Delta \mathbf{c} \quad , \quad -\infty < \alpha < \infty,$$

$$\mathbf{a}_j + \gamma \Delta \mathbf{a}_j, j \in \mathbb{N}, \quad -\infty < \gamma < \infty,$$

en donde  $\Delta \mathbf{b}$ ,  $\Delta \mathbf{a}_j$ ,  $\Delta \mathbf{c}$  son vectores, respectivamente con las mismas dimensiones que los vectores  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a}_j$ ,  $\mathbf{c}$  y  $\gamma$ ,  $\theta$ ,  $\alpha$  son escalares que pueden tomar cualquier valor real. El análisis de sensibilidad que estudia los cambios continuos se llama *programación paramétrica*.

Se describen primero los *cambios discretos* y después los *cambios continuos*.

### Análisis de sensibilidad para cambios discretos

La estructura del tableau inicial de cualquier programa lineal de forma canónica es:

	<i>Variables originales</i>				<i>Variables de holgura</i>			
Z	$X_1$	$X_2$	$\dots$	$X_n$	$X_{n+1}$	$\dots$	$X_{n+m}$	
<b>1</b>	-c				0			<b>0</b>
<b>0</b>	A				I			<b>b</b>

La estructura del tableau óptimo es:

	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	$\dots$	$z_n - c_n$	$z_{n+1} - c_{n+1}$	$\dots$	$z_{n+m} - c_{n+m}$	
<b>1</b>	$\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{c}$				$\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}$			$Z = \mathbf{c}_B \mathbf{X}_B$
<b>0</b>	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}$				$\mathbf{B}^{-1}$			$\mathbf{X}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$

Por facilidad de notación se va a representar al vector dual  $\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}$  por  $\mathbf{\Pi}$ , que tiene como sus  $m$  componentes a

$$\mathbf{\Pi} = (\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m)$$

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}.$$

El tableau óptimo puede escribirse como

<b>1</b>	$\mathbf{\Pi} \mathbf{A} - \mathbf{c}$	$\mathbf{\Pi}$	$\mathbf{c}_B \mathbf{X}_B$
<b>0</b>	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}$	$\mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$

## 148 La programación lineal

El análisis de sensibilidad se basará en el manejo de esta última estructura. Se analiza a continuación cada uno de los cambios.

### a) Cambio del vector $\mathbf{b}$

Supóngase que el problema original  $(PO)$ , cuya solución óptima se tiene a la mano, es

$$\text{Máx } Z = \mathbf{c}\mathbf{X}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{X} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{X} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (PO)$$

Se cambiará en forma discreta el vector  $\mathbf{b}$ , cuyo nuevo valor será  $\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$ , donde  $\Delta\mathbf{b}$  es un vector con  $m$  componentes. El nuevo problema  $(PN)$  a resolver es

$$\text{Máx } Z = \mathbf{c}\mathbf{X}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{X} &\leq \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b} \\ \mathbf{X} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (PN)$$

El análisis de sensibilidad para este tipo de cambio toma como punto de partida la solución óptima de  $(PO)$ . Supóngase que  $\mathbf{B}^{-1}$  es la inversa de la base óptima asociada a  $(PO)$ . Entonces la solución óptima de  $(PO)$  es

$$\mathbf{X}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$$

y

$$Z = \mathbf{c}_B \mathbf{X}_B.$$

Al cambiar  $\mathbf{b}$  a  $\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$ , el vector  $\mathbf{X}_B$  cambia a uno nuevo  $\hat{\mathbf{X}}_B$  dado por:

$$\hat{\mathbf{X}}_B = \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}).$$

Si  $\hat{\mathbf{X}}_B \geq \mathbf{0}$ , entonces será la nueva solución óptima de  $(PN)$ . Para que  $\hat{\mathbf{X}}_B \geq \mathbf{0}$  es necesario que  $\mathbf{B}^{-1} (\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) \geq \mathbf{0}$ . Si  $\mathbf{B}^{-1} (\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) \not\geq \mathbf{0}$ , entonces  $\hat{\mathbf{X}}_B$  no es factible y habrá que usar el *dual simplex* para restaurar la factibilidad y de hecho la optimalidad de  $(PN)$ . El *dual simplex*, en caso de usarse, deberá aplicarse al tableau óptimo de  $(PO)$ , cambiando la columna  $\mathbf{X}_B$  por la nueva  $\hat{\mathbf{X}}_B$ .

*Ejemplo.* Supóngase que el programa original  $(PO)$  consiste en producir un volumen  $X$  de un producto químico  $A$  que se vende a \$5/litro y otro volumen  $Y$  de un producto químico  $B$  que se vende a \$3/litro. Dos tipos de restricciones se consideran en este ejemplo, personal y costo de producción. En lo que se refiere a la primera restricción se tiene un máximo de 15 personas, mientras que en lo segundo se tiene un máximo de \$10/hora de trabajo. Los coeficientes tecnológicos están dados por:

	Producto químico A	Producto químico B
Personal	3	5
Costo de producción	5	2

Si la variable  $X_1$  representa el número de litros del producto químico A a ser producidos por hora y  $X_2$  el del producto químico B, el programa lineal original es:

$$\text{Máx } Z = 5X_1 + 3X_2$$

sujeto a

$$3X_1 + 5X_2 \leq 15$$

$$5X_1 + 2X_2 \leq 10$$

(PO)

$$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0.$$

El tableau original es

	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	
	1	-5	-3	0	0	0
$a_3$	0	3	5	1	0	15
$a_4$	0	5	2	0	1	10

y como el lector podrá corroborar, el tableau óptimo resulta ser

	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	
	1	0	0	5/19	16/19	235/19
$a_2$	0	0	1	5/19	-3/19	45/19
$a_1$	0	1	0	-2/19	5/19	20/19

o sea

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_B \\ \mathbf{X}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_1 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45/19 \\ 20/19 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Z = 235/19$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 5/19 & -3/19 \\ -2/19 & 5/19 \end{bmatrix}.$$

Supóngase que por una depresión económica el número de empleados debe reducirse a 5 y el costo máximo de producción a \$5/hora. El nuevo vector de disponibilidad de recursos es



## 150 La programación lineal

$$\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

El nuevo programa lineal a resolver sería

$$\text{Máx } Z = 5X_1 + 3X_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3X_1 + 5X_2 &\leq 5 \\ 5X_1 + 2X_2 &\leq 5 \\ X_1 \geq 0, \quad X_2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (PN)$$

No es necesario resolver el programa desde el principio, sino que utilizando el análisis de sensibilidad se estudia el cambio  $\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b})$  y se determina si el nuevo vector  $\mathbf{X}_B = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b})$  es factible o no. Si lo es, también lo es óptimo para (PN). Si no lo es, habrá que restablecer la factibilidad y la optimalidad, utilizando el *dual simplex* a partir del tableau óptimo de (PO).

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}}_B = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) &= \begin{pmatrix} 5/19 & -3/19 \\ -2/19 & 5/19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10/19 \\ 15/19 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y por lo tanto el nuevo vector  $\hat{\mathbf{X}}_B$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}}_B &= \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) \\ \mathbf{X}_B &= \begin{pmatrix} X_2 \\ X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/19 \\ 15/19 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

es óptimo. La nueva utilidad óptima es

$$\begin{aligned} Z &= \mathbf{c}_B \mathbf{X}_B \\ &= (c_2, c_1) \begin{pmatrix} X_2 \\ X_1 \end{pmatrix} \\ &= (3, 5) \begin{pmatrix} 10/19 \\ 15/19 \end{pmatrix} \\ &= \$ 105/19 \\ &= \$ 5.53. \end{aligned}$$

Nótese que una reducción en la disponibilidad de recursos ha causado una disminución en la producción óptima de ambos productos químicos, así como en la utilidad.

## Sensibilidad y programación paramétrica 151

*Ejemplo.* Supóngase ahora que el personal se reduce a 10 personas, pero el costo máximo por hora de producción se aumenta a \$20. El nuevo programa a resolver sería

$$\begin{aligned} \text{Máx } Z &= 5X_1 + 3X_2 \\ \text{sujeto a} \quad & 3X_1 + 5X_2 \leq 10 \\ & 5X_1 + 2X_2 \leq 20 \\ & X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (PN)$$

Utilizando el análisis de sensibilidad se tiene que

$$\begin{aligned} \hat{X}_B &= \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}) \\ &= \begin{bmatrix} 5/19 & -3/19 \\ -2/19 & 5/19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -10/19 \\ 80/19 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y por lo tanto se hace necesario utilizar el *dual simplex* para restaurar la factibilidad y obtener optimalidad del nuevo programa. Utilizando el tableau óptimo del programa original, con la nueva columna  $\hat{X}_B$  se tiene

	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	
	1	0	0	5/19	16/19	
$a_2$	0	0	1	5/19	<span style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 2px;">-3/19</span>	-10/19 ←
$a_1$	0	1	0	-2/19	5/19	80/19
	1	0	16/3	80/57	0	
$a_4$	0	0	-19/3	-5/3	1	10/3
$a_1$	0	1	-5/3	1/3	0	10/3

La nueva solución es producir

$X_1 = 10/3$  litros del producto químico *A* por hora,

$X_2 = 0$  litros del producto químico *B* por hora,

generando una utilidad óptima de

$$\begin{aligned} Z &= \mathbf{c}_B \mathbf{X}_B \\ &= (c_4, c_1) \begin{bmatrix} X_4 \\ X_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## 152 La programación lineal

$$\begin{aligned}
 &= (0, 5) \begin{bmatrix} 10/3 \\ 10/3 \end{bmatrix} \\
 &= \$ 50/3 \\
 &= \$16.66.
 \end{aligned}$$

Nótese que la producción de  $10/3$  litros del producto químico  $A$  implican el uso de

$$3 \left( \frac{10}{3} \right) + 5(0) = 10$$

obreros, que son los que se tienen, originando que la holgura  $X_3 = 0$ , mientras que por el lado de la restricción del costo se tiene que

$$5 \left( \frac{10}{3} \right) + 2(0) = \frac{50}{3}$$

generando una holgura en el costo de

$$\begin{aligned}
 X_4 &= 20 - \frac{50}{3} \\
 &= \frac{10}{3}.
 \end{aligned}$$

### b) Cambio en el vector $c$

Supóngase que el problema original ( $PO$ ), cuya solución óptima se tiene a la mano es

$$\text{Máx } Z = cX$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
 AX &\leq b \\
 X &\geq 0.
 \end{aligned} \tag{PO}$$

Se cambiará en forma discreta el vector  $c$ , cuyo nuevo valor será  $c + \Delta c$ , donde  $\Delta c$ , es un vector con  $n$  componentes. El nuevo problema ( $PN$ ) a resolver es

$$\text{Máx } Z = (c + \Delta c) X$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
 AX &\leq b \\
 X &\geq 0.
 \end{aligned} \tag{PN}$$

El análisis de sensibilidad para este tipo de cambio toma como punto de partida la solución óptima de ( $PO$ ). Supóngase que  $B^{-1}$ , es la inversa de la base óptima asociada a ( $PO$ ). Se tiene que al cambiar  $c$  por  $c + \Delta c$ , las  $z_j - c_j$  cambian a  $z_j - (c_j + \Delta c_j)$  o sea

$$\begin{aligned}
 z_j - (c_j + \Delta c_j) &= c_B B^{-1} a_j - (c_j + \Delta c_j) \\
 &= \Pi a_j - (c_j + \Delta c_j)
 \end{aligned}$$

donde  $a_j$  es la columna  $j$  de la matriz  $A$ .

Se sabe que en condiciones de optimalidad  $z_j - (c_j + \Delta c_j)$  deben ser no-negativa para cualquier  $j$  en **A**, no en **B**, y debe ser cero para cualquier  $j$  en **B**. Si esas dos condiciones se cumplen, la  $\mathbf{X}_B$  asociada al tableau óptimo de (PO) permanece óptimo y el nuevo valor de la función objetivo será

$$Z = (\mathbf{c}_B + \Delta \mathbf{c}_B) \mathbf{X}_B.$$

En caso contrario se deberá primero hacer la  $z_j - (c_j + \Delta c_j)$  igual a cero, para  $j$  en **B**, mediante operaciones matriciales elementales y después obtener las condiciones de optimalidad,  $z_j - c_j \geq 0$ , para  $j$  en **A**,  $j$  no en **B**, mediante el método simplex.

*Ejemplo.* Tómesese como problema original el siguiente

$$\text{Máx } Z = 5X_1 + 3X_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3X_1 + 5X_2 &\leq 15 \\ 5X_1 + 2X_2 &\leq 10 \\ X_1 \geq 0, \quad X_2 &\geq 0, \end{aligned}$$

cuyo tableau óptimo es

	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	
	1	0	0	5/19	16/19	235/19
$a_2$	0	0	1	5/19	-3/19	45/19
$a_1$	0	1	0	-2/19	5/19	20/19

Supóngase que el precio unitario del producto químico *B*, se reduce de \$ 3 a \$ 1. El nuevo problema lineal es

$$\text{Máx } Z = 5X_1 + X_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3X_1 + 5X_2 &\leq 15 \\ 5X_1 + 2X_2 &\leq 10 \\ X_1 \geq 0, \quad X_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Nótese que

$$\begin{aligned} \mathbf{c} + \Delta \mathbf{c} &= (5, 3, 0, 0) + (0, -2, 0, 0) \\ &= (5, 1, 0, 0). \end{aligned}$$

Como la única componente de  $\mathbf{c}$  que cambió es  $c_2$ , únicamente  $z_2 - c_2$  cambia a

$$\begin{aligned} z_2 - (c_2 + \Delta c_2) &= \mathbf{II} \mathbf{a}_2 - (c_2 + \Delta c_2) \\ &= (5/19, 16/19) \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 = 2. \end{aligned}$$

## 154 La programación lineal

Pero  $z_2 - (c_2 + \Delta c_2) = 0$  en condiciones de optimalidad porque  $j = 2$  está en la base original óptima de (PO). Entonces, mediante operaciones matriciales elementales se transforma el siguiente tableau

	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	
	1	0	2	5/19	16/19	235/19
$a_2$	0	0	1	5/19	-3/19	45/19
$a_1$	0	1	0	-2/19	5/19	20/19

en

	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	
	1	0	0	-5/19	22/19	145/19
$a_2$	0	0	1	5/19	-3/19	45/19 ←
$a_1$	0	1	0	-2/19	5/19	20/19

que no es óptimo porque  $z_3 - c_3 = -5/19 < 0$ . Utilizando el *método simplex* se obtiene la nueva solución óptima que es

	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	
	1	0	1	0	1	10
$a_3$	0	0	19/5	1	-3/5	9
$a_1$	0	1	2/5	0	1/5	2

o sea

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_B \\ \mathbf{X}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_3 \\ \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Z = 10.$$

El lector podrá comprobar en efecto que la solución satisface las restricciones del problema.

*Ejemplo.* Supóngase que el precio de ambos productos químicos es de \$1. El nuevo programa a resolver sería

$$\text{Máx } Z = X_1 + X_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3X_1 + 5X_2 &\leq 15 \\ 5X_1 + 2X_2 &\leq 10 \\ X_1 &\geq 0, \quad X_2 \geq 0. \end{aligned}$$

El nuevo vector  $\mathbf{c} + \Delta \mathbf{c}$  es

$$\begin{aligned}\mathbf{c} + \Delta \mathbf{c} &= (5, 3, 0, 0) + (-4, -2, 0, 0) \\ &= (1, 1, 0, 0)\end{aligned}$$

o sea que sólo  $z_1 - c_1$  y  $z_2 - c_2$  han cambiado a

$$\begin{aligned}z_1 - (c_1 + \Delta c_1) &= \mathbf{I} \mathbf{a}_1 - (c_1 + \Delta c_1) \\ &= (5/19, 16/19) \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - 1 \\ &= 5 - 1 = 4, \\ z_2 - (c_2 + \Delta c_2) &= \mathbf{I} \mathbf{a}_2 - (c_2 + \Delta c_2) \\ &= (5/19, 16/19) \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \\ &= 3 - 1 = 2.\end{aligned}$$

Como tanto el vector  $\mathbf{a}_1$  y  $\mathbf{a}_2$  están en la base óptima correspondiente a  $(PO)$ , la  $z_1 - (c_1 + \Delta c_1)$  y  $z_2 - (c_2 + \Delta c_2)$  deben ser cero. Los vectores unitarios  $\mathbf{a}_1$  y  $\mathbf{a}_2$  se restablecen del tableau

	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	
	1	4	2	5/19	16/19	235/19
$\mathbf{a}_2$	0	0	1	5/19	-3/19	45/19
$\mathbf{a}_1$	0	1	0	-2/19	5/19	20/19

al tableau indicado a continuación mediante el uso de operaciones matriciales elementales.

	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	
	1	0	0	3/19	2/19	65/19
$\mathbf{a}_2$	0	0	1	5/19	-3/19	45/19
$\mathbf{a}_1$	0	1	0	-2/19	5/19	20/19

Nótese que este tableau es óptimo, dando como resultado

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_B \\ \mathbf{X}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_1 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45/19 \\ 20/19 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Z = 65/19.$$

## 156 La programación lineal

*Ejemplo.* Sea el problema original

$$\text{Máx } Z = 3X_1 + 5X_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} X_1 &\leq 4 \\ 3X_1 + 2X_2 &\leq 18 \\ X_1 \geq 0, \quad X_2 &\geq 0, \end{aligned} \quad (PO)$$

siendo su tableau óptimo el siguiente:

	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	
	1	9/2	0	0	5/2	45
$a_3$	0	1	0	1	0	4
$a_2$	0	3/2	1	0	1/2	9

Supóngase que el precio de la primera actividad es \$6. El nuevo problema a resolver es

$$\text{Máx } Z = 6X_1 + 5X_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} X_1 &\leq 4 \\ 3X_1 + 2X_2 &\leq 18 \\ X_1 \geq 0, \quad X_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

El nuevo vector  $\mathbf{c} + \Delta\mathbf{c}$  es

$$\begin{aligned} \mathbf{c} + \Delta\mathbf{c} &= (3, 5, 0, 0) + (3, 0, 0, 0) \\ &= (6, 5, 0, 0), \end{aligned}$$

y la única  $z_j - c_j$  que cambia es

$$\begin{aligned} z_1 - (c_1 + \Delta c_1) &= \mathbf{II} \mathbf{a}_1 - (c_1 + \Delta c_1) \\ &= (0, 5/2) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 6 \\ &= 3/2. \end{aligned}$$

El nuevo tableau quedaría

	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	
	1	3/2	0	0	5/2	45
$a_3$	0	1	0	1	0	4
$a_2$	0	3/2	1	0	1/2	9

y por lo tanto es óptimo. Como se ve en este ejemplo, al cambiar el precio unitario de  $X_1$  (que no es básico) de \$3 a \$6, no ha cambiado la solución óptima que es

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_B \\ \mathbf{X}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_2 \\ X_1 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Z = 45.$$

La razón es muy sencilla. Como  $X_1$  no es básico, su nivel de utilización es de cero. El cambio hecho en su precio unitario no es lo suficientemente atractivo para que el nivel de utilización de  $X_1$  se incremente de su valor cero.

*Ejemplo.* Supóngase ahora que el precio de  $X_1$  se cambia a \$10. El nuevo problema a resolver es:

$$\text{Máx } Z = 10X_1 + 5X_2$$

sujeto a

$$X_1 \leq 4$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 18$$

$$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0.$$

El nuevo vector  $\mathbf{c} + \Delta\mathbf{c}$  es

$$\begin{aligned} \mathbf{c} + \Delta\mathbf{c} &= (3, 5, 0, 0) + (7, 0, 0, 0) \\ &= (10, 5, 0, 0) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} z_1 - (c_1 + \Delta c_1) &= \mathbf{II} \mathbf{a}_1 - (c_1 + \Delta c_1) \\ &= (0, 5/2) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 10 \\ &= \frac{15}{2} - 10 = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

El nuevo tableau que se muestra a continuación

	Z	$\downarrow$ $X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	
	1	-5/2	0	0	5/2	45
$\mathbf{a}_3$	0	①	0	1	0	4 ←
$\mathbf{a}_2$	0	3/2	1	0	1/9	9

no es óptimo, porque  $z_1 - (c_1 + \Delta c_1) = -5/2 < 0$  y por lo tanto se aplica el *método simplex*. Una iteración conduce al óptimo que es:



## 158 La programación lineal

	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	
	1	0	0	5/2	5/2	55
$a_1$	0	1	0	1	0	4
$a_2$	0	0	1	-3/2	1/9	3

La nueva solución es

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_B \\ \mathbf{X}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Z = 55.$$

Nótese que un cambio en el precio unitario en  $X_1$  de \$3 a \$10, hace primero, que sea conveniente producir  $X_1$  a un nivel de 4 unidades y segundo, que se reduzca el nivel de producción de  $X_2$  de 9 unidades a 3, con un incremento en la utilidad de 45 a 55 unidades.

### c) Cambio de un coeficiente tecnológico $a_{ij}$ cuando $j$ no es básico

Únicamente se va a tratar en esta sección el cambio discreto de uno o varios coeficientes tecnológicos asociados a variables no básicas. En el caso de que se trate de una variable básica, se recomienda que se resuelva el nuevo problema desde el principio.<sup>42</sup>

Un cambio en las componentes del vector  $\mathbf{a}_j$ ,  $j$  en  $\mathbf{N}$  ocasiona un cambio en el término  $z_j - c_j$ ,  $j$  en  $\mathbf{N}$  puesto que

$$\begin{aligned} z_j - c_j &= \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j \\ &= \mathbf{II} \mathbf{a}_j - c_j. \end{aligned}$$

Si el vector  $\mathbf{a}_j$  se cambia por uno nuevo  $\hat{\mathbf{a}}_j$ , el nuevo término  $\hat{z}_j - \hat{c}_j$  sería

$$\hat{z}_j - \hat{c}_j = \mathbf{II} \hat{\mathbf{a}}_j - c_j.$$

Mientras este término sea no-negativo, la solución óptima asociada con (PO) sigue siendo óptima. En caso contrario, es decir, que  $\hat{z}_j - \hat{c}_j < 0$  para  $j$  en  $\mathbf{N}$ , hay que aplicar el *método simplex*, para obtener la nueva solución óptima de (PN) teniendo cuidado que el vector  $\mathbf{Y}_j$  del tableau óptimo de (PO) sea actualizado por otro  $\hat{\mathbf{Y}}_j$ , donde  $\hat{\mathbf{Y}}_j = \mathbf{B}^{-1} \hat{\mathbf{a}}_j$ .

*Ejemplo.* Sea el problema original el siguiente

$$\text{Máx } Z = 3X_1 + 5X_2$$

<sup>42</sup> Existen métodos de análisis de sensibilidad para esta clase de cambios pero son bastante complicados. Véase por ejemplo la referencia [17].

sujeto a

$$\begin{aligned} X_1 &\leq 4 \\ 3X_1 + 2X_2 &\leq 18 \\ X_1 \geq 0, \quad X_2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (PO)$$

cuyo tableau óptimo es

	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	
	1	9/2	0	0	5/2	45
$a_3$	0	1	0	1	0	4
$a_2$	0	3/2	1	0	1/2	9

Supóngase que el vector  $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ , que no es básico, se cambia a  $\hat{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ . El nuevo problema a resolver es

$$\text{Máx } Z = 3X_1 + 5X_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2X_1 &\leq 4 \\ 2X_1 + 2X_2 &\leq 18 \\ X_1 \geq 0, \quad X_2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (PN)$$

Como únicamente se cambió el vector  $a_1$ , solamente  $z_1 - c_1$  se modifica a

$$\begin{aligned} \hat{z}_1 - \hat{c}_1 &= \mathbf{1} \hat{a}_1 - c_1 \\ &= (0, 5/2) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Como  $\hat{z}_1 - \hat{c}_1 = 2 > 0$  el nuevo tableau

	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	
	1	2	0	0	5/2	45
$a_3$	0	1	0	1	0	4
$a_2$	0	3/2	1	0	1/2	9

es óptimo, y la solución óptima (PO) continúa siendo la solución óptima de (PN), o sea

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_2 \\ X_1 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ Z &= 45. \end{aligned}$$

## 160 La programación lineal

*Ejemplo.* Supóngase que en el problema original (PO) anterior, el vector  $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ , se cambia a  $\hat{\mathbf{a}}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$ . El problema a resolver es

$$\text{Máx } Z = 3X_1 + 5X_2$$

sujeto a

$$10X_1 \leq 4$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 18$$

$$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0.$$

El nuevo elemento  $z_1 - c_1$  sería

$$\begin{aligned} \hat{z}_1 - \hat{c}_1 &= \mathbf{1} \hat{\mathbf{a}}_1 - c_1 \\ &= (0, 5/2) \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \\ &= -1/2. \end{aligned}$$

Como  $\hat{z}_1 - \hat{c}_1 = -1/2 < 0$  hay que aplicar el *método simplex* teniendo cuidado de actualizar el vector  $\mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$  del tableau óptimo de (PO) por otro nuevo  $\hat{\mathbf{Y}}_1$ , dado por

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Y}}_1 &= \mathbf{B}^{-1} \hat{\mathbf{a}}_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 \\ 1/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El *método simplex* se aplica al siguiente tableau, que difiere del tableau óptimo de (PO) en el término  $z_1 - c_1$  y en la columna  $\mathbf{Y}_1$ .

	Z	$\downarrow$ $X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	
	1	-1/2	0		5/2	45
$\mathbf{a}_3$	0	Ⓣ	0	1	0	4 ←
$\mathbf{a}_2$	0	1/2	1	0	1/2	9
	1	0	0	1/20	5/2	45.2
$\mathbf{a}_1$	0	1	0	1/10	0	4/10
$\mathbf{a}_2$	0	0	1	-1/20	1/2	8.8

La nueva solución óptima es

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_B \\ \mathbf{X}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 8.8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Z = 45.2.$$

**d) Adición de nuevas actividades  $X_j$**

La adición de nuevas variables  $X_j$ , crea nuevos términos  $z_j - c_j$  y nuevas columnas  $\mathbf{Y}_j$  en el tableau. Si asociado a la nueva actividad  $X_j$ , se conoce su precio unitario  $c_j$  y su vector de coeficientes tecnológicos  $\mathbf{a}_j$ , los nuevos elementos se calculan así:

$$z_j - c_j = \mathbf{I} \mathbf{I} \mathbf{a}_j - c_j$$

y 
$$\mathbf{Y}_j = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j.$$

Si el nuevo término  $z_j - c_j \geq 0$ , la variable  $X_j$  no debe entrar a la base y su valor de utilización es cero. En caso contrario, es decir  $z_j - c_j < 0$ , se introduce el vector  $\mathbf{Y}_j$  en el tableau y se aplica el *método simplex* hasta obtener optimalidad.

*Ejemplo.* Supóngase que el problema original es

$$\text{Máx } Z = 3X_1 + 5X_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} X_1 &\leq 4 \\ 3X_1 + 2X_2 &\leq 18 \\ X_1 \geq 0, \quad X_2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (PO)$$

¿Conviene producir una nueva actividad  $X_3$  cuyo precio unitario es \$7 y su vector de coeficientes tecnológicos  $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ?

El nuevo problema a resolver es

$$\text{Máx } Z = 3X_1 + 5X_2 + 7X_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} X_1 + X_3 &\leq 4 \\ 3X_1 + 2X_2 + 2X_3 &\leq 18 \\ X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad X_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

El nuevo elemento  $z_3 - c_3$  es

$$\begin{aligned} z_3 - c_3 &= \mathbf{I} \mathbf{I} \mathbf{a}_3 - c_3 \\ &= (0, 5/2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 7 \\ &= -2, \end{aligned}$$

## 162 La programación lineal

y como resulta negativo hay que calcular la columna  $\mathbf{Y}_5$  del nuevo tableau dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_5 &= \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_5 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

El nuevo tableau donde el *método simplex* debe aplicarse es

	Z	$X_1$	$X_2$	$X_5$	$X_3$	$X_4$	
	1	9/2	0	-2	0	5/2	45
$\mathbf{a}_3$	0	1	0	①	1	0	4←
$\mathbf{a}_2$	0	3/2	1	1	0	1/2	9
	1	13/2	0	0	2	5/2	53
$\mathbf{a}_5$	0	1	0	1	1	0	4
$\mathbf{a}_2$	0	1/2	1	0	-1	1/2	5

La nueva solución óptima es que la actividad  $X_5$  debe producirse a un nivel de 4 unidades y la actividad  $X_2$  debe reducirse de 9 a 5 unidades, con un incremento en la utilidad de 45 a 53 unidades.

*Ejemplo.* Supóngase que en el problema anterior el precio unitario de la nueva actividad  $X_5$  es \$4 y el vector  $\mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ . El nuevo problema a resolver es

$$\begin{aligned}\text{Máx } Z &= 3X_1 + 5X_2 + 4X_5 \\ \text{sujeto a} & \\ & X_1 + 10X_5 \leq 4 \\ & 3X_1 + 2X_2 + 4X_5 \leq 18 \\ & X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad X_5 \geq 0.\end{aligned} \quad (PN)$$

El término  $z_5 - c_5$  es

$$\begin{aligned}z_5 - c_5 &= \mathbf{1} \mathbf{a}_5 - c_5 \\ &= (0, 5/2) \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} - 4 \\ &= 10 - 4 \\ &= 6,\end{aligned}$$

y como es positivo, el tableau óptimo correspondiente a (PO) es óptimo para (PN) y  $X_5$  debe ser igual a cero. En otras palabras, bajo las condiciones actuales, no se debe producir  $X_5$  y la solución óptima de (PN) es

$$X = \begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_2 \\ X_1 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Z = 45.$$

Conviene terminar esta sección explicando el significado de  $z_j - c_j$ . Existen dos significados, a saber:

- a)  $z_j - c_j$  es la reducción (aumento) del valor de la función objetivo en el caso de maximización (minimización), al aumentar en una unidad el valor de la actividad  $X_j$ ,  $j \in \mathbf{N}$

o bien

- b)  $z_j - c_j$  es el valor que  $c_j$  debe aumentar (disminuir), en el caso de maximización (minimización), para que  $X_j$ ,  $j \in \mathbf{N}$  se convierta de una actividad no básica a básica.

*Ejemplo.* Supóngase el problema

$$\text{Máx } Z = 5X_1 + 3X_2$$

sujeto a

$$3X_1 + 5X_2 \leq 10$$

$$5X_1 + 2X_2 \leq 20$$

$$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0.$$

cuyo tableau óptimo es:

	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_B$
	1	0	$\frac{16}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{50}{3}$
$a_1$	0	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{10}{3}$
$a_4$	0	0	$-\frac{19}{3}$	$-\frac{5}{3}$	1	$\frac{10}{3}$

o sea

$$X_1 = \frac{10}{3}$$

$$X_2 = 0$$

$$Z = \frac{50}{3}$$

## 164 La programación lineal

Si  $X_2 = 1$  el nuevo valor de la función objetivo es:

$$\begin{aligned}\hat{Z} &= Z - (z_2 - c_2) \\ &= \frac{50}{3} - \frac{16}{3} \\ &= \frac{34}{3}.\end{aligned}$$

Por el otro lado, si se quiere que en la solución óptima  $X_2$  sea básico, el precio unitario de  $X_2$  debe aumentarse de \$5 a

$$\begin{aligned}\hat{c}_2 &= c_2 + (z_2 - c_2) \\ &= 5 + \frac{16}{3} \\ &= \frac{31}{3}.\end{aligned}$$

### e) Adición de nuevas restricciones

Si al añadir  $k$  ( $k > 0$ ) nuevas restricciones del tipo

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \begin{cases} < \\ > \end{cases} b_i \quad i = m + 1, \dots, m + k$$

al problema original ( $PO$ ), la solución óptima  $\mathbf{X}_B$  asociada a ( $PO$ ) las satisface, entonces  $\mathbf{X}_B$  es también solución óptima del nuevo problema. Por el contrario, si  $\mathbf{X}_B$  viola alguna de las  $k$  nuevas restricciones, habrá que restablecer la factibilidad del nuevo problema y obtener su optimalidad por vía del *método dual simplex*.

En caso de ser necesaria la aplicación del *método dual simplex*, cada una de las nuevas  $k$  restricciones deben añadirse en el tableau óptimo de ( $PO$ ) con su correspondiente variable de holgura. Todos los vectores unitarios asociados al tableau óptimo de ( $PO$ ) deben de re-establecerse por medio de operaciones elementales matriciales. El *método dual simplex*, debe aplicarse hasta obtener una solución óptima.

*Ejemplo.* Supóngase que el problema original ( $PO$ ) es el siguiente:

$$\text{Máx } Z = 5X_1 + 3X_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned}3X_1 + 5X_2 &\leq 15 \\ 5X_1 + 2X_2 &\leq 10 \\ X_1 &\geq 0, \quad X_2 \geq 0.\end{aligned}$$

cuyo tableau óptimo es

	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	
	1	0	0	5/19	16/19	235/19
$a_2$	0	0	1	5/19	-3/19	45/19
$a_1$	0	1	0	-2/19	5/19	20/19

La solución óptima asociada a (PO) es

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_B \\ \mathbf{X}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_1 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45/19 \\ 20/19 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Z = 235/19.$$

Supóngase que la nueva restricción es  $X_2 \leq 1$ . Obviamente la solución óptima de (PO) viola esta restricción, pues  $X_2$  óptimo es de 45/19, que es mayor que uno. El nuevo problema (PN) a resolver es

$$\begin{aligned} \text{Máx } Z &= 5X_1 + 3X_2 \\ \text{sujeto a} & \\ & 3X_1 + 5X_2 \leq 15 \\ & 5X_1 + 2X_2 \leq 10 \\ & X_2 \leq 1 \\ & X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (PN)$$

Añadiendo las variables de holgura se tiene

$$\begin{aligned} \text{Máx } Z &= 5X_1 + 3X_2 \\ \text{sujeto a} & \\ & 3X_1 + 5X_2 + X_3 = 15 \\ & 5X_1 + 2X_2 + X_4 = 10 \\ & X_2 + X_5 = 1 \\ & X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad X_3 \geq 0, \quad X_4 \geq 0, \quad X_5 \geq 0. \end{aligned}$$

En términos del tableau óptimo de (PO) se tiene que

	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	
	1	0	0	5/19	16/19	0	235/19
$a_2$	0	0	1	5/19	-3/19	0	45/19
$a_1$	0	1	0	-2/19	5/19	0	20/19
$a_5$	0	0	1	0	0	1	1



## 166 La programación lineal

Reestructurando el vector unitario  $e_3$ , por medio de operaciones matriciales elementales da el siguiente tableau.

	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	
	1	0	0	$\downarrow$ 5/19	16/19	0	235/19
$a_2$	0	0	1	5/19	-3/19	0	45/19
$a_1$	0	1	0	-2/19	5/19	0	20/19
$a_3$	0	0	0	-5/19	3/19	1	-26/19 ←

Aplicando el *método dual simplex* se obtiene el tableau óptimo

	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	
	1	0	0	0	1	1	11
$a_2$	0	0	1	0	0	1	1
$a_1$	0	1	0	0	1/5	-2/5	8/5
$a_3$	0	0	0	1	-3/5	-19/5	26/5

La nueva solución óptima es

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_1 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8/5 \\ 26/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Z = 11.$$

*Ejemplo.* Supóngase que en el ejemplo anterior la nueva restricción es  $X_2 \leq 10$ . Obviamente, como el resultado óptimo de (PO) arroja un valor de  $X_2 = 45/19$ , éste satisface la nueva restricción y por consiguiente la solución óptima de (PO), sigue siendo óptima.

### Cambios continuos y programación paramétrica

Se consideran en esta sección únicamente tres clases de cambios,

- parametrización o cambio continuo en el vector  $\mathbf{e}$ ,
- parametrización o cambio continuo en el vector  $\mathbf{b}$ ,
- parametrización o cambio continuo en un vector tecnológico no-básico  $\mathbf{a}_j$ ,  $j$  en  $\mathbf{N}$ .

## Significado intuitivo de los cambios continuos

Supóngase que el vector de precios unitarios  $\mathbf{c}$ , consta de dos componentes  $c_1$  y  $c_2$  donde  $c_1$  es el precio unitario de cemento y  $c_2$  el precio unitario de varilla corrugada. Supóngase que por la inflación que está sufriendo México, el precio del cemento aumenta un 3% cada semestre, mientras que el precio de la varilla aumenta en un 2% por semestre. Supóngase que el precio unitario actual es \$3 000 por tonelada de cemento y \$5 000 por una tonelada de varilla corrugada. El cambio continuo de precios  $\mathbf{c}$  puede representarse matemáticamente por

$$\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{c} + \theta \boldsymbol{\gamma}$$

donde  $\mathbf{c}$  es el vector con componentes  $c_1, c_2$  que representa el precio unitario actual, o sea

$$\mathbf{c} = (c_1, c_2) = (3\,000, 5\,000),$$

$\boldsymbol{\gamma}$  es un vector con componentes  $\gamma_1, \gamma_2$  que representa el porcentaje de aumento en precios, es decir

$$\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2) = (0.03 \times 3\,000, 0.02 \times 5\,000) = (90, 100)$$

y  $\theta$  es un escalar, en este caso no-negativo ( $\theta \geq 0$ ), que representa semestres. En resumen

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{c}} &= \mathbf{c} + \theta \boldsymbol{\gamma} = (c_1, c_2) + \theta (\gamma_1, \gamma_2) \\ &= (3\,000, 5\,000) + \theta (90, 100) \\ &= (3\,000 + 90\theta, 5\,000 + 100\theta) \end{aligned}$$

es el vector de precios continuos. En la siguiente tabla se dan los precios de cemento y varilla corrugada a 6 meses, 9 meses, 1 año y 2 años, al futuro.

Tabla 2.4

Semestre	Precio ton de cemento	Precio ton de varilla corrugada	Observaciones
$\theta$	$3\,000 + 90\theta$	$5\,000 + 100\theta$	
0	3 000	5 000	precio actual
1	3 090	5 100	precio a 6 meses
1.5	3 135	5 150	precio a 9 meses
2	3 180	5 200	precio a 1 año
4	3 360	5 400	precio a 2 años

## 168 La programación lineal

De manera similar, si los recursos  $b_1$ , capital disponible, aumentan en un 10% por año, mientras que los recursos  $b_2$  obreros, disminuyen en 5% por año, debido a la automatización, el cambio continuo  $\hat{\mathbf{b}}$  puede representarse matemáticamente por

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{b}} &= \mathbf{b} + \alpha \boldsymbol{\delta} \\ &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Supóngase que el capital actual es \$ 10 000 000 y se dispone de 1 000 obreros. Entonces

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{b}} &= \begin{pmatrix} 10\,000\,000 \\ 1\,000 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0.1 \times 10\,000\,000 \\ -0.05 \times 1\,000 \end{pmatrix} \\ \hat{\mathbf{b}} &= \begin{pmatrix} 10\,000\,000 + 1\,000\,000\alpha \\ 1\,000 - 50\alpha \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

La siguiente tabla da los valores de recursos a 1, 2 y 5.5 años al futuro.

Tabla 2.5

Año	Obreros	Capital	Observaciones
$\alpha$	$1\,000 - 50\alpha$	$10\,000\,000 + 1\,000\,000\alpha$	
0	1 000	10 000 000	actual
1	950	11 000 000	1 año
2	900	12 000 000	2 años
5.5	725	15 500 000	5.5 años

Bajo la suposición de que el lector entiende a estas alturas la diferencia entre *cambios discretos* y *cambios continuos*, se explica a continuación el análisis de sensibilidad de estos últimos, llamado *Programación Paramétrica*.

### Cambios continuos en el vector $\mathbf{c}$

El problema a estudiar es el siguiente

$$\text{Máx } Z = (\mathbf{c} + \theta \boldsymbol{\gamma}) \mathbf{X}$$

sujeto a

$$\begin{aligned}\mathbf{AX} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{X} &\geq \mathbf{0},\end{aligned}$$

donde  $\mathbf{c} + \theta \boldsymbol{\gamma}$ ,  $-\infty < \theta < \infty$ , es el vector paramétrico que indica los cambios continuos de los precios unitarios,  $\boldsymbol{\gamma}$  es un vector con  $n$  compo-

centes. Se restringe el estudio al caso en que  $\theta \geq 0$ , puesto que para el caso  $\theta < 0$ , todos los resultados que se obtengan serán análogos.

Cuando el vector paramétrico  $\mathbf{e} + \theta \boldsymbol{\gamma}$  varía, el elemento  $z_j - c_j$ , para toda  $j$  en  $\mathbf{A}$ , también varía. Para analizar esta variación, se establece la siguiente notación. Sea  $\mathbf{B}_0$  la base óptima asociada al problema arriba mencionado, para  $\theta = 0$ , es decir

$$\text{Máx } Z = \mathbf{eX}$$

sujeto a

$$\mathbf{AX} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0},$$

entonces el nuevo valor de  $z_j - c_j$ , denotado por  $\hat{z}_j - \hat{c}_j$  es

$$\begin{aligned} \hat{z}_j - \hat{c}_j &= (\mathbf{e}_{B_0} + \theta \boldsymbol{\gamma}_{B_0}) \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{a}_j - (c_j + \theta \gamma_j), \text{ para } j \text{ en } \mathbf{A} \\ &= \mathbf{e}_{B_0} \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{a}_j - c_j + \theta (\boldsymbol{\gamma}_{B_0} \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{a}_j - \gamma_j) \\ &= (z_j - c_j) + \theta (\boldsymbol{\gamma}_{B_0} \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{a}_j - \gamma_j), \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{e}_{B_0}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}_{B_0}$  son las componentes de  $\mathbf{e}$  y  $\boldsymbol{\gamma}$  asociadas a la base  $\mathbf{B}_0$ .

¿Existe algún valor crítico de  $\theta$ , digamos  $\theta^*$ , tal que para valores mayores que  $\theta^*$ , la base  $\mathbf{B}_0$  dejaría de ser óptima?

Para contestar esta pregunta se analiza el término  $\hat{z}_j - \hat{c}_j$ . Como la optimalidad para cualquier valor de  $\theta$  se obtiene cuando  $\hat{z}_j - \hat{c}_j \geq 0$ , para toda  $j$  en  $\mathbf{A}$ , y sabiendo que  $z_j - c_j \geq 0$ , para toda  $j$ , porque  $\mathbf{B}_0$  es óptimo para  $\theta = 0$ , queda únicamente pendiente analizar al segundo término de  $\hat{z}_j - \hat{c}_j$ , es decir

$$\boldsymbol{\gamma}_{B_0} \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{a}_j - \gamma_j.$$

Se concluye:

- Si  $\boldsymbol{\gamma}_{B_0} \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{a}_j - \gamma_j \geq 0$ , para toda  $j$  en  $\mathbf{A}$  entonces la base  $\mathbf{B}_0$ , correspondiente al tableau óptimo del programa lineal con  $\theta = 0$ , sigue siendo óptimo para cualquier valor de  $\theta \geq 0$ .
- De lo contrario, si existe alguna  $j$  en  $\mathbf{A}$  para la cual su correspondiente  $\boldsymbol{\gamma}_{B_0} \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{a}_j - \gamma_j < 0$ , entonces existe un valor crítico de  $\theta$ , denotado por  $\theta^*$ , que se calcula por

$$\begin{aligned} \theta^* &= - \left( \frac{(z_k - c_k)}{(\boldsymbol{\gamma}_{B_0} \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{a}_k - \gamma_k)} \right) \\ &= \text{Mín}_{j \in \mathbf{N}} \left[ - \frac{(z_j - c_j)}{(\boldsymbol{\gamma}_{B_0} \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{a}_j - \gamma_j)} \mid \boldsymbol{\gamma}_{B_0} \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{a}_j - \gamma_j < 0 \right] \quad (2.65) \end{aligned}$$

para el cual  $\mathbf{B}_0$  deja de ser óptimo para valores de  $\theta \geq \theta^*$ .

Cuando  $\theta \geq \theta^*$ , ¿qué debe hacerse para reoptimizar el tableau correspondiente a  $\theta = 0$ ?

## 170 La programación lineal

La respuesta a esta pregunta tiene 2 partes. La primera cuando (2.65) tiene un valor mínimo único y la segunda cuando (2.65) no tiene un valor mínimo único.

*Caso 1.* La expresión de  $\Theta^*$  dada por (2.65) tiene valor mínimo único.

a) Si  $Y_{ik} \leq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , entonces NO existe un óptimo finito para valores de  $\Theta \geq \Theta^*$ . O sea, en este caso el problema lineal para valores de  $\Theta \geq \Theta^*$  tiene como solución óptima al infinito.

b) Si  $Y_{ik} > 0$ , al menos para una  $i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , el *método simplex* se aplica de la manera usual, hasta obtener una nueva solución óptima con la salvedad de que todos los valores  $z_j - c_j$ ,  $j$  en  $\mathbf{N}$  deben de actualizarse. La base asociada a esta solución óptima es  $\mathbf{B}_1$ .

Se puede continuar el mismo análisis en el sentido de que puede existir un valor crítico de  $\Theta$ , denotado  $\Theta^{**}$ , para el cual  $\mathbf{B}_1$  sigue siendo óptimo en el rango  $\Theta^* \leq \Theta < \Theta^* + \Theta^{**}$ . Este valor  $\Theta^{**}$  está dado por

$$\Theta^{**} = - \frac{(z_k - c_k)}{(\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{B}_1} \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{a}_k - \gamma_k)} =$$

$$\text{Mín}_{j \in \mathbf{N}} \left[ - \frac{(z_j - c_j)}{(\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{B}_1} \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{a}_j - \gamma_j)} \mid \boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{B}_1} \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{a}_j - \gamma_j < 0 \right].$$

*Caso 2.* La expresión de  $\Theta^*$  dada por (2.65) no tiene un valor mínimo único.

En este caso será necesario hacer varios cambios de base, por medio del *método simplex*, hasta corroborar que no existe ciclaje, en cuyo caso lo explicado en el *caso 1* se aplica aquí, o bien demostrar que no existe una solución óptima finita para valores de  $\Theta \geq \Theta^*$ .

*Ejemplo.* Considérese el siguiente problema paramétrico

$$\begin{aligned} \text{Máx } Z &= (3-6\Theta)X_1 + (2-2\Theta)X_2 + (5+5\Theta)X_3 \\ \text{sujeto a} & \\ & X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 430 \\ & 3X_1 + \quad + 2X_3 \leq 460 \\ & X_1 + 4X_2 \leq 420 \\ & X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad X_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Nótese que  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3) = (3, 2, 5)$  y  $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (-6, -2, 5)$ .

Para  $\Theta = 0$ , el problema se convierte en

$$\begin{aligned} \text{Máx } Z &= 3X_1 + 2X_2 + 5X_3 \\ \text{sujeto a} & \\ & X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 430 \\ & 3X_1 + \quad + 2X_3 \leq 460 \\ & X_1 + 4X_2 \leq 420 \\ & X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad X_3 \geq 0. \end{aligned}$$

cuyo tableau inicial y óptimo, como podrá corroborar el lector, es respectivamente:

	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	
	1	-3	-2	-5	0	0	0	0
$a_4$	1	1	2	1	1	0	0	430
$a_5$	0	3	0	2	0	1	0	460
$a_6$	0	1	4	0	0	0	1	420
	1	4	0	0	1	2	0	1 350
$a_2$	0	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0	100
$a_3$	0	3/2	0	1	0	1/2	0	230
$a_6$	0	2	0	0	-2	1	1	20

Los resultados óptimos para  $\theta = 0$  son

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{a_0} \\ \mathbf{X}_{N_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_6 \\ X_1 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 230 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Z^* = 1\,350$$

$$\mathbf{B}_0 = (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_6), \quad \mathbf{N}_0 = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5)$$

$$\mathbf{B}_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se calculará a continuación  $\theta^*$ ,

$$\theta^* = \text{Mín}_{j \in \mathbf{N}_0} \left[ - \frac{(z_j - c_j)}{(\boldsymbol{\gamma}_{B_0} \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{a}_j - \gamma_j)} \mid \boldsymbol{\gamma}_{B_0} \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{a}_j - \gamma_j < 0 \right].$$

Como  $\mathbf{N}_0 = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5)$  se tiene

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}_{B_0} \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{N}_0 - \boldsymbol{\gamma}_{N_0} &= (\gamma_2, \gamma_3, \gamma_6) \mathbf{B}_0^{-1} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5) - (\gamma_1, \gamma_4, \gamma_5) \\ &= (-2, 5, 0) \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - (-6, 0, 0) \\ &= (-1, 3, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - (-6, 0, 0) \\ &= (8, -1, 3) - (-6, 0, 0) \\ &= (14, -1, 3), \end{aligned}$$

o sea en otras palabras que

## 172 La programación lineal

$$\gamma_{B_0} \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{a}_1 - \gamma_1 = 14,$$

$$\gamma_{B_0} \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{a}_4 - \gamma_4 = -1,$$

$$\gamma_{B_0} \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{a}_5 - \gamma_5 = 3.$$

Entonces, el único candidato para el cálculo de  $\Theta^*$  es  $\gamma_{B_0} \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{a}_4 - \gamma_4$ , porque es negativo, dando como resultado que

$$\begin{aligned} \Theta^* &= - \frac{z_4 - c_4}{\gamma_{B_0} \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{a}_4 - \gamma_4} \\ &= - \frac{1}{-1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Entonces, para valores de  $\Theta$  comprendidos en el rango  $0 \leq \Theta < 1$ , se tienen los siguientes resultados óptimos

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{B_0} \\ \mathbf{X}_{N_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_6 \\ X_1 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 230 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{y} \quad Z^* &= (\mathbf{c}_{B_0} + \Theta \gamma_{B_0}) \mathbf{X}_{B_0} \\ &= (c_2 + \Theta \gamma_2, c_3 + \Theta \gamma_3, c_6 + \Theta \gamma_6) \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_6 \end{pmatrix} \\ &= (2 - 2\Theta, 5 + 5\Theta, 0 + 0\Theta) \begin{pmatrix} 100 \\ 230 \\ 20 \end{pmatrix} \\ &= 200 - 200\Theta + 1150 + 1150\Theta \\ &= 1350 - 950\Theta. \end{aligned}$$

Por ejemplo, para  $\Theta = 1/2$ , el valor de la función objetivo será

$$\begin{aligned} Z &= 1350 - 950(1/2) \\ &= 875. \end{aligned}$$

Se analiza si existe algún otro rango de  $\Theta$ , dado por  $\Theta^* \leq \Theta < \Theta^* + \Theta^{**}$ . Para eso en el tableau óptimo correspondiente a  $\Theta = 0$ , se actualizan los  $z_j - c_j$ , para toda  $j$  en  $\mathbf{N}$ , y se introduce inmediatamente el vector  $\mathbf{a}_4$  aplicando el *método simplex*, tal como se muestra a continuación:

$$\hat{z}_1 - \hat{c}_1 = z_1 - c_1 + \Theta^*(\gamma_{B_0} \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{a}_1 - \gamma_1) = 4 + 1(14) = 18,$$

$$\hat{z}_4 - \hat{c}_4 = z_4 - c_4 + \Theta^*(\gamma_{B_0} \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{a}_4 - \gamma_4) = 1 + 1(-1) = 0,$$

$$\hat{z}_5 - \hat{c}_5 = z_5 - c_5 + \Theta^*(\gamma_{B_0} \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{a}_5 - \gamma_5) = 2 + 1(3) = 5.$$

	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$\downarrow$ $X_4$	$X_5$	$X_6$	
	1	18	0	0	0	5	0	1 350
$a_2$	0	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0	100 ←
$a_3$	0	3/2	0	1	0	1/2	0	230
$a_6$	0	2	0	0	-2	1	1	20

Después de introducir el vector  $a_4$ , asociado a  $\theta^*$ , el método simplex da el siguiente tableau óptimo

	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	
	1	18	0	0	0	5	0	2 300
$a_4$	0	-1/2	2	0	1	-1/2	0	200
$a_3$	0	3/2	0	1	0	1/2	0	230
$a_6$	0	1	4	0	0	0	1	420

El valor de la función objetivo, para  $\theta = 1$ , proviene de  $Z = (5+5\theta)X_3 + 0X_4 + 0X_6 = (5+5\theta)230 = 1150 + 1150\theta = 1150 + 1150 = 2300$ .

Los resultados óptimos para  $1 \leq \theta < 1 + \theta^{**}$  son

$$\mathbf{X}^{**} = \begin{pmatrix} X_4 \\ X_3 \\ X_6 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 230 \\ 420 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Z^{**} = (5+5\theta)(230)$$

$$= 1150 + 1150\theta, \quad 1 \leq \theta < 1 + \theta^{**}$$

$$\mathbf{B}_1 = (\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_6), \quad \mathbf{N}_1 = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5)$$

$$\mathbf{B}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para ver si existe una  $\theta^{**}$  se calcula

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}_{B_1} \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{N}_1 - \boldsymbol{\gamma}_{N_1} &= (\gamma_4, \gamma_3, \gamma_6) \mathbf{B}_1^{-1} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5) - (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_5) \\ &= (0, 5, 0) \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} - (-6, -2, 0) \\ &= (0, 5/2, 0) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} - (-6, -2, 0) \end{aligned}$$



## 174 La programación lineal

$$\begin{aligned}
 &= (15/2, 0, 5/2) - (-6, -2, 0) \\
 &= (27/2, 2, 5/2),
 \end{aligned}$$

o sea

$$\begin{aligned}
 \gamma_{B_1} \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{a}_1 - \gamma_1 &= 27/2 \\
 \gamma_{B_1} \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{a}_2 - \gamma_2 &= 2 \\
 \gamma_{B_1} \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{a}_3 - \gamma_3 &= 5/2,
 \end{aligned}$$

y como no hay  $\gamma_{B_1} \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{a}_j - \gamma_j$ , para  $j$  en  $\mathbf{N}$ , menor que cero, entonces  $\theta^{**}$  es igual a infinito.

En resumen para valores de  $\theta$ , comprendidos en el rango  $0 \leq \theta < 1$ , la solución óptima es

$$X_1 = 0, X_2 = 100, X_3 = 230, X_4 = 0, X_5 = 0, X_6 = 20,$$

y

$$Z = 1\,350 - 950\theta, \quad 0 \leq \theta < 1,$$

y para valores de  $\theta$ , en el rango  $1 \leq \theta < \infty$  se tiene como solución óptima

$$X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 230, X_4 = 200, X_5 = 0, X_6 = 420$$

y

$$Z = 1\,150 + 1\,150\theta, \quad 1 \leq \theta < \infty.$$

### Cambio continuo en el vector $\mathbf{b}$

El problema a resolver es el siguiente

$$\text{Máx } Z = \mathbf{c}\mathbf{X}$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}\mathbf{X} &\leq \mathbf{b} + \alpha\mathbf{g} \\
 \mathbf{X} &\geq \mathbf{0},
 \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{b} + \alpha\mathbf{g}$ ,  $-\infty < \alpha < \infty$ , es el vector paramétrico que indica los cambios continuos en la disponibilidad de recursos;  $\mathbf{g}$  es un vector con  $m$  componentes. Se restringe el estudio al caso en que  $\alpha \geq 0$ , puesto que para el caso  $\alpha < 0$ , todos los resultados que se obtienen son análogos.

Sea  $\mathbf{B}_0$  la base óptima asociada al problema antes mencionado, cuando  $\alpha = 0$ , es decir,

$$\text{Máx } Z = \mathbf{c}\mathbf{X}$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}\mathbf{X} &\leq \mathbf{b} \\
 \mathbf{X} &\geq \mathbf{0}.
 \end{aligned}$$

Un cambio en el parámetro  $\mathbf{b} + \alpha\mathbf{g}$ , hace cambiar al vector básico  $\mathbf{X}_{B_0}$  y al valor de la función objetivo  $Z^*$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}_{B_0} &= \mathbf{B}_0^{-1} (\mathbf{b} + \alpha\mathbf{g}) \\
 Z^* &= \mathbf{c}_{B_0} \mathbf{X}_{B_0}.
 \end{aligned}$$

¿Existe algún valor crítico de  $\alpha$ , por ejemplo  $\alpha^*$ , tal que para valores mayores que  $\alpha$ , la base  $\mathbf{B}_0$  dejaría de ser óptima?

La contestación es la siguiente: si  $\mathbf{X}_{B_0} = \mathbf{B}_0^{-1} (\mathbf{b} + \alpha \mathbf{g}) \geq \mathbf{0}$ , para cualquier valor de  $\alpha$ , entonces  $\mathbf{B}_0$  sigue siendo óptima. En caso contrario, es decir si alguna componente de  $\mathbf{B}_0^{-1} (\mathbf{b} + \alpha \mathbf{g})$  es negativa,  $\mathbf{B}_0$  cesa de ser óptimo y el valor de  $\alpha^*$  se determina mediante la siguiente relación:

$$\alpha^* = \text{Mín}_{i=1, \dots, m} \left[ \frac{-X_{B_{0i}}}{\mathbf{B}_0^{-1} \delta_i} \mid \mathbf{B}_0^{-1} \delta_i < 0 \right] \quad (2.66)$$

donde  $X_{B_{0i}}$  es la  $i$ -ésima componente,  $i = 1, \dots, m$ , del vector básico  $\mathbf{X}_{B_0}$ ,  $\delta_i$  es la  $i$ -ésima componente,  $i = 1, \dots, m$  del vector  $\mathbf{g}$ . Para el valor  $\alpha = \alpha^*$ , se puede obtener una nueva solución factible básica usando el *método dual simplex* una vez actualizado  $\mathbf{X}_{B_0}$  y  $Z^*$ , para  $\alpha = \alpha^*$ , en el tableau óptimo asociado a  $\mathbf{B}_0$ . Al obtener una nueva solución óptima  $\mathbf{X}_{B_1}$ , correspondiente a una nueva base  $\mathbf{B}_1$ , el análisis para determinar un segundo valor crítico de  $\alpha$ , por ejemplo  $\alpha^{**}$ , es similar. El rango de análisis en este caso sería  $\alpha^* \leq \alpha \leq \alpha^* + \alpha^{**}$ .

*Ejemplo.* Considérese el siguiente problema paramétrico

$$\text{Máx } Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$$

sujeto a

$$X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 430 + 100\alpha$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 460 - 200\alpha$$

$$X_1 + 4X_2 \leq 420 + 400\alpha$$

$$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad X_3 \geq 0,$$

donde

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 430 \\ 460 \\ 420 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ -200 \\ 400 \end{bmatrix}.$$

Para  $\alpha = 0$  el problema se convierte en

$$\text{Máx } Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$$

sujeto a

$$X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 430$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 460$$

$$X_1 + 4X_2 \leq 420$$

$$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad X_3 \geq 0,$$

cuyo tableau óptimo es

## 176 La programación lineal

	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	
	1	4	0	0	1	2	0	1 350
$a_2$	0	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0	100
$a_3$	0	3/2	0	1	0	1/2	0	230
$a_6$	0	2	0	0	-2	1	1	20

Los resultados óptimos para  $\alpha = 0$  son:

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_6 \\ X_1 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 230 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Z^* = 1\ 350$$

$$\mathbf{B}_0 = (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_6), \quad \mathbf{N}_0 = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5)$$

$$\mathbf{B}_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El valor de  $\alpha^*$  queda determinado por

$$\alpha^* = \text{Mín}_{i=1, \dots, m} \left[ \frac{-X_{B_{0i}}}{\mathbf{B}_0^{-1} \delta_i} \mid \mathbf{B}_0^{-1} \delta_i < 0 \right],$$

donde

$$\mathbf{B}_0^{-1} \delta = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ -200 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como  $\mathbf{B}_0^{-1} \delta_2 = -100 < 0$ , si existe  $\alpha^*$ , cuyo valor es

$$\begin{aligned} \alpha^* &= \left[ \frac{-X_{B_{02}}}{\mathbf{B}_0^{-1} \delta_2} \right] \\ &= \left[ \frac{-230}{-100} \right] = 2.3. \end{aligned}$$

Esto quiere decir que para el rango  $0 \leq \alpha \leq 2.3$  la solución óptima está dada por

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_{B_0} &= \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_6 \end{pmatrix} = \mathbf{B}_0^{-1} (\mathbf{b} + \alpha \mathbf{b}) \\
&= \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{b} + \alpha \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{b} \\
&= \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 430 \\ 460 \\ 420 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 100 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 100 \\ 230 \\ 20 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 100 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 100 + 100\alpha \\ 230 - 100\alpha \\ 20 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

y el valor de la función objetivo queda expresado por

$$\begin{aligned}
Z^* &= \mathbf{c}_{B_0} \mathbf{X}_{B_0}, \quad 0 \leq \alpha \leq 2.3 \\
&= (c_2, c_3, c_6) \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_6 \end{pmatrix} \\
&= (2, 5, 0) \begin{pmatrix} 100 + 100\alpha \\ 230 - 100\alpha \\ 20 \end{pmatrix} \\
&= 1\,350 - 300\alpha.
\end{aligned}$$

Por ejemplo para  $\alpha = 1$ , la solución óptima es

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_{B_0} &= \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 + 100 \\ 230 - 100 \\ 20 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 200 \\ 130 \\ 20 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
Z &= 1\,350 - 300 \\
&= 1\,050.
\end{aligned}$$

Para valores de  $\alpha$ ,  $\alpha > 2.3$ , al actualizar el vector  $\mathbf{X}_{B_0}$  para  $\alpha = 2.3$  se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_{B_0} &= \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 + 100 \times 2.3 \\ 230 - 100 \times 2.3 \\ 20 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 330 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

## 178 La programación lineal

con

$$\begin{aligned} Z &= 1\,350 - 300 \quad (2.3) \\ &= 660. \end{aligned}$$

El tableau al cual se le aplica el *método dual simplex*, donde  $X_{B_03} = X_2 = 0$ , para  $\alpha = 2.3$ , debe salir de la base es

	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	
	1	4	0	0	1	2	0	660
$a_2$	0	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0	330
$a_3$	0	3/2	0	1	0	1/2	0	0 ←
$a_6$	0	2	0	0	-2	1	1	20

Sin embargo, como el *método dual simplex* no puede en este caso determinar un vector de entrada (porque todos los elementos  $Y_{2j} \geq 0$ ,  $j$  en  $\mathbf{A}$ ) el problema paramétrico original no tiene solución, para cualquier valor de  $\alpha > 2.3$ .

### Cambio continuo en una columna tecnológica no-básica $a_j$ de $\mathbf{A}$

El problema a resolver es el siguiente

$$\text{Máx } Z = \mathbf{c}\mathbf{X}$$

sujeto a

$$\hat{\mathbf{A}}\mathbf{X} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0},$$

donde  $\hat{\mathbf{A}}$  difiere de la matriz original  $\mathbf{A}$  únicamente en una columna no-básica, la  $j$ , donde

$$\hat{\mathbf{a}}_j = \mathbf{a}_j + \theta \boldsymbol{\gamma}_j, \quad j \in \mathbf{N},$$

$\mathbf{a}_j$  pertenece a  $\mathbf{A}$ ,  $-\infty < \theta < \infty$ , y  $\boldsymbol{\gamma}_j$  es un vector columna con  $m$  componentes. De nuevo se restringe el análisis al caso en que  $\theta \geq 0$  puesto que en el caso contrario,  $\theta < 0$ , los resultados que se obtienen son análogos.

A diferencia del análisis de parametrización de los vectores  $\mathbf{c}$  y  $\mathbf{b}$ , en este caso, una vez que se calcule un valor crítico de  $\theta$ , por ejemplo  $\theta^*$ , el análisis *no puede* continuarse para valores de  $\theta > \theta^*$ , puesto que  $\hat{\mathbf{a}}_j$  se convierte de vector no-básico (para  $0 \leq \theta \leq \theta^*$ ) a un vector básico (para  $\theta > \theta^*$ ).

Con esta advertencia se continúa el análisis paramétrico de un vector tecnológico no-básico. Sea de nuevo  $\mathbf{B}_0$  la base óptima asociada al problema anterior con  $\theta = 0$ , es decir

$$\text{Máx } Z = \mathbf{cX}$$

sujeto a

$$\mathbf{AX} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}.$$

Un cambio paramétrico en el vector  $\hat{\mathbf{a}}_j$ ,  $j$  en  $\mathbf{N}$  ocasiona que  $\hat{z}_j - \hat{c}_j$  se modifique de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \hat{z}_j - \hat{c}_j &= \mathbf{c}_{B_0} \mathbf{B}_0^{-1} \hat{\mathbf{a}}_j - c_j & , \quad j \text{ en } \mathbf{N}, \\ &= \mathbf{c}_{B_0} \mathbf{B}_0^{-1} (\mathbf{a}_j + \Theta \boldsymbol{\gamma}_j) - c_j & , \quad j \text{ en } \mathbf{N}, \\ &= \mathbf{c}_{B_0} \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{a}_j - c_j + \Theta \mathbf{c}_{B_0} \mathbf{B}_0^{-1} \boldsymbol{\gamma}_j & , \quad j \text{ en } \mathbf{N}, \\ &= z_j - c_j + \Theta \mathbf{c}_{B_0} \mathbf{B}_0^{-1} \boldsymbol{\gamma}_j & , \quad j \text{ en } \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Si  $\hat{z}_j - \hat{c}_j \geq 0$ , para toda  $j$  en  $\mathbf{N}$  y para cualquier valor de  $\Theta > 0$ , entonces  $\mathbf{B}_0$  sigue siendo óptimo. En caso contrario, es decir, si existe alguna  $j$  en  $\mathbf{N}$ , para el cual  $\hat{z}_j - \hat{c}_j < 0$ , entonces  $\Theta^*$  se determina por medio de la siguiente relación:

$$\Theta^* = \text{Mín}_{j=1, \dots, m} \left[ \frac{-(z_j - c_j)}{\mathbf{c}_{B_0} \mathbf{B}_0^{-1} \boldsymbol{\gamma}_j} \mid \mathbf{c}_{B_0} \mathbf{B}_0^{-1} \boldsymbol{\gamma}_j < 0 \right] \quad (2.67)$$

En ese caso  $\mathbf{B}_0$  es óptimo únicamente en el rango  $0 \leq \Theta \leq \Theta^*$ , y nada se puede decir para valores de  $\Theta > \Theta^*$ .<sup>43</sup>

*Ejemplo.* Resuélvase el siguiente problema

$$\text{Máx } Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$$

sujeto a

$$(1 + \Theta)X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 430$$

$$(3 - \Theta)X_1 + 2X_3 \leq 460$$

$$X_1 + 4X_2 \leq 420$$

$$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad X_3 \geq 0,$$

donde el vector tecnológico paramétrico  $\hat{\mathbf{a}}_1$  es

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}_1 &= \mathbf{a}_1 + \Theta \boldsymbol{\gamma}_1 \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \Theta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

<sup>43</sup> Para aquellos lectores interesados en el análisis que determina valores críticos de  $\Theta$  mayores a  $\Theta^*$ , por ejemplo,  $\Theta^{**}$ ,  $\Theta^{***}$ , etc. se recomienda la lectura de Simmonard [17] sección 7-10-2, pág. 157.

## 180 La programación lineal

Para  $\Theta = 0$ , el problema se convierte en

$$\text{Máx } Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$$

sujeto a

$$X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 430$$

$$3X_1 + 2X_3 \leq 460$$

$$X_1 + 4X_2 \leq 420$$

$$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad X_3 \geq 0,$$

cuyo tableau óptimo es

	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	
	1	4	0	0	1	2	0	1 350
$a_2$	0	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0	100
$a_3$	0	3/2	0	1	0	1/2	0	230
$a_4$	0	2	0	0	-2	1	1	20

Los resultados óptimos para  $\Theta = 0$  son

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{a_0} \\ \mathbf{X}_{x_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_6 \\ X_1 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 230 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Z^* = 1\,350.$$

Para determinar si existe un valor crítico  $\Theta^*$ , se calcula  $\mathbf{e}_{B_0} \mathbf{B}_0^{-1} \gamma_j$ , para toda  $j$  en  $\mathbf{N}$ , que sufra un cambio paramétrico, en este caso  $j = 1$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{B_0} \mathbf{B}_0^{-1} \gamma_1 &= (c_2, c_3, c_6) \mathbf{B}_0^{-1} \gamma_1 \\ &= (2, 5, 0) \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (1, 2, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -1 \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \Theta^* &= \frac{-(z_1 - c_1)}{\mathbf{e}_{B_0} \mathbf{B}_0^{-1} \gamma_1} \\ &= \frac{-4}{-1} = 4. \end{aligned}$$

Se puede entonces resumir que para valores de  $\theta$ , comprendidos en el rango  $0 \leq \theta \leq 4$ , la solución óptima es  $X_2 = 100$ ,  $X_3 = 230$ ,  $X_6 = 20$ ,  $X_1 = X_4 = X_5 = 0$  y  $Z^* = 1\,350$ .

## 2.5. Método revisado

La solución práctica de problemas reales que utilizan modelos de programación lineal, presentan la gran dificultad de que contienen mucha información que debe almacenarse en la computadora. Supóngase por ejemplo un problema con 10 000 variables de decisión y 500 restricciones. En este caso la matriz  $\mathbf{A}$  tendría 5 millones de componentes, quizás muchas de ellas cero, que habría que guardar dentro de una computadora. Muchas computadoras no tienen capacidad de memoria que les permita almacenar toda la información requerida en la solución de problemas lineales de tales dimensiones. Aun suponiendo que sí tuviera memorias y dispositivos especiales para guardar toda esa información, se consumiría mucho tiempo en el acceso de esa información para el cálculo de los diferentes pasos del *método simplex*. Este tiempo se vende comercialmente a precios muy elevados (\$8000/hora aproximadamente).

Bajo tales problemas se han desarrollado métodos que aprovechando las propiedades básicas de la estructura del *método simplex*, permiten la solución de problemas lineales bastante grandes, sin requerir del almacenamiento de toda esa información y sin incrementar el tiempo de cómputo.

Dos de esos métodos que se tratan en este libro son:

- a) el *método simplex revisado*,
- b) el *método de descomposición lineal*.

El primero de esos métodos se estudiará y analizará a continuación, dejando la *descomposición lineal* para la siguiente sección.

En seguida se analiza qué elementos se utilizan en el *método simplex*. En cada iteración se tiene que el vector básico  $\mathbf{X}_B$  está dado por

$$\mathbf{X}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b},$$

donde  $\mathbf{B}$  es la base correspondiente a esa iteración; el valor de la función objetivo en cada iteración es

$$Z = \mathbf{c}_B \mathbf{X}_B$$

y los valores que indican la optimalidad de la base son:

$$z_j - c_j = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j, \quad j \text{ en } \mathbf{A}.$$

Se puede entonces resumir, que en cada iteración el *único elemento indispensable* es  $\mathbf{B}^{-1}$ , pues conociendo  $\mathbf{B}^{-1}$  se pueden calcular  $\mathbf{X}_B$ ,  $Z$  y  $z_j - c_j$ . La diferencia entre el *método simplex revisado* y el *método*



## 182 La programación lineal

*simplex*, es que en el primero, es necesario almacenar en cada iteración un tableau de  $m$  por  $m$ , mientras que en el segundo método, cada tableau es de  $m$  por  $n$ , conteniendo muchísima más información que en el primer proceso:<sup>44</sup>

Supóngase que en dos iteraciones consecutivas del *método simplex* se tiene a  $\mathbf{B}^{-1}$  asociada con el tableau anterior y a  $\hat{\mathbf{B}}^{-1}$  con el tableau actual. Ambas matrices son de  $m$  por  $m$ . Sea

$$\mathbf{I} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

una matriz identidad, donde  $\mathbf{e}_i$  es el  $i$ -ésimo vector unitario,  $i = 1, \dots, m$ . Sea  $\mathbf{a}_r$  el vector de salida de la base y  $\mathbf{a}_j$  el vector de entrada en la nueva base. Entonces, la siguiente relación asocia a  $\mathbf{B}^{-1}$  y  $\hat{\mathbf{B}}^{-1}$ .

$$\hat{\mathbf{B}}^{-1} = \mathbf{E} \mathbf{B}^{-1}$$

donde

$$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{r-1}, \boldsymbol{\zeta}, \mathbf{e}_{r+1}, \dots, \mathbf{e}_m)$$

y

$$\boldsymbol{\zeta} = \begin{pmatrix} -Y_{1j} / Y_{rj} \\ -Y_{2j} / Y_{rj} \\ \vdots \\ 1 / Y_{rj} \\ \vdots \\ -Y_{mj} / Y_{rj} \end{pmatrix} \leftarrow r\text{-ava posición.}$$

Como ya es sabido,  $Y_{ij}$  es un elemento del último tableau asociado a la  $i$ -ésima restricción ( $i = 1, \dots, m$ ) y a la  $j$ -ésima actividad ( $j = 1, \dots, n$ ). es decir, es una componente de  $\mathbf{Y}_j = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j$ . Una vez computado  $\hat{\mathbf{B}}^{-1}$ , se puede calcular  $\mathbf{X}_B$ ,  $Z$  y  $z_j - c_j$ .

El tableau asociado a  $\hat{\mathbf{B}}^{-1}$  tendrá la siguiente estructura:

<sup>44</sup> Supóngase que un programa lineal tiene 10 000 variables y 500 restricciones. El *método simplex* utilizaría un tableau con 5 millones de elementos, mientras que el *método simplex revisado*, uno de 250 000 elementos.

<b>1</b>	$\mathbf{c}_B \hat{\mathbf{B}}^{-1}$	$\mathbf{c}_B \hat{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{b}$
<b>0</b>	$\hat{\mathbf{B}}^{-1}$	$\hat{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{b}$

En efecto, si se hace

$$\mathbf{T} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{1} & \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} \end{array} \right)$$

entonces

$$\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{E}} \mathbf{T},$$

donde

$$\hat{\mathbf{E}} = \left( \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -(z_j - c_j)/Y_{rj} & 0 & \dots & \mathbf{0} \\ \hline 0 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_{r-1} & \zeta & \mathbf{e}_{r+1} & \dots & \mathbf{e}_m \end{array} \right).$$

El criterio de entrada y salida de vectores entre dos bases consecutivas, se hace como en el *método simplex* y  $\hat{\mathbf{Z}}$ ,  $\hat{\mathbf{X}}_B$  se calculan por medio de

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{Z}} \\ \hat{\mathbf{X}}_B \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{T}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

*Ejemplo.* Resuélvase por el *método simplex revisado* el siguiente problema

$$\text{Máx } Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$$

sujeto a

$$X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 430$$

$$3X_1 + 2X_3 \leq 460$$

$$X_1 + 4X_2 \leq 420$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0.$$

El formato del tableau original es

	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	
	1	-3	-2	-5	0	0	0	0
$a_4$	0	1	2	1	1	0	0	430
$a_5$	0	3	0	2	0	1	0	460
$a_6$	0	1	4	0	0	0	1	420

El *método simplex revisado* procede de la siguiente manera:

## 184 La programación lineal

Primera iteración:

$$\mathbf{T} = \left( \begin{array}{c|ccc} \mathbf{1} & \mathbf{e}_B \mathbf{B}^{-1} & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} & & \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} Z \\ \mathbf{X}_B \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

$$= \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 430 \\ 460 \\ 420 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 430 \\ 460 \\ 420 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}, \quad \mathbf{B} = \{\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6\}$$

$$z_j - c_j = \mathbf{e}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j, \quad j \text{ en } \mathbf{N},$$

$$= (0, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} - (3, 2, 5) = (-3, -2, -5),$$

por lo que el vector de entrada será  $\mathbf{a}_3$ . El vector de salida se determina por medio de la siguiente relación

$$\text{Mín}_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{X_{is}}{Y_{is}} \mid Y_{is} > 0 \right\},$$

donde

$$\mathbf{Y}_3 = \begin{pmatrix} Y_{13} \\ Y_{23} \\ Y_{33} \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\text{Mín} \left\{ \frac{430}{1}, \frac{460}{2} \right\} = 230,$$

y  $\mathbf{a}_5$  sale de la base.

Segunda iteración:<sup>45</sup>

$$\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{E}} \mathbf{T}$$

$$= \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & -(-5/2) & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\hat{\mathbf{T}} = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

<sup>45</sup> Como  $\mathbf{a}_5$  sale de la base, la tercera columna de  $\hat{\mathbf{E}}$  (correspondiente al vector  $\mathbf{a}_5$ ) debe modificarse.

con

$$\begin{pmatrix} \hat{Z} \\ \hat{X}_B \end{pmatrix} = \hat{T} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 430 \\ 460 \\ 420 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1150 \\ 200 \\ 230 \\ 420 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z \\ X_4 \\ X_3 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

Para calcular los elementos que indican el criterio de optimalidad se tiene que

$$\mathbf{N} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5\}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \{\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2\},$$

$$z_j - c_j = \mathbf{c}_B \hat{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j, \quad j \text{ en } \mathbf{N},$$

$$= (0, 5, 0) \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} - (3, 2, 0) = (9/2, -2, 5/2)$$

y por lo tanto  $\mathbf{a}_2$  entra a la nueva base  $\hat{\mathbf{B}}$ . El vector de salida de la base  $\hat{\mathbf{B}}$  se determina mediante el siguiente cálculo:

$$\text{Mín}_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{X_{B_i}}{Y_{i2}} \mid Y_{i2} > 0 \right\},$$

donde

$$\mathbf{Y}_2 = \begin{pmatrix} Y_{12} \\ Y_{22} \\ Y_{32} \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\text{Mín} \left\{ \frac{200}{2}, \frac{420}{4} \right\} = 100,$$

y  $\mathbf{a}_4$  sale de la base.

*Tercera iteración:*<sup>46</sup>

$$\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{E}} \hat{\mathbf{T}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -(-2/2) & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

siendo la nueva solución

<sup>46</sup> Como  $\mathbf{a}_4$  sale de la base, la segunda columna de  $\hat{\mathbf{E}}$  (correspondiente al vector  $\mathbf{a}_4$ ) debe modificarse.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{Z} \\ \hat{X}_B \end{pmatrix} &= \hat{\mathbf{T}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \\ &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 1 & 2 & 0 \\ 0 & & & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & & & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & & & -2 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 430 \\ 460 \\ 420 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1350 \\ 100 \\ 230 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{Z} \\ X_2 \\ X_3 \\ X_6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para el criterio de optimalidad se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5\}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_6\} \\ z_j - c_j &= \mathbf{c}_B^{\hat{\mathbf{B}}} \hat{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j, \quad j \text{ en } \mathbf{N}, \\ &= (2, 5, 0) \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - (3, 0, 0) \\ &= (4, 1, 2), \end{aligned}$$

por lo que la solución  $\hat{Z}$ ,  $\hat{X}_B$  es óptima, es decir

$$\begin{aligned} Z &= 1350 \\ X_2 &= 100, X_3 = 230, X_6 = 20 \\ X_1 &= X_4 = X_5 = 0. \end{aligned}$$

## 2.6. Método de descomposición lineal

El *método simplex revisado* es un mejoramiento del *método simplex* en cuanto a la solución de problemas lineales grandes que requieren gran cantidad de almacenamiento de información. Sin embargo, en bastantes problemas reales, el almacenar una matriz de orden  $m$  por  $m$  (la matriz  $\mathbf{B}^{-1}$ ) puede resultar una tarea, si no imposible, sí bastante complicada y que consume mucho tiempo.

El *método de descomposición lineal* viene a ser un mejoramiento del *método simplex revisado* en ciertos casos. Resulta que mientras más grande es la matriz  $\mathbf{A}$ , también es mayor el número de ceros en la misma. Es decir, por regla general, a medida que la matriz de coeficientes tecnológicos aumenta (por tenerse más actividades y más restricciones), esta se va haciendo menos densa, donde la densidad es la relación de números diferentes de cero en la matriz entre el número total de sus componentes. Bajo ciertas condiciones, se pueden resolver por medio de los *métodos de descomposición lineal*, problemas que no se pueden resolver por el *método simplex revisado*, por cuestiones de espacio disponibles en una computadora.

A continuación se ven las condiciones que debe tener la matriz de coeficientes tecnológicos  $\mathbf{A}$ , para que se pueda aplicar la *descomposición lineal* y ver también, cuál es la estructura en donde se basa esta descomposición.

Considérese el problema lineal

$$\text{Máx } Z = \mathbf{cX}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \mathbf{AX} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{X} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{2.68}$$

donde la matriz  $\mathbf{A}$  y los vectores  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$  tienen la siguiente estructura

		$\mathbf{c}_1$	$\mathbf{c}_2$	$\mathbf{c}_3$	$\dots$	$\mathbf{c}_{p-1}$	$\mathbf{c}_p$	
		$n_1$	$n_2$	$n_3$	$\dots$	$n_{p-1}$	$n_p$	1
$m_0$	{	$\mathbf{L}_1$	$\mathbf{L}_2$	$\mathbf{L}_3$	$\dots$	$\mathbf{L}_{p-1}$	$\mathbf{L}_p$	$\mathbf{b}_0$
$m_1$	{	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\dots$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{b}_1$
$m_2$	{	$\mathbf{0}$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{0}$	$\dots$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{b}_2$
$m_3$	{	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{A}_3$	$\dots$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{b}_3$
	:							
	:							
	:							
$m_{p-1}$	{	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\dots$	$\mathbf{A}_{p-1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{b}_{p-1}$
$m_p$	{	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\dots$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{A}_p$	$\mathbf{b}_p$

Nótese que cada bloque de la estructura arriba mencionada a excepción del primero, es un problema lineal de la forma

$$\mathbf{A}_i \mathbf{X}_i = \mathbf{b}_i, \quad i = 1, \dots, p$$

mientras que el primer bloque es

$$\sum_{i=1}^p \mathbf{L}_i \mathbf{X}_i = \mathbf{b}_0.$$

Nótese que el vector  $\mathbf{b}$  ha sido partido en  $p + 1$  componentes  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p$ , mientras que el vector  $\mathbf{c}$ , en  $p$  componentes  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_p$ . El problema (2.68) puede re-escribirse como

## 188 La programación lineal

$$\text{Máx } Z = \sum_{j=1}^p \mathbf{c}_j \mathbf{X}_j$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^p \mathbf{L}_j \mathbf{X}_j = \mathbf{b}_0 \quad (2.69)$$

$$\mathbf{A}_j \mathbf{X}_j = \mathbf{b}_j, \quad j = 1, \dots, p,$$

$$\mathbf{X}_j \geq \mathbf{0}, \quad j = 1, \dots, p.$$

Cada juego de restricciones  $\mathbf{A}_j \mathbf{X}_j = \mathbf{b}_j$  define un conjunto convexo  $S_j$  idéntico a la región de factibilidad estudiada con anterioridad. Sea  $\mathbf{X}_{ij}$  los puntos extremos de la región  $S_j$ . Entonces, cualquier solución básica factible  $\mathbf{X}_j$  de (2.68) puede escribirse en función de los puntos extremos como

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_j &= \sum_{i=1}^{s_j} \lambda_{ij} \mathbf{X}_{ij}, \quad j = 1, \dots, p, \\ \sum_{i=1}^{s_j} \lambda_{ij} &= 1, \quad j = 1, \dots, p, \\ \lambda_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, \dots, s_j, \\ &\quad j = 1, \dots, p, \end{aligned} \quad (2.70)$$

donde  $s_j$  es el número de puntos extremos de la región de factibilidad  $S_j$ . Entonces (2.70) en (2.69) da

$$\text{Máx } Z = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{s_j} \mathbf{c}_j \lambda_{ij} \mathbf{X}_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{s_j} \mathbf{L}_j \lambda_{ij} \mathbf{X}_{ij} = \mathbf{b}_0 \quad (2.71)$$

$$\sum_{i=1}^{s_j} \lambda_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, p,$$

$$\lambda_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, s_j,$$

$$j = 1, \dots, p.$$

Se hace el siguiente cambio de notación

$$\mathbf{d}_{ij} = \mathbf{L}_j \mathbf{X}_{ij}, \quad i = 1, \dots, s_j, \quad (2.72)$$

$$\bar{\mathbf{c}}_{ij} = \mathbf{c}_j \mathbf{X}_{ij}, \quad j = 1, \dots, p,$$

(2.72) en (2.71) da

$$\text{Máx } Z = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{s_j} \bar{c}_{ij} \lambda_{ij}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{s_j} \mathbf{d}_{ij} \lambda_{ij} &= \mathbf{b}_0 \\ \sum_{i=1}^{s_j} \lambda_{ij} &= 1, \quad j = 1, \dots, p, \\ \lambda_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, \dots, s_j, \\ &\quad j = 1, \dots, p. \end{aligned} \tag{2.73}$$

Las variables de decisión en el problema (2.73) son las  $\lambda_{ij}$ , que una vez halladas permiten conocer el valor de las  $\mathbf{X}_j$ , utilizando la relación (2.70). La estructura del problema lineal (2.73) se presenta a continuación.

$$\begin{array}{l} 1 \left\{ \begin{array}{c|c|c} \overbrace{\bar{c}_{11} \ \bar{c}_{21} \ \dots \ \bar{c}_{s_1,1}}^{s_1} & \overbrace{\bar{c}_{1,2} \ \bar{c}_{2,2} \ \dots \ \bar{c}_{s_2,2}}^{s_2} & \dots \ \overbrace{\bar{c}_{1,p} \ \dots \ \bar{c}_{s_p,p}}^{s_p} \\ \hline \mathbf{d}_{11} \ \mathbf{d}_{21} \ \dots \ \mathbf{d}_{s_1,1} & \mathbf{d}_{1,2} \ \mathbf{d}_{2,2} \ \dots \ \mathbf{d}_{s_2,2} & \dots \ \mathbf{d}_{1,p} \ \dots \ \mathbf{d}_{s_p,p} \\ \hline 1 \ 1 \ \dots \ 1 & 0 \ 0 \ \dots \ 0 & \dots \ 0 \ \dots \ 0 \\ \hline 0 \ 0 \ \dots \ 0 & 1 \ 1 \ \dots \ 1 & \dots \ 0 \ \dots \ 0 \end{array} \right. = \mathbf{b}_0 \\ \Pi_0 \ m_0 \left\{ \begin{array}{c|c|c} \dots & \dots & \dots \\ \hline 1 \ 1 \ \dots \ 1 & 0 \ 0 \ \dots \ 0 & \dots \ 0 \ \dots \ 0 \\ \hline 0 \ 0 \ \dots \ 0 & 1 \ 1 \ \dots \ 1 & \dots \ 0 \ \dots \ 0 \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \hline 0 \ 0 \ \dots \ 0 & 0 \ 0 \ \dots \ 0 & \dots \ 1, 1 \ \dots \ 1 \end{array} \right. = 1 \\ \Pi_1 \ 1 \left\{ \begin{array}{c|c|c} \dots & \dots & \dots \\ \hline 0 \ 0 \ \dots \ 0 & 0 \ 0 \ \dots \ 0 & \dots \ 1, 1 \ \dots \ 1 \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \hline 0 \ 0 \ \dots \ 0 & 0 \ 0 \ \dots \ 0 & \dots \ 1, 1 \ \dots \ 1 \end{array} \right. = 1 \\ \Pi_2 \ 1 \left\{ \begin{array}{c|c|c} \dots & \dots & \dots \\ \hline 0 \ 0 \ \dots \ 0 & 0 \ 0 \ \dots \ 0 & \dots \ 1, 1 \ \dots \ 1 \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \hline 0 \ 0 \ \dots \ 0 & 0 \ 0 \ \dots \ 0 & \dots \ 1, 1 \ \dots \ 1 \end{array} \right. = 1 \end{array}$$

donde  $\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_p$  son los vectores duales asociados con las restricciones del problema (2.73).

El problema original (2.69) que contiene  $m_0 + \sum_{i=1}^p m_i$  restricciones y  $\sum_{i=1}^p n_i$  variables de decisión ha sido convertido en un problema equivalente (2.73), con menos restricciones (de hecho con  $m_0 + p$ ), aunque con un número mucho mayor de decisiones,  $\sum_{j=1}^p s_j$ . Además de que el grado de dificultad en resolver un problema lineal está en el número de restricciones,<sup>47</sup> en el problema (2.73) *no se necesita necesariamente*

<sup>47</sup> Que da el tamaño de la base.



## 190 La programación lineal

trabajar con todas las variables  $\lambda_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, s_j$ ;  $j = 1, \dots, p$ , al mismo tiempo, ni se necesita conocer todos los puntos extremos  $X_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, s_j$ ;  $j = 1, \dots, p$ . Eso acarrea que el problema (2.73) sea más atractivo para resolver, que el (2.69), en los casos que la estructura de  $\mathbf{A}$  sea como la dada en (2.68).

Como la matriz en (2.73) tiene  $m_0 + p$  renglones, la base de (2.73) debe tener  $m_0 + p$  vectores. Si de alguna manera se logra generar una solución inicial que sea básica y factible, se tiene como consecuencia a los indicadores  $z_{ij} - \bar{c}_{ij}$ ,  $j \in \mathbf{N}$ . Si  $z_{ij} - \bar{c}_{ij} < 0$ , para  $j$  en  $\mathbf{N}$ , entonces la columna  $j$ , dada por el vector  $\begin{bmatrix} \mathbf{d}_{ij} \\ \mathbf{e}_j \end{bmatrix}$  entrará en la base.

Pero

$$z_{ij} = (\mathbf{II}_0, \mathbf{II}) \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{ij} \\ \mathbf{e}_j \end{bmatrix}$$

donde  $\mathbf{II}_0$  es el vector dual con  $m_0$  componentes  $(\Pi_1^*, \Pi_2^*, \dots, \Pi_{m_0}^*)$  asociado a las primeras  $m_0$  restricciones primarias de (2.73) y  $\mathbf{II}$  es el vector dual con  $p$  componentes  $(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_p)$  asociado a las últimas  $p$  restricciones primarias de (2.73).

Entonces,

$$\begin{aligned} z_{ij} - \bar{c}_{ij} &= (\mathbf{II}_0, \mathbf{II}) \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{ij} \\ \mathbf{e}_j \end{bmatrix} - \bar{c}_{ij} \\ &= \mathbf{II}_0 \mathbf{d}_{ij} + \mathbf{II} \mathbf{e}_j - \bar{c}_{ij}. \end{aligned}$$

Si el mínimo de todos los  $z_{ij} - \bar{c}_{ij} \geq 0$ , la solución asociada a ese tableau es óptima. De otra manera, es decir, si hay algún  $z_{ij} - \bar{c}_{ij} < 0$ , habrá que buscar en cada región factible  $S_j$  el mínimo  $z_{ij} - \bar{c}_{ij}$ , resolviendo el siguiente problema.

$$\text{Mín}_{j=1, \dots, p} (z_{ij} - \bar{c}_{ij}) = \text{Mín}_{j=1, \dots, p} (\mathbf{II}_0 \mathbf{d}_{ij} + \mathbf{II} \mathbf{e}_j - \bar{c}_{ij}).$$

Pero como en todas las regiones de factibilidad  $S_j$ , el vector  $\mathbf{II}$  es el mismo, este puede desaparecer de la función objetivo anterior ya que es una constante dejando a esta como

$$\text{Mín}_{j=1, \dots, p} (\mathbf{II}_0 \mathbf{d}_{ij} - \bar{c}_{ij}),$$

o utilizando (2.72) se tiene

$$\text{Mín}_{j=1, \dots, p} (\mathbf{II}_0 \mathbf{L}_j - \mathbf{c}_j) \mathbf{X}_{ij} \quad (2.74)$$

sujeto a

$$\mathbf{X}_{ij} \in S_j, \quad j = 1, \dots, p$$

Pero (2.74) es el siguiente programa lineal

$$\begin{aligned} & \text{Mín } (\mathbf{II}_0 \mathbf{L}_j - \mathbf{c}_j) \mathbf{X}_{ij} \\ \text{sujeto a} & \quad \mathbf{A}_j \mathbf{X}_j = \mathbf{b}_j, \quad j = 1, \dots, p \quad (2.75) \\ & \quad \mathbf{X}_j \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Como la función objetivo en (2.75) es lineal, el óptimo será siempre un punto extremo  $\mathbf{X}_{ij}$ . Si

$$(\mathbf{II}_0 \mathbf{L}_j - \mathbf{c}_j) \mathbf{X}_{ij} + \Pi_j < \mathbf{0},$$

el vector  $\begin{bmatrix} \mathbf{d}_{ij} \\ \mathbf{e}_j \end{bmatrix}$  deberá entrar en la nueva base y el *método simplex* se usará como de costumbre. Cuando se introduce el vector  $\begin{bmatrix} \mathbf{d}_{ij} \\ \mathbf{e}_j \end{bmatrix}$  a la nueva base, deberá éste de actualizarse, multiplicándose por la base inversa actual  $\mathbf{B}^{-1}$  antes de efectuar las operaciones matriciales elementales. Si al resolver  $p$  problemas lineales de la forma (2.75) el

$$\text{Mín } (\mathbf{II}_0 \mathbf{L}_j - \mathbf{c}_j) \mathbf{X}_{ij} + \Pi_j \geq \mathbf{0}, \quad \text{para } j = 1, \dots, p, \quad (2.76)$$

la solución actual es óptima.

### Resumen del método de descomposición lineal

*Paso 1.* Redúzcase el problema original (2.69) en un problema modificado (2.73) por medio de las fórmulas (2.72).

*Paso 2.* Encuéntrese una solución inicial a (2.73) que sea básica y factible.

*Paso 3.* Con la solución actual, resuélvase  $p$  problemas lineales de la forma (2.75). Si

$$\text{Mín } \{ (\mathbf{II}_0 \mathbf{L}_j - \mathbf{c}_j) \mathbf{X}_{ij} + \Pi_j \} \geq 0, \quad (2.76)$$

la solución actual es óptima y el proceso termina. Si no continúese con el paso 4.

*Paso 4.* El mínimo obtenido en (2.76) corresponde a una  $\lambda_{ij}$ . Introdúzcase ésta en la nueva base. Actualícese el nuevo vector  $\begin{bmatrix} \mathbf{d}_{ij} \\ \mathbf{e}_j \end{bmatrix}$  multiplicándose por  $\mathbf{B}^{-1}$ . Determínese el vector a salir de la base. Actualícese la base, tal como se hizo en el *método simplex revisado* y regrésese al paso 3.

*Ejemplo.* Resuélvase por el *método de descomposición lineal* el siguiente problema.

## 192 La programación lineal

$$\begin{aligned} \text{Máx } Z &= X_1 + 2X_2 + X_3 + 3X_4 \\ \text{sujeto a} & \\ & X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 200 \\ & X_1 + 2X_2 + X_3 + 3X_4 \geq 400 \\ & X_1 + 2X_2 \leq 100 \\ & 4X_1 + 6X_2 \leq 300 \\ & \qquad \qquad \qquad 3X_3 + 6X_4 \leq 600 \\ & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad X_4 \geq 20 \\ & X_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

Una vez que se introducen las variables de holgura  $X_5$  y superflua  $X_6$  se tiene la siguiente estructura que conforma a los requisitos de la descomposición lineal.

$$\text{Máx } Z = \boxed{X_1 + 2X_2} \quad + \quad \boxed{X_3 + 3X_4} \quad \boxed{\phantom{X_1 + 2X_2}}$$

sujeto a

$X_1 + X_2$	$+ X_3 + X_4$	$+ X_5$	$= 200$
$X_1 + 2X_2$	$+ X_3 + 3X_4$	$- X_6$	$= 400$
$X_1 + 2X_2 + X_7$			$= 100$
$4X_1 + 6X_2$	$+ X_8$		$= 300$
	$+ 3X_3 + 6X_4 + X_9$		$= 600$
	$X_4 - X_{10}$		$= 20$

Da la estructura de arriba se distingue lo siguiente:

$$\mathbf{c}_1 = (1, 2, 0, 0)$$

$$\mathbf{c}_2 = (1, 3, 0, 0)$$

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_0 = \begin{bmatrix} 200 \\ 400 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 100 \\ 300 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 600 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{X}}_1 = (X_1, X_2, X_7, X_8)$$

$$\bar{\mathbf{X}}_2 = (X_3, X_4, X_9, X_{10}).$$

Las variables de holgura y superfluas  $X_5$  y  $X_6$  no constituyen un subproblema, en el sentido tratado en esta sección y por lo tanto serán trabajadas en forma separada.

Iteración 1.

Paso 1. Se añaden las variables artificiales  $X_{a_1}$ ,  $X_{a_2}$  y  $X_{a_3}$  y la solución inicial del problema modificado (2.71) se da a continuación:

$\lambda_{11}$	$\lambda_{21}$	$\dots$	$\lambda_{s_1,1}$	$\lambda_{1,2}$	$\lambda_{2,2}$	$\dots$	$\lambda_{s_2,2}$	$X_6$	$X_5$	$X_{a_1}$	$X_{a_2}$	$X_{a_3}$	
$c_1 X_{11}$	$c_1 X_{21}$	$\dots$	$c_1 X_{s_1,1}$	$c_2 X_{12}$	$c_2 X_{22}$	$\dots$	$c_2 X_{s_2,2}$	0	0	-M	-M	-M	0
$L_1 X_{11}$	$L_1 X_{21}$	$\dots$	$L_1 X_{s_1,1}$	$L_2 X_{12}$	$L_2 X_{22}$	$\dots$	$L_2 X_{s_2,2}$	0	1	0	0	0	200
								-1	0	1	0	0	400
1	1	$\dots$	1	0	0	$\dots$	0	0	0	0	1	0	1
0	0	$\dots$	0	①	1	$\dots$	1	0	0	0	0	1	1 ←
Subproblema 1				Subproblema 2				Solución básica factible inicial					

Paso 2. La solución básica factible inicial es

$$B_0 = (a_5, a_{a_1}, a_{a_2}, a_{a_3}), \quad b = \begin{pmatrix} 200 \\ 400 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X_{s_0} = \begin{pmatrix} X_5 \\ X_{a_1} \\ X_{a_2} \\ X_{a_3} \end{pmatrix} = B_0^{-1} b = \begin{pmatrix} 1000 \\ 0100 \\ 0010 \\ 0001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 400 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 400 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\Pi_0, \Pi) &= (\Pi_1^*, \Pi_2^*, \Pi_1, \Pi_2) \\ &= (0, -M, -M, -M). \end{aligned}$$

Paso 3. Para  $j = 1$  el primer subproblema (2.75) es

$$\text{Mín } (\Pi_0, L_1 - c_1) \bar{X}_1$$

sujeto a

$$A_1 \bar{X}_1 = b_1$$

$$\bar{X}_1 \geq 0$$

o

$$\text{Mín } \left[ (0, -M) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - (1, 2, 0, 0) \right] \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_7 \\ X_8 \end{pmatrix}$$

## 194 La programación lineal

sujeto a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_7 \\ X_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 300 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_7 \\ X_8 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La solución de este subproblema lineal usando el *método simplex* es

$$\bar{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{X}_{1,1} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_7 \\ X_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que es el *primer punto extremo de la región de factibilidad*  $S_1$ , con función objetivo igual a

$$(\mathbf{H}_0 \mathbf{L}_1 - \mathbf{c}_1) \mathbf{X}_{1,1} = -100M - 100.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}_0 \mathbf{L}_1 - \mathbf{c}_1) \mathbf{X}_{1,1} + \Pi_1 &= -100M - 100 - M \\ &= -101M - 100. \end{aligned}$$

Para  $j = 2$  el segundo subproblema lineal de la forma (2.75) es

$$\text{Mín } (\mathbf{H}_0 \mathbf{L}_2 - \mathbf{c}_2) \bar{\mathbf{X}}_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2 \bar{\mathbf{X}}_2 &= \mathbf{b}_2 \\ \bar{\mathbf{X}}_2 &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

o

$$\text{Mín } \left[ (0, -M) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} - (1 \ 3 \ 0 \ 0) \right] \begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_9 \\ X_{10} \end{pmatrix}$$

sujeto a

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_9 \\ X_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_9 \\ X_{10} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La solución de este problema lineal usando el *método simplex* es

$$\bar{\mathbf{X}}_2 = \mathbf{X}_{1,2} = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_9 \\ X_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \\ 80 \end{pmatrix},$$

que es el primer punto extremo de la región de factibilidad  $S_2$ . El valor de la función objetivo para este subproblema es

$$(\mathbf{II}_0 \mathbf{L}_2 - \mathbf{c}_2) \mathbf{X}_{1,2} = -300M - 300$$

por lo que

$$(\mathbf{II}_0 \mathbf{L}_2 - \mathbf{c}_2) \mathbf{X}_{1,2} + \Pi_2 = -300M - 300 - M = -301M - 300.$$

Paso 4. El mínimo de todas las funciones objetivo de los dos subproblemas (2.75) resulta ser

$$\begin{aligned} \text{Mín}_{j=1,2} [\mathbf{II}_0 \mathbf{L}_j - \mathbf{c}_j] \mathbf{X}_{1,j} + \Pi_j &= \text{Mín} [-101M - 100, -301M - 300] \\ &= -301M - 300 < 0, \end{aligned}$$

que corresponde a  $j = 2$ .

Para calcular el elemento  $z_j - c_j$  correspondiente a la variable superflua  $X_6$  que no está en la base se tiene

$$\begin{aligned} z_6 - c_6 &= \mathbf{c}_B \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{a}_6 - c_6 \\ &= (0, -M, -M, -M) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \\ &= M > 0, \end{aligned}$$

y por lo tanto  $\mathbf{a}_6$  no entra en la base. Como el más negativo de todos los  $z_{ij} - \bar{c}_{ij}$  calculado para los dos subproblemas y la variable de holgura  $X_6$  que no están en la base  $\mathbf{B}_0$  es  $-300M - 300$  correspondiente al punto extremo  $\mathbf{X}_{12}$  de la región  $S_2$ ,  $\lambda_{12}$  deberá entrar a la nueva base  $\mathbf{B}_1$ .

Determinando el vector que sale de la base  $\mathbf{B}_0$  se tiene

$$\text{Mín} \left\{ \frac{(200, 400)}{\mathbf{L}_2 \mathbf{X}_{12}}, \frac{1}{1} \right\}$$

donde

$$\mathbf{L}_2 \mathbf{X}_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 300 \end{pmatrix}$$

o sea

$$\text{Mín} \left\{ \frac{200}{100}, \frac{400}{300}, \frac{1}{1} \right\} = 1.$$

El vector artificial  $\mathbf{a}_{a_3}$  sale de la base. El pivote se muestra en el tablcáu original.

## 196 La programación lineal

### Iteración 2.

*Paso 1.* El nuevo tableau correspondiente al problema (2.71) se obtiene así

$$\mathbf{B}_1^{-1} = \mathbf{E} \mathbf{B}_0^{-1}$$

$$\mathbf{X}_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -100/1 \\ 0 & 1 & 0 & -300/1 \\ 0 & 0 & 0 & -0/1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -100 \\ 0 & 1 & 0 & -300 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_{B_1} = \begin{pmatrix} X_5 \\ X_{a_1} \\ X_{a_2} \\ \lambda_{12} \end{pmatrix} = \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{b}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -100 \\ 0 & 1 & 0 & -300 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 400 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El coeficiente  $\bar{c}_{12}$  de  $\lambda_{12}$  se determina por medio de (2.72)

$$\begin{aligned} \bar{c}_{12} &= \mathbf{e}_2 \mathbf{X}_{12} \\ &= (1 \ 3 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \\ 80 \end{pmatrix} \\ &= 300. \end{aligned}$$

El tableau correspondiente al inicio de la segunda iteración es

$\lambda_{11}$	$\lambda_{21}$	$\cdots$	$\lambda_{s_1, s}$	$\lambda_{12}$	$\lambda_{22}$	$\cdots$	$\lambda_{s_2, s}$	$X_5$	$X_5$	$X_{s_1}$	$X_{s_2}$	$X_{s_3}$	
				300					0	-M	-M	300M+300	100
				0					1	0	0	-100	100
				0					0	1	0	-300	100
				0					0	0	1	0	1
				1					0	0	0	1	1

Paso 2. El vector básico en la segunda iteración correspondiente a la solución del problema lineal (2.73) es

$$\mathbf{X}_{B_1} = \begin{pmatrix} X_5 \\ X_{a_1} \\ X_{a_2} \\ \lambda_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con base inversa, costos unitarios y precios duales

$$\mathbf{B}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -100 \\ 0 & 1 & 0 & -300 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{B_1} &= (c_5, c_{a_1}, c_{a_2}, c_{\lambda_{12}}) \\ &= (0, -M, -M, 300) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{II}_0, \mathbf{II}) &= (\Pi_1^*, \Pi_2^*, \Pi_1, \Pi_2) \\ &= \mathbf{c}_{B_1} \mathbf{B}_1^{-1} \\ &= (0, -M, -M, 300) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -100 \\ 0 & 1 & 0 & -300 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (0, -M, -M, 300M + 300). \end{aligned}$$

Paso 3. El primer subprograma  $j = 1$  es

$$\text{Mín } (\mathbf{II}_0 \mathbf{L}_1 - \mathbf{c}_1) \bar{\mathbf{X}}_1$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 \bar{\mathbf{X}}_1 &= \mathbf{b}_1 \\ \bar{\mathbf{X}}_1 &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

o sea

$$\text{Mín } \left[ (0, -M) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - (1 \ 2 \ 0 \ 0) \right] \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_7 \\ X_8 \end{pmatrix}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_7 \\ X_8 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 100 \\ 300 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_7 \\ X_8 \end{pmatrix} &\geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

cuya solución usando el método simplex es



## 198 La programación lineal

$$\bar{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{X}_{2,1} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_7 \\ X_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que corresponde al *segundo punto extremo de la región de factibilidad*  $S_1$ . El término  $(\mathbf{II}_0 \mathbf{L}_1 - \mathbf{c}_1) \mathbf{X}_{2,1} + \Pi_1$  resulta ser de  $-101M - 100$ .

Para  $j = 2$ , el segundo subproblema lineal es

$$\text{Mín } (\mathbf{II}_0 \mathbf{L}_2 - \mathbf{c}_2) \bar{\mathbf{X}}_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2 \mathbf{X}_2 &= \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{X}_2 &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

que resulta ser idéntico al segundo subproblema de la iteración anterior con solución óptima

$$\bar{\mathbf{X}}_2 = \mathbf{X}_{2,2} = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_9 \\ X_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \\ 80 \end{pmatrix},$$

correspondiente al *segundo punto extremo de*  $S_2$ . El elemento  $(\mathbf{II}_0 \mathbf{L}_2 - \mathbf{c}_2) \bar{\mathbf{X}}_2 + \Pi_2$  resulta ser

$$-300M - 300 + 300M + 300 = 0.$$

Por lo tanto

$$\text{Mín } [(\mathbf{II}_0 \mathbf{L}_j - \mathbf{c}_j) \mathbf{X}_{2,j} + \Pi_j] =$$

$$\text{Mín } [-101M - 100, 0] = -101M - 100.$$

*Paso 4.* La  $z_j - c_j$  correspondiente a la variable superflua  $X_6$  que no está en la base se calcula de acuerdo con

$$\begin{aligned} z_6 - c_6 &= \mathbf{c}_{B_1} \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{a}_6 - c_6 \\ &= (0, -M, -M, 300M + 300) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \\ &= M > 0, \end{aligned}$$

y por lo tanto  $\mathbf{a}_6$  no entra a la base. Como el más negativo de los  $z_{ij} - c_{ij}$  calculados para los dos subproblemas y la variable de holgura  $X_6$  que no están en la base  $\mathbf{B}_1$  es  $-100M - 100$ , correspondiente al punto extremo  $\mathbf{X}_{2,1}$  de la región  $S_1$ ,  $\lambda_{2,1}$  entra a la nueva base  $\mathbf{B}_2$ .

Los elementos del tableau correspondiente a la columna  $\mathbf{a}_{\lambda_{2,1}}$  son donde

$$\mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{a}_{\lambda_{21}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -100 \\ 0 & 1 & 0 & -300 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{X}_{21} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde

$$\mathbf{L}_1 \mathbf{X}_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \end{pmatrix},$$

por lo que

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{a}_{\lambda_{21}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -100 \\ 0 & 1 & 0 & -300 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

El vector que deberá salir de la base  $\mathbf{B}_1$  para formar la base  $\mathbf{B}_2$  se calcula por medio de

$$\text{Mín} \left\{ \frac{100}{50}, \frac{100}{100}, \frac{1}{1} \right\} = 1,$$

por lo que  $\mathbf{a}_{\sigma_2}$  sale de la base  $\mathbf{B}_1$ . El pivote se muestra a continuación:

$\lambda_{11}$	$\lambda_{21}$	$\dots$	$\lambda_{s_1,1}$	$\lambda_{12}$	$\lambda_{22}$	$\dots$	$\lambda_{s_2,2}$	$X_6$	$X_5$	$X_{s_1}$	$X_{s_2}$	$X_{s_3}$	
				300					0	-M	-M	300M+300	
50				0					1	0	0	-100	100
100				0					0	1	0	-300	100
①				0					0	0	1	0	1 ←
0				1					0	0	0	1	1

Iteración 3.

Paso 1. El nuevo tableau correspondiente al problema (2.71) se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_2^{-1} &= \mathbf{E} \mathbf{B}_1^{-1} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -50/1 & 0 \\ 0 & 1 & -100/1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/1 & 0 \\ 0 & 0 & -0/1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -100 \\ 0 & 1 & 0 & -300 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -50 & -100 \\ 0 & 1 & -100 & -300 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{X}_{B_2} &= \begin{pmatrix} X_5 \\ X_{a_1} \\ \lambda_{21} \\ \lambda_{12} \end{pmatrix} = \mathbf{B}_2^{-1} \mathbf{b} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -50 & -100 \\ 0 & 1 & -100 & -300 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 400 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

El coeficiente  $\bar{c}_{21}$  de  $\lambda_{21}$  se determina por medio de (2.72)

$$\begin{aligned}
 \bar{c}_{21} &= \mathbf{c}_1 \mathbf{X}_{21} \\
 &= (1, 2, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= 100.
 \end{aligned}$$

El tableau correspondiente al inicio de la tercera iteración es

$\lambda_{11}$	$\lambda_{21}$	$\dots$	$\lambda_{r_1,1}$	$\lambda_{12}$	$\lambda_{22}$	$\dots$	$\lambda_{r_2,2}$	$X_6$	$X_5$	$X_{a_1}$	$X_{a_2}$	$X_{a_3}$	
100				300					0	$-M$	$100M+100$	$300M+300$	
0				0					1	0	-50	-100	50
0				0					0	1	-100	-300	0
1				0					0	0	1	0	1
0				1					0	0	0	1	1

*Paso 2.* El vector básico en la tercera iteración correspondiente a la solución del problema lineal (2.73) es

$$\mathbf{X}_{B_2} = \begin{pmatrix} X_5 \\ X_{a_1} \\ \lambda_{21} \\ \lambda_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

con base inversa, costos unitarios y precios duales

$$\mathbf{B}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -50 & -100 \\ 0 & 1 & -100 & -300 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{B_2} &= (c_5, c_{a_1}, c_{\lambda_{2,1}}, c_{\lambda_{1,2}}) \\ &= (0, -M, 100, 300) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{II}_0, \mathbf{II}) &= (\Pi_1^*, \Pi_2^*, \Pi_1, \Pi_2) = \mathbf{c}_{B_2} \mathbf{B}_2^{-1} \\ &= (0, -M, 100, 300) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -50 & -100 \\ 0 & 1 & -100 & -300 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (0, -M, 100M + 100, 300M + 300). \end{aligned}$$

Paso 3. El primer subprograma  $j = 1$  es

$$\text{Mín } (\mathbf{II}_0 \mathbf{L}_1 - \mathbf{c}_1) \bar{\mathbf{X}}_1$$

sujeto a

$$\mathbf{A}_1 \bar{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{b}_1$$

$$\bar{\mathbf{X}}_1 \geq \mathbf{0},$$

cuya solución óptima es

$$\bar{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_7 \\ X_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

correspondiendo al tercer punto extremo de la región de factibilidad  $S_1$ .

El parámetro  $(\mathbf{II}_0 \mathbf{L}_1 - \mathbf{c}_1) \mathbf{X}_{31} + \Pi_1$  resulta ser

$$-100M - 100 + 100M + 100 = 0.$$

Para  $j = 2$  el subproblema lineal es

$$\text{Mín } (\mathbf{II}_0 \mathbf{L}_2 - \mathbf{c}_2) \bar{\mathbf{X}}_2$$

sujeto a

$$\mathbf{A}_2 \bar{\mathbf{X}}_2 = \mathbf{b}_2$$

$$\bar{\mathbf{X}}_2 \geq \mathbf{0},$$

cuya solución óptima es

## 202 La programación lineal

$$\bar{\mathbf{X}}_2 = \mathbf{X}_{3,2} = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_9 \\ X_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \\ 80 \end{pmatrix},$$

correspondiendo al tercer punto extremo de la región de factibilidad  $S_2$ .

El parámetro  $(\mathbf{II}_3 \mathbf{L}_2 - \mathbf{c}_2) \mathbf{X}_{3,2} + \Pi_2$  resulta ser de

$$-300M - 300 + 300M + 300 = 0.$$

Por último  $z_6 - c_6$ , que corresponde al vector superfluo  $\mathbf{a}_6$  que no está en la base  $\mathbf{B}_2$  es

$$\begin{aligned} z_6 - c_6 &= \mathbf{c}_{B_2} \mathbf{B}_2^{-1} \mathbf{a}_6 - c_6 \\ &= (0, -M, 100M + 100, 300M + 300) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \\ &= M > 0. \end{aligned}$$

Como todos los elementos  $z_{ij} - \bar{c}_{ij} \geq 0$ , y por lo tanto la condición de optimalidad (2.76) se satisface, el vector

$$\mathbf{X}_{B_2} = \begin{pmatrix} X_5 \\ X_{a_1} \\ \lambda_{21} \\ \lambda_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es óptimo para el problema (2.73). La solución óptima del problema original (2.69), se obtiene utilizando la conversión (2.70), es decir

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^*_1 &= \sum_{i=1}^3 \lambda_{i1} \mathbf{X}_{i1} \\ &= \lambda_{11} \mathbf{X}_{11} + \lambda_{21} \mathbf{X}_{21} + \lambda_{31} \mathbf{X}_{31} \\ &= 0 \mathbf{X}_{11} + 1 \mathbf{X}_{21} + 0 \mathbf{X}_{31} \\ &= \mathbf{X}_{21} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_7 \\ X_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{X}^*_2 &= \sum_{i=1}^3 \lambda_{i2} \mathbf{X}_{i2} \\ &= \lambda_{12} \mathbf{X}_{12} + \lambda_{22} \mathbf{X}_{22} + \lambda_{32} \mathbf{X}_{32} \\ &= 1 \mathbf{X}_{12} + 0 \mathbf{X}_{22} + 0 \mathbf{X}_{32} \\ &= \mathbf{X}_{12} = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_9 \\ X_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \\ 80 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

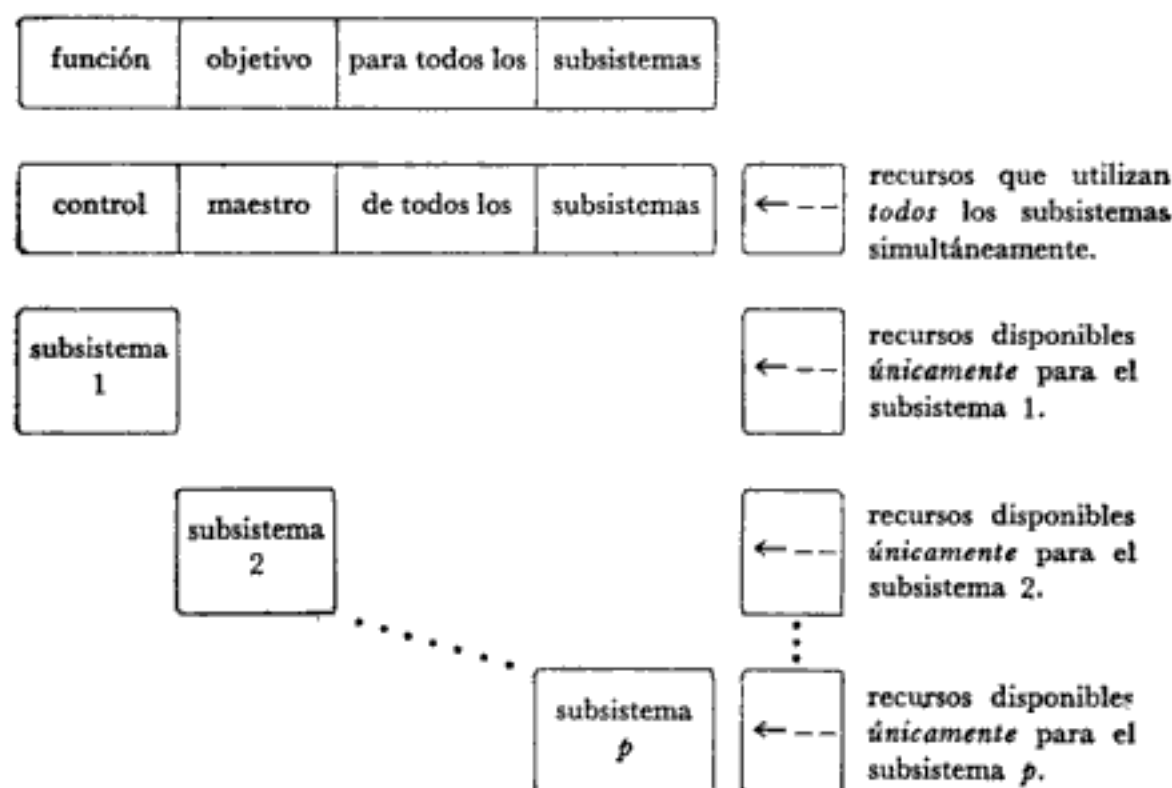
$$\begin{aligned}
 Z^0 &= c_{B_2} X_{B_2} \\
 &= (c_{x_5}, c_{a_1}, c_{\lambda_{21}}, c_{\lambda_{12}}) \begin{pmatrix} X_5 \\ X_{a_1} \\ \lambda_{21} \\ \lambda_{12} \end{pmatrix} \\
 &= (0, -M, 100, 300) \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= 400.
 \end{aligned}$$

Note el lector cómo los puntos extremos de las regiones de factibilidad  $S_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , se van generando a medida que las iteraciones van avanzando y que *no es necesario* conocer a priori todos los puntos extremos  $X_{ij}$  de  $S_j$ ,  $i = 1, \dots, s_j$ ;  $j = 1, \dots, p$ .

### Interpretación económica intuitiva de la descomposición lineal

Considerando la estructura que debe tener la matriz  $A$ , para poder aplicar la descomposición lineal se puede hacer la siguiente interpretación económica.

Sea la estructura la siguiente:



Se consideran ahora los efectos causados por cualquier acción del subsistema  $i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) en la función objetivo de todo el sistema. Si el subsistema  $i$  decide en el valor de los niveles de las actividades asociadas con el vector  $X_i$ , se genera un costo  $c_i X_i$  en la función objetivo del sistema y se consumen recursos  $L_i X_i$  que otros subsistemas no podrán

## 204 La programación lineal

usar. Se consumen además los recursos propios  $\mathbf{A}_i \mathbf{X}_i$  del subsistema  $i$ . Sin embargo, los efectos resultantes de las acciones asociadas con la decisión del subsistema  $i$  en todo el sistema, queda reflejada en el vector de los precios duales  $\mathbf{II}$ . Si las decisiones del subsistema  $i$  causan efectos negativos en la función objetivo de todo el sistema, el vector dual actuará como un mecanismo de corrección y no permitirá que el nivel de decisión  $\mathbf{X}_i$  sea muy elevado, ni que se consuman muchos recursos  $\mathbf{L}_i \mathbf{X}_i$ . Por el otro lado, si los efectos son benéficos en la función objetivo, el vector de precios duales  $\mathbf{II}$ , hará que el nivel de  $\mathbf{X}_i$  sea lo suficientemente elevado y que además se consuman los recursos necesarios  $\mathbf{L}_i \mathbf{X}_i$  a ese nivel.

Este tipo de coordinación es la que el *método de descomposición lineal* logra al optimizar los  $p$  subproblemas de la forma

$$\begin{aligned} & \text{Opt } (\mathbf{II}_0 \mathbf{L}_j - \mathbf{c}_j) \bar{\mathbf{X}}_j \\ \text{sujeto a} & \quad \mathbf{A}_j \bar{\mathbf{X}}_j = \mathbf{b}_j, \quad j = 1, \dots, p \\ & \quad \bar{\mathbf{X}}_j \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Las variables  $\lambda_{ij}$  que se van determinando en el proceso iterativo, son los *pesos ponderados* de las diferentes decisiones  $i$  ( $i = 1, \dots, s_j$ ) asociadas a un subsistema  $j$  ( $j = 1, \dots, p$ ). El criterio de optimalidad

$$(\mathbf{II}_0 \mathbf{L}_j - \mathbf{c}_j) \bar{\mathbf{X}}_j + \Pi_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, p,$$

indica que en el punto óptimo los efectos negativos resultantes de la decisión del subsistema  $j$  ( $j = 1, \dots, p$ ) dados por  $\mathbf{c}_j \bar{\mathbf{X}}_j - \mathbf{II}_0 \mathbf{L}_j \bar{\mathbf{X}}_j$ , deben ser menor o igual a los efectos negativos resultantes de la *decisión* integrada de todo el sistema dada por  $\mathbf{II}$ . En efecto, en el punto óptimo se tiene

$$(\mathbf{II}_0 \mathbf{L}_j - \mathbf{c}_j) \bar{\mathbf{X}}_j + \Pi_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, p,$$

ó

$$\Pi_j \geq \mathbf{c}_j \bar{\mathbf{X}}_j - \mathbf{II}_0 \mathbf{L}_j \bar{\mathbf{X}}_j \quad j = 1, \dots, p.$$

En resumen, se puede decir que las decisiones individuales de cada subsistema  $i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) dadas por  $\bar{\mathbf{X}}_i$  son transmitidas al control maestro, el cual genera *pesos ponderados*  $\lambda_{ij}$  asociadas con cada decisión, y además mecanismos correctores  $(\mathbf{II}_0, \mathbf{II})$  que influirán en las nuevas decisiones que hacen individualmente los subsistemas.

### 2.7. Técnicas de cota inferior y superior

*Cotas inferiores.*

El problema lineal con cota inferior se define como

$$\text{Opt } Z = \mathbf{cX}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \mathbf{AX} &\begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{h} &\leq \mathbf{X}, \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{h}$  es un vector columna de  $n$  componentes, no necesariamente mayor o igual al vector  $\mathbf{0}$ . Este problema puede resolverse por el *método simplex*, pero el precio que se paga es el de usar  $m + n$  restricciones adicionales, las primeras  $m$  generadas por  $\mathbf{AX} \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} \mathbf{b}$  y las últimas  $n$  por  $\mathbf{h} \leq \mathbf{X}$ .

Sin embargo, introduciendo el vector superfluo  $\mathbf{Y}$ , se pueden suprimir  $n$  restricciones, tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &\leq \mathbf{X} \\ \mathbf{h} &= \mathbf{X} - \mathbf{Y}, \quad \mathbf{Y} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{X} &= \mathbf{h} + \mathbf{Y} \end{aligned}$$

que una vez que se substituye en el problema original da:

$$\text{Opt } Z = \mathbf{cY} + \mathbf{ch}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \mathbf{AY} + \mathbf{Ah} &\begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{Y} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Pero como  $\mathbf{ch}$  es una constante, ésta puede eliminarse de la función objetivo, quedando finalmente el problema

$$\text{Opt } Z = \mathbf{cY}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \mathbf{AY} &\begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \mathbf{b} - \mathbf{Ah} \\ \mathbf{Y} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Este problema difiere del formulado originalmente, en que sólo tiene  $m$  restricciones y por lo tanto puede resolverse fácilmente por el *método simplex*.

*Ejemplo.* Resuelva

$$\text{Máx } Z = X_1 + 2X_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} X_1 - 4X_2 &\leq 4 \\ X_2 &\leq 2 \\ X_1 &\geq 2 \\ X_1 \geq 0, \quad X_2 &\geq 0. \end{aligned}$$



## 206 La programación lineal

Se hace

$$X_1 - Y_1 = 2, \quad Y_1 \geq 0,$$

o sea

$$X_1 = 2 + Y_1.$$

El problema original se puede re-escribir como

$$\text{Máx } \bar{Z} = 2 + Y_1 + 2X_2$$

sujeto a

$$2 + Y_1 - 4X_2 + X_3 = 4$$

$$X_2 + X_4 = 2$$

$$Y_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad X_3 \geq 0, \quad X_4 \geq 0.$$

Utilizando el *método simplex*, se tiene

	$\bar{Z}$	$Y_1$	$\downarrow$ $X_2$	$X_3$	$X_4$	
	1	-1	-2	0	0	2
$a_3$	0	1	-4	1	0	2
$a_4$	0	0	①	0	1	2←
	1	-1	0	0	2	6
$a_3$	0	①	0	1	4	10←
$a_2$	0	0	1	0	1	2
	1	0	0	1	6	16
$a_{Y_1}$	0	1	0	1	4	10
$a_2$	0	0	1	0	1	2

El resultado óptimo es

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{Z} = 16,$$

por lo que

$$X_1 = 2 + Y_1 = 2 + 10 = 12$$

y

$$\begin{aligned} Z &= \bar{Z} - 2 \\ &= 16 - 2 = 14. \end{aligned}$$

*Cotas superiores.*

El problema lineal con cota superior se define como

$$\text{Opt } Z = \mathbf{c}\mathbf{X}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{X} &\leq \mathbf{b} \\ &> \\ \mathbf{0} &\leq \mathbf{X} \leq \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Se trata de ver nuevamente cómo resolver un problema equivalente que tenga menos de  $m + n$  restricciones.

A diferencia del caso de la cota inferior, no se puede hacer en este caso la siguiente substitución:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &\leq \mathbf{u} \\ \mathbf{X} + \mathbf{W} &= \mathbf{u}, \quad \mathbf{W} \geq \mathbf{0}, \\ \mathbf{X} &= \mathbf{u} - \mathbf{W}, \end{aligned}$$

porque, aunque se garantiza que  $\mathbf{X} \leq \mathbf{u}$ , no se puede garantizar que  $\mathbf{u} - \mathbf{W} \geq \mathbf{0}$ . Basta con que  $\mathbf{W}$  sea mayor que  $\mathbf{u}$  para que  $\mathbf{u} - \mathbf{W} < \mathbf{0}$  y por lo tanto  $\mathbf{X} < \mathbf{0}$ , violando la restricción de que  $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$ .  $\mathbf{X} = \mathbf{u} - \mathbf{W}$  se representa por medio de sus componentes, es decir,

$$X_j = u_j - W_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Para el caso de la cota superior se distinguen tres casos diferentes, que ameritan cada uno trato especial, a saber:

- a)  $X_j$  es básica y su complemento de holgura  $W_j$  es no-básica,
- b) ambas,  $X_j$  y  $W_j$  son básicas,
- c)  $X_j$  es no-básica y su complemento de holgura  $W_j$  es básico.

Las iteraciones del *método simplex* en este caso pueden ser de tres tipos, a saber:

I. Cuando una variable no básica aumenta su valor, otra variable básica disminuye a cero. Este es el caso normal del *método simplex* utilizado hasta ahora en este texto.

II. Cuando una variable no-básica se incrementa, otra variable básica aumenta hasta alcanzar su cota superior. Este tipo de iteración se puede convertir a una iteración normal del *simplex* (iteración tipo I), si es que antes de efectuar la iteración se hace uso de una de las dos fórmulas de conversión

$$X_j = u_j - W_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

ó

$$W_j = u_j - X_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

como sea apropiado al caso.

## 208 La programación lineal

III. Cuando una variable no básica se incrementa, ésta alcanza su valor de cota superior.

El *método simplex* común y corriente, utilizado hasta ahora, difiere del *método simplex con cota superior* en sólo dos fases:

- a) la selección del vector que deberá dejar la base, y
- b) la iteración que deberá realizarse,

siendo ambos métodos exactamente iguales en el resto de las fases.

Se dan a continuación los pasos a seguir del *método simplex con cota superior*.

*Paso 1.* Obténgase una solución inicial básica factible por medio de la adición de variables de holgura o artificiales.

*Paso 2.* Si todas las  $z_j - c_j \geq 0$ , para  $j = 1, \dots, n$ , la base actual es óptima. Si no, selecciónese como vector de entrada aquél cuya  $z_j - c_j$  sea la más negativa. Sea este, el vector  $a_k$ .

*Paso 3.* Selecciónense indicadores

- $r_1 =$  número de fila utilizado en la iteración tipo I,
- $r_2 =$  número de fila utilizado en la iteración tipo II,
- $f_1 =$  cociente numérico de la iteración tipo I,
- $f_2 =$  cociente numérico de la iteración tipo II,

y hágase  $r_1 = r_2 = 0$ ,  $f_1 = f_2 = \infty$ .

*Paso 4.* Encuéntrese el  $\text{Mín}_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{X_{B_i}}{Y_{ik}} \mid Y_{ik} > 0 \right\}$  y désígnese a  $r_1$  como la fila donde se obtuvo el mínimo y a  $f_1$  como el cociente mínimo.

*Paso 5.* Encuéntrese el  $\text{Mín}_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{X_{B_i} - u_{B_i}}{Y_{ik}} \mid Y_{ik} < 0 \right\}$  y désígnese a  $r_2$  la fila donde se obtuvo el mínimo y a  $f_2$  como el cociente mínimo.

*Paso 6.* Si  $r_1 = r_2 = 0$  y  $u_k = \infty$  el problema *no* tiene solución óptima acotada, sino que la solución es infinito. En caso contrario escójase el

$$\text{Mín} (f_1, f_2, u_k).$$

*Paso 7.* Si el mínimo es:

- a)  $f_1$ , utilícese la iteración tipo I del *método simplex*, es decir, hágase al pivote  $Y_{r_1, k}$  uno, y al resto de la columna cero. Continúe al paso 2.
- b)  $f_2$ , hágase primero el cambio de  $X_{B_{r_2}}$  por  $W_{B_{r_2}}$  y  $Y_{r_2, j}$  por  $-Y_{r_2, j}$ , para toda  $j$  en  $\mathbf{N}$  donde

$$W_{B_{r_2}} = u_{B_{r_2}} - X_{B_{r_2}},$$

y después utilícese una iteración del tipo I del *simplex* pivotando sobre el elemento  $Y_{r_2, k}$ . Regrésese al paso 2. El vector que sale de la base adquiere el valor de su cota superior.

c)  $u_k$ , háganse los siguientes cambios y regrésese al paso 2, sin iterar.

Cámbiese  $X_{B_i}$  por  $W_{B_i}$ , donde  $W_{B_i} = X_{B_i} - u_k Y_{ik}$ , para toda  $i = 1, \dots, m$ .

Cámbiese  $Y_{ik}$  por  $-Y_{ik}$ , para toda  $i = 1, \dots, m$ .

Cámbiese  $z_k - c_k$  por  $-z_k + c_k$  y  $Z$  por  $Z - u_k (z_k - c_k)$ .

El vector no básico que debería entrar a la base (pero que no entra) adquiere el valor de su cota superior.

*Ejemplo.* Resuélvase por el método simplex de cota superior el siguiente problema lineal:

$$\text{Máx } Z = .56X_1 + .42X_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 &\leq 240\,000 \\ 1.5 X_1 + X_2 &\leq 180\,000 \\ 0 \leq X_1 &\leq 110\,000 \\ X_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

*Iteración 1.*

*Paso 1.*

	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	
	1	-.56	-.42	0	0	0
$a_3$	0	1	2	1	0	240 000
$a_4$	0	1.5	1	0	1	180 000

*Paso 2.*  $X_1$  entra a la base, por lo que  $k = 1$ .

*Paso 3.*  $r_1 = r_2 = 0$   
 $f_1 = f_2 = \infty$ .

*Pasos 4 y 5.* Como todas las  $Y_{i1} > 0$   $i = 1, 2$  se tiene  $r_2 = 0$  y  $f_2 = \infty$ .

$$\text{Mín} \left\{ \frac{X_{B_i}}{Y_{i1}} \mid Y_{i1} > 0 \right\} = \text{Mín} \left\{ \frac{240\,000}{1}, \frac{180\,000}{1.5} \right\} = 120\,000,$$

y por lo tanto  $r_1 = 2$  y  $f_1 = 120\,000$ .

*Paso 6.*  $\text{Mín}(f_1, f_2, u_1) = \text{Mín}(120\,000, \infty, 110\,000) = 110\,000$ .

*Paso 7-C.* La iteración es del tipo III, es decir a  $X_1$  se le reemplaza por  $(110\,000 - W_1)$  y se hacen los siguientes cambios:

i)  $W_{B_i} = X_{B_i} - u_k Y_{ik} \quad i = 1, 2; \quad k = 1$

es decir, para  $i = 1$

$$W_{B_1} = X_{B_1} - u_1 Y_{11} = 240\,000 - 110\,000(1) = 130\,000,$$

## 210 La programación lineal

y para  $i = 2$

$$W_{B_2} = X_{B_2} - u_1 Y_{21} = 180\,000 - 110\,000(1.5) = 15\,000.$$

ii)

$$Y_{ik} = -Y_{ik}, \quad i = 1, 2; \quad k = 1,$$

es decir,

$$Y_{11} = -Y_{11} = -1,$$

$$Y_{21} = -Y_{21} = -1.5,$$

iii)

$$z_k - c_k = -z_k + c_k$$

$$z_1 - c_1 = -z_1 + c_1 = -(-.56) = .56.$$

iv)

$$Z = Z - u_k (z_k - c_k) = Z - u_1 (z_1 - c_1)$$

$$= 0 - 110\,000(-.56) = 61\,600.$$

*Iteración 2.*

*Paso 2.* El nuevo tableau, al inicio de esta iteración, es

	Z	$W_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	
	1	.56	-.42	0	0	61 600
$a_3$	0	-1	2	1	0	130 000
$a_4$	0	-1.5	1	0	1	15 000

y  $X_2$  entra a la nueva base, por lo que  $k = 2$ . Note como  $X_1$  ha adquirido en esta iteración el valor de su cota superior. En efecto  $X_1 = 110\,000 - W_1$ , pero  $W_1 = 0$ , por lo que  $X_1 = 110\,000$ .

*Paso 3.*  $r_1 = r_2 = 0$ ,  $f_1 = f_2 = \infty$ .

*Pasos 4 y 5.* Como todos los  $Y_{i2} > 0$ ,  $i = 1, 2$  se tiene  $r_2 = 0$  y  $f_2 = \infty$ .

$$\begin{aligned} & \text{Mín}_{i=1,2} \left\{ \frac{X_{B_i}}{Y_{i2}} \mid Y_{i2} > 0 \right\} \\ &= \text{Mín} \left\{ \frac{130\,000}{2}, \frac{15\,000}{1} \right\} = 15\,000 \\ & r_1 = 2, \quad f_1 = 15\,000. \end{aligned}$$

*Paso 6.*  $\text{Mín}(f_1, f_2, u_2) = \text{Mín}(15\,000, \infty, \infty) = 15\,000$ .

*Paso 7-a.* Se realiza una iteración tipo I del *método simplex* sobre el pivote  $Y_{22}$ , generando el siguiente tableau.

Iteración 3.

Paso 2.

	Z	$W_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	
	1	-.07	0	0	.42	67 900
$a_3$	0	2	0	1	-2	100 000
$a_2$	0	-1.5	1	0	1	15 000

y  $W_1$  entra a la base, por lo que  $k = 1$ .

Paso 3.  $r_1 = r_2 = 0, f_1 = f_2 = \infty$ .

Paso 4.  $\text{Mín}_{i=1,2} \left\{ \frac{X_{B_i}}{Y_{i1}} \mid Y_{i1} > 0 \right\} = \text{Mín} \left\{ \frac{100\ 000}{2} \right\} = 50\ 000$ ,

y por lo tanto

$$r_1 = 1, f_1 = 50\ 000.$$

Paso 5.  $\text{Mín}_{i=1,2} \left\{ \frac{X_{B_i} - u_{B_i}}{Y_{ik}} \mid Y_{ik} < 0 \right\}$   
 $\text{Mín} \left\{ \frac{15\ 000 - \infty}{-1.5} \right\} = \infty$ ,

y por lo tanto

$$r_2 = 2, f_2 = \infty.$$

Paso 6.  $\text{Mín}(f_1, f_2, u_1) = \text{Mín}(50\ 000, \infty, 110\ 000) = 50\ 000$ .

Paso 7-a. Se realiza una iteración tipo I del método simplex sobre el pivote  $Y_{11}$ , generando el siguiente tableau que es óptimo:

	Z	$W_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	
	1	0	0	.035	.35	71 400
$a_{W_1}$	0	1	0	.5	-1	50 000
$a_2$	0	0	1	.75	-.5	90 000

La solución óptima es

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50\ 000 \\ 90\ 000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Z = 71\ 400,$$

por lo que  $X_1 = u_1 - W_1 = 110\ 000 - 50\ 000 = 60\ 000$ .

## 212 La programación lineal

*Ejemplo.* Para ilustrar una iteración del tipo II (paso 7-b) se introduce al vector  $\mathbf{a}_4$  a una nueva base, en el tableau óptimo anterior. Se tiene  $k = 4$ .

*Iteración 1.*

*Paso 2.*

	Z	$W_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	
	1	0	0	.035	.35	71 400
$\mathbf{a}_{w_1}$	0	1	0	.5	-1	50 000
$\mathbf{a}_2$	0	0	1	.75	-.5	90 000

*Paso 3.*  $r_1 = r_2 = 0$ ,  $f_1 = f_2 = \infty$ .

*Paso 4.* Por ser todas las  $Y_{i4} < 0$  se tiene  $r_1 = 0$  y  $f_1 = \infty$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Paso 5. } & \text{Mín}_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{X_{B_i} - u_{B_i}}{Y_{i4}} \mid Y_{i4} < 0 \right\} \\
 & \text{Mín} \left\{ \frac{50\,000 - 110\,000}{-1}, \frac{90\,000 - \infty}{-.5} \right\} \\
 & = \text{Mín} \{60\,000, \infty\} = 60\,000,
 \end{aligned}$$

por lo que  $r_2 = 1$  y  $f_2 = 60\,000$ .

*Paso 6.*  $\text{Mín}(f_1, f_2, u_4) = \text{Mín}(\infty, 60\,000, \infty) = 60\,000$ .

*Paso 7-b.* Se hacen los siguientes cambios:

i)  $W_{Br_2} = u_{Br_2} - X_{Br_2}$

es decir,

$$W_{B_1} = u_{B_1} - X_{B_1} = 110\,000 - 50\,000 = 60\,000.$$

ii)  $Y_{r_2, j} = -Y_{r_2, j}$ , para toda  $j$  en  $\mathbf{N}$

es decir,

$$Y_{1, j} = -Y_{1, j}, \text{ para } j = 3, 4,$$

$$Y_{1, 3} = -.5$$

$$Y_{1, 4} = -(-1) = 1.$$

El tableau generado antes de efectuar operaciones matriciales elementales sobre el pivote  $Y_{r_2, k} = Y_{1, 4}$  es:

	Z	$W_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	
	1	0	0	.035	.35	71 400
$a_{w_1}$	0	1	0	-.5	1	60 000 ←
$a_2$	0	0	1	.75	-.5	90 000

y una vez efectuadas las operaciones matriciales elementales, se tiene el siguiente tableau, que desde luego no es óptimo y habrá que seguir iterando. Note cómo el vector que sale de la base adquiere el valor de su cota superior. En efecto,  $W'_1 = 110\,000 - W_1$ , pero  $W'_1 = 0$  por lo que  $W_1 = 110\,000$ . Eso, a su vez, implica que  $X_1 = 0$ , porque  $X_1 = 110\,000 - W_1$ .

	Z	$W'_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	
	1	-.35	0	.21	0	50 400
$a_4$	0	1	0	-.5	1	60 000
$a_2$	0	.5	1	.5	0	120 000

El método simplex revisado con la técnica de cota superior es el que se emplea en casi todos los programas comerciales de computadoras (programas de biblioteca) para resolver problemas de programación lineal.<sup>48</sup>

### 2.8. Aplicación real de un programa lineal en la administración pública mexicana

A continuación se presenta una aplicación real de la programación lineal en la administración pública del Gobierno de México. Se trata de un modelo nacional de distribución de maíz, que el autor diseñó para la Compañía Nacional de Subsistemas Populares (CONASUPO), y que actualmente se está implantando en la Subdirección de Operaciones de CONASUPO. [38]

La Compañía Nacional de Subsistemas Populares (CONASUPO) es una institución para servir al pueblo mexicano. Es un organismo descentralizado del Gobierno Federal que fomenta el desarrollo del país en el campo de las subsistencias populares mediante el abasto, regulación y modernización de sus mercados. La CONASUPO, en esencia, es un instrumento de justicia social, cuyos mecanismos de redistribución de la riqueza representa un factor de desarrollo y de apoyo a las clases populares.

<sup>48</sup> El suplemento 2 de este capítulo contiene una lista de programas de biblioteca para resolver problemas lineales por computadora.



## 214 La programación lineal

La acción reguladora que el Gobierno mexicano adoptó como compromiso para proteger a los sectores de escasos recursos en 1934, se transformó con el tiempo en el actual organismo público descentralizado, CONASUPO, creado en 1965.

La función de CONASUPO es la de regular los mercados mediante el establecimiento de una relación más eficiente y racional entre productores y consumidores, y la de proteger a los productores de subsistencias populares y a los consumidores de escasos recursos. Para expresar estas funciones de una manera operativa, la CONASUPO persigue los siguientes objetivos:

- a) Aumentar el ingreso de ejidatarios y pequeños propietarios productores de subsistemas populares.
- b) Aumentar el poder de compra de consumidores de escasos recursos.
- c) Inducir una mayor eficiencia en la comercialización de subsistemas populares, tanto en el mercado interno como en el exterior.

La CONASUPO actúa de la siguiente manera:

- a) *Realiza* compras directas a precios de garantía.
- b) *Celebra* convenios con industriales para que realicen compras a precios de garantía o superiores.
- c) *Establece* normas de calidad y vigila que se respeten.
- d) *Crea* reservas reguladoras de granos y semillas.
- e) *Almacena* y transporta granos, directamente en las bodegas rurales BORUCONSA que opera y a través de Almacenes Nacionales de Depósito, S. A. (ANDSA) y Ferrocarriles Nacionales de México.
- f) *Celebra* convenios para la venta controlada de subsistencias a precios estables.
- g) *Realiza* ventas al menudeo a precios CONASUPO.
- h) *Opera* importaciones y exportaciones de subsistencias.
- i) *Produce* pan, leche, harina de maíz, aceites comestibles y alimentos balanceados.
- j) *Capacita* a los productores agrícolas en aspectos comerciales y les proporciona servicios auxiliares.

Entre los muchos programas que se llevan a cabo en la CONASUPO, se pueden mencionar entre otros, los de la comercialización al mayoreo del maíz, trigo, sorgo, frijol, arroz, cebada, grasas, oleaginosas, aceites comestibles y leche en polvo.

El programa de comercialización del maíz de la CONASUPO, que incluye su compra, almacenamiento, distribución y venta, costó aproximadamente 4 000 millones de pesos durante el año 1974, convirtiéndolo en el programa más dinámico de la Compañía.

Los costos asociados con la distribución y almacenamiento del maíz vinieron a representar, durante 1974, aproximadamente el 7.4% de los gastos totales del programa. Al no saberse con exactitud la demanda futura de maíz en ciertas regiones del país, ni tampoco los exce-

dentes o déficits que pudieran existir en diferentes zonas del país, históricamente, se han generado dentro del programa de comercialización movimientos excesivos e innecesarios en la distribución del mismo, que vienen indudablemente a repercutir en un alza en los costos asociados con la comercialización del mismo. Aunado a estos costos de distribución se vienen a sumar los costos originados por las diferentes políticas de importación de maíz por parte de CONASUPO.<sup>49</sup>

Este problema, de una costosa distribución, se viene a complicar aún más, si se considera que en el programa de comercialización, el maíz se mueve de aproximadamente 2 000 centros receptores (Bodegas Rurales CONASUPO, más puntos de importación) a aproximadamente 510 centros consumidores (260 almacenes ANDSA y 250 estaciones de embarque de ferrocarril) ubicados en las 180 ciudades más importantes del país.

Por tal motivo, se procedió a construir, implantar y operar para la CONASUPO un modelo matemático que persigue los siguientes objetivos:

- a) Garantizar la disponibilidad de maíz por zonas, para satisfacer la demanda mensual y la reserva mínima reguladora en la zona,
- b) minimizar los costos de distribución en el programa de comercialización del maíz, y
- c) pronosticar existencias de maíz por zona a 30 y 60 días en el futuro.

Con objeto de evaluar los logros reales del modelo se procedió a la siguiente medición de los objetivos:

- a) Respecto al primero, se comparó en un mismo período el volumen de movimientos generado por el modelo contra el volumen de movimientos reales;
- b) respecto al segundo, se comparó los costos unitarios de distribución resultantes de la operación del modelo contra costos unitarios de distribución de años anteriores;
- c) respecto al tercero, se comparó las existencias pronosticadas con las reales, por zona, a 30 y 60 días en el futuro.

En el modelo matemático de distribución de maíz sólo se incluyeron los siguientes costos variables:

*Distribución* por ferrocarril, carretera y marítimos de cada uno de los centros emisores a los centros receptores.

*Almacenamiento* en bodegas ANDSA (propias y rentadas), en bodegas BORUCONSA y en zonas de espera de importación.

*Carga* en cada una de las zonas emisoras.

*Descarga* en cada una de las zonas receptores.

Se ignoraron en el modelo los costos financieros por conceptos de divisas (en el caso de la importación) e intereses en el capital invertido,

<sup>49</sup> México ha tenido que importar, a partir de 1972, aproximadamente el 10% de la demanda de maíz, es decir, 1 millón de toneladas anuales. Antes de 1972 México exportaba maíz.

## 216 La programación lineal

así como costos fijos por conceptos de compra de maíz a los ejidatarios, certificación de calidad e importaciones del extranjero.

El modelo recomienda las entregas de maíz a 30 días en el futuro y pronostica los posibles movimientos de maíz en el país a 60 días de 26 zonas emisoras, que incluyen 9 zonas de importación, a 17 zonas receptoras, a costo mínimo, sujetándose a las siguientes restricciones reales:

- a) La cantidad almacenada en cada zona no puede exceder la capacidad de almacenamiento de la zona;
- b) las maniobras de carga y descarga por unidad de tiempo (30 días) en cada zona, no puede exceder la capacidad de carga y descarga de la zona por unidad de tiempo, y finalmente,
- c) la recepción (por compra o por transferencia), más las existencias de maíz en una zona por unidad de tiempo, deberán ser mayores o iguales a la demanda más la existencia mínima reguladora de la zona.

El mapa que se presenta a continuación corresponde a la división del país en regiones o zonas; cada zona está representada por un *centroide*. La regionalización del país para el modelo de distribución de maíz se hizo en función de:

- a) la oferta de compra,
- b) la demanda de la venta,
- c) cercanía geográfica de los poblados,
- d) red ferrocarrilera, camionera y marítima,
- e) disponibilidad actual en la memoria de la computadora utilizada (Borroughs B-3700).

Los estados incluidos en cada zona, más el centroide de la zona, más las características de la zona (importación o emisor-receptor) están dadas a continuación.

**Tabla 2.6**

### Identificación de Zonas

Zona núm.	Observación	Centroide
Zona 1	Importación por Matamoros-Nuevo Laredo	
Zona 2	Piedras Negras	
Zona 3	Cd. Juárez	
Zona 4	Nogales-Mexicali	
Zona 5	Tampico	
Zona 6	Veracruz-Coatzacoalcos	
Zona 7	S. Cruz	
Zona 8	Manzanillo	
Zona 9	Mazatlán	
Bodegas ANDSA-BORUCONSA en el estado de:		
Zona 10	Baja California Norte	Mexicali
Zona 11	Baja California Sur	La Paz
Zona 12	Durango y Comarca Lagunera de Coahuila	Torreón
Zona 13	Chiapas	Arriaga

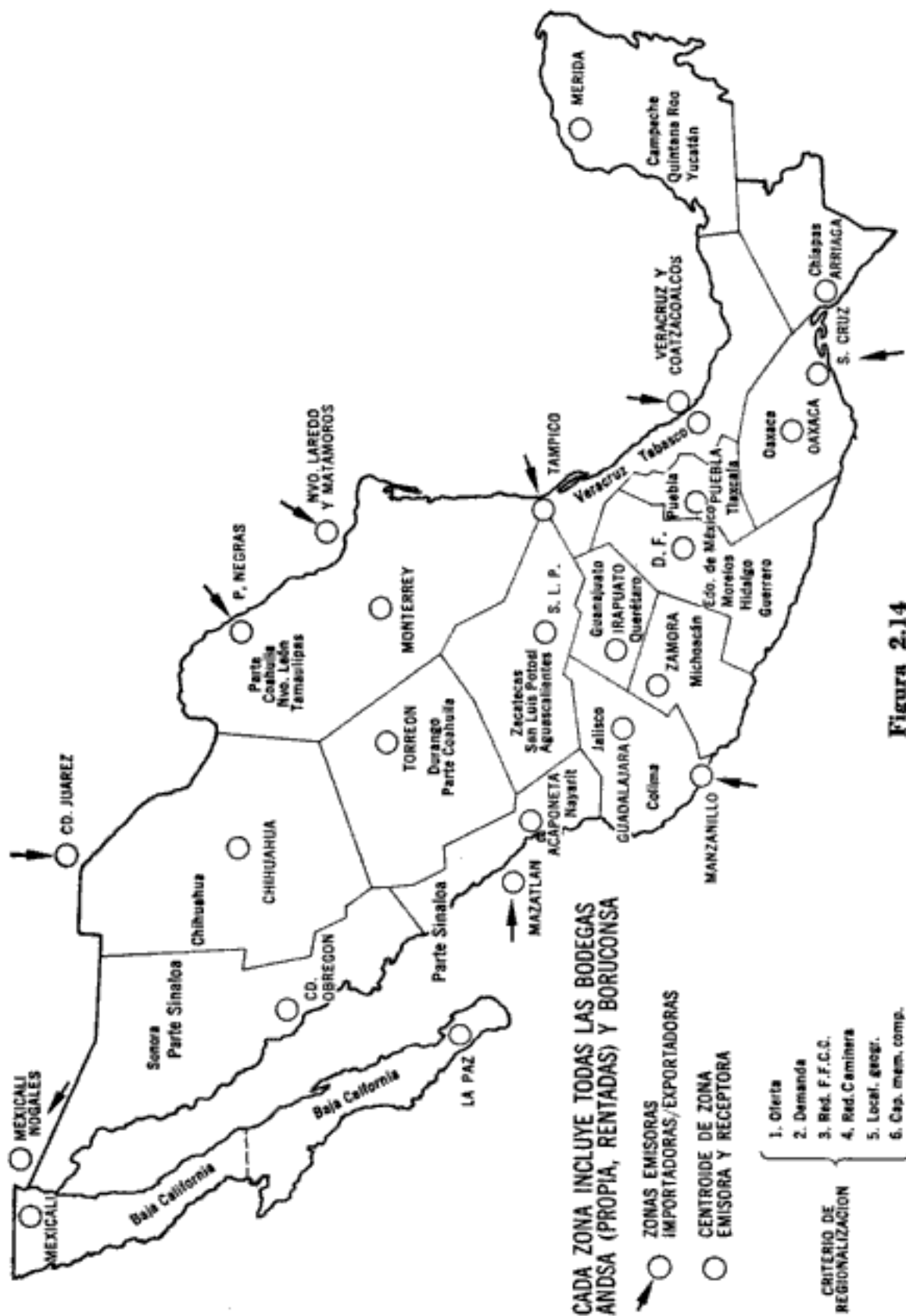


Figura 2.14

## 218 La programación lineal

Zona núm.	Observación	Centroide
Zona 14	Chihuahua	Chihuahua
Zona 15	Distrito Federal, Edo. de México, Morelos, Guerrero e Hidalgo	Distrito Federal
Zona 16	Jalisco y Colima	Guadalajara
Zona 17	Michoacán	Zamora
Zona 18	Guanajuato y Querétaro	Irapuato
Zona 19	Nayarit y parte Sur Sinaloa	Acaponeta
Zona 20	Nuevo León, Tamaulipas y Coahuila (sin la Comarca Lagunera)	Monterrey
Zona 21	Oaxaca	Oaxaca
Zona 22	Puebla y Tlaxcala	Puebla
Zona 23	Sonora y parte Norte de Sinaloa	Cd. Obregón
Zona 24	Veracruz y Tabasco	Veracruz
Zona 25	Campeche, Quintana Roo y Yucatán	Mérida
Zona 26	Aguascalientes, San Luis Potosí y Zacatecas	S. L. P.

Antes de formular el modelo y presentar como ilustración los resultados obtenidos para el bimestre octubre-noviembre de 1973, se enfatizan los siguientes puntos:

- El modelo de distribución del maíz genera recomendaciones de movimientos mensuales *óptimos de una zona a otra*, es decir, de centroide a centroide;
- la distribución a nivel de bodega a bodega se hace a *criterio de CONASUPO*, es decir el modelo NO genera órdenes de distribución entre bodegas,
- el modelo de distribución del maíz puede extenderse a productos de dinámica similar a la del maíz en lo que respecta a su comercialización, como por ejemplo el frijol, la cebada, el sorgo y el trigo.<sup>50</sup>

El modelo matemático define a las siguientes variables y constantes.

### Variables

$X_{ijt} \geq 0$ : toneladas de maíz mandadas de la zona  $i$  ( $i = 1, \dots, 26$ ) a la zona  $j$  ( $j = 10, \dots, 26$ ), durante el período  $t$ , ( $t = 1, 2$ ).

$Y_{it} \geq 0$ : toneladas de maíz existentes en la zona  $i$  ( $i = 10, \dots, 26$ ) al finalizar el período  $t$  ( $t = 2, 3$ ).

$Z_{it} \geq 0$ : toneladas de maíz de importación existentes en la zona de importación  $i$  ( $i = 1, \dots, 9$ ) al finalizar el período  $t$  ( $t = 1, 2$ ).

### Constantes.

$Y_{i1} \geq 0$ : toneladas de maíz existentes en la zona  $i$  ( $i = 10, \dots, 26$ ) en la fecha base (fecha en que se corra el modelo).

<sup>50</sup> De hecho, a partir del mes de junio de 1974, opera en CONASUPO en forma recurrente un modelo de distribución de trigo. El departamento de trigo de CONASUPO, informó que con ayuda del modelo lograron un ahorro para la compañía al 31 de diciembre de 1974 de 84 millones de pesos.

$Q_i \geq 0$ : capacidad de almacenamiento de maíz en toneladas en las bodegas de ANDSA y BORUCONSA de la zona  $i(i = 10, \dots, 26)$ .

$W_i \geq 0$ : capacidad de carga y descarga en toneladas por unidad de tiempo, en la zona  $i(i = 10, \dots, 26)$ .

$\emptyset_{it} \geq 0$ : pronóstico de compras de maíz en toneladas en la zona  $i(i = 10, \dots, 26)$ , durante el período  $t(t = 1, 2)$ .

$V_{it} \geq 0$ : pronóstico de ventas de maíz en toneladas en la zona  $i(i = 10, \dots, 26)$ , durante el período  $t(t = 1, 2)$ .

$E_i \geq 0$ : existencia mínima reguladora de maíz en toneladas que debe permanecer en la zona  $i(i = 10, \dots, 26)$ , durante todo el año en forma constante.

$I_{it} \geq 0$ : toneladas de maíz importado por la zona de importación  $i(i = 1, \dots, 9)$  durante el período  $t(t = 1, 2)$ .

*Costos unitarios.*

$c_{ij}$ : \$/tonelada de maíz mandado de la zona  $i(i = 1, \dots, 26)$  a la zona  $j(j = 10, \dots, 26)$ .

$e_i$ : \$/tonelada de maíz cargado en la zona  $i(i = 1, \dots, 26)$ .

$r_j$ : \$/tonelada de maíz descargado en la zona  $j(j = 10, \dots, 26)$ .

$g_i$ : \$/tonelada de maíz almacenado por unidad de tiempo en la zona  $i(i = 10, \dots, 26)$ .

$h_i$ : \$/tonelada de maíz almacenado por unidad de tiempo en la zona de importación  $i(i = 1, \dots, 9)$ .

*Función objetivo.*

$$\text{Mín } \sum_{i=1}^{26} \sum_{j=10}^{26} \sum_{t=1}^2 (c_{ij} + e_i + r_j) X_{ijt} + \sum_{i=10}^{26} \sum_{t=2}^2 h_i Z_{it} + \sum_{i=1}^9 \sum_{t=1}^2 g_i Y_{it}$$

sujeto a:

$$- \text{EMBARQUES} + \text{RECEPCION} + \text{COMPRAS} - \text{VENTAS} + \text{EXISTENCIA INICIAL} = \text{EXISTENCIA FINAL}$$

$$\sum_{j=10}^{26} X_{ij1} - \sum_{j=1}^{26} X_{ji1} + Y_{i2} = Y_{i1} + \emptyset_{i1} - V_{i2}, i = 10, \dots, 26 \text{ (30 días)}$$

$$\sum_{j=10}^{26} X_{ij2} - \sum_{j=1}^{26} X_{ji2} + Y_{i3} - Y_{i2} = \emptyset_{i2} - V_{i2}, i = 10, \dots, 26 \text{ (60 días)}$$

$$\text{RECEPCION} - \text{EMBARQUES} + \text{EXISTENCIA INICIAL} + \text{COMPRAS} - \text{VENTAS} \leq \text{CAPACIDAD DE ALMACENAMIENTO}$$

$$\sum_{j=1}^{26} X_{ji1} - \sum_{j=10}^{26} X_{ij1} \leq -Y_{i1} - \emptyset_{i1} + V_{i1} + Q_i, i = 10, \dots, 26 \text{ (30 días)}$$

$$\sum_{j=1}^{26} X_{ji2} - \sum_{j=10}^{26} X_{ij2} + Y_{i2} \leq -\emptyset_{i2} + V_{i2} + Q_i, i = 10, \dots, 26 \text{ (60 días)}$$

## 220 La programación lineal

RECEPCION + EMBARQUES  $\leq$  CAPACIDAD DE MANIOBRAS DE CARGA Y DESCARGA

$$\sum_{j=1}^{26} X_{ji1} + \sum_{j=10}^{26} X_{ij1} \leq W_i, \quad i = 10, \dots, 26 \quad (30 \text{ días})$$

$$\sum_{j=1}^{26} X_{ji2} + \sum_{j=10}^{26} X_{ij2} \leq W_i, \quad i = 10, \dots, 26 \quad (60 \text{ días})$$

- EMBARQUES + RECEPCION + COMPRAS - VENTAS + EXISTENCIA INICIAL  $\geq$  EXISTENCIA MINIMA REGULADORA

$$\sum_{j=10}^{26} X_{ij1} - \sum_{j=1}^{26} X_{ji1} \leq Y_{i1} + \emptyset_{i1} - V_{i1} - E_i, \quad i = 10, \dots, 26 \quad (30 \text{ días})$$

$$\sum_{j=10}^{26} X_{ij2} - \sum_{j=1}^{26} X_{ji2} - Y_{i2} \leq \emptyset_{i2} - V_{i2} - E_i, \quad i = 10, \dots, 26 \quad (60 \text{ días})$$

TRANSFERENCIA DE IMPORTACION AL INTERIOR DEL PAIS + IMPORTACION ALMACENADA EN LAS ZONAS IMPORTADORAS = IMPORTACION RECIBIDA EN LAS ZONAS IMPORTADORAS.

$$\sum_{j=10}^{26} X_{ij1} + Z_{i1} = I_{i1}, \quad i = 1, \dots, 9 \quad (30 \text{ días})$$

$$\sum_{j=10}^{26} X_{ij2} - Z_{i1} + Z_{i2} = I_{i2}, \quad i = 1, \dots, 9 \quad (60 \text{ días})$$

### CONDICIONES DE NO NEGATIVIDAD

$$\begin{aligned} X_{ijt} &\geq 0, & i &= 1, \dots, 26; & j &= 10, \dots, 26; & t &= 1, 2 \\ Y_{it} &\geq 0, & i &= 10, \dots, 26; & t &= 2, 3 \\ Z_{it} &\geq 0, & i &= 1, \dots, 9; & t &= 1, 2. \end{aligned}$$

Este modelo de programación lineal tiene:

$i = 26$  centros emisores (tomando en cuenta a los de importación).

$j = 17$  centros receptores.

$t = 2$  períodos de tiempo.

$t[j(i+1)+9] = 936$  variables continuas.

$t[4j+9] = 154$  restricciones.

$6j = 102$  variables de holgura.

$t[j+9] = 52$  variables artificiales.

Los datos de entrada para el bimestre de octubre-noviembre de 1973 se muestran en la tabla de la página siguiente.

La capacidad mensual de carga y descarga en las zonas se calcularon en base al máximo número de carros de ferrocarril de 50 ton c/u, que se pueden cargar o descargar por día en todas las estaciones del ferrocarril en la zona, veces el número de días hábiles en un mes.

Tabla 2.7

Zona	Centroides	Importación, durante el mes Sep. 1973 (ton.)	Existencia al 30 de Sep. 1973 (ton.)	Pronóstico de ventas		Pronóstico de compras		Cap. de Almac. zona (ton.)	Cap. de carga y descarga (ton.)	Existencia mínima por zona (ton.)
				Oct. 1973 (ton.)	Nov. 1973 (ton.)	Oct. 1973 (ton.)	Nov. 1973 (ton.)			
1	Nvo. Lar.-Mat.	32 622								
2	P. Negra	327								
3	Cd. Juárez	3 048								
4	Nog.-Méx.	2 334								
5	Tampico	20 400								
6	Ver.-Coatz.	50 473								
7	S. Cruz	12 820								
8	Manzanillo	56 634								
9	Mazatlán	24 415								
<b>TOTAL:</b>		203 073 ton								
<b>MODELO NACIONAL DE DISTRIBUCION DE MAIZ</b>										
										<i>Toneladas</i>
10	Mexicali		12 294	3 752	3 132	0	0	101 860	41 400	9 542
11	La Paz		657	26	85	0	0	10 000	7 500	714
12	Torreón		7 761	3 545	1 847	0	0	251 180	52 200	4 315
13	Arriaga		8 475	1 674	812	0	12 741	209 105	9 000	9 415
14	Chihuahua		3 467	8 472	4 033	0	14 249	206 250	50 400	15 058
15	Distrito Federal		48 204	18 228	42 495	0	18	1 189 555	289 800	207 809
16	Guadalajara		17 796	14 270	12 172	0	10 023	531 860	217 800	31 502
17	Zamora		4 409	6 939	5 213	0	55	166 905	30 600	18 503
18	Irapuato		8 296	3 693	966	0	186	215 480	68 400	11 126
19	Acaponeta		5 981	7 450	6 144	0	267	366 310	56 550	20 044
20	Monterrey		6 917	5 354	894	0	68	415 150	153 000	96 218
21	Oaxaca		10 398	2 692	1 845	0	3	54 899	54 000	14 806
22	Puebla		3 367	3 829	1 601	0	479	216 745	42 900	10 835
23	Cd. Obregón		2 304	3 531	2 720	0	0	498 660	307 500	8 345
24	Veracruz		6 785	3 596	926	0	1 420	249 730	247 220	28 723
25	Mérida		9 937	2 242	2 240	0	979	63 080	58 210	9 644
26	San Luis Potosí		10 508	3 320	1 268	0	59	306 232	34 200	7 069
<b>TOTAL:</b>		203 073	167 554	92 663	88 393	0	39 947	5 052 994	1 711 680	443 450
<b>OFERTA</b>										
MES		OCT.	NOV.	MES		DEMANDA		Fecha de corrida del modelo		
Importación		203 073		Ventas	OCT.	NOV.		Octubre 3 de 1973.		
Existencia		167 554		Exist. Mín.	92 663	88 393				
Compras		0	39 947	Total:	443 450	443 450				
Total:		370 627	39 947		536 113	531 843		Datos de entrada para el bimestre: Oct.-Nov. de 1973.		



## 222 La programación lineal

La tabla a continuación dá los costos unitarios de carga y descarga en cada uno de los centroides de las zonas definidas.

Tabla 2.8

<i>Zona i</i>	<i>Centroide población</i>	<i>Cuota por tonelada cargada <math>e_i</math> (pesos)</i>	<i>Cuota por tonelada descargada <math>r_j</math> (pesos)</i>
1	Matamoros	5.94	5.94
2	Nuevo Laredo	6.41	6.41
3	Piedras Negras	7.50	7.50
4	Cd. Juárez	4.77	4.77
5	Tampico	13.00	13.00
6	Veracruz (muelle)	11.26	6.95
7	Coatzacoalcos	7.35	7.35
8	Salina Cruz	7.35	7.35
9	Manzanillo	4.28	4.28
10	Mexicali	8.38	8.38
11	La Paz	8.19	8.19
12	Torreón	7.93	7.93
13	Arriaga	6.25	6.25
14	Chihuahua	5.63	5.63
15	Distrito Federal	10.28	10.28
16	Guadalajara	7.49	7.86
17	Zamora	6.00	6.00
18	Irapuato	6.35	6.35
19	Acaponeta	4.91	4.91
20	Monterrey	7.04	7.04
21	Oaxaca	5.16	5.16
22	Puebla	5.94	5.94
23	Cd. Obregón	8.40	8.40
24	Veracruz	7.55	7.55
25	Mérida	4.10	4.10
26	San Luis Potosí	7.20	7.20

Los costos de almacenamiento  $g_i$ , en las bodegas ANDSA y BORU-CONSA fueron de \$7/ton/mes para las regiones no importadoras ( $i = 10, 11, \dots, 26$ ) y de \$1 000/ton/mes para las zonas importadoras ( $i = 1, \dots, 9$ ). Este último costo, denotado  $h_i$  ( $i = 1, \dots, 9$ ), aunque no existe en la realidad, obliga al modelo que todo el maíz de importación se interne al país y no quede indefinidamente almacenado en las zonas de espera de los centroides importadores.

A continuación se proporciona la matriz de fletes ferrocarrileros y marítimos (por ejemplo embarque o recepción en La Paz, embarque por Salina Cruz), de cada una de las 26 regiones emisoras a cada una de las 17 zonas receptoras. Los fletes están dados en pesos por tonelada de maíz transportado.

Inmediatamente, a continuación, se dan los resultados de la corrida, primero en forma gráfica, en el mapa de la República Mexicana y después equivalentemente, en forma matricial. Asimismo se dan las existencias pronosticadas al fin del mes de octubre y noviembre. Se muestran los costos de distribución del modelo (\$7.323,825.70) y costos de almacenamiento para octubre (\$1.263,164.00). El modelo indica también que un total adicional de 5 451 toneladas de maíz debieron de importarse (líneas discontinuas en el mapa) para cubrir las necesidades de demanda y existencias mínimas reguladoras en el país durante ese mes, a donde debió dirigirse la importación y por intuición, por qué puerto debió de importarse.

Debe hacerse notar que en la realidad, CONASUPO movió en el mes de octubre 91 353 ton de maíz, pagando un costo promedio total de \$104.02/ton, por conceptos de distribución y almacenamiento. Por no haber suficiente oferta, tanto nacional como de importación, las existencias mínimas reguladoras no fueron cubiertas. En cambio, el modelo distribuye 142 470 ton de maíz a razón de un costo promedio total de \$51.41/ton, por concepto de distribución y almacenamiento (menos de la mitad) y además si se satisfacen las necesidades mínimas.

A continuación se muestra una tabla de evaluación del presente modelo, que comprende el programa de comercialización del maíz, de octubre 1973 a julio 1974. La evaluación se efectuó comparando los movimientos reales con los recomendados por el modelo. Para la evaluación, no se utilizaron los pronósticos de compra y venta, sino las compras y ventas reales por zona, para los meses considerados.

El modelo de distribución de maíz es una herramienta adicional de toma de decisiones, cuyas recomendaciones son evaluadas y ajustadas por los encargados de distribuir el maíz en la CONASUPO, quienes con su experiencia emiten en última instancia las órdenes definitivas.<sup>51</sup>

<sup>51</sup> *Agradecimiento.*

El autor agradece la cooperación de las diferentes autoridades de CONASUPO, por permitir hacer público este modelo. Asimismo, el autor agradece a los compañeros de la Subgerencia de Investigación de Operaciones que prestaron tan valiosa ayuda. Mención especial se hace del Ing. José Urquiaga, Ing. Jesús Préstamo, Ing. Enrique Jiménez Espriú, Ing. Miguel Alonzo y del Ing. Luis Enríquez.

TABLA 2-9

Zonas receptoras / Zonas emisoras		Mexicali	La Paz	Torreón	Tapachula	Chihuahua	Distrito Federal	Guadalajara	Zamora	Trapanato	Acaponeta	Monterrey	Oaxaca	Puebla	Cd. Obregón	Veracruz	Merida	S. L. P.
Matamoros		340.50	267.95	62.10	141.90	96.25	88.60	103.85	100.80	93.95	161.25	37.15	117.75	95.45	183.65	104.60	215.40	68.95
Nuevo Laredo		333.70	264.90	61.05	141.90	93.20	86.30	101.55	98.50	91.65	158.95	30.35	107.65	93.20	180.60	102.35	213.15	65.75
Piedras Negras		285.95	256.50	64.70	141.90	84.80	87.85	96.25	92.40	86.30	153.65	48.05	109.95	95.45	172.20	115.00	214.65	68.95
Cd. Juárez		342.50	212.00	68.95	141.90	40.30	112.20	108.40	105.40	99.30	165.80	83.25	130.50	118.20	127.20	125.80	239.00	97.95
Tampico		319.45	272.50	82.45	127.75	100.80	84.80	81.70	77.85	63.65	139.10	52.25	106.15	91.65	188.20	113.75	211.60	47.10
Veracruz		366.75	186.75	95.45	75.55	112.20	60.55	75.55	75.55	65.20	123.35	110.70	48.70	33.50	199.60	—	92.40	83.25
Coatzacoalcos		385.85	166.60	109.20	61.05	125.20	66.25	89.35	85.55	79.40	146.75	122.00	65.75	56.80	212.60	45.15	60.55	97.00
Salina Cruz		391.25	132.55	111.45	48.70	126.45	68.60	90.90	87.85	80.95	148.30	123.90	70.15	62.10	213.85	54.20	94.60	98.50
Manzanillo		327.05	103.50	90.15	118.20	108.40	73.25	39.80	51.60	57.45	97.20	104.60	94.70	80.15	195.85	57.45	162.90	77.10
Mexicali			204.85	258.55	346.90	209.20	306.20	248.25	227.65	218.40	206.40	303.35	361.05	329.15	121.80	366.75	433.00	290.15

La Paz	221.05	334.00	144.90	172.10	143.30	155.10	160.95	169.70	241.45	202.20	194.65	104.50	186.75	227.15	180.60
Torreón		115.65	49.35	80.15	77.10	73.60	57.45	134.50	44.80	101.55	87.05	136.75	95.45	206.95	64.70
Tapachula		137.00	84.00	106.50	103.10	96.25	164.30	135.05	85.55	78.65	224.40	75.55	121.60	113.75	
Chihuahua			97.00	95.45	91.65	85.55	100.75	69.75	118.80	105.40	87.40	112.20	223.80	80.95	
Distrito Federal				57.95	51.60	38.75	115.35	94.70	54.85	22.95	184.40	60.55	126.80	67.30	
Guadalajara				20.60	29.85	57.40	91.65	81.70	66.25	130.00	75.55	184.25	54.20		
Zamora				19.45	77.45	87.85	77.85	57.45	179.05	75.55	178.40	58.50			
Irapuato					86.70	81.70	71.70	52.90	172.95	65.20	165.55	48.05			
Acaponeta					151.05	141.10	125.65	84.60	123.35	242.15	122.55				
Monterrey						97.00	83.25	157.15	110.70	221.50	50.65				
Oaxaca							40.85	206.20	48.70	128.75	77.85				
Puebla								192.80	33.50	120.05	62.60				
Cd. Obregón									199.60	311.20	168.35				
Veracruz															
Mérida															194.10
San Luis Potosí															

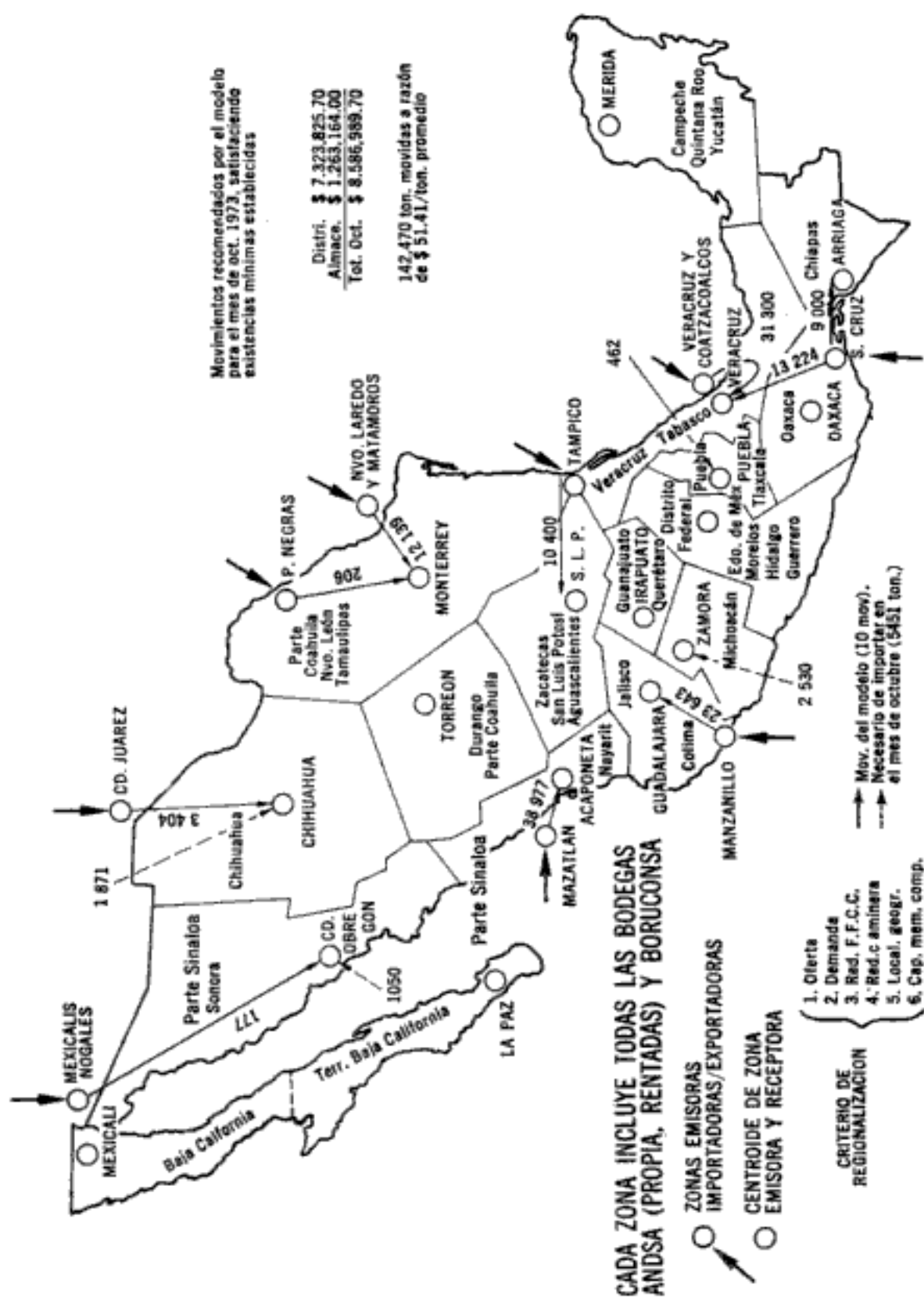


Tabla 2.10

Matriz de transferencias de maíz para el mes de octubre de 1973.

<i>A</i> <i>De</i>	México	La Paz	Torreón	Arriaga	Chihuahua	Distrito Federal	Guadalajara	Zamora	Irapuato	Acaponeta	Monterrey	Oaxaca	Puebla	Col. Obregón	Veracruz	Mérida	San Luis Potosí
Nuevo Laredo-Matamoros											12 139						
Piedras Negras											206						
Cd. Juárez					3 404												
Nogales-México														177			
Tampico																	10 400
Veracruz-Coahuila															31 300		
S. Cruz				9 000											13 224		
Mannanillo							23 643										
Mazatlán										38 977							
México																	
La Paz																	
Torreón																	
Arriaga																	
Chihuahua																	
Distrito Federal																	
Guadalajara																	
Zamora																	
Irapuato																	
Acaponeta																	
Monterrey																	
Oaxaca																	
Puebla																	
Col. Obregón																	
Veracruz																	
Mérida																	
San Luis Potosí																	

Toneladas

Fecha de corrida del modelo  
Octubre 3, 1973.

Costo de distribución para el mes  
de octubre 1973: \$7,323,825.70

228 La programación lineal

Tabla 2.11

Existencias pronosticadas de maíz

BIMESTRE DE OCTUBRE-NOVIEMBRE DE 1973

AL 31 DE OCTUBRE 1973.

AL 30 DE NOVIEMBRE 1973.

<i>Toneladas</i>	<i>Zona</i>	<i>Toneladas</i>
8541	10 Mexicali	
630	11 La Paz	
4215	12 Torreón	
10140	13 Arriaga	
-1871	14 Chihuahua	
29976	15 Distrito Federal	
12525	16 Guadalajara	
-2530	17 Zamora	
4603	18 Irapuato	
14780	19 Acaponeta	
13908	20 Monterrey	
8183	21 Oaxaca	
-462	22 Puebla	
-1050	23 Cd. Obregón	
47713	24 Veracruz	
7650	25 Mérida	
17588	26 S.L.P.	
180452	Total a \$ 7/toneladas	
\$ 1.263,164.00	costo de almacenamiento	

Fecha de corrida del modelo. Oct. 1, 1973.

Nota: Las cantidades que aparecen con signo negativo, significan un déficit en el punto considerado.

Tabla 2.12  
Evaluación del modelo de distribución de maíz

Año	Mes	Movimiento real			Movimiento modelo			Ahorro teórico en \$/Ton
		Tonelaje	Costo	Costo/Ton	Tonelaje	Costo/Ton	Costo/Ton	
1973	Octubre	91 353	\$ 9,502,254	\$ 104.02	203 073	\$ 10,082,929	\$ 49.65	\$ 54.37
	Noviembre	23 200	\$ 2,691,891	\$ 116.03	142 470	\$ 8,214,161	\$ 57.66	\$ 58.37
	Diciembre	22 179	\$ 1,677,473	\$ 75.65	28 463	\$ 1,595,066	\$ 56.04	\$ 19.61
1974	Enero	34 150	\$ 3,245,029	\$ 95.02	21 724	\$ 1,312,899	\$ 60.43	\$ 34.59
	Febrero	91 528	\$ 7,520,811	\$ 82.17	173	\$ 22,011	\$ 127.23	(\$ 45.06)
	Marzo	143 199	\$ 10,657,920	\$ 74.43	116 839	\$ 6,463,364	\$ 55.32	\$ 19.11
	Abril	184 350	\$ 13,780,674	\$ 74.75	209 523	\$ 4,022,634	\$ 45.28	\$ 29.47
	Mayo	217 712	\$ 16,600,276	\$ 76.25	256 314	\$ 12,110,853	\$ 47.25	\$ 29.00
	Junio	219 363	\$ 14,816,170	\$ 67.45	214 658	\$ 11,167,898	\$ 52.03	\$ 15.42
	Julio	110 988	\$ 7,914,400	\$ 71.31	132 766	\$ 6,609,415	\$ 49.78	\$ 21.53
Totales		1 138 022	\$ 88,406,898		1 326 003	\$ 61,601,230		\$ 46.46
Promedios								\$ 31.22
Ahorro total teórico		(1,138,022 × 31.22) =		\$ 35,529,046.84				\$ 77.68



## 230 La programación lineal

### 2.9. Lista de algunos programas comerciales de computadoras para resolver problemas de programación lineal

Tabla 2.13

Computadora	Nombre de la subrutina	Máximo número de	
		restricciones	variables
IBM 7040/7044	Linear Programming System for 7044/44	1023	200 000
IBM 7090/7094	Linear Programming System for 7090/94	1023	200 000
IBM 360	MPS/360	4095	sin límite
IBM 1620	Linear Programming System	100-400	1000-3000
IBM 1401	Linear Programming System or Linear Programming Revised Simplex	47-97	900
IBM 1410	Basic Linear Programming	108	sin límite
IBM 1130	LP-MOSS	150	sin límite
CDC 1604/3400/ 3600/3800	CDM	400	900
CDC 3100/3200/ 3300/3500	REGINA I	1024	sin límite
CDC 3600/3800	OPHELIE	4095	sin límite
CDC 6400/6500/6600	OPTIMA	4095	sin límite
Burroughs 3500	ALPS 3500	100-500	2000
Burroughs 3700	FLP	150-500	998
Burroughs 6700	TEMPO	sin límite	sin límite
Bull-General Electric Gamma 30	PF 1	500	1000
Bull-General Electric 400	Linear Programming Package	750	1200
Bull-General Electric 600	LP/600	4096	sin límite
Honeywell H 200	Linear Programming D	48	1000-1500
Honeywell M 8200	Linear Programming K ALPS	500-700 Limitado por memoria	sin límite sin límite
Sperry Rand-Univac 1107/1108	1107 ,LP ILONA	restricciones + variables = 8 000 restricciones + variables = 8 000	

<i>Computadora</i>	<i>Nombre de la subrutina</i>	<i>Máximo número de</i>	
		<i>restricciones</i>	<i>variables</i>
National Cash Register 315	LP	300	1500
Telefunken TR 4	KPDA TELINOP	restricciones + variables = 1 200 restricciones + variables = 5 000	
Siemens 4004/35-55	Linear Programming System I	400	sin restricciones
	Linear Programming System II	sin límite	sin límite

## Problemas

### I. *Formulación.*

1. Supóngase que el Departamento de Policía ha pronosticado la demanda de carros patrulla en la Ciudad de México para el período que empieza a las 12 del mediodía del 31 de diciembre y termina a las 12 del mediodía del 1º de enero. Las 24 horas han sido divididas en períodos de 4 horas, y la demanda tanto en carros patrulla como en personal motorizado (2 personas por patrulla) están dados a continuación.

<i>Hora del día</i>	<i>Carros patrulla</i>	<i>Personal motorizado</i>
12-16	300	600
16-20	400	800
20-24	500	1 000
24-4	600	1 200
4-8	400	800
8-12	200	400

El personal motorizado sólo puede trabajar 8 horas consecutivas y se cuenta con un total de 4 000 individuos. Formule un programa lineal que encuentre el número mínimo requerido para satisfacer la demanda en cada período de 4 horas.

2. Supóngase que el Banco de Crédito al Campesino tiene dos planes de inversión, a saber, el primero en el programa de tierras de riego y segundo en el programa de tierras de temporal. El primer programa regresa un 30% de la inversión al fin del año, mientras que el segundo plan regresa un 65% de la inversión, pero al término de dos años. Los

## 232 La programación lineal

intereses recibidos en ambos planes son reinvertidos de nuevo en cualquiera de ambos planes. Formule un programa lineal que le permita al Banco maximizar la inversión total en un sexenio, si la inversión anual es de \$ 100 millones de pesos.

3. La Compañía Nacional Aérea ha adquirido 2 aviones tipo Boeing 747, 4 aviones DC-8 y 6 aviones DC-9. Se trata de programar el servicio de esos 12 aviones a cubrir las cinco rutas que a continuación se muestran.

Tipo de avión	Capacidad en pasajeros	Número de aviones	Número de viajes redondos por día				
			México-N. York	México-Madrid	México-Acapulco	México-Tokio (Japón)	México-Cancún
B-747	350	2	2	2/3	3	1/2	2
DC-8	150	4	1	1/2	6	1/4	5
DC-9	110	6	1	0	8	0	7
<i>Demanda diaria de pasajeros por ruta</i>			400	180	1 500	115	300

La siguiente tabla da el costo de operaciones por vuelo redondo y el costo penal asociado a un asiento vacío.

Tipo de Avión	Costo unitario de operaciones por vuelo redondo (en pesos)				
	México-N. York	México-Madrid	México-Acapulco	México-Tokio	México-Cancún
B-747	100 000	250 000	20 000	350 000	35 000
DC-8	80 000	160 000	10 000	200 000	18 000
DC-9	60 000	no opera	5 000	no opera	12 000
<i>Costo penal por asiento vacío</i>	3 000	7 000	500	10 000	900

Formule un problema lineal que le permita a la Compañía aérea asignar aviones a rutas, tal que el costo total (de operaciones, más costos de oportunidad por asiento vacío) se minimicen y se atengan a la demanda diaria, disponibilidad de equipo y frecuencia de viajes redondos diarios por rutas.

4. Supóngase que el Instituto Nacional de Desayunos Escolares debe satisfacer una demanda diaria de 500 000 desayunos para alumnos de escuelas primarias públicas en la ciudad de México. Los desayunos consisten en huevos, leche, pan, chocolate y fruta fresca (generalmente un

Alimento	Peso g	Calorías	Proteínas	Carbohidratos	Grasas g	Minerales						Vitaminas			
						Hierro mg	Calcio mg	Fósforo mg	Potasio mg	Sodio mg	A mg	B <sub>1</sub> mg	B <sub>2</sub> mg	Niacina mg	C mg
1 huevo	100	150	12	—	12	2.3	54	205	129	122	1 180	—	.3	—	—
1 vaso de leche	984	660	32	48	40	.4	1 140	930	210	75	1 560	.32	1.7	.8	6
1 pan bolillo	23	60	2	12	1	.4	16	25	50	125	0	—	—	.3	—
1 barra de chocolate	56	290	2	44	6	.6	72	115	192	47	100	—	—	—	—
1 plátano	150	85	1	23	—	.7	8	44	390	1	190	—	—	.7	10

Los requerimientos promedios mínimos diarios para niños en esa edad escolar (6 a 15 años) es

Calorías	Proteínas	Calcio	Hierro	Vitamina A	Vitamina B <sub>1</sub>	Vitamina B <sub>2</sub>	Niacina	Vitamina C
2 000	50 g	800 mg	10 mg	2 500 unidades	.6 mg	1 mg	11 mg	50

## 234 La programación lineal

plátano). La siguiente tabla da una descripción de las calorías, proteínas, carbohidratos, grasas, minerales y vitaminas de cada uno de los alimentos, así como los requerimientos promedios mínimos diarios para niños en edad escolar.

Se recomienda asimismo que las grasas no excedan los 100 gramos diarios, para evitar el colesterol. Los costos unitarios asociados con cada uno de los productos que forman los desayunos escolares son:

1 pan bolillo	\$ 0.10
1 vaso de leche	\$ 1.00
1 barra de chocolate	\$ 0.25
1 plátano	\$ 0.05
1 huevo	\$ 0.50

Formule un programa lineal que le permita al Instituto Nacional de Desayunos Escolares determinar el número de huevos, panes-bolillos, vasos de leche, barras de chocolate y el número de plátanos que deben constituir un desayuno escolar primario diario, tal que satisfaga la demanda diaria de desayunos, los requerimientos mínimos promedios diarios de calorías, proteínas, minerales y vitaminas, no exceda los límites tolerables de grasas y se minimicen los costos. El presupuesto diario del Instituto es de 2 millones de pesos.

5. Supóngase que una planta en San Luis Potosí (planta 1) fabrica un producto 1, que sirve como componente insumo para la fabricación de un producto final 2 en Monterrey y otro producto final 3 en Monclova. Asimismo, el producto 3 requiere como insumo adicional al producto 2. La siguiente figura muestra el flujo de fabricación.

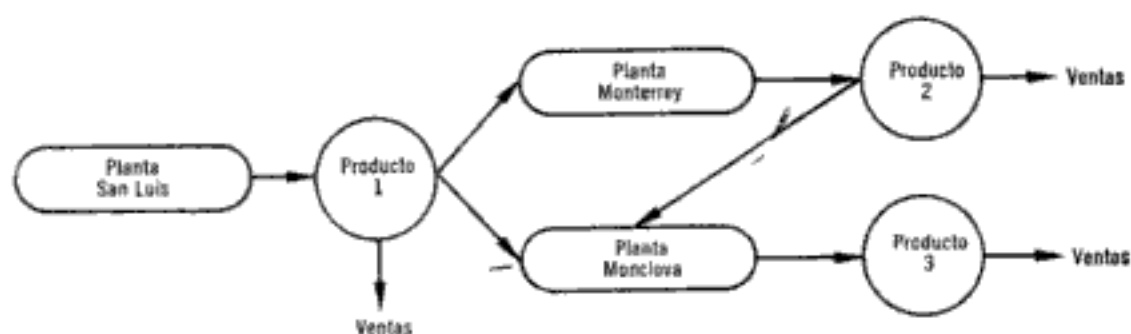


Figura 2.16

La capacidad mensual de producción de cada planta es

<i>Fábrica</i>	<i>Capacidad de producción</i>
San Luis Potosí	200 000 unidades de producto 1
Monterrey	120 000 unidades de producto 2
Monclova	100 000 unidades de producto 3

La siguiente tabla da la cantidad de unidades  $i$  requeridas en la fabricación de una unidad  $j$ .

		Para producir		
		Producto 1	Producto 2	Producto 3
Insumo necesario del	Producto 1	1	4	2
	Producto 2	-	1	1
	Producto 3	-	-	1

La demanda mensual mínima y máxima nacional para cada producto está dada a continuación.

	Venta mínima mensual	Venta máxima mensual
Producto 1	10 000	30 000
Producto 2	25 000	50 000
Producto 3	40 000	60 000

Además, por ley se debe de exportar al extranjero el 10% de la venta nacional mensual. Los costos unitarios de producción son de \$3, \$5 y \$10 respectivamente para los productos 1, 2, 3, los cuáles se venden en el mercado nacional a \$6, \$10 y \$15 y en el extranjero un 20% más caro, respectivamente.

Formule un programa lineal que determine la producción mensual de los productos 1, 2 y 3, tal que satisfaga todas las condiciones descritas anteriormente y maximice los ingresos provenientes de su venta nacional e internacional.

II. Método simplex

6. Considere el siguiente problema lineal y escríbalo en forma canónica.

$$\text{Mín } Z = 2X_1 - 3X_2 + 4X_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + X_3 &\geq 1 \\ X_1 - 2X_2 &= 7 \\ X_1 \leq 0, X_2 \geq 0, X_3 &\text{ no restringida.} \end{aligned}$$

7. Resuelva gráficamente

$$\text{Máx } Z = 10X_1 + 4X_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &\leq 5 \\ X_2 &= 2 \\ X_1 \geq 0, X_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

8. Resuelva gráficamente

$$\text{Mín } Z = -10X_1 - 12X_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} -X_1 - 2X_2 &\leq -2 \\ -2X_1 + 3X_2 &\geq 2 \\ X_1 \text{ y } X_2 &\text{ no restringidas.} \end{aligned}$$

## 236 La programación lineal

9. Considere el siguiente problema lineal

$$\text{Máx } Z = 3X_1 + 6X_2 + 5X_3 + 4X_4$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2X_1 + 8X_2 + X_3 + X_4 &\leq 6 \\ X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 &\leq 4 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, X_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

- ¿Cuál es el máximo número de soluciones básicas posibles?
- Identifique todas las soluciones básicas factibles.
- Identifique todas las soluciones básicas factibles no degeneradas.
- Identifique todas las soluciones factibles básicas degeneradas.
- Encuentre la solución óptima en base, no al *método simplex*, sino al análisis de todos los puntos extremos o soluciones básicas factibles.

10. Resuelva por el *método simplex*

a)

$$\text{Máx } Z = 2X_1 + X_2 - X_3 + 5X_4$$

sujeto a

$$\begin{aligned} -X_1 - 7X_2 - 3X_3 + 7X_4 &\geq -46 \\ 3/2X_1 - 1/2X_2 + 1/2X_3 + X_4 &\leq 4 \\ 4X_1 + 6X_2 - 2X_3 + 2X_4 &\leq 20 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, X_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

b)

$$\text{Mín } Z = X_1 - 3X_2 - 2X_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3X_1 - X_2 + 2X_3 &\leq 7 \\ 2X_1 - 4X_2 &\geq -12 \\ -2X_1 + 3/2X_2 + 4X_3 &\leq 5 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

11. Resuelva por el *método de penalización* los siguientes problemas:

a)

$$\text{Máx } Z = 2X_1 + 3X_2 - 5X_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2X_1 + 2X_2 + 2X_3 &= 14 \\ -2X_1 + 5X_2 - X_3 &\leq -10 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

b)

$$\text{Mín } Z = 5X_1 - 6X_2 - 7X_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2X_1 + 10X_2 - 6X_3 &\geq 30 \\ 5/2X_1 - 3X_2 + 5X_3 &\leq 10 \\ 2X_1 + 2X_2 + 2X_3 &= 5 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

c)

$$\text{Mín } Z = 2X_1 + 3X_2 + 5X_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 6X_1 + 20X_2 + 10X_3 &\leq 30 \\ 33X_1 - 10X_2 + 9X_3 &\leq 33 \\ 2X_1 + 4X_2 + 2X_3 &\geq 8 \\ X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad X_3 \geq 0. \end{aligned}$$

12. Resuelva los mismos problemas presentados en 11 por el *método de doble fase*.

13. Demuestre por el *método simplex* que el siguiente problema no tiene una solución óptima acotada.

$$\text{Máx } Z = 4X_1 + X_2 + 3X_3 + 5X_4$$

sujeto a

$$\begin{aligned} -2X_1 + 3X_2 + 5/2X_3 - 2X_4 &\leq 10 \\ 6X_1 - 4X_2 + 8X_3 + 2X_4 &\leq 20 \\ -16X_1 + 6X_2 - 6X_3 - 4X_4 &\geq -40 \\ X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad X_3 \geq 0, \quad X_4 \geq 0. \end{aligned}$$

14. Encuentre una expresión matemática que de *todas* las soluciones óptimas al problema

$$\text{Máx } Z = X_1 + 2X_2 + 3X_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2X_1 + 4X_2 + 6X_3 &\leq 20 \\ 1/2X_1 + 1/2X_2 &\leq 5/2 \\ 2X_1 &\leq 2 \\ X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad X_3 \geq 0. \end{aligned}$$

### III. Dualidad

15. Escriba la forma dual de los problemas 6, 10(b) y 11(a).

16. Considere el siguiente problema lineal

$$\text{Mín } G = Y_1 - 5Y_2 + 6Y_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2Y_1 + 4Y_3 &\geq 50 \\ Y_1 + 2Y_2 &\geq 30 \\ Y_1, Y_2 \text{ no restringidas, } Y_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Demuestre que la solución a este problema es no acotada, mostrando que la solución a su problema dual correspondiente es no factible (teorema 2-10).

17. Dado el siguiente problema lineal

$$\text{Máx } Z = X_1 + 5X_2$$



## 238 La programación lineal

sujeto a

$$\begin{aligned} 5X_1 + 6X_2 &\leq 30 \\ 3X_1 + 2X_2 &\leq 12 \\ -X_1 + 2X_2 &\leq 10 \\ X_1 \geq 0, \quad X_2 &\geq 0, \end{aligned}$$

cuyo tableau óptimo es

	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	
	1	0	0	7/16	0	19/16	25
$a_1$	0	1	0	1/8	0	-3/8	0
$a_4$	0	0	0	-1/2	1	1/2	2
$a_2$	0	0	1	1/16	0	5/16	5

conteste:

- ¿Cuál es el problema dual?
- ¿Cuál es la solución óptima al problema dual sin resolver el dual?
- ¿Las soluciones óptimas a los problemas primal y dual son degeneradas?
- Compruebe que la solución dual dada en el punto (b) es factible y óptima.
- Supóngase que el recurso 30 aumenta a 31, ¿cuál es el valor de la función objetivo? Conteste sin resolver el nuevo problema.
- Supóngase que el recurso 10 disminuye a 9, sin resolver el nuevo problema, ¿cuál es el valor de la función objetivo?

18. Resuelva el siguiente problema por el *método dual simplex*.

$$\text{Mín } Z = 2X_1 + 3X_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 4X_1 + 6X_2 &\leq 60 \\ X_1 + 4X_2 &\geq 5 \\ X_1 - X_2 &\geq 0 \\ X_1 &\geq 5 \\ X_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

19. Dado el problema primario en 17, construya su dual y exprese matemáticamente las condiciones de holgura complementarias débiles.

### IV. Análisis de sensibilidad y programación paramétrica

20. Considere el siguiente problema lineal

$$\text{Máx } Z = -X_1 + 3X_2 - 2X_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3X_1 - X_2 + 2X_3 &\leq 7 \text{ recurso } A \\ -2X_1 + 4X_2 &\leq 12 \text{ recurso } B \\ -4X_1 + 3X_2 + 8X_3 &\leq 10 \text{ recurso } C \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

- a) Resuélvase por el *método simplex* y dése la solución óptima. Los siguientes cambios (b), (c), (d), (e) y (f) se hacen en referencia al problema original.
- b) Supóngase que el vector de disponibilidad debe cambiarse a  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 20 \end{pmatrix}$ . Utilizando técnicas de análisis de sensibilidad, determine la nueva solución.
- c) El vector de precios se cambia a  $\mathbf{e} = (2, 2, 1)$ . Utilizando análisis de sensibilidad, ¿cuál es la nueva solución óptima?
- d) El vector de coeficientes tecnológicos correspondiente a la actividad  $X_3$  se cambia a  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Utilizando análisis de sensibilidad, ¿cuál es la nueva solución óptima?
- e) Se desean introducir actividades  $X_7$  y  $X_8$  a precios de \$10 y \$20 respectivamente. Los coeficientes tecnológicos asociados a cada actividad son  $\mathbf{a}_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $\mathbf{a}_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Utilizando análisis de sensibilidad determine el nivel óptimo de estas nuevas actividades.
- f) Dos nuevas restricciones se añaden al sistema original, a saber,  $X_1 \leq 2$ ,  $X_2 \leq 4$ . Utilizando análisis de sensibilidad, determine los nuevos valores óptimos.

21. Utilizando programación paramétrica, determine las soluciones óptimas asociadas a todos los rangos de  $\theta \geq 0$  en los siguientes problemas.

a)

$$\text{Máx } Z = (4 + \theta)X_1 + (12 - 2\theta)X_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 &\leq 20 \\ X_1 + X_2 &\leq 13 \\ 3X_1 + 2X_2 &\leq 36 \\ X_1 \geq 0, X_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

b)

$$\text{Máx } Z = 7X_1 + 4X_2 + 6X_3 + 5X_4$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 &\leq 10 + \theta \\ 2X_1 - X_2 + 4X_3 + 2X_4 &\leq 26 - \theta \\ 3X_1 + X_2 - 2X_3 + 3X_4 &\leq 45 - 2\theta \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, X_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

## 240 La programación lineal

c)

$$\text{Máx } Z = 3X_1 + 2X_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} X_1 + (1/2 + 2\theta)X_2 &\leq 15 \\ 2X_1 + (4 - \theta)X_2 &\leq 24 \\ X_1 \geq 0, \quad X_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

En este problema sólo debe determinarse la primera  $\theta$  crítica.

d)

$$\text{Máx } Z = 3X_1 + (6 - 4\theta)X_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} X_1 &\leq 4 + 8\theta \\ 3X_1 + 2X_2 &\leq 18 - 24\theta \\ X_1 \geq 0, \quad X_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

### V. Método simplex revisado

22. Resuélvase por el *método simplex revisado* los siguientes problemas:

a)

$$\text{Máx } Z = 6X_1 - 2X_2 + 3X_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2X_1 - X_2 + 2X_3 &\leq 2 \\ X_1 + 4X_3 &\leq 4 \\ X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad X_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

b)

$$\text{Máx } Z = 2X_1 + X_2 + 2X_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 4X_1 + 3X_2 + 8X_3 &\leq 12 \\ 4X_1 + X_2 + 12X_3 &\leq 8 \\ 4X_1 - X_2 + 3X_3 &\leq 8 \\ X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad X_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

### VI. Descomposición lineal

23. Resuélvase por el *método de descomposición lineal* el siguiente problema

$$\text{Máx } Z = 4X_1 + 6X_2 + 8X_3 + 5X_4$$

sujeto a

$$\begin{aligned} X_1 + 3X_2 + 2X_3 + 4X_4 &\leq 20 \\ 2X_1 + 3X_2 + 6X_3 + 4X_4 &\leq 25 \\ X_1 + X_2 &\leq 5 \\ X_1 + 2X_2 &\leq 8 \\ 4X_3 + 3X_4 &\leq 12 \\ X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad X_3 \geq 0, \quad X_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

## VII. Problemas de cota superior e inferior

24. Resuelva, utilizando simultáneamente las técnicas de cota inferior y superior, el siguiente problema

$$\text{Máx } Z = 4X_1 + 2X_2 + 6X_3$$

sujeto a

$$4X_1 - X_2 \leq 9$$

$$-X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 8$$

$$-3X_1 + X_2 + 4X_3 \leq 12$$

$$1 \leq X_1 \leq 3$$

$$0 \leq X_2 \leq 5$$

$$0 \leq X_3 \leq 2.$$

## REFERENCIAS

## I. Libros

- [1] Beale E.M.L. *Mathematical Programming in Practice*. Pittman, 1968.
- [2] Charnes A. y W. W. Cooper, *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*, volúmenes I y II, John Wiley & Sons, 1961.
- [3] Dano S. *Linear Programming in Industry, Theory and Applications*, Springer-Verlag, Third Edition, 1968.
- [4] Dantzig George B. *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, 1963.
- [5] Dorfman Robert, Paul A. Samuelson and R. M. Solow, *Linear Programming and Economic Analysis*, McGraw Hill, 1958.
- [6] Driebeek N. *Applied Linear Programming*, Addison-Wesley, 1969.
- [7] Gale David, *The Theory of Linear Economic Models*, McGraw Hill, 1960.
- [8] Gass Saul I, *Linear Programming Methods and Applications*, McGraw Hill, Third Edition, 1969.
- [9] Graves R. and Wolfe P. *Recent Advances in Mathematical Programming*, McGraw Hill, 1963.
- [10] Hadley G. *Linear Programming*, Addison-Wesley, 1962.
- [11] Hillier F. and G. Lieberman, *Introductions to Operations Research*, Holden Day Inc. 1967.
- [12] Hughes A. y Grawoig D. *Linear Programming and Emphasis on Decision Making*, Addison-Wesley, 1973.
- [13] Karlin S., *Mathematical Methods and Theory of Games, Programming and Economics*, Vol. I, Addison-Wesley, 1959.
- [14] Koopmans, T. G. *Activity Analysis of Production and Allocation. Proceedings of a Conference*, John Wiley & Sons, 1951.
- [15] Kuhn, H. W. and A. W. Tucker, *Linear Inequalities and Related Systems*, Princeton University Press, 1956.
- [16] Orchard-Hays, W. *Advanced Linear Programming Computing Techniques*, McGraw Hill, 1968.
- [17] Simmonard M. *Linear Programming*, Prentice Hall, 1966.
- [18] Simmons D. M. *Linear Programming for Operations Research*, Holden-Day Inc., 1972.
- [19] Spivey, W. A. and R. M. Thrall, *Linear Optimization*, Holt, Rinehart, Whinston, 1970.

## 242 La programación lineal

- [20] Strum, J. G. *Introductions to Linear Programming*, Holden Day Inc. 1972.
- [21] Taha H., *Operations Research*, McMillan, 1971.
- [22] Thompson G., *Linear Programming*, McMillan, 1971.
- [23] Vajda S., *Mathematical Programming*, Addison-Wesley, 1961.
- [24] Van de Panne C., *Linear Programming and Related Techniques*, North-Holland, 1971.
- [25] Wagner, H. M., *Principles of Operations Research*, Prentice Hall, 1969.
- [26] Zions S.; *Linear and Integer Programming*, Prentice Hall, 1974.
- [27] Zukhovitzkiy S. and L. Avdeyeva. *Linear and Convex Programming*, Saunders Comp., 1966.

### II. Artículos referentes al método simplex

- [28] Charnes A. "Optimality and Degeneracy in Linear Programming" *Econometrica*. Vol. 20 (1952) pp. 160-170.
- [29] Hoffman A. I. "Cycling in the Simplex Method" *National Bureau of Standards*. Report 2974, December 16 (1953).

### III. Artículos referentes a dualidad

- [30] Beale E.M.L. "Cycling in the Dual Simplex Algorithm" *Naval Research Logistics Quarterly*. Vol. 2 (1955), pp. 265-276.
- [31] Lemke C. E. "The Dual Method of Solving the Linear Programming Problem" *Naval Research Logistics Quarterly*. Vol. 1 (1954), pp. 36-47.
- [32] Wagner H. M. "The Dual Simplex Algorithm for Bounded Variables" *Naval Research Logistics Quarterly*. Vol. 5 (1958), pp. 257-261.

### IV. Artículos referentes a programación paramétrica

- [33] Barnett S. "A Simple Class of Parametric Linear Programming Problems" *Operations Research*. Vol. 15 (1967), pp. 1051-1056.

### V. Artículos referentes a descomposición

- [34] Dantzig C. B. and P. Wolfe "Descomposition Principles for Linear Programs" *Operations Research*. Vol. 8 (1960), pp. 101-111.

### VI. Artículos referentes a técnicas de cota superior

- [35] Dantzig G. B. and R. M. Van Slyke "Generalized Upper Bounding Techniques" *Journal of Computer and Systems Science*. Vol. 1 (1967), pp. 213-226.
- [36] Sakarovitch M. R. Saigal "An Extension of Generalized Upper Bounding Techniques for Structured Linear Programs" *SIAM Journal on Applied Mathematics*. Vol. 15 (1967), pp. 906-914.

### VII. Bibliografía referente a programas de computadoras para resolver problemas lineales

- [37] Kunzi H. P., Tzschach, H. G. Zehnder C. A. *Numerical Methods of Mathematical Optimization*. Second Edition. Academic Press, 1971.

**VIII. Aplicaciones reales**

- [38] Prawda, J. "Un modelo nacional de distribución de maíz para la Compañía Nacional de Subsistencias Populares, CONASUPO". *Boletín del Instituto Mexicano de Planeación y Operación de Sistemas, IMPOS*. Vol. VI, 33, enero-febrero 1976, pp 353-375.



## Problemas de transporte y asignación

El objetivo de este capítulo es el de presentar al lector ciertas estructuras especiales de la programación lineal que se generan con bastante frecuencia en los problemas reales. Estas estructuras reciben el nombre de *estructuras de transporte*. A su vez, estas formas especiales de programas lineales pueden dividirse en varias subcategorías. Estas subcategorías son: *estructuras de asignación*, *estructura de transbordo o transportes con nodos intermedios*, *estructura de transportes con capacidad limitada* y *estructura de transportes generalizados*. Todas estas estructuras lineales pueden resolverse por el *método simplex*. Sin embargo, existen métodos propios asociados a cada estructura que hacen que el *método simplex* resulte muy ineficiente. En este capítulo se justifican e ilustran los métodos de solución de las estructuras de transporte.

### 3.1. Algunos ejemplos intuitivos

Dado que el lector ya conoce la programación lineal, conviene ilustrar la formulación de ciertos problemas reales<sup>1</sup> que generan las estructuras especiales de transporte. Una vez ilustradas estas estructuras, se estudiarán sus propiedades básicas, sus métodos de solución, y se ilustrarán estos últimos.

- a) *Un problema de transporte*. Supóngase que la Compañía Nacional de Subsistencias Populares (CONASUPO) planea la distribución de la compra de costales de yute de 75 kg c/u que utilizará en el encostalado del maíz y del frijol en su próximo programa de comercialización de estos granos. Las fábricas de costales están ubicadas en Mérida, Saltillo y Cd. Victoria. Los centros almacedores de costales estarán ubicados en siete urbes, que se tomarán como centroides, de las siete zonas en las que se ha dividido el país, a saber:

<sup>1</sup> Aunque en la presente sección se encuentren idealizados por falta de espacio.



TABLA 3-1

<i>Zona</i>	<i>Almacén ubicado en</i>
Zona Noroeste	Cd. Obregón, Sonora
Zona Noreste	Monterrey, Nuevo León
Zona Occidental	Guadalajara, Jalisco
Zona Oriental	Veracruz, Veracruz
Zona Centro	Distrito Federal
Zona Suroeste	Arriaga, Chiapas
Zona Sureste	Mérida, Yucatán

La capacidad mensual de producción de costales de yute es:

TABLA 3-2

<i>Fábrica</i>	<i>Capacidad, en costales</i>
Mérida	400 000
Cd. Victoria	150 000
Saltillo	300 000

La demanda mensual<sup>2</sup> de costales de yute de 75 kg c/u para las diferentes zonas es:

TABLA 3-3

<i>Zona</i>	<i>Demanda mensual de costales</i>
Zona Noroeste	100 000
Zona Noreste	75 000
Zona Occidental	150 000
Zona Oriental	100 000
Zona Centro	125 000
Zona Suroeste	200 000
Zona Sureste	50 000

El flete de transporte por ferrocarril en pesos por costal de cada una de las fábricas a los centros de consumo de costales de yute es:

TABLA 3-4

<i>Fábrica</i> \ <i>Zona</i>	NO	NE	O	E	C	SO	SE
Mérida	0.249	0.235	0.201	0.134	0.171	0.109	0.010
Cd. Victoria	0.138	0.090	0.136	0.150	0.136	0.194	0.224
Saltillo	0.106	0.040	0.119	0.128	0.119	0.179	0.231

<sup>2</sup> Se supone fija, aunque en realidad se trata de un valor promedio.

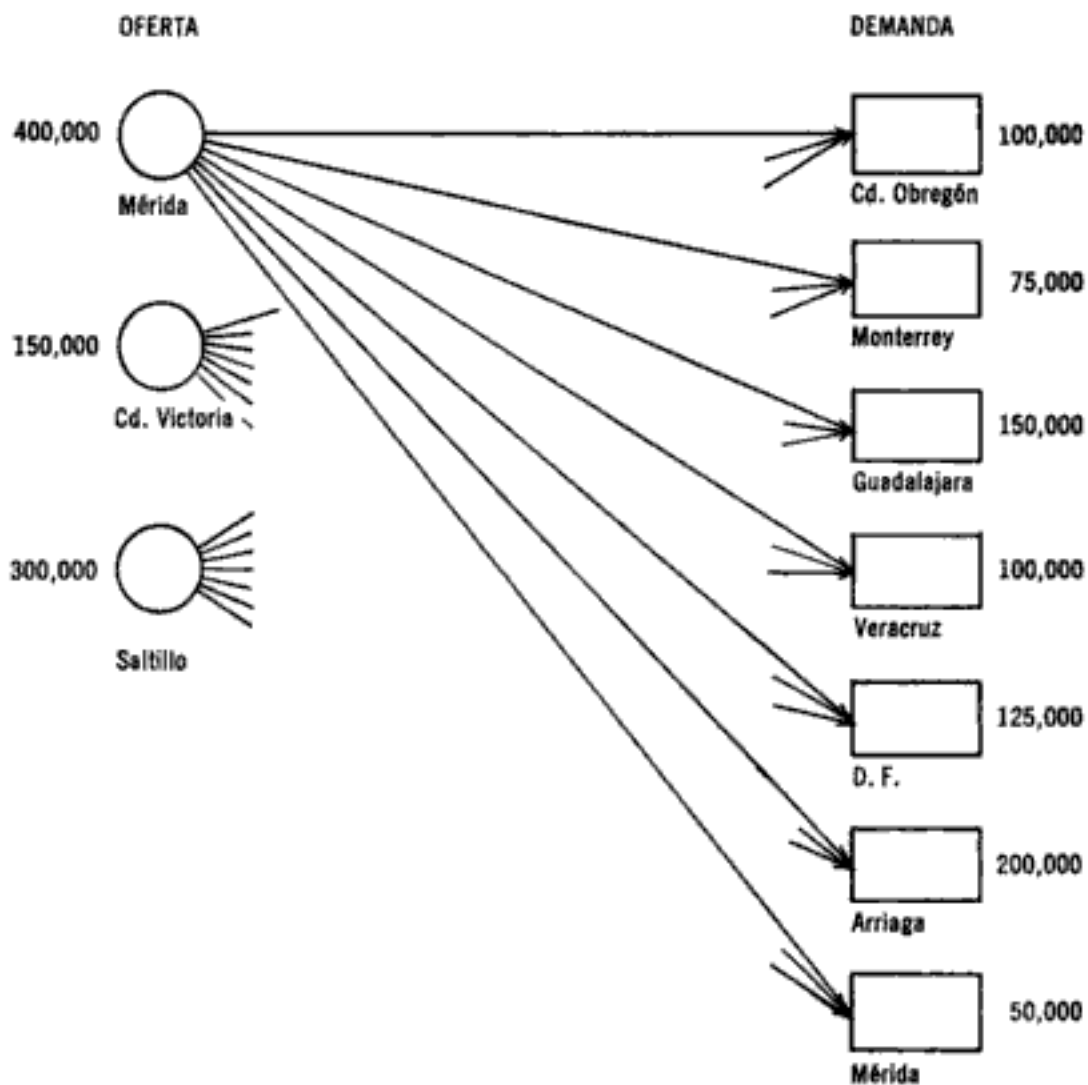


Figura 3.1

Bajo estas circunstancias, ¿cómo deben distribuirse los costales de las fábricas a los centros de consumo a fin de que el flete total que va a pagar CONASUPO sea mínimo?

#### Formulación.

Gráficamente se tienen tres centros de oferta<sup>3</sup> y siete centros consumidores. El flujo de costales va de los primeros a los segundos únicamente, tal como se indica en la figura 3.1.

Sea  $X_{ij}$  la cantidad de costales que se mandan del centro de oferta  $i$  ( $i = \text{Mer.}, \text{Cd. Vic.}, \text{Salt.}$ ) al centro consumidor  $j$  ( $j = \text{NO}, \text{NE}, \text{O}, \text{E}, \text{C}, \text{SO}, \text{SE}$ ). Entonces la función objetivo es

$$\begin{aligned} \text{Mín } & 0.249X_{M,NO} + 0.235X_{M,NE} + 0.201X_{M,O} + 0.134X_{M,E} + 0.171X_{M,C} \\ & + 0.109X_{M,SO} + 0.01X_{M,SE} + 0.138X_{CV,NO} + 0.09X_{CV,NE} + 0.136X_{CV,O} \\ & + 0.150X_{CV,E} + 0.136X_{CV,C} + 0.194X_{CV,SO} + 0.224X_{CV,SE} + 0.106X_{S,NO} \\ & + 0.04X_{S,NE} + 0.119X_{S,O} + 0.128X_{S,E} + 0.119X_{S,C} + 0.179X_{S,SO} + \\ & 0.231X_{S,SE}. \end{aligned}$$

<sup>3</sup> También llamados "oferentes".

## 248 Problemas de transporte y asignación

Las dos restricciones que existen en este problema son:

a) Que la cantidad de costales que sale de un centro de oferta a todos los centros consumidores no puede exceder a la oferta de la planta, es decir:

$$X_{M,NO} + X_{M,NE} + X_{M,O} + X_{M,E} + X_{M,C} + X_{M,SE} + X_{M,SO} \leq 400\,000 \text{ costales en Mérida,}$$

$$X_{CV,NO} + X_{CV,NE} + X_{CV,O} + X_{CV,E} + X_{CV,C} + X_{CV,SE} + X_{CV,SO} \leq 150\,000 \text{ costales en Cd. Victoria,}$$

$$X_{S,NO} + X_{S,NE} + X_{S,O} + X_{S,E} + X_{S,C} + X_{S,SE} + X_{S,SO} \leq 300\,000 \text{ costales en Saltillo.}$$

b) Que la cantidad de costales que llegan de todas las plantas a un centro consumidor no debe ser menor a la demanda del centro consumidor, es decir:

$$X_{M,NO} + X_{CV,NO} + X_{S,NO} \geq 100\,000 \text{ costales en la zona NO,}$$

$$X_{M,NE} + X_{CV,NE} + X_{S,NE} \geq 75\,000 \text{ costales en la zona NE,}$$

$$X_{M,O} + X_{CV,O} + X_{S,O} \geq 150\,000 \text{ costales en la zona O,}$$

$$X_{M,E} + X_{CV,E} + X_{S,E} \geq 100\,000 \text{ costales en la zona E,}$$

$$X_{M,C} + X_{CV,C} + X_{S,C} \geq 125\,000 \text{ costales en la zona C,}$$

$$X_{M,SO} + X_{CV,SO} + X_{S,SO} \geq 200\,000 \text{ costales en la zona SO,}$$

$$X_{M,SE} + X_{CV,SE} + X_{S,SE} \geq 50\,000 \text{ costales en la zona SE.}$$

Por último, como el flujo de costales va en una sola dirección, se tiene que

$$X_{ij} \geq 0 \text{ para toda } i = M, CV, S \text{ y } j = NO, NE, O, E, C, SO, SE.$$

No se admite que exista  $X_{ij} < 0$  para alguna  $i$  y  $j$ , porque indicaría que hay costales que se envían de los centros consumidores a las fábricas.

A este tipo de problemas se les llama *problemas de transporte*.

b) *Un problema de transporte con capacidad limitada.* En relación al problema anterior, supóngase que debido a una escasez de transportes por carretera y de ferrocarriles, existe una capacidad limitada de movilización de los centros de producción de costales a los centros de consumo. Esta delimitación se expresa en la siguiente tabla.

TABLA 3-5

CAPACIDAD MENSUAL DE TRANSPORTE DE COSTALES

<i>Origen</i> <i>Destino</i>	(NO) <i>Cd.</i> <i>Obregón</i>	(NE) <i>Mon-</i> <i>terrey</i>	(O) <i>Gua-</i> <i>dalajara</i>	(E) <i>Veracruz</i>	(C) <i>Distrito</i> <i>Federal</i>	(SO) <i>Arriaga</i>	(SE) <i>Mérida</i>
<i>Mérida</i>	50 000	50 000	80 000	100 000	100 000	100 000	130 000
<i>Cd. Victoria</i>	75 000	100 000	75 000	90 000	80 000	20 000	10 000
<i>Saltillo</i>	100 000	120 000	80 000	50 000	100 000	30 000	20 000

La formulación de este nuevo problema es muy semejante a la del anterior, con la diferencia de que en este caso se tienen las siguientes restricciones adicionales.

$$\begin{aligned}
 0 \leq X_{M,NO} \leq 50\,000, & \quad 0 \leq X_{CV,NO} \leq 75\,000, & \quad 0 \leq X_{S,NO} \leq 100\,000, \\
 0 \leq X_{M,NE} \leq 50\,000, & \quad 0 \leq X_{CV,NE} \leq 100\,000, & \quad 0 \leq X_{S,NE} \leq 120\,000, \\
 0 \leq X_{M,O} \leq 80\,000, & \quad 0 \leq X_{CV,O} \leq 75\,000, & \quad 0 \leq X_{S,O} \leq 80\,000, \\
 0 \leq X_{M,E} \leq 100\,000, & \quad 0 \leq X_{CV,E} \leq 90\,000, & \quad 0 \leq X_{S,E} \leq 50\,000, \\
 0 \leq X_{M,C} \leq 100\,000, & \quad 0 \leq X_{CV,C} \leq 80\,000, & \quad 0 \leq X_{S,C} \leq 100\,000, \\
 0 \leq X_{M,SO} \leq 100\,000, & \quad 0 \leq X_{CV,SO} \leq 20\,000, & \quad 0 \leq X_{S,SO} \leq 30\,000, \\
 0 \leq X_{M,SE} \leq 130\,000, & \quad 0 \leq X_{CV,SE} \leq 10\,000, & \quad 0 \leq X_{S,SE} \leq 20\,000,
 \end{aligned}$$

que permite que el lector pueda identificar inmediatamente un problema lineal con cota superior.<sup>4</sup>

### c) Problema de transporte generalizado

Supóngase que la flota de Aeroméxico consiste de 3 tipos de aviones (DC-10, DC-9 y DC-8), y la compañía opera 100 rutas diferentes por día. Se tienen 3 DC-10, 15 DC-8 y 25 DC-9. Supóngase que se dispone del pronóstico de la demanda del día  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, 365$ ) en la ruta  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, 100$ ). Por ejemplo para el día 24 de octubre se ha pronosticado lo siguiente:

<sup>4</sup> Otra manera de resolver este tipo de problemas es por medio de redes de optimización.

## 250 Problemas de transporte y asignación

**TABLA 3-6**  
DEMANDA (en pasajeros)

<i>Ruta</i>	<i>Trayecto</i>	<i>Número de pasajeros</i>
1	México-N. York	355
2	N. York-México	410
.	.	.
.	.	.
.	.	.
100	Acapulco-México	630

Supóngase que la compañía ha estudiado los costos de operación de un avión tipo  $i$  ( $i = \text{DC-10, DC-9, DC-8}$ ), asignado a una ruta  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, 100$ ). Por ejemplo:

**TABLA 3-7**  
COSTO (en pesos por ruta)

<i>Ruta</i>	<i>Trayecto</i>	<i>Tipo de Avión</i>		
		DC-10	DC-9	DC-8
1	México-N. York	50 000	no opera	35 000
2	N. York-México	60 000	no opera	38 000
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
100	Acapulco-México	no opera	5 000	7 500

Además, la compañía conoce el número total de pasajeros que se pueden acomodar en un avión tipo  $i$  ( $i = \text{DC-10, DC-9, DC-8}$ ) en la ruta  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, 100$ ). Por ejemplo:

**TABLA 3-8**  
CAPACIDAD DE TRANSPORTE (en pasajeros)

<i>Ruta</i>	<i>Trayecto</i>	<i>Tipo de Avión</i>		
		DC-10	DC-9	DC-8
1	México-N. York	300	no opera	150
2	N. York-México	300	no opera	150
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
100	Acapulco-México	no opera	115	150

La compañía desea saber el número de aviones tipo  $i$  ( $i = \text{DC-10, DC-9, DC-8}$ ), que se necesitan asignar en la ruta  $j$  ( $j = 1, \dots, 100$ ) en un determinado día  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, 365$ ), con objeto de minimizar costos de transporte; pero atendiendo a las restricciones de demanda, de capacidad de flota y de capacidad de pasajero por avión.

*Formulación:*

Un problema de este tipo puede formularse como un programa de programación lineal si se hacen las siguientes consideraciones. Sea, para un determinado día  $k$  ( $k = 1, \dots, 365$ ):

- $X_{ij}$  la variable de decisión que mide el número de aviones del tipo  $i$  ( $i = \text{DC-10, DC-9, DC-8}$ ) asignados a la ruta  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, 100$ );
- $a_i$  el número de aviones tipo  $i$  ( $i = \text{DC-10, DC-9, DC-8}$ ) que se dispone en la flota de Aeroméxico;
- $b_j$  el número de pasajeros a transportar en la ruta  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, 100$ );
- $c_{ij}$  el costo de operación de un avión tipo  $i$  ( $i = \text{DC-10, DC-9, DC-8}$ ) en la ruta  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, 100$ );
- $p_{ij}$  el número de pasajeros que caben en un avión tipo  $i$  ( $i = \text{DC-10, DC-9, DC-8}$ ) en la ruta  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, 100$ ).

El problema que se necesita resolver para el día  $k^5$  es

$$\text{Mín } \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{100} c_{ij} X_{ij}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{100} X_{ij} &\leq a_i \quad i = 1, \dots, 3 \\ \sum_{i=1}^3 p_{ij} X_{ij} &\geq b_j \quad j = 1, \dots, 100 \\ X_{ij} &\geq 0. \end{aligned}$$

Este tipo de problema lineal se llama de *transporte generalizado* y tiene métodos propios de solución que son más eficientes que el *método simplex*.

d) *Un problema de transbordo o de transporte con nodos intermedios*

Supóngase en el primer problema, que antes de que las fábricas de Mérida, Cd. Victoria y Saltillo entreguen los costales de yute a las dife-

<sup>5</sup> Se van a resolver 365 diferentes problemas, uno por día.

## 252 Problemas de transporte y asignación

rentes ciudades del país, esos costales deben ser enviados a centros maquiladores, en donde se les imprime un emblema. Existen 4 centros maquiladores; en Perote (Veracruz), San Luis Potosí, Puebla y Toluca (Edo. de México). Se supone que se conoce: *a*) el flete de las fábricas a los centros maquiladores y de éstos a los centros consumidores y *b*) la capacidad de maquila de cada centro maquilador. Se desea conocer un programa de distribución mensual que abata los costos y respete las demandas y las capacidades de fabricación y de maquila.

No se hace por el momento una formulación matemática del modelo, sino que se lo describe gráficamente.

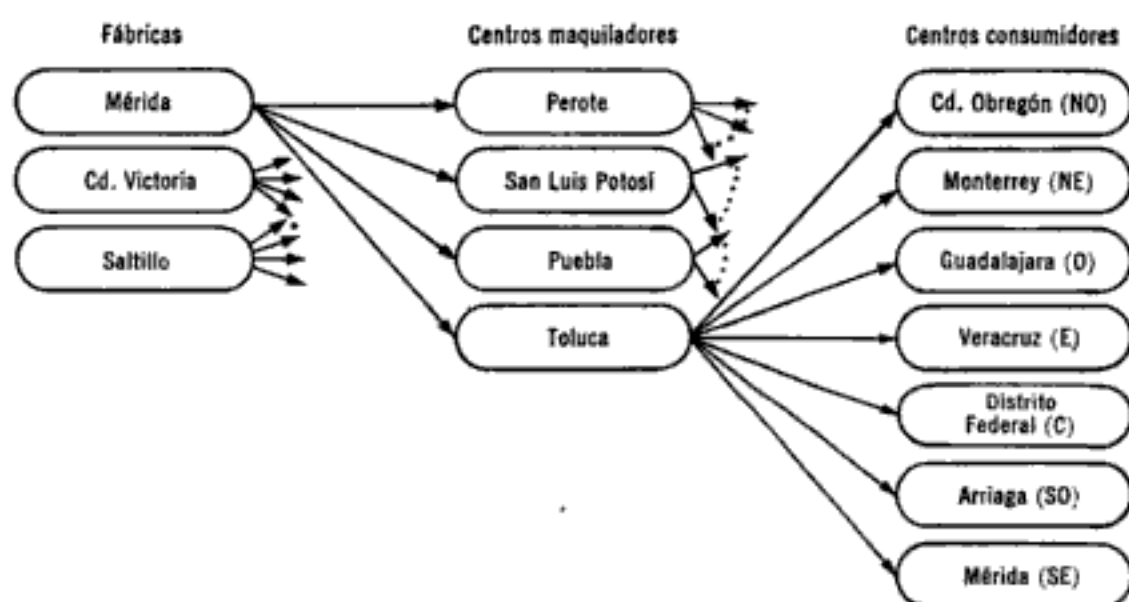


Figura 3.2

Un problema de este tipo se llama de “*transbordo o de transporte con nodos intermedios*” y se resolverá por *métodos de transporte*, que son más eficientes que el *método simplex*.

### e) Un problema de asignación

Supóngase que el Departamento del Distrito Federal (D.D.F.) en su programa de expansión del Metro, requiere de 300 trabajos diferentes, como por ejemplo excavación, alumbrado, plomería, tendido de vías, comunicación, etc. Al mismo tiempo, 300 compañías diferentes han presentado en concurso sus proyectos. El Departamento del D. F. ha decidido que cada trabajo sea realizado por una sola compañía y que cada compañía podrá hacer un solo trabajo. Esta condición ha sido dictaminada con objeto de distribuir el presupuesto del proyecto entre más individuos. La siguiente matriz proporciona un resumen del costo del trabajo  $i$  ( $i = 1, \dots, 300$ ), cotizado por la compañía  $j$  ( $j = 1, \dots, 300$ ).

**TABLA 3-9**  
COSTO EN MILLONES DE PESOS

<i>Compañía</i>	<i>Excavación trabajo 1</i>	<i>Iluminación trabajo 2</i>	— — —	<i>Tendido de vías trabajo 300</i>
1	175	57	.	113
2	184	53	.	113
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
300	163	59	.	116

Bajo tales condiciones, ¿cuál es la asignación que el Departamento del D. F. deberá de realizar, con objeto de minimizar el costo total del proyecto?

**Formulación:**

Sea  $X_{ij}$  la variable de decisión, que será igual a uno si el trabajo  $i$  ( $i = 1, \dots, 300$ ) lo realiza la compañía  $j$  ( $j = 1, \dots, 300$ ), y será igual a cero si esto no sucede. Sea  $c_{ij}$  el costo del trabajo  $i$  ( $i = 1, \dots, 300$ ) cotizado por la compañía  $j$  ( $j = 1, \dots, 300$ ). Entonces la función objetivo es

$$\text{Mín } \sum_{i=1}^{300} \sum_{j=1}^{300} c_{ij} X_{ij}$$

sujeto, primero, a la restricción que cada compañía podrá realizar únicamente un trabajo, es decir:

$$\sum_{i=1}^{300} X_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, 300,$$

y segundo, que cada trabajo sólo podrá ser realizado por una sola compañía, es decir:

$$\sum_{j=1}^{300} X_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, 300,$$

y además

$$X_{ij} = 0 \quad \text{ó} \quad 1 \quad \text{para toda } i \text{ y } j.$$

Este tipo de problemas se llaman de *asignación* y tienen métodos de solución propios, que son más eficientes que el *método simplex*.

**3.2. La estructura de transportes**

Se supone que  $m$  orígenes tienen que surtir a  $n$  centros de consumo con un cierto producto. La capacidad de oferta del origen  $i$  es  $a_i$  ( $i = 1,$



## 254 Problemas de transporte y asignación

$\dots, m$ ) y la demanda en el centro de consumo  $j$  es  $b_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Se supone que  $c_{ij}$  es el costo de enviar una unidad del producto del origen  $i$  al centro de consumo  $j$  ( $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ ). El problema se reduce a determinar cuántas unidades del producto deben enviarse del origen  $i$  al centro de consumo  $j$ , tal que se minimicen los costos totales de distribución, se satisfaga la demanda del centro de consumo  $j$  y no se exceda la capacidad de oferta del origen  $i$ . Sea  $X_{ij}$  esta variable de decisión. Entonces la formulación del problema lineal es

$$\text{Mín } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} X_{ij} \quad (3.1)$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} \leq a_i \quad i = 1, \dots, m \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} \geq b_j \quad j = 1, \dots, n \quad (3.3)$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.4)$$

$$j = 1, \dots, n.$$

Con la adición de variables de holgura y superfluas, el problema anterior puede escribirse como

$$\text{Mín } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} X_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$(PT) \quad \sum_{i=1}^m X_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$j = 1, \dots, n.$$

Esta última formulación lineal (PT) se denomina una *estructura de transporte*.

La restricción (3.2) indica que todo el flujo del producto que emana del origen  $i$  y que se envía a todos los posibles  $m$  destinos, no puede exceder a la oferta del origen  $i$  que es  $a_i$ . Existe una restricción de ese tipo por cada origen. La restricción (3.3) indica que todo el flujo del producto que llega al centro de consumo  $j$  de todos los posibles  $n$  orígenes debe satisfacer la demanda del centro de consumo  $b_j$ . Existe una restricción de este tipo por cada centro de demanda. Por último las restricciones de no-negatividad (3.4) indican que el sentido del flujo del producto es de los orígenes a los destinos, únicamente.

**Teorema 3.1.**

Una condición necesaria y suficiente para que la estructura de transporte (PT) tenga solución es que la oferta total sea igual a la demanda total, es decir:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

*Prueba.* De la formulación (PT) se tiene

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, m.$$

Si se suma sobre todos los orígenes, no se afecta la igualdad, es decir

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij} = \sum_{i=1}^m a_i. \quad (3.5)$$

Por el otro lado, de la formulación (PT) se tiene:

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, n.$$

Sumando sobre todos los centros de consumo,

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m X_{ij} = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (3.6)$$

Las igualdades (3.5) y (3.6) establecen la prueba del teorema.

El problema de transporte (PT) puede escribirse en forma condensada como

$$\begin{aligned} & \text{Mín } Z = \mathbf{cX} \\ & \text{sujeto a} \\ & \quad \mathbf{AX} = \mathbf{d} \\ & \quad \mathbf{X} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde la estructura de las componentes de (3.7) es la siguiente:

## 256 Problemas de transporte y asignación

$$\mathbf{X}^T = (X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n}, X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n}, \dots, X_{m1}, X_{m2}, \dots, X_{mn})$$

$$\mathbf{c} = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}, c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2n}, \dots, c_{m1}, c_{m2}, \dots, c_{mn}),$$

$$\mathbf{d}^T = (a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n),$$

$$\mathbf{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ I_n & I_n & I_n & \cdots & I_n & I_n \end{bmatrix}}_{m \times n \text{ columnas}} \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} m \text{ renglones} \\ n \text{ renglones} \end{array} \right\} \right\} m + n \text{ renglones,}$$

el vector  $\mathbf{1}$  y el vector  $\mathbf{0}$  son vectores fila conteniendo respectivamente  $n$  unos y  $n$  ceros, tal como se muestra a continuación

$$\mathbf{1} = \underbrace{(1, 1, 1 \dots 1)}_{n \text{ componentes}},$$

$$\mathbf{0} = \underbrace{(0, 0, 0 \dots 0)}_{n \text{ componentes}},$$

y

$$I_n = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{n \text{ componentes}}, \quad n \text{ componentes,}$$

La matriz de coeficientes tecnológicos  $\mathbf{A}$  de  $m + n$  renglones y  $m \cdot n$  columnas tiene las siguientes propiedades importantes:

- a) El rango de  $\mathbf{A}$  es  $m + n - 1$ . Esto puede probarse fácilmente mostrando que la suma de los primeros  $m$  renglones es igual a la suma de los últimos  $n$  renglones, y que cualquier submatriz cuadrada de  $\mathbf{A}$  de orden  $m + n - 1$  es no singular.

*Ejemplo.* Sea  $\mathbf{A}$  una matriz que conforma a la estructura de (PT) tal como la siguiente:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que la suma de los 3 últimos renglones menos el segundo generan el primer renglón. Por lo tanto, cada renglón es dependiente de los  $m + n - 1$  renglones restantes.

b) La matriz  $\mathbf{A}$  es unimodular, es decir, que cualquier submatriz cuadrada de  $\mathbf{A}$  de orden  $m + n - 1$  tiene un determinante que es igual a 0 o a  $\pm 1$ .

Estas dos propiedades permiten el desarrollo de un nuevo algoritmo, llamado *de transporte*, que resuelve este tipo de problemas de una manera más eficiente (menos iteraciones y menos tiempo) que el *método simplex*.<sup>6</sup>

Se ve como el *método simplex* resolvería el problema (PT). Se designa a las columnas de  $\mathbf{A}$  por  $\bar{\mathbf{a}}_{ij}$ , es decir

$$\bar{\mathbf{a}}_{ij} = \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{m+j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \leftarrow \text{posición } i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \leftarrow \text{posición } m + j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \leftarrow \text{posición } i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \leftarrow \text{posición } m + j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como la matriz  $\mathbf{A}$  de  $m + n$  renglones y  $m \cdot n$  columnas tiene rango  $m + n - 1$ , cualquier base  $\mathbf{B}$  de (PT) será de orden  $m + n - 1$ . Sea esta base  $\mathbf{B}$  la siguiente:

$$\mathbf{B} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+n-1}),$$

donde  $\alpha_k, k = 1, 2, \dots, m + n - 1$ , son  $m + n - 1$  columnas  $\bar{\mathbf{a}}_{ij}$  de  $\mathbf{A}$  linealmente independientes. Cualquier vector  $\bar{\mathbf{a}}_{ij}$  que no esté en la base  $\mathbf{B}$ , puede escribirse como una combinación lineal de las  $\alpha_k, k = 1, \dots, m + n - 1$ , es decir:

<sup>6</sup> El lector que no esté interesado en los detalles de la justificación matemática del *método de transporte*, puede continuar la lectura en la sección 3.3.

Hidden page

Hidden page

## 260 Problemas de transporte y asignación

$$z_{ij} - c_{ij} = \mathbf{e}_B \bar{\mathbf{Y}}_{ij} - c_{ij},$$

pero como  $\bar{\mathbf{Y}}_{ij}$  es un vector de ceros ó +1 ó -1, la expresión anterior se convierte en

$$z_{ij} - c_{ij} = \sum_{k \in \mathbf{L}} \pm c_{B_k} - c_{ij},$$

o sea,

$$z_{ij} - c_{ij} = c_{B_\beta} - c_{B_\gamma} + c_{B_\delta} - c_{B_\epsilon} + \dots - c_{B_\nu} + c_{B_\phi} - c_{ij} \quad (3.14)$$

Las expresiones (3.13) y (3.14) indican *que no es necesario tratar con una base de  $(m+n-1)$  por  $(m+n-1)$* , sino solamente con  $m+n-1$  elementos a la vez. Esto representa un ahorro considerable de tiempo y de espacio en la memoria de una computadora.

Para encontrar el valor de las  $m+n-1$  componentes de  $\mathbf{e}_B$ , el Dr. Dantzig elaboró el siguiente método.

Sean  $\mu_i$   $i = 1, \dots, m$  las variables duales asociadas a las restricciones (3.2) de (PT) y  $v_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  las variables duales asociadas a las restricciones (3.3) de (PT). Se hace el siguiente cambio de notación.

$$\begin{aligned} c_{B_\beta} &= c_{i\beta}^B \\ c_{B_\gamma} &= c_{\gamma\beta}^B \\ c_{B_\delta} &= c_{\gamma\delta}^B \\ &\vdots \\ &\vdots \\ c_{B_\nu} &= c_{\phi\nu}^B \\ c_{B_\phi} &= c_{\phi j}^B \end{aligned}$$

Supóngase que se pudiera escribir lo siguiente:

$$\begin{aligned} c_{i\beta}^B &= \mu_i + v_\beta \\ c_{\gamma\beta}^B &= \mu_\gamma + v_\beta \\ c_{\gamma\delta}^B &= \mu_\gamma + v_\delta \\ &\vdots \\ &\vdots \\ c_{\phi\nu}^B &= \mu_\phi + v_\nu \\ c_{\phi j}^B &= \mu_\phi + v_j \end{aligned} \quad (3.15)$$

Las expresiones que se proporcionan en (3.15) representan un sistema de  $m+n-1$  ecuaciones lineales con  $m+n$  incógnitas (las  $\mu_i$  y las  $v_j$ ,  $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$ ). En este sistema hay un grado de libertad, es decir, que arbitrariamente se le puede asignar un valor entero a cualquiera de las incógnitas y de ahí se procede a resolver el sistema (3.15). Substituyendo (3.15) en (3.14) se obtiene

$$z_{ij} - c_{ij} = \mu_i + v_\beta - \mu_\gamma - v_\beta + u_\gamma + v_\delta - \mu_\phi + \mu_\phi + v_j - c_{ij}$$

o resumiendo

$$z_{ij} - c_{ij} = \mu_i + v_j - c_{ij}. \tag{3.16}$$

La simplicidad de (3.16) indica cómo evaluar los elementos  $z_{ij} - c_{ij}$  para toda  $\bar{a}_{ij}$  que no esté en **B**, partiendo del supuesto de que todos los elementos  $u_i$  y  $v_j$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$  se conocen de la solución del sistema (3.15). Esto, aunado a la simplicidad del cambio de la solución básica dada en (3.9) y (3.10), le permitió al Dr. Dantzig desarrollar el siguiente algoritmo de transporte.

### 3.3. El algoritmo de transporte<sup>8</sup>

El problema que se quiere resolver es

$$\text{Mín } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} X_{ij}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n X_{ij} &= a_i & i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m X_{ij} &= b_j & j = 1, \dots, n \\ X_{ij} &\geq 0 & i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

donde  $a_i$  y  $b_j$  son números enteros positivos,  $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$ . La explicación se facilita si se establecen dos matrices, una de costos y otra de flujos, tal como se muestra a continuación

		Destinos				Oferta
		1	2	...	n	
Orígenes	1	$c_{11}$	$c_{12}$	...	$c_{1n}$	$a_1$
	2	$c_{21}$	$c_{22}$	...	$c_{2n}$	$a_2$
	.	.	.	...	.	.
	.	.	.	...	.	.
	m	$c_{m1}$	$c_{m2}$	...	$c_{mn}$	$a_m$
Demanda		$b_1$	$b_2$	...	$b_n$	

Costos

<sup>8</sup> En inglés este algoritmo se conoce con el nombre de *stepping stone algorithm*, que significa *algoritmo de las piedras de paso*.



## 262 Problemas de transporte y asignación

		Destinos				Oferta
		1	2	...	n	
Orígenes	1	$X_{11}$	$X_{12}$	...	$X_{1n}$	$a_1$
	2	$X_{21}$	$X_{22}$	...	$X_{2n}$	$a_2$
	.	.	.	...	.	.
	.	.	.	...	.	.
	m	$X_{m1}$	$X_{m2}$	...	$X_{mn}$	$a_m$
Demanda		$b_1$	$b_2$	...	$b_n$	

Flujos

En el caso de que la oferta total sea mayor que la demanda total, es decir  $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$ , entonces se añade un centro de consumo artificial  $n + 1$  cuya demanda  $b_{n+1}$  es  $\sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$  y cuyos costos unitarios  $c_{k,n+1}$ ,  $k = 1, \dots, m$  son todos ceros.

En forma tabular se tiene

		Destinos					Oferta
		1	2	...	n	n + 1	
Orígenes	1	$c_{11}$	$c_{12}$	...	$c_{1n}$	0	$a_1$
	2	$c_{21}$	$c_{22}$	...	$c_{2n}$	0	$a_2$
	.	.	.	...	.	.	.
	.	.	.	...	.	.	.
	m	$c_{m1}$	$c_{m2}$	...	$c_{mn}$	0	$a_m$
Demanda		$b_1$	$b_2$	...	$b_n$	$\sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$	

Costos

Por el otro lado, si la demanda total excede a la oferta total, es decir  $\sum_{j=1}^n b_j > \sum_{i=1}^m a_i$ , entonces se añade un centro de oferta artificial  $m + 1$ , cuya capacidad de oferta  $a_{m+1}$  es  $\sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$  y cuyos costos unitarios  $c_{m+1,k}$ ,  $k = 1, \dots, n$  son todos ceros.

Tabularmente:

		Destinos				Oferta
		1	2	. . .	n	
Orígenes	1	$c_{11}$	$c_{12}$	. . .	$c_{1n}$	$a_1$
	2	$c_{21}$	$c_{22}$	. . .	$c_{2n}$	$a_2$
	.	.	.	. . .	.	.
	.	.	.	. . .	.	.
	m	$c_{m1}$	$c_{m2}$	. . .	$c_{mn}$	$a_m$
	m + 1	0	0	. . .	0	$\sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$
	Demanda	$b_1$	$b_2$	. . .	$b_n$	

Costos

Cuando un problema de transporte real está *desbalanceado*,<sup>9</sup> añadiendo ya sea orígenes o destinos artificiales, se le balancea y así se satisface la condición necesaria y suficiente (teorema 3.1) para que el problema tenga solución.

Una vez que un problema de transporte está balanceado, se requiere una solución inicial que sea básica y factible. Hay varios mecanismos para lograr esta solución. Se presentan dos; el *método del extremo noroccidental* y el *método de Vogel*.

**I. Método del extremo noroccidental, para generar una solución inicial básica factible de un problema de transporte**

El punto de partida es una matriz con orígenes, destinos, ofertas y demandas de un problema balanceado tal como se muestra a continuación:

		Destinos				Oferta
		1	2	. . .	m	
Orígenes	1					$a_1$
	2					$a_2$
	.					.
	.					.
	n					$a_m$
	Demanda	$b_1$	$b_2$	. . .	$b_n$	

Para obtener una solución básica factible al problema (PT) se empieza a construir una matriz de flujos de la siguiente manera:

$$^9 \sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j.$$

## 264 Problemas de transporte y asignación

*Paso 1.* En la posición (1, 1), que es el extremo noroccidental de la matriz (y de ahí el nombre de este método) asígnese el mín  $(a_1, b_1) = X_{1,1}$ . Réstese  $X_{1,1}$  de la oferta  $a_1$  y de la demanda  $b_1$ . Obviamente, alguna de estas dos cantidades se convertirá en cero.

*Paso 2.* Si  $a_1$  se convierte en cero, pásese a la posición (2, 1) y hágase  $X_{2,1} = \text{Mín}(b_1 - X_{1,1}, a_2)$ . Si por el otro lado es  $b_1$  el que se convierte en cero en el paso anterior, se pasa a la posición (1, 2) y  $X_{1,2} = \text{Mín}(a_1 - X_{1,1}, b_2)$ .

*Paso 3.* Continúese con la misma lógica hasta llegar a la posición  $(m, n)$ . La matriz de flujos que se obtenga será factible y básica para (PT).

*Ejemplo.* Se suponen 4 orígenes y 5 destinos con las ofertas y demandas que se muestran a continuación:

		Destinos					Oferta
		1	2	3	4	5	
Orígenes	1						40
	2						60
	3						90
	4						50
Demanda		30	40	70	40	60	

Nótese que el problema está balanceado porque la oferta total es igual a la demanda total, igual a 240 unidades. A continuación se obtiene una solución básica inicial factible, utilizando el método del extremo noroccidental.<sup>10</sup>

*Paso 1.*  $X_{11} = \text{Mín}(a_1, b_1) = \text{Mín}(40, 30) = 30$ ,

$$\hat{a}_1 = a_1 - X_{11} = 40 - 30 = 10,$$

$$\hat{b}_1 = b_1 - X_{11} = 30 - 30 = 0,$$

y se pasa a la posición (1, 2).

*Paso 2.*  $X_{12} = \text{Mín}(\hat{a}_1, b_2) = \text{Mín}(10, 40) = 10$ ,

$$\hat{\hat{a}}_1 = \hat{a}_1 - X_{12} = 10 - 10 = 0,$$

$$\hat{b}_2 = b_2 - X_{12} = 40 - 10 = 30,$$

y se pasa a la posición (2, 2).

<sup>10</sup> En el ejemplo se utilizará la notación  $\hat{a}_i, \hat{b}_j$  para indicar oferta y demanda nuevas después de una asignación de flujo.

$$\text{Paso 3. } X_{22} = \text{Mín}(a_2, \hat{b}_2) = \text{Mín}(60, 30) = 30,$$

$$\hat{a}_2 = a_2 - X_{22} = 60 - 30 = 30,$$

$$\hat{b}_2 = \hat{b}_2 - X_{22} = 30 - 30 = 0,$$

y se pasa a la posición (2, 3).

$$\text{Paso 4. } X_{23} = \text{Mín}(a_2, b_3) = (30, 70) = 30,$$

$$\hat{a}_2 = \hat{a}_2 - X_{23} = 30 - 30 = 0,$$

$$\hat{b}_3 = b_3 - X_{23} = 70 - 30 = 40,$$

y se pasa a la posición (3, 3).

$$\text{Paso 5. } X_{33} = \text{Mín}(a_3, \hat{b}_3) = \text{Mín}(90, 40) = 40,$$

$$\hat{a}_3 = a_3 - X_{33} = 90 - 40 = 50,$$

$$\hat{b}_3 = \hat{b}_3 - X_{33} = 40 - 40 = 0,$$

y se pasa a la posición (3, 4).

$$\text{Paso 6. } X_{34} = \text{Mín}(\hat{a}_3, b_4) = \text{Mín}(50, 40) = 40,$$

$$\hat{a}_3 = \hat{a}_3 - X_{34} = 50 - 40 = 10,$$

$$\hat{b}_4 = b_4 - X_{34} = 40 - 40 = 0,$$

y se pasa a la posición (3, 5).

$$\text{Paso 7. } X_{35} = \text{Mín}(\hat{a}_3, b_5) = \text{Mín}(10, 60) = 10,$$

$$\hat{a}_3 = \hat{a}_3 - X_{35} = 10 - 10 = 0,$$

$$\hat{b}_5 = b_5 - X_{35} = 60 - 10 = 50,$$

y se pasa a la posición (4, 5).

$$\text{Paso 8. (Ultimo) } X_{45} = \text{Mín}(a_4, \hat{b}_5) = \text{Mín}(50, 50) = 50,$$

$$\hat{a}_4 = a_4 - X_{45} = 50 - 50 = 0,$$

$$\hat{b}_5 = \hat{b}_5 - X_{45} = 50 - 50 = 0.$$

A continuación se ilustra gráficamente el método. Los pasos están marcados dentro de los círculos.

## 266 Problemas de transporte y asignación

		Destinos					Oferta		
		1	2	3	4	5			
Orígenes	1	30	10				40	10	0
	2		30	30			60	30	0
	3			40	40	10	90	50	10
	4					50	50	0	0
Demanda		30	40	70	40	60			
		0	30	40	0	50			
			0	0		0			

Flujos

La solución inicial es básica porque hay  $m + n - 1$  ( $4 + 5 - 1 = 8$ ) flujos  $X_{ij} \geq 0$ , el resto, es decir  $m \cdot n - (m + n - 1)$ , o sean 12, son ceros.<sup>11</sup> La solución es factible porque satisface las restricciones de oferta (las sumas por renglón dan la oferta del origen) y las restricciones de demanda (las sumas por columna dan la demanda del destino). Además, la solución inicial es no-degenerada porque hay exactamente  $m + n - 1$  flujos en la base que son positivos.

Este método es muy sencillo, siendo su única desventaja que el punto extremo de la región de factibilidad de (PT) asociado a la solución inicial básica factible así obtenida, está bastante alejado de la solución óptima, es decir, que de aquí a obtener la solución óptima se requieren muchas iteraciones. Esto, en tiempo de computadora puede ser bastante costoso.

El método de Vogel proporcionará una solución inicial básica factible más cercana al punto óptimo.

### II. Método de Vogel, para obtener una solución inicial básica factible de un problema de transporte

- Paso 1.* Constrúyase una matriz de costos y de flujos asociados al problema balanceado y váyase al paso 3.
- Paso 2.* Utilícese el remanente de la matriz de costos y flujos una vez que estos últimos se hayan asignado.
- Paso 3.* Se entiende por *diferencia de fila (de columna)* a la diferencia que hay entre los dos números más pequeños que existen en la fila (columna). Calcúlese todas las diferencias de fila y de columna de la matriz de costos.

<sup>11</sup> El tamaño de la base en un problema de transporte es  $m + n - 1$ .

- Paso 4.* Seleccionese aquella fila o columna con mayor diferencia. Los empates se deciden arbitrariamente.
- Paso 5.* Localícese el costo más pequeño en la matriz de costos en la fila o columna seleccionada en el paso anterior. Sea esta la posición  $c_{ij}$ .
- Paso 6.* En la matriz de flujo hágase  $X_{ij} = \text{Mín}(a_i, b_j)$ , donde la posición  $(i, j)$  se identificó en el paso anterior. Hágase la oferta  $a_i$  igual a  $a_i - X_{ij}$  y la demanda  $b_j$  igual a  $b_j - X_{ij}$ .
- Paso 7.* Si  $a_i - X_{ij} = 0$ , llénese la fila  $i$  de la matriz de flujos con ceros, a excepción de la posición  $(i, j)$  y elimínese esa fila de cualquier consideración futura. Por otro lado, si  $b_j - X_{ij} = 0$ , llénese la columna  $j$  de la matriz de flujos con ceros, a excepción de la posición  $(i, j)$  y elimínese esa columna de cualquier consideración futura. Regrésese al paso 2.

*Ejemplo.* Supóngase un problema balanceado de transporte como el anterior, con cuatro orígenes y cinco destinos, cuyas capacidades de oferta, demanda y costos unitarios de transporte están dados a continuación. El costo  $M$  en la posición  $(3, 5)$  es un costo altísimo y significa que en realidad el origen 3 no puede suplir al destino 5. Esta es una manera simbólica de representar estas imposibilidades.

		Destinos					Oferta
		1	2	3	4	5	
Orígenes	1	20	19	14	21	16	40
	2	15	20	13	19	16	60
	3	18	15	18	20	M	90
	4	0	0	0	0	0	50
Demanda		30	40	70	40	60	

Matriz de costos unitarios

Se empieza con el *método de Vogel* para obtener una solución inicial básica factible.

*Paso 3.* Cálculo de las diferencias de filas y columnas.<sup>12</sup>

		1	2	3	4	5	Diferencia de filas
	1	20	19	14	21	16	2
	2	15	20	13	19	16	2
	3	18	15	18	20	M	3
	4	0	0	0	0	0	0
Diferencia de columnas		15	15	13	(19)	16	

<sup>12</sup> Recuerde que la  $M$  se utilizó en la programación lineal para simbolizar un número positivo muy elevado.

## 268 Problemas de transporte y asignación

*Paso 4.* Se selecciona la columna 4 por tener la diferencia máxima que es 19.

*Paso 5.* En la columna 4 el costo más pequeño corresponde a  $c_{44} = 0$ .

*Paso 6.*  $X_{44} = \text{Mín}(a_4, b_4) = \text{Mín}(50, 40) = 40$ ,  
 $\hat{a}_4 = a_4 - X_{44} = 50 - 40 = 10$ ,  
 $\hat{b}_4 = b_4 - X_{44} = 40 - 40 = 0$ .

*Paso 7.* Como  $\hat{b}_4 = 0$  todos los elementos de la columna 4, a excepción del  $X_{44}$  se hacen igual a cero. Se elimina la columna 4 de cualquier consideración futura.

*Paso 2.* Al regresar al paso 2, la matriz de costos y flujos queda como se indica a continuación:

	1	2	3	4	5	
1	20	19	14	21	16	
2	15	20	13	19	16	
3	18	15	18	20	M	
4	0	0	0	0	0	
	Flujos					

	1	2	3	4	5	Oferta
1					0	40
2					0	60
3					0	90
4					40	10
Demanda	30	40	70	0	60	
	Costos					

*Paso 3.* Cálculo de las diferencias de filas y columnas en la matriz de costos anteriores.

	1	2	3	4	5	Diferencia de filas
1	20	19	14		16	2
2	15	20	13		16	2
3	18	15	18		M	3
4	0	0	0		0	0
Diferencia de columnas	15	15	13		(16)	
	Costos					

*Paso 4.* Se selecciona la columna 5 por tener la diferencia máxima que es 16.

Paso 5. En la columna 5 el costo más pequeño corresponde a  $c_{45} = 0$ .

Paso 6.  $X_{45} = \text{Mín} (\hat{a}_4, b_5) = \text{Mín} (10, 60) = 10$ ,

$$\hat{a}_4 = \hat{a}_4 - X_{45} = 10 - 10 = 0,$$

$$\hat{b}_5 = b_5 - X_{45} = 60 - 10 = 50.$$

Paso 7. Como  $a_4 = 0$ , todos los elementos de la fila 4 se hacen cero, a excepción del elemento  $X_{45}$ . Se elimina la fila 4 de cualquier consideración futura.

Paso 2. Al regresar al paso 2, la matriz de costos y flujos queda como se indica a continuación:

	1	2	3	4	5
1	20	19	14		16
2	15	20	13		16
3	18	15	18		M
4	0	0	0		0

Costos

	1	2	3	4	5	Oferta
1				0		40
2				0		60
3				0		90
4	0	0	0	40	10	0
Demanda	30	40	70	0	50	

Flujos

En forma gráfica condensada se ilustra el resto de las iteraciones del método de Vogel.

	1	2	3	4	5	Diferencia de renglones
1	20	19	14		16	2
2	15	20	13		16	2
3	18	15	18		M	3
4						
Diferencia de columnas	3	4	1		0	

Costos

	1	2	3	4	5	Oferta
1				0	0	40
2				0	0	60
3				40	0	50
4	0	0	0	40	10	0
Demanda	30	0	70	0	50	

Flujos



## 270 Problemas de transporte y asignación

	1	2	3	4	5	Diferencia de renglones
1	20	14	16			2
2	15	13	16			2
3	18	18	M			0
4						
Diferencia de columnas	3	1	0			

*Costos*

	1	2	3	4	5	Oferta
1	0	0	0			40
2	30	0	0			30
3	0	40	0			50
4	0	0	0	40	10	0
Demanda	0	0	70	0	50	

*Flujos*

	1	2	3	4	5	Diferencia de renglones
1			14	16		2
2			13	16		3
3			18	M		M-18
4						
Diferencia de columnas			1	0		

*Costos*

	1	2	3	4	5	Oferta
1	0	0	0			40
2	30	0	0			30
3	0	40	50	0	0	0
4	0	0	0	40	10	0
Demanda	0	0	20	0	50	

*Flujos*

	1	2	3	4	5	Diferencia de renglones
1			14	16		2
2			13	16		3
3						
4						
Diferencia de columnas			1	0		

*Costos*

	1	2	3	4	5	Oferta
1	0	0	0	0		40
2	30	0	20	0		10
3	0	40	50	0	0	0
4	0	0	0	40	10	0
Demanda	0	0	0	0	50	

*Flujos*

	1	2	3	4	5	Diferencia de renglones
1				16		16
2				16		16
3						
4						
Diferencia de columnas				0		

*Costos*

	1	2	3	4	5	Oferta
1	0	0	0	0	40	0
2	30	0	20	0		10
3	0	40	50	0	0	0
4	0	0	0	40	10	0
Demanda	0	0	0	0	10	

*Flujos*

	1	2	3	4	5	Diferencia de renglones
1						
2						(16)
3						(16)
4						
Diferencia de columnas						(16)

	1	2	3	4	5	Oferta
1	0	0	0	0	40	0
2	30	0	20	0	10	0
3	0	40	50	0	0	0
4	0	0	0	40	10	0
Demanda	0	0	0	0	0	

La solución inicial básica y factible dada por el *método de Vogel* está resumida en la siguiente tabla de flujos, donde los espacios en blanco significan que es nulo el flujo en esa posición (es decir, es una posición no-básica).

		Destinos					Oferta
		1	2	3	4	5	
Orígenes	1					40	40
	2	30		20		10	60
	3		40	50			90
	4				40	10	50
Demanda		30	40	70	40	60	

El costo asociado con esta solución inicial es de \$ 3,010. En cambio, el costo asociado con la solución inicial dada por el *método del extremo noroccidental* es de (\$ 3,300 + 10M). Nótese, que aun sin alcanzar la solución óptima, se ha acercado mucho más a ésta por el *método de Vogel* que por el anterior.

Los programas de biblioteca de computadoras que resuelven problemas de transporte, emplean el *método de Vogel* para generar una solución inicial básica factible.

**Algoritmo de transporte**

*Paso 1.* Balancéese el problema original, a fin de que se consiga la condición necesaria y suficiente para obtener una solución

$$\text{óptima, es decir } \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

*Paso 2.* Genérese una solución inicial que sea básica y factible, ya sea utilizando el *método de Vogel* o del *extremo noroccidental*.

*Paso 3.* Constrúyase una matriz de costos  $\bar{c}_{ij}$ , asociada a la solución básica factible que se tenga, donde

$$\begin{aligned} \bar{c}_{ij} &= c_{ij}, & \text{si } X_{ij} \text{ está en la base,} \\ \bar{c}_{ij} &= 0, & \text{si } X_{ij} \text{ no está en la base.} \end{aligned}$$

## 272 Problemas de transporte y asignación

*Paso 4.* Con esta matriz de costos, calcúlese el valor de todas las variables duales  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , y  $v_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , utilizando la fórmula

$$u_i + v_j - \bar{c}_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n.$$

Como hay  $m + n$  variables ( $m$  variables  $u_i$  y  $n$  variables  $v_j$ ), y solamente  $m + n - 1$  ecuaciones  $u_i + v_j - \bar{c}_{ij} = 0$ , existe un grado de libertad. Esto equivale a darle un valor arbitrario (se recomienda el valor cero) a cualquiera de las variables duales y así queda por resolver un sistema de  $m + n - 1$  ecuaciones con  $m + n - 1$  variables.

*Paso 5.* Los parámetros  $z_{ij} - c_{ij}$  se calculan por medio de la ecuación (3.16), es decir,  $z_{ij} - c_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ . Como se están usando reglas de minimización, si  $z_{ij} - c_{ij} \leq 0$  para toda  $i$  y  $j$ , la solución actual es óptima. En caso contrario, la  $X_{ij}$  correspondiente a la  $z_{ij} - c_{ij}$  más positiva entra a la base. Para guardar consistencia con la programación lineal se utilizan las reglas de maximización. En este caso

$$z_{ij} - c_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j).$$

Si todas las  $z_{ij} - c_{ij} \geq 0$ , la solución actual es óptima. En caso contrario, se introduce a la base la  $X_{ij}$  correspondiente a la  $z_{ij} - c_{ij}$  más negativa.

*Paso 6.* Si la variable  $X_{ij}$  entra a la base con un cierto valor positivo  $\theta$ , la oferta  $a_i$  y la demanda  $b_j$  se desequilibrarán en un valor  $\pm\theta$ , a menos de que exista, un mecanismo de compensación. Antes de señalar cuál es éste, se ilustra el desequilibrio mencionado. Considérese que la solución básica factible actual es la que se indica a continuación:

	1	...	$j$	...	$n$	<i>Oferta</i>
1	$X_{11}$		$X_{1j}$			$a_1$
.						.
.						.
.						.
$i$					$X_{in}$	$a_i$
.						.
.						.
$m$					$X_{mn}$	$a_m$
<i>Demanda</i>	$b_1$	...	$b_j$	...	$b_n$	
	<i>Flujos</i>					

La solución es básica, porque  $m + n - 1 = 5$  (una suposición), y es factible porque

$$\begin{aligned}
 X_{11} + X_{1j} &= a_1 \\
 X_{in} &= a_i \\
 X_{m1} + X_{mn} &= a_m \\
 X_{11} + X_{m1} &= b_1 \\
 X_{1j} &= b_j \\
 X_{in} + X_{mn} &= b_n
 \end{aligned}
 \tag{3.17}$$

$$X_{11} \geq 0, \quad X_{1j} \geq 0, \quad X_{in} \geq 0, \quad X_{m1} \geq 0, \quad X_{mn} \geq 0.$$

Se supone que  $z_{ij} - c_{ij}$  es la más negativa y por consiguiente,  $X_{ij}$  entra a la nueva base con un determinado valor  $\theta \geq 0$ . Tabularmente se tiene lo siguiente:

	1	...	j	...	n	Oferta
1	$X_{11}$		$X_{1j}$			$a_1$
.						.
.						.
i			$\theta$		$X_{in}$	$a_i$
.						.
.						.
m	$X_{m1}$				$X_{mn}$	$a_m$
Demanda	$b_1$	...	$b_j$	...	$b_n$	
	Flujos					

Si  $\theta > 0$ , esta nueva solución ya no es básica, porque hay  $m + n$  (6 en este caso) elementos en la base y no  $m + n - 1$ , como deberían haber. La solución tampoco es factible, porque por un lado la oferta del origen  $i$  es mayor que  $a_i$ , de hecho es

$$\theta + X_{in} = \theta + a_i > a_i,$$

y por el otro la demanda del destino  $j$ , es

$$\theta + X_{1j} = \theta + b_j > b_j.$$

Existe un desequilibrio que únicamente puede desaparecer si se resta y suma  $\theta$  unidades en ciertas partes de la matriz de flujos. Un pequeño análisis permite *construir un circuito*, tal como se muestra a continuación,

## 274 Problemas de transporte y asignación

	1	j	n	Oferta
1	$X_{11} + \theta$	$X_{1j} - \theta$		$a_1$
i		$\theta$	$X_{in} - \theta$	$a_i$
m	$X_{m1} - \theta$		$X_{mn} + \theta$	$a_m$
Demanda	$b_1$	$b_j$	$b_m$	

Flujos

en donde en ciertas partes se ha sumado el valor de  $\theta$  y en otras se ha restado. Lo importante es que se ha regenerado la factibilidad, más no lo básico. En efecto

$$\begin{aligned} X_{11} + \theta + X_{1j} - \theta &= a_1 \\ \theta + X_{in} - \theta &= a_i \\ X_{m1} - \theta + X_{mn} + \theta &= a_m \\ X_{11} + \theta + X_{m1} - \theta &= b_1 \\ X_{1j} - \theta + \theta &= b_j \\ X_{in} - \theta + X_{mn} + \theta &= b_m, \end{aligned}$$

que son iguales a las condiciones (3.17). Para que esta nueva solución sea básica, es decir, que solamente existan  $m + n - 1$  elementos en la base,  $\theta$  debe de ser lo suficientemente grande como para reducir el valor de uno o varios flujos básicos a cero. Si se analiza la matriz anterior, se ve que si  $\theta$  aumenta, los siguientes flujos disminuyen:

$$X_{1j}, X_{in}, X_{m1}.$$

Por lo tanto,

$$\theta = \text{Mín} (X_{1j}, X_{in}, X_{m1}).$$

El circuito formado anteriormente y el valor de  $\theta$ , corresponden a las ecuaciones (3.9) y (3.10) respectivamente. Este circuito es *único*. Por lo tanto, el paso 6 se puede resumir como sigue:

- 6-a) Constrúyase el *circuito único* que contiene a la variable  $X_{ij}$  que entra a la base.
- 6-b)  $X_{ij} = \theta$ , donde  $\theta$  es el mínimo de todos los vectores básicos en el circuito que disminuyen su valor a medida que  $\theta$  aumenta.

Regrésese al paso 3 con esta nueva solución.

*Ejemplo.* Resuelva el problema de transporte que tiene 3 orígenes con capacidad de 40, 60 y 90 unidades respectivamente; 5 destinos con demandas de 30, 40, 70, 40 y 60 unidades respectivamente y los costos unitarios dados en la siguiente tabla:

		Destinos					Oferta
		1	2	3	4	5	
Orígenes	1	20	19	14	21	16	40
	2	15	20	13	19	16	60
	3	18	15	18	20	no surte	90
Demanda		30	40	70	40	60	

Costos

Por razones físicas el origen 3 no puede surtir al destino 5.

*Solución.* Primero, como el origen 3 no surte al destino 5, se hace  $c_{35} = M \gg 0$ , en que  $M$  es un número positivo muy grande.

*Primera iteración*

*Paso 1.* El problema está desbalanceado, puesto que la oferta total es menor a la demanda total en 50 unidades. En efecto  $\sum_{i=1}^3 a_i = 190 < \sum_{j=1}^5 b_j = 240$ . Por lo tanto, para balancear el problema se agrega un origen artificial con una oferta igual a  $240 - 190 = 50$  unidades, y con costos  $c_{4j} = 0, j = 1, \dots, 5$ . El problema ya balanceado presenta la siguiente matriz de costos.

		Destinos					Oferta
		1	2	3	4	5	
Orígenes	1	20	19	14	21	16	40
	2	15	20	13	19	16	60
	3	18	15	18	20	M	90
Origen artificial	4	0	0	0	0	0	50
Demanda		30	40	70	40	60	

Costos

*Paso 2.* Utilizando el *método de Vogel* (ver sección correspondiente) se obtiene la siguiente solución inicial factible básica con costo total de \$3,010.

		Destinos					Oferta
		1	2	3	4	5	
Orígenes	1					40	40
	2	30		20		10	60
	3		40	50			90
	4				40	10	50
Demanda		30	40	70	40	60	

Flujos

## 276 Problemas de transporte y asignación

*Paso 3.* Se construye una matriz de costos  $\bar{c}_{ij}$ , donde

$$\begin{aligned} \bar{c}_{15} &= 16 & \bar{c}_{32} &= 15 \\ \bar{c}_{21} &= 15 & \bar{c}_{33} &= 18 \\ \bar{c}_{23} &= 13 & \bar{c}_{44} &= 0 \\ \bar{c}_{25} &= 16 & \bar{c}_{45} &= 0, \end{aligned}$$

el resto de las  $c_{ij} = 0$ . Se asocia las variables duales  $u_i$  con los orígenes ( $i = 1, \dots, 4$ ) y las  $v_j$  ( $j = 1, \dots, 5$ ) con los destinos.

		Destinos					
		1	2	3	4	5	
Orígenes	1					16	$u_1$
	2	15		13		16	$u_2$
	3		15	18			$u_3$
	4				0	0	$u_4$
		$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	

Costos

*Paso 4.* Dándole a<sup>13</sup>  $u_2$  un valor arbitrario de cero, se pueden calcular los valores de  $v_1$ ,  $v_3$  y  $v_5$ .

$$-\bar{c}_{21} + u_2 + v_1 = 0 \text{ o sea } v_1 = \bar{c}_{21} - u_2 = 15 - 0 = 15,$$

$$-\bar{c}_{23} + u_2 + v_3 = 0 \text{ o sea } v_3 = \bar{c}_{23} - u_2 = 13 - 0 = 13$$

$$-\bar{c}_{25} + u_2 + v_5 = 0 \text{ o sea } v_5 = \bar{c}_{25} - u_2 = 16 - 0 = 16.$$

Conocidos  $v_1$ ,  $v_3$  y  $v_5$  se pueden calcular  $u_1$ ,  $u_3$  y  $u_4$ . En efecto,

$$-\bar{c}_{15} + u_1 + v_5 = 0 \text{ o sea } u_1 = \bar{c}_{15} - v_5 = 16 - 16 = 0,$$

$$-\bar{c}_{45} + u_4 + v_5 = 0 \text{ o sea } u_4 = \bar{c}_{45} - v_5 = 0 - 16 = -16,$$

$$-\bar{c}_{33} + u_3 + v_3 = 0 \text{ o sea } u_3 = \bar{c}_{33} - v_3 = 18 - 13 = 5.$$

De manera similar, se obtienen los valores de las variables duales restantes.

$$-c_{44} + u_4 + v_4 = 0 \text{ o sea } v_4 = \bar{c}_{44} - u_4 = 0 - (-16) = 16$$

$$-\bar{c}_{32} + u_3 + v_2 = 0 \text{ o sea } v_2 = \bar{c}_{32} - u_3 = 15 - 5 = 10.$$

<sup>13</sup> Ya que se dispone de un grado de libertad, se escogió  $u_2$  arbitrariamente y se le dio un valor arbitrario. En este caso  $u_2 = 0$ .

En resumen

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 & v_1 &= 15 \\ u_2 &= 0 & v_2 &= 10 \\ u_3 &= 5 & v_3 &= 13 \\ u_4 &= -16 & v_4 &= 16 \\ & & v_5 &= 16. \end{aligned}$$

Paso 5. Utilizando la fórmula  $z_{ij} - c_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$  (reglas de maximización) para toda  $i, j$  que no está en la base se obtienen los indicadores en optimalidad.

$$\begin{aligned} z_{11} - c_{11} &= c_{11} - (u_1 + v_1) = 20 - (0 + 15) = 5 \\ z_{12} - c_{12} &= c_{12} - (u_1 + v_2) = 19 - (0 + 10) = 9 \\ z_{13} - c_{13} &= c_{13} - (u_1 + v_3) = 14 - (0 + 13) = 1 \\ z_{14} - c_{14} &= c_{14} - (u_1 + v_4) = 21 - (0 + 16) = 5 \\ z_{22} - c_{22} &= c_{22} - (u_2 + v_2) = 20 - (0 + 10) = 10 \\ z_{24} - c_{24} &= c_{24} - (u_2 + v_4) = 19 - (0 + 16) = 3 \\ z_{31} - c_{31} &= c_{31} - (u_3 + v_1) = 18 - (5 + 15) = -2 \\ z_{34} - c_{34} &= c_{34} - (u_3 + v_4) = 20 - (5 + 16) = -1 \\ z_{35} - c_{35} &= c_{35} - (u_3 + v_5) = M - (5 + 16) = M - 21 \\ z_{41} - c_{41} &= c_{41} - (u_4 + v_1) = 0 - (-16 + 15) = 1 \\ z_{42} - c_{42} &= c_{42} - (u_4 + v_2) = 0 - (-16 + 10) = 6 \\ z_{43} - c_{43} &= c_{43} - (u_4 + v_3) = 0 - (-16 + 13) = 3. \end{aligned}$$

Como  $z_{31} - c_{31} = -2 < 0$  es la más negativa,  $X_{31}$  entra a la base.

Paso 6. El circuito correspondiente a las ecuaciones (3.9) queda representado tabularmente a continuación.

		Destinos					Oferta
		1	2	3	4	5	
Orígenes	1					40	40
	2	30 - $\theta$		20 + $\theta$		10	60
	3	$\theta$	40	50 - $\theta$			90
	4				40	10	50
Demanda		30	40	70	40	60	

Flujos



## 278 Problemas de transporte y asignación

El valor de  $\theta$  proviene del mínimo de aquellos flujos que disminuyen al aumentar  $\theta$ , es decir

$$\theta = \text{Mín} (30, 50) = 30$$

Por lo tanto, la nueva solución es:

		Destinos					Oferta
		1	2	3	4	5	
Orígenes	1					40	40
	2			50		10	60
	3	30	40	20			90
	4				40	10	50
Demanda		30	40	70	40	60	

Flujos

El costo asociado a esta nueva solución es

$$\begin{aligned} & \$ 3,010 + X_{31} (z_{31} - c_{31}) \\ & = \$ 3,010 + 30(-2) \\ & = \$ 2,950. \end{aligned}$$

Se regresa al paso 3.

### Segunda iteración

*Pasos 3 y 4.* Tabularmente se representa a la nueva matriz con elementos  $\bar{c}_{ij}$  y a los valores duales  $u_i$  y  $v_j$ .

		Destinos					
		1	2	3	4	5	
Orígenes	1					16	$u_1 = -5$
	2			13		16	$u_2 = -5$
	3	18	15	18			$u_3 = 0$ (Arbitrario)
	4				0	0	$u_4 = -21$
		$v_1 = 18$	$v_2 = 15$	$v_3 = 18$	$v_4 = 21$	$v_5 = 21$	

Costos

*Paso 5.* Tabularmente se representa a la matriz con los elementos  $z_{ij} - c_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$ .

Hidden page

## 280 Problemas de transporte y asignación

### Tercera iteración

Pasos 3 y 4. Tabularmente se representa a la nueva matriz de elementos  $\bar{c}_{ij}$  y a los valores  $u_i$  y  $v_j$ .

		Destinos					
		1	2	3	4	5	
Orígenes	1					16	$u_1 = -4$
	3			13			$u_2 = -5$
	2	18	15	18	20		$u_3 = 0$ (Arbitrario)
	4				0	0	$u_4 = -20$
		$v_1 = 18$	$v_2 = 15$	$v_3 = 18$	$v_4 = 20$	$v_5 = 20$	
		Costos					

Paso 5. Tabularmente se representa a la matriz con los elementos  $z_{ij} - c_{ij}$ , calculados de  $z_{ij} - c_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$ .

	1	2	3	4	5
1	6	8	0	5	
2	2	10		4	1
3					$M-20$
4	2	5	2		
Costos					

Como todas las  $z_{ij} - c_{ij}$  para  $i$  y  $j$  que no están en la base son positivas, la solución anterior es óptima. En resumen, la solución óptima es:

- $X_{15} = 40$ ,  $X_{23} = 60$ ,  $X_{31} = 30$ ,  $X_{32} = 40$ ,  $X_{34} = 10$ ,  $X_{44} = 30$ ,  $X_{45} = 20$ ,  $X_{33} = 10$ ,
- las restantes  $X_{ij}$  son cero,
- el costo mínimo de transportes es \$ 2,940.

La solución óptima se ilustra a continuación

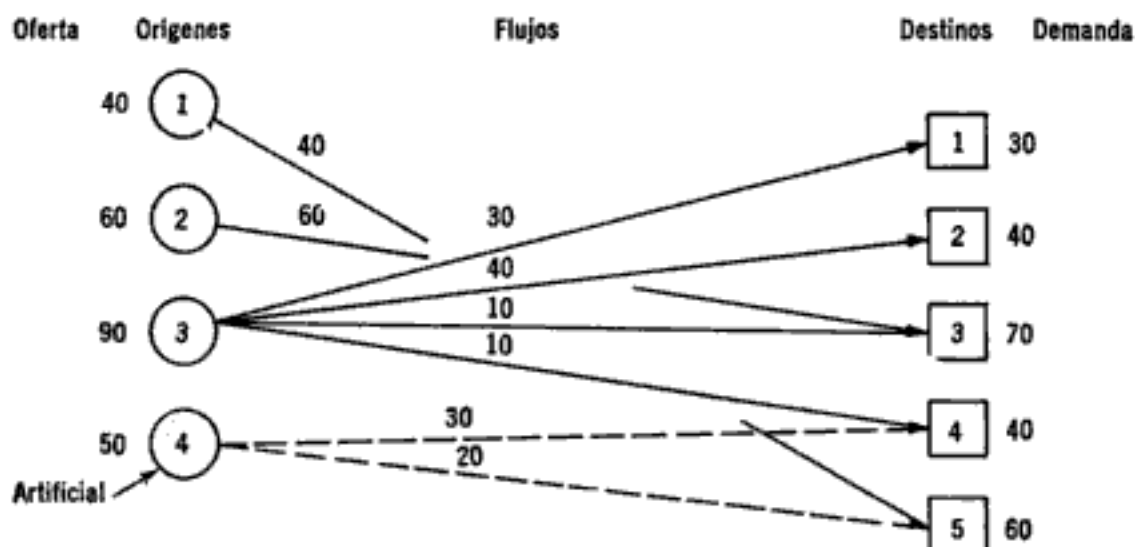


Figura 3.3

Hidden page

## 282 Problemas de transporte y asignación

Pasos 3, 4, 5 y 6. Se determina que  $X_{31}$  debe entrar a la base con un valor  $\theta$  dado por

$$\theta = \text{Mín}(30, 30) = 30.$$

El circuito correspondiente a la ecuación (3.9) se muestra a continuación.

		Destinos					Oferta
		1	2	3	4	5	
Orígenes	1					40	40
	2	$30 - \theta$		$20 + \theta$		10	60
	3	$\theta$	40	$30 - \theta$			70
	4				40	10	50
Demanda		30	40	50	40	60	

Flujos

El problema que se presenta es el siguiente:

Si  $\theta = 30$ , entonces, tanto  $X_{21}$  como  $X_{23}$  se reducen a cero, lo que originaría que en la nueva base sólo habría  $m + n - 2$  (7 en este caso) valores positivos. ¿Cómo se distinguiría entonces aquel elemento cero que queda en la base (haciendo los  $m + n - 1$  componentes) de los elementos que no están en la base y cuyos valores son también nulos?

Esta identificación se logra si se asigna en forma transitoria y arbitraria el valor  $E$  (que representa cero) a cualquiera de los elementos que se hayan anulado y que se requieren para tener  $m + n - 1$  componentes en la base. El símbolo  $E$ , cuyo valor es cero, sólo sirve para distinguir aquellos flujos de valor cero que están en la base de aquellos que no lo están.

En este caso se hace arbitrariamente a  $X_{33} = E$ . La nueva base está dada por

		Destinos					Oferta
		1	2	3	4	5	
Orígenes	1					40	40
	2			50		10	60
	3	30	40	$E$			70
	4				40	10	50
Demanda		30	40	50	40	60	

Flujos

Una nueva iteración indicaría que  $X_{34}$  debería entrar a la base. Gráficamente:

		Destinos					Oferta
		1	2	3	4	5	
Orígenes	1					40	40
	2			$50 + \theta$		$10 - \theta$	60
	3	30	40	$E - \theta$	$\theta$		70
	4				$40 - \theta$	$10 + \theta$	50
Demanda		30	40	50	40	60	

Flujos

por lo que  $\theta$  está dado por

$$\theta = \text{Mín}(10, 40, E) = E.$$

La nueva solución básica factible degenerada es:

		Destinos					Oferta
		1	2	3	4	5	
Orígenes	1					40	40
	2			50		10	60
	3	30	40		$E$		70
	4				40	10	50
Demanda		30	40	50	40	10	

Costos

Esta solución ya es óptima porque como lo podrá corroborar el lector, todas las  $z_{ij} - c_{ij} \geq 0$  para toda  $i$  y  $j$ . En este momento, ya se puede prescindir de la  $E$ , quedando la solución óptima degenerada igual a:

- a)  $X_{15} = 40, X_{23} = 50, X_{31} = 30, X_{32} = 40, X_{44} = 40, X_{45} = 10,$   
 $X_{25} = 10,$
- b) el resto de las  $X_{ij}$  es igual a cero,
- c) el costo total óptimo es de \$ 2,590.

Gráficamente se tiene:

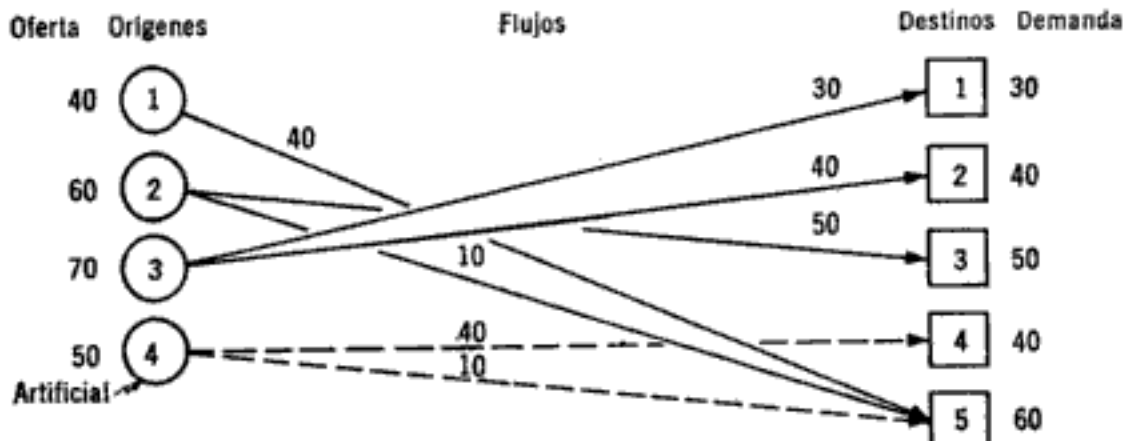


Figura 3.4

## 284 Problemas de transporte y asignación

¿Qué interpretación real le dá usted a los flujos  $X_{44}$  y  $X_{45}$ ?

### 3.5. Problemas con capacidad restringida en sus flujos de transporte

La formulación matemática de este tipo de problemas es

$$\text{Mín } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} X_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} \leq a_i \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} \geq b_j \quad j = 1, \dots, n,$$

$$0 \leq X_{ij} \leq u_{ij} \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n.$$

Este tipo de problemas puede resolverse por medio de técnicas de *programación lineal con cota superior*, o de una manera más eficiente, por medio de *redes de optimización* como se ve en el capítulo siguiente.

### 3.6. Problemas de transbordo o transportes con nodos intermedios<sup>15</sup>

Hasta este momento se supuso que el movimiento del flujo es de un origen a un destino. Sin embargo, pueden existir problemas donde se permita adicionalmente el flujo de destinos a orígenes.<sup>16</sup> En este último caso los orígenes actúan como destinos y los destinos como orígenes.

Si en el problema original existen  $m$  orígenes (numerados  $1, 2, \dots, m$ ) y  $n$  destinos (numerados por  $m + 1, m + 2, \dots, m + n$ ), y si además se permite la dirección del flujo en ambos sentidos (de origen a destino y de destino a origen), se puede hablar de un problema con  $m + n$  orígenes y  $m + n$  destinos. Un problema de transporte de este tipo, donde el flujo puede dirigirse en ambos sentidos, se le conoce como un *problema de transbordo* o *transporte con nodos intermedios*.

En forma de matriz se tiene

<sup>15</sup> En inglés se les conoce como "*transshipment problems*".

<sup>16</sup> Por ejemplo, este sería el caso de las devoluciones de un cierto producto del centro de consumo a la fábrica de origen.

		Destinos						Oferta	
		1	2	...	m	m+1	...		m+n
Orígenes	1	$c_{11}$	$c_{12}$	...	$c_{1m}$	$c_{1,m+1}$	...	$c_{1,m+n}$	$a_1$
	2	$c_{21}$	$c_{22}$	...	$c_{2m}$	$c_{2,m+1}$	...	$c_{2,m+n}$	$a_2$
	⋮	.....						.....	⋮
	⋮	.....						.....	⋮
	m	$c_{m1}$	$c_{m2}$	...	$c_{mm}$	$c_{m,m+1}$	...	$c_{m,m+n}$	$a_m$
	m+1	$c_{m+1,1}$	$c_{m+1,2}$	...	$c_{m+1,m}$	$c_{m+1,m+1}$	...	$c_{m+1,m+n}$	0
⋮	.....						.....	⋮	
⋮	.....						.....	⋮	
m+n	$c_{m+n,1}$	$c_{m+n,2}$	...	$c_{m+n,m}$	$c_{m+n,m+1}$	...	$c_{m+n,m+n}$	0	
Demanda		0	0	0	0	$b_1$	$b_n$		

Costos

La oferta de los orígenes  $m + 1, m + 2, \dots, m + n$  es cero, porque originalmente se trataban de centros de consumo. Análogamente, la demanda en los destinos  $1, 2, \dots, m$  es cero, porque originalmente se trataba de centros productores. En pocas palabras, se está diciendo que el flujo neto en los orígenes  $1, 2, \dots, m$  debe ser respectivamente  $a_1, a_2, \dots, a_m$  y en los centros de consumo  $m + 1, m + 2, \dots, m + n$  respectivamente de  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Matemáticamente se tiene:

$$\text{Mín } Z = \sum_{i=1}^{m+n} \sum_{j=1}^{m+n} c_{ij} X_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m+n} X_{ik} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m+n} X_{ki} = a_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m+j}}^{m+n} X_{k,m+j} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m+j}}^{m+n} X_{m+j,k} = b_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m+n$$

$$j = 1, 2, \dots, m+n$$

Este problema lineal se podría resolver fácilmente como un problema de transporte, si se supiera de antemano la cantidad de flujo que entrará y saldrá de cada uno de los  $m + n$  puntos. Lamentablemente estas cantidades son parte del problema de decisión y por lo tanto no se les conoce. Sin embargo no hay inconveniente en fijar una cota superior a cada una de estas variables.



Solución:

Se sabe que en una base óptima no se pueden encontrar simultáneamente los flujos  $X_{ij}$  y  $X_{ji}$   $i \neq j$  ambos con valores positivos. Intuitivamente se observa que el costo se reduce si se envía el flujo neto, es decir:

$$\begin{aligned}
 & X_{ij} - X_{ji}, \text{ si } X_{ij} \geq X_{ji}, \quad i \neq j, \\
 & X_{ji} - X_{ij}, \text{ si } X_{ji} \geq X_{ij}, \quad i \neq j.
 \end{aligned}$$

Se concluye por lo tanto, que un flujo  $X_{ij}$   $i \neq j$  no debe pasar más de una vez<sup>17</sup> por un determinado punto  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m + n$ . El valor máximo que  $X_{ij}$ ,  $i \neq j$  puede alcanzar es de  $\theta$  donde

$$\theta = \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Los flujos no deseables, es decir los flujos en exceso en un punto  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m + n$  se previenen mediante una absorción<sup>18</sup> del tipo  $X_{kk}$  a un costo  $c_{kk} = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, m + n$ . Por lo tanto, si se incrementan las demandas de todos los destinos en  $\theta$  unidades, las ofertas en todos los orígenes en  $\theta$  unidades, y se hacen todas las  $c_{kk} = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , el problema anterior se convierte en un problema de transporte con las siguientes características.

		Destinos						Ofertas	
		1	2	...	$m$	$m + 1$	...		$m + n$
Orígenes	1	0	$c_{12}$	...	$c_{1m}$	$c_{1,m+1}$	...	$c_{1,m+n}$	$a_1 + \theta$
	2	$c_{21}$	0	...	$c_{2m}$	$c_{2,m+1}$	...	$c_{2,m+n}$	$a_2 + \theta$
	.	.	.	...	.	.	...	.	.
	.	.	.	...	.	.	...	.	.
	.	.	.	...	.	.	...	.	.
	.	.	.	...	.	.	...	.	.
	$m$	$c_{m1}$	$c_{m2}$	...	0	$c_{m,m+1}$	...	$c_{m,m+n}$	$a_m + \theta$
	$m + 1$	$c_{m+1,1}$	$c_{m+1,2}$	...	$c_{m+1,m}$	0	...	$c_{m+1,m+n}$	$\theta$
	.	.	.	...	.	.	...	.	.
	.	.	.	...	.	.	...	.	.
$m + n$	$c_{m+n,1}$	$c_{m+n,2}$	...	$c_{m+n,m}$	$c_{m+n,m+1}$	...	0	$\theta$	
Demanda	$\theta$	$\theta$	...	$\theta$	$b_1 + \theta$	...	$b_n + \theta$		
$c_{ij} \geq 0$		Costos							
$c_{ii} = 0$									

<sup>17</sup> Si pasara  $p$  veces el flujo  $X_{ij}$  por un determinado punto  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m + n$ , la función objetivo aumentaría en  $p \cdot c_{ij} > 0$ .

<sup>18</sup> La absorción significa que el flujo no deseable se queda recirculando en el nodo  $k$ .

Este problema se resuelve por el algoritmo de transporte.

*Ejemplo.* Supóngase que existen dos orígenes, con ofertas de 100 y 200 unidades respectivamente y tres centros de consumo con demandas de 100 unidades cada uno. La matriz de costos unitarios es:

		Destinos			Oferta
		1	2	3	
Orígenes	A	10	20	30	100
	B	20	50	40	200
Demanda		100	100	100	

Costos

Una representación gráfica del problema balanceado es la siguiente:

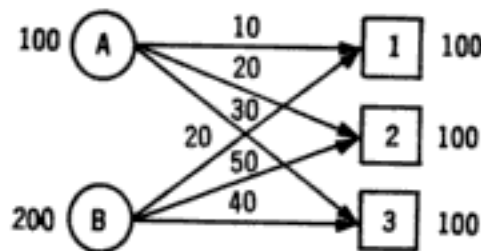


Figura 3.5

Se supone que los destinos pueden ahora enviar flujo y los orígenes recibir flujo. Gráficamente se tiene lo siguiente:

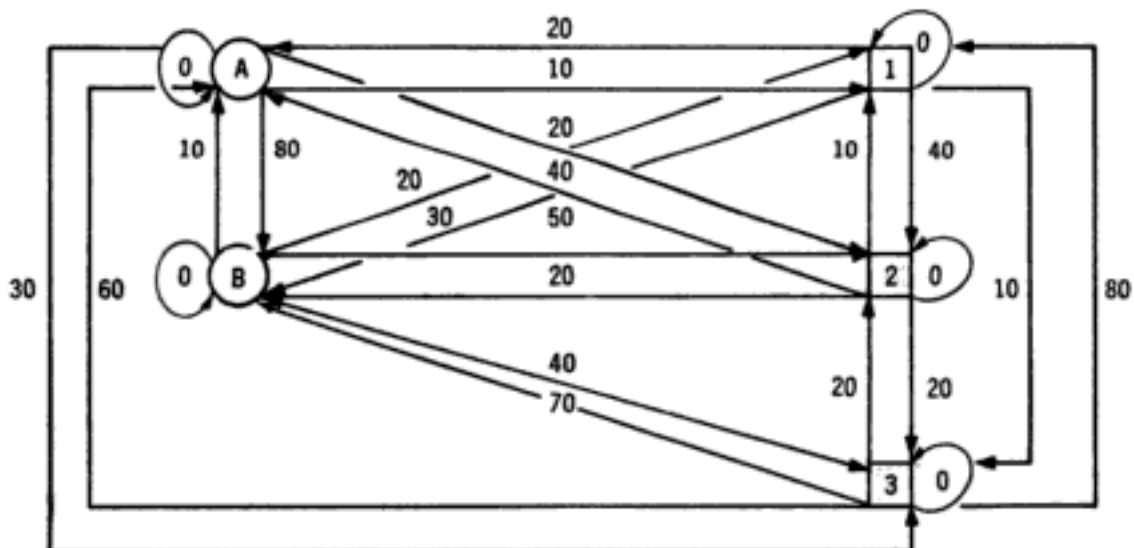


Figura 3.6

## 288 Problemas de transporte y asignación

en que el número asignado a cada arco es el costo unitario del arco. Obviamente  $\theta = 300$ , y la matriz de costo del problema de transporte asociado al diagrama anterior es:

		Destinos					Oferta
		A	B	1	2	3	
Orígenes	A	0	80	10	20	30	100 + 300
	B	10	0	20	50	40	200 + 300
	1	20	30	0	40	10	300
	2	40	20	10	0	20	300
	3	60	70	80	20	0	300
Demanda		300	300	100+300	100+300	100+300	

Costos

Después de aplicar el algoritmo de transporte a esta última matriz de costos se obtiene la siguiente solución óptima:

		Destinos					Oferta
		A	B	1	2	3	
Orígenes	A	300			100		400
	B		300	200			500
	1			200		100	300
	2				300		300
	3					300	300
Demanda		300	300	400	400	400	

Flujos

Si se ignoran los flujos del tipo  $X_{ii}$ ,  $i = A, B, 1, 2, 3$ , la representación gráfica de la solución óptima es:

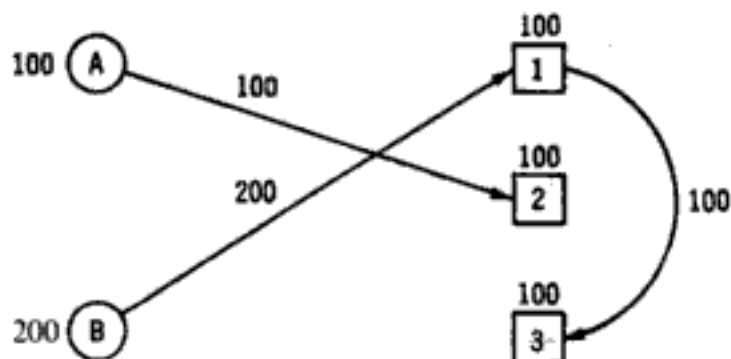


Figura 3.7

El costo óptimo es \$7,000. Nótese que el único nodo que termina funcionando como origen y destino al mismo tiempo, es el nodo 1, que recibe 200 unidades de *B* y manda 100 unidades al nodo 3, quedando un flujo neto de 100 unidades en 1.

### 3.7. Problemas de asignación

La formulación de un problema de asignación es la siguiente

$$\text{Mín } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} X_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, n$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$j = 1, \dots, n.$$

De hecho las variables  $X_{ij}$  sólo pueden tomar el valor 0 ó 1. Toman el valor 1 si el origen  $i$  se hace corresponder al destino  $j$ , y 0 en caso contrario.

Este tipo de problemas son lineales, con una estructura de transporte, sólo que la oferta en cada origen es de valor uno y la demanda en cada destino es también de valor uno. Sería muy ineficiente resolver este tipo de problemas por medio del *método simplex* o por medio del *de transporte*. Debido a la estructura propia de los problemas de asignación, existen métodos de solución llamados *algoritmos de asignación* que son más eficientes que el *simplex* o que el *método de transporte*.

Se puede pensar intuitivamente que en un problema de asignación, los orígenes son personas buscando un trabajo y los destinos son trabajos disponibles. Existe un costo  $c_{ij}$  por asignar a la persona  $i$  a un trabajo  $j$ . Una mala asignación, por ejemplo, un barrendero al puesto de secretaria bilingüe, puede acarrear un costo muy elevado. La restricción que existe en este tipo de problemas es que a cada persona se le asignará un solo trabajo, y a cada trabajo se le asignará una sola persona.

Una condición necesaria y suficiente para que este tipo de problemas tenga una solución, es que estén balanceados, es decir que la oferta total sea igual a la demanda total. En otras palabras, si hay  $m$  orígenes y  $n$  destinos, se requiere que  $m$  y  $n$  sean iguales. A un problema de asignación desbalanceado se le balancea del mismo modo que a un problema de transporte.

El algoritmo que se presenta a continuación para resolver problemas de asignación se conoce como el *método húngaro*, debido a que fueron

## 290 Problemas de transporte y asignación

dos matemáticos húngaros, König (1916)<sup>19</sup> y Egervary (1931),<sup>20</sup> los que aportaron las teorías que sirven de base a este método.

### Algoritmo húngaro

Dada una matriz  $\mathbf{M}$  de  $m \times n$ , se representa por  $\mathbf{L}$  el conjunto de todas las líneas o filas que se denominarán  $L_1, L_2, \dots, L_m$  y por  $\mathbf{C}$  el conjunto de todas las columnas que se denominarán  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . En general, los elementos de la matriz  $\mathbf{M}$  son ceros y diversos números reales.

Se denomina como un *soporte* de  $\mathbf{M}$  al conjunto de filas y/o columnas, tal que si se omiten estas filas y/o columnas desaparecen todos los ceros de la matriz.

Si un soporte se compone de  $p$  filas  $L_{i_1}, L_{i_2}, \dots, L_{i_p}$  y  $q$  columnas  $C_{j_1}, C_{j_2}, \dots, C_{j_q}$ , se tiene que  $p + q \leq \min(m, n)$  porque a lo más un soporte contiene un número máximo de filas o columnas dado por  $\min(m, n)$ .

Se define como *índice de diseminación* de una matriz al número mínimo de filas o columnas que forman un soporte. Se denotará al *índice de diseminación* de una matriz  $\mathbf{M}$  por  $\mathbf{D}(\mathbf{M})$ .

Un conjunto de  $k$  ceros de una matriz forma un *concatenamiento* si las  $k$  filas y las  $k$  columnas del conjunto de esos  $k$  ceros, se encuentran en la intersección de  $k$  diferentes filas y columnas.

Se define como *índice cuadrado* de una matriz  $\mathbf{M}$  al *concatenamiento máximo*, es decir a aquel *concatenamiento* que contiene el máximo número de ceros. El *índice cuadrado* de una matriz  $\mathbf{M}$ , se escribe  $\mathbf{O}(\mathbf{M})$ .

La teoría del algoritmo de asignación se basa en el descubrimiento de König<sup>21</sup> de que

$$\mathbf{D}(\mathbf{M}) = \mathbf{O}(\mathbf{M}),$$

es decir, que el *número mínimo de líneas en un soporte es igual al máximo número de ceros de un concatenamiento* en una matriz  $\mathbf{M}$ . La prueba de este teorema se puede encontrar en las referencias [10, 17, 18, 19].

El *método húngaro* para resolver problemas de asignación es el siguiente:

*Paso 1.* Dada una matriz de costos de un problema de asignación balanceado,<sup>22</sup> reste en cada columna y en cada renglón el número más pequeño de esa columna ó renglón, del resto de los elementos en esa columna o renglón. En otras palabras

<sup>19</sup> Ver referencia [17].

<sup>20</sup> Ver referencia [10].

<sup>21</sup> Véase las referencias [10, 17].

<sup>22</sup> Si el problema de asignación está desbalanceado, el balance se logra como en el problema de transporte. Si  $m > n$  ( $m$  siendo los orígenes y  $n$  los destinos) se introducen  $m - n$  destinos con demanda unitaria cada uno y costos nulos. Si  $m < n$ , se introducen  $n - m$  orígenes, cada uno con oferta unitaria y costo nulo.

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \underset{i}{\text{Mín}} c_{ij} \quad j = 1, \dots, n$$

$$\bar{c}_{ij} = \bar{c}_{ij} - \underset{j}{\text{Mín}} \bar{c}_{ij} \quad i = 1, \dots, m.$$

*Paso 2.* En la nueva matriz de costos selecciónese un cero en cada renglón y columna. Elimine durante el proceso de selección la columna y el renglón al que pertenece el cero seleccionado. Si al finalizar este paso se ha hecho una *asignación completa* de ceros, es decir, cada origen tiene asignado un solo destino y cada destino tiene asignado un solo origen, se ha encontrado la asignación óptima. En caso contrario continúe en el paso 3.

*Paso 3.* Este paso encuentra la condición de König de que  $\mathbf{0}(\mathbf{M}) = \mathbf{D}(\mathbf{M})$ , siendo  $\mathbf{M}$  la matriz de costos del paso 2. Este paso tiene 6 secciones, a saber:

3-1 Marque cada fila que *no contiene un cero asignado*.

3-2 Marque cada columna que *contiene un cero* (no necesariamente asignado) en la fila marcada en el paso 3-1.

3-3 Marque cada fila que *contiene un cero asignado* en la columna marcada en el paso 3-2.

3-4 Repita los pasos 3-2 y 3-3 hasta que no se puedan marcar más columnas o filas.

3-5 Tache las filas *no* marcadas y las columnas marcadas.

3-6 Selecciónese al número más pequeño de los elementos *no* cubiertos por una tachadura horizontal o vertical. Reste ese elemento del resto de los no tachados y sume ese elemento a los tachados en cruz, es decir, por una tachadura horizontal y vertical. Los elementos cruzados por una sola tachadura no cambian. Regrésese al paso 2.

*Ejemplo.* El gobierno va a construir 3 proyectos, *A*, *B*, *C*, y 4 compañías constructoras están compitiendo por los proyectos. La siguiente matriz resume la cotización de cada compañía por proyecto, en millones de pesos.

Compañía \ Proyecto	Proyecto		
	A	B	C
1	5	13	19
2	13	10	15
3	11	15	27
4	15	9	6

Cotización en millones de pesos

Por motivos políticos y de un reparto más equitativo de las erogaciones se decidió que cada empresa tendrá contrato por un solo proyecto, y que cada proyecto será realizado por una sola compañía.

## 292 Problemas de transporte y asignación

*Paso 0.* Para balancear ( $m = n$ ) el problema, se agrega un proyecto artificial  $D$ , con cotización de cero pesos. Es decir

<i>Compañía</i> \ <i>Proyecto</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
	1	5	13	19
2	13	10	15	0
3	11	15	27	0
4	15	9	6	0

*Paso 1.* Construyendo primero ceros en cada columna

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
1	0	4	13	0
2	8	1	9	0
3	6	6	21	0
4	10	0	0	0

y después ceros en cada fila, se tiene

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
1	0	4	13	0
2	8	1	9	0
3	6	6	21	0
4	10	0	0	0

*Paso 2.* Una posible asignación es

- 1-*A* (se elimina fila 1, columna *A*)
- 2-*D* (se elimina fila 2, columna *D*)
- 4-*B* (se elimina fila 4, columna *B*).

Como el proyecto *C* y la compañía 3 no han sido asignados, se continúa en el paso 3.

*Paso 3-1.* Solamente la fila 3 no tiene asignación. Se le marca.

*Paso 3-2.* En la fila 3 solamente la columna *D* tiene un cero. Se le marca.

*Paso 3-3.* En la columna *D* hay un cero asignado en la fila 2. Se le marca.

*Paso 3-4.* En la fila 2 hay un cero en la columna *D* y como *D* ya está marcada se continúa en el paso 3-5.

		A	B	C	X D
	1	0	4	13	0
X	2	8	1	9	0
X	3	6	6	21	0
	4	10	0	0	0

Paso 3-5. La condición de König se representa gráficamente a continuación.

		A	B	C	X D
	1	0	4	13	0
X	2	8	1	9	0
X	3	6	6	21	0
	4	10	0	0	0

Paso 3-6. El número no cubierto más pequeño es 1. La nueva matriz es

		A	B	C	D
1		0	4	13	1
2		7	0	8	0
3		5	5	20	0
4		10	0	0	1

Paso 2. Una nueva asignación es

- 1-A (se elimina fila 1, columna A)
- 2-B (se elimina fila 2, columna B)
- 3-D (se elimina fila 3, columna D)
- 4-C (se elimina fila 4, columna C).

La asignación es óptima, es decir que

la compañía 1 realiza el proyecto A por 5 millones,  
 la compañía 2 realiza el proyecto B por 10 millones,  
 la compañía 4 realiza el proyecto C por 6 millones, y  
 a la compañía 3 no se le contrata.

El costo total es de \$ 21 millones.

*Ejemplo.* Supóngase que Aero-México tiene el siguiente horario de vuelos diarios México-Río de Janeiro.



## 294 Problemas de transporte y asignación

<i>Salida México</i>	<i>Vuelo</i>	<i>Llegada Río de Janeiro</i>
6:00	A	12:00
7:30	B	13:30
11:30	C	17:30
19:00	D	1:00
0:30	E	6:30

<i>Llegada México</i>	<i>Vuelo</i>	<i>Salida Río de Janeiro</i>
11:30	1	5:30
15:00	2	9:00
21:00	3	15:00
0:30	4	18:30
6:00	5	00:00

El problema que tiene Aero-México, es la calendarización de la tripulación en estos vuelos. Resulta que una tripulación que sale de México un lunes a las 7:30, llega a Río el mismo lunes a las 13:30; sale el martes de Río a las 9 y llega a México a las 15 horas; cobra desde el lunes a las 7:30 hasta el martes a las 15 horas. El tiempo transcurrido desde las 13:30 del lunes hasta las 9 del martes siguiente, es un tiempo muerto. Se trata entonces de reducir los tiempos muertos de las tripulaciones en estos vuelos, sujeto a ciertas condiciones. En este caso, las condiciones son que cada tripulación debe descansar al menos 8 horas, pero no más de 24.

El problema se puede enunciar de la siguiente manera: dónde deben vivir las tripulaciones y qué tripulaciones deben asignarse a qué vuelos, tal que los tiempos muertos totales se minimicen y al mismo tiempo se respeten las condiciones de descanso de las tripulaciones.

Supóngase una tripulación que vive en la ciudad de México, que trabaja en el vuelo *C* y regresa en el vuelo 2 de Río de Janeiro. De acuerdo con los tiempos de vuelo, esa tripulación llega a las 17:30 y sale a las 9 de la mañana rumbo a México, tras 15 y media horas de tiempo muerto. En cambio, una tripulación que vive en Río y sale en el vuelo 1 hacia México, y regresa en el vuelo *A* a Río, tiene un tiempo muerto de 18 y media horas. Así se pueden construir 2 matrices de tiempos muertos, a saber:

	1	2	3	4	5	
<i>A</i>	17.5	21	3	6.5	12	MATRIZ I
<i>B</i>	16	19.5	1.5	5	10.5	
<i>C</i>	12	15.5	21.5	1	6.5	
<i>D</i>	4.5	8	14	17.5	23	
<i>E</i>	23	2.5	8.5	12	17.5	

Tiempos muertos teóricos para  
tripulaciones con sede en  
México (horas).

	1	2	3	4	5
A	18.5	15	9	5.5	0
B	20	16.5	10.5	7	1.5
C	0	20.5	14.5	11	5.5
D	7.5	4	22	18.5	13
E	13	9.5	3.5	0	18.5

MATRIZ II

Tiempos muertos teóricos para tripulaciones con sede en Río de Janeiro (horas).

Dadas estas dos matrices, se construye una nueva, donde los elementos  $t_{ij}$  serán

$$t_{ij} = \min(t_{ijI}, t_{ijII}),$$

siempre y cuando  $8 \leq t_{ij} \leq 24$ . En caso de que  $t_{ij}$  no cumpla con esta restricción, la asignación  $i, j$  es imposible y por lo tanto,  $t_{ij} = M$ , donde  $M \gg 0$ . En efecto, la nueva matriz es

	1	2	3	4	5
A	17.5	15	9	$M$	12
B	16	16.5	10.5	$M$	10.5
C	12	15.5	14.5	11	$M$
D	$M$	8	14	17.5	13
E	13	9.5	8.5	12	17.5

A esta matriz se le aplica el *método húngaro*. Nótese que el problema ya está balanceado.

*Paso 1.* Ceros en cada columna.<sup>23</sup>

	1	2	3	4	5
A	5.5	7	0.5	$M$	1.5
B	4	8.5	2	$M$	0
C	0	7.5	6	0	$M$
D	$M$	0	5.5	6.5	2.5
E	1	1.5	0	1	7

Ceros en cada fila.<sup>24</sup>

<sup>23</sup>  $M - t_{ij} = M$ .

<sup>24</sup>  $M - t_{ij} = M$ .

296 Problemas de transporte y asignación

	1	2	3	4	5
A	5	6.5	0	M	1
B	4	8.5	2	M	0
C	0	7.5	6	0	M
D	M	0	5.5	6.5	2.5
E	1	1.5	0	1	7

Paso 2. Posible asignación:

- A - 3
- B - 5
- C - 4
- D - 2.

Como las rutas E y 1 no han sido asignadas, se continúa en el paso 3.

Paso 3-1 a 3-5. Condición de König.

		1	2	X 3	4	5
X	A	5	6.5	0	M	1
	B	4	8.5	2	M	0
	C	0	7.5	6	0	M
	D	M	0	5.5	6.5	2.5
X	E	1	1.5	0	1	7

Paso 3-6.

	1	2	3	4	5
A	4	5.5	0	M	0
B	4	8.5	3	M	0
C	0	7.5	7	0	M
D	M	0	6.5	6.5	2.5
E	0	0.5	0	0	6

Paso 2. Nueva asignación

- A - 3 con tiempo muerto de 9 horas,
- B - 5 con tiempo muerto de 10:5 horas,
- C - 1 con tiempo muerto de 12 horas,
- D - 2 con tiempo muerto de 8 horas,
- E - 4 con tiempo muerto de 12 horas.

Esta asignación es óptima. Refiriéndonos a las dos matrices originales se tiene que en términos de donde viven las tripulaciones la asignación óptima es

Vuelo	Proviene de	Observaciones
A - 3	(Matriz II)	Sale Río 15 h. Llega México 21 h. (DIA 1) Sale México 6 h. Llega Río 12 h. (DIA 2)
B - 5	(Matriz I)	Sale México 7:30 h. Llega Río 13:30 h. (DIA 1) Sale Río 00:00 h. Llega México 6:00 h. (DIA 2)
C - 1	(Matriz I)	Sale México 11:30 h. Llega Río 17:30 h. (DIA 1) Sale Río 5:30 h. Llega México 11:30 h. (DIA 2)
D - 2	(Matriz I)	Sale México 19:00 h. Llega Río 1:00 h. (DIA 1) Sale Río 9:00 h. Llega México 15:00 h. (DIA 2)
E - 4	(Matriz I)	Sale México 0:30 h. Llega Río 6:30 h. (DIA 1) Sale Río 18:30 h. Llega México 0:30 h. (DIA 2)

El tiempo muerto total mínimo es de 51.5 h. De una manera similar se podría encontrar asignación de tripulantes a vuelos que proporcione un tiempo muerto total máximo. Basta para eso construir una matriz  $t_{ij}$ , tal que

$$t_{ij} = \text{Máx} (t_{ijp}, t_{ijm})$$

$$t_{ij} = M \text{ si no se cumple } 8 \leq t_{ij} \leq 24.$$

El número total de diferentes combinaciones de asignación de tripulantes a vuelos en este problema es de  $5!$ , o sea 120.

### 3.8. Problema de transporte generalizado

El problema que se quiere resolver es

$$\text{Mín } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_{ij} Y_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^n d_{ij} Y_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m f_{ij} Y_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$Y_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$j = 1, \dots, n$$

## 298 Problemas de transporte y asignación

y donde  $a_i \geq 0$ ,  $b_j \geq 0$ ,  $d_{ij} > 0$  (estrictamente positivo),  $f_{ij} \geq 0$  para toda  $i$ ,  $i = 1, \dots, m$  y toda  $j$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Si en la formulación anterior se hace el siguiente cambio de variable:<sup>25</sup>

$$X_{ij} = d_{ij} Y_{ij} \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

$$p_{ij} = \frac{f_{ij}}{d_{ij}}, \quad d_{ij} > 0 \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

$$c_{ij} = \frac{w_{ij}}{d_{ij}}, \quad d_{ij} > 0 \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

se obtiene

$$\text{Mín } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} X_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m p_{ij} X_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n$$

$$X_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m; \\ j = 1, \dots, n.$$

Este último problema lineal se conoce con el nombre de *problema de transporte generalizado*. Este tipo de problemas se puede presentar frecuentemente en la realidad con un pequeño cambio, y es que en vez de tener restricciones de igualdad de la forma

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, m,$$

se tienen las siguientes restricciones de desigualdad:

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} < a_i \quad i = 1, \dots, m.$$

En ambos casos, los métodos de solución que a continuación se explican, son exactamente los mismos.

*Algoritmo del problema de transporte generalizado.*

Sea el problema a resolver el siguiente:

$$\text{Mín } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} X_{ij}$$

<sup>25</sup> También se puede tener  $X_{ij} = f_{ij} Y_{ij}$ , en cuyo caso  $f_{ij} > 0$ . Véase el ejemplo de ilustración de esta sección.

sujeto a

$$(P) \quad \sum_{j=1}^n X_{ij} \leq a_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m p_{ij} X_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n.$$

Este tipo de problemas también tiene un método de solución propio, que es más eficiente que el *método simplex*.

El problema dual asociado es

$$\text{Máx } G = \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j$$

sujeto a

$$(D) \quad u_i + p_{ij} v_j \leq c_{ij} \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n,$$

$$u_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$v_j \text{ no restringida en signo } j = 1, \dots, n.$$

Del teorema 2-13, llamado de *holgura complementaria*, se desprende que un conjunto de variables  $X_{ij}$  es óptimo para el problema (P), si existen variables duales  $u_i$  y  $v_j$  en (D), tales que

$$X_{ij} > 0 \text{ implica } u_i + p_{ij} v_j = c_{ij} \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n,$$

$$u_i + p_{ij} v_j < c_{ij} \text{ implica } X_{ij} = 0 \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n.$$

Estas dos condiciones son suficientes para poder obtener una solución óptima al problema (P). El tableau de trabajo para este tipo de problemas presenta la siguiente estructura:

		Destinos				Oferta
		1	2	...	n	
1		$p_{11} \mid c_{11}$	$p_{12} \mid c_{12}$	...	$p_{1n} \mid c_{1n}$	$a_1$
		$X_{11}$	$X_{12}$		$X_{1n}$	$u_1$
2		$p_{21} \mid c_{21}$	$p_{22} \mid c_{22}$	...	$p_{2n} \mid c_{2n}$	$a_2$
		$X_{21}$	$X_{22}$		$X_{2n}$	$u_2$
...		.	.	.	.	.
		.	.	.	.	.
m		$p_{m1} \mid c_{m1}$	$p_{m2} \mid c_{m2}$	...	$p_{mn} \mid c_{mn}$	$a_m$
		$X_{m1}$	$X_{m2}$		$X_{mn}$	$u_m$
Demanda		$b_1$	$b_2$	...	$b_n$	
		$v_1$	$v_2$		$v_n$	

### 300 Problemas de transporte y asignación

En un problema de transporte generalizado con  $m$  orígenes y  $n$  destinos, existen  $m + n$  vectores en la base. Estos son los pasos a seguir:

*Paso 1.* (Tableau.) Constrúyase un tableau similar al indicado anteriormente.

*Paso 2.* (Solución inicial.) De cada columna del tableau escójase el  $c_{ij}$  más pequeño e increméntese  $X_{ij}$  a un valor  $\theta$ , tal que

$$\begin{aligned} X_{ij} = \theta &= \text{Mín} \left( a_i, \frac{b_j}{p_{ij}} \right) \\ a_i^1 &= a_i - X_{ij}, \\ b_j^1 &= b_j - p_{ij}X_{ij}. \end{aligned}$$

Elimínese la columna o fila que se satura<sup>26,27</sup>. Si tanto la oferta como la demanda de la posición  $(i, j)$  disminuyen a cero, elimínese la fila  $i$  o la columna  $j$ , pero no ambas.

*Paso 3.* Al terminar el paso 2 puede que quede una fila o columna sin saturarse, es decir que alguna oferta o demanda seguirá siendo positiva. En este caso se introduce una variable artificial, añadiendo un elemento de déficit  $(r, s)$  con  $(0, s)$  o  $(r, 0)$  a la fila o columna, respectivamente, que no esté saturada. En este caso,  $r$  es la cantidad que aún queda de oferta en la fila no saturada, o en caso de que sea una columna,  $s$  es la cantidad de demanda de la columna no saturada.

*Paso 4.* El paso anterior determina qué vectores  $X_{ij}$  están en la base. Cualquier vector en la base es no-negativo. Se aplica el teorema 2-12 para resolver las  $m + n$  ecuaciones lineales:

$$u_i + p_{ij}v_j = c_{ij} \quad \text{para } i, j \text{ en la base.}$$

Si hay un elemento de déficit  $(0, s)$  en la columna  $k$ , entonces  $v_k = s$ . Por el otro lado, si hay un elemento de déficit  $(r, 0)$  en la fila  $i$ , entonces  $u_i = r$ .

*Paso 5.* El criterio de optimalidad, para un problema de maximización, está dado por los costos marginales:

$$z_{ij} - c_{ij} = c_{ij} - (u_i + p_{ij}v_j).$$

Si todas las  $z_{ij} - c_{ij} \geq 0$ , la solución actual es óptima. En caso contrario, selecciónese como vector de entrada a la base aquél cuyo  $z_{ij} - c_{ij}$  es el más negativo.

*Paso 6.* Si  $X_{ij}$  entra a la base, lo hace con un valor de  $\Delta$ . Esto afectará la factibilidad de la nueva solución, al no cumplirse las siguientes restricciones:

<sup>26</sup> La oferta y/o la demanda correspondiente(s) disponible(s) disminuye(n) a cero.

<sup>27</sup>  $a_i^1$  y  $b_j^1$  son los nuevos valores de oferta y demanda en la posición  $(i, j)$ .

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m p_{ij} X_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, n.$$

Con objeto de restablecer la factibilidad, se resuelven  $m + n$  ecuaciones lineales, de la forma.<sup>28</sup>

$$\sum_{j=1}^n (X_{ij} + E_{ij} + \Delta) = a_i$$

para  $i, j$ , en la base.

$$\sum_{i=1}^m p_{ij}(X_{ij} + E_{ij} + \Delta) = b_j$$

Pero esto significa que:<sup>28</sup>

$$\sum_{j=1}^n (E_{ij} + \Delta) = 0 \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m p_{ij}(E_{ij} + \Delta) = 0 \quad j = 1, \dots, n.$$

Una vez resueltas estas ecuaciones, el valor de  $\Delta$  ( $\Delta \geq 0$ ) se determina en la nueva base como el máximo valor que conserve la factibilidad de las  $X_{ij}$ , es decir  $X_{ij} \geq 0$ . Regrédese al paso 3.

*Ejemplo.<sup>29</sup>* Resolver por el método de transporte generalizado el siguiente problema:

$$\text{Mín } Z = 4X_{11} + 2X_{12} + X_{21} + 5X_{22}$$

<sup>28</sup> Recuerde que la  $\Delta$  aparecerá en sólo dos ecuaciones que dependen de la  $X_{ij}$  que entra a la base.

<sup>29</sup> El formato de este problema es

$$\text{Mín } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} X_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} X_{ij} \leq a_i \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, n,$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m,$$

$$j = 1, \dots, n.$$



### 302 Problemas de transporte y asignación

sujeto a

$$\begin{aligned} 0.5X_{11} + 0.1X_{12} &\leq 10 \\ X_{21} + 2X_{22} &\leq 25 \\ X_{11} + X_{21} &= 15 \\ X_{12} + X_{22} &= 30 \\ X_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Agregando las variables de holgura  $X_{1s}$  y  $X_{2s}$  en la primera y segunda restricción respectivamente, se tiene

$$\text{Mín } Z = 4X_{11} + 2X_{12} + X_{21} + 5X_{22}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 0.5X_{11} + 0.1X_{12} + X_{1s} &= 10 \\ X_{21} + 2X_{22} + X_{2s} &= 25 \\ X_{11} + X_{21} &= 15 \\ X_{12} + X_{22} &= 30 \\ X_{1s} \geq 0, \quad X_{2s} \geq 0, \quad X_{ij} \geq 0; \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Paso 1. (Tableau)

		Destinos						Oferta
		1		2		s		
Orígenes	1	1/2	4	.1	2	1	0	10
		$X_{11}$		$X_{12}$		$X_{1s}$		$u_1$
2	1	1	1	2	5	1	0	25
		$X_{21}$		$X_{22}$		$X_{2s}$		$u_2$
Demanda		15		30		...		
		$v_1$		$v_2$		$v_s$		

Paso 2.  $\theta = \text{Mín} \left( \frac{a_i}{p_{ij}}, b_j \right)$

$$\text{i) } X_{11} = \text{Mín} \left( \frac{a_1}{p_{11}}, b_1 \right) = \text{Mín} \left( \frac{10}{1/2}, 15 \right) = 15$$

$$b'_1 = b_1 - X_{11} = 15 - 15 = 0$$

$$a'_1 = a_1 - p_{11}X_{11} = 10 - \frac{1}{2}(15) = 2.5$$

$$\text{ii) } X_{12} = \text{Mín} \left( \frac{a'_1}{p_{12}}, b_2 \right) = \text{Mín} \left( \frac{2.5}{.1}, 30 \right) = 25$$

$$a''_1 = a'_1 - p_{12}X_{12} = 2.5 - 0.5(25) = 0$$

$$b'_2 = b_2 - X_{12} = 30 - 25 = 5$$

$$\text{iii) } X_{22} = \text{Mín} \left( \frac{a_2}{p_{22}}, b'_2 \right) = \text{Mín} \left( \frac{25}{2}, 5 \right) = 5$$

$$a'_2 = a_2 - p_{22}X_{22} = 25 - 2(5) = 15$$

$$b''_2 = b'_2 - X_{22} = 5 - 5 = 0$$

$$\text{iv) } X_{2s} = \text{Mín} \left( \frac{a'_2}{p_{2s}}, b_s \right) = \text{Mín} \left( \frac{15}{1}, - \right) = 15$$

$$a''_2 = a'_2 - p_{2s}X_{2s} = 15 - 1(15) = 0$$

$b_s$  no existe.

La primera solución queda

	1	2	Holgura	Oferta
1	15	25		10
2		5	15	25
Demanda	15	30	..	

La solución obtenida es factible, ya que:

$$\sum_{i=1}^2 X_{ij} = b_j \quad j = 1, 2$$

$$15 = 15 \text{ para el primer centro de consumo}$$

$$25 + 5 = 30 \text{ para el segundo centro de consumo}$$

$$\sum_{j=1}^2 p_{ij} X_{ij} = a_i \quad i = 1, 2$$

$$\frac{1}{2}(15) + .1(25) = 10 \text{ para el primer centro de oferta,}$$

$$2(5) + 1(15) = 25 \text{ para el segundo centro de oferta.}$$

*Paso 3.* Se omite porque todas las filas y columnas están saturadas.

*Paso 4.* Aplicando el teorema 2.13 se tiene:

- i) dado que  $X_{11} = 15 > 0$ , entonces  $p_{11}u_1 + v_1 = c_{11}$ , es decir,  $\frac{1}{2}u_1 + v_1 = 4$ ,
- ii) dado que  $X_{12} = 25 > 0$ , entonces  $p_{12}u_1 + v_2 = c_{12}$ , es decir,  $.1u_1 + v_2 = 2$ ,
- iii) dado que  $X_{22} = 5 > 0$ , entonces  $p_{22}u_2 + v_2 = c_{22}$ , es decir,  $2u_2 + v_2 = 5$ ,
- iv) dado que  $X_{2s} = 15 > 0$ , entonces  $p_{2s}u_2 + v_s = c_{2s}$ , es decir,  $u_s = 0$ ,  $v_s$  es igual a 0.

Al resolver el sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas se obtiene como resultado:

### 304 Problemas de transporte y asignación

$$u_2 = 0, v_2 = 5, u_1 = -30, v_1 = 19.$$

Paso 5.

$$z_{ij} - c_{ij} = c_{ij} - (p_{ij}u_i + v_j) \quad i, j \in \mathbf{N}.$$

Los únicos vectores que no están en la base (por lo tanto están en  $\mathbf{N}$ ) son los siguientes:

$$z_{1s} - c_{1s} = 0 - (1(-30) + 0) = 30,$$

$$z_{21} - c_{21} = 1 - (1(0) + 19) = -18.$$

Por lo tanto,  $X_{21}$  entra a la nueva base con un valor  $\Delta$ .

Paso 6. Gráficamente se tiene:

	1	2	s	
1	$15 + E_{11}$	$25 + E_{12}$		10
2	$\Delta$	$5 + E_{22}$	$15 + E_{2s}$	25
	15	30		

Si se quiere mantener factibilidad, se necesita que las siguientes restricciones se cumplan.

$$\sum_{j=1}^s p_{ij} (X_{ij} + E_{ij} + \Delta) = a_i \quad i = 1, 2,$$

o sea

$$1/2 (15 + E_{11}) + 0.1 (25 + E_{12}) = 10,$$

$$1 \cdot \Delta + 2(5 + E_{22}) + 1(15 + E_{2s}) = 25,$$

y además

$$\sum_{i=1}^2 (X_{ij} + E_{ij} + \Delta) = b_j \quad j = 1, 2,$$

o sea

$$15 + E_{11} + \Delta = 15$$

$$25 + E_{12} + 5 + E_{22} = 30.$$

Pero estas ecuaciones son equivalentes a

$$1/2 E_{11} + 0.1 E_{12} = 0,$$

$$\Delta + 2E_{22} + E_{2s} = 0,$$

$$E_{11} + \Delta = 0,$$

$$E_{12} + E_{22} = 0.$$

Se tienen 4 ecuaciones lineales con 5 incógnitas. Se resuelven en función de  $\Delta$ , resultando lo siguiente:

$$E_{12} = 5\Delta,$$

$$E_{2s} = 9\Delta,$$

$$E_{11} = -\Delta,$$

$$E_{22} = -5\Delta.$$

Pero esto, en términos de la nueva base genera que

$$X_{11} = 15 + E_{11} = 15 - \Delta \geq 0, \text{ o sea, } \Delta \leq 15,$$

$$X_{12} = 25 + E_{12} = 25 + 5\Delta \geq 0, \text{ o sea, } \Delta \geq -5,$$

$$X_{21} = \Delta \geq 0 \quad \text{o sea, } \Delta \geq 0,$$

$$X_{22} = 5 + E_{22} = 5 - 5\Delta \geq 0, \text{ o sea, } \Delta \leq 1,$$

$$X_{2s} = 15 + E_{2s} = 15 + 9\Delta \geq 0, \text{ o sea, } \Delta \geq \frac{-15}{9}.$$

Resumiendo todas las condiciones de  $\Delta$  que mantienen a las  $X_{ij} \geq 0$ , se tiene que

$$0 \leq \Delta \leq 1,$$

y el máximo valor que puede adquirir es  $\Delta = 1$ . Se regresa al paso 3.

*Segunda iteración*

*Paso 3.* La nueva solución básica es

	1	2	s	Oferta
1	14	30		10
2	1		24	25
Demanda	15	30		

Esta solución es factible, puesto que

$$14 + 1 = 15,$$

$$30 = 30,$$

$$\frac{1}{2}(14) + 0.1(30) = 10,$$

$$1(1) + 1(24) = 25.$$

Como todas las columnas y filas están saturadas, no se necesita una posición de déficit.

### 306 Problemas de transporte y asignación

*Paso 4.*

Como  $X_{11} > 0$ , se tiene  $1/2u_1 + v_1 = 4$ ,  
 como  $X_{12} > 0$ , se tiene  $0.1u_1 + v_2 = 2$ ,  
 como  $X_{21} > 0$ , se tiene  $u_2 + v_1 = 1$ ,  
 como  $X_{24}$ , se tiene  $(p_{2s}u_2 + v_s = c_{2s})$ , o sea  $1u_2 + 0 = 0$

por lo que

$$u_2 = 0, \quad v_1 = 1, \quad u_1 = 6, \quad v_2 = 1.4, \quad v_s = 0.$$

*Paso 5.*

$$z_{1s} - c_{1s} = 0 - (1(6) + 0) = -6$$

$$z_{22} - c_{22} = 5 - (2(0) + 1.4) = 3.6,$$

y  $X_{1s}$  entra a la base.

*Paso 6.*

$$1/2 E_{11} + 0.1 E_{12} + \Delta = 0,$$

$$E_{21} + E_{2s} = 0,$$

$$E_{11} + E_{21} = 0,$$

$$E_{12} = 0,$$

por lo que

$$E_{11} = -2\Delta,$$

$$E_{2s} = -2\Delta,$$

$$E_{21} = 2\Delta,$$

$$E_{12} = 0,$$

y

$$X_{11} = 14 + E_{11} = 14 - 2\Delta \geq 0, \text{ por lo que } \Delta \leq 7,$$

$$X_{12} = 30 + E_{12} = 30,$$

$$X_{1s} = \Delta \geq 0 \quad \text{por lo que } \Delta \geq 0,$$

$$X_{21} = 1 + E_{21} = 1 + 2\Delta \geq 0, \text{ por lo que } \Delta \geq -1/2,$$

$$X_{2s} = 24 + E_{2s} = 24 - 2\Delta \geq 0, \text{ por lo que } \Delta \leq 12.$$

El rango de factibilidad de  $\Delta$  es  $0 \leq \Delta \leq 7$ , y el valor máximo que  $\Delta$  puede adquirir manteniendo la factibilidad de la nueva base es  $\Delta = 7$ . Se regresa al paso 3.

*Tercera iteración*

*Paso 3.* La nueva solución básica es

	1	2	s	<i>Oferta</i>
1		30	7	10
2	15		10	25
<i>Demanda</i>	15	30		

que el lector puede corroborar que es factible, y por lo tanto no se necesita ningún elemento de déficit.

*Paso 4.*

Como  $X_{13} > 0$ , se tiene  $p_{13}u_1 + v_3 = c_{13}$ , es decir  $u_1 = 0$ , y  $v_3 = 0$ ,

como  $X_{23} > 0$ , se tiene  $p_{23}u_2 + v_3 = c_{23}$ , es decir  $u_2 = 0$ ,

como  $X_{12} > 0$ , se tiene  $p_{12}u_1 + v_2 = c_{12}$ , es decir  $v_2 = 2$ ,

como  $X_{21} > 0$ , se tiene  $p_{21}u_2 + v_1 = c_{21}$ , es decir  $v_1 = 1$ .

*Paso 5.*

$$z_{11} - c_{11} = c_{11} - (p_{11}u_1 + v_1) = 4 - 1 = 3$$

$$z_{22} - c_{22} = c_{22} - (p_{22}u_2 + v_2) = 5 - 2 = 3,$$

por lo que la solución anterior es óptima. Únicamente con el objeto de corroborar, se comprueba que en el punto óptimo, la función objetivo primaria es igual a la función objetivo dual. En efecto:

$$Z = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 c_{ij} X_{ij} = 30(2) + 15(1) + 7(0) + 10(0) = 75,$$

$$G = \sum_{i=1}^2 a_i u_i + \sum_{j=1}^3 b_j v_j = 10(0) + 25(0) + 15(1) + 30(2) = 75.$$

Se ilustra en otro ejemplo el uso del elemento de déficit.

*Ejemplo.<sup>30</sup>* Resuélvase por el método de *transporte generalizado* el siguiente problema:

$$\text{Mín } Z = 4X_{11} - 8X_{12} + 3X_{13} + 6X_{21} + 4X_{22} + 7X_{23}$$

sujeto a

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} = 4$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} = 5$$

$$X_{11} + 2X_{21} = 5$$

$$2X_{12} + X_{22} = 2$$

$$X_{13} + X_{23} = 3$$

$$X_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3.$$

<sup>30</sup> El formato de este problema es igual al formato (P) que se presentó al explicar la teoría. Con el ejemplo anterior y este se han trabajado todos los formatos posibles de los problemas de transporte generalizado.

### 308 Problemas de transporte y asignación

Paso 1. (Tableau)

		Destinos						Oferta
		1		2		3		
Origenes	1	$p_{11} = 1$	$c_{11} = 4$	$p_{12} = 2$	$c_{12} = -8$	$p_{13} = 1$	$c_{13} = 3$	$a_1 = 4$
		$X_{11}$		$X_{12}$		$X_{13}$		$u_1$
	2	$p_{21} = 2$	$c_{21} = 6$	$p_{22} = 1$	$c_{22} = 4$	$p_{23} = 1$	$c_{23} = 7$	$a_2 = 5$
		$X_{21}$		$X_{22}$		$X_{23}$		$u_2$
Demanda		$b_1 = 5$	$v_1$	$b_2 = 2$	$v_2$	$b_3 = 3$	$v_3$	

Paso 2. (Solución inicial)

$$X_{13} = \text{Mín} \left( 4, \frac{3}{1} \right) = 3$$

$$b'_3 = 3 - 3 \cdot 1 = 0$$

$$a'_1 = 4 - 3 \cdot 1 = 1$$

$$X_{11} = \text{Mín} \left( 1, \frac{5}{1} \right) = 1$$

$$b'_1 = 5 - 1 \cdot 1 = 4$$

$$a''_1 = 1 - 1 = 0$$

$$X_{22} = \text{Mín} \left( 5, \frac{2}{1} \right) = 2$$

$$b'_2 = 2 - 2 \cdot 1 = 0$$

$$a'_2 = 5 - 2 = 3$$

$$X_{21} = \text{Mín} \left( 3, \frac{4}{2} \right) = 2$$

$$b''_1 = 4 - 2 \cdot 2 = 0$$

$$a''_2 = 3 - 2 = 1.$$

La solución inicial es por lo tanto:

	1	2	3	Oferta
1	1		3	4
2	2	2		5
Demanda	5	2	3	

Paso 3. (Elemento de déficit.)

Como la oferta  $a_2$  no se redujo a cero, se agrega a la solución anterior un elemento de déficit, con flujo igual a la oferta aún disponible. Gráficamente

	1	2	3	Déficit	Oferta
1	1		3		4
2	2	2		1	5
Demanda	5	2	3		

↙ elemento de déficit correspondiente a una variable artificial

Paso 4.

$$\text{Dado que } \begin{cases} X_{11} > 0 \\ X_{13} > 0 \\ X_{21} > 0 \\ X_{22} > 0 \\ X_{DEF} > 0 \end{cases} \quad \text{se tiene } \begin{cases} u_1 + v_1 = 4 \\ u_1 + v_3 = 3 \\ u_2 + 2v_1 = 6 \\ u_2 + v_2 = 4 \\ u_2 + 0v_{DEF} = 1. \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones genera los siguientes resultados:

$$u_2 = 1, v_2 = 3, v_1 = 2.5, u_1 = 1.5, v_3 = 1.5.$$

Paso 5.

$$z_{12} - c_{12} = -8 - (1.5 + 2(3)) = -15.5,$$

$$z_{23} - c_{23} = 7 - (1 + 1(1.5)) = 4.5,$$

por lo que  $X_{12}$  entra a la base.

Paso 6.

	1	2	3	Déficit	Oferta
1	$X_{11} + E_{11}$	$\Delta$	$X_{13} + E_{13}$		4
2	$X_{21} + E_{21}$	$X_{22} + E_{22}$		$X_{DEF} + E_{DEF}$	5
Demanda	5	2	3		

Con objeto de que la nueva solución básica también lo sea factible, se deben satisfacer las siguientes ecuaciones:



### 310 Problemas de transporte y asignación

$$\begin{aligned} E_{13} &= 0, \\ E_{11} + 2E_{21} &= 0, \\ 2\Delta + E_{22} &= 0, \\ E_{11} + E_{13} + \Delta &= 0, \\ E_{21} + E_{22} + E_{DEF} &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo en términos de  $\Delta$  se tiene

$$\begin{aligned} E_{11} &= -\Delta, \\ E_{21} &= \frac{1}{2}\Delta, \\ E_{13} &= 0, \\ E_{DEF} &= \frac{3}{2} \\ E_{22} &= -2\Delta. \end{aligned}$$

Esto implica lo siguiente:

$$\begin{aligned} X_{12} &= \Delta \\ X_{11} + E_{11} &= 1 - \Delta \geq 0, \text{ o sea, } \Delta \leq 1, \\ X_{13} + E_{13} &= 3 \\ X_{21} + E_{21} &= 2 + \frac{1}{2}\Delta \geq 0, \text{ o sea, } \Delta \geq -4, \\ X_{22} + E_{22} &= 2 - 2\Delta \geq 0, \text{ o sea, } \Delta \leq 1. \\ X_{DEF} + E_{DEF} &= 1 + \frac{3}{2}\Delta \geq 0, \text{ o sea, } \Delta \geq -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Se resume que  $-\frac{2}{3} \leq \Delta \leq 1$ , por lo que el máximo valor que  $\Delta$  puede obtener, manteniendo la factibilidad de la nueva base es  $\Delta = 1$ . La nueva base es

	1	2	3	Déficit	Oferta
1	0	1	3	0	4
2	2.5	0	0	2.5	5
Demanda	5	2	3		

Se regresa al paso 3.

#### Segunda iteración

La nueva base satisface las restricciones de oferta, ya que

$$\begin{aligned} 1 + 3 &= 4, \\ 2.5 + 2.5 &= 5, \end{aligned}$$

y las restricciones de demanda, como se muestra a continuación

$$2(2.5) = 5,$$

$$2(1) = 2,$$

$$(3) = 3.$$

Por lo tanto sólo se requiere una sola posición de déficit de 2.5 unidades, para satisfacer la segunda oferta, tal como se muestra en la tabla anterior.

*Paso 4.*

$$\text{Dado que } \begin{cases} X_{12} > 0 \\ X_{13} > 0 \\ X_{21} > 0 \\ X_{DEF} > 0 \end{cases} \quad \text{se tiene } \begin{cases} u_1 + 2v_2 = -8, \\ u_1 + v_3 = 3, \\ u_2 + 2v_1 = 6, \\ u_2 = 2.5. \end{cases}$$

El proceso continúa de manera análoga a la explicada con anterioridad.

### 3.9. Una aplicación real del problema de transportes en la administración pública de México

La Compañía Nacional de Subsistencias Populares (CONASUPO), instrumento de justicia social cuyos mecanismos de redistribución de la riqueza representa un factor de desarrollo y de apoyo a las clases populares, lleva a cabo varios programas de comercialización.

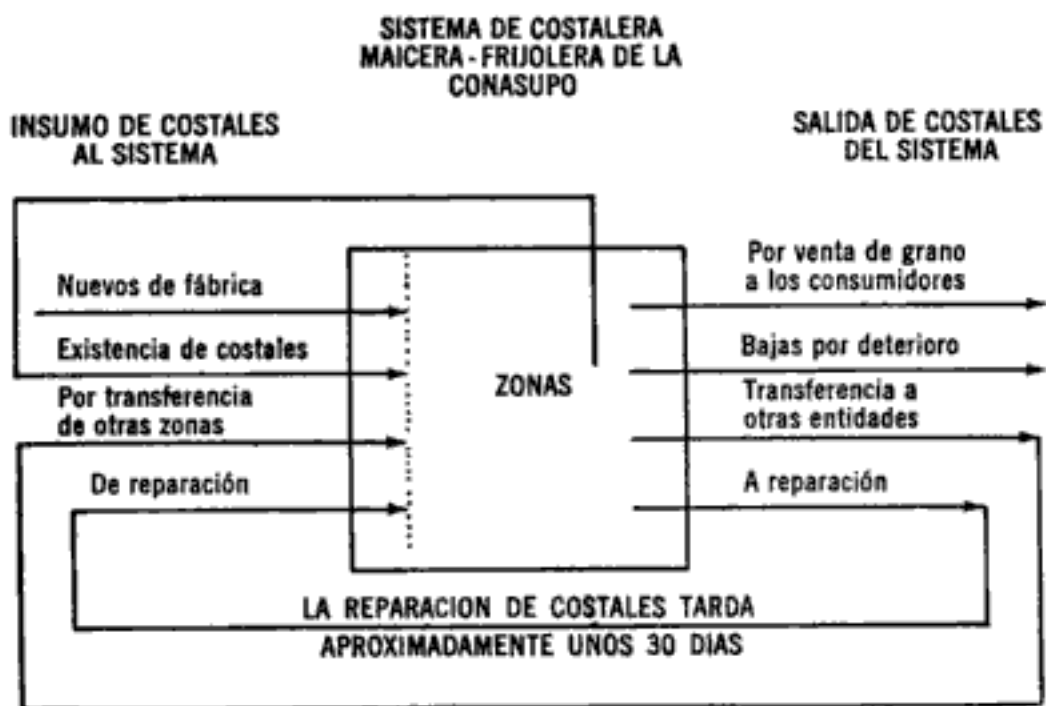
Los programas de comercialización del maíz y del frijol que se llevan a cabo con esa Compañía incluyen la compra de los granos (tanto nacional como de importación), su almacenamiento, distribución y venta. Estos programas son en conjunto de los más dinámicos entre todos los programas que maneja esa dependencia.

El programa de comercialización del maíz, es el de mayor importancia, en cuanto a las erogaciones asociadas al mismo.

Tanto el maíz como el frijol que se compra a los campesinos mexicanos a través de las Bodegas Rurales Conasupo (BORUCONSA) y los Almacenes Nacionales de Depósito, S. A. (ANDSA), se hace generalmente en costales de yute de unos 75 kg. Se prefiere el grano encostalado al de granel, porque el primero presenta ventajas en cuanto a su manejo, almacenamiento y mermas. El campesino que no tiene costales, se los compra a la CONASUPO. Una vez que el campesino entrega su grano encostalado a la CONASUPO, esta le reintegra el valor de los costales junto al valor de la compra del grano.

El grano se almacena, distribuye y vende en costal. El ciclo del costal se presenta gráficamente a continuación.

## 312 Problemas de transporte y asignación



**Figura 3.8**

El insumo al sistema puede provenir de la existencia que se tenga de costales en una zona, más los costales nuevos de fábrica, más las transferencias del exceso de costales que se tenga en otras zonas y por último los costales reparados provenientes de los diferentes centros de reparación del país. La salida de costales del sistema se debe, en primer lugar a la venta encostalada de los granos; después, a la transferencia a otras zonas de los excesos que se tengan en un determinado período de tiempo; a las bajas por deterioro y por último las salidas por reparación a los centros reparadores.

Un análisis de costo de los costales maiceros-frijoleros elaborado para la CONASUPO durante 1973, mostró que se erogaron aproximadamente 90 millones de pesos en el programa de costalera. Esta erogación anual incluyó, entre otros, los costos de capital (compra de nuevos costales), de almacenamiento, de distribución, de reparación, de mermas y de control de calidad.

Debido a que las erogaciones de costales son de gran cuantía, la CONASUPO, por conducto del autor,<sup>31</sup> procedió a diseñar, construir y operar un modelo matemático de distribución de costales, que auxiliara en la toma de decisiones relacionadas con este programa [26]. Entre los diferentes objetivos que cumple este modelo están los de auxiliar al grupo de toma de decisiones en:

- a) El pronóstico de calendarización de la compra de nuevos costales a futuro. Esto equivale a pronosticar cuánto se va a comprar

<sup>31</sup> El autor agradece a las autoridades de CONASUPO el permitir la publicación de este documento. Asimismo se agradece al Ing. Luis Enríquez y al Depto. de Estudios Administrativos de CONASUPO por su valiosa cooperación.

mensualmente a cada fábrica, y a dónde debe dirigirse la compra de costales maiceros-frijoleros.

- b) Pronosticar un programa de transferencia de costales a futuro. Esto equivale a las transferencias de los excedentes costaleros de una zona a otra a costo mínimo, en relación a la demanda futura de los granos mencionados en una zona, a la existencia de costales y a la oferta de costales nuevos.

Se procedió a dividir el país en 7 zonas, cada una representada por un centroide. Estas son:

Zona	Centroide	Entidades federativas que comprende
1	Cd. Victoria	Coahuila, Nuevo León, Tamaulipas.
2	Chihuahua	Baja California Norte, Baja California Sur, Chihuahua, Sonora.
3	Zacatecas	Aguascalientes, Durango, Nayarit, San Luis Potosí, Sinaloa, Zacatecas.
4	Guadalajara	Colima, Guanajuato, Jalisco, Michoacán, Querétaro.
5	Distrito Federal	Distrito Federal, Guerrero, México, Morelos, Hidalgo.
6	Arriaga	Campeche, Chiapas, Quintana Roo, Tabasco, Yucatán.
7	Puebla	Oaxaca, Puebla, Tlaxcala, Veracruz.

El flujo *a y de* los centros reparadores se tomó como constante, con una duración aproximada de un mes. Esto quiere decir, por ejemplo, que si la zona 3 (Zacatecas) mandó reparar 100,000 costales durante el mes de octubre, esos 100,000 costales regresan a la zona 3, un mes más tarde, es decir durante noviembre. Aproximadamente cada mes se envían a reparación un 3 por ciento de las existencias totales de una zona.

En cuanto a las bajas de costalera por deterioro, se calculan aproximadamente en el 1 por ciento de la existencia total por zona, durante el mes en cuestión.

La capacidad de producción máxima de cada una de las tres fábricas de costalera es variable, según el mes de que se trate. Estas capacidades se indican posteriormente entre los demás datos de esta aplicación.

La capacidad de fabricación se puede variar mediante la adición o supresión de turnos extra de trabajo. En caso de reducción, la capacidad de producción se aprovecha fabricando otros derivados del yute.

El presente modelo se puede considerar como un problema de *transporte "capacitado" con nodos intermedios*.<sup>32</sup> Los centros de oferta son las fábricas y las zonas almacenadoras de costalera. Los destinos son las mismas zonas almacenadoras. Estos últimos funcionan como nodos intermedios, jugando el papel simultáneo de centros de oferta y de consumo. La única diferencia entre este tipo de aplicación real y los modelos que se discutieron en este capítulo, es que el caso real es de carácter dinámico (considera el factor tiempo): Gráficamente, para un solo período de tiempo, se tiene lo siguiente:

<sup>32</sup> Problema de *transbordo con capacidad restringida de flujo*

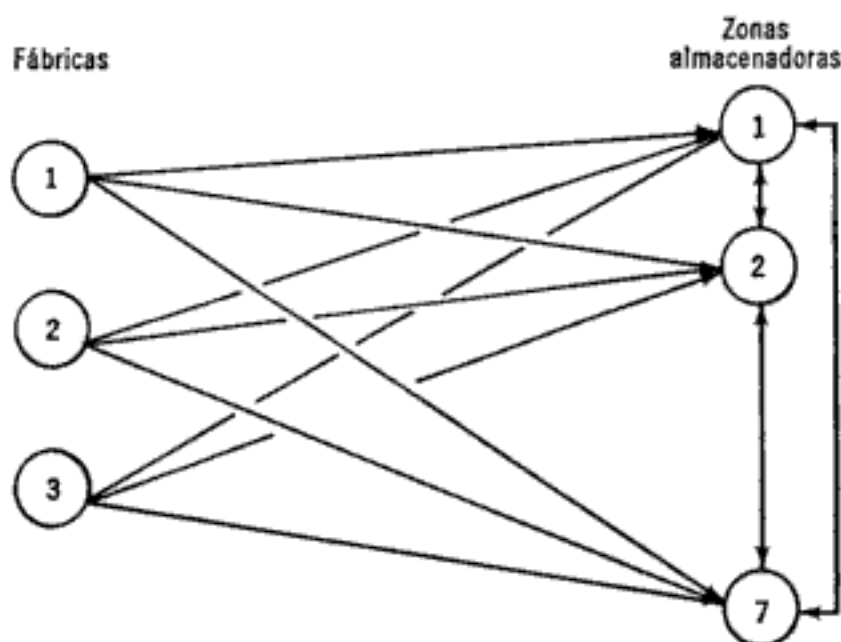


Figura 3.9

El modelo matemático considera los siguientes elementos.

*Variables:*

$Y_{j,t} \geq 0$ , número de costales en existencia en la zona  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, 7$ ) al inicio del mes  $t$  ( $t = 1, 2, 3, 4, 5$ ).

$X_{ijt} \geq 0$ , número de costales nuevos mandados de la fábrica  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), a la zona  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, 7$ ) durante el mes  $t$  ( $t = 1, 2, 3, 4$ ).

$W_{kjt} \geq 0$ , número de costales transferidos de la zona  $k$  a la zona  $j$ ,  $k \neq j$  ( $k = 1, 2, \dots, 7$ ;  $j = 1, 2, \dots, 7$ ), durante el mes  $t$  ( $t = 1, 2, 3, 4$ ).

*Constantes:*

$Y_{j,0} \geq 0$ , existencia de costales en la zona  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, 7$ ) para  $t = 0$  (1º de diciembre de 1973).

$Y_{j,1} \geq 0$ , existencia de costales en la zona  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, 7$ ) para  $t = 1$  (1º de enero de 1974).

$Q_{j,t} \geq 0$ , capacidad de almacenamiento de costales en la zona  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, 7$ ) durante el período  $t$  ( $t = 1, 2, 3, 4$ ).

$K_{it} \geq 0$ , capacidad de producción máxima de costales en la fábrica  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) durante el mes  $t$  ( $t = 1, 2, 3, 4$ ).

$D_{j,t} \geq 0$ , demanda pronosticada de costales en la zona  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, 7$ ) durante el período  $t$  ( $t = 1, 2, 3, 4$ ).

*Costos:*

$c_{ij} \geq 0$ , flete de transporte, por enviar un costal de la fábrica  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) a la zona  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, 7$ ).

$f_{ke} \geq 0$ , flete de transporte por enviar un costal de la zona  $k$  a la zona  $e$ ,  $k \neq e$  ( $k = 1, 2, \dots, 7$ ;  $e = 1, 2, \dots, 7$ ).

$g \geq 0$ , costo de un costal en cualquiera de las tres fábricas.

$h_j \geq 0$ , costo de almacenamiento de costales, por mes, en la zona  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, 7$ ).

*Modelo matemático.*

Este minimiza la siguiente función de costo:

Costo total = costo de almacenamiento + costo de fabricación  
y flete + costo de transferencia

$$\text{Mín } Z = \sum_{j=1}^7 \sum_{t=2}^4 h_j Y_{jt} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^7 \sum_{t=1}^4 (g + c_{ij}) X_{ijt} + \sum_{e=1}^7 \sum_{k=1}^7 \sum_{t=1}^4 f_{ke} W_{ket}$$

sujeta a las siguientes restricciones:

a) *Equilibrio de flujo:*

existencias a fin de mes = existencias a principios de mes + costales nuevos fabricados en ese mes + transferencias de otras zonas en ese mes - transferencias a otras zonas en ese mes - demanda del mes - reparaciones del mes - bajas del mes + reparados en el mes anterior.

$$Y_{j,t+1} = Y_{jt} + \sum_{i=1}^3 X_{ijt} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^7 W_{kjt} - D_{jt} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^7 W_{jkt} - \\ - 0.01Y_{jt} - 0.03Y_{jt} + 0.03Y_{j,t-1} \quad t = 1, 2, 3, 4; \quad j = 1, 2, \dots, 7.$$

b) *Capacidad de almacenamiento*

$$Y_{jt} \leq Q_{jt}, \quad j = 1, 2, \dots, 7; \quad t = 1, 2, \dots, 4.$$

c) *Capacidad de fabricación*

$$\sum_{j=1}^7 X_{ijt} \leq K_{it}, \quad i = 1, 2, 3; \quad t = 1, 2, 3, 4.$$

d) *Satisfacción de la demanda*

$$Y_{jt} + \sum_{i=1}^3 X_{ijt} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^7 W_{kjt} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^7 W_{jkt} - D_{jt} - \\ - 0.01Y_{jt} - 0.03Y_{jt} + .03Y_{j,t-1} \geq D_{j,t+1} \quad j = 1, 2, \dots, 7; \quad t = 1, 2, 3, 4.$$

Los datos correspondientes al período de enero de 1974 a abril de 1974, con los que se probó el modelo son:

**Costos:**

$$h_j = \$ 0.0054/\text{costal} \quad j = 1, 2, \dots, 7.$$

$$g = \$ 8.05/\text{costal}.$$

### 316 Problemas de transporte y asignación

#### Flete de fábrica a zonas consumidoras

$i \backslash j$		Destinos						
		1	2	3	4	5	6	7
Fábricas	Mérida	0.235	0.249	0.202	0.201	0.171	0.109	0.134
	Cd. Victoria	0	0.138	0.127	0.136	0.136	0.194	0.150
	Saltillo	0.058	0.106	0.099	0.120	0.119	0.179	0.128

$c_{ij}$  (\$/costal)

#### Fletes de transferencia de zona a zona

	1	2	3	4	5	6	7
1	.....	0.1384	0.1272	0.1368	0.1368	0.1944	0.1508
2		.....	0.1190	0.1662	0.1712	0.2065	0.1737
3			.....	0.0859	0.0969	0.1724	0.1163
4				.....	0.0847	0.1662	0.1066
5					.....	0.1217	0.0306
6						.....	0.1091
7							.....

$f_{ke}$  (\$/costal)

Existencias iniciales ( $Y_{i0}$ ,  $Y_{i1}$ ):

- $Y_{j0} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, 7$  (al 1° de diciembre de 1973)
- $Y_{11} = 239\,542$  costales (al 1° de enero de 1974)
- $Y_{21} = 1\,636\,155$  costales (al 1° de enero de 1974)
- $Y_{31} = 2\,410\,621$  costales (al 1° de enero de 1974)
- $Y_{41} = 3\,656\,992$  costales (al 1° de enero de 1974)
- $Y_{51} = 1\,259\,188$  costales (al 1° de enero de 1974)
- $Y_{61} = 2\,299\,151$  costales (al 1° de enero de 1974)
- $Y_{71} = 2\,314\,623$  costales (al 1° de enero de 1974).

Capacidad de almacenamiento mensual ( $Q_{jt}$ )

(en costales)

$j \backslash t$	1	2	3	4
1	$5.86 \times 10^8$	$5.91 \times 10^8$	$5.94 \times 10^8$	$5.95 \times 10^8$
2	$9.22 \times 10^8$	$9.64 \times 10^8$	$10.09 \times 10^8$	$10.08 \times 10^8$
3	$8.67 \times 10^8$	$9.51 \times 10^8$	$10.25 \times 10^8$	$10.39 \times 10^8$
4	$8.67 \times 10^8$	$9.75 \times 10^8$	$10.75 \times 10^8$	$10.94 \times 10^8$
5	$12.06 \times 10^8$	$12.35 \times 10^8$	$9.05 \times 10^8$	$9.10 \times 10^8$
6	$1.80 \times 10^8$	$2.57 \times 10^8$	$3.22 \times 10^8$	$3.34 \times 10^8$
7	$4.99 \times 10^8$	$5.48 \times 10^8$	$5.92 \times 10^8$	$6.00 \times 10^8$

RESULTADOS DEL MODELO NACIONAL DE COSTALERA PARA EL XXXII PROGRAMA DE MAIZ Y EL  
 XXVIII PROGRAMA DE FRIJOL  
 MESES DE ENERO A ABRIL 1974

Mes Zona	1 Disponibilidad al 31-12-73	2 Demanda	3 A reparar	4 Bajas en	5 Reparados	Compras			Transferencias de Zona I
						Fábrica Mérida	Fábrica Cd. Victoria	Fábrica Saltillo	
1	239 542	137 085	7 185	2 395					
2	1 636 155	1 322 685	49 083	16 361				448 126	
3	2 410 621	2 660 931	72 318	24 106				1 787 722	
4	3 656 992	3 614 217	109 707	36 569			1 420 116	606 092	20 725
5	1 259 188	895 869	37 773	12 591				158 558	
6	2 299 151	2 311 920	68 973	22 991				1 321 534	
7	2 314 623	1 652 430	69 438	23 146				300 092	
Total	13 816 272	12 595 137	414 486	138 162			1 420 116	3 000 498	20 725
Febrero									
1	92 150	72 150	2 164	721	7 185				
2	696 150	696 150	20 884	6 961	49 083		10 130	17 992	
3	1 440 490	1 440 490	43 214	14 404	72 318			225 399	
4	1 916 430	1 916 430	57 492	19 164	109 707			350 234	
5	471 510	471 510	14 145	4 715	37 703			75 387	
6	1 216 800	1 216 800	36 504	12 168	68 973			233 058	
7	869 700	869 700	26 091	8 697	69 438			139 290	
Total	6 683 230	6 683 230	200 496	66 832	414 486		10 130	669 012	



318 Problemas de transporte y asignación

<b>Marzo</b>												
1	14 430	14 430	433	144	2 164							
2	39 230	139 230	1 177	392	20 884							115 491
3	280 098	280 098	8 402	2 800	43 214							38 013
4	383 286	383 286	11 498	3 832	57 492							53 659
5	94 302	94 302	2 829	943	14 145							13 201
6	243 360	243 360	7 300	2 433	36 504			34 070				
7	173 940	173 940	5 218	1 739	26 091							24 351
<b>Total</b>	<b>1 228 646</b>	<b>1 048 548</b>	<b>36 858</b>	<b>12 286</b>	<b>200 496</b>			<b>34 070</b>				<b>244 715</b>
<b>Abril</b>												
1	3 607	2 107	108	36	433							
2	34 807	34 807	1 044	348	1 177							3 502
3	70 024	70 024	2 100	700	8 402							64 422
4	95 821	95 821	2 874	958	11 498							88 155
5	23 575	23 575	707	235	2 829							21 688
6	60 840	60 840	1 825	608	7 300			55 972				
7	43 485	43 485	1 304	434	5 218							40 006
<b>Total</b>	<b>332 159</b>	<b>330 659</b>	<b>9 963</b>	<b>3 321</b>	<b>36 858</b>			<b>55 972</b>				<b>249 293</b>
<b>Totales</b>	<b>22 060 307</b>	<b>20 657 574</b>	<b>661 809</b>	<b>220 603</b>	<b>651 840</b>			<b>2 074 016</b>				<b>4 163 518</b>
												<b>20 725</b>

*Demanda mensual pronosticada de costalera ( $D_{jt}$ )*

		(en costales)			
$j \backslash t$		1	2	3	4
1		137085	72150	14430	2107
2		1322685	696150	139230	34807
3		2660931	1440490	280098	70024
4		3641217	1916430	383286	95821
5		895869	471510	94302	23575
6		2311920	1216800	243360	60840
7		1652430	869700	173940	43485

*Capacidad mensual de producción de costales ( $k_{it}$ )*

		(en costales)			
$Fábrica \backslash Mes$		Enero	Febrero	Marzo	Abril
Mérida		1 700 000	1 000 000	750 000	500 000
Cd. Victoria		1 500 000	500 000	250 000	100 000
Saltillo		3 250 000	1 000 000	500 000	300 000

Los resultados del programa de costalera maicera-frijolera, que se corrió durante los primeros días de enero de 1974, para el período enero-abril 1974, se muestran en las páginas 317 y 318.

Los pronósticos de costos asociados con el programa costalero de enero-abril 1974, son los siguientes:

*Almacenamiento:*

22060307 costales a \$0.0054/costal \$119 125.66

*Reparación:*

661809 costales a \$1.14/costal \$754 462.26

*Compra de nuevos costales:*

7673117 costales a \$8.05/costal \$61 768 591.85

*Transferencias de una zona a otra:*

20725 costales a \$0.1368/costal \$ 2 835.18

## 320 Problemas de transporte y asignación

### *Transferencias de fábricas a zonas:*

1321534	costales a \$0.109/costal	144 047.21
300092	costales a \$0.134/costal	40 212.33
233058	costales a \$0.109/costal	25 403.32
139290	costales a \$0.134/costal	18 664.86
34070	costales a \$0.109/costal	3 713.63
55972	costales a \$0.109/costal	6 100.95
1420116	costales a \$0.136/costal	193 135.78
10130	costales a \$0.0 /costal	... ..
2019	costales a \$0.0 /costal	... ..
3318	costales a \$0.0 /costal	... ..
448126	costales a \$0.106/costal	47 501.36
1787722	costales a \$0.099/costal	176 984.48
606092	costales a \$0.120/costal	72 731.04
158558	costales a \$0.119/costal	18 868.40
17992	costales a \$0.106/costal	1 907.15
225399	costales a \$0.099/costal	22 314.50
350234	costales a \$0.120/costal	42 028.08
75387	costales a \$0.119/costal	8 971.05
115491	costales a \$0.106/costal	12 242.05
38013	costales a \$0.099/costal	3 763.29
53659	costales a \$0.120/costal	6 439.08
13201	costales a \$0.119/costal	1 570.92
24351	costales a \$0.128/costal	3 116.93
3502	costales a \$0.106/costal	371.21
64422	costales a \$0.099/costal	6 377.78
88155	costales a \$0.120/costal	10 578.60
21688	costales a \$0.119/costal	2 580.87
40006	costales a \$0.128/costal	5 120.77
		\$63 476 458.23

El ahorro anual que este modelo de distribución puede generar<sup>33</sup> a la CONASUPO, es de aproximadamente 26½ millones de pesos.

### 3.10. Programas de computadora para resolver problemas de transportes

<i>Computadora</i>	<i>Nombre del programa</i>	<i>Características</i>
IBM 7090/7094	Transportation Problem Subroutine	10 000 elementos de la matriz de flujos
IBM 1620	Transportation Problem	40 × (80 a 300) elementos de la matriz de flujos
IBM 7070	Transportation Problem Dennis Technique	(50 a 275) × (500 a 275) elementos de la matriz de flujos

<sup>33</sup> En el momento de escribir el texto, el modelo estaba en la fase de implementación, mas no de operación recurrente.

IBM 360	Transportation Problem	Memoria de la computadora limita la dimensión de la matriz de flujos
CDC 3100/3200/3300/3500	REGINA I	Sin límite
CDC 3600/3800	OPHELIE	Sin límite
CDC 6400/6500/6600	OPTIMA	Sin límite
ICT 1900	XDT2, XDT3	Memoria de la computadora limita la dimensión de la matriz de flujos
NCR 315	TRANSPORT	1 500 elementos de la matriz de flujos
Burroughs 3600	FLP/TRANSPORT	99 999 elementos en la matriz de coeficientes tecnológicos
Siemens 4004/15-55	TRAP	1 200 nodos
Univac 1107/1108	PFTC	400 × 400 elementos de la matriz de flujos.

**Problemas**

**I. Formulación de problemas**

**3-1** Supóngase que cierta empresa nacional tiene dos fábricas y tres centros de ventas. La empresa está planeando la calendarización de su producción para los próximos cuatro meses. La oferta para los meses 1, 2, 3 y 4 es respectivamente 4 000, 6 000, 3 000 y 2 000 toneladas del producto para la planta 1, y 7 500, 10 000, 8 000 y 6 000 toneladas para la planta 2. De la misma manera se han pronosticado las ventas para los períodos 1, 2, 3 y 4 en cada uno de los tres centros de consumo. Para el primer centro serán de 5 000, 5 500, 4 000 y 3 000 toneladas; para el segundo centro serán de 8 000, 9 000, 8 000 y 7 000 toneladas, y para el último centro serán de 1 000, 10 000, 11 000 y 7 000 toneladas. Se conoce el flete unitario de cada una de las fábricas a los centros de consumo.

- a) Formule, sin resolver, un modelo de transporte del problema mencionado.
- b) ¿Cree usted que este problema, con los datos disponibles tiene una solución factible?
- c) Si su respuesta a (b) es negativa, explíquela y proponga algún mecanismo que permita una solución.

**3-2** Supóngase que la Compañía Nacional Hotelera tiene que programar la utilización semanal de sábanas para su complejo turístico

### 322 Problemas de transporte y asignación

de Cancún, Quintana Roo. Los requerimientos de sábanas blancas es de 1 000, 1 100, 1 200, 1 100, 1 300, 1 500, y 1 600 respectivamente para cada día de la semana.

La Compañía Nacional Hotelera tiene 3 alternativas:

- Ordenar sábanas de la ciudad de México, las cuales son entregadas a las 6 h de ser ordenadas en uno de los múltiples vuelos que cubren el puente aéreo México-Cancún. El precio de cada sábana es de \$ 100.00;
- mandar las sábanas sucias a la lavandería local de Cancún. El servicio demora 48 horas y cuesta \$ 0.50 por sábana;
- mandar las sábanas sucias a la ciudad de Mérida, donde todo el servicio, desde el momento en que se recogen sucias hasta que se devuelven limpias, es de 24 horas. El servicio de lavado, que ya incluye el flete aéreo, es de \$5 por sábana.

Formule, sin resolver, un modelo de transporte que le indique a la Compañía Nacional Hotelera cómo debe cubrir sus requerimientos semanales a costo mínimo.

**3-3** Supóngase que un número bastante considerable de órdenes de trabajo pueden ser llevadas a cabo en una serie de máquinas herramienta. Supóngase que una orden de trabajo  $i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) en una máquina  $j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) se realiza con una eficiencia  $E_{ij}$ . Supóngase además que se conoce la siguiente información:

- el número de horas disponibles en cada una de las máquinas herramienta;
- el número de unidades que se deben fabricar en cada una de las órdenes de trabajo;
- el número de unidades de tiempo que se requieren en una máquina herramienta determinada para producir una unidad de cierta orden de trabajo.

Formule, sin resolver, un modelo de transporte que determine el número de horas de cada máquina-herramienta que se debe asignar a un cierto tipo de trabajo, con objeto de maximizar la eficiencia total de la empresa.

**3-4** Supóngase que la Compañía Naviera de México opera entre los puertos mexicanos de Tampico, Veracruz y Coatzacoalcos, y los norteamericanos de Nueva Orleans y Houston. La calendarización de movimientos para las próximas dos semanas es:

Días	Puerto de origen	Puerto de destino
1 de junio	N. Orleans	Veracruz
5 de junio	Houston	Veracruz
6 de junio	N. Orleans	Veracruz
6 de junio	N. Orleans	Tampico
6 de junio	Houston	Coatzacoalcos
6 de junio	Houston	Veracruz

8 de junio	Houston	Tampico
8 de junio	Houston	Coatzacoalcos
10 de junio	N. Orleáns	Coatzacoalcos
13 de junio	Houston	Veracruz
15 de junio	Houston	Veracruz
15 de junio	N. Orleáns	Coatzacoalcos

Una vez que un barco llega a un puerto se le puede despachar a otro. El tiempo de viaje entre un puerto y otro es:

	Houston	N. Orledns
Veracruz	2	3
Tampico	1	2
Coatzacoalcos	3	4

Días de viaje entre puertos

Supóngase que el 1º de junio existen 4 barcos en Houston y 3 en Nueva Orleáns. Supngase que se conoce el costo total de transportar un barco de un puerto americano a uno mexicano y viceversa.

Formule, sin resolver, un modelo de transporte que permita resolver la programación de rutas de barcos de puertos mexicanos a norteamericanos, del 1º al 15 de junio y que minimicen los costos del sistema.

3-5 Supóngase que en el problema anterior, la Compañía Naviera de México quiere encontrar el número mínimo de barcos que se requiere para cumplir con la programación del 1º al 15 de junio.

Formule, sin resolver, un modelo de transporte que resuelva este problema.

## II. Solución de problemas

3-6 Supóngase que la Compañía de Aceros Nacionales produce mensualmente en cada una de sus tres plantas 50 000, 70 000 y 90 000 toneladas de acero. Esta empresa tiene cinco distribuidoras ubicadas en diferentes partes del país, con una demanda mensual de 20 000, 60 000, 80 000, 40 000 y 10 000 toneladas de acero, respectivamente. El costo total del flete, por toneladas de acero que se transporta, es:

		Distribuidoras				
		1	2	3	4	5
Fábricas	1	7	3	2	4	2
	2	6	5	8	3	4
	3	3	2	5	7	1

Miles de pesos/tonelada de acero

### 324 Problemas de transporte y asignación

Calcule un programa de distribución mensual de acero que minimice los costos totales.

**3-7** La Compañía Nacional de Textiles compra lana y la convierte en hilo de lana. Las ventas anuales ascienden a 12 000 kilos de este producto. La producción trimestral es igual a las ventas, siendo estas las siguientes:

<i>Trimestre</i>	<i>Ventas de hilo de lana (en kilos)</i>	<i>Precio de la materia prima (lana) \$/kilo</i>
1	2 000	\$0.40
2	3 000	\$0.60
3	3 000	\$0.75
4	4 000	\$1.00

Como se indica, el precio de la materia prima varía con la época del año en que se le compra. Además del precio de la materia prima, la compañía tiene costos de producción y de almacenamiento. Estos últimos dos costos, ya combinados, varían con la anticipación de la producción, como se indica a continuación:

<i>Tiempo de producción</i>	<i>Costo de producción de hilo de lana y almacenamiento (en \$/kg)</i>
Durante el mismo trimestre	\$0.50
Con 1 trimestre de anticipación	\$0.60
Con 2 trimestres de anticipación	\$0.80
Con 3 trimestres de anticipación	\$1.00
Con 4 o más trimestres de anticipación	Prohibitivo

La materia prima se entrega a la compañía el primer día de cada trimestre. La materia prima puede procesarse en hilo de lana durante el mismo trimestre de su compra, o bien almacenarse para ser producida en trimestres posteriores. El hilo de lana se vende a un precio constante de \$2/kg. La compañía tiene una restricción que le impide comprar más de 5 000 kg de materia prima por trimestre.

Formule y resuelva este problema con un modelo de transporte, que permita a la empresa programar sus compras de materia prima en cada uno de los próximos cuatro trimestres, a costo mínimo.

**3-8** Siete áreas de irrigación *A, B, C, D, E, F, G*, requieren de fertilizantes. Supóngase que hay cuatro tipos de fertilizantes *X, Y, W, Z*. La oferta y el costo de estos fertilizantes (ya incluido el flete de transporte a las zonas de consumo) es:

<i>Fertilizante</i>	<i>Oferta mensual</i>	<i>Precio por tonelada</i>
<i>X</i>	7 000 ton	\$1 000/ton
<i>Y</i>	4 000 ton	\$4 000/ton
<i>W</i>	6 000 ton	\$2 000/ton
<i>Z</i>	5 000 ton	\$5 000/ton

Las siete áreas de irrigación requieren (indistintamente) de lo siguiente:

<i>Area</i>	<i>Tipo de fertilizante factibles</i>	<i>Demanda mensual total (independiente de la combinación de fertilizantes)</i>
<i>A</i>	<i>X, Z</i>	2 000 ton
<i>B</i>	<i>W, X, Y,</i>	3 000 ton
<i>C</i>	<i>Y, W</i>	1 000 ton
<i>D</i>	<i>Z, X</i>	2 000 ton
<i>E</i>	<i>X, Y</i>	3 000 ton
<i>F</i>	<i>Y, X, Z</i>	2 000 ton
<i>G</i>	<i>W, Z</i>	1 000 ton

Formule y resuelva este problema con un modelo de transporte para programar la entrega de fertilizantes a zonas de irrigación a un costo mínimo.

**3-9** Resuelva el siguiente problema de transportes:

		<i>Destinos</i>						
		1	2	3	4	5	6	<i>Oferta</i>
<i>Orígenes</i>	1	5	10	15	8	9	7	30
	2	14	13	10	9	20	21	40
	3	15	11	13	25	8	12	10
	4	9	19	12	8	6	13	100
<i>Demanda</i>		50	20	10	35	15	50	

**3-10** Considere el siguiente problema de asignar 5 operadores a 5 máquinas. Los costos de asignación son

		<i>Máquina</i>				
		1	2	3	4	5
<i>Operador</i>	1	5	5	—	2	6
	2	7	4	2	3	4
	3	9	3	5	—	3
	4	7	2	6	7	2
	5	6	5	7	9	1

El operador 1 no puede operar la máquina 3; el operador 3 no puede operar la máquina 4.

**3-11** Resuelva las siguientes matrices de asignación:



### 326 Problemas de transporte y asignación

a)

	A	B	C	D	E
1	8	2	8	3	2
2	3	9	2	1	1
3	7	9	7	7	3
4	5	3	4	5	1
5	1	1	4	4	9

b)

	A	B	C	D	E
1	5	3	7	3	4
2	5	6	12	7	3
3	2	8	3	4	5
4	9	6	10	5	6
5	3	2	1	4	5

**3-12** Supóngase que tres tipos de sistemas de carga están siendo utilizados en el nuevo puerto de Lázaro Cárdenas, Michoacán, para manejar cuatro grupos de cargamento: productos perecederos, químicos, minerales y productos manufacturados.

Durante el presente mes, el volumen por grupo de cargamento que se requiere mover, es:

Productos perecederos	1 800 ton
Productos químicos	1 500 ton
Productos minerales	2 000 ton
Productos manufacturados	1 300 ton

Se muestran a continuación el número de toneladas que se pueden manejar por hora de operación del sistema de carga empleado, la disponibilidad de horas de operación por sistema y los costos de operación:

		Grupo de carga ton/h				Disponibilidad de horas	\$/h Costo
		Perecederos	Químicos	Minerales	Manufacturados		
Sistema de carga	1	50	100	50	20	500	500
	2	20	—	20	50		
	3	20	50	50	20		

El sistema de carga *dos* no puede movilizar productos químicos.

Formule y resuelva este problema con un modelo de transporte, a fin de programar el movimiento de carga a costo mínimo.

**3-13** Supóngase que la distribuidora CONASUPO recibe diariamente 200 kilos de papel sanitario de la fábrica de papel "El Higiénico", y 300 de la fábrica "El Mirador Optimista", para cada uno de sus tres almacenes situados en el Norte, Centro y Sur del país.

La demanda diaria de cada uno de estos centros es respectivamente 100, 200 y 50 kilos. Sin embargo, los faltantes de un almacén se pueden cubrir con sobrantes de otro.

Como las fábricas de papel son filiales de la CONASUPO, se permite la venta de papel higiénico al público desde la misma fábrica. Una de las fábricas está localizada en la zona boscosa de Michoacán, y la otra en la zona boscosa de Chiapas. Los excedentes de papel en los almacenes, también pueden ser enviados a las fábricas.

Los fletes por kg de papel son:

		<i>Fábricas</i>		<i>Almacenes</i>		
		1	2	1	2	3
<i>Fábricas</i>	1	0	6	7	8	9
	2	6	0	5	4	3
<i>Almacenes</i>	1	7	2	0	5	1
	2	1	5	1	0	4
	3	8	9	7	6	0

\$/kg de papel

Formule y resuelva el problema con un modelo de transporte a fin de programar la distribución de papel higiénico a costo mínimo.

**3-14** Considere el problema de asignar 3 tipos de avión a 3 rutas. El objetivo es satisfacer la demanda a costo mínimo. Los datos son:

<i>Tipo de avión</i>	<i>Capacidad de pasajeros en cada ruta</i>			<i>Número de aviones</i>	<i>Costo de operación por ruta en pesos</i>		
	1	2	3		1	2	3
1	100	100	100	10	8 000	10 000	6 000
2	250	250	200	5	9 000	12 000	8 000
3	250	100	100	4	10 000	15 000	15 000
<i>Demanda de pasajeros en cada ruta</i>					1 000	1 500	1 000

Formule y resuelva este problema con un modelo de transporte.

## REFERENCIAS

### I. Libros

- [1] Berge, C.: *The Theory of Graphs And Its Applications*, John Wiley & Sons, Inc., 1962.
- [2] Dantzig, G.: *Linear Programming And Extensions*, Princeton University Press, 1963.
- [3] Ford, L. and D. Fulkerson: *Flows in Networks*, Princeton University Press, 1962.
- [4] Hadley, G.: *Linear Programming*, Addison-Wesley, 1962.
- [5] Hillier, F., G., Lieberman: *Introduction to Operations Research*, Holden Day Inc., 1967.

## 328 Problemas de transporte y asignación

- [6] Kauffman, A. and R. Faure: *Introduction to Operations Research*, Academic Press, 1968.
- [7] Simonard, M.: *Linear Programming*, Prentice Hall, 1966.
- [8] Taha H., *Operations Research*, MacMillan Co., 1971.

### II. Artículos

- [9] Balinsky, M. L. and R. E. Gomory: "A Primal Method for the Assignment and Transportation Problems" *Management Science*, Vol. 10, 1964, pp. 578-593.
- [10] Egervary, J.: "Matrixok Kombinatorius Tulajdoságairol", *Math, Fiz. Lapok*, Vol. 38, 1931.
- [11] Eisemann, K.: "The Generalized Stepping—Stone Method for the Machine Loading Problems" *Management Science*, Vol. 11-1, 1964.
- [12] Hitchcock, F. L.: "The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities", *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 20, 1941.
- [13] Hoffman, A. J. and H. M. Markowitz: "A Note on Shortest Path, Assignment and Transportation Problems" *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 10, 1963, pp. 375-379.
- [14] Houthakker, H. S.: "On The Numerical Solution of the Transportation Problem", *Operations Research*, Vol. 3, Núm. 2, 1955.
- [15] Kantorovich, L. V.: "Mathematical Methods In The Organization and Planning of Production" *Management Science*, Vol. 6, 1960, pp. 336-442.
- [16] Klein, M.: "A Primal Method for Minimal Cost Flows with Applications to the Assignment and Transportation Problems" *Management Science*, Vol. 14, 1967, pp. 205-220.
- [17] König, D.: "Theorie Der Endlichen und Unendlichen Graphen, (1912)" editado por Chelsea, 1950.
- [18] Kuhn, H. W.: "The Hungarian Method for the Assignment Problem" *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 2, 1955.
- [19] Kuhn, H.: "Variants of the Hungarian Method for Assignment Problems" *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 3, 1956, pp. 253-258.
- [20] Lagemann, J. J.: "A Method for Solving the Transportation Problem" *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 14, 1967, pp. 89-99.
- [21] Orden, A.: "The Transshipment Problem" *Management Science*, Vol. 2, 1956.
- [22] Pierskalla, W. P.: "The Multidimensional Assignment Problem" *Operations Research*, Vol. 16, 1968, pp. 422-431.
- [23] Szwarc W.: "The Initial Solution of the Transportation Problem" *Operation Research*, Vol. 8, 1960, pp. 727-729.
- [24] Wagner, H.: "On a Class of Capacitated Transportation Problems" *Management Science*, Vol. 5, 1959, pp. 304-318.
- [25] Williams, A. C.: "A Treatment of Transportation Problems by Decomposition" *SIAM Journal of Applied Mathematics*, Vol. 10, 1962, pp. 35-48.

### III. Aplicación real

- [26] Prawda, J., Enríquez, L.: "Un modelo para programar la calendarización de transferencias y compras de costalera maicera-frijolera de la Compañía Nacional de Subsistencias Populares, CONASUPO" *Boletín del Instituto Mexicano de Planeación y Operación de Sistemas*, Año IV Núm. 24, julio-agosto, 1974.

# Redes de optimización

El objetivo de este capítulo es el de presentar los métodos y modelos asociados a las redes de optimización. Estos incluyen: *problemas de flujo máximo en una red, problemas de flujo por una red a costo mínimo, problemas de flujo máximo por una red a costo mínimo, problemas de flujos múltiples por una red, problemas de expansión por una red, árboles mínimos de comunicación en una red* y por último *redes de actividad*.

Se ilustrarán una serie de aplicaciones de cada uno de estos modelos en problemas que emanan de los campos de distribución, reemplazo, secuenciación, confiabilidad, asignación de recursos, etc. Los modelos de redes son casos particulares de la programación lineal que disponen de métodos de solución propios que resultan más eficientes que el *método simplex*.

## 4.1. Conceptos elementales de una red

Una *red* es un conjunto de *nodos* (vértices o puntos) conectados por un conjunto de *arcos* (líneas, ramas, bordes). Existen arcos *dirigidos* de un nodo a otro y existen arcos que no tienen dirección. A las redes cuyos arcos no tienen dirección se les llama *adireccionales*.

Se denotará al nodo  $i$  por  $N_i$  y al arco dirigido del nodo  $i$  al nodo  $j$  por  $A_{ij}$ . Las redes de optimización que se utilizan en este capítulo tendrán un número finito de nodos y arcos. Cuando se trate de un arco no dirigido de  $N_i$  a  $N_j$ , se utilizará indistintamente la nomenclatura  $A_{ij}$  o  $A_{ji}$ .

La figura 4.1 representa una red con cuatro nodos y seis arcos dirigidos.

Una *cadena* de  $N_i$  a  $N_k$  es una serie de nodos y arcos que unen los nodos  $N_i$  y  $N_k$ . Por ejemplo, en la figura 4.1, la cadena  $N_1, A_{12}, N_2, A_{24}, N_4$  une a los nodos  $N_1$  y  $N_4$ . Un *ciclo* es una cadena que empieza y termina en el mismo nodo. Por ejemplo, en la figura 4.1, la cadena  $N_2, A_{23}, N_3, A_{32}, N_2$  forma un ciclo. *Cadenas simples* son aquellas cadenas

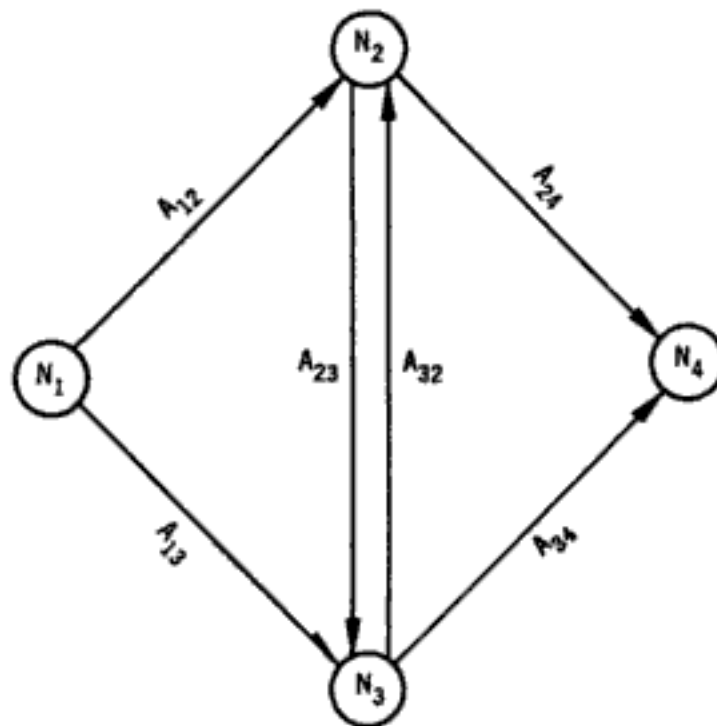


Figura 4.1

que no contienen ciclos. Una *red conexa* es aquella en donde existe por lo menos una cadena que conecta a cada nodo con el resto de los nodos de la red. Una *red inconexa* es aquella que no está conectada.

Un *árbol* es una red conectada que no contiene ciclos.

Asociado a cada arco  $A_{ij}$  se define lo siguiente:

$X_{ij} \geq 0$ , el flujo que va del nodo  $N_i$  al nodo  $N_j$ .<sup>1</sup>

$u_{ij} \geq 0$ , capacidad máxima de flujo del arco  $A_{ij}$ . Por lo general es un número entero.

$l_{ij} \geq 0$ , cantidad mínima de flujo que debe fluir del nodo  $N_i$  al nodo  $N_j$ . Por lo general es un número entero.

$c_{ij} \geq 0$ , costo por unidad de flujo que va del nodo  $N_i$  al nodo  $N_j$ .

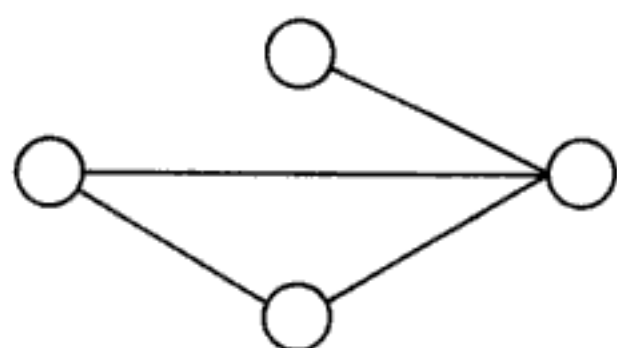
Cuando  $c_{ij} \geq 0$ , se le toma como un *egreso* y cuando  $c_{ij} \leq 0$ , se le toma como un *ingreso*.

En cualquier red se van a distinguir dos nodos en especial. Uno es el nodo *fuelle* por donde entra el flujo a la red y el otro el nodo *destino* por donde sale el flujo de la red. En la figura 4.1,  $N_1$  es el nodo fuente y  $N_4$  es el nodo destino. Se designará al nodo fuente por  $N_s$  y al nodo destino por  $N_t$ .

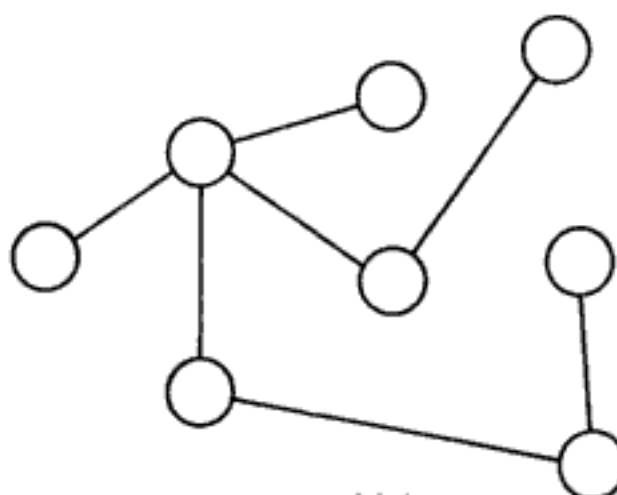
El flujo a través de una red debe satisfacer las siguientes restricciones:

- a) El flujo entra a la red únicamente por el nodo fuente. Matemáticamente se representa por:

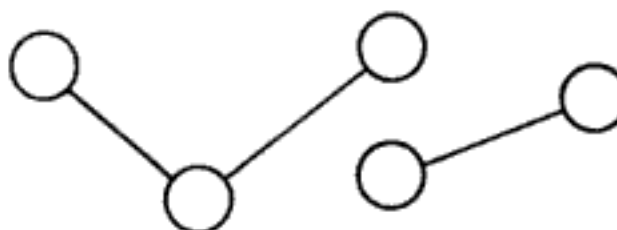
<sup>1</sup> Cuando un flujo sale de un nodo se le llama *eflujo* y cuando llega a un nodo, se le llama *influjo*.



Red conexa



Arbol



Red inconexa

Figura 4.2

$$\sum_i X_{ij} - \sum_k X_{jk} = -v, \quad \text{si } j = s,$$

donde  $v \geq 0$  es el *flujo total* que entra a la red y  $s$  es el nodo fuente. Por convención, el flujo que sale de un nodo (eflujo) es negativo y el flujo que entra en un nodo (influjo) es positivo.

- b) Hay conservación de flujo en un nodo intermedio, es decir, el total del flujo que entra en cierto nodo es igual al total del flujo que sale del mismo. Matemáticamente se tiene:

$$\sum_i X_{ij} - \sum_k X_{jk} = 0, \quad \text{para toda } j \neq s, t.$$

- c) El flujo sale de la red únicamente por el nodo destino. Matemáticamente se escribe como

### 332 Redes de optimización

$$\sum_i X_{ij} - \sum_k X_{jk} = v, \quad \text{si } j = t.$$

El flujo total que sale de la red por el nodo destino es  $v \geq 0$ .

- d) El flujo en un arco debe conformar los requerimientos mínimos y las capacidades máximas del arco, es decir:

$$0 \leq l_{ij} \leq X_{ij} \leq u_{ij}, \quad \text{para toda } A_{ij}.$$

#### 4.2. El problema de flujo máximo

El problema del flujo máximo en una red se define como

$$\text{Máx } v = \sum_j X_{sj}$$

sujeto a

$$\sum_i X_{ij} - \sum_k X_{jk} = \begin{cases} -v, & \text{si } j = s. \\ 0, & \text{si } j \neq s, t. \\ v, & \text{si } j = t. \end{cases} \quad (4.1)$$

$$0 \leq l_{ij} \leq X_{ij} \leq u_{ij}.$$

Este problema de programación lineal tiene métodos propios de solución que resultan más eficientes que el *método simplex*.

Intuitivamente, este tipo de red se puede aplicar por ejemplo a problemas de distribución de granos como el maíz, en donde existen  $m$  centros productores y  $n$  centros consumidores. Gráficamente se tendría un nodo fuente, al que se llamará *producción* y un nodo destino al que se llamará *consumidor*. Los arcos del nodo productor a cada uno de

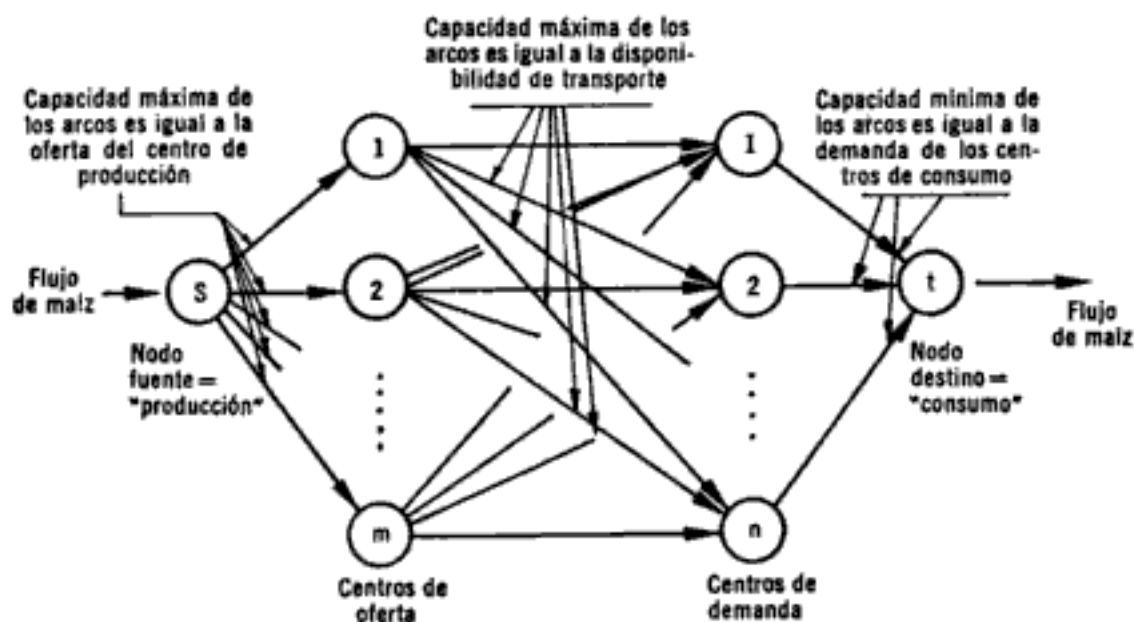


Figura 4.3

los centros de oferta 1, 2, ...,  $m$  tendrán una capacidad máxima de flujo igual a la oferta del lugar. Los arcos de los  $n$  centros consumidores al nodo destino, tendrán una capacidad mínima igual a la demanda del centro. En cambio, los arcos que van de los centros de oferta a los centros de consumo, tendrían una capacidad máxima igual a la capacidad disponible de transporte por unidad de tiempo entre esos dos puntos.

El problema es determinar primero cuál es el flujo máximo de maíz que puede circular por esa red por unidad de tiempo, y segundo, por qué arcos se distribuye ese flujo máximo.

Nótese que la capacidad mínima de los arcos que van de los centros de consumo al nodo destino garantizan que se satisfagan las demandas en cada centro.

El algoritmo que se explica a continuación para resolver el problema de flujo máximo en una red fue diseñado por Ford y Fulkerson [5, 24, 25] y lleva el nombre de *algoritmo de etiquetas*.<sup>2</sup>

*Algoritmo de etiquetas para resolver el problema de flujo máximo en una red*

Este algoritmo consta de dos fases. En la primera fase se le asigna una etiqueta a cada nodos, y en la segunda se cambia el flujo de la red.

*Primera fase. Etiquetas*

Este algoritmo, de naturaleza recursiva, considera que un nodo puede estar en uno de los siguientes estados, que son mutuamente excluyentes.

- a) Con etiqueta y registrado.
- b) Con etiqueta sin registrar.
- c) Sin etiqueta.

Un nodo  $N_j$  tiene etiqueta y está registrado cuando  $N_j$  tiene etiqueta y todos los nodos vecinos a él, es decir todos los nodos directamente conectados a  $N_j$  por un solo arco, han sido inspeccionados. Un nodo  $N_j$  tiene etiqueta pero no está registrado cuando  $N_j$  tiene etiqueta, pero no todos los nodos vecinos a él han sido inspeccionados. Un nodo está en el tercer estado cuando no tiene etiqueta.

Al inicio del algoritmo todos los nodos están sin etiqueta. Si  $X_{ij}$  es el flujo que va de  $N_i$  a  $N_j$ ,<sup>3</sup> se define a  $X_{ji}$  como el flujo ficticio que va de  $N_j$  a  $N_i$ . Sea

$$g_{ij} = u_{ij} - X_{ij},$$

la capacidad no saturada del arco  $A_{ij}$ .

Al comienzo del algoritmo se asigna la etiqueta  $[s^*, \delta_s = \infty]$  al nodo fuente  $N_s$ . A todos los nodos vecinos a  $N_s$  se le asigna la etiqueta  $[s^*, \delta_j]$

<sup>2</sup> En inglés se le llama *the labeling algorithm*.

<sup>3</sup> Al arco  $A_{ij}$  se le denominará *arco normal*, mientras que al arco ficticio  $A_{ji}$  se le conocerá como *arco reverso*.



### 334 Redes de optimización

donde  $\delta_j = g_{sj} > 0$  y  $N_j$  son todos los nodos vecinos a  $N_s$ . El primer elemento de la etiqueta indica el nodo de donde se proviene y el segundo elemento indica la cantidad de flujo que aún puede fluir en el arco. El nodo fuente  $N_s$  pasa a la categoría de etiqueta y con registro, mientras que el grupo de nodos vecinos a  $N_s$ , pasan a la categoría de etiqueta, pero sin registro. En caso de que  $g_{sj} = 0$ , al nodo  $N_j$  no se le pone una etiqueta.

A todos los nodos vecinos  $N_k$  del nodo  $N_j$ , que no tengan etiqueta y para los cuales se cumpla la condición de que

$$0 \leq X_{jk} \leq u_{jk}$$

se les asigna una etiqueta

$$[j^+, \delta_k]$$

donde

$$\delta_k = \text{Mín} [\delta_j, g_{jk}]$$

y

$$g_{jk} = u_{jk} - X_{jk}.$$

A todos aquellos nodos vecinos  $N_k$  del nodo  $N_j$ , que no tienen etiqueta y para los cuales el flujo ficticio opuesto  $X_{kj}$  es positivo, se les asigna una etiqueta

$$[j^-, \delta_k]$$

donde

$$\delta_k = \text{Mín} [\delta_j, X_{kj}].$$

En el caso de que el arco  $A_{kj}$  o  $A_{jk}$  no tenga una dirección se tiene que

$$\delta_k = \text{Mín} [\delta_j, X_{kj} + u_{jk}].$$

El signo + o - de las etiquetas indican si los flujos deben aumentar o disminuir en la segunda parte del algoritmo.

Como todos los nodos vecinos  $N_k$  del nodo  $N_j$  han sido investigados, el nodo  $N_j$  pasa al estado de etiqueta con registro. Este proceso se repite hasta alcanzar el nodo destino de la red, es decir  $N_t$ , etiquetarlo y registrarlo, o hasta que llegue un momento en que sea imposible etiquetar nodos intermedios de la red.

Si es imposible inspeccionar a todos los nodos vecinos  $N_k$  de  $N_j$ , se considera a  $N_j$  etiquetada y registrada.

Si el nodo destino de la red,  $N_t$ , no puede ser etiquetado, el flujo actual en la red no cambia y por consiguiente es el flujo máximo, es decir, el problema queda resuelto. En caso de que  $N_t$  reciba una etiqueta, el flujo actual cambiará de acuerdo con lo que se explica a continuación.

#### *Segunda fase. Modificación del flujo*

Si el nodo destino tiene etiqueta  $[k^+, \delta_t]$ , modifíquese el flujo  $N_{kt}$  del arco que va del nodo  $N_k$  al nodo destino  $N_t$ , por

$$X_{kt} + \delta_t$$

y pásese al nodo  $N_k$ . Si  $N_k$  tiene etiqueta  $[j^*, \delta_k]$  modifíquese el flujo  $N_{jk}$  por

$$X_{jk} + \delta_t$$

y pásese al nodo  $N_j$ . Por el otro lado, si el nodo  $N_k$  tiene etiqueta  $[j^*, \delta_k]$ , modifíquese el flujo  $X_{kj}$  por

$$X_{kj} - \delta_t$$

y pásese al nodo  $N_j$ . Continúese de esta manera hasta alcanzar el nodo fuente  $N_s$  y regrésese a la primera fase (de etiquetar). En esta iteración se han introducido a la red  $\delta_t$  unidades de nuevo flujo.

Como todos los arcos tienen una capacidad máxima, el algoritmo termina en un número finito de pasos.

*Ejemplo.* Supóngase que la Compañía Nacional de Subsistencias Populares tiene un programa anual de costalera. Esta se compra de dos fábricas, una en Mérida con capacidad de producción máxima de 10 millones de costales al año, y otra en Saltillo con capacidad de producción máxima de 7 millones de costales al año. Los excedentes en la fábrica de Mérida pueden transferirse a la planta de Saltillo. La disponibilidad de transporte entre las dos fábricas permite un máximo de 8 millones de costales por año. Hay tres centros almacenadores: en el Distrito Federal, Guadalajara y Oaxaca. La siguiente matriz proporciona la capacidad máxima anual de transporte de las fábricas a los centros almacenadores.

Origen \ Destino	Destino		
	Guadalajara	Distrito Federal	Oaxaca
Saltillo	8	4	-
Mérida	2	3	3

(en millones de costales por año)

Los excedentes de Guadalajara y Oaxaca pueden transferirse al Distrito Federal. La capacidad máxima anual de transporte es de 3 y 4 millones de costales respectivamente.

Una vez en los centros almacenadores, los costales se entregan a los ejidatarios de la región. La capacidad máxima anual de entrega es de 4 millones en la región de almacenadora de Guadalajara, 7 millones en la región del Distrito Federal y 5 millones en la región de Oaxaca.

¿Cuál es el flujo máximo anual de costales nuevos que pueden circular en este sistema?

El problema puede representarse gráficamente en la siguiente red.

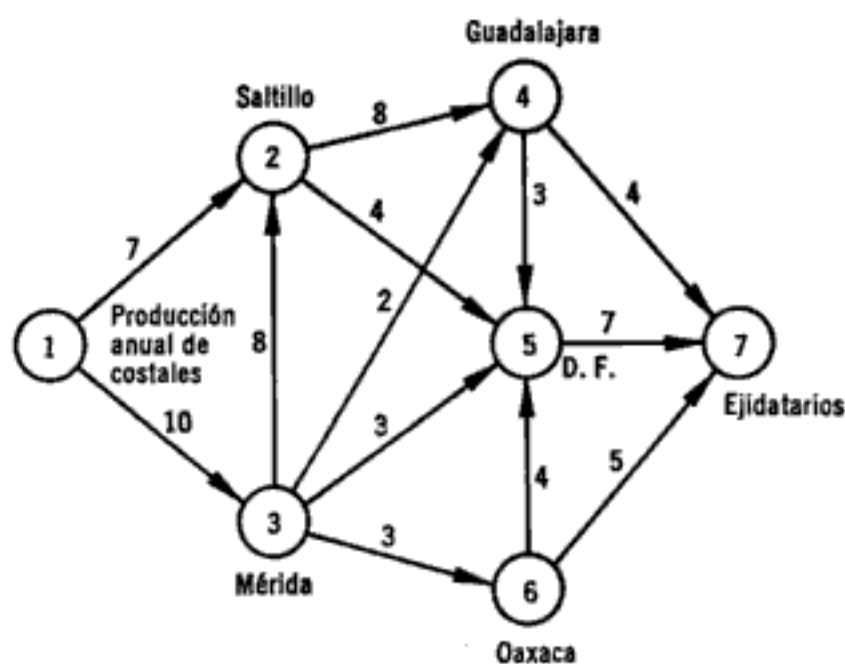


Figura 4.4

El nodo fuente es  $N_1$  y el nodo destino es  $N_7$ .

### Iteración 1

#### Fase de etiquetas

Al nodo fuente  $N_1$  se le coloca la etiqueta  $[1^+, \infty]$ . Los nodos vecinos a  $N_1$  son  $N_2$  y  $N_3$ . Como tanto  $g_{12}$  como  $g_{13}$  son positivos, se les coloca respectivamente las etiquetas  $[1^+, 7]$  y  $[1^+, 10]$ . El nodo  $N_1$  queda con etiqueta y registrado.

Los nodos vecinos de  $N_2$  son  $N_4$  y  $N_5$ . Se analiza  $N_4$ . Si a  $N_4$  se llega vía el arco  $A_{24}$  se tiene que

$$\begin{aligned}\delta_4 &= \text{Mín} [\delta_2, g_{24}] \\ &= \text{Mín} [7, 8] = 7,\end{aligned}$$

por lo que la etiqueta de  $N_4$  será  $[2^+, 7]$ . Si se llega a  $N_5$  vía  $A_{25}$  se tiene que

$$\begin{aligned}\delta_5 &= \text{Mín} [\delta_2, g_{25}] \\ &= \text{Mín} [7, 4] = 4,\end{aligned}$$

por lo que la etiqueta de  $N_5$  será  $[2^+, 4]$ . El nodo  $N_2$  queda entonces con etiqueta y registrado.

Los nodos vecinos a  $N_3$  que permanecen aún sin registrar están compuestos únicamente por el nodo  $N_6$ . Si a éste se llega vía el arco  $A_{36}$  se tiene

$$\begin{aligned}\delta_6 &= \text{Mín} [\delta_3, g_{36}] \\ &= \text{Mín} [10, 3] = 3,\end{aligned}$$

por lo que la etiqueta de  $N_6$  es  $[3^+, 3]$ . El nodo  $N_3$  queda registrado y con etiqueta.

Los nodos  $N_4, N_5, N_6$  tienen etiqueta, pero aún no han sido registrados, pues su único nodo vecino,  $N_7$ , el nodo destino, aún no ha sido analizado, y no tiene etiqueta

Arbitrariamente se llega al nodo  $N_7$  vía el arco  $A_{47}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \delta_7 &= \text{Mín} [\delta_4, g_{47}] \\ &= \text{Mín} [7, 4] = 4, \end{aligned}$$

y la etiqueta de  $N_7$  es  $[4^+, 4]$ . Como todos los nodos ya tienen etiqueta se pasa a la fase de modificación del flujo. Recuérdese que por el momento todos los flujos en la red son nulos.

#### Fase de modificación de flujo

Esta fase analiza a los nodos, empezando por el nodo destino  $N_7$ . Dado que  $N_7 = [4^+, 4]$ , esto implica a su vez que  $X_{44} = 4$  y por lo tanto  $g_{44} = 4 - 4 = 0$ . Estando en el nodo  $N_4$ , su etiqueta de  $[2^+, 7]$  indica que  $X_{24} = 4$  y  $g_{24} = 8 - 4 = 4$ . Se pasa al nodo  $N_2$ , y dado que su etiqueta dice  $[1^+, 7]$ , se tiene que  $X_{12} = 4$  y  $g_{12} = 7 - 4 = 3$ . Las demás  $g_{jk}$  no cambian.

Así, en esta iteración, se introducen a la red 4 unidades de flujo, vía la cadena  $N_1, A_{12}, N_2, A_{24}, N_4, A_{47}, N_7$ .

#### Iteración 2

Ya en forma tabulada se calcula lo siguiente:<sup>4</sup>

#### Fase de etiquetas

Nodo $N_j$	Nodo $N_k$	$\delta_j$	$g_{jk}$	Etiqueta $N_k$
$N_1^*$	$N_1$	—	—	$[1^+, \infty]$
$N_1$	$N_2$	$\infty$	3	$[1^+, 3]$
$N_1$	$N_3$	$\infty$	10	$[1^+, 10]$
$N_2$	$N_4$	3	4	$[2^+, 3]$
$N_2$	$N_5$	3	4	$[2^+, 3]$
$N_3$	$N_6$	10	3	$[3^+, 3]$
$N_5$	$N_7$	3	7	$[5^+, 3]$

\* Fuente.

<sup>4</sup> Conviene que el lector dibuje la red con los flujos existentes y las capacidades  $g_{jk}$  aún no saturadas.

### 338 Redes de optimización

#### Fase de modificación de flujo

Nodo $N_k$ Etiqueta $[j^+, \delta_k]$	Nuevo flujo $X'_{jk}$ $X'_{jk} = X_{jk} \pm \delta_t$	Nuevo valor de $g'_{jk}$ $g'_{jk} = g_{jk} - X_{jk}$
$N_7 = [5^+, 3]$	$X_{57} = 0 + 3 = 3$	$g_{57} = 7 - 3 = 4$
$N_5 = [2^+, 3]$	$X_{25} = 0 + 3 = 3$	$g_{25} = 4 - 3 = 1$
$N_2 = [1^+, 3]$	$X_{12} = 4 + 3 = 7$	$g_{12} = 3 - 3 = 0$

Los demás  $g_{jk}$  no cambian. El nuevo flujo de 3 unidades recorre la cadena  $N_1, A_{12}, N_2, A_{25}, N_5, A_{57}, N_7$ .

Al término de la segunda iteración hay un total de 7 unidades de flujo, distribuidas de la siguiente manera:

$$v = 7 \begin{cases} N_1, A_{12}, N_2, A_{24}, N_4, A_{47}, N_7 \text{ con 4 unidades} \\ N_1, A_{12}, N_2, A_{25}, N_5, A_{57}, N_7 \text{ con 3 unidades.} \end{cases}$$

#### Iteración 3

#### Fase de etiquetas

Nodo $N_j$	Nodo $N_k$	$\delta_j$	$g_{jk}$	Etiqueta $N_k$
$N_1^*$	$N_1$	—	—	$[1^+, \infty]$
$N_1$	$N_5$	$\infty$	10	$[1^+, 10]$
$N_3$	$N_2$	10	8	$[3^+, 8]$
$N_3$	$N_4$	10	2	$[3^+, 2]$
$N_3$	$N_5$	10	3	$[3^+, 3]$
$N_3$	$N_6$	10	3	$[3^+, 3]$
$N_5$	$N_7$	3	3	$[5^+, 3]$

\* Fuente.

#### Fase de modificación de flujo

Nodo $N_k$ Etiqueta $[j^+, \delta_k]$	Nuevo flujo $X'_{jk}$ $X'_{jk} = X_{jk} \pm \delta_t$	Nuevo valor de $g'_{jk}$ $g'_{jk} = g_{jk} - X_{jk}$
$N_7 = [5^+, 3]$	$X_{57} = 3 + 3 = 6$	$g_{57} = 4 - 3 = 1$
$N_5 = [3^+, 3]$	$X_{35} = 0 + 3 = 3$	$g_{35} = 3 - 3 = 0$
$N_3 = [1^+, 10]$	$N_{13} = 0 + 3 = 3$	$g_{13} = 10 - 3 = 7$

Las demás  $g_{jk}$  no cambian. Al término de la tercera iteración hay 10 unidades de flujo, distribuidas de la siguiente manera:

$$v = 10 \begin{cases} N_1, A_{12}, N_2, A_{25}, N_5, A_{57}, N_7 \text{ con 3 unidades} \\ N_1, A_{12}, N_2, A_{24}, N_4, A_{47}, N_7 \text{ con 4 unidades} \\ N_1, A_{13}, N_3, A_{35}, N_5, A_{57}, N_7 \text{ con 3 unidades.} \end{cases}$$

Iteración 4

Fase de etiquetas

Nodo $N_j$	Nodo $N_k$	$\delta_j$	$g_{jk}$	Etiqueta $N_k$
$N_1^*$	$N_1$	—	—	$[1^+, \infty]$
$N_1$	$N_3$	$\infty$	7	$[1^+, 7]$
$N_3$	$N_6$	7	3	$[3^+, 3]$
$N_6$	$N_7$	3	5	$[6^+, 3]$

\* Fuente.

Fase de modificación de flujos

Nodo $N_k$ Etiqueta $[j^+, \delta_k]$	Nuevo flujo $X'_{jk}$ $X'_{jk} = X_{jk} \pm \delta_t$	Nuevo valor de $g'_{jk}$ $g'_{jk} = g_{jk} - X_{jk}$
$N_7 = [6^+, 3]$	$X_{67} = 0 + 3 = 3$	$g_{67} = 5 - 3 = 2$
$N_6 = [3^+, 3]$	$X_{36} = 0 + 3 = 3$	$g_{36} = 3 - 3 = 0$
$N_3 = [1^+, 7]$	$X_{13} = 3 + 3 = 6$	$g_{13} = 7 - 3 = 4$

Las demás  $g_{jk}$  no cambian. Al término de la cuarta iteración hay 13 unidades distribuidas de la siguiente manera:

$$v = 13 \begin{cases} N_1, A_{12}, N_2, A_{24}, N_4, A_{47}, N_7 & \text{con 4 unidades} \\ N_1, A_{12}, N_2, A_{25}, N_5, A_{57}, N_7 & \text{con 3 unidades} \\ N_1, A_{13}, N_3, A_{35}, N_5, A_{57}, N_7 & \text{con 3 unidades} \\ N_1, A_{13}, N_3, A_{36}, N_6, A_{67}, N_7 & \text{con 3 unidades.} \end{cases}$$

Gráficamente se tiene:

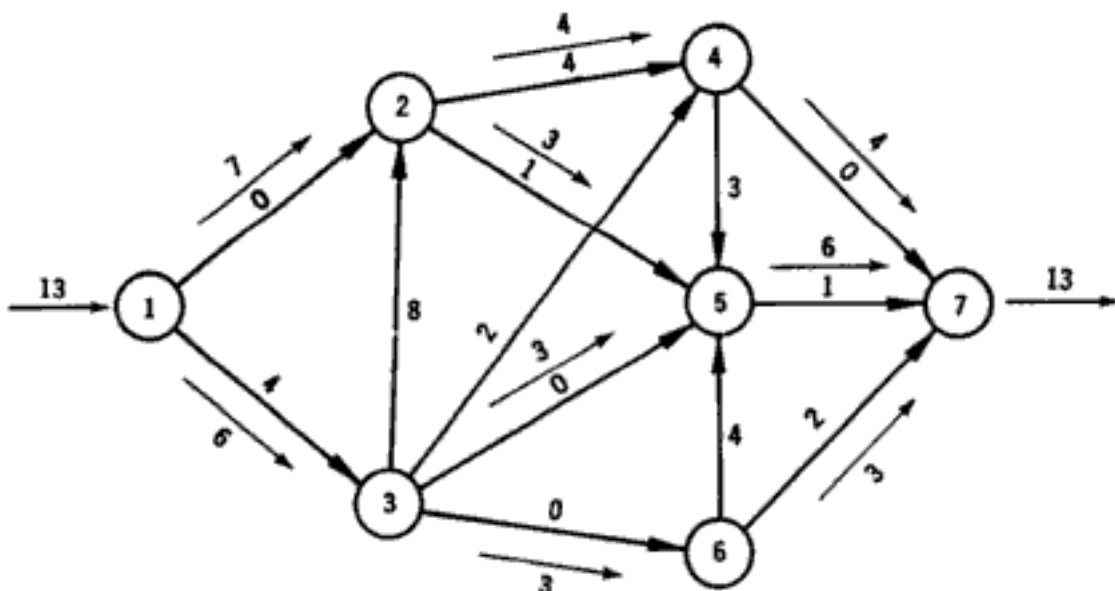


Figura 4.5

## 340 Redes de optimización

### Iteración 5

#### Fase de etiquetas

Nodo $N_j$	Nodo $N_k$	$\delta_j$	$g_{jk}$	Etiqueta $N_k$
$N_1^*$	$N_1$	—	—	$[1^+, \infty]$
$N_1$	$N_3$	$\infty$	4	$[1^+, 4]$
$N_3$	$N_4$	4	2	$[3^+, 2]$
$N_4$	$N_5$	2	3	$[4^+, 2]$
$N_5$	$N_7$	2	1	$[5^+, 1]$

\* Fuente.

#### Fase de modificación de flujos

Nodo $N_k$ Etiqueta $[j^+, \delta_k]$	Nuevo flujo $X'_{jk}$ $X'_{jk} = X_{jk} \pm \delta_k$	Nuevo valor de $g'_{jk}$ $g'_{jk} = g_{jk} - X_{jk}$
$N_7 = [5^+, 1]$	$X_{57} = 6 + 1 = 7$	$g_{57} = 7 - 7 = 0$
$N_5 = [4^+, 2]$	$X_{45} = 0 + 1 = 1$	$g_{45} = 3 - 1 = 2$
$N_4 = [3^+, 2]$	$X_{34} = 0 + 1 = 1$	$g_{34} = 2 - 1 = 1$
$N_3 = [1^+, 4]$	$X_{13} = 6 + 1 = 7$	$g_{13} = 4 - 1 = 3$

gráficamente se tiene:

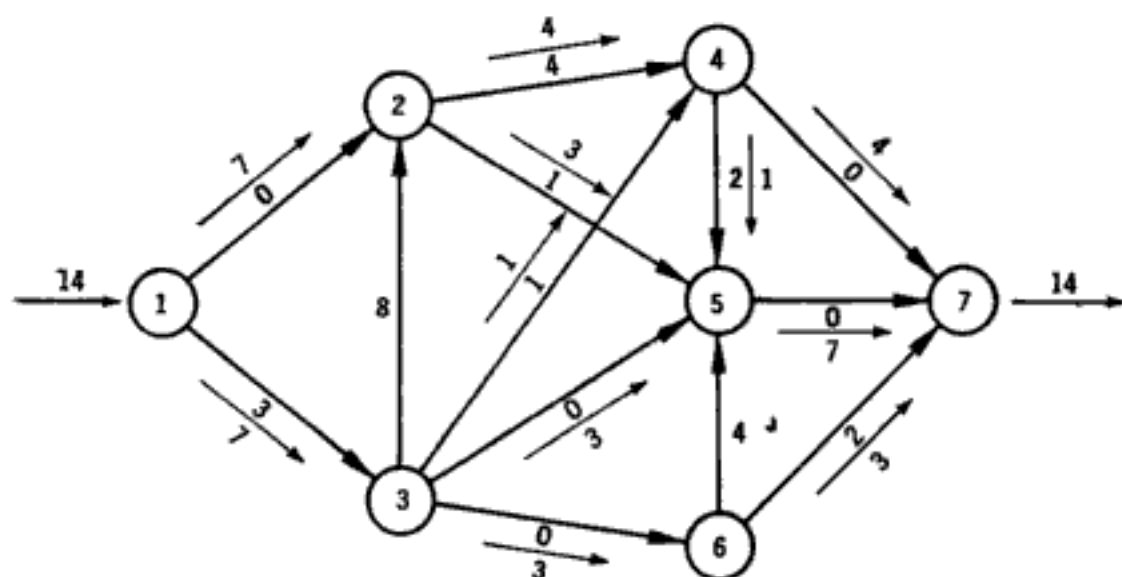


Figura 4.6

El lector deberá convencerse, por la figura 4.6, de que la única vía disponible que permite el aumento del flujo en  $N_7$  es el arco  $A_{67}$ , pues el resto de los arcos que conducen al destino, como lo son,  $A_{47}$  y  $A_{57}$  ya están saturados. Sin embargo, el único arco que llega al nodo  $N_6$ , es decir  $A_{36}$ , ya está saturado. Por lo tanto el flujo que se muestra en la figura 4.6 es máximo, es decir que por la red de distribución de costalera puede fluir un volumen máximo de 14 millones de costales por año.

*Ejemplo.* Se trata en este ejemplo de ilustrar el uso de la etiqueta  $[j^-, \delta_k]$ . Supóngase la siguiente red:

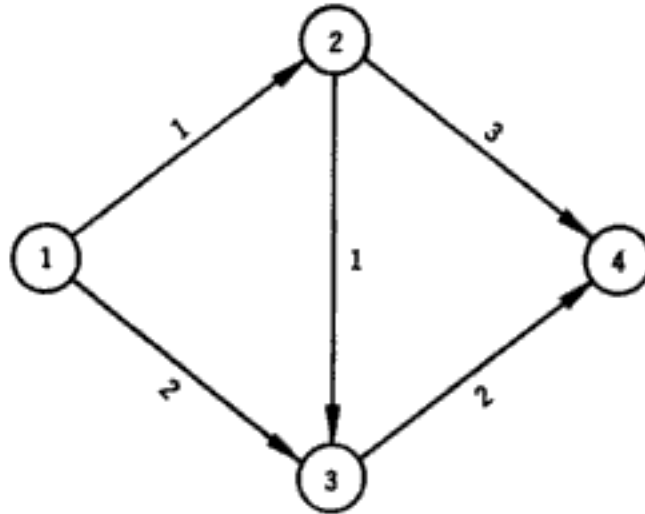


Figura 4.7

*Iteración 1*

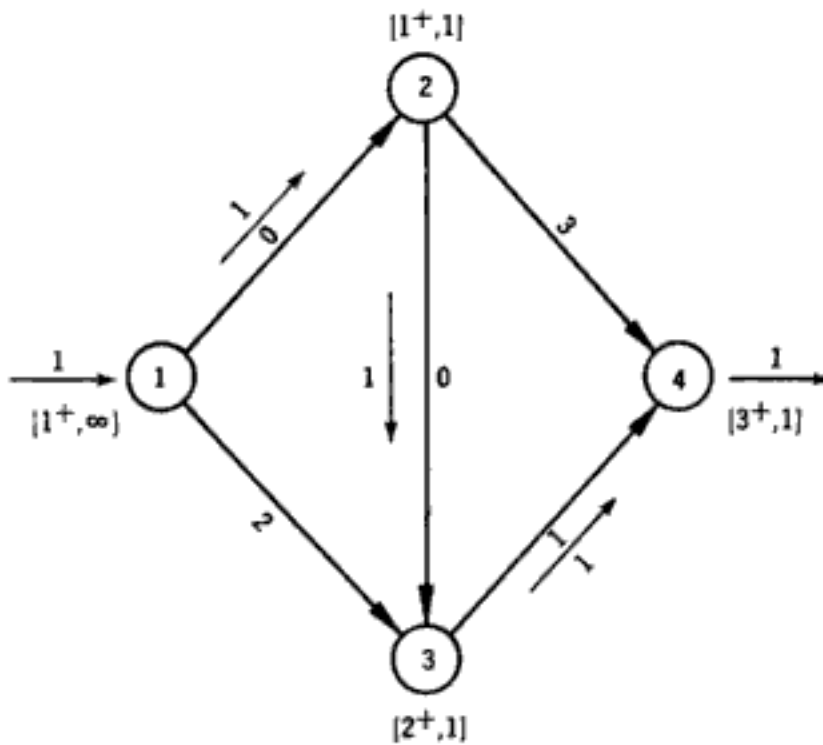


Figura 4.8



## Iteración 2

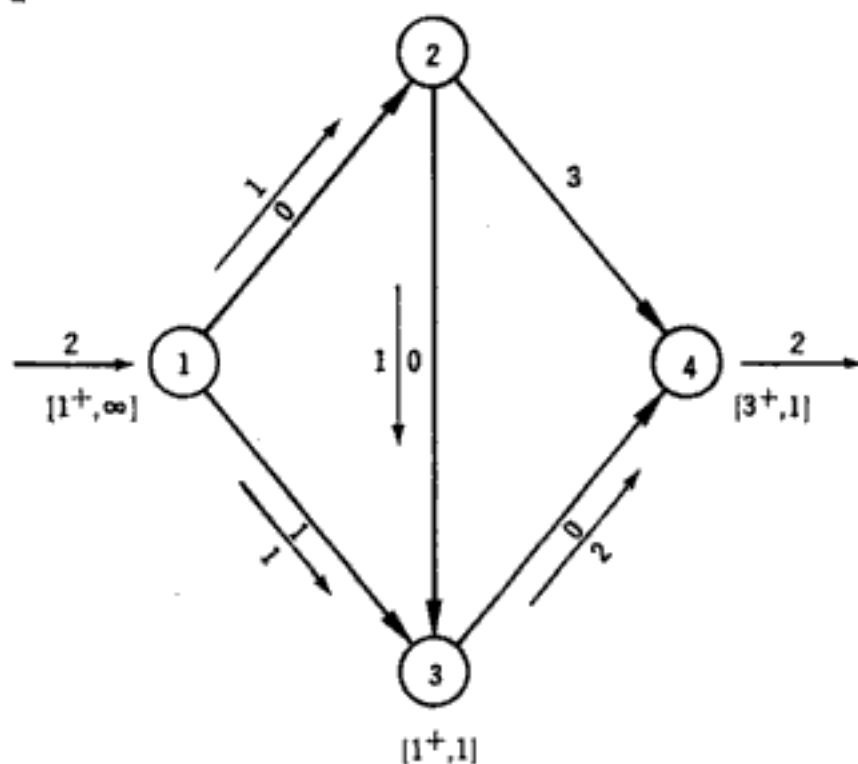


Figura 4.9

## Iteración 3

El nodo  $N_1$  lleva la etiqueta  $[1^+, \infty]$ . De ahí se pasa al nodo  $N_3$  con etiqueta  $[1^+, 1]$ . Como el flujo  $X_{23}$  es positivo, se puede utilizar un flujo ficticio  $X_{32}$ , etiquetando al nodo  $N_2$  con  $[3^-, \delta_2]$ , donde

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \text{Mín} [\delta_3, X_{23}] \\ &= \text{Mín} [1, 1] = 1, \end{aligned}$$

o sea que a  $N_2$  se le pone la etiqueta  $[3^-, 1]$ . De ahí se pasa al nodo  $N_4$  con etiqueta  $[2^+, 1]$ . Gráficamente se tiene la siguiente modificación de flujo:

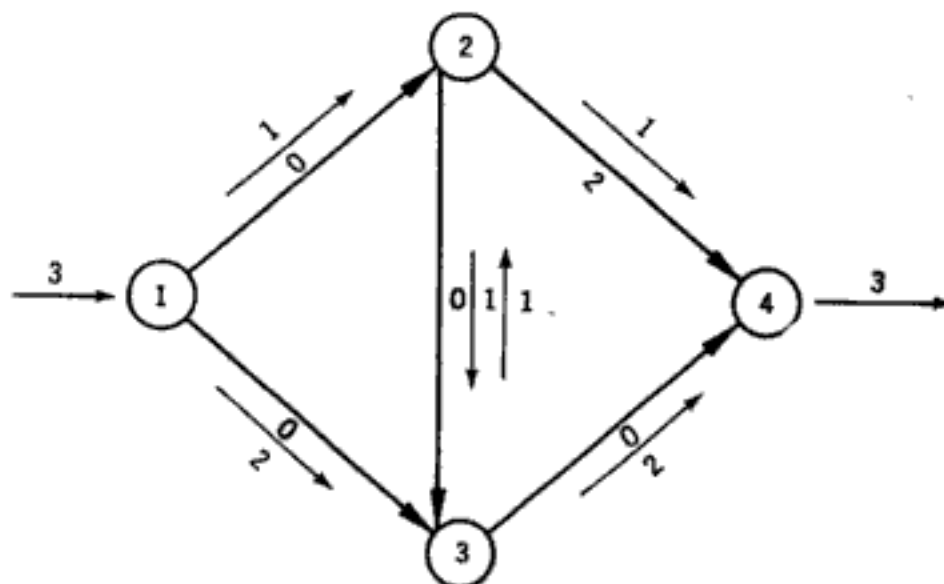


Figura 4.10

quedando el siguiente flujo neto que ya es máximo.

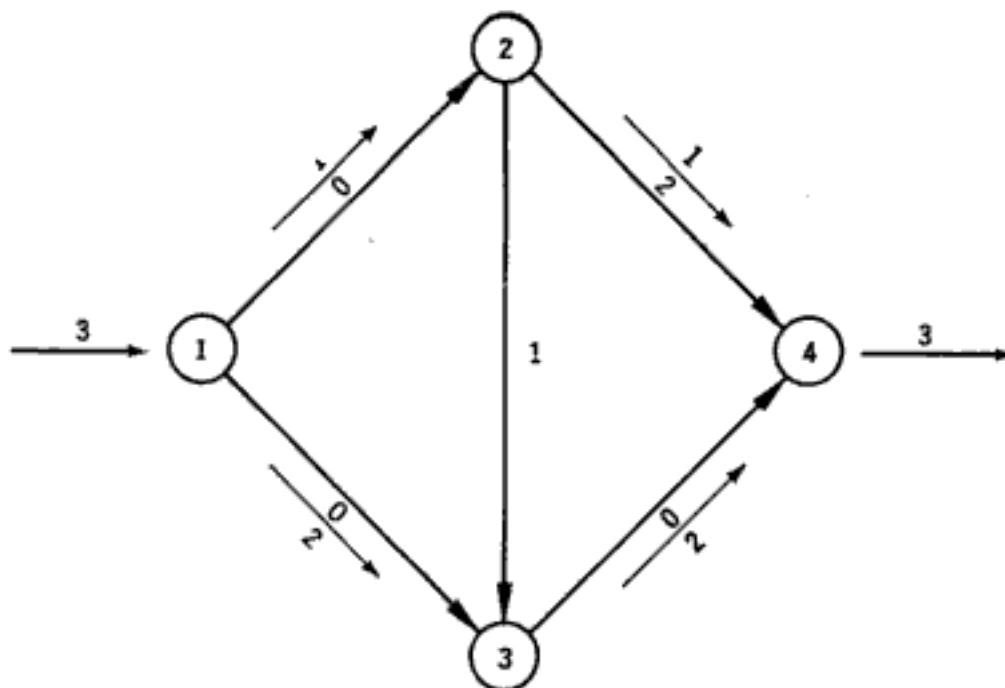


Figura 4.11

El flujo ficticio  $X_{32}$  cancela al flujo real  $X_{23}$ , y por consiguiente, se consigue que el flujo en  $A_{12}$  se continúe por  $A_{24}$  y el flujo total aumente de dos a tres unidades.

Edmons y Karp [21] modificaron en 1969 el algoritmo de flujo máximo que Ford y Fulkerson [5, 24, 25] diseñaron en 1956, para que la red pudiera tener capacidades máximas en sus arcos, que no necesariamente fueran números enteros.

### 4.3. Redes de optimización y la programación lineal

Los problemas de redes de optimización corresponden a una clase especial de problemas de programación lineal. En efecto, el problema de flujo máximo a través de la red mostrada en la figura 4.12, puede formularse así:

$$\text{Máx } v = \mathbf{c}\mathbf{X}$$

sujeto a

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{0} \tag{4.2}$$

$$\mathbf{B}\mathbf{X} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0},$$

donde

$$\mathbf{X} = [v, X_{s1}, X_{s2}, X_{12}, X_{21}, X_{1t}, X_{2t}]$$

$$\mathbf{c} = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

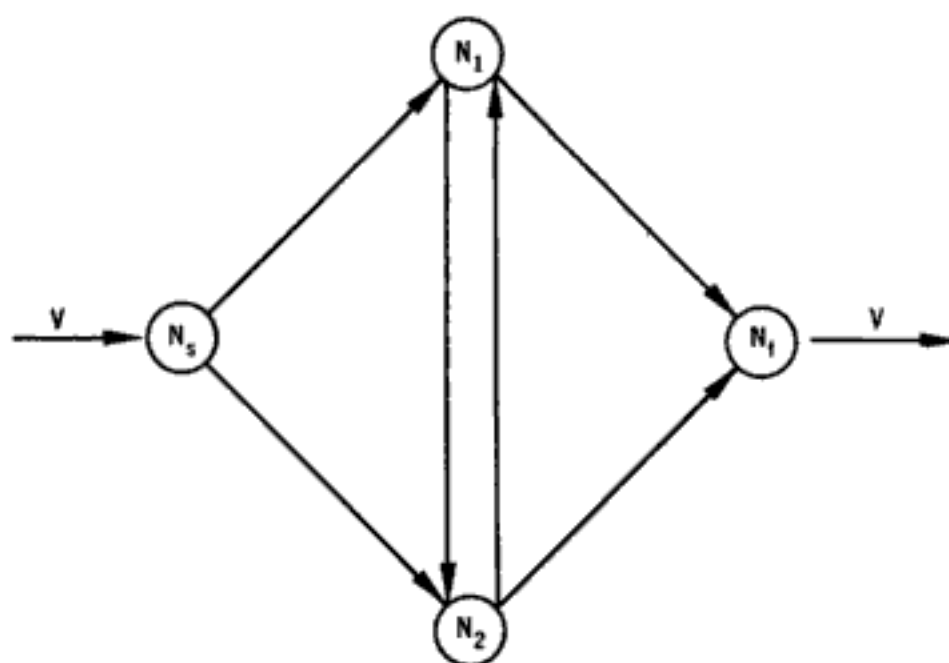


Figura 4.12

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} s \\ 1 \\ 2 \\ t \end{array} \begin{array}{c} v \\ X_{s1} \\ X_{s2} \\ X_{12} \\ X_{21} \\ X_{1t} \\ X_{2t} \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c} X_{s1} \\ X_{s2} \\ X_{12} \\ X_{21} \\ X_{1t} \\ X_{2t} \end{array} \begin{array}{c} v \\ X_{s1} \\ X_{s2} \\ X_{12} \\ X_{21} \\ X_{1t} \\ X_{2t} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz  $\mathbf{A}$  tiene  $n$  renglones por  $m + 1$  columnas, la matriz  $\mathbf{B}$  tiene  $m$  renglones por  $m + 1$  columnas, donde  $n$  es el número de nodos de la red y  $m$  es el número de arcos de la red. La convención que se utiliza a continuación es que el flujo que sale de un nodo (eflujo) es positivo y el que llega a un nodo (influjo) es negativo.<sup>5</sup> El vector  $\mathbf{b}$  tiene como sus  $m$  componentes a los siguientes:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_{s1} \\ b_{s2} \\ b_{12} \\ b_{21} \\ b_{1t} \\ b_{2t} \end{bmatrix}$$

<sup>5</sup> Esta convención no concuerda con la tomada anteriormente. Se cambió la convención a propósito con objeto de que el lector adquiriera un poco de flexibilidad en el manejo de estas ideas, que después de todo son convencionales.

La matriz  $\mathbf{A}$  tiene las siguientes propiedades:

- a) En cada columna hay un solo  $+1$ , un solo  $-1$  y el resto de las componentes son ceros.
- b) El rango de  $\mathbf{A}$  es  $n-1$ .
- c) Cada subdeterminante de  $\mathbf{A}$  tiene un valor  $+1$ , ó  $-1$  ó  $0$ . En este caso la matriz  $\mathbf{A}$  tiene la propiedad de que es *totalmente unimodular*.

Si el vector  $\mathbf{b}$  es un vector cuyas componentes son todas números enteros, y la matriz  $\mathbf{A}$  es totalmente unimodular, entonces el vector de flujos  $\mathbf{X}$ , óptimo en (4.2), es un vector cuyas componentes son números enteros.

El probar que una matriz es totalmente unimodular, es muy laborioso. Sin embargo, existe una condición suficiente, mas no necesaria, para que una matriz sea totalmente unimodular. Esta condición suficiente se propone en el siguiente teorema.

**Teorema 4.1.** Una matriz es totalmente unimodular si satisface las siguientes 4 condiciones:

- a) Cada columna de la matriz contiene no más de dos componentes diferentes de cero;
- b) cada componente de la matriz es  $0$  ó  $+1$  ó  $-1$ ;
- c) la matriz puede ser dividida en dos subconjuntos disjuntos de filas,<sup>6</sup> tal que dos componentes no nulos en una columna, con el mismo signo, no forman parte del mismo conjunto de filas; y
- d) dos componentes diferentes de cero en una columna con signos diferentes, forman parte del mismo conjunto de filas.

#### 4.4. El teorema del flujo máximo y el corte mínimo de una red

Se denota a una red con  $G = [N:A]$ , donde  $N$  es un conjunto finito de nodos  $\{N_s, N_1, N_2, \dots, N_t\}$  y  $A$  es un conjunto finito de arcos que unen pares ordenados de nodos  $(N_i, N_j)$  del conjunto  $N$ . A los elementos de  $A$  se les denota por  $A_{ij}$ .

Un *corte* de la red  $G$  se denota por  $(X, \bar{X})$ , donde  $X$  es un subconjunto de  $N$  y  $\bar{X}$  es su complemento, es decir  $X \cup \bar{X} = N$ . Un corte  $(X, \bar{X})$  es un conjunto de arcos  $A_{ij}$ , con  $N_i$  en  $X$  y  $N_j$  en  $\bar{X}$  o viceversa  $N_i$  en  $\bar{X}$  y  $N_j$  en  $X$ . Un corte de una red, como su nombre lo indica, es un conjunto de arcos cuya ausencia desconectaría completamente a la red. Un corte que separa a la fuente de la red, del destino de la misma, es un corte  $(X, \bar{X})$  tal que  $N_s$  está en  $X$  y  $N_t$  en  $\bar{X}$ .

La *capacidad* de un corte  $(X, \bar{X})$ , se denota por  $c(X, \bar{X})$  y se define como  $\sum_{i,j} u_{ij}$  con  $N_i$  en  $X$  y  $N_j$  en  $\bar{X}$ . Al definirse la capacidad de un corte,

<sup>6</sup> Su intersección es el conjunto vacío.

### 346 Redes de optimización

se toma en cuenta la dirección de los arcos del corte, por lo que se puede demostrar fácilmente que  $c(X, \bar{X}) \neq c(\bar{X}, X)$ .

Se define como un *corte mínimo* de separación de  $N_s$  a  $N_t$  a aquel corte cuya capacidad sea mínima.

Ford y Fulkerson [5] demostraron el siguiente teorema:

**Teorema 4.2.** *Flujo máximo con el corte mínimo.*

En cualquier red, el flujo máximo que fluye de la fuente al destino, es igual a la capacidad del corte mínimo que separa a la fuente del destino. Este corte mínimo de separación puede no ser único.

La prueba de este famoso teorema se encuentra en la referencia [5].

*Ejemplo.*

En la red que se muestra en la figura 4.13 existen varios cortes, cada uno con una capacidad diferente. Los números que se muestran en los arcos son las capacidades máximas del arco. La siguiente tabla proporciona el corte de separación y su capacidad.

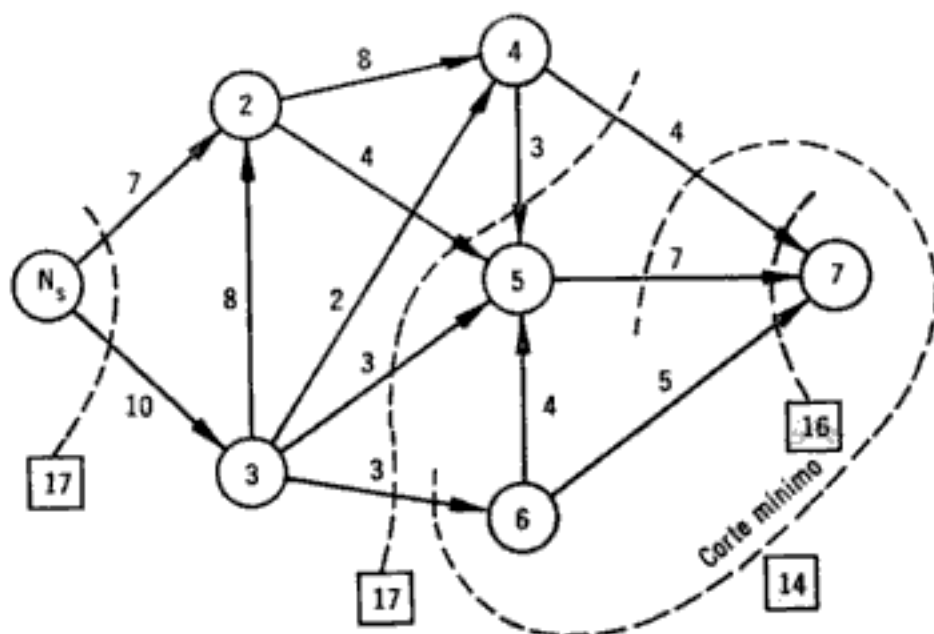


Figura 4.13

Arcos en el corte de separación	Capacidad
1. $\{A_{s2}, A_{s3}\}$	17 unidades
2. $\{A_{36}, A_{35}, A_{25}, A_{45}, A_{4t}\}$	17 unidades
3. $\{A_{4t}, A_{5t}, A_{6t}\}$	16 unidades
4. $\{A_{36}, A_{4t}, A_{5t}\}$	14 unidades

El corte mínimo es precisamente el cuarto de la lista, y como el lector recordará de la sección 4.3, el flujo máximo a través de esta red, son 14 unidades, que es precisamente la capacidad del corte mínimo.

### 4.5. Problemas de flujo a costo mínimo

En esta sección se va a cubrir una variedad de problemas prácticos, que pueden ser modelados y resueltos por medio de redes. En estas redes se va a calcular el costo mínimo de enviar flujo de un nodo a otro.

Si  $c_{ij} \geq 0$  es el costo unitario del arco  $A_{ij}$  que va del nodo  $N_i$  al nodo  $N_j$ , entonces,  $c_{ij}$  no satisface la propiedad geométrica que dice que el trayecto más corto y por ende más económico entre dos puntos, es el que utiliza la recta que une a esos dos puntos. En términos de la figura 4.14 se tiene que *no se cumple necesariamente* la siguiente desigualdad

$$c_{ij} + c_{jk} \geq c_{ik}.$$

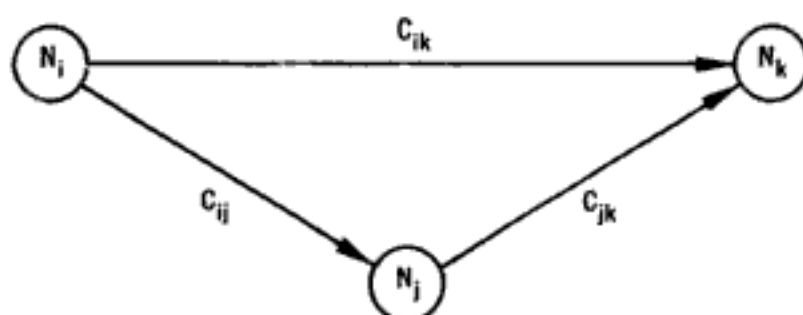


Figura 4.14

En una red se puede tener que  $c_{ik} \geq c_{ij} + c_{jk}$  o bien  $c_{ik} \leq c_{ij} + c_{jk}$  dependiendo de los costos unitarios en cuestión. Si el trayecto más económico entre dos puntos es el arco directo que los une, entonces los problemas de redes tendrían soluciones triviales. Afortunadamente, para el desarrollo de esta sección,<sup>7</sup> este no es el caso en las redes de optimización.

El algoritmo que se va a presentar es el que determina la cadena de arcos más económica de la fuente al destino de una red. El algoritmo que se va a explicar es de Dijkstra [19]. Hay otros métodos que resuelven el mismo problema, tales como los algoritmos de Bellman [14], Dantzig [18], Ford y Fulkerson [5] y Minty [39].

#### *Algoritmo de Dijkstra para determinar el trayecto más económico de la fuente al destino de una red*

El algoritmo que diseñó Dijkstra sirve para determinar la ruta más económica entre la fuente y el destino de una red. Este tipo de problemas, tiene aplicaciones en problemas de distribución y asignación de recursos. Sin embargo, la aplicación más fuerte de los métodos de redes, es cuando se combinan los problemas de flujo máximo en una red a costo mínimo. Este tipo de problema combinado y sus aplicaciones se verá en la sección siguiente.

<sup>7</sup> Y por qué no decirlo, para no quitarle el sustento a este autor.

## 348 Redes de optimización

En el algoritmo de Dijkstra se considera que los arcos de una red pueden pertenecer a sólo uno de los siguientes conjuntos, mutuamente excluyentes, a saber:

- a) El arco pertenece a un árbol.
- b) El arco no pertenece a un árbol.

Al principio los arcos no pertenecen al árbol. En cada iteración, el algoritmo incrementa en uno el número de arcos en el árbol, hasta llegar a  $n-1$  arcos, donde  $n$  es el número de nodos en la red. Cuando el árbol queda formado por  $n-1$  arcos, el algoritmo llega a su conclusión y determina la solución del problema. Estos son los pasos a seguir:

*Paso 1.* Sea  $N_s$  el nodo fuente. Entonces  $L'_{sk} = c_{sk}$  para todo  $A_{sk}$  que esté definido en la red. El nodo  $N_s$  pasa a ser un elemento del árbol. Se define  $L_{ss} \equiv 0$ .

*Paso 2.* Sea

$$L_{sr} = \underset{k}{\text{Mín}} \{L'_{sk}\} = \underset{k}{\text{Mín}} [L_{sj} + c_{jk}]$$

donde  $N_k$  son todos los nodos vecinos<sup>8</sup> a los nodos del árbol en cuestión.

*Paso 3.* El arco  $A_{jr}$  pasa a ser un elemento del árbol. Se etiqueta al nodo  $N_r$  con  $(L_{sr}, N_j)$ .

*Paso 4.* Si el árbol tiene  $n-1$  arcos, pare, la solución óptima ha sido encontrada. En caso contrario continúe con el paso 5.

*Paso 5.* Sea

$$L'_{sk} = \underset{k}{\text{Mín}} [L'_{sk}; L_{sr} + c_{rk}]$$

para todos los nodos  $N_k$  vecinos a los nodos del árbol. Regrese al paso 2.

Este algoritmo también etiqueta a todos los nodos. Un nodo  $N_j$  puede tener una etiqueta *temporal* o *permanente*. Independientemente del tipo de etiqueta, cada una de éstas llevará dos componentes. La primera indica el costo temporal o permanente más económico de alcanzar al nodo  $N_j$  desde el nodo fuente y la segunda componente indica el nodo del cual se procede.

Una etiqueta  $(L'_{sk}, N_i)$  es *temporal* mientras que una etiqueta  $(L_{sk}, N_i)$  es *permanente*. Cuando un costo no está definido, se toma a este como  $\infty$ .

*Ejemplo.* Supóngase que en la siguiente red (después se le da un significado intuitivo) se quiere hallar la ruta más económica del nodo fuente  $N_s$  al nodo destino  $N_t$ , en donde los números indicados sobre el arco  $A_{ij}$  son los costos unitarios  $c_{ij}$ . Los arcos sin flecha son adireccionales.

<sup>8</sup> El nodo  $N_k$  es vecino del nodo  $N_i$ , si es que existe un arco  $A_{ki}$  o  $A_{ik}$  que conecta a ambos.

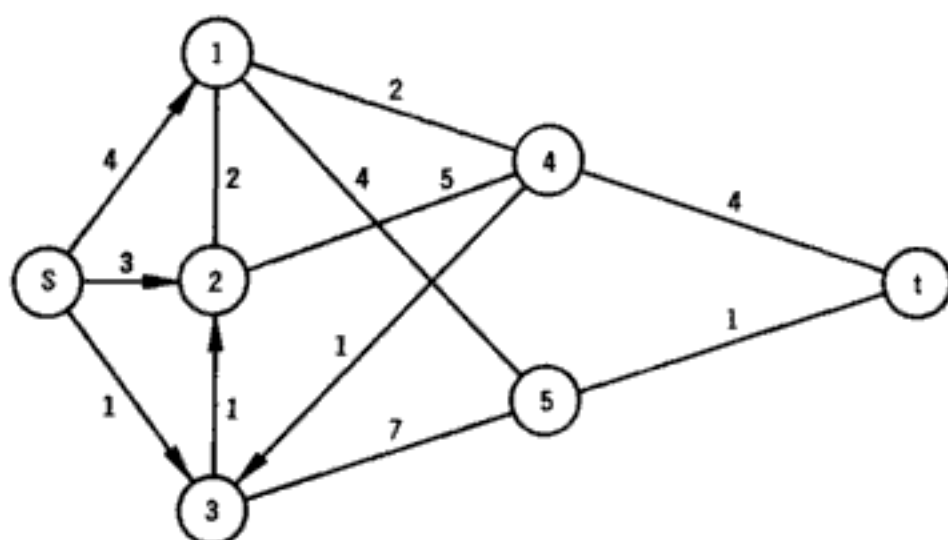


Figura 4.15

Iteración 1

Paso 1.  $N_s$  pasa a formar parte del árbol,  $L_{ss} = 0$ .

Vecinos a los nodos del árbol son:  $N_1, N_2, N_3$ .

$L_{ss} = 0, L'_{1s} = L'_{s1} = 2, L'_{s1} = 4, L'_{12} = L'_{21} = 2, L'_{s2} = 3,$   
 $L'_{15} = L'_{51} = 4, L'_{s3} = 1, L'_{24} = L'_{42} = 5, L'_{32} = 1, L'_{4t} =$   
 $L'_{t4} = 4, L'_{5t} = L'_{t5} = 1, L'_{14} = \infty, L'_{23} = \infty, L'_{3s} = \infty,$   
 $L'_{st} = \infty,$  etc.

Paso 2.  $L_{sr} = \underset{k=1,2,3}{\text{Mín}} \{L'_{sk}\} = \underset{k=1,2,3}{\text{Mín}} \{L_{ss} + c_{sk}\} = \text{Mín} \{4, 3, 1\} = 1$ .

$$L_{sr} = L'_{s3}$$

$$r = 3.$$

Paso 3. El arco  $A_{s3}$  pasa a formar parte del árbol. Se etiqueta a  $N_3$  con  $(1, s)$ .

Paso 4. Como el árbol no contiene  $n - 1 = 7 - 1 = 6$  elementos, se continúa en el siguiente paso.

Paso 5.  $L'_{sk} = \underset{k}{\text{Mín}} (L'_{sk}, L_{sr} + c_{rk})$ .

Como los nodos vecinos a los nodos del árbol son  $N_1, N_2, N_4, N_5$  se tiene:

$$L'_{s1} = \text{Mín} (L'_{s1}, L_{s3} + c_{31}) = \text{Mín} (4, 1 + \infty) = 4.$$

$$L'_{s2} = \text{Mín} (L'_{s2}, L_{s3} + c_{32}) = \text{Mín} (3, 1 + 1) = 2.$$

$$L'_{s4} = \text{Mín} (L'_{s4}, L_{s3} + c_{34}) = \text{Mín} (\infty, 1 + \infty) = \infty.$$

$$L'_{s5} = \text{Mín} (L'_{s5}, L_{s3} + c_{35}) = \text{Mín} (\infty, 1 + 7) = 8.$$



## 350 Redes de optimización

### Iteración 2

*Paso 2.*  $L_{sr} = \text{Mín}(4, 2, \infty, 8) = 2.$

Por lo que  $L_{sr} = L'_{s2}$  y  $r = 2.$

*Paso 3.* El arco  $A_{3,2}$  pasa a formar parte del árbol y la etiqueta de  $N_2$  es  $(2, 3).$

*Paso 4.* Hay 2 elementos en el árbol (menor a 6), por lo que se continúa.

*Paso 5.* Los nodos vecinos al árbol son  $N_1, N_4, N_5.$  Entonces

$$L'_{s1} = \text{Mín}(L'_{s1}, L_{s2} + c_{21}) = \text{Mín}(4, 2 + 2) = 4.$$

$$L'_{s4} = \text{Mín}(L'_{s4}, L_{s2} + c_{24}) = \text{Mín}(\infty, 2 + 5) = 7.$$

$$L'_{s5} = \text{Mín}(L'_{s5}, L_{s2} + c_{25}) = \text{Mín}(8, 2 + \infty) = 8.$$

### Iteración 3

#### *Paso 2*

$$L_{sr} = \text{Mín}(4, 7, 8) = 4.$$

Por lo que  $L_{sr} = L'_{s1}$  y  $r = 1.$

*Paso 3.* El arco  $A_{s1}$  pasa a formar parte del árbol<sup>9</sup> y el nodo  $N_1$  se etiqueta  $(4, 5).$

*Paso 4.* No se tiene aún la solución óptima (¿por qué?).

*Paso 5.* Vecinos al árbol son los nodos  $N_4$  y  $N_5,$  por lo que

$$L'_{s4} = \text{Mín}(L'_{s4}, L_{s1} + c_{14})$$

$$= \text{Mín}(7, 4 + 2) = 6.$$

$$L'_{s5} = \text{Mín}(L'_{s5}, L_{s1} + c_{15})$$

$$= \text{Mín}(8, 4 + 4) = 8.$$

### Iteración 4

*Paso 2.*  $L_{sr} = \text{Mín}(6, 8) = 6$

$$L_{sr} = L'_{s4} = 6$$

$$r = 4.$$

*Paso 3.* El arco  $A_{14}$  pasa al árbol y  $N_4$  se le etiqueta  $(6, 1).$

*Paso 4.* No se tiene aún la solución óptima.

*Paso 5.* Nodos vecinos al árbol son  $N_5$  y  $N_t,$  por lo que

<sup>9</sup> Note de la iteración anterior, que  $L'_{s1} = 4,$  ya sea vía el arco  $A_{s1}$  o la cadena  $N_s, A_{s3}, N_3, A_{32}, N_2, A_{21}.$  Arbitrariamente se escogió como nuevo elemento del árbol, al arco  $A_{s1}.$

$$L'_{s5} = \text{Mín} (L'_{s5}, L_{s4} + c_{45}) = \text{Mín} (8, 6 + \infty) = 8.$$

$$L'_{st} = \text{Mín} (L'_{st}, L_{s4} + c_{4t}) = \text{Mín} (\infty, 6 + 4) = 10.$$

*Iteración 5*

*Paso 2.*  $L_{sr} = \text{Mín} (8, 10) = 8$

$$L_{sr} = L'_{s5} = 8$$

$$r = 5.$$

*Paso 3.* El arco  $A_{35}$  entra a formar parte del árbol<sup>10</sup> y se etiqueta al nodo  $N_5$  con  $(8, 3)$ .

*Paso 4.* Se continúa.

*Paso 5.*  $L_{st} = \text{Mín} (L'_{st}, L_{s5} + c_{5t}) = \text{Mín} (10, 8 + 1) = 9.$

*Iteración 6*

*Paso 2.*  $L_{sr} = L'_{st} = 9.$

$$r = t.$$

*Paso 3.*  $A_{5t}$  entra al árbol y  $N_t$  se le pone la etiqueta  $(9, 5)$ .

*Paso 4.* Como el árbol contiene  $n - 1 = 6$  elementos, se ha llegado a la solución óptima del problema, que gráficamente aparece a continuación.

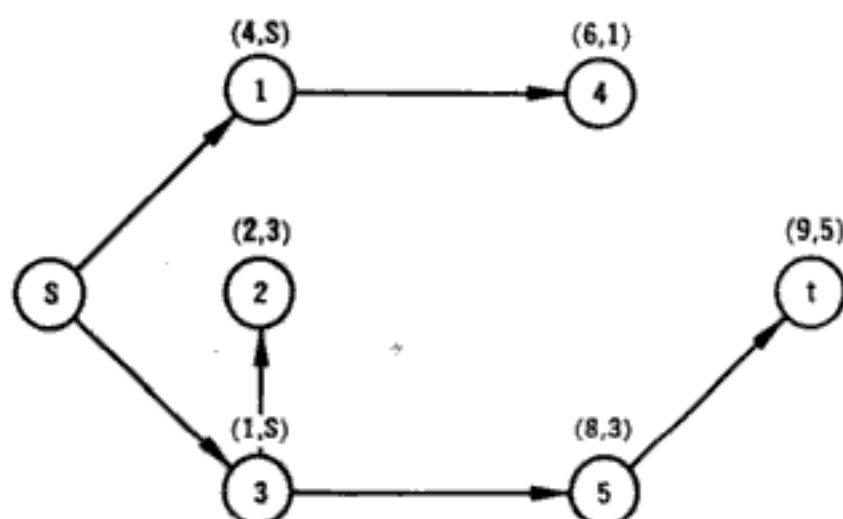


Figura 4.16

La solución óptima indica que la ruta más económica del nodo destino a la fuente, es vía la cadena  $N_s, A_{s3}, N_3, A_{35}, N_5, A_{5t}, N_t$  y cuesta 9

<sup>10</sup> De nuevo existe un empate entre la cadena  $N_s, A_{s3}, N_3, A_{35}, N_5$  y la  $N_s, A_{s3}, N_3, A_{32}, N_2, A_{21}, N_1, A_{15}, N_5$ , ambas con costo mínimo de 8 unidades. Arbitrariamente se eligió la primera.

## 352 Redes de optimización

unidades por unidad de flujo en esta cadena. Esta cadena óptima *no* es única. Otra alternativa hubiera sido la  $N_s, A_{s1}, N_1, A_{15}, N_5, A_{5t}, N_t$ . Este problema se podría pensar como una red ferroviaria que une varios puntos. Los arcos dirigidos representarían una sola vía, mientras que los arcos no dirigidos pueden representar una doble vía, donde el tráfico de ferrocarriles se desarrolla simultáneamente en ambos sentidos y los nodos son estaciones.

### 4.6. Algunas aplicaciones de los problemas de flujo a costo mínimo

#### 1) Problemas de reemplazo

Supóngase que se compra una computadora en el año 1 y se le usa hasta el año  $p$ . En el año  $p$  se le reemplaza por otra computadora más moderna que se conserva hasta el año  $t$  ( $t > p$ ). Este proceso se continúa hasta el año  $m$  ( $m > t > p$ ). Supóngase que se conoce el costo  $c_{ij}$ , correspondiente al costo total asociado con instalar una computadora en el año  $i$  y reemplazarla en el año  $j$ . Este costo incluye el costo de adquisición, de mantenimiento, de operación y valor residual (o de reventa) en el momento del reemplazo. El problema de reemplazo a costo mínimo puede resolverse fácilmente por medio de una red, a la cual se le aplica el algoritmo de flujo a costo mínimo.

En la figura 4.17 se presenta un problema de reemplazo a 10 años donde el equipo debe mantenerse por lo menos 4 años.

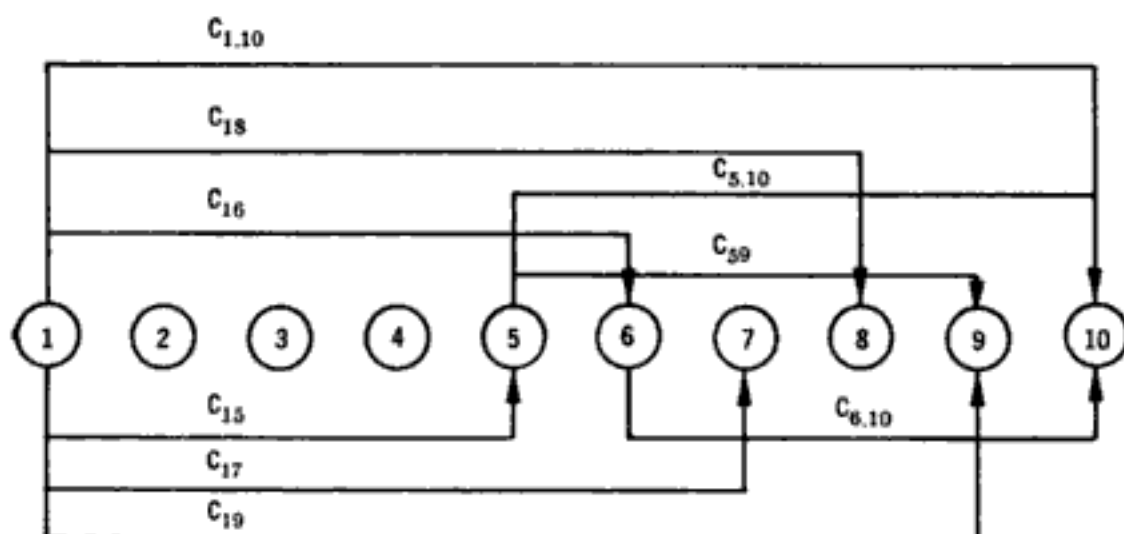


Figura 4.17

Si la ruta más económica la da la cadena  $N_1, A_{16}, N_6, A_{6,10}, N_{10}$  esto significa que la computadora que se compra en el año 1 debe cambiarse en el año 6 y esta a su vez en el año 10.

II) *Problemas de distribución*

Todos los problemas de transporte, asignación y transbordo, pueden también resolverse por medio de redes de optimización con los métodos de flujos a costo mínimo.

III) *Problemas de confiabilidad*

Elmagrahby [3, 4] adaptó el problema de confiabilidad a uno de flujo a costo mínimo en una red de optimización. Los arcos de la red representan a las componentes de un sistema (electrónico, mecánico, humano, etc.) y los nodos representan las juntas de unión de las componentes. La entrada de flujo debe seguir una y sólo una cadena directa de la fuente de la red al destino. El problema es encontrar la cadena de mayor confiabilidad, definida como la probabilidad de ausencia de fallas. La confiabilidad de la cadena es el producto de las probabilidades de falla de los arcos de la misma. Con objeto de poder sumar estas probabilidades se trabaja con sus respectivos logaritmos.

IV) *Problema de rutas más largas y costosas*

El mismo algoritmo de Dijkstra puede aplicarse a la solución de las rutas más largas o costosas, cambiando el proceso de minimización por uno de maximización, o bien invirtiendo el signo de los costos  $c_{ij}$  de todos los arcos  $A_{ij}$  y aplicando el algoritmo de Dijkstra en un proceso de minimización. El problema de ruta crítica que se trata en la sección 4.12.1 es un ejemplo de este caso.

4.7. **Cadenas múltiples económicas en una red**

En esta sección se dará un método que calcula la ruta más económica entre cualquier par de nodos de una red. El conjunto de todas estas rutas se llaman *cadenas múltiples económicas*.

Como se recordará de las secciones anteriores, los costos de los arcos no satisfacen necesariamente la ley que la distancia más económica entre dos nodos sea la que utiliza el arco que las une. Sin embargo, hay redes en donde esta propiedad se cumple. Por lo tanto, se define como un *arco básico*  $A_{ij}$  a aquel que satisface esta propiedad, es decir,  $A_{ij}$  es básico si es que

$$c_{ij} \leq c_{ik} + c_{kj}, \text{ para toda } N_k \text{ y } N_j.$$

Se puede inferir de inmediato, que todos los arcos en un árbol construido por el algoritmo de Dijkstra son básicos, pero no todos los arcos básicos pertenecen al árbol.

El algoritmo que resuelve el problema de encontrar las *cadenas múltiples económicas*, formulado por Gomory y Hu [30] está basado en la construcción de arcos básicos entre cualquier par de nodos en una red.

Dado un nodo  $N_j$ , se define a la siguiente operación

### 354 Redes de optimización

$$c_{ik} = \text{Mín} (c_{ik}, c_{ij} + c_{jk}), \text{ para todo } N_i, N_k, N_j; i \neq k \neq j,$$

como una *operación triple*. Esta operación compara el costo del arco  $A_{ik}$  con la suma de los costos de los arcos  $A_{ij}$  y  $A_{jk}$ , y substituye el mínimo de ambos como el nuevo costo del arco  $A_{ij}$ . Una vez aplicada esta operación,  $A_{ik}$  se convierte en un arco básico.

Este algoritmo también requiere de un *sistema de etiquetas*. En una matriz asociada a la operación triple, el elemento  $(i, k)$  indica el nodo intermedio en la ruta más económica del nodo  $N_i$  al nodo  $N_k$ , si es que este existe. El etiquetado en la matriz asociada a la operación triple se define de la siguiente manera:

$$(i, k) = \begin{cases} (i, j), & \text{si es que } c_{ik} > c_{ij} + c_{jk}, \\ (i, k), & \text{si es que } c_{ik} \leq c_{ij} + c_{jk}, \end{cases}$$

donde  $c_{ii} = 0$  para todo nodo  $N_i$  y  $c_{ij} = \infty$ , si es que no existe un arco  $A_{ij}$ .

*Ejemplo.* Encuentre las rutas más económicas existentes entre cualquier pareja de nodos que se muestra en la red de la figura 4.18.

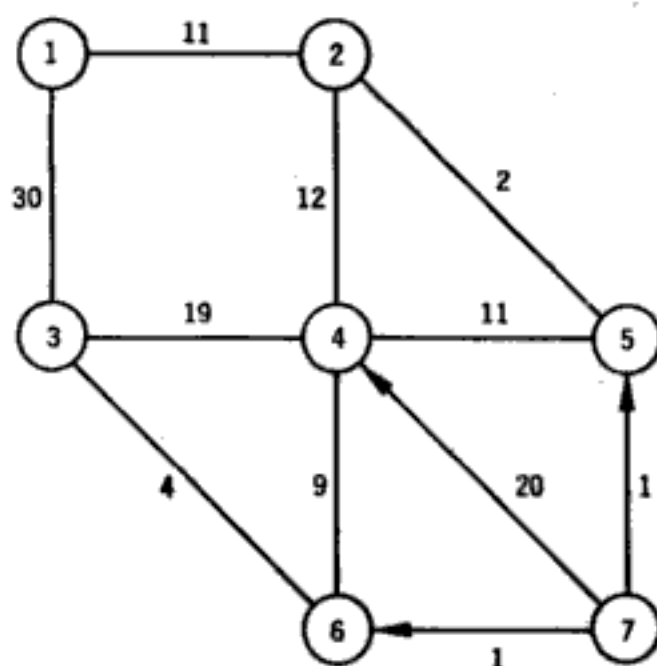


Figura 4.18

La matriz de costos asociada a esta red es

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	11	30	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
2	11	0	$\infty$	12	2	$\infty$	$\infty$
3	30	$\infty$	0	19	$\infty$	4	$\infty$
4	$\infty$	12	19	0	11	9	$\infty$
5	$\infty$	2	$\infty$	11	0	$\infty$	$\infty$
6	$\infty$	$\infty$	4	9	$\infty$	0	$\infty$
7	$\infty$	$\infty$	$\infty$	20	1	1	0

Para  $j = 1$ , se revisan todas las entradas de la matriz que no se encuentran en la posición (1, 1).

$$c_{ik} = \text{Mín} (c_{ik}, c_{i1} + c_{1k}) \text{ para toda } c_{i1} \text{ y } c_{1k}, i \neq k.$$

$$c_{23} = \text{Mín} (c_{23}, c_{21} + c_{13}) = \text{Mín} (\infty, 11 + 30) = 41,$$

$$c_{32} = \text{Mín} (c_{32}, c_{31} + c_{12}) = \text{Mín} (\infty, 30 + 11) = 41,$$

y las  $c_{ij}$  restantes permanecen igual.

Para  $j = 2$ , se revisan todas las entradas de la matriz que no se encuentran en la posición (2, 2). Para el cálculo que sigue  $c_{23} = c_{32} = 41$ .

$$c_{ik} = \text{Mín} (c_{ik}, c_{i2} + c_{2k}) \text{ para toda } c_{i2} \text{ y } c_{2k}, i \neq k.$$

$$c_{14} = c_{41} = \text{Mín} (c_{14}, c_{12} + c_{24}) = \text{Mín} (\infty, 11 + 12) = 23,$$

$$c_{15} = c_{51} = \text{Mín} (c_{15}, c_{12} + c_{25}) = \text{Mín} (\infty, 11 + 2) = 13,$$

$$c_{35} = c_{53} = \text{Mín} (c_{35}, c_{32} + c_{25}) = \text{Mín} (\infty, 2 + 41) = 43,$$

$$c_{34} = c_{43} = \text{Mín} (c_{34}, c_{32} + c_{24}) = \text{Mín} (19, 41 + 12) = 19,$$

y las  $c_{ij}$  restantes permanecen igual.

Para  $j = 3$ , se revisan todas las entradas de la matriz que no se encuentran en la posición (3, 3). Para los cálculos que siguen, se toman en cuenta los resultados anteriores.

$$c_{ik} = \text{Mín} (c_{ik}, c_{i3} + c_{3k}) \text{ para toda } c_{i3} \text{ y } c_{3k}, i \neq k.$$

$$c_{14} = c_{41} = \text{Mín} (c_{14}, c_{13} + c_{34}) = \text{Mín} (23, 30 + 19) = 23,$$

$$c_{61} = c_{16} = \text{Mín} (c_{16}, c_{13} + c_{36}) = \text{Mín} (\infty, 30 + 4) = 34,$$

$$c_{15} = c_{51} = \text{Mín} (c_{15}, c_{13} + c_{35}) = \text{Mín} (13, 30 + 43) = 13,$$

.....

Al finalizar las  $n$  iteraciones (en este caso  $n = 7$ ), la matriz de costos mínimos resultante entre cualquier par de nodos es:

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	11	30	23	13	32	$\infty$
2	11	0	25	12	2	21	$\infty$
3	30	25	0	13	24	4	$\infty$
4	23	12	13	0	11	9	$\infty$
5	13	2	24	11	0	20	$\infty$
6	32	21	4	9	20	0	$\infty$
7	14	3	5	10	1	1	0

Matriz de costos mínimos

La siguiente matriz de etiquetas, indica el nodo intermedio en la ruta más económica entre cualquier par de nodos de la red.

### 356 Redes de optimización

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	2	2	2	7
2	1	2	4	4	5	4	7
3	1	6	3	6	6	6	7
4	2	2	6	4	5	6	7
5	2	2	4	4	5	4	7
6	4	4	3	4	4	6	7
7	5	5	6	6	5	6	7

Matriz de nodos intermedios con rutas óptimas

La interpretación de las dos matrices anteriores se explica a continuación. Supóngase que se quiere encontrar la ruta más económica y su costo, del nodo  $N_p$  al nodo  $N_q$ . Si la entrada  $(p, q)$  en la matriz de nodos intermedios es  $k$ , se vería entonces la entrada  $(k, q)$ . Si esta es  $j$ , se vería entonces la entrada  $(j, q)$  y así sucesivamente. La cadena más corta sería entonces la  $N_p, A_{pk}, N_k, A_{kj}, N_j, \dots, N_q$ . La entrada  $(p, q)$  en la matriz de costos daría el costo de la ruta más económica de  $N_p$  a  $N_q$ .

Por ejemplo, la ruta más económica del nodo  $N_3$  al nodo  $N_2$  se identifica así:

$$(3, 2) = 6$$

$$(6, 2) = 4$$

$$(4, 2) = 2.$$

Esto quiere decir que la ruta más económica del nodo  $N_3$  al nodo  $N_2$  está dada por la cadena  $N_3, A_{36}, N_6, A_{64}, N_4, A_{42}, N_2$ , con un costo dado por la entrada  $(3, 2)$  de la matriz de costos, que es 25 unidades.

#### *Aplicaciones a otros problemas: rutas de máxima capacidad entre cualquier par de nodos de una red*

T. C. Hu [7, 32] extendió el algoritmo anterior para resolver el problema de encontrar las rutas de máxima capacidad entre cualquier par de nodos en una red. En efecto si  $u_{ij}$  es la capacidad del arco  $A_{ij}$ , la operación triple que se aplica aquí se define como:

$$u_{ij} = \text{Máx} [u_{ij}, \text{Mín} (u_{ik}, u_{kj})], \text{ para toda } i, j \neq k.$$

La matriz de etiquetas que permite conocer las rutas, se construye a base de la siguiente definición:

$$(i, j) = \begin{cases} (i, k), & \text{si } u_{ij} \leq \text{Mín} (u_{ik}, u_{kj}). \\ (i, j), & \text{si } u_{ij} > \text{Mín} (u_{ik}, u_{kj}). \end{cases}$$

Se concluye esta sección mencionando que T. C. Hu y Torres [36] han desarrollado un método de descomposición de redes extremadamente grandes, con objeto de resolver problemas de cadenas múltiples a costo

mínimo y rutas de capacidad máxima entre cualquier par de nodos de una red.

### 4.8. Problemas de flujo máximo a costo mínimo

Este tipo de problemas de flujo máximo a costo mínimo es una combinación de los dos problemas que se han analizado en forma independiente en las secciones anteriores. Este tipo de problemas tiene una aplicación bastante amplia dentro del área de optimización de recursos. Antes de definir su estructura matemática así como los métodos de solución (se darán dos), se formula un problema real en forma de red.

#### I. Problemas de comercialización de un solo producto

Supóngase que la CONASUPO, en su programa de comercialización del maíz, puede, en cualquiera de  $N$  períodos de tiempo en el futuro, comprar, vender, almacenar o distribuir este grano. En el período  $i$  ( $i = 1,$

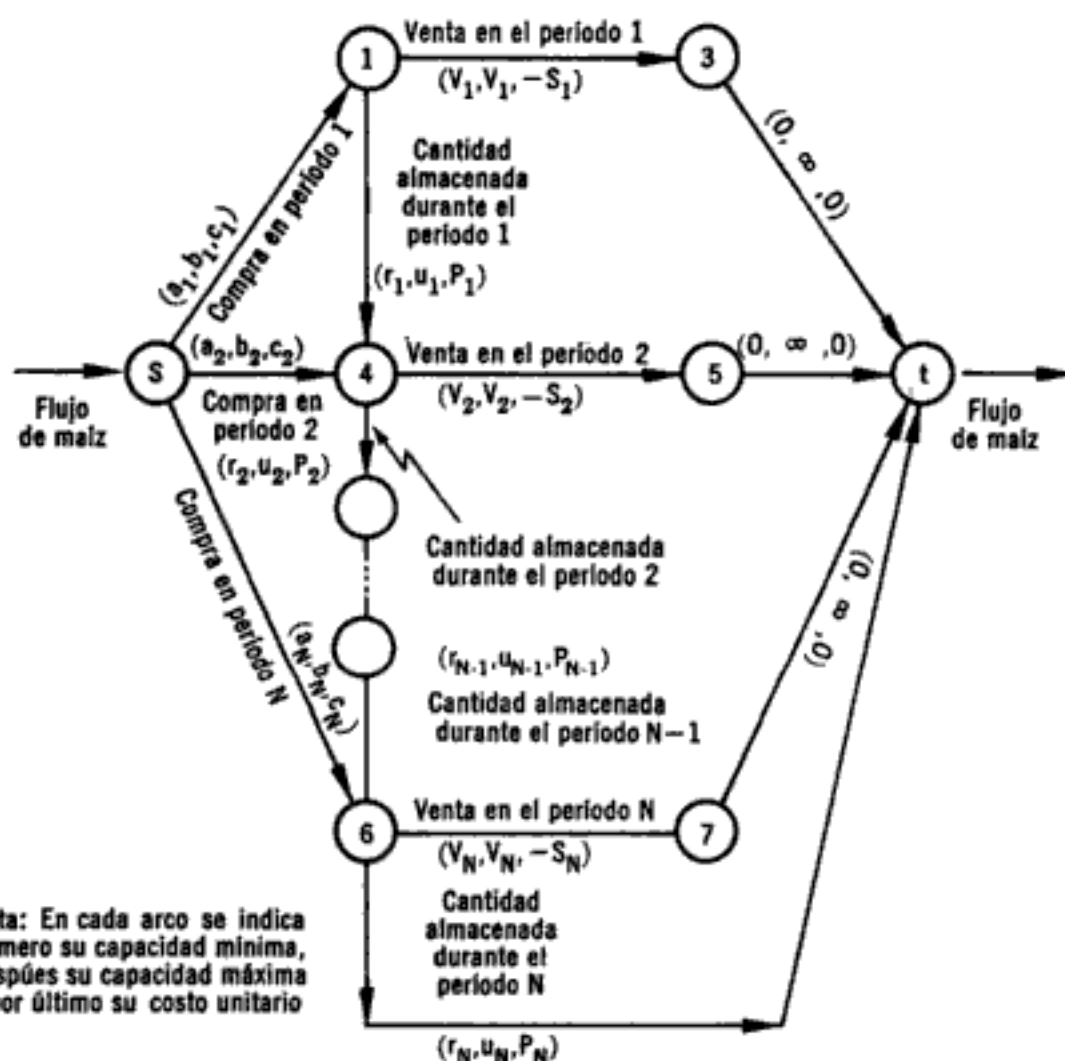


Figura 4.19



### 358 Redes de optimización

$\dots, N$ ), la empresa debe comprar un mínimo de  $a_i \geq 0$  unidades de maíz, para poder satisfacer su programa de ventas. Sin embargo, con objeto de no monopolizar la comercialización de ese grano, la compañía, por decreto gubernamental, no puede comprar más de  $b_i \geq 0$  unidades, que vienen a representar un cierto porcentaje de la producción nacional (generalmente un 20%). Por otro lado, este organismo descentralizado puede almacenar en sus instalaciones un máximo de  $u_i \geq 0$  unidades durante el período  $i$  ( $i = 1, \dots, N$ ). Por consideraciones de casos imprevistos, la CONASUPO mantiene una reserva reguladora en su almacenaje del maíz, que no debe bajar de  $r_i \geq 0$  unidades en el período  $i$  ( $i = 1, \dots, N$ ). Por otro lado la compañía ha contraído una obligación de ventas de  $v_i \geq 0$  unidades en el mes  $i$ . Se supone que los precios unitarios de compra, almacenamiento y venta durante el período  $i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) son respectivamente  $c_i \geq 0$ ,  $p_i \geq 0$  y  $s_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

¿Cuál debe ser el programa de comercialización del maíz que debe seguir la CONASUPO durante los próximos  $N$  períodos, tal que le permita minimizar sus costos de operación?

Este problema puede formularse como una red en que se desea hacer pasar la mayor cantidad de maíz al costo mínimo, atendiendo a todas las restricciones del problema real. En efecto, el flujo en el arco  $A_{s,1}$  indica la compra en el primer período. Como se observa en la figura 4.19, la capacidad mínima del arco es  $a_1$ , es decir que necesariamente deben pasar  $a_1$  unidades de maíz. En la realidad  $a_1$  es la compra mínima que CONASUPO debe realizar en el primer período. La capacidad máxima en ese arco es  $b_1$ , indicando lo máximo permisible que la empresa puede comprar en ese período. El costo unitario en ese arco es  $c_1$ , que es lo que la compañía paga por tonelada de maíz (\$ 1 500). De manera análoga, los arcos  $A_{s,2}, \dots, A_{s,N}$  indicarían respectivamente las compras realizadas por la CONASUPO en los períodos 2, 3,  $\dots, N$ .

El arco  $A_{1,s}$  representa la venta de maíz de la empresa a los consumidores en el primer período. Como se sabe que van a ser  $v_1$  unidades, se igualan las capacidades máximas y mínimas de ese arco. Si la venta oscila en un rango, el límite inferior del rango sería la capacidad mínima de flujo del arco y el límite superior la capacidad máxima de flujo del arco. Por lo venta del maíz la CONASUPO percibe un ingreso de  $s_1$  pesos por tonelada. Como los modelos de redes trabajan con costos, se escribe como costo unitario de ese arco, un costo negativo (igual a ingreso) de menos  $s_1$  unidades. De manera análoga los arcos  $A_{4,5}$  y  $A_{6,7}$  representan respectivamente las ventas en los períodos 2,  $\dots, N$ .

El arco  $A_{1,4}$  representa el almacenamiento del maíz en las bodegas de CONASUPO durante el primer período. Se debe dejar almacenado un mínimo de  $r_1$  unidades, por lo que la capacidad mínima de ese arco es  $r_1$ . No se puede almacenar más de  $u_1$  unidades. El costo unitario por el almacenamiento son  $p_1$  unidades. Análogamente, los arcos que salen de los nodos  $N_4$  y  $N_6$ , representan respectivamente el proceso de almacenamiento durante el segundo y el último período del horizonte de planeación de  $N$  períodos.

Los arcos  $A_{st}$ ,  $A_{st}$  y  $A_{7t}$  sirven únicamente para conectar el flujo a un destino común. El flujo que va a pasar por esos arcos queda determinado por las mismas condiciones del problema y por eso, trivialmente, se le pone un costo y capacidad mínima de cero y una capacidad máxima de infinito.

Si se consigue fluir la máxima cantidad de maíz a costo mínimo, los flujos resultantes serán las componentes de la solución óptima que se busca.

A continuación se analiza la estructura de estos problemas y sus métodos de solución.

*Formulación matemática*

El problema de flujo máximo a costo mínimo puede representarse matemáticamente como

$$\text{Mín } Z = \sum_{A_{ij}} c_{ij} X_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{N_i} X_{ij} - \sum_{N_s} X_{jk} = \begin{cases} -v, & \text{si } N_j = N_s \\ 0 & \text{si } N_j \neq N_s, N_t \\ v, & \text{si } N_j = N_t. \end{cases} \quad (4.3)$$

$$0 \leq X_{ij} \leq u_{ij}, \text{ para toda } A_{ij},$$

$$v \geq 0.$$

En esta formulación, las variables de decisión son las  $X_{ij}$  (una para cada arco) y el flujo total,  $v$ . Se explican ahora dos métodos de solución, uno *heurístico*, diseñado por Busacker y Gowen [15] y el otro basado en el *teorema dual de holguras complementarias* (teorema 2.12 y 2.13), que sirvió a Ford y Fulkerson [5] para desarrollar uno de los algoritmos más potentes y elegantes de toda la Investigación de Operaciones. Este algoritmo se conoce con el nombre de *out of kilter*, que en castellano significa *fuera de orden*.

*Algoritmo de Busacker y Gowen.*

*Paso 1.*  $X_{ij} = 0$  para todos los arcos  $A_{ij}$  y  $v = 0$ .

*Paso 2.* Constrúyase un nuevo costo  $\bar{c}_{ij}$  en el arco  $A_{ij}$  basado en la siguiente definición:

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij}, \text{ si } 0 \leq X_{ij} < u_{ij} \quad (\text{el costo no cambia}).$$

$$\bar{c}_{ij} = \infty, \text{ si } X_{ij} = u_{ij} \quad (\text{el arco se satura}).$$

$$\bar{c}_{ji} = -c_{ij}, \text{ si } X_{ij} > 0 \quad (\text{arcos en reversa para posible reducción de flujo}).$$

*Paso 3.* Encuéntrese la ruta más económica del nodo fuente  $N_s$  al nodo destino  $N_t$ , basado en los costos  $\bar{c}_{ij}$  e utilizando cualquier algoritmo disponible, por ejemplo, el de Dijkstra, explicado en la sección 4.5.

## 360 Redes de optimización

Mándese la mayor cantidad de flujo permisible por la ruta más económica que se encuentre, es decir, hasta que uno o varios arcos que componen esta ruta se saturen.

Añádase al flujo actual en toda la red, el flujo adicional que se encuentre en este paso. Si todas las rutas que conducen al destino  $N_t$  están saturadas, la solución óptima ha sido encontrada. De otra manera, regrese con el flujo actual al paso 2.

*Ejemplo.* Supóngase la red que se muestra en la figura 4.20. Los números en los arcos representan respectivamente la capacidad mínima, máxima y el costo unitario.

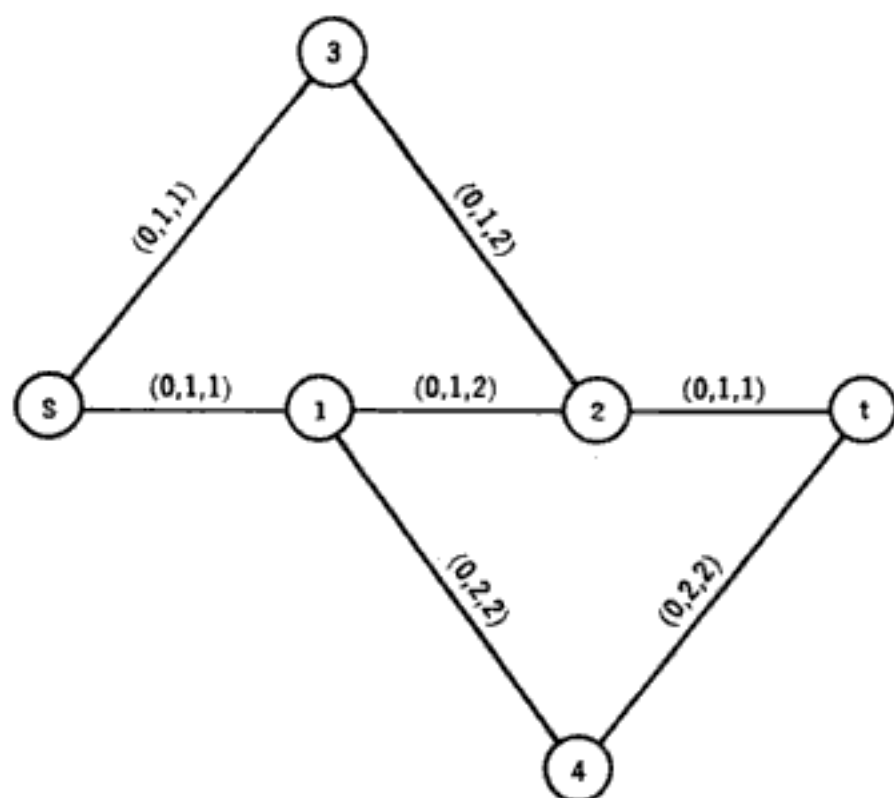


Figura 4.20

### Iteración 1

*Paso 1.*  $v = 0$ .

$$X_{ij} = 0, \text{ para toda } A_{ij}.$$

*Paso 2.*  $\bar{c}_{s3} = 1, c_{32} = 2, \bar{c}_{14} = 2,$

$$\bar{c}_{4t} = 2,$$

$$\bar{c}_{s1} = 1, c_{12} = 2, \bar{c}_{2t} = 1.$$

*Paso 3.* Utilizando el algoritmo de Dijkstra se encuentra que la cadena más económica de la fuente al destino es la  $N_s, A_{s1}, N_1, A_{12}, N_2, A_{2t}, N_t$ , o bien la  $N_s, A_{s3}, N_3, A_{32}, N_2, A_{2t}, N_t$ , ambas con un costo de 4 unidades.

En ambas rutas, la máxima capacidad de flujo que se puede mandar es una unidad. Se ha elegido arbitrariamente la primera cadena.

Iteración 2

Paso 2. El flujo actual y los nuevos costos, junto con los arcos en reversa para posible disminución del flujo, se muestran a continuación.

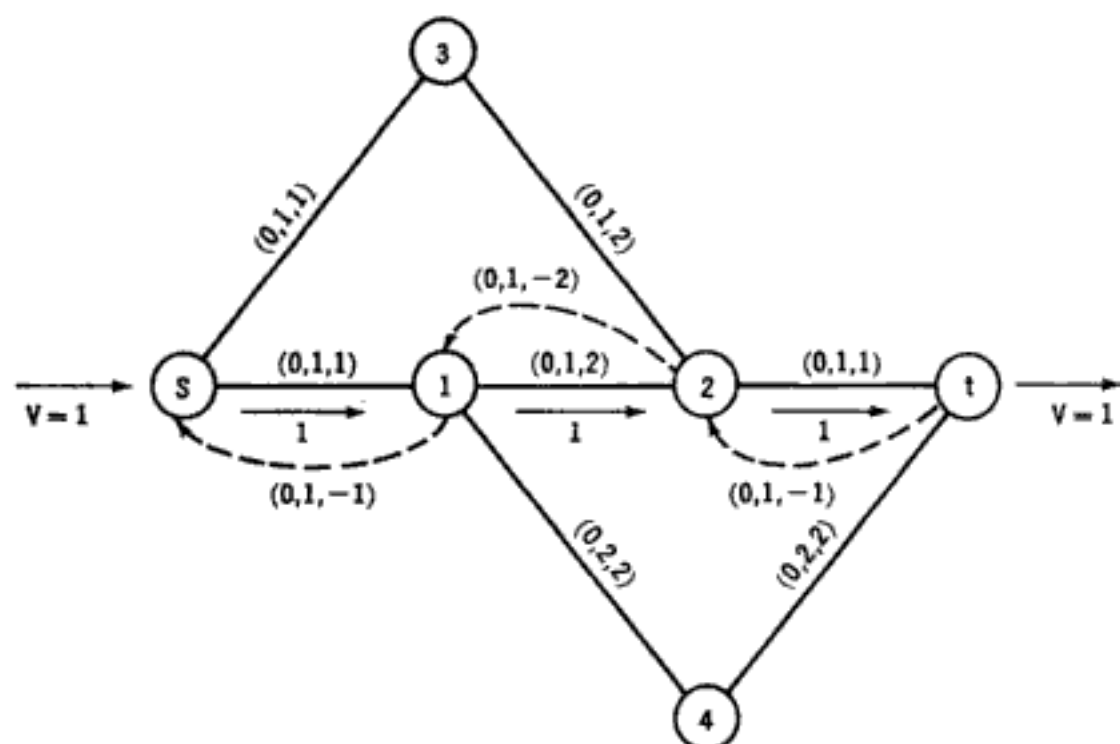


Figura 4.21

Los nuevos costos son:

- $c_{s1} = \infty$  (por estar saturado el arco  $A_{s1}$ ).
- $\bar{c}_{12} = \infty$  (por estar saturado el arco  $A_{12}$ ).
- $\bar{c}_{2t} = \infty$  (por estar saturado el arco  $A_{2t}$ ).
- $\bar{c}_{1s} = -1$  (por tener el arco  $A_{s1}$  flujo positivo).
- $\bar{c}_{21} = -2$  (por tener el arco  $A_{12}$  flujo positivo).
- $\bar{c}_{t2} = -1$  (por tener el arco  $A_{2t}$  flujo positivo).

los restantes  $c_{ij}$  permanecen igual.

Paso 3. Aplicando el algoritmo de Dijkstra se encuentra que la cadena más económica es la  $N_s, A_{s3}, N_3, A_{32}, N_2, A_{21}, N_1, A_{14}, N_4, A_{4t}, N_t$  con costo de  $1 + 2 - 2 + 2 + 2 = 5$  unidades. El flujo máximo que puede pasar a través de esta cadena es una unidad, tal como se muestra a continuación.

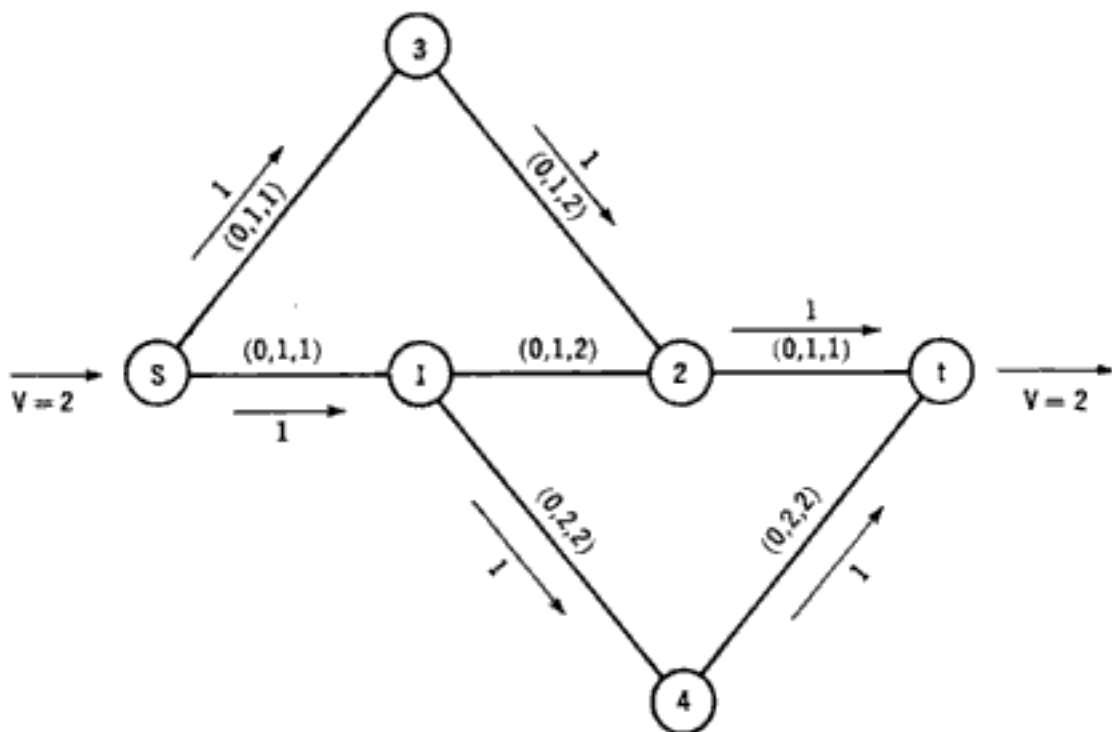


Figura 4.22

Nótese que el flujo de una unidad en  $A_{12}$  se cancela con el flujo de una unidad de  $A_{21}$ . El resultado neto es que eliminando el flujo en  $A_{12}$  se puede incrementar el flujo total de la red a dos unidades. La solución óptima consiste en mandar dos unidades (tal como se muestra en la figura 4.22) a un costo de nueve.

#### El algoritmo del "out of kilter"

El algoritmo de Busacker y Gowen, que se acaba de analizar tiene la gran ventaja, que es muy fácil de entender y de utilizar para problemas relativamente pequeños. Su gran desventaja consiste en que en cada iteración se requiere la construcción de nuevos arcos, los arcos en reversa, y por lo tanto, el número de elementos de la red original también aumenta. En redes de tamaño medio y peor aún, en redes de gran dimensión, esto resulta un inconveniente muy serio, pues la memoria de la computadora tiende a saturarse rápidamente. El efecto neto de la lógica del algoritmo de Busacker y Gowen, es que limita de inmediato el tamaño de las redes que se pueden resolver.

Por tal motivo, Ford y Fulkerson [5], desarrollaron un algoritmo, al cual bautizaron con el nombre de *out of kilter* que resuelve el problema de flujo máximo en una red a costo mínimo, sin modificar la estructura de la red (no se añaden o reducen arcos y nodos). Este algoritmo está basado en los teoremas 2.12 y 2.13 de la programación lineal (teoremas de holgura complementaria).

Para explicar la teoría que justifica a este algoritmo conviene reescribir la formulación matemática del problema que se quiere resolver, dada en (4.3), de la siguiente manera:

$$\text{Mín } \sum_{A_{ij}} c_{ij} X_{ij}$$

sujeto a

$$(P) \quad \begin{aligned} X_{ij} - X_{ki} &= 0, \quad \text{para toda } A_{ij} \text{ y } A_{ki}, j \neq k \quad (4.4) \\ 0 \leq l_{ij} \leq X_{ij} \leq u_{ij}, &\quad \text{para toda } A_{ij}. \end{aligned}$$

A continuación se trata de obtener la formulación dual del problema primario. La formulación dual no es fácil de obtener, y por lo tanto se sugiere trabajarla en un ejemplo muy pequeño y de ahí tratar de generalizar. Se toma una red como la de la figura 4.23.

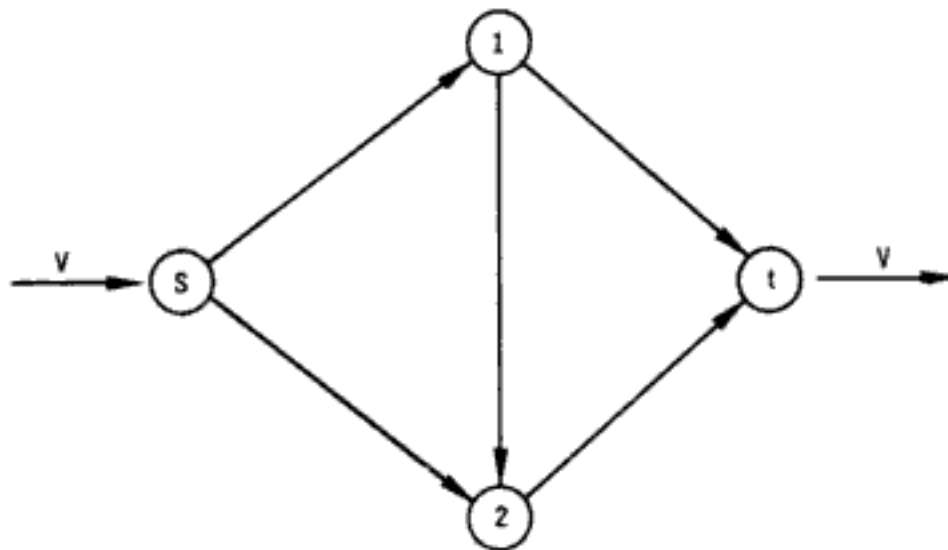


Figura 4.23

El problema primario es:

$$\text{Mín } c_{s1}X_{s1} + c_{s2}X_{s2} + c_{12}X_{12} + c_{1t}X_{1t} + c_{2t}X_{2t}$$

sujeto a

i) flujo que entra a un nodo = flujo que sale del nodo

	Variable dual
$X_{s1} - X_{12} - X_{1t} = 0$ (nodo 1)	$\Pi_1$
$X_{s2} + X_{12} - X_{2t} = 0$ (nodo 2)	$\Pi_2$
$-X_{s1} - X_{s2} = v$ (nodo s)	$\Pi_s$
$X_{1t} + X_{2t} = -v$ (nodo t)	$\Pi_t$

ii) Flujo en un arco  $\geq$  capacidad mínima del arco

	Variable dual
$X_{s1} \geq l_{s1} \geq 0$ (arco $A_{s1}$ )	$\delta_{s1}$
$X_{s2} \geq l_{s2} \geq 0$ (arco $A_{s2}$ )	$\delta_{s2}$
$X_{12} \geq l_{12} \geq 0$ (arco $A_{12}$ )	$\delta_{12}$
$X_{1t} \geq l_{1t} \geq 0$ (arco $A_{1t}$ )	$\delta_{1t}$
$X_{2t} \geq l_{2t} \geq 0$ (arco $A_{2t}$ )	$\delta_{2t}$

### 364 Redes de optimización

iii) Flujo en un arco  $\leq$  capacidad máxima del arco

	<i>Variable dual</i>
$X_{s1} \leq u_{s1}$ (arco $A_{s1}$ )	$\gamma_{s1}$
$X_{s2} \leq u_{s2}$ (arco $A_{s2}$ )	$\gamma_{s2}$
$X_{12} \leq u_{12}$ (arco $A_{12}$ )	$\gamma_{12}$
$X_{1t} \leq u_{1t}$ (arco $A_{1t}$ )	$\gamma_{1t}$
$X_{2t} \leq u_{2t}$ (arco $A_{2t}$ )	$\gamma_{2t}$

El problema dual es el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Máx } & 0\Pi_1 + 0\Pi_2 + v\Pi_s - v\Pi_t + l_{s1}\delta_{s1} + l_{s2}\delta_{s2} \\ & + l_{12}\delta_{12} + l_{1t}\delta_{1t} + l_{2t}\delta_{2t} - u_{s1}\gamma_{s1} - u_{s2}\gamma_{s2} \\ & - u_{12}\gamma_{12} - u_{1t}\gamma_{1t} - u_{2t}\gamma_{2t} \end{aligned}$$

sujeto a

$$\begin{array}{rcccccl} \Pi_1 & - \Pi_s & + \delta_{s1} & - \gamma_{s1} & \leq & c_{s1} \\ & \Pi_2 - \Pi_s & & + \delta_{s2} & - \gamma_{s2} & \leq c_{s2} \\ - \Pi_1 + \Pi_2 & & & + \delta_{12} & - \gamma_{12} & \leq c_{12} \\ - \Pi_1 & + \Pi_t & & + \delta_{1t} & - \gamma_{1t} & \leq c_{1t} \\ & - \Pi_2 + \Pi_t & & & + \delta_{2t} & - \gamma_{2t} \leq c_{2t} \end{array}$$

$$\delta_{s1} \geq 0, \quad \delta_{s2} \geq 0, \quad \delta_{12} \geq 0, \quad \delta_{1t} \geq 0, \quad \delta_{2t} \geq 0.$$

$$\gamma_{s1} \geq 0, \quad \gamma_{s2} \geq 0, \quad \gamma_{12} \geq 0, \quad \gamma_{1t} \geq 0, \quad \gamma_{2t} \geq 0.$$

$$\Pi_1, \Pi_2, \Pi_s, \Pi_t \text{ no restringidas en signo.}$$

En términos generales, si la formulación primaria de un problema de flujo máximo en una red a costo mínimo es

$$\text{Mín } Z = \sum_{A_{ij}} c_{ij} X_{ij}$$

sujeto a

$$- X_{ij} + X_{ki} = 0, \quad \text{para todo arco } A_{ij}, A_{ki}, j \neq k, \quad (4.5)$$

$$X_{ij} \geq l_{ij} \geq 0, \quad \text{para todo arco } A_{ij},$$

$$- X_{ij} \geq -u_{ij}, \quad \text{para todo arco } A_{ij},$$

entonces, asociando las variables duales  $\Pi_i$  (para todo nodo  $N_i$ )  $\delta_{ij}$ ,  $\gamma_{ij}$  (para todo arco  $A_{ij}$ ), respectivamente con la primera, segunda y tercera serie de restricciones primarias, se tiene la siguiente formulación dual:

$$\text{Máx } \sum_{A_{ij}} (l_{ij}\delta_{ij} - u_{ij}\gamma_{ij})$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
 -\Pi_i + \Pi_j + \delta_{ij} - \gamma_{ij} &\leq c_{ij}, \\
 &\text{para todo arco } A_{ij}, \\
 \delta_{ij} &\geq 0, \\
 &\text{para todo arco } A_{ij}, \\
 \gamma_{ij} &\geq 0, \\
 &\text{para todo arco } A_{ij}, \\
 \Pi_i, &\text{ no restringida en signo,} \\
 &\text{para todo nodo } N_i.
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

Aplicando el teorema 2.12 de la dualidad se tiene:

$$\begin{aligned}
 \Pi_i (X_{ki} - X_{ij}) &= 0, \\
 &\text{para todo nodo } N_i, \text{ y todos los arcos } A_{ki}, A_{ij}, j \neq k, \\
 \delta_{ij} (X_{ij} - l_{ij}) &= 0, \\
 &\text{para todo arco } A_{ij}, \\
 \gamma_{ij} (-X_{ij} + u_{ij}) &= 0, \\
 &\text{para todo arco } A_{ij}, \\
 X_{ij} (c_{ij} + \Pi_i - \Pi_j - \delta_{ij} + \gamma_{ij}) &= 0, \\
 &\text{para todo arco } A_{ij} \text{ y todo nodo } N_i, N_j.
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

Por el teorema 2.13 las condiciones (4.7) implican lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \text{si } \delta_{ij} > 0, &\text{ entonces } X_{ij} = l_{ij}, \text{ para todo } A_{ij}, \\
 \text{si } \gamma_{ij} > 0, &\text{ entonces } X_{ij} = u_{ij}, \text{ para todo } A_{ij}, \\
 \text{si } X_{ij} > 0, &\text{ entonces } -\Pi_i + \Pi_j + \delta_{ij} - \gamma_{ij} = c_{ij}, \\
 &\text{para todo } N_j, N_i \text{ y todo } A_{ij}.
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

Como el flujo  $X_{ij}$  en el arco  $A_{ij}$  no puede tener al mismo tiempo el valor del nivel inferior  $l_{ij}$  y superior  $u_{ij}$  (a menos de que  $l_{ij} = u_{ij}$  para el arco  $A_{ij}$ ), se puede concluir de (4.8) que  $\delta_{ij}$  y  $\gamma_{ij}$  no pueden ser positivos simultáneamente. En otras palabras:

$$\begin{aligned}
 \text{si } \delta_{ij} > 0, &\text{ entonces } \gamma_{ij} = 0, \text{ para } A_{ij}, \\
 \text{si } \gamma_{ij} > 0, &\text{ entonces } \delta_{ij} = 0, \text{ para } A_{ij}.
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

Obviamente,  $\delta_{ij}$  y  $\gamma_{ij}$  pueden ser igual a cero simultáneamente. Si se hace en la tercera restricción de (4.8) el siguiente cambio de notación:

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} + \Pi_i - \Pi_j = \delta_{ij} - \gamma_{ij}, \text{ para toda } A_{ij}
 \tag{4.10}$$

entonces se tiene que, si  $c_{ij} > 0$ , esto implica que  $\delta_{ij} - \gamma_{ij} > 0$  y esto a su vez, por (4.9), indica que  $\delta_{ij} > 0$  y  $\gamma_{ij} = 0$  para el arco  $A_{ij}$ . Pero



### 366 Redes de optimización

esta condición vuelve a implicar que  $X_{ij} = l_{ij}$  en el arco  $A_{ij}$ . Por el otro lado, si  $\bar{c}_{ij} < 0$ , entonces  $\delta_{ij} - \gamma_{ij} < 0$ , o sea  $\delta_{ij} < \gamma_{ij}$ , es decir que  $\gamma_{ij} > 0$  y  $\delta_{ij} = 0$ , por (4.9). Esto, a su vez, indica que en el arco  $A_{ij}$ , el flujo  $X_{ij} = u_{ij}$ . Por último, si  $\bar{c}_{ij} = 0$ , se tiene que  $\delta_{ij} - \gamma_{ij} = 0$ , o sea  $\delta_{ij} = \gamma_{ij}$ . Esta condición, puede ocurrir si y sólo si  $\delta_{ij} = \gamma_{ij} = 0$ . Pero esto, a su vez, indica por (4.7) que en el arco  $A_{ij}$  se tiene  $l_{ij} \leq X_{ij} \leq u_{ij}$ .

Resumiendo:

$$\begin{aligned} \text{si } \bar{c}_{ij} > 0, & \text{ entonces } X_{ij} = l_{ij} \text{ en el arco } A_{ij}, \\ \text{si } \bar{c}_{ij} = 0, & \text{ entonces } l_{ij} \leq X_{ij} \leq u_{ij} \text{ en el arco } A_{ij}, \\ \text{si } \bar{c}_{ij} < 0, & \text{ entonces } X_{ij} = u_{ij} \text{ en el arco } A_{ij}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

Ford y Fulkerson [5] encontraron las condiciones necesarias y suficientes que el flujo  $X_{ij}$  en el arco  $A_{ij}$  debe satisfacer, para que sea óptimo. El siguiente teorema presenta esas condiciones.

**Teorema 4.3.** La condición necesaria y suficiente para que  $X_{ij}$  sea óptimo en (4.4) es que sea factible y existan variables duales  $\Pi_i$ ,  $\delta_{ij}$  y  $\gamma_{ij}$  asociadas con (4.6), tal que cumplan con las siguientes condiciones:

- si  $\bar{c}_{ij} > 0$ , entonces  $X_{ij} = l_{ij}$  en  $A_{ij}$ ,
- si  $\bar{c}_{ij} = 0$ , entonces  $l_{ij} \leq X_{ij} \leq u_{ij}$  en  $A_{ij}$ ,
- si  $\bar{c}_{ij} < 0$ , entonces  $X_{ij} = u_{ij}$  en  $A_{ij}$ ,

donde

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} + \Pi_i - \Pi_j = \delta_{ij} - \gamma_{ij}, \text{ para toda } A_{ij}.$$

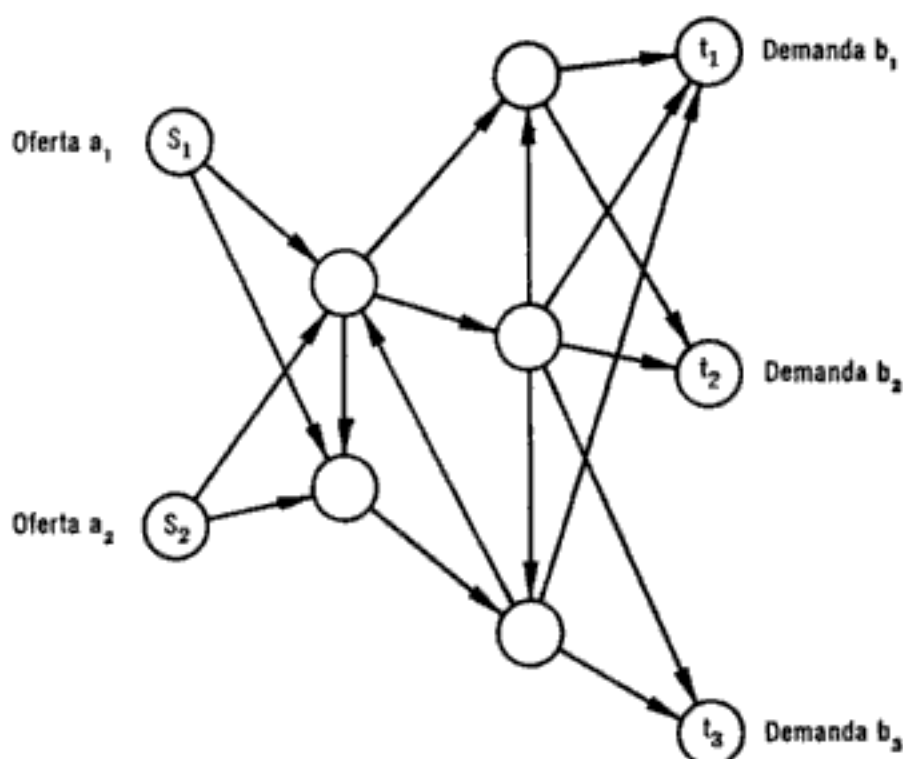
*Prueba.* Resulta directamente de la aplicación del teorema 2.12 y 2.13 sobre el problema primario (4.4) y su correspondiente dual (4.6).

Las condiciones de optimalidad que proporciona el teorema 4.3 pueden ser violadas en cualquiera de las siguientes seis condiciones:

$$\begin{aligned} \bar{c}_{ij} > 0 \text{ y } X_{ij} < l_{ij} \text{ ó } X_{ij} > l_{ij} \text{ para } A_{ij}, \\ \bar{c}_{ij} = 0 \text{ y } X_{ij} < l_{ij} \text{ ó } X_{ij} > u_{ij} \text{ para } A_{ij}, \\ \bar{c}_{ij} < 0 \text{ y } X_{ij} < u_{ij} \text{ ó } X_{ij} > u_{ij} \text{ para } A_{ij}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Lo ingenioso del algoritmo de Ford y Fulkerson, es que puede empezar con cualquier clase de flujo  $X_{ij}$  en la red. Si este flujo, para empezar ya es factible, entonces, el algoritmo lo convierte en óptimo. Si por el contrario, el flujo no es factible porque viola alguna o todas las condiciones en (4.12), el algoritmo lo convierte primero en factible y después en óptimo. El algoritmo no modifica la estructura de la red, dejando constante el número de arcos y nodos originales.

El nombre de *out of kilter*, que significa *fuera de orden*, proviene de que cuando un flujo está "en orden", es que satisface el teorema 4.3, pero cuando está "fuera de orden", es decir en alguna de las situaciones



Red con fuentes y destinos múltiples

Figura 4.24

de (4.12), el algoritmo lo "pone en orden" (es decir que satisfaga el teorema 4.3).

Ford y Fulkerson requieren que todos los elementos  $l_{ij}$  y  $u_{ij}$  sean números enteros para todos los arcos  $A_{ij}$ . Además, requieren que la red a resolver sea *circulatoria*.

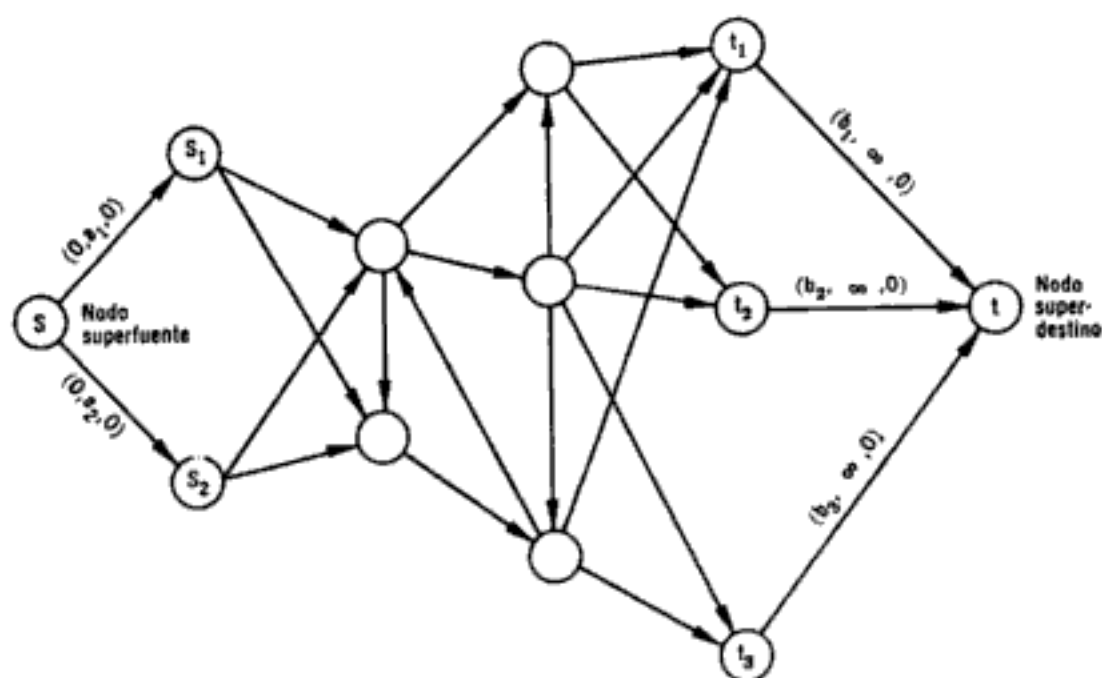


Figura 4.25

### 368 Redes de optimización

Una red circulatoria es aquella en donde prácticamente han dejado de existir el nodo fuente y el nodo destino. Para convertir una red común y corriente que tiene varios nodos fuente, por ejemplo  $(s_1, s_2)$  y varios nodos destinos, por ejemplo  $(t_1, t_2, t_3)$  como la que se muestra en la figura 4.24, a una red circulatoria, hay que construir primero una red equivalente con un *nodo superfuente* y un *nodo superdestino*. Esto se logra añadiendo un nodo artificial  $s$  unido a los nodos fuente originales por arcos  $A_{s,s_1}, A_{s,s_2}$ , etc. con costo cero, capacidad mínima cero y capacidad máxima igual a la oferta del nodo fuente original. Además, se construye un nodo destino artificial  $t$ , unido a los nodos destinos originales por arcos  $A_{t_1,t}, A_{t_2,t}$ , etc., con costo cero, capacidad máxima infinita y capacidad mínima igual a la demanda del nodo destino original. Gráficamente se muestra esto en la figura 4.25.

Para convertir la red anterior (con un solo nodo fuente y un solo nodo destino), a una red circulatoria, añádese un arco  $A_{t,s}$  que una al nodo superdestino con el nodo superfuente. Este arco tendría un alto costo negativo<sup>11</sup> (para obligar a la circulación del flujo), capacidad mínima dada por la suma de todas las demandas de los destinos originales, y una capacidad máxima dada por la suma de todas los ofertas de los nodos fuentes originales. Obviamente, para que el problema resulte factible, la capacidad máxima de este arco  $A_{t,s}$ , debe ser mayor o igual a su capacidad mínima. Gráficamente se tiene

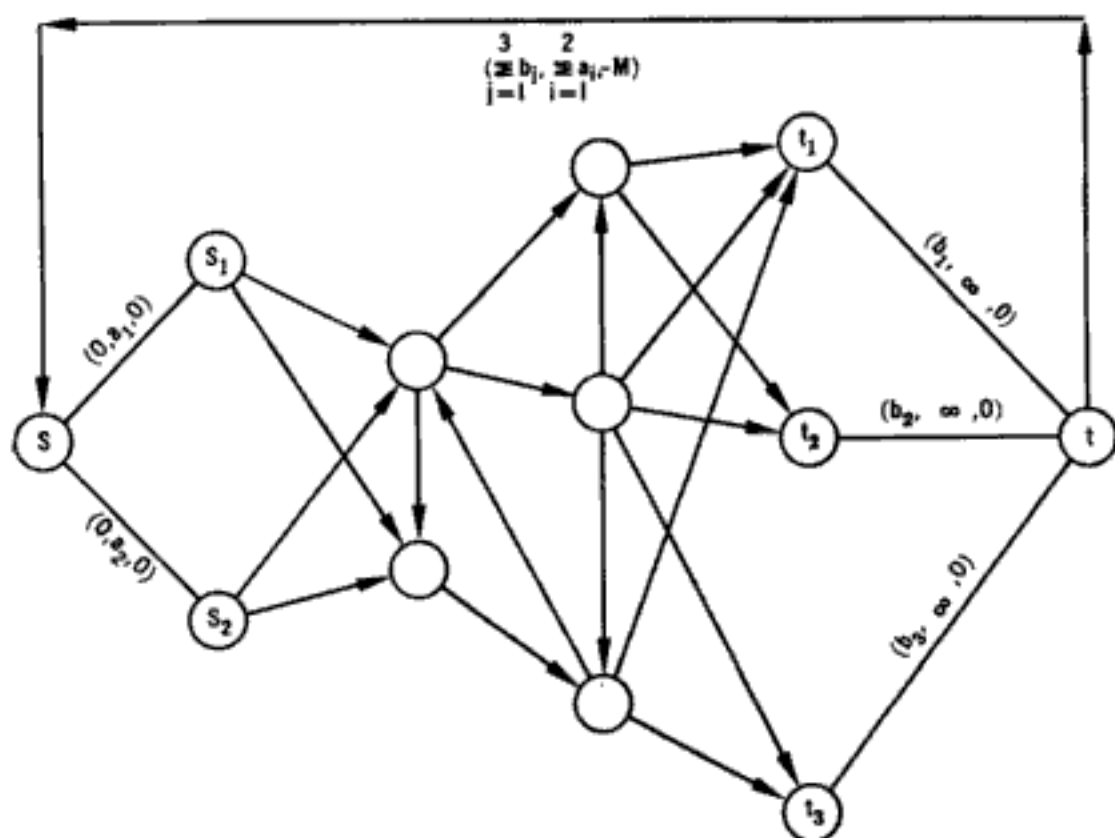


Figura 4.26

<sup>11</sup> Recuérdese que un costo negativo es un ingreso.

A continuación se pasa a explicar e ilustrar este potente algoritmo. La explicación se hace a base del diagrama de flujo que aparece en el siguiente desplegado.

La ilustración del algoritmo se hace sobre la red que se muestra en la figura 4.27 con datos iniciales dados a continuación

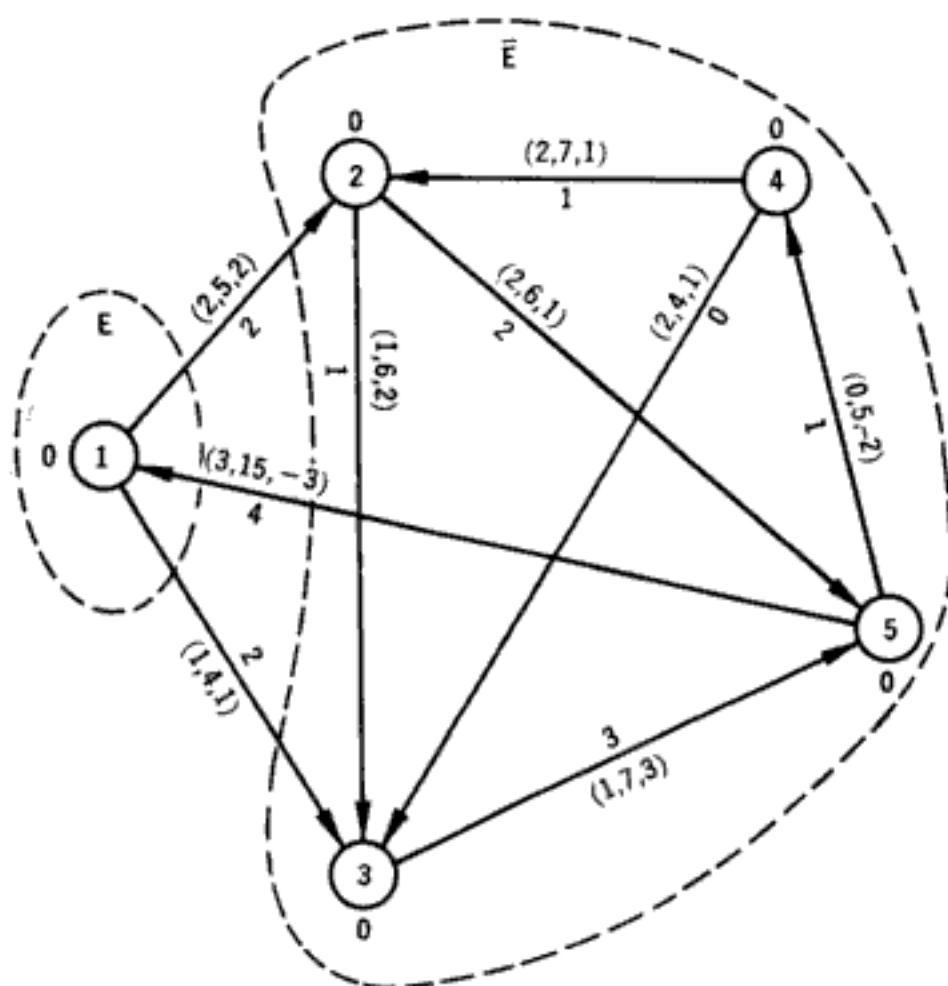


Figura 4.27

Los números en los arcos  $A_{ij}$  indican respectivamente  $l_{ij}$ ,  $u_{ij}$  y  $c_{ij}$ . El flujo inicial (arbitrario) en cada arco también se indica como el número sin paréntesis. Los precios duales asignados arbitrariamente a cada nodo, son todos ceros y están indicados sobre el mismo nodo. Los costos negativos representan ganancias.

*Primera iteración*

Se calcula

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} + \Pi_i - \Pi_j$$

para cada arco  $A_{ij}$ . Como todas las  $\Pi_i = \Pi_j = 0$ , en esta iteración  $\bar{c}_{ij} = c_{ij}$  para todo  $A_{ij}$ . Los arcos  $A_{12}$ ,  $A_{23}$  y  $A_{25}$  están *en orden* pues satisfacen las condiciones del teorema 4.3. Así, por ejemplo,  $c_{12} = 2 > 0$ , lo que implica que el flujo  $X_{12}$  debe satisfacer  $X_{12} = l_{12} = 2$ .  $X_{12}$  está *en orden*,

### 370 Redes de optimización

porque en efecto,  $X_{12} = l_{12}$ . Conviene que el lector se cerciore que,  $X_{23}$  y  $X_{25}$  también están *en orden*.

Se analizará arbitrariamente el arco  $A_{13}$  que está *fuera de orden*.  $\bar{c}_{13} = 1 > 0$ , lo que indica que  $X_{13}$  debería ser igual que  $l_{13} = 1$ . Pero  $X_{13} = 2 > l_{13} = 1$ , y por lo tanto, se reduce el valor de  $X_{13}$  al valor  $l_{13} = 1$ . Se hace

$$q_1 = X_{13} - l_{13} = 2 - 1 = 1$$

y se etiqueta a  $N_1$  con  $(1, 3^-)$ . El objetivo es etiquetar a  $N_3$ . Siguiendo el diagrama de flujo se llega al bloque donde hay que cambiar el precio dual de los nodos. El conjunto  $E$ , tal como se aprecia gráficamente en 4.27, lo forman los nodos  $\{N_1\}$ , mientras que  $\bar{E}$  lo forman  $\{N_2, N_3, N_4, N_5\}$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} A_1 &= \{A_{12}, A_{13}\} \\ A_2 &= \{A_{51}\} \\ \delta_1 &= \text{Mín} [2, 1] = 1 \\ \delta_2 &= 3 \\ \delta &= \text{Mín} [1, 3] = 1. \end{aligned}$$

Se añade  $\delta = 1$  unidades a  $\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5$ , mientras que  $\Pi_1$  sigue siendo igual a 0. Al término de la primera iteración se tiene gráficamente que

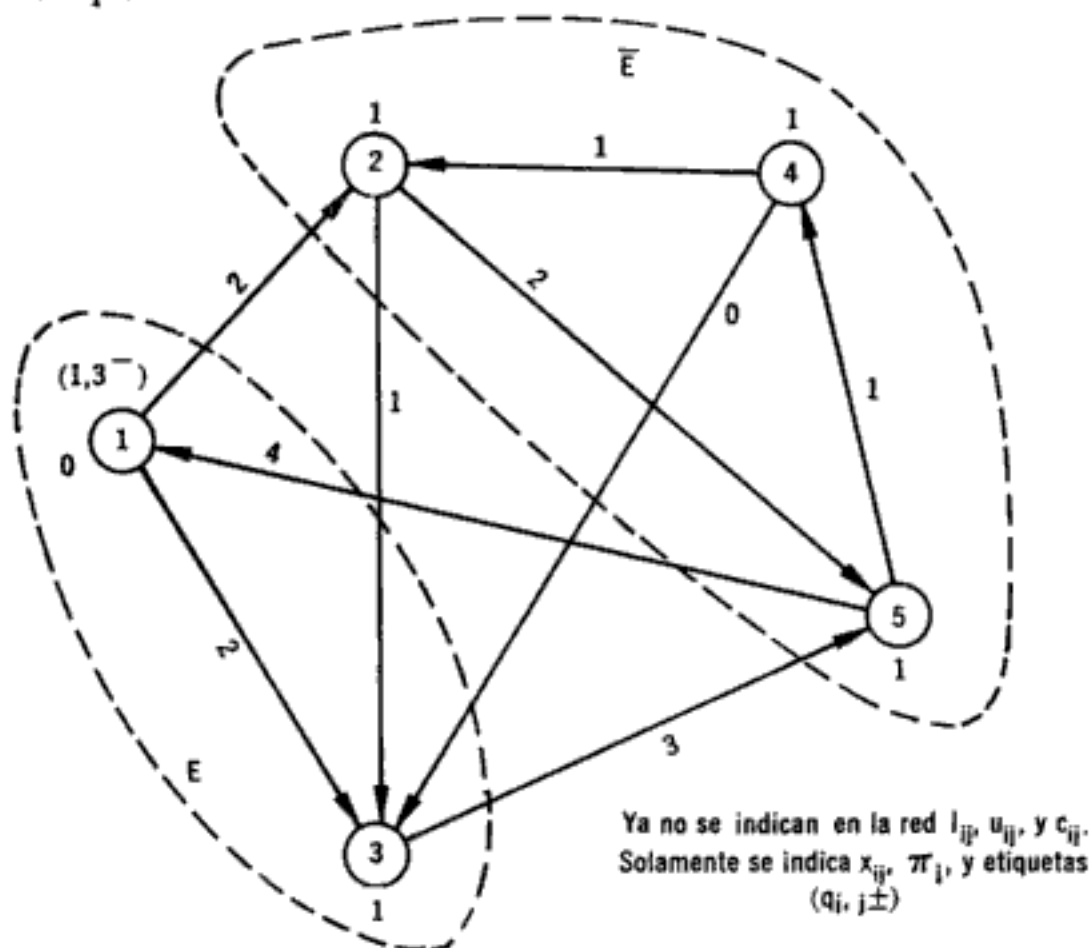


Figura 4.28

Segunda iteración

Se han modificado las  $\bar{c}_{ij}$  a los siguientes valores  $\bar{c}_{12} = 1$ ,  $\bar{c}_{13} = 0$ ,  $\bar{c}_{23} = 2$ ,  $\bar{c}_{25} = 1$ ,  $\bar{c}_{35} = 3$ ,  $\bar{c}_{42} = 1$ ,  $\bar{c}_{43} = 1$ ,  $\bar{c}_{51} = -2$ ,  $\bar{c}_{54} = -2$ .

Con las nuevas  $\bar{c}_{ij}$ , los siguientes arcos están en orden:  $A_{12}$ ,  $A_{13}$ ,  $A_{23}$  y  $A_{25}$ . Así por ejemplo, se tiene que  $\bar{c}_{13} = 0$ , lo que implica que  $l_{13} \leq X_{13} \leq u_{13}$ , o sea  $1 \leq 2 \leq 4$ , por lo que  $X_{13}$  está *en orden* (en la iteración anterior  $X_{13}$  estaba *fuera de orden*). Es interesante notar que los arcos que estaban *en orden* durante la primera iteración, permanecen *en orden* al empezar la segunda iteración.

Se analizará ahora el arco  $A_{35}$ . Como  $\bar{c}_{35} = 3 > 0$  se debe cumplir que  $l_{35} = X_{35}$ . Sin embargo,  $X_{35} = 3 > l_{35} = 1$ , por lo que se debe disminuir el valor del flujo a la capacidad mínima. Se etiquetará a  $N_3$  con  $(q_3, 5^-)$  donde

$$q_3 = X_{35} - l_{35} = 3 - 1 = 2.$$

El objetivo es etiquetar al nodo  $N_5$ . No se puede encontrar una cadena de  $N_3$  a  $N_5$  y por lo tanto se construyen los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} E &= \{N_1, N_3\} \\ \bar{E} &= \{N_2, N_4, N_5\} \\ A_1 &= \{A_{12}, A_{13}\} \\ A_2 &= \{A_{51}\}. \end{aligned} \quad (\text{véase la figura 4.28})$$

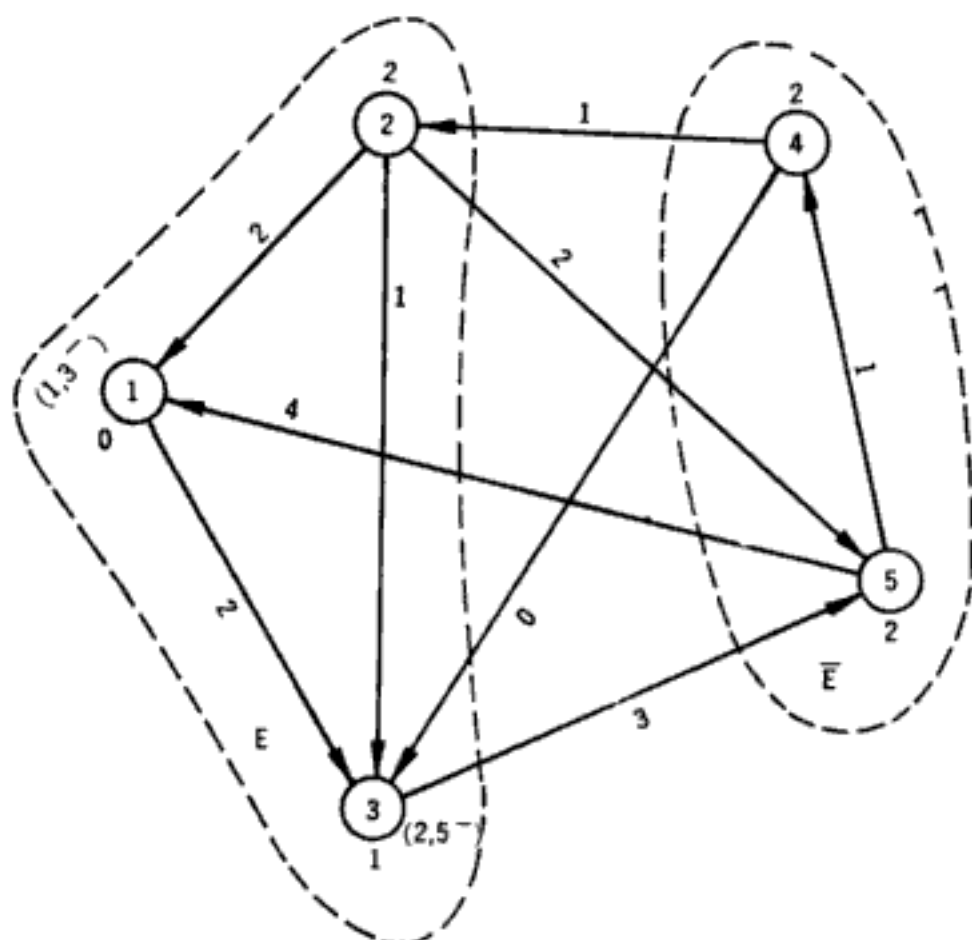


Figura 4.29

## 372 Redes de optimización

Se calcula a continuación el valor de  $\delta$ :

$$\delta_1 = \text{Mín} \{1, 3\} = 1$$

$$\delta_2 = \text{Mín} \{-(-2)\} = 2$$

$$\delta = \text{Mín} \{1, 2\} = 1.$$

Por lo tanto,  $\Pi_1 = 0$ ,  $\Pi_3 = 1$ ,  $\Pi_2 = \Pi_4 = \Pi_5 = 2$ . Al concluir la segunda iteración, los flujos no han cambiado, pero sí, los precios duales asignados a los nodos, tal como se muestra en la figura 4.29.

### Tercera iteración

Los nuevos valores de  $\bar{c}_{ij}$  son:

$$\bar{c}_{12} = 0, \bar{c}_{13} = 0, \bar{c}_{23} = 3, \bar{c}_{25} = 1, \bar{c}_{35} = 2, \bar{c}_{42} = 1,$$

$$\bar{c}_{43} = 2, \bar{c}_{51} = -1, \bar{c}_{54} = -2.$$

No se ha aumentado la lista de los arcos que están *en orden*, por lo que se continúa con el análisis del arco  $A_{35}$ , que aún está *fuera de orden*.

Como  $\bar{c}_{35} = 2 > 0$ , esto implica que  $X_{35} = l_{35}$ . Pero  $X_{35} = 3 > l_{35} = 1$ , por lo que aún hay que reducir ese flujo. Siguiendo la lógica del diagrama de flujo. Se encuentra con que existe la posibilidad de una cadena del nodo  $N_3$  al  $N_5$ . Si esta cadena existiera contendría arcos en reversa, por lo que se conseguiría una reducción del flujo en  $A_{35}$ .

¿Existe esa cadena? El nodo  $N_2$  no puede etiquetarse<sup>12</sup> desde  $N_3$  porque

$$\bar{c}_{23} = 3 \geq 0, \text{ pero } X_{23} = 1 \text{ no es mayor que } l_{23} = 1.$$

Sin embargo,  $N_1$  sí se puede etiquetar desde  $N_3$  porque

$$\bar{c}_{13} = 0 \text{ y } l_{13} = 1 \leq X_{13} = 2 < u_{13} = 4.$$

El nodo  $N_1$  se le etiqueta con  $[\text{Mín} (q_3, X_{13} - l_{13}), 3^-]$ , o sea  $[\text{Mín} (2, 2 - 1), 3^-]$ , es decir  $(1, 3^-)$ . Del nodo  $N_1$  se puede etiquetar ahora al nodo  $N_2$  porque

$$\bar{c}_{12} = 0 \text{ y } l_{12} = 2 \leq X_{12} = 2 \leq u_{12} = 5.$$

Se etiqueta a  $N_2$  con  $[\text{Mín} (1, 5 - 2), 1^+] = (1, 1^+)$ . Un minuto de meditación por parte del lector (siguiendo el diagrama de flujo del algoritmo), corroboraría que tanto el nodo  $N_4$  como el  $N_5$  no pueden ser etiquetados del nodo  $N_2$ . Por lo tanto, tampoco en esta iteración se ha podido encontrar una cadena de  $N_3$  a  $N_5$ .<sup>13</sup>

<sup>12</sup> El lector deberá convencerse siguiendo el diagrama de flujo.

<sup>13</sup> Este mismo análisis se hizo implícitamente durante la segunda iteración. Conviene que el lector haga los análisis explícitamente.

Tal como se muestra en la figura 4.29 se tiene

$$E = \{N_1, N_2, N_3\}$$

$$\bar{E} = \{N_4, N_5\}$$

$$A_1 = \{A_{25}, A_{35}\}$$

$$A_2 = \{A_{51}\}.$$

Se calcula

$$\delta_1 = \text{Mín} \{1, 2\} = 1$$

$$\delta_2 = \text{Mín} \{-(-1)\} = 1$$

$$\delta = \text{Mín} \{1, 1\} = 1,$$

por lo que  $\Pi_1 = 0$ ,  $\Pi_2 = 2$ ,  $\Pi_3 = 1$ ,  $\Pi_4 = \Pi_5 = 3$ . Al concluir esta iteración, se tiene gráficamente lo siguiente:

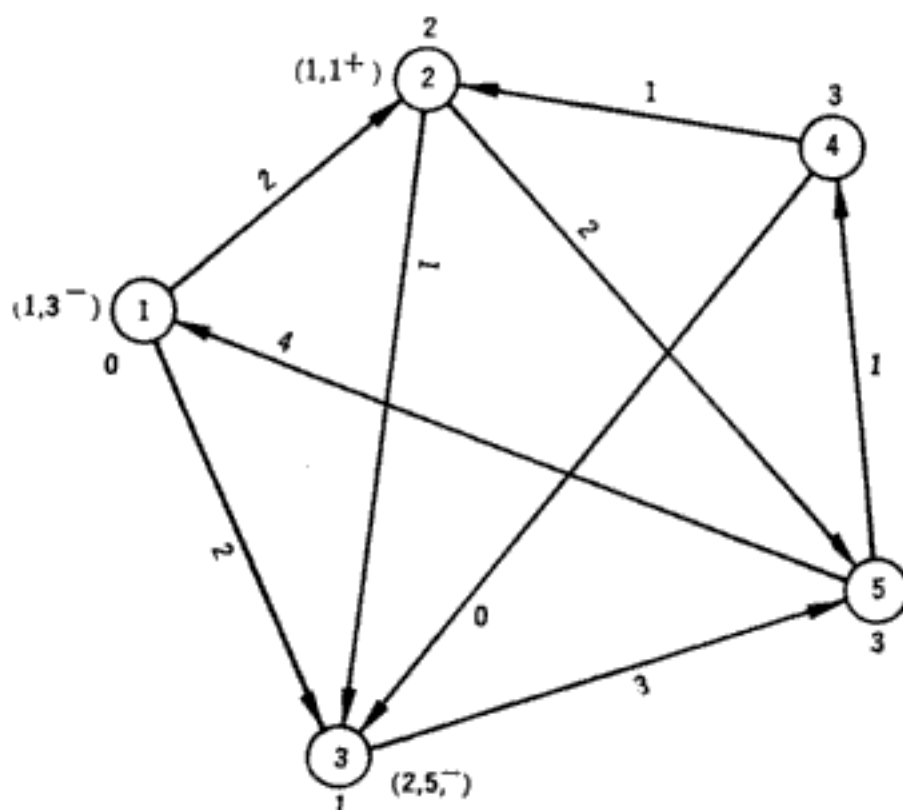


Figura 4.30

*Cuarta iteración*

Los nuevos valores de  $\bar{c}_{ij}$  son:

$$\bar{c}_{12} = 0, \bar{c}_{13} = 0, \bar{c}_{23} = 3, \bar{c}_{25} = 0, \bar{c}_{35} = 1, \bar{c}_{42} = 2,$$

$$\bar{c}_{43} = 3, \bar{c}_{51} = 0, \bar{c}_{54} = -2.$$

Ahora, los siguientes arcos están *en orden*:  $A_{12}$ ,  $A_{13}$ ,  $A_{23}$ ,  $A_{25}$ ,  $A_{51}$ . Continuando el análisis del Arco  $A_{35}$ , de una manera análoga a las ite-



### 374 Redes de optimización

raciones anteriores, se encuentra que la cadena de  $N_3$  a  $N_5$  está formada por  $N_3, A_{31}, N_1, A_{12}, N_2, A_{25}, N_5$ . Al nodo  $N_3$  le corresponde la etiqueta  $(2, 5^-)$ , al  $N_1$  la  $(1, 3^-)$ , al  $N_2$  la  $(1, 1^+)$  y por último al  $N_5$  la  $(1, 2^+)$ . Se ve ahora cómo se calculó la etiqueta del nodo  $N_5$ . Dado que  $\bar{e}_{25} = 0$  y  $l_{25} = 2 \leq X_{25} = 2 \leq u_{25} = 6$ , la etiqueta de  $N_5$  es  $[\text{Mín } (1, 6-2), 2^+] = (1, 2^+)$ .

Siguiendo el diagrama de flujo se entra a la subrutina de cambio de flujo. Se cambia el flujo en esta cadena añadiendo el valor  $q_5 = 1$  al flujo en los arcos normales y restando ese mismo valor de los arcos en reversa. Así se tiene que

$$X_{12} = 2 + 1 = 3 \quad (\text{normal})$$

$$X_{13} = 2 - 1 = 1 \quad (\text{arco en reversa, porque la cadena utiliza al arco } A_{31})$$

$$X_{25} = 2 + 1 = 3 \quad (\text{normal})$$

$$X_{35} = 3 - 1 = 2 \quad (\text{porque se trata del arco } A_{35} \text{ que se está analizando en esta iteración, y al cual se debe reducir su flujo}).$$

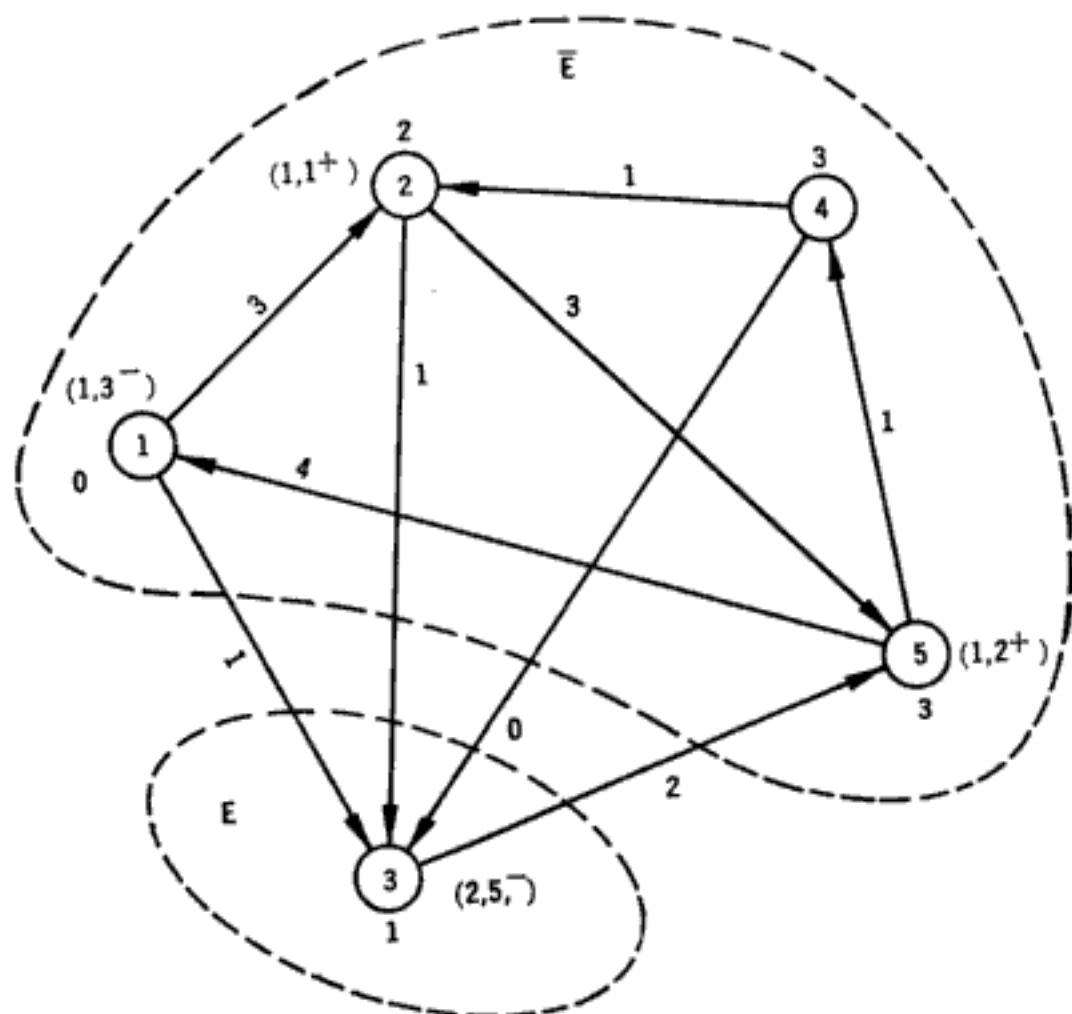


Figura 4.31

Los arcos que no pertenecen a la cadena retienen el mismo flujo que antes es decir:

$$X_{23} = 1, \quad X_{42} = 1, \quad X_{43} = 0, \quad X_{51} = 4, \quad X_{54} = 1.$$

Las condiciones de la red al término de esta iteración, se muestran gráficamente en la figura 4.31.

*Quinta iteración*

Ya en forma abreviada se tiene:<sup>14</sup>

- a) Arcos en orden:  $A_{12}, A_{13}, A_{23}, A_{25}, A_{51}$ .
- b) Arco fuera de orden que se investiga:  $A_{35}$ .
- c)  $\bar{c}_{12} = 0, \bar{c}_{13} = 0, \bar{c}_{23} = 3, \bar{c}_{25} = 0, \bar{c}_{35} = 1, \bar{c}_{42} = 2, \bar{c}_{43} = 3, \bar{c}_{51} = 0, \bar{c}_{54} = -2$ .
- d)  $\bar{c}_{35} = 1 > 0$ , por lo que  $X_{35} = l_{35}$ . Pero  $X_{35} = 2 > l_{35} = 1$ . Hay que disminuir el flujo  $X_{35}$ .
- e)  $N_3$  se etiqueta  $(q_3, 5^-) = (X_{35} - l_{35}, 5^-)$ . El objetivo es etiquetar  $N_5$ .
- f) No es posible encontrar una cadena de  $N_3$  a  $N_5$ .
- g)  $E = \{N_3\}, \bar{E} = \{N_1, N_2, N_4, N_5\}$  (ver figura 4.31).  
 $A_1 = \{A_{35}\}, A_2 = \{\phi\}$ .  
 $\delta_1 = 1, \delta_2 = \infty, \delta = \text{Mín} \{\delta_1, \delta_2\} = 1$ .
- h)  $\Pi_1 = 1, \Pi_2 = 3, \Pi_3 = 1, \Pi_4 = 4, \Pi_5 = 4$ . Flujos no cambian.
- i) Al término de la quinta iteración se tiene gráficamente:

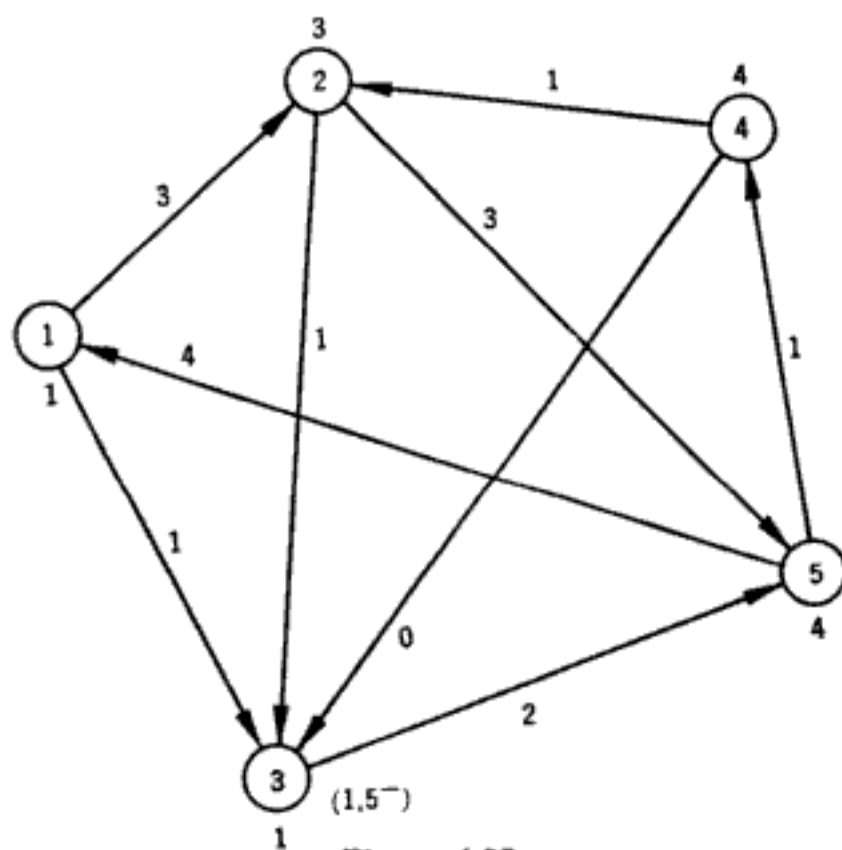


Figura 4.32

<sup>14</sup> Conviene que el lector detalle cada paso de cada iteración.

## 376 Redes de optimización

### Sexta iteración

- Arcos *en orden*, mismos que en la iteración pasada, más el  $A_{35}$ .
- Arco *fuera de orden* que se investiga:  $A_{42}$ .
- $\bar{c}_{12} = 0$ ,  $\bar{c}_{13} = 1$ ,  $\bar{c}_{23} = 4$ ,  $\bar{c}_{25} = 0$ ,  $\bar{c}_{35} = 0$ ,  $\bar{c}_{42} = 2$ ,  $\bar{c}_{43} = 4$ ,
- $\bar{c}_{42} = 2 > 0$ , por lo que  $X_{42} = l_{42}$ . Pero  $X_{42} = 1 < l_{42} = 2$ . Hay que aumentar el flujo  $X_{42}$ .
- $N_2$  se etiqueta  $(q_2, 4^+) = (l_{42} - X_{42}, 4^+) = (1, 4^+)$ . El objetivo es etiquetar  $N_4$ .
- La cadena que une a  $N_2$  con  $N_4$  es la  $N_2, A_{25}, N_5, A_{54}, N_4$ . A los nodos  $N_4$  y  $N_5$  se les etiqueta respectivamente con  $(1, 2^+)$  y  $(1, 5^+)$ .
- Se cambia el valor del flujo del arco, sumando  $q_4 = 1$  a los flujos de los arcos normales y restando la misma cantidad a los flujos de los arcos en reversa. Al arco  $A_{42}$  habrá que aumentarle una unidad de flujo, tal como se indica en el inciso (d) de esta iteración. Los precios duales en los nodos no cambian.
- Al término de la sexta iteración, se tiene gráficamente lo siguiente:

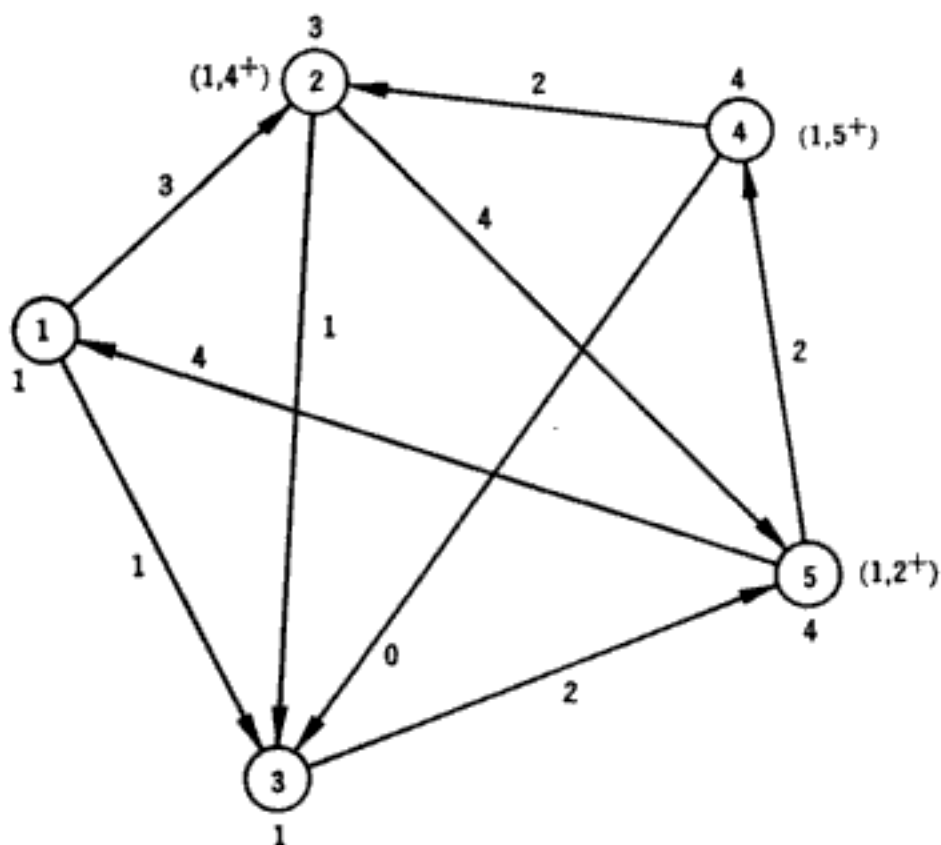


Figura 4.33

### Séptima iteración

- Se añade a la lista anterior de arcos *en orden* el arco  $A_{42}$ .
- Se investiga el arco  $A_{43}$ .
- El valor de las  $\bar{c}_{ij}$  no ha cambiado desde la última iteración.

**METODOS Y MODELOS DE INVESTIGACION DE OPERACIONES Vol. I: MODELOS DETERMINISTICOS**, es un libro de texto dirigido a estudiantes de licenciatura y de grado que cursan dentro de sus estudios la materia de Investigación de Operaciones. La obra resulta muy adecuada como libro de consulta para los profesionales que de alguna manera están vinculados a la toma de decisiones.

La Investigación de Operaciones es una herramienta moderna que se usa en la toma de decisiones en las organizaciones productivas de bienes y servicios. Esta herramienta se utiliza muy frecuentemente en todas las ramas de la Ingeniería, la Economía, la Administración, las ciencias Fisico-matemáticas, las ciencias Políticas, etc. Es un instrumento que está íntimamente ligado a los procesos de planeación.

El objetivo del primer volumen de esta obra es el de presentar, explicar e ilustrar el uso de aquellos modelos y métodos determinísticos de la Investigación de Operaciones que se utilizan con mayor frecuencia. La presentación de los temas se hace desde un punto de vista balanceado, utilizando por un lado la suficiente teoría para justificar lo que se expone y alejarse de las "recetas de cocina" que se olvidan tan rápidamente como se aprenden; y por el otro, el de utilizar los suficientes ejemplos, los más apegados a la realidad, para aclarar e ilustrar el uso de modelos y métodos.

El libro aporta al lector las experiencias que el autor ha tenido al aplicar estos modelos en los sectores públicos y privados, tanto de países desarrollados como, y más importante, países en vías de desarrollo, tales como México.

Las obras traducidas al español, de ninguna manera [de acuerdo con la opinión del autor] reducen la enorme diferencia que existe entre los sistemas donde se originan estos métodos y modelos y los sistemas en los países del Tercer Mundo, donde hay la necesidad de aplicarlos. Esta obra pretende acortar dicha diferencia.



e-mail: [limusa@noriega.com.mx](mailto:limusa@noriega.com.mx)

[www.noriega.com.mx](http://www.noriega.com.mx) Copyrighted material